Praktische Funktionenlehre

Von

Dr.-Ing. habil. Friedrich Tölke VDI

o. Professor für Technische Mechanik,
Höhere Festigkeitslehre und Wasserbauliche Strömungslehre
an der Technischen Hochschule Berlin

Erster Band

Elementare und elementare transzendente Funktionen
(Unterstufe)

Mit 62 Abbildungen und
31 durchgerechneten Beispielen

Berlin
Springer-Verlag
1943

ISBN-13: 978-3-642-98171-5 e-ISBN-13: 978-3-642-98982-7
DOI: 10.1007/978-3-642-98982-7

Vorwort.

Seitdem E. Jahnke und insbesondere F. Emde mit ihren einzigartigen durch Formeln, Kurven und räumliche Schaubilder ergänzten Tafelwerken die mathematisch hochentwickelte Funktionentheorie weiten Kreisen von Ingenieuren und Physikern erschlossen haben, zeigt sich auf zahlreichen Gebieten der Technik ein immer fühlbarer werdendes Bedürfnis nach einer weit ausholenden Darstellung der Praktischen Funktionenlehre.

Es ist in der heutigen Zeit nicht mehr tragbar, daß hochwertigste technische Kräfte bei der Inangriffnahme neuer Probleme immer wieder gezwungen sind, sich mit der Lösung von Integralen, Differential- und Integralgleichungen abzuquälen, die längst technisches Allgemeingut sein könnten, oder infolge Mangel an Besserem zu ungeeigneten oder fehlerhaften Funktionentafeln greifen müssen, welche die Gefahr des völligen Leerlaufs der angestellten Berechnungen in sich bergen.

In dieser Erkenntnis habe ich vor einiger Zeit den Entschluß gefaßt, ein den heutigen technischen Bedürfnissen angepaßtes Lehr- und Nachschlagebuch der Praktischen Funktionenlehre zu schaffen. Es sind zunächst die folgenden sechs Bände vorgesehen:

Band I. Elementare und elementare transzendente Funktionen, Unterstufe.
Band II. Elementare und elementare transzendente Funktionen, Oberstufe.
Band III. Theta-Funktionen.
Band IV. Elliptische Funktionen.
Band V. Hypergeometrische Funktionen und Kugelfunktionen.
Band VI. Zylinderfunktionen.

Meine Assistenten Dr.-Ing. Walter Ernst, Dr.-Ing. Hans Hagen und Dipl.-Ing. Chang Wei hatten die Freundlichkeit, das Manuskript des vorliegenden ersten Bandes zu lesen und sämtliche Formeln und Integrale unabhängig von mir nachzurechnen. In den Händen meines Oberingenieurs Dr.-Ing. Kurt Hirschfeld lag die Betreuung und Überwachung der für die Berechnung der Funktionentafeln eingesetzten Kräfte. Mein verehrter Kollege, Herr Professor Dr.-Ing. E. Brennecke, Direktor des Geodätischen Institutes der Technischen Hochschule Berlin, hatte die Freundlichkeit, mir in Herrn Vermessungsinspektor Kramm einen Mitarbeiter zur Verfügung zu stellen, der, in seltenem Maße zahlenmäßig begabt, die Zuverlässigkeit der Funktionentafeln weitgehend sicherstellte. Ich kann jedenfalls versichern, daß alles Menschenmögliche getan wurde, um der Fachwelt ein möglichst verläßliches Werk zu übergeben.

Es ist mir ein besonderes Bedürfnis, den genannten Herren meinen Dank für ihre selbstlose Mitarbeit auszusprechen. Ferner danke ich auch den studentischen Mitarbeitern, den Herren E. W. Lindow, E. Iwanoff, M. V. Bodnarescu und R. Schulz, sowie Herrn Dipl.-Ing. Chang Wei, Frau Dr. rer. nat. Chang-Lu Hsiu-Chen und den Herren Eckhard, Franke und Neuhaus für das Lesen der Korrektur.

Schließlich gedenke ich noch dankbar des Verständnisses und Weitblickes, den ich beim Springer-Verlag fand. Ohne diesen Weitblick wäre es wohl kaum möglich gewesen, ein so schwieriges Manuskript im gegenwärtigen Augenblicke zu verlegen und den besten Traditionen des Springer-Verlages gemäß auszustatten.

Charlottenburg, im September 1942.

F. TÖLKE.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Erster Abschnitt.

Definierende Differential- und Integralgleichungen, Fundamentaleigenschaften und gegenseitige Beziehungen der elementaren und elementaren transzendenten Funktionen.

Zweiter Abschnitt.

Durch elementare und elementare transzendente Funktionen ausdrückbare Integrale.

Dritter Abschnitt.

Funktionentafeln der elementaren Transzendenten.

Erster Abschnitt.

Definierende Differential- und Integralgleichungen, Fundamentaleigenschaften und gegenseitige Beziehungen der elementaren und elementaren transzendenten Funktionen.

1. Gausssche Differentialgleichung und hypergeometrische Reihen[1].

In den folgenden Betrachtungen wird des öfteren auf die Gausssche Differentialgleichung und ihre Lösungen durch hypergeometrische Reihen bezug genommen, weshalb hierüber das Notwendigste vorangestellt sei.

Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 w}{d z^2} + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1) z}{z(1-z)} \frac{d w}{d z} - \frac{\alpha \beta}{z(1-z)} w = 0 \qquad (1)^a$$

zwischen den reellen, imaginären oder komplexen Veränderlichen w und z unter Einschluß von drei willkürlichen Parametern α, β, γ heißt Gausssche oder hypergeometrische Differentialgleichung. Sie läßt sich, wenn $1 - z$ an Stelle von z als unabhängige Veränderliche eingeführt wird, auch in der Alternativform

$$\frac{d^2 w}{d(1-z)^2} + \frac{(\alpha + \beta - \gamma + 1) - (\alpha + \beta + 1)(1-z)}{z(1-z)} \frac{d w}{d(1-z)} - \frac{\alpha \beta}{z(1-z)} w = 0 \qquad (1)^b$$

schreiben. Ein erstes Partikularintegral liefert die durch die hypergeometrische Potenzreihe dargestellte Funktion

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha \beta}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{[\alpha(\alpha+1)][\beta(\beta+1)]}{[\gamma(\gamma+1)]} \frac{z^2}{2!} + \cdots + \\ + \frac{[\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)][\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n-1)]}{[\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+n-1)]} \frac{z^n}{n!} + \cdots, \end{aligned} \qquad (2)^a$$

wie durch Einsetzen von $(2)^a$ in $(1)^a$ bewiesen werden soll. Für $w = F$ und nach Multiplikation von $(1)^a$ mit $-\frac{z(1-z)}{\alpha\beta}$ lautet die zu beweisende Identitätsgleichung bei leichter Umordnung

$$F - \frac{\gamma}{\alpha \beta} \frac{dF}{dz} + \frac{\alpha + \beta + 1}{\alpha \beta} z \frac{dF}{dz} - \frac{z}{\alpha \beta} \frac{d^2 F}{d z^2} + \frac{z^2}{\alpha \beta} \frac{d^2 F}{d z^2} = 0.$$

Da $(2)^a$ innerhalb ihres Konvergenzbereiches gleichmäßig konvergent ist, können die Ableitungen von F nach z durch gliedweise Differentiation gebildet werden. Aus $(2)^a$ folgt daher

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha \beta}{\gamma} z + \sum_{2}^{\infty} {}_n \frac{[\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)][\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n-1)]}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+n-1)} \frac{z^n}{n!},$$

$$-\frac{\gamma}{\alpha \beta} \frac{dF}{dz} = -1 - \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{\gamma+1} z - \sum_{2}^{\infty} {}_n \frac{[(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)][(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)]}{(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma-n)} \frac{z^n}{n!},$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha+\beta+1}{\alpha \beta} z \frac{dF}{dz} = \frac{\alpha+\beta+1}{\gamma} z + \\ + \sum_{2}^{\infty} {}_n \frac{(\alpha+\beta+1)[(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)][(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n-1)]}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+n-1)} \frac{z^n}{(n-1)!}, \end{aligned}$$

$$-\frac{z}{\alpha \beta} \frac{d^2 F}{d z^2} = -\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} z - \sum_{2}^{\infty} {}_n \frac{[(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)][(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)]}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+n)} \frac{z^n}{(n-1)!},$$

$$+\frac{z^2}{\alpha \beta} \frac{d^2 F}{d z^2} = \sum_{2}^{\infty} {}_n \frac{[(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)][(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n-1)]}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+n-1)} \frac{z^n}{(n-2)!},$$

[1] Der mathematisch weniger geübte Leser kann Ziffer 1 zunächst überspringen.

und damit

$$F - \frac{\gamma}{\alpha\beta}\frac{dF}{dz} + \frac{\alpha+\beta+1}{\alpha\beta} z \frac{dF}{dz} - \frac{z}{\alpha\beta}\frac{d^2F}{dz^2} + \frac{z^2}{\alpha\beta}\frac{d^2F}{dz^2}$$
$$= \frac{[\alpha\beta(\gamma+1) - (\alpha+1)(\beta+1)\gamma + (\alpha+\beta+1)(\gamma+1) - (\alpha+1)(\beta+1)]}{\gamma(\gamma+1)} z +$$
$$+ \sum_2^\infty \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+n)}$$
$$\Big[\alpha\beta(\gamma+n) - (\alpha+n)(\beta+n)\gamma + (\alpha+\beta+1)(\gamma+n)n - (\alpha+n)(\beta+n)n + (\gamma+n)(n-1)n\Big]\frac{z^n}{n!}.$$

Die Ausmultiplikation auf der rechten Seite zeigt, daß die beiden eckigen Klammern identisch verschwinden. Somit folgt

$$F - \frac{\gamma}{\alpha\beta}\frac{dF}{dz} + \frac{\alpha+\beta+1}{\alpha\beta} z \frac{dF}{dz} - \frac{z}{\alpha\beta}\frac{d^2F}{dz^2} + \frac{z^2}{\alpha\beta}\frac{d^2F}{dz^2} = 0,$$

wie zu beweisen war.

Durch Vertauschen von γ mit $\alpha+\beta-\gamma+1$ und z mit $1-z$ ergibt sich entsprechend

$$F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\gamma+1}\frac{1-z}{1!} + \frac{[\alpha(\alpha+1)][\beta(\beta+1)]}{[(\alpha+\beta-\gamma+1)(\alpha+\beta-\gamma+2)]}\frac{(1-z)^2}{2!} + \cdots +$$
$$+ \frac{[\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)][\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots[(\beta+n-1)]}{[(\alpha+\beta-\gamma+1)(\alpha+\beta-\gamma+2)\cdots(\alpha+\beta-\gamma+n)]}\frac{(1-z)^n}{n!} + \cdots \qquad (2)^{\mathrm{b}}$$

als ein Partikularintegral von $(1)^{\mathrm{b}}$.

Da die Differentialgleichungen $(1)^{\mathrm{a}}$ und $(1)^{\mathrm{b}}$ identisch sind, liegen in $(2)^{\mathrm{a}}$ und $(2)^{\mathrm{b}}$ zwei voneinander unabhängige Partikularintegrale vor, und man erhält

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)z}{z(1-z)}\frac{dw}{dz} - \frac{\alpha\beta}{z(1-z)}w = 0,$$
$$w = c_1 F(\alpha,\beta,\gamma,z) + c_2 F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-z). \qquad (|z|<1) \qquad (3)$$

Die Brauchbarkeit der Lösung ist an den Konvergenzbereich der hypergeometrischen Reihen $(2)^{\mathrm{a}}$ und $(2)^{\mathrm{b}}$ gebunden. Dieser umfaßt den im Innern des Einheitskreises um $z=0$ gelegenen Teil der komplexen Zahlenebene. Unter gewissen Bedingungen konvergieren die Reihen auch noch auf dem Einheitskreise selbst, worauf einzugehen sich hier aber erübrigt.

2. Die Exponentialfunktionen.

a) Definierende Integralgleichung und Potenzreihenentwicklung.

Es sei nach einer Funktion $w(z)$ gefragt, die der linearen Integralgleichung

$$w(z) - w_0 - \int_0^z \omega\, w(\zeta)\, d\zeta = 0$$

genügt. ω sei dabei ein willkürlicher Parameter, während w_0, wie aus der Integralgleichung unmittelbar hervorgeht, den Wert von w für $z=0$ darstellt. Nun sei $w(z)$ nach Frobenius in der Form der unbestimmten Potenzreihe

$$w(z) = w_0 + w_1 z + w_2 z^2 + \cdots + w_n z^n + \cdots$$

angesetzt, mit deren Hilfe das Integral gemäß

$$\int_0^z \omega\, w(\zeta)\, d\zeta = \omega \int_0^z (w_0 + w_1\zeta + w_2\zeta^2 + \cdots + w_n\zeta^n + \cdots)\, d\zeta$$
$$= \omega\left[w_0 z + \frac{w_1 z^2}{2} + \frac{w_2 z^3}{3} + \cdots + \frac{w_n z^{n+1}}{n+1} + \cdots\right].$$

ausgewertet werden kann. Dann tritt an die Stelle der Integralgleichung nach entsprechender Zusammenfassung die Identitätsgleichung

$$(w_1 - \omega w_0)z + \left(w_2 - \frac{\omega w_1}{2}\right)z^2 + \left(w_3 - \frac{\omega w_2}{3}\right)z^3 + \cdots + \left(w_n - \frac{\omega w_{n-1}}{n}\right)z^n + \cdots = 0,$$

die nur durch Nullsetzen sämtlicher Klammern befriedigt werden kann. Hieraus folgt für die unbestimmten Koeffizienten

$$w_1 - \omega w_0 = 0\,, \quad w_2 - \frac{\omega w_1}{2} = 0\,, \quad w_3 - \frac{\omega w_2}{3} = 0\,, \quad \cdots w_n - \frac{\omega w_{n-1}}{n} = 0\,, \quad \cdots$$

oder nach Auflösung des Gleichungssystems

$$w_1 = \omega w_0\,, \quad w_2 = \frac{\omega w_1}{2} = \frac{\omega^2 w_0}{2!}\,, \quad w_3 = \frac{\omega w_2}{3} = \frac{\omega^3 w_0}{3!}\,, \cdots w_n = \frac{\omega w_{n-1}}{n} = \frac{\omega^n w_0}{n!}\,, \cdots .$$

Damit lassen sich Ausgangsgleichung und Ergebnis in folgender Weise zusammenfassen

$$w(z) - w_0 - \omega \int_0^z w(\zeta)\,d\zeta = 0\,, \quad w(z) = w_0 \left[1 + \frac{\omega z}{1!} + \frac{(\omega z)^2}{2!} + \frac{(\omega z)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\omega z)^n}{n!} + \cdots\right]. \tag{4)^a$$

In entsprechender Weise ergibt sich durch Vertauschen von ω mit $-\omega$

$$w(z) - w_0 + \omega \int_0^z w(\zeta)\,d\zeta = 0\,, \quad w(z) = w_0 \left[1 - \frac{\omega z}{1!} + \frac{(\omega z)^2}{2!} - \frac{(\omega z)^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{(\omega z)^n}{n!} + \cdots\right]. \tag{4)^b$$

Die in den eckigen Klammern von (4) enthaltenen Funktionen werden gemäß

$$\left.\begin{aligned} e^{+\omega z} &= 1 + \frac{\omega z}{1!} + \frac{(\omega z)^2}{2!} + \frac{(\omega z)^3}{3!} + \cdots = \sum_0^\infty {}_n \frac{(\omega z)^n}{n!}\,, \\ e^{-\omega z} &= 1 - \frac{\omega z}{1!} + \frac{(\omega z)^2}{2!} - \frac{(\omega z)^3}{3!} + \cdots = \sum_0^\infty {}_n (-1)^n \frac{(\omega z)^n}{n!}\,, \end{aligned}\right\} \quad (|z| < \infty) \tag{5}$$

als Exponentialfunktionen bezeichnet. Da die Potenzreihen für jeden z-Wert konvergieren, werden die Exponentialfunktionen durch (5) für den gesamten Bereich der komplexen Zahlenebene definiert. Für reelle z-Werte und $\omega = 1$ ist ihr Verlauf aus Abb. 1 ersichtlich.

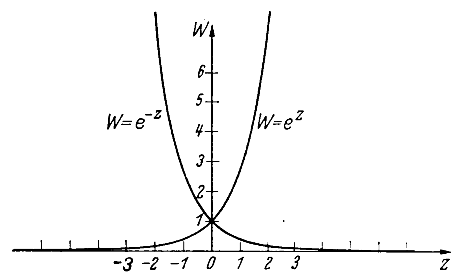

Abb. 1.

Die Einführung von (5) in (4) liefert

$$\left.\begin{aligned} w(z) - w_0 - \omega \int_0^z w(\zeta)\,d\zeta &= 0\,, \quad w(z) = w_0 e^{+\omega z}\,, \\ w(z) - w_0 + \omega \int_0^z w(\zeta)\,d\zeta &= 0\,, \quad w(z) = w_0 e^{-\omega z}\,. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Die Integralgleichungen (6) lassen sich auch in der allgemeineren Form

$$\left.\begin{aligned} w(z) - w(z_0) - \omega \int_{z_0}^z w(\zeta)\,d\zeta &= 0\,, \quad w(z) = w(z_0)\, e^{\omega(z-z_0)}\,, \\ w(z) - w(z_0) + \omega \int_{z_0}^z w(\zeta)\,d\zeta &= 0\,, \quad w(z) = w(z_0)\, e^{-\omega(z-z_0)}\,, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

schreiben, wie man durch Einsetzen der Lösungen in Verbindung mit (5) unmittelbar bestätigt.

b) Differential- und Integralformeln.

Aus (5) folgen die Differential- und Integralformeln

$$\left.\begin{aligned} \frac{de^{\omega z}}{dz} &= \omega e^{\omega z}\,, & \int e^{\omega z}\,dz &= \frac{1}{\omega}\, e^{\omega z}\,, \\ \frac{de^{-\omega z}}{dz} &= -\,\omega e^{-\omega z}\,, & \int e^{-\omega z}\,dz &= -\,\frac{1}{\omega}\, e^{-\omega z}\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

c) Definierende Differentialgleichungen.

Für $w = C e^{\omega z}$ bzw. $w = C e^{-\omega z}$ ergeben sich aus (8) die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{dw}{dz} - \omega w &= 0\,, \quad w = C e^{\omega z}\,, \\ \frac{dw}{dz} + \omega w &= 0\,, \quad w = C e^{-\omega z}\,, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Man hätte dieses Ergebnis auch unmittelbar aus (6) bzw. (7) durch Differentiation der Integralgleichungen gewinnen können. Demgemäß sind die Integralgleichungen (6) bzw. (7) und die Differentialgleichungen (9) als äquivalent anzusehen. Trotz dieser Äquivalenz besteht aber insofern ein bemerkenswerter Unterschied, als in der Lösung der Integralgleichung alle Größen von vornherein festgelegt sind, während in derjenigen der Differentialgleichung eine zunächst völlig willkürliche Größe, die Integrationskonstante C, anfällt, deren Bestimmung erst durch zusätzliche Aussagen, z. B. über das Funktionsverhalten am Rande, möglich ist.

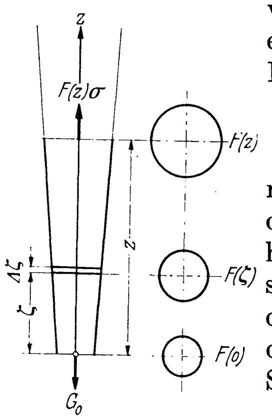

Abb. 2.

d) Beispiel 1.

Zur Beleuchtung dieser grundsätzlich verschiedenen Betrachtungsmöglichkeiten sei gemäß Abb. 2 ein langes Bohrgestänge untersucht, dessen Tragquerschnitt $F(z)$, um das Gestängegewicht auf ein Minimum herabzusetzen, überall voll ausgenutzt sein soll; die zulässige Zugbeanspruchung und das Raumgewicht des Stahles seien σ bzw. γ, das Gewicht des Bohrers G_0 und der Querschnitt am unteren Ende F_0. Dann liefert die Kräftegleichgewichtsbedingung für das Gestänge unterhalb eines Schnittes im Abstande z vom unteren Ende

$$F(z)\,\sigma - G_0 - \int_0^z \gamma F(\zeta)\,d\zeta = 0\,,$$

und insbesondere an der Stelle $z=0$

$$F_0\sigma - G_0 = 0 \quad \text{oder} \quad G_0 = F_0\sigma\,.$$

Wird diese Beziehung in der Gleichgewichtsbedingung berücksichtigt und gleichzeitig durch σ dividiert, so folgt die Integralgleichung

$$F(z) - F_0 - \frac{\gamma}{\sigma}\int_0^z F(\zeta)\,d\zeta = 0\,,$$

die mit der oberen der Integralgleichungen (6) vollständig übereinstimmt, wenn w durch F und ω durch $\frac{\gamma}{\sigma}$ ersetzt werden. Somit ergibt sich als Lösung

$$F(z) = F_0\,e^{\frac{\gamma}{\sigma}z}\,.$$

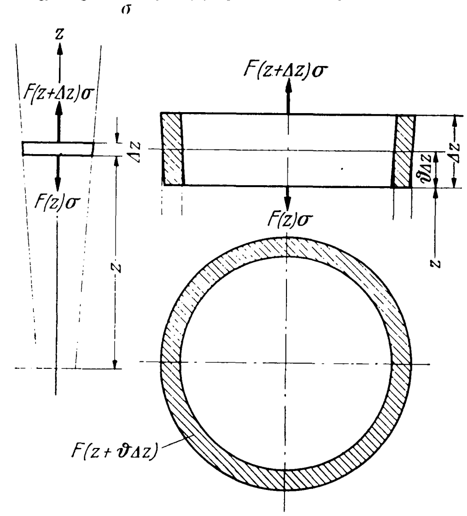

Abb. 3.

Zu einer ganz anderen Art der Betrachtung gelangt man, wenn gemäß Abb. 3 noch ein zweiter benachbarter Schnitt an der Stelle $z+\Delta z$ durch das Gestänge geführt und die Gleichgewichtsuntersuchung auf das zwischen z und $z+\Delta z$ liegende „Gestängeelement" beschränkt wird. In diesem Falle ergibt sich

$$F(z+\Delta z)\sigma - F(z)\sigma - \gamma F(z+\vartheta\Delta z)\Delta z = 0$$

oder nach Division durch $\sigma\Delta z$

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - \frac{\gamma}{\sigma}F(z+\vartheta\Delta z) = 0\,.$$

Da der „mittlere" Querschnitt $F(z+\vartheta\Delta z)$ des Gestängeelementes zunächst unbekannt ist, kann über ϑ nur ausgesagt werden, daß es zwischen 0 und 1 liegt. Beim Grenzübergang für $\Delta z \to 0$ fällt ϑ aus der Gleichgewichtsbedingung heraus und man erhält

$$\frac{dF}{dz} - \frac{\gamma}{\sigma}F = 0\,.$$

Durch Vergleich mit der ersten der Gln (8) ergibt sich hier die Lösung zu

$$F = C\,e^{\frac{\gamma}{\sigma}z}\,.$$

Die Integrationskonstante C folgt aus der Randbedingung

$$F = F_0 \quad \text{für} \quad z = 0$$

in Verbindung mit (5) zu

$$C = F_0 .$$

Man erhält daher

$$F(z) = F_0 e^{\frac{\gamma}{\sigma} z}$$

d. h. das gleiche Ergebnis wie bei der ersten Betrachtungsweise.

Wie dieses Beispiel anschaulich erkennen läßt, gelangt man zu Integralgleichungen, wenn der Körper als Ganzes oder „im Großen" betrachtet wird, zu Differentialgleichungen, wenn er atomisiert oder „im Kleinen" untersucht wird. Da die Betrachtung im Großen erheblich kürzer ist und keine offenbleibenden Bestimmungsstücke enthält, ist es häufig vorteilhafter die Probleme auf Integralgleichungen zurückzuführen.

e) Exponentialfunktionen als Lösungen von Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Werden die Gln (8) nochmals differenziert, so folgt

$$\frac{d^2 e^{\omega z}}{dz^2} = \omega^2 e^{\omega z}, \qquad \frac{d^2 e^{-\omega z}}{dz^2} = \omega^2 e^{-\omega z}.$$

Hiernach lassen sich die beiden Exponentialfunktionen als Lösungen ein und derselben Differentialgleichung zweiter Ordnung darstellen, z. B. in der Form

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - \omega^2 w = 0, \quad w = C_1 e^{\omega z} + C_2 e^{-\omega z}. \tag{10}$$

Durch sukzessive Differentiation ergibt sich für die n^{ten} Differentialquotienten der Exponentialfunktionen

$$\frac{d^n e^{\omega z}}{dz^n} = \omega^n e^{\omega z}, \quad \frac{d^n e^{-\omega z}}{dz^n} = (-1)^n \omega^n e^{-\omega z}. \tag{11}$$

Diese Formeln gestatten — wenigstens formal —, die Lösung einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten allgemein darzustellen. Ist die Differentialgleichung in der Form

$$\frac{d^n w}{dz^n} + A_1 \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} w}{dz^{n-2}} + \cdots + A_{n-2} \frac{d^2 w}{dz^2} + A_{n-1} \frac{dw}{dz} + A_n w = 0$$

vorgegeben, so liefert der Ansatz

$$w = C e^{\omega z}$$

in Verbindung mit (11)

$$C e^{\omega z} [\omega^n + A_1 \omega^{n-1} + A_2 \omega^{n-2} + \cdots + A_{n-2} \omega^2 + A_{n-1} \omega + A_n] = 0 .$$

Wird der Parameter ω so gewählt, daß die charakteristische Gleichung

$$\omega^n + A_1 \omega^{n-1} + A_2 \omega^{n-2} + \cdots + A_{n-2} \omega^2 + A_{n-1} \omega + A_n = 0$$

erfüllt ist, so wird die Identitätsgleichung für jeden Wert von z befriedigt und $C e^{\omega z}$ ist demgemäß ein Partikularintegral der Ausgangsdifferentialgleichung. Die charakteristische Gleichung besitzt als algebraische Gleichung n^{ter} Ordnung n Wurzeln, so daß n Lösungen von der Form $C e^{\omega z}$ angegeben werden können. Ihre Überlagerung liefert die allgemeine Lösung mit n willkürlichen Integrationskonstanten. In Zusammenfassung dieser Ergebnisse erhält man

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^n w}{dz^n} + A_1 \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} w}{dz^{n-2}} + \cdots + A_{n-2} \frac{d^2 w}{dz^2} + A_{n-1} \frac{dw}{dz} + A_n w = 0, \\
&w = C_1 e^{\omega_1 z} + C_2 e^{\omega_2 z} + \cdots + C_n e^{\omega_n z}, \\
&\omega^n + A_1 \omega^{n-1} + A_2 \omega^{n-2} + \cdots + A_{n-2} \omega^2 + A_{n-1} \omega + A_n = 0 .
\end{aligned}\right| \tag{12}$$

Auf die praktische Bestimmung der Wurzelwerte ω, insbesondere wenn sie komplex sind, auf die Behandlung von Doppelwurzeln und auf die reelle Zusammenfassung komplexer Lösungen wird weiter unten noch teilweise eingegangen werden.

f) Produkte von Exponentialfunktionen.

Nun seien zwei Exponentialfunktionen gemäß

$$e^{\omega z} = 1 + \frac{\omega z}{1!} + \frac{(\omega z)^2}{2!} + \frac{(\omega z)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\omega z)^n}{n!} + \cdots,$$

$$e^{\omega_0 z_0} = 1 + \frac{\omega_0 z_0}{1!} + \frac{(\omega_0 z_0)^2}{2!} + \frac{(\omega_0 z_0)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\omega_0 z_0)^n}{n!} + \cdots$$

durch ihre Potenzreihen gegeben; dann liefert ihre Multiplikation

$$e^{\omega z} e^{\omega_0 z_0} = 1 + \frac{(\omega z + \omega_0 z_0)}{1!} + \frac{(\omega z + \omega_0 z_0)^2}{2!} + \frac{(\omega z + \omega_0 z_0)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\omega z + \omega_0 z_0)^n}{n!} + \cdots = e^{\omega z + \omega_0 z_0}. \tag{13}$$

Insbesondere folgt für $\omega = \omega_0 = 1$ und $\omega = -\omega_0 = 1$

$$\left.\begin{aligned} e^z e^{z_0} &= e^{z+z_0}, \\ e^z e^{-z_0} &= e^{z-z_0}. \end{aligned}\right| \tag{14}$$

Für $z_0 = z$ erhält man aus der zweiten der Gln (14) wegen $e^0 = 1$

$$e^{-z} = \frac{1}{e^{+z}}, \qquad e^{+z} = \frac{1}{e^{-z}}. \tag{15}$$

In Erweiterung auf mehrfache Produkte liefert (14) durch stufenweise Anwendung auf sich selbst

$$e^{z_1} e^{z_2} e^{z_3} \cdots e^{z_n} = e^{z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n}. \tag{16}$$

g) Potenzen von Exponentialfunktionen.

Aus (16) folgt bei Heranziehung des Potenzbegriffes der Algebra

$$(e^z)^\lambda = e^{\lambda z} = (e^\lambda)^z. \tag{17}$$

3. Die Logarithmusfunktion.

a) Logarithmusfunktion als Umkehrung der Exponentialfunktion.

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrung der Exponentialfunktion. Demgemäß lauten die Definitionsgleichungen

$$z = e^w, \quad w = \ln z. \tag{18}$$

b) Differential- und Integralformeln, Potenzreihenentwicklung.

Aus dem Umkehrcharakter folgt in Verbindung mit (8)

$$\frac{d \ln z}{dz} = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\dfrac{dz}{dw}} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}. \tag{19}$$

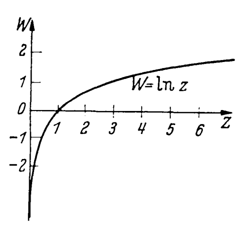

Abb. 4.

Ferner ergibt sich durch partielle Integration

$$\int \ln z \, dz = z \ln z - \int z \frac{d \ln z}{dz} dz = z(\ln z - 1). \tag{20}$$

Durch n-fache Differentiation erhält man aus (19)

$$\frac{d^n \ln z}{dz^n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{z^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{n!}{z^n}, \qquad \left(\frac{d^n \ln z}{dz^n}\right)_{z=1} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} n!. \tag{21}$$

Wird die Logarithmusfunktion gemäß

$$\ln z = \ln[1 - (1 - z)] = \ln 1 - \left(\frac{d \ln z}{dz}\right)_1 \frac{1-z}{1!} + \left(\frac{d^2 \ln z}{dz^2}\right)_1 \frac{(1-z)^2}{n!} - \cdots + (-1)^n \left(\frac{d^n \ln z}{dz^n}\right)_1 \frac{(1-z)^n}{n!} + \cdots$$

an der Stelle $z = 1$ entwickelt, so folgt wegen

$$\ln 1 = 0 \tag{22}$$

und in Verbindung mit (21)

$$\ln z = -\left[(1-z) + \frac{(1-z)^2}{2} + \frac{(1-z)^3}{3} + \cdots + \frac{(1-z)^n}{n} + \cdots\right] = -\sum_1^\infty \frac{(1-z)^n}{n}. \qquad (|z| < 1). \tag{23}$$

Für reelles Argument ist der Verlauf von $\ln z$ aus Abb. 4 ersichtlich.

c) Definierende Differentialgleichung.

Wie man mit (19) oder (21) sofort bestätigt, genügt die Logarithmusfunktion der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 w}{d z^2} + \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} = 0 \quad \text{mit} \quad w = c_1 \ln z + c_2 . \tag{24}$$

d) Logarithmus von Produkten und Potenzen.

Nun seien zwei Logarithmusfunktionen gemäß

$$\left.\begin{aligned} z &= e^{w}, & w &= \ln z \\ z_0 &= e^{w_0}, & w_0 &= \ln z_0 \end{aligned}\right|$$

gegeben. Dann folgt durch Multiplikation und Addition bzw. Division und Subtraktion

$$\left.\begin{aligned} z z_0 &= e^{w} e^{w_0} = e^{w+w_0}, & w + w_0 &= \ln z + \ln z_0, & z z_0 &= e^{\ln z + \ln z_0}, \\ \frac{z}{z_0} &= \frac{e^{w}}{e^{w_0}} = e^{w-w_0}, & w - w_0 &= \ln z - \ln z_0, & \frac{z}{z_0} &= e^{\ln z - \ln z_0}. \end{aligned}\right| \tag{25}$$

Hieraus ergibt sich durch Umkehrung

$$\ln (z z_0) = \ln z + \ln z_0, \qquad \ln \frac{z}{z_0} = \ln z - \ln z_0 . \tag{26}$$

Im Sonderfalle $z = 1$ liefert die zweite dieser Gleichungen, wenn z an Stelle von z_0 geschrieben und gleichzeitig (22) beachtet wird,

$$\ln \frac{1}{z} = - \ln z . \tag{27}$$

Bei Erweiterung auf ein n-faches Produkt, durch Anwendung von (26) auf sich selbst, folgt

$$\ln (z_1 z_2 z_3 \cdots z_n) = \ln z_1 + \ln z_2 + \ln z_3 + \cdots + \ln z_n \tag{28}$$

und bei Heranziehung des Potenzbegriffes der Algebra

$$\ln z^{\lambda} = \lambda \ln z . \tag{29}$$

4. Die Potenzfunktion.

a) Darstellung durch Exponential- und Logarithmusfunktion.

Die Funktion

$$w = z^{\lambda}$$

heißt Potenzfunktion. Mit der aus (18) folgenden Identität

$$w = e^{\ln w}$$

und unter Verwendung von (29) kann die Potenzfunktion gemäß

$$w = z^{\lambda} = e^{\lambda \ln z} \tag{30}$$

durch Exponential- und Logarithmusfunktion ausgedrückt werden.

b) Differential- und Integralformeln.

Für Differentialquotient und Integral erhält man

$$\frac{d z^{\lambda}}{d z} = \lambda z^{\lambda - 1}, \qquad \int z^{\lambda}\, dz = \frac{z^{\lambda+1}}{\lambda + 1} . \tag{31}$$

Hieraus folgt für den n-fachen Differentialquotienten und das n-fache Integral

$$\frac{d^n z^{\lambda}}{d z^n} = \lambda (\lambda - 1)(\lambda - 2) \cdots (\lambda - n + 1) z^{\lambda - n}, \qquad \underbrace{\int\int \cdots \int}_{(n)} z^{\lambda} (dz)^n = \frac{z^{\lambda+n}}{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n)} . \tag{32}$$

c) Potenzfunktionen als Lösungen der gleichdimensionalen Differentialgleichung.

Zufolge (32) lassen sich die Lösungen der sogenannten gleichdimensionalen Differentialgleichung

$$\frac{d^n w}{dz^n} + A_1 \frac{1}{z} \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + A_2 \frac{1}{z^2} \frac{d^{n-2} w}{dz^{n-2}} + \cdots + A_{n-2} \frac{1}{z^{n-2}} \frac{d^2 w}{dz^2} + A_{n-1} \frac{1}{z^{n-1}} \frac{dw}{dz} + A_n \frac{1}{z^n} w = 0$$

unmittelbar durch Potenzfunktionen darstellen. Wird w in der Form

$$w = C z^\lambda$$

angesetzt, so geht die Differentialgleichung in die Identitätsgleichung

$$\begin{aligned} C z^{\lambda-n} [\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1) + A_1 \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+2) + \cdots + \\ + A_{n-\lambda} \lambda(\lambda-1) + A_{n-1}\lambda + A_n] = 0 \end{aligned}$$

über. Um sie für jedes z zu befriedigen, muß λ der charakteristischen Gleichung

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1) + A_1 \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+2) + \cdots + \\ + A_{n-2} \lambda(\lambda-1) + A_{n-1}\lambda + A_n = 0 \end{aligned}$$

genügen, die nach dem Ausmultiplizieren eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades darstellt. Entsprechend den n Wurzeln dieser Gleichung ergeben sich n Partikularintegrale von der Form Cz^λ, die bei Überlagerung, als mit n willkürlichen Konstanten behaftet, die allgemeine Lösung der Ausgangsdifferentialgleichung darstellen. In Zusammenfassung dieser Ergebnisse erhält man

$$\left.\begin{aligned} & \frac{d^n w}{dz^n} + \frac{A_1}{z} \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \frac{A_2}{z_2} \frac{d^{n-2} w}{dz^{n-2}} + \cdots + \frac{A_{n-2}}{z^{n-2}} \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{A_{n-1}}{z^{n-1}} \frac{dw}{dz} + \frac{A_n}{z^n} w = 0, \\ & w = C_1 z^{\lambda_1} + C_2 z^{\lambda_2} + C_3 z^{\lambda_3} + \cdots + C_n z^{\lambda_n}, \\ & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1) + A_1 \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+2) + \cdots + \\ & \quad + A_{n-2}\lambda(\lambda-1) + A_{n-1}\lambda + A_n = 0. \end{aligned}\right| \tag{33}$$

Auf die praktische Bestimmung der Wurzelwerte λ, insbesondere wenn sie komplex sind, auf die Behandlung von Doppelwurzeln und auf die reelle Zusammenfassung komplexer Lösungen kann hier nicht näher eingegangen werden.

d) Potenzfunktionen und Gausssche Differentialgleichung.

In besonders enger Beziehung stehen die Potenzfunktionen zu der Gaussschen Differentialgleichung für die Parameter $\alpha = -\lambda$ und $\beta = \gamma = 1 - \lambda$. In diesem Falle folgt nämlich einerseits, wie man durch Einsetzen in Verbindung mit (31) und (32) bestätigt,

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{(1-\lambda)(1-2z)}{z(1-z)} \frac{dw}{dz} + \frac{\lambda(1-\lambda)}{z(1-z)} w = 0, \qquad w = c_1 (1-z)^\lambda + c_2 z^\lambda. \tag{34}$$

und andererseits nach (3)

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{(1-\lambda)(1-2z)}{z(1-z)} \frac{dw}{dz} + \frac{\lambda(1-\lambda)}{z(1-z)} w = 0, \\ & w = c_1 F(-\lambda, 1-\lambda, 1-\lambda, z) + c_2 F(-\lambda, 1-\lambda, 1-\lambda, 1-z). \end{aligned} \tag{35}$$

Dabei stellen nach (2) die mit F bezeichneten Partikularintegrale die hypergeometrischen Reihen

$$\left.\begin{aligned} & F(-\lambda, 1-\lambda, 1-\lambda, z) = 1 - \lambda z + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!} z^2 - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{3!} z^3 + \cdots + \\ & \quad + (-1)^n \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1)}{n!} z^n + \cdots, \\ & F(-\lambda, 1-\lambda, 1-\lambda, 1-z) = 1 - \lambda(1-z) + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}(1-z)^2 - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{3!}(1-z)^3 + \cdots + \\ & \quad + (-1^n) \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1)}{n!}(1-z)^n + \cdots. \end{aligned}\right| \tag{36}$$

dar.

Der Vergleich von (34) und (35) in Verbindung mit (36) zeigt für beide Lösungsformen Entwickelbarkeit an den Stellen $z=0$ bzw. $z=1$ und Übereinstimmung der Funktionswerte an diesen Entwicklungsstellen. Somit erhält man

$$\left.\begin{aligned}(1-z)^\lambda &= 1-\lambda z+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}z^2-\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{3!}z^3+\cdots+\\&\quad+(-1)^n\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1)}{n!}z^n+\cdots, \qquad (|z|<1)\\ z^\lambda &= 1-\lambda(1-z)+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}(1-z)^2-\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{3!}(1-z)^3+\cdots+\\&\quad+(-1)^n\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1)}{n!}(1-z)^n+\cdots.\end{aligned}\right| \tag{37}$$

Dies sind die binomischen Sätze der Algebra.

e) Produkte und Potenzen von Potenzfunktionen.

Über (30) und die für Exponential- und Logarithmusfunktion abgeleiteten Beziehungen läßt sich zeigen, daß die Produkt- und Potenzformeln der Algebra

$$\left.\begin{aligned}z^\lambda z^{\lambda_0} &= z^{\lambda+\lambda_0},\\ (z^\lambda)^\mu &= z^{\lambda\mu}=(z^\mu)^\lambda,\end{aligned}\right| \tag{38}$$

auch für beliebige komplexe Argumente z gelten. Mit $\mu=\frac{1}{\lambda}$ folgt aus (38) die Identität

$$(z^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}=z=\left(z^{\frac{1}{\lambda}}\right)^\lambda. \tag{39}$$

Diese liefert für $z^\lambda=w$ die Umkehrung der Potenzfunktion in der Form

$$w=z^\lambda,\qquad z=w^{\frac{1}{\lambda}}. \tag{40}$$

5. Die Kreisfunktionen.

a) Definierende Differentialgleichung und Potenzreihenentwicklung der cosinus- und sinus-Funktion.

Wird in (10) ω durch $i\omega$ ersetzt, so ergibt sich

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\omega^2w=0,\qquad w=C_1e^{i\omega z}+C_2e^{-i\omega z}. \tag{41}$$

Für die Partikularintegrale von (41) folgen aus (5) die Reihenentwicklungen

$$e^{\pm i\omega z}=\left[1-\frac{(\omega z)^2}{2!}+\frac{(\omega z)^4}{4!}-\cdots\right]\pm i\left[\omega z-\frac{(\omega z)^3}{3!}+\frac{(\omega z)^5}{5!}-\cdots\right], \tag{42}$$

deren Real- bzw. Imaginärteile gemäß

$$\left.\begin{aligned}\cos\omega z &= 1-\frac{(\omega z)^2}{2!}+\frac{(\omega z)^4}{4!}-\cdots=\sum_0^\infty{}_n(-1)^n\frac{(\omega z)^{2n}}{(2n)!},\\ \sin\omega z &= \omega z-\frac{(\omega z)^3}{3!}+\frac{(\omega z)^5}{5!}-\cdots=\sum_0^\infty{}_n(-1)^n\frac{(\omega z)^{2n+1}}{(2n+1)!},\end{aligned}\right| \tag{43}$$

als cosinus-Funktion und sinus-Funktion bezeichnet werden. Beide Funktionen werden für den gesamten Bereich der komplexen Zahlenebenen durch (43) definiert.

b) Differential- und Integralformeln.

Die Differentiation der Reihenentwicklungen (43) ergibt

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\cos\omega z}{dz} &= -\omega\left[\omega z-\frac{(\omega z)^3}{3!}+\frac{(\omega z)^5}{5!}-\cdots\right]=-\omega\sum_0^\infty{}_n(-1)^n\frac{(\omega z)^{2n+1}}{(2n+1)!},\\ \frac{d\sin\omega z}{dz} &= +\omega\left[1-\frac{(\omega z)^2}{2!}+\frac{(\omega z)^4}{4!}-\cdots\right]=+\omega\sum_0^\infty{}_n(-1)^n\frac{(\omega z)^{2n}}{(2n)!}.\end{aligned}\right|$$

In Verbindung mit (44) folgen hieraus die Differential- und Integralformeln

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\cos\omega z}{dz} &= -\omega\sin\omega z, & \int\cos\omega z\,dz &= +\frac{1}{\omega}\sin\omega z, \\ \frac{d\sin\omega z}{dz} &= +\omega\cos\omega z, & \int\sin\omega z\,dz &= -\frac{1}{\omega}\cos\omega z. \end{aligned}\right| \tag{44}$$

c) MOIVREsche Formel.

Mit (43) wird (42) in die MOIVREsche Formel

$$e^{\pm i\omega z} = \cos\omega z \pm i\sin\omega z \tag{45}$$

übergeführt. Wird diese zusammen mit der Konstantentransformation

$$C_1 = \tfrac{1}{2}(A - Bi), \qquad C_2 = \tfrac{1}{2}(A + Bi)$$

in (41) berücksichtigt, so folgt

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \omega^2 w = 0, \qquad w = A\cos\omega z + B\sin\omega z. \tag{46}$$

d) Additionstheoreme der cosinus- und sinus-Funktion.

Nun seien gemäß

$$e^{\pm i\omega z} = \cos\omega z \pm i\sin\omega z, \qquad e^{\pm i\omega_0 z_0} = \cos\omega_0 z_0 \pm i\sin\omega_0 z_0,$$
$$e^{\pm i(\omega z + \omega_0 z_0)} = \cos(\omega z + \omega_0 z_0) \pm i\sin(\omega z + \omega_0 z_0)$$

drei Exponentialfunktionen mit imaginärem Argument zugrunde gelegt. Wird hierauf die Produktformel (13) angewendet, nachdem ω mit $i\omega$ und ω_0 mit $i\omega_0$ vertauscht sind, so folgt

$$(\cos\omega z \pm i\sin\omega z)(\cos\omega_0 z_0 \pm i\sin\omega_0 z_0) = \cos(\omega z + \omega_0 z_0) \pm i\sin(\omega z + \omega_0 z_0).$$

Diese komplexe Gleichung kann nur bestehen, wenn sie getrennt für die Real- und Imaginärteile befriedigt wird. Es ergeben sich somit die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \cos\omega z\cos\omega_0 z_0 - \sin\omega z\sin\omega_0 z_0 &= \cos(\omega z + \omega_0 z_0), \\ \sin\omega z\cos\omega_0 z_0 + \cos\omega z\sin\omega_0 z_0 &= \sin(\omega z + \omega_0 z_0), \end{aligned}\right| \tag{47}$$

die das Additionstheorem der trigonometrischen Funktionen enthalten. Werden $\omega = 1$ und $\omega_0 = \pm 1$ gesetzt und gleichzeitig die aus (43) folgenden Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \cos(-\omega z) &= \cos\omega z, \\ \sin(-\omega z) &= -\sin\omega z, \end{aligned}\right| \tag{48}$$

beachtet, so nimmt (47) die vereinfachte Form

$$\left.\begin{aligned} \cos z\cos z_0 \mp \sin z\sin z_0 &= \cos(z \pm z_0), \\ \sin z\cos z_0 \pm \cos z\sin z_0 &= \sin(z \pm z_0) \end{aligned}\right| \tag{49}$$

an. Die Auflösung dieser Gleichungen nach $\cos z$ und $\sin z$ ergibt

$$\left.\begin{aligned} \cos z &= \cos(z \pm z_0)\cos z_0 \pm \sin(z \pm z_0)\sin z_0, \\ \sin z &= \mp\cos(z \pm z_0)\sin z_0 + \sin(z \pm z_0)\cos z_0. \end{aligned}\right| \tag{50}$$

Die entsprechenden Gleichungen für ωz und $\omega_0 z_0$ lauten

$$\left.\begin{aligned} \cos\omega z &= \cos(\omega z \pm \omega_0 z_0)\cos\omega_0 z_0 \pm \sin(\omega z \pm \omega_0 z_0)\sin\omega_0 z_0, \\ \sin\omega z &= \mp\cos(\omega z \pm \omega_0 z_0)\sin\omega_0 z_0 + \sin(\omega z \pm \omega_0 z_0)\cos\omega_0 z_0. \end{aligned}\right| \tag{51}$$

e) Verschiedene Lösungsformen der definierenden Differentialgleichung.

Die Gln (51) sollen nun für das untere Vorzeichen in die Lösungsfunktion (46) eingeführt werden. Dies ergibt

$$w = (A\cos\omega_0 z_0 + B\sin\omega_0 z_0)\cos(\omega z - \omega_0 z_0) + (-A\sin\omega_0 z_0 + B\cos\omega_0 z_0)\sin(\omega z - \omega_0 z_0).$$

Werden für die runden Klammern neue Konstante C_1 und C_2 eingeführt und die ω-Werte gleich gesetzt, so ergibt sich die Lösung der Ausgangsdifferentialgleichung in der Form

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \omega^2 w = 0\,, \qquad w = C_1 \cos\omega(z - z_0) + C_2 \sin\omega(z - z_0)\,. \tag{52}$$

Faßt man z_0 nicht wie bisher als einen vorgegebenen Parameter auf, sondern als eine willkürliche wählbare Größe, so enthält die Lösung (52) drei willkürliche Konstante. Es kann dann, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, über einen der C-Werte noch frei verfügt werden. So folgt für $C_2 = 0$ bzw. $C_1 = 0$ die dritte Form der allgemeinen Lösung

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \omega^2 w = 0\,, \qquad w = C\cos\omega(z - z_0) \quad \text{bzw.} \quad w = C\sin\omega(z - z_0)\,. \tag{53}$$

Wird in der ersten der Lösungsdarstellungen (53) z_0 mit z_1, in der zweiten z_0 mit z_2 vertauscht, so ergibt sich bei Überlagerung beider eine mit vier Konstanten behaftete Lösungsform, die als die allgemeinste Darstellung zu bezeichnen ist. In Zusammenfassung der verschiedenen Möglichkeiten erhält man:

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \omega^2 w = 0\,, \qquad \left|\begin{aligned} &w = C_1\cos\omega(z - z_1) + C_2\sin\omega(z - z_2)\,,\\ &w = C_1\cos\omega(z - z_0) + C_2\sin\omega(z - z_0)\,,\\ &w = C_1\cos\omega z + C_2\sin\omega z\,,\\ &w = C\cos\omega(z - z_0) \quad \text{bzw.} \quad w = C\sin\omega(z - z_0)\,. \end{aligned}\right| \tag{54}$$

Man könnte bei rein formaler Betrachtungsweise eine so weitgehende Unterteilung der Lösungsmöglichkeiten als überflüssig ansehen. Dem ist aber keineswegs so. Es ist für den Formel- und Rechenaufwand, der bei Behandlung physikalischer und technischer Randwertaufgaben in Kauf genommen werden muß, geradezu ausschlaggebend, in welcher Form die Lösung einer Differentialgleichung angesetzt wird.

f) Integralgleichungen der cosinus- und sinus-Funktion.

Wie schon unter Ziffer 2 bemerkt wurde, fallen alle mit der nachträglichen Konstantenbestimmung verbundenen Rechenarbeiten fort, wenn anstatt im kleinen im großen gearbeitet und dadurch die Lösung auf eine Integralgleichung zurückgeführt wird. Welches sind nun die zu (54) äquivalenten Integralgleichungen und wie sehen ihre Lösungen aus?

Wird die Differentialgleichung (54) zunächst mit $2\frac{dw}{dz}$ multipliziert, so folgt

$$2\frac{d^2w}{dz^2}\frac{dw}{dz} + 2\omega^2\frac{dw}{dz}w = \frac{d}{dz}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 + \omega^2\frac{dw^2}{dz} = \frac{d}{dz}\left|\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 + \omega^2 w^2\right| = 0$$

oder integriert zwischen den bestimmten Grenzen z_0 und z

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 + \omega^2 w^2 - \left(\frac{dw}{dz}\right)_0^2 - \omega^2 w^2(z_0) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dw}{dz} = \sqrt{\left(\frac{dw}{dz}\right)_0^2 + \omega^2\left[w^2(z_0) - w^2(z)\right]}\,. \tag{55}$$

Hieraus ergibt sich durch nochmalige Integration zwischen z_0 und z die Integralgleichung

$$w(z) - w(z_0) - \int_{z_0}^{z} \sqrt{\left(\frac{dw}{dz}\right)_0^2 + \omega^2\left[w^2(z_0) - w^2(\zeta)\right]}\; d\zeta = 0\,.$$

Wird entsprechend der zweiten der Lösungsformen (54) die allgemeine Lösung gemäß

$$w = C_1\cos\omega(z - z_0) + C_2\sin\omega(z - z_0)\,, \qquad \frac{dw}{dz} = -C_1\omega\sin\omega(z - z_0) + C_2\omega\cos\omega(z - z_0)$$

angesetzt, so folgt für $z = z_0$

$$w(z_0) = C_1\,, \qquad \left(\frac{dw}{dz}\right)_0 = C_2\omega\,.$$

Damit sind C_1 und C_2 bekannt, und man erhält in Zusammenfassung der gefundenen Ergebnisse

$$\left.\begin{aligned} &w(z) - w(z_0) - \int_{z_0}^{z} \sqrt{\left(\frac{dw}{dz}\right)_0^2 + \omega^2\left[w^2(z_0) - w^2(\zeta)\right]}\, d\zeta = 0\,,\\ &w(z) = w(z_0)\cos\omega(z - z_0) + \frac{1}{\omega}\left(\frac{dw}{dz}\right)_0 \sin\omega(z - z_0)\,. \end{aligned}\right| \tag{56}$$

Mit (56) ist gleichzeitig auch die Lösung der in der Anwendung besonders häufig auftretenden quadratischen Differentialgleichung (55) gewonnen worden. Es ergibt sich

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 + \omega^2 w^2(z) - \left(\frac{dw}{dz}\right)_0^2 - \omega^2 w^2(z_0) = 0\,, \quad w(z) = w(z_0)\cos\omega(z-z_0) + \frac{1}{\omega}\left(\frac{dw}{dz}\right)_0 \sin\omega(z-z_0)\,. \tag{57}$$

Durch Multiplikation mit $2w$ nimmt (55) die Form

$$2w\frac{dw}{dz} = \frac{dw^2}{dz} = 2w\sqrt{\left(\frac{dw}{dz}\right)_0^2 + \omega^2\left[w^2(z_0) - w^2(z)\right]}$$

an. Die Integration dieser Differentialgleichung zwischen z_0 und z liefert eine Alternativform der Integralgleichung (56). Man erhält

$$\left.\begin{aligned} & w^2(z) - w^2(z_0) - 2\int_{z_0}^{z} w(\zeta)\sqrt{\left(\frac{dw}{dz}\right)_0^2 + \omega^2\left[w^2(z_0) - w^2(\zeta)\right]}\, d\zeta = 0\,, \\ & w(z) = w(z_0)\cos\omega(z-z_0) + \frac{1}{\omega}\left(\frac{dw}{dz}\right)_0 \sin\omega(z-z_0) \quad . \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Die Integralgleichungen (56) und (58) sind dadurch gekennzeichnet, daß die gesuchten Funktionen unter einem einfachen Integral stehen. Durch unmittelbare zweimalige Integration von (54) ergeben sich Integralgleichungen mit Doppelintegralen. Eine erste Integration zwischen z_0 und z ergibt

$$\frac{dw}{dz} - \left(\frac{dw}{dz}\right)_0 + \omega^2\int_{z_0}^{z} w(\zeta)\, d\zeta = 0\,. \tag{59}$$

Wird die zweite Integration zwischen den gleichen Grenzen vollzogen, so folgt als weitere Alternativform der Integralgleichung (56)

$$\left.\begin{aligned} & w(z) - w(z_0) - \left(\frac{dw}{dz}\right)_0 (z-z_0) + \omega^2\int_{z_0}^{z}\int_{z_0}^{z} w(\zeta)\, d\zeta\, d\zeta = 0\,, \\ & w(z) = w(z_0)\cos\omega(z-z_0) + \frac{1}{\omega}\left(\frac{dw}{dz}\right)_0 \sin\omega(z-z_0) \quad . \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

In Zusammenfassung der äquivalenten Lösungsformen erhält man

$$\left.\begin{aligned} & w(z) - w(z_0) - \int_{z_0}^{z}\sqrt{\left(\frac{dw}{dz}\right)_0^2 + \omega^2\left[w^2(z_0) - w^2(\zeta)\right]}\, d\zeta = 0 \quad , \\ & w^2(z) - w^2(z_0) - 2\int_{z_0}^{z} w(\zeta)\sqrt{\left(\frac{dw}{dz}\right)_0^2 + \omega^2\left[w^2(z_0) - w^2(\zeta)\right]}\, d\zeta = 0\,, \\ & w(z) - w(z_0) - \left(\frac{dw}{dz}\right)_0 (z-z_0) + \omega^2\int_{z_0}^{z}\int_{z_0}^{z} w(\zeta)\, d\zeta\, d\zeta = 0 \quad . \end{aligned}\right| \begin{aligned} & w(z) = w(z_0)\cos\omega(z-z_0) + \\ & \quad + \frac{1}{\omega}\left(\frac{dw}{dz}\right)_0 \sin\omega(z-z_0)\,. \end{aligned} \tag{61}$$

In (61) heißen $w(z_0)$ und $\left(\frac{dw}{dz}\right)_0$ die vorgegebenen Anfangswerte der Integralgleichung. Diese legen hier den Funktionsverlauf im Punkte z_0 vollständig fest. Man kann auch andere Anfangswerte vorschreiben. Ist z. B. im Punkte z_0 die Ableitung und in z_1 der Funktionswert vorgegeben, so erhält man durch Integration von (59) zwischen z_1 und z

$$w(z) - w(z_1) - \left(\frac{dw}{dz}\right)_0 (z-z_1) + \omega^2\int_{z_1}^{z}\int_{z_0}^{z} w(\zeta)\, d\zeta\, d\zeta = 0\,.$$

Die zugehörige Lösung folgt sofort aus der ersten der Lösungsformen (54), wenn z_1 mit z_0 und z_2 mit z_1 vertauscht wird. Es ergibt sich

$$w = c_1\cos\omega(z-z_0) + c_2\sin\omega(z-z_1)\,, \qquad \frac{dw}{dz} = -c_1\omega\sin\omega(z-z_0) + c_2\omega\cos\omega(z-z_1)$$

und damit für $z = z_0$ bzw. $z = z_1$

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_0 = c_2\,\omega\cos\omega(z_0 - z_1)\,, \qquad w(z_1) = c_1\cos\omega(z_1 - z_0)\,.$$

Hieraus können c_1 und c_2 unmittelbar abgelesen werden, und es folgt in Zusammenfassung der Ergebnisse

$$\left.\begin{aligned} &w(z) - w(z_1) - \left(\frac{dw}{dz}\right)_0 (z - z_1) + \omega^2 \int_{z_1}^{z}\int_{z_0}^{z} w(\zeta)\, d\zeta\, d\zeta = 0\,, \\ &w = w(z_1)\frac{\cos\omega(z-z_0)}{\cos\omega(z_1-z_0)} + \frac{1}{\omega}\left(\frac{dw}{dz}\right)_0 \frac{\sin\omega(z-z_1)}{\cos\omega(z_0-z_1)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

g) Zusammenhang mit der Differentialgleichung der harmonischen Schwingungen. Beispiel 2.

Die vorstehend behandelten Differential- und Integralgleichungen der Funktionen $\cos \omega z$ und $\sin \omega z$ werden auch als Differential- und Integralgleichungen der harmonischen Schwingungen bezeichnet. Es dürfte sich verlohnen, die verschiedenen Möglichkeiten der physikalischen Betrachtung dieser Schwingungen in Zusammenhang mit den Differential- und Integralgleichungen der Kreisfunktionen zu erörtern. Um hierfür ein technisches Anwendungsbeispiel vor Augen zu haben, sei an den aus Abb. 5 ersichtlichen Federpuffer angeknüpft, auf den zur Zeit $t = t_0$ eine Masse vom Gewichte G kg mit der Geschwindigkeit v_0 m sec^{-1} auftreffen möge. Bezeichnet $u(t)$ die Federzusammendrückung zur Zeit t und $P(u)$ die zu u gehörige Federspannkraft, so sei die Federcharakteristik in der Form

$$P(u) = c u$$

gegeben; c ist also diejenige Kraft in kg, welche die Feder um 1 m zusammendrücken würde. Das Vorspannmaß der Feder im Augenblick t_0 des Auftreffens der Masse sei $u(t_0) = u_0$.

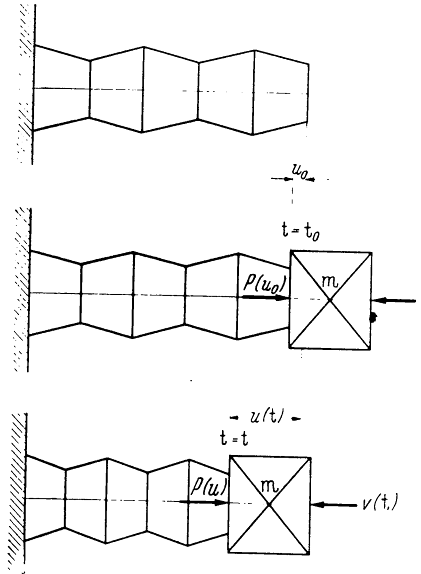

Abb. 5.

Wird zunächst das NEWTONsche Kraftgesetz: „Kraft gleich Masse mal Beschleunigung“ zur Beschreibung des Bewegungsvorganges herangezogen, so ergibt sich unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die auf die Masse wirkende Federkraft P dem Wegvektor u stets entgegengesetzt gerichtet ist,

$$-P(u) = m\frac{d^2 u}{dt^2}\,.$$

Wird hierin $P(u)$ der Federcharakteristik entsprechend eingesetzt und m durch $\frac{G}{g}$ ausgedrückt, so folgt

$$-c u = \frac{G}{g}\frac{d^2 u}{dt^2}$$

oder anders geschrieben

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{g c}{G} u = 0\,.$$

Dies ist die Gl. (54) für $w = u$, $z = t$ und $\omega = \sqrt{\frac{gc}{G}}$. Wird für u die zweite der Lösungsformen (54) zugrunde gelegt, so erhält man mit

$$u = C_1 \cos\omega(t - t_0) + C_2 \sin\omega(t - t_0)\,, \qquad \frac{du}{dt} = v = -C_1\omega\sin\omega(t - t_0) + C_2\omega\cos\omega(t - t_0)$$

aus den Anfangsbedingungen zur Zeit $t = t_0$

$$u_0 = c_1\,, \quad v_0 = c_2\omega\,.$$

Damit lauten Bewegungsgesetz, Geschwindigkeitsgesetz und Federkraftgesetz

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0\cos\omega(t - t_0) + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega(t - t_0)\,, \\ v &= -u_0\omega\sin\omega(t - t_0) + v_0\cos\omega(t - t_0)\,, \\ P &= c u_0\cos\omega(t - t_0) + \frac{c v_0}{\omega}\sin\omega(t - t_0)\,. \end{aligned}\right| \quad \omega = \sqrt{\frac{gc}{G}}\,.$$

Eine zweite Möglichkeit zur Beschreibung des Bewegungsvorganges bietet die Energiegleichung. Sie besagt, daß die Zunahme an kinetischer Energie gleich der aufgewendeten Arbeit ist und lautet hier

$$\frac{m}{2} v^2 - \frac{m}{2} v_0^2 = \int_{s_0}^{s} P\, d s .$$

Nun ist, da die Arbeit leistende bzw. Arbeit speichernde Kraft P zur Wegrichtung stets entgegengesetzt gerichtet ist,

$$P = + c u , \qquad d s = - d u .$$

Wird ferner für die Masse $\frac{G}{g}$ und für v und v_0 definitionsgemäß

$$v = \frac{d u}{d t}, \qquad v_0 = \left(\frac{d u}{d t}\right)_0$$

eingesetzt, so folgt

$$\left(\frac{d u}{d t}\right)^2 - \left(\frac{d u}{d t}\right)_0^2 = - \frac{2 c g}{G} \int_{u_0}^{u} u\, d u = - \frac{c g}{G} (u^2 - u_0^2)$$

oder umgeordnet

$$\left(\frac{d u}{d t}\right)^2 + \frac{c g}{G} u^2 - \left(\frac{d u}{d t}\right)_0^2 - \frac{c g}{G} u_0^2 = 0 .$$

Dies ist mit $w = u$, $z = t$, $\omega = \sqrt{\frac{c g}{G}}$ die Differentialgleichung (57) und man erhält daher ohne weitere Rechnung

$$u = u_0 \cos \omega (t - t_0) + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega (t - t_0) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{c g}{G}} .$$

Man kann aber noch einen Schritt weiter gehen und die quadratische Differentialgleichung, ähnlich wie es oben im Anschluß an (55) allgemein geschehen ist, noch einmal integrieren und erhält dann gemäß

$$u(t) - u_0 - \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{d u}{d t}\right)_0^2 + \frac{c g}{G} [u_0^2 - u^2(\tau)]}\, d \tau = 0$$

die auf die vorliegenden Bezeichnungen umgeschriebenen Integralgleichung (56) mit der gleichen Lösung wie vorhin.

Eine dritte Möglichkeit zur Beschreibung des Bewegungsvorganges ergibt sich durch Heranziehung des Impulssatzes, der besagt, daß die Zunahme an Bewegungsgröße gleich dem aufgewendeten Impuls ist. Im vorliegenden Falle bedeutet dies

$$m v - m v_0 = - \int_{t_0}^{t} P\, d t ,$$

wobei das negative Vorzeichen auf der rechten Seite zum Ausdruck bringt, daß es sich bei der Federzusammendrückung nicht um einen aufgewendeten sondern um einen gespeicherten Impuls handelt. Nach Einsetzen von v, v_0, P und m ergibt sich

$$\frac{d u}{d t} - \left(\frac{d u}{d t}\right)_0 + \frac{c g}{G} \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d \tau = 0$$

oder bei nochmaliger Integration zwischen t_0 und t

$$u(t) - u_0 - \left(\frac{d u}{d t}\right)_0 (t - t_0) + \frac{c g}{G} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d \tau\, d \tau = 0 .$$

Dies ist die auf die vorliegenden Bezeichnungen umgeschriebene Integralgleichung (60), und man erhält auch hier wieder unmittelbar

$$u = u_0 \cos \omega (t - t_0) + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega (t - t_0) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{c g}{G}} .$$

h) cosinus- und sinus-Funktion als Koordinaten des Einheitskreises. Funktionsverlauf im Reellen.

Für $\omega_0 z_0 = -\omega z$ liefert die erste der Gln (47)

$$\cos^2 \omega z + \sin^2 \omega z = 1\,. \tag{63}$$

Wird hierin $\omega = 1$ und

$$\xi = \cos z\,, \quad \eta = \sin z \tag{64}$$

gesetzt, so folgt

$$\xi^2 + \eta^2 = 1\,. \tag{65}$$

Im Falle reeller z-Werte und damit auch reeller ξ- und η-Werte stellt (65) die Gleichung des Einheitskreises im kartesischen Bezugssystem dar (Abb. 6). Der Parameter z ist in dieser Deutungsweise der Bogen des Einheitskreises zwischen der Abszissenachse und dem zu $\cos z$ und

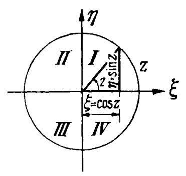

Abb. 6.

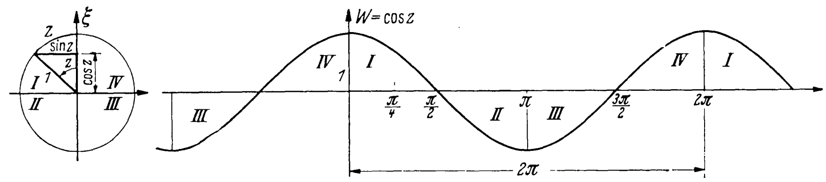

Abb. 7.

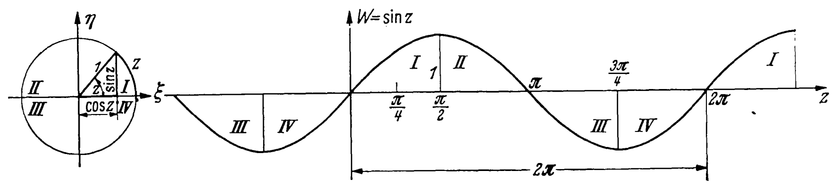

Abb. 8.

$\sin z$ gehörigen Radiusvektor, und zwar im Linkssinne positiv gemessen. Da z den Einheitskreis beliebig oft durchlaufen kann, ist es in keiner Weise beschränkt; jeder neue Kreisumlauf ergibt immer wieder das gleiche Bild für den Verlauf von $\cos z$ und $\sin z$. Dieses Verhalten der Kreisfunktionen wird als periodisch bezeichnet; da einem Kreisumlauf der Bogen $z = 2\pi$ entspricht, heißt dieser Wert die Periode oder Wellenlänge. Alle weiteren Eigenschaften der reellen Kreisfunktionen, wie Vorzeichenwechsel, Symmetrieverhalten usw., zeigt eine Auftragung von $\cos z$ und $\sin z$ im kartesischen Bezugssystem in Anlehnung an den Einheitskreis und seine Quadranten (Abb. 7 und 8).

i) tangens- und cotangens-Funktion. Definitionsgleichungen und Additionstheoreme.

Die Quotienten von $\cos \omega z$ und $\sin \omega z$ werden gemäß

$$\operatorname{tang} \omega z = \frac{\sin \omega z}{\cos \omega z} = -\operatorname{tang}(-\omega z)\,, \quad \operatorname{cotg} \omega z = \frac{\cos \omega z}{\sin \omega z} = -\operatorname{cotg}(-\omega z)\,, \quad \operatorname{cotg} \omega z = \frac{1}{\operatorname{tang} \omega z} \tag{66}$$

als tangens- und cotangens-Funktion eingeführt. Aus (47) folgt für diese Funktionen das Additionstheorem

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}(\omega z + \omega_0 z_0) &= \frac{\sin(\omega z + \omega_0 z_0)}{\cos(\omega z + \omega_0 z_0)} = \frac{\sin \omega z \cos \omega_0 z_0 + \cos \omega z \sin \omega_0 z_0}{\cos \omega z \cos \omega_0 z_0 - \sin \omega z \sin \omega_0 z_0}\,, \\ \operatorname{cotg}(\omega z + \omega_0 z_0) &= \frac{\cos(\omega z + \omega_0 z_0)}{\sin(\omega z + \omega_0 z_0)} = \frac{\cos \omega z \cos \omega_0 z_0 - \sin \omega z \sin \omega_0 z_0}{\sin \omega z \cos \omega_0 z_0 + \cos \omega z \sin \omega_0 z_0}\,, \end{aligned}\right\}$$

oder wenn im Zähler und Nenner durch $\cos \omega z \cos \omega_0 z_0$ bzw. $\sin \omega z \sin \omega_0 z_0$ dividiert wird,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}(\omega z + \omega_0 z_0) &= \frac{\operatorname{tang} \omega z + \operatorname{tang} \omega_0 z_0}{1 - \operatorname{tang} \omega z \operatorname{tang} \omega_0 z_0}\,, & \operatorname{tang} \omega z &= \frac{\operatorname{tang}(\omega z + \omega_0 z_0) - \operatorname{tang} \omega_0 z_0}{\operatorname{tang}(\omega z + \omega_0 z_0) \operatorname{tang} \omega_0 z_0 + 1}\,, \\ \operatorname{cotg}(\omega z + \omega_0 z_0) &= \frac{\operatorname{cotg} \omega z \operatorname{cotg} \omega_0 z_0 - 1}{\operatorname{cotg} \omega z + \operatorname{cotg} \omega_0 z_0}\,, & \operatorname{cotg} \omega z &= \frac{\operatorname{cotg}(\omega z + \omega_0 z_0) \operatorname{cotg} \omega_0 z_0 + 1}{\operatorname{cotg} \omega_0 z_0 - \operatorname{cotg}(\omega z + \omega_0 z_0)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

k) tangens- und cotangens-Funktion. Differential- und Integralformeln.

Die tangens- und cotangens-Funktion können gemäß

$$\operatorname{tang} \omega z = -\frac{1}{\omega}\,\frac{d \ln \cos \omega z}{dz}\,, \quad \operatorname{cotg} \omega z = +\frac{1}{\omega}\,\frac{d \ln \sin \omega z}{dz} \tag{68}$$

auch als logarithmische Ableitungen der cosinus- bzw. sinus-Funktion dargestellt werden, wie man durch Ausdifferentiation nach der Kettenregel unter Berücksichtigung von (19) und (44) leicht bestätigt.

Durch Differentiation von (66) und Integration von (68) ergeben sich die Differential- bzw. Integralformeln

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\operatorname{tang}\omega z}{dz} &= \frac{\omega}{\cos^2\omega z}\,, & \int \operatorname{tang}\omega z\, dz &= -\frac{\ln\cos\omega z}{\omega}\,, \\ \frac{d\operatorname{cotg}\omega z}{dz} &= \frac{-\omega}{\sin^2\omega z}\,, & \int \operatorname{cotg}\omega z\, dz &= +\frac{\ln\sin\omega z}{\omega}\,. \end{aligned}\right| \tag{69}$$

Unter Heranziehung von (63) folgt

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2\omega z} &= \frac{\cos^2\omega z + \sin^2\omega z}{\cos^2\omega z} = 1 + \operatorname{tang}^2\omega z\,, \\ \frac{1}{\sin^2\omega z} &= \frac{\cos^2\omega z + \sin^2\omega z}{\sin^2\omega z} = 1 + \operatorname{cotg}^2\omega z\,. \end{aligned}\right| \tag{70}$$

Die Einführung dieser Beziehungen in (69) liefert

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\operatorname{tang}\omega z}{dz} &= \omega(1 + \operatorname{tang}^2\omega z)\,, \\ \frac{d\operatorname{cotg}\omega z}{dz} &= -\omega(1 + \operatorname{cotg}^2\omega z)\,. \end{aligned}\right| \tag{71}$$

oder wenn z durch $z - z_0$ ersetzt wird,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\operatorname{tang}\omega(z-z_0)}{dz} &= \omega(1 + \operatorname{tang}^2\omega(z-z_0))\,, \\ \frac{d\operatorname{cotg}\omega(z-z_0)}{dz} &= -\omega(1 + \operatorname{cotg}^2\omega(z-z_0))\,. \end{aligned}\right| \tag{72}$$

l) Differential- und Integralgleichungen der tangens- und cotangens-Funktion.

Die Gln (72) enthalten die Differentialgleichungen der tangens- und cotangens-Funktion. Mit $w = \operatorname{tang}\omega(z-z_0)$ bzw. $w = \operatorname{cotg}\omega(z-z_0)$ folgt

$$\left.\begin{aligned} \frac{dw}{dz} - \omega(1+w^2) &= 0 \qquad w = \operatorname{tang}\omega(z-z_0)\,, \\ \frac{dw}{dz} + \omega(1+w^2) &= 0 \qquad w = \operatorname{cotg}\omega(z-z_0)\,. \end{aligned}\right| \tag{73}$$

z_0 stellt in den Lösungen dieser Differentialgleichungen die Integrationskonstante dar.

Die Integration von (73) führt zu den Integralgleichungen

$$\left.\begin{aligned} w(z) - \omega\int_{z_0}^{z}(1 + w^2(\zeta))\,d\zeta &= 0 \quad \text{mit } w = +\operatorname{tang}\omega(z-z_0)\,, \\ w(z) + \omega\int_{z_0}^{z}(1 + w^2(\zeta))\,d\zeta &= 0 \quad \text{mit } w = -\operatorname{tang}\omega(z-z_0)\,. \end{aligned}\right| \tag{74}$$

m) Potenzreihenentwicklung der tangens- und cotangens-Funktion.

Mit Hilfe von (73) lassen sich die höheren Ableitungen der tangens- und cotangens-Funktion leicht bilden. Man erhält

$$\left.\begin{aligned} & w = \operatorname{tang}\omega(z-z_0) & & w = \operatorname{cotg}\omega(z-z_0) \\ & \frac{dw}{dz} = \omega(1+w^2) & & \frac{dw}{dz} = -\omega(1+w^2) \\ & \frac{d^2w}{dz^2} = \omega\cdot 2w\frac{dw}{dz} = 2\omega^2 w(1+w^2) & & \frac{d^2w}{dz^2} = 2\omega^2 w(1+w^2) \\ & \frac{d^3w}{dz^3} = 2\omega^3(1+3w^2)(1+w^2) & & \frac{d^3w}{dz^3} = -2\omega^3(1+3w^2)(1+w^2) \\ & \frac{d^4w}{dz^4} = 8\omega^4 w(2+3w^2)(1+w^2) & & \frac{d^4w}{dz^4} = 8\omega^4 w(2+3w^2)(1+w^2) \\ & \frac{d^5w}{dz^5} = 8\omega^5(2+15w^2+15w^4)(1+w^2) & & \frac{d^5w}{dz^5} = -8\omega^5(2+15w^2+15w^4)(1+w^2) \\ & \frac{d^6w}{dz^6} = 16\omega^6 w(17+60w^2+45w^4)(1+w^2) & & \frac{d^6w}{dz^6} = 16\omega^6 w(17+60w^2+15w^4)(1+w^2) \\ & \frac{d^7w}{dz^7} = 16\omega^7(17+231w^2+525w^4+ & & \frac{d^7w}{dz^7} = -16\omega^7(17+231w^2+525w^4+ \\ & \qquad\qquad +315w^6)(1+w^2) & & \qquad\qquad +315w^6)(1+w^2) \\ & \qquad\qquad \cdots & & \qquad\qquad \cdots \end{aligned}\right| \tag{75}$$

Wird die Funktion $w = \operatorname{tang}\omega(z-z_0)$ an der Stelle $z=z_0$ entwickelt, wofür die Ableitungen unter Einsetzen von $w=0$ aus (75) entnommen werden können, so folgt

$$\operatorname{tang}\left[\omega(z-z_0)\right] = \omega\frac{z-z_0}{1!} + 2\omega^3\frac{(z-z_0)^3}{3!} + 16\omega^5\frac{(z-z_0)^5}{5!} + 272\omega^7\frac{(z-z_0)^7}{7!} + \cdots$$

oder bei entsprechender Zusammenfassung

$$\operatorname{tang}\left[\omega(z-z_0)\right] = \left[\omega(z-z_0)\right] + \frac{1}{3}\left[\omega(z-z_0)\right]^3 + \frac{2}{15}\left[\omega(z-z_0)\right]^5 + \\ + \frac{17}{315}\left[\omega(z-z_0)\right]^7 + \cdots \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} < |\omega(z-z_0)| < \frac{\pi}{2}. \tag{76}$$

Hieraus ergibt sich in Verbindung mit (66) für die cotangens-Funktion

$$\operatorname{cotg}\left[\omega(z-z_0)\right] = \frac{1}{\operatorname{tang}\left[\omega(z-z_0)\right]} = \frac{1}{\left[\omega(z-z_0)\right] + \frac{1}{3}\left[\omega(z-z_0)\right]^3 + \frac{2}{15}\left[\omega(z-z_0)\right]^5 + \frac{17}{315}\left[\omega(z-z_0)\right]^7 + \cdots}$$

oder nach Durchführung der Reihendivision

$$\operatorname{cotg}\left[\omega(z-z_0)\right] = \frac{1}{\left[\omega(z-z_0)\right]} - \frac{1}{3}\left[\omega(z-z_0)\right] - \frac{1}{45}\left[\omega(z-z_0)\right]^3 - \frac{2}{945}\left[\omega(z-z_0)\right]^5 - \\ - \frac{1}{4725}\left[\omega(z-z_0)\right]^7 - \cdots \quad \text{für} \quad 0 < |\omega(z-z_0)| < \pi. \tag{77}$$

n) Funktionsverlauf der tangens- und cotangens-Funktion im Reellen.

Für reelles Argument $z=x$ ist der Verlauf der Funktionen $\operatorname{tang} z$ und $\operatorname{cotg} z$ aus den Abb. 9 und 10 ersichtlich. Die Periode ist hier nicht 2π sondern π, da durch die Division von $\cos z$ und $\sin z$ deren Vorzeichenwechsel im dritten Quadranten wieder aufgehoben wird.

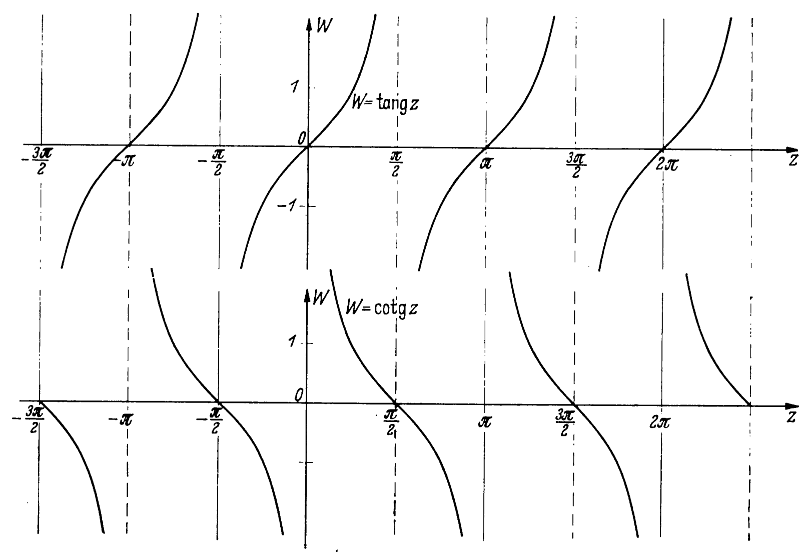

Abb. 9 und 10.

o) Funktionalbeziehungen zwischen den Kreisfunktionen.

Durch einfache algebraische Operationen ergeben sich aus den Gln (63), (66) und (70) die nachfolgenden gegenseitigen Beziehungen zwischen den Kreisfunktionen:

$$\left.\begin{array}{llll}
w = \sin\omega z\,, & \sqrt{1-w^2} = \cos\omega z\,, & \dfrac{w}{\sqrt{1-w^2}} = \operatorname{tang}\omega z\,, & \dfrac{\sqrt{1-w^2}}{w} = \operatorname{cotg}\omega z\,;\\
w = \cos\omega z\,, & \sqrt{1-w^2} = \sin\omega z\,, & \dfrac{\sqrt{1-w^2}}{w} = \operatorname{tang}\omega z\,, & \dfrac{w}{\sqrt{1-w^2}} = \operatorname{cotg}\omega z\,;\\
w = \operatorname{tang}\omega z\,, & \dfrac{1}{w} = \operatorname{cotg}\omega z\,, & \dfrac{w}{\sqrt{1+w^2}} = \sin\omega z\,, & \dfrac{1}{\sqrt{1+w^2}} = \cos\omega z\,;\\
w = \operatorname{cotg}\omega z\,, & \dfrac{1}{w} = \operatorname{tang}\omega z\,, & \dfrac{1}{\sqrt{1+w^2}} = \sin\omega z\,, & \dfrac{w}{\sqrt{1+w^2}} = \cos\omega z\,.
\end{array}\right\} \tag{78}$$

Weitere gegenseitige Beziehungen folgen aus (47) und (67) für $\omega=1$ und $\omega_0 z_0 = \pm n\pi$ bzw. $\omega_0 z_0 = \pm\frac{2n+1}{2}\pi$ oder auch unmittelbar durch Ablesen aus den Abb. 7 bis 10. Sie lauten

$$\left.\begin{aligned} \cos z &= (-1)^n \cos(n\pi + z) = (-1)^n \cos(n\pi - z) \\ &= (-1)^n \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi + z\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi - z\right) \quad, \\ \sin z &= (-1)^n \sin(n\pi + z) = (-1)^{n+1} \sin(n\pi - z) \\ &= (-1)^{n+1} \cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi + z\right) = (-1)^n \cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi - z\right). \end{aligned}\right\} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{79}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} z &= \operatorname{tang}(n\pi + z) = -\operatorname{tang}(n\pi - z) \\ &= -\operatorname{cotg}\left(\frac{2n+1}{2}\pi + z\right) = \operatorname{cotg}\left(\frac{2n+1}{2}\pi - z\right) , \\ \operatorname{cotg} z &= \operatorname{cotg}(n\pi + z) = -\operatorname{cotg}(n\pi - z) \\ &= -\operatorname{tang}\left(\frac{2n+1}{2}\pi + z\right) = \operatorname{tang}\left(\frac{2n+1}{2}\pi - z\right). \end{aligned}\right\} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{80}$$

6. Die Kreisfunktionen mit der Phase $\frac{\pi}{4}$.

a) Definitionsgleichungen und Wechselbeziehungen.

Wird in (47) und (67) die Phase $\omega_0 z_0 = -\frac{\pi}{4}$ gesetzt, so entsteht eine für die Anwendung sehr wichtige Sonderklasse von Kreisfunktionen, die gemäß

$$\left.\begin{aligned} \cos\left(\omega z - \frac{\pi}{4}\right) &= \overset{*}{\cos}\,\omega z \quad , \\ \sin\left(\omega z - \frac{\pi}{4}\right) &= \overset{*}{\sin}\,\omega z \quad , \\ \operatorname{tang}\left(\omega z - \frac{\pi}{4}\right) &= \overset{*}{\operatorname{tang}}\,\omega z , \\ \operatorname{cotg}\left(\omega z - \frac{\pi}{4}\right) &= \overset{*}{\operatorname{cotg}}\,\omega z \quad , \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

bezeichnet werden sollen. Sie sind wie alle Kreisfunktionen Lösungen der Differentialgleichungen (54) bzw. (73).

Zwischen den Kreisfunktionen der Phasen 0 und $\frac{\pi}{4}$ bestehen nach (47), (51) und (67), in denen hier $\omega_0 z_0 = -\frac{\pi}{4}$ zu setzen ist, die Transformationsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{\cos}\,\omega z &= \frac{\sin\omega z + \cos\omega z}{\sqrt{2}} , &\quad \cos\omega z &= \frac{\overset{*}{\cos}\,\omega z - \overset{*}{\sin}\,\omega z}{\sqrt{2}} , \\ \overset{*}{\sin}\,\omega z &= \frac{\sin\omega z - \cos\omega z}{\sqrt{2}} , &\quad \sin\omega z &= \frac{\overset{*}{\cos}\,\omega z + \overset{*}{\sin}\,\omega z}{\sqrt{2}} . \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{\operatorname{tang}}\,\omega z &= \frac{\operatorname{tang}\omega z - 1}{\operatorname{tang}\omega z + 1} , &\quad \operatorname{tang}\omega z &= \frac{1 + \overset{*}{\operatorname{tang}}\,\omega z}{1 - \overset{*}{\operatorname{tang}}\,\omega z} , \\ \overset{*}{\operatorname{cotg}}\,\omega z &= \frac{1 + \operatorname{cotg}\omega z}{1 - \operatorname{cotg}\omega z} , &\quad \operatorname{cotg}\omega z &= \frac{\overset{*}{\operatorname{cotg}}\,\omega z - 1}{\overset{*}{\operatorname{cotg}}\,\omega z + 1} . \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

Ferner folgt aus (63) bei Vertauschung von ωz mit $\omega z - \frac{\pi}{4}$

$$\overset{*}{\cos}{}^2\omega z + \overset{*}{\sin}{}^2\omega z = 1 . \tag{84}$$

b) Differential- und Integralformeln.

Die Differential- und Integralformeln (44) und (69) können unmittelbar übernommen werden, da die Vertauschung von ωz mit $\omega z - \frac{\pi}{4}$ ohne Einfluß auf dz ist. Man erhält daher

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\overset{*}{\cos}\omega z}{dz} &= -\omega\overset{*}{\sin}\omega z\,, & \int \overset{*}{\cos}\omega z\,dz &= +\frac{1}{\omega}\overset{*}{\sin}\omega z\,,\\
\frac{d\overset{*}{\sin}\omega z}{dz} &= +\omega\overset{*}{\cos}\omega z\,, & \int \overset{*}{\sin}\omega z\,dz &= -\frac{1}{\omega}\overset{*}{\cos}\omega z\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (85)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\overset{*}{\operatorname{tang}}\omega z}{dz} &= \frac{\omega}{\overset{*}{\cos}{}^2\omega z} = \omega(1+\overset{*}{\operatorname{tang}}{}^2\omega z)\,, & \int \overset{*}{\operatorname{tang}}\omega z\,dz &= -\frac{\ln\overset{*}{\cos}\omega z}{\omega}\,,\\
\frac{d\overset{*}{\operatorname{cotg}}\omega z}{dz} &= \frac{-\omega}{\overset{*}{\sin}{}^2\omega z} = -\omega(1+\overset{*}{\operatorname{cotg}}{}^2\omega z)\,, & \int \overset{*}{\operatorname{cotg}}\omega z\,dz &= +\frac{\ln\overset{*}{\sin}\omega z}{\omega}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (86)$$

Werden auf den linken Seiten dieser Gleichungen die Transformationen (82) und (83) berücksichtigt, so folgt

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d(\sin\omega z+\cos\omega z)}{dz} &= -\omega\sqrt{2}\,\overset{*}{\sin}\omega z\,, & \int(\sin\omega z+\cos\omega z)\,dz &= +\frac{\sqrt{2}}{\omega}\overset{*}{\sin}\omega z\,,\\
\frac{d(\sin\omega z-\cos\omega z)}{dz} &= +\omega\sqrt{2}\,\overset{*}{\cos}\omega z\,, & \int(\sin\omega z-\cos\omega z)\,dz &= -\frac{\sqrt{2}}{\omega}\overset{*}{\cos}\omega z\,;
\end{aligned}\right\} \qquad (87)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left[\frac{\operatorname{tang}\omega z-1}{\operatorname{tang}\omega z+1}\right] &= \frac{\omega}{\overset{*}{\cos}{}^2\omega z}\,, & \int\frac{\operatorname{tang}\omega z-1}{\operatorname{tang}\omega z+1}\,dz &= -\frac{\ln\overset{*}{\cos}\omega z}{\omega}\,,\\
\frac{d}{dz}\left[\frac{1+\operatorname{cotg}\omega z}{1-\operatorname{cotg}\omega z}\right] &= \frac{-\omega}{\overset{*}{\sin}{}^2\omega z}\,, & \int\frac{1+\operatorname{cotg}\omega z}{1-\operatorname{cotg}\omega z}\,dz &= +\frac{\ln\overset{*}{\sin}\omega z}{\omega}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (88)$$

Umgekehrt ergibt sich, wenn auf den linken Seiten von (44) und (69) die Transformationen (82) und (83) berücksichtigt werden,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d(\overset{*}{\cos}\omega z-\overset{*}{\sin}\omega z)}{dz} &= -\omega\sqrt{2}\,\sin\omega z\,, & \int(\overset{*}{\cos}\omega z-\overset{*}{\sin}\omega z)\,dz &= +\frac{\sqrt{2}}{\omega}\sin\omega z\,,\\
\frac{d(\overset{*}{\cos}\omega z+\overset{*}{\sin}\omega z)}{dz} &= +\omega\sqrt{2}\,\cos\omega z\,, & \int(\overset{*}{\cos}\omega z+\overset{*}{\sin}\omega z)\,dz &= -\frac{\sqrt{2}}{\omega}\cos\omega z\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (89)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left[\frac{1+\overset{*}{\operatorname{tang}}\omega z}{1-\overset{*}{\operatorname{tang}}\omega z}\right] &= \frac{\omega}{\cos^2\omega z}\,, & \int\frac{1+\overset{*}{\operatorname{tang}}\omega z}{1-\overset{*}{\operatorname{tang}}\omega z}\,dz &= -\frac{\ln\cos\omega z}{\omega}\,,\\
\frac{d}{dz}\left[\frac{\overset{*}{\operatorname{cotg}}\omega z-1}{\overset{*}{\operatorname{cotg}}\omega z+1}\right] &= \frac{-\omega}{\sin^2\omega z}\,, & \int\frac{\overset{*}{\operatorname{cotg}}\omega z-1}{\overset{*}{\operatorname{cotg}}\omega z+1}\,dz &= +\frac{\ln\sin\omega z}{\omega}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (90)$$

c) Potenzreihenentwicklungen.

Durch Einführung von (43) in (82) und durch Einsetzen von $\omega z_0 = \frac{\pi}{4}$ in (76) und (77) folgen die Reihendarstellungen

$$\left.\begin{aligned}
\overset{*}{\cos}\omega z &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\omega z-\frac{(\omega z)^2}{2!}-\frac{(\omega z)^3}{3!}+\frac{(\omega z)^4}{4!}+\frac{(\omega z)^5}{5!}-\cdots\right] = \sum_0^\infty\frac{(-1)^n}{\sqrt{2}}\left[+\frac{(\omega z)^{2n}}{(2n)!}+\frac{(\omega z)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right],\\
\overset{*}{\sin}\omega z &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-1+\omega z+\frac{(\omega z)^2}{2!}-\frac{(\omega z)^3}{3!}-\frac{(\omega z)^4}{4!}+\frac{(\omega z)^5}{5!}+\cdots\right] = \sum_0^\infty\frac{(-1)^n}{\sqrt{2}}\left[-\frac{(\omega z)^{2n}}{(2n)!}+\frac{(\omega z)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (91)$$

$$\left.\begin{aligned}
\overset{*}{\operatorname{tang}}\omega z &= \left(\omega z-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\omega z-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{2}{15}\left(\omega z-\frac{\pi}{4}\right)^5+\frac{17}{315}\left(\omega z-\frac{\pi}{4}\right)^7+\cdots \text{ für } -\frac{\pi}{2}<\left|\omega z-\frac{\pi}{4}\right|<\frac{\pi}{2}\,,\\
\overset{*}{\operatorname{cotg}}\omega z &= \frac{1}{\omega z-\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{3}\left(\omega z-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{45}\left(\omega z-\frac{\pi}{4}\right)^3-\frac{2}{945}\left(\omega z-\frac{\pi}{4}\right)^5-\frac{1}{4725}\left(\omega z-\frac{\pi}{4}\right)^7-\cdots\\
&\qquad\text{für } 0<\left|\omega z-\frac{\pi}{4}\right|<\pi\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (92)$$

d) Funktionalbeziehungen.

Durch Vertauschen von ωz mit $\omega z - \frac{\pi}{4}$ liefert (78), (79) und (80)

$$\left.\begin{array}{llll}
w = \overset{*}{\sin}\,\omega z\,, & \sqrt{1-w^2} = \overset{*}{\cos}\,\omega z\,, & \dfrac{w}{\sqrt{1-w^2}} = \overset{*}{\operatorname{tang}}\,\omega z\,, & \dfrac{\sqrt{1-w^2}}{w} = \overset{*}{\operatorname{cotg}}\,\omega z\,; \\
w = \overset{*}{\cos}\,\omega z\,, & \sqrt{1-w^2} = \overset{*}{\sin}\,\omega z\,, & \dfrac{\sqrt{1-w^2}}{w} = \overset{*}{\operatorname{tang}}\,\omega z\,, & \dfrac{w}{\sqrt{1-w^2}} = \overset{*}{\operatorname{cotg}}\,\omega z\,; \\
w = \overset{*}{\operatorname{tang}}\,\omega z\,, & \dfrac{1}{w} = \overset{*}{\operatorname{cotg}}\,\omega z\,, & \dfrac{w}{\sqrt{1+w^2}} = \overset{*}{\sin}\,\omega z\,, & \dfrac{1}{\sqrt{1+w^2}} = \overset{*}{\cos}\,\omega z\,; \\
w = \overset{*}{\operatorname{cotg}}\,\omega z\,, & \dfrac{1}{w} = \overset{*}{\operatorname{tang}}\,\omega z\,, & \dfrac{1}{\sqrt{1+w^2}} = \overset{*}{\sin}\,\omega z\,, & \dfrac{w}{\sqrt{1+w^2}} = \overset{*}{\cos}\,\omega z\,.
\end{array}\right| \tag{93}$$

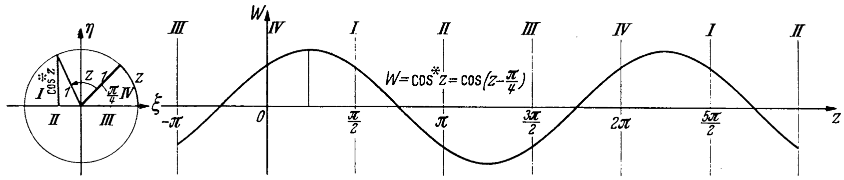

Abb. 11.

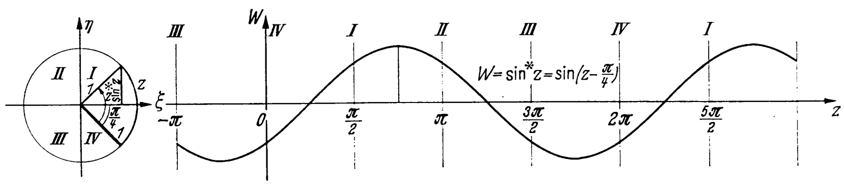

Abb. 12.

$$\left.\begin{aligned}
\overset{*}{\cos} z &= (-1)^n \overset{*}{\cos}(n\pi + z) = (-1)^n \overset{*}{\cos}\left(\frac{2n+1}{2}\pi - z\right) \\
&= (-1)^n \overset{*}{\sin}\left(\frac{2n+1}{2}\pi + z\right) = (-1)^{n+1} \overset{*}{\sin}(n\pi - z)\,, \\
\overset{*}{\sin} z &= (-1)^n \overset{*}{\sin}(n\pi + z) = (-1)^{n+1} \overset{*}{\sin}\left(\frac{2n+1}{2}\pi - z\right) \\
&= (-\ )^{n+1} \overset{*}{\cos}\left(\frac{2n+1}{2}\pi + z\right) = (-1)^{n+1} \overset{*}{\cos}(n\pi - z)\,.
\end{aligned}\right| \quad (n = 0,1,2\cdots) \tag{94}$$

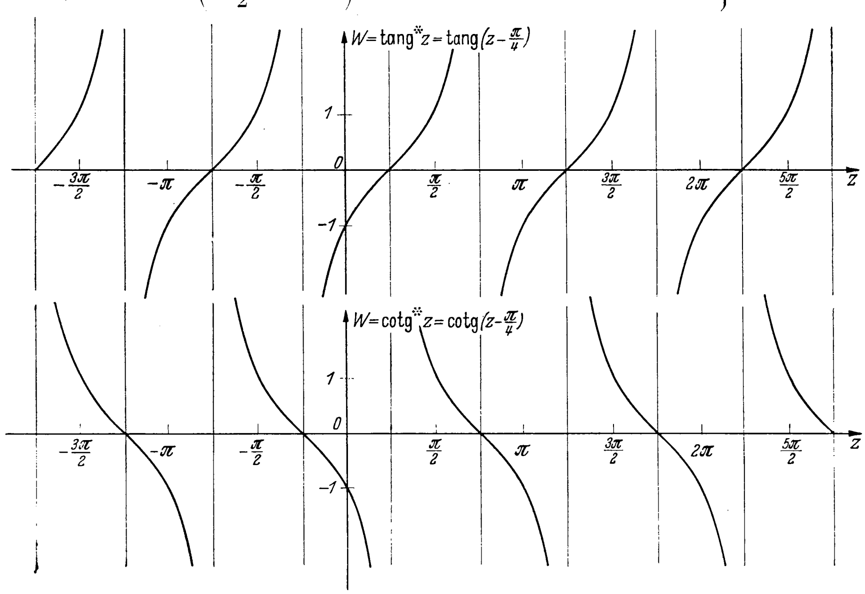

Abb. 13 und 14.

$$\left.\begin{aligned}\overset{*}{\operatorname{tang}} z &= \overset{*}{\operatorname{tang}}(n\pi + z) = -\overset{*}{\operatorname{tang}}\left(\frac{2n+1}{2}\pi - z\right)\\ &= -\overset{*}{\operatorname{cotg}}\left(\frac{2n+1}{2}\pi + z\right) = \overset{*}{\operatorname{cotg}}(n\pi - z),\\ \overset{*}{\operatorname{cotg}} z &= \overset{*}{\operatorname{cotg}}(n\pi + z) = -\overset{*}{\operatorname{cotg}}\left(\frac{2n+1}{2}\pi - z\right)\\ &= -\overset{*}{\operatorname{tang}}\left(\frac{2n+1}{2}\pi + z\right) = \overset{*}{\operatorname{tang}}(n\pi - z).\end{aligned}\right| \quad n = 0, 1, 2 \cdots \tag{95}$$

Der Verlauf der Kreisfunktionen mit der Phase $\frac{\pi}{4}$ ist für reelles Argument z aus den Abb. 11 bis 14 ersichtlich.

7. Die Hyperbelfunktionen.

a) Definitionsgleichungen der Cosinus- und Sinus-Funktion. Potenzreihenentwicklungen.

Wird in den Gln (43) ω mit $i\omega$ vertauscht und die zweite der Gln (43) gleichzeitig mit $-i$ multipliziert, so ergeben sich die Potenzreihenentwicklungen

$$\cos i\omega z = 1 + \frac{(\omega z)^2}{2!} + \frac{(\omega z)^4}{4!} + \cdots, \qquad -i \sin i\omega z = \omega z + \frac{(\omega z)^3}{3!} + \frac{(\omega z)^5}{5!} + \cdots.$$

Diese definieren für den gesamten Bereich der komplexen Zahlenebene zwei analytische Funktionen, die gemäß

$$\begin{aligned} \operatorname{Cof} \omega z &= \cos i\omega z, & \cos i\omega z &= \operatorname{Cof} \omega z\\ \operatorname{Sin} \omega z &= -i \sin i\omega z, & \sin i\omega z &= i \operatorname{Sin} \omega z \end{aligned} \tag{96}$$

als hyperbolische Cosinus- und Sinusfunktion eingeführt werden. Die Berücksichtigung dieser Bezeichnungen in den Ausgangsentwicklungen liefert

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cof} \omega z &= 1 + \frac{(\omega z)^2}{2!} + \frac{(\omega z)^4}{4!} + \cdots = \sum_0^\infty {}_n \frac{(\omega z)^{2n}}{(2n)!},\\ \operatorname{Sin} \omega z &= \omega z + \frac{(\omega z)^3}{3!} + \frac{(\omega z)^5}{5!} + \cdots = \sum_0^\infty {}_n \frac{(\omega z)^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}\right| \tag{97}$$

b) Differential- und Integralformeln der Cosinus- und Sinus-Funktion.

Aus den Reihenentwicklungen (97) oder auch durch Umschreiben der Gln (44) folgen die Differential- und Integralformeln

$$\left.\begin{aligned} \frac{d \operatorname{Cof} \omega z}{dz} &= \omega \operatorname{Sin} \omega z, & \int \operatorname{Cof} \omega z\, dz &= \frac{1}{\omega} \operatorname{Sin} \omega z,\\ \frac{d \operatorname{Sin} \omega z}{dz} &= \omega \operatorname{Cof} \omega z, & \int \operatorname{Sin} \omega z\, dz &= \frac{1}{\omega} \operatorname{Cof} \omega z. \end{aligned}\right| \tag{98}$$

c) Differential- und Integralgleichungen der Cosinus- und Sinus-Funktion.

Durch Vertauschen von ω mit $i\omega$ und von C_2 mit $-iC_2$ in (54) und (61) in Verbindung mit (96) erhält man für die Differential- und Integralgleichungen der Hyperbelfunktionen

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - \omega^2 w = 0, \qquad \left.\begin{aligned} w &= C_1 \operatorname{Cof} \omega (z - z_1) + C_2 \operatorname{Sin} \omega (z - z_2),\\ w &= C_1 \operatorname{Cof} \omega (z - z_0) + C_2 \operatorname{Sin} \omega (z - z_0),\\ w &= C_1 \operatorname{Cof} \omega z + C_2 \operatorname{Sin} \omega z,\\ w &= C \operatorname{Cof} \omega (z - z_0) \quad \text{bzw.} \quad w = C \operatorname{Sin} \omega (z - z_0). \end{aligned}\right| \tag{99}$$

$$\left.\begin{aligned} & w(z) - w(z_0) - \int_{z_0}^{z} \sqrt{\left(\frac{dw}{dz}\right)_0^2 - \omega^2 \left[w^2(z_0) - w^2(\zeta)\right]}\, d\zeta = 0,\\ & w^2(z) - w^2(z_0) - 2\int_{z_0}^{z} w(\zeta) \sqrt{\left(\frac{dw}{dz}\right)_0^2 - \omega^2 \left[w^2(z_0) - w^2(\zeta)\right]}\, d\zeta = 0,\\ & w(z) - w(z_0) - \left(\frac{dw}{dz}\right)_0 (z - z_0) - \omega^2 \int_{z_0}^{z} \int_{z}^{z} w(\zeta)\, d\zeta\, d\zeta = 0. \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} w(z) = w(z_0) \operatorname{Cof} \omega (z - z_0) +\\ + \frac{1}{\omega}\left(\frac{dw}{dz}\right)_0 \operatorname{Sin} \omega (z - z_0). \end{aligned} \tag{100}$$

Ferner liefert die Umschreibung von (57) und (62)

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 - \omega^2 w^2(z) - \left(\frac{dw}{dz}\right)_0^2 + \omega^2 w^2(z_0) = 0\,, \quad w(z) = w(z_0)\,\mathfrak{Cof}\,\omega(z - z_0) + \frac{1}{\omega}\left(\frac{dw}{dz}\right)_0 \mathfrak{Sin}\,\omega z - z_0)\,. \tag{101}$$

$$\left.\begin{aligned} & w(z) - w(z_1) - \left(\frac{dw}{dz}\right)_0 (z - z_1) - \omega^2 \int_{z_1}^{z}\int_{z_0}^{z} w(\zeta)\,d\zeta\,d\zeta = 0\,, \\ & w(z) = w(z_1)\,\frac{\mathfrak{Cof}\,\omega(z - z_0)}{\mathfrak{Cof}\,\omega(z_1 - z_0)} + \frac{1}{\omega}\left(\frac{dw}{dz}\right)_0 \frac{\mathfrak{Sin}\,\omega(z - z_1)}{\mathfrak{Cof}\,\omega(z_0 - z_1)}\,. \end{aligned}\right| \tag{102}$$

d) Additionstheoreme der Cosinus- und Sinus-Funktion.

Durch Vertauschung von ω mit $i\omega$ und ω_0 mit $i\omega_0$ folgt aus (47), (48) und (51)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Cof}\,\omega z\,\mathfrak{Cof}\,\omega_0 z_0 + \mathfrak{Sin}\,\omega z\,\mathfrak{Sin}\,\omega_0 z_0 &= \mathfrak{Cof}\,(\omega z + \omega_0 z_0)\,, \\ \mathfrak{Sin}\,\omega z\,\mathfrak{Cof}\,\omega_0 z_0 + \mathfrak{Cof}\,\omega z\,\mathfrak{Sin}\,\omega_0 z_0 &= \mathfrak{Sin}\,(\omega z + \omega_0 z_0)\,. \end{aligned}\right| \tag{103}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Cof}\,\omega z &= \mathfrak{Cof}\,(\omega z \pm \omega_0 z_0)\,\mathfrak{Cof}\,\omega_0 z_0 \mp \mathfrak{Sin}\,(\omega z \pm \omega_0 z_0)\,\mathfrak{Sin}\,\omega_0 z_0\,, \\ \mathfrak{Sin}\,\omega z &= \mp\,\mathfrak{Cof}\,(\omega z \pm \omega_0 z_0)\,\mathfrak{Sin}\,\omega_0 z_0 + \mathfrak{Sin}\,(\omega z \pm \omega_0 z_0)\,\mathfrak{Cof}\,\omega_0 z_0\,. \end{aligned}\right| \tag{104}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Cof}\,(-\omega z) &= \mathfrak{Cof}\,\omega z\,, \\ \mathfrak{Sin}\,(-\omega z) &= -\,\mathfrak{Sin}\,\omega z\,. \end{aligned}\right| \tag{105}$$

Mit $\omega = 1$ und $\omega_0 = \pm 1$ liefern (103) und (104) in Verbindung mit (105)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Cof}\,z\,\mathfrak{Cof}\,z_0 \pm \mathfrak{Sin}\,z\,\mathfrak{Sin}\,z_0 &= \mathfrak{Cof}\,(z \pm z_0)\,, \\ \mathfrak{Sin}\,z\,\mathfrak{Cof}\,z_0 \pm \mathfrak{Cof}\,z\,\mathfrak{Sin}\,z_0 &= \mathfrak{Sin}\,(z \pm z_0)\,. \end{aligned}\right| \tag{106}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Cof}\,z &= \mathfrak{Cof}\,(z \pm z_0)\,\mathfrak{Cof}\,z_0 \mp \mathfrak{Sin}\,(z \pm z_0)\,\mathfrak{Sin}\,z_0\,, \\ \mathfrak{Sin}\,z &= \mp\,\mathfrak{Sin}\,(z \pm z_0)\,\mathfrak{Sin}\,z_0 + \mathfrak{Sin}\,(z \pm z_0)\,\mathfrak{Cof}\,z_0\,. \end{aligned}\right| \tag{107}$$

e) Cosinus- und Sinus-Funktion als Koordinaten der Einheitshyperbel. Funktionsverlauf im Reellen.

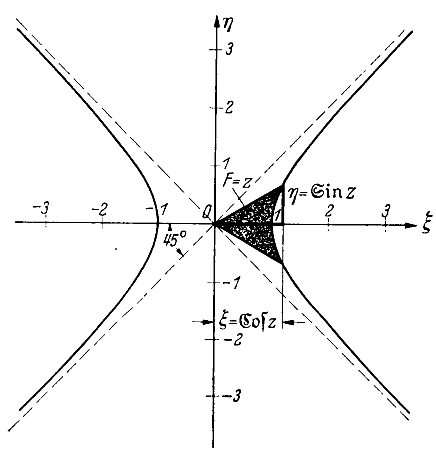

Abb. 15.

Mit ωi an Stelle von ω folgt aus (63) oder mit $\omega_0 z_0 = -\omega z$ aus (103)

$$\mathfrak{Cof}^2\,\omega z - \mathfrak{Sin}^2\,\omega z = 1\,. \tag{108}$$

Wird hierin $\omega = 1$ und

$$\xi = \mathfrak{Cof}\,z\,, \qquad \eta = \mathfrak{Sin}\,z \tag{109}$$

gesetzt, so folgt

$$\xi^2 - \eta^2 = 1\,. \tag{110}$$

Im Falle reeller z-Werte und damit auch reeller ξ- und η-Werte stellt (110) die Gleichung der Einheitshyperbel im kartesischen Bezugssystem dar (Abb. 15). Dem Parameter z entspricht hierbei der Flächeninhalt des Hyperbeldreiecks OPP', das in Abb. 15 schraffiert ist. Man erhält nämlich, wenn das Hyperbeldreieck nach den Methoden der Integralrechnung planimetriert wird,

$$F = \xi\eta - 2\int_1^{\xi} \eta\,d\xi = \mathfrak{Cof}\,z\,\mathfrak{Sin}\,z - 2\int_1^{\xi} \mathfrak{Sin}\,z\,d(\mathfrak{Cof}\,z) = \mathfrak{Cof}\,z\,\mathfrak{Sin}\,z - 2\int_0^{z} \mathfrak{Sin}^2 z\,dz = z\,.$$

Dem Flächeninhalt z müssen für $\eta > 0$ positive Werte, für $\eta < 0$ negative Werte zugeordnet werden; den Übergang vermittelt der Hyperbelscheitel mit $z = \eta = 0$. Mit wachsendem z rückt die Hyperbel mehr und mehr an ihre Asymptoten heran. Da diese unter 45^0 liegen, folgt in Verbindung mit (105)

$$\lim_{z \to \infty} \mathfrak{Cof}\,z = \lim_{z \to \infty} \mathfrak{Sin}\,z\,, \qquad \lim_{z \to -\infty} \mathfrak{Cof}\,z = -\lim_{z \to -\infty} \mathfrak{Sin}\,z\,. \tag{111}$$

Einen Überblick über den Verlauf der Funktionen $\mathfrak{Cof}\,z$ und $\mathfrak{Sin}\,z$ für reelle z-Werte gibt Abb. 16.

f) Beispiel 3.

Einige Beispiele mögen auch hier wieder die Nützlichkeit der entwickelten Formeln erläutern. Zunächst sei nach der Durchhangskurve gefragt, die ein über zwei gleich hohe Rollen gelegtes und durch zwei gleich große Gewichte G vorgespanntes Kabel unter der Wirkung ihres Eigengewichtes erfährt (Abb. 17); der Drahtquerschnitt des Kabels sei F, das Raumgewicht γ und der Rollenabstand l. Wird das Kabel an der tiefsten Durchhangsstelle $(x = 0)$ und an einer beliebigen Zwischenstelle $(x = x)$ durchschnitten, so wirken die Schnittkräfte als Seilzugkräfte jeweils tangential zur Kabelmittellinie; die waagerechte

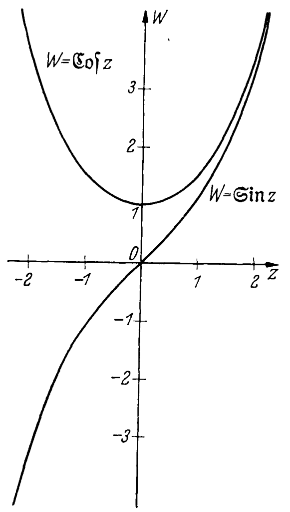

Abb. 16.

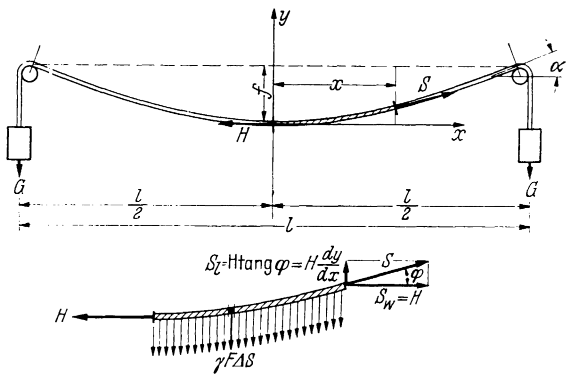

Abb. 17.

Schnittkraft an der tiefsten Durchhangsstelle sei H, die Schnittkraft an der beliebigen Zwischenstelle S. Wird S in ihre waagerechten und lotrechten Komponenten zerlegt, so folgt S_w aus Gleichgewichtsgründen zu H und damit S_l aus geometrischen Gründen zu $H \tan \varphi$ oder zu $H \frac{dy}{dx}$. Damit ergibt die Gleichgewichtsbedingung in lotrechter Richtung für das Kabelstück zwischen den Schnittstellen (Abb. 17)

$$H \frac{dy}{dx} - \int_0^S \gamma F \, ds = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} - \frac{\gamma F}{H} \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx = 0 .$$

Diese Integralgleichung entspricht der ersten der Integralgleichungen (100). Den Übergang vermitteln die Transformationen

$$z = x, \qquad z_0 = 0, \qquad w(z) = \frac{dy}{dx}, \qquad w(z_0) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0, \qquad \omega = \frac{\gamma F}{H}, \qquad \left(\frac{dw}{dz}\right)_0 = \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0 = \omega = \frac{\gamma F}{H} .$$

Damit lautet die Lösung der Integralgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{Sin} \frac{\gamma F x}{H} .$$

Hieraus folgt durch Integration zwischen x_0 und x

$$y - y_0 = \int_{x_0}^{x} \mathrm{Sin} \frac{\gamma F x}{H} \, dx = \frac{H}{\gamma F} \left[\mathrm{Cof} \frac{\gamma F x}{H} - \mathrm{Cof} \frac{\gamma F x_0}{H} \right]$$

und bei Berücksichtigung von $y_0 = x_0 = 0$

$$y = \frac{H}{\gamma F} \left[\mathrm{Cof} \frac{\gamma F x}{H} - 1 \right] .$$

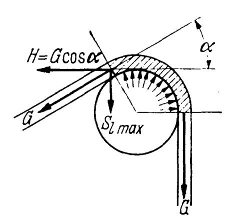

Abb. 18.

Es muß nun noch H durch G ausgedrückt werden. Wird das Kabel unmittelbar an der Rolle, d. h. an der Stelle $x = \frac{l}{2}$ durchschnitten gedacht, wo der Kabelzug S gleich dem Gewichte G ist, so ergibt sich (Abb. 18)

$$H = G \cos \alpha .$$

Nun ist nach (78) in Verbindung mit der Lösung der Integralgleichung und (108)

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2_{x=\frac{l}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathfrak{Sin}^2\frac{\gamma F l}{2H}}} = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\frac{\gamma F l}{2H}}\,.$$

Wird dieses in der Ausgangsgleichung berücksichtigt, so folgt nach leichter Umformung

$$\frac{2H}{\gamma F l}\,\mathfrak{Cof}\frac{\gamma F l}{2H} = \frac{2G}{\gamma F l}\,.$$

Dies ist eine transzendente Gleichung für $\frac{\gamma F l}{2H}$ als Unbekannte, die mit

$$\xi = \frac{\gamma F l}{2H}\,, \qquad \eta = \frac{2G}{\gamma F l}$$

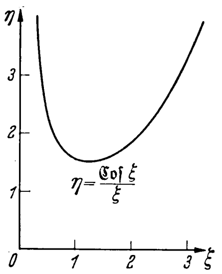

Abb. 19.

in der durchsichtigeren Form

$$\eta = \frac{\mathfrak{Cof}\,\xi}{\xi}$$

geschrieben werden kann. Aus Abb. 19 läßt sich der zu einem gegebenen η-Wert gehörige ξ-Wert ungefähr ablesen. Mit Hilfe der Funktionentafeln am Ende des Buches kann er dann beliebig genau bestimmt werden; man vergleiche hierzu die Rechnungsbeispiele zum Gebrauch der Tafeln.

Mit ξ ist auch H bekannt, und man erhält durch Einsetzen von $x = \frac{l}{2}$ in die aus der Integralgleichung abgeleiteten Formeln die größte Kabelsteigung

$$\operatorname{tang}\alpha = \mathfrak{Sin}\frac{\gamma F l}{2H} = \mathfrak{Sin}\,\xi$$

und den größten Durchhang (vgl. auch Abb. 17)

$$f = \frac{H}{\gamma F}\left[\mathfrak{Cof}\frac{\gamma F l}{2H} - 1\right] = \frac{l}{2}\,\frac{\mathfrak{Cof}\,\xi - 1}{\xi}\,.$$

Ferner folgt für die lotrechte Komponente des Kabelzuges $S^{\max} = G$ am Auflager

$$S_l^{\max} = H \operatorname{tang}\alpha = H\,\mathfrak{Sin}\frac{\gamma F l}{2H} = H\,\mathfrak{Sin}\,\xi\,,$$

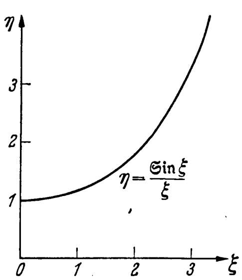

Abb. 20.

und hieraus das Kabelgewicht

$$G_0 = 2\,S_l^{\max} = 2\,H\,\mathfrak{Sin}\frac{\gamma F l}{2H} = 2\,H\,\mathfrak{Sin}\,\xi\,.$$

Damit ist auch die Länge L des Kabels zwischen den Rollen bekannt. Es ergibt sich

$$L = \frac{G_0}{\gamma F} = \frac{2H}{\gamma F}\,\mathfrak{Sin}\frac{\gamma F l}{2H} = l\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\xi}{\xi}\,.$$

Der Verlauf der Funktion $\frac{\mathfrak{Sin}\,\xi}{\xi}$ ist aus Abb. 20 ersichtlich.

Ist das Kabel an den Enden nicht über Rollen gezogen, sondern fest gelagert (Abb. 21) und gleichzeitig der größte Seildurchhang f vorgegeben, so lautet die transzendente Gleichung

$$f = \frac{H}{\gamma F}\left[\mathfrak{Cof}\frac{\gamma F l}{2H} - 1\right].$$

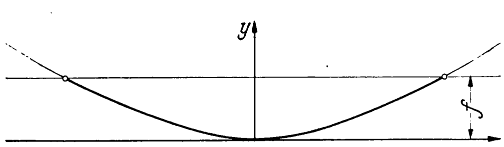

Abb. 21.

Sie schreibt sich mit

$$\xi = \frac{\gamma F l}{2H}\,, \qquad \eta = \frac{2f}{l}$$

in der durchsichtigeren Form

$$\eta = \frac{\mathfrak{Cof}\,\xi - 1}{\xi}\,,$$

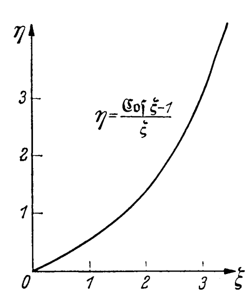

Abb. 22.

deren Verlauf in Abb. 22 zum Zwecke einer ungefähren Ablesung der gesuchten ξ-Werte aufgetragen wurde.

g) Beispiel 4.

Als weiteres Beispiel sei gemäß Abb. 23 ein hinterfülltes Brückengewölbe mit waagerechter Abdeckung betrachtet und nach derjenigen Gewölbeform gefragt, bei welcher die Gewölbemittellinie zur Drucklinie wird. Durchschneidet man das Gewölbe einmal im Scheitel ($x=0$) und einmal an einer beliebigen Zwischenstelle ($x=x$), so muß voraussetzungsgemäß die resultierende Schnittkraft in die Tangente der Gewölbemittellinie fallen. Wird als Gleichgewichtsbedingung eine Momentengleichung in bezug auf den Angriffspunkt der Schnittkraft an der Schnittstelle x gewählt und für die Auflast vorausgesetzt, daß die unterhalb der Gewölbemittellinie liegende Beton- oder Steinmasse durch eine entsprechende Aufhöhung der Abdeckung ausgeglichen ist (punktierte Linien in Abb. 23), so ergibt sich für einen Gewölbestreifen von 1,0 m Breite

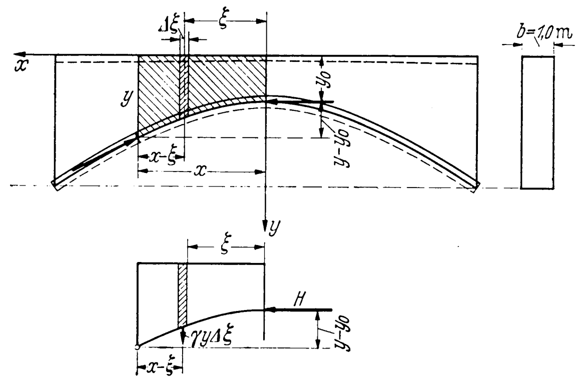

Abb. 23.

$$H(y-y_0)-\int_0^x \gamma y (x-\xi)\,d\xi = 0\,.$$

Eine erste Differentiation dieser Integralgleichung liefert

$$H\frac{dy}{dx}-\int_0^x \gamma y\,d\xi = 0\,,$$

eine zweite die Differentialgleichung

$$H\frac{d^2y}{dx^2}-\gamma y = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2y}{dx^2}-\frac{\gamma}{H}\,y = 0\,,$$

die mit den Transformationen

$$z = x\,,\qquad w = y\,,\qquad \omega = \sqrt{\frac{\gamma}{H}}$$

in (99) übergeht. Man erhält daher als Lösung, wenn auf die dritte der Lösungsformen (99) zurückgegriffen wird,

$$y = C_1\,\mathfrak{Cof}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{H}}\,x\right)+C_2\,\mathfrak{Sin}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{H}}\,x\right).$$

Da nach Abb. 23 nur gerade Funktionen als Lösungsformen in Frage kommen, kann C_2 von vornherein gleich Null gesetzt werden. Für die verbleibende Konstante folgt aus der Bedingung $x=0$, $y=y_0$

$$C_1 = y_0\,.$$

Damit ergibt sich

$$y = y_0\,\mathfrak{Cof}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{H}}\,x\right).$$

h) Tangens- und Cotangens-Funktion. Definitionsgleichungen und Additionstheoreme.

Ähnlich wie bei den Kreisfunktionen werden die Quotienten von $\mathfrak{Cof}\,\omega z$ und $\mathfrak{Sin}\,\omega z$ gemäß

$$\mathfrak{Tang}\,\omega z = \frac{\mathfrak{Sin}\,\omega z}{\mathfrak{Cof}\,\omega z} = -\mathfrak{Tang}(-\omega z)\,,\qquad \mathfrak{Cotg}\,\omega z = \frac{\mathfrak{Cof}\,\omega z}{\mathfrak{Sin}\,\omega z} = -\mathfrak{Cotg}(-\omega z)\,,\qquad \mathfrak{Cotg}\,\omega z = \frac{1}{\mathfrak{Tang}\,\omega z} \tag{112}$$

als hyperbolische Tangens- und Cotangens-Funktionen eingeführt. Durch Verbindung von (66), (96) und (112) ergeben sich die Transformationsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Tang}\,\omega z &= -i\,\mathrm{tang}\,i\omega z\,, & \mathrm{tang}\,i\omega z &= +i\,\mathfrak{Tang}\,\omega z\,,\\ \mathfrak{Cotg}\,\omega z &= +i\,\mathrm{cotg}\,i\omega z\,, & \mathrm{cotg}\,i\omega z &= -i\,\mathfrak{Cotg}\,\omega z\,. \end{aligned}\right\} \tag{113}$$

Wird in (67) ω mit $i\omega$ und ω_0 mit $i\omega_0$ vertauscht, so folgt unter Berücksichtigung von (113)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Tang}(\omega z+\omega_0 z_0) &= \frac{\mathfrak{Tang}\,\omega z+\mathfrak{Tang}\,\omega_0 z_0}{1+\mathfrak{Tang}\,\omega z\,\mathfrak{Tang}\,\omega_0 z_0}\,, & \mathfrak{Tang}\,\omega z &= \frac{\mathfrak{Tang}(\omega z+\omega_0 z_0)-\mathfrak{Tang}\,\omega_0 z_0}{1-\mathfrak{Tang}(\omega z+\omega_0 z_0)\,\mathfrak{Tang}\,\omega_0 z_0}\,,\\ \mathfrak{Cotg}(\omega z+\omega_0 z_0) &= \frac{1+\mathfrak{Cotg}\,\omega z\,\mathfrak{Cotg}\,\omega_0 z_0}{\mathfrak{Cotg}\,\omega z+\mathfrak{Cotg}\,\omega_0 z_0}\,, & \mathfrak{Cotg}\,\omega z &= \frac{-1+\mathfrak{Cotg}(\omega z+\omega_0 z_0)\,\mathfrak{Cotg}\,\omega_0 z_0}{\mathfrak{Cotg}\,\omega_0 z_0-\mathfrak{Cotg}(\omega z+\omega_0 z_0)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{114}$$

i) $\mathfrak{Tangens}$- und $\mathfrak{Cotangens}$-Funktion. Differential- und Integralbeziehungen.

In entsprechender Weise erhält man durch Umschreibung der Differential- und Integralformeln (69) und (71) sowie der Differentialgleichungen (73) und Integralgleichungen (74)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,\mathfrak{Tang}\,\omega z}{dz} &= \frac{\omega}{\mathfrak{Cof}^2\,\omega z} = \omega(1-\mathfrak{Tang}^2\,\omega z), & \int \mathfrak{Tang}\,\omega z\,dz &= \frac{\ln \mathfrak{Cof}\,\omega z}{\omega}, \\ \frac{d\,\mathfrak{Cotg}\,\omega z}{dz} &= \frac{-\omega}{\mathfrak{Sin}^2\,\omega z} = \omega(1-\mathfrak{Cotg}^2\,\omega z), & \int \mathfrak{Cotg}\,\omega z\,dz &= \frac{\ln \mathfrak{Sin}\,\omega z}{\omega}. \end{aligned}\right\} \tag{115}$$

$$\frac{dw}{dz} - \omega(1-w^2) = 0, \qquad w = \mathfrak{Tang}\,\omega(z-z_0) \quad \text{bzw.} \quad w = \mathfrak{Cotg}\,\omega(z-z_0). \tag{116}$$

$$w(z) - \omega\int_{z_0}^{z}(1-w^2(\zeta))\,d\zeta = 0, \qquad w = \mathfrak{Tang}\,\omega(z-z_0). \tag{117}$$

k) Potenzreihenentwicklung der $\mathfrak{Tangens}$- und $\mathfrak{Cotangens}$-Funktion.

Die Umschreibung der Gln (76) und (77) führt zu den Reihendarstellungen

$$\mathfrak{Tang}\left[\omega(z-z_0)\right] = \left[\omega(z-z_0)\right] - \frac{1}{3}\left[\omega(z-z_0)\right]^3 + \frac{2}{15}\left[\omega(z-z_0)\right]^5 - \frac{17}{315}\left[\omega(z-z_0)\right]^7 + \cdots. \tag{118}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{Cotg}\left[\omega(z-z_0)\right] = \frac{1}{\left[\omega(z-z_0)\right]} + \frac{1}{3}\left[\omega(z-z_0)\right] - \frac{1}{45}\left[\omega(z-z_0)\right]^3 + \frac{2}{945}\left[\omega(z-z_0)\right]^5 - \\ - \frac{1}{4725}\left[\omega(z-z_0)\right]^7 + \cdots. \end{aligned} \tag{119}$$

l) Funktionsverlauf der $\mathfrak{Tangens}$- und $\mathfrak{Cotangens}$-Funktion.

Für reelles Argument ist der Verlauf der Funktionen $\mathfrak{Tang}\,z$ und $\mathfrak{Cotg}\,z$ aus Abb. 24 ersichtlich. Entsprechend dem durch (111) zum Ausdruck gebrachten Verhalten von $\mathfrak{Cof}\,z$ und $\mathfrak{Sin}\,z$ streben $\mathfrak{Tang}\,z$ und $\mathfrak{Cotg}\,z$ mit wachsendem Argument sehr rasch den asymptotischen Werten $+1$ bzw. -1 zu.

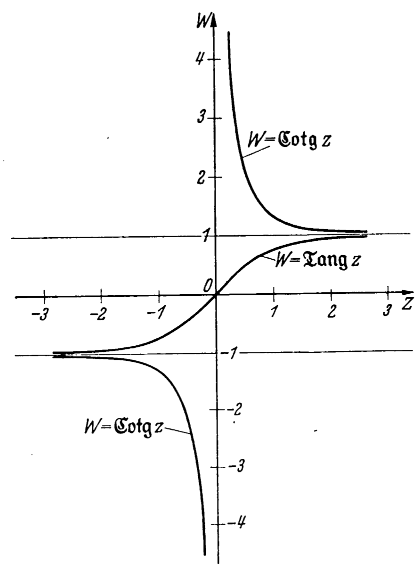

Abb. 24.

m) Beziehungen zwischen Hyperbel- und Exponentialfunktionen.

Nach (10) und (99) genügen die Exponentialfunktionen derselben Differentialgleichung wie die hyperbolischen Cosinus- und Sinusfunktionen. Es muß daher möglich sein, die einen durch die anderen auszudrücken. Der Vergleich der Reihendarstellungen (5) und (97) ergibt

$$\left.\begin{aligned} e^{+\omega z} &= \mathfrak{Cof}\,\omega z + \mathfrak{Sin}\,\omega z, & \mathfrak{Cof}\,\omega z &= \frac{1}{2}\left(e^{\omega z} + e^{-\omega z}\right), \\ e^{-\omega z} &= \mathfrak{Cof}\,\omega z - \mathfrak{Sin}\,\omega z, & \mathfrak{Sin}\,\omega z &= \frac{1}{2}\left(e^{\omega z} - e^{-\omega z}\right). \end{aligned}\right\} \tag{120}$$

Aus (112) in Verbindung mit (120) folgt weiter

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Tang}\,\omega z &= \frac{e^{\omega z} - e^{-\omega z}}{e^{\omega z} + e^{-\omega z}} = \frac{e^{2\omega z} - 1}{e^{2\omega z} + 1} = \frac{1 - e^{-2\omega z}}{1 + e^{-2\omega z}}, \\ \mathfrak{Cotg}\,\omega z &= \frac{e^{\omega z} + e^{-\omega z}}{e^{\omega z} - e^{-\omega z}} = \frac{e^{2\omega z} + 1}{e^{2\omega z} - 1} = \frac{1 + e^{-2\omega z}}{1 - e^{-2\omega z}}. \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

n) Periodenverhalten der Exponential- und Hyperbelfunktionen.

Wird in (45) $\omega z = 2n\pi$ gesetzt, wobei n eine positive ganze Zahl sein soll, so erhält man

$$e^{\pm 2n\pi i} = \cos 2n\pi \pm i \sin 2n\pi = 1 \qquad (n \text{ ganzzahlig}). \tag{122}$$

Damit liefert (13) für $\omega_0 z_0 = \pm 2n\pi i$

$$e^{\omega z} = e^{\omega z \pm 2n\pi i} \qquad (n \text{ ganzzahlig}). \tag{123}$$

In entsprechender Weise ergibt sich für negatives ω

$$e^{-\omega z} = e^{-\omega z \pm 2n\pi i} \qquad (n \text{ ganzzahlig}). \tag{124}$$

Werden diese Beziehungen in (120) und (121) berücksichtigt, so folgt weiter

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Cof}\,\omega z &= \mathfrak{Cof}\,(\omega z \pm 2n\pi i)\,, & \mathfrak{Tang}\,\omega z &= \mathfrak{Tang}\,(\omega z \pm n\pi i)\,, \\ \mathfrak{Sin}\,\omega z &= \mathfrak{Sin}\,(\omega z \pm 2n\pi i)\,, & \mathfrak{Cotg}\,\omega z &= \mathfrak{Cotg}\,(\omega z \pm n\pi i)\,. \end{aligned}\right\} \tag{125}$$

Exponential- und Hyperbelfunktionen sind hiernach periodisch mit der imaginären Periode $2\pi i$.

o) Beziehungen zwischen Hyperbel- und Kreisfunktionen.

Wird in (96) und (113) ω mit $i\omega$ vertauscht, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Cof}\,i\omega z &= \cos\omega z\,, & \cos\omega z &= \mathfrak{Cof}\,i\omega z\,, \\ \mathfrak{Sin}\,i\omega z &= i\sin\omega z\,, & \sin\omega z &= -i\,\mathfrak{Sin}\,i\omega z\,. \end{aligned}\right\} \tag{126}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Tang}\,i\omega z &= i\,\mathrm{tang}\,\omega z\,, & \mathrm{tang}\,\omega z &= -i\,\mathfrak{Tang}\,i\omega z\,, \\ \mathfrak{Cotg}\,i\omega z &= -i\,\mathrm{cotg}\,\omega z\,, & \mathrm{cotg}\,\omega z &= i\,\mathfrak{Cotg}\,i\omega z\,. \end{aligned}\right\} \tag{127}$$

Ferner folgt durch Vertauschen von $\omega_0 z_0$ mit $i\omega_0 z_0$ in (103) und (114) in Verbindung mit (126) und (127)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Cof}\,(\omega z + i\omega_0 z_0) &= \mathfrak{Cof}\,\omega z \cos\omega_0 z_0 + i\,\mathfrak{Sin}\,\omega z \sin\omega_0 z_0\,, \\ \mathfrak{Sin}\,(\omega z + i\omega_0 z_0) &= \mathfrak{Sin}\,\omega z \cos\omega_0 z_0 + i\,\mathfrak{Cof}\,\omega z \sin\omega_0 z_0\,. \end{aligned}\right\} \tag{128}$$

$$\mathfrak{Tang}\,(\omega z + i\omega_0 z_0) = \frac{\mathfrak{Tang}\,\omega z + i\,\mathrm{tang}\,\omega_0 z_0}{1 + i\,\mathfrak{Tang}\,\omega z\,\mathrm{tang}\,\omega_0 z_0}\,, \qquad \mathfrak{Cotg}\,(\omega z + i\omega_0 z_0) = \frac{1 - \mathfrak{Cotg}\,\omega z\,\mathrm{cotg}\,\omega_0 z_0}{\mathfrak{Cotg}\,\omega z - i\,\mathrm{cotg}\,\omega_0 z_0}\,. \tag{129}$$

p) Funktionalbeziehungen der Hyperbelfunktionen.

Durch einfache algebraische Operationen folgt in Verbindung mit (108) und (112)

$$\left.\begin{aligned} &w = \mathfrak{Sin}\,\omega z\,, & &\sqrt{w^2+1} = \mathfrak{Cof}\,\omega z\,, & &\frac{w}{\sqrt{w^2+1}} = \mathfrak{Tang}\,\omega z\,, & &\frac{\sqrt{w^2+1}}{w} = \mathfrak{Cotg}\,\omega z\,; \\ &w = \mathfrak{Cof}\,\omega z\,, & &\sqrt{w^2-1} = \mathfrak{Sin}\,\omega z\,, & &\frac{\sqrt{w^2-1}}{w} = \mathfrak{Tang}\,\omega z\,, & &\frac{w}{\sqrt{w^2-1}} = \mathfrak{Cotg}\,\omega z\,; \\ &w = \mathfrak{Tang}\,\omega z\,, & &\frac{1}{w} = \mathfrak{Cotg}\,\omega z\,, & &\frac{w}{\sqrt{1-w^2}} = \mathfrak{Sin}\,\omega z\,, & &\frac{1}{\sqrt{1-w^2}} = \mathfrak{Cof}\,\omega z\,; \\ &w = \mathfrak{Cotg}\,\omega z\,, & &\frac{1}{w} = \mathfrak{Tang}\,\omega z\,, & &\frac{1}{\sqrt{w^2-1}} = \mathfrak{Sin}\,\omega z\,, & &\frac{w}{\sqrt{w^2-1}} = \mathfrak{Cof}\,\omega z\,. \end{aligned}\right\} \tag{130}$$

Mit Hilfe von (128) und (129) ergeben sich die Transformationsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Cof}\,z &= (-1)^n\,\mathfrak{Cof}\,(n\pi i + z) = (-1)^n\,\mathfrak{Cof}\,(n\pi i - z) \\ &= i(-1)^{n+1}\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{2n+1}{2}\pi i + z\right) = i(-1)^{n+1}\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{2n+1}{2}\pi i - z\right), \\ \mathfrak{Sin}\,z &= (-1)^n\,\mathfrak{Sin}\,(n\pi i + z) = (-1)^{n+1}\,\mathfrak{Sin}\,(n\pi i - z) \\ &= i(-1)^{n+1}\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{2n+1}{2}\pi i + z\right) = i(-1)^n\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{2n+1}{2}\pi i - z\right). \end{aligned}\right\} (n = 0, 1, 2\ldots) \tag{131}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Tang}\,z &= \mathfrak{Tang}\,(n\pi i + z) = -\mathfrak{Tang}\,(n\pi i - z) = \mathfrak{Cotg}\left(\frac{2n+1}{2}\pi i + z\right) \\ &= -\mathfrak{Cotg}\left(\frac{2n+1}{2}\pi i - z\right), \\ \mathfrak{Cotg}\,z &= \mathfrak{Cotg}\,(n\pi i + z) = -\mathfrak{Cotg}\,(n\pi i - z) = \mathfrak{Tang}\left(\frac{2n+1}{2}\pi i - z\right) \\ &= -\mathfrak{Tang}\left(\frac{2n+1}{2}\pi i - z\right). \end{aligned}\right\} (n = 0, 1, 2\ldots) \tag{132}$$

8. Die arcus-Funktionen und Area-Funktionen.

a) Definitionsgleichungen und Verlauf im Reellen.

Die Umkehrungen der Kreisfunktionen werden als arcus-Funktionen, diejenigen der Hyperbelfunktionen als Area-Funktionen bezeichnet. Ihre Definitionsgleichungen lauten

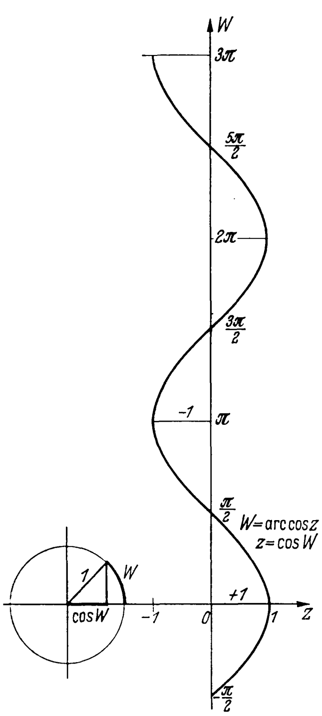

Abb. 25a.

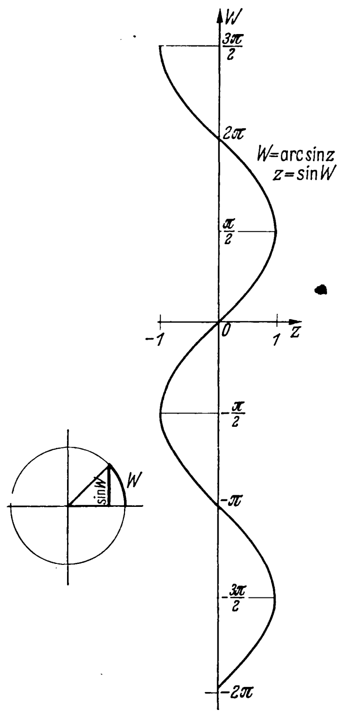

Abb. 25b.

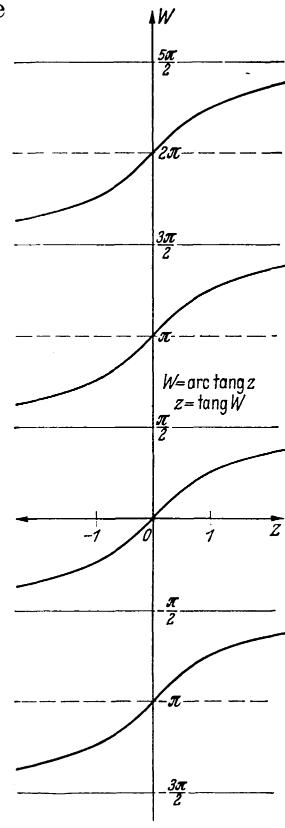

Abb. 26a.

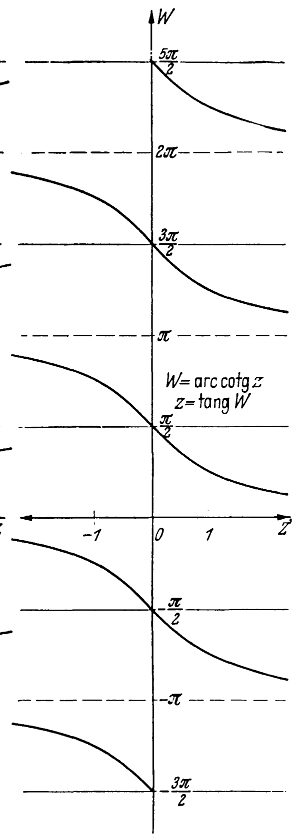

Abb. 26b.

$$\left.\begin{array}{ll} z = \cos w \;, & w = \operatorname{arc}\cos z \;, \\ z = \sin w \;, & w = \operatorname{arc}\sin z \;, \\ z = \operatorname{tang} w \;, & w = \operatorname{arc}\operatorname{tang} z \;, \\ z = \operatorname{cotg} w \;, & w = \operatorname{arc}\operatorname{cotg} z \;, \end{array}\right\} \text{(arcus-Funktionen).} \tag{133}$$

$$\left.\begin{array}{ll} z = \mathfrak{Cos}\, w \;, & w = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\, z \;, \\ z = \mathfrak{Sin}\, w \;, & w = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, z \;, \\ z = \mathfrak{Tang}\, w \;, & w = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\, z \;, \\ z = \mathfrak{Cotg}\, w \;, & w = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\, z \;, \end{array}\right\} \text{(Area-Funktionen).} \tag{134}$$

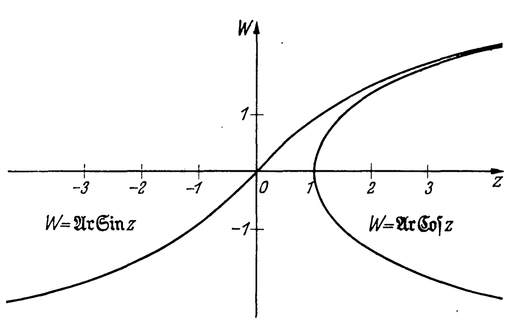

Abb. 27.

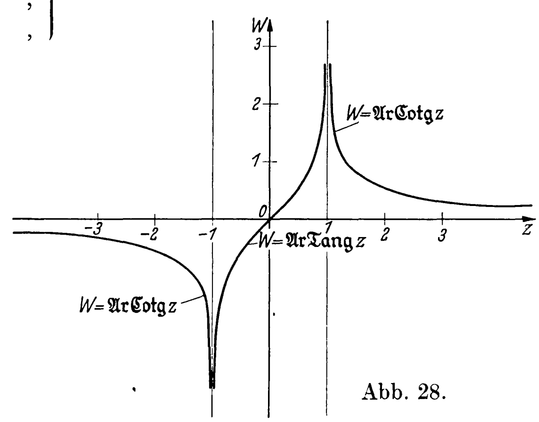

Abb. 28.

Für reelle Argumentwerte ergibt sich der aus Abb. 25 bis 28 ersichtliche Funktionsverlauf. Nach den Darlegungen unter Ziffer 5 bis 7 stellt w in diesem Falle den Bogen auf dem Einheitskreise bzw. den Flächeninhalt zwischen der Einheitshyperbel und ihren Asymptoten dar; hierauf gründen sich die Bezeichnungen arcus- bzw. Area-Funktionen.

Entsprechend dem periodischen Verhalten der Kreis- und Hyperbelfunktionen sind die arcus- und Area-Funktionen mehrdeutig. Für die Zwecke der Anwendung muß daher stets noch eine Bereichsbeschränkung hinzugefügt werden, z. B. $w = \operatorname{arc}\cos z$ für w zwischen 0 und π.

b) Differential- und Integralformeln.

Unter Heranziehung der Differentiationsformel

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\dfrac{dz}{dw}}$$

folgt in Verbindung mit den Differentiationsformeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen aus (133) und (134)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\operatorname{arc}\cos z}{dz} &= \frac{1}{\dfrac{d\cos w}{dw}} = \frac{1}{-\sin w} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 w}} = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,,\\
\frac{d\operatorname{arc}\sin z}{dz} &= \frac{1}{\dfrac{d\sin w}{dw}} = \frac{1}{\cos w} = +\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 w}} = +\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,,\\
\frac{d\operatorname{arc}\operatorname{tang} z}{dz} &= \frac{1}{\dfrac{d\operatorname{tang} w}{dw}} = \cos^2 w = +\frac{1}{1+\operatorname{tang}^2 w} = +\frac{1}{1+z^2}\,,\\
\frac{d\operatorname{arc}\operatorname{cotg} z}{dz} &= \frac{1}{\dfrac{d\operatorname{cotg} w}{dw}} = -\sin^2 w = -\frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2 w} = -\frac{1}{1+z^2}\,.
\end{aligned}\right| \qquad (135)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\,\mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}\, z}{dz} &= \frac{1}{\dfrac{d\,\mathfrak{Cof}\, w}{dw}} = \frac{1}{\mathfrak{Sin}\, w} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{Cof}^2 w - 1}} = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\,,\\
\frac{d\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, z}{dz} &= \frac{1}{\dfrac{d\,\mathfrak{Sin}\, w}{dw}} = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\, w} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{Sin}^2 w + 1}} = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}\,,\\
\frac{d\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\, z}{dz} &= \frac{1}{\dfrac{d\,\mathfrak{Tang}\, w}{dw}} = \mathfrak{Cof}^2 w = \frac{1}{1-\mathfrak{Tang}^2 w} = \frac{1}{1-z^2}\,,\\
\frac{d\,\mathfrak{Ar}\mathfrak{Cotg}\, z}{dz} &= \frac{1}{\dfrac{d\,\mathfrak{Cotg}\, w}{dw}} = -\,\mathfrak{Sin}^2 w = \frac{1}{1-\mathfrak{Cotg}^2 w} = \frac{1}{1-z^2}\,.
\end{aligned}\right| \qquad (136)$$

Die Integration von (135) und (136) führt zu den Integraldarstellungen

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{arc}\cos z &= c - \int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\,, & \mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}\, z &= c + \int\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}\,,\\
\operatorname{arc}\sin z &= c + \int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\,, & \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, z &= c + \int\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}\,,\\
\operatorname{arc}\operatorname{tang} z &= c + \int\frac{dz}{1+z^2}\,, & \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\, z &= c + \int\frac{dz}{1-z^2}\ (|z|<1)\,,\\
\operatorname{arc}\operatorname{cotg} z &= c - \int\frac{dz}{1+z^2}\,, & \mathfrak{Ar}\mathfrak{Cotg}\, z &= c + \int\frac{dz}{1-z^2}\ (|z|>1)\,.
\end{aligned}\right| \qquad (137)$$

Aus ihnen folgt

$$\begin{aligned}
\operatorname{arc}\cos z + \operatorname{arc}\sin z &= \text{konst.}\\
\operatorname{arc}\operatorname{cotg} z + \operatorname{arc}\operatorname{tang} z &= \text{konst.}
\end{aligned}$$

Wird die Bereichsbeschränkung so gewählt, daß für $z = 0$ die Funktionen $\operatorname{arc}\cos z$ und $\operatorname{arc}\operatorname{cotg} z$

den Wert $\frac{\pi}{2}$ und arc sin z und arc tang z den Wert 0 annehmen, so ergibt sich in beiden Fällen die Konstante zu $\frac{\pi}{2}$ und man erhält

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{arc\,cos} z &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sin} z \quad , \\ \operatorname{arc\,cotg} z &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang} z\,. \end{aligned}\right\} \tag{138}$$

Durch partielle Integration unter Benutzung von (135) und (136) folgt für die unbestimmten Integrale der arcus- und Area-Funktionen

$$\left.\begin{aligned} \int \operatorname{arc\,cos} z\,dz &= z \operatorname{arc\,cos} z + \int \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\,dz = z \operatorname{arc\,cos} z - \sqrt{1-z^2} \quad , \\ \int \operatorname{arc\,sin} z\,dz &= z \operatorname{arc\,sin} z - \int \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\,dz = z \operatorname{arc\,sin} z + \sqrt{1-z^2} \quad , \\ \int \operatorname{arc\,tang} z\,dz &= z \operatorname{arc\,tang} z - \int \frac{z}{1+z^2}\,dz = z \operatorname{arc\,tang} z - \ln\sqrt{1+z^2} \quad , \\ \int \operatorname{arc\,cotg} z\,dz &= z \operatorname{arc\,cotg} z + \int \frac{z}{1+z^2}\,dz = z \operatorname{arc\,cotg} z + \ln\sqrt{1+z^2} \quad . \end{aligned}\right\} \tag{139}$$

$$\left.\begin{aligned} \int \mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}\, z\,dz &= z\,\mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}\, z - \int \frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\,dz = z\,\mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}\, z - \sqrt{z^2-1} \quad , \\ \int \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, z\,dz &= z\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, z - \int \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\,dz = z\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, z - \sqrt{z^2+1} \quad , \\ \int \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\, z\,dz &= z\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\, z - \int \frac{z}{1-z^2}\,dz = z\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\, z + \ln\sqrt{1-z^2} \quad , \\ \int \mathfrak{Ar}\mathfrak{Cotg}\, z\,dz &= z\,\mathfrak{Ar}\mathfrak{Cotg}\, z - \int \frac{z}{1-z^2}\,dz = z\,\mathfrak{Ar}\mathfrak{Cotg}\, z + \ln\sqrt{z^2-1} \quad . \end{aligned}\right\} \tag{140}$$

c) Zusammenhänge der Area-Funktionen mit der Logarithmusfunktion.

Aus dem durch (120) und (121) dargestellten Zusammenhang zwischen den Hyperbel- und Exponentialfunktionen ergibt sich ein entsprechender Zusammenhang zwischen den Area-Funktionen und der Logarithmusfunktion. Wird in (120) und (121) $\omega = 1$ gesetzt und z mit w vertauscht und gleichzeitig (121) noch nach $e^{\omega z}$ bzw. e^{w} aufgelöst, so erhält man die Gleichungskette

$$e^{w} = \mathfrak{Cof}\, w + \mathfrak{Sin}\, w = \mathfrak{Sin}\, w + \sqrt{\mathfrak{Sin}^2 w + 1} = \mathfrak{Cof}\, w + \sqrt{\mathfrak{Cof}^2 w - 1} = \sqrt{\frac{1+\mathfrak{Tang}\, w}{1-\mathfrak{Tang}\, w}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{Cotg}\, w + 1}{\mathfrak{Cotg}\, w - 1}}\,. \tag{141}$$

Hieraus folgt durch Umkehrung

$$\begin{aligned} w &= \ln\left(\mathfrak{Sin}\, w + \sqrt{\mathfrak{Sin}^2 w + 1}\right) = \ln\left(\mathfrak{Cof}\, w + \sqrt{\mathfrak{Cof}^2 w - 1}\right) \\ &= \ln\sqrt{\frac{1+\mathfrak{Tang}\, w}{1-\mathfrak{Tang}\, w}} = \ln\sqrt{\frac{\mathfrak{Cotg}\, w + 1}{\mathfrak{Cotg}\, w - 1}}\,. \end{aligned} \tag{142}$$

Setzt man hierin nun der Reihe nach

$$\mathfrak{Sin}\, w = z\,, \qquad \mathfrak{Cof}\, w = z\,, \qquad \mathfrak{Tang}\, w = z, \qquad \mathfrak{Cotg}\, w = z$$

und entsprechend

$$w = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, z\,, \qquad w = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}\, z\,, \qquad w = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\, z\,, \qquad w = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Cotg}\, z\,,$$

so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Ar}\mathfrak{Sin}\, z &= \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right) \quad , & e^{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, z} &= z + \sqrt{z^2+1} \quad , \\ \mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}\, z &= \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) \quad , & e^{\mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}\, z} &= z + \sqrt{z^2-1} \quad , \\ \mathfrak{Ar}\mathfrak{Tang}\, z &= \ln\sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \quad (|z| < 1)\,, & e^{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\, z} &= \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \quad (|z| < 1)\,, \\ \mathfrak{Ar}\mathfrak{Cotg}\, z &= \ln\sqrt{\frac{z+1}{z-1}} \quad (|z| > 1)\,. & e^{\mathfrak{Ar}\mathfrak{Cotg}\, z} &= \sqrt{\frac{z+1}{z-1}} \quad (|z| > 1)\,. \end{aligned}\right\} \tag{143}$$

d) Darstellung einiger Logarithmusintegrale.

Die Einführung von (143) in (140) liefert

$$\left.\begin{aligned}
&\int \ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)dz = z\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\,z-\sqrt{z^2-1} &&,\\
&\int \ln\left(z+\sqrt{(z^2+1)}\right)dz = z\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,z-\sqrt{z^2+1} &&,\\
&\int \ln\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\,dz = z\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\,z+\ln\sqrt{1-z^2} &&(|z|<1),\\
&\int \ln\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}\,dz = z\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\,z+\ln\sqrt{z^2-1} &&(|z|>1).
\end{aligned}\right| \tag{144}$$

e) Funktionalbeziehungen der arcus- und Area-Funktionen.

Mit den aus (78) und (130) für $\omega z \to w$ und $w \to z$ folgenden Gleichungsgruppen

$$\left.\begin{array}{llll}
\sin w = z, & \cos w = \sqrt{1-z^2}, & \operatorname{tang} w = \dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}}, & \operatorname{cotg} w = \dfrac{\sqrt{1-z^2}}{z},\\
\cos w = z, & \sin w = \sqrt{1-z^2}, & \operatorname{tang} w = \dfrac{\sqrt{1-z^2}}{z}, & \operatorname{cotg} w = \dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}},\\
\operatorname{tang} w = z, & \operatorname{cotg} w = \dfrac{1}{z}, & \sin w = \dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}, & \cos w = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}},\\
\operatorname{cotg} w = z, & \operatorname{tang} w = \dfrac{1}{z}, & \sin w = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}, & \cos w = \dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}},
\end{array}\right| \tag{145}$$

$$\left.\begin{array}{llll}
\mathfrak{Sin}\, w = z, & \mathfrak{Cos}\, w = \sqrt{z^2+1}, & \mathfrak{Tang}\, w = \dfrac{z}{\sqrt{z^2+1}}, & \mathfrak{Cotg}\, w = \dfrac{\sqrt{z^2+1}}{z},\\
\mathfrak{Cos}\, w = z, & \mathfrak{Sin}\, w = \sqrt{z^2-1}, & \mathfrak{Tang}\, w = \dfrac{\sqrt{z^2-1}}{z}, & \mathfrak{Cotg}\, w = \dfrac{z}{\sqrt{z^2-1}},\\
\mathfrak{Tang}\, w = z, & \mathfrak{Cotg}\, w = \dfrac{1}{z}, & \mathfrak{Sin}\, w = \dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}}, & \mathfrak{Cos}\, w = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}},\\
\mathfrak{Cotg}\, w = z, & \mathfrak{Tang}\, w = \dfrac{1}{z}, & \mathfrak{Sin}\, w = \dfrac{1}{\sqrt{z^2-1}}, & \mathfrak{Cos}\, w = \dfrac{z}{\sqrt{z^2-1}},
\end{array}\right| \tag{146}$$

ergeben sich für die arcus- und Area-Funktionen die Gleichungsketten

$$\left.\begin{aligned}
w &= \operatorname{arc}\sin z = \operatorname{arc}\cos\sqrt{1-z^2} = \operatorname{arc}\operatorname{tang}\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = \operatorname{arc}\operatorname{cotg}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z},\\
w &= \operatorname{arc}\cos z = \operatorname{arc}\sin\sqrt{1-z^2} = \operatorname{arc}\operatorname{tang}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z} = \operatorname{arc}\operatorname{cotg}\frac{z}{\sqrt{1-z^2}},\\
w &= \operatorname{arc}\operatorname{tang} z = \operatorname{arc}\operatorname{cotg}\frac{1}{z} = \operatorname{arc}\sin\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \operatorname{arc}\cos\frac{1}{\sqrt{1+z^2}},\\
w &= \operatorname{arc}\operatorname{cotg} z = \operatorname{arc}\operatorname{tang}\frac{1}{z} = \operatorname{arc}\sin\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \operatorname{arc}\cos\frac{z}{\sqrt{1+z^2}},
\end{aligned}\right| \tag{147}$$

$$\left.\begin{aligned}
w &= \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,z = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\sqrt{z^2+1} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z}{\sqrt{z^2+1}} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\frac{\sqrt{z^2+1}}{z},\\
w &= \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\,z = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\sqrt{z^2-1} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{\sqrt{z^2-1}}{z} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\frac{z}{\sqrt{z^2-1}},\\
w &= \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\,z = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\frac{1}{z} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}},\\
w &= \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\,z = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{1}{z} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{1}{\sqrt{z^2-1}} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}.
\end{aligned}\right| \tag{148}$$

Die vier arcus- und Area-Funktionen lassen sich somit durch rein algebraische Transformationen ineinander überführen.

f) Additionstheoreme der arcus- und Area-Funktionen.

Unter Heranziehung von (147) und (148) ergeben sich aus (47), (67), (103) und (114) die Additionstheoreme der arcus- und Area-Funktionen. Der Rechnungsgang möge am Beispiel der arc sin-Funktion erläutert werden. Zunächst liefert (47) mit $\omega z = \operatorname{arc}\sin u$ und $\omega_0 z_0 = \operatorname{arc}\sin v$

$$\sin(\operatorname{arc}\sin u + \operatorname{arc}\sin v) = \sin(\operatorname{arc}\sin u)\cos(\operatorname{arc}\sin v) + \cos(\operatorname{arc}\sin u)\sin(\operatorname{arc}\sin v)\,.$$

Nun ist aber nach (145) und (147), wenn z durch u bzw. v ersetzt wird,

$$\begin{aligned} \sin(\operatorname{arc}\sin u) &= u\,, &\quad \cos(\operatorname{arc}\sin u) &= \cos(\operatorname{arc}\cos\sqrt{1-u^2}) = \sqrt{1-u^2}\,,\\ \sin(\operatorname{arc}\sin v) &= v\,, &\quad \cos(\operatorname{arc}\sin v) &= \cos(\operatorname{arc}\cos\sqrt{1-v^2}) = \sqrt{1-v^2}\,, \end{aligned}$$

und man erhält

$$\sin(\operatorname{arc}\sin u + \operatorname{arc}\sin v) = u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2}\,,$$

oder auch

$$\operatorname{arc}\sin u + \operatorname{arc}\sin v = \operatorname{arc}\sin\left(u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2}\right).$$

In ähnlichem Rechnungsgange ergeben sich die nachstehenden Formelgruppen:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{arc}\sin u \pm \operatorname{arc}\sin v &= \operatorname{arc}\sin\left(u\sqrt{1-v^2} \pm v\sqrt{1-u^2}\right) = \operatorname{arc}\cos\left(\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)} \mp uv\right)\,,\\
\operatorname{arc}\sin u \pm \operatorname{arc}\cos v &= \operatorname{arc}\sin\left(uv \pm \sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}\right) = \operatorname{arc}\cos\left(v\sqrt{1-u^2} \mp u\sqrt{1-v^2}\right)\,,\\
\operatorname{arc}\cos u \pm \operatorname{arc}\sin v &= \operatorname{arc}\sin\left(\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)} \pm uv\right) = \operatorname{arc}\cos\left(u\sqrt{1-v^2} \mp v\sqrt{1-u^2}\right)\,,\\
\operatorname{arc}\cos u \pm \operatorname{arc}\cos v &= \pi - \operatorname{arc}\sin\left(v\sqrt{1-u^2} \pm u\sqrt{1-v^2}\right) = \operatorname{arc}\cos\left(uv \mp \sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}\right)\,,\\
\operatorname{arc}\operatorname{tang} u \pm \operatorname{arc}\operatorname{tang} v &= \operatorname{arc}\operatorname{tang}\frac{u \pm v}{1 \mp uv} = \operatorname{arc}\operatorname{cotg}\frac{1 \mp uv}{u \pm v}\,,\\
\operatorname{arc}\operatorname{tang} u \pm \operatorname{arc}\operatorname{cotg} v &= \operatorname{arc}\operatorname{tang}\frac{uv \pm 1}{v \mp u} = \operatorname{arc}\operatorname{cotg}\frac{v \mp u}{uv \pm 1}\,,\\
\operatorname{arc}\operatorname{cotg} u \pm \operatorname{arc}\operatorname{tang} v &= \operatorname{arc}\operatorname{tang}\frac{1 \pm uv}{u \mp v} = \operatorname{arc}\operatorname{cotg}\frac{u \mp v}{1 \pm uv}\,,\\
\operatorname{arc}\operatorname{cotg} u \pm \operatorname{arc}\operatorname{cotg} v &= \operatorname{arc}\operatorname{tang}\frac{v \pm u}{uv \mp 1} = \operatorname{arc}\operatorname{cotg}\frac{uv \mp 1}{v \pm u}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{149}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, u \pm \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, v &= \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\left(u\sqrt{v^2+1} \pm v\sqrt{u^2+1}\right) = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\left(\sqrt{(u^2+1)(v^2+1)} \pm uv\right)\,,\\
\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, u \pm \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\, v &= \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\left(uv \pm \sqrt{(u^2+1)(v^2-1)}\right) = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\left(v\sqrt{u^2+1} \pm u\sqrt{v^2-1}\right)\,,\\
\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\, u \pm \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, v &= \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\left(\sqrt{(u^2-1)(v^2+1)} \pm uv\right) = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\left(u\sqrt{v^2+1} \pm v\sqrt{u^2-1}\right)\,,\\
\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\, u \pm \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\, v &= \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\left(v\sqrt{u^2-1} \pm u\sqrt{v^2-1}\right) = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\left(uv \pm \sqrt{(u^2-1)(v^2-1)}\right)\,;\\
\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\, u \pm \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\, v &= \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{u \pm v}{1 \pm uv} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\frac{1 \pm uv}{u \pm v}\,,\\
\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\, u \pm \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\, v &= \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{uv \pm 1}{v \pm u} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\frac{v \pm u}{uv \pm 1}\,,\\
\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\, u \pm \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\, v &= \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{1 \pm uv}{u \pm v} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\frac{u \pm v}{1 \pm uv}\,,\\
\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\, u \pm \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\, v &= \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{v \pm u}{uv \pm 1} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\frac{uv \pm 1}{v \pm u}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{150}$$

Wird in (149) und (150) $v = u$ gesetzt, so ergibt sich für das obere Vorzeichen

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{arc}\sin u &= \frac{1}{2}\operatorname{arc}\sin\left(2u\sqrt{1-u^2}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arc}\cos(1-2u^2)\,,\\
\operatorname{arc}\cos u &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arc}\sin\left(2u\sqrt{1-u^2}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arc}\cos(2u^2-1)\,,\\
\operatorname{arc}\operatorname{tang} u &= \frac{1}{2}\operatorname{arc}\operatorname{tang}\frac{2u}{1-u^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arc}\operatorname{cotg}\frac{1-u^2}{2u}\,,\\
\operatorname{arc}\operatorname{cotg} u &= \frac{1}{2}\operatorname{arc}\operatorname{tang}\frac{2u}{u^2-1} = \frac{1}{2}\operatorname{arc}\operatorname{cotg}\frac{u^2-1}{2u}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{151}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,u &= \frac{1}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,(2u\sqrt{u^2+1}) = \frac{1}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,(2u^2+1) & &, \\
\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,u &= \frac{1}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,(2u\sqrt{u^2-1}) = \frac{1}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,(2u^2-1) & &, \\
\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\,u &= \frac{1}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\,\frac{2u}{u^2+1} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\,\frac{u^2+1}{2u} & &(u^2\leq 1)\,, \\
\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\,u &= \frac{1}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\,\frac{2u}{u^2+1} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\,\frac{u^2+1}{2u} & &(u^2\geq 1)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{152}$$

Entsprechend der Mehrdeutigkeit der arcus- und Area-Funktionen gelten die Gln (149) bis (152) nur in Verbindung mit einer dem Werteverlauf Rechnung tragenden Bereichsabgrenzung. Für reelles Argument besitzen die Gln (150) und (152) unbeschränkte Gültigkeit.

g) Arc sinus und $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sinus}$-Funktion als hypergeometrische Reihen.

Es sei nun die Funktion

$$w = \frac{\arcsin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

betrachtet. Zunächst folgt für die erste und zweite Ableitung

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2z\sqrt{1-z}} - \frac{\arcsin\sqrt{z}}{2z\sqrt{z}}\,, \qquad \frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{3}{4z^2\sqrt{1-z}} + \frac{1}{4z(1-z)\sqrt{1-z}} + \frac{3\arcsin\sqrt{z}}{4z^2\sqrt{z}}\,.$$

Führt man diese zusammen mit w in die Differentialgleichung

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2z-\frac{3}{2}}{z(z-1)}\,\frac{dw}{dz} + \frac{\frac{1}{4}\,w}{z(z-1)} = 0 \tag{153}$$

ein, so wird sie identisch befriedigt. Die Ausgangsfunktion ist somit ein Partikularintegral dieser Differentialgleichung. Ein zweites Partikularintegral liefert die Funktion

$$w = \frac{1}{\sqrt{z}}\,,$$

wie man durch Einsetzen sofort bestätigt. Zu (153) gehört daher die allgemeine Lösung

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2z-\frac{3}{2}}{z(z-1)}\,\frac{dw}{dz} + \frac{\frac{1}{4}\,w}{z(z-1)} = 0\,, \qquad w = c_1\,\frac{\arcsin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} + \frac{c_2}{\sqrt{z}}\,. \tag{154}$$

Setzt man in (3) $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=\frac{3}{2}$, so geht (3) in (153) über. Die Differentialgleichung (153) ist hiernach eine Gaussssche Differentialgleichung, so daß die allgemeine Lösung auch in der Form

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2z-\frac{3}{2}}{z(z-1)}\,\frac{dw}{dz} + \frac{\frac{1}{4}\,w}{z(z-1)} = 0\,, \qquad w = c_1F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},z\right) + c_2F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1-z\right) \tag{155}$$

angesetzt werden kann, wobei $F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},z\right)$ und $F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},1-z\right)$ nach (2)[a] und (2)[b] die hypergeometrischen Reihen

$$\left.\begin{aligned}
F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},z\right) &= 1+\frac{1}{2\cdot 3}\,z+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\,z^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\,z^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9}\,z^4+\cdots \\
F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1-z\right) &= 1+\tfrac{1}{2}\,(1-z)+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,(1-z)^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,(1-z)^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{5\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\,(1-z)^4+\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{156}$$

darstellen. Man erkennt nun sofort, daß die mit c_1 bzw. c_2 multiplizierten Partikularintegrale von (154) und (155) identisch gleich sein müssen, denn beide Lösungsformen gestatten eine Potenzreihenentwicklung an der Stelle $z=0$ bzw. $z=1$ und nehmen an diesen Entwicklungsstellen den Wert eins an. Ein Beweis dieser Behauptung ist lediglich für den arc sin-Ausdruck zu erbringen, der an der Stelle $z=0$ den unbestimmten Wert $0/0$ annimmt. Man erhält nach bekannten Methoden

$$\lim_{z\to 0}\frac{\arcsin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = \frac{\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{d}{dz}(\arcsin\sqrt{z})}{\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{d}{dz}(\sqrt{z})} = \frac{\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{2\sqrt{z}}\,\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}}{\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{2\sqrt{z}}} = 1\,.$$

Somit folgt durch Vergleich von (154) und (155) in Verbindung mit (156)

$$\frac{\arcsin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = F\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, z\right) = 1 + \frac{1}{2\cdot 3}z + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}z^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}z^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9}z^4 + \cdots. \tag{157}$$

In entsprechender Weise sei nun die Funktion

$$w = \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

betrachtet, die zufolge ihrer Ableitungen

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2z\sqrt{1+z}} - \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\sqrt{z}}{2z\sqrt{z}}\,, \qquad \frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{3}{4z^2\sqrt{1+z}} - \frac{1}{4z(1+z)\sqrt{1+z}} + \frac{3\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\sqrt{z}}{4z^2\sqrt{z}}$$

der Differentialgleichung

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2z+\frac{3}{2}}{z(z+1)}\frac{dw}{dz} + \frac{\frac{1}{4}w}{z(z+1)} = 0$$

genügt. Auch hier liefert die Funktion

$$w = \frac{1}{\sqrt{z}}$$

ein zweites Partikularintegral, womit sich die allgemeine Lösung in der Form

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2z+\frac{3}{2}}{z(z+1)}\frac{dw}{dz} + \frac{\frac{1}{4}w}{z(z+1)} = 0\,, \qquad w = c_1\frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\sqrt{z}}{\sqrt{z}} + \frac{c^2}{\sqrt{z}} \tag{158}$$

darstellt. Nun läßt sich aber (158) sofort in (153) überführen, indem in dieser z mit $-z$ vertauscht wird. Demgemäß tritt jetzt an Stelle von (155)

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2z+\frac{3}{2}}{z(z+1)}\frac{dw}{dz} + \frac{\frac{1}{4}w}{z(z+1)} = 0\,, \quad w = c_1F\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -z\right) + c_2F\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}1, +z\right). \tag{159}$$

Durch Vergleich von (158) und (159) in Verbindung mit (156) ergibt sich

$$\frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = F\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -z\right) = 1 - \frac{1}{2\cdot 3}z + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}z^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}z^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9}z^4 - \cdots. \tag{160}$$

h) Potenzreihendarstellungen von arc sinus- und $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sinus}$-Funktion.

Ersetzt man in (157) und (160) $\sqrt{z}$ durch z, so folgen die Potenzreihendarstellungen der arcussinus- und Areasinus-Funktion in der Form

$$\left.\begin{aligned} \arcsin z &= z + \frac{1}{2\cdot 3}z^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}z^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}z^7 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9}z^9 + \cdots\,, \\ \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, z &= z - \frac{1}{2\cdot 3}z^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}z^5 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}z^7 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9}z^9 - \cdots\,, \end{aligned}\right\} \quad (|z| < 1) \tag{161}$$

i) Komplexe Transformationen zwischen arc sinus- und $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sinus}$-Funktion.

Aus (161) liest man unmittelbar die Richtigkeit der komplexen Transformationen

$$\arcsin iz = i\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, z\,, \quad \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\, iz = i\arcsin z \tag{162}$$

ab.

k) $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tangens}$-und arc tangens-Funktion als hypergeometrische Reihen.

Weiterhin sei die Funktion

$$w = \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

betrachtet, die zufolge ihrer Ableitungen

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2z(1-z)} - \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\sqrt{z}}{2z\sqrt{z}}\,, \quad \frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{3}{4z^2(1-z)} + \frac{1}{2z(1-z)^2} + \frac{3\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\sqrt{z}}{4z^2\sqrt{z}}$$

der Differentialgleichung

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{\frac{5}{2}z - \frac{3}{2}}{z(z-1)}\frac{dw}{dz} + \frac{\frac{1}{2}w}{z(z-1)} = 0$$

genügt. Die vollständige Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{\frac{5}{2}z - \frac{3}{2}}{z(z-1)}\frac{dw}{dz} + \frac{\frac{1}{2}w}{z(z-1)} = 0\,, \qquad w = c_1\frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\sqrt{z}}{\sqrt{z}} + \frac{c_2}{\sqrt{z}}\,. \tag{163}$$

Setzt man in (3) $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$, $\gamma = \frac{3}{2}$, so geht (3) in (163) über, und man erhält eine zweite Lösungsdarstellung in der Form

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{\frac{5}{2}z - \frac{3}{2}}{z(z-1)}\frac{dw}{dz} + \frac{\frac{1}{2}w}{z(z-1)} = 0\,, \qquad w = c_1F\left(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, z\right) + c_2F\left(\tfrac{1}{2}\, 1, 1, 1-z\right), \tag{164}$$

mit den hypergeometrischen Funktionen

$$\left.\begin{aligned} F\left(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, z\right) &= 1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{5} + \frac{z^3}{7} + \frac{z^4}{9} + \cdots. \\ F\left(\tfrac{1}{2}, 1, 1, 1-z\right) &= 1 + \tfrac{1}{2}(1-z) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}(1-z)^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}(1-z)^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}(1-z)^4 + \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{165}$$

Durch Vergleich von (163) mit (164) in Verbindung mit (165) ergibt sich

$$\frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = F\left(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, z\right) = 1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{5} + \frac{z^3}{7} + \frac{z^4}{9} + \cdots. \tag{166}$$

Eine entsprechende Betrachtung im Anschluß an die Funktion

$$w = \frac{\operatorname{arc\,tang}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

liefert

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{\frac{5}{2}z + \frac{3}{2}}{z(z+1)}\frac{dw}{dz} + \frac{\frac{1}{2}w}{z(z+1)} = 0\,, \qquad w = c_1\frac{\operatorname{arc\,tang}\sqrt{z}}{\sqrt{z}} + \frac{c_2}{\sqrt{z}} \tag{167}$$

beziehungsweise

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{\frac{5}{2}z + \frac{3}{2}}{z(z+1)}\frac{dw}{dz} + \frac{\frac{1}{2}w}{z(z+1)} = 0\,, \qquad w = c_1F\left(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, -z\right) + c_2F\left(\tfrac{1}{2}, 1, 1, 1+z\right). \tag{168}$$

Durch Vergleich beider Lösungsformen in Verbindung mit (165) folgt

$$\frac{\operatorname{arc\,tang}\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = F\left(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, -z\right) = 1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{5} - \frac{z^3}{7} + \frac{z^4}{9} - \cdots. \tag{169}$$

l) Potenzreihendarstellungen von arc tangens- und 𝔄𝔯 𝔗𝔞𝔫𝔤𝔢𝔫𝔰-Funktion.

Wird in (166) und (169) $\sqrt{z}$ durch z ersetzt, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{arc\,tang} z &= z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} - \cdots, \\ \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\, z &= z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} + \cdots. \end{aligned}\right\} \quad (|z| < 1) \tag{170}$$

m) Komplexe Transformationen zwischen arc tangens- und 𝔄𝔯 𝔗𝔞𝔫𝔤𝔢𝔫𝔰-Funktion.

Mit (170) bestätigt man die Richtigkeit der komplexen Transformationen

$$\operatorname{arc\,tang} iz = i\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\, z\,, \qquad \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\, iz = i\operatorname{arc\,tang} z\,. \tag{171}$$

n) Reihenentwicklungen und komplexe Transformationen für arc cotangens- und 𝔄𝔯 ℭ𝔬𝔱𝔞𝔫𝔤𝔢𝔫𝔰-Funktion.

In Verbindung mit den aus (147) und (148) folgenden Beziehungen

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{z} = \operatorname{arc\,cotg} z \quad \text{und} \quad \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{1}{z} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\, z$$

folgt aus (170)

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{arc\,cotg} z &= \frac{1}{z} - \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z^5} - \frac{1}{7z^7} + \cdots,\\ \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\, z &= \frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z^5} + \frac{1}{7z^7} + \cdots.\end{aligned}\right\}\ (|z| > 1). \tag{172}$$

Hiermit bestätigt man die Richtigkeit der komplexen Transformationen

$$\operatorname{arc\,cotg} iz = -i\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\, z\,,\quad \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\, iz = -i \operatorname{arc\,cotg} z\,. \tag{173}$$

9. Die hyperbolische Amplitudenfunktion und ihre Umkehrung.

a) Definition der hyperbolischen Amplitudenfunktion.

Nach (135) folgt für den Differentialquotienten der Funktion $2 \operatorname{arc\,tang} e^z$

$$\frac{d}{dz}(2 \operatorname{arc\,tang} e^z) = \frac{2e^z}{1+e^{2z}} = \frac{1}{\frac{1}{2}(e^z + e^{-z})} = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\, z}. \tag{174}$$

Hieraus ergibt sich

$$\int_0^z \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cof}\,\zeta} = 2 \operatorname{arc\,tang} e^z - 2 \operatorname{arc\,tang} 1 = 2 \operatorname{arc\,tang} e^z - \frac{\pi}{2}\,.$$

Dieses Integral wird gemäß

$$\mathfrak{Amp}\, z = \int_0^z \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cof}\,\zeta} = 2 \operatorname{arc\,tang} e^z - \frac{\pi}{2}\,,\qquad \frac{d\,\mathfrak{Amp}\, z}{dz} = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\, z} \tag{175}$$

auch als hyperbolische Amplitudenfunktion bezeichnet.

b) Reelle Wechselbeziehungen zwischen Kreis- und Hyperbelfunktionen.

Die hyperbolische Amplitudenfunktion gestattet die Darstellung der Hyperbelfunktionen durch Kreisfunktionen. Wird zunächst $\operatorname{cotg} \mathfrak{Amp}\, z$ betrachtet, so folgt bei Berücksichtigung von (80), (67) und (120)

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg} \mathfrak{Amp}\, z &= -\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arc\,tang} e^z\right) = -\operatorname{tang}(2 \operatorname{arc\,tang} e^z)\\ &= -\frac{2 \operatorname{tang} \operatorname{arc\,tang} e^z}{1 - \operatorname{tang}^2 \operatorname{arc\,tang} e^z} = -\frac{2e^z}{1-e^{2z}} = \frac{1}{\mathfrak{Sin}\, z}\,.\end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich in Verbindung mit (145) und (108) entsprechende Formeln für die übrigen Kreisfunktionen. Man erhält

$$\left.\begin{aligned}\sin \mathfrak{Amp}\, z &= \mathfrak{Tang}\, z\,, & \mathfrak{Sin}\, z &= \operatorname{tang} \mathfrak{Amp}\, z\,,\\ \cos \mathfrak{Amp}\, z &= \frac{1}{\mathfrak{Cof}\, z}\,, & \mathfrak{Cof}\, z &= \frac{1}{\cos \mathfrak{Amp}\, z}\,,\\ \operatorname{tang} \mathfrak{Amp}\, z &= \mathfrak{Sin}\, z\,, & \mathfrak{Tang}\, z &= \sin \mathfrak{Amp}\, z\,,\\ \operatorname{cotg} \mathfrak{Amp}\, z &= \frac{1}{\mathfrak{Sin}\, z}\,; & \mathfrak{Cotg}\, z &= \frac{1}{\sin \mathfrak{Amp}\, z}\,.\end{aligned}\right\} \tag{176}$$

c) Umkehrung der hyperbolischen Amplitudenfunktion.

Durch die Gleichungen

$$\mathfrak{Amp}\, w = z,\qquad w = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\, z,\qquad \mathfrak{Amp}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\, z = z \tag{177}$$

wird die Umkehrung der hyperbolischen Amplitudenfunktion definiert. Für diese folgt

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}} = \frac{1}{\frac{d\,\mathfrak{Amp}\, w}{dz}} = \frac{1}{\frac{1}{\mathfrak{Cof}\, w}} = \mathfrak{Cof}\, w$$

oder bei Einsetzung von w und Berücksichtigung von (176)

$$\frac{d\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\, z}{dz} = \mathfrak{Cof}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\, z = \frac{1}{\cos \mathfrak{Amp}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\, z} = \frac{1}{\cos z}\,.$$

Da gemäß (175) $\mathfrak{Amp}\,z$ für $z=0$ den Wert Null annimmt, muß auch $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,(0)$ den Wert Null annehmen. Man erhält daher durch Integration

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,z=\int_0^z \frac{d\zeta}{\cos\zeta}\,,\qquad \frac{d\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,z}{dz}=\frac{1}{\cos z}\,. \tag{178}$$

Wird in (178) z mit $\frac{\pi}{2}-z$ vertauscht, so ergibt sich

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}-z}\frac{d\zeta}{\cos\zeta}=\int_{\frac{\pi}{2}-z}^{0}\frac{d\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right)}=\int_z^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\bar\zeta}{\sin\bar\zeta}\,,\qquad \frac{d\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}{dz}=-\frac{1}{\sin z}\,. \tag{179}$$

Ferner folgt durch Vertauschen von z mit $\pi-z$

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,(\pi-z)=\int_0^{\pi-z}\frac{d\zeta}{\cos\zeta}=\int_0^{\pi-z}\frac{d(\pi-\zeta)}{\cos(\pi-\zeta)}=\int_\pi^z\frac{d\bar\zeta}{\cos\bar\zeta}=\int_\pi^0\frac{d\bar\zeta}{\cos\bar\zeta}+\int_0^z\frac{d\bar\zeta}{\cos\bar\zeta}=-\int_0^\pi\frac{d\bar\zeta}{\cos\bar\zeta}+\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,z\,.$$

Nun verschwindet aber das von 0 bis π erstreckte Integral angesichts der Polarsymmetrie von $\cos z$ in bezug auf $z=\frac{\pi}{2}$. Es verbleibt daher

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,(\pi-z)=\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,z\,. \tag{180}$$

d) Potenzreihenentwicklung von Amplitudenfunktion und Umkehrfunktion.

Gemäß (175) und (178) können die höheren Ableitungen von $\mathfrak{Amp}\,z$ und $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,z$ sofort hingeschrieben werden. Mit ihnen erhält man die Maclaurin-Entwicklungen

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{Amp}\,z&=z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{24}-\frac{61\,z^7}{5040}+\cdots\,,\\ \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,z&=z+\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{24}+\frac{61\,z^7}{5040}+\cdots\,.\end{aligned}\right\} \tag{181}$$

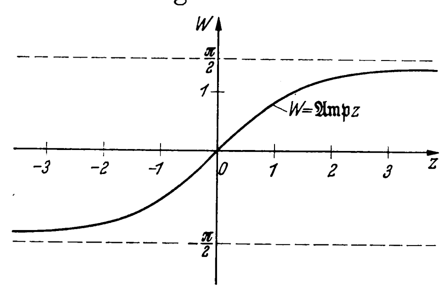

Abb. 29 a.

Vertauscht man in (181) z mit iz, so folgt

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{Amp}\,iz&=i\left[z+\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{24}+\frac{61\,z^7}{5040}+\cdots\right],\\ \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,iz&=i\left[z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{24}-\frac{61\,z^7}{5040}+\cdots\right],\end{aligned}\right\}$$

oder in Verbindung mit (181)

$$\mathfrak{Amp}\,iz=i\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,z\,,\qquad \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,iz=i\,\mathfrak{Amp}\,z\,. \tag{182}$$

Aus Abb. 29 ist der Verlauf von $\mathfrak{Amp}\,z$ und $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,z$ für reelles Argument ersichtlich.

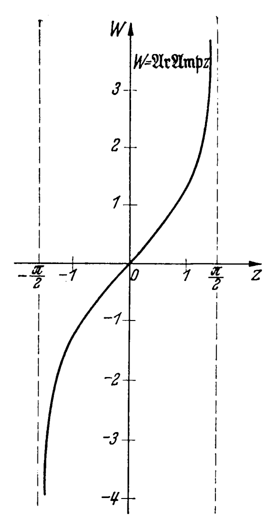

Abb. 29 b.

10. Trigonometrisch-exponentielle und hyperbolisch-exponentielle Produktfunktionen.

a) Definierende simultane Differential- und Integralgleichungen.

Wird in der zweiten der Differentialgleichungen (9) ω mit $\omega e^{i\alpha}$ vertauscht, so erhält man

$$\frac{dw}{dz}+\omega e^{i\alpha}w=0\,,\qquad w=C\,e^{-\omega z e^{i\alpha}}\,.$$

Nun ist nach (45)

$$e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha\,,\qquad e^{-\omega z e^{i\alpha}}=e^{-\omega z\cos\alpha}\left[\cos(\omega z\sin\alpha)-i\sin(\omega z\sin\alpha)\right].$$

Dies ergibt, wenn gleichzeitig gemäß

$$C=C_1+iC_2$$

eine komplexe Aufspaltung der Integrationskonstanten vorgenommen wird,

$$\frac{dw}{dz}+\omega(\cos\alpha+i\sin\alpha)\,w=0\,,\qquad w=(C_1+iC_2)\,e^{-\omega z\cos\alpha}\left[\cos(\omega z\sin\alpha)-i\sin(\omega z\sin\alpha)\right].\tag{183}$$

Wird in (183) w in Real- und Imaginärteil aufgespalten, so folgt

$$\left.\begin{aligned} w=u+iv\,,\qquad u&=C_1e^{-\omega z\cos\alpha}\cos(\omega z\sin\alpha)+C_2e^{-\omega z\cos\alpha}\sin(\omega z\sin\alpha)\,,\\ v&=-C_1e^{-\omega z\cos\alpha}\sin(\omega z\sin\alpha)+C_2e^{-\omega z\cos\alpha}\cos(\omega z\sin\alpha)\,.\end{aligned}\right|\tag{184}$$

Geht man mit $w=u+iv$ in die Differentialgleichung hinein, so entsteht eine komplexe Identitätsgleichung, die sich den Real- und Imaginärteilen entsprechend in zwei Identitätsgleichungen aufspaltet. Da die letzteren wieder Differentialgleichungen sind, stellen u und v deren allgemeine Lösung dar. Man erhält

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dz}+u\omega\cos\alpha-v\omega\sin\alpha&=0\,,\\ \frac{dv}{dz}+v\omega\cos\alpha+u\omega\sin\alpha&=0\,,\end{aligned}\right|\;\left.\begin{aligned}u&=C_1e^{-\omega z\cos\alpha}\cos(\omega z\sin\alpha)+C_2e^{-\omega z\cos\alpha}\sin(\omega z\sin\alpha)\,,\\ v&=-C_1e^{-\omega z\cos\alpha}\sin(\omega z\sin\alpha)+C_2e^{-\omega z\cos\alpha}\cos(\omega z\sin\alpha)\,.\end{aligned}\right\}\tag{185}$$

Wird in (185) α mit $i\alpha$, u mit iu und C_1 mit iC_1 vertauscht, so ergibt sich weiter

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dz}+u\omega\,\mathfrak{Cof}\,\alpha-v\omega\,\mathfrak{Sin}\,\alpha&=0\,,\\ \frac{dv}{dz}+v\omega\,\mathfrak{Cof}\,\alpha-u\omega\,\mathfrak{Sin}\,\alpha&=0\,,\end{aligned}\right|\;\left.\begin{aligned}u&=C_1e^{-\omega z\mathfrak{Cof}\alpha}\,\mathfrak{Cof}(\omega z\,\mathfrak{Sin}\,\alpha)+C_2e^{-\omega z\mathfrak{Cof}\alpha}\,\mathfrak{Sin}(\omega z\,\mathfrak{Sin}\,\alpha)\,,\\ v&=C_1e^{-\omega z\mathfrak{Cof}\alpha}\,\mathfrak{Sin}(\omega z\,\mathfrak{Sin}\,\alpha)+C_2e^{-\omega z\mathfrak{Cof}\alpha}\,\mathfrak{Cof}(\omega z\,\mathfrak{Sin}\,\alpha)\,.\end{aligned}\right\}\tag{186}$$

Der Aufbau dieser simultanen Differentialgleichungen und ihrer Lösungen legt es nahe, an Stelle von ω und α neue Parameter gemäß

$$\begin{aligned}\omega\cos\alpha&=a\,,\\ \omega\sin\alpha&=b\,,\end{aligned}\qquad\text{bzw.}\qquad\begin{aligned}\omega\,\mathfrak{Cof}\,\alpha&=a\\ \omega\,\mathfrak{Sin}\,\alpha&=b\end{aligned}$$

einzuführen. Mit ihnen lauten (185) und (186)

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dz}+au-bv&=0\,,\\ \frac{dv}{dz}+av+bu&=0\,,\end{aligned}\right|\;\left.\begin{aligned}u&=C_1e^{-az}\cos bz+C_2e^{-az}\sin bz\,,\\ v&=-C_1e^{-az}\sin bz+C_2e^{-az}\cos bz\,.\end{aligned}\right|\tag{187}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dz}+au-bv&=0\,,\\ \frac{dv}{dz}+av-bu&=0\,,\end{aligned}\right|\;\left.\begin{aligned}u&=C_1e^{-az}\,\mathfrak{Cof}\,bz+C_2e^{-az}\,\mathfrak{Sin}\,bz\,,\\ v&=C_1e^{-az}\,\mathfrak{Sin}\,bz+C_2e^{-az}\,\mathfrak{Cof}\,bz\,.\end{aligned}\right|\tag{188}$$

Die Gln (187) können als die Differentialgleichungen der trigonometrisch-exponentiellen, die Gln (188) als diejenigen der hyperbolisch-exponentiellen Produktfunktionen bezeichnet werden.

b) Differential- und Integralformeln.

Werden in den ersten der Gln (187) und (188) $C_1=1$, $C_2=0$ bzw. $C_1=0$, $C_2=1$ gesetzt, so folgen die Differentialformeln

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dz}(e^{-az}\cos bz)&=-e^{-az}(a\cos bz+b\sin bz)\,,\\ \frac{d}{dz}(e^{-az}\sin bz)&=-e^{-az}(a\sin bz-b\cos bz)\,,\\ \frac{d}{dz}(e^{-az}\,\mathfrak{Cof}\,bz)&=-e^{-az}(a\,\mathfrak{Cof}\,bz-b\,\mathfrak{Sin}\,bz)\\ \frac{d}{dz}(e^{-az}\,\mathfrak{Sin}\,bz)&=-e^{-az}(a\,\mathfrak{Sin}\,bz-b\,\mathfrak{Cof}\,bz)\,.\end{aligned}\right|\tag{189}$$

Die entsprechenden Integralformeln ergeben sich mit $C_1 = \frac{1}{b}$, $C_2 = -\frac{1}{a}$ bzw. $C_1 = \frac{1}{a}$, $C_2 = \frac{1}{b}$ zu

$$\left.\begin{aligned}
\int e^{-az}\cos bz\,dz &= -\frac{e^{-az}(a\cos bz - b\sin bz)}{a^2+b^2}\,,\\
\int e^{-az}\sin bz\,dz &= -\frac{e^{-az}(b\cos bz + a\sin bz)}{a^2+b^2}\,,\\
\int e^{-az}\mathfrak{Cof}\,bz\,dz &= -\frac{e^{-az}(a\,\mathfrak{Cof}\,bz + b\,\mathfrak{Sin}\,bz)}{a^2-b^2}\,,\\
\int e^{-az}\mathfrak{Sin}\,bz\,dz &= -\frac{e^{-az}(b\,\mathfrak{Cof}\,bz + a\,\mathfrak{Sin}\,bz)}{a^2-b^2}\,.
\end{aligned}\right| \tag{190}$$

c) Funktionsverlauf im Reellen.

Mit den Transformationen

$$z = \frac{\zeta}{b}\,,\qquad a = \lambda b$$

nehmen die Gln (187) die Normalform

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{d\zeta} + \lambda u - v &= 0\,,\\
\frac{dv}{d\zeta} + \lambda v + u &= 0\,,
\end{aligned}\right|\quad
\left.\begin{aligned}
u &= C_1 e^{-\lambda\zeta}\cos\zeta + C_2 e^{-\lambda\zeta}\sin\zeta\,,\\
v &= -C_1 e^{-\lambda\zeta}\sin\zeta + C_2 e^{-\lambda\zeta}\cos\zeta\,,
\end{aligned}\right| \tag{191}$$

an. Werden die darin einander zugeordneten Funktionen gemäß

$$\xi = e^{-\lambda\zeta}\cos\zeta\,,\qquad \eta = e^{-\lambda\zeta}\sin\zeta \tag{192}$$

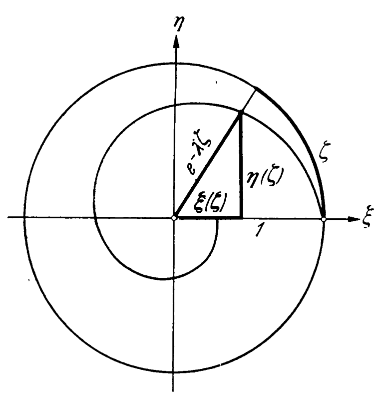

Abb. 30 a.

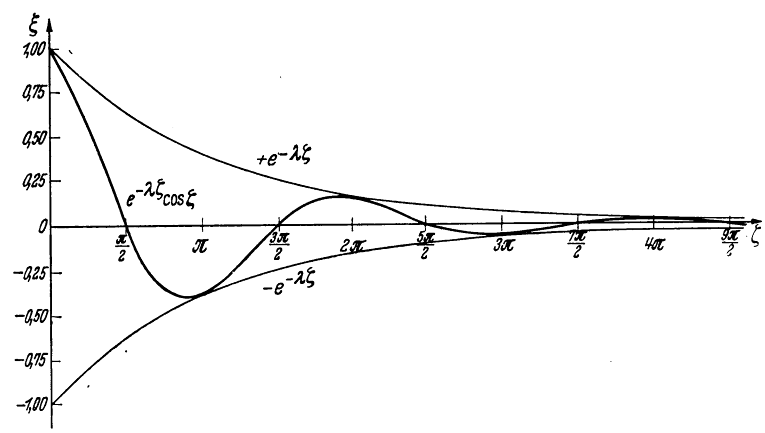

Abb. 3 1.

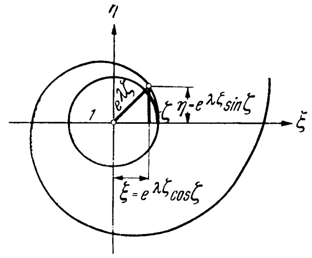

Abb. 30 b.

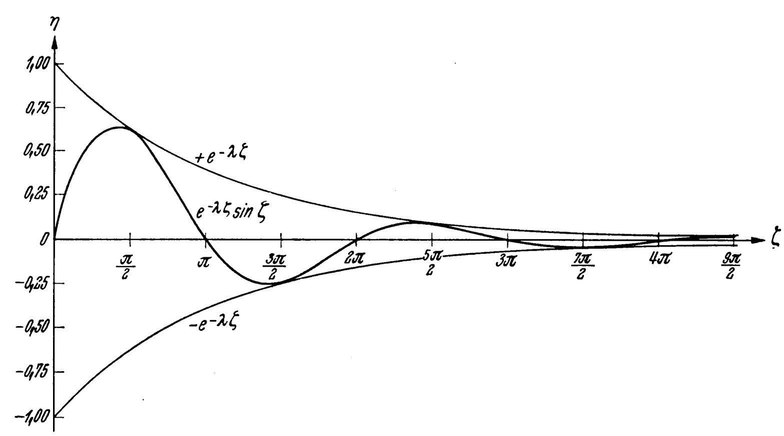

Abb. 32.

auf ein kartesisches System bezogen, so entsteht die Parameterdarstellung einer logarithmischen Spirale mit dem Bogen des Einheitskreises als Parameter. Im Falle $\lambda > 0$ heißt die Spirale eine Dämpfungsspirale (Abb. 30a), im Falle $\lambda < 0$ eine Aufschaukelungsspirale (Abb. 30b). Wird die Spirale als Polardiagramm aufgefaßt, so folgt der Radiusvektor zu

$$\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = e^{-\lambda\zeta}\,. \tag{193}$$

Diese Funktion wird für $\lambda > 0$ als Dämpfungsfunktion, für $\lambda < 0$ als Aufschaukelungsfunktion bezeichnet; sie ist im wesentlichen für den Verlauf der trigonometrisch-exponentiellen Produktfunktionen bestimmend, wie die Auftragungen von $\xi(\zeta)$ und $\eta(\zeta)$ in Abb. 31 bis 34 erkennen lassen.

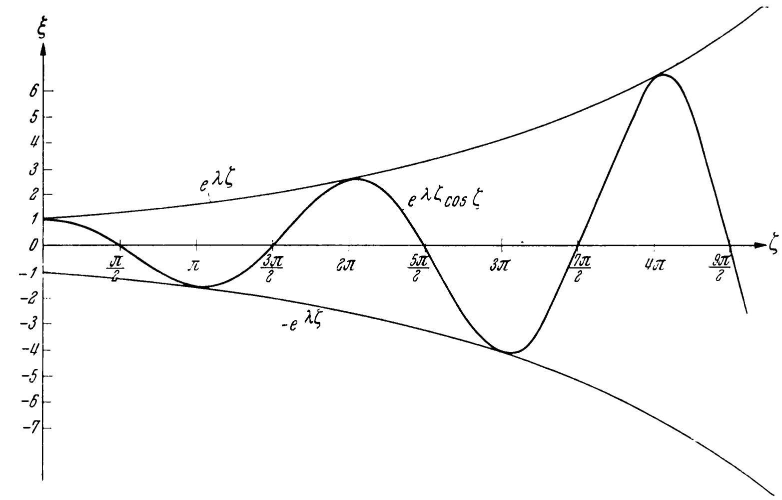

Abb. 33.

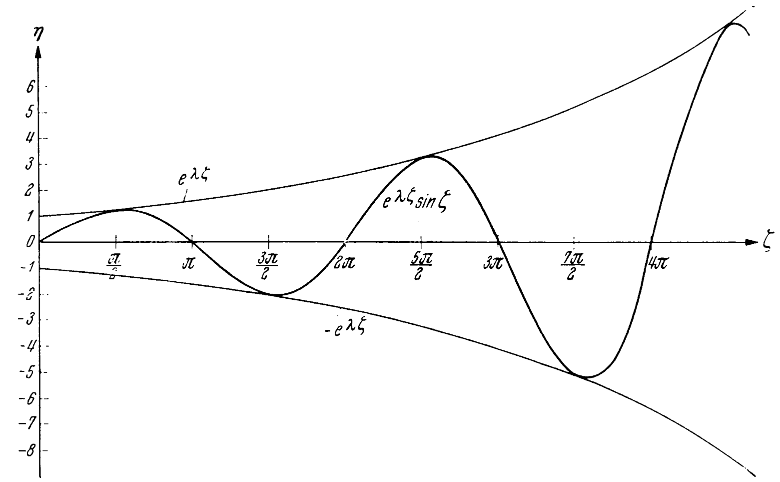

Abb. 34.

Durch Integration zwischen den Grenzen z_0 und z gehen die Differentialgleichungen (187) und (188) in Integralgleichungen über. Bei entsprechender Anpassung der Konstanten C_1 und C_2 erhält man

$$\left.\begin{aligned} &u(z)-u(z_0)+a\int_{z_0}^{z}u(z)\,dz-b\int_{z_0}^{z}v(z)\,dz=0\,, &&\left|\begin{aligned} u&=u(z_0)e^{-a(z-z_0)}\cos b(z-z_0)+\\ &\quad+v(z_0)e^{-a(z-z_0)}\sin b(z-z_0)\,,\end{aligned}\right.\\ &v(z)-v(z_0)+a\int_{z_0}^{z}z(v)\,dz+b\int_{z_0}^{z}u(z)\,dz=0\,, &&\left|\begin{aligned} v&=-u(z_0)e^{-a(z-z_0)}\sin b(z-z_0)+\\ &\quad+v(z_0)e^{-a(z-z_0)}\cos b(z-z_0)\,,\end{aligned}\right.\end{aligned}\right\} \tag{194}$$

$$\left.\begin{aligned} &u(z)-u(z_0)+a\int_{z_0}^{z}u(z)\,dz-b\int_{z_0}^{z}v(z)\,dz=0\,, &&\left|\begin{aligned} u&=u(z_0)e^{-a(z-z_0)}\mathfrak{Cof}\,b(z-z_0)+\\ &\quad+v(z_0)\,e^{-a(z-z_0)}\,\mathfrak{Sin}\,b(z-z_0)\,,\end{aligned}\right.\\ &v(z)-v(z_0)+a\int_{z_0}^{z}v(z)\,dz-b\int_{z_0}^{z}u(z)\,dz=0\,, &&\left|\begin{aligned} v&=u(z_0)e^{-a(z-z_0)}\,\mathfrak{Sin}\,b(z-z_0)+\\ &\quad+v(z_0)e^{-a(z-z_0)}\mathfrak{Cof}\,b(z-z_0)\,,\end{aligned}\right.\end{aligned}\right\} \tag{195}$$

Von der Richtigkeit dieser Beziehungen kann man sich durch Einsetzen von u und v unter Benutzung von (190) unmittelbar überzeugen.

d) Definierende Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

In engem Zusammenhang mit den simultanen Differentialgeichungen (185) steht die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{dw}{dz} + \omega e^{\mp i\alpha} w\right] + \omega e^{\pm i\alpha}\left[\frac{dw}{dz} + \omega e^{\mp i\alpha} w\right] = 0,$$

die beim Ausdifferenzieren bzw. Ausmultiplizieren in

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \omega\,(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})\frac{dw}{dz} + \omega^2 w = 0$$

und mit

$$e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\,\mathfrak{Cof}\,i\alpha = 2\cos\alpha$$

in

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + 2\,\omega\cos\alpha\,\frac{dw}{dz} + \omega^2 w = 0$$

übergeht. Es handelt sich also trotz der scheinbar komplexen Ausgangsform um eine Differentialgleichung mit reellen Koeffizienten. Mit Hilfe der komplexen Ausgangsform erkennt man, daß die Lösungen der beiden Differentialgleichungen

$$\frac{dw}{dz} + \omega e^{-i\alpha} w = 0$$

$$\frac{dw}{dz} + \omega e^{+i\alpha} w = 0$$

Partikularintegrale der betrachteten Differentialgleichung darstellen. Werden diese in der Form (183) zugrunde gelegt, wobei $\pm i$ an Stelle von i zu setzen ist, so liefert die Überlagerung der Lösungen für $+i$ und $-i$ unter Einschaltung eines Faktors $\frac{1}{2}$

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + 2\,\omega\cos\alpha\,\frac{dw}{dz} + \omega^2 w = 0, \qquad w = \frac{1}{2}\,(C_1 + i\,C_2)e^{-\omega z\cos\alpha}[\cos(\omega z\sin\alpha) - i\sin(\omega z\sin\alpha)] + \\ + \frac{1}{2}\,(C_1 - i\,C_2)e^{-\omega z\cos\alpha}[\cos(\omega z\sin\alpha) + i\sin(\omega z\sin\alpha)]$$

oder ausmultipliziert und zusammengefaßt

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + 2\,\omega\cos\alpha\,\frac{dw}{dz} + \omega^2 w = 0, \quad w = C_1 e^{-\omega z\cos\alpha}\cos(\omega z\sin\alpha) + C_2 e^{-\omega z\cos\alpha}\sin(\omega z\sin\alpha). \tag{196}$$

Für $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$ artet die Lösung aus, indem das erste Partikularintegral $e^{-\omega z}$ bzw. $e^{+\omega z}$ und das zweite Null wird. Um ein Ersatzintegral zu finden, führt man zweckmäßig an Stelle von C_2 die neue Konstante $\frac{C_2}{\omega\sin\alpha}$ ein, mit welcher das zweite Partikularintegral die Form

$$e^{-\omega z\cos\alpha}\frac{\sin(\omega z\sin\alpha)}{\omega\sin\alpha} = z e^{-\omega z\cos\alpha}\frac{\sin(\omega z\sin\alpha)}{\omega z\sin\alpha}$$

annimmt. Geht nun α nach 0 oder π, so nähert sich der Bruch mehr und mehr der Einheit und man erhält als Ersatzintegral $ze^{-\omega z}$ bzw. $ze^{+\omega z}$. In Zusammenfassung dieser Ergebnisse erhält man

$$\frac{d^2 w}{dz^2} \pm 2\,\omega\frac{dw}{dz} + \omega^2 w = 0, \quad w = C_1 e^{\mp\omega z} + C_2\,z e^{\mp\omega z}. \tag{197}$$

Wird in (196) α mit $i\alpha$ und C_2 mit $-iC_2$ vertauscht, so folgt in Verbindung mit (96)

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + 2\,\omega\,\mathfrak{Cof}\,\alpha\,\frac{dw}{dz} + \omega^2 w = 0, \quad w = C_1 e^{-\omega z\mathfrak{Cof}\alpha}\mathfrak{Cof}(\omega z\,\mathfrak{Sin}\,\alpha) + C_2 e^{-\omega z\mathfrak{Cof}\alpha}\mathfrak{Sin}(\omega z\,\mathfrak{Sin}\,\alpha). \tag{198}$$

Dieses Integral läßt sich noch in durchsichtigerer Form schreiben, wenn C_1 mit $C_1 + C_2$ und C_2 mit $C_1 - C_2$ vertauscht und gleichzeitig (120) berücksichtigt wird. Man erhält dann

$$w = (C_1 + C_2)e^{-\omega z\mathfrak{Cof}\alpha}\mathfrak{Cof}(\omega z\,\mathfrak{Sin}\,\alpha) + (C_1 - C_2)e^{-\omega z\mathfrak{Cof}\alpha}\mathfrak{Sin}(\omega z\,\mathfrak{Sin}\,\alpha) \\ = C_1 e^{-\omega z(\mathfrak{Cof}\alpha - \mathfrak{Sin}\alpha)} + C_2 e^{-\omega z(\mathfrak{Cof}\alpha + \mathfrak{Sin}\alpha)} = C_1 e^{-\omega z e^{-\alpha}} + C_2 e^{-\omega z e^{+\alpha}}.$$

oder zusammengefaßt

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + 2\,\omega\,\mathfrak{Cof}\,\alpha\,\frac{dw}{dz} + \omega^2 w = 0, \quad w = C_1 e^{-\omega z e^{-\alpha}} + C_2 e^{-\omega z e^{+\alpha}}. \tag{199}$$

Wird in (196) ω mit $i\omega$ und α mit $i\alpha + \frac{\pi}{2}$ vertauscht, womit $\cos\alpha$ in $(-i \operatorname{Sin}\alpha)$ und $\sin\alpha$ in $\operatorname{Cos}\alpha$ übergeht, so ergibt sich bei ähnlicher Zusammenfassung der Lösung wie im vorigen Falle

$$\frac{d^2w}{dz^2} + 2\omega \operatorname{Sin}\alpha \frac{dw}{dz} - \omega^2 w = 0, \qquad w = C_1 e^{+\omega z e^{-\alpha}} + C_2 e^{-\omega z e^{+\alpha}}. \tag{200}$$

e) Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Mit den Gln (196), (197), (199) und (200) wird die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, etwa in der Form

$$\frac{d^2w}{dz^2} \pm a\frac{dw}{dz} \pm bw = 0 \quad (a \text{ und } b \text{ positive reelle Größen})$$

vollständig beherrscht. Werden ω und α jeweils durch a und b ausgedrückt, so ergeben sich die nachfolgenden Abgrenzungen und Lösungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2w}{dz^2} + a\frac{dw}{dz} + bw = 0, \quad a < 2\sqrt{b}, \quad w = C_1 e^{-\frac{a}{2}z}\cos\left(z\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right) + C_2 e^{-\frac{a}{2}z}\sin\left(z\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right),\\
&\qquad a = 2\sqrt{b}, \quad w = (C_1 + C_2 z)e^{-\frac{a}{2}z},\\
&\qquad a > 2\sqrt{b}, \quad w = C_1 e^{-\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)z} + C_2 e^{-\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)z};
\end{aligned}\right\} \tag{201}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2w}{dz^2} - a\frac{dw}{dz} + bw = 0, \quad a < 2\sqrt{b}, \quad w = C_1 e^{+\frac{a}{2}z}\cos\left(z\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right) + C_2 e^{+\frac{a}{2}z}\sin\left(z\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right),\\
&\qquad a = 2\sqrt{b}, \quad w = (C_1 + C_2 z)e^{+\frac{a}{2}z},\\
&\qquad a > 2\sqrt{b}, \quad w = C_1 e^{\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)z} + C_2 e^{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)z};
\end{aligned}\right\} \tag{202}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2w}{dz^2} + a\frac{dw}{dz} - bw = 0, \quad w = C_1 e^{-\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}+b} + \frac{a}{2}\right)z} + C_2 e^{+\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}+b} - \frac{a}{2}\right)z};\\
&\frac{d^2w}{dz^2} - a\frac{dw}{dz} - bw = 0, \quad w = C_1 e^{-\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}+b} - \frac{a}{2}\right)z} + C_2 e^{+\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}+b} + \frac{a}{2}\right)z}.
\end{aligned}\right\} \tag{203}$$

Die Differentialgleichung (201) heißt Differentialgleichung der gedämpften Schwingungen bei linearem Widerstandsgesetz. Ihr Hauptanwendungsgebiet liegt in der Elektrotechnik, wo sie in der Form

$$\frac{d^2J}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dJ}{dt} + \frac{1}{LK}J = 0$$

geschrieben wird, in der J die Stromstärke, R den Widerstand, L die Selbstinduktion und K die Kapazität bezeichnen (Abb. 35). Der Schwingungszustand für $a < 2\sqrt{b}$ ist eine echte Schwingung und die Partikularintegrale verlaufen gemäß Abb. 31 und 32. Die Schwingungszustände für $a = 2\sqrt{b}$ und $a > 2\sqrt{b}$ sind ausgeartete Schwingungen oder Kriechbewegungen. Je nach Größe und Vorzeichen der Konstanten erfolgt der Kriechvorgang unter Ausbildung eines Maximums oder monoton oder unter Ausbildung eines Minimums (Abb. 36). Die Schwingungszustände für $a = 2\sqrt{b}$ werden auch als aperiodische Grenzfälle, diejenigen für $a > 2\sqrt{b}$ als aperiodische Schwingungen bezeichnet.

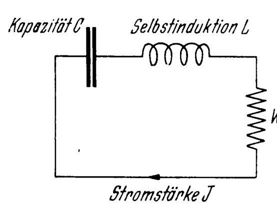

Abb. 35.

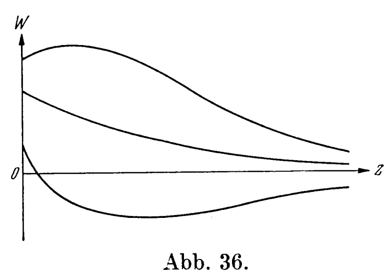

Abb. 36.

Die Differentialgleichung (202) heißt homogene Differentialgleichung der aufgeschaukelten Schwingungen bei linearem Aufschaukelungsgesetz. Für sich allein, d. h. ohne Hinzufügung einer

Störungsfunktion besitzt sie nur theoretisches Interesse, da eine Aufschaukelung nur in Verbindung mit ständiger Energiezufuhr denkbar ist. Der Schwingungszustand für $a < 2\sqrt{b}$ ist wieder eine echte Schwingung und die Partikularintegrale verlaufen gemäß Abb. 33 und 34. Den Fällen $a = 2\sqrt{b}$ und $a > 2\sqrt{b}$ entsprechen je nach Größe und Vorzeichen der Konstanten Aufschaukelungen oder Abschaukelungen, die entweder monoton oder unter Ausbildung eines Minimums oder Maximums verlaufen (Abb. 37).

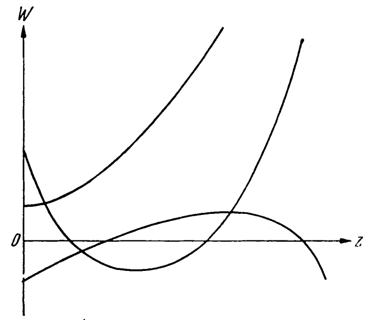

Abb. 37.

Die Differentialgleichungen (203) stellen je nach Größe und Vorzeichen der Konstanten Kriechvorgänge oder aperiodische Auf- oder Abschaukelungsvorgänge dar.

Auf ähnlichem Wege, wie es im Falle der Differentialgleichung (54) der harmonischen Schwingungen geschehen ist, lassen sich auch bei den gedämpften harmonischen Schwingungen verschiedene Lösungsformen darstellen. Die wichtigsten von ihnen sind nachfolgend zusammengestellt.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2w}{dz^2} \pm a\frac{dw}{dz} + bw = 0, \quad && w = C_1 e^{\mp\frac{a}{2}(z-z_1)} \cos\left[(z-z_1)\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right] + C_2 e^{\mp\frac{a}{2}(z-z_2)} \sin\left[(z-z_2)\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right], \\
&a < 2\sqrt{b} && w = C_1 e^{\mp\frac{a}{2}(z-z_0)} \cos\left[(z-z_0)\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right] + C_2 e^{\mp\frac{a}{2}(z-z_0)} \sin\left[(z-z_0)\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right], \\
& && w = C_1 e^{\mp\frac{a}{2}z} \cos\left[(z-z_1)\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right] + C_2 e^{\mp\frac{a}{2}z} \sin\left[(z-z_2)\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right], \\
& && w = C_1 e^{\mp\frac{a}{2}z} \cos\left[(z-z_0)\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right] + C_2 e^{\mp\frac{a}{2}z} \sin\left[(z-z_0)\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right], \\
& && w = C_1 e^{\mp\frac{a}{2}z} \cos\left[z\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right] + C_2 e^{\mp\frac{a}{2}z} \sin\left[z\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right], \\
& && w = C e^{\mp\frac{a}{2}(z-z_0)} \cos\left[(z-z_0)\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right] \text{ bzw. } w = C e^{\mp\frac{a}{2}(z-z_0)} \sin\left[(z-z_0)\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right], \\
& && w = C e^{\mp\frac{a}{2}z} \cos\left[(z-z_0)\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right] \text{ bzw. } w = C e^{\mp\frac{a}{2}z} \sin\left[(z-z_0)\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}\right].
\end{aligned}\right\} \quad (204)$$

Für die Kriech- und Aufschaukelungsvorgänge kann angesichts des einfacheren Aufbaus der Grundlösungen auf die Angabe weiterer Lösungsformen verzichtet werden.

11. Trigonometrisch-hyperbolische Produktfunktionen.

a) Definierende simultane Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Wird in (46) ω mit $\omega e^{i\alpha}$ vertauscht und $A = C_1 + iC_2$, $B = C_3 - iC_4$ gesetzt, so ergibt sich in Verbindung mit (45) und (128)

$$\begin{aligned}
\frac{d^2w}{dz^2} + \omega^2 e^{2i\alpha} w = 0, \quad w = {}& (C_1 + iC_2)\left[\cos(\omega z\cos\alpha)\,\mathfrak{Cof}(\omega z\sin\alpha) - i\sin(\omega z\cos\alpha)\,\mathfrak{Sin}(\omega z\sin\alpha)\right] + \\
&+ (C_3 - iC_4)\left[\sin(\omega z\cos\alpha)\,\mathfrak{Cof}(\omega z\sin\alpha) + i\cos(\omega z\cos\alpha)\,\mathfrak{Sin}(\omega z\sin\alpha)\right]. \quad (205)
\end{aligned}$$

Wird in (205) w in Real- und Imaginärteil aufgespalten, so folgt

$$\left.\begin{aligned}
w = u + iv, \quad u = {}& C_1\cos(\omega z\cos\alpha)\,\mathfrak{Cof}(\omega z\sin\alpha) + C_2\sin(\omega z\cos\alpha)\,\mathfrak{Sin}(\omega z\sin\alpha) + \\
&+ C_3\sin(\omega z\cos\alpha)\,\mathfrak{Cof}(\omega z\sin\alpha) + C_4\cos(\omega z\cos\alpha)\,\mathfrak{Sin}(\omega z\sin\alpha), \\
v = {}& -C_1\sin(\omega z\cos\alpha)\,\mathfrak{Sin}(\omega z\sin\alpha) + C_2\cos(\omega z\cos\alpha)\,\mathfrak{Cof}(\omega z\sin\alpha) + \\
&+ C_3\cos(\omega z\cos\alpha)\,\mathfrak{Sin}(\omega z\sin\alpha) - C_4\sin(\omega z\cos\alpha)\,\mathfrak{Cof}(\omega z\sin\alpha).
\end{aligned}\right\} \quad (206)$$

Geht man mit $w = u + iv$ in die Differentialgleichung (205) hinein und setzt man gemäß (45)

$$e^{2i\alpha} = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha,$$

so entsteht wieder eine komplexe Identitätsgleichung, die sich den Real- und Imaginärteilen entsprechend in zwei simultane Differentialgleichungen aufspaltet, als deren allgemeine Lösung u und v betrachtet werden können. Man erhält

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2u}{dz^2}+u\omega^2\cos 2\alpha-v\omega^2\sin 2\alpha=0\,,\\
&\frac{d^2v}{dz^2}+v\omega^2\cos 2\alpha+u\omega^2\sin 2\alpha=0\,,\\
&u=C_1\cos(\omega z\cos\alpha)\operatorname{Cof}(\omega z\sin\alpha)+C_2\sin(\omega z\cos\alpha)\operatorname{Sin}(\omega z\sin\alpha)+\\
&\quad+C_3\sin(\omega z\cos\alpha)\operatorname{Cof}(\omega z\sin\alpha)+C_4\cos(\omega z\cos\alpha)\operatorname{Sin}(\omega z\sin\alpha)\,,\\
&v=-C_1\sin(\omega z\cos\alpha)\operatorname{Sin}(\omega z\sin\alpha)+C_2\cos(\omega z\cos\alpha)\operatorname{Cof}(\omega z\sin\alpha)+\\
&\quad+C_3\cos(\omega z\cos\alpha)\operatorname{Sin}(\omega z\sin\alpha)-C_4\sin(\omega z\cos\alpha)\operatorname{Cof}(\omega z\sin\alpha)\,.
\end{aligned}\right\}\tag{207}$$

Diese Lösungen lassen sich noch allgemeiner gestalten, indem in jedes Partikularintegral noch eine Phasenverschiebung eingefügt wird. Dies ergibt

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2u}{dz^2}+u\omega^2\cos 2\alpha-v\omega^2\sin 2\alpha=0\,,\\
&\frac{d^2v}{dz^2}+v\omega^2\cos 2\alpha+u\omega^2\sin 2\alpha=0\,,\\
&u=C_1\cos[\omega(z-z_1)\cos\alpha]\operatorname{Cof}[\omega(z-z_1)\sin\alpha]+C_2\sin[\omega(z-z_2)\cos\alpha]\operatorname{Sin}[\omega(z-z_2)\sin\alpha]+\\
&\quad+C_3\sin[\omega(z-z_3)\cos\alpha]\operatorname{Cof}[\omega(z-z_3)\sin\alpha]+C_4\cos[\omega(z-z_4)\cos\alpha]\operatorname{Sin}[\omega(z-z_4)\sin\alpha]\,,\\
&v=-C_1\sin[\omega(z-z_1)\cos\alpha]\operatorname{Sin}[\omega(z-z_1)\sin\alpha]+C_2\cos[\omega(z-z_2)\cos\alpha]\operatorname{Cof}[\omega(z-z_2)\sin\alpha]+\\
&\quad+C_3\cos[\omega(z-z_3)\cos\alpha]\operatorname{Sin}[\omega(z-z_3)\sin\alpha]-C_4\sin[\omega(z-z_4)\cos\alpha]\operatorname{Cof}[\omega(z-z_4)\sin\alpha]\,.
\end{aligned}\right\}\tag{208}$$

Schließlich können durch Einführung neuer Konstanten auch noch die Hyperbelfunktionen gegen Exponentialfunktionen ausgetauscht werden. Dies liefert die dritte Lösungsform

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2u}{dz^2}+u\omega^2\cos 2\alpha-v\omega^2\sin 2\alpha=0\,,\\
&\frac{d^2v}{dz^2}+v\omega^2\cos 2\alpha+u\omega^2\sin 2\alpha=0\,,\\
&u=C_1e^{\omega(z-z_1)\sin\alpha}\cos[\omega(z-z_1)\cos\alpha]+C_2e^{\omega(z-z_2)\sin\alpha}\sin[\omega(z-z_2)\cos\alpha]+\\
&\quad+C_3e^{-\omega(z-z_3)\sin\alpha}\cos[\omega(z-z_3)\cos\alpha]+C_4e^{-\omega(z-z_4)\sin\alpha}\sin[\omega(z-z_4)\cos\alpha]\,,\\
&v=-C_1e^{\omega(z-z_1)\sin\alpha}\sin[\omega(z-z_1)\cos\alpha]+C_2e^{\omega(z-z_2)\sin\alpha}\cos[\omega(z-z_2)\cos\alpha]+\\
&\quad+C_3e^{-\omega(z-z_3)\sin\alpha}\sin[\omega(z-z_3)\cos\alpha]-C_4e^{-\omega(z-z_4)\sin\alpha}\cos[\omega(z-z_4)\cos\alpha]\,.
\end{aligned}\right\}\tag{209}$$

Mit den Gln (207) bis (209) werden die simultanen Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2u}{dz^2}+au-bv=0\,,\\
&\frac{d^2v}{dz^2}+av+bu=0\,,
\end{aligned}\right\}$$

vollständig beherrscht. Die entsprechenden Transformationsgleichungen lauten

$$\left.\begin{aligned}
&a=\omega^2\cos 2\alpha\,,\quad a^2+b^2=\omega^4\,,\quad \omega=\sqrt[4]{a^2+b^2}\,,\quad \omega\cos\alpha=\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\,,\\
&b=\omega^2\sin 2\alpha\,,\quad \frac{b}{a}=\operatorname{tang} 2\alpha\,,\quad \alpha=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a}\,,\quad \omega\sin\alpha=\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\,.
\end{aligned}\right\}$$

Hiermit erhält man unter Beschränkung auf die Lösungsformen (208) und (209)

$$
\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2u}{dz^2}+au-bv=0\,,\\
&\frac{d^2v}{dz^2}+av+bu=0\,,
\end{aligned}\right\}\\
&\left.\begin{aligned}
u=\;&C_1\cos\left[(z-z_1)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]\operatorname{Cof}\left[(z-z_1)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]+\\
&+C_2\sin\left[(z-z_2)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]\operatorname{Sin}\left[(z-z_2)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]+\\
&+C_3\sin\left[(z-z_3)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]\operatorname{Cof}\left[(z-z_3)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]+\\
&+C_4\cos\left[(z-z_4)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]\operatorname{Sin}\left[(z-z_4)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right],\\
v=\;&-C_1\sin\left[(z-z_1)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]\operatorname{Sin}\left[(z-z_1)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]+\\
&+C_2\cos\left[(z-z_2)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]\operatorname{Cof}\left[(z-z_2)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]+\\
&+C_3\cos\left[(z-z_3)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]\operatorname{Sin}\left[(z-z_3)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]-\\
&-C_4\sin\left[(z-z_4)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]\operatorname{Cof}\left[(z-z_4)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right],
\end{aligned}\right\}\\
&\text{oder in Exponentialform}\\
&\left.\begin{aligned}
u=\;&C_1e^{(z-z_1)\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}}\cos\left[(z-z_1)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]+\\
&+C_2e^{(z-z_2)\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}}\sin\left[(z-z_2)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]+\\
&+C_3e^{-(z-z_3)\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}}\cos\left[(z-z_3)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]+\\
&+C_4e^{-(z-z_4)\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}}\sin\left[(z-z_4)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right],\\
v=\;&-C_1e^{(z-z_1)\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}}\sin\left[(z-z_1)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]+\\
&+C_2e^{(z-z_2)\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}}\cos\left[(z-z_2)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]+\\
&+C_3e^{-(z-z_3)\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}}\sin\left[(z-z_3)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]-\\
&-C_4e^{-(z-z_4)\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}}\cos\left[(z-z_4)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right].
\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(210)
$$

Die simultanen Differentialgleichungen (210) können als die Differentialgleichungen der trigonometrisch-hyperbolischen Produktfunktionen bezeichnet werden.

b) Funktionsverlauf im Reellen.

Werden die Funktionen durch die Transformationen

$$
z_1=z_2=z_3=z_4=z_c\,,\quad \zeta=(z-z_c)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\,,\quad \lambda=\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{+a+\sqrt{a^2+b^2}}}\qquad(211)
$$

auf ihre Normalform umgeschrieben und gemäß

$$
\left.\begin{aligned}
\xi_1&=\operatorname{Cof}\lambda\zeta\cos\zeta\,, & \xi_2&=\operatorname{Sin}\lambda\zeta\cos\zeta\,,\\
\eta_1&=\operatorname{Cof}\lambda\zeta\sin\zeta\,, & \eta_2&=\operatorname{Sin}\lambda\zeta\sin\zeta\,,
\end{aligned}\right\}\qquad(212)
$$

in zwei Gruppen einander in einem kartesischen Bezugssystem zugeordnet, so ergeben sich die Parameterdarstellungen zweier Spiralen (Abb. 38[a] uud 38[b]). Werden die Spiralen als Polardiagramme aufgefaßt, so folgen die Radiusvektoren zu

$$\varrho_1 = \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} = \mathfrak{Cof}\,\lambda\zeta\,, \qquad \varrho_2 = \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} = \mathfrak{Sin}\,\lambda\zeta\,. \tag{213}$$

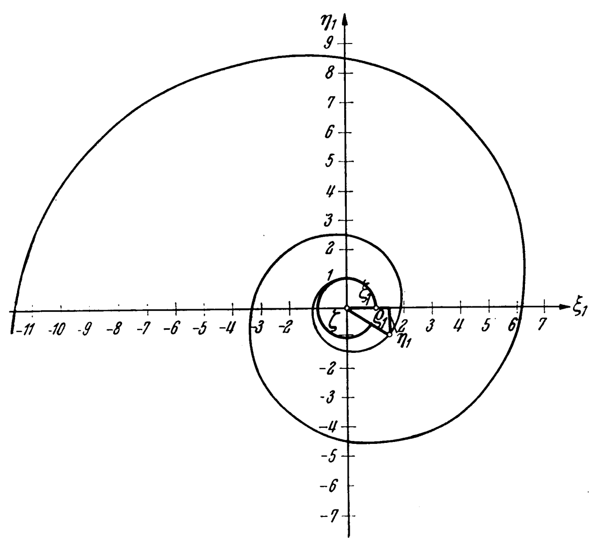

Abb. 38a.

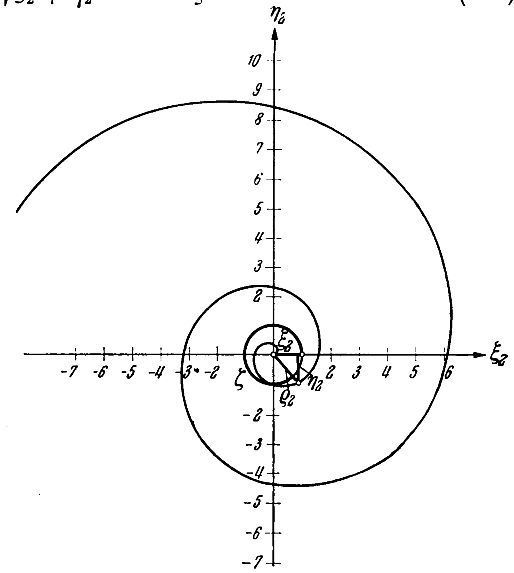

Abb. 38b.

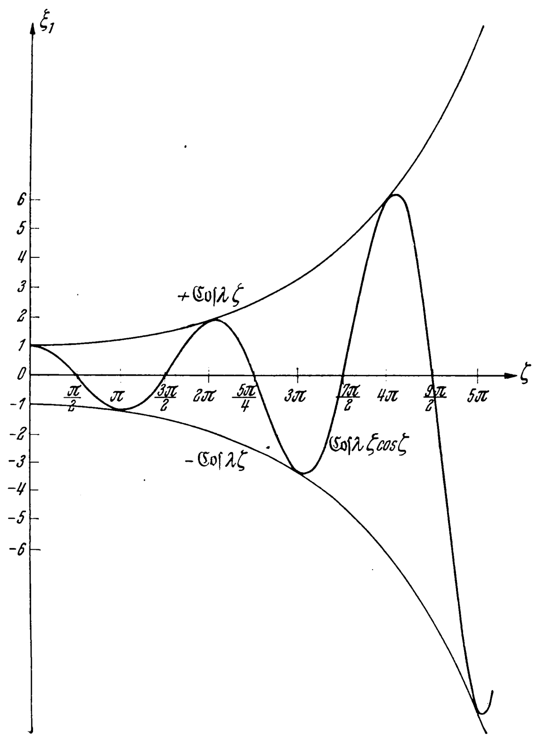

Abb. 39.

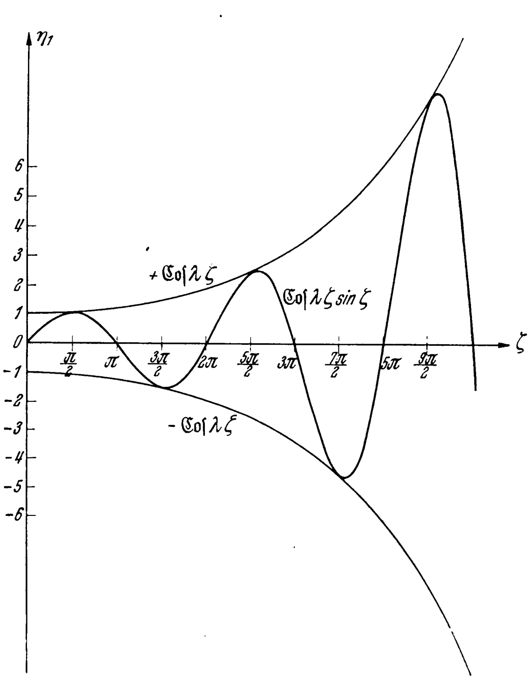

Abb. 40.

Der Verlauf der vier Funktionen $\xi_1(\zeta)$, $\eta_2(\zeta)$, $\xi_1(\zeta)$, $\eta_2(\zeta)$ ist aus Abb. 39 bis 42 ersichtlich.

c) Differential- und Integralformeln.

Die Differential- und Integralformeln der trigonometrisch-hyperbolischen Produktfunktionen lassen sich unmittelbar aus (189) und (190) herleiten, indem die entsprechenden Gleichungen unter Vertauschung von a mit $-a$ angesetzt und addiert bzw. subtrahiert werden. Berücksichtigt man hierbei gleichzeitig (120), so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dz}(\operatorname{Cof} az \cos bz) &= a \operatorname{Sin} az \cos bz - b \operatorname{Cof} az \sin bz\,,\\
\frac{d}{dz}(\operatorname{Cof} az \sin bz) &= a \operatorname{Sin} az \sin bz + b \operatorname{Cof} az \cos bz\,,\\
\frac{d}{dz}(\operatorname{Sin} az \cos bz) &= a \operatorname{Cof} az \cos bz - b \operatorname{Sin} az \sin bz\,,\\
\frac{d}{dz}(\operatorname{Sin} az \sin bz) &= a \operatorname{Cof} az \sin bz + b \operatorname{Sin} az \cos bz\,.
\end{aligned}\right\} \tag{214}$$

$$\left.\begin{aligned}
\int \operatorname{Cof} az \cos bz\, dz &= \frac{a \operatorname{Sin} az \cos bz + b \operatorname{Cof} az \sin bz}{a^2 + b^2}\,,\\
\int \operatorname{Cof} az \sin bz\, dz &= \frac{a \operatorname{Sin} az \sin bz - b \operatorname{Cof} az \cos bz}{a^2 + b^2}\,,\\
\int \operatorname{Sin} az \cos bz\, dz &= \frac{a \operatorname{Cof} az \cos bz + b \operatorname{Sin} az \sin bz}{a^2 + b^2}\,,\\
\int \operatorname{Sin} az \sin bz\, dz &= \frac{a \operatorname{Cof} az \sin bz - b \operatorname{Sin} az \cos bz}{a^2 + b^2}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{215}$$

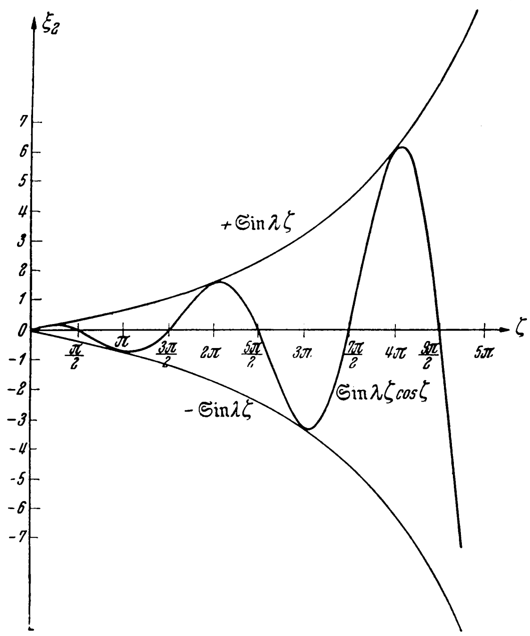

Abb. 41.

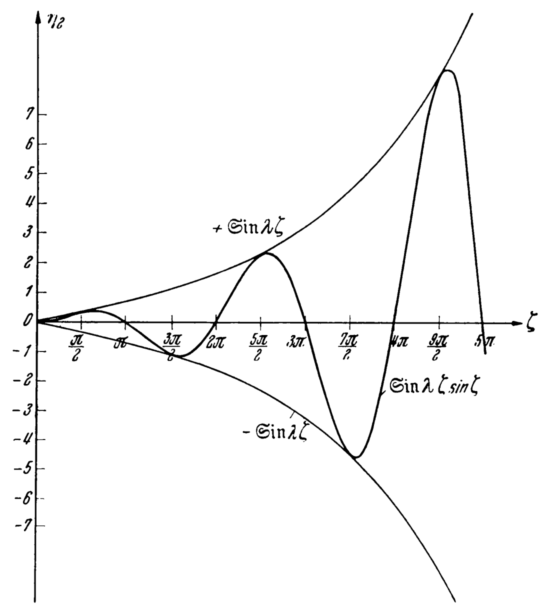

Abb. 42.

d) Definierende Differentialgleichung vierter Ordnung.

Den beiden simultanen Differentialgleichungen (210) entspricht eine einzige Differentialgleichung vierter Ordnung. Man könnte diese, ähnlich wie im Anschluß an (195), auch hier unabhängig von (210) durch Betrachtung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{d^2 w}{dz^2} + \omega^2 e^{\mp 2ia} w\right] + \omega^2 e^{\pm 2ia}\left[\frac{d^2 w}{dz^2} + \omega^2 e^{\mp 2ia} w\right] = 0$$

herleiten, in der die Lösungen der Ausgangsdifferentialgleichung (205) dieser Ziffer unmittelbar als Partikularintegrale erscheinen. Es ist jedoch bequemer und auch für die Bereichsabgrenzungen der Koeffizienten vorteilhafter, an die simultanen Differentialgleichungen anzuknüpfen.

Wird u nach der zweiten der Differentialgleichungen (210) durch v ausgedrückt und in die erste der Gln (210) eingeführt, so ergibt sich

$$\frac{d^4 v}{dz^4} + 2a\frac{d^2 v}{dz^2} + (a^2 + b^2)\, v = 0\,.$$

Dieselbe Differentialgleichung ergibt sich für u. Durch Vertauschen von u und v mit w folgt in Verbindung mit (210)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^4 w}{dz^4} + 2a\frac{d^2 w}{dz^2} + (a^2+b^2)\,w = 0\,,\\
&w = C_1\cos\left[(z-z_1)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]\mathfrak{Cof}\left[(z-z_1)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]+\\
&\quad + C_2\sin\left[(z-z_2)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]\mathfrak{Sin}\left[(z-z_2)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]+\\
&\quad + C_3\sin\left[(z-z_3)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]\mathfrak{Cof}\left[(z-z_3)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]+\\
&\quad + C_4\cos\left[(z-z_4)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]\mathfrak{Sin}\left[(z-z_4)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right].
\end{aligned}\right\}\qquad(216)$$

Ausgedrückt in Exponentialform lautet die Lösung (216)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^4 w}{dz^4} + 2a\frac{d^2 w}{dz^2} + (a^2+b^2)\,w = 0\,,\\
&w = C_1 e^{(z-z_1)\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}}\cos\left[(z-z_1)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]+\\
&\quad + C_2 e^{(z-z_2)\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}}\sin\left[(z-z_2)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]+\\
&\quad + C_3 e^{-(z-z_3)\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}}\cos\left[(z-z_3)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]+\\
&\quad + C_4 e^{-(z-z_4)\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}}\sin\left[(z-z_4)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right].
\end{aligned}\right\}\qquad(217)$$

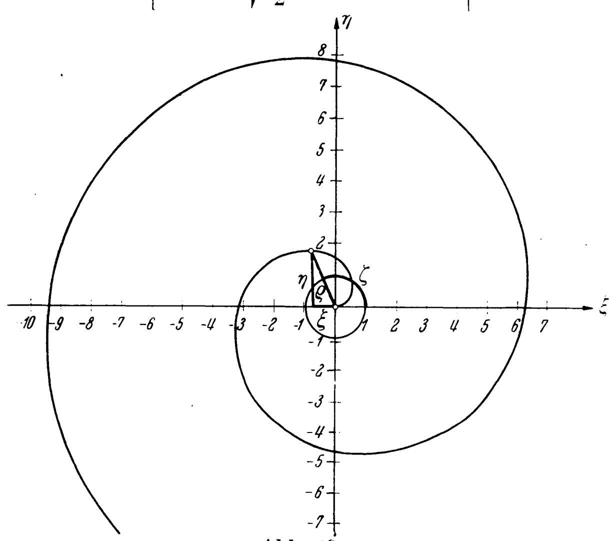

Abb. 43.

Für $b=0$ arten die Lösungen aus, und zwar ergeben sich zwei Formen der Ausartung, je nachdem ob $a \gtrless 0$ ist. Die Ersatzlösungen lassen sich wieder durch Einführung neuer Konstanten ermitteln. In Anknüpfung an (216) erhält man

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^4 w}{dz^4} + 2a\frac{d^2 w}{dz^2} + a^2 w = 0\,,\\
&w = C_1\cos\left[(z-z_1)\sqrt{a}\right] + C_2(z-z_2)\sin\left[(z-z_2)\sqrt{a}\right] + C_3\sin\left[(z-z_3)\sqrt{a}\right] + C_4(z-z_4)\cos\left[(z-z_4)\sqrt{a}\right].
\end{aligned}\right\}\qquad(218)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^4 w}{dz^4} - 2a\frac{d^2 w}{dz^2} + a_2 w = 0\,,\\
&w = C_1\mathfrak{Cof}\left[(z-z_1)\sqrt{a}\right] + C_2(z-z_2)\mathfrak{Sin}\left[(z-z_2)\sqrt{a}\right] + C_3\,\mathfrak{Sin}\left[(z-z_3)\sqrt{a}\right]+\\
&\quad + C_4(z-z_4)\mathfrak{Cof}\left[(z-z_4)\sqrt{a}\right].
\end{aligned}\right\}\qquad(219)$$

Die in (218) auftretenden Produkte $(z - z_2)\sin\left[(z - z_2)\sqrt{a}\right]$ und $(z - z_4)\cos\left[z - z_4)\sqrt{a}\right]$ beschreiben eine lineare Schwingungsaufschaukelung. Wird für diese $z\sqrt{a} = \zeta$ und $z_1 = z_4 = 0$ gesetzt und werden die damit entstehenden normierten Funktionen gemäß

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \zeta\cos\zeta \\ \eta &= \zeta\sin\zeta \end{aligned}\right\} \qquad (220)$$

einander im kartesischen Bezugssystem zugeordnet, so ergibt sich eine archimedische Spirale mit dem Bogen des Einheitskreises als Parameter (Abb. 43). Wird die Spirale als Polardiagramm aufgefaßt, so folgt der Radiusvektor zu

$$\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \zeta\,. \qquad (221)$$

Demgemäß sind die Aufschaukelungsfunktionen ← Gerade unter 45°. Aus Abb. 44 und 45 ist der Verlauf der Parameterfunktionen $\xi(\zeta)$ und $\eta(\zeta)$ ersichtlich. Die zugehörigen Ableitungen und Integrale lauten

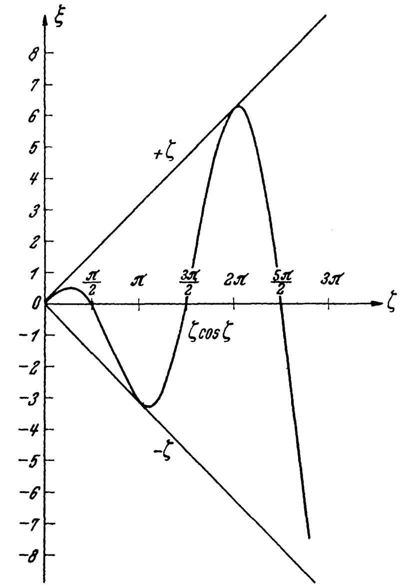

Abb. 44.

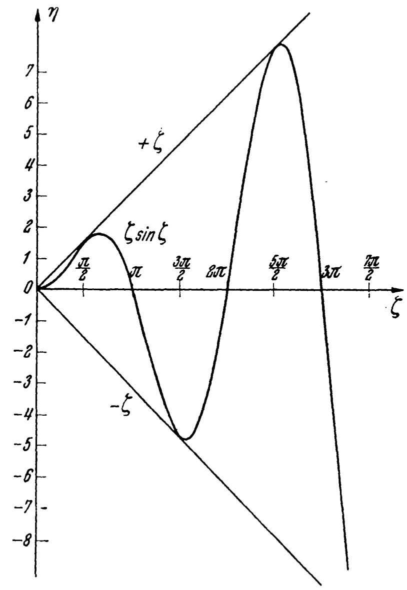

Abb. 45.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{d\zeta}(\zeta\cos\zeta) = \cos\zeta - \zeta\sin\zeta\,, && \int\zeta\cos\zeta\,d\zeta = \cos\zeta + \zeta\sin\zeta\,, \\ &\frac{d}{d\zeta}(\zeta\sin\zeta) = \sin\zeta + \zeta\cos\zeta\,, && \int\zeta\sin\zeta\,d\zeta = \sin\zeta - \zeta\cos\zeta\,. \end{aligned}\right\} \qquad (222)$$

In (219) stellen die Ersatzlösungen Aufschaukelungsfunktionen von der Normalform

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta \\ \eta &= \zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta \end{aligned}\right\} \qquad (223)$$

dar. Ihre Zuordnung im kartesischen Bezugssystem ist aus Abb. 46 und 47 ersichtlich. Für die zugehörigen Ableitungen und Integrale ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{d\zeta}(\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta) = \mathfrak{Cof}\,\zeta + \zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\,, && \int\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\,d\zeta = -\,\mathfrak{Cof}\,\zeta + \zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\,, \\ &\frac{d}{d\zeta}(\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta) = \mathfrak{Sin}\,\zeta + \zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\,, && \int\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\,d\zeta = -\,\mathfrak{Sin}\,\zeta + \zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\,. \end{aligned}\right\} \qquad (224)$$

e) Trigonometrisch-hyperbolische und trigonometrisch-exponentielle Produktfunktionen vom Argument $\frac{z}{\sqrt{2}}$.

Von besonderer Bedeutung für die Anwendung sind die trigonometrisch-hyperbolischen und trigonometrisch-exponentiellen Produktfunktionen vom Argument $\frac{z}{\sqrt{2}}$. Wird in (210), (216) und (217) $a = 0$ und $b = 1$ gesetzt, so ergibt sich in trigonometrisch-hyperbolischer Lösungsform

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2u}{dz^2} - v = 0\,, \quad & u = C_1\cos\frac{z-z_1}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{z-z_1}{\sqrt{2}} + C_2\sin\frac{z-z_2}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{z-z_2}{\sqrt{2}} + C_3\sin\frac{z-z_3}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{z-z_3}{\sqrt{2}} + \\ & \qquad + C_4\cos\frac{z-z_4}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{z-z_4}{\sqrt{2}}\,, \\ \frac{d^2v}{dz^2} + u = 0\,, \quad & v = -\,C_1\sin\frac{z-z_1}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{z-z_1}{\sqrt{2}} + C_2\cos\frac{z-z_2}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{z-z_2}{\sqrt{2}} + C_3\cos\frac{z-z_3}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{z-z_3}{\sqrt{2}} - \\ & \qquad - C_4\sin\frac{z-z_4}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{z-z_4}{\sqrt{2}}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (225)$$

$$\frac{d^4 w}{dz^4} + w = 0\,, \quad w = C_1 \cos\frac{z-z_1}{\sqrt{2}} \mathfrak{Cof}\,\frac{z-z_1}{\sqrt{2}} + C_2 \sin\frac{z-z_2}{\sqrt{2}} \mathfrak{Sin}\,\frac{z-z_2}{\sqrt{2}} + C_3 \sin\frac{z-z_3}{\sqrt{2}} \mathfrak{Cof}\,\frac{z-z_3}{\sqrt{2}} + C_4 \cos\frac{z-z_4}{\sqrt{2}} \mathfrak{Sin}\,\frac{z-z_4}{\sqrt{2}}\,, \tag{226}$$

und in trigonometrisch-exponentieller Lösungsform

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2 u}{dz^2} - v = 0\,, &\quad u = C_1 e^{\frac{z-z_1}{\sqrt{2}}} \cos\frac{z-z_1}{\sqrt{2}} + C_2 e^{\frac{z-z_2}{\sqrt{2}}} \sin\frac{z-z_2}{\sqrt{2}} + C_3 e^{-\frac{z-z_3}{\sqrt{2}}} \cos\frac{z-z_3}{\sqrt{2}} + \\
&\qquad + C_4 e^{-\frac{z-z_4}{\sqrt{2}}} \sin\frac{z-z_4}{\sqrt{2}}\,, \\
\frac{d^2 v}{dz^2} + u = 0\,, &\quad v = -C_1 e^{\frac{z-z_1}{\sqrt{2}}} \sin\frac{z-z_1}{\sqrt{2}} + C_2 e^{\frac{z-z_2}{\sqrt{2}}} \cos\frac{z-z_2}{\sqrt{2}} + C_3 e^{-\frac{z-z_3}{\sqrt{2}}} \sin\frac{z-z_3}{\sqrt{2}} - \\
&\qquad - C_4 e^{-\frac{z-z_4}{\sqrt{2}}} \cos\frac{z-z_4}{\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{227}$$

$$\frac{d^4 w}{dz^4} + w = 0\,, \quad w = C_1 e^{\frac{z-z_1}{\sqrt{2}}} \cos\frac{z-z_1}{\sqrt{2}} + C_2 e^{\frac{z-z_2}{\sqrt{2}}} \sin\frac{z-z_2}{\sqrt{2}} + C_3 e^{-\frac{z-z_3}{\sqrt{2}}} \cos\frac{z-z_3}{\sqrt{2}} + C_4 e^{-\frac{z-z_4}{\sqrt{2}}} \sin\frac{z-z_4}{\sqrt{2}}\,. \tag{228}$$

Die Gln (227) und (228) beschreiben unter anderem die durch gedämpfte harmonische Schwingungen darstellbaren Randabklingungsvorgänge, insbesondere auf den Gebieten der Elastizitätstheorie, der Wärmelehre und der Elektrotechnik. Die dabei gleichzeitig benötigten Ableitungen lassen sich unter Heranziehung der Kreisfunktionen mit der Phase $\frac{\pi}{4}$ in sehr durchsichtiger Weise darstellen. Beispielsweise folgt für w nach (228) in Verbindung mit Ziffer 6

$$\left.\begin{aligned}
w &= C_1 e^{\frac{z-z_1}{\sqrt{2}}} \cos\frac{z-z_1}{\sqrt{2}} + C_2 e^{\frac{z-z_2}{\sqrt{2}}} \sin\frac{z-z_2}{\sqrt{2}} + C_3 e^{-\frac{z-z_3}{\sqrt{2}}} \cos\frac{z-z_3}{\sqrt{2}} + C_4 e^{-\frac{z-z_4}{\sqrt{2}}} \sin\frac{z-z_4}{\sqrt{2}}\,, \\
\frac{dw}{dz} &= -C_1 e^{\frac{z-z_1}{\sqrt{2}}} \overset{*}{\sin}\frac{z-z_1}{\sqrt{2}} + C_2 e^{\frac{z-z_2}{\sqrt{2}}} \overset{*}{\cos}\frac{z-z_2}{\sqrt{2}} - C_3 e^{-\frac{z-z_3}{\sqrt{2}}} \overset{*}{\cos}\frac{z-z_3}{\sqrt{2}} - C_4 e^{-\frac{z-z_4}{\sqrt{2}}} \overset{*}{\sin}\frac{z-z_4}{\sqrt{2}}\,, \\
\frac{d^2 w}{dz^2} &= -C_1 e^{\frac{z-z_1}{\sqrt{2}}} \sin\frac{z-z_1}{\sqrt{2}} + C_2 e^{\frac{z-z_2}{\sqrt{2}}} \cos\frac{z-z_2}{\sqrt{2}} + C_3 e^{-\frac{z-z_3}{\sqrt{2}}} \sin\frac{z-z_3}{\sqrt{2}} - C_4 e^{-\frac{z-z_4}{\sqrt{2}}} \cos\frac{z-z_4}{\sqrt{2}}\,, \\
\frac{d^3 w}{dz^3} &= -C_1 e^{\frac{z-z_1}{\sqrt{2}}} \overset{*}{\cos}\frac{z-z_1}{\sqrt{2}} - C_2 e^{\frac{z-z_2}{\sqrt{2}}} \overset{*}{\sin}\frac{z-z_2}{\sqrt{2}} - C_3 e^{-\frac{z-z_3}{\sqrt{2}}} \overset{*}{\sin}\frac{z-z_3}{\sqrt{2}} + C_4 e^{-\frac{z-z_4}{\sqrt{2}}} \overset{*}{\cos}\frac{z-z_4}{\sqrt{2}}\,, \\
\frac{d^4 w}{dz^4} &= -C_1 e^{\frac{z-z_1}{\sqrt{2}}} \cos\frac{z-z_1}{\sqrt{2}} - C_2 e^{\frac{z-z_2}{\sqrt{2}}} \sin\frac{z-z_2}{\sqrt{2}} - C_3 e^{-\frac{z-z_3}{\sqrt{2}}} \cos\frac{z-z_3}{\sqrt{2}} - C_4 e^{-\frac{z-z_4}{\sqrt{2}}} \sin\frac{z-z_4}{\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{229}$$

f) Beispiel 5.

Es sei noch ein Beispiel aus der Elastizitätstheorie zur Erläuterung hinzugefügt, und zwar möge gemäß Abb. 46 eine Kreiszylinderschale unter drehsymmetrischer Randbiegungsbelastung ohne Längskräfte betrachtet werden. Wird aus einer solchen Schale ein quaderartiges Element von der Dicke h, der Länge Δx der Erzeugenden und der Länge $a\Delta\varphi$ des Kreisbogens herausgeschnitten, so wirken auf das Element die aus Abb. 47 ersichtlichen Schnittkräfte und Momente. Die zugehörigen Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$\begin{aligned}
&\left(Q + \frac{dQ}{dx}\Delta x\right) a\Delta\varphi - Q a\Delta\varphi + h\sigma_\varphi \Delta\varphi \Delta x = 0\,, \\
&\left(M_x + \frac{dM_x}{dx}\Delta x\right) a\Delta\varphi - M_x a\Delta\varphi - Q a\Delta\varphi\Delta x = 0\,,
\end{aligned}$$

oder nach Zusammenfassen und Division durch $a\Delta\varphi\Delta x$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dQ}{dx} + \frac{h}{a}\sigma_\varphi &= 0\,, \\ \frac{dM_x}{dx} - Q &= 0\,. \end{aligned}\right|$$

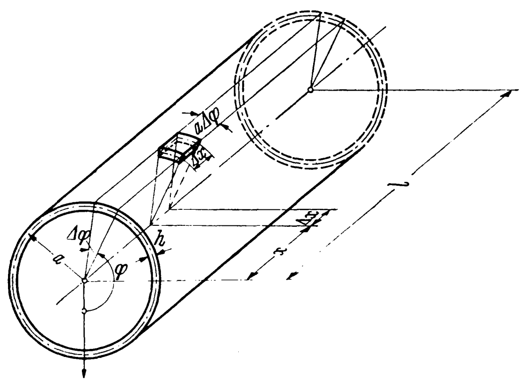

Abb. 46.

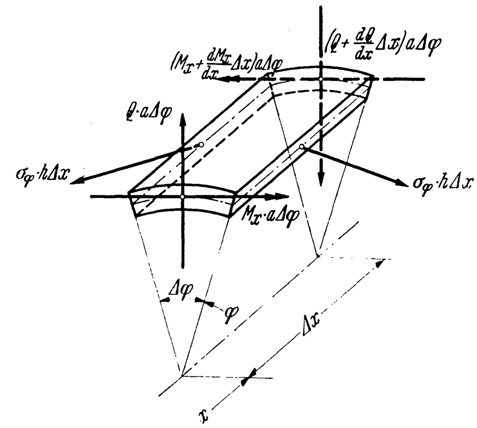

Abb. 47.

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$Q = \frac{dM_x}{dx}$$

und damit aus der ersten

$$\frac{d^2M_x}{dx^2} + \frac{h}{a}\sigma_\varphi = 0\,.$$

Bezeichnet w die nach außen positiv gezählte Durchbiegung der Schale (Abb. 48), so ergibt sich unter Zugrundelegung kleiner Verformungen für Ringdehnung ε_φ, Längskrümmungsänderung k_x und Ringkrümmungsänderung k_φ

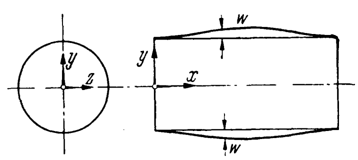

Abb. 48.

$$\varepsilon_\varphi = \frac{w}{a}\,, \qquad k_x = \frac{d^2w}{dx^2}\,, \qquad k_\varphi = 0\,.$$

Andererseits liefert das erweiterte HOOKEsche Gesetz

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\sigma_\varphi}{E}\,, \qquad k_x = \frac{M_x}{EJ} - \mu\frac{M_\varphi}{EJ}\,, \qquad k_\varphi = \frac{M_\varphi}{EJ} - \mu\frac{M_x}{EJ}\,. \qquad \left(\begin{aligned} E &= \text{Elastizitätsmodul,} \\ \mu &= \text{Querkontraktionszahl} \end{aligned}\right)$$

Aus der Gleichsetzung der Verzerrungen folgt mit dem Trägheitsmoment $J = \frac{h^3}{12}$

$$\sigma_\varphi = \frac{Ew}{a}\,, \qquad M_x = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\frac{d^2w}{dx^2}\,, \qquad M_\varphi = \mu M_x\,.$$

Wird die Gleichung für M_x in der Form

$$\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3}M_x = 0$$

geschrieben und σ_φ in die aus den Gleichgewichtsbedingungen gefundene Beziehung zwischen M_x und σ_φ eingeführt, so ergibt sich das simultane Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2w}{dx^2} - \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3}M_x &= 0\,, \\ \frac{d^2M_x}{dx^2} + \frac{Eh}{a^2}w \qquad &= 0\,. \end{aligned}\right|$$

Um dieses in der Form (227) darzustellen, brauchen nur neue Unbekannte gemäß

$$x = \alpha\xi\,, \qquad M_x = \beta\overline{M}_x$$

eingeführt und die Koeffizienten α und β zweckentsprechend bestimmt zu werden. Die Umschreibung des Differentialgleichungssystems liefert zunächst

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\alpha^2}\frac{d^2w}{d\xi^2}-\frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3}\beta\bar{M}_x&=0\,,\\ \frac{\beta}{\alpha^2}\frac{d^2\bar{M}_x}{d\xi^2}+\frac{Eh}{a^2}w\qquad&=0\,,\end{aligned}\right\}\quad\text{oder}\quad\left.\begin{aligned}\frac{d^2w}{d\xi^2}-\frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3}\beta\alpha^2\bar{M}_x&=0\,,\\ \frac{d^2\bar{M}_x}{d\xi^2}+\frac{Eh}{a^2}\frac{\alpha^2}{\beta}w\qquad&=0\,.\end{aligned}\right\}$$

Um die Übereinstimmung mit (225) herbeizuführen, müssen die Bedingungsgleichungen

$$\frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3}\beta\alpha^2=1\quad\text{und}\quad\frac{Eh}{a^2}\frac{\alpha^2}{\beta}=1$$

erfüllt sein. Durch Auflösen nach α und β erhält man

$$\alpha=\frac{\sqrt{a\,h}}{\sqrt[4]{12(1-\mu^2)}}\,,\qquad\beta=\frac{Eh^2}{a\sqrt{12(1-\mu^2)}}\,,$$

und damit

$$x=\frac{\sqrt{a\,h}}{\sqrt[4]{12(1-\mu^2)}}\,\xi\,,\qquad M_x=\frac{Eh^2}{a\sqrt{12(1-\mu^2)}}\,\bar{M}_x\,,$$

während die simultanen Differentialgleichungen die Form

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2w}{d\xi^2}-\bar{M}_x&=0\,,\\ \frac{d^2\bar{M}_x}{d\xi^2}+w&=0\,,\end{aligned}\right\}$$

annehmen. Hieraus folgt in Verbindung mit (225) und (227)

$$\left.\begin{aligned}w&=C_1\cos\frac{\xi-\xi_1}{\sqrt2}\operatorname{\mathfrak{Cof}}\frac{\xi-\xi_1}{\sqrt2}+C_2\sin\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt2}\operatorname{\mathfrak{Sin}}\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt2}+C_3\sin\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt2}\operatorname{\mathfrak{Cof}}\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt2}+C_4\cos\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt2}\operatorname{\mathfrak{Sin}}\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt2}\,,\\ \bar{M}_x&=-C_1\sin\frac{\xi-\xi_1}{\sqrt2}\operatorname{\mathfrak{Sin}}\frac{\xi-\xi_1}{\sqrt2}+C_2\cos\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt2}\operatorname{\mathfrak{Cof}}\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt2}+C_3\cos\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt2}\operatorname{\mathfrak{Sin}}\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt2}-C_4\sin\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt2}\operatorname{\mathfrak{Cof}}\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt2}\,,\end{aligned}\right\}$$

und

$$\left.\begin{aligned}w&=C_1e^{\frac{\xi-\xi_1}{\sqrt2}}\cos\frac{\xi-\xi_1}{\sqrt2}+C_2e^{\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt2}}\sin\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt2}+C_3e^{-\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt2}}\cos\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt2}+C_4e^{-\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt2}}\sin\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt2}\,,\\ \bar{M}_x&=-C_1e^{\frac{\xi-\xi_1}{\sqrt2}}\sin\frac{\xi-\xi_1}{\sqrt2}+C_2e^{\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt2}}\cos\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt2}+C_3e^{-\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt2}}\sin\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt2}-C_4e^{-\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt2}}\cos\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt2}\,.\end{aligned}\right\}$$

Zu der gleichen Lösung kann man auch über (226) und (228) gelangen, indem in dem simultanen Ausgangssystem

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2w}{dx^2}-\frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3}M_x&=0\,,\\ \frac{d^2M_x}{dx^2}+\frac{Eh}{a^2}w\qquad&=0\,,\end{aligned}\right\}$$

die erste Gleichung nach M_x aufgelöst und in die zweite eingeführt wird. Dies ergibt

$$\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\frac{d^4w}{dx^4}+\frac{Eh}{a^2}w=0$$

oder auch

$$\frac{d^4w}{dx^4}+\frac{12(1-\mu^2)}{a^2h^2}w=0\,.$$

Damit der zweite Faktor eins wird, muß auch hier wieder

$$x=\frac{\sqrt{ah}}{\sqrt[4]{12(1-\mu^2)}}\,\xi$$

gesetzt werden. Damit folgt dann aus (226) bzw. (228) die gleiche Lösung für w wie vorhin, während M_x nach der ersten der simultanen Ausgangsgleichungen sich aus dem zweiten Differentialquotienten von w in Verbindung mit (229) ergibt.

Für die praktische Rechnung ist es meist bequemer, mit dem simultanen Gleichungssystem zu arbeiten, da dieses auf einen Schlag zwei der das Problem bestimmenden Größen liefert.

Die für die Festigkeitsuntersuchung maßgebenden Funktionen

$$w, \quad \frac{dw}{dx}, \quad M_x, \quad M_\varphi, \quad Q = \frac{dM_x}{dx}$$

sind nachfolgend für die beiden Lösungsformen zusammengestellt.

$$w = C_1 \cos\frac{\xi-\xi_1}{\sqrt{2}} \mathfrak{Cof}\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt{2}} + C_2 \sin\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt{2}} \mathfrak{Sin}\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt{2}} + C_3 \sin\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt{2}} \mathfrak{Cof}\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt{2}} + C_4 \cos\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt{2}} \mathfrak{Sin}\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt{2}} = \frac{\sigma_\varphi a}{E} \quad ,$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} = \frac{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}}{\sqrt{ah}} \Big[& C_1\left(\cos\frac{\xi-\xi_1}{\sqrt{2}} \mathfrak{Sin}\frac{\xi-\xi_1}{\sqrt{2}} - \sin\frac{\xi-\xi_1}{\sqrt{2}} \mathfrak{Cof}\frac{\zeta-\xi_1}{\sqrt{2}}\right) + C_2\left(\sin\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt{2}} \mathfrak{Cof}\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt{2}} + \cos\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt{2}} \mathfrak{Sin}\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt{2}}\right) + \\ & + C_3\left(\sin\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt{2}} \mathfrak{Sin}\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt{2}} + \cos\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt{2}} \mathfrak{Cof}\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt{2}}\right) + C_4\left(\cos\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt{2}} \mathfrak{Cof}\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt{2}} - \sin\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt{2}} \mathfrak{Sin}\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt{2}}\right)\Big] \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x \overset{!}{=} \frac{E h^2}{a\sqrt{12(1-\mu^2)}} \Big[& -C_1 \sin\frac{\xi-\xi_1}{\sqrt{2}} \mathfrak{Sin}\frac{\xi-\xi_1}{\sqrt{2}} + C_2 \cos\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt{2}} \mathfrak{Cof}\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt{2}} + C_3 \cos\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt{2}} \mathfrak{Sin}\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt{2}} - \\ & - C_4 \sin\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt{2}} \mathfrak{Cof}\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt{2}}\Big] = \frac{M_\varphi}{\mu} \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_x = \frac{E h\sqrt{h}}{2a\sqrt{a}\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}} \Big[& -C_1\left(\sin\frac{\xi-\xi_1}{\sqrt{2}} \mathfrak{Cof}\frac{\xi-\xi_1}{\sqrt{2}} + \cos\frac{\xi-\xi_1}{\sqrt{2}} \mathfrak{Sin}\frac{\xi-\xi_1}{\sqrt{2}}\right) + C_2\left(\cos\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt{2}} \mathfrak{Sin}\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt{2}} - \right. \\ & \left. - \sin\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt{2}} \mathfrak{Cof}\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt{2}}\right) + C_3\left(\cos\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt{2}} \mathfrak{Cof}\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt{2}} - \sin\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt{2}} \mathfrak{Sin}\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt{2}}\right) - \\ & - C_4\left(\sin\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt{2}} \mathfrak{Sin}\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt{2}} + \cos\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt{2}} \mathfrak{Cof}\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt{2}}\right)\Big] \quad . \end{aligned}$$

$$w = C_1 e^{\frac{\xi-\xi_1}{\sqrt{2}}} \cos\frac{\zeta-\xi_1}{\sqrt{2}} + C_2 e^{\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt{2}}} \sin\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt{2}} + C_3 e^{-\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt{2}}} \cos\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt{2}} + C_4 e^{-\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt{2}}} \sin\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt{2}} = \frac{\sigma_\varphi a}{E} \quad ,$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\sqrt[4]{12(1-\mu^2)}}{\sqrt{ah}} \left[-C_1 e^{\frac{\xi-\xi_1}{\sqrt{2}}} \overset{*}{\sin}\frac{\xi-\xi_1}{\sqrt{2}} + C_2 e^{\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt{2}}} \overset{*}{\cos}\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt{2}} - C_3 e^{-\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt{2}}} \overset{*}{\cos}\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt{2}} - C_4 e^{-\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt{2}}} \overset{*}{\sin}\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt{2}} \right] \quad ,$$

$$M_x = \frac{E h^2}{a\sqrt{12(1-\mu^2)}} \left[-C_1 e^{\frac{\xi-\xi_1}{\sqrt{2}}} \sin\frac{\xi-\xi_1}{\sqrt{2}} + C_2 e^{\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt{2}}} \cos\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt{2}} + C_3 e^{-\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt{2}}} \sin\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt{2}} - C_4 e^{-\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt{2}}} \cos\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt{2}} \right] = \frac{M_\varphi}{\mu} \quad ,$$

$$Q = \frac{E h\sqrt{h}}{a\sqrt{a}\sqrt[4]{12(1-\mu^2)}} \left[-C_1 e^{\frac{\xi-\xi_1}{\sqrt{2}}} \overset{*}{\cos}\frac{\xi-\xi_1}{\sqrt{2}} - C_2 e^{\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt{2}}} \overset{*}{\sin}\frac{\xi-\xi_2}{\sqrt{2}} - C_3 e^{-\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt{2}}} \overset{*}{\sin}\frac{\xi-\xi_3}{\sqrt{2}} + C_4 e^{-\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt{2}}} \overset{*}{\cos}\frac{\xi-\xi_4}{\sqrt{2}} \right] \quad .$$

g) Beispiel 6.

Es sei nun noch an zwei speziellen Problemen der Zylinderschale gezeigt, wie bald die eine, bald die andere der beiden Alternativlösungen die größeren Vorteile bietet. Zuerst sei gemäß Abb. 49 der zylindrische Teil eines Unterseebootdruckkörpers betrachtet, bei dem der Biegungszustand durch die Spantringe, die den Druckkörper gegen Ausbeulen aussteifen, ausgelöst wird. Denkt man sich die Spantringe vorübergehend entfernt, so würde die Schale unter der Wirkung der Ring- und Stirndrucke die Ring- und Längsspannungen

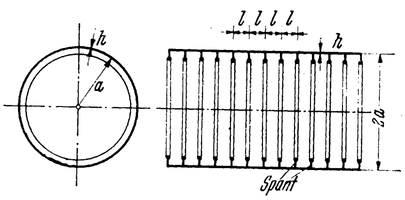

Abb. 49.

$$\sigma_\varphi^{(0)} = -\frac{pa}{h}, \qquad \sigma_S^{(0)} = -\frac{pa}{2h}$$

und damit die Zusammendrückungen

$$w^{(0)} = a\,\varepsilon_\varphi = a\left(\frac{\sigma_\varphi^{(0)}}{E} - \mu\,\frac{\sigma_S^{(0)}}{E}\right) = -\frac{pa^2\left(1 - \frac{1}{2}\mu\right)}{hE}$$

erfahren. Diese sind nun an den Spantringen unmöglich. Die Folge ist ein Gegendruck seitens der Spante, der eine Verbiegung der Schale nach außen nach sich zieht (Abb. 50), und zwar dergestalt, daß jeweils über den Spanten und mittig zwischen den Spanten Symmetriepunkte der Biegelinie liegen. Die Untersuchung kann daher auf eines der Spantfelder von der Länge l beschränkt werden, wobei das Bezugssystem mittig zwischen die Spante gelegt sei.

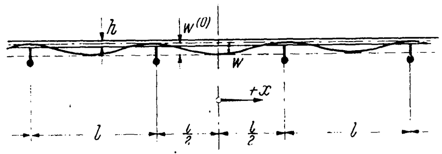

Abb. 50.

Bei einem Symmetriezustand, wie im vorliegenden Falle, ist stets die trigonometrisch-hyperbolische Lösungsform am Platze. Werden in Anpassung an das gewählte Bezugssystem die Phasen ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 sämtlich null gesetzt und die mit C_3 und C_4 multiplizierten antimetrischen Partikularintegrale von vornherein durch Nullsetzen von C_3 und C_4 ausgeschaltet, so ergibt sich für die zusätzliche Verbiegung

$$\left.\begin{aligned} w &= C_1 \cos\frac{\xi}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{Cof}\frac{\xi}{\sqrt{2}} + C_2 \sin\frac{\xi}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{Sin}\frac{\xi}{\sqrt{2}}\,, \\ \overline{M}_x &= -C_1 \sin\frac{\xi}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{Sin}\frac{\xi}{\sqrt{2}} + C_2 \cos\frac{\xi}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{Cof}\frac{\xi}{\sqrt{2}}\,, \end{aligned}\right| \quad \text{mit} \quad \left.\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{ah}}{\sqrt[4]{12(1-\mu^2)}}\,\xi\,, \\ M_x &= \frac{Eh^2}{a\sqrt{12(1-\mu^2)}}\,\overline{M}_x\,. \end{aligned}\right|$$

Nun entsprach dem vorhin beschriebenen $w^{(0)}$-Zustand, der auch als Membranzustand bezeichnet wird, eine überall gleiche Durchbiegung

$$w^{(0)} = -\frac{pa^2\left(1-\frac{1}{2}\mu\right)}{hE}\,.$$

Wird die elastische Nachgiebigkeit der Spanten, um das Problem nicht unnötig zu erschweren, unberücksichtigt gelassen, so muß über den Spanten

$$w^{(0)} + w = 0$$

sein. Gleichzeitig muß entsprechend dem geschilderten Symmetrieverhalten

$$\frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{oder auch} \quad \frac{dw}{d\xi} = 0$$

sein. Dies sind die beiden Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der Konstanten C_1 und C_2.

Gemäß $x = \pm\frac{l}{2}$ ist über den Spanten

$$\xi = \pm\frac{l\sqrt[4]{12(1-\mu^2)}}{2\sqrt{ah}} = \xi_S$$

zu setzen. Demgemäß lauten die Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} -\frac{pa^2\left(1-\frac{1}{2}\mu\right)}{hE} + C_1\cos\frac{\xi_S}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{Cof}\frac{\xi_S}{\sqrt{2}} + C_2\sin\frac{\xi_S}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{Sin}\frac{\xi_S}{\sqrt{2}} = 0\,, \\ \frac{C_1}{\sqrt{2}}\left[\cos\frac{\xi_S}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{Sin}\frac{\xi_S}{\sqrt{2}} - \sin\frac{\xi_S}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{Cof}\frac{\xi_S}{\sqrt{2}}\right] + \frac{C_2}{\sqrt{2}}\left[\sin\frac{\xi_S}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{Cof}\frac{\xi_S}{\sqrt{2}} + \cos\frac{\xi_S}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{Sin}\frac{\xi_S}{\sqrt{2}}\right] = 0\,. \end{aligned}\right|$$

Die Auflösung liefert

$$C_{\substack{1\\2}} = \frac{pa^2\left(1-\frac{1}{2}\mu\right)}{hE}\,\frac{\sin\frac{\xi_S}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{Cof}\frac{\xi_S}{\sqrt{2}} \pm \mathfrak{Sin}\frac{\xi_S}{\sqrt{2}}\cos\frac{\xi_S}{\sqrt{2}}}{\sin\frac{\xi_S}{\sqrt{2}}\cos\frac{\xi_S}{\sqrt{2}} + \mathfrak{Sin}\frac{\xi_S}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{Cof}\frac{\xi_S}{\sqrt{2}}}\,.$$

Werden diese Beziehungen zusammen mit

$$C_{\substack{3\\4}} = 0 \quad \text{und} \quad \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0$$

in der oben allgemein für Zylinderschalen gegebenen Formelzusammenstellung berücksichtigt, so liegt der Biegungszustand eindeutig fest.

Die Überlagerung von Membran- und Biegungszustand liefert für Durchbiegung, Ringspannung, Biegungsmomente und Querkraft

$$w = -\frac{pa^2(1-\frac{1}{2}\mu)}{hE}\left[1-\frac{\left(\sin\frac{\xi s}{\sqrt2}\mathfrak{Cof}\frac{\xi s}{\sqrt2}+\mathfrak{Sin}\frac{\xi s}{\sqrt2}\cos\frac{\xi s}{\sqrt2}\right)\cos\frac{\xi}{\sqrt2}\mathfrak{Cof}\frac{\xi}{\sqrt2}+\left(\sin\frac{\xi s}{\sqrt2}\mathfrak{Cof}\frac{\xi s}{\sqrt2}-\mathfrak{Sin}\frac{\xi s}{\sqrt2}\cos\frac{\xi s}{\sqrt2}\right)\sin\frac{\xi}{\sqrt2}\mathfrak{Sin}\frac{\xi}{\sqrt2}}{\sin\frac{\xi s}{\sqrt2}\cos\frac{\xi s}{\sqrt2}+\mathfrak{Sin}\frac{\xi s}{\sqrt2}\mathfrak{Cof}\frac{\xi s}{\sqrt2}}\right],$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{pa}{h}\left[1-\left(1-\frac{1}{2}\mu\right)\frac{\left(\sin\frac{\xi s}{\sqrt2}\mathfrak{Cof}\frac{\xi s}{\sqrt2}+\mathfrak{Sin}\frac{\xi s}{\sqrt2}\cos\frac{\xi s}{\sqrt2}\right)\cos\frac{\xi}{\sqrt2}\mathfrak{Cof}\frac{\xi}{\sqrt2}+\left(\sin\frac{\xi s}{\sqrt2}\mathfrak{Cof}\frac{\xi s}{\sqrt2}-\mathfrak{Sin}\frac{\xi s}{\sqrt2}\cos\frac{\xi s}{\sqrt2}\right)\sin\frac{\xi}{\sqrt2}\mathfrak{Sin}\frac{\xi}{\sqrt2}}{\sin\frac{\xi s}{\sqrt2}\cos\frac{\xi s}{\sqrt2}+\mathfrak{Sin}\frac{\xi s}{\sqrt2}\mathfrak{Cof}\frac{\xi s}{\sqrt2}}\right],$$

$$M_x = \frac{pah(1-\frac{1}{2}\mu)}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}\cdot\frac{-\left(\sin\frac{\xi\varrho}{\sqrt2}\mathfrak{Cof}\frac{\xi\varrho}{\sqrt2}+\mathfrak{Sin}\frac{\xi\varrho}{\sqrt2}\cos\frac{\xi\varrho}{\sqrt2}\right)\sin\frac{\xi}{\sqrt2}\mathfrak{Sin}\frac{\xi}{\sqrt2}+\left(\sin\frac{\xi\varrho}{\sqrt2}\mathfrak{Cof}\frac{\xi\varrho}{\sqrt2}-\mathfrak{Sin}\frac{\xi s}{\sqrt2}\cos\frac{\xi s}{\sqrt2}\right)\cos\frac{\xi}{\sqrt2}\mathfrak{Cof}\frac{\xi}{\sqrt2}}{\sin\frac{\xi s}{\sqrt2}\cos\frac{\xi s}{\sqrt2}+\mathfrak{Sin}\frac{\xi s}{\sqrt2}\mathfrak{Cof}\frac{\xi s}{\sqrt2}},$$

$$M_\varphi = \frac{pah\mu(1-\frac{1}{2}\mu)}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}\cdot\frac{-\left(\sin\frac{\xi s}{\sqrt2}\mathfrak{Cof}\frac{\xi s}{\sqrt2}+\mathfrak{Sin}\frac{\xi s}{\sqrt2}\cos\frac{\xi s}{\sqrt2}\right)\sin\frac{\xi}{\sqrt2}\mathfrak{Sin}\frac{\xi}{\sqrt2}+\left(\sin\frac{\xi s}{\sqrt2}\mathfrak{Cof}\frac{\xi s}{\sqrt2}-\mathfrak{Sin}\frac{\xi s}{\sqrt2}\cos\frac{\xi s}{\sqrt2}\right)\cos\frac{\xi}{\sqrt2}\mathfrak{Cof}\frac{\xi}{\sqrt2}}{\sin\frac{\xi s}{\sqrt2}\cos\frac{\xi s}{\sqrt2}+\mathfrak{Sin}\frac{\xi s}{\sqrt2}\mathfrak{Cof}\frac{\xi s}{\sqrt2}},$$

$$Q = \frac{p\sqrt{ah}\,(1-\frac{1}{2}\mu)}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}\cdot\frac{-\sin\frac{\xi s}{\sqrt2}\mathfrak{Cof}\frac{\xi s}{\sqrt2}\sin\frac{\xi}{\sqrt2}\mathfrak{Cof}\frac{\xi}{\sqrt2}-\mathfrak{Sin}\frac{\xi s}{\sqrt2}\cos\frac{\xi s}{\sqrt2}\mathfrak{Sin}\frac{\xi}{\sqrt2}\cos\frac{\xi}{\sqrt2}}{\sin\frac{\xi s}{\sqrt2}\cos\frac{\xi s}{\sqrt2}+\mathfrak{Sin}\frac{\xi s}{\sqrt2}\mathfrak{Cof}\frac{\xi s}{\sqrt2}}.$$

Für die Zahlenwerte $a = 250$ cm, $l = 70$ cm, $h = 2{,}4$ cm, $p = 5$ kg/cm², $E = 2100000$ kg/cm², $\mu = 0{,}3$ ist der Verlauf dieser Funktionen aus Abb. 51 ersichtlich.

h) Beispiel 7.

Als zweites Beispiel sei ein länglicher Druckkessel mit eingespannten Enden betrachtet (Abb. 52). Ohne Berücksichtigung der Einspannung würde der Kessel sich unter dem konstanten Innendrucke p um das Maß

$$w^{(0)} = \frac{pa^2}{hE}$$

gleichmäßig weiten; die Verformungsbehinderung an den Enden erzeugt jedoch einen zusätzlichen Biegungszustand. Im Gegensatz zu dem vorigen Beispiel können sich hier die von den Rändern eingeleiteten Verbiegungen nicht überlagern, da die Länge des Kessels den sogenannten Randabklingungsbereich der Biegungsspannungen um ein Vielfaches übertrifft. Der Biegungszustand spaltet sich gewissermaßen in einen Biegungszustand am unte-

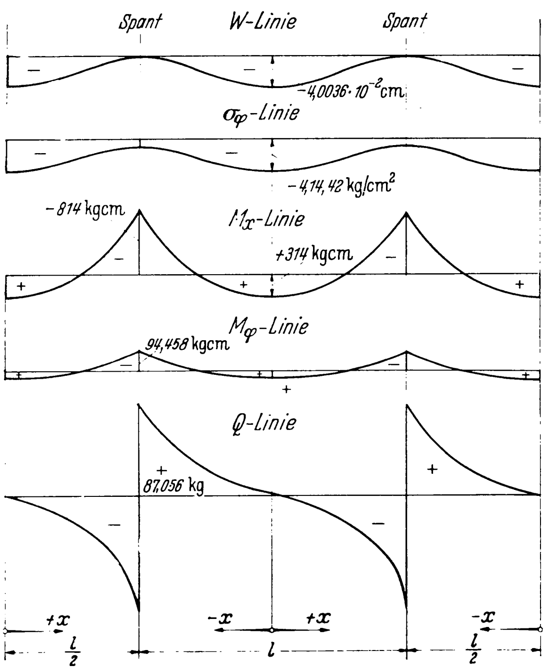

Abb. 51.

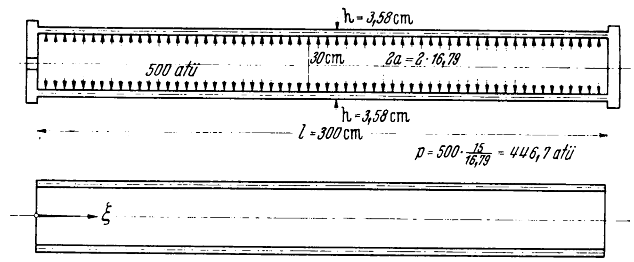

Abb. 52 u. 53.

ren und einen am oberen Rande; das dazwischen liegende Kesselstück bleibt gerade und erfährt die konstante Weitung $w^{(0)}$.

Nach den gegebenen Erläuterungen kann die Untersuchung auf einen der Ränder, beispielsweise auf den unteren, beschränkt werden; wird hierfür das Bezugssystem gemäß Abb. 53 gewählt, so können die Phasen ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 sämtlich null gesetzt werden. Damit nun der geschilderte Randabklingungsvorgang eintreten kann, ist nur ein Lösungsansatz brauchbar, der mit wachsendem ξ nach null geht. Dieser Forderung entspricht der zweite der allgemeinen Lösungsansätze, wenn gemäß

$$w = C_3 e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \cos\frac{\xi}{\sqrt{2}} + C_4 e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \sin\frac{\xi}{\sqrt{2}}$$

nur die mit C_3 und C_4 multiplizierten Partikularintegrale beibehalten werden.

Für die Bestimmung der Integrationskonstanten stehen hier ähnlich wie im vorigen Beispiele die Randbedingungen

$$w^{(0)} + w = 0,$$

$$\frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{bzw.} \quad \xi = 0$$

zur Verfügung. Werden diese in die oben entwickelten allgemeinen Formeln eingeführt, so ergibt sich

$$\frac{pa^2}{hE} + C_3 = 0, \qquad -C_3 \overset{*}{\cos}(0) - C_4 \overset{*}{\sin}(0) = 0$$

oder aufgelöst

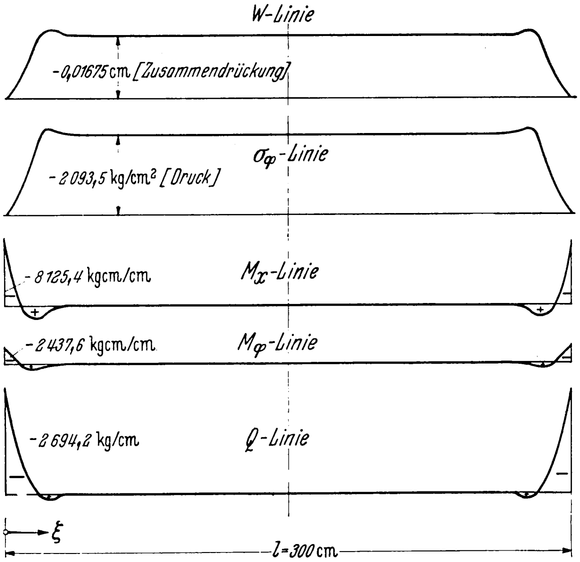

Abb. 54.

$$C_3 = -\frac{pa^2}{hE}, \qquad C_4 = -C_3 \overset{*}{\operatorname{cotg}}(0) = -C_3 \operatorname{cotg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = +C_3.$$

Damit liegt der zusätzliche Biegungszustand fest. Ähnlich wie im vorigen Beispiele folgt durch Überlagerung mit dem Membranzustand unter Beachtung von (82)

$$\left.\begin{aligned}
w &= \frac{pa^2}{hE}\left[1 - e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \sin\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{pa^2\sqrt{2}}{hE}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \overset{*}{\cos}\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right],\\
\sigma_\varphi &= \frac{pa}{h}\left[1 - e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \sin\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{pa\sqrt{2}}{h}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \overset{*}{\cos}\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right],\\
M_x &= \frac{pah}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}\, e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \sin\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)\Big] = -\frac{pah}{\sqrt{6(1-\mu^2)}}\, e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \overset{*}{\sin}\frac{\xi}{\sqrt{2}},\\
M_\varphi &= \frac{pah\mu}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}\, e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \sin\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{pah\mu}{\sqrt{6(1-\mu^2)}}\, e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \overset{*}{\sin}\frac{\xi}{\sqrt{2}},\\
Q_x &= \frac{p\sqrt{ah}}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}\, e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}}\left(\overset{*}{\sin}\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \overset{*}{\cos}\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{p\sqrt{ah}}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}\, e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \cos\frac{\xi}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}\right\}$$

In diesen Formeln tritt der große rechnerische Vorteil, den die Einführung der trigonometrischen Sternfunktionen bietet, anschaulich in Erscheinung. Für die Zahlenwerte

$$a = 16{,}79 \text{ cm}, \quad l = 300 \text{ cm}, \quad h = 3{,}58 \text{ cm}, \quad p = 446{,}7 \text{ kg/cm}^2, \quad E = 2\,100\,000 \text{ kg/cm}^2, \quad \mu = 0{,}3$$

ist der Verlauf der einzelnen Funktionen aus Abb. 54 ersichtlich.

12. Transformation der Differentialgleichungen von 11.

a) Simultane Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rein trigonometrischen Lösungen.

Wird in den Lösungsfunktionen (208) α mit $i\alpha$, u mit iu, C_1 mit $i(C_1 + C_2)$, C_2 mit $C_1 - C_2$, C_3 mit $i(C_3 + C_4)$, C_4 mit $-(C_3 - C_4)$ vertauscht und werden die Phasen z_1, z_2, z_3, z_4 vorübergehend sämtlich null gesetzt, so folgt, wenn gleichzeitig die Gleichung für u durch i dividiert wird,

$$\left.\begin{aligned} u &= (C_1 + C_2)\cos(\omega z \mathfrak{Cof}\,\alpha)\cos(\omega z \mathfrak{Sin}\,\alpha) + (C_1 - C_2)\sin(\omega z \mathfrak{Cof}\,\alpha)\sin(\omega z \mathfrak{Sin}\,\alpha) + \\ &\quad + (C_3 + C_4)\sin(\omega z \mathfrak{Cof}\,\alpha)\cos(\omega z \mathfrak{Sin}\,\alpha) - (C_3 - C_4)\cos(\omega z \mathfrak{Cof}\,\alpha)\sin(\omega z \mathfrak{Sin}\,\alpha)\,, \\ v &= (C_1 + C_2)\sin(\omega z \mathfrak{Cof}\,\alpha)\sin(\omega z \mathfrak{Sin}\,\alpha) + (C_1 - C_2)\cos(\omega z \mathfrak{Cof}\,\alpha)\cos(\omega z \mathfrak{Sin}\,\alpha) - \\ &\quad - (C_3 + C_4)\cos(\omega z \mathfrak{Cof}\,\alpha)\sin(\omega z \mathfrak{Sin}\,\alpha) + (C_3 - C_4)\sin(\omega z \mathfrak{Cof}\,\alpha)\cos(\omega z \mathfrak{Sin}\,\alpha)\,. \end{aligned}\right\}$$

Die Zusammenfassung unter Berücksichtigung von (49) und (120) liefert

$$\left.\begin{aligned} u &= C_1\cos(\omega z e^{-\alpha}) + C_2\cos(\omega z e^{+\alpha}) + C_3\sin(\omega z e^{-\alpha}) + C_4\sin(\omega z e^{+\alpha})\,, \\ v &= C_1\cos(\omega z e^{-\alpha}) - C_2\cos(\omega z e^{+\alpha}) + C_3\sin(\omega z e^{-\alpha}) - C_4\sin(\omega z e^{+\alpha})\,. \end{aligned}\right\}$$

Werden hierin nun nachträglich wieder Phasen eingeschoben und wird die Transformation auch in den Differentialgleichungen (208) berücksichtigt, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dz^2} + u\omega^2\,\mathfrak{Cof}\,2\alpha - v\omega^2\,\mathfrak{Sin}\,2\alpha = 0\,, \\ &\frac{d^2v}{dz^2} + v\omega^2\,\mathfrak{Cof}\,2\alpha - u\omega^2\,\mathfrak{Sin}\,2\alpha = 0\,, \\ &u = C_1\cos[\omega(z-z_1)e^{-\alpha}] + C_2\cos[\omega(z-z_2)e^{+\alpha}] + C_3\sin[\omega(z-z_3)e^{-\alpha}] + C_4\sin[\omega(z-z_4)\,e^{+\alpha}]\,, \\ &v = C_1\cos[\omega(z-z_1)e^{-\alpha}] - C_2\cos[\omega(z-z_2)e^{+\alpha}] + C_3\sin[\omega(z-z_3)e^{-\alpha}] - C_4\sin[\omega(z-z_4)e^{+\alpha}]\,. \end{aligned}\right\} \quad (230)$$

Mit den Transformationen $\omega^2\,\mathfrak{Cof}\,2\alpha = a\,,\quad \omega^2\,\mathfrak{Sin}\,2\alpha = -b$

und den daraus in Verbindung mit (108) und (143) folgenden Beziehungen

$$a^2 - b^2 = \omega^4\,,\qquad \omega = \sqrt[4]{a^2 - b^2}\,,\qquad \frac{a}{b} = -\mathfrak{Cotg}\,2\alpha\,,\qquad \alpha = -\frac{1}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\,\frac{a}{b}\,,$$

$$e^{\alpha} = e^{-\frac{1}{2}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\frac{a}{b}} = \left(e^{+\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\frac{a}{b}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{\frac{a-b}{a+b}}\,,\qquad \omega e^{\alpha} = \sqrt{a-b}\,,$$

$$e^{-\alpha} = e^{+\frac{1}{2}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\frac{a}{b}} = \left(e^{+\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\frac{a}{b}}\right)^{+\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)^{+\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{\frac{a+b}{a-b}}\,,\qquad \omega e^{-\alpha} = \sqrt{a+b}\,,$$

geht (216) in

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dz^2} + au + bv = 0\,, && u = C_1\cos\left[(z-z_1)\sqrt{a+b}\right] + C_2\cos\left[(z-z_2)\sqrt{a-b}\right] \\ & && \quad + C_3\sin\left[(z-z_3)\sqrt{a+b}\right] + C_4\sin\left[(z-z_4)\sqrt{a-b}\right]\,, \\ &\frac{d^2v}{dz^2} + av + bu = 0\,, && v = C_1\cos\left[(z-z_1)\sqrt{a+b}\right] - C_2\cos\left[(z-z_2)\sqrt{a-b}\right] \\ & && \quad + C_3\sin\left[(z-z_3)\sqrt{a+b}\right] - C_4\sin\left[(z-z_4)\sqrt{a-b}\right]\,, \end{aligned}\right\} \quad (231)$$

über. Die darin enthaltene Lösung gilt zunächst nur für $b < a$. Sie läßt sich aber in Verbindung mit (96) leicht auch auf $b > a$ umschreiben. Das gleiche gilt für negative a- oder b-Werte.

Im Falle $a = -b$ bzw. $a = +b$ artet (231) aus, indem die mit C_3 bzw. C_4 multiplizierten Partikularintegrale null werden. Um die Ersatzlösungen zu finden, werden ähnlich wie im Anschluß an (196) an Stelle von C_3 bzw. C_4 die neuen Konstanten

$$\frac{C_3}{\sqrt{a+b}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{C_4}{\sqrt{a-b}}$$

eingeführt, mit denen die beiden Partikularintegrale die Formen

$$(z - z_3)\,\frac{\sin\left[(z-z_3)\sqrt{a+b}\right]}{(z-z_3)\sqrt{a+b}} \quad \text{bzw.} \quad (z - z_4)\,\frac{\sin\left[(z-z_4)\sqrt{a-b}\right]}{(z-z_4)\sqrt{a-b}}$$

annehmen, die beim Grenzübergange für $a \to -b$ bzw. $a \to b$ in

$$z - z_3 \quad \text{bzw.} \quad z - z_4$$

übergehen.

b) Allgemeine Lösungen der simultanen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2u}{dz^2} \pm au \pm bv = 0,\qquad \frac{d^2v}{dz^2} \pm av \pm bu = 0.$$

In Zusammenfassung der verschiedenen Fälle ergeben sich, teilweise unter Einführung neuer Konstanten, für die Lösungen der beiden simultanen Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dz^2} \pm au \pm bv = 0 \\ &\frac{d^2v}{dz^2} \pm av \pm bu = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (a \text{ und } b \text{ positive, reelle Größen})$$

die nachfolgenden Abgrenzungen:

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{\dfrac{d^2u}{dz^2}+au+bv=0\,,\quad \dfrac{d^2v}{dz^2}+av+bu=0\,,} \\[2ex]
b<a & \begin{aligned} u &= C_1\cos\left[(z-z_1)\sqrt{a+b}\right]+C_2\cos\left[(z-z_2)\sqrt{a-b}\right]+C_3\sin\left[(z-z_3)\sqrt{a+b}\right]+ \\ &\quad + C_4\sin\left[(z-z_4)\sqrt{a-b}\right]\,, \\ v &= C_1\cos\left[(z-z_1)\sqrt{a+b}\right]-C_2\cos\left[(z-z_2)\sqrt{a-b}\right]+C_3\sin\left[(z-z_3)\sqrt{a+b}\right]- \\ &\quad - C_4\sin\left[(z-z_4)\sqrt{a-b}\right]\,, \end{aligned} \\[2ex]
b=a & \begin{aligned} u &= C_1\cos\left[(z-z_1)\sqrt{2a}\right]+C_2+C_3\sin\left[(z-z_3)\sqrt{2a}\right]+C_4z\,, \\ v &= C_1\cos\left[(z-z_1)\sqrt{2a}\right]-C_2+C_3\sin\left[(z-z_3)\sqrt{2a}\right]-C_4z\,, \end{aligned} \\[2ex]
b>a & \begin{aligned} u &= C_1\cos\left[(z-z_1)\sqrt{a+b}\right]+C_2\mathfrak{Cof}\left[(z-z_2)\sqrt{b-a}\right]+C_3\sin\left[(z-z_3)\sqrt{a+b}\right]+ \\ &\quad + C_4\mathfrak{Sin}\left[(z-z_4)\sqrt{b-a}\right]\,, \\ v &= C_1\cos\left[(z-z_1)\sqrt{a+b}\right]-C_2\mathfrak{Cof}\left[(z-z_2)\sqrt{b-a}\right]+C_3\sin\left[(z-z_3)\sqrt{a+b}\right]- \\ &\quad - C_4\mathfrak{Sin}\left[(z-z_4)\sqrt{b-a}\right]\,. \end{aligned}
\end{array}
\tag{232}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{\dfrac{d^2u}{dz^2}-au+bv=0\,,\quad \dfrac{d^2v}{dz^2}-av+bu=0\,,} \\[2ex]
a<b & \begin{aligned} u &= C_1\cos\left[(z-z_1)\sqrt{b-a}\right]+C_2\mathfrak{Cof}\left[(z-z_2)\sqrt{b+a}\right]+C_3\sin\left[(z-z_3)\sqrt{b-a}\right]+ \\ &\quad + C_4\mathfrak{Sin}\left[(z-z_4)\sqrt{b+a}\right]\,, \\ v &= C_1\cos\left[(z-z_1)\sqrt{b-a}\right]-C_2\mathfrak{Cof}\left[(z-z_2)\sqrt{b+a}\right]+C_3\sin\left[(z-z_3)\sqrt{b-a}\right]- \\ &\quad - C_4\mathfrak{Sin}\left[(z-z_4)\sqrt{b+a}\right]\,, \end{aligned} \\[2ex]
a=b & \begin{aligned} u &= C_1+C_2\mathfrak{Cof}\left[(z-z_2)\sqrt{2a}\right]+C_3z+C_4\mathfrak{Sin}\left[(z-z_4)\sqrt{2a}\right]\,, \\ v &= C_1-C_2\mathfrak{Cof}\left[(z-z_2)\sqrt{2a}\right]+C_3z-C_4\mathfrak{Sin}\left[(z-z_4)\sqrt{2a}\right]\,, \end{aligned} \\[2ex]
a>b & \begin{aligned} u &= C_1\mathfrak{Cof}\left[(z-z_1)\sqrt{a-b}\right]+C_2\mathfrak{Cof}\left[(z-z_2)\sqrt{b+a}\right]+C_3\mathfrak{Sin}\left[(z-z_3)\sqrt{a-b}\right]+ \\ &\quad + C_4\mathfrak{Sin}\left[(z-z_4)\sqrt{b+a}\right]\,, \\ v &= C_1\mathfrak{Cof}\left[(z-z_1)\sqrt{a-b}\right]-C_2\mathfrak{Cof}\left[(z-z_2)\sqrt{b+a}\right]+C_3\mathfrak{Sin}\left[(z-z_3)\sqrt{a-b}\right]- \\ &\quad - C_4\mathfrak{Sin}\left[(z-z_4)\sqrt{b+a}\right]\,. \end{aligned}
\end{array}
\tag{233}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{\dfrac{d^2u}{dz^2}+au-bv=0\,,\quad \dfrac{d^2v}{dz^2}+av-bu=0\,,} \\[2ex]
b<a & \begin{aligned} u &= C_1\cos\left[(z-z_1)\sqrt{a-b}\right]+C_2\cos\left[(z-z_2)\sqrt{a+b}\right]+C_3\sin\left[(z-z_3)\sqrt{a-b}\right]+ \\ &\quad + C_4\sin\left[(z-z_4)\sqrt{a+b}\right]\,, \\ v &= C_1\cos\left[(z-z_1)\sqrt{a-b}\right]-C_2\cos\left[(z-z_2)\sqrt{a+b}\right]+C_3\sin\left[(z-z_3)\sqrt{a-b}\right]- \\ &\quad - C_4\sin\left[(z-z_4)\sqrt{a+b}\right]\,, \end{aligned} \\[2ex]
b=a & \begin{aligned} u &= C_1+C_2\cos\left[(z-z_2)\sqrt{2a}\right]+C_3z+C_4\sin\left[(z-z_4)\sqrt{2a}\right]\,, \\ v &= C_1-C_2\cos\left[(z-z_2)\sqrt{2a}\right]+C_3z-C_4\sin\left[(z-z_4)\sqrt{2a}\right]\,, \end{aligned} \\[2ex]
b>a & \begin{aligned} u &= C_1\mathfrak{Cof}\left[(z-z_1)\sqrt{b-a}\right]+C_2\cos\left[(z-z_2)\sqrt{a+b}\right]+C_3\mathfrak{Sin}\left[(z-z_3)\sqrt{b-a}\right]+ \\ &\quad + C_4\sin\left[(z-z_4)\sqrt{a+b}\right]\,, \\ v &= C_1\mathfrak{Cof}\left[\ \ldots_2)\sqrt{b-a}\right]-C_2\cos\left[(z-z_2)\sqrt{a+b}\right]+C_3\mathfrak{Sin}\left[(z-z_3)\sqrt{b-a}\right]- \\ &\quad - C_4\sin\left[(z-z_4)\sqrt{a+b}\right]\,. \end{aligned}
\end{array}
\tag{234}
$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2u}{dz^2}-a\,u-b\,v=0\,,\\
&\frac{d^2v}{dz^2}-a\,v-b\,u=0\,,\\
a<b\quad & u=C_1\mathfrak{Cof}\left[(z-z_1)\sqrt{b+a}\right]+C_2\cos\left[(z-z_2)\sqrt{b-a}\right]+C_3\mathfrak{Sin}\left[(z-z_3)\sqrt{b+a}\right]+\\
&\qquad +C_4\sin\left[(z-z_4)\sqrt{b-a}\right]\,,\\
& v=C_1\mathfrak{Cof}\left[(z-z_1)\sqrt{b+a}\right]-C_2\cos\left[(z-z_2)\sqrt{b-a}\right]+C_3\mathfrak{Sin}\left[(z-z_3)\sqrt{b+a}\right]-\\
&\qquad -C_4\sin\left[(z-z_4)\sqrt{b-a}\right]\,,\\
a=b\quad & u=C_1\mathfrak{Cof}\left[(z-z_1)\sqrt{2a}\right]+C_2+C_3\mathfrak{Sin}\left[(z-z_3)\sqrt{2a}\right]+C_4z\,,\\
& v=C_1\mathfrak{Cof}\left[(z-z_1)\sqrt{2a}\right]-C_2+C_3\mathfrak{Sin}\left[(z-z_3)\sqrt{2a}\right]-C_4z\,,\\
a>b\quad & u=C_1\mathfrak{Cof}\left[(z-z_1)\sqrt{b+a}\right]+C_2\mathfrak{Cof}\left[(z-z_2)\sqrt{a-b}\right]+C_3\mathfrak{Sin}\left[(z-z_3)\sqrt{b+a}\right]+\\
&\qquad +C_4\mathfrak{Sin}\left[(z-z_4)\sqrt{a-b}\right]\,,\\
& v=C_1\mathfrak{Cof}\left[(z-z_1)\sqrt{b+a}\right]-C_2\mathfrak{Cof}(z-z_2)\sqrt{a-b}\,]+C_3\mathfrak{Sin}\left[(z-z_3)\sqrt{b+a}\right]-\\
&\qquad -C_4\mathfrak{Sin}\left[(z-z_4)\sqrt{a-b}\right]\,.
\end{aligned}\right\}\tag{235}$$

Die Differentialgleichungen (232) bis (235) stellen Sonderfälle der Differentialgleichungen der einfach gekoppelten harmonischen Schwingungen dar. Echte Schwingungen ergeben sich hierbei nur für $b<a$ und für positive Koeffizienten im zweiten Gliede, d. h. für positive Rückstellkräfte.

c) Allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\frac{d^4w}{dz^4}\,2\pm a\frac{d^2w}{dz^2}+(a^2-b^2)\,w=0.$

Ähnlich wie unter Ziffer 11 folgt aus den simultanen Differentialgleichungen (232) bis (235) die äquivalente Differentialgleichung vierter Ordnung

$$\frac{d^4w}{dz^4}\pm 2a\frac{d^2w}{dz^2}+(a^2-b^2)\,w=0\,.$$

Die zugehörigen Lösungen sind bereits in (232) bis (235) niedergelegt; es folgt daher

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^4w}{dz^4}+2a\frac{d^2w}{dz^2}+(a^2-b^2)w=0\,,\\
b<a\quad & w=C_1\cos\left[(z-z_1)\sqrt{a+b}\right]+C_2\cos\left[(z-z_2)\sqrt{a-b}\right]+C_3\sin\left[(z-z_3)\sqrt{a+b}\right]+\\
&\qquad +C_4\sin\left[(z-z_4)\sqrt{a-b}\right]\,,\\
b=a\quad & w=C_1\cos\left[(z-z_1)\sqrt{2a}\right]+C_2+C_3\sin\left[(z-z_3)\sqrt{2a}\right]+C_4z\,,\\
b>a\quad & w=C_1\cos\left[(z-z_1)\sqrt{a+b}\right]+C_2\mathfrak{Cof}\left[(z-z_2)\sqrt{b-a}\right]+C_3\sin\left[(z-z_3)\sqrt{a+b}\right]+\\
&\qquad +C_4\mathfrak{Sin}\left[(z-z_4)\sqrt{b-a}\right]\,.
\end{aligned}\right\}\tag{236}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^4w}{dz^4}-2a\frac{d^2w}{dz^2}+(a^2-b^2)w=0\,,\\
b<a\quad & w=C_1\cos\left[(z-z_1)\sqrt{b-a}\right]+C_2\mathfrak{Cof}\left[(z-z_2)\sqrt{a+b}\right]+C_3\sin\left[(z-z_3)\sqrt{b-a}\right]+\\
&\qquad +C_4\mathfrak{Sin}\left[(z-z_4)\sqrt{a+b}\right]\,,\\
b=a\quad & w=C_1+C_2\mathfrak{Cof}\left[(z-z_2)\sqrt{2a}\right]+C_3z+C_4\mathfrak{Sin}\left[(z-z_4)\sqrt{2a}\right]\,,\\
b>a\quad & w=C_1\mathfrak{Cof}\left[(z-z_1)\sqrt{a-b}\right]+C_2\mathfrak{Cof}\left[(z-z_2)\sqrt{a+b}\right]+C_3\mathfrak{Sin}\left[(z-z_3)\sqrt{a-b}\right]+\\
&\qquad +C_4\mathfrak{Sin}\left[(z-z_4)\sqrt{a+b}\right]\,.
\end{aligned}\right\}\tag{237}$$

d) Beispiel 8.

Um ein Beispiel anzuschließen, sei gemäß Abb. 55 ein Doppel-Pendelschwinger betrachtet, bei dem die Koppelung durch eine die Pendelstangen verbindende elastische Feder erfolgt. Die Länge beider Pendel sei l, das schwingende Gewicht G. Die Feder im Abstande a von der Aufhängung sei bei lotrechter Lage beider Pendel entspannt; ihre Charakteristik folge dem Gesetze

$$S=cu\,,$$

wobei S die Federspannkraft, u die Verlängerung bezeichnen soll. Bezogen auf eine lotrechte Lage beider Pendel seien φ_1 und φ_2 die Ausschlagwinkel, u_1 und u_2 die Wege der Federanschlußpunkte. Dann ergibt sich durch Anwendung des Drehmomentensatzes der Mechanik auf jeden der beiden Schwinger

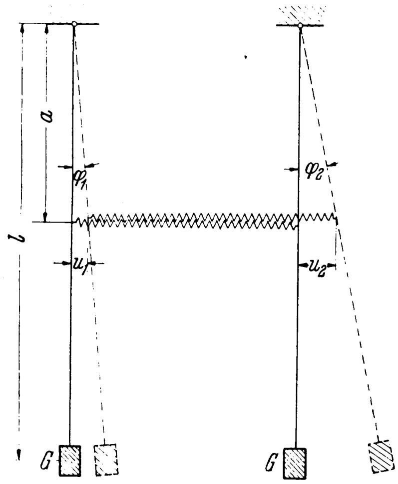

Abb. 55.

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= -Gl\sin\varphi_1 - Sa = J\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}\,, \\ M_2 &= -Gl\sin\varphi_2 + Sa = J\frac{d^2\varphi_2}{dt^2}\,. \end{aligned}\right\}$$

Hierin ist Federspannkraft S und Trägheitsmoment J gemäß

$$S = cu = c(u_1 - u_2)\,, \qquad J = m\,l^2 = \frac{G}{g}\,l^2$$

einzusetzen. Wird gleichzeitig mit J^{-1} multipliziert und alles auf die rechte Seite gebracht, so folgt

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi_1 + \frac{cga}{Gl^2}(u_1 - u_2) = 0\,, \\ \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi_2 + \frac{cga}{Gl^2}(u_2 - u_1) = 0\,. \end{aligned}\right\}$$

Können die Ausschläge als klein zugrunde gelegt werden, so ist

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi_1 &= \sim\varphi_1\,, & u_1 &= \sim a\varphi_1\,, \\ \sin\varphi_2 &= \sim\varphi_2\,, & u_2 &= \sim a\varphi_2\,, \end{aligned}\right\}$$

und man erhält

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \frac{g}{l}\left(1 + \frac{ca^2}{Gl^2}\right)\varphi_1 - \frac{gca^2}{Gl^2}\varphi_2 = 0\,, \\ \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \frac{g}{l}\left(1 + \frac{ca^2}{Gl}\right)\varphi_2 - \frac{gca^2}{Gl^2}\varphi_1 = 0\,. \end{aligned}\right\}$$

Diese Differentialgleichungen sind von der Form (234), und zwar ist $b < a$. Demgemäß lautet die allgemeine Lösung

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 = {} & C_1\cos\left[(t - t_1)\sqrt{\frac{g}{l}}\right] + C_2\cos\left[(t - t_2)\sqrt{\frac{g}{l}\left(1 + \frac{2ca^2}{Gl}\right)}\right] + C_3\sin\left[(t - t_3)\sqrt{\frac{g}{l}}\right] + \\ & + C_4\sin\left[(t - t_4)\sqrt{\frac{g}{l}\left(1 + \frac{2ca^2}{Gl}\right)}\right]\,, \\ \varphi_2 = {} & C_1\cos\left[(t - t_1)\sqrt{\frac{g}{l}}\right] - C_2\cos\left[(t - t_2)\sqrt{\frac{g}{l}\left(1 + \frac{2ca^2}{Gl}\right)}\right] + C_3\sin\left[(t - t_3)\sqrt{\frac{g}{l}}\right] - \\ & - C_4\sin\left[(t - t_4)\sqrt{\frac{g}{l}\left(1 + \frac{2ca^2}{Gl}\right)}\right]\,. \end{aligned}\right\}$$

Werden t_1 und t_2 nicht als vorgegebene Phasen, sondern als willkürliche Konstante aufgefaßt, so können C_3 und C_4 von vornherein null gesetzt werden. Damit verbleibt

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= C_1\cos\left[(t - t_1)\sqrt{\frac{g}{l}}\right] + C_2\cos\left[(t - t_2)\sqrt{\frac{g}{l}\left(1 + \frac{2ca^2}{Gl}\right)}\right]\,, \\ \varphi_2 &= C_1\cos\left[(t - t_1)\sqrt{\frac{g}{l}}\right] - C_2\cos\left[(t - t_2)\sqrt{\frac{g}{l}\left(1 + \frac{2ca^2}{Gl}\right)}\right]\,. \end{aligned}\right\}$$

Die Differentiation nach t liefert die Winkelgeschwindigkeiten

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= -C_1\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\left[(t - t_1)\sqrt{\frac{g}{l}}\right] - C_2\sqrt{\frac{g}{l}\left(1 + \frac{2ca^2}{Gl}\right)}\sin\left[(t - t_2)\sqrt{\frac{g}{l}\left(1 + \frac{2ca^2}{Gl}\right)}\right]\,, \\ \omega_2 &= -C_1\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\left[(t - t_1)\sqrt{\frac{g}{l}}\right] + C_2\sqrt{\frac{g}{l}\left(1 + \frac{2ca^2}{Gl}\right)}\sin\left[(t - t_2)\sqrt{\frac{g}{l}\left(1 + \frac{2ca^2}{Gl}\right)}\right]\,. \end{aligned}\right\}$$

Die Integrationskonstanten folgen entsprechend den Anfangsbedingungen. Werden die Pendel zur Zeit $t = 0$ unter den Ausschlagwinkeln $\varphi_1 = \alpha$, $\varphi_2 = \beta$ losgelassen, so lauten die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha\,, & \omega_1 &= 0\,, \\ \varphi_2 &= \beta\,, & \omega_2 &= 0\,, \end{aligned} \qquad \text{für } t = 0\,.$$

Aus dem Verschwinden der Winkelgeschwindigkeiten für $t = 0$ ergeben sich sofort die Phasen

$$t_1 = 0\,, \qquad t_2 = 0\,.$$

Damit lauten die φ-Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= C_1 + C_2 \\ \beta &= C_1 - C_2 \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} C_1 &= \frac{\alpha+\beta}{2}\,, \\ C_2 &= \frac{\alpha-\beta}{2}\,. \end{aligned}\right\}$$

Die Einsetzung von t_1, t_2 und C_1, C_2 liefert die gesuchte Lösung in der Form

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\alpha+\beta}{2}\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right) + \frac{\alpha-\beta}{2}\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}\left(1+\frac{2ca^2}{Gl}\right)}\right)\,, \\ \varphi_2 &= \frac{\alpha+\beta}{2}\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right) - \frac{\alpha-\beta}{2}\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}\left(1+\frac{2ca^2}{Gl}\right)}\right)\,. \end{aligned}\right\}$$

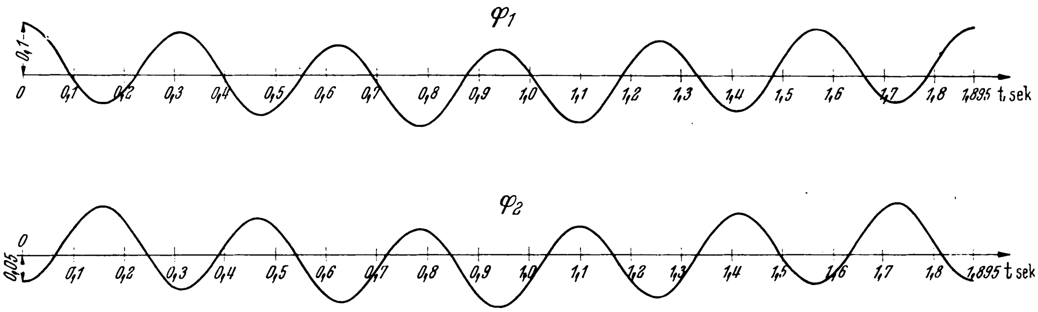

Abb. 56.

Für die Zahlenwerte $G = 10$ kg, $g = 981$ cm s^{-2}, $l = 80$ cm, $a = 50$ cm, $c = 0{,}5$ kg cm^{-2}, $\alpha = 0{,}10$, $\beta = -0{,}05$ ist der Schwingungsverlauf der beiden Grundschwingungen und der gekoppelten Schwingung aus Abb. 56 ersichtlich.

13. Durch Potenzfunktionen abgewandelte trigonometrisch-exponentielle Produktfunktionen.

Aus (31) liest man unmittelbar die Differentialgleichung

$$\frac{dw}{dz} - \frac{\lambda}{z}\,w = 0 \quad \text{mit} \quad w = C z^\lambda$$

ab. Werden hierin λ und C gemäß

$$\lambda = a + bi\,, \qquad C = C_1 - iC_2$$

als komplex zugrunde gelegt und z^λ nach (30) und (45) in der Form

$$z^\lambda = e^{\lambda \ln z} = e^{(a+bi)\ln z} = e^{a\ln z}[\cos(b\ln z) + i\sin(b\ln z)] = z^a[\cos(b\ln z) + i\sin(b\ln z)]$$

dargestellt, so folgt

$$\frac{dw}{dz} - \frac{a+bi}{z}\,w = 0\,, \qquad w = z^a\left[C_1\cos(b\ln z) + C_2\sin(b\ln z)\right] + iz^a\left[C_1\sin(b\ln z) - C_2\cos(b\ln z)\right].$$

Mit $w = u + iv$ ergibt sich hieraus nach dem bereits mehrfach beschriebenen Aufspaltungsverfahren das simultane Differentialgleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dz} - a\frac{u}{z} + b\frac{v}{z} &= 0\,, \\ \frac{dv}{dz} - a\frac{v}{z} - b\frac{u}{z} &= 0\,, \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} u &= C_1 z^a\cos(b\ln z) + C_2 z^a\sin(b\ln z)\,, \\ v &= C_1 z^a\sin(b\ln z) - C_2 z^a\cos(b\ln z)\,. \end{aligned}\right\} \tag{238}$$

Wird die Integralformel (31) unter Einführung der bestimmten Grenzen z_0 und z in der Form der Integralgleichung

$$\int_{z_0}^{z} \zeta^\lambda\,d\zeta - \frac{z^{\lambda+1} - z_0^{\lambda+1}}{\lambda+1} = 0$$

geschrieben und auch hier λ in der komplexen Form $\lambda = a + bi$ zugrundegelegt, so folgt

$$\int_{z_0}^{z} \zeta^a [\cos(b \ln \zeta) + i \sin(b \ln \zeta)]\, d\zeta = \frac{z^{a+1}[\cos(b \ln z) + i \sin(b \ln z)]}{a+1+ib} - \frac{z_0^{a+1}[\cos(b \ln z_0) + i \sin(b \ln z_0)]}{a+1+ib}$$

oder nach Erweiterung mit $a+1-ib$ und Aufspaltung nach Real- und Imaginärteilen

$$\left.\begin{aligned} \int_{z_0}^{z} \zeta^a \cos(b \ln \zeta)\, d\zeta &= \frac{a+1}{(a+1)^2+b^2}\left[z^{a+1}\cos(b\ln z) - z_0^{a+1}\cos(b \ln z_0)\right] + \\ &+ \frac{b}{(a+1)^2+b^2}\left[z^{a+1}\sin(b\ln z) - z_0^{a+1}\sin(b\ln z_0)\right] \quad , \\ \int_{z_0}^{z} \zeta^a \sin(b \ln \zeta)\, d\zeta &= \frac{a+1}{(a+1)^2+b^2}\left[z^{a+1}\sin(b\ln z) - z_0^{a+1}\sin(b \ln z_0)\right] - \\ &- \frac{b}{(a+1)^2+b^2}\left[z^{a+1}\cos(b\ln z) - z_0^{a+1}\cos(b\ln z_0)\right] \quad . \end{aligned}\right|$$

Mit den Veränderlichen

$$u = z^a \cos(b \ln z)\,, \quad v = z^a \sin(b \ln z)$$

entspricht diesen Gleichungen das Integralgleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \int_{z_0}^{z} u(\zeta)\, d\zeta - \frac{(a+1)(zu - z_0 u_0)}{(a+1)^2+b^2} - \frac{b(zv - z_0 v_0)}{(a+1)^2+b^2} = 0\,, &\quad u = z^a \cos(b \ln z)\,, \\ \int_{z_0}^{z} v(\zeta)\, d\zeta - \frac{(a+1)(zv - z_0 v_0)}{(a+1)^2+b^2} + \frac{b(zu - z_0 u_0)}{(a+1)^2+b^2} = 0\,, &\quad v = z^a \sin(b \ln z)\,. \end{aligned}\right\} \tag{239}$$

Durch (239) sind die unbestimmten Integrale der durch u und v dargestellten Funktionen unmittelbar gegeben. Da z_0 beim unbestimmten Integral willkürlich bleibt, kann es unbeschadet der Allgemeinheit zu null angenommen werden. Es folgt daher

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dz}[z^a \cos(b\ln z)] &= a z^{a-1}\cos(b\ln z) - b z^{a-1}\sin(b \ln z)\,, \\ \frac{d}{dz}[z^a \sin(b\ln z)] &= a z^{a-1}\sin(b\ln z) + b z^{a-1}\cos(b \ln z)\,. \end{aligned}\right\} \tag{240}$$

$$\left.\begin{aligned} \int z^a \cos(b\ln z)dz &= \frac{a+1}{(a+1)^2+b^2} z^{a+1}\cos(b\ln z) + \frac{b}{(a+1)^2+b^2} z^{a+1}\sin(b\ln z)\,, \\ \int z^a \sin(b\ln z)dz &= \frac{a+1}{(a+1)^2+b^2} z^{a+1}\sin(b\ln z) - \frac{b}{(a+1)^2+b^2} z^{a+1}\cos(b\ln z)\,. \end{aligned}\right\} \tag{241}$$

Wird in (238) die zweite Gleichung nach u aufgelöst und in die erste eingeführt oder die erste Gleichung nach v aufgelöst und in die zweite eingeführt, so ergibt sich in beiden Fällen die gleiche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Man erhält unter Vertauschung von u und v mit w

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1-2a}{z}\frac{dw}{dz} + \frac{a^2+b^2}{z^2} w = 0\,, \quad w = C_1 z^a \cos(b \ln z) + C_2 z^a \sin(b \ln z)\,. \tag{242}$$

Diese Differentialgleichung ist dem simultanen System (238) äquivalent.

Nun sei in (242) der Parameter b gemäß

$$b = \omega e^{i\alpha} = \omega\cos\alpha + i\omega\sin\alpha\,, \qquad b^2 = \omega^2 e^{2i\alpha} = \omega^2\cos 2\alpha + i\omega^2 \sin 2\alpha$$

als komplex zugrunde gelegt. Ferner seien C_1 und C_2 mit $C_1 + iC_2$ bzw. $C_3 - iC_4$ vertauscht. Dann folgt in Verbindung mit (128)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1-2a}{z}\frac{dw}{dz} + \frac{a^2+\omega^2\cos 2\alpha + i\omega^2\sin 2\alpha}{z^2} w = 0\,, \\ &w = (C_1 + iC_2) z^a [\cos(\omega\cos\alpha \ln z)\,\mathfrak{Cof}(\omega\sin\alpha\ln z) - i\sin(\omega\cos\alpha\ln z)\,\mathfrak{Sin}(\omega\sin\alpha\ln z)] + \\ &\quad + (C_3 - iC_4) z^a [\sin(\omega\cos\alpha\ln z)\,\mathfrak{Cof}(\omega\sin\alpha\ln z) + i\cos(\omega\cos\alpha\ln z)\,\mathfrak{Sin}(\omega\sin\alpha\ln z)]\,. \end{aligned}\right\} \tag{243}$$

Mit $w = u + iv$ ergibt sich hieraus das simultane System

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1-2a}{z}\frac{du}{dz} + \frac{a^2+\omega^2\cos 2\alpha}{z^2}u - \frac{\omega^2\sin 2\alpha}{z^2}v = 0\,,\\
&\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{1-2a}{z}\frac{dv}{dz} + \frac{a^2+\omega^2\cos 2\alpha}{z^2}v + \frac{\omega^2\sin 2\alpha}{z^2}u = 0\,,\\
&u = C_1 z^a \cos(\omega\cos\alpha\ln z)\mathfrak{Cof}(\omega\sin\alpha\ln z) + C_2 z^a \sin(\omega\cos\alpha\ln z)\mathfrak{Sin}(\omega\sin\alpha\ln z) + \\
&\quad + C_3 z^a \sin(\omega\cos\alpha\ln z)\mathfrak{Cof}(\omega\sin\alpha\ln z) + C_4 z^a\cos(\omega\cos\alpha\ln z)\mathfrak{Sin}(\omega\sin\alpha\ln z)\,,\\
&v = -C_1 z^a \sin(\omega\cos\alpha\ln z)\mathfrak{Sin}(\omega\sin\alpha\ln z) + C_2 z^a\cos(\omega\cos\alpha\ln z)\mathfrak{Cof}(\omega\sin\alpha\ln z) + \\
&\quad + C_3 z^a\cos(\omega\cos\alpha\ln z)\mathfrak{Sin}(\omega\sin\alpha\ln z) - C_4 z^a\sin(\omega\cos\alpha\ln z)\mathfrak{Cof}(\omega\sin\alpha\ln z)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{244}$$

In diesen Gleichungen lassen sich durch Einführung neuer Konstanten die Hyperbelfunktionen gegen Exponentialfunktionen austauschen. Wird dabei beachtet, daß

$$e^{\omega\sin\alpha\ln z} = e^{\ln z^{\omega\sin\alpha}} = z^{\omega\sin\alpha}, \qquad e^{-\omega\sin\alpha\ln z} = z^{-\omega\sin\alpha}$$

ist, so folgt unter gleichzeitiger Einschaltung trigonometrischer Phasen z_1, z_2, z_3, z_4

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1-2a}{z}\frac{du}{dz} + \frac{a^2+\omega^2\cos 2\alpha}{z^2}u - \frac{\omega^2\sin 2\alpha}{z^2}v = 0\,,\\
&\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{1-2a}{z}\frac{dv}{dz} + \frac{a^2+\omega^2\cos 2\alpha}{z^2}v + \frac{\omega^2\sin 2\alpha}{z^2}u = 0\,,\\
&u = C_1 z^{a+\omega\sin\alpha}\cos\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_1}\right) + C_2 z^{a+\omega\sin\alpha}\sin\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_2}\right) + \\
&\quad + C_3 z^{a-\omega\sin\alpha}\cos\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_3}\right) + C_4 z^{a-\omega\sin\alpha}\sin\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_4}\right),\\
&v = -C_1 z^{a+\omega\sin\alpha}\sin\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_1}\right) + C_2 z^{a+\omega\sin\alpha}\cos\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_2}\right) + \\
&\quad + C_3 z^{a-\omega\sin\alpha}\sin\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_3}\right) - C_4 z^{a-\omega\sin\alpha}\cos\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_4}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{245}$$

Für die Ableitungen und Integrale der in (245) auftretenden Lösungsfunktionen erhält man in Verbindung mit (240) und (241)

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dz} &= C_1 z^{a-1+\omega\sin\alpha}\left[(a+\omega\sin\alpha)\cos\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_1}\right) - \omega\cos\alpha\sin\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_1}\right)\right] + \\
&+ C_2 z^{a-1+\omega\sin\alpha}\left[(a+\omega\sin\alpha)\sin\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_2}\right) + \omega\cos\alpha\cos\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_2}\right)\right] + \\
&+ C_3 z^{a-1-\omega\sin\alpha}\left[(a-\omega\sin\alpha)\cos\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_3}\right) - \omega\cos\alpha\sin\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_3}\right)\right] + \\
&+ C_4 z^{a-1-\omega\sin\alpha}\left[(a-\omega\sin\alpha)\cos\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_4}\right) + \omega\cos\alpha\cos\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_4}\right)\right].
\end{aligned} \tag{246}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dz} &= -C_1 z^{a-1+\omega\sin\alpha}\left[(a+\omega\sin\alpha)\sin\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_1}\right) + \omega\cos\alpha\cos\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_1}\right)\right] + \\
&+ C_2 z^{a-1+\omega\sin\alpha}\left[(a+\omega\sin\alpha)\cos\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_2}\right) - \omega\cos\alpha\sin\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_2}\right)\right] + \\
&+ C_3 z^{a-1-\omega\sin\alpha}\left[(a-\omega\sin\alpha)\sin\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_3}\right) + \omega\cos\alpha\cos\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_3}\right)\right] - \\
&- C_4 z^{a-1-\omega\sin\alpha}\left[(a-\omega\sin\alpha)\cos\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_4}\right) - \omega\cos\alpha\sin\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_4}\right)\right].
\end{aligned} \tag{247}$$

$$\begin{aligned}
\int u\,dz &= C_1 z^{a+1+\omega\sin\alpha}\frac{(a+1+\omega\sin\alpha)\cos\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_1}\right) + \omega\cos\alpha\sin\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_1}\right)}{(a+1+\omega\sin\alpha)^2+(\omega\cos\alpha)^2} + \\
&+ C_2 z^{a+1+\omega\sin\alpha}\frac{(a+1+\omega\sin\alpha)\sin\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_2}\right) - \omega\cos\alpha\cos\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_2}\right)}{(a+1+\omega\sin\alpha)^2+(\omega\cos\alpha)^2} + \\
&+ C_3 z^{a+1-\omega\sin\alpha}\frac{(a+1-\omega\sin\alpha)\cos\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_3}\right) + \omega\cos\alpha\sin\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_3}\right)}{(a+1-\omega\sin\alpha)^2+(\omega\cos\alpha)^2} + \\
&+ C_4 z^{a+1-\omega\sin\alpha}\frac{(a+1-\omega\sin\alpha)\sin\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_4}\right) - \omega\sin\alpha\cos\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_4}\right)}{(a+1-\omega\sin\alpha)^2+(\omega\cos\alpha)^2}.
\end{aligned} \tag{248}$$

$$\left.\begin{aligned}
\int v\,dz = &-C_1 z^{a+1+\omega\sin\alpha}\,\frac{(a+1+\omega\sin\alpha)\sin\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_1}\right)-\omega\cos\alpha\cos\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_1}\right)}{(a+1+\omega\sin\alpha)^2+(\omega\cos\alpha)^2}+\\
&+C_2 z^{a+1+\omega\sin\alpha}\,\frac{(a+1+\omega\sin\alpha)\cos\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_2}\right)+\omega\cos\alpha\sin\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_2}\right)}{(a+1+\omega\sin\alpha)^2+(\omega\cos\alpha)^2}+\\
&+C_3 z^{a+1-\omega\sin\alpha}\,\frac{(a+1-\omega\sin\alpha)\sin\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_3}\right)-\omega\cos\alpha\cos\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_3}\right)}{(a+1-\omega\sin\alpha)^2+(\omega\cos\alpha)^2}-\\
&-C_4 z^{a+1-\omega\sin\alpha}\,\frac{(a+1-\omega\sin\alpha)\cos\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_4}\right)+\omega\cos\alpha\sin\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_4}\right)}{(a+1-\omega\sin\alpha)^2+(\omega\cos\alpha)^2}.
\end{aligned}\right\}\quad(249)$$

Wird in (245) die zweite Gleichung nach u aufgelöst und in die erste eingeführt, so folgt eine Differentialgleichung vierter Ordnung für v; derselben Differentialgleichung genügt auch u. Unter Vertauschung von u und v mit w erhält man

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^4w}{dz^4}+\frac{6-4a}{z}\frac{d^3w}{dz^3}+\frac{7-12a+6a^2+2\omega^2\cos2\alpha}{z^2}\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{(1-2a)(1-2a+2a^2+2\omega^2\cos2\alpha)}{z^3}\frac{dw}{dz}+\\
&\quad+\frac{(a^2+\omega^2\cos2\alpha)^2+(\omega^2\sin2\alpha)^2}{z^4}w=0\qquad,\\
&w=C_1z^{a+\omega\sin\alpha}\cos\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_1}\right)+C_2z^{a+\omega\sin\alpha}\sin\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_2}\right)+\\
&\quad+C_3z^{a-\omega\sin\alpha}\cos\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_3}\right)+C_4z^{a-\omega\sin\alpha}\sin\left(\omega\cos\alpha\ln\frac{z}{z_4}\right).
\end{aligned}\right\}\quad(250)$$

Diese Differentialgleichung ist dem Systeme (245) äquivalent.

In den Fällen der Anwendung pflegt (245) gewöhnlich in der allgemeineren Form

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{\lambda_1}{z}\frac{du}{dz}+\frac{\lambda_2}{z^2}u-\frac{\lambda_3}{z^2}v=0\,;\\
\frac{d^2v}{dz^2}+\frac{\lambda_1}{z}\frac{dv}{dz}+\frac{\lambda_2}{z^2}v+\frac{\lambda_3}{z^2}u=0\,,
\end{aligned}\right\}\;.\quad(251)$$

gegeben zu sein. Den Übergang zu den in (245) bis (250) auftretenden Größen vermitteln dann die Transformationen

$$\left.\begin{aligned}
&a=\frac{1-\lambda_1}{2},\quad \omega^2\cos2\alpha=\lambda_2-\left(\frac{1-\lambda_1}{2}\right)^2,\quad \omega^2\sin2\alpha=\lambda_3,\quad \omega=\sqrt[4]{\left[\lambda_2-\left(\frac{1-\lambda_1}{2}\right)^2\right]^2+\lambda_3^2}\,,\\
&\omega\sin\alpha=\sqrt{-\frac{1}{2}\left[\lambda_2-\left(\frac{1-\lambda_1}{2}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\sqrt{\left[\lambda_2-\left(\frac{1-\lambda_1}{2}\right)^2\right]^2+\lambda_3^2}}\,,\\
&\omega\cos\alpha=\sqrt{+\frac{1}{2}\left[\lambda_2-\left(\frac{1-\lambda_1}{2}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\sqrt{\left[\lambda_2-\left(\frac{1-\lambda_1}{2}\right)^2\right]^2+\lambda_3^2}}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(252)$$

Beispiele für die Anwendung der Formeln dieser Ziffer finden sich insbesondere in der Elastizitätstheorie. So führen verschiedene Knickprobleme an Stäben mit veränderlicher Wandstärke auf (242), die Theorie der Kegel- und Kugelschalen mit linear zunehmender Wandstärke auf (245) bzw. (251).

14. Trigonometrisch-hyperbolische Algebra.

Es sollen unter dieser Ziffer eine Reihe für die Anwendung wichtiger Formeln gruppenweise zusammengestellt werden, die teils schon entwickelt wurden, teils durch einfache algebraische Operationen hergeleitet werden können.

a) Additions- und Produktformeln.

$$\left.\begin{aligned}
\cos(u\pm v)&=\cos u\cos v\mp\sin u\sin v\,, & \mathrm{Cos}(u\pm v)&=\mathrm{Cos}\,u\,\mathrm{Cos}\,v\pm\mathrm{Sin}\,u\,\mathrm{Sin}\,v\,,\\
\sin(u\pm v)&=\sin u\cos v\pm\cos u\sin v\,, & \mathrm{Sin}(u\pm v)&=\mathrm{Sin}\,u\,\mathrm{Cos}\,v\pm\mathrm{Cos}\,u\,\mathrm{Sin}\,v\,,\\
\mathrm{tang}(u\pm v)&=\frac{\mathrm{tang}\,u\pm\mathrm{tang}\,v}{1\mp\mathrm{tang}\,u\,\mathrm{tang}\,v}\,, & \mathrm{Tang}(u\pm v)&=\frac{\mathrm{Tang}\,u\pm\mathrm{Tang}\,v}{1\pm\mathrm{Tang}\,u\,\mathrm{Tang}\,v}\,,\\
\mathrm{cotg}(u\pm v)&=\frac{\pm\mathrm{cotg}\,u\,\mathrm{cotg}\,v-1}{\mathrm{cotg}\,u\pm\mathrm{cotg}\,v}\,, & \mathrm{Cotg}(u\pm v)&=\frac{\pm\mathrm{Cotg}\,u\,\mathrm{Cotg}\,v+1}{\mathrm{Cotg}\,u\pm\mathrm{Cotg}\,v}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(253)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos u+\cos v&=2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}\,, &\qquad \mathfrak{Cof}\,u+\mathfrak{Cof}\,v&=2\mathfrak{Cof}\,\frac{u+v}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{u-v}{2}\,,\\
\cos u-\cos v&=-2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}\,, & \mathfrak{Cof}\,u-\mathfrak{Cof}\,v&=2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{u+v}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{u-v}{2}\,,\\
\sin u+\sin v&=2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}\,, & \mathfrak{Sin}\,u+\mathfrak{Sin}\,v&=2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{u+v}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{u-v}{2}\,,\\
\sin u-\sin v&=2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}\,, & \mathfrak{Sin}\,u-\mathfrak{Sin}\,v&=2\mathfrak{Cof}\,\frac{u+v}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{u-v}{2}\,,
\end{aligned}\right\}\quad(254)$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tang}u+\operatorname{tang}v&=\frac{\sin(u+v)}{\cos u\cos v}\,, &\qquad \mathfrak{Tang}\,u+\mathfrak{Tang}\,v&=\frac{\mathfrak{Sin}(u+v)}{\mathfrak{Cof}\,u\,\mathfrak{Cof}\,v}\,,\\
\operatorname{tang}u-\operatorname{tang}v&=\frac{\sin(u-v)}{\cos u\cos v}\,, & \mathfrak{Tang}\,u-\mathfrak{Tang}\,v&=\frac{\mathfrak{Sin}(u-v)}{\mathfrak{Cof}\,u\,\mathfrak{Cof}\,v}\,,\\
\operatorname{cotg}u+\operatorname{cotg}v&=\frac{\sin(u+v)}{\sin u\sin v}\,, & \mathfrak{Cotg}\,u+\mathfrak{Cotg}\,v&=\frac{\mathfrak{Sin}(u+v)}{\mathfrak{Sin}\,u\,\mathfrak{Sin}\,v}\,,\\
\operatorname{cotg}u-\operatorname{cotg}v&=\frac{\sin(v-u)}{\sin u\sin v}\,, & \mathfrak{Cotg}\,u-\mathfrak{Cotg}\,v&=\frac{\mathfrak{Sin}(v-u)}{\mathfrak{Sin}\,u\,\mathfrak{Sin}\,v}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(255)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos(u+v)+\cos(u-v)&=2\cos u\cos v\,, &\qquad \mathfrak{Cof}(u+v)+\mathfrak{Cof}(u-v)&=2\mathfrak{Cof}\,u\,\mathfrak{Cof}\,v\,,\\
\cos(u+v)-\cos(u-v)&=-2\sin u\sin v\,, & \mathfrak{Cof}(u+v)-\mathfrak{Cof}(u-v)&=2\,\mathfrak{Sin}\,u\,\mathfrak{Sin}\,v\,,\\
\sin(u+v)+\sin(u-v)&=2\sin u\cos v\,, & \mathfrak{Sin}(u+v)+\mathfrak{Sin}(u-v)&=2\,\mathfrak{Sin}\,u\,\mathfrak{Cof}\,v\,,\\
\sin(u+v)-\sin(u-v)&=2\cos u\sin v\,, & \mathfrak{Sin}(u+v)-\mathfrak{Sin}(u-v)&=2\mathfrak{Cof}\,u\,\mathfrak{Sin}\,v\,,
\end{aligned}\right\}\quad(256)$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tang}(u+v)+\operatorname{tang}(u-v)&=\frac{2\operatorname{tang}u(1+\operatorname{tang}^2v)}{1-\operatorname{tang}^2u\operatorname{tang}^2v}\,, &\quad \mathfrak{Tang}(u+v)+\mathfrak{Tang}(u-v)&=\frac{2\mathfrak{Tang}\,u(1-\mathfrak{Tang}^2v)}{1-\mathfrak{Tang}^2u\,\mathfrak{Tang}^2v}\,,\\
\operatorname{tang}(u+v)-\operatorname{tang}(u-v)&=\frac{2\operatorname{tang}v(1+\operatorname{tang}^2u)}{1-\operatorname{tang}^2u\operatorname{tang}^2v}\,, & \mathfrak{Tang}(u+v)-\mathfrak{Tang}(u-v)&=\frac{2\mathfrak{Tang}\,v(1-\mathfrak{Tang}^2u)}{1-\mathfrak{Tang}^2u\,\mathfrak{Tang}^2v}\,,\\
\operatorname{cotg}(u+v)+\operatorname{cotg}(u-v)&=\frac{2\operatorname{cotg}u(1+\operatorname{cotg}^2v)}{\operatorname{cotg}^2v-\operatorname{cotg}^2u}\,, & \mathfrak{Cotg}(u+v)+\mathfrak{Cotg}(u-v)&=\frac{2\mathfrak{Cotg}\,u(\mathfrak{Cotg}^2v-1)}{\mathfrak{Cotg}^2v-\mathfrak{Cotg}^2u}\,,\\
\operatorname{cotg}(u+v)-\operatorname{cotg}(u-v)&=\frac{2\operatorname{cotg}v(1+\operatorname{cotg}^2u)}{\operatorname{cotg}^2u-\operatorname{cotg}^2v}\,, & \mathfrak{Cotg}(u+v)-\mathfrak{Cotg}(u-v)&=\frac{2\mathfrak{Cotg}\,v(\mathfrak{Cotg}^2u-1)}{\mathfrak{Cotg}^2u-\mathfrak{Cotg}^2v}\,,
\end{aligned}\right\}\quad(257)$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tang}u+\operatorname{cotg}v&=\frac{\cos(u-v)}{\cos u\sin v}\,, &\qquad \mathfrak{Tang}\,u+\mathfrak{Cotg}\,v&=\frac{\mathfrak{Cof}(u+v)}{\mathfrak{Cof}\,u\,\mathfrak{Sin}\,v}\,,\\
\operatorname{tang}u-\operatorname{cotg}v&=-\frac{\cos(u+v)}{\cos u\sin v}\,, & \mathfrak{Tang}\,u-\mathfrak{Cotg}\,v&=-\frac{\mathfrak{Cof}(u-v)}{\mathfrak{Cof}\,u\,\mathfrak{Sin}\,v}\,,\\
\operatorname{cotg}u+\operatorname{tang}v&=\frac{\cos(u-v)}{\sin u\cos v}\,, & \mathfrak{Cotg}\,u+\mathfrak{Tang}\,v&=\frac{\mathfrak{Cof}(u+v)}{\mathfrak{Cof}\,v\,\mathfrak{Sin}\,u}\,,\\
\operatorname{cotg}u-\operatorname{tang}v&=\frac{\cos(u+v)}{\sin u\cos v}\,, & \mathfrak{Cotg}\,u-\mathfrak{Tang}\,v&=\frac{\mathfrak{Cof}(u-v)}{\mathfrak{Cof}\,v\,\mathfrak{Sin}\,u}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(258)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\cos(u-v)}{\cos(u+v)}&=\frac{1+\operatorname{tang}u\operatorname{tang}v}{1-\operatorname{tang}u\operatorname{tang}v}=\frac{\operatorname{cotg}u\operatorname{cotg}v+1}{\operatorname{cotg}u\operatorname{cotg}v-1}\,, &\quad \frac{\mathfrak{Cof}(u-v)}{\mathfrak{Cof}(u+v)}&=\frac{1-\mathfrak{Tang}\,u\,\mathfrak{Tang}\,v}{1+\mathfrak{Tang}\,u\,\mathfrak{Tang}\,v}=\frac{\mathfrak{Cotg}\,u\,\mathfrak{Cotg}\,v-1}{\mathfrak{Cotg}\,u\,\mathfrak{Cotg}\,v+1}\,,\\
\frac{\sin(u-v)}{\sin(u+v)}&=\frac{\operatorname{tang}u-\operatorname{tang}v}{\operatorname{tang}u+\operatorname{tang}v}=\frac{\operatorname{cotg}v-\operatorname{cotg}u}{\operatorname{cotg}v+\operatorname{cotg}u}\,, & \frac{\mathfrak{Sin}(u-v)}{\mathfrak{Sin}(u+v)}&=\frac{\mathfrak{Tang}\,u-\mathfrak{Tang}\,v}{\mathfrak{Tang}\,u+\mathfrak{Tang}\,v}=\frac{\mathfrak{Cotg}\,v-\mathfrak{Cotg}\,u}{\mathfrak{Cotg}\,v+\mathfrak{Cotg}\,u}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(259)$$

b) Funktionen des doppelten Arguments.

$$\left.\begin{aligned}
\cos 2u&=\cos^2u-\sin^2u=2\cos^2u-1 &\qquad \mathfrak{Cof}\,2u&=\mathfrak{Cof}^2u+\mathfrak{Sin}^2u=2\mathfrak{Cof}^2u-1\\
&=1-2\sin^2u & &=1+2\,\mathfrak{Sin}^2u\\
&=\frac{1-\operatorname{tang}^2u}{1+\operatorname{tang}^2u}=\frac{\operatorname{cotg}^2u-1}{\operatorname{cotg}^2u+1}\,, & &=\frac{1+\mathfrak{Tang}^2u}{1-\mathfrak{Tang}^2u}=\frac{\mathfrak{Cotg}^2u+1}{\mathfrak{Cotg}^2u-1}\,,\\
\sin 2u&=2\sin u\cos u=\frac{2\operatorname{tang}u}{1+\operatorname{tang}^2u}\,, & \mathfrak{Sin}\,2u&=2\,\mathfrak{Sin}\,u\,\mathfrak{Cof}\,u=\frac{2\mathfrak{Tang}\,u}{1-\mathfrak{Tang}^2u}\,,\\
\operatorname{tang}2u&=\frac{2\operatorname{tang}u}{1-\operatorname{tang}^2u}=\frac{2}{\operatorname{cotg}u-\operatorname{tang}u}\,, & \mathfrak{Tang}\,2u&=\frac{2\mathfrak{Tang}\,u}{1+\mathfrak{Tang}^2u}=\frac{2}{\mathfrak{Cotg}\,u+\mathfrak{Tang}\,u}\,,\\
\operatorname{cotg}2u&=\frac{\operatorname{cotg}^2u-1}{2\operatorname{cotg}u}=\frac{\operatorname{cotg}u-\operatorname{tang}u}{2}\,, & \mathfrak{Cotg}\,2u&=\frac{\mathfrak{Cotg}^2u+1}{2\mathfrak{Cotg}\,u}=\frac{\mathfrak{Cotg}\,u+\mathfrak{Tang}\,u}{2}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(260)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{Cof}\,2u+\cos 2u&=2(\cos^2u+\mathfrak{Sin}^2u)=2(\mathfrak{Cof}^2u-\sin^2u)\,,\\
\mathfrak{Cof}\,2u-\cos 2u&=2(\sin^2u+\mathfrak{Sin}^2u)=2(\mathfrak{Cof}^2u-\cos^2u)\,.
\end{aligned}\right\}\quad(261)$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\cos 2u + \cos 2v = 2\cos(u+v)\cos(u-v) = 2(\cos^2 u - \sin^2 v) = 2(\cos^2 v - \sin^2 u) & , \\
\cos 2u - \cos 2v = -2\sin(u+v)\sin(u-v) = 2(\cos^2 u - \cos^2 v) = 2(\sin^2 v - \sin^2 u) & , \\
\mathfrak{Cos}\,2u + \mathfrak{Cos}\,2v = 2\,\mathfrak{Cos}\,(u+v)\,\mathfrak{Cos}\,(u-v) = 2(\mathfrak{Cos}^2 u + \mathfrak{Sin}^2 v) = 2(\mathfrak{Cos}^2 v + \mathfrak{Sin}^2 u) & , \\
\mathfrak{Cos}\,2u - \mathfrak{Cos}\,2v = 2\,\mathfrak{Sin}\,(u+v)\,\mathfrak{Sin}\,(u-v) = 2(\mathfrak{Cos}^2 u - \mathfrak{Cos}^2 v) = 2(\mathfrak{Sin}^2 u - \mathfrak{Sin}^2 v) & .
\end{array}\right\} \tag{262}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\sin 2u + \sin 2v = 2\sin(u+v)\cos(u-v) = \dfrac{2\,\mathrm{tang}\,u}{1+\mathrm{tang}^2 u} + \dfrac{2\,\mathrm{tang}\,v}{1+\mathrm{tang}^2 v} & \\
\qquad = \dfrac{2(\mathrm{tang}\,u + \mathrm{tang}\,v)(1 + \mathrm{tang}\,u\,\mathrm{tang}\,v)}{(1+\mathrm{tang}^2 u)(1+\mathrm{tang}^2 v)} & , \\
\sin 2u - \sin 2v = 2\cos(u+v)\sin(u-v) = \dfrac{2\,\mathrm{tang}\,u}{1+\mathrm{tang}^2 u} - \dfrac{2\,\mathrm{tang}\,v}{1+\mathrm{tang}^2 v} & \\
\qquad = \dfrac{2(\mathrm{tang}\,u - \mathrm{tang}\,v)(1 - \mathrm{tang}\,u\,\mathrm{tang}\,v)}{(1+\mathrm{tang}^2 u)(1+\mathrm{tang}^2 v)} & , \\
\mathfrak{Sin}\,2u + \mathfrak{Sin}\,2v = 2\,\mathfrak{Sin}\,(u+v)\,\mathfrak{Cos}\,(u-v) = \dfrac{2\,\mathfrak{Tang}\,u}{1-\mathfrak{Tang}^2 u} + \dfrac{2\,\mathfrak{Tang}\,v}{1-\mathfrak{Tang}^2 v} & \\
\qquad = \dfrac{2(\mathfrak{Tang}\,u + \mathfrak{Tang}\,v)(1 - \mathfrak{Tang}\,u\,\mathfrak{Tang}\,v)}{(1-\mathfrak{Tang}^2 u)(1-\mathfrak{Tang}^2 v)} & , \\
\mathfrak{Sin}\,2u - \mathfrak{Sin}\,2v = 2\,\mathfrak{Cos}\,(u+v)\,\mathfrak{Sin}\,(u-v) = \dfrac{2\,\mathfrak{Tang}\,u}{1-\mathfrak{Tang}^2 u} - \dfrac{2\,\mathfrak{Tang}\,v}{1-\mathfrak{Tang}^2 v} & \\
\qquad = \dfrac{2(\mathfrak{Tang}\,u - \mathfrak{Tang}\,v)(1 + \mathfrak{Tang}\,u\,\mathfrak{Tang}\,v)}{(1-\mathfrak{Tang}^2 u)(1-\mathfrak{Tang}^2 v)} & .
\end{array}\right\} \tag{263}$$

c) Funktionen des dreifachen Arguments.

$$\left.\begin{array}{llll}
\cos 3u = \cos u\,(1 - 4\sin^2 u) & & \mathfrak{Cos}\,3u = \mathfrak{Cos}\,u\,(1 + 4\,\mathfrak{Sin}^2 u) & \\
\qquad = \cos u\,(-3 + 4\cos^2 u)\,, & & \qquad = \mathfrak{Cos}\,u\,(-3 + 4\,\mathfrak{Cos}^2 u)\,, & \\
\sin 3u = \sin u\,(-1 + 4\cos^2 u) & & \mathfrak{Sin}\,3u = \mathfrak{Sin}\,u\,(-1 + 4\,\mathfrak{Cos}^2 u) & \\
\qquad = \sin u\,(3 - 4\sin^2 u) & , & \qquad = \mathfrak{Sin}\,u\,(3 + 4\,\mathfrak{Sin}^2 u) & , \\
\mathrm{tang}\,3u = \dfrac{\mathrm{tang}\,u\,(3 - \mathrm{tang}^2 u)}{1 - 3\,\mathrm{tang}^2 u} & , & \mathfrak{Tang}\,3u = \dfrac{\mathfrak{Tang}\,u\,(3 + \mathfrak{Tang}^2 u)}{1 + 3\,\mathfrak{Tang}^2 u} & , \\
\mathrm{cotg}\,3u = \dfrac{\mathrm{cotg}\,u\,(-3 + \mathrm{cotg}^2 u)}{-1 + 3\,\mathrm{cotg}^2 u} & , & \mathfrak{Cotg}\,3u = \dfrac{\mathfrak{Cotg}\,u\,(3 + \mathfrak{Cotg}^2 u)}{1 + 3\,\mathfrak{Cotg}^2 u} & .
\end{array}\right\} \tag{264}$$

d) Funktionen des n-fachen Arguments.

$$\left.\begin{array}{ll}
e^{inu} = \cos nu + i\sin nu\,, \qquad e^{inu} = (e^{iu})^n = (\cos u + i\sin u)^n & , \\
\cos nu + i\sin nu = (\cos u + i\sin u)^n = \cos^n u + \binom{n}{1} i\cos^{n-1} u\sin u + & \\
\qquad + \binom{n}{2} i^2 \cos^{n-2} u\sin^2 u + \cdots + \binom{n}{n} i^n \sin^n u\,, & \\
\cos nu = \cos^n u - \binom{n}{2}\cos^{n-2} u\sin^2 u + \binom{n}{4}\cos^{n-4} u\sin^4 u - \cdots & , \\
\mathfrak{Cos}\,nu = \mathfrak{Cos}^n u + \binom{n}{2}\mathfrak{Cos}^{n-2} n\,\mathfrak{Sin}^2 u + \binom{n}{4}\mathfrak{Cos}^{n-4} u\,\mathfrak{Sin}^4 u + \cdots & , \\
\sin nu = \binom{n}{1}\cos^{n-1} u\sin u - \binom{n}{3}\cos^{n-3} u\sin^3 u + \binom{n}{5}\cos^{n-5} u\sin^5 u - \cdots & , \\
\mathfrak{Sin}\,nu = \binom{n}{1}\mathfrak{Cos}^{n-1} u\,\mathfrak{Sin}\,u + \binom{n}{3}\mathfrak{Cos}^{n-3} u\,\mathfrak{Sin}^3 u + \binom{n}{5}\mathfrak{Cos}^{n-5} u\,\mathfrak{Sin}^5 u + \cdots & .
\end{array}\right\} \tag{265}$$

$$\left.\begin{array}{llll}
\cos u = \cos u & , & \mathfrak{Cos}\,u = \mathfrak{Cos}\,u & , \\
\cos 2u = -1 + 2\cos^2 u & , & \mathfrak{Cos}\,2u = -1 + 2\,\mathfrak{Cos}^2 u & , \\
\cos 3u = \cos u\,(-3 + 4\cos^2 u) & , & \mathfrak{Cos}\,3u = \mathfrak{Cos}\,u\,(-3 + 4\,\mathfrak{Cos}^2 u) & , \\
\cos 4u = 1 - 8\cos^2 u + 8\cos^4 u & , & \mathfrak{Cos}\,4u = 1 - 8\,\mathfrak{Cos}^2 u + 8\,\mathfrak{Cos}^4 u & , \\
\cos 5u = \cos u\,(5 - 20\cos^2 u + 16\cos^4 u) & , & \mathfrak{Cos}\,5u = \mathfrak{Cos}\,u\,(5 - 20\,\mathfrak{Cos}^2 u + 16\,\mathfrak{Cos}^4 u) & , \\
\cos 6u = -1 + 18\cos^2 u - 48\cos^4 u + & & \mathfrak{Cos}\,6u = -1 + 18\,\mathfrak{Cos}^2 u - 48\,\mathfrak{Cos}^4 u + & \\
\qquad + 32\cos^6 u & , & \qquad + 32\,\mathfrak{Cos}^6 u & , \\
\cos 7u = \cos u\,(-7 + 56\cos^2 u - & & \mathfrak{Cos}\,7u = \mathfrak{Cos}\,u\,(-7 + 56\,\mathfrak{Cos}^2 u - & \\
\qquad - 112\cos^4 u + 64\cos^6 u) & , & \qquad - 112\,\mathfrak{Cos}^4 u + 64\,\mathfrak{Cos}^8 u) & , \\
\cos 8u = 1 - 32\cos^2 u + 160\cos^4 u - & & \mathfrak{Cos}\,8u = 1 - 32\,\mathfrak{Cos}^2 u + 160\,\mathfrak{Cos}^4 u - & , \\
\qquad - 256\cos^6 u + 128\cos^8 u & , & \qquad - 256\,\mathfrak{Cos}^6 u + 128\,\mathfrak{Cos}^8 u & .
\end{array}\right\} \tag{266}$$

$$
\begin{aligned}
\sin u &= \sin u \,, \\
\sin 2u &= \sin u \cos u \cdot 2 \,, \\
\sin 3u &= \sin u\,(-1 + 4\cos^2 u) \,, \\
\sin 4u &= \sin u \cos u\,(-4 + 8\cos^2 u) \,, \\
\sin 5u &= \sin u\,(1 - 12\cos^2 u + 16\cos^4 u) \,, \\
\sin 6u &= \sin u \cos u\,(6 - 32\cos^2 u + \\
&\quad + 32\cos^4 u) \,, \\
\sin 7u &= \sin u\,(-1 + 24\cos^2 u - \\
&\quad - 80\cos^4 u + 64\cos^6 u) \,, \\
\sin 8u &= \sin u \cos u\,(-8 + 80\cos^2 u - \\
&\quad - 192\cos^4 u + 128\cos^6 u) \,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{Sin}\, u &= \mathfrak{Sin}\, u \,, \\
\mathfrak{Sin}\, 2u &= \mathfrak{Sin}\, u\, \mathfrak{Cof}\, u \cdot 2 \,, \\
\mathfrak{Sin}\, 3u &= \mathfrak{Sin}\, u\,(-1 + 4\mathfrak{Cof}^2 u) \,, \\
\mathfrak{Sin}\, 4u &= \mathfrak{Sin}\, u\, \mathfrak{Cof}\, u\,(-4 + 8\mathfrak{Cof}^2 u) \,, \\
\mathfrak{Sin}\, 5u &= \mathfrak{Sin}\, u\,(1 - 12\mathfrak{Cof}^2 u + \\
&\quad + 16\mathfrak{Cof}^4 u) \,, \\
\mathfrak{Sin}\, 6u &= \mathfrak{Sin}\, u\, \mathfrak{Cof}\, u\,(6 - 32\mathfrak{Cof}^2 u + \\
&\quad + 32\mathfrak{Cof}^4 u) \,, \\
\mathfrak{Sin}\, 7u &= \mathfrak{Sin}\, u\,(-1 + 24\mathfrak{Cof}^2 u - \\
&\quad - 80\mathfrak{Cof}^4 u + 64\mathfrak{Cof}^6 u) \,, \\
\mathfrak{Sin}\, 8u &= \mathfrak{Sin}\, u\, \mathfrak{Cof}\, u\,(-8 + 80\mathfrak{Cof}^2 u - \\
&\quad - 192\mathfrak{Cof}^4 u + 128\mathfrak{Cof}^6 u) \,.
\end{aligned}
\tag{267}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos u &= \cos u \,, \\
\cos^2 u &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2u \,, \\
\cos^3 u &= \frac{3}{4}\cos u + \frac{1}{4}\cos 3u \,, \\
\cos^4 u &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2u + \frac{1}{8}\cos 4u \,, \\
\cos^5 u &= \frac{5}{8}\cos u + \frac{5}{16}\cos 3u + \frac{1}{16}\cos 5u \,, \\
\cos^6 u &= \frac{5}{16} + \frac{15}{32}\cos 2u + \frac{3}{16}\cos 4u + \\
&\quad + \frac{1}{32}\cos 6u \,, \\
\cos^7 u &= \frac{35}{64}\cos u + \frac{21}{64}\cos 3u + \\
&\quad + \frac{7}{64}\cos 5u + \frac{1}{64}\cos 7u \,, \\
\cos^8 u &= \frac{35}{128} + \frac{7}{16}\cos 2u + \frac{7}{32}\cos 4u + \\
&\quad + \frac{1}{16}\cos 6u + \frac{1}{128}\cos 8u \,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{Cof}\, u &= \mathfrak{Cof}\, u \,, \\
\mathfrak{Cof}^2 u &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathfrak{Cof}\, 2u \,, \\
\mathfrak{Cof}^3 u &= \frac{3}{4}\mathfrak{Cof}\, u + \frac{1}{4}\mathfrak{Cof}\, 3u \,, \\
\mathfrak{Cof}^4 u &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\mathfrak{Cof}\, 2u + \frac{1}{8}\mathfrak{Cof}\, 4u \,, \\
\mathfrak{Cof}^5 u &= \frac{5}{8}\mathfrak{Cof}\, u + \frac{5}{16}\mathfrak{Cof}\, 3u + \frac{1}{16}\mathfrak{Cof}\, 5u \,, \\
\mathfrak{Cof}^6 u &= \frac{5}{16} + \frac{15}{32}\mathfrak{Cof}\, 2u + \frac{3}{16}\mathfrak{Cof}\, 4u + \\
&\quad + \frac{1}{32}\mathfrak{Cof}\, 6u \,, \\
\mathfrak{Cof}^7 u &= \frac{35}{64}\mathfrak{Cof}\, u + \frac{21}{64}\mathfrak{Cof}\, 3u + \\
&\quad + \frac{7}{64}\mathfrak{Cof}\, 5u + \frac{1}{64}\mathfrak{Cof}\, 7u \,, \\
\mathfrak{Cof}^8 u &= \frac{35}{128} + \frac{7}{16}\mathfrak{Cof}\, 2u + \frac{7}{32}\mathfrak{Cof}\, 4u + \\
&\quad + \frac{1}{16}\mathfrak{Cof}\, 6u + \frac{1}{128}\mathfrak{Cof}\, 8u \,.
\end{aligned}
\tag{268}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin u &= \sin u \,, \\
\sin^2 u &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2u \,, \\
\sin^3 u &= \frac{3}{4}\sin u - \frac{1}{4}\sin 3u \,, \\
\sin^4 u &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2u + \frac{1}{8}\cos 4u \,, \\
\sin^5 u &= \frac{5}{8}\sin u - \frac{5}{16}\sin 3u + \frac{1}{16}\sin 5u \,, \\
\sin^6 u &= \frac{5}{16} - \frac{15}{32}\cos 2u + \frac{3}{16}\cos 4u - \\
&\quad - \frac{1}{32}\cos 6u \,, \\
\sin^7 u &= \frac{35}{64}\sin u - \frac{21}{64}\sin 3u + \\
&\quad + \frac{7}{64}\sin 5u - \frac{1}{64}\sin 7u \,, \\
\sin^8 u &= \frac{35}{128} - \frac{7}{16}\cos 2u + \frac{7}{32}\cos 4u - \\
&\quad - \frac{1}{16}\cos 6u + \frac{1}{128}\cos 8u \,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{Sin}\, u &= \mathfrak{Sin}\, u \,, \\
\mathfrak{Sin}^2 u &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathfrak{Cof}\, 2u \,, \\
\mathfrak{Sin}^3 u &= -\frac{3}{4}\mathfrak{Sin}\, u + \frac{1}{4}\mathfrak{Sin}\, 3u \,, \\
\mathfrak{Sin}^4 u &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\mathfrak{Cof}\, 2u + \frac{1}{8}\mathfrak{Cof}\, 4u \,, \\
\mathfrak{Sin}^5 u &= \frac{5}{8}\mathfrak{Sin}\, u - \frac{5}{16}\mathfrak{Sin}\, 3u + \frac{1}{16}\mathfrak{Sin}\, 5u \,, \\
\mathfrak{Sin}^6 u &= -\frac{5}{16} + \frac{15}{32}\mathfrak{Cof}\, 2u - \\
&\quad - \frac{3}{16}\mathfrak{Cof}\, 4u + \frac{1}{32}\mathfrak{Cof}\, 6u \,, \\
\mathfrak{Sin}^7 u &= -\frac{35}{64}\mathfrak{Sin}\, u + \frac{21}{64}\mathfrak{Sin}\, 3u - \\
&\quad - \frac{7}{64}\mathfrak{Sin}\, 5u + \frac{1}{64}\mathfrak{Sin}\, 7u \,, \\
\mathfrak{Sin}^8 u &= \frac{35}{128} - \frac{7}{16}\mathfrak{Cof}\, 2u + \frac{7}{32}\mathfrak{Cof}\, 4u - \\
&\quad - \frac{1}{16}\mathfrak{Cof}\, 6u + \frac{1}{128}\mathfrak{Cof}\, 8u \,.
\end{aligned}
\tag{269}
$$

e) Funktionen des halben Arguments.

$$
\left.
\begin{aligned}
\cos\frac{u}{2} &= \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos u)} = \frac{\sin u}{\sqrt{2(1-\cos u)}}\,, &\quad \mathfrak{Cos}\,\frac{u}{2} &= \sqrt{\frac{1}{2}(\mathfrak{Cos}\,u+1)} = \frac{\mathfrak{Sin}\,u}{\sqrt{2(\mathfrak{Cos}\,u-1)}}\,,\\
\sin\frac{u}{2} &= \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos u)} = \frac{\sin u}{\sqrt{2(1+\cos u)}}\,, & \mathfrak{Sin}\,\frac{u}{2} &= \sqrt{\frac{1}{2}(\mathfrak{Cos}\,u-1)} = \frac{\mathfrak{Sin}\,u}{\sqrt{2(\mathfrak{Cos}\,u+1)}}\,,\\
\operatorname{tang}\frac{u}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}} = \frac{\sin u}{1+\cos u} = \frac{1-\cos u}{\sin u}\,, & \mathfrak{Tang}\,\frac{u}{2} &= \sqrt{\frac{\mathfrak{Cos}\,u-1}{\mathfrak{Cos}\,u+1}} = \frac{\mathfrak{Sin}\,u}{\mathfrak{Cos}\,u+1} = \frac{\mathfrak{Cos}\,u-1}{\mathfrak{Sin}\,u}\,,\\
\operatorname{cotg}\frac{u}{2} &= \sqrt{\frac{1+\cos u}{1-\cos u}} = \frac{1+\cos u}{\sin u} = \frac{\sin u}{1-\cos u}\,, & \mathfrak{Cotg}\,\frac{u}{2} &= \sqrt{\frac{\mathfrak{Cos}\,u+1}{\mathfrak{Cos}\,u-1}} = \frac{\mathfrak{Cos}\,u+1}{\mathfrak{Sin}\,u} = \frac{\mathfrak{Sin}\,u}{\mathfrak{Cos}\,u-1}\,.
\end{aligned}
\right\} \quad (270)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\sin u &= \frac{2\operatorname{tang}\frac{u}{2}}{1+\operatorname{tang}^2\frac{u}{2}} = \frac{2\operatorname{cotg}\frac{u}{2}}{\operatorname{cotg}^2\frac{u}{2}+1}\,, &\quad \mathfrak{Sin}\,u &= \frac{2\,\mathfrak{Tang}\,\frac{u}{2}}{1-\mathfrak{Tang}^2\frac{u}{2}} = \frac{2\,\mathfrak{Cotg}\,\frac{u}{2}}{\mathfrak{Cotg}^2\frac{u}{2}-1}\,,\\
\cos u &= \frac{1-\operatorname{tang}^2\frac{u}{2}}{1+\operatorname{tang}^2\frac{u}{2}} = \frac{\operatorname{cotg}^2\frac{u}{2}-1}{\operatorname{cotg}^2\frac{u}{2}+1}\,, & \mathfrak{Cos}\,u &= \frac{1+\mathfrak{Tang}^2\frac{u}{2}}{1-\mathfrak{Tang}^2\frac{u}{2}} = \frac{\mathfrak{Cotg}^2\frac{u}{2}+1}{\mathfrak{Cotg}^2\frac{u}{2}-1}\,,\\
\operatorname{tang} u &= \frac{2\operatorname{tang}\frac{u}{2}}{1-\operatorname{tang}^2\frac{u}{2}} = \frac{2\operatorname{cotg}\frac{u}{2}}{\operatorname{cotg}^2\frac{u}{2}-1}\,, & \mathfrak{Tang}\,u &= \frac{2\,\mathfrak{Tang}\,\frac{u}{2}}{1+\mathfrak{Tang}^2\frac{u}{2}} = \frac{2\,\mathfrak{Cotg}\,\frac{u}{2}}{\mathfrak{Cotg}^2\frac{u}{2}+1}\,,\\
\operatorname{cotg} u &= \frac{1-\operatorname{tang}^2\frac{u}{2}}{2\operatorname{tang}\frac{u}{2}} = \frac{\operatorname{cotg}^2\frac{u}{2}-1}{2\operatorname{cotg}\frac{u}{2}}\,, & \mathfrak{Cotg}\,u &= \frac{1+\mathfrak{Tang}^2\frac{u}{2}}{2\,\mathfrak{Tang}\,\frac{u}{2}} = \frac{\mathfrak{Cotg}^2\frac{u}{2}+1}{2\,\mathfrak{Cotg}\,\frac{u}{2}}\,.
\end{aligned}
\right\} \quad (271)
$$

Zweiter Abschnitt.

Durch elementare und elementare transzendente Funktionen ausdrückbare Integrale.

1. Integrale der Klasse $\int \frac{(a+bz)^{\lambda-1}}{(c+dz)^{\lambda+1}}\,dz$.

a) Algebraische Integrale.

Wie man durch Differentiation leicht bestätigt, ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{(a+bz)^{\lambda-1}}{(c+dz)^{\lambda+1}}\,dz = \frac{1}{\lambda(bc-ad)}\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^{\lambda}, \\
&\int \frac{z^{\lambda-1}}{(1\pm z)^{\lambda+1}}\,dz = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{z}{1\pm z}\right)^{\lambda}, \\
&\int \frac{(1\pm z)^{\lambda-1}}{z^{\lambda+1}}\,dz = -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1\pm z}{z}\right)^{\lambda}.
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Diese Integralformeln gelten für beliebige ganzzahlige, gebrochene oder irrationale Parameterwerte λ mit Ausnahme von $\lambda = 0$.

In Anwendung auf die ganzzahligen Parameterwerte $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5$ erhält man

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{1}{(c+dz)^2}\,dz = \frac{1}{(bc-ad)}\,\frac{a+bz}{c+dz}, && \int \frac{1}{(1\pm z)^2}\,dz = \frac{z}{1\pm z}, && \int \frac{1}{z^2}\,dz = -\frac{1\pm z}{z}, \\
&\int \frac{a+bz}{(c+dz)^3}\,dz = \frac{1}{2(bc-ad)}\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^2, && \int \frac{z}{(1\pm z)^3}\,dz = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{1\pm z}\right)^2, && \int \frac{1\pm z}{z^3}\,dz = -\frac{1}{2}\left(\frac{1\pm z}{z}\right)^2, \\
&\int \frac{(a+bz)^2\,dz}{(c+dz)^4} = \frac{1}{3(bc-ad)}\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^3, && \int \frac{z^2}{(1\pm z)^4}\,dz = \frac{1}{3}\left(\frac{z}{1\pm z}\right)^3, && \int \frac{(1\pm z)^2}{z^4}\,dz = -\frac{1}{3}\left(\frac{1\pm z}{z}\right)^3, \\
&\int \frac{(a+bz)^3}{(c+dz)^5}\,dz = \frac{1}{4(bc-ad)}\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^4, && \int \frac{z^3}{(1\pm z)^5}\,dz = \frac{1}{4}\left(\frac{z}{1\pm z}\right)^4, && \int \frac{(1\pm z)^3}{z^5}\,dz = -\frac{1}{4}\left(\frac{1\pm z}{z}\right)^4, \\
&\int \frac{(a+bz)^4}{(c+dz)^6}\,dz = \frac{1}{5(bc-ad)}\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^5, && \int \frac{z^4}{(1\pm z)^6}\,dz = \frac{1}{5}\left(\frac{z}{1\pm z}\right)^5, && \int \frac{(1\pm z)^4}{z^6}\,dz = -\frac{1}{5}\left(\frac{1\pm z}{z}\right)^5.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ferner folgt für einige gebrochene Parameterwerte

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{\sqrt{(a+bz)(c+dz)^3}} = \frac{2}{bc-ad}\sqrt{\frac{a+bz}{c+dz}}, && \int \frac{dz}{(1\pm z)\sqrt{z(1\pm z)}} = 2\sqrt{\frac{z}{1\pm z}}, && \int \frac{dz}{z\sqrt{z(1\pm z)}} = -2\sqrt{\frac{1\pm z}{z}}, \\
&\int \frac{\sqrt{a+bz}\,dz}{(c+dz)^2\sqrt{c+dz}} = \frac{2}{3(bc-ad)}\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^{\frac{3}{2}}, && \int \frac{\sqrt{z}\,dz}{(1\pm z)^2\sqrt{1\pm z}} = \frac{2}{3}\left(\frac{z}{1\pm z}\right)^{\frac{3}{2}}, && \int \frac{\sqrt{1\pm z}\,dz}{z^2\sqrt{z}} = -\frac{2}{3}\left(\frac{1\pm z}{z}\right)^{\frac{3}{2}}, \\
&\int \frac{(a+bz)\sqrt{a+bz}\,dz}{(c+dz)^3\sqrt{c+dz}} = \frac{2}{5(bc-ad)}\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^{\frac{5}{2}}, && \int \frac{z\sqrt{z}\,dz}{(1\pm z)^3\sqrt{1\pm z}} = \frac{2}{5}\left(\frac{z}{1\pm z}\right)^{\frac{5}{2}}, && \int \frac{(1\pm z)\sqrt{1\pm z}\,dz}{z^3\sqrt{z}} = -\frac{2}{5}\left(\frac{1\pm z}{z}\right)^{\frac{5}{2}}.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{\sqrt[3]{(a+bz)^2(c+dz)^4}} = \frac{3}{bc-ad}\sqrt[3]{\frac{a+bz}{c+dz}}, && \int \frac{dz}{\sqrt[3]{z^2(1\pm z)^4}} = 3\sqrt[3]{\frac{z}{1\pm z}}, && \int \frac{dz}{\sqrt[3]{z^4(1\pm z)^2}} = -3\sqrt[3]{\frac{1\pm z}{z}}, \\
&\int \frac{dz}{\sqrt[3]{(a+bz)(c+dz)^5}} = \frac{3}{2(bc-ad)}\sqrt[3]{\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^2}, && \int \frac{dz}{\sqrt[3]{z(1\pm z)^5}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{z}{1\pm z}\right)^2}, && \int \frac{dz}{\sqrt[3]{z^5(1\pm z)}} = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{1\pm z}{z}\right)^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{\sqrt[4]{(a+bz)^3(c+dz)^5}} = \frac{4}{bc-ad}\sqrt[4]{\frac{a+bz}{c+dz}}, && \int \frac{dz}{\sqrt[4]{z^3(1\pm z)^5}} = 4\sqrt[4]{\frac{z}{1\pm z}}, && \int \frac{dz}{\sqrt[4]{z^5(1\pm z)^3}} = -4\sqrt[4]{\frac{1\pm z}{z}}, \\
&\int \frac{dz}{\sqrt[4]{(a+bz)(c+dz)^7}} = \frac{4}{3(bc-ad)}\sqrt[4]{\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^3}, && \int \frac{dz}{\sqrt[4]{z(1\pm z)^7}} = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\left(\frac{z}{1\pm z}\right)^3}, && \int \frac{dz}{\sqrt[4]{z^7(1\pm z)}} = -\frac{4}{3}\sqrt[4]{\left(\frac{1\pm z}{z}\right)^3}.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

b) Trigonometrische Integrale.

Werden in (1) die neuen Veränderlichen

$$z = \sin\zeta\,,\quad dz = \cos\zeta\,d\zeta \quad \text{bzw.}\quad z = \cos\zeta\,,\quad dz = -\sin\zeta\,d\zeta$$

eingeführt, so ergeben sich die trigonometrischen Darstellungen

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{(a+b\sin\zeta)^{\lambda-1}\cos\zeta}{(c+d\sin\zeta)^{\lambda+1}}\,d\zeta = \frac{1}{\lambda(bc-ad)}\left(\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right)^{\lambda}, &&\int\frac{(a+b\cos\zeta)^{\lambda-1}\sin\zeta}{(c+d\cos\zeta)^{\lambda+1}}\,d\zeta = \frac{1}{\lambda(ad-bc)}\left(\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right)^{\lambda},\\
&\int\frac{\sin^{\lambda-1}\zeta\cos\zeta}{(1\pm\sin\zeta)^{\lambda+1}}\,d\zeta = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\sin\zeta}{1\pm\sin\zeta}\right)^{\lambda}, &&\int\frac{\cos^{\lambda-1}\zeta\sin\zeta}{(1\pm\cos\zeta)^{\lambda+1}}\,d\zeta = -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\cos\zeta}{1\pm\cos\zeta}\right)^{\lambda},\\
&\int\frac{(1\pm\sin\zeta)^{\lambda-1}\cos\zeta}{\sin^{\lambda+1}\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1\pm\sin\zeta}{\sin\zeta}\right)^{\lambda}, &&\int\frac{(1\pm\cos\zeta)^{\lambda-1}\sin\zeta}{\cos^{\lambda+1}\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1\pm\cos\zeta}{\cos\zeta}\right)^{\lambda}.
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Hieraus folgt für die ganzzahligen Parameterwerte $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{\cos\zeta}{(c+d\sin\zeta)^2}\,d\zeta = \frac{1}{(bc-ad)}\,\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}, &&\int\frac{\sin\zeta}{(c+d\cos\zeta)^2}\,d\zeta = \frac{1}{(ad-bc)}\,\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta},\\
&\int\frac{(a+b\sin\zeta)\cos\zeta}{(c+d\sin\zeta)^3}\,d\zeta = \frac{1}{2(bc-ad)}\left(\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right)^2, &&\int\frac{(a+b\cos\zeta)\sin\zeta}{(c+d\cos\zeta)^3}\,d\zeta = \frac{1}{2(ad-bc)}\left(\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right)^2,\\
&\int\frac{(a+b\sin\zeta)^2\cos\zeta}{(c+d\sin\zeta)^4}\,d\zeta = \frac{1}{3(bc-ad)}\left(\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right)^3, &&\int\frac{(a+b\cos\zeta)^2\sin\zeta}{(c+d\cos\zeta)^4}\,d\zeta = \frac{1}{3(ad-bc)}\left(\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right)^3,\\
&\int\frac{(a+b\sin\zeta)^3\cos\zeta}{(c+d\sin\zeta)^5}\,d\zeta = \frac{1}{4(bc-ad)}\left(\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right)^4, &&\int\frac{(a+b\cos\zeta)^3\sin\zeta}{(c+d\cos\zeta)^5}\,d\zeta = \frac{1}{4(ad-bc)}\left(\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right)^4,\\
&\int\frac{(a+b\sin\zeta)^4\cos\zeta}{(c+d\sin\zeta)^6}\,d\zeta = \frac{1}{5(bc-ad)}\left(\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right)^5, &&\int\frac{(a+b\cos\zeta)^4\sin\zeta}{(c+d\cos\zeta)^6}\,d\zeta = \frac{1}{5(ad-bc)}\left(\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right)^5.
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{\cos\zeta}{(1\pm\sin\zeta)^2}\,d\zeta = \frac{\sin\zeta}{1\pm\sin\zeta}, &&\int\frac{\sin\zeta}{(1\pm\cos\zeta)^2}\,d\zeta = -\frac{\cos\zeta}{1\pm\cos\zeta},\\
&\int\frac{\sin\zeta\cos\zeta}{(1\pm\sin\zeta)^3}\,d\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\zeta}{1\pm\sin\zeta}\right)^2, &&\int\frac{\cos\zeta\sin\zeta}{(1\pm\cos\zeta)^3}\,d\zeta = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\zeta}{1\pm\cos\zeta}\right)^2,\\
&\int\frac{\sin^2\zeta\cos\zeta}{(1\pm\sin\zeta)^4}\,d\zeta = \frac{1}{3}\left(\frac{\sin\zeta}{1\pm\sin\zeta}\right)^3, &&\int\frac{\cos^2\zeta\sin\zeta}{(1\pm\cos\zeta)^4}\,d\zeta = -\frac{1}{3}\left(\frac{\cos\zeta}{1\pm\cos\zeta}\right)^3,\\
&\int\frac{\sin^3\zeta\cos\zeta}{(1\pm\sin\zeta)^5}\,d\zeta = \frac{1}{4}\left(\frac{\sin\zeta}{1\pm\sin\zeta}\right)^4, &&\int\frac{\cos^3\zeta\sin\zeta}{(1\pm\cos\zeta)^5}\,d\zeta = -\frac{1}{4}\left(\frac{\cos\zeta}{1\pm\cos\zeta}\right)^4,\\
&\int\frac{\sin^4\zeta\cos\zeta}{(1\pm\sin\zeta)^6}\,d\zeta = \frac{1}{5}\left(\frac{\sin\zeta}{1\pm\sin\zeta}\right)^5, &&\int\frac{\cos^4\zeta\sin\zeta}{(1\pm\cos\zeta)^6}\,d\zeta = -\frac{1}{5}\left(\frac{\cos\zeta}{1\pm\cos\zeta}\right)^5,
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{\cos\zeta}{\sin^2\zeta}\,d\zeta = -\frac{1\pm\sin\zeta}{\sin\zeta}, &&\int\frac{\sin\zeta}{\cos^2\zeta}\,d\zeta = \frac{1\pm\cos\zeta}{\cos\zeta},\\
&\int\frac{(1\pm\sin\zeta)\cos\zeta}{\sin^3\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{2}\left(\frac{1\pm\sin\zeta}{\sin\zeta}\right)^2, &&\int\frac{(1\pm\cos\zeta)\sin\zeta}{\cos^3\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{1\pm\cos\zeta}{\cos\zeta}\right)^2,\\
&\int\frac{(1\pm\sin\zeta)^2\cos\zeta}{\sin^4\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{3}\left(\frac{1\pm\sin\zeta}{\sin\zeta}\right)^3, &&\int\frac{(1\pm\cos\zeta)^2\sin\zeta}{\cos^4\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{3}\left(\frac{1\pm\cos\zeta}{\cos\zeta}\right)^3,\\
&\int\frac{(1\pm\sin\zeta)^3\cos\zeta}{\sin^5\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{4}\left(\frac{1\pm\sin\zeta}{\sin\zeta}\right)^4, &&\int\frac{(1\pm\cos\zeta)^3\sin\zeta}{\cos^5\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{4}\left(\frac{1\pm\cos\zeta}{\cos\zeta}\right)^4,\\
&\int\frac{(1\pm\sin\zeta)^4\cos\zeta}{\sin^6\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{5}\left(\frac{1\pm\sin\zeta}{\sin\zeta}\right)^5. &&\int\frac{(1\pm\cos\zeta)^4\sin\zeta}{\cos^6\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{5}\left(\frac{1\pm\cos\zeta}{\cos\zeta}\right)^5.
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Werden unter Zugrundelegung des unteren Vorzeichens in den beiden unteren der Gln (1) die neuen Veränderlichen

$$z = \sin^2\zeta\,,\quad dz = 2\sin\zeta\cos\zeta\,d\zeta \quad\text{bzw.}\quad z = \cos^2\zeta\,,\quad dz = -2\cos\zeta\sin\zeta\,d\zeta$$

eingeführt, so erhält man

$$\int\frac{\sin^{2\lambda-1}\zeta}{\cos^{2\lambda+1}\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{2\lambda}\operatorname{tang}^{2\lambda}\zeta\,,\qquad \int\frac{\cos^{2\lambda-1}\zeta}{\sin^{2\lambda+1}\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{2\lambda}\operatorname{cotg}^{2\lambda}\zeta. \qquad (10)$$

Die Anwendung auf die ganzzahligen Parameterwerte $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5$ ergibt

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sin\zeta}{\cos^3\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{2}\operatorname{tang}^2\zeta\,, && \int \frac{\cos\zeta}{\sin^3\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2\zeta\,,\\
&\int \frac{\sin^3\zeta}{\cos^5\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{4}\operatorname{tang}^4\zeta\,, && \int \frac{\cos^3\zeta}{\sin^5\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{4}\operatorname{cotg}^4\zeta\,,\\
&\int \frac{\sin^5\zeta}{\cos^7\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{6}\operatorname{tang}^6\zeta\,, && \int \frac{\cos^5\zeta}{\sin^7\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{6}\operatorname{cotg}^6\zeta\,,\\
&\int \frac{\sin^7\zeta}{\cos^9\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{8}\operatorname{tang}^8\zeta\,, && \int \frac{\cos^7\zeta}{\sin^9\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{8}\operatorname{cotg}^8\zeta\,,\\
&\int \frac{\sin^9\zeta}{\cos^{11}\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{10}\operatorname{tang}^{10}\zeta\,, && \int \frac{\cos^9\zeta}{\sin^{11}\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{10}\operatorname{cotg}^{10}\zeta\,.
\end{aligned} \tag{11}$$

die halbzahligen Parameterwerte $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$ liefern

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\cos^2\zeta}\,d\zeta = \operatorname{tang}\zeta\,, && \int \frac{1}{\sin^2\zeta}\,d\zeta = -\operatorname{cotg}\zeta\,,\\
&\int \frac{\sin^2\zeta}{\cos^4\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\zeta\,, && \int \frac{\cos^2\zeta}{\sin^4\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3\zeta\,,\\
&\int \frac{\sin^4\zeta}{\cos^6\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{5}\operatorname{tang}^5\zeta\,, && \int \frac{\cos^4\zeta}{\sin^6\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{5}\operatorname{cotg}^5\zeta\,,\\
&\int \frac{\sin^6\zeta}{\cos^8\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{7}\operatorname{tang}^7\zeta\,, && \int \frac{\cos^6\zeta}{\sin^8\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{7}\operatorname{cotg}^7\zeta\,,\\
&\int \frac{\sin^8\zeta}{\cos^{10}\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{9}\operatorname{tang}^9\zeta\,, && \int \frac{\cos^8\zeta}{\sin^{10}\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{9}\operatorname{cotg}^9\zeta\,.
\end{aligned} \tag{12}$$

Unter Zugrundelegung des oberen Vorzeichens folgt aus den unteren der Gln (1) für $z = \sin^2\zeta$ bzw. $z = \cos^2\zeta$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sin^{2\lambda-1}\zeta\cos\zeta}{(1+\sin^2\zeta)^{\lambda+1}}\,d\zeta = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\sin^2\zeta}{1+\sin^2\zeta}\right)^{\lambda}, && \int \frac{\cos^{2\lambda-1}\zeta\sin\zeta}{(1+\cos^2\zeta)^{\lambda+1}}\,d\zeta = -\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\cos^2\zeta}{1+\cos^2\zeta}\right)^{\lambda},\\
&\int \frac{(1+\sin^2\zeta)^{\lambda-1}\cos\zeta}{\sin^{2\lambda+1}\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1+\sin^2\zeta}{\sin^2\zeta}\right)^{\lambda}, && \int \frac{(1+\cos^2\zeta)^{\lambda-1}\sin\zeta}{\cos^{2\lambda+1}\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1+\cos^2\zeta}{\cos^2\zeta}\right)^{\lambda}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Die Anwendung auf die ganzzahligen Parameterwerte $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5$ ergibt

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sin\zeta\cos\zeta}{(1+\sin^2\zeta)^2}\,d\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\zeta}{1+\sin^2\zeta}\right), && \int \frac{\cos\zeta\sin\zeta}{(1+\cos^2\zeta)^2}\,d\zeta = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\zeta}{1+\cos^2\zeta}\right),\\
&\int \frac{\sin^3\zeta\cos\zeta}{(1+\sin^2\zeta)^3}\,d\zeta = \frac{1}{4}\left(\frac{\sin^2\zeta}{1+\sin^2\zeta}\right)^2, && \int \frac{\cos^3\zeta\sin\zeta}{(1+\cos^2\zeta)^3}\,d\zeta = -\frac{1}{4}\left(\frac{\cos^2\zeta}{1+\cos^2\zeta}\right)^2,\\
&\int \frac{\sin^5\zeta\cos\zeta}{(1+\sin^2\zeta)^4}\,d\zeta = \frac{1}{6}\left(\frac{\sin^2\zeta}{1+\sin^2\zeta}\right)^3, && \int \frac{\cos^5\zeta\sin\zeta}{(1+\cos^2\zeta)^4}\,d\zeta = -\frac{1}{6}\left(\frac{\cos^2\zeta}{1+\cos^2\zeta}\right)^3,\\
&\int \frac{\sin^7\zeta\cos\zeta}{(1+\sin^2\zeta)^5}\,d\zeta = \frac{1}{8}\left(\frac{\sin^2\zeta}{1+\sin^2\zeta}\right)^4, && \int \frac{\cos^7\zeta\sin\zeta}{(1+\cos^2\zeta)^5}\,d\zeta = -\frac{1}{8}\left(\frac{\cos^2\zeta}{(1+\cos^2\zeta)}\right)^4,\\
&\int \frac{\sin^9\zeta\cos\zeta}{(1+\sin^2\zeta)^6}\,d\zeta = \frac{1}{10}\left(\frac{\sin^2\zeta}{1+\sin^2\zeta}\right)^5, && \int \frac{\cos^9\zeta\sin\zeta}{(1+\cos^2\zeta)^6}\,d\zeta = -\frac{1}{10}\left(\frac{\cos^2\zeta}{1+\cos^2\zeta}\right)^5.
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\cos\zeta}{\sin^3\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{2}\,\frac{1+\sin^2\zeta}{\sin^2\zeta}\,, && \int \frac{\sin\zeta}{\cos^3\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{2}\,\frac{1+\cos^2\zeta}{\cos^2\zeta}\,,\\
&\int \frac{(1+\sin^2\zeta)\cos\zeta}{\sin^5\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{4}\left(\frac{1+\sin^2\zeta}{\sin^2\zeta}\right)^2, && \int \frac{(1+\cos^2\zeta)\sin\zeta}{\cos^5\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos^2\zeta}{\cos^2\zeta}\right)^2,\\
&\int \frac{(1+\sin^2\zeta)^2\cos\zeta}{\sin^7\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{6}\left(\frac{1+\sin^2\zeta}{\sin^2\zeta}\right)^3, && \int \frac{(1+\cos^2\zeta)^2\sin\zeta}{\cos^7\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{6}\left(\frac{1+\cos^2\zeta}{\cos^2\zeta}\right)^3,\\
&\int \frac{(1+\sin^2\zeta)^3\cos\zeta}{\sin^9\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{8}\left(\frac{1+\sin^2\zeta}{\sin^2\zeta}\right)^4, && \int \frac{(1+\cos^2\zeta)^3\sin\zeta}{\cos^9\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{8}\left(\frac{1+\cos^2\zeta}{\cos^2\zeta}\right)^4,\\
&\int \frac{(1+\sin^2\zeta)^4\cos\zeta}{\sin^{11}\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{10}\left(\frac{1+\sin^2\zeta}{\sin^2\zeta}\right)^5, && \int \frac{(1+\cos^2\zeta)^4\sin\zeta}{\cos^{11}\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{10}\left(\frac{1+\cos^2\zeta}{\cos^2\zeta}\right)^5.
\end{aligned} \tag{15}$$

Für $\lambda = \frac{1}{2}$ und $\lambda = -\frac{1}{2}$ erhält man

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\cos\zeta}{(1+\sin^2\zeta)^{\frac{3}{2}}}\,d\zeta = \frac{\sin\zeta}{\sqrt{1+\sin^2\zeta}}\,, &&\int \frac{\sin\zeta}{(1+\cos^2\zeta)^{\frac{3}{2}}}\,d\zeta = -\frac{\cos\zeta}{\sqrt{1+\cos^2\zeta}}\,,\\
&\int \frac{\cos\zeta}{\sin^2\zeta\sqrt{1+\sin^2\zeta}}\,d\zeta = -\frac{\sqrt{1+\sin^2\zeta}}{\sin\zeta}\,, &&\int \frac{\sin\zeta}{\cos^2\zeta\sqrt{1+\cos^2\zeta}}\,d\zeta = \frac{\sqrt{1+\cos^2\zeta}}{\cos\zeta}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

c) Hyperbolische Integrale.

Durch Vertauschen von ζ mit $i\zeta$ gehen die trigonometrischen Integrale in die entsprechenden hyperbolischen Integrale über. Man erhält, wenn in den sinus-Integralen gleichzeitig b und d mit $-ib$ und $-id$ vertauscht werden,

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda-1}\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda+1}}\,d\zeta = \frac{1}{\lambda(bc-ad)}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^{\lambda}, &&\int \frac{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda-1}\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda+1}}\,d\zeta = \frac{1}{\lambda(bc-ad)}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}\right)^{\lambda},\\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^{\lambda-1}\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(1\pm\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda+1}}\,d\zeta = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{1\pm\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^{\lambda}, &&\int \frac{\mathfrak{Cof}^{\lambda-1}\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(1\pm\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda+1}}\,d\zeta = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\mathfrak{Cof}\,\zeta}{1\pm\mathfrak{Cof}\,\zeta}\right)^{\lambda},\\
&\int \frac{(1\pm\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda-1}\mathfrak{Cof}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}^{\lambda+1}\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1\pm\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^{\lambda}, &&\int \frac{(1\pm\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda-1}\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Cof}^{\lambda+1}\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1\pm\mathfrak{Cof}\,\zeta}{\mathfrak{Cof}\,\zeta}\right)^{\lambda}.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2}\,d\zeta = \frac{1}{(bc-ad)}\,\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}, &&\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2}\,d\zeta = \frac{1}{(bc-ad)}\,\frac{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta},\\
&\int \frac{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^3}\,d\zeta = \frac{1}{2(bc-ad)}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^2, &&\int \frac{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^3}\,d\zeta = \frac{1}{2(bc-ad)}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}\right)^2,\\
&\int \frac{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^4}\,d\zeta = \frac{1}{3(bc-ad)}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^3, &&\int \frac{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^4}\,d\zeta = \frac{1}{3(bc-ad)}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}\right)^3,\\
&\int \frac{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^3\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^5}\,d\zeta = \frac{1}{4(bc-ad)}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^4, &&\int \frac{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^3\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^5}\,d\zeta = \frac{1}{4(bc-ad)}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}\right)^4,\\
&\int \frac{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^4\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^6}\,d\zeta = \frac{1}{5(bc-ad)}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^5, &&\int \frac{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^4\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^6}\,d\zeta = \frac{1}{5(bc-ad)}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}\right)^5.
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(1\pm\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2}\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{1\pm\mathfrak{Sin}\,\zeta}, &&\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(1\pm\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2}\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cof}\,\zeta}{1\pm\mathfrak{Cof}\,\zeta},\\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(1\pm\mathfrak{Sin}\,\zeta)^3}\,d\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{1\pm\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^2, &&\int \frac{\mathfrak{Cof}\,\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(1\pm\mathfrak{Cof}\,\zeta)^3}\,d\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{Cof}\,\zeta}{1\pm\mathfrak{Cof}\,\zeta}\right)^2,\\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(1\pm\mathfrak{Sin}\,\zeta)^4}\,d\zeta = \frac{1}{3}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{1\pm\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^3, &&\int \frac{\mathfrak{Cof}^2\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(1\pm\mathfrak{Cof}\,\zeta)^4}\,d\zeta = \frac{1}{3}\left(\frac{\mathfrak{Cof}\,\zeta}{1\pm\mathfrak{Cof}\,\zeta}\right)^3,\\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(1\pm\mathfrak{Sin}\,\zeta)^5}\,d\zeta = \frac{1}{4}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{1\pm\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^4, &&\int \frac{\mathfrak{Cof}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(1\pm\mathfrak{Cof}\,\zeta)^5}\,d\zeta = \frac{1}{4}\left(\frac{\mathfrak{Cof}\,\zeta}{1\pm\mathfrak{Cof}\,\zeta}\right)^4,\\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^4\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(1\pm\mathfrak{Sin}\,\zeta)^6}\,d\zeta = \frac{1}{5}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{1\pm\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^5, &&\int \frac{\mathfrak{Cof}^4\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(1\pm\mathfrak{Cof}\,\zeta)^6}\,d\zeta = \frac{1}{5}\left(\frac{\mathfrak{Cof}\,\zeta}{1\pm\mathfrak{Cof}\,\zeta}\right)^5.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\mathfrak{Cof}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}^2\zeta}\,d\zeta = -\frac{1\pm\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}\,\zeta}, &&\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Cof}^2\zeta}\,d\zeta = -\frac{1\pm\mathfrak{Cof}\,\zeta}{\mathfrak{Cof}\,\zeta},\\
&\int \frac{(1\pm\mathfrak{Sin}\,\zeta)\mathfrak{Cof}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}^3\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{2}\left(\frac{1\pm\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^2, &&\int \frac{(1\pm\mathfrak{Cof}\,\zeta)\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Cof}^3\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{2}\left(\frac{1\pm\mathfrak{Cof}\,\zeta}{\mathfrak{Cof}\,\zeta}\right)^2,\\
&\int \frac{(1\pm\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2\mathfrak{Cof}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}^4\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{3}\left(\frac{1\pm\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^3, &&\int \frac{(1\pm\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Cof}^4\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{3}\left(\frac{1\pm\mathfrak{Cof}\,\zeta}{\mathfrak{Cof}\,\zeta}\right)^3,\\
&\int \frac{(1\pm\mathfrak{Sin}\,\zeta)^3\mathfrak{Cof}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}^5\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{4}\left(\frac{1\pm\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^4, &&\int \frac{(1\pm\mathfrak{Cof}\,\zeta)^3\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Cof}^5\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{4}\left(\frac{1\pm\mathfrak{Cof}\,\zeta}{\mathfrak{Cof}\,\zeta}\right)^4,\\
&\int \frac{(1\pm\mathfrak{Sin}\,\zeta)^4\mathfrak{Cof}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}^6\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{5}\left(\frac{1\pm\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^5, &&\int \frac{(1\pm\mathfrak{Cof}\,\zeta)^4\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Cof}^6\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{5}\left(\frac{1\pm\mathfrak{Cof}\,\zeta}{\mathfrak{Cof}\,\zeta}\right)^5.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\int \frac{\mathfrak{Sin}^{2\lambda-1}\zeta}{\mathfrak{Cof}^{2\lambda+1}\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{2\lambda}\,\mathfrak{Tang}^{2\lambda}\zeta, \qquad \int \frac{\mathfrak{Cof}^{2\lambda-1}\zeta}{\mathfrak{Sin}^{2\lambda+1}\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{2\lambda}\,\mathfrak{Cotg}^{2\lambda}\zeta. \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
&\int\frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Cos}^3\zeta}d\zeta=\frac{1}{2}\mathfrak{Tang}^2\zeta, &&\int\frac{\mathfrak{Cos}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}^3\zeta}d\zeta=-\frac{1}{2}\mathfrak{Cotg}^2\zeta,\\
&\int\frac{\mathfrak{Sin}^3\zeta}{\mathfrak{Cos}^5\zeta}d\zeta=\frac{1}{4}\mathfrak{Tang}^4\zeta, &&\int\frac{\mathfrak{Cos}^3\zeta}{\mathfrak{Sin}^5\zeta}d\zeta=-\frac{1}{4}\mathfrak{Cotg}^4\zeta,\\
&\int\frac{\mathfrak{Sin}^5\zeta}{\mathfrak{Cos}^7\zeta}d\zeta=\frac{1}{6}\mathfrak{Tang}^6\zeta, &&\int\frac{\mathfrak{Cos}^5\zeta}{\mathfrak{Sin}^7\zeta}d\zeta=-\frac{1}{6}\mathfrak{Cotg}^6\zeta,\\
&\int\frac{\mathfrak{Sin}^7\zeta}{\mathfrak{Cos}^9\zeta}d\zeta=\frac{1}{8}\mathfrak{Tang}^8\zeta, &&\int\frac{\mathfrak{Cos}^7\zeta}{\mathfrak{Sin}^9\zeta}d\zeta=-\frac{1}{8}\mathfrak{Cotg}^8\zeta,\\
&\int\frac{\mathfrak{Sin}^9\zeta}{\mathfrak{Cos}^{11}\zeta}d\zeta=\frac{1}{10}\mathfrak{Tang}^{10}\zeta, &&\int\frac{\mathfrak{Cos}^9\zeta}{\mathfrak{Sin}^{11}\zeta}d\zeta=-\frac{1}{10}\mathfrak{Cotg}^{10}\zeta.
\end{aligned}\qquad(22)$$

$$\begin{aligned}
&\int\frac{1}{\mathfrak{Cos}^2\zeta}d\zeta=\mathfrak{Tang}\,\zeta, &&\int\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\zeta}d\zeta=-\mathfrak{Cotg}\,\zeta,\\
&\int\frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{\mathfrak{Cos}^4\zeta}d\zeta=\frac{1}{3}\mathfrak{Tang}^3\zeta, &&\int\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{\mathfrak{Sin}^4\zeta}d\zeta=-\frac{1}{3}\mathfrak{Cotg}^3\zeta,\\
&\int\frac{\mathfrak{Sin}^4\zeta}{\mathfrak{Cos}^6\zeta}d\zeta=\frac{1}{5}\mathfrak{Tang}^5\zeta, &&\int\frac{\mathfrak{Cos}^4\zeta}{\mathfrak{Sin}^6\zeta}d\zeta=-\frac{1}{5}\mathfrak{Cotg}^5\zeta,\\
&\int\frac{\mathfrak{Sin}^6\zeta}{\mathfrak{Cos}^8\zeta}d\zeta=\frac{1}{7}\mathfrak{Tang}^7\zeta, &&\int\frac{\mathfrak{Cos}^6\zeta}{\mathfrak{Sin}^8\zeta}d\zeta=-\frac{1}{7}\mathfrak{Cotg}^7\zeta,\\
&\int\frac{\mathfrak{Sin}^8\zeta}{\mathfrak{Cos}^{10}\zeta}d\zeta=\frac{1}{9}\mathfrak{Tang}^9\zeta, &&\int\frac{\mathfrak{Cos}^8\zeta}{\mathfrak{Sin}^{10}\zeta}d\zeta=-\frac{1}{9}\mathfrak{Cotg}^9\zeta.
\end{aligned}\qquad(23)$$

$$\begin{aligned}
&\int\frac{\mathfrak{Sin}^{2\lambda-1}\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{(1-\mathfrak{Sin}^2\zeta)^{\lambda+1}}d\zeta=\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{1-\mathfrak{Sin}^2\zeta}\right)^{\lambda}, &&\int\frac{\mathfrak{Cos}^{2\lambda-1}\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(1+\mathfrak{Cos}^2\zeta)^{\lambda+1}}d\zeta=\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{1+\mathfrak{Cos}^2\zeta}\right)^{\lambda},\\
&\int\frac{(1-\mathfrak{Sin}^2\zeta)^{\lambda-1}\mathfrak{Cos}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}^{2\lambda+1}\zeta}d\zeta=-\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1-\mathfrak{Sin}^2\zeta}{\mathfrak{Sin}^2\zeta}\right)^{\lambda}, &&\int\frac{(1+\mathfrak{Cos}^2\zeta)^{\lambda-1}\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Cos}^{2\lambda+1}\zeta}d\zeta=-\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1+\mathfrak{Cos}^2\zeta}{\mathfrak{Cos}^2\zeta}\right)^{\lambda}.
\end{aligned}\qquad(24)$$

$$\begin{aligned}
&\int\frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{(1-\mathfrak{Sin}^2\zeta)^2}d\zeta=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{1-\mathfrak{Sin}^2\zeta}\right), &&\int\frac{\mathfrak{Cos}\,\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(1+\mathfrak{Cos}^2\zeta)^2}d\zeta=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{1+\mathfrak{Cos}^2\zeta}\right),\\
&\int\frac{\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{(1-\mathfrak{Sin}^2\zeta)^3}d\zeta=\frac{1}{4}\left(\frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{1-\mathfrak{Sin}^2\zeta}\right)^2, &&\int\frac{\mathfrak{Cos}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(1+\mathfrak{Cos}^2\zeta)^3}d\zeta=\frac{1}{4}\left(\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{1+\mathfrak{Cos}^2\zeta}\right)^2,\\
&\int\frac{\mathfrak{Sin}^5\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{(1-\mathfrak{Sin}^2\zeta)^4}d\zeta=\frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{1-\mathfrak{Sin}^2\zeta}\right)^3, &&\int\frac{\mathfrak{Cos}^5\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(1+\mathfrak{Cos}^2\zeta)^4}d\zeta=\frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{1+\mathfrak{Cos}^2\zeta}\right)^3,\\
&\int\frac{\mathfrak{Sin}^7\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{(1-\mathfrak{Sin}^2\zeta)^5}d\zeta=\frac{1}{8}\left(\frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{1-\mathfrak{Sin}^2\zeta}\right)^4, &&\int\frac{\mathfrak{Cos}^7\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(1+\mathfrak{Cos}^2\zeta)^5}d\zeta=\frac{1}{8}\left(\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{1+\mathfrak{Cos}^2\zeta}\right)^4,\\
&\int\frac{\mathfrak{Sin}^9\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{(1-\mathfrak{Sin}^2\zeta)^6}d\zeta=\frac{1}{10}\left(\frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{1-\mathfrak{Sin}^2\zeta}\right)^5, &&\int\frac{\mathfrak{Cos}^9\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(1+\mathfrak{Cos}^2\zeta)^6}d\zeta=\frac{1}{10}\left(\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{1+\mathfrak{Cos}^2\zeta}\right)^5.
\end{aligned}\qquad(25)$$

$$\begin{aligned}
&\int\frac{\mathfrak{Cos}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}^3\zeta}d\zeta=-\frac{1}{2}\,\frac{1-\mathfrak{Sin}^2\zeta}{\mathfrak{Sin}^2\zeta}, &&\int\frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Cos}^3\zeta}d\zeta=-\frac{1}{2}\,\frac{1+\mathfrak{Cos}^2\zeta}{\mathfrak{Cos}^2\zeta},\\
&\int\frac{(1-\mathfrak{Sin}^2\zeta)\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}^5\zeta}d\zeta=-\frac{1}{4}\left(\frac{1-\mathfrak{Sin}^2\zeta}{\mathfrak{Sin}^2\zeta}\right)^2, &&\int\frac{(1+\mathfrak{Cos}^2\zeta)\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Cos}^5\zeta}d\zeta=-\frac{1}{4}\left(\frac{1+\mathfrak{Cos}^2\zeta}{\mathfrak{Cos}^2\zeta}\right)^2,\\
&\int\frac{(1-\mathfrak{Sin}^2\zeta)^2\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}^7\zeta}d\zeta=-\frac{1}{6}\left(\frac{1-\mathfrak{Sin}^2\zeta}{\mathfrak{Sin}^2\zeta}\right)^3, &&\int\frac{(1+\mathfrak{Cos}^2\zeta)^2\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Cos}^7\zeta}d\zeta=-\frac{1}{6}\left(\frac{1+\mathfrak{Cos}^2\zeta}{\mathfrak{Cos}^2\zeta}\right)^3,\\
&\int\frac{(1-\mathfrak{Sin}^2\zeta)^3\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}^9\zeta}d\zeta=-\frac{1}{8}\left(\frac{1-\mathfrak{Sin}^2\zeta}{\mathfrak{Sin}^2\zeta}\right)^4, &&\int\frac{(1+\mathfrak{Cos}^2\zeta)^3\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Cos}^9\zeta}d\zeta=-\frac{1}{8}\left(\frac{1+\mathfrak{Cos}^2\zeta}{\mathfrak{Cos}^2\zeta}\right)^4,\\
&\int\frac{(1-\mathfrak{Sin}^2\zeta)^4\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}^{11}\zeta}d\zeta=-\frac{1}{10}\left(\frac{1-\mathfrak{Sin}^2\zeta}{\mathfrak{Sin}^2\zeta}\right)^5, &&\int\frac{(1+\mathfrak{Cos}^2\zeta)^4\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Cos}^{11}\zeta}d\zeta=-\frac{1}{10}\left(\frac{1+\mathfrak{Cos}^2\zeta}{\mathfrak{Cos}^2\zeta}\right)^5.
\end{aligned}\qquad(26)$$

$$\begin{aligned}
&\int\frac{\mathfrak{Cos}\,\zeta}{(1-\mathfrak{Sin}^2\zeta)^{\frac{3}{2}}}d\zeta=\frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\sqrt{1-\mathfrak{Sin}^2\zeta}}, &&\int\frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(1+\mathfrak{Cos}^2\zeta)^{\frac{3}{2}}}d\zeta=\frac{\mathfrak{Cos}\,\zeta}{\sqrt{1+\mathfrak{Cos}^2\zeta}},\\
&\int\frac{\mathfrak{Cos}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}^2\zeta\sqrt{1-\mathfrak{Sin}^2\zeta}}d\zeta=-\frac{\sqrt{1-\mathfrak{Sin}^2\zeta}}{\mathfrak{Sin}\,\zeta}, &&\int\frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Cos}^2\zeta\sqrt{1+\mathfrak{Cos}^2\zeta}}d\zeta=-\frac{\sqrt{1+\mathfrak{Cos}^2\zeta}}{\mathfrak{Cos}\,\zeta}.
\end{aligned}\qquad(27)$$

2. Integrale der Klasse $\int (a+bz)^{\lambda}(c+dz)^{n}dz$.

a) Algebraische Integrale.

λ sei eine beliebige ganze, gebrochene oder irrationale Zahl, n eine positive ganze Zahl. Dann ergibt sich

$$\int (a+bz)^{\lambda}(c+dz)^{n}dz=\int (a+bz)^{\lambda}\left(\frac{d}{b}\right)^{n}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right)+(a+bz)\right]^{n}dz$$

oder wenn eine neue Veränderliche

$$\zeta = \frac{a+bz}{\frac{cb}{d}-a}$$

substituiert wird,

$$\int (a+bz)^\lambda (c+dz)^n dz = \frac{d^n}{b^{n+1}}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{\lambda+n+1} \int \zeta^\lambda (1+\zeta)^n d\zeta .$$

Nun ist nach dem binomischen Satze

$$(1+\zeta)^n = 1 + \binom{n}{1}\zeta + \binom{n}{2}\zeta^2 + \cdots + \zeta^n \qquad \text{mit} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$$

und damit

$$\int (a+bz)^\lambda (c+dz)^n dz = \frac{d^n}{b^{n+1}}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{\lambda+n+1} \int \left| \zeta^\lambda + \binom{n}{1}\zeta^{\lambda+1} + \binom{n}{2}\zeta^{\lambda+2} + \cdots + \zeta^{\lambda+n}\right| d\zeta$$

oder ausgewertet

$$\int (a+bz)^\lambda (c+dz)^n dz = \frac{d^n}{b^{n+1}}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{\lambda+n+1}\left[\frac{\zeta^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \binom{n}{1}\frac{\zeta^{\lambda+2}}{\lambda+2} + \binom{n}{2}\frac{\zeta^{\lambda+3}}{\lambda+3} + \cdots + \frac{\zeta^{\lambda+n+1}}{\lambda+n+1}\right].$$

Für $\lambda = -1, -2, -3, \cdots -(n+1)$ artet die Lösung aus. In diesen Fällen ergibt sich

$$\int \frac{(c+dz)^n}{(a+bz)} dz = \frac{d^n}{b^{n+1}}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n \left| \ln\zeta + \binom{n}{1}\frac{\zeta}{1} + \binom{n}{2}\frac{\zeta^2}{2} + \cdots + \frac{\zeta^n}{n-1}\right| ,$$

$$\int \frac{(c+dz)^n}{(a+bz)^2} dz = \frac{d^n}{b^{n+1}}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1} \left| -\frac{1}{\zeta} + \binom{n}{1}\ln\zeta + \binom{n}{2}\frac{\zeta}{1} + \binom{n}{3}\frac{\zeta^2}{2} + \cdots + \frac{\zeta^{n-1}}{n}\right| ,$$

$$\int \frac{(c+dz)^n}{(a+bz)^3} dz = \frac{d^n}{b^{n+1}}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2} \left| -\frac{1}{2\zeta^2} - \binom{n}{1}\frac{1}{\zeta} + \binom{n}{2}\ln\zeta + \binom{n}{3}\frac{\zeta}{1} + \binom{n}{4}\frac{\zeta^2}{2} + \cdots + \frac{\zeta^{n-2}}{n-2}\right| ,$$

$$\int \frac{(c+dz)^n}{(a+bz)^4} dz = \frac{d^n}{b^{n+1}}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-3} \left| -\frac{1}{3\zeta^3} - \binom{n}{1}\frac{1}{2\zeta^2} - \binom{n}{2}\frac{1}{\zeta} + \binom{n}{3}\ln\zeta + \binom{n}{4}\frac{\zeta}{1} + \binom{n}{5}\frac{\zeta^2}{2} + \cdots + \frac{\zeta^{n-3}}{n-3}\right| .$$

$$\int \frac{(c+dz)^n}{(a+bz)^n} dz = \frac{d^n}{b^{n+1}}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^1 \left| -\frac{1}{(n-1)\zeta^{n-1}} - \binom{n}{1}\frac{1}{(n-2)\zeta^{n-2}} - \cdots - \binom{n}{n-2}\frac{1}{\zeta} + \binom{n}{n-1}\ln\zeta + \zeta\right| ,$$

$$\int \frac{(c+dz)^n}{(a+bz)^{n+1}} dz = \frac{d^n}{b^{n+1}}\left| -\frac{1}{n\zeta^n} - \binom{n}{1}\frac{1}{(n-1)\zeta^{n-1}} - \binom{n}{2}\frac{1}{(n-2)\zeta^{n-2}} - \cdots - \binom{n}{n-1}\frac{1}{\zeta} + \ln\zeta\right| .$$

Wird in den Integralen ζ wieder in z rücktransformiert, so erhält man die sehr weitreichende Gruppe von Integralen

$$\int (a+bz)^\lambda (c+dz)^n dz = \frac{d^n}{b^{n+1}}\left[\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n (a+bz)^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}(a+bz)^{\lambda+2}}{\lambda+2} + \right.$$
$$\left. + \binom{n}{2}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}(a+bz)^{\lambda+3}}{\lambda+3} + \cdots + \frac{(a+bz)^{\lambda+n+1}}{\lambda+n+1}\right]. \qquad (\lambda \neq -1, -2, -3, \cdots -(n+1)) \tag{28}$$

$$\int \frac{(c+dz)^n}{a+bz} dz = \frac{d^n}{b^{n+1}}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n \ln\left|\frac{a+bz}{\frac{cb}{d}-a}\right| + \binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}(a+bz)}{1} + \right.$$
$$\left. + \binom{n}{2}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}(a+bz)^2}{2} + \cdots + \frac{(a+bz)^n}{n}\right] ,$$

$$\int \frac{(c+dz)^n}{(a+bz)^2} dz = \frac{d^n}{b^{n+1}}\left[-\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n}{a+bz} + \binom{n}{1}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}\ln\left|\frac{a+bz}{\frac{cb}{d}-a}\right| + \binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}\frac{a+bz}{1} + \right.$$
$$\left. + \binom{n}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-3}\frac{(a+bz)^2}{2} + \cdots + \frac{(a+bz)^{n-1}}{n-1}\right] , \tag{29}$$

$$\int \frac{(c+dz)^n}{(a+bz)^3}\,dz = \frac{d^n}{b^{n+1}}\left[\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n}{2(a+bz)^2} - \binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}}{a+bz} + \binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}\ln\left|\frac{a+bz}{\frac{cb}{d}-a}\right| + \right.$$
$$\left. + \binom{n}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-3}\frac{a+bz}{1} + \binom{n}{4}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-4}\frac{(a+bz)^2}{2} + \cdots + \frac{(a+bz)^{n-2}}{n-2}\right], \tag{29}$$

$$\int \frac{(c+dz)^n}{(a+bz)^4}\,dz = \frac{d^n}{b^{n+1}}\left[-\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n}{3(a+bz)^3} - \binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}}{2(a+bz)^2} - \binom{n}{2}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}}{a+bz} + \binom{n}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-3}\ln\left|\frac{a+bz}{\frac{cb}{d}-a}\right| + \right.$$
$$\left. + \binom{n}{4}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-4}\frac{a+bz}{1} + \binom{n}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-5}\frac{(a+bz)^2}{2} + \cdots + \frac{(a+bz)^{n-3}}{n-3}\right],$$

$$\int \frac{(c+dz)^n}{(a+bz)^n}\,dz = \frac{d^n}{b^{n+1}}\left[-\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n}{(n-1)(a+bz)^{n-1}} - \binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}}{(n-2)(a+bz)^{n-2}} - \cdots - \binom{n}{n-2}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{2}}{a+bz} + \right.$$
$$\left. + \binom{n}{n-1}\left(\frac{cb}{d}-a\right)\ln\left|\frac{a+bz}{\frac{cb}{d}-a}\right| + (a+bz)\right]$$

$$\int \frac{(c+dz)^n}{(a+bz)^{n+1}}\,dz = \frac{d^n}{b^{n+1}}\left[-\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n}{n(a+bz)^n} - \binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}}{(n-1)(a+bz)^{n-1}} - \cdots - \binom{n}{n-1}\frac{\frac{cb}{d}-a}{a+bz} + \ln\left|\frac{a+bz}{\frac{cb}{d}-a}\right|\right].$$

Hieraus folgt für $a=0,\ b=1,\ c=1,\ d=-1$:

$$\int z^{\lambda}(1-z)^n\,dz = \frac{z^{\lambda+1}}{\lambda+1} - \binom{n}{1}\frac{z^{\lambda+2}}{\lambda+2} + \binom{n}{2}\frac{z^{\lambda+3}}{\lambda+3} - \cdots + (-1)^n\frac{z^{\lambda+n+1}}{\lambda+n+1} \qquad (\lambda \neq -1, -2, -3, \cdots -(n+1)). \tag{30}$$

$$\int \frac{(1-z)^n}{z}\,dz = \ln z - \binom{n}{1}\frac{z}{1} + \binom{n}{2}\frac{z^2}{2} - \cdots + (-1)^n\frac{z^n}{n},$$

$$\int \frac{(1-z)^n}{z^2}\,dz = -\frac{1}{z} - \binom{n}{1}\ln z + \binom{n}{2}\frac{z}{1} - \binom{n}{3}\frac{z^2}{2} + \cdots + (-1)^n\frac{z^{n-1}}{n-1},$$

$$\int \frac{(1-z)^n}{z^3}\,dz = -\frac{1}{2z^2} + \binom{n}{1}\frac{1}{z} + \binom{n}{2}\ln z - \binom{n}{3}\frac{z}{1} + \binom{n}{4}\frac{z^2}{2} - \cdots + (-1)^n\frac{z^{n-2}}{n-2},$$

$$\int \frac{(1-z)^n}{z^4}\,dz = -\frac{1}{3z^3} + \binom{n}{1}\frac{1}{2z^2} - \binom{n}{2}\frac{1}{z} - \binom{n}{3}\ln|z| + \binom{n}{4}\frac{z}{1} - \binom{n}{5}\frac{z^2}{2} + \cdots + (-1)^n\frac{z^{n-3}}{n-3}, \tag{31}$$

$$\int \frac{(1-z)^n}{z^n}\,dz = -\frac{1}{(n-1)z^{n-1}} + \binom{n}{1}\frac{1}{(n-2)z^{n-2}} - \binom{n}{2}\frac{1}{(n-3)z^{n-3}} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-2}\frac{1}{z} +$$
$$+ (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\ln z + (-1)^n z,$$

$$\int \frac{(1-z)^n}{z^{n+1}}\,dz = -\frac{1}{nz^n} + \binom{n}{1}\frac{1}{(n-1)z^{n-1}} - \binom{n}{2}\frac{1}{(n-2)z^{n-2}} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n-1}\frac{1}{z} + (-1)^n\ln z.$$

Ferner folgt für $a=1,\ b=-1,\ c=0,\ d=1$:

$$\int (1-z)^{\lambda}z^n\,dz = -\frac{(1-z)^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \binom{n}{1}\frac{(1-z)^{\lambda+2}}{\lambda+2} - \binom{n}{2}\frac{(1-z)^{\lambda+3}}{\lambda+3} + \cdots +$$
$$+ (-1)^{n+1}\frac{(1-z)^{\lambda+n+1}}{\lambda+n+1} \qquad (\lambda \neq -1, -2, -3 \cdots -(n+1)). \tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{z^n}{1-z}\,dz = -\ln|1-z| + \binom{n}{1}\frac{1-z}{1} - \binom{n}{2}\frac{(1-z)^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(1-z)^n}{n}\,, \\
&\int \frac{z^n}{(1-z)^2}\,dz = \frac{1}{1-z} + \binom{n}{1}\ln|1-z| - \binom{n}{2}\frac{1-z}{1} + \binom{n}{3}\frac{(1-z)^2}{2} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(1-z)^{n-1}}{n-1}\,, \\
&\int \frac{z^n}{(1-z)^3}\,dz = \frac{1}{2(1-z)^2} - \binom{n}{1}\frac{1}{1-z} - \binom{n}{2}\ln|1-z| + \binom{n}{3}\frac{1-z}{1} - \binom{n}{4}\frac{(1-z)^2}{2} + \cdots + \\
&\qquad + (-1)^{n+1}\frac{(1-z)^{n-2}}{n-2}\,, \\
&\int \frac{z^n}{(1-z)^4}\,dz = \frac{1}{3(1-z)^3} - \binom{n}{1}\frac{1}{2(1-z)^2} + \binom{n}{2}\frac{1}{1-z} + \binom{n}{3}\ln|1-z| - \binom{n}{4}\frac{1-z}{1} + \\
&\qquad + \binom{n}{5}\frac{(1-z)^2}{2} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(1-z)^{n-3}}{n-3}\,, \\
&\text{- -} \\
&\int \frac{z^n}{(1-z)^n}\,dz = \frac{1}{(n-1)(1-z)^{n-1}} - \binom{n}{1}\frac{1}{(n-2)(1-z)^{n-2}} + \binom{n}{2}\frac{1}{(n-3)(1-z)^{n-3}} - \cdots + \\
&\qquad + (-1)^n\binom{n}{n-2}\frac{1}{1-z} + (-1)^n\binom{n}{n-1}\ln|1-z| + (-1)^{n+1}(1-z)\,, \\
&\int \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}\,dz = \frac{1}{n(1-z)^n} - \binom{n}{1}\frac{1}{(n-1)(1-z)^{n-1}} + \binom{n}{2}\frac{1}{(n-2)(1-z)^{n-2}} - \cdots + \\
&\qquad + (-1)^{n+1}\binom{n}{n-1}\frac{1}{(1-z)} + (-1)^{n+1}\ln|1-z|\,.
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Für $c = 0$, $d = 1$ und die Parameterwerte $n = 0, 1, 2, 3$ liefern die allgemeinen Formeln (28) und (29)

$$\left.\begin{aligned}
&\int (a \pm bz)^\lambda\,dz = \pm\frac{(a\pm bz)^{\lambda+1}}{b(\lambda+1)}\,, &&\int (az\pm b)^\lambda\,dz = \frac{(az\pm b)^{\lambda+1}}{a(\lambda+1)}\,, \\
&\int \frac{dz}{(a\pm bz)^\lambda} = \pm\frac{1}{b(1-\lambda)(a\pm bz)^{\lambda-1}}\,, &&\int \frac{dz}{(az\pm b)^\lambda} = \frac{1}{a(1-\lambda)(az\pm b)^{\lambda-1}}\,, \\
&\int \frac{dz}{a\pm bz} = \pm\frac{1}{b}\ln\left|1\pm\frac{bz}{a}\right|\,, &&\int \frac{dz}{az\pm b} = \frac{1}{a}\ln\left|1\pm\frac{az}{b}\right|\,.
\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int z(a\pm bz)^\lambda\,dz = -\frac{a(a\pm bz)^{\lambda+1}}{b^2(\lambda+1)} + \frac{(a\pm bz)^{\lambda+2}}{b^2(\lambda+2)}\,, &&\int z(az\pm b)^\lambda\,dz = \mp\frac{b(az\pm b)^{\lambda+1}}{a^2(\lambda+1)} + \\
& && \qquad + \frac{(az\pm b)^{\lambda+2}}{a^2(\lambda+2)}\,, \\
&\int \frac{z\,dz}{(a\pm bz)^\lambda} = -\frac{a}{b^2(1-\lambda)(a\pm bz)^{\lambda-1}} + &&\int \frac{z\,dz}{(az\pm b)^\lambda} = \mp\frac{b}{a^2(1-\lambda)(az\pm b)^{\lambda-1}} + \\
&\qquad + \frac{1}{b^2(2-\lambda)(a\pm bz)^{\lambda-2}}\,, &&\qquad + \frac{1}{a^2(2-\lambda)(az\pm b)^{\lambda-2}}\,, \\
&\int \frac{z\,dz}{a\pm bz} = \frac{a}{b^2} \pm \frac{z}{b} - \frac{a}{b^2}\ln\left|1\pm\frac{bz}{a}\right|\,, &&\int \frac{z\,dz}{az\pm b} = \pm\frac{b}{a^2} + \frac{z}{a} \mp \frac{b}{a^2}\ln\left|1\pm\frac{az}{b}\right|\,, \\
&\int \frac{z\,dz}{(a\pm bz)^2} = \frac{a}{b^2(a\pm bz)} + \frac{1}{b^2}\ln\left|1\pm\frac{bz}{a}\right|\,, &&\int \frac{z\,dz}{(az\pm b)^2} = \pm\frac{b}{a^2(az\pm b)} + \frac{1}{a^2}\ln\left|1\pm\frac{az}{b}\right|\,.
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int z^2(a+bz)^\lambda\,dz = \frac{a^2(a+bz)^{\lambda+1}}{b^3(\lambda+1)} - \frac{2a(a+bz)^{\lambda+2}}{b^3(\lambda+2)} + \frac{(a+bz)^{\lambda+3}}{b^3(\lambda+3)}\,, \\
&\int \frac{z^2\,dz}{(a+bz)^\lambda} = \frac{a^2}{b^3(1-\lambda)(a+bz)^{\lambda-1}} - \frac{2a}{b^3(2-\lambda)(a+bz)^{\lambda-2}} + \frac{1}{b^3(3-\lambda)(a+bz)^{\lambda-3}}\,, \\
&\int \frac{z^2\,dz}{a+bz} = -\frac{3a^2}{2b^3} - \frac{a}{b^2}z + \frac{z^2}{2b} + \frac{a^2}{b^3}\ln\left|1+\frac{bz}{a}\right|\,, \\
&\int \frac{z^2\,dz}{(a+bz)^2} = -\frac{a^2}{b^3(a+bz)} - \frac{2a}{b^3}\ln\left|1+\frac{bz}{a}\right| + \frac{a+bz}{b^3}\,, \\
&\int \frac{z^2\,dz}{+(a\,bz)^3} = -\frac{a^2}{2b^3(a+bz)^2} + \frac{2a}{b^3(a+bz)} + \frac{1}{b^3}\ln\left|1+\frac{bz}{a}\right|\,.
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int z^3 (a+bz)^\lambda dz = -\frac{a^3 (a+bz)^{\lambda+1}}{b^4(\lambda+1)} + \frac{3a^2(a+bz)^{\lambda+2}}{b^4(\lambda+2)} - \frac{3a(a+bz)^{\lambda+3}}{b^4(\lambda+3)} + \frac{(a+bz)^{\lambda+4}}{b^4(\lambda+4)} ,\\
&\int \frac{z^3 dz}{(a+bz)^\lambda} = -\frac{a^3}{b^4(1-\lambda)(a+bz)^{\lambda-1}} + \frac{3a^2}{b^4(2-\lambda)(a+bz)^{\lambda-2}} - \frac{3a}{b^4(3-\lambda)(a+bz)^{\lambda-3}} + \\
&\qquad + \frac{1}{b^4(4-\lambda)(a+bz)^{\lambda-4}} .\\
&\int \frac{z^3 dz}{a+bz} = \frac{11a^3}{6b^4} + \frac{a^2}{b^3} z - \frac{a}{2b^2} z^2 + \frac{z^3}{3b} - \frac{a^3}{b^4} \ln\left|1+\frac{bz}{a}\right| ,\\
&\int \frac{z^3 dz}{(a+bz)^2} = \frac{a^3}{b^4(a+bz)} + \frac{3a^2}{b^4} \ln\left|1+\frac{bz}{a}\right| - \frac{3a}{b^4}(a+bz) + \frac{(a+bz)^2}{2b^4} .\\
&\int \frac{z^3 dz}{(a+bz)^3} = \frac{a^3}{2b^4(a+bz)^2} - \frac{3a^2}{b^4(a+bz)} - \frac{3a}{b^4} \ln\left|1+\frac{bz}{a}\right| + \frac{a+bz}{b^4} .\\
&\int \frac{z^3 dz}{(a+bz)^4} = \frac{a^3}{3b^4(a+bz)^3} - \frac{3a^2}{2b^4(a+bz)^2} + \frac{3a}{b^4(a+bz)} + \frac{1}{b^4} \ln\left|1+\frac{bz}{a}\right| .
\end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Für $\lambda = \frac{1}{2}$ folgt aus (28)

$$\begin{aligned}
\int (c+dz)^n \sqrt{a+bz}\, dz = \frac{2d^n(a+bz)^{\frac{3}{2}}}{b^{n+1}} \Big[& \frac{1}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n + \frac{1}{5}\binom{n}{1}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}(a+bz) + \\
& + \frac{1}{7}\binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}(a+bz)^2 + \cdots + \frac{1}{2n+3}(a+bz)^n \Big]
\end{aligned} \quad (38)$$

und in Anwendung auf $n = 0, 1, 2, 3, 4$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \sqrt{a+bz}\, dz = \frac{2}{3b}(a+bz)^{\frac{3}{2}} ,\\
&\int (c+dz)\sqrt{a+bz}\, dz = \frac{2d(a+bz)^{\frac{3}{2}}}{b^2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right) + \frac{1}{5}(a+bz)\right] ,\\
&\int (c+dz)^2\sqrt{a+bz}\, dz = \frac{2d^2(a+bz)^{\frac{3}{2}}}{b^3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+bz) + \frac{1}{7}(a+bz)^2\right] ,\\
&\int (c+dz)^3\sqrt{a+bz}\, dz = \frac{2d^3(a+bz)^{\frac{3}{2}}}{b^4}\Big[\frac{1}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3 + \frac{3}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2(a+bz) + \\
&\qquad + \frac{3}{7}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+bz)^2 + \frac{1}{9}(a+bz)^3\Big] ,\\
&\int (c+dz)^4\sqrt{a+bz}\, dz = \frac{2d^4(a+bz)^{\frac{3}{2}}}{b^5}\Big[\frac{1}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^4 + \frac{4}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3(a+bz) + \\
&\qquad + \frac{6}{7}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2(a+bz)^2 + \frac{4}{9}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+bz)^3 + \frac{1}{11}(a+bz)^4\Big] .
\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Ferner folgt für $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{(c+dz)^n}{\sqrt{a+bz}} dz = \frac{2d^n\sqrt{a+bz}}{b^{n+1}} \Big[& \left(\frac{cb}{d}-a\right)^n + \frac{1}{3}\binom{n}{1}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}(a+bz) + \\
& + \frac{1}{5}\binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}(a+bz)^2 + \cdots + \frac{1}{2n+1}(a+bz)^n \Big] .
\end{aligned} \quad (40)$$

und in Anwendung auf $n = 0, 1, 2, 3, 4$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{\sqrt{a+bz}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bz} ,\\
&\int \frac{c+dz}{\sqrt{a+bz}} dz = \frac{2d\sqrt{a+bz}}{b^2}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right) + \frac{a+bz}{3}\right] ,\\
&\int \frac{(c+dz)^2}{\sqrt{a+bz}} dz = \frac{2d^2\sqrt{a+bz}}{b^3}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+bz) + \frac{1}{5}(a+bz)^2\right] ,\\
&\int \frac{(c+dz)^3}{\sqrt{a+bz}} dz = \frac{2d^3\sqrt{a+bz}}{b^4}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3 + \left(\frac{cb}{d}-a\right)^2(a+bz) + \frac{3}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+bz)^2 + \frac{1}{7}(a+bz)^3\right] ,\\
&\int \frac{(c+dz)^4}{\sqrt{a+bz}} dz = \frac{2d^4\sqrt{a+bz}}{b^5}\Big[\left(\frac{cb}{d}-a\right)^4 + \frac{4}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3(a+bz) + \frac{6}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2(a+bz)^2 + \\
&\qquad + \frac{4}{7}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+bz)^3 + \frac{1}{9}(a+bz)^4\Big] .
\end{aligned}\right\} \quad (41)$$

Für $c=0$ und $d=1$ liefern (39) und (41)

$$\left.\begin{aligned}
&\int \sqrt{a+bz}\,dz = \frac{2}{3b}(a+bz)^{\frac{3}{2}} ,\\
&\int z\sqrt{a+bz}\,dz = \frac{2}{5b^2}(a+bz)^{\frac{3}{2}}\left[-\frac{2}{3}a+bz\right] ,\\
&\int z^2\sqrt{a+bz}\,dz = \frac{2}{b^3}(a+bz)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{a^2}{3}-\frac{2a}{5}(a+bz)+\frac{1}{7}(a+bz)^2\right] ,\\
&\int z^3\sqrt{a+bz}\,dz = \frac{2}{b^4}(a+bz)^{\frac{3}{2}}\left[-\frac{a^3}{3}+\frac{3a^2}{5}(a+bz)-\frac{3a}{7}(a+bz)^2+\frac{1}{9}(a+bz)^3\right] ,\\
&\int z^4\sqrt{a+bz}\,dz = \frac{2}{b^5}(a+bz)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{a^4}{3}-\frac{4a^3}{5}(a+bz)+\frac{6a^2}{7}(a+bz)^2-\frac{4a}{9}(a+bz)^3+\frac{1}{11}(a+bz)^4\right] .
\end{aligned}\right\} \quad (42)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{\sqrt{a+bz}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bz} ,\\
&\int \frac{z\,dz}{\sqrt{a+bz}} = \frac{2}{3b^2}\sqrt{a+bz}\left[-2a+bz\right] ,\\
&\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{a+bz}} = \frac{2}{b^2}\sqrt{a+bz}\left[a^2-\frac{2a}{3}(a+bz)+\frac{1}{5}(a+bz)^2\right] ,\\
&\int \frac{z^3\,dz}{\sqrt{a+bz}} = \frac{2}{b^4}\sqrt{a+bz}\left[-a^3+a^2(a+bz)-\frac{3a}{5}(a+bz)^2+\frac{1}{7}(a+bz)^3\right] ,\\
&\int \frac{z^4\,dz}{\sqrt{a+bz}} = \frac{2}{b^5}\sqrt{a+bz}\left[a^4-\frac{4a^3}{3}(a+bz)+\frac{6a^2}{5}(a+bz)^2-\frac{4a}{7}(a+bz)^3+\frac{1}{9}(a+bz)^4\right] .
\end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Für $\lambda=\frac{3}{2}$ folgt aus (28)

$$\begin{aligned}
\int (a+bz)^{\frac{3}{2}}(c+dz)^n dz = \frac{2d^n(a+bz)^{\frac{5}{2}}}{b^{n+1}}&\left[\frac{1}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n+\frac{1}{7}\binom{n}{1}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}(a+bz)+\right.\\
&\left.+\frac{1}{9}\binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}(a+bz)^2+\cdots+\frac{1}{2n+5}(a+bz)^n\right]
\end{aligned} \quad (44)$$

und in Anwendung auf $n=0, 1, 2, 3, 4$

$$\left.\begin{aligned}
&\int (a+bz)^{\frac{3}{2}}dz = \frac{2}{5b}(a+bz)^{\frac{5}{2}} ,\\
&\int (c+dz)(a+bz)^{\frac{3}{2}}dz = \frac{2d}{b^2}(a+bz)^{\frac{5}{2}}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)+\frac{1}{7}(a+bz)\right] ,\\
&\int (c+dz)^2(a+bz)^{\frac{3}{2}}dz = \frac{2d^2}{b^3}(a+bz)^{\frac{5}{2}}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2+\frac{2}{7}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+bz)+\frac{1}{9}(a+bz)^2\right] ,\\
&\int (c+dz)^3(a+bz)^{\frac{3}{2}}dz = \frac{2d^3}{b^4}(a+bz)^{\frac{5}{2}}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3+\frac{3}{7}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2(a+bz)+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{3}{9}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+bz)^2+\frac{1}{11}(a+bz)^3\right] ,\\
&\int (c+dz)^4(a+bz)^{\frac{3}{2}}dz = \frac{2d^4}{b^5}(a+bz)^{\frac{5}{2}}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^4+\frac{4}{7}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3(a+bz)+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{6}{9}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2(a+bz)^2+\frac{4}{11}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+bz)^3+\frac{1}{13}(a+bz)^4\right] .
\end{aligned}\right\} \quad (45)$$

Ferner folgt für $\lambda=-\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{(c+dz)^n}{(a+bz)^{\frac{3}{2}}}dz = \frac{2d^n}{b^{n+1}\sqrt{a+bz}}&\left[-\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n+\binom{n}{1}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}(a+bz)+\right.\\
&\left.+\frac{1}{3}\binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}(a+bz)^2+\cdots+\frac{1}{2n-1}(a+bz)^n\right]
\end{aligned} \quad (46)$$

und in Anwendung auf $n=0, 1, 2, 3, 4$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{(a+bz)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{b\sqrt{a+bz}} ,\\
&\int \frac{(c+dz)\,dz}{(a+bz)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2d}{b^2\sqrt{a+bz}}\left[-\left(\frac{cb}{d}-a\right)+a+bz\right] ,\\
&\int \frac{(c+dz)^2\,dz}{(a+bz)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2d^2}{b^3\sqrt{a+bz}}\left[-\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2+2\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+bz)+\frac{1}{3}(a+bz)^2\right] ,
\end{aligned}\right\} \quad (47)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{(c+dz)^3\,dz}{(a+bz)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2d^3}{b^4\sqrt{a+bz}}\left[-\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3+3\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2(a+bz)+\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+bz)^2+\frac{1}{5}(a+bz)^4\right],\\
&\int \frac{(c+dz)^4\,dz}{(a+bz)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2d^4}{b^5\sqrt{a+bz}}\left[-\left(\frac{cb}{d}-a\right)^4+4\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3(a+bz)+2\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2(a+bz)^2+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{4}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+bz)^3+\frac{1}{7}(a+bz)^4\right].
\end{aligned}\right\} \quad (47)$$

Für $\lambda = \frac{1}{3}$ folgt aus (28)

$$\begin{aligned}
\int (c+dz)^n \sqrt[3]{a+bz}\,dz = \frac{3d^n(a+bz)^{\frac{4}{3}}}{b^{n+1}}&\left[\frac{1}{4}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n+\frac{1}{7}\binom{n}{1}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}(a+bz)+\right.\\
&\left.+\frac{1}{10}\binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}(a+bz)^2+\cdots+\frac{1}{3n+4}(a+bz)^n\right]
\end{aligned} \quad (48)$$

und in Anwendung auf $n=0, 1, 2, 3, 4$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \sqrt[3]{a+bz}\,dz = \frac{3}{4b}(a+bz)^{\frac{4}{3}},\\
&\int (c+dz)\sqrt[3]{a+bz}\,dz = \frac{3d}{b^2}(a+bz)^{\frac{4}{3}}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{cb}{d}-a\right)+\frac{1}{7}(a+bz)\right],\\
&\int (c+dz)^2\sqrt[3]{a+bz}\,dz = \frac{3d^2}{b^3}(a+bz)^{\frac{4}{3}}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2+\frac{2}{7}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+bz)+\frac{1}{10}(a+bz)^2\right],\\
&\int (c+dz)^3\sqrt[3]{a+bz}\,dz = \frac{3d^3}{b^4}(a+bz)^{\frac{4}{3}}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3+\frac{3}{7}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2(a+bz)+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{3}{10}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+bz)^2+\frac{1}{13}(a+bz)^3\right],\\
&\int (c+dz)^4\sqrt[3]{a+bz}\,dz = \frac{3d^4}{b^5}(a+bz)^{\frac{4}{3}}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^4+\frac{4}{7}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3(a+bz)+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{6}{10}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2(a+bz)^2+\frac{4}{13}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+bz)^3+\frac{1}{16}(a+bz)^4\right].
\end{aligned}\right\} \quad (49)$$

Ferner folgt für $\lambda = -\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{(c+dz)^n}{\sqrt[3]{a+bz}}\,dz = \frac{3d^n(a+bz)^{\frac{2}{3}}}{b^{n+1}}&\left[\frac{1}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n+\frac{1}{5}\binom{n}{1}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}(a+bz)+\right.\\
&\left.+\frac{1}{8}\binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}(a+bz)^2+\cdots+\frac{1}{3n+2}(a+bz)^n\right]
\end{aligned} \quad (50)$$

und in Anwendung auf $n=0, 1, 2, 3, 4$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{\sqrt[3]{a+bz}} = \frac{3}{2b}\sqrt[3]{(a+bz)^2},\\
&\int \frac{(c+dz)}{\sqrt[3]{a+bz}}\,dz = \frac{3d}{b^2}\sqrt[3]{(a+bz)^2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)+\frac{1}{5}(a+bz)\right],\\
&\int \frac{(c+dz)^2}{\sqrt[3]{a+bz}}\,dz = \frac{3d^2}{b^3}\sqrt[3]{(a+bz)^2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2+\frac{2}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+bz)+\frac{1}{8}(a+bz)^2\right],\\
&\int \frac{(c+dz)^3}{\sqrt[3]{a+bz}}\,dz = \frac{3d^3}{b^4}\sqrt[3]{(a+bz)^2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3+\frac{3}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2(a+bz)+\frac{3}{8}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+bz)^2+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{11}(a+bz)^3\right],\\
&\int \frac{(c+dz)^4}{\sqrt[3]{a+bz}}\,dz = \frac{3d^4}{b^5}\sqrt[3]{(a+bz)^2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^4+\frac{4}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3(a+bz)+\frac{6}{8}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2(a+bz)^2+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{4}{11}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+bz)^3+\frac{1}{14}(a+bz)^4\right].
\end{aligned}\right\} \quad (51)$$

Es folgen nun Anwendungen von (31) und (33) auf $n=0, 1, 2, 3, 4$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{z} = \ln|z|, &\quad& \int \frac{dz}{1-z} = -\ln|1-z|,\\
&\int \frac{1-z}{z}\,dz = \ln|z|-z, && \int \frac{z}{1-z}\,dz = -\ln|1-z|+1-z,
\end{aligned}\right\} \quad (52)$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{(1-z)^2}{z}\,dz = \ln|z| - 2z + \frac{z^2}{2}\,, && \int \frac{z^2}{1-z}\,dz = -\ln|1-z| + 2(1-z) - \frac{(1-z)^2}{2}\,.\\
&\int \frac{(1-z)^3}{z}\,dz = \ln|z| - 3z + \frac{3z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\,, && \int \frac{z^3}{1-z}\,dz = -\ln|1-z| + 3(1-z) - \frac{3(1-z)^2}{2} + \frac{(1-z)^3}{3}\,,\\
&\int \frac{(1-z)^4}{z}\,dz = \ln|z| - 4z + 3z^2 - \frac{4z^3}{3} + \frac{z^4}{4}\,, && \int \frac{z^4}{1-z}\,dz = -\ln|1-z| + 4(1-z) - 3(1-z)^2 + \frac{4(1-z)^3}{3} - \frac{(1-z)^4}{4}\,.
\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z}\,, && \int \frac{dz}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z}\,,\\
&\int \frac{1-z}{z^2}\,dz = -\frac{1}{z} - \ln|z|\,, && \int \frac{z}{(1-z)^2}\,dz = \frac{1}{1-z} + \ln|1-z|\,,\\
&\int \frac{(1-z)^2}{z^2}\,dz = -\frac{1}{z} - 2\ln|z| + z\,, && \int \frac{z^2}{(1-z)^2}\,dz = \frac{1}{1-z} + 2\ln|1-z| - (1-z)\,,\\
&\int \frac{(1-z)^3}{z^2}\,dz = -\frac{1}{z} - 3\ln|z| + 3z - \frac{z^2}{2}\,, && \int \frac{z^3}{(1-z)^2}\,dz = \frac{1}{1-z} + 3\ln|1-z| - 3(1-z) + \frac{(1-z)^2}{2}\,,\\
&\int \frac{(1-z)^4}{z^2}\,dz = -\frac{1}{z} - 4\ln|z| + 6z - 2z^2 + \frac{z^3}{3}\,, && \int \frac{z^4}{(1-z)^2}\,dz = \frac{1}{1-z} + 4\ln|1-z| - 6(1-z) + 2(1-z)^2 - \frac{(1-z)^3}{3}\,.
\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{z^3} = -\frac{1}{2z^2}\,, && \int \frac{dz}{(1-z)^3} = +\frac{1}{2(1-z)^2}\,,\\
&\int \frac{1-z}{z^3}\,dz = -\frac{1}{2z^2} + \frac{1}{z}\,, && \int \frac{z}{(1-z)^3}\,dz = \frac{1}{2(1-z)^2} - \frac{1}{1-z}\,,\\
&\int \frac{(1-z)^2}{z^3}\,dz = -\frac{1}{2z^2} + \frac{2}{z} + \ln z\,, && \int \frac{z^2}{(1-z)^3}\,dz = \frac{1}{2(1-z)^2} - \frac{2}{1-z} - \ln|1-z|\,,\\
&\int \frac{(1-z)^3}{z^3}\,dz = -\frac{1}{2z^2} + \frac{3}{z} + 3\ln z - z\,, && \int \frac{z^3}{(1-z)^3}\,dz = \frac{1}{2(1-z)^2} - \frac{3}{1-z} - 3\ln|1-z| + (1-z)\,,\\
&\int \frac{(1-z)^4}{z^3}\,dz = -\frac{1}{2z^2} + \frac{4}{z} + 6\ln z - 4z + \frac{z^2}{2}\,, && \int \frac{z^4}{(1-z)^3}\,dz = \frac{1}{2(1-z)^2} - \frac{4}{1-z} - 6\ln|1-z| + 4(1-z) - \frac{(1-z)^2}{2}\,.
\end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{z^4} = -\frac{1}{3z^3}\,, && \int \frac{dz}{(1-z)^4} = +\frac{1}{3(1-z)^3}\,,\\
&\int \frac{1-z}{z^4}\,dz = -\frac{1}{3z^3} + \frac{1}{2z^2}\,, && \int \frac{z}{(1-z)^4}\,dz = \frac{1}{3(1-z)^3} - \frac{1}{2(1-z)^2}\,,\\
&\int \frac{(1-z)^2}{z^4}\,dz = -\frac{1}{3z^3} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}\,, && \int \frac{z^2}{(1-z)^4}\,dz = \frac{1}{3(1-z)^3} - \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-z}\,,\\
&\int \frac{(1-z)^3}{z^4}\,dz = -\frac{1}{3z^3} + \frac{3}{2z^2} - \frac{3}{z} - \ln z\,, && \int \frac{z^3}{(1-z)^4}\,dz = \frac{1}{3(1-z)^3} - \frac{3}{2(1-z)^2} + \frac{3}{1-z} + \ln|1-z|\,,\\
&\int \frac{(1-z)^4}{z^4}\,dz = -\frac{1}{3z^3} + \frac{2}{z^2} - \frac{6}{z} - 4\ln z + z\,, && \int \frac{z^4}{(1-z)^4}\,dz = \frac{1}{3(1-z)^3} - \frac{2}{(1-z)^2} + \frac{6}{1-z} + 4\ln|1-z| - (1-z)\,.
\end{aligned} \tag{55}$$

Schließlich folgt aus (30) und (32) für $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4$ und $n = 0, 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned}
&\int dz = z\,, && \\
&\int z\,dz = \frac{z^2}{2}\,, && \int (1-z)\,dz = -\frac{(1-z)^2}{2}\,,\\
&\int z(1-z)\,dz = \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\,, && \int (1-z)\,z\,dz = -\frac{(1-z)^2}{2} + \frac{(1-z)^3}{3}\,,
\end{aligned} \tag{56}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int z(1-z)^2\,dz = \frac{z^2}{2} - \frac{2z^3}{3} + \frac{z^4}{4}, && \int (1-z)\,z^2\,dz = -\frac{(1-z)^2}{2} + \frac{2(1-z)^3}{3} - \frac{(1-z)^4}{4},\\
&\int z(1-z)^3\,dz = \frac{z^2}{2} - z^3 + \frac{3z^4}{4} - \frac{z^5}{5}, && \int (1-z)\,z^3\,dz = -\frac{(1-z)^2}{2} + (1-z)^3 - \\
& && \qquad -\frac{3(1-z)^4}{4} + \frac{(1-z)^5}{5},\\
&\int z(1-z)^4\,dz = \frac{z^2}{2} - \frac{4z^3}{3} + \frac{6z^4}{4} - \frac{4z^5}{5} + \frac{z^6}{6}, && \int (1-z)\,z^4\,dz = -\frac{(1-z)^2}{2} + \frac{4(1-z)^3}{3} - \frac{6(1-z)^4}{4} + \\
& && \qquad + \frac{4(1-z)^5}{5} - \frac{(1-z)^6}{6}.
\end{aligned}\right| \tag{56}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int z^2\,dz = \frac{z^3}{3}, && \int (1-z)^2\,dz = -\frac{(1-z)^3}{3},\\
&\int z^2(1-z)\,dz = \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4}, && \int (1-z)^2\,z\,dz = -\frac{(1-z)^3}{3} + \frac{(1-z)^4}{4},\\
&\int z^2(1-z)^2\,dz = \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{2} + \frac{z^5}{5}, && \int (1-z)^2\,z^2\,dz = -\frac{(1-z)^3}{3} + \frac{(1-z)^4}{2} - \frac{(1-z)^5}{5},\\
&\int z^2(1-z)^3\,dz = \frac{z^3}{3} - \frac{3z^4}{4} + \frac{3z^5}{5} - \frac{z^6}{6}, && \int (1-z)^2\,z^3\,dz = -\frac{(1-z)^3}{3} + \frac{3(1-z)^4}{4} - \\
& && \qquad - \frac{3(1-z)^5}{5} + \frac{(1-z)^6}{6},\\
&\int z^2(1-z)^4\,dz = \frac{z^3}{3} - z^4 + \frac{6z^5}{5} - \frac{2z^6}{3} + \frac{z^7}{7}, && \int (1-z)^2\,z^2\,dz = -\frac{(1-z)^3}{3} + (1-z)^4 - \\
& && \qquad - \frac{6(1-z)^5}{5} + \frac{2(1-z)^6}{3} - \frac{(1-z)^7}{7}.
\end{aligned}\right| \tag{57}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int z^3\,dz = \frac{z^4}{4}, && \int (1-z)^3\,dz = -\frac{(1-z)^4}{4},\\
&\int z^3(1-z)\,dz = \frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5}, && \int (1-z)^3\,z\,dz = -\frac{(1-z)^4}{4} + \frac{(1-z)^5}{5},\\
&\int z^3(1-z)^2\,dz = \frac{z^4}{4} - \frac{2z^5}{5} + \frac{z^6}{6}, && \int (1-z)^3\,z^2\,dz = -\frac{(1-z)^4}{4} + \frac{2(1-z)^5}{5} - \frac{(1-z)^6}{6},\\
&\int z^3(1-z)^3\,dz = \frac{z^4}{4} - \frac{3z^5}{5} + \frac{z^6}{2} - \frac{z^7}{7}, && \int (1-z)^3\,z^3\,dz = -\frac{(1-z)^4}{4} + \frac{3(1-z)^5}{5} - \\
& && \qquad - \frac{(1-z)^6}{2} + \frac{(1-z)^7}{7},\\
&\int z^3(1-z)^4\,dz = \frac{z^4}{4} - \frac{4z^5}{5} + z^6 - \frac{4z^7}{7} + \frac{z^8}{8}, && \int (1-z)^3\,z^4\,dz = -\frac{(1-z)^4}{4} + \frac{4(1-z)^5}{5} - \\
& && \qquad - (1-z)^6 + \frac{4(1-z)^7}{7} - \frac{(1-z)^8}{8}.
\end{aligned}\right| \tag{58}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int z^4\,dz = \frac{z^5}{5}, && \int (1-z)^4\,dz = -\frac{(1-z)^5}{5},\\
&\int z^4(1-z)\,dz = \frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{6}, && \int (1-z)^4\,z\,dz = -\frac{(1-z)^5}{5} + \frac{(1-z)^6}{6},\\
&\int z^4(1-z)^2\,dz = \frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{3} + \frac{z^7}{7}, && \int (1-z)^4\,z^2\,dz = -\frac{(1-z)^5}{5} + \frac{(1-z)^6}{3} - \\
& && \qquad - \frac{(1-z)^7}{7},\\
&\int z^4(1-z)^3\,dz = \frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{2} + \frac{3z^7}{7} - \frac{z^8}{8}, && \int (1-z)^4\,z^3\,dz = -\frac{(1-z)^5}{5} + \frac{(1-z)^6}{2} - \\
& && \qquad - \frac{3(1-z)^7}{7} + \frac{(1-z)^8}{8},\\
&\int z^4(1-z)^4\,dz = \frac{z^5}{5} - \frac{2z^6}{3} + \frac{6z^7}{7} - \frac{z^8}{2} + \frac{z^9}{9}, && \int (1-z)^4\,z^4\,dz = -\frac{(1-z)^5}{5} + \frac{2(1-z)^6}{3} - \\
& && \qquad - \frac{6(1-z)^7}{7} + \frac{(1-z)^8}{2} - \frac{(1-z)^9}{9}.
\end{aligned}\right| \tag{59}$$

b) Trigonometrische Integrale.

Werden in (28) bis (37) die neuen Veränderlichen $z = \sin\zeta$, $dz = \cos\zeta\, d\zeta$ bzw. $z = \cos\zeta$, $dz = -\sin\zeta\, d\zeta$ eingeführt, so erhält man:

$$\int (a + b\sin\zeta)^\lambda (c + d\sin\zeta)^n \cos\zeta\, d\zeta = \frac{d^n}{b^{n+1}}\left[\frac{\left(\frac{cb}{d} - a\right)^n (a + b\sin\zeta)^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d} - a\right)^{n-1}(a + b\sin\zeta)^{\lambda+2}}{\lambda+2} + \right.$$
$$\left. + \binom{n}{2}\frac{\left(\frac{cb}{d} - a\right)^{n-2}(a + b\sin\zeta)^{\lambda+3}}{\lambda+3} + \cdots + \frac{(a + b\sin\zeta)^{\lambda+n+1}}{\lambda+n+1}\right]. \quad (\lambda \neq -1, -2, -3, \cdots -(n+1)). \tag{60}$$

$$\int (a + b\cos\zeta)^\lambda (c + d\cos\zeta)^n \sin\zeta\, d\zeta = -\frac{d^n}{b^{n+1}}\left[\frac{\left(\frac{cb}{d} - a\right)^n (a + b\cos\zeta)^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d} - a\right)^{n-1}(a + b\cos\zeta)^{\lambda+2}}{\lambda+2} + \right.$$
$$\left. + \binom{n}{2}\frac{\left(\frac{cb}{d} - a\right)^{n-2}(a + b\cos\zeta)^{\lambda+3}}{\lambda+3} + \cdots + \frac{(a + b\cos\zeta)^{\lambda+n+1}}{\lambda+n+1}\right]. \quad (\lambda \neq -1, -2, -3, \cdots -(n+1)). \tag{61}$$

$$\int \frac{(c + d\sin\zeta)^n \cos\zeta}{a + b\sin\zeta}\, d\zeta = \frac{d^n}{b^{n+1}}\left[\left(\frac{cb}{d} - a\right)^n \ln\left|\frac{a + b\sin\zeta}{\frac{cb}{d} - a}\right| + \binom{n}{1}\left(\frac{cb}{d} - a\right)^{n-1}\frac{(a + b\sin\zeta)}{1} + \right.$$
$$\left. + \binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d} - a\right)^{n-2}\frac{(a + b\sin\zeta)^2}{2} + \cdots + \frac{(a + b\sin\zeta)^n}{n}\right],$$

$$\int \frac{(c + d\sin\zeta)^n \cos\zeta}{(a + b\sin\zeta)^2}\, d\zeta = \frac{d^n}{b^{n+1}}\left[-\frac{\left(\frac{cb}{d} - a\right)^n}{a + b\sin\zeta} + \binom{n}{1}\left(\frac{cb}{d} - a\right)^{n-1}\ln\left|\frac{a + b\sin\zeta}{\frac{cb}{d} - a}\right| + \binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d} - a\right)^{n-2}\frac{a + b\sin\zeta}{1} + \right.$$
$$\left. + \binom{n}{3}\left(\frac{cb}{d} - a\right)^{n-3}\frac{(a + b\sin\zeta)^2}{2} + \cdots + \frac{(a + b\sin\zeta)^{n-1}}{n-1}\right],$$

$$\int \frac{(c + d\sin\zeta)^n \cos\zeta}{(a + b\sin\zeta)^3}\, d\zeta = \frac{d^n}{b^{n+1}}\left[-\frac{\left(\frac{cb}{d} - a\right)^n}{2(a + b\sin\zeta)^2} - \binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d} - a\right)^{n-1}}{a + b\sin\zeta} + \binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d} - a\right)^{n-2}\ln\left|\frac{a + b\sin\zeta}{\frac{cb}{d} - a}\right| + \right.$$
$$\left. + \binom{n}{3}\left(\frac{cb}{d} - a\right)^{n-3}\frac{a + b\sin\zeta}{1} + \binom{n}{4}\left(\frac{cb}{d} - a\right)^{n-4}\frac{(a + b\sin\zeta)^2}{2} + \cdots + \frac{(a + b\sin\zeta)^{n-2}}{n-2}\right],$$

$$\int \frac{(c + d\sin\zeta)^n \cos\zeta}{(a + b\sin\zeta)^4}\, d\zeta = \frac{d^n}{b^{n+1}}\left[-\frac{\left(\frac{cb}{d} - a\right)^n}{3(a + b\sin\zeta)^3} - \binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d} - a\right)^{n-1}}{2(a + b\sin\zeta)^2} + \binom{n}{2}\frac{\left(\frac{cb}{d} - a\right)^{n-2}}{a + b\sin\zeta} + \right.$$
$$+ \binom{n}{3}\left(\frac{cb}{d} - a\right)^{n-3}\ln\left|\frac{a + b\sin\zeta}{\frac{cb}{d} - a}\right| + \binom{n}{4}\left(\frac{cb}{d} - a\right)^{n-4}\frac{a + b\sin\zeta}{1} +$$
$$\left. + \binom{n}{5}\left(\frac{cb}{d} - a\right)^{n-5}\frac{(a + b\sin\zeta)^2}{2} + \cdots + \frac{(a + b\sin\zeta)^{n-3}}{n-3}\right]; \tag{62}$$

$$\int \frac{(c + d\sin\zeta)^n \cos\zeta}{(a + b\sin\zeta)^n}\, d\zeta = \frac{d^n}{b^{n+1}}\left[-\frac{\left(\frac{cb}{d} - a\right)^n}{(n-1)(a + b\sin\zeta)^{n-1}} - \binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d} - a\right)^{n-1}}{(n-2)(a + b\sin\zeta)^{n-2}} - \cdots - \right.$$
$$\left. - \binom{n}{n-2}\frac{\left(\frac{cb}{d} - a\right)^2}{a + b\sin\zeta} + \binom{n}{n-1}\left(\frac{cb}{d} - a\right)\ln\left|\frac{a + b\sin\zeta}{\frac{cb}{d} - a}\right| + a + b\sin\zeta\right],$$

$$\int \frac{(c + d\sin\zeta)^n \cos\zeta}{(a + b\sin\zeta)^{n+1}}\, d\zeta = \frac{d^n}{b^{n+1}}\left[-\frac{\left(\frac{cb}{d} - a\right)^n}{n(a + b\sin\zeta)^n} - \binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d} - a\right)^{n-1}}{(n-1)(a + b\sin\zeta)^{n-1}} - \cdots - \right.$$
$$\left. - \binom{n}{n-1}\frac{\frac{cb}{d} - a}{a + b\sin\zeta} + \ln\left|\frac{a + b\sin\zeta}{\frac{cb}{d} - a}\right|\right].$$

$$\int \frac{(c+d\cos\zeta)^n \sin\zeta}{a+b\cos\zeta}\,d\zeta = -\frac{d^n}{b^{n+1}}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n \ln\left|\frac{a+b\cos\zeta}{\frac{cb}{d}-a}\right| + \binom{n}{1}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}\frac{a+b\cos\zeta}{1} + \binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}\frac{(a+b\cos\zeta)^2}{2} + \cdots + \frac{(a+b\cos\zeta)^n}{n}\right],$$

$$\int \frac{(c+d\cos\zeta)^n \sin\zeta}{(a+b\cos\zeta)^2}\,d\zeta = -\frac{d^n}{b^{n+1}}\left[-\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n}{a+b\cos\zeta} + \binom{n}{1}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}\ln\left|\frac{a+b\cos\zeta}{\frac{cb}{d}-a}\right| + \binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}\frac{a+b\cos\zeta}{1} + \binom{n}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-3}\frac{(a+b\cos\zeta)^2}{2} + \cdots + \frac{(a+b\cos\zeta)^{n-1}}{n-1}\right],$$

$$\int \frac{(c+d\cos\zeta)^n \sin\zeta}{(a+b\cos\zeta)^3}\,d\zeta = -\frac{d^n}{b^{n+1}}\left[-\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n}{2(a+b\cos\zeta)^2} - \binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}}{a+b\cos\zeta} + \binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}\ln\left|\frac{a+b\cos\zeta}{\frac{cb}{d}-a}\right| + \binom{n}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-3}\frac{a+b\cos\zeta}{1} + \binom{n}{4}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-4}\frac{(a+b\cos\zeta)^2}{2} + \cdots + \frac{(a+b\cos\zeta)^{n-2}}{n-2}\right],$$

$$\int \frac{(c+d\cos\zeta)^n \sin\zeta}{(a+b\cos\zeta)^4}\,d\zeta = -\frac{d^n}{b^{n+1}}\left[-\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n}{3(a+b\cos\zeta)^3} - \binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}}{2(a+b\cos\zeta)^2} - \binom{n}{2}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}}{a+b\cos\zeta} + \binom{n}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-3}\ln\left|\frac{a+b\cos\zeta}{\frac{cb}{d}-a}\right| + \binom{n}{4}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-4}\frac{a+b\cos\zeta}{1} + \binom{n}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-5}\frac{(a+b\cos\zeta)^2}{2} + \cdots + \frac{(a+b\cos\zeta)^{n-3}}{n-3}\right],$$

- -

$$\int \frac{(c+d\cos\zeta)^n \sin\zeta}{(a+b\cos\zeta)^n}\,d\zeta = -\frac{d^n}{b^{n+1}}\left[-\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n}{(n-1)(a+b\cos\zeta)^{n-1}} - \binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}}{(n-2)(a+b\cos\zeta)^{n-2}} - \cdots - \binom{n}{n-2}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2}{a+b\cos\zeta} + \binom{n}{n-1}\left(\frac{cb}{d}-a\right)\ln\left|\frac{a+b\cos\zeta}{\frac{cb}{d}-a}\right| + a + b\cos\zeta\right],$$

$$\int \frac{(c+d\cos\zeta)^n \sin\zeta}{(a+b\cos\zeta)^{n+1}}\,d\zeta = -\frac{d^n}{b^{n+1}}\left[-\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n}{n(a+b\cos\zeta)^n} - \binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}}{(n-1)(a+b\cos\zeta)^{n-1}} - \cdots - \binom{n}{n-1}\frac{\frac{cb}{d}-a}{a+b\cos\zeta} + \ln\left|\frac{a+b\cos\zeta}{\frac{cb}{d}-a}\right|\right]. \quad (63)$$

$$\int \sin^\lambda\zeta\,(1-\sin\zeta)^n\cos\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^{\lambda+1}\zeta}{\lambda+1} - \binom{n}{1}\frac{\sin^{\lambda+2}\zeta}{\lambda+2} + \binom{n}{2}\frac{\sin^{\lambda+3}\zeta}{\lambda+3} - \cdots + (-1)^n\frac{\sin^{\lambda+n+1}\zeta}{\lambda+n+1},$$

$$\int \cos^\lambda\zeta\,(1-\cos\zeta)^n\sin\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^{\lambda+1}\zeta}{\lambda+1} + \binom{n}{1}\frac{\cos^{\lambda+2}\zeta}{\lambda+2} - \binom{n}{2}\frac{\cos^{\lambda+3}\zeta}{\lambda+3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{\cos^{\lambda+n+1}\zeta}{\lambda+n+1}.$$

$(\lambda \neq -1, -2, -3, \cdots -(n-1))$ (64)

$$\int \frac{(1-\sin\zeta)^n}{\sin\zeta}\cos\zeta\,d\zeta = \ln|\sin\zeta| - \binom{n}{1}\frac{\sin\zeta}{1} + \binom{n}{2}\frac{\sin^2\zeta}{2} - \cdots + (-1)^n\frac{\sin^n\zeta}{n},$$

$$\int \frac{(1-\sin\zeta)^n}{\sin^2\zeta}\cos\zeta\,d\zeta = -\frac{1}{\sin\zeta} - \binom{n}{1}\ln|\sin\zeta| + \binom{n}{2}\frac{\sin\zeta}{1} - \binom{n}{3}\frac{\sin^2\zeta}{2} + \cdots + (-1)^n\frac{\sin^{n-1}\zeta}{n-1},$$

$$\int \frac{(1-\sin\zeta)^n}{\sin^3\zeta}\cos\zeta\,d\zeta = -\frac{1}{2\sin^2\zeta} + \binom{n}{1}\frac{1}{\sin\zeta} + \binom{n}{2}\ln|\sin\zeta| - \binom{n}{3}\frac{\sin\zeta}{1} + \binom{n}{4}\frac{\sin^2\zeta}{2} - \cdots + (-1)^n\frac{\sin^{n-2}\zeta}{n-2}, \quad (65)$$

$$\int\frac{(1-\sin\zeta)^n}{\sin^4\zeta}\cos\zeta\,d\zeta=-\frac{1}{3\sin^3\zeta}+\binom{n}{1}\frac{1}{2\sin^2\zeta}-\binom{n}{2}\frac{1}{\sin\zeta}-\binom{n}{3}\ln|\sin\zeta|+\binom{n}{4}\frac{\sin\zeta}{1}-\binom{n}{5}\frac{\sin^2\zeta}{2}+\cdots+(-1)^n\frac{\sin^{n-3}\zeta}{n-3},\tag{65}$$

$$\int\frac{(1-\sin\zeta)^n}{\sin^n\zeta}\cos\zeta\,d\zeta=-\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1}\zeta}+\binom{n}{1}\frac{1}{(n-2)\sin^{n-2}\zeta}-\binom{n}{2}\frac{1}{(n-3)\sin^{n-3}\zeta}+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-2}\frac{1}{\sin\zeta}+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\ln|\sin\zeta|+(-1)^n\sin\zeta,$$

$$\int\frac{(1-\sin\zeta)^n}{\sin^{n+1}\zeta}\cos\zeta\,d\zeta=-\frac{1}{n\sin^n\zeta}+\binom{n}{1}\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1}\zeta}-\binom{n}{2}\frac{1}{(n-2)\sin^{n-2}\zeta}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n-1}\frac{1}{\sin\zeta}+(-1)^n\ln|\sin\zeta|.$$

$$\int\frac{(1-\cos\zeta)^n}{\cos\zeta}\sin\zeta\,d\zeta=-\ln|\cos\zeta|+\binom{n}{1}\frac{\cos\zeta}{1}-\binom{n}{2}\frac{\cos^2\zeta}{2}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{\cos^n\zeta}{n},$$

$$\int\frac{(1-\cos\zeta)^n}{\cos^2\zeta}\sin\zeta\,d\zeta=+\frac{1}{\cos\zeta}+\binom{n}{1}\ln|\cos\zeta|-\binom{n}{2}\frac{\cos\zeta}{1}+\binom{n}{3}\frac{\cos^2\zeta}{2}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{\cos^{n-1}\zeta}{n-1},$$

$$\int\frac{(1-\cos\zeta)^n}{\cos^3\zeta}\sin\zeta\,d\zeta=+\frac{1}{2\cos^2\zeta}-\binom{n}{1}\frac{1}{\cos\zeta}-\binom{n}{2}\ln|\cos\zeta|+\binom{n}{3}\frac{\cos\zeta}{1}-\binom{n}{4}\frac{\cos^2\zeta}{2}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{\cos^{n-2}\zeta}{n-2},$$

$$\int\frac{(1-\cos\zeta)^n}{\cos^4\zeta}\sin\zeta\,d\zeta=+\frac{1}{3\cos^3\zeta}-\binom{n}{1}\frac{1}{2\cos^2\zeta}+\binom{n}{2}\frac{1}{\cos\zeta}+\binom{n}{3}\ln|\cos\zeta|-\binom{n}{4}\frac{\cos\zeta}{1}+\binom{n}{5}\frac{\cos^2\zeta}{2}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{\cos^{n-3}\zeta}{n-3},\tag{66}$$

$$\int\frac{(1-\cos\zeta)^n}{\cos^n\zeta}\sin\zeta\,d\zeta=+\frac{1}{(n-1)\cos^{n-1}\zeta}-\binom{n}{1}\frac{1}{(n-2)\cos^{n-2}\zeta}+\binom{n}{2}\frac{1}{(n-3)\cos^{n-3}\zeta}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n-2}\frac{1}{\cos\zeta}+(-1)^n\binom{n}{n-1}\ln|\cos\zeta|+(-1)^{n+1}\cos\zeta,$$

$$\int\frac{(1-\cos\zeta)^n}{\cos^{n+1}\zeta}\sin\zeta\,d\zeta=+\frac{1}{n\cos^n\zeta}-\binom{n}{1}\frac{1}{(n-1)\cos^{n-1}\zeta}+\binom{n}{2}\frac{1}{(n-2)\cos^{n-2}\zeta}-\cdots+(-1)^{n+1}\binom{n}{n-1}\frac{1}{\cos\zeta}+(-1)^{n+1}\ln|\cos\zeta|.$$

$$\int(1-\sin\zeta)^\lambda\sin^n\zeta\cos\zeta\,d\zeta=-\frac{(1-\sin\zeta)^{\lambda+1}}{\lambda+1}+\binom{n}{1}\frac{(1-\sin\zeta)^{\lambda+2}}{\lambda+2}-\binom{n}{2}\frac{(1-\sin\zeta)^{\lambda+3}}{\lambda+3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{(1-\sin\zeta)^{\lambda+n+1}}{\lambda+n+1},$$

$$\int(1-\cos\zeta)^\lambda\cos^n\zeta\sin\zeta\,d\zeta=+\frac{(1-\cos\zeta)^{\lambda+1}}{\lambda+1}-\binom{n}{1}\frac{(1-\cos\zeta)^{\lambda+2}}{\lambda+2}+\binom{n}{2}\frac{(1-\cos\zeta)^{\lambda+3}}{\lambda+3}-\cdots+(-1)^n\frac{(1-\cos\zeta)^{\lambda+n+1}}{\lambda+n+1}.$$

$(\lambda\neq-1,-2,-3,\cdots-(n-1))$ (67)

$$\int\frac{\sin^n\zeta\cos\zeta}{1-\sin\zeta}d\zeta=-\ln|1-\sin\zeta|+\binom{n}{1}\frac{1-\sin\zeta}{1}-\binom{n}{2}\frac{(1-\sin\zeta)^2}{2}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{(1-\sin\zeta)^n}{n},$$

$$\int\frac{\sin^n\zeta\cos\zeta}{(1-\sin\zeta)^2}d\zeta=\frac{1}{1-\sin\zeta}+\binom{n}{1}\ln|1-\sin\zeta|-\binom{n}{2}\frac{1-\sin\zeta}{1}+\binom{n}{3}\frac{(1-\sin\zeta)^2}{2}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{(1-\sin\zeta)^{n-1}}{n-1},$$

$$\int\frac{\sin^n\zeta\cos\zeta}{(1-\sin\zeta)^3}d\zeta=\frac{1}{2(1-\sin\zeta)^2}-\binom{n}{1}\frac{1}{1-\sin\zeta}-\binom{n}{2}\ln|1-\sin\zeta|+\binom{n}{3}\frac{1-\sin\zeta}{1}-\binom{n}{4}\frac{(1-\sin\zeta)^2}{2}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{(1-\sin\zeta)^{n-2}}{n-2},$$

$$\int\frac{\sin^n\zeta\cos\zeta}{(1-\sin\zeta)^4}d\zeta=\frac{1}{3(1-\sin\zeta)^3}-\binom{n}{1}\frac{1}{2(1-\sin\zeta)^2}+\binom{n}{2}\frac{1}{1-\sin\zeta}+\binom{n}{3}\ln|1-\sin\zeta|-\binom{n}{4}\frac{1-\sin\zeta}{1}+\binom{n}{5}\frac{(1-\sin\zeta)^2}{2}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{(1-\sin\zeta)^{n-3}}{n-3},$$

---

(68)

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\sin^n\zeta\cos\zeta}{(1-\sin\zeta)^n}\,d\zeta = \frac{1}{(n-1)(1-\sin\zeta)^{n-1}} - \binom{n}{1}\frac{1}{(n-2)(1-\sin\zeta)^{n-2}} + \binom{n}{2}\frac{1}{(n-3)(1-\sin\zeta)^{n-3}} - \\
&\qquad - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n-2}\frac{1}{1-\sin\zeta} + (-1)^n\binom{n}{n-1}\ln|1-\sin\zeta| + \\
&\qquad + (-1)^{n+1}(1-\sin\zeta) \quad ,\\
&\int \frac{\sin^n\zeta\cos\zeta}{(1-\sin\zeta)^{n+1}}\,d\zeta = \frac{1}{n(1-\sin\zeta)^n} - \binom{n}{1}\frac{1}{(n-1)(1-\sin\zeta)^{n-1}} + \binom{n}{2}\frac{1}{(n-2)(1-\sin\zeta)^{n-2}} - \cdots + \\
&\qquad + (-1)^{n+1}\binom{n}{n-1}\frac{1}{1-\sin\zeta} + (-1)^{n+1}\ln|1-\sin\zeta| \quad .
\end{aligned}\right\} \quad (68)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\cos^n\zeta\sin\zeta}{1-\cos\zeta}\,d\zeta = +\ln|1-\cos\zeta| - \binom{n}{1}\frac{1-\cos\zeta}{1} + \binom{n}{2}\frac{(1-\cos\zeta)^2}{2} - \cdots + (-1)^n\frac{(1-\cos\zeta)^n}{n} \quad ,\\
&\int \frac{\cos^n\zeta\sin\zeta}{(1-\cos\zeta)^2}\,d\zeta = -\frac{1}{1-\cos\zeta} - \binom{n}{1}\ln|1-\cos\zeta| + \binom{n}{2}\frac{1-\cos\zeta}{1} - \binom{n}{3}\frac{(1-\cos\zeta)^2}{2} + \cdots + \\
&\qquad + (-1)^n\frac{(1-\cos\zeta)^{n-1}}{n-1} \quad ,\\
&\int \frac{\cos^n\zeta\sin\zeta}{(1-\cos\zeta)^3}\,d\zeta = -\frac{1}{2(1-\cos\zeta)^2} + \binom{n}{1}\frac{1}{1-\cos\zeta} + \binom{n}{2}\ln|1-\cos\zeta| - \binom{n}{3}\frac{1-\cos\zeta}{1} + \\
&\qquad + \binom{n}{4}\frac{(1-\cos\zeta)^2}{2} + \cdots + (-1)^n\frac{(1-\cos\zeta)^{n-2}}{n-2} \quad ,\\
&\int \frac{\cos^n\zeta\sin\zeta}{(1-\cos\zeta)^4}\,d\zeta = -\frac{1}{3(1-\cos\zeta)^3} + \binom{n}{1}\frac{1}{2(1-\cos\zeta)^2} - \binom{n}{2}\frac{1}{1-\cos\zeta} - \binom{n}{3}\ln|1-\cos\zeta| + \\
&\qquad + \binom{n}{4}\frac{1-\cos\zeta}{1} - \binom{n}{5}\frac{(1-\cos\zeta)^2}{2} + \cdots + (-1)^n\frac{(1-\cos\zeta)^{n-3}}{n-3} \quad ,\\
&\text{---}\\
&\int \frac{\cos^n\zeta\sin\zeta}{(1-\cos\zeta)^n}\,d\zeta = -\frac{1}{(n-1)(1-\cos\zeta)^{n-1}} + \binom{n}{1}\frac{1}{(n-2)(1-\cos\zeta)^{n-2}} - \binom{n}{2}\frac{1}{(n-3)(1-\cos\zeta)^{n-3}} + \\
&\qquad + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\frac{1}{1-\cos\zeta} + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\ln|1-\cos\zeta| + \\
&\qquad + (-1)^n(1-\cos\zeta) \quad ,\\
&\int \frac{\cos^n\zeta\sin\zeta}{(1-\cos\zeta)^{n+1}}\,d\zeta = -\frac{1}{n(1-\cos\zeta)^n} + \binom{n}{1}\frac{1}{(n-1)(1-\cos\zeta)^{n-1}} - \binom{n}{2}\frac{1}{(n-2)(1-\cos\zeta)^{n-2}} + \\
&\qquad + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n-1}\frac{1}{1-\cos\zeta} + (-1)^n\ln|1-\cos\zeta| \quad .
\end{aligned}\right\} \quad (69)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int (a+b\sin\zeta)^\lambda\cos\zeta\,d\zeta = \frac{(a+b\sin\zeta)^{\lambda+1}}{b(\lambda+1)} \quad , \quad \int (a+b\cos\zeta)^\lambda\sin\zeta\,d\zeta = -\frac{(a+b\cos\zeta)^{\lambda+1}}{b(\lambda+1)} \quad ,\\
&\int \frac{\cos\zeta}{(a+b\sin\zeta)^\lambda}\,d\zeta = \frac{1}{b(1-\lambda)(a+b\sin\zeta)^{\lambda-1}} \quad , \quad \int \frac{\sin\zeta}{(a+b\cos\zeta)^\lambda}\,d\zeta = \frac{1}{b(\lambda-1)(a+b\cos\zeta)^{\lambda-1}} \quad ,\\
&\int \frac{\cos\zeta}{a+b\sin\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{b}\ln\left|1+\frac{b}{a}\sin\zeta\right| \quad , \quad \int \frac{\sin\zeta}{a+b\cos\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{b}\ln\left|1+\frac{b}{a}\cos\zeta\right| \quad .
\end{aligned}\right\} \quad (70)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int (a+b\sin\zeta)^\lambda\sin\zeta\cos\zeta\,d\zeta = -\frac{a(a+b\sin\zeta)^{\lambda+1}}{b^2(\lambda+1)} + \frac{(a+b\sin\zeta)^{\lambda+2}}{b^2(\lambda+2)} \quad ,\\
&\int \frac{\sin\zeta\cos\zeta}{(a+b\sin\zeta)^\lambda}\,d\zeta = -\frac{a}{b^2(1-\lambda)(a+b\sin\zeta)^{\lambda-1}} + \frac{1}{b^2(2-\lambda)(a+b\sin\zeta)^{\lambda-2}} \quad ,\\
&\int \frac{\sin\zeta\cos\zeta}{a+b\sin\zeta}\,d\zeta = \frac{a}{b^2} + \frac{\sin\zeta}{b} - \frac{a}{b^2}\ln\left|1+\frac{b}{a}\sin\zeta\right| \quad ,\\
&\int \frac{\sin\zeta\cos\zeta}{(a+b\sin\zeta)^2}\,d\zeta = \frac{a}{b^2(a+b\sin\zeta)} + \frac{1}{b^2}\ln\left|1+\frac{b}{a}\sin\zeta\right| \quad .
\end{aligned}\right\} \quad (71)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int (a+b\cos\zeta)^{\lambda}\cos\zeta\sin\zeta\,d\zeta = \frac{a(a+b\cos\zeta)^{\lambda+1}}{b^2(\lambda+1)} - \frac{(a+b\cos\zeta)^{\lambda+2}}{b^2(\lambda+2)} ,\\
&\int \frac{\cos\zeta\sin\zeta}{(a+b\cos\zeta)^{\lambda}}\,d\zeta = \frac{a}{b^2(1-\lambda)(a+b\cos\zeta)^{\lambda-1}} - \frac{1}{b^2(2-\lambda)(a+b\cos\zeta)^{\lambda-2}} ,\\
&\int \frac{\cos\zeta\sin\zeta}{a+b\cos\zeta}\,d\zeta = -\frac{a}{b^2} - \frac{\cos\zeta}{b} + \frac{a}{b^2}\ln\left|1+\frac{b}{a}\cos\zeta\right| ,\\
&\int \frac{\cos\zeta\sin\zeta}{(a+b\cos\zeta)^2}\,d\zeta = -\frac{a}{b^2(a+b\cos\zeta)} - \frac{1}{b^2}\ln\left|1+\frac{b}{a}\cos\zeta\right| .
\end{aligned}\right\}\tag{72}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int (a+b\sin\zeta)^{\lambda}\sin^2\zeta\cos\zeta\,d\zeta = \frac{a^2(a+b\sin\zeta)^{\lambda+1}}{b^3(\lambda+1)} - \frac{2a(a+b\sin\zeta)^{\lambda+2}}{b^3(\lambda+2)} + \frac{(a+b\sin\zeta)^{\lambda+3}}{b^3(\lambda+3)} ,\\
&\int \frac{\sin^2\zeta\cos\zeta}{(a+b\sin\zeta)^{\lambda}}\,d\zeta = \frac{a^2}{b^3(1-\lambda)(a+b\sin\zeta)^{\lambda-1}} - \frac{2a}{b^3(2-\lambda)(a+b\sin\zeta)^{\lambda-2}} + \frac{1}{b^3(3-\lambda)(a+b\sin\zeta)^{\lambda-3}} ,\\
&\int \frac{\sin^2\zeta\cos\zeta}{a+b\sin\zeta}\,d\zeta = -\frac{3a^2}{2b^3} - \frac{a}{b^2}\sin\zeta + \frac{\sin^2\zeta}{2b} + \frac{a^2}{b^3}\ln\left|1+\frac{b}{a}\sin\zeta\right| ,\\
&\int \frac{\sin^2\zeta\cos\zeta}{(a+b\sin\zeta)^2}\,d\zeta = -\frac{a^2}{b^3(a+b\sin\zeta)} - \frac{2a}{b^3}\ln\left|1+\frac{b}{a}\sin\zeta\right| + \frac{a+b\sin\zeta}{b^3} ,\\
&\int \frac{\sin^2\zeta\cos\zeta}{(a+b\sin\zeta)^3}\,d\zeta = -\frac{a^2}{2b^3(a+b\sin\zeta)^2} + \frac{2a}{b^3(a+b\sin\zeta)} + \frac{1}{b^3}\ln\left|1+\frac{b}{a}\sin\zeta\right| .
\end{aligned}\right\}\tag{73}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int (a+b\cos\zeta)^{\lambda}\cos^2\zeta\sin\zeta\,d\zeta = -\frac{a^2(a+b\cos\zeta)^{\lambda+1}}{b^3(\lambda+1)} + \frac{2a(a+b\cos\zeta)^{\lambda+2}}{b^3(\lambda+2)} - \frac{(a+b\cos\zeta)^{\lambda+3}}{b^3(\lambda+3)} ,\\
&\int \frac{\cos^2\zeta\sin\zeta}{(a+b\cos\zeta)^{\lambda}}\,d\zeta = -\frac{a^2}{b^3(1-\lambda)(a+b\cos\zeta)^{\lambda-1}} + \frac{2a}{b^3(2-\lambda)(a+b\cos\zeta)^{\lambda-2}} - \frac{1}{b^3(3-\lambda)(a+b\cos\zeta)^{\lambda-3}} ,\\
&\int \frac{\cos^2\zeta\sin\zeta}{a+b\cos\zeta}\,d\zeta = \frac{3a^2}{2b^3} + \frac{a}{b^2}\cos\zeta - \frac{\cos^2\zeta}{2b} - \frac{a^2}{b^3}\ln\left|1+\frac{b}{a}\cos\zeta\right| ;\\
&\int \frac{\cos^2\zeta\sin\zeta}{(a+b\cos\zeta)^2}\,d\zeta = \frac{a}{b^3(a+b\cos\zeta)} + \frac{2a}{b^3}\ln\left|1+\frac{b}{a}\cos\zeta\right| - \frac{a+b\cos\zeta}{b^3} ,\\
&\int \frac{\cos^2\zeta\sin\zeta}{(a+b\cos\zeta)^3}\,d\zeta = \frac{a^2}{2b^3(a+b\cos\zeta)^2} - \frac{2a}{b^3(a+b\cos\zeta)} - \frac{1}{b^3}\ln\left|1+\frac{b}{a}\cos\zeta\right| .
\end{aligned}\right\}\tag{74}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int (a+b\sin\zeta)^{\lambda}\sin^3\zeta\cos\zeta\,d\zeta = -\frac{a^3(a+b\sin\zeta)^{\lambda+1}}{b^4(\lambda+1)} + \frac{3a^2(a+b\sin\zeta)^{\lambda+2}}{b^4(\lambda+2)} - \frac{3a(a+b\sin\zeta)^{\lambda+3}}{b^4(\lambda+3)} +\\
&\qquad + \frac{(a+b\sin\zeta)^{\lambda+4}}{b^4(\lambda+4)} ,\\
&\int \frac{\sin^3\zeta\cos\zeta}{(a+b\sin\zeta)^{\lambda}}\,d\zeta = -\frac{a^3}{b^4(1-\lambda)(a+b\sin\zeta)^{\lambda-1}} + \frac{3a^2}{b^4(2-\lambda)(a+b\sin\zeta)^{\lambda-2}} - \frac{3a}{b^4(3-\lambda)(a+b\sin\zeta)^{\lambda-3}} +\\
&\qquad + \frac{1}{b^4(4-\lambda)(a+b\sin\zeta)^{\lambda-4}} ,\\
&\int \frac{\sin^3\zeta\cos\zeta}{a+b\sin\zeta}\,d\zeta = \frac{11a^3}{6b^4} + \frac{a^2}{b^3}\sin\zeta - \frac{a}{2b^2}\sin^2\zeta + \frac{\sin^3\zeta}{3b} - \frac{a^3}{b^4}\ln\left|1+\frac{b}{a}\sin\zeta\right| ,\\
&\int \frac{\sin^3\zeta\cos\zeta}{(a+b\sin\zeta)^2}\,d\zeta = \frac{a^3}{b^4(a+b\sin\zeta)} + \frac{3a^2}{b^4}\ln\left|1+\frac{b}{a}\sin\zeta\right| - \frac{3a}{b^4}(a+b\sin\zeta) + \frac{(a+b\sin\zeta)^2}{2b^4} ,\\
&\int \frac{\sin^3\zeta\cos\zeta}{(a+b\sin\zeta)^3}\,d\zeta = \frac{a^3}{2b^4(a+b\sin\zeta)^2} - \frac{3a^2}{b^4(a+b\sin\zeta)} - \frac{3a}{b^4}\ln\left|1+\frac{b}{a}\sin\zeta\right| + \frac{a+b\sin\zeta}{b^4} ,\\
&\int \frac{\sin^3\zeta\cos\zeta}{(a+b\sin\zeta)^4}\,d\zeta = \frac{a^3}{3b^4(a+b\sin\zeta)^3} - \frac{3a^2}{2b^4(a+b\sin\zeta)^2} + \frac{3a}{b^4(a+b\sin\zeta)} + \frac{1}{b^4}\ln\left|1+\frac{b}{a}\sin\zeta\right| .
\end{aligned}\right\}\tag{75}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int (a+b\cos\zeta)^{\lambda}\cos^3\zeta\sin\zeta\,d\zeta = \frac{a^3(a+b\cos\zeta)^{\lambda+1}}{b^4(\lambda+1)} - \frac{3a^2(a+b\cos\zeta)^{\lambda+2}}{b^4(\lambda+2)} + \frac{3a(a+b\cos\zeta)^{\lambda+3}}{b^4(\lambda+3)} -\\
&\qquad - \frac{(a+b\cos\zeta)^{\lambda+4}}{b^4(\lambda+4)} ,\\
&\int \frac{\cos^3\zeta\sin\zeta}{(a+b\cos\zeta)^{\lambda}}\,d\zeta = \frac{a^3}{b^4(1-\lambda)(a+b\cos\zeta)^{\lambda-1}} - \frac{3a^2}{b^4(2-\lambda)(a+b\cos\zeta)^{\lambda-2}} + \frac{3a}{b^4(3-\lambda)(a+b\cos\zeta)^{\lambda-3}} -\\
&\qquad - \frac{1}{b^4(4-\lambda)(a+b\cos\zeta)^{\lambda-4}} ,
\end{aligned}\right\}\tag{76}$$

$$\int \frac{\cos^3\zeta\sin\zeta}{a+b\cos\zeta}\,d\zeta = -\frac{11a^3}{6b^4} - \frac{a^2}{b^3}\cos\zeta + \frac{a}{2b^2}\cos^2\zeta - \frac{\cos^3\zeta}{3b} + \frac{a^3}{b^4}\ln\left|1+\frac{b}{a}\cos\zeta\right| \quad ,$$

$$\int \frac{\cos^3\zeta\sin\zeta}{(a+b\cos\zeta)^2}\,d\zeta = -\frac{a^3}{b^4(a+b\cos\zeta)} - \frac{3a^2}{b^4}\ln\left|1+\frac{b}{a}\cos\zeta\right| + \frac{3a}{b^4}(a+b\cos\zeta) - \frac{(a+b\cos\zeta)^2}{2b^4} \quad ,$$

$$\int \frac{\cos^3\zeta\sin\zeta}{(a+b\cos\zeta)^3}\,d\zeta = -\frac{a^3}{2b^4(a+b\cos\zeta)^2} + \frac{3a^2}{b^4(a+b\cos\zeta)} + \frac{3a}{b^4}\ln\left|1+\frac{b}{a}\cos\zeta\right| - \frac{a+b\cos\zeta}{b^4} \quad ,$$

$$\int \frac{\cos^3\zeta\sin\zeta}{(a+b\cos\zeta)^4}\,d\zeta = -\frac{a^3}{3b^4(a+b\cos\zeta)^3} + \frac{3a^2}{2b^4(a+b\cos\zeta)^2} - \frac{3a}{b^4(a+b\cos\zeta)} - \frac{1}{b^4}\ln\left|1+\frac{b}{a}\cos\zeta\right| \quad . \tag{76}$$

$$\int (c+d\sin\zeta)^n\sqrt{a+b\sin\zeta}\cos\zeta\,d\zeta = \frac{2d^n(a+b\sin\zeta)^{\frac{3}{2}}}{b^{n+1}}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n + \frac{1}{5}\binom{n}{1}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}(a+b\sin\zeta) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{7}\binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}(a+b\sin\zeta)^2 + \cdots + \frac{1}{2n+3}(a+b\sin\zeta)^n\right],$$

$$\int (c+d\cos\zeta)^n\sqrt{a+b\cos\zeta}\sin\zeta\,d\zeta = -\frac{2d^n(a+b\cos\zeta)^{\frac{3}{2}}}{b^{n+1}}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n + \frac{1}{5}\binom{n}{1}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}(a+b\cos\zeta) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{7}\binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}(a+b\cos\zeta)^2 + \cdots + \frac{1}{2n+3}(a+b\cos\zeta)^n\right]. \tag{77}$$

$$\int \frac{(c+d\sin\zeta)^n\cos\zeta}{\sqrt{a+b\sin\zeta}}\,d\zeta = \frac{2d^n\sqrt{a+b\sin\zeta}}{b^{n+1}}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n + \frac{1}{3}\binom{n}{1}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}(a+b\sin\zeta) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5}\binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}(a+b\sin\zeta)^2 + \cdots + \frac{1}{2n+1}(a+b\sin\zeta)^n\right],$$

$$\int \frac{(c+d\cos\zeta)^n\sin\zeta}{\sqrt{a+b\cos\zeta}}\,d\zeta = -\frac{2d^n\sqrt{a+b\cos\zeta}}{b^{n+1}}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n + \frac{1}{3}\binom{n}{1}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}(a+b\cos\zeta) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5}\binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}(a+b\cos\zeta)^2 + \cdots + \frac{1}{2n+1}(a+b\cos\zeta)^n\right]. \tag{78}$$

$$\int \cos\zeta\sqrt{a+b\sin\zeta}\,d\zeta = \frac{2}{3b}(a+b\sin\zeta)^{\frac{3}{2}} \quad ,$$

$$\int (c+d\sin\zeta)\cos\zeta\sqrt{a+b\sin\zeta}\,d\zeta = \frac{2d(a+b\sin\zeta)^{\frac{3}{2}}}{b^2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right) + \frac{1}{5}(a+b\sin\zeta)\right] \quad ,$$

$$\int (c+d\sin\zeta)^2\cos\zeta\sqrt{a+b\sin\zeta}\,d\zeta = \frac{2d^2(a+b\sin\zeta)^{\frac{3}{2}}}{b^3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+b\sin\zeta) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{7}(a+b\sin\zeta)^2\right] \quad ,$$

$$\int (c+d\sin\zeta)^3\cos\zeta\sqrt{a+b\sin\zeta}\,d\zeta = \frac{2d^3(a+b\sin\zeta)^{\frac{3}{2}}}{b^4}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3 + \frac{3}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2(a+b\sin\zeta) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{7}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+b\sin\zeta)^2 + \frac{1}{9}(a+b\sin\zeta)^3\right],$$

$$\int (c+d\sin\zeta)^4\cos\zeta\sqrt{a+b\sin\zeta}\,d\zeta = \frac{2d^4(a+b\sin\zeta)^{\frac{3}{2}}}{b^5}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^4 + \frac{4}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3(a+b\sin\zeta) + \right.$$

$$+ \frac{6}{7}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2(a+b\sin\zeta)^2 + \frac{4}{9}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+b\sin\zeta)^3 +$$

$$\left. + \frac{1}{11}(a+b\sin\zeta)^4\right] \quad . \tag{79}$$

$$\int \sin\zeta\sqrt{a+b\cos\zeta}\,d\zeta = -\frac{2}{3b}(a+b\cos\zeta)^{\frac{3}{2}} \quad ,$$

$$\int (c+d\cos\zeta)\sin\zeta\sqrt{a+b\cos\zeta}\,d\zeta = -\frac{2d(a+b\cos\zeta)^{\frac{3}{2}}}{b^2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right) + \frac{1}{5}(a+b\cos\zeta)\right],$$

$$\int (c+d\cos\zeta)\sin\zeta\sqrt{a+b\cos\zeta}\,d\zeta = -\frac{2d^2(a+b\cos\zeta)^{\frac{3}{2}}}{b^3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+b\cos\zeta) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{7}(a+b\cos\zeta)^2\right] \quad ,$$

$$\int (c+d\cos\zeta)^3\sin\zeta\sqrt{a+b\cos\zeta}\,d\zeta = -\frac{2d^3(a+b\cos\zeta)^{\frac{3}{2}}}{b^4}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3 + \frac{3}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2(a+b\cos\zeta) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{7}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+b\cos\zeta)^2 + \frac{1}{9}(a+b\cos\zeta)^3\right], \tag{80}$$

$$\begin{aligned}\int (c+d\cos\zeta)^4 \sin\zeta \sqrt{a+b\cos\zeta}\, d\zeta = &-\frac{2d^4(a+b\cos\zeta)^{\frac{3}{2}}}{b^5}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^4 + \frac{4}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3 (a+b\cos\zeta) + \right.\\ &+\frac{6}{7}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2 (a+b\cos\zeta)^2 + \frac{4}{9}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+b\cos\zeta)^3 + \\ &\left.+\frac{1}{11}(a+b\cos\zeta)^4\right]\,.\end{aligned} \qquad (80)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\cos\zeta}{\sqrt{a+b\sin\zeta}}\, d\zeta = \frac{2}{b}\sqrt{a+b\sin\zeta}\,,\\
&\int \frac{c+d\sin\zeta}{\sqrt{a+b\sin\zeta}}\cos\zeta\, d\zeta = \frac{2d\sqrt{a+b\sin\zeta}}{b^2}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right) + \frac{1}{3}(a+b\sin\zeta)\right],\\
&\int \frac{(c+d\sin\zeta)^2}{\sqrt{a+b\sin\zeta}}\cos\zeta\, d\zeta = \frac{2d^2\sqrt{a+b\sin\zeta}}{b^3}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+b\sin\zeta) + \frac{1}{5}(a+b\sin\zeta)^2\right],\\
&\int \frac{(c+d\sin\zeta)^3}{\sqrt{a+b\sin\zeta}}\cos\zeta\, d\zeta = \frac{2d^3\sqrt{a+b\sin\zeta}}{b^4}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3 + \left(\frac{cb}{d}-a\right)^2 (a+b\sin\zeta) + \right.\\
&\qquad\left.+\frac{3}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+b\sin\zeta)^2 + \frac{1}{7}(a+b\sin\zeta)^3\right],\\
&\int \frac{(c+d\sin\zeta)^4}{\sqrt{a+b\sin\zeta}}\cos\zeta\, d\zeta = \frac{2d^4\sqrt{a+b\sin\zeta}}{b^5}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right)^4 + \frac{4}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3 (a+b\sin\zeta) + \right.\\
&\qquad\left.+\frac{6}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2 (a+b\sin\zeta)^2 + \frac{4}{7}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+b\sin\zeta)^3 + \frac{1}{9}(a+b\sin\zeta)^4\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (81)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\sin\zeta}{\sqrt{a+b\cos\zeta}}\, d\zeta = -\frac{2}{b}\sqrt{a+b\cos\zeta}\,,\\
&\int \frac{c+d\cos\zeta}{\sqrt{a+b\cos\zeta}}\sin\zeta\, d\zeta = -\frac{2d\sqrt{a+b\cos\zeta}}{b^2}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right) + \frac{1}{3}(a+b\cos\zeta)\right],\\
&\int \frac{(c+d\cos\zeta)^2}{\sqrt{a+b\cos\zeta}}\sin\zeta\, d\zeta = -\frac{2d^2\sqrt{a+b\cos\zeta}}{b^3}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+b\cos\zeta) + \frac{1}{5}(a+b\cos\zeta)^2\right],\\
&\int \frac{(c+d\cos\zeta)^3}{\sqrt{a+b\cos\zeta}}\sin\zeta\, d\zeta = -\frac{2d^3\sqrt{a+b\cos\zeta}}{b^4}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3 + \left(\frac{cb}{d}-a\right)^2 (a+b\cos\zeta) + \right.\\
&\qquad\left.+\frac{3}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+b\cos\zeta)^2 + \frac{1}{7}(a+b\cos\zeta)^3\right],\\
&\int \frac{(c+d\cos\zeta)^4}{\sqrt{a+b\cos\zeta}}\sin\zeta\, d\zeta = -\frac{2d^4\sqrt{a+b\cos\zeta}}{b^5}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right)^4 + \frac{4}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3 (a+b\cos\zeta) + \right.\\
&\qquad\left.+\frac{6}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2 (a+b\cos\zeta)^2 + \frac{4}{7}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+b\cos\zeta)^3 + \frac{1}{9}(a+b\cos\zeta)^4\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (82)$$

Für die neuen Veränderlichen

$$z = \sin^2\zeta\,, \qquad dz = 2\sin\zeta\cos\zeta\, d\zeta \quad \text{bzw.} \quad z = \cos^2\zeta\,, \qquad dz = -2\cos\zeta\sin\zeta\, d\zeta$$

folgt aus (30) bis (33) und (52) bis (59)

$$\left.\begin{aligned}
&\int \sin^{2\lambda+1}\zeta\cos^{2n+1}\zeta\, d\zeta = \frac{\sin^{2\lambda+2}\zeta}{2\lambda+2} - \binom{n}{1}\frac{\sin^{2\lambda+4}\zeta}{2\lambda+4} + \binom{n}{2}\frac{\sin^{2\lambda+6}\zeta}{2\lambda+6} - \cdots + (-1)^n\frac{\sin^{2\lambda+2n+2}\zeta}{2\lambda+2n+2}\,,\\
&\int \cos^{2\lambda+1}\zeta\sin^{2n+1}\zeta\, d\zeta = -\frac{\cos^{2\lambda+2}\zeta}{2\lambda+2} + \binom{n}{1}\frac{\cos^{2\lambda+4}\zeta}{2\lambda+4} - \binom{n}{2}\frac{\cos^{2\lambda+6}\zeta}{2\lambda+6} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{\cos^{2\lambda+2n+2}\zeta}{2\lambda+2n+2}.
\end{aligned}\right\} \quad (\lambda \neq -1, -2, -3, \cdots -(n+1)) \qquad (83)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\cos^{2n+1}\zeta}{\sin\zeta}\, d\zeta = \ln|\sin\zeta| - \binom{n}{1}\frac{\sin^2\zeta}{2} + \binom{n}{2}\frac{\sin^4\zeta}{4} - \cdots + (-1)^n\frac{\sin^{2n}\zeta}{2n}\,,\\
&\int \frac{\cos^{2n+1}\zeta}{\sin^3\zeta}\, d\zeta = -\frac{1}{2\sin^2\zeta} - \binom{n}{1}\ln|\sin\zeta| + \binom{n}{2}\frac{\sin^2\zeta}{2} - \binom{n}{3}\frac{\sin^4\zeta}{4} + \cdots + (-1)^n\frac{\sin^{2n-2}\zeta}{2n-2}\,,\\
&\int \frac{\cos^{2n+1}\zeta}{\sin^5\zeta}\, d\zeta = -\frac{1}{4\sin^4\zeta} + \binom{n}{1}\frac{1}{2\sin^2\zeta} + \binom{n}{2}\ln|\sin\zeta| - \binom{n}{3}\frac{\sin^2\zeta}{2} + \binom{n}{4}\frac{\sin^4\zeta}{4} - \cdots + (-1)^n\frac{\sin^{2n-4}\zeta}{2n-4}\,,\\
&\int \frac{\cos^{2n+1}\zeta}{\sin^7\zeta}\, d\zeta = -\frac{1}{6\sin^6\zeta} + \binom{n}{1}\frac{1}{4\sin^4\zeta} - \binom{n}{2}\frac{1}{2\sin^2\zeta} - \binom{n}{3}\ln|\sin\zeta| + \binom{n}{4}\frac{\sin^2\zeta}{2} - \binom{n}{5}\frac{\sin^4\zeta}{4} + \cdots +\\
&\qquad + (-1)^n\frac{\sin^{2n-6}\zeta}{2n-6}\,,\\
&\text{---}
\end{aligned}\right. \qquad (84)$$

$$\left.\begin{aligned}
\int\frac{\cos^{2n+1}\zeta}{\sin^{2n-1}\zeta}\,d\zeta &= -\frac{1}{(2n-2)\sin^{2n-2}\zeta}+\binom{n}{1}\frac{1}{(2n-4)\sin^{2n-4}\zeta}-\binom{n}{2}\frac{1}{(2n-6)\sin^{2n-6}\zeta}+\cdots+\\
&\quad+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-2}\frac{1}{2\sin^{2}\zeta}+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\ln|\sin\zeta|+(-1)^{n}\frac{\sin^{2}\zeta}{2}\,,\\
\int\frac{\cos^{2n+1}\zeta}{\sin^{2n+1}\zeta}\,d\zeta &= \int\operatorname{cotg}^{2n+1}\zeta\,d\zeta=-\frac{1}{2n\sin^{2n}\zeta}+\binom{n}{1}\frac{1}{(2n-2)\sin^{2n-2}\zeta}-\binom{n}{2}\frac{1}{(2n-4)\sin^{2n-4}\zeta}+\cdots+\\
&\quad+(-1)^{n}\binom{n}{n-1}\frac{1}{2\sin^{2}\zeta}+(-1)^{n}\ln|\sin\zeta|\,.
\end{aligned}\right|\tag{84}$$

$$\left.\begin{aligned}
\int\frac{\sin^{2n+1}\zeta}{\cos\zeta}\,d\zeta &= -\ln|\cos\zeta|+\binom{n}{1}\frac{\cos^{2}\zeta}{2}-\binom{n}{2}\frac{\cos^{4}\zeta}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{\cos^{2n}\zeta}{2n}\,,\\
\int\frac{\sin^{2n+1}\zeta}{\cos^{3}\zeta}\,d\zeta &= \frac{1}{2\cos^{2}\zeta}+\binom{n}{1}\ln|\cos\zeta|-\binom{n}{2}\frac{\cos^{2}\zeta}{2}+\binom{n}{3}\frac{\cos^{4}\zeta}{4}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{\cos^{2n-2}\zeta}{2n-2}\,,\\
\int\frac{\sin^{2n+1}\zeta}{\cos^{5}\zeta}\,d\zeta &= \frac{1}{4\cos^{4}\zeta}-\binom{n}{1}\frac{1}{2\cos^{2}\zeta}-\binom{n}{2}\ln|\cos\zeta|+\binom{n}{3}\frac{\cos^{2}\zeta}{2}-\binom{n}{4}\frac{\cos^{4}\zeta}{4}+\cdots+\\
&\quad+(-1)^{n+1}\frac{\cos^{2n-4}\zeta}{2n-4}\,,\\
\int\frac{\sin^{2n+1}\zeta}{\cos^{7}\zeta}\,d\zeta &= \frac{1}{6\cos^{6}\zeta}-\binom{n}{1}\frac{1}{4\cos^{4}\zeta}+\binom{n}{2}\frac{1}{2\cos^{2}\zeta}+\binom{n}{3}\ln|\cos\zeta|-\binom{n}{4}\frac{\cos^{2}\zeta}{2}+\binom{n}{5}\frac{\cos^{4}\zeta}{4}-\\
&\quad-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{\cos^{2n-6}\zeta}{2n-6}\,,\\
&\text{---}\\
\int\frac{\sin^{2n+1}\zeta}{\cos^{2n-1}\zeta}\,d\zeta &= \frac{1}{(2n-2)\cos^{2n-2}\zeta}-\binom{n}{1}\frac{1}{(2n-4)\cos^{2n-4}\zeta}+\binom{n}{2}\frac{1}{(2n-6)\cos^{2n-6}\zeta}-\\
&\quad-\cdots+(-1)^{n}\binom{n}{n-2}\frac{1}{2\cos^{2}\zeta}+(-1)^{n}\binom{n}{n-1}\ln|\cos\zeta|+(-1)^{n+1}\frac{\cos^{2}\zeta}{2}\,,\\
\int\frac{\sin^{2n+1}\zeta}{\cos^{2n+1}\zeta}\,d\zeta &= \int\operatorname{tang}^{2n+1}\zeta\,d\zeta=\frac{1}{2n\cos^{2n}\zeta}-\binom{n}{1}\frac{1}{(2n-2)\cos^{2n-2}\zeta}+\binom{n}{2}\frac{1}{(2n-4)\cos^{2n-4}\zeta}-\\
&\quad-\cdots+(-1)^{n+1}\binom{n}{n-1}\frac{1}{2\cos^{2}\zeta}+(-1)^{n+1}\ln|\cos\zeta|\,.
\end{aligned}\right\}\tag{85}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{\cos\zeta}{\sin\zeta}\,d\zeta=\ln|\sin\zeta|\,, && \int\frac{\sin\zeta}{\cos\zeta}\,d\zeta=-\ln|\cos\zeta|\,,\\
&\int\frac{\cos^{3}\zeta}{\sin\zeta}\,d\zeta=\ln|\sin\zeta|-\frac{\sin^{2}\zeta}{2}\,, && \int\frac{\sin^{3}\zeta}{\cos\zeta}\,d\zeta=-\ln|\cos\zeta|+\frac{\cos^{2}\zeta}{2}\,,\\
&\int\frac{\cos^{5}\zeta}{\sin\zeta}\,d\zeta=\ln|\sin\zeta|-\sin^{2}\zeta+\frac{\sin^{4}\zeta}{4}\,, && \int\frac{\sin^{5}\zeta}{\cos\zeta}\,d\zeta=-\ln|\cos\zeta|+\cos^{2}\zeta-\frac{\cos^{4}\zeta}{4}\,,\\
&\int\frac{\cos^{7}\zeta}{\sin\zeta}\,d\zeta=\ln|\sin\zeta|-\frac{3\sin^{2}\zeta}{2}+\frac{3\sin^{4}\zeta}{4}- && \int\frac{\sin^{7}\zeta}{\cos\zeta}\,d\zeta=-\ln|\cos\zeta|+\frac{3\cos^{2}\zeta}{2}-\frac{3\cos^{4}\zeta}{4}+\\
&\qquad-\frac{\sin^{6}\zeta}{6}\,, && \qquad+\frac{\cos^{6}\zeta}{6}\,,\\
&\int\frac{\cos^{9}\zeta}{\sin\zeta}\,d\zeta=\ln|\sin\zeta|-2\sin^{2}\zeta+\frac{3\sin^{4}\zeta}{2}- && \int\frac{\sin^{9}\zeta}{\cos\zeta}\,d\zeta=-\ln|\cos\zeta|+2\cos^{2}\zeta-\frac{3\cos^{4}\zeta}{2}+\\
&\qquad-\frac{2\sin^{6}\zeta}{3}+\frac{\sin^{8}\zeta}{8}\,, && \qquad+\frac{2\cos^{6}\zeta}{3}-\frac{\cos^{8}\zeta}{8}\,.
\end{aligned}\right\}\tag{86}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{\cos\zeta}{\sin^{3}\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{2\sin^{2}\zeta}\,, && \int\frac{\sin\zeta}{\cos^{3}\zeta}\,d\zeta=\frac{1}{2\cos^{2}\zeta}\,,\\
&\int\frac{\cos^{3}\zeta}{\sin^{3}\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{2\sin^{2}\zeta}-\ln|\sin\zeta|\,, && \int\frac{\sin^{3}\zeta}{\cos^{3}\zeta}\,d\zeta=\frac{1}{2\cos^{2}\zeta}+\ln|\cos\zeta|\,,\\
&\int\frac{\cos^{5}\zeta}{\sin^{3}\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{2\sin^{2}\zeta}-2\ln|\sin\zeta|+\frac{\sin^{2}\zeta}{2}\,, && \int\frac{\sin^{5}\zeta}{\cos^{3}\zeta}\,d\zeta=\frac{1}{2\cos^{2}\zeta}+2\ln|\cos\zeta|-\frac{\cos^{2}\zeta}{2}\,,\\
&\int\frac{\cos^{7}\zeta}{\sin^{3}\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{2\sin^{2}\zeta}-3\ln|\sin\zeta|+\frac{3\sin^{2}\zeta}{2}- && \int\frac{\sin^{7}\zeta}{\cos^{3}\zeta}\,d\zeta=\frac{1}{2\cos^{2}\zeta}+3\ln|\cos\zeta|-\frac{3\cos^{2}\zeta}{2}+\\
&\qquad-\frac{\sin^{4}\zeta}{4}\,, && \qquad+\frac{\cos^{4}\zeta}{4}\,,\\
&\int\frac{\cos^{9}\zeta}{\sin^{3}\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{2\sin^{2}\zeta}-4\ln|\sin\zeta|+3\sin^{2}\zeta- && \int\frac{\sin^{9}\zeta}{\cos^{3}\zeta}\,d\zeta=\frac{1}{2\cos^{2}\zeta}+4\ln|\cos\zeta|-3\cos^{2}\zeta+\\
&\qquad-\sin^{4}\zeta+\frac{\sin^{6}\zeta}{6}\,, && \qquad+\cos^{4}\zeta-\frac{\cos^{6}\zeta}{6}\,.
\end{aligned}\right\}\tag{87}$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\cos\zeta}{\sin^5\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{4\sin^4\zeta}\,, \\
&\int \frac{\cos^3\zeta}{\sin^5\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{4\sin^4\zeta} + \frac{1}{2\sin^2\zeta}\,, \\
&\int \frac{\cos^5\zeta}{\sin^5\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{4\sin^4\zeta} + \frac{1}{\sin^2\zeta} + \ln|\sin\zeta|\,, \\
&\int \frac{\cos^7\zeta}{\sin^5\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{4\sin^4\zeta} + \frac{3}{2\sin^2\zeta} + 3\ln|\sin\zeta| - \\
&\qquad - \frac{\sin^2\zeta}{2}\,, \\
&\int \frac{\cos^9\zeta}{\sin^5\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{4\sin^4\zeta} + \frac{2}{\sin^2\zeta} + 6\ln|\sin\zeta| - \\
&\qquad - 2\sin^2\zeta + \frac{\sin^4\zeta}{4}\,, \\
&\int \frac{\sin\zeta}{\cos^5\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{4\cos^4\zeta}\,, \\
&\int \frac{\sin^3\zeta}{\cos^5\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{4\cos^4\zeta} - \frac{1}{2\cos^2\zeta}\,, \\
&\int \frac{\sin^5\zeta}{\cos^5\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{4\cos^4\zeta} - \frac{1}{\cos^2\zeta} - \ln|\cos\zeta|\,, \\
&\int \frac{\sin^7\zeta}{\cos^5\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{4\cos^4\zeta} - \frac{3}{2\cos^2\zeta} - 3\ln|\cos\zeta| + \\
&\qquad + \frac{\cos^2\zeta}{2}\,, \\
&\int \frac{\sin^9\zeta}{\cos^5\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{4\cos^4\zeta} - \frac{2}{\cos^2\zeta} - 6\ln|\cos\zeta| + \\
&\qquad + 2\cos^2\zeta - \frac{\cos^4\zeta}{4}\,.
\end{aligned} \tag{88}$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\cos\zeta}{\sin^7\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{6\sin^6\zeta}\,, \\
&\int \frac{\cos^3\zeta}{\sin^7\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{6\sin^6\zeta} + \frac{1}{4\sin^4\zeta}\,, \\
&\int \frac{\cos^5\zeta}{\sin^7\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{6\sin^6\zeta} + \frac{1}{2\sin^4\zeta} - \frac{1}{2\sin^2\zeta}\,, \\
&\int \frac{\cos^7\zeta}{\sin^7\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{6\sin^6\zeta} + \frac{3}{4\sin^4\zeta} - \frac{3}{2\sin^2\zeta} - \\
&\qquad - \ln|\sin\zeta|\,, \\
&\int \frac{\cos^9\zeta}{\sin^7\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{6\sin^6\zeta} + \frac{1}{\sin^4\zeta} - \frac{3}{\sin^2\zeta} - \\
&\qquad - 4\ln|\sin\zeta| + \frac{\sin^2\zeta}{2}\,, \\
&\int \frac{\sin\zeta}{\cos^7\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{6\cos^6\zeta}\,, \\
&\int \frac{\sin^3\zeta}{\cos^7\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{6\cos^6\zeta} - \frac{1}{4\cos^4\zeta}\,, \\
&\int \frac{\sin^5\zeta}{\cos^7\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{6\cos^6\zeta} - \frac{1}{2\cos^4\zeta} + \frac{1}{2\cos^2\zeta}\,, \\
&\int \frac{\sin^7\zeta}{\cos^7\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{6\cos^6\zeta} - \frac{3}{4\cos^4\zeta} + \frac{3}{2\cos^2\zeta} + \\
&\qquad + \ln|\cos\zeta|\,, \\
&\int \frac{\sin^9\zeta}{\cos^7\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{6\cos^6\zeta} - \frac{1}{\cos^4\zeta} + \frac{3}{\cos^2\zeta} + \\
&\qquad + 4\ln|\cos\zeta| - \frac{\cos^2\zeta}{2}\,.
\end{aligned} \tag{89}$$

$$\begin{aligned}
&\int \sin\zeta\cos\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^2\zeta}{2}\,, \\
&\int \sin\zeta\cos^3\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^2\zeta}{2} - \frac{\sin^4\zeta}{4}\,, \\
&\int \sin\zeta\cos^5\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^2\zeta}{2} - \frac{\sin^4\zeta}{2} + \frac{\sin^6\zeta}{6}\,, \\
&\int \sin\zeta\cos^7\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^2\zeta}{2} - \frac{3\sin^4\zeta}{4} + \frac{\sin^6\zeta}{2} - \\
&\qquad - \frac{\sin^8\zeta}{8}\,, \\
&\int \sin\zeta\cos^9\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^2\zeta}{2} - \sin^4\zeta + \sin^6\zeta - \\
&\qquad - \frac{\sin^8\zeta}{2} + \frac{\sin^{10}\zeta}{10}\,, \\
&\int \cos\zeta\sin\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^2\zeta}{2}\,, \\
&\int \cos\zeta\sin^3\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^2\zeta}{2} + \frac{\cos^4\zeta}{4}\,, \\
&\int \cos\zeta\sin^5\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^2\zeta}{2} + \frac{\cos^4\zeta}{2} - \frac{\cos^6\zeta}{6}\,, \\
&\int \cos\zeta\sin^7\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^2\zeta}{2} + \frac{3\cos^4\zeta}{4} - \frac{\cos^6\zeta}{2} + \\
&\qquad + \frac{\cos^8\zeta}{8}\,, \\
&\int \cos\zeta\sin^9\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^2\zeta}{2} + \cos^4\zeta - \cos^6\zeta + \\
&\qquad + \frac{\cos^8\zeta}{2} - \frac{\cos^{10}\zeta}{10}\,.
\end{aligned} \tag{90}$$

$$\begin{aligned}
&\int \sin^3\zeta\cos\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^4\zeta}{4}\,, \\
&\int \sin^3\zeta\cos^3\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^4\zeta}{4} - \frac{\sin^6\zeta}{6}\,, \\
&\int \sin^3\zeta\cos^5\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^4\zeta}{4} - \frac{\sin^6\zeta}{3} + \frac{\sin^8\zeta}{8}\,, \\
&\int \sin^3\zeta\cos^7\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^4\zeta}{4} - \frac{\sin^6\zeta}{2} + \frac{3\sin^8\zeta}{8} - \\
&\qquad - \frac{\sin^{10}\zeta}{10}\,, \\
&\int \sin^3\zeta\cos^9\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^4\zeta}{4} - \frac{2\sin^6\zeta}{3} + \frac{3\sin^8\zeta}{4} - \\
&\qquad - \frac{2\sin^{10}\zeta}{5} + \frac{\sin^{12}\zeta}{12}\,, \\
&\int \cos^3\zeta\sin\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^4\zeta}{4}\,, \\
&\int \cos^3\zeta\sin^3\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^4\zeta}{4} + \frac{\cos^6\zeta}{6}\,, \\
&\int \cos^3\zeta\sin^5\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^4\zeta}{4} + \frac{\cos^6\zeta}{3} - \frac{\cos^8\zeta}{8}\,, \\
&\int \cos^3\zeta\sin^7\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^4\zeta}{4} + \frac{\cos^6\zeta}{2} - \frac{3\cos^8\zeta}{8} + \\
&\qquad + \frac{\cos^{10}\zeta}{10}\,, \\
&\int \cos^3\zeta\sin^9\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^4\zeta}{4} + \frac{2\cos^6\zeta}{3} - \\
&\qquad - \frac{3\cos^8\zeta}{4} + \frac{2\cos^{10}\zeta}{5} - \frac{\cos^{12}\zeta}{12}\,.
\end{aligned} \tag{91}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \sin^5\zeta\cos\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^6\zeta}{6}, &&\int \cos^5\zeta\sin\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^6\zeta}{6};\\
&\int \sin^5\zeta\cos^3\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^6\zeta}{6}-\frac{\sin^8\zeta}{8}, &&\int \cos^5\zeta\sin^3\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^6\zeta}{6}+\frac{\cos^8\zeta}{8},\\
&\int \sin^5\zeta\cos^5\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^6\zeta}{6}-\frac{\sin^8\zeta}{4}+\frac{\sin^{10}\zeta}{10}, &&\int \cos^5\zeta\sin^5\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^6\zeta}{6}+\frac{\cos^8\zeta}{4}-\frac{\cos^{10}\zeta}{10},\\
&\int \sin^5\zeta\cos^7\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^6\zeta}{6}-\frac{3\sin^8\zeta}{8}+\frac{3\sin^{10}\zeta}{10}- &&\int \cos^5\zeta\sin^7\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^6\zeta}{6}+\frac{3\cos^8\zeta}{8}-\\
&\qquad -\frac{\sin^{12}\zeta}{12}; &&\qquad -\frac{3\cos^{10}\zeta}{10}+\frac{\cos^{12}\zeta}{12},\\
&\int \sin^5\zeta\cos^9\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^6\zeta}{6}-\frac{\sin^8\zeta}{2}+\frac{3\sin^{10}\zeta}{5}- &&\int \cos^5\zeta\sin^9\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^6\zeta}{6}+\frac{\cos^8\zeta}{2}-\frac{3\cos^{10}\zeta}{5}+\\
&\qquad -\frac{\sin^{12}\zeta}{3}+\frac{\sin^{14}\zeta}{14}; &&\qquad +\frac{\cos^{12}\zeta}{3}-\frac{\cos^{14}\zeta}{14}.
\end{aligned}\right\}\quad(92)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \sin^7\zeta\cos\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^8\zeta}{8}. &&\int \cos^7\zeta\sin\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^8\zeta}{8},\\
&\int \sin^7\zeta\cos^3\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^8\zeta}{8}-\frac{\sin^{10}\zeta}{10}, &&\int \cos^7\zeta\sin^3\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^8\zeta}{8}+\frac{\cos^{10}\zeta}{10},\\
&\int \sin^7\zeta\cos^5\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^8\zeta}{8}-\frac{\sin^{10}\zeta}{5}+\frac{\sin^{12}\zeta}{12}; &&\int \cos^7\zeta\sin^5\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^8\zeta}{8}+\frac{\cos^{10}\zeta}{5}-\frac{\cos^{12}\zeta}{12},\\
&\int \sin^7\zeta\cos^7\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^8\zeta}{8}-\frac{3\sin^{10}\zeta}{10}+\frac{\sin^{12}\zeta}{4}- &&\int \cos^7\zeta\sin^7\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^8\zeta}{8}+\frac{3\cos^{10}\zeta}{10}-\\
&\qquad -\frac{\sin^{14}\zeta}{14}, &&\qquad -\frac{\cos^{12}\zeta}{4}+\frac{\cos^{14}\zeta}{14},\\
&\int \sin^7\zeta\cos^9\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^8\zeta}{8}-\frac{2\sin^{10}\zeta}{5}+\frac{\sin^{12}\zeta}{2}- &&\int \cos^7\zeta\sin^9\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^8\zeta}{8}+\frac{2\cos^{10}\zeta}{5}-\frac{\cos^{12}\zeta}{2}+\\
&\qquad -\frac{2\sin^{14}\zeta}{7}+\frac{\sin^{16}\zeta}{16}. &&\qquad +\frac{2\cos^{14}\zeta}{7}-\frac{\cos^{16}\zeta}{16}.
\end{aligned}\right\}\quad(93)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \sin^9\zeta\cos\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^{10}\zeta}{10}; &&\int \cos^9\zeta\sin\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^{10}\zeta}{10}.\\
&\int \sin^9\zeta\cos^3\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^{10}\zeta}{10}-\frac{\sin^{12}\zeta}{12}, &&\int \cos^9\zeta\sin^3\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^{10}\zeta}{10}+\frac{\cos^{12}\zeta}{12},\\
&\int \sin^9\zeta\cos^5\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^{10}\zeta}{10}-\frac{\sin^{12}\zeta}{6}+\frac{\sin^{14}\zeta}{14}, &&\int \cos^9\zeta\sin^5\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^{10}\zeta}{10}+\frac{\cos^{12}\zeta}{6}-\frac{\cos^{14}\zeta}{14},\\
&\int \sin^9\zeta\cos^7\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^{10}\zeta}{10}-\frac{\sin^{12}\zeta}{4}+\frac{3\sin^{14}\zeta}{14}- &&\int \cos^9\zeta\sin^7\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^{10}\zeta}{10}+\frac{\cos^{12}\zeta}{4}-\\
&\qquad -\frac{\sin^{16}\zeta}{16}, &&\qquad -\frac{3\cos^{14}\zeta}{14}+\frac{\cos^{16}\zeta}{16},\\
&\int \sin^9\zeta\cos^9\zeta\,d\zeta = \frac{\sin^{10}\zeta}{10}-\frac{\sin^{12}\zeta}{3}+\frac{3\sin^{14}\zeta}{7}- &&\int \cos^9\zeta\sin^9\zeta\,d\zeta = -\frac{\cos^{10}\zeta}{10}+\frac{\cos^{12}\zeta}{3}-\\
&\qquad -\frac{\sin^{16}\zeta}{4}+\frac{\sin^{18}\zeta}{18}, &&\qquad -\frac{3\cos^{14}\zeta}{7}+\frac{\cos^{16}\zeta}{4}-\frac{\cos^{18}\zeta}{18}.
\end{aligned}\right\}\quad(94)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \operatorname{tang}\zeta\,d\zeta = -\ln|\cos\zeta|, &&\int \operatorname{cotg}\zeta\,d\zeta = \ln|\sin\zeta|,\\
&\int \operatorname{tang}^3\zeta\,d\zeta = \frac{1}{2\cos^2\zeta}+\ln|\cos\zeta|, &&\int \operatorname{cotg}^3\zeta\,d\zeta = -\frac{1}{2\sin^2\zeta}-\ln|\sin\zeta|,\\
&\int \operatorname{tang}^5\zeta\,d\zeta = \frac{1}{4\cos^4\zeta}-\frac{1}{\cos^2\zeta}-\ln|\cos\zeta|, &&\int \operatorname{cotg}^5\zeta\,d\zeta = -\frac{1}{4\sin^4\zeta}+\frac{1}{\sin^2\zeta}+\ln|\sin\zeta|,\\
&\int \operatorname{tang}^7\zeta\,d\zeta = \frac{1}{6\cos^6\zeta}-\frac{3}{4\cos^4\zeta}+\frac{3}{2\cos^2\zeta}+ &&\int \operatorname{cotg}^7\zeta\,d\zeta = -\frac{1}{6\sin^6\zeta}+\frac{3}{4\sin^4\zeta}-\frac{2}{2\sin^2\zeta}-\\
&\qquad +\ln|\cos\zeta|, &&\qquad -\ln|\sin\zeta|.
\end{aligned}\right\}\quad(95)$$

c) Hyperbolische Integrale.

Vertauscht man ζ mit $i\zeta$ und in den sinus-Integralen b und d mit $-ib$ und $-id$, so ergeben sich die den Gln (60) bis (95) entsprechenden hyperbolischen Integrale. Man erhält u. a.

$$\int (a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda}(c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{n}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\,d\zeta = \frac{d^n}{b^{n+1}}\left[\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n}(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda+1}}{\lambda+1}+\binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda+2}}{\lambda+2}+\right.$$
$$\left.+\binom{n}{2}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda+3}}{\lambda+3}+\cdots+\frac{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda+n+1}}{\lambda+n+1}\right],\quad (\lambda \neq -1,-2,-3,\cdots-(n+1)). \quad (96)$$

$$\int (a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda}(c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{n}\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\,d\zeta = \frac{d^n}{b^{n+1}}\left[\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n}(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda+1}}{\lambda+1}+\binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda+2}}{\lambda+2}+\right.$$
$$\left.+\binom{n}{2}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda+3}}{\lambda+3}+\cdots+\frac{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda+n+1}}{\lambda+n+1}\right],\quad (\lambda \neq -1,-2,-3,\cdots-(n+1)). \quad (97)$$

$$\int\frac{(c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{n}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\,d\zeta=\frac{d^n}{b^{n+1}}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\frac{cb}{d}-a}\right|+\binom{n}{1}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{1}+\right.$$
$$\left.+\binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}\frac{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{2}}{2}+\cdots+\frac{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{n}}{n}\right],$$

$$\int\frac{(c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{n}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{2}}\,d\zeta=\frac{d^n}{b^{n+1}}\left[-\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n}}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}+\binom{n}{1}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\frac{cb}{d}-a}\right|+\binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{1}+\right.$$
$$\left.+\binom{n}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-3}\frac{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{2}}{2}+\cdots+\frac{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{n-1}}{n-1}\right],$$

$$\int\frac{(c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{n}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{3}}\,d\zeta=\frac{d^n}{b^{n+1}}\left[-\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n}}{2(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{2}}-\binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}+\binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\frac{cb}{d}-a}\right|+\right.$$
$$+\binom{n}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-3}\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{1}+\binom{n}{4}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-4}\frac{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{2}}{2}+\cdots+$$
$$\left.+\frac{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{n-2}}{n-2}\right],$$

$$\int\frac{(c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{n}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{4}}\,d\zeta=\frac{d^n}{b^{n+1}}\left[-\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n}}{3(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{3}}-\binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}}{2(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{2}}-\binom{n}{2}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}+\right.$$
$$+\binom{n}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-3}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\frac{cb}{d}-a}\right|+\binom{n}{4}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-4}\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{1}+$$
$$\left.+\binom{n}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-5}\frac{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{2}}{2}+\cdots+\frac{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{n-3}}{n-3}\right], \qquad (98)$$

$$\int\frac{(c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{n}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{n}}\,d\zeta=\frac{d^n}{b^{n+1}}\left[-\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n}}{(n-1)(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{n-1}}-\binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}}{(n-2)(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{n-2}}-\cdots-\right.$$
$$\left.-\binom{n}{n-2}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{2}}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}+\binom{n}{n-1}\left(\frac{cb}{d}-a\right)\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\frac{cb}{d}-a}\right|a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\right],$$

$$\int\frac{(c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{n}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{n+1}}\,d\zeta=\frac{d^n}{b^{n+1}}\left[-\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n}}{n(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{n}}-\binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}}{(n-1)(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{n-1}}-\cdots-\right.$$
$$\left.-\binom{n}{n-1}\frac{\frac{cb}{d}-a}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}+\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\frac{cb}{d}-a}\right|\right].$$

$$\int \frac{(c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^n\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}\,d\zeta=\frac{d^n}{b^{n+1}}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{\frac{cb}{d}-a}\right|+\binom{n}{1}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}\frac{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{1}+\binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}\frac{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2}{2}+\cdots+\frac{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^n}{n}\right],$$

$$\int \frac{(c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^n\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2}\,d\zeta=\frac{d^n}{b^{n+1}}\left[-\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n}{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}+\binom{n}{1}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{\frac{cb}{d}-a}\right|+\binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}\frac{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{1}+\binom{n}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-3}\frac{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2}{2}+\cdots+\frac{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{n-1}}{n-1}\right],$$

$$\int \frac{(c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^n\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^3}\,d\zeta=\frac{d^n}{b^{n+1}}\left[-\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n}{2(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2}-\binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}}{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}+\binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{\frac{cb}{d}-a}\right|+\binom{n}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-3}\frac{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{1}+\binom{n}{4}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-4}\frac{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2}{2}+\cdots+\frac{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{n-2}}{n-2}\right],$$

$$\int \frac{(c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^n\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^4}\,d\zeta=\frac{d^n}{b^{n+1}}\left[-\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n}{3(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^3}-\binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}}{2(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2}-\binom{n}{2}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}}{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}+\binom{n}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-3}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{\frac{cb}{d}-a}\right|+\binom{n}{4}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-4}\frac{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{1}+\binom{n}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-5}\frac{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2}{2}+\cdots+\frac{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{n-3}}{n-3}\right],$$

$$\int \frac{(c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^n\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^n}\,d\zeta=\frac{d^n}{b^{n+1}}\left[-\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n}{(n-1)(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{n-1}}-\binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}}{(n-2)(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{n-2}}-\cdots-\binom{n}{n-2}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2}{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}+\binom{n}{n-1}\left(\frac{cb}{d}-a\right)\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{\frac{cb}{d}-a}\right|+a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\right],$$

$$\int \frac{(c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^n\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{n+1}}\,d\zeta=\frac{d^n}{b^{n+1}}\left[-\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n}{n(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^n}-\binom{n}{1}\frac{\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}}{(n-1)(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{n-1}}-\cdots-\binom{n}{n-1}\frac{\frac{cb}{d}-a}{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}+\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{\frac{cb}{d}-a}\right|\right]. \tag{99}$$

$$\int (a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\,d\zeta=\frac{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda+1}}{b(\lambda+1)},\qquad \int (a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda}\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\,d\zeta=\frac{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda+1}}{b(\lambda+1)},$$
$$\int \frac{\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda}}\,d\zeta=\frac{1}{b(1-\lambda)(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda-1}},\qquad \int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda}}\,d\zeta=\frac{1}{b(1-\lambda)(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda-1}},$$
$$\int \frac{\mathfrak{Cof}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\,d\zeta=\frac{1}{b}\ln\left|1+\frac{b}{a}\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\right|,\qquad \int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}\,d\zeta=\frac{1}{b}\ln\left|1+\frac{b}{a}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\right|. \tag{100}$$

$$\int (a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda}\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\,d\zeta=-\frac{a(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda+1}}{b^2(\lambda+1)}+\frac{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda+2}}{b^2(\lambda+2)},$$
$$\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda}}\,d\zeta=-\frac{a}{b^2(1-\lambda)(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda-1}}+\frac{1}{b^2(2-\lambda)(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda-2}},$$
$$\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\,d\zeta=\frac{a}{b^2}+\frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{b}-\frac{a}{b^2}\ln\left|1+\frac{b}{a}\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\right|,$$
$$\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2}\,d\zeta=\frac{a}{b^2(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)}+\frac{1}{b^2}\ln\left|1+\frac{b}{a}\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\right|. \tag{101}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int (a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\,d\zeta = -\frac{a(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda+1}}{b^2(\lambda+1)} + \frac{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda+2}}{b^2(\lambda+2)}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Cof}\,\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda}}\,d\zeta = -\frac{a}{b^2(1-\lambda)(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda-1}} + \frac{1}{b^2(2-\lambda)(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda-2}}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Cof}\,\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}\,d\zeta = \frac{a}{b^2} + \frac{\mathfrak{Cof}\,\zeta}{b} - \frac{a}{b^2}\ln\left|1+\frac{b}{a}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\right|\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Cof}\,\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2}\,d\zeta = \frac{a}{b^2(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)} + \frac{1}{b^2}\ln\left|1+\frac{b}{a}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\right|\,.
\end{aligned}\right\}\quad(102)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int (a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda}\,\mathfrak{Sin}^2\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\,d\zeta = \frac{a^2(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda+1}}{b^3(\lambda+1)} - \frac{2a(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda+2}}{b^3(\lambda+2)} + \frac{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda+3}}{b^3(\lambda+3)}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda}}\,d\zeta = \frac{a^2}{b^3(1-\lambda)(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda-1}} - \frac{2a}{b^3(2-\lambda)(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda-2}} + \frac{1}{b^3(3-\lambda)(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda-3}}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\,d\zeta = -\frac{3a^2}{2b^3} - \frac{a}{b^2}\,\mathfrak{Sin}\,\zeta + \frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{2b} + \frac{a^2}{b^3}\ln\left|1+\frac{b}{a}\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\right|\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2}\,d\zeta = -\frac{a^2}{b^3(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)} - \frac{2a}{b^3}\ln\left|1+\frac{b}{a}\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\right| + \frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{b^3}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^3}\,d\zeta = -\frac{a^2}{2b^3(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2} + \frac{2a}{b^3(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)} + \frac{1}{b^3}\ln\left|1+\frac{b}{a}\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\right|\,.
\end{aligned}\right\}\quad(103)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int (a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda}\,\mathfrak{Cof}^2\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\,d\zeta = \frac{a^2(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda+1}}{b^3(\lambda+1)} - \frac{2a(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda+2}}{b^3(\lambda+2)} + \frac{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda+3}}{b^3(\lambda+3)}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Cof}^2\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda}}\,d\zeta = \frac{a^2}{b^3(1-\lambda)(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda-1}} - \frac{2a}{b^3(2-\lambda)(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda-2}} + \frac{1}{b^3(3-\lambda)(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda-3}}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Cof}^2\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}\,d\zeta = -\frac{3a^2}{2b^3} - \frac{a}{b^2}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta + \frac{\mathfrak{Cof}^2\zeta}{2b} + \frac{a^2}{b^3}\ln\left|1+\frac{b}{a}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\right|\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Cof}^2\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2}\,d\zeta = -\frac{a^2}{b^3(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)} - \frac{2a}{b^3}\ln\left|1+\frac{b}{a}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\right| + \frac{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{b^3}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Cof}^2\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^3}\,d\zeta = -\frac{a^2}{2b^3(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2} + \frac{2a}{b^3(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)} + \frac{1}{b^3}\ln\left|1+\frac{b}{a}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\right|\,.
\end{aligned}\right\}\quad(104)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int (a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda}\,\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\,d\zeta = -\frac{a^3(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda+1}}{b^4(\lambda+1)} + \frac{3a^2(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda+2}}{b^4(\lambda+2)} - \frac{3a(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda+3}}{b^4(\lambda+3)} +\\
&\qquad\qquad + \frac{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda+4}}{b^4(\lambda+4)}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda}}\,d\zeta = -\frac{a^3}{b^4(1-\lambda)(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda-1}} + \frac{3a^2}{b^4(2-\lambda)(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda-2}} -\\
&\qquad\qquad - \frac{3a}{b^4(3-\lambda)(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda-3}} + \frac{1}{b^4(4-\lambda)(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\lambda-4}}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\,d\zeta = \frac{11a^3}{6b^4} + \frac{a^2}{b^3}\,\mathfrak{Sin}\,\zeta - \frac{a}{2b^2}\,\mathfrak{Sin}^2\zeta + \frac{\mathfrak{Sin}^3\zeta}{3b} - \frac{a^3}{b^4}\ln\left|1+\frac{b}{a}\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\right|\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2}\,d\zeta = \frac{a^3}{b^4(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)} + \frac{3a^2}{b^4}\ln\left|1+\frac{b}{a}\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\right| - \frac{3a}{b^4}(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta) + \frac{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2}{2b^4}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^3}\,d\zeta = \frac{a^3}{2b^4(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2} - \frac{3a^2}{b^4(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)} - \frac{3a}{b^4}\ln\left|1+\frac{b}{a}\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\right| + \frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{b^4}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^4}\,d\zeta = \frac{a^3}{3b^4(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^3} - \frac{3a^2}{2b^4(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2} + \frac{3a}{b^4(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)} + \frac{1}{b^4}\ln\left|1+\frac{b}{a}\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\right|\,.
\end{aligned}\right\}\quad(105)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int (a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda}\,\mathfrak{Cof}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\,d\zeta = -\frac{a^3(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda+1}}{b^4(\lambda+1)} + \frac{3a^2(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda+2}}{b^4(\lambda+2)} - \frac{3a(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda+3}}{b^4(\lambda+3)} +\\
&\qquad\qquad + \frac{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda+4}}{b^4(\lambda+4)}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Cof}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda}}\,d\zeta = -\frac{a^3}{b^4(1-\lambda)(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda-1}} + \frac{3a^2}{b^4(2-\lambda)(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda-2}} -\\
&\qquad\qquad - \frac{3a}{b^4(3-\lambda)(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda-3}} + \frac{1}{b^4(4-\lambda)(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\lambda-4}}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Cof}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}\,d\zeta = \frac{11a^3}{6b^4} + \frac{a^2}{b^3}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta - \frac{a}{2b^2}\,\mathfrak{Cof}^2\zeta + \frac{\mathfrak{Cof}^3\zeta}{3b} - \frac{a^3}{b^4}\ln\left|1+\frac{b}{a}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\right|\,,
\end{aligned}\right\}\quad(106)$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\mathfrak{Cof}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2}\,d\zeta = \frac{a^3}{b^4(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)} + \frac{3a^2}{b^4}\ln\left|1+\frac{b}{a}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\right| - \frac{3a}{b^4}(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta) + \frac{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2}{2b^4}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Cof}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^3}\,d\zeta = \frac{a^3}{2b^4(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2} - \frac{3a^2}{b^4(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)} - \frac{3a}{b^4}\ln\left|1+\frac{b}{a}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\right| + \frac{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{b^4}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Cof}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^4}\,d\zeta = \frac{a^3}{3b^4(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^3} - \frac{3a^2}{2b^4(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2} + \frac{3a}{b^4(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)} + \frac{1}{b^4}\ln\left|1+\frac{b}{a}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\right|.
\end{aligned}\right|\tag{106}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\int (c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^n\sqrt{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\,d\zeta = \frac{2d^n(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\frac{3}{2}}}{b^{n+1}}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n + \frac{1}{5}\binom{n}{1}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta) +\right.\\
&\qquad\left. + \frac{1}{7}\binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2 + \cdots + \frac{1}{2n+3}(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^n\right],\\
&\int (c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^n\sqrt{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\,d\zeta = \frac{2d^n(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\frac{3}{2}}}{b^{n+1}}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n + \frac{1}{5}\binom{n}{1}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta) +\right.\\
&\qquad\left. + \frac{1}{7}\binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2 + \cdots + \frac{1}{2n+3}(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^n\right].
\end{aligned}\right\}\tag{107}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\int \frac{(c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^n\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{\sqrt{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}}\,d\zeta = \frac{2d^n\sqrt{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}}{b^{n+1}}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n + \frac{1}{3}\binom{n}{1}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta) +\right.\\
&\qquad\left. + \frac{1}{5}\binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2 + \cdots + \frac{1}{2n+1}(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^n\right],\\
&\int \frac{(c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^n\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\sqrt{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}}\,d\zeta = \frac{2d^n\sqrt{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}}{b^{n+1}}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right)^n + \frac{1}{3}\binom{n}{1}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-1}(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta) +\right.\\
&\qquad\left. + \frac{1}{5}\binom{n}{2}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^{n-2}(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2 + \cdots + \frac{1}{2n+1}(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^n\right].
\end{aligned}\right\}\tag{108}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\int \mathfrak{Cof}\,\zeta\sqrt{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\,d\zeta = \frac{2}{3b}(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\frac{3}{2}}\,,\\
&\int (c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\sqrt{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\,d\zeta = \frac{2d(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\frac{3}{2}}}{b^2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right) + \frac{1}{5}(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)\right],\\
&\int (c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\sqrt{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\,d\zeta = \frac{2d^2(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\frac{3}{2}}}{b^3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta) +\right.\\
&\qquad\left. + \frac{1}{7}(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2\right],\\
&\int (c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^3\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\sqrt{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\,d\zeta = \frac{2d^3(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\frac{3}{2}}}{b^4}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3 + \frac{3}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta) +\right.\\
&\qquad\left. + \frac{3}{7}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2 + \frac{1}{9}(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta]^3\right],\\
&\int (c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^4\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\sqrt{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\,d\zeta = \frac{2d^4(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^{\frac{3}{2}}}{b^5}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^4 + \frac{4}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta) +\right.\\
&\qquad + \frac{6}{7}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2 + \frac{4}{9}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^3 +\\
&\qquad\left. + \frac{1}{11}(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^4\right].
\end{aligned}\right\}\tag{109}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\int \mathfrak{Sin}\,\zeta\sqrt{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}\,d\zeta = \frac{2}{3b}(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\frac{3}{2}}\,,\\
&\int (c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\sqrt{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}\,d\zeta = \frac{2d(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\frac{3}{2}}}{b^2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right) + \frac{1}{5}(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)\right],\\
&\int (c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\sqrt{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}\,d\zeta = \frac{2d^2(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\frac{3}{2}}}{b^3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta) +\right.\\
&\qquad\left. + \frac{1}{7}(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2\right],\\
&\int (c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^3\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\sqrt{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}\,d\zeta = \frac{2d^3(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\frac{3}{2}}}{b^4}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3 + \frac{3}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta) +\right.\\
&\qquad\left. + \frac{3}{7}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2 + \frac{1}{9}(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^3\right],\\
&\int (c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^4\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\sqrt{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}\,d\zeta = \frac{2d^4(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^{\frac{3}{2}}}{b^5}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^4 + \frac{4}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta) +\right.\\
&\qquad + \frac{6}{7}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2 + \frac{4}{9}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^3 +\\
&\qquad\left. + \frac{1}{11}(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^4\right].
\end{aligned}\right\}\tag{110}
$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\mathfrak{Cof}\,\zeta}{\sqrt{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}}\,d\zeta=\frac{2}{b}\sqrt{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\,,\\
&\int \frac{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\sqrt{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\,d\zeta=\frac{2\,d\sqrt{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}}{b^2}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right)+\frac{1}{3}\,(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)\right],\\
&\int \frac{(c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2}{\sqrt{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\,d\zeta=\frac{2\,d^2\sqrt{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}}{b^3}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2+\frac{2}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)+\frac{1}{5}\,(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2\right],\\
&\int \frac{(c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^3}{\sqrt{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\,d\zeta=\frac{2\,d^3\sqrt{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}}{b^4}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3+\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{3}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2+\frac{1}{7}\,(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^3\right],\\
&\int \frac{(c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^4}{\sqrt{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}}\,\mathfrak{Cof}\,\zeta\,d\zeta=\frac{2\,d^4\sqrt{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}}{b^5}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right)^4+\frac{4}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)+\right.\\
&\qquad+\frac{6}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2+\frac{4}{7}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^3+\\
&\qquad\left.+\frac{1}{9}\,(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^4\right].
\end{aligned}\right\}\tag{111}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\sqrt{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}}\,d\zeta=\frac{2}{b}\sqrt{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}\,,\\
&\int \frac{c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}{\sqrt{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}}\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\,d\zeta=\frac{2\,d\sqrt{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}}{b^2}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right)+\frac{1}{3}\,(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)\right],\\
&\int \frac{(c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2}{\sqrt{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}}\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\,d\zeta=\frac{2\,d^2\sqrt{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}}{b^3}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2+\frac{2}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)+\frac{1}{5}\,(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2\right],\\
&\int \frac{(c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^3}{\sqrt{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}}\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\,d\zeta=\frac{2\,d^3\sqrt{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}}{b^4}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3+\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{3}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2+\frac{1}{7}\,(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^3\right],\\
&\int \frac{(c+d\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^4}{\sqrt{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}}\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\,d\zeta=\frac{2\,d^4\sqrt{a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta}}{b^5}\left[\left(\frac{cb}{d}-a\right)^4+\frac{4}{3}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^3(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)+\right.\\
&\qquad+\frac{6}{5}\left(\frac{cb}{d}-a\right)^2(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^2+\frac{4}{7}\left(\frac{cb}{d}-a\right)(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^3+\\
&\qquad\left.+\frac{1}{9}\,(a+b\,\mathfrak{Cof}\,\zeta)^4\right].
\end{aligned}\right\}\tag{112}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \mathfrak{Sin}^{2\lambda+1}\zeta\,\mathfrak{Cof}^{2n+1}\zeta\,d\zeta=\frac{\mathfrak{Sin}^{2\lambda+2}\zeta}{2\lambda+2}+\binom{n}{1}\frac{\mathfrak{Sin}^{2\lambda+4}\zeta}{2\lambda+4}+\binom{n}{2}\frac{\mathfrak{Sin}^{2\lambda+6}\zeta}{2\lambda+6}+\\
&\qquad+\cdots+\frac{\mathfrak{Sin}^{2\lambda+2n+2}\zeta}{2\lambda+2n+2}\,,\\
&\int \mathfrak{Cof}^{2\lambda+1}\zeta\,\mathfrak{Sin}^{2n+1}\zeta\,d\zeta=(-1)^n\left[\frac{\mathfrak{Cof}^{2\lambda+2}\zeta}{2\lambda+2}-\binom{n}{1}\frac{\mathfrak{Cof}^{2\lambda+4}\zeta}{2\lambda+4}+\binom{n}{2}\frac{\mathfrak{Cof}^{2\lambda+6}\zeta}{2\lambda+6}-\right.\\
&\qquad\left.-\cdots+(-1)^n\frac{\mathfrak{Cof}^{2\lambda+2n+2}\zeta}{2\lambda+2n+2}\right].
\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&(\lambda\neq-1,-2,-3,\\&\cdots-(n-1))\end{aligned}\tag{113}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\mathfrak{Cof}^{2n+1}\zeta}{\mathfrak{Sin}\,\zeta}\,d\zeta=\ln|\mathfrak{Sin}\,\zeta|+\binom{n}{1}\frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{2}+\binom{n}{2}\frac{\mathfrak{Sin}^4\zeta}{4}+\cdots+\frac{\mathfrak{Sin}^{2n}\zeta}{2n}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Cof}^{2n+1}\zeta}{\mathfrak{Sin}^3\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{2\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}+\binom{n}{1}\ln|\mathfrak{Sin}\,\zeta|+\binom{n}{2}\frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{2}+\binom{n}{3}\frac{\mathfrak{Sin}^4\zeta}{4}+\cdots+\frac{\mathfrak{Sin}^{2n-2}\zeta}{2n-2}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Cof}^{2n+1}\zeta}{\mathfrak{Sin}^5\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{4\,\mathfrak{Sin}^4\zeta}-\binom{n}{1}\frac{1}{2\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}+\binom{n}{2}\ln|\mathfrak{Sin}\,\zeta|+\binom{n}{3}\frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{2}+\binom{n}{4}\frac{\mathfrak{Sin}^4\zeta}{4}+\cdots+\frac{\mathfrak{Sin}^{2n-4}\zeta}{2n-4}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Cof}^{2n+1}\zeta}{\mathfrak{Sin}^7\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{6\,\mathfrak{Sin}^6\zeta}-\binom{n}{1}\frac{1}{4\,\mathfrak{Sin}^4\zeta}-\binom{n}{2}\frac{1}{2\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}+\binom{n}{3}\ln|\mathfrak{Sin}\,\zeta|+\binom{n}{4}\frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{2}+\binom{n}{5}\frac{\mathfrak{Sin}^4\zeta}{4}+\\
&\qquad+\cdots+\frac{\mathfrak{Sin}^{2n-6}\zeta}{2n-6}\,,\\
&-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-
\end{aligned}\right\}\tag{114}$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathfrak{Cos}^{2n+1}\zeta}{\mathfrak{Sin}^{2n-1}\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{(2n-2)\,\mathfrak{Sin}^{2n-2}\zeta} - \binom{n}{1}\frac{1}{(2n-4)\,\mathfrak{Sin}^{2n-4}\zeta} - \binom{n}{2}\frac{1}{(2n-6)\,\mathfrak{Sin}^{2n-6}\zeta} - \\
&\qquad - \cdots - \binom{n}{n-2}\frac{1}{2\,\mathfrak{Sin}^2\zeta} + \binom{n}{n-1}\ln|\mathfrak{Sin}\,\zeta| + \frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{2}\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Cos}^{2n+1}\zeta}{\mathfrak{Sin}^{2n+1}\zeta}\,d\zeta = \int \mathfrak{Cotg}^{2n+1}\zeta\,d\zeta = -\frac{1}{2n\,\mathfrak{Sin}^{2n}\zeta} - \binom{n}{1}\frac{1}{(2n-2)\,\mathfrak{Sin}^{2n-2}\zeta} - \binom{n}{2}\frac{1}{(2n-4)\,\mathfrak{Sin}^{2n-4}\zeta} - \\
&\qquad - \cdots - \binom{n}{n-1}\frac{1}{2\,\mathfrak{Sin}^2\zeta} + \ln|\mathfrak{Sin}\,\zeta|\,.
\end{aligned}\tag{114}$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^{2n+1}\zeta}{\mathfrak{Cos}\,\zeta}\,d\zeta = (-1)^n\left[\ln|\mathfrak{Cos}\,\zeta| - \binom{n}{1}\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{2} + \binom{n}{2}\frac{\mathfrak{Cos}^4\zeta}{4} - \cdots + (-1)^n\frac{\mathfrak{Cos}^{2n}\zeta}{2n}\right]\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^{2n+1}\zeta}{\mathfrak{Cos}^3\zeta}\,d\zeta = (-1)^n\left[-\frac{1}{2\,\mathfrak{Cos}^2\zeta} - \binom{n}{1}\ln|\mathfrak{Cos}\,\zeta| + \binom{n}{2}\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{2} - \binom{n}{3}\frac{\mathfrak{Cos}^4\zeta}{4} + \cdots + (-1)^n\frac{\mathfrak{Cos}^{2n-2}\zeta}{2n-2}\right]\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^{2n+1}\zeta}{\mathfrak{Cos}^5\zeta}\,d\zeta = (-1)^n\left[-\frac{1}{4\,\mathfrak{Cos}^4\zeta} + \binom{n}{1}\frac{1}{2\,\mathfrak{Cos}^2\zeta} + \binom{n}{2}\ln|\mathfrak{Cos}\,\zeta| - \binom{n}{3}\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{2} + \binom{n}{4}\frac{\mathfrak{Cos}^4\zeta}{4} - \right. \\
&\qquad \left. - \cdots + (-1)^n\frac{\mathfrak{Cos}^{2n-4}\zeta}{2n-4}\right]\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^{2n+1}\zeta}{\mathfrak{Cos}^7\zeta}\,d\zeta = (-1)^n\left[-\frac{1}{6\,\mathfrak{Cos}^6\zeta} + \binom{n}{1}\frac{1}{4\,\mathfrak{Cos}^4\zeta} - \binom{n}{2}\frac{1}{2\,\mathfrak{Cos}^2\zeta} - \binom{n}{3}\ln|\mathfrak{Cos}\,\zeta| + \binom{n}{4}\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{2} - \right. \\
&\qquad \left. - \binom{n}{5}\frac{\mathfrak{Cos}^4\zeta}{4} + \cdots + (-1)^n\frac{\mathfrak{Cos}^{2n-6}\zeta}{2n-6}\right]\,. \\
&\text{- -} \\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^{2n+1}\zeta}{\mathfrak{Cos}^{2n-1}\zeta}\,d\zeta = (-1)^n\left[\frac{-1}{(2n-2)\,\mathfrak{Cos}^{2n-2}\zeta} + \binom{n}{1}\frac{1}{(2n-4)\,\mathfrak{Cos}^{2n-4}\zeta} - \binom{n}{2}\frac{1}{(2n-6)\,\mathfrak{Cos}^{2n-6}\zeta} + \right. \\
&\qquad \left. + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-2}\frac{1}{2\,\mathfrak{Cos}^2\zeta} + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\ln|\mathfrak{Cos}\,\zeta| + (-1)^n\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{2}\right]\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^{2n+1}\zeta}{\mathfrak{Cos}^{2n+1}\zeta}\,d\zeta = \int \mathfrak{Tang}^{2n+1}\zeta\,d\zeta = (-1)^n\left[-\frac{1}{2n\,\mathfrak{Cos}^{2n}\zeta} + \binom{n}{1}\frac{1}{(2n-2)\,\mathfrak{Cos}^{2n-2}\zeta} - \right. \\
&\qquad \left. - \binom{n}{2}\frac{1}{(2n-4)\,\mathfrak{Cos}^{2n-4}\zeta} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n-1}\frac{1}{2\,\mathfrak{Cos}^2\zeta} + (-1)^n\ln|\mathfrak{Cos}\,\zeta|\right]\,.
\end{aligned}\tag{115}$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathfrak{Cos}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}\,\zeta}\,d\zeta = \ln|\mathfrak{Sin}\,\zeta|\,, &&\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Cos}\,\zeta}\,d\zeta = \ln|\mathfrak{Cos}\,\zeta|\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Cos}^3\zeta}{\mathfrak{Sin}\,\zeta}\,d\zeta = \ln|\mathfrak{Sin}\,\zeta| + \frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{2}\,, &&\int \frac{\mathfrak{Sin}^3\zeta}{\mathfrak{Cos}\,\zeta}\,d\zeta = -\ln|\mathfrak{Cos}\,\zeta| + \frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{2}\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Cos}^5\zeta}{\mathfrak{Sin}\,\zeta}\,d\zeta = \ln|\mathfrak{Sin}\,\zeta| + \mathfrak{Sin}^2\zeta + \frac{\mathfrak{Sin}^4\zeta}{4}\,, &&\int \frac{\mathfrak{Sin}^5\zeta}{\mathfrak{Cos}\,\zeta}\,d\zeta = \ln|\mathfrak{Cos}\,\zeta| - \mathfrak{Cos}^2\zeta + \frac{\mathfrak{Cos}^4\zeta}{4}\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Cos}^7\zeta}{\mathfrak{Sin}\,\zeta}\,d\zeta = \ln|\mathfrak{Sin}\,\zeta| + \frac{3\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}{2} + \frac{3\,\mathfrak{Sin}^4\zeta}{4} + &&\int \frac{\mathfrak{Sin}^7\zeta}{\mathfrak{Cos}\,\zeta}\,d\zeta = -\ln|\mathfrak{Cos}\,\zeta| + \frac{3\,\mathfrak{Cos}^2\zeta}{2} - \frac{3\,\mathfrak{Cos}^4\zeta}{4} + \\
&\qquad + \frac{\mathfrak{Sin}^6\zeta}{6}\,, &&\qquad + \frac{\mathfrak{Cos}^6\zeta}{6}\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Cos}^9\zeta}{\mathfrak{Sin}\,\zeta}\,d\zeta = \ln|\mathfrak{Sin}\,\zeta| + 2\,\mathfrak{Sin}^2\zeta + \frac{3\,\mathfrak{Sin}^4\zeta}{2} + &&\int \frac{\mathfrak{Sin}^9\zeta}{\mathfrak{Cos}\,\zeta}\,d\zeta = \ln|\mathfrak{Cos}\,\zeta| - 2\,\mathfrak{Cos}^2\zeta + \frac{3\,\mathfrak{Cos}^4\zeta}{2} - \\
&\qquad + \frac{2\,\mathfrak{Sin}^6\zeta}{3} + \frac{\mathfrak{Sin}^8\zeta}{8}\,, &&\qquad - \frac{2\,\mathfrak{Cos}^6\zeta}{3} + \frac{\mathfrak{Cos}^8\zeta}{8}\,.
\end{aligned}\tag{116}$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathfrak{Cos}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}^3\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{2\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}\,, &&\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Cos}^3\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{2\,\mathfrak{Cos}^2\zeta}\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Cos}^3\zeta}{\mathfrak{Sin}^3\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{2\,\mathfrak{Sin}^2\zeta} + \ln|\mathfrak{Sin}\,\zeta|\,, &&\int \frac{\mathfrak{Sin}^3\zeta}{\mathfrak{Cos}^3\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{2\,\mathfrak{Cos}^2\zeta} + \ln|\mathfrak{Cos}\,\zeta|\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Cos}^5\zeta}{\mathfrak{Sin}^3\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{2\,\mathfrak{Sin}^2\zeta} + 2\ln|\mathfrak{Sin}\,\zeta| + \frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{2}\,, &&\int \frac{\mathfrak{Sin}^5\zeta}{\mathfrak{Cos}^3\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{2\,\mathfrak{Cos}^2\zeta} - 2\ln|\mathfrak{Cos}\,\zeta| + \frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{2}\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Cos}^7\zeta}{\mathfrak{Sin}^3\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{2\,\mathfrak{Sin}^2\zeta} + 3\ln|\mathfrak{Sin}\,\zeta| + \frac{3\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}{2} + &&\int \frac{\mathfrak{Sin}^7\zeta}{\mathfrak{Cos}^3\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{2\,\mathfrak{Cos}^2\zeta} + 3\ln|\mathfrak{Cos}\,\zeta| - \frac{3\,\mathfrak{Cos}^2\zeta}{2} + \\
&\qquad + \frac{\mathfrak{Sin}^4\zeta}{4}\,, &&\qquad + \frac{\mathfrak{Cos}^4\zeta}{4}\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Cos}^9\zeta}{\mathfrak{Sin}^3\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{2\,\mathfrak{Sin}^2\zeta} + 4\ln|\mathfrak{Sin}\,\zeta| + &&\int \frac{\mathfrak{Sin}^9\zeta}{\mathfrak{Cos}^3\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{2\,\mathfrak{Cos}^2\zeta} - 4\ln|\mathfrak{Cos}\,\zeta| + \\
&\qquad + 3\,\mathfrak{Sin}^2\zeta + \mathfrak{Sin}^4\zeta + \frac{\mathfrak{Sin}^6\zeta}{6}\,, &&\qquad + 3\,\mathfrak{Cos}^2\zeta - \mathfrak{Cos}^4\zeta + \frac{\mathfrak{Cos}^6\zeta}{6}\,.
\end{aligned}\tag{117}$$

$$\begin{aligned}
&\int\frac{\mathfrak{Cos}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}^5\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{4\,\mathfrak{Sin}^4\zeta}\,,\qquad
\int\frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Cos}^5\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{4\,\mathfrak{Cos}^4\zeta}\,,\\
&\int\frac{\mathfrak{Cos}^3\zeta}{\mathfrak{Sin}^5\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{4\,\mathfrak{Sin}^4\zeta}-\frac{1}{2\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}\,,\qquad
\int\frac{\mathfrak{Sin}^3\zeta}{\mathfrak{Cos}^5\zeta}\,d\zeta=\frac{1}{4\,\mathfrak{Cos}^4\zeta}-\frac{1}{2\,\mathfrak{Cos}^2\zeta}\,,\\
&\int\frac{\mathfrak{Cos}^5\zeta}{\mathfrak{Sin}^5\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{4\,\mathfrak{Sin}^4\zeta}-\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\zeta}+\ln|\mathfrak{Sin}\,\zeta|\,,\qquad
\int\frac{\mathfrak{Sin}^5\zeta}{\mathfrak{Cos}^5\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{4\,\mathfrak{Cos}^4\zeta}+\frac{1}{\mathfrak{Cos}^2\zeta}+\ln|\mathfrak{Cos}\,\zeta|\,,\\
&\int\frac{\mathfrak{Cos}^7\zeta}{\mathfrak{Sin}^5\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{4\,\mathfrak{Sin}^4\zeta}-\frac{3}{2\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}+3\ln|\mathfrak{Sin}\,\zeta|+\frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{2}\,,\qquad
\int\frac{\mathfrak{Sin}^7\zeta}{\mathfrak{Cos}^5\zeta}\,d\zeta=\frac{1}{4\,\mathfrak{Cos}^4\zeta}-\frac{3}{2\,\mathfrak{Cos}^2\zeta}-3\ln|\mathfrak{Cos}\,\zeta|+\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{2}\,,\\
&\int\frac{\mathfrak{Cos}^9\zeta}{\mathfrak{Sin}^5\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{4\,\mathfrak{Sin}^4\zeta}-\frac{2}{\mathfrak{Sin}^2\zeta}+6\ln|\mathfrak{Sin}\,\zeta|+2\,\mathfrak{Sin}^2\zeta+\frac{\mathfrak{Sin}^4\zeta}{4}\,,\\
&\int\frac{\mathfrak{Sin}^9\zeta}{\mathfrak{Cos}^5\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{4\,\mathfrak{Cos}^4\zeta}+\frac{2}{\mathfrak{Cos}^2\zeta}+6\ln|\mathfrak{Cos}\,\zeta|-2\,\mathfrak{Cos}^2\zeta+\frac{\mathfrak{Cos}^4\zeta}{4}\,.
\end{aligned}\tag{118}$$

$$\begin{aligned}
&\int\frac{\mathfrak{Cos}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}^7\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{6\,\mathfrak{Sin}^6\zeta}\,,\qquad
\int\frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Cos}^7\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{6\,\mathfrak{Cos}^6\zeta}\,,\\
&\int\frac{\mathfrak{Cos}^3\zeta}{\mathfrak{Sin}^7\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{6\,\mathfrak{Sin}^6\zeta}-\frac{1}{4\,\mathfrak{Sin}^4\zeta}\,,\qquad
\int\frac{\mathfrak{Sin}^3\zeta}{\mathfrak{Cos}^7\zeta}\,d\zeta=\frac{1}{6\,\mathfrak{Cos}^6\zeta}-\frac{1}{4\,\mathfrak{Cos}^4\zeta}\,,\\
&\int\frac{\mathfrak{Cos}^5\zeta}{\mathfrak{Sin}^7\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{6\,\mathfrak{Sin}^6\zeta}-\frac{1}{2\,\mathfrak{Sin}^4\zeta}-\frac{1}{2\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}\,,\qquad
\int\frac{\mathfrak{Sin}^5\zeta}{\mathfrak{Cos}^7\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{6\,\mathfrak{Cos}^6\zeta}+\frac{1}{2\,\mathfrak{Cos}^4\zeta}-\frac{1}{2\,\mathfrak{Cos}^2\zeta}\,,\\
&\int\frac{\mathfrak{Cos}^7\zeta}{\mathfrak{Sin}^7\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{6\,\mathfrak{Sin}^6\zeta}-\frac{3}{4\,\mathfrak{Sin}^4\zeta}-\frac{3}{2\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}+\ln|\mathfrak{Sin}\,\zeta|\,,\qquad
\int\frac{\mathfrak{Sin}^7\zeta}{\mathfrak{Cos}^7\zeta}\,d\zeta=\frac{1}{6\,\mathfrak{Cos}^6\zeta}-\frac{3}{4\,\mathfrak{Cos}^4\zeta}+\frac{3}{2\,\mathfrak{Cos}^2\zeta}+\ln|\mathfrak{Cos}\,\zeta|\,,\\
&\int\frac{\mathfrak{Cos}^9\zeta}{\mathfrak{Sin}^7\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{6\,\mathfrak{Sin}^6\zeta}-\frac{1}{\mathfrak{Sin}^4\zeta}-\frac{3}{\mathfrak{Sin}^2\zeta}+4\ln|\mathfrak{Sin}\,\zeta|+\frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{2}\,,\\
&\int\frac{\mathfrak{Sin}^9\zeta}{\mathfrak{Cos}^7\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{6\,\mathfrak{Cos}^6\zeta}+\frac{1}{\mathfrak{Cos}^4\zeta}-\frac{3}{\mathfrak{Cos}^2\zeta}-4\ln|\mathfrak{Cos}\,\zeta|+\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{2}\,.
\end{aligned}\tag{119}$$

$$\begin{aligned}
&\int\mathfrak{Sin}\,\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta\,d\zeta=\frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{2}\,,\qquad
\int\mathfrak{Cos}\,\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\,d\zeta=\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{2}\,,\\
&\int\mathfrak{Sin}\,\zeta\,\mathfrak{Cos}^3\zeta\,d\zeta=\frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{2}+\frac{\mathfrak{Sin}^4\zeta}{4}\,,\qquad
\int\mathfrak{Cos}\,\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta\,d\zeta=-\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{2}+\frac{\mathfrak{Cos}^4\zeta}{4}\,,\\
&\int\mathfrak{Sin}\,\zeta\,\mathfrak{Cos}^5\zeta\,d\zeta=\frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{2}+\frac{\mathfrak{Sin}^4\zeta}{2}+\frac{\mathfrak{Sin}^6\zeta}{6}\,,\qquad
\int\mathfrak{Cos}\,\zeta\,\mathfrak{Sin}^5\zeta\,d\zeta=\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{2}-\frac{\mathfrak{Cos}^4\zeta}{2}+\frac{\mathfrak{Cos}^6\zeta}{6}\,,\\
&\int\mathfrak{Sin}\,\zeta\,\mathfrak{Cos}^7\zeta\,d\zeta=\frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{2}+\frac{3\,\mathfrak{Sin}^4\zeta}{4}+\frac{\mathfrak{Sin}^6\zeta}{2}+\frac{\mathfrak{Sin}^8\zeta}{8}\,,\qquad
\int\mathfrak{Cos}\,\zeta\,\mathfrak{Sin}^7\zeta\,d\zeta=-\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{2}+\frac{3\,\mathfrak{Cos}^4\zeta}{4}-\frac{\mathfrak{Cos}^6\zeta}{2}+\frac{\mathfrak{Cos}^8\zeta}{8}\,,\\
&\int\mathfrak{Sin}\,\zeta\,\mathfrak{Cos}^9\zeta\,d\zeta=\frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{2}+\mathfrak{Sin}^4\zeta+\mathfrak{Sin}^6\zeta+\frac{\mathfrak{Sin}^8\zeta}{2}+\frac{\mathfrak{Sin}^{10}\zeta}{10}\,,\\
&\int\mathfrak{Cos}\,\zeta\,\mathfrak{Sin}^9\zeta\,d\zeta=\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{2}-\mathfrak{Cos}^4\zeta+\mathfrak{Cos}^6\zeta-\frac{\mathfrak{Cos}^8\zeta}{2}+\frac{\mathfrak{Cos}^{10}\zeta}{10}\,.
\end{aligned}\tag{120}$$

$$\begin{aligned}
&\int\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta\,d\zeta=\frac{\mathfrak{Sin}^4\zeta}{4}\,,\qquad
\int\mathfrak{Cos}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\,d\zeta=\frac{\mathfrak{Cos}^4\zeta}{4}\,,\\
&\int\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cos}^3\zeta\,d\zeta=\frac{\mathfrak{Sin}^4\zeta}{4}+\frac{\mathfrak{Sin}^6\zeta}{6}\,,\qquad
\int\mathfrak{Cos}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta\,d\zeta=-\frac{\mathfrak{Cos}^4\zeta}{4}+\frac{\mathfrak{Cos}^6\zeta}{6}\,,\\
&\int\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cos}^5\zeta\,d\zeta=\frac{\mathfrak{Sin}^4\zeta}{4}+\frac{\mathfrak{Sin}^6\zeta}{3}+\frac{\mathfrak{Sin}^8\zeta}{8}\,,\qquad
\int\mathfrak{Cos}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}^5\zeta\,d\zeta=\frac{\mathfrak{Cos}^4\zeta}{4}-\frac{\mathfrak{Cos}^6\zeta}{3}+\frac{\mathfrak{Cos}^8\zeta}{8}\,,\\
&\int\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cos}^7\zeta\,d\zeta=\frac{\mathfrak{Sin}^4\zeta}{4}+\frac{\mathfrak{Sin}^6\zeta}{2}+\frac{3\,\mathfrak{Sin}^8\zeta}{8}+\frac{\mathfrak{Sin}^{10}\zeta}{10}\,,\qquad
\int\mathfrak{Cos}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}^7\zeta\,d\zeta=-\frac{\mathfrak{Cos}^4\zeta}{4}+\frac{\mathfrak{Cos}^6\zeta}{2}-\frac{3\,\mathfrak{Cos}^8\zeta}{8}+\frac{\mathfrak{Cos}^{10}\zeta}{10}\,,\\
&\int\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cos}^9\zeta\,d\zeta=\frac{\mathfrak{Sin}^4\zeta}{4}+\frac{2\,\mathfrak{Sin}^6\zeta}{3}+\frac{3\,\mathfrak{Sin}^8\zeta}{4}+\frac{2\,\mathfrak{Sin}^{10}\zeta}{5}+\frac{\mathfrak{Sin}^{12}\zeta}{12}\,,\\
&\int\mathfrak{Cos}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}^9\zeta\,d\zeta=\frac{\mathfrak{Cos}^4\zeta}{4}-\frac{2\,\mathfrak{Cos}^6\zeta}{3}+\frac{3\,\mathfrak{Cos}^8\zeta}{4}-\frac{2\,\mathfrak{Cos}^{10}\zeta}{5}+\frac{\mathfrak{Cos}^{12}\zeta}{12}\,.
\end{aligned}\tag{121}$$

$$\int \mathfrak{Sin}^5\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^6\zeta}{6},$$
$$\int \mathfrak{Sin}^5\zeta\,\mathfrak{Cos}^3\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^6\zeta}{6} + \frac{\mathfrak{Sin}^8\zeta}{8},$$
$$\int \mathfrak{Sin}^5\zeta\,\mathfrak{Cos}^5\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^6\zeta}{6} + \frac{\mathfrak{Sin}^8\zeta}{4} + \frac{\mathfrak{Sin}^{10}\zeta}{10},$$
$$\int \mathfrak{Sin}^5\zeta\,\mathfrak{Cos}^7\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^6\zeta}{6} + \frac{3\,\mathfrak{Sin}^8\zeta}{8} + \frac{3\,\mathfrak{Sin}^{10}\zeta}{10} + \frac{\mathfrak{Sin}^{12}\zeta}{12},$$
$$\int \mathfrak{Sin}^5\zeta\,\mathfrak{Cos}^9\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^6\zeta}{6} + \frac{\mathfrak{Sin}^8\zeta}{2} + \frac{3\,\mathfrak{Sin}^{10}\zeta}{5} + \frac{\mathfrak{Sin}^{12}\zeta}{3} + \frac{\mathfrak{Sin}^{14}\zeta}{14},$$
$$\int \mathfrak{Cos}^5\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^6\zeta}{6},$$
$$\int \mathfrak{Cos}^5\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta\,d\zeta = -\frac{\mathfrak{Cos}^6\zeta}{6} + \frac{\mathfrak{Cos}^8\zeta}{8},$$
$$\int \mathfrak{Cos}^5\zeta\,\mathfrak{Sin}^5\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^6\zeta}{6} - \frac{\mathfrak{Cos}^8\zeta}{4} + \frac{\mathfrak{Cos}^{10}\zeta}{10},$$
$$\int \mathfrak{Cos}^5\zeta\,\mathfrak{Sin}^7\zeta\,d\zeta = -\frac{\mathfrak{Cos}^6\zeta}{6} + \frac{3\,\mathfrak{Cos}^8\zeta}{8} - \frac{3\,\mathfrak{Cos}^{10}\zeta}{10} + \frac{\mathfrak{Cos}^{12}\zeta}{12},$$
$$\int \mathfrak{Cos}^5\zeta\,\mathfrak{Sin}^9\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^6\zeta}{6} - \frac{\mathfrak{Cos}^8\zeta}{2} + \frac{3\,\mathfrak{Cos}^{10}\zeta}{5} - \frac{\mathfrak{Cos}^{12}\zeta}{3} + \frac{\mathfrak{Cos}^{14}\zeta}{14}. \tag{122}$$

$$\int \mathfrak{Sin}^7\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^8\zeta}{8},$$
$$\int \mathfrak{Sin}^7\zeta\,\mathfrak{Cos}^3\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^8\zeta}{8} + \frac{\mathfrak{Sin}^{10}\zeta}{10},$$
$$\int \mathfrak{Sin}^7\zeta\,\mathfrak{Cos}^5\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^8\zeta}{8} + \frac{\mathfrak{Sin}^{10}\zeta}{5} + \frac{\mathfrak{Sin}^{12}\zeta}{12},$$
$$\int \mathfrak{Sin}^7\zeta\,\mathfrak{Cos}^7\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^8\zeta}{8} + \frac{3\,\mathfrak{Sin}^{10}\zeta}{10} + \frac{\mathfrak{Sin}^{12}\zeta}{4} + \frac{\mathfrak{Sin}^{14}\zeta}{14},$$
$$\int \mathfrak{Sin}^7\zeta\,\mathfrak{Cos}^9\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^8\zeta}{8} + \frac{2\,\mathfrak{Sin}^{10}\zeta}{5} + \frac{\mathfrak{Sin}^{12}\zeta}{2} + \frac{2\,\mathfrak{Sin}^{14}\zeta}{7} + \frac{\mathfrak{Sin}^{16}\zeta}{16},$$
$$\int \mathfrak{Cos}^7\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^8\zeta}{8},$$
$$\int \mathfrak{Cos}^7\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta\,d\zeta = -\frac{\mathfrak{Cos}^8\zeta}{8} + \frac{\mathfrak{Cos}^{10}\zeta}{10},$$
$$\int \mathfrak{Cos}^7\zeta\,\mathfrak{Sin}^5\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^8\zeta}{8} - \frac{\mathfrak{Cos}^{10}\zeta}{5} + \frac{\mathfrak{Cos}^{12}\zeta}{12},$$
$$\int \mathfrak{Cos}^7\zeta\,\mathfrak{Sin}^7\zeta\,d\zeta = -\frac{\mathfrak{Cos}^8\zeta}{8} + \frac{3\,\mathfrak{Cos}^{10}\zeta}{10} - \frac{\mathfrak{Cos}^{12}\zeta}{4} + \frac{\mathfrak{Cos}^{14}\zeta}{14},$$
$$\int \mathfrak{Cos}^7\zeta\,\mathfrak{Sin}^9\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^8\zeta}{8} - \frac{2\,\mathfrak{Cos}^{10}\zeta}{5} + \frac{\mathfrak{Cos}^{12}\zeta}{2} - \frac{2\,\mathfrak{Cos}^{14}\zeta}{7} + \frac{\mathfrak{Cos}^{16}\zeta}{16}. \tag{123}$$

$$\int \mathfrak{Sin}^9\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^{10}\zeta}{10},$$
$$\int \mathfrak{Sin}^9\zeta\,\mathfrak{Cos}^3\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^{10}\zeta}{10} + \frac{\mathfrak{Sin}^{12}\zeta}{12},$$
$$\int \mathfrak{Sin}^9\zeta\,\mathfrak{Cos}^5\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^{10}\zeta}{10} + \frac{\mathfrak{Sin}^{12}\zeta}{6} + \frac{\mathfrak{Sin}^{14}\zeta}{14},$$
$$\int \mathfrak{Sin}^9\zeta\,\mathfrak{Cos}^7\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^{10}\zeta}{10} + \frac{\mathfrak{Sin}^{12}\zeta}{4} + \frac{3\,\mathfrak{Sin}^{14}\zeta}{14} + \frac{\mathfrak{Sin}^{16}\zeta}{16},$$
$$\int \mathfrak{Sin}^9\zeta\,\mathfrak{Cos}^9\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^{10}\zeta}{10} + \frac{\mathfrak{Sin}^{12}\zeta}{3} + \frac{3\,\mathfrak{Sin}^{14}\zeta}{7} + \frac{\mathfrak{Sin}^{16}\zeta}{4} + \frac{\mathfrak{Sin}^{18}\zeta}{18},$$
$$\int \mathfrak{Cos}^9\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^{10}\zeta}{10},$$
$$\int \mathfrak{Cos}^9\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta\,d\zeta = -\frac{\mathfrak{Cos}^{10}\zeta}{10} + \frac{\mathfrak{Cos}^{12}\zeta}{12},$$
$$\int \mathfrak{Cos}^9\zeta\,\mathfrak{Sin}^5\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^{10}\zeta}{10} - \frac{\mathfrak{Cos}^{12}\zeta}{6} + \frac{\mathfrak{Cos}^{14}\zeta}{14},$$
$$\int \mathfrak{Cos}^9\zeta\,\mathfrak{Sin}^7\zeta\,d\zeta = -\frac{\mathfrak{Cos}^{10}\zeta}{10} + \frac{\mathfrak{Cos}^{12}\zeta}{4} - \frac{3\,\mathfrak{Cos}^{14}\zeta}{14} + \frac{\mathfrak{Cos}^{16}\zeta}{16},$$
$$\int \mathfrak{Cos}^9\zeta\,\mathfrak{Sin}^9\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^{10}\zeta}{10} - \frac{\mathfrak{Cos}^{12}\zeta}{3} + \frac{3\,\mathfrak{Cos}^{14}\zeta}{7} - \frac{\mathfrak{Cos}^{16}\zeta}{4} + \frac{\mathfrak{Cos}^{18}\zeta}{18}. \tag{124}$$

$$\int \mathfrak{Tang}\,\zeta\,d\zeta = \ln|\mathfrak{Cos}\,\zeta|,$$
$$\int \mathfrak{Tang}^3\zeta\,d\zeta = \frac{1}{2\,\mathfrak{Cos}^2\zeta} + \ln|\mathfrak{Cos}\,\zeta|,$$
$$\int \mathfrak{Tang}^5\zeta\,d\zeta = -\frac{1}{4\,\mathfrak{Cos}^4\zeta} + \frac{1}{\mathfrak{Cos}^2\zeta} + \ln|\mathfrak{Cos}\,\zeta|,$$
$$\int \mathfrak{Tang}^7\zeta\,d\zeta = \frac{1}{6\,\mathfrak{Cos}^6\zeta} - \frac{3}{4\,\mathfrak{Cos}^4\zeta} + \frac{3}{2\,\mathfrak{Cos}^2\zeta} + \ln|\mathfrak{Cos}\,\zeta|,$$
$$\int \mathfrak{Cotg}\,\zeta\,d\zeta = \ln|\mathfrak{Sin}\,\zeta|,$$
$$\int \mathfrak{Cotg}^3\zeta\,d\zeta = -\frac{1}{2\,\mathfrak{Sin}^2\zeta} + \ln|\mathfrak{Sin}\,\zeta|,$$
$$\int \mathfrak{Cotg}^5\zeta\,d\zeta = -\frac{1}{4\,\mathfrak{Sin}^4\zeta} - \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\zeta} + \ln|\mathfrak{Sin}\,\zeta|,$$
$$\int \mathfrak{Cotg}^7\zeta\,d\zeta = -\frac{1}{6\,\mathfrak{Sin}^6\zeta} - \frac{3}{4\,\mathfrak{Sin}^4\zeta} - \frac{3}{2\,\mathfrak{Sin}^2\zeta} + \ln|\mathfrak{Sin}\,\zeta|. \tag{125}$$

3. Integrale der Klasse $\int \frac{dz}{(a+bz)^m (c+dz)^n}$.

a) Algebraische Integrale.

m und n seien positive ganze Zahlen größer als Null; dann lassen sich die Integrale der vorliegenden Klasse geschlossen darstellen. Wird vorübergehend die Substitution

$$\zeta = \frac{a+bz}{c+dz}, \qquad z = -\frac{a-c\zeta}{b-d\zeta}, \qquad a+bz = \frac{(bc-ad)\zeta}{b-d\zeta}, \qquad c+dz = \frac{bc-ad}{b-d\zeta}, \qquad dz = \frac{bc-ad}{(b-d\zeta)^2}\,d\zeta$$

eingeführt, so folgt zunächst

$$\int \frac{dz}{(a+bz)^m (c+dz)^n} = \int \frac{1}{(bc-ad)^{m+n-1}} \frac{(b-d\zeta)^{m+n-2}}{\zeta^m}\,d\zeta = \frac{(-d)^{m+n-2}}{(bc-ad)^{m+n-1}} \int \frac{\left(\zeta-\frac{b}{d}\right)^{m+n-2}}{\zeta^m}\,d\zeta .$$

Nun ist

$$\frac{(-d)^{m+n-2}}{(bc-ad)^{m+n-1}} = -\frac{1}{d}\frac{(-d)^{m+n-1}}{(bc-ad)^{m+n-1}} = -\frac{1}{d}\frac{1}{\left(a-\frac{bc}{d}\right)^{m+n-1}},$$

$$\begin{aligned}\left(\zeta-\frac{b}{d}\right)^{m+n-2} = \zeta^{m+n-2} &- \binom{m+n-2}{1}\frac{b}{d}\zeta^{m+n-3} + \binom{m+n-2}{2}\left(\frac{b}{d}\right)^2\zeta^{m+n-4} - \cdots + \\ &+ (-1)^{n-2}\binom{m+n-2}{n-2}\left(\frac{b}{d}\right)^{n-2}\zeta^m + (-1)^{n-1}\binom{m+n-2}{n-1}\left(\frac{b}{d}\right)^{n-1}\zeta^{m-1} + \\ &+ \cdots + (-1)^{m+n-3}\binom{m+n-2}{m+n-3}\left(\frac{b}{d}\right)^{m+n-3}\zeta + (-1)^{m+n-2}\left(\frac{b}{d}\right)^{m+n-2}.\end{aligned}$$

Die Berücksichtigung dieser Beziehungen ergibt

$$\begin{aligned}\int \frac{dz}{(a+bz)^m (c+dz)^n} = -\frac{1}{d}\frac{1}{\left(a-\frac{bc}{d}\right)^{m+n-1}} &\left[\frac{\zeta^{n-1}}{n-1} - \binom{m+n-2}{1}\frac{b}{d}\frac{\zeta^{n-2}}{n-2} + \binom{m+n-2}{2}\left(\frac{b}{d}\right)^2\frac{\zeta^{n-3}}{n-3} - \cdots + \right. \\ &+ (-1)^{n-2}\binom{m+n-2}{n-2}\left(\frac{b}{d}\right)^{n-2}\zeta + (-1)^{n-1}\binom{m+n-2}{n-1}\left(\frac{b}{d}\right)^{n-1}\ln|\zeta| + \cdots + \\ &\left. + (-1)^{m+n-3}\binom{m+n-2}{m+n-3}\left(\frac{b}{d}\right)^{m+n-3}\frac{\zeta^{-m+2}}{-m+2} + (-1)^{m+n-2}\left(\frac{b}{d}\right)^{m+n-2}\frac{\zeta^{-m+1}}{-m+1}\right],\end{aligned}$$

und, wenn schließlich noch auf z rücktransformiert wird,

$$\begin{aligned}\int \frac{dz}{(a+bz)^m (c+dz)^n} = -\frac{1}{d}\frac{1}{\left(a-\frac{bc}{d}\right)^{m+n-1}} &\left[\frac{1}{n-1}\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^{n-1} - \frac{1}{n-2}\binom{m+n-2}{1}\frac{b}{d}\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^{n-2} + \right. \\ &+ \frac{1}{n-3}\binom{m+n-2}{2}\left(\frac{b}{d}\right)^2\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^{n-3} - \cdots + (-1)^{n-2}\binom{m+n-2}{n-2}\left(\frac{b}{d}\right)^{n-2}\frac{a+bz}{c+dz} + \\ &+ (-1)^{n-1}\binom{m+n-2}{n-1}\left(\frac{b}{d}\right)^{n-1}\ln\left|\frac{a+bz}{c+dz}\right| + \cdots + \\ &+ (-1)^{m+n-3}\frac{1}{-m+2}\binom{m+n-2}{m+n-3}\left(\frac{b}{d}\right)^{m+n-3}\left(\frac{c+dz}{a+bz}\right)^{m-2} + \\ &\left. + (-1)^{m+n-2}\frac{1}{-m+1}\left(\frac{b}{d}\right)^{m+n-2}\left(\frac{c+dz}{a+bz}\right)^{m-1}\right]. \qquad (126)\end{aligned}$$

Hieraus folgen u. a. die Sonderformeln

$$\left.\begin{aligned}\int \frac{dz}{(a+bz)(c+dz)} &= \frac{1}{bc-ad}\ln\left|\frac{a+bz}{c+dz}\right|, \\ \int \frac{dz}{(a+bz)(c+dz)^2} &= -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^2}\left[\frac{a+bz}{c+dz} - \frac{b}{d}\ln\left|\frac{a+bz}{c+dz}\right|\right], \\ \int \frac{dz}{(a+bz)(c+dz)^3} &= -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^2 - 2\frac{b}{d}\frac{a+bz}{c+dz} + \frac{b^2}{d^2}\ln\left|\frac{a+bz}{c+dz}\right|\right], \\ \int \frac{dz}{(a+bz)(c+dz)^4} &= -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^4}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^3 - \frac{3}{2}\frac{b}{d}\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^2 + 3\frac{b^2}{d^2}\frac{a+bz}{c+dz} - \frac{b^3}{d^3}\ln\left|\frac{a+bz}{c+dz}\right|\right].\end{aligned}\right\} \quad (127)$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dz}{(a+bz)^2(c+dz)} &= -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^2}\left[\ln\left|\frac{a+bz}{c+dz}\right| + \frac{b}{d}\,\frac{c+dz}{a+bz}\right] ,\\
\int \frac{dz}{(a+bz)^2(c+dz)^2} &= -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^3}\left[\frac{a+bz}{c+dz} - 2\,\frac{b}{d}\ln\left|\frac{a+bz}{c+dz}\right| - \frac{b^2}{d^2}\,\frac{c+dz}{a+bz}\right] ,\\
\int \frac{dz}{(a+bz)^2(c+dz)^3} &= -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^4}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^2 - 3\,\frac{b}{d}\,\frac{a+bz}{c+dz} + 3\,\frac{b^2}{d^2}\ln\left|\frac{a+bz}{c+dz}\right| + \frac{b^3}{d^3}\,\frac{c+dz}{a+bz}\right] ,\\
\int \frac{dz}{(a+bz)^2(c+dz)^4} &= -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^5}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^3 - 2\,\frac{b}{d}\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^2 + 6\,\frac{b^2}{d^2}\,\frac{a+bz}{c+dz} -\right.\\
&\qquad \left. - 4\,\frac{b^3}{d^3}\ln\left|\frac{a+bz}{c+dz}\right| - \frac{b^4}{d^4}\,\frac{c+dz}{a+bz}\right] .
\end{aligned}
\tag{128}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dz}{(a+bz)^3(c+dz)} &= -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^3}\left[\ln\left|\frac{a+bz}{c+dz}\right| + 2\,\frac{b}{d}\,\frac{c+dz}{a+bz} - \frac{1}{2}\,\frac{b^2}{d^2}\left(\frac{c+dz}{a+bz}\right)^2\right] ,\\
\int \frac{dz}{(a+bz)^3(c+dz)^2} &= -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^4}\left[\frac{a+bz}{c+dz} - 3\,\frac{b}{d}\ln\left|\frac{a+bz}{c+dz}\right| - 3\,\frac{b^2}{d^2}\,\frac{c+dz}{a+bz} + \frac{1}{2}\,\frac{b^3}{d^3}\left(\frac{c+dz}{a+bz}\right)^2\right] ,\\
\int \frac{dz}{(a+bz)^3(c+dz)^3} &= -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^5}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^2 - 4\,\frac{b}{d}\,\frac{a+bz}{c+dz} + 6\,\frac{b^2}{d^2}\ln\left|\frac{a+bz}{c+dz}\right| + 4\,\frac{b^3}{d^3}\,\frac{c+dz}{a+bz} -\right.\\
&\qquad \left. - \frac{1}{2}\,\frac{b^4}{d^4}\left(\frac{c+dz}{a+bz}\right)^2\right] ,\\
\int \frac{dz}{(a+bz)^3(c+dz)^4} &= -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^6}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^3 - \frac{5}{2}\,\frac{b}{d}\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^2 + 10\,\frac{b^2}{d^2}\,\frac{a+bz}{c+dz} -\right.\\
&\qquad \left. - 10\,\frac{b^3}{d^3}\ln\left|\frac{a+bz}{c+dz}\right| - 5\,\frac{b^4}{d^4}\,\frac{c+dz}{a+bz} + \frac{1}{2}\,\frac{b^5}{d^5}\left(\frac{c+dz}{a+bz}\right)^2\right] .
\end{aligned}
\tag{129}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dz}{(a+bz)^4(c+dz)} &= -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^4}\left[\ln\left|\frac{a+bz}{c+dz}\right| + 3\,\frac{b}{d}\,\frac{c+dz}{a+bz} - \frac{3}{2}\,\frac{b^2}{d^2}\left(\frac{c+dz}{a+bz}\right)^2 + \frac{1}{3}\,\frac{b^3}{d^3}\left(\frac{c+dz}{a+bz}\right)^3\right] ,\\
\int \frac{dz}{(a+bz)^4(c+dz)^2} &= -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^5}\left[\frac{a+bz}{c+dz} - 4\,\frac{b}{d}\ln\left|\frac{a+bz}{c+dz}\right| - 6\,\frac{b^2}{d^2}\,\frac{c+dz}{a+bz} + 2\,\frac{b^3}{d^3}\left(\frac{c+dz}{a+bz}\right)^2 -\right.\\
&\qquad \left. - \frac{1}{3}\,\frac{b^4}{d^4}\left(\frac{c+dz}{a+bz}\right)^3\right] ,\\
\int \frac{dz}{(a+bz)^4(c+dz)^3} &= -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^6}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^2 - 5\,\frac{b}{d}\,\frac{a+bz}{c+dz} + 10\,\frac{b^2}{d^2}\ln\left|\frac{a+bz}{c+dz}\right| + 10\,\frac{b^3}{d^3}\,\frac{c+dz}{a+bz} -\right.\\
&\qquad \left. - \frac{5}{2}\,\frac{b^4}{d^4}\left(\frac{c+dz}{a+bz}\right)^2 + \frac{1}{3}\,\frac{b^5}{d^5}\left(\frac{c+dz}{a+bz}\right)^3\right] ,\\
\int \frac{dz}{(a+bz)^4(c+dz)^4} &= -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^7}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^3 - 3\,\frac{b}{d}\left(\frac{a+bz}{c+dz}\right)^2 + 15\,\frac{b^2}{d^2}\,\frac{a+bz}{c+dz} - 20\,\frac{b^3}{d^3}\ln\left|\frac{a+bz}{c+dz}\right| -\right.\\
&\qquad \left. - 15\,\frac{b^4}{d^4}\,\frac{c+dz}{a+bz} + 3\,\frac{b^5}{d^5}\left(\frac{c+dz}{a+bz}\right)^2 - \frac{1}{3}\,\frac{b^6}{d^6}\left(\frac{c+dz}{a+bz}\right)^3\right] .
\end{aligned}
\tag{130}
$$

Wird in (127) bis (130) $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = \pm 1$ gesetzt, so erhält man

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dz}{z(1\pm z)} &= \ln\left|\frac{z}{1\pm z}\right| ,\\
\int \frac{dz}{z(1\pm z)^2} &= \mp \frac{z}{1\pm z} + \ln\left|\frac{z}{1\pm z}\right| ,\\
\int \frac{dz}{z(1\pm z)^3} &= + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{1\pm z}\right)^2 \mp 2\,\frac{z}{1\pm z} + \ln\left|\frac{z}{1\pm z}\right| ,\\
\int \frac{dz}{z(1\pm z)^4} &= \mp \frac{1}{3}\left(\frac{z}{1\pm z}\right)^3 + \frac{3}{2}\left(\frac{z}{1\pm z}\right)^2 \mp 3\,\frac{z}{1\pm z} + \ln\left|\frac{z}{1\pm z}\right| .
\end{aligned}
\tag{131}
$$

$$\left.\begin{aligned}
\int\frac{dz}{z^2(1\pm z)} &= \mp\ln\left|\frac{z}{1\pm z}\right| - \frac{1\pm z}{z}\,,\\
\int\frac{dz}{z^2(1\pm z)^2} &= +\frac{z}{1\pm z} \mp 2\ln\left|\frac{z}{1\pm z}\right| - \frac{1\pm z}{z}\,,\\
\int\frac{dz}{z^2(1\pm z)^3} &= \mp\frac{1}{2}\left(\frac{z}{1\pm z}\right)^2 + 3\,\frac{z}{1\pm z} \mp 3\ln\left|\frac{z}{1\pm z}\right| - \frac{1\pm z}{z}\,,\\
\int\frac{dz}{z^2(1\pm z)^4} &= +\frac{1}{3}\left(\frac{z}{1\pm z}\right)^3 \mp 2\left(\frac{z}{1\pm z}\right)^2 + 6\,\frac{z}{1\pm z} \mp 4\ln\left|\frac{z}{1\pm z}\right| - \frac{1\pm z}{z}\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(132)$$

$$\left.\begin{aligned}
\int\frac{dz}{z^3(1\pm z)} &= +\ln\left|\frac{z}{1\pm z}\right| \pm 2\,\frac{1\pm z}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{1\pm z}{z}\right)^2,\\
\int\frac{dz}{z^3(1\pm z)^2} &= \mp\frac{z}{1\pm z} + 3\ln\left|\frac{z}{1\pm z}\right| \pm 3\,\frac{1\pm z}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{1\pm z}{z}\right)^2,\\
\int\frac{dz}{z^3(1\pm z)^3} &= +\frac{1}{2}\left(\frac{z}{1\pm z}\right)^2 \mp 4\,\frac{z}{1\pm z} + 6\ln\left|\frac{z}{1\pm z}\right| \pm 4\,\frac{1\pm z}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{1\pm z}{z}\right)^2,\\
\int\frac{dz}{z^3(1\pm z)^4} &= \mp\frac{1}{3}\left(\frac{z}{1\pm z}\right)^3 + \frac{5}{2}\left(\frac{z}{1\pm z}\right)^2 \mp 10\,\frac{z}{1\pm z} + 10\ln\left|\frac{z}{1\pm z}\right| \pm 5\,\frac{1\pm z}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{1\pm z}{z}\right)^2.
\end{aligned}\right\}\qquad(133)$$

$$\left.\begin{aligned}
\int\frac{dz}{z^4(1\pm z)} &= \mp\ln\left|\frac{z}{1\pm z}\right| - 3\,\frac{1\pm z}{z} \pm \frac{3}{2}\left(\frac{1\pm z}{z}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1\pm z}{z}\right)^3,\\
\int\frac{dz}{z^4(1\pm z)^2} &= +\frac{z}{1\pm z} \mp 4\ln\left|\frac{z}{1\pm z}\right| - 6\,\frac{1\pm z}{z} \pm 2\left(\frac{1\pm z}{z}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1\pm z}{z}\right)^3,\\
\int\frac{dz}{z^4(1\pm z)^3} &= \mp\frac{1}{2}\left(\frac{z}{1\pm z}\right)^2 + 5\,\frac{z}{1\pm z} \mp 10\ln\frac{z}{1\pm z} - 10\,\frac{1\pm z}{z} \pm \frac{5}{2}\left(\frac{1\pm z}{z}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1\pm z}{z}\right)^3,\\
\int\frac{dz}{z^4(1\pm z)^4} &= +\frac{1}{3}\left(\frac{z}{1\pm z}\right)^3 \mp 3\left(\frac{z}{1\pm z}\right)^2 + 15\,\frac{z}{1\pm z} \mp 20\ln\left|\frac{z}{1\pm z}\right| - 15\,\frac{1\pm z}{z} \pm 3\left(\frac{1\pm z}{z}\right)^2 -\\
&\quad - \frac{1}{3}\left(\frac{1\pm z}{z}\right)^3.
\end{aligned}\right\}\qquad(134)$$

b) Trigonometrische Integrale.

Mit den Substitutionen

$$z=\sin\zeta\,,\qquad dz=\cos\zeta\,d\zeta\qquad\text{bzw.}\qquad z=\cos\zeta\,,\qquad dz=-\sin\zeta\,d\zeta$$

lauten (127) bis (130)

$$\left.\begin{aligned}
\int\frac{\cos\zeta\,d\zeta}{(a+b\sin\zeta)(c+d\sin\zeta)} &= \frac{1}{bc-ad}\ln\left|\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right|,\\
\int\frac{\cos\zeta\,d\zeta}{(a+b\sin\zeta)(c+d\sin\zeta)^2} &= -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^2}\left[\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta} - \frac{b}{d}\ln\left|\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right|\right],\\
\int\frac{\cos\zeta\,d\zeta}{(a+b\sin\zeta)(c+d\sin\zeta)^3} &= -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right)^2 - 2\,\frac{b}{d}\,\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta} + \frac{b^2}{d^2}\ln\left|\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right|\right],\\
\int\frac{\cos\zeta\,d\zeta}{(a+b\sin\zeta)(c+d\sin\zeta)^4} &= -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^4}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right)^3 - \frac{3}{2}\,\frac{b}{d}\left(\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right)^2 + 3\,\frac{b^2}{d^2}\,\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta} -\right.\\
&\quad\left. - \frac{b^3}{d^3}\ln\left|\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right|\right].
\end{aligned}\right\}\qquad(135)$$

$$\left.\begin{aligned}
\int\frac{\cos\zeta\,d\zeta}{(a+b\sin\zeta)^2(c+d\sin\zeta)} &= -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^2}\left[\ln\left|\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right| + \frac{b}{d}\,\frac{c+d\sin\zeta}{a+b\sin\zeta}\right],\\
\int\frac{\cos\zeta\,d\zeta}{(a+b\sin\zeta)^2(c+d\sin\zeta)^2} &= -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^3}\left[\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta} - 2\,\frac{b}{d}\ln\left|\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right| - \frac{b^2}{d^2}\,\frac{c+d\sin\zeta}{a+b\sin\zeta}\right],\\
\int\frac{\cos\zeta\,d\zeta}{(a+b\sin\zeta)^2(c+d\sin\zeta)^3} &= -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^4}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right)^2 - 3\,\frac{b}{d}\,\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta} + 3\,\frac{b^2}{d^2}\ln\left|\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right| +\right.\\
&\quad\left. + \frac{b^3}{d^3}\,\frac{c+d\sin\zeta}{a+b\sin\zeta}\right],
\end{aligned}\right.\qquad(136)$$

$$\int \frac{\cos\zeta\, d\zeta}{(a+b\sin\zeta)^2 (c+d\sin\zeta)^4} = -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^5}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right)^3 - 2\frac{b}{d}\left(\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right)^2 + 6\frac{b^2}{d^2}\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta} - 4\frac{b^3}{d^3}\ln\left|\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right| - \frac{b^4}{d^4}\frac{c+d\sin\zeta}{a+b\sin\zeta}\right] . \tag{136}$$

$$\int \frac{\cos\zeta\, d\zeta}{(a+b\sin\zeta)^3 (c+d\sin\zeta)} = -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^3}\left[\ln\left|\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right| + 2\frac{b}{d}\frac{c+d\sin\zeta}{a+b\sin\zeta} - \frac{1}{2}\frac{b^2}{d^2}\left(\frac{c+d\sin\zeta}{a+b\sin\zeta}\right)^2\right] ,$$

$$\int \frac{\cos\zeta\, d\zeta}{(a+b\sin\zeta)^3 (c+d\sin\zeta)^2} = -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^4}\left[\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta} - 3\frac{b}{d}\ln\left|\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right| + 3\frac{b^2}{d^2}\frac{c+d\sin\zeta}{a+b\sin\zeta} + \frac{1}{2}\frac{b^3}{d^3}\left(\frac{c+d\sin\zeta}{a+b\sin\zeta}\right)^2\right] ,$$

$$\int \frac{\cos\zeta\, d\zeta}{(a+b\sin\zeta)^3 (c+d\sin\zeta)^3} = -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^5}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right)^2 - 4\frac{b}{d}\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta} + 6\frac{b^2}{d^2}\ln\left|\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right| + 4\frac{b^3}{d^3}\frac{c+d\sin\zeta}{a+b\sin\zeta} - \frac{1}{2}\frac{b^4}{d^4}\left(\frac{c+d\sin\zeta}{a+b\sin\zeta}\right)^2\right] , \tag{137}$$

$$\int \frac{\cos\zeta\, d\zeta}{(a+b\sin\zeta)^3 (c+d\sin\zeta)^4} = -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^6}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right)^3 - \frac{5}{2}\frac{b}{d}\left(\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right)^2 + 10\frac{b^2}{d^2}\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta} - 10\frac{b^3}{d^3}\ln\left|\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right| - 5\frac{b^4}{d^4}\frac{c+d\sin\zeta}{a+b\sin\zeta} + \frac{1}{2}\frac{b^5}{d^5}\left(\frac{c+d\sin\zeta}{a+b\sin\zeta}\right)^2\right] .$$

$$\int \frac{\cos\zeta\, d\zeta}{(a+b\sin\zeta)^4 (c+d\sin\zeta)} = -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^4}\left[\ln\left|\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right| + 3\frac{b}{d}\frac{c+d\sin\zeta}{a+b\sin\zeta} - \frac{3}{2}\frac{b^2}{d^2}\left(\frac{c+d\sin\zeta}{a+b\sin\zeta}\right)^2 + \frac{1}{3}\frac{b^3}{d^3}\left(\frac{c+d\sin\zeta}{a+b\sin\zeta}\right)^3\right] ,$$

$$\int \frac{\cos\zeta\, d\zeta}{(a+b\sin\zeta)^4 (c+d\sin\zeta)^2} = -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^5}\left[\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta} - 4\frac{b}{d}\ln\left|\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right| - 6\frac{b^2}{d^2}\frac{c+d\sin\zeta}{a+b\sin\zeta} + 2\frac{b^3}{d^3}\left(\frac{c+d\sin\zeta}{a+b\sin\zeta}\right)^2 - \frac{1}{3}\frac{b^4}{d^4}\left(\frac{c+d\sin\zeta}{a+b\sin\zeta}\right)^3\right] ,$$

$$\int \frac{\cos\zeta\, d\zeta}{(a+b\sin\zeta)^4 (c+d\sin\zeta)^3} = -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^6}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right)^2 - 5\frac{b}{d}\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta} + 10\frac{b^2}{d^2}\ln\left|\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right| + 10\frac{b^3}{d^3}\frac{c+d\sin\zeta}{a+b\sin\zeta} - \frac{5}{2}\frac{b^4}{d^4}\left(\frac{c+d\sin\zeta}{a+b\sin\zeta}\right)^2 + \frac{1}{3}\frac{b^5}{d^5}\left(\frac{c+d\sin\zeta}{a+b\sin\zeta}\right)^3\right] , \tag{138}$$

$$\int \frac{\cos\zeta\, d\zeta}{(a+b\sin\zeta)^4 (c+d\sin\zeta)^4} = -\frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^7}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right)^3 - 3\frac{b}{d}\left(\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right)^2 + 15\frac{b^2}{d^2}\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta} - 20\frac{b^3}{d^3}\ln\left|\frac{a+b\sin\zeta}{c+d\sin\zeta}\right| - 15\frac{b^4}{d^4}\frac{c+d\sin\zeta}{a+b\sin\zeta} + 3\frac{b^5}{d^5}\left(\frac{c+d\sin\zeta}{a+b\sin\zeta}\right)^2 - \frac{1}{3}\frac{b^6}{d^6}\left(\frac{c+d\sin\zeta}{a+b\sin\zeta}\right)^3\right] .$$

$$\int \frac{\sin\zeta\, d\zeta}{(a+b\cos\zeta)(c+d\cos\zeta)} = \frac{1}{ad-bc}\ln\left|\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right| ,$$

$$\int \frac{\sin\zeta\, d\zeta}{(a+b\cos\zeta)(c+d\cos\zeta)^2} = \frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^2}\left[\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta} - \frac{b}{d}\ln\left|\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right|\right] ,$$

$$\int \frac{\sin\zeta\, d\zeta}{(a+b\cos\zeta)(c+d\cos\zeta)^3} = \frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right)^2 - 2\frac{b}{d}\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta} + \frac{b^2}{d^2}\ln\left|\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right|\right] , \tag{139}$$

$$\int \frac{\sin\zeta\, d\zeta}{(a+b\cos\zeta)(c+d\cos\zeta)^4} = \frac{1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^4}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right)^3 - \frac{3}{2}\frac{b}{d}\left(\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right)^2 + 3\frac{b^2}{d^2}\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta} - \frac{b^3}{d^3}\ln\left|\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right|\right] .$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sin\zeta\, d\zeta}{(a+b\cos\zeta)^2(c+d\cos\zeta)} = \frac{1}{d\left(a-\frac{b\,c}{d}\right)^2}\left[\ln\left|\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right| + \frac{b}{d}\,\frac{c+d\cos\zeta}{a+b\cos\zeta}\right] ,\\
&\int \frac{\sin\zeta\, d\zeta}{(a+b\cos\zeta)^2(c+d\cos\zeta)^2} = \frac{1}{d\left(a-\frac{b\,c}{d}\right)^3}\left[\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta} - 2\,\frac{b}{d}\ln\left|\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right| - \frac{b^2}{d^2}\,\frac{c+d\cos\zeta}{a+b\cos\zeta}\right] ,\\
&\int \frac{\sin\zeta\, d\zeta}{(a+b\cos\zeta)^2(c+d\cos\zeta)^3} = \frac{1}{d\left(a-\frac{b\,c}{d}\right)^4}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right)^2 - 3\,\frac{b}{d}\,\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta} + 3\,\frac{b^2}{d^2}\ln\left|\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right| + \right.\\
&\qquad\left. + \frac{b^3}{d^3}\,\frac{c+d\cos\zeta}{a+b\cos\zeta}\right] ,\\
&\int \frac{\sin\zeta\, d\zeta}{(a+b\cos\zeta)^2(c+d\cos\zeta)^4} = \frac{1}{d\left(a-\frac{b\,c}{d}\right)^5}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right)^3 - 2\,\frac{b}{d}\left(\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right)^2 + 6\,\frac{b^2}{d^2}\,\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta} - \right.\\
&\qquad\left. - 4\,\frac{b^3}{d^3}\ln\left|\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right| - \frac{b^4}{d^4}\,\frac{c+d\cos\zeta}{a+b\cos\zeta}\right] .
\end{aligned}\tag{140}$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sin\zeta\, d\zeta}{(a+b\cos\zeta)^3(c+d\cos\zeta)} = \frac{1}{d\left(a-\frac{b\,c}{d}\right)^3}\left[\ln\left|\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right| + 2\,\frac{b}{d}\,\frac{c+d\cos\zeta}{a+b\cos\zeta} - \frac{1}{2}\,\frac{b^2}{d^2}\left(\frac{c+d\cos\zeta}{a+b\cos\zeta}\right)^2\right] ,\\
&\int \frac{\sin\zeta\, d\zeta}{(a+b\cos\zeta)^3(c+d\cos\zeta)^2} = \frac{1}{d\left(a-\frac{b\,c}{d}\right)^4}\left[\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta} - 3\,\frac{b}{d}\ln\left|\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right| - 3\,\frac{b^2}{d^2}\,\frac{c+d\cos\zeta}{a+b\cos\zeta} + \right.\\
&\qquad\left. + \frac{1}{2}\,\frac{b^3}{d^3}\left(\frac{c+d\cos\zeta}{a+b\cos\zeta}\right)^2\right] ,\\
&\int \frac{\sin\zeta\, d\zeta}{(a+b\cos\zeta)^3(c+d\cos\zeta)^3} = \frac{1}{d\left(a-\frac{b\,c}{d}\right)^5}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right)^2 - 4\,\frac{b}{d}\,\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta} + 6\,\frac{b^2}{d^2}\ln\left|\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right| + \right.\\
&\qquad\left. + 4\,\frac{b^3}{d^3}\,\frac{c+d\cos\zeta}{a+b\cos\zeta} - \frac{1}{2}\,\frac{b^4}{d^4}\left(\frac{c+d\cos\zeta}{a+b\cos\zeta}\right)^2\right] ,\\
&\int \frac{\sin\zeta\, d\zeta}{(a+b\cos\zeta)^3(c+d\cos\zeta)^4} = \frac{1}{d\left(a-\frac{b\,c}{d}\right)^6}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right)^3 - \frac{5}{2}\,\frac{b}{d}\left(\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right)^2 + 10\,\frac{b^2}{d^2}\,\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta} - \right.\\
&\qquad\left. - 10\,\frac{b^3}{d^3}\ln\left|\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right| - 5\,\frac{b^4}{d^4}\,\frac{c+d\cos\zeta}{a+b\cos\zeta} + \frac{1}{2}\,\frac{b^5}{d^5}\left(\frac{c+d\cos\zeta}{a+b\cos\zeta}\right)^2\right] .
\end{aligned}\tag{141}$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sin\zeta\, d\zeta}{(a+b\cos\zeta)^4(c+d\cos\zeta)} = \frac{1}{d\left(a-\frac{b\,c}{d}\right)^4}\left[\ln\left|\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right| + 3\,\frac{b}{d}\,\frac{c+d\cos\zeta}{a+b\cos\zeta} - \frac{3}{2}\,\frac{b^2}{d^2}\left(\frac{c+d\cos\zeta}{a+b\cos\zeta}\right)^2 + \right.\\
&\qquad\left. + \frac{1}{3}\,\frac{b^3}{d^3}\left(\frac{c+d\cos\zeta}{a+b\cos\zeta}\right)^3\right] ,\\
&\int \frac{\sin\zeta\, d\zeta}{(a+b\cos\zeta)^4(c+d\cos\zeta)^2} = \frac{1}{d\left(a-\frac{b\,c}{d}\right)^5}\left[\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta} - 4\,\frac{b}{d}\ln\left|\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right| - 6\,\frac{b^2}{d^2}\,\frac{c+d\cos\zeta}{a+b\cos\zeta} + \right.\\
&\qquad\left. + 2\,\frac{b^3}{d^3}\left(\frac{c+d\cos\zeta}{a+b\cos\zeta}\right)^2 - \frac{1}{3}\,\frac{b^4}{d^4}\left(\frac{c+d\cos\zeta}{a+b\cos\zeta}\right)^3\right] ,\\
&\int \frac{\sin\zeta\, d\zeta}{(a+b\cos\zeta)^4(c+d\cos\zeta)^3} = \frac{1}{d\left(a-\frac{b\,c}{d}\right)^6}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right)^2 - 5\,\frac{b}{d}\,\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta} + 10\,\frac{b^2}{d^2}\ln\left|\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right| + \right.\\
&\qquad\left. + 10\,\frac{b^3}{d^3}\,\frac{c+d\cos\zeta}{a+b\cos\zeta} - \frac{5}{2}\,\frac{b^4}{d^4}\left(\frac{c+d\cos\zeta}{a+b\cos\zeta}\right)^2 + \frac{1}{3}\,\frac{b^5}{d^5}\left(\frac{c+d\cos\zeta}{a+b\cos\zeta}\right)^3\right] ,\\
&\int \frac{\sin\zeta\, d\zeta}{(a+b\cos\zeta)^4(c+d\cos\zeta)^4} = \frac{1}{d\left(a-\frac{b\,c}{d}\right)^7}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right)^3 - 3\,\frac{b}{d}\left(\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right)^2 + 15\,\frac{b^2}{d^2}\,\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta} - \right.\\
&\qquad - 20\,\frac{b^3}{d^3}\ln\left|\frac{a+b\cos\zeta}{c+d\cos\zeta}\right| - 15\,\frac{b^4}{d^4}\,\frac{c+d\cos\zeta}{a+b\cos\zeta} + 3\,\frac{b^5}{d^5}\left(\frac{c+d\cos\zeta}{a+b\cos\zeta}\right)^2 - \\
&\qquad\left. - \frac{1}{3}\,\frac{b^6}{d^6}\left(\frac{c+d\cos\zeta}{a+b\cos\zeta}\right)^3\right] .
\end{aligned}\tag{142}$$

Mit den Substitutionen

$z = \sin^2\zeta\,, \quad 1 - z = \cos^2\zeta \quad dz = 2\sin\zeta\cos\zeta$ bzw. $z = \cos^2\zeta \quad 1 - z = \sin^2\zeta \quad dz = -2\cos\zeta\sin\zeta$

und unter Zugrundelegung des unteren Vorzeichens folgt aus (131) bis (134)

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{d\zeta}{\sin\zeta\cos\zeta} = \ln|\mathrm{tang}\,\zeta|\,, &&\int\frac{d\zeta}{\cos\zeta\sin\zeta} = -\ln|\mathrm{cotg}\,\zeta|\,,\\
&\int\frac{d\zeta}{\sin\zeta\cos^3\zeta} = \frac{1}{2}\mathrm{tang}^2\zeta + \ln|\mathrm{tang}\,\zeta|\,, &&\int\frac{d\zeta}{\cos\zeta\sin^3\zeta} = -\frac{1}{2}\mathrm{cotg}^2\zeta - \ln|\mathrm{cotg}\,\zeta|\,,\\
&\int\frac{d\zeta}{\sin\zeta\cos^5\zeta} = \frac{1}{4}\mathrm{tang}^4\zeta + \mathrm{tang}^2\zeta + \ln|\mathrm{tang}\,\zeta|\,, &&\int\frac{d\zeta}{\cos\zeta\sin^5\zeta} = -\frac{1}{4}\mathrm{cotg}^4\zeta - \mathrm{cotg}^2\zeta - \ln|\mathrm{cotg}\,\zeta|\,,\\
&\int\frac{d\zeta}{\sin\zeta\cos^7\zeta} = \frac{1}{6}\mathrm{tang}^6\zeta + \frac{3}{4}\mathrm{tang}^4\zeta + \frac{3}{2}\mathrm{tang}^2\zeta + \ln|\mathrm{tang}\,\zeta|\,, &&\int\frac{d\zeta}{\cos\zeta\sin^7\zeta} = -\frac{1}{6}\mathrm{cotg}^6\zeta - \frac{3}{4}\mathrm{cotg}^4\zeta - \frac{3}{2}\mathrm{cotg}^2\zeta - \ln|\mathrm{cotg}\,\zeta|\,.
\end{aligned}\right\}\quad(143)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{d\zeta}{\sin^3\zeta\cos\zeta} = \ln|\mathrm{tang}\,\zeta| - \frac{1}{2}\mathrm{cotg}^2\zeta\,, &&\int\frac{d\zeta}{\cos^3\zeta\sin\zeta} = -\ln|\mathrm{cotg}\,\zeta| + \frac{1}{2}\mathrm{tang}^2\zeta\,,\\
&\int\frac{d\zeta}{\sin^3\zeta\cos^3\zeta} = \frac{1}{2}\mathrm{tang}^2\zeta + 2\ln|\mathrm{tang}\,\zeta| - \frac{1}{2}\mathrm{cotg}^2\zeta\,, &&\int\frac{d\zeta}{\cos^3\zeta\sin^3\zeta} = -\frac{1}{2}\mathrm{cotg}^2\zeta - 2\ln|\mathrm{cotg}\,\zeta| + \frac{1}{2}\mathrm{tang}^2\zeta\,,\\
&\int\frac{d\zeta}{\sin^3\zeta\cos^5\zeta} = \frac{1}{4}\mathrm{tang}^4\zeta + \frac{3}{2}\mathrm{tang}^2\zeta + 3\ln|\mathrm{tang}\,\zeta| - \frac{1}{2}\mathrm{cotg}^2\zeta\,, &&\int\frac{d\zeta}{\cos^3\zeta\sin^5\zeta} = -\frac{1}{4}\mathrm{cotg}^4\zeta - \frac{3}{2}\mathrm{cotg}^2\zeta - 3\ln|\mathrm{cotg}\,\zeta| + \frac{1}{2}\mathrm{tang}^2\zeta\,,\\
&\int\frac{d\zeta}{\sin^3\zeta\cos^7\zeta} = \frac{1}{6}\mathrm{tang}^6\zeta + \mathrm{tang}^4\zeta + 3\mathrm{tang}^2\zeta + 4\ln|\mathrm{tang}\,\zeta| - \frac{1}{2}\mathrm{cotg}^2\zeta\,, &&\int\frac{d\zeta}{\cos^3\zeta\sin^7\zeta} = -\frac{1}{6}\mathrm{cotg}^6\zeta - \mathrm{cotg}^4\zeta - 3\mathrm{cotg}^2\zeta - 4\ln|\mathrm{cotg}\,\zeta| + \frac{1}{2}\mathrm{tang}^2\zeta\,.
\end{aligned}\right\}\quad(144)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{d\zeta}{\sin^5\zeta\cos\zeta} = \ln|\mathrm{tang}\,\zeta| - \mathrm{cotg}^2\zeta - \frac{1}{4}\mathrm{cotg}^4\zeta\,, &&\int\frac{d\zeta}{\cos^5\zeta\sin\zeta} = -\ln|\mathrm{cotg}\,\zeta| + \mathrm{tang}^2\zeta + \frac{1}{4}\mathrm{tang}^4\zeta\,,\\
&\int\frac{d\zeta}{\sin^5\zeta\cos^3\zeta} = \frac{1}{2}\mathrm{tang}^2\zeta + 3\ln|\mathrm{tang}\,\zeta| - \frac{3}{2}\mathrm{cotg}^2\zeta - \frac{1}{4}\mathrm{cotg}^4\zeta\,, &&\int\frac{d\zeta}{\cos^5\zeta\sin^3\zeta} = -\frac{1}{2}\mathrm{cotg}^2\zeta - 3\ln|\mathrm{cotg}\,\zeta| + \frac{3}{2}\mathrm{tang}^2\zeta + \frac{1}{4}\mathrm{tang}^4\zeta\,,\\
&\int\frac{d\zeta}{\sin^5\zeta\cos^5\zeta} = \frac{1}{4}\mathrm{tang}^4\zeta + 2\mathrm{tang}^2\zeta + 6\ln|\mathrm{tang}\,\zeta| - 2\mathrm{cotg}^2\zeta - \frac{1}{4}\mathrm{cotg}^4\zeta\,, &&\int\frac{d\zeta}{\cos^5\zeta\sin^5\zeta} = -\frac{1}{4}\mathrm{cotg}^4\zeta - 2\mathrm{cotg}^2\zeta - 6\ln|\mathrm{cotg}\,\zeta| + 2\mathrm{tang}^2\zeta + \frac{1}{4}\mathrm{tang}^4\zeta\,,\\
&\int\frac{d\zeta}{\sin^5\zeta\cos^7\zeta} = \frac{1}{6}\mathrm{tang}^6\zeta + \frac{5}{4}\mathrm{tang}^4\zeta + 5\mathrm{tang}^2\zeta + 10\ln|\mathrm{tang}\,\zeta| - \frac{5}{2}\mathrm{cotg}^2\zeta - \frac{1}{4}\mathrm{cotg}^4\zeta\,, &&\int\frac{d\zeta}{\cos^5\zeta\sin^7\zeta} = -\frac{1}{6}\mathrm{cotg}^6\zeta - \frac{5}{4}\mathrm{cotg}^4\zeta - 5\mathrm{cotg}^2\zeta - 10\ln|\mathrm{cotg}\,\zeta| + \frac{5}{2}\mathrm{tang}^2\zeta + \frac{1}{4}\mathrm{tang}^4\zeta\,.
\end{aligned}\right\}\quad(145)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{d\zeta}{\sin^7\zeta\cos\zeta} = \ln|\mathrm{tang}\,\zeta| - \frac{3}{2}\mathrm{cotg}^2\zeta - \frac{3}{4}\mathrm{cotg}^4\zeta - \frac{1}{6}\mathrm{cotg}^6\zeta\,, &&\int\frac{d\zeta}{\cos^7\zeta\sin\zeta} = -\ln|\mathrm{cotg}\,\zeta| + \frac{3}{2}\mathrm{tang}^2\zeta + \frac{3}{4}\mathrm{tang}^4\zeta + \frac{1}{6}\mathrm{tang}^6\zeta\,,\\
&\int\frac{d\zeta}{\sin^7\zeta\cos^3\zeta} = \frac{1}{2}\mathrm{tang}^2\zeta + 4\ln|\mathrm{tang}\,\zeta| - 3\mathrm{cotg}^2\zeta - \mathrm{cotg}^4\zeta - \frac{1}{6}\mathrm{cotg}^6\zeta\,, &&\int\frac{d\zeta}{\cos^7\zeta\sin^3\zeta} = -\frac{1}{2}\mathrm{cotg}^2\zeta - 4\ln|\mathrm{cotg}\,\zeta| + 3\mathrm{tang}^2\zeta + \mathrm{tang}^4\zeta + \frac{1}{6}\mathrm{tang}^6\zeta\,,
\end{aligned}\right\}\quad(146$$

$$\int\frac{d\zeta}{\sin^7\zeta\cos^5\zeta}=\frac{1}{4}\operatorname{tang}^4\zeta+\frac{5}{2}\operatorname{tang}^2\zeta+10\ln|\operatorname{tang}\zeta|-5\operatorname{cotg}^2\zeta-\frac{5}{4}\operatorname{cotg}^4\zeta-\frac{1}{6}\operatorname{cotg}^6\zeta\,,\qquad \int\frac{d\zeta}{\cos^7\zeta\sin^5\zeta}=-\frac{1}{4}\operatorname{cotg}^4\zeta-\frac{5}{2}\operatorname{cotg}^2\zeta-10\ln|\operatorname{cotg}\zeta|+5\operatorname{tang}^2\zeta+\frac{5}{4}\operatorname{tang}^4\zeta+\frac{1}{6}\operatorname{tang}^6\zeta\,, \tag{146}$$

$$\int\frac{d\zeta}{\sin^7\zeta\cos^7\zeta}=\frac{1}{6}\operatorname{tang}^6\zeta+\frac{3}{2}\operatorname{tang}^4\zeta+\frac{15}{2}\operatorname{tang}^2\zeta+20\ln|\operatorname{tang}\zeta|-\frac{15}{2}\operatorname{cotg}^2\zeta-\frac{3}{2}\operatorname{cotg}^4\zeta-\frac{1}{6}\operatorname{cotg}^6\zeta\,,\qquad \int\frac{d\zeta}{\cos^7\zeta\sin^7\zeta}=-\frac{1}{6}\operatorname{cotg}^6\zeta-\frac{3}{2}\operatorname{cotg}^4\zeta-\frac{15}{2}\operatorname{cotg}^2\zeta-20\ln|\operatorname{cotg}\zeta|+\frac{15}{2}\operatorname{tang}^2\zeta+\frac{3}{2}\operatorname{tang}^4\zeta+\frac{1}{6}\operatorname{tang}^6\zeta\,.$$

Mit den gleichen Substitutionen folgt bei Zugrundelegung des oberen Vorzeichens und unter Beschränkung auf (131)

$$\int\frac{\operatorname{cotg}\zeta\,d\zeta}{1+\sin^2\zeta}=\ln\sqrt{\frac{\sin^2\zeta}{1+\sin^2\zeta}}\,,\qquad \int\frac{\operatorname{tang}\zeta\,d\zeta}{1+\cos^2\zeta}=-\ln\sqrt{\frac{\cos^2\zeta}{1+\cos^2\zeta}}\,,$$

$$\int\frac{\operatorname{cotg}\zeta\,d\zeta}{(1+\sin^2\zeta)^2}=-\frac{1}{2}\frac{\sin^2\zeta}{1+\sin^2\zeta}+\ln\sqrt{\frac{\sin^2\zeta}{1+\sin^2\zeta}}\,,\qquad \int\frac{\operatorname{tang}\zeta\,d\zeta}{(1+\cos^2\zeta)^2}=\frac{1}{2}\frac{\cos^2\zeta}{1+\cos^2\zeta}-\ln\sqrt{\frac{\cos^2\zeta}{1+\cos^2\zeta}}\,,$$

$$\int\frac{\operatorname{cotg}\zeta\,d\zeta}{(1+\sin^2\zeta)^3}=\frac{1}{4}\frac{\sin^4\zeta}{(1+\sin^2\zeta)^2}-\frac{\sin^2\zeta}{1+\sin^2\zeta}+\ln\sqrt{\frac{\sin^2\zeta}{1+\sin^2\zeta}}\,,\qquad \int\frac{\operatorname{tang}\zeta\,d\zeta}{(1+\cos^2\zeta)^3}=-\frac{1}{4}\frac{\cos^4\zeta}{(1+\cos^2\zeta)^2}+\frac{\cos^2\zeta}{1+\cos^2\zeta}-\ln\sqrt{\frac{\cos^2\zeta}{1+\cos^2\zeta}}\,, \tag{147}$$

$$\int\frac{\operatorname{cotg}\zeta\,d\zeta}{(1+\sin^2\zeta)^4}=-\frac{1}{6}\frac{\sin^6\zeta}{(1+\sin^2\zeta)^3}+\frac{3}{4}\frac{\sin^4\zeta}{(1+\sin^2\zeta)^2}-\frac{3}{2}\frac{\sin^2\zeta}{1+\sin^2\zeta}+\ln\sqrt{\frac{\sin^2\zeta}{1+\sin^2\zeta}}\,,\qquad \int\frac{\operatorname{tang}\zeta\,d\zeta}{(1+\cos^2\zeta)^4}=\frac{1}{6}\frac{\cos^6\zeta}{(1+\cos^2\zeta)^3}-\frac{3}{4}\frac{\cos^4\zeta}{(1+\cos^2\zeta)^2}+\frac{3}{2}\frac{\cos^2\zeta}{1+\cos^2\zeta}-\ln\sqrt{\frac{\cos^2\zeta}{1+\cos^2\zeta}}\,.$$

c) Hyperbolische Integrale.

Vertauscht man in (135) bis (147) ζ mit $i\zeta$ und in den sinus-Integralen b mit $-ib$ und d mit $-id$, so ergibt sich

$$\int\frac{\mathfrak{Cof}\,\zeta\,d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)(c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)}=\frac{1}{bc-ad}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right|\,,$$

$$\int\frac{\mathfrak{Cof}\,\zeta\,d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)(c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2}=\frac{-1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^2}\left[\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}-\frac{b}{d}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right|\right]\,,$$

$$\int\frac{\mathfrak{Cof}\,\zeta\,d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)(c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^3}=\frac{-1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^2-2\frac{b}{d}\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}+\frac{b^2}{d^2}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right|\right]\,, \tag{148}$$

$$\int\frac{\mathfrak{Cof}\,\zeta\,d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)(c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^4}=\frac{-1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^4}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^3-\frac{3}{2}\frac{b}{d}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^2+3\frac{b^2}{d^2}\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}-\frac{b^3}{d^3}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right|\right]\,.$$

$$\int\frac{\mathfrak{Cof}\,\zeta\,d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2(c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)}=\frac{-1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^2}\left[\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right|+\frac{b}{d}\frac{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right]\,,$$

$$\int\frac{\mathfrak{Cof}\,\zeta\,d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2(c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2}=\frac{-1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^3}\left[\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}-2\frac{b}{d}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right|-\frac{b^2}{d^2}\frac{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right]\,,$$

$$\int\frac{\mathfrak{Cof}\,\zeta\,d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2(c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^3}=\frac{-1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^4}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^2-3\frac{b}{d}\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}+3\frac{b^2}{d^2}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right|+\frac{b^3}{d^3}\frac{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right]\,, \tag{149}$$

$$\int \frac{\mathfrak{Cos}\,\zeta\, d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2 (c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^4} = \frac{-1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^5}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^3 - 2\frac{b}{d}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^2 + 6\frac{b^2}{d^2}\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} - 4\frac{b^3}{d^3}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right| - \frac{b^4}{d^4}\frac{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right]. \tag{149}$$

$$\int \frac{\mathfrak{Cos}\,\zeta\, d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^3 (c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)} = \frac{-1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^3}\left[\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right| + 2\frac{b}{d}\frac{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} - \frac{1}{2}\frac{b^2}{d^2}\left(\frac{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^2\right],$$

$$\int \frac{\mathfrak{Cos}\,\zeta\, d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^3 (c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2} = \frac{-1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^4}\left[\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} - 3\frac{b}{d}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right| - 3\frac{b^2}{d^2}\frac{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} + \frac{1}{2}\frac{b^3}{d^3}\left(\frac{a+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^2\right],$$

$$\int \frac{\mathfrak{Cos}\,\zeta\, d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^3 (c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^3} = \frac{-1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^5}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^2 - 4\frac{b}{d}\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} + 6\frac{b^2}{d^2}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right| + 4\frac{b^3}{d^3}\frac{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} - \frac{1}{2}\frac{b^4}{d^4}\left(\frac{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^2\right], \tag{150}$$

$$\int \frac{\mathfrak{Cos}\,\zeta\, d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^3 (c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^4} = \frac{-1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^6}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^3 - \frac{5}{2}\frac{b}{d}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^2 + 10\frac{b^2}{d^2}\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} - 10\frac{b^3}{d^3}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right| - 5\frac{b^4}{d^4}\frac{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} + \frac{1}{2}\frac{b^5}{d^5}\left(\frac{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^2\right].$$

$$\int \frac{\mathfrak{Cos}\,\zeta\, d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^4 (c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)} = \frac{-1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^4}\left[\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right| + 3\frac{b}{d}\frac{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} - \frac{3}{2}\frac{b^2}{d^2}\left(\frac{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^2 + \frac{1}{3}\frac{b^3}{d^3}\left(\frac{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^3\right],$$

$$\int \frac{\mathfrak{Cos}\,\zeta\, d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^4 (c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^2} = \frac{-1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^5}\left[\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} - 4\frac{b}{d}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right| - 6\frac{b^2}{d^2}\frac{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} + 2\frac{b^3}{d^3}\left(\frac{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^2 - \frac{1}{3}\frac{b^4}{d^4}\left(\frac{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^3\right],$$

$$\int \frac{\mathfrak{Cos}\,\zeta\, d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^4 (c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^3} = \frac{-1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^6}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^2 - 5\frac{b}{d}\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} + 10\frac{b^2}{d^2}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right| + 10\frac{b^3}{d^3}\frac{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} - \frac{5}{2}\frac{b^4}{d^4}\left(\frac{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^2 + \frac{1}{3}\frac{b^5}{d^5}\left(\frac{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^3\right], \tag{151}$$

$$\int \frac{\mathfrak{Cos}\,\zeta\, d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^4 (c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)^4} = \frac{-1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^7}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^3 - 3\frac{b}{d}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^2 + 15\frac{b^2}{d^2}\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} - 20\frac{b^3}{d^3}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right| - 15\frac{b^4}{d^4}\frac{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} + 3\frac{b^5}{d^5}\left(\frac{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^2 - \frac{1}{3}\frac{b^6}{d^6}\left(\frac{c+d\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\right)^3\right].$$

$$\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta\, d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)(c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)} = \frac{-1}{ad-bc}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right|;$$

$$\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta\, d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)(c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)^2} = \frac{-1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^2}\left[\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} - \frac{b}{d}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right|\right];$$

$$\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta\, d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)(c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)^3} = \frac{-1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right)^2 - 2\frac{b}{d}\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} + \frac{b^2}{d^2}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right|\right], \tag{152}$$

$$\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta\, d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)(c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)^4} = \frac{-1}{d\left(a-\frac{bc}{d}\right)^4}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right)^3 - \frac{3}{2}\frac{b}{d}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right)^2 + 3\frac{b^2}{d^2}\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} - \frac{b^3}{d^3}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right|\right].$$

$$\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta\, d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)^2(c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)} = \frac{-1}{d\left(a-\frac{b\,c}{d}\right)^2}\left[\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right| + \frac{b}{d}\,\frac{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right],$$

$$\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta\, d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)^2(c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)^2} = \frac{-1}{d\left(a-\frac{b\,c}{d}\right)^3}\left[\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} - 2\,\frac{b}{d}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right| - \frac{b^2}{d^2}\,\frac{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right],$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta\, d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)^2(c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)^3} = \frac{-1}{d\left(a-\frac{b\,c}{d}\right)^4}&\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right)^2 - 3\,\frac{b}{d}\,\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} + 3\,\frac{b^2}{d^2}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right| + \right.\\ &\left. + \frac{b^3}{d^3}\,\frac{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta\, d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)^2(c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)^4} = \frac{-1}{d\left(a-\frac{b\,c}{d}\right)^5}&\left[\frac{1}{3}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right)^3 - 2\,\frac{b}{d}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right)^2 + 6\,\frac{b^2}{d^2}\,\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} - \right.\\ &\left. - 4\,\frac{b^3}{d^3}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right| - \frac{b^4}{d^4}\,\frac{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right].\end{aligned}$$

(153)

$$\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta\, d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)^3(c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)} = \frac{-1}{d\left(a-\frac{b\,c}{d}\right)^3}\left[\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right| + 2\,\frac{b}{d}\,\frac{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} - \frac{1}{2}\,\frac{b^2}{d^2}\left(\frac{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right)^2\right],$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta\, d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)^3(c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)^2} = \frac{-1}{d\left(a-\frac{b\,c}{d}\right)^4}&\left[\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} - 3\,\frac{b}{d}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right| - 3\,\frac{b^2}{d^2}\,\frac{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} + \right.\\ &\left. + \frac{1}{2}\,\frac{b^3}{d^3}\left(\frac{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right)^2\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta\, d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)^3(c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)^3} = \frac{-1}{d\left(a-\frac{b\,c}{d}\right)^5}&\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right)^2 - 4\,\frac{b}{d}\,\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} + 6\,\frac{b^2}{d^2}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right| + \right.\\ &\left. + 4\,\frac{b^3}{d^3}\,\frac{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} - \frac{1}{2}\,\frac{b^4}{d^4}\left(\frac{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right)^2\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta\, d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)^3(c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)^4} = \frac{-1}{d\left(a-\frac{b\,c}{d}\right)^6}&\left[\frac{1}{3}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right)^3 - \frac{5}{2}\,\frac{b}{d}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right)^2 + 10\,\frac{b^2}{d^2}\,\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} - \right.\\ &\left. - 10\,\frac{b^3}{d^3}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right| - 5\,\frac{b^4}{d^4}\,\frac{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} + \frac{1}{2}\,\frac{b^5}{d^5}\left(\frac{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right)^2\right].\end{aligned}$$

(154)

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta\, d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)^4(c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)} = \frac{-1}{d\left(a-\frac{b\,c}{d}\right)^4}&\left[\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right| + 3\,\frac{b}{d}\,\frac{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} - \frac{3}{2}\,\frac{b^2}{d^2}\left(\frac{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right)^2 + \right.\\ &\left. + \frac{1}{3}\,\frac{b^3}{d^3}\left(\frac{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right)^3\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta\, d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)^4(c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)^2} = \frac{-1}{d\left(a-\frac{b\,c}{d}\right)^5}&\left[\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} - 4\,\frac{b}{d}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right| - 6\,\frac{b^2}{d^2}\,\frac{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} + \right.\\ &\left. + 2\,\frac{b^3}{d^3}\left(\frac{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right)^2 - \frac{1}{3}\,\frac{b^4}{d^4}\left(\frac{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right)^3\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta\, d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)^4(c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)^3} = \frac{-1}{d\left(a-\frac{b\,c}{d}\right)^6}&\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right)^2 - 5\,\frac{b}{d}\,\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} + 10\,\frac{b^2}{d^2}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right| + \right.\\ &\left. + 10\,\frac{b^3}{d^3}\,\frac{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} - \frac{5}{2}\,\frac{b^4}{d^4}\left(\frac{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right)^2 + \frac{1}{3}\,\frac{b^5}{d^5}\left(\frac{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right)^3\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta\, d\zeta}{(a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)^4(c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta)^4} = \frac{-1}{d\left(a-\frac{b\,c}{d}\right)^7}&\left[\frac{1}{3}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right)^3 - 3\,\frac{b}{d}\left(\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right)^2 + 15\,\frac{b^2}{d^2}\,\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} - \right.\\ & - 20\,\frac{b^3}{d^3}\ln\left|\frac{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right| - 15\,\frac{b^4}{d^4}\,\frac{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} + 3\,\frac{b^5}{d^5}\left(\frac{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right)^2 - \\ &\left. + \frac{1}{3}\,\frac{b^6}{d^6}\left(\frac{c+d\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{a+b\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\right)^3\right].\end{aligned}$$

(155)

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}\,\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta} = \ln|\mathfrak{Tang}\,\zeta| \quad ,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}\,\zeta\,\mathfrak{Cof}^3\zeta} = -\frac{1}{2}\mathfrak{Tang}^2\zeta + \ln|\mathfrak{Tang}\,\zeta| \quad ,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}\,\zeta\,\mathfrak{Cof}^5\zeta} = \frac{1}{4}\mathfrak{Tang}^4\zeta - \mathfrak{Tang}^2\zeta + \ln|\mathfrak{Tang}\,\zeta| \quad ,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}\,\zeta\,\mathfrak{Cof}^7\zeta} = -\frac{1}{6}\mathfrak{Tang}^6\zeta + \frac{3}{4}\mathfrak{Tang}^4\zeta - \frac{3}{2}\mathfrak{Tang}^2\zeta + \ln|\mathfrak{Tang}\,\zeta| \quad ,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cof}\,\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} = -\ln|\mathfrak{Cotg}\,\zeta| \quad ,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cof}\,\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta} = -\frac{1}{2}\mathfrak{Cotg}^2\zeta + \ln|\mathfrak{Cotg}\,\zeta| \quad ,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cof}\,\zeta\,\mathfrak{Sin}^5\zeta} = -\frac{1}{4}\mathfrak{Cotg}^4\zeta + \mathfrak{Cotg}^2\zeta - \ln|\mathfrak{Cotg}\,\zeta| \quad ,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cof}\,\zeta\,\mathfrak{Sin}^7\zeta} = -\frac{1}{6}\mathfrak{Cotg}^6\zeta + \frac{3}{4}\mathfrak{Cotg}^4\zeta - \frac{3}{2}\mathfrak{Cotg}^2\zeta + \ln|\mathfrak{Cotg}\,\zeta| \quad .$$

(156)

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta} = -\ln|\mathfrak{Tang}\,\zeta| - \frac{1}{2}\mathfrak{Cotg}^2\zeta \quad ,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cof}^3\zeta} = \frac{1}{2}\mathfrak{Tang}^2\zeta - 2\ln|\mathfrak{Tang}\,\zeta| - \frac{1}{2}\mathfrak{Cotg}^2\zeta \quad ,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cof}^5\zeta} = -\frac{1}{4}\mathfrak{Tang}^4\zeta + \frac{3}{2}\mathfrak{Tang}^2\zeta - 3\ln|\mathfrak{Tang}\,\zeta| - \frac{1}{2}\mathfrak{Cotg}^2\zeta \quad ,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cof}^7\zeta} = \frac{1}{6}\mathfrak{Tang}^6\zeta - \mathfrak{Tang}^4\zeta + 3\mathfrak{Tang}^2\zeta - 4\ln|\mathfrak{Tang}\,\zeta| - \frac{1}{2}\mathfrak{Cotg}^2\zeta \quad ,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cof}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} = -\ln|\mathfrak{Cotg}\,\zeta| - \frac{1}{2}\mathfrak{Tang}^2\zeta \quad ,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cof}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta} = -\frac{1}{2}\mathfrak{Cotg}^2\zeta + 2\ln|\mathfrak{Cotg}\,\zeta| + \frac{1}{2}\mathfrak{Tang}^2\zeta \quad ,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cof}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}^5\zeta} = -\frac{1}{4}\mathfrak{Cotg}^4\zeta + \frac{3}{2}\mathfrak{Cotg}^2\zeta - 3\ln|\mathfrak{Cotg}\,\zeta| - \frac{1}{2}\mathfrak{Tang}^2\zeta \quad ,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cof}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}^7\zeta} = -\frac{1}{6}\mathfrak{Cotg}^6\zeta + \mathfrak{Cotg}^4\zeta - 3\mathfrak{Cotg}^2\zeta + 4\ln|\mathfrak{Cotg}\,\zeta| + \frac{1}{2}\mathfrak{Tang}^2\zeta \quad .$$

(157)

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^5\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta} = \ln|\mathfrak{Tang}\,\zeta| + \mathfrak{Cotg}^2\zeta - \frac{1}{4}\mathfrak{Cotg}^4\zeta \quad ,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^5\zeta\,\mathfrak{Cof}^3\zeta} = -\frac{1}{2}\mathfrak{Tang}^2\zeta + 3\ln|\mathfrak{Tang}\,\zeta| + \frac{3}{2}\mathfrak{Cotg}^2\zeta - \frac{1}{4}\mathfrak{Cotg}^4\zeta \quad ,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^5\zeta\,\mathfrak{Cof}^5\zeta} = \frac{1}{4}\mathfrak{Tang}^4\zeta - 2\mathfrak{Tang}^2\zeta + 6\ln|\mathfrak{Tang}\,\zeta| + 2\mathfrak{Cotg}^2\zeta - \frac{1}{4}\mathfrak{Cotg}^4\zeta \quad ,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^5\zeta\,\mathfrak{Cof}^7\zeta} = -\frac{1}{6}\mathfrak{Tang}^6\zeta + \frac{5}{4}\mathfrak{Tang}^4\zeta - 5\mathfrak{Tang}^2\zeta + 10\ln|\mathfrak{Tang}\,\zeta| + \frac{5}{2}\mathfrak{Cotg}^2\zeta - \frac{1}{4}\mathfrak{Cotg}^4\zeta \quad ,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cof}^5\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} = -\ln|\mathfrak{Cotg}\,\zeta| - \mathfrak{Tang}^2\zeta + \frac{1}{4}\mathfrak{Tang}^4\zeta \quad ,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cof}^5\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta} = -\frac{1}{2}\mathfrak{Cotg}^2\zeta + 3\ln|\mathfrak{Cotg}\,\zeta| + \frac{3}{2}\mathfrak{Tang}^2\zeta - \frac{1}{4}\mathfrak{Tang}^4\zeta \quad ,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cof}^5\zeta\,\mathfrak{Sin}^5\zeta} = -\frac{1}{4}\mathfrak{Cotg}^4\zeta + 2\mathfrak{Cotg}^2\zeta - 6\ln|\mathfrak{Cotg}\,\zeta| - 2\mathfrak{Tang}^2\zeta + \frac{1}{4}\mathfrak{Tang}^4\zeta \quad ,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cof}^5\zeta\,\mathfrak{Sin}^7\zeta} = -\frac{1}{6}\mathfrak{Cotg}^6\zeta + \frac{5}{4}\mathfrak{Cotg}^4\zeta - 5\mathfrak{Cotg}^2\zeta + 10\ln|\mathfrak{Cotg}\,\zeta| + \frac{5}{2}\mathfrak{Tang}^2\zeta - \frac{1}{4}\mathfrak{Tang}^4\zeta \quad .$$

(158)

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^7\zeta\,\mathfrak{Cof}\,\zeta} = -\ln|\mathfrak{Tang}\,\zeta| - \frac{3}{2}\mathfrak{Cotg}^2\zeta + \frac{3}{4}\mathfrak{Cotg}^4\zeta - \frac{1}{6}\mathfrak{Cotg}^6\zeta \quad ,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^7\zeta\,\mathfrak{Cof}^3\zeta} = \frac{1}{2}\mathfrak{Tang}^2\zeta - 4\ln|\mathfrak{Tang}\,\zeta| - 3\mathfrak{Cotg}^2\zeta + \mathfrak{Cotg}^4\zeta - \frac{1}{6}\mathfrak{Cotg}^6\zeta \quad ,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cof}^7\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} = -\ln|\mathfrak{Cotg}\,\zeta| - \frac{3}{2}\mathfrak{Tang}^2\zeta + \frac{3}{4}\mathfrak{Tang}^4\zeta - \frac{1}{6}\mathfrak{Tang}^6\zeta \quad ,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cof}^7\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta} = -\frac{1}{2}\mathfrak{Cotg}^2\zeta + 4\ln|\mathfrak{Cotg}\,\zeta| + 3\mathfrak{Tang}^2\zeta - \mathfrak{Tang}^4\zeta + \frac{1}{6}\mathfrak{Tang}^6\zeta \quad ,$$

(159)

$$\begin{aligned}
\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^7\zeta\,\mathfrak{Cos}^5\zeta} &= -\frac{1}{4}\mathfrak{Tang}^4\zeta+\frac{5}{2}\mathfrak{Tang}^2\zeta-\\
&\quad-10\ln|\mathfrak{Tang}\,\zeta|-5\mathfrak{Cotg}^2\zeta+\\
&\quad+\frac{5}{4}\mathfrak{Cotg}^4\zeta-\frac{1}{6}\mathfrak{Cotg}^6\zeta\,,\\
\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^7\zeta\,\mathfrak{Sin}^5\zeta} &= -\frac{1}{4}\mathfrak{Cotg}^4\zeta+\frac{5}{2}\mathfrak{Cotg}^2\zeta-\\
&\quad-10\ln|\mathfrak{Cotg}\,\zeta|-5\mathfrak{Tang}^2\zeta+\\
&\quad+\frac{5}{4}\mathfrak{Tang}^4\zeta-\frac{1}{6}\mathfrak{Tang}^6\zeta\,,\\
\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^7\zeta\,\mathfrak{Cos}^7\zeta} &= \frac{1}{6}\mathfrak{Tang}^6\zeta-\frac{3}{2}\mathfrak{Tang}^4\zeta+\\
&\quad+\frac{15}{2}\mathfrak{Tang}^2\zeta-20\ln|\mathfrak{Tang}\,\zeta|-\\
&\quad-\frac{15}{2}\mathfrak{Cotg}^2\zeta+\frac{3}{2}\mathfrak{Cotg}^4\zeta-\\
&\quad-\frac{1}{6}\mathfrak{Cotg}^6\zeta\,,\\
\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^7\zeta\,\mathfrak{Sin}^7\zeta} &= -\frac{1}{6}\mathfrak{Cotg}^6\zeta+\frac{3}{2}\mathfrak{Cotg}^4\zeta-\\
&\quad-\frac{15}{2}\mathfrak{Cotg}^2\zeta+20\ln|\mathfrak{Cotg}\,\zeta|+\\
&\quad+\frac{15}{2}\mathfrak{Tang}^2\zeta-\frac{3}{2}\mathfrak{Tang}^4\zeta+\\
&\quad+\frac{1}{6}\mathfrak{Tang}^6\zeta\,.
\end{aligned}\tag{159}$$

$$\begin{aligned}
\int\frac{\mathfrak{Cotg}\,\zeta\,d\zeta}{1-\mathfrak{Sin}^2\zeta} &= \ln\sqrt{\frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{1-\mathfrak{Sin}^2\zeta}}\,, &
\int\frac{\mathfrak{Tang}\,\zeta\,d\zeta}{1+\mathfrak{Cos}^2\zeta} &= \ln\sqrt{\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{1+\mathfrak{Cos}^2\zeta}}\,,\\
\int\frac{\mathfrak{Cotg}\,\zeta\,d\zeta}{(1-\mathfrak{Sin}^2\zeta)^2} &= \frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{1-\mathfrak{Sin}^2\zeta}+\ln\sqrt{\frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{1-\mathfrak{Sin}^2\zeta}}\,, &
\int\frac{\mathfrak{Tang}\,\zeta\,d\zeta}{(1+\mathfrak{Cos}^2\zeta)} &= -\frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{1+\mathfrak{Cos}^2\zeta}+\ln\sqrt{\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{1+\mathfrak{Cos}^2\zeta}}\,,\\
\int\frac{\mathfrak{Cotg}\,\zeta\,d\zeta}{(1-\mathfrak{Sin}^2\zeta)^3} &= \frac{1}{4}\,\frac{\mathfrak{Sin}^4\zeta}{(1-\mathfrak{Sin}^2\zeta)^2}+\frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{1-\mathfrak{Sin}^2\zeta}+ &
\int\frac{\mathfrak{Tang}\,\zeta\,d\zeta}{(1+\mathfrak{Cos}^2\zeta)^3} &= \frac{1}{4}\,\frac{\mathfrak{Cos}^4\zeta}{(1+\mathfrak{Cos}^2\zeta)^2}-\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{1+\mathfrak{Cos}^2\zeta}+\\
&\quad+\ln\sqrt{\frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{1-\mathfrak{Sin}^2\zeta}}\,, & &\quad+\ln\sqrt{\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{1+\mathfrak{Cos}^2\zeta}}\,,\\
\int\frac{\mathfrak{Cotg}\,\zeta\,d\zeta}{(1-\mathfrak{Sin}^2\zeta)^4} &= \frac{1}{6}\,\frac{\mathfrak{Sin}^6\zeta}{(1-\mathfrak{Sin}^2\zeta)^3}+\frac{3}{4}\,\frac{\mathfrak{Sin}^4\zeta}{(1-\mathfrak{Sin}^2\zeta)^2}+ &
\int\frac{\mathfrak{Tang}\,\zeta\,d\zeta}{(1+\mathfrak{Cos}^2\zeta)^4} &= -\frac{1}{6}\,\frac{\mathfrak{Cos}^6\zeta}{(1+\mathfrak{Cos}^2\zeta)^3}+\frac{3}{4}\,\frac{\mathfrak{Cos}^4\zeta}{(1+\mathfrak{Cos}^2\zeta)^2}-\\
&\quad+\frac{3}{2}\,\frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{1-\mathfrak{Sin}^2\zeta}+\ln\sqrt{\frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{1-\mathfrak{Sin}^2\zeta}}\,, & &\quad-\frac{3}{2}\,\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{1+\mathfrak{Cos}^2\zeta}+\ln\sqrt{\frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{1+\mathfrak{Cos}^2\zeta}}\,.
\end{aligned}\tag{160}$$

4. Integrale der Klasse $\int\frac{A_{m+n}z^{m+n}+A_{m+n-1}z^{m+n-1}+\cdots+A_1z+A_0}{z^m+B_{m-1}z^{m-1}+\cdots+B_1z+B_0}\,dz$.

m und n seien ganze positive Zahlen. Dann kann zunächst durchdividiert werden und man erhält

$$\begin{aligned}
\int\frac{A_{m+n}z^{m+n}+A_{m+n-1}z^{m+n-1}+\cdots+A_1z+A_0}{z^m+B_{m-1}z^{m-1}+\cdots+B_1z+B_0}\,dz &= \int\Big[c_nz^n+c_{n-1}z^{n-1}+\cdots c_1z+c_0+\\
&\quad+\frac{D_{m-1}z^{m-1}+D_{m-2}z^{m-2}+\cdots D_1z+D_0}{z^m+B_{m-1}z^{m-1}+\cdots+B_1z+B_0}\Big]\,dz
\end{aligned}$$

oder integriert

$$\begin{aligned}
\int\frac{A_{m+n}z^{m+n}+A_{m+n-1}z^{m+n-1}+\cdots+A_1z+A_0}{z^m+B_{m-1}z^{m-1}+\cdots+B_1z+B_0}\,dz &= \frac{c_nz^{n+1}}{n+1}+\frac{c_{n-1}z^n}{n}+\cdots+\frac{c_1z^2}{2}+c_0z+\\
&\quad+\int\frac{D_{m-1}z^{m-1}+D_{m-2}z^{m-2}+\cdots+D_1z+D_0}{z^m+B_{m-1}z^{m-1}+\cdots+B_1z+B_0}\,dz\,.
\end{aligned}\tag{161}$$

Wird die Gleichung

$$z^m+B_{m-1}z^{m-1}+\cdots+B_1z+B_0=0$$

aufgelöst und sind

$$z=a_1,\ z=a_2,\ \dots z=a_m$$

die m Wurzelwerte, so ist

$$z^m+B_{m-1}z^{m-1}+\cdots+B_1z+B_0=(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_m),$$

und es folgt

$$\int\frac{D_{m-1}z^{m-1}+D_{m-2}z^{m-2}+\cdots+D_1z+D_0}{z^m+B_{m-1}z^{m-1}+\cdots+B_1z+B_0}\,dz=\int\frac{D_{m-1}z^{m-1}+D_{m-2}z^{m-2}+\cdots+D_1z+D_0}{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_m)}\,dz\,.$$

Nun ergibt das Verfahren der Partialbruchzerlegung

$$\int\frac{D_{m-1}z^{m-1}+D_{m-2}z^{m-2}+\cdots+D_1z+D_0}{z^m+B_{m-1}z^{m-1}+\cdots+B_1z+B_0}\,dz=\int\Big[\frac{b_1}{z-a_1}+\frac{b_2}{z-a_2}+\cdots+\frac{b_m}{z-a_m}\Big]\,dz\,,$$

wobei die Koeffizienten $b_1, b_2 \ldots b_m$ aus der Identitätsgleichung

$$\frac{D_{m-1} z^{m-1} + D_{m-2} z^{m-2} + \cdots + D_1 z + D_0}{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_m)} =$$

$$= \frac{b_1[(z-a_2)(z-a_3)\cdots(z-a_m)] + b_2[(z-a_1)(z-a_3)\cdots(z-a_m)] + \cdots + b_m[(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_{m-1})}{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_m)}$$

zu bestimmen sind. Sie folgen durch Einführen von $z=a_1$, $z=a_2$, $\ldots z=a_m$ in die Identitätsgleichung zu

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \frac{D_{m-1} a_1^{m-1} + D_{m-2} a_1^{m-2} + \cdots + D_1 a_1 + D_0}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_m)}, \\ b_2 &= \frac{D_{m-1} a_2^{m-1} + D_{m-2} a_2^{m-2} + \cdots + D_1 a_2 + D_0}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_m)}, \\ &\text{-----------------} \\ b_m &= \frac{D_{m-1} a_m^{m-1} + D_{m-2} a_m^{m-2} + \cdots + D_1 a_m + D_0}{(a_m-a_1)(a_m-a_2)\cdots(a_m-a_{m-1})}. \end{aligned}\right\}$$

Die Auswertung des durch Partialbruchzerlegung aufgespaltenen Integrals ergibt

$$\int \frac{D_{m-1} z^{m-1} + D_{m-2} z^{m-2} + \cdots + D_1 z + D_0}{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_m)} dz = b_1 \ln|z-a_1| + b_2 \ln|z-a_2| + \cdots + b_n \ln|z-a_m|. \quad (162)$$

Die in (162) auftretenden Wurzelwerte a_m können reell oder komplex sein. Im letzteren Falle müssen sie immer paarweise komplex sein. a_1 und a_2 seien gemäß

$$a_1 = \alpha_1 + i\alpha_2, \qquad a_2 = \alpha_1 - i\alpha_2$$

ein solches Paar komplexer Wurzeln. Dann müssen auch die zugehörigen Koeffizienten b_1 und b_2 konjugiert komplex sein, etwa gemäß

$$b_1 = \beta_1 - i\beta_2, \qquad b_2 = \beta_1 + i\beta_2,$$

und man erhält

$$b_1 \ln|z-a_1| + b_2 \ln|z-a_2| = (\beta_1 - i\beta_2)\ln|(z-\alpha_1) - i\alpha_2| + (\beta_1 + i\beta_2)\ln|(z-\alpha_1) + i\alpha_2|.$$

Nun ist nach der Theorie der komplexen Zahlen

$$(z-\alpha_1) - i\alpha_2 = r e^{-i\varphi} = \sqrt{(z-\alpha_1)^2 + \alpha_2^2}\, e^{-i \operatorname{arc\,cotg} \frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}}$$

$$(z-\alpha_1) + i\alpha_2 = r e^{+i\varphi} = \sqrt{(z-\alpha_1)^2 + \alpha_2^2}\, e^{+i \operatorname{arc\,cotg} \frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}}$$

und damit

$$\ln|(z-\alpha_1) - i\alpha_2| = \ln\sqrt{(z-\alpha_1)^2 + \alpha_2^2} - i \operatorname{arc\,cotg} \frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}$$

$$\ln|(z-\alpha_1) + i\alpha_2| = \ln\sqrt{(z-\alpha_1)^2 + \alpha_2^2} + i \operatorname{arc\,cotg} \frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Die Berücksichtigung dieser Ausdrücke ergibt

$$b_1 \ln|z-a_1| + b_2 \ln|z-a_2| = 2\beta_1 \ln\sqrt{(z-\alpha_1)^2 + \alpha_2^2} - 2\beta_2 \operatorname{arc\,cotg} \frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}.$$

In Anwendung auf ein einziges Paar komplexer Wurzelwerte folgt mit $m=2$

$$(z-a_1)(z-a_2) = (z-\alpha_1-i\alpha_2)(z-\alpha_1+i\alpha_2) = (z-\alpha_1)^2 + \alpha_2^2$$

$$a_1 - a_2 = 2i\alpha_2,$$

$$b_1 = \beta_1 - i\beta_2 = \frac{D_1 a_1 + D_0}{a_1 - a_2} = \frac{(D_1\alpha_1 + D_0) + iD_1\alpha_2}{2i\alpha_2} = \frac{D_1}{2} - i\left(\frac{D_1\alpha_1}{2\alpha_2} + \frac{D_0}{2\alpha_2}\right), \ \beta_1 = \frac{D_1}{2}, \ \beta_2 = \frac{D_1\alpha_1}{2\alpha_2} + \frac{D_0}{2\alpha_2},$$

$$b_2 = \beta_1 + i\beta_2 = \frac{D_1 a_2 + D_0}{a_2 - a_1} = \frac{(D_1\alpha_1 + D_0) - iD_1\alpha_2}{-2i\alpha_2} = \frac{D_1}{2} + i\left(\frac{D_1\alpha_1}{2\alpha_2} + \frac{D_0}{2\alpha_2}\right), \ \beta_1 = \frac{D_1}{2}, \ \beta_2 = \frac{D_1\alpha_1}{2\alpha_2} + \frac{D_0}{2\alpha_2},$$

und damit

$$\int \frac{D_1 z + D_0}{(z-\alpha_1)^2 + \alpha_2^2} dz = D_1 \ln\sqrt{(z-\alpha_1)^2 + \alpha_2^2} - \left(\frac{D_1\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{D_0}{\alpha_2}\right) \operatorname{arc\,cotg} \frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}. \quad (163)$$

Im Hinblick auf die Funktionalgleichung

$$\operatorname{arc\,cotg}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}$$

und die noch hinzufügbare willkürliche Integrationskonstante kann (163) auch in der Form

$$\int\frac{D_1 z+D_0}{(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2}\,dz=D_1\ln\sqrt{(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2}+\left(\frac{D_1\alpha_1}{\alpha_2}+\frac{D_0}{\alpha_2}\right)\operatorname{arc\,tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2} \tag{164}$$

geschrieben werden. Insbesondere folgt für $D_1=0$, $D_0=1$ und $D_1=1$, $D_0=0$

$$\left.\begin{aligned}&\int\frac{dz}{(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2}=\frac{1}{\alpha_2}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\quad,\\&\int\frac{z\,dz}{(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2}=\ln\sqrt{(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2}+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\quad.\end{aligned}\right\} \tag{165}$$

In Verbindung mit (161) und (165) ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}&\int\frac{z^2\,dz}{(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2}=z+2\alpha_1\ln\sqrt{(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2}+\frac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{\alpha_2}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\quad,\\&\int\frac{z^3\,dz}{(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2}=\frac{z^2}{2}+2\alpha_1 z+(3\alpha_1^2-\alpha_2^2)\ln\sqrt{(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2}+\frac{\alpha_1(\alpha_1^2-3\alpha_2^2)}{\alpha_2}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\quad,\\&\int\frac{z^4\,dz}{(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2}=\frac{z^3}{3}+\alpha_1 z^2+(3\alpha_1^2-\alpha_2^2)z+4\alpha_1(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\ln\sqrt{(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2}+\\&\qquad+\frac{\alpha_1^2(\alpha_1^2-6\alpha_2^2)+\alpha_2^4}{\alpha_2}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\quad.\end{aligned}\right\} \tag{166}$$

Durch Differentiation gemäß

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{z-\alpha_1}{2n\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n}\right]=\frac{1}{2n\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n}-\frac{(z-\alpha_1)^2}{\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n+1}}=\frac{1-2n}{2n\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n}+$$
$$+\frac{1}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n+1}}$$

bestätigt sich die Richtigkeit der Rekursionsformel

$$\int\frac{dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n+1}}=\frac{z-\alpha_1}{2n\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n}+\frac{2n-1}{2n\alpha_2^2}\int\frac{dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n}\,. \tag{167}$$

Hieraus folgt in Verbindung mit (165)

$$\left.\begin{aligned}&\int\frac{dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^2}=\frac{z-\alpha_1}{2\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]}+\frac{1}{2\alpha_2^3}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\quad,\\&\int\frac{dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^3}=\frac{z-\alpha_1}{4\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^2}+\frac{3(z-\alpha_1)}{8\alpha_2^4[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]}+\frac{3}{8\alpha_2^5}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\quad,\\&\int\frac{dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^4}=\frac{z-\alpha_1}{6\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^3}+\frac{5(z-\alpha_1)}{24\alpha_2^4[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^2}+\frac{5(z-\alpha_1)}{16\alpha_2^6[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]}+\\&\qquad+\frac{5}{16\alpha_2^7}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\quad.\end{aligned}\right\} \tag{168}$$

Ferner ergibt sich aus

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{2n[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n}\right]=-\frac{z-\alpha_1}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n+1}}$$

die Rekursionsformel

$$\int\frac{z\,dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n+1}}=-\frac{1}{2n[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n}+\alpha_1\int\frac{dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n+1}}\,,$$

oder bei Berücksichtigung von (167)

$$\int\frac{z\,dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n+1}}=\frac{\alpha_1(z-\alpha_1)-\alpha_2^2}{2n\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n}+\frac{(2n-1)\alpha_1}{2n\alpha_2^2}\int\frac{dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n}\,. \tag{169}$$

Diese liefert in Verbindung mit (165) und (168)

$$\begin{aligned}
\int \frac{z\,dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^2} &= \frac{\alpha_1(z-\alpha_1)-\alpha_2^2}{2\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]} + \frac{\alpha_1}{2\alpha_2^3}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\,, \\
\int \frac{z\,dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^3} &= \frac{\alpha_1(z-\alpha_1)-\alpha_2^2}{4\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^2} + \frac{3\alpha_1(z-\alpha_1)}{8\alpha_2^4[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]} + \frac{3\alpha_1}{8\alpha_2^5}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\,, \\
\int \frac{z\,dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^4} &= \frac{\alpha_1(z-\alpha_1)-\alpha_2^2}{6\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^3} + \frac{5\alpha_1(z-\alpha_1)}{24\alpha_2^4[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^2} + \frac{5\alpha_1(z-\alpha_1)}{16\alpha_2^6[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]} + \\
&\quad + \frac{5\alpha_1}{16\alpha_2^7}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\,.
\end{aligned} \tag{170}$$

Weiter folgt aus

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{z-\alpha_1}{2n[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n}\right] = \frac{1}{2n[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n} - \frac{(z-\alpha_1)^2}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n+1}} = \frac{1}{2n[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n} - \frac{z^2-2z\alpha_1+\alpha_1^2}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n+1}}$$

die Rekursionsformel

$$\begin{aligned}
\int \frac{z^2\,dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n+1}} &= -\frac{z-\alpha_1}{2n[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n} + \frac{1}{2n}\int \frac{dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n} + 2\alpha_1\int \frac{z\,dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n+1}} - \\
&\quad - \alpha_1^2\int \frac{dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n+1}}\,,
\end{aligned}$$

die bei Berücksichtigung von (167) und (169) die Form

$$\int \frac{z^2\,dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n+1}} = \frac{(\alpha_1^2-\alpha_2^2)(z-\alpha_1)-2\alpha_1\alpha_2^2}{2n\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n} + \frac{(2n-1)\alpha_1^2+\alpha_2^2}{2n\alpha_2^2}\int \frac{dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n} \tag{171}$$

annimmt. Hieraus erhält man in Verbindung mit (165) und (168)

$$\begin{aligned}
\int \frac{z^2\,dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^2} &= \frac{(\alpha_1^2-\alpha_2^2)(z-\alpha_1)-2\alpha_1\alpha_2^2}{2\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]} + \frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{2\alpha_2^3}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\,, \\
\int \frac{z^2\,dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^3} &= \frac{(\alpha_1^2-\alpha_2^2)(z-\alpha_1)-2\alpha_1\alpha_2^2}{4\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^2} + \frac{(3\alpha_1^2+\alpha_2^2)(z-\alpha_1)}{8\alpha_2^4[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]} + \frac{3\alpha_1^2+\alpha_2^2}{8\alpha_2^5}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\,, \\
\int \frac{z^2\,dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^4} &= \frac{(\alpha_1^2-\alpha_2^2)(z-\alpha_1)-2\alpha_1\alpha_2^2}{6\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^3} + \frac{(5\alpha_1^2+\alpha_2^2)(z-\alpha_1)}{24\alpha_2^4[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^2} + \frac{(5\alpha_1^2+\alpha_2^2)(z-\alpha_1)}{16\alpha_2^6[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]} + \\
&\quad + \frac{5\alpha_1^2+\alpha_2^2}{16\alpha_2^7}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\,.
\end{aligned} \tag{172}$$

Weiter folgt aus

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\alpha_2^2}{2n[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n} - \frac{1}{2(n-1[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n-1}}\right] = \frac{(z-\alpha_1)^3}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n-1}} = \frac{z^3-3z^2\alpha_1+3z\alpha_1^2-\alpha_1^3}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n+1}}$$

die Rekursionsformel

$$\int \frac{z^3\,dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n+1}} = \frac{\alpha_2^2}{2n[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n} - \frac{1}{2(n-1)[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n-1}} + \int \frac{3\alpha_1 z^2-3\alpha_1^2 z+\alpha_1^3}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n+1}}dz$$

oder bei Berücksichtigung von (167), (169) und (171)

$$\begin{aligned}
\int \frac{z^3\,dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n+1}} &= -\frac{1}{2(n-1)[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n-1}} + \frac{\alpha_1(\alpha_1^2-3\alpha_2^2)(z-\alpha_1)+\alpha_2^2(\alpha_2^2-3\alpha_1^2)}{2n\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n} + \\
&\quad + \frac{3\alpha_1\alpha_2^2+(2n-1)\alpha_1^3}{2n\alpha_2^2}\int \frac{dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n}\,.
\end{aligned} \tag{173}$$

In Verbindung mit (168) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int \frac{z^3\,dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^3} &= \frac{\alpha_1(\alpha_1^2-3\alpha_2^2)(z-\alpha_1)+\alpha_2^2(\alpha_2^2-3\alpha_1^2)}{4\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^2} + \frac{3\alpha_1(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(z-\alpha_1)-4\alpha_2^4}{8\alpha_2^4[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]} + \\
&\quad + \frac{3\alpha_1(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}{8\alpha_2^5}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\,, \\
\int \frac{z^3\,dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^4} &= \frac{\alpha_1(\alpha_1^2-3\alpha_2^2)(z-\alpha_1)+\alpha_2^2(\alpha_2^2-3\alpha_1^2)}{6\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^3} + \frac{\alpha_1(5\alpha_1^2+3\alpha_2^2)(z-\alpha_1)-6\alpha_2^4}{24\alpha_2^4[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^2} + \\
&\quad + \frac{\alpha_1(5\alpha_1^2+3\alpha_2^2)(z-\alpha_1)}{16\alpha_2^6[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]} + \frac{\alpha_1(5\alpha_1^2+3\alpha_2^2)}{16\alpha_2^7}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\,.
\end{aligned} \tag{174}$$

Im Falle $n=1$ artet (173) aus; hierfür folgt

$$\begin{aligned}\int\frac{z^3\,dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^2}&=\frac{\alpha_1(\alpha_1^2-3\alpha_2^2)(z-\alpha_1)-\alpha_2^2(3\alpha_1^2-\alpha_2^2)}{2\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]}+\ln\sqrt{(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2}+\\&+\frac{\alpha_1(\alpha_1^2+3\alpha_2^2)}{2\alpha_2^3}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\quad.\end{aligned}\tag{175}$$

Weiter ergibt sich aus

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-\alpha_1)^3}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n}\right]=\frac{3(z-\alpha_1)^2}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n}-\frac{2n(z-\alpha_1)^4}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n+1}}=(3-2n)\frac{(z-\alpha_1)^4}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n+1}}+\frac{3\alpha_2^2(z-\alpha_1)^2}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n+1}}$$

die Rekursionsformel

$$\int\frac{(z-\alpha_1)^4}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n+1}}\,dz=-\frac{(z-\alpha_1)^3}{(2n-3)[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n}+\frac{3\alpha_2^2}{2n-3}\int\frac{(z-\alpha_1)^2\,dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n+1}}$$

und nach Ausmultiplikation von $(z-\alpha_1)^4$ und $(z-\alpha_1)^2$

$$\begin{aligned}\int\frac{z^4\,dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n+1}}&=-\frac{(z-\alpha_1)^3}{(2n-3)[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n}+\\&+\int\frac{4\alpha_1(2n-3)z^3+(3\alpha_2^2-6\alpha_1^2(2n-3))z^2+(4\alpha_1^3(2n-3)-6\alpha_1\alpha_2^2)\,z+(3\alpha_1^2\alpha_2^2-\alpha_1^4(2n-3))}{(2n-3)[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n+1}}\,dz\,.\end{aligned}$$

Wird das Integral auf der rechten Seite durch Heranziehung von (167), (169), (171) und (173) weiterbehandelt, so erhält man

$$\begin{aligned}\int\frac{z^4\,dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n+1}}&=-\frac{2(n-1)(z-\alpha_1)+4\alpha_1(2n-3)}{2(n-1)(2n-3)[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^{n-1}}+\frac{(\alpha_1^4-6\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^4)(z-\alpha_1)+4\alpha_1\alpha_2^2(\alpha_2^2-\alpha_1^2)}{2n\,\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n}+\\&+\frac{3\alpha_2^4+(2n-3)(6\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_1^4(2n-1))}{2n(2n-3)\,\alpha_2^2}\int\frac{dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^n}\quad.\end{aligned}\tag{176}$$

Hieraus folgt in Verbindung mit (168)

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{z^4\,dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^3}&=\frac{(\alpha_1^4-6\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^4)(z-\alpha_1)+4\alpha_1\alpha_2^2(\alpha_2^2-\alpha_1^2)}{4\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^2}+\frac{(3\alpha_1^4+6\alpha_1^2\alpha_2^2-5\alpha_2^4)(z-\alpha_1)-16\alpha_1\alpha_2^4}{8\alpha_2^4[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]}+\\&+\frac{3(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^2}{8\alpha_2^5}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\quad.\\\int\frac{z^4\,dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^4}&=\frac{(\alpha_1^4-6\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^4)(z-\alpha_1)+4\alpha_1\alpha_2^2(\alpha_2^2-\alpha_1^2)}{6\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^3}+\frac{(5\alpha_1^4+6\alpha_1^2\alpha_2^2-7\alpha_2^4)(z-\alpha_1)-24\alpha_1\alpha_2^4}{24\alpha_2^4[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^2}+\\&+\frac{(5\alpha_1^4+6\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^4)(z-\alpha_1)}{16\alpha_2^6[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]}+\frac{5\alpha_1^4+6\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^4}{16\alpha_2^7}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\quad.\end{aligned}\right\}\tag{177}$$

Auch (176) artet für $n=1$ aus. In diesem Falle ergibt sich

$$\begin{aligned}\int\frac{z^4\,dz}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]^2}&=+\frac{(\alpha_1^4-6\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^4)(z-\alpha_1)+4\alpha_1\alpha_2^2(\alpha_2^2-\alpha_1^2)}{2\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2]}+(z-\alpha_1)+4\alpha_1\ln\sqrt{(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2}+\\&+\frac{\alpha_1^4+6\alpha_1^2\alpha_2^2-3\alpha_2^4}{2\alpha_2^3}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\quad.\end{aligned}\tag{178}$$

Eine Gegengruppe von Integralformeln folgt aus (164) bis (178) durch Vertauschen von α_2 mit $i\alpha_2$. Man erhält auf diesem Wege

$$\int\frac{D_1z+D_0}{(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2}\,dz=D_1\ln\sqrt{|(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2|}-\left(\frac{D_1\alpha_1}{\alpha_2}+\frac{D_0}{\alpha_2}\right)\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\quad.\tag{179}$$

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{dz}{(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2}&=-\frac{1}{\alpha_2}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\quad,\\\int\frac{z\,dz}{(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2}&=\ln\sqrt{|(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2|}-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\quad,\\\int\frac{z^2\,dz}{(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2}&=z+2\alpha_1\ln\sqrt{|(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2|}-\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_2}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\quad,\\\int\frac{z^3\,dz}{(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2}&=\frac{z^2}{2}+2\alpha_1z+(3\alpha_1^2+\alpha_2^2)\ln\sqrt{|(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2|}-\frac{\alpha_1(\alpha_1^2+3\alpha_2^2)}{\alpha_2}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\quad,\\\int\frac{z^4\,dz}{(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2}&=\frac{z^3}{3}+\alpha_1z^2+(3\alpha_1^2+\alpha_2^2)z+4\alpha_1(x_1^2+\alpha_2^2)\ln\sqrt{|(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2|}-\\&-\frac{\alpha_1^2(\alpha_1^2+6\alpha_2^2)+\alpha_2^4}{\alpha_2}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\quad.\end{aligned}\right|\tag{180}$$

$$\int \frac{dz}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^{n+1}} = -\frac{z-\alpha_1}{2n\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^n} - \frac{2n-1}{2n\alpha_2^2}\int\frac{dz}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^n},$$

$$\int \frac{dz}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^{2}} = -\frac{z-\alpha_1}{2\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]} + \frac{1}{2\alpha_2^3}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\,\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2},$$

$$\int \frac{dz}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^{3}} = -\frac{z-\alpha_1}{4\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^2} + \frac{3(z-\alpha_1)}{8\alpha_2^4[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]} - \frac{3}{8\alpha_2^5}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\,\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2},$$

$$\int \frac{dz}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^{4}} = -\frac{z-\alpha_1}{6\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^3} + \frac{5(z-\alpha_1)}{24\alpha_2^4[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^2} - \frac{5(z-\alpha_1)}{16\alpha_2^6[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]} + \frac{5}{16\alpha_2^7}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\,\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}. \tag{181}$$

$$\int \frac{z\,dz}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^{n+1}} = -\frac{\alpha_1(z-\alpha_1)+\alpha_2^2}{2n\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^n} - \frac{(2n-1)\alpha_1}{2n\alpha_2^2}\int\frac{dz}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^n},$$

$$\int \frac{z\,dz}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^{2}} = -\frac{\alpha_1(z-\alpha_1)+\alpha_2^2}{2\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]} + \frac{\alpha_1}{2\alpha_2^3}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\,\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2},$$

$$\int \frac{z\,dz}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^{3}} = -\frac{\alpha_1(z-\alpha_1)+\alpha_2^2}{4\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^2} + \frac{3\alpha_1(z-\alpha_1)}{8\alpha_2^4[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]} - \frac{3\alpha_1}{8\alpha_2^5}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\,\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2},$$

$$\int \frac{z\,dz}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^{4}} = -\frac{\alpha_1(z-\alpha_1)+\alpha_2^2}{6\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^3} + \frac{5\alpha_1(z-\alpha_1)}{24\alpha_2^4[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^2} - \frac{5\alpha_1(z-\alpha_1)}{16\alpha_2^6[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]} + \frac{5\alpha_1}{16\alpha_2^7}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\,\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}. \tag{182}$$

$$\int \frac{z^2\,dz}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^{n+1}} = -\frac{(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(z-\alpha_1)+2\alpha_1\alpha_2^2}{2n\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^n} - \frac{(2n-1)\alpha_1^2-\alpha_2^2}{2n\alpha_2^2}\int\frac{dz}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^n},$$

$$\int \frac{z^2\,dz}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^{2}} = -\frac{(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(z-\alpha_1)+2\alpha_1\alpha_2^2}{2\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]} + \frac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{2\alpha_2^3}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\,\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2},$$

$$\int \frac{z^2\,dz}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^{3}} = -\frac{(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(z-\alpha_1)+2\alpha_1\alpha_2^2}{4\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^2} + \frac{(3\alpha_1^2-\alpha_2^2)(z-\alpha_1)}{8\alpha_2^4[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]} - \frac{3\alpha_1^2-\alpha_2^2}{8\alpha_2^5}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\,\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2},$$

$$\int \frac{z^2\,dz}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^{4}} = -\frac{(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(z-\alpha_1)+2\alpha_1\alpha_2^2}{6\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^3} + \frac{(5\alpha_1^2-\alpha_2^2)(z-\alpha_1)}{24\alpha_2^4[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^2} - \frac{(5\alpha_1^2-\alpha_2^2)(z-\alpha_1)}{16\alpha_2^6[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]} + \frac{5\alpha_1^2-\alpha_2^2}{16\alpha_2^7}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\,\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}. \tag{183}$$

$$\int \frac{z^3\,dz}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^{n+1}} = -\frac{1}{2(n-1)[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^{n-1}} - \frac{\alpha_1(\alpha_1^2+3\alpha_2^2)(z-\alpha_1)+\alpha_2^2(\alpha_2^2+3\alpha_1^2)}{2n\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^n} + \frac{3\alpha_1\alpha_2^2-(2n-1)\alpha_1^3}{2n\alpha_2^2}\int\frac{dz}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^n},$$

$$\int \frac{z^3\,dz}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^{2}} = -\frac{\alpha_1(\alpha_1^2+3\alpha_2^2)(z-\alpha_1)+\alpha_2^2(3\alpha_1^2+\alpha_2^2)}{2\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]} + \ln\sqrt{|(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2|} + \frac{\alpha_1(\alpha_1^2-3\alpha_2^2)}{2\alpha_2^3}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\,\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2},$$

$$\int \frac{z^3\,dz}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^{3}} = -\frac{\alpha_1(\alpha_1^2+3\alpha_2^2)(z-\alpha_1)+\alpha_2^2(3\alpha_1^2+\alpha_2^2)}{4\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^2} + \frac{3\alpha_1(\alpha_1^2-\alpha_2^2)(z-\alpha_1)-4\alpha_2^4}{8\alpha_2^4[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]} - \frac{3\alpha_1(\alpha_1^2-\alpha_2^2)}{8\alpha_2^5}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\,\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2},$$

$$\int \frac{z^3\,dz}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^{4}} = -\frac{\alpha_1(\alpha_1^2+3\alpha_2^2)(z-\alpha_1)+\alpha_2^2(3\alpha_1^2+\alpha_2^2)}{6\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^3} + \frac{\alpha_1(5\alpha_1^2-3\alpha_2^2)(z-\alpha_1)-6\alpha_2^4}{24\alpha_2^4[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^2} - \frac{\alpha_1(5\alpha_1^2-3\alpha_2^2)(z-\alpha_1)}{16\alpha_2^6[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]} + \frac{\alpha_1(5\alpha_1^2-3\alpha_2^2)}{16\alpha_2^7}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\,\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}. \tag{184}$$

$$\int \frac{z^4\,dz}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^{n+1}} = -\frac{2(n-1)(z-\alpha_1)+4\alpha_1(2n-3)}{2(n-1)(2n-3)[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^{n-1}} - \frac{(\alpha_1^4+6\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^4)(z-\alpha_1)+4\alpha_1\alpha_2^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}{2n\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^n} - \frac{3\alpha_2^4+(2n-3)(\alpha_1^4(2n-1)-6\alpha_1^2\alpha_2^2)}{2n(2n-3)\alpha_2^2}\int\frac{dz}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^n},$$

$$\int \frac{z^4\,dz}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^{2}} = -\frac{(\alpha_1^4+6\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^4)(z-\alpha_1)+4\alpha_1\alpha_2^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}{2\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]} + (z-\alpha_1) + 4\alpha_1\ln\sqrt{|(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2|} + \frac{\alpha_1^4-6\alpha_1^2\alpha_2^2-3\alpha_2^4}{2\alpha_2^3}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\,\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}, \tag{185}$$

$$\int \frac{z^4\,dz}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^3} = -\frac{(\alpha_1^4+6\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^4)(z-\alpha_1)+4\alpha_1\alpha_2^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}{4\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^2} + \frac{(3\alpha_1^4-6\alpha_1^2\alpha_2^2-5\alpha_2^4)(z-\alpha_1)-16\alpha_1\alpha_2^4}{8\alpha_2^4[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]} - \frac{3(\alpha_1^2-\alpha_2^2)^2}{8\alpha_2^5}\operatorname{Ar\,Tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}, \tag{185}$$

$$\int \frac{z^4\,dz}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^4} = -\frac{(\alpha_1^4+6\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^4)(z-\alpha_1)+4\alpha_1\alpha_2^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}{6\alpha_2^2[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^3} + \frac{(5\alpha_1^4-6\alpha_1^2\alpha_2^2-7\alpha_2^4)(z-\alpha_1)-24\alpha_1\alpha_2^4}{24\alpha_2^4[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]^2} - \frac{(5\alpha_1^4-6\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^4)(z-\alpha_1)}{16\alpha_2^6[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2]} + \frac{5\alpha_1^4-6\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^4}{16\alpha_2^7}\operatorname{Ar\,Tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Für $\alpha_1=0$ und $\alpha_2=a$ folgt aus (164) bis (185)

$$\int\frac{D_1z+D_0}{z^2+a^2}\,dz = D_1\ln\sqrt{z^2+a^2}+\frac{D_0}{a}\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}, \qquad \int\frac{D_1z+D_0}{z^2-a^2}\,dz = D_1\ln\sqrt{|z^2-a^2|}-\frac{D_0}{a}\operatorname{Ar\,Tang}\frac{z}{a}, \tag{186}$$

$$\int\frac{dz}{z^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}, \qquad \int\frac{dz}{z^2-a^2}=-\frac{1}{a}\operatorname{Ar\,Tang}\frac{z}{a},$$

$$\int\frac{z\,dz}{z^2+a^2}=\ln\sqrt{z^2+a^2}, \qquad \int\frac{z\,dz}{z^2-a^2}=\ln\sqrt{|z^2-a^2|},$$

$$\int\frac{z^2\,dz}{z^2+a^2}=z-a\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}, \qquad \int\frac{z^2\,dz}{z^2-a^2}=z-a\operatorname{Ar\,Tang}\frac{z}{a}, \tag{187}$$

$$\int\frac{z^3\,dz}{z^2+a^2}=\frac{z^2}{2}-a^2\ln\sqrt{z^2+a^2}, \qquad \int\frac{z^3\,dz}{z^2-a^2}=\frac{z^2}{2}+a^2\ln\sqrt{|z^2-a^2|},$$

$$\int\frac{z^4\,dz}{z^2+a^2}=\frac{z^3}{3}-a^2z+a^3\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}, \qquad \int\frac{z^4\,dz}{z^2-a^2}=\frac{z^3}{3}+a^2z-a^3\operatorname{Ar\,Tang}\frac{z}{a}.$$

$$\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^2}=\frac{z}{2a^2(z^2+a^2)}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}, \qquad \int\frac{dz}{(z^2-a^2)^2}=-\frac{z}{2a^2(z^2-a^2)}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{Ar\,Tang}\frac{z}{a},$$

$$\int\frac{z\,dz}{(z^2+a^2)^2}=-\frac{1}{2(z^2+a^2)}, \qquad \int\frac{z\,dz}{(z^2-a^2)^2}=-\frac{1}{2(z^2-a^2)},$$

$$\int\frac{z^2\,dz}{(z^2+a^2)^2}=-\frac{z}{2(z^2+a^2)}+\frac{1}{2a}\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}, \qquad \int\frac{z^2\,dz}{(z^2-a^2)^2}=-\frac{z}{2(z^2-a^2)}-\frac{1}{2a}\operatorname{Ar\,Tang}\frac{z}{a}, \tag{188}$$

$$\int\frac{z^3\,dz}{(z^2+a^2)^2}=\frac{a^2}{2(z^2+a^2)}+\ln\sqrt{z^2+a^2}, \qquad \int\frac{z^3\,dz}{(z^2-a^2)^2}=-\frac{a^2}{2(z^2-a^2)}+\ln\sqrt{|z^2-a^2|},$$

$$\int\frac{z^4\,dz}{(z^2+a^2)^2}=\frac{a^2z}{2(z^2+a^2)}+z-\frac{3a}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}, \qquad \int\frac{z^3\,dz}{(z^2-a^2)^2}=-\frac{a^2z}{2(z^2-a^2)}+z-\frac{3a}{2}\operatorname{Ar\,Tang}\frac{z}{a}.$$

$$\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^3}=\frac{z}{4a^2(z^2+a^2)^2}+\frac{3z}{8a^4(z^2+a^2)}+\frac{3}{8a^5}\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}, \qquad \int\frac{dz}{(z^2-a^2)^3}=-\frac{z}{4a^2(z^2-a^2)^2}+\frac{3z}{8a^4(z^2-a^2)}-\frac{3}{8a^5}\operatorname{Ar\,Tang}\frac{z}{a},$$

$$\int\frac{z\,dz}{(z^2+a^2)^3}=-\frac{1}{4(z^2+a^2)^2}, \qquad \int\frac{z\,dz}{(z^2-a^2)^3}=-\frac{1}{4(z^2-a^2)^2},$$

$$\int\frac{z^2\,dz}{(z^2+a^2)^3}=-\frac{z}{4(z^2+a^2)^2}+\frac{z}{8a^2(z^2+a^2)}+\frac{1}{8a^3}\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}, \qquad \int\frac{z^2\,dz}{(z^2-a^2)^3}=-\frac{z}{4(z^2-a^2)^2}-\frac{z}{8a^2(z^2-a^2)}+\frac{1}{8a^3}\operatorname{Ar\,Tang}\frac{z}{a}, \tag{189}$$

$$\int\frac{z^3\,dz}{(z^2+a^2)^3}=\frac{a^2}{4(z^2+a^2)^2}-\frac{1}{2(z^2+a^2)}, \qquad \int\frac{z^3\,dz}{(z^2-a^2)^3}=-\frac{a^2}{4(z^2-a^2)^2}-\frac{1}{2(z^2-a^2)},$$

$$\int\frac{z^4\,dz}{(z^2+a^2)^3}=\frac{a^2z}{4(z^2+a^2)^2}-\frac{5z}{8(z^2+a^2)}+\frac{3}{8a}\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}, \qquad \int\frac{z^4\,dz}{(z^2-a^2)^3}=-\frac{a^2z}{4(z^2-a^2)^2}-\frac{5z}{8(z^2-a^2)}-\frac{3}{8a}\operatorname{Ar\,Tang}\frac{z}{a}.$$

$$\int\frac{dz}{(z^2+a^2)^4}=\frac{z}{6a^2(z^2+a^2)^3}+\frac{5z}{24a^4(z^2+a^2)^2}+\frac{5z}{16a^6(z^2+a^2)}+\frac{5}{16a^7}\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}, \qquad \int\frac{dz}{(z^2-a^2)^4}=-\frac{z}{6a^2(z^2-a^2)^3}+\frac{5z}{24a^4(z^2-a^2)^2}-\frac{5z}{16a^6(z^2-a^2)}+\frac{5}{16a^7}\operatorname{Ar\,Tang}\frac{z}{a},$$

$$\int\frac{z\,dz}{(z^2+a^2)^4}=-\frac{1}{6(z^2+a^2)^3}, \qquad \int\frac{z\,dz}{(z^2-a^2)^4}=-\frac{1}{6(z^2-a^2)^3}, \tag{190}$$

$$\int \frac{z^2\,dz}{(z^2+a^2)^4} = -\frac{z}{6(z^2+a^2)^3} + \frac{z}{24a^2(z^2+a^2)^2} + \frac{z}{16a^4(z^2+a^2)} + \frac{1}{16a^5}\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}\,, \quad \int \frac{z^2\,dz}{(z^2-a^2)^4} = -\frac{z}{6(z^2-a^2)^3} - \frac{z}{24a^2(z^2-a^2)^2} + \frac{z}{16a^4(z^2-a^2)} - \frac{1}{16a^5}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z}{a}\,, \tag{190}$$

$$\int \frac{z^3\,dz}{(z^2+a^2)^4} = \frac{a^2}{6(z^2+a^2)^3} - \frac{1}{4(z^2+a^2)^2}\,, \quad \int \frac{z^3\,dz}{(z^2-a^2)^4} = -\frac{a^2}{6(z^2-a^2)^3} - \frac{1}{4(z^2-a^2)^2}\,,$$

$$\int \frac{z^4\,dz}{(z^2+a^2)^4} = \frac{a^2 z}{6(z^2+a^2)^3} - \frac{7z}{24(z^2+a^2)^2} + \frac{z}{16a^2(z^2+a^2)} + \frac{1}{16a^3}\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}\,, \quad \int \frac{z^4\,dz}{(z^2-a^2)^4} = -\frac{a^2 z}{6(z^2-a^2)^3} - \frac{7z}{24(z^2-a^2)^2} - \frac{z}{16a^2(z^2-a^2)} + \frac{1}{16a^3}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z}{a}\,.$$

Für $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = \sqrt{b-a^2}$ bzw. $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = \sqrt{a^2-b}$ folgt aus (164) bis (178) bzw. (179) bis (185)

$$\int \frac{D_1 z + D_0}{z^2 - 2az + b}\,dz = D_1 \ln\sqrt{|z^2 - 2az + b|} + \left(\frac{D_1 a}{\sqrt{b-a^2}} + \frac{D_0}{\sqrt{b-a^2}}\right)\operatorname{arc\,tang}\frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}} \quad \text{für } b > a^2\,, \tag{191}$$

$$\int \frac{D_1 z + D_0}{z^2 - 2az + b}\,dz = D_1 \ln\sqrt{|z^2 - 2az + b|} - \left(\frac{D_1 a}{\sqrt{a^2-b}} + \frac{D_0}{\sqrt{a^2-b}}\right)\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}} \quad \text{für } b < a^2\,.$$

$$\int \frac{dz}{z^2 - 2az + b} = \frac{1}{\sqrt{b-a^2}}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}}\,, \tag{192^a für $b > a^2$}$$

$$\int \frac{z\,dz}{z^2 - 2az + b} = \ln\sqrt{|z^2-2az+b|} + \frac{a}{\sqrt{b-a^2}}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}}\,,$$

$$\int \frac{z^2\,dz}{z^2 - 2az + b} = z + 2a\ln\sqrt{|z^2-2az+b|} + \frac{2a^2-b}{\sqrt{b-a^2}}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}}\,,$$

$$\int \frac{z^3\,dz}{z^2 - 2az + b} = \frac{z^2}{2} + 2az + (4a^2-b)\ln\sqrt{|z^2-2az+b|} + \frac{a(4a^2-3b)}{\sqrt{b-a^2}}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}}\,,$$

$$\int \frac{z^4\,dz}{z^2 - 2az + b} = \frac{z^3}{3} + az^2 + (4a^2-b)z + 4a(2a^2-b)\ln\sqrt{|z^2-2az+b|} + \frac{a^2(7a^2-6b)+(b-a^2)^2}{\sqrt{b-a^2}}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}}\,.$$

$$\int \frac{dz}{z^2 - 2az + b} = -\frac{1}{\sqrt{a^2-b}}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}}\,, \tag{192^b für $b < a^2$}$$

$$\int \frac{z\,dz}{z^2 - 2az + b} = \ln\sqrt{|z^2-2az+b|} - \frac{a}{\sqrt{a^2-b}}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}}\,,$$

$$\int \frac{z^2\,dz}{z^2 - 2az + b} = z + 2a\ln\sqrt{|z^2-2az+b|} - \frac{2a^2-b}{\sqrt{a^2-b}}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}}\,,$$

$$\int \frac{z^3\,dz}{z^2 - 2az + b} = \frac{z^2}{2} + 2az + (4a^2-b)\ln\sqrt{|z^2-2az+b|} - \frac{a(4a^2-3b)}{\sqrt{a^2-b}}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}}\,,$$

$$\int \frac{z^4\,dz}{z^2 - 2az + b} = \frac{z^3}{3} + az^2 + (4a^2-b)z + 4a(2a^2-b)\ln\sqrt{|z^2-2az+b|} - \frac{a^2(7a^2-6b)+(a^2-b)^2}{\sqrt{a^2-b}}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}}\,.$$

$$\int \frac{dz}{(z^2-2az+b)^2} = \frac{(z-a)}{2(b-a^2)(z^2-2az+b)} + \frac{1}{2(b-a^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}}\,, \tag{193^a für $b > a^2$}$$

$$\int \frac{z\,dz}{(z^2-2az+b)^2} = \frac{az-b}{2(b-a^2)(z^2-2az+b)} + \frac{a}{2(b-a^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}}\,,$$

$$\int \frac{z^2\,dz}{(z^2-2az+b)^2} = \frac{(2a^2-b)(z-a)-2a(b-a^2)}{2(b-a^2)(z^2-2az+b)} + \frac{b}{2(b-a^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}}\,,$$

$$\int \frac{z^3\,dz}{(z^2-2az+b)^2} = \frac{a(4a^2-3b)(z-a)-(b-a^2)(4a^2-b)}{2(b-a^2)(z^2-2az+b)} + \ln\sqrt{z^2-2az+b} + \frac{a(3b-2a^2)}{2(b-a^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}}\,,$$

$$\int \frac{z^4\,dz}{(z^2-2az+b)^2} = +\frac{\left[a^4-6a^2(b-a^2)+(b-a^2)^2\right](z-a)+4a(b-a^2)(b-2a^2)}{2(b-a^2)(z^2-2az+b)} + (z-a) + 4a\ln\sqrt{z^2-2az+b} + \frac{a^4+6a^2(b-a^2)-3(b-a^2)^2}{2(b-a^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}}\,.$$

$$\begin{aligned}
\int\frac{dz}{(z^2-2az+b)^2} &= -\frac{z-a}{2(a^2-b)(z^2-2az+b)}+\frac{1}{2(a^2-b)^{\frac32}}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}}\,,\\
\int\frac{z\,dz}{(z^2-2az+b)^2} &= -\frac{az-b}{2(a^2-b)(z^2-2az+b)}+\frac{a}{2(a^2-b)^{\frac32}}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}}\,,\\
\int\frac{z^2\,dz}{(z^2-2az+b)^2} &= -\frac{(2a^2-b)(z-a)+2a(a^2-b)}{2(a^2-b)(z^2-2az+b)}+\frac{b}{2(a^2-b)^{\frac32}}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}}\,,\\
\int\frac{z^3\,dz}{(z^2-2az+b)^2} &= -\frac{a(4a^2-3b)(z-a)+(a^2-b)(4a^2-b)}{2(a^2-b)(z^2-2az+b)}+\ln\sqrt{z^2-2az+b}+\\
&\quad+\frac{a(3b-2a^2)}{2(a^2-b)^{\frac32}}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}}\,,\\
\int\frac{z^4\,dz}{(z^2-2az+b)^2} &= -\frac{[a^4+6a^2(a^2-b)+(a^2-b)^2](z-a)+4a(a^2-b)(2a^2-b)}{2(a^2-b)(z^2-2az+b)}+(z-a)+\\
&\quad+4a\ln\sqrt{z^2-2az+b}+\frac{a^4-6a^2(a^2-b)-3(a^2-b)^2}{2(a^2-b)^{\frac32}}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}}\,.
\end{aligned}$$

(193)^b für $b < a^2$

$$\begin{aligned}
\int\frac{dz}{(z^2-2az+b)^3} &= \frac{z-a}{4(b-a^2)(z^2-2az+b)^2}+\frac{3(z-a)}{8(b-a^2)^2(z^2-2az+b)}+\frac{3}{8(b-a^2)^{\frac52}}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}}\,,\\
\int\frac{z\,dz}{(z^2-2az+b)^3} &= \frac{az-b}{4(b-a^2)(z^2-2az+b)^2}+\frac{3a(z-a)}{8(b-a^2)^2(z^2-2az+b)}+\frac{3a}{8(b-a^2)^{\frac52}}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}}\,,\\
\int\frac{z^2\,dz}{(z^2-2az+b)^3} &= \frac{(2a^2-b)(z-a)-2a(b-a^2)}{4(b-a^2)(z^2-2az+b)^2}+\frac{(2a^2+b)(z-a)}{8(b-a^2)^2(z^2-2az+b)}+\\
&\quad+\frac{2a^2+b}{8(b-a^2)^{\frac52}}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}}\,,\\
\int\frac{z^3\,dz}{(z^2-2az+b)^3} &= \frac{a(4a^2-3b)(z-a)+(b-a^2)(b-4a^2)}{4(b-a^2)(z^2-2az+b)^2}+\frac{3ab(z-a)-4(b-a^2)^2}{8(b-a^2)^2(z^2-2az+b)}+\\
&\quad+\frac{3ab}{8(b-a^2)^{\frac52}}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}}\,,\\
\int\frac{z^4\,dz}{(z^2-2az+b)^3} &= \frac{[a^4-6a^2(b-a^2)+(b-a^2)^2](z-a)+4a(b-a^2)(b-2a^2)}{4(b-a^2)(z^2-2az+b)^2}+\\
&\quad+\frac{[3a^4+6a^2(b-a^2)-5(b-a^2)^2](z-a)-16a(b-a^2)^2}{8(b-a^2)^2(z^2-2az+b)}+\frac{3b^2}{8(b-a^2)^{\frac52}}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}}\,.
\end{aligned}$$

(194)^a für $b > a^2$

$$\begin{aligned}
\int\frac{dz}{(z^2-2az+b)^3} &= -\frac{z-a}{4(a^2-b)(z^2-2az+b)^2}+\frac{3(z-a)}{8(a^2-b)^2(z^2-2az+b)}-\frac{3}{8(a^2-b)^{\frac52}}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}}\,,\\
\int\frac{z\,dz}{(z^2-2az+b)^3} &= -\frac{az-b}{4(a^2-b)(z^2-2az+b)^2}+\frac{3a(z-a)}{8(a^2-b)^2(z^2-2az+b)}-\frac{3a}{8(a^2-b)^{\frac52}}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}}\,,\\
\int\frac{z^2\,dz}{(z^2-2az+b)^3} &= -\frac{(2a^2-b)(z-a)+2a(a^2-b)}{4(a^2-b)(z^2-2az+b)^2}+\frac{(2a^2+b)(z-a)}{8(a^2-b)^2(z^2-2az+b)}-\\
&\quad-\frac{2a^2+b}{8(a^2-b)^{\frac52}}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}}\,,\\
\int\frac{z^3\,dz}{(z^2-2az+b)^3} &= -\frac{a(4a^2-3b)(z-a)+(a^2-b)(4a^2-b)}{4(a^2-b)(z^2-2az+b)^2}+\frac{3ab(z-a)-4(a^2-b)^2}{8(a^2-b)^2(z^2-2az+b)}-\\
&\quad-\frac{3ab}{8(a^2-b)^{\frac52}}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}}\,,\\
\int\frac{z^4\,dz}{(z^2-2az+b)^3} &= \frac{[a^4+6a^2(a^2-b)+(a^2-b)^2](z-a)+4a(a^2-b)(2a^2-b)}{4(a^2-b)(z^2-2az+b)^2}+\\
&\quad+\frac{[3a^4-6a^2(a^2-b)-5(a^2-b)^2](z-a)-16a(a^2-b)^2}{8(a^2-b)^2(z^2-2az+b)}-\frac{3b^2}{8(a^2-b)^{\frac52}}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}}\,.
\end{aligned}$$

(194)^b für $b < a^2$

$$\left.\begin{aligned}
\int \frac{dz}{(z^2-2az+b)^4} &= \frac{z-a}{6(b-a^2)(z^2-2az+b)^3} + \frac{5(z-a)}{24(b-a^2)^2(z^2-2az+b)^2} + \frac{5(z-a)}{16(b-a^2)^3(z^2-2az+b)} + \\
&\quad + \frac{5}{16(b-a^2)^{\frac{7}{2}}} \operatorname{arc\,tang} \frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}} \qquad ,\\
\int \frac{z\,dz}{(z^2-2az+b)^4} &= \frac{az-b}{6(b-a^2)(z^2-2az+b)^3} + \frac{5a(z-a)}{24(b-a^2)^2(z^2-2az+b)^2} + \frac{5a(z-a)}{16(b-a^2)^3(z^2-2az+b)} + \\
&\quad + \frac{5a}{16(b-a^2)^{\frac{7}{2}}} \operatorname{arc\,tang} \frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}} \qquad ,\\
\int \frac{z^2\,dz}{(z^2-2az+b)^4} &= \frac{(2a^2-b)(z-a)-2a(b-a^2)}{6(b-a^2)(z^2-2az+b)^3} + \frac{(4a^2+b)(z-a)}{24(b-a^2)^2(z^2-2az+b)^2} + \frac{(4a^2+b)(z-a)}{16(b-a^2)^3(z^2-2az+b)} + \\
&\quad + \frac{4a^2+b}{16(b-a^2)^{\frac{7}{2}}} \operatorname{arc\,tang} \frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}} \qquad ,\\
\int \frac{z^3\,dz}{(z^2-2az+b)^4} &= \frac{a(4a^2-3b)(z-a)+(b-a^2)(b-4a^2)}{6(b-a^2)(z^2-2az+b)^3} + \frac{a(2a^2+3b)(z-a)-6(b-a^2)^2}{24(b-a^2)^2(z^2-2az+b)^2} + \\
&\quad + \frac{a(2a^2+3b)(z-a)}{16(b-a^2)^3(z^2-2az+b)} + \frac{a(2a^2+3b)}{16(b-a^2)^{\frac{7}{2}}} \operatorname{arc\,tang} \frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}} \qquad ,\\
\int \frac{z^4\,dz}{(z^2-2az+b)^4} &= \frac{[a^4-6a^2(b-a^2)+(b-a^2)^2](z-a)+4a(b-a^2)(b-2a^2)}{6(b-a^2)(z^2-2az+b)^3} + \\
&\quad + \frac{[5a^4+6a^2(b-a^2)-7(b-a^2)^2](z-a)-24a(b-a^2)^2}{24(b-a^2)^2(z^2-2az+b)^2} + \\
&\quad + \frac{[5a^4+6a^2(b-a^2)+(b-a^2)^2](z-a)}{16(b-a^2)^3(z^2-2az+b)} + \frac{5a^4+6a^2(b-a^2)+(b-a^2)^2}{16(b-a^2)^{\frac{7}{2}}} \operatorname{arc\,tang} \frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}} \; .
\end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix}(195)^a \\ \\ \text{für } b > a^2\end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned}
\int \frac{dz}{(z^2-2az+b)^4} &= -\frac{z-a}{6(a^2-b)(z^2-2az+b)^3} + \frac{5(z-a)}{24(a^2-b)^2(z^2-2az+b)^2} - \frac{5(z-a)}{16(a^2-b)^3(z^2-2az+b)} + \\
&\quad + \frac{5}{16(a^2-b)^{\frac{7}{2}}} \mathfrak{Ar\,Tang} \frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}} \qquad ,\\
\int \frac{z\,dz}{(z^2-2az+b)^4} &= -\frac{az-b}{6(a^2-b)(z^2-2az+b)^3} + \frac{5a(z-a)}{24(a^2-b)^2(z^2-2az+b)^2} - \frac{5a(z-a)}{16(a^2-b)^3(z^2-2az+b)} + \\
&\quad + \frac{5a}{16(a^2-b)^{\frac{7}{2}}} \mathfrak{Ar\,Tang} \frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}} \qquad ,\\
\int \frac{z^2\,dz}{(z^2-2az+b)^4} &= -\frac{(2a^2-b)(z-a)+2a(a^2-b)}{6(a^2-b)(z^2-2az+b)^3} + \frac{(4a^2+b)(z-a)}{24(a^2-b)^2(z^2-2az+b)^2} - \\
&\quad - \frac{(4a^2+b)(z-a)}{16(a^2-b)^3(z^2-2az+b)} + \frac{4a^2+b}{16(a^2-b)^{\frac{7}{2}}} \mathfrak{Ar\,Tang} \frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}} \qquad ,\\
\int \frac{z^3\,dz}{(z^2-2az+b)^4} &= -\frac{a(4a^2-3b)(z-a)+(a^2-b)(4a^2-b)}{6(a^2-b)(z^2-2az+b)^3} + \frac{a(2a^2+3b)(z-a)-6(a^2-b)^2}{24(a^2-b)^2(z^2-2az+b)^2} - \\
&\quad - \frac{a(2a^2+3b)(z-a)}{16(a^2-b)^3(z^2-2az+b)} + \frac{a(2a^2+3b)}{16(a^2-b)^{\frac{7}{2}}} \mathfrak{Ar\,Tang} \frac{z-a}{\sqrt{a-b^2}} \qquad ,\\
\int \frac{z^4\,dz}{(z^2-2az+b)^4} &= -\frac{[a^4+6a^2(a^2-b)+(a^2-b)^2](z-a)+4a(a^2-b)(2a^2-b)}{6(a^2-b)(z^2-2az+b)^3} + \\
&\quad + \frac{[5a^4-6a^2(a^2-b)-7(a^2-b)^2](z-a)-24a(a^2-b)^2}{24(a^2-b)^2(z^2-2az+b)^2} - \\
&\quad - \frac{[5a^4-6a^2(a^2-b)+(a^2-b)^2](z-a)}{16(a^2-b)^3(z^2-2az+b)} + \frac{5a^4-6a^2(a^2-b)+(a^2-b)^2}{16(a^2-b)^{\frac{7}{2}}} \mathfrak{Ar\,Tang} \frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}} \; .
\end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix}(195)^b \\ \\ \text{für } b < a^2\end{matrix}$$

Weitere Integrale lassen sich leicht mit Hilfe der nachstehenden Rekursionsformeln darstellen:

$$\left.\begin{aligned}
\int \frac{z^m\,dz}{(z^2-2az-b)^n} &= -\frac{z^{m-1}}{(2n-m-1)(z^2-2az+b)^{n-1}} + \frac{b(m-1)}{2n-m-1}\int \frac{z^{m-2}\,dz}{(z^2-2az+b)^n} + \\
&\quad + \frac{2a(n-m)}{2n-m-1}\int \frac{z^{m-1}\,dz}{(z^2-2az+b)^n} \qquad (m \neq 2n-1) \qquad ,\\
\int \frac{z^{2n-1}\,dz}{(z^2-2az+b)^n} &= \int \frac{z^{2n-3}\,dz}{(z^2-2az+b)^{n-1}} - b\int \frac{z^{2n-3}\,dz}{(z^2-2az+b)^n} + 2a\int \frac{z^{2n-2}\,dz}{(z^2-2az+b)^n} \quad (m = 2n-1) \; .
\end{aligned}\right\} \quad (196)$$

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{dz}{(z^2-2az+b)^n}&=\frac{z-a}{2(n-1)(b-a^2)(z^2-2az+b)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)(b-a^2)}\int\frac{dz}{(z^2-2az+b)^{n-1}}\,,\\ \int\frac{z\,dz}{(z^2-2az+b)^n}&=\frac{az-b}{2(n-1)(b-a^2)(z^2-2az+b)^{n-1}}+\frac{a(2n-3)}{2(n-1)(b-a^2)}\int\frac{dz}{(z^2-2az+b)^{n-1}}\,.\end{aligned}\right\}\quad(n>1)\tag{197}$$

Als weiterer Sonderfall von (162) sei nun der Fall dreier Wurzelwerte a_1, a_2, a_3 betrachtet, von denen zwei komplex sein mögen, so daß a_1, a_2, a_3 in der Form

$$a_1=\alpha_1+i\alpha_2,\quad a_2=\alpha_1-i\alpha_2,\quad a_3=\alpha_3$$

zugrunde gelegt werden können. Dann liefern die allgemeinen Formeln für die Koeffizienten b_1, b_2, b_3 der Partialbruchzerlegung nach einigen Rechnungen

$$\begin{aligned}b_{\substack{1\\2}}=\beta_1\mp i\beta_2&=\frac{D_2a_{\substack{1\\2}}^2+D_1a_{\substack{1\\2}}+D_0}{(a_{\substack{1\\2}}-a_{\substack{2\\1}})(a_{\substack{1\\2}}-a_3)}=\frac{D_2\alpha_2(\alpha_1^2+\alpha_2^2-2\alpha_1\alpha_3)-D_1\alpha_2\alpha_3-D_0\alpha_2}{2\alpha_2[(\alpha_1-\alpha_3)^2+\alpha_2^2]}\mp\\ &\mp i\,\frac{D_2[\alpha_1(\alpha_1^2+\alpha_2^2)-\alpha_3(\alpha_1^2-\alpha_2^2)]+D_1(\alpha_1^2+\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3)+D_0(\alpha_1-\alpha_3)}{2\alpha_2[(\alpha_1-\alpha_3)^2+\alpha_2^2]}\,,\\ b_3&=\frac{D_2a_3^2+D_1a_3+D_0}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}=\frac{D_2a_3^2+D_1a_3+D_0}{(\alpha_1-\alpha_3)^2+\alpha_2^2}\,.\end{aligned}$$

Weiter folgt ähnlich wie früher

$$b_1\ln|z-a_1|+b_2\ln|z-a_2|+b_3\ln|z-a_3|=2\beta_1\ln\sqrt{(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2}-2\beta_2\operatorname{arc\,cotg}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}+b_3\ln|z-\alpha_3|\,.$$

Die Berücksichtigung dieser Werte in dem allgemeinen Integral ergibt unter gleichzeitiger Einführung der arc tang-Funktion

$$\begin{aligned}\int\frac{D_2z^2+D_1z+D_0}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2](z-\alpha_3)}dz&=\frac{D_2(\alpha_1^2+\alpha_2^2-2\alpha_1\alpha_3)-D_1\alpha_3-D_0}{(\alpha_1-\alpha_3)^2+\alpha_2^2}\ln\sqrt{(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2}+\frac{D_2\alpha_3^2+D_1\alpha_3+D_0}{(\alpha_1-\alpha_3)^2+\alpha_2^2}\ln|z-\alpha_3|+\\ &+\frac{D_2[\alpha_1(\alpha_1^2+\alpha_2^2)-\alpha_3(\alpha_1^2-\alpha_2^2)]+D_1(\alpha_1^2+\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3)+D_0(\alpha_1-\alpha_3)}{\alpha_2[(\alpha_1-\alpha_3)^2+\alpha_2^2]}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\,.\end{aligned}\tag{198}$$

Entsprechend folgt bei Vertauschung von α_2 mit $i\alpha_2$

$$\begin{aligned}\int\frac{D_2z^2+D_1z+D_0}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2](z-\alpha_3)}dz&=\frac{D_2(\alpha_1^2-\alpha_2^2-2\alpha_1\alpha_3)-D_1\alpha_3-D_0}{(\alpha_1-\alpha_3)^2-\alpha_2^2}\ln\sqrt{|(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2|}+\frac{D_2\alpha_3^2+D_1\alpha_3+D_0}{(\alpha_1-\alpha_3)^2-\alpha_2^2}\ln|z-\alpha_3|-\\ &-\frac{D_2[\alpha_1(\alpha_1^2-\alpha_2^2)-\alpha_3(\alpha_1^2+\alpha_2^2)]+D_1(\alpha_1^2-\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3)+D_0(\alpha_1-\alpha_3)}{\alpha_2[(\alpha_1-\alpha_3)^2-\alpha_2^2]}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2}\,.\end{aligned}\tag{199}$$

Weiterhin erhält man mit $\alpha_1=a$, $\alpha_2=\sqrt{b-a^2}$, $\alpha_3=c$ bzw. $\alpha_1=a$, $\alpha_2=\sqrt{a^2-b}$, $\alpha_3=c$

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{D_2z^2+D_1z+D_0}{(z^2-2az+b)(z-c)}dz&=\frac{D_2(b-2ac)-D_1c-D_0}{b-2ac+c^2}\ln\sqrt{|z^2-2az+b|}+\frac{D_2c^2+D_1c+D_0}{b-2ac+c^2}\ln|z-c|+\\ &+\frac{D_2[ab-c(2a^2-b)]+D_1(b-ac)+D_0(a-c)}{(b-2ac+c^2)\sqrt{b-a^2}}\operatorname{arc\,tang}\frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}}\quad\text{für } b>a^2\,,\\ \int\frac{D_2z^2+D_1z+D_0}{(z^2-2az+b)(z-c)}dz&=\frac{D_2(b-2ac)-D_1c-D_0}{b-2ac+c^2}\ln\sqrt{|z^2-2az+b|}+\frac{D_2c^2+D_1c+D_0}{b-2ac+c^2}\ln|z-c|-\\ &-\frac{D_2[ab-c(2a^2-b)]+D_1(b-ac)+D_0(a-c)}{(b-2ac+c^2)\sqrt{a^2-b}}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}}\quad\text{für } b>a^2\,.\end{aligned}\right|\tag{200}$$

Für den Sonderfall $\alpha_1=0$, $\alpha_2=a$, $\alpha_3=0$ ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{D_2z^2+D_1z+D_0}{z(z^2+a^2)}dz&=\left(D_2-\frac{D_0}{a^2}\right)\ln\sqrt{z^2+a^2}+\frac{D_0}{a^2}\ln|z|+\frac{D_1}{a}\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}\,,\\ \int\frac{D_2z^2+D_1z+D_0}{z(z^2+a^2)}dz&=\left(D_2+\frac{D_0}{a^2}\right)\ln\sqrt{z^2-a^2}-\frac{D_0}{a^2}\ln|z|-\frac{D_1}{a}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z}{a}\,,\end{aligned}\right|\tag{201}$$

und insbesondere bei $D_1=D_2=0$, $D_0=1$

$$\int\frac{dz}{z(z^2+a^2)}=\frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right|\,,\qquad\int\frac{dz}{z(z^2-a^2)}=-\frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{z}{\sqrt{|z^2-a^2|}}\right|\,.\tag{202}$$

Ähnlich wie im Anschluß an (166) lassen sich auch hier Rekursionsformeln gewinnen, aus denen sich Formeln für Integrale der Form

$$\int\frac{z^p\,dz}{(z^2-2az+b)^m(z-c)^n}$$

ableiten lassen. Um nicht zu weitläufig zu werden, sollen von dieser Klasse lediglich zwei spezielle Rekursionsformeln und einige Integrale mitgeteilt werden. Die beiden Rekursionsformeln lauten

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{z^m (z^2-2az+b)^n} = -\frac{1}{(m-1)\, b z^{m-1} (z^2-2az+b)^{n-1}} - \frac{2n+m-3}{(m-1)\, b} \int \frac{dz}{z^{m-2}(z^2-2az+b)^n} + \\
&\qquad + \frac{2a(n+m-2)}{(m-1)\, b} \int \frac{dz}{z^{m-1}(z^2-2az+b)^n} \qquad (m>1)\,, \\
&\int \frac{dz}{z(z^2-2az+b)^n} = \frac{1}{2b(n-1)(z^2-2az+b)^{n-1}} + \frac{a}{b} \int \frac{dz}{(z^2-2az+b)^n} + \frac{1}{b} \int \frac{dz}{z(z^2-2az+b)^{n-1}} \qquad (m=1)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{203}$$

Die Auswertung erfolgt zweckmäßig in Verbindung mit (192) bis (197). Wird $a=0$ gesetzt und b mit a^2 bzw. $-a^2$ vertauscht, so folgt aus (203) nach einigen Rechnungen

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{z^2(z^2+a^2)} = -\frac{1}{a^2 z} - \frac{1}{a^3} \operatorname{arc\,tang} \frac{z}{a}\,, &&\int \frac{dz}{z^2(z^2-a^2)} = \frac{1}{a^2 z} - \frac{1}{a^3}\, \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang} \frac{z}{a}\,, \\
&\int \frac{dz}{z^3(z^2-a^2)} = -\frac{1}{2a^2 z^2} - \frac{1}{a^4} \ln \left| \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} \right|, &&\int \frac{dz}{z^3(z^2-a^2)} = \frac{1}{2a^2 z^2} - \frac{1}{a^4} \ln \left| \frac{z}{\sqrt{|z^2-a^2|}} \right|, \\
&\int \frac{dz}{z^4(z^2+a^2)} = -\frac{1}{3a^2 z^3} + \frac{1}{a^4 z} + \frac{1}{a^5} \operatorname{arc\,tang} \frac{z}{a}\,, &&\int \frac{dz}{z^4(z^2-a^2)} = \frac{1}{3a^2 z^3} + \frac{1}{a^4 z} - \frac{1}{a^5}\, \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang} \frac{z}{a^5}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{204}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{z(z^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2(z^2+a^2)} + \frac{1}{a^4} \ln \left| \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} \right|, &&\int \frac{dz}{z(z^2-a^2)^2} = -\frac{1}{2a^2(z^2-a^2)} + \frac{1}{a^4} \ln \left| \frac{z}{\sqrt{|z^2-a^2|}} \right|, \\
&\int \frac{dz}{z^2(z^2+a^2)^2} = -\frac{1}{a^4 z} - \frac{z}{2a^4(z^2+a^2)} - &&\int \frac{dz}{z^2(z^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^4 z} - \frac{z}{2a^4(z^2-a^2)} + \\
&\qquad - \frac{3}{2a^5} \operatorname{arc\,tang} \frac{z}{a}\,, &&\qquad + \frac{3}{2a^5}\, \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang} \frac{z}{a}\,, \\
&\int \frac{dz}{z^3(z^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2a^4 z^2} - \frac{1}{2a^4(z^2+a^2)} - &&\int \frac{dz}{z^3(z^2-a^2)^2} = -\frac{1}{2a^4 z^2} - \frac{1}{2a^4(z^2-a^2)} + \\
&\qquad - \frac{2}{a^6} \ln \left| \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} \right|, &&\qquad + \frac{2}{a^6} \ln \left| \frac{z}{\sqrt{|z^2-a^2|}} \right|, \\
&\int \frac{dz}{z^4(z^2+a^2)^2} = -\frac{1}{3a^4 z^3} + \frac{2}{a^6 z} + \frac{z}{2a^6(z^2+a^2)} + &&\int \frac{dz}{z^4(z^2-a^2)^2} = -\frac{1}{3a^4 z^3} - \frac{2}{a^6 z} - \frac{z}{2a^6(z^2-a^2)} + \\
&\qquad + \frac{5}{2a^7} \operatorname{arc\,tang} \frac{z}{a}\,, &&\qquad + \frac{5}{2a^7}\, \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang} \frac{z}{a}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{205}$$

Wird in (198) $\alpha_1 = -\frac{a}{2}$, $\alpha_2 = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$, $\alpha_3 = a$ bzw. $\alpha_1 = +\frac{a}{2}$, $\alpha_2 = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$, $\alpha_3 = -a$ gesetzt, so erhält man die Integralformeln

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{D_2 z^2 + D_1 z + D_0}{z^3 - a^3}\, dz = \left(\frac{2}{3} D_2 - \frac{D_1}{3a} - \frac{D_0}{3a^2}\right) \ln \sqrt{z^2+az+a^2} + \left(\frac{1}{3} D_2 + \frac{D_1}{3a} + \frac{D_0}{3a^2}\right) \ln |z-a| + \\
&\qquad + \left(\frac{D_1}{a\sqrt{3}} - \frac{D_0}{a^2\sqrt{3}}\right) \operatorname{arc\,tang} \frac{z+\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}}\,, \\
&\int \frac{D_2 z^2 + D_1 z + D_0}{z^3 + a^3}\, dz = \left(\frac{2}{3} D_2 + \frac{D_1}{3a} - \frac{D_0}{3a^2}\right) \ln \sqrt{z^2+az+a^2} + \left(\frac{1}{3} D_2 - \frac{D_1}{3a} + \frac{D_0}{3a^2}\right) \ln |z+a| + \\
&\qquad + \left(\frac{D_1}{a\sqrt{3}} + \frac{D_0}{a^2\sqrt{3}}\right) \operatorname{arc\,tang} \frac{z-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{206}$$

Hieraus folgen die Sonderformeln

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{z^3-a^3} = \frac{1}{3a^2} \ln \frac{|z-a|}{\sqrt{z^2+az+a^2}} - &&\int \frac{dz}{z^3+a^3} = \frac{1}{3a^2} \ln \frac{|z+a|}{\sqrt{z^2-az+a^2}} + \\
&\qquad - \frac{1}{a^2\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tang} \frac{2z+a}{a\sqrt{3}}\,, &&\qquad + \frac{1}{a^2\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tang} \frac{2z-a}{a\sqrt{3}}\,,
\end{aligned}\right\} \tag{207}$$

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{z\,dz}{z^3-a^3} = \frac{1}{3a}\ln\frac{|z-a|}{\sqrt{z^2+az+a^2}} + \frac{1}{a\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2z+a}{a\sqrt{3}}\,, \qquad
&&\int \frac{z\,dz}{z^3+a^3} = -\frac{1}{3a}\ln\frac{|z+a|}{\sqrt{z^2-az+a^2}} + \frac{1}{a\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2z-a}{a\sqrt{3}}\,,\\
&\int \frac{z^2\,dz}{z^3-a^3} = \frac{1}{3}\ln|z^3-a^3|\,,
&&\int \frac{z^2\,dz}{z^3+a^3} = \frac{1}{3}\ln|z^3+a^3|\,.
\end{aligned}
\tag{207}
$$

Weitere Integralformeln in Verbindung mit der Funktion $z^3 \mp a^3$ im Nenner sind nachfolgend zusammengestellt.

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{z(z^3-a^3)} = \frac{1}{3a^3}\ln\left|1-\frac{a^3}{z^3}\right|\,,
&&\int \frac{dz}{z(z^3+a^3)} = -\frac{1}{3a^3}\ln\left|1+\frac{a^3}{z^3}\right|\,,\\
&\int \frac{dz}{z^2(z^3-a^3)} = \frac{1}{a^3 z} + \frac{1}{3a^4}\ln\frac{|z-a|}{\sqrt{z^2+az+a^2}} + \frac{1}{a^4\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2z+a}{a\sqrt{3}}\,,
&&\int \frac{dz}{z^2(z^3+a^3)} = -\frac{1}{a^3 z} + \frac{1}{3a^4}\ln\frac{|z+a|}{\sqrt{z^2-az+a^2}} - \frac{1}{a^4\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2z-a}{a\sqrt{3}}\,,\\
&\int \frac{dz}{z^3(z^3-a^3)} = \frac{1}{2a^3z^2} + \frac{1}{3a^5}\ln\frac{|z-a|}{\sqrt{z^2+az+a_2}} - \frac{1}{a^5\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2z+a}{a\sqrt{3}}\,,
&&\int \frac{dz}{z^3(z^3+a^3)} = -\frac{1}{2a^3z^2} - \frac{1}{3a^5}\ln\frac{|z+a|}{\sqrt{z^2-az+a^2}} - \frac{1}{a^5\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2z-a}{a\sqrt{3}}\,,\\
&\int \frac{dz}{z^4(z^3-a^3)} = \frac{1}{3a^3z^3} + \frac{1}{3a^6}\ln\left|1-\frac{a^3}{z^3}\right|\,,
&&\int \frac{dz}{z^4(z^3+a^3)} = -\frac{1}{3a^3z^3} + \frac{1}{3a^6}\ln\left|1+\frac{a^3}{z^3}\right|\,.
\end{aligned}
\tag{208}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{(z^3-a^3)^2} = -\frac{z}{3a^3(z^3-a^3)} - \frac{2}{9a^5}\ln\frac{|z-a|}{\sqrt{z^2+az+a^2}} + \frac{2}{3a^5\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2z+a}{a\sqrt{3}}\,,
&&\int \frac{dz}{(z^3+a^3)^2} = \frac{z}{3a^3(z^3+a^3)} + \frac{2}{9a^5}\ln\frac{|z+a|}{\sqrt{z^2-az+a^2}} + \frac{2}{3a^5\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2z-a}{a\sqrt{3}}\,,\\
&\int \frac{z\,dz}{(z^3-a^3)^2} = -\frac{z^2}{3a^3(z^3-a^3)} - \frac{1}{9a^4}\ln\frac{|z-a|}{\sqrt{z^2+az+a^2}} - \frac{1}{3a^4\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2z+a}{a\sqrt{3}}\,,
&&\int \frac{z\,dz}{(z^3+a^3)^2} = \frac{z^2}{3a^3(z^3+a^3)} - \frac{1}{9a^4}\ln\frac{|z+a|}{\sqrt{z^2-az+a^2}} + \frac{1}{3a^4\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2z-a}{a\sqrt{3}}\,,\\
&\int \frac{z^2\,dz}{(z^3-a^3)^2} = -\frac{1}{3(z^3-a^3)}\,,
&&\int \frac{z^2\,dz}{(z^3+a^3)^2} = -\frac{1}{3(z^3+a^3)}\,,\\
&\int \frac{z^3\,dz}{(z^3-a^3)^2} = -\frac{z}{3(z^3-a^3)} + \frac{1}{9a^2}\ln\frac{|z-a|}{\sqrt{z^2+az+a^2}} - \frac{1}{3a^2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2z+a}{a\sqrt{3}}\,,
&&\int \frac{z^3\,dz}{(z^3+a^3)^2} = -\frac{z}{3(z^3+a^3)} + \frac{1}{9a^2}\ln\frac{|z+a|}{\sqrt{z^2-az+a^2}} + \frac{1}{3a^2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2z-a}{a\sqrt{3}}\,,\\
&\int \frac{z^4\,dz}{(z^3-a^3)^2} = -\frac{z^2}{3(z^3-a^3)} + \frac{2}{9a}\ln\frac{|z-a|}{\sqrt{z^2+az+a^2}} + \frac{2}{3a\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2z+a}{a\sqrt{3}}\,,
&&\int \frac{z^4\,dz}{(z^3+a^3)^2} = -\frac{z^2}{3(z^3+a^3)} - \frac{2}{9a}\ln\frac{|z+a|}{\sqrt{z^2-az+a^2}} + \frac{2}{3a\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2z-a}{a\sqrt{3}}\,.
\end{aligned}
\tag{209}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{z(z^3-a^3)^2} = -\frac{1}{3a^3(z^3-a^3)} - \frac{1}{3a^6}\ln\left|1-\frac{a^3}{z^3}\right|\,,
&&\int \frac{dz}{z(z^3+a^3)^2} = \frac{1}{3a^3(z^3+a^3)} - \frac{1}{3a^6}\ln\left|1+\frac{a^3}{z^3}\right|\,,\\
&\int \frac{dz}{z^2(z^3-a^3)^2} = -\frac{1}{a^6 z} - \frac{z^2}{3a^6(z^3-a^3)} - \frac{4}{9a^7}\ln\frac{|z-a|}{\sqrt{z^2+az+a^2}} - \frac{4}{3a^7\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2z+a}{a\sqrt{3}}\,,
&&\int \frac{dz}{z^2(z^3+a^3)^2} = -\frac{1}{a^6 z} - \frac{z^2}{3a^6(z^3+a^3)} + \frac{4}{3a^7}\ln\frac{|z+a|}{\sqrt{z^2-az+a^2}} - \frac{4}{3a^7\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2z-a}{a\sqrt{3}}\,.
\end{aligned}
\tag{210}
$$

Schließlich sei noch der Fall von vier Wurzelwerten betrachtet, von denen zwei komplex und zwei reell sein sollen, etwa gemäß

$$a_1 = \alpha_1 + i\alpha_2\,, \quad a_2 = \alpha_1 - i\alpha_2\,, \quad a_3 = \alpha_3\,, \quad a_4 = \alpha_4\,.$$

Es folgt zunächst für die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung

$$b_{\substack{1\\2}} = \beta_1 \mp i\beta_2 = \frac{D_3 a_{\substack{1\\2}}^3 + D_2 a_{\substack{1\\2}}^2 + D_1 a_{\substack{1\\2}} + D_0}{(a_{\substack{1\\2}} - a_{\substack{2\\1}})(a_{\substack{1\\2}} - a_3)(a_{\substack{1\\2}} - a_4)} =$$

$$= \frac{[(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)-\alpha_2^2][D_3(3\alpha_1^2-\alpha_2^2)+2D_2\alpha_1+D_1]-(2\alpha_1-\alpha_3-\alpha_4)[D_3\alpha_1(\alpha_1^2-3\alpha_2^2)+D_2(\alpha_1^2-\alpha_2^2)+D_1\alpha_1+D_0]}{2[(\alpha_1-\alpha_3)^2+\alpha_2^2][(\alpha_1-\alpha_4)^2+\alpha_2^2]} \mp$$

$$\mp i \frac{\alpha_2^2(2\alpha_1-\alpha_3-\alpha_4)[D_3(3\alpha_1^2-\alpha_2^2)+2D_2\alpha_1+D_1]+[(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)-\alpha_2^2][(D_3\alpha_1(\alpha_1^2-3\alpha_2^2)+D_2(\alpha_1^2-\alpha_2^2)+D_1\alpha_1+D_0]}{2\alpha_2[(\alpha_1-\alpha_3)^2+\alpha_2^2][(\alpha_1-\alpha_4)^2+\alpha_2^2]},$$

$$b_3 = \frac{D_3 a_3^3 + D_2 a_3^2 + D_1 a_3 + D_0}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)} = \frac{D_3\alpha_3^3 + D_2\alpha_3^2 + D_1\alpha_3 + D_0}{[(\alpha_1-\alpha_3)^2+\alpha_2^2](\alpha_3-\alpha_4)},$$

$$b_4 = \frac{D_3 a_4^3 + D_2 a_4^2 + D_1 a_4 + D_0}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)} = -\frac{D_3\alpha_4^3 + D_2\alpha_4^2 + D_1\alpha_4 + D_0}{[(\alpha_1-\alpha_4)^2+\alpha_2^2](\alpha_3-\alpha_4)}.$$

Hiermit ergibt sich

$$\int \frac{D_3 z^3 + D_2 z^2 + D_1 z + D_0}{[(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2](z-\alpha_3)(z-\alpha_4)} dz =$$

$$= \frac{[(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)-\alpha_2^2][D_3(3\alpha_1^2-\alpha_2^2)+2D_2\alpha_1+D_1]-(2\alpha_1-\alpha_3-\alpha_4)[D_3\alpha_1(\alpha_1^2-3\alpha_2^2)+D_2(\alpha_1^2-\alpha_2^2)+D_1\alpha_1+D_0]}{[(\alpha_1-\alpha_3)^2+\alpha_2^2][(\alpha_1-\alpha_4)^2+\alpha_2^2]} \ln|(z-\alpha_1)^2+\alpha_2^2| +$$

$$+ \frac{\alpha_2^2(2\alpha_1-\alpha_3-\alpha_4)[D_3(3\alpha_1^2-\alpha_2^2)+2D_2\alpha_1+D_1]+[(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)-\alpha_2^2][D_3\alpha_1(\alpha_1^2-3\alpha_2^2)+D_2(\alpha_1^2-\alpha_2^2)+D_1\alpha_1+D_0]}{\alpha_2[(\alpha_1-\alpha_3)^2+\alpha_2^2][(\alpha_1-\alpha_4)^2+\alpha_2^2]} \operatorname{arc\,tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2} +$$

$$+ \frac{D_3\alpha_3^3+D_2\alpha_3^2+D_1\alpha_3+D_0}{[(\alpha_1-\alpha_3)^2+\alpha_2^2](\alpha_3-\alpha_4)} \ln|z-\alpha_3| - \frac{D_3\alpha_4^3+D_2\alpha_4^2+D_1\alpha_4+D_0}{[(\alpha_1-\alpha_4)^2+\alpha_2^2](\alpha_3-\alpha_4)} \ln|z-\alpha_4|. \tag{211}$$

Die Vertauschung von α_2 mit $i\alpha_2$ liefert die Gegenformel

$$\int \frac{D_3 z^3 + D_2 z^2 + D_1 z + D_0}{[(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2](z-\alpha_3)(z-\alpha_4)} dz =$$

$$\frac{[(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)+\alpha_2^2][D_3(3\alpha_1^2+\alpha_2^2)+2D_2\alpha_1+D_1]-(2\alpha_1-\alpha_3-\alpha_4)[D_3\alpha_1(\alpha_1^2+3\alpha_2^2)+D_2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)+D_1\alpha_1+D_0]}{[(\alpha_1-\alpha_3)^2-\alpha_2^2][(\alpha_1-\alpha_4)^2-\alpha_2^2]} \ln|(z-\alpha_1)^2-\alpha_2^2| +$$

$$\frac{\alpha_2^2(2\alpha_1-\alpha_3-\alpha_4)[D_3(3\alpha_1^2+\alpha_2^2)+2D_2\alpha_1+D_1]+[(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)+\alpha_2^2][D_3\alpha_1(\alpha_1^2+3\alpha_2^2)+D_2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)+D_1\alpha_1+D_0]}{\alpha_2[(\alpha_1-\alpha_3)^2-\alpha_2^2][(\alpha_1-\alpha_4)^2-\alpha_2^2]} \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2} +$$

$$\frac{D_3\alpha_3^3+D_2\alpha_3^2+D_1\alpha_3+D_0}{[(\alpha_1-\alpha_3)^2-\alpha_2^2](\alpha_3-\alpha_4)} \ln|z-\alpha_3| - \frac{D_3\alpha_4^3+D_2\alpha_4^2+D_1\alpha_4+D_0}{[(\alpha_1-\alpha_4)^2-\alpha_2^2](\alpha_3-\alpha_4)} \ln|z-\alpha_4|. \tag{212}$$

Mit $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = \sqrt{b-a^2}$, $\alpha_3 = c$, $\alpha_4 = d$ bzw. $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = \sqrt{a^2-b}$, $\alpha_3 = c$, $\alpha_4 = d$ folgt aus (211) bzw. (212)

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{D_3 z^3 + D_2 z^2 + D_1 z + D_0}{(z^2-2az+b)(z-c)(z-d)} dz = \\
&\frac{[a^2-b+(a-c)(a-d)][D_3(4a^2-b)+2D_2a+D_1]-(2a-c-d)[D_3a(4a^2-3b)+D_2(2a^2-b)+D_1a+D_0]}{(b-2ac+c^2)(b-2ad+d^2)} \ln|z^2-2az+b| + \\
&\frac{(b-a^2)(2a-c-d)[D_3(4a^2-b)+2D_2a+D_1]+[a^2-b+(a-c)(a-d)][D_3a(4a^2-3b)+D_2(2a^2-b)+D_1a+D_0]}{(b-2ac+c^2)(b-2ad+d^2)\sqrt{b-a^2}} \operatorname{arc\,tang}\frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}} + \\
&+ \frac{D_3c^3+D_2c^2+D_1c+D_0}{(b-2ac+c^2)(c-d)} \ln|z-c| - \frac{D_3d^3+D_2d^2+D_1d+D_0}{(b-2ad+d^2)(c-d)} \ln|z-d| \qquad \text{für } b > a^2, \\[2ex]
&\int \frac{D_3 z^3 + D_2 z^2 + D_1 z + D_0}{(z^2-2az+b)(z-c)(z-d)} dz = \\
&\frac{[a^2-b+(a-c)(a-d)][D_3(4a^2-b)+2D_2a+D_1]-(2a-c-d)[D_3a(4a^2-3b)+D_2(2a^2-b)+D_1a+D_0]}{(b-2ac+c^2)(b-2ad+d^2)} \ln|z^2-2az+b| + \\
&\frac{(a^2-b)(2a-c-d)[D_3(4a^2-b)+2D_2a+D_1]+[a^2-b+(a-c)(a-d)][D_3a(4a^2-3b)+D_2(2a^2-b)+D_1a+D_0]}{(b-2ac+c^2)(b-2ad+d^2)\sqrt{a^2-b}} \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}} + \\
&+ \frac{D_3c^3+D_2c^2+D_1c+D_0}{(b-2ac+c^2)(c-d)} \ln|z-c| - \frac{D_3d^3+D_2d^2+D_1d+D_0}{(b-2ad+d^2)(c-d)} \ln|z-d| \qquad \text{für } b < a^2.
\end{aligned}\right| \tag{213}$$

Wird in der oberen der Gln (213) $a = 0$ gesetzt und b mit a^2, c mit a und d mit $-a$ vertauscht, so erhält man

$$\begin{aligned}
\int \frac{D_3 z^3 + D_2 z^2 + D_1 z + D_0}{z^4 - a^4} dz &= \left(\frac{1}{2} D_3 - \frac{D_1}{2a^2}\right) \ln|z^2 + a^2| + \left(\frac{D_2}{2a} - \frac{D_0}{2a^3}\right) \operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a} + \\
&+ \left(\frac{1}{4} D_3 + \frac{1}{4}\frac{D_2}{a} + \frac{1}{4}\frac{D_1}{a^2} + \frac{1}{4}\frac{D_0}{a^3}\right) \ln|z-a| + \left(\frac{1}{4} D_3 - \frac{1}{4}\frac{D_2}{a} + \frac{1}{4}\frac{D_1}{a^2} - \frac{1}{4}\frac{D_0}{a^3}\right) \ln|z+a|.
\end{aligned} \tag{214}$$

Hieraus folgen die Sonderformeln

$$\left.\begin{aligned}
\int\frac{dz}{z^4-a^4}&=-\frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}-\frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right|=-\frac{1}{2a^3}\left[\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}+\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z}{a}\right]\quad,\\
\int\frac{z\,dz}{z^4-a^4}&=-\frac{1}{4a^2}\ln\left|\frac{z^2+a^2}{z^2-a^2}\right|=-\frac{1}{2a^2}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z^2}{a^2}\quad,\\
\int\frac{z^2\,dz}{z^4-a^4}&=\frac{1}{2a}\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}-\frac{1}{4a}\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right|=\frac{1}{2a}\left[\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}-\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z}{a}\right]\quad,\\
\int\frac{z^3\,dz}{z^4-a^4}&=\frac{1}{4}\ln|z^4-a^4|\quad.
\end{aligned}\right\}\tag{215}$$

Wird hierin a mit $a\sqrt{i}$ vertauscht, so ergibt sich nach einigen Rechnungen

$$\left.\begin{aligned}
\int\frac{dz}{z^4+a^4}&=\frac{1}{4a^3\sqrt{2}}\ln\frac{\left(z+\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left(z-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}-\frac{1}{2a^3\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tang}\frac{az\sqrt{2}}{z^2-a^2}\quad,\\
\int\frac{z\,dz}{z^4+a^4}&=\frac{1}{2a^2}\operatorname{arc\,tang}\frac{z^2}{a^2}\quad,\\
\int\frac{z^2\,dz}{z^4+a^4}&=-\frac{1}{4a\sqrt{2}}\ln\frac{\left(z+\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left(z-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}-\frac{1}{2a\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tang}\frac{az\sqrt{2}}{z^2-a^2}\quad,\\
\int\frac{z^3\,dz}{z^4+a^4}&=-\frac{1}{4}\ln|z^4+a^4|\quad.
\end{aligned}\right\}\tag{216}$$

Zum Schluß seien noch einige Worte der Behandlung von Doppel- und mehrfachen Wurzeln in (162) gewidmet. Für die wichtigsten Fälle dieser Art, nämlich die komplexen, sind die Integralformeln im Vorhergehenden bereits mitgeteilt worden, so daß die Betrachtung hier auf das Reelle beschränkt werden kann. Um nicht zu weitläufig werden zu müssen, sei der Grenzübergang nicht allgemein sondern am Beispiele einer Doppelwurzel und an Hand des Integrales

$$\int\frac{D_3z^3+D_2z^2+D_1z+D_0}{(z-a_1)^2(z-a_3)(z-a_4)}\,dz$$

vorgeführt. Bei mehrfachen Wurzeln ist der Grenzübergang sinngemäß vorzunehmen. Zunächst sei a_2 nicht gleich a_1 sondern gemäß

$$a_2=a_1-\varepsilon$$

um einen kleinen Betrag von a_1 verschieden. Dann lautet das Integral

$$\int\frac{D_3z^3+D_2z^2+D_1z+D_0}{(z-a_1)(z-a_1+\varepsilon)(z-a_3)(z-a_4)}\,dz=b_1\ln|z-a_1|+b_2\ln|z-a_1+\varepsilon|+b_3\ln|z-a_3|+b_4\ln|z-a_4|\;.$$

Für die b-Werte liefern die allgemeinen Formeln

$$\begin{aligned}
b_1&=\frac{D_3a_1^3+D_2a_1^2+D_1a_1+D_0}{\varepsilon(a_1-a_3)(a_1-a_4)}\quad,\\
b_2&=\frac{D_3(a_1-\varepsilon)^3+D_2(a_1-\varepsilon)^2+D_1(a_1-\varepsilon)+D_0}{-\varepsilon(a_1-\varepsilon-a_3)(a_1-\varepsilon-a_4)}=-\frac{D_3a_1^3+D_2a_1^2+D_1a_1+D_0}{\varepsilon(a_1-a_3)(a_1-a_4)}+\frac{3D_3a_1^2+2D_2a_1+D_1}{(a_1-a_3)(a_1-a_4)}+\varepsilon[\cdots]\quad,\\
b_3&=\frac{D_3a_3^3+D_2a_3^2+D_1a_3+D_0}{(a_1-a_3)^2(a_3-a_4)}+\varepsilon[\cdots]\\
b_4&=\frac{D_3a_4^3+D_2a_4^2+D_1a_4+D_0}{(a_1-a_4)^2(a_4-a_3)}+\varepsilon[\cdots]
\end{aligned}$$

Ferner folgt

$$\ln|z-a_1+\varepsilon|=\ln|z-a_1|+\frac{\varepsilon}{z-a_1}+\varepsilon^2[\cdots]\quad.$$

Werden diese Beziehungen in der Ausgangsgleichung berücksichtigt und nach Zusammenfassung die Grenzübergänge für $\varepsilon \to 0$ vollzogen, so ergibt sich

$$\int \frac{D_3 z^3 + D_2 z^2 + D_1 z + D_0}{(z-a_1)^2 (z-a_3)(z-a_4)} dz = \frac{3 D_3 a_1^2 + 2 D_2 a_1 + D_1}{(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)} \ln |z - a_1| - \frac{D_3 a_1^3 + D_2 a_1^2 + D_1 a_1 + D_0}{(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)} \frac{1}{z - a_1} + \tag{217}$$

$$+ \frac{D_3 a_3^3 + D_2 a_3^2 + D_1 a_3 + D_0}{(a_1 - a_3)^2 (a_3 - a_4)} \ln |z - a_3| - \frac{D_3 a_4^3 + D_2 a_4^2 + D_1 a_4 + D_0}{(a_1 - a_4)^2 (a_3 - a_4)} \ln |z - a_4| .$$

Weiter erhält man

$$\int \frac{D_2 z^2 + D_1 z + D_0}{(z-a_1)^2 (z-a_3)} dz = \frac{2 D_2 a_1 + D_1}{a_1 - a_3} \ln |z - a_1| - \frac{D_2 a_1^2 + D_1 a_1 + D_0}{(a_1 - a_3)} \cdot \frac{1}{z - a_1} + \frac{D_2 a_3^2 + D_1 a_3 + D_0}{(a_1 - a_3)^2} \ln |z - a_3| , \tag{218}$$

$$\int \frac{D_1 z + D_0}{(z-a)^2} dz = D_1 \ln |z - a_1| - \frac{D_1 a_1 + D_0}{z - a_1} . \tag{219}$$

5. Integrale der Klasse $\int \frac{A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \cdots + A_1 z + A_0}{B_m z^m + B_{m-1} z^{m-1} + \cdots + B_1 z + B_0} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 2az + b}}$.

a) Algebraische Integrale.

Es sei zunächst $b - a^2 > 0$ vorausgesetzt. Dann lassen sich die Integrale der vorliegenden Klasse rational machen und damit auf diejenigen der vorigen Klasse zurückführen, wenn man sich der Transformation

$$z - a = \sqrt{b - a^2}\, \mathfrak{Sin}\, t = \sqrt{b - a^2}\, \frac{2\, \mathfrak{Sin} \frac{t}{2} \mathfrak{Cos} \frac{t}{2}}{\mathfrak{Cos}^2 \frac{t}{2} - \mathfrak{Sin}^2 \frac{t}{2}} = \sqrt{b - a^2}\, \frac{2\, \mathfrak{Tang} \frac{t}{2}}{1 - \mathfrak{Tang}^2 \frac{t}{2}}$$

bedient. Diese liefert

$$\sqrt{z^2 - 2az + b} = \sqrt{(z-a)^2 + (b - a^2)} = \sqrt{b - a^2} \sqrt{\mathfrak{Sin}^2 t + 1} = \sqrt{b - a^2}\, \mathfrak{Cos}\, t$$

$$= \sqrt{b - a^2}\, \frac{\mathfrak{Cos}^2 \frac{t}{2} + \mathfrak{Sin}^2 \frac{t}{2}}{\mathfrak{Cos}^2 \frac{t}{2} - \mathfrak{Sin}^2 \frac{t}{2}} = \sqrt{b - a^2}\, \frac{1 + \mathfrak{Tang}^2 \frac{t}{2}}{1 - \mathfrak{Tang}^2 \frac{t}{2}} ,$$

$$dz = 2 \sqrt{b - a^2}\, \frac{1 + \mathfrak{Tang}^2 \frac{t}{2}}{\left(1 - \mathfrak{Tang}^2 \frac{t}{2}\right)^2} d\left(\mathfrak{Tang} \frac{t}{2}\right) .$$

Wird zur Abkürzung $\mathfrak{Tang} \frac{t}{2} = u$ gesetzt, d. h. z gemäß

$$z = a + \sqrt{b - a^2}\, \frac{2u}{1 - u^2} \qquad (b > a^2) \tag{220}$$

durch eine neue Veränderliche dargestellt, so erhält man

$$\int \frac{A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \cdots + A_1 z + A_0}{B_m z^m + B_{m-1} z^{m-1} + \cdots + B_1 z + B_0} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 2az + b}} = \int \frac{A_n \left(a + \frac{2u\sqrt{b - a^2}}{1 - u^2}\right)^n + A_{n-1} \left(a + \frac{2u\sqrt{b - a^2}}{1 - u^2}\right)^{n-1} + \cdots + A_0}{B_m \left(a + \frac{2u\sqrt{b - a^2}}{1 - u^2}\right)^m + B_{m-1} \left(a + \frac{2u\sqrt{b - a^2}}{1 - u^2}\right)^{m-1} + \cdots + B_0} \frac{2\,du}{1 - u^2} . \tag{221}$$

Im Falle $b - a^2 < 0$ bedient man sich der Transformation

$$z - a = \sqrt{a^2 - b}\, \mathfrak{Cos}\, t = \sqrt{a^2 - b}\, \frac{\mathfrak{Cos}^2 \frac{t}{2} + \mathfrak{Sin}^2 \frac{t}{2}}{\mathfrak{Cos}^2 \frac{t}{2} - \mathfrak{Sin}^2 \frac{t}{2}} = \sqrt{a^2 - b}\, \frac{1 + \mathfrak{Tang}^2 \frac{t}{2}}{1 - \mathfrak{Tang}^2 \frac{t}{2}} .$$

Sie ergibt

$$\sqrt{z^2-2az+b}=\sqrt{(z-a)^2-(a^2-b)}=\sqrt{a^2-b}\sqrt{\mathfrak{Cof}^2 t-1}=\sqrt{a^2-b}\,\mathfrak{Sin}\,t$$
$$=\sqrt{a^2-b}\,\frac{2\,\mathfrak{Sin}\frac{t}{2}\,\mathfrak{Cof}\frac{t}{2}}{\mathfrak{Cof}^2\frac{t}{2}-\mathfrak{Sin}^2\frac{t}{2}}=\sqrt{a^2-b}\,\frac{2\,\mathfrak{Tang}\frac{t}{2}}{1-\mathfrak{Tang}^2\frac{t}{2}},$$

$$dz=\sqrt{a^2-b}\,\frac{4\,\mathfrak{Tang}\frac{t}{2}}{\left(1-\mathfrak{Tang}^2\frac{t}{2}\right)^2}\,d\left(\mathfrak{Tang}\frac{t}{2}\right).$$

Wird auch hier wieder $\mathfrak{Tang}\,t=u$ gesetzt, d. h. z in der Form

$$z=a+\sqrt{a^2-b}\,\frac{1+u^2}{1-u^2}\qquad (b<a^2)\tag{222}$$

dargestellt, so folgt

$$\int\frac{A_nz^n+A_{n-1}z^{n-1}+\cdots+A_1z+A_0}{B_mz^m+B_{m-1}z^{m-1}+\cdots+B_1z+B_0}\,\frac{dz}{\sqrt{z^2-2az+b}}=\int\frac{A_n\left(a+\frac{(1+u^2)\sqrt{a^2-b}}{1-u^2}\right)^n+A_{n-1}\left(a+\frac{(1+u^2)\sqrt{a^2-b}}{1-u^2}\right)^{n-1}+\cdots+A_0}{B_m\left(a+\frac{(1+u^2)\sqrt{a^2-b}}{1-u^2}\right)^m+A_{m-1}\left(a+\frac{(1+u^2)\sqrt{a^2-b}}{1-u^2}\right)^{m-1}+\cdots+B_0}\,\frac{2\,du}{1-u^2}.\tag{223}$$

Eine besondere Behandlung verlangen im Falle $b-a^2<0$ noch diejenigen Integrale, bei denen sämtliche B-Konstanten rein imaginär sind bzw. der Integrand mit -1 multipliziert ist. In diesem Falle hat man

$$z-a=\sqrt{a^2-b}\cos t=\sqrt{a^2-b}\,\frac{\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}}=\sqrt{a^2-b}\,\frac{1-\operatorname{tang}^2\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tang}^2\frac{t}{2}}$$

zu setzen und erhält

$$\sqrt{-(z^2-2az+b)}=\sqrt{(a^2-b)-(z-a)^2}=\sqrt{a^2-b}\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{a^2-b}\sin t$$
$$=\sqrt{a^2-b}\,\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}}=\sqrt{a^2-b}\,\frac{2\operatorname{tang}\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tang}^2\frac{t}{2}}.$$

$$dz=\sqrt{a^2-b}\,\frac{-4\operatorname{tang}\frac{t}{2}}{\left(1+\operatorname{tang}^2\frac{t}{2}\right)^2}\,d\left(\operatorname{tang}\frac{t}{2}\right).$$

Mit $\operatorname{tang} t=u$ und demgemäß

$$z=a+\sqrt{a^2-b}\,\frac{1-u^2}{1+u^2}\tag{224}$$

folgt

$$\int\frac{A_nz^n+A_{n-1}z^{n-1}+\cdots+A_1z+A_0}{B_mz^m+B_{m-1}z^{m-1}+\cdots+B_1z+B_0}\,\frac{dz}{\sqrt{-z^2+2az-b}}=\int\frac{A_n\left(a+\frac{(1-u^2)\sqrt{a^2-b}}{1+u^2}\right)^n+A_{n-1}\left(a+\frac{(1-u^2)\sqrt{a^2-b}}{1+u^2}\right)^{n-1}+\cdots+A_0}{B_m\left(a+\frac{(1-u^2)\sqrt{a^2-b}}{1+u^2}\right)^m+B_{m-1}\left(a+\frac{(1-u^2)\sqrt{a^2-b}}{1+u^2}\right)^{m-1}+\cdots+B_0}\,\frac{-2\,du}{1+u^2}.\tag{225}$$

Es folgt nun eine Zusammenstellung der wichtigsten Integrale der vorliegenden Klasse, die mit Hilfe der unter Ziffer 4 mitgeteilten Integrale und unter Heranziehung der Funktionalbeziehungen zwischen den arcus- und Area-Funktionen leicht dargestellt werden können.

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-2az+b}}=\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}} &&(b>a^2)\quad,\\
&\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-2az+b}}=\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}} &&(b<a^2)\quad,\\
&\int\frac{dz}{\sqrt{-z^2+2az-b}}=-\operatorname{arc}\cos\frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}} &&(b<a^2).
\end{aligned}\right\}\tag{226}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2-2az+b}} = \sqrt{z^2-2az+b} + a\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}} && (b > a^2) \quad ,\\
&\int \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2-2az+b}} = \sqrt{z^2-2az+b} + a\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}} && (b < a^2) \quad ,\\
&\int \frac{z\,dz}{\sqrt{-z^2+2az-b}} = -\sqrt{-z^2+2az-b} - a \arccos\frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}} && (b < a^2) \quad .
\end{aligned}\right\} \quad (227)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2-2az+b}} = -\sqrt{\frac{1}{b}}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{b-az}{z\sqrt{b-a^2}} && (b > a^2),\\
&\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2-2az+b}} = -\sqrt{\frac{1}{b}}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\frac{b-az}{z\sqrt{a^2-b}} && (b < a^2),\\
&\int \frac{dz}{z\sqrt{-z^2+2az-b}} = +\sqrt{\frac{1}{b}}\arccos\frac{b-az}{z\sqrt{a^2-b}} && (b < a^2).
\end{aligned}\right\} \quad (228)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \sqrt{z^2-2az+b}\,dz = \frac{z-a}{2}\sqrt{z^2-2az+b} + \frac{b-a^2}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{z-a}{\sqrt{b-a^2}} && (b > a^2),\\
&\int \sqrt{z^2-2az+b}\,dz = \frac{z-a}{2}\sqrt{z^2-2az+b} + \frac{b-a^2}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}} && (b < a^2),\\
&\int \sqrt{-z^2+2az-b}\,dz = \frac{z-a}{2}\sqrt{-z^2+2az-b} + \frac{b-a^2}{2}\arccos\frac{z-a}{\sqrt{a^2-b}} && (b < a^2).
\end{aligned}\right\} \quad (229)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+a^2}} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{z}{a} \quad , && \int \frac{dz}{\sqrt{z^2-a^2}} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\frac{z}{a} \quad ;\\
&\int \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2+a^2}} = \sqrt{z^2+a^2} \quad , && \int \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2-a^2}} = \sqrt{z^2-a^2} \quad ,\\
&\int \frac{z^2dz}{\sqrt{z^2+a^2}} = \frac{z}{2}\sqrt{z^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{z}{a} \quad , && \int \frac{z^2dz}{\sqrt{z^2-a^2}} = \frac{z}{2}\sqrt{z^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\frac{z}{a} \quad ,\\
&\int \frac{z^3dz}{\sqrt{z^2+a^2}} = \frac{z^2-2a^2}{3}\sqrt{z^2+a^2} \quad , && \int \frac{z^3dz}{\sqrt{z^2-a^2}} = \frac{z^2+2a^2}{3}\sqrt{z^2-a^2} \quad ,\\
&\int \frac{z^4dz}{\sqrt{z^2+a^2}} = \frac{z(2z^2-3a^2)}{8}\sqrt{z^2+a^2} + \frac{3a^4}{8}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{z}{a} \quad , && \int \frac{z^4dz}{\sqrt{z^2-a^2}} = \frac{z(2z^2+3a^2)}{8}\sqrt{z^2-a^2} + \frac{3a^4}{8}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\frac{z}{a} \quad .
\end{aligned}\right\} \quad (230)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{\sqrt{a^2-z^2}} = \arcsin\frac{z}{a} \quad ,\\
&\int \frac{z\,dz}{\sqrt{a^2-z^2}} = -\sqrt{a^2-z^2} \quad ,\\
&\int \frac{z^2dz}{\sqrt{a^2-z^2}} = -\frac{z}{2}\sqrt{a^2-z^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{z}{a} \quad ,\\
&\int \frac{z^3dz}{\sqrt{a^2-z^2}} = \frac{z^2-2a^2}{3}\sqrt{a^2-z^2} \quad ,\\
&\int \frac{z^4dz}{\sqrt{a^2-z^2}} = -\frac{z(2z^2+3a^2)}{8}\sqrt{a^2-z^2} + \frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{z}{a} \, .
\end{aligned}\right\} \quad (231)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{a}{z} \quad , && \int \frac{dz}{z\sqrt{z^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{z} \quad ,\\
&\int \frac{dz}{z^2\sqrt{z^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{z^2+a^2}}{a^2z} \quad , && \int \frac{dz}{z^2\sqrt{z^2-a^2}} = \frac{\sqrt{z^2-a^2}}{a^2z} \quad ,\\
&\int \frac{dz}{z^3\sqrt{z^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{z^2+a^2}}{2a^2z^2} + \frac{1}{2a^3}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{a}{z} \quad , && \int \frac{dz}{z^3\sqrt{z^2-a^2}} = \frac{\sqrt{z^2-a^2}}{2a^2z^2} + \frac{1}{2a^3}\arccos\frac{a}{z} \quad ,\\
&\int \frac{dz}{z^4\sqrt{z^2+a^2}} = \frac{2z^2-a^2}{3a^4z^3}\sqrt{z^2+a^2} \quad , && \int \frac{dz}{z^4\sqrt{z^2-a^2}} = \frac{2z^2+a^2}{3a^4z^3}\sqrt{z^2-a^2} \quad .
\end{aligned}\right\} \quad (232)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{dz}{z\sqrt{a^2-z^2}}=-\frac{1}{a}\,\mathfrak{Ar\ Cos}\,\frac{a}{z}\,,\\
&\int\frac{dz}{z^2\sqrt{a^2-z^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{a^2z}\,,\\
&\int\frac{dz}{z^3\sqrt{a^2-z^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{2a^2z^2}-\frac{1}{2a^3}\,\mathfrak{Ar\ Cos}\,\frac{a}{z}\,,\\
&\int\frac{dz}{z^4\sqrt{a^2-z^2}}=-\frac{2z^2+a^2}{3a^4z^3}\sqrt{a^2-z^2}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(233)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\sqrt{z^2+a^2}\,dz=\frac{z}{2}\sqrt{z^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\,\mathfrak{Ar\ Sin}\,\frac{z}{a}\,,\\
&\int z\sqrt{z^2+a^2}\,dz=\frac{(z^2+a^2)\sqrt{z^2+a^2}}{3}\,,\\
&\int z^2\sqrt{z^2+a^2}\,dz=\frac{z(2z^2+a^2)}{8}\sqrt{z^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\,\mathfrak{Ar\ Sin}\,\frac{z}{a}\,,\\
&\int z^3\sqrt{z^2+a^2}\,dz=\frac{3z^2-2a^2}{15}\,(z^2+a^2)\sqrt{(z^2+a^2)}\,,\\
&\int z^4\sqrt{z^2+a^2}\,dz=\frac{8z^4+2a^2z^2-3a^4}{48}\,z\sqrt{z^2+a^2}+\\
&\qquad+\frac{a^6}{16}\,\mathfrak{Ar\ Sin}\,\frac{z}{a}\,,\\
&\int\sqrt{z^2-a^2}\,dz=\frac{z}{2}\sqrt{z^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\,\mathfrak{Ar\ Cos}\,\frac{z}{a}\,,\\
&\int z\sqrt{z^2-a^2}\,dz=\frac{(z^2-a^2)\sqrt{z^2-a^2}}{3}\,,\\
&\int z^2\sqrt{z^2-a^2}\,dz=\frac{z(2z^2-a^2)}{8}\sqrt{z^2-a^2}-\frac{a^4}{8}\,\mathfrak{Ar\ Cos}\,\frac{z}{a}\,,\\
&\int z^3\sqrt{z^2-a^2}\,dz=\frac{3z^2+2a^2}{15}\,(z^2-a^2)\sqrt{z^2-a^2}\,,\\
&\int z^4\sqrt{z^2-a^2}\,dz=\frac{8z^4-2a^2z^2-3a^4}{48}\,z\sqrt{z^2-a^2}-\\
&\qquad-\frac{a^6}{16}\,\mathfrak{Ar\ Cos}\,\frac{z}{a}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(234)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\sqrt{a^2-z^2}\,dz=\frac{z}{2}\sqrt{a^2-z^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{z}{a}\,,\\
&\int z\sqrt{a^2-z^2}\,dz=-\frac{(a^2-z^2)\sqrt{a^2-z^2}}{3}\,,\\
&\int z^2\sqrt{a^2-z^2}\,dz=\frac{z(2z^2-a^2)}{8}\sqrt{a^2-z^2}+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{z}{a}\,,\\
&\int z^3\sqrt{a^2-z^2}\,dz=-\frac{3z^2+2a^2}{15}\,(a^2-z^2)\sqrt{a^2-z^2}\,,\\
&\int z^4\sqrt{a^2-z^2}\,dz=\frac{8z^4-2a^2z^2-3a^4}{48}\,z\sqrt{a^2-z^2}+\frac{a^6}{16}\arcsin\frac{z}{a}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(235)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{\sqrt{z^2+a^2}}{z}\,dz=\sqrt{z^2+a^2}-a\,\mathfrak{Ar\ Sin}\,\frac{a}{z}\,,\\
&\int\frac{\sqrt{z^2+a^2}}{z^2}\,dz=-\frac{\sqrt{z^2+a^2}}{z}+\mathfrak{Ar\ Sin}\,\frac{z}{a}\,,\\
&\int\frac{\sqrt{z^2+a^2}}{z^3}\,dz=-\frac{\sqrt{z^2+a^2}}{2z^2}-\frac{1}{2a}\,\mathfrak{Ar\ Sin}\,\frac{a}{z}\,,\\
&\int\frac{\sqrt{z^2+a^2}}{z^4}\,dz=-\frac{(z^2+a^2)\sqrt{z^2+a^2}}{3a^2z^3}\,,\\
&\int\frac{\sqrt{z^2-a^2}}{z}\,dz=\sqrt{z^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{z}\,,\\
&\int\frac{\sqrt{z^2-a^2}}{z^2}\,dz=-\frac{\sqrt{z^2-a^2}}{z}+\mathfrak{Ar\ Cos}\,\frac{z}{a}\,,\\
&\int\frac{\sqrt{z^2-a^2}}{z^3}\,dz=-\frac{\sqrt{z^2-a^2}}{2z^2}+\frac{1}{2a}\arccos\frac{a}{z}\,,\\
&\int\frac{\sqrt{z^2-a^2}}{z^4}\,dz=\frac{(z^2-a^2)\sqrt{z^2-a^2}}{3a^2z^3}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(236)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{z}\,dz=\sqrt{a^2-z^2}-a\,\mathfrak{Ar\ Cos}\,\frac{a}{z}\,,\\
&\int\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{z^2}\,dz=-\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{z}-\arcsin\frac{z}{a}\,,\\
&\int\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{z^3}\,dz=-\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{2z^2}+\frac{1}{2a}\,\mathfrak{Ar\ Cos}\,\frac{a}{z}\,,\\
&\int\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{z^4}\,dz=-\frac{(a^2-z^2)\sqrt{a^2-z^2}}{3a^2z^3}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(237)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}, && \int \frac{dz}{(z^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{a^2}\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}},\\
&\int \frac{z\,dz}{(z^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}, && \int \frac{z\,dz}{(z^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}},\\
&\int \frac{z^2dz}{(z^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} + \mathfrak{Ar\,Sin}\frac{z}{a}, && \int \frac{z^2dz}{(z^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}} + \mathfrak{Ar\,Cof}\frac{z}{a},\\
&\int \frac{z^3dz}{(z^2+a^2)^{3/2}} = \sqrt{z^2+a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{z^2+a^2}}, && \int \frac{z^3dz}{(z^2-a^2)^{3/2}} = \sqrt{z^2-a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{z^2-a^2}},\\
&\int \frac{z^4dz}{(z^2+a^2)^{3/2}} = \frac{z(z^2+3a^2)}{2\sqrt{z^2+a^2}} - \frac{3a^2}{2}\mathfrak{Ar\,Sin}\frac{z}{a}, && \int \frac{z^4dz}{(z^2-a^2)^{3/2}} = \frac{z(z^2-3a^2)}{2\sqrt{z^2-a^2}} + \frac{3a^2}{2}\mathfrak{Ar\,Cof}\frac{z}{a}.
\end{aligned}\right\} \quad (238)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{(a^2-z^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}},\\
&\int \frac{z\,dz}{(a^2-z^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-z^2}},\\
&\int \frac{z^2dz}{(a^2-z^2)^{3/2}} = \frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}} - \arcsin\frac{z}{a},\\
&\int \frac{z^3dz}{(a^2-z^2)^{3/2}} = \sqrt{a^2-z^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2-z^2}},\\
&\int \frac{z^4dz}{(a^2-z^2)^{3/2}} = \frac{z(3a^2-z^2)}{2\sqrt{a^2-z^2}} - \frac{3a^2}{2}\arcsin\frac{z}{a}.
\end{aligned}\right\} \quad (239)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{z(z^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2\sqrt{z^2+a^2}} - \frac{1}{a^3}\mathfrak{Ar\,Sin}\frac{a}{z}, && \int \frac{dz}{z(z^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{a^2\sqrt{z^2-a^2}} - \frac{1}{a^3}\arccos\frac{a}{z},\\
&\int \frac{dz}{z^2(z^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{z^2+a^2}}{z} + \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right), && \int \frac{dz}{z^2(z^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{z^2-a^2}}{z} + \frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}\right),\\
&\int \frac{dz}{z^3(z^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{a^2+3z^2}{2a^4z^2\sqrt{z^2+a^2}} + \frac{3}{2a^5}\mathfrak{Ar\,Sin}\frac{a}{z}, && \int \frac{dz}{z^3(z^2-a^2)^{3/2}} = \frac{a^2-3z^2}{2a^4z^2\sqrt{z^2-a^2}} - \frac{3}{2a^5}\arccos\frac{a}{z},\\
&\int \frac{dz}{z^4(z^2+a^2)^{3/2}} = \frac{8z^4+4a^2z^2-a^4}{3a^6z^3\sqrt{z^2+a^2}}. && \int \frac{dz}{z^4(z^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{8z^4-4a^2z^2-a^4}{3a^6z^3\sqrt{z^2-a^2}}.
\end{aligned}\right\} \quad (240)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{z(a^2-z^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2-z^2}} - \frac{1}{a^3}\mathfrak{Ar\,Cof}\frac{a}{z},\\
&\int \frac{dz}{z^2(a^2-z^2)^{3/2}} = -\frac{1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{z} - \frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}\right),\\
&\int \frac{dz}{z^3(a^2-z^2)^{3/2}} = -\frac{a^2-3z^2}{2a^4z^2\sqrt{a^2-z^2}} - \frac{3}{2a^5}\mathfrak{Ar\,Cof}\frac{a}{z},\\
&\int \frac{dz}{z^4(a^2-z^2)^{3/2}} = \frac{8z^4-4a^2z^2-a^4}{3a^6z^3\sqrt{a^2-z^2}},
\end{aligned}\right\} \quad (241)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int (z^2+a^2)^{3/2}dz = \frac{2z^2+5a^2}{8}z\sqrt{z^2+a^2} + \frac{3a^4}{8}\mathfrak{Ar\,Sin}\frac{z}{a}, && \int (z^2-a^2)^{3/2}dz = \frac{2z^2-5a^2}{8}z\sqrt{z^2-a^2} + \frac{3a^4}{8}\mathfrak{Ar\,Cof}\frac{z}{a},\\
&\int z(z^2+a^2)^{3/2}dz = \frac{(z^2+a^2)^2\sqrt{z^2+a^2}}{5}, && \int z(z^2-a^2)^{3/2}dz = \frac{(z^2-a^2)^2\sqrt{z^2-a^2}}{5},\\
&\int z^2(z^2+a^2)^{3/2}dz = \frac{8z^4+14a^2z^2+3a^4}{48}z\sqrt{z^2+a^2} - \frac{a^6}{16}\mathfrak{Ar\,Sin}\frac{z}{a}, && \int z^2(z^2-a^2)^{3/2}dz = \frac{8z^4-14z^2a^2+3a^4}{48}z\sqrt{z^2-a^2} + \frac{a^6}{16}\mathfrak{Ar\,Cof}\frac{z}{a},\\
&\int z^3(z^2+a^2)^{3/2}dz = \frac{(5z^2-2a^2)(z^2+a^2)^2}{35}\sqrt{z^2+a^2}, && \int z^3(z^2-a^2)^{3/2}dz = \frac{(5z^2+2a^2)(z^2-a^2)^2}{35}\sqrt{z^2-a^2},\\
&\int z^4(z^2+a^2)^{3/2}dz = \frac{16z^6+24a^2z^4+2a^4z^2-3a^6}{128}z\sqrt{z^2+a^2} + \frac{3a^8}{128}\mathfrak{Ar\,Sin}\frac{z}{a}, && \int z^4(z^2-a^2)^{3/2}dz = \frac{16z^6-24a^2z^4+2a^4z^2+3a^6}{128}z\sqrt{z^2-a^2} + \frac{3a^8}{128}\mathfrak{Ar\,Cof}\frac{z}{a}.
\end{aligned}\right\} \quad (242)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int (a^2-z^2)^{3/2}\,dz = -\frac{2z^2-5a^2}{8}\,z\sqrt{a^2-z^2}+\frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{z}{a}\,,\\
&\int z\,(a^2-z^2)^{3/2}\,dz = -\frac{(a^2-z^2)^2\sqrt{a^2-z^2}}{5}\,,\\
&\int z^2\,(a^2-z^2)^{3/2}\,dz = -\frac{8z^4-14a^2z^2+3a^4}{48}\,z\sqrt{a^2-z^2}+\frac{a^6}{16}\arcsin\frac{z}{a}\,,\\
&\int z^3\,(a^2-z^2)^{3/2}\,dz = -\frac{(5z^2+2a^2)\,(a^2-z^2)^2}{35}\sqrt{a^2-z^2}\,,\\
&\int z^4\,(a^2-z^2)^{3/2}\,dz = -\frac{16z^6-24a^2z^4+2a^4z^2+3a^6}{128}\,z\sqrt{a^2-z^2}+\frac{3a^8}{128}\arcsin\frac{z}{a}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(243)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{(z^2+a^2)^{3/2}}{z}\,dz=\frac{z^2+4a^2}{3}\sqrt{z^2+a^2}-a^3\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{a}{z}\,, &&\int\frac{(z^2-a^2)^{3/2}}{z}\,dz=\frac{z^2-4a^2}{3}\sqrt{z^2-a^2}+a^3\arccos\frac{a}{z}\,,\\
&\int\frac{(z^2+a^2)^{3/2}}{z^2}\,dz=\frac{z^2-2a^2}{2z}\sqrt{z^2+a^2}+\frac{3a^2}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{z}{a}\,, &&\int\frac{(z^2-a^2)^{3/2}}{z^2}\,dz=\frac{z^2+2a^2}{2z}\sqrt{z^2-a^2}-\frac{3a^2}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\frac{z}{a}\,,\\
&\int\frac{(z^2+a^2)^{3/2}}{z^3}\,dz=\frac{2z^2-a^2}{2z^2}\sqrt{z^2+a^2}-\frac{3a}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{a}{z}\,, &&\int\frac{(z^2-a^2)^{3/2}}{z^3}\,dz=\frac{2z^2+a^2}{2z^2}\sqrt{z^2-a^2}-\frac{3a}{2}\arccos\frac{a}{z}\,,\\
&\int\frac{(z^2+a^2)^{3/2}}{z^4}\,dz=-\frac{4z^2+a^2}{3z^3}\sqrt{z^2+a^2}+\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{z}{a}\,, &&\int\frac{(z^2-a^2)^{3/2}}{z^4}\,dz=-\frac{4z^2-a^2}{3z^3}\sqrt{z^2-a^2}+\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\frac{z}{a}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(244)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{(a^2-z^2)^{3/2}}{z}\,dz=-\frac{z^2-4a^2}{3}\sqrt{a^2-z^2}-a^3\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\frac{a}{z}\,,\\
&\int\frac{(a^2-z^2)^{3/2}}{z^2}\,dz=-\frac{z^2+2a^2}{2z}\sqrt{a^2-z^2}-\frac{3a^2}{2}\arcsin\frac{z}{a}\,,\\
&\int\frac{(a^2-z^2)^{3/2}}{z^3}\,dz=-\frac{2z^2+a^2}{2z^2}\sqrt{a^2-z^2}+\frac{3a}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\frac{a}{z}\,,\\
&\int\frac{(a^2-z^2)^{3/2}}{z^4}\,dz=\frac{4z^2-a^2}{3z^3}\sqrt{a^2-z^2}+\arcsin\frac{z}{a}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(245)$$

b) Trigonometrische Integrale.

Wird in den a^2-z^2 enthaltenden Integralen von a) die Substitution

$$z=a\sin\zeta \qquad \text{bzw.} \qquad z=a\cos\zeta$$

eingeführt, so schreiben sich die betreffenden algebraischen Integrale in trigonometrische Integrale um. Für diese lassen sich auf dem Wege über die partielle Integration sehr bequeme Rekursionsformeln herleiten. Wird $a=1$ gesetzt, so ergibt sich, klassenweise geordnet und unter Voranstellung der Rekursionsformeln

$$\left.\begin{aligned}
&\int\sin^m\zeta\,d\zeta=-\frac{\sin^{m-1}\zeta\cos\zeta}{m}+\frac{m-1}{m}\int\sin^{m-2}\zeta\,d\zeta\,, &&\int\cos^m\zeta\,d\zeta=\frac{\cos^{m-1}\zeta\sin\zeta}{m}+\frac{m-1}{m}\int\cos^{m-2}\zeta\,d\zeta\,,\\
&\int\sin\zeta\,d\zeta=-\cos\zeta\,, &&\int\cos\zeta\,d\zeta=\sin\zeta\,,\\
&\int\sin^2\zeta\,d\zeta=-\frac{\sin\zeta\cos\zeta}{2}+\frac{\zeta}{2}\,, &&\int\cos^2\zeta\,d\zeta=\frac{\cos\zeta\sin\zeta}{2}+\frac{\zeta}{2}\,,\\
&\int\sin^3\zeta\,d\zeta=-\frac{\sin^2\zeta\cos\zeta}{3}-\frac{2}{3}\cos\zeta\,, &&\int\cos^3\zeta\,d\zeta=\frac{\cos^2\zeta\sin\zeta}{3}+\frac{2}{3}\sin\zeta\,,\\
&\int\sin^4\zeta\,d\zeta=-\frac{\sin^3\zeta\cos\zeta}{4}-\frac{3\sin\zeta\cos\zeta}{8}+\frac{3\zeta}{8}\,, &&\int\cos^4\zeta\,d\zeta=\frac{\cos^3\zeta\sin\zeta}{4}+\frac{3\cos\zeta\sin\zeta}{8}+\frac{3\zeta}{8}\,,\\
&\int\sin^5\zeta\,d\zeta=-\frac{\sin^4\zeta\cos\zeta}{5}-\frac{4\sin^2\zeta\cos\zeta}{15}- &&\int\cos^5\zeta\,d\zeta=\frac{\cos^4\zeta\sin\zeta}{5}+\frac{4\cos^2\zeta\sin\zeta}{15}+\\
&\qquad-\frac{8}{15}\cos\zeta\,, &&\qquad+\frac{8}{15}\sin\zeta\,,\\
&\int\sin^6\zeta\,d\zeta=-\frac{\sin^5\zeta\cos\zeta}{6}-\frac{5\sin^3\zeta\cos\zeta}{24}- &&\int\cos^6\zeta\,d\zeta=\frac{\cos^5\zeta\sin\zeta}{6}+\frac{5\cos^3\zeta\sin\zeta}{24}+\\
&\qquad-\frac{15\sin\zeta\cos\zeta}{48}+\frac{15\zeta}{48}\,, &&\qquad+\frac{15\cos\zeta\sin\zeta}{48}+\frac{15\zeta}{48}\,,
\end{aligned}\right\}\quad(246)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \sin^7\zeta\, d\zeta = -\frac{\sin^6\zeta\cos\zeta}{7} - \frac{6\sin^4\zeta\cos\zeta}{35} - \frac{24\sin^2\zeta\cos\zeta}{105} - \frac{48}{105}\cos\zeta\,, \\
&\int \cos^7\zeta\, d\zeta = \frac{\cos^6\zeta\sin\zeta}{7} + \frac{6\cos^4\zeta\sin\zeta}{35} + \frac{24\cos^2\zeta\sin\zeta}{105} + \frac{48}{105}\sin\zeta\,, \\
&\int \sin^8\zeta\, d\zeta = -\frac{\sin^7\zeta\cos\zeta}{8} - \frac{7\sin^5\zeta\cos\zeta}{48} - \frac{35\sin^3\zeta\cos\zeta}{192} - \frac{105\sin\zeta\cos\zeta}{384} + \frac{105\zeta}{384}\,, \\
&\int \cos^8\zeta\, d\zeta = \frac{\cos^7\zeta\sin\zeta}{8} + \frac{7\cos^5\zeta\sin\zeta}{48} + \frac{35\cos^3\zeta\sin\zeta}{192} + \frac{105\cos\zeta\sin\zeta}{384} + \frac{105\zeta}{384}\,.
\end{aligned}\right\} \quad (246)$$

Durch unmittelbare Integration der Gln (268) und (269) des ersten Teils, in denen u durch ζ ersetzt zu denken ist, folgt für die Integrale von (246) die Paralleldarstellung

$$\left.\begin{aligned}
&\int \sin\zeta\, d\zeta = -\cos\zeta\,, \qquad \int \cos\zeta\, d\zeta = \sin\zeta\,, \\
&\int \sin^2\zeta\, d\zeta = \frac{\zeta}{2} - \frac{\sin 2\zeta}{4}\,, \qquad \int \cos^2\zeta\, d\zeta = \frac{\zeta}{2} + \frac{\sin 2\zeta}{4}\,, \\
&\int \sin^3\zeta\, d\zeta = -\frac{3\cos\zeta}{4} + \frac{\cos 3\zeta}{12}\,, \qquad \int \cos^3\zeta\, d\zeta = \frac{3\sin\zeta}{4} + \frac{\sin 3\zeta}{12}\,, \\
&\int \sin^4\zeta\, d\zeta = \frac{3\zeta}{8} - \frac{\sin 2\zeta}{4} + \frac{\sin 4\zeta}{32}\,, \qquad \int \cos^4\zeta\, d\zeta = \frac{3\zeta}{8} + \frac{\sin 2\zeta}{4} + \frac{\sin 4\zeta}{32}\,, \\
&\int \sin^5\zeta\, d\zeta = -\frac{5\cos\zeta}{8} + \frac{5\cos 3\zeta}{48} - \frac{\cos 5\zeta}{80}\,, \qquad \int \cos^5\zeta\, d\zeta = \frac{5\sin\zeta}{8} + \frac{5\sin 3\zeta}{48} + \frac{\sin 5\zeta}{80}\,, \\
&\int \sin^6\zeta\, d\zeta = \frac{5\zeta}{16} - \frac{15\sin 2\zeta}{64} + \frac{3\sin 4\zeta}{64} - \frac{\sin 6\zeta}{192}\,, \qquad \int \cos^6\zeta\, d\zeta = \frac{5\zeta}{16} + \frac{15\sin 2\zeta}{64} + \frac{3\sin 4\zeta}{64} + \frac{\sin 6\zeta}{192}\,, \\
&\int \sin^7\zeta\, d\zeta = -\frac{35\cos\zeta}{64} + \frac{21\cos 3\zeta}{192} - \frac{7\cos 5\zeta}{320} + \frac{\cos 7\zeta}{448}\,, \\
&\int \cos^7\zeta\, d\zeta = \frac{35\sin\zeta}{64} + \frac{21\sin 3\zeta}{192} + \frac{7\sin 5\zeta}{320} + \frac{\sin 7\zeta}{448}\,, \\
&\int \sin^8\zeta\, d\zeta = \frac{35\zeta}{128} - \frac{7\sin 2\zeta}{32} + \frac{7\sin 4\zeta}{128} - \frac{\sin 6\zeta}{96} + \frac{\sin 8\zeta}{1024}\,, \\
&\int \cos^8\zeta\, d\zeta = \frac{35\zeta}{128} + \frac{7\sin 2\zeta}{32} + \frac{7\sin 4\zeta}{128} + \frac{\sin 6\zeta}{96} + \frac{\sin 8\zeta}{1024}\,.
\end{aligned}\right\} \quad (247)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{d\zeta}{\sin^m\zeta} = -\frac{\cos\zeta}{(m-1)\sin^{m-1}\zeta} + \frac{m-2}{m-1}\int\frac{d\zeta}{\sin^{m-2}\zeta}\,, \qquad \int \frac{d\zeta}{\cos^m\zeta} = \frac{\sin\zeta}{(m-1)\cos^{m-1}\zeta} + \frac{m-2}{m-1}\int\frac{d\zeta}{\cos^{m-2}\zeta}\,, \\
&\int \frac{d\zeta}{\sin\zeta} = -\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\cos\zeta \text{ bzw.} = -\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right)\,, \qquad \int \frac{d\zeta}{\cos\zeta} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\sin\zeta \text{ bzw.} = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\zeta\,, \\
&\int \frac{d\zeta}{\sin^2\zeta} = -\operatorname{cotg}\zeta\,, \qquad \int \frac{d\zeta}{\cos^2\zeta} = \operatorname{tang}\zeta\,, \\
&\int \frac{d\zeta}{\sin^3\zeta} = -\frac{\operatorname{cotg}\zeta}{2\sin\zeta} - \frac{1}{2}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right)\,, \qquad \int \frac{d\zeta}{\cos^3\zeta} = \frac{\operatorname{tang}\zeta}{2\cos\zeta} + \frac{1}{2}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\zeta\,, \\
&\int \frac{d\zeta}{\sin^4\zeta} = -\frac{\operatorname{cotg}^3\zeta}{3} - \operatorname{cotg}\zeta\,, \qquad \int \frac{d\zeta}{\cos^4\zeta} = \frac{\operatorname{tang}^3\zeta}{3} + \operatorname{tang}\zeta\,, \\
&\int \frac{d\zeta}{\sin^5\zeta} = -\frac{\operatorname{cotg}\zeta}{4\sin^3\zeta} - \frac{3\operatorname{cotg}\zeta}{8\sin\zeta} - \frac{3}{8}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right)\,, \\
&\int \frac{d\zeta}{\cos^5\zeta} = \frac{\operatorname{tang}\zeta}{4\cos^3\zeta} + \frac{3\operatorname{tang}\zeta}{8\cos\zeta} + \frac{3}{8}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\zeta\,, \\
&\int \frac{d\zeta}{\sin^6\zeta} = -\frac{\operatorname{cotg}\zeta}{5\sin^4\zeta} - \frac{4\operatorname{cotg}\zeta}{15\sin^2\zeta} - \frac{8}{15}\operatorname{cotg}\zeta\,, \qquad \int \frac{d\zeta}{\cos^6\zeta} = \frac{\operatorname{tang}\zeta}{5\cos^4\zeta} + \frac{4\operatorname{tang}\zeta}{15\cos^2\zeta} + \frac{8}{15}\operatorname{tang}\zeta\,, \\
&\int \frac{d\zeta}{\sin^7\zeta} = -\frac{\operatorname{cotg}\zeta}{6\sin^5\zeta} - \frac{5\operatorname{cotg}\zeta}{24\sin^3\zeta} - \frac{5\operatorname{cotg}\zeta}{16\sin\zeta} - \frac{5}{16}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right)\,, \\
&\int \frac{d\zeta}{\cos^7\zeta} = \frac{\operatorname{tang}\zeta}{6\cos^5\zeta} + \frac{5\operatorname{tang}\zeta}{24\cos^3\zeta} + \frac{5\operatorname{tang}\zeta}{16\cos\zeta} + \frac{5}{16}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\zeta\,, \\
&\int \frac{d\zeta}{\sin^8\zeta} = -\frac{\operatorname{cotg}\zeta}{7\sin^6\zeta} - \frac{6\operatorname{cotg}\zeta}{35\sin^4\zeta} - \frac{8\operatorname{cotg}\zeta}{35\sin^2\zeta} - \frac{16}{35}\operatorname{cotg}\zeta\,, \\
&\int \frac{d\zeta}{\cos^8\zeta} = \frac{\operatorname{tang}\zeta}{7\cos^6\zeta} + \frac{6\operatorname{tang}\zeta}{35\cos^4\zeta} + \frac{8\operatorname{tang}\zeta}{35\cos^2\zeta} + \frac{16}{35}\operatorname{tang}\zeta\,.
\end{aligned}\right\} \quad (248)$$

$$
\begin{aligned}
\int\frac{d\zeta}{\sin^m\zeta\cos\zeta} &= -\frac{1}{(m-1)\sin^{m-1}\zeta}+\int\frac{d\zeta}{\sin^{m-2}\zeta\cos\zeta}\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\sin\zeta\cos\zeta} &= -\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-2\zeta\right)\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\sin^2\zeta\cos\zeta} &= -\frac{1}{\sin\zeta}+\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\zeta\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\sin^3\zeta\cos\zeta} &= -\frac{1}{2\sin^2\zeta}-\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-2\zeta\right)\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\sin^4\zeta\cos\zeta} &= -\frac{1}{3\sin^3\zeta}-\frac{1}{\sin\zeta}+\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\zeta\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\sin^5\zeta\cos\zeta} &= -\frac{1}{4\sin^4\zeta}-\frac{1}{2\sin^2\zeta}- \\
&\quad -\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-2\zeta\right)\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\sin^6\zeta\cos\zeta} &= -\frac{1}{5\sin^5\zeta}-\frac{1}{3\sin^3\zeta}-\frac{1}{\sin\zeta}+ \\
&\quad +\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\zeta\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\sin^7\zeta\cos\zeta} &= -\frac{1}{6\sin^6\zeta}-\frac{1}{4\sin^4\zeta}-\frac{1}{2\sin^2\zeta}- \\
&\quad -\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-2\zeta\right)\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\sin^8\zeta\cos\zeta} &= -\frac{1}{7\sin^7\zeta}-\frac{1}{5\sin^5\zeta}-\frac{1}{3\sin^3\zeta}- \\
&\quad -\frac{1}{\sin\zeta}+\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\zeta\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int\frac{d\zeta}{\cos^m\zeta\sin\zeta} &= \frac{1}{(m-1)\cos^{m-1}\zeta}+\int\frac{d\zeta}{\cos^{m-2}\zeta\sin\zeta}\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\cos\zeta\sin\zeta} &= -\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-2\zeta\right)\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\cos^2\zeta\sin\zeta} &= \frac{1}{\cos\zeta}-\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right)\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\cos^3\zeta\sin\zeta} &= \frac{1}{2\cos^2\zeta}-\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-2\zeta\right)\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\cos^4\zeta\sin\zeta} &= \frac{1}{3\cos^3\zeta}+\frac{1}{\cos\zeta}-\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right)\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\cos^5\zeta\sin\zeta} &= \frac{1}{4\cos^4\zeta}+\frac{1}{2\cos^2\zeta}- \\
&\quad -\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-2\zeta\right)\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\cos^6\zeta\sin\zeta} &= \frac{1}{5\cos^5\zeta}+\frac{1}{3\cos^3\zeta}+\frac{1}{\cos\zeta}- \\
&\quad -\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right)\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\cos^7\zeta\sin\zeta} &= \frac{1}{6\cos^6\zeta}+\frac{1}{4\cos^4\zeta}+\frac{1}{2\cos^2\zeta}- \\
&\quad -\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-2\zeta\right)\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\cos^8\zeta\sin\zeta} &= \frac{1}{7\cos^7\zeta}+\frac{1}{5\cos^5\zeta}+\frac{1}{3\cos^3\zeta}+ \\
&\quad +\frac{1}{\cos\zeta}-\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right)\,.
\end{aligned}
\qquad (249)
$$

$$
\begin{aligned}
\int\frac{d\zeta}{\sin^m\zeta\cos^2\zeta} &= -\frac{1}{(m-1)\sin^{m-1}\zeta\cos\zeta}+ \\
&\quad +\frac{m}{m-1}\int\frac{d\zeta}{\sin^{m-2}\zeta\cos^2\zeta}\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\sin\zeta\cos^2\zeta} &= \frac{1}{\cos\zeta}-\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right)\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\sin^2\zeta\cos^2\zeta} &= -2\operatorname{cotg}2\zeta\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\sin^3\zeta\cos^2\zeta} &= -\frac{1}{2\sin^2\zeta\cos\zeta}+\frac{3}{2\cos\zeta}- \\
&\quad -\frac{3}{2}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right)\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\sin^4\zeta\cos^2\zeta} &= -\frac{1}{3\sin^3\zeta\cos\zeta}-\frac{8}{3}\operatorname{cotg}2\zeta\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\sin^5\zeta\cos^2\zeta} &= -\frac{1}{4\sin^4\zeta\cos\zeta}-\frac{5}{8\sin^2\zeta\cos\zeta}+ \\
&\quad +\frac{15}{8\cos\zeta}-\frac{15}{8}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right)\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\sin^6\zeta\cos^2\zeta} &= -\frac{1}{5\sin^5\zeta\cos\zeta}-\frac{2}{5\sin^3\zeta\cos\zeta}- \\
&\quad -\frac{16}{5}\operatorname{cotg}2\zeta\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\sin^7\zeta\cos^2\zeta} &= -\frac{1}{6\sin^6\zeta\cos\zeta}-\frac{7}{24\sin^4\zeta\cos\zeta}- \\
&\quad -\frac{35}{48\sin^2\zeta\cos\zeta}+\frac{35}{16\cos\zeta}- \\
&\quad -\frac{35}{16}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right)\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\sin^8\zeta\cos^2\zeta} &= -\frac{1}{7\sin^7\zeta\cos\zeta}-\frac{8}{35\sin^5\zeta\cos\zeta}- \\
&\quad -\frac{16}{35\sin^3\zeta\cos\zeta}-\frac{128}{35}\operatorname{cotg}2\zeta\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int\frac{d\zeta}{\cos^m\zeta\sin^2\zeta} &= \frac{1}{(m-1)\cos^{m-1}\zeta\sin\zeta}+ \\
&\quad +\frac{m}{m-1}\int\frac{d\zeta}{\cos^{m-2}\zeta\sin^2\zeta}\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\cos\zeta\sin^2\zeta} &= -\frac{1}{\sin\zeta}+\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\zeta\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\cos^2\zeta\sin^2\zeta} &= -2\operatorname{cotg}2\zeta\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\cos^3\zeta\sin^2\zeta} &= \frac{1}{2\cos^2\zeta\sin\zeta}-\frac{3}{2\sin\zeta}+ \\
&\quad +\frac{3}{2}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\zeta\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\cos^4\zeta\sin^2\zeta} &= \frac{1}{3\cos^3\zeta\sin\zeta}-\frac{8}{3}\operatorname{cotg}2\zeta\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\cos^5\zeta\sin^2\zeta} &= \frac{1}{4\cos^4\zeta\sin\zeta}+\frac{5}{8\cos^2\zeta\sin\zeta}- \\
&\quad -\frac{15}{8\sin\zeta}+\frac{15}{8}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\zeta\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\cos^6\zeta\sin^2\zeta} &= \frac{1}{5\cos^5\zeta\sin\zeta}+\frac{2}{5\cos^3\zeta\sin\zeta}- \\
&\quad -\frac{16}{5}\operatorname{cotg}2\zeta\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\cos^7\zeta\sin^2\zeta} &= \frac{1}{6\cos^6\zeta\sin\zeta}+\frac{7}{24\cos^4\zeta\sin\zeta}+ \\
&\quad +\frac{35}{48\cos^2\zeta\sin\zeta}-\frac{35}{16\sin\zeta}+ \\
&\quad +\frac{35}{16}\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\zeta\,, \\
\int\frac{d\zeta}{\cos^8\zeta\sin^2\zeta} &= \frac{1}{7\cos^7\zeta\sin\zeta}+\frac{8}{35\cos^5\zeta\sin\zeta}+ \\
&\quad +\frac{16}{35\cos^3\zeta\sin\zeta}-\frac{128}{35}\operatorname{cotg}2\zeta\,.
\end{aligned}
\qquad (250)
$$

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{d\zeta}{\sin^m\zeta\cos^3\zeta} = -\frac{1}{(m-1)\sin^{m-1}\zeta\cos^2\zeta} + \frac{m+1}{m-1}\int\frac{d\zeta}{\sin^{m-2}\zeta\cos^3\zeta}\,,\\
&\int \frac{d\zeta}{\sin^3\zeta\cos^3\zeta} = -\frac{2\operatorname{cotg}2\zeta}{\sin 2\zeta} - 2\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2} - 2\zeta\right),\\
&\int \frac{d\zeta}{\sin^4\zeta\cos^3\zeta} = -\frac{1}{3\sin^3\zeta\cos^2\zeta} + \frac{5}{6\sin\zeta\cos^2\zeta} - \frac{5}{2\sin\zeta} + \frac{5}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\zeta\,,\\
&\int \frac{d\zeta}{\sin^5\zeta\cos^3\zeta} = -\frac{1}{4\sin^4\zeta\cos^2\zeta} - \frac{3\operatorname{cotg}2\zeta}{\sin 2\zeta} - 3\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2} - 2\zeta\right),\\
&\int \frac{d\zeta}{\cos^m\zeta\sin^3\zeta} = \frac{1}{(m-1)\cos^{m-1}\zeta\sin^2\zeta} + \frac{m+1}{m-1}\int\frac{d\zeta}{\cos^{m-2}\zeta\sin^3\zeta}\,,\\
&\int \frac{d\zeta}{\cos^3\zeta\sin^3\zeta} = -\frac{2\operatorname{cotg}2\zeta}{\sin 2\zeta} - 2\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2} - 2\zeta\right),\\
&\int \frac{d\zeta}{\cos^4\zeta\sin^3\zeta} = \frac{1}{3\cos^3\zeta\sin^2\zeta} - \frac{5}{6\cos\zeta\sin^2\zeta} + \frac{5}{2\cos\zeta} - \frac{5}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2} - \zeta\right),\\
&\int \frac{d\zeta}{\cos^5\zeta\sin^3\zeta} = \frac{1}{4\cos^4\zeta\sin^2\zeta} - \frac{3\operatorname{cotg}2\zeta}{\sin 2\zeta} - 3\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2} - 2\zeta\right).
\end{aligned}
\tag{251}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{d\zeta}{\sin^m\zeta\cos^4\zeta} = -\frac{1}{(m-1)\sin^{m-1}\zeta\cos^3\zeta} + \frac{m+2}{m-1}\int\frac{d\zeta}{\sin^{m-2}\zeta\cos^4\zeta}\,,\\
&\int \frac{d\zeta}{\sin^4\zeta\cos^4\zeta} = -\frac{8\operatorname{cotg}^3 2\zeta}{3} - 8\operatorname{cotg}2\zeta\,,\\
&\int \frac{d\zeta}{\sin^5\zeta\cos^4\zeta} = -\frac{1}{4\sin^4\zeta\cos^3\zeta} + \frac{7}{12\sin^2\zeta\cos^3\zeta} - \frac{35}{24\sin^2\zeta\cos\zeta} + \frac{35}{8\cos\zeta} - \frac{35}{8}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2} - \zeta\right),\\
&\int \frac{d\zeta}{\cos^m\zeta\sin^4\zeta} = \frac{1}{(m-1)\cos^{m-1}\zeta\sin^3\zeta} + \frac{m+2}{m-1}\int\frac{d\zeta}{\cos^{m-2}\zeta\sin^4\zeta}\,,\\
&\int \frac{d\zeta}{\cos^4\zeta\sin^4\zeta} = -\frac{8\operatorname{cotg}^3 2\zeta}{3} - 8\operatorname{cotg}2\zeta\,,\\
&\int \frac{d\zeta}{\cos^5\zeta\sin^4\zeta} = \frac{1}{4\cos^4\zeta\sin^3\zeta} - \frac{7}{12\cos^2\zeta\sin^3\zeta} + \frac{35}{24\cos^2\zeta\sin\zeta} - \frac{35}{8\sin\zeta} + \frac{35}{8}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\zeta\,.
\end{aligned}
\tag{252}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{d\zeta}{\sin^m\zeta\cos^n\zeta} = -\frac{1}{(m-1)\sin^{m-1}\zeta\cos^{n-1}\zeta} + \frac{m+n-2}{m-1}\int\frac{d\zeta}{\sin^{m-2}\zeta\cos^n\zeta}\,,\\
&\int \frac{d\zeta}{\cos^m\zeta\sin^n\zeta} = \frac{1}{(m-1)\cos^{m-1}\zeta\sin^{n-1}\zeta} + \frac{m+n-2}{m-1}\int\frac{d\zeta}{\cos^{m-2}\zeta\sin^n\zeta}\,.
\end{aligned}
\tag{253}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\sin^m\zeta}{\cos\zeta}\,d\zeta = -\frac{\sin^{m-1}\zeta}{m-1} + \int\frac{\sin^{m-2}\zeta}{\cos\zeta}\,d\zeta \quad (m > 1)\,,\\
&\int \frac{\sin^2\zeta}{\cos\zeta}\,d\zeta = -\sin\zeta + \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\zeta\,,\\
&\int \frac{\sin^4\zeta}{\cos\zeta}\,d\zeta = -\frac{\sin^3\zeta}{3} - \sin\zeta + \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\zeta\,,\\
&\int \frac{\sin^6\zeta}{\cos\zeta}\,d\zeta = -\frac{\sin^5\zeta}{5} - \frac{\sin^3\zeta}{3} - \sin\zeta + \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\zeta\,,\\
&\int \frac{\sin^8\zeta}{\cos\zeta}\,d\zeta = -\frac{\sin^7\zeta}{7} - \frac{\sin^5\zeta}{5} - \frac{\sin^3\zeta}{3} - \sin\zeta + \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\zeta\,,\\
&\int \frac{\cos^m\zeta}{\sin\zeta}\,d\zeta = \frac{\cos^{m-1}\zeta}{m-1} + \int\frac{\cos^{m-2}\zeta}{\sin\zeta}\,d\zeta \quad (m > 1)\,,\\
&\int \frac{\cos^2\zeta}{\sin\zeta}\,d\zeta = \cos\zeta - \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2} - \zeta\right),\\
&\int \frac{\cos^4\zeta}{\sin\zeta}\,d\zeta = \frac{\cos^3\zeta}{3} + \cos\zeta - \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2} - \zeta\right),\\
&\int \frac{\cos^6\zeta}{\sin\zeta}\,d\zeta = \frac{\cos^5\zeta}{5} + \frac{\cos^3\zeta}{3} + \cos\zeta - \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2} - \zeta\right),\\
&\int \frac{\cos^8\zeta}{\sin\zeta}\,d\zeta = \frac{\cos^7\zeta}{7} + \frac{\cos^5\zeta}{5} + \frac{\cos^3\zeta}{3} + \cos\zeta - \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2} - \zeta\right).
\end{aligned}
\tag{254}
$$

[Für die ungeraden Potenzen vgl. (86)].

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\sin^m\zeta}{\cos^2\zeta}\,d\zeta = -\frac{\sin^{m-1}\zeta}{(m-2)\cos\zeta} + \frac{m-1}{m-2}\int\frac{\sin^{m-2}\zeta}{\cos^2\zeta}\,d\zeta\,,\\
&\int \frac{\sin\zeta}{\cos^2\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{\cos\zeta}\,,\\
&\int \frac{\sin^2\zeta}{\cos^2\zeta}\,d\zeta = -\zeta + \operatorname{tang}\zeta\,,\\
&\int \frac{\sin^3\zeta}{\cos^2\zeta}\,d\zeta = \cos\zeta + \frac{1}{\cos\zeta}\,,\\
&\int \frac{\sin^4\zeta}{\cos^2\zeta}\,d\zeta = -\frac{\sin^3\zeta}{2\cos\zeta} - \frac{3}{2}\zeta + \frac{3}{2}\operatorname{tang}\zeta\,,\\
&\int \frac{\cos^m\zeta}{\sin^2\zeta}\,d\zeta = \frac{\cos^{m-1}\zeta}{(m-2)\sin\zeta} + \frac{m-1}{m-2}\int\frac{\cos^{m-2}\zeta}{\sin^2\zeta}\,d\zeta\,,\\
&\int \frac{\cos\zeta}{\sin^2\zeta}\,d\zeta = -\frac{1}{\sin\zeta}\,,\\
&\int \frac{\cos^2\zeta}{\sin^2\zeta}\,d\zeta = -\zeta - \operatorname{cotg}\zeta\,,\\
&\int \frac{\cos^3\zeta}{\sin^2\zeta}\,d\zeta = -\sin\zeta - \frac{1}{\sin\zeta}\,,\\
&\int \frac{\cos^4\zeta}{\sin^2\zeta}\,d\zeta = \frac{\cos^3\zeta}{2\sin\zeta} - \frac{3}{2}\zeta - \frac{3}{2}\operatorname{cotg}\zeta\,,
\end{aligned}
\tag{255}
$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{\sin^5\zeta}{\cos^2\zeta}\,d\zeta=-\frac{\sin^4\zeta}{3\cos\zeta}+\frac{4}{3}\cos\zeta+\frac{4}{3\cos\zeta}\,, &&\int\frac{\cos^5\zeta}{\sin^2\zeta}\,d\zeta=\frac{\cos^4\zeta}{3\sin\zeta}-\frac{4}{3}\sin\zeta-\frac{4}{3\sin\zeta}\,,\\
&\int\frac{\sin^6\zeta}{\cos^2\zeta}\,d\zeta=-\frac{\sin^5\zeta}{4\cos\zeta}-\frac{5\sin^3\zeta}{8\cos\zeta}-\frac{15}{8}\zeta+\frac{15}{8}\operatorname{tang}\zeta\,, &&\int\frac{\cos^6\zeta}{\sin^2\zeta}\,d\zeta=\frac{\cos^5\zeta}{4\sin\zeta}+\frac{5\cos^3\zeta}{8\sin\zeta}-\frac{15}{8}\zeta-\frac{15}{8}\operatorname{cotg}\zeta\,,\\
&\int\frac{\sin^7\zeta}{\cos^2\zeta}\,d\zeta=-\frac{\sin^6\zeta}{5\cos\zeta}-\frac{2\sin^4\zeta}{5\cos\zeta}+\frac{8}{5}\cos\zeta+\frac{8}{5\cos\zeta}\,, &&\int\frac{\cos^7\zeta}{\sin^2\zeta}\,d\zeta=\frac{\cos^6\zeta}{5\sin\zeta}+\frac{2\cos^4\zeta}{5\sin\zeta}-\frac{8}{5}\sin\zeta-\frac{8}{5\sin\zeta}\,,\\
&\int\frac{\sin^8\zeta}{\cos^2\zeta}\,d\zeta=-\frac{\sin^7\zeta}{6\cos\zeta}-\frac{7\sin^5\zeta}{24\cos\zeta}-\frac{35\sin^3\zeta}{48\cos\zeta}- &&\int\frac{\cos^8\zeta}{\sin^2\zeta}\,d\zeta=\frac{\cos^7\zeta}{6\sin\zeta}+\frac{7\cos^5\zeta}{24\sin\zeta}+\frac{35\cos^3\zeta}{48\sin\zeta}-\frac{105}{48}\zeta-\\
&\qquad-\frac{105}{48}\zeta+\frac{105}{48}\operatorname{tang}\zeta\,, &&\qquad-\frac{105}{48}\operatorname{cotg}\zeta\,.
\end{aligned}\right\}\tag{255}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{\sin^m\zeta}{\cos^3\zeta}\,d\zeta=-\frac{\sin^{m-1}\zeta}{(m-3)\cos^2\zeta}+\frac{m-1}{m-3}\int\frac{\sin^{m-2}\zeta}{\cos^3\zeta}\,d\zeta\,, &&\int\frac{\cos^m\zeta}{\sin^3\zeta}\,d\zeta=\frac{\cos^{m-1}\zeta}{(m-3)\sin^2\zeta}+\frac{m-1}{m-3}\int\frac{\cos^{m-2}\zeta}{\sin^3\zeta}\,d\zeta\,,\\
&\int\frac{\sin^2\zeta}{\cos^3\zeta}\,d\zeta=\frac{\sin\zeta}{2\cos^2\zeta}-\frac{1}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\zeta\,, &&\int\frac{\cos^2\zeta}{\sin^3\zeta}\,d\zeta=-\frac{\cos\zeta}{2\sin^2\zeta}+\frac{1}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right),\\
&\int\frac{\sin^4\zeta}{\cos^3\zeta}\,d\zeta=-\frac{\sin^3\zeta}{\cos^2\zeta}+\frac{3\sin\zeta}{2\cos^2\zeta}-\frac{3}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\zeta\,, &&\int\frac{\cos^4\zeta}{\sin^3\zeta}\,d\zeta=\frac{\cos^3\zeta}{\sin^2\zeta}-\frac{3\cos\zeta}{2\sin^2\zeta}+\frac{3}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right),\\
&\int\frac{\sin^6\zeta}{\cos^3\zeta}\,d\zeta=-\frac{\sin^5\zeta}{3\cos^2\zeta}-\frac{5\sin^3\zeta}{3\cos^2\zeta}+\frac{5\sin\zeta}{2\cos^2\zeta}- &&\int\frac{\cos^6\zeta}{\sin^3\zeta}\,d\zeta=\frac{\cos^5\zeta}{3\sin^2\zeta}+\frac{5\cos^3\zeta}{3\sin^2\zeta}-\frac{5\cos\zeta}{2\sin^2\zeta}+\\
&\qquad-\frac{5}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\zeta\,, &&\qquad+\frac{5}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right),\\
&\int\frac{\sin^8\zeta}{\cos^3\zeta}\,d\zeta=-\frac{\sin^7\zeta}{5\cos^2\zeta}-\frac{7\sin^5\zeta}{15\cos^2\zeta}-\frac{7\sin^3\zeta}{3\cos^2\zeta}+ &&\int\frac{\cos^8\zeta}{\sin^3\zeta}\,d\zeta=\frac{\cos^7\zeta}{5\sin^2\zeta}+\frac{7\cos^5\zeta}{15\sin^2\zeta}+\frac{7\cos^3\zeta}{3\sin^2\zeta}-\\
&\qquad+\frac{7\sin\zeta}{2\cos^2\zeta}-\frac{7}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\zeta\,, &&\qquad-\frac{7\cos\zeta}{2\sin^2\zeta}+\frac{7}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right).
\end{aligned}\right\}\tag{256}$$

[Für die ungeraden Potenzen vgl. (87).]

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{\sin^m\zeta}{\cos^4\zeta}\,d\zeta=-\frac{\sin^{m-1}\zeta}{(m-4)\cos^3\zeta}+\frac{m-1}{m-4}\int\frac{\sin^{m-2}\zeta}{\cos^4\zeta}\,d\zeta\,, &&\int\frac{\cos^m\zeta}{\sin^4\zeta}\,d\zeta=\frac{\cos^{m-1}\zeta}{(m-4)\sin^3\zeta}+\frac{m-1}{m-4}\int\frac{\cos^{m-2}\zeta}{\sin^4\zeta}\,d\zeta\,,\\
&\int\frac{\sin\zeta}{\cos^4\zeta}\,d\zeta=\frac{1}{3\cos^3\zeta}\,, &&\int\frac{\cos\zeta}{\sin^4\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{3\sin^3\zeta}\,,\\
&\int\frac{\sin^2\zeta}{\cos^4\zeta}\,d\zeta=\frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\zeta\,, &&\int\frac{\cos^2\zeta}{\sin^4\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3\zeta\,,\\
&\int\frac{\sin^3\zeta}{\cos^4\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{\cos\zeta}+\frac{1}{3\cos^3\zeta}\,, &&\int\frac{\cos^3\zeta}{\sin^4\zeta}\,d\zeta=\frac{1}{\sin\zeta}-\frac{1}{3\sin^3\zeta}\,,\\
&\int\frac{\sin^4\zeta}{\cos^4\zeta}\,d\zeta=\zeta-\operatorname{tang}\zeta+\frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\zeta\,, &&\int\frac{\cos^4\zeta}{\sin^4\zeta}\,d\zeta=\zeta+\operatorname{cotg}\zeta-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3\zeta\,.
\end{aligned}\right\}\tag{257}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{\sin^m\zeta}{\cos^n\zeta}\,d\zeta=-\frac{\sin^{m-1}\zeta}{(m-n)\cos^{n-1}\zeta}+\frac{m-1}{m-n}\int\frac{\sin^{m-2}\zeta\,d\zeta}{\cos^n\zeta}\quad(m\neq n), &&\int\frac{\cos^m\zeta}{\sin^n\zeta}\,d\zeta=\frac{\cos^{m-1}\zeta}{(m-n)\sin^{n-1}\zeta}+\frac{m-1}{m-n}\int\frac{\cos^{m-2}\zeta\,d\zeta}{\sin^n\zeta}\quad(m\neq n),\\
&\int\frac{\sin^m\zeta}{\cos^n\zeta}\,d\zeta=\frac{\sin^{m+1}\zeta}{(n-1)\cos^{n-1}\zeta}-\frac{m-n+2}{n-1}\int\frac{\sin^m\zeta\,d\zeta}{\cos^{n-2}\zeta}\quad(n\neq 1), &&\int\frac{\cos^m\zeta}{\sin^n\zeta}\,d\zeta=-\frac{\cos^{m+1}\zeta}{(n-1)\sin^{n-1}\zeta}-\frac{m-n+2}{n-1}\int\frac{\cos^m d\zeta}{\sin^{n-2}\zeta}\quad(n\neq 1),\\
&\int\frac{\sin^m\zeta}{\cos^n\zeta}\,d\zeta=\frac{\sin^{m-1}\zeta}{(n-1)\cos^{n-1}\zeta}-\frac{m-1}{n-1}\int\frac{\sin^{m-2}\zeta\,d\zeta}{\cos^{n-2}\zeta}\quad(n\neq 1), &&\int\frac{\cos^m\zeta}{\sin^n\zeta}\,d\zeta=-\frac{\cos^{m-1}\zeta}{(n-1)\sin^{n-1}\zeta}-\frac{m-1}{n-1}\int\frac{\cos^{m-2}d\zeta}{\sin^{n-2}\zeta}\quad(n\neq 1).
\end{aligned}\right\}\tag{258}$$

$$\int\frac{\sin\zeta}{\cos^n\zeta}\,d\zeta=\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{\cos^{n-1}\zeta}\quad(n\neq 1),\qquad \int\frac{\cos\zeta}{\sin^n\zeta}\,d\zeta=-\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{\sin^{n-1}\zeta}\quad(n\neq 1).\tag{259}$$

$$\int\sin^m\zeta\cos\zeta\,d\zeta=\frac{\sin^{m+1}\zeta}{m+1},\qquad \int\cos^m\zeta\sin\zeta\,d\zeta=-\frac{\cos^{m+1}\zeta}{m+1}.\tag{260}$$

$$\int \sin^m\zeta \cos^2\zeta\, d\zeta = -\frac{\sin^{m-1}\zeta \cos^3\zeta}{m+2} + \frac{m-1}{m+2}\int \sin^{m-2}\zeta \cos^2\zeta\, d\zeta,$$
$$\int \sin\zeta \cos^2\zeta\, d\zeta = -\frac{\cos^3\zeta}{3},$$
$$\int \sin^2\zeta \cos^2\zeta\, d\zeta = \frac{\zeta}{8} - \frac{\sin 4\zeta}{32},$$
$$\int \sin^3\zeta \cos^2\zeta\, d\zeta = -\frac{\sin^2\zeta\cos^3\zeta}{5} - \frac{2\cos^3\zeta}{15},$$
$$\int \sin^4\zeta \cos^2\zeta\, d\zeta = -\frac{\sin^3 2\zeta}{48} + \frac{\zeta}{16} - \frac{\sin 4\zeta}{64},$$
$$\int \sin^5\zeta \cos^2\zeta\, d\zeta = -\frac{\sin^4\zeta\cos^3\zeta}{7} - \frac{4\sin^2\zeta\cos^3\zeta}{35} - \frac{8\cos^3\zeta}{105},$$
$$\int \sin^6\zeta \cos^2\zeta\, d\zeta = -\frac{\sin^5\zeta\cos^3\zeta}{8} - \frac{5\sin^3 2\zeta}{384} + \frac{5\zeta}{128} - \frac{5\sin 4\zeta}{512},$$
$$\int \sin^7\zeta \cos^2\zeta\, d\zeta = -\frac{\sin^6\zeta\cos^3\zeta}{9} - \frac{2\sin^4\zeta\cos^3\zeta}{21} - \frac{8\sin^2\zeta\cos^3\zeta}{105} - \frac{16\cos^3\zeta}{315},$$
$$\int \sin^8\zeta \cos^2\zeta\, d\zeta = -\frac{\sin^7\zeta\cos^3\zeta}{10} - \frac{7\sin^5\zeta\cos^3\zeta}{80} - \frac{7\sin^3 2\zeta}{768} + \frac{7\zeta}{256} - \frac{7\sin 4\zeta}{1024},$$

$$\int \cos^m\zeta \sin^2\zeta\, d\zeta = \frac{\cos^{m-1}\zeta \sin^3\zeta}{m+2} + \frac{m-1}{m+2}\int \cos^{m-2}\zeta \sin^2\zeta\, d\zeta,$$
$$\int \cos\zeta \sin^2\zeta\, d\zeta = \frac{\sin^3\zeta}{3},$$
$$\int \cos^2\zeta \sin^2\zeta\, d\zeta = \frac{\zeta}{8} - \frac{\sin 4\zeta}{32},$$
$$\int \cos^3\zeta \sin^2\zeta\, d\zeta = \frac{\cos^2\zeta\sin^3\zeta}{5} + \frac{2\sin^3\zeta}{15},$$
$$\int \cos^4\zeta \sin^2\zeta\, d\zeta = \frac{\sin^3 2\zeta}{48} + \frac{\zeta}{16} - \frac{\sin 4\zeta}{64},$$
$$\int \cos^5\zeta \sin^2\zeta\, d\zeta = \frac{\cos^4\zeta\sin^3\zeta}{7} + \frac{4\cos\zeta\sin^3\zeta}{35} + \frac{8\sin^3\zeta}{105},$$
$$\int \cos^6\zeta \sin^2\zeta\, d\zeta = \frac{\cos^5\zeta\sin^3\zeta}{8} + \frac{5\sin^3 2\zeta}{384} + \frac{5\zeta}{128} - \frac{5\sin 4\zeta}{512},$$
$$\int \cos^7\zeta \sin^2\zeta\, d\zeta = \frac{\cos^6\zeta\sin^3\zeta}{9} + \frac{2\cos^4\zeta\sin^3\zeta}{21} + \frac{8\cos^2\zeta\sin^3\zeta}{105} + \frac{16\sin^3\zeta}{315},$$
$$\int \cos^8\zeta \sin^2\zeta\, d\zeta = \frac{\cos^7\zeta\sin^3\zeta}{10} + \frac{7\cos^5\zeta\sin^3\zeta}{80} + \frac{7\sin^3 2\zeta}{768} + \frac{7\zeta}{256} - \frac{7\sin 4\zeta}{1024}. \qquad (261)$$

$$\int \sin^m\zeta \cos^3\zeta\, d\zeta = -\frac{\sin^{m-1}\zeta \cos^4\zeta}{m+3} + \frac{m-1}{m+3}\int \sin^{m-2}\zeta \cos^3\zeta\, d\zeta,$$
$$\int \sin^2\zeta \cos^3\zeta\, d\zeta = \frac{\sin^3\zeta\cos^2\zeta}{5} + \frac{2\sin^3\zeta}{15},$$
$$\int \sin^4\zeta \cos^3\zeta\, d\zeta = -\frac{\sin^3\zeta\cos^4\zeta}{7} + \frac{3\sin^3\zeta\cos^2\zeta}{35} + \frac{2\sin^3\zeta}{35},$$
$$\int \sin^6\zeta \cos^3\zeta\, d\zeta = -\frac{\sin^5\zeta\cos^4\zeta}{9} - \frac{5\sin^3\zeta\cos^4\zeta}{63} + \frac{\sin^3\zeta\cos^2\zeta}{21} + \frac{2\sin^3\zeta}{63},$$

$$\int \cos^m\zeta \sin^3\zeta\, d\zeta = \frac{\cos^{m-1}\zeta \sin^4\zeta}{m+3} + \frac{m-1}{m+3}\int \cos^{m-2}\zeta \sin^3\zeta\, d\zeta,$$
$$\int \cos^2\zeta \sin^3\zeta\, d\zeta = -\frac{\cos^3\zeta\sin^2\zeta}{5} - \frac{2\cos^3\zeta}{15},$$
$$\int \cos^4\zeta \sin^3\zeta\, d\zeta = \frac{\cos^3\zeta\sin^4\zeta}{7} - \frac{3\cos^3\zeta\sin^2\zeta}{35} - \frac{2\cos^3\zeta}{35},$$
$$\int \cos^6\zeta \sin^3\zeta\, d\zeta = \frac{\cos^5\zeta\sin^4\zeta}{9} + \frac{5\cos^3\zeta\sin^4\zeta}{63} - \frac{\cos^3\zeta\sin^2\zeta}{21} - \frac{2\cos^3\zeta}{63}. \qquad (262)$$

[Für die ungeraden Potenzen vgl. (91).]

$$\int \sin^m\zeta \cos^4\zeta\, d\zeta = -\frac{\sin^{m-1}\zeta \cos^5\zeta}{m+4} + \frac{m-1}{m+4}\int \sin^{m-2}\zeta \cos^4\zeta\, d\zeta,$$
$$\int \sin^4\zeta \cos^4\zeta\, d\zeta = \frac{3\zeta}{128} - \frac{\sin 4\zeta}{128} + \frac{\sin 8\zeta}{1024},$$
$$\int \sin^5\zeta \cos^4\zeta\, d\zeta = -\frac{\sin^4\zeta\cos^5\zeta}{9} + \frac{4\cos^3\zeta\sin^4\zeta}{63} - \frac{4\cos^3\zeta\sin^2\zeta}{105} - \frac{8\cos^3\zeta}{315},$$
$$\int \sin^6\zeta \cos^4\zeta\, d\zeta = -\frac{\sin^5 2\zeta}{320} - \frac{3\zeta}{256} - \frac{\sin 4\zeta}{256} + \frac{\sin 8\zeta}{2048},$$

$$\int \cos^m\zeta \sin^4\zeta\, d\zeta = \frac{\cos^{m-1}\zeta \sin^5\zeta}{m+4} + \frac{m-1}{m+4}\int \cos^{m-2}\zeta \sin^4\zeta\, d\zeta,$$
$$\int \cos^4\zeta \sin^4\zeta\, d\zeta = \frac{3\zeta}{128} - \frac{\sin 4\zeta}{128} + \frac{\sin 8\zeta}{1024},$$
$$\int \cos^5\zeta \sin^4\zeta\, d\zeta = \frac{\cos^4\zeta\sin^5\zeta}{9} - \frac{4\sin^3\zeta\cos^4\zeta}{63} + \frac{4\sin^3\zeta\cos^2\zeta}{105} + \frac{8\sin^3\zeta}{315},$$
$$\int \cos^6\zeta \sin^4\zeta\, d\zeta = \frac{\sin^5 2\zeta}{320} + \frac{3\zeta}{256} - \frac{\sin 4\zeta}{256} + \frac{\sin 8\zeta}{2048}. \qquad (263)$$

$$
\begin{aligned}
&\int \sin^m\zeta\cos^n\zeta\,d\zeta = -\frac{\sin^{m-1}\zeta\cos^{n+1}\zeta}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int\sin^{m-2}\zeta\cos^n\zeta\,d\zeta, \\
&\int \cos^m\zeta\sin^n\zeta\,d\zeta = \frac{\cos^{m-1}\zeta\sin^{n+1}\zeta}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int\cos^{m-2}\zeta\sin^n\zeta\,d\zeta.
\end{aligned}
\tag{264}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int\operatorname{tang}^n\zeta\,d\zeta = \frac{\operatorname{tang}^{n-1}\zeta}{n-1} - \int\operatorname{tang}^{n-2}\zeta\,d\zeta, &&\int\operatorname{cotg}^n\zeta\,d\zeta = -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1}\zeta}{n-1} - \int\operatorname{cotg}^{n-2}\zeta\,d\zeta, \\
&\int\operatorname{tang}^2\zeta\,d\zeta = \operatorname{tang}\zeta - \zeta, &&\int\operatorname{cotg}^2\zeta\,d\zeta = -\operatorname{cotg}\zeta - \zeta, \\
&\int\operatorname{tang}^4\zeta\,d\zeta = \frac{\operatorname{tang}^3\zeta}{3} - \operatorname{tang}\zeta + \zeta, &&\int\operatorname{cotg}^4\zeta\,d\zeta = -\frac{\operatorname{cotg}^3\zeta}{3} + \operatorname{cotg}\zeta + \zeta, \\
&\int\operatorname{tang}^6\zeta\,d\zeta = \frac{\operatorname{tang}^5\zeta}{5} - \frac{\operatorname{tang}^3\zeta}{3} + \operatorname{tang}\zeta - \zeta, &&\int\operatorname{cotg}^6\zeta\,d\zeta = -\frac{\operatorname{cotg}^5\zeta}{5} + \frac{\operatorname{cotg}^3\zeta}{3} - \operatorname{cotg}\zeta - \zeta, \\
&\int\operatorname{tang}^8\zeta\,d\zeta = \frac{\operatorname{tang}^7\zeta}{7} - \frac{\operatorname{tang}^5\zeta}{5} + \frac{\operatorname{tang}^3\zeta}{3} - \operatorname{tang}\zeta + \zeta, &&\int\operatorname{cotg}^8\zeta\,d\zeta = -\frac{\operatorname{cotg}^7\zeta}{7} + \frac{\operatorname{cotg}^5\zeta}{5} - \frac{\operatorname{cotg}^3\zeta}{3} + \operatorname{cotg}\zeta + \zeta.
\end{aligned}
\tag{265}
$$

[Für die ungeraden Potenzen vgl. (95).]

c) Hyperbolische Integrale.

Durch Vertauschen von ζ mit $i\zeta$ lassen sich die unter β) aufgeführten trigonometrischen Integrale unmittelbar in hyperbolische Integrale umschreiben. Man erhält:

$$
\begin{aligned}
&\int\mathfrak{Sin}^m\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^{m-1}\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{m} - \frac{m-1}{m}\int\mathfrak{Sin}^{m-2}\zeta\,d\zeta, &&\int\mathfrak{Cos}^m\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^{m-1}\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{m} + \frac{m-1}{m}\int\mathfrak{Cos}^{m-2}\zeta\,d\zeta, \\
&\int\mathfrak{Sin}\,\zeta\,d\zeta = \mathfrak{Cos}\,\zeta, &&\int\mathfrak{Cos}\,\zeta\,d\zeta = \mathfrak{Sin}\,\zeta, \\
&\int\mathfrak{Sin}^2\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{2} - \frac{\zeta}{2}, &&\int\mathfrak{Cos}^2\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}\,\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{2} + \frac{\zeta}{2}, \\
&\int\mathfrak{Sin}^3\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{3} - \frac{2}{3}\mathfrak{Cos}\,\zeta, &&\int\mathfrak{Cos}^3\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{3} + \frac{2}{3}\mathfrak{Sin}\,\zeta, \\
&\int\mathfrak{Sin}^4\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{4} - \frac{3\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{8} + \frac{3\zeta}{8}, &&\int\mathfrak{Cos}^4\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{4} + \frac{3\,\mathfrak{Cos}\,\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{8} + \frac{3\zeta}{8}, \\
&\int\mathfrak{Sin}^5\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^4\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{5} - \frac{4\,\mathfrak{Sin}^2\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{15} + \frac{8}{15}\mathfrak{Cos}\,\zeta, &&\int\mathfrak{Cos}^5\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^4\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{5} + \frac{4\,\mathfrak{Cos}^2\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{15} + \frac{8}{15}\mathfrak{Sin}\,\zeta, \\
&\int\mathfrak{Sin}^6\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^5\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{6} - \frac{5\,\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{24} + \frac{15\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{48} - \frac{15\zeta}{48}, &&\int\mathfrak{Cos}^6\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^5\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{6} + \frac{5\,\mathfrak{Cos}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{24} + \frac{15\,\mathfrak{Cos}\,\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{48} + \frac{15\zeta}{48}, \\
&\int\mathfrak{Sin}^7\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^6\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{7} - \frac{6\,\mathfrak{Sin}^4\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{35} + \frac{24\,\mathfrak{Sin}^2\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{105} - \frac{48}{105}\mathfrak{Cos}\,\zeta, &&\int\mathfrak{Cos}^7\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^6\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{7} + \frac{6\,\mathfrak{Cos}^4\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{35} + \frac{24\,\mathfrak{Cos}^2\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{105} + \frac{48}{105}\mathfrak{Sin}\,\zeta, \\
&\int\mathfrak{Sin}^8\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^7\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{8} - \frac{7\,\mathfrak{Sin}^5\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{48} + \frac{35\,\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{192} - \frac{105\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{384} + \frac{105\zeta}{384}, &&\int\mathfrak{Cos}^8\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^7\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{8} + \frac{7\,\mathfrak{Cos}^5\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{48} + \frac{35\,\mathfrak{Cos}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{192} + \frac{105\,\mathfrak{Cos}\,\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{384} + \frac{105\zeta}{384}.
\end{aligned}
\tag{266}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int\mathfrak{Sin}\,\zeta\,d\zeta = \mathfrak{Cos}\,\zeta, &&\int\mathfrak{Cos}\,\zeta\,d\zeta = \mathfrak{Sin}\,\zeta, \\
&\int\mathfrak{Sin}^2\zeta\,d\zeta = -\frac{\zeta}{2} + \frac{\mathfrak{Sin}\,2\zeta}{4}, &&\int\mathfrak{Cos}^2\zeta\,d\zeta = \frac{\zeta}{2} + \frac{\mathfrak{Sin}\,2\zeta}{4},
\end{aligned}
\tag{267}
$$

$$\int \mathfrak{Sin}^3 \zeta \, d\zeta = -\frac{3\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{4} + \frac{\mathfrak{Cos}\,3\zeta}{12}, \qquad \int \mathfrak{Cos}^3 \zeta \, d\zeta = \frac{3\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{4} + \frac{\mathfrak{Sin}\,3\zeta}{12}, \tag{267}$$

$$\int \mathfrak{Sin}^4 \zeta \, d\zeta = \frac{3\zeta}{8} - \frac{\mathfrak{Sin}\,2\zeta}{4} + \frac{\mathfrak{Sin}\,4\zeta}{32}, \qquad \int \mathfrak{Cos}^4 \zeta \, d\zeta = \frac{3\zeta}{8} + \frac{\mathfrak{Sin}\,2\zeta}{4} + \frac{\mathfrak{Sin}\,4\zeta}{32},$$

$$\int \mathfrak{Sin}^5 \zeta \, d\zeta = \frac{5\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{8} - \frac{5\,\mathfrak{Cos}\,3\zeta}{48} + \frac{\mathfrak{Cos}\,5\zeta}{80}, \qquad \int \mathfrak{Cos}^5 \zeta \, d\zeta = \frac{5\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{8} + \frac{5\,\mathfrak{Sin}\,3\zeta}{48} + \frac{\mathfrak{Sin}\,5\zeta}{80},$$

$$\int \mathfrak{Sin}^6 \zeta \, d\zeta = -\frac{5\zeta}{16} + \frac{15\,\mathfrak{Sin}\,2\zeta}{64} - \frac{3\,\mathfrak{Sin}\,4\zeta}{64} + \frac{\mathfrak{Sin}\,6\zeta}{192}, \qquad \int \mathfrak{Cos}^6 \zeta \, d\zeta = \frac{5\zeta}{16} + \frac{15\,\mathfrak{Sin}\,2\zeta}{64} + \frac{3\,\mathfrak{Sin}\,4\zeta}{64} + \frac{\mathfrak{Sin}\,6\zeta}{192},$$

$$\int \mathfrak{Sin}^7 \zeta \, d\zeta = -\frac{35\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{64} + \frac{21\,\mathfrak{Cos}\,3\zeta}{192} - \frac{7\,\mathfrak{Cos}\,5\zeta}{320} + \frac{\mathfrak{Cos}\,7\zeta}{448}, \qquad \int \mathfrak{Cos}^7 \zeta \, d\zeta = \frac{35\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{64} + \frac{21\,\mathfrak{Sin}\,3\zeta}{192} + \frac{7\,\mathfrak{Sin}\,5\zeta}{320} + \frac{\mathfrak{Sin}\,7\zeta}{448},$$

$$\int \mathfrak{Sin}^8 \zeta \, d\zeta = \frac{35\zeta}{128} - \frac{7\,\mathfrak{Sin}\,2\zeta}{32} + \frac{7\,\mathfrak{Sin}\,4\zeta}{128} - \frac{\mathfrak{Sin}\,6\zeta}{96} + \frac{\mathfrak{Sin}\,8\zeta}{1024}, \qquad \int \mathfrak{Cos}^8 \zeta \, d\zeta = \frac{35\zeta}{128} + \frac{7\,\mathfrak{Sin}\,2\zeta}{32} + \frac{7\,\mathfrak{Sin}\,4\zeta}{128} + \frac{\mathfrak{Sin}\,6\zeta}{96} + \frac{\mathfrak{Sin}\,8\zeta}{1024}.$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^m \zeta} = -\frac{\mathfrak{Cos}\,\zeta}{(m-1)\,\mathfrak{Sin}^{m-1}\zeta} - \frac{m-2}{m-1}\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^{m-2}\zeta}, \qquad \int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^m \zeta} = \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{(m-1)\,\mathfrak{Cos}^{m-1}\zeta} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^{m-2}\zeta},$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}\,\zeta} = \ln \mathfrak{Tang}\,\frac{\zeta}{2}, \qquad \int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}\,\zeta} = \mathfrak{Amp}\,\zeta,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^2 \zeta} = -\mathfrak{Cotg}\,\zeta, \qquad \int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^2 \zeta} = \mathfrak{Tang}\,\zeta,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^3 \zeta} = -\frac{\mathfrak{Cotg}\,\zeta}{2\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} - \frac{1}{2}\ln \mathfrak{Tang}\,\frac{\zeta}{2}, \qquad \int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^3 \zeta} = \frac{\mathfrak{Tang}\,\zeta}{2\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} + \frac{1}{2}\mathfrak{Amp}\,\zeta,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^4 \zeta} = -\frac{\mathfrak{Cotg}^3\zeta}{3} + \mathfrak{Cotg}\,\zeta, \qquad \int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^4 \zeta} = -\frac{\mathfrak{Tang}^3\zeta}{3} + \mathfrak{Tang}\,\zeta,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^5 \zeta} = -\frac{\mathfrak{Cotg}\,\zeta}{4\,\mathfrak{Sin}^3\zeta} + \frac{3\,\mathfrak{Cotg}\,\zeta}{8\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} + \frac{3}{8}\ln \mathfrak{Tang}\,\frac{\zeta}{2}, \qquad \int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^5 \zeta} = \frac{\mathfrak{Tang}\,\zeta}{4\,\mathfrak{Cos}^3\zeta} + \frac{3\,\mathfrak{Tang}\,\zeta}{8\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} + \frac{3}{8}\mathfrak{Amp}\,\zeta, \tag{268}$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^6 \zeta} = -\frac{\mathfrak{Cotg}\,\zeta}{5\,\mathfrak{Sin}^4\zeta} + \frac{4\,\mathfrak{Cotg}\,\zeta}{15\,\mathfrak{Sin}^2\zeta} - \frac{8}{15}\mathfrak{Cotg}\,\zeta, \qquad \int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^6 \zeta} = \frac{\mathfrak{Tang}\,\zeta}{5\,\mathfrak{Cos}^4\zeta} + \frac{4\,\mathfrak{Tang}\,\zeta}{15\,\mathfrak{Cos}^2\zeta} + \frac{8}{15}\mathfrak{Tang}\,\zeta,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^7 \zeta} = -\frac{\mathfrak{Cotg}\,\zeta}{6\,\mathfrak{Sin}^5\zeta} + \frac{5\,\mathfrak{Cotg}\,\zeta}{24\,\mathfrak{Sin}^3\zeta} - \frac{5\,\mathfrak{Cotg}\,\zeta}{16\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} - \frac{5}{16}\ln \mathfrak{Tang}\,\frac{\zeta}{2}, \qquad \int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^7 \zeta} = \frac{\mathfrak{Tang}\,\zeta}{6\,\mathfrak{Cos}^5\zeta} + \frac{5\,\mathfrak{Tang}\,\zeta}{24\,\mathfrak{Cos}^3\zeta} + \frac{5\,\mathfrak{Tang}\,\zeta}{16\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} + \frac{5}{16}\mathfrak{Amp}\,\zeta,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^8 \zeta} = -\frac{\mathfrak{Cotg}\,\zeta}{7\,\mathfrak{Sin}^6\zeta} + \frac{6\,\mathfrak{Cotg}\,\zeta}{35\,\mathfrak{Sin}^4\zeta} - \frac{8\,\mathfrak{Cotg}\,\zeta}{35\,\mathfrak{Sin}^2\zeta} + \frac{48}{105}\mathfrak{Cotg}\,\zeta, \qquad \int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^8 \zeta} = \frac{\mathfrak{Tang}\,\zeta}{7\,\mathfrak{Cos}^6\zeta} + \frac{6\,\mathfrak{Tang}\,\zeta}{35\,\mathfrak{Cos}^4\zeta} + \frac{8\,\mathfrak{Tang}\,\zeta}{35\,\mathfrak{Cos}^2\zeta} + \frac{48}{105}\mathfrak{Tang}\,\zeta.$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^m\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} = -\frac{1}{(m-1)\,\mathfrak{Sin}^{m-1}\zeta} - \int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^{m-2}\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}, \qquad \int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^m\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} = \frac{1}{(m-1)\,\mathfrak{Cos}^{m-1}\zeta} + \int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^{m-2}\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta},$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}\,\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} = \ln \mathfrak{Tang}\,\zeta, \qquad \int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}\,\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} = \ln \mathfrak{Tang}\,\zeta,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^2\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} = -\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\zeta} - \mathfrak{Amp}\,\zeta, \qquad \int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^2\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\zeta} + \ln \mathfrak{Tang}\,\frac{\zeta}{2},$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} = -\frac{1}{2\,\mathfrak{Sin}^2\zeta} - \ln \operatorname{tang}\zeta, \qquad \int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} = \frac{1}{2\,\mathfrak{Cos}^2\zeta} + \ln \mathfrak{Tang}\,\zeta,$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^4\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} = -\frac{1}{3\,\mathfrak{Sin}^3\zeta} + \frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\zeta} + \mathfrak{Amp}\,\zeta, \qquad \int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^4\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} = \frac{1}{3\,\mathfrak{Cos}^3\zeta} + \frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\zeta} + \ln \mathfrak{Tang}\,\frac{\zeta}{2},$$

$$\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^5\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} = -\frac{1}{4\,\mathfrak{Sin}^4\zeta} + \frac{1}{2\,\mathfrak{Sin}^2\zeta} + \ln \operatorname{tang}\zeta, \qquad \int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^5\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} = \frac{1}{4\,\mathfrak{Cos}^4\zeta} + \frac{1}{2\,\mathfrak{Cos}^2\zeta} + \ln \mathfrak{Tang}\,\zeta, \tag{269}$$

$$\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^6\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}=-\frac{1}{5\,\mathfrak{Sin}^5\zeta}+\frac{1}{3\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}-\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\zeta}-\mathfrak{Amp}\,\zeta\,,\qquad \int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^6\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}=\frac{1}{5\,\mathfrak{Cos}^5\zeta}+\frac{1}{3\,\mathfrak{Cos}^3\zeta}+\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\zeta}+\ln\mathfrak{Tang}\frac{\zeta}{2}\,,$$

$$\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^7\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}=-\frac{1}{6\,\mathfrak{Sin}^6\zeta}+\frac{1}{4\,\mathfrak{Sin}^4\zeta}-\frac{1}{2\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}-\ln\operatorname{tang}\zeta\,,\qquad \int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^7\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}=\frac{1}{6\,\mathfrak{Cos}^6\zeta}+\frac{1}{4\,\mathfrak{Cos}^4\zeta}+\frac{1}{2\,\mathfrak{Cos}^2\zeta}+\ln\mathfrak{Tang}\,\zeta\,,$$

$$\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^8\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}=-\frac{1}{7\,\mathfrak{Sin}^7\zeta}+\frac{1}{5\,\mathfrak{Sin}^5\zeta}-\frac{1}{3\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}+\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\zeta}+\mathfrak{Amp}\,\zeta\,,\qquad \int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^8\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}=\frac{1}{7\,\mathfrak{Cos}^7\zeta}+\frac{1}{5\,\mathfrak{Cos}^5\zeta}+\frac{1}{3\,\mathfrak{Cos}^3\zeta}+\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\zeta}+\ln\mathfrak{Tang}\frac{\zeta}{2}\,. \tag{269}$$

$$\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^m\zeta\,\mathfrak{Cos}^2\zeta}=-\frac{1}{(m-1)\,\mathfrak{Sin}^{m-1}\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}-\frac{m}{m-1}\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^{m-2}\zeta\,\mathfrak{Cos}^2\zeta}\,,\qquad \int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^m\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}=\frac{1}{(m-1)\,\mathfrak{Cos}^{m-1}\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}+\frac{m}{m-1}\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^{m-2}\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}\,,$$

$$\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}\,\zeta\,\mathfrak{Cos}^2\zeta}=\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\zeta}+\ln\mathfrak{Tang}\frac{\zeta}{2}\,,\qquad \int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}\,\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}=-\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\zeta}-\mathfrak{Amp}\,\zeta\,,$$

$$\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^2\zeta\,\mathfrak{Cos}^2\zeta}=-2\,\mathfrak{Cotg}\,2\zeta\,,\qquad \int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^2\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}=-2\,\mathfrak{Cotg}\,2\zeta\,,$$

$$\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cos}^2\zeta}=-\frac{1}{2\,\mathfrak{Sin}^2\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}-\frac{3}{2\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}-\frac{3}{2}\ln\mathfrak{Tang}\frac{\zeta}{2}\,,\qquad \int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}=\frac{1}{2\,\mathfrak{Cos}^2\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}-\frac{3}{2\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}-\frac{3}{2}\mathfrak{Amp}\,\zeta\,,$$

$$\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^4\zeta\,\mathfrak{Cos}^2\zeta}=-\frac{1}{3\,\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}+\frac{8}{3}\mathfrak{Cotg}\,2\zeta\,,\qquad \int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^4\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}=\frac{1}{3\,\mathfrak{Cos}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}-\frac{8}{3}\mathfrak{Cotg}\,2\zeta\,,$$

$$\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^5\zeta\,\mathfrak{Cos}^2\zeta}=-\frac{1}{4\,\mathfrak{Sin}^4\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}+\frac{5}{8\,\mathfrak{Sin}^2\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}+\frac{15}{8\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}+\frac{15}{8}\ln\mathfrak{Tang}\frac{\zeta}{2}\,,\qquad \int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^5\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}=\frac{1}{4\,\mathfrak{Cos}^4\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}+\frac{5}{8\,\mathfrak{Cos}^2\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}-\frac{15}{8\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}-\frac{15}{8}\mathfrak{Amp}\,\zeta\,,$$

$$\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^6\zeta\,\mathfrak{Cos}^2\zeta}=-\frac{1}{5\,\mathfrak{Sin}^5\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}+\frac{2}{5\,\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}-\frac{16}{5}\mathfrak{Cotg}\,2\zeta\,,\qquad \int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^6\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}=\frac{1}{5\,\mathfrak{Cos}^5\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}+\frac{2}{5\,\mathfrak{Cos}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}-\frac{16}{5}\mathfrak{Cotg}\,2\zeta\,,$$

$$\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^7\zeta\,\mathfrak{Cos}^2\zeta}=-\frac{1}{6\,\mathfrak{Sin}^6\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}+\frac{7}{24\,\mathfrak{Sin}^4\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}-\frac{35}{48\,\mathfrak{Sin}^2\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}-\frac{105}{48\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}-\frac{105}{48}\ln\mathfrak{Tang}\frac{\zeta}{2}\,,$$

$$\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^7\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}=\frac{1}{6\,\mathfrak{Cos}^6\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}+\frac{7}{24\,\mathfrak{Cos}^4\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}+\frac{35}{48\,\mathfrak{Cos}^2\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}-\frac{105}{48\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}-\frac{105}{48}\mathfrak{Amp}\,\zeta\,,$$

$$\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^8\zeta\,\mathfrak{Cos}^2\zeta}=-\frac{1}{7\,\mathfrak{Sin}^7\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}+\frac{8}{35\,\mathfrak{Sin}^5\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}-\frac{16}{35\,\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}+\frac{128}{35}\mathfrak{Cotg}\,2\zeta\,,$$

$$\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^8\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}=\frac{1}{7\,\mathfrak{Cos}^7\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}+\frac{8}{35\,\mathfrak{Cos}^5\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}+\frac{16}{35\,\mathfrak{Cos}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}+\frac{128}{35}\mathfrak{Cotg}\,2\zeta\,. \tag{270}$$

$$\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^m\zeta\,\mathfrak{Cos}^3\zeta}=-\frac{1}{(m-1)\,\mathfrak{Sin}^{m-1}\zeta\,\mathfrak{Cos}^2\zeta}-\frac{m+1}{m-1}\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^{m-2}\zeta\,\mathfrak{Cos}^3\zeta}\,,\qquad \int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^m\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}=\frac{1}{(m-1)\,\mathfrak{Cos}^{m-1}\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}+\frac{m+1}{m-1}\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^{m-2}\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}\,,$$

$$\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cos}^3\zeta}=-\frac{2\,\mathfrak{Cotg}\,2\zeta}{\mathfrak{Sin}\,2\zeta}-2\ln\mathfrak{Tang}\,\zeta\,,\qquad \int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}=-\frac{2\,\mathfrak{Cotg}\,2\zeta}{\mathfrak{Sin}\,2\zeta}-2\ln\mathfrak{Tang}\,\zeta\,,$$

$$\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^4\zeta\,\mathfrak{Cos}^3\zeta}=-\frac{1}{3\,\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cos}^2\zeta}-\frac{5}{6\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\,\mathfrak{Cos}^2\zeta}+\frac{5}{2\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}+\frac{5}{2}\mathfrak{Amp}\,\zeta\,,\qquad \int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^4\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}=\frac{1}{3\,\mathfrak{Cos}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}-\frac{5}{6\,\mathfrak{Cos}\,\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}-\frac{5}{2\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}-\frac{5}{2}\ln\mathfrak{Tang}\frac{\zeta}{2}\,,$$

$$\int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^5\zeta\,\mathfrak{Cos}^3\zeta}=-\frac{1}{4\,\mathfrak{Sin}^4\zeta\,\mathfrak{Cos}^2\zeta}+\frac{3\,\mathfrak{Cotg}\,2\zeta}{\mathfrak{Sin}\,2\zeta}+3\ln\mathfrak{Tang}\,\zeta\,,\qquad \int\frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^5\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}=\frac{1}{4\,\mathfrak{Cos}^4\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}-\frac{3\,\mathfrak{Cotg}\,2\zeta}{\mathfrak{Sin}\,2\zeta}-3\ln\mathfrak{Tang}\,\zeta\,. \tag{271}$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^m \zeta\, \mathfrak{Cos}^4 \zeta} = -\frac{1}{(m-1)\,\mathfrak{Sin}^{m-1}\zeta\, \mathfrak{Cos}^3 \zeta} - \frac{m+2}{m-1}\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^{m-2}\zeta\, \mathfrak{Cos}^4 \zeta}\,, \\
&\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^m \zeta\, \mathfrak{Sin}^4 \zeta} = \frac{1}{(m-1)\,\mathfrak{Cos}^{m-1}\zeta\, \mathfrak{Sin}^3 \zeta} + \frac{m+2}{m-1}\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^{m-2}\zeta\, \mathfrak{Sin}^4 \zeta}\,, \\
&\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^4 \zeta\, \mathfrak{Cos}^4 \zeta} = -\frac{8\,\mathfrak{Cotg}^3 2\zeta}{3} + 8\,\mathfrak{Cotg}\, 2\zeta\,, \\
&\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^4 \zeta\, \mathfrak{Sin}^4 \zeta} = -\frac{8\,\mathfrak{Cotg}^3 2\zeta}{3} + 8\,\mathfrak{Cotg}\, 2\zeta\,, \\
&\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^5 \zeta\, \mathfrak{Cos}^4 \zeta} = -\frac{1}{4\,\mathfrak{Sin}^4 \zeta\, \mathfrak{Cos}^3 \zeta} - \frac{7}{12\,\mathfrak{Sin}^2 \zeta\, \mathfrak{Cos}^3 \zeta} + \frac{35}{24\,\mathfrak{Sin}^2 \zeta\, \mathfrak{Cos}\, \zeta} + \frac{35}{8\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} + \frac{35}{8} \ln \mathfrak{Tang}\, \frac{\zeta}{2}\,, \\
&\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^5 \zeta\, \mathfrak{Sin}^4 \zeta} = \frac{1}{4\,\mathfrak{Cos}^4 \zeta\, \mathfrak{Sin}^3 \zeta} - \frac{7}{12\,\mathfrak{Cos}^2 \zeta\, \mathfrak{Sin}^3 \zeta} - \frac{35}{24\,\mathfrak{Cos}^2 \zeta\, \mathfrak{Sin}\, \zeta} + \frac{35}{8\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} + \frac{35}{8}\, \mathfrak{Amp}\, \zeta\,.
\end{aligned} \tag{272}$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^m \zeta\, \mathfrak{Cos}^n \zeta} = -\frac{1}{(m-1)\,\mathfrak{Sin}^{m-1}\zeta\, \mathfrak{Cos}^{n-1} \zeta} - \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Sin}^{m-2}\zeta\, \mathfrak{Cos}^n \zeta}\,, \\
&\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^m \zeta\, \mathfrak{Sin}^n \zeta} = \frac{1}{(m-1)\,\mathfrak{Cos}^{m-1}\zeta\, \mathfrak{Sin}^{n-1} \zeta} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cos}^{m-2}\zeta\, \mathfrak{Sin}^n \zeta}\,.
\end{aligned} \tag{273}$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^m \zeta}{\mathfrak{Cos}\,\zeta}\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^{m-1}\zeta}{m-1} - \int \frac{\mathfrak{Sin}^{m-2}\zeta}{\mathfrak{Cos}\,\zeta}\, d\zeta \quad (m>1), \\
&\int \frac{\mathfrak{Cos}^m \zeta}{\mathfrak{Sin}\,\zeta}\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^{m-1}\zeta}{m-1} + \int \frac{\mathfrak{Cos}^{m-2}\zeta}{\mathfrak{Sin}\,\zeta}\, d\zeta \quad (m>1), \\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^2 \zeta}{\mathfrak{Cos}\,\zeta}\, d\zeta = \mathfrak{Sin}\,\zeta - \mathfrak{Amp}\,\zeta\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Cos}^2 \zeta}{\mathfrak{Sin}\,\zeta}\, d\zeta = \mathfrak{Cos}\,\zeta + \ln \mathfrak{Tang}\,\frac{\zeta}{2}\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^4 \zeta}{\mathfrak{Cos}\,\zeta}\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^3\zeta}{3} - \mathfrak{Sin}\,\zeta + \mathfrak{Amp}\,\zeta\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Cos}^4 \zeta}{\mathfrak{Sin}\,\zeta}\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^3\zeta}{3} + \mathfrak{Cos}\,\zeta + \ln \mathfrak{Tang}\,\frac{\zeta}{2}\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^6 \zeta}{\mathfrak{Cos}\,\zeta}\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^5\zeta}{5} - \frac{\mathfrak{Sin}^3\zeta}{3} + \mathfrak{Sin}\,\zeta - \mathfrak{Amp}\,\zeta\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Cos}^6 \zeta}{\mathfrak{Sin}\,\zeta}\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^5\zeta}{5} + \frac{\mathfrak{Cos}^3\zeta}{3} + \mathfrak{Cos}\,\zeta + \ln \mathfrak{Tang}\,\frac{\zeta}{2}\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^8 \zeta}{\mathfrak{Cos}\,\zeta}\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^7\zeta}{7} - \frac{\mathfrak{Sin}^5\zeta}{5} + \frac{\mathfrak{Sin}^3\zeta}{3} - \mathfrak{Sin}\,\zeta + \mathfrak{Amp}\,\zeta\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Cos}^8 \zeta}{\mathfrak{Sin}\,\zeta}\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^7\zeta}{7} + \frac{\mathfrak{Cos}^5\zeta}{5} + \frac{\mathfrak{Cos}^3\zeta}{3} + \mathfrak{Cos}\,\zeta + \ln \mathfrak{Tang}\,\frac{\zeta}{2}\,.
\end{aligned} \tag{274}$$

[Für die ungeraden Potenzen vgl. (116).]

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^m \zeta}{\mathfrak{Cos}^2\zeta}\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^{m-1}\zeta}{(m-2)\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} - \frac{m-1}{m-2}\int \frac{\mathfrak{Sin}^{m-2}\zeta}{\mathfrak{Cos}^2\zeta}\, d\zeta\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Cos}^m \zeta}{\mathfrak{Sin}^2\zeta}\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^{m-1}\zeta}{(m-2)\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} + \frac{m-1}{m-2}\int \frac{\mathfrak{Cos}^{m-2}\zeta}{\mathfrak{Sin}^2\zeta}\, d\zeta\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Cos}^2\zeta}\, d\zeta = -\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\zeta}\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Cos}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}^2\zeta}\, d\zeta = -\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\zeta}\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta}{\mathfrak{Cos}^2\zeta}\, d\zeta = \zeta - \mathfrak{Tang}\,\zeta\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta}{\mathfrak{Sin}^2\zeta}\, d\zeta = \zeta - \mathfrak{Cotg}\,\zeta\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^3\zeta}{\mathfrak{Cos}^2\zeta}\, d\zeta = \mathfrak{Cos}\,\zeta + \frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\zeta}\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Cos}^3\zeta}{\mathfrak{Sin}^2\zeta}\, d\zeta = \mathfrak{Sin}\,\zeta - \frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\zeta}\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^4\zeta}{\mathfrak{Cos}^2\zeta}\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^3\zeta}{2\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} - \frac{3}{2}\zeta + \frac{3}{2}\,\mathfrak{Tang}\,\zeta\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Cos}^4\zeta}{\mathfrak{Sin}^2\zeta}\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^3\zeta}{2\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} + \frac{3}{2}\zeta - \frac{3}{2}\,\mathfrak{Cotg}\,\zeta\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^5\zeta}{\mathfrak{Cos}^2\zeta}\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^4\zeta}{3\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} + \frac{4}{3}\,\mathfrak{Cos}\,\zeta - \frac{4}{3\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Cos}^5\zeta}{\mathfrak{Sin}^2\zeta}\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^4\zeta}{3\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} + \frac{4}{3}\,\mathfrak{Sin}\,\zeta - \frac{4}{3\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^6\zeta}{\mathfrak{Cos}^2\zeta}\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^5\zeta}{4\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} + \frac{5\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}{8\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} + \frac{15}{8}\zeta - \frac{15}{8}\,\mathfrak{Tang}\,\zeta\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Cos}^6\zeta}{\mathfrak{Sin}^2\zeta}\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^5\zeta}{4\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} + \frac{5\,\mathfrak{Cos}^3\zeta}{8\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} + \frac{15}{8}\zeta - \frac{15}{8}\,\mathfrak{Cotg}\,\zeta\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^7\zeta}{\mathfrak{Cos}^2\zeta}\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^6\zeta}{5\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} - \frac{2\,\mathfrak{Sin}^4\zeta}{5\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} + \frac{8}{5}\,\mathfrak{Cos}\,\zeta + \frac{8}{5\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Cos}^7\zeta}{\mathfrak{Sin}^2\zeta}\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^6\zeta}{5\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} + \frac{2\,\mathfrak{Cos}^4\zeta}{5\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} + \frac{8}{5}\,\mathfrak{Sin}\,\zeta - \frac{8}{5\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}^8\zeta}{\mathfrak{Cos}^2\zeta}\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^7\zeta}{6\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} - \frac{7\,\mathfrak{Sin}^5\zeta}{24\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} + \frac{35\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}{48\,\mathfrak{Cos}\,\zeta} - \frac{105}{48}\zeta + \frac{105}{48}\,\mathfrak{Tang}\,\zeta\,, \\
&\int \frac{\mathfrak{Cos}^8\zeta}{\mathfrak{Sin}^2\zeta}\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^7\zeta}{6\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} + \frac{7\,\mathfrak{Cos}^5\zeta}{24\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} + \frac{35\,\mathfrak{Cos}^3\zeta}{48\,\mathfrak{Sin}\,\zeta} + \frac{105}{48}\zeta - \frac{105}{48}\,\mathfrak{Cotg}\,\zeta\,.
\end{aligned} \tag{275}$$

$$\int \frac{\mathfrak{Sin}^m \zeta}{\mathfrak{Cos}^3 \zeta} d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^{m-1}\zeta}{(m-3)\mathfrak{Cos}^2\zeta} - \frac{m-1}{m-3}\int \frac{\mathfrak{Sin}^{m-2}\zeta}{\mathfrak{Cos}^3\zeta} d\zeta,$$

$$\int \frac{\mathfrak{Sin}^2 \zeta}{\mathfrak{Cos}^3 \zeta} d\zeta = -\frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{2\mathfrak{Cos}^2\zeta} - \frac{1}{2}\mathfrak{Amp}\,\zeta ,$$

$$\int \frac{\mathfrak{Sin}^4 \zeta}{\mathfrak{Cos}^3 \zeta} d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^3\zeta}{\mathfrak{Cos}^2\zeta} + \frac{3\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{2\mathfrak{Cos}^2\zeta} - \frac{3}{2}\mathfrak{Amp}\,\zeta ,$$

$$\int \frac{\mathfrak{Sin}^6 \zeta}{\mathfrak{Cos}^3 \zeta} d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^5\zeta}{3\mathfrak{Cos}^2\zeta} - \frac{5\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}{3\mathfrak{Cos}^2\zeta} - \frac{5\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{2\mathfrak{Cos}^2\zeta} + \frac{5}{2}\mathfrak{Amp}\,\zeta ,$$

$$\int \frac{\mathfrak{Sin}^8 \zeta}{\mathfrak{Cos}^3 \zeta} d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^7\zeta}{5\mathfrak{Cos}^2\zeta} - \frac{7\,\mathfrak{Sin}^5\zeta}{15\mathfrak{Cos}^2\zeta} + \frac{7\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}{3\mathfrak{Cos}^2\zeta} + \frac{7\,\mathfrak{Sin}\,\zeta}{2\mathfrak{Cos}^2\zeta} - \frac{7}{2}\mathfrak{Amp}\,\zeta ,$$

$$\int \frac{\mathfrak{Cos}^m \zeta}{\mathfrak{Sin}^3 \zeta} d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^{m-1}\zeta}{(m-3)\,\mathfrak{Sin}^2\zeta} + \frac{m-1}{m-3}\int \frac{\mathfrak{Cos}^{m-2}\zeta}{\mathfrak{Sin}^3\zeta} d\zeta,$$

$$\int \frac{\mathfrak{Cos}^2 \zeta}{\mathfrak{Sin}^3 \zeta} d\zeta = -\frac{\mathfrak{Cos}\,\zeta}{2\,\mathfrak{Sin}^2\zeta} + \frac{1}{2}\ln \mathfrak{Tang}\frac{\zeta}{2} ,$$

$$\int \frac{\mathfrak{Cos}^4 \zeta}{\mathfrak{Sin}^3 \zeta} d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^3\zeta}{\mathfrak{Sin}^2\zeta} - \frac{3\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{2\,\mathfrak{Sin}^2\zeta} + \frac{3}{2}\ln \mathfrak{Tang}\frac{\zeta}{2} ,$$

$$\int \frac{\mathfrak{Cos}^6 \zeta}{\mathfrak{Sin}^3 \zeta} d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^5\zeta}{3\,\mathfrak{Sin}^2\zeta} + \frac{5\,\mathfrak{Cos}^3\zeta}{3\,\mathfrak{Sin}^2\zeta} - \frac{5\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{2\,\mathfrak{Sin}^2\zeta} + \frac{5}{2}\ln \mathfrak{Tang}\frac{\zeta}{2} ,$$

$$\int \frac{\mathfrak{Cos}^8 \zeta}{\mathfrak{Sin}^3 \zeta} d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^7\zeta}{5\,\mathfrak{Sin}^2\zeta} + \frac{7\,\mathfrak{Cos}^5\zeta}{15\,\mathfrak{Sin}^2\zeta} + \frac{7\,\mathfrak{Cos}^3\zeta}{3\,\mathfrak{Sin}^3\zeta} - \frac{7\,\mathfrak{Cos}\,\zeta}{2\,\mathfrak{Sin}^3\zeta} + \frac{7}{2}\ln \mathfrak{Tang}\frac{\zeta}{2} . \tag{276}$$

[Für die ungeraden Potenzen vgl. (117).]

$$\int \frac{\mathfrak{Sin}^m \zeta}{\mathfrak{Cos}^4 \zeta} d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^{m-1}\zeta}{(m-4)\mathfrak{Cos}^3\zeta} - \frac{m-1}{m-4}\int \frac{\mathfrak{Sin}^{m-2}\zeta}{\mathfrak{Cos}^4\zeta} d\zeta,$$

$$\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Cos}^4 \zeta} d\zeta = -\frac{1}{3\mathfrak{Cos}^3\zeta} ,$$

$$\int \frac{\mathfrak{Sin}^2 \zeta}{\mathfrak{Cos}^4 \zeta} d\zeta = \frac{1}{3}\mathfrak{Tang}^3\zeta ,$$

$$\int \frac{\mathfrak{Sin}^3 \zeta}{\mathfrak{Cos}^4 \zeta} d\zeta = -\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\zeta} + \frac{1}{3\mathfrak{Cos}^3\zeta} ,$$

$$\int \frac{\mathfrak{Sin}^4 \zeta}{\mathfrak{Cos}^4 \zeta} d\zeta = \zeta - \mathfrak{Tang}\,\zeta - \frac{1}{3}\mathfrak{Tang}^3\zeta ,$$

$$\int \frac{\mathfrak{Cos}^m \zeta}{\mathfrak{Sin}^4 \zeta} d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^{m-1}\zeta}{(m-4)\,\mathfrak{Sin}^3\zeta} + \frac{m-1}{m-4}\int \frac{\mathfrak{Cos}^{m-2}\zeta}{\mathfrak{Sin}^4\zeta} d\zeta,$$

$$\int \frac{\mathfrak{Cos}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}^4 \zeta} d\zeta = -\frac{1}{3\,\mathfrak{Sin}^3\zeta} ,$$

$$\int \frac{\mathfrak{Cos}^2 \zeta}{\mathfrak{Sin}^4 \zeta} d\zeta = -\frac{1}{3}\mathfrak{Cotg}^3\zeta ,$$

$$\int \frac{\mathfrak{Cos}^3 \zeta}{\mathfrak{Sin}^4 \zeta} d\zeta = -\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\zeta} - \frac{1}{3\,\mathfrak{Sin}^3\zeta} ,$$

$$\int \frac{\mathfrak{Cos}^4 \zeta}{\mathfrak{Sin}^4 \zeta} d\zeta = +\zeta - \mathfrak{Cotg}\,\zeta - \frac{1}{3}\mathfrak{Cotg}^3\zeta . \tag{277}$$

$$\int \frac{\mathfrak{Sin}^m \zeta}{\mathfrak{Cos}^n \zeta} d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^{m-1}\zeta}{(m-n)\mathfrak{Cos}^{n-1}\zeta} - \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\mathfrak{Sin}^{m-2}\zeta\, d\zeta}{\mathfrak{Cos}^n\zeta} \qquad (m \neq n),$$

$$\int \frac{\mathfrak{Sin}^m \zeta}{\mathfrak{Cos}^n \zeta} d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^{m+1}\zeta}{(n-1)\mathfrak{Cos}^{n-1}\zeta} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\mathfrak{Sin}^{m}\zeta\, d\zeta}{\mathfrak{Cos}^{n-2}\zeta} \qquad (n \neq 1),$$

$$\int \frac{\mathfrak{Sin}^m \zeta}{\mathfrak{Cos}^n \zeta} d\zeta = -\frac{\mathfrak{Sin}^{m-1}\zeta}{(n-1)\mathfrak{Cos}^{n-1}\zeta} + \frac{m-1}{n-1}\int \frac{\mathfrak{Sin}^{m-2}\zeta\, d\zeta}{\mathfrak{Cos}^{n-2}\zeta} \qquad (n \neq 1),$$

$$\int \frac{\mathfrak{Cos}^m \zeta}{\mathfrak{Sin}^n \zeta} d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^{m-1}\zeta}{(m-n)\,\mathfrak{Sin}^{n-1}\zeta} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\mathfrak{Cos}^{m-2}\zeta\, d\zeta}{\mathfrak{Sin}^n\zeta} \qquad (m \neq n),$$

$$\int \frac{\mathfrak{Cos}^m \zeta}{\mathfrak{Sin}^n \zeta} d\zeta = -\frac{\mathfrak{Cos}^{m+1}\zeta}{(n-1)\,\mathfrak{Sin}^{n-1}\zeta} + \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\mathfrak{Cos}^{m}\zeta\, d\zeta}{\mathfrak{Sin}^{m-2}\zeta} \qquad (n \neq 1),$$

$$\int \frac{\mathfrak{Cos}^m \zeta}{\mathfrak{Sin}^n \zeta} d\zeta = -\frac{\mathfrak{Cos}^{m-1}\zeta}{(n-1)\,\mathfrak{Sin}^{n-1}\zeta} + \frac{m-1}{n-1}\int \frac{\mathfrak{Cos}^{m-2}\zeta\, d\zeta}{\mathfrak{Sin}^{n-2}\zeta} \qquad (n \neq 1). \tag{278}$$

$$\int \frac{\mathfrak{Sin}\,\zeta}{\mathfrak{Cos}^n \zeta} d\zeta = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{\mathfrak{Cos}^{n-1}\zeta} \qquad (n \neq 1), \qquad \int \frac{\mathfrak{Cos}\,\zeta}{\mathfrak{Sin}^n \zeta} d\zeta = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{\mathfrak{Sin}^{n-1}\zeta} \qquad (n \neq 1), \tag{279}$$

$$\int \mathfrak{Sin}^m\zeta\,\mathfrak{Cos}\,\zeta\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^{m+1}\zeta}{m+1} , \qquad \int \mathfrak{Cos}^m\zeta\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^{m+1}\zeta}{m+1} . \tag{280}$$

$$\int \mathfrak{Sin}^m\zeta\,\mathfrak{Cos}^2\zeta\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^{m-1}\zeta\,\mathfrak{Cos}^3\zeta}{m+2} - \frac{m-1}{m+2}\int \mathfrak{Sin}^{m-2}\zeta\,\mathfrak{Cos}^2\zeta\, d\zeta,$$

$$\int \mathfrak{Sin}\,\zeta\,\mathfrak{Cos}^2\zeta\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^3\zeta}{3} ,$$

$$\int \mathfrak{Sin}^2\zeta\,\mathfrak{Cos}^2\zeta\, d\zeta = -\frac{\zeta}{8} + \frac{\mathfrak{Sin}\,4\zeta}{32} ,$$

$$\int \mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cos}^2\zeta\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^2\zeta\,\mathfrak{Cos}^3\zeta}{5} - \frac{2\mathfrak{Cos}^3\zeta}{15} ,$$

$$\int \mathfrak{Sin}^4\zeta\,\mathfrak{Cos}^2\zeta\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^3 2\zeta}{48} + \frac{\zeta}{16} - \frac{\mathfrak{Sin}\,4\zeta}{64} ,$$

$$\int \mathfrak{Cos}^m\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^{m-1}\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}{m+2} + \frac{m-1}{m+2}\int \mathfrak{Cos}^{m-2}\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta\, d\zeta,$$

$$\int \mathfrak{Cos}\,\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^3\zeta}{3} ,$$

$$\int \mathfrak{Cos}^2\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta\, d\zeta = -\frac{\zeta}{8} + \frac{\mathfrak{Sin}\,4\zeta}{32} ,$$

$$\int \mathfrak{Cos}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Cos}^2\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}{5} + \frac{2\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}{15} ,$$

$$\int \mathfrak{Cos}^4\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta\, d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^3 2\zeta}{48} - \frac{\zeta}{16} + \frac{\mathfrak{Sin}\,4\zeta}{64} , \tag{281}$$

$$\int \mathfrak{Sin}^5\zeta\,\mathfrak{Cof}^2\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^4\zeta\,\mathfrak{Cof}^3\zeta}{7} - \frac{4\,\mathfrak{Sin}^2\zeta\,\mathfrak{Cof}^3\zeta}{35} + \frac{8\,\mathfrak{Cof}^3\zeta}{105}\,,$$

$$\int \mathfrak{Sin}^6\zeta\,\mathfrak{Cof}^2\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^5\zeta\,\mathfrak{Cof}^3\zeta}{8} - \frac{5\,\mathfrak{Sin}^3 2\zeta}{384} - \frac{5\zeta}{128} + \frac{5\,\mathfrak{Sin}\,4\zeta}{512}\,,$$

$$\int \mathfrak{Sin}^7\zeta\,\mathfrak{Cof}^2\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^6\zeta\,\mathfrak{Cof}^3\zeta}{9} - \frac{2\,\mathfrak{Sin}^4\zeta\,\mathfrak{Cof}^3\zeta}{21} + \frac{8\,\mathfrak{Sin}^2\zeta\,\mathfrak{Cof}^3\zeta}{105} - \frac{16\,\mathfrak{Cof}^3\zeta}{315}\,,$$

$$\int \mathfrak{Sin}^8\zeta\,\mathfrak{Cof}^2\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^7\zeta\,\mathfrak{Cof}^3\zeta}{10} - \frac{7\,\mathfrak{Sin}^5\zeta\,\mathfrak{Cof}^3\zeta}{80} + \frac{7\,\mathfrak{Sin}^3 2\zeta}{768} + \frac{7\zeta}{256} - \frac{7\,\mathfrak{Sin}\,4\zeta}{1024}\,,$$

$$\int \mathfrak{Cof}^5\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cof}^4\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}{7} + \frac{4\,\mathfrak{Cof}^2\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}{35} + \frac{8\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}{105}\,,$$

$$\int \mathfrak{Cof}^6\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cof}^5\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}{8} + \frac{5\,\mathfrak{Sin}^3 2\zeta}{384} - \frac{5\zeta}{128} + \frac{5\,\mathfrak{Sin}\,4\zeta}{512}\,,$$

$$\int \mathfrak{Cof}^7\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cof}^6\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}{9} + \frac{2\,\mathfrak{Cof}^4\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}{21} + \frac{8\,\mathfrak{Cof}^2\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}{105} + \frac{16\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}{315}\,,$$

$$\int \mathfrak{Cof}^8\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cof}^7\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}{10} + \frac{7\,\mathfrak{Cof}^5\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}{80} + \frac{7\,\mathfrak{Sin}^3 2\zeta}{768} - \frac{7\zeta}{256} + \frac{7\,\mathfrak{Sin}\,4\zeta}{1024}\,. \qquad (281)$$

$$\int \mathfrak{Sin}^m\zeta\,\mathfrak{Cof}^3\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^{m-1}\zeta\,\mathfrak{Cof}^4\zeta}{m+3} - \frac{m-1}{m+3}\int \mathfrak{Sin}^{m-2}\zeta\,\mathfrak{Cof}^3\zeta\,d\zeta\,,$$

$$\int \mathfrak{Sin}^2\zeta\,\mathfrak{Cof}^3\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cof}^2\zeta}{5} + \frac{2\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}{15}\,,$$

$$\int \mathfrak{Sin}^4\zeta\,\mathfrak{Cof}^3\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cof}^4\zeta}{7} - \frac{3\,\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cof}^2\zeta}{35} - \frac{2\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}{35}\,,$$

$$\int \mathfrak{Sin}^6\zeta\,\mathfrak{Cof}^3\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^5\zeta\,\mathfrak{Cof}^4\zeta}{9} - \frac{5\,\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cof}^4\zeta}{63} - \frac{\mathfrak{Sin}^3\zeta\,\mathfrak{Cof}^2\zeta}{21} + \frac{2\,\mathfrak{Sin}^3\zeta}{63}\,,$$

$$\int \mathfrak{Cof}^m\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cof}^{m-1}\zeta\,\mathfrak{Sin}^4\zeta}{m+3} + \frac{m-1}{m+3}\int \mathfrak{Cof}^{m-2}\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta\,d\zeta\,,$$

$$\int \mathfrak{Cof}^2\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cof}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}{5} - \frac{2\,\mathfrak{Cof}^3\zeta}{15}\,,$$

$$\int \mathfrak{Cof}^4\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cof}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}^4\zeta}{7} + \frac{3\,\mathfrak{Cof}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}{35} - \frac{2\,\mathfrak{Cof}^3\zeta}{35}\,,$$

$$\int \mathfrak{Cof}^6\zeta\,\mathfrak{Sin}^3\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cof}^5\zeta\,\mathfrak{Sin}^4\zeta}{9} + \frac{5\,\mathfrak{Cof}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}^4\zeta}{63} + \frac{\mathfrak{Cof}^3\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}{21} - \frac{2\,\mathfrak{Cof}^3\zeta}{63}\,. \qquad (282)$$

[Für die ungeraden Potenzen vgl. (121).]

$$\int \mathfrak{Sin}^m\zeta\,\mathfrak{Cof}^4\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^{m-1}\zeta\,\mathfrak{Cof}^5\zeta}{m+4} - \frac{m-1}{m+4}\int \mathfrak{Sin}^{m-2}\zeta\,\mathfrak{Cof}^4\zeta\,d\zeta\,,$$

$$\int \mathfrak{Sin}^4\zeta\,\mathfrak{Cof}^4\zeta\,d\zeta = \frac{3\zeta}{128} - \frac{\mathfrak{Sin}\,4\zeta}{128} + \frac{\mathfrak{Sin}\,8\zeta}{1024}\,,$$

$$\int \mathfrak{Sin}^5\zeta\,\mathfrak{Cof}^4\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^4\zeta\,\mathfrak{Cof}^5\zeta}{9} - \frac{4\,\mathfrak{Cof}^5\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}{63} - \frac{4\,\mathfrak{Cof}^5\zeta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta}{105} + \frac{8\,\mathfrak{Cof}^5\zeta}{315}\,,$$

$$\int \mathfrak{Sin}^6\zeta\,\mathfrak{Cof}^4\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^5 2\zeta}{320} + \frac{3\zeta}{256} + \frac{\mathfrak{Sin}\,4\zeta}{256} - \frac{\mathfrak{Sin}\,8\zeta}{2048}\,,$$

$$\int \mathfrak{Cof}^m\zeta\,\mathfrak{Sin}^4\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cof}^{m-1}\zeta\,\mathfrak{Sin}^5\zeta}{m+4} + \frac{m-1}{m+4}\int \mathfrak{Cof}^{m-2}\zeta\,\mathfrak{Sin}^4\zeta\,d\zeta\,,$$

$$\int \mathfrak{Cof}^4\zeta\,\mathfrak{Sin}^4\zeta\,d\zeta = \frac{3\zeta}{128} - \frac{\mathfrak{Sin}\,4\zeta}{128} + \frac{\mathfrak{Sin}\,8\zeta}{1024}\,,$$

$$\int \mathfrak{Cof}^5\zeta\,\mathfrak{Sin}^4\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cof}^4\zeta\,\mathfrak{Sin}^5\zeta}{9} + \frac{4\,\mathfrak{Sin}^5\zeta\,\mathfrak{Cof}^2\zeta}{63} - \frac{4\,\mathfrak{Sin}^5\zeta\,\mathfrak{Cof}^2\zeta}{105} - \frac{8\,\mathfrak{Sin}^5\zeta}{315}\,,$$

$$\int \mathfrak{Cof}^6\zeta\,\mathfrak{Sin}^4\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^5 2\zeta}{320} + \frac{3\zeta}{256} - \frac{\mathfrak{Sin}\,4\zeta}{256} + \frac{\mathfrak{Sin}\,8\zeta}{2048}\,. \qquad (283)$$

$$\int \mathfrak{Sin}^m\zeta\,\mathfrak{Cof}^n\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Sin}^{m-1}\zeta\,\mathfrak{Cof}^{n-1}\zeta}{m+n} - \frac{m-1}{m+n}\int \mathfrak{Sin}^{m-2}\zeta\,\mathfrak{Cof}^n\zeta\,d\zeta\,,$$

$$\int \mathfrak{Cof}^m\zeta\,\mathfrak{Sin}^n\zeta\,d\zeta = \frac{\mathfrak{Cof}^{m-1}\zeta\,\mathfrak{Sin}^{n+1}\zeta}{m+n} + \frac{m-1}{m+4}\int \mathfrak{Cof}^{m-2}\zeta\,\mathfrak{Sin}^n\zeta\,d\zeta\,. \qquad (284)$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\int \mathfrak{Tang}^n \zeta\, d\zeta = -\frac{\mathfrak{Tang}^{n-1}\zeta}{n-1} + \int \mathfrak{Tang}^{n-2}\zeta\, d\zeta\ , & \int \mathfrak{Cotg}^n \zeta\, d\zeta = -\frac{\mathfrak{Cotg}^{n-1}\zeta}{n-1} + \int \mathfrak{Cotg}^{n-2}\zeta\, d\zeta\ , \\
\int \mathfrak{Tang}^2 \zeta\, d\zeta = -\mathfrak{Tang}\,\zeta + \zeta\ , & \int \mathfrak{Cotg}^2 \zeta\, d\zeta = -\mathfrak{Cotg}\,\zeta + \zeta\ , \\
\int \mathfrak{Tang}^4 \zeta\, d\zeta = -\frac{\mathfrak{Tang}^3\zeta}{3} - \mathfrak{Tang}\,\zeta + \zeta\ , & \int \mathfrak{Cotg}^4 \zeta\, d\zeta = -\frac{\mathfrak{Cotg}^3\zeta}{3} - \mathfrak{Cotg}\,\zeta + \zeta\ , \\
\int \mathfrak{Tang}^6 \zeta\, d\zeta = -\frac{\mathfrak{Tang}^5\zeta}{5} - \frac{\mathfrak{Tang}^3\zeta}{3} - \mathfrak{Tang}\,\zeta + \zeta\ , & \int \mathfrak{Cotg}^6 \zeta\, d\zeta = -\frac{\mathfrak{Cotg}^5\zeta}{5} - \frac{\mathfrak{Cotg}^3\zeta}{3} - \mathfrak{Cotg}\,\zeta + \zeta\ , \\
\int \mathfrak{Tang}^8 \zeta\, d\zeta = -\frac{\mathfrak{Tang}^7\zeta}{7} - \frac{\mathfrak{Tang}^5\zeta}{5} - \frac{\mathfrak{Tang}^3\zeta}{3} - & \int \mathfrak{Cotg}^8 \zeta\, d\zeta = -\frac{\mathfrak{Cotg}^7\zeta}{7} - \frac{\mathfrak{Cotg}^5\zeta}{5} - \frac{\mathfrak{Cotg}^3\zeta}{3} - \\
\qquad - \mathfrak{Tang}\,\zeta + \zeta\ . & \qquad - \mathfrak{Cotg}\,\zeta + \zeta\ .
\end{array}\right\} \quad (285)$$

[Für die ungeraden Potenzen vgl. (125).]

6. Integrale der Klasse $\int z^n T(z)\,dz$.

Ist $T(z)$ eine elementare transzendente Funktion, so folgt durch partielle Integration

$$\left.\begin{array}{l}
\int z^n\, T(z)\, dz = z^n \int T(z)\, dz - \int n z^{n-1} \int T(z)\, dz\, dz\ , \\
\int z^n\, T(z)\, dz = \frac{z^{n+1}}{n+1}\, T(z) - \int \frac{z^{n+1}}{n+1} \frac{d\,T(z)}{dz}\, dz\ .
\end{array}\right\} \quad (286)$$

Durch einmalige oder mehrmalige Anwendung der Gln (286) und unter Zugrundelegung ganzzahliger n-Werte lassen sich zahlreiche Integrale geschlossen darstellen. Man gelangt auf diesem Wege auch zu wichtigen Rekursionsformeln, die eine unmittelbare Erledigung ganzer Integralgruppen ermöglichen.

a) Exponentialintegrale.

Durch Anwendung der ersten der Gln (286) auf $T(z) = e^{\omega z}$ folgt

$$\left.\begin{array}{l}
\int z^n e^{\omega z}\, dz = \frac{z^n e^{\omega z}}{\omega} - \frac{n}{\omega} \int z^{n-1} e^{\omega z}\, dz\ , \\
\int z^n e^{\omega z}\, dz = e^{\omega z} \left[\frac{z^n}{\omega} - \frac{n z^{n-1}}{\omega^2} + \frac{[n(n-1)] z^{n-2}}{\omega^3} - \frac{[n(n-1)(n-2)] z^{n-3}}{\omega^4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{[n(n-1)\ldots 2] z}{\omega^n} + \right. \\
\qquad \left. + (-1)^n \frac{[n(n-1)\ldots 2\cdot 1]}{\omega^{n+1}} \right]\ .
\end{array}\right\} \quad (287)$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\int e^{\omega z}\, dz = \frac{1}{\omega} e^{\omega z}\ , & \int e^{\pm z}\, dz = \pm\, e^z\ , \\
\int z e^{\omega z}\, dz = e^{\omega z} \left(\frac{z}{\omega} - \frac{1}{\omega^2} \right)\ , & \int z e^{\pm z}\, dz = e^z (\pm z - 1)\ , \\
\int z^2 e^{\omega z}\, dz = e^{\omega z} \left(\frac{z^2}{\omega} - \frac{2z}{\omega^2} + \frac{2}{\omega^3} \right)\ , & \int z^2 e^{\pm z}\, dz = e^z (\pm z^2 - 2z \pm 2)\ , \\
\int z^3 e^{\omega z}\, dz = e^{\omega z} \left(\frac{z^3}{\omega} - \frac{3z^2}{\omega^2} + \frac{6z}{\omega^3} - \frac{6}{\omega^4} \right)\ , & \int z^3 e^{\pm z}\, dz = e^z (\pm z^3 - 3z^2 \pm 6z - 6)\ , \\
\int z^4 e^{\omega z}\, dz = e^{\omega z} \left(\frac{z^4}{\omega} - \frac{4z^3}{\omega^2} + \frac{12z^2}{\omega^3} - \frac{24z}{\omega^4} + \frac{24}{\omega^5} \right)\ , & \int z^4 e^{\pm z}\, dz = e^z (\pm z^4 - 4z^3 \pm 12z^2 - 24z \pm 24)\ .
\end{array}\right\} \quad (288)$$

Das Integral

$$\int \frac{e^{\omega z}}{z}\, dz = Ei\,(\omega z)$$

ist nicht in geschlossener Form darstellbar. Durch Reihenentwicklung gemäß Gl. (5) des ersten Teiles und gliedweise Integration folgt

$$\int \frac{e^{\omega z}}{z}\, dz = Ei\,(\omega z) = \ln |\omega z| + \frac{\omega z}{1!} + \frac{(\omega z)^2}{2(2!)} + \frac{(\omega z)^3}{3(3!)} + \cdots + \frac{(\omega z)^n}{n(n!)} + \cdots\ . \quad (289)$$

Mit Hilfe von $Ei(\omega z)$ ergibt sich durch Anwendung der zweiten der Gln (286) für $n \to -n$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{e^{\omega z}}{z^n}dz = -\frac{e^{\omega z}}{(n-1)z^{n-1}} + \frac{\omega}{n-1}\int\frac{e^{\omega z}}{z^{n-1}}dz \quad ,\\
&\int\frac{e^{\omega z}}{z^n}dz = -\frac{e^{\omega z}}{(n-1)z^{n-1}} - \frac{\omega e^{\omega z}}{[(n-1)(n-2)]z^{n-2}} - \cdots - \frac{\omega^{n-3}e^{\omega z}}{[(n-1)(n-2)\ldots 2]z^2} - \frac{\omega^{n-2}e^{\omega z}}{[(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1]z} +\\
&\qquad + \frac{\omega^{n-1}Ei(\omega z)}{[(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1]} \quad .
\end{aligned}\right\} \quad (290)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{e^{\omega z}}{z}dz = Ei(\omega z) \quad , && \int\frac{e^{\pm z}}{z}dz = Ei(\pm z) \quad ,\\
&\int\frac{e^{\omega z}}{z^2}dz = -\frac{e^{\omega z}}{z} + \omega Ei(\omega z) \quad , && \int\frac{e^{\pm z}}{z^2}dz = -\frac{e^{\pm z}}{z} \pm Ei(\pm z) \quad ,\\
&\int\frac{e^{\omega z}}{z^3}dz = -\frac{e^{\omega z}}{2z^2} - \frac{\omega e^{\omega z}}{2z} + \frac{\omega^2}{2}Ei(\omega z) \quad , && \int\frac{e^{\pm z}}{z^3}dz = -\frac{e^{\pm z}}{2z^2}(1 \pm z) + \frac{1}{2}Ei(\pm z) \quad ,\\
&\int\frac{e^{\omega z}}{z^4}dz = -\frac{e^{\omega z}}{3z^3} - \frac{\omega e^{\omega z}}{6z^2} - \frac{\omega^2 e^{\omega z}}{6z} + \frac{\omega^3}{6}Ei(\omega z) \quad , && \int\frac{e^{\pm z}}{z^4}dz = -\frac{e^{\pm z}}{6z^3}(2 \pm z + z^2) \pm \frac{1}{6}Ei(\pm z) \quad .
\end{aligned}\right\} \quad (291)$$

Für reelles Argument ist der Verlauf von $Ei(z)$ und $Ei(-z)$ aus Abb. 57 und 58 ersichtlich.

b) Trigonometrische Integrale.

Wird in (287) bis (291) $\omega = i$ gesetzt und e^{iz} gemäß

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

zerlegt, so erhält man bei Trennung nach Real- und Imaginärteil die Integrale für $\sin z$ und $\cos z$. Sie lauten

$$\left.\begin{aligned}
&\int z^n \cos z\,dz = z^n \sin z - n\int z^{n-1}\sin z\,dz, \qquad \int z^n \sin z\,dz = -z^n\cos z + n\int z^{n-1}\cos z\,dz,\\
&\int z^n \cos z\,dz = \Big[z^n - [n(n-1)]z^{n-2} + [n(n-1)(n-2)(n-3)]z^{n-4} - \cdots +\\
&\qquad + (-1)^{\frac{n}{2}}[n(n-1)\ldots 2.1]\Big]\sin z + \Big[nz^{n-1} - [n(n-1)(n-2)]z^{n-3} + \cdots +\\
&\qquad + (-1)^{\frac{n}{2}-1}[n(n-1)\ldots 2]z\Big]\cos z \qquad \text{(für gerades } n\text{)},\\
&\int z^n \cos z\,dz = \Big[z^n - [n(n-1)]z^{n-2} + [n(n-1)(n-2)(n-3)]z^{n-4} - \cdots +\\
&\qquad + (-1)^{\frac{n-1}{2}}[n(n-1)\ldots 2]z\Big]\sin z + \Big[nz^{n-1} - [n(n-1)(n-2)]z^{n-3} + \cdots +\\
&\qquad + (-1)^{\frac{n-1}{2}}[n(n-1)\ldots 2.1]\Big]\cos z \qquad \text{(für ungerades } n\text{)},\\
&\int z^n \sin z\,dz = -\Big[z^n - [n(n-1)]z^{n-2} + [n(n-1)(n-2)(n-3)]z^{n-4} - \cdots +\\
&\qquad + (-1)^{\frac{n}{2}}[n(n-1)\ldots 2.1]\Big]\cos z + \Big[nz^{n-1} - [n(n-1)(n-2)]z^{n-3} + \cdots +\\
&\qquad + (-1)^{\frac{n}{2}-1}[n(n-1)\ldots 2]z\Big]\sin z \qquad \text{(für gerades } n\text{)},\\
&\int z^n \sin z\,dz = -\Big[z^n - [n(n-1)]z^{n-2} + [n(n-1)(n-2)(n-3)]z^{n-4} - \cdots +\\
&\qquad + (-1)^{\frac{n-1}{2}}[n(n-1)\ldots 2]z\Big]\cos z + \Big[nz^{n-1} - [n(n-1)(n-2)]z^{n-3} + \cdots +\\
&\qquad + (-1)^{\frac{n-1}{2}}[n(n-1)\ldots 2.1]\Big]\sin z \qquad \text{(für ungerades } n\text{)}.
\end{aligned}\right\} \quad (292)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \cos z\,dz = \sin z \quad , && \int \sin z\,dz = -\cos z \quad ,\\
&\int z\cos z\,dz = z\sin z + \cos z \quad , && \int z\sin z\,dz = -z\cos z + \sin z \quad ,\\
&\int z^2\cos z\,dz = (z^2-2)\sin z + 2z\cos z \quad , && \int z^2\sin z\,dz = -(z^2-2)\cos z + 2z\sin z \quad ,\\
&\int z^3\cos z\,dz = (z^3-6z)\sin z + (3z^2-6)\cos z \,, && \int z^3\sin z\,dz = -(z^3-6z)\cos z + (3z^2-6)\sin z,\\
&\int z^4\cos z\,dz = (z^4-12z^2+24)\sin z + && \int z^4\sin z\,dz = -(z^4-12z^2+24)\cos z +\\
&\qquad + (4z^3-24z)\cos z \quad , && \qquad + (4z^3-24z)\sin z \quad .
\end{aligned}\right\} \quad (293)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\cos z}{z}\,dz = Ci(z) = \ln z - \frac{z^2}{2(2!)} + \frac{z^4}{4(4!)} - \frac{z^6}{6(6!)} + \cdots,\\
&\int \frac{\sin z}{z}\,dz = Si(z) = z - \frac{z^3}{3(3!)} + \frac{z^5}{5(5!)} - \frac{z^7}{7(7!)} + \cdots.
\end{aligned}\right\} \qquad (294)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\cos z}{z^n}\,dz = -\frac{\cos z}{(n-1)z^{n-1}} - \frac{1}{n-1}\int \frac{\sin z}{z^{n-1}}\,dz, \qquad \int \frac{\sin z}{z^n}\,dz = -\frac{\sin z}{(n-1)z^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{\cos z}{z^{n-1}}\,dz \quad .\\
&\int \frac{\cos z}{z^n}\,dz = -\left[\frac{1}{(n-1)z^{n-1}} - \frac{1}{[(n-1)(n-2)(n-3)]z^{n-3}} + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}-1}\frac{1}{[(n-1)(n-2)\ldots 2.1]z}\right]\cos z +\\
&\quad + \left[\frac{1}{(n-1)(n-2)z^{n-2}} - \frac{1}{[(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)]z^{n-4}} + \cdots +\right.\\
&\quad \left. + (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{[(n-1)(n-2)\ldots 2]z^2}\right]\sin z + (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{Si(z)}{[(n-1)(n-2)\ldots 2.1]} \qquad \text{(für gerades } n\text{)},\\
&\int \frac{\cos z}{z^n}\,dz = -\left[\frac{1}{(n-1)z^{n-1}} - \frac{1}{[(n-1)(n-2)(n-3)]z^{n-3}} + \cdots + (-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{1}{[(n-1)(n-2)\ldots 2]z^2}\right]\cos z +\\
&\quad + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{Ci(z)}{[(n-1)(n-2)\ldots 2.1]} + \left[\frac{1}{(n-1)(n-2)z^{n-2}} - \right. \qquad \text{(für ungerades } n\text{)}\\
&\quad \left. - \frac{1}{[(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)]z^{n-4}} + \cdots + (-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{1}{[(n-1)(n-2)\ldots 2.1]z}\right]\sin z \quad ,\\
&\int \frac{\sin z}{z^n}\,dz = -\left[\frac{1}{(n-1)z^{n-1}} - \frac{1}{[(n-1)(n-2)(n-3)]z^{n-3}} + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}-1}\frac{1}{[(n-1)(n-2)\ldots 2.1]z}\right]\sin z -\\
&\quad - \left[\frac{1}{(n-1)(n-2)z^{n-2}} - \frac{1}{[(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)]z^{n-4}} + \cdots +\right.\\
&\quad \left. + (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{[(n-1)(n-2)\ldots 2]z^2}\right]\cos z + (-1)^{\frac{n}{2}-1}\frac{Ci(z)}{[(n-1)(n-2)\ldots 2.1]} \qquad \text{(für gerades } n\text{)},\\
&\int \frac{\sin z}{z^n}\,dz = -\left[\frac{1}{(n-1)z^{n-1}} - \frac{1}{[(n-1)(n-2)(n-3)]z^{n-3}} + \cdots + (-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{1}{[(n-1)(n-2)\ldots 2]z^2}\right]\sin z +\\
&\quad + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{Si(z)}{[(n-1)(n-2)\ldots 2.1]} - \left[\frac{1}{(n-1)(n-2)z^{n-2}} - \right. \qquad \text{(für ungerades } n\text{)}\\
&\quad \left. - \frac{1}{[(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)]z^{n-4}} + \cdots + (-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{1}{[(n-1)(n-2)\ldots 2.1]z}\right]\cos z \quad .
\end{aligned}\right\} \qquad (295)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\cos z}{z}\,dz = Ci(z) &&, \quad \int \frac{\sin z}{z}\,dz = Si(z) &&,\\
&\int \frac{\cos z}{z^2}\,dz = -\frac{\cos z}{z} - Si(z) &&, \quad \int \frac{\sin z}{z^2}\,dz = -\frac{\sin z}{z} + Ci(z) &&,\\
&\int \frac{\cos z}{z^3}\,dz = -\frac{\cos z}{2z^2} + \frac{\sin z}{2z} - \frac{1}{2}Ci(z) &&, \quad \int \frac{\sin z}{z^3}\,dz = -\frac{\sin z}{2z^2} - \frac{\cos z}{2z} - \frac{1}{2}Si(z) &&,\\
&\int \frac{\cos z}{z^4}\,dz = -\left(\frac{1}{3z^3} - \frac{1}{6z}\right)\cos z + \frac{\sin z}{6z^2} + \frac{1}{6}Si(z), &&\quad \int \frac{\sin z}{z^4}\,dz = -\left(\frac{1}{3z^3} - \frac{1}{6z}\right)\sin z - \frac{\cos z}{6z^2} - \frac{1}{6}Ci(z). &&
\end{aligned}\right\} \qquad (296)$$

Für reelles Argument ist der Verlauf von $Si(z)$ und $Ci(z)$ aus Abb. 61 und 62 ersichtlich.

Durch Verbindung von (292) bis (296) mit (247) lassen sich auch Integrale der Gruppen

$$\int \frac{\cos^m z}{z^n}\,dz, \qquad \int z^n \cos^m z\,dz, \qquad \int \frac{\sin^m z}{z^n}\,dz, \qquad \int z^n \sin^m z\,dz$$

darstellen, worauf einzugehen hier jedoch zu weit führen würde.

c) Hyperbolische Integrale.

Durch Vertauschen von z mit iz in den Formeln unter β) folgen die entsprechenden hyperbolischen Integrale. Man erhält

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int z^n\,\mathfrak{Cof}\,z\,dz = z^n\,\mathfrak{Sin}\,z - n\int z^{n-1}\,\mathfrak{Sin}\,z\,dz\,, \qquad \int z^n\,\mathfrak{Sin}\,z\,dz = z^n\,\mathfrak{Cof}\,z - n\int z^{n-1}\,\mathfrak{Cof}\,z\,dz\,,\\
&\int z^n\,\mathfrak{Cof}\,z\,dz = \big[z^n + [n(n-1)]\,z^{n-2} + [n(n-1)(n-2)(n-3)]\,z^{n-4} + \cdots +\\
&\qquad + [n(n-1)\ldots 2\cdot 1]\big]\,\mathfrak{Sin}\,z - \big[n\,z^{n-1} + [n(n-1)(n-2)]\,z^{n-3} + \cdots +\\
&\qquad + [n(n-1)\ldots 2]\,z\big]\,\mathfrak{Cof}\,z \qquad \text{(für gerades } n\text{)},\\
&\int z^n\,\mathfrak{Cof}\,z\,dz = \big[z^n + [n(n-1)]\,z^{n-2} + [n(n-1)(n-2)(n-3)]\,z^{n-4} + \cdots +\\
&\qquad + [n(n-1)\ldots 2]\,z\big]\,\mathfrak{Sin}\,z - \big[n\,z^{n-1} + [n(n-1)(n-2)]\,z^{n-3} + \cdots +\\
&\qquad + [n(n-1)\ldots 2\cdot 1]\big]\,\mathfrak{Cof}\,z \qquad \text{(für ungerades } n\text{)},\\
&\int z^n\,\mathfrak{Sin}\,z\,dz = \big[z^n + [n(n-1)]\,z^{n-2} + [n(n-1)(n-2)(n-3)]\,z^{n-4} + \cdots +\\
&\qquad + [n(n-1)\ldots 2\cdot 1]\big]\,\mathfrak{Cof}\,z - \big[n\,z^{n-1} + [n(n-1)(n-2)]\,z^{n-3} + \cdots +\\
&\qquad + [n(n-1)\ldots 2]\,z\big]\,\mathfrak{Sin}\,z \qquad \text{(für gerades } n\text{)},\\
&\int z^n\,\mathfrak{Sin}\,z\,dz = \big[z^n + [n(n-1)]\,z^{n-2} + [n(n-1)(n-2)(n-3)]\,z^{n-4} + \cdots +\\
&\qquad + [n(n-1)\ldots 2]\,z\big]\,\mathfrak{Cof}\,z - \big[n\,z^{n-1} + [n(n-1)(n-2)]\,z^{n-3} + \cdots +\\
&\qquad + [n(n-1)\ldots 2\cdot 1]\big]\,\mathfrak{Sin}\,z \qquad \text{(für ungerades } n\text{)}.
\end{aligned}
\right\} \tag{297}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int \mathfrak{Cof}\,z\,dz = \mathfrak{Sin}\,z\,, && \int \mathfrak{Sin}\,z\,dz = \mathfrak{Cof}\,z\,,\\
&\int z\,\mathfrak{Cof}\,z\,dz = z\,\mathfrak{Sin}\,z - \mathfrak{Cof}\,z\,, && \int z\,\mathfrak{Sin}\,z\,dz = z\,\mathfrak{Cof}\,z - \mathfrak{Sin}\,z\,,\\
&\int z^2\,\mathfrak{Cof}\,z\,dz = (z^2+2)\,\mathfrak{Sin}\,z - 2z\,\mathfrak{Cof}\,z\,, && \int z^2\,\mathfrak{Sin}\,z\,dz = (z^2+2)\,\mathfrak{Cof}\,z - 2z\,\mathfrak{Sin}\,z\,,\\
&\int z^3\,\mathfrak{Cof}\,z\,dz = (z^3+6z)\,\mathfrak{Sin}\,z - (3z^2+6)\,\mathfrak{Cof}\,z\,, && \int z^3\,\mathfrak{Sin}\,z\,dz = (z^3+6z)\,\mathfrak{Cof}\,z - (3z^2+6)\,\mathfrak{Sin}\,z\,,\\
&\int z^4\,\mathfrak{Cof}\,z\,dz = (z^4+12z^2+24)\,\mathfrak{Sin}\,z - && \int z^4\,\mathfrak{Sin}\,z\,dz = (z^4+12z^2+24)\,\mathfrak{Cof}\,z -\\
&\qquad - (4z^3+24z)\,\mathfrak{Cof}\,z\,, && \qquad - (4z^3+24z)\,\mathfrak{Sin}\,z\,.
\end{aligned}
\right\} \tag{298}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int \frac{\mathfrak{Cof}\,z}{z}\,dz = \mathfrak{Ci}(z) = \ln|z| + \frac{z^2}{2(2!)} + \frac{z^4}{4(4!)} + \frac{z^6}{6(6!)} + \cdots\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}\,z}{z}\,dz = \mathfrak{Si}(z) = z + \frac{z^3}{3(3!)} + \frac{z^5}{5(5!)} + \frac{z^7}{7(7!)} + \cdots\,.
\end{aligned}
\right\} \tag{299}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int \frac{\mathfrak{Cof}\,z}{z^n}\,dz = -\frac{\mathfrak{Cof}\,z}{(n-1)\,z^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{\mathfrak{Sin}\,z}{z^{n-1}}\,dz\,, \qquad \int \frac{\mathfrak{Sin}\,z}{z^n}\,dz = -\frac{\mathfrak{Sin}\,z}{(n-1)\,z^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{\mathfrak{Cof}\,z}{z^{n-1}}\,dz\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Cof}\,z}{z^n}\,dz = -\left[\frac{1}{(n-1)\,z^{n-1}} + \frac{1}{[(n-1)(n-2)(n-3)]\,z^{n-3}} + \cdots + \frac{1}{[(n-1)(n-2)\ldots 2.1]\,z}\right]\mathfrak{Cof}\,z -\\
&\qquad - \left[\frac{1}{(n-1)(n-2)\,z^{n-2}} + \frac{1}{[(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)]\,z^{n-4}} + \cdots +\right.\\
&\qquad \left. + \frac{1}{[(n-1)(n-2)\ldots 2]\,z^2}\right]\mathfrak{Sin}\,z + \frac{\mathfrak{Si}(z)}{[(n-1)(n-2)\ldots 2.1]} \qquad \text{(für gerades } n\text{)},\\
&\int \frac{\mathfrak{Cof}\,z}{z^n}\,dz = -\left[\frac{1}{(n-1)\,z^{n-1}} + \frac{1}{[(n-1)(n-2)(n-3)]\,z^{n-3}} + \cdots + \frac{1}{[(n-1)(n-2)\ldots 2]\,z^2}\right]\mathfrak{Cof}\,z +\\
&\qquad + \frac{\mathfrak{Ci}(z)}{[(n-1)(n-2)\ldots 2.1]} - \left[\frac{1}{(n-1)(n-2)\,z^{n-2}} + \frac{1}{[(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)]\,z^{n-4}} + \cdots +\right.\\
&\qquad \left. + \frac{1}{[(n-1)(n-2)\ldots 2.1]\,z}\right]\mathfrak{Sin}\,z \qquad \text{(für ungerades } n\text{)},\\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}\,z}{z^n}\,dz = -\left[\frac{1}{(n-1)\,z^{n-1}} + \frac{1}{[(n-1)(n-2)(n-3)\,z^{n-3}} + \cdots + \frac{1}{[(n-1)(n-2)\ldots 2.1]\,z}\right]\mathfrak{Sin}\,z -\\
&\qquad - \left[\frac{1}{(n-1)(n-2)\,z^{n-2}} + \frac{1}{[(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)]\,z^{n-4}} + \cdots + \frac{1}{[(n-1)(n-2)\ldots 2]\,z^2}\right]\mathfrak{Cof}\,z +\\
&\qquad + \frac{\mathfrak{Ci}(z)}{[(n-1)(n-2)\ldots 2.1]} \qquad \text{(für gerades } n\text{)},\\
&\int \frac{\mathfrak{Sin}\,z}{z^n}\,dz = -\left[\frac{1}{(n-1)\,z^{n-1}} + \frac{1}{[(n-1)(n-2)(n-3)\,z^{n-3}} + \cdots + \frac{1}{[(n-1)(n-2)\ldots 2]\,z^2}\right]\mathfrak{Sin}\,z +\\
&\qquad + \frac{\mathfrak{Si}(z)}{[(n-1)(n-2)\ldots 2.1]} - \left[\frac{1}{(n-1)(n-2)\,z^{n-2}} + \frac{1}{[(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)]\,z^{n-4}} + \cdots +\right.\\
&\qquad \left. + \frac{1}{[(n-1)(n-2)\ldots 2.1]\,z}\right]\mathfrak{Cof}\,z \qquad \text{(für ungerades } n\text{)}.
\end{aligned}
\right\} \tag{300}
$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\displaystyle\int \frac{\mathfrak{Cos}\, z}{z}\, dz = \mathfrak{Ci}\,(z) \quad , & \displaystyle\int \frac{\mathfrak{Sin}\, z}{z}\, dz = \mathfrak{Si}\,(z) \quad , \\
\displaystyle\int \frac{\mathfrak{Cos}\, z}{z^2}\, dz = -\frac{\mathfrak{Cos}\, z}{z} + \mathfrak{Si}\,(z) \quad , & \displaystyle\int \frac{\mathfrak{Sin}\, z}{z^2}\, dz = -\frac{\mathfrak{Sin}\, z}{z} + \mathfrak{Ci}\,(z) \quad , \\
\displaystyle\int \frac{\mathfrak{Cos}\, z}{z^3}\, dz = -\frac{\mathfrak{Cos}\, z}{2z^2} - \frac{\mathfrak{Sin}\, z}{2z} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{Ci}\,(z)\,, & \displaystyle\int \frac{\mathfrak{Sin}\, z}{z^3}\, dz = -\frac{\mathfrak{Sin}\, z}{2z^2} - \frac{\mathfrak{Cos}\, z}{2z} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{Si}\,(z)\,, \\
\displaystyle\int \frac{\mathfrak{Cos}\, z}{z^4}\, dz = -\left(\frac{1}{3z^3} + \frac{1}{6z}\right)\mathfrak{Cos}\, z - & \displaystyle\int \frac{\mathfrak{Sin}\, z}{z^4}\, dz = -\left(\frac{1}{3z^3} + \frac{1}{6z}\right)\mathfrak{Sin}\, z - \\
\displaystyle\qquad - \frac{\mathfrak{Sin}\, z}{6z^2} + \frac{1}{6}\,\mathfrak{Si}\,(z) \quad , & \displaystyle\qquad - \frac{\mathfrak{Cos}\, z}{6z^2} + \frac{1}{6}\,\mathfrak{Ci}\,(z) \quad .
\end{array}\right\} \qquad (301)$$

Für reelles Argument ist der Verlauf der Funktionen $\mathfrak{Si}\,(z)$ und $\mathfrak{Ci}\,(z)$ aus Abb. 59 und 60 ersichtlich.

Durch Verbindung von (297) bis (301) mit (267) lassen sich auch Integrale der Gruppen

$$\int \frac{\mathfrak{Cos}^m z}{z^n}\, dz\,, \qquad \int z^n\, \mathfrak{Cos}^m z\, dz\,, \qquad \int \frac{\mathfrak{Sin}^m z}{z^n}\, dz\,, \qquad \int z^n\, \mathfrak{Sin}^m z\, dz$$

darstellen, worauf einzugehen hier wieder zu weit führen würde.

d) Logarithmische Integrale.

Für $T(z) = \ln|z|$ folgt durch Anwendung der zweiten der Gln (286) im Falle $n \neq -1$ und durch unmittelbare Integration im Falle $n = -1$

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\int z^n \ln|z|\, dz = \frac{z^{n+1}\ln|z|}{n+1} - \frac{z^{n+1}}{(n+1)^2} \quad , \\
\displaystyle\int \frac{\ln|z|}{z}\, dz = \int \ln|z|\, d(\ln|z|) = \frac{(\ln z)^2}{2} \quad , \\
\displaystyle\int \frac{\ln|z|}{z^n}\, dz = -\frac{\ln|z|}{(n-1)\, z^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)^2 z^{n-1}} \quad .
\end{array}\right\} \qquad (302)$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\displaystyle\int \ln|z|\, dz = z\ln|z| - z \quad , & \displaystyle\int \ln|z|\, dz = z\ln|z| - z \quad , \\
\displaystyle\int z\ln|z|\, dz = \frac{z^2}{2}\ln|z| - \frac{z^2}{4} \quad , & \displaystyle\int \frac{\ln|z|}{z}\, dz = \frac{1}{2}\,(\ln|z|)^2 \quad , \\
\displaystyle\int z^2\ln|z|\, dz = \frac{z^3}{3}\ln|z| - \frac{z^3}{9} \quad , & \displaystyle\int \frac{\ln|z|}{z^2}\, dz = -\frac{\ln|z|}{z} - \frac{1}{z} \quad , \\
\displaystyle\int z^3\ln|z|\, dz = \frac{z^4}{4}\ln|z| - \frac{z^4}{16} \quad , & \displaystyle\int \frac{\ln|z|}{z^3}\, dz = -\frac{\ln|z|}{2z^2} - \frac{1}{4z^2} \quad , \\
\displaystyle\int z^4\ln|z|\, dz = \frac{z^5}{5}\ln|z| - \frac{z^5}{25} \quad , & \displaystyle\int \frac{\ln|z|}{z^4}\, dz = -\frac{\ln|z|}{3z^3} - \frac{1}{9z^3} \quad .
\end{array}\right\} \qquad (303)$$

Entsprechend ergibt sich für $T(z) = (\ln|z|)^2$ in Verbindung mit (302)

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\int z^n (\ln|z|)^2\, dz = \frac{z^{n+1}(\ln|z|)^2}{n+1} - \frac{2z^{n+1}\ln|z|}{(n+1)^2} + \frac{2z^{n+1}}{(n+1)^3} \quad , \\
\displaystyle\int \frac{(\ln|z|)^2}{z}\, dz = \frac{(\ln|z|)^3}{3} \quad , \\
\displaystyle\int \frac{(\ln|z|)^2}{z^n}\, dz = -\frac{(\ln|z|)^2}{(n-1)\, z^{n-1}} - \frac{2\ln|z|}{(n-1)^2 z^{n-1}} - \frac{2}{(n-1)^3 z^{n-1}} \quad .
\end{array}\right\} \qquad (304)$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\displaystyle\int (\ln|z|)^2 dz = z(\ln|z|)^2 - 2z\ln|z| + 2z \quad , & \displaystyle\int (\ln|z|)^2 dz = z(\ln|z|)^2 - 2z\ln|z| + 2z \quad , \\
\displaystyle\int z(\ln|z|)^2 dz = \frac{1}{2}\, z^2(\ln|z|)^2 - \frac{1}{2}\, z^2\ln|z| + \frac{1}{4}\, z^2 \quad , & \displaystyle\int \frac{(\ln|z|)^2}{z}\, dz = \frac{(\ln|z|)^3}{3} \quad , \\
\displaystyle\int z^2(\ln|z|)^2 dz = \frac{1}{3}\, z^3(\ln|z|)^2 - \frac{2}{9}\, z^3\ln|z| + \frac{2}{27}\, z^3 \quad , & \displaystyle\int \frac{(\ln|z|)^2}{z^2}\, dz = -\frac{(\ln|z|)^2}{z} - \frac{2\ln|z|}{z} - \frac{2}{z} \quad , \\
\displaystyle\int z^3(\ln|z|)^2 dz = \frac{1}{4}\, z^4(\ln|z|)^2 - \frac{1}{8}\, z^4\ln|z| + \frac{1}{32}\, z^4 \quad , & \displaystyle\int \frac{(\ln|z|)^2}{z^3}\, dz = -\frac{(\ln|z|)^2}{2z^2} - \frac{\ln|z|}{2z^2} - \frac{1}{4z^2} \quad , \\
\displaystyle\int z^4(\ln|z|)^2 dz = \frac{1}{5}\, z^5(\ln|z|)^2 - \frac{2}{25}\, z^5\ln|z| + \frac{2}{125}\, z^5 \quad , & \displaystyle\int \frac{(\ln|z|)^2}{z^4}\, dz = -\frac{(\ln|z|)^2}{3z^3} - \frac{2\ln|z|}{9z^3} - \frac{2}{27z^3} \quad .
\end{array}\right\} \qquad (305)$$

Für $T(z) = (\ln|z|)^m$ liefert die zweite der Gln (286) die Rekursionsformeln

$$\left.\begin{aligned}
&\int z^n(\ln|z|)^m dz = \frac{z^{n+1}(\ln|z|)^m}{n+1} - \frac{m}{n+1}\int z^n(\ln|z|)^{m-1}dz \quad ,\\
&\int \frac{(\ln|z|)^m}{z}dz = \frac{(\ln|z|)^{m+1}}{m+1} \quad ,\\
&\int \frac{(\ln|z|)^m}{z^n}dz = -\frac{(\ln|z|)^m}{(n-1)z^{n-1}} + \frac{m}{n-1}\int\frac{(\ln|z|)^{m-1}}{z^n}dz \quad ,
\end{aligned}\right\} \tag{306}$$

Für $T(z) = \ln|a-bz|$ erhält man zunächst aus $(286)^2$

$$\int z^n \ln|a-bz|dz = \frac{z^{n+1}\ln|a-bz|}{n+1} + \frac{b}{n+1}\int\frac{z^{n+1}}{a-bz}dz\,.$$

Nun ist bei Zugrundelegung ganzzahliger positiver n-Werte

$$\frac{z^{n+1}}{a-bz} = \frac{1}{b^{n+1}}\,\frac{[a-(a-bz)]^{n+1}}{a-bz} = \frac{1}{b^{n+1}}\left[\frac{a^{n+1}}{a-bz} - \binom{n+1}{1}a^n + \binom{n+1}{2}a^{n-1}(a-bz) - \cdots + (-1)^{n+1}(a-bz)^n\right].$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int z^n\ln|a-bz|dz = \frac{1}{(n+1)b^{n+1}}\Big[&((bz)^{n+1}-a^{n+1})\ln|a-bz| + \binom{n+1}{1}a^n(a-bz) - \\
&-\binom{n+1}{2}\frac{a^{n-1}}{2}(a-bz)^2 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n+1}(a-bz)^{n+1}\Big]\,.
\end{aligned} \tag{307}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \ln|a-bz|dz = -\frac{1}{b}(a-bz)\ln|a-bz| + \frac{a-bz}{b} \quad ,\\
&\int z\ln|a-bz|dz = \frac{1}{2b^2}\left[(b^2z^2-a^2)\ln|a-bz| + 2a(a-bz) - \frac{1}{2}(a-bz)^2\right] \quad ,\\
&\int z^2\ln|a-bz|dz = \frac{1}{3b^3}\left[(b^3z^3-a^3)\ln|a-bz| + 3a^3(a-bz) - \frac{3a}{2}(a-bz)^2 + \frac{1}{3}(a-bz)^3\right] \quad ,\\
&\int z^3\ln|a-bz|dz = \frac{1}{4b^4}\Big[(b^4z^4-a^4)\ln|a-bz| + 4a^3(a-bz) - 3a^2(a-bz)^2 + \frac{4a}{3}(a-bz)^3 - \\
&\qquad -\frac{1}{4}(a-bz)^4\Big] \quad ,\\
&\int z^4\ln|a-bz|dz = \frac{1}{5b^5}\Big[(b^5z^5-a^5)\ln|a-bz| + 5a^4(a-bz) - 5a^3(a-bz)^2 + \frac{10a^2}{3}(a-bz)^3 - \\
&\qquad -\frac{5a}{4}(a-bz)^4 + \frac{1}{5}(a-bz)^5\Big] \quad .
\end{aligned}\right\} \tag{308}$$

Durch Vertauschen von z mit $\frac{a-z}{b}$ und entsprechend $a-bz$ mit z ergibt sich aus (307) und (308)

$$\begin{aligned}
\int\left(\frac{a-z}{b}\right)^n\ln z\,dz = -\frac{1}{(n+1)b^n}\Big[&((a-z)^{n+1}-a^{n+1})\ln|z| + \binom{n+1}{1}a^n z - \binom{n+1}{2}\frac{a^{n-1}}{2}z^2 + \cdots + \\
&+(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}\Big]\,.
\end{aligned} \tag{309}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\ln z\,dz = z\ln z - z \quad ,\\
&\int\left(\frac{a-z}{b}\right)\ln z\,dz = -\frac{1}{2b}\left[((a-z)^2-a^2)\ln|z| + 2az - \frac{z^2}{2}\right] \quad ,\\
&\int\left(\frac{a-z}{b}\right)^2\ln z\,dz = -\frac{1}{3b^2}\left[((a-z)^3-a^3)\ln|z| + 3a^2z - \frac{3a}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3\right] \quad ,\\
&\int\left(\frac{a-z}{b}\right)^3\ln z\,dz = -\frac{1}{4b^3}\left[((a-z)^4-a^4)\ln|z| + 4a^3z - 3a^2z^2 + \frac{4a}{3}z^3 - \frac{z^4}{4}\right] \quad ,\\
&\int\left(\frac{a-z}{b}\right)^4\ln z\,dz = -\frac{1}{5b^4}\left[((a-z)^5-a^5)\ln|z| + 5a^4z - 5a^3z^2 + \frac{10a^2}{3}z^3 - \frac{5a}{4}z^4 + \frac{z^5}{5}\right] \quad .
\end{aligned}\right\} \tag{310}$$

Für die drei transzendenten Funktionen

$$T(z) = \ln|z^2-a^2|\,,\qquad T(z) = \ln|z^2+a^2|\,,\qquad T(z) = \ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right|$$

werden die Integrale dieser Klasse mit Ausnahme von $n=-1$ durch $(286)^2$ auf Integrale der unter Ziffer 4 behandelten Klasse zurückgeführt. Man erhält zunächst allgemein, getrennt für positives und negatives n,

$$\left.\begin{aligned}\int z^n \ln|z^2-a^2|\,dz &= \frac{z^{n+1}\ln|z^2-a^2|}{n+1} - \frac{2}{n+1}\int \frac{z^{n+2}}{z^2-a^2}\,dz\,,\\ \int \frac{\ln|z^2-a^2|}{z^n}\,dz &= -\frac{\ln|z^2-a^2|}{(n-1)z^{n-1}} + \frac{2}{n-1}\int \frac{dz}{z^{n-2}(z^2-a^2)}\,.\end{aligned}\right\} \tag{311}$$

$$\left.\begin{aligned}\int z^n \ln|z^2+a^2|\,dz &= \frac{z^{n+1}\ln|z^2+a^2|}{n+1} - \frac{2}{n+1}\int \frac{z^{n+2}}{z^2+a^2}\,dz\,,\\ \int \frac{\ln|z^2+a^2|}{z^n}\,dz &= -\frac{\ln|z^2+a^2|}{(n-1)z^{n-1}} + \frac{2}{n-1}\int \frac{dz}{z^{n-2}(z^2+a^2)}\,.\end{aligned}\right\} \tag{312}$$

$$\left.\begin{aligned}\int z^n \ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right|dz &= \frac{z^{n+1}\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right|}{n+1} + \frac{2a}{n+1}\int \frac{z^{n+1}}{z^2-a^2}\,dz\,,\\ \int \frac{\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right|}{z^n}\,dz &= -\frac{\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right|}{(n-1)z^{n-1}} - \frac{2a}{n-1}\int \frac{dz}{z^{n-1}(z^2-a^2)}\,.\end{aligned}\right\} \tag{313}$$

In Anwendung auf $n=0, 1, 2, 3, 4$ folgt:

$$\left.\begin{aligned}\int \ln|z^2-a^2|\,dz &= z\ln|z^2-a^2| + a\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right| - 2z\,,\\ \int z\ln|z^2-a^2|\,dz &= \frac{z^2-a^2}{2}\ln|z^2-a^2| - \frac{z^2}{2}\,,\\ \int z^2\ln|z^2-a^2|\,dz &= \frac{z^3}{3}\ln|z^2-a^2| + \frac{a^3}{3}\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right| - \frac{2z^3}{9} - \frac{2za^2}{3}\,,\\ \int z^3\ln|z^2-a^2|\,dz &= \frac{z^4-a^4}{4}\ln|z^2-a^2| - \frac{z^4}{8} - \frac{z^2a^2}{4}\,,\\ \int z^4\ln|z^2-a^2|\,dz &= \frac{z^5}{5}\ln|z^2-a^2| + \frac{a^5}{5}\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right| - \frac{2z^5}{25} - \frac{2z^3a^2}{15} - \frac{2za^4}{5}\,.\end{aligned}\right\} \tag{314}$$

$$\left.\begin{aligned}\int \ln|z^2+a^2|\,dz &= z\ln|z^2+a^2| + 2a\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{z}{a} - 2z\,,\\ \int z\ln|z^2+a^2|\,dz &= \frac{z^2+a^2}{2}\ln|z^2+a^2| - \frac{z^2}{2}\,,\\ \int z^2\ln|z^2+a^2|\,dz &= \frac{z^3}{3}\ln|z^2+a^2| - \frac{2a^3}{3}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{z}{a} - \frac{2z^3}{9} + \frac{2za^2}{3}\,,\\ \int z^3\ln|z^2+a^2|\,dz &= \frac{z^4-a^4}{4}\ln|z^2+a^2| - \frac{z^4}{8} + \frac{z^2a^2}{4}\,,\\ \int z^4\ln|z^2+a^2|\,dz &= \frac{z^5}{5}\ln|z^2+a^2| + \frac{2a^5}{5}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{z}{a} - \frac{2z^5}{25} + \frac{2z^3a^2}{15} - \frac{2za^4}{5}\,.\end{aligned}\right\} \tag{315}$$

$$\left.\begin{aligned}\int \ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right|dz &= z\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right| + a\ln|z^2-a^2|\,,\\ \int z\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right|dz &= \frac{z^2-a^2}{2}\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right| + az\,,\\ \int z^2\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right|dz &= \frac{z^3}{3}\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right| + \frac{a^3}{3}\ln|z^2-a^2| + \frac{z^2a}{3}\,,\\ \int z^3\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right|dz &= \frac{z^4-a^4}{4}\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right| + \frac{z^3a}{6} + \frac{za^3}{2}\,,\\ \int z^4\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right|dz &= \frac{z^5}{5}\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right| + \frac{a^5}{5}\ln|z^2-a^2| + \frac{z^4a}{10} + \frac{z^2a^3}{5}\,.\end{aligned}\right\} \tag{316}$$

$$\left.\begin{aligned}\int \frac{\ln|z^2-a^2|}{z^2}\,dz &= -\frac{\ln|z^2-a^2|}{z} - \frac{1}{a}\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right|\,,\\ \int \frac{\ln|z^2-a^2|}{z^3}\,dz &= -\frac{\ln|z^2-a^2|}{2z^2} + \frac{1}{2a^2}\ln\left|1-\frac{a^2}{z^2}\right|\,,\\ \int \frac{\ln|z^2-a^2|}{z^4}\,dz &= -\frac{\ln|z^2-a^2|}{3z^3} + \frac{2}{3a^2z} - \frac{1}{3a^3}\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right|\,.\end{aligned}\right\} \tag{317}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\ln|z^2+a^2|}{z^2}\,dz = -\frac{\ln|z^2+a^2|}{z} + \frac{2}{a}\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a} \quad ,\\
&\int \frac{\ln|z^2+a^2|}{z^3}\,dz = -\frac{\ln|z^2+a^2|}{2z^2} - \frac{1}{2a^2}\ln\left|1+\frac{a^2}{z^2}\right| \quad ,\\
&\int \frac{\ln|z^2+a^2|}{z^4}\,dz = -\frac{\ln|z^2+a^2|}{3z^3} - \frac{2}{3a^2z} - \frac{2}{3a^3}\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a} \quad .
\end{aligned}\right\} \tag{318}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right|}{z^2}\,dz = -\frac{\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right|}{z} - \frac{1}{a}\ln\left|1-\frac{a^2}{z^2}\right| \quad ,\\
&\int \frac{\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right|}{z^3}\,dz = -\frac{\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right|}{2z^2} - \frac{1}{az} + \frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right| \quad ,\\
&\int \frac{\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right|}{z^4}\,dz = -\frac{\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right|}{3z^3} - \frac{1}{3az^2} - \frac{1}{3a^3}\ln\left|1-\frac{a^2}{z^2}\right| \quad .
\end{aligned}\right\} \tag{319}$$

Für die beiden transzendenten Funktionen $\ln|z+\sqrt{z^2-a^2}|$ und $\ln|z+\sqrt{z^2+a^2}|$ werden die Integrale dieser Klasse mit Ausnahme von $n=-1$ durch $(286)^2$ auf Integrale der unter Ziffer 5 behandelten Klasse zurückgeführt. Es ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}
&\int z^n \ln|z+\sqrt{z^2-a^2}|\,dz = \frac{z^{n+1}\ln|z+\sqrt{z^2-a^2}|}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int\frac{z^{n+1}}{\sqrt{z^2-a^2}}\,dz \,,\\
&\int \frac{\ln|z+\sqrt{z^2-a^2}|}{z^n}\,dz = -\frac{\ln|z+\sqrt{z^2-a^2}|}{(n-1)z^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int\frac{dz}{z^{n-1}\sqrt{z^2-a^2}} \quad ,
\end{aligned}\right\} \tag{320}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int z^n \ln|z+\sqrt{z^2+a^2}|\,dz = \frac{z^{n+1}\ln|z+\sqrt{z^2+a^2}|}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int\frac{z^{n+1}}{\sqrt{z^2+a^2}}\,dz \,,\\
&\int \frac{\ln|z+\sqrt{z^2+a^2}|}{z^n}\,dz = -\frac{\ln|z+\sqrt{z^2+a^2}|}{(n-1)z^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int\frac{dz}{z^{n-1}\sqrt{z^2+a^2}} \quad .
\end{aligned}\right\} \tag{321}$$

In Anwendung auf $n=0, 1, 2, 3, 4$ folgt:

$$\left.\begin{aligned}
&\int \ln|z+\sqrt{z^2-a^2}|\,dz = z\ln|z+\sqrt{z^2-a^2}| - \sqrt{z^2-a^2} \quad ,\\
&\int z\ln|z+\sqrt{z^2-a^2}|\,dz = \frac{2z^2-a^2}{4}\ln|z+\sqrt{z^2-a^2}| - \frac{z}{4}\sqrt{z^2-a^2} \quad ,^*\\
&\int z^2\ln|z+\sqrt{z^2-a^2}|\,dz = \frac{z^3}{3}\ln|z+\sqrt{z^2-a^2}| - \frac{z^2+2a^2}{9}\sqrt{z^2-a^2} \quad ,\\
&\int z^3\ln|z+\sqrt{z^2-a^2}|\,dz = \frac{8z^4-3a^4}{32}\ln|z+\sqrt{z^2-a^2}| - \frac{2z^2+3a^2}{32}z\sqrt{z^2-a^2} \quad ,\\
&\int z^4\ln|z+\sqrt{z^2-a^2}|\,dz = \frac{z^5}{5}\ln|z+\sqrt{z^2-a^2}| - \frac{3z^4+4a^2z^2+8a^4}{75}\sqrt{z^2-a^2} \quad .
\end{aligned}\right\} \tag{322}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \ln|z+\sqrt{z^2+a^2}|\,dz = z\ln|z+\sqrt{z^2+a^2}| - \sqrt{z^2+a^2} \quad ,\\
&\int z\ln|z+\sqrt{z^2+a^2}|\,dz = \frac{2z^2+a^2}{4}\ln|z+\sqrt{z^2+a^2}| - \frac{z}{4}\sqrt{z^2+a^2} \quad ,\\
&\int z^2\ln|z+\sqrt{z^2+a^2}|\,dz = \frac{z^3}{3}\ln|z+\sqrt{z^2+a^2}| - \frac{z^2-2a^2}{9}\sqrt{z^2+a^2} \quad ,\\
&\int z^3\ln|z+\sqrt{z^2+a^2}|\,dz = \frac{8z^4-3a^4}{32}\ln|z+\sqrt{z^2+a^2}| - \frac{2z^2-3a^2}{32}z\sqrt{z^2+a^2} \quad ,\\
&\int z^4\ln|z+\sqrt{z^2+a^2}|\,dz = \frac{z^5}{5}\ln|z+\sqrt{z^2+a^2}| - \frac{3z^4-4a^2z^2+8a^4}{75}\sqrt{z^2+a^2} \quad .
\end{aligned}\right\} \tag{323}$$

* $-\ln a$ ist in die Integrationskonstante hineingenommen.

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\ln|z+\sqrt{z^2-a^2}|}{z^2}\,dz = -\frac{\ln|z+\sqrt{z^2-a^2}|}{z} + \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{z}\,,\\
&\int \frac{\ln|z+\sqrt{z^2-a^2}|}{z^3}\,dz = -\frac{\ln|z+\sqrt{z^2-a^2}|}{2z^2} + \frac{\sqrt{z^2-a^2}}{2a^2 z}\,,\\
&\int \frac{\ln|z+\sqrt{z^2-a^2}|}{z^4}\,dz = -\frac{\ln|z+\sqrt{z^2-a^2}|}{3z^3} + \frac{\sqrt{z^2-a^2}}{6a^2z^2} + \frac{1}{6a^3}\arccos\frac{a}{z}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{324}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\ln|z+\sqrt{z^2+a^2}|}{z^2}\,dz = -\frac{\ln|z+\sqrt{z^2+a^2}|}{z} - \frac{1}{a}\mathfrak{Ar\,Sin}\frac{a}{z}\,,\\
&\int \frac{\ln|z+\sqrt{z^2+a^2}|}{z^3}\,dz = -\frac{\ln|z+\sqrt{z^2+a^2}|}{2z^2} - \frac{\sqrt{z^2+a^2}}{2a^2 z}\,,\\
&\int \frac{\ln|z+\sqrt{z^2+a^2}|}{z^4}\,dz = -\frac{\ln|z+\sqrt{z^2+a^2}|}{3z^3} - \frac{\sqrt{z^2+a^2}}{6a^2z^2} + \frac{1}{6a^3}\mathfrak{Ar\,Sin}\frac{a}{z}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{325}$$

e) Area-Integrale.

Mit Hilfe der aus den Gln (143) des ersten Teiles ablesbaren Beziehungen

$$\mathfrak{Ar\,Sin}\frac{z}{a} = \ln\left(z+\sqrt{z^2+a^2}\right) - \ln a\,, \qquad \mathfrak{Ar\,Cof}\frac{z}{a} = \ln\left(z+\sqrt{z^2-a^2}\right) - \ln a$$

$$\mathfrak{Ar\,Tang}\frac{z}{a} = \frac{1}{2}\ln\frac{a+z}{a-z} \quad (z<a)\,, \qquad \mathfrak{Ar\,Cotg}\frac{z}{a} = \frac{1}{2}\ln\frac{z+a}{z-a} \quad (z>a)$$

lassen sich die Area-Integrale dieser Klasse unmittelbar durch die Logarithmus-Integrale der Gln (313), (316), (319) (320) bis (325) darstellen. Man erhält:

$$\left.\begin{aligned}
&\int z^n\,\mathfrak{Ar\,Sin}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^{n+1}\,\mathfrak{Ar\,Sin}\frac{z}{a}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int\frac{z^{n+1}}{\sqrt{z^2+a^2}}\,dz\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Ar\,Sin}\frac{z}{a}}{z^n}\,dz = -\frac{\mathfrak{Ar\,Sin}\frac{z}{a}}{(n-1)z^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int\frac{dz}{z^{n-1}\sqrt{z^2+a^2}}\,,
\end{aligned}\right\} \tag{326}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int z^n\,\mathfrak{Ar\,Cof}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^{n+1}\,\mathfrak{Ar\,Cof}\frac{z}{a}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int\frac{z^{n+1}}{\sqrt{z^2-a^2}}\,dz\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Ar\,Cof}\frac{z}{a}}{z^n}\,dz = -\frac{\mathfrak{Ar\,Cof}\frac{z}{a}}{(n-1)z^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int\frac{dz}{z^{n-1}\sqrt{z^2-a^2}}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{327}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int z^n\,\mathfrak{Ar\,Tang}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^{n+1}\,\mathfrak{Ar\,Tang}\frac{z}{a}}{n+1} + \frac{a}{n+1}\int\frac{z^{n+1}}{z^2-a^2}\,dz\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Ar\,Tang}\frac{z}{a}}{z^n}\,dz = -\frac{\mathfrak{Ar\,Tang}\frac{z}{a}}{(n-1)z^{n-1}} - \frac{a}{n-1}\int\frac{dz}{z^{n-1}(z^2-a^2)}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{328}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int z^n\,\mathfrak{Ar\,Cotg}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^{n+1}\,\mathfrak{Ar\,Cotg}\frac{z}{a}}{n+1} + \frac{a}{n+1}\int\frac{z^{n+1}}{z^2-a^2}\,dz\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Ar\,Cotg}\frac{z}{a}}{z^n}\,dz = -\frac{\mathfrak{Ar\,Cotg}\frac{z}{a}}{(n-1)z^{n-1}} - \frac{a}{n-1}\int\frac{dz}{z^{n-1}(z^2-a^2)}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{329}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \mathfrak{Ar\,Sin}\frac{z}{a}\,dz = z\,\mathfrak{Ar\,Sin}\frac{z}{a} - \sqrt{z^2+a^2}\,,\\
&\int z\,\mathfrak{Ar\,Sin}\frac{z}{a}\,dz = \frac{2z^2+a^2}{4}\,\mathfrak{Ar\,Sin}\frac{z}{a} - \frac{z}{4}\sqrt{z^2+a^2}\,,\\
&\int z^2\,\mathfrak{Ar\,Sin}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^3}{3}\,\mathfrak{Ar\,Sin}\frac{z}{a} - \frac{z^2-2a^2}{9}\sqrt{z^2+a^2}\,,\\
&\int z^3\,\mathfrak{Ar\,Sin}\frac{z}{a}\,dz = \frac{8z^4-3a^4}{32}\,\mathfrak{Ar\,Sin}\frac{z}{a} - \frac{2z^2-3a^2}{32}\,z\sqrt{z^2+a^2}\,,\\
&\int z^4\,\mathfrak{Ar\,Sin}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^5}{5}\,\mathfrak{Ar\,Sin}\frac{z}{a} - \frac{3z^4-4a^2z^2+8a^4}{75}\sqrt{z^2+a^2}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{330}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\frac{z}{a}\,dz = z\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\frac{z}{a} - \sqrt{z^2-a^2}\,,\\
&\int z\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\frac{z}{a}\,dz = \frac{2z^2-a^2}{4}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\frac{z}{a} - \frac{z}{4}\sqrt{z^2-a^2}\,,\\
&\int z^2\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^3}{3}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\frac{z}{a} - \frac{z^2+2a^2}{9}\sqrt{z^2-a^2}\,,\\
&\int z^3\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\frac{z}{a}\,dz = \frac{8z^4-3a^4}{32}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\frac{z}{a} - \frac{2z^2+3a^2}{32}\,z\sqrt{z^2-a^2}\,,\\
&\int z^4\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^5}{5}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\frac{z}{a} - \frac{3z^4+4a^2z^2+8a^4}{75}\sqrt{z^2-a^2}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (331)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z}{a}\,dz = z\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z}{a} + a\ln\sqrt{a^2-z^2}\,,\\
&\int z\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^2-a^2}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z}{a} + \frac{az}{2}\,,\\
&\int z^2\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^3}{3}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z}{a} + \frac{a^3}{3}\ln\sqrt{a^2-z^2} + \frac{z^2a}{6}\,,\\
&\int z^3\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^4-a^4}{4}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z}{a} + \frac{z^3a}{12} + \frac{za^3}{4}\,,\\
&\int z^4\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^5}{5}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z}{a} + \frac{a^5}{5}\ln\sqrt{a^2-z^2} + \frac{z^4a}{20} + \frac{z^2a^3}{10}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad \begin{matrix}(332)\\ (z<a)\end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\frac{z}{a}\,dz = z\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\frac{z}{a} + a\ln\sqrt{z^2-a^2}\,,\\
&\int z\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^2-a^2}{2}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\frac{z}{a} + \frac{az}{2}\,,\\
&\int z^2\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^3}{3}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\frac{z}{a} + \frac{a^3}{3}\ln\sqrt{z^2-a^2} + \frac{z^2a}{6}\,,\\
&\int z^3\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^4-a^4}{4}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\frac{z}{a} + \frac{z^3a}{12} + \frac{za^3}{4}\,,\\
&\int z^4\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^5}{5}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\frac{z}{a} + \frac{a^5}{5}\ln\sqrt{z^2-a^2} + \frac{z^4a}{20} + \frac{z^2a^3}{10}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad \begin{matrix}(333)\\ (z>a)\end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{z}{a}}{z^2}\,dz = -\frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{z}{a}}{z} - \frac{1}{a}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{a}{z}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{z}{a}}{z^3}\,dz = -\frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{z}{a}}{2z^2} - \frac{\sqrt{z^2+a^2}}{2a^2z}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{z}{a}}{z^4}\,dz = -\frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{z}{a}}{3z^3} - \frac{\sqrt{z^2+a^2}}{6a^2z^2} + \frac{1}{6a^3}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\frac{a}{z}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (334)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\frac{z}{a}}{z^2}\,dz = -\frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\frac{z}{a}}{z} + \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{z}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\frac{z}{a}}{z^3}\,dz = -\frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\frac{z}{a}}{2z^2} + \frac{\sqrt{z^2-a^2}}{2a^2z}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\frac{z}{a}}{z^4}\,dz = -\frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\frac{z}{a}}{3z^3} + \frac{\sqrt{z^2-a^2}}{6a^2z^2} + \frac{1}{6a^3}\arccos\frac{a}{z}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (335)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z}{a}}{z^2}\,dz = -\frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z}{a}}{z} - \frac{1}{a}\ln\sqrt{\frac{a^2}{z^2}-1}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z}{a}}{z^3}\,dz = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{a^2}\right)\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z}{a} - \frac{1}{2az}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z}{a}}{z^4}\,dz = -\frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\frac{z}{a}}{3z^3} - \frac{1}{6az^2} - \frac{1}{3a^3}\ln\sqrt{\frac{a^2}{z^2}-1}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (336)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\,\frac{z}{a}}{z^2}\,dz = -\frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\,\frac{z}{a}}{z} - \frac{1}{a}\ln\sqrt{1-\frac{a^2}{z^2}}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\,\frac{z}{a}}{z^3}\,dz = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{a^2}\right)\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\,\frac{z}{a} - \frac{1}{2az}\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\,\frac{z}{a}}{z^4}\,dz = -\frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\,\frac{z}{a}}{3z^3} - \frac{1}{6az^2} - \frac{1}{3a^3}\ln\sqrt{1-\frac{a^2}{z^2}}\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(337)$$

Im Falle $n=1$, für den die allgemeinen Formeln versagen, ergeben sich die Reihendarstellungen

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{z}{a}}{z}\,dz = \frac{z}{a} - \frac{1}{2\cdot 3^2}\frac{z^3}{a^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5^2}\frac{z^5}{a^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7^2}\frac{z^7}{a^7} + \cdots \qquad (z<a)\,,\\
&\int \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{z}{a}}{z}\,dz = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{2z}{a}\right)^2 - \frac{1}{2^3}\frac{a^2}{z^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4^3}\frac{a^4}{z^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6^3}\frac{a^6}{z^6} + \cdots \qquad (z>a)\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(338)$$

$$\int \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{z}{a}}{z}\,dz = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{2z}{a}\right)^2 + \frac{1}{2^3}\frac{a^2}{z^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4^3}\frac{a^4}{z^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6^3}\frac{a^6}{z^6} + \cdots\,. \qquad(339)$$

$$\int \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\,\frac{z}{a}}{z}\,dz = \frac{z}{a} + \frac{1}{9}\frac{z^3}{a^3} + \frac{1}{25}\frac{z^5}{a^5} + \frac{1}{49}\frac{z^7}{a^7} + \cdots\,. \qquad(340)$$

$$\int \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\,\frac{z}{a}}{z}\,dz = -\frac{a}{z} - \frac{1}{9}\frac{a^3}{z^3} - \frac{1}{25}\frac{a^5}{z^5} - \frac{1}{49}\frac{a^7}{z^7} + \cdots\,. \qquad(341)$$

f) Arcus-Integrale.

Wird in (326) z mit iz vertauscht, so folgt

$$\left.\begin{aligned}
&\int z^n \arcsin\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^{n+1}\arcsin\frac{z}{a}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int\frac{z^{n+1}}{\sqrt{a^2-z^2}}\,dz\,,\\
&\int \frac{\arcsin\frac{z}{a}}{z^n}\,dz = -\frac{\arcsin\frac{z}{a}}{(n-1)z^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int\frac{dz}{z^{n-1}\sqrt{a^2-z^2}}\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(342)$$

Ersetzt man hierin gemäß

$$\arcsin\frac{z}{a} = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{z}{a}$$

die arcus-sinus-Funktion durch die arcus-cosinus-Funktion, so erhält man für die letztere

$$\left.\begin{aligned}
&\int z^n \arccos\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^{n+1}\arccos\frac{z}{a}}{n+1} + \frac{1}{n+1}\int\frac{z^{n+1}}{\sqrt{a^2-z^2}}\,dz\,,\\
&\int \frac{\arccos\frac{z}{a}}{z^n}\,dz = -\frac{\arccos\frac{z}{a}}{(n-1)z^{n-1}} - \frac{1}{n-1}\int\frac{dz}{z^{n-1}\sqrt{a^2-z^2}}\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(343)$$

Wird in (328) und (329) z mit iz vertauscht, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}
&\int z^n \operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^{n+1}\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}}{n+1} - \frac{a}{n+1}\int\frac{z^{n+1}}{z^2+a^2}\,dz\,,\\
&\int \frac{\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}}{z^n}\,dz = -\frac{\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}}{(n-1)z^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int\frac{dz}{z^{(n-1)}(z^2+a^2)}\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(344)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int z^n \operatorname{arc\,cotg}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^{n+1}\operatorname{arc\,cotg}\frac{z}{a}}{n+1} + \frac{a}{n+1}\int\frac{z^{n+1}}{z^2+a^2}\,dz\,,\\
&\int\frac{\operatorname{arc\,cotg}\frac{z}{a}}{z^n}\,dz = -\frac{\operatorname{arc\,cotg}\frac{z}{a}}{(n-1)\,z^{n-1}} - \frac{a}{n-1}\int\frac{dz}{z^{n-1}(z^2+a^2)}\quad.
\end{aligned}\right\}\tag{345}$$

Für $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ folgt aus (342) bis (345)

$$\left.\begin{aligned}
&\int \arcsin\frac{z}{a}\,dz = z\arcsin\frac{z}{a} + \sqrt{a^2-z^2}\,,\\
&\int z\arcsin\frac{z}{a}\,dz = \frac{2z^2-a^2}{4}\arcsin\frac{z}{a} + \frac{z}{4}\sqrt{a^2-z^2}\,,\\
&\int z^2\arcsin\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^3}{3}\arcsin\frac{z}{a} + \frac{z^2+2a^2}{9}\sqrt{a^2-z^2}\,,\\
&\int z^3\arcsin\frac{z}{a}\,dz = \frac{8z^4-3a^4}{32}\arcsin\frac{z}{a} + \frac{2z^2+3a^2}{32}\,z\sqrt{a^2-z^2}\,,\\
&\int z^4\arcsin\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^5}{5}\arcsin\frac{z}{a} + \frac{3z^4+4a^2z^2+8a^4}{75}\sqrt{a^2-z^2}\quad.
\end{aligned}\right\}\tag{346}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \arccos\frac{z}{a}\,dz = z\arccos\frac{z}{a} - \sqrt{a^2-z^2}\,,\\
&\int z\arccos\frac{z}{a}\,dz = \frac{2z^2-a^2}{4}\arccos\frac{z}{a} - \frac{z}{4}\sqrt{a^2-z^2}\,,\\
&\int z^2\arccos\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^3}{3}\arccos\frac{z}{a} - \frac{z^2+2a^2}{9}\sqrt{a^2-z^2}\,,\\
&\int z^3\arccos\frac{z}{a}\,dz = \frac{8z^4-3a^4}{32}\arccos\frac{z}{a} - \frac{2z^2+3a^2}{32}\,z\sqrt{a^2-z^2}\,,\\
&\int z^4\arccos\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^5}{5}\arccos\frac{z}{a} - \frac{3z^4+4a^2z^2+8a^4}{75}\sqrt{a^2-z^2}\quad.
\end{aligned}\right\}\tag{347}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}\,dz = z\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a} - a\ln\sqrt{z^2+a^2}\,,\\
&\int z\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^2+a^2}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a} - \frac{az}{2}\,,\\
&\int z^2\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^3}{3}\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a} + \frac{a^3}{3}\ln\sqrt{z^2+a^2} - \frac{z^2a}{6}\,,\\
&\int z^3\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^4-a^4}{4}\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a} - \frac{z^3a}{12} + \frac{za^3}{4}\,,\\
&\int z^4\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^5}{5}\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a} - \frac{a^5}{5}\ln\sqrt{z^2+a^2} - \frac{z^4a}{20} + \frac{z^2a^3}{10}\,.
\end{aligned}\right\}\tag{348}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \operatorname{arc\,cotg}\frac{z}{a}\,dz = z\operatorname{arc\,cotg}\frac{z}{a} + a\ln\sqrt{z^2+a^2}\,,\\
&\int z\operatorname{arc\,cotg}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^2+a^2}{2}\operatorname{arc\,cotg}\frac{z}{a} + \frac{az}{2}\,,\\
&\int z^2\operatorname{arc\,cotg}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^3}{3}\operatorname{arc\,cotg}\frac{z}{a} - \frac{a^3}{3}\ln\sqrt{z^2+a^2} + \frac{z^2a}{6}\,,\\
&\int z^3\operatorname{arc\,cotg}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^4-a^4}{4}\operatorname{arc\,cotg}\frac{z}{a} + \frac{z^3a}{12} - \frac{za^3}{4}\,,\\
&\int z^4\operatorname{arc\,cotg}\frac{z}{a}\,dz = \frac{z^5}{a}\operatorname{arc\,cotg}\frac{z}{a} + \frac{a^5}{5}\ln\sqrt{z^2+a^2} + \frac{z^4a}{20} - \frac{z^2a^3}{10}\,.
\end{aligned}\right\}\tag{349}$$

$$\left.\begin{aligned}
\int \frac{\arcsin\frac{z}{a}}{z^2}\,dz &= -\frac{\arcsin\frac{z}{a}}{z} - \frac{1}{a}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{a}{z}\,,\\
\int \frac{\arcsin\frac{z}{a}}{z^3}\,dz &= -\frac{\arcsin\frac{z}{a}}{2z^2} - \frac{\sqrt{a^2-z^2}}{2a^2z}\,,\\
\int \frac{\arcsin\frac{z}{a}}{z^4}\,dz &= -\frac{\arcsin\frac{z}{a}}{3z^3} - \frac{\sqrt{a^2-z^2}}{6a^2z^2} - \frac{1}{6a^3}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{a}{z}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{350}$$

$$\left.\begin{aligned}
\int \frac{\arccos\frac{z}{a}}{z^2}\,dz &= -\frac{\arccos\frac{z}{a}}{z} + \frac{1}{a}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{a}{z}\,,\\
\int \frac{\arccos\frac{z}{a}}{z^3}\,dz &= -\frac{\arccos\frac{z}{a}}{2z^2} + \frac{\sqrt{a^2-z^2}}{2a^2z}\,,\\
\int \frac{\arccos\frac{z}{a}}{z^4}\,dz &= -\frac{\arccos\frac{z}{a}}{6z^3} + \frac{\sqrt{a^2-z^2}}{6a^2z^2} + \frac{1}{6a^3}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{a}{z}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{351}$$

$$\left.\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}}{z^2}\,dz &= -\frac{\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}}{z} - \frac{1}{a}\ln\sqrt{\frac{a^2}{z^2}+1}\,,\\
\int \frac{\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}}{z^3}\,dz &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{a^2}\right)\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a} - \frac{1}{2az}\,,\\
\int \frac{\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}}{z^4}\,dz &= -\frac{\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}}{3z^3} - \frac{1}{6az^2} + \frac{1}{3a^3}\ln\sqrt{\frac{a^2}{z^2}+1}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{352}$$

$$\left.\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{arc\,cotg}\frac{z}{a}}{z^2}\,dz &= -\frac{\operatorname{arc\,cotg}\frac{z}{a}}{z} + \frac{1}{a}\ln\sqrt{\frac{a^2}{z^2}+1}\,,\\
\int \frac{\operatorname{arc\,cotg}\frac{z}{a}}{z^3}\,dz &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{a^2}\right)\operatorname{arc\,cotg}\frac{z}{a} + \frac{1}{2az}\,,\\
\int \frac{\operatorname{arc\,cotg}\frac{z}{a}}{z^4}\,dz &= -\frac{\operatorname{arc\,cotg}\frac{z}{a}}{3z^3} + \frac{1}{6az^2} - \frac{1}{3a^3}\ln\sqrt{\frac{a^2}{z^2}+1}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{353}$$

Im Falle $n=1$, für den die allgemeinen Formeln versagen, ergeben sich die Reihendarstellungen

$$\int \frac{\arcsin\frac{z}{a}}{z}\,dz = \frac{z}{a} + \frac{1}{2\cdot 3^2}\frac{z^3}{a^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5^2}\frac{z^5}{a^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7^2}\frac{z^7}{a^7} + \cdots \qquad (z<a)\,. \tag{354}$$

$$\int \frac{\arccos\frac{z}{a}}{z}\,dz = \int \frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{z}{a}}{z}\,dz = \frac{\pi}{2}\ln|z| - \frac{z}{a} - \frac{1}{2\cdot 3^2}\frac{z^3}{a^3} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5^2}\frac{z^5}{a^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7^2}\frac{z^7}{a^7} - \cdots \quad (z<a)\,. \tag{355}$$

$$\left.\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}}{z}\,dz &= \frac{z}{a} - \frac{1}{9}\frac{z^3}{a^3} + \frac{1}{25}\frac{z^5}{a^5} - \frac{1}{49}\frac{z^7}{a^7} + \cdots \qquad (z<a)\,,\\
\int \frac{\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}}{z}\,dz &= \frac{\pi}{2}\ln z + \frac{a}{z} - \frac{1}{9}\frac{a^3}{z^3} + \frac{1}{25}\frac{a^5}{z^5} - \frac{1}{49}\frac{a^7}{z^7} + \cdots \qquad (z>a)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{356}$$

$$\left.\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{arc\,cotg}\frac{z}{a}}{z}\,dz &= \int \frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}}{z}\,dz = \frac{\pi}{2}\ln|z| - \frac{z}{a} + \frac{1}{9}\frac{z^3}{a^3} - \frac{1}{25}\frac{z^5}{a^5} + \frac{1}{49}\frac{z^7}{a^7} - \cdots \quad (z<a)\,,\\
\int \frac{\operatorname{arc\,cotg}\frac{z}{a}}{z}\,dz &= \int \frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{a}}{z}\,dz = -\frac{a}{z} + \frac{1}{9}\frac{a^3}{z^3} - \frac{1}{25}\frac{a^5}{z^5} + \frac{1}{49}\frac{a^7}{z^7} - \cdots \quad (z>a)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{357}$$

7. Sonderintegrale.

Abschließend sollen hier noch einige Integrale zusammengestellt werden, deren Zusammenstellung in Klassen sich nicht lohnt. Ein Teil dieser Integrale ist bereits zerstreut im ersten Abschnitt enthalten.

$$\left.\begin{aligned}
&\int e^{+az}\cos bz\,dz = +\frac{e^{+az}(a\cos bz + b\sin bz)}{a^2+b^2}, &&\int e^{-az}\cos bz\,dz = -\frac{e^{-az}(a\cos bz - b\sin bz)}{a^2+b^2},\\
&\int e^{+az}\sin bz\,dz = -\frac{e^{+az}(b\cos bz - a\sin bz)}{a^2+b^2}, &&\int e^{-az}\sin bz\,dz = -\frac{e^{-az}(b\cos bz + a\sin bz)}{a^2+b^2},\\
&\int e^{+az}\mathfrak{Cos}\,bz\,dz = +\frac{e^{+az}(a\,\mathfrak{Cos}\,bz - b\,\mathfrak{Sin}\,bz)}{a^2-b^2}, &&\int e^{-az}\mathfrak{Cos}\,bz\,dz = -\frac{e^{-az}(a\,\mathfrak{Cos}\,bz + b\,\mathfrak{Sin}\,bz)}{a^2-b^2},\\
&\int e^{+az}\mathfrak{Sin}\,bz\,dz = -\frac{e^{+az}(b\,\mathfrak{Cos}\,bz - a\,\mathfrak{Sin}\,bz)}{a^2-b^2}, &&\int e^{-az}\mathfrak{Sin}\,bz\,dz = -\frac{e^{-az}(b\,\mathfrak{Cos}\,bz + a\,\mathfrak{Sin}\,bz)}{a^2-b^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{358}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \mathfrak{Cos}\,az\cos bz\,dz = \frac{a\,\mathfrak{Sin}\,az\cos bz + b\,\mathfrak{Cos}\,az\sin bz}{a^2+b^2},\\
&\int \mathfrak{Cos}\,az\sin bz\,dz = \frac{a\,\mathfrak{Sin}\,az\sin bz - b\,\mathfrak{Cos}\,az\cos bz}{a^2+b^2},\\
&\int \mathfrak{Sin}\,az\cos bz\,dz = \frac{a\,\mathfrak{Cos}\,az\cos bz + b\,\mathfrak{Sin}\,az\sin bz}{a^2+b^2},\\
&\int \mathfrak{Sin}\,az\sin bz\,dz = \frac{a\,\mathfrak{Cos}\,az\sin bz - b\,\mathfrak{Sin}\,az\cos bz}{a^2+b^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{359}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int z^a\cos(b\ln z)\,dz = \frac{z^{a+1}[(a+1)\cos(b\ln z) + b\sin(b\ln z)]}{(a+1)^2+b^2},\\
&\int z^a\sin(b\ln z)\,dz = \frac{z^{a+1}[(a+1)\sin(b\ln z) - b\cos(b\ln z)]}{(a+1)^2+b^2}
\end{aligned}\right\} \tag{360}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int \cos\ln z\,dz = \frac{z}{2}(\cos\ln z + \sin\ln z) = \frac{z}{\sqrt{2}}\overset{*}{\cos}\ln z,\\
&\int \sin\ln z\,dz = \frac{z}{2}(\sin\ln z - \cos\ln z) = \frac{z}{\sqrt{2}}\overset{*}{\sin}\ln z.
\end{aligned}\right\} \tag{361}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int e^{az}\cos^n z\,dz = \frac{e^{az}\cos^{n-1}z}{a^2+n^2}(a\cos z + n\sin z) + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{az}\cos^{n-2}z\,dz,\\
&\int e^{az}\cos z\,dz = \frac{e^{az}}{a^2+1}(a\cos z + \sin z),\\
&\int e^{az}\cos^2 z\,dz = \frac{e^{az}}{a^2+4}\left(a\cos^2 z + 2\cos z\sin z + \frac{2}{a}\right),\\
&\int e^{az}\cos^3 z\,dz = \frac{e^{az}}{a^2+9}\left(a\cos^3 z + 3\cos^2 z\sin z + \frac{6}{a^2+1}(a\cos z + \sin z)\right),\\
&\int e^{az}\cos^4 z\,dz = \frac{e^{az}}{a^2+16}\left(a\cos^4 z + 4\cos^3 z\sin z + \frac{12}{a^2+4}\left(a\cos^2 z + 2\cos z\sin z + \frac{2}{a}\right)\right).
\end{aligned}\right\} \tag{362}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int e^{az}\sin^n z\,dz = \frac{e^{az}\sin^{n-1}z}{a^2+n^2}(a\sin z - n\cos z) + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{az}\sin^{n-2}z\,dz,\\
&\int e^{az}\sin z\,dz = \frac{e^{az}}{a^2+1}(a\sin z - \cos z),\\
&\int e^{az}\sin^2 z\,dz = \frac{e^{az}}{a^2+4}\left(a\sin^2 z - 2\sin z\cos z + \frac{2}{a}\right),\\
&\int e^{az}\sin^3 z\,dz = \frac{e^{az}}{a^2+9}\left(a\sin^3 z - 3\sin^2 z\cos z + \frac{6}{a^2+1}(a\sin z - \cos z)\right),\\
&\int e^{az}\sin^4 z\,dz = \frac{e^{az}}{a^2+16}\left(a\sin^4 z - 4\sin^3 z\cos z + \frac{12}{a^2+4}\left(a\sin^2 z - 2\sin z\cos z + \frac{2}{a}\right)\right).
\end{aligned}\right\} \tag{363}$$

$$\int \frac{dz}{b e^{az} + c} = \frac{z}{c} - \frac{\ln|b e^{az} + c|}{ac}. \tag{364}$$

$$\int \frac{z e^{az}}{(az+1)^2}\,dz = \frac{e^{az}}{a^2(az+1)}. \tag{365}$$

$$\int e^{az}\ln z\,dz = \frac{1}{a}\,e^{az}\ln z - \frac{1}{a}\,\mathfrak{Ei}\,(az). \tag{366}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{dz}{(\cos z+\sin z)} = \frac{\ln\left|\operatorname{tang}\left(\frac{z}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|}{\sqrt{2}}, && \int\frac{dz}{(\cos z-\sin z)} = -\frac{\ln\left|\operatorname{tang}\left(\frac{z}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right|}{\sqrt{2}};\\
&\int\frac{dz}{(\cos z+\sin z)^2} = \frac{1}{2}\,\overset{*}{\operatorname{tang}}\,(z), && \int\frac{dz}{(\cos z-\sin z)^2} = -\frac{1}{2}\,\overset{*}{\operatorname{cotg}}\,(z),\\
&\int\frac{dz}{1+(\cos z+\sin z)} = \ln\left|1+\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right|, && \int\frac{dz}{1+(\cos z-\sin z)} = -\ln\left|1-\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right|.
\end{aligned}\right\} \tag{367}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{\sin z\,dz}{\cos z+\sin z} = \int\frac{\operatorname{tang} z\,dz}{1+\operatorname{tang} z} = \int\frac{dz}{\operatorname{cotg} z+1} = \frac{z}{2}-\frac{1}{2}\ln|\cos z+\sin z|,\\
&\int\frac{\sin z\,dz}{\cos z-\sin z} = \int\frac{\operatorname{tang} z\,dz}{1-\operatorname{tang} z} = \int\frac{dz}{\operatorname{cotg} z-1} = -\frac{z}{2}-\frac{1}{2}\ln|\cos z-\sin z|,\\
&\int\frac{\cos z\,dz}{\cos z+\sin z} = \int\frac{dz}{1+\operatorname{tang} z} = \int\frac{\operatorname{cotg} z\,dz}{\operatorname{cotg} z+1} = \frac{z}{2}+\frac{1}{2}\ln|\cos z+\sin z|,\\
&\int\frac{\cos z\,dz}{\cos z-\sin z} = \int\frac{dz}{1-\operatorname{tang} z} = \int\frac{\operatorname{cotg} z\,dz}{\operatorname{cotg} z-1} = \frac{z}{2}-\frac{1}{2}\ln|\cos z-\sin z|.
\end{aligned}\right\} \tag{368}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int\frac{1-\operatorname{tang} az}{1+\operatorname{tang} az}\,dz = \int\frac{\operatorname{cotg} az-1}{\operatorname{cotg} az+1}\,dz = \frac{\ln|\overset{*}{\cos}\,az|}{a},\\
&\int\frac{1+\operatorname{tang} az}{1-\operatorname{tang} az}\,dz = \int\frac{\operatorname{cotg} az+1}{\operatorname{cotg} az-1}\,dz = -\frac{\ln|\overset{*}{\sin}\,az|}{a}.
\end{aligned}\right\} \tag{369}$$

Dritter Abschnitt.

Funktionstafeln der elementaren Transzendenten.

Eine mathematische Funktion wird für den Praktiker erst dann von Bedeutung, wenn sie ihm durch eine unmittelbar brauchbare Funktionentafel erschlossen ist. Da an meinem Lehrstuhle häufig umfangreiche Rechnungen mit elementaren und höheren Transzendenten durchgeführt werden, so konnte alles Erdenkliche geschehen, um die Tafeln auf die verschiedensten Bedürfnisse der Anwendung abzustellen.

1. Grundtafel der elementaren transzendenten Funktionen.

Die Tafel enthält für die reellen Argumente $x = 0{,}000$ bis $1{,}000$ mit $0{,}001$ Intervall und für die reellen Argumente $2\pi x = 0{,}00000$ bis $6{,}2832$ mit $0{,}00628$ bzw. $0{,}0063$ Intervall fünf- bzw. sechsstellige Werte der Funktionen

$$\ln 2\pi x,\ e^{2\pi x},\ e^{-2\pi x},\ \mathfrak{Sin}\,2\pi x,\ \mathfrak{Cof}\,2\pi x,\ \mathfrak{Tang}\,2\pi x,\ \mathfrak{Cotg}\,2\pi x,\ \mathfrak{Amp}\,2\pi x,$$

$$\sin 2\pi x,\ \cos 2\pi x,\ \mathrm{tang}\,2\pi x,\ \mathrm{cotg}\,2\pi x,\ \overset{*}{\sin}\,2\pi x,\ \overset{*}{\cos}\,2\pi x,\ \overset{*}{\mathrm{tang}}\,2\pi x,\ \overset{*}{\mathrm{cotg}}\,2\pi x.$$

Tafelintervall und Stellenzahl der Funktionswerte sind derart einander angepaßt, daß eine lineare Interpolation zwischen den Funktionswerten möglich ist; eine Ausnahme bilden hier lediglich gewisse kleine Bereiche der Funktionen $\ln 2\pi x$, $\mathrm{tang}\,2\pi x$, $\mathrm{cotg}\,2\pi x$, in denen man sich teils mit der Produktformel der Logarithmusfunktion, teils unter Zurückgehen auf die sinus- und cosinus-Funktionen helfen kann.

Durch die in die Tafeln eingeführte doppelte Argumentskala können außer den eben aufgeführten Funktionswerten unmittelbar auch die fünf- bzw. sechsstelligen Werte der Funktionen

$$\ln u,\ e^{u},\ e^{-u},\ \mathfrak{Sin}\,u,\ \mathfrak{Cof}\,u,\ \mathfrak{Tang}\,u,\ \mathfrak{Cotg}\,u,\ \mathfrak{Amp}\,u,$$

$$\sin u,\ \cos u,\ \mathrm{tang}\,u,\ \mathrm{cotg}\,u,\ \overset{*}{\sin}\,u,\ \overset{*}{\cos}\,u,\ \overset{*}{\mathrm{tang}}\,u,\ \overset{*}{\mathrm{cotg}}\,u,$$

abgelesen werden, wenn man für $2\pi x$ das Argumentzeichen u gesetzt denkt. Die hierfür notwendige Interpolation in beiden Skalen — Argument- und Funktionsskala — geht vermöge der in der Tafel verzeichneten ersten Differenzen fast genau so schnell wie im ersten Falle der x-Skala mit $0{,}001$ Intervall.

Die doppelte Argumentskala bietet in Verbindung mit den ersten Differenzen die weitere Möglichkeit, die Umkehrfunktionen unmittelbar abzulesen. An der $2\pi x = u$ Skala erhält man die fünfstelligen Werte der Funktionen

$$e^{-u},\ e^{+u},\ \ln u,\ \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,u,\ \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,u,\ \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\,u,\ \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\,u,\ \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,u,$$

$$\mathrm{arc}\sin u,\ \mathrm{arc}\cos u,\ \mathrm{arc\,tang}\,u,\ \mathrm{arc\,cotg}\,u,\ \mathrm{arc}\,\overset{*}{\sin}\,u,\ \mathrm{arc}\,\overset{*}{\cos}\,u,\ \mathrm{arc}\,\overset{*}{\mathrm{tang}}\,u,\ \mathrm{arc}\,\overset{*}{\mathrm{cotg}}\,u.$$

An der x-Skala ergeben sich die $\frac{1}{2\pi}$-fachen Werte dieser Funktionen, d. h. die fünfstelligen Werte der Funktionen

$$\frac{e^{-u}}{2\pi},\ \frac{e^{+u}}{2\pi},\ \frac{\ln u}{2\pi},\ \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,u}{2\pi},\ \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,u}{2\pi},\ \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tang}\,u}{2\pi},\ \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cotg}\,u}{2\pi},\ \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,u}{2\pi},$$

$$\frac{\mathrm{arc}\sin u}{2\pi},\ \frac{\mathrm{arc}\cos u}{2\pi},\ \frac{\mathrm{arc\,tang}\,u}{2\pi},\ \frac{\mathrm{arc\,cotg}\,u}{2\pi},\ \frac{\mathrm{arc}\,\overset{*}{\sin}\,u}{2\pi},\ \frac{\mathrm{arc}\,\overset{*}{\cos}\,u}{2\pi},\ \frac{\mathrm{arc}\,\overset{*}{\mathrm{tang}}\,u}{2\pi},\ \frac{\mathrm{arc}\,\overset{*}{\mathrm{cotg}}\,u}{2\pi}.$$

Mit dem Argument $x = 1{,}000$ bzw. $u = 2\,\pi\,x = 6{,}2832$ ist der Bereich der Tafel gerade so weit ausgedehnt worden, bis die Funktionen $\mathfrak{Tang}\ 2\,\pi\,x$ und $\mathfrak{Cotg}\ 2\,\pi\,x$ die konstanten Werte

$$\mathfrak{Tang}\,2\,\pi\,x = \sim 1\,, \quad \mathfrak{Cotg}\,2\,\pi\,x = \sim 1 \qquad\qquad (\text{für } x > 1)$$

annehmen. Gleichzeitig werden die Funktionen $\mathfrak{Sin}\,2\,\pi\,x$ und $\mathfrak{Cos}\,2\,\pi\,x$ im Rahmen der fünfstelligen Genauigkeit einander gleich, so daß sie für größere Argumentwerte gemäß

$$\mathfrak{Sin}\,2\,\pi\,x = \sim \mathfrak{Cos}\,2\,\pi\,x = \sim \frac{1}{2}\,e^{2\,\pi\,x} \qquad\qquad (\text{für } x > 1)$$

unmittelbar auf die Exponentialfunktion zurückgeführt werden können. Diese aber kann aus einer zweiten Tafel der Exponential- und Kreisfunktionen für Argumentwerte bis $x = 10$ und $2\,\pi\,x = 62{,}83$ abgelesen werden.

Für die Kreisfunktionen umspannt der Argumentbereich von $x = 0$ bis $x = 1$ gerade eine volle Periode. Für größere Argumentwerte kann man sich entweder der Grundtafel bedienen, indem jeweils ein solches Vielfaches von $2\,\pi$ bzw. ein solches ganzzahliges x abgezogen wird, daß der verbleibende Rest in den Bereich der Tafel fällt, oder man kann unmittelbar auf die eben erwähnte zweite Tafel zurückgreifen.

Vermöge der Transformation

$$a^{\lambda} = e^{\lambda \ln a}$$

können aus der Grundtafel auch die Werte von Potenzfunktionen ermittelt werden.

Die Grundtafel läßt sich auch mit Vorteil zur Auflösung transzendenter Gleichungen heranziehen, wie am Beispiel erläutert werden wird.

2. Tafel der Exponential- und Kreisfunktionen.

Für manche technische Anwendungsgebiete, insbesondere in der Elastizitätstheorie, benötigt man sehr große Argumentbereiche der elementaren transzendenten Funktionen. Solchen Zwecken dient eine nach ähnlichen Grundsätzen wie die Grundtafel aufgebaute Sondertafel der Exponential- und Kreisfunktionen. Es ist hier lediglich in der zweiten Skala nicht $2\,\pi\,x$ sondern $\frac{\pi\,x}{2}$ als Argument gewählt, um eine besonders bequeme Durchrechnung der auf elementare Transzendente führenden Eigenwertprobleme zu ermöglichen. Entsprechend ihrem Charakter als Ergänzungstafel zur Grundtafel konnte die zweite Tafel auf die vier Funktionen

$$e^{\frac{\pi x}{2}}\,,\ e^{-\frac{\pi x}{2}}\,,\ \sin\frac{\pi x}{2}\,,\ \cos\frac{\pi x}{2}$$

beschränkt werden. In Verbindung mit der zweiten Skala kann auch eine unmittelbare Ablesung der Funktionen

$$e^{u},\ e^{-u},\ \sin u,\ \cos u,$$

erfolgen, wobei hier sinngemäß $\frac{\pi\,x}{2} = u$ gesetzt ist. Ähnlich wie bei der Grundtafel können ferner die zu den Ausgangsfunktionen gehörigen Umkehrfunktionen abgelesen werden, und zwar in der zweiten Skala in der Form

$$\ln u,\quad \operatorname{arc}\sin u,\quad \operatorname{arc}\cos u,$$

während die erste Skala die Funktionen

$$\frac{2}{\pi}\ln u\,,\ \frac{2}{\pi}\operatorname{arc}\sin u\,,\ \frac{2}{\pi}\operatorname{arc}\cos u$$

liefert.

Die außerordentlich weitgehende Ausdehnung der Tafel auf Argumente bis $u = \frac{\pi\,x}{2} = 62{,}8319$ dürfte auch den anspruchvollsten technischen Anforderungen genügen. Leider mußte dabei aus raumtechnischen Gründen auf die Angabe der ersten Differenzen verzichtet werden, wodurch die Interpolation etwas mehr Rechenarbeit verlangt wie bei der Grundtafel. Die sehr enge Intervallteilung der Tafel dürfte jedoch insofern einen Ausgleich herbeiführen, als ein praktisches Bedürfnis zur Interpolation nur in den seltensten Fällen bestehen wird.

3. Tafel der Funktionen $\mathrm{Ei}(x)$, $\mathrm{Ei}(-x)$, $\mathfrak{S}\mathrm{i}(x)$, $\mathfrak{C}\mathrm{i}(x)$, $\mathrm{Si}(x)$, $\mathrm{Ci}(x)$.

Wie der zweite Abschnitt, Ziffer 6, erkennen läßt, führen zahlreiche für die Anwendung wichtige Integrale auf die Funktionen

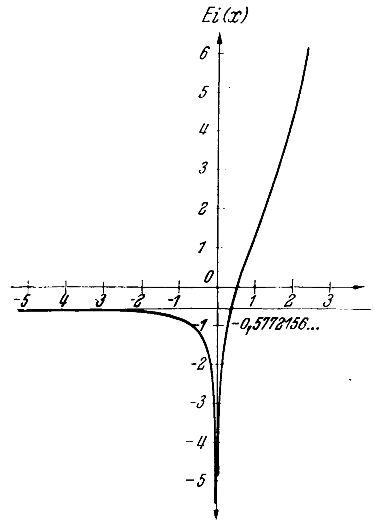

Abb. 57.

$$\mathrm{Ei}(x) = \ln x + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2(2!)} + \frac{x^3}{3(3!)} + \frac{x^4}{4(4!)} + \cdots ,$$

$$\mathrm{Ei}(-x) = \ln |x| - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2(2!)} - \frac{x^3}{3(3!)} + \frac{x^4}{4(4!)} - \cdots ,$$

$$\mathfrak{S}\mathrm{i}(x) = x + \frac{x^3}{3(3!)} + \frac{x^5}{5(5!)} + \frac{x^7}{7(7!)} + \cdots ,$$

$$\mathfrak{C}\mathrm{i}(x) = \ln |x| + \frac{x^2}{2(2!)} + \frac{x^4}{4(4!)} + \frac{x^6}{6(6!)} + \cdots ,$$

$$\mathrm{Si}(x) = x - \frac{x^3}{3(3!)} + \frac{x^5}{5(5!)} - \frac{x^7}{7(7!)} + \cdots ,$$

$$\mathrm{Ci}(x) = \ln |x| - \frac{x^2}{2(2!)} + \frac{x^4}{4(4!)} - \frac{x^6}{6(6!)} + \cdots .$$

Demgemäß wurde eine drei- bzw. vierstellige Tafel dieser Funktionen in diesen Band mit hineingenommen. Nach dem in den Abb. 57 bis 62 niedergelegten Verlauf der Funktionen genügt für praktische Zwecke ein Argumentbereich von $x = 0{,}00$ bis $x = 5{,}00$. Die Intervallteilung von 0,01 gestattet im allgemeinen eine lineare Interpolation.

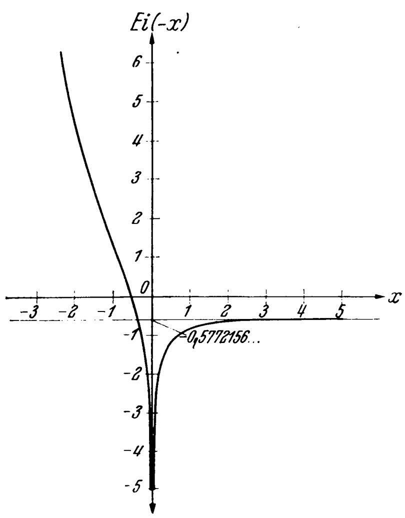

Abb. 58.

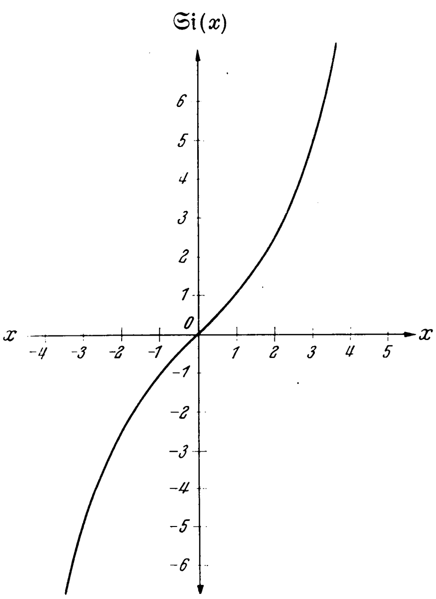

Abb. 59.

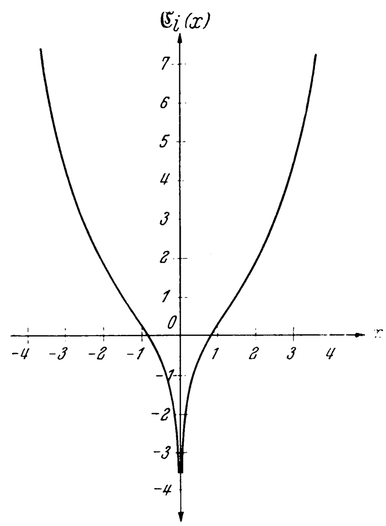

Abb. 60.

4. Beispiele zur Anwendung der Tafeln.

Beispiel 9.

Gesucht $\ln 0{,}7824\,\pi$. Hierfür ist die Grundtafel zu benutzen. Setzt man

$$\ln 0{,}7824\,\pi = \ln 0{,}3912 \cdot 2\pi ,$$

so hat man $\ln 2\pi x$ an der Stelle $x = 0{,}3912$ zu entnehmen. Bei linearer Interpolation ergibt sich unter Benutzung der in der Tafel enthaltenen ersten Differenzen

$$\ln 0{,}3912 \cdot 2\pi = 0{,}89882 + 0{,}20 \cdot 0{,}00256 = 0{,}89882 + 0{,}00051 = 0{,}89933 .$$

Somit folgt

$$\ln 0{,}7824\,\pi = 0{,}89933 .$$

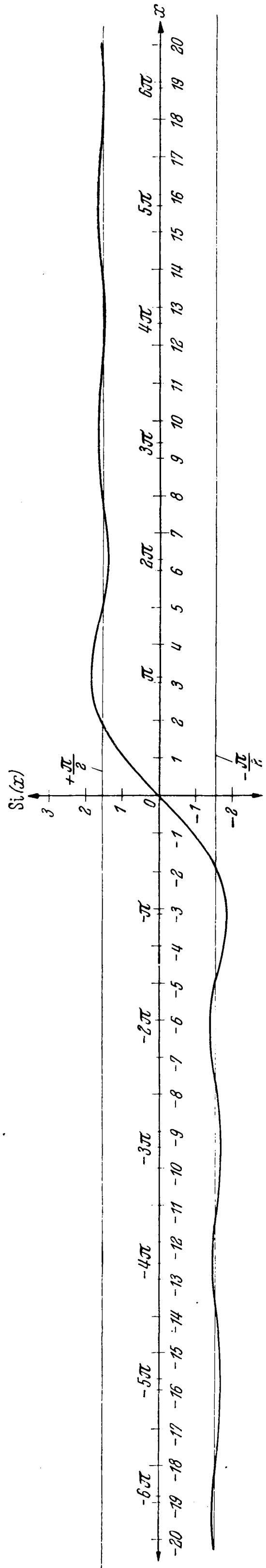

Abb. 61.

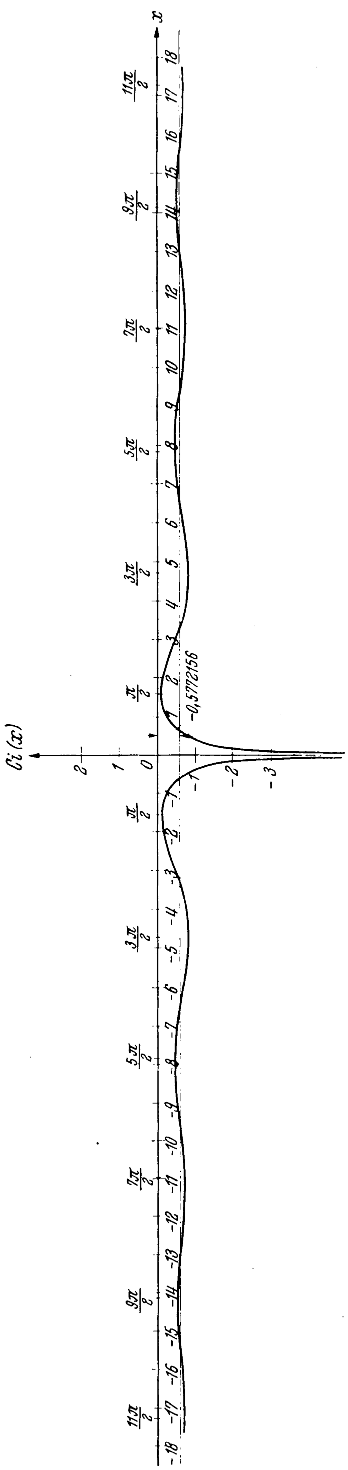

Abb. 62.

Beispiel 10.

Gesucht ln 3,156. Hierfür ist ebenfalls die Grundtafel zu benutzen, und zwar hat man $2\pi x = u = 3{,}156$ zu setzen. Dieses u liegt zwischen den aufeinanderfolgenden Werten $u = 3{,}1542$ $u = 3{,}1604$ der Tafel. Man bildet nun zunächst die Differenz von $u = 3{,}1542$ mit dem gegebenen $u = 3{,}1560$ und setzt sie ins Verhältnis zu der aus der Tafel ablesbaren Differenz zwischen $u = 3{,}1542$ und $u = 3{,}1604$. Dies ergibt

$$\frac{18}{62} = 0{,}290.$$

Wird dieses Verhältnis mit der ebenfalls aus der Tafel ablesbaren Differenz der zu $u = 3{,}1542$ und $u = 3{,}1604$ gehörigen ln-Werte multipliziert, so erhält man den Unterschied zwischen dem ln-Wert an der gesuchten Stelle und demjenigen der Tafel an der Stelle $u = 3{,}1542$. Somit folgt

$$\ln 3{,}156 = \ln\ 3{,}1542 + \frac{18}{62} \cdot 0{,}00198$$
$$= 1{,}14873 + 0{,}00058 = 1{,}14931.$$

Beispiel 11.

Gesucht ln 33,14. Hierfür hat man die Grundtafel gemäß

$$e^u = 33{,}14\,, \quad u = \ln 33{,}14$$

als Umkehrtafel zu benutzen, wobei wieder $2\pi x = u$ gesetzt ist. Der gegebene e^u-Wert liegt zwischen den aufeinanderfolgenden Werten $e^u = 33{,}107$ und 33,315 der Tafel. Man hat nun wieder die Differenz zwischen $e^u = 33{,}107$ und dem Ausgangswerte 33,14 zu der Differenz der Tafelwerte ins Verhältnis zu setzen und dieses Verhältnis mit der Tafeldifferenz der zu $e^u = 33{,}107$ und 33,315 gehörigen u-Werte $u = 3{,}4997$ und 3,5060 zu multiplizieren, um den Unterschied des gesuchten u-Wertes gegenüber $u = 3{,}4997$ zu erhalten. Auf diesem Wege folgt

$$\ln 33{,}14 = 3{,}4997 + \frac{33}{208} \cdot 0{,}0063$$
$$= 3{,}4997 + 0{,}0010 = 3{,}5007.$$

Beispiel 12.

Gesucht $e^{3,284\,\pi}$. Der Rechnungsgang ist der gleiche wie im neunten Beispiel, nur muß hier die zweite Tafel benutzt werden. Setzt man

$$e^{3,284\,\pi} = e^{6,568\frac{\pi}{2}}\,,$$

so ist $e^{\frac{\pi x}{2}}$ an der Stelle $x = 6{,}568$ aufzusuchen. Wird die erste Differenz zwischen den zu $x = 6{,}56$ und $x = 6{,}57$ gehörigen Funktionswerten gebildet, so ergibt sich

$$e^{6{,}568\frac{\pi}{2}} = 2{,}9864 \cdot 10^4 + 0{,}8 \cdot 0{,}0473 \cdot 10^4 = 2{,}9864 \cdot 10^4 + 0{,}0378 \cdot 10^4 = 3{,}0242 \cdot 10^4 .$$

Beispiel 13.

Gesucht $e^{53,19}$. Der Rechnungsgang ist der gleiche wie im zehnten Beispiel, nur muß auch hier die zweite Tafel benutzt werden. Mit $\frac{\pi x}{2} = u$ liegt der gegebene u-Wert zwischen den Tafel-u-Werten 53,1872 und 53,2029. Demgemäß folgt das Differenzenverhältnis zu

$$\frac{53{,}1900 - 53{,}1872}{53{,}2029 - 53{,}1872} = \frac{0{,}0028}{0{,}0157} .$$

Ferner ergibt sich für die Differenz der zu $u = 53{,}1872$ und $53{,}2029$ gehörigen Exponentialfunktionen der Wert

$$(1{,}2756 - 1{,}2557) \cdot 10^{23} = 0{,}0199 \cdot 10^{23} .$$

Man erhält daher

$$e^{53,19} = \left(1{,}2557 + \frac{28}{157} \cdot 0{,}0199\right) 10^{23} = 1{,}2593 \cdot 10^{23}.$$

Beispiel 14.

Gesucht $0{,}375^{4,42}$. Zunächst folgt durch Umschreibung

$$0{,}375^{4,42} = e^{4,42 \ln 0,375}.$$

Für die Bildung von ln 0,375 ist der Rechnungsgang der gleiche wie im zehnten Beispiel. Man erhält mit Hilfe der Grundtafel

$$\ln 0{,}375 = -0{,}99234 + \frac{429}{628} 0{,}01680 = -0{,}99234 + 0{,}01148 = -0{,}98086 ,$$

und damit

$$0{,}375^{4,42} = e^{-4,42 \cdot 0,98086} = e^{-4,3354}.$$

Für die Darstellung der Exponentialfunktion geht man ähnlich wie in Beispiel 13 vor; nur kann hier die bequemere Grundtafel benutzt werden. Es ergibt sich

$$e^{-4,3354} = 0{,}0131.$$

Das Ergebnis lautet somit

$$0{,}375^{4,42} = 0{,}0131 .$$

Beispiel 15.

Gesucht ln tang $0{,}327\,\pi$. Für die tang-Funktion liefert die Grundtafel ähnlich wie im neunten Beispiel

$$\operatorname{tang} 0{,}327\,\pi = \operatorname{tang} 0{,}1635 \cdot 2\pi = 1{,}64342 + 0{,}5 \cdot 0{,}02350 = 1{,}65517 .$$

Damit folgt

$$\ln \operatorname{tang} 0{,}327\,\pi = \ln 1{,}65517 .$$

Durch abermalige Benutzung der Grundtafel erhält man ähnlich wie im zweiten Beispiele

$$\ln 1{,}65517 = 0{,}50228 + \frac{27}{63} \cdot 0{,}00379 = 0{,}50228 + 0{,}00162 = 0{,}50390.$$

Demgemäß ergibt sich

$$\ln \operatorname{tang} 0{,}327\,\pi = 0{,}50390 .$$

Beispiel 16.

Gesucht $e^{12,35\pi} \cos 3{,}79\,\pi$. Für beide Funktionen ist die zweite Tafel zu benutzen. Man erhält

$$e^{12,35\pi} = e^{24,70\frac{\pi}{2}} = 7{,}0802 \cdot 10^{16} ,$$

$$\cos 3{,}79\pi = \cos 7{,}58\,\frac{\pi}{2} = +0{,}79016,$$

und damit

$$e^{12,35\pi} \cos 3{,}79\,\pi = 7{,}0802 \cdot 10^{16} \cdot 0{,}79016 = 5{,}5945 \cdot 10^{16} .$$

Beispiel 17.

Gesucht $e^{-11{,}85}$ sin 9,84. Auch hier ist für beide Funktionen die zweite Tafel zu benutzen. Der Rechnungsgang ist ähnlich wie in Beispiel 13. Es ergibt sich

$$e^{-11{,}85} = 7{,}1829 \cdot 10^{-6} - \frac{62}{157}\, 0{,}0119 \cdot 10^{-6} = (7{,}1829 - 0{,}0047)\, 10^{-6} = 7{,}1782 \cdot 10^{-6}\,,$$

$$\sin 9{,}84 = -\,0{,}39715 - \frac{68}{157}\, 0{,}01436 = -\,0{,}39715 - 0{,}00622 = -\,0{,}40337\,,$$

und damit

$$e^{-11{,}85} \sin 9{,}84 = -\,7{,}1782 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}40337 = -\,2{,}8955 \cdot 10^{-6}\,.$$

Beispiel 18.

Gesucht $\frac{1}{2\pi}$ arc cotg 2,136. Hierfür ist die Grundtafel als Umkehrtafel zu benutzen, und zwar hat die Ablesung des gesuchten Funktionswertes nach den Ausführungen unter Ziffer 1 in der ersten Argumentskala zu erfolgen. Die Rechnung liefert

$$\frac{1}{2\pi} \operatorname{arc\,cotg} 2{,}136 = 0{,}069 + \frac{2380}{3509} \cdot 0{,}001 = 0{,}069 + 0{,}00068 = 0{,}06968\,.$$

Beispiel 19.

Gesucht 𝔄r𝔖in 13,74. Auch hier ist die Grundtafel als Umkehrtafel zu benutzen, nur muß jetzt in der zweiten Argumentskala abgelesen werden. Man erhält

$$\mathfrak{Ar\,Sin}\; 13{,}74 = 3{,}3112 + \frac{49}{87} \cdot 0{,}0063 = 3{,}3112 + 0{,}0035 = 3{,}3147\,.$$

Beispiel 20.

Gesucht arc cos 𝔄r𝔗ang 0,57162. Hier ist die Grundtafel zweimal als Umkehrtafel zu benutzen, und zwar hat die Ablesung beide Male in der zweiten Argumentskala zu erfolgen. Zunächst folgt

$$\mathfrak{Ar\,Tang}\; 0{,}57162 = 0{,}64717 + \frac{185}{422} \cdot 0{,}00628 = 0{,}64717 + 0{,}00276 = 0{,}64993$$

und damit

$$\operatorname{arc\,cos} \mathfrak{Ar\,Tang}\; 0{,}57162 = \operatorname{arc\,cos} 0{,}64993 = 0{,}86080 + \frac{190}{477} \cdot 0{,}00628 = 0{,}86080 + 0{,}00250 = 0{,}86330\,.$$

Beispiel 21.

Gesucht 𝔄r𝔄mp $\overset{*}{\text{tang}}$ 0,111π. Hier ist die Grundtafel einmal direkt und einmal als Umkehrtafel zu benutzen. Es ergibt sich

$$\overset{*}{\operatorname{tang}}\, 0{,}111\,\pi = \overset{*}{\operatorname{tang}}\, 0{,}0555 \cdot 2\pi = -\,0{,}47056 + 0{,}5 \cdot 0{,}00764 = -\,0{,}47056 + 0{,}00382 = -\,0{,}46674$$

und damit

$$\mathfrak{Ar\,Amp}\, \overset{*}{\operatorname{tang}}\, 0{,}111\,\pi = -\,\mathfrak{Ar\,Amp}\; 0{,}46674 = -0{,}48381 - \frac{8}{57}\, 0{,}00628$$

$$= -\,0{,}48381 - 0{,}00088 = -\,0{,}48469\,.$$

Beispiel 22.

Gesucht Lösung der transzendenten Gleichung $\frac{\mathfrak{Cof}\,\xi}{\xi} = 1{,}72$. Zur Lösung dieser auf S. 24 in Erscheinung getretenen transzendenten Gleichung ist die Grundtafel für $\xi = 2\pi x$ zu benutzen. Man verfolgt an Hand der Tafel mit dem Auge und unter Durchdividieren im Kopfe den Quotienten $\frac{\mathfrak{Cof}\,\xi}{\xi}$, mit $\xi = 0$ beginnend, und gelangt bei $x = 0{,}120$ etwa in den Bereich des vorgegebenen Zahlenwertes. Die genaue Rechnung liefert

$$\text{für } x = 0{,}120 \quad \text{und} \quad \xi = 0{,}75398\colon \frac{\mathfrak{Cof}\,\xi}{\xi} = \frac{1{,}2980}{0{,}75398} = 1{,}722\,,$$

$$\text{für } x = 0{,}121 \quad \text{und} \quad \xi = 0{,}76027\colon \frac{\mathfrak{Cof}\,\xi}{\xi} = \frac{1{,}3032}{0{,}76027} = 1{,}714\,.$$

Der gesuchte ξ-Wert wird hierdurch ein klein wenig größer als 0,75398. Es folgt durch lineare Interpolation

$$\frac{\mathfrak{Cof}\,\xi}{\xi} = 1{,}72, \text{ für } \xi = 0{,}75398 + \frac{1{,}722 - 1{,}720}{1{,}722 - 1{,}714} \cdot 0{,}00629 = 0{,}7556\,.$$

Beispiel 23.

Gesucht eine der Funktionen $\mathrm{Ei}(x)$, $\overline{\mathrm{Ei}}(x)$, $\mathfrak{Ci}(x)$, $\mathfrak{Si}(x)$, $\mathrm{Ci}(x)$, $\mathrm{Si}(x)$. Die Funktionswerte können unmittelbar für das gegebene x aus der dritten Tafel entnommen werden. Rechnungsgang und Interpolationsverfahren sind gleich dem des neunten Beispiels.

Beispiel 24.

Es folgt nun die Auswertung einiger bestimmter Integrale, und zwar sei mit dem Integral

$$\int\limits_0^1 \frac{z^2\,dz}{(z+1)^2 + \frac{1}{4}}$$

begonnen. Die Auflösung lautet nach (166) des zweiten Abschnittes mit $\alpha_1 = -1$ und $\alpha_2 = \frac{1}{2}$

$$z - 2\ln\sqrt{(z+1)^2 + \frac{1}{4}} + \frac{3}{2}\operatorname{arc\,tang} 2\,(z+1)\Big|_0^1\,.$$

Nach Einführung der Grenzen ergibt sich

$$\int\limits_0^1 \frac{z^2\,dz}{(z+1)^2 + \frac{1}{4}} = 1 - 0 - 2\ln\sqrt{4{,}25} + 2\ln\sqrt{1{,}25} + \frac{3}{2}\operatorname{arc\,tang} 4 - \frac{3}{2}\operatorname{arc\,tang} 2\,.$$

Entsprechend dem in Beispiel 10 geschilderten Verfahren erhält man aus der Grundtafel

$$2\ln\sqrt{4{,}25} = \ln 4{,}25 = 1{,}44632 + \frac{26}{63} \cdot 0{,}00147 = 1{,}44632 + 0{,}00061 = 1{,}44693$$

$$2\ln\sqrt{1{,}25} = \ln 1{,}25 = 0{,}21841 + \frac{59}{63} \cdot 0{,}00505 = 0{,}21841 + 0{,}00473 = 0{,}22314\,.$$

Der Funktionswert des Ausdruckes $\frac{3}{2}$ arc tang 4 wird im umgekehrten Ableseverfahren in der zweiten Spalte der Grundtafel aufgefunden

$$\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tang} 4 = \frac{3}{2}\left(1{,}3258 + \frac{1{,}11}{109{,}48} \cdot 0{,}0062\right) = \frac{3}{2}(1{,}3258 + 0{,}0001) = 1{,}98885\,.$$

Ebenso verfährt man bei

$$\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tang} 2 = \frac{3}{2}\left(1{,}1058 + \frac{651}{3163} \cdot 0{,}0063\right) = \frac{3}{2}(1{,}1058 + 0{,}0013) = 1{,}66065\,.$$

Die Lösung des Integrals lautet daher

$$\int\limits_0^1 \frac{z^2\,dz}{(z+1)^2 + \frac{1}{4}} = 1 - 0 - 1{,}44693 + 0{,}22314 + 1{,}98885 - 1{,}66065 = 0{,}10441\,.$$

Beispiel 25.

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\zeta}{\cos\zeta\,\sin^3\zeta} = -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2\zeta - \ln|\operatorname{cotg}\zeta|\,\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \qquad \text{[vergl. (143)]}$$

Nach Berücksichtigung der Grenzen des Integrals ergibt sich

$$-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2\frac{1}{2} - \ln\left|\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4}\right| + \ln\left|\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\right|.$$

Wird $\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4}$ nicht von vornherein gleich 1 gesetzt, sondern aus der Grundtafel entnommen, so folgt

$$\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 0{,}125\cdot 2\pi\,.$$

Wir suchen in der x-Spalte 0,125 auf und lesen $\operatorname{cotg} 0{,}125\cdot 2\pi = 1{,}0000$ ab. Somit ist

$$\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2\, 0{,}125\cdot 2\pi = 0{,}500\,.$$

Ähnlich erfolgt die Ablesung für cotg 0,5. Der Argumentwert muß jedoch in der zweiten Tafelspalte aufgesucht werden

$$\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 0{,}5 = \frac{1}{2}\left(\operatorname{cotg}\, 0{,}49637 - \frac{363}{628}\cdot 0{,}02737\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1{,}84638 - 0{,}01582\right)^2 = 1{,}67548\,.$$

Nun sind noch die mit dem Logarithmus behafteten Glieder auszurechnen.

$$\ln\left|\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4}\right| = \ln\left|\operatorname{cotg} 0{,}125\cdot 2\pi\right| = \ln 1\,.$$

Obwohl man weiß, daß $\ln 1 = 0$ ist, soll zum Zwecke der Erläuterung die Tafel benutzt werden. Danach wird

$$\ln 1 = \ln 0{,}99903 + \frac{9{,}7}{63}\cdot 0{,}00626 = -\,0{,}00097 + 0{,}00098 = 0{,}00001 = \sim 0\,.$$

Als letzter Wert ist noch

$$\ln\left|\operatorname{cotg} 0{,}5\right| = \ln 1{,}83056$$

zu bestimmen. Auf dem gleichen Wege wie eben ergibt sich

$$\ln 1{,}83056 = \ln 1{,}8284 + \frac{21{,}6}{63}\cdot 0{,}00344 = 0{,}60344 + 0{,}00118 = 0{,}60462\,.$$

Damit wird

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\zeta}{\cos\zeta\sin^3\zeta} = -\,0{,}5000 + 1{,}67548 - 0 + 0{,}60462 = 1{,}78010\,.$$

Beispiel 26.

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\zeta}{\cos^3\zeta\sin^3\zeta} = -\frac{2\operatorname{cotg} 2\zeta}{\sin 2\zeta} - 2\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\left(\frac{\pi}{2} - 2\zeta\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \qquad \text{[vgl. (251)]}$$

Nach Einführung der Grenzen ergibt sich

$$-\frac{2\operatorname{cotg} 2\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}} + \frac{2\operatorname{cotg} 2\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{2\pi}{6}} + 2\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\frac{\pi}{6} + 2\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\frac{\pi}{6}\,.$$

Das Argument in der Spalte $2\pi x$ der Grundtafel aufgesucht, liefert

$$2\operatorname{cotg} 0{,}33333\cdot 2\pi = 2(-0{,}57457 - 0{,}33\cdot 0{,}00838) = -1{,}15472$$

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin 0{,}3333\cdot 2\pi = 0{,}86707 - 0{,}33\cdot 0{,}00315 = 0{,}86602.$$

oder einfacher $\qquad \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}86602\,.$

Damit wird der erste Quotient, im Einklang mit dem direkt folgenden Zahlenwerte $\frac{4}{3}$,

$$-\frac{2\operatorname{cotg} 2\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}} = \frac{1{,}15416}{0{,}86602} = 1{,}33333\,.$$

Die Ermittlung des zweiten Ausdrucks erfolgt in ähnlicher Weise

$$2\operatorname{cotg} 0{,}16667\cdot 2\pi = 2(0{,}58295 - 0{,}67\cdot 0{,}00838) = 1{,}15472$$

$$\sin\frac{2\pi}{6} = \sin 0{,}16667\cdot 2\pi = 0{,}86392 + 0{,}67\cdot 0{,}00315 = 0{,}86602$$

oder einfacher $\sin\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}86602\,.$

Der zweite Quotient ergibt sich daher zu

$$\frac{2\operatorname{cotg} 2\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{2\pi}{6}} = \frac{1{,}15472}{0{,}86602} = 1{,}33333\,.$$

Die beiden gleichen $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}$ Ausdrücke sind als Umkehrfunktionen aus der Grundtafel abzulesen. Es folgt zunächst

$$2\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\frac{\pi}{6} = 2\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,0{,}52360.$$

Man sucht den Wert $0{,}52360$ in der Spalte „$\mathfrak{Amp}\,2\pi x$" auf und findet in der Spalte „$2\pi x$" den gesuchten Funktionswert. Die Ablösung liefert

$$2\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Amp}\,\frac{\pi}{6} = 2\left(0{,}54664 + \frac{23}{55}\cdot 0{,}00628\right) = 1{,}0985$$

Mit diesen Einzelergebnissen wird dann

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\zeta}{\cos^3\zeta\,\sin^3\zeta} = 1{,}33333 + 1{,}33333 + 1{,}0985 + 1{,}0985 = 4{,}8637\,.$$

Beispiel 27.

$$\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+\operatorname{tang} 2z}{1-\operatorname{tang} 2z}\,dz = -\left.\frac{\ln\left|\overset{*}{\sin} 2z\right|}{2}\right|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}. \qquad [\text{vgl. } (369)]$$

Nach Einführung der Grenzen erhält man

$$-\frac{1}{2}\left[\ln\left|\overset{*}{\sin} 1\right| - \ln\left|\overset{*}{\sin}\frac{1}{2}\right|\right].$$

Zunächst liefert die Grundtafel für den Argumentenwert $0{,}99903$ in der Spalte „$2\pi x$" den Funktionswert $\overset{*}{\sin}\ 0{,}99903 = 0{,}21201$. Dazu kommt noch der Anteil der Differenz, so daß sich für das Argument 1 der Wert

$$\overset{*}{\sin} 1 = 0{,}21201 + \frac{9{,}7}{63}\cdot 0{,}00613 = 0{,}21295$$

errechnet. Für das Aufschlagen des Logarithmus folgt in ähnlicher Weise

$$\ln 0{,}21295 = -1{,}57335 + \frac{560}{628}\cdot 0{,}02984 = -1{,}54674.$$

Der entsprechende Rechnungsgang für das zweite Glied ergibt

$$\overset{*}{\sin} 0{,}5 = \left|-0{,}28502 + \frac{363}{628}\,0{,}00603\right| = 0{,}28153$$

$$\ln 0{,}28153 = -1{,}28569 + \frac{507}{628}\cdot 0{,}02246 = -1{,}26756\,.$$

Damit erhält man

$$\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1+\operatorname{tang} 2z}{1-\operatorname{tang} 2z}\,dz = -\frac{1}{2}\left[-1{,}54674 + 1{,}26756\right] = 0{,}13959\,.$$

Beispiel 28.

$$\int\limits_{1}^{\frac{3}{2}} \cos\ln z\,dz = \left|\frac{z}{\sqrt{2}}\,\overset{*}{\cos}\ln z\right|_{1}^{\frac{3}{2}} \qquad [\text{vgl. } (361)]$$

Mit Berücksichtigung der Grenzen ergibt sich

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{3}{2}\overset{*}{\cos}\ln\frac{3}{2}-\overset{*}{\cos}\ln 1\right].$$

Da das Aufsuchen der Werte in den vorhergehenden Beispielen eingehend erläutert wurde, so möge hier die zahlenmäßige Durchrechnung genügen. Man erhält

$$\ln 1{,}5 = 0{,}40239 + \frac{46}{63}\cdot 0{,}00420 = 0{,}40546$$

$$\overset{*}{\cos}\, 0{,}40546 = 0{,}92745 + \frac{334}{629}\cdot 0{,}00233 = 0{,}92869$$

$$\frac{3}{2}\overset{*}{\cos}\ln 1{,}5 = 1{,}39304$$

$$\ln 1 = 0; \qquad \overset{*}{\cos}\, 0 = 0{,}70711\,.$$

Damit wird

$$\int\limits_1^{\frac{3}{2}} \cos\ln z\, dz = 0{,}70711\,(1{,}39304 - 0{,}70711) = 0{,}48503\,.$$

Beispiel 29.

$$\int\limits_1^{\frac{3}{2}} e^{az}\ln z\, dz = \frac{1}{a}\, e^{az}\ln z - \frac{1}{a}\, Ei\,(az)\Big|_1^{\frac{3}{2}} \qquad [\text{vgl. } (366)]$$

Für $a = 1$ ergibt sich unter Einführung der Grenzen

$$e^{\frac{3}{2}}\ln\frac{3}{2} - e^1\ln 1 - Ei\left(\frac{3}{2}\right) + Ei\,(1)\,.$$

Die Argumente der Exponentialfunktion und des Logarithmus sucht man in der zweiten Spalte auf und erhält für das erste Glied

$$e^{1{,}5} = 4{,}4611 + \frac{46}{63}\cdot 0{,}0281 = 4{,}4816$$

$$\ln 1{,}5 = 0{,}40239 + \frac{46}{63}\, 0{,}00420 = 0{,}40546\,.$$

Das Produkt aus beiden Funktionen ist dann

$$e^{1{,}5}\ln 1{,}5 = 4{,}4816\cdot 0{,}40546 = 1{,}81711\,.$$

Für das zweite Glied $e^1\ln 1$ wird keine Tafel benötigt, da mit $\ln 1 = 0$ der Gesamtwert null wird. Die beiden Ei-Funktionen lassen sich unmittelbar aus der Zahlentafel 3 entnehmen.

$$Ei\left(\frac{3}{2}\right) = 2{,}724; \qquad Ei\,(1) = 1{,}318\,.$$

Damit folgt

$$\int\limits_1^{\frac{3}{2}} e^z \ln z\, dz = 1{,}81711 - 0 - 2{,}724 + 1{,}318 = 0{,}411\,.$$

Beispiel 30.

Die letzten Beispiele sollen noch den Nutzen der Hilfstafeln auf S. 258 für die Berechnung von Exponentialfunktionen bzw. Hyperbelfunktionen, insbesondere für große Argumente erläutern.

Gesucht sei der Funktionswert von $e^{2{,}125\cdot 2\pi}$. Wir spalten den Exponenten zunächst in das Produkt $e^{2{,}000\cdot 2\pi}\cdot e^{0{,}125\cdot 2\pi}$ auf und entnehmen den ersten Wert der Tafel b auf S. 258, den zweiten aus der Grundtafel.

$$e^{2{,}000\cdot 2\pi} = 286\,751{,}3131\,; \qquad e^{0{,}125\cdot 2\pi} = 2{,}1933\,.$$

Demzufolge wird

$$e^{2,125 \cdot 2\pi} = 286\,751{,}3131 \cdot 2{,}1933 = 628\,931\,.$$

Wir können aber auch die Tafel 2 mit dem Argument $\frac{\pi z}{2}$ benutzen. Sie liefert

$$e^{2,125 \cdot 2\pi} = e^{8,50 \cdot \frac{\pi}{2}} = 6{,}2893 \cdot 10^5\,.$$

Eine dritte Möglichkeit besteht darin, das Produkt des Exponenten vorher auszurechnen, um dann das Argument in der Spalte „$\frac{\pi x}{2}$" einzusetzen. Dies ergibt ebenfalls

$$e^{2,125 \cdot 2\pi} = e^{13,3518} = 6{,}2893 \cdot 10^5\,.$$

Beispiel 31.

Gesucht sei der Funktionswert von $\mathfrak{Cof}\,21{,}5122$. Der Ausdruck läßt sich nicht ohne weiteres aus der Tafel entnehmen. Man wird ihn zunächst in Exponentialdarstellung umschreiben

$$\mathfrak{Cof}\,21{,}5122 = \frac{1}{2}\left(e^{21,5122} + e^{-21,5122}\right) = \frac{1}{2}\,e^{21,5122}\,.$$

Den Potenzexponenten spalten wir so auf, daß die Funktionswerte aus den Tafeln abzulesen sind, etwa gemäß

$$e^{21,5122} = e^{21 + 0,5122} = e^{21} \cdot e^{0.5122}\,.$$

Die Tafel c auf S. 258 liefert $e^{21} = 13\,188\,15\,734{,}4832$

und die Grundtafel $e^{0,5122} = 1{,}6635 + \frac{326}{628} \cdot 0{,}0105 = 1{,}6690\,.$

Damit folgt $e^{21,5122} = 13188\,15734{,}4832 \cdot 1{,}6690 = 22011\,03460{,}85246.$

Es lohnt nicht, diese Zahlen alle hinzuschreiben, da die Grundtafel ja nur eine Genauigkeit von fünf Ziffern garantiert. Im Rahmen der vorliegenden Genauigkeit ergibt sich

$$e^{21,5122} = 22011 \cdot 10^5\,.$$

Anders ist es, wenn der Potenzexponent eine ganze Zahl ist. Dann erlauben die Tafeln auf Seite 258 eine große Genauigkeit. Somit folgt

$$\mathfrak{Cof}\,21{,}5122 = \frac{1}{2} \cdot 22011 \cdot 10^5 = 11005 \cdot 10^5\,.$$

5. Zahlenwerte der Tafel 1.

x	$2\pi x$ u	$\ln 2\pi x$ ln u	$e^{2\pi x}$ e^u	$e^{-2\pi x}$ e^{-u}	$\operatorname{Sin} 2\pi x$ Sin u	$\operatorname{Cof} 2\pi x$ Cof u	$\operatorname{Tang} 2\pi x$ Tang u	$\operatorname{Cotg} 2\pi x$ Cotg u	$\operatorname{Amp} 2\pi x$ Amp u
0,000	0,0000 628	− ∞	1,0000 63	1,0000 63	0,0000 628	1,0000 0	0,00000 628	∞	0,0000 63
0,001	0,00628 629	−5,07040 69395	1,0063 63	0,9937 62	0,00628 629	1,0000 1	0,00628 629	159,2357	0,0063 63
0,002	0,01257 628	−4,37645 40520	1,0126 64	0,9875 61	0,01257 628	1,0001 1	0,01257 628	79,5545	0,0126 62
0,003	0,01885 628	−3,97125 28755	1,0190 64	0,9814 62	0,01885 628	1,0002 1	0,01885 627	53,0504	0,0188 63
0,004	0,02513 629	−3,68370 22338	1,0254 65	0,9752 61	0,02513 629	1,0003 2	0,02512 629	39,8089	0,0251 63
0,005	0,03142 628	−3,46032 18222	1,0319 65	0,9691 61	0,03142 630	1,0005 2	0,03141 627	31,8370	0,0314 63
0,006	0,03770 628	−3,27810 15407	1,0384 66	0,9630 60	0,03772 628	1,0007 3	0,03768 627	26,5393	0,0377 63
0,007	0,04398 629	−3,12403 13368	1,0450 66	0,9570 61	0,04400 629	1,0010 3	0,04395 628	22,7531	0,0440 63
0,008	0,05027 628	−2,99035 11771	1,0516 66	0,9509 58	0,05029 629	1,0013 4	0,05023 626	19,9084	0,0503 62
0,009	0,05655 628	−2,87264 10531	1,0582 66	0,9451 60	0,05658 629	1,0017 3	0,05649 626	17,7023	0,0565 63
0,010	0,06283 629	−2,76733 9541	1,0648 68	0,9391 59	0,06287 630	1,0020 4	0,06275 626	15,9363	0,0628 63
0,011	0,06912 628	−2,67192 8697	1,0716 67	0,9332 58	0,06917 630	1,0024 5	0,06901 625	14,4907	0,0691 63
0,012	0,07540 628	−2,58495 8000	1,0783 68	0,9274 58	0,07547 629	1,0029 5	0,07526 624	13,2873	0,0754 62
0,013	0,08168 629	−2,50495 7419	1,0851 69	0,9216 58	0,08176 632	1,0034 5	0,08150 624	12,2699 8726	0,0816 62
0,014	0,08797 628	−2,43076 6895	1,0920 68	0,9158 57	0,08808 631	1,0039 5	0,08774 623	11,3973 7556	0,0878 63
0,015	0,09425 628	−2,36181 6451	1,0988 70	0,9101 57	0,09439 631	1,0044 7	0,09397 623	10,6417 6617	0,0941 62
0,016	0,10053 628	−2,29730 6059	1,1058 69	0,9044 56	0,10070 631	1,0051 7	0,10020 620	9,9800 5815	0,1003 62
0,017	0,10681 629	−2,23671 5722	1,1127 70	0,8988 57	0,10701 633	1,0058 6	0,10640 622	9,3985 5191	0,1065 63
0,018	0,11310 628	−2,17949 5404	1,1197 71	0,8931 56	0,11334 632	1,0064 8	0,11262 620	8,8794 4633	0,1128 62
0,019	0,11938 628	−2,12545 5127	1,1268 71	0,8875 56	0,11966 634	1,0072 7	0,11882 619	8,4161 4167	0,1190 62
0,020	0,12566 629	−2,07418 4884	1,1339 72	0,8819 56	0,12600 633	1,0079 8	0,12501 620	7,9994 3780	0,1252 63
0,021	0,13195 628	−2,02534 4650	1,1411 71	0,8763 54	0,13233 634	1,0087 9	0,13121 615	7,6214 3413	0,1315 62
0,022	0,13823 628	−1,97884 4443	1,1482 73	0,8709 54	0,13867 634	1,0096 9	0,13736 615	7,2801 3119	0,1377 62
0,023	0,14451 629	−1,93441 4261	1,1555 73	0,8655 54	0,14501 636	1,0105 10	0,14351 616	6,9682 2868	0,1439 63
0,024	0,15080 628	−1,89180 4080	1,1628 73	0,8601 55	0,15137 635	1,0115 9	0,14967 613	6,6814 2629	0,1502 62
0,025	0,15708 628	−1,85100 3920	1,1701 74	0,8546 53	0,15772 637	1,0124 10	0,15580 612	6,4185 2426	0,1564 62
0,026	0,16336 629	−1,81180 3778	1,1775 74	0,8493 53	0,16409 638	1,0134 11	0,16192 613	6,1759 2253	0,1626 63
0,027	0,16965 628	−1,77402 3635	1,1849 75	0,8440 53	0,17047 637	1,0145 11	0,16805 611	5,9506 2088	0,1689 62
0,028	0,17593 628	−1,73767 3507	1,1924 75	0,8387 52	0,17684 638	1,0156 11	0,17416 607	5,7418 1933	0,1751 62
0,029	0,18221 629	−1,70260 3394	1,1999 75	0,8335 53	0,18322 639	1,0167 11	0,18023 607	5,5485 1808	0,1813 62
0,030	0,18850 628	−1,66866 3277	1,2074 76	0,8282 52	0,18961 640	1,0178 12	0,18630 607	5,3677 1694	0,1875 61
0,031	0,19478 628	−1,63589 3173	1,2150 77	0,8230 51	0,19601 641	1,0190 13	0,19237 603	5,1983 1580	0,1936 61
0,032	0,20106 629	−1,60416 3081	1,2227 77	0,8179 52	0,20242 643	1,0203 13	0,19840 603	5,0403 1487	0,1997 62
0,033	0,20735 628	−1,57335 2984	1,2304 78	0,8127 51	0,20885 641	1,0216 13	0,20443 602	4,8916 1399	0,2059 62
0,034	0,21363 628	−1,54351 2897	1,2382 78	0,8076 50	0,21526 643	1,0229 14	0,21045 600	4,7517 1317	0,2121 61
0,035	0,21991 628	−1,51454 2816	1,2460 78	0,8026 50	0,22169 643	1,0243 14	0,21645 597	4,6200 1240	0,2182 61
0,036	0,22619 629	−1,48638 2743	1,2538 79	0,7976 50	0,22812 646	1,0257 15	0,22242 596	4,4960 1173	0,2243 61
0,037	0,23248 628	−1,45895 2665	1,2617 80	0,7926 50	0,23458 646	1,0272 15	0,22838 596	4,3787 1104	0,2304 62
0,038	0,23876 628	−1,43230 2596	1,2697 80	0,7876 49	0,24104 646	1,0287 15	0,23434 591	4,2683 1060	0,2366 61
0,039	0,24504 629	−1,40634 2535	1,2777 80	0,7827 49	0,24750 648	1,0302 15	0,24025 591	4,1623 999	0,2427 60
0,040	0,25133 628	−1,38099 2468	1,2857 81	0,7778 49	0,25398 649	1,0317 17	0,24616 589	4,0624 949	0,2487 61
0,041	0,25761 628	−1,35631 2408	1,2938 82	0,7729 49	0,26047 649	1,0334 16	0,25205 589	3,9675 906	0,2548 61
0,042	0,26389 629	−1,33223 2356	1,3020 82	0,7680 48	0,26696 652	1,0350 17	0,25794 586	3,8769 861	0,2609 60
0,043	0,27018 628	−1,30867 2298	1,3102 83	0,7632 48	0,27348 652	1,0367 18	0,26380 584	3,7908 822	0,2669 61
0,044	0,27646 628	−1,28569 2246	1,3185 83	0,7584 47	0,28000 653	1,0385 17	0,26964 580	3,7086 780	0,2730 60
0,045	0,28274 629	−1,26323 2200	1,3268 83	0,7537 47	0,28653 654	1,0402 18	0,27544 580	3,6306 749	0,2790 61
0,046	0,28903 628	−1,24123 2150	1,3351 84	0,7490 47	0,29307 655	1,0420 19	0,28124 577	3,5557 715	0,2851 60
0,047	0,29531 628	−1,21973 2104	1,3435 85	0,7443 47	0,29962 657	1,0439 19	0,28701 576	3,4842 685	0,2911 61
0,048	0,30159 629	−1,19869 2064	1,3520 85	0,7396 46	0,30619 658	1,0458 20	0,29277 574	3,4157 657	0,2972 60
0,049	0,30788 628	−1,17805 2019	1,3605 86	0,7350 46	0,31277 658	1,0478 20	0,29851 570	3,3500 628	0,3032 59
0,050	0,31416 628	−1,15786 1980	1,3691 86	0,7304 46	0,31935 660	1,0498 20	0,30421 570	3,2872 605	0,3091 60

x	$2\pi x$		$\sin 2\pi x$		$\cos 2\pi x$		$\operatorname{tang} 2\pi x$		$\operatorname{cotg} 2\pi x$		$\sin^* 2\pi x$		$\cos^* 2\pi x$		$\operatorname{tang}^* 2\pi x$		$\operatorname{cotg}^* 2\pi x$	
0,000	0,0000	628	0,00000	628	1,00000	2	0,00000	628	∞		−0,70711	446	0,70711	443	−1,00000	1249	−1,00000	1265
0,001	0,00628	629	0,00628	629	0,99998	6	0,00628	629	159,23248		−0,70265	448	0,71154	440	−0,98751	1233	−1,01265	1280
0,002	0,01257	628	0,01257	628	0,99992	10	0,01257	628	79,54813		−0,69817	452	0,71594	437	−0,97518	1219	−1,02545	1298
0,003	0,01885	628	0,01885	628	0,99982	14	0,01885	629	53,04085		−0,69365	454	0,72031	434	−0,96299	1203	−1,03843	1314
0,004	0,02513	629	0,02513	628	0,99968	17	0,02514	629	39,78034		−0,68911	456	0,72465	432	−0,95096	1190	−1,05157	1332
0,005	0,03142	628	0,03141	628	0,99951	22	0,03143	629	31,82139		−0,68455	460	0,72897	429	−0,93906	1176	−1,06489	1351
0,006	0,03770	628	0,03769	628	0,99929	26	0,03772	629	26,51340		−0,67995	462	0,73326	425	−0,92730	1161	−1,07840	1367
0,007	0,04398	629	0,04397	627	0,99903	29	0,04401	629	22,72072		−0,67533	464	0,73751	423	−0,91569	1148	−1,09207	1387
0,008	0,05027	628	0,05024	628	0,99874	34	0,05030	631	19,87938		−0,67069	468	0,74174	420	−0,90421	1136	−1,10594	1407
0,009	0,05655	628	0,05652	627	0,99840	37	0,05661	630	17,66454		−0,66601	470	0,74594	417	−0,89285	1123	−1,12001	1427
0,010	0,06283	629	0,06279	627	0,99803	42	0,06291	632	15,89473		−0,66131	472	0,75011	414	−0,88162	1110	−1,13428	1446
0,011	0,06912	628	0,06906	627	0,99761	45	0,06923	631	14,44555		−0,65659	476	0,75425	411	−0,87052	1099	−1,14874	1469
0,012	0,07540	628	0,07533	626	0,99716	49	0,07554	632	13,23722		−0,65183	477	0,75836	408	−0,85953	1086	−1,16343	1488
0,013	0,08168	629	0,08159	626	0,99667	54	0,08186	633	12,21559		−0,64706	481	0,76244	405	−0,84867	1076	−1,17831	1513
0,014	0,08797	628	0,08785	626	0,99613	57	0,08819	634	11,33899		−0,64225	483	0,76649	402	−0,83791	1064	−1,19344	1535
0,015	0,09425	628	0,09411	625	0,99556	61	0,09453	634	10,57868		−0,63742	485	0,77051	399	−0,82727	1052	−1,20879	1558
0,016	0,10053	628	0,10036	625	0,99495	65	0,10087	635	9,91381		−0,63257	488	0,77450	396	−0,81675	1043	−1,22437	1583
0,017	0,10681	629	0,10661	625	0,99430	69	0,10722	637	9,32652		−0,62769	490	0,77846	393	−0,80632	1031	−1,24020	1607
0,018	0,11310	628	0,11286	624	0,99361	73	0,11359	636	8,80392		−0,62279	493	0,78234	390	−0,79601	1022	−1,25627	1633
0,019	0,11938	628	0,11910	623	0,99288	77	0,11995	638	8,33652		−0,61786	495	0,78629	387	−0,78579	1011	−1,27260	1659
0,020	0,12566	629	0,12533	623	0,99211	80	0,12633	638	7,91598		−0,61291	498	0,79016	383	−0,77568	1002	−1,28919	1686
0,021	0,13195	628	0,13156	623	0,99131	85	0,13271	641	7,53504		−0,60793	500	0,79399	380	−0,76566	991	−1,30605	1714
0,022	0,13823	628	0,13779	622	0,99046	88	0,13912	641	7,18818		−0,60293	503	0,79779	378	−0,75575	984	−1,32319	1745
0,023	0,14451	629	0,14401	622	0,98958	93	0,14553	642	6,87161		−0,59790	504	0,80157	374	−0,74591	972	−1,34064	1771
0,024	0,15080	628	0,15023	620	0,98865	96	0,15195	643	6,58091		−0,59286	507	0,80531	371	−0,73619	964	−1,35835	1803
0,025	0,15708	628	0,15643	621	0,98769	100	0,15838	645	6,31394		−0,58779	510	0,80902	367	−0,72655	956	−1,37638	1834
0,026	0,16336	629	0,16264	619	0,98669	105	0,16483	646	6,06671		−0,58269	512	0,81269	365	−0,71699	948	−1,39472	1868
0,027	0,16965	628	0,16883	619	0,98564	108	0,17129	647	5,83806		−0,57757	514	0,81634	361	−0,70751	938	−1,41340	1900
0,028	0,17593	628	0,17502	619	0,98456	111	0,17776	650	5,62541		−0,57243	516	0,81995	358	−0,69813	930	−1,43240	1934
0,029	0,18221	629	0,18121	617	0,98345	116	0,18426	650	5,42713		−0,56727	519	0,82353	355	−0,68883	923	−1,45174	1972
0,030	0,18850	628	0,18738	617	0,98229	120	0,19076	652	5,24224		−0,56208	520	0,82708	352	−0,67960	914	−1,47146	2006
0,031	0,19478	628	0,19355	616	0,98109	123	0,19728	653	5,06892		−0,55688	523	0,83060	348	−0,67046	907	−1,49152	2045
0,032	0,20106	629	0,19971	615	0,97986	128	0,20381	656	4,90641		−0,55165	526	0,83408	345	−0,66139	901	−1,51197	2087
0,033	0,20735	628	0,20586	615	0,97858	131	0,21037	657	4,75362		−0,54639	527	0,83753	341	−0,65238	891	−1,53284	2123
0,034	0,21363	628	0,21201	613	0,97727	135	0,21694	658	4,60955		−0,54112	529	0,84094	339	−0,64347	885	−1,55407	2167
0,035	0,21991	628	0,21814	613	0,97592	139	0,22352	661	4,47382		−0,53583	532	0,84433	335	−0,63462	878	−1,57574	2212
0,036	0,22619	629	0,22427	612	0,97453	143	0,23013	663	4,34534		−0,53051	534	0,84768	331	−0,62584	871	−1,59786	2255
0,037	0,23248	628	0,23039	611	0,97310	147	0,23676	665	4,22371		−0,52517	535	0,85099	329	−0,61713	864	−1,62041	2301
0,038	0,23876	628	0,23650	610	0,97163	150	0,24341	666	4,10837		−0,51982	538	0,85428	325	−0,60849	858	−1,64342	2350
0,039	0,24504	629	0,24260	609	0,97013	155	0,25007	669	3,99889		−0,51444	540	0,85753	321	−0,59991	851	−1,66692	2399
0,040	0,25133	628	0,24869	608	0,96858	158	0,25676	670	3,89473	9915	−0,50904	542	0,86074	318	−0,59140	845	−1,69091	2451
0,041	0,25761	628	0,25477	607	0,96700	162	0,26346	673	3,79558	9454	−0,50362	543	0,86392	315	−0,58295	838	−1,71542	2502
0,042	0,26389	629	0,26084	606	0,96538	166	0,27019	676	3,70104	9025	−0,49819	546	0,86707	311	−0,57457	833	−1,74044	2560
0,043	0,27018	628	0,26690	605	0,96372	169	0,27695	677	3,61079	8623	−0,49273	548	0,87018	308	−0,56624	827	−1,76604	2618
0,044	0,27646	628	0,27295	604	0,96203	174	0,28372	681	3,52456	8254	−0,48725	550	0,87326	305	−0,55797	822	−1,79222	2679
0,045	0,28274	629	0,27899	603	0,96029	177	0,29053	682	3,44202	7903	−0,48175	551	0,87631	301	−0,54975	815	−1,81901	2737
0,046	0,28903	628	0,28502	602	0,95852	181	0,29735	686	3,36299	7578	−0,47624	554	0,87932	297	−0,54160	810	−1,84638	2804
0,047	0,29531	628	0,29104	600	0,95671	185	0,30421	687	3,28721	7263	−0,47070	555	0,88229	294	−0,53350	804	−1,87442	2869
0,048	0,30159	629	0,29704	600	0,95486	188	0,31108	691	3,21458	6985	−0,46515	557	0,88523	291	−0,52546	800	−1,90311	2939
0,049	0,30788	628	0,30304	598	0,95298	192	0,31799	693	3,14473	6707	−0,45958	559	0,88814	287	−0,51746	794	−1,93250	3012
0,050	0,31416	628	0,30902	597	0,95106	196	0,32492	696	3,07766	6455	−0,45399	561	0,89101	283	−0,50952	789	−1,96262	3087

x	$2\pi x$	$\ln 2\pi x$	$e^{2\pi x}$	$e^{-2\pi x}$	Sin $2\pi x$	Cos $2\pi x$	Tang $2\pi x$	Cotg $2\pi x$	Amp $2\pi x$
0,050	0,31416 628	−1,15786 1980	1,3691 86	0,7304 46	0,31935 660	1,0498 20	0,30421 570	3,2872 605	0,3091 60
0,051	0,32044 629	−1,13806 1944	1,3777 87	0,7258 45	0,32595 663	1,0518 21	0,30991 567	3,2267 580	0,3151 60
0,052	0,32673 628	−1,11862 1903	1,3864 88	0,7213 45	0,33258 662	1,0539 21	0,31558 564	3,1687 556	0,3211 59
0,053	0,33301 628	−1,09959 1869	1,3952 88	0,7168 45	0,33920 663	1,0560 22	0,32122 562	3,1131 535	0,3270 60
0,054	0,33929 629	−1,08090 1837	1,4040 88	0,7123 45	0,34583 667	1,0582 21	0,32684 561	3,0596 516	0,3330 59
0,055	0,34558 628	−1,06253 1801	1,4128 89	0,7078 44	0,35250 666	1,0603 22	0,33245 557	3,0080 496	0,3389 59
0,056	0,35186 628	−1,04452 1769	1,4217 90	0,7034 44	0,35916 668	1,0625 23	0,33802 555	2,9584 478	0,3448 59
0,057	0,35814 628	−1,02683 1738	1,4307 90	0,6990 44	0,36584 670	1,0648 24	0,34357 553	2,9106 461	0,3507 58
0,058	0,36442 629	−1,00945 1711	1,4397 91	0,6946 44	0,37254 672	1,0672 23	0,34910 551	2,8645 446	0,3565 59
0,059	0,37071 628	−0,99234 1680	1,4488 91	0,6902 43	0,37926 673	1,0695 24	0,35461 548	2,8199 428	0,3624 59
0,060	0,37699 628	−0,97554 1652	1,4579 92	0,6859 43	0,38599 673	1,0719 25	0,36009 545	2,7771 415	0,3683 59
0,061	0,38327 629	−0,95902 1628	1,4671 92	0,6816 42	0,39272 677	1,0744 25	0,36554 545	2,7356 401	0,3742 59
0,062	0,38956 628	−0,94274 1599	1,4763 93	0,6774 43	0,39949 677	1,0769 25	0,37099 539	2,6955 387	0,3801 58
0,063	0,39584 628	−0,92675 1574	1,4856 94	0,6731 42	0,40626 679	1,0794 26	0,37638 538	2,6568 374	0,3859 58
0,064	0,40212 629	−0,91101 1552	1,4950 94	0,6689 42	0,41305 681	1,0820 26	0,38176 536	2,6194 362	0,3917 58
0,065	0,40841 628	−0,89549 1526	1,5044 95	0,6647 42	0,41986 682	1,0846 26	0,38712 532	2,5832 351	0,3975 57
0,066	0,41469 628	−0,88023 1503	1,5139 95	0,6605 41	0,42668 684	1,0872 27	0,39244 530	2,5481 339	0,4032 58
0,067	0,42097 629	−0,86520 1484	1,5234 97	0,6564 41	0,43352 686	1,0899 28	0,39774 529	2,5142 330	0,4090 58
0,066	0,42726 628	−0,85036 1459	1,5331 96	0,6523 41	0,44038 687	1,0927 28	0,40303 525	2,4812 319	0,4148 57
0,069	0,43354 628	−0,83577 1438	1,5427 97	0,6482 40	0,44725 689	1,0955 28	0,40828 522	2,4493 309	0,4205 57
0,070	0,43982 629	−0,82139 1420	1,5524 98	0,6442 41	0,45414 692	1,0983 29	0,41350 520	2,4184 301	0,4262 56
0,071	0,44611 628	−0,80719 1398	1,5622 99	0,6401 40	0,46106 692	1,1012 29	0,41870 516	2,3883 290	0,4318 57
0,072	0,45239 628	−0,79321 1378	1,5721 99	0,6361 40	0,46798 695	1,1041 30	0,42386 514	2,3593 283	0,4375 57
0,073	0,45867 629	−0,77943 1363	1,5820 100	0,6321 39	0,47493 697	1,1071 30	0,42900 513	2,3310 275	0,4432 57
0,074	0,46496 628	−0,76580 1341	1,5920 100	0,6282 40	0,48190 698	1,1101 30	0,43413 507	2,3035 266	0,4489 57
0,075	0,47124 628	−0,75239 1324	1,6020 101	0,6242 39	0,48888 700	1,1131 31	0,43920 506	2,2769 260	0,4546 56
0,076	0,47752 629	−0,73915 1309	1,6121 101	0,6203 39	0,49588 703	1,1162 31	0,44426 503	2,2509 252	0,4602 57
0,077	0,48381 628	−0,72606 1289	1,6222 103	0,6164 38	0,50291 704	1,1193 33	0,44929 500	2,2257 245	0,4659 57
0,078	0,49009 628	−0,71317 1273	1,6325 102	0,6126 39	0,50995 706	1,1226 31	0,45429 497	2,2012 238	0,4716 56
0,079	0,49637 628	−0,70044 1258	1,6427 104	0,6087 38	0,51701 708	1,1257 33	0,45926 494	2,1774 232	0,4772 56
0,080	0,50265 629	−0,68786 1243	1,6531 104	0,6049 38	0,52409 711	1,1290 33	0,46420 492	2,1542 226	0,4828 55
0,081	0,50894 628	−0,67543 1227	1,6635 105	0,6011 37	0,53120 712	1,1323 34	0,46912 488	2,1316 219	0,4883 55
0,082	0,51522 628	−0,66316 1211	1,6740 106	0,5974 38	0,53832 714	1,1357 34	0,47400 486	2,1097 214	0,4938 56
0,083	0,52150 629	−0,65105 1199	1,6846 106	0,5936 37	0,54546 718	1,1391 35	0,47886 483	2,0883 209	0,4994 55
0,084	0,52779 628	−0,63906 1183	1,6952 107	0,5899 37	0,55264 718	1,1426 34	0,48369 479	2,0674 202	0,5049 55
0,085	0,53407 628	−0,62723 1169	1,7059 107	0,5862 37	0,55982 722	1,1460 36	0,48848 477	2,0472 199	0,5104 54
0,086	0,54035 629	−0,61554 1157	1,7166 108	0,5825 36	0,56704 724	1,1496 36	0,49325 474	2,0273 192	0,5158 55
0,087	0,54664 628	−0,60397 1143	1,7274 109	0,5789 36	0,57428 725	1,1532 36	0,49799 473	2,0081 189	0,5213 55
0,088	0,55292 628	−0,59254 1129	1,7383 110	0,5753 36	0,58153 727	1,1568 37	0,50272 467	1,9892 183	0,5268 54
0,089	0,55920 629	−0,58125 1119	1,7493 110	0,5717 36	0,58880 731	1,1605 37	0,50739 465	1,9709 179	0,5322 54
0,090	0,56549 628	−0,57006 1104	1,7603 111	0,5681 36	0,59611 733	1,1642 38	0,51204 461	1,9530 175	0,5376 54
0,091	0,57177 628	−0,55902 1092	1,7714 112	0,5645 35	0,60344 735	1,1680 38	0,51665 460	1,9355 171	0,5430 53
0,092	0,57805 629	−0,54810 1083	1,7826 112	0,5610 35	0,61079 738	1,1718 39	0,52125 456	1,9184 166	0,5483 53
0,093	0,58434 628	−0,53727 1069	1,7938 113	0,5575 35	0,61817 740	1,1757 39	0,52581 454	1,9018 163	0,5536 53
0,094	0,59062 628	−0,52658 1057	1,8051 114	0,5540 35	0,62557 742	1,1796 39	0,53035 449	1,8855 158	0,5589 53
0,095	0,59690 629	−0,51601 1049	1,8165 114	0,5505 34	0,63299 745	1,1835 40	0,53484 447	1,8697 155	0,5642 53
0,096	0,60319 628	−0,50552 1035	1,8279 116	0,5471 35	0,64044 747	1,1875 41	0,53931 444	1,8542 151	0,5695 53
0,097	0,60947 628	−0,49517 1025	1,8395 115	0,5436 34	0,64791 750	1,1916 40	0,54375 441	1,8391 148	0,5748 53
0,098	0,61575 629	−0,48492 1027	1,8510 117	0,5402 34	0,65541 753	1,1956 42	0,54816 439	1,8243 145	0,5801 52
0,099	0,62204 628	−0,47475 1004	1,8627 118	0,5368 33	0,66294 754	1,1998 42	0,55255 434	1,8098 141	0,5853 53
0,100	0,62832 628	−0,46471 995	1,8745 118	0,5335 34	0,67048 76	1,2040 42	0,55689 432	1,7957 138	0,5906 52

x	$2\pi x$	$\sin 2\pi x$	$\cos 2\pi x$	$\mathrm{tang}\, 2\pi x$	$\mathrm{cotg}\, 2\pi x$	$\sin^* 2\pi x$	$\cos^* 2\pi x$	$\mathrm{tang}^* 2\pi x$	$\mathrm{cotg}^* 2\pi x$
0,050	0,31416$_{628}$	0,30902$_{597}$	0,95106$_{196}$	0,32492$_{696}$	3,07766$_{6455}$	−0,45399$_{561}$	0,89101$_{283}$	−0,50952$_{789}$	−1,96262$_{3087}$
0,051	0,32044$_{629}$	0,31499$_{595}$	0,94910$_{200}$	0,33188$_{699}$	3,01311$_{6209}$	−0,44838$_{562}$	0,89384$_{280}$	−0,50163$_{783}$	−1,99349$_{3163}$
0,052	0,32673$_{628}$	0,32094$_{595}$	0,94710$_{204}$	0,33887$_{702}$	2,95102$_{5996}$	−0,44276$_{564}$	0,89664$_{277}$	−0,49380$_{779}$	−2,02512$_{3246}$
0,053	0,33301$_{628}$	0,32689$_{593}$	0,94506$_{207}$	0,34589$_{705}$	2,89106$_{5773}$	−0,43712$_{566}$	0,89941$_{272}$	−0,48601$_{774}$	−2,05758$_{3330}$
0,054	0,33929$_{629}$	0,33282$_{592}$	0,94299$_{211}$	0,35294$_{708}$	2,83333$_{5574}$	−0,43146$_{568}$	0,90213$_{270}$	−0,47827$_{771}$	−2,09088$_{3423}$
0,055	0,34558$_{628}$	0,33874$_{590}$	0,94088$_{215}$	0,36002$_{711}$	2,77759$_{5379}$	−0,42578$_{569}$	0,90483$_{265}$	−0,47056$_{764}$	−2,12511$_{3509}$
0,056	0,35186$_{628}$	0,34464$_{589}$	0,93873$_{218}$	0,36713$_{715}$	2,72380$_{5199}$	−0,42009$_{571}$	0,90748$_{263}$	−0,46292$_{761}$	−2,16020$_{3612}$
0,057	0,35814$_{628}$	0,35053$_{588}$	0,93655$_{222}$	0,37428$_{718}$	2,67181$_{5031}$	−0,41438$_{573}$	0,91011$_{258}$	−0,45531$_{757}$	−2,19632$_{3711}$
0,058	0,36442$_{629}$	0,35641$_{587}$	0,93433$_{226}$	0,38146$_{722}$	2,62150$_{4871}$	−0,40865$_{574}$	0,91269$_{255}$	−0,44774$_{752}$	−2,23343$_{3814}$
0,059	0,37071$_{628}$	0,36228$_{584}$	0,93207$_{229}$	0,38868$_{724}$	2,57279$_{4704}$	−0,40291$_{576}$	0,91524$_{251}$	−0,44022$_{748}$	−2,27157$_{3927}$
0,060	0,37699$_{628}$	0,36812$_{584}$	0,92978$_{233}$	0,39592$_{729}$	2,52575$_{4567}$	−0,39715$_{578}$	0,91775$_{248}$	−0,43274$_{744}$	−2,31084$_{4046}$
0,061	0,38327$_{629}$	0,37396$_{582}$	0,92745$_{237}$	0,40321$_{733}$	2,48008$_{4425}$	−0,39137$_{579}$	0,92023$_{244}$	−0,42530$_{740}$	−2,35130$_{4164}$
0,062	0,38956$_{628}$	0,37978$_{580}$	0,92508$_{241}$	0,41054$_{736}$	2,43583$_{4289}$	−0,38558$_{580}$	0,92267$_{241}$	−0,41790$_{736}$	−2,39294$_{4289}$
0,063	0,39584$_{628}$	0,38558$_{579}$	0,92267$_{244}$	0,41790$_{740}$	2,39294$_{4164}$	−0,37978$_{582}$	0,92508$_{237}$	−0,41054$_{733}$	−2,43583$_{4425}$
0,064	0,40212$_{629}$	0,39137$_{578}$	0,92023$_{248}$	0,42530$_{744}$	2,35130$_{4046}$	−0,37396$_{584}$	0,92745$_{233}$	−0,40321$_{729}$	−2,48008$_{4567}$
0,065	0,40841$_{628}$	0,39715$_{576}$	0,91775$_{251}$	0,43274$_{748}$	2,31084$_{3927}$	−0,36812$_{584}$	0,92978$_{229}$	−0,39592$_{724}$	−2,52575$_{4704}$
0,066	0,41469$_{628}$	0,40291$_{574}$	0,91524$_{255}$	0,44022$_{752}$	2,27157$_{3814}$	−0,36228$_{587}$	0,93207$_{226}$	−0,38868$_{722}$	−2,57279$_{4871}$
0,067	0,42097$_{629}$	0,40865$_{573}$	0,91269$_{258}$	0,44774$_{757}$	2,23343$_{3711}$	−0,35641$_{588}$	0,93433$_{222}$	−0,38146$_{718}$	−2,62150$_{5031}$
0,068	0,42726$_{628}$	0,41438$_{571}$	0,91011$_{263}$	0,45531$_{761}$	2,19632$_{3612}$	−0,35053$_{589}$	0,93655$_{218}$	−0,37428$_{715}$	−2,67181$_{5199}$
0,069	0,43354$_{628}$	0,42009$_{569}$	0,90748$_{265}$	0,46292$_{764}$	2,16020$_{3509}$	−0,34464$_{590}$	0,93873$_{215}$	−0,36713$_{711}$	−2,72380$_{5379}$
0,070	0,43982$_{629}$	0,42578$_{568}$	0,90483$_{270}$	0,47056$_{771}$	2,12511$_{3423}$	−0,33874$_{592}$	0,94088$_{211}$	−0,36002$_{708}$	−2,77759$_{5574}$
0,071	0,44611$_{628}$	0,43146$_{566}$	0,90213$_{272}$	0,47827$_{774}$	2,09088$_{3330}$	−0,33282$_{593}$	0,94299$_{207}$	−0,35294$_{705}$	−2,83333$_{5773}$
0,072	0,45239$_{628}$	0,43712$_{564}$	0,89941$_{277}$	0,48601$_{779}$	2,05758$_{3246}$	−0,32689$_{595}$	0,94506$_{204}$	−0,34589$_{702}$	−2,89106$_{5996}$
0,073	0,45867$_{629}$	0,44276$_{562}$	0,89664$_{280}$	0,49380$_{783}$	2,02512$_{3163}$	−0,32094$_{595}$	0,94710$_{200}$	−0,33887$_{699}$	−2,95102$_{6209}$
0,074	0,46496$_{628}$	0,44838$_{561}$	0,89384$_{283}$	0,50163$_{789}$	1,99349$_{3087}$	−0,31499$_{597}$	0,94910$_{196}$	−0,33188$_{696}$	−3,01311$_{6455}$
0,075	0,47124$_{628}$	0,45399$_{559}$	0,89101$_{287}$	0,50952$_{794}$	1,96262$_{3012}$	−0,30902$_{598}$	0,95106$_{192}$	−0,32492$_{693}$	−3,07766$_{6707}$
0,076	0,47752$_{629}$	0,45958$_{557}$	0,88814$_{291}$	0,51746$_{800}$	1,93250$_{2939}$	−0,30304$_{600}$	0,95298$_{188}$	−0,31799$_{691}$	−3,14473$_{6985}$
0,077	0,48381$_{628}$	0,46515$_{555}$	0,88523$_{294}$	0,52546$_{804}$	1,90311$_{2869}$	−0,29704$_{600}$	0,95486$_{185}$	−0,31108$_{687}$	−3,21458$_{7263}$
0,078	0,49009$_{628}$	0,47070$_{554}$	0,88229$_{297}$	0,53350$_{810}$	1,87442$_{2804}$	−0,29104$_{602}$	0,95671$_{181}$	−0,30421$_{686}$	−3,28721$_{7578}$
0,079	0,49637$_{628}$	0,47624$_{551}$	0,87932$_{301}$	0,54160$_{815}$	1,84638$_{2737}$	−0,28502$_{603}$	0,95852$_{177}$	−0,29735$_{682}$	−3,36299$_{7903}$
0,080	0,50265$_{629}$	0,48175$_{550}$	0,87631$_{305}$	0,54975$_{822}$	1,81901$_{2679}$	−0,27899$_{604}$	0,96029$_{174}$	−0,29053$_{681}$	−3,44202$_{8254}$
0,081	0,50894$_{628}$	0,48725$_{548}$	0,87326$_{308}$	0,55797$_{827}$	1,79222$_{2618}$	−0,27295$_{605}$	0,96203$_{169}$	−0,28372$_{677}$	−3,52456$_{8623}$
0,082	0,51522$_{628}$	0,49273$_{546}$	0,87018$_{311}$	0,56624$_{833}$	1,76604$_{2560}$	−0,26690$_{606}$	0,96372$_{166}$	−0,27695$_{676}$	−3,61079$_{9025}$
0,083	0,52150$_{629}$	0,49819$_{543}$	0,86707$_{315}$	0,57457$_{838}$	1,74044$_{2502}$	−0,26084$_{607}$	0,96538$_{162}$	−0,27019$_{673}$	−3,70104$_{9454}$
0,084	0,52779$_{628}$	0,50362$_{542}$	0,86392$_{318}$	0,58295$_{845}$	1,71542$_{2451}$	−0,25477$_{608}$	0,96700$_{158}$	−0,26346$_{670}$	−3,79558$_{9915}$
0,085	0,53407$_{628}$	0,50904$_{540}$	0,86074$_{321}$	0,59140$_{851}$	1,69091$_{2399}$	−0,24869$_{609}$	0,96858$_{155}$	−0,25676$_{669}$	−3,89473
0,086	0,54035$_{629}$	0,51444$_{538}$	0,85753$_{325}$	0,59991$_{858}$	1,66692$_{2350}$	−0,24260$_{610}$	0,97013$_{150}$	−0,25007$_{666}$	−3,99889
0,087	0,54664$_{628}$	0,51982$_{535}$	0,85428$_{329}$	0,60849$_{864}$	1,64342$_{2301}$	−0,23650$_{611}$	0,97163$_{147}$	−0,24341$_{665}$	−4,10837
0,088	0,55292$_{628}$	0,52517$_{534}$	0,85099$_{331}$	0,61713$_{871}$	1,62041$_{2255}$	−0,23039$_{612}$	0,97310$_{143}$	−0,23676$_{663}$	−4,22371
0,089	0,55920$_{629}$	0,53051$_{532}$	0,84768$_{335}$	0,62584$_{878}$	1,59786$_{2212}$	−0,22427$_{613}$	0,97453$_{139}$	−0,23013$_{661}$	−4,34534
0,090	0,56549$_{628}$	0,53583$_{529}$	0,84433$_{339}$	0,63462$_{885}$	1,57574$_{2167}$	−0,21814$_{613}$	0,97592$_{135}$	−0,22352$_{658}$	−4,47382
0,091	0,57177$_{628}$	0,54112$_{527}$	0,84094$_{341}$	0,64347$_{891}$	1,55407$_{2123}$	−0,21201$_{615}$	0,97727$_{131}$	−0,21694$_{657}$	−4,60955
0,092	0,57805$_{629}$	0,54639$_{526}$	0,83753$_{345}$	0,65238$_{901}$	1,53284$_{2087}$	−0,20586$_{615}$	0,97858$_{128}$	−0,21037$_{656}$	−4,75362
0,093	0,58434$_{628}$	0,55165$_{523}$	0,83408$_{348}$	0,66139$_{907}$	1,51197$_{2045}$	−0,19971$_{616}$	0,97986$_{123}$	−0,20381$_{653}$	−4,90641
0,094	0,59062$_{628}$	0,55688$_{520}$	0,83060$_{352}$	0,67046$_{914}$	1,49152$_{2006}$	−0,19355$_{617}$	0,98109$_{120}$	−0,19728$_{652}$	−5,06892
0,095	0,59690$_{629}$	0,56208$_{519}$	0,82708$_{355}$	0,67960$_{923}$	1,47146$_{1972}$	−0,18738$_{617}$	0,98229$_{116}$	−0,19076$_{650}$	−5,24224
0,096	0,60319$_{628}$	0,56727$_{516}$	0,82353$_{358}$	0,68883$_{930}$	1,45174$_{1934}$	−0,18121$_{619}$	0,98345$_{111}$	−0,18426$_{650}$	−5,42713
0,097	0,60947$_{628}$	0,57243$_{514}$	0,81995$_{361}$	0,69813$_{938}$	1,43240$_{1900}$	−0,17502$_{619}$	0,98456$_{108}$	−0,17776$_{647}$	−5,62541
0,098	0,61575$_{629}$	0,57757$_{512}$	0,81634$_{365}$	0,70751$_{948}$	1,41340$_{1868}$	−0,16883$_{619}$	0,98564$_{105}$	−0,17129$_{646}$	−5,83806
0,099	0,62204$_{628}$	0,58269$_{510}$	0,81269$_{367}$	0,71699$_{956}$	1,39472$_{1834}$	−0,16264$_{621}$	0,98669$_{100}$	−0,16483$_{645}$	−6,06671
0,100	0,62832$_{628}$	0,58779$_{507}$	0,80902$_{371}$	0,72655$_{964}$	1,37638$_{1803}$	−0,15643$_{620}$	0,98769$_{96}$	−0,15838$_{643}$	−6,31394

x	$2\pi x$	Δ	$\ln 2\pi x$	Δ	$e^{2\pi x}$	Δ	$e^{-2\pi x}$	Δ	Sin $2\pi x$	Δ	Cos $2\pi x$	Δ	Tang $2\pi x$	Δ	Cotg $2\pi x$	Δ	Amp $2\pi x$	Δ
0,100	0,62832	628	−0,46471	995	1,8745	118	0,5335	34	0,67048	76	1,2040	42	0,55689	432	1,7957	138	0,5906	52
0,101	0,63460	628	−0,45476	985	1,8863	119	0,5301	33	0,6781	76	1,2082	43	0,56121	430	1,7819	136	0,5958	52
0,102	0,64088	629	−0,44491	976	1,8982	119	0,5268	33	0,6857	76	1,2125	43	0,56551	426	1,7683	132	0,6010	52
0,103	0,64717	628	−0,43515	966	1,9101	121	0,5235	33	0,6933	77	1,2168	44	0,56977	422	1,7551	129	0,6062	52
0,104	0,65345	628	−0,42549	956	1,9222	121	0,5202	32	0,7010	76	1,2212	44	0,57399	420	1,7422	127	0,6114	51
0,105	0,65973	629	−0,41593	949	1,9343	122	0,5170	33	0,7086	78	1,2256	45	0,57819	416	1,7295	123	0,6165	51
0,106	0,66602	628	−0,40644	939	1,9465	122	0,5137	32	0,7164	77	1,2301	45	0,58235	414	1,7172	121	0,6216	51
0,107	0,67230	628	−0,39705	930	1,9587	124	0,5105	32	0,7241	78	1,2346	46	0,58649	411	1,7051	119	0,6267	51
0,108	0,67858	629	−0,38775	922	1,9711	124	0,5073	31	0,7319	78	1,2392	47	0,59060	408	1,6932	116	0,6318	50
0,109	0,68487	628	−0,37853	913	1,9835	125	0,5042	32	0,7397	78	1,2439	46	0,59468	404	1,6816	114	0,6368	50
0,110	0,69115	628	−0,36940	905	1,9960	126	0,5010	31	0,7475	79	1,2485	48	0,59872	401	1,6702	111	0,6418	51
0,111	0,69743	629	−0,36035	897	2,0086	127	0,4979	32	0,7554	79	1,2533	47	0,60273	399	1,6591	109	0,6469	50
0,112	0,70372	628	−0,35138	889	2,0213	127	0,4947	31	0,7633	79	1,2580	48	0,60672	396	1,6482	107	0,6519	50
0,113	0,71000	628	−0,34249	881	2,0340	128	0,4916	30	0,7712	79	1,2628	49	0,61068	392	1,6375	104	0,6569	49
0,114	0,71628	629	−0,33368	874	2,0468	129	0,4886	31	0,7791	80	1,2677	49	0,61460	390	1,6271	103	0,6618	49
0,115	0,72257	628	−0,32494	865	2,0597	130	0,4855	30	0,7871	80	1,2726	50	0,61850	386	1,6168	100	0,6667	49
0,116	0,72885	628	−0,31629	858	2,0727	130	0,4825	30	0,7951	80	1,2776	50	0,62236	383	1,6068	98	0,6716	49
0,117	0,73513	629	−0,30771	852	2,0857	132	0,4795	31	0,8031	82	1,2826	51	0,62619	381	1,5970	97	0,6765	49
0,118	0,74142	628	−0,29919	844	2,0989	132	0,4764	29	0,8113	80	1,2877	51	0,63000	378	1,5873	95	0,6814	49
0,119	0,74770	628	−0,29075	836	2,1121	133	0,4735	30	0,8193	82	1,2928	52	0,63378	374	1,5778	92	0,6863	49
0,120	0,75398	629	−0,28239	831	2,1254	135	0,4705	30	0,8275	82	1,2980	52	0,63752	372	1,5686	91	0,6912	48
0,121	0,76027	628	−0,27408	822	2,1389	134	0,4675	29	0,8357	82	1,3032	53	0,64124	368	1,5595	89	0,6960	49
0,122	0,76655	628	−0,26586	816	2,1523	136	0,4646	29	0,8439	82	1,3085	53	0,64492	365	1,5506	88	0,7009	48
0,123	0,77283	628	−0,25770	810	2,1659	137	0,4617	29	0,8521	83	1,3138	54	0,64857	362	1,5418	85	0,7057	48
0,124	0,77911	629	−0,24960	804	2,1796	137	0,4588	29	0,8604	83	1,3192	54	0,65219	361	1,5333	84	0,7105	47
0,125	0,78540	628	−0,24156	796	2,1933	138	0,4559	28	0,8687	83	1,3246	55	0,65580	357	1,5249	83	0,7152	47
0,126	0,79168	628	−0,23360	790	2,2071	139	0,4531	29	0,8770	84	1,3301	55	0,65937	353	1,5166	81	0,7199	47
0,127	0,79796	629	−0,22570	785	2,2210	140	0,4502	28	0,8854	84	1,3356	56	0,66290	351	1,5085	79	0,7246	47
0,128	0,80425	628	−0,21785	778	2,2350	141	0,4474	28	0,8938	85	1,3412	57	0,66641	347	1,5006	78	0,7293	47
0,129	0,81053	628	−0,21007	772	2,2491	142	0,4446	28	0,9023	84	1,3469	57	0,66988	346	1,4928	77	0,7340	47
0,130	0,81681	629	−0,20235	767	2,2633	142	0,4418	27	0,9107	85	1,3526	57	0,67334	341	1,4851	74	0,7387	46
0,131	0,82310	628	−0,19468	760	2,2775	144	0,4391	28	0,9192	86	1,3583	58	0,67675	340	1,4777	74	0,7433	46
0,132	0,82938	628	−0,18708	755	2,2919	145	0,4363	27	0,9278	86	1,3641	59	0,68015	335	1,4703	72	0,7479	46
0,133	0,83566	629	−0,17953	749	2,3064	145	0,4336	27	0,9364	86	1,3700	59	0,68350	334	1,4631	72	0,7525	46
0,134	0,84195	628	−0,17204	744	2,3209	146	0,4309	27	0,9450	87	1,3759	59	0,68684	330	1,4559	70	0,7571	45
0,135	0,84823	628	−0,16460	737	2,3355	147	0,4282	27	0,9537	87	1,3818	61	0,69014	327	1,4489	68	0,7616	45
0,136	0,85451	629	−0,15723	734	2,3502	148	0,4255	27	0,9624	87	1,3879	60	0,69341	326	1,4421	67	0,7661	45
0,137	0,86080	628	−0,14989	727	2,3650	149	0,4228	26	0,9711	88	1,3939	62	0,69667	322	1,4354	66	0,7706	45
0,138	0,86708	628	−0,14262	721	2,3799	150	0,4202	26	0,9799	88	1,4001	62	0,69989	319	1,4288	65	0,7751	45
0,139	0,87336	629	−0,13541	718	2,3949	151	0,4176	27	0,9887	89	1,4063	62	0,70308	317	1,4223	64	0,7796	45
0,140	0,87965	628	−0,12823	711	2,4100	152	0,4149	26	0,9976	89	1,4125	63	0,70625	313	1,4159	62	0,7841	44
0,141	0,88593	628	−0,12112	707	2,4252	153	0,4123	25	1,0065	89	1,4188	64	0,70938	310	1,4097	62	0,7885	44
0,142	0,89221	629	−0,11405	702	2,4405	154	0,4098	26	1,0154	90	1,4252	64	0,71248	308	1,4035	60	0,7929	44
0,143	0,89850	628	−0,10703	697	2,4559	155	0,4072	26	1,0244	90	1,4316	64	0,71556	306	1,3975	59	0,7973	44
0,144	0,90478	628	−0,10006	691	2,4714	156	0,4046	25	1,0334	90	1,4380	65	0,71862	302	1,3916	59	0,8017	44
0,145	0,91106	629	−0,09315	688	2,4870	156	0,4021	25	1,0424	91	1,4445	66	0,72164	301	1,3857	57	0,8061	43
0,146	0,91735	628	−0,08627	683	2,5026	158	0,3996	25	1,0515	92	1,4511	67	0,72465	296	1,3800	56	0,8104	43
0,147	0,92363	628	−0,07944	677	2,5184	159	0,3971	26	1,0607	92	1,4578	66	0,72761	295	1,3744	56	0,8147	43
0,148	0,92991	628	−0,07267	673	2,5343	160	0,3945	24	1,0699	92	1,4644	68	0,73056	291	1,3688	54	0,8190	44
0,149	0,93619	629	−0,06594	670	2,5503	160	0,3921	24	1,0791	92	1,4712	68	0,73347	289	1,3634	54	0,8234	43
0,150	0,94248	628	−0,05924	664	2,5663	162	0,3897	25	1,0883	94	1,4780	69	0,73636	286	1,3580	52	0,8277	42

x	$2\pi x$	$\sin 2\pi x$	$\cos 2\pi x$	$\mathrm{tang}\, 2\pi x$	$\mathrm{cotg}\, 2\pi x$	$\sin^* 2\pi x$	$\cos^* 2\pi x$	$\mathrm{tang}^* 2\pi x$	$\mathrm{cotg}^* 2\pi x$
0,100	0,62832 $_{628}$	0,58779 $_{507}$	0,80902 $_{371}$	0,72655 $_{964}$	1,37638 $_{1803}$	−0,15643 $_{620}$	0,98769 $_{96}$	−0,15838 $_{643}$	− 6,31394
0,101	0,63460 $_{628}$	0,59286 $_{504}$	0,80531 $_{374}$	0,73619 $_{972}$	1,35835 $_{1771}$	−0,15023 $_{622}$	0,98865 $_{93}$	−0,15195 $_{642}$	− 6,58091
0,102	0,64088 $_{629}$	0,59790 $_{503}$	0,80157 $_{378}$	0,74591 $_{984}$	1,34064 $_{1745}$	−0,14401 $_{622}$	0,98958 $_{88}$	−0,14553 $_{641}$	− 6,87161
0,103	0,64717 $_{628}$	0,60293 $_{500}$	0,79779 $_{380}$	0,75575 $_{991}$	1,32319 $_{1714}$	−0,13779 $_{623}$	0,99046 $_{85}$	−0,13912 $_{641}$	− 7,18818
0,104	0,65345 $_{628}$	0,60793 $_{498}$	0,79399 $_{383}$	0,76566 $_{1002}$	1,30605 $_{1686}$	−0,13156 $_{623}$	0,99131 $_{80}$	−0,13271 $_{638}$	− 7,53504
0,105	0,65973 $_{629}$	0,61291 $_{495}$	0,79016 $_{387}$	0,77568 $_{1011}$	1,28919 $_{1659}$	−0,12533 $_{623}$	0,99211 $_{77}$	−0,12633 $_{638}$	− 7,91598
0,106	0,66602 $_{628}$	0,61786 $_{493}$	0,78629 $_{390}$	0,78579 $_{1022}$	1,27260 $_{1633}$	−0,11910 $_{624}$	0,99288 $_{73}$	−0,11995 $_{636}$	− 8,33652
0,107	0,67230 $_{628}$	0,62279 $_{490}$	0,78239 $_{393}$	0,79601 $_{1031}$	1,25627 $_{1607}$	−0,11286 $_{625}$	0,99361 $_{69}$	−6,11359 $_{637}$	− 8,80392
0,108	0,67858 $_{629}$	0,62769 $_{488}$	0,77846 $_{396}$	0,80632 $_{1043}$	1,24020 $_{1583}$	−0,10661 $_{625}$	0,99430 $_{65}$	−0,10722 $_{635}$	− 9,32652
0,109	0,68487 $_{628}$	0,63257 $_{485}$	0,77450 $_{399}$	0,81675 $_{1052}$	1,22437 $_{1558}$	−0,10036 $_{625}$	0,99495 $_{61}$	−0,10087 $_{634}$	− 9,91381
0,110	0,69115 $_{628}$	0,63742 $_{483}$	0,77051 $_{402}$	0,82727 $_{1064}$	1,20879 $_{1535}$	−0,09411 $_{626}$	0,99556 $_{57}$	−0,09453 $_{634}$	−10,57868
0,111	0,69743 $_{629}$	0,64225 $_{481}$	0,76649 $_{405}$	0,83791 $_{1076}$	1,19344 $_{1513}$	−0,08785 $_{626}$	0,99613 $_{54}$	−0,08819 $_{633}$	−11,33899
0,112	0,70372 $_{628}$	0,64706 $_{477}$	0,76244 $_{408}$	0,84867 $_{1086}$	1,17831 $_{1488}$	−0,08159 $_{626}$	0,99667 $_{49}$	−0,08186 $_{632}$	−12,21559
0,113	0,71000 $_{628}$	0,65183 $_{476}$	0,75836 $_{411}$	0,85953 $_{1099}$	1,16343 $_{1469}$	−0,07533 $_{627}$	0,99716 $_{45}$	−0,07554 $_{631}$	−13,23722
0,114	0,71628 $_{629}$	0,65659 $_{472}$	0,75425 $_{414}$	0,87052 $_{1110}$	1,14874 $_{1446}$	−0,06906 $_{627}$	0,99761 $_{42}$	−0,06923 $_{632}$	−14,44555
0,115	0,72257 $_{628}$	0,66131 $_{470}$	0,75011 $_{417}$	0,88162 $_{1123}$	1,13428 $_{1427}$	−0,06279 $_{627}$	0,99803 $_{37}$	−0,06291 $_{630}$	−15,89473
0,116	0,72885 $_{628}$	0,66601 $_{468}$	0,74594 $_{420}$	0,89285 $_{1136}$	1,12001 $_{1407}$	−0,05652 $_{628}$	0,99840 $_{34}$	−0,05661 $_{631}$	−17,66454
0,117	0,73513 $_{629}$	0,67069 $_{464}$	0,74174 $_{423}$	0,90421 $_{1148}$	1,10594 $_{1387}$	−0,05024 $_{627}$	0,99874 $_{29}$	−0,05030 $_{629}$	−19,87938
0,118	0,74142 $_{628}$	0,67533 $_{462}$	0,73751 $_{425}$	0,91569 $_{1161}$	1,09207 $_{1367}$	−0,04397 $_{628}$	0,99903 $_{26}$	−0,04401 $_{629}$	−22,72072
0,119	0,74770 $_{628}$	0,67995 $_{460}$	0,73326 $_{429}$	0,92730 $_{1176}$	1,07840 $_{1351}$	−0,03769 $_{628}$	0,99929 $_{22}$	−0,03772 $_{629}$	−26,51340
0,120	0,75398 $_{629}$	0,68455 $_{456}$	0,72897 $_{432}$	0,93906 $_{1190}$	1,06489 $_{1332}$	−0,03141 $_{628}$	0,99951 $_{17}$	−0,03143 $_{629}$	−31,82139
0,121	0,76027 $_{628}$	0,68911 $_{454}$	0,72465 $_{434}$	0,95096 $_{1203}$	1,05157 $_{1314}$	−0,02513 $_{628}$	0,99968 $_{14}$	−0,02514 $_{629}$	−39,78034
0,122	0,76655 $_{628}$	0,69365 $_{452}$	0,72031 $_{437}$	0,96299 $_{1219}$	1,03843 $_{1298}$	−0,01885 $_{628}$	0,99982 $_{10}$	−0,01885 $_{628}$	−53,04085
0,123	0,77283 $_{628}$	0,69817 $_{446}$	0,71594 $_{440}$	0,97518 $_{1233}$	1,02545 $_{1280}$	−0,01257 $_{629}$	0,99992 $_{6}$	−0,01257 $_{629}$	−79,54813
0,124	0,77911 $_{629}$	0,70265 $_{446}$	0,71154 $_{443}$	0,98751 $_{1249}$	1,01265 $_{1265}$	−0,00628 $_{628}$	0,99998 $_{2}$	−0,00628 $_{628}$	−159,23248
0,125	0,78540 $_{628}$	0,70711 $_{443}$	0,70711 $_{446}$	1,00000 $_{1265}$	1,00000 $_{1249}$	∓0,00000 $_{628}$	1,00000 $_{2}$	∓0,00000 $_{628}$	∓ ∞
0,126	0,79168 $_{628}$	0,71154 $_{440}$	0,70265 $_{448}$	1,01265 $_{1280}$	0,98751 $_{1233}$	0,00628 $_{629}$	0,99998 $_{6}$	0,00628 $_{629}$	159,23248
0,127	0,79796 $_{629}$	0,71594 $_{437}$	0,69817 $_{452}$	1,02545 $_{1298}$	0,97518 $_{1219}$	0,01257 $_{628}$	0,99992 $_{10}$	0,01257 $_{628}$	79,54813
0,128	0,80425 $_{628}$	0,72031 $_{434}$	0,69365 $_{454}$	1,03843 $_{1314}$	0,96299 $_{1203}$	0,01885 $_{628}$	0,99982 $_{14}$	0,01885 $_{629}$	53,04085
0,129	0,81053 $_{628}$	0,72465 $_{432}$	0,68911 $_{456}$	1,05157 $_{1332}$	0,95096 $_{1190}$	0,02513 $_{628}$	0,99968 $_{17}$	0,02514 $_{629}$	39,78034
0,130	0,81681 $_{629}$	0,72897 $_{429}$	0,68455 $_{460}$	1,06489 $_{1351}$	0,93906 $_{1176}$	0,03141 $_{628}$	0,99951 $_{22}$	0,03143 $_{629}$	31,82139
0,131	0,82310 $_{628}$	0,73326 $_{425}$	0,67995 $_{462}$	1,07840 $_{1367}$	0,92730 $_{1161}$	0,03769 $_{628}$	0,99929 $_{26}$	0,03772 $_{629}$	26,51340
0,132	0,82938 $_{628}$	0,73751 $_{423}$	0,67533 $_{464}$	1,09207 $_{1387}$	0,91569 $_{1148}$	0,04397 $_{627}$	0,99903 $_{29}$	0,04401 $_{629}$	22,72072
0,133	0,83566 $_{629}$	0,74174 $_{420}$	0,67069 $_{468}$	1,10594 $_{1407}$	0,90421 $_{1136}$	0,05024 $_{628}$	0,99874 $_{34}$	0,05030 $_{631}$	19,87938
0,134	0,84195 $_{628}$	0,74594 $_{417}$	0,66601 $_{470}$	1,12001 $_{1427}$	0,89285 $_{1123}$	0,05652 $_{627}$	0,99840 $_{37}$	0,05661 $_{630}$	17,66454
0,135	0,84823 $_{628}$	0,75011 $_{414}$	0,66131 $_{472}$	1,13428 $_{1446}$	0,88162 $_{1110}$	0,06279 $_{627}$	0,99803 $_{42}$	0,06291 $_{632}$	15,89473
0,136	0,85451 $_{629}$	0,75425 $_{411}$	0,65659 $_{476}$	1,14874 $_{1469}$	0,87052 $_{1099}$	0,06906 $_{627}$	0,99761 $_{45}$	0,06923 $_{631}$	14,44555
0,137	0,86080 $_{628}$	0,75836 $_{408}$	0,65183 $_{477}$	1,16343 $_{1488}$	0,85953 $_{1086}$	0,07533 $_{626}$	0,99716 $_{49}$	0,07554 $_{632}$	13,23722
0,138	0,86708 $_{628}$	0,76244 $_{405}$	0,64706 $_{481}$	1,17831 $_{1513}$	0,84867 $_{1076}$	0,08159 $_{626}$	0,99667 $_{54}$	0,08186 $_{633}$	12,21559
0,139	0,87336 $_{629}$	0,76649 $_{402}$	0,64225 $_{483}$	1,19344 $_{1535}$	0,83791 $_{1064}$	0,08785 $_{626}$	0,99613 $_{57}$	0,08819 $_{634}$	11,33899
0,140	0,87965 $_{628}$	0,77051 $_{399}$	0,63742 $_{485}$	1,20879 $_{1558}$	0,82727 $_{1052}$	0,09411 $_{625}$	0,99556 $_{61}$	0,09453 $_{634}$	10,57868
0,141	0,88593 $_{628}$	0,77450 $_{396}$	0,63257 $_{488}$	1,22437 $_{1583}$	0,81675 $_{1043}$	0,10036 $_{625}$	0,99495 $_{65}$	0,10087 $_{635}$	9,91381
0,142	0,89221 $_{629}$	0,77846 $_{393}$	0,62769 $_{490}$	1,24020 $_{1607}$	0,80632 $_{1031}$	0,10661 $_{625}$	0,99430 $_{69}$	0,10722 $_{637}$	9,32652
0,143	0,89850 $_{628}$	0,78239 $_{390}$	0,62279 $_{493}$	1,25627 $_{1633}$	0,79601 $_{1022}$	0,11286 $_{624}$	0,99361 $_{73}$	0,11359 $_{636}$	8,80392
0,144	0,90478 $_{628}$	0,78629 $_{387}$	0,61786 $_{495}$	1,27260 $_{1659}$	0,78579 $_{1011}$	0,11910 $_{623}$	0,99288 $_{77}$	0,11995 $_{638}$	8,33652
0,145	0,91106 $_{629}$	0,79016 $_{383}$	0,61291 $_{498}$	1,28919 $_{1686}$	0,77568 $_{1002}$	0,12533 $_{623}$	0,99211 $_{80}$	0,12633 $_{638}$	7,91598
0,146	0,91735 $_{628}$	0,79399 $_{380}$	0,60793 $_{500}$	1,30605 $_{1714}$	0,76566 $_{991}$	0,13156 $_{623}$	0,99131 $_{85}$	0,13271 $_{641}$	7,53504
0,147	0,92363 $_{628}$	0,79779 $_{378}$	0,60293 $_{503}$	1,32319 $_{1745}$	0,75575 $_{984}$	0,13779 $_{622}$	0,99046 $_{88}$	0,13912 $_{641}$	7,18818
0,148	0,92991 $_{628}$	0,80157 $_{374}$	0,59790 $_{504}$	1,34064 $_{1771}$	0,74591 $_{972}$	0,14401 $_{622}$	0,98958 $_{93}$	0,14553 $_{642}$	6,87161
0,149	0,93619 $_{629}$	0,80531 $_{371}$	0,59286 $_{507}$	1,35835 $_{1803}$	0,73619 $_{964}$	0,15023 $_{620}$	0,98865 $_{96}$	0,15195 $_{643}$	6,58091
0,150	0,94248 $_{628}$	0,80902 $_{367}$	0,58779 $_{510}$	1,37638 $_{1834}$	0,72655 $_{956}$	0,15643 $_{621}$	0,98769 $_{100}$	0,15838 $_{645}$	6,31394

x	$2\pi x$		$\ln 2\pi x$		$e^{2\pi x}$		$e^{-2\pi x}$		$\mathfrak{Sin}\, 2\pi x$		$\mathfrak{Cos}\, 2\pi x$		$\mathfrak{Tang}\, 2\pi x$		$\mathfrak{Cotg}\, 2\pi x$		$\mathfrak{Amp}\, 2\pi x$	
0,150	0,94248	628	−0,05924	664	2,5663	162	0,3897	25	1,0883	94	1,4780	69	0,73636	286	1,3580	52	0,8277	42
0,151	0,94876	628	−0,05260	660	2,5825	163	0,3872	24	1,0977	93	1,4849	69	0,73922	284	1,3528	52	0,8319	42
0,152	0,95504	629	−0,04600	656	2,5988	164	0,3848	24	1,1070	94	1,4918	70	0,74206	281	1,3476	51	0,8361	41
0,153	0,96133	628	−0,03944	651	2,6152	164	0,3824	24	1,1164	94	1,4988	70	0,74487	278	1,3425	50	0,8402	42
0,154	0,96761	628	−0,03293	647	2,6316	166	0,3800	24	1,1258	95	1,5058	71	0,74765	276	1,3375	49	0,8444	42
0,155	0,97389	629	−0,02646	644	2,6482	167	0,3776	24	1,1353	96	1,5129	72	0,75041	274	1,3326	48	0,8486	42
0,156	0,98018	628	−0,02002	639	2,6649	168	0,3752	23	1,1449	95	1,5201	72	0,75315	270	1,3278	48	0,8528	41
0,157	0,98646	628	−0,01363	634	2,6817	169	0,3729	23	1,1544	96	1,5273	73	0,75585	267	1,3230	47	0,8569	41
0,158	0,99274	629	−0,00729	632	2,6986	170	0,3706	24	1,1640	97	1,5346	73	0,75852	266	1,3183	46	0,8610	41
0,159	0,99903	63	−0,00097	626	2,7156	172	0,3682	23	1,1737	97	1,5419	74	0,76118	264	1,3137	45	0,8651	41
0,160	1,0053	63	+0,00529	622	2,7328	172	0,3659	23	1,1834	98	1,5493	75	0,76382	260	1,3092	44	0,8692	40
0,161	1,0116	63	0,01151	618	2,7500	173	0,3636	22	1,1932	98	1,5568	76	0,76642	258	1,3048	44	0,8732	40
0,162	1,0179	63	0,01769	615	2,7673	174	0,3614	23	1,2030	98	1,5644	75	0,76900	255	1,3004	43	0,8772	40
0,163	1,0242	62	0,02384	611	2,7847	176	0,3591	23	1,2128	99	1,5719	77	0,77155	254	1,2961	43	0,8812	40
0,164	1,0304	63	0,02995	609	2,8023	177	0,3568	22	1,2227	100	1,5796	76	0,77409	250	1,2918	41	0,8852	40
0,165	1,0367	63	0,03604	606	2,8200	177	0,3546	22	1,2327	100	1,5872	79	0,77659	248	1,2877	41	0,8892	40
0,166	1,0430	63	0,04210	602	2,8377	179	0,3524	22	1,2427	100	1,5951	78	0,77907	246	1,2836	41	0,8932	39
0,167	1,0493	63	0,04812	599	2,8556	180	0,3502	22	1,2527	101	1,6029	79	0,78153	244	1,2795	39	0,8971	39
0,168	1,0556	63	0,05411	595	2,8736	181	0,3480	22	1,2628	102	1,6108	80	0,78397	241	1,2756	40	0,9010	39
0,169	1,0619	62	0,06006	591	2,8917	183	0,3458	22	1,2730	102	1,6188	80	0,78638	238	1,2716	38	0,9049	39
0,170	1,0681	63	0,06597	587	2,9100	183	0,3436	21	1,2832	102	1,6268	81	0,78876	236	1,2678	38	0,9088	38
0,171	1,0744	63	0,07184	583	2,9283	185	0,3415	21	1,2934	103	1,6349	82	0,79112	234	1,2640	37	0,9126	38
0,172	1,0807	63	0,07767	580	2,9468	185	0,3394	22	1,3037	103	1,6431	82	0,79346	232	1,2603	37	0,9164	39
0,173	1,0870	63	0,08347	576	2,9653	187	0,3372	21	1,3140	105	1,6513	83	0,79578	229	1,2566	36	0,9203	38
0,174	1,0933	63	0,08923	572	2,9840	188	0,3351	21	1,3245	104	1,6596	83	0,79807	227	1,2530	35	0,9241	38
0,175	1,0996	62	0,09495	568	3,0028	190	0,3330	21	1,3349	106	1,6679	85	0,80034	225	1,2495	35	0,9279	37
0,176	1,1058	63	0,10063	565	3,0218	190	0,3309	20	1,3455	105	1,6764	85	0,80259	223	1,2460	35	0,9316	37
0,177	1,1121	63	0,10628	563	3,0408	192	0,3289	21	1,3560	106	1,6849	85	0,80482	219	1,2425	34	0,9353	37
0,178	1,1184	63	0,11191	561	3,0600	193	0,3268	21	1,3666	107	1,6934	86	0,80701	219	1,2391	33	0,9390	36
0,179	1,1247	63	0,11752	558	3,0793	194	0,3247	20	1,3773	107	1,7020	87	0,80920	216	1,2358	33	0,9426	37
0,180	1,1310	63	0,12310	555	3,0987	195	0,3227	20	1,3880	108	1,7107	88	0,81136	213	1,2325	32	0,9463	37
0,181	1,1373	62	0,12865	551	3,1182	197	0,3207	20	1,3988	108	1,7195	88	0,81349	211	1,2293	32	0,9500	37
0,182	1,1435	63	0,13416	548	3,1379	197	0,3187	20	1,4096	109	1,7283	89	0,81560	209	1,2261	31	0,9537	37
0,783	1,1498	63	0,13964	545	3,1576	199	0,3167	20	1,4205	109	1,7372	89	0,81769	208	1,2230	31	0,9574	36
0,184	1,1561	63	0,14509	541	3,1775	201	0,3147	20	1,4314	110	1,7461	90	0,81977	204	1,2199	31	0,9610	36
0,185	1,1624	63	0,15050	539	3,1976	201	0,3127	19	1,4424	109	1,7551	92	0,82181	203	1,2168	30	0,9646	35
0,186	1,1687	63	0,15589	536	3,2177	203	0,3108	20	1,4535	111	1,7643	91	0,82384	201	1,2138	29	0,9681	36
0,187	1,1750	62	0,16125	533	3,2380	204	0,3088	19	1,4646	112	1,7734	93	0,82585	199	1,2109	29	0,9717	35
0,188	1,1812	63	0,16658	530	3,2584	205	0,3069	19	1,4758	112	1,7827	93	0,82784	197	1,2080	29	0,9752	35
0,189	1,1875	63	0,17188	527	3,2789	207	0,3050	19	1,4870	113	1,7920	93	0,82981	195	1,2051	28	0,9787	35
0,190	1,1938	63	0,17715	525	3,2996	208	0,3031	19	1,4983	113	1,8013	95	0,83176	192	1,2023	28	0,9822	35
0,191	1,2001	63	0,18240	523	3,3204	209	0,3012	19	1,5096	114	1,8108	95	0,83368	191	1,1995	27	0,9857	34
0,192	1,2064	63	0,18763	520	3,3413	211	0,2993	19	1,5210	115	1,8203	96	0,83559	189	1,1968	27	0,9891	35
0,193	1,2127	62	0,19283	517	3,3624	212	0,2974	19	1,5325	116	1,8299	97	0,83748	185	1,1941	27	0,9926	34
0,194	1,2189	63	0,19800	514	3,3836	213	0,2955	18	1,5441	115	1,8396	97	0,83933	185	1,1914	26	0,9960	34
0,195	1,2252	63	0,20314	511	3,4049	215	0,2937	18	1,5556	117	1,8493	99	0,84118	184	1,1888	26	0,9994	34
0,196	1,2315	63	0,20825	509	3,4264	216	0,2919	19	1,5673	117	1,8592	98	0,84302	181	1,1862	25	1,0028	34
0,197	1,2378	63	0,21334	507	3,4480	217	0,2900	18	1,5790	118	1,8690	100	0,84483	178	1,1837	25	1,0062	34
0,198	1,2441	63	0,21841	505	3,4697	219	0,2882	18	1,5908	118	1,8790	100	0,84661	177	1,1812	25	1,0096	34
0,199	1,2504	62	0,22346	502	3,4916	220	0,2864	18	1,6026	119	1,8890	101	0,84838	176	1,1787	24	1,0130	33
0,200	1,2566	63	0,22848	499	3,5136	221	0,2846	18	1,6145	120	1,8991	102	0,85014	173	1,1763	24	1,0163	33

x	$2\pi x$	$\sin 2\pi x$	$\cos 2\pi x$	$\tan 2\pi x$	$\cot 2\pi x$	$\sin^* 2\pi x$	$\cos^* 2\pi x$	$\tan^* 2\pi x$	$\cot^* 2\pi x$
0,150	0,94248 628	0,80902 367	0,58779 510	1,37638 1834	0,72655 956	0,15643 621	0,98769 100	0,15838 645	6,31394
0,151	0,94876 628	0,81269 365	0,58269 512	1,39472 1868	0,71699 948	0,16264 619	0,98669 105	0,16483 646	6,06671
0,152	0,95504 629	0,81634 361	0,57757 514	1,41340 1900	0,70751 938	0,16883 619	0,98564 108	0,17129 647	5,83806
0,153	0,96133 628	0,81995 358	0,57243 516	1,43240 1934	0,69813 930	0,17502 619	0,98456 111	0,17776 650	5,62541
0,154	0,96761 628	0,82353 355	0,56727 519	1,45174 1972	0,68883 923	0,18121 617	0,98345 116	0,18426 650	5,42713
0,155	0,97389 629	0,82708 352	0,56208 520	1,47146 2006	0,67960 914	0,18738 617	0,98229 120	0,19076 652	5,24224
0,156	0,98018 628	0,83060 348	0,55688 523	1,49152 2045	0,67046 907	0,19355 616	0,98109 123	0,19728 653	5,06892
0,157	0,98646 628	0,83408 345	0,55165 526	1,51197 2087	0,66139 901	0,19971 615	0,97986 128	0,20381 656	4,90641
0,158	0,99274 629	0,83753 341	0,54639 527	1,53284 2123	0,65238 891	0,20586 615	0,97858 131	0,21037 657	4,75362
0,159	0,99903 63	0,84094 339	0,54112 529	1,55407 2167	0,64347 885	0,21201 613	0,97727 135	0,21694 658	4,60955
0,160	1,0053 63	0,84433 335	0,53583 532	1,57574 2212	0,63462 878	0,21814 613	0,97592 139	0,22352 661	4,47382
0,161	1,0116 63	0,84768 331	0,53051 534	1,59786 2255	0,62584 871	0,22427 612	0,97453 143	0,23013 663	4,34534
0,162	1,0179 63	0,85099 329	0,52517 535	1,62041 2301	0,61713 864	0,23039 611	0,97310 147	0,23676 665	4,22371
0,163	1,0242 62	0,85428 325	0,51982 538	1,64342 2350	0,60849 858	0,23650 610	0,97163 150	0,24341 666	4,10837
0,164	1,0304 63	0,85753 321	0,51444 540	1,66692 2399	0,59991 851	0,24260 609	0,97013 155	0,25007 669	3,99889
0,165	1,0367 63	0,86074 318	0,50904 542	1,69091 2451	0,59140 845	0,24869 608	0,96858 158	0,25676 670	3,89473 9915
0,166	1,0430 63	0,86392 315	0,50362 543	1,71542 2502	0,58295 838	0,25477 607	0,96700 162	0,26346 673	3,79558 9454
0,167	1,0493 63	0,86707 311	0,49819 546	1,74044 2560	0,57457 833	0,26084 606	0,96538 166	0,27019 676	3,70104 9025
0,168	1,0556 63	0,87018 308	0,49273 548	1,76604 2618	0,56624 827	0,26690 605	0,96372 169	0,27695 677	3,61079 8623
0,169	1,0619 62	0,87326 305	0,48725 550	1,79222 2679	0,55797 822	0,27295 604	0,96203 174	0,28372 681	3,52456 8254
0,170	1,0681 63	0,87631 301	0,48175 551	1,81901 2737	0,54975 815	0,27899 603	0,96029 177	0,29053 682	3,44202 7903
0,171	1,0744 63	0,87932 297	0,47624 554	1,84638 2804	0,54160 810	0,28502 602	0,95852 181	0,29735 686	3,36299 7578
0,172	1,0807 63	0,88229 294	0,47070 555	1,87442 2869	0,53350 804	0,29104 600	0,95671 185	0,30421 687	3,28721 7263
0,173	1,0870 63	0,88523 291	0,46515 557	1,90311 2939	0,52546 800	0,29704 600	0,95486 188	0,31108 691	3,21458 6985
0,174	1,0933 63	0,88814 287	0,45958 559	1,93250 3012	0,51746 794	0,30304 598	0,95298 192	0,31799 693	3,14473 6707
0,175	1,0996 62	0,89101 283	0,45399 561	1,96262 3087	0,50952 789	0,30902 597	0,95106 196	0,32492 696	3,07766 6455
0,176	1,1058 63	0,89384 280	0,44838 562	1,99349 3163	0,50163 783	0,31499 595	0,94910 200	0,33188 699	3,01311 6209
0,177	1,1121 63	0,89664 277	0,44276 564	2,02512 3246	0,49380 779	0,32094 595	0,94710 204	0,33887 702	2,95102 5996
0,178	1,1184 63	0,89941 272	0,43712 566	2,05758 3330	0,48601 774	0,32689 593	0,94506 207	0,34589 705	2,89106 5773
0,179	1,1247 63	0,90213 270	0,43146 568	2,09088 3423	0,47827 771	0,33282 592	0,94299 211	0,35294 708	2,83333 5574
0,180	1,1310 63	0,90483 265	0,42578 569	2,12511 3509	0,47056 764	0,33874 590	0,94088 215	0,36002 711	2,77759 5379
0,181	1,1373 62	0,90748 263	0,42009 571	2,16020 3612	0,46292 761	0,34464 589	0,93873 218	0,36713 715	2,72380 5199
0,182	1,1435 63	0,91011 258	0,41438 573	2,19632 3711	0,45531 757	0,35053 588	0,93655 222	0,37428 718	2,67181 5031
0,183	1,1498 63	0,91269 255	0,40865 574	2,23343 3814	0,44774 752	0,35641 587	0,93433 226	0,38146 722	2,62150 4871
0,184	1,1561 63	0,91524 251	0,40291 576	2,27157 3927	0,44022 748	0,36228 584	0,93207 229	0,38868 724	2,57279 4704
0,185	1,1624 63	0,91775 248	0,39715 578	2,31084 4046	0,43274 744	0,36812 584	0,92978 233	0,39592 729	2,52575 4567
0,186	1,1687 63	0,92023 244	0,39137 579	2,35130 4164	0,42530 740	0,37396 582	0,92745 237	0,40321 733	2,48008 4425
0,187	1,1750 62	0,92267 241	0,38558 580	2,39294 4289	0,41790 736	0,37978 580	0,92508 241	0,41054 736	2,43583 4289
0,188	1,1812 63	0,92508 237	0,37978 582	2,43583 4425	0,41054 733	0,38558 579	0,92267 244	0,41790 740	2,39294 4164
0,189	1,1875 63	0,92745 233	0,37396 584	2,48008 4567	0,40321 729	0,39137 578	0,92023 248	0,42530 744	2,35130 4046
0,190	1,1938 63	0,92978 229	0,36812 584	2,52575 4704	0,39592 724	0,39715 576	0,91775 251	0,43274 748	2,31084 3927
0,191	1,2001 63	0,93207 226	0,36228 587	2,57279 4871	0,38868 722	0,40291 574	0,91524 255	0,44022 752	2,27157 3814
0,192	1,2064 63	0,93433 222	0,35641 588	2,62150 5031	0,38146 718	0,40865 573	0,91269 258	0,44774 757	2,23343 3711
0,193	1,2127 62	0,93655 218	0,35053 589	2,67181 5199	0,37428 715	0,41438 571	0,91011 263	0,45531 761	2,19632 3612
0,194	1,2189 63	0,93873 215	0,34464 590	2,72380 5379	0,36713 711	0,42009 569	0,90748 265	0,46292 764	2,16020 3509
0,195	1,2252 63	0,94088 211	0,33874 592	2,77759 5574	0,36002 708	0,42578 568	0,90483 270	0,47056 771	2,12511 3423
0,196	1,2315 63	0,94299 207	0,33282 593	2,83333 5773	0,35294 705	0,43146 566	0,90213 272	0,47827 774	2,09088 3330
0,197	1,2378 63	0,94506 204	0,32689 595	2,89106 5996	0,34589 702	0,43712 564	0,89941 277	0,48601 779	2,05758 3246
0,198	1,2441 63	0,94710 200	0,32094 595	2,95102 6209	0,33887 699	0,44276 562	0,89664 280	0,49380 783	2,02512 3163
0,199	1,2504 62	0,94910 196	0,31499 597	3,01311 6455	0,33188 696	0,44838 561	0,89384 283	0,50163 789	1,99349 3087
0,200	1,2566 63	0,95106 192	0,30902 598	3,07766 6707	0,32492 693	0,45399 559	0,89101 287	0,50952 794	1,96262 3012

x	$2\pi x$		$\ln 2\pi x$		$e^{2\pi x}$		$e^{-2\pi x}$		Sin $2\pi x$		Cos $2\pi x$		Tang $2\pi x$		Cotg $2\pi x$		Amp $2\pi x$	
0,200	1,2566	63	0,22848	499	3,5136	221	0,2846	18	1,6145	120	1,8991	102	0,85014	173	1,1763	24	1,0163	33
0,201	1,2629	63	0,23347	496	3,5357	223	0,2828	17	1,6265	120	1,9093	103	0,85187	172	1,1739	24	1,0196	32
0,202	1,2692	63	0,23843	493	3,5580	224	0,2811	18	1,6385	121	1,9196	103	0,85359	169	1,1715	23	1,0228	32
0,203	1,2755	63	0,24336	491	3,5804	226	0,2793	18	1,6506	122	1,9299	104	0,85528	168	1,1692	23	1,0260	33
0,204	1,2818	63	0,24827	488	3,6030	227	0,2775	17	1,6628	122	1,9403	105	0,85696	166	1,1669	22	1,0293	33
0,205	1,2881	62	0,25315	486	3,6257	229	0,2758	17	1,6750	123	1,9508	106	0,85862	164	1,1647	22	1,0326	32
0,206	1,2943	63	0,25801	484	3,6486	230	0,2741	17	1,6873	123	1,9614	106	0,86026	162	1,1625	22	1,0358	32
0,207	1,3006	63	0,26285	482	3,6716	231	0,2724	17	1,6996	124	1,9720	107	0,86188	162	1,1603	22	1,0390	32
0,208	1,3069	63	0,26767	480	3,6947	233	0,2707	17	1,7120	125	1,9827	108	0,86350	158	1,1581	21	1,0422	32
0,209	1,3132	63	0,27247	478	3,7180	234	0,2690	17	1,7245	126	1,9935	109	0,86508	158	1,1560	21	1,0454	31
0,210	1,3195	63	0,27725	476	3,7414	236	0,2673	17	1,7371	126	2,0044	109	0,86666	155	1,1539	21	1,0485	31
0,211	1,3258	62	0,28201	473	3,7650	238	0,2656	17	1,7497	128	2,0153	111	0,86821	154	1,1518	20	1,0516	31
0,212	1,3320	63	0,28674	470	3,7888	238	0,2639	16	1,7625	127	2,0264	111	0,86975	152	1,1498	20	1,0547	31
0,213	1,3383	63	0,29144	468	3,8126	241	0,2623	17	1,7752	129	2,0375	112	0,87127	151	1,1478	20	1,0578	30
0,214	1,3446	63	0,29612	466	3,8367	241	0,2606	16	1,7881	128	2,0487	112	0,87278	148	1,1458	20	1,0608	31
0,215	1,3509	63	0,30078	464	3,8608	244	0,2590	16	1,8009	130	2,0599	114	0,87426	148	1,1438	19	1,0639	30
0,216	1,3572	63	0,30542	462	3,8852	244	0,2574	16	1,8139	130	2,0713	114	0,87574	146	1,1419	19	1,0669	30
0,217	1,3635	62	0,31004	459	3,9096	247	0,2558	16	1,8269	132	2,0827	115	0,87720	143	1,1400	19	1,0699	31
0,218	1,3697	63	0,31463	457	3,9343	248	0,2542	16	1,8401	132	2,0942	117	0,87863	142	1,1381	18	1,0730	30
0,219	1,3760	63	0,31920	455	3,9591	250	0,2526	16	1,8533	132	2,1059	116	0,88005	142	1,1363	18	1,0760	30
0,220	1,3823	63	0,32375	453	3,9841	251	0,2510	16	1,8665	134	2,1175	118	0,88147	139	1,1345	18	1,0790	30
0,221	1,3886	63	0,32828	451	4,0092	252	0,2494	15	1,8799	134	2,1293	119	0,88286	138	1,1327	18	1,0820	29
0,222	1,3949	63	0,33279	449	4,0344	254	0,2479	16	1,8933	135	2,1412	119	0,88424	136	1,1309	17	1,0849	29
0,223	1,4012	62	0,33728	447	4,0598	257	0,2463	15	1,9068	136	2,1531	121	0,88560	135	1,1292	17	1,0878	29
0,224	1,4074	63	0,34175	445	4,0855	257	0,2448	16	1,9204	136	2,1652	120	0,88695	133	1,1275	17	1,0907	29
0,225	1,4137	63	0,34620	443	4,1112	259	0,2432	15	1,9340	137	2,1772	122	0,88828	132	1,1258	17	1,0936	29
0,226	1,4200	63	0,35063	442	4,1371	261	0,2417	15	1,9477	138	2,1894	123	0,88960	130	1,1241	16	1,0965	28
0,227	1,4263	63	0,35505	440	4,1632	262	0,2402	15	1,9615	139	2,2017	124	0,89090	129	1,1225	17	1,0993	29
0,228	1,4326	62	0,35945	438	4,1894	264	0,2387	15	1,9754	139	2,2141	124	0,89219	127	1,1208	16	1,1022	29
0,229	1,4388	63	0,36383	436	4,2158	266	0,2372	15	1,9893	141	2,2265	126	0,89346	127	1,1192	15	1,1051	28
0,230	1,4451	63	0,36819	434	4,2424	268	0,2357	15	2,0034	141	2,2391	126	0,89473	124	1,1177	16	1,1079	28
0,231	1,4514	63	0,37253	432	4,2692	269	0,2342	14	2,0175	142	2,2517	128	0,89597	123	1,1161	15	1,1107	27
0,232	1,4577	63	0,37685	430	4,2961	271	0,2328	15	2,0317	143	2,2645	128	0,89720	122	1,1146	15	1,1134	28
0,233	1,4640	63	0,38115	428	4,3232	272	0,2313	14	2,0460	143	2,2773	129	0,89842	121	1,1131	15	1,1162	27
0,234	1,4703	62	0,38543	426	4,3504	274	0,2299	15	2,0603	144	2,2902	129	0,89963	119	1,1116	15	1,1189	28
0,235	1,4765	63	0,38969	425	4,3778	276	0,2284	14	2,0747	145	2,3031	131	0,90082	117	1,1101	14	1,1217	27
0,236	1,4828	63	0,39394	423	4,4054	278	0,2270	14	2,0892	146	2,3162	132	0,90199	117	1,1087	15	1,1244	26
0,237	1,4891	63	0,39817	422	4,4332	279	0,2256	14	2,1038	147	2,3294	133	0,90316	115	1,1072	14	1,1270	27
0,238	1,4954	63	0,40239	420	4,4611	281	0,2242	14	2,1185	147	2,3427	133	0,90431	114	1,1058	14	1,1297	27
0,239	1,5017	63	0,40659	418	4,4892	283	0,2228	14	2,1332	149	2,3560	134	0,90545	112	1,1044	14	1,1324	27
0,240	1,5080	62	0,41077	416	4,5175	285	0,2214	14	2,1481	149	2,3694	136	0,90657	112	1,1030	13	1,1351	26
0,241	1,5142	63	0,41490	414	5,5460	286	0,2200	14	2,1630	150	2,3830	136	0,90769	110	1,1017	13	1,1377	26
0,242	1,5205	63	0,41904	414	4,5746	289	0,2186	14	2,1780	152	2,3966	138	0,90879	109	1,1004	14	1,1403	26
0,243	1,5268	63	0,42318	411	4,6035	290	0,2172	13	2,1932	151	2,4104	138	0,90988	108	1,0990	13	1,1429	25
0,244	1,5331	63	0,42729	409	4,6325	292	0,2159	14	2,2083	153	2,4242	139	0,91096	105	1,0977	12	1,1454	26
0,245	1,5394	63	0,43138	407	4,6617	294	0,2145	13	2,2236	154	2,4381	141	0,91201	106	1,0965	13	1,1480	26
0,246	1,5457	62	0,43545	405	4,6911	296	0,2132	14	2,2390	155	2,4522	141	0,91307	103	1,0952	12	1,1506	26
0,247	1,5519	63	0,43950	403	4,7207	297	0,2118	13	2,2545	155	2,4663	142	0,91410	104	1 0940	13	1,1532	26
0,248	1,5582	63	0,44353	404	4,7504	300	0,2105	13	2,2700	156	2,4805	143	0,91514	101	1,0927	12	1,1558	25
0,249	1,5645	63	6,44757	402	4,7804	301	0,2092	13	2,2856	157	2,4948	144	0,91615	100	1,0915	12	1,1583	25
0,250	1,5708	63	0,45159	400	4,8105	303	0,2079	13	2,3013	158	2,5092	145	0,91715	99	1,0903	11	1,1608	25

x	$2\pi x$	$\sin 2\pi x$	$\cos 2\pi x$	$\operatorname{tang} 2\pi x$	$\operatorname{cotg} 2\pi x$	$\sin^* 2\pi x$	$\cos^* 2\pi x$	$\operatorname{tang}^* 2\pi x$	$\operatorname{cotg}^* 2\pi x$
0,200	1,2566 $_{63}$	0,95106 $_{192}$	0,30902 $_{598}$	3,07766 $_{6707}$	0,32492 $_{693}$	0,45399 $_{559}$	0,89101 $_{287}$	0,50952 $_{794}$	1,96262 $_{3012}$
0,201	1,2629 $_{63}$	0,95298 $_{188}$	0,30304 $_{600}$	3,14473 $_{6985}$	0,31799 $_{691}$	0,45958 $_{557}$	0,88814 $_{291}$	0,51746 $_{800}$	1,93250 $_{2939}$
0,202	1,2692 $_{63}$	0,95486 $_{185}$	0,29704 $_{600}$	3,21458 $_{7263}$	0,31108 $_{687}$	0,46515 $_{555}$	0,88523 $_{294}$	0,52546 $_{804}$	1,90311 $_{2869}$
0,203	1,2755 $_{63}$	0,95671 $_{181}$	0,29104 $_{602}$	3,28721 $_{7578}$	0,30421 $_{686}$	0,47070 $_{554}$	0,88229 $_{297}$	0,53350 $_{810}$	1,87442 $_{2804}$
0,204	1,2818 $_{63}$	0,95852 $_{177}$	0,28502 $_{603}$	3,36299 $_{7903}$	0,29735 $_{682}$	0,47624 $_{551}$	0,87932 $_{301}$	0,54160 $_{815}$	1,84638 $_{2737}$
0,205	1,2881 $_{62}$	0,96029 $_{174}$	0,27899 $_{604}$	3,44202 $_{8254}$	0,29053 $_{681}$	0,48175 $_{550}$	0,87631 $_{305}$	0,54975 $_{822}$	1,81901 $_{2679}$
0,206	1,2943 $_{63}$	0,96203 $_{169}$	0,27295 $_{605}$	3,52456 $_{8623}$	0,28372 $_{677}$	0,48725 $_{548}$	0,87326 $_{308}$	0,55797 $_{827}$	1,79222 $_{2618}$
0,207	1,3006 $_{63}$	0,96372 $_{166}$	0,26690 $_{606}$	3,61079 $_{9025}$	0,27695 $_{676}$	0,49273 $_{546}$	0,87018 $_{311}$	0,56624 $_{833}$	1,76604 $_{2560}$
0,208	1,3069 $_{63}$	0,96538 $_{162}$	0,26084 $_{607}$	3,70104 $_{9454}$	0,27019 $_{673}$	0,49819 $_{543}$	0,86707 $_{315}$	0,57457 $_{838}$	1,74044 $_{2502}$
0,209	1,3132 $_{63}$	0,96700 $_{158}$	0,25477 $_{608}$	3,79558 $_{9915}$	0,26346 $_{670}$	0,50362 $_{542}$	0,86392 $_{318}$	0,58295 $_{845}$	1,71542 $_{2451}$
0,210	1,3195 $_{63}$	0,96858 $_{155}$	0,24869 $_{609}$	3,89473	0,25676 $_{669}$	0,50904 $_{540}$	0,86074 $_{321}$	0,59140 $_{851}$	1,69091 $_{2399}$
0,211	1,3258 $_{62}$	0,97013 $_{150}$	0,24260 $_{610}$	3,99889	0,25007 $_{666}$	0,51444 $_{538}$	0,85753 $_{325}$	0,59991 $_{858}$	1,66692 $_{2350}$
0,212	1,3320 $_{63}$	0,97163 $_{147}$	0,23650 $_{611}$	4,10837	0,24341 $_{665}$	0,51982 $_{535}$	0,85428 $_{329}$	0,60849 $_{864}$	1,64342 $_{2301}$
0,213	1,3383 $_{63}$	0,97310 $_{143}$	0,23039 $_{612}$	4,22371	0,23676 $_{663}$	0,52517 $_{534}$	0,85099 $_{331}$	0,61713 $_{871}$	1,62041 $_{2255}$
0,214	1,3446 $_{63}$	0,97453 $_{139}$	0,22427 $_{613}$	4,34534	0,23013 $_{661}$	0,53051 $_{532}$	0,84768 $_{335}$	0,62584 $_{878}$	1,59786 $_{2212}$
0,215	1,3509 $_{63}$	0,97592 $_{135}$	0,21814 $_{613}$	4,47382	0,22352 $_{658}$	0,53583 $_{529}$	0,84433 $_{339}$	0,63462 $_{885}$	1,57574 $_{2167}$
0,216	1,3572 $_{63}$	0,97727 $_{131}$	0,21201 $_{615}$	4,60955	0,21694 $_{657}$	0,54112 $_{527}$	0,84094 $_{341}$	0,64347 $_{891}$	1,55407 $_{2123}$
0,217	1,3635 $_{62}$	0,97858 $_{128}$	0,20586 $_{615}$	4,75362	0,21037 $_{656}$	0,54639 $_{526}$	0,83753 $_{345}$	0,65238 $_{901}$	1,53284 $_{2087}$
0,218	1,3697 $_{63}$	0,97986 $_{123}$	0,19971 $_{616}$	4,90641	0,20381 $_{653}$	0,55165 $_{523}$	0,83408 $_{348}$	0,66139 $_{907}$	1,51197 $_{2045}$
0,219	1,3760 $_{63}$	0,98109 $_{120}$	0,19355 $_{617}$	5,06892	0,19728 $_{652}$	0,55688 $_{520}$	0,83060 $_{352}$	0,67046 $_{914}$	1,49152 $_{2006}$
0,220	1,3823 $_{63}$	0,98229 $_{116}$	0,18738 $_{617}$	5,24224	0,19076 $_{650}$	0,56208 $_{519}$	0,82708 $_{355}$	0,67960 $_{923}$	1,47146 $_{1972}$
0,221	1,3886 $_{63}$	0,98345 $_{111}$	0,18121 $_{619}$	5,42713	0,18426 $_{650}$	0,56727 $_{516}$	0,82353 $_{358}$	0,68883 $_{930}$	1,45174 $_{1934}$
0,222	1,3949 $_{63}$	0,98456 $_{108}$	0,17502 $_{619}$	5,62541	0,17776 $_{647}$	0,57243 $_{514}$	0,81995 $_{361}$	0,69813 $_{938}$	1,43240 $_{1900}$
0,223	1,4012 $_{62}$	0,98564 $_{105}$	0,16883 $_{619}$	5,83806	0,17129 $_{646}$	0,57757 $_{512}$	0,81634 $_{365}$	0,70751 $_{948}$	1,41340 $_{1868}$
0,224	1,4074 $_{63}$	0,98669 $_{100}$	0,16264 $_{621}$	6,06671	0,16483 $_{645}$	0,58269 $_{510}$	0,81269 $_{367}$	0,71699 $_{956}$	1,39472 $_{1834}$
0,225	1,4137 $_{63}$	0,98769 $_{96}$	0,15643 $_{620}$	6,31394	0,15838 $_{643}$	0,58779 $_{507}$	0,80902 $_{371}$	0,72655 $_{964}$	1,37638 $_{1803}$
0,226	1,4200 $_{63}$	0,98865 $_{93}$	0,15023 $_{622}$	6,58091	0,15195 $_{642}$	0,59286 $_{504}$	0,80531 $_{374}$	0,73619 $_{972}$	1,35835 $_{1771}$
0,227	1,4263 $_{63}$	0,98958 $_{88}$	0,14401 $_{622}$	6,87161	0,14553 $_{641}$	0,59790 $_{503}$	0,80157 $_{378}$	0,74591 $_{984}$	1,34064 $_{1745}$
0,228	1,4326 $_{62}$	0,99046 $_{85}$	0,13779 $_{623}$	7,18818	0,13912 $_{641}$	0,60293 $_{500}$	0,79779 $_{380}$	0,75575 $_{991}$	1,32319 $_{1714}$
0,229	1,4388 $_{63}$	0,99131 $_{80}$	0,13156 $_{623}$	7,53504	0,13271 $_{638}$	0,60793 $_{498}$	0,79399 $_{383}$	0,76566 $_{1002}$	1,30605 $_{1686}$
0,230	1,4451 $_{63}$	0,99211 $_{77}$	0,12533 $_{623}$	7,91598	0,12633 $_{638}$	0,61291 $_{495}$	0,79016 $_{387}$	0,77568 $_{1011}$	1,28919 $_{1659}$
0,231	1,4514 $_{63}$	0,99288 $_{73}$	0,11910 $_{624}$	8,33652	0,11995 $_{636}$	0,61786 $_{493}$	0,78629 $_{390}$	0,78579 $_{1022}$	1,27260 $_{1633}$
0,232	1,4577 $_{63}$	0,99361 $_{69}$	0,11286 $_{625}$	8,80392	0,11359 $_{637}$	0,62279 $_{490}$	0,78239 $_{393}$	0,79601 $_{1031}$	1,25627 $_{1607}$
0,233	1,4640 $_{63}$	0,99430 $_{65}$	0,10661 $_{625}$	9,32652	0,10722 $_{635}$	0,62769 $_{488}$	0,77846 $_{396}$	0,80632 $_{1043}$	1,24020 $_{1583}$
0,234	1,4703 $_{62}$	0,99495 $_{61}$	0,10036 $_{625}$	9,91381	0,10087 $_{634}$	0,63257 $_{485}$	0,77450 $_{399}$	0,81675 $_{1052}$	1,22437 $_{1558}$
0,235	1,4765 $_{63}$	0,99556 $_{57}$	0,09411 $_{626}$	10,57868	0,09453 $_{634}$	0,63742 $_{483}$	0,77051 $_{402}$	0,82727 $_{1064}$	1,20879 $_{1535}$
0,236	1,4828 $_{63}$	0,99613 $_{54}$	0,08785 $_{626}$	11,33899	0,08819 $_{633}$	0,64225 $_{481}$	0,76649 $_{405}$	0,83791 $_{1076}$	1,19344 $_{1513}$
0,237	1,4891 $_{63}$	0,99667 $_{49}$	0,08159 $_{626}$	12,21559	0,08186 $_{632}$	0,64706 $_{477}$	0,76244 $_{408}$	0,84867 $_{1086}$	1,17831 $_{1488}$
0,238	1,4954 $_{63}$	0,99716 $_{45}$	0,07533 $_{627}$	13,23722	0,07554 $_{631}$	0,65183 $_{476}$	0,75836 $_{411}$	0,85953 $_{1099}$	1,16343 $_{1469}$
0,239	1,5017 $_{63}$	0,99761 $_{42}$	0,06906 $_{627}$	14,44555	0,06923 $_{632}$	0,65659 $_{472}$	0,75425 $_{414}$	0,87052 $_{1110}$	1,14874 $_{1446}$
0,240	1,5080 $_{62}$	0,99803 $_{37}$	0,06279 $_{627}$	15,89473	0,06291 $_{630}$	0,66131 $_{470}$	0,75011 $_{417}$	0,88162 $_{1123}$	1,13428 $_{1427}$
0,241	1,5142 $_{63}$	0,99840 $_{34}$	0,05652 $_{628}$	17,66454	0,05661 $_{631}$	0,66601 $_{468}$	0,74594 $_{420}$	0,89285 $_{1136}$	1,12001 $_{1407}$
0,242	1,5205 $_{63}$	0,99874 $_{29}$	0,05024 $_{627}$	19,87938	0,05030 $_{629}$	0,67069 $_{464}$	0,74174 $_{423}$	0,90421 $_{1148}$	1,10594 $_{1387}$
0,243	1,5268 $_{63}$	0,99903 $_{26}$	0,04397 $_{628}$	22,72072	0,04401 $_{629}$	0,67533 $_{462}$	0,73751 $_{425}$	0,91569 $_{1161}$	1,09207 $_{1367}$
0,244	1,5331 $_{63}$	0,99929 $_{22}$	0,03769 $_{628}$	26,51340	0,03772 $_{629}$	0,67995 $_{460}$	0,73326 $_{429}$	0,92730 $_{1176}$	1,07840 $_{1351}$
0,245	1,5394 $_{63}$	0,99951 $_{17}$	0,03141 $_{628}$	31,82139	0,03143 $_{629}$	0,68455 $_{456}$	0,72897 $_{432}$	0,93906 $_{1190}$	1,06489 $_{1332}$
0,246	1,5457 $_{62}$	0,99968 $_{14}$	0,02513 $_{628}$	39,78034	0,02514 $_{629}$	0,68911 $_{454}$	0,72465 $_{434}$	0,95096 $_{1203}$	1,05157 $_{1314}$
0,247	1,5519 $_{63}$	0,99982 $_{10}$	0,01885 $_{628}$	53,04085	0,01885 $_{628}$	0,69365 $_{452}$	0,72031 $_{437}$	0,96299 $_{1219}$	1,03843 $_{1298}$
0,248	1,5582 $_{63}$	0,99992 $_{6}$	0,01257 $_{629}$	79,54813	0,01257 $_{629}$	0,69817 $_{448}$	0,71594 $_{440}$	0,97518 $_{1233}$	1,02545 $_{1280}$
0,249	1,5645 $_{63}$	0,99998 $_{2}$	0,00628 $_{628}$	159,23248	0,00628 $_{628}$	0,70265 $_{446}$	0,71154 $_{443}$	0,98751 $_{1249}$	1,01265 $_{1265}$
0,250	1,5708 $_{63}$	1,00000 $_{2}$	±0,00000 $_{628}$	$\pm\infty$	±0,00000 $_{628}$	0,70711 $_{443}$	0,70711 $_{446}$	1,00000 $_{1265}$	1,00000 $_{1249}$

x	$2\pi x$		$\ln 2\pi x$		$e^{2\pi x}$		$e^{-2\pi x}$		Sin $2\pi x$		Cos $2\pi x$		Tang $2\pi x$		Cotg $2\pi x$		Amp $2\pi x$	
0,250	1,5708	63	0,45159	400	4,8105	303	0,2079	13	2,3013	158	2,5092	145	0,91715	99	1,0903	11	1,1608	25
0,251	1,5771	63	0,45559	397	4,8408	305	0,2066	13	2,3171	159	2,5237	146	0,91814	99	1,0892	12	1,1633	25
0,252	1,5834	62	0,45956	395	4,8713	307	0,2053	13	2,3330	160	2,5383	147	0,91913	97	1,0880	12	1,1658	24
0,253	1,5896	63	0,46351	394	4,9020	309	0,2040	13	2,3490	161	2,5530	148	0,92010	95	1,0868	11	1,1682	25
0,254	1,5959	63	0,46745	393	4,9329	311	0,2027	12	2,3651	162	2,5678	149	0,92105	95	1,0857	11	1,1707	25
0,255	1,6022	63	0,47138	392	4,9640	313	0,2015	13	2,3813	163	2,5827	151	0,92200	94	1,0846	11	1,1732	24
0,256	1,6085	63	0,47530	390	4,9953	315	0,2002	13	2,3976	164	2,5978	151	0,92294	93	1,0835	11	1,1756	24
0,257	1,6148	63	0,47920	388	5,0268	316	0,1989	12	2,4140	164	2,6129	152	0,92387	91	1,0824	11	1,1780	25
0,258	1,6211	62	0,48308	386	5,0584	320	0,1977	13	2,4304	166	2,6281	153	0,92478	90	1,0813	10	1,1805	24
0,259	1,6273	63	0,48694	385	5,0904	321	0,1964	12	2,4470	166	2,6434	154	0,92568	90	1,0803	10	1,1829	23
0,260	1,6336	63	0,49079	385	5,1225	322	0,1952	12	2,4636	168	2,6588	156	0,92658	88	1,0793	11	1,1852	23
0,261	1,6399	63	0,49464	383	5,1547	325	0,1940	12	2,4804	168	2,6744	156	0,92746	88	1,0782	10	1,1875	23
0,262	1,6462	63	0,49847	381	5,1872	327	0,1928	12	2,4972	170	2,6900	158	0,92834	86	1,0772	10	1;1898	23
0,263	1,6525	63	0,50228	379	5,2199	329	0,1916	12	2,5142	170	2,7058	158	0,92920	86	1,0762	10	1,1921	23
0,264	1,6588	62	0,50607	377	5,2528	331	0,1904	12	2,5312	172	2,7216	159	0,93006	84	1,0752	10	1,1944	23
0,265	1,6650	63	0,50984	377	5,2859	333	0,1892	12	2,5484	172	2,7375	159	0,93090	82	1,0742	9	1,1967	23
0,266	1,6713	63	0,51361	376	5,3192	335	0,1880	12	2,5656	174	2,7536	162	0,93172	83	1,0733	10	1,1990	23
0,267	1,6776	63	0,51737	374	5,3527	338	0,1868	12	2,5830	175	2,7698	163	0,93255	81	1,0723	9	1,2013	23
0,268	1,6839	63	0,52111	373	5,3865	339	0,1856	11	2,6005	175	2,7861	164	0,93336	81	1,0714	9	1,2036	23
0,269	1,6902	63	0,52484	371	5,4204	342	0,1845	12	2,6180	176	2,8025	165	0,93417	80	1,0705	9	1,2059	22
0,270	1,6965	62	0,52855	369	5,4546	344	0,1833	11	2,6356	178	2,8190	166	0,93497	79	1,0696	9	1,2081	22
0,271	1,7027	63	0,53224	367	5,4890	346	0,1822	12	2,6534	179	2,8356	167	0,93576	76	1,0687	9	1,2103	22
0,272	1,7090	63	0,53591	368	5,5236	348	0,1810	11	2,6713	180	2,8523	169	0,93652	78	1,0678	9	1,2125	22
0,273	1,7153	63	0,53959	367	5,5584	351	0,1799	11	2,6893	181	2,8692	170	0,93730	75	1,0669	9	1,2147	22
0,274	1,7216	63	0,54326	365	5,5935	352	0,1788	11	2,7074	181	2,8862	170	0,93805	76	1,0660	8	1,2169	22
0,275	1,7279	63	0,54691	363	5,6287	354	0,1777	11	2,7255	183	2,9032	172	0,93881	74	1,0652	9	1,2191	22
0,276	1,7342	62	0,55054	361	5,6641	358	0,1766	12	2,7438	185	2,9204	173	0,93955	73	1,0643	8	1,2213	21
0,277	1,7404	63	0,55415	359	5,6999	359	0,1754	11	2,7623	185	2,9377	174	0,94028	73	1,0635	8	1,2234	21
0,278	1,7467	63	0,55774	359	5,7358	361	0,1743	10	2,7808	185	2,9551	175	0,94101	71	1,0627	8	1,2255	21
0,279	1,7530	63	0,56133	359	5,7719	364	0,1733	11	2,7993	188	2,9726	176	0,94172	70	1,0619	8	1,2276	21
0,280	1,7593	63	0,56492	357	5,8083	366	0,1722	11	2,8181	188	2,9902	178	0,94242	70	1,0611	8	1,2297	21
0,281	1,7656	63	0,56849	355	5,8449	369	0,1711	11	2,8369	190	3,0080	179	0,94312	70	1,0603	8	1,2318	21
0,282	1,7719	62	0,57204	353	5,8818	370	0,1700	10	2,8559	190	3,0259	180	0,94382	68	1,0595	7	1,2339	21
0,283	1,7781	63	0,57557	352	5,9188	374	0,1690	11	2,8749	193	3,0439	182	0,94450	67	1,0588	8	1,2360	21
0,284	1,7844	63	0,57909	352	5,9562	375	0,1679	11	2,8942	192	3,0621	182	0,94517	67	1,0580	7	1,2381	20
0,285	1,7907	63	0,58261	351	5,9937	377	0,1668	10	2,9134	194	3,0803	183	0,94584	65	1,0573	8	1,2401	21
0,286	1,7970	63	0,58612	349	6,0314	381	0,1658	10	2,9328	196	3,0986	186	0,94649	66	1,0565	7	1,2422	20
0,287	1,8033	63	0,58961	347	6,0695	382	0,1648	11	2,9524	196	3,1172	185	0,94715	64	1,0558	7	1,2442	20
0,288	1,8096	62	0,59308	346	6,1077	385	0,1637	10	2,9720	198	3,1357	188	0,94779	64	1,0551	7	1,2462	20
0,289	1,8158	63	0,59654	345	6,1462	388	0,1627	10	2,9918	198	3,1545	188	0,94843	62	1,0544	7	1,2482	20
0,290	1,8221	63	0,59999	345	6,1850	390	0,1617	10	3,0116	201	3,1733	191	0,94905	62	1,0537	7	1,2502	19
0,291	1,8284	63	0,60344	344	6,2240	392	0,1607	10	3,0317	201	3,1924	190	0,94967	62	1,0530	7	1,2521	20
0,292	1,8347	63	0,60688	342	6,2632	395	0,1597	10	3,0518	202	3,2114	193	0,95029	61	1,0523	7	1,2541	20
0,293	1,8410	63	0,61030	340	6,3027	397	0,1587	10	3,0720	204	3,2307	194	0,95090	58	1,0516	6	1,2561	20
0,294	1,8473	62	0,61370	339	6,3424	400	0,1577	10	3,0924	204	3,2501	194	0,95148	60	1,0510	7	1,2581	19
0,295	1,8535	63	0,61709	338	6,3824	402	0,1567	10	3,1128	207	3,2695	197	0,95208	59	1,0503	6	1,2600	18
0,296	1,8598	63	0,62047	338	6,4226	405	0,1557	10	3,1335	207	3,2892	197	0,95267	57	1,0497	6	1,2618	19
0,297	1,8661	63	0,62385	337	6,4631	407	0,1547	9	3,1542	208	3,3089	199	0,95324	58	1,0491	7	1,2637	19
0,298	1,8724	63	0,62722	335	6,5038	410	0,1538	10	3,1750	210	3,3288	200	0,95382	56	1,0484	6	1,2656	19
0,299	1,8787	63	0,63057	333	6,5448	413	0,1528	10	3,1960	211	3,3488	201	0,95438	56	1,0478	6	1,2675	19
0,300	1,8850	62	0,63390	332	6,5861	414	0,1518	9	3,2171	212	3,3689	203	0,95494	54	1,0472	6	1,2694	18

x	$2\pi x$	$\sin 2\pi x$	$\cos 2\pi x$	$\operatorname{tang} 2\pi x$	$\operatorname{cotg} 2\pi x$	$\sin^* 2\pi x$	$\cos^* 2\pi x$	$\operatorname{tang}^* 2\pi x$	$\operatorname{cotg}^* 2\pi x$
0,250	1,5708$_{63}$	1,00000$_{2}$	±0,00000$_{628}$	± ∞	±0,00000$_{628}$	0,70711$_{443}$	0,70711$_{446}$	1,00000$_{1265}$	1,00000$_{1249}$
0,251	1,5771$_{63}$	0,99998$_{6}$	−0,00628$_{629}$	−159,23248	−0,00628$_{629}$	0,71154$_{440}$	0,70265$_{448}$	1,01265$_{1280}$	0,98751$_{1233}$
0,252	1,5834$_{62}$	0,99992$_{10}$	−0,01257$_{628}$	−79,54813	−0,01257$_{628}$	0,71594$_{437}$	0,69817$_{452}$	1,02545$_{1298}$	0,97518$_{1219}$
0,253	1,5896$_{63}$	0,99982$_{14}$	−0,01885$_{628}$	−53,04085	−0,01885$_{629}$	0,72031$_{434}$	0,69365$_{454}$	1,03843$_{1314}$	0,96299$_{1203}$
0,254	1,5959$_{63}$	0,99968$_{17}$	−0,02513$_{628}$	−39,78034	−0,02514$_{629}$	0,72465$_{432}$	0,68911$_{456}$	1,05157$_{1332}$	0,95096$_{1190}$
0,255	1,6022$_{63}$	0,99951$_{22}$	−0,03141$_{628}$	−31,82139	−0,03143$_{629}$	0,72897$_{429}$	0,68455$_{460}$	1,06489$_{1351}$	0,93906$_{1176}$
0,256	1,6085$_{63}$	0,99929$_{26}$	−0,03769$_{628}$	−26,51340	−0,03772$_{629}$	0,73326$_{425}$	0,67995$_{462}$	1,07840$_{1367}$	0,92730$_{1161}$
0,257	1,6148$_{63}$	0,99903$_{29}$	−0,04397$_{627}$	−22,72072	−0,04401$_{629}$	0,73751$_{423}$	0,67533$_{464}$	1,09207$_{1387}$	0,91569$_{1148}$
0,258	1,6211$_{62}$	0,99874$_{34}$	−0,05024$_{628}$	−19,87938	−0,05030$_{631}$	0,74174$_{420}$	0,67069$_{468}$	1,10594$_{1407}$	0,90421$_{1136}$
0,259	1,6273$_{63}$	0,99840$_{37}$	−0,05652$_{627}$	−17,66454	−0,05661$_{630}$	0,74594$_{417}$	0,66601$_{470}$	1,12001$_{1427}$	0,89285$_{1123}$
0,260	1,6336$_{63}$	0,99803$_{42}$	−0,06279$_{627}$	−15,89473	−0,06291$_{632}$	0,75011$_{414}$	0,66131$_{472}$	1,13428$_{1446}$	0,88162$_{1110}$
0,261	1,6399$_{63}$	0,99761$_{45}$	−0,06906$_{627}$	−14,44555	−0,06923$_{631}$	0,75425$_{411}$	0,65659$_{476}$	1,14874$_{1469}$	0,87052$_{1099}$
0,262	1,6462$_{63}$	0,99716$_{49}$	−0,07533$_{626}$	−13,23722	−0,07554$_{632}$	0,75836$_{408}$	0,65183$_{477}$	1,16343$_{1488}$	0,85953$_{1086}$
0,263	1,6525$_{63}$	0,99667$_{54}$	−0,08159$_{626}$	−12,21559	−0,08186$_{633}$	0,76244$_{405}$	0,64706$_{481}$	1,17831$_{1513}$	0,84867$_{1076}$
0,264	1,6588$_{62}$	0,99613$_{57}$	−0,08785$_{626}$	−11,33899	−0,08819$_{634}$	0,76649$_{402}$	0,64225$_{483}$	1,19344$_{1535}$	0,83791$_{1064}$
0,265	1,6650$_{63}$	0,99556$_{61}$	−0,09411$_{625}$	−10,57868	−0,09453$_{634}$	0,77051$_{399}$	0,63742$_{485}$	1,20879$_{1558}$	0,82727$_{1052}$
0,266	1,6713$_{63}$	0,99495$_{65}$	−0,10036$_{625}$	− 9,91381	−0,10087$_{635}$	0,77450$_{396}$	0,63257$_{488}$	1,22437$_{1583}$	0,81675$_{1043}$
0,267	1,6776$_{63}$	0,99430$_{69}$	−0,10661$_{625}$	− 9,32652	−0,10722$_{637}$	0,77846$_{393}$	0,62769$_{490}$	1,24020$_{1607}$	0,80632$_{1031}$
0,268	1,6839$_{63}$	0,99361$_{73}$	−0,11286$_{624}$	− 8,80392	−0,11359$_{636}$	0,78239$_{390}$	0,62279$_{493}$	1,25627$_{1633}$	0,79601$_{1022}$
0,269	1,6902$_{63}$	0,99288$_{77}$	−0,11910$_{623}$	− 8,33652	−0,11995$_{638}$	0,78629$_{387}$	0,61786$_{495}$	1,27260$_{1659}$	0,78579$_{1011}$
0,270	1,6965$_{62}$	0,99211$_{80}$	−0,12533$_{623}$	− 7,91598	−0,12633$_{638}$	0,79016$_{383}$	0,61291$_{498}$	1,28919$_{1686}$	0,77568$_{1002}$
0,271	1,7027$_{63}$	0,99131$_{85}$	−0,13156$_{623}$	− 7,53504	−0,13271$_{641}$	0,79399$_{380}$	0,60793$_{500}$	1,30605$_{1714}$	0,76566$_{991}$
0,272	1,7090$_{63}$	0,99046$_{88}$	−0,13779$_{622}$	− 7,18818	−0,13912$_{641}$	0,79779$_{378}$	0,60293$_{503}$	1,32319$_{1745}$	0,75575$_{984}$
0,273	1,7153$_{63}$	0,98958$_{93}$	−0,14401$_{622}$	− 6,87161	−0,14553$_{642}$	0,80157$_{374}$	0,59790$_{504}$	1,34064$_{1771}$	0,74591$_{972}$
0,274	1,7216$_{63}$	0,98865$_{96}$	−0,15023$_{620}$	− 6,58091	−0,15195$_{643}$	0,80531$_{371}$	0,59286$_{507}$	1,35835$_{1803}$	0,73619$_{964}$
0,275	1,7279$_{63}$	0,98769$_{100}$	−0,15643$_{621}$	− 6,31394	−0,15838$_{645}$	0,80902$_{367}$	0,58779$_{510}$	1,37638$_{1834}$	0,72655$_{956}$
0,276	1,7342$_{62}$	0,98669$_{105}$	−0,16264$_{619}$	− 6,06671	−0,16483$_{646}$	0,81269$_{365}$	0,58269$_{512}$	1,39472$_{1868}$	0,71699$_{948}$
0,277	1,7404$_{63}$	0,98564$_{108}$	−0,16883$_{619}$	− 5,83806	−0,17129$_{647}$	0,81634$_{361}$	0,57757$_{514}$	1,41340$_{1900}$	0,70751$_{938}$
0,278	1,7467$_{63}$	0,98456$_{111}$	−0,17502$_{619}$	− 5,62541	−0,17776$_{650}$	0,81995$_{358}$	0,57243$_{516}$	1,43240$_{1934}$	0,69813$_{930}$
0,279	1,7530$_{63}$	0,98345$_{116}$	−0,18121$_{617}$	− 5,42713	−0,18426$_{650}$	0,82353$_{355}$	0,56727$_{519}$	1,45174$_{1972}$	0,68883$_{923}$
0,280	1,7593$_{63}$	0,98229$_{120}$	−0,18738$_{617}$	− 5,24224	−0,19076$_{652}$	0,82708$_{352}$	0,56208$_{520}$	1,47146$_{2006}$	0,67960$_{914}$
0,281	1,7656$_{63}$	0,98109$_{123}$	−0,19355$_{616}$	− 5,06892	−0,19728$_{653}$	0,83060$_{348}$	0,55688$_{523}$	1,49152$_{2045}$	0,67046$_{907}$
0,282	1,7719$_{62}$	0,97986$_{128}$	−0,19971$_{615}$	− 4,90641	−0,20381$_{656}$	0,83408$_{345}$	0,55165$_{526}$	1,51197$_{2087}$	0,66139$_{901}$
0,283	1,7781$_{63}$	0,97858$_{131}$	−0,20586$_{615}$	− 4,75362	−0,21037$_{657}$	0,83753$_{341}$	0,54639$_{527}$	1,53284$_{2123}$	0,65238$_{891}$
0,284	1,7844$_{63}$	0,97727$_{135}$	−0,21201$_{613}$	− 4,60955	−0,21694$_{658}$	0,84094$_{339}$	0,54112$_{529}$	1,55407$_{2167}$	0,64347$_{885}$
0,285	1,7907$_{63}$	0,97592$_{139}$	−0,21814$_{613}$	− 4,47382	−0,22352$_{661}$	0,84433$_{335}$	0,53583$_{532}$	1,57574$_{2212}$	0,63462$_{878}$
0,286	1,7970$_{63}$	0,97453$_{143}$	−0,22427$_{612}$	− 4,34534	−0,23013$_{663}$	0,84768$_{331}$	0,53051$_{534}$	1,59786$_{2255}$	0,62584$_{871}$
0,287	1,8033$_{63}$	0,97310$_{147}$	−0,23039$_{611}$	− 4,22371	−0,23676$_{665}$	0,85099$_{329}$	0,52517$_{535}$	1,62041$_{2301}$	0,61713$_{864}$
0,288	1,8096$_{62}$	0,97163$_{150}$	−0,23650$_{610}$	− 4,10837	−0,24341$_{666}$	0,85428$_{325}$	0,51982$_{538}$	1,64342$_{2350}$	0,60849$_{858}$
0,289	1,8158$_{63}$	0,97013$_{155}$	−0,24260$_{609}$	− 3,99889	−0,25007$_{669}$	0,85753$_{321}$	0,51444$_{540}$	1,66692$_{2399}$	0,59991$_{851}$
0,290	1,8221$_{63}$	0,96858$_{158}$	−0,24869$_{608}$	− 3,89473$_{9915}$	−0,25676$_{670}$	0,86074$_{318}$	0,50904$_{542}$	1,69091$_{2451}$	0,59140$_{845}$
0,291	1,8284$_{63}$	0,96700$_{162}$	−0,25477$_{607}$	− 3,79558$_{9454}$	−0,26346$_{673}$	0,86392$_{315}$	0,50362$_{543}$	1,71542$_{2502}$	0,58295$_{838}$
0,292	1,8347$_{63}$	0,96538$_{166}$	−0,26084$_{606}$	− 3,70104$_{9025}$	−0,27019$_{676}$	0,86707$_{311}$	0,49819$_{546}$	1,74044$_{2560}$	0,57457$_{833}$
0,293	1,8410$_{63}$	0,96372$_{169}$	−0,26690$_{605}$	− 3,61079$_{8623}$	−0,27695$_{677}$	0,87018$_{308}$	0,49273$_{548}$	1,76604$_{2618}$	0,56624$_{827}$
0,294	1,8473$_{62}$	0,96203$_{174}$	−0,27295$_{604}$	− 3,52456$_{8254}$	−0,28372$_{681}$	0,87326$_{305}$	0,48725$_{550}$	1,79222$_{2679}$	0,55797$_{822}$
0,295	1,8535$_{63}$	0,96029$_{177}$	−0,27899$_{603}$	− 3,44202$_{7903}$	−0,29053$_{682}$	0,87631$_{301}$	0,48175$_{551}$	1,81901$_{2737}$	0,54975$_{815}$
0,296	1,8598$_{63}$	0,95852$_{181}$	−0,28502$_{602}$	− 3,36299$_{7578}$	−0,29735$_{686}$	0,87932$_{297}$	0,47624$_{554}$	1,84638$_{2804}$	0,54160$_{810}$
0,297	1,8661$_{63}$	0,95671$_{185}$	−0,29104$_{600}$	− 3,28721$_{7263}$	−0,30421$_{687}$	0,88229$_{294}$	0,47070$_{555}$	1,87442$_{2869}$	0,53350$_{804}$
0,298	1,8724$_{63}$	0,95486$_{188}$	−0,29704$_{600}$	− 3,21458$_{6985}$	−0,31108$_{691}$	0,88523$_{291}$	0,46515$_{557}$	1,90311$_{2939}$	0,52546$_{800}$
0,299	1,8787$_{63}$	0,95298$_{192}$	−0,30304$_{598}$	− 3,14473$_{6707}$	−0,31799$_{693}$	0,88814$_{287}$	0,45958$_{559}$	1,93250$_{3012}$	0,51746$_{794}$
0,300	1,8850$_{62}$	0,95106$_{196}$	−0,30902$_{597}$	− 3,07766$_{6455}$	−0,32492$_{696}$	0,89101$_{283}$	0,45399$_{561}$	1,96262$_{3087}$	0,50952$_{789}$

x	$2\pi x$	$\ln 2\pi x$	$e^{2\pi x}$	$e^{-2\pi x}$	Sin $2\pi x$	Cos $2\pi x$	Tang $2\pi x$	Cotg $2\pi x$	Amp $2\pi x$
0,300	1,8850 62	0,63390 332	6,5861 414	0,1518 9	3,2171 212	3,3689 203	0,95494 54	1,0472 6	1,2694 18
0,301	1,8912 63	0,63722 332	6,6275 419	0,1509 10	3,2383 215	3,3892 205	0,95548 55	1,0466 6	1,2712 19
0,302	1,8975 63	0,64054 331	6,6694 420	0,1499 9	3,2598 214	3,4097 205	0,95603 53	1,0460 6	1,2731 18
0,303	1,9038 63	0,64385 331	6,7114 423	0,1490 9	3,2812 216	3,4302 207	0,95656 54	1,0454 6	1,2749 18
0,304	1,9101 63	0,64716 329	5,7537 426	0,1481 10	3,3028 218	3,4509 208	0,95710 52	1,0448 6	1,2767 19
0,305	1,9164 63	0,65045 327	6,7963 429	0,1471 9	3,3246 219	3,4717 210	0,95762 51	1,0442 5	1,2786 18
0,306	1,9227 62	0,65372 324	6,8392 430	0,1462 9	3,3465 220	3,4927 211	0,95813 52	1,0437 6	1,2804 18
0,307	1,9289 63	0,65696 325	6,8822 434	0,1453 9	3,3685 221	3,5138 212	0,95865 51	1,0431 5	1,2822 18
0,308	1,9352 63	0,66021 325	6,9256 436	0,1444 9	3,3906 223	3,5350 214	0,95916 49	1,0426 5	1,2840 18
0,309	1,9415 63	0,66346 324	6,9692 440	0,1435 9	3,4129 224	3,5564 215	0,95965 50	1,0421 6	1,2858 18
0,310	1,9478 63	0,66670 322	7,0132 442	0,1426 9	3,4353 226	3,5779 217	0,96015 49	1,0415 5	1,2876 17
0,311	1,9541 63	0,66992 321	7,0574 444	0,1417 9	3,4579 226	3,5996 217	0,96064 48	1,0410 5	1,2893 17
0,312	1,9604 62	0,67313 319	7,1018 447	0,1408 9	3,4805 228	3,6213 219	0,96112 48	1,0405 6	1,2910 18
0,313	1,9666 63	0,67632 319	7,1465 448	0,1399 9	3,5033 231	3,6432 222	0,96160 47	1,0399 5	1,2928 17
0,314	1,9729 63	0,67951 318	7,1917 453	0,1390 8	3,5264 230	3,6654 222	0,96207 46	1,0394 5	1,2945 17
0,315	1,9792 63	0,68269 318	7,2370 456	0,1382 9	3,5494 233	3,6876 224	0,96253 46	1,0389 5	1,2962 17
0,316	1,9855 63	0,68587 316	7,2826 458	0,1373 8	3,5727 233	3,7100 225	0,96299 46	1,0384 5	1,2979 16
0,317	1,9918 63	0,68903 315	7,3284 463	0,1365 9	3,5960 236	3,7325 227	0,96345 44	1,0379 4	1,2995 17
0,318	1,9981 62	0,69218 313	7,3747 465	0,1356 9	3,6196 237	3,7552 228	0,96389 44	1,0375 5	1,3012 16
0,319	2,0043 63	0,69531 312	7,4212 467	0,1347 8	3,6433 237	3,7780 229	0,96433 44	1,0370 5	1,3028 17
0,320	2,0106 63	0,69843 313	7,4679 471	0,1339 8	3,6670 240	3,8009 232	0,96477 43	1,0365 4	1,3045 16
0,321	2,0169 63	0,70156 312	7,5150 474	0,1331 9	3,6910 241	3,8241 232	0,96520 43	1,0361 5	1,3061 17
0,322	2,0232 63	0,70468 310	7,5624 476	0,1322 8	3,7151 242	3,8473 234	0,96563 42	1,0356 5	1,3078 16
0,323	2,0295 63	0,70778 309	7,6100 480	0,1314 8	3,7393 244	3,8707 236	0,96605 42	1,0351 4	1,3094 17
0,324	2,0358 62	0,71087 307	7,6580 483	0,1306 8	3,7637 246	3,8943 238	0,96647 41	1,0347 4	1,3111 16
0,325	2,0420 63	0,71394 307	7,7063 485	0,1298 8	3,7883 246	3,9181 238	0,96688 41	1,0343 5	1,3127 16
0,326	2,0483 63	0,71701 307	7,7548 490	0,1290 9	3,8129 250	3,9419 241	0,96729 40	1,0338 4	1,3143 16
0,327	2,0546 63	0,72008 306	7,8038 491	0,1281 8	3,8379 249	3,9660 241	0,96769 40	1,0334 4	1,3159 15
0,328	2,0609 63	0,72314 305	7,8529 495	0,1273 8	3,8628 252	3,9901 244	0,96809 39	1,0330 4	1,3174 16
0,329	2,0672 63	0,72619 303	7,9024 498	0,1265 7	3,8880 252	4,0145 245	0,96848 39	1,0326 4	1,3190 16
0,330	2,0735 62	0,72922 302	7,9522 501	0,1258 8	3,9132 255	4,0390 247	0,96887 38	1,0322 5	1,3206 15
0,331	2,0797 63	0,73224 301	8,0023 505	0,1250 8	3,9387 256	4,0637 248	0,96925 38	1,0317 4	1,3221 15
0,332	2,0860 63	0,73525 302	8,0528 508	0,1242 8	3,9643 258	4,0885 250	0,96963 37	1,0313 4	1,3236 15
0,333	2,0923 63	0,73827 300	8,1036 510	0,1234 8	3,9901 259	4,1135 251	0,97000 37	1,0309 4	1,3251 16
0,334	2,0986 63	0,74127 300	8,1546 514	0,1226 7	4,0160 261	4,1386 254	0,97037 36	1,0305 4	1,3267 15
0,335	2,1049 63	0,74427 298	8,2060 517	0,1219 8	4,0421 262	4,1640 254	0,97073 36	1,0301 4	1,3282 15
0,336	2,1112 62	0,74725 296	8,2577 521	0,1211 8	4,0683 265	4,1894 257	0,97109 36	1,0297 3	1,3297 15
0,337	2,1174 63	0,75021 295	8,3098 523	0,1203 7	4,0948 265	4,2151 258	0,97145 35	1,0294 4	1,3312 15
0,338	2,1237 63	0,75316 296	8,3621 527	0,1196 8	4,1213 267	4,2409 259	0,97180 35	1,0290 3	1,3327 15
0,339	2,1300 63	0,75612 296	8,4148 531	0,1188 7	4,1480 269	4,2668 262	0,97215 35	1,0287 4	1,3342 14
0,340	2,1363 63	0,75906 294	8,4679 534	0,1181 7	4,1749 271	4,2930 264	0,97250 33	1,0283 4	1,3356 15
0,341	2,1426 62	0,76200 292	8,5213 537	0,1174 8	4,2020 272	4,3194 264	0,97283 33	1,0279 3	1,3371 14
0,342	2,1488 63	0,76492 292	8,5750 541	0,1166 7	4,2292 274	4,3458 267	0,97316 34	1,0276 4	1,3385 15
0,343	2,1551 63	0,76784 292	8,6291 543	0,1159 7	4,2566 275	4,3725 268	0,97350 32	1,0272 3	1,3400 15
0,344	2,1614 63	0,77076 291	8,6834 548	0,1152 8	4,2841 278	4,3993 270	0,97382 33	1,0269 4	1,3415 14
0,345	2,1677 63	0,77367 290	8,7382 551	0,1144 7	4,3119 279	4,4263 272	0,97415 31	1,0265 3	1,3429 14
0,346	2,1740 63	0,77657 288	8,7933 554	0,1137 7	4,3398 281	4,4535 274	0,97446 32	1,0262 3	1,3443 14
0,347	2,1803 62	0,77945 286	8,8487 557	0,1130 7	4,3679 283	4,4809 275	0,97478 31	1,0259 3	1,3457 14
0,348	2,1865 63	0,78231 287	8,9044 562	0,1123 7	4,3962 283	4,5084 277	0,97509 31	1,0256 4	1,3471 14
0,349	2,1928 63	0,78518 287	8,9606 564	0,1116 7	4,4245 286	4,5361 279	0,97540 30	1,0252 3	1,3485 14
0,350	2,1991 63	0,78805 286	9,0170 568	0,1109 7	4,4531 287	4,5640 280	0,97570 30	1,0249 3	1,3499 14

x	$2\pi x$	$\sin 2\pi x$	$\cos 2\pi x$	$\operatorname{tang} 2\pi x$	$\operatorname{cotg} 2\pi x$	$\sin^* 2\pi x$	$\cos^* 2\pi x$	$\operatorname{tang}^* 2\pi x$	$\operatorname{cotg}^* 2\pi x$
0,300	1,8850$_{62}$	0,95106$_{196}$	−0,30902$_{597}$	−3,07766$_{6455}$	−0,32492$_{696}$	0,89101$_{283}$	0,45399$_{561}$	1,96262$_{3087}$	0,50952$_{789}$
0,301	1,8912$_{63}$	0,94910$_{200}$	−0,31499$_{595}$	−3,01311$_{6209}$	−0,33188$_{699}$	0,89384$_{280}$	0,44838$_{562}$	1,99349$_{3163}$	0,50163$_{783}$
0,302	1,8975$_{63}$	0,94710$_{204}$	−0,32094$_{595}$	−2,95102$_{5996}$	−0,33887$_{702}$	0,89664$_{277}$	0,44276$_{564}$	2,02512$_{3246}$	0,49380$_{779}$
0,303	1,9038$_{63}$	0,94506$_{207}$	−0,32689$_{593}$	−2,89106$_{5773}$	−0,34589$_{705}$	0,89941$_{272}$	0,43712$_{566}$	2,05758$_{3330}$	0,48601$_{774}$
0,304	1,9101$_{63}$	0,94299$_{211}$	−0,33282$_{592}$	−2,83333$_{5574}$	−0,35294$_{708}$	0,90213$_{270}$	0,43146$_{568}$	2,09088$_{3423}$	0,47827$_{771}$
0,305	1,9164$_{63}$	0,94088$_{215}$	−0,33874$_{590}$	−2,77759$_{5379}$	−0,36002$_{711}$	0,90483$_{265}$	0,42578$_{569}$	2,12511$_{3509}$	0,47056$_{764}$
0,306	1,9227$_{62}$	0,93873$_{218}$	−0,34464$_{589}$	−2,72380$_{5199}$	−0,36713$_{715}$	0,90748$_{263}$	0,42009$_{571}$	2,16020$_{3612}$	0,46292$_{761}$
0,307	1,9289$_{63}$	0,93655$_{222}$	−0,35053$_{588}$	−2,67181$_{5031}$	−0,37428$_{718}$	0,91011$_{258}$	0,41438$_{573}$	2,19632$_{3711}$	0,45531$_{757}$
0,308	1,9352$_{63}$	0,93433$_{226}$	−0,35641$_{587}$	−2,62150$_{4871}$	−0,38146$_{722}$	0,91269$_{255}$	0,40865$_{574}$	2,23343$_{3814}$	0,44774$_{752}$
0,309	1,9415$_{63}$	0,93207$_{229}$	−0,36228$_{584}$	−2,57279$_{4704}$	−0,38868$_{724}$	0,91524$_{251}$	0,40291$_{576}$	2,27157$_{3927}$	0,44022$_{748}$
0,310	1,9478$_{63}$	0,92978$_{233}$	−0,36812$_{584}$	−2,52575$_{4567}$	−0,39592$_{729}$	0,91775$_{248}$	0,39715$_{578}$	2,31084$_{4046}$	0,43274$_{744}$
0,311	1,9541$_{63}$	0,92745$_{237}$	−0,37396$_{582}$	−2,48008$_{4425}$	−0,40321$_{733}$	0,92023$_{244}$	0,39137$_{579}$	2,35130$_{4164}$	0,42530$_{740}$
0,312	1,9604$_{62}$	0,92508$_{241}$	−0,37978$_{580}$	−2,43583$_{4289}$	−0,41054$_{736}$	0,92267$_{241}$	0,38558$_{580}$	2,39294$_{4289}$	0,41790$_{736}$
0,313	1,9666$_{63}$	0,92267$_{244}$	−0,38558$_{579}$	−2,39294$_{4164}$	−0,41790$_{740}$	0,92508$_{237}$	0,37978$_{582}$	2,43583$_{4425}$	0,41054$_{733}$
0,314	1,9729$_{63}$	0,92023$_{248}$	−0,39137$_{578}$	−2,35130$_{4046}$	−0,42530$_{744}$	0,92745$_{233}$	0,37396$_{584}$	2,48008$_{4567}$	0,40321$_{729}$
0,315	1,9792$_{63}$	0,91775$_{251}$	−0,39715$_{576}$	−2,31084$_{3927}$	−0,43274$_{748}$	0,92978$_{229}$	0,36812$_{584}$	2,52575$_{4704}$	0,39592$_{724}$
0,316	1,9855$_{63}$	0,91524$_{255}$	−0,40291$_{574}$	−2,27157$_{3814}$	−0,44022$_{752}$	0,93207$_{226}$	0,36228$_{587}$	2,57279$_{4871}$	0,38868$_{722}$
0,317	1,9918$_{63}$	0,91269$_{258}$	−0,40865$_{573}$	−2,23343$_{3711}$	−0,44774$_{757}$	0,93433$_{222}$	0,35641$_{588}$	2,62150$_{5031}$	0,38146$_{718}$
0,318	1,9981$_{62}$	0,91011$_{263}$	−0,41438$_{571}$	−2,19632$_{3612}$	−0,45531$_{761}$	0,93655$_{218}$	0,35053$_{589}$	2,67181$_{5199}$	0,37428$_{715}$
0,319	2,0043$_{63}$	0,90748$_{265}$	−0,42009$_{569}$	−2,16020$_{3509}$	−0,46292$_{764}$	0,93873$_{215}$	0,34464$_{590}$	2,72380$_{5379}$	0,36713$_{711}$
0,320	2,0106$_{63}$	0,90483$_{270}$	−0,42578$_{568}$	−2,12511$_{3423}$	−0,47056$_{771}$	0,94088$_{211}$	0,33874$_{592}$	2,77759$_{5574}$	0,36002$_{708}$
0,321	2,0169$_{63}$	0,90213$_{272}$	−0,43146$_{566}$	−2,09088$_{3330}$	−0,47827$_{774}$	0,94299$_{207}$	0,33282$_{593}$	2,83333$_{5773}$	0,35294$_{705}$
0,322	2,0232$_{63}$	0,89941$_{277}$	−0,43712$_{564}$	−2,05758$_{3246}$	−0,48601$_{779}$	0,94506$_{204}$	0,32689$_{595}$	2,89106$_{5996}$	0,34589$_{702}$
0,323	2,0295$_{63}$	0,89664$_{280}$	−0,44276$_{562}$	−2,02512$_{3163}$	−0,49380$_{783}$	0,94710$_{200}$	0,32094$_{595}$	2,95102$_{6209}$	0,33887$_{699}$
0,324	2,0358$_{62}$	0,89384$_{283}$	−0,44838$_{561}$	−1,99349$_{3087}$	−0,50163$_{789}$	0,94910$_{196}$	0,31499$_{597}$	3,01311$_{6455}$	0,33188$_{696}$
0,325	2,0420$_{63}$	0,89101$_{287}$	−0,45399$_{559}$	−1,96262$_{3012}$	−0,50952$_{794}$	0,95106$_{192}$	0,30902$_{598}$	3,07766$_{6707}$	0,32492$_{693}$
0,326	2,0483$_{63}$	0,88814$_{291}$	−0,45958$_{557}$	−1,93250$_{2939}$	−0,51746$_{800}$	0,95298$_{188}$	0,30304$_{600}$	3,14473$_{6985}$	0,31799$_{691}$
0,327	2,0546$_{63}$	0,88523$_{294}$	−0,46515$_{555}$	−1,90311$_{2869}$	−0,52546$_{804}$	0,95486$_{185}$	0,29704$_{600}$	3,21458$_{7263}$	0,31108$_{687}$
0,328	2,0609$_{63}$	0,88229$_{297}$	−0,47070$_{554}$	−1,87442$_{2804}$	−0,53350$_{810}$	0,95671$_{181}$	0,29104$_{602}$	3,28721$_{7578}$	0,30421$_{686}$
0,329	2,0672$_{63}$	0,87932$_{301}$	−0,47624$_{551}$	−1,84638$_{2737}$	−0,54160$_{815}$	0,95852$_{177}$	0,28502$_{603}$	3,36299$_{7903}$	0,29735$_{682}$
0,330	2,0735$_{62}$	0,87631$_{305}$	−0,48175$_{550}$	−1,81901$_{2679}$	−0,54975$_{822}$	0,96029$_{174}$	0,27899$_{604}$	3,44202$_{8254}$	0,29053$_{681}$
0,331	2,0797$_{63}$	0,87326$_{308}$	−0,48725$_{548}$	−1,79222$_{2618}$	−0,55797$_{827}$	0,96203$_{169}$	0,27295$_{605}$	3,52456$_{8623}$	0,28372$_{677}$
0,332	2,0860$_{63}$	0,87018$_{311}$	−0,49273$_{546}$	−1,76604$_{2560}$	−0,56624$_{833}$	0,96372$_{166}$	0,26690$_{606}$	3,61079$_{9025}$	0,27695$_{676}$
0,333	2,0923$_{63}$	0,86707$_{315}$	−0,49819$_{543}$	−1,74044$_{2502}$	−0,57457$_{838}$	0,96538$_{162}$	0,26084$_{607}$	3,70104$_{9454}$	0,27019$_{673}$
0,334	2,0986$_{63}$	0,86392$_{318}$	−0,50362$_{542}$	−1,71542$_{2451}$	−0,58295$_{845}$	0,96700$_{158}$	0,25477$_{608}$	3,79558$_{9915}$	0,26346$_{670}$
0,335	2,1049$_{63}$	0,86074$_{321}$	−0,50904$_{540}$	−1,69091$_{2399}$	−0,59140$_{851}$	0,96858$_{155}$	0,24869$_{609}$	3,89473	0,25676$_{669}$
0,336	2,1112$_{62}$	0,85753$_{325}$	−0,51444$_{538}$	−1,66692$_{2350}$	−0,59991$_{858}$	0,97013$_{150}$	0,24260$_{610}$	3,99889	0,25007$_{666}$
0,337	2,1174$_{63}$	0,85428$_{329}$	−0,51982$_{535}$	−1,64342$_{2301}$	−0,60849$_{864}$	0,97163$_{147}$	0,23650$_{611}$	4,10837	0,24341$_{665}$
0,338	2,1237$_{63}$	0,85099$_{331}$	−0,52517$_{534}$	−1,62041$_{2255}$	−0,61713$_{871}$	0,97310$_{143}$	0,23039$_{613}$	4,22371	0,23676$_{663}$
0,339	2,1300$_{63}$	0,84768$_{335}$	−0,53051$_{532}$	−1,59786$_{2212}$	−0,62584$_{878}$	0,97453$_{139}$	0,22427$_{613}$	4,34534	0,23013$_{661}$
0,340	2,1363$_{63}$	0,84433$_{339}$	−0,53583$_{529}$	−1,57574$_{2167}$	−0,63462$_{885}$	0,97592$_{135}$	0,21814$_{613}$	4,47382	0,22352$_{658}$
0,341	2,1426$_{62}$	0,84094$_{341}$	−0,54112$_{527}$	−1,55407$_{2123}$	−0,64347$_{891}$	0,97727$_{131}$	0,21201$_{615}$	4,60955	0,21694$_{657}$
0,342	2,1488$_{63}$	0,83753$_{345}$	−0,54639$_{526}$	−1,53284$_{2087}$	−0,65238$_{901}$	0,97858$_{128}$	0,20586$_{615}$	4,75362	0,21037$_{656}$
0,343	2,1551$_{63}$	0,83408$_{348}$	−0,55165$_{523}$	−1,51197$_{2045}$	−0,66139$_{907}$	0,97986$_{123}$	0,19971$_{616}$	4,90641	0,20381$_{653}$
0,344	2,1614$_{63}$	0,83060$_{352}$	−0,55688$_{520}$	−1,49152$_{2006}$	−0,67046$_{914}$	0,98109$_{120}$	0,19355$_{617}$	5,06892	0,19728$_{652}$
0,345	2,1677$_{63}$	0,82708$_{355}$	−0,56208$_{519}$	−1,47146$_{1972}$	−0,67960$_{923}$	0,98229$_{116}$	0,18738$_{619}$	5,24224	0,19076$_{650}$
0,346	2,1740$_{63}$	0,82353$_{358}$	−0,56727$_{516}$	−1,45174$_{1934}$	−0,68883$_{930}$	0,98345$_{111}$	0,18121$_{619}$	5,42713	0,18426$_{650}$
0,347	2,1803$_{62}$	0,81995$_{361}$	−0,57243$_{514}$	−1,43240$_{1900}$	−0,69813$_{938}$	0,98456$_{108}$	0,17502$_{619}$	5,62541	0,17776$_{647}$
0,348	2,1865$_{63}$	0,81634$_{365}$	−0,57757$_{512}$	−1,41340$_{1868}$	−0,70751$_{948}$	0,98564$_{105}$	0,16883$_{619}$	5,83806	0,17129$_{646}$
0,349	2,1928$_{63}$	0,81269$_{367}$	−0,58269$_{510}$	−1,39472$_{1834}$	−0,71699$_{956}$	0,98669$_{100}$	0,16264$_{621}$	6,06671	0,16483$_{645}$
0,350	2,1991$_{63}$	0,80902$_{371}$	−0,58779$_{507}$	−1,37638$_{1803}$	−0,72655$_{964}$	0,98769$_{96}$	0,15643$_{620}$	6,31394	0,15838$_{643}$

x	$2\pi x$		$\ln 2\pi x$		$e^{2\pi x}$		$e^{-2\pi x}$		Sin $2\pi x$		Cos $2\pi x$		Tang $2\pi x$		Cotg $2\pi x$		Amp $2\pi x$	
0,350	2,1991	63	0,78805	286	9,0170	568	0,1109	7	4,4531	287	4,5640	280	0,97570	30	1,0249	3	1,3499	14
0,351	2,2054	63	0,79091	285	9,0738	573	0,1102	7	4,4818	290	4,5920	283	0,97600	30	1,0246	3	1,3513	13
0,352	2,2117	63	0,79376	284	9,1311	575	0,1095	7	4,5108	291	4,6203	284	0,97630	29	1,0243	3	1,3526	14
0,353	2,2180	62	0,79660	282	9,1886	579	0,1088	7	4,5399	293	4,6487	286	0,97659	29	1,0240	3	1,3540	13
0,354	2,2242	63	0,79942	281	9,2465	583	0,1081	6	4,5692	295	4,6773	288	0,97688	28	1,0237	3	1,3553	14
0,355	2,2305	63	0,80223	282	9,3048	587	0,1075	7	4,5987	297	4,7061	291	0,97716	29	1,0234	3	1,3567	13
0,356	2,2368	63	0,80505	281	9,3635	589	0,1068	7	4,6284	298	4,7352	291	0,97745	27	1,0231	3	1,3580	13
0,357	2,2431	63	0,80786	280	9,4224	594	0,1061	6	4,6582	300	4,7643	294	0,97772	28	1,0228	3	1,3593	13
0,358	2,2494	63	0,81066	279	9,4818	598	0,1055	7	4,6882	302	4,7937	295	0,97800	27	1,0225	3	1,3606	14
0,359	2,2557	62	0,81345	277	9,5416	602	0,1048	7	4,7184	304	4,8232	298	0,97827	27	1,0222	3	1,3620	13
0,360	2,2619	63	0,81622	277	9,6018	604	0,1041	6	4,7488	306	4,8530	299	0,97854	26	1,0219	2	1,3633	13
0,361	2,2682	63	0,81899	277	9,6622	610	0,1035	7	4,7794	308	4,8829	301	0,97880	27	1,0217	3	1,3646	12
0,362	2,2745	63	0,82176	277	9,7232	613	0,1028	6	4,8102	310	4,9130	304	0,97907	25	1,0214	3	1,3658	13
0,363	2,2808	63	0,82453	276	9,7845	616	0,1022	6	4,8412	311	4,9434	305	0,97932	26	1,0211	3	1,3671	12
0,364	2,2871	63	0,82729	274	9,8461	621	0,1016	7	4,8723	313	4,9739	307	0,97958	26	1,0208	2	1,3683	13
0,365	2,2934	62	0,83003	272	9,9082	624	0,1009	6	4,9036	316	5,0046	309	0,97984	24	1,0206	3	1,3696	12
0,366	2,2996	63	0,83275	272	9,9706	62	0,1003	6	4,9352	317	5,0355	311	0,98008	25	1,0203	3	1,3708	13
0,367	2,3059	63	0,83547	273	10,033	64	0,0997	7	4,9669	320	5,0666	313	0,98033	24	1,0200	2	1,3721	12
0,368	2,3122	63	0,83820	272	10,097	63	0,0990	6	4,9989	321	5,0979	315	0,98057	24	1,0198	2	1,3733	13
0,369	2,3185	63	0,84092	272	10,160	64	0,0984	6	5,0310	323	5,1294	317	0,98081	24	1,0196	3	1,3746	13
0,370	2,3248	63	0,84364	269	10,224	65	0,0978	6	5,0633	326	5,1611	320	0,98105	23	1,0193	2	1,3759	12
0,371	2,3311	62	0,84633	268	10,289	65	0,0972	6	5,0959	327	5,1931	321	0,98128	23	1,0191	3	1,3771	12
0,372	2,3373	63	0,84901	268	10,354	65	0,0966	6	5,1286	329	5,2252	323	0,98151	23	1,0188	2	1,3783	12
0,373	2,3436	63	0,85169	268	10,419	66	0,0960	6	5,1615	332	5,2575	325	0,98174	23	1,0186	2	1,3795	11
0,374	2,3499	63	0,85437	268	10,485	66	0,0954	6	5,1947	333	5,2900	328	0,98197	23	1,0184	3	1,3806	12
0,375	2,3562	63	0,85705	267	10,551	66	0,0948	6	5,2280	335	5,3228	329	0,98220	22	1,0181	2	1,3818	12
0,376	2,3625	63	0,85972	265	10,617	67	0,0942	6	5,2615	338	5,3557	332	0,98242	21	1,0179	2	1,3830	12
0,377	2,3688	62	0,86237	264	10,684	68	0,0936	6	5,2953	340	5,3889	334	0,98263	22	1,0177	3	1,3842	11
0,378	2,3750	63	0,85501	264	10,752	67	0,0930	6	5,3293	341	5,4223	335	0,98285	21	1,0174	2	1,3853	12
0,379	2,3813	63	0,86765	264	10,819	68	0,0924	6	5,3634	344	5,4558	338	0,98306	21	1,0172	2	1,3865	11
0,380	2,3876	63	0,87029	264	10,887	69	0,0918	5	5,3978	346	5,4896	341	0,98327	21	1,0170	2	1,3876	11
0,381	2,3939	63	0,87293	262	10,956	69	0,0913	6	5,4324	348	5,5237	342	0,98348	20	1,0168	2	1,3887	12
0,382	2,4002	63	0,87555	261	11,025	70	0,0907	6	5,4672	351	5,5579	344	0,98368	20	1,0166	2	1,3899	12
0,383	2,4065	62	0,87816	260	11,095	70	0,0901	5	5,5023	352	5,5923	348	0,98388	20	1,0164	2	1,3911	11
0,384	2,4127	63	0,88076	260	11,165	70	0,0896	6	5,5375	355	5,6271	349	0,98408	20	1,0162	2	1,3922	11
0,385	2,4190	63	0,88336	260	11,235	71	0,0890	6	5,5730	356	5,6620	350	0,98428	19	1,0160	2	1,3933	11
0,386	2,4253	63	0,88596	259	11,306	71	0,0884	5	5,6086	360	5,6970	355	0,98447	20	1,0158	2	1,3944	11
0,387	2,4316	63	0,88855	259	11,377	72	0,0879	6	5,6446	361	5,7325	355	0,98467	19	1,0156	2	1,3955	10
0,388	2,4379	63	0,89114	257	11,449	72	0,0873	5	5,6807	363	5,7680	359	0,98486	19	1,0154	2	1,3965	10
0,389	2,4442	62	0,89371	255	11,521	72	0,0868	5	5,7170	366	5,8039	360	0,98505	18	1,0152	2	1,3975	11
0,390	2,4504	63	0,89626	256	11,593	74	0,0863	6	5,7536	368	5,8399	362	0,98523	18	1,0150	2	1,3986	11
0,391	2,4567	63	0,89882	256	11,667	73	0,0857	5	5,7904	370	5,8761	365	0,98541	18	1,0148	2	1,3997	11
0,392	2,4630	63	0,90138	256	11,740	74	0,0852	6	5,8274	374	5,9126	368	0,98559	18	1,0146	2	1,4008	10
0,393	2,4693	63	0,90394	254	11,814	75	0,0846	5	5,8648	374	5,9494	369	0,98577	18	1,0144	2	1,4018	11
0,394	2,4756	63	0,90648	254	11,889	74	0,0841	5	5,9022	377	5,9863	372	0,98595	18	1,0142	2	1,4029	11
0,395	2,4819	62	0,90902	252	11,963	76	0,0836	5	5,9399	380	6,0235	375	0,98613	16	1,0140	1	1,4040	11
0,396	2,4881	63	0,91154	251	12,039	76	0,0831	6	5,9779	382	6,0610	377	0,98629	17	1,0139	2	1,4051	10
0,397	2,4944	63	0,91405	252	12,115	76	0,0825	5	5,0161	385	6,0987	378	0,98646	17	1,0137	2	1,4061	10
0,398	2,5007	63	0,91657	252	12,191	77	0,0820	5	6,0546	387	6,1365	382	0,98663	17	1,0135	1	1,4071	10
0,399	2,5070	63	0,91909	251	12,268	77	0,0815	5	6,0933	388	6,1747	384	0,98680	17	1,0134	2	1,4081	10
0,400	2,5133	63	0,92160	249	12,345	78	0,0810	5	6,1321	392	6,2131	387	0,98697	15	1,0132	2	1,4091	10

x	2π x		sin 2π x		cos 2π x		tang 2π x		cotg 2π x		sin* 2π x		cos* 2π x		tang* 2π x	cotg* 2π x	
0,350	2,1991	63	0,80902	371	−0,58779	507	−1,37638	1803	−0,72655	964	0,98769	96	0,15643	620	6,31394	0,15838	643
0,351	2,2054	63	0,80531	374	−0,59286	504	−1,35835	1771	−0,73619	972	0,98865	93	0,15023	622	6,58091	0,15195	642
0,352	2,2117	63	0,80157	378	−0,59790	503	−1,34064	1745	−0,74591	984	0,98958	88	0,14401	622	6,87161	0,14553	641
0,353	2,2180	62	0,79779	380	−0,60293	500	−1,32319	1714	−0,75575	991	0,99046	85	0,13779	623	7,18818	0,13912	641
0,354	2,2242	63	0,79399	383	−0,60793	498	−1,30605	1686	−0,76566	1002	0,99131	80	0,13156	623	7,53504	0,13271	638
0,355	2,2305	63	0,79016	387	−0,61291	495	−1,28919	1659	−0,77568	1011	0,99211	77	0,12533	623	7,91598	0,12633	638
0,356	2,2368	63	0,78629	390	−0,61786	493	−1,27260	1633	−0,78579	1022	0,99288	73	0,11910	624	8,33652	0,11995	636
0,357	2,2431	63	0,78239	393	−0,62279	490	−1,25627	1607	−0,79601	1031	0,99361	69	0,11286	625	8,80392	6,11359	637
0,358	2,2494	63	0,77846	396	−0,62769	488	−1,24020	1583	−0,80632	1043	0,99430	65	0,10661	625	9,32652	0,10722	635
0,359	2,2557	62	0,77450	399	−0,63257	485	−1,22437	1558	−0,81675	1052	0,99495	61	0,10036	625	9,91381	0,10087	634
0,360	2,2619	63	0,77051	402	−0,63742	483	−1,20879	1535	−0,82727	1064	0,99556	57	0,09411	626	10,57868	0,09453	634
0,361	2,2682	63	0,76649	405	−0,64225	481	−1,19344	1513	−0,83791	1076	0,99613	54	0,08785	626	11,33899	0,08819	633
0,362	2,2745	63	0,76244	408	−0,64706	477	−1,17831	1488	−0,84867	1086	0,99667	49	0,08159	626	12,21559	0,08186	632
0,363	2,2808	63	0,75836	411	−0,65183	476	−1,16343	1469	−0,85953	1099	0,99716	45	0,07533	627	13,23722	0,07554	631
0,364	2,2871	63	0,75425	414	−0,65659	472	−1,14874	1446	−0,87052	1110	0,99761	42	0,06906	627	14,44555	0,06923	632
0,365	2,2934	62	0,75011	417	−0,66131	470	−1,13428	1427	−0,88162	1123	0,99803	37	0,06279	627	15,89473	0,06291	630
0,366	2,2996	63	0,74594	420	−0,66601	468	−1,12001	1407	−0,89285	1136	0,99840	34	0,05652	628	17,66454	0,05661	631
0,367	2,3059	63	0,74174	423	−0,67069	464	−1,10594	1387	−0,90421	1148	0,99874	29	0,05024	627	19,87938	0,05030	629
0,368	2,3122	63	0,73751	425	−0,67533	462	−1,09207	1367	−0,91569	1161	0,99903	26	0,04397	628	22,72072	0,04401	629
0,369	2,3185	63	0,73326	429	−0,67995	460	−1,07840	1351	−0,92730	1176	0,99929	22	0,03769	628	26,51340	0,03772	629
0,370	2,3248	63	0,72897	432	−0,68455	456	−1,06489	1332	−0,93906	1190	0,99951	17	0,03141	628	31,82139	0,03143	629
0,371	2,3311	62	0,72465	434	−0,68911	454	−1,05157	1314	−0,95096	1203	0,99968	14	0,02513	628	39,78034	0,02514	629
0,372	2,3373	63	0,72031	437	−0,69365	452	−1,03843	1298	−0,96299	1219	0,99982	10	0,01885	628	53,04085	0,01885	628
0,373	2,3436	63	0,71594	440	−0,69817	448	−1,02545	1280	−0,97518	1233	0,99992	6	0,01257	629	79,54813	0,01257	629
0,374	2,3499	63	0,71154	443	−0,70265	446	−1,01265	1265	−0,98751	1249	0,99998	2	0,00628	628	159,23248	0,00628	628
0,375	2,3562	63	0,70711	446	−0,70711	443	−1,00000	1249	−1,00000	1265	1,00000	2	0,00000	628	± ∞	±0,00000	628
0,376	2,3625	63	0,70265	448	−0,71154	440	−0,98751	1233	−1,01265	1280	0,99998	6	−0,00628	629	−159,23248	−0,00628	629
0,377	2,3688	62	9,69817	452	−0,71594	437	−0,97518	1219	−1,02545	1298	0,99992	10	−0,01257	628	−79,54813	−0,01257	628
0,378	2,3750	63	0,69365	454	−0,72031	434	−0,96299	1203	−1,03843	1314	0,99982	14	−0,01885	628	−53,04085	−0,01885	629
0,379	2,3813	63	0,68911	456	−0,72465	432	−0,95096	1190	−1,05157	1332	0,99968	17	−0,02513	628	−39,78034	−0,02514	629
0,380	2,3876	63	0,68455	460	−0,72897	429	−0,93906	1176	−1,06489	1351	0,99951	22	−0,03141	628	−31,82139	−0,03143	629
0,381	2,3939	63	0,67995	462	−0,73326	425	−0,92730	1161	−1,07840	1367	0,99929	26	−0,03769	628	−26,51340	−0,03772	629
0,382	2,4002	63	0,67533	464	−0,73751	423	−0,91569	1148	−1,09207	1387	0,99903	29	−0,04397	627	−22,72072	−0,04401	629
0,383	2,4065	62	0,67069	468	−0,74174	420	−0,90421	1136	−1,10594	1407	0,99874	34	−0,05024	628	−19,87938	−0,05030	631
0,384	2,4127	63	0,66601	470	−0,74594	417	−0,89285	1123	−1,12001	1427	0,99840	37	−0,05652	627	−17,66454	−0,05661	630
0,385	2,4190	63	0,66131	472	−0,75011	414	−0,88162	1110	−1,13428	1446	0,99803	42	−0,06279	628	−15,89473	−0,06291	632
0,386	2,4253	63	0,65659	476	−0,75425	411	−0,87052	1099	−1,14874	1469	0,99761	45	−0,06906	627	−14,44555	−0,06923	631
0,387	2,4316	63	0,65183	477	−0,75836	408	−0,85953	1086	−1,16343	1488	0,99716	49	−0,07533	626	−13,23722	−0,07554	632
0,388	2,4379	63	0,64706	481	−0,76244	405	−0,84867	1076	−1,17831	1513	0,99667	54	−0,08159	626	−12,21559	−0,08186	633
0,389	2,4442	62	0,64225	483	−0,76649	402	−0,83791	1064	−1,19344	1535	0,99613	57	−0,08785	626	−11,33899	−0,08819	634
0,390	2,4504	63	0,63742	485	−0,77051	399	−0,82727	1052	−1,20879	1558	0,99556	61	−0,09411	625	−10,57868	−0,09453	634
0,391	2,4567	63	0,63257	488	−0,77450	396	−0,81675	1043	−1,22437	1583	0,99495	65	−0,10036	625	− 9,91381	−0,10087	635
0,392	2,4630	63	0,62769	490	−0,77846	393	−0,80632	1031	−1,24020	1607	0,99430	69	−0,10661	625	− 7,32652	−0,10722	637
0,393	2,4693	63	0,62279	493	−0,78239	390	−0,79601	1022	−1,25627	1633	0,99361	73	−0,11286	624	− 8,80392	−0,11359	636
0,394	2,4756	63	0,61786	495	−0,78629	387	−0,78579	1011	−1,27260	1659	0,99288	77	−0,11910	623	− 8,33652	−0,11995	638
0,395	2,4819	62	0,61291	498	−0,79016	383	−0,77568	1002	−1,28919	1686	0,99211	80	−0,12533	623	− 7,91598	−0,12633	638
0,396	2,4881	63	0,60793	500	−0,79399	380	−0,76566	991	−1,30605	1714	0,99131	85	−0,13156	623	− 7,53504	−0,13271	641
0,397	2,4944	63	0,60293	503	−0,79779	378	−0,75575	984	−1,32319	1745	0,99046	88	−0,13779	622	− 7,18818	−0,13912	641
0,398	2,5007	63	0,59790	504	−0,80157	374	−0,74591	972	−1,34064	1771	0,98958	93	−0,14401	622	− 6,87161	−0,14553	642
0,399	2,5070	63	0,59286	507	−0,80531	371	−0,73619	964	−1,35835	1803	0,98865	96	−0,15023	620	− 6,58091	−0,15195	643
0,400	2,5133	63	0,58779	510	−0,80902	367	−0,72655	956	−1,37638	1834	0,98769	100	−0,15643	621	− 6,31394	−0,15838	645

x	$2\pi x$		$\ln 2\pi x$		$e^{2\pi x}$		$e^{-2\pi x}$		$\mathfrak{Sin}\, 2\pi x$		$\mathfrak{Cos}\, 2\pi x$		$\mathfrak{Tang}\, 2\pi x$		$\mathfrak{Cotg}\, 2\pi x$		$\mathfrak{Amp}\, 2\pi x$	
0,400	2,5133	63	0,92160	249	12,345	78	0,0810	5	6,1321	392	6,2131	387	0,98697	15	1,0132	2	1,4091	10
0,401	2,5196	62	0,92409	248	12,423	78	0,0805	5	6,1713	394	6,2518	389	0,98712	16	1,0130	1	1,4101	10
0,402	2,5258	63	0,92657	248	12,501	79	0,0800	5	6,2107	397	6,2907	392	0,98728	16	1,0129	2	1,4111	10
0,403	2,5321	63	0,92905	249	12,580	79	0,0795	5	6,2504	399	6,3299	394	0,98744	16	1,0127	1	1,4121	10
0,404	2,5384	63	0,93154	247	12,659	80	0,0790	5	6,2903	401	6,3693	396	0,98760	15	1,0126	2	1,4131	10
0,405	2,5447	63	0,93401	248	12,739	81	0,0785	5	6,3304	405	6,4089	400	0,98775	15	1,0124	2	1,4141	10
0,406	2,5510	63	0,93649	245	12,820	80	0,0780	5	6,3709	405	6,4489	400	0,98790	16	1,0122	1	1,4151	10
0,407	2,5573	62	0,93894	245	12,900	82	0,0775	5	6,4114	410	6,4889	405	0,98806	14	1,0121	2	1,4161	10
0,408	2,5635	63	0,94139	244	12,982	82	0,0770	5	6,4524	411	6,5294	406	0,98820	15	1,0119	1	1,4171	10
0,409	2,5698	63	0,94383	245	13,064	82	0,0765	4	6,4935	414	6,5700	410	0,98835	14	1,0118	2	1,4181	9
0,410	2,5761	63	0,94628	244	13,146	83	0,0761	5	6,5349	417	6,6110	412	0,98849	15	1,0116	1	1,4190	9
0,411	2,5824	63	0,94872	244	13,229	83	0,0756	5	6,5766	419	6,6522	414	0,98864	13	1,0115	1	1,4199	10
0,412	2,5887	63	0,95116	242	13,312	84	0,0751	5	6,6185	422	6,6936	417	0,98877	15	1,0114	2	1,4209	9
0,413	2,5950	62	0,95358	240	13,396	85	0,0746	4	6,6607	425	6,7353	421	0,98892	14	1,0112	1	1,4218	9
0,414	2,6012	63	0,95598	241	13,481	84	0,0742	5	6,7032	426	6,7774	422	0,98906	13	1,0111	1	1,4227	9
0,415	2,6075	63	0,95839	242	13,565	86	0,0737	4	6,7458	430	6,8196	425	0,98919	13	1,0110	2	1,4236	9
0,416	2,6138	63	0,96081	240	13,651	86	0,0733	5	6,7888	433	6,8621	428	0,98932	14	1,0108	1	1,4245	9
0,417	2,6201	63	0,96321	241	13,737	87	0,0728	5	6,8321	435	6,9049	430	0,98946	13	1,0107	2	1,4254	9
0,418	2,6264	63	0,96562	238	13,824	87	0,0723	4	6,8756	438	6,9479	434	0,98959	12	1,0105	1	1,4263	9
0,419	2,6327	62	0,96800	237	13,911	87	0,0719	5	6,9194	440	6,9913	436	0,98971	14	1,0104	1	1,4272	9
0,420	2,6389	63	0,97037	238	13,998	89	0,0714	4	6,9634	444	7,0349	439	0,98985	12	1,0103	2	1,4281	9
0,421	2,6452	63	0,97275	238	14,087	88	0,0710	5	7,0078	447	7,0788	442	0,98997	13	1,0101	1	1,4290	9
0,422	2,6515	63	0,97513	237	14,175	90	0,0705	4	7,0525	448	7,1230	444	0,99010	12	1,0100	1	1,4299	9
0,423	2,6578	63	0,97750	237	14,265	90	0,0701	4	7,0973	452	7,1674	448	0,99022	12	1,0099	1	1,4308	9
0,424	2,6641	63	0,97987	235	14,355	90	0,0697	5	7,1425	454	7,2122	450	0,99034	12	1,0098	2	1,4317	9
0,425	2,6704	62	0,98222	234	14,445	91	0,0692	4	7,1879	458	7,2572	453	0,99046	12	1,0096	1	1,4326	8
0,426	2,6766	63	0,98456	234	14,536	92	0,0688	4	7,2337	460	7,3025	456	0,99058	12	1,0095	1	1,4334	9
0,427	2,6829	63	0,98690	235	14,628	92	0,0684	5	7,2797	463	7,3481	458	0,99070	11	1,0094	1	1,4343	8
0,428	2,6892	63	0,98925	234	14,720	93	0,0679	4	7,3260	466	7,3939	462	0,99081	12	1,0093	1	1,4351	9
0,429	2,6955	63	0,99159	233	14,813	93	0,0675	4	7,3726	469	7,4401	465	0,99093	11	1,0092	2	1,4360	8
0,430	2,7018	63	0,99392	232	14,906	94	0,0671	4	7,4195	472	7,4866	468	0,99104	11	1,0090	1	1,4368	8
0,431	2,7081	62	0,99624	231	15,000	95	0,0667	5	7,4667	475	7,5334	470	0,99115	11	1,0089	1	1,4376	8
0,432	2,7143	63	0,99855	230	15,095	95	0,0662	4	7,5142	479	7,5804	475	0,99126	11	1,0088	1	1,4384	9
0,433	2,7206	63	1,00085	232	15,190	95	0,0658	4	7,5621	480	7,6279	476	0,99137	10	1,0087	1	1,4393	8
0,434	2,7269	63	1,00317	231	15,285	97	0,0654	4	7,6101	483	7,6755	479	0,99147	11	1,0086	1	1,4401	8
0,435	2,7332	63	1,00548	230	15,382	97	0,0650	4	7,6584	486	7,7234	483	0,99158	11	1,0085	1	1,4409	8
0,436	2,7395	63	1,00778	228	15,479	97	0,0646	4	7,7070	491	7,7717	486	0,99169	10	1,0084	1	1,4417	8
0,437	2,7458	62	1,01006	228	15,576	98	0,0642	4	7,7561	492	7,8203	488	0,99179	10	1,0083	1	1,4425	9
0,438	2,7520	63	1,01234	228	15,674	99	0,0638	4	7,8053	496	7,8691	492	0,99189	11	1,0082	1	1,4434	8
0,439	2,7583	63	1,01462	228	15,773	100	0,0634	4	7,8549	500	7,9183	496	0,99200	9	1,0081	1	1,4442	8
0,440	2,7646	63	1,01690	227	15,873	100	0,0630	4	7,9049	502	7,9679	498	0,99209	10	1,0080	1	1,4450	8
0,441	2,7709	63	1,01917	228	15,973	100	0,0626	4	7,9551	505	8,0177	501	0,99219	10	1,0079	1	1,4458	7
0,442	2,7772	63	1,02145	225	16,073	102	0,0622	4	8,0056	509	8,0678	505	0,99229	10	1,0078	1	1,4465	8
0,443	2,7835	62	1,02370	225	16,175	102	0,0618	4	8,0565	512	8,1183	509	0,99239	9	1,0077	1	1,4473	8
0,444	2,7897	63	1,02595	224	16,277	102	0,0614	3	8,1077	514	8,1692	510	0,99248	9	1,0076	1	1,4481	8
0,445	2,7960	63	1,02819	225	16,379	104	0,0611	4	8,1591	519	8,2202	515	0,99257	10	1,0075	1	1,4489	8
0,446	2,8023	63	1,03044	225	16,483	103	0,0607	4	8,2110	521	8,2717	517	0,99267	9	1,0074	1	1,4497	7
0,447	2,8086	63	1,03269	224	16,586	105	0,0603	4	8,2631	524	8,3234	520	0,99276	8	1,0073	1	1,4504	7
0,448	2,8149	63	1,03493	222	16,691	105	0,0599	4	8,3155	529	8,3754	525	0,99284	9	1,0072	1	1,4511	8
0,449	2,8212	62	1,03715	222	16,796	106	0,0595	3	8,3684	530	8,4279	527	0,99293	10	1,0071	1	1,4519	8
0,450	2,8274	63	1,03937	222	16,902	107	0,0592	4	8,4214	535	8,4806	531	0,99303	8	1,0070	1	1,4527	8

x	$2\pi x$	$\sin 2\pi x$	$\cos 2\pi x$	$\operatorname{tang} 2\pi x$	$\operatorname{cotg} 2\pi x$	$\sin^* 2\pi x$	$\cos^* 2\pi x$	$\operatorname{tang}^* 2\pi x$	$\operatorname{cotg}^* 2\pi x$
0,400	2,5133$_{63}$	0,58779$_{510}$	−0,80902$_{367}$	−0,72655$_{956}$	−1,37638$_{1834}$	0,98769$_{100}$	−0,15643$_{621}$	−6,31394	−0,15838$_{645}$
0,401	2,5196$_{62}$	0,58269$_{512}$	−0,81269$_{365}$	−0,71699$_{948}$	−1,39472$_{1868}$	0,98669$_{105}$	−0,16264$_{619}$	−6,06671	−0,16483$_{646}$
0,402	2,5258$_{63}$	0,57757$_{514}$	−0,81634$_{361}$	−0,70751$_{938}$	−1,41340$_{1900}$	0,98564$_{108}$	−0,16883$_{619}$	−5,83806	−0,17129$_{647}$
0,403	2,5321$_{63}$	0,57243$_{516}$	−0,81995$_{358}$	−0,69813$_{930}$	−1,43240$_{1934}$	0,98456$_{111}$	−0,17502$_{619}$	−5,62541	−0,17776$_{650}$
0,404	2,5384$_{63}$	0,56727$_{519}$	−0,82353$_{355}$	−0,68883$_{923}$	−1,45174$_{1972}$	0,98345$_{116}$	−0,18121$_{617}$	−5,42713	−0,18426$_{650}$
0,405	2,5447$_{63}$	0,56208$_{520}$	−0,82708$_{352}$	−0,67960$_{914}$	−1,47146$_{2006}$	0,98229$_{120}$	−0,18738$_{617}$	−5,24224	−0,19076$_{652}$
0,406	2,5510$_{63}$	0,55688$_{523}$	−0,83060$_{348}$	−0,67046$_{907}$	−1,49152$_{2045}$	0,98109$_{123}$	−0,19355$_{616}$	−5,06892	−0,19728$_{653}$
0,407	2,5573$_{62}$	0,55165$_{526}$	−0,83408$_{345}$	−0,66139$_{901}$	−1,51197$_{2087}$	0,97986$_{128}$	−0,19971$_{615}$	−4,90641	−0,20381$_{656}$
0,408	2,5635$_{63}$	0,54639$_{527}$	−0,83753$_{341}$	−0,65238$_{891}$	−1,53284$_{2123}$	0,97858$_{131}$	−0,20586$_{615}$	−4,75362	−0,21037$_{657}$
0,409	2,5698$_{63}$	0,54112$_{529}$	−0,84094$_{339}$	−0,64347$_{885}$	−1,55407$_{2167}$	0,97727$_{135}$	−0,21201$_{613}$	−4,60955	−0,21694$_{658}$
0,410	2,5761$_{63}$	0,53583$_{532}$	−0,84433$_{335}$	−0,63462$_{878}$	−1,57574$_{2212}$	0,97592$_{139}$	−0,21814$_{613}$	−4,47382	−0,22352$_{661}$
0,411	2,5824$_{63}$	0,53051$_{534}$	−0,84768$_{331}$	−0,62584$_{871}$	−1,59786$_{2255}$	0,97453$_{143}$	−0,22427$_{613}$	−4,34534	−0,23013$_{663}$
0,412	2,5887$_{63}$	0,52517$_{535}$	−0,85099$_{329}$	−0,61713$_{864}$	−1,62041$_{2301}$	0,97310$_{147}$	−0,23039$_{611}$	−4,22371	−0,23676$_{665}$
0,413	2,5950$_{62}$	0,51982$_{538}$	−0,85428$_{325}$	−0,60849$_{858}$	−1,64342$_{2350}$	0,97163$_{150}$	−0,23650$_{610}$	−4,10837	−0,24341$_{666}$
0,414	2,6012$_{63}$	0,51444$_{540}$	−0,85753$_{321}$	−0,59991$_{851}$	−1,66692$_{2399}$	0,97013$_{155}$	−0,24260$_{609}$	−3,99889	−0,25007$_{669}$
0,415	2,6075$_{63}$	0,50904$_{542}$	−0,86074$_{318}$	−0,59140$_{845}$	−1,69091$_{2451}$	0,96858$_{158}$	−0,24869$_{608}$	−3,89473$_{9915}$	−0,25676$_{670}$
0,416	2,6138$_{63}$	0,50362$_{543}$	−0,86392$_{315}$	−0,58295$_{838}$	−1,71542$_{2502}$	0,96700$_{162}$	−0,25477$_{607}$	−3,79558$_{9454}$	−0,26346$_{673}$
0,417	2,6201$_{63}$	0,49819$_{546}$	−0,86707$_{311}$	−0,57457$_{833}$	−1,74044$_{2560}$	0,96538$_{166}$	−0,26084$_{606}$	−3,70104$_{9025}$	−0,27019$_{676}$
0,418	2,6264$_{63}$	0,49273$_{548}$	−0,87018$_{308}$	−0,56624$_{827}$	−1,76604$_{2618}$	0,96372$_{169}$	−0,26690$_{605}$	−3,61079$_{8623}$	−0,27695$_{677}$
0,419	2,6327$_{62}$	0,48725$_{550}$	−0,87326$_{305}$	−0,55797$_{822}$	−1,79222$_{2679}$	0,96203$_{174}$	−0,27295$_{604}$	−3,52456$_{8254}$	−0,28372$_{681}$
0,420	2,6389$_{63}$	0,48175$_{551}$	−0,87631$_{301}$	−0,54975$_{815}$	−1,81901$_{2737}$	0,96029$_{177}$	−0,27899$_{603}$	−3,44202$_{7903}$	−0,29053$_{682}$
0,421	2,6452$_{63}$	0,47624$_{554}$	−0,87932$_{297}$	−0,54160$_{810}$	−1,84638$_{2804}$	0,95852$_{181}$	−0,28502$_{602}$	−3,36299$_{7578}$	−0,29735$_{686}$
0,422	2,6515$_{63}$	0,47070$_{555}$	−0,88229$_{294}$	−0,53350$_{804}$	−1,87442$_{2869}$	0,95671$_{185}$	−0,29104$_{600}$	−3,28721$_{7263}$	−0,30421$_{687}$
0,423	2,6578$_{63}$	0,46515$_{557}$	−0,88523$_{291}$	−0,52546$_{800}$	−1,90311$_{2939}$	0,95486$_{188}$	−0,29704$_{600}$	−3,21458$_{6985}$	−0,31108$_{691}$
0,424	2,6641$_{63}$	0,45958$_{559}$	−0,88814$_{287}$	−0,51746$_{794}$	−1,93250$_{3012}$	0,95298$_{192}$	−0,30304$_{598}$	−3,14473$_{6707}$	−0,31799$_{693}$
0,425	2,6704$_{62}$	0,45399$_{561}$	−0,89101$_{283}$	−0,50952$_{789}$	−1,96262$_{3087}$	0,95106$_{196}$	−0,30902$_{597}$	−3,07766$_{6455}$	−0,32492$_{696}$
0,426	2,6766$_{63}$	0,44838$_{562}$	−0,89384$_{280}$	−0,50163$_{783}$	−1,99349$_{3163}$	0,94910$_{200}$	−0,31499$_{595}$	−3,01311$_{6209}$	−0,33188$_{699}$
0,427	2,6829$_{63}$	0,44276$_{564}$	−0,89664$_{277}$	−0,49380$_{779}$	−2,02512$_{3246}$	0,94710$_{204}$	−0,32094$_{595}$	−2,95102$_{5996}$	−0,33887$_{702}$
0,428	2,6892$_{63}$	0,43712$_{566}$	−0,89941$_{272}$	−0,48601$_{774}$	−2,05758$_{3330}$	0,94506$_{207}$	−0,32689$_{593}$	−2,89106$_{5773}$	−0,34589$_{705}$
0,429	2,6955$_{63}$	0,43146$_{568}$	−0,90213$_{270}$	−0,47827$_{771}$	−2,09088$_{3423}$	0,94299$_{211}$	−0,33282$_{592}$	−2,83333$_{5574}$	−0,35294$_{708}$
0,430	2,7018$_{63}$	0,42578$_{569}$	−0,90483$_{265}$	−0,47056$_{764}$	−2,12511$_{3509}$	0,94088$_{215}$	−0,33874$_{590}$	−2,77759$_{5379}$	−0,36002$_{711}$
0,431	2,7081$_{62}$	0,42009$_{571}$	−0,90748$_{263}$	−0,46292$_{761}$	−2,16020$_{3612}$	0,93873$_{218}$	−0,34464$_{589}$	−2,72380$_{5199}$	−0,36713$_{715}$
0,432	2,7143$_{63}$	0,41438$_{573}$	−0,91011$_{258}$	−0,45531$_{757}$	−2,19632$_{3711}$	0,93655$_{222}$	−0,35053$_{588}$	−2,67181$_{5031}$	−0,37428$_{718}$
0,433	2,7206$_{63}$	0,40865$_{574}$	−0,91269$_{255}$	−0,44774$_{752}$	−2,23343$_{3814}$	0,93433$_{226}$	−0,35641$_{587}$	−2,62150$_{4871}$	−0,38146$_{722}$
0,434	2,7269$_{63}$	0,40291$_{576}$	−0,91524$_{251}$	−0,44022$_{748}$	−2,27157$_{3927}$	0,93207$_{229}$	−0,36228$_{584}$	−2,57279$_{4704}$	−0,38868$_{724}$
0,435	2,7332$_{63}$	0,39715$_{578}$	−0,91775$_{248}$	−0,43274$_{744}$	−2,31084$_{4046}$	0,92978$_{233}$	−0,36812$_{584}$	−2,52575$_{4567}$	−0,39592$_{729}$
0,436	2,7395$_{63}$	0,39137$_{579}$	−0,92023$_{244}$	−0,42530$_{740}$	−2,35130$_{4164}$	0,92745$_{237}$	−0,37396$_{582}$	−2,48008$_{4425}$	−0,40321$_{733}$
0,437	2,7458$_{62}$	0,38558$_{580}$	−0,92267$_{241}$	−0,41790$_{736}$	−2,39294$_{4289}$	0,92508$_{241}$	−0,37978$_{580}$	−2,43583$_{4289}$	−0,41054$_{736}$
0,438	2,7520$_{63}$	0,37978$_{582}$	−0,92508$_{237}$	−0,41054$_{733}$	−2,43583$_{4425}$	0,92267$_{244}$	−0,38558$_{579}$	−2,39294$_{4164}$	−0,41790$_{740}$
0,439	2,7583$_{63}$	0,37396$_{584}$	−0,92745$_{233}$	−0,40321$_{729}$	−2,48008$_{4567}$	0,92023$_{248}$	−0,39137$_{578}$	−2,35130$_{4046}$	−0,42530$_{744}$
0,440	2,7646$_{63}$	0,36812$_{584}$	−0,92978$_{229}$	−0,39592$_{724}$	−2,52575$_{4704}$	0,91775$_{251}$	−0,39715$_{576}$	−2,31084$_{3927}$	−0,43274$_{748}$
0,441	2,7709$_{63}$	0,36228$_{587}$	−0,93207$_{226}$	−0,38868$_{722}$	−2,57279$_{4871}$	0,91524$_{255}$	−0,40291$_{574}$	−2,27157$_{3814}$	−0,44022$_{752}$
0,442	2,7772$_{63}$	0,35641$_{588}$	−0,93433$_{222}$	−0,38146$_{718}$	−2,62150$_{5031}$	0,91269$_{258}$	−0,40865$_{573}$	−2,23343$_{3711}$	−0,44774$_{757}$
0,443	2,7835$_{62}$	0,35053$_{589}$	−0,93655$_{218}$	−0,37428$_{715}$	−2,67181$_{5199}$	0,91011$_{263}$	−0,41438$_{571}$	−2,19632$_{3612}$	−0,45531$_{761}$
0,444	2,7897$_{63}$	0,34464$_{590}$	−0,93873$_{215}$	−0,36713$_{711}$	−2,72380$_{5379}$	0,90748$_{265}$	−0,42009$_{569}$	−2,16020$_{3509}$	−0,46292$_{764}$
0,445	2,7960$_{63}$	0,33874$_{592}$	−0,94088$_{211}$	−0,36002$_{708}$	−2,77759$_{5574}$	0,90483$_{270}$	−0,42578$_{568}$	−2,12511$_{3423}$	−0,47056$_{771}$
0,446	2,8023$_{63}$	0,33282$_{593}$	−0,94299$_{207}$	−0,35294$_{705}$	−2,83333$_{5773}$	0,90213$_{272}$	−0,43146$_{566}$	−2,09088$_{3330}$	−0,47827$_{774}$
0,447	2,8086$_{63}$	0,32689$_{595}$	−0,94506$_{204}$	−0,34589$_{702}$	−2,89106$_{5996}$	0,89941$_{277}$	−0,43712$_{564}$	−2,05758$_{3246}$	−0,48601$_{779}$
0,448	2,8149$_{63}$	0,32094$_{595}$	−0,94710$_{200}$	−0,33887$_{699}$	−2,95102$_{6209}$	0,89664$_{280}$	−0,44276$_{562}$	−2,02512$_{3163}$	−0,49380$_{783}$
0,449	2,8212$_{62}$	0,31499$_{597}$	−0,94910$_{196}$	−0,33188$_{696}$	−3,01311$_{6455}$	0,89384$_{283}$	−0,44838$_{561}$	−1,99349$_{3087}$	−0,50163$_{789}$
0,450	2,8274$_{63}$	0,30902$_{598}$	−0,95106$_{196}$	−0,32492$_{693}$	−3,07766$_{6707}$	0,89101$_{287}$	−0,45399$_{559}$	−1,96262$_{3012}$	−0,50952$_{794}$

x	$2\pi x$		$\ln 2\pi x$		$e^{2\pi x}$		$e^{-2\pi x}$		Sin $2\pi x$		Cos $2\pi x$		Tang $2\pi x$		Cotg $2\pi x$		Amp $2\pi x$	
0,450	2,8274	63	1,03937	222	16,902	107	0,0592	4	8,4214	535	8,4806	531	0,99303	8	1,0070	1	1,4527	8
0,451	2,8337	63	1,04159	222	17,009	107	0,0588	4	8,4749	538	8,5337	534	0,99311	9	1,0069	1	1,4535	7
0,452	2,8400	63	1,04381	221	17,116	108	0,0584	3	8,5287	541	8,5871	538	0,99320	8	1,0068	0	1,4542	7
0,453	2,8463	63	1,04602	220	17,224	108	0,0581	4	8,5828	545	8,6409	541	0,99328	9	1,0068	1	1,4549	7
0,454	2,8526	62	1,04822	219	17,332	109	0,0577	4	8,6373	548	8,6950	544	0,99337	8	1,0067	1	1,4556	7
0,455	2,8588	63	1,05041	220	17,441	110	0,0573	3	8,6921	551	8,7494	548	0,99345	8	1,0066	1	1,4563	7
0,456	2,8651	63	1,05261	219	17,551	111	0,0570	4	8,7472	555	8,8042	551	0,99353	8	1,0065	1	1,4570	7
0,457	2,8714	63	1,05480	219	17,662	111	0,0566	3	8,8027	558	8,8593	555	0,99361	8	1,0064	0	1,4577	7
0,458	2,8777	63	1,05699	219	17,773	112	0,0563	4	8,8585	563	8,9148	559	0,99369	8	1,0064	1	1,4584	7
0,459	2,8840	63	1,05918	217	17,885	113	0,0559	3	8,9148	565	8,9707	561	0,99377	7	1,0063	1	1,4591	7
0,460	2,8903	62	1,06135	217	17,998	113	0,0556	4	8,9713	569	9,0268	566	0,99384	7	1,0062	1	1,4598	6
0,461	2,8965	63	1,06352	216	18,111	115	0,0552	3	9,0282	572	9,0834	569	0,99391	8	1,0061	1	1,4604	7
0,462	2,9028	63	1,06568	217	18,226	115	0,0549	4	9,0854	576	9,1403	572	0,99399	8	1,0060	0	1,4611	7
0,463	2,9091	63	1,06785	216	18,341	115	0,0545	3	9,1430	580	9,1975	577	0,99407	7	1,0060	1	1,4618	7
0,464	2,9154	63	1,07001	216	18,456	116	0,0542	4	9,2010	583	9,2552	580	0,99414	8	1,0059	1	1,4625	7
0,465	2,9217	63	1,07217	214	18,572	118	0,0538	3	9,2593	587	9,3132	583	0,99422	7	1,0058	1	1,4632	6
0,466	2,9280	62	1,07431	214	18,690	117	0,0535	3	9,3180	591	9,3715	588	0,99429	7	1,0057	0	1,4638	7
0,467	2,9342	63	1,07645	213	18,807	119	0,0532	4	9,3771	595	9,4303	591	0,99436	8	1,0057	1	1,4645	7
0,468	2,9405	63	1,07858	214	18,926	119	0,0528	3	9,4366	598	9,4894	595	0,99444	6	1,0056	1	1,4652	7
0,469	2,9468	63	1,08072	214	19,045	120	0,0525	3	9,4964	601	9,5489	598	0,99450	7	1,0055	0	1,4659	6
0,470	2,9531	63	1,08286	213	19,165	121	0,0522	3	9,5565	606	9,6087	603	0,99457	6	1,0055	1	1,4665	6
0,471	2,9594	63	1,08499	212	19,286	122	0,0519	4	9,6171	609	9,6690	606	0,99463	7	1,0054	1	1,4671	7
0,472	2,9657	62	1,08711	210	19,408	122	0,0515	3	9,6780	613	9,7296	609	0,99470	7	1,0053	0	1,4678	7
0,473	2,9719	63	1,08921	211	19,530	123	0,0512	3	9,7393	618	9,7905	615	0,99477	6	1,0053	1	1,4685	7
0,474	2,9782	63	1,09132	211	19,653	124	0,0509	3	9,8011	621	9,8520	617	0,99483	7	1,0052	1	1,4692	6
0,475	2,9845	63	1,09343	211	19,777	124	0,0506	4	9,8632	625	9,9137	622	0,99490	7	1,0051	0	1,4698	6
0,476	2,9908	63	1,09554	211	19,901	126	0,0502	3	9,9257	629	9,9759	63	0,99497	6	1,0051	1	1,4704	7
0,477	2,9971	63	1,09765	209	20,027	126	0,0499	3	9,9886	632	10,039	62	0,99503	5	1,0050	1	1,4711	6
0,478	3,0034	62	1,09974	208	20,153	127	0,0496	3	10,0518	637	10,101	64	0,99508	6	1,0049	0	1,4717	6
0,479	3,0096	63	1,10182	208	20,280	128	0,0493	3	10,1155	64	10,165	64	0,99514	6	1,0049	1	1,4723	6
0,480	3,0159	63	1,10390	209	20,408	129	0,0490	3	10,180	64	10,229	64	0,99520	7	1,0048	0	1,4729	6
0,481	3,0222	63	1,10599	208	20,537	129	0,0487	3	10,244	65	10,293	64	0,99527	6	1,0048	1	1,4735	6
0,482	3,0285	63	1,10807	208	20,666	130	0,0484	3	10,309	65	10,357	65	0,99533	6	1,0047	1	1,4741	6
0,483	3,0348	63	1,11015	206	20,796	131	0,0481	3	10,374	66	10,422	66	0,99539	5	1,0046	0	1,4747	6
0,484	3,0411	62	1,11221	206	20,927	132	0,0478	3	10,440	66	10,488	65	0,99544	5	1,0046	1	1,4753	6
0,485	3,0473	63	1,11427	205	21,059	133	0,0475	3	10,506	66	10,553	67	0,99549	6	1,0045	0	1,4759	6
0,486	3,0536	63	1,11632	207	21,192	134	0,0472	3	10,572	67	10,620	66	0,99555	5	1,0045	1	1,4765	5
0,487	3,0599	63	1,11839	205	21,326	134	0,0469	3	10,639	68	10,686	67	0,99560	6	1,0044	0	1,4770	6
0,488	3,0662	63	1,12044	205	21,460	135	0,0466	3	10,707	68	10,753	68	0,99566	6	1,0044	1	1,4776	5
0,489	3,0725	63	1,12249	204	21,595	136	0,0463	3	10,775	68	10,821	68	0,99572	5	1,0043	1	1,4781	6
0,490	3,0788	62	1,12453	203	21,731	137	0,0460	3	10,843	68	10,889	68	0,99577	5	1,0042	0	1,4787	6
0,491	3,0850	63	1,12656	203	21,868	138	0,0457	3	10,911	69	10,957	69	0,99582	6	1,0042	1	1,4793	6
0,492	3,0913	63	1,12859	204	22,006	139	0,0454	2	10,980	70	11,026	69	0,99588	5	1,0041	0	1,4799	6
0,493	3,0976	63	1,13063	203	22,145	140	0,0452	3	11,050	70	11,095	70	0,99593	5	1,0041	1	1,4805	6
0,494	3,1039	63	1,13266	203	22,285	140	0,0449	3	11,120	70	11,165	70	0,99598	5	1,0040	0	1,4811	6
0,495	3,1102	63	1,13469	201	22,425	141	0,0446	3	11,190	71	11,235	70	0,99603	5	1,0040	1	1,4817	5
0,496	3,1165	62	1,13670	201	22,566	143	0,0443	3	11,261	71	11,305	71	0,99608	5	1,0039	0	1,4822	6
0,497	3,1227	63	1,13871	201	22,709	143	0,0440	2	11,332	72	11,376	72	0,99613	5	1,0039	1	1,4828	5
0,498	3,1290	63	1,14072	201	22,852	144	0,0438	3	11,404	72	11,448	72	0,99618	4	1,0038	0	1,4833	6
0,499	3,1353	63	1,14273	200	22,996	145	0,0435	3	11,476	73	11,520	72	0,99622	5	1,0038	1	1,4839	5
0,500	3,1416	63	1,14473	201	23,141	145	0,0432	3	11,549	73	11,592	73	0,99627	5	1,0037	0	1,4844	5

x	$2\pi x$	$\sin 2\pi x$	$\cos 2\pi x$	$\operatorname{tang} 2\pi x$	$\operatorname{cotg} 2\pi x$	$\sin^* 2\pi x$	$\cos^* 2\pi x$	$\operatorname{tang}^* 2\pi x$	$\operatorname{cotg}^* 2\pi x$
0,450	2,8274 $_{63}$	0,30902 $_{598}$	−0,95106 $_{196}$	−0,32492 $_{693}$	−3,07766 $_{6707}$	0,89101 $_{287}$	−0,45399 $_{559}$	−1,96262 $_{3012}$	−0,50952 $_{794}$
0,451	2,8337 $_{63}$	0,30304 $_{600}$	−0,95298 $_{188}$	−0,31799 $_{691}$	−3,14473 $_{6985}$	0,88814 $_{291}$	−0,45958 $_{557}$	−1,93250 $_{2939}$	−0,51746 $_{800}$
0,452	2,8400 $_{63}$	0,29704 $_{600}$	−0,95486 $_{185}$	−0,31108 $_{687}$	−3,21458 $_{7263}$	0,88523 $_{294}$	−0,46515 $_{555}$	−1,90311 $_{2869}$	−0,52546 $_{804}$
0,453	2,8463 $_{63}$	0,29104 $_{602}$	−0,95671 $_{181}$	−0,30421 $_{686}$	−3,28721 $_{7578}$	0,88229 $_{297}$	−0,47070 $_{554}$	−1,87442 $_{2804}$	−0,53350 $_{810}$
0,454	2,8526 $_{62}$	0,28502 $_{603}$	−0,95852 $_{177}$	−0,29735 $_{682}$	−3,36299 $_{7903}$	0,87932 $_{301}$	−0,47624 $_{551}$	−1,84638 $_{2737}$	−0,54160 $_{815}$
0,455	2,8588 $_{63}$	0,27899 $_{604}$	−0,96029 $_{174}$	−0,29053 $_{681}$	−3,44202 $_{8254}$	0,87631 $_{305}$	−0,48175 $_{550}$	−1,81901 $_{2679}$	−0,54975 $_{822}$
0,456	2,8651 $_{63}$	0,27295 $_{605}$	−0,96203 $_{169}$	−0,28372 $_{677}$	−3,52456 $_{8623}$	0,87326 $_{308}$	−0,48725 $_{548}$	−1,79222 $_{2618}$	−0,55797 $_{827}$
0,457	2,8714 $_{63}$	0,26690 $_{606}$	−0,96372 $_{166}$	−0,27695 $_{676}$	−3,61079 $_{9025}$	0,87018 $_{311}$	−0,49273 $_{546}$	−1,76604 $_{2560}$	−0,56624 $_{833}$
0,458	2,8777 $_{63}$	0,26084 $_{607}$	−0,96538 $_{162}$	−0,27019 $_{673}$	−3,70104 $_{9454}$	0,86707 $_{315}$	−0,49819 $_{543}$	−1,74044 $_{2502}$	−0,57457 $_{838}$
0,459	2,8840 $_{63}$	0,25477 $_{608}$	−0,96700 $_{158}$	−0,26346 $_{670}$	−3,79558 $_{9915}$	0,86392 $_{318}$	−0,50362 $_{542}$	−1,71542 $_{2451}$	−0,58295 $_{845}$
0,460	2,8903 $_{62}$	0,24869 $_{609}$	−0,96858 $_{155}$	−0,25676 $_{669}$	−3,89473	0,86074 $_{321}$	−0,50904 $_{540}$	−1,69091 $_{2399}$	−0,59140 $_{851}$
0,461	2,8965 $_{63}$	0,24260 $_{610}$	−0,97013 $_{150}$	−0,25007 $_{666}$	−3,99889	0,85753 $_{325}$	−0,51444 $_{538}$	−1,66692 $_{2350}$	−0,59991 $_{858}$
0,462	2,9028 $_{63}$	0,23650 $_{611}$	−0,97163 $_{147}$	−0,24341 $_{665}$	−4,10837	0,85428 $_{329}$	−0,51982 $_{535}$	−1,64342 $_{2301}$	−0,60849 $_{864}$
0,463	2,9091 $_{63}$	0,23039 $_{612}$	−0,97310 $_{143}$	−0,23676 $_{663}$	−4,22371	0,85099 $_{331}$	−0,52517 $_{534}$	−1,62041 $_{2255}$	−0,61713 $_{871}$
0,464	2,9154 $_{63}$	0,22427 $_{613}$	−0,97453 $_{139}$	−0,23013 $_{661}$	−4,34534	0,84768 $_{335}$	−0,53051 $_{532}$	−1,59786 $_{2212}$	−0,62584 $_{878}$
0,465	2,9217 $_{63}$	0,21814 $_{613}$	−0,97592 $_{135}$	−0,22352 $_{658}$	−4,47382	0,84433 $_{333}$	−0,53583 $_{529}$	−1,57574 $_{2167}$	−0,63462 $_{885}$
0,466	2,9280 $_{62}$	0,21201 $_{615}$	−0,97727 $_{131}$	−0,21694 $_{657}$	−4,60955	0,84094 $_{341}$	−0,54112 $_{527}$	−1,55407 $_{2123}$	−0,64347 $_{891}$
0,467	2,9342 $_{63}$	0,20586 $_{615}$	−0,97858 $_{128}$	−0,21037 $_{656}$	−4,75362	0,83753 $_{345}$	−0,54639 $_{526}$	−1,53284 $_{2087}$	−0,65238 $_{901}$
0,468	2,9405 $_{63}$	0,19971 $_{616}$	−0,97986 $_{123}$	−0,20381 $_{653}$	−4,90641	0,83408 $_{348}$	−0,55165 $_{523}$	−1,51197 $_{2045}$	−0,66139 $_{907}$
0,469	2,9468 $_{63}$	0,19355 $_{617}$	−0,98109 $_{120}$	−0,19728 $_{652}$	−5,06892	0,83060 $_{352}$	−0,55688 $_{520}$	−1,49152 $_{2006}$	−0,67046 $_{914}$
0,470	2,9531 $_{63}$	0,18738 $_{617}$	−0,98229 $_{116}$	−0,19076 $_{650}$	−5,24224	0,82708 $_{355}$	−0,56208 $_{519}$	−1,47146 $_{1972}$	−0,67960 $_{923}$
0,471	2,9594 $_{63}$	0,18121 $_{619}$	−0,98345 $_{111}$	−0,18426 $_{650}$	−5,42713	0,82353 $_{358}$	−0,56727 $_{516}$	−1,45174 $_{1934}$	−0,68883 $_{930}$
0,472	2,9657 $_{62}$	0,17502 $_{619}$	−0,98456 $_{108}$	−0,17776 $_{647}$	−5,62541	0,81995 $_{361}$	−0,57243 $_{514}$	−1,43240 $_{1900}$	−0,69813 $_{938}$
0,473	2,9719 $_{63}$	0,16883 $_{619}$	−0,98564 $_{105}$	−0,17129 $_{646}$	−5,83806	0,81634 $_{365}$	−0,57757 $_{512}$	−1,41340 $_{1868}$	−0,70751 $_{948}$
0,474	2,9782 $_{63}$	0,16264 $_{621}$	−0,98669 $_{100}$	−0,16483 $_{645}$	−6,06671	0,81269 $_{367}$	−0,58269 $_{510}$	−1,39472 $_{1834}$	−0,71699 $_{956}$
0,475	2,9845 $_{63}$	0,15643 $_{620}$	−0,98769 $_{96}$	−0,15838 $_{643}$	−6,31394	0,80902 $_{371}$	−0,58779 $_{507}$	−1,37638 $_{1803}$	−0,72655 $_{964}$
0,476	2,9908 $_{63}$	0,15023 $_{622}$	−0,98865 $_{93}$	−0,15195 $_{642}$	−6,58091	0,80531 $_{374}$	−0,59286 $_{504}$	−1,35835 $_{1771}$	−0,73619 $_{972}$
0,477	2,9971 $_{63}$	0,14401 $_{622}$	−0,98958 $_{88}$	−0,14553 $_{641}$	−6,87161	0,80157 $_{378}$	−0,59790 $_{503}$	−1,34064 $_{1745}$	−0,74591 $_{984}$
0,478	3,0034 $_{62}$	0,13779 $_{623}$	−0,99046 $_{85}$	−0,13912 $_{641}$	−7,18818	0,79779 $_{380}$	−0,60293 $_{500}$	−1,32319 $_{1714}$	−0,75575 $_{991}$
0,479	3,0096 $_{63}$	0,13156 $_{623}$	−0,99131 $_{80}$	−0,13271 $_{638}$	−7,53504	0,79399 $_{383}$	−0,60793 $_{498}$	−1,30605 $_{1686}$	−0,76566 $_{1002}$
0,480	3,0159 $_{63}$	0,12533 $_{623}$	−0,99211 $_{77}$	−0,12633 $_{638}$	−7,91598	0,79016 $_{387}$	−0,61291 $_{495}$	−1,28919 $_{1659}$	−0,77568 $_{1011}$
0,481	3,0222 $_{63}$	0,11910 $_{624}$	−0,99288 $_{73}$	−0,11995 $_{636}$	−8,33652	0,78629 $_{390}$	−0,61786 $_{493}$	−1,27260 $_{1633}$	−0,78579 $_{1022}$
0,482	3,0285 $_{63}$	0,11286 $_{625}$	−0,99361 $_{69}$	−0,11359 $_{637}$	−8,80392	0,78239 $_{393}$	−0,62279 $_{490}$	−1,25627 $_{1607}$	−0,79601 $_{1031}$
0,483	3,0348 $_{63}$	0,10661 $_{625}$	−0,99430 $_{65}$	−0,10722 $_{635}$	−9,32652	0,77846 $_{396}$	−0,62769 $_{488}$	−1,24020 $_{1583}$	−0,80632 $_{1043}$
0,484	3,0411 $_{62}$	0,10036 $_{625}$	−0,99495 $_{61}$	−0,10087 $_{634}$	−9,91381	0,77450 $_{399}$	−0,63257 $_{485}$	−1,22437 $_{1558}$	−0,81675 $_{1052}$
0,485	3,0473 $_{63}$	0,09411 $_{626}$	−0,99556 $_{57}$	−0,09453 $_{634}$	−10,57868	0,77051 $_{402}$	−0,63742 $_{483}$	−1,20879 $_{1535}$	−0,82727 $_{1064}$
0,486	3,0536 $_{63}$	0,08785 $_{626}$	−0,99613 $_{54}$	−0,08819 $_{633}$	−11,33899	0,76649 $_{405}$	−0,64225 $_{481}$	−1,19344 $_{1513}$	−0,83791 $_{1076}$
0,487	3,0599 $_{63}$	0,08159 $_{626}$	−0,99667 $_{49}$	−0,08186 $_{632}$	−12,21559	0,76244 $_{408}$	−0,64706 $_{477}$	−1,17831 $_{1488}$	−0,84867 $_{1086}$
0,488	3,0662 $_{63}$	0,07533 $_{627}$	−0,99716 $_{45}$	−0,07554 $_{631}$	−13,23722	0,75836 $_{411}$	−0,65183 $_{476}$	−1,16343 $_{1469}$	−0,85953 $_{1099}$
0,489	3,0725 $_{63}$	0,06906 $_{627}$	−0,99761 $_{42}$	−0,06923 $_{632}$	−14,44555	0,75425 $_{414}$	−0,65659 $_{472}$	−1,14874 $_{1446}$	−0,87052 $_{1110}$
0,490	3,0788 $_{62}$	0,06279 $_{627}$	−0,99803 $_{37}$	−0,06291 $_{630}$	−15,89473	0,75011 $_{417}$	−0,66131 $_{470}$	−1,13428 $_{1427}$	−0,88162 $_{1123}$
0,491	3,0850 $_{63}$	0,05652 $_{628}$	−0,99840 $_{34}$	−0,05661 $_{631}$	−17,66454	0,74594 $_{420}$	−0,66601 $_{468}$	−1,12001 $_{1407}$	−0,89285 $_{1136}$
0,492	3,0913 $_{63}$	0,05024 $_{627}$	−0,99874 $_{29}$	−0,05030 $_{629}$	−19,87938	0,74174 $_{423}$	−0,67069 $_{464}$	−1,10594 $_{1387}$	−0,90421 $_{1148}$
0,493	3,0976 $_{63}$	0,04397 $_{628}$	−0,99903 $_{26}$	−0,04401 $_{629}$	−22,72072	0,73751 $_{425}$	−0,67533 $_{462}$	−1,09207 $_{1367}$	−0,91569 $_{1161}$
0,494	3,1039 $_{63}$	0,03769 $_{628}$	−0,99929 $_{22}$	−0,03772 $_{629}$	−26,51340	0,73326 $_{429}$	−0,67995 $_{460}$	−1,07840 $_{1351}$	−0,92730 $_{1176}$
0,495	3,1102 $_{63}$	0,03141 $_{628}$	−0,99951 $_{17}$	−0,03143 $_{629}$	−31,82139	0,72897 $_{432}$	−0,68455 $_{456}$	−1,06489 $_{1332}$	−0,93906 $_{1190}$
0,496	3,1165 $_{62}$	0,02513 $_{628}$	−0,99968 $_{14}$	−0,02514 $_{629}$	−39,78034	0,72465 $_{434}$	−0,68911 $_{454}$	−1,05157 $_{1314}$	−0,95096 $_{1203}$
0,497	3,1227 $_{63}$	0,01885 $_{628}$	−0,99982 $_{10}$	−0,01885 $_{628}$	−53,04085	0,72031 $_{437}$	−0,69365 $_{452}$	−1,03843 $_{1298}$	−0,96299 $_{1219}$
0,498	3,1290 $_{63}$	0,01257 $_{629}$	−0,99992 $_{6}$	−0,01257 $_{629}$	−79,54813	0,71594 $_{440}$	−0,69817 $_{448}$	−1,02545 $_{1280}$	−0,97518 $_{1233}$
0,499	3,1353 $_{63}$	0,00628 $_{628}$	−0,99998 $_{2}$	−0,00628 $_{628}$	−159,23248	0,71154 $_{443}$	−0,70265 $_{446}$	−1,01265 $_{1265}$	−0,98751 $_{1249}$
0,500	3,1416 $_{63}$	±0,00000 $_{628}$	−1,00000 $_{2}$	∓0,00000 $_{628}$	∓ ∞	0,70711 $_{446}$	−0,70711 $_{443}$	−1,00000 $_{1249}$	−1,00000 $_{1265}$

x	$2\pi x$	$\ln 2\pi x$	$e^{2\pi x}$	$e^{-2\pi x}$	Sin $2\pi x$	Cos $2\pi x$	Tang $2\pi x$	Cotg $2\pi x$	Amp $2\pi x$
0,500	3,1416 63	1,14473 201	23,141 145	0,0432 3	11,549 73	11,592 73	0,99627 5	1,0037 0	1,4844 5
0,501	3,1479 63	1,14674 199	23,286 147	0,0429 2	11,622 73	11,665 73	0,99632 4	1,0037 0	1,4849 6
0,502	3,1542 62	1,14873 198	23,433 148	0,0427 3	11,695 74	11,738 74	0,99636 4	1,0037 1	1,4855 5
0,503	3,1604 63	1,15071 198	23,581 149	0,0424 3	11,769 75	11,812 74	0,99640 5	1,0036 0	1,4860 5
0,504	3,1667 63	1,15269 199	23,730 149	0,0421 2	11,844 75	11,886 75	0,99645 5	1,0036 1	1,4865 6
0,505	3,1730 63	1,15468 198	23,879 151	0,0419 3	11,919 75	11,961 75	0,99650 4	1,0035 0	1,4871 5
0,506	3,1793 63	1,15666 198	24,030 151	0,0416 2	11,994 76	12,036 75	0,99654 4	1,0035 1	1,4876 6
0,507	3,1856 63	1,15864 197	24,181 153	0,0414 3	12,070 76	12,111 76	0,99658 4	1,0034 0	1,4882 5
0,508	3,1919 62	1,16061 196	24,334 153	0,0411 3	12,146 77	12,187 77	0,99662 5	1,0034 1	1,4887 5
0,509	3,1981 63	1,16257 196	24,487 154	0,0408 2	12,223 77	12,264 77	0,99667 4	1,0033 0	1,4892 5
0,510	3,2044 63	1,16453 196	24,641 156	0,0406 3	12,300 78	12,341 78	0,99671 4	1,0033 0	1,4897 5
0,511	3,2107 63	1,16649 196	24,797 156	0,0403 2	12,378 78	12,419 78	0,99675 4	1,0033 1	1,4902 5
0,512	3,2170 63	1,16845 196	24,953 157	0,0401 3	12,456 79	12,497 78	0,99679 4	1,0032 0	1,4907 5
0,513	3,2233 63	1,17041 194	25,110 159	0,0398 2	12,535 80	12,575 79	0,99683 4	1,0032 1	1,4912 5
0,514	3,2296 62	1,17235 194	25,269 159	0,0396 3	12,615 79	12,654 80	0,99687 4	1,0031 0	1,4917 5
0,515	3,2358 63	1,17429 193	25,428 160	0,0393 2	12,694 80	12,734 80	0,99691 4	1,0031 0	1,4922 5
0,516	3,2421 63	1,17622 195	25,588 161	0,0391 3	12,774 81	12,814 80	0,99695 4	1,0031 1	1,4927 5
0,517	3,2484 63	1,17817 193	25,749 163	0,0388 2	12,855 82	12,894 81	0,99699 3	1,0030 0	1,4932 5
0,518	3,2547 63	1,18010 194	25,912 163	0,0386 2	12,937 81	12,975 82	0,99702 4	1,0030 1	1,4937 4
0,519	3,2610 63	1,18204 192	26,075 164	0,0384 3	13,018 83	13,057 82	0,99706 4	1,0029 0	1,4941 5
0,520	3,2673 62	1,18396 191	26,239 166	0,0381 2	13,101 82	13,139 82	0,99710 4	1,0029 0	1,4946 5
0,521	3,2735 63	1,18587 192	26,405 166	0,0379 3	13,183 84	13,221 83	0,99714 3	1,0029 1	1,4951 5
0,522	3,2798 63	1,18779 191	26,571 167	0,0376 2	13,267 84	13,304 84	0,99717 3	1,0028 0	1,4956 4
0,523	3,2861 63	1,18970 192	26,738 169	0,0374 2	13,351 84	13,388 84	0,99720 4	1,0028 0	1,4960 5
0,524	3,2924 63	1,19162 191	26,907 170	0,0372 3	13,435 85	13,472 85	0,99724 4	1,0028 1	1,4965 5
0,525	3,2987 63	1,19353 190	27,077 170	0,0369 2	13,520 85	13,557 85	0,99728 3	1,0027 0	1,4970 4
0,526	3,3050 62	1,19543 189	27,247 172	0,0367 2	13,605 86	13,642 86	0,99731 4	1,0027 0	1,4974 4
0,527	3,3112 63	1,19732 189	27,419 173	0,0365 3	13,691 87	13,728 86	0,99735 3	1,0027 1	1,4978 4
0,528	3,3175 63	1,19921 190	27,592 174	0,0362 2	13,778 87	13,814 87	0,99738 3	1,0026 0	1,4982 5
0,529	3,3238 63	1,20111 189	27,766 175	0,0360 2	13,865 88	13,901 87	0,99741 3	1,0026 0	1,4987 5
0,530	3,3301 63	1,20300 189	27,941 176	0,0358 2	13,953 88	13,988 88	0,99744 3	1,0026 1	1,4992 4
0,531	3,3364 63	1,20489 188	28,117 177	0,0356 3	14,041 88	14,076 89	0,99747 3	1,0025 0	1,4996 4
0,532	3,3427 62	1,20677 187	28,294 179	0,0353 2	14,129 90	14,165 89	0,99750 3	1,0025 0	1,5000 4
0,533	3,3489 63	1,20864 187	28,473 179	0,0351 2	14,219 90	14,254 89	0,99753 3	1,0025 1	1,5004 5
0,534	3,3552 63	1,21051 188	28,652 181	0,0349 2	14,309 90	14,343 91	0,99756 4	1,0024 0	1,5009 5
0,535	3,3615 63	1,21239 187	28,833 181	0,0347 2	14,399 91	14,434 90	0,99760 3	1,0024 0	1,5014 4
0,536	3,3678 63	1,21426 187	29,014 183	0,0345 2	14,490 91	14,524 92	0,99763 3	1,0024 1	1,5018 4
0,537	3,3741 63	1,21613 186	29,197 184	0,0343 3	14,581 93	14,616 92	0,99766 2	1,0023 0	1,5022 4
0,538	3,3804 62	1,21799 185	29,381 185	0,0340 2	14,674 92	14,708 92	0,99768 3	1,0023 0	1,5026 5
0,539	3,3866 63	1,21984 185	29,566 187	0,0338 2	14,766 94	14,800 93	0,99771 3	1,0023 0	1,5031 4
0,540	3,3929 63	1,22169 185	29,753 187	0,0336 2	14,860 93	14,893 94	0,99774 3	1,0023 1	1,5035 4
0,541	3,3992 63	1,22354 185	29,940 189	0,0334 2	14,953 95	14,987 94	0,99777 3	1,0022 0	1,5039 5
0,542	3,4055 63	1,22539 185	30,129 190	0,0332 2	15,048 95	15,081 95	0,99780 3	1,0022 0	1,5044 4
0,543	3,4118 63	1,22724 184	30,319 191	0,0330 2	15,143 96	15,176 95	0,99783 3	1,0022 1	1,5048 4
0,544	3,4181 62	1,22908 183	30,510 192	0,0328 2	15,239 96	15,271 96	0,99786 2	1,0021 0	1,5052 4
0,545	3,4243 63	1,23091 183	30,702 194	0,0326 2	15,335 97	15,367 97	0,99788 2	1,0021 0	1,5056 4
0,546	3,4306 63	1,23274 183	30,896 195	0,0324 2	15,432 97	15,464 97	0,99790 3	1,0021 0	1,5060 4
0,547	3,4369 63	1,23457 183	31,091 195	0,0322 2	15,529 98	15,561 98	0,99793 3	1,0021 1	1,5064 4
0,548	3,4432 63	1,23640 183	31,286 198	0,0320 2	15,627 99	15,659 99	0,99796 3	1,0020 0	1,5068 4
0,549	3,4495 63	1,23823 182	31,484 198	0,0318 2	15,726 99	15,758 99	0,99799 2	1,0020 0	1,5072 4
0,550	3,4558 62	1,24005 181	31,682 200	0,0316 2	15,825 100	15,857 100	0,99801 3	1,0020 0	1,5076 4

x	$2\pi x$	$\sin 2\pi x$	$\cos 2\pi x$	$\operatorname{tang} 2\pi x$	$\operatorname{cotg} 2\pi x$	$\sin^* 2\pi x$	$\cos^* 2\pi x$	$\operatorname{tang}^* 2\pi x$	$\operatorname{cotg}^* 2\pi x$
0,500	$3,1416_{63}$	$\pm 0,00000_{628}$	$-1,00000$ 2	$\mp 0,00000_{628}$	$\mp\ \infty$	$0,70711_{446}$	$-0,70711_{443}$	$-1,00000_{1249}$	$-1,00000_{1265}$
0,501	$3,1479_{63}$	$-0,00628_{629}$	$-0,99998$ 6	$+0,00628_{629}$	159,23248	$0,70265_{448}$	$-0,71154_{440}$	$-0,98751_{1233}$	$-1,01265_{1280}$
0,502	$3,1542_{62}$	$-0,01257_{628}$	$-0,99992$ 10	$0,01257_{628}$	79,54813	$0,69817_{452}$	$-0,71594_{437}$	$-0,97518_{1219}$	$-1,02545_{1298}$
0,503	$3,1604_{63}$	$-0,01885_{628}$	$-0,99982$ 14	$0,01885_{629}$	53,04085	$0,69365_{454}$	$-0,72031_{434}$	$-0,96299_{1203}$	$-1,03843_{1314}$
0,504	$3,1667_{63}$	$-0,02513_{628}$	$-0,99968$ 17	$0,02514_{629}$	39,78034	$0,68911_{456}$	$-0,72465_{432}$	$-0,95096_{1190}$	$-1,05157_{1332}$
0,505	$3,1730_{63}$	$-0,03141_{628}$	$-0,99951$ 22	$0,03143_{629}$	31,82139	$0,68455_{460}$	$-0,72897_{429}$	$-0,93906_{1176}$	$-1,06489_{1351}$
0,506	$3,1793_{63}$	$-0,03769_{628}$	$-0,99929$ 26	$0,03772_{629}$	26,51340	$0,67995_{462}$	$-0,73326_{425}$	$-0,92730_{1161}$	$-1,07840_{1367}$
0,507	$3,1856_{63}$	$-0,04397_{627}$	$-0,99903$ 29	$0,04401_{629}$	22,72072	$0,67533_{464}$	$-0,73751_{423}$	$-0,91569_{1148}$	$-1,09207_{1387}$
0,508	$3,1919_{62}$	$-0,05024_{628}$	$-0,99874$ 34	$0,05030_{631}$	19,87938	$0,67069_{468}$	$-0,74174_{420}$	$-0,90421_{1136}$	$-1,10594_{1407}$
0,509	$3,1981_{63}$	$-0,05652_{627}$	$-0,99840$ 37	$0,05661_{630}$	17,66454	$0,66601_{470}$	$-0,74594_{417}$	$-0,89285_{1123}$	$-1,12001_{1427}$
0,510	$3,2044_{63}$	$-0,06279_{627}$	$-0,99803$ 42	$0,06291_{632}$	15,89473	$0,66131_{472}$	$-0,75011_{414}$	$-0,88162_{1110}$	$-1,13428_{1446}$
0,511	$3,2107_{63}$	$-0,06906_{627}$	$-0,99761$ 45	$0,06923_{631}$	14,44555	$0,65659_{476}$	$-0,75425_{411}$	$-0,87052_{1099}$	$-1,14874_{1469}$
0,512	$3,2170_{63}$	$-0,07533_{626}$	$-0,99716$ 49	$0,07554_{632}$	13,23722	$0,65183_{477}$	$-0,75836_{408}$	$-0,85953_{1086}$	$-1,16343_{1488}$
0,513	$3,2233_{63}$	$-0,08159_{626}$	$-0,99667$ 54	$0,08186_{633}$	12,21559	$0,64706_{481}$	$-0,76244_{405}$	$-0,84867_{1076}$	$-1,17831_{1513}$
0,514	$3,2296_{62}$	$-0,08785_{626}$	$-0,99613$ 57	$0,08819_{634}$	11,33899	$0,64225_{483}$	$-0,76649_{402}$	$-0,83791_{1064}$	$-1,19344_{1535}$
0,515	$3,2358_{63}$	$-0,09411_{625}$	$-0,99556$ 61	$0,09453_{634}$	10,57868	$0,63742_{485}$	$-0,77051_{399}$	$-0,82727_{1052}$	$-1,20879_{1558}$
0,516	$3,2421_{63}$	$-0,10036_{625}$	$-0,99495$ 65	$0,10087_{635}$	9,91381	$0,63257_{488}$	$-0,77450_{396}$	$-0,81675_{1043}$	$-1,22437_{1583}$
0,517	$3,2484_{63}$	$-0,10661_{625}$	$-0,99430$ 69	$0,10722_{637}$	9,32652	$0,62769_{490}$	$-0,77846_{393}$	$-0,80632_{1031}$	$-1,24020_{1607}$
0,518	$3,2547_{63}$	$-0,11286_{624}$	$-0,99361$ 73	$0,11359_{636}$	8,80392	$0,62279_{493}$	$-0,78239_{390}$	$-0,79601_{1022}$	$-1,25627_{1633}$
0,519	$3,2610_{63}$	$-0,11910_{623}$	$-0,99288$ 77	$0,11995_{638}$	8,33652	$0,61786_{495}$	$-0,78629_{387}$	$-0,78579_{1011}$	$-1,27260_{1659}$
0,520	$3,2673_{62}$	$-0,12533_{623}$	$-0,99211$ 80	$0,12633_{638}$	7,91598	$0,61291_{498}$	$-0,79016_{383}$	$-0,77568_{1002}$	$-1,28919_{1686}$
0,521	$3,2735_{63}$	$-0,13156_{623}$	$-0,99131$ 85	$0,13271_{641}$	7,53504	$0,60793_{500}$	$-0,79399_{380}$	$-0,76566$ 991	$-1,30605_{1714}$
0,522	$3,2798_{63}$	$-0,13779_{622}$	$-0,99046$ 88	$0,13912_{641}$	7,18818	$0,60293_{503}$	$-0,79779_{378}$	$-0,75575$ 984	$-1,32319_{1745}$
0,523	$3,2861_{63}$	$-0,14401_{622}$	$-0,98958$ 93	$0,14553_{642}$	6,87161	$0,59790_{504}$	$-0,80157_{374}$	$-0,74591$ 972	$-1,34064_{1771}$
0,524	$3,2924_{63}$	$-0,15023_{620}$	$-0,98865$ 96	$0,15195_{643}$	6,58091	$0,59286_{507}$	$-0,80531_{371}$	$-0,73619$ 964	$-1,35835_{1803}$
0,525	$3,2987_{63}$	$-0,15643_{621}$	$-0,98769_{100}$	$0,15838_{645}$	6,31394	$0,58779_{510}$	$-0,80902_{367}$	$-0,72655$ 956	$-1,37638_{1834}$
0,526	$3,3050_{62}$	$-0,16264_{619}$	$-0,98669_{105}$	$0,16483_{646}$	6,06671	$0,58269_{512}$	$-0,81269_{365}$	$-0,71699$ 948	$-1,39472_{1868}$
0,527	$3,3112_{63}$	$-0,16883_{619}$	$-0,98564_{108}$	$0,17129_{647}$	5,83806	$0,57757_{514}$	$-0,81634_{361}$	$-0,70751$ 938	$-1,41340_{1900}$
0,528	$3,3175_{63}$	$-0,17502_{619}$	$-0,98456_{111}$	$0,17776_{650}$	5,62541	$0,57243_{516}$	$-0,81995_{358}$	$-0,69813$ 930	$-1,43240_{1934}$
0,529	$3,3238_{63}$	$-0,18121_{617}$	$-0,98345_{116}$	$0,18426_{650}$	5,42713	$0,56727_{519}$	$-0,82353_{355}$	$-0,68883$ 923	$-1,45174_{1972}$
0,530	$3,3301_{63}$	$-0,18738_{617}$	$-0,98229_{120}$	$0,19076_{652}$	5,24224	$0,56208_{520}$	$-0,82708_{352}$	$-0,67960$ 914	$-1,47146_{2006}$
0,531	$3,3364_{63}$	$-0,19355_{616}$	$-0,98109_{123}$	$0,19728_{653}$	5,06892	$0,55688_{523}$	$-0,83060_{348}$	$-0,67046$ 907	$-1,49152_{2045}$
0,532	$3,3427_{62}$	$-0,19971_{615}$	$-0,97986_{128}$	$0,20381_{656}$	4,90641	$0,55165_{526}$	$-0,83408_{345}$	$-0,66139$ 901	$-1,51197_{2087}$
0,533	$3,3489_{63}$	$-0,20586_{615}$	$-0,97858_{131}$	$0,21037_{657}$	4,75362	$0,54639_{527}$	$-0,83753_{341}$	$-0,65238$ 891	$-1,53284_{2123}$
0,534	$3,3552_{63}$	$-0,21201_{613}$	$-0,97727_{135}$	$0,21694_{658}$	4,60955	$0,54112_{529}$	$-0,84094_{339}$	$-0,64347$ 885	$-1,55407_{2167}$
0,535	$3,3615_{63}$	$-0,21814_{613}$	$-0,97592_{139}$	$0,22352_{661}$	4,47382	$0,53583_{532}$	$-0,84433_{335}$	$-0,63462$ 878	$-1,57574_{2212}$
0,536	$3,3678_{63}$	$-0,22427_{612}$	$-0,97453_{143}$	$0,23013_{663}$	4,34534	$0,53051_{534}$	$-0,84768_{331}$	$-0,62584$ 871	$-1,59786_{2255}$
0,537	$3,3741_{63}$	$-0,23039_{611}$	$-0,97310_{147}$	$0,23676_{665}$	4,22371	$0,52517_{535}$	$-0,85099_{329}$	$-0,61713$ 864	$-1,62041_{2301}$
0,538	$3,3804_{62}$	$-0,23650_{610}$	$-0,97163_{150}$	$0,24341_{666}$	4,10837	$0,51982_{538}$	$-0,85428_{325}$	$-0,60849$ 858	$-1,64342_{2350}$
0,539	$3,3866_{63}$	$-0,24260_{609}$	$-0,97013_{155}$	$0,25007_{669}$	3,99889	$0,51444_{540}$	$-0,85753_{321}$	$-0,59991$ 851	$-1,66692_{2399}$
0,540	$3,3929_{63}$	$-0,24869_{608}$	$-0,96858_{158}$	$0,25676_{670}$	$3,89473_{9915}$	$0,50904_{542}$	$-0,86074_{318}$	$-0,59140$ 845	$-1,69091_{2451}$
0,541	$3,3992_{63}$	$-0,25477_{609}$	$-0,96700_{162}$	$0,26346_{673}$	$3,79558_{9454}$	$0,50362_{543}$	$-0,86392_{315}$	$-0,58295$ 838	$-1,71542_{2502}$
0,542	$3,4055_{63}$	$-0,26084_{606}$	$-0,96538_{166}$	$0,27019_{676}$	$3,70104_{9025}$	$0,49819_{546}$	$-0,86707_{311}$	$-0,57457$ 833	$-1,74044_{2560}$
0,543	$3,4118_{63}$	$-0,26690_{605}$	$-0,96372_{169}$	$0,27695_{677}$	$3,61079_{8623}$	$0,49273_{548}$	$-0,87018_{308}$	$-0,56624$ 827	$-1,76604_{2618}$
0,544	$3,4181_{62}$	$-0,27295_{604}$	$-0,96203_{174}$	$0,28372_{681}$	$3,52456_{8254}$	$0,48725_{550}$	$-0,87326_{305}$	$-0,55797$ 822	$-1,79222_{2679}$
0,545	$3,4243_{63}$	$-0,27899_{603}$	$-0,96029_{177}$	$0,29053_{682}$	$3,44202_{7903}$	$0,48175_{551}$	$-0,87631_{301}$	$-0,54975$ 815	$-1,81901_{2737}$
0,546	$3,4306_{63}$	$-0,28502_{602}$	$-0,95852_{181}$	$0,29735_{686}$	$3,36299_{7578}$	$0,47624_{554}$	$-0,87932_{297}$	$-0,54160$ 810	$-1,84638_{2804}$
0,547	$3,4369_{63}$	$-0,29104_{600}$	$-0,95671_{185}$	$0,30421_{687}$	$3,28721_{7263}$	$0,47070_{555}$	$-0,88229_{294}$	$-0,53350$ 804	$-1,87442_{2869}$
0,548	$3,4432_{63}$	$-0,29704_{600}$	$-0,95486_{188}$	$0,31108_{691}$	$3,21458_{6985}$	$0,46515_{557}$	$-0,88523_{291}$	$-0,52546$ 800	$-1,90311_{2939}$
0,549	$3,4495_{63}$	$-0,30304_{598}$	$-0,95298_{192}$	$0,31799_{693}$	$3,14473_{6707}$	$0,45958_{559}$	$-0,88814_{287}$	$-0,51746$ 794	$-1,93250_{3012}$
0,550	$3,4558_{62}$	$-0,30902_{597}$	$-0,95106_{196}$	$0,32492_{696}$	$3,07766_{6455}$	$0,45399_{561}$	$-0,89101_{283}$	$-0,50952$ 789	$-1,96262_{3087}$

x	$2\pi x$	$\ln 2\pi x$	$e^{2\pi x}$	$e^{-2\pi x}$	$\mathfrak{Sin}\, 2\pi x$	$\mathfrak{Cof}\, 2\pi x$	$\mathfrak{Tang}\, 2\pi x$	$\mathfrak{Cotg}\, 2\pi x$	$\mathfrak{Amp}\, 2\pi x$
0,550	3,4558 62	1,24005 181	31,682 200	0,0316 2	15,825 100	15,857 100	0,99801 3	1,0020 0	1,5076 4
0,551	3,4620 63	1,24186 181	31,882 201	0,0314 2	15,925 101	15,957 100	0,99804 2	1,0020 1	1,5080 4
0,552	3,4683 63	1,24367 181	32,083 202	0,0312 2	16,026 101	16,057 101	0,99806 3	1,0019 0	1,5084 4
0,553	3,4746 63	1,24548 181	32,285 203	0,0310 2	16,127 102	16,158 102	0,99809 2	1,0019 0	1,5088 4
0,554	3,4809 63	1,24729 181	32,488 205	0,0308 2	16,229 102	16,260 102	0,99811 2	1,0019 0	1,5092 4
0,555	3,4872 63	1,24910 180	32,693 206	0,0306 2	16,331 103	16,362 103	0,99813 2	1,0019 0	1,5096 4
0,556	3,4935 62	1,25090 179	32,899 208	0,0304 2	16,434 104	16,465 103	0,99815 2	1,0019 1	1,5100 4
0,557	3,4997 63	1,25269 179	33,107 208	0,0302 2	16,538 105	16,568 105	0,99817 3	1,0018 0	1,5104 4
0,558	3,5060 63	1,25448 179	33,315 210	0,0300 2	16,643 105	16,673 105	0,99820 2	1,0018 0	1,5108 4
0,559	3,5123 63	1,25627 180	33,525 212	0,0298 2	16,748 106	16,778 105	0,99822 2	1,0018 0	1,5112 4
0,560	3,5186 63	1,25807 178	33,737 212	0,0296 1	16,854 106	16,883 106	0,99824 2	1,0018 1	1,5116 4
0,561	3,5249 63	1,25985 178	33,949 214	0,0295 2	16,960 107	16,989 107	0,99826 2	1,0017 0	1,5120 4
0,562	3,5312 62	1,26163 177	34,163 216	0,0293 2	17,067 108	17,096 108	0,99828 2	1,0017 0	1,5124 4
0,563	3,5374 63	1,26340 177	34,379 216	0,0291 2	17,175 108	17,204 108	0,99830 3	1,0017 0	1,5128 4
0,564	3,5437 63	1,26517 178	34,595 218	0,0289 2	17,283 109	17,312 109	0,99833 2	1,0017 0	1,5132 3
0,565	3,5500 63	1,26695 177	34,813 220	0,0287 2	17,392 110	17,421 110	0,99835 2	1,0017 1	1,5135 3
0,566	3,5563 63	1,26872 176	35,033 220	0,0285 1	17,502 111	17,531 110	0,99837 2	1,0016 0	1,5138 3
0,567	3,5626 62	1,27048 176	35,253 223	0,0284 2	17,613 111	17,641 111	0,99839 2	1,0016 0	1,5141 3
0,568	3,5688 63	1,27224 176	35,476 223	0,0282 2	17,724 112	17,752 112	0,99841 2	1,0016 0	1,5144 4
0,569	3,5751 63	1,27400 176	35,699 225	0,0280 2	17,836 112	17,864 112	0,99843 2	1,0016 0	1,5148 4
0,570	3,5814 63	1,27576 175	35,924 227	0,0278 1	17,948 114	17,976 113	0,99845 2	1,0016 1	1,5152 3
0,571	3,5877 63	1,27751 176	36,151 228	0,0277 2	18,062 114	18,089 114	0,99847 2	1,0015 0	1,5155 4
0,572	3,5940 63	1,27927 174	36,379 229	0,0275 2	18,176 114	18,203 115	0,99849 1	1,0015 0	1,5159 4
0,573	3,6003 62	1,28101 174	36,608 231	0,0273 2	18,290 116	18,318 115	0,99850 2	1,0015 0	1,5163 3
0,574	3,6065 63	1,28275 174	36,839 232	0,0271 1	18,406 116	18,433 116	0,99852 2	1,0015 0	1,5166 3
0,575	3,6128 63	1,28449 174	37,071 233	0,0270 2	18,522 117	18,549 117	0,99854 2	1,0015 1	1,5169 3
0,576	3,6191 63	1,28623 174	37,304 236	0,0268 2	18,639 118	18,666 117	0,99856 2	1,0014 0	1,5172 3
0,577	3,6254 63	1,28797 173	37,540 236	0,0266 1	18,757 118	18,783 118	0,99858 2	1,0014 0	1,5175 4
0,578	3,6317 63	1,28970 173	37,776 238	0,0265 2	18,875 119	18,901 119	0,99860 2	1,0014 0	1,5179 3
0,579	3,6380 62	1,29143 172	38,014 240	0,0263 2	18,994 120	19,020 120	0,99862 2	1,0014 0	1,5182 3
0,580	3,6442 63	1,29315 172	38,254 241	0,0261 1	19,114 121	19,140 121	0,99864 1	1,0014 0	1,5185 3
0,581	3,6505 63	1,29487 172	38,495 243	0,0260 2	19,235 121	19,261 121	0,99865 2	1,0014 1	1,5188 4
0,582	3,6568 63	1,29659 172	38,738 244	0,0258 1	19,356 122	19,382 122	0,99867 2	1,0013 0	1,5192 4
0,583	3,6631 63	1,29831 172	38,982 246	0,0257 2	19,478 123	19,504 123	0,99869 1	1,0013 0	1,5196 3
0,584	3,6694 63	1,30003 172	39,228 247	0,0255 2	19,601 124	19,627 123	0,99870 1	1,0013 0	1,5199 3
0,585	3,6757 62	1,30175 170	39,475 248	0,0253 1	19,725 124	19,750 124	0,99871 2	1,0013 0	1,5202 3
0,586	3,6819 63	1,30345 170	39,723 251	0,0252 2	19,849 126	19,874 126	0,99873 2	1,0013 0	1,5205 3
0,587	3,6882 63	1,30515 170	39,974 252	0,0250 1	19,975 126	20,000 125	0,99875 1	1,0013 1	1,5208 4
0,588	3,6945 63	1,30685 170	40,226 253	0,0249 2	20,101 126	20,125 127	0,99876 2	1,0012 0	1,5212 3
0,589	3,7008 63	1,30855 170	40,479 256	0,0247 2	20,227 128	20,252 128	0,99878 2	1,0012 0	1,5215 3
0,590	3,7071 63	1,31025 169	40,735 256	0,0245 1	20,355 129	20,380 128	0,99880 1	1,0012 0	1,5218 3
0,591	3,7134 62	1,31194 169	40,991 259	0,0244 2	20,484 129	20,508 129	0,99881 1	1,0012 0	1,5221 3
0,592	3,7196 63	1,31363 168	41,250 260	0,0242 1	20,613 130	20,637 130	0,99882 2	1,0012 0	1,5224 3
0,593	3,7259 63	1,31531 169	41,510 261	0,0241 2	20,743 131	20,767 131	0,99884 2	1,0012 1	1,5227 3
0,594	3,7322 63	1,31700 169	41,771 264	0,0239 1	20,874 131	20,898 131	0,99886 1	1,0011 0	1,5230 3
0,595	3,7385 63	1,31869 168	42,035 265	0,0238 2	21,005 133	21,029 133	0,99887 1	1,0011 0	1,5233 3
0,596	3,7448 63	1,32037 167	42,300 266	0,0236 1	21,138 133	21,162 133	0,99888 1	1,0011 0	1,5236 3
0,597	3,7511 62	1,32204 167	42,566 268	0,0235 2	21,271 135	21,295 134	0,99889 2	1,0011 0	1,5239 3
0,598	3,7573 63	1,32371 167	42,834 271	0,0233 1	21,406 135	21,429 135	0,99891 2	1,0011 0	1,5242 3
0,599	3,7636 63	1,32538 167	43,105 271	0,0232 1	21,541 136	21,564 136	0,99893 1	1,0011 0	1,5245 3
0,600	3,7699 63	1,32705 167	43,376 273	0,0231 2	21,677 136	21,700 136	0,99894 1	1,0011 0	1,5248 3

x	$2\pi x$	$\sin 2\pi x$	$\cos 2\pi x$	$\mathrm{tang}\, 2\pi x$	$\mathrm{cotg}\, 2\pi x$	$\sin^* 2\pi x$	$\cos^* 2\pi x$	$\mathrm{tang}^* 2\pi x$	$\mathrm{cotg}^* 2\pi x$
0,550	3,4558$_{62}$	−0,30902$_{597}$	−0,95106$_{196}$	0,32492$_{696}$	3,07766$_{6455}$	0,45399$_{561}$	−0,89101$_{283}$	−0,50952$_{789}$	−1,96262$_{3087}$
0,551	3,4620$_{63}$	−0,31499$_{595}$	−0,94910$_{200}$	0,33188$_{699}$	3,01311$_{6209}$	0,44838$_{562}$	−0,89384$_{280}$	−0,50163$_{783}$	−1,99349$_{3163}$
0,552	3,4683$_{63}$	−0,32094$_{595}$	−0,94710$_{204}$	0,33887$_{702}$	2,95102$_{5996}$	0,44276$_{564}$	−0,89664$_{277}$	−0,49380$_{779}$	−2,02512$_{3246}$
0,553	3,4746$_{63}$	−0,32689$_{593}$	−0,94506$_{207}$	0,34589$_{705}$	2,89106$_{5773}$	0,43712$_{566}$	−0,89941$_{272}$	−0,48601$_{774}$	−2,05758$_{3330}$
0,554	3,4809$_{63}$	−0,33282$_{592}$	−0,94299$_{211}$	0,35294$_{708}$	2,83333$_{5574}$	0,43146$_{568}$	−0,90213$_{270}$	−0,47827$_{771}$	−2,09088$_{3423}$
0,555	3,4872$_{63}$	−0,33874$_{590}$	−0,94088$_{215}$	0,36002$_{711}$	2,77759$_{5379}$	0,42578$_{569}$	−0,90483$_{265}$	−0,47056$_{764}$	−2,12511$_{3509}$
0,556	3,4935$_{62}$	−0,34464$_{589}$	−0,93873$_{218}$	0,36713$_{715}$	2,72380$_{5199}$	0,42009$_{571}$	−0,90748$_{263}$	−0,46292$_{761}$	−2,16020$_{3612}$
0,557	3,4997$_{63}$	−0,35053$_{588}$	−0,93655$_{222}$	0,37428$_{718}$	2,67181$_{5031}$	0,41438$_{573}$	−0,91011$_{258}$	−0,45531$_{757}$	−2,19632$_{3711}$
0,558	3,5060$_{63}$	−0,35641$_{587}$	−0,93433$_{226}$	0,38146$_{722}$	2,62150$_{4871}$	0,40865$_{574}$	−0,91269$_{255}$	−0,44774$_{752}$	−2,23343$_{3814}$
0,559	3,5123$_{63}$	−0,36228$_{584}$	−0,93207$_{229}$	0,38868$_{724}$	2,57279$_{4704}$	0,40291$_{576}$	−0,91524$_{252}$	−0,44022$_{748}$	−2,27157$_{3927}$
0,560	3,5186$_{63}$	−0,36812$_{584}$	−0,92978$_{233}$	0,39592$_{729}$	2,52575$_{4567}$	0,39715$_{578}$	−0,91775$_{248}$	−0,43274$_{744}$	−2,31084$_{4046}$
0,561	3,5249$_{63}$	−0,37396$_{582}$	−0,92745$_{237}$	0,40321$_{733}$	2,48008$_{4425}$	0,39137$_{579}$	−0,92023$_{244}$	−0,42530$_{740}$	−2,35130$_{4164}$
0,562	3,5312$_{62}$	−0,37978$_{580}$	−0,92508$_{241}$	0,41054$_{736}$	2,43583$_{4289}$	0,38558$_{580}$	−0,92267$_{241}$	−0,41790$_{736}$	−2,39294$_{4289}$
0,563	3,5374$_{63}$	−0,38558$_{579}$	−0,92267$_{244}$	0,41790$_{740}$	2,39294$_{4164}$	0,37978$_{582}$	−0,92508$_{237}$	−0,41054$_{733}$	−2,43583$_{4425}$
0,564	3,5437$_{63}$	−0,39137$_{578}$	−0,92023$_{248}$	0,42530$_{744}$	2,35130$_{4046}$	0,37396$_{584}$	−0,92745$_{233}$	−0,40321$_{729}$	−2,48008$_{4567}$
0,565	3,5500$_{63}$	−0,39715$_{576}$	−0,91775$_{251}$	0,43274$_{748}$	2,31084$_{3927}$	0,36812$_{584}$	−0,92978$_{229}$	−0,39592$_{724}$	−2,52575$_{4704}$
0,566	3,5563$_{63}$	−0,40291$_{574}$	−0,91524$_{255}$	0,44022$_{752}$	2,27157$_{3814}$	0,36228$_{587}$	−0,93207$_{226}$	−0,38868$_{722}$	−2,57279$_{4871}$
0,567	3,5626$_{62}$	−0,40865$_{573}$	−0,91269$_{258}$	0,44774$_{757}$	2,23343$_{3711}$	0,35641$_{588}$	−0,93433$_{222}$	−0,38146$_{718}$	−2,62150$_{5031}$
0,568	3,5688$_{63}$	−0,41438$_{571}$	−0,91011$_{263}$	0,45531$_{761}$	2,19632$_{3612}$	0,35053$_{589}$	−0,93655$_{218}$	−0,37428$_{715}$	−2,67181$_{5199}$
0,569	3,5751$_{63}$	−0,42009$_{569}$	−0,90748$_{265}$	0,46292$_{764}$	2,16020$_{3509}$	0,34464$_{590}$	−0,93873$_{215}$	−0,36713$_{711}$	−2,72380$_{5379}$
0,570	3,5814$_{63}$	−0,42578$_{568}$	−0,90483$_{270}$	0,47056$_{771}$	2,12511$_{3423}$	0,33874$_{592}$	−0,94088$_{211}$	−0,36002$_{708}$	−2,77759$_{5574}$
0,571	3,5877$_{63}$	−0,43146$_{566}$	−0,90213$_{272}$	0,47827$_{774}$	2,09088$_{3330}$	0,33282$_{593}$	−0,94299$_{207}$	−0,35294$_{705}$	−2,83333$_{5773}$
0,572	3,5940$_{63}$	−0,43712$_{564}$	−0,89941$_{277}$	0,48601$_{779}$	2,05758$_{3246}$	0,32689$_{595}$	−0,94506$_{204}$	−0,34589$_{702}$	−2,89106$_{5996}$
0,573	3,6003$_{62}$	−0,44276$_{562}$	−0,89664$_{280}$	0,49380$_{783}$	2,02512$_{3163}$	0,32094$_{595}$	−0,94710$_{200}$	−0,33887$_{699}$	−2,95102$_{6209}$
0,574	3,6065$_{63}$	−0,44838$_{561}$	−0,89384$_{283}$	0,50163$_{789}$	1,99349$_{3087}$	0,31499$_{597}$	−0,94910$_{196}$	−0,33188$_{696}$	−3,01311$_{6455}$
0,575	3,6128$_{63}$	−0,45399$_{559}$	−0,89101$_{287}$	0,50952$_{794}$	1,96262$_{3012}$	0,30902$_{598}$	−0,95106$_{192}$	−0,32492$_{693}$	−3,07766$_{6707}$
0,576	3,6191$_{63}$	−0,45958$_{557}$	−0,88814$_{291}$	0,51746$_{800}$	1,93250$_{2939}$	0,30304$_{600}$	−0,95298$_{188}$	−0,31799$_{691}$	−3,14473$_{6985}$
0,577	3,6254$_{63}$	−0,46515$_{555}$	−0,88523$_{294}$	0,52546$_{804}$	1,90311$_{2869}$	0,29704$_{600}$	−0,95486$_{185}$	−0,31108$_{687}$	−3,21458$_{7263}$
0,578	3,6317$_{63}$	−0,47070$_{554}$	−0,88229$_{297}$	0,53350$_{810}$	1,87442$_{2804}$	0,29104$_{602}$	−0,95671$_{181}$	−0,30421$_{686}$	−3,28721$_{7578}$
0,579	3,6380$_{62}$	−0,47624$_{551}$	−0,87932$_{301}$	0,54160$_{815}$	1,84638$_{2737}$	0,28502$_{603}$	−0,95852$_{177}$	−0,29735$_{682}$	−3,36299$_{7903}$
0,580	3,6442$_{63}$	−0,48175$_{550}$	−0,87631$_{305}$	0,54975$_{822}$	1,81901$_{2679}$	0,27899$_{604}$	−0,96029$_{174}$	−0,29053$_{681}$	−3,44202$_{8254}$
0,581	3,6505$_{63}$	−0,48725$_{548}$	−0,87326$_{308}$	0,55797$_{827}$	1,79222$_{2618}$	0,27295$_{605}$	−0,96203$_{169}$	−0,28372$_{677}$	−3,52456$_{8623}$
0,582	3,6568$_{63}$	−0,49273$_{546}$	−0,87018$_{311}$	0,56624$_{833}$	1,76604$_{2560}$	0,26690$_{606}$	−0,96372$_{166}$	−0,27695$_{676}$	−3,61079$_{9025}$
0,583	3,6631$_{63}$	−0,49819$_{543}$	−0,86707$_{315}$	0,57457$_{838}$	1,74044$_{2502}$	0,26084$_{607}$	−0,96538$_{162}$	−0,27019$_{673}$	−3,70104$_{9454}$
0,584	3,6694$_{63}$	−0,50362$_{542}$	−0,86392$_{318}$	0,58295$_{845}$	1,71542$_{2451}$	0,25477$_{608}$	−0,96700$_{158}$	−0,26346$_{670}$	−3,79558$_{9915}$
0,585	3,6757$_{62}$	−0,50904$_{540}$	−0,86074$_{321}$	0,59140$_{851}$	1,69091$_{2399}$	0,24869$_{609}$	−0,96858$_{155}$	−0,25676$_{669}$	−3,89473
0,586	3,6819$_{63}$	−0,51444$_{538}$	−0,85753$_{325}$	0,59991$_{858}$	1,66692$_{2350}$	0,24260$_{610}$	−0,97013$_{150}$	−0,25007$_{666}$	−3,99889
0,587	3,6882$_{63}$	−0,51982$_{535}$	−0,85428$_{329}$	0,60849$_{864}$	1,64342$_{2301}$	0,23650$_{611}$	−0,97163$_{147}$	−0,24341$_{665}$	−4,10837
0,588	3,6945$_{63}$	−0,52517$_{534}$	−0,85099$_{331}$	0,61713$_{871}$	1,62041$_{2255}$	0,23039$_{612}$	−0,97310$_{143}$	−0,23676$_{663}$	−4,22371
0,589	3,7008$_{63}$	−0,53051$_{532}$	−0,84768$_{335}$	0,62584$_{878}$	1,59786$_{2212}$	0,22427$_{613}$	−0,97453$_{139}$	−0,23013$_{661}$	−4,34534
0,590	3,7071$_{63}$	−0,53583$_{529}$	−0,84433$_{339}$	0,63462$_{885}$	1,57574$_{2167}$	0,21814$_{613}$	−0,97592$_{135}$	−0,22352$_{658}$	−4,47382
0,591	3,7134$_{62}$	−0,54112$_{527}$	−0,84094$_{341}$	0,64347$_{891}$	1,55407$_{2123}$	0,21201$_{615}$	−0,97727$_{131}$	−0,21694$_{657}$	−4,60955
0,592	3,7196$_{63}$	−0,54639$_{526}$	−0,83753$_{345}$	0,65238$_{901}$	1,53284$_{2087}$	0,20586$_{615}$	−0,97858$_{128}$	−0,21037$_{656}$	−4,75362
0,593	3,7259$_{63}$	−0,55165$_{523}$	−0,83408$_{348}$	0,66139$_{907}$	1,51197$_{2045}$	0,19971$_{616}$	−0,97986$_{123}$	−0,20381$_{653}$	−4,90641
0,594	3,7322$_{63}$	−0,55688$_{520}$	−0,83060$_{352}$	0,67046$_{914}$	1,49152$_{2006}$	0,19355$_{617}$	−0,98109$_{120}$	−0,19728$_{652}$	−5,06892
0,595	3,7385$_{63}$	−0,56208$_{519}$	−0,82708$_{355}$	0,67960$_{923}$	1,47146$_{1972}$	0,18738$_{617}$	−0,98229$_{116}$	−0,19076$_{650}$	−5,24224
0,596	3,7448$_{63}$	−0,56727$_{516}$	−0,82353$_{358}$	0,68883$_{930}$	1,45174$_{1934}$	0,18121$_{619}$	−0,98345$_{111}$	−0,18426$_{650}$	−5,42713
0,597	3,7511$_{62}$	−0,57243$_{514}$	−0,81995$_{361}$	0,69813$_{938}$	1,43240$_{1900}$	0,17502$_{619}$	−0,98456$_{108}$	−0,17776$_{647}$	−5,62541
0,598	3,7573$_{63}$	−0,57757$_{512}$	−0,81634$_{365}$	0,70751$_{948}$	1,41340$_{1868}$	0,16883$_{619}$	−0,98564$_{105}$	−0,17129$_{646}$	−5,83806
0,599	3,7636$_{63}$	−0,58269$_{510}$	−0,81269$_{367}$	0,71699$_{956}$	1,39472$_{1834}$	0,16264$_{621}$	−0,98669$_{100}$	−0,16483$_{645}$	−6,06671
0,600	3,7699$_{63}$	−0,58779$_{507}$	−0,80902$_{371}$	0,72655$_{964}$	1,37638$_{1803}$	0,15643$_{620}$	−0,98769$_{96}$	−0,15838$_{643}$	−6,31394

x	$2\pi x$		$\ln 2\pi x$		$e^{2\pi x}$		$e^{-2\pi x}$		Sin $2\pi x$		Cos $2\pi x$		Tang $2\pi x$		Cotg $2\pi x$		Amp $2\pi x$	
0,600	3,7699	63	1,32705	167	43,376	273	0,0231	2	21,677	136	21,700	136	0,99894	1	1,0011	0	1,5248	3
0,601	3,7762	63	1,32872	167	43,649	276	0,0229	1	21,813	138	21,836	138	0,99895	2	1,0011	1	1,5251	3
0,602	3,7825	63	1,33039	166	43,925	277	0,0228	2	21,951	139	21,974	138	0,99897	1	1,0010	0	1,5254	2
0,603	3,7888	62	1,33205	164	44,202	278	0,0226	1	22,090	139	22,112	139	0,99898	1	1,0010	0	1,5256	3
0,604	3,7950	63	1,33369	166	44,480	281	0,0225	2	22,229	140	22,251	140	0,99899	1	1,0010	0	1,5259	3
0,605	3,8013	63	1,33535	165	44,761	282	0,0223	1	22,369	142	22,391	142	0,99900	1	1,0010	0	1,5262	3
0,606	3,8076	63	1,33700	166	45,043	283	0,0222	1	22,511	141	22,533	141	0,99901	2	1,0010	0	1,5265	2
0,607	3,8139	63	1,33866	165	45,326	286	0,0221	2	22,652	143	22,674	143	0,99903	1	1,0010	0	1,5267	3
0,608	3,8202	63	1,34031	163	45,612	288	0,0219	1	22,795	144	22,817	144	0,99904	1	1,0010	0	1,5270	3
0,609	3,8265	62	1,34194	164	45,900	289	0,0218	1	22,939	145	22,961	144	0,99905	2	1,0010	1	1,5273	3
0,610	3,8327	63	1,34358	164	46,189	291	0,0217	2	23,084	145	23,105	146	0,99907	1	1,0009	0	1,5276	2
0,611	3,8390	63	1,34522	163	46,480	293	0,0215	1	23,229	147	23,251	146	0,99908	1	1,0009	0	1,5278	3
0,612	3,8453	63	1,34685	164	46,773	295	0,0214	2	23,376	147	23,397	147	0,99909	1	1,0009	0	1,5281	3
0,613	3,8516	63	1,34849	164	47,068	297	0,0212	1	23,523	149	23,544	149	0,99910	1	1,0009	0	1,5284	2
0,614	3,8579	63	1,35013	162	47,365	298	0,0211	1	23,672	149	23,693	149	0,99911	1	1,0009	0	1,5286	3
0,615	3,8642	62	1,35175	162	47,663	300	0,0210	2	23,821	150	23,842	150	0,99912	1	1,0009	0	1,5289	3
0,616	3,8704	63	1,35337	162	47,963	302	0,0208	1	23,971	151	23,992	151	0,99913	1	1,0009	0	1,5292	2
0,617	3,8767	63	1,35499	162	48,265	305	0,0207	1	24,122	153	24,143	152	0,99914	1	1,0009	0	1,5294	2
0,618	3,8830	63	1,35661	162	48,570	306	0,0206	1	24,275	153	24,295	153	0,99915	1	1,0009	1	1,5296	2
0,619	3,8893	63	1,35823	162	48,876	308	0,0205	2	24,428	154	24,448	154	0,99916	1	1,0008	0	1,5298	3
0,620	3,8956	63	1,35985	161	49,184	310	0,0203	1	24,582	155	24,602	155	0,99917	1	1,0008	0	1,5301	3
0,621	3,9019	62	1,36146	160	49,494	312	0,0202	1	24,737	156	24,757	156	0,99918	1	1,0008	0	1,5304	2
0,622	3,9081	63	1,36306	161	49,806	314	0,0201	1	24,893	157	24,913	157	0,99919	1	1,0008	0	1,5306	3
0,623	3,9144	63	1,36467	160	50,120	316	0,0200	2	25,050	158	25,070	158	0,99920	1	1,0008	0	1,5309	2
0,624	3,9207	63	1,36627	161	50,436	318	0,0198	1	25,208	159	25,228	159	0,99921	1	1,0008	0	1,5311	3
0,625	3,9270	63	1,36788	160	50,754	320	0,0197	1	25,367	160	25,387	160	0,99922	1	1,0008	0	1,5314	3
0,626	3,9333	63	1,36948	160	51,074	322	0,0196	1	25,527	161	25,547	161	0,99923	1	1,0008	0	1,5317	2
0,627	3,9396	62	1,37108	158	51,396	324	0,0195	2	25,688	162	25,708	162	0,99924	1	1,0008	0	1,5319	3
0,628	3,9458	63	1,37266	159	51,720	326	0,0193	1	25,850	163	25,870	162	0,99925	1	1,0008	1	1,5322	2
0,629	3,9521	63	1,37425	159	52,046	328	0,0192	1	26,013	164	26,032	164	0,99926	1	1,0007	0	1,5324	2
0,630	3,9584	63	1,37584	159	52,374	330	0,0191	1	26,177	166	26,196	166	0,99927	1	1,0007	0	1,5326	2
0,631	3,9647	63	1,37743	159	52,704	332	0,0190	1	26,343	166	26,362	165	0,99928	1	1,0007	0	1,5328	3
0,632	3,9710	63	1,37902	158	53,036	335	0,0189	2	26,509	167	26,527	168	0,99929	1	1,0007	0	1,5331	2
0,633	3,9773	62	1,38060	157	53,371	336	0,0187	1	26,676	168	26,695	168	0,99930	1	1,0007	0	1,5333	3
0,634	3,9835	63	1,38217	157	53,707	338	0,0186	1	26,844	169	26,863	169	0,99931	1	1,0007	0	1,5336	2
0,635	3,9898	63	1,38374	158	54,045	341	0,0185	1	27,013	171	27,032	170	0,99932	1	1,0007	0	1,5338	2
0,636	3,9961	63	1,38532	158	54,386	343	0,0184	1	27,184	171	27,202	172	0,99933	0	1,0007	0	1,5340	2
0,637	4,0024	63	1,38690	157	54,729	345	0,0183	1	27,355	173	27,374	172	0,99933	1	1,0007	0	1,5342	3
0,638	4,0087	63	1,38847	156	55,074	347	0,0182	2	27,528	173	27,546	173	0,99934	1	1,0007	0	1,5345	2
0,639	4,0150	62	1,39003	156	55,421	349	0,0180	1	27,701	175	27,719	175	0,99935	1	1,0007	1	1,5347	2
0,640	4,0212	63	1,39159	156	55,770	352	0,0179	1	27,876	176	27,894	176	0,99936	1	1,0006	0	1,5349	2
0,641	4,0275	63	1,39315	156	56,122	353	0,0178	1	28,052	177	28,070	176	0,99937	0	1,0006	0	1,5351	2
0,642	4,0338	63	1,39471	156	56,475	357	0,0177	1	28,229	178	28,246	179	0,99937	1	1,0006	0	1,5353	3
0,643	4,0401	63	1,39627	156	56,832	358	0,0176	1	28,407	179	28,425	179	0,99938	1	1,0006	0	1,5356	2
0,644	4,0464	63	1,39783	155	57,190	360	0,0175	1	28,586	180	28,604	180	0,99939	0	1,0006	0	1,5358	3
0,645	4,0527	62	1,39938	155	57,550	363	0,0174	1	28,766	182	28,784	181	0,99939	1	1,0006	0	1,5361	2
0,646	4,0589	63	1,40093	154	57,913	365	0,0173	1	28,948	182	28,965	183	0,99940	1	1,0006	0	1,5363	3
0,647	4,0652	63	1,40247	154	58,278	367	0,0172	1	29,130	184	29,148	183	0,99941	1	1,0006	0	1,5366	2
0,648	4,0715	63	1,40401	155	58,645	370	0,0171	2	29,314	185	29,331	185	0,99942	1	1,0006	0	1,5368	2
0,649	4,0778	63	1,40556	154	59,015	372	0,0169	1	29,499	186	29,516	186	0,99943	0	1,0006	0	1,5370	2
0,650	4,0841	63	1,40710	154	59,387	374	0,0168	1	29,685	187	29,702	187	0,99943	1	1,0006	0	1,5372	2

x	$2\pi x$	$\sin 2\pi x$	$\cos 2\pi x$	$\operatorname{tang} 2\pi x$	$\operatorname{cotg} 2\pi x$	$\sin^* 2\pi x$	$\cos^* 2\pi x$	$\operatorname{tang}^* 2\pi x$	$\operatorname{cotg}^* 2\pi x$
0,600	3,7699 $_{63}$	−0,58779 $_{507}$	−0,80902 $_{371}$	0,72655 $_{964}$	1,37638 $_{1803}$	0,15643 $_{620}$	−0,98769 $_{96}$	−0,15838 $_{643}$	− 6,31394
0,601	3,7762 $_{63}$	−0,59286 $_{504}$	−0,80531 $_{374}$	0,73619 $_{972}$	1,35835 $_{1771}$	0,15023 $_{622}$	−0,98865 $_{93}$	−0,15195 $_{642}$	− 6,58091
0,602	3,7825 $_{63}$	−0,59790 $_{503}$	−0,80157 $_{378}$	0,74591 $_{984}$	1,34064 $_{1745}$	0,14401 $_{622}$	−0,98958 $_{88}$	−0,14553 $_{641}$	− 6,87161
0,603	3,7888 $_{62}$	−0,60293 $_{500}$	−0,79779 $_{380}$	0,75575 $_{991}$	1,32319 $_{1714}$	0,13779 $_{623}$	−0,99046 $_{85}$	−0,13912 $_{641}$	− 7,18818
0,604	3,7950 $_{63}$	−0,60793 $_{498}$	−0,79399 $_{383}$	0,76566 $_{1002}$	1,30605 $_{1686}$	0,13156 $_{623}$	−0,99131 $_{80}$	−0,13271 $_{638}$	− 7,53504
0,605	3,8013 $_{63}$	−0,61291 $_{495}$	−0,79016 $_{387}$	0,77568 $_{1011}$	1,28919 $_{1659}$	0,12533 $_{623}$	−0,99211 $_{77}$	−0,12633 $_{638}$	− 7,91598
0,606	3,8076 $_{63}$	−0,61786 $_{493}$	−0,78629 $_{390}$	0,78579 $_{1022}$	1,27260 $_{1633}$	0,11910 $_{624}$	−0,99288 $_{73}$	−0,11995 $_{636}$	− 8,33652
0,607	3,8139 $_{63}$	−0,62279 $_{490}$	−0,78239 $_{393}$	0,79601 $_{1031}$	1,25627 $_{1607}$	0,11286 $_{625}$	−0,99361 $_{69}$	−0,11359 $_{637}$	− 8,80392
0,608	3,8202 $_{63}$	−0,62769 $_{488}$	−0,77846 $_{396}$	0,80632 $_{1043}$	1,24020 $_{1583}$	0,10661 $_{625}$	−0,99430 $_{65}$	−0,10722 $_{635}$	− 9,32652
0,609	3,8265 $_{62}$	−0,63257 $_{485}$	−0,77450 $_{399}$	0,81675 $_{1052}$	1,22437 $_{1558}$	0,10036 $_{625}$	−0,99495 $_{61}$	−0,10087 $_{634}$	− 9,91381
0,610	3,8327 $_{63}$	−0,63742 $_{483}$	−0,77051 $_{402}$	0,82727 $_{1064}$	1,20879 $_{1535}$	0,09411 $_{626}$	−0,99556 $_{57}$	−0,09453 $_{634}$	−10,57868
0,611	3,8390 $_{63}$	−0,64225 $_{481}$	−0,76649 $_{405}$	0,83791 $_{1076}$	1,19344 $_{1513}$	0,08785 $_{626}$	−0,99613 $_{54}$	−0,08819 $_{633}$	−11,33899
0,612	3,8453 $_{63}$	−0,64706 $_{477}$	−0,76244 $_{408}$	0,84867 $_{1086}$	1,17831 $_{1488}$	0,08159 $_{626}$	−0,99667 $_{49}$	−0,08186 $_{632}$	−12,21559
0,613	3,8516 $_{63}$	−0,65183 $_{476}$	−0,75836 $_{411}$	0,85953 $_{1099}$	1,16343 $_{1469}$	0,07533 $_{627}$	−0,99716 $_{45}$	−0,07554 $_{631}$	−13,23722
0,614	3,8579 $_{63}$	−0,65659 $_{472}$	−0,75425 $_{414}$	0,87052 $_{1110}$	1,14874 $_{1446}$	0,06906 $_{627}$	−0,99761 $_{42}$	−0,06923 $_{632}$	−14,44555
0,615	3,8642 $_{62}$	−0,66131 $_{470}$	−0,75011 $_{417}$	0,88162 $_{1123}$	1,13428 $_{1427}$	0,06279 $_{627}$	−0,99803 $_{37}$	−0,06291 $_{630}$	−15,89473
0,616	3,8704 $_{63}$	−0,66601 $_{468}$	−0,74594 $_{420}$	0,89285 $_{1136}$	1,12001 $_{1407}$	0,05652 $_{628}$	−0,99840 $_{34}$	−0,05661 $_{631}$	−17,66454
0,617	3,8767 $_{63}$	−0,67069 $_{464}$	−0,74174 $_{423}$	0,90421 $_{1148}$	1,10594 $_{1387}$	0,05024 $_{627}$	−0,99874 $_{29}$	−0,05030 $_{629}$	−19,87938
0,618	3,8830 $_{63}$	−0,67533 $_{462}$	−0,73751 $_{425}$	0,91569 $_{1161}$	1,09207 $_{1367}$	0,04397 $_{628}$	−0,99903 $_{26}$	−0,04401 $_{629}$	−22,72072
0,619	3,8893 $_{63}$	−0,67995 $_{460}$	−0,73326 $_{429}$	0,92730 $_{1176}$	1,07840 $_{1351}$	0,03769 $_{628}$	−0,99929 $_{22}$	−0,03772 $_{629}$	−26,51340
0,620	3,8956 $_{63}$	−0,68455 $_{456}$	−0,72897 $_{432}$	0,93906 $_{1190}$	1,06489 $_{1332}$	0,03141 $_{628}$	−0,99951 $_{17}$	−0,03143 $_{629}$	−31,82139
0,621	3,9019 $_{62}$	−0,68911 $_{454}$	−0,72465 $_{434}$	0,95096 $_{1203}$	1,05157 $_{1314}$	0,02513 $_{628}$	−0,99968 $_{14}$	−0,02514 $_{629}$	−39,78034
0,622	3,9081 $_{63}$	−0,69365 $_{452}$	−0,72031 $_{437}$	0,96299 $_{1219}$	1,03843 $_{1298}$	0,01885 $_{628}$	−0,99982 $_{10}$	−0,01885 $_{628}$	−53,04085
0,623	3,9144 $_{63}$	−0,69817 $_{448}$	−0,71594 $_{440}$	0,97518 $_{1233}$	1,02545 $_{1280}$	0,01257 $_{629}$	−0,99992 $_{6}$	−0,01257 $_{629}$	−79,54813
0,624	3,9207 $_{63}$	−0,70265 $_{446}$	−0,71154 $_{443}$	0,98751 $_{1249}$	1,01265 $_{1265}$	0,00628 $_{628}$	−0,99998 $_{2}$	−0,00628 $_{628}$	−159,23248
0,625	3,9270 $_{63}$	−0,70711 $_{443}$	−0,70711 $_{446}$	1,00000 $_{1265}$	1,00000 $_{1249}$	∓0,00000 $_{628}$	−1,00000 $_{2}$	∓0,00000 $_{628}$	∓ ∞
0,626	3,9333 $_{63}$	−0,71154 $_{440}$	−0,70265 $_{448}$	1,01265 $_{1280}$	0,98751 $_{1233}$	−0,00628 $_{629}$	−0,99998 $_{6}$	+0,00628 $_{629}$	159,23248
0,627	3,9396 $_{62}$	−0,71594 $_{437}$	−0,69817 $_{452}$	1,02545 $_{1298}$	0,97518 $_{1219}$	−0,01257 $_{628}$	−0,99992 $_{10}$	0,01257 $_{628}$	79,54813
0,628	3,9458 $_{63}$	−0,72031 $_{434}$	−0,69365 $_{454}$	1,03843 $_{1314}$	0,96299 $_{1203}$	−0,01885 $_{628}$	−0,99982 $_{14}$	0,01885 $_{629}$	53,04085
0,629	3,9521 $_{63}$	−0,72465 $_{432}$	−0,68911 $_{456}$	1,05157 $_{1332}$	0,95096 $_{1190}$	−0,02513 $_{628}$	−0,99968 $_{17}$	0,02514 $_{629}$	39,78034
0,630	3,9584 $_{63}$	−0,72897 $_{429}$	−0,68455 $_{460}$	1,06489 $_{1351}$	0,93906 $_{1176}$	−0,03141 $_{628}$	−0,99951 $_{22}$	0,03143 $_{629}$	31,82139
0,631	3,9647 $_{63}$	−0,73326 $_{425}$	−0,67995 $_{462}$	1,07840 $_{1367}$	0,92730 $_{1161}$	−0,03769 $_{628}$	−0,99929 $_{26}$	0,03772 $_{629}$	26,51340
0,632	3,9710 $_{63}$	−0,73751 $_{423}$	−0,67533 $_{464}$	1,09207 $_{1387}$	0,91569 $_{1148}$	−0,04397 $_{627}$	−0,99903 $_{29}$	0,04401 $_{629}$	22,72072
0,633	3,9773 $_{62}$	−0,74174 $_{420}$	−0,67069 $_{468}$	1,10594 $_{1407}$	0,90421 $_{1136}$	−0,05024 $_{628}$	−0,99874 $_{34}$	0,05030 $_{631}$	19,87938
0,634	3,9835 $_{63}$	−0,74594 $_{417}$	−0,66601 $_{470}$	1,12001 $_{1427}$	0,89285 $_{1123}$	−0,05652 $_{627}$	−0,99840 $_{37}$	0,05661 $_{630}$	17,66454
0,635	3,9898 $_{63}$	−0,75011 $_{414}$	−0,66131 $_{472}$	1,13428 $_{1446}$	0,88162 $_{1110}$	−0,06279 $_{627}$	−0,99803 $_{42}$	0,06291 $_{632}$	15,89473
0,636	3,9961 $_{63}$	−0,75425 $_{411}$	−0,65659 $_{476}$	1,14874 $_{1469}$	0,87052 $_{1099}$	−0,06906 $_{627}$	−0,99761 $_{45}$	0,06923 $_{631}$	14,44555
0,637	4,0024 $_{63}$	−0,75836 $_{408}$	−0,65183 $_{477}$	1,16343 $_{1488}$	0,85953 $_{1086}$	−0,07533 $_{626}$	−0,99716 $_{49}$	0,07554 $_{632}$	13,23722
0,638	4,0087 $_{63}$	−0,76244 $_{405}$	−0,64706 $_{481}$	1,17831 $_{1513}$	0,84867 $_{1076}$	−0,08159 $_{626}$	−0,99667 $_{54}$	0,08186 $_{633}$	12,21559
0,639	4,0150 $_{62}$	−0,76649 $_{402}$	−0,64225 $_{483}$	1,19344 $_{1535}$	0,83791 $_{1064}$	−0,08785 $_{626}$	−0,99613 $_{57}$	0,08819 $_{634}$	11,33899
0,640	4,0212 $_{63}$	−0,77051 $_{399}$	−0,63742 $_{485}$	1,20879 $_{1558}$	0,82727 $_{1052}$	−0,09411 $_{625}$	−0,99556 $_{61}$	0,09453 $_{634}$	10,57868
0,641	4,0275 $_{63}$	−0,77450 $_{396}$	−0,63257 $_{488}$	1,22437 $_{1583}$	0,81675 $_{1043}$	−0,10036 $_{625}$	−0,99495 $_{65}$	0,10087 $_{635}$	9,91381
0,642	4,0338 $_{63}$	−0,77846 $_{393}$	−0,62769 $_{490}$	1,24020 $_{1607}$	0,80632 $_{1031}$	−0,10661 $_{625}$	−0,99430 $_{69}$	0,10722 $_{637}$	9,32652
0,643	4,0401 $_{63}$	−0,78239 $_{390}$	−0,62279 $_{493}$	1,25627 $_{1633}$	0,79601 $_{1022}$	−0,11286 $_{624}$	−0,99361 $_{73}$	0,11359 $_{636}$	8,80392
0,644	4,0464 $_{63}$	−0,78629 $_{387}$	−0,61786 $_{495}$	1,27260 $_{1659}$	0,78579 $_{1011}$	−0,11910 $_{623}$	−0,99288 $_{77}$	0,11995 $_{638}$	8,33652
0,645	4,0527 $_{62}$	−0,79016 $_{383}$	−0,61291 $_{498}$	1,28919 $_{1686}$	0,77568 $_{1002}$	−0,12533 $_{623}$	−0,99211 $_{80}$	0,12633 $_{638}$	7,91598
0,646	4,0589 $_{63}$	−0,79399 $_{380}$	−0,60793 $_{500}$	1,30605 $_{1714}$	0,76566 $_{991}$	−0,13156 $_{623}$	−0,99131 $_{85}$	0,13271 $_{641}$	7,53504
0,647	4,0652 $_{63}$	−0,79779 $_{378}$	−0,60293 $_{503}$	1,32319 $_{1745}$	0,75575 $_{984}$	−0,13779 $_{622}$	−0,99046 $_{88}$	0,13912 $_{641}$	7,18818
0,648	4,0715 $_{63}$	−0,80157 $_{374}$	−0,59790 $_{504}$	1,34064 $_{1771}$	0,74591 $_{972}$	−0,14401 $_{622}$	−0,98958 $_{93}$	0,14553 $_{642}$	6,87161
0,649	4,0778 $_{63}$	−0,80531 $_{371}$	−0,59286 $_{507}$	1,35835 $_{1803}$	0,73619 $_{964}$	−0,15023 $_{620}$	−0,98865 $_{96}$	0,15195 $_{643}$	6,58091
0,650	4,0841 $_{63}$	−0,80902 $_{367}$	−0,58779 $_{510}$	1,37638 $_{1834}$	0,72655 $_{956}$	−0,15643 $_{621}$	−0,98769 $_{100}$	0,15838 $_{645}$	6,31394

x	$2\pi x$		$\ln 2\pi x$		$e^{2\pi x}$		$e^{-2\pi x}$		$\mathfrak{Sin}\, 2\pi x$		$\mathfrak{Cof}\, 2\pi x$		$\mathfrak{Tang}\, 2\pi x$		$\mathfrak{Cotg}\, 2\pi x$		$\mathfrak{Amp}\, 2\pi x$	
0,650	4,0841	63	1,40710	154	59,387	374	0,0168	1	29,685	187	29,702	187	0,99943	1	1,0006	0	1,5372	2
0,651	4,0904	62	1,40864	153	59,761	377	0,0167	1	29,872	189	29,889	188	0,99944	1	1,0006	0	1,5374	2
0,652	4,0966	63	1,41017	153	60,138	379	0,0166	1	30,061	189	30,077	190	0,99945	0	1,0006	0	1,5376	2
0,653	4,1029	63	1,41170	153	60,517	381	0,0165	1	30,250	189	30,267	190	0,99945	1	1,0006	1	1,5378	2
0,654	4,1092	63	1,41323	153	60,898	384	0,0164	1	30,441	192	30,457	192	0,99946	1	1,0005	0	1,5380	2
0,655	4,1155	63	1,41476	153	61,282	386	0,0163	1	30,633	193	30,649	193	0,99947	0	1,0005	0	1,5382	2
0,656	4,1218	63	1,41629	152	61,668	389	0,0162	1	30,826	194	30,842	194	0,99947	1	1,0005	0	1,5384	2
0.657	4,1281	62	1,41781	152	62,057	391	0,0161	1	31,020	196	31,036	196	0,99948	0	1,0005	0	1,5386	2
0,658	4,1343	63	1,41331	151	62,448	394	0,0160	1	31,216	197	31,232	197	0,99948	1	1,0005	0	1,5388	2
0,659	4,1406	63	1,42084	152	62,842	396	0,0159	1	31,413	198	31,429	198	0,99949	1	1,0005	0	1,5390	2
0,660	4,1469	63	1,42236	152	63,238	398	0,0158	1	31,611	199	31,627	199	0,99950	0	1,0005	0	1,5392	2
0,661	4,1532	63	1,42388	152	63,636	402	0,0157	1	31,810	201	31,826	201	0,99950	1	1,0005	0	1,5394	2
0,662	4,1595	63	1,42540	151	64,038	403	0,0156	1	32,011	202	32,027	201	0,99951	1	1,0005	0	1,5396	2
0,663	4,1658	62	1,42691	149	64,441	406	0,0155	1	32,213	203	32,228	203	0,99952	0	1,0005	0	1,5398	2
0,664	4,1720	63	1,42840	151	64,847	409	0,0154	1	32,416	204	32,431	205	0,99952	1	1,0005	0	1,5400	2
0,665	4,1783	63	1,42991	150	65,256	411	0,0153	1	32,620	206	32,636	205	0,99953	0	1,0005	0	1,5402	2
0,666	4,1846	63	1,43141	151	65,667	414	0,0152	1	32,826	207	32,841	207	0,99953	1	1,0005	0	1,5404	2
0,667	4,1909	63	1,43292	150	66,081	417	0,0151	1	33,033	209	33,048	209	0,99954	1	1,0005	0	1,5406	2
0,668	4,1972	63	1,43442	149	66,498	419	0,0150	1	33,242	209	33,257	209	0,99955	0	1,0005	0	1,5408	2
0,669	4,2035	62	1,43591	149	66,917	422	0,0149	0	33,451	211	33,466	211	0,99955	1	1,0005	1	1,5410	2
0,670	4,2097	63	1,43740	149	67,339	424	0,0149	1	33,662	212	33,677	212	0,99956	1	1,0004	0	1,5412	2
0,671	4,2160	63	1,43889	149	67,763	427	0,0148	1	33,874	214	33,889	213	0,99957	0	1,0004	0	1,5414	1
0,672	4,2223	63	1,44038	149	68,190	430	0,0147	1	34,088	215	34,102	215	0,99957	1	1,0004	0	1,5415	2
0,673	4,2286	63	1,44187	149	68,620	433	0,0146	1	34,303	216	34,317	217	0,99958	0	1,0004	0	1,5417	2
0,674	4,2349	63	1,44336	148	69,053	435	0,0145	1	34,519	218	34,534	217	0,99958	0	1,0004	0	1,5419	2
0,675	4,2412	62	1,44484	148	69,488	437	0,0144	1	34,737	219	34,751	219	0,99958	1	1,0004	0	1,5421	1
0,676	4,2474	63	1,44632	147	69,925	442	0,0143	1	34,956	220	34,970	221	0,99959	0	1,0004	0	1,5422	2
0,677	4,2537	63	1,44779	148	70,367	443	0,0142	1	35,176	222	35,191	221	0,99959	1	1,0004	0	1,5424	1
0,678	4,2600	63	1,44927	148	70,810	446	0,0141	1	35,398	223	35,412	223	0,99960	1	1,0004	0	1,5425	2
0,679	4,2663	63	1,45075	147	71,256	449	0,0140	1	35,621	225	35,635	225	0,99961	0	1,0004	0	1,5427	2
0,680	4,2726	62	1,45222	147	71,705	452	0,0139	0	35,846	226	35,860	226	0,99961	1	1,0004	0	1,5429	2
0,681	4,2788	63	1,45369	146	72,157	455	0,0139	1	36,072	227	36,086	227	0,99962	0	1,0004	0	1,5431	2
0,682	4,2851	63	1,45515	147	72,612	458	0,0138	1	36,299	229	36,313	229	0,99962	0	1,0004	0	1,5433	2
0,683	4,2914	63	1,45662	146	73,070	461	0,0137	1	36,528	230	36,542	230	0,99962	0	1,0004	0	1,5435	1
0,684	4,2977	63	1,45808	147	73,531	463	0,0136	1	36,758	232	36,772	232	0,99962	1	1,0004	0	1,5436	2
0,685	4,3040	63	1,45955	146	73,994	466	0,0135	1	36,990	233	37,004	233	0,99963	1	1,0004	0	1,5438	1
0,686	4,3103	62	1,46101	144	74,460	470	0,0134	1	37,223	235	37,237	235	0,99964	0	1,0004	0	1,5439	2
0,687	4,3165	63	1,46245	146	74,930	472	0,0133	0	37,458	236	37,472	236	0,99964	1	1,0004	1	1,5441	1
0,688	4,3228	63	1,46391	145	75,402	475	0,0133	1	37,694	238	37,708	237	0,99965	1	1,0003	0	1,5442	2
0,689	4,3291	63	1,46536	146	75,877	478	0,0132	1	37,932	239	37,945	239	0,99966	0	1,0003	0	1,5444	2
0,690	4,3354	63	1,46682	145	76,355	482	0,0131	1	38,171	241	38,184	241	0,99966	0	1,0003	0	1,5446	1
0,691	4,3417	63	1,46827	144	76,837	484	0,0130	1	38,412	242	38,425	242	0,99966	1	1,0003	0	1,5447	2
0,692	4,3480	62	1,46971	144	77,321	488	0,0129	0	38,654	244	38,667	244	0,99967	0	1,0003	0	1,5449	1
0,693	4,3542	63	1,47115	144	77,809	490	0,0129	1	38,898	245	38,911	245	0,99967	0	1,0003	0	1,5450	2
0,694	4,3605	63	1,47259	144	78,299	493	0,0128	1	39,143	247	39,156	246	0,99967	0	1,0003	0	1,5452	1
0,695	4,3668	63	1,47403	145	78,792	497	0,0127	1	39,390	248	39,402	249	0,99967	1	1,0003	0	1,5453	2
0,696	4,3731	63	1,47548	144	79,289	500	0,0126	1	39,638	250	39,651	250	0,99968	1	1,0003	0	1,5455	2
0,697	4,3794	63	1,47692	143	79,789	502	0,0125	0	39,888	251	39,901	251	0,99969	0	1,0003	0	1,5457	1
0,698	4,3857	62	1,47835	141	80,291	507	0,0125	1	40,139	254	40,152	253	0,99969	0	1,0003	0	1,5458	2
0,699	4,3919	63	1,47976	144	80,798	509	0,0124	1	40,393	254	40,405	255	0,99969	0	1,0003	0	1,5460	1
0,700	4,3982	63	1,48120	143	81,307	512	0,0123	1	40,647	256	40,660	256	0,99969	1	1,0003	0	1,5461	2

x	$2\pi x$	$\sin 2\pi x$	$\cos 2\pi x$	$\tan 2\pi x$	$\cot 2\pi x$	$\sin^* 2\pi x$	$\cos^* 2\pi x$	$\tan^* 2\pi x$	$\cot^* 2\pi x$
0,650	4,0841$_{63}$	−0,80902$_{367}$	−0,58779$_{510}$	1,37638$_{1834}$	0,72655$_{956}$	−0,15643$_{621}$	−0,98769$_{100}$	0,15838$_{645}$	6,31394
0,651	4,0904$_{62}$	−0,81269$_{365}$	−0,58269$_{512}$	1,39472$_{1868}$	0,71699$_{948}$	−0,16264$_{619}$	−0,98669$_{105}$	0,16483$_{646}$	6,06671
0,652	4,0966$_{63}$	−0,81634$_{361}$	−0,57757$_{514}$	1,41340$_{1900}$	0,70751$_{938}$	−0,16883$_{619}$	−0,98564$_{108}$	0,17129$_{647}$	5,83806
0,653	4,1029$_{63}$	−0,81995$_{358}$	−0,57243$_{516}$	1,43240$_{1934}$	0,69813$_{930}$	−0,17502$_{619}$	−0,98456$_{111}$	0,17776$_{650}$	5,62541
0,654	4,1092$_{63}$	−0,82353$_{355}$	−0,56727$_{519}$	1,45174$_{1972}$	0,68883$_{923}$	−0,18121$_{617}$	−0,98345$_{116}$	0,18426$_{650}$	5,42713
0,655	4,1155$_{63}$	−0,82708$_{352}$	−0,56208$_{520}$	1,47146$_{2006}$	0,67960$_{914}$	−0,18738$_{617}$	−0,98229$_{120}$	0,19076$_{652}$	5,24224
0,656	4,1218$_{63}$	−0,83060$_{348}$	−0,55688$_{523}$	1,49152$_{2045}$	0,67046$_{907}$	−0,19355$_{616}$	−0,98109$_{123}$	0,19728$_{653}$	5,06892
0,657	4,1281$_{62}$	−0,83408$_{345}$	−0,55165$_{526}$	1,51197$_{2087}$	0,66139$_{901}$	−0,19971$_{615}$	−0,97986$_{128}$	0,20381$_{656}$	4,90641
0,658	4,1343$_{63}$	−0,83753$_{341}$	−0,54639$_{527}$	1,53284$_{2123}$	0,65238$_{891}$	−0,20586$_{615}$	−0,97858$_{131}$	0,21037$_{657}$	4,75362
0,659	4,1406$_{63}$	−0,84094$_{339}$	−0,54112$_{529}$	1,55407$_{2167}$	0,64347$_{885}$	−0,21201$_{613}$	−0,97727$_{135}$	0,21694$_{658}$	4,60955
0,660	4,1469$_{63}$	−0,84433$_{335}$	−0,53583$_{532}$	1,57574$_{2212}$	0,63462$_{878}$	−0,21814$_{613}$	−0,97592$_{139}$	0,22352$_{661}$	4,47382
0,661	4,1532$_{63}$	−0,84768$_{331}$	−0,53051$_{534}$	1,59786$_{2255}$	0,62584$_{871}$	−0,22427$_{612}$	−0,97453$_{143}$	0,23013$_{663}$	4,34534
0,662	4,1595$_{63}$	−0,85099$_{329}$	−0,52517$_{535}$	1,62041$_{2301}$	0,61713$_{864}$	−0,23039$_{611}$	−0,97310$_{147}$	0,23676$_{665}$	4,22371
0,663	4,1658$_{62}$	−0,85428$_{325}$	−0,51982$_{538}$	1,64342$_{2350}$	0,60849$_{858}$	−0,23650$_{610}$	−0,97163$_{150}$	0,24341$_{666}$	4,10837
0,664	4,1720$_{63}$	−0,85753$_{321}$	−0,51444$_{540}$	1,66692$_{2399}$	0,59991$_{851}$	−0,24260$_{609}$	−0,97013$_{155}$	0,25007$_{689}$	3,99889
0,665	4,1783$_{63}$	−0,86074$_{318}$	−0,50904$_{542}$	1,69091$_{2451}$	0,59140$_{845}$	−0,24869$_{608}$	−0,96858$_{158}$	0,25676$_{670}$	3,89473$_{9915}$
0,666	4,1846$_{63}$	−0,86392$_{315}$	−0,50362$_{543}$	1,71542$_{2502}$	0,58295$_{838}$	−0,25477$_{607}$	−0,96700$_{162}$	0,26346$_{673}$	3,79558$_{9454}$
0,667	4,1909$_{63}$	−0,86707$_{311}$	−0,49819$_{546}$	1,74044$_{2560}$	0,57457$_{833}$	−0,26084$_{606}$	−0,96538$_{166}$	0,27019$_{676}$	3,70104$_{9025}$
0,668	4,1972$_{63}$	−0,87018$_{308}$	−0,49273$_{548}$	1,76604$_{2618}$	0,56624$_{827}$	−0,26690$_{605}$	−0,96372$_{169}$	0,27695$_{677}$	3,61079$_{8623}$
0,669	4,2035$_{62}$	−0,87326$_{305}$	−0,48725$_{550}$	1,79222$_{2679}$	0,55797$_{822}$	−0,27295$_{604}$	−0,96203$_{174}$	0,28372$_{681}$	3,52456$_{8254}$
0,670	4,2097$_{63}$	−0,87631$_{301}$	−0,48175$_{551}$	1,81901$_{2737}$	0,54975$_{815}$	−0,27899$_{603}$	−0,96029$_{177}$	0,29053$_{682}$	3,44202$_{7903}$
0,671	4,2160$_{63}$	−0,87932$_{297}$	−0,47624$_{554}$	1,84638$_{2804}$	0,54160$_{810}$	−0,28502$_{602}$	−0,95852$_{181}$	0,29735$_{686}$	3,36299$_{7578}$
0,672	4,2223$_{63}$	−0,88229$_{294}$	−0,47070$_{555}$	1,87442$_{2869}$	0,53350$_{804}$	−0,29104$_{600}$	−0,95671$_{185}$	0,30421$_{687}$	3,28721$_{7263}$
0,673	4,2286$_{63}$	−0,88523$_{291}$	−0,46515$_{557}$	1,90311$_{2939}$	0,52546$_{800}$	−0,29704$_{600}$	−0,95486$_{188}$	0,31108$_{691}$	3,21458$_{6985}$
0,674	4,2349$_{63}$	−0,88814$_{287}$	−0,45958$_{559}$	1,93250$_{3012}$	0,51746$_{794}$	−0,30304$_{598}$	−0,95298$_{192}$	0,31799$_{693}$	3,14473$_{6707}$
0,675	4,2412$_{62}$	−0,89101$_{283}$	−0,45399$_{561}$	1,96262$_{3087}$	0,50952$_{789}$	−0,30902$_{597}$	−0,95106$_{196}$	0,32492$_{696}$	3,07766$_{6455}$
0,676	4,2474$_{63}$	−0,89384$_{280}$	−0,44838$_{562}$	1,99349$_{3163}$	0,50163$_{783}$	−0,31499$_{595}$	−0,94910$_{200}$	0,33188$_{699}$	3,01311$_{6209}$
0,677	4,2537$_{63}$	−0,89664$_{277}$	−0,44276$_{564}$	2,02512$_{3246}$	0,49380$_{779}$	−0,32094$_{595}$	−0,94710$_{204}$	0,33887$_{702}$	2,95102$_{5996}$
0,678	4,2600$_{63}$	−0,89941$_{272}$	−0,43712$_{566}$	2,05758$_{3330}$	0,48601$_{774}$	−0,32689$_{593}$	−0,94506$_{207}$	0,34589$_{705}$	2,89106$_{5773}$
0,679	4,2663$_{63}$	−0,90213$_{270}$	−0,43146$_{568}$	2,09088$_{3423}$	0,47827$_{771}$	−0,33282$_{592}$	−0,94299$_{211}$	0,35294$_{708}$	2,83333$_{5574}$
0,680	4,2726$_{62}$	−0,90483$_{265}$	−0,42578$_{569}$	2,12511$_{3509}$	0,47056$_{764}$	−0,33874$_{590}$	−0,94088$_{215}$	0,36002$_{711}$	2,77759$_{5379}$
0,681	4,2788$_{63}$	−0,90748$_{263}$	−0,42009$_{571}$	2,16020$_{3612}$	0,46292$_{761}$	−0,34464$_{589}$	−0,93873$_{218}$	0,36713$_{715}$	2,72380$_{5199}$
0,682	4,2851$_{63}$	−0,91011$_{258}$	−0,41438$_{573}$	2,19632$_{3711}$	0,45531$_{757}$	−0,35053$_{588}$	−0,93655$_{222}$	0,37428$_{718}$	2,67181$_{5031}$
0,683	4,2914$_{63}$	−0,91269$_{255}$	−0,40865$_{574}$	2,23343$_{3814}$	0,44774$_{752}$	−0,35641$_{587}$	−0,93433$_{226}$	0,38146$_{722}$	2,62150$_{4871}$
0,684	4,2977$_{63}$	−0,91524$_{251}$	−0,40291$_{576}$	2,27157$_{3927}$	0,44022$_{748}$	−0,36228$_{584}$	−0,93207$_{229}$	0,38868$_{724}$	2,57279$_{4704}$
0,685	4,3040$_{63}$	−0,91775$_{248}$	−0,39715$_{578}$	2,31084$_{4046}$	0,43274$_{744}$	−0,36812$_{584}$	−0,92978$_{233}$	0,39592$_{729}$	2,52575$_{4567}$
0,686	4,3103$_{62}$	−0,92023$_{244}$	−0,39137$_{579}$	2,35130$_{4164}$	0,42530$_{740}$	−0,37396$_{582}$	−0,92745$_{237}$	0,40321$_{733}$	2,48008$_{4425}$
0,687	4,3165$_{63}$	−0,92267$_{241}$	−0,38558$_{580}$	2,39294$_{4289}$	0,41790$_{736}$	−0,37978$_{580}$	−0,92508$_{241}$	0,41054$_{736}$	2,43583$_{4289}$
0,688	4,3228$_{63}$	−0,92508$_{237}$	−0,37978$_{582}$	2,43583$_{4425}$	0,41054$_{733}$	−0,38558$_{579}$	−0,92267$_{244}$	0,41790$_{740}$	2,39294$_{4164}$
0,689	4,3291$_{63}$	−0,92745$_{233}$	−0,37396$_{584}$	2,48008$_{4567}$	0,40321$_{729}$	−0,39137$_{578}$	−0,92023$_{248}$	0,42530$_{744}$	2,35130$_{4046}$
0,690	4,3354$_{63}$	−0,92978$_{229}$	−0,36812$_{584}$	2,52575$_{4704}$	0,39592$_{724}$	−0,39715$_{576}$	−0,91775$_{251}$	0,43274$_{748}$	2,31084$_{3927}$
0,691	4,3417$_{63}$	−0,93207$_{226}$	−0,36228$_{587}$	2,57279$_{4871}$	0,38868$_{722}$	−0,40291$_{574}$	−0,91524$_{255}$	0,44022$_{752}$	2,27157$_{3814}$
0,692	4,3480$_{62}$	−0,93433$_{222}$	−0,35641$_{588}$	2,62150$_{5031}$	0,38146$_{718}$	−0,40865$_{573}$	−0,91269$_{258}$	0,44774$_{757}$	2,23343$_{3711}$
0,693	4,3542$_{63}$	−0,93655$_{218}$	−0,35053$_{589}$	2,67181$_{5199}$	0,37428$_{715}$	−0,41438$_{571}$	−0,91011$_{263}$	0,45531$_{761}$	2,19632$_{3612}$
0,694	4,3605$_{63}$	−0,93873$_{215}$	−0,34464$_{590}$	2,72380$_{5379}$	0,36713$_{711}$	−0,42009$_{569}$	−0,90748$_{265}$	0,46292$_{764}$	2,16020$_{3509}$
0,695	4,3668$_{63}$	−0,94088$_{211}$	−0,33874$_{592}$	2,77759$_{5574}$	0,36002$_{708}$	−0,42578$_{568}$	−0,90483$_{270}$	0,47056$_{771}$	2,12511$_{3423}$
0,696	4,3731$_{63}$	−0,94299$_{207}$	−0,33282$_{593}$	2,83333$_{5773}$	0,35294$_{705}$	−0,43146$_{566}$	−0,90213$_{272}$	0,47827$_{774}$	2,09088$_{3330}$
0,697	4,3794$_{63}$	−0,94506$_{204}$	−0,32689$_{595}$	2,89106$_{5996}$	0,34589$_{702}$	−0,43712$_{564}$	−0,89941$_{277}$	0,48601$_{779}$	2,05758$_{3246}$
0,698	4,3857$_{62}$	−0,94710$_{200}$	−0,32094$_{595}$	2,95102$_{6209}$	0,33887$_{699}$	−0,44276$_{562}$	−0,89664$_{280}$	0,49380$_{783}$	2,02512$_{3163}$
0,699	4,3919$_{63}$	−0,94910$_{196}$	−0,31499$_{597}$	3,01311$_{6455}$	0,33188$_{696}$	−0,44838$_{561}$	−0,89384$_{283}$	0,50163$_{789}$	1,99349$_{3087}$
0,700	4,3982$_{63}$	−0,95106$_{192}$	−0,30902$_{598}$	3,07766$_{6707}$	0,32492$_{693}$	−0,45399$_{559}$	−0,89101$_{287}$	0,50952$_{794}$	1,96262$_{3012}$

x	$2\pi x$		$\ln 2\pi x$		$e^{2\pi x}$		$e^{-2\pi x}$		Sin $2\pi x$		Cos $2\pi x$		Tang $2\pi x$		Cotg $2\pi x$		Amp $2\pi x$	
0,700	4.3982	63	1,48120	143	81,307	512	0,0123	1	40,647	256	40,660	256	0,99969	1	1,0003	0	1,5461	2
0,701	4,4045	63	1,48263	143	81,819	516	0,0122	1	40,903	259	40,916	258	0,99970	0	1,0003	0	1,5463	1
0,702	4,4108	63	1,48406	143	82,335	519	0,0121	0	41,162	259	41,174	259	0,99970	0	1,0003	0	1,5464	2
0,703	4,4171	63	1,48549	142	82,854	522	0,0121	1	41,421	261	41,433	261	0,99970	1	1,0003	0	1,5466	2
0,704	4,4234	62	1,48691	140	83,376	526	0,0120	1	41,682	263	41,694	263	0,99971	1	1,0003	0	1,5468	1
0,705	4,4296	63	1,48831	142	83,902	529	0,0119	1	41,945	265	41,957	265	0,99972	0	1,0003	0	1,5469	2
0,706	4,4359	63	1,48973	142	84,431	532	0,0118	0	42,210	265	42,222	265	0,99972	0	1,0003	0	1,5471	1
0,707	4,4422	63	1,49115	142	84,963	536	0,0118	1	42,475	268	42,487	268	0,99972	0	1,0003	0	1,5472	2
0,708	4,4485	63	1,49257	142	85,499	538	0,0117	1	42,743	270	42,755	269	0,99972	1	1,0003	0	1,5474	1
0,709	4,4548	63	1,49399	141	86,037	542	0,0116	0	43,013	271	43,024	272	0,99973	0	1,0003	0	1,5475	2
0,710	4,4611	62	1,49540	139	86,579	546	0,0116	1	43,284	273	43,296	272	0,99973	0	1,0003	0	1,5477	2
0,711	4,4673	63	1,49679	141	87,125	549	0,0115	1	43,557	274	43,568	275	0,99973	1	1,0003	0	1,5479	1
0,712	4,4736	63	1,49820	140	87,674	552	0,0114	1	43,831	276	43,843	276	0,99974	0	1,0003	0	1,5480	1
0,713	4,4799	63	1,49960	141	88,226	557	0,0113	0	44,107	279	44,119	278	0,99974	0	1,0003	0	1,5481	1
0,714	4,4862	63	1,50101	140	88,783	560	0,0113	1	44,386	280	44,397	280	0,99974	1	1,0003	0	1,5482	1
0,715	4,4925	63	1,50241	140	89,343	562	0,0112	1	44,666	281	44,677	281	0,99975	0	1,0003	0	1,5483	2
0,716	4,4988	62	1,50381	138	89,905	566	0,0111	0	44,947	283	44,958	283	0,99975	0	1,0003	0	1,5485	1
0,717	4,5050	63	1,50519	140	90,471	572	0,0111	1	45,230	286	45,241	286	0,99975	1	1,0003	1	1,5486	2
0,718	4,5113	63	1,50659	139	91,043	573	0,0110	1	45,516	287	45,527	287	0,99976	0	1,0002	0	1,5488	2
0,719	4,5176	63	1,50798	140	91,616	578	0,0109	1	45,803	289	45,814	288	0,99976	0	1,0002	0	1,5490	1
0,720	4,5239	63	1,50938	139	92,194	581	0,0108	0	46,092	290	46,102	291	0,99976	1	1,0002	0	1,5491	1
0,721	4,5302	63	1,51077	139	92,775	585	0,0108	1	46,382	293	46,393	292	0,99977	0	1,0002	0	1,5492	1
0,722	4,5365	62	1,51215	138	93,360	588	0,0107	1	46,675	294	46,685	294	0,99977	0	1,0002	0	1,5493	1
0,723	4,5427	63	1,51353	138	93,948	593	0,0106	0	46,969	296	46,979	297	0,99977	0	1,0002	0	1,5494	2
0,724	4,5490	63	1,51491	138	94,541	595	0,0106	1	47,265	298	47,276	297	0,99977	1	1,0002	0	1,5496	1
0,725	4,5553	63	1,51629	139	95,136	600	0,0105	1	47,563	300	47,573	300	0,99978	0	1,0002	0	1,5497	2
0,726	4,5616	63	1,51768	138	95,736	604	0,0104	0	47,863	302	47,873	302	0,99978	0	1,0002	0	1,5499	1
0,727	4,5679	63	1,51906	137	96,340	607	0,0104	1	48,165	303	48,175	303	0,99978	1	1,0002	0	1,5500	1
0,728	4,5742	62	1,52043	136	96,947	610	0,0103	0	48,468	306	48,478	306	0,99979	0	1,0002	0	1,5501	1
0,729	4,5804	63	1,52179	137	97,557	615	0,0103	1	48,774	307	48,784	307	0,99979	0	1,0002	0	1,5502	2
0,730	4,5867	63	1,52316	138	98,172	619	0,0102	1	49,081	310	49,091	310	0,99979	0	1,0002	0	1,5504	1
0,731	4,5930	63	1,52454	137	98,791	623	0,0101	0	49,391	311	49,401	311	0,99979	0	1,0002	0	1,5505	1
0,732	4,5993	63	1,52591	137	99,414	63	0,0101	1	49,702	314	49,712	314	0,99979	1	1,0002	0	1,5506	1
0,733	4,6056	63	1,52728	136	100,04	63	0,0100	1	50,016	315	50,026	315	0,99980	0	1,0002	0	1,5507	1
0,734	4,6119	62	1,52864	135	100,67	64	0,0099	0	50,331	317	50,341	317	0,99980	0	1,0002	0	1,5508	2
0,735	4,6181	63	1,52999	136	101,31	63	0,0099	1	50,648	319	50,658	319	0,99980	1	1,0002	0	1,5510	2
0,736	4,6244	63	1,53135	136	101,94	65	0,0098	1	50,967	322	50,977	321	0,99981	0	1,0002	0	1,5512	1
0,737	4,6307	63	1,53271	136	102,59	64	0,0097	0	51,289	323	51,298	323	0,99981	0	1,0002	0	1,5513	1
0,738	4,6370	63	1,53407	136	103,23	65	0,0097	1	51,612	325	51,621	326	0,99981	0	1,0002	0	1,5514	1
0,739	4,6433	63	1,53543	135	103,88	66	0,0096	0	51,937	328	51,947	327	0,99981	0	1,0002	0	1,5515	1
0,740	4,6496	62	1,53678	134	104,54	66	0,0096	1	52,265	329	52,274	330	0,99981	1	1,0002	0	1,5516	2
0,741	4,6558	63	1,53812	135	105,20	66	0,0095	0	52,594	331	52,604	331	0,99982	0	1,0002	0	1,5518	1
0,742	4,6621	63	1,53947	135	105,86	67	0,0095	1	52,925	334	52,935	334	0,99982	0	1,0002	0	1,5519	1
0,743	4,6684	63	1,54082	135	106,53	67	0,0094	1	53,259	336	53,269	335	0,99982	0	1,0002	0	1,5520	1
0,744	4,6747	63	1,54217	134	107,20	67	0,0093	0	53,595	338	53,604	338	0,99982	1	1,0002	0	1,5521	2
0,745	4,6810	63	1,54351	134	107,87	69	0,0093	1	53,933	340	53,942	340	0,99983	0	1,0002	0	1,5523	1
0,746	4,6873	62	1,54485	134	108,56	68	0,0092	0	54,273	342	54,282	342	0,99983	0	1,0002	0	1,5524	1
0,747	4,6935	63	1,54619	133	109,24	69	0,0092	1	54,615	344	54,624	344	0,99983	0	1,0002	0	1,5525	1
0,748	4,6998	63	1,54752	134	109,93	69	0,0091	1	54,959	347	54,968	347	0,99983	0	1,0002	0	1,5526	1
0,749	4,7061	63	1,54886	134	110,62	70	0,0090	0	55,306	348	55,315	348	0,99983	1	1,0002	0	1,5527	2
0,750	4,7124	63	1,55020	134	111,32	70	0,0090	1	55,654	351	55,663	351	0,99984	0	1,0002	0	1,5529	1

x	$2\pi x$	$\sin 2\pi x$	$\cos 2\pi x$	$\tan 2\pi x$	$\cot 2\pi x$	$\sin^* 2\pi x$	$\cos^* 2\pi x$	$\tan^* 2\pi x$	$\cot^* 2\pi x$
0,700	4,3982$_{63}$	-0,95106$_{192}$	-0,30902$_{598}$	3,07766$_{6707}$	0,32492$_{693}$	-0,45399$_{559}$	-0,89101$_{287}$	0,50952$_{794}$	1,96262$_{3012}$
0,701	4,4045$_{63}$	-0,95298$_{188}$	-0,30304$_{600}$	3,14473$_{6985}$	0,31799$_{691}$	-0,45958$_{557}$	-0,88814$_{291}$	0,51746$_{800}$	1,93250$_{2939}$
0,702	4,4108$_{63}$	-0,95486$_{185}$	-0,29704$_{600}$	3,21458$_{7263}$	0,31108$_{687}$	-0,46515$_{555}$	-0,88523$_{294}$	0,52546$_{804}$	1,90311$_{2869}$
0,703	4,4171$_{63}$	-0,95671$_{181}$	-0,29104$_{602}$	3,28721$_{7578}$	0,30421$_{686}$	-0,47070$_{554}$	-0,88229$_{297}$	0,53350$_{810}$	1,87442$_{2804}$
0,704	4,4234$_{62}$	-0,95852$_{177}$	-0,28502$_{603}$	3,36299$_{7903}$	0,29735$_{682}$	-0,47624$_{551}$	-0,87932$_{301}$	0,54160$_{815}$	1,84638$_{2737}$
0,705	4,4296$_{63}$	-0,96029$_{174}$	-0,27899$_{604}$	3,44202$_{8254}$	0,29053$_{681}$	-0,48175$_{550}$	-0,87631$_{305}$	0,54975$_{822}$	1,81901$_{2679}$
0,706	4,4359$_{63}$	-0,96203$_{169}$	-0,27295$_{605}$	3,52456$_{8623}$	0,28372$_{677}$	-0,48725$_{548}$	-0,87326$_{308}$	0,55797$_{827}$	1,79222$_{2618}$
0,707	4,4422$_{63}$	-0,96372$_{166}$	-0,26690$_{606}$	3,61079$_{9025}$	0,27695$_{676}$	-0,49273$_{546}$	-0,87018$_{311}$	0,56624$_{833}$	1,76604$_{2560}$
0,708	4,4485$_{63}$	-0,96538$_{162}$	-0,26084$_{607}$	3,70104$_{9454}$	0,27019$_{673}$	-0,49819$_{543}$	-0,86707$_{315}$	0,57457$_{838}$	1,74044$_{2502}$
0,709	4,4548$_{63}$	-0,96700$_{158}$	-0,25477$_{608}$	3,79558$_{9915}$	0,26346$_{670}$	-0,50362$_{542}$	-0,86392$_{318}$	0,58295$_{845}$	1,71542$_{2451}$
0,710	4,4611$_{62}$	-0,96858$_{155}$	-0,24869$_{609}$	3,89473	0,25676$_{669}$	-0,50904$_{540}$	-0,86074$_{321}$	0,59140$_{851}$	1,69091$_{2399}$
0,711	4,4673$_{63}$	-0,97013$_{150}$	-0,24260$_{610}$	3,99889	0,25007$_{666}$	-0,51444$_{538}$	-0,85753$_{325}$	0,59991$_{858}$	1,66692$_{2350}$
0,712	4,4736$_{63}$	-0,97163$_{147}$	-0,23650$_{611}$	4,10837	0,24341$_{665}$	-0,51982$_{535}$	-0,85428$_{329}$	0,60849$_{864}$	1,64342$_{2301}$
0,713	4,4799$_{63}$	-0,97310$_{143}$	-0,23039$_{612}$	4,22371	0,23676$_{663}$	-0,52517$_{534}$	-0,85099$_{331}$	0,61713$_{871}$	1,62041$_{2255}$
0,714	4,4862$_{63}$	-0,97453$_{139}$	-0,22427$_{613}$	4,34534	0,23013$_{661}$	-0,53051$_{532}$	-0,84768$_{335}$	0,62584$_{878}$	1,59786$_{2212}$
0,715	4,4925$_{63}$	-0,97592$_{135}$	-0,21814$_{613}$	4,47382	0,22352$_{658}$	-0,53583$_{529}$	-0,84433$_{339}$	0,63462$_{885}$	1,57574$_{2167}$
0,716	4,4988$_{62}$	-0,97727$_{131}$	-0,21201$_{615}$	4,60955	0,21694$_{657}$	-0,54112$_{527}$	-0,84094$_{341}$	0,64347$_{891}$	1,55407$_{2123}$
0,717	4,5050$_{63}$	-0,97858$_{128}$	-0,20586$_{615}$	4,75362	0,21037$_{656}$	-0,54639$_{526}$	-0,83753$_{345}$	0,65238$_{901}$	1,53284$_{2087}$
0,718	4,5113$_{63}$	-0,97986$_{123}$	-0,19971$_{616}$	4,90641	0,20381$_{653}$	-0,55165$_{523}$	-0,83408$_{348}$	0,66139$_{907}$	1,51197$_{2045}$
0,719	4,5176$_{63}$	-0,98109$_{120}$	-0,19355$_{617}$	5,06892	0,19728$_{652}$	-0,55688$_{520}$	-0,83060$_{352}$	0,67046$_{914}$	1,49152$_{2006}$
0,720	4,5239$_{63}$	-0,98229$_{116}$	-0,18738$_{617}$	5,24224	0,19076$_{650}$	-0,56208$_{519}$	-0,82708$_{355}$	0,67960$_{923}$	1,47146$_{1972}$
0,721	4,5302$_{63}$	-0,98345$_{111}$	-0,18121$_{619}$	5,42713	0,18426$_{650}$	-0,56727$_{516}$	-0,82353$_{358}$	0,68883$_{930}$	1,45174$_{1934}$
0,722	4,5365$_{62}$	-0,98456$_{108}$	-0,17502$_{619}$	5,62541	0,17776$_{647}$	-0,57243$_{514}$	-0,81995$_{361}$	0,69813$_{938}$	1,43240$_{1900}$
0,723	4,5427$_{63}$	-0,98564$_{105}$	-0,16883$_{619}$	5,83806	0,17129$_{646}$	-0,57757$_{512}$	-0,81634$_{365}$	0,70751$_{948}$	1,41340$_{1868}$
0,724	4,5490$_{63}$	-0,98669$_{100}$	-0,16264$_{621}$	6,06671	0,16483$_{645}$	-0,58269$_{510}$	-0,81269$_{367}$	0,71699$_{956}$	1,39472$_{1834}$
0,725	4,5553$_{63}$	-0,98769$_{96}$	-0,15643$_{620}$	6,31394	0,15838$_{643}$	-0,58779$_{507}$	-0,80902$_{371}$	0,72655$_{964}$	1,37638$_{1803}$
0,726	4,5616$_{63}$	-0,98865$_{93}$	-0,15023$_{622}$	6,58091	0,15195$_{642}$	-0,59286$_{504}$	-0,80531$_{374}$	0,73619$_{972}$	1,35835$_{1771}$
0,727	4,5679$_{63}$	-0,98958$_{88}$	-0,14401$_{622}$	6,87161	0,14553$_{641}$	-0,59790$_{503}$	-0,80157$_{378}$	0,74591$_{984}$	1,34064$_{1745}$
0,728	4,5742$_{62}$	-0,99046$_{85}$	-0,13779$_{623}$	7,18818	0,13912$_{641}$	-0,60293$_{500}$	-0,79779$_{380}$	0,75575$_{991}$	1,32319$_{1714}$
0,729	4,5804$_{63}$	-0,99131$_{80}$	-0,13156$_{623}$	7,53504	0,13271$_{638}$	-0,60793$_{498}$	-0,79399$_{383}$	0,76566$_{1002}$	1,30605$_{1686}$
0,730	4,5867$_{63}$	-0,99211$_{77}$	-0,12533$_{623}$	7,91598	0,12633$_{638}$	-0,61291$_{495}$	-0,79016$_{387}$	0,77568$_{1011}$	1,28919$_{1659}$
0,731	4,5930$_{63}$	-0,99288$_{73}$	-0,11910$_{624}$	8,33652	0,11995$_{636}$	-0,61786$_{493}$	-0,78629$_{390}$	0,78579$_{1022}$	1,27260$_{1633}$
0,732	4,5993$_{63}$	-0,99361$_{69}$	-0,11286$_{625}$	8,80392	0,11359$_{637}$	-0,62279$_{490}$	-0,78239$_{393}$	0,79601$_{1031}$	1,25627$_{1607}$
0,733	4,6056$_{63}$	-0,99430$_{65}$	-0,10661$_{625}$	9,32652	0,10722$_{635}$	-0,62769$_{488}$	-0,77846$_{396}$	0,80632$_{1043}$	1,24020$_{1583}$
0,734	4,6119$_{62}$	-0,99495$_{61}$	-0,10036$_{625}$	9,91381	0,10087$_{634}$	-0,63257$_{485}$	-0,77450$_{399}$	0,81675$_{1052}$	1,22437$_{1558}$
0,735	4,6181$_{63}$	-0,99556$_{57}$	-0,09411$_{626}$	10,57868	0,09453$_{634}$	-0,63742$_{483}$	-0,77051$_{402}$	0,82727$_{1064}$	1,20879$_{1535}$
0,736	4,6244$_{63}$	-0,99613$_{54}$	-0,08785$_{626}$	11,33899	0,08819$_{633}$	-0,64225$_{481}$	-0,76649$_{405}$	0,83791$_{1076}$	1,19344$_{1513}$
0,737	4,6307$_{63}$	-0,99667$_{49}$	-0,08159$_{626}$	12,21559	0,08186$_{632}$	-0,64706$_{477}$	-0,76244$_{408}$	0,84867$_{1086}$	1,17831$_{1488}$
0,738	4,6370$_{63}$	-0,99716$_{45}$	-0,07533$_{627}$	13,23722	0,07554$_{631}$	-0,65183$_{476}$	-0,75836$_{411}$	0,85953$_{1099}$	1,16343$_{1469}$
0,739	4,6433$_{63}$	-0,99761$_{42}$	-0,06906$_{627}$	14,44555	0,06923$_{632}$	-0,65659$_{472}$	-0,75425$_{414}$	0,87052$_{1110}$	1,14874$_{1446}$
0,740	4,6496$_{62}$	-0,99803$_{37}$	-0,06279$_{627}$	15,89473	0,06291$_{630}$	-0,66131$_{470}$	-0,75011$_{417}$	0,88162$_{1123}$	1,13428$_{1427}$
0,741	4,6558$_{63}$	-0,99840$_{34}$	-0,05652$_{628}$	17,66454	0,05661$_{631}$	-0,66601$_{468}$	-0,74594$_{420}$	0,89285$_{1136}$	1,12001$_{1407}$
0,742	4,6621$_{63}$	-0 99874$_{29}$	-0,05024$_{627}$	19,87938	0,05030$_{629}$	-0,67069$_{464}$	-0,74174$_{423}$	0,90421$_{1148}$	1,10594$_{1387}$
0,743	4,6684$_{63}$	-0,99903$_{26}$	-0,04397$_{628}$	22,72072	0,04401$_{629}$	-0,67533$_{462}$	-0,73751$_{425}$	0,91569$_{1161}$	1,09207$_{1367}$
0,744	4,6747$_{63}$	-0,99929$_{22}$	-0,03769$_{628}$	26,51340	0,03772$_{629}$	-0,67995$_{460}$	-0,73326$_{429}$	0,92730$_{1176}$	1,07840$_{1351}$
0,745	4,6810$_{63}$	-0,99951$_{17}$	-0,03141$_{628}$	31,82139	0,03143$_{629}$	-0,68455$_{456}$	-0,72897$_{432}$	0,93906$_{1190}$	1,06489$_{1332}$
0,746	4,6873$_{62}$	-0,99968$_{14}$	-0,02513$_{628}$	39,78034	0,02514$_{629}$	-0,68911$_{454}$	-0,72465$_{434}$	0,95096$_{1203}$	1,05157$_{1314}$
0,747	4,6935$_{63}$	-0,99982$_{10}$	-0,01885$_{628}$	53,04085	0,01885$_{628}$	-0,69365$_{452}$	-0,72031$_{437}$	0,96299$_{1219}$	1,03843$_{1298}$
0,748	4,6998$_{63}$	-0,99992$_{6}$	-0,01257$_{629}$	79,54813	0,01257$_{629}$	-0,69817$_{448}$	-0,71594$_{440}$	0,97518$_{1233}$	1,02545$_{1280}$
0,749	4,7061$_{63}$	-0,99998$_{2}$	-0,00628$_{628}$	159,23248	0,00628$_{628}$	-0,70265$_{446}$	-0,71154$_{443}$	0,98751$_{1249}$	1,01265$_{1265}$
0,750	4,7124$_{63}$	-1,00000$_{2}$	∓0,00000$_{628}$	± ∞	∓0,00000$_{628}$	-0,70711$_{443}$	-0,70711$_{446}$	1,00000$_{1265}$	1,00000$_{1249}$

x	$2\pi x$		$\ln 2\pi x$		$e^{2\pi x}$		$e^{-2\pi x}$		$\mathfrak{Sin}\, 2\pi x$		$\mathfrak{Cof}\, 2\pi x$		$\mathfrak{Tang}\, 2\pi x$		$\mathfrak{Cotg}\, 2\pi x$		$\mathfrak{Amp}\, 2\pi x$	
0,750	4,7124	63	1,55020	134	111,32	70	0,0090	1	55,654	351	55,663	351	0,99984	0	1,0002	0	1,5529	1
0,751	4,7187	63	1,55154	133	112,02	71	0,0089	0	56,005	354	56,014	353	0,99984	0	1,0002	0	1,5530	1
0,752	4,7250	63	1,55287	133	112,73	71	0,0089	1	56,359	355	56,367	355	0,99984	0	1,0002	0	1,5531	1
0,753	4,7313	62	1,55420	131	113,44	71	0,0088	0	56,714	357	56,722	358	0,99984	0	1,0002	0	1,5532	1
0,754	4,7375	63	1,55551	133	114,15	72	0,0088	1	57,071	360	57,080	360	0,99984	1	1,0002	0	1,5533	1
0,755	4,7438	63	1,55684	133	114,87	72	0,0087	0	57,431	362	57,440	362	0,99985	0	1,0002	0	1,5534	1
0,756	4,7501	63	1,55817	132	115,59	73	0,0087	1	57,793	364	57,802	364	0,99985	0	1,0002	0	1,5535	1
0,757	4,7564	63	1,55949	133	116,32	74	0,0086	1	58,157	367	58,166	366	0,99985	0	1,0002	0	1,5536	1
0,758	4,7627	63	1,56082	132	117,06	73	0,0085	0	58,524	369	58,532	369	0,99985	0	1,0002	0	1,5537	1
0,759	4,7690	62	1,56214	130	117,79	75	0,0085	1	58,893	371	58,901	371	0,99985	1	1,0002	1	1,5538	1
0,760	4,7752	63	1,56344	132	118,54	74	0,0084	0	59,264	373	59,272	374	0,99986	0	1,0001	0	1,5539	1
0,761	4,7815	63	1,56476	131	119,28	76	0,0084	1	59,637	377	59,646	376	0,99986	0	1,0001	0	1,5540	1
0,762	4,7878	63	1,56607	132	120,04	75	0,0083	0	60,014	378	60,022	378	0,99986	0	1,0001	0	1,5541	1
0,763	4,7941	63	1,56739	131	120,79	76	0,0083	1	60,392	380	60,400	381	0,99986	0	1,0001	0	1,5542	1
0,764	4,8004	63	1,56870	130	121,55	77	0,0082	0	60,772	384	60,781	383	0,99986	0	1,0001	0	1,5543	1
0,765	4,8067	62	1,57000	131	122,32	77	0,0082	1	61,156	385	61,164	385	0,99986	1	1,0001	0	1,5544	1
0,766	4,8129	63	1,57131	130	123,09	78	0,0081	0	61,541	388	61,549	388	0,99987	0	1,0001	0	1,5545	1
0,767	4,8192	63	1,57261	131	123,87	78	0,0081	1	61,929	391	61,937	391	0,99987	0	1,0001	0	1,5546	1
0,768	4,8255	63	1,57392	130	124,65	78	0,0080	0	62,320	392	62,328	392	0,99987	0	1,0001	0	1,5547	1
0,769	4,8318	63	1,57522	131	125,43	79	0,0080	1	62,712	396	62,720	396	0,99987	0	1,0001	0	1,5548	1
0,770	4,8381	63	1,57653	130	126,22	80	0,0079	0	63,108	398	63,116	398	0,99987	0	1,0001	0	1,5549	1
0,771	4,8444	62	1,57783	128	127,02	80	0,0079	1	63,506	400	63,514	400	0,99987	1	1,0001	0	1,5550	1
0,772	4,8506	63	1,57911	129	127,82	80	0,0078	0	63,906	403	63,914	402	0,99988	0	1,0001	0	1,5551	1
0,773	4,8569	63	1,58040	130	128,62	82	0,0078	1	64,309	405	64,316	406	0,99988	0	1,0001	0	1,5552	1
0,774	4,8632	63	1,58170	129	129,44	81	0,0077	0	64,714	408	64,722	408	0,99988	0	1,0001	0	1,5553	1
0,775	4,8695	63	1,58299	130	130,25	82	0,0077	1	65,122	410	65,130	410	0,99988	0	1,0001	0	1,5554	1
0,776	4,8758	63	1,58429	129	131,07	83	0,0076	0	65,532	414	65,540	414	0,99988	0	1,0001	0	1,5555	1
0,777	4,8821	62	1,58558	127	131,90	83	0,0076	1	65,946	415	65,954	415	0,99988	0	1,0001	0	1,5556	0
0,778	4,8883	63	1,58685	129	132,73	84	0,0075	0	66,361	419	66,369	418	0,99988	1	1,0001	0	1,5556	1
0,779	4,8946	63	1,58814	128	133,57	84	0,0075	1	66,780	421	66,787	421	0,99989	0	1,0001	0	1,5557	1
0,780	4,9009	63	1,58942	129	134,41	85	0,0074	0	67,201	423	67,208	424	0,99989	0	1,0001	0	1,5558	1
0,781	4,9072	63	1,59071	128	135,26	85	0,0074	1	67,624	426	67,632	426	0,99989	0	1,0001	0	1,5559	1
0,782	4,9135	63	1,59199	128	136,11	86	0,0073	0	68,050	429	68,058	428	0,99989	0	1,0001	0	1,5560	1
0,783	4,9198	62	1,59327	126	136,97	86	0,0073	0	68,479	432	68,486	433	0,99989	0	1,0001	0	1,5561	1
0,784	4,9260	63	1,59453	128	137,83	87	0,0073	1	68,911	435	68,919	434	0,99989	1	1,0001	0	1,5562	1
0,785	4,9323	63	1,59581	128	138,70	87	0,0072	0	69,346	436	69,353	437	0,99990	0	1,0001	0	1,5563	1
0,786	4,9386	63	1,59709	127	139,57	88	0,0072	1	69,782	441	69,790	440	0,99990	0	1,0001	0	1,5564	1
0,787	4,9449	63	1,59836	127	140,45	89	0,0071	0	70,223	442	70,230	442	0,99990	0	1,0001	0	1,5565	1
0,788	4,9512	62	1,59963	125	141,34	89	0,0071	1	70,665	445	70,672	445	0,99990	0	1,0001	0	1,5566	1
0,789	4,9574	63	1,60088	127	142,23	89	0,0070	0	71,110	449	71,117	449	0,99990	0	1,0001	0	1,5567	0
0,790	4,9637	63	1,60215	127	143,12	91	0,0070	1	71,559	451	71,566	451	0,99990	0	1,0001	0	1,5567	1
0,791	4,9700	63	1,60342	127	144,03	90	0,0069	0	72,010	454	72,017	454	0,99990	0	1,0001	0	1,5568	1
0,792	4,9763	63	1,60469	127	144,93	92	0,0069	0	72,464	457	72,471	457	0,99990	1	1,0001	0	1,5569	1
0,793	4,9826	63	1,60596	126	145,85	92	0,0069	1	72,921	459	72,928	459	0,99991	0	1,0001	0	1,5570	1
0,794	4,9889	62	1,60722	124	146,77	92	0,0068	0	73,380	463	73,387	463	0,99991	0	1,0001	0	1,5571	1
0,795	4,9951	63	1,60846	126	147,69	93	0,0068	1	73,843	466	73,850	465	0,99991	0	1,0001	0	1,5572	1
0,796	5,0014	63	1,60972	126	148,62	94	0,0067	0	74,309	468	74,315	469	0,99991	0	1,0001	0	1,5573	0
0,797	5,0077	63	1,61098	126	149,56	94	0,0067	1	74,777	471	74,784	471	0,99991	0	1,0001	0	1,5573	1
0,798	5,0140	63	1,61224	125	150,50	95	0,0066	0	75,248	475	75,255	474	0,99991	0	1,0001	0	1,5574	1
0,799	5,0203	63	1,61349	125	151,45	96	0,0066	1	75,723	477	75,729	477	0,99991	0	1,0001	0	1,5575	1
0,800	5,0266	62	1,61474	125	152,41	96	0,0065	0	76,200	480	76,206	480	0,99991	0	1,0001	0	1,5576	1

x	$2\pi x$	$\sin 2\pi x$	$\cos 2\pi x$	$\tan g\, 2\pi x$	$\mathrm{cotg}\, 2\pi x$	$\sin^* 2\pi x$	$\cos^* 2\pi x$	$\mathrm{tang}^* 2\pi x$	$\mathrm{cotg}^* 2\pi x$
0,750	4,7124$_{63}$	−1,00000$_{2}$	∓0,00000$_{628}$	± ∞	±0,00000$_{628}$	−0,70711$_{443}$	−0,70711$_{446}$	1,00000$_{1265}$	1,00000$_{1249}$
0,751	4,7187$_{63}$	−0,99998$_{6}$	0,00628$_{629}$	−159,23248	−0,00628$_{629}$	−0,71154$_{440}$	−0,70265$_{448}$	1,01265$_{1280}$	0,98751$_{1233}$
0,752	4,7250$_{63}$	−0,99992$_{10}$	0,01257$_{628}$	−79,54813	−0,01257$_{628}$	−0,71594$_{437}$	−0,69817$_{452}$	1,02545$_{1298}$	0,97518$_{1219}$
0,753	4,7313$_{62}$	−0,99982$_{14}$	0,01885$_{628}$	−53,04085	−0,01885$_{629}$	−0,72031$_{434}$	−0,69365$_{454}$	1,03843$_{1314}$	0,96299$_{1203}$
0,754	4,7375$_{63}$	−0,99968$_{17}$	0,02513$_{628}$	−39,78034	−0,02514$_{629}$	−0,72465$_{432}$	−0,68911$_{456}$	1,05157$_{1332}$	0,95096$_{1190}$
0,755	4,7438$_{63}$	−0,99951$_{22}$	0,03141$_{628}$	−31,82139	−0,03143$_{629}$	−0,72897$_{429}$	−0,68455$_{460}$	1,06489$_{1351}$	0,93906$_{1176}$
0,756	4,7501$_{63}$	−0,99929$_{26}$	0,03769$_{628}$	−26,51340	−0,03772$_{629}$	−0,73326$_{425}$	−0,67995$_{462}$	1,07840$_{1367}$	0,92730$_{1161}$
0,757	4,7564$_{63}$	−0,99903$_{29}$	0,04397$_{627}$	−22,72072	−0,04401$_{629}$	−0,73751$_{423}$	−0,67533$_{464}$	1,09207$_{1387}$	0,91569$_{1148}$
0,758	4,7627$_{63}$	−0,99874$_{34}$	0,05024$_{628}$	−19,87938	−0,05030$_{631}$	−0,74174$_{420}$	−0,67069$_{468}$	1,10594$_{1407}$	0,90421$_{1136}$
0,759	4,7690$_{62}$	−0,99840$_{37}$	0,05652$_{627}$	−17,66454	−0,05661$_{630}$	−0,74594$_{417}$	−0,66601$_{470}$	1,12001$_{1427}$	0,89285$_{1123}$
0,760	4,7752$_{63}$	−0,99803$_{42}$	0,06279$_{627}$	−15,89473	−0,06291$_{632}$	−0,75011$_{414}$	−0,66131$_{472}$	1,13428$_{1446}$	0,88162$_{1110}$
0,761	4,7815$_{63}$	−0,99761$_{45}$	0,06906$_{627}$	−14,44555	−0,06923$_{631}$	−0,75425$_{411}$	−0,65659$_{476}$	1,14874$_{1469}$	0,87052$_{1099}$
0,762	4,7878$_{63}$	−0,99716$_{49}$	0,07533$_{626}$	−13,23722	−0,07554$_{632}$	−0,75836$_{408}$	−0,65183$_{477}$	1,16343$_{1488}$	0,85953$_{1086}$
0,763	4,7941$_{63}$	−0,99667$_{54}$	0,08159$_{626}$	−12,21559	−0,08186$_{633}$	−0,76244$_{405}$	−0,64706$_{481}$	1,17831$_{1513}$	0,84867$_{1076}$
0,764	4,8004$_{63}$	−0,99613$_{57}$	0,08785$_{626}$	−11,33899	−0,08819$_{634}$	−0,76649$_{402}$	−0,64225$_{483}$	1,19344$_{1535}$	0,83791$_{1064}$
0,765	4,8067$_{62}$	−0,99556$_{61}$	0,09411$_{625}$	−10,57868	−0,09453$_{634}$	−0,77051$_{399}$	−0,63742$_{485}$	1,20879$_{1558}$	0,82727$_{1052}$
0,766	4,8129$_{63}$	−0,99495$_{65}$	0,10036$_{625}$	− 9,91381	−0,10087$_{635}$	−0,77450$_{396}$	−0,63257$_{488}$	1,22437$_{1583}$	0,81675$_{1043}$
0,767	4,8192$_{63}$	−0,99430$_{69}$	0,10661$_{625}$	− 9,32652	−0,10722$_{637}$	−0,77846$_{393}$	−0,62769$_{490}$	1,24020$_{1607}$	0,80632$_{1031}$
0,768	4,8255$_{63}$	−0,99361$_{73}$	0,11286$_{624}$	− 8,80392	−0,11359$_{636}$	−0,78239$_{390}$	−0,62279$_{493}$	1,25627$_{1633}$	0,79601$_{1022}$
0,769	4,8318$_{63}$	−0,99288$_{77}$	0,11910$_{623}$	− 8,33652	−0,11995$_{638}$	−0,78629$_{387}$	−0,61786$_{495}$	1,27260$_{1659}$	0,78579$_{1011}$
0,770	4,8381$_{63}$	−0,99211$_{80}$	0,12533$_{623}$	− 7,91598	−0,12633$_{638}$	−0,79016$_{383}$	−0,61291$_{498}$	1,28919$_{1686}$	0,77568$_{1002}$
0,771	4,8444$_{62}$	−0,99131$_{85}$	0,13156$_{623}$	− 7,53504	−0,13271$_{641}$	−0,79399$_{380}$	−0,60793$_{500}$	1,30605$_{1714}$	0,76566$_{991}$
0,772	4,8506$_{63}$	−0,99046$_{88}$	0,13779$_{622}$	− 7,18818	−0,13912$_{641}$	−0,79779$_{378}$	−0,60293$_{503}$	1,32319$_{1745}$	0,75575$_{984}$
0,773	4,8569$_{63}$	−0,98958$_{93}$	0,14401$_{622}$	− 6,87161	−0,14553$_{642}$	−0,80157$_{374}$	−0,59790$_{504}$	1,34064$_{1771}$	0,74591$_{972}$
0,774	4,8632$_{63}$	−0,98865$_{96}$	0,15023$_{620}$	− 6,58091	−0,15195$_{643}$	−0,80531$_{371}$	−0,59286$_{507}$	1,35835$_{1803}$	0,73619$_{964}$
0,775	4,8695$_{63}$	−0,98769$_{100}$	0,15643$_{621}$	− 6,31394	−0,15838$_{645}$	−0,80902$_{367}$	−0,58779$_{510}$	1,37638$_{1834}$	0,72655$_{956}$
0,776	4,8758$_{63}$	−0,98669$_{105}$	0,16264$_{619}$	− 6,06671	−0,16483$_{646}$	−0,81269$_{365}$	−0,58269$_{512}$	1,39472$_{1868}$	0,71699$_{948}$
0,777	4,8821$_{62}$	−0,88564$_{108}$	0,16883$_{619}$	− 5,83806	−0,17129$_{647}$	−0,81634$_{361}$	−0,57757$_{514}$	1,41340$_{1900}$	0,70751$_{938}$
0,778	4,8883$_{63}$	−0,98456$_{111}$	0,17502$_{619}$	− 5,62541	−0,17776$_{650}$	−0,81995$_{358}$	−0,57243$_{516}$	1,43240$_{1934}$	0,69813$_{930}$
0,779	4,8946$_{63}$	−0,98345$_{116}$	0,18121$_{617}$	− 5,42713	−0,18426$_{650}$	−0,82353$_{355}$	−0,56727$_{519}$	1,45174$_{1972}$	0,68883$_{923}$
0,780	4,9009$_{63}$	−0,98229$_{120}$	0,18738$_{617}$	− 5,24224	−0,19076$_{652}$	−0,82708$_{352}$	−0,56208$_{520}$	1,47146$_{2006}$	0,67960$_{914}$
0,781	4,9072$_{63}$	−0,98109$_{123}$	0,19355$_{616}$	− 5,06892	−0,19728$_{653}$	−0,83060$_{348}$	−0,55688$_{523}$	1,49152$_{2045}$	0,67046$_{907}$
0,782	4,9135$_{63}$	−0,97986$_{128}$	0,19971$_{615}$	− 4,90641	−0,20381$_{656}$	−0,83408$_{345}$	−0,55165$_{526}$	1,51197$_{2087}$	0,66139$_{901}$
0,783	4,9198$_{62}$	−0,97858$_{131}$	0,20586$_{615}$	− 4,75362	−0,21037$_{657}$	−0,83753$_{341}$	−0,54639$_{527}$	1,53284$_{2123}$	0,65238$_{891}$
0,784	4,9260$_{63}$	−0,97727$_{135}$	0,21201$_{613}$	− 4,60955	−0,21694$_{658}$	−0,84094$_{339}$	−0,54112$_{529}$	1,55407$_{2167}$	0,64347$_{885}$
0,785	4,9323$_{63}$	−0,97592$_{139}$	0,21814$_{613}$	− 4,47382	−0,22352$_{661}$	−0,84433$_{335}$	−0,53583$_{532}$	1,57574$_{2212}$	0,63462$_{878}$
0,786	4,9386$_{63}$	−0,97453$_{143}$	0,22427$_{612}$	− 4,34534	−0,23013$_{663}$	−0,84768$_{331}$	−0,53051$_{534}$	1,59786$_{2255}$	0,62584$_{871}$
0,787	4,9449$_{63}$	−0,97310$_{147}$	0,23039$_{611}$	− 4,22371	−0,23676$_{665}$	−0,85099$_{329}$	−0,52517$_{535}$	1,62041$_{2301}$	0,61713$_{864}$
0,788	4,9512$_{62}$	−0,97163$_{150}$	0,23650$_{610}$	− 4,10837	−0,24341$_{666}$	−0,85428$_{325}$	−0,51982$_{538}$	1,64342$_{2350}$	0,60849$_{858}$
0,789	4,9574$_{63}$	−0,97013$_{155}$	0,24260$_{609}$	− 3,99889	−0,25007$_{669}$	−0,85753$_{321}$	−0,51444$_{540}$	1,66692$_{2399}$	0,59991$_{851}$
0,790	4,9637$_{63}$	−0,96858$_{158}$	0,24869$_{608}$	− 3,89473$_{9915}$	−0,25676$_{670}$	−0,86074$_{318}$	−0,50904$_{542}$	1,69091$_{2451}$	0,59140$_{845}$
0,791	4,9700$_{63}$	−0,96700$_{162}$	0,25477$_{607}$	− 3,79558$_{9454}$	−0,26346$_{673}$	−0,86392$_{315}$	−0,50362$_{543}$	1,71542$_{2502}$	0,58295$_{838}$
0,792	4,9763$_{63}$	−0,96538$_{166}$	0,26084$_{606}$	− 3,70104$_{9025}$	−0,27019$_{676}$	−0,86707$_{311}$	−0,49819$_{546}$	1,74044$_{2560}$	0,57457$_{833}$
0,793	4,9826$_{63}$	−0,96372$_{169}$	0,26690$_{605}$	− 3,61079$_{8623}$	−0,27695$_{677}$	−0,87018$_{308}$	−0,49273$_{548}$	1,76604$_{2618}$	0,56624$_{827}$
0,794	4,9889$_{62}$	−0,96203$_{174}$	0,27295$_{604}$	− 3,52456$_{8254}$	−0,28372$_{681}$	−0,87326$_{305}$	−0,48725$_{550}$	1,79222$_{2679}$	0,55797$_{822}$
0,795	4,9951$_{63}$	−0,96029$_{177}$	0,27899$_{603}$	− 3,44202$_{7903}$	−0,29053$_{682}$	−0,87631$_{301}$	−0,48175$_{551}$	1,81901$_{2727}$	0,54975$_{815}$
0,796	5,0014$_{63}$	−0,95852$_{181}$	0,28502$_{602}$	− 3,36299$_{7578}$	−0,29735$_{686}$	−0,87932$_{297}$	−0,47624$_{554}$	1,84638$_{2804}$	0,54160$_{810}$
0,797	5,0077$_{63}$	−0,95671$_{185}$	0,29104$_{600}$	− 3,28721$_{7263}$	−0,30421$_{687}$	−0,88229$_{294}$	−0,47070$_{555}$	1,87442$_{2869}$	0,53350$_{804}$
0,798	5,0140$_{63}$	−0,95486$_{188}$	0,29704$_{600}$	− 3,21458$_{6985}$	−0,31108$_{691}$	−0,88523$_{291}$	−0,46515$_{557}$	1,90311$_{2939}$	0,52546$_{800}$
0,799	5,0203$_{63}$	−0,95298$_{192}$	0,30304$_{598}$	− 3,14473$_{6707}$	−0,31799$_{693}$	−0,88814$_{287}$	−0,45958$_{559}$	1,93250$_{3012}$	0,51746$_{794}$
0,800	5,0266$_{62}$	−0,95106$_{196}$	0,30902$_{597}$	− 3,07766$_{6455}$	−0,32492$_{696}$	−0,89101$_{283}$	−0,45399$_{561}$	1,96262$_{3087}$	0,50952$_{789}$

x	$2\pi x$		$\ln 2\pi x$		$e^{2\pi x}$		$e^{-2\pi x}$		$\mathfrak{Sin}\, 2\pi x$		$\mathfrak{Cof}\, 2\pi x$		$\mathfrak{Tang}\, 2\pi x$		$\mathfrak{Cotg}\, 2\pi x$		$\mathfrak{Amp}\, 2\pi x$	
0,800	5,0266	62	1,61474	125	152,41	96	0,0065	0	76,200	480	76,206	480	0,99991	0	1,0001	0	1,5576	1
0,801	5,0328	63	1,61599	124	153,37	96	0,0065	0	76,680	484	76,686	484	0,99991	0	1,0001	0	1,5577	1
0,802	5,0391	63	1,61723	125	154,33	98	0,0065	1	77,164	486	77,170	486	0,99991	1	1,0001	0	1,5578	1
0,803	5,0454	63	1,61848	125	155,31	97	0,0064	0	77,650	489	77,656	489	0,99992	0	1,0001	0	1,5579	1
0,804	5,0517	63	1,61973	124	156,28	99	0,0064	0	78,139	493	78,145	493	0,99992	0	1,0001	0	1,5580	1
0,805	5,0580	63	1,62097	124	157,27	99	0,0064	1	78,632	496	78,638	497	0,99992	0	1,0001	0	1,5581	0
0,806	5,0643	62	1,62221	124	158,26	1,00	0,0063	0	79,128	498	79,135	497	0,99992	0	1,0001	0	1,5581	1
0,807	5,0705	63	1,62345	123	159,26	1,00	0,0063	1	79,626	503	79,632	503	0,99992	0	1,0001	0	1,5582	1
0,808	5,0768	63	1,62468	124	160,26	1,01	0,0062	0	80,129	504	80,135	505	0,99992	0	1,0001	0	1,5583	1
0,809	5,0831	63	1,62592	124	161,27	1,02	0,0062	0	80,633	509	80,640	508	0,99992	0	1,0001	0	1,5584	0
0,810	5,0894	63	1,62716	124	162,29	1,02	0,0062	1	81,142	511	81,148	511	0,99992	0	1,0001	0	1,5584	1
0,811	5,0957	63	1,62840	124	163,31	1,03	0,0061	0	81,653	515	81,659	515	0,99992	1	1,0001	0	1,5585	1
0,812	5,1020	62	1,62964	121	164,34	1,04	0,0061	1	82,168	517	82,174	517	0,99993	0	1,0001	0	1,5586	1
0,813	5,1082	63	1,63085	123	165,38	1,04	0,0060	0	82,685	522	82,691	522	0,99993	0	1,0001	0	1,5587	1
0,814	5,1145	63	1,63208	123	166,42	1,05	0,0060	0	83,207	524	83,213	524	0,99993	0	1,0001	0	1,5588	1
0,815	5,1208	63	1,63331	123	167,47	1,05	0,0060	1	83,731	528	83,737	528	0,99993	0	1,0001	0	1,5589	0
0,816	5,1271	63	1,63454	123	168,52	1,06	0,0059	0	84,259	530	84,265	530	0,99993	0	1,0001	0	1,5589	1
0,817	5,1334	63	1,63577	122	169,58	1,08	0,0059	0	84,789	536	84,795	536	0,99993	0	1,0001	0	1,5590	1
0,818	5,1397	62	1,63699	122	170,66	1,07	0,0059	1	85,325	538	85,331	537	0,99993	0	1,0001	0	1,5591	1
0,819	5,1459	63	1,63821	122	171,73	1,08	0,0058	0	85,863	541	85,868	542	0,99993	0	1,0001	0	1,5592	0
0,820	5,1522	63	1,63943	122	172,81	1,09	0,0058	0	86,404	545	86,410	544	0,99993	0	1,0001	0	1,5592	1
0,821	5,1585	63	1,64065	122	173,90	1,10	0,0058	1	86,949	548	86,954	548	0,99993	0	1,0001	0	1,5593	1
0,822	5,1648	63	1,64187	122	175,00	1,10	0,0057	0	87,497	551	87,502	551	0,99993	1	1,0001	0	1,5594	1
0,823	5,1711	63	1,64309	121	176,10	1,11	0,0057	1	88,048	555	88,053	556	0,99994	0	1,0001	0	1,5595	0
0,824	5,1774	62	1,64430	121	177,21	1,12	0,0056	0	88,603	559	88,609	558	0,99994	0	1,0001	0	1,5595	1
0,825	5,1836	63	1,64551	121	178,33	1,12	0,0056	0	89,162	561	89,167	562	0,99994	0	1,0001	0	1,5596	1
0,826	5,1899	63	1,64672	121	179,45	1,13	0,0056	1	89,723	566	89,729	566	0,99994	0	1,0001	0	1,5597	1
0,827	5,1962	63	1,64793	121	180,58	1,14	0,0055	0	90,289	569	90,295	569	0,99994	0	1,0001	0	1,5598	1
0,828	5,2025	63	1,64914	121	181,72	1,15	0,0055	0	90,858	573	90,864	572	0,99994	0	1,0001	0	1,5599	1
0,829	5,2088	63	1,65035	121	182,87	1,15	0,0055	1	91,431	576	91,436	577	0,99994	0	1,0001	0	1,5600	0
0,830	5,2151	62	1,65156	119	184,02	1,16	0,0054	0	92,007	580	92,013	580	0,99994	0	1,0001	0	1,5600	0
0,831	5,2213	63	1,65275	121	185,18	1,17	0,0054	0	92,587	584	92,593	583	0,99994	0	1,0001	0	1,5600	1
0,832	5,2276	63	1,65396	120	186,35	1,17	0,0054	1	93,171	588	93,176	589	0,99994	0	1,0001	0	1,5601	1
0,833	5,2339	63	1,65516	120	187,52	1,18	0,0053	0	93,759	590	93,765	590	0,99994	0	1,0001	0	1,5602	1
0,834	5,2402	63	1,65636	120	188,70	1,19	0,0053	0	94,349	595	94,355	594	0,99994	0	1,0001	0	1,5603	0
0,835	5,2465	63	1,65756	120	189,89	1,20	0,0053	1	94,944	598	94,949	598	0,99994	0	1,0001	0	1,5603	0
0,836	5,2528	62	1,65876	118	191,09	1,20	0,0052	0	95,542	603	95,547	603	0,99994	1	1,0001	0	1,5603	1
0,837	5,2590	63	1,65994	120	192,29	1,22	0,0052	0	96,145	605	96,150	606	0,99995	0	1,0001	0	1,5604	1
0,838	5,2653	63	1,66114	120	193,51	1,21	0,0052	1	96,750	610	96,756	609	0,99995	0	1,0001	0	1,5605	1
0,839	5,2716	63	1,66234	119	194,72	1,23	0,0051	0	97,360	614	97,365	614	0,99995	0	1,0001	0	1,5606	0
0,840	5,2779	63	1,66353	119	195,95	1,24	0,0051	0	97,974	618	97,979	618	0,99995	0	1,0001	0	1,5606	0
0,841	5,2842	63	1,66472	119	197,19	1,24	0,0051	1	98,592	621	98,597	621	0,99995	0	1,0001	0	1,5606	1
0,842	5,2905	62	1,66591	119	198,43	1,25	0,0050	0	99,213	626	99,218	626	0,99995	0	1,0001	0	1,5607	1
0,843	5,2967	63	1,66710	118	199,68	1,26	0,0050	0	99,839	63	99,844	63	0,99995	0	1,0001	0	1,5608	1
0,844	5,3030	63	1,66828	118	200,94	1,27	0,0050	1	100,47	63	100,47	64	0,99995	0	1,0001	0	1,5609	0
0,845	5,3093	63	1,66946	119	202,21	1,27	0,0049	0	101,10	64	101,11	63	0,99995	0	1,0001	0	1,5609	0
0,846	5,3156	63	1,67065	118	203,48	1,28	0,0049	0	101,74	64	101,74	64	0,99995	0	1,0001	0	1,5609	1
0,847	5,3219	63	1,67183	118	204,76	1,29	0,0049	0	102,38	64	102,38	65	0,99995	0	1,0001	0	1,5610	1
0,848	5,3282	62	1,67301	118	206,05	1,30	0,0049	1	103,02	65	103,03	65	0,99995	0	1,0001	0	1,5611	1
0,849	5,3344	63	1,67419	117	207,35	1,31	0,0048	0	103,67	66	103,68	65	0,99995	0	1,0001	0	1,5612	0
0,850	5,3407	63	1,67536	118	208,66	1,31	0,0048	0	104,33	66	104,33	66	0,99995	0	1,0001	0	1,5612	0

x	$2\pi x$	$\sin 2\pi x$	$\cos 2\pi x$	$\operatorname{tang} 2\pi x$	$\operatorname{cotg} 2\pi x$	$\sin^* 2\pi x$	$\cos^* 2\pi x$	$\operatorname{tang}^* 2\pi x$	$\operatorname{cotg}^* 2\pi x$
0,800	5,0266$_{62}$	−0,95106$_{196}$	0,30902$_{597}$	−3,07766$_{6455}$	−0,32492$_{696}$	−0,89101$_{283}$	−0,45399$_{561}$	1,96262$_{3087}$	0,50952$_{789}$
0,801	5,0328$_{63}$	−0,94910$_{200}$	0,31499$_{595}$	−3,01311$_{6209}$	−0,33188$_{699}$	−0,89384$_{280}$	−0,44838$_{562}$	1,99349$_{3163}$	0,50163$_{783}$
0,802	5,0391$_{63}$	−0,94710$_{204}$	0,32094$_{595}$	−2,95102$_{5996}$	−0,33887$_{702}$	−0,89664$_{277}$	−0,44276$_{564}$	2,02512$_{3246}$	0,49380$_{779}$
0,803	5,0454$_{63}$	−0,94506$_{207}$	0,32689$_{593}$	−2,89106$_{5773}$	−0,34589$_{705}$	−0,89941$_{272}$	−0,43712$_{566}$	2,05758$_{3330}$	0,48601$_{774}$
0,804	5,0517$_{63}$	−0,94299$_{211}$	0,33282$_{592}$	−2,83333$_{5574}$	−0,35294$_{708}$	−0,90213$_{270}$	−0,43146$_{568}$	2,09088$_{3423}$	0,47827$_{771}$
0,805	5,0580$_{63}$	−0,94088$_{215}$	0,33874$_{590}$	−2,77759$_{5379}$	−0,36002$_{711}$	−0,90483$_{265}$	−0,42578$_{569}$	2,12511$_{3509}$	0,47056$_{764}$
0,806	5,0643$_{62}$	−0,93873$_{218}$	0,34464$_{589}$	−2,72380$_{5199}$	−0,36713$_{715}$	−0,90748$_{263}$	−0,42009$_{571}$	2,16020$_{3612}$	0,46292$_{761}$
0,807	5,0705$_{63}$	−0,93655$_{222}$	0,35053$_{588}$	−2,67181$_{5031}$	−0,37428$_{718}$	−0,91011$_{258}$	−0,41438$_{573}$	2,19632$_{3711}$	0,45531$_{757}$
0,808	5,0768$_{63}$	−0,93433$_{226}$	0,35641$_{587}$	−2,62150$_{4871}$	−0,38146$_{722}$	−0,91269$_{255}$	−0,40865$_{574}$	2,23343$_{3814}$	0,44774$_{752}$
0,809	5,0831$_{63}$	−0,93207$_{229}$	0,36228$_{584}$	−2,57279$_{4704}$	−0,38868$_{724}$	−0,91524$_{251}$	−0,40291$_{576}$	2,27157$_{3927}$	0,44022$_{748}$
0,810	5,0894$_{63}$	−0,92978$_{233}$	0,36812$_{584}$	−2,52575$_{4567}$	−0,39592$_{729}$	−0,91775$_{248}$	−0,39715$_{578}$	2,31084$_{4046}$	0,43274$_{744}$
0,811	5,0957$_{63}$	−0,92745$_{237}$	0,37396$_{582}$	−2,48008$_{4425}$	−0,40321$_{733}$	−0,92023$_{244}$	−0,39137$_{579}$	2,35130$_{4164}$	0,42530$_{740}$
0,812	5,1020$_{62}$	−0,92508$_{241}$	0,37978$_{580}$	−2,43583$_{4289}$	−0,41054$_{736}$	−0,92267$_{241}$	−0,38558$_{580}$	2,39294$_{4289}$	0,41790$_{736}$
0,813	5,1082$_{63}$	−0,92267$_{244}$	0,38558$_{579}$	−2,39294$_{4164}$	−0,41790$_{740}$	−0,92508$_{237}$	−0,37978$_{582}$	2,43583$_{4425}$	0,41054$_{733}$
0,814	5,1145$_{63}$	−0,92023$_{248}$	0,39137$_{578}$	−2,35130$_{4046}$	−0,42530$_{744}$	−0,92745$_{233}$	−0,37396$_{584}$	2,48008$_{4567}$	0,40321$_{729}$
0,815	5,1208$_{63}$	−0,91775$_{251}$	0,39715$_{576}$	−2,31084$_{3927}$	−0,43274$_{748}$	−0,92978$_{229}$	−0,36812$_{584}$	2,52575$_{4704}$	0,39592$_{724}$
0,816	5,1271$_{63}$	−0,91524$_{255}$	0,40291$_{574}$	−2,27157$_{3814}$	−0,44022$_{752}$	−0,93207$_{226}$	−0,36228$_{587}$	2,57279$_{4871}$	0,38868$_{722}$
0,817	5,1334$_{63}$	−0,91269$_{258}$	0,40865$_{573}$	−2,23343$_{3711}$	−0,44774$_{757}$	−0,93433$_{222}$	−0,35641$_{588}$	2,62150$_{5031}$	0,38146$_{718}$
0,818	5,1397$_{62}$	−0,91011$_{263}$	0,41438$_{571}$	−2,19632$_{3612}$	−0,45531$_{761}$	−0.93655$_{218}$	−0,35053$_{589}$	2,67181$_{5199}$	0,37428$_{715}$
0,819	5,1459$_{63}$	−0,90748$_{265}$	0,42009$_{569}$	−2,16020$_{3509}$	−0,46292$_{764}$	−0,93873$_{215}$	−0,34464$_{590}$	2,72380$_{5379}$	0,36713$_{711}$
0,820	5,1522$_{63}$	−0,90483$_{270}$	0,42578$_{568}$	−2,12511$_{3423}$	−0,47056$_{771}$	−0,94088$_{211}$	−0,33874$_{592}$	2,77759$_{5574}$	0,36002$_{708}$
0,821	5,1585$_{63}$	−0,90213$_{272}$	0,43146$_{566}$	−2,09088$_{3330}$	−0,47827$_{774}$	−0,94299$_{207}$	−0,33282$_{593}$	2,83333$_{5773}$	0,35294$_{705}$
0,822	5,1648$_{63}$	−0,89941$_{277}$	0,43712$_{564}$	−2,05758$_{3246}$	−0,48601$_{779}$	−0,94506$_{204}$	−0,32689$_{595}$	2,89106$_{5996}$	0,34589$_{702}$
0,823	5,1711$_{63}$	−0,89664$_{280}$	0,44276$_{562}$	−2,02512$_{3163}$	−0,49380$_{783}$	−0,94710$_{200}$	−0,32094$_{595}$	2,95102$_{6209}$	0,33887$_{699}$
0,824	5,1774$_{62}$	−0,89384$_{283}$	0,44838$_{561}$	−1,99349$_{3087}$	−0,50163$_{789}$	−0,94910$_{196}$	−0,31499$_{597}$	3,01311$_{6455}$	0,33188$_{696}$
0,825	5,1836$_{63}$	−0,89101$_{287}$	0,45399$_{559}$	−1,96262$_{3012}$	−0,50952$_{794}$	−0,95106$_{192}$	−0,30902$_{598}$	3,07766$_{6707}$	0,32492$_{693}$
0,826	5,1899$_{63}$	−0,88814$_{291}$	0,45958$_{557}$	−1,93250$_{2939}$	−0,51746$_{800}$	−0,95298$_{188}$	−0,30304$_{600}$	3,14473$_{6985}$	0,31799$_{691}$
0,827	5,1962$_{63}$	−0,88523$_{294}$	0,46515$_{555}$	−1,90311$_{2869}$	−0,52546$_{804}$	−0,95486$_{185}$	−0,29704$_{600}$	3,21458$_{7263}$	0,31108$_{687}$
0,828	5,2025$_{63}$	−0,88229$_{297}$	0,47070$_{554}$	−1,87442$_{2804}$	−0,53350$_{810}$	−0,95671$_{181}$	−0,29104$_{602}$	3,28721$_{7578}$	0,30421$_{686}$
0,829	5,2088$_{63}$	−0,87932$_{301}$	0,47624$_{551}$	−1,84638$_{2737}$	−0,54160$_{815}$	−0,95852$_{177}$	−0,28502$_{603}$	3,36299$_{7903}$	0,29735$_{682}$
0,830	5,2151$_{62}$	−0,87631$_{305}$	0,48175$_{550}$	−1,81901$_{2679}$	−0,54975$_{822}$	−0,96029$_{174}$	−0,27899$_{604}$	3,44202$_{8254}$	0,29053$_{681}$
0,831	5,2213$_{63}$	−0,87326$_{308}$	0,48725$_{548}$	−1,79222$_{2618}$	−0,55797$_{827}$	−0,96203$_{169}$	−0,27295$_{605}$	3,52456$_{8623}$	0,28372$_{677}$
0,832	5,2276$_{63}$	−0,87018$_{311}$	0,49273$_{546}$	−1,76604$_{2560}$	−0,56624$_{833}$	−0,96372$_{166}$	−0,26690$_{606}$	3,61079$_{9025}$	0,27695$_{676}$
0,833	5,2339$_{63}$	−0,86707$_{315}$	0,49819$_{543}$	−1,74044$_{2502}$	−0,57457$_{838}$	−0,96538$_{162}$	−0,26084$_{607}$	3,70104$_{9454}$	0,27019$_{673}$
0,834	5,2402$_{63}$	−0,86392$_{318}$	0,50362$_{542}$	−1,71542$_{2451}$	−0,58295$_{845}$	−0,96700$_{158}$	−0,25477$_{608}$	3,79558$_{9915}$	0,26346$_{670}$
0,835	5,2465$_{63}$	−0,86074$_{321}$	0,50904$_{540}$	−1,69091$_{2399}$	−0,59140$_{851}$	−0,96858$_{155}$	−0,24869$_{609}$	3,89473	0,25676$_{669}$
0,836	5,2528$_{62}$	−0,85753$_{325}$	0,51444$_{538}$	−1,66692$_{2350}$	−0,59991$_{858}$	−0,97013$_{150}$	−0,24260$_{610}$	3,99889	0,25007$_{666}$
0,837	5,2590$_{63}$	−0,85428$_{329}$	0,51982$_{535}$	−1,64342$_{2301}$	−0,60849$_{864}$	−0,97163$_{147}$	−0,23650$_{611}$	4,10837	0,24341$_{665}$
0,838	5,2653$_{63}$	−0,85099$_{331}$	0,52517$_{534}$	−1,62041$_{2255}$	−0,61713$_{871}$	−0,97310$_{143}$	−0,23039$_{612}$	4,22371	0,23676$_{663}$
0,839	5,2716$_{63}$	−0,84768$_{335}$	0,53051$_{532}$	−1,59786$_{2212}$	−0,62584$_{878}$	−0,97453$_{139}$	−0,22427$_{613}$	4,34534	0,23013$_{661}$
0,840	5,2779$_{63}$	−0,84433$_{339}$	0,53583$_{529}$	−1,57574$_{2167}$	−0,63462$_{885}$	−0,97592$_{135}$	−0,21814$_{613}$	4,47382	0,22352$_{658}$
0,841	5,2842$_{63}$	−0,84094$_{341}$	0,54112$_{527}$	−1,55407$_{2123}$	−0,64347$_{891}$	−0,97727$_{131}$	−0,21201$_{615}$	4,60955	0,21694$_{657}$
0,842	5,2905$_{62}$	−0,83753$_{345}$	0,54639$_{526}$	−1,53284$_{2087}$	−0,65238$_{901}$	−0,97858$_{128}$	−0,20586$_{615}$	4,75362	0,21037$_{656}$
0,843	5,2967$_{63}$	−0,83408$_{348}$	0,55165$_{523}$	−1,51197$_{2045}$	−0,66139$_{907}$	−0,97986$_{123}$	−0,19971$_{616}$	4,90641	0,20381$_{653}$
0,844	5,3030$_{63}$	−0,83060$_{352}$	0,55688$_{520}$	−1,49152$_{2006}$	−0,67046$_{914}$	−0,98109$_{120}$	−0,19355$_{617}$	5,06892	0,19728$_{652}$
0,845	5,3093$_{63}$	−0,82708$_{355}$	0,56208$_{519}$	−1,47146$_{1972}$	−0,67960$_{923}$	−0,98229$_{116}$	−0,18738$_{617}$	5,24224	0,19076$_{650}$
0,846	5,3156$_{63}$	−0,82353$_{358}$	0,56727$_{516}$	−1,45174$_{1934}$	−0,68883$_{930}$	−0,98345$_{111}$	−0,18121$_{619}$	5,42713	0,18426$_{650}$
0,847	5,3219$_{63}$	−0,81995$_{361}$	0,57243$_{514}$	−1,43240$_{1900}$	−0,69813$_{938}$	−0,98456$_{108}$	−0,17502$_{619}$	5,62541	0,17776$_{647}$
0,848	5,3282$_{62}$	−0,81634$_{365}$	0,57757$_{512}$	−1,41340$_{1868}$	−0,70751$_{948}$	−0,98564$_{105}$	−0,16883$_{619}$	5,83806	0,17129$_{646}$
0,849	5,3344$_{63}$	−0,81269$_{367}$	0,58269$_{510}$	−1,39472$_{1834}$	−0,71699$_{956}$	−0,98669$_{100}$	−0,16264$_{621}$	6,06671	0,16483$_{645}$
0,850	5,3407$_{63}$	−0,80902$_{371}$	0,58779$_{507}$	−1,37638$_{1803}$	−0,72655$_{964}$	−0,98769$_{96}$	−0,15643$_{620}$	6,31394	0,15838$_{643}$

x	$2\pi x$		$\ln 2\pi x$		$e^{2\pi x}$		$e^{-2\pi x}$		$\mathfrak{Sin}\,2\pi x$		$\mathfrak{Cof}\,2\pi x$		$\mathfrak{Tang}\,2\pi x$		$\mathfrak{Cotg}\,2\pi x$		$\mathfrak{Amp}\,2\pi x$	
0,850	5,3407	63	1,67536	118	208,66	1,31	0,0048	0	104,33	66	104,33	66	0,99995	0	1,0001	0	1,5612	1
0,851	5,3470	63	1,67654	118	209,97	1,33	0,0048	1	104,99	66	104,99	66	0,99995	0	1,0001	0	1,5613	1
0,852	5,3533	63	1,67772	117	211,30	1,33	0,0047	0	105,65	66	105,65	67	0,99995	1	1,0001	1	1,5614	0
0,853	5,3596	63	1,67889	117	212,63	1,34	0,0047	0	106,31	67	106,32	67	0,99996	0	1,0000	0	1,5614	0
0,854	5,3659	62	1,68006	117	213,97	1,35	0,0047	1	106,98	68	106,99	67	0,99996	0	1,0000	0	1,5614	1
0,855	5,3721	63	1,68123	116	215,32	1,36	0,0046	0	107,66	68	107,66	68	0,99996	0	1,0000	0	1,5615	1
0,856	5,3784	63	1,68239	118	216,68	1,36	0,0046	0	108,34	68	108,34	68	0,99996	0	1,0000	0	1,5616	1
0,857	5,3847	63	1,68357	116	218,04	1,38	0,0046	0	109,02	69	109,02	70	0,99996	0	1,0000	0	1,5617	0
0,858	5,3910	63	1,68473	117	219,42	1,38	0,0046	1	109,71	69	109,72	68	0,99996	0	1,0000	0	1,5617	0
6,859	5,3973	63	1,68590	117	220,80	1,39	0,0045	0	110,40	69	110,40	70	0,99996	0	1,0000	0	1,5617	1
0,860	5,4036	62	1,68707	115	222,19	1,40	0,0045	0	111,09	70	111,10	70	0,99996	0	1,0000	0	1,5618	0
0,861	5,4098	63	1,68822	116	223,59	1,41	0,0045	1	111,79	71	111,80	70	0,99996	0	1,0000	0	1,5618	1
0,862	5,4161	63	1,68938	116	225,00	1,42	0,0044	0	112,50	71	112,50	71	0,99996	0	1,0000	0	1,5619	1
0,863	5,4224	63	1,69054	116	226,42	1,43	0,0044	0	113,21	71	113,21	71	0,99996	0	1,0000	0	1,5620	0
0,864	5,4287	63	1,69170	116	227,85	1,43	0,0044	0	113,92	72	113,92	72	0,99996	0	1,0000	0	1,5620	1
0,865	5,4350	63	1,69286	116	229,28	1,45	0,0044	1	114,64	73	114,64	73	0,99996	0	1,0000	0	1,5621	1
0,866	5,4413	62	1,69402	114	230,73	1,45	0,0043	0	115,37	72	115,37	72	0,99996	0	1,0000	0	1,5622	0
0,867	5,4475	63	1,69516	116	232,18	1,47	0,0043	0	116,09	74	116,09	74	0,99996	0	1,0000	0	1,5622	0
0,868	5,4538	63	1,69632	115	233,65	1,47	0,0043	0	116,83	73	116,83	73	0,99996	0	1,0000	0	1,5622	1
0,869	5,4601	63	1,69747	115	235,12	1,48	0,0043	1	117,56	74	117,56	74	0,99996	0	1,0000	0	1,5623	1
0,870	5,4664	63	1,69862	116	236,60	1,49	0,0042	0	118,30	74	118,30	75	0,99996	0	1,0000	0	1,5624	1
0,871	5,4727	63	1,69978	115	238,09	1,50	0,0042	0	119,04	75	119,05	75	0,99996	0	1,0000	0	1,5625	0
0,872	5,4790	62	1,70093	113	239,59	1,51	0,0042	1	119,79	76	119,80	75	0,99996	1	1,0000	0	1,5625	0
0,873	5,4852	63	1,70206	115	241,10	1,52	0,0041	0	120,55	76	120,55	76	0,99997	0	1,0000	0	1,5625	1
0,874	5,4915	63	1,70321	114	242,62	1,53	0,0041	0	121,31	76	121,31	77	0,99997	0	1,0000	0	1,5626	0
0,875	5,4978	63	1,70435	115	244,15	1,54	0,0041	0	122,07	77	122,08	77	0,99997	0	1,0000	0	1,5626	1
0,876	5,5041	63	1,70550	114	245,69	1,55	0,0041	1	122,84	78	122,85	77	0,99997	0	1,0000	0	1,5627	1
0,877	5,5104	63	1,70664	114	247,24	1,56	0,0040	0	123,62	78	123,62	78	0,99997	0	1,0000	0	1,5628	0
0,878	5,5167	62	1,70778	113	248,80	1,56	0,0040	0	124,40	78	124,40	78	0,99997	0	1,0000	0	1,5628	0
0,879	5,5229	63	1,70891	114	250,36	1,58	0,0040	0	125,18	79	125,18	79	0,99997	0	1,0000	0	1,5628	0
0,880	5,5292	63	1,71005	114	251,94	1,59	0,0040	1	125,97	79	125,97	80	0,99997	0	1,0000	0	1,5628	1
0,881	5,5355	63	1,71119	113	253,53	1,60	0,0039	0	126,76	80	126,77	80	0,99997	0	1,0000	0	1,5629	0
0,882	5,5418	63	1,71232	114	255,13	1,61	0,0039	0	127,56	81	127,57	80	0,99997	0	1,0000	0	1,5629	1
0,883	5,5481	63	1,71346	113	256,74	1,62	0,0039	0	128,37	81	128,37	81	0,99997	0	1,0000	0	1,5630	1
0,884	5,5544	62	1,71459	112	258,36	1,62	0,0039	1	129,18	81	129,18	81	0,99997	0	1,0000	0	1,5631	0
0,885	5,5606	63	1,71571	113	259,98	1,64	0,0038	0	129,99	82	129,99	82	0,99997	0	1,0000	0	1,5631	0
0,886	5,5669	63	1,71684	113	261,62	1,65	0,0038	0	130,81	83	130,81	83	0,99997	0	1,0000	0	1,5631	1
0,887	5,5732	63	1,71797	113	263,27	1,66	0,0038	0	131,64	83	131,64	83	0,99997	0	1,0000	0	1,5632	1
0,888	5,5795	63	1,71910	113	264,93	1,67	0,0038	0	132,47	83	132,47	83	0,99997	0	1,0000	0	1,5633	0
0,889	5,5858	63	1,72023	113	266,60	1,68	0,0038	1	133,30	84	133,30	84	0,99997	0	1,0000	0	1,5633	0
0,890	5,5921	62	1,72136	111	268,28	1,69	0,0037	0	134,14	85	134,14	85	0,99997	0	1,0000	0	1,5633	0
0,891	5,5983	63	1,72247	112	269,97	1,70	0,0037	0	134,99	85	134,99	85	0,99997	0	1,0000	0	1,5633	1
0,892	5,6046	63	1,72359	112	271,67	1,72	0,0037	0	135,84	86	135,84	86	0,99997	0	1,0000	0	1,5634	0
0,893	5,6109	63	1,72471	113	273,39	1,72	0,0037	1	136,70	86	136,70	86	0,99997	0	1,0000	0	1,5634	1
0,894	5,6172	63	1,72584	112	275,11	1,73	0,0036	0	137,56	86	137,56	86	0,99997	0	1,0000	0	1,5635	1
0,895	5,6235	63	1,72696	112	276,84	1,75	0,0036	0	138,42	88	138,42	88	0,99997	0	1,0000	0	1,5636	0
0,896	5,6298	62	1,72808	110	278,59	1,75	0,0036	0	139,30	87	139,30	87	0,99997	0	1,0000	0	1,5636	0
0,897	5,6360	63	1,72918	112	280,34	1,77	0,0036	0	140,17	89	140,17	89	0,99997	0	1,0000	0	1,5636	0
0,898	5,6423	63	1,73030	111	282,11	1,78	0,0036	1	141,06	89	141,06	89	0,99997	0	1,0000	0	1,5636	1
0,899	5,6486	63	1,73141	112	283,89	1,79	0,0035	0	141,95	89	141,95	89	0,99997	1	1,0000	0	1,5637	0
0,900	5,6549	63	1,73253	110	285,68	1,80	0,0035	0	142,84	90	142,84	90	0,99998	0	1,0000	0	1,5637	1

x	$2\pi x$	$\sin 2\pi x$	$\cos 2\pi x$	$\operatorname{tang} 2\pi x$	$\operatorname{cotg} 2\pi x$	$\sin^* 2\pi x$	$\cos^* 2\pi x$	$\operatorname{tang}^* 2\pi x$	$\operatorname{cotg}^* 2\pi x$
0,850	5,3407 63	-0,80902 371	0,58779 507	-1,37638 1803	-0,72655 964	-0,98769 96	-0,15643 620	6,31394	0,15838 643
0,851	5,3470 63	-0,80531 374	0,59286 504	-1,35835 1771	-0,73619 972	-0,98865 93	-0,15023 622	6,58091	0,15195 642
0,852	5,3533 63	-0,80157 378	0,59790 503	-1,34064 1745	-0,74591 984	-0,98958 88	-0,14401 622	6,87161	0,14553 641
0,853	5,3596 63	-0,79779 380	0,60293 500	-1,32319 1714	-0,75575 991	-0,99046 85	-0,13779 623	7,18818	0,13912 641
0,854	5,3659 62	-0,79399 383	0,60793 498	-1,30605 1686	-0,76566 1002	-0,99131 80	-0,13156 623	7,53504	0,13271 638
0,855	5,3721 63	-0,79016 387	0,61291 495	-1,28919 1659	-0,77568 1011	-0,99211 77	-0,12533 623	7,91598	0,12633 638
0,856	5,3784 63	-0,78629 390	0,61786 493	-1,27260 1633	-0,78579 1022	-0,99288 73	-0,11910 624	8,33652	0,11995 636
0,857	5,3847 63	-0,78239 393	0,62279 490	-1,25627 1607	-0,79601 1031	-0,99361 69	-0,11286 625	8,80392	0,11359 637
0,858	5,3910 63	-0,77846 396	0,62769 488	-1,24020 1583	-0,80632 1043	-0,99430 65	-0,10661 625	9,32652	0,10722 635
0,859	5,3973 63	-0,77450 399	0,63257 485	-1,22437 1558	-0,81675 1052	-0,99495 61	-0,10036 625	9,91381	0,10087 634
0,860	5,4036 62	-0,77051 402	0,63742 483	-1,20879 1535	-0,82727 1064	-0,99556 57	-0,09411 626	10,57868	0,09453 634
0,861	5,4098 63	-0,76649 405	0,64225 481	-1,19344 1513	-0,83791 1076	-0,99613 54	-0,08785 626	11,33899	0,08819 633
0,862	5,4161 63	-0,76244 408	0,64706 477	-1,17831 1488	-0,84867 1086	-0,99667 49	-0,08159 626	12,21559	0,08186 632
0,863	5,4224 63	-0,75836 411	0,65183 476	-1,16343 1469	-0,85953 1099	-0,99716 45	-0,07533 627	13,23722	0,07554 631
0,864	5,4287 63	-0,75425 414	0,65659 472	-1,14874 1446	-0,87052 1110	-0,99761 42	-0,06906 627	14,44555	0,06923 632
0,865	5,4350 63	-0,75011 417	0,66131 470	-1,13428 1427	-0,88162 1123	-0,99803 37	-0,06279 627	15,89473	0,06291 630
0,866	5,4413 62	-0,74594 420	0,66601 468	-1,12001 1407	-0,89285 1136	-0,99840 34	-0,05652 628	17,66454	0,05661 631
0,867	5,4475 63	-0,74174 423	0,67069 464	-1,10594 1387	-0,90421 1148	-0,99874 29	-0,05024 627	19,87938	0,05030 629
0,868	5,4538 63	-0,73751 425	0,67533 462	-1,09207 1367	-0,91569 1161	-0,99903 26	-0,04397 628	22,72072	0,04401 629
0,869	5,4601 63	-0,73326 429	0,67995 460	-1,07840 1351	-0,92730 1176	-0,99929 22	-0,03769 628	26,51340	0,03772 629
0,870	5,4664 63	-0,72897 432	0,68455 456	-1,06489 1332	-0,93906 1190	-0,99951 17	-0,03141 628	31,82139	0,03143 629
0,871	5,4727 63	-0,72465 434	0,68911 454	-1,05157 1314	-0,95096 1203	-0,99968 14	-0,02513 628	39,78034	0,02514 629
0,872	5,4790 62	-0,72031 437	0,69365 452	-1,03843 1298	-0,96299 1219	-0,99982 10	-0,01885 628	53,04085	0,01885 628
0,873	5,4852 63	-0,71594 440	0,69817 448	-1,02545 1280	-0,97518 1233	-0,99992 6	-0,01257 629	79,54813	0,01257 629
0,874	5,4915 63	-0,71154 443	0,70265 446	-1,01265 1265	-0,98751 1249	-0,99998 2	-0,00628 628	159,23248	0,00628 628
0,875	5,4978 63	-0,70711 446	0,70711 443	-1,00000 1249	-1,00000 1265	-1,00000 2	∓0,00000 628	± ∞	±0,00000 628
0,876	5,5041 63	-0,70265 448	0,71154 440	-0,98751 1233	-1,01265 1280	-0,99998 6	0,00628 629	-159,23248	-0,00628 629
0,877	5,5104 63	-0,69817 452	0,71594 437	-0,97518 1219	-1,02545 1298	-0,99992 10	0,01257 628	-79,54813	-0,01257 628
0,878	5,5167 62	-0,69365 454	0,72031 434	-0,96299 1203	-1,03843 1314	-0,99982 14	0,01885 628	-53,04085	-0,01885 629
0,879	5,5229 63	-0,68911 456	0,72465 432	-0,95096 1190	-1,05157 1332	-0,99968 17	0,02513 628	-39,78034	-0,02514 629
0,880	5,5292 63	-0,68455 460	0,72897 429	-0,93906 1176	-1,06489 1351	-0,99951 22	0,03141 628	-31,82139	-0,03143 629
0,881	5,5355 63	-0,67995 462	0,73326 425	-0,92730 1161	-1,07840 1367	-0,99929 26	0,03769 628	-26,51340	-0,03772 629
0,882	5,5418 63	-0,67533 464	0,73751 423	-0,91569 1148	-1,09207 1387	-0,99903 29	0,04397 627	-22,72072	-0,04401 629
0,883	5,5481 63	-0,67069 468	0,74174 420	-0,90421 1136	-1,10594 1407	-0,99874 34	0,05024 628	-19,87938	-0,05030 631
0,884	5,5544 62	-0,66601 470	0,74594 417	-0,89285 1123	-1,12001 1427	-0,99840 37	0,05652 627	-17,66454	-0,05661 630
0,885	5,5606 63	-0,66131 472	0,75011 414	-0,88162 1110	-1,13428 1446	-0,99803 42	0,06279 627	-15,89473	-0,06291 632
0,886	5,5669 63	-0,65659 476	0,75425 411	-0,87052 1099	-1,14874 1469	-0,99761 45	0,06906 627	-14,44555	-0,06923 631
0,887	5,5732 63	-0,65183 477	0,75836 408	-0,85953 1086	-1,16343 1488	-0,99716 49	0,07533 626	-13,23722	-0,07554 632
0,888	5,5795 63	-0,64706 481	0,76244 405	-0,84867 1076	-1,17831 1513	-0,99667 54	0,08159 626	-12,21559	-0,08186 633
0,889	5,5858 63	-0,64225 483	0,76649 402	-0,83791 1064	-1,19344 1535	-0,99613 57	0,08785 626	-11,33899	-0,08819 634
0,890	5,5921 62	-0,63742 485	0,77051 399	-0,82727 1052	-1,20879 1558	-0,99556 61	0,09411 625	-10,57868	-0,09453 634
0,891	5,5983 63	-0,63257 488	0,77450 396	-0,81675 1043	-1,22437 1583	-0,99495 65	0,10036 625	- 9,91381	-0,10087 635
0,892	5,6046 63	-0,62769 490	0,77846 393	-0,80632 1031	-1,24020 1607	-0,99430 69	0,10661 625	- 9,32652	-0,10722 637
0,893	5,6109 63	-0,62279 493	0,78239 390	-0,79601 1022	-1,25627 1633	-0,99361 73	0,11286 624	- 8,80392	-0,11359 636
0,894	5,6172 63	-0,61786 495	0,78629 387	-0,78579 1011	-1,27260 1659	-0,99288 77	0,11910 623	- 8,33652	-0,11995 638
0,895	5,6235 63	-0,61291 498	0,79016 383	-0,77568 1002	-1,28919 1686	-0,99211 80	0,12533 623	- 7,91598	-0,12633 638
0,896	5,6298 62	-0,60793 500	0,79399 380	-0,76566 991	-1,30605 1714	-0,99131 85	0,13156 623	- 7,53504	-0,13271 641
0,897	5,6360 63	-0,60293 503	0,79779 378	-0,75575 984	-1,32319 1745	-0,99046 88	0,13779 622	- 7,18818	-0,13912 641
0,898	5,6423 63	-0,59790 504	0,80157 374	-0,74591 972	-1,34064 1771	-0,98958 93	0,14401 622	- 6,87161	-0,14553 642
0,899	5,6486 63	-0,59286 507	0,80531 371	-0,73619 964	-1,35835 1803	-0,98865 96	0,15023 620	- 6,58091	-0,15195 643
0,900	5,6549 63	-0,58779 510	0,80902 367	-0,72655 956	-1,37638 1834	-0,98769 100	0,15643 621	- 6,31394	-0,15838 645

x	$2\pi x$		$\ln 2\pi x$		$e^{2\pi x}$		$e^{-2\pi x}$		$\mathfrak{Sin}\, 2\pi x$		$\mathfrak{Cos}\, 2\pi x$		$\mathfrak{Tang}\, 2\pi x$		$\mathfrak{Cotg}\, 2\pi x$		$\mathfrak{Amp}\, 2\pi x$	
0,900	5,6549	63	1,73253	110	285,68	1,80	0,0035	0	142,84	90	142,84	90	0,99998	0	1,0000	0	1,5637	1
0,901	5,6612	62	1,73363	111	287,48	1,81	0,0035	0	143,74	90	143,74	91	0,99998	0	1,0000	0	1,5638	1
0,902	5,6674	63	1,73474	111	289,29	1,82	0,0035	1	144,64	91	144,65	91	0,99998	0	1,0000	0	1,5639	0
0,903	5,6737	63	1,73585	110	291,11	1,84	0,0034	0	145,55	92	145,56	92	0,99998	0	1,0000	0	1,5639	0
0,904	5,6800	63	1,73695	111	292,95	1,85	0,0034	0	146,47	93	146,48	92	0,99998	0	1,0000	0	1,5639	0
0,905	5,6863	63	1,73806	111	294,80	1,86	0,0034	0	147,40	93	147,40	93	0,99998	0	1,0000	0	1,5639	1
0,906	5,6926	63	1,73917	110	296,66	1,86	0,0034	0	148,33	93	148,33	93	0,99998	0	1,0000	0	1,5640	0
0,907	5,6989	62	1,74027	110	298,52	1,89	0,0034	1	149,26	94	149,26	95	0,99998	0	1,0000	0	1,5640	1
0,908	5,7051	63	1,74137	110	300,41	1,89	0,0033	0	150,20	95	150,21	94	0,99998	0	1,0000	0	1,5641	1
0,909	5,7114	63	1,74247	110	302,30	1,90	0,0033	0	151,15	95	151,15	95	0,99998	0	1,0000	0	1,5642	0
0,910	5,7177	63	1,74357	110	304,20	1,92	0,0033	0	152,10	96	152,10	96	0,99998	0	1,0000	0	1,5642	0
0,911	5,7240	63	1,74467	110	306,12	1,93	0,0033	1	153,06	96	153,06	97	0,99998	0	1,0000	0	1,5642	1
0,912	5,7303	63	1,74577	110	308,05	1,94	0,0032	0	154,02	97	154,03	97	0,99998	0	1,0000	0	1,5643	1
0,913	5,7366	62	1,74687	108	309,99	1,96	0,0032	0	154,99	98	155,00	98	0,99998	0	1,0000	0	1,5644	0
0,914	5,7428	63	1,74795	110	311,95	1,96	0,0032	0	155,97	98	155,98	98	0,99998	0	1,0000	0	1,5644	0
0,915	5,7491	63	1,74905	109	313,91	1,98	0,0032	0	156,95	99	156,96	99	0,99998	0	1,0000	0	1,5644	0
0,916	5,7554	63	1,75014	110	315,89	1,99	0,0032	1	157,94	1,00	157,95	99	0,99998	0	1,0000	0	1,5644	1
0,917	5,7617	63	1,75124	109	317,88	2,01	0,0031	0	158,94	1,00	158,94	1,01	0,99998	0	1,0000	0	1,5645	0
0,918	5,7680	63	1,75233	109	319,89	2,01	0,0031	0	159,94	1,01	159,95	1,00	0,99998	0	1,0000	0	1,5645	1
0,919	5,7743	62	1,75342	107	321,90	2,03	0,0031	0	160,95	1,01	160,95	1,02	0,99998	0	1,0000	0	1,5646	1
0,920	5,7805	63	1,75449	109	323,93	2,04	0,0031	0	161,96	1,02	161,97	1,02	0,99998	0	1,0000	0	1,5647	0
0,921	5,7868	63	1,75558	109	325,97	2,06	0,0031	1	162,98	1,03	162,99	1,03	0,99998	0	1,0000	0	1,5647	0
0,922	5,7931	63	1,75667	109	328,03	2,06	0,0030	0	164,01	1,03	164,02	1,03	0,99998	0	1,0000	0	1,5647	0
0,923	5,7994	63	1,75776	108	330,09	2,09	0,0030	0	165,04	1,05	165,05	1,04	0,99998	0	1,0000	0	1,5647	1
0,924	5,8057	63	1,75884	109	332,18	2,09	0,0030	0	166,09	1,04	166,09	1,05	0,99998	0	1,0000	0	1,5648	0
0,925	5,8120	63	1,75993	108	334,27	2,11	0,0030	0	167,13	1,06	167,14	1,05	0,99998	0	1,0000	0	1,5648	0
0,926	5,8183	62	1,76101	107	336,38	2,12	0,0030	0	168,19	1,06	168,19	1,06	0,99998	0	1,0000	0	1,5648	1
0,927	5,8245	63	1,76208	108	338,50	2,13	0,0030	1	169,25	1,06	169,25	1,07	0,99998	0	1,0000	0	1,5649	1
0,928	5,8308	63	1,76316	108	340,63	2,15	0,0029	0	170,31	1,08	170,32	1,07	0,99998	0	1,0000	0	1,5650	0
0,929	5,8371	63	1,76424	108	342,78	2,16	0,0029	0	171,39	1,08	171,39	1,08	0,99998	0	1,0000	0	1,5650	0
0,930	5,8434	63	1,76532	107	344,94	2,17	0,0029	0	172,47	1,08	172,47	1,09	0,99998	0	1,0000	0	1,5650	0
0,931	5,8497	62	1,76639	106	347,11	2,19	0,0029	0	173,55	1,10	173,56	1,09	0,99998	0	1,0000	0	1,5650	0
0,932	5,8559	63	1,76745	108	349,30	2,21	0,0029	1	174,65	1,10	174,65	1,11	0,99998	0	1,0000	0	1,5650	1
0,933	5,8622	63	1,76853	107	351,51	2,21	0,0028	0	175,75	1,11	175,76	1,10	0,99998	0	1,0000	0	1,5651	0
0,934	5,8685	63	1,76960	108	353,72	2,23	0,0028	0	176,86	1,11	176,86	1,12	0,99998	0	1,0000	0	1,5651	0
0,935	5,8748	63	1,77068	107	355,95	2,24	0,0028	0	177,97	1,12	177,98	1,12	0,99998	0	1,0000	0	1,5651	0
0,936	5,8811	63	1,77175	107	358,19	2,26	0,0028	0	179,09	1,13	179,10	1,13	0,99998	0	1,0000	0	1,5651	1
0,937	5,8874	62	1,77282	105	360,45	2,27	0,0028	0	180,22	1,14	180,23	1,13	0,99998	0	1,0000	0	1,5652	1
0,938	5,8936	63	1,77387	107	362,72	2,28	0,0028	1	181,36	1,14	181,36	1,14	0,99998	0	1,0000	0	1,5653	0
0,939	5,8999	63	1,77494	107	365,00	2,31	0,0027	0	182,50	1,15	182,50	1,16	0,99998	1	1,0000	0	1,5653	0
0,940	5,9062	63	1,77601	106	367,31	2,31	0,0027	0	183,65	1,16	183,66	1,15	0,99999	0	1,0000	0	1,5653	0
0,941	5,9125	63	1,77707	107	369,62	2,33	0,0027	0	184,81	1,16	184,81	1,17	0,99999	0	1,0000	0	1,5653	1
0,942	5,9188	63	1,77814	106	371,95	2,35	0,0027	0	185,97	1,18	185,98	1,17	0,99999	0	1,0000	0	1,5654	1
0,943	5,9251	62	1,77920	105	374,30	2,35	0,0027	0	187,15	1,17	187,15	1,18	0,99999	0	1,0000	0	1,5655	0
0,944	5,9313	63	1,78025	106	376,65	2,38	0,0027	1	188,32	1,19	188,33	1,19	0,99999	0	1,0000	0	1,5655	0
0,945	5,9376	63	1,78131	106	379,03	2,39	0,0026	0	189,51	1,20	189,52	1,19	0,99999	0	1,0000	0	1,5655	0
0,946	5,9439	63	1,78237	106	381,42	2,40	0,0026	0	190,71	1,20	190,71	1,20	0,99999	0	1,0000	0	1,5655	0
0,947	5,9502	63	1,78343	106	383,82	2,42	0,0026	0	191,91	1,21	191,91	1,21	0,99999	0	1,0000	0	1,5655	1
0,948	5,9565	63	1,78449	105	386,24	2,44	0,0026	0	193,12	1,22	193,12	1,22	0,99999	0	1,0000	0	1,5656	0
0,949	5,9628	62	1,78554	104	388,68	2,44	0,0026	0	194,34	1,22	194,34	1,22	0,99999	0	1,0000	0	1,5656	0
0,950	5,9690	63	1,78658	106	391,12	2,47	0,0026	1	195,56	1,23	195,56	1,24	0,99999	0	1,0000	0	1,5656	0

x	$2\pi x$	$\sin 2\pi x$	$\cos 2\pi x$	$\operatorname{tang} 2\pi x$	$\operatorname{cotg} 2\pi x$	$\sin^* 2\pi x$	$\cos^* 2\pi x$	$\operatorname{tang}^* 2\pi x$	$\operatorname{cotg}^* 2\pi x$
0,900	5,6549$_{63}$	−0,58779$_{510}$	0,80902$_{367}$	−0,72655$_{956}$	−1,37638$_{1834}$	−0,98769$_{100}$	0,15643$_{621}$	−6,31394	−0,15838$_{645}$
0,901	5,6612$_{62}$	−0,58269$_{512}$	0,81269$_{365}$	−0,71699$_{948}$	−1,39472$_{1868}$	−0,98669$_{105}$	0,16264$_{619}$	−6,06671	−0,16483$_{646}$
0,902	5,6674$_{63}$	−0,57757$_{514}$	0,81634$_{361}$	−0,70751$_{938}$	−1,41340$_{1900}$	−0,98564$_{108}$	0,16883$_{619}$	−5,83806	−0,17129$_{647}$
0,903	5,6737$_{63}$	−0,57243$_{516}$	0,81995$_{358}$	−0,69813$_{930}$	−1,43240$_{1934}$	−0,98456$_{111}$	0,17502$_{619}$	−5,62541	−0,17776$_{650}$
0,904	5,6800$_{63}$	−0,56727$_{519}$	0,82353$_{355}$	−0,68883$_{923}$	−1,45174$_{1972}$	−0,98345$_{116}$	0,18121$_{617}$	−5,42713	−0,18426$_{650}$
0,905	5,6863$_{63}$	−0,56208$_{520}$	0,82708$_{352}$	−0,67960$_{914}$	−1,47146$_{2006}$	−0,98229$_{120}$	0,18738$_{617}$	−5,24224	−0,19076$_{652}$
0,906	5,6926$_{63}$	−0,55688$_{523}$	0,83060$_{348}$	−0,67046$_{907}$	−1,49152$_{2045}$	−0,98109$_{123}$	0,19355$_{616}$	−5,06892	−0,19728$_{653}$
0,907	5,6989$_{62}$	−0,55165$_{526}$	0,83408$_{345}$	−0,66139$_{901}$	−1,51197$_{2087}$	−0,97986$_{128}$	0,19971$_{615}$	−4,90641	−0,20381$_{656}$
0,908	5,7051$_{63}$	−0,54639$_{527}$	0,83753$_{341}$	−0,65238$_{891}$	−1,53284$_{2123}$	−0,97858$_{131}$	0,20586$_{615}$	−4,75362	−0,21037$_{657}$
0,909	5,7114$_{63}$	−0,54112$_{529}$	0,84094$_{339}$	−0,64347$_{885}$	−1,55407$_{2167}$	−0,97727$_{135}$	0,21201$_{613}$	−4,60955	−0,21694$_{658}$
0,910	5,7177$_{63}$	−0,53583$_{532}$	0,84433$_{335}$	−0,63462$_{878}$	−1,57574$_{2212}$	−0,97592$_{139}$	0,21814$_{613}$	−4,47382	−0,22352$_{661}$
0,911	5,7240$_{63}$	−0,53051$_{534}$	0,84768$_{331}$	−0,62584$_{871}$	−1,59786$_{2255}$	−0,97453$_{143}$	0,22427$_{612}$	−4,34534	−0,23013$_{663}$
0,912	5,7303$_{63}$	−0,52517$_{535}$	0,85099$_{329}$	−0,61713$_{864}$	−1,62041$_{2301}$	−0,97310$_{147}$	0,23039$_{611}$	−4,22371	−0,23676$_{665}$
0,913	5,7366$_{62}$	−0,51982$_{538}$	0,85428$_{325}$	−0,60849$_{858}$	−1,64342$_{2350}$	−0,97163$_{150}$	0,23650$_{610}$	−4,10837	−0,24341$_{666}$
0,914	5,7428$_{63}$	−0,51444$_{540}$	0,85753$_{321}$	−0,59991$_{851}$	−1,66692$_{2399}$	−0,97013$_{155}$	0,24260$_{609}$	−3,99889	−0,25007$_{669}$
0,915	5,7491$_{63}$	−0,50904$_{542}$	0,86074$_{318}$	−0,59140$_{845}$	−1,69091$_{2451}$	−0,96858$_{158}$	0,24869$_{608}$	−3,89473$_{9915}$	−0,25676$_{670}$
0,916	5,7554$_{63}$	−0,50362$_{543}$	0,86392$_{315}$	−0,58295$_{838}$	−1,71542$_{2502}$	−0,96700$_{162}$	0,25477$_{607}$	−3,79558$_{9454}$	−0,26346$_{673}$
0,917	5,7617$_{63}$	−0,49819$_{546}$	0,86707$_{311}$	−0,57457$_{833}$	−1,74044$_{2560}$	−0,96538$_{166}$	0,26084$_{606}$	−3,70104$_{9025}$	−0,27019$_{676}$
0,918	5,7680$_{63}$	−0,49273$_{548}$	0,87018$_{308}$	−0,56624$_{827}$	−1,76604$_{2618}$	−0,96372$_{169}$	0,26690$_{605}$	−3,61079$_{8623}$	−0,27695$_{677}$
0,919	5,7743$_{62}$	−0,48725$_{550}$	0,87326$_{305}$	−0,55797$_{822}$	−1,79222$_{2679}$	−0,96203$_{174}$	0,27295$_{604}$	−3,52456$_{8254}$	−0,28372$_{681}$
0,920	5,7805$_{63}$	−0,48175$_{551}$	0,87631$_{301}$	−0,54975$_{815}$	−1,81901$_{2737}$	−0,96029$_{177}$	0,27899$_{603}$	−3,44202$_{7903}$	−0,29053$_{682}$
0,921	5,7868$_{63}$	−0,47624$_{554}$	0,87932$_{297}$	−0,54160$_{810}$	−1,84638$_{2804}$	−0,95852$_{181}$	0,28502$_{602}$	−3,36299$_{7578}$	−0,29735$_{686}$
0,922	5,7931$_{63}$	−0,47070$_{555}$	0,88229$_{294}$	−0,53350$_{804}$	−1,87442$_{2869}$	−0,95671$_{185}$	0,29104$_{600}$	−3,28721$_{7263}$	−0,30421$_{687}$
0,923	5,7994$_{63}$	−0,46515$_{557}$	0,88523$_{291}$	−0,52546$_{800}$	−1,90311$_{2939}$	−0,95486$_{188}$	0,29704$_{600}$	−3,21458$_{6985}$	−0,31108$_{691}$
0,924	5,8057$_{63}$	−0,45958$_{559}$	0,88814$_{287}$	−0,51746$_{794}$	−1,93250$_{3012}$	−0,95298$_{192}$	0,30304$_{598}$	−3,14473$_{6707}$	−0,31799$_{693}$
0,925	5,8120$_{63}$	−0,45399$_{561}$	0,89101$_{283}$	−0,50952$_{789}$	−1,96262$_{3087}$	−0,95106$_{196}$	0,30902$_{597}$	−3,07766$_{6455}$	−0,32492$_{696}$
0,926	5,8183$_{62}$	−0,44838$_{562}$	0,89384$_{280}$	−0,50163$_{783}$	−1,99349$_{3163}$	−0,94910$_{200}$	0,31499$_{595}$	−3,01311$_{6209}$	−0,33188$_{699}$
0,927	5,8245$_{63}$	−0,44276$_{564}$	0,89664$_{277}$	−0,49380$_{779}$	−2,02512$_{3246}$	−0,94710$_{204}$	0,32094$_{595}$	−2,95102$_{5996}$	−0,33887$_{702}$
0,928	5,8308$_{63}$	−0,43712$_{566}$	0,89941$_{272}$	−0,48601$_{774}$	−2,05758$_{3330}$	−0,94506$_{207}$	0,32689$_{593}$	−2,89106$_{5773}$	−0,34589$_{705}$
0,929	5,8371$_{63}$	−0,43146$_{568}$	0,90213$_{270}$	−0,47827$_{771}$	−2,09088$_{3423}$	−0,94299$_{211}$	0,33282$_{592}$	−2,83333$_{5574}$	−0,35294$_{708}$
0,930	5,8434$_{63}$	−0,42578$_{569}$	0,90483$_{265}$	−0,47056$_{764}$	−2,12511$_{3509}$	−0,94088$_{215}$	0,33874$_{590}$	−2,77759$_{5379}$	−0,36002$_{711}$
0,931	5,8497$_{62}$	−0,42009$_{571}$	0,90748$_{263}$	−0,46292$_{761}$	−2,16020$_{3612}$	−0,93873$_{218}$	0,34464$_{589}$	−2,72380$_{5199}$	−0,36713$_{715}$
0,932	5,8559$_{63}$	−0,41438$_{573}$	0,91011$_{258}$	−0,45531$_{757}$	−2,19632$_{3711}$	−0,93655$_{222}$	0,35053$_{588}$	−2,67181$_{5031}$	−0,37428$_{718}$
0,933	5,8622$_{63}$	−0,40865$_{574}$	0,91269$_{255}$	−0,44774$_{752}$	−2,23343$_{3814}$	−0,93433$_{226}$	0,35641$_{587}$	−2,62150$_{4871}$	−0,38146$_{722}$
0,934	5,8685$_{63}$	−0,40291$_{576}$	0,91524$_{251}$	−0,44022$_{748}$	−2,27157$_{3927}$	−0,93207$_{229}$	0,36228$_{584}$	−2,57279$_{4704}$	−0,38868$_{724}$
0,935	5,8748$_{63}$	−0,39715$_{578}$	0,91775$_{248}$	−0,43274$_{744}$	−2,31084$_{4046}$	−0,92978$_{233}$	0,36812$_{584}$	−2,52575$_{4567}$	−0,39592$_{729}$
0,936	5,8811$_{63}$	−0,39137$_{579}$	0,92023$_{244}$	−0,42530$_{740}$	−2,35130$_{4164}$	−0,92745$_{237}$	0,37396$_{582}$	−2,48008$_{4425}$	−0,40321$_{733}$
0,937	5,8874$_{62}$	−0,38558$_{580}$	0,92261$_{241}$	−0,41790$_{736}$	−2,39294$_{4289}$	−0,92508$_{241}$	0,37978$_{580}$	−2,43583$_{4289}$	−0,41054$_{736}$
0,938	5,8936$_{63}$	−0,37978$_{582}$	0,92508$_{237}$	−0,41054$_{733}$	−2,43583$_{4425}$	−0,92267$_{244}$	0,38558$_{579}$	−2,39294$_{4164}$	−0,41790$_{740}$
0,939	5,8999$_{63}$	−0,37396$_{584}$	0,92745$_{233}$	−0,40321$_{729}$	−2,48008$_{4567}$	−0,92023$_{248}$	0,39137$_{578}$	−2,35130$_{4046}$	−0,42530$_{744}$
0,940	5,9062$_{63}$	−0,36812$_{584}$	0,92978$_{229}$	−0,39592$_{724}$	−2,52575$_{4704}$	−0,91775$_{251}$	0,39715$_{576}$	−2,31084$_{3927}$	−0,43274$_{748}$
0,941	5,9125$_{63}$	−0,36228$_{587}$	0,93207$_{226}$	−0,38868$_{722}$	−2,57279$_{4871}$	−0,91524$_{255}$	0,40291$_{574}$	−2,27157$_{3814}$	−0,44022$_{752}$
0,942	5,9188$_{63}$	−0,35641$_{588}$	0,93433$_{222}$	−0,38146$_{718}$	−2,62150$_{5031}$	−0,91269$_{258}$	0,40865$_{573}$	−2,23343$_{3711}$	−0,44774$_{757}$
0,943	5,9251$_{62}$	−0,35053$_{589}$	0,93655$_{218}$	−0,37428$_{715}$	−2,67181$_{5199}$	−0,91011$_{263}$	0,41438$_{571}$	−2,19632$_{3612}$	−0,45531$_{761}$
0,944	5,9313$_{63}$	−0,34464$_{590}$	0,93873$_{215}$	−0,36713$_{711}$	−2,72380$_{5379}$	−0,90748$_{265}$	0,42009$_{569}$	−2,16020$_{3509}$	−0,46292$_{764}$
0,945	5,9376$_{63}$	−0,33874$_{592}$	0,94088$_{211}$	−0,36002$_{708}$	−2,77759$_{5574}$	−0,90483$_{270}$	0,42578$_{568}$	−2,12511$_{3423}$	−0,47056$_{771}$
0,946	5,9439$_{63}$	−0,33282$_{593}$	0,94299$_{207}$	−0,35294$_{705}$	−2,83333$_{5773}$	−0,90213$_{272}$	0,43146$_{566}$	−2,09088$_{3330}$	−0,47827$_{774}$
0,947	5,9502$_{63}$	−0,32689$_{595}$	0,94506$_{204}$	−0,34589$_{702}$	−2,89106$_{5996}$	−0,89941$_{277}$	0,43712$_{564}$	−2,05758$_{3246}$	−0,48601$_{779}$
0,948	5,9565$_{63}$	−0,32094$_{595}$	0,94710$_{200}$	−0,33887$_{699}$	−2,95102$_{6209}$	−0,89664$_{280}$	0,44276$_{562}$	−2,02512$_{3163}$	−0,49380$_{783}$
0,949	5,9628$_{62}$	−0,31499$_{597}$	0,94910$_{196}$	−0,33188$_{696}$	−3,01311$_{6455}$	−0,89384$_{283}$	0,44838$_{561}$	−1,99349$_{3087}$	−0,50163$_{789}$
0,950	5,9690$_{63}$	−0,30902$_{598}$	0,95106$_{192}$	−0,32492$_{693}$	−3,07766$_{6707}$	−0,89101$_{287}$	0,45399$_{559}$	−1,96262$_{3012}$	−0,50952$_{794}$

x	$2\pi x$		$\ln 2\pi x$		$e^{2\pi x}$		$e^{-2\pi x}$		Sin $2\pi x$		Cos $2\pi x$		Tang $2\pi x$		Cotg $2\pi x$		Amp $2\pi x$	
0,950	5,9690	63	1,78658	106	391,12	2,47	0,0026	1	195,56	1,23	195,56	1,24	0,99999	0	1,0000	0	1,5656	0
0,951	5,9753	63	1,78764	105	393,59	2,48	0,0025	0	196,79	1,24	196,80	1,24	0,99999	0	1,0000	0	1,5656	1
0,952	5,9816	63	1,78869	105	396,07	2,50	0,0025	0	198,03	1,25	198,04	1,25	0,99999	0	1,0000	0	1,5657	1
0,953	5,9879	63	1,78974	106	398,57	2,51	0,0025	0	199,28	1,26	199,29	1,25	0,99999	0	1,0000	0	1,5658	0
0,954	5,9942	63	1,79080	105	401,08	2,53	0,0025	0	200,54	1,26	200,54	1,27	0,99999	0	1,0000	0	1,5658	0
0,955	6,0005	62	1,79185	103	403,61	2,54	0,0025	0	201,80	1,27	201,81	1,27	0,99999	0	1,0000	0	1,5658	0
0,956	6,0067	63	1,79288	105	406,15	2,56	0,0025	1	203,07	1,28	203,08	1,28	0,99999	0	1,0000	0	1,5658	0
0,957	6,0130	63	1,79393	105	408,71	2,58	0,0024	0	204,35	1,29	204,36	1,29	0,99999	0	1,0000	0	1,5658	1
0,958	6,0193	63	1,79498	104	411,29	2,59	0,0024	0	205,64	1,30	205,65	1,29	0,99999	0	1,0000	0	1,5659	0
0,959	6,0256	63	1,79602	105	413,88	2,61	0,0024	0	206,94	1,30	206,94	1,31	0,99999	0	1,0000	0	1,5659	0
0,960	6,0319	63	1,79707	104	416,49	2,62	0,0024	0	208,24	1,31	208,25	1,31	0,99999	0	1,0000	0	1,5659	0
0,961	6,0382	62	1,79811	103	419,11	2,65	0,0024	0	209,55	1,33	209,56	1,32	0,99999	0	1,0000	0	1,5659	1
0,962	6,0444	63	1,79914	104	421,76	2,65	0,0024	0	210,88	1,32	210,88	1,33	0,99999	0	1,0000	0	1,5660	1
0,963	6,0507	63	1,80018	104	424,41	2,68	0,0024	1	212,20	1,34	212,21	1,34	0,99999	0	1,0000	0	1,5661	0
0,964	6,0570	63	1,80122	104	427,09	2,69	0,0023	0	213,54	1,35	213,55	1,34	0,99999	0	1,0000	0	1,5661	0
0,965	6,0633	63	1,80226	104	429,78	2,71	0,0023	0	214,89	1,35	214,89	1,36	0,99999	0	1,0000	0	1,5661	0
0,966	6,0696	63	1,80330	103	432,49	2,72	0,0023	0	216,24	1,36	216,25	1,36	0,99999	0	1,0000	0	1,5661	0
0,967	6,0759	62	1,80433	102	435,21	2,75	0,0023	0	217,60	1,38	217,61	1,37	0,99999	0	1,0000	0	1,5661	1
0,968	6,0821	63	1,80535	104	437,96	2,76	0,0023	0	218,98	1,38	218,98	1,38	0,99999	0	1,0000	0	1,5662	0
0,969	6,0884	63	1,80639	103	440,72	2,78	0,0023	0	220,36	1,39	220,36	1,39	0,99999	0	1,0000	0	1,5662	0
0,970	6,0947	63	1,80742	104	443,50	2,79	0,0023	1	221,75	1,39	221,75	1,40	0,99999	0	1,0000	0	1,5662	0
0,971	6,1010	63	1,80846	103	446,29	2,82	0,0022	0	223,14	1,41	223,15	1,41	0,99999	0	1,0000	0	1,5662	1
0,972	6,1073	63	1,80949	103	449,11	2,82	0,0022	0	224,55	1,41	224,56	1,41	0,99999	0	1,0000	0	1,5663	1
0,973	6,1136	62	1,81052	101	451,93	2,86	0,0022	0	225,96	1,43	225,97	1,43	0,99999	0	1,0000	0	1,5664	0
0,974	6,1198	63	1,81153	103	454,79	2,86	0,0022	0	227,39	1,43	227,40	1,43	0,99999	0	1,0000	0	1,5664	0
0,975	6,1261	63	1,81256	103	457,65	2,88	0,0022	0	228,82	1,44	228,83	1,44	0,99999	0	1,0000	0	1,5664	0
0,976	6,1324	63	1,81359	103	460,53	2,91	0,0022	0	230,26	1,46	230,27	1,45	0,99999	0	1,0000	0	1,5664	0
0,977	6,1387	63	1,81462	102	463,44	2,92	0,0022	1	231,72	1,46	231,72	1,46	0,99999	0	1,0000	0	1,5664	1
0,978	6,1450	62	1,81564	101	466,36	2,94	0,0021	0	233,18	1,47	233,18	1,47	0,99999	0	1,0000	0	1,5665	1
0,979	6,1512	63	1,81665	102	469,30	2,96	0,0021	0	234,65	1,48	234,65	1,48	0,99999	0	1,0000	0	1,5666	0
0,980	6,1575	63	1,81767	103	472,26	2,97	0,0021	0	236,13	1,48	236,13	1,49	0,99999	0	1,0000	0	1,5666	0
0,981	6,1638	63	1,81870	102	475,23	3,00	0,0021	0	237,61	1,50	237,62	1,50	0,99999	0	1,0000	0	1,5666	0
0,982	6,1701	63	1,81972	102	478,23	3,01	0,0021	0	239,11	1,51	239,12	1,50	0,99999	0	1,0000	0	1,5666	0
0,983	6,1764	63	1,82074	102	481,24	3,04	0,0021	0	240,62	1,52	240,62	1,52	0,99999	0	1,0000	0	1,5666	0
0,984	6,1827	62	1,82176	100	484,28	3,05	0,0021	0	242,14	1,52	242,14	1,53	0,99999	0	1,0000	0	1,5666	1
0,985	6,1889	63	1,82276	102	487,33	3,07	0,0021	1	243,66	1,54	243,67	1,53	0,99999	0	1,0000	0	1,5667	0
0,986	6,1952	63	1,82378	101	490,40	3,09	0,0020	0	245,20	1,54	245,20	1,55	0,99999	0	1,0000	0	1,5667	0
0,987	6,2015	63	1,82479	102	493,49	3,11	0,0020	0	246,74	1,56	246,75	1,55	0,99999	0	1,0000	0	1,5667	0
0,988	6,2078	63	1,82581	101	496,60	3,13	0,0020	0	248,30	1,56	248,30	1,57	0,99999	0	1,0000	0	1,5667	0
0,989	6,2141	63	1,82682	101	499,73	3,15	0,0020	0	249,86	1,58	249,87	1,57	0,99999	0	1,0000	0	1,5667	1
0,990	6,2204	62	1,82783	101	502,88	3,17	0,0020	0	251,44	1,58	251,44	1,59	0,99999	0	1,0000	0	1,5668	1
0,991	6,2266	63	1,82884	101	506,05	3,19	0,0020	0	253,02	1,60	253,03	1,59	0,99999	0	1,0000	0	1,5669	0
0,992	6,2329	63	1,82985	101	509,24	3,21	0,0020	0	254,62	1,60	254,62	1,61	0,99999	0	1,0000	0	1,5669	0
0,993	6,2392	63	1,83086	101	512,45	3,23	0,0020	1	256,22	1,62	256,23	1,61	0,99999	0	1,0000	0	1,5669	0
0,994	6,2455	63	1,83187	100	515,68	3,25	0,0019	0	257,84	1,62	257,84	1,63	0,99999	0	1,0000	0	1,5669	0
0,995	6,2518	63	1,83287	101	518,93	3,27	0,0019	0	259,46	1,64	259,47	1,63	0,99999	0	1,0000	0	1,5669	0
0,996	6,2581	62	1,83388	99	522,20	3,29	0,0019	0	261,10	1,64	261,10	1,65	0,99999	0	1,0000	0	1,5669	1
0,997	6,2643	63	1,83487	101	525,49	3,31	0,0019	0	262,74	1,66	262,75	1,65	0,99999	0	1,0000	0	1,5670	0
0,998	6,2706	63	1,83588	100	528,80	3,34	0,0019	0	264,40	1,67	264,40	1,67	0,99999	0	1,0000	0	1,5670	0
0,999	6,2769	63	1,83688	100	532,14	3,35	0,0019	0	266,07	1,67	266,07	1,68	0,99999	0	1,0000	0	1,5670	0
1,000	6,2832		1,83788		535,49		0,0019		267,74		267,75		0,99999		1,0000		1,5670	

x	$2\pi x$	$\sin 2\pi x$	$\cos 2\pi x$	$\operatorname{tang} 2\pi x$	$\operatorname{cotg} 2\pi x$	$\sin^* 2\pi x$	$\cos^* 2\pi x$	$\operatorname{tang}^* 2\pi x$	$\operatorname{ctg}^* 2\pi x$
0,950	5,9690 63	-0,30902 598	0,95106 192	-0,32492 693	- 3,07766 6707	-0,89101 287	0,45399 559	-1,96262 3012	-0,50952 794
0,951	5,9753 63	-0,30304 600	0,95298 188	-0,31799 691	- 3,14473 6985	-0,88814 291	0,45958 557	-1,93250 2939	-0,51746 800
0,952	5,9816 63	-0,29704 600	0,95486 185	-0,31108 687	- 3,21458 7263	-0,88523 294	0,46515 555	-1,90311 2869	-0,52546 804
0,953	5,9879 63	-0,29104 602	0,95671 181	-0,30421 686	- 3,28721 7578	-0,88229 297	0,47070 554	-1,87442 2804	-0,53350 810
0,954	5,9942 63	-0,28502 603	0,95852 177	-0,29735 682	- 3,36299 7903	-0,87932 301	0,47624 551	-1,84638 2737	-0,54160 815
0,955	6,0005 62	-0,27899 604	0,96029 174	-0,29053 681	- 3,44202 8254	-0,87631 305	0,48175 550	-1,81901 2679	-0,54975 822
0,956	6,0067 63	-0,27295 605	0,96203 169	-0,28372 677	- 3,52456 8623	-0,87326 308	0,48725 548	-1,79222 2618	-0,55797 827
0,957	6,0130 63	-0,26690 606	0,96372 166	-0.27695 676	- 3,61079 9025	-0,87018 311	0,49273 546	-1,76604 2560	-0,56624 833
0,958	6,0193 63	-0,26084 607	0,96538 162	-0,27019 673	- 3,70104 9454	-0,86707 315	0,49819 543	-1,74044 2502	-0,57457 838
0,959	6,0256 63	-0,25477 608	0,96700 158	-0,26346 670	- 3,79558 9915	-0,86392 318	0,50362 542	-1,71542 2451	-0,58295 845
0,960	6,0319 63	-0,24869 609	0,96858 155	-0,25676 669	- 3,89473	-0,86074 321	0,50904 540	-1,69091 2399	-0,59140 851
0,961	6,0382 62	-0,24260 610	0,97013 150	-0,25007 666	- 3,99889	-0,85753 325	0,51444 538	-1,66692 2350	-0,59991 858
0,962	6,0444 63	-0,23650 611	0,97163 147	-0,24341 665	- 4,10837	-0,85428 329	0,51982 535	-1,64342 2301	-0,60849 864
0,963	6,0507 63	-0,23039 612	0,97310 143	-0,23676 663	- 4,22371	-0,85099 331	0,52517 534	-1,62041 2255	-0,61713 871
0,964	6,0570 63	-0,22427 613	0,97453 139	-0,23013 661	- 4,34534	-0,84768 335	0,53051 532	-1,59786 2212	-0,62584 878
0,965	6,0633 63	-0,21814 613	0,97592 135	-0,22352 658	- 4,47382	-0,84433 339	0,53583 529	-1,57574 2167	-0,63462 885
0,966	6,0696 63	-0,21201 615	0,97727 131	-0,21694 657	- 4,60955	-0,84094 341	0,54112 527	-1,55407 2123	-0,64347 891
0,967	6,0759 62	-0,20586 615	0,97858 128	-0,21037 656	- 4,75362	-0,83753 345	0,54639 526	-1,53284 2087	-0,65238 901
0,968	6,0821 63	-0,19971 616	0,97986 123	-0,20381 653	- 4,90641	-0,83408 348	0,55165 523	-1,51197 2045	-0,66139 907
0,969	6,0884 63	-0,19355 617	0,98109 120	-0,19728 652	- 5,06892	-0,83060 352	0,55688 520	-1,49152 2006	-0,67046 914
0,970	6,0947 63	-0,18738 617	0,98229 116	-0,19076 650	- 5,24224	-0,82708 355	0,56208 519	-1,47146 1972	-0,67960 923
0,971	6,1010 63	-0,18121 619	0,98345 111	-0,18426 650	- 5,42713	-0,82353 358	0,56727 516	-1,45174 1934	-0,68883 930
0,972	6,1073 63	-0,17502 619	0,98456 108	-0,17776 647	- 5,62541	-0,81995 361	0,57243 514	-1,43240 1900	-0,69813 938
0,973	6,1136 62	-0,16883 619	0,98564 105	-0,17129 646	- 5,83806	-0,81634 365	0,57757 512	-1,41340 1868	-0,70751 948
0,974	6,1198 63	-0,16264 621	0,98669 100	-0,16483 645	- 6,06671	-0,81269 367	0,58269 510	-1,39472 1834	-0,71699 956
0,975	6,1261 63	-0,15643 620	0,98769 96	-0,15838 643	- 6,31394	-0,80902 371	0,58779 507	-1,37638 1803	-0,72655 964
0,976	6,1324 63	-0,15023 622	0,98865 93	-0,15195 642	- 6,58091	-0,80531 374	0,59286 504	-1,35835 1771	-0,73619 972
0,977	6,1387 63	-0,14401 622	0,98958 88	-0,14553 641	- 6,87161	-0,80157 378	0,59790 503	-1,34064 1745	-0,74591 984
0,978	6,1450 62	-0,13779 623	0,99046 85	-0,13912 641	- 7,18818	-0,79779 380	0,60293 500	-1,32319 1714	-0,75575 991
0,979	6,1512 63	-0,13156 623	0,99131 80	-0,13271 638	- 7,53504	-0,79399 383	0,60793 498	-1,30605 1686	-0,76566 1002
0,980	6,1575 63	-0,12533 623	0,99211 77	-0,12633 638	- 7,91598	-0,79016 387	0,61291 495	-1,28919 1659	-0,77568 1011
0,981	6,1638 63	-0,11910 624	0,99288 73	-0,11995 636	- 8,33652	-0,78629 390	0,61786 493	-1,27260 1633	-0,78579 1022
0,982	6,1701 63	-0,11286 625	0,99361 69	-0,11359 637	- 8,80392	-0,78239 393	0,62279 490	-1,25627 1607	-0,79601 1031
0,983	6,1764 63	-0,10661 625	0,99430 65	-0,10722 635	- 9,32652	-0,77846 396	0,62769 488	-1,24020 1583	-0,80632 1043
0,984	6,1827 62	-0,10036 625	0,99495 61	-0,10087 634	- 9,91381	-0,77450 399	0,63257 485	-1,22437 1558	-0,81675 1052
0,985	6,1889 63	-0,09411 626	0,99556 57	-0,09453 634	-10,57868	-0,77051 402	0,63742 483	-1,20879 1535	-0,82727 1064
0,986	6,1952 63	-0,08785 626	0,99613 54	-0,08819 633	-11,33899	-0,76649 405	0,64225 481	-1,19344 1513	-0,83791 1076
0,987	6,2015 63	-0,08159 626	0,99667 49	-0,08186 632	-12,21559	-0,76244 408	0,64706 477	-1,17831 1488	-0,84867 1086
0,988	6,2078 63	-0,07533 627	0,99716 45	-0,07554 631	-13,23722	-0,75836 411	0,65183 476	-1,16343 1469	-0,85953 1099
0,989	6,2141 63	-0,06906 627	0,99761 42	-0,06923 632	-14,44555	-0,75425 414	0,65659 472	-1,14874 1446	-0,87052 1110
0,990	6,2204 62	-0,06279 627	0,99803 37	-0,06291 630	-15,89473	-0,75011 417	0,66131 470	-1,13428 1427	-0,88162 1123
0,991	6,2266 63	-0,05652 628	0,99840 34	-0,05661 631	-17,66454	-0,74594 420	0,66601 468	-1,12001 1407	-0,89285 1136
0,992	6,2329 63	-0,05024 627	0,99874 29	-0,05030 629	-19,87938	-0,74174 423	0,67069 464	-1,10594 1387	-0,90421 1148
0,993	6,2392 63	-0,04397 628	0,99903 26	-0,04401 629	-22,72072	-0,73751 425	0,67533 462	-1,09207 1367	-0,91569 1161
0,994	6,2455 63	-0,03769 628	0,99929 22	-0,03772 629	-26,51340	-0,73326 429	0,67995 460	-1,07840 1351	-0,92730 1176
0,995	6,2518 63	-0,03141 628	0,99951 17	-0,03143 629	-31,82139	-0,72897 432	0,68455 456	-1,06489 1332	-0,93906 1190
0,996	6,2581 62	-0,02513 628	0,99968 14	-0,02514 629	-39,78034	-0,72465 434	0,68911 454	-1,05157 1314	-0,95096 1203
0,997	6,2643 63	-0,01885 628	0,99982 10	-0,01885 628	-53,04085	-0,72031 437	0,69365 452	-1,03843 1298	-0,96299 1219
0,998	6,2706 63	-0,01257 629	0,99992 6	-0,01257 629	-79,54813	-0,71594 440	0,69817 448	-1,02545 1280	-0,97518 1233
0,999	6,2769 63	-0,00628 628	0,99998 2	-0,00628 628	-159,23248	-0,71154 443	0,70265 446	-1,01265 1265	-0,98751 1249
1,000	6,2832	±0,00000	1,00000	-0,00000	∞	-0,70711	0,70711	-1,00000	-1,00000

6. Zahlenwerte der Tafel 2.

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
0,00	0,0000	1,0000	1,0000	0,00000	1,00000	0,50	0,7854	2,1933	$4{,}5594\cdot10^{-1}$	0,70711	0,70711
0,01	0,0157	1,0158	$9{,}8441\cdot10^{-1}$	0,01571	0,99988	0,51	0,8011	2,2280	4,4884	0,71813	0,69591
0,02	0,0314	1,0319	9,6907	0,03141	0,99951	0,52	0,8168	2,2633	4,4184	0,72897	0,68455
0,03	0,0471	1,0482	9,5397	0,04711	0,99889	0,53	0,8325	2,2991	4,3495	0,73963	0,67301
0,04	0,0628	1,0648	9,3910	0,06279	0,99803	0,54	0,8482	2,3355	4,2817	0,75011	0,66131
0,05	0,0785	1,0817	9,2447	0,07846	0,99692	0,55	0,8639	2,3724	4,2150	0,76041	0,64945
0,06	0,0942	1,0988	9,1006	0,09411	0,99556	0,56	0,8797	2,4100	4,1493	0,77051	0,63742
0,07	0,1100	1,1162	8,9587	0,10973	0,99396	0,57	0,8954	2,4482	4,0847	0,78043	0,62524
0,08	0,1257	1,1339	8,8191	0,12533	0,99211	0,58	0,9111	2,4870	4,0210	0,79016	0,61291
0,09	0,1414	1,1519	8,6817	0,14090	0,99002	0,59	0,9268	2,5263	3,9583	0,79968	0,60042
0,10	0,1571	1,1701	8,5464	0,15643	0,98769	0,60	0,9425	2,5663	3,8966	0,80902	0,58779
0,11	0,1728	1,1886	8,4132	0,17193	0,98511	0,61	0,9582	2,6069	3,8359	0,81815	0,57501
0,12	0,1885	1,2074	8,2820	0,18738	0,98229	0,62	0,9739	2,6482	3,7761	0,82708	0,56208
0,13	0,2042	1,2266	8,1530	0,20279	0,97922	0,63	0,9896	2,6902	3,7172	0,83581	0,54902
0,14	0,2199	1,2460	8,0259	0,21814	0,97592	0,64	1,0053	2,7328	3,6593	0,84433	0,53583
0,15	0,2356	1,2657	7,9008	0,23345	0,97237	0,65	1,0210	2,7761	3,6022	0,85264	0,52250
0,16	0,2513	1,2857	7,7777	0,24869	0,96858	0,66	1,0367	2,8200	3,5461	0,86074	0,50904
0,17	0,2670	1,3061	7,6565	0,26387	0,96456	0,67	1,0524	2,8647	3,4909	0,86863	0,49546
0,18	0,2827	1,3268	7,5371	0,27899	0,96029	0,68	1,0681	2,9100	3,4365	0,87631	0,48175
0,19	0,2985	1,3478	7,4196	0,29404	0,95579	0,69	1,0838	2,9560	3,3829	0,88377	0,46792
0,20	0,3142	1,3691	7,3040	0,30902	0,95106	0,70	1,0996	3,0028	3,3302	0,89101	0,45399
0,21	0,3299	1,3908	7,1902	0,32392	0,94609	0,71	1,1153	3,0504	3,2783	0,89803	0,43994
0,22	0,3456	1,4128	7,0781	0,33874	0,94088	0,72	1,1310	3,0987	3,2272	0,90483	0,42578
0,23	0,3613	1,4352	6,9678	0,35347	0,93544	0,73	1,1467	3,1478	3,1769	0,91140	0,41151
0,24	0,3770	1,4579	6,8592	0,36812	0,92978	0,74	1,1624	3,1976	3,1274	0,91775	0,39715
0,25	0,3927	1,4810	6,7523	0,38268	0,92388	0,75	1,1781	3,2482	3,0787	0,92388	0,38268
0,26	0,4084	1,5044	6,6471	0,39715	0,91775	0,76	1,1938	3,2996	3,0307	0,92978	0,36812
0,27	0,4241	1,5282	6,5435	0,41151	0,91140	0,77	1,2095	3,3518	2,9834	0,93544	0,35347
0,28	0,4398	1,5524	6,4415	0,42578	0,90483	0,78	1,2252	3,4049	2,9369	0,94088	0,33874
0,29	0,4555	1,5770	6,3411	0,43994	0,89803	0,79	1,2409	3,4588	0,8911	0,94609	0,32392
0,30	0,4712	1,6020	6,2423	0,45399	0,89101	0,80	1,2566	3,5136	2,8461	0,95106	0,30902
0,31	0,4870	1,6273	6,1450	0,46792	0,88377	0,81	1,2723	3,5692	2,8018	0,95579	0,29404
0,32	0,5027	1,6531	6,0492	0,48175	0,87631	0,82	1,2881	3,6257	2,7581	0,96029	0,27899
0,33	0,5184	1,6793	5,9549	0,49546	0,86863	0,83	1,3038	3,6831	2,7151	0,96456	0,26387
0,34	0,5341	1,7059	5,8621	0,50904	0,86074	0,84	1,3195	3,7414	2,6728	0,96858	0,24869
0,35	0,5498	1,7329	5,7707	0,52250	0,85264	0,85	1,3352	3,8006	2,6311	0,97237	0,23345
0,36	0,5655	1,7603	5,6808	0,53583	0,84433	0,86	1,3509	3,8608	2,5901	0,97592	0,21814
0,37	0,5812	1,7882	5,5923	0,54902	0,83581	0,87	1,3666	3,9220	2,5497	0,97922	0,20279
0,38	0,5969	1,8165	5,5051	0,56208	0,82708	0,88	1,3823	3,9841	2,5100	0,98229	0,18738
0,39	0,6126	1,8453	5,4193	0,57501	0,81815	0,89	1,3980	4,0471	2,4709	0,98511	0,17193
0,40	0,6283	1,8745	5,3349	0,58779	0,80902	0,90	1,4137	4,1112	2,4324	0,98769	0,15643
0,41	0,6440	1,9042	5,2518	0,60042	0,79968	0,91	1,4294	4,1763	2,3944	0,99002	0,14090
0,42	0,6597	1,9343	5,1699	0,61291	0,79016	0,92	1,4451	4,2424	2,3571	0,99211	0,12533
0,43	0,6754	1,9649	5,0893	0,62524	0,78043	0,93	1,4608	4,3096	2,3204	0,99396	0,10973
0,44	0,6912	1,9960	5,0100	0,63742	0,77051	0,94	1,4765	4,3778	2,2842	0,99556	0,09411
0,45	0,7069	2,0276	4,9319	0,64945	0,76041	0,95	1,4923	4,4471	2,2486	0,99692	0,07846
0,46	0,7226	2,0597	4,8550	0,66131	0,75011	0,96	1,5080	4,5175	2,2136	0,99803	0,06279
0,47	0,7383	2,0923	4,7793	0,67301	0,73963	0,97	1,5237	4,5890	2,1791	0,99889	0,04711
0,48	0,7540	2,1254	4,7048	0,68455	0,72897	0,98	1,5394	4,6617	2,1451	0,99951	0,03141
0,49	0,7697	2,1591	4,6315	0,69591	0,71813	0,99	1,5551	4,7355	2,1117	0,99988	0,01571
0,50	0,7854	2,1933	$4{,}5594\cdot10^{-1}$	0,70711	0,70711	1,00	1,5708	4,8105	$2{,}0788\cdot10^{-1}$	1,00000	$\pm0{,}00000$

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
1,00	1,5708	4,8105	$2{,}0788\cdot 10^{-1}$	1,00000	±0,00000	1,50	2,3562	$1{,}0551\cdot 10^{1}$	$9{,}4780\cdot 10^{-2}$	0,70711	-0,70711
1,01	1,5865	4,8866	2,0464	0,99988	-0,01571	1,51	2,3719	1,0718	9,3303	0,69591	-0,71813
1,02	1,6022	4,9640	2,0145	0,99951	-0,03141	1,52	2,3876	1,0887	9,1849	0,68455	-0,72897
1,03	1,6179	5,0426	1,9831	0,99889	-0,04711	1,53	2,4033	1,1060	9,0417	0,67301	-0,73963
1,04	1,6336	5,1224	1,9522	0,99803	-0,06279	1,54	2,4190	1,1235	8,9008	0,66131	-0,75011
1,05	1,6493	5,2035	1,9218	0,99692	-0,07846	1,55	2,4347	1,1413	8,7621	0,64945	-0,76041
1,06	1,6650	5,2859	1,8918	0,99556	-0,09411	1,56	2,4504	1,1593	8,6255	0,63742	-0,77051
1,07	1,6808	5,3696	1,8623	0,99396	-0,10973	1,57	2,4662	1,1777	8,4911	0,62524	-0,78043
1,08	1,6965	5,4546	1,8333	0,99211	-0,12533	1,58	2,4819	1,1963	8,3588	0,61291	-0,79016
1,09	1,7122	5,5410	1,8047	0,99002	-0,14090	1,59	2,4976	1,2153	8,2286	0,60042	-0,79968
1,10	1,7279	5,6287	1,7766	0,98769	-0,15643	1,60	2,5133	1,2345	8,1003	0,58779	-0,80902
1,11	1,7436	5,7178	1,7489	0,98511	-0,17193	1,61	2,5290	1,2540	7,9740	0,57501	-0,81815
1,12	1,7593	5,8083	1,7217	0,98229	-0,18738	1,62	2,5447	1,2739	7,8497	0,56208	-0,82708
1,13	1,7750	5,9003	1,6948	0,97922	-0,20279	1,63	2,5604	1,2941	7,7274	0,54902	-0,83581
1,14	1,7907	5,9937	1,6684	0,97592	-0,21814	1,64	2,5761	1,3146	7,6070	0,53583	-0,84433
1,15	1,8064	6,0886	1,6424	0,97237	-0,23345	1,65	2,5918	1,3354	7,4884	0,52250	-0,85264
1,16	1,8221	6,1850	1,6168	0,96858	-0,24869	1,66	2,6075	1,3565	7,3717	0,50904	-0,86074
1,17	1,8378	6,2829	1,5916	0,96456	-0,26387	1,67	2,6232	1,3780	7,2568	0,49546	-0,86863
1,18	1,8535	6,3824	1,5668	0,96029	-0,27899	1,68	2,6389	1,3998	7,1437	0,48175	-0,87631
1,19	1,8692	6,4834	1,5424	0,95579	-0,29404	1,69	2,6546	1,4220	7,0324	0,46792	-0,88377
1,20	1,8850	6,5861	1,5184	0,95106	-0,30902	1,70	2,6704	1,4445	6,9228	0,45399	-0,89101
1,21	1,9007	6,6904	1,4947	0,94609	-0,32392	1,71	2,6861	1,4674	6,8149	0,43994	-0,89803
1,22	1,9164	6,7963	1,4714	0,94088	-0,33874	1,72	2,7018	1,4906	6,7087	0,42578	-0,90483
1,23	1,9321	6,9039	1,4485	0,93544	-0,35347	1,73	2,7175	1,5142	6,6041	0,41151	-0,91140
1,24	1,9478	7,0132	1,4259	0,92978	-0,36812	1,74	2,7332	1,5382	6,5012	0,39715	-0,91775
1,25	1,9635	7,1242	1,4037	0,92388	-0,38268	1,75	2,7489	1,5626	6,3999	0,38268	-0,92388
1,26	1,9792	7,2370	1,3818	0,91775	-0,39715	1,76	2,7646	1,5873	6,3001	0,36812	-0,92978
1,27	1,9949	7,3515	1,3603	0,91140	-0,41151	1,77	2,7803	1,6124	6,2019	0,35347	-0,93544
1,28	2,0106	7,4679	1,3391	0,90483	-0,42578	1,78	2,7960	1,6379	6,1053	0,33874	-0,94088
1,29	2,0263	7,5862	1,3182	0,89803	-0,43994	1,79	2,8117	1,6638	6,0102	0,32392	-0,94609
1,30	2,0420	7,7063	1,2976	0,89101	-0,45399	1,80	2,8274	1,6902	5,9165	0,30902	-0,95106
1,31	2,0577	7,8283	1,2774	0,88377	-0,46792	1,81	2,8431	1,7169	5,8243	0,29404	-0,95579
1,32	2,0735	7,9522	1,2575	0,87631	-0,48175	1,82	2,8588	1,7441	5,7335	0,27899	-0,96029
1,33	2,0892	8,0781	1,2379	0,86863	-0,49546	1,83	2,8746	1,7717	5,6442	0,26387	-0,96456
1,34	2,1049	8,2060	1,2186	0,86074	-0,50904	1,84	2,8903	1,7998	5,5562	0,24869	-0,96858
1,35	2,1206	8,3359	1,1996	0,85264	-0,52250	1,85	2,9060	1,8283	5,4696	0,23345	-0,97237
1,36	2,1363	8,4679	1,1809	0,84433	-0,53583	1,86	2,9217	1,8572	5,3843	0,21814	-0,97592
1,37	2,1520	8,6020	1,1625	0,83581	-0,54902	1,87	2,9374	1,8866	5,3004	0,20279	-0,97922
1,38	2,1677	8,7382	1,1444	0,82708	-0,56208	1,88	2,9531	1,9165	5,2178	0,18738	-0,98229
1,39	2,1834	8,8765	1,1266	0,81815	-0,57501	1,89	2,9688	1,9469	5,1365	0,17193	-0,98511
1,40	2,1991	1,0170	1,1090	0,80902	-0,58779	1,90	2,9845	1,9777	5,0564	0,15643	-0,98769
1,41	2,2148	9,1598	1,0917	0,79968	-0,60042	1,91	3,0002	2,0090	4,9776	0,14090	-0,99002
1,42	2,2305	9,3048	1,0747	0,79016	-0,61291	1,92	3,0159	2,0408	4,9000	0,12533	-0,99211
1,43	2,2462	9,4521	1,0580	0,78043	-0,62524	1,93	3,0316	2,0731	4,8237	0,10973	-0,99396
1,44	2,2619	9,6018	1,0415	0,77051	-0,63742	1,94	3,0473	2,1059	4,7485	0,09411	-0,99556
1,45	2,2777	9,7538	1,0253	0,76041	-0,64945	1,95	3,0631	2,1392	4,6745	0,07846	-0,99692
1,46	2,2934	9,9082	$1{,}0093\cdot 10^{-1}$	0,75011	-0,66131	1,96	3,0788	2,1731	4,6016	0,06279	-0,99803
1,47	2,3091	$1{,}0065\cdot 10^{1}$	$9{,}9354\cdot 10^{-2}$	0,73963	-0,67301	1,97	3,0945	2,2075	4,5299	0,04711	-0,99889
1,48	2,3248	$1{,}0224\cdot 10^{1}$	9,7805	0,72897	-0,68455	1,98	3,1102	2,2425	4,4593	0,03141	-0,99951
1,49	2,3405	$1{,}0386\cdot 10^{1}$	9,6281	0,71813	-0,69591	1,99	3,1259	2,2780	4,3898	0,01571	-0,99988
1,50	2,3562	$1{,}0551\cdot 10^{1}$	$9{,}4780\cdot 10^{-2}$	0,70711	-0,70711	2,00	3,1416	$2{,}3141\cdot 10^{1}$	$4{,}3214\cdot 10^{-2}$	±0,00000	-1,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
2,00	3,1416	$2{,}3141\cdot10^{1}$	$4{,}3214\cdot10^{-2}$	±0,00000	−1,00000	2,50	3,9270	$5{,}0754\cdot10^{1}$	$1{,}9703\cdot10^{-2}$	−0,70711	−0,70711
2,01	3,1573	2,3507	4,2540	−0,01571	−0,99988	2,51	3,9427	5,1558	1,9396	−0,71813	−0,69591
2,02	3,1730	2,3879	4,1877	−0,03141	−0,99951	2,52	3,9584	5,2374	1,9094	−0,72897	−0,68455
2,03	3,1887	2,4257	4,1224	−0,04711	−0,99889	2,53	3,9741	5,3203	1,8796	−0,73963	−0,67301
2,04	3,2044	2,4641	4,0582	−0,06279	−0,99803	2,54	3,9898	5,4045	1,8503	−0,75011	−0,66131
2,05	3,2201	2,5032	3,9950	−0,07846	−0,99692	2,55	4,0055	5,4901	1,8215	−0,76041	−0,64945
2,06	3,2358	2,5428	3,9327	−0,09411	−0,99556	2,56	4,0212	5,5770	1,7931	−0,77051	−0,63742
2,07	3,2515	2,5830	3,8714	−0,10973	−0,99396	2,57	4,0369	5,6653	1,7651	−0,78043	−0,62524
2,08	3,2673	2,6239	3,8111	−0,12533	−0,99211	2,58	4,0527	5,7550	1,7376	−0,79016	−0,61291
2,09	3,2830	2,6655	3,7517	−0,14090	−0,99002	2,59	4,0684	5,8461	1,7105	−0,79968	−0,60042
2,10	3,2987	2,7077	3,6932	−0,15643	−0,98769	2,60	4,0841	5,9387	1,6839	−0,80902	−0,58779
2,11	3,3144	2,7506	3,6357	−0,17193	−0,98511	2,61	4,0998	6,0327	1,6576	−0,81815	−0,57501
2,12	3,3301	2,7941	3,5790	−0,18738	−0,98229	2,62	4,1155	6,1282	1,6318	−0,82708	−0,56208
2,13	3,3458	2,8383	3,5232	−0,20279	−0,97922	2,63	4,1312	6,2252	1,6063	−0,83581	−0,54902
2,14	3,3615	2,8833	3,4683	−0,21814	−0,97592	2,64	4,1469	6,3238	1,5813	−0,84433	−0,53583
2,15	3,3772	2,9289	3,4142	−0,23345	−0,97237	2,65	4,1626	6,4239	1,5567	−0,85264	−0,52250
2,16	3,3929	2,9753	3,3610	−0,24869	−0,96858	2,66	4,1783	6,5256	1,5324	−0,86074	−0,50904
2,17	3,4086	3,0224	3,3086	−0,26387	−0,96456	2,67	4,1940	6,6289	1,5085	−0,86863	−0,49546
2,18	3,4243	3,0702	3,2571	−0,27899	−0,96029	2,68	4,2097	6,7339	1,4850	−0,87631	−0,48175
2,19	3,4400	3,1188	3,2064	−0,29404	−0,95579	2,69	4,2254	6,8405	1,4619	−0,88377	−0,46792
2,20	3,4558	3,1682	3,1564	−0,30902	−0,95106	2,70	4,2412	6,9488	1,4391	−0,89101	−0,45399
2,21	3,4715	3,2183	3,1072	−0,32392	−0,94609	2,71	4,2569	7,0588	1,4167	−0,89803	−0,43994
2,22	3,4872	3,2693	3,0587	−0,33874	−0,94088	2,72	4,2726	7,1705	1,3946	−0,90483	−0,42578
2,23	3,5029	3,3211	3,0110	−0,35347	−0,93544	2,73	4,2883	7,2841	1,3729	−0,91140	−0,41151
2,24	3,5186	3,3737	2,9641	−0,36812	−0,92978	2,74	4,3040	7,3994	1,3515	−0,91775	−0,39715
2,25	3,5343	3,4271	2,9180	−0,38268	−0,92388	2,75	4,3197	7,5165	1,3304	−0,92388	−0,38268
2,26	3,5500	3,4813	2,8725	−0,39715	−0,91775	2,76	4,3354	7,6355	1,3097	−0,92978	−0,36812
2,27	3,5657	3,5364	2,8277	−0,41151	−0,91140	2,77	4,3511	7,7564	1,2893	−0,93544	−0,35347
2,28	3,5814	3,5924	2,7836	−0,42578	−0,90483	2,78	4,3668	7,8792	1,2692	−0,94088	−0,33874
2,29	3,5971	3,6493	2,7402	−0,43994	−0,89803	2,79	4,3825	8,0040	1,2494	−0,94609	−0,32392
2,30	3,6128	3,7071	2,6975	−0,45399	−0,89101	2,80	4,3982	8,1307	1,2299	−0,95106	−0,30902
2,31	3,6285	3,7658	2,6555	−0,46792	−0,88377	2,81	4,4139	8,2594	1,2108	−0,95579	−0,29404
2,32	3,6442	3,8254	2,6141	−0,48175	−0,87631	2,82	4,4296	8,3902	1,1919	−0,96029	−0,27899
2,33	3,6600	3,8860	2,5734	−0,49546	−0,86863	2,83	4,4454	8,5230	1,1733	−0,96456	−0,26387
2,34	3,6757	3,9475	2,5333	−0,50904	−0,86074	2,84	4,4611	8,6579	1,1550	−0,96858	−0,24869
2,35	3,6914	4,0100	2,4938	−0,52250	−0,85264	2,85	4,4768	8,7950	1,1370	−0,97237	−0,23345
2,36	3,7071	4,0735	2,4549	−0,53583	−0,84433	2,86	4,4925	8,9343	1,1193	−0,97592	−0,21814
2,37	3,7228	4,1380	2,4167	−0,54902	−0,83581	2,87	4,5082	9,0757	1,1019	−0,97922	−0,20279
2,38	3,7385	4,2035	2,3790	−0,56208	−0,82708	2,88	4,5239	9,2194	1,0847	−0,98229	−0,18738
2,39	3,7542	4,2700	2,3419	−0,57501	−0,81815	2,89	4,5396	9,3653	1,0678	−0,98511	−0,17193
2,40	3,7699	4,3376	2,3054	−0,58779	−0,80902	2,90	4,5553	9,5136	1,0511	−0,98769	−0,15643
2,41	3,7856	4,4063	2,2695	−0,60042	−0,79968	2,91	4,5710	9,6642	1,0347	−0,99002	−0,14090
2,42	3,8013	4,4761	2,2341	−0,61291	−0,79016	2,92	4,5867	9,8172	1,0186	−0,99211	−0,12533
2,43	3,8170	4,5469	2,1993	−0,62524	−0,78043	2,93	4,6024	$9{,}9727\cdot10^{1}$	$1{,}0027\cdot10^{-2}$	−0,99396	−0,10973
2,44	3,8327	4,6189	2,1650	−0,63742	−0,77051	2,94	4,6181	$1{,}0131\cdot10^{2}$	$9{,}8711\cdot10^{-3}$	−0,99556	−0,09411
2,45	3,8485	4,6920	2,1313	−0,64945	−0,76041	2,95	4,6338	1,0291	9,7173	−0,99692	−0,07846
2,46	3,8642	4,7663	2,0981	−0,66131	−0,75011	2,96	4,6496	1,0454	9,5658	−0,99803	−0,06279
2,47	3,8799	4,8417	2,0654	−0,67301	−0,73963	2,97	4,6653	1,0519	9,4168	−0,99889	−0,04711
2,48	3,8956	4,9184	2,0332	−0,68455	−0,72897	2,98	4,6810	1,0787	9,2700	−0,99951	−0,03141
2,49	3,9113	4,9963	2,0015	−0,69591	−0,71813	2,99	4,6967	1,0958	9,1255	−0,99988	−0,01571
2,50	3,9270	$5{,}0754\cdot10^{1}$	$1{,}9703\cdot10^{-2}$	−0,70711	−0,70711	3,00	4,7124	$1{,}1132\cdot10^{2}$	$8{,}9833\cdot10^{-3}$	−1,00000	∓0,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
3,00	4,7124	$1{,}1132\cdot10^2$	$8{,}9833\cdot10^{-3}$	−1,00000	∓0,00000	3,50	5,4978	$2{,}4415\cdot10^2$	$4{,}0958\cdot10^{-3}$	−0,70711	0,70711
3,01	4,7281	1,1308	8,8433	−0,99988	0,01571	3,51	5,5135	2,4801	4,0320	−0,69591	0,71813
3,02	4,7438	1,1487	8,7055	−0,99951	0,03141	3,52	5,5292	2,5194	3,9692	−0,68455	0,72897
3,03	4,7595	1,1669	8,5698	−0,99889	0,04711	3,53	5,5449	2,5593	3,9073	−0,67301	0,73963
3,04	4,7752	1,1854	8,4362	−0,99803	0,06279	3,54	5,5606	2,5998	3,8464	−0,66131	0,75011
3,05	4,7909	1,2042	8,3047	−0,99692	0,07846	3,55	5,5763	2,6410	3,7864	−0,64945	0,76041
3,06	4,8066	1,2232	8,1753	−0,99556	0,09411	3,56	5,5920	2,6828	3,7274	−0,63742	0,77051
3,07	4,8223	1,2425	8,0479	−0,99396	0,10973	3,57	5,6077	2,7253	3,6694	−0,62524	0,78043
3,08	4,8381	1,2622	7,9225	−0,99211	0,12533	3,58	5,6235	2,7684	3,6122	−0,61291	0,79016
3,09	4,8538	1,2822	7,7990	−0,99002	0,14090	3,59	5,6392	2,8123	3,5558	−0,60042	0,79968
3,10	4,8695	1,3025	7,6774	−0,98769	0,15643	3,60	5,6549	2,8568	3,5004	−0,58779	0,80902
3,11	4,8852	1,3231	7,5578	−0,98511	0,17193	3,61	5,6706	2,9021	3,4459	−0,57501	0,81815
3,12	4,9009	1,3441	7,4400	−0,98229	0,18738	3,62	5,6863	2,9480	3,3922	−0,56208	0,82708
3,13	4,9166	1,3654	7,3241	−0,97922	0,20279	3,63	5,7020	2,9946	3,3393	−0,54902	0,83581
3,14	4,9323	1,3870	7,2099	−0,97592	0,21814	3,64	5,7177	3,0420	3,2873	−0,53583	0,84433
3,15	4,9480	1,4089	7,0975	−0,97237	0,23345	3,65	5,7334	3,0902	3,2361	−0,52250	0,85264
3,16	4,9637	1,4312	6,9869	−0,96858	0,24869	3,66	5,7491	3,1391	3,1856	−0,50904	0,86074
3,17	4,9794	1,4539	6,8780	−0,96456	0,26387	3,67	5,7648	3,1888	3,1360	−0,49546	0,86863
3,18	4,9951	1,4769	6,7708	−0,96029	0,27899	3,68	5,7805	3,2393	3,0871	−0,48175	0,87631
3,19	5,0108	1,5003	6,6653	−0,95579	0,29404	3,69	5,7962	3,2906	3,0390	−0,46792	0,88377
3,20	5,0265	1,5241	6,5614	−0,95106	0,30902	3,70	5,8119	3,3427	2,9916	−0,45399	0,89101
3,21	5,0423	1,5482	6,4592	−0,94609	0,32392	3,71	5,8276	3,3956	2,9450	−0,43994	0,89803
3,22	5,0580	1,5727	6,3585	−0,94088	0,33874	3,72	5,8434	3,4494	2,8991	−0,42578	0,90483
3,23	5,0737	1,5976	6,2594	−0,93544	0,35347	3,73	5,8591	3,5040	2,8539	−0,41151	0,91140
3,24	5,0894	1,6229	6,1618	−0,92978	0,36812	3,74	5,8748	3,5595	2,8094	−0,39715	0,91775
3,25	5,1051	1,6486	6,0658	−0,92388	0,38268	3,75	5,8905	3,6159	2,7656	−0,38268	0,92388
3,26	5,1208	1,6747	5,9713	−0,91775	0,39715	3,76	5,9062	3,6731	2,7225	−0,36812	0,92978
3,27	5,1365	1,7012	5,8782	−0,91140	0,41151	3,77	5,9219	3,7312	2,6801	−0,35347	0,93544
3,28	5,1522	1,7281	5,7866	−0,90483	0,42578	3,78	5,9376	3,7903	2,6383	−0,33874	0,94088
3,29	5,1679	1,7555	5,6964	−0,89803	0,43994	3,79	5,9533	3,8503	2,5972	−0,32392	0,94609
3,30	5,1836	1,7833	5,6076	−0,89101	0,45399	3,80	5,9690	3,9112	2,5567	−0,30902	0,95106
3,31	5,1993	1,8115	5,5202	−0,88377	0,46792	3,81	5,9847	3,9732	2,5169	−0,29404	0,95579
3,32	5,2150	1,8402	5,4342	−0,87631	0,48175	3,82	6,0004	4,0361	2,4777	−0,27899	0,96029
3,33	5,2307	1,8693	5,3495	−0,86863	0,49546	3,83	6,0162	4,1000	2,4390	−0,26387	0,96456
3,34	5,2465	1,8989	5,2661	−0,86074	0,50904	3,84	6,0319	4,1649	2,4010	−0,24869	0,96858
3,35	5,2622	1,9290	5,1841	−0,85264	0,52250	3,85	6,0476	4,2308	2,3636	−0,23345	0,97237
3,36	5,2779	1,9595	5,1033	−0,84433	0,53583	3,86	6,0633	4,2978	2,3268	−0,21814	0,97592
3,37	5,2936	1,9906	5,0237	−0,83581	0,54902	3,87	6,0790	4,3659	2,2905	−0,20279	0,97922
3,38	5,3093	2,0221	4,9454	−0,82708	0,56208	3,88	6,0947	4,4350	2,2548	−0,18738	0,98229
3,39	5,3250	2,0541	4,8684	−0,81815	0,57501	3,89	6,1104	4,5052	2,2197	−0,17193	0,98511
3,40	5,3407	2,0866	4,7925	−0,80902	0,58779	3,90	6,1261	4,5765	2,1851	−0,15643	0,98769
3,41	5,3564	2,1196	4,7178	−0,79968	0,60042	3,91	6,1418	4,6490	2,1510	−0,14090	0,99002
3,42	5,3721	2,1532	4,6443	−0,79016	0,61291	3,92	6,1575	4,7226	2,1175	−0,12533	0,99211
3,43	5,3878	2,1873	4,5719	−0,78043	0,62524	3,93	6,1732	4,7974	2,0845	−0,10973	0,99396
3,44	5,4035	2,2219	4,5006	−0,77051	0,63742	3,94	6,1889	4,8733	2,0520	−0,09411	0,99556
3,45	5,4193	2,2571	4,4305	−0,76041	0,64945	3,95	6,2047	4,9504	2,0200	−0,07846	0,99692
3,46	5,4350	2,2928	4,3614	−0,75011	0,66131	3,96	6,2204	5,0288	1,9885	−0,06279	0,99803
3,47	5,4507	2,3291	4,2934	−0,73963	0,67301	3,97	6,2361	5,1084	1,9575	−0,04711	0,99889
3,48	5,4664	2,3660	4,2265	−0,72897	0,68455	3,98	6,2518	5,1893	1,9270	−0,03141	0,99951
3,49	5,4821	2,4035	4,1606	−0,71813	0,69591	3,99	6,2675	5,2714	1,8970	−0,01571	0,99988
3,50	5,4978	$2{,}4415\cdot10^2$	$4{,}0958\cdot10^{-8}$	−0,70711	0,70711	4,00	6,2832	$5{,}3549\cdot10^2$	$1{,}8674\cdot10^{-3}$	∓0,00000	1,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
4,00	6,2832	$5,3549\cdot10^{2}$	$1,8674\cdot10^{-3}$	∓0,00000	1,00000	4,50	7,0686	$1,1745\cdot10^{3}$	$8,5144\cdot10^{-4}$	0,70711	0,70711
4,01	6,2989	5,4397	1,8383	0,01571	0,99988	4,51	7,0843	1,1931	8,3817	0,71813	0,69591
4,02	6,3146	5,5258	1,8097	0,03141	0,99951	4,52	7,1000	1,2120	8,2511	0,72897	0,68455
4,03	6,3303	5,6133	1,7815	0,04711	0,99889	4,53	7,1157	1,2311	8,1225	0,73963	0,67301
4,04	6,3460	5,7022	1,7537	0,06279	0,99803	4,54	7,1314	1,2506	7,9959	0,75011	0,66131
4,05	6,3617	5,7925	1,7264	0,07846	0,99692	4,55	7,1471	1,2705	7,8713	0,76041	0,64945
4,06	6,3774	5,8842	1,6995	0,09411	0,99556	4,56	7,1628	1,2906	7,7486	0,77051	0,63742
4,07	6,3931	5,9773	1,6730	0,10973	0,99396	4,57	7,1787	1,3110	7,6278	0,78043	0,62524
4,08	6,4088	6,0719	1,6469	0,12533	0,99211	4,58	7,1942	1,3317	7,5089	0,79016	0,61291
4,09	6,4245	6,1680	1,6213	0,14090	0,99002	4,59	7,2099	1,3528	7,3919	0,79968	0,60042
4,10	6,4403	6,2657	1,5960	0,15643	0,98769	4,60	7,2257	1,3742	7,2767	0,80902	0,58779
4,11	6,4560	6,3649	1,5711	0,17193	0,98511	4,61	7,2414	1,3960	7,1633	0,81815	0,57501
4,12	6,4717	6,4657	1,5466	0,18738	0,98229	4,62	7,2571	1,4181	7,0516	0,82708	0,56208
4,13	6,4874	6,5680	1,5225	0,20279	0,97922	4,63	7,2728	1,4406	6,9418	0,83581	0,54902
4,14	6,5031	6,6720	1,4988	0,21814	0,97592	4,64	7,2885	1,4634	6,8336	0,84433	0,53583
4,15	6,5188	6,7777	1,4754	0,23345	0,97237	4,65	7,3042	1,4866	6,7271	0,85264	0,52250
4,16	6,5345	6,8850	1,4524	0,24869	0,96858	4,66	7,3199	1,5101	6,6222	0,86074	0,50904
4,17	6,5502	6,8940	1,4298	0,26387	0,96456	4,67	7,3356	1,5340	6,5190	0,86863	0,49546
4,18	6,5659	7,1047	1,4075	0,27899	0,96029	4,68	7,3513	1,5583	6,4174	0,87631	0,48175
4,19	6,5816	7,2172	1,3856	0,29404	0,95579	4,69	7,3670	1,5830	6,3174	0,88377	0,46792
4,20	6,5973	7,3315	1,3640	0,30902	0,95106	4,70	7,3827	1,6080	6,2189	0,89101	0,45399
4,21	6,6130	7,4475	1,3427	0,32392	0,94609	4,71	7,3984	1,6334	6,1220	0,89803	0,43994
4,22	6,6288	7,5654	1,3218	0,33874	0,94088	4,72	7,4142	1,6593	6,0266	0,90483	0,42578
4,23	6,6445	7,6852	1,3012	0,35347	0,93544	4,73	7,4299	1,6856	5,9327	0,91140	0,41151
4,24	6,6602	7,8069	1,2809	0,36812	0,92978	4,74	7,4456	1,7123	5,8402	0,91775	0,39715
4,25	6,6759	7,9305	1,2609	0,38268	0,92388	4,75	7,4613	1,7394	5,7492	0,92388	0,38268
4,26	6,6916	8,0560	1,2413	0,39715	0,91775	4,76	7,4770	1,7669	5,6596	0,92978	0,36812
4,27	6,7073	8,1835	1,2220	0,41151	0,91140	4,77	7,4927	1,7949	5,5714	0,93544	0,35347
4,28	6,7230	8,3131	1,2029	0,42578	0,90483	4,78	7,5084	1,8233	5,4845	0,94088	0,33874
4,29	6,7387	8,4448	1,1841	0,43994	0,89803	4,79	7,5241	1,8522	5,3990	0,94609	0,32392
4,30	6,7544	8,5785	1,1657	0,45399	0,89101	4,80	7,5398	1,8815	5,3149	0,95106	0,30902
4,31	6,7701	8,7142	1,1476	0,46792	0,88377	4,81	7,5555	1,9113	5,2321	0,95579	0,29404
4,32	6,7858	8,8522	1,1297	0,48175	0,87631	4,82	7,5712	1,9415	5,1505	0,96029	0,27899
4,33	6,8015	8,9924	1,1121	0,49546	0,86863	4,83	7,5869	1,9723	5,0702	0,96456	0,26387
4,34	6,8173	9,1348	1,0947	0,50904	0,86074	4,84	7,6027	2,0035	4,9912	0,96858	0,24869
4,35	6,8330	9,2794	1,0777	0,52250	0,85264	4,85	7,6184	2,0352	4,9135	0,97237	0,23345
4,36	6,8487	9,4263	1,0609	0,53583	0,84433	4,86	7,6341	2,0674	4,8369	0,97592	0,21814
4,37	6,8644	9,5755	1,0443	0,54902	0,83581	4,87	7,6498	2,1001	4,7615	0,97922	0,20279
4,38	6,8801	9,7271	1,0281	0,56208	0,82708	4,88	7,6655	2,1334	4,6873	0,98229	0,18738
4,39	6,8958	$9,8811\cdot10^{2}$	$1,0120\cdot10^{-3}$	0,57501	0,81815	4,89	7,6812	2,1672	4,6142	0,98511	0,17193
4,40	6,9115	$1,0038\cdot10^{3}$	$9,9626\cdot10^{-4}$	0,58779	0,80902	4,90	7,6969	2,2015	4,5423	0,98769	0,15643
4,41	6,9272	1,0197	9,8074	0,60042	0,79968	4,91	7,7126	2,2364	4,4715	0,99002	0,14090
4,42	6,9429	1,0358	9,6545	0,61291	0,79016	4,92	7,7283	2,2718	4,4018	0,99211	0,12533
4,43	6,9586	1,0522	9,5040	0,62524	0,78043	4,93	7,7440	2,3078	4,3332	0,99396	0,10973
4,44	6,9743	1,0688	9,3559	0,63742	0,77051	4,94	7,7597	2,3443	4,2657	0,99556	0,09411
4,45	6,9900	1,0858	9,2101	0,64945	0,76041	4,95	7,7754	2,3814	4,1992	0,99692	0,07846
4,46	7,0058	1,1030	9,0665	0,66131	0,75011	4,96	7,7911	2,4191	4,1338	0,99803	0,06279
4,47	7,0215	1,1205	8,9252	0,67301	0,73963	4,97	7,8068	2,4574	4,0694	0,99889	0,04711
4,48	7,0372	1,1382	8,7861	0,68455	0,72897	4,98	7,8226	2,4963	4,0059	0,99951	0,03141
4,49	7,0529	1,1562	8,6492	0,69591	0,71813	4,99	7,8383	2,5359	3,9435	0,99988	0,01571
4,50	7,0686	$1,1745\cdot10^{3}$	$8,5144\cdot10^{-4}$	0,70711	0,70711	5,00	7,8540	$2,5760\cdot10^{3}$	$3,8820\cdot10^{-4}$	1,00000	±0,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
5,00	7,8540	$2{,}5760\cdot10^3$	$3{,}8820\cdot10^{-4}$	1,00000	±0,00000	5,50	8,6394	$5{,}6498\cdot10^3$	$1{,}7700\cdot10^{-4}$	0,70711	−0,70711
5,01	7,8697	2,6168	3,8215	0,99988	−0,01571	5,51	8,6551	5,7392	1,7424	0,69591	−0,71813
5,02	7,8854	2,6582	3,7620	0,99951	−0,03141	5,52	8,6708	5,8301	1,7152	0,68455	−0,72897
5,03	7,9011	2,7003	3,7033	0,99889	−0,04711	5,53	8,6865	5,9224	1,6885	0,67301	−0,73963
5,04	7,9168	2,7430	3,6456	0,99803	−0,06279	5,54	8,7022	6,0162	1,6622	0,66131	−0,75011
5,05	7,9325	2,7865	3,5888	0,99692	−0,07846	5,55	8,7179	6,1114	1,6363	0,64945	−0,76041
5,06	7,9482	2,8306	3,5329	0,99556	−0,09411	5,56	8,7336	6,2082	1,6108	0,63742	−0,77051
5,07	7,9639	2,8754	3,4778	0,99396	−0,10973	5,57	8,7493	6,3065	1,5857	0,62524	−0,78043
5,08	7,9796	2,9209	3,4236	0,99211	−0,12533	5,58	8,7650	6,4063	1,5610	0,61291	−0,79016
5,09	7,9953	2,9671	3,3702	0,99002	−0,14090	5,59	8,7807	6,5077	1,5367	0,60042	−0,79968
5,10	8,0111	3,0141	3,3177	0,98769	−0,15643	5,60	8,7965	6,6108	1,5127	0,58779	−0,80902
5,11	8,0268	3,0618	3,2660	0,98511	−0,17193	5,61	8,8122	6,7155	1,4891	0,57501	−0,81815
5,12	8,0425	3,1103	3,2151	0,98229	−0,18738	5,62	8,8279	6,8218	1,4659	0,56208	−0,82708
5,13	8,0582	3,1596	3,1650	0,97922	−0,20279	5,63	8,8436	6,9298	1,4431	0,54902	−0,83581
5,14	8,0739	3,2096	3,1157	0,97592	−0,21814	5,64	8,8593	7,0395	1,4206	0,53583	−0,84433
5,15	8,0896	3,2604	3,0671	0,97237	−0,23345	5,65	8,8750	7,1510	1,3984	0,52250	−0,85264
5,16	8,1053	3,3120	3,0193	0,96858	−0,24869	5,66	8,8907	7,2642	1,3766	0,50904	−0,86074
5,17	8,1210	3,3644	2,9722	0,96456	−0,26387	5,67	8,9064	7,3792	1,3551	0,49546	−0,86863
5,18	8,1367	3,4177	2,9259	0,96029	−0,27899	5,68	8,9221	7,4960	1,3340	0,48175	−0,87631
5,19	8,1524	3,4718	2,8803	0,95579	−0,29404	5,69	8,9378	7,6146	1,3132	0,46792	−0,88377
5,20	8,1681	3,5268	2,8354	0,95106	−0,30902	5,70	8,9535	7,7352	1,2928	0,45399	−0,89101
5,21	8,1838	3,5826	2,7913	0,94609	−0,32392	5,71	8,9692	7,8577	1,2726	0,43994	−0,89803
5,22	8,1996	3,6393	2,7478	0,94088	−0,33874	5,72	8,9850	7,9821	1,2528	0,42578	−0,90483
5,23	8,2153	3,6970	2,7050	0,93544	−0,35347	5,73	9,0007	8,1084	1,2333	0,41151	−0,91140
5,24	8,2310	3,7555	2,6628	0,92978	−0,36812	5,74	9,0164	8,2368	1,2141	0,39715	−0,91775
5,25	8,2467	3,8149	2,6213	0,92388	−0,38268	5,75	9,0321	8,3672	1,1952	0,38268	−0,92388
5,26	8,2624	3,8753	2,5804	0,91775	−0,39715	5,76	9,0478	8,4997	1,1765	0,36812	−0,92978
5,27	8,2781	3,9367	2,5402	0,91140	−0,41151	5,77	9,0635	8,6343	1,1581	0,35347	−0,93544
5,28	8,2938	3,9990	2,5006	0,90483	−0,42578	5,78	9,0792	8,7710	1,1401	0,33874	−0,94088
5,29	8,3095	4,0623	2,4617	0,89803	−0,43994	5,79	9,0949	8,9098	1,1224	0,32392	−0,94609
5,30	8,3252	4,1266	2,4233	0,89101	−0,45399	5,80	9,1106	9,0509	1,1049	0,30902	−0,95106
5,31	8,3409	4,1919	2,3855	0,88377	−0,46792	5,81	9,1263	9,1941	1,0877	0,29404	−0,95579
5,32	8,3566	4,2583	2,3483	0,87631	−0,48175	5,82	9,1420	9,3397	1,0707	0,27899	−0,96029
5,33	8,3724	4,3258	2,3117	0,86863	−0,49546	5,83	9,1577	9,4876	1,0540	0,26387	−0,96456
5,34	8,3881	4,3943	2,2757	0,86074	−0,50904	5,84	9,1735	9,6378	1,0376	0,24869	−0,96858
5,35	8,4038	4,4638	2,2402	0,85264	−0,52250	5,85	9,1892	9,7904	1,0214	0,23345	−0,97237
5,36	8,4195	4,5345	2,2053	0,84433	−0,53583	5,86	9,2049	$9{,}9454\cdot10^3$	$1{,}0055\cdot10^{-4}$	0,21814	−0,97592
5,37	8,4352	4,6063	2,1709	0,83581	−0,54902	5,87	9,2206	$1{,}0103\cdot10^4$	$9{,}8982\cdot10^{-5}$	0,20279	−0,97922
5,38	8,4509	4,6792	2,1371	0,82708	−0,56208	5,88	9,2363	1,0263	9,7439	0,18738	−0,98229
5,39	8,4666	4,7533	2,1038	0,81815	−0,57501	5,89	9,2520	1,0425	9,5921	0,17193	−0,98511
5,40	8,4823	4,8285	2,0710	0,80902	−0,58779	5,90	9,2677	1,0590	9,4426	0,15643	−0,98769
5,41	8,4980	4,9049	2,0388	0,79968	−0,60042	5,91	9,2834	1,0758	9,2954	0,14090	−0,99002
5,42	8,5137	4,9826	2,0070	0,79016	−0,61291	5,92	9,2991	1,0928	9,1505	0,12533	−0,99211
5,43	8,5294	5,0615	1,9757	0,78043	−0,62524	5,93	9,3148	1,1101	9,0079	0,10973	−0,99396
5,44	8,5451	5,1417	1,9449	0,77051	−0,63742	5,94	9,3305	1,1277	8,8675	0,09411	−0,99556
5,45	8,5608	5,2231	1,9145	0,76041	−0,64945	5,95	9,3462	1,1456	8,7293	0,07846	−0,99692
5,46	8,5765	5,3058	1,8847	0,75011	−0,66131	5,96	9,3619	1,1637	8,5933	0,06279	−0,99803
5,47	8,5922	5,3898	1,8554	0,73963	−0,67301	5,97	9,3776	1,1821	8,4594	0,04711	−0,99889
5,48	8,6080	5,4751	1,8265	0,72897	−0,68455	5,98	9,3934	1,2008	8,3275	0,03141	−0,99951
5,49	8,6237	5,5618	1,7980	0,71813	−0,69591	5,99	9,4091	1,2199	8,1978	0,01571	−0,99988
5,50	8,6394	$5{,}6498\cdot10^3$	$1{,}7700\cdot10^{-4}$	0,70711	−0,70711	6,00	9,4248	$1{,}2392\cdot10^4$	$8{,}0700\cdot10^{-5}$	±0,00000	−1,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
6,00	9,4248	$1,2392 \cdot 10^{4}$	$8,0700 \cdot 10^{-5}$	±0,00000	−1,00000	6,50	10,2102	$2,7178 \cdot 10^{4}$	$3,6794 \cdot 10^{-5}$	−0,70711	−0,70711
6,01	9,4405	1,2588	7,9442	−0,01571	−0,99988	6,51	10,2259	2,7609	3,6221	−0,71813	−0,69591
6,02	9,4562	1,2787	7,8204	−0,03141	−0,99951	6,52	10,2416	2,8046	3,5656	−0,72897	−0,68455
6,03	9,4719	1,2989	7,6985	−0,04711	−0,99889	6,53	10,2573	2,8490	3,5100	−0,73963	−0,67301
6,04	9,4876	1,3195	7,5785	−0,06279	−0,99803	6,54	10,2730	2,8941	3,4553	−0,75011	−0,66131
6,05	9,5033	1,3404	7,4604	−0,07846	−0,99692	6,55	10,2887	2,9399	3,4015	−0,76041	−0,64945
6,06	9,5190	1,3616	7,3441	−0,09411	−0,99556	6,56	10,3045	2,9864	3,3485	−0,77051	−0,63742
6,07	9,5347	1,3832	7,2297	−0,10973	−0,99396	6,57	10,3202	3,0337	3,2963	−0,78043	−0,62524
6,08	9,5504	1,4051	7,1170	−0,12533	−0,99211	6,58	10,3359	3,0818	3,2449	−0,79016	−0,61291
6,09	9,5661	1,4273	7,0061	−0,14090	−0,99002	6,59	10,3516	3,1306	3,1943	−0,79968	−0,60042
6,10	9,5819	1,4499	6,8969	−0,15643	−0,98769	6,60	10,3673	3,1801	3,1445	−0,80902	−0,58779
6,11	9,5976	1,4729	6,7894	−0,17193	−0,98511	6,61	10,3830	3,2305	3,0955	−0,81815	−0,57501
6,12	9,6133	1,4962	6,6836	−0,18738	−0,98229	6,62	10,3987	3,2816	3,0473	−0,82708	−0,56208
6,13	9,6290	1,5199	6,5795	−0,20279	−0,97922	6,63	10,4144	3,3335	2,9998	−0,83581	−0,54902
6,14	9,6447	1,5440	6,4769	−0,21814	−0,97592	6,64	10,4301	3,3863	2,9530	−0,84433	−0,53583
6,15	9,6604	1,5684	6,3759	−0,23345	−0,97237	6,65	10,4458	3,4399	2,9070	−0,85264	−0,52250
6,16	9,6761	1,5932	6,2765	−0,24869	−0,96858	6,66	10,4615	3,4944	2,8617	−0,86074	−0,50904
6,17	9,6918	1,6185	6,1787	−0,26387	−0,96456	6,67	10,4772	3,5497	2,8171	−0,86863	−0,49546
6,18	9,7075	1,6441	6,0824	−0,27899	−0,96029	6,68	10,4929	3,6059	2,7732	−0,87631	−0,48175
6,19	9,7233	1,6702	5,9876	−0,29404	−0,95579	6,69	10,5086	3,6630	2,7300	−0,88377	−0,46792
6,20	9,7389	1,6966	5,8943	−0,30902	−0,95106	6,70	10,5244	3,7210	2,6874	−0,89101	−0,45399
6,21	9,7546	1,7234	5,8024	−0,32392	−0,94609	6,71	10,5401	3,7799	2,6455	−0,89803	−0,43994
6,22	9,7704	1,7507	5,7120	−0,33874	−0,94088	6,72	10,5558	3,8398	2,6043	−0,90483	−0,42578
6,23	9,7861	1,7784	5,6230	−0,35347	−0,93544	6,73	10,5715	3,9006	2,5637	−0,91140	−0,41151
6,24	9,8018	1,8066	5,5354	−0,36812	−0,92978	6,74	10,5872	3,9623	2,5238	−0,91775	−0,39715
6,25	9,8175	1,8352	5,4491	−0,38268	−0,92388	6,75	10,6029	4,0251	2,4844	−0,92388	−0,38268
6,26	9,8332	1,8642	5,3642	−0,39715	−0,91775	6,76	10,6186	4,0888	2,4457	−0,92978	−0,36812
6,27	9,8489	1,8937	5,2806	−0,41151	−0,91140	6,77	10,6343	4,1535	2,4076	−0,93544	−0,35347
6,28	9,8646	1,9237	5,1983	−0,42578	−0,90483	6,78	10,6500	4,2193	2,3701	−0,94088	−0,33874
6,29	9,8803	1,9542	5,1173	−0,43994	−0,89803	6,79	10,6657	4,2861	2,3332	−0,94609	−0,32392
6,30	9,8960	1,9851	5,0375	−0,45399	−0,89101	6,80	10,6814	4,3539	2,2968	−0,95106	−0,30902
6,31	9,9117	2,0166	4,9590	−0,46792	−0,88377	6,81	10,6971	4,4229	2,2610	−0,95579	−0,29404
6,32	9,9274	2,0485	4,8817	−0,48175	−0,87631	6,82	10,7129	4,4929	2,2258	−0,96029	−0,27899
6,33	9,9431	2,0809	4,8056	−0,49546	−0,86863	6,83	10,7286	4,5640	2,1911	−0,96456	−0,26387
6,34	9,9588	2,1138	4,7307	−0,50904	−0,86074	6,84	10,7443	4,6363	2,1569	−0,96858	−0,24869
6,35	9,9745	2,1473	4,6570	−0,52250	−0,85264	6,85	10,7600	4,7097	2,1233	−0,97237	−0,23345
6,36	9,9903	2,1813	4,5844	−0,53583	−0,84433	6,86	10,7757	4,7842	2,0902	−0,97592	−0,21814
6,37	10,0060	2,2158	4,5129	−0,54902	−0,83581	6,87	10,7914	4,8599	2,0577	−0,97922	−0,20279
6,38	10,0217	2,2509	4,4426	−0,56208	−0,82708	6,88	10,8071	4,9369	2,0256	−0,98229	−0,18738
6,39	10,0374	2,2866	4,3734	−0,57501	−0,81815	6,89	10,8228	5,0151	1,9940	−0,98511	−0,17193
6,40	10,0531	2,3228	4,3052	−0,58779	−0,80902	6,90	10,8385	5,0945	1,9629	−0,98769	−0,15643
6,41	10,0688	2,3596	4,2381	−0,60042	−0,79968	6,91	10,8542	5,1752	1,9323	−0,99002	−0,14090
6,42	10,0845	2,3969	4,1721	−0,61291	−0,79016	6,92	10,8699	5,2571	1,9022	−0,99211	−0,12533
6,43	10,1002	2,4349	4,1070	−0,62524	−0,78043	6,93	10,8856	5,3403	1,8726	−0,99396	−0,10973
6,44	10,1160	2,4734	4,0430	−0,63742	−0,77051	6,94	10,9014	5,4248	1,8434	−0,99556	−0,09411
6,45	10,1317	2,5125	3,9800	−0,64945	−0,76041	6,95	10,9171	5,5107	1,8147	−0,99692	−0,07846
6,46	10,1474	2,5523	3,9180	−0,66131	−0,75011	6,96	10,9328	5,5980	1,7864	−0,99803	−0,06279
6,47	10,1631	2,5927	3,8569	−0,67301	−0,73963	6,97	10,9485	5,6866	1,7585	−0,99889	−0,04711
6,48	10,1788	2,6338	3,7968	−0,68455	−0,72897	6,98	10,9642	5,7766	1,7311	−0,99951	−0,03141
6,49	10,1945	2,6755	3,7376	−0,69591	−0,71813	6,99	10,9799	5,8681	1,7041	−0,99988	−0,01571
6,50	10,2102	$2,7178 \cdot 10^{4}$	$3,6794 \cdot 10^{-5}$	−0,70711	−0,70711	7,00	10,9956	$5,9610 \cdot 10^{4}$	$1,6776 \cdot 10^{-5}$	−1,00000	∓0,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
7,00	10,9956	$5{,}9610\cdot 10^{4}$	$1{,}6776\cdot 10^{-5}$	−1,00000	∓0,00000	7,50	11,7810	$1{,}3074\cdot 10^{5}$	$7{,}6487\cdot 10^{-6}$	−0,70711	0,70711
7,01	11,0113	6,0553	1,6515	−0,99988	0,01571	7,51	11,7967	1,3281	7,5295	−0,69591	0,71813
7,02	11,0270	6,1512	1,6257	−0,99951	0,03141	7,52	11,8124	1,3491	7,4122	−0,68455	0,72897
7,03	11,0427	6,2486	1,6003	−0,99889	0,04711	7,53	11,8281	1,3705	7,2966	−0,67301	0,73963
7,04	11,0584	6,3475	1,5754	−0,99803	0,06279	7,54	11,8438	1,3922	7,1829	−0,66131	0,75011
7,05	11,0741	6,4480	1,5509	−0,99692	0,07846	7,55	11,8595	1,4142	7,0710	−0,64945	0,76041
7,06	11,0898	6,5501	1,5267	−0,99556	0,09411	7,56	11,8753	1,4366	6,9608	−0,63742	0,77051
7,07	11,1056	6,6538	1,5029	−0,99396	0,10973	7,57	11,8910	1,4594	6,8523	−0,62524	0,78043
7,08	11,1213	6,7592	1,4795	−0,99211	0,12533	7,58	11,9067	1,4825	6,7455	−0,61291	0,79016
7,09	11,1370	6,8662	1,4564	−0,99002	0,14090	7,59	11,9224	1,5060	6,6404	−0,60042	0,79968
7,10	11,1527	6,9749	1,4337	−0,98769	0,15643	7,60	11,9381	1,5298	6,5369	−0,58779	0,80902
7,11	11,1684	7,0853	1,4114	−0,98511	0,17193	7,61	11,9538	1,5540	6,4350	−0,57501	0,81815
7,12	11,1841	7,1975	1,3894	−0,98229	0,18738	7,62	11,9695	1,5786	6,3347	−0,56208	0,82708
7,13	11,1998	7,3114	1,3677	−0,97922	0,20279	7,63	11,9852	1,6036	6,2360	−0,54902	0,83581
7,14	11,2155	7,4272	1,3464	−0,97592	0,21814	7,64	12,0009	1,6290	6,1388	−0,53583	0,84433
7,15	11,2312	7,5448	1,3254	−0,97237	0,23345	7,65	12,0166	1,6548	6,0431	−0,52250	0,85264
7,16	11,2469	7,6642	1,3048	−0,96858	0,24869	7,66	12,0323	1,6810	5,9489	−0,50904	0,86074
7,17	11,2626	7,7855	1,2844	−0,96456	0,26387	7,67	12,0480	1,7076	5,8562	−0,49546	0,86863
7,18	11,2783	7,9088	1,2644	−0,96029	0,27899	7,68	12,0637	1,7346	5,7649	−0,48175	0,87631
7,19	11,2941	8,0340	1,2447	−0,95579	0,29404	7,69	12,0794	1,7621	5,6750	−0,46792	0,88377
7,20	11,3098	8,1612	1,2253	−0,95106	0,30902	7,70	12,0952	1,7900	5,5866	−0,45399	0,89101
7,21	11,3255	8,2904	1,2062	−0,94609	0,32392	7,71	12,1109	1,8183	5,4996	−0,43994	0,89803
7,22	11,3412	8,4217	1,1874	−0,94088	0,33874	7,72	12,1266	1,8471	5,4139	−0,42578	0,90483
7,23	11,3569	8,5550	1,1689	−0,93544	0,35347	7,73	12,1423	1,8764	5,3295	−0,41151	0,91140
7,24	11,3726	8,6905	1,1507	−0,92978	0,36812	7,74	12,1580	1,9061	5,2464	−0,39715	0,91775
7,25	11,3883	8,8280	1,1328	−0,92388	0,38268	7,75	12,1737	1,9363	5,1647	−0,38268	0,92388
7,26	11,4040	8,9678	1,1151	−0,91775	0,39715	7,76	12,1894	1,9669	5,0842	−0,36812	0,92978
7,27	11,4197	9,1098	1,0977	−0,91140	0,41151	7,77	12,2051	1,9981	5,0049	−0,35347	0,93544
7,28	11,4354	9,2540	1,0806	−0,90483	0,42578	7,78	12,2208	2,0297	4,9269	−0,33874	0,94088
7,29	11,4511	9,4005	1,0638	−0,89803	0,43994	7,79	12,2365	2,0618	4,8501	−0,32392	0,94609
7,30	11,4668	9,5493	1,0472	−0,89101	0,45399	7,80	12,2522	2,0944	4,7745	−0,30902	0,95106
7,31	11,4826	9,7005	1,0309	−0,88377	0,46792	7,81	12,2679	2,1276	4,7001	−0,29404	0,95579
7,32	11,4983	$9{,}8541\cdot 10^{4}$	$1{,}0148\cdot 10^{-5}$	−0,87631	0,48175	7,82	12,2837	2,1613	4,6269	−0,27899	0,96029
7,33	11,5140	$1{,}0010\cdot 10^{5}$	$9{,}9899\cdot 10^{-6}$	−0,86863	0,49546	7,83	12,2994	2,1955	4,5548	−0,26387	0,96456
7,34	11,5297	1,0169	9,8342	−0,86074	0,50904	7,84	12,3151	2,2303	4,4838	−0,24869	0,96858
7,35	11,5454	1,0330	9,6809	−0,85264	0,52250	7,85	12,3308	2,2656	4,4139	−0,23345	0,97237
7,36	11,5611	1,0493	9,5300	−0,84433	0,53583	7,86	12,3465	2,3014	4,3451	−0,21814	0,97592
7,37	11,5768	1,0659	9,3815	−0,83581	0,54902	7,87	12,3622	2,3379	4,2774	−0,20279	0,97922
7,38	11,5925	1,0828	9,2353	−0,82708	0,56208	7,88	12,3779	2,3749	4,2107	−0,18738	0,98229
7,39	11,6082	1,1000	9,0914	−0,81815	0,57501	7,89	12,3936	2,4125	4,1451	−0,17193	0,98511
7,40	11,6239	1,1174	8,9497	−0,80902	0,58779	7,90	12,4093	2,4507	4,0805	−0,15643	0,98769
7,41	11,6396	1,1351	8,8102	−0,79968	0,60042	7,91	12,4250	2,4895	4,0169	−0,14090	0,99002
7,42	11,6553	1,1530	8,6729	−0,79016	0,61291	7,92	12,4407	2,5289	3,9543	−0,12533	0,99211
7,43	11,6710	1,1713	8,5378	−0,78043	0,62524	7,93	12,4564	2,5689	3,8927	−0,10973	0,99396
7,44	11,6868	1,1898	8,4047	−0,77051	0,63742	7,94	12,4721	2,6096	3,8320	−0,09411	0,99556
7,45	11,7025	1,2087	8,2737	−0,76041	0,64945	7,95	12,4879	2,6509	3,7723	−0,07846	0,99692
7,46	11,7182	1,2278	8,1447	−0,75011	0,66131	7,96	12,5036	2,6929	3,7135	−0,06279	0,99803
7,47	11,7339	1,2473	8,0178	−0,73963	0,67301	7,97	12,5193	2,7355	3,6556	−0,04711	0,99889
7,48	11,7496	1,2670	7,8928	−0,72897	0,68455	7,98	12,5350	2,7788	3,5986	−0,03141	0,99951
7,49	11,7653	1,2870	7,7698	−0,71813	0,69591	7,99	12,5507	2,8228	3,5425	−0,01571	0,99988
7,50	11,7810	$1{,}3074\cdot 10^{5}$	$7{,}6487\cdot 10^{-6}$	−0,70711	0,70711	8,00	12,5664	$2{,}8675\cdot 10^{5}$	$3{,}4873\cdot 10^{-6}$	∓0,00000	1,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
8,00	12,5664	$2,8675\cdot10^5$	$3,4873\cdot10^{-6}$	∓0,00000	1,00000	8,50	13,3518	$6,2893\cdot10^5$	$1,5900\cdot10^{-6}$	0,70711	0,70711
8,01	12,5821	2,9129	3,4330	0,01571	0,99988	8,51	13,3675	6,3889	1,5652	0,71813	0,69591
8,02	12,5978	2,9590	3,3795	0,03141	0,99951	8,52	13,3832	6,4900	1,5408	0,72897	0,68455
8,03	12,6135	3,0059	3,3268	0,04711	0,99889	8,53	13,3989	6,5928	1,5168	0,73963	0,67301
8,04	12,6292	3,0535	3,2750	0,06279	0,99803	8,54	13,4146	6,6971	1,4932	0,75011	0,66131
8,05	12,6449	3,1018	3,2240	0,07846	0,99692	8,55	13,4303	6,8031	1,4699	0,76041	0,64945
8,06	12,6606	3,1509	3,1737	0,09411	0,99556	8,56	13,4461	6,9108	1,4470	0,77051	0,63742
8,07	12,6764	3,2008	3,1242	0,10973	0,99396	8,57	13,4618	7,0202	1,4244	0,78043	0,62524
8,08	12,6921	3,2515	3,0755	0,12533	0,99211	8,58	13,4775	7,1314	1,4022	0,79016	0,61291
8,09	12,7078	3,3029	3,0276	0,14090	0,99002	8,59	13,4932	7,2443	1,3804	0,79968	0,60042
8,10	12,7235	3,3552	2,9804	0,15643	0,98769	8,60	13,5089	7,3590	1,3589	0,80902	0,58779
8,11	12,7392	3,4083	2,9339	0,17193	0,98511	8,61	13,5246	7,4755	1,3377	0,81815	0,57501
8,12	12,7549	3,4623	2,8882	0,18738	0,98229	8,62	13,5403	7,5939	1,3169	0,82708	0,56208
8,13	12,7706	3,5171	2,8432	0,20279	0,97922	8,63	13,5560	7,7141	1,2963	0,83581	0,54902
8,14	12,7863	3,5728	2,7989	0,21814	0,97592	8,64	13,5717	7,8362	1,2761	0,84433	0,53583
8,15	12,8020	3,6293	2,7552	0,23345	0,97237	8,65	13,5874	7,9603	1,2563	0,85264	0,52250
8,16	12,8177	3,6868	2,7123	0,24869	0,96858	8,66	13,6031	8,0863	1,2367	0,86074	0,50904
8,17	12,8334	3,7452	2,6701	0,26387	0,96456	8,67	13,6188	8,2143	1,2174	0,86863	0,49546
8,18	12,8491	3,8045	2,6285	0,27899	0,96029	8,68	13,6345	8,3444	1,1984	0,87631	0,48175
8,19	12,8649	3,8647	2,5875	0,29404	0,95579	8,69	13,6502	8,4765	1,1797	0,88377	0,46792
8,20	12,8806	3,9259	2,5472	0,30902	0,95106	8,70	13,6660	8,6107	1,1613	0,89101	0,45399
8,21	12,8963	3,9881	2,5075	0,32392	0,94609	8,71	13,6817	8,7470	1,1432	0,89803	0,43994
8,22	12,9120	4,0512	2,4684	0,33874	0,94088	8,72	13,6974	8,8855	1,1254	0,90483	0,42578
8,23	12,9277	4,1153	2,4299	0,35347	0,93544	8,73	13,7131	9,0262	1,1079	0,91140	0,41151
8,24	12,9434	4,1805	2,3920	0,36812	0,92978	8,74	13,7288	9,1691	1,0906	0,91775	0,39715
8,25	12,9591	4,2467	2,3548	0,38268	0,92388	8,75	13,7445	9,3142	1,0736	0,92388	0,38268
8,26	12,9748	4,3139	2,3181	0,39715	0,91775	8,76	13,7602	9,4617	1,0569	0,92978	0,36812
8,27	12,9905	4,3822	2,2820	0,41151	0,91140	8,77	13,7759	9,6114	1,0404	0,93544	0,35347
8,28	13,0062	4,4516	2,2464	0,42578	0,90483	8,78	13,7916	4,7636	1,0242	0,94088	0,33874
8,29	13,0219	4,5221	2,2114	0,43994	0,89803	8,79	13,8073	$9,9182\cdot10^5$	$1,0083\cdot10^{-6}$	0,94609	0,32392
8,30	13,0376	4,5937	2,1769	0,45399	0,89101	8,80	13,8230	$1,0075\cdot10^6$	$9,9253\cdot10^{-7}$	0,95106	0,30902
8,31	13,0534	4,6664	2,1430	0,46792	0,88377	8,81	13,8387	1,0235	9,7706	0,95579	0,29404
8,32	13,0691	4,7403	2,1096	0,48175	0,87631	8,82	13,8545	1,0397	9,6183	0,96029	0,27899
8,33	13,0848	4,8154	2,0767	0,49546	0,86863	8,83	13,8702	1,0562	9,4685	0,96456	0,26387
8,34	13,1005	4,8916	2,0443	0,50904	0,86074	8,84	13,8859	1,0729	9,3209	0,96858	0,24869
8,35	13,1162	4,9690	2,0125	0,52250	0,85264	8,85	13,9016	1,0899	9,1756	0,97237	0,23345
8,36	13,1319	5,0477	1,9811	0,53583	0,84433	8,86	13,9173	1,1071	9,0326	0,97592	0,21814
8,37	13,1476	5,1276	1,9502	0,54902	0,83581	8,87	13,9330	1,1246	8,8918	0,97922	0,20279
8,38	13,1633	5,2088	1,9198	0,56208	0,82708	8,88	13,9487	1,1424	8,7532	0,98229	0,18738
8,39	13,1790	5,2912	1,8899	0,57501	0,81815	8,89	13,9644	1,1605	8,6168	0,98511	0,17193
8,40	13,1947	5,3750	1,8605	0,58779	0,80902	8,90	13,9801	1,1789	8,4825	0,98769	0,15643
8,41	13,2104	5,4601	1,8315	0,60042	0,79968	8,91	13,9958	1,1976	8,3503	0,99002	0,14090
8,42	13,2261	5,5466	1,8029	0,61291	0,79016	8,92	14,0115	1,2165	8,2202	0,99211	0,12533
8,43	13,2418	5,6344	1,7748	0,62524	0,78043	8,93	14,0272	1,2357	8,0921	0,99396	0,10973
8,44	13,2576	5,7236	1,7472	0,63742	0,77051	8,94	14,0430	1,2553	7,9660	0,99556	0,09411
8,45	13,2733	5,8142	1,7199	0,64945	0,76041	8,95	14,0587	1,2752	7,8418	0,99692	0,07846
8,46	13,2890	5,9063	1,6931	0,66131	0,75011	8,96	14,0744	1,2954	7,7196	0,99803	0,06279
8,47	13,3047	5,9997	1,6668	0,67301	0,73963	8,97	14,0901	1,3159	7,5993	0,99889	0,04711
8,48	13,3204	6,0947	1,6408	0,68455	0,72897	8,98	14,1058	1,3367	7,4808	0,99951	0,03141
8,49	13,3361	6,1912	1,6152	0,69591	0,71813	8,99	14,1215	1,3579	7,3643	0,99988	0,01571
8,50	13,3518	$6,2893\cdot10^5$	$1,5900\cdot10^{-6}$	0,70711	0,70711	9,00	14,1372	$1,3794\cdot10^6$	$7,2495\cdot10^{-7}$	1,00000	±0,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
9,00	14,1372	$1,3794\cdot10^{6}$	$7,2495\cdot10^{-7}$	1,00000	±0,00000	9,50	14,9226	$3,0254\cdot10^{6}$	$3,3053\cdot10^{-7}$	0,70711	−0,70711
9,01	14,1529	1,4012	7,1365	0,99988	−0,01571	9,51	14,9383	3,0743	3,2538	0,69591	−0,71813
9,02	14,1686	1,4234	7,0253	0,99951	−0,03141	9,52	14,9540	3,1220	3,2031	0,68455	−0,72897
9,03	14,1843	1,4459	6,9158	0,99889	−0,04711	9,53	14,9697	3,1714	3,1532	0,67301	−0,73963
9,04	14,2000	1,4688	6,8080	0,99803	−0,06279	9,54	14,9854	3,2216	3,1040	0,66131	−0,75011
9,05	14,2157	1,4921	6,7019	0,99692	−0,07846	9,55	15,0011	3,2726	3,0556	0,64945	−0,76041
9,06	14,2314	1,5157	6,5974	0,99556	−0,09411	9,56	15,0169	3,3244	3,0080	0,63742	−0,77051
9,07	14,2472	1,5397	6,4946	0,99396	−0,10973	9,57	15,0326	3,3770	2,9611	0,62524	−0,78043
9,08	14,2629	1,5641	6,3934	0,99211	−0,12533	9,58	15,0483	3,4305	2,9150	0,61291	−0,79016
9,09	14,2786	1,5889	6,2938	0,99002	−0,14090	9,59	15,0640	3,4848	2,8695	0,60042	−0,79968
9,10	14,2943	1,6140	6,1957	0,98769	−0,15643	9,60	15,0797	3,5400	2,8248	0,58779	−0,80902
9,11	14,3100	1,6395	6,0991	0,98511	−0,17193	9,61	15,0954	3,5961	2,7808	0,57501	−0,81815
9,12	14,3257	1,6655	6,0040	0,98229	−0,18738	9,62	15,1111	3,6530	2,7375	0,56208	−0,82708
9,13	14,3414	1,6919	5,9105	0,97922	−0,20279	9,63	15,1268	3,7108	2,6948	0,54902	−0,83581
9,14	14,3571	1,7187	5,8184	0,97592	−0,21814	9,64	15,1425	3,7696	2,6528	0,53583	−0,84433
9,15	14,3728	1,7459	5,7277	0,97237	−0,23345	9,65	15,1582	3,8293	2,6115	0,52250	−0,85264
9,16	14,3885	1,7736	5,6384	0,96858	−0,24869	9,66	15,1739	3,8899	2,5708	0,50904	−0,86074
9,17	14,4042	1,8017	5,5505	0,96456	−0,26387	9,67	15,1896	3,9515	2,5307	0,49546	−0,86863
9,18	14,4199	1,8302	5,4640	0,96029	−0,27899	9,68	15,2053	4,0140	2,4913	0,48175	−0,87631
9,19	14,4357	1,8592	5,3788	0,95579	−0,29404	9,69	15,2210	4,0776	2,4524	0,46792	−0,88377
9,20	14,4514	1,8886	5,2950	0,95106	−0,30902	9,70	15,2368	4,1421	2,4142	0,45399	−0,89101
9,21	14,4671	1,9185	5,2125	0,94609	−0,32392	9,71	15,2525	4,2077	2,3765	0,43994	−0,89803
9,22	14,4828	1,9488	5,1313	0,94088	−0,33874	9,72	15,2682	4,2743	2,3395	0,42578	−0,90483
9,23	14,4985	1,9797	5,0513	0,93544	−0,35347	9,73	15,2839	4,3420	2,3031	0,41151	−0,91140
9,24	14,5142	2,0110	4,9726	0,92978	−0,36812	9,74	15,2996	4,4108	2,2672	0,39715	−0,91775
9,25	14,5299	2,0429	4,8951	0,92388	−0,38266	9,75	15,3153	4,4806	2,2319	0,38268	−0,92388
9,26	14,5456	2,0752	4,8188	0,91775	−0,39715	9,76	15,3310	4,5515	2,1971	0,36812	−0,92978
9,27	14,5613	2,1080	4,7437	0,91140	−0,41151	9,77	15,3467	4,6236	2,1628	0,35347	−0,93544
9,28	14,5770	2,1414	4,6698	0,90483	−0,42578	9,78	15,3624	4,6968	2,1291	0,33874	−0,94088
9,29	14,5927	2,1753	4,5970	0,89803	−0,43994	9,79	15,3781	4,7712	2,0959	0,32392	−0,94609
9,30	14,6084	2,2098	4,5253	0,89101	−0,45399	9,80	15,3938	4,8467	2,0633	0,30902	−0,95106
9,31	14,6242	2,2448	4,4548	0,88377	−0,46792	9,81	15,4095	4,9234	2,0312	0,29404	−0,95579
9,32	14,6399	2,2803	4,3854	0,87631	−0,48175	9,82	15,4253	5,0014	1,9995	0,27899	−0,96029
9,33	14,6556	2,3164	4,3170	0,86863	−0,49546	9,83	15,4410	5,0806	1,9683	0,26387	−0,96456
9,34	14,6713	2,3531	4,2497	0,86074	−0,50904	9,84	15,4567	5,1610	1,9376	0,24869	−0,96858
9,35	14,6870	2,3904	4,1835	0,85264	−0,52250	9,85	15,4724	5,2427	1,9074	0,23345	−0,97237
9,36	14,7027	2,4282	4,1183	0,84433	−0,53583	9,86	15,4881	5,3257	1,8777	0,21814	−0,97592
9,37	14,7184	2,4667	4,0541	0,83581	−0,54902	9,87	15,5038	5,4100	1,8484	0,20279	−0,97922
9,38	14,7341	2,5057	3,9909	0,82708	−0,56208	9,88	15,5195	5,4957	1,8196	0,18738	−0,98229
9,39	14,7498	2,5453	3,9287	0,81815	−0,57501	9,89	15,5352	5,5826	1,7912	0,17193	−0,98511
9,40	14,7655	2,5856	3,8675	0,80902	−0,58779	9,90	15,5509	5,6710	1,7633	0,15643	−0,98769
9,41	14,7812	2,6266	3,8072	0,79968	−0,60042	9,91	15,5666	5,7608	1,7358	0,14090	−0,99002
9,42	14,7969	2,6682	3,7479	0,79016	−0,61291	9,92	15,5823	5,8520	1,7088	0,12533	−0,99211
9,43	14,8126	2,7104	3,6895	0,78043	−0,62524	9,93	15,5980	5,9447	1,6822	0,10973	−0,99396
9,44	14,8284	2,7533	3,6320	0,77051	−0,63742	9,94	15,6138	6,0388	1,6560	0,09411	−0,99556
9,45	14,8441	2,7969	3,5754	0,76041	−0,64945	9,95	15,6295	6,1344	1,6301	0,07846	−0,99692
9,46	14,8598	2,8412	3,5197	0,75011	−0,66131	9,96	15,6452	6,2315	1,6047	0,06279	−0,99803
9,47	14,8755	2,8862	3,4648	0,73963	−0,67301	9,97	15,6609	6,3302	1,5797	0,04711	−0,99889
9,48	14,8912	2,9319	3,4108	0,72897	−0,68455	9,98	15,6766	6,4304	1,5551	0,03141	−0,99951
9,49	14,9069	2,9783	3,3576	0,71813	−0,69591	9,99	15,6923	6,5322	1,5309	0,01571	−0,99988
9,50	14,9226	$3,0254\cdot10^{6}$	$3,3053\cdot10^{-7}$	0,70711	−0,70711	10,00	15,7080	$6,6556\cdot10^{6}$	$1,5070\cdot10^{-7}$	±0,00000	−1,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
10,00	15,7080	$6,6356\cdot10^{6}$	$1,5070\cdot10^{-7}$	±0,00000	−1,00000	10,50	16,4934	$1,4554\cdot10^{7}$	$6,8711\cdot10^{-8}$	−0,70711	−0,70711
10,01	15,7237	6,7407	1,4835	−0,01571	−0,99988	10,51	16,5091	1,4784	6,7640	−0,71813	−0,69591
10,02	15,7394	6,8474	1,4604	−0,03141	−0,99951	10,52	16,5248	1,5018	6,6586	−0,72897	−0,68455
10,03	15,7551	6,9558	1,4376	−0,04711	−0,99889	10,53	16,5405	1,5246	6,5548	−0,73963	−0,67301
10,04	15,7708	7,0659	1,4152	−0,06279	−0,99803	10,54	16,5562	1,5498	6,4526	−0,75011	−0,66131
10,05	15,7865	7,1778	1,3932	−0,07846	−0,99692	10,55	16,5719	1,5743	6,3521	−0,76041	−0,64945
10,06	15,8022	7,2914	1,3715	−0,09411	−0,99556	10,56	16,5876	1,5992	6,2531	−0,77051	−0,63742
10,07	15,8180	7,4068	1,3501	−0,10973	−0,99396	10,57	16,6034	1,6246	6,1556	−0,78043	−0,62524
10,08	15,8337	7,5241	1,3291	−0,12533	−0,99211	10,58	16,6191	1,6503	6,0597	−0,79016	−0,61291
10,09	15,8494	7,6433	1,3084	−0,14090	−0,99002	10,59	16,6348	1,6764	5,9653	−0,79968	−0,60042
10,10	15,8651	7,7643	1,2880	−0,15643	−0,98769	10,60	16,6505	1,7029	5,8723	−0,80902	−0,58779
10,11	15,8808	7,8872	1,2679	−0,17193	−0,98511	10,61	16,6662	1,7299	5,7808	−0,81815	−0,57501
10,12	15,8965	8,0121	1,2481	−0,18738	−0,98229	10,62	16,6819	1,7573	5,6907	−0,82708	−0,56208
10,13	15,9122	8,1389	1,2286	−0,20279	−0,97922	10,63	16,6976	1,7851	5,6020	−0,83581	−0,54902
10,14	15,9279	8,2678	1,2095	−0,21814	−0,97592	10,64	16,7133	1,8134	5,5147	−0,84433	−0,53583
10,15	15,9436	8,3986	1,1906	−0,23345	−0,97237	10,65	16,7290	1,8421	5,4287	−0,85264	−0,52250
10,16	15,9593	8,5316	1,1721	−0,24869	−0,96858	10,66	16,7447	1,8712	5,3441	−0,86074	−0,50904
10,17	15,9750	8,6667	1,1539	−0,26387	−0,96456	10,67	16,7604	1,9008	5,2608	−0,86863	−0,49546
10,18	15,9907	8,8039	1,1359	−0,27899	−0,96029	10,68	16,7761	1,9309	5,1788	−0,87631	−0,48175
10,19	16,0065	8,9433	1,1181	−0,29404	−0,95579	10,69	16,7918	1,9615	5,0981	−0,88377	−0,46792
10,20	16,0222	9,0849	1,1007	−0,30902	−0,95106	10,70	16,8076	1,9926	5,0187	−0,89101	−0,45399
10,21	16,0379	9,2287	1,0836	−0,32392	−0,94609	10,71	16,8233	2,0242	4,9404	−0,89803	−0,43994
10,22	16,0536	9,3748	1,0667	−0,33874	−0,94088	10,72	16,8390	2,0562	4,8634	−0,90483	−0,42578
10,23	16,0693	9,5232	1,0501	−0,35347	−0,93544	10,73	16,8547	2,0887	4,7876	−0,91140	−0,41151
10,24	16,0850	9,6740	1,0337	−0,36812	−0,92978	10,74	16,8704	2,1218	4,7130	−0,91775	−0,39715
10,25	16,1007	9,8272	1,0176	−0,38268	−0,92388	10,75	16,8861	2,1554	4,6396	−0,92388	−0,38268
10,26	16,1164	$9,9828\cdot10^{6}$	$1,0017\cdot10^{-7}$	−0,39715	−0,91775	10,76	16,9018	2,1895	4,5673	−0,92978	−0,36812
10,27	16,1321	$1,0141\cdot10^{7}$	$9,8612\cdot10^{-8}$	−0,41151	−0,91140	10,77	16,9175	2,2242	4,4961	−0,93544	−0,35347
10,28	16,1478	1,0301	9,7075	−0,42578	−0,90483	10,78	16,9332	2,2594	4,4260	−0,94088	−0,33874
10,29	16,1635	1,0464	9,5562	−0,43994	−0,89803	10,79	16,9489	2,2952	4,3570	−0,94609	−0,32392
10,30	16,1792	1,0630	9,4072	−0,45399	−0,89101	10,80	16,9646	2,3315	4,2891	−0,95106	−0,30902
10,31	16,1950	1,0798	9,2606	−0,46792	−0,88377	10,81	16,9803	2,3684	4,2223	−0,95579	−0,29404
10,32	16,2107	1,0969	9,1163	−0,48175	−0,87631	10,82	16,9961	2,4059	4,1565	−0,96029	−0,27899
10,33	16,2264	1,1143	8,9742	−0,49546	−0,86863	10,83	17,0118	2,4440	4,0917	−0,96456	−0,26387
10,34	16,2421	1,1319	8,8343	−0,50904	−0,86074	10,84	17,0275	2,4827	4,0279	−0,96858	−0,24869
10,35	16,2578	1,1499	8,6966	−0,52250	−0,85264	10,85	17,0432	2,5220	3,9651	−0,97237	−0,23345
10,36	16,2735	1,1681	8,5611	−0,53583	−0,84433	10,86	17,0589	2,5619	3,9033	−0,97592	−0,21814
10,37	16,2892	1,1866	8,4277	−0,54902	−0,83581	10,87	17,0746	2,6025	3,8425	−0,97922	−0,20279
10,38	16,3049	1,2054	8,2963	−0,56208	−0,82708	10,88	17,0903	2,6437	3,7826	−0,98229	−0,18738
10,39	16,3206	1,2244	8,1671	−0,57501	−0,81815	10,89	17,1060	2,6855	3,7236	−0,98511	−0,17193
10,40	16,3363	1,2438	8,0398	−0,58779	−0,80902	10,90	17,1217	2,7280	3,6656	−0,98769	−0,15643
10,41	16,3520	1,2635	7,9145	−0,60042	−0,79968	10,91	17,1374	2,7712	3,6085	−0,99002	−0,14090
10,42	16,3677	1,2835	7,7911	−0,61291	−0,79016	10,92	17,1531	2,8151	3,5523	−0,99211	−0,12533
10,43	16,3834	1,3039	7,6697	−0,62524	−0,78043	10,93	17,1688	2,8597	3,4969	−0,99396	−0,10973
10,44	16,3992	1,3245	7,5502	−0,63742	−0,77051	10,94	17,1846	2,9050	3,4424	−0,99556	−0,09411
10,45	16,4149	1,3454	7,4325	−0,64945	−0,76041	10,95	17,2003	2,9510	3,3887	−0,99692	−0,07846
10,46	16,4306	1,3667	7,3166	−0,66131	−0,75011	10,96	17,2160	2,9977	3,3359	−0,99803	−0,06279
10,47	16,4463	1,3884	7,2026	−0,67301	−0,73963	10,97	17,2317	3,0451	3,2840	−0,99889	−0,04711
10,48	16,4620	1,4104	7,0904	−0,68455	−0,72897	10,98	17,2474	3,0933	3,2328	−0,99951	−0,03141
10,49	16,4777	1,4327	6,9799	−0,69591	−0,71813	10,99	17,2631	3,1423	3,1824	−0,99988	−0,01571
10,50	16,4934	$1,4554\cdot10^{7}$	$6,8711\cdot10^{-8}$	−0,70711	−0,70711	11,00	17,2788	$3,1921\cdot10^{7}$	$3,1328\cdot10^{-8}$	−1,00000	∓0,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
11,00	17,2788	$3,1921\cdot10^{7}$	$3,1328\cdot10^{-8}$	−1,00000	∓0,00000	11,50	18,0642	$7,0011\cdot10^{7}$	$1,4284\cdot10^{-8}$	−0,70711	0,70711
11,01	17,2945	3,2426	3,0840	−0,99988	0,01571	11,51	18,0799	7,1119	1,4061	−0,69591	0,71813
11,02	17,3102	3,2939	3,0359	−0,99951	0,03141	11,52	18,0956	7,2245	1,3842	−0,68455	0,72897
11,03	17,3259	3,3460	2,9886	−0,99889	0,04711	11,53	18,1113	7,3389	1,3626	−0,67301	0,73963
11,04	17,3416	3,3990	2,9420	−0,99803	0,06279	11,54	18,1270	7,4551	1,3414	−0,66131	0,75011
11,05	17,3573	3,4528	2,8961	−0,99692	0,07846	11,55	18,1427	7,5731	1,3205	−0,64945	0,76041
11,06	17,3730	3,5075	2,8510	−0,99556	0,09411	11,56	18,1584	7,6930	1,2999	−0,63742	0,77051
11,07	17,3888	3,5631	2,8065	−0,99396	0,10973	11,57	18,1742	7,8148	1,2796	−0,62524	0,78043
11,08	17,4045	3,6195	2,7628	−0,99211	0,12533	11,58	18,1899	7,9385	1,2597	−0,61291	0,79016
11,09	17,4202	3,6768	2,7198	−0,99002	0,14090	11,59	18,2056	8,0642	1,2400	−0,60042	0,79968
11,10	17,4359	3,7350	2,6774	−0,98769	0,15643	11,60	18,2213	8,1919	1,2207	−0,58779	0,80902
11,11	17,4516	3,7941	2,6357	−0,98511	0,17193	11,61	18,2370	8,3216	1,2017	−0,57501	0,81815
11,12	17,4673	3,8542	2,5946	−0,98229	0,18738	11,62	18,2527	8,4533	1,1830	−0,56208	0,82708
11,13	17,4830	3,9152	2,5541	−0,97922	0,20279	11,63	18,2684	8,5871	1,1646	−0,54902	0,83581
11,14	17,4987	3,9772	2,5143	−0,97592	0,21814	11,64	18,2841	8,7231	1,1464	−0,53583	0,84433
11,15	17,5144	4,0401	2,4752	−0,97237	0,23345	11,65	18,2998	8,8612	1,1285	−0,52250	0,85264
11,16	17,5301	4,1041	2,4366	−0,96858	0,24869	11,66	18,3155	9,0015	1,1109	−0,50904	0,86074
11,17	17,5458	4,1691	2,3986	−0,96456	0,26387	11,67	18,3312	9,1440	1,0936	−0,49546	0,86863
11,18	17,5615	4,2351	2,3612	−0,96029	0,27899	11,68	18,3469	9,2888	1,0766	−0,48175	0,87631
11,19	17,5773	4,3022	2,3244	−0,95579	0,29404	11,69	18,3626	9,4358	1,0598	−0,46792	0,88377
11,20	17,5930	4,3703	2,2882	−0,95106	0,30902	11,70	18,3784	9,5852	1,0433	−0,45399	0,89101
11,21	17,6087	4,4394	2,2525	−0,94609	0,32392	11,71	18,3941	9,7369	1,0270	−0,43994	0,89803
11,22	17,6244	4,5097	2,2174	−0,94088	0,33874	11,72	18,4098	$9,8911\cdot10^{7}$	$1,0110\cdot10^{-8}$	−0,42578	0,90483
11,23	17,6401	4,5811	2,1828	−0,93544	0,35347	11,73	18,4255	$1,0048\cdot10^{8}$	$9,9525\cdot10^{-9}$	−0,41151	0,91140
11,24	17,6558	4,6537	2,1488	−0,92978	0,36812	11,74	18,4412	1,0207	9,7974	−0,39715	0,91775
11,25	17,6715	4,7274	2,1153	−0,92388	0,38268	11,75	18,4569	1,0369	9,6447	−0,38268	0,92388
11,26	17,6872	4,8022	2,0824	−0,91775	0,39715	11,76	18,4726	1,0533	9,4944	−0,36812	0,92978
11,27	17,7029	4,8782	2,0499	−0,91140	0,41151	11,77	18,4883	1,0700	9,3465	−0,35347	0,93544
11,28	17,7186	4,9554	2,0180	−0,90483	0,42578	11,78	18,5040	1,0869	9,2008	−0,33874	0,94088
11,29	17,7343	5,0339	1,9866	−0,89803	0,43994	11,79	18,5197	1,1041	9,0574	−0,32392	0,94609
11,30	17,7500	5,1136	1,9556	−0,89101	0,45399	11,80	18,5354	1,1216	8,9162	−0,30902	0,95106
11,31	17,7658	5,1946	1,9251	−0,88377	0,46792	11,81	18,5511	1,1393	8,7772	−0,29404	0,95579
11,32	17,7815	5,2768	1,8951	−0,87631	0,48175	11,82	18,5669	1,1573	8,6404	−0,27899	0,96029
11,33	17,7972	5,3603	1,8656	−0,86863	0,49546	11,83	18,5826	1,1757	8,5058	−0,26387	0,96456
11,34	17,8129	5,4452	1,8365	−0,86074	0,50904	11,84	18,5983	1,1943	8,3732	−0,24869	0,96858
11,35	17,8286	5,5314	1,8079	−0,85264	0,52250	11,85	18,6140	1,2132	8,2427	−0,23345	0,97237
11,36	17,8443	5,6190	1,7797	−0,84433	0,53583	11,86	18,6297	1,2324	8,1142	−0,21814	0,97592
11,37	17,8600	5,7079	1,7519	−0,83581	0,54902	11,87	18,6454	1,2519	7,9878	−0,20279	0,97922
11,38	17,8757	5,7983	1,7246	−0,82708	0,56208	11,88	18,6611	1,2717	7,8633	−0,18738	0,98229
11,39	17,8914	5,8901	1,6977	−0,81815	0,57501	11,89	18,6768	1,2918	7,7408	−0,17193	0,98511
11,40	17,9071	5,9834	1,6713	−0,80902	0,58779	11,90	18,6925	1,3123	7,6201	−0,15643	0,98769
11,41	17,9228	6,0781	1,6452	−0,79968	0,60042	11,91	18,7082	1,3331	7,6013	−0,14090	0,99002
11,42	17,9385	6,1743	1,6196	−0,79016	0,61291	11,92	18,7239	1,3542	7,3844	−0,12533	0,99211
11,43	17,9542	6,2721	1,5943	−0,78043	0,62524	11,93	18,7396	1,3756	7,2694	−0,10973	0,99396
11,44	17,9700	6,3714	1,5695	−0,77051	0,63742	11,94	18,7554	1,3974	7,1561	−0,09411	0,99556
11,45	17,9857	6,4722	1,5451	−0,76041	0,64945	11,95	18,7711	1,4195	7,0445	−0,07846	0,99692
11,46	18,0014	6,5747	1,5210	−0,75011	0,66131	11,96	18,7868	1,4420	6,9347	−0,06279	0,99803
11,47	18,0171	6,6788	1,4972	−0,73963	0,67301	11,97	18,8025	1,4648	6,8267	−0,04711	0,99889
11,48	18,0328	6,7845	1,4739	−0,72897	0,68455	11,98	18,8182	1,4880	6,7203	−0,03141	0,99951
11,49	18,0485	6,8920	1,4510	−0,71813	0,69591	11,99	18,8339	1,5116	6,6155	−0,01571	0,99988
11,50	18,0642	$7,0011\cdot10^{7}$	$1,4284\cdot10^{-8}$	−0,70711	0,70711	12,00	18,8496	$1,5355\cdot10^{8}$	$6,5124\cdot10^{-9}$	∓0,00000	1,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
12,00	18,8496	$1{,}5355\cdot10^{8}$	$6{,}5124\cdot10^{-9}$	∓0,00000	1,00000	12,50	19,6350	$3{,}3678\cdot10^{8}$	$2{,}9693\cdot10^{-9}$	0,70711	0,70711
12,01	18,8653	1,5598	6,4109	0,01571	0,99988	12,51	19,6507	3,4211	2,9230	0,71813	0,69591
12,02	18,8810	1,5845	6,3110	0,03141	0,99951	12,52	19,6664	3,4753	2,8774	0,72897	0,68455
12,03	18,8967	1,6096	6,2126	0,04711	0,99889	12,53	19,6821	3,5303	2,8325	0,73963	0,67301
12,04	18,9124	1,6351	6,1158	0,06279	0,99803	12,54	19,6978	3,5862	2,7884	0,75011	0,66131
12,05	18,9281	1,6610	6,0205	0,07846	0,99692	12,55	19,7135	3,6430	2,7450	0,76041	0,64945
12,06	18,9438	1,6873	5,9267	0,09411	0,99556	12,56	19,7292	3,7007	2,7022	0,77051	0,63742
12,07	18,9596	1,7140	5,8343	0,10973	0,99396	12,57	19,7450	3,7593	2,6601	0,78043	0,62524
12,08	18,9753	1,7411	5,7434	0,12533	0,99211	12,58	19,7607	3,8188	2,6186	0,79016	0,61291
12,09	18,9910	1,7687	5,6538	0,14090	0,99002	12,59	19,7764	3,8793	2,5778	0,79968	0,60042
12,10	19,0067	1,7967	5,5657	0,15643	0,98769	12,60	19,7921	3,9407	2,5376	0,80902	0,58779
12,11	19,0224	1,8251	5,4790	0,17193	0,98511	12,61	17,8078	4,0030	2,4980	0,81815	0,57501
12,12	19,0381	1,8540	5,3936	0,18738	0,98229	12,62	19,8235	4,0664	2,4591	0,82708	0,56208
12,13	19,0538	1,8834	5,3096	0,20279	0,97922	12,63	19,8392	4,1308	2,4208	0,83581	0,54902
12,14	19,0695	1,9132	5,2268	0,21814	0,97592	12,64	19,8549	4,1962	2,3831	0,84433	0,53583
12,15	19,0852	1,9435	5,1453	0,23345	0,97237	12,65	19,8706	4,2626	2,3460	0,85264	0,52250
12,16	19,1009	1,9743	5,0651	0,24869	0,96858	12,66	19,8863	4,3301	2,3094	0,86074	0,50904
12,17	19,1166	2,0056	4,9862	0,26387	0,96456	12,67	19,9020	4,3987	2,2734	0,86863	0,49546
12,18	19,1323	2,0373	4,9085	0,27899	0,96029	12,68	19,9177	4,4683	2,2380	0,87631	0,48175
12,19	19,1481	2,0695	4,8320	0,29404	0,95579	12,69	19,9334	4,5390	2,2031	0,88377	0,46792
12,20	19,1638	2,1023	4,7567	0,30902	0,95106	12,70	19,9492	4,6109	2,1688	0,89101	0,45399
12,21	19,1795	2,1356	4,6826	0,32392	0,94609	12,71	19,9649	4,6839	2,1350	0,89803	0,43994
12,22	19,1952	2,1694	4,6096	0,33874	0,94088	12,72	19,9806	4,7581	2,1017	0,90483	0,42578
12,23	19,2109	2,2037	4,5377	0,35347	0,93544	12,73	19,9963	4,8335	2,0689	0,91140	0,41151
12,24	19,2266	2,2386	4,4670	0,36812	0,92978	12,74	20,0120	4,9100	2,0367	0,91775	0,39715
12,25	19,2423	2,2741	4,3974	0,38268	0,92388	12,75	20,0277	4,9877	2,0049	0,92388	0,38268
12,26	19,2580	2,3101	4,3289	0,39715	0,91775	12,76	20,0434	5,0667	1,9737	0,92978	0,36812
12,27	19,2737	2,3467	4,2614	0,41151	0,91140	12,77	20,0591	5,1469	1,9430	0,93544	0,35347
12,28	19,2894	2,3838	4,1950	0,42578	0,90483	12,78	20,0748	5,2284	1,9127	0,94088	0,33874
12,29	19,3051	2,4216	4,1296	0,43994	0,89803	12,79	20,0905	5,3111	1,8829	0,94609	0,32392
12,30	19,3208	2,4599	4,0652	0,45399	0,89101	12,80	20,1062	5,3952	1,8535	0,95106	0,30902
12,31	19,3366	2,4988	4,0019	0,46792	0,88377	12,81	20,1219	5,4806	1,8246	0,95579	0,29404
12,32	19,3523	2,5384	3,9395	0,48175	0,87631	12,82	20,1377	5,5674	1,7962	0,96029	0,27899
12,33	19,3680	2,5786	3,8781	0,49546	0,86863	12,83	20,1534	5,6556	1,7682	0,96456	0,26387
12,34	19,3837	2,6194	3,8177	0,50904	0,86074	12,84	20,1691	5,7451	1,7406	0,96858	0,24869
12,35	19,3994	2,6609	3,7582	0,52250	0,85264	12,85	20,1848	5,8360	1,7135	0,97237	0,23345
12,36	19,4151	2,7030	3,6996	0,53583	0,84433	12,86	20,2005	5,9284	1,6868	0,97592	0,21814
12,37	19,4308	2,7458	3,6420	0,54902	0,83581	12,87	20,2162	6,0222	1,6605	0,97922	0,20279
12,38	19,4465	2,7893	3,5852	0,56208	0,82708	12,88	20,2319	6,1176	1,6346	0,98229	0,18738
12,39	19,4622	2,8335	3,5293	0,57501	0,81815	12,89	20,2476	6,2145	1,6092	0,98511	0,17193
12,40	19,4779	2,8783	3,4743	0,58779	0,80902	12,90	20,2633	6,3129	1,5841	0,98769	0,15643
12,41	19,4936	2,9238	3,4201	0,60042	0,79968	12,91	20,2790	6,4129	1,5594	0,99002	0,14090
12,42	19,5093	2,9701	3,3668	0,61291	0,79016	12,92	20,2947	6,5144	1,5351	0,99211	0,12533
12,43	19,5250	3,0171	3,3143	0,62524	0,78043	12,93	20,3104	6,6175	1,5112	0,99396	0,10973
12,44	19,5408	3,0649	3,2627	0,63742	0,77051	12,94	20,3262	6,7223	1,4876	0,99556	0,09411
12,45	19,5565	3,1134	3,2119	0,64945	0,76041	12,95	20,3419	6,8287	1,4644	0,99692	0,07846
12,46	19,5722	3,1627	3,1618	0,66131	0,75011	12,96	20,3576	6,9368	1,4416	0,99803	0,06279
12,47	19,5879	3,2128	3,1125	0,67301	0,73963	12,97	20,3733	7,0466	1,4191	0,99889	0,04711
12,48	19,6036	3,2637	3,0640	0,68455	0,72897	12,98	20,3890	7,1582	1,3970	0,99951	0,03141
12,49	19,6193	3,3153	3,0163	0,69591	0,71813	12,99	20,4047	7,2715	1,3752	0,99988	0,01571
12,50	19,6350	$3{,}3678\cdot10^{8}$	$2{,}9693\cdot10^{-9}$	0,70711	0,70711	13,00	20,4204	$7{,}3866\cdot10^{8}$	$1{,}3538\cdot10^{-9}$	1,00000	∓0,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
13,00	20,4204	$7,3866\cdot10^{8}$	$1,3538\cdot10^{-9}$	1,00000	±0,00000	13,50	21,2058	$1,6201\cdot10^{9}$	$6,1725\cdot10^{-10}$	0,70711	−0,70711
13,01	20,4361	7,5036	1,3327	0,99988	−0,01571	13,51	21,2215	1,6457	6,0763	0,69591	−0,71813
13,02	20,4518	7,6224	1,3119	0,99951	−0,03141	13,52	21,2372	1,6718	5,9816	0,68455	−0,72897
13,03	20,4675	7,7430	1,2915	0,99889	−0,04711	13,53	21,2529	1,6983	5,8884	0,67301	−0,73963
13,04	20,4832	7,8656	1,2714	0,99803	−0,06279	13,54	21,2686	1,7252	5,7966	0,66131	−0,75011
13,05	20,4989	7,9902	1,2515	0,99692	−0,07846	13,55	21,2843	1,7525	5,7062	0,64945	−0,76041
13,06	20,5146	8,1167	1,2320	0,99556	−0,09411	13,56	21,3000	1,7802	5,6173	0,63742	−0,77051
13,07	20,5304	8,2452	1,2128	0,99396	−0,10973	13,57	21,3158	1,8084	5,5298	0,62524	−0,78043
13,08	20,5461	8,3757	1,1939	0,99211	−0,12533	13,58	21,3315	1,8370	5,4436	0,61291	−0,79016
13,09	20,5618	8,5083	1,1753	0,99002	−0,14090	13,59	21,3472	1,8661	5,3587	0,60042	−0,79968
13,10	20,5775	8,6430	1,1570	0,98769	−0,15643	13,60	21,3629	1,8957	5,2752	0,58779	−0,80902
13,11	20,5932	8,7799	1,1390	0,98511	−0,17193	13,61	21,3786	1,9257	5,1930	0,57501	−0,81815
13,12	20,6089	8,9189	1,1212	0,98229	−0,18738	13,62	21,3943	1,9562	5,1121	0,56208	−0,82708
13,13	20,6246	9,0601	1,1037	0,97922	−0,20279	13,63	21,4100	1,9872	5,0324	0,54902	−0,83581
13,14	20,6403	9,2035	1,0865	0,97592	−0,21814	13,64	21,4257	2,0186	4,9540	0,53583	−0,84433
13,15	20,6560	9,3492	1,0696	0,97237	−0,23345	13,65	21,4414	2,0505	4,8768	0,52250	−0,85264
13,16	20,6717	9,4972	1,0529	0,96858	−0,24869	13,66	21,4571	2,0830	4,8008	0,50904	−0,86074
13,17	20,6874	9,6475	1,0365	0,96456	−0,26387	13,67	21,4728	2,1160	4,7260	0,49546	−0,86863
13,18	20,7031	9,8003	1,0204	0,96029	−0,27899	13,68	21,4885	2,1495	4,6523	0,48175	−0,87631
13,19	20,7189	$9,9555\cdot10^{8}$	$1,0045\cdot10^{-9}$	0,95579	−0,29404	13,69	21,5042	2,1835	4,5798	0,46792	−0,88377
13,20	20,7346	$1,0113\cdot10^{9}$	$9,8882\cdot10^{-10}$	0,95106	−0,30902	13,70	21,5200	2,2181	4,5084	0,45399	−0,89101
13,21	20,7503	1,0273	9,7341	0,94609	−0,32392	13,71	21,5357	2,2532	4,4382	0,43994	−0,89803
13,22	20,7660	1,0436	9,5824	0,94088	−0,33874	13,72	21,5514	2,2889	4,3690	0,42578	−0,90483
13,23	20,7817	1,0601	9,4330	0,93544	−0,35347	13,73	21,5671	2,3251	4,3009	0,41151	−0,91140
13,24	20,7974	1,0769	9,2860	0,92978	−0,36812	13,74	21,5828	2,3619	4,2338	0,39715	−0,91775
13,25	20,8131	1,0940	9,1413	0,92388	−0,38268	13,75	21,5985	2,3993	4,1678	0,38268	−0,92388
13,26	20,8288	1,1113	8,9988	0,91775	−0,39715	13,76	21,6142	2,4373	4,1029	0,36812	−0,92978
13,27	20,8445	1,1289	8,8586	0,91140	−0,41151	13,77	21,6299	2,4759	4,0390	0,35347	−0,93544
13,28	20,8602	1,1467	8,7205	0,90483	−0,42578	13,78	21,6456	2,5151	3,9760	0,33874	−0,94088
13,29	20,8759	1,1649	8,5846	0,89803	−0,43994	13,79	21,6613	2,5549	3,9140	0,32392	−0,94609
13,30	20,8916	1,1833	8,4508	0,89101	−0,45399	13,80	21,6770	2,5954	3,8530	0,30902	−0,95106
13,31	20,9074	1,2021	8,3191	0,88377	−0,46792	13,81	21,6927	2,6365	3,7930	0,29404	−0,95579
13,32	20,9231	1,2211	8,1894	0,87631	−0,48175	13,82	21,7085	2,6782	3,7339	0,27899	−0,96029
13,33	20,9388	1,2405	8,0618	0,86863	−0,49546	13,83	21,7242	2,7206	3,6757	0,26387	−0,96456
13,34	20,9545	1,2601	7,9361	0,86074	−0,50904	13,84	21,7399	2,7637	3,6184	0,24869	−0,96858
13,35	20,9702	1,2800	7,8125	0,85264	−0,52250	13,85	21,7556	2,8075	3,5620	0,23345	−0,97237
13,36	20,9859	1,3003	7,6907	0,84433	−0,53583	13,86	21,7713	2,8519	3,5065	0,21814	−0,97592
13,37	21,0016	1,3209	7,5708	0,83581	−0,54902	13,87	21,7870	2,8970	3,4518	0,20279	−0,97922
13,38	21,0173	1,3418	7,4528	0,82708	−0,56208	13,88	21,8027	2,9429	3,3980	0,18738	−0,98229
13,39	21,0330	1,3630	7,3366	0,81815	−0,57501	13,89	21,8184	2,9895	3,3450	0,17193	−0,98511
13,40	21,0487	1,3846	7,2223	0,80902	−0,58779	13,90	21,8341	3,0368	3,2929	0,15643	−0,98769
13,41	21,0644	1,4065	7,1098	0,79968	−0,60042	13,91	21,8498	3,0849	3,2416	0,14090	−0,99002
13,42	21,0801	1,4288	6,9990	0,79016	−0,61291	13,92	21,8655	3,1337	3,1911	0,12533	−0,99211
13,43	21,0958	1,4514	6,8899	0,78043	−0,62524	13,93	21,8812	3,1833	3,1414	0,10973	−0,99396
13,44	21,1116	1,4744	6,7825	0,77051	−0,63742	13,94	21,8970	3,2337	3,0924	0,09411	−0,99556
13,45	21,1273	1,4977	6,6768	0,76041	−0,64945	13,95	21,9127	3,2849	3,0442	0,07846	−0,99692
13,46	21,1430	1,5214	6,5728	0,75011	−0,66131	13,96	21,9284	3,3369	2,9968	0,06279	−0,99803
13,47	21,1587	1,5455	6,4704	0,73963	−0,67301	13,97	21,9441	3,3897	2,9501	0,04711	−0,99889
13,48	21,1744	1,5700	6,3695	0,72897	−0,68455	13,98	21,9598	3,4434	2,9041	0,03141	−0,99951
13,49	21,1901	1,5949	6,2702	0,71813	−0,69591	13,99	21,9755	3,4979	2,8589	0,01571	−0,99988
13,50	21,2058	$1,6201\cdot10^{9}$	$6,1725\cdot10^{-10}$	0,70711	−0,70711	14,00	21,9912	$3,5533\cdot10^{9}$	$2,8143\cdot10^{-10}$	±0,00000	−1,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
14,00	21,9912	$3,5533\cdot10^{9}$	$2,8143\cdot10^{-10}$	±0,00000	-1,00000	14,50	22,7766	$7,7934\cdot10^{9}$	$1,2831\cdot10^{-10}$	-0,70711	-0,70711
14,01	22,0069	3,6096	2,7704	-0,01571	-0,99988	14,51	22,7923	7,9168	1,2632	-0,71813	-0,69591
14,02	22,0226	3,6667	2,7272	-0,03141	-0,99951	14,52	22,8080	8,0422	1,2435	-0,72897	-0,68455
14,03	22,0383	3,7247	2,6847	-0,04711	-0,99889	14,53	22,8237	8,1695	1,2241	-0,73963	-0,67301
14,04	22,0540	3,7837	2,6429	-0,06279	-0,99803	14,54	22,8394	8,2988	1,2050	-0,75011	-0,66131
14,05	22,0697	3,8436	2,6017	-0,07846	-0,99692	14,55	22,8551	8,4302	1,1862	-0,76041	-0,64945
14,06	22,0854	3,9045	2,5612	-0,09411	-0,99556	14,56	22,8708	8,5637	1,1677	-0,77051	-0,63742
14,07	22,1012	3,9663	2,5212	-0,10973	-0,99396	14,57	22,8866	8,6993	1,1495	-0,78043	-0,62524
14,08	22,1169	4,0291	2,4819	-0,12533	-0,99211	14,58	22,9023	8,8370	1,1316	-0,79016	-0,61291
14,09	22,1326	4,0929	2,4433	-0,14090	-0,99002	14,59	22,9180	8,9769	1,1140	-0,79968	-0,60042
14,10	22,1483	4,1577	2,4052	-0,15643	-0,98769	14,60	22,9337	9,1190	1,0966	-0,80902	-0,58779
14,11	22,1640	4,2235	2,3677	-0,17193	-0,98511	14,61	22,9494	9,2633	1,0795	-0,81815	-0,57501
14,12	22,1797	4,2904	2,3308	-0,18738	-0,98229	14,62	22,9651	9,4100	1,0627	-0,82708	-0,56208
14,13	22,1954	4,3583	2,2945	-0,20279	-0,97922	14,63	22,9808	9,5590	1,0461	-0,83581	-0,54902
14,14	22,2111	4,4273	2,2587	-0,21814	-0,97592	14,64	22,9965	9,7104	1,0298	-0,84433	-0,53583
14,15	22,2268	4,4974	2,2235	-0,23345	-0,97237	14,65	23,0122	$9,8641\cdot10^{9}$	$1,0138\cdot10^{-10}$	-0,85264	-0,52250
14,16	22,2425	4,5686	2,1889	-0,24869	-0,96858	14,66	23,0279	$1,0020\cdot10^{10}$	$9,9798\cdot10^{-11}$	-0,86074	-0,50904
14,17	22,2582	4,6409	2,1548	-0,26387	-0,96456	14,67	23,0436	1,0179	9,8242	-0,86863	-0,49546
14,18	22,2739	4,7144	2,1212	-0,27899	-0,96029	14,68	23,0593	1,0340	9,6711	-0,87631	-0,48175
14,19	22,2897	4,7891	2,0881	-0,29404	-0,95579	14,69	23,0750	1,0504	9,5204	-0,88377	-0,46792
14,20	22,3054	4,8649	2,0556	-0,30902	-0,95106	14,70	23,0908	1,0670	9,3720	-0,89101	-0,45399
14,21	22,3211	4,9419	2,0235	-0,32392	-0,94609	14,71	23,1065	1,0839	9,2260	-0,89803	-0,43994
14,22	22,3368	5,0201	1,9920	-0,33874	-0,94088	14,72	23,1222	1,1011	9,0822	-0,90483	-0,42578
14,23	22,3525	5,0996	1,9610	-0,35347	-0,93544	14,73	23,1379	1,1185	8,9407	-0,91140	-0,41151
14,24	22,3682	5,1804	1,9304	-0,36812	-0,92978	14,74	23,1536	1,1362	8,8013	-0,91775	-0,39715
14,25	22,3839	5,2624	1,9003	-0,38268	-0,92388	14,75	23,1693	1,1542	8,6641	-0,92388	-0,38268
14,26	22,3996	5,3457	1,8707	-0,39715	-0,91775	14,76	23,1850	1,1725	8,5291	-0,92978	-0,36812
14,27	22,4153	5,4303	1,8415	-0,41151	-0,91140	14,77	23,2007	1,1911	8,3962	-0,93544	-0,35347
14,28	22,4310	5,5163	1,8128	-0,42578	-0,90483	14,78	23,2164	1,2099	8,2653	-0,94088	-0,33874
14,29	22,4467	5,6036	1,7846	-0,43994	-0,89803	14,79	23,2321	1,2291	8,1365	-0,94609	-0,32392
14,30	22,4624	5,6923	1,7568	-0,45399	-0,89101	14,80	23,2478	1,2485	8,0097	-0,95106	-0,30902
14,31	22,4782	5,7824	1,7294	-0,46792	-0,88377	14,81	23,2635	1,2682	7,8849	-0,95579	-0,29404
14,32	22,4939	5,8740	1,7024	-0,48175	-0,87631	14,82	23,2793	1,2883	7,7620	-0,96029	-0,27899
14,33	22,5096	5,9670	1,6759	-0,49546	-0,86863	14,83	23,2950	1,3088	7,6410	-0,96456	-0,26387
14,34	22,5253	6,0615	1,6498	-0,50904	-0,86074	14,84	23,3107	1,3295	7,5219	-0,96858	-0,24869
14,35	22,5410	6,1574	1,6240	-0,52250	-0,85264	14,85	23,3264	1,3505	7,4047	-0,97237	-0,23345
14,36	22,5567	6,2549	1,5987	-0,53583	-0,84433	14,86	23,3421	1,3719	7,2893	-0,97592	-0,21814
14,37	22,5724	6,3540	1,5738	-0,54902	-0,83581	14,87	23,3578	1,3936	7,1757	-0,97922	-0,20279
14,38	22,5881	6,4546	1,5493	-0,56208	-0,82708	14,88	23,3735	1,4157	7,0638	-0,98229	-0,18738
14,39	22,6038	6,5567	1,5252	-0,57501	-0,81815	14,89	23,3892	1,4381	6,9538	-0,98511	-0,17193
14,40	22,6195	6,6605	1,5014	-0,58779	-0,80902	14,90	23,4049	1,4608	6,8454	-0,98769	-0,15643
14,41	22,6352	6,7660	1,4779	-0,60042	-0,79968	14,91	23,4206	1,4840	6,7387	-0,99002	-0,14090
14,42	22,6509	6,8731	1,4549	-0,61291	-0,79016	14,92	23,4363	1,5075	6,6336	-0,99211	-0,12533
14,43	22,6666	6,9819	1,4323	-0,62524	-0,78043	14,93	23,4520	1,5314	6,5303	-0,99396	-0,10973
14,44	22,6824	7,0925	1,4100	-0,63742	-0,77051	14,94	23,4678	1,5556	6,4285	-0,99556	-0,09411
14,45	22,6981	7,2047	1,3880	-0,64945	-0,76041	14,95	23,4835	1,5802	6,3283	-0,99692	-0,07846
14,46	22,7138	7,3188	1,3663	-0,66131	-0,75011	14,96	23,4992	1,6052	6,2297	-0,99803	-0,06279
14,47	22,7295	7,4347	1,3450	-0,67301	-0,73963	14,97	23,5149	1,6307	6,1326	-0,99889	-0,04711
14,48	22,7452	7,5524	1,3241	-0,68455	-0,72897	14,98	23,5306	1,6565	6,0370	-0,99951	-0,03141
14,49	22,7609	7,6719	1,3034	-0,69591	-0,71813	14,99	23,5463	1,6827	5,9429	-0,99988	-0,01571
14,50	22,7766	$7,7934\cdot10^{9}$	$1,2831\cdot10^{-10}$	-0,70711	-0,70711	15,00	23,5620	$1,7093\cdot10^{10}$	$5,8503\cdot10^{-11}$	-1,00000	∓0,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
15,00	23,5620	$1,7093\cdot10^{10}$	$5,8503\cdot10^{-11}$	−1,00000	∓0,00000	15,50	24,3474	$3,7490\cdot10^{10}$	$2,6674\cdot10^{-11}$	−0,70711	0,70711
15,01	23,5777	1,7364	5,7592	−0,99988	0,01571	15,51	24,3631	3,8084	2,6258	−0,69591	0,71813
15,02	23,5934	1,7639	5,6694	−0,99951	0,03141	15,52	24,3788	3,8687	2,5849	−0,68455	0,72897
15,03	23,6091	1,7918	5,5810	−0,99889	0,04711	15,53	24,3945	3,9299	2,5446	−0,67301	0,73963
15,04	23,6248	1,8202	5,4940	−0,99803	0,06279	15,54	24,4102	3,9921	2,5049	−0,66131	0,75011
15,05	23,6405	1,8490	5,4084	−0,99692	0,07846	15,55	24,4259	4,0553	2,4659	−0,64945	0,76041
15,06	23,6562	1,8783	5,3241	−0,99556	0,09411	15,56	24,4416	4,1195	2,4275	−0,63742	0,77051
15,07	23,6720	1,9080	5,2411	−0,99396	0,10973	15,57	24,4574	4,1847	2,3897	−0,62524	0,78043
15,08	23,6877	1,9382	5,1594	−0,99211	0,12533	15,58	24,4731	4,2510	2,3524	−0,61291	0,79016
15,09	23,7034	1,9689	5,0790	−0,99002	0,14090	15,59	24,4888	4,3183	2,3157	−0,60042	0,79968
15,10	23,7191	2,0001	4,9999	−0,98769	0,15643	15,60	24,5045	4,3867	2,2796	−0,58779	0,80902
15,11	23,7348	2,0317	4,9219	−0,98511	0,17193	15,61	24,5202	4,4562	2,2441	−0,57501	0,81815
15,12	23,7505	2,0639	4,8452	−0,98229	0,18738	15,62	24,5359	4,5267	2,2092	−0,56208	0,82708
15,13	23,7662	2,0966	4,7697	−0,97922	0,20279	15,63	24,5516	4,5983	2,1747	−0,54902	0,83581
15,14	23,7819	2,1298	4,6954	−0,97592	0,21814	15,64	24,5673	4,6711	2,1408	−0,53583	0,84433
15,15	23,7976	2,1635	4,6222	−0,97237	0,23345	15,65	24,5830	4,7451	2,1074	−0,52250	0,85264
15,16	23,8133	2,1977	4,5502	−0,96858	0,24869	15,66	24,5987	4,8202	2,0746	−0,50904	0,86074
15,17	23,8290	2,2325	4,4792	−0,96456	0,26387	15,67	24,6144	4,8966	2,0422	−0,49546	0,86863
15,18	23,8447	2,2679	4,4094	−0,96029	0,27899	15,68	24,6301	4,9741	2,0104	−0,48175	0,87631
15,19	23,8605	2,3038	4,3407	−0,95579	0,29404	15,69	24,6458	5,0528	1,9791	−0,46792	0,88377
15,20	23,8762	2,3402	4,2731	−0,95106	0,30902	15,70	24,6616	5,1328	1,9483	−0,45399	0,89101
15,21	23,8919	2,3773	4,2065	−0,94609	0,32392	15,71	24,6773	5,2141	1,9179	−0,43994	0,89803
15,22	23,9076	2,4149	4,1409	−0,94088	0,33874	15,72	24,6930	5,2966	1,8880	−0,42578	0,90483
15,23	23,9233	2,4532	4,0763	−0,93544	0,35347	15,73	24,7087	5,3804	1,8586	−0,41151	0,91140
15,24	23,9390	2,4920	4,0128	−0,92978	0,36812	15,74	24,7244	5,4656	1,8296	−0,39715	0,91775
15,25	23,9547	2,5314	3,9503	−0,92388	0,38268	15,75	24,7401	5,5522	1,8011	−0,38268	0,92388
15,26	23,9704	2,5715	3,8887	−0,91775	0,39715	15,76	24,7558	5,6401	1,7730	−0,36812	0,92978
15,27	23,9861	2,6122	3,8281	−0,91140	0,41151	15,77	24,7715	5,7294	1,7454	−0,35347	0,93544
15,28	24,0018	2,6536	3,7685	−0,90483	0,42578	15,78	24,7872	5,8201	1,7182	−0,33874	0,94088
15,29	24,0175	2,6956	3,7097	−0,89803	0,43994	15,79	24,8029	5,9122	1,6914	−0,32392	0,94609
15,30	24,0332	2,7383	3,6519	−0,89101	0,45399	15,80	24,8186	6,0058	1,6651	−0,30902	0,95106
15,31	24,0490	2,7817	3,5950	−0,88377	0,46792	15,81	24,8343	6,1009	1,6391	−0,29404	0,95579
15,32	24,0647	2,8257	3,5390	−0,87631	0,48175	15,82	24,8501	6,1975	1,6136	−0,27899	0,96029
15,33	24,0804	2,8705	3,4838	−0,86863	0,49546	15,83	24,8658	6,2956	1,5885	−0,26387	0,96456
15,34	24,0961	2,9159	3,4295	−0,86074	0,50904	15,84	24,8815	6,3953	1,5637	−0,24869	0,96858
15,35	24,1118	2,9620	3,3761	−0,85264	0,52250	15,85	24,8972	6,4965	1,5393	−0,23345	0,97237
15,36	24,1275	3,0089	3,3235	−0,84433	0,53583	15,86	24,9129	6,5994	1,5153	−0,21814	0,97592
15,37	24,1432	3,0565	3,2717	−0,83581	0,54902	15,87	24,9286	6,7039	1,4917	−0,20279	0,97922
15,38	24,1589	3,1049	3,2207	−0,82708	0,56208	15,88	24,9443	6,8100	1,4684	−0,18738	0,98229
15,39	24,1746	3,1541	3,1705	−0,81815	0,57501	15,89	24,9600	6,9178	1,4455	−0,17193	0,98511
15,40	24,1903	3,2040	3,1211	−0,80902	0,58779	15,90	24,9757	7,0274	1,4230	−0,15643	0,98769
15,41	24,2060	3,2548	3,0724	−0,79968	0,60042	15,91	24,9914	7,1386	1,4008	−0,14090	0,99002
15,42	24,2217	3,3063	3,0245	−0,79016	0,61291	15,92	25,0071	7,2516	1,3790	−0,12533	0,99211
15,43	24,2374	3,3586	2,9774	−0,78043	0,62524	15,93	25,0228	7,3664	1,3575	−0,10973	0,99396
15,44	24,2532	3,4118	2,9310	−0,77051	0,63742	15,94	25,0385	7,4831	1,3364	−0,09411	0,99556
15,45	24,2689	3,4658	2,8853	−0,76041	0,64945	15,95	25,0542	7,6016	1,3155	−0,07846	0,99692
15,46	24,2846	3,5207	2,8403	−0,75011	0,66131	15,96	25,0699	7,7219	1,2950	−0,06279	0,99803
15,47	24,3003	3,5765	2,7961	−0,73963	0,67301	15,97	25,0856	7,8441	1,2748	−0,04711	0,99889
15,48	24,3160	3,6331	2,7525	−0,72897	0,68455	15,98	25,1013	7,9683	1,2550	−0,03141	0,99951
15,49	24,3317	3,6906	2,7096	−0,71813	0,69591	15,99	25,1170	8,0944	1,2355	−0,01571	0,99988
15,50	24,3474	$3,7490\cdot10^{10}$	$2,6674\cdot10^{-11}$	−0,70711	0,70711	16,00	25,1327	$8,2226\cdot10^{10}$	$1,2162\cdot10^{-11}$	∓0,00000	1,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
16,00	25,1327	$8,2226\cdot10^{10}$	$1,2162\cdot10^{-11}$	∓0,00000	1,00000	16,50	25,9181	$1,8035\cdot10^{11}$	$5,5449\cdot10^{-12}$	0,70711	0,70711
16,01	25,1484	8,3528	1,1972	0,01571	0,99988	16,51	25,9338	1,8320	5,4585	0,71813	0,69591
16,02	25,1641	8,4851	1,1785	0,03141	0,99951	16,52	25,9495	1,8610	5,3734	0,72897	0,68455
16,03	25,1798	8,6194	1,1602	0,04711	0,99889	16,53	25,9652	1,8905	5,2896	0,73963	0,67301
16,04	25,1955	8,7559	1,1421	0,06279	0,99803	16,54	25,9809	1,9204	5,2072	0,75011	0,66131
16,05	25,2112	8,8945	1,1243	0,07846	0,99692	16,55	25,9966	1,9508	5,1261	0,76041	0,64945
16,06	25,2269	9,0353	1,1068	0,09411	0,99556	16,56	26,0123	1,9817	5,0462	0,77051	0,63742
16,07	25,2427	9,1784	1,0895	0,10973	0,99396	16,57	26,0281	2,0130	4,9675	0,78043	0,62524
16,08	25,2584	9,3237	1,0725	0,12533	0,99211	16,58	26,0438	2,0449	4,8901	0,79016	0,61291
16,09	25,2741	9,4713	1,0558	0,14090	0,99002	16,59	26,0595	2,0773	4,8139	0,79968	0,60042
16,10	25,2898	9,6212	1,0394	0,15643	0,98769	16,60	26,0752	2,1102	4,7389	0,80902	0,58779
16,11	25,3055	9,7735	1,0232	0,17193	0,98511	16,61	26,0909	2,1436	4,6650	0,81815	0,57501
16,12	25,3212	$9,9283\cdot10^{10}$	$1,0072\cdot10^{-11}$	0,18738	0,98229	16,62	26,1066	2,1775	4,5923	0,82708	0,56208
16,13	25,3369	$1,0085\cdot10^{11}$	$9,9153\cdot10^{-12}$	0,20279	0,97922	16,63	26,1223	2,2120	4,5207	0,83581	0,54902
16,14	25,3526	1,0245	9,7607	0,21814	0,97592	16,64	26,1380	2,2470	4,4503	0,84433	0,53583
16,15	25,3683	1,0407	9,6086	0,23345	0,97237	16,65	26,1537	2,2826	4,3810	0,85264	0,52250
16,16	25,3840	1,0572	9,4589	0,24869	0,96858	16,66	26,1694	2,3188	4,3127	0,86074	0,50904
16,17	25,3997	1,0740	9,3115	0,26387	0,96456	16,67	26,1851	2,3555	4,2455	0,86863	0,49546
16,18	25,4154	1,0910	9,1663	0,27899	0,96029	16,68	26,2008	2,3928	4,1793	0,87631	0,48175
16,19	25,4312	1,1083	9,0234	0,29404	0,95579	16,69	26,2165	2,4306	4,1141	0,88377	0,46792
16,20	25,4469	1,1258	8,8828	0,30902	0,95106	16,70	26,2323	2,4691	4,0500	0,89101	0,45399
16,21	25,4626	1,1436	8,7444	0,32392	0,94609	16,71	26,2480	2,5082	3,9869	0,89803	0,43994
16,22	25,4783	1,1617	8,6081	0,33874	0,94088	16,72	26,2637	2,5479	3,9248	0,90483	0,42578
16,23	25,4940	1,1801	8,4740	0,35347	0,93544	16,73	26,2794	2,5882	3,8636	0,91140	0,41151
16,24	25,5097	1,1988	8,3419	0,36812	0,92978	16,74	26,2951	2,6292	3,8034	0,91775	0,39715
16,25	25,5254	1,2177	8,2119	0,38268	0,92388	16,75	26,3108	2,6709	3,7441	0,92388	0,38268
16,26	25,5411	1,2370	8,0839	0,39715	0,91775	16,76	26,3265	2,7132	3,6858	0,92978	0,36812
16,27	25,5568	1,2566	7,9579	0,41151	0,91140	16,77	26,3422	2,7561	3,6284	0,93544	0,35347
16,28	25,5725	1,2765	7,8339	0,42578	0,90483	16,78	26,3579	2,7997	3,5718	0,94088	0,33874
16,29	25,5882	1,2967	7,7118	0,43994	0,89803	16,79	26,3736	2,8441	3,5161	0,94609	0,32392
16,30	25,6039	1,3172	7,5916	0,45399	0,89101	16,80	26,3893	2,8891	3,4613	0,95106	0,30902
16,31	25,6197	1,3381	7,4733	0,46792	0,88377	16,81	26,4050	2,9348	3,4074	0,95579	0,29404
16,32	25,6354	1,3593	7,3568	0,48175	0,87631	16,82	26,4208	2,9813	3,3543	0,96029	0,27899
16,33	25,6511	1,3808	7,2422	0,49546	0,86863	16,83	26,4365	3,0285	3,3020	0,96456	0,26387
16,34	25,6668	1,4027	7,1293	0,50904	0,86074	16,84	26,4522	3,0764	3,2505	0,96858	0,24869
16,35	25,6825	1,4249	7,0182	0,52250	0,85264	16,85	26,4679	3,1251	3,1999	0,97237	0,23345
16,36	25,6982	1,4474	6,9088	0,53583	0,84433	16,86	26,4836	3,1746	3,1500	0,97592	0,21814
16,37	25,7139	1,4703	6,8011	0,54902	0,83581	16,87	26,4993	3,2248	3,1009	0,97922	0,20279
16,38	25,7296	1,4936	6,6951	0,56208	0,82708	16,88	26,5150	3,2759	3,0526	0,98229	0,18738
16,39	25,7453	1,5173	6,5908	0,57501	0,81815	16,89	26,5307	3,3278	3,0050	0,98511	0,17193
16,40	25,7610	1,5413	6,4881	0,58779	0,80902	16,90	26,5464	3,3805	2,9582	0,98769	0,15643
16,41	25,7767	1,5657	6,3870	0,60042	0,79968	16,91	26,5621	3,4340	2,9121	0,99002	0,14090
16,42	25,7924	1,5905	6,2874	0,61291	0,79016	16,92	26,5778	3,4884	2,8667	0,99211	0,12533
16,43	25,8081	1,6156	6,1894	0,62524	0,78043	16,93	26,5935	3,5436	2,8220	0,99396	0,10973
16,44	25,8239	1,6412	6,0929	0,63742	0,77051	16,94	26,6093	3,5997	2,7780	0,99556	0,09411
16,45	25,8396	1,6672	5,9980	0,64945	0,76041	16,95	26,6250	3,6567	2,7347	0,99692	0,07846
16,46	25,8553	1,6936	5,9045	0,66131	0,75011	16,96	26,6407	3,7146	2,6921	0,99803	0,06279
16,47	25,8710	1,7204	5,8125	0,67301	0,73963	16,97	26,6564	3,7734	2,6501	0,99889	0,04711
16,48	25,8867	1,7477	5,7219	0,68455	0,72897	16,98	26,6721	3,8331	2,6088	0,99951	0,03141
16,49	25,9024	1,7754	5,6327	0,69591	0,71813	16,99	26,6878	3,8938	2,5681	0,99988	0,01571
16,50	25,9181	$1,8035\cdot10^{11}$	$5,5449\cdot10^{-12}$	0,70711	0,70711	17,00	26,7035	$3,9555\cdot10^{11}$	$2,5281\cdot10^{-12}$	1,00000	±0,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
17,00	26,7035	$3{,}9555\cdot10^{11}$	$2{,}5281\cdot10^{-12}$	1,00000	±0,00000	17,50	27,4889	$8{,}6755\cdot10^{11}$	$1{,}1527\cdot10^{-12}$	0,70711	-0,70711
17,01	26,7192	4,0181	2,4888	0,99988	+0,01571	17,51	27,5046	8,8129	1,1347	0,69591	-0,71813
17,02	26,7349	4,0817	2,4500	0,99951	-0,03141	17,52	27,5203	8,9524	1,1170	0,68455	-0,72897
17,03	26,7506	4,1463	2,4118	0,99889	-0,04711	17,53	27,5360	9,0941	1,0996	0,67301	-0,73963
17,04	26,7663	4,2120	2,3742	0,99803	-0,06279	17,54	27,5517	9,2381	1,0825	0,66131	-0,75011
17,05	26,7820	4,2787	2,3372	0,99692	-0,07846	17,55	27,5674	9,3843	1,0656	0,64945	-0,76041
17,06	26,7977	4,3464	2,3008	0,99556	-0,09411	17,56	27,5831	9,5329	1,0490	0,63742	-0,77051
17,07	26,8135	4,4152	2,2649	0,99396	-0,10973	17,57	27,5989	9,6838	1,0327	0,62524	-0,78043
17,08	26,8292	4,4851	2,2296	0,99211	-0,12533	17,58	27,6146	9,8371	1,0166	0,61291	-0,79016
17,09	26,8449	4,5561	2,1948	0,99002	-0,14090	17,59	27,6303	$9{,}9929\cdot10^{11}$	$1{,}0007\cdot10^{-12}$	0,60042	-0,79968
17,10	26,8606	4,6283	2,1606	0,98769	-0,15643	17,60	27,6460	$1{,}0151\cdot10^{12}$	$9{,}8512\cdot10^{-13}$	0,58779	-0,80902
17,11	26,8763	4,7016	2,1269	0,98511	-0,17193	17,61	27,6617	1,0312	9,6977	0,57501	-0,81815
17,12	26,8920	4,7760	2,0938	0,98229	-0,18738	17,62	27,6774	1,0475	9,5465	0,56208	-0,82708
17,13	26,9077	4,8516	2,0612	0,97922	-0,20279	17,63	27,6931	1,0641	9,3978	0,54902	-0,83581
17,14	26,9234	4,9284	2,0291	0,97592	-0,21814	17,64	27,7088	1,0809	9,2513	0,53583	-0,84433
17,15	26,9391	5,0064	1,9974	0,97237	-0,23345	17,65	27,7245	1,0980	9,1071	0,52250	-0,85264
17,16	26,9548	5,0857	1,9663	0,96858	-0,24869	17,66	27,7402	1,1154	8,9651	0,50904	-0,86074
17,17	26,9705	5,1662	1,9357	0,96456	-0,26387	17,67	27,7559	1,1331	8,8254	0,49546	-0,86863
17,18	26,9862	5,2480	1,9055	0,96029	-0,27899	17,68	27,7716	1,1510	8,6879	0,48175	-0,87631
17,19	27,0020	5,3311	1,8758	0,95579	-0,29404	17,69	27,7873	1,1693	8,5525	0,46792	-0,88377
17,20	27,0177	5,4155	1,8466	0,95106	-0,30902	17,70	27,8031	1,1878	8,4192	0,45399	-0,89101
17,21	27,0334	5,5012	1,8178	0,94609	-0,32392	17,71	27,8188	1,2066	8,2880	0,43994	-0,89803
17,22	27,0491	5,5883	1,7895	0,94088	-0,33874	17,72	27,8345	1,2257	8,1588	0,42578	-0,90483
17,23	27,0648	5,6768	1,7616	0,93544	-0,35347	17,73	27,8502	1,2451	8,0317	0,41151	-0,91140
17,24	27,0805	5,7667	1,7341	0,92978	-0,36812	17,74	27,8659	1,2648	7,9065	0,39715	-0,91775
17,25	27,0962	5,8580	1,7071	0,92388	-0,38268	17,75	27,8816	1,2849	7,7832	0,38268	-0,92388
17,26	27,1119	5,9507	1,6805	0,91775	-0,39715	17,76	27,8973	1,3052	7,6619	0,36812	-0,92978
17,27	27,1276	6,0449	1,6543	0,91140	-0,41151	17,77	27,9130	1,3258	7,5425	0,35347	-0,93544
17,28	27,1433	6,1406	1,6285	0,90483	-0,42578	17,78	27,9287	1,3468	7,4250	0,33874	-0,94088
17,29	27,1590	6,2378	1,6031	0,89803	-0,43994	17,79	27,9444	1,3681	7,3092	0,32392	-0,94609
17,30	27,1747	6,3366	1,5781	0,89101	-0,45399	17,80	27,9601	1,3898	7,1953	0,30902	-0,95106
17,31	27,1905	6,4369	1,5535	0,88377	-0,46792	17,81	27,9758	1,4118	7,0832	0,29404	-0,95579
17,32	27,2062	6,5388	1,5293	0,87631	-0,48175	17,82	27,9916	1,4341	6,9728	0,27899	-0,96029
17,33	27,2219	6,6423	1,5055	0,86863	-0,49546	17,83	28,0073	1,4568	6,8641	0,26387	-0,96456
17,34	27,2376	6,7475	1,4820	0,86074	-0,50904	17,84	28,0230	1,4799	6,7571	0,24869	-0,96858
17,35	27,2533	6,8544	1,4589	0,85264	-0,52250	17,85	28,0387	1,5033	6,6519	0,23345	-0,97237
17,36	27,2690	6,9629	1,4362	0,84433	-0,53583	17,86	28,0544	1,5271	6,5482	0,21814	-0,97592
17,37	27,2847	7,0731	1,4138	0,83581	-0,54902	17,87	28,0701	1,5513	6,4461	0,20279	-0,97922
17,38	27,3004	7,1851	1,3918	0,82708	-0,56208	17,88	28,0858	1,5759	6,3456	0,18738	-0,98229
17,39	27,3161	7,2988	1,3701	0,81815	-0,57501	17,89	28,1015	1,6009	6,2467	0,17193	-0,98511
17,40	27,3318	7,4144	1,3487	0,80902	-0,58779	17,90	28,1172	1,6262	6,1494	0,15643	-0,98769
17,41	27,3475	7,5318	1,3277	0,79968	-0,60042	17,91	28,1329	1,6520	6,0536	0,14090	-0,99002
17,42	27,3632	7,6510	1,3070	0,79016	-0,61291	17,92	28,1486	1,6781	5,9592	0,12533	-0,99211
17,43	27,3789	7,7721	1,2866	0,78043	-0,62524	17,93	28,1643	1,7046	5,8663	0,10973	-0,99396
17,44	27,3947	7,8952	1,2666	0,77051	-0,63742	17,94	28,1801	1,7316	5,7749	0,09411	-0,99556
17,45	27,4104	8,0202	1,2468	0,76041	-0,64945	17,95	28,1958	1,7590	5,6849	0,07846	-0,99692
17,46	27,4261	8,1472	1,2214	0,75011	-0,66131	17,96	28,2115	1,7869	5,5963	0,06279	-0,99803
17,47	27,4418	8,2762	1,2083	0,73963	-0,67301	17,97	28,2272	1,8152	5,5091	0,04711	-0,99889
17,48	27,4575	8,4072	1,1895	0,72897	-0,68455	17,98	28,2429	1,8439	5,4232	0,03141	-0,99951
17,49	27,4732	8,5403	1,1710	0,71813	-0,69591	17,99	28,2586	1,8731	5,3387	0,01571	-0,99988
17,50	27,4889	$8{,}6755\cdot10^{11}$	$1{,}1527\cdot10^{-12}$	0,70711	-0,70711	18,00	28,2743	$1{,}9028\cdot10^{12}$	$5{,}2555\cdot10^{-13}$	±0,00000	-1,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
18,00	28,2743	$1,9028\cdot10^{12}$	$5,2555\cdot10^{-13}$	±0,00000	−1,00000	18,50	29,0597	$4,1733\cdot10^{12}$	$2,3962\cdot10^{-13}$	−0,70711	−0,70711
18,01	28,2900	1,9329	5,1736	−0,01571	−0,99988	18,51	29,0754	4,2394	2,3589	−0,71813	−0,69591
18,02	28,3057	1,9635	5,0929	−0,03141	−0,99951	18,52	29,0911	4,3065	2,3221	−0,72897	−0,68455
18,03	28,3214	1,9946	5,0135	−0,04711	−0,99889	18,53	29,1068	4,3747	2,2859	−0,73963	−0,67301
18,04	28,3371	2,0262	4,9354	−0,06279	−0,99803	18,54	29,1265	4,4440	2,2503	−0,75011	−0,66131
18,05	28,3528	2,0582	4,8585	−0,07846	−0,99692	18,55	29,1382	4,5143	2,2152	−0,76041	−0,64945
18,06	28,3685	2,0908	4,7828	−0,09411	−0,99556	18,56	29,1539	4,5858	2,1807	−0,77051	−0,63742
18,07	28,3843	2,1240	4,7083	−0,10973	−0,99396	18,57	29,1697	4,6584	2,1467	−0,78043	−0,62524
18,08	28,4000	2,1576	4,6349	−0,12533	−0,99211	18,58	29,1854	4,7321	2,1132	−0,79016	−0,61291
18,09	28,4157	2,1917	4,5626	−0,14090	−0,99002	18,59	29,2011	4,8071	2,0803	−0,79968	−0,60042
18,10	28,4314	2,2264	4,4915	−0,15643	−0,98769	18,60	29,2168	4,8832	2,0479	−0,80902	−0,58779
18,11	28,4471	2,2617	4,4215	−0,17193	−0,98511	18,61	29,2325	4,9605	2,0159	−0,81815	−0,57501
18,12	28,4628	2,2975	4,3526	−0,18738	−0,98229	18,62	29,2482	5,0390	1,9845	−0,82708	−0,56208
18,13	28,4785	2,3339	4,2848	−0,20279	−0,97922	18,63	29,2639	5,1188	1,9535	−0,83581	−0,54902
18,14	28,4942	2,3708	4,2180	−0,21814	−0,97592	18,64	29,2796	5,1998	1,9231	−0,84433	−0,53583
18,15	28,5099	2,4084	4,1522	−0,23345	−0,97237	18,65	29,2953	5,2822	1,8932	−0,85264	−0,52250
18,16	28,5256	2,4465	4,0875	−0,24869	−0,96858	18,66	29,3110	5,3658	1,8637	−0,86074	−0,50904
18,17	28,5413	2,4852	4,0238	−0,26387	−0,96456	18,67	29,3267	5,4507	1,8346	−0,86863	−0,49546
18,18	28,5570	2,5245	3,9611	−0,27899	−0,96029	18,68	29,3424	5,5370	1,8060	−0,87631	−0,48175
18,19	28,5728	2,5645	3,8994	−0,29404	−0,95579	18,69	29,3581	5,6246	1,7779	−0,88377	−0,46792
18,20	28,5885	2,6051	3,8386	−0,30902	−0,95106	18,70	29,3739	5,7137	1,7502	−0,89101	−0,45399
18,21	28,6042	2,6463	3,7788	−0,32392	−0,94609	18,71	29,3896	5,8042	1,7229	−0,89803	−0,43994
18,22	28,6199	2,6882	3,7199	−0,33874	−0,94088	18,72	29,4053	5,8961	1,6960	−0,90483	−0,42578
18,23	28,6356	2,7308	3,6620	−0,35347	−0,93544	18,73	29,4210	5,9894	1,6696	−0,91140	−0,41151
18,24	28,6513	2,7740	3,6049	−0,36812	−0,92978	18,74	29,4367	6,0842	1,6436	−0,91775	−0,39715
18,25	28,6670	2,8180	3,5487	−0,38268	−0,92388	18,75	29,4524	6,1805	1,6180	−0,92388	−0,38268
18,26	28,6827	2,8626	3,4934	−0,39715	−0,91775	18,76	29,4681	6,2784	1,5928	−0,92978	−0,36812
18,27	28,6984	2,9079	3,4389	−0,41151	−0,91140	18,77	29,4838	6,3778	1,5679	−0,93544	−0,35347
18,28	28,7141	2,9539	3,3853	−0,42578	−0,90483	18,78	29,4995	6,4788	1,5435	−0,94088	−0,33874
18,29	28,7298	3,0007	3,3325	−0,43994	−0,89803	18,79	29,5152	6,5814	1,5195	−0,94609	−0,32392
18,30	28,7455	3,0482	3,2806	−0,45399	−0,89101	18,80	29,5309	6,6856	1,4958	−0,95106	−0,30902
18,31	28,7613	3,0965	3,2295	−0,46792	−0,88377	18,81	29,5466	6,7914	1,4725	−0,95579	−0,29404
18,32	28,7770	3,1455	3,1792	−0,48175	−0,87631	18,82	29,5624	6,8989	1,4495	−0,96029	−0,27899
18,33	28,7927	3,1953	3,1296	−0,49546	−0,86863	18,83	29,5781	7,0081	1,4269	−0,96456	−0,26387
18,34	28,8084	3,2459	3,0808	−0,50904	−0,86074	18,84	29,5938	7,1191	1,4047	−0,96858	−0,24869
18,35	28,8241	3,2973	3,0328	−0,52250	−0,85264	18,85	29,6095	7,2318	1,3828	−0,97237	−0,23345
18,36	28,8398	3,3495	2,9856	−0,53583	−0,84433	18,86	29,6252	7,3463	1,3612	−0,97592	−0,21814
18,37	28,8555	3,4025	2,9390	−0,54902	−0,83581	18,87	29,6409	7,4626	1,3400	−0,97922	−0,20279
18,38	28,8712	3,4564	2,8932	−0,56208	−0,82708	18,88	29,6566	7,5808	1,3191	−0,98229	−0,18738
18,39	28,8869	3,5111	2,8481	−0,57501	−0,81815	18,89	29,6723	7,7008	1,2985	−0,98511	−0,17193
18,40	28,9026	3,5667	2,8037	−0,58779	−0,80902	18,90	29,6880	7,8227	1,2783	−0,98769	−0,15643
18,41	28,9183	3,6231	2,7600	−0,60042	−0,79968	18,91	29,7037	7,9466	1,2584	−0,99002	−0,14090
18,42	28,9340	3,6805	2,7170	−0,61291	−0,79016	18,92	29,7194	8,0724	1,2388	−0,99211	−0,12533
18,43	28,9497	3,7388	2,6747	−0,62524	−0,78043	18,93	29,7351	8,2002	1,2195	−0,99396	−0,10973
18,44	28,9655	3,7980	2,6330	−0,63742	−0,77051	18,94	29,7509	8,3300	1,2005	−0,99556	−0,09411
18,45	28,9812	3,8581	2,5920	−0,64945	−0,76041	18,95	29,7666	8,4618	1,1818	−0,99692	−0,07846
18,46	28,9969	3,9192	2,5516	−0,66131	−0,75011	18,96	29,7823	8,5958	1,1634	−0,99803	−0,06279
18,47	29,0126	3,9813	2,5118	−0,67301	−0,73963	18,97	29,7980	8,7319	1,1453	−0,99889	−0,04711
18,48	29,0283	4,0443	2,4726	−0,68455	−0,72897	18,98	29,8137	8,8702	1,1274	−0,99951	−0,03141
18,49	29,0440	4,1083	2,4341	−0,69591	−0,71813	18,99	29,8294	9,0106	1,1098	−0,99988	−0,01571
18,50	29,0597	$4,1733\cdot10^{12}$	$2,3962\cdot10^{-13}$	−0,70711	−0,70711	19,00	29,8451	$9,1533\cdot10^{12}$	$1,0925\cdot10^{-13}$	−1,00000	∓0,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
19,00	29,8451	$9{,}1533\cdot 10^{12}$	$1{,}0925\cdot 10^{-13}$	−1,00000	∓0,00000	19,50	30,6305	$2{,}0076\cdot 10^{13}$	$4{,}9812\cdot 10^{-14}$	−0,70711	0,70711
19,01	29,8608	9,2982	1,0755	−0,99988	0,01571	19,51	30,6462	2,0393	4,9035	−0,69591	0,71813
19,02	29,8765	9,4454	1,0587	−0,99951	0,03141	19,52	30,6629	2,0716	4,8271	−0,68455	0,72897
19,03	29,8922	9,5949	1,0422	−0,99889	0,04711	19,53	30,6776	2,1044	4,7519	−0,67301	0,73963
19,04	29,9079	9,7468	1,0260	−0,99803	0,06279	19,54	30,6933	2,1378	4,6778	−0,66131	0,75011
19,05	29,9236	$9{,}9011\cdot 10^{12}$	$1{,}0100\cdot 10^{-13}$	−0,99692	0,07846	19,55	30,7090	2,1716	4,6049	−0,64945	0,76041
19,06	29,9393	$1{,}0058\cdot 10^{13}$	$9{,}9424\cdot 10^{-14}$	−0,99556	0,09411	19,56	30,7247	2,2060	4,5331	−0,63742	0,77051
19,07	29,9551	1,0217	9,7875	−0,99396	0,10973	19,57	30,7405	2,2409	4,4624	−0,62524	0,78043
19,08	29,9708	1,0379	9,6350	−0,99211	0,12533	19,58	30,7562	2,2764	4,3929	−0,61291	0,79016
19,09	29,9865	1,0543	9,4848	−0,99002	0,14090	19,59	30,7719	2,3124	4,3245	−0,60042	0,79968
19,10	30,0022	1,0710	9,3370	−0,98769	0,15643	19,60	30,7876	2,3490	4,2571	−0,58779	0,80902
19,11	30,0179	1,0880	9,1915	−0,98511	0,17193	19,61	30,8033	2,3862	4,1907	−0,57501	0,81815
19,12	30,0336	1,1052	9,0482	−0,98229	0,18738	19,62	30,8190	2,4240	4,1254	−0,56208	0,82708
19,13	30,0493	1,1227	8,9072	−0,97922	0,20279	19,63	30,8347	2,4624	4,0611	−0,54902	0,83581
19,14	30,0650	1,1405	8,7684	−0,97592	0,21814	19,64	30,8504	2,5014	3,9978	−0,53583	0,84433
19,15	30,0807	1,1586	8,6317	−0,97237	0,23345	19,65	30,8661	2,5410	3,9355	−0,52250	0,85264
19,16	30,0964	1,1769	8,4972	−0,96858	0,24869	19,66	30,8818	2,5812	3,8742	−0,50904	0,86074
19,17	30,1121	1,1955	8,3648	−0,96456	0,26387	19,67	30,8975	2,6221	3,8138	−0,49546	0,86863
19,18	30,1278	1,2144	8,2344	−0,96029	0,27899	19,68	30,9132	2,6636	3,7544	−0,48175	0,87631
19,19	30,1436	1,2337	8,1061	−0,95579	0,29404	19,69	30,9289	2,7058	3,6959	−0,46792	0,88377
19,20	30,1593	1,2532	7,9797	−0,95106	0,30902	19,70	30,9447	2,7486	3,6383	−0,45399	0,89101
19,21	30,1750	1,2731	7,8553	−0,94609	0,32392	19,71	30,9604	2,7921	3,5815	−0,43994	0,89803
19,22	30,1907	1,2932	7,7329	−0,94088	0,33874	19,72	30,9761	2,8363	3,5257	−0,42578	0,90483
19,23	30,2064	1,3136	7,6123	−0,93544	0,35347	19,73	30,9918	2,8812	3,4708	−0,41151	0,91140
19,24	30,2221	1,3344	7,4938	−0,92978	0,36812	19,74	31,0075	2,9268	3,4167	−0,39715	0,91775
19,25	30,2378	1,3555	7,3770	−0,92388	0,38268	19,75	31,0232	2,9731	3,3634	−0,38268	0,92388
19,26	30,2535	1,3770	7,2620	−0,91775	0,39715	19,76	31,0389	3,0202	3,3110	−0,36812	0,92978
19,27	30,2692	1,3988	7,1488	−0,91140	0,41151	19,77	31,0546	3,0680	3,2594	−0,35347	0,93544
19,28	30,2849	1,4210	7,0374	−0,90483	0,42578	19,78	31,0703	3,1166	3,2086	−0,33874	0,94088
19,29	30,3006	1,4435	6,9277	−0,89803	0,43994	19,79	31,0860	3,1660	3,1586	−0,32392	0,94609
19,30	30,3163	1,4663	6,8197	−0,89101	0,45399	19,80	31,1017	3,2161	3,1094	−0,30902	0,95106
19,31	30,3321	1,4895	6,7134	−0,88377	0,46792	19,81	31,1174	3,2670	3,0609	−0,29404	0,95579
19,32	30,3478	1,5131	6,6088	−0,87631	0,48175	19,82	31,1332	3,3187	3,0132	−0,27899	0,96029
19,33	30,3635	1,5371	6,5058	−0,86863	0,49546	19,83	31,1489	3,3712	2,9662	−0,26387	0,96456
19,34	30,3792	1,5614	6,4044	−0,86074	0,50904	19,84	31,1646	3,4246	2,9200	−0,24869	0,96858
19,35	30,3949	1,5862	6,3046	−0,85264	0,52250	19,85	31,1803	3,4788	2,8745	−0,23345	0,97237
19,36	30,4106	1,6113	6,2064	−0,84433	0,53583	19,86	31,1960	3,5339	2,8297	−0,21814	0,97592
19,37	30,4263	1,6368	6,1096	−0,83581	0,54902	19,87	31,2117	3,5899	2,7856	−0,20279	0,97922
19,38	30,4420	1,6627	6,0144	−0,82708	0,56208	19,88	31,2274	3,6467	2,7422	−0,18738	0,98229
19,39	30,4577	1,6890	5,9207	−0,81815	0,57501	19,89	31,2431	3,7044	2,6995	−0,17193	0,98511
19,40	30,4734	1,7157	5,8284	−0,80902	0,58779	19,90	31,2588	3,7631	2,6574	−0,15643	0,98769
19,41	30,4891	1,7429	5,7375	−0,79968	0,60042	19,91	31,2745	3,8227	2,6160	−0,14090	0,99002
19,42	30,5048	1,7705	5,6481	−0,79016	0,61291	19,92	31,2902	3,8832	2,5752	−0,12533	0,99211
19,43	30,5205	1,7985	5,5601	−0,78043	0,62524	19,93	31,3059	3,9447	2,5351	−0,10973	0,99396
19,44	30,5363	1,8270	5,4735	−0,77051	0,63742	19,94	31,3217	4,0071	2,4956	−0,09411	0,99556
19,45	30,5520	1,8559	5,3882	−0,76041	0,64945	19,95	31,3374	4,0705	2,4567	−0,07846	0,99692
19,46	30,5677	1,8853	5,3042	−0,75011	0,66131	19,96	31,3531	4,1350	2,4184	−0,06279	0,99803
19,47	30,5834	1,9152	5,2215	−0,73963	0,67301	19,97	31,3688	4,2005	2,3807	−0,04711	0,99889
19,48	30,5991	1,9455	5,1401	−0,72897	0,68455	19,98	31,3845	4,2670	2,3436	−0,03141	0,99951
19,49	30,6148	1,9763	5,0600	−0,71813	0,69591	19,99	31,4002	4,3346	2,3071	−0,01571	0,99988
19,50	30,6305	$2{,}0076\cdot 10^{13}$	$4{,}9812\cdot 10^{-14}$	−0,70711	0,70711	20,00	31,4159	$4{,}4032\cdot 10^{13}$	$2{,}2711\cdot 10^{-14}$	∓0,00000	1,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
20,00	31,4159	$4{,}4032\cdot 10^{13}$	$2{,}2711\cdot 10^{-14}$	$\mp 0{,}00000$	1,00000	20,50	32,2013	$9{,}6573\cdot 10^{13}$	$1{,}0355\cdot 10^{-14}$	0,70711	0,70711
20,01	31,4316	4,4729	2,2357	0,01571	0,99988	20,51	32,2170	9,8102	1,0194	0,71813	0,69591
20,02	31,4473	4,5437	2,2009	0,03141	0,99951	20,52	32,2327	$9{,}9656\cdot 10^{13}$	$1{,}0035\cdot 10^{-14}$	0,72897	0,68455
20,03	31,4630	4,6156	2,1666	0,04711	0,99889	20,53	32,2484	$1{,}0123\cdot 10^{14}$	$9{,}8782\cdot 10^{-15}$	0,73963	0,67301
20,04	31,4787	4,6887	2,1328	0,06279	0,99803	20,54	32,2641	1,0284	9,7242	0,75011	0,66131
20,05	31,4944	4,7629	2,0995	0,07846	0,99692	20,55	32,2798	1,0447	9,5727	0,76041	0,64945
20,06	31,5101	4,8383	2,0668	0,09411	0,99556	20,56	32,2955	1,0612	9,4235	0,77051	0,63742
20,07	31,5259	4,9149	2,0346	0,10973	0,99396	20,57	32,3113	1,0780	9,2766	0,78043	0,62524
20,08	31,5416	4,9927	2,0029	0,12533	0,99211	20,58	32,3270	1,0950	9,1320	0,79016	0,61291
20,09	31,5573	5,0718	1,9717	0,14090	0,99002	20,59	32,3427	1,1124	8,9897	0,79968	0,60042
20,10	31,5730	5,1521	1,9410	0,15643	0,98769	20,60	32,3584	1,1300	8,8496	0,80902	0,58779
20,11	31,5887	5,2336	1,9107	0,17193	0,98511	20,61	32,3741	1,1479	8,7117	0,81815	0,57501
20,12	31,6044	5,3165	1,8809	0,18738	0,98229	20,62	32,3898	1,1661	8,5759	0,82708	0,56208
20,13	31,6201	5,4007	1,8516	0,20279	0,97922	20,63	32,4055	1,1846	8,4423	0,83581	0,54902
20,14	31,6358	5,4862	1,8228	0,21814	0,97592	20,64	32,4212	1,2033	8,3107	0,84433	0,53583
20,15	31,6515	5,5731	1,7944	0,23345	0,97237	20,65	32,4369	1,2224	8,1811	0,85264	0,52250
20,16	31,6672	5,6613	1,7664	0,24869	0,96858	20,66	32,4526	1,2417	8,0536	0,86074	0,50904
20,17	31,6829	5,7509	1,7389	0,26387	0,96456	20,67	32,4683	1,2613	7,9281	0,86863	0,49546
20,18	31,6986	5,8419	1,7118	0,27899	0,96029	20,68	32,4840	1,2813	7,8046	0,87631	0,48175
20,19	31,7144	5,9344	1,6851	0,29404	0,95579	20,69	32,4997	1,3016	7,6830	0,88377	0,46792
20,20	31,7301	6,0284	1,6588	0,30902	0,95106	20,70	32,5155	1,3222	7,5632	0,89101	0,45399
20,21	31,7458	6,1238	1,6329	0,32392	0,94609	20,71	32,5312	1,3431	7,4453	0,89803	0,43994
20,22	31,7615	6,2208	1,6075	0,33874	0,94088	20,72	32,5469	1,3644	7,3293	0,90483	0,42578
20,23	31,7772	6,3193	1,5825	0,35347	0,93544	20,73	32,5626	1,3860	7,2151	0,91140	0,41151
20,24	31,7929	6,4193	1,5578	0,36812	0,92978	20,74	32,5783	1,4079	7,1026	0,91775	0,39715
20,25	31,8086	6,5209	1,5335	0,38268	0,92388	20,75	32,5940	1,4302	6,9919	0,92388	0,38268
20,26	31,8243	6,6242	1,5096	0,39715	0,91775	20,76	32,6097	1,4529	6,8829	0,92978	0,36812
20,27	31,8400	6,7291	1,4861	0,41151	0,91140	20,77	32,6254	1,4759	6,7757	0,93544	0,35347
20,28	31,8557	6,8356	1,4629	0,42578	0,90483	20,78	32,6411	1,4992	6,6701	0,94088	0,33874
20,29	31,8714	6,9438	1,4401	0,43994	0,89803	20,79	32,6568	1,5230	6,5661	0,94609	0,32392
20,30	31,8871	7,0537	1,4177	0,45399	0,89101	20,80	32,6725	1,5471	6,4638	0,95106	0,30902
20,31	31,9029	7,1654	1,3956	0,46792	0,88377	20,81	32,6882	1,5716	6,3631	0,95579	0,29404
20,32	31,9186	7,2789	1,3738	0,48175	0,87631	20,82	32,7040	1,5965	6,2639	0,96029	0,27899
20,33	31,9343	7,3941	1,3524	0,49546	0,86863	20,83	32,7197	1,6217	6,1662	0,96456	0,26387
20,34	31,9500	7,5112	1,3314	0,50904	0,86074	20,84	32,7354	1,6474	6,0701	0,96858	0,24869
20,35	31,9657	7,6301	1,3106	0,52250	0,85264	20,85	32,7511	1,6735	5,9755	0,97237	0,23345
20,36	31,9814	7,7509	1,2902	0,53583	0,84433	20,86	32,7668	1,7000	5,8824	0,97592	0,21814
20,37	31,9971	7,8736	1,2701	0,54902	0,83581	20,87	32,7825	1,7269	5,7907	0,97922	0,20279
20,38	32,0128	7,9983	1,2503	0,56208	0,82708	20,88	32,7982	1,7542	5,7005	0,98229	0,18738
20,39	32,0285	8,1249	1,2308	0,57501	0,81815	20,89	32,8139	1,7820	5,6117	0,98511	0,17193
20,40	32,0442	8,2535	1,2116	0,58779	0,80902	20,90	32,8296	1,8102	5,5242	0,98769	0,15643
20,41	32,0599	8,3842	1,1927	0,60042	0,79968	20,91	32,8453	1,8389	5,4381	0,99002	0,14090
20,42	32,0756	8,5169	1,1741	0,61291	0,79016	20,92	32,8610	1,8680	5,3533	0,99211	0,12533
20,43	32,0913	8,6517	1,1558	0,62524	0,78043	20,93	32,8767	1,8976	5,2699	0,99396	0,10973
20,44	32,1070	8,7887	1,1378	0,63742	0,77051	20,94	32,8925	1,9276	5,1878	0,99556	0,09411
20,45	32,1228	8,9278	1,1201	0,64945	0,76041	20,95	32,9082	1,9581	5,1069	0,99692	0,07846
20,46	32,1385	9,0692	1,1026	0,66131	0,75011	20,96	32,9239	1,9891	5,0273	0,99803	0,06279
20,47	32,1542	9,2128	1,0854	0,67301	0,73963	20,97	32,9396	2,0206	4,9489	0,99889	0,04711
20,48	32,1699	9,3587	1,0685	0,68455	0,72897	20,98	32,9553	2,0526	4,8718	0,99951	0,03141
20,49	32,1856	9,5068	1,0519	0,69591	0,71813	20,99	32,9710	2,0851	4,7959	0,99988	0,01571
20,50	32,2013	$9{,}6573\cdot 10^{13}$	$1{,}0355\cdot 10^{-14}$	0,70711	0,70711	21,00	32,9867	$2{,}1181\cdot 10^{14}$	$4{,}7212\cdot 10^{-15}$	1,00000	$\pm 0{,}00000$

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
21,00	32,9867	$2,1181\cdot10^{14}$	$4,7212\cdot10^{-15}$	1,00000	±0,00000	21,50	33,7721	$4,6456\cdot10^{14}$	$2,1526\cdot10^{-15}$	0,70711	-0,70711
21,01	33,0024	2,1516	4,6476	0,99988	-0,01571	21,51	33,7878	4,7192	2,1190	0,69591	-0,71813
21,02	33,0181	2,1857	4,5751	0,99951	-0,03141	21,52	33,8035	4,7939	2,0860	0,68455	-0,72897
21,03	33,0338	2,2203	4,5038	0,99889	-0,04711	21,53	33,8192	4,8698	2,0535	0,67301	-0,73963
21,04	33,0495	2,2555	4,4336	0,99803	-0,06279	21,54	33,8349	4,9469	2,0215	0,66131	-0,75011
21,05	33,0652	2,2912	4,3645	0,99692	-0,07846	21,55	33,8506	5,0252	1,9899	0,64945	-0,76041
21,06	33,0809	2,3275	4,2965	0,99556	-0,09411	21,56	33,8663	5,1048	1,9589	0,63742	-0,77051
21,07	33,0967	2,3643	4,2295	0,99396	-0,10973	21,57	33,8821	5,1856	1,9284	0,62524	-0,78043
21,08	33,1124	2,4017	4,1636	0,99211	-0,12533	21,58	33,8978	5,2677	1,8984	0,61291	-0,79016
21,09	33,1281	2,4398	4,0988	0,99002	-0,14090	21,59	33,9135	5,3511	1,8688	0,60042	-0,79968
21,10	33,1438	2,4784	4,0349	0,98769	-0,15643	21,60	33,9292	5,4358	1,8397	0,58779	-0,80902
21,11	33,1595	2,5176	3,9720	0,98511	-0,17193	21,61	33,9449	5,5219	1,8110	0,57501	-0,81815
21,12	33,1752	2,5575	3,9101	0,98229	-0,18738	21,62	33,9606	5,6093	1,7828	0,56208	-0,82708
21,13	33,1909	2,5980	3,8492	0,97922	-0,20279	21,63	33,9763	5,6981	1,7550	0,54902	-0,83581
21,14	33,2066	2,6391	3,7892	0,97592	-0,21814	21,64	33,9920	5,7883	1,7276	0,53583	-0,84433
21,15	33,2223	2,6809	3,7301	0,97237	-0,23345	21,65	34,0077	5,8799	1,7007	0,52250	-0,85264
21,16	33,2380	2,7233	3,6720	0,96858	-0,24869	21,66	34,0234	5,9730	1,6742	0,50904	-0,86074
21,17	33,2537	2,7665	3,6148	0,96456	-0,26387	21,67	34,0391	6,0676	1,6481	0,49546	-0,86863
21,18	33,2694	2,8103	3,5584	0,96029	-0,27899	21,68	34,0548	6,1637	1,6224	0,48175	-0,87631
21,19	33,2852	2,8547	3,5029	0,95579	-0,29404	21,69	34,0705	6,2613	1,5971	0,46792	-0,88377
21,20	33,3009	2,8999	3,4483	0,95106	-0,30902	21,70	34,0863	6,3604	1,5722	0,45399	-0,89101
21,21	33,3166	2,9458	3,3946	0,94609	-0,32392	21,71	34,1020	6,4611	1,5477	0,43994	-0,89803
21,22	33,3323	2,9925	3,3417	0,94088	-0,33874	21,72	34,1177	6,5634	1,5236	0,42578	-0,90483
21,23	33,3480	3,0399	3,2896	0,93544	-0,35347	21,73	34,1334	6,6673	1,4999	0,41151	-0,91140
21,24	33,3637	3,0880	3,2383	0,92978	-0,36812	21,74	34,1491	6,7728	1,4765	0,39715	-0,91775
21,25	33,3794	3,1369	3,1879	0,92388	-0,38268	21,75	34,1648	6,8801	1,4535	0,38268	-0,92388
21,26	33,3951	3,1865	3,1382	0,91775	-0,39715	21,76	34,1805	6,9890	1,4308	0,36812	-0,92978
21,27	33,4108	3,2369	3,0893	0,91140	-0,41151	21,77	34,1962	7,0996	1,4085	0,35347	-0,93544
21,28	33,4265	3,2882	3,0411	0,90483	-0,42578	21,78	34,2119	7,2120	1,3866	0,33874	-0,94088
21,29	33,4422	3,3403	2,9937	0,89803	-0,43994	21,79	34,2276	7,3262	1,3650	0,32392	-0,94609
21,30	33,4579	3,3932	2,9471	0,89101	-0,45399	21,80	34,2433	7,4422	1,3437	0,30902	-0,95106
21,31	33,4737	3,4469	2,9011	0,88377	-0,46792	21,81	34,2590	7,5600	1,3227	0,29404	-0,95579
21,32	33,4894	3,5015	2,8559	0,87631	-0,48175	21,82	34,2748	7,6797	1,3021	0,27899	-0,96029
21,33	33,5051	3,5569	2,8114	0,86863	-0,49546	21,83	34,2905	7,8013	1,2819	0,26387	-0,96456
21,34	33,5208	3,6132	2,7676	0,86074	-0,50904	21,84	34,3062	7,9248	1,2619	0,24869	-0,96858
21,35	33,5365	3,6704	2,7245	0,85264	-0,52250	21,85	34,3219	8,0502	1,2422	0,23345	-0,97237
21,36	33,5522	3,7285	2,6820	0,84433	-0,53583	21,86	34,3376	8,1777	1,2228	0,21814	-0,97592
21,37	33,5679	3,7875	2,6402	0,83581	-0,54902	21,87	34,3533	8,3072	1,2037	0,20279	-0,97922
21,38	33,5836	3,8475	2,5991	0,82708	-0,56208	21,88	34,3690	8,4387	1,1850	0,18738	-0,98229
21,39	33,5993	3,9084	2,5586	0,81815	-0,57501	21,89	34,3847	8,5723	1,1766	0,17193	-0,98511
21,40	33,6150	3,9703	2,5187	0,80902	-0,58779	21,90	34,4004	8,7081	1,1484	0,15643	-0,98769
21,41	33,6307	4,0331	2,4794	0,79968	-0,60042	21,91	34,4161	8,8459	1,1304	0,14090	-0,99002
21,42	33,6464	4,0970	2,4408	0,79016	-0,61291	21,92	34,4318	8,9860	1,1128	0,12533	-0,99211
21,43	33,6621	4,1619	2,4028	0,78043	-0,62524	21,93	34,4475	9,1283	1,0955	0,10973	-0,99396
21,44	33,6779	4,2278	2,3653	0,77051	-0,63742	21,94	34,4633	9,2728	1,0784	0,09411	-0,99556
21,45	33,6936	4,2947	2,3284	0,76041	-0,64945	21,95	34,4790	9,4196	1,0616	0,07846	-0,99692
21,46	33,7093	4,3627	2,2921	0,75011	-0,66131	21,96	34,4947	9,5687	1,0451	0,06279	-0,99803
21,47	33,7250	4,4318	2,2564	0,73963	-0,67301	21,97	34,5104	9,7202	1,0288	0,04711	-0 99889
21,48	33,7407	4,5020	2,2213	0,72897	-0,68455	21,98	34,5261	$9,8741\cdot10^{14}$	$1,0128\cdot10^{-15}$	0,03141	-0,99951
21,49	33,7564	4,5732	2,1867	0,71813	-0,69591	21,99	34,5418	$1,0030\cdot10^{15}$	$9,9697\cdot10^{-16}$	0,01571	-0,99988
21,50	33,7721	$4,6456\cdot10^{14}$	$2,1526\cdot10^{-15}$	0,70711	-0,70711	22,00	34,5575	$1,0189\cdot10^{15}$	$9,8143\cdot10^{-16}$	±0,00000	-1,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
22,00	34,5575	$1{,}0189 \cdot 10^{15}$	$9{,}8143 \cdot 10^{-16}$	±0,00000	−1,00000	22,50	35,3429	$2{,}2348 \cdot 10^{15}$	$4{,}4747 \cdot 10^{-16}$	−0,70711	−0,70711
22,01	34,5732	1,0350	9,6614	−0,01571	−0,99988	22,51	35,3586	2,2702	4,4050	−0,71813	−0,69591
22,02	34,5889	1,0514	9,5108	−0,03141	−0,99951	22,52	35,3743	2,3061	4,3363	−0,72897	−0,68455
22,03	34,6046	1,0681	9,3625	−0,04711	−0,99889	22,53	35,3900	2,3426	4,2687	−0,73963	−0,67301
22,04	34,6203	1,0850	9,2166	−0,06279	−0,99803	22,54	35,4057	2,3797	4,2022	−0,75011	−0,66131
22,05	34,6360	1,1022	9,0730	−0,07846	−0,99692	22,55	35,4214	2,4173	4,1367	−0,76041	−0,64945
22,06	34,6517	1,1196	8,9316	−0,09411	−0,99556	22,56	35,4371	2,4556	4,0722	−0,77051	−0,63742
22,07	34,6675	1,1374	8,7924	−0,10973	−0,99396	22,57	35,4529	2,4945	4,0088	−0,78043	−0,62524
22,08	34,6832	1,1554	8,6553	−0,12533	−0,99211	22,58	35,4686	2,5340	3,9463	−0,79016	−0,61291
22,09	34,6989	1,1736	8,5205	−0,14090	−0,99002	22,59	35,4843	2,5741	3,8848	−0,79968	−0,60042
22,10	34,7146	1,1922	8,3877	−0,15643	−0,98769	22,60	35,5000	2,6149	3,8243	−0,80902	−0,58779
22,11	34,7303	1,2111	8,2569	−0,17193	−0,98511	22,61	35,5157	2,6563	3,7647	−0,81815	−0,57501
22,12	34,7460	1,2303	8,1282	−0,18738	−0,98229	22,62	35,5314	2,6983	3,7060	−0,82708	−0,56208
22,13	34,7617	1,2497	8,0016	−0,20279	−0,97922	22,63	35,5471	2,7411	3,6483	−0,83581	−0,54902
22,14	34,7774	1,2695	7,8769	−0,21814	−0,97592	22,64	35,5628	2,7845	3,5914	−0,84433	−0,53583
22,15	34,7931	1,2897	7,7542	−0,23345	−0,97237	22,65	35,5785	2,8285	3,5354	−0,85264	−0,52250
22,16	34,8088	1,3101	7,6333	−0,24869	−0,96858	22,66	35,5942	2,8733	3,4803	−0,86074	−0,50904
22,17	34,8245	1,3308	7,5143	−0,26387	−0,96456	22,67	35,6099	2,9188	3,4261	−0,86863	−0,49546
22,18	34,8402	1,3519	7,3972	−0,27899	−0,96029	22,68	35,6256	2,9650	3,3727	−0,87631	−0,48175
22,19	34,8560	1,3733	7,2819	−0,29404	−0,95579	22,69	35,6413	3,0119	3,3201	−0,88377	−0,46792
22,20	34,8717	1,3950	7,1684	−0,30902	−0,95106	22,70	35,6571	3,0596	3,2683	−0,89101	−0,45399
22,21	34,8874	1,4171	7,0567	−0,32392	−0,94609	22,71	35,6728	3,1081	3,2174	−0,89803	−0,43994
22,22	34,9031	1,4395	6,9467	−0,33874	−0,94088	22,72	35,6885	3,1573	3,1673	−0,90483	−0,42578
22,23	34,9188	1,4623	6,8385	−0,35347	−0,93544	22,73	35,7042	3,2073	3,1179	−0,91140	−0,41151
22,24	34,9345	1,4855	6,7319	−0,36812	−0,92978	22,74	35,7199	3,2581	3,0693	−0,91775	−0,39715
22,25	34,9502	1,5090	6,6269	−0,38268	−0,92388	22,75	35,7356	3,3096	3,0215	−0,92388	−0,38268
22,26	34,9659	1,5329	6,5236	−0,39715	−0,91775	22,76	35,7513	3,3620	2,9744	−0,92978	−0,36812
22,27	34,9816	1,5572	6,4219	−0,41151	−0,91140	22,77	35,7670	3,4152	2,9280	−0,93544	−0,35347
22,28	34,9973	1,5818	6,3219	−0,42578	−0,90483	22,78	35,7827	3,4693	2,8824	−0,94088	−0,33874
22,29	35,0130	1,6069	6,2234	−0,43994	−0,89803	22,79	35,7984	3,5243	2,8374	−0,94609	−0,32392
22,30	35,0287	1,6323	6,1264	−0,45399	−0,89101	22,80	35,8141	3,5801	2,7932	−0,95106	−0,30902
22,31	35,0444	1,6581	6,0309	−0,46792	−0,88377	22,81	35,8298	3,6367	2,7497	−0,95579	−0,29404
22,32	35,0601	1,6844	5,9369	−0,48175	−0,87631	22,82	35,8456	3,6943	2,7069	−0,96029	−0,27899
22,33	35,0758	1,7110	5,8444	−0,49546	−0,86863	22,83	35,8613	3,7528	2,6647	−0,96456	−0,26387
22,34	35,0915	1,7381	5,7533	−0,50904	−0,86074	22,84	35,8770	3,8122	2,6231	−0,96858	−0,24869
22,35	35,1072	1,7656	5,6636	−0,52250	−0,85264	22,85	35,8927	3,8726	2,5822	−0,97237	−0,23345
22,36	35,1229	1,7936	5,5753	−0,53583	−0,84433	22,86	35,9084	3,9339	2,5420	−0,97592	−0,21814
22,37	35,1387	1,8220	5,4884	−0,54902	−0,83581	22,87	35,9241	3,9961	2,5024	−0,97922	−0,20279
22,38	35,1544	1,8509	5,4029	−0,56208	−0,82708	22,88	35,9398	4,0594	2,4634	−0,98229	−0,18738
22,39	35,1701	1,8802	5,3187	−0,57501	−0,81815	22,89	35,9555	4,1237	2,4250	−0,98511	−0,17193
22,40	35,1858	1,9099	5,2358	−0,58779	−0,80902	22,90	35,9712	4,1890	2,3872	−0,98769	−0,15643
22,41	35,2015	1,9402	5,1542	−0,60042	−0,79968	22,91	35,9869	4,2553	2,3500	−0,99002	−0,14090
22,42	35,2172	1,9709	5,0739	−0,61291	−0,79016	22,92	36,0026	4,3227	2,3134	−0,99211	−0,12533
22,43	35,2329	2,0021	4,9948	−0,62524	−0,78043	22,93	36,0183	4,3911	2,2773	−0,99396	−0,10973
22,44	35,2487	2,0338	4,9170	−0,63742	−0,77051	22,94	36,0341	4,4606	2,2418	−0,99556	−0,09411
22,45	35,2644	2,0660	4,8404	−0,64945	−0,76041	22,95	36,0498	4,5312	2,2069	−0,99692	−0,07846
22,46	35,2801	2,0987	4,7649	−0,66131	−0,75011	22,96	36,0655	4,6030	2,1725	−0,99803	−0,06279
22,47	35,2958	2,1319	4,6906	−0,67301	−0,73963	22,97	36,0812	4,6759	2,1386	−0,99889	−0,04711
22,48	35,3115	2,1657	4,6175	−0,68455	−0,72897	22,98	36,0969	4,7499	2,1053	−0,99951	−0,03141
22,49	35,3272	2,2000	4,5455	−0,69591	−0,71813	22,99	36,1126	4,8251	2,0725	−0,99988	−0,01571
22,50	35,3429	$2{,}2348 \cdot 10^{15}$	$4{,}4747 \cdot 10^{-16}$	−0,70711	−0,70711	23,00	36,1283	$4{,}9015 \cdot 10^{15}$	$2{,}0402 \cdot 10^{-16}$	−1,00000	∓0,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
23,00	36,1283	$4{,}9015\cdot 10^{15}$	$2{,}0402\cdot 10^{-16}$	−1,00000	∓0,00000	23,50	36,9137	$1{,}0750\cdot 10^{16}$	$9{,}3020\cdot 10^{-17}$	−0,70711	0,70711
23,01	36,1440	4,9791	2,0084	−0,99988	0,01571	23,51	36,9294	1,0920	9,1570	−0,69591	0,71813
23,02	36,1597	5,0579	1,9771	−0,99951	0,03141	23,52	36,9451	1,1093	9,0143	−0,68455	0,72897
23,03	36,1754	5,1380	1,9463	−0,99889	0,04711	23,53	36,9608	1,1269	8,8739	−0,67301	0,73963
23,04	36,1911	5,2193	1,9160	−0,99803	0,06279	23,54	36,9765	1,1447	8,7356	−0,66131	0,75011
23,05	36,2068	5,3019	1,8861	−0,99692	0,07846	23,55	36,9922	1,1629	8,6994	−0,64945	0,76041
23,06	36,2225	5,3859	1,8567	−0,99556	0,09411	23,56	37,0079	1,1813	8,4654	−0,63742	0,77051
23,07	36,2383	5,4712	1,8278	−0,99396	0,10973	23,57	37,0237	1,2000	8,3335	−0,62524	0,78043
23,08	36,2540	5,5578	1,7993	−0,99211	0,12533	23,58	37,0394	1,2190	8,2036	−0,61291	0,79016
23,09	36,2697	5,6458	1,7712	−0,99002	0,14090	23,59	37,0551	1,2383	8,0758	−0,60042	0,79968
23,10	36,2854	5,7352	1,7436	−0,98769	0,15643	23,60	37,0708	1,2579	7,9499	−0,58779	0,80902
23,11	36,3011	5,8260	1,7164	−0,98511	0,17193	23,61	37,0865	1,2778	7,8260	−0,57501	0,81815
23,12	36,3168	5,9182	1,6897	−0,98229	0,18738	23,62	37,1022	1,2980	7,7040	−0,56208	0,82708
23,13	36,3325	6,0119	1,6633	−0,97922	0,20279	23,63	37,1179	1,3186	7,5839	−0,54902	0,83581
23,14	36,3482	6,1071	1,6374	−0,97592	0,21814	23,64	37,1336	1,3395	7,4657	−0,53583	0,84433
23,15	36,3639	6,2038	1,6119	−0,97237	0,23345	23,65	37,1493	1,3607	7,3493	−0,52250	0,85264
23,16	36,3796	6,3020	1,5868	−0,96858	0,24869	23,66	37,1650	1,3822	7,2348	−0,50904	0,86074
23,17	36,3953	6,4017	1,5620	−0,96456	0,26387	23,67	37,1807	1,4041	7,1221	−0,49546	0,86863
23,18	36,4110	6,5031	1,5377	−0,96029	0,27899	23,68	37,1964	1,4263	7,0111	−0,48175	0,87631
23,19	36,4268	6,6061	1,5138	−0,95579	0,29404	23,69	37,2121	1,4489	6,9018	−0,46792	0,88377
23,20	36,4425	6,7107	1,4902	−0,95106	0,30902	23,70	37,2279	1,4718	6,7942	−0,45399	0,89101
23,21	36,4582	6,8169	1,4670	−0,94609	0,32392	23,71	37,2436	1,4951	6,6883	−0,43994	0,89803
23,22	36,4739	6,9248	1,4441	−0,94088	0,33874	23,72	37,2593	1,5188	6,5841	−0,42578	0,90483
23,23	36,4896	7,0344	1,4216	−0,93544	0,35347	23,73	37,2750	1,5429	6,4815	−0,41151	0,91140
23,24	36,5053	7,1458	1,3994	−0,92978	0,36812	23,74	37,2907	1,5673	6,3805	−0,39715	0,91775
23,25	36,5210	7,2590	1,3776	−0,92388	0,38268	23,75	37,3064	1,5921	6,2810	−0,38268	0,92388
23,26	36,5367	7,3739	1,3561	−0,91775	0,39715	23,76	37,3221	1,6173	6,1831	−0,36812	0,92978
23,27	36,5524	7,4906	1,3350	−0,91140	0,41151	23,77	37,3378	1,6429	6,0868	−0,35347	0,93544
23,28	36,5681	7,6092	1,3142	−0,90483	0,42578	23,78	37,3535	1,6689	5,9919	−0,33874	0,94088
23,29	36,5838	7,7297	1,2937	−0,89803	0,43994	23,79	37,3692	1,6954	5,8985	−0,32392	0,94609
23,30	36,5995	7,8521	1,2735	−0,89101	0,45399	23,80	37,3849	1,7222	5,8066	−0,30902	0,95106
23,31	36,6153	7,9764	1,2537	−0,88377	0,46792	23,81	37,4006	1,7494	5,7161	−0,29404	0,95579
23,32	36,6310	8,1027	1,2342	−0,87631	0,48175	23,82	37,4164	1,7771	5,6270	−0,27899	0,96029
23,33	36,6467	8,2310	1,2149	−0,86863	0,49546	23,83	37,4321	1,8053	5,5393	−0,26387	0,96456
23,34	36,6624	8,3613	1,1960	−0,86074	0,50904	23,84	37,4478	1,8339	5,4530	−0,24869	0,96858
23,35	36,6781	8,4936	1,1773	−0,85264	0,52250	23,85	37,4635	1,8629	5,3680	−0,23345	0,97237
23,36	36,6938	8,6281	1,1590	−0,84433	0,53583	23,86	37,4792	1,8924	5,2843	−0,21814	0,97592
23,37	36,7095	8,7647	1,1410	−0,83581	0,54902	23,87	37,4949	1,9224	5,2020	−0,20279	0,97922
23,38	36,7252	8,9035	1,1232	−0,82708	0,56208	23,88	37,5106	1,9528	5,1209	−0,18738	0,98229
23,39	36,7409	9,0444	1,1056	−0,81815	0,57501	23,89	37,5263	1,9837	5,0411	−0,17193	0,98511
23,40	36,7566	9,1876	1,0884	−0,80902	0,58779	23,90	37,5420	2,0151	4,9625	−0,15643	0,98769
23,41	36,7723	9,3330	1,0715	−0,79968	0,60042	23,91	37,5577	2,0470	4,8851	−0,14090	0,99002
23,42	36,7880	9,4808	1,0548	−0,79016	0,61291	23,92	37,5734	2,0794	4,8090	−0,12533	0,99211
23,43	36,8037	9,6309	1,0383	−0,78043	0,62524	23,93	37,5891	2,1123	4,7341	−0,10973	0,99396
23,44	36,8195	9,7834	1,0221	−0,77051	0,63742	23,94	37,6049	2,1458	4,6603	−0,09411	0,99556
23,45	36,8352	$9{,}9383\cdot 10^{15}$	$1{,}0062\cdot 10^{-16}$	−0,76041	0,64945	23,95	37,6206	2,1798	4,5877	−0,07846	0,99692
23,46	36,8509	$1{,}0096\cdot 10^{16}$	$9{,}9052\cdot 10^{-17}$	−0,75011	0,66131	23,96	37,6363	2,2143	4,5162	−0,06279	0,99803
23,47	36,8666	1,0256	9,7509	−0,73963	0,67301	23,97	37,6520	2,2493	4,4458	−0,04711	0,99889
23,48	36,8823	1,0418	9,5989	−0,72897	0,68455	23,98	37,6677	2,2849	4,3765	−0,03141	0,99951
23,49	36,8980	1,0583	9,4493	−0,71813	0,69591	23,99	37,6834	2,3211	4,3083	−0,01571	0,99988
23,50	36,9137	$1{,}0750\cdot 10^{16}$	$9{,}3020\cdot 10^{-17}$	−0,70711	0,70711	24,00	37,6991	$2{,}3579\cdot 10^{16}$	$4{,}2412\cdot 10^{-17}$	∓0,00000	1,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
24,00	37,6991	$2,3579\cdot10^{16}$	$4,2412\cdot10^{-17}$	$\mp$0,00000	1,00000	24,50	38,4845	$5,1714\cdot10^{16}$	$1,9337\cdot10^{-17}$	0,70711	0,70711
24,01	37,7148	2,3952	4,1751	0,01571	0,99988	24,51	38,5002	5,2533	1,9036	0,71813	0,69591
24,02	37,7305	2,4331	4,1100	0,03141	0,99951	24,52	38,5159	5,3365	1,8739	0,72897	0,68455
24,03	37,7462	2,4717	4,0460	0,04711	0,99889	24,53	38,5316	5,4210	1,8447	0,73963	0,67301
24,04	37,7619	2,5108	3,9829	0,06279	0,99803	24,54	38,5473	5,5068	1,8159	0,75011	0,66131
24,05	37,7776	2,5505	3,9208	0,07846	0,99692	24,55	38,5630	5,5939	1,7876	0,76041	0,64945
24,06	37,7933	2,5909	3,8597	0,09411	0,99556	24,56	38,5787	5,6825	1,7598	0,77051	0,63742
24,07	37,8091	2,6319	3,7995	0,10973	0,99396	24,57	38,5945	5,7725	1,7324	0,78043	0,62524
24,08	37,8248	2,6736	3,7403	0,12533	0,99211	24,58	38,6102	5,8639	1,7054	0,79016	0,61291
24,09	37,8405	2,7159	3,6820	0,14090	0,99002	24,59	38,6259	5,9567	1,6788	0,79968	0,60042
24,10	37,8562	2,7589	3,6246	0,15643	0,98769	24,60	38,6416	6,0510	1,6526	0,80902	0,58779
24,11	37,8719	2,8025	3,5681	0,17193	0,98511	24,61	38,6573	6,1468	1,6268	0,81815	0,57501
24,12	37,8876	2,8469	3,5125	0,18738	0,98229	24,62	38,6730	6,2441	1,6015	0,82708	0,56208
24,13	37,9033	2,8920	3,4578	0,20279	0,97922	24,63	38,6887	6,3430	1,5766	0,83581	0,54902
24,14	37,9190	2,9378	3,4039	0,21814	0,97592	24,64	38,7044	6,4434	1,5520	0,84433	0,53583
24,15	37,9347	2,9843	3,3508	0,23345	0,97237	24,65	38,7201	6,5454	1,5278	0,85264	0,52250
24,16	37,9504	3,0316	3,2986	0,24869	0,96858	24,66	38,7358	6,6491	1,5040	0,86074	0,50904
24,17	37,9661	3,0796	3,2472	0,26387	0,96456	24,67	38,7515	6,7544	1,4806	0,86863	0,49546
24,18	37,9818	3,1283	3,1966	0,27899	0,96029	24,68	38,7672	6,8613	1,4575	0,87631	0,48175
24,19	37,9976	3,1779	3,1468	0,29404	0,95579	24,69	38,7829	6,9699	1,4348	0,88377	0,46792
24,20	38,0133	3,2282	3,0977	0,30902	0,95106	24,70	38,7987	7,0802	1,4124	0,89101	0,45399
24,21	38,0290	3,2793	3,0494	0,32392	0,94609	24,71	38,8144	7,1923	1,3904	0,89803	0,43994
24,22	38,0447	3,3312	3,0019	0,33874	0,94088	24,72	38,8301	7,3062	1,3687	0,90483	0,42578
24,23	38,0604	3,3839	2,9551	0,35347	0,93544	24,73	38,8458	7,4219	1,3474	0,91140	0,41151
24,24	38,0761	3,4375	2,9091	0,36812	0,92978	24,74	38,8615	7,5394	1,3264	0,91775	0,39715
24,25	38,0918	3,4919	2,8637	0,38268	0,92388	24,75	38,8772	7,6587	1,3057	0,92388	0,38268
24,26	38,1075	3,5472	2,8191	0,39715	0,91775	24,76	38,8929	7,7800	1,2853	0,92978	0,36812
24,27	38,1232	3,6034	2,7752	0,41151	0,91140	24,77	38,9086	7,9032	1,2653	0,93544	0,35347
24,28	38,1389	3,6604	2,7319	0,42578	0,90483	24,78	38,9243	8,0283	1,2456	0,94088	0,33874
24,29	38,1546	3,7183	2,6893	0,43994	0,89803	24,79	38,9400	8,1554	1,2262	0,94609	0,32392
24,30	38,1703	3,7772	2,6474	0,45399	0,89101	24,80	38,9557	8,2845	1,2071	0,95106	0,30902
24,31	38,1861	3,8370	2,6062	0,46792	0,88377	24,81	38,9714	8,4157	1,1882	0,95579	0,29404
24,32	38,2018	3,8978	2,5656	0,48175	0,87631	24,82	38,9872	8,5489	1,1697	0,96029	0,27899
24,33	38,2175	3,9595	2,5256	0,49546	0,86863	24,83	39,0029	8,6842	1,1515	0,96456	0,26387
24,34	38,2332	4,0222	2,4862	0,50904	0,86074	24,84	39,0186	8,8217	1,1336	0,96858	0,24869
24,35	38,2489	4,0858	2,4474	0,52250	0,85264	24,85	39,0343	8,9614	1,1159	0,97237	0,23345
24,36	38,2646	4,1505	2,4093	0,53583	0,84433	24,86	39,0500	9,1033	1,0985	0,97592	0,21814
24,37	38,2903	4,2162	2,3718	0,54902	0,83581	24,87	39,0657	9,2474	1,0814	0,97922	0,20279
24,38	38,2860	4,2830	2,3348	0,56208	0,82708	24,88	39,0814	9,3938	1,0645	0,98229	0,18738
24,39	38,3117	4,3508	2,2984	0,57501	0,81815	24,89	39,0971	9,5425	1,0479	0,98511	0,17193
24,40	38,3274	4,4197	2,2626	0,58779	0,80902	24,90	39,1128	9,6936	1,0316	0,98769	0,15643
24,41	38,3431	4,4896	2,2273	0,60042	0,79968	24,91	39,1285	$9,8471\cdot10^{16}$	$1,0155\cdot10^{-17}$	0,99002	0,14090
24,42	38,3588	4,5607	2,1926	0,61291	0,79016	24,92	39,1442	$1,0003\cdot10^{17}$	$9,9970\cdot10^{-18}$	0,99211	0,12533
24,43	38,3745	4,6330	2,1584	0,62524	0,78043	24,93	39,1599	1,0161	9,8412	0,99396	0,10973
24,44	38,3903	4,7063	2,1248	0,63742	0,77051	24,94	39,1757	1,0322	9,6878	0,99556	0,09411
24,45	38,4060	4,7808	2,0917	0,64945	0,76041	24,95	39,1914	1,0486	9,5368	0,99692	0,07846
24,46	38,4217	4,8565	2,0591	0,65131	0,75011	24,96	39,2071	1,0652	9,3882	0,99803	0,06279
24,47	38,4374	4,9334	2,0270	0,67301	0,73963	24,97	39,2228	1,0821	9,2419	0,99889	0,04711
24,48	38,4531	5,0115	1,9954	0,68455	0,72897	24,98	39,2385	1,0992	9,0979	0,99951	0,03141
24,49	38,4688	5,0908	1,9643	0,69591	0,71813	24,99	39,2542	1,1166	8,9561	0,99988	0,01571
24,50	38,4845	$5,1714\cdot10^{16}$	$1,9337\cdot10^{-17}$	0,70711	0,70711	25,00	39,2699	$1,1342\cdot10^{17}$	$8,8165\cdot10^{-18}$	1,00000	$\pm$0,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
25,00	39,2699	$1,1342\cdot10^{17}$	$8,6165\cdot10^{-18}$	1,00000	±0,00000	25,50	40,0553	$2,4877\cdot10^{17}$	$4,0198\cdot10^{-18}$	0,70711	-0,70711
25,01	39,2856	1,1522	8,6791	0,99988	-0,01571	25,51	40,0710	2,5271	3,9572	0,69591	-0,71813
25,02	39,3013	1,1704	8,5438	0,99951	-0,03141	25,52	40,0867	2,5671	3,8955	0,68455	-0,72897
25,03	39,3170	1,1890	8,4107	0,99889	-0,04711	25,53	40,1024	2,6077	3,8348	0,67301	-0,73963
25,04	39,3327	1,2078	8,2796	0,99803	-0,06279	25,54	40,1181	2,6490	3,7750	0,66131	-0,75011
25,05	39,3484	1,2269	8,1505	0,99692	-0,07846	25,55	40,1338	2,6910	3,7161	0,64945	-0,76041
25,06	39,3641	1,2463	8,0235	0,99556	-0,09411	25,56	40,1495	2,7336	3,6582	0,63742	-0,77051
25,07	39,3799	1,2660	7,8985	0,99396	-0,10973	25,57	40,1653	2,7769	3,6012	0,62524	-0,78043
25,08	39,3956	1,2861	7,7754	0,99211	-0,12533	25,58	40,1810	2,8208	3,5451	0,61291	-0,79016
25,09	39,4113	1,3065	7,6542	0,99002	-0,14090	25,59	40,1967	2,8654	3,4898	0,60042	-0,79968
25,10	39,4270	1,3272	7,5349	0,98769	-0,15643	25,60	40,2124	2,9108	3,4354	0,58779	-0,80902
25,11	39,4427	1,3482	7,4175	0,98511	-0,17193	25,61	40,2281	2,9569	3,3819	0,57501	-0,81815
25,12	39,4584	1,3695	7,3019	0,98229	-0,18738	25,62	40,2438	3,0037	3,3292	0,56208	-0,82708
25,13	39,4741	1,3912	7,1881	0,97922	-0,20279	25,63	40,2595	3,0513	3,2773	0,54902	-0,83581
25,14	39,4898	1,4132	7,0760	0,97592	-0,21814	25,64	40,2752	3,0996	3,2262	0,53583	-0,84433
25,15	39,5055	1,4356	6,9658	0,97237	-0,23345	25,65	40,2909	3,1487	3,1759	0,52250	-0,85264
25,16	39,5212	1,4583	6,8572	0,96858	-0,24869	25,66	40,3066	3,1985	3,1264	0,50904	-0,86074
25,17	39,5369	1,4814	6,7503	0,96456	-0,26387	25,67	40,3223	3,2492	3,0777	0,49546	-0,86863
25,18	39,5526	1,5049	6,6451	0,96029	-0,27899	25,68	40,3380	3,3006	3,0298	0,48175	-0,87631
25,19	39,5684	1,5287	6,5416	0,95579	-0,29404	25,69	40,3537	3,3528	2,9826	0,46792	-0,88377
25,20	39,5841	1,5529	6,4396	0,95106	-0,30902	25,70	40,3695	3,4059	2,9361	0,45399	-0,89101
25,21	39,5998	1,5775	6,3392	0,94609	-0,32392	25,71	40,3852	3,4598	2,8903	0,43994	-0,89803
25,22	39,6155	1,6025	6,2404	0,94088	-0,33874	25,72	40,4009	3,5146	2,8452	0,42578	-0,90483
25,23	39,6312	1,6278	6,1431	0,93544	-0,35347	25,73	40,4166	3,5703	2,8009	0,41151	-0,91140
25,24	39,6469	1,6536	6,0474	0,92978	-0,36812	25,74	40,4323	3,6268	2,7573	0,39715	-0,91775
25,25	39,6626	1,6798	5,9532	0,92388	-0,38268	25,75	40,4480	3,6842	2,7143	0,38268	-0,92388
25,26	39,6783	1,7064	5,8604	0,91775	-0,39715	25,76	40,4637	3,7425	2,6720	0,36812	-0,92978
25,27	39,6940	1,7334	5,7690	0,91140	-0,41151	25,77	40,4794	3,8018	2,6303	0,35347	-0,93544
25,28	39,7097	1,7608	5,6791	0,90483	-0,42578	25,78	40,4951	3,8620	2,5893	0,33874	-0,94088
25,29	39,7254	1,7887	5,5906	0,89803	-0,43994	25,79	40,5108	3,9232	2,5490	0,32392	-0,94609
25,30	39,7411	1,8170	5,5035	0,89101	-0,45399	25,80	40,5265	3,9852	2,5093	0,30902	-0,95106
25,31	39,7569	1,8458	5,4177	0,88377	-0,46792	25,81	40,5422	4,0483	2,4702	0,29404	-0,95579
25,32	39,7726	1,8750	5,3333	0,87631	-0,48175	25,82	40,5580	4,1124	2,4317	0,27899	-0,96029
25,33	39,7883	1,9047	5,2501	0,86863	-0,49546	25,83	40,5737	4,1775	2,3937	0,26387	-0,96456
25,34	39,8040	1,9349	5,1683	0,86074	-0,50904	25,84	40,5894	4,2437	2,3564	0,24869	-0,96858
25,35	39,8197	1,9655	5,0878	0,85264	-0,52250	25,85	40,6051	4,3109	2,3197	0,23345	-0,97237
25,36	39,8354	1,9966	5,0085	0,84433	-0,53583	25,86	40,6208	4,3791	2,2836	0,21814	-0,97592
25,37	39,8511	2,0282	4,9304	0,83581	-0,54902	25,87	40,6365	4,4485	2,2480	0,20279	-0,97922
25,38	39,8668	2,0603	4,8536	0,82708	-0,56208	25,88	40,6522	4,5189	2,2129	0,18738	-0,98229
25,39	39,8825	2,0930	4,7780	0,81815	-0,57501	25,89	40,6679	4,5904	2,1784	0,17193	-0,98511
25,40	39,8982	2,1261	4,7035	0,80902	-0,58779	25,90	40,6836	4,6631	2,1445	0,15643	-0,98769
25,41	39,9139	2,1597	4,6302	0,79968	-0,60042	25,91	40,6993	4,7369	2,1111	0,14090	-0,99002
25,42	39,9296	2,1939	4,5580	0,79016	-0,61291	25,92	40,7150	4,8119	2,0782	0,12533	-0,99211
25,43	39,9453	2,2287	4,4870	0,78043	-0,62524	25,93	40,7307	4,8881	2,0458	0,10973	-0,99396
25,44	39,9611	2,2640	4,4171	0,77051	-0,63742	25,94	40,7465	4,9655	2,0139	0,09411	-0,99556
25,45	39,9768	2,2998	4,3482	0,76041	-0,64945	25,95	40,7622	5,0441	1,9825	0,07846	-0,99692
25,46	39,9925	2,3362	4,2804	0,75011	-0,66131	25,96	40,7779	5,1240	1,9516	0,06279	-0,99803
25,47	40,0082	2,3732	4,2137	0,73963	-0,67301	25,97	40,7936	5,2051	1,9212	0,04711	-0,99889
25,48	40,0239	2,4108	4,1481	0,72897	-0,68455	25,98	40,8093	5,2875	1,8913	0,03141	-0,99951
25,49	40,0396	2,4489	4,0834	0,71813	-0,69591	25,99	40,8250	5,3712	1,8618	0,01571	-0,99988
25,50	40,0553	$2,4877\cdot10^{17}$	$4,0198\cdot10^{-18}$	0,70711	-0,70711	26,00	40,8407	$5,4562\cdot10^{17}$	$1,8328\cdot10^{-18}$	±0,00000	-1,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
26,00	40,8407	$5{,}4562\cdot10^{17}$	$1{,}8328\cdot10^{-18}$	±0,00000	−1,00000	26,50	41,6261	$1{,}1967\cdot10^{18}$	$8{,}3563\cdot10^{-19}$	−0,70711	−0,70711
26,01	40,8564	5,5426	1,8042	−0,01571	−0,99988	26,51	41,6418	1,2157	8,2260	−0,71813	−0,69591
26,02	40,8721	5,6304	1,7761	−0,03141	−0,99951	26,52	41,6575	1,2349	8,0978	−0,72897	−0,68455
26,03	40,8878	5,7195	1,7484	−0,04711	−0,99889	26,53	41,6732	1,2544	7,9716	−0,73963	−0,67301
26,04	40,9035	5,8101	1,7212	−0,06279	−0,99803	26,54	41,6889	1,2743	7,8474	−0,75011	−0,66131
26,05	40,9192	5,9021	1,6943	−0,07846	−0,99692	26,55	41,7046	1,2945	7,7251	−0,76041	−0,64945
26,06	40,9349	5,9955	1,6679	−0,09411	−0,99556	26,56	41,7203	1,3150	7,6047	−0,77051	−0,63742
26,07	40,9507	6,0904	1,6419	−0,10973	−0,99396	26,57	41,7361	1,3358	7,4862	−0,78043	−0,62524
26,08	40,9664	6,1868	1,6163	−0,12533	−0,99211	26,58	41,7518	1,3569	7,3695	−0,79016	−0,61291
26,09	40,9821	6,2848	1,5911	−0,14090	−0,99002	26,59	41,7675	1,3784	7,2547	−0,79968	−0,60042
26,10	40,9978	6,3843	1,5663	−0,15643	−0,98769	26,60	41,7832	1,4002	7,1416	−0,80902	−0,58779
26,11	41,0135	6,4853	1,5419	−0,17193	−0,98511	26,61	41,7989	1,4224	7,0303	−0,81815	−0,57501
26,12	41,0292	6,5880	1,5179	−0,18738	−0,98229	26,62	41,8146	1,4449	6,9207	−0,82708	−0,56208
26,13	41,0449	6,6923	1,4943	−0,20279	−0,97922	26,63	41,8303	1,4678	6,8129	−0,83581	−0,54902
26,14	41,0606	6,7983	1,4710	−0,21814	−0,97592	26,64	41,8460	1,4911	6,7067	−0,84433	−0,53583
26,15	41,0763	6,8059	1,4481	−0,23345	−0,97237	26,65	41,8617	1,5147	6,6021	−0,85264	−0,52250
26,16	41,0920	7,0152	1,4255	−0,24869	−0,96858	26,66	41,8774	1,5386	6,4992	−0,86074	−0,50904
26,17	41,1077	7,1263	1,4033	−0,26387	−0,96456	26,67	41,8931	1,5630	6,3979	−0,86863	−0,49546
26,18	41,1234	7,2391	1,3814	−0,27899	−0,96029	26,68	41,9088	1,5877	6,2982	−0,87631	−0,48175
26,19	41,1392	7,3537	1,3599	−0,29404	−0,95579	26,69	41,9245	1,6129	6,2000	−0,88377	−0,46792
26,20	41,1549	7,4702	1,3387	−0,30902	−0,95106	26,70	41,9403	1,6384	6,1034	−0,89101	−0,45399
26,21	41,1706	7,5885	1,3178	−0,32392	−0,94609	26,71	41,9560	1,6643	6,0083	−0,89803	−0,43994
26,22	41,1863	7,7086	1,2973	−0,33874	−0,94088	26,72	41,9717	1,6907	5,9147	−0,90483	−0,42578
26,23	41,2020	7,7306	1,2770	−0,35347	−0,93544	26,73	41,9874	1,7175	5,8225	−0,91140	−0,41151
26,24	41,2177	7,9546	1,2571	−0,36812	−0,92978	26,74	42,0031	1,7447	5,7318	−0,91775	−0,39715
26,25	41,2334	8,0806	1,2376	−0,38268	−0,92388	26,75	42,0188	1,7723	5,6425	−0,92388	−0,38268
26,26	41,2491	8,2085	1,2183	−0,39715	−0,91775	26,76	42,0345	1,8003	5,5545	−0,92978	−0,36812
26,27	41,2648	8,3384	1,1993	−0,41151	−0,91140	26,77	42,0502	1,8288	5,4679	−0,93544	−0,35347
26,28	41,2805	8,4704	1,1806	−0,42578	−0,90483	26,78	42,0659	1,8578	5,3827	−0,94088	−0,33874
26,29	41,2962	8,6045	1,1622	−0,43994	−0,89803	26,79	42,0816	1,8872	5,2988	−0,94609	−0,32392
26,30	41,3119	8,7408	1,1441	−0,45399	−0,89101	26,80	42,0973	1,9171	5,2162	−0,95106	−0,30902
26,31	41,3277	8,8791	1,1263	−0,46792	−0,88377	26,81	42,1130	1,9475	5,1349	−0,95579	−0,29404
26,32	41,3434	9,0197	1,1087	−0,48175	−0,87631	26,82	42,1288	1,9783	5,0549	−0,96029	−0,27899
26,33	41,3591	9,1625	1,0914	−0,49546	−0,86863	26,83	42,1445	2,0096	4,9761	−0,96456	−0,26387
26,34	41,3748	9,3076	1,0744	−0,50904	−0,86074	26,84	42,1602	2,0414	4,8986	−0,96858	−0,24869
26,35	41,3905	9,4549	1,0577	−0,52250	−0,85264	26,85	42,1759	2,0738	4,8223	−0,97237	−0,23345
26,36	41,4062	9,6046	1,0412	−0,53583	−0,84433	26,86	42,1916	2,1066	4,7471	−0,97592	−0,21814
26,37	41,4219	9,7567	1,0249	−0,54902	−0,83581	26,87	42,2073	2,1399	4,6731	−0,97922	−0,20279
26,38	41,4376	$9{,}9112\cdot10^{17}$	$1{,}0090\cdot10^{-18}$	−0,56208	−0,82708	26,88	42,2230	2,1738	4,6003	−0,98229	−0,18738
26,39	41,4533	$1{,}0068\cdot10^{18}$	$9{,}9324\cdot10^{-19}$	−0,57501	−0,81815	26,89	42,2387	2,2082	4,5286	−0,98511	−0,17193
26,40	41,4690	1,0227	9,7776	−0,58779	−0,80902	26,90	42,2544	2,2431	4,4580	−0,98769	−0,15643
26,41	41,4847	1,0389	9,6252	−0,60042	−0,79968	26,91	42,2701	2,2787	4,3885	−0,99002	−0,14090
26,42	41,5004	1,0554	9,4752	−0,61291	−0,79016	26,92	42,2858	2,3148	4,3201	−0,99211	−0,12533
26,43	41,5161	1,0721	9,3276	−0,62524	−0,78043	26,93	42,3015	2,3514	4,2528	−0,99396	−0,10973
26,44	41,5319	1,0891	9,1822	−0,63742	−0,77051	26,94	42,3173	2,3886	4,1865	−0,99556	−0,09411
26,45	41,5476	1,1063	9,0391	−0,64945	−0,76041	26,95	42,3330	2,4265	4,1212	−0,99692	−0,07846
26,46	41,5633	1,1238	8,8982	−0,66131	−0,75011	26,96	42,3487	2,4649	4,0570	−0,99803	−0,06279
26,47	41,5790	1,1416	8,7595	−0,67301	−0,73963	26,97	42,3644	2,5039	3,9938	−0,99889	−0,04711
26,48	41,5947	1,1597	8,6230	−0,68455	−0,72897	26,98	42,3801	2,5435	3,9315	−0,99951	−0,03141
26,49	41,6104	1,1781	8,4886	−0,69591	−0,71813	26,99	42,3958	2,5838	3,8702	−0,99988	−0,01571
26,50	41,6261	$1{,}1967\cdot10^{18}$	$8{,}3563\cdot10^{-19}$	−0,70711	−0,70711	27,00	42,4115	$2{,}6247\cdot10^{18}$	$3{,}8099\cdot10^{-19}$	−1,00000	∓0,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
27,00	42,4115	$2,6247\cdot10^{18}$	$3,8099\cdot10^{-19}$	−1,00000	∓0,00000	27,50	43,1969	$5,7567\cdot10^{18}$	$1,7371\cdot10^{-19}$	−0,70711	0,70711
27,01	42,4272	2,6663	3,7505	−0,99988	0,01571	27,51	43,2126	5,8478	1,7100	−0,69591	0,71813
27,02	42,4429	2,7085	3,6921	−0,99951	0,03141	27,52	43,2283	5,9404	1,6834	−0,68455	0,72897
27,03	42,4586	2,7514	3,6345	−0,99889	0,04711	27,53	43,2440	6,0344	1,6571	−0,67301	0,73963
27,04	42,4743	2,7949	3,5779	−0,99803	0,06279	27,54	43,2597	6,1300	1,6313	−0,66131	0,75011
27,05	42,4900	2,8391	3,5222	−0,99692	0,07846	27,55	43,2754	6,2271	1,6059	−0,64945	0,76041
27,06	42,5057	2,8841	3,4673	−0,99556	0,09411	27,56	43,2911	6,3257	1,5809	−0,63742	0,77051
27,07	42,5215	2,9298	3,4132	−0,99396	0,10973	27,57	43,3069	6,4258	1,5563	−0,62524	0,78043
27,08	42,5372	2,9762	3,3600	−0,99211	0,12533	27,58	43,3226	6,5275	1,5320	−0,61291	0,79016
27,09	42,5529	3,0233	3,3076	−0,99002	0,14090	27,59	43,3383	6,6309	1,5081	−0,60042	0,79968
27,10	42,5686	3,0711	3,2561	−0,98769	0,15643	27,60	43,3540	6,7359	1,4846	−0,58779	0,80902
27,11	42,5843	3,1198	3,2054	−0,98511	0,17193	27,61	43,3697	6,8425	1,4615	−0,57501	0,81815
27,12	42,6000	3,1692	3,1554	−0,98229	0,18738	27,62	43,3854	6,9508	1,4387	−0,56208	0,82708
27,13	42,6157	3,2193	3,1062	−0,97922	0,20279	27,63	43,4011	7,0609	1,4163	−0,54902	0,83581
27,14	42,6314	3,2703	3,0578	−0,97592	0,21814	27,64	43,4168	7,1727	1,3942	−0,53583	0,84433
27,15	42,6471	3,3221	3,0102	−0,97237	0,23345	27,65	43,4325	7,2862	1,3725	−0,52250	0,85264
27,16	42,6628	3,3747	2,9633	−0,96858	0,24869	27,66	43,4482	7,4016	1,3511	−0,50904	0,86074
27,17	42,6785	3,4281	2,9171	−0,96456	0,26387	27,67	43,4639	7,5188	1,3300	−0,49546	0,86863
27,18	42,6942	3,4824	2,8716	−0,96029	0,27899	27,68	43,4796	7,6378	1,3093	−0,48175	0,87631
27,19	42,7100	3,5375	2,8269	−0,95579	0,29404	27,69	43,4953	7,7587	1,2889	−0,46792	0,88377
27,20	42,7257	3,5935	2,7828	−0,95106	0,30902	27,70	43,5111	7,8816	1,2688	−0,45399	0,89101
27,21	42,7414	3,6504	2,7394	−0,94609	0,32392	27,71	43,5268	8,0063	1,2490	−0,43994	0,89803
27,22	42,7571	3,7082	2,6967	−0,94088	0,33874	27,72	43,5425	8,1331	1,2295	−0,42578	0,90483
27,23	42,7728	3,7669	2,6547	−0,93544	0,35347	27,73	43,5582	8,2619	1,2103	−0,41151	0,91140
27,24	42,7885	3,8265	2,6133	−0,92978	0,36812	27,74	43,5739	8,3927	1,1915	−0,39715	0,91775
27,25	42,8042	3,8871	2,5726	−0,92388	0,38268	27,75	43,5896	8,5255	1,1730	−0,38268	0,92388
27,26	42,8199	3,9487	2,5325	−0,91775	0,39715	27,76	43,6053	8,6605	1,1547	−0,36812	0,92978
27,27	42,8356	4,0112	2,4930	−0,91140	0,41151	27,77	43,6210	8,7976	1,1366	−0,35347	0,93544
27,28	42,8513	4,0747	2,4542	−0,90483	0,42578	27,78	43,6367	8,9369	1,1189	−0,33874	0,94088
27,29	42,8670	4,1392	2,4160	−0,89803	0,43994	27,79	43,6524	9,0784	1,1015	−0,32392	0,94609
27,30	42,8827	4,2047	2,3783	−0,89101	0,45399	27,80	43,6681	9,2221	1,0843	−0,30902	0,95106
27,31	42,8985	4,2713	2,3412	−0,88377	0,46792	27,81	43,6838	9,3681	1,0674	−0,29404	0,95579
27,32	42,9142	4,3389	2,3047	−0,87631	0,48175	27,82	43,6996	9,5165	1,0508	−0,27899	0,96029
27,33	42,9299	4,4076	2,2688	−0,86863	0,49546	27,83	43,7153	9,6671	1,0344	−0,26387	0,96456
27,34	42,9456	4,4774	2,2334	−0,86074	0,50904	27,84	43,7310	9,8202	1,0183	−0,24869	0,96858
27,35	42,9613	4,5483	2,1986	−0,85264	0,52250	27,85	43,7467	$9,9757\cdot10^{18}$	$1,0024\cdot10^{-19}$	−0,23345	0,97237
27,36	42,9770	4,6203	2,1644	−0,84433	0,53583	27,86	43,7624	$1,0134\cdot10^{19}$	$9,8682\cdot10^{-20}$	−0,21814	0,97592
27,37	42,9927	4,6934	2,1306	−0,83581	0,54902	27,87	43,7781	1,0294	9,7144	−0,20279	0,97922
27,38	43,0084	4,7677	2,0974	−0,82708	0,56208	27,88	43,7938	1,0457	9,5630	−0,18738	0,98229
27,39	43,0241	4,8432	2,0648	−0,81815	0,57501	27,89	43,8095	1,0623	9,4139	−0,17193	0,98511
27,40	43,0398	4,9199	2,0326	−0,80902	0,58779	27,90	43,8252	1,0791	9,2672	−0,15643	0,98769
27,41	43,0555	4,9978	2,0009	−0,79968	0,60042	27,91	43,8409	1,0962	9,1228	−0,14090	0,99002
27,42	43,0712	5,0769	1,9697	−0,79016	0,61291	27,92	43,8566	1,1135	8,9806	−0,12533	0,99211
27,43	43,0869	5,1573	1,9390	−0,78043	0,62524	27,93	43,8723	1,1311	8,8407	−0,10973	0,99396
27,44	43,1027	5,2389	1,9088	−0,77051	0,63742	27,94	43,8881	1,1490	8,7029	−0,09411	0,99556
27,45	43,1184	5,3218	1,8790	−0,76041	0,64945	27,95	43,9038	1,1672	8,5672	−0,07846	0,99692
27,46	43,1341	5,4061	1,8497	−0,75011	0,66131	27,96	43,9195	1,1857	8,4337	−0,06279	0,99803
27,47	43,1498	5,4917	1,8209	−0,73963	0,67301	27,97	43,9352	1,2045	8,3023	−0,04711	0,99889
27,48	43,1655	5,5787	1,7925	−0,72897	0,68455	27,98	43,9509	1,2236	8,1729	−0,03141	0,99951
27,49	43,1812	5,6670	1,7646	−0,71813	0,69591	27,99	43,9666	1,2429	8,0455	−0,01571	0,99988
27,50	43,1969	$5,7567\cdot10^{18}$	$1,7371\cdot10^{-19}$	−0,70711	0,70711	28,00	43,9823	$1,2626\cdot10^{19}$	$7,9201\cdot10^{-20}$	∓0,00000	1,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
28,00	43,9823	$1{,}2626\cdot10^{19}$	$7{,}9201\cdot10^{-20}$	∓0,00000	1,00000	28,50	44,7677	$2{,}7693\cdot10^{19}$	$3{,}6111\cdot10^{-20}$	0,70711	0,70711
28,01	43,9980	1,2826	7,7967	0,01571	0,99988	28,51	44,7834	2,8131	3,5548	0,71813	0,69591
28,02	44,0137	1,3029	7,6752	0,03141	0,99951	28,52	44,7991	2,8576	3,4994	0,72897	0,68455
28,03	44,0294	1,3235	7,5556	0,04711	0,99889	28,53	44,8148	2,9028	3,4449	0,73963	0,67301
28,04	44,0451	1,3445	7,4378	0,06279	0,99803	28,54	44,8305	2,9488	3,3912	0,75011	0,66131
28,05	44,0608	1,3658	7,3219	0,07846	0,99692	28,55	44,8462	2,9955	3,3383	0,76041	0,64945
28,06	44,0765	1,3874	7,2078	0,09411	0,99556	28,56	44,8619	3,0429	3,2863	0,77051	0,63742
28,07	44,0923	1,4094	7,0954	0,10973	0,99396	28,57	44,8777	3,0911	3,2351	0,78043	0,62524
28,08	44,1080	1,4317	6,9848	0,12533	0,99211	28,58	44,8934	3,1401	3,1847	0,79016	0,61291
28,09	44,1237	1,4544	6,8760	0,14090	0,99002	28,59	44,9091	3,1898	3,1351	0,79968	0,60042
28,10	44,1394	1,4774	6,7688	0,15643	0,98769	28,60	44,9248	3,2403	3,0862	0,80902	0,58779
28,11	44,1551	1,5008	6,6633	0,17193	0,98511	28,61	44,9405	3,2916	3,0381	0,81815	0,57501
28,12	44,1708	1,5245	6,5595	0,18738	0,98229	28,62	44,9562	3,3437	2,9907	0,82708	0,56208
28,13	44,1865	1,5487	6,4573	0,20279	0,97922	28,63	44,9719	3,3966	2,9441	0,83581	0,54902
28,14	44,2022	1,5732	6,3566	0,21814	0,97592	28,64	44,9876	3,4504	2,8982	0,84433	0,53583
28,15	44,2179	1,5981	6,2575	0,23345	0,97237	28,65	45,0033	3,5050	2,8531	0,85264	0,52250
28,16	44,2336	1,6234	6,1600	0,24869	0,96858	28,66	45,0190	3,5605	2,8086	0,86074	0,50904
28,17	44,2493	1,6491	6,0640	0,26387	0,96456	28,67	45,0347	3,6169	2,7648	0,86863	0,49546
28,18	44,2650	1,6752	5,9695	0,27899	0,96029	28,68	45,0504	3,6742	2,7217	0,87631	0,48175
28,19	44,2808	1,7017	5,8765	0,29404	0,95579	28,69	45,0661	3,7323	2,6793	0,88377	0,46792
28,20	44,2965	1,7286	5,7849	0,30902	0,95106	28,70	45,0819	3,7914	2,6375	0,89101	0,45399
28,21	44,3122	1,7560	5,6948	0,32392	0,94609	28,71	45,0976	3,8514	2,5964	0,89803	0,43994
28,22	44,3279	1,7838	5,6060	0,33874	0,94088	28,72	45,1133	3,9124	2,5560	0,90483	0,42578
28,23	44,3436	1,8120	5,5186	0,35347	0,93544	28,73	45,1290	3,9744	2,5161	0,91140	0,41151
28,24	44,3593	1,8407	5,4326	0,36812	0,92978	28,74	45,1447	4,0373	2,4769	0,91775	0,39715
28,25	44,3750	1,8699	5,3480	0,38268	0,92388	28,75	45,1604	4,1012	2,4383	0,92388	0,38268
28,26	44,3907	1,8995	5,2646	0,39715	0,91775	28,76	45,1761	4,1661	2,4003	0,92978	0,36812
28,27	44,4064	1,9296	5,1825	0,41151	0,91140	28,77	45,1918	4,2321	2,3629	0,93544	0,35347
28,28	44,4221	1,9601	5,1017	0,42578	0,90483	28,78	45,2075	4,2991	2,3261	0,94088	0,33874
28,29	44,4378	1,9912	5,0222	0,43994	0,89803	28,79	45,2222	4,3672	2,2898	0,94609	0,32392
28,30	44,4535	2,0227	4,9440	0,45399	0,89101	28,80	45,2389	4,4363	2,2541	0,95106	0,30902
28,31	44,4693	2,0547	4,8670	0,46792	0,88377	28,81	45,2546	4,5065	2,2190	0,95579	0,29404
28,32	44,4850	2,0872	4,7911	0,48175	0,87631	28,82	45,2704	4,5779	2,1844	0,96029	0,27899
28,33	44,5007	2,1202	4,7164	0,49546	0,86863	28,83	45,2861	4,6504	2,1504	0,96456	0,26387
28,34	44,5164	2,1538	4,6429	0,50904	0,86074	28,84	45,3018	4,7240	2,1169	0,96858	0,24869
28,35	44,5321	2,1879	4,5705	0,52250	0,85264	28,85	45,3175	4,7987	2,0839	0,97237	0,23345
28,36	44,5478	2,2226	4,4993	0,53583	0,84433	28,86	45,3332	4,8747	2,0514	0,97592	0,21814
28,37	44,5635	2,2578	4,4291	0,54902	0,83581	28,87	45,3489	4,9519	2,0194	0,97922	0,20279
28,38	44,5792	2,2935	4,3601	0,56208	0,82708	28,88	45,3646	5,0303	1,9879	0,98229	0,18738
28,39	44,5949	2,3298	4,2922	0,57501	0,81815	28,89	45,3803	5,1099	1,9570	0,98511	0,17193
28,40	44,6106	2,3667	4,2253	0,58779	0,80902	28,90	45,3960	5,1908	1,9265	0,98769	0,15643
28,41	44,6263	2,4041	4,1594	0,60042	0,79968	28,91	45,4117	5,2730	1,8965	0,99002	0,14090
28,42	44,6420	2,4422	4,0946	0,61291	0,79016	28,92	45,4274	5,3565	1,8669	0,99211	0,12533
28,43	44,6577	2,4809	4,0308	0,62524	0,78043	28,93	45,4431	5,4413	1,8378	0,99396	0,10973
28,44	44,6735	2,5202	3,9680	0,63742	0,77051	28,94	45,4589	5,5275	1,8091	0,99556	0,09411
28,45	44,6892	2,5601	3,9061	0,64945	0,76041	28,95	45,4746	5,6150	1,7809	0,99692	0,07846
28,46	44,7049	2,6006	3,8452	0,66131	0,75011	28,96	45,4903	5,7039	1,7532	0,99803	0,06279
28,47	44,7206	2,6418	3,7853	0,67301	0,73963	28,97	45,5060	5,7942	1,7259	0,99889	0,04711
28,48	44,7363	2,6836	3,7263	0,68455	0,72897	28,98	45,5217	5,8859	1,6990	0,99951	0,03141
28,49	44,7520	2,7261	3,6683	0,69591	0,71813	28,99	45,5374	5,9791	1,6725	0,99988	0,01571
28,50	44,7677	$2{,}7693\cdot10^{19}$	$3{,}6111\cdot10^{-20}$	0,70711	0,70711	29,00	45,5531	$6{,}0738\cdot10^{19}$	$1{,}6464\cdot10^{-20}$	1,00000	±0,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
29,00	45,5531	$6,0738\cdot10^{19}$	$1,6464\cdot10^{-20}$	1,00000	±0,00000	29,50	46,3385	$1,3321\cdot10^{20}$	$7,5067\cdot10^{-21}$	0,70711	-0,70711
29,01	45,5688	6,1699	1,6207	0,99988	-0,01571	29,51	46,3542	1,3533	7,3897	0,69591	-0,71813
29,02	45,5845	6,2676	1,5955	0,99951	-0,03141	29,52	46,3699	1,3747	7,2745	0,68455	-0,72897
29,03	45,6002	6,3668	1,5707	0,99889	-0,04711	29,53	46,3856	1,3964	7,1611	0,67301	-0,73963
29,04	45,6159	6,4676	1,5462	0,99803	-0,06279	29,54	46,4013	1,4185	7,0495	0,66131	-0,75011
29,05	45,6316	6,5700	1,5220	0,99692	-0,07846	29,55	46,4170	1,4410	6,9397	0,64945	-0,76041
29,06	45,6473	6,6740	1,4983	0,99556	-0,09411	29,56	46,4327	1,4638	6,8315	0,63742	-0,77051
29,07	45,6631	6,7797	1,4750	0,99396	-0,10973	29,57	46,4485	1,4870	6,7250	0,62524	-0,78043
29,08	45,6788	6,8870	1,4520	0,99211	-0,12533	29,58	46,4642	1,5105	6,6202	0,61291	-0,79016
29,09	45,6945	6,9960	1,4294	0,99002	-0,14090	29,59	46,4799	1,5344	6,5171	0,60042	-0,79968
29,10	45,7102	7,1068	1,4071	0,98769	-0,15643	29,60	46,4956	1,5587	6,4155	0,58779	-0,80902
29,11	45,7259	7,2193	1,3852	0,98511	-0,17193	29,61	46,5113	1,5834	6,3155	0,57501	-0,81815
29,12	45,7416	7,3336	1,3636	0,98229	-0,18738	29,62	46,5270	1,6085	6,2171	0,56208	-0,82708
29,13	45,7573	7,4497	1,3423	0,97922	-0,20279	29,63	46,5427	1,6339	6,1202	0,54902	-0,83581
29,14	45,7730	7,5677	1,3214	0,97592	-0,21814	29,64	46,5584	1,6598	6,0248	0,53583	-0,84433
29,15	45,7887	7,6875	1,3008	0,97237	-0,23345	29,65	46,5741	1,6861	5,9309	0,52250	-0,85264
29,16	45,8044	7,8092	1,2805	0,96858	-0,24869	29,66	46,5898	1,7128	5,8385	0,50904	-0,86074
29,17	45,8201	7,9328	1,2605	0,96456	-0,26387	29,67	46,6055	1,7399	5,7475	0,49546	-0,86863
29,18	45,8358	8,0584	1,2409	0,96029	-0,27899	29,68	46,6212	1,7674	5,6579	0,48175	-0,87631
29,19	45,8516	8,1860	1,2216	0,95579	-0,29404	29,69	46,6369	1,7954	5,5697	0,46792	-0,88377
29,20	45,8673	8,3156	1,2026	0,95106	-0,30902	29,70	46,6527	1,8238	5,4829	0,45399	-0,89101
29,21	45,8830	8,4472	1,1839	0,94609	-0,32392	29,71	46,6684	1,8527	5,3974	0,43994	-0,89803
29,22	45,8987	8,5810	1,1654	0,94088	-0,33874	29,72	46,6841	1,8821	5,3133	0,42578	-0,90483
29,23	45,9144	8,7169	1,1472	0,93544	-0,35347	29,73	46,6998	1,9119	5,2305	0,41151	-0,91140
29,24	45,9301	8,8549	1,1293	0,92978	-0,36812	29,74	46,7155	1,9421	5,1490	0,39715	-0,91775
29,25	45,9458	8,9951	1,1117	0,92388	-0,38268	29,75	46,7312	1,9729	5,0688	0,38268	-0,92388
29,26	45,9615	9,1375	1,0944	0,91775	-0,39715	29,76	46,7469	2,0041	4,9898	0,36812	-0,92978
29,27	45,9772	9,2821	1,0773	0,91140	-0,41151	29,77	46,7626	2,0359	4,9120	0,35347	-0,93544
29,28	45,9929	9,4291	1,0605	0,90483	-0,42578	29,78	46,7783	2,0681	4,8354	0,33874	-0,94088
29,29	46,0086	9,5784	1,0440	0,89803	-0,43994	29,79	46,7940	2,1008	4,7601	0,32392	-0,94609
29,30	46,0243	9,7300	1,0277	0,89101	-0,45399	29,80	46,8097	2,1341	4,6859	0,30902	-0,95106
29,31	46,0401	$9,8840\cdot10^{19}$	$1,0117\cdot10^{-20}$	0,88377	-0,46792	29,81	46,8254	2,1679	4,6129	0,29404	-0,95579
29,32	46,0558	$1,0041\cdot10^{20}$	$9,9596\cdot10^{-21}$	0,87631	-0,48175	29,82	46,8412	2,2022	4,5410	0,27899	-0,96029
29,33	46,0715	1,0200	9,8044	0,86863	-0,49546	29,83	46,8569	2,2371	4,4702	0,26387	-0,96456
29,34	46,0872	1,0361	9,6516	0,86074	-0,50904	29,84	46,8726	2,2725	4,4005	0,24869	-0,96858
29,35	46,1029	1,0525	9,5012	0,85264	-0,52250	29,85	46,8883	2,3085	4,3319	0,23345	-0,97237
29,36	46,1186	1,0692	9,3531	0,84433	-0,53583	29,86	46,9040	2,3450	4,2644	0,21814	-0,97592
29,37	46,1343	1,0861	9,2073	0,83581	-0,54902	29,87	46,9197	2,3821	4,1979	0,20279	-0,97922
29,38	46,1500	1,1033	9,0638	0,82708	-0,56208	29,88	46,9354	2,4198	4,1325	0,18738	-0,98229
29,39	46,1657	1,1208	8,9226	0,81815	-0,57501	29,89	46,9511	2,4581	4,0681	0,17193	-0,98511
29,40	46,1814	1,1385	8,7835	0,80902	-0,58779	29,90	46,9668	2,4970	4,0047	0,15643	-0,98769
29,41	46,1971	1,1565	8,6466	0,79968	-0,60042	29,91	46,9825	2,5365	3,9423	0,14090	-0,99002
29,42	46,2128	1,1748	8,5118	0,79016	-0,61291	29,92	46,9982	2,5767	3,8809	0,12533	-0,99211
29,43	46,2285	1,1934	8,3792	0,78043	-0,62524	29,93	47,0139	2,6175	3,8204	0,10973	-0,99396
29,44	46,2443	1,2123	8,2486	0,77051	-0,63742	29,94	47,0297	2,6590	3,7609	0,09411	-0,99556
29,45	46,2600	1,2315	8,1201	0,76041	-0,64945	29,95	47,0454	2,7011	3,7022	0,07846	-0,99692
29,46	46,2757	1,2510	7,9935	0,75011	-0,66131	29,96	47,0611	2,7438	3,6445	0,06279	-0,99803
29,47	46,2914	1,2708	7,8689	0,73963	-0,67301	29,97	47,0768	2,7873	3,5877	0,04711	-0,99889
29,48	46,3071	1,2909	7,7463	0,72897	-0,68455	29,98	47,0925	2,8314	3,5318	0,03141	-0,99951
29,49	46,3228	1,3113	7,6256	0,71813	-0,69591	29,99	47,1082	2,8763	3,4768	0,01571	-0,99988
29,50	46,3385	$1,3321\cdot10^{20}$	$7,5067\cdot10^{-21}$	0,70711	-0,70711	30,00	47,1239	$2,9218\cdot10^{20}$	$3,4226\cdot10^{-21}$	±0,00000	-1,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
30,00	47,1239	$2,9218\cdot10^{20}$	$3,4226\cdot10^{-21}$	±0,00000	−1,00000	30,50	47,9093	$6,4082\cdot10^{20}$	$1,5605\cdot10^{-21}$	−0,70711	−0,70711
30,01	47,1396	2,9680	3,3692	−0,01571	−0,99988	30,51	47,9250	6,5097	1,5361	−0,71813	−0,69591
30,02	47,1553	3,0150	3,3167	−0,03141	−0,99951	30,52	47,9407	6,6128	1,5122	−0,72897	−0,68455
30,03	47,1710	3,0627	3,2651	−0,04711	−0,99889	30,53	47,9564	6,7175	1,4887	−0,73963	−0,67301
30,04	47,1867	3,1112	3,2142	−0,06279	−0,99803	30,54	47,9721	6,8238	1,4655	−0,75011	−0,66131
30,05	47,2024	3,1605	3,1641	−0,07846	−0,99692	30,55	47,9878	6,9318	1,4426	−0,76041	−0,64945
30,06	47,2181	3,2105	3,1148	−0,09411	−0,99556	30,56	48,0035	7,0416	1,4201	−0,77051	−0,63742
30,07	47,2339	3,2614	3,0662	−0,10973	−0,99396	30,57	48,0193	7,1531	1,3980	−0,78043	−0,62524
30,08	47,2496	3,3130	3,0184	−0,12533	−0,99211	30,58	48,0350	7,2663	1,3762	−0,79016	−0,61291
30,09	47,2653	3,3654	2,9714	−0,14090	−0,99002	30,59	48,0507	7,3813	1,3547	−0,79968	−0,60042
30,10	47,2810	3,4187	2,9251	−0,15643	−0,98769	30,60	48,0664	7,4982	1,3336	−0,80902	−0,58779
30,11	47,2967	3,4728	2,8795	−0,17193	−0,98511	30,61	48,0821	7,6169	1,3128	−0,81815	−0,57501
30,12	47,3124	3,5278	2,8346	−0,18738	−0,98229	30,62	48,0978	7,7375	1,2924	−0,82708	−0,56208
30,13	47,3281	3,5837	2,7904	−0,20279	−0,97922	30,63	48,1135	7,8600	1,2722	−0,83581	−0,54902
30,14	47,3438	3,6404	2,7469	−0,21814	−0,97592	30,64	48,1292	7,9845	1,2524	−0,84433	−0,53583
30,15	47,3595	3,6980	2,7041	−0,23345	−0,97237	30,65	48,1449	8,1109	1,2329	−0,85264	−0,52250
30,16	47,3752	3,7566	2,6620	−0,24869	−0,96858	30,66	48,1606	8,2393	1,2137	−0,86074	−0,50904
30,17	47,3909	3,8161	2,6205	−0,26387	−0,96456	30,67	48,1763	8,3697	1,1948	−0,86863	−0,49546
30,18	47,4066	3,8765	2,5797	−0,27899	−0,96029	30,68	48,1920	8,5022	1,1762	−0,87631	−0,48175
30,19	47,4224	3,9379	2,5395	−0,29404	−0,95579	30,69	48,2077	8,6368	1,1579	−0,88377	−0,46792
30,20	47,4381	4,0002	2,4999	−0,30902	−0,95106	30,70	48,2235	8,7736	1,1398	−0,89101	−0,45399
30,21	47,4538	4,0635	2,4610	−0,32392	−0,94609	30,71	48,2392	8,9125	1,1220	−0,89803	−0,43994
30,22	47,4695	4,1279	2,4226	−0,33874	−0,94088	30,72	48,2549	9,0536	1,1045	−0,90483	−0,42578
30,23	47,4852	4,1932	2,3848	−0,35347	−0,93544	30,73	48,2706	9,1969	1,0873	−0,91140	−0,41151
30,24	47,5009	4,2596	2,3476	−0,36812	−0,92978	30,74	48,2863	9,3425	1,0704	−0,91775	−0,39715
30,25	47,5166	4,3271	2,3110	−0,38268	−0,92388	30,75	48,3020	9,4904	1,0537	−0,92388	−0,38268
30,26	47,5323	4,3956	2,2750	−0,39715	−0,91775	30,76	48,3177	9,6407	1,0373	−0,92978	−0,36812
30,27	47,5480	4,4651	2,2396	−0,41151	−0,91140	30,77	48,3334	9,7933	1,0211	−0,93544	−0,35347
30,28	47,5637	4,5358	2,2047	−0,42578	−0,90483	30,78	48,3491	$9,9484\cdot10^{20}$	$1,0052\cdot10^{-21}$	−0,94088	−0,33874
30,29	47,5794	4,6076	2,1703	−0,43994	−0,89803	30,79	48,3648	$1,0106\cdot10^{21}$	$9,8952\cdot10^{-22}$	−0,94609	−0,32392
30,30	47,5951	4,6806	2,1365	−0,45399	−0,89101	30,80	48,3805	1,0266	9,7410	−0,95106	−0,30902
30,31	47,6109	4,7547	2,1032	−0,46792	−0,88377	30,81	48,3962	1,0429	9,5892	−0,95579	−0,29404
30,32	47,6266	4,8300	2,0704	−0,48175	−0,87631	30,82	48,4120	1,0594	9,4397	−0,96029	−0,27899
30,33	47,6423	4,9064	2,0382	−0,49546	−0,86863	30,83	48,4277	1,0762	9,2926	−0,96456	−0,26387
30,34	47,6580	4,9841	2,0064	−0,50904	−0,86074	30,84	48,4434	1,0932	9,1478	−0,96858	−0,24869
30,35	47,6737	5,0630	1,9751	−0,52250	−0,85264	30,85	48,4591	1,1105	9,0053	−0,97237	−0,23345
30,36	47,6894	5,1432	1,9443	−0,53583	−0,84433	30,86	48,4748	1,1280	8,8649	−0,97592	−0,21814
30,37	47,7051	5,2246	1,9140	−0,54902	−0,83581	30,87	48,4905	1,1459	8,7267	−0,97922	−0,20279
30,38	47,7208	5,3073	1,8842	−0,56208	−0,82708	30,88	48,5062	1,1640	8,5907	−0,98229	−0,18738
30,39	47,7365	5,3913	1,8548	−0,57501	−0,81815	30,89	48,5219	1,1825	8,4568	−0,98511	−0,17193
30,40	47,7522	5,4767	1,8259	−0,58779	−0,80902	30,90	48,5376	1,2012	8,3250	−0,98769	−0,15643
30,41	47,7679	5,5634	1,7974	−0,60042	−0,79968	30,91	48,5534	1,2202	8,1952	−0,99002	−0,14090
30,42	47,7836	5,6515	1,7694	−0,61291	−0,79016	30,92	48,5690	1,2395	8,0675	−0,99211	−0,12533
30,43	47,7993	5,7410	1,7418	−0,62524	−0,78043	30,93	48,5847	1,2592	7,9418	−0,99396	−0,10973
30,44	47,8151	5,8319	1,7147	−0,63742	−0,77051	30,94	48,6005	1,2791	7,8180	−0,99556	−0,09411
30,45	47,8308	5,9242	1,6880	−0,64945	−0,76041	30,95	48,6162	1,2993	7,6962	−0,99692	−0,07846
30,46	47,8465	6,0180	1,6617	−0,66131	−0,75011	30,96	48,6319	1,3199	7,5763	−0,99803	−0,06279
30,47	47,8622	6,1133	1,6358	−0,67301	−0,73963	30,97	48,6476	1,3408	7,4582	−0,99889	−0,04711
30,48	47,8779	6,2101	1,6103	−0,68455	−0,72897	30,98	48,6633	1,3620	7,3419	−0,99951	−0,03141
30,49	47,8936	6,3083	1,5852	−0,69591	−0,71813	30,99	48,6790	1,3836	7,2275	−0,99988	−0,01571
30,50	47,9093	$6,4082\cdot10^{20}$	$1,5605\cdot10^{-21}$	−0,70711	−0,70711	31,00	48,6947	$1,4055\cdot10^{21}$	$7,1149\cdot10^{-22}$	−1,00000	∓0,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
31,00	48,6947	$1,4055\cdot10^{21}$	$7,1149\cdot10^{-22}$	−1,00000	∓0,00000	31,50	49,4801	$3,0827\cdot10^{21}$	$3,2439\cdot10^{-22}$	−0,70711	0,70711
31,01	48,7104	1,4278	7,0040	−0,99988	0,01571	31,51	49,4958	3,1315	3,1934	−0,69591	0,71813
31,02	48,7261	1,4504	6,8948	−0,99951	0,03141	31,52	49,5115	3,1811	3,1436	−0,68455	0,72897
31,03	48,7418	1,4734	6,7874	−0,99889	0,04711	31,53	49,5272	3,2315	3,0946	−0,67301	0,73963
31,04	48,7575	1,4967	6,6816	−0,99803	0,06279	31,54	49,5429	3,2826	3,0464	−0,66131	0,75011
31,05	48,7732	1,5204	6,5774	−0,99692	0,07846	31,55	49,5586	3,3345	2,9989	−0,64945	0,76041
31,06	48,7889	1,5444	6,4749	−0,99556	0,09411	31,56	49,5743	3,3873	2,9522	−0,63742	0,77051
31,07	48,8047	1,5689	6,3741	−0,99396	0,10973	31,57	49,5901	3,4409	2,9062	−0,62524	0,78043
31,08	48,8204	1,5937	6,2747	−0,99211	0,12533	31,58	49,6058	3,4954	2,8609	−0,61291	0,79016
31,09	48,8361	1,6190	6,1769	−0,99002	0,14090	31,59	49,6215	3,5508	2,8163	−0,60042	0,79968
31,10	48,8518	1,6446	6,0806	−0,98769	0,15643	31,60	49,6372	3,6070	2,7724	−0,58779	0,80902
31,11	48,8675	1,6707	5,9859	−0,98511	0,17193	31,61	49,6529	3,6641	2,7292	−0,57501	0,81815
31,12	48,8832	1,6971	5,8926	−0,98229	0,18738	31,62	49,6686	3,7221	2,6866	−0,56208	0,82708
31,13	48,8989	1,7239	5,8007	−0,97922	0,20279	31,63	49,6843	3,7810	2,6447	−0,54902	0,83581
31,14	48,9146	1,7512	5,7103	−0,97592	0,21814	31,64	49,7000	3,8409	2,6035	−0,53583	0,84433
31,15	48,9303	1,7789	5,6213	−0,97237	0,23345	31,65	49,7157	3,9017	2,5629	−0,52250	0,85264
31,16	48,9460	1,8071	5,5337	−0,96858	0,24869	31,66	49,7314	3,9635	2,5230	−0,50904	0,86074
31,17	48,9617	1,8357	5,4475	−0,96456	0,26387	31,67	49,7471	4,0263	2,4837	−0,49546	0,86863
31,18	48,9774	1,8648	5,3626	−0,96029	0,27899	31,68	49,7628	4,0900	2,4450	−0,48175	0,87631
31,19	48,9932	1,8943	5,2790	−0,95579	0,29404	31,69	49,7785	4,1547	2,4069	−0,46792	0,88377
31,20	49,0089	1,9243	5,1967	−0,95106	0,30902	31,70	49,7943	4,2205	2,3694	−0,45399	0,89101
31,21	49,0246	1,9548	5,1157	−0,94609	0,32392	31,71	49,8100	4,2873	2,3325	−0,43994	0,89803
31,22	49,0403	1,9857	5,0360	−0,94088	0,33874	31,72	49,8257	4,3552	2,2961	−0,42578	0,90483
31,23	49,0560	2,0172	4,9575	−0,93544	0,35347	31,73	49,8414	4,4242	2,2603	−0,41151	0,91140
31,24	49,0717	2,0491	4,8802	−0,92978	0,36812	31,74	49,8571	4,4942	2,2251	−0,39715	0,91775
31,25	49,0874	2,0815	4,8042	−0,92388	0,38268	31,75	49,8728	4,5653	2,1904	−0,38268	0,92388
31,26	49,1031	2,1145	4,7293	−0,91775	0,39715	31,76	49,8885	4,6376	2,1563	−0,36812	0,92978
31,27	49,1188	2,1480	4,6556	−0,91140	0,41151	31,77	49,9042	4,7110	2,1227	−0,35347	0,93544
31,28	49,1345	2,1820	4,5830	−0,90483	0,42578	31,78	49,9199	4,7856	2,0896	−0,33874	0,94088
31,29	49,1502	2,2165	4,5116	−0,89803	0,43994	31,79	49,9356	4,8614	2,0571	−0,32392	0,94609
31,30	49,1659	2,2516	4,4413	−0,89101	0,45399	31,80	49,9513	4,9384	2,0250	−0,30902	0,95106
31,31	49,1817	2,2873	4,3721	−0,88377	0,46792	31,81	49,9670	5,0166	1,9934	−0,29404	0,95579
31,32	49,1974	2,3235	4,3039	−0,87631	0,48175	31,82	49,9828	5,0960	1,9623	−0,27899	0,96029
31,33	49,2131	2,3603	4,2368	−0,86863	0,49546	31,83	49,9985	5,1767	1,9317	−0,26387	0,96456
31,34	49,2288	2,3976	4,1708	−0,86074	0,50904	31,84	50,0142	5,2586	1,9016	−0,24869	0,96858
31,35	49,2445	2,4355	4,1058	−0,85264	0,52250	31,85	50,0299	5,3418	1,8720	−0,23345	0,97237
31,36	49,2602	2,4741	4,0418	−0,84433	0,53583	31,86	50,0456	5,4264	1,8428	−0,21814	0,97592
31,37	49,2759	2,5133	3,9788	−0,83581	0,54902	31,87	50,0613	5,5123	1,8141	−0,20279	0,97922
31,38	49,2916	2,5531	3,9168	−0,82708	0,56208	31,88	50,0770	5,5996	1,7858	−0,18738	0,98229
31,39	49,3073	2,5935	3,8558	−0,81815	0,57501	31,89	50,0927	5,6882	1,7580	−0,17193	0,98511
31,40	49,3230	2,6346	3,7957	−0,80902	0,58779	31,90	50,1084	5,7783	1,7306	−0,15643	0,98769
31,41	49,3387	2,6763	3,7365	−0,79968	0,60042	31,91	50,1241	5,8698	1,7036	−0,14090	0,99002
31,42	49,3544	2,7186	3,6783	−0,79016	0,61291	31,92	50,1398	5,9628	1,6771	−0,12533	0,99211
31,43	49,3701	2,7617	3,6209	−0,78043	0,62524	31,93	50,1555	6,0571	1,6509	−0,10973	0,99396
31,44	49,3859	2,8054	3,5645	−0,77051	0,63742	31,94	50,1713	6,1530	1,6252	−0,09411	0,99556
31,45	49,4016	2,8498	3,5090	−0,76041	0,64945	31,95	50,1870	6,2504	1,5998	−0,07846	0,99692
31,46	49,4173	2,8949	3,4543	−0,75011	0,66131	31,96	50,2027	6,3494	1,5749	−0,06279	0,99803
31,47	49,4330	2,9407	3,4005	−0,73963	0,67301	31,97	50,2184	6,4500	1,5504	−0,04711	0,99889
31,48	49,4487	2,9873	3,3475	−0,72897	0,68455	31,98	50,2341	6,5521	1,5262	−0,03141	0,99951
31,49	49,4644	3,0346	3,2953	−0,71813	0,69591	31,99	50,2498	6,6558	1,5024	−0,01571	0,99988
31,50	49,4801	$3,0827\cdot10^{21}$	$3,2439\cdot10^{-22}$	−0,70711	0,70711	32,00	50,2655	$6,7612\cdot10^{21}$	$1,4790\cdot10^{-22}$	∓0,00000	1,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
32,00	50,2655	$6{,}7612\cdot10^{21}$	$1{,}4790\cdot10^{-22}$	∓0,00000	1,00000	32,50	51,0509	$1{,}4829\cdot10^{22}$	$6{,}7435\cdot10^{-23}$	0,70711	0,70711
32,01	50,2812	6,8682	1,4560	0,01571	0,99988	32,51	51,0666	1,5064	6,6384	0,71813	0,69591
32,02	50,2969	6,9769	1,4333	0,03141	0,99951	32,52	51,0823	1,5302	6,5349	0,72897	0,68455
32,03	50,3126	7,0874	1,4110	0,04711	0,99889	32,53	51,0980	1,5545	6,4331	0,73963	0,67301
32,04	50,3283	7,1996	1,3890	0,06279	0,99803	32,54	51,1137	1,5791	6,3328	0,75011	0,66131
32,05	50,3440	7,3136	1,3673	0,07846	0,99692	32,55	51,1294	1,6041	6,2341	0,76041	0,64945
32,06	50,3597	7,4294	1,3460	0,09411	0,99556	32,56	51,1452	1,6295	6,1369	0,77051	0,63742
32,07	50,3755	7,5470	1,3250	0,10973	0,99396	32,57	51,1609	1,6553	6,0413	0,78043	0,62524
32,08	50,3912	7,6665	1,3044	0,12533	0,99211	32,58	51,1766	1,6815	5,9472	0,79016	0,61291
32,09	50,4069	7,7879	1,2840	0,14090	0,99002	32,59	51,1923	1,7081	5,8545	0,79968	0,60042
32,10	50,4226	7,9112	1,2640	0,15643	0,98769	32,60	51,2080	1,7351	5,7632	0,80902	0,58779
32,11	50,4383	8,0364	1,2443	0,17193	0,98511	32,61	51,2237	1,7626	5,6734	0,81815	0,57501
32,12	50,4540	8,1636	1,2249	0,18738	0,98229	32,62	51,2394	1,7905	5,5850	0,82708	0,56208
32,13	50,4697	8,2929	1,2059	0,20279	0,97922	32,63	51,2551	1,8189	5,4980	0,83581	0,54902
32,14	50,4854	8,4242	1,1871	0,21814	0,97592	32,64	51,2708	1,8477	5,4123	0,84433	0,53583
32,15	50,5011	8,5575	1,1685	0,23345	0,97237	32,65	51,2865	1,8769	5,3279	0,85264	0,52250
32,16	50,5168	8,6930	1,1503	0,24869	0,96858	32,66	51,3022	1,9066	5,2449	0,86074	0,50904
32,17	50,5325	8,8307	1,1324	0,26387	0,96456	32,67	51,3179	1,9368	5,1632	0,86863	0,49546
32,18	50,5482	8,9705	1,1148	0,27899	0,96029	32,68	51,3336	1,9675	5,0827	0,87631	0,48175
32,19	50,5640	9,1125	1,0974	0,29404	0,95579	32,69	51,3493	1,9987	5,0035	0,88377	0,46792
32,20	50,5797	9,2568	1,0803	0,30902	0,95106	32,70	51,3651	2,0303	4,9255	0,89101	0,45399
32,21	50,5954	9,4033	1,0635	0,32392	0,94609	32,71	51,3808	2,0625	4,8487	0,89803	0,43994
32,22	50,6111	9,5522	1,0469	0,33874	0,94088	32,72	51,3965	2,0951	4,7731	0,90483	0,42578
32,23	50,6268	9,7034	1,0306	0,35347	0,93544	32,73	51,4122	2,1282	4,6987	0,91140	0,41151
32,24	50,6425	$9{,}8570\cdot10^{21}$	$1{,}0145\cdot10^{-22}$	0,36812	0,92978	32,74	51,4279	2,1619	4,6255	0,91775	0,39715
32,25	50,6582	$1{,}0013\cdot10^{22}$	$9{,}9869\cdot10^{-23}$	0,38268	0,92388	32,75	51,4436	2,1961	4,5534	0,92388	0,38268
32,26	50,6739	1,0172	9,8313	0,39715	0,91775	32,76	51,4593	2,2309	4,4824	0,92978	0,36812
32,27	50,6896	1,0333	9,6781	0,41151	0,91140	32,77	51,4750	2,2662	4,4126	0,93544	0,35347
32,28	50,7053	1,0496	9,5272	0,42578	0,90483	32,78	51,4907	2,3021	4,3438	0,94088	0,33874
32,29	50,7210	1,0662	9,3787	0,43994	0,89803	32,79	51,5064	2,3386	4,2761	0,94609	0,32392
32,30	50,7367	1,0831	9,2325	0,45399	0,89101	32,80	51,5221	2,3756	4,2095	0,95106	0,30902
32,31	50,7525	1,1003	9,0886	0,46792	0,88377	32,81	51,5378	2,4132	4,1439	0,95579	0,29404
32,32	50,7682	1,1177	8,9470	0,48175	0,87631	32,82	51,5536	2,4514	4,0793	0,96029	0,27899
32,33	50,7839	1,1354	8,8076	0,49546	0,86863	32,83	51,5693	2,4902	4,0157	0,96456	0,26387
32,34	50,7996	1,1534	8,6703	0,50904	0,86074	32,84	51,5850	2,5296	3,9531	0,96858	0,24869
32,35	50,8153	1,1717	8,5351	0,52250	0,85264	32,85	51,6007	2,5697	3,8915	0,97237	0,23345
32,36	50,8310	1,1902	8,4021	0,53583	0,84433	32,86	51,6164	2,6104	3,8309	0,97592	0,21814
32,37	50,8467	1,2091	8,2712	0,54902	0,83581	32,87	51,6321	2,6517	3,7712	0,97922	0,20279
32,38	50,8624	1,2282	8,1423	0,56208	0,82708	32,88	51,6478	2,6937	3,7124	0,98229	0,18738
32,39	50,8781	1,2477	8,0154	0,57501	0,81815	32,89	51,6635	2,7364	3,6546	0,98511	0,17193
32,40	50,8938	1,2674	7,8905	0,58779	0,80902	32,90	51,6792	2,7797	3,5976	0,98769	0,15643
32,41	50,9095	1,2874	7,7675	0,60042	0,79968	32,91	51,6949	2,8237	3,5415	0,99002	0,14090
32,42	50,9252	1,3078	7,6464	0,61291	0,79016	32,92	51,7106	2,8684	3,4863	0,99211	0,12533
32,43	50,9409	1,3285	7,5272	0,62524	0,78043	32,93	51,7263	2,9138	3,4320	0,99396	0,10973
32,44	50,9567	1,3495	7,4099	0,63742	0,77051	32,94	51,7421	2,9599	3,3785	0,99556	0,09411
32,45	50,9724	1,3709	7,2945	0,64945	0,76041	32,95	51,7578	3,0068	3,3258	0,99692	0,07846
32,46	50,9881	1,3926	7,1808	0,66131	0,75011	32,96	51,7735	3,0544	3,2740	0,99803	0,06279
32,47	51,0038	1,4147	7,0689	0,67301	0,73963	32,97	51,7892	3,1028	3,2229	0,99889	0,04711
32,48	51,0195	1,4371	6,9587	0,68455	0,72897	32,98	51,8049	3,1519	3,1727	0,99951	0,03141
32,49	51,0352	1,4598	6,8503	0,69591	0,71813	32,99	51,8206	3,2017	3;1233	0,99988	0,01571
32,50	51,0509	$1{,}4829\cdot10^{22}$	$6{,}7435\cdot10^{-23}$	0,70711	0,70711	33,00	51,8363	$3{,}2524\cdot10^{22}$	$3{,}0746\cdot10^{-23}$	1,00000	±0,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
33,00	51,8363	$3,2524\cdot 10^{22}$	$3,0746\cdot 10^{-23}$	1,00000	±0,00000	33,50	52,6217	$7,1335\cdot 10^{22}$	$1,4018\cdot 10^{-23}$	0,70711	-0,70711
33,01	51,8520	3,3039	3,0267	0,99988	-0,01571	33,51	52,6374	7,2465	1,3799	0,69591	-0,71813
33,02	51,8677	3,3562	2,9795	0,99951	-0,03141	33,52	52,6531	7,3612	1,3584	0,68455	-0,72897
33,03	51,8834	3,4094	2,9331	0,99889	-0,04711	33,53	52,6688	7,4777	1,3373	0,67301	-0,73963
33,04	51,8991	3,4634	2,8874	0,99803	-0,06279	33,54	52,6845	7,5961	1,3165	0,66131	-0,75011
33,05	51,9148	3,5182	2,8424	0,99692	-0,07846	33,55	52,7002	7,7163	1,2959	0,64945	-0,76041
33,06	51,9305	3,5739	2,7981	0,99556	-0,09411	33,56	52,7160	7,8385	1,2757	0,63742	-0,77051
33,07	51,9463	3,6304	2,7544	0,99396	-0,10973	33,57	52,7317	7,9626	1,2558	0,62524	-0,78043
33,08	51,9620	3,6879	2,7115	0,99211	-0,12533	33,58	52,7474	8,0887	1,2363	0,61291	-0,79016
33,09	51,9777	3,7463	2,6693	0,99002	-0,14090	33,59	52,7631	8,2168	1,2171	0,60042	-0,79968
33,10	51,9934	3,8056	2,6277	0,98769	-0,15643	33,60	52,7788	8,3469	1,1981	0,58779	-0,80902
33,11	52,0091	3,8659	2,5867	0,98511	-0,17193	33,61	52,7945	8,4790	1,1794	0,57501	-0,81815
33,12	52,0248	3,9271	2,5464	0,98229	-0,18738	33,62	52,8102	8,6132	1,1610	0,56208	-0,82708
33,13	52,0405	3,9892	2,5067	0,97922	-0,20279	33,63	52,8259	8,7496	1,1429	0,54902	-0,83581
33,14	52,0562	4,0524	2,4676	0,97592	-0,21814	33,64	52,8416	8,8881	1,1251	0,53583	-0,84433
33,15	52,0719	4,1166	2,4291	0,97237	-0,23345	33,65	52,8573	9,0288	1,1076	0,52250	-0,85264
33,16	52,0876	4,1818	2,3913	0,96858	-0,24869	33,66	52,8730	9,1718	1,0903	0,50904	-0,86074
33,17	52,1033	4,2480	2,3541	0,96456	-0,26387	33,67	52,8887	9,3170	1,0733	0,49546	-0,86863
33,18	52,1190	4,3152	2,3174	0,96029	-0,27899	33,68	52,9044	9,4645	1,0566	0,48175	-0,87631
33,19	52,1348	4,3835	2,2813	0,95579	-0,29404	33,69	52,9201	9,6143	1,0401	0,46792	-0,88377
33,20	52,1505	4,4529	2,2457	0,95106	-0,30902	33,70	52,9359	9,7665	1,0239	0,45399	-0,89101
33,21	52,1662	4,5235	2,2107	0,94609	-0,32392	33,71	52,9516	$9,9212\cdot 10^{22}$	$1,0080\cdot 10^{-23}$	0,43994	-0,89803
33,22	52,1819	4,5951	2,1763	0,94088	-0,33874	33,72	52,9673	$1,0078\cdot 10^{23}$	$9,9224\cdot 10^{-24}$	0,42578	-0,90483
33,23	52,1976	4,6678	2,1423	0,93544	-0,35347	33,73	52,9830	1,0238	9,7677	0,41151	-0,91140
33,24	52,2133	4,7417	2,1089	0,92978	-0,36812	33,74	52,9987	1,0400	9,6154	0,39715	-0,91775
33,25	52,2290	4,8167	2,0760	0,92388	-0,38268	33,75	53,0144	1,0565	9,4656	0,38268	-0,92388
33,26	52,2447	4,8930	2,0437	0,91775	-0,39715	33,76	53,0301	1,0732	9,3181	0,36812	-0,92978
33,27	52,2604	4,9705	2,0118	0,91140	-0,41151	33,77	53,0458	1,0902	9,1729	0,35347	-0,93544
33,28	52,2761	5,0492	1,9805	0,90483	-0,42578	33,78	53,0615	1,1074	9,0299	0,33874	-0,94088
33,29	52,2918	5,1291	1,9497	0,89803	-0,43994	33,79	53,0772	1,1250	8,8891	0,32392	-0,94609
33,30	52,3075	5,2103	1,9193	0,89101	-0,45399	33,80	53,0929	1,1428	8,7506	0,30902	-0,95106
33,31	52,3233	5,2928	1,8894	0,88377	-0,46792	33,81	53,1086	1,1608	8,6143	0,29404	-0,95579
33,32	52,3390	5,3766	1,8599	0,87631	-0,48175	33,82	53,1244	1,1792	8,4801	0,27899	-0,96029
33,33	52,3547	5,4617	1,8309	0,86863	-0,49546	33,83	53,1401	1,1979	8,3479	0,26387	-0,96456
33,34	52,3704	5,5482	1,8024	0,86074	-0,50904	33,84	53,1558	1,2169	8,2178	0,24869	-0,96858
33,35	52,3861	5,6361	1,7743	0,85264	-0,52250	33,85	53,1715	1,2361	8,0897	0,23345	-0,97237
33,36	52,4018	5,7253	1,7466	0,84433	-0,53583	33,86	53,1872	1,2557	7,9636	0,21814	-0,97592
33,37	52,4175	5,8159	1,7194	0,83581	-0,54902	33,87	53,2029	1,2756	7,8394	0,20279	-0,97922
33,38	52,4332	5,9080	1,6926	0,82708	-0,56208	33,88	53,2186	1,2958	7,7172	0,18738	-0,98229
33,39	52,4489	6,0016	1,6663	0,81815	-0,57501	33,89	53,2343	1,3163	7,5969	0,17193	-0,98511
33,40	52,4646	6,0966	1,6403	0,80902	-0,58779	33,90	53,2500	1,3371	7,4785	0,15643	-0,98769
33,41	52,4803	6,1931	1,6147	0,79968	-0,60042	33,91	53,2657	1,3583	7,3620	0,14090	-0,99002
33,42	52,4960	6,2911	1,5895	0,79016	-0,61291	33,92	53,2814	1,3798	7,2473	0,12533	-0,99211
33,43	52,5117	6,3907	1,5648	0,78043	-0,62524	33,93	53,2971	1,4017	7,1344	0,10973	-0,99396
33,44	52,5275	6,4919	1,5404	0,77051	-0,63742	33,94	53,3129	1,4239	7,0232	0,09411	-0,99556
33,45	52,5432	6,5947	1,5163	0,76041	-0,64945	33,95	53,3286	1,4464	6,9138	0,07846	-0,99692
33,46	52,5589	6,6991	1,4927	0,75011	-0,66131	33,96	53,3443	1,4693	6,8060	0,06279	-0,99803
33,47	52,5746	6,7052	1,4695	0,73963	-0,67301	33,97	53,3600	1,4926	6,6999	0,04711	-0,99889
33,48	52,5903	6,9129	1,4466	0,72897	-0,68455	33,98	53,3757	1,5162	6,5955	0,03141	-0,99951
33,49	52,6060	7,0223	1,4240	0,71813	-0,69591	33,99	53,3914	1,5402	6,4927	0,01571	-0,99988
33,50	52,6217	$7,1335\cdot 10^{22}$	$1,4018\cdot 10^{-23}$	0,70711	-0,70711	34,00	53,4071	$1,5646\cdot 10^{23}$	$6,3915\cdot 10^{-24}$	±0,00000	-1,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
34,00	53,4071	$1,5646\cdot10^{23}$	$6,3915\cdot10^{-24}$	±0,00000	−1,00000	34,50	54,1925	$3,4316\cdot10^{23}$	$2,9141\cdot10^{-24}$	−0,70711	−0,70711
34,01	53,4228	1,5894	6,2919	−0,01571	−0,99988	34,51	54,2082	3,4859	2,8687	−0,71813	−0,69591
34,02	53,4385	1,6145	6,1938	−0,03141	−0,99951	34,52	54,2239	3,5411	2,8240	−0,72897	−0,68455
34,03	53,4542	1,6400	6,0972	−0,04711	−0,99889	34,53	54,2396	3,5972	2,7800	−0,73963	−0,67301
34,04	53,4699	1,6660	6,0022	−0,06279	−0,99803	34,54	54,2553	3,6541	2,7367	−0,75011	−0,66131
34,05	53,4856	1,6924	5,9087	−0,07846	−0,99692	34,55	54,2710	3,7119	2,6940	−0,76041	−0,64945
34,06	53,5013	1,7192	5,8166	−0,09411	−0,99556	34,56	54,2868	3,7707	2,6520	−0,77051	−0,63742
34,07	53,5171	1,7464	5,7259	−0,10973	−0,99396	34,57	54,3025	3,8304	2,6107	−0,78043	−0,62524
34,08	53,5328	1,7741	5,6367	−0,12533	−0,99211	34,58	54,3182	3,8911	2,5700	−0,79016	−0,61291
34,09	53,5485	1,8022	5,5489	−0,14090	−0,99002	34,59	54,3339	3,9526	2,5299	−0,79968	−0,60042
34,10	53,5642	1,8307	5,4624	−0,15643	−0,98769	34,60	54,3496	4,0152	2,4905	−0,80902	−0,58779
34,11	53,5799	1,8597	5,3773	−0,17193	−0,98511	34,61	54,3653	4,0788	2,4517	−0,81815	−0,57501
34,12	53,5956	1,8891	5,2935	−0,18738	−0,98229	34,62	54,3810	4,1434	2,4135	−0,82708	−0,56208
34,13	53,6113	1,9190	5,2109	−0,20279	−0,97922	34,63	54,3967	4,2090	2,3758	−0,83581	−0,54902
34,14	53,6270	1,9494	5,1297	−0,21814	−0,97592	34,64	54,4124	4,2756	2,3388	−0,84433	−0,53583
34,15	53,6427	1,9803	5,0498	−0,23345	−0,97237	34,65	54,4281	4,3433	2,3024	−0,85264	−0,52250
34,16	53,6584	2,0116	4,9711	−0,24869	−0,96858	34,66	54,4438	4,4121	2,2665	−0,86074	−0,50904
34,17	53,6741	2,0434	4,8936	−0,26387	−0,96456	34,67	54,4595	4,4819	2,2312	−0,86863	−0,49546
34,18	53,6898	2,0758	4,8173	−0,27899	−0,96029	34,68	54,4752	4,5529	2,1964	−0,87631	−0,48175
34,19	53,7056	2,1087	4,7423	−0,29404	−0,95579	34,69	54,4909	4,6250	2,1622	−0,88377	−0,46792
34,20	53,7213	2,1421	4,6684	−0,30902	−0,95106	34,70	54,5067	4,6982	2,1285	−0,89101	−0,45399
34,21	53,7370	2,1760	4,5956	−0,32392	−0,94609	34,71	54,5224	4,7726	2,0953	−0,89803	−0,43994
34,22	53,7527	2,2104	4,5240	−0,33874	−0,94088	34,72	54,5381	4,8481	2,0627	−0,90483	−0,42578
34,23	53,7684	2,2454	4,4535	−0,35347	−0,93544	34,73	54,5538	4,9248	2,0306	−0,91140	−0,41151
34,24	53,7841	2,2810	4,3841	−0,36812	−0,92978	34,74	54,5695	5,0028	1,9989	−0,91775	−0,39715
34,25	53,7998	2,3171	4,3158	−0,38268	−0,92388	34,75	54,5852	5,0820	1,9677	−0,92388	−0,38268
34,26	53,8155	2,3538	4,2485	−0,39715	−0,91775	34,76	54,6009	5,1625	1,9370	−0,92978	−0,36812
34,27	53,8312	2,3911	4,1823	−0,41151	−0,91140	34,77	54,6166	5,2443	1,9068	−0,93544	−0,35347
34,28	53,8469	2,4289	4,1171	−0,42578	−0,90483	34,78	54,6323	5,3273	1,8771	−0,94088	−0,33874
34,29	53,8626	2,4673	4,0530	−0,43994	−0,89803	34,79	54,6480	5,4116	1,8479	−0,94609	−0,32392
34,30	53,8783	2,5064	3,9898	−0,45399	−0,89101	34,80	54,6637	5,4973	1,8191	−0,95106	−0,30902
34,31	53,8941	2,5461	3,9275	−0,46792	−0,88377	34,81	54,6794	5,5843	1,7907	−0,95579	−0,29404
34,32	53,9098	2,5864	3,8663	−0,48175	−0,87631	34,82	54,6952	5,6727	1,7628	−0,96029	−0,27899
34,33	53,9255	2,6274	3,8061	−0,49546	−0,86863	34,83	54,7109	5,7625	1,7353	−0,96456	−0,26387
34,34	53,9412	2,6690	3,7468	−0,50904	−0,86074	34,84	54,7266	5,8538	1,7083	−0,96858	−0,24869
34,35	53,9569	2,7112	3,6884	−0,52250	−0,85264	34,85	54,7423	5,9465	1,6817	−0,97237	−0,23345
34,36	53,9726	2,7541	3,6309	−0,53583	−0,84433	34,86	54,7580	6,0406	1,6555	−0,97592	−0,21814
34,37	53,9883	2,7977	3,5743	−0,54902	−0,83581	34,87	54,7737	6,1362	1,6297	−0,97922	−0,20279
34,38	54,0040	2,8420	3,5186	−0,56208	−0,82708	34,88	54,7894	6,2334	1,6043	−0,98229	−0,18738
34,39	54,0197	2,8870	3,4638	−0,57501	−0,81815	34,89	54,8051	6,3321	1,5793	−0,98511	−0,17193
34,40	54,0354	2,9327	3,4098	−0,58779	−0,80902	34,90	54,8208	6,4323	1,5547	−0,98769	−0,15643
34,41	54,0511	2,9791	3,3566	−0,60042	−0,79968	34,91	54,8365	6,5341	1,5305	−0,99002	−0,14090
34,42	54,0668	3,0263	3,3043	−0,61291	−0,79016	34,92	54,8522	6,6376	1,5066	−0,99211	−0,12533
34,43	54,0825	3,0742	3,2528	−0,62524	−0,78043	34,93	54,8679	6,7427	1,4831	−0,99396	−0,10973
34,44	54,0983	3,1229	3,2021	−0,63742	−0,77051	34,94	54,8837	6,8494	1,4600	−0,99556	−0,09411
34,45	54,1140	3,1724	3,1522	−0,64945	−0,76041	34,95	54,8994	6,9578	1,4372	−0,99692	−0,07846
34,46	54,1297	3,2226	3,1031	−0,66131	−0,75011	34,96	54,9151	7,0680	1,4148	−0,99803	−0,06279
34,47	54,1454	3,2736	3,0547	−0,67301	−0,73963	34,97	54,9308	7,1790	1,3928	−0,99889	−0,04711
34,48	54,1611	3,3254	3,0071	−0,68455	−0,72897	34,98	54,9465	7,2936	1,3711	−0,99951	−0,03141
34,49	54,1768	3,3781	2,9602	−0,69591	−0,71813	34,99	54,9622	7,4091	1,3497	−0,99988	−0,01551
34,50	54,1925	$3,4316\cdot10^{23}$	$2,9141\cdot10^{-24}$	−0,70711	−0,70711	35,00	54,9779	$7,5264\cdot10^{23}$	$1,3287\cdot10^{-24}$	−1,00000	∓0,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
35,00	54,9779	$7{,}5264\cdot10^{23}$	$1{,}3287\cdot10^{-24}$	−1,00000	∓0,00000	35,50	55,7633	$1{,}6507\cdot10^{24}$	$6{,}0579\cdot10^{-25}$	−0,70711	0,70711
35,01	54,9936	7,6455	1,3080	−0,99988	0,01571	35,51	55,7790	1,6768	5,9635	−0,69591	0,71813
35,02	55,0093	7,7666	1,2876	−0,99951	0,03141	35,52	55,7947	1,7034	5,8705	−0,68455	0,72897
35,03	55,0250	7,8896	1,2675	−0,99889	0,04711	35,53	55,8104	1,7304	5,7790	−0,67301	0,73963
35,04	55,0407	8,0145	1,2477	−0,99803	0,06279	35,54	55,8261	1,7578	5,6889	−0,66131	0,75011
35,05	55,0564	8,1413	1,2283	−0,99692	0,07846	35,55	55,8418	1,7856	5,6003	−0,64945	0,76041
35,06	55,0721	8,2702	1,2092	−0,99556	0,09411	35,56	55,8576	1,8139	5,5130	−0,63742	0,77051
35,07	55,0879	8,4012	1,1904	−0,99396	0,10973	35,57	55,8733	1,8426	5,4271	−0,62524	0,78043
35,08	55,1036	8,5342	1,1718	−0,99211	0,12533	35,58	55,8890	1,8718	5,3425	−0,61291	0,79016
35,09	55,1193	8,6693	1,1535	−0,99002	0,14090	35,59	55,9047	1,9014	5,2593	−0,60042	0,79968
35,10	55,1350	8,8065	1,1355	−0,98769	0,15643	35,60	55,9204	1,9315	5,1773	−0,58779	0,80902
35,11	55,1507	8,9459	1,1178	−0,98511	0,17193	35,61	55,9361	1,9621	5,0966	−0,57501	0,81815
35,12	55,1664	9,0876	1,1004	−0,98229	0,18738	35,62	55,9518	1,9932	5,0172	−0,56208	0,82708
35,13	55,1821	9,2314	1,0833	−0,97922	0,20279	35,63	55,9675	2,0248	4,9390	−0,54902	0,83581
35,14	55,1978	9,3776	1,0664	−0,97592	0,21814	35,64	55,9832	2,0568	4,8620	−0,53583	0,84433
35,15	55,2135	9,5261	1,0498	−0,97237	0,23345	35,65	55,9989	2,0893	4,7862	−0,52250	0,85264
35,16	55,2292	9,6769	1,0334	−0,96858	0,24869	35,66	56,0146	2,1224	4,7116	−0,50904	0,86074
35,17	55,2449	9,8301	1,0173	−0,96456	0,26387	35,67	56,0303	2,1561	4,6382	−0,49546	0,86863
35,18	55,2606	$9{,}9857\cdot10^{23}$	$1{,}0014\cdot10^{-24}$	−0,96029	0,27899	35,68	56,0460	2,1902	4,5659	−0,48175	0,87631
35,19	55,2764	$1{,}0144\cdot10^{24}$	$9{,}8583\cdot10^{-25}$	−0,95579	0,29404	35,69	56,0617	2,2248	4,4948	−0,46792	0,88377
35,20	55,2921	1,0304	9,7046	−0,95106	0,30902	35,70	56,0775	2,2600	4,4247	−0,45399	0,89101
35,21	55,3078	1,0467	9,5533	−0,94609	0,32392	35,71	56,0932	2,2958	4,3557	−0,43994	0,89803
35,22	55,3235	1,0633	9,4044	−0,94088	0,33874	35,72	56,1089	2,3322	4.2878	−0,42578	0,90483
35,23	55,3392	1,0802	9,2579	−0,93544	0,35347	35,73	56,1246	2,3691	4,2210	−0,41151	0,91140
35,24	55,3549	1,0973	9,1136	−0,92978	0,36812	35,74	56,1403	2,4066	4,1552	−0,39715	0,91775
35,25	55,3706	1,1147	8,9715	−0,92388	0,38268	35,75	56,1560	2,4447	4,0904	−0,38268	0,92388
35,26	55,3863	1,1323	8,8317	−0,91775	0,39715	35,76	56,1717	2,4834	4,0267	−0,36812	0,92978
35,27	55,4020	1,1502	8,6941	−0,91140	0,41151	35,77	56,1874	2,5227	3,9640	−0,35347	0,93544
35,28	55,4177	1,1684	8,5586	−0,90483	0,42578	35,78	56,2031	2,5627	3,9022	−0,33874	0,94088
35,29	55,4334	1,1869	8,4252	−0,89803	0,43994	35,79	56,2188	2,6033	3,8414	−0,32392	0,94609
35,30	55,4491	1,2057	8,2939	−0,89101	0,45399	35,80	56,2345	2,6445	3,7815	−0,30902	0,95106
35,31	55,4649	1,2248	8,1647	−0,88377	0,46792	35,81	56,2502	2,6864	3,7225	−0,29404	0,95579
35,32	55,4806	1,2442	8,0374	−0,87631	0,48175	35,82	56,2660	2,7289	3,6645	−0,27899	0,96029
35,33	55,4963	1,2639	7,9121	−0,86863	0,49546	35,83	56,2817	2,7720	3,6074	−0,26387	0,96456
35,34	55,5120	1,2839	7,7888	−0,86074	0,50904	35,84	56,2974	2,8159	3,5512	−0,24869	0,96858
35,35	55,5277	1,3042	7,6674	−0,85264	0,52250	35,85	56,3131	2,8605	3,4959	−0,23345	0,97237
35,36	55,5434	1,3249	7,5479	−0,84433	0,53583	35,86	56,3288	2,9058	3,4414	−0,21814	0,97592
35,37	55,5591	1,3459	7,4303	−0,83581	0,54902	35,87	56,3445	2,9518	3,3877	−0,20279	0,97922
35,38	55,5748	1,3672	7,3145	−0,82708	0,56208	35,88	56,3602	2,9986	3,3349	−0,18738	0,98229
35,39	55,5905	1,3888	7,2005	−0,81815	0,57501	35,89	56,3759	3,0461	3,2830	−0,17193	0,98511
35,40	55,6062	1,4108	7,0882	−0,80902	0,58779	35,90	56,3916	3,0943	3,2318	−0,15643	0,98769
35,41	55,6219	1,4331	6,9777	−0,79968	0,60042	35,91	56,4073	3,1433	3,1814	−0,14090	0,99002
35,42	55,6376	1,4558	6,8690	−0,79016	0,61291	35,92	56,4230	3,1930	3,1318	−0,12533	0,99211
35,43	55,6533	1,4789	6,7620	−0,78043	0,62524	35,93	56,4387	3,2435	3,0830	−0,10973	0,99396
35,44	55,6691	1,5023	6,6566	−0,77051	0,63742	35,94	56,4545	3,2949	3,0350	−0,09411	0,99556
35,45	55,6848	1,5261	6,5528	−0,76041	0,64945	35,95	56,4702	3,3471	2,9877	−0,07846	0,99692
35,46	55,7005	1,5502	6,4507	−0,75011	0,66131	35,96	56,4859	3,4001	2,9411	−0,06279	0,99803
35,47	55,7162	1,5748	6,3502	−0,73963	0,67301	35,97	56,5016	3,4539	2,8953	−0,04711	0,99889
35,48	55,7319	1,5997	6,2512	−0,72897	0,68455	35,98	56,5173	3,5086	2,8502	−0,03141	0,99951
35,49	55,7476	1,6250	6,1538	−0,71813	0,69591	35,99	56,5330	3,5641	2,8057	−0,01571	0,99988
35,50	55,7633	$1{,}6507\cdot10^{24}$	$6{,}0579\cdot10^{-25}$	−0,70711	0,70711	36,00	56,5487	$3{,}6205\cdot10^{24}$	$2{,}7620\cdot10^{-25}$	∓0,00000	1,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
36,00	56,5487	$3{,}6205\cdot10^{24}$	$2{,}7620\cdot10^{-25}$	∓0,00000	1,00000	36,50	57,3341	$7{,}9409\cdot10^{24}$	$1{,}2593\cdot10^{-25}$	0,70711	0,70711
36,01	56,5644	3,6779	2,7190	0,01571	0,99988	36,51	57,3498	8,0666	1,2397	0,71813	0,69591
36,02	56,5801	3,7361	2,6766	0,03141	0,99951	36,52	57,3655	8,1943	1,2204	0,72897	0,68455
36,03	56,5958	3,7952	2,6349	0,04711	0,99889	36,53	57,3812	8,3240	1,2013	0,73963	0,67301
36,04	56,6115	3,8553	2,5938	0,06279	0,99803	36,54	57,3969	8,4558	1,1826	0,75011	0,66131
36,05	56,6272	3,9164	2,5534	0,07846	0,99692	36,55	57,4126	8,5897	1,1641	0,76041	0,64945
36,06	56,6429	3,9784	2,5136	0,09411	0,99556	36,56	57,4284	8,7257	1,1460	0,77051	0,63742
36,07	56,6587	4,0413	2,4745	0,10973	0,99396	36,57	57,4441	8,8639	1,1282	0,78043	0,62524
36,08	56,6744	4,1053	2,4359	0,12533	0,99211	36,58	57,4598	9,0042	1,1106	0,79016	0,61291
36,09	56,6901	4,1703	2,3979	0,14090	0,99002	36,59	57,4755	9,1467	1,0932	0,79968	0,60042
36,10	56,7058	4,2364	2,3605	0,15643	0,98769	36,60	57,4912	9,2915	1,0762	0,80902	0,58779
36,11	56,7215	4,3035	2,3237	0,17193	0,98511	36,61	57,5069	9,4386	1,0595	0,81815	0,57501
36,12	56,7372	4,3716	2,2875	0,18738	0,98229	36,62	57,5226	9,5881	1,0430	0,82708	0,56208
36,13	56,7529	4,4408	2,2519	0,20279	0,97922	36,63	57,5383	9,7399	1,0267	0,83581	0,54902
36,14	56,7686	4,5111	2,2168	0,21814	0,97592	36,64	57,5540	$9{,}8941\cdot10^{24}$	$1{,}0107\cdot10^{-25}$	0,84433	0,53583
36,15	56,7843	4,5825	2,1822	0,23345	0,97237	36,65	57,5697	$1{,}0051\cdot10^{25}$	$9{,}9495\cdot10^{-26}$	0,85264	0,52250
36,16	56,8000	4,6551	2,1482	0,24869	0,96858	36,66	57,5854	1,0210	9,7945	0,86074	0,50904
36,17	56,8157	4,7288	2,1147	0,26387	0,96456	36,67	57,6011	1,0372	9,6419	0,86863	0,49546
36,18	56,8314	4,8036	2,0818	0,27899	0,96029	36,68	57,6168	1,0536	9,4916	0,87631	0,48175
36,19	56,8472	4,8797	2,0493	0,29404	0,95579	36,69	57,6325	1,0703	9,3437	0,88377	0,46792
36,20	56,8629	4,9569	2,0174	0,30902	0,95106	36,70	57,6483	1,0872	9,1980	0,89101	0,45399
36,21	56,8786	5,0354	1,9860	0,32392	0,94609	36,71	57,6640	1,1044	9,0546	0,89803	0,43994
36,22	56,8943	5,1151	1,9550	0,33874	0,94088	36,72	57,6797	1,1219	8,9135	0,90483	0,42578
36,23	56,9100	5,1960	1,9245	0,35347	0,93544	36,73	57,6954	1,1397	8,7746	0,91140	0,41151
36,24	56,9257	5,2783	1,8945	0,36812	0,92978	36,74	57,7111	1,1577	8,6379	0,91775	0,39715
36,25	56,9414	5,3619	1,8650	0,38268	0,92388	36,75	57,7268	1,1760	8,5033	0,92388	0,38268
36,26	56,9571	5,4468	1,8359	0,39715	0,91775	36,76	57,7425	1,1946	8,3707	0,92978	0,36812
36,27	56,9728	5,5331	1,8073	0,41151	0,91140	36,77	57,7582	1,2136	8,2402	0,93544	0,35347
36,28	56,9885	5,6207	1,7792	0,42578	0,90483	36,78	57,7739	1,2328	8,1118	0,94088	0,33874
36,29	57,0042	5,7096	1,7514	0,43994	0,89803	36,79	57,7896	1,2523	7,9854	0,94609	0,32392
36,30	57,0199	5,8000	1,7241	0,45399	0,89101	36,80	57,8053	1,2721	7,8610	0,95106	0,30902
36,31	57,0357	5,8918	1,6972	0,46792	0,88377	36,81	57,8210	1,2922	7,7384	0,95579	0,29404
36,32	57,0514	5,9851	1,6708	0,48175	0,87631	36,82	57,8368	1,3127	7,6178	0,96029	0,27899
36,33	57,0671	6,0799	1,6447	0,49546	0,86863	36,83	57,8525	1,3335	7,4991	0,96456	0,26387
36,34	57,0828	6,1762	1,6191	0,50904	0,86074	36,84	57,8682	1,3546	7,3822	0,96858	0,24869
36,35	57,0985	6,2740	1,5939	0,52250	0,85264	36,85	57,8839	1,3760	7,2672	0,97237	0,23345
36,36	57,1142	6,3733	1,5691	0,53583	0,84433	36,86	57,8996	1,3978	7,1539	0,97592	0,21814
36,37	57,1299	6,4742	1,5446	0,54902	0,83581	36,87	57,9153	1,4199	7,0424	0,97922	0,20279
36,38	57,1456	6,5767	1,5205	0,56208	0,82708	36,88	57,9310	1,4424	6,9327	0,98229	0,18738
36,39	57,1613	6,6808	1,4968	0,57501	0,81815	36,89	57,9467	1,4653	6,8247	0,98511	0,17193
36,40	57,1770	6,7866	1,4735	0,58779	0,80902	36,90	57,9624	1,4885	6,7183	0,98769	0,15643
36,41	57,1927	6,8940	1,4505	0,60042	0,79968	36,91	57,9781	1,5121	6,6136	0,99002	0,14090
36,42	57,2084	7,0031	1,4279	0,61291	0,79016	36,92	57,9938	1,5360	6,5105	0,99211	0,12533
36,43	57,2241	7,1140	1,4057	0,62524	0,78043	36,93	58,0095	1,5603	6,4090	0,99396	0,10973
36,44	57,2399	7,2267	1,3838	0,63742	0,77051	36,94	58,0253	1,5850	6,3091	0,99556	0,09411
36,45	57,2556	7,3411	1,3622	0,64945	0,76041	36,95	58,0410	1,6101	6,2108	0,99692	0,07846
36,46	57,2713	7,4573	1,3410	0,66131	0,75011	36,96	58,0567	1,6356	6,1140	0,99803	0,06279
36,47	57,2870	7,5754	1,3201	0,67301	0,73963	36,97	58,0724	1,6615	6,0187	0,99889	0,04711
36,48	57,3027	7,6953	1,2995	0,68455	0,72897	36,98	58,0881	1,6878	5,9249	0,99951	0,03141
36,49	57,3184	7,8171	1,2792	0,69591	0,71813	36,99	58,1038	1,7146	5,8326	0,99988	0,01571
36,50	57,3341	$7{,}9409\cdot10^{24}$	$1{,}2593\cdot10^{-25}$	0,70711	0,70711	37,00	58,1195	$1{,}7417\cdot10^{25}$	$5{,}7417\cdot10^{-26}$	1,00000	±0,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
37,00	58,1195	$1{,}7417\cdot10^{25}$	$5{,}7417\cdot10^{-26}$	1,00000	±0,00000	37,50	58,9049	$3{,}8199\cdot10^{25}$	$2{,}6178\cdot10^{-26}$	0,70711	−0,70711
37,01	58,1352	1,7692	5,6522	0,99988	−0,01571	37,51	58,9206	3,8804	2,5770	0,69591	−0,71813
37,02	58,1509	1,7972	5,5641	0,99951	−0,03141	37,52	58,9363	3,9419	2,5369	0,68455	−0,72897
37,03	58,1666	1,8257	5,4774	0,99889	−0,04711	37,53	58,9520	4,0043	2,4973	0,67301	−0,73963
37,04	58,1823	1,8546	5,3920	0,99803	−0,06279	37,54	58,9677	4,0677	2,4584	0,66131	−0,75011
37,05	58,1980	1,8840	5,3079	0,99692	−0,07846	37,55	58,9834	4,1321	2,4201	0,64945	−0,76041
37,06	58,2137	1,9138	5,2252	0,99556	−0,09411	37,56	58,9992	4,1975	2,3824	0,63742	−0,77051
37,07	58,2295	1,9441	5,1438	0,99396	−0,10973	37,57	59,0149	4,2639	2,3453	0,62524	−0,78043
37,08	58,2452	1,9749	5,0636	0,99211	−0,12533	37,58	59,0306	4,3314	2,3087	0,61291	−0,79016
37,09	58,2609	2,0062	4,9847	0,99002	−0,14090	37,59	59,0463	4,4000	2,2727	0,60042	−0,79968
37,10	58,2766	2,0379	4,9070	0,98769	−0,15643	37,60	59,0620	4,4697	2,2373	0,58779	−0,80902
37,11	58,2923	2,0701	4,8306	0,98511	−0,17193	37,61	59,0777	4,5404	2,2024	0,57501	−0,81815
37,12	58,3080	2,1029	4,7553	0,98229	−0,18738	37,62	59,0934	4,6123	2,1681	0,56208	−0,82708
37,13	58,3237	2,1362	4,6812	0,97922	−0,20279	37,63	59,1091	4,6853	2,1343	0,54902	−0,83581
37,14	58,3394	2,1700	4,6082	0,97592	−0,21814	37,64	59,1248	4,7595	2,1011	0,53583	−0,84433
37,15	58,3551	2,2044	4,5364	0,97237	−0,23345	37,65	59,1405	4,8348	2,0683	0,52250	−0,85264
37,16	58,3708	2,2393	4,4657	0,96858	−0,24869	37,66	59,1562	4,9114	2,0361	0,50904	−0,86074
37,17	58,3865	2,2748	4,3961	0,96456	−0,26387	37,67	59,1719	4,9892	2,0043	0,49546	−0,86863
37,18	58,4022	2,3108	4,3276	0,96029	−0,27899	37,68	59,1876	5,0682	1,9731	0,48175	−0,87631
37,19	58,4180	2,3474	4,2601	0,95579	−0,29404	37,69	59,2033	5,1484	1,9424	0,46792	−0,88377
37,20	58,4337	2,3845	4,1937	0,95106	−0,30902	37,70	59,2191	5,2299	1,9121	0,45399	−0,89101
37,21	58,4494	2,4223	4,1283	0,94609	−0,32392	37,71	59,2348	5,3127	1,8823	0,43994	−0,89803
37,22	58,4651	2,4606	4,0640	0,94088	−0,33874	37,72	59,2505	5,3968	1,8529	0,42578	−0,90483
37,23	58,4808	2,4995	4,0007	0,93544	−0,35347	37,73	59,2662	5,4823	1,8240	0,41151	−0,91140
37,24	58,4965	2,5391	3,9383	0,92978	−0,36812	37,74	59,2819	5,5691	1,7956	0,39715	−0,91775
37,25	58,5122	2,5793	3,8769	0,92388	−0,38268	37,75	59,2976	5,6572	1,7676	0,38268	−0,92388
37,26	58,5279	2,6202	3,8165	0,91775	−0,39715	37,76	59,3133	5,7468	1,7401	0,36812	−0,92978
37,27	58,5436	2,6617	3,7570	0,91140	−0,41151	37,77	59,3290	5,8378	1,7130	0,35347	−0,93544
37,28	58,5593	2,7038	3,6985	0,90483	−0,42578	37,78	59,3447	5,9302	1,6863	0,33874	−0,94088
37,29	58,5750	2,7466	3,6408	0,89803	−0,43994	37,79	59,3604	6,0241	1,6600	0,32392	−0,94609
37,30	58,5907	2,7901	3,5841	0,89101	−0,45399	37,80	59,3761	6,1195	1,6341	0,30902	−0,95106
37,31	58,6065	2,8342	3,5283	0,88377	−0,46792	37,81	59,3918	6,2164	1,6087	0,29404	−0,95579
37,32	58,6222	2,8791	3,4733	0,87631	−0,48175	37,82	59,4076	6,3148	1,5836	0,27899	−0,96029
37,33	58,6379	2,9247	3,4191	0,86863	−0,49546	37,83	59,4233	6,4147	1,5589	0,26387	−0,96456
37,34	58,6536	2,9710	3,3658	0,86074	−0,50904	37,84	59,4390	6,5163	1,5346	0,24869	−0,96858
37,35	58,6693	3,0180	3,3133	0,85264	−0,52250	37,85	59,4547	6,6195	1,5107	0,23345	−0,97237
37,36	58,6850	3,0658	3,2617	0,84433	−0,53583	37,86	59,4704	6,7243	1,4872	0,21814	−0,97592
37,37	58,7007	3,1144	3,2109	0,83581	−0,54902	37,87	59,4861	6,8308	1,4640	0,20279	−4,97922
37,38	58,7164	3,1637	3,1609	0,82708	−0,56208	37,88	59,5018	6,9389	1,4412	0,18738	−0,98229
37,39	58,7321	3,2138	3,1116	0,81815	−0,57501	37,89	59,5175	7,0487	1,4187	0,17193	−0,98511
37,40	58,7478	3,2647	3,0631	0,80902	−0,58779	37,90	59,5332	7,1603	1,3966	0,15643	−0,98769
37,41	58,7635	3,3164	3,0154	0,79968	−0,60042	37,91	59,5489	7,2736	1,3748	0,14090	−0,99002
37,42	58,7792	3,3689	2,9684	0,79016	−0,61291	37,92	59,5646	7,3888	1,3534	0,12533	−0,99211
37,43	58,7949	3,4222	2,9221	0,78043	−0,62524	37,93	59,5803	7,5058	1,3323	0,10973	−0,99396
37,44	58,8107	3,4764	2,8766	0,77051	−0,63742	37,94	59,5961	7,6246	1,3115	0,09411	−0,99556
37,45	58,8264	3,5314	2,8318	0,76041	−0,64945	37,95	59,6118	7,7453	1,2911	0,07846	−0,99692
37,46	58,8421	3,5873	2,7876	0,75011	−0,66131	37,96	59,6275	7,8680	1,2710	0,06279	−0,99803
37,47	58,8578	3,6441	2,7442	0,73963	−0,67301	37,97	59,6432	7,9926	1,2512	0,04711	−0,99889
37,48	58,8735	3,7018	2,7014	0,72897	−0,68455	37,98	59,6589	8,1191	1,2317	0,03141	−0,99951
37,49	58,8892	3,7604	2,6593	0,71813	−0,69591	37,99	59,6746	8,2476	1,2125	0,01571	−0,99988
37,50	58,9049	$3{,}8199\cdot10^{25}$	$2{,}6178\cdot10^{-26}$	0,70711	−0,70711	38,00	59,6903	$8{,}3782\cdot10^{25}$	$1{,}1936\cdot10^{-26}$	±0,00000	−1,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
38,00	59,6903	$8,3782\cdot 10^{25}$	$1,1936\cdot 10^{-26}$	±0,00000	−1,00000	38,50	60,4757	$1,8376\cdot 10^{26}$	$5,4420\cdot 10^{-27}$	−0,70711	−0,70711
38,01	59,7060	8,5108	1,1750	−0,01571	−0,99988	38,51	60,4914	1,8667	5,3571	−0,71813	−0,69591
38,02	59,7217	8,6456	1,1567	−0,03141	−0,99951	38,52	60,5071	1,8962	5,2736	−0,72897	−0,68455
38,03	59,7374	8,7825	1,1387	−0,04711	−0,99889	38,53	60,5228	1,9262	5,1914	−0,73963	−0,67301
38,04	59,7531	8,9215	1,1209	−0,06279	−0,99803	38,54	60,5385	1,9567	5,1105	−0,75011	−0,66131
38,05	59,7688	9,0627	1,1034	−0,07846	−0,99692	38,55	60,5542	1,9877	5,0309	−0,76041	−0,64945
38,06	59,7845	9,2062	1,0862	−0,09411	−0,99556	38,56	60,5700	2,0192	4,9525	−0,77051	−0,63742
38,07	59,8003	9,3520	1,0693	−0,10973	−0,99396	38,57	60,5857	2,0511	4,8753	−0,78043	−0,62524
38,08	59,8160	9,5001	1,0526	−0,12533	−0,99211	38,58	60,6014	2,0836	4,7993	−0,79016	−0,61291
38,09	59,8317	9,6504	1,0362	−0,14090	−0,99002	38,59	60,6171	2,1166	4,7245	−0,79968	−0,60042
38,10	59,8474	9,8032	1,0201	−0,15643	−0,98769	38,60	60,6328	2,1501	4,6509	−0,80902	−0,58779
38,11	59,8631	$9,9584\cdot 10^{25}$	$1,0042\cdot 10^{-26}$	−0,17193	−0,98511	38,61	60,6485	2,1841	4,5784	−0,81815	−0,57501
38,12	59,8788	$1,0116\cdot 10^{26}$	$9,8852\cdot 10^{-27}$	−0,18738	−0,98229	38,62	60,6642	2,2187	4,5071	−0,82708	−0,56208
38,13	59,8945	1,0276	9,7312	−0,20279	−0,97922	38,63	60,6799	2,2539	4,4369	−0,83581	−0,54902
38,14	59,9102	1,0439	9,5795	−0,21814	−0,97592	38,64	60,6956	2,2896	4,3677	−0,84433	−0,53583
38,15	59,9259	1,0604	9,4302	−0,23345	−0,97237	38,65	60,7113	2,3258	4,2996	−0,85264	−0,52250
38,16	59,9416	1,0772	9,2832	−0,24869	−0,96858	38,66	60,7270	2,3626	4,2326	−0,86074	−0,50904
38,17	59,9573	1,0943	9,1385	−0,26387	−0,96456	38,67	60,7427	2,4000	4,1666	−0,86863	−0,49546
38,18	59,9730	1,1116	8,9961	−0,27899	−0,96029	38,68	60,7584	2,4380	4,1017	−0,87631	−0,48175
38,19	59,9888	1,1292	8,8559	−0,29404	−0,95579	38,69	60,7741	2,4766	4,0377	−0,88377	−0,46792
38,20	60,0045	1,1471	8,7179	−0,30902	−0,95106	38,70	60,7899	2,5158	3,9748	−0,89101	−0,45399
38,21	60,0202	1,1653	8,5821	−0,32392	−0,94609	38,71	60,8056	2,5556	3,9129	−0,89803	−0,43994
38,22	60,0359	1,1837	8,4483	−0,33874	−0,94088	38,72	60,8213	2,5961	3,8519	−0,90483	−0,42578
38,23	60,0516	1,2025	8,3166	−0,35347	−0,93544	38,73	60,8370	2,6372	3,7919	−0,91140	−0,41151
38,24	60,0673	1,2215	8,1870	−0,36812	−0,92978	38,74	60,8527	2,6790	3,7328	−0,91775	−0,39715
38,25	60,0830	1,2408	8,0594	−0,38268	−0,92388	38,75	60,8684	2,7214	3,6746	−0,92388	−0,38268
38,26	60,0987	1,2604	7,9338	−0,39715	−0,91775	38,76	60,8841	2,7645	3,6173	−0,92978	−0,36812
38,27	60,1144	1,2804	7,8101	−0,41151	−0,91140	38,77	60,8998	2,8082	3,5609	−0,93544	−0,35347
38,28	60,1301	1,3007	7,6884	−0,42578	−0,90483	38,78	60,9155	2,8527	3,5054	−0,94088	−0,33874
38,29	60,1458	1,3213	7,5686	−0,43994	−0,89803	38,79	60,9312	2,8979	3,4508	−0,94609	−0,32392
38,30	60,1615	1,3422	7,4506	−0,45399	−0,89101	38,80	60,9469	2,9438	3,3970	−0,95106	−0,30902
38,31	60,1773	1,3634	7,3345	−0,46792	−0,88377	38,81	60,9626	2,9904	3,3441	−0,95579	−0,29404
38,32	60,1930	1,3850	7,2202	−0,48175	−0,87631	38,82	60,9784	3,0377	3,2920	−0,96029	−0,27899
38,33	60,2087	1,4069	7,1077	−0,49546	−0,86863	38,83	60,9941	3,0858	3,2406	−0,96456	−0,26387
38,34	60,2244	1,4292	6,9969	−0,50904	−0,86074	38,84	61,0098	3,1346	3,1901	−0,96858	−0,24869
38,35	60,2401	1,4518	6,8879	−0,52250	−0,85264	38,85	61,0255	3,1843	3,1404	−0,97237	−0,23345
38,36	60,2558	1,4748	6,7805	−0,53583	−0,84433	38,86	61,0412	3,2347	3,0915	−0,97592	−0,21814
38,37	60,2715	1,4982	6,6748	−0,54902	−0,83581	38,87	61,0569	3,2859	3,0433	−0,97922	−0,20279
38,38	60,2872	1,5219	6,5708	−0,56208	−0,82708	38,88	61,0726	3,3379	2,9959	−0,98229	−0,18738
38,39	60,3029	1,5460	6,4684	−0,57501	−0,81815	38,89	61,0883	3,3908	2,9492	−0,98511	−0,17193
38,40	60,3186	1,5705	6,3676	−0,58779	−0,80902	38,90	61,1040	3,4445	2,9032	−0,98769	−0,15643
38,41	60,3343	1,5954	6,2683	−0,60042	−0,79968	38,91	61,1197	3,4990	2,8579	−0,99002	−0,14090
38,42	60,3500	1,6206	6,1706	−0,61291	−0,79016	38,92	61,1354	3,5544	2,8134	−0,99211	−0,12533
38,43	66,3657	1,6462	6,0745	−0,62524	−0,78043	38,93	61,1511	3,6106	2,7696	−0,99396	−0,10973
38,44	60,3815	1,6723	5,9798	−0,63742	−0,77051	38,94	61,1669	3,6678	2,7264	−0,99556	−0,09411
38,45	60,3972	1,6988	5,8866	−0,64945	−0,76041	38,95	61,1826	3,7259	2,6839	−0,99692	−0,07846
38,46	60,4129	1,7257	5,7949	−0,66131	−0,75011	38,96	61,1983	3,7849	2,6421	−0,99803	−0,06279
38,47	60,4286	1,7530	5,7045	−0,67301	−0,73963	38,97	61,2140	3,8448	2,6009	−0,99889	−0,04711
38,48	60,4443	1,7807	5,6156	−0,68455	−0,72897	38,98	61,2297	3,9057	2,5604	−0,99951	−0,03141
38,49	60,4600	1,8089	5,5281	−0,69591	−0,71813	38,99	61,2454	3,9675	2,5205	−0,99988	−0,01571
38,50	60,4757	$1,8376\cdot 10^{26}$	$5,4420\cdot 10^{-27}$	−0,70711	−0,70711	39,00	61,2611	$4,0303\cdot 10^{26}$	$2,4812\cdot 10^{-27}$	−1,00000	∓0,00000

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
39,00	61,2611	$4{,}0303\cdot 10^{26}$	$2{,}4812\cdot 10^{-27}$	−1,00000	∓0,00000	39,50	62,0465	$8{,}8396\cdot 10^{26}$	$1{,}1313\cdot 10^{-27}$	−0,70711	0,70711
39,01	61,2768	4,0941	2,4426	−0,99988	0,01571	39,51	62,0622	8,9795	1,1137	−0,69591	0,71813
39,02	61,2925	4,1589	2,4045	−0,99951	0,03141	39,52	62,0779	9,1217	1,0963	−0,68455	0,72897
39,03	61,3082	4,2248	2,3670	−0,99889	0,04711	39,53	62,0936	9,2661	1,0792	−0,67301	0,73963
39,04	61,3239	4,2917	2,3301	−0,99803	0,06279	39,54	62,1093	9,4128	1,0624	−0,66131	0,75011
39,05	61,3396	4,3596	2,2938	−0,99692	0,07846	39,55	62,1250	9,5618	1,0458	−0,64945	0,76041
39,06	61,3553	4,4286	2,2580	−0,99556	0,09411	39,56	62,1408	9,7132	1,0295	−0,63742	0,77051
39,07	61,3711	4,4988	2,2228	−0,99396	0,10973	39,57	62,1565	$9{,}8670\cdot 10^{26}$	$1{,}0135\cdot 10^{-27}$	−0,62524	0,78043
39,08	61,3868	4,5700	2,1882	−0,99211	0,12533	39,58	62,1722	$1{,}0023\cdot 10^{27}$	$9{,}9768\cdot 10^{-28}$	−0,61291	0,79016
39,09	61,4025	4,6423	2,1541	−0,99002	0,14090	39,59	62,1879	1,0182	9,8214	−0,60042	0,79968
39,10	61,4182	4,7158	2,1205	−0,98769	0,15643	39,60	62,2036	1,0343	9,6683	−0,58779	0,80902
39,11	61,4339	4,7905	2,0874	−0,98511	0,17193	39,61	62,2193	1,0507	9,5176	−0,57501	0,81815
39,12	61,4496	4,8663	2,0549	−0,98229	0,18738	39,62	62,2350	1,0673	9,3692	−0,56208	0,82708
39,13	61,4653	4,9433	2,0229	−0,97922	0,20279	39,63	62,2507	1,0842	9,2232	−0,54902	0,83581
39,14	61,4810	5,0216	1,9914	−0,97592	0,21814	39,64	62,2664	1,1014	9,0795	−0,53583	0,84433
39,15	61,4967	5,1011	1,9604	−0,97237	0,23345	39,65	62,2821	1,1188	8,9380	−0,52250	0,85264
39,16	61,5124	5,1819	1,9298	−0,96858	0,24869	39,66	62,2978	1,1365	8,7987	−0,50904	0,86074
39,17	61,5281	5,2640	1,8997	−0,96456	0,26387	39,67	62,3135	1,1545	8,6615	−0,49546	0,86863
39,18	61,5438	5,3473	1,8701	−0,96029	0,27899	39,68	62,3292	1,1728	8,5265	−0,48175	0,87631
39,19	61,5596	5,4319	1,8410	−0,95579	0,29404	39,69	62,3449	1,1913	8,3936	−0,46792	0,88377
39,20	61,5753	5,5179	1,8123	−0,95106	0,30902	39,70	62,3607	1,2102	8,2628	−0,45399	0,89101
39,21	61,5910	5,6052	1,7840	−0,94609	0,32392	39,71	62,3764	1,2294	8,1341	−0,43994	0,89803
39,22	61,6067	5,6940	1,7562	−0,94088	0,33874	39,72	62,3921	1,2489	8,0073	−0,42578	0,90483
39,23	61,6224	5,7842	1,7288	−0,93544	0,35347	39,73	62,4078	1,2686	7,8825	−0,41151	0,91140
39,24	61,6381	5,8758	1,7019	−0,92978	0,36812	39,74	62,4235	1,2887	7,7596	−0,39715	0,91775
39,25	61,6538	5,9688	1,6754	−0,92388	0,38268	39,75	62,4392	1,3091	7,6387	−0,38268	0,92388
39,26	61,6695	6,0633	1,6493	−0,91775	0,39715	39,76	62,4549	1,3298	7,5197	−0,36812	0,92978
39,27	61,6852	6,1593	1,6236	−0,91140	0,41151	39,77	62,4706	1,3509	7,4025	−0,35347	0,93544
39,28	61,7009	6,2568	1,5983	−0,90483	0,42578	39,78	62,4863	1,3723	7,2871	−0,33874	0,94088
39,29	61,7166	6,3559	1,5733	−0,89803	0,43994	39,79	62,5020	1,3940	7,1735	−0,32392	0,94609
39,30	61,7323	6,4565	1,5488	−0,89101	0,45399	39,80	62,5177	1,4161	7,0617	−0,30902	0,95106
39,31	61,7481	6,5587	1,5247	−0,88377	0,46792	39,81	62,5334	1,4385	6,9516	−0,29404	0,95579
39,32	61,7638	6,6625	1,5009	−0,87631	0,48175	39,82	62,5492	1,4613	6,8433	−0,27899	0,96029
39,33	61,7795	6,7680	1,4775	−0,86863	0,49546	39,83	62,5649	1,4844	6,7367	−0,26387	0,96456
39,34	61,7952	6,8752	1,4545	−0,86074	0,50904	39,84	62,5806	1,5079	6,6317	−0,24869	0,96858
39,35	61,8109	6,9840	1,4318	−0,85264	0,52250	39,85	62,5963	1,5318	6,5284	−0,23345	0,97237
39,36	61,8266	7,0946	1,4095	−0,84433	0,53583	39,86	62,6120	1,5560	6,4266	−0,21814	0,97592
39,37	61,8423	7,2069	1,3875	−0,83581	0,54902	39,87	62,6277	1,5807	6,3264	−0,20279	0,97922
39,38	61,8580	7,3210	1,3659	−0,82708	0,56208	39,88	62,6434	1,6057	6,2278	−0,18738	0,98229
39,39	61,8737	7,4369	1,3446	−0,81815	0,57501	39,89	62,6591	1,6311	6,1308	−0,17193	0,98511
39,40	61,8894	7,5546	1,3237	−0,80902	0,58779	39,90	62,6748	1,6569	6,0352	−0,15643	0,98769
39,41	61,9051	7,6743	1,3031	−0,79968	0,60042	39,91	62,6905	1,6831	5,9411	−0,14090	0,99002
39,42	61,9208	7,7958	1,2828	−0,79016	0,61291	39,92	62,7062	1,7098	5,8485	−0,12533	0,99211
39,43	61,9365	7,9191	1,2628	−0,78043	0,62524	39,93	62,7219	1,7369	5,7574	−0,10973	0,99396
39,44	61,9523	8,0445	1,2431	−0,77051	0,63742	39,94	62,7377	1,7644	5,6677	−0,09411	0,99556
39,45	61,9680	8,1719	1,2237	−0,76041	0,64945	39,95	62,7534	1,7923	5,5794	−0,07846	0,99692
39,46	61,9837	8,3013	1,2046	−0,75011	0,66131	39,96	62,7691	1,8207	5,4924	−0,06279	0,99803
39,47	61,9994	8,4327	1,1859	−0,73963	0,67301	39,97	62,7848	1,8495	5,4068	−0,04711	0,99889
39,48	62,0151	8,5662	1,1674	−0,72897	0,68455	39,98	62,8005	1,8788	5,3225	−0,03141	0,99951
39,49	62,0308	8,7018	1,1492	−0,71813	0,69591	39,99	62,8162	1,9086	5,2395	−0,01571	0,99988
39,50	62,0465	$8{,}8396\cdot 10^{26}$	$1{,}1313\cdot 10^{-27}$	−0,70711	0,70711	40,00	62,8319	$1{,}9388\cdot 10^{27}$	$5{,}1579\cdot 10^{-28}$	−0,00000	1,00000

7. Zahlenwerte der Tafel 3.

x	$Ei(x)$		$Ei(-x)$		𝔖i(x)		ℭi(x)		$Si(x)$		$Ci(x)$	
0,00	— ∞		— ∞		0,0000	100	— ∞		0,0000	100	— ∞	
0,01	— 4,595	703	— 4,615	683	0,0100	100	— 4,605	693	0,0100	100	— 4,605	693
0,02	— 3,892	416	— 3,932	396	0,0200	100	— 3,912	406	0,0200	100	— 3,912	405
0,03	— 3,476	297	— 3,536	277	0,0300	100	— 3,506	287	0,0300	100	— 3,507	288
0,04	— 3,179	234	— 3,259	214	0,0400	100	— 3,219	224	0,0400	100	— 3,219	223
0,05	— 2,945	192	— 3,045	172	0,0500	100	— 2,995	182	0,0500	100	— 2,996	182
0,06	— 2,753	165	— 2,873	145	0,0600	100	— 2,813	155	0,0600	100	— 2,814	153
0,07	— 2,588	144	— 2,728	124	0,0700	100	— 2,658	134	0,0700	100	— 2,661	134
0,08	— 2,444	128	— 2,604	108	0,0800	100	— 2,524	118	0,0800	100	— 2,527	117
0,09	— 2,316	116	— 2,496	96	0,0900	101	— 2,406	106	0,0900	99	— 2,410	105
0,10	— 2,200	106	— 2,400	86	0,1001	100	— 2,300	96	0,0999	100	— 2,305	95
0,11	— 2,094	97	— 2,314	77	0,1101	100	— 2,204	87	0,1099	100	— 2,210	86
0,12	— 1,997	91	— 2,237	71	0,1201	101	— 2,117	81	0,1199	100	— 2,124	80
0,13	— 1,906	85	— 2,166	65	0,1302	100	— 2,036	75	0,1299	99	— 2,044	73
0,14	— 1,821	80	— 2,101	59	0,1402	100	— 1,961	69	0,1398	100	— 1,971	68
0,15	— 1,741	75	— 2,042	56	0,1502	100	— 1,892	66	0,1498	100	— 1,903	64
0,16	— 1,666	72	— 1,986	51	0,1602	101	— 1,826	61	0,1598	99	— 1,839	60
0,17	— 1,594	68	— 1,935	48	0,1703	100	— 1,765	58	0,1697	100	— 1,779	56
0,18	— 1,526	65	— 1,887	45	0,1803	101	— 1,707	55	0,1797	99	— 1,723	53
0,19	— 1,461	62	— 1,842	42	0,1904	100	— 1,652	53	0,1896	100	— 1,670	51
0,20	— 1,399	60	— 1,800	40	0,2004	101	— 1,599	49	0,1996	99	— 1,619	47
0,21	— 1,339	58	— 1,760	37	0,2105	101	— 1,550	48	0,1995	99	— 1,572	46
0,22	— 1,281	55	— 1,723	36	0,2206	101	— 1,502	45	0,2194	99	— 1,526	43
0,23	— 1,226	54	— 1,687	34	0,2307	101	— 1,457	44	0,2293	99	— 1,483	41
0,24	— 1,172	52	— 1,653	31	0,2408	101	— 1,413	42	0,2392	99	— 1,442	40
0,25	— 1,120	51	— 1,622	31	0,2509	101	— 1,371	41	0,2491	99	— 1,402	38
0,26	— 1,069	49	— 1,591	29	0,2610	101	— 1,330	39	0,2590	99	— 1,364	36
0,27	— 0,020	48	— 1,562	27	0,2711	101	— 1,291	37	0,2689	99	— 1,328	35
0,28	— 0,972	47	— 1,535	27	0,2812	102	— 1,254	37	0,2788	98	— 1,293	34
0,29	—,0,925	45	— 1,508	25	0,2914	101	— 1,217	35	0,2886	99	— 1,259	33
0,30	— 0,880	45	— 1,483	24	0,3015	102	— 1,182	35	0,2985	98	— 1,226	31
0,31	— 0,835	43	— 1,459	23	0,3117	101	— 1,147	33	0,3083	99	— 1,195	30
0,32	— 0,792	43	— 1,436	23	0,3218	102	— 1,114	33	0,3182	98	— 1,165	29
0,33	— 0,749	41	— 1,413	21	0,3320	102	— 1,081	31	0,3280	98	— 1,136	28
0,34	— 0,708	41	— 1,392	21	0,3422	102	— 1,050	31	0,3378	98	— 1,108	28
0,35	— 0,667	41	— 1,371	19	0,3524	102	— 1,019	30	0,3476	98	— 1,080	26
0,36	— 0,626	39	— 1,352	19	0,3626	102	— 0,989	29	0,3574	98	— 1,054	26
0,37	— 0,587	39	— 1,333	19	0,3728	102	— 0,960	29	0,3672	98	— 1,028	24
0,38	— 0,548	38	— 1,314	17	0,3830	103	— 0,931	27	0,3770	97	— 1,004	250
0,39	— 0,510	38	— 1,297	17	0,3933	103	— 0,904	28	0,3867	97	— 0,9794	235
0,40	— 0,472	37	— 1,280	17	0,4036	102	— 0,876	27	0,3964	98	— 0,9559	227
0,41	— 0,435	36	— 1,263	16	0,4138	103	— 0,849	26	0,4062	97	— 0,9332	220
0,42	— 0,399	36	— 1,247	15	0,4241	103	— 0,823	25	0,4159	97	— 0,9112	215
0,43	— 0,363	36	— 1,232	15	0,4344	103	— 0,798	26	0,4256	97	— 0,8897	208
0,44	— 0,327	35	— 1,217	14	0,4447	104	— 0,772	24	0,4353	96	— 0,8689	203
0,45	— 0,292	34	— 1,203	14	0,4551	103	— 0,748	24	0,4449	97	— 0,8486	198
0,46	— 0,258	34	— 1,189	14	0,4654	104	— 0,724	25	0,4546	96	— 0,8288	192
0,47	— 0,224	34	— 1,175	13	0,4758	104	— 0,699	23	0,4642	96	— 0,8096	187
0,48	— 0,190	34	— 1,162	13	0,4862	103	— 0,676	23	0,4738	97	— 0,7909	182
0,49	— 0,156	33	— 1,149	12	0,4965	105	— 0,653	23	0,4835	95	— 0,7727	176
0,50	— 0,123		— 1,137		0,5070		— 0,630		0,4930		— 0,7551	

x	$Ei(x)$		$Ei(-x)$		𝔖i (x)		ℭi (x)		$Si(x)$		$Ci(x)$	
0,50	– 0,123	33	– 1,137	12	0,5070	104	– 0,630	22	0,4930	96	– 0,7551	174
0,51	– 0,090	32	– 1,125	12	0,5174	104	– 0,608	22	0,5026	96	– 0,7377	169
0,52	– 0,058	32	– 1,113	11	0,5278	105	– 0,586	22	0,5122	95	– 0,7208	165
0,53	– 0,026	20	– 1,102	11	0,5383	105	– 0,564	21	0,5217	95	– 0,7043	161
0,54	0,006	32	– 1,091	10	0,5488	105	– 0,543	21	0,5312	95	– 0,6882	157
0,55	0,038	32	– 1,081	11	0,5593	104	– 0,522	22	0,5407	96	– 0,6725	153
0,56	0,070	31	– 1,070	10	0,5697	106	– 0,500	20	0,5503	94	– 0,6572	149
0,57	0,101	31	– 1,060	10	0,5803	105	– 0,480	21	0,5597	95	– 0,6423	146
0,58	0,132	30	– 1,050	9	0,5908	106	– 0,459	19	0,5692	94	– 0,6277	143
0,59	0,162	31	– 1,041	9	0,6014	106	– 0,440	20	0,5786	94	– 0,6134	139
0,60	0,193	30	– 1,032	9	0,6120	107	– 0,420	20	0,5880	95	– 0,5995	136
0,61	0,223	30	– 1,023	9	0,6227	106	– 0,400	19	0,5975	94	– 0,5859	133
0,62	0,253	30	– 1,014	9	0,6333	107	– 0,381	20	0,6069	93	– 0,5726	130
0,63	0,283	30	– 1,005	8	0,6440	108	– 0,361	19	0,6162	94	– 0,5596	126
0,64	0,313	30	– 0,997	8	0,6548	107	– 0,342	18	0,6256	93	– 0,5470	124
0,65	0,342	30	– 0,989	8	0,6655	108	– 0,324	19	0,6349	93	– 0,5346	121
0,66	0,372	29	– 0,981	8	0,6763	106	– 0,305	19	0,6442	93	– 0,5225	119
0,67	0,401	29	– 0,973	7	0,6869	104	– 0,286	18	0,6535	92	– 0,5106	115
0,68	0,430	29	– 0,966	8	0,6973	113	– 0,268	18	0,6627	93	– 0,4991	113
0,69	0,459	29	– 0,958	7	0,7086	108	– 0,250	18	0,6720	92	– 0,4878	111
0,70	0,488	28	– 0,951	7	0,7194	108	– 0,232	18	0,6812	92	– 0,4767	108
0,71	0,516	29	– 0,944	7	0,7302	109	– 0,214	18	0,6904	93	– 0,4659	106
0,72	0,545	29	– 0,937	7	0,7411	110	– 0,196	18	0,6997	92	– 0,4553	103
0,73	0,574	28	– 0,930	6	0,7521	109	– 0,178	17	0,7089	91	– 0,4450	101
0,74	0,602	28	– 0,924	7	0,7630	110	– 0,161	17	0,7180	90	– 0,4349	98
0,75	0,630	28	– 0,917	6	0,7740	110	– 0,144	17	0,7270	92	– 0,4251	97
0,76	0,658	28	– 0,911	6	0,7850	110	– 0,127	17	0,7362	90	– 0,4154	94
0,77	0,686	28	– 0,905	6	0,7960	110	– 0,110	17	0,7452	90	– 0,4060	93
0,78	0,714	28	– 0,899	5	0,8070	111	– 0,093	17	0,7542	90	– 0,3967	90
0,79	0,742	28	– 0,894	6	0,8181	111	– 0,076	17	0,7632	90	– 0,3877	88
0,80	0,770	28	– 0,888	6	0,8292	110	– 0,059	17	0,7722	90	– 0,3789	86
0,81	0,798	28	– 0,882	5	0,8402	112	– 0,042	16	0,7812	90	– 0,3703	84
0,82	0,826	27	– 0,877	5	0,8514	112	– 0,026	16	0,7902	88	– 0,3619	82
0,83	0,853	28	– 0,872	6	0,8626	112	– 0,010	17	0,7990	88	– 0,3537	81
0,84	0,881	28	– 0,866	5	0,8738	113	0,007	17	0,8078	89	– 0,3456	78
0,85	0,909	27	– 0,861	5	0,8851	112	0,024	16	0,8167	88	– 0,3378	77
0,86	0,936	28	– 0,856	5	0,8963	114	0,040	17	0,8255	88	– 0,3301	75
0,87	0,964	27	– 0,851	4	0,9077	112	0,057	15	0,8343	88	– 0,3226	73
0,88	0,991	27	– 0,847	5	0,9189	113	0,072	16	0,8431	87	– 0,3153	72
0,89	1,018	28	– 0,842	5	0,9302	115	0,088	17	0,8518	87	– 0,3081	70
0,90	1,046	27	– 0,837	4	0,9417		0,105	15	0,8605	86	– 0,3011	68
0,91	1,073	27	– 0,833	4	0,9531	114	0,120	16	0,8691	87	– 0,2943	67
0,92	1,100	28	– 0,829	5	0,9645	115	0,136	16	0,8778	87	– 0,2876	65
0,93	1,128	27	– 0,824	4	0,9760	114	0,152	16	0,8805	85	– 0,2811	63
0,94	1,155	27	– 0,820	4	0,9874	116	0,168	15	0,8950	86	– 0,2748	62
0,95	1,182	27	– 0,816	4	0,9990	120	0,183	16	0,9036	86	– 0,2686	61
0,96	1,209	27	– 0,812	4	1,011	11	0,199	15	0,9122	84	– 0,2625	59
0,97	1,236	28	– 0,808	4	1,022	12	0,214	16	0,9206	86	– 0,2566	57
0,98	1,264	27	– 0,804	4	1,034	12	0,230	16	0,9292	85	– 0,2509	56
0,99	1,291	27	– 0,800	3	1,046	12	0,246	15	0,9377	83	– 0,2453	55
1,00	1,318		– 0,797		1,058		0,261		0,9460		– 0,2398	

x	$Ei(x)$		$Ei(-x)$		$\mathfrak{S}i(x)$		$\mathfrak{C}i(x)$		$Si(x)$		$Ci(x)$	
1,00	1,318	27	−0,797	4	1,058	12	0,261	15	0,9460	85	−0,2398	52
1,01	1,345	27	−0,793	4	1,070	12	0,276	15	0,9545	84	−0,2346	51
1,02	1,372	28	−0,789	4	1,082	11	0,291	16	0,9629	83	−0,2295	50
1,03	1,400	27	−0,785	3	1,093	12	0,307	15	0,9712	84	−0,2245	50
1,04	1,427	27	−0,782	3	1,105	12	0,322	15	0,9796	81	−0,2195	49
1,05	1,454	27	−0,779	3	1,117	12	0,337	15	0,9877	84	−0,2146	47
1,06	1,481	27	−0,776	3	1,129	12	0,352	16	0,9961	79	−0,2099	46
1,07	1,508	28	−0,773	4	1,141	12	0,368	15	1,004	7	−0,2053	45
1,08	1,536	27	−0,769	3	1,153	12	0,383	16	1,013	8	−0,2008	43
1,09	1,563	27	−0,766	3	1,165	12	0,399	15	1,021	8	−0,1965	42
1,10	1,590	27	−0,763	3	1,177	12	0,414	15	1,029	8	−0,1923	41
1,11	1,617	28	−0,760	3	1,189	12	0,429	15	1,037	8	−0,1882	39
1,12	1,645	27	−0,757	2	1,201	13	0,444	15	1,045	8	−0,1843	38
1,13	1,672	28	−0,755	3	1,214	12	0,459	15	1,053	8	−0,1805	37
1,14	1,700	27	−0,752	3	1,226	12	0,474	15	1,061	8	−0,1768	36
1,15	1,727	28	−0,749	3	1,238	12	0,489	15	1,069	8	−0,1732	35
1,16	1,755	27	−0,746	3	1,250	13	0,504	15	1,077	8	−0,1697	34
1,17	1,782	28	−0,743	3	1,263	12	0,519	16	1,085	7	−0,1663	33
1,18	1,810	27	−0,740	2	1,275	13	0,535	15	1,092	8	−0,1630	32
1,19	1,837	28	−0,738	2	1,288	12	0,550	15	1,100	8	−0,1598	31
1,20	1,865	28	−0,736	3	1,300	13	0,565	15	1,108	8	−0,1567	30
1,21	1,893	28	−0,733	3	1,313	13	0,580	15	1,116	7	−0,1537	29
1,22	1,921	27	−0,730	2	1,326	12	0,595	15	1,123	8	−0,1508	27
1,23	1,948	28	−0,728	2	1,338	13	0,610	15	1,131	7	−0,1481	26
1,24	1,976	28	−0,726	2	1,351	13	0,625	15	1,138	8	−0,1455	25
1,25	2,004	28	−0,724	3	1,364	13	0,640	15	1,146	8	−0,1430	25
1,26	2,032	28	−0,721	2	1,377	13	0,655	15	1,154	7	−0,1405	24
1,27	2,060	28	−0,719	2	1,390	13	0,670	16	1,161	8	−0,1381	23
1,28	2,088	28	−0,717	2	1,403	13	0,686	15	1,169	7	−0,1358	22
1,29	2,116	28	−0,715	2	1,416	13	0,701	15	1,176	8	−0,1396	21
1,30	2,144	28	−0,713	2	1,429	13	0,716	15	1,184	7	−0,1315	21
1,31	2,172	29	−0,711	2	1,442	13	0,731	15	1,191	8	−0,1294	20
1,32	2,201	28	−0,709	2	1,455	13	0,746	16	1,199	7	−0,1274	18
1,33	2,229	29	−0,707	2	1,468	13	0,762	14	1,206	8	−0,1256	17
1,34	2,258	28	−0,705	2	1,481	13	0,776	16	1,214	7	−0,1239	17
1,35	2,286	29	−0,703	2	1,494	14	0,792	15	1,221	7	−0,1222	16
1,36	2,315	29	−0,701	2	1,508	13	0,807	15	1,228	7	−0,1206	15
1,37	2,344	28	−0,699	2	1,521	14	0,822	16	1,235	7	−0,1191	14
1,38	2,372	29	−0,697	2	1,535	13	0,838	15	1,242	7	−0,1177	13
1,39	2,401	29	−0,695	2	1,548	14	0,853	15	1,249	7	−0,1164	12
1,40	2,430	29	−0,693	2	1,562	14	0,868	15	1,256	7	−0,1152	12
1,41	2,459	29	−0,691	2	1,576	13	0,883	15	1,263	7	−0,1140	11
1,42	2,488	30	−0,689	2	1,589	14	0,898	16	1,270	7	−0,1129	10
1,43	2,518	29	−0,687	1	1,603	13	0,914	16	1,277	7	−0,1119	9
1,44	2,547	29	−0,686	1	1,616	14	0,930	15	1,284	7	−0,1110	9
1,45	2,576	30	−0,685	2	1,630	14	0,945	16	1,291	7	−0,1101	8
1,46	2,606	29	−0,683	1	1,644	14	0,961	16	1,298	7	−0,1093	7
1,47	2,635	30	−0,682	2	1,658	15	0,977	15	1,305	6	−0,1086	7
1,48	2,665	29	−0,680	1	1,673	14	0,992	16	1,311	7	−0,1079	6
1,49	2,694	30	−0,679	2	1,687	14	1,008	16	1,318	7	−0,1073	5
1,50	2,724		−0,677		1,701		1,024		1,325		−0,1068	

x	$Ei(x)$		$Ei(-x)$		$\mathfrak{Si}(x)$		$\mathfrak{Ci}(x)$		$Si(x)$		$Ci(x)$	
1,50	2,724	30	− 0,677	2	1,701	14	1,024	15	1,325	7	− 0,1068	4
1,51	2,754	30	− 0,675	1	1,715	14	1,039	16	1,332	6	− 0,1064	4
1,52	2,784	31	− 0,674	2	1,729	14	1,055	15	1,338	7	− 0,1060	3
1,53	2,815	30	− 0,672	1	1,743	14	1,070	16	1,345	6	− 0,1057	2
1,54	2,845	30	− 0,671	1	1,757	15	1,086	16	1,351	7	− 0,1055	1
1,55	2,875	30	− 0,670	2	1,772	15	1,102	16	1,358	6	− 0,1054	1
1,56	2,905	31	− 0,668	1	1,787	14	1,118	16	1,364	6	− 0,1053	0
1,57	2,936	30	− 0,667	1	1,801	15	1,134	16	1,370	7	− 0,1053	0
1,58	2,966	31	− 0,666	1	1,816	15	1,150	16	1,377	6	− 0,1053	1
1,59	2,997	31	− 0,665	1	1,831	15	1,166	16	1,383	6	− 0,1054	1
1,60	3,028	31	− 0,664	2	1,846	15	1,182	16	1,389	6	− 0,1055	2
1,61	3,059	31	− 0,662	1	1,861	15	1,198	16	1,395	6	− 0,1057	2
1,62	3,090	31	− 0,661	2	1,876	15	1,214	16	1,401	6	− 0,1059	3
1,63	3,121	31	− 0,659	1	1,891	15	1,230	17	1,407	6	− 0,1062	5
1,64	3,152	32	− 0,658	1	1,906	15	1,247	16	1,413	7	− 0,1067	5
1,65	3,184	32	− 0,657	1	1,921	15	1,263	16	1,420	6	− 0,1072	5
1,66	3,216	32	− 0,656	1	1,936	15	1,279	17	1,426	6	− 0,1077	6
1,67	3,248	32	− 0,655	1	1,951	16	1,296	16	1,432	6	− 0,1083	6
1,68	3,280	32	− 0,654	1	1,967	15	1,312	17	1,438	6	− 0,1089	6
1,69	3,312	32	− 0,653	1	1,982	16	1,329	17	1,444	6	− 0,1095	7
1,70	3,344	32	− 0,652	1	1,998	16	1,346	17	1,450	6	− 0,1102	7
1,71	3,376	33	− 0,651	1	2,014	16	1,363	17	1,456	5	− 0,1109	8
1,72	3,409	32	− 0,650	1	2,030	15	1,380	16	1,461	6	− 0,1117	9
1,73	3,441	33	− 0,649	1	2,045	16	1,396	17	1,467	5	− 0,1126	10
1,74	3,474	32	− 0,648	1	2,061	16	1,413	17	1,472	6	− 0,1136	11
1,75	3,506	33	− 0,647	1	2,077	16	1,430	17	1,478	6	− 0,1147	10
1,76	3,539	34	− 0,646	1	2,093	16	1,447	16	1,484	5	− 0,1157	11
1,77	3,573	33	− 0,645	1	2,109	16	1,463	17	1,489	6	− 0,1168	11
1,78	3,606	34	− 0,644	1	2,125	16	1,480	17	1,495	5	− 0,1179	12
1,79	3,640	33	− 0,643	1	2,141	16	1,497	18	1,500	6	− 0,1191	13
1,80	3,673	34	− 0,642	1	2,157	16	1,515	17	1,506	5	− 0,1204	13
1,81	3,707	34	− 0,641	1	2,173	16	1,532	17	1,511	5	− 0,1217	13
1,82	3,741	34	− 0,640	1	2,189	17	1,549	18	1,516	6	− 0,1230	14
1,83	3,775	34	− 0,639	1	2,206	17	1,567	18	1,522	5	− 0,1244	15
1,84	3,809	34	− 0,638	0	2,223	17	1,585	18	1,527	6	− 0,1259	15
1,85	3,843	34	− 0,638	1	2,240	17	1,603	18	1,533	5	− 0,1274	15
1,86	3,877	35	− 0,637	1	2,257	17	1,621	18	1,538	5	− 0,1289	15
1,87	3,912	35	− 0,636	1	2,274	17	1,639	17	1,543	5	− 0,1304	16
1,88	3,947	35	− 0,635	0	2,291	17	1,656	18	1,548	5	− 0,1320	16
1,89	3,982	35	− 0,635	1	2,308	17	1,674	18	1,553	5	− 0,1336	17
1,90	4,017	35	− 0,634	1	2,325	17	1,692	18	1,558	5	− 0,1353	17
1,91	4,042	35	− 0,633	1	2,342	17	1,710	18	1,563	5	− 0,1370	17
1,92	4,077	36	− 0,632	1	2,359	17	1,728	18	1,568	4	− 0,1387	18
1,93	4,113	35	− 0,631	0	2,376	18	1,746	18	1,572	5	− 0,1405	19
1,94	4,148	36	− 0,631	1	2,394	18	1,764	19	1,577	5	− 0,1424	19
1,95	4,194	36	− 0,630	1	2,412	18	1,783	18	1,582	5	− 0,1443	19
1,96	4,230	37	− 0,629	1	2,430	18	1,801	18	1,587	4	− 0,1462	20
1,97	4,267	36	− 0,628	0	2,448	18	1,819	19	1,591	5	− 0,1482	20
1,98	4,303	37	− 0,628	1	2,466	18	1,838	19	1,596	4	− 0,1502	20
1,99	4,340	37	− 0,627	1	2,484	18	1,857	19	1,600	5	− 0,1522	20
2,00	4,377		− 0,626		2,502		1,876		1,605		− 0,1542	

x	$Ei(x)$		$Ei(-x)$		$\mathfrak{S}\mathrm{i}(x)$		$\mathfrak{C}\mathrm{i}(x)$		$Si(x)$		$Ci(x)$	
2,00	4,377	37	– 0,626	1	2,502	18	1,876	19	1,605	5	– 0,1542	21
2,01	4,414	37	– 0,625	1	2,520	18	1,895	19	1,610	4	– 0,1563	22
2,02	4,451	37	– 0,624	0	2,538	20	1,914	19	1,614	4	– 0,1585	22
2,03	4,488	38	– 0,624	1	2,558	18	1,933	19	1,618	5	– 0,1607	22
2,04	4,526	38	– 0,623	0	2,576	18	1,952	19	1,623	5	– 0,1629	22
2,05	4,564	38	– 0,623	1	2,594	19	1,971	19	1,628	4	– 0,1651	22
2,06	4,602	38	– 0,622	0	2,613	19	1,990	19	1,632	4	– 0,1673	23
2,07	4,640	38	– 0,622	1	2,632	18	2,009	20	1,636	5	– 0,1696	23
2,08	4,678	39	– 0,621	1	2,650	19	2,029	19	1,641	4	– 0,1719	24
2,09	4,717	39	– 0,620	1	2,669	19	2,048	20	1,645	4	– 0,1743	24
2,10	4,756	39	– 0,619	0	2,688	19	2,068	20	1,649	4	– 0,1767	24
2,11	4,795	39	– 0,619	0	2,707	19	2,088	20	1,653	4	– 0,1791	24
2,12	4,834	39	– 0,619	1	2,726	20	2,108	20	1,657	4	– 0,1815	25
2,13	4,873	40	– 0,618	0	2,746	20	2,128	20	1,661	4	– 0,1840	25
2,14	4,913	40	– 0,618	1	2,766	19	2,148	20	1,665	4	– 0,1865	26
2,15	4,953	40	– 0,617	1	2,785	20	2,168	20	1,669	4	– 0,1891	26
2,16	4,993	40	– 0,616	0	2,805	20	2,188	21	1,673	4	– 0,1917	26
2,17	5,033	40	– 0,616	1	2,825	20	2,209	20	1,677	4	– 0,1943	26
2,18	5,073	41	– 0,615	0	2,845	20	2,229	21	1,681	3	– 0,1969	26
2,19	5,114	41	– 0,615	1	2,865	20	2,250	21	1,684	4	– 0,1995	26
2,20	5,155	41	– 0,614	0	2,885	20	2,271	21	1,688	3	– 0,2021	27
2,21	5,196	41	– 0,614	1	2,905	21	2,292	21	1,691	4	– 0,2048	27
2,22	5,237	42	– 0,613	0	2,926	20	2,313	21	1,695	3	– 0,2075	27
2,23	5,279	42	– 0,613	1	2,946	21	2,334	21	1,698	4	– 0,2102	28
2,24	5,321	42	– 0,612	0	2,967	21	2,355	21	1,702	3	– 0,2130	28
2,25	5,363	42	– 0,612	1	2,988	21	2,376	21	1,705	3	– 0,2158	28
2,26	5,405	43	– 0,611	0	3,009	21	2,397	22	1,708	4	– 0,2186	28
2,27	5,448	43	– 0,611	0	3,030	21	2,419	21	1,712	3	– 0,2214	28
2,28	5,491	43	– 0,611	1	3,051	21	2,440	22	1,715	4	– 0,2242	29
2,29	5,534	43	– 0,610	0	3,072	22	2,462	22	1,719	3	– 0,2271	29
2,30	5,577	44	– 0,610	1	3,094	21	2,484	22	1,722	3	– 0,2300	29
2,31	5,621	44	– 0,609	0	3,115	22	2,506	22	1,725	3	– 0,2329	29
2,32	5,665	44	– 0,609	1	3,137	22	2,528	23	1,728	4	– 0,2358	29
2,33	5,709	44	– 0,608	0	3,159	22	2,551	22	1,732	3	– 0,2387	30
2,34	5,753	44	– 0,608	0	3,181	22	2,573	22	1,735	3	– 0,2417	31
2,35	5,797	45	– 0,608	1	3,203	22	2,595	22	1,738	3	– 0,2448	30
2,36	5,842	45	– 0,607	0	3,225	22	2,617	23	1,741	3	– 0,2478	30
2,37	5,887	45	– 0,607	1	0,247	23	2,640	23	1,744	3	– 0,2508	30
2,38	5,932	46	– 0,606	0	3,270	22	2,663	23	1,747	3	– 0,2538	30
2,39	5,978	46	– 0,606	0	3,292	23	2,686	23	1,750	3	– 0,2568	31
2,40	6,024	46	– 0,606	1	3,315	23	2,709	25	1,753	3	– 0,2599	31
2,41	6,070	46	– 0 605	0	3,338	23	2,734	23	1,756	2	– 0,2630	31
2,42	6,116	46	– 0,605	0	3,361	23	2,757	23	1,758	3	– 0,2661	31
2,43	6,162	47	– 0,605	1	3,384	23	2,780	23	1,761	2	– 0,2692	31
2,44	6,209	47	– 0,604	0	3,407	23	2,803	23	1,763	3	– 0,2723	32
2,45	6,256	48	– 0,604	1	3,430	23	2,826	24	1,766	2	– 0,2755	31
2,46	6,304	48	– 0,603	0	3,453	24	2,850	24	1,768	3	– 0,2786	32
2,47	6,352	48	– 0,603	0	3,477	24	2,874	24	1,771	3	– 0,2818	32
2,48	6,400	48	– 0,603	1	3,501	24	2,898	24	1,774	2	– 0,2850	31
2,49	6,448	49	– 0,602	0	3,525	24	2,922	25	1,776	3	– 0,2881	32
2,50	6,497		– 0,602		3,549		2,947		1,779		– 0,2913	

x	$Ei(x)$		$Ei(-x)$		$\mathfrak{S}\mathrm{i}(x)$		$\mathfrak{C}\mathrm{i}(x)$		$Si(x)$		$Ci(x)$	
2,50	6,497	49	– 0,602	0	3,549	24	2,947	25	1,779	2	– 0,2913	32
2,51	6,546	49	– 0,602	1	3,573	24	2,972	25	1,781	2	– 0,2945	32
2,52	6,595	49	– 0,601	0	3,597	25	2,997	25	1,783	2	– 0,2977	33
2,53	6,644	50	– 0,601	0	3,622	24	3,022	25	1,785	2	– 0,3010	32
2,54	6,694	50	– 0,601	0	3,646	25	3,047	25	1,787	3	– 0,3042	33
2,55	6,744	51	– 0,601	1	3,671	25	3,072	25	1,790	2	– 0,3075	32
3,56	6,795	51	– 0,600	1	3,696	26	3,097	26	1,792	2	– 0,3107	33
2,57	6,846	51	– 0,599	0	3,722	25	3,123	25	1,794	2	– 0,3140	33
2,58	6,897	51	– 0,599	0	3,747	26	3,148	26	1,796	2	– 0,3173	33
2,59	6,948	51	– 0,599	0	3,773	26	3,174	26	1,798	2	– 0,3206	33
2,60	6,999	52	– 0,599	0	3,799	26	3,200	26	1,800	2	– 0,3239	33
2,61	7,051	52	– 0,599	0	3,825	26	3,226	26	1,802	2	– 0,3272	33
2,62	7,103	53	– 0,599	1	3,851	26	3,252	27	1,804	2	– 0,3305	33
2,63	7,156	53	– 0,598	0	3,877	26	3,279	26	1,806	2	– 0,3338	33
2,64	7,209	53	– 0,598	0	3,903	27	3,305	27	1,808	2	– 0,3371	33
2,65	7,262	53	– 0,598	0	3,930	27	3,332	27	1,810	1	– 0,3404	33
2,66	7,315	54	– 0,598	1	3,957	27	3,359	27	1,811	2	– 0,3437	33
2,67	7,369	54	– 0,597	0	3,984	27	3,386	27	1,813	1	– 0,3470	34
2,68	7,423	55	– 0,597	0	4,011	27	3,413	27	1,814	2	– 0,3504	33
2,69	7,478	55	– 0,597	1	4,038	27	3,440	28	1,816	2	– 0,3537	34
2,70	7,533	55	– 0,596	0	4,065	27	3,468	28	1,818	1	– 0,3571	33
2,71	7,588	56	– 0,596	0	4,092	28	3,496	28	1,819	2	– 0,3604	34
2,72	7,644	56	– 0,596	0	4,120	28	3,524	28	1,821	1	– 0,3638	33
2,73	7,700	56	– 0,596	1	4,148	28	3,552	28	1,822	2	– 0,3671	34
2,74	7,756	57	– 0,595	0	4,176	28	3,580	29	1,824	2	– 0,3705	34
2,75	7,813	57	– 0,595	0	4,204	28	3,609	29	1,826	1	– 0,3739	33
2,76	7,870	57	– 0,595	0	4,232	29	3,638	29	1,827	1	– 0,3772	34
2,77	7,927	58	– 0,595	0	4,261	29	3,667	29	1,828	1	– 0,3806	33
2,78	7,985	58	– 0,595	1	4,290	29	3,696	29	1,829	1	– 0,3839	34
2,79	8,043	59	– 0,594	0	4,319	29	3,725	29	1,830	2	– 0,3873	34
2,80	8,102	59	– 0,594	0	4,348	29	3,754	30	1,832	1	– 0,3907	33
2,81	8,161	59	– 0,594	0	4,377	30	3,784	30	1,833	1	– 0,3940	34
2,82	8,220	60	– 0,594	1	4,407	30	3,814	30	1,834	2	– 0,3974	33
2,83	8,280	60	– 0,593	0	4,437	30	3,844	30	1,836	1	– 0,4007	34
2,84	8,340	60	– 0,593	0	4,467	30	3,874	30	1,837	1	– 0,4041	34
2,85	8,400	61	– 0,593	0	4,497	30	3,904	30	1,838	1	– 0,4075	33
2,86	8,461	61	– 0,593	0	4,527	31	3,934	31	1,839	1	– 0,4108	34
2,87	8,522	62	– 0,593	1	4,558	30	3,965	31	1,840	1	– 0,4142	33
2,88	8,584	62	– 0,592	0	4,588	31	3,996	31	1,841	0	– 0,4175	34
2,89	8,646	63	– 0,592	0	4,619	31	4,027	31	1,841	1	– 0,4209	34
2,90	8,709	63	– 0,592	0	4,650	31	4,058	32	1,842	0	– 0,4243	33
2,91	8,772	63	– 0,592	0	4,681	32	4,090	32	1,842	1	– 0,4276	34
2,92	8,835	64	– 0,592	1	4,713	32	4,122	32	1,843	1	– 0,4310	33
2,93	8,899	64	– 0,591	0	4,745	32	4,154	32	1,844	1	– 0,4343	33
2,94	8,963	64	– 0,591	0	4,777	32	4,186	32	1,845	1	– 0,4376	34
2,95	9,027	66	– 0,591	0	4,809	32	4,218	33	1,846	1	– 0,4410	33
2,96	9,093	65	– 0,591	0	4,841	33	4,251	33	1,847	0	– 0,4443	34
2,97	9,158	66	– 0,591	0	4,874	33	4,284	33	1,847	1	– 0,4477	33
2,98	9,224	66	– 0,591	1	4,907	33	4,317	33	1,848	0	– 0,4510	33
2,99	9,290	67	– 0,590	0	4,940	33	4,350	33	1,848	1	– 0,4543	33
3,00	9,357		– 0,590		4,973		4,383		1,849		– 0,4576	

x	$Ei(x)$		$Ei(-x)$		$\mathfrak{Si}(x)$		$\mathfrak{Ci}(x)$		$Si(x)$		$Ci(x)$	
3,00	9,357	67	− 0,590	0	4,973	34	4,383	34	1,849	0	− 0,4576	33
3,01	9,424	68	− 0,590	1	5,007	34	4,417	34	1,849	0	− 0,4609	33
3,02	9,492	68	− 0,589	0	5,041	34	4,451	34	1,849	0	− 0,4642	33
3,03	9,560	68	− 0,589	0	5,075	34	4,485	34	1,849	1	− 0,4675	33
3,04	9,638	69	− 0,589	0	5,109	34	4,519	35	1,850	1	− 0,4708	32
3,05	9,697	69	− 0,589	0	5,143	35	4,554	35	1,851	0	− 0,4740	33
3,06	9,766	70	− 0,589	0	5,178	35	4,589	35	1,851	0	− 0,4773	33
3,07	9,836	70	− 0,589	0	5,213	35	4,624	35	1,851	0	− 0,4806	32
3,08	9,906	71	− 0,589	0	5,248	35	4,659	35	1,851	0	− 0,4838	32
3,09	9,977	73	− 0,589	0	5,283	36	4,694	36	1,851	1	− 0,4870	32
3,10	10,05	7	− 0,589	0	5,319	36	4,730	36	1,852	0	− 0,4902	31
3,11	10,12	7	− 0,589	1	5,355	36	4,766	37	1,852	0	− 0,4933	34
3,12	10,19	7	− 0,588	0	5,391	37	4,803	36	1,852	0	− 0,4967	32
3,13	10,26	8	− 0,588	0	5,428	36	4,839	37	1,852	0	− 0,4999	32
3,14	10,34	7	− 0,588	0	5,464	37	4,876	37	1,852	0	− 0,5031	32
3,15	10,41	7	− 0,588	0	5,501	37	4,913	37	1,852	0	− 0,5063	32
3,16	10,48	8	− 0,588	0	5,538	38	4,950	38	1,852	0	− 0,5095	31
3,17	10,56	7	− 0,588	0	5,576	37	4,988	37	1,852	0	− 0,5126	31
3,18	10,63	8	− 0,588	1	5,613	38	5,025	38	1,852	0	− 0,5157	31
3,19	10,71	8	− 0,587	0	5,651	38	5,063	38	1,852	1	− 0,5188	32
3,20	10,79	8	− 0,587	0	5,689	38	5,101	39	1,851	0	− 0,5220	31
3,21	10,87	7	− 0,587	0	5,727	39	5,140	39	1,851	0	− 0,5251	31
3,22	10,94	8	− 0,587	0	5,766	39	5,179	39	1,851	0	− 0,5282	31
3,23	11,02	8	− 0,587	0	5,805	39	5,218	39	1,851	1	− 0,5313	31
3,24	11,10	8	− 0,587	0	5,844	39	5,257	40	1,850	0	− 0,5344	31
3,25	11,18	8	− 0,587	0	5,883	40	5,297	40	1,850	1	− 0,5375	30
3,26	11,26	8	− 0,587	1	5,923	40	5,337	40	1,849	0	− 0,5405	30
3,27	11,34	8	− 0,586	0	5,963	41	5,377	41	1,849	0	− 0,5435	30
3,28	11,42	8	− 0,586	0	6,004	40	5,418	40	1,849	0	− 0,5465	30
3,29	11,50	8	− 0,586	0	6,044	41	5,458	41	1,849	1	− 0,5495	30
3,30	11,58	9	− 0,586	0	6,085	41	5,499	41	1,848	0	− 0,5525	30
3,31	11,67	8	− 0,586	0	6,126	42	5,540	42	1,848	1	− 0,5555	30
3,32	11,75	8	− 0,586	0	6,168	42	5,582	42	1,847	1	− 0,5585	30
3,33	11,83	9	− 0,586	0	6,210	42	5,624	42	1,846	0	− 0,5615	29
3,34	11,92	8	− 0,586	0	6,252	42	5,666	42	1,846	1	− 0,5644	29
3,35	12,00	9	− 0,586	0	6,294	43	5,708	43	1,845	0	− 0,5673	29
3,36	12,09	8	− 0,586	1	6,337	43	5,751	43	1,845	1	− 0,5702	29
3,37	12,17	9	− 0,585	0	6,380	43	5,794	44	1,844	1	− 0,5731	29
3,38	12,26	9	− 0,585	0	6,423	43	5,838	43	1,843	0	− 0,5760	29
3,39	12,35	8	− 0,585	0	6,466	44	5,881	44	1,843	1	− 0,5789	28
3,40	12,43	9	− 0,585	0	6,510	44	5,925	44	1,842	1	− 0,5817	28
3,41	12,52	9	− 0,585	0	6,554	45	5,969	45	1,841	1	− 0,5845	28
3,42	12,61	10	− 0,585	0	6,599	45	6,014	45	1,840	1	− 0,5873	28
3,43	12,71	9	− 0,585	0	6,644	45	6,059	45	1,839	0	− 0,5901	28
3,44	12,80	8	− 0,585	0	6,689	45	6,104	45	1,839	1	− 0,5929	28
3,45	12,88	9	− 0,585	0	6,734	46	6,149	46	1,838	1	− 0,5957	28
3,46	12,97	9	− 0,585	1	6,780	46	6,195	47	1,837	1	− 0,5985	27
3,47	13,06	10	− 0,584	0	6,826	47	6,242	46	1,836	1	− 0,6012	27
3,48	13,16	9	− 0,584	0	6,873	46	6,288	47	1,835	1	− 0,6039	27
3,49	13,25	10	− 0,584	0	6,919	47	6,335	47	1,834	1	− 0,6066	27
3,50	13,35		− 0,584		6,966		6,382		1,833		− 0,6093	

x	$Ei(x)$		$Ei(-x)$		$\mathfrak{Si}(x)$		$\mathfrak{Ci}(x)$		$Si(x)$		$Ci(x)$	
3,50	13,35	9	− 0,584	0	6,966	48	6,382	48	1,833	1	− 0,6093	27
3,51	13,44	10	− 0,584	0	7,014	48	6,430	48	1,832	1	− 0,6120	27
3,52	13,54	10	− 0,584	0	7,062	48	6,478	48	1,831	1	− 0,6147	27
3,53	13,64	9	− 0,584	0	7,110	48	6,526	48	1,830	1	− 0,6174	26
3,54	13,73	10	− 0,584	0	7,158	49	6,574	49	1,829	1	− 0,6200	26
3,55	13,83	10	− 0,584	0	7,207	49	6,623	50	1,828	1	− 0,6226	26
3,56	13,93	10	− 0,584	0	7,256	50	6,673	50	1,827	1	− 0,6252	25
3,57	14,03	10	− 0,584	0	7,306	50	6,723	50	1,826	2	− 0,6277	25
3,58	14,13	10	− 0,584	1	7,356	50	6,773	50	1,824	1	− 0,6302	25
3,59	14,23	10	− 0,583	0	7,406	50	6,823	50	1,823	1	− 0,6327	25
3,60	14,33	10	− 0,583	0	7,456	51	6,873	51	1,822	1	− 0,6352	25
3,61	14,43	11	− 0,583	0	6,507	52	6,924	52	1,821	1	− 0,6377	25
3,62	14,54	10	− 0,583	0	7,559	52	6,976	52	1,820	2	− 0,6402	24
3,63	14,64	10	− 0,583	0	7,611	52	7,028	52	1,818	1	− 0,6426	24
3,64	14,74	11	− 0,583	0	7,663	52	7,080	52	1,817	1	− 0,6450	24
3,65	14,85	10	− 0,583	0	7,715	53	7,132	53	1,816	1	− 0,6474	24
3,66	14,95	11	− 0,583	0	7,768	54	7,185	54	1,815	2	− 0,6498	24
3,67	15,06	11	− 0,583	0	7,822	53	7,239	53	1,813	1	− 0,6522	23
3,68	15,17	11	− 0,583	0	7,875	54	7,292	54	1,812	2	− 0,6545	23
3,69	15,28	10	− 0,583	0	7,929	54	7,346	54	1,810	1	− 0,6568	23
3,70	15,38	11	− 0,583	0	7,983	55	7,400	55	1,809	2	− 0,6591	23
3,71	15,49	11	− 0,583	1	8,038	56	7,455	56	1,807	1	− 0,6614	23
3,72	15,60	11	− 0,582	0	8,094	55	7,511	56	1,806	2	− 0,6637	22
3,73	15,71	11	− 0,582	0	8,149	56	7,567	56	1,804	1	− 0,6659	22
3,74	15,82	11	− 0,582	0	8,205	56	7,623	56	1,803	2	− 0,6681	22
3,75	15,93	12	− 0,582	0	8,261	57	7,679	57	1,801	2	− 0,6703	22
3,76	16,05	12	− 0,582	0	8,318	58	7,736	58	1,799	1	− 0,6725	22
3,77	16,17	11	− 0,582	0	8,376	58	7,794	58	1,798	2	− 0,6747	21
3,78	16,28	12	− 0,582	0	8,434	58	7,852	58	1,796	1	− 0,6768	21
3,79	16,40	12	− 0,582	0	8,492	58	7,910	58	1,795	2	− 0,6789	21
3,80	16,52	12	− 0,582	0	8,550	59	7,968	59	1,793	2	− 0,6810	21
3,81	16,64	12	− 0,582	0	8,609	60	8,027	60	1,791	1	− 0,6831	20
3,82	16,76	12	− 0,582	0	8,669	60	8,087	60	1,790	2	− 0,6851	20
3,83	16,88	11	− 0,582	0	8,729	60	8,147	60	1,788	1	− 0,6871	20
3,84	16,99	13	− 0,582	0	8,789	60	8,207	60	1,787	2	− 0,6891	20
3,85	17,12	12	− 0,582	0	8,849	62	8,267	61	1,785	2	− 0,6911	20
3,86	17,24	13	− 0,582	0	8,911	62	8,329	62	1,783	1	− 0,6931	19
3,87	17,37	12	− 0,582	0	8,973	62	8,391	63	1,782	2	− 0,6950	19
3,88	17,49	12	− 0,582	0	9,035	62	8,454	62	1,780	1	− 0,6969	19
3,89	17,61	13	− 0,582	0	9,097	63	8,516	63	1,779	2	− 0,6988	19
3,90	17,74	13	− 0,582	1	9,160	64	8,579	64	1,777	2	− 0,7007	19
3,91	17,87	12	− 0,581	0	9,224	64	8,643	64	1,775	2	− 0,7026	18
3,92	17,99	14	− 0,581	0	9,288	65	8,707	65	1,773	1	− 0,7044	18
3,93	18,13	12	− 0,581	0	9,353	64	8,772	64	1,772	2	− 0,7062	18
3,94	18,25	13	− 0,581	0	9,417	65	8,836	65	1,770	2	− 0,7080	18
3,95	18,38	14	− 0,581	0	9,482	67	8,901	67	1,768	2	− 0,7098	18
3,96	18,52	13	− 0,581	0	9,549	67	8,968	67	1,766	2	− 0,7116	17
3,97	18,65	14	− 0,581	0	9,616	67	9,035	67	1,764	2	− 0,7133	17
3,98	18,79	13	− 0,581	0	9,683	67	9,102	67	1,762	2	− 0,7150	16
3,99	18,92	13	− 0,581	0	9,750	67	9,169	67	1,760	2	− 0,7166	16
4,00	19,05		− 0,581		9,817		9,236		1,758		− 0,7182	

x	$Ei(x)$		$Ei(-x)$		$\mathfrak{Si}(x)$		$\mathfrak{Ci}(x)$		$Si(x)$		$Ci(x)$	
4,00	19,05	14	– 0,581	0	9,817	69	9,236	69	1,758	2	– 0,7182	16
4,01	19,19	14	– 0,581	0	9,886	70	9,305	70	1,756	2	– 0,7198	16
4,02	19,33	14	– 0,581	0	9,956	64	9,375	69	1,754	2	– 0,7214	16
4,03	19,47	14	– 0,581	0	10,02	8	9,444	70	1,752	2	– 0,7230	16
4,04	19,61	14	– 0,581	0	10,10	7	9,514	70	1,750	1	– 0,7246	15
4,05	19,75	14	– 0,581	0	10,17	7	9,584	72	1,749	2	– 0,7261	15
4,06	19,89	14	– 0,581	0	10,24	7	9,656	72	1,747	2	– 0,7276	16
4,07	20,03	15	– 0,581	0	10,31	7	9,728	72	1,745	2	– 0,7292	14
4,08	20,18	14	– 0,581	0	10,38	7	9,800	72	1,743	2	– 0,7306	14
4,09	20,32	15	– 0,581	0	10,45	8	9,872	73	1,741	2	– 0,7320	14
4,10	20,47	15	– 0,581	1	10,53	7	9,945	75	1,739	2	– 0,7334	14
4,11	20,62	15	– 0,580	0	10,60	8	10,02	8	1,737	2	– 0,7348	14
4,12	20,77	15	– 0,580	0	10,68	7	10,10	7	1,735	2	– 0,7362	13
4,13	20,92	15	– 0,580	0	10,75	8	10,17	8	1,733	2	– 0,7375	13
4,14	21,07	15	– 0,580	0	10,83	7	10,25	7	1,731	2	– 0,7388	13
4,15	21,22	15	– 0,580	0	10,90	8	10,32	8	1,729	2	– 0,7401	13
4,16	21,37	16	– 0,580	0	10,98	8	10,40	8	1,727	2	– 0,7414	12
4,17	21,53	15	– 0,580	0	11,06	7	10,48	7	1,725	3	– 0,7426	12
4,18	21,68	16	– 0,580	0	11,13	8	10,55	8	1,722	2	– 0,7438	12
4,19	21,84	16	– 0,580	0	11,21	8	10,63	8	1,720	2	– 0,7450	12
4,20	22,00	16	– 0,580	0	11,29	8	10,71	8	1,718	2	– 0,7462	11
4,21	22,16	16	– 0,580	0	11,37	8	10,79	8	1,716	2	– 0,7473	11
4,22	22,32	16	– 0,580	0	11,45	8	10,87	8	1,714	2	– 0,7484	11
4,23	22,48	16	– 0,580	0	11,53	8	10,95	8	1,712	2	– 0,7495	11
4,24	22,64	17	– 0,580	0	11,61	8	11,03	8	1,710	2	– 0,7506	11
4,25	22,81	16	– 0,580	1	11,69	9	11,11	9	1,708	2	– 0,7517	10
4,26	22,97	17	– 0,579	0	11,78	8	11,20	8	1,706	2	– 0,7527	10
4,27	23,14	17	– 0,579	0	11,86	9	11,28	9	1,704	3	– 0,7537	10
4,28	23,31	17	– 0,579	0	11,95	8	11,37	8	1,701	2	– 0,7547	10
4,29	23,48	17	– 0,579	0	12,03	9	11,45	9	1,699	2	– 0,7557	10
4,30	23,65	17	– 0,579	0	12,12	8	11,54	8	1,697	2	– 0,7567	9
4,31	23,82	17	– 0,579	0	12,20	9	11,62	9	1,695	2	– 0,7576	9
4,32	23,99	18	– 0,579	0	12,29	9	11,71	9	1,693	2	– 0,7585	9
4,33	24,17	17	– 0,579	0	12,38	8	11,80	8	1,691	2	– 0,7594	9
4,34	24,34	18	– 0,579	0	12,46	9	11,88	9	1,689	2	– 0,7603	8
4,35	24,52	18	– 0,579	0	12,55	9	11,97	9	1,687	2	– 0,7611	8
4,36	24,70	18	– 0,579	0	12,64	9	12,06	9	1,685	2	– 0,7619	8
4,37	24,88	18	– 0,579	0	12,73	9	12,15	9	1,683	3	– 0,7627	8
4,38	25,06	18	– 0,579	0	12,82	10	12,24	10	1,680	2	– 0,7635	7
4,39	25,24	19	– 0,579	0	12,92	9	12,34	9	1,678	2	– 0,7642	7
4,40	25,43	18	– 0,579	0	13,01	9	12,43	9	1,676	2	– 0,7649	7
4,41	25,61	19	– 0,579	0	13,10	9	12,52	9	1,674	2	– 0,7656	7
4,42	25,80	19	– 0,579	0	13,19	10	12,61	10	1,672	3	– 0,7663	6
4,43	25,99	19	– 0,579	0	13,29	9	12,71	9	1,669	2	– 0,7669	6
4,44	26,18	19	– 0,579	0	13,38	10	12,80	10	1,667	2	– 0,7675	6
4,45	26,37	19	– 0,579	0	13,48	10	12,90	9	1,665	2	– 0,7681	6
4,46	26,56	20	– 0,579	0	13,58	9	12,99	10	1,663	2	– 0,7687	5
4,47	26,76	20	– 0,579	0	13,67	10	13,09	10	1,661	3	– 0,7692	5
4,48	26,96	20	– 0,579	0	13,77	10	13,19	10	1,658	2	– 0,7697	5
4,49	27,16	20	– 0,579	0	13,87	10	13,29	10	1,656	2	– 0,7702	5
4,50	27,36		– 0,579		13,97		13,39		1,654		– 0,7707	

x	Ei		$Ei(-x)$		$\mathfrak{Si}(x)$		$\mathfrak{Ci}(x)$		$Si(x)$		$Ci(x)$	
4,50	27,36	20	−0,579	0	13,97	10	13,39	10	1,654	2	−0,7707	5
4,51	27,56	21	−0,579	0	14,07	10	13,49	10	1,652	2	−0,7712	4
4,52	27,77	20	−0,579	0	14,17	10	13,59	10	1,650	3	−0,7716	4
4,53	27,97	21	−0,579	0	14,27	10	13,69	10	1,647	2	−0,7720	4
4,54	28,18	20	−0,579	0	14,37	11	13,79	11	1,645	2	−0,7724	3
4,55	28,38	21	−0,579	0	14,48	10	13,90	11	1,643	2	−0,7727	3
4,56	28,59	21	−0,579	0	14,58	11	14,01	10	1,641	3	−0,7730	3
4,57	28,80	21	−0,579	0	14,69	10	14,11	10	1,638	2	−0,7733	3
4,58	29,01	22	−0,579	0	14,79	11	14,21	11	1,636	2	−0,7736	3
4,59	29,23	21	−0,579	0	14,90	11	14,32	11	1,634	2	−0,7739	3
4,60	29,44	22	−0,579	0	15,01	11	14,43	11	1,632	2	−0,7742	2
4,61	29,66	22	−0,579	0	15,12	11	14,54	11	1,630	2	−0,7744	2
4,62	29,88	22	−0,579	0	15,23	11	14,65	11	1,628	2	−0,7746	2
4,63	30,10	22	−0,579	0	15,34	11	14,76	11	1,626	2	−0,7748	2
4,64	30,32	22	−0,579	0	15,45	11	14,87	11	1,624	2	−0,7750	2
4,65	30,54	23	−0,579	0	15,56	11	14,98	11	1,622	2	−0,7752	1
4,66	30,77	23	−0,579	0	15,67	11	15,09	11	1,620	2	−0,7753	1
4,67	31,00	23	−0,579	0	15,78	12	15,20	12	1,618	3	−0,7754	1
4,68	31,23	23	−0,579	0	15,90	11	15,32	11	1,615	2	−0,7755	1
4,69	31,46	23	−0,579	0	16,01	12	15,43	12	1,613	2	−0,7756	0
4,70	31,69	23	−0,579	0	16,13	12	15,55	12	1,611	3	−0,7756	0
4,71	31,92	24	−0,579	0	16,25	12	15,67	12	1,608	2	−0,7756	0
4,72	32,16	24	−0,579	0	16,37	12	15,79	12	1,606	2	−0,7756	0
4,73	32,40	24	−0,579	0	16,49	12	15,91	12	1,604	2	−0,7756	1
4,74	32,64	24	−0,579	0	16,61	12	16,03	12	1,602	2	−0,7755	0
4,75	32,88	24	−0,579	0	16,73	12	16,15	12	1,600	2	−0,7755	1
4,76	33,12	25	−0,579	0	16,85	12	16,27	12	1,598	2	−0,7754	1
4,77	33,37	25	−0,579	0	16,97	13	16,39	13	1,596	2	−0,7753	1
4,78	33,62	25	−0,579	0	17,10	12	16,52	12	1,594	2	−0,7752	2
4,79	33,87	25	−0,579	0	17,22	13	16,64	13	1,592	2	−0,7750	2
4,80	34,12	25	−0,579	0	17,35	12	16,77	13	1,590	2	−0,7748	2
4,81	34,37	26	−0,579	0	17,47	13	16,90	13	1,588	2	−0,7746	2
4,82	34,63	26	−0,579	0	17,60	13	17,03	13	1,586	2	−0,7744	2
4,83	34,89	26	−0,579	0	17,73	13	17,16	13	1,584	2	−0,7742	2
4,84	35,15	26	−0,579	0	17,86	13	17,29	13	1,582	2	−0,7740	3
4,85	35,41	27	−0,579	0	17,99	13	17,42	13	1,580	2	−0,7737	3
4,86	35,68	27	−0,579	0	18,12	14	17,55	13	1,578	2	−0,7734	3
4,87	35,95	27	−0,579	0	18,26	13	17,68	14	1,576	2	−0,7731	3
4,88	36,22	27	−0,579	0	18,39	14	17,82	13	1,574	2	−0,7728	4
4,89	36,49	27	−0,579	0	18,53	14	17,95	14	1,572	2	−0,7724	4
4,90	36,76	27	−0,579	1	18,67	14	18,09	14	1,570	2	−0,7720	4
4,91	37,03	28	−0,578	0	18,81	14	18,23	14	1,568	2	−0,7716	4
4,92	37,31	28	−0,578	0	18,95	14	18,37	14	1,566	2	−0,7712	4
4,93	37,59	28	−0,578	0	19,09	14	18,51	14	1,564	2	−0,7708	4
4,94	37,87	28	−0,578	0	19,23	14	18,65	14	1,562	2	−0,7704	5
4,95	38,15	29	−0,578	0	19,37	14	18,79	14	1,560	2	−0,7699	5
4,96	38,44	29	−0,578	0	19,51	14	18,93	14	1,558	2	−0,7694	5
4,97	38,73	29	−0,578	0	19,65	15	19,07	15	1,556	2	−0,7689	5
4,98	39,02	29	−0,578	0	19,80	14	19,22	14	1,554	2	−0,7684	6
4,99	39,31	30	−0,578	0	19,94	15	19,36	15	1,552	2	−0,7678	6
5,00	39,61		−0,578		20,09		19,51		1,550		−0,7672	

8. Hilfstafeln der Exponential- und Kreisfunktionen.

a

x	$\frac{\pi x}{2}$	$e^{\frac{\pi x}{2}}$	$e^{-\frac{\pi x}{2}}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi x}{2}$
0,001	0,00157	1,0016	$9{,}9843 \cdot 10^{-1}$	0,00157	1,00000
0,002	0,00314	1,0031	$9{,}9687 \cdot 10^{-1}$	0,00314	1,00000
0,003	0,00471	1,0047	$9{,}9531 \cdot 10^{-1}$	0,00471	0,99999
0,004	0,00628	1,0063	$9{,}9375 \cdot 10^{-1}$	0,00628	0,99998
0,005	0,00785	1,0079	$9{,}9218 \cdot 10^{-1}$	0,00785	0,99997
0,006	0,00942	1,0095	$9{,}9063 \cdot 10^{-1}$	0,00942	0,99996
0,007	0,01100	1,0111	$9{,}8906 \cdot 10^{-1}$	0,01100	0,99994
0,008	0,01257	1,0126	$9{,}8752 \cdot 10^{-1}$	0,01257	0,99992
0,009	0,01414	1,0142	$9{,}8596 \cdot 10^{-1}$	0,01414	0,99990
0,010	0,01571	1,0158	$9{,}8441 \cdot 10^{-1}$	0,01571	0,99988

b

x	$2x\pi$	$e^{2\pi x}$	$e^{-2\pi x}$
0	0	1	1
1	6,28319	535,49165 55248	$18{,}67442\ 69709 \cdot 10^{-4}$
2	12,56637	2 86751,31313 6	$34{,}87342\ 23277 \cdot 10^{-7}$
3	18,84956	1535 52935,395	$65{,}12411\ 92443 \cdot 10^{-10}$
4	25,13274	8 22263 15585,4	$0{,}12161\ 55627 \cdot 10^{-10}$
5	31,41593	$44\ 03150\ 58605 \cdot 10^{2}$	$0{,}00022\ 71101 \cdot 10^{-10}$
6	37,69911	$23\ 57850\ 39685 \cdot 10^{5}$	$0{,}00000\ 04241 \cdot 10^{-10}$
7	43,98230	$12\ 62609\ 21249 \cdot 10^{8}$	$0{,}00000\ 00007 \cdot 10^{-10}$
8	50,26548	$67\ 61166\ 97477 \cdot 10^{10}$	$0{,}00000\ 00000 \cdot 10^{-10}$
9	56,54867	$36\ 20548\ 49659 \cdot 10^{13}$	$0{,}00000\ 00000 \cdot 10^{-10}$
10	62,83185	$19\ 38773\ 50834 \cdot 10^{16}$	$0{,}00000\ 00000 \cdot 10^{-10}$

c

x	e^{x}	e^{-x}
1	2,71828	$36787{,}94412 \cdot 10^{-5}$
2	7,38906	13533,52832
3	20,08554	4978,70684
4	54,59815	1831,56389
5	148,41316	673,79470
6	403,42879	247,87522
7	1096,63316	91,18820
8	2980,95799	33,54626
9	8103,08393	12,34098
10	22026,46579	$4{,}53999 \cdot 10^{-5}$
11	59874,14172	$1{,}67017 \cdot 10^{-5}$
12	1 62754,79142	$6{,}14421 \cdot 10^{-6}$
13	4 42413,39201	$2{,}26033 \cdot 10^{-6}$
14	12 02604,28416	$8{,}31529 \cdot 10^{-7}$
15	32 69017,37247	$3{,}05902 \cdot 10^{-7}$
16	88 86110,52051	$1{,}12535 \cdot 10^{-7}$
17	241 54952,75358	$4{,}13994 \cdot 10^{-8}$
18	656 59969,13733	$1{,}52300 \cdot 10^{-8}$
19	1784 82300,96319	$5{,}60280 \cdot 10^{-9}$
20	4851 65195,40979	$2{,}06115 \cdot 10^{-9}$

x	e^x	e^{-x}
21	13188 15734,48321	$7{,}58256 \cdot 10^{-10}$
22	35849 12846,13159	2,78947
23	97448 03446,24890	1,02619
24	2 64891 22129,84347	0,37751
25	7 20048 99337,38587	0,13888
26	19 57296 09428,83876	0,05109
27	53 20482 40601,79862	0,01880
28	144 62570 64291,47517	0,00691
29	393 13342 97144,04207	0,00254
30	1068 64745 81524,46215	0,00094
31	2904 88496 65247,42523	0,00034
32	7896 29601 82680,69516	0,00013
33	21464 35797 85916,06462	0,00005
34	58346 17425 27454,88140	0,00002
35	1 58601 34523 13430,72813	0,00001
36	4 31123 15471 15195,22711	0,00000
37	11 71914 23728 02611,30877	0,00000
38	31 85593 17571 13756,22033	0,00000
39	86 59340 04239 93746,95361	0,00000
40	235 38526 68370 19985,40790	0,00000
41	639 84349 35300 54949,22266	0,00000
42	1739 27494 15205 01047,39468	0,00000
43	4727 83946 82293 46561,47446	0,00000
44	12851 60011 43593 08275,80930	0,00000
45	34934 27105 74850 95348,03480	0,00000
46	94961 19420 60244 88745,13365	0,00000
47	2 58131 28861 90067 39623,28580	0,00000
48	7 01673 59120 97631 73865,47160	0,00000
49	19 07346 57249 50996 90525,09984	0,00000
50	51 84705 52858 70724 64087,45332	$0{,}00000 \cdot 10^{-10}$

9. Tafeln ganzer oder gebrochener Vielfacher von π bzw. $\frac{1}{\pi}$.

x	$\frac{\pi x}{4}$	$\frac{\pi x}{3}$	$\frac{\pi x}{2}$	$\frac{2\pi x}{3}$	$\frac{3\pi x}{4}$	πx	$\frac{5\pi x}{4}$	$\frac{4\pi x}{3}$	$\frac{3\pi x}{2}$	$\frac{7\pi x}{4}$	$2\pi x$
1	0,78540	1,04720	1,57080	2,09440	2,35619	3,14159	3,92699	4,18879	4,71239	5,49779	6,28319
2	1,57080	2,09440	3,14159	4,18879	4,71239	6,28319	7,85398	8,37758	9,42478	10,99557	12,56637
3	2,35619	3,14159	4,71239	6,28319	7,06858	9,42478	11,78097	12,56637	14,13717	16,49336	18,84956
4	3,14159	4,18879	6,28319	8,37758	9,42478	12,56637	15,70796	16,75516	18,84956	21,99115	25,13274
5	3,92699	5,23599	7,85398	10,47198	11,78097	15,70796	19,63495	20,94395	23,56194	27,48894	31,41593
6	4,71239	6,28319	9,42478	12,56637	14,13717	18,84956	23,56194	25,13274	28,27433	32,98672	37,69911
7	5,49779	7,33038	10,99557	14,66077	16,49336	21,99115	27,48893	29,32153	32,98672	38,48451	43,98230
8	6,28319	8,37758	12,56637	16,75516	18,84956	25,13274	31,41593	33,51032	37,69911	43,98230	50,26548
9	7,06858	9,42478	14,13717	18,84956	21,20575	28,27433	35,34292	37,69911	42,41150	49,48008	56,54867
10	7,85398	10,47198	15,70796	20,94395	23,56194	31,41593	39,26990	41,88790	47,12389	54,97787	62,83185
11	8,63938	11,51917	17,27876	23,03835	25,91814	34,55752	43,19689	46,07669	51,83628	60,47566	69,11504
12	9,42478	12,56637	18,84956	25,13274	28,27433	37,69911	47,12389	50,26548	56,54867	65,97344	75,39822
13	10,21018	13,61357	20,42035	27,22714	30,63053	40,84070	51,05087	54,45427	61,26106	71,47123	81,68141
14	10,99557	14,66077	21,99115	29,32153	32,98672	43,98230	54,97787	58,64306	65,97344	76,96902	87,96459
15	11,78097	15,70796	23,56194	31,41593	35,34292	47,12389	58,90485	62,83185	70,68583	82,46681	94,24778
16	12,56637	16,75516	25,13274	33,51032	37,69911	50,26548	62,83185	67,02064	75,39822	87,96459	100,53096
17	13,35177	17,80236	26,70353	35,60472	40,05530	53,40708	66,75883	71,20943	80,11061	93,46238	106,81415
18	14,13717	18,84956	28,27433	37,69911	42,41150	56,54867	70,68583	75,39822	84,82300	98,96017	113,09734
19	14,92257	19,89675	29,84512	39,79351	44,76769	59,69026	74,61283	79,58701	89,53539	104,45795	119,38052
20	15,70796	20,94395	31,41593	41,88790	47,12389	62,83185	78,53982	83,77580	94,24778	109,95574	125,66371

x	$\frac{x}{4\pi}$	$\frac{x}{3\pi}$	$\frac{x}{2\pi}$	$\frac{2x}{3\pi}$	$\frac{3x}{4\pi}$	$\frac{x}{\pi}$	$\frac{5x}{4\pi}$	$\frac{4x}{3\pi}$	$\frac{3x}{2\pi}$	$\frac{7x}{4\pi}$	$\frac{2x}{\pi}$
1	0,07958	0,10610	0,15916	0,21221	0,23873	0,31831	0,39789	0,42441	0,47746	0,55704	0,63662
2	0,15916	0,21221	0,31831	0,42441	0,47746	0,63662	0,79578	0,84883	0,95493	1,11408	1,27324
3	0,23873	0,31831	0,47746	0,63662	0,71620	0,95493	1,19366	1,27324	1,43239	1,67113	1,90986
4	0,31831	0,42441	0,63662	0,84883	0,95493	1,27324	1,59155	1,69765	1,90986	2,22817	2,54648
5	0,39789	0,53052	0,79578	1,06103	1,19366	1,59155	1,98944	2,12207	2,38732	2,78521	3,18310
6	0,47746	0,63662	0,95493	1,27324	1,43239	1,90986	2,38732	2,54648	2,86479	3,34225	3,81972
7	0,55704	0,74272	1,11408	1,48545	1,67113	2,22817	2,78521	2,97089	3,34225	3,89930	4,45634
8	0,63662	0,84883	1,27324	1,69765	1,90986	2,54648	3,18310	3,39530	3,81972	4,45634	5,09296
9	0,71620	0,95493	1,43239	1,90986	2,14859	2,86479	3,58099	3,81972	4,29718	5,01338	5,72958
10	0,79578	1,06103	1,59155	2,12207	2,38732	3,18310	3,97887	4,24413	4,77465	5,57042	6,36620

10. Tafeln häufig vorkommender Fakultäten.

m	$m!$	$1/m!$
2	2	0,5
3	6	0,1666667
4	24	0,0416667
5	120	0,0083333
6	720	0,0013889
7	5040	0,0001984
8	40320	0,00002480
9	362880	0,000002756
10	3628800	0,0000002756

$$\frac{m!}{(m-n)!}$$

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	2	2								
3	3	6	6							
4	4	12	24	24						
5	5	20	60	120	120					
6	6	30	120	360	720	720				
7	7	42	210	840	2520	5040	5040			
8	8	56	336	1680	6720	20160	40320	40320		
9	9	72	504	3024	15120	60480	181440	362880	362880	
10	10	90	720	5040	30240	151200	604800	1814400	3628800	3628800

11. Tafel der Binomialkoeffizienten.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$	$\binom{n}{11}$	$\binom{n}{12}$	$\binom{n}{13}$	$\binom{n}{14}$	$\binom{n}{15}$
1	1	1														
2	1	2	1													
3	1	3	3	1												
4	1	4	6	4	1											
5	1	5	10	10	5	1										
6	1	6	15	20	15	6	1									
7	1	7	21	35	35	21	7	1								
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1							
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1						
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1					
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1				
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1			
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1		
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1

12. Häufig vorkommende Zahlenwerte.

$\sqrt{2} = 1{,}41421\ 35624$	$1/\sqrt{2} = 0{,}70710\ 67812$	$\frac{\pi}{2} = 1{,}57079\ 63268$	$1/\frac{\pi}{2} = 0{,}63661\ 97724$
$\sqrt{3} = 1{,}73205\ 08076$	$1/\sqrt{3} = 0{,}57735\ 02692$	$\pi = 3{,}14159\ 26536$	$1/\pi = 0{,}31830\ 98862$
$\sqrt{5} = 2{,}23606\ 79775$	$1/\sqrt{5} = 0{,}44721\ 35955$	$\pi^2 = 9{,}86960\ 44011$	$1/\pi^2 = 0{,}10132\ 11836$
$\sqrt{6} = 2{,}44948\ 97428$	$1/\sqrt{6} = 0{,}40824\ 82905$	$\pi^3 = 31{,}00627\ 66803$	$1/\pi^3 = 0{,}03225\ 15344$
$\sqrt{7} = 2{,}64575\ 13111$	$1/\sqrt{7} = 0{,}37796\ 44730$	$\pi^4 = 97{,}40909\ 10340$	$1/\pi^4 = 0{,}01026\ 59822$
$\sqrt{10} = 3{,}16227\ 76602$	$\sqrt[3]{2} = 1{,}25992\ 10499$	$\pi^5 = 306{,}01968\ 47853$	$1/\pi^5 = 0{,}00326\ 77636$
$\sqrt[3]{10} = 2{,}15443\ 46900$	$\sqrt[3]{100} = 4{,}64158\ 88336$	$\sqrt{2\pi} = 2{,}50662\ 82746$	$1/\sqrt{2\pi} = 0{,}39894\ 22804$
$\sqrt[4]{10} = 1{,}77827\ 94100$	$\sqrt[8]{10} = 1{,}33352\ 14322$	$\sqrt{\pi} = 1{,}77245\ 38509$	$1/\sqrt{\pi} = 0{,}56418\ 95835$
$\log_e \pi = 1{,}14472\ 98858 = \ln \pi$	$\log_{10} \pi = 0{,}49714\ 98727$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1{,}25331\ 41373$	$1/\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 0{,}79788\ 45608$
$M = \log_{10} e = 0{,}43429\ 44819$	$\frac{1}{M} = \log_e 10 = 2{,}30258\ 50930$	$\sqrt[3]{\pi} = 1{,}46459\ 18876$	$1/\sqrt[3]{\pi} = 0{,}68278\ 40633$
$e = 2{,}71828\ 18285$	$\frac{1}{e} = 0{,}36787\ 94412$	$e^{2\pi} = 535{,}49165\ 55248$	$e^{-2\pi} = 0{,}00186\ 74427$
$e^2 = 7{,}38905\ 60989$	$\frac{1}{e^2} = 0{,}13533\ 52832$	$e^{\pi} = 23{,}14069\ 26328$	$e^{-\pi} = 0{,}04321\ 39183$
$\sqrt{e} = 1{,}64872\ 12707$	$\frac{1}{\sqrt{e}} = 0{,}60653\ 06597$	$e^{\frac{\pi}{2}} = 4{,}81047\ 73810$	$e^{-\frac{\pi}{2}} = 0{,}20787\ 95764$
$1 = \operatorname{arc} 57^0\,17'\,44'',80625$ oder	$57^0,29577\ 95131$	$e^{\frac{\pi}{4}} = 2{,}19328\ 00507$	$e^{-\frac{\pi}{4}} = 0{,}45593\ 81278$
$\operatorname{arc} 1^0 = 0{,}01745\ 32925$	$\operatorname{arc} 1' = 0{,}00029\ 08882$	$\operatorname{arc} 1'' = 0{,}00000\ 48481$	