

# Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern

## IV. Band

Erstes Heft (abgeschlossen am 15. Februar 1925)

Mit 171 Textabbildungen und 3 Tafeln

Unter Mitwirkung von

Heinrich von Buol, Dr. Robert Fellingner, Dr. Dr.-Ing. e. h. Adolf Franke, Professor Dr. Hans Gerdien,  
Dr.-Ing. e. h. Georg Grabe, Dr. Carl Haase, Dr. Georg Hohorst, Professor Dr. Hans Holldack,  
Dr. Ragnar Holm, Dr. Robert Jaeger, Dr. Werner Jubitz, Dr. Jürgen von Issendorff, Florus  
Kertseher, Lisel Koch, Theodor Kopezynski, Dr.-Ing. e. h. Carl Köttgen, Karl Krapp,  
Dr. Michael Liwschitz, Dr. Fritz Lubberger, Dr. Georg Masing, Dr. Wilhelm Maukseh,  
Dr. Max Moeller, Dr. Friedrich Natalis, Wilhelm Peters, Geheimrat Professor Dr. Dr.-Ing. e. h.  
Walter Reichel, Dr. Erich Helmuth Reiman, August Roth, Dr. Gottfried Rückle, Professor  
Dr. Dr.-Ing. e. h. Reinhold Rüdénberg, Dr. Helmut Scheffers, Dr. Hans Schmick,  
Dr. Rudolf Störmer, Dr. Ferdinand Trendelenburg, Manfred Tunkel

herausgegeben von der

Zentralstelle für wissenschaftlich-technische Forschungsarbeiten  
des Siemens-Konzerns

Vol. I



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH  
1925

# Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern

Vierter Band  
1925



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

**ISBN 978-3-662-22750-3**  
**DOI 10.1007/978-3-662-24681-8**

**ISBN 978-3-662-24681-8 (eBook)**

# Inhaltsübersicht.

## 1. Heft.

	Seite
I. Aus dem Forschungslaboratorium des Siemens-Konzerns zu Siemensstadt (Leiter: Prof. Dr. H. Gerdien).	
F. Trendelenburg: Objektive Klangaufzeichnung mittels des Kondensatormikrophons	1
R. Holm: Die Theorie der Corona an Hochspannungsleitungen . . . . .	14
R. Holm und R. Störmer: Koronamessungen an Hochspannungsleitern . . . . .	25
H. Backhaus: Über Siebketten . . . . .	33
H. Gerdien und W. Jubitz: Über Messungen der Wärmeausdehnung . . . . .	59
G. Masing und C. Haase: Über die Größe und Verteilung von Eigenspannungen in kaltgerecktem Rundmessing . . . . .	69
G. Masing und W. Mauksch: Einfluß der plastischen Dehnung und Stauchung auf die Festigkeitseigenschaften und inneren Spannungen des Messings . . . . .	74
G. Masing und G. Hohorst: Über das elektrische Leitvermögen des kaltgereckten Aluminiums . . . . .	90
G. Masing und L. Koch: Zur Konstitution der Kupfer-Aluminium-Legierungen . . . . .	109
G. Masing und C. Haase: Zur Frage der umgekehrten Blockseigerung . . . . .	113
II. Aus dem Dynamowerk der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H. zu Siemensstadt (Leiter: Geheimrat Prof. Dr. Dr.-Ing. e. h. W. Reichel).	
J. von Issendorff: Energetik der Wandströme in Quecksilberdampfentladungen . . . . .	124
K. Krapp: Die Grenzen der voreilenden Belastung von Turbo-Synchrongeneratoren . . . . .	162
M. Liwschitz: Der Anlauf- und Bremsvorgang bei Asynchronmotoren mit Wirbelstromläufer . . . . .	167
Th. Kopezynski: Ein Beitrag zur schnellen Lösung von Wechselstrom-Aufgaben durch eine kombinierte rechnerisch-graphische Methode . . . . .	185
III. Aus dem Charlottenburger Werk der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H. zu Charlottenburg (Leiter: H. Beiersdorf).	
Fr. Natalis: Maxima und Minima von Vektorfunktionen . . . . .	189
IV. Aus der Wissenschaftlichen Abteilung der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H. zu Siemensstadt (Leiter: Prof. Dr. Dr.-Ing. e. h. R. Rüdenberg).	
W. Peters: Die Temperaturverteilung in den Nuten von Zweistabwicklungen . . . . .	197
M. Tunkel: Schwingungsvorgänge bei Nadelgleichrichtern . . . . .	214
V. Aus dem Wernerwerk M der Siemens & Halske A.-G. zu Siemensstadt (Leiter: H. v. Buol).	
R. Jaeger und H. Scheffers: Ein hochempfindliches Röhrengalvanometer mit Gleichstromrückkopplung . . . . .	233
M. Moeller und H. Schmick: Über die Strahlung der Feuergase . . . . .	239
VI. Aus dem Wernerwerk F der Siemens & Halske A.-G. zu Siemensstadt (Leiter: Dr.-Ing. e. h. G. Grabe).	
G. Rückle: Die Zusammensetzung und Teilung von Verkehrsmengen im Fernsprechwesen	250
VII. Aus der Versuchs- und Lehranstalt für Bodenfräskultur der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H. zu Gieshof (Leiter: Prof. Dr. H. Holldack).	
E. H. Reinau und F. Kertscher: Die Umwandlung der Sonnenenergie, des Wassers und des Kohlenstoffes in der Landwirtschaft . . . . .	258

## 2. Heft.

Nachruf auf Robert M. Friese. Von Prof. Dr. K. Schmidt, Halle a. S. . . . .	1
I. Aus dem Dynamowerk der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H. zu Siemensstadt (Leiter: Geheimrat Prof. Dr. Dr.-Ing. e. h. W. Reichel).	
K. Krauß: Die Charakteristik des Bahnmotors . . . . .	9

## IV

## Inhaltsübersicht des vierten Bandes.

	Seite
II. Aus der Wissenschaftlichen Abteilung der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H. zu Siemensstadt (Leiter: Prof. Dr. Dr.-Ing. e. h. R. Rüd enberg).	
R. Rüd enberg: Die Spannungsregelung großer Drehstromgeneratoren nach plötzlicher Entlastung) . . . . .	61
III. Aus dem Kabelwerk der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H. zu Gartenfeld (Leiter: Dr.-Ing. e. h. A. Ebeling).	
A. Gyemant: Zur Theorie des Durchschlages flüssiger Dielektriken . . . . .	68
IV. Aus der Versuchs- und Lehranstalt für Bodenfräskultur der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H. zu Gieshof (Leiter: Prof. Dr. H. Holldack).	
W. Nitzsch: Zustand und Veränderung der Struktur des Ackerbodens . . . . .	75
V. Aus dem Wernerwerk M der Siemens & Halske A.-G. zu Siemensstadt (Leiter: H. von Buol).	
F. Ahrberg u. W. Gaarz: Das Verhalten des Differentialschutzes nach Merz-Price bei Verwendung von Stromwandlern kleiner Leistung . . . . .	95
H. Grüß: Die Herstellung stark raumtemperaturabhängiger elektrischer Widerstände . . . . .	105
VI. Aus der Abteilung für Elektrochemie des Wernerwerkes der Siemens & Halske A.-G. zu Sie- mensstadt (Leiter: Prof. V. Engelhardt).	
G. Hänsel: Beiträge zum Studium der Kupferelektrolyse in kupferchlorürhaltigen Elek- trolyten . . . . .	111
H. Fischer: Die Metallverbindungen des Diphenylthiocarbazon und ihre Verwendbarkeit für die chemische Analyse . . . . .	158
E. J. Fischer: Das Verhalten aliphatischer Aminbasen und einiger zyklischen basischen Stickstoffkerne zu Metallsalzlösungen . . . . .	171
H. Walde und K. A. Schuch: Beiträge zur analytischen Betriebskontrolle bei der Per- manganatdarstellung . . . . .	188
VII. Aus dem Forschungslaboratorium des Siemens-Konzerns zu Siemensstadt (Leiter: Prof. Dr. H. Gerdien).	
F. Trendelenburg: Über eine Methode zur objektiven Lautsprecheruntersuchung . . . . .	200
H. Backhaus u. F. Trendelenburg: Akustische und physiologische Beobachtungen am Lautsprecher . . . . .	205
H. Backhaus: Über Ausgleichsvorgänge an kurzen Siebketten . . . . .	209
G. Masing und K. Miething: Die Reaktion des Messings mit Kupferchlorür . . . . .	225
G. Masing: Rekristallisation und Erholung (Kristallvergütung) bei Metallen . . . . .	230
G. Masing und W. Mauksch: Eigenspannungen und Verfestigung des plastisch gedehnten und gestauchten Messings . . . . .	244
G. Masing und L. Koch: Studien über die Entzinkung von Messing bei der Korrosion . . . . .	257
O. v. Auwers: Über den Einfluß der Korngröße auf die magnetischen Eigenschaften silizierter Bleche . . . . .	266
W. Mauksch: Ein Quecksilber-Eichstand . . . . .	274
W. Nagel u. J. Grüß: Beitrag zur Kenntnis des chinesischen Holzöls . . . . .	284
W. Nagel: Der Erweichungspunkt von Harzen . . . . .	321
F. Evers: Der Einfluß von Wärme auf Mineralöl I. Die Zersetzungsprodukte des Öls durch den elektrischen Lichtbogen . . . . .	324
Namenverzeichnis des vierten Bandes . . . . .	335
Sachverzeichnis des vierten Bandes . . . . .	338

# Objektive Klangaufzeichnung mittels des Kondensatormikrophons.

## Zweiter Teil: Zur Physik der Konsonanten.

Von **Ferdinand Trendelenburg.**

Mit 2 Textabbildungen und 3 Tafeln.

Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium Siemensstadt.

Eingegangen am 8. Dezember 1924.

In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> hatte ich eine Methode angegeben, um Klangbilder aufzunehmen und insbesondere die Feinstruktur der Sprachklänge objektiv zu erfassen. Aus den mit der Anordnung durchgeführten Untersuchungen hatten wir neben Folgerungen für die technischen Probleme der Klangaufnahme, Übertragung und Wiedergabe auch Schlüsse über die physikalische Natur der Vokalklänge ziehen können.

Die aufgenommenen Klangbilder ergaben nämlich sämtlich die genaue Periodizität der Kurven in der Periode des Grundtones, eine Periode war der anderen auch in ihrer feinsten Struktur völlig identisch. Die beiden Bilder 36 und 37 auf Tafel I mögen dies nochmals zeigen. Aus der Periodizität der Vokalbilder ließ sich die Gültigkeit der von Helmholtz aufgestellten Vokaltheorie folgern:

Das Stimmband erzeugt einen Klang, dessen Grundton die musikalisch definierte Tonhöhe ist. Dieser Klang ist reich an Obertönen: die dem Kehlkopf vorgelagerte Mundhöhle greift diejenigen Obertöne verstärkt heraus, welche ihrer Eigenresonanz am nächsten liegen und strahlt sie besonders kräftig in die Umgebung ab. Die Tonhöhe der Eigenresonanz der Mundhöhle ist durch diejenige Mundstellung definiert, welche für den betreffenden Vokal charakteristisch ist, so entspricht jedem Vokal ein bestimmter in seiner absoluten Höhe fester Tonbereich: der Formant.

Sämtliche Vokalklänge lassen sich in der eben skizzierten Weise als erzwungene Schwingungen eines Resonanzsystems (Kehlkopf — Rachen — Mundhöhle), welche von einer einzigen Schallquelle — dem Stimmband — angeregt werden, erklären.

Bevor wir nun zu der Besprechung einiger weiterer Klanguntersuchungen übergehen, welche ich mit dem Kondensatormikrophon nach H. Riegger an den Lauten der Konsonantengruppe der Liquidae (L, M, N, R) durchführte, möchte ich noch kurz einige Vokalanalysen streifen, welche C. Stumpf unabhängig von meinen Arbeiten durchführte und die mir bei Publikation meiner letzten Arbeit noch nicht bekannt waren.

---

<sup>1)</sup> Wissenschaftl. Veröffentl. a. d. Siemens-Konzern Bd. 3, H. 2, S. 43ff.

### 1. Nachträge zur Klangverteilung der Vokale.

Herr Geheimrat C. Stumpf hatte die Liebenswürdigkeit, mir neue, bisher noch nicht im Druck erschienene Tabellen der von ihm untersuchten Vokalklänge zu überlassen, die auf diesen Tabellen verzeichnete Klangverteilung deckt sich besonders gut mit den von mir auf Grund der Oszillogramme durchgeführten Analysen. Ich bin für die Überlassung dieser Tabellen sehr dankbar, insbesondere da ich in meiner älteren Arbeit (S. 58) versehentlich in der dort abgedruckten Tabelle der Klangverteilung nach C. Stumpf auch einige von diesem Forscher synthetisch zusammengesetzte künstliche Vokale aufnahm. (Spalten 1, 3, 4 und 5.) Die erwähnten Spalten besitzen daher nur einen mittelbaren Vergleichswert, um so besser wird die Übereinstimmung der auf völlig verschiedenen Wegen gewonnenen Klangverteilung der Vokale auf Grund des Vergleiches dieser ausführlichen neuen Tabellen mit den Ergebnissen meiner Arbeit hervortreten.

C. Stumpf hat die Klangverteilung, wie sie in diesen Tabellen dargestellt ist, mit seiner Methode der Resonanzgabeln gewonnen, er beobachtete mit dem Ohr das Mitschwingen der einzelnen Gabeln und konnte so die relative Stärke der Teiltöne annähernd schätzen. Die Tabellen stammen aus den Jahren 1913 bis 1916 und sind einem in Vorbereitung begriffenen Werke über die Sprachlaute entnommen.

Die Betrachtung der Resonanztabellen zeigt, daß der Tonbereich von etwa 2800 bis 3000  $s^{-1}$ , welchen ich in meiner früheren Arbeit als dasjenige Gebiet angesprochen hatte, welches den Vokalen A, O und U in der Hauptsache die persönliche Klangfarbe verleiht, auch in fast allen von C. Stumpf an den genannten Vokalen

#### Klangverteilung der Hauptvokale nach C. Stumpf.

##### I. Grundton c, 128 Schwingungen $s^{-1}$ .

Ordnungs- zahl des Partialtones	Ton- höhe	Note	Versuchsperson														
			Ab.	St.	Bl.	Ab.	St.	Bl.	Ab.	St.	Bl.	Ab.	St.	Bl.	Ab.	St.	Bl.
32	4096	c <sup>5</sup>							4	2		4	2		4	2	
30	3840	h <sup>4</sup>							4	3		6	2		8	2	
28	3584	b <sup>4</sup>							4	3	1	8	6	1	8	3	1
26	3328	a <sup>4</sup>							8	3	2	6.	4	4	8	4	2
24	3072	g <sup>4</sup>							8	4	3	8	4	3	10	4	3
22	2816	fis <sup>4</sup>			1		2	2	10	6	4	8	4	2	8	4	3
20	2560	e <sup>4</sup>			2		1	2	8	6	4	4	4	4	8	4	3
18	2304	d <sup>4</sup>			0		1	1	4	4	2	8	2	1	8	2	3
16	2048	c <sup>4</sup>			0		1	0	4	2	1/2	8	2	2	4	2	2
15	1920	h <sup>3</sup>			0		0	0	4	3	0	4	1	0	3	1	0
12	1536	g <sup>3</sup>			0		0	0	8	4	6	6	2	1	4	2	1/2
10	1280	e <sup>3</sup>			1/2		1	1/2	10	6	8	6	0	1	3	0	1
9	1152	d <sup>3</sup>			1/2		2	0	1/2	12	6	8	4	0	1	2	0
8	1024	c <sup>3</sup>			2		4	1/2	2	12	4	4	4	0	1	3	0
7	896	b <sup>2</sup>	2		6	3	4	8	4	8	16	8	8	2	1/2	4	8
6	768	g <sup>2</sup>	12	10	16	20	12	20	16	16	20	10	1	4	6	1	4
5	640	e <sup>2</sup>	12	8	12	16	10	12	8	14	20	3	2	8	8	2	8
4	512	c <sup>2</sup>	16	12	20	20	16	20	10	10	12	8	6	14	12	6	12
3	384	g <sup>1</sup>	16	16	16	12	8	18	8	12	6	12	12	8	12	12	4
2	256	c <sup>1</sup>	16	16	12	12	16	14	8	6	12	6	14	12	12	14	12
1	128	c	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
					U			O			A			E			I

Anm.: Die überstrichenen Noten bedeuten, daß sich die betreffende physikalisch definierte Schwingungszahl nicht ganz streng mit derjenigen der angegebenen Note deckt.

2. Grundton  $c^1$  256 Schwingungen  $s^{-1}$ .

Ordnungs- zahl des Partialtones	Ton- höhe	Note	Versuchsperson														
			Ab.	St.	Kr.	Ab.	St.	Kr.	Ab.	St.	Kr.	Ab.	St.	Kr.			
16	4096	$c^5$				$\frac{1}{2}$	2		3	3	1	4	4		2	2	
15	3840	$h^4$				$\frac{1}{2}$	4		6	4	0	3	3		4	3	1
14	3584	$\bar{b}^4$	1			6	5		8	4	4	6	8		4	4	2
13	3328	$\bar{a}^4$	1	1		6	5	2	10	8	6	10	10	2	10	6	1
12	3072	$\bar{g}^4$	1	2	4	3	6	12	12	10	12	10	12	4	12	8	8
11	2816	$\bar{f}is^4$	2	2	2	4	10	14	14	14	16	7	4	12	10	8	10
10	2560	$e^4$	2	2	12	8	4	16	14	8	16	16	12	16	18	10	8
9	2304	$d^4$	2	3	8	2	4	12	8	6	8	12	10	20	14	12	12
8	2048	$c^4$	1	3	8	2	3	4	8	3	6	14	8	10	8	6	8
6	1536	$g^3$	3	2	2	3	4	4	12	10	12	10	8	12	8	4	8
5	1280	$e^3$	2	4	4	4	4	8	16	12	12	6	6	12	4	4	4
4	1024	$c^3$	4	4	6	4	8	12	16	12	16	6	6	16	4	4	4
3	768	$g^2$	20	20	16	20	16	20	22	22	22	10	8	22	8	4	12
2	512	$c^2$	16	10	12	24	20	22	16	12	16	14	16	16	14	4	16
1	256	$c^1$	22	22	20	16	16	12	12	12	16	16	16	8	18	18	20
					U			O			A			E			I

3. Grundton  $c^2$  512 Schwingungen  $s^{-1}$ .

Ordnungs- zahl des Partialtones	Ton- höhe	Note	Versuchsperson														
			Be.	Oh.	Pl.	Be.	Oh.	Pl.	Be.	Oh.	Pl.	Be.	Oh.	Pl.			
8	4096	$c^5$				$\frac{1}{2}$			2	4	8	1	2	4	$\frac{1}{2}$	0	8
7	3584	$\bar{b}^4$	6		4	$\frac{1}{2}$	4	4	8	6	8	12	4	4	12	4	10
6	3072	$g^4$	4		2	8	4	8	14	4	8	16	4	10	16	4	10
5	2560	$e^4$	2	3	2	2	6	4	4	4	2	8	8	12	8	12	16
4	2048	$c^4$	$\frac{1}{2}$	4	0	3	3	4	8	6	4	4	16	14	2	18	14
3	1536	$g^3$	6	4	4	6	6	4	16	12	6	6	10	10	6	10	10
2	1024	$c^3$	14	12	8	14	20	12	12	16	10	8	12	4	8	12	4
1	512	$c^2$	16	24	16	24	20	18	16	18	18	16	22	18	20	24	20
					U			O			A			E			I

durchgeführten Analysen verstärkt hervortritt, ich habe dieses Gebiet in den obenstehenden Tabellen durch Einrahmung gekennzeichnet. Wo dieser Bereich fehlt (z. B. an den beiden ersten U-Analysen auf Grundton 128  $s^{-1}$ ), kann dies an dem dumpfen U-Charakter der betreffenden Versuchsperson liegen, ich erinnere, daß ich auch ein Klangbild des U registrierte, welches nahezu keine Feinstruktur aufwies (Bild 29, Tafel II, der früheren Arbeit).

Besonders gut ist die Übereinstimmung zweier von mir früher durchgeführten Klanganalysen des Vokals A mit zwei anderen, die den obigen Tabellen entnommen sind.

Ich möchte dies an dem folgenden Kurvenbild zeigen, in welchem ich als Abszissen die Schwingungszahlen und als Ordinaten die Amplituden der verschiedenen Teiltöne eingetragen habe. Auf diese Weise gewinnt man eine Reihe diskret verteilter Punkte, die ich für den betreffenden Klang durch eine Kurve verbunden habe, es ergibt sich auf diese Weise eine Art von Tonspektrum des untersuchten Vokalklanges. Die Übereinstimmung der Kurven 1 und 3 bzw. 2 und 4 ist in die Augen fallend, die Maxima der Kurven - also der Formantbereich und der für die persönliche Klangfarbe charakteristische Bereich - liegen in der gleichen Tonhöhe. Dem Umstand, daß die relative Intensitätsverteilung der nach den verschiedenen Methoden



gewonnenen Tonspektren neben der Lage der Maxima auch ihrem Werte nach nahezu übereinstimmt, möchte ich weniger Gewicht beilegen, da C. Stumpf in seinen Tabellen die subjektive Stärkeempfindung (in welche also noch die Abhängigkeit der Empfindlichkeit des Ohres von der Reizstärke und auch von der Tonhöhe eingeht) registriert, während ich die Amplitude des Druckes aufzeichne.

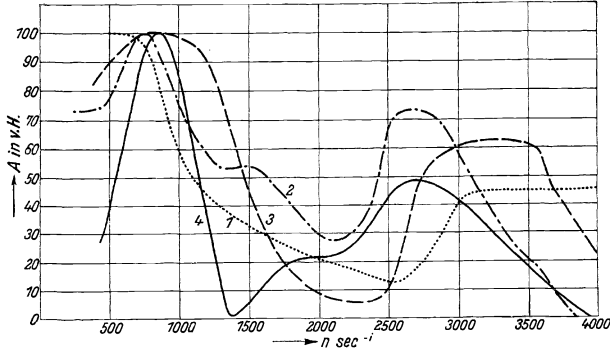


Abb. 1. Klangverteilung des Vokales A.

1. Nach C. Stumpf, Resonanztabelle 3, Versuchsperson P1, Grundton  $512 \text{ sec}^{-1}$ .
2. Nach C. Stumpf, Resonanztabelle 2, Versuchsperson Kr, Grundton  $256 \text{ sec}^{-1}$ .
3. Fourieranalyse, Klangbild 9 der früheren Arbeit, S. 59, Grundton  $398 \text{ sec}^{-1}$ .
4. Fourieranalyse, Klangbild 10 der früheren Arbeit, S. 59, Grundton  $441 \text{ sec}^{-1}$ .

Nach Besprechung dieser neueren Klangverteilungen nach C. Stumpf wollen wir uns nun den Klangbildern der Konsonanten der Lautgruppe der Liquidae zuwenden.

Auch für diese Laute gibt es charakteristische und in ihrer absoluten Lage feste Formantgebiete, die Tonhöhe dieser Bereiche ist durch die Untersuchungen, welche C. Stumpf<sup>1)</sup> nach verschiedenen Methoden durchführte und durch die Arbeiten anderer Forscher im wesentlichen aufgeklärt, meine eigenen Versuche konnten zu der Frage der Formantlage nur eine neue objektive Bestätigung der Richtigkeit dieser Anschauungen beibringen. Die nach meiner Methode durchgeführten Untersuchungen können aber zur Klärung eines anderen Gesichtspunktes beitragen:

„Sind die stimmhaften Konsonanten, insbesondere die sog. Halbvokale, von den stimmhaften Vokalen physikalisch prinzipiell unterschieden oder ist der Unterschied zwischen diesen Lauten rein phonetischer Natur?“

Die letzte Ansicht findet man fast allgemein vertreten, so sagt z. B. P. v. Grützner<sup>2)</sup>: „... Wie schon oben erwähnt, gibt es Konsonanten mit und ohne Stimme. Unter den Stimmhaften, die man, wenn längere Zeit hintereinander in gleicher Stärke ausgesprochen geradezu als Vokale bezeichnen kann, sind die Laute M und N, man bezeichnet sie aber als Konsonanten, weil sie keine oder nur äußerst selten Stimmtäger sind, sondern die Stimme über sich weg auf die Vokale gleiten lassen (Sievers).“

C. Stumpf<sup>3)</sup> schreibt z. B. über den Halbvokal L: „Infolge dieser Eigenschaften nähert sich tatsächlich ... das stimmhafte L den stimmhaften Vokalen, und wird da-

<sup>1)</sup> C. Stumpf: Zur Analyse der Konsonanten. Beitr. z. Anat., Physiol., Pathol. u. Therapie d. Ohres, d. Nase u. d. Halses Bd. 17, S. 151ff. 1921.

<sup>2)</sup> Handwörterbuch der Naturwissenschaften Artikel Stimme und Sprache Bd. 9, S. 662. Jena 1913.

<sup>3)</sup> a. a. O. S. 178.

her am natürlichsten zu diesen gerechnet. Aber aller Wortstreit ist vom Übel, und der Fall zeigt wieder deutlich, daß die Einteilung in Vokale und Konsonanten, wenn auch begrifflich scharf, in Wirklichkeit nur fließend ist.“

Meine Untersuchungen sollen zur Klärung der physikalischen Natur der Konsonanten beitragen. Insbesondere werden wir uns im folgenden mit den Klangbildern der stimmhaften Konsonanten beschäftigen; wir werden sehen, daß bereits diese Sprachlaute, welche subjektiv den Vokalen sehr nahe stehen, physikalisch von diesen prinzipiell unterschieden sind.

Wir hatten früher als das physikalische Bild eines Klanges diejenige Funktion definiert, welche den Verlauf des Druckes in Abhängigkeit von der Zeit an einer Stelle des Schallfeldes darstellt. Für den Spezialfall der Vokalklänge konnten wir diese Funktion leicht mathematisch behandeln: wir wählten für sie die Form der Fourierreihe und schrieben:

$$P + P_0 + \sum_1^n P_n \sin(n \omega t + \varphi_n). \quad (1)$$

Hierbei ist  $\omega = 2\pi N$  die Kreisfrequenz des als musikalische Tonhöhe definierten Grundtones.

Die Möglichkeit dieses Ansatzes folgt für die Vokalklänge ohne weiteres aus der Richtigkeit der Helmholtzschen Theorie. Zur Erfassung der Konsonantenbilder wird uns dieser Ansatz nicht ausreichen, wir werden dem entsprechend neben der Helmholtzschen Resonanztheorie auch noch andere akustische Effekte zur Erklärung heranziehen müssen.

Als erster Laut soll uns der Konsonant L beschäftigen, er steht zweifelsohne den Vokalen am nächsten. Gelingt es uns für diesen Laut einen prinzipiellen Unterschied zwischen Vokal und Konsonant zu finden, so dürfen wir erwarten, das allgemeine physikalische Prinzip der Konsonanten leicht feststellen zu können.

## 2. Der Konsonant L und die akustischen Vorgänge bei der Konsonantbildung.

Die oberflächliche Betrachtung der Oszillogramme 39, 40, 41 und 42 (Tafel I) zeigt zunächst einen vokalähnlichen periodischen Kurvenverlauf. Dies ist ja auch nicht anders zu erwarten, es war oben angegeben, daß der Laut stimmhaft gegeben wurde, der vom Stimmband erzeugte Klang wird also je nach der für den betreffenden Laut charakteristischen Mundstellung resonatorisch beeinflusst, die der Eigenfrequenz benachbarten Obertöne werden herausgehoben und verstärkt in die Umgebung abgegeben. So könnten wir z. B. tatsächlich Bild 42 durch eine Fourierreihe in grober Annäherung darstellen, bei der die sekundliche Frequenz des Grundtones  $266 \text{ s}^{-1}$  beträgt, die zweite Oberschwingung ( $532 \text{ s}^{-1}$ ) würde ebenfalls stark vertreten sein. Betrachten wir nun aber die feinere Struktur des genannten Bildes genauer, so findet sich, daß diese nicht mehr streng periodisch wiederkehrt, sie liegt unharmonisch zum Grundton. Diese Beobachtung steht in völligem Gegensatz zu der bei allen Vokalbildern gefundenen strengen Periodizität. Es gelingt uns nicht, diese Unregelmäßigkeit zu erklären, wenn wir, wie bei den Vokalen, nur eine einzige Schallquelle: das Stimmband annehmen. Auf Bild 42 ist z. B. noch eine Schwingung ziemlich hoher Frequenz vorhanden, deren Schwingungszahl etwa 2500 bis 2600  $\text{s}^{-1}$ , aber kein ganzzahliges Vielfache der Grundfrequenz ist, die kurzen Kräuselungen gehen in der Welle der Grundperiode nicht genau auf. Auch noch höhere Komponenten bis etwa 4000  $\text{s}^{-1}$

sind vertreten. Wir müssen also zur Erklärung dieses Konsonantbildes annehmen, daß zum mindesten noch eine weitere, vom Stimmband unabhängige Schallquelle, welche die vom Grundton unabhängigen Komponenten liefert, vorhanden ist, die Helmholtzsche Resonanztheorie genügt nicht zur Erklärung der Konsonanten.

Wie können wir uns nun das Auftreten mehrerer Schallquellen vorstellen?

Die erste Schallquelle: das Stimmband behält bei dem stimmhaften Konsonant dieselbe Funktion wie bei der Bildung der Vokale bei.

Während nun aber bei den Vokalen der größtmögliche Betrag der Strömungsenergie des Luftstromes bereits im Kehlkopf in Schall umgesetzt wird, ist dies bei den Konsonanten nicht der Fall, die Ausnutzung ist hier eine geringere, der Luftstrom ist zum Teil noch nicht akustisch wirksam geworden und ist auf seinem Wege nach außen in der Lage, die dort gelegenen Hohlräume in ihrer Eigenperiode und unabhängig vom Stimmbandklang anzublase. Bei der Bildung der Konsonanten wird dem Luftstrom überdies teilweise ein anderer Weg zur Außenluft zugewiesen als bei der Bildung der Vokale, denken wir z. B. gerade an das L: „durch Anlegung der Zunge an die Zähne wird ein Teil der Leitung in die Nase verlegt“ (C. Stumpff), oder an das M, bei welchem der Mund völlig geschlossen wird und die Luft gezwungen wird, ihren Weg nur durch die Nase zu wählen. Bei den Konsonanten haben die natürlichen Hohlräume des Rachens, des Mundes und der Nase eine doppelte Bedeutung: das eine Mal dienen sie dazu, durch ihre resonatorischen Eigenschaften den aus dem Stimmband stammenden Stimmklang entsprechend der Helmholtzschen Resonanztheorie zu formen, das andere Mal treten sie als selbstständige Schallquellen auf, welche durch Anblasen genau in ihrer Eigenfrequenz betätigt werden. Die Superposition dieser Vorgänge ruft ein so kompliziertes Klangbild hervor, wie wir es in den Oszillogrammen 39, 40, 41 und 42 vor uns haben.

Eine Abweichung hiervon bilden nur die an einer anderen Versuchsperson aufgenommenen Bilder 45 und 46. Hier haben wir wieder völlig harmonische Klangbilder, so daß man sie nach ihrer physikalischen Beschaffenheit für Klangbilder eines Vokales halten sollte. Tatsächlich entsprach aber auch der subjektive Klangeindruck der betreffenden Versuchsperson vollkommen dem Klang eines Vokales, unbefangene Beobachter sprachen den Laut für Ö an, die Fourieranalyse des Klangbildes 46 weiter unten (S. 9) zeigt deutlich das starke Hervortreten des Ö-Formanten bei  $1648 \text{ s}^{-1}$ .

Diese Erscheinung hat zweifelsohne ihren Grund in der Atemtechnik der betreffenden Versuchsperson, wird der Luftstrom bereits im Kehlkopf stark zur Klangbildung herangezogen, so herrscht die periodische Kurvenform mit der Grundwelle des Stimmbandklanges vor, die zu dieser unharmonischen Bestandteile sind objektiv wenig oder gar nicht erkennbar, tritt hingegen viel wilde Luft durch das Stimmband und bläst diese weitere Schallquellen an, so werden vom Stimmbandklang unabhängige Klangkomponenten erkennbar.

Der Gedanke drängt sich auf, auch einmal von der Seite der Vokale aus den Übergang zu den nicht periodischen Klangbildern der Konsonanten zu suchen. So wurde der Versuch gemacht, einen Vokal (das A) aufzuzeichnen, der absichtlich mit möglichst geringer Ausnutzung des Luftstromes zur Stimmbildung gesungen wurde. Es war also zu erwarten, daß die reichlich ausströmende wilde Luft in der Lage sei, vom Stimmbandklang völlig unabhängige Schallquellen anzublase, das Ergebnis dieses Versuches zeigt Bild 47 zum erstenmal, und zwar willkürlich erzwungen sind hier bei einem Vokalklang Abweichungen des Kurvenbildes von der strengen Periodizität

zu beobachten, die genaue Betrachtung des genannten Klangbildes zeigt besonders in der Feinstruktur der beiden in der Mitte des Bildes liegenden Perioden deutliche Verschiedenheiten.

Auf Grund der eben ausgeführten Gedankengänge können wir nun versuchen, einen rechnerischen Ausdruck zu finden, der uns mit genügender Annäherung die Darstellung der Konsonantenbilder ermöglicht und einen klar umrissenen physikalischen Unterschied für die Begriffe Konsonant und Vokal bietet.

Wir hatten früher gesehen, daß wir die Vokalklänge als eine Fourierreihe darstellen konnten, deren Grundton im akustischen Gebiet liegt, er besitzt die musikalisch definierte Tonhöhe. Eine Periode ist der folgenden auch in ihrer feinsten Struktur identisch. Einen derartigen Klang wollen wir hier als einen rein periodischen Klang bezeichnen und können nun aussagen:

„Die stimmhaften Vokale sind rein periodische Klänge.“

Zur theoretischen Deutung der Konsonantenbilder hatten wir neben der Stimmbandschallquelle noch weitere Schallquellen, welche durch Anblasen betätigt werden, annehmen müssen, ganz analog werden wir nun bei dem rechnerischen Ansatz dieser Klänge vorgehen können, indem wir neben der vom Stimmband herrührenden Grundschwingung noch eine Reihe weiterer von dieser unabhängiger Grundschwingungen annehmen und daher schreiben:

$$P = P_0 + \left. \begin{aligned} & \sum_1^n P_n \sin (n \omega_1 t + \varphi_n) \\ & + \sum_1^m P_m \sin (m \omega_2 t + \varphi_m) \\ & + \sum_1^p P_p \sin (p \omega_3 t + \varphi_p) \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Hierbei ist  $N_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$  die Grundfrequenz des Stimmbandklanges.

Es wird im allgemeinen genügen, für die Frequenzen  $N_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$ ,  $N_3 = \frac{\omega_3}{2\pi}$  ... die Grundfrequenzen der durch Anblasen betätigten Schallquellen zu wählen, doch dürfen wir ihnen nicht generell diese Beschränkung auferlegen. Treten bei der Klangbildung noch weitere Schwingungsvorgänge beispielsweise mechanischer Natur auf, wie sie z. B. das Vibrieren der Zunge beim R linguale darstellt, so werden auch diese irgendeinen akustischen Effekt auslösen und so ihren Beitrag zu den einzelnen Fourierreihen liefern. Wir wollen den hier analytisch definierten Ausdruck mit dem Wort Klanggemisch bezeichnen, wir werden in der Folge sehen, daß wir sagen können:

„Die stimmhaften Konsonanten sind Klanggemische.“

Diese Definition trifft das physikalische Wesen der Konsonanten besser als die Bezeichnung Geräusch, die man vielfach angewendet findet. Unter einem Geräusch versteht man einen akustischen Vorgang, der in seiner Tonhöhe und in seiner Klangfarbe dauernd und ohne jede Gesetzmäßigkeit wechselt. Hierbei kann aber bei dem Klang eines stimmhaften Konsonanten keine Rede sein, dies geht schon aus der Tatsache hervor, daß viele Forscher dazu neigen, Konsonanten und Vokale als physikalisch identisch anzusehen.

Um jedes Mißverständnis auszuschließen wollen wir hier noch eine klare mathematische Abgrenzung unseres eben definierten Begriffes Klanggemisch gegen den Begriff Geräusch vornehmen.

Für die Definition des Klanggemisches ist die Bedingung notwendig und hinreichend, daß eine endliche Zahl voneinander unabhängiger Grundfrequenzen im akustisch hörbaren Bereich vorhanden ist.

Wir können den Ansatz II für das Klanggemisch dadurch in den Ansatz für das Geräusch übergehen lassen, daß wir eine der Grundfrequenzen  $N$  als so langsam annehmen, daß sich die Grundperiode über die gesamte betrachtete Zeitdauer des akustischen Vorganges erstreckt, daß also diese Zeitdauer nur eine solche Grundperiode enthält.

Selbstverständlich wird sich bei der Aufnahme der Sprachklänge, deren Formung durch akustische Gebilde erfolgt, welche aus belebten organischer Materie bestehen, gelegentlich ein Übergreifen des einzelnen Klangformen ergaben, die oben geschilderte Einteilung ist jedoch vorherrschend.

Wir wollen jetzt die Konsonantklänge weiter betrachten.

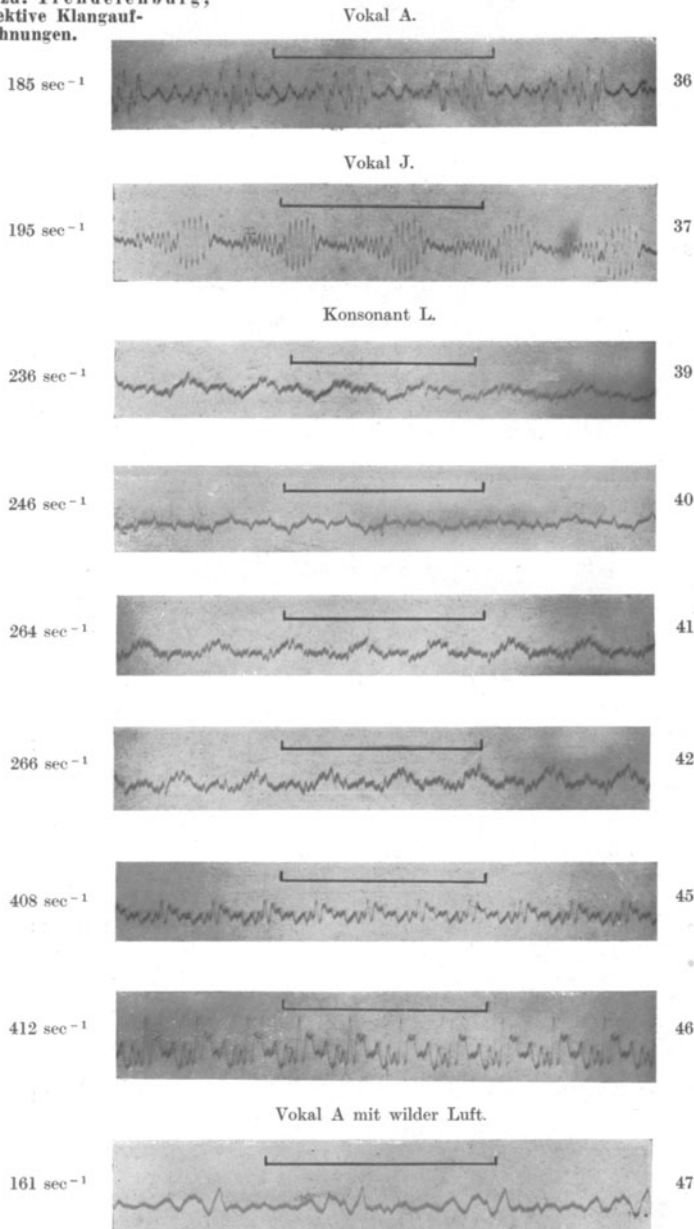
Wie weit für den einzelnen Konsonantklang der Stimmbandklang und wie weit die zu diesem unharmonischen Teilklänge vorherrschen, hängt von der Klangfarbe des einzelnen ab. Wir hatten bereits gesehen, daß bei den Klangbildern 45 und 46 objektiv keine unharmonischen Bestandteile sichtbar werden und hatten auch betont, daß der Klangcharakter dem eines Vokalklanges — in diesem Falle dem eines  $\ddot{O}$  — zum Verwechseln ähnlich wurde. Auch bei den Klangbildern anderer Konsonanten ( $M$ ,  $N$ ,  $R$ ) treten die unharmonischen Bestandteile bei einigen Versuchspersonen ganz oder teilweise zurück, ich werde in den Zusammenstellungen der Klangbilder hierauf hinweisen. Stets war aber in solchen Fällen der Konsonantcharakter schlecht betont, und teilweise war es nicht möglich, sicher anzugeben, welchen Sprachlaut der betreffende stimmhafte Konsonant repräsentieren sollte<sup>1)</sup>. Diese Angabe gelingt nur, wenn die angeblasenen Eigentöne auch im objektiv aufgezeichneten Klangbild gut hervortreten, so daß ohne Zweifel in ihnen das Wesen der Konsonanten liegt. Im Verlauf der Sprache ist es selbstverständlich viel leichter, den Laut zu identifizieren, da hier beim Konsonant noch Übergangserscheinungen (z. B. die Differenzierung im Ansatz zwischen  $M$  und  $N$ ) auftreten, die gerade für den betreffenden Laut charakteristisch sind.

Die bisherigen Feststellungen können nur einen genäherten Anhalt dafür bieten, in welcher Tonhöhe die durch Anblasen entstandenen Teiltöne liegen, da uns die Möglichkeit fehlt, die Komponenten eines Gemisches von Klängen durch Auswertung der Ordinaten rechnerisch zu erfassen, wie dies für rein periodische Klangvorgänge unter Zuhilfenahme der bekannten Verfahren der Fourieranalyse möglich ist. Wir könnten uns hier mit elektrischen Resonanzmethoden helfen, beispielsweise könnten wir in die Leitung des elektrischen Stromes, welcher das Abbild des Klanggemisches darstellt, ein elektrisches Resonanzsystem einschalten und so durch kontinuierliche Variation der Abstimmung dieses Resonanzsystemes die einzelnen Komponenten des Klanggemisches nach Stärke und Tonhöhe registrieren.

Im Rahmen der von uns hier behandelten Aufgabe wollen wir uns jedoch darauf beschränken, die Tonhöhe der Formantgebiete durch Auszählen zu bestimmen, auch einige Fourieranalysen nach der in meiner früheren Arbeit verwendeten Methode von Zipperer werde ich bringen, sie ist zwar nicht geeignet, die wirkliche Tonhöhe der unharmonischen Teilklänge festzustellen, wohl aber werden bei der Fourieranalyse die

<sup>1)</sup> Die Frage, ob vielleicht bei gesanglicher Schulung zugunsten der ästhetischen Wirkung der stimmhafte Konsonant den rein periodischen Vokalklängen genähert wird, ist in meinen Untersuchungen zunächst noch nicht behandelt worden.

**Tafel zu: Trendelenburg,  
Objektive Klangauf-  
zeichnungen.**

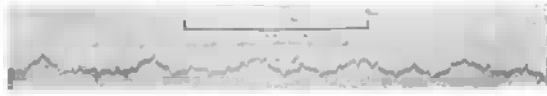


Bemerkungen: Der zeitliche Anfang aller Klangbilder befindet sich rechts, das Ende links. Die Bezifferung der Klangbilder bezieht sich auf die Tabellen im Text. Über jedem Klangbild ist das Zeitmaß von  $\frac{1}{100}$  sec eingetragen, überdies ist die Frequenz des Stimmklanges angegeben.

Objektive Klängauf-  
zeichnungen.

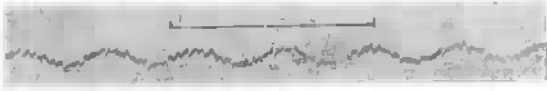
Konsonant M.

167 sec<sup>-1</sup>



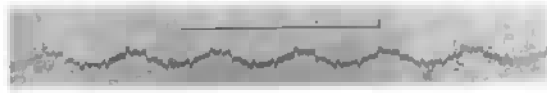
48

238 sec<sup>-1</sup>



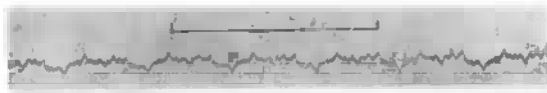
52

248 sec<sup>-1</sup>



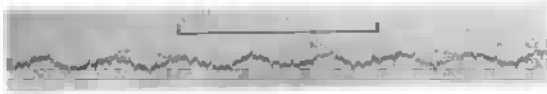
53

248 sec<sup>-1</sup>



54

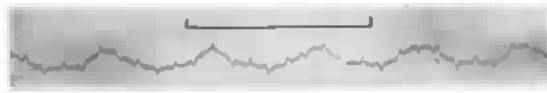
256 sec<sup>-1</sup>



55

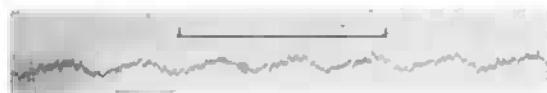
Konsonant N.

168 sec<sup>-1</sup>



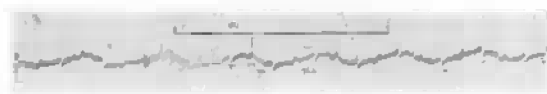
56

202 sec<sup>-1</sup>



58

264 sec<sup>-1</sup>



59

Merke zu: Trendelenburg.  
Objektive Klangauf-  
zeichnungen.

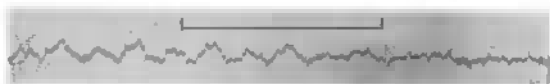
Konsonant R.

linguale  
256 sec<sup>-1</sup>



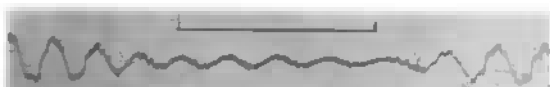
61

271 sec<sup>-1</sup>



63

420 sec<sup>-1</sup>



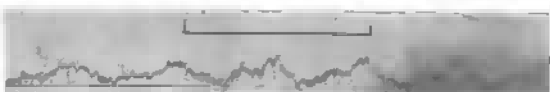
65

454 sec<sup>-1</sup>



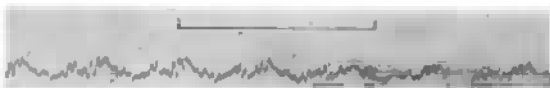
67

uvulare  
194 sec<sup>-1</sup>



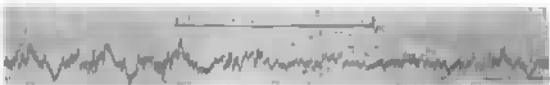
68

241 sec<sup>-1</sup>



69

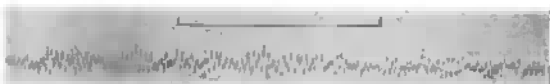
260 sec<sup>-1</sup>



70

Konsonant Sch.

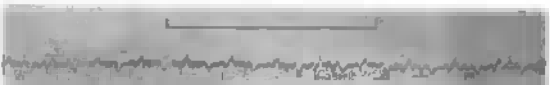
mittlere  
Frequenz  
3800—4000



72

Konsonant S.

bis 5800



73



den betreffenden Komponenten benachbarten höheren Harmonischen verstärkt hervortreten.

Ich möchte einige solcher Fourieranalysen des Konsonanten L jetzt folgen lassen.

Lfd. Nr.		Ordnungszahl des Partialtones										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
39	Frequenz . .	240	480	720	960	1200	1440	1680	1920	2160	2400	2640
	Amplitude . .	92,1	100,0	4,15	8,52	13,4	51,2	3,35	5,1	16,4	42,2	32,5
40	Frequenz . .	246	492	738	984	1230	1476	1722	1968	2214	2460	2706
	Amplitude . .	73,0	100,0	7,5	20,0	14,1	48,1	9,9	16,4	16,5	3,6	4,7
41	Frequenz . .	264	528	792	1056	1320	1584	1848	2112	2376	2640	2904
	Amplitude . .	100,0	71,8	14,8	11,4	15,5	27,0	13,1	15,4	27,7	16,6	15,3
46	Frequenz . .	412	824	1236	1648	2060	2472	2884	3296	3708	4120	4532
	Amplitude . .	98,8	20,0	38,9	100,0	69,0	59,6	69,0	70,8	32,4	18,7	30,0

Beachtenswert ist, daß alle diese L-Klänge das Gebiet um 550 bis 600 s<sup>-1</sup> mit einer Amplitude, die nahezu den Wert der Amplitude des Grundtones erreicht, aufweisen. Es handelt sich hier offenbar um den durch die Eigenresonanz der Mundhöhle resonatorisch oder auch durch Anblasen hervorgehobenen Teilklang.

Vergleichen wir dies Ergebnis mit einer Tabelle, welche wir bei C. St u m p f<sup>1)</sup> finden.

Wir fanden in Übereinstimmung mit diesem Forscher das Vorhandensein eines Formantgebietes für das L in Gegend 600 (bei uns etwa im Gebiet von 550 bis 600, dort zwischen 550 und 900), es soll aber ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß sich die Angaben von C. St u m p f auf stimmlose Konsonanten beziehen, so daß also dort die Teilkomponenten nur durch Anblasen entstanden sein können. Auch ein erneutes Ansteigen der Amplitude in dem Bereich oberhalb etwa 1400 s<sup>-1</sup> findet sich ähnlich in der Tabelle von C. St u m p f wieder. Die höchsten Teiltöne meiner Aufnahmen reichen bis über 4000 s<sup>-1</sup> hinauf, sie dürften weniger für die Charakterisierung des betreffenden Klanges als für die Klangfarbe der Versuchsperson maßgebend sein.

Die Hauptmerkmale einer Reihe weiterer L-Kurven mögen folgen:

Lfd. Nr.	Grundton des Sformklanges.	Charakter und Tonhöhe der Feinstruktur	Versuchsperson	
38	201	rein periodisch	bis 3500	H
39	236	unregelmäßig	bei 3000	I
40	246	unregelmäßig	bis 3500	B
41	264	völlig unregelmäßig	„ 4000	B
42	266	völlig unregelmäßig	„ 4000	B
43	272	unregelmäßig	bei 3800	G
44	274	völlig unregelmäßig	bis 4000	B
45	408	rein periodisch	2600 „ 3000	F
46	412	rein periodisch	2600 „ 3000	F

<sup>1)</sup> a. a. O. S. 181.

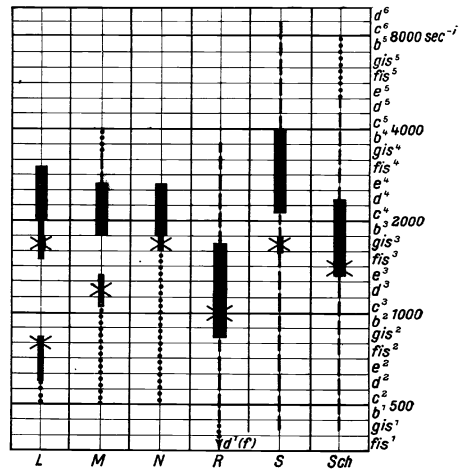


Abb. 2. Formantgebiete stimmloser Konsonanten nach C. St u m p f.

Die von mir hier gewählte Bezeichnungsart des jeweiligen Kurvencharakters ergibt sich leicht, wenn man als Beispiele solche Klangbilder betrachtet, die in den Tafeln abgedruckt sind. Bei rein periodischem Kurvenverlauf gelingt es subjektiv gar nicht oder nur schwer, den betreffenden Laut richtig anzugeben.

### 3. Die Konsonanten M und N.

Die Konsonanten M und N fallen physikalisch ebenfalls unter den oben definierten Begriff des Klanggemisches. Wieder finden wir neben dem vom Stimmband herührenden Stimmklang und seinen durch die betreffenden Resonanzstellungen der Mundhöhle hervorgehobenen Obertönen unabhängige Klänge, welche von anderen Schallquellen herrühren, so daß die Klangbilder in ihrer feinen Struktur nicht mehr rein periodisch ausfallen. Nichtsdestoweniger führte ich wieder einige Fourieranalysen durch, deren Ergebnis in der folgenden Tabelle zusammengestellt ist.

Lfd. Nr.		Ordnungszahl des Partialtones										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
M-Kurven:												
48	Frequenz . .	167	334	501	668	835	1002	1169	1336	1503	1670	1837
	Amplitude . .	99,0	100,0	19,4	6,4	4,9	3,0	0,8	33,5	5,6	11,5	16,2
53	Frequenz . .	248	496	744	992	1240	1488	1736	1984	2232	2480	2728
	Amplitude . .	100,0	23,5	12,3	10,8	23,0	23,8	4,5	5,4	6,3	26,2	8,6
N-Kurven:												
56	Frequenz . .	167	334	501	668	835	1002	1169	1336	1503	1670	1837
	Amplitude . .	100,0	24,3	19,2	3,9	2,3	6,3	1,3	16,6	30,0	17,3	15,8
58	Frequenz . .	262	524	786	1048	1310	1572	1834	2096	2358	2620	2882
	Amplitude . .	100,0	29,3	13,7	7,9	15,7	7,1	5,4	6,2	12,4	28,0	14,5

Allen diesen Klangbildern ist gemeinsam, daß die Teiltöne zwischen etwa  $300\text{ s}^{-1}$  und  $1200\text{ s}^{-1}$  wenig vertreten sind. Erst bei  $1300\text{ s}^{-1}$  beginnt für das M ein Teilton mit etwa 30% der Amplitude des Grundtones hinzutreten, während das N erst etwas höher, etwa bei 1400 bis 1600 vertreten ist. Gemeinsam ist allen Analysen ein erneuter Anstieg der Amplitude in Gegend  $2500\text{ s}^{-1}$ .

Diese Analysen passen auch in das von C. Stumpf angegebene Formantenschema hinein, ich möchte aber bemerken, daß die Annäherung mit Hilfe der von mir durchgeführten Analysen zu gering ist, um ein deutliches Unterscheidungsmerkmal der beiden auch subjektiv so ähnlichen Sprachlaute einwandfrei zu liefern.

Die Hauptmerkmale einer Reihe weiterer M- und N-Bilder zeigt die folgende Zusammenstellung:

Lfd. Nr.	Grundton des Stimmklanges	Charakter und Tonhöhe der Feinstruktur	Versuchsperson	
M-Kurven				
48	167	völlig unregelmäßig	bis etwa 3000	I
49	214	rein periodisch	um 1800 und bei 2500	K
50	228	rein periodisch	um 1800 und bei 3000	H
51	230	fast regelmäßig	um 1800 und bei 2500	G
52	238	völlig unregelmäßig	bis etwa 4000	B
53	248	völlig unregelmäßig	bis etwa 4000	B
54	248	unregelmäßig	bis etwa 4000	B
55	256	völlig unregelmäßig	bis etwa 4000	B
N-Kurven				
56	168	völlig unregelmäßig	ausgesprochen Gegend 1500 schwach Gegend 3000	I
57	228	völlig unregelmäßig	bis etwa 4000	B
58	262	völlig unregelmäßig	bis etwa 4000	B
59	264	völlig unregelmäßig	bis etwa 4000	B

Fast alle Klangbilder, die an den Lauten M und N aufgenommen wurden, besitzen Klangkomponenten auch noch in dem Gebiet zwischen 3000 und 4000  $s^{-1}$ . Sehr ausgesprochen sind diese hohen Teiltöne bei der Versuchsperson B, welche einen besonders klaren Klangcharakter besitzt. Wir hatten schon gelegentlich unserer Vokalanalysen in der früheren Arbeit feststellen können, daß bei allen Vokalaufnahmen die Feinstruktur dieser Versuchsperson am ausgesprochensten hervortrat.

#### 4. Der Konsonant R.

Hatte für die Deutung der bisher behandelten Klangbilder der Sprachlaute L, M und N die Annahme ausgereicht, daß neben der durch das Stimmband gebildeten Schallquelle noch weitere Schallquellen vorhanden sind, welche vom austretenden Luftstrom durch Anblasen betätigt werden, so tritt für den Sprachlaut R ein neues Moment hinzu, die mechanischen Schwingungen der Zunge (R linguale) beziehungsweise des Zäpfchens (R uvulare) unterbrechen periodisch in einer ziemlich langsamen Frequenz (ca. 20 bis 40  $s^{-1}$ ) den austretenden Luftstrom. Auf diese Weise kommt es zu einer kräftigen Modulation der Amplitude der vom Stimmband ausgehenden akustischen Wellen, auch werden diese genannten mechanischen Schwingungen akustische Wellen der gleichen Schwingungszahl auslösen. Im übrigen behalten alle natürlichen Hohlräume ihre Funktionen als Resonanzgebilde und als selbstständige, durch Anblasen betätigte Schallquellen bei, wie wir dies bereits bei den anderen bisher behandelten Konsonanten gefunden haben.

Wir wollen nun das besonders übersichtliche R-Klangbild 67 betrachten. Sehen wir zunächst von der feineren Struktur ab, so läßt sich der Kurvenzug angenähert als eine einwellige Sinuskurve deuten, welche in ihrer Amplitude moduliert ist. Wir können eine solche Funktion leicht mathematisch darstellen, indem wir schreiben:

$$P = P_0 + P_1 \sin \Omega t \sin \omega t, \quad (3)$$

hierbei ist  $n = \frac{\omega}{2\pi}$  die Frequenz des Stimmbandklanges (für das betrachtete Bild 67 454  $s^{-1}$ ) und  $N = \frac{\Omega}{2\pi}$  die Frequenz der mechanischen Schwingungen der Zunge (für unser Beispiel etwa 30  $s^{-1}$ ).

Der obenstehende Ansatz wird uns ohne weiteres einen Aufschluß liefern, ob wir das R zu den rein periodischen Klängen oder zu den Klanggemischen zu rechnen haben, selbst wenn das Klangbild äußerlich so regelmäßig erscheint wie das von uns betrachtete Beispiel.

Nach einer bekannten Beziehung ist der Ausdruck für P identisch mit:

$$P = P_0 + \frac{P_1}{2} \{ \cos (\omega - \Omega) t - \cos (\omega + \Omega) t \}. \quad (4)$$

Dieser Ausdruck fällt aber unter die auf Seite 7 aufgestellte Definition des Begriffes Klanggemisch.

Die eben angestellte Überlegung beweist, daß wir die R-Laute physikalisch zu den Konsonanten zu rechnen haben, selbst wenn wir von der Beschaffenheit der feineren Struktur völlig absehen, es treten ja infolge der Amplitudenmodulation in unserem erweiterten Fourieransatz zwei voneinander unabhängige Teiltöne auf, deren Frequenz sich um den Betrag  $2\Omega$  unterscheidet.

Die Regelmäßigkeit des Klangbildes 67 bildet indessen eine Ausnahme, meistens, und zwar gerade für die sprachlich besonders gut charakterisierten R-Laute, ist die feinere Struktur zum Stimmbandklang unharmonisch.

Zu den Frequenzen  $(\omega + \Omega)$  und  $(\omega - \Omega)$  treten also noch weitere Frequenzen hinzu, die durch Anblasen entstanden sind, auch die mechanischen Schwingungen der Frequenz  $\Omega$  werden von akustischen Schwingungen der gleichen Frequenz begleitet.

Um einen angenäherten Überblick über die Lage der Formantgebiete zu erhalten, führte ich die beiden folgenden Fourieranalysen durch:

Lfd. Nr.		Ordnungszahl des Partialtones											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
67	Frequenz	454	908	1312	1816	2270	2724	3178	3632	4086	4540	4946	} R linguale
	Amplitude	100,0	9,1	7,5	28,8	5,9	8,2	13,3	9,4	3,5	10,2	2,0	
70	Frequenz	260	520	780	1040	1300	1560	1820	2080	2340	2600	2860	} R uvulare
	Amplitude	70,7	100,0	23,4	7,1	68,6	7,6	23,9	11,7	19,9	30,1	41,0	

Die Hauptmerkmale einer Reihe von R-Kurven sind die folgenden:

Lfd. Nr.	Grundton des Stimmklanges	Charakter und Tonhöhe der Feinstruktur	Versuchsperson	
61	256	unregelmäßig	Gegend 2700	B
62	257	völlig unregelmäßig	bis etwa 4000	B
63	271	völlig unregelmäßig	bis etwa 4000	B
64	308	unregelmäßig	2500 bis 2800	G
65	420	fast regelmäßig <sup>1)</sup>	Gegend 3200	F
66	450	fast regelmäßig	Gegend 2700	F
67	454	fast regelmäßig	Gegend 3200	F
68	194	unregelmäßig	Gegend 2700	I
69	241	völlig unregelmäßig	bis etwa 4000	B
70	260	völlig unregelmäßig	bis etwa 4000	B
71	395	unregelmäßig	Gegend 3500	F

Die Untersuchung der Konsonantengruppe der Liquidae mit der Methode der Klangaufzeichnung mittels des Kondensatormikrophons hat uns Aufschluß über die physikalische Beschaffenheit dieser Laute geliefert, wir hatten feststellen können, daß diese Laute Gemische mehrerer voneinander unabhängiger Klänge sind, während die Vokale rein periodisch aus einem Grundton und seinen harmonischen Obertönen aufgebaut sind.

Die Folgerungen, die wir aus der von uns objektiv ermittelten Lage der Formanten dieser Laute für die technischen Probleme der Klangaufnahme, -übertragung und -wiedergabe stellen müssen, decken sich mit den von mir in meiner früheren Arbeit auf Grund der Vokaluntersuchung aufgestellten Prinzipien: Der Tonbereich von etwa 50 bis 5000  $s^{-1}$  enthält die für die Sprach- und Gesangübertragung wichtigen Frequenzen einschließlich derjenigen hohen Bereiche, welche für die persönliche Klangfarbe entscheidend sind. Die Frage der oberen Grenze möchte ich noch durch zwei neuere Oszillogramme der Zischlaute Sch bzw. S streifen (Klangbilder 72 und 73) und möchte ergänzend auch hinzufügen, daß subjektive Versuche (Abhören des Ausgangstromes des letzten Rohres) ergaben, daß bei einer Abstimmung des Kondensatormikrophons von etwa 5000  $s^{-1}$  eben eine geringe Abstumpfung des schärfsten S-Lautes merkbar wird, im fortlaufenden Sprachtext ist dieser Fehler jedoch noch nicht erkennbar.

<sup>1)</sup> Von der Amplitudenmodulation abgesehen.

### **Zusammenfassung.**

Es werden mehrere bisher unveröffentlichte Klangverteilungstabellen der Vokale, welche C. Stumpf mit seiner Methode der Resonanzgabeln aufnahm, mit den Vokalanalysen verglichen, die in einer früheren Arbeit (objektive Klangaufzeichnung mittels des Kondensatormikrophons) durchgeführt wurden. Die Ergebnisse decken sich gut.

Die Klangaufzeichnung wird auf die Konsonantgruppe der liquidae (L, M, N, R) ausgedehnt. Auf Grund der Untersuchungen gelingt es, die Frage zu beantworten, ob die Konsonanten physikalisch von den Vokalen verschieden sind, oder ob der Unterschied dieser Lautgruppen rein phonetischer Natur ist.

Als Ergebnis kann zusammenfassend ausgesagt werden:

Die Vokale sind rein periodische Vorgänge. Der Vokalklang besteht aus dem vom Stimmband herrührenden Grundton und den zu diesem harmonischen durch die Resonanzen der Mundhöhle verstärkten Obertönen. Die Konsonanten sind Klanggemische, zum Stimmbandklang und seinen Obertönen treten die Eigentöne der natürlichen Hohlräume hinzu, welche durch Anblasen betätigt werden.

---

# Die Theorie der Korona an Hochspannungsleitungen.

Von **Ragnar Holm.**

Mit 7 Textabbildungen.

Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium Siemensstadt.

Eingegangen am 11. Dezember 1924.

## § 1. Beschreibung des Phänomens.

Die Koronaerscheinung ohne wesentliche Büschel wird hier geschildert für den Fall zweier von umgebenden Gegenständen weit entfernten Drahtleitungen (Abb. 3a). Diese Leiterform (nicht konzentrische Zylinderleiter, vgl. unten) stellt der Theorie bei genügend hohen Frequenzen die einfachsten Bedingungen. Andeutungen über die Behandlung anderer Leitergebilde werden zum Schluß gegeben.

Die sichtbare Korona besteht aus einem leuchtenden Ionisationsgebiet von etwa 1 bis 3 mm Dicke, welches die Drähte dicht umhüllt. Aus diesem Gebiet werden die Ionen bzw. Elektronen in das umgebende Gas getrieben. Da die Elektronen bald an Molekülen haften und negative Ionen bilden, kann annähernd damit gerechnet werden, daß die Stromführung durch das nichtleuchtende Gas nur von Ionen vermittelt wird<sup>1)</sup>.

Die Stromform des Ionisationsgebietes ist wesentlich eine Townsendsche<sup>2)</sup>, d. h. die Raumladungen jener Strombahn spielen für das Feld eine untergeordnete Rolle. Besonders um den positiven Draht herum und gerade beim ersten Einsetzen der Korona ist dies der Fall. Am negativen Draht zerfällt die Koronahaut sehr schnell in kleine Büschel, welche an sehr kleinen diskreten Kathodenflecken ansetzende, vor diesen Raumladungen und Kathodenfälle besitzende Glimmströme darstellen. Es ist zu vermuten, daß diese Gebilde die Effektivität der negativen Korona stärken, indem sie  $E_1$  etwas herabsetzen (vgl. 2b). Die positiven Ströme nehmen zwangsweise dieselbe Stärke wie die negativen an. An sehr dicken Leitern können unter Umständen starke Büschel oder Funken ohne vorhergehende Korona auftreten. Auf diese Phänomene sei ein anderes Mal näher eingegangen.

Solange die Stromart des erwähnten Ionisationsgebietes wesentlich eine Townsendsche ist, müssen positive Ionen innerhalb desselben Gasmoleküle ionisieren, während sie aus dem Metall kaum Elektronen befreien können. Damit ihre Ionisation für den selbständigen Strom ausreicht, muß erstens die Feldstärke der Ionisations-schicht gewisse Grenzen überschreiten (Größenordnung  $30 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$ ), dann muß auch die Ionisationsschicht eine von der Drahtstärke abhängige Dicke besitzen. Diese Abhängigkeit hängt damit zusammen, daß das Feld am Draht konvergierend ist, so daß

<sup>1)</sup> Wegen der allgemeinen Theorie der Entladung durch Gase wird verwiesen auf R. Holm: Phys. Z. Bd. 25, S. 497. 1924. Diese Abhandlung wird im folgenden mit HTG. bezeichnet.

<sup>2)</sup> Vgl. HTG. § 6.

das Feld an einem dünnen Draht mit wachsender Entfernung schneller abnimmt als an einem dickeren. Wird, ohne Rücksicht auf die Raumladungen, die Zündungsfeldstärke  $X_0$  an der Drahtoberfläche aus gemessenen Zündspannungen berechnet, so ergibt sich bei Atmosphärendruck in Luft

$$X_0 = 30 \left( 1 + \frac{0,3}{\sqrt{a}} \right) \frac{\text{kV}}{\text{cm}}, \quad (1a)$$

wo  $a$  den Drahtradius bedeutet.

W. O. Schumann<sup>1)</sup> hat auf Grund der Townsendschen Theorie Berechnungen gemacht, welche auch zu der Gleichung (1a) führen, woraus man wohl schließen darf, daß seine Theorie ziemlich richtig ist (vgl. HTG., § 22). Schumann berechnet auch die Dicke  $\delta$  der Ionisationsschicht und findet sie etwas größer als die von Peek angenommene

$$\delta = 0,3 \sqrt{a}. \quad (1b)$$

Die Feldstärke am Außenrande der genannten Schicht ist von der Größe 20 bis  $30 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$ .

Außerhalb dieser Schicht sammeln sich Ionen an, welche relativ langsam weiterwandern. Da der Strom zunächst keine definierte Stärke hat, wächst er an und liefert immer mehr Ionen, bis er (allerdings in äußerst kurzer Zeit) einen in folgender Weise bestimmten Höchstwert erreicht. Abb. 3a deutet an, wie mit den Drahtladungen gleichnamige Ionenmengen um die Drähte gehäuft sind. Es ist aus der Abbildung ersichtlich, daß die Ionen eine Menge der Kraftlinien auffangen und infolgedessen hinter sich rings um den Draht das Feld schwächen. Der Vorgang erreicht nun, wie gesagt, in äußerst kurzer Zeit einen Gleichgewichtszustand derart, daß das Feld direkt am Draht nur noch gerade ausreicht, um die erwähnte Ionisationsschicht aufrechtzuerhalten. Sie bleibt bestehen und liefert Ionen nach zur Kompensation des sonstigen Feldzuwachses am Drahte, welches entstehen würde teils infolge des Weiterwanderns der Ionen, teils infolge der Steigerung der Elektrodenspannung. Wenn diese wieder abnimmt, wird das Feld an den Drähten bald zu schwach für die Ionisation, und die Korona erlischt. Es ist leicht verständlich, daß die Ionisationsschicht während der Feldzunahme nicht so viel Ionen herausbefördern kann, daß sie schon dadurch erlischt. Wenn sie das tun würde, würde sie doch im nächsten Augenblick wieder zünden, entweder weil die sich entfernenden Ionen das Feld hinter sich wieder anwachsen ließen, oder infolge des Anwachsens des Feldes mit der Elektrodenspannung.

Die Mehrleistung des Wechselstromes, die infolge der mit der Spannung fast phasengleichen Abwanderung der Ionen von den Drähten entsteht, ist es, welche die Energieverluste durch Korona verursacht. Da man die Beweglichkeit der Ionen in der Luft kennt, so gibt die obige Erklärung uns die Mittel in die Hand, eine Verlustformel theoretisch herzuleiten.

Hier unten wird eine recht grob angenäherte Formel hergeleitet. Messungen, über die ich zusammen mit Herrn Störmer in einem folgenden Aufsatz<sup>2)</sup> berichte, zeigen, daß diese Formel trotz der Vereinfachungen praktisch befriedigend ist und daß sie an Genauigkeit die bekannte Peeksche übertrifft.

<sup>1)</sup> W. O. Schumann: Elektrische Durchbruchfeldstärke von Gasen. Berlin 1923. Siehe besonders § 62 und 63. Dieses Buch wird hier mit Schum. bezeichnet.

<sup>2)</sup> R. Holm und R. Störmer: Wiss. Veröff. a. d. Siemens-Konzern Bd. 4, S. 25. 1925.

Die obige Theorie ist auch für die Gleichstromkorona zwischen parallelen Drähten verwendbar. Die Raumladungen werden allerdings bei dieser Stromform komplizierter, weil die gegeneinander wandernden Ionenströme ihre Raumladungen teilweise aufheben, so daß größere Stromstärke und kleinere Durchschlagsspannung als bei Wechselfeld zu erwarten sind. Bei genügend kleiner Frequenz bzw. kleinem Leiterabstand können allerdings auch die Ionenströme der Wechselkorona teilweise den anderen Leiter erreichen. Über Gleich- und Wechselkorona zwischen zylindrischen Leitern siehe § 6.

### § 2. Peeks Formel.

Nach Peek<sup>1)</sup> berechnet sich der Energieverlust  $W$  durch Korona bei Wechselstrom auf einer Doppelleitung mit dem Drahtdurchmesser  $2a$  und dem Drahtabstand  $D$  nach der folgenden, empirisch gefundenen Formel:

$$W = \frac{1,22}{10^3} (v + 25) \sqrt{a + \frac{6}{D} + 0,04} \frac{(E_{\text{eff}} - E_0)^2}{D} \frac{\text{kW}}{\text{km}}, \quad (2a)$$

wobei  $E_{\text{eff}}$  die effektive Spannung zwischen den Leitern und  $E_0$  eine Größe ist, die bisweilen gleichgesetzt wird derjenigen effektiven Spannung, welche (ohne Korona) die maximale Feldstärke  $X_0$  (siehe 1a) an der Drahtoberfläche erzeugt, meistens aber gleich einer Größe  $E_2$  gesetzt wird, welche weiter unten definiert wird.  $E_1$  ist die sogenannte Zündspannung der Korona und wird gegeben durch:

$$E_1 = a \cdot \ln \frac{D}{a} \cdot 42,3 \left( 1 + \frac{0,3}{\sqrt{a}} \right). \quad (2b)$$

$E_2$  ist folgende Rechnungsgröße:

$$E_2 = a \cdot \ln \frac{D}{a} \cdot 42,3 \left( 1 + \frac{0,3}{\sqrt{a}} \frac{1}{1 + 230a^2} \right). \quad (2c)$$

Die Einführung dieser physikalisch nicht definierten Größe  $E_2$  bedeutet eine Schwäche der Peekschen Darstellung. In meiner Theorie liegt kein Bedarf nach einer derartigen Größe vor.

### § 3. Die von der Korona pro Halbwelle beförderte Elektrizitätsmenge.

In den hier zunächst folgenden Herleitungen benutze ich der Einfachheit wegen elektrostatische c. g. s.-Einheiten.

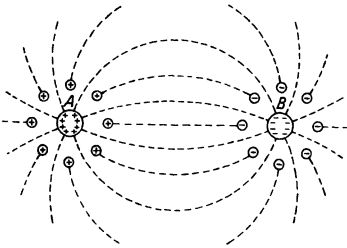


Abb. 3a.

In der Abb. 3a bedeuten die Kreise  $A$  und  $B$  die Querschnitte der beiden Leiter. Ihre Ladungen sind durch Kraftlinien verbunden. In der Umgebung der Leiter sind Ionen gezeichnet, welche paarweise durch Kraftlinien verbunden sind. Wir rechnen mit guter Annäherung so, als ob die Felder in nächster Nähe der Drähte rings um diese symmetrisch und ebenso die Ionen verteilt wären. Das gezeichnete Kraftfeld gibt ein gutes Bild des wirklichen und zeigt unter

anderem wie das Feld in nächster Nähe eines Leiters nur von dessen eigener Ladung

<sup>1)</sup> F. W. Peek: Dielectric phenomena, New York 1920, besonders die Formel (34a) S. 137 und die Formeln auf der S. 203.



bestimmt ist. Wir bezeichnen durch  $\varrho_1$  die Ladung des Drahtes pro Zentimeter, mit  $\varrho_2$  die entsprechende Ionenladung rings um den Draht herum. Die Potentialdifferenz zwischen den Leitern wird dann

$$E = 4\varrho_1 \ln \frac{D}{a} + 4\varrho_2 \ln \frac{D}{L}, \quad (3b)$$

wo  $L$  ein gewisses Mittel der Ionenabstände von der Drahtmitte bedeutet.

Nun ist nach unserer Theorie das erste Glied der rechten Seite von (3b) bekannt. Da nämlich das Feld an der Drahtoberfläche während der Ionisation durch die eigentliche Korona die Stärke  $X_0$  (siehe 1a) besitzt, so muß  $\varrho_1$  eine solche Ladung sein, die allein gerade die Zündspannung bedingen würde, d. h.

$$E_1 = 4\varrho_1 \ln \frac{D}{a}. \quad (3c)$$

Nun zerfällt allerdings am negativen Draht die Koronahaut in Büschel, welche vermutlich eine etwas geringere Potentialdifferenz innerhalb der Ionisationsschicht verlangen als die kontinuierliche Korona und darum mit kleinerem  $\varrho_1$  auskommen. Hierauf nehmen wir vorläufig keine Rücksicht.

Aus (3b) und (3c) folgt

$$E - E_1 = 4\varrho_2 \ln \frac{D}{L}. \quad (3d)$$

Diese Gleichung bestimmt  $\varrho_2$ , sobald  $L$  bekannt ist. Wie  $L$  berechnet werden kann, wird in § 5 gezeigt.

Man versteht nun: Wenn  $q$  jene Drahtladung ist, welche ohne Korona (die Korona möge z. B. durch vergrößerten Luftdruck unterdrückt sein) die Spannung  $E$  geben würde, so wird  $q$  die Zusatzladung bedeuten, die während einer Halbwelle in Folge der Korona in die Umgebung des Drahtes geschafft wird, und es gilt:

$$q + \varrho = \varrho_1 + \varrho_2$$

$$\text{oder} \quad q = \varrho_1 + \varrho_2 - \varrho. \quad (3e)$$

Zu der Gleichung (3e) ist zu bemerken: Sie gilt besonders für die Scheitelladungen, welche uns gerade interessieren. Die Ladung  $\varrho_2$  verändert sich zwar in recht verwickelter Weise mit der Zeit, doch so, daß  $q$ ,  $\varrho$ ,  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  gleichzeitig ihre Scheitelwerte besitzen. Wir benutzen die Gleichung (3e) für diesen Zeitpunkt. Nach Substitution der bezüglichen  $\varrho_i$ -Werte und Übergang zu praktischen Einheiten bekommen wir:

$$q = \frac{\sqrt{2}}{4 \cdot 9 \cdot 10^9} (E_{\text{eff}} - E_1) \left( \frac{1}{\ln \frac{D}{L}} - \frac{1}{\ln \frac{D}{a}} \right) \frac{\text{coul}}{\text{km}}, \quad (3f)$$

wo  $E_{\text{eff}}$  und  $E_1$  in kV gemessen werden.  $E_1$  ist durch die Gleichung (2b) gegeben, welche aus (3c) und (1a) hergeleitet werden kann.

#### § 4. Effektverlustformel.

Die Ströme, welche die Ladung  $q$  erzeugen würden, fließen mit der Phase  $90^\circ$  der Spannung voraus und sind wattlos. Anders ist es mit der Zusatzladung  $q$ . Um die sie erzeugenden Ströme beurteilen zu können, müssen wir den betreffenden Vorgang etwas näher betrachten. Es handelt sich um eine stationäre Wechselspannung, wo jede Halbwelle einer gleichstarken von entgegengesetztem Vorzeichen folgt. Wenn

eine Halbwelle die Ladung  $-q_2$  um den einen Draht gesammelt hat, so muß die nächste zuerst eine Ladung  $+q_2$  zum Kompensieren herbeiführen, und außerdem  $+q_2$  für ihren eignen Bedarf liefern. Ein ähnlicher Gedankengang führt dazu, daß die Stromquelle bei jeder Halbwelle die zusätzliche Elektrizitätsmenge  $2q$  herbeischaffen muß.

Die Abb. 4a und 4b veranschaulichen zwei charakteristische Formen des Feldes: Im Falle der Abb. 4a existiert noch eine positive Spannung von  $A$  gegenüber  $B$ , welche gerade im schnellen Abnehmen begriffen ist. Sie wird nur durch die Ionenladungen erzeugt, während die Drähte selbst ohne Ladungen sind. Die Abb. 4b stellt einen Zustand dar, der kurze Zeit nach dem Feldwechsel auftritt.  $A$  ist jetzt gegen  $B$  negativ, allerdings nur infolge des Feldes zwischen den Ionen und dem nächstliegenden Draht. Zwischen den

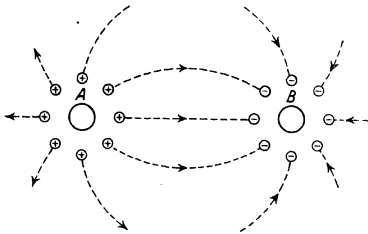


Abb. 4a.

Ionenladungen ist die Feldstärke Null. Man beachte, daß die in der Abbildung gezeichneten Ionen eine Mittellage der Ionen veranschaulichen. Sowohl außerhalb wie innerhalb des gezeichneten Ionenringes sind in Wirklichkeit Ionen vorhanden. Im Falle (4b) befinden sich also Ionen in einem Feld, das sie nach dem Mutterdraht zurückzieht. Schon zwischen den Zuständen in Abb. 4a und 4b wirken solche zurückziehenden Felder. Am kräftigsten bei noch ungeschwächten Ionenladungen wirken sie ungefähr bei der Umkehrphase der Spannung, welche darum von einem Stromstoß aus zurücklaufenden Ionen begleitet wird. Etwas später wird die Feldstärke am Draht hoch genug, um die Korona zu zünden. Dann erfolgt ein kräftiger Stromstoß, der sehr bald die noch übrigbleibende Kompensation vollzieht und sodann die neue  $q_2$ -Ladung heraus schafft. Dieser Stromstoß kann infolge der Hilfeleistung der Raumladung (vgl. Abb. 4b) bei einer Elektrodenspannung  $E_3$  eintreffen, die tiefer als  $E_1$  liegt. Darum setzen die einzelnen Koronastrome bei hoher Scheitelspannung (zu der großes  $q_2$  und schnelle Spannungssteigerung gehören) unterhalb  $E_1$  ein, obwohl beim weiteren Verlauf des Vorganges nicht  $E_3$ , sondern  $E_1$



Abb. 4b.

im wesentlichen die oben geschilderte Rolle spielt, (vgl. Beob. von Holm und Störmer).

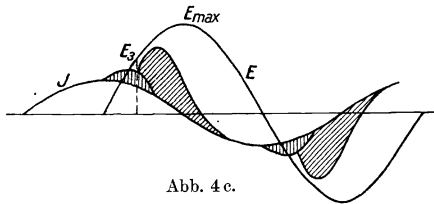


Abb. 4c.

Der eigentliche Koronastrom existiert im wesentlichen bis zur Zeit der höchsten Elektrodenspannung. Das Weiterwandern der Ionen setzt allerdings auch nachher etwas fort und bedingt einen weiteren Strom zur Vergrößerung des  $q$ . Wir sehen so, daß schon die Ladung  $q_2$  und noch mehr die Zusatzladung  $q$  wesentlich in Phase mit der Spannung bewegt wird. Der Koronastrom wird demnach ein Wattstrom.

Die Abb. 4c veranschaulicht die erwähnten Ströme, so wie sie in Oszillogrammen erscheinen. In der Abbildung ist der zur Ladung  $q$  passende Strom (der

berechnete Ladestrom) eingetragen. Über diesen lagern sich die von der Korona bedingten, beschriebenen Ströme. Senkrecht gestrichelt (ohne genauere Ausmessung) ist der Rückflußstrom gezeichnet, schräg gestrichelt der Neuladungsstrom, welcher beim Zünden der Koronahaut anfängt. Wenn  $\Delta J$  ein Ordinatenstück innerhalb des schattierten Gebietes,  $E$  die zugehörige Ordinate der Spannungskurve und  $t$  die Zeit bedeuten, so bedeutet

$$w = \int \Delta J \cdot E \cdot dt, \quad (4d)$$

über eine Halbwelle der Spannung integriert den Effektverlust infolge der Korona während einer Halbwelle. Weil

$$\int \Delta J dt, \quad (4e)$$

d. h. die schraffierte Fläche =  $2q$  ist, und die betreffenden  $E$ -Werte meistens kleiner als  $E_{\max}$  sind, so gilt:

$$w = 2q \cdot \Theta E_{\max}, \quad (4f)$$

wo  $0 < \Theta < 1$  ist.

Aus Beobachtungen hat sich für  $\Theta$  als ein allgemein gut brauchbares Mittel berechnen lassen

$$\Theta = 0,82 \quad (4g)$$

Da nun  $2\nu$  Halbwellen pro Sekunde ausgesandt werden, so wird der von der Korona verursachte Energieverlust pro Sekunde d. h. der Effektverlust,

$$W = 2\nu w = 4 \cdot 1,16 \cdot \nu \cdot q \cdot E_{\text{eff}}, \quad (4h)$$

oder nach Substitution aus (3f):

$$W = \frac{1,64}{9 \cdot 10^3} \cdot \nu \cdot E_{\text{eff}} [E_{\text{eff}} - E_1] \left( \frac{1}{\ln \frac{D}{L}} - \frac{1}{\ln \frac{D}{a}} \right) \frac{\text{kw}}{\text{km}} \quad (4i)$$

wo die  $E$  in kV gemessen sind.

Dies ist die theoretisch hergeleitete angenäherte Verlustformel, welche ich zunächst für den praktischen Gebrauch empfehlen möchte.

### § 5. Berechnung von L.

Wie im vorigen Paragraphen geschildert, wird die Ladung  $2q$  während der ersten Hälfte einer Spannung-Halbwelle gebildet, und zwar im wesentlichen um den Zeitpunkt  $t_1$  herum, wo die eigentliche Korona zündet, d. h. wo  $E$  den Wert  $\sqrt{2} E_1$  passiert. Den mittleren Ionenabstand von der Drahtmitte, den wir  $L$  genannt haben, wollen wir nun gerade für die Zeit  $t_2$ , wo  $E = E_{\max}$ , berechnen. Die Ladung ist bis dahin eine Zeit  $t_2 - t_1$  unterwegs. Wir setzen  $\tau = t_2 - t_1$ . Offenbar gilt:

$$\cos 2\pi\nu\tau = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2} E_1}{E_{\max}} = \frac{E_1}{E_{\text{eff}}}. \quad (5a)$$

Es ist also zu berechnen, bis zu welcher Entfernung  $L$  von der Drahtmitte Ionen von der Ausgangslage  $a + \frac{0,3}{\sqrt{a}}$  in der Zeit  $\tau$  wandern. Das treibende Feld wird ein Mittelwert zwischen den von  $q_1$  und  $q$  bedingten Feldern sein. Da zu einer Elektroden-spannung  $E_{\max} \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$  im Punkte  $r$  eine Feldstärke  $X \frac{\text{V}}{\text{cm}}$  gehört, wo, wenn von Raumladungen abgesehen wird,

$$X = \frac{E_{\max} \cdot 10^3}{2r \ln \frac{D}{a}},$$

so haben wir mit der Feldstärke

$$X_m = \vartheta \cdot X = \frac{\vartheta \cdot E_{\max} \cdot 10^3}{2r \cdot \ln \frac{D}{a}} \quad (5b)$$

zu rechnen, wo  $0 < \vartheta < 1$  ist.

Die spezifische Ionengeschwindigkeit ist (siehe z. B. L. Graetz, Handb. d. Elektr. Bd. 3, S. 362; vgl. auch J. Loeb, J. Frankl. Inst. 1923) etwa  $1,8 \frac{\text{cm}}{\text{sek}}$ .

Die Geschwindigkeit unserer Ionen wird also:

$$\frac{dr}{dt} = X_m \cdot 1,8. \quad (5c)$$

Wir erhalten aus (5b) und (5c)

$$\frac{1,8 \cdot \vartheta \cdot E_{\max} \cdot 10^3}{2 \ln \frac{D}{a}} \int_0^r dt = \int_{a + \frac{0,3}{\sqrt{a}}}^L r dr \quad \text{annäh.}^1) = \int_0^L r dr.$$

Durch Ausführung der Integration ergibt sich

$$L^2 = \frac{3,6 \cdot \vartheta \cdot E_{\text{eff}} \cdot 10^3}{2\sqrt{2} \ln \frac{D}{a}} \cdot \frac{\alpha}{\pi \nu}. \quad (5d)$$

Es hat sich gezeigt, daß man zu guter Übereinstimmung mit Messungen gelangt, wenn man für

$$3,6 \vartheta = 3 \quad (5e)$$

setzt.

Die Gleichung (5d), wo (5e) substituiert wird, dürfte für praktisches Rechnen zu empfehlen sein.

Diejenige Abhängigkeit des  $q$  von  $\nu$ , welche in den Peek'schen Formeln den Zusatz 25 zu  $\nu$  bedingt, entsteht in meiner Theorie in der Weise, daß  $L$  laut (5d) von  $\nu$  abhängig wird.

## § 6. Andere Elektrodengebilde.

Wenn nicht stark feldverzerrende Raumladungen auftreten, so würde die theoretisch übersichtlichste Elektrodenform für Koronauntersuchungen die von Peek und anderen verwandte konzentrische sein, d. h. ein Draht in der Achse eines hohlen Zylinders. Wir sehen zunächst von solchen Ladungen ab und können dann in Anschluß an das Vorgehende leicht folgende Formeln herleiten, wobei wir beachten, daß die Korona nur am inneren Draht entsteht:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 9 \cdot 10^3} (E_{\text{eff}} - E_0) \left( \frac{1}{\ln \frac{D}{L}} - \frac{1}{\ln \frac{D}{a}} \right), \\ E_0 &= \frac{E_1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

wo

wird, wenn  $E_1$  aus (2b) bestimmt wird.

<sup>1)</sup> Diese Annäherung ist natürlich nur dann gestattet, wenn  $L \gg a$  ist. Bei  $\nu = 50$  und  $E_{\text{eff}} = 100$  bis 150 wird  $L$  meistens von der Größenordnung einige bis 20 cm. Im Falle eines dicken Leiters wird als linkes Glied der Gl. (5d) benutzt  $L^2 - a^2$ .

Für die mittlere Ionenentfernung,  $L_0$ , und die Koronaverluste,  $W_0$ , gelten die Formeln

$$L_0 = 2L \quad \text{und} \quad W_0 = 2W, \tag{6b}$$

wo  $L$  und  $W$  nach bzw. (5d) und (4i), mit eingesetztem  $E_0$  so wie in (6a) berechnet werden.

Einige Messungen gaben von diesen Formeln deutlich abweichende Resultate, zunächst kleinere Ströme. Ich vermute den folgenden Grund dazu: Negative Ionen bewegen sich rund 1,4 mal schneller als positive. Sie entfernen sich weiter von dem Draht und unterhalten beim stationären Wechselfeldzustande in achsenentfernten Teilen des großen Zylinders negative Raumladungen, welche direkt die negative Korona und dadurch indirekt auch die positive Korona am Draht schwächen. (Infolge der Feldschwächung wird die Ionengeschwindigkeit und damit  $L$  vermindert, vermutlich auch  $E_1$  etwas erhöht.) Bei höheren Spannungen zerfällt unter Umständen auch die positive Korona in Büscheln und übernimmt sozusagen die führende Rolle. Dann werden die betreffenden Ströme größer als laut (6a). Wir werden ein anderes Mal hoffentlich über diese Phänomene ausführlicher berichten können.

Die Gleichstromkorona muß bei konzentrischen Elektroden infolge der ausgedehnten Raumladung besonders geschwächt werden und dürfte kleinere Ströme als die Wechselkorona geben.

Bei Dreiphasenstrom entsteht eine große Komplikation dadurch, daß die Koronaladungen um die Drähte herum nicht gleichzeitig auftreten. Tatsächlich kann der eine Draht in einem Augenblick Korona besitzen, die anderen gar nicht. Für den Fall, daß die Spannungen hoch über die Zündspannung der Korona gelangen, stört dies weniger. Die folgende Berechnungsweise ist gut gültig für diesen letzten Fall und liefert für kleinere Spannungen etwas zu hohe Verlustzahlen.

Wir behandeln zuerst die Drahtanordnung der Abb. 6c. Die Mitte  $Z$  behält dauernd das Potential Null. Wenn der Draht  $A$  seine höchste Spannung besitzt, aber keine Korona,  $q$  seine Ladung bedeutet und je  $-\frac{q}{2}$  die Ladungen der Drähte  $B$  und  $C$  (von nach der Umgebung

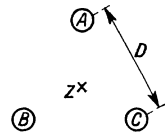


Abb. 6c.

leckenden Kraftlinien wird abgesehen), so ist die Spannung  $E$  des Drahtes  $A$  gegen Erde (gegen  $Z$ )

$$E = 2q \ln \frac{x}{a} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{q}{2} \ln \frac{D}{x} = 2q \ln \frac{D}{a},$$

wenn  $D$  den gegenseitigen Abstand der Drähte und  $x$  deren Abstand von  $Z$  bedeutet. Nach ähnlichen Rechnungen wie in § 3 findet man, daß, wenn  $E_0$ ,  $L_0$  und  $W_0$  nach bzw. (6a) und (6b) berechnet werden, der ganze Koronaverlust gegeben wird durch

$$W_A = 3W_0 = 6W, \tag{6d}$$

wo  $W$  nach (4i) mit eingesetztem  $E_0$  statt  $E_1$  berechnet wird und  $E_{\text{eff}}$  die Phasenspannung gegen Erde bedeutet.

Ähnlich wie hier unten bei (6n) und (6p) kann man verfahren, um die Koronaverluste bei der Drahtanordnung der Abb. 6e zu berechnen. Wir vernachlässigen wieder leckende Kraftlinien. Hier stellt sich die Berechnung verschieden für den mittleren und für

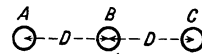


Abb. 6e.

die äußeren Drähte. Für den mittleren Draht  $B$  gilt, wenn  $E$  seine Phasenspannung gegen Erde bedeutet (vgl. 6n):

$$\sqrt{3} \cdot E = \varrho_B \left( 3 \ln \frac{D}{a} - \ln 2 \right). \quad (6f)$$

Man ersetzt in (2b), (3f), (4i) und (5d) den Ausdruck  $4 \ln \frac{D}{x}$ , wo  $x = L$  oder  $a$  ist, durch,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left( 3 \ln \frac{D}{x} - \ln 2 \right). \quad (6g)$$

Jetzt betrachten wir den Draht  $A$  bei seiner maximalen Spannung  $E$  gegen Erde. Man geht aus von dem Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{3} E &= 2 \varrho_A \ln \frac{D}{a} + 2 \varrho_B \ln \frac{D}{a} + 2 \varrho_C \ln 2, \\ \sqrt{3} E &= 2 \varrho_A \ln \frac{D}{a} + 2 \varrho_C \ln \frac{2D}{a}, \\ \varrho_A - \varrho_B - \varrho_C &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6h)$$

Formeln von der Art (2b), (3f), (4i), (5d) bleiben auch hier bestehen, wenn Ausdrücke von der Form  $4 \ln \frac{D}{x}$  ersetzt werden durch

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left( 3 \ln \frac{D}{x} + 2 \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{\ln \frac{D}{x}} \right). \quad (6i)$$

Gemittelt für zwei äußere Drähte ( $A$  und  $C$ ) und einen mittleren ( $B$ ) entsteht schließlich die Regel, daß für die Drahtanordnung (6e) Ausdrücke von der Form  $4 \ln \frac{D}{x}$  ersetzt werden durch

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left( 3 \ln \frac{D}{x} + \ln 2 - \frac{2}{3} \frac{\ln^2 2}{\ln \frac{D}{x}} \right), \quad (6k)$$

wonach der ganze Koronaverlust  $W_A$  mit Hilfe des veränderten  $W$  berechnet wird als

$$W_A = 3 W. \quad (6l)$$

Alle diese Berechnungen setzen Sinusspannung und gleichmäßige Belastung der 3 Leiter voraus. Die Verdrehung spielt an sich keine Rolle für die hergeleiteten Formeln.

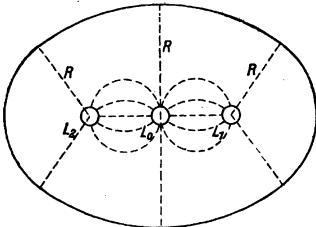


Abb. 6m.

Alle die obigen Berechnungen sind ohne Berücksichtigung der nach der Erde oder nach vorhandenen Wänden führenden Kraftlinien ausgeführt. Bei unseren ersten Versuchen mit drei Drähten, von denen die zwei äußersten mit Hochspannung beschickt wurden, während der mittlere über einer Oszillographenschleife geerdet war (siehe die folgende Abhandlung von R. Holm und R. Störmer), war es allerdings notwendig, den Einfluß der wenig entfernten Wände auch mit in Rechnung zu ziehen. Es zeigte sich, daß die folgende annähernde Berechnungsart das Erforderliche leistete.

Die Abb. 6m veranschaulicht die Feldform.  $L_0$ ,  $L_1$  und  $L_2$  sind die drei Leiter.

Die Entfernungen ( $L_1 L_0$ ) und ( $L_2 L_0$ ) sind beide =  $D$ . Für die Abstände von den Drähten nach den Wänden wird ein Mittel  $R$  verwendet. Die Ladung pro Zentimeter des Drahtes  $L_0$  sei  $\varrho$ , die Ladung der Drähte  $L_1$  und  $L_2$  seien je  $\frac{\varrho}{2} + \frac{\varrho_1}{2}$ .

Die nach den Wänden verlaufende Kraftlinienzahl wird so berechnet, wie für einen Draht mit der Ladung  $\varrho_1$ . Man findet für die Potentialdifferenz zwischen  $L_0$  und  $L_1$

$$E = 2\varrho \ln \frac{D}{a} + (\varrho + \varrho_1) \left[ \ln \frac{D}{a} - \ln 2 \right], \tag{6 n}$$

ein von der Ladung  
des  $L_0$  herrührendes  
Glied
von der  
Ladung  
des  $L_1$ 
von der  
Ladung  
des  $L_2$

und für die Potentialdifferenz zwischen  $L_1$  und der Wand

$$E = 2\varrho_1 \ln \frac{R}{a}. \tag{6 o}$$

Da die beiden  $E$ -Werte gleich sein müssen, so ergibt sich nach einfachen Rechnungen

wo

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1 &= \xi \varrho, \\ \xi &= \frac{3 \ln \frac{D}{a} - \ln 2}{2 \ln \frac{R}{a} - \ln \frac{D}{a} + \ln 2} \end{aligned} \right\} \tag{6 p}$$

Bei der Rechnung mit dem  $L$  der Formel (5d) müssen ähnliche Korrekturen verwendet werden. Überhaupt tritt statt des Ausdruckes

$$4 \ln \frac{D}{x},$$

wo  $x$  entweder  $a$  oder  $L$  bedeutet, jetzt der Ausdruck

$$\left. \begin{aligned} (4 + \varepsilon) \ln \frac{D}{x} - (2 + \varepsilon) \ln 2 \\ \varepsilon = \xi - 1, \end{aligned} \right\} \tag{6 q}$$

wenn  $\xi$  nach (6p) mit eingesetztem  $x$  berechnet wird. Etwas näher wird über die Korrektur in dem zitierten Aufsatz von Holm und Störmer berichtet.

Den Einfluß der Erde bei Freileitungen berücksichtigt man mit Hilfe der bekannten Spiegelungsmethode. Allerdings, solche genaue Rechnungen sind wohl nur dann motiviert, wenn es sich um eine genaue Prüfung der Theorie handelt. In der Praxis sind Störungen von der hier erwähnten Art zu klein (sicher kleiner als 5% der Korona-verluste), um Berücksichtigung zu rechtfertigen.

### § 7. Deformierte Oberflächen der Elektroden.

Wir gehen aus von einer Oberfläche, die im übrigen eben ist, aber an einer Stelle einen halbzyklindrischen Wulst trägt, dessen Radius klein ist im Verhältnis zum Radius des Leiters. Vor diesem Wulst wird nach Schottky<sup>1)</sup> die Feldstärke etwa verdoppelt. Unebenheiten mit abgerundeten Formen wirken ungefähr so wie derartige Wülste. Wo sie die Feldstärke verdoppeln, können Büschel schon bei  $E = \frac{E_1}{2}$  zünden. Wenn sie genügend reichlich vorkommen, tritt  $\frac{E_1}{2}$  anstatt  $E_1$  als

<sup>1)</sup> Siehe W. Schottky: Zeitschr. f. Phys. Bd. 14, S. 77. 1923.

Zündspannung auf. Liegen die Unebenheiten sehr dicht oder sind ihre Radien nicht mehr klein im Verhältnis zum Radius des Leiters, so nimmt allerdings ihre Fähigkeit, die Zündspannung zu vermindern, ab.

Durch Regen erhält die Leiteroberfläche Wasserwülste vom etwaigen Radius 1 bis 2 mm. Auf einem dagegen dicken Leiter müssen die Regentropfen eine Verminderung der Zündspannung auf etwa  $\frac{E_1}{2}$  bewirken können, während ihre Wirkung auf dünne Leiter kleiner ist.

Die Wülste der Seile liegen zu dicht, um die volle Effektivität zu erreichen. Nach Beobachtungen von Peek hat man bei Seilen statt mit  $E_1$  mit  $0,72 E_1$  bis  $0,82 E_1$  zu rechnen.

### § 8. Zusammenfassung.

Die eigentliche leuchtende Korona ist ein Ionisierungsgebiet von etwa 1 bis 3 mm Dicke um den betr. Draht herum. Die Vorgänge innerhalb des Ionisierungsgebietes, welche die Durchbruchfeldstärke  $X_0$  (siehe 1 a) bestimmen, hat Schumann, auf Townsend fußend, zu einem großen Teil geklärt. Außerhalb des Ionisierungsgebietes bewegen sich Ladungen in der Form von Ionen. Eine theoretische Bestimmung der Größe dieser Ionenströme, besonders bei Wechselspannung, gab es bisher nicht. Ich nehme an, daß die betr. Ladungen bei weiterwachsender Elektrodenspannung Größen annehmen, welche dadurch definiert sind, daß hinter ihnen am Drahte das Feld so reduziert wird, daß es nur noch für die Erhaltung der Ionisation gerade ausreicht. Es läßt sich dann die Größe der zusätzlichen Ladungen (über die normale Drahtladung hinaus; siehe Formel 3f), ihre mittlere Entfernung vom Mutterdraht, da sie voll ausgebildet sind (Formel 5d), und die Wattverluste infolge der Koronaströme (Formel 4i) berechnen. Diese Formeln sind in angenäherter, für die Praxis verwendbarer Form dargestellt. Sie beziehen sich auf ein Zweileitergebilde. Für einige andere Leitergebilde werden in § 6 ähnliche Formeln hergeleitet. Alle diese Formeln haben vor der Peekschen den Vorzug einer klaren, prüfbaren physikalischen Grundlage und sind auch genauer als jene (siehe den folg. Aufsatz). Die dargestellte Theorie vermag viele Einzelheiten der Koronaströme erklären: den Rückflußstrom und die Differenz der Größen  $E_1$  und  $E_3$  in § 4; die Wirkung des Regens in § 7.

---



# Koronamessungen an Hochspannungsleitern.

Von Ragnar Holm und Rudolf Störmer.

Mit 9 Textabbildungen.

Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium Siemensstadt.

Eingegangen am 10. Dezember 1924.

Zur Prüfung der Holmschen Theorie<sup>1)</sup> der Korona haben wir einige Leerlaufversuche an Hochspannungsleitern ausgeführt, über die im folgenden berichtet werden soll.

Die einfachsten, am leichtesten theoretisch zu verfolgenden Bedingungen liegen, wie in Holm TK. § 6 geschildert wird, nicht immer bei konzentrischer Anordnung der Elektroden vor. Um einen möglichst einfachen Aufbau zu erhalten und dabei für die Theorie möglichst zugängliche Verhältnisse, wo einseitige Raumladungen wie bei konzentrischen Elektroden vermieden sind und doch eine leichte Berücksichtigung der Wände ermöglicht wird, zu schaffen, haben wir zunächst die folgende Anordnung gewählt<sup>2)</sup>. Es wurden die Versuche an drei parallel in gleichem Abstand und in einer Ebene liegenden Leitern von kreisförmigem Querschnitt angestellt. Die beiden äußeren Drähte erhielten Wechselspannung, während der dem mittleren zufließende Strom gemessen wurde.

Da uns im Forschungslaboratorium kein genügend großer Transformator zur Verfügung stand, wurden die Versuche im Schaltwerk der Siemens-Schuckertwerke in Siemensstadt ausgeführt. Es war dort ein Transformator mit nahe sinusförmiger Spannung bis zu 130 kV vorhanden. Der mittlere der drei Leiter war über eine Oszillographenschleife geerdet und zeigte den Kapazitäts- plus Koronastrom an. Die beiden äußeren waren mit dem ungeerdeten Pol des Transformators verbunden. Den Verlauf der Spannung zeichnete eine zweite Oszillographenschleife auf, welche in Reihe mit einem sehr großen Widerstand direkt an die Hochspannung geschaltet war.

## § 1. Aufbau.

Der Transformator  $T$  (siehe Schaltschema) hatte eine Leistung von 30 kW und gab Spannungen bis zu 150 kV<sub>eff</sub>. Er war jedoch nur bis etwa 125 kV<sub>eff</sub>. zu gebrauchen, da er darüber hinaus nicht mehr genügend sinusförmige Spannungen ergab. Der eine Pol des Transformators war geerdet, während der andere Pol zu den beiden äußeren Leitern führte. Als Zuleiter wurden stets 1 cm starke Messingrohre benutzt. Diese zeigten bis zu Spannungen von 130 kV noch keine Sprühverluste.

<sup>1)</sup> Siehe den vorangehenden Aufsatz von Holm. Wir bezeichnen diesen im folgenden mit Holm TK.

<sup>2)</sup> Über zusammen mit Dr. Estorff später vorgenommene Versuche mit zylindrischer Anordnung, die auch zu größeren Leiterdicken und höheren Spannungen ausgedehnt wurden, dürfen wir aus patentrechtlichen Gründen noch nichts veröffentlichen.

Die drei Leiter vom Durchmesser  $2a$  wurden parallel im Abstand  $D$  voneinander schräg von der einen oberen Raumkante zur gegenüberliegenden geführt und unter Benutzung von Bakelitstäben isoliert befestigt. Ihre Länge betrug 12,50 m. Die Enden der Drähte wurden mit Messingzylindern, deren Kanten abgerundet waren, umgeben, um Sprühverluste zu vermeiden. Der ungeerdete Pol des Transformators war mit den beiden äußeren Leitern verbunden, außerdem führte von ihm eine Verbindung über einen hohen Widerstand von etwa  $2,5 \cdot 10^7 \Omega$  in Reihe mit einer Oszillographenschleife zur Erde. Dieser Widerstand mußte möglichst kapazitäts- und induktionsfrei sein, um die Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung richtig wiederzugeben. Mit Erfolg wurde dazu ein Borsäure-Mannit-Flüssigkeitswiderstand verwendet.

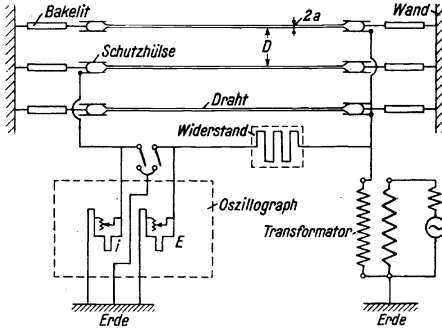
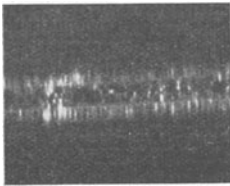
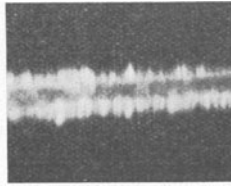


Abb. 1 a.

Er bestand aus einem mehrere Meter langen, in Schleifenform gebogenen Glasrohr. Dieser wurde mit der Widerstandsflüssigkeit gefüllt und hing zur Isolierung in Öl. Er hielt Spannungen bis zu  $150 \text{ kV}_{\text{eff}}$  glatt aus, ohne sich zu erwärmen. Der mittlere Draht war über eine andere Schleife zur Messung des Kapazitäts- plus Koronastromes geerdet. Außerdem lag zwischen den Zuleitungen zu den beiden Oszillographenschleifen und diesem selbst ein Schalter, um diese beiden Enden der Oszillographenschleifen bei Bedarf mit der Erde verbinden zu können.

## § 2. Die Messungen.

Vier Größen kommen in den Verlustformeln vor, die variiert werden können und durch deren Änderung die Theorie geprüft werden kann. Es sind dies: 1. die Frequenz, 2. die Spannungshöhe, 3. der Abstand der Drähte und 4. ihr Durchmesser. Die Frequenz konnte leider nicht geändert werden, da uns hierzu keine passende Maschine zur Verfügung stand. Es blieben also die drei anderen Größen.

Abb. 2 a.  $\varnothing = 3 \text{ mm}$ , Drahtabstand 60 cm, eff. = 80 kV.Abb. 2 b.  $\varnothing = 3 \text{ mm}$ , Drahtabstand 60 cm, eff. = 120 kV.

Nachdem die blanken, gut glatten Drähte vom Durchmesser  $2a$  in einer Entfernung  $D$  voneinander ausgespannt waren, wurden sie zunächst mit Benzol abgewaschen, um etwa anhaftenden Staub zu entfernen, da dieser unter Umständen zur vorzeitigen Koronabildung hätte Anlaß geben können. Unter Variierung der Spannung wurde dann eine Anzahl Oszillogramme aufgenommen. Die Spannung wurde mittels einer Kugelfunkenstrecke gemessen unter Berücksichtigung von Temperatur und Luftdruck. Nach jeder Versuchsreihe wurden die Schleifen mit Gleichstrom geeicht, außer-

dem wurde auch immer eine Spannungskurve mit beiden Schleifen zugleich aufgenommen, da es sich zeigte, daß bisweilen die Aufzeichnungen der Schleifen eine Phasendifferenz aufwiesen.

Einige der mit Korona umgebenen Drähte wurden photographiert. Da die Korona sehr lichtschwach war, wurden die Aufnahmen aus nächster Nähe des mittleren Drahtes mit einem sehr lichtstarken Objektiv gemacht. Abb. 2 a und 2 b zeigen Aufnahmen, die an einem 3 mm dicken Draht bei 60 cm Drahtabstand und bei Spannungen von 80 und 120 kV<sub>eff</sub> gemacht wurden. Die positive Koronahaut macht sich nur als ein feiner Schleier bemerkbar, während die negativen Büschel als kleine Stacheln erscheinen.

### § 3. Berechnung der Messungen und Vergleich mit der Theorie.

Zur Prüfung der Theorie wurde, wie schon erwähnt, ein Dreileitersystem verwendet. Diese Anordnung wurde gewählt, um um den mittleren Draht herum ein möglichst homogenes Feld zu erhalten und dabei doch den Einfluß der Wände leicht berechnen zu können. An dem späteren Einsetzen der Korona an dem mittleren Draht konnte man ersehen, daß die Wände nicht ohne Einfluß waren. Dieser Einfluß wurde durch den Gebrauch der Formeln (6 p) bis (6 q) in Holm TK. berücksichtigt. Es wurde also die Fiktion gemacht, daß die Wände um das Leitersystem herum als ein großer Zylinder, vom Radius  $R$  betrachtet werden könnten, wo  $R$  groß im Vergleich zum Drahtabstand  $D$  war, vgl. Abb. 3 a.

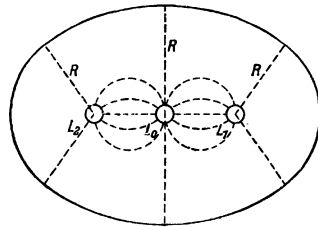


Abb. 3 a.

Die Ladung pro Zentimeter des Leiters  $L_0$  sei  $q$ , die Ladungen von  $L_1$  und  $L_2$  je  $\frac{q}{2} + \frac{q_1}{2}$ . Nur die Ladung  $q_1$  sendet Kraftlinien zu dem äußeren Zylinder, der also die Ladung  $-q_1$  trägt. Die Potentialdifferenz zwischen  $L_0$  und  $L_1$  ist dann:

$$E = 2q \ln \frac{D}{a} + (q + q_1) \left[ \ln \frac{D}{a} - \ln 2 \right]$$

und die Potentialdifferenz zwischen  $L_1$  und der Wand

$$E = 2q_1 \ln \frac{R}{a}.$$

Beide  $E$ -Werte müssen einander gleich sein. Setzen wir:

$$q_1 = \xi_a \cdot q, \quad (3 b)$$

so ergibt sich:

$$\xi_a = \frac{3 \ln \frac{D}{a} - \ln 2}{2 \ln \frac{R}{a} - \ln \frac{D}{a} + \ln 2}. \quad (3 c)$$

Wir bezeichnen:

$$\xi_a = 1 + \varepsilon_a \quad (3 d)$$

und erhalten aus den obigen Gleichungen:

$$q = \frac{E}{(4 + \varepsilon_a) \ln \frac{D}{a} - (2 + \varepsilon_a) \ln 2}, \quad (3 e)$$

Man hat also in den Gleichungen des § 3 bei Holm TK. statt  $4 \ln \frac{D}{a}$  den Ausdruck  $(4 + \varepsilon_a) \ln \frac{D}{a} - (2 + \varepsilon_a) \ln 2$  zu setzen.

Dann ergibt sich die Einsatzspannung auf dem mittleren Draht zu:

$$E_{10} = a \cdot 10,6 \left(1 + \frac{0,3}{\sqrt{a}}\right) \left[(4 + \varepsilon_a) \ln \frac{D}{a} - (2 + \varepsilon_a) \ln 2\right], \quad (3f)$$

auf einem äußeren Draht dagegen einen Wert

$$\frac{1}{2} E_{10} \left(1 + \frac{1}{\xi_a}\right) = \frac{1}{2} (E_{10} + E_{11}),$$

wenn wir  $\frac{E_{10}}{\xi_a} = E_{11}$  setzen.

Wir erhalten also dort, wie auch die Beobachtungen zeigen, eine kleinere Zündspannung. Für die Berechnung haben wir einen mittleren Wert zwischen beiden gebraucht, und zwar den Wert:

$$E_1 = \frac{1}{3} (2 E_{10} + E_{11}) = E_{10} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3 \xi_a}\right). \quad (3g)$$

Bei der Berechnung des Ionenfeldes müssen dieselben Korrekturen angebracht werden. Man hat überall statt  $a$  den Wert  $L$  einzusetzen.

Im folgenden möge ein Beispiel zur Erläuterung ausgerechnet werden:

Es war:

$\alpha = 0,15$  cm,  $D = 80$  cm,  $R = 300$  cm, Drahtlänge = 12,80 m,  $\nu = 52$ ,  $E = 127,7$  kV<sub>eff</sub>.

Es wird zunächst ausgerechnet:

$$\xi_a = (1 + \varepsilon_a) = \frac{3 \ln \frac{D}{a} - \ln 2}{2 \ln \frac{R}{a} - \ln \frac{D}{a} + \ln 2} = 1,8869,$$

$$\varepsilon_a = 0,8869,$$

$$E_1 = E_{10} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3 \xi_a}\right) = 68,26 \text{ kV},$$

dabei ist nach (3f):

$$E_{10} = a \cdot 10,6 \left(1 + \frac{0,3}{\sqrt{a}}\right) \left[(4 + \varepsilon_a) \ln \frac{D}{a} - (2 + \varepsilon_a) \ln 2\right].$$

Aus:

$$\cos \alpha = \frac{E_1}{E_{\text{eff}}} = \frac{68,26}{124,4} \quad [\text{vgl. Holm TK. (5a)}]$$

ergibt sich:

$$\alpha = 1,007 \text{ Rad.}$$

Die nächste Größe, die berechnet werden kann, ist  $L$  aus der Gleichung:

$$L^2 = \frac{3 \cdot E_{\text{eff}} \cdot 10^3}{2 \sqrt{2} \ln \frac{D}{a}} \cdot \frac{\alpha}{\pi \nu}.$$

Die gegebenen Werte eingesetzt, ergibt  $L = 11,53$  cm. Nachher berechnen wir:

$$\xi_L = 1 + \varepsilon_L = \frac{3 \ln \frac{D}{L} - \ln 2}{2 \ln \frac{R}{L} - \ln \frac{D}{L} + \ln 2} = 0,9705,$$

also

$$\begin{aligned} \varepsilon_L &= -0,0295, \\ q &= \frac{\sqrt{2}}{9 \cdot 10^3} (E_{\text{eff}} - E_1) \left( \frac{1}{(4 + \varepsilon_L) \ln \frac{D}{L} - (2 + \varepsilon_L) \ln 2} - \frac{1}{(4 + 2a) \ln \frac{D}{a} - (2 + \varepsilon_a) \ln 2} \right) \frac{\text{coul}}{\text{km}} \\ &= 1,151 \cdot 10^{-3} \frac{\text{coul}}{\text{km}}, \\ W_{\text{ber}} &= 2 \nu \cdot 2q \cdot 0,82 \cdot E_{\text{max}} = 35,5 \frac{\text{kW}}{\text{km}}. \end{aligned}$$

Wenn der Einfluß der Wände nicht berücksichtigt wird, erhalten wir Werte, die unter Umständen um 10%, oder in einzelnen Fällen sogar mehr, zu hoch sind.

#### § 4. Auswertung der Oszillogramme.

Bei der Auswertung der Oszillogramme haben wir im allgemeinen zunächst den Kapazitätsstrom eingezeichnet. Seine Größe ergibt sich aus der Gleichung:

$$J_m = \frac{2\pi \cdot \nu \cdot E_{\text{eff}} \cdot \sqrt{2}}{(4 + \varepsilon_a) \ln \frac{D}{a} - (2 + \varepsilon_a) \ln 2} \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^3} \cdot 0,0128 \text{ Amp.} \quad (4a)$$

Im obigen Beispiel wird

$$J_m = 2,93 \text{ mA}.$$

Hier ist 0,0128 km die Länge des Drahtes.

Auf dem Oszillogramm, Abb. 4 b, möge 1 mA  $h$  mm entsprechen. Auf dem abgebildeten Oszillogramm war  $h = 4,283$ .

Der Kapazitätsstrom hat dort sein Maximum, wo die etwa sinusförmige Spannungskurve ihre Wendetangente hat; er ist gleich Null, wenn die Spannungskurve ihr Maximum hat.

Im Oszillogramm ist nun nicht der Kapazitätsstrom, sondern der Kapazitäts- plus Koronastrom photographiert. Die Halbwellenfläche, die durch die Kapazitätsstromkurve und die Kurve des oszillographierten Stromes begrenzt wird, stellt  $2q$  dar. Ist die Länge einer Halbwelle auf dem Oszillogramm  $l$  mm, in unserem Falle 52 mm, so stellt  $2\nu \cdot l \cdot h$  die Fläche in mm<sup>2</sup> für ein Millicoulomb dar.

Rechnet man danach  $2q = 2,302$  Millicoulomb für eine Leitungslänge von 0,0128 km aus, so erhält man in unserem Beispiel 696 mm<sup>2</sup>, während wir durch Planimetrisieren des Oszillogramms gemessen haben

$$2q_{\text{beob}} = 640 \text{ mm}^2.$$

Zur Berechnung der Verluste aus dem Oszillogramm teilt man eine Spannungshalbwelle in eine gewisse Anzahl gleicher Teile  $n$  ein. Nennt man das durch die photographisch aufgezeichnete und die eingezeichnete Kapazitätsstromkurve begrenzte Stück der Ordinate  $\Delta J$ , so ist

$$\frac{1}{2 \cdot \nu \cdot n} \sum \Delta J \cdot E$$

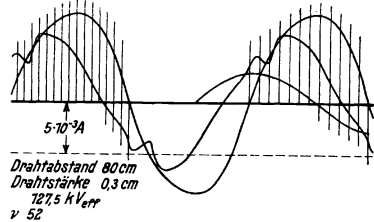


Abb. 4 b.

der Verlust pro Spannungshalbwelle bei einer Leiterlänge von 0,0128 km in Watt, wenn  $E$  in kV und  $\Delta J$  in Milliampere gemessen wird, also

$$\frac{1}{0,0128 \cdot n \cdot 10^3} \sum \Delta J \cdot E$$

der Verlust in  $\frac{\text{kW}}{\text{cm}}$ .

In unserem Beispiel erhält man so  $33,5 \frac{\text{kW}}{\text{cm}}$ , d. h. sehr gute Übereinstimmung mit dem berechneten Werte.

Zur Bestimmung der Einsatzspannung  $E_3$  mißt man die Spannungsordinate, die durch den Punkt der Stromkurve gezogen ist, in welchem die Korona einsetzt. Ist die Länge dieser Ordinate  $h_{sp}$  mm, die Ordinate des Spannungsmaximums  $h_{max}$  mm, so ist

$$E_3 = \frac{h_{sp}}{h_{max}} E_{eff}.$$

Bei obigem Oszillogramm erhält man  $= 75,5$  kV.

Auf diese Weise wurden alle Oszillogramme berechnet und ausgewertet. Die folgende Tabelle enthält alle die so berechneten und gemessenen Werte.

Tabelle 4c. Koronamessungen.

Lfd. Nr.	Drahtstärke mm	Drahtabstand cm	$E_{eff}$ in kV	$J$ in Amp. pro km	Frequenz $\nu$	$E_s$	$E_1$	$2g$		Verluste $W$ in $\frac{\text{kW}}{\text{km}}$		in $\frac{\text{P.e.k}}{W_x}$
								beobachtet	be-rechnet	beobachtet	ber. nach Holm	
1	3	45	72,2	0,15	51,5	63,7	59,8	200	180	4,81	4,21	18,3
2	3	45	81,9	0,17	51,5	57,9	59,8	415	392	12,12	10,38	25,6
3	3	45	91,8	0,19	51,5	53	59,8	629	655	21,35	19,4	36,2
4	3	45	95,5	0,2	51,5	52	59,8	750	760	23,6	23,5	42,4
5	3	60	85	0,16	50,5	68,4	64,2	310	280	8,67	7,7	20,2
6	3	60	100,8	0,188	50	64,3	64,2	600	590	20,4	19,0	34,3
7	3	60	113,8	0,214	50,5	62,6	64,2	870	887	33,1	32,6	52,1
8	3	80	81,2	0,145	52	—	68,26	90	99	2,94	3,2	7,88
9	3	80	96	0,17	52	78,4	68,26	245	257	9,83	9,9	17,9
10	3	80	106,1	0,193	53	77	68,26	330	384	15,5	16,4	26,6
11	3	80	114,5	0,205	52	75,7	68,26	460	498	21,2	22,7	33,9
12	3	80	122,3	0,216	51,5	70,36	68,26	595	607	28,3	30,0	42,6
13	0,8	80	72,9	0,104	52,5	25,1	31,8	345	365	10,9	11,5	11,5
14	0,8	80	82	0,117	52,5	21,1	31,8	440	474	16,3	16,8	16,5
15	0,8	80	90,7	0,128	52,5	19,8	31,8	558	587	21,8	23	22,3
16	0,8	80	100,1	0,144	52,5	14,7	31,8	650	716,4	29,3	31	29,6
17	0,8	80	110,2	0,158	52,5	12,2	31,8	790	864	37,8	41,2	39,1
18	0,8	80	122,6	0,176	52,5	12,2	31,8	924	1033	50,7	54,7	48,6
19	4	66	99	0,193	51	79	80	284	273	9,8	8,64	25,7
20	4	66	112,4	0,216	50	78	80	480	459,5	20,1	18,4	39,1
21	4	66	123	0,234	49,5	76,3	80	716	653	32,2	28,6	53,5
22	4	100	102	0,18	51,5	76,3	85,3	133	129	4,9	4,7	16,9
23	4	100	117	0,198	49,9	—	85,3	299	284,9	12,4	11,7	26,4

Einige graphisch dargestellte Werte veranschaulichen die Tabelle und zeigen das Ansteigen der Verluste mit wachsender Spannung sowie den Unterschied zwischen berechneten und beobachteten Werten.

**Bemerkungen zu der Ausrechnung.**

Die Scheitelspannungen waren mit einer Kugelfunkenstrecke gemessen worden. Für die Berechnung wurde die mit dem Oszillographen aufgezeichneten Spannungskurven miteinander verglichen, und danach die mit der Kugelfunkenstrecke gemessenen Werte korrigiert.

Bei der Berechnung wurde eine etwas größere Leitungslänge benutzt, 12,80 m statt 12,50 m, um Verluste und Kapazitätsströme der Zuführungen zu berücksichtigen.

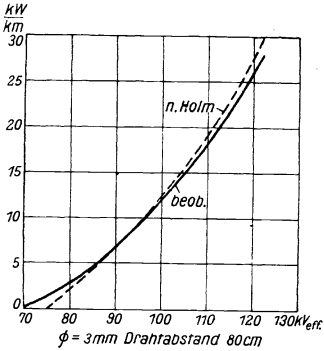


Abb. 4 d.

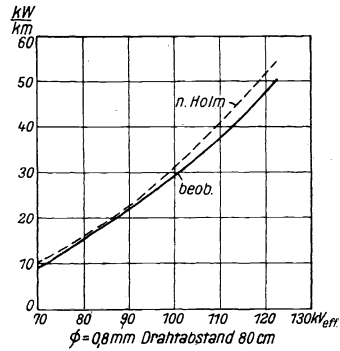


Abb. 4 e.

Der eingesetzte Wert für  $R$  stellt den durchschnittlichen Abstand des mittleren Leitern von den Wänden dar.

Die in Spalte 9 der Tabelle enthaltenen  $2q$ -Werte wurden durch mehrfaches Planimetrieren der Oszillogramme erhalten.

Zur genaueren Berechnung des Ausdruckes  $W_{\text{beob}} = \frac{1}{0,0128 n \cdot 10^3} \sum \Delta J \cdot E$  wurde stets die Simpsonsche Formel verwendet.

Bei der Ausrechnung der  $W_{\text{beob}}$ -Werte aus den Oszillogrammen könnte man Bedenken haben, daß der Oszillograph die  $E$ - und  $J$ -Werte nicht genau genug aufzeichnet. Bei späteren Versuchen wurden die Verluste außer mittels eines Oszillographen noch wattmetrisch gemessen. Die beiden so erhaltenen Werte stimmen vollkommen überein.

In der letzten Spalte sind die Pee kschen Werte angegeben. Da keine Pee ksche Formel für das hier angewandte Dreileitungssystem bekannt ist, so wurde deshalb so verfahren, daß alle Beispiele nach der Hol m schen Zweileiterformel (siehe Holm TK.4i) ausgerechnet wurden, ebenso die entsprechenden Werte nach der Pee kschen Formel (siehe Holm TK. 2 a). Diese wurden mit den für das Dreileitersystem ausgerechneten Werten verglichen gemäß der der Proportion.

$$W : W = W_x : W .$$

Holm	Holm	Pee k
3 Leit.	2 Leit.	2 Leit.

**§ 5. Schlußfolgerungen.**

Die von dem einen von uns (R. Hol m, im vorangegangenen Aufsatz) rein theoretisch hergeleiteten annähernden Formeln für den Koronastrom und dem von ihm verursachten Energieverlust werden an einem Dreileitersystem geprüft. Um den Ein-

fluß der Wände zu berücksichtigen, werden mit bezug auf diese korrigierte Formeln verwendet.

Die auf diese Weise berechneten Werte stehen mit den aus Oszillogrammen ausgewerteten in so guter Übereinstimmung, wie nach den gemachten Vereinfachungen in der Theorie überhaupt erwartet werden kann. Siehe die Kolonnen  $2 q$  ber,  $2 q$  beob,  $W$  ber,  $W$  beob, in der Tabelle 4c.

Die empirische Formel von Peek, welche aus Versuchen mit gewissen konzentrischen Elektroden hervorgegangen ist, zeigt sich für unsere Messungen nicht verwendbar, auch wenn bis zu 10% zusätzliche Korrekturen wegen des Einflusses der Wände angebracht werden.

Die Abb. 4b sowie 5a und 5b geben Beispiele der oszillographischen Aufnahmen. Sie zeigen die von der Theorie erforderte Stromform.

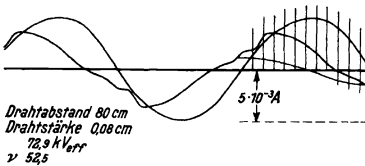


Abb. 12 a.

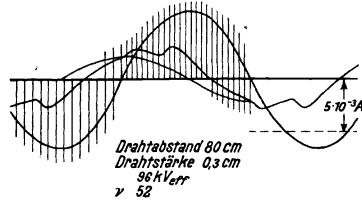


Abb. 12 b.

Nach der Theorie soll  $E_3 < E_1$  sein und mit wachsendem  $E_{\max}$  abnehmen. Die betreffende Kolonne  $E_3$  der Tabelle 4c bestätigt diese Annahme. Ein paarmal treten aber  $E_3$ -Werte auf, die größer als das betreffende  $E_1$  sind. Es ist hervorzuheben, daß die betreffende Ausmessung von  $E_3$  in Folge der Schwierigkeit, die Einsatzzeit genau zu bestimmen, so große Fehlerquellen in sich schließt, daß die Abweichung von der Theorie noch innerhalb der Fehlergrenze liegt.

### Zusammenfassung.

Die Arbeit schließt sich an die betreffende Arbeit von Holm „Die Theorie der Korona an Hochspannungsleitern“ an und prüft die dort theoretisch abgeleiteten Verlustformeln.

Als Versuchsanordnung werden drei parallel in einer Ebene liegende Drähte verwendet, deren beide äußere mit dem ungeerdeten Pol eines Hochspannungstransformators verbunden sind, während die dem mittleren Draht zu- und abfließenden Ströme mittels eines Oszillographen gemessen werden.

Der Aufbau der Versuchsanordnung wird näher beschrieben. Eine Tabelle, in der die empirisch und theoretisch gefundenen Werte nebeneinandergestellt sind, zeigt die gute Übereinstimmung der beiden Werte. Schließlich werden noch einige Oszillogramme, sowie einige photographische Aufnahmen der Korona gezeigt.



# Über Siebketten.

Von Hermann Backhaus.

Mit 11 Textabbildungen.

(Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium Siemensstadt.)

Eingegangen am 11. Februar 1925.

Im vorigen Heft dieser Zeitschrift<sup>1)</sup> habe ich nach den von H. Riegger angegebenen Methoden ein- und zweigliedrige Siebketten behandelt und auch einige Formen dreigliedriger Siebketten betrachtet. Für viele technische Zwecke sind nun aber die Resonanzkurven so kurzer Siebketten nicht steil genug. Die meistens in der Leitungstheorie verwendete Diskussionsmethode, die darin besteht, daß man sich mit der Betrachtung der Dämpfungskonstanten begnügt, kann in manchen Fällen zu ungenauen Resultaten führen, während eine strenge Berechnung solcher Gebilde ohne die der genannten leitungstheoretischen Näherungsmethode eigentümliche Vernachlässigung der Rückwirkung eine übersichtliche Diskussion der Formen der sich ergebenden Resonanzkurven noch zuläßt. Es seien daher im folgenden Rechnungen mitgeteilt, die es gestatten, einen allgemeinen Überblick über die Resonanzkurvenformen drei-, vier- und fünfgliedriger Siebketten zu gewinnen.

## § 1. Die Grundformeln.

Es werden zunächst abgestimmte Siebe betrachtet, d. h. solche, bei denen die Eigenfrequenz jedes Kreises ohne Berücksichtigung der Koppelung mit den Nachbarkreisen dieselbe ist. Weiter soll gemischte Koppelung ausgeschlossen sein, ebenso die Ohmsche Koppelung, so daß wir also nur rein induktive und rein kapazitive Koppelung betrachten. Die kapazitive Koppelung läßt sich in einfacher Weise auf die induktive Koppelung zurückführen<sup>2)</sup>; es soll daher im Folgenden nur die induktive Koppelung behandelt werden. Die behandelten Siebe sind dann allgemein durch folgendes Schaltungsschema dargestellt:

Es sei ausdrücklich bemerkt, daß gleicher Aufbau der einzelnen Kreise nicht vorausgesetzt wird.

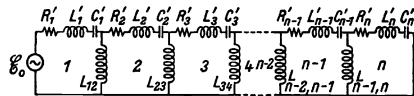


Abb. 1.

Um zu den Gleichungen der Resonanzkurven, d. h. der Abhängigkeit der

Stromamplitude im letzten Gliede von der Frequenz zu gelangen, könnten wir den zweiten Kirchhoffschen Satz auf jeden Kreis anwenden. Hierdurch erhalten wir Gleichungen

<sup>1)</sup> Wiss. Veröff. a. d. Siemens-Konzern Bd. III, 2, S. 101—152.

<sup>2)</sup> Siehe H. Backhaus, Theorie der kurzen Siebketten, Jahrb. f. drahtl. Telegr., 24; 1, 2, 3, § 4.



quenzverhältnis  $\eta$  wollen wir, wo es nunmehr erscheint, gleich 1 setzen, eine Vernachlässigung, die bei dem schmalen Frequenzbereich, der für unsere Resonanzkurven in Frage kommt, noch zu keinen wesentlichen Ungenauigkeiten führen kann, zumal  $\eta$  sowohl im Zähler wie im Nenner der zu diskutierenden Ausdrücke auftritt. Wir werden später auf die Wirkung dieser Vernachlässigung näher eingehen. Die Größen:

$$U_i = \frac{S_i}{R_i} = \frac{\omega L_i}{R_i} - \frac{1}{\omega C_i R_i} = \frac{1}{D_i} \left( \eta - \frac{1}{\eta} \right) = \frac{X}{D_i}$$

unterscheiden sich nur durch den Faktor  $\frac{1}{D_i}$ , weil nach Voraussetzung alle Kreise aufeinander abgestimmt sind, also  $\eta$  für alle Kreise gemeinsam ist. Wir können daher setzen:

$$U_1 = \frac{U}{p_1}, \quad U_2 = \frac{U}{p_2}, \quad \dots, \quad U_n = \frac{U}{p_n},$$

wo die Dämpfungsverhältnisse  $p$  definiert sind durch:

$$p_1 = \frac{D_1}{D_1} = 1, \quad p_2 = \frac{D_2}{D_1}, \quad p_3 = \frac{D_3}{D_1}, \quad \dots, \quad p_n = \frac{D_n}{D_1}.$$

Außerdem seien die Koppelungsverhältnisse:

$$\frac{K_{12}^2}{K_{12}^2} = n_1^2 = 1, \quad \frac{K_{23}^2}{K_{12}^2} = n_2^2, \quad \dots, \quad \frac{K_{n-1,n}^2}{K_{12}^2} = n_{n-1}^2,$$

und schließlich setzen wir:

$$m_1^2 = \frac{K_{12}^2}{D_1^2}. \tag{3}$$

Dann wird:

$$m_{12}^2 = \frac{n_1^2 m_1^2}{p_1 p_2}, \quad m_{23}^2 = \frac{n_2^2 m_1^2}{p_2 p_3}, \quad \dots, \quad m_{n-1,n}^2 = \frac{n_{n-1}^2 m_1^2}{p_{n-1} p_n}.$$

Demnach wird aus den Gleichungen (2):

$$\left. \begin{aligned} & M'_n = 2 \frac{n_1 n_2 \dots n_{n-1} m_1^{n-1}}{\sqrt{p_1 p_n p_2 p_3 \dots p_{n-1}}}, \quad N'_n = \sqrt{A_n'^2 + B_n'^2}, \\ & 1. \left\{ \begin{aligned} & A'_1 = 1, \\ & B'_1 = \frac{U}{p_1}. \end{aligned} \right. \\ & 2. \left\{ \begin{aligned} & A'_2 = A'_1 - \frac{U}{p_2} B'_1 + \frac{n_1^2 m_1^2}{p_1 p_2}, \\ & B'_2 = \frac{U}{p_2} A'_1 + B'_1. \end{aligned} \right. \\ & 3. \left\{ \begin{aligned} & A'_3 = A'_2 - \frac{U}{p_3} B'_2 + \frac{n_2^2 m_1^2}{p_2 p_3} A'_1, \\ & B'_3 = \frac{U}{p_3} A'_2 + B'_2 + \frac{n_2^2 m_1^2}{p_2 p_3} B'_1. \end{aligned} \right. \\ & \dots \dots \dots \\ & n. \left\{ \begin{aligned} & A'_n = A'_{n-1} - \frac{U}{p_n} B'_{n-1} + \frac{n_{n-1}^2 m_1^2}{p_{n-1} p_n} A'_{n-2}, \\ & B'_n = \frac{U}{p_n} A'_{n-1} + B'_{n-1} + \frac{n_{n-1}^2 m_1^2}{p_{n-1} p_n} B'_{n-2}. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

Jetzt multiplizieren wir in (4) Zähler und Nenner mit  $p_1 p_2 \dots p_n$  und erhalten:

$$\left. \begin{aligned}
 J_n &= \frac{E_0}{2\sqrt{R_1 R_n}} \frac{M''_n}{N''_n} = \frac{E_0}{2\sqrt{R_1 R_n}} P_n. \\
 M''_n &= 2 m_1^{n-1} n_1 n_2 \dots n_{n-1} \sqrt{p_1 p_n}, \quad N''_n = \sqrt{A''_n{}^2 + B''_n{}^2}. \\
 1. \quad &\begin{cases} A''_1 = p_1, \\ B''_1 = U. \end{cases} \\
 2. \quad &\begin{cases} A''_2 = A''_1 p_2 - U B''_1 + n_1^2 m_1^2, \\ B''_2 = U A''_1 + B''_1 p_2. \end{cases} \\
 3. \quad &\begin{cases} A''_3 = A''_2 p_3 - U B''_2 + n_2^2 m_1^2 A''_1, \\ B''_3 = U A''_2 + B''_2 p_3 + n_2^2 m_1^2 B''_1. \end{cases} \\
 \dots &\dots \\
 n. \quad &\begin{cases} A''_n = A''_{n-1} p_n - U B''_{n-1} + n_{n-1}^2 m_1^2 A''_{n-2}, \\ B''_n = U A''_{n-1} + B''_{n-1} p_n + n_{n-1}^2 m_1^2 B''_{n-2}, \end{cases}
 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

worin:  $A''_i = A_i p_1 p_2 \dots p_i$ ,  $B''_i = B_i p_1 p_2 \dots p_i$ .

Die Gleichungen dienen zur Berechnung der Resonanzkurven beliebiger Siebe, für die unsere Voraussetzungen zutreffen; der Abzissenmaßstab ist hierbei  $U$ . Die Wahl dieses Maßstabes hat den Vorteil, daß hierbei sämtlichen Sieben, bei denen die Dämpfungen der einzelnen Kreise in demselben Verhältnis stehen, immer nur eine bestimmte Resonanzkurventype entspricht. Die Transformationsformeln für den Übergang zu anderen Abzissenmaßstäben, d. h. zu individuellen Kurvenformen, sind in der früheren Arbeit abgeleitet<sup>1)</sup>.

Der Faktor  $\frac{E_0}{2\sqrt{R_1 R_n}}$  ist so gewählt, daß er die Stromamplitude darstellt, die bei günstigster Energieübertragung überhaupt über den Widerstand  $R_1$  in den Widerstand  $R_n$  geliefert werden kann<sup>2)</sup>.  $P_n = \frac{M''_n}{N''_n}$  ist dann das Verhältnis der Amplitude des wirklich übertragenen Stromes zu dieser optimalen Stromamplitude. Günstigste Energieübertragung haben wir also dann, wenn  $M''_n = N''_n$  ist. Wir werden beim Auftragen unserer Resonanzkurven den konstanten Faktor  $\frac{E_0}{2\sqrt{R_1 R_n}}$  unberücksichtigt lassen und  $P_n = \frac{M''_n}{N''_n}$  als Gleichung der Resonanzkurve betrachten. Die Resonanzkurve kann sich dann also niemals über die Amplitude 1 erheben.

Man sieht aus den Formeln (5) leicht, daß die  $A_i$  nur gerade, die  $B_i$  nur ungerade Potenzen von  $U$  enthalten, wobei die Potenz 0 als gerade betrachtet wird.  $N''_n{}^2 = A''_n{}^2 + B''_n{}^2$  kann also nur gerade Potenzen von  $U$  enthalten und muß sich in der Form darstellen lassen:

$$N''_n{}^2 = a + b U^2 + c U^4 + \dots + k U^{2n}. \quad (6)$$

Da  $M''_n$  von  $U$  unabhängig ist, so genügt es, zur Berechnung und Diskussion der Resonanzkurve diese Größe  $N''_n{}^2$  zu betrachten. Aus der Gleichung (6) folgt, daß die Resonanzkurven stets symmetrisch in bezug auf die Eigenfrequenz sind, weil nämlich  $U$  in (6) nur quadratisch auftritt. Würden die Kurven mit  $\eta$  oder der Verstärkung  $x$  als Abszisse aufgetragen, so wären sie natürlich nicht symmetrisch.

<sup>1)</sup> Siehe a. a. O. § 3 (26), (27).

<sup>2)</sup> Siehe a. a. O. § 2.

Weiter erkennt man leicht, daß die Resonanzkurven für  $U = 0$  ein Minimum oder Maximum haben müssen, denn die Gleichung:  $\frac{d(N''_n)}{dU} = 0$  hat immer die Wurzel  $U = 0$ .

§ 2. Siebketten der Normalform.

Für den praktischen Gebrauch liegt es nahe, Siebketten so zu bauen, daß Ohmsche Verluste möglichst vermieden werden. Man wird also die Dämpfungen sämtlicher Glieder mit Ausnahme der beiden Anschlußglieder so klein machen, daß sie praktisch vernachlässigt werden können. Als Normalform eines Siebes wollen wir nun ein solches definieren, bei dem die Dämpfungen des Anfangs- und Endgliedes einander gleich, die Dämpfungen der übrigen Glieder zu vernachlässigen sind; außerdem sollen die Siebe der Normalform bezüglich der Koppelungsfaktoren symmetrisch sein, d. h. wenn zwei Koppelungsglieder gleich weit von den beiden Enden der Siebkette entfernt sind, so sollen ihre bezüglichen Koppelungsfaktoren einander gleich sein. Hierdurch ist wohlverstanden über den eigentlichen Aufbau der einzelnen Kreise nichts vorausgesetzt. In dieser Hinsicht können Siebketten der Normalform vielmehr durchaus unsymmetrisch sein. In unserer Bezeichnungswiese sind demnach die Bedingungen für die Normalform die folgenden:

$$p_1 = p_n = 1, \quad p_2 = p_3 = \dots = p_{n-1} = 0, \\ n_1^2 = n_{n-1}^2 = 1, \quad n_2^2 = n_{n-2}^2, \quad n_3^2 = n_{n-3}^2, \quad \dots$$

Dann gehen die Gleichungen (5) über in:

$$J_n = \frac{E_0}{2\sqrt{R_1 R_n}} P_n = \frac{E_0}{2\sqrt{R_1 R_n}} \frac{M''_n}{N''_n},$$

$$M''_n = 2m_1^{n-1} n_1^2 n_2^2 \dots n_{v-1}^2 n_v, \quad N''_n = \sqrt{A''_n{}^2 + B''_n{}^2}, \quad \text{wo} \quad \frac{n-1}{2} < v \leq \frac{n}{2} \quad \text{ist.} \quad \left. \begin{array}{l} 1. \left\{ \begin{array}{l} A''_1 = 1, \\ B''_1 = U. \end{array} \right. \\ 2. \left\{ \begin{array}{l} A''_2 = -UB''_1 + n_1^2 m_1^2, \\ B''_2 = UA''_1. \end{array} \right. \\ 3. \left\{ \begin{array}{l} A''_3 = -UB''_2 + n_2^2 m_1^2 A''_1, \\ B''_3 = UA''_2 + n_2^2 m_1^2 B''_1. \end{array} \right. \\ \dots \dots \dots \\ n. \left\{ \begin{array}{l} A''_n = A''_{n-1} - UB''_{n-1} + n_1^2 m_1^2 A''_{n-2}. \\ B''_n = UA''_{n-1} + B''_{n-1} + n_1^2 m_1^2 B''_{n-2}. \end{array} \right. \end{array} \right\} (7)$$

Für  $U = 0$  wird nach (6):  $N''_n{}^2 = a$ . Zu diesem Wert  $a$  tragen in den Gleichungen (7) nur die Größen  $A$  bei, und zwar mit Ausnahme von  $A_n$ , wo das erste und dritte Glied beitragen, nur die letzten Glieder der Größen  $A$ . Wir wollen nun unterscheiden zwischen den Fällen, wo  $n$  ungerade und wo  $n$  gerade ist, und zuerst den ersten dieser Fälle betrachten. Wir haben dann:

$$M''_n = 2m_1^{n-1} n_1^2 n_2^2 \dots n_{\frac{n-1}{2}}^2, \\ \sqrt{a} = 2(m_1^2)^{\frac{n-3}{2}+1} n_1^2 n_3^2 n_5^2 \dots n_1^2 n_3^2 = 2m_1^{n-1} n_1^2 n_2^2 \dots n_{\frac{n-1}{2}}^2.$$

Mithin für  $U = 0$ :  $N''_n = M''_n$ . Hiermit haben wir folgendes bewiesen: Siebketten der Normalform mit ungerader Gliederzahl haben für ihre Eigenfrequenz, d. h. in

der Mitte der Resonanzkurve ein Maximum, in dem die größtmögliche Energie übertragen wird; dies gilt bei jeder, auch bei sehr loser Koppelung.

Bei geradzahligem  $n$  ist:

$$M''_n = 2 m_1^{n-1} n_1^2 n_2^2 \cdots n_{\frac{n-2}{2}}^2 n_n, \\ \sqrt{a} = n_1^4 n_3^4 \cdots m_1^n + n_2^4 n_4^4 \cdots m_1^{n-2},$$

also ist für  $U = 0$   $P_n$  von der Form:

$$\frac{e m_1^{n-1}}{f m_1^n + g m_1^{n-2}} = \frac{e m_1}{f m_1^2 + g},$$

und dieser Ausdruck strebt, wenn  $m_1$  klein wird, gegen 0. Also: Siebketten der Normalform mit gerader Gliederzahl haben bei sehr loser Koppelung in der Mitte der Resonanzkurve ein Minimum, dessen Amplitude mit der Koppelung immer kleiner wird.

### § 3. Dreigliedrige Siebe.

Aus den Gleichungen (5) finden wir:

$$\left. \begin{aligned} M''_3 &= 2 m_1^2 n_1 n_2 \sqrt{p_1 p_3}, & N''_3 &= \sqrt{A_3'^2 + B_3'^2}, \\ A_3' &= \alpha_0 - \alpha_2 U^2, & N_3'^2 &= a + b U^2 + c U^4 + U^6, \\ B_3' &= \beta_1 U - U^3, & a &= \alpha_0^2, \\ \alpha_0 &= p_1 p_2 p_3 + n_1^2 m_1^2 p_3 + n_2^2 m_1^2 p_1, & b &= \beta_1^2 - 2 \alpha_0 \alpha_2, \\ \alpha_2 &= p_1 + p_2 + p_3, & c &= \alpha_2^2 - 2 \beta_1, \\ \beta_1 &= p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 + m_1^2 (n_1^2 + n_2^2). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Aus diesen Formeln lassen sich die Resonanzkurven jedes beliebigen dreigliedrigen Siebes, das unseren grundlegenden Voraussetzungen genügt, berechnen<sup>1)</sup>.

Wir wollen nun dreigliedrige Siebe der Normalform betrachten. Hierzu müssen wir in den vorstehenden Gleichungen (8) setzen:

$$p_1 = p_3 = 1, \quad p_2 = 0, \quad n_1^2 = n_2^2 = 1.$$

Es ergibt sich dann:

$$\left. \begin{aligned} M''_3 &= 2 m_1^2, \\ \alpha_0 &= 2 m_1^2, \\ \alpha_2 &= 2, \\ \beta_1 &= 1 + 2 m_1^2, \\ a &= 4 m_1^4, \quad b = (1 - 2 m_1^2)^2, \quad c = 2(1 - 2 m_1^2). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Es besteht also die Beziehung:  $c^2 = 4b$  und wir können schreiben:

$$N_3'^2 = a + \frac{c^2}{4} U^2 + c U^4 + U^6 = a + \left( \frac{c}{2} U + U^3 \right)^2. \quad (10)$$

Hieraus läßt sich in einfacher Weise auf die Gestalt der Resonanzkurve schließen: Sie hat, wie wir oben für Siebe mit ungerader Gliederzahl allgemein bewiesen haben, in der Mitte ein Maximum von optimaler Amplitude. Wir sehen dies auch durch die Gleichungen (9) bestätigt; denn für  $U = 0$  ist:  $M''_3 = N_3'' = \sqrt{a} = \alpha_0$ . Es fragt sich nun, ob sich die Resonanzkurve in ihren übrigen Maxima ebenfalls zu der opti-

<sup>1)</sup> Über dreigliedrige Siebe, bei denen die Dämpfung des mittleren Gliedes berücksichtigt ist, vgl. Anm. 2 auf Seite 33 a. a. O. § 9.

malen Amplitude erhebt. Dies ist offenbar nur dann der Fall, wenn in  $N_3''^2$  der von  $U$  abhängige Teil auch für andere Werte als  $U = 0$  verschwindet, also wenn die Gleichung:  $U^4 + cU^2 + b = 0$  für  $U^2$  reelle Wurzeln hat. Aus (10) erkennen wir sofort, daß die Gleichung die Doppelwurzel  $U^2 = -\frac{1}{2}c$  besitzt. D. h. die Resonanzkurve berührt die Gerade, die im Abstand 1 parallel zur  $U$ -Achse gezogen ist, in den Punkten:

$$U_{\max} = \pm \sqrt{-\frac{c}{2}} = \pm \sqrt{2m_1^2 - 1}. \tag{11}$$

Die gleiche Bedingung ergibt sich aus (10) durch Ableitung nach  $U$ .

Die Resonanzkurve hat also nur dann außer bei  $U = 0$  reelle Maxima, wenn  $m_1^2 > 0,5$  ist. Für den Fall:  $m_1^2 = 0,5$  fallen die drei Maxima bei  $U = 0$  zusammen; wir können diesen Fall als Grenzkoppelung bezeichnen. Es ist dann:  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$ , und die Gleichung der Resonanzkurve nimmt die sehr einfache Gestalt an:

$$P_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + U^6}}. \tag{12}$$

Für die Lochbreite haben wir ein Maß durch Gleichung (11). Es erübrigt sich noch, die Lage und Tiefe der Minima zu bestimmen. Wir finden dazu aus:

$$\frac{d(N_3''^2)}{dU} = 0: \left(U^2 + \frac{c}{2}\right) \left(3U^2 + \frac{c}{2}\right) = 0.$$

Der erste Faktor entspricht den Maxima; es ergibt sich also für die Minima:

$$U_{\min}^2 = -\frac{c}{6}, \quad U_{\min} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}(2m_1^2 - 1)}.$$

Die Minimumamplitude wird dann aus (9) errechnet zu:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{3}m_1^6 + 5m_1^4 + 2m_1^2 - \frac{1}{3}}}.$$

In der nachstehenden Tabelle 1 sind die nach den angegebenen Formeln ermittelten Werte für die halbe Lochbreite und die Minimumamplitude für verschiedene Werte von  $m_1^2$  eingetragen.

		Tabelle 1.							
		0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0
verschiedene Werte von $m_1^2$ eingetragen.	$U_{\max} \dots$	0,000	1,000	1,414	1,732	2,000	2,236	2,646	3,000
	Min.-Ampl. in % . . . .	100	98,5	94,3	88,6	85,2	81,5	76,4	69,3

Die Resonanzkurven für  $m_1^2 = 0,5, 1,0, 1,5, 2,0$  und  $2,5$  sind in der Abb. 2 aufgetragen.

Wir wollen nun an diesem Beispiel die Wirkung der Vernachlässigung  $\eta = 1$  diskutieren. Für die später zu behandelnden Fälle gelten dann ganz analoge Überlegungen. Wird  $\eta$  nicht gleich 1 gesetzt, so gehen die Gleichungen (9) in die strenge Form dadurch über, daß man überall  $\eta^2 m_1^2$  statt  $m_1^2$  setzt. Die Gleichung (10) behält dann ihre Form bei, und wir erhalten als Bedingung für Maxima mit optimaler Amplitude außer  $U = 0$ , wo ja  $\eta = 1$  streng gilt:  $U_{\max}^2 = 2\eta^2 m_1^2 - 1$ .

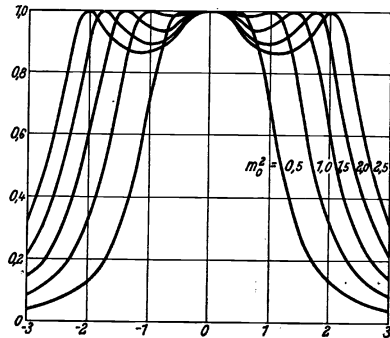


Abb. 2.

Ist diese Bedingung erfüllt, so hebt sich  $\eta^2$  aus Zähler und Nenner in  $\frac{M_3'}{N_3'}$  fort. Wir haben also eine quadratische Gleichung für  $\eta^2$ , die, wie man leicht erkennt, stets zwei reelle positive Wurzeln hat, solange  $m_1^2 > \frac{4 - D_1^2}{8} \sim 0,5$  ist. Da  $\eta$  nicht negativ sein kann, ergeben sich dann also zwei reelle positive Wurzeln  $\eta$ . In den uns interessierenden Fällen weichen die  $\eta$  stets nur um einige Prozent von 1 ab. Wir erkennen also, daß die Berücksichtigung der Veränderlichkeit von  $\eta$  gegenüber den oben abgeleiteten Formeln folgende Abweichungen ergibt: Die Resonanzkurve hat im allgemeinen Fall drei Maxima von optimaler Amplitude; davon liegt eins bei:  $U = 0, \eta = 1$ ; die beiden seitlichen Maxima verschieben sich dagegen beide nach höheren Frequenzen hin gegenüber den aus Formel (11) sich ergebenden Stellen. Die Größe der Verschiebung ist dadurch gegeben, daß in (11) ein um einige Prozent größerer oder kleinerer Wert von  $m_1^2$  eintritt. Auch die Grenzkoppelung verschiebt sich, wie wir gesehen haben, etwas. Aus der Abb. 2 erkennen wir, daß eine solche Veränderung von  $m_1^2$  die Kurvenform nur wenig beeinflussen kann; die entstehende Abweichung würde in dem Maßstab unserer Abb. 2 erst für größere Lochbreiten erkennbar werden.

Weiter sei noch der Fall erwähnt, wo die Koppelungen zwischen den Kreisen 1 und 2 bzw. 2 und 3 nicht beide induktiv, oder beide kapazitiv, sondern abwechselnd induktiv und kapazitiv sind. Den Übergang von der induktiven zur kapazitiven Koppelung können wir in unseren Formeln einfach dadurch erreichen, daß wir an den betreffenden Stellen  $\frac{1}{\eta}$  statt  $\eta$  einsetzen. Dann hebt sich  $\eta$  aus  $M_3'$  heraus, und im Nenner erhalten wir überall statt:  $2 m_1^2$  jetzt:  $(\eta^2 + \frac{1}{\eta^2}) m_1^2$ . Bei den Verstimmungen, die für uns in Betracht kommen, kann man aber  $\eta^2 + \frac{1}{\eta^2}$  mit genügender Annäherung gleich 2 setzen. Wir erhalten also auch hier nur einen Wert von  $m_1^2$ , der um wenige Prozent größer ist als der unseren Formeln entsprechende. Die durch die Vernachlässigung  $\eta = 1$  entstehende Ungenauigkeit ist also in diesem Falle noch kleiner als in dem vorher betrachteten.

Wir sehen aus Abb. 2, daß die Anstiege der Kurven in ihren oberen Teilen bis etwa auf 10% der Maximalamplitude herab einander parallel sind. Wenn wir also als Steilheit  $T_3$  der Resonanzkurve die Neigung der Tangente an der steilsten Stelle, also die Neigung der Wendetangente definieren, so genügt es, der Berechnung dieser Steilheit die Gleichung der Resonanzkurve in ihrer einfachsten Gestalt (12) zugrunde zu legen. Wir wollen uns außerdem zur Bestimmung der Steilheit die Resonanzkurve nicht mit  $U$ , sondern mit  $x = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{UD}{2}$  aufgetragen denken. Wir finden dann:

$$\frac{dP_3}{dU} = -3U^5(1+U^6)^{-\frac{1}{2}}$$

und aus der Bedingung für die Wendetangente:

$$\frac{d^2P_3}{dU^2} = -15U^4(1+U^6)^{-\frac{1}{2}} + 27U^{10}(1+U^6)^{-\frac{3}{2}} = 0,$$

und demnach:

$$U_w^6 = \frac{5}{4}, \quad U_w = 1,038,$$

$$T_3 = \frac{dP_3}{dx} = \frac{dP_3}{dU} \frac{2}{D_1} = \frac{2}{D_1} 3 \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{5}{2}} \left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = 2,133 \frac{1}{D_1}.$$



Setzen wir an Stelle von  $D_1$  die mittlere Dämpfung  $D_m = \frac{2}{3} D_1$  ein, so wird:

$$T_3 = 1,42 \cdot \frac{1}{D_m}.$$

#### § 4. Viergliedrige Siebe.

Es ist hierfür nach (5):

$$\left. \begin{aligned} M_4' &= 2m_1^3 n_1 n_2 n_3 \sqrt{p_1 p_4}, & N_4' &= \sqrt{A_4'^2 + B_4'^2}, \\ A_4' &= \alpha_0 - \alpha_2 U^2 + U^4, & B_4' &= \beta_1 U - \beta_3 U^3, \quad \text{worin:} \\ \alpha_0 &= p_1 p_2 p_3 p_4 + m_1^2 (n_1^2 p_3 p_4 + n_2^2 p_1 p_4 + n_3^2 p_1 p_2) + m_1^4 n_1^2 n_3^2, \\ \alpha_2 &= p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_1 p_4 + p_2 p_3 + p_2 p_4 + p_3 p_4 + m_1^2 (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2), \\ \beta_1 &= p_1 p_2 p_3 + p_1 p_2 p_4 + p_1 p_3 p_4 + p_2 p_3 p_4 + m_1^2 [n_1^2 (p_3 + p_4) + n_2^2 (p_1 + p_4) + n_3^2 (p_1 + p_2)], \\ \beta_3 &= p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \end{aligned} \right\} (13)$$

und:  $N_4'^2 = a + b U^2 + c U^4 + d U^6 + U^8$ , wo:

$$\left. \begin{aligned} a &= \alpha_0^2, \\ b &= \beta_1^2 - 2\alpha_0 \alpha_2, \\ c &= 2\alpha_0 + \alpha_2^2 - 2\beta_1 \beta_3, \\ d &= \beta_3^2 - 2\alpha_2. \end{aligned} \right\} (14)$$

Für den Fall der Normalform ist zu setzen:

$$p_1 = p_4 = 1, \quad p_2 = p_3 = 0, \quad n_1^2 = n_3^2 = 1.$$

Dann wird:

$$\left. \begin{aligned} M_4' &= 2m_1^3 n_2, \\ \alpha_0 &= m_1^2 (n_2^2 + m_1^2), \\ \alpha_2 &= 1 + m_1^2 (2 + n_2^2), \\ \beta_1 &= 2m_1^2 (1 + n_2^2), \\ \beta_3 &= 2. \end{aligned} \right\} (15)$$

Als Bedingungsgleichung für Maxima und Minima haben wir:

$$\frac{d(N_4'^2)}{dU} = 8U^7 + 6dU^5 + 4cU^3 + 2bU = 0.$$

Also ist eine Wurzel  $U = 0$  und für die übrigen drei Wurzeln bleibt für  $U^2$  die kubische Gleichung:

$$U^6 + \frac{3}{4} d U^4 + \frac{1}{2} c U^2 + \frac{1}{4} b = 0. \quad (16)$$

Im allgemeinen Fall haben also die Resonanzkurven ein Minimum bei  $U = 0$ , während zu beiden Seiten hiervon liegen: erst ein Maximum, dann ein Minimum und schließlich wieder ein Maximum. Die Kurve hat also in ihrer allgemeinsten Form, wie es sein muß, vier Maxima.

Um nun die kubische Gleichung (16) aufzulösen, machen wir zur Beseitigung des Gliedes mit  $U^4$  die bekannte Substitution:  $U^2 = x - \frac{1}{4} d$  und erhalten dadurch die reduzierte kubische Gleichung:

$$x^3 + qx + r = 0,$$

wo:

$$q = \frac{c}{2} - \frac{3}{16} d^2, \quad r = \frac{1}{4} \left( b - \frac{cd}{2} + \frac{d^3}{8} \right) \quad (17)$$

ist.

Durch Einsetzen der Gleichungen (14) ergibt sich:

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{4} \left( \beta_1^2 - 2\alpha_0 \alpha_2 - \frac{2\alpha \beta_3^2 + \alpha_2^2 \beta_3^2 - 2\beta_1 \beta_3^2 - 4\alpha_0 \alpha_2 - 2\alpha_2^3 - 4\alpha_2 \beta_1 \beta_3 + \beta_3^6 - 6\alpha_2 \beta_3^4 + 12\alpha_2 \beta_3^2 - 8\alpha_2^3}{2} \right), \\ &= \frac{1}{4} \left( \beta_1^2 - \alpha_0 \beta_3^2 + \alpha_1 \beta_3^2 + \beta_1 \beta_3^2 - 2\alpha_2 \beta_1 \beta_3 + \frac{\beta_3}{8} - \frac{3}{4} \alpha_2 \beta_3^4 \right) \end{aligned}$$

und hieraus durch Einsetzen der Werte (15):

$$r = \frac{1}{4} \left( b - \frac{cd}{2} + \frac{d^3}{8} \right) = 0. \quad (18)$$

Die Wurzeln der Gleichung (17) lassen sich also sofort angeben zu:

$$x_1 = -\sqrt{-q}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = +\sqrt{-q}.$$

und demnach:

$$U_1 = \pm \sqrt{-\frac{d}{4} - \sqrt{-q}}, \quad U_2 = \pm \sqrt{-\frac{d}{4}}, \quad U_3 = \pm \sqrt{-\frac{d}{4} + \sqrt{-q}}. \quad (19)$$

Die Indizes, die wir jetzt den  $U$  geben, dienen nur zur Bezeichnung der Wurzeln und sind nicht zu verwechseln mit den zu Anfang benutzten Bezeichnungen, wobei sich die Indizes der  $U$  auf die einzelnen Kreise der Siebkette bezogen.

Nach (17) und (14) folgt:

$$-q = 3 - 3\alpha_2 + \frac{\alpha_2^2}{4} - \alpha_0 + 2\beta_1 = \frac{1}{4} [1 - 2m_1^2(2 - n_2^2) + m_1^4 n_2^2(4 + n_2^2)], \quad (20)$$

und nach (19) und (15):

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \pm \sqrt{\frac{m_1^2(2 + n_2^2) - 1 - \sqrt{1 - 2m_1^2(2 - n_2^2) + m_1^4 n_2^2(4 + n_2^2)}}{2}}, \\ U_2 &= \pm \sqrt{\frac{m_1^2(2 + n_2^2) - 1}{2}}, \\ U_3 &= \pm \sqrt{\frac{m_1^2(2 + n_2^2) - 1 + \sqrt{1 - 2m_1^2(2 - n_2^2) + m_1^4 n_2^2(4 + n_2^2)}}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Im allgemeinen Fall entspricht den Werten  $U_1$  und  $U_3$  ein Maximum, den Werten  $U_2$  ein Minimum.

Um die Amplitude an den Maximalstellen zu berechnen, müssen wir:

$U = \pm \sqrt{-\frac{d}{4} \pm \sqrt{-q}}$  in  $P_4 = \frac{M_4''}{N_4''}$  einsetzen. Wir haben zunächst: wenn wir das negative Vorzeichen von  $\sqrt{-q}$  annehmen:

$$U^2 = -\frac{d}{4} - \sqrt{-q},$$

$$U^4 = \frac{d^2}{4} - \frac{c}{2} + \frac{d}{2} \sqrt{-q},$$

$$U^6 = -\frac{10d^3}{64} + \frac{3}{8}cd - \left(\frac{3}{8}d^2 - \frac{c}{2}\right)\sqrt{-q},$$

$$U^8 = \frac{7}{64}d^4 - \frac{3}{8}cd^2 + \left(\frac{d^3}{4} - \frac{cd}{2}\right)\sqrt{-q},$$

$$N_4''^2 = a + \frac{c^2}{4} + \frac{bd}{8} + \frac{cd^2}{16} - \frac{3d}{8} \left( b - \frac{cd}{2} + \frac{d^3}{8} \right) - \left( b - \frac{cd}{2} + \frac{d^3}{8} \right) \sqrt{-q},$$

also nach (18):

$$N_4''^2 = a + \frac{c^2}{4} + \frac{bd}{8} + \frac{cd^2}{16};$$

die elementare Ausrechnung nach (14) und (15) ergibt:

$$N_4''^2 = 4m_1^2 n_2^2, \quad \text{also: } P_4 = 1.$$

Da in  $N_4^2$  der Faktor von  $\sqrt{-q}$  verschwindet, so gilt die Ableitung auch für das positive Vorzeichen von  $\sqrt{-q}$  in  $U = \pm \sqrt{-\frac{d}{4} \pm \sqrt{-q}}$ , und wir haben das Resultat:

Wenn bei der Normalform viergliedriger Siebe die Maxima  $U_1$  und  $U_3$  überhaupt vorhanden sind, so ist an diesen Stellen die Stromamplitude die größtmögliche, wir haben also an diesen Maximalstellen optimale Energieübertragung.

Es ist nun aber weiter der Fall denkbar, daß  $U_1$  und  $U_3$  komplex werden, weil  $q > 0$  ist. Nun ist nach (20) sowohl für große wie für kleine  $m_1^2 : q < 0$ .  $U_1$  und  $U_3$  können also nur dann komplex werden, wenn die Gleichung  $q = 0$  reelle Wurzeln für  $m_1^2$  hat, und das ist nur der Fall, wenn  $n_2^2 < 0,5$  ist. Die Resonanzkurven haben dann außer dem Minimum für  $U = 0$  zwei Maxima bei  $U_2$ . Für diese Maxima gilt dann aber nicht die vorstehende Ableitung, wonach wir an den Maximumstellen optimale Energieübertragung zu erwarten haben. Jedoch wird in praktischen Fällen für nicht zu kleine Werte von  $n_2^2$  die Abweichung von der Maximalamplitude nur sehr gering sein, weil dann der Bereich, in dem  $U_2$  die einzige reelle Wurzel ist, nur klein ist.

Für sehr kleine Werte von  $m_1^2$ , also für sehr lose Koppelung, ist  $U_2$  komplex; für die beiden anderen Wurzeln können wir dann setzen:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \sqrt{\frac{2m_1^2 + m_1^2 n_2^2 - 1 - (1 - 2m_1^2 + m_1^2 n_2^2)}{2}}, \\ U_1 &= \sqrt{m_1^2 - 1}, \\ U_3 &= \sqrt{\frac{2m_1^2 + m_1^2 n_2^2 - 1 + 1 - 2m_1^2 + m_1^2 n_2^2}{2}}, \\ U_3 &= m_1 n_2. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$U_1$  ist dann also komplex und wir haben an den Stellen  $U_3$  immer zwei reelle Maxima, die, wie gezeigt, den optimalen Wert erreichen. Bei  $U = 0$  dagegen liegt ein Minimum mit der Amplitude  $\frac{2m_1 n_2}{m_1^2 + n_2^2}$ , das also mit loser werdender Koppelung immer tiefer wird, während die Maxima  $U_3$  nach (22) immer näher zusammenrücken.

Das ist eine ganz ähnliche Erscheinung, wie ich sie in der früheren Arbeit<sup>1)</sup> beim zweigliedrigen Kettenleiter erster Art beschrieben habe. Der innere Grund dafür ist in beiden Fällen folgender: Die beiden Mittelkreise sind nur durch die Koppelung mit den Außenkreisen, also nur schwach gedämpft; das für die Gestalt der Resonanzkurve maßgebende Verhältnis von Koppelung zu Dämpfung muß also sehr groß, die Zweiwelligkeit mithin sehr stark ausgeprägt sein; mit loser werdender Koppelung fällt die Dämpfung der Innenkreise, die sie nur durch die gleichfalls loser werdende Koppelung mit den Außenkreisen erhalten, quadratisch<sup>2)</sup>; das Verhältnis von Koppelung zu Dämpfung wird also immer größer. In praktischen Fällen wird die in Wirklichkeit stets vorhandene Dämpfung der Mittelglieder insofern etwas ausgleichend wirken, als das Minimum in der Mitte etwas verflacht wird.

Wie wir in § 2 gesehen haben, treten analoge Erscheinungen bei allen Sieben der Normalform mit gerader Gliederzahl bei loser Koppelung auf. In der Praxis können nun solche Resonanzkurven besonders dann sehr unangenehm werden, wenn

<sup>1)</sup> Siehe Anm. 1) S. 33 a. a. O. § 8.

<sup>2)</sup> Vgl. a. a. O. § 8 (145).

man, wie es für manche Zwecke geschieht, Siebe verwendet, nicht um die Breite, sondern um die große Steilheit der Resonanzkurve auszunutzen. Man wird dann sehr schmale Resonanzkurven wünschen und demnach die Koppelung sehr lose wählen. Hierbei muß man nun wohl in Kauf nehmen, daß die Resonanzkurve zwei steile Abfälle zu beiden Seiten hat; weitere Ungleichmäßigkeiten der soeben geschilderten Art in der Mitte der Resonanzkurve müssen dann aber zu sehr unangenehmen Störungen führen.

Um zu speziellen Fällen viergliedriger Siebe der Normalform zu gelangen, müssen wir eine Annahme über das Koppelungsverhältnis  $n_2^2$  machen. Wir wollen zunächst solche Siebe betrachten, bei denen alle drei Koppelungen einander gleich sind, also  $n_2^2 = 1$  ist. Wir erhalten dann aus (14) und (15) die für die Berechnung der Resonanzkurve erforderlichen Größen:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= m_1^2(1 + m_1^2), & a &= m_1^4(1 + m_1^2)^2, \\ \alpha_2 &= 1 + 3m_1^2, & b &= -6m_1^4 + 8m_1^4 - 2m_1^2, \\ \beta_1 &= 4m_1^2, & c &= 11m_1^4 - 8m_1^2 + 1, \\ \beta_3 &= 2. & d &= 2 - 6m_1^2, \end{aligned}$$

und für die Lage der Maxima und Minima ergibt sich aus (21):

$$\begin{aligned} U_1 &= \pm \sqrt{\frac{3m_1^2 - 1 - \sqrt{1 - 2m_1^2 + 5m_1^4}}{2}}, \\ U_2 &= \pm \sqrt{\frac{3m_1^2 - 1}{2}}, \\ U_3 &= \pm \sqrt{\frac{3m_1^2 - 1 + \sqrt{1 - 2m_1^2 + 5m_1^4}}{2}}, \end{aligned}$$

Da  $n_2^2 > 0,5$  ist, können, wie wir oben gezeigt haben, die Werte  $U_2$  niemals Maxima darstellen. An den Maximumstellen der Resonanzkurven wird also, wie oben bewiesen wurde, immer die optimale Energie übertragen.

Weiter erkennen wir, daß  $U_3$  für jeden Wert von  $m_1^2$  reell ist. Die beiden Werte von  $U_3$  stellen also immer die beiden äußeren Maxima der Resonanzkurve dar, geben also ein Maß für die halbe Lochbreite. In der nachstehenden Tabelle 2 sind diese halben Lochbreiten für verschiedene Werte von  $m_1^2$  berechnet.

Tabelle 2.

$m_1^2$	0,1	0,333	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0
$U_3$	0,333	0,687	0,9	1,414	1,81	2,135	2,42	2,68	3,13

Bei großem  $m_1^2$ , also bei enger Koppelung, sind alle drei Wurzeln reell, die Resonanzkurve hat also vier Maxima, von denen je zwei durch  $U_1$  und  $U_3$  gegeben sind, während bei  $U_2$  und bei  $U = 0$  Minima liegen. Das Minimum in der Mitte hat die Amplitude:  $P_4 = \frac{2m_1^2}{m_1^2 + 1}$ . Für  $m_1^2 = 1$  wird  $U_1 = 0$ , während  $U_2$  und  $U_3$  reell bleiben; gleichzeitig wird die Amplitude für  $U = 0$ :  $\frac{2m_1^2}{m_1^2 + 1} = 1$ . Die beiden mittleren Maxima fallen hier also bei  $U = 0$  zusammen, die Kurve hat nur noch drei gleich hohe Maxima. Wird die Koppelung noch weiter verkleinert, so bleiben zunächst noch  $U_2$  und  $U_3$  reell, die Kurve behält also drei Maxima, aber das mittlere Maximum erreicht nicht mehr den optimalen Wert, bis schließlich bei  $m_1^2 = \frac{1}{3}$  auch  $U_2 = 0$

wird und demnach das mittlere Maximum mit den beiden daneben liegenden Minima zusammenfällt. Die Kurve hat von hier an nur zwei Maxima von optimaler Höhe und bei  $U = 0$  ein Minimum, das sich mit loser werdender Koppelung immer mehr vertieft, während die beiden Maxima immer näher zusammenrücken.

In Abb. 3 sind die Resonanzkurven eines solchen Siebes mit überall gleicher Koppelung für:  $m_1^2 = 0,1, 0,333, 0,5, 1,0$  und  $2,0$  aufgetragen. Man sieht hieraus, daß man für Siebzwecke die günstigsten Kurvenformen erhält, wenn man sich weder nach oben noch nach unten weit von dem Wert  $m_1^2 = 1$  entfernt.

Wir hatten in § 3 als Grenzkoppelung eine solche Koppelung bezeichnet, bei der sämtliche Maxima der Resonanzkurve bei  $U = 0$  zusammenfallen. In dem Ausdruck  $N_4'^2$  müssen dann die Größen  $b, c$  und  $d$  verschwinden, so daß  $P_4 = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + U^8}}$

ist, wenn wir gleichzeitig verlangen, daß auch hier das Maximum der Resonanzkurve die optimale Amplitude haben soll. Bei den bisher betrachteten Sieben mit überall gleicher Koppelung ergibt sich eine solche Form, die für manche Zwecke sehr erwünscht ist, wie wir gesehen haben, nicht. Es ist aber zu erwarten, daß man auch bei viergliedrigen Sieben eine derartige Resonanzkurvenform erhalten kann, wenn man nur über das Koppelungsverhältnis  $n_2^2$  in geeigneter Weise verfügt. Um die gewünschte Form des Siebes zu finden, haben wir  $n_2^2$  und  $m_1^2$  so zu bestimmen, daß folgenden Bedingungen genügt wird:

$$\left. \begin{aligned} b = 0, \quad c = 0, \quad d = 0 \\ \text{und } M_4' = 2m_1^2 n_2 = \sqrt{a} = m_1^2 (n_2^2 + m_1^2) \end{aligned} \right\} (23)$$

Die letzte Bedingung ergibt:  $m_1^2 = n_2^2$  und wenn wir dies in  $d = 0$  nach (14) und (15) einsetzen, so kommt:

$$m_1^4 + 2m_1^2 - 1 = 0$$

und demnach:

$$m_1^2 = n_2^2 = \sqrt{2} - 1 = 0,414.$$

Man erkennt leicht, daß hierdurch auch den Bedingungen:  $b = 0, c = 0$  genügt wird. Es läßt sich übrigens auch allgemein zeigen, daß, wenn nur  $p_2 = p_3 = 0$  angenommen wird,  $p_4 = 1, n_3^2 = 1, m_1^2 = \sqrt{2} - 1, n_2^2 = \sqrt{2} - 1$  die einzigen praktisch möglichen Lösungen sind, die die vier Gleichungen (23) befriedigen.

Wir wollen nun den Fall:  $n_2^2 = \sqrt{2} - 1$  diskutieren. Nach (21) ergibt sich für die Lage der Maxima und Minima:

$$\begin{aligned} U_1 &= \pm \sqrt{\frac{m_1^2(1 + \sqrt{2}) - 1 - \sqrt{1 - 2m_1^2(3 - \sqrt{2}) + m_1^4(2\sqrt{2} - 1)}}{2}}, \\ U_2 &= \pm \sqrt{\frac{m_1^2(1 + \sqrt{2}) - 1}{2}}, \\ U_3 &= \pm \sqrt{\frac{m_1^2(1 + \sqrt{2}) - 1 + \sqrt{1 - 2m_1^2(3 - \sqrt{2}) + m_1^4(2\sqrt{2} - 1)}}{2}}. \end{aligned}$$

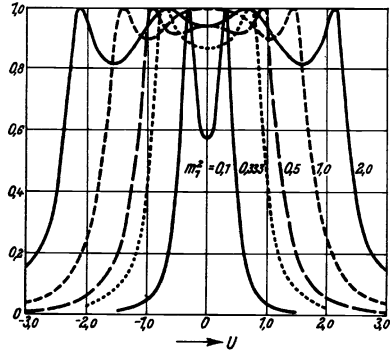


Abb. 3.

Zunächst erkennt man leicht, daß für  $m_1^2 = \sqrt{2} - 1$  alle drei Wurzeln  $U_1$ ,  $U_2$  und  $U_3$  mit der Wurzel  $U = 0$  zusammenfallen; die Resonanzkurve hat also nur ein Maximum bei  $U = 0$ . Wird  $m_1^2 < \sqrt{2} - 1$ , so ist nur  $U_3$  reell, wir haben dann also zwei Maxima

mit optimaler Amplitude und bei  $U = 0$  ein Minimum mit der Amplitude:  $\frac{2m_1^2\sqrt{\sqrt{2}-1}}{m_1^2 + \sqrt{2} - 1}$ .

Dieser Wert fällt von  $m_1^2 = 0,414$  an zunächst langsam mit  $m_1^2$ ; bei  $m_1^2 = 0,1$  ist er z. B. noch gleich 0,8. Die Ungleichförmigkeit der Durchlässigkeit bei loser Koppelung prägt sich also in diesem Falle nicht so schnell aus wie bei dem vorher behandelten Beispiel. Wird nun  $m_1^2 > \sqrt{2} - 1$ , so ist von jetzt an  $U_2$  immer reell; aber zunächst sind  $U_1$  und  $U_3$  noch komplex, weil  $q > 0$  ist. Die Resonanzkurve hat dann zwei Maxima bei  $U_2$  und ein Minimum bei  $U = 0$ . Die Amplitude an den Maximumstellen ist jetzt aber nicht streng gleich der optimalen Stromamplitude, sondern etwas geringer. Immerhin ist in diesem Beispiel der Unterschied so klein, daß er

praktisch vernachlässigt werden kann. Erst von  $m_1^2 = \frac{5 + 3\sqrt{2}}{7} = 1,32$  an sind alle drei Wurzeln reell und die Maxima erreichen wieder die optimale Amplitude.

Von hier an lösen sich also die beiden seitlichen Maxima in je zwei Maxima mit dazwischen liegendem Minimum auf, während das Minimum bei  $U = 0$  immer tiefer wird. In diesem Beispiel tritt bei wachsender Koppelung das Minimum in der Mitte früher auf als die beiden seitlichen Minima. Daher wird auch das Minimum in der Mitte stärker ausgeprägt sein. Umgekehrt liegen die Verhältnisse in dem vorher behandelten Beispiel:  $n_2^2 = 1$ , wo zuerst die beiden Seitenminima vorhanden sind, während das Minimum in der Mitte erst von  $m_1^2 > 1$  anfängt sich auszubilden. In der nachstehenden Abb. 4 sind für  $n_2^2 = \sqrt{2} - 1$  die Resonanzkurven für  $m_1^2 = 0,1, 0,414, 1,0, 2,0$  und  $3,0$  eingetragen.

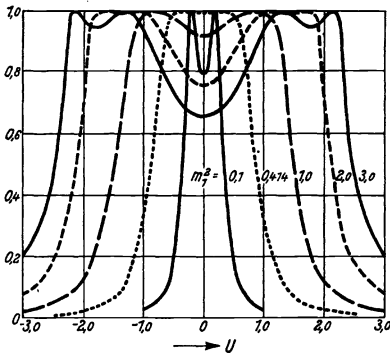


Abb. 4.

Ein Vergleich der beiden Abb. 3 und 4 miteinander zeigt, daß bei loserer Koppelung die Kurven der Abb. 4 für Siebzwecke günstiger sind; wird aber die Koppelung enger, so zeigen die Kurven der Abb. 3 eine bessere Form.

Der dreigliedrige Kettenleiter zweiter Art der Leitungstheorie<sup>1)</sup> ist ein Spezialfall eines der hier betrachteten viergliedrigen Siebe. Und zwar ist hierbei  $n_2^2 = 0,5$ . Die Kurven der Abb. 4 geben also annähernd einen Überblick über die bei Anwendung solcher Kettenleiter zu erwartenden Kurventypen. Viergliedrige Kettenleiter erster Art müssen ebenso wie in § 12 der früheren Arbeit gezeigt, im allgemeinen unsymmetrische Resonanzkurven haben.

Weiter fällt bei Betrachtung der Abb. 3 und 4 auf, daß die Resonanzkurven in ihrem steilen Anstieg wesentlich parallel verlaufen. Wir können also wieder ein Maß für die Steilheit der Resonanzkurven viergliedriger Siebe dadurch gewinnen,

<sup>1)</sup> K. W. Wagner, Arch. Elektrot. Bd. 8, S. 61. 1919.

daß wir  $T_4 = \frac{dP_4}{dx}$  an der steilsten Stelle der Kurve, d. h. für die Wendetangente berechnen und hierfür die Kurvengleichung in ihrer einfachsten Form, nämlich für  $n_2^2 = m_1^2 = 0,414$  aus Abb. 4 zugrunde legen. Es ist dann:

$$P_4 = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + U^8}}, \quad \text{wo} \quad \alpha = 2(\sqrt{2} - 1)^2.$$

Wir finden dann:

$$\frac{dP_4}{dU} = -4\alpha U^7(\alpha^2 + U^8)^{-\frac{3}{2}}$$

und als Bedingung für die Wendetangente:

$$\frac{d^2P_4}{dU^2} = -28\alpha U^6(\alpha^2 + U^8)^{-\frac{3}{2}} + 48\alpha U^{10}(\alpha^2 + U^8)^{-\frac{5}{2}} = 0,$$

also:

$$U_w^8 = \frac{7}{5}\alpha^2$$

und:

$$T_4 = \frac{2}{D_1} 4\alpha U_w^7(\alpha^2 + U_w^8)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{D_1} \frac{U_w^7}{\alpha^2} \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = 3,789 \frac{1}{D_1}.$$

Setzen wir an Stelle von  $D_1$  die mittlere Dämpfung des ganzen Siebes:  $D_m = \frac{1}{2} D_1$  ein, so bleibt:

$$T_4 = 1,894 \cdot \frac{1}{D_m}.$$

Wir haben hier nur zwei besondere Fälle als Beispiele behandelt. Es leuchtet aber ein, daß man durch andere Wahl der Mittelkoppelung, also von  $n_2^2$ , wieder andere Kurventypen erhalten muß. Durch geeignete Bestimmung von  $n_2^2$  kann man z. B. auch die soeben geschilderten Verschiedenheiten in der Tiefe der Minima bei engerer Koppelung ausgleichen.

Es sei nun an einem praktischen Beispiel die Berechnung eines viergliedrigen Siebes mit bestimmten Eigenschaften durchgeführt. Es soll an eine Freileitung, deren Charakteristik mit hinreichender Genauigkeit durch den rein reellen Wert 500 Ohm gegeben sei, ein viergliedriges Sieb angeschlossen werden. Am Ende des Siebes werde die Spannung am Kondensator  $C_4$  abgegriffen und dem Steuergitter einer Elektronenröhre zugeführt. Es kommt also darauf an, daß die Spannung am Kondensator  $C_4$  möglichst groß ist. Die Eigenfrequenz des Siebes betrage:  $\omega_0 = 2 \cdot 10^5$ . Die erforderliche Lochbreite sei 20%. Die mit Rücksicht auf die Einschwingvorgänge erforderliche mittlere Dämpfung sei:  $D_m = 0,05$ . Die Dämpfung der Mittelglieder sei klein.

Aus der mittleren Dämpfung finden wir dann:

$$D_1 = D_4 = 2D_m = 0,1.$$

Die Maximalspannung am Kondensator  $C_4$  ergibt sich für  $\omega = \omega_0$  zu:

$$E_C = \frac{E_0}{2\sqrt{R_1 R_4}} \frac{1}{\omega_0 C_4} = \frac{E_0}{2D_1} \sqrt{\frac{R_4}{R_1}}.$$

Wenn also die Spannung  $E_C$  groß sein soll, so kommt es darauf an,  $R_4$  möglichst groß im Vergleich zu  $R_1$  zu machen. Es sei:  $R_1 = 500$  Ohm,  $R_4 = 2500$  Ohm. Aus

$D_1 = \frac{R_1}{\omega_0 L_1} = D_4 = \frac{R_4}{\omega_0 L_4} = 0,1$  finden wir dann:

$$L_1 = 0,025 \text{ Henry,}$$

$$L_4 = 0,125 \quad ,,$$

$$C_1 = 0,001 \quad \mu F,$$

$$C_4 = 0,0002 \quad \mu F.$$

20% Lochbreite bedeutet, daß die äußeren Maxima liegen sollen bei:  $x = 0,1$ . Also ist:  $0,1 = \frac{U_{\max} \cdot D_1}{2}$ ,  $U_{\max} = 2,0$ . Für diese große Lochbreite sind die Kurven der Abb. 3 die günstigeren: wir wählen also:  $n_2^2 = 1$ . Eine Interpolation aus Tabelle 2 ergibt:  $m_1^2 = 1,8$ , also eine Resonanzkurve mit vier Maxima. Wir haben dann:

$$m_1^2 = \frac{K_{12}^2}{D_1^2}, \quad K_{12}^2 = K_{23}^2 = K_{34}^2 = 0,018,$$

$$\frac{L_{12}^2}{L_1 L_2} = 0,018, \quad \frac{L_{23}^2}{L_2 L_3} = 0,018, \quad \frac{L_{34}^2}{L_3 L_4} = 0,018,$$

$$\frac{L_{12}^2}{L_2} = 0,00045, \quad \frac{L_{34}^2}{L_3} = 0,00225.$$

Nun können wir z. B.  $L_{12}$  und  $L_{23}$  frei wählen, wodurch dann  $L_{23}$ ,  $L_2$  und  $L_3$  bestimmt sind. Es seien:  $L_{12} = L_{23} = 0,005$  Henry. Dann ist:  $L_2 = 0,0555$  Henry,  $L_3 = 0,025$  Henry,  $L_{34} = 0,0075$  Henry. Daraus ergibt sich dann schließlich für den Bau des Siebes:

$$L'_1 = 0,02, \quad L'_2 = 0,0455, \quad L'_3 = 0,0135, \quad L'_4 = 0,1185 \text{ Henry},$$

$$C'_1 = 0,001, \quad C'_2 = 0,00045, \quad C'_3 = 0,001, \quad C'_4 = 0,0002 \mu F.$$

$$L_{12} = 0,005, \quad L_{23} = 0,005, \quad L_{34} = 0,0075 \text{ Henry}.$$

Wenn die für die Einschwingevorgänge erforderliche mittlere Dämpfung gegeben ist, so führt die Berechnung, wie man sieht, auf eine ganz bestimmte Kurventype, wenn man über  $n_2^2$  verfügt hat. Ist dagegen die mittlere Dämpfung nicht vorgegeben, so kann man eine beliebige Kurventype, die als die günstigste erscheint, heraussuchen. Hierdurch ist dann aber über die mittlere Dämpfung in bestimmter Weise verfügt, da die Lochbreite gegeben ist.

## § 5. Fünfgliedrige Siebe.

Es ist nach Gleichung (5):

$$\begin{aligned} M'_5 &= 2 m_1^4 n_1 n_2 n_3 n_4 \sqrt{p_1 p_5}, & N'_5 &= \sqrt{A_5'^2 + B_5'^2} \\ \text{worin:} \quad A_5' &= \alpha_0 - \alpha_2 U^2 + \alpha_4 U^4, & B_5' &= \beta_1 U - \beta_3 U^3 + U^5, \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 + m_1^2 (n_1^2 p_3 p_4 p_5 + n_2^2 p_1 p_4 p_5 + n_3^2 p_1 p_2 p_5 + n_4^2 p_1 p_2 p_3) \\ &\quad + m_1^4 (n_1^2 n_3^2 p_5 + n_1^2 n_4^2 p_3 + n_2^2 n_4^2 p_1), \\ \alpha_2 &= p_1 p_2 p_3 + p_1 p_2 p_4 + p_1 p_2 p_5 + p_1 p_3 p_4 + p_1 p_3 p_5 + p_1 p_4 p_5 + p_2 p_3 p_4 \\ &\quad + p_2 p_3 p_5 + p_2 p_4 p_5 + p_3 p_4 p_5 + m_1^2 [n_1^2 (p_3 + p_4 + p_5) + n_2^2 (p_1 + p_4 + p_5) \\ &\quad + n_3^2 (p_1 + p_2 + p_5) + n_4^2 (p_1 + p_2 + p_3)], \\ \alpha_4 &= p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5, \\ \beta_1 &= p_1 p_2 p_3 p_4 + p_1 p_2 p_3 p_5 + p_1 p_2 p_4 p_5 + p_1 p_3 p_4 p_5 + p_2 p_3 p_4 p_5 \\ &\quad + m_1^2 [n_1^2 (p_3 p_4 + p_3 p_5 + p_4 p_5) + n_2^2 (p_1 p_4 + p_1 p_5 + p_4 p_5) \\ &\quad + n_3^2 (p_1 p_2 + p_1 p_5 + p_2 p_5) + n_4^2 (p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3)] \\ &\quad + m_1^4 (n_1^2 n_3^2 + n_1^2 n_4^2 + n_2^2 n_4^2), \\ \beta_3 &= p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_1 p_4 + p_1 p_5 + p_2 p_3 + p_2 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_4 + p_3 p_5 + p_4 p_5 \\ &\quad + m_1^2 (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2), \end{aligned} \right\} (24)$$



$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} N_5''^2 &= a + bU^2 + cU^4 + dU^6 + eU^8 + U^{10}, \\ a &= \alpha_0^2, \\ b &= \beta_1 - 2\alpha_0\alpha_2, \\ c &= 2\alpha_0\alpha_4 + \alpha_2^2 - 2\beta_1\beta_3, \\ d &= \beta_3^2 - 2\alpha_2\alpha_4 + 2\beta_1, \\ e &= \alpha_4^2 - 2\beta_3. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Für die Normalform, also für:

$$\text{ergibt sich:} \quad \left. \begin{aligned} p_1 = p_5 = 1, \quad p_2 = p_3 = p_4 = 0, \quad n_1^2 = n_4^2 = 1, \quad n_2^2 = n_3^2 \\ M_5'' = 2m_1^4 n_2^2, \\ \alpha_0 = 2m_1^4 n_2^2, \quad \beta_1 = 2m_1^2 n_2^2 + m_1^4 (1 + 2n_2^2), \\ \alpha_2 = m_1^2 (2 + 4n_2^2), \quad \beta_3 = 1 + m_1^2 (2 + 2n_2^2), \\ \alpha_4 = 2, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

und daraus nach (25):

$$\left. \begin{aligned} a &= 4m_1^8 n_2^4, \\ b &= (2m_1^4 n_2^2 + m_1^4 - 2m_1^2 n_2^2)^2, \\ c &= (2m_1^4 n_2^2 + m_1^4 - 2m_1^2 n_2^2) 2[1 - 2m_1^2 (1 + n_2^2)], \\ d &= [1 - 2m_1^2 (1 + n_2^2)]^2 + 2(2m_1^4 n_2^2 + m_1^4 - 2m_1^2 n_2^2), \\ e &= 2[1 - 2m_1^2 (1 + n_2^2)]. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Wir bemerken, daß zwischen diesen Größen folgende Beziehungen bestehen:

$$c = e\sqrt{b}, \quad d = \frac{e^2}{4} + 2\sqrt{b}, \quad (28)$$

wo unter  $\sqrt{b}$  der Wert verstanden ist:  $\sqrt{b} = 2m_1^4 n_2^2 + m_1^4 - 2m_1^2 n_2^2$ .

Demnach können wir schreiben:

$$\left. \begin{aligned} N_5''^2 &= a + bU^2 + e\sqrt{b}U^4 + \left(\frac{e^2}{4} + 2\sqrt{b}\right)U^6 + eU^8 + U^{10}, \\ N_5''^2 &= a + U^2 \left( U^4 + \frac{e}{2}U^2 + \sqrt{b} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Für  $U = 0$  hat  $N_5''^2$  den Wert  $a$  und die Resonanzkurve hat hier, wie wir oben allgemein gezeigt haben, und wie auch aus den Gleichungen (26) unmittelbar zu erkennen ist, ein Maximum mit optimaler Amplitude. Aus (29) sehen wir nun, daß die Kurve auch sonst noch Maxima von optimaler Amplitude hat, nämlich an den Stellen, die durch die Wurzeln der Gleichungen:

$$U^4 + \frac{e}{2}U^2 + \sqrt{b} = 0 \quad (30)$$

gegeben sind, d. h. für:

$$U = \pm \sqrt{-\frac{e}{4} \pm \sqrt{\frac{e^2}{16} - \sqrt{b}}}. \quad (31)$$

Um die Minima aufzusuchen, haben wir dann die Gleichung:  $\frac{dP_5}{dU} = 0$  zu bilden.

Wir finden nach Beseitigung der Wurzel  $U = 0$  und unter Berücksichtigung der Beziehungen (28):

$$U^8 + \frac{4}{5}eU^6 + \left(\frac{3e^2}{20} + \frac{6}{5}\sqrt{b}\right)U^4 + \frac{2}{5}e\sqrt{b}U^2 + \frac{1}{5}b = 0. \quad (32)$$

Diese Gleichung muß ebenfalls die Wurzeln (31) haben. Um die beiden übrigen Wurzeln, also die Stellen für die Minima der Resonanzkurve zu finden, brauchen wir nur die linke Seite von (30) in die linke Seite von (32) zu dividieren. Die Division muß aufgehen, und der Quotient gibt dann eine Gleichung zweiten Grades für  $U^2$ , deren Wurzeln die gesuchten Minimumstellen bezeichnen. Wir finden dafür:

$$U^4 + \frac{3}{10} e U^2 + \frac{1}{5} \sqrt{b} = 0, \quad (33)$$

also

$$U = \pm \sqrt{-\frac{3}{20} e \pm \sqrt{\frac{9 e^2}{400} - \frac{1}{5} \sqrt{b}}}. \quad (34)$$

Es ist also nach Einsetzen von (27) in (31) und (33):

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \pm \sqrt{-\frac{3}{20} e - \sqrt{\frac{9 e^2}{400} - \frac{1}{5} \sqrt{b}}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{6 m_1^2 (1 + n_2^2) - 3 - \sqrt{16 m_1^4 + 32 m_1^2 n_2^2 + 36 m_1^2 n_2^4 - 36 m_1^2 + 4 m_1^2 n_2^2 + 9}}{10}} \\ U_2 &= \pm \sqrt{-\frac{e}{4} - \sqrt{\frac{e^2}{16} - \sqrt{b}}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{2 m_1^2 (1 + n_2^2) - 1 - \sqrt{1 - 4 m_1^2 + 4 m_1^2 n_2^2 + 4 m_1^4 n_2^4}}{2}} \\ U_3 &= \pm \sqrt{-\frac{3}{20} e + \sqrt{\frac{9 e^2}{400} - \frac{1}{5} \sqrt{b}}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{6 m_1^2 (1 + n_2^2) - 3 + \sqrt{16 m_1^4 + 32 m_1^2 n_2^2 + 36 m_1^2 n_2^4 - 36 m_1^2 + 4 m_1^2 n_2^2 + 9}}{10}} \\ U_4 &= \pm \sqrt{-\frac{e}{4} + \sqrt{\frac{e^2}{16} - \sqrt{b}}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{2 m_1^2 (1 + n_2^2) - 1 + \sqrt{1 - 4 m_1^2 + 4 m_1^2 n_2^2 + 4 m_1^4 n_2^4}}{2}} \end{aligned} \right\} (35)$$

Um hiernach die Gestalt der Resonanzkurven diskutieren zu können, müssen wir uns klar werden, wann die Wurzeln (35) reell sind. Das ist offenbar nur dann der Fall, wann die Wurzeln der quadratischen Gleichungen (30) und (33) für  $U^2$  reell und positiv sind. Hierfür wiederum ist maßgebend das Vorzeichen der Größen:  $e$ ,  $\sqrt{b}$ ,  $\frac{e^2}{16} - \sqrt{b}$  und  $\frac{9 e^2}{400} - \frac{1}{5} \sqrt{b}$ . Um uns dies veranschaulichen zu können, prüfen wir, für welche Werte von  $m_1^2$  diese Größen verschwinden. Wir finden aus (27) und (35) folgende Bedingungen:

$$\left. \begin{aligned} 1) \text{ für } \quad \sqrt{b} &= 0: & m_1^2 &= \frac{2 n_2^2}{1 + 2 n_2^2}, \\ 2) \text{ für } \quad e &= 0: & m_1^2 &= \frac{1}{2(1 + n_2^2)}, \\ 3) \text{ für } \quad \frac{e^2}{16} - \sqrt{b} &= 0: & m_1^2 &= \frac{1 - n_2^2 \pm \sqrt{1 - 2 n_2^2}}{2 n_2^4}, \\ 4) \text{ für } \quad \frac{9 e^2}{400} - \frac{1}{5} \sqrt{b} &= 0: & m_1^2 &= \frac{9 - n_2^2 \pm \sqrt{5(9 - 18 n_2^2 - 16 n_2^4)}}{18 n_2^4 + 16 n_2^2 + 8}. \end{aligned} \right\} (36)$$

Die Bedingung 3) ist nur reell für  $n_2^2 \leq \frac{1}{2}$ , die Bedingung 4) nur für  $n_2^2 \leq \frac{3}{8}$ . In Abb. 5 sind die Werte (36) in Abhängigkeit von  $n_2^2$  aufgetragen; die entstandenen Kurven sind entsprechend der Bezifferung im Text unter (36) mit 1), 2), 3), 4) bezeichnet.

Zunächst folgt aus (36), daß alle vier Kurven sich in dem Punkt:

$$n_2^2 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) = 0,309, \quad m_1^2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) = 0,382$$

schneiden müssen. Durch die Kurven 1—4 wird dann die Ebene in vier Teile zerlegt, die in der Abb. 5 durch verschiedene Schraffur kenntlich gemacht und mit I, II, III, IV bezeichnet sind.

In der Fläche I ist:

$$\sqrt{b} > 0, \quad e < 0, \quad \frac{e^2}{16} - \sqrt{b} > 0, \quad \frac{9e^2}{400} - \frac{1}{5}\sqrt{b} > 0.$$

Demnach sind die Wurzeln der Gleichungen (30) und (33) sämtlich reell und positiv, die Resonanzkurve hat also hier, außer bei  $U = 0$ , vier Maxima von optimaler Höhe und vier Minima.

In der Fläche II ist:  $\sqrt{b} < 0$  und oberhalb der Kurve 2:  $e < 0$ , außerdem:

$$\frac{e^2}{16} - \sqrt{b} > 0, \quad \frac{9e^2}{400} - \frac{1}{5}\sqrt{b} > 0.$$

Dann haben die Gleichungen (30) und (33) je zwei reelle Wurzeln, von denen aber je eine negativ ist. Es werden also in (35)  $U_1$  und  $U_2$  komplex, und die Resonanzkurve hat demnach hier, außer  $U = 0$ , zwei Maxima optimaler Höhe und zwei Minima. Unterhalb der Kurve 2 ist  $e > 0$ ; dann bleiben die Verhältnisse wie bisher: (30) und (33) haben zwei reelle aber je nur eine positive Wurzel.

In der Fläche III ist:

$$\sqrt{b} > 0, \quad e < 0, \quad \frac{e^2}{16} - \sqrt{b} < 0, \quad \frac{9e^2}{400} - \frac{1}{5}\sqrt{b} > 0.$$

Die Gleichung (30) hat demnach keine reellen Wurzeln, dagegen sind die Wurzeln von (33) beide reell und positiv. Die Resonanzkurve hat also hier, neben  $U = 0$ , zwei Maxima und zwei Minima, aber die Amplitude der jetzt durch  $U_3$  gegebenen Maxima ist nicht die optimale.

In der Fläche IV ist:  $\sqrt{b} > 0$  und oberhalb der Kurve 4:  $\frac{e^2}{16} - \sqrt{b} < 0$  und  $\frac{9e^2}{400} - \frac{1}{5}\sqrt{b} < 0$ . Die Gleichungen (30) und (33) haben also keine reellen Wurzeln, die Resonanzkurve hat nur ein Maximum bei  $U = 0$ . Unterhalb der Kurve 4 wird:  $\frac{9e^2}{400} - \frac{1}{5}\sqrt{b} > 0$ . Jedoch ist hier, weil wir uns unterhalb der Kurve 2 befinden:  $e > 0$ ; also hat die Gleichung (33) zwei reelle negative Wurzeln, d. h. die Resonanz-

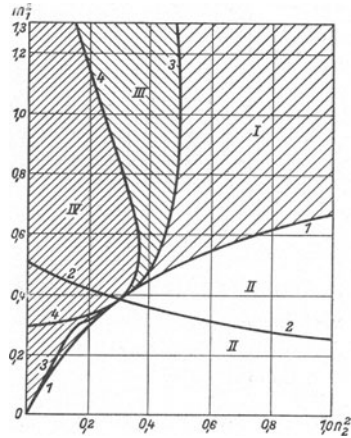


Abb. 5.

kurve hat auch hier nur ein Maximum bei  $U = 0$ . Das gleiche gilt unterhalb der Kurve 3 für die Gleichung (30).

Stellen wir die bezüglich der Gestalt der Resonanzkurve gefundenen Resultate an Hand der Abb. 5 zusammen, so haben wir:

Fläche I: fünf Maxima optimaler Höhe, vier Minima.

Fläche II: drei Maxima optimaler Höhe, zwei Minima.

Fläche III: drei Maxima, davon zwei nicht optimaler Höhe, zwei Minima.

Fläche IV: ein Maximum optimaler Höhe bei  $U = 0$ .

In den Abbildungen 6, 7, und 8 sind mehrere Resonanzkurven aufgetragen und zwar für  $n_2^2 = 1,0, 0,5$  und  $0,375$ . Hierin sind also die Kurven für  $n_2^2 = 0,5$  solche,

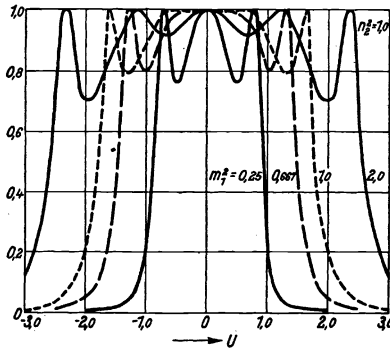


Abb. 6.

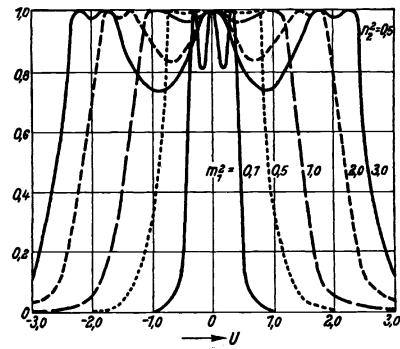


Abb. 7.

die man mit den nach der Leitungstheorie gebauten Gebilden erhalten kann. Die verschiedenen Kurventypen ergeben sich dann, wenn man die Anpassung von Anschluß- und Wellenwiderstand an verschiedenen Stellen des Loches vornimmt. In der Nähe des Punktes:  $n_2^2 = 0,309$ ,  $m_1^2 = 0,382$  nähern sich die Kurven sehr stark dem einwelligen Typus, der für den genannten Punkt selbst durch die Gleichung:

$$P_5 = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha^2 + U^{10}}}$$
 gegeben ist. Das zeigt die Kurve der Abb. 8. für  $n_2^2 = 0,375$ ,  $m_1^2 = 0,522$ . Dieser Punkt liegt in Abb. 5 auf der Kurve 4. Es fallen also die beiden Wurzeln  $U_1$  und  $U_3$  auf einen endlichen Wert zusammen, während  $U_2$  und  $U_4$  komplex sind. Die Resonanzkurve muß also bei  $U_1 = U_3$  Wendepunkte mit horizontaler Tangente haben. Diese Wendepunkte liegen aber so dicht unter der Geraden  $P_5 = 1$ , daß sie als solche bei dem Maßstabe der Abb. 8 nicht erkennbar sind. Solche Wendepunkte müssen sich auf dem ganzen oberen Ast der Kurve 4 in Abb. 5 ergeben. In dem ganzen Raum IV werden sich diese Wendepunkte, allerdings nicht mit horizontaler Tangente, finden. Wenn man daher eine schmale Resonanzkurve mit glattem Anstieg und nur einem Maximum wünscht, so wird man mit  $m_1^2$  bis auf die Kurve 1 heruntergehen müssen. Dies wird veranschaulicht durch die Kurve der Abb. 9 für  $n_2^2 = 0,1$ ,  $m_1^2 = 1,0$  bzw.  $m_1^2 = 0,167$ .

Für die Steilheit der Resonanzkurve mit der Gleichung:

$$P_5 = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + U^{10}}},$$

wo:  $\alpha^2 = 4 m_1^8 n_2^4$ ,  $m_1^2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ ,  $n_2^2 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$  ist, finden wir:

$$\frac{dP_5}{dU^2} = -5\alpha U^9 (\alpha^2 + U^{10})^{-\frac{3}{2}}.$$

Aus der Bedingung für die Wendetangente:

$$\frac{d^2 P_5}{dU^2} = -5\alpha \left[ 9 U^8 (\alpha^2 + U^{10})^{-\frac{3}{2}} - 15 U^9 (\alpha^2 + U^{10})^{-\frac{5}{2}} \right] = 0$$

folgt:

$$U_w^{10} = \frac{3}{2} \alpha^2$$

$$\text{und: } T_5 = \frac{2}{D_1} 5\alpha U_w^9 (\alpha^2 + U_w^{10})^{-\frac{3}{2}} = \frac{10}{D_1 \alpha^2} U_w^9 \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = 5,89 \cdot \frac{1}{D_1}.$$

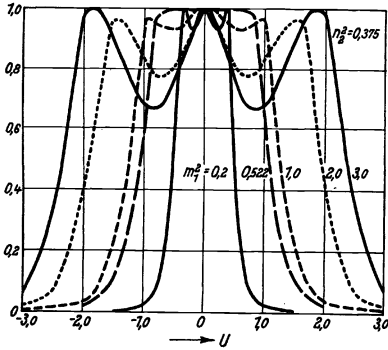


Abb. 8.

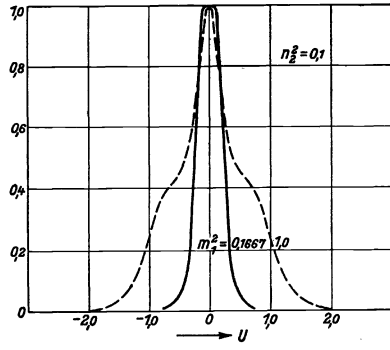


Abb. 9.

Setzt man wieder an Stelle von  $D_1$  die mittlere Dämpfung des gesamten Gebildes:  $D_m = \frac{2}{3} D_1$  ein, so kommt:

$$T_5 = 2,36 \cdot \frac{1}{D_m}.$$

Die Steilheiten, abgesehen vom Faktor  $\frac{1}{D_m}$ , ergeben sich also bei den Sieben von ein bis zu fünf Gliedern zu<sup>1)</sup>:

$$T_1 = 0,77, \quad T_2 = 1,0, \quad T_3 = 1,42, \quad T_4 = 1,894, \quad T_5 = 2,36 \cdot \frac{1}{D_m}.$$

Wir erkennen hieraus, daß die Steilheit vom zweigliedrigen Sieb an aufwärts annähernd proportional zur Gliederzahl ist.

### § 6. Verstimmte Siebe.

Wenn man die einzelnen Glieder eines Siebes in beliebiger Weise gegeneinander verstimmt, so wird man natürlich im allgemeinen unsymmetrische Resonanzkurven erhalten. Es ist denkbar, daß man bei einer Verstimmung, die in ganz bestimmter gesetzmäßiger Weise definiert ist, auch günstige Resonanzkurvenformen erhält. Wir wollen je ein solches Sieb mit drei und mit fünf Gliedern betrachten. Es handelt sich hierbei um eine Form von Siebketten, die in der Praxis vielfach Anwendung findet.

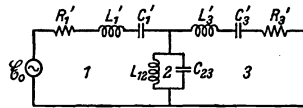


Abb. 10.

<sup>1)</sup> Siehe Anm. <sup>2)</sup> auf S. 33 a. a. O. § 1 und § 4.

Das Gebilde ist offenbar als dreigliedriges Sieb zu betrachten. Es sei:

$$\omega'_1 = \frac{1}{\sqrt{L'_1 C'_1}} = \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_{12} C_{23}}} = \omega'_3 = \frac{1}{\sqrt{L'_3 C'_3}} = \omega_0.$$

Es sind also die Leitungsglieder des ersten und dritten Kreises auf den gesamten zweiten Kreis abgestimmt; gegenüber dem zweiten Kreise ist also der erste nach tieferen, der dritte nach höheren Frequenzen verstimmt.

Die Betrachtung dieses Gebildes mit den bisher benutzten Methoden ist kompliziert und ergibt keine übersichtlichen Formeln, wenn man die Dämpfung des mittleren Gliedes berücksichtigt. Wir wollen also hier und bei dem entsprechenden fünfgliedrigen Gebilde nur Siebe der Normalform betrachten, wobei die Normalform in analoger Weise wie oben definiert wird:

$$D_1 = \frac{R'_1}{\omega_0 L'_1} = D'_3 = \frac{R'_3}{\omega_0 L'_3} = R'_1 \omega_0 C'_1 = R'_3 \omega_0 C'_3, \quad R_2 = 0.$$

Um die Resonanzkurve zu errechnen, gehen wir aus von den Gleichungen (1), in denen wir  $R_2 = 0$  setzen und erhalten:

$$J_3 = E_0 \frac{M_3}{N_3},$$

$$M_3 = S_{12} \cdot S_{23}, \quad N_3 = \sqrt{A_3^2 + B_3^2},$$

$$A_3 = -R_1 S_2 S_3 - R_3 S_1 S_2 + R_1 S_{23}^2 + R_3 S_{12}^2,$$

$$B_3 = R_1 R_3 S_2 - S_1 S_2 S_3 + S_1 S_{23}^2 + S_3 S_{12}^2.$$

Dividieren wir Zähler und Nenner durch  $R_1 \cdot R_{2a} \cdot R_3$  wo  $R_{2a}$  vorläufig beliebig ist, so kommt:

$$J_3 = \frac{E_0}{2\sqrt{R_1 R_3}} \frac{M'_3}{N'_3},$$

$$M'_3 = 2\sqrt{U_{12} U_{21} U_{23} U_{32}}, \quad N'_3 = \sqrt{A_3'^2 + B_3'^2},$$

$$A_3' = -U_2 U_3 - U_1 U_2 + U_{23} U_{32} + U_{12} U_{21},$$

$$B_3' = U_2 - U_1 U_2 U_3 + U_1 U_{23} U_{32} + U_3 U_{12} U_{21},$$

worin:

$$U_1 = \frac{S_1}{R_1}, \quad U_2 = \frac{S_2}{R_{2a}}, \quad U_3 = \frac{S_3}{R_3}, \quad U_{12} = \frac{S_{12}}{R_1}, \quad U_{21} = \frac{S_{12}}{R_{2a}}, \quad U_{23} = \frac{S_{23}}{R_{2a}}, \quad U_{32} = \frac{S_{23}}{R_3}$$

ist. Nun haben wir:  $U_1 = U'_1 + U_{12}$ ,  $U_2 = U_{21} + U_{23}$ ,  $U_3 = U'_3 + U_{32}$ .

Setzen wir dies ein, so ergibt sich:

$$A_3' = -U_2 U'_3 - U'_1 U_2 - U_{12} U_{23} - U_{21} U_{32},$$

$$B_3' = U_2 - U'_1 U_2 U'_3 - U'_3 U_{12} U_{21} - U'_1 U_{21} U_{32}.$$

Es ist:

$$U'_1 = \frac{X'_1}{D'_1} = U'_3 = \frac{X'_3}{D'_3}, \quad U_2 = \frac{X_2}{D_{2a}} = \frac{X_1}{D_{2a}},$$

wo:

$$X_1 = X_2 = X_3 = \eta - \frac{1}{\eta}$$

ist.

Wir wollen nun  $R_{2a}$  so bestimmen, daß  $U'_1 = U_2 = U'_3 = U'$  wird. Dazu muß offenbar:  $D_{2a} = D'_1 = D'_3$  also

$$\frac{R_{2a}}{\omega_0 L_{12}} = \frac{R'_1}{\omega_0 L'_1} = \frac{R'_3}{\omega_0 L'_3}, \quad R_{2a} \omega_0 C_{23} = R'_1 \omega_0 C'_1 = R'_3 \omega_0 C'_3$$

und somit:

$$R_{2a} = \frac{L_{12}}{L_1'} R_1' = \frac{L_{12}}{L_3'} R_3' = \frac{C_1'}{C_{23}} R_1' = \frac{C_3'}{C_{23}} R_3'$$

sein. Setzen wir nun:

$$\frac{L_{12}}{L_1'} = \kappa'_{12}, \quad \frac{C_3'}{C_{23}} = \gamma'_{32}, \quad \kappa'_{21} = \gamma'_{23} = 1,$$

so ist:

$$U_{12} = \frac{\omega L_{12}}{R_1'} = \frac{\omega_0 L_1'}{R_1'} \frac{\omega}{\omega_0} \frac{L_{12}}{L_1'} = \eta \frac{\kappa'_{12}}{D_1'} = \eta \mu'_{12},$$

$$U_{21} = \frac{\omega L_{12}}{R_{2a}} = \frac{\omega_0 L_1'}{R_1'} \frac{\omega}{\omega_0} \frac{L_{12}}{L_{12}} = \eta \frac{\kappa'_{21}}{D_1'} = \eta \frac{1}{D_1'} = \eta \mu'_{21},$$

$$U_{23} = -\frac{1}{\omega C_{23} R_{2a}} = -\frac{1}{\omega_0^2 C_{23} L_{12}} \frac{\omega_0}{\omega} \frac{\omega_0 L_3'}{R_3'} = -\frac{1}{\eta} \frac{\gamma'_{23}}{D_3'} = -\frac{1}{\eta} \frac{1}{D_1'} = -\frac{1}{\eta} \mu'_{23} = -\frac{1}{\eta} \mu'_{21},$$

$$U_{32} = -\frac{1}{\omega C_{23} R_3'} = -\frac{1}{\omega_0 C_3' R_3'} \frac{\omega_0}{\omega} \frac{C_3'}{C_{23}} = -\frac{1}{\eta} \frac{\gamma'_{32}}{D_3'} = -\frac{1}{\eta} \frac{\gamma'_{32}}{D_1'} = -\frac{1}{\eta} \mu'_{32}.$$

Es folgt dann, wenn wir setzen:  $\mu'_{12} \mu'_{21} = m_{12}'^2$ ,  $\mu'_{23} \mu'_{32} = m_{23}'^2$ :

$$M_3' = 2 \sqrt{\eta^2 m_{12}'^2 \frac{1}{\eta^2} m_{23}'^2} = 2 m_{12}' m_{23}' = 2 m_1'^2 n_1' n_2',$$

$$A_3' = \alpha_0' - \alpha_2' U'^2,$$

$$B_3' = \beta_1' U' - U'^3,$$

wo

$$\alpha_0' = m_1' (n_1'^2 + n_2'^2),$$

$$\alpha_2' = 2,$$

$$\beta_0' = 1 + m_1'^2 (n_1'^2 + n_2'^2)$$

und

$$m_{12}'^2 = n_1'^2 m_1'^2, \quad m_{23}'^2 = n_2'^2 m_1'^2.$$

Wenn wir hierin nach der Bedingung für die Normalform setzen:  $n_1'^2 = n_2'^2 = 1$ , so nehmen die Formeln genau die gleiche Gestalt an, wie die unter (9) gefundenen. Eine Diskussion der entstehenden Resonanzkurven erübrigt sich daher, man erhält genau dieselben Kurven wie bei dreigliedrigen abgestimmten Sieben, siehe Abb. 2. Der Unterschied gegenüber den Kurven für abgestimmte Siebketten besteht nur darin, daß die jetzt für den Kurventypus entscheidende Größe  $m_1'^2$  aus den gestrichelten Größen für die Leitungsglieder zu errechnen ist, während sich bei den abgestimmten Sieben  $m_1'^2$  aus den für den gesamten Schwingungskreis gültigen Größen ergab.

Es sei bemerkt, daß in diesem Falle nicht wie bei den abgestimmten Sieben die Vernachlässigung  $\eta = 1$  für die Diskussion der Resonanzkurven notwendig ist.

Die Annahme:  $n_1'^2 = n_2'^2 = 1$ , die notwendig ist, um optimale Energieübertragung zu erhalten, bedingt:  $L_1' = L_3'$ ,  $C_1' = C_3'$  und damit:  $R_1' = R_3'$ . Man ist hier also im Aufbau des Siebes, wenn man optimale Energieübertragung erhalten will, sehr eingeschränkt.

Für ein entsprechendes fünfgliedriges Sieb nach Abb. 11

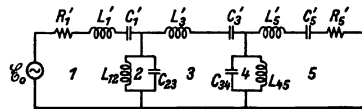


Abb. 11.

für das wieder gilt:

$$\omega_1' = \frac{1}{\sqrt{L_1' C_1'}} = \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_{12} C_{23}}} = \omega_3' = \frac{1}{\sqrt{L_3' C_3'}} = \omega_4 = \frac{1}{\sqrt{L_{45} C_{34}}} = \omega_5' = \frac{1}{\sqrt{L_5' C_5'}} = \omega_0,$$

finden wir aus (1), wenn wir wieder:  $R_2 = R_3 = R_4 = 0$  setzen:

$$J_5 = E_0 \frac{M_5}{N_5},$$

$$M_5 = S_{12} S_{23} S_{34} S_{45},$$

$$N_5 = \sqrt{A_5^2 - B_5^2},$$

$$A_5 = R_5 S_1 S_2 S_3 S_4 - R_5 S_3 S_4 S_{12}^2 - R_5 S_1 S_4 S_{13}^2 - R_5 S_1 S_2 S_{34}^2 + R_5 S_{12}^2 S_{34}^2 \\ + R_1 S_2 S_3 S_4 S_5 - R_1 S_4 S_5 S_{23}^2 - R_1 S_2 S_5 S_{34}^2 - R_1 S_2 S_3 S_{45}^2 + R_1 S_{23}^2 S_{45}^2,$$

$$B_5 = S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 - S_3 S_4 S_5 S_{12}^2 - S_1 S_4 S_5 S_{23}^2 - S_1 S_2 S_5 S_{34}^2 + S_5 S_{12}^2 S_{34}^2 + S_3 S_{12}^2 S_{45}^2 \\ + S_1 S_{23}^2 S_{45}^2 - R_1 R_5 S_2 S_3 S_4 + R_1 R_5 S_4 S_{23}^2 + R_1 R_5 S_2 S_{34}^2 - S_1 S_2 S_3 S_{45}^2.$$

Wir dividieren wieder durch:  $R_1 R_{2a} R_{3a} R_{4a} R_5$ , wo  $R_{2a}, R_{3a}, R_{4a}$  vorläufig beliebig sind, und erhalten:

$$J_5 = \frac{E_0}{2\sqrt{R_1 R_5}} \frac{M'_5}{N'_5},$$

$$M'_5 = 2\sqrt{U_{12} U_{21} U_{23} U_{32} U_{34} U_{43} U_{45} U_{54}},$$

$$N'_5 = \sqrt{A_5'^2 + B_5'^2},$$

$$A_5' = U_1 U_2 U_3 U_4 U_5 - U_3 U_4 U_{12} U_{21} - U_1 U_4 U_{23} U_{32} - U_1 U_2 U_{34} U_{43} + U_{12} U_{21} U_{34} U_{43} \\ + U_2 U_3 U_4 U_5 - U_4 U_5 U_{23} U_{32} - U_2 U_5 U_{34} U_{43} - U_2 U_3 U_{45} U_{54} + U_{23} U_{32} U_{45} U_{54},$$

$$B_5' = U_1 U_2 U_3 U_4 U_5 - U_3 U_4 U_5 U_{12} U_{21} - U_1 U_4 U_5 U_{23} U_{32} - U_1 U_2 U_5 U_{34} U_{43} - U_1 U_2 U_3 U_{45} U_{54} \\ + U_5 U_{12} U_{21} U_{34} U_{43} + U_3 U_{12} U_{21} U_{45} U_{54} + U_1 U_{23} U_{32} U_{45} U_{54} - U_2 U_3 U_4 \\ + U_4 U_{23} U_{32} + U_2 U_{34} U_{43}.$$

Es ist:

$$U_1 = U'_1 + U_{12}, \quad U_2 = U_{21} + U_{23}, \quad U_3 = U_{32} + U'_3 + U_{34}, \quad U_4 = U_{43} + U_{45}, \quad U_5 = U'_5 + U_{54}. \quad (37)$$

Wenn wir wieder wie oben  $R_{2a}, R_{3a}$  und  $R_{4a}$  so bestimmen, daß:

$$U'_1 = U_2 = U'_3 = U_4 = U'_5 = U'$$

ist, also die Beziehungen:

$$\frac{R'_1}{\omega_0 L'_1} = \frac{R_{2a}}{\omega_0 L_{12}} = \frac{R_{3a}}{\omega_0 L'_3} = \frac{R_{4a}}{\omega_0 L_{45}} = \frac{R'_5}{\omega_0 L'_5},$$

$$R'_1 \omega_0 C'_1 = R_{2a} \omega_0 C_{23} = R_{3a} \omega_0 C'_3 = R_{4a} \omega_0 C_{34} = R'_5 \omega_0 C'_5$$

berücksichtigen, so finden wir wie oben:

$$\left. \begin{aligned} U_{12} &= \eta \frac{\kappa'_{12}}{D'_1} = \eta \mu'_{12}, & U_{34} &= -\frac{1}{\eta} \frac{\gamma'_{34}}{D'_1} = -\frac{1}{\eta} \mu'_{34}, \\ U_{21} &= \eta \frac{\kappa'_{21}}{D'_1} = \eta \frac{1}{D'_1} = \eta \mu'_{21}, & U_{43} &= -\frac{1}{\eta} \frac{\gamma'_{43}}{D'_1} = -\frac{1}{\eta} \frac{1}{D'_1} = -\frac{1}{\eta} \mu'_{43}, \\ U_{23} &= -\frac{1}{\eta} \frac{\gamma'_{23}}{D'_1} = -\frac{1}{\eta} \frac{1}{D'_1} = -\frac{1}{\eta} \mu'_{23}, & U_{45} &= \eta \frac{\kappa'_{45}}{D'_1} = \eta \frac{1}{D'_1} = \eta \mu'_{45}, \\ U_{32} &= -\frac{1}{\eta} \frac{\gamma'_{32}}{D'_1} = -\frac{1}{\eta} \mu'_{32}, & U_{54} &= \eta \frac{\kappa'_{54}}{D'_1} = \mu'_{54}, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

wo die Koppelungskoeffizienten  $\kappa$  und  $\gamma$  in gleicher Weise definiert sind wir im vorigen Beispiel. Für die Koppelungsfaktoren finden wir dann:

$$K'^2_{12} = \kappa'^2_{12} = n_1'^2 K'^2_{12}, \quad K'^2_{23} = \gamma'^2_{23} = n_2'^2 K'^2_{12}, \quad K'^2_{34} = \gamma'^2_{34} = n_3'^2 K'^2_{12}, \quad K'^2_{45} = \kappa'^2_{45} = n_4'^2 K'^2_{12}. \quad (39)$$

Setzen wir also die Bedingungen der Normalform:

$$n_1'^2 = n_4'^2 = 1, \quad n_2'^2 = n_3'^2,$$

so haben wir:

$$\text{und: } \left. \begin{aligned} U_{12} &= U_{54}, \quad U_{21} = U_{45}, \quad U_{23} = U_{43}, \quad U_{32} = U_{34} \\ U_1 &= U_5, \quad U_2 = U_4. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$



Dann ist:

$$\begin{aligned} A'_5 &= 2U_1U_2^2U_3 - 4U_1U_2U_{23}U_{32} - 2U_2U_3U_{12}U_{21} + 2U_{12}U_{21}U_{23}U_{32}, \\ B'_5 &= U_1^2U_2^2U_3 - 2U_1U_2U_3U_{12}U_{21} - 2U_1^2U_2U_{23}U_{32} - U_2^2U_3 \\ &\quad + 2U_2U_{23}U_{32} + 2U_1U_{12}U_{21}U_{23}U_{32} + U_3U_{12}^2U_{21}^2. \end{aligned}$$

Setzen wir hierin die Beziehungen (37) ein, so finden wir:

$$\begin{aligned} A'_5 &= 2U'_1U_2^2U'_3 + 2U_2U'_3U_{12}U_{23} + U'_1U_2U_{21}U_{32} + 2U_{12}U_{21}U_{23}U_{32}, \\ B'_5 &= U_1^2U_2^2U'_3 + 2U'_1U_2U'_3U_{12}U_{23} + 2U_1^2U_2U_{21}U_{32} - U_2^2U'_3 \\ &\quad + 2U'_1U_{12}U_{21}U_{23}U_{32} + U'_3U_{12}^2U_{21}^2 - 2U_2U_{21}U_{32}. \end{aligned}$$

Wenn wir nunmehr wieder setzen:

$$\mu'_{12}\mu'_{21} = m_{12}^2, \quad \mu'_{23}\mu'_{32} = m_{23}^2,$$

so ist nach (38) und (39):

$$\mu'_{12}\mu'_{21} = n_1^2 m_1^2 = m_1^2, \quad \mu'_{23}\mu'_{32} = n_2^2 m_1^2.$$

Das ergibt dann unter Berücksichtigung von:  $U'_1 = U_2 = U'_3 = U'$ :

$$M'_5 = 2m_1^4 n_2^2,$$

$$\begin{aligned} A'_5 &= \alpha'_0 - \alpha'_2 U'^2 + \alpha'_4 U'^4, & B'_5 &= \beta'_1 U' - \beta'_3 U'^3 + U'^5, \\ \text{wo: } \alpha'_0 &= 2m_1^4 n_2^2, & \beta'_1 &= 2m_1^2 n_2^2 + m_1^4 (1 + 2n_2^2) \\ \alpha'_2 &= m_1^2 (2 + 4n_2^2), & \beta'_3 &= 1 + m_1^2 (2 + 2n_2^2), \\ \alpha'_4 &= 2. \end{aligned}$$

Die Vernachlässigung  $\eta = 1$  ist auch hier, wie man sieht, zur Diskussion der Resonanzkurven nicht erforderlich.

Die vorstehenden Gleichungen stimmen überein mit dem Resultat, das für abgestimmte fünfgliedrige Siebe gefunden wurde (26). Wir erhalten also dieselben Resonanzkurven wie dort, wenn wir nur die abweichende Definition der Größen  $m_1^2$  und  $n_2^2$  berücksichtigen.

Aus den Bedingungen der Normalform:  $n_1^2 = n_4^2 = 1$ ,  $n_2^2 = n_3^2$  folgt:  $L_1 = L'_5$ ,  $C'_1 = C'_5$ ,  $L_{12} = L_{45}$ ,  $C_{23} = C_{34}$  und mithin:  $R'_1 = R'_5$ . Auch hier ist man also im Aufbau des Siebes recht beschränkt. Wenn die Bauvorschriften der Leitungstheorie auf solche Siebe angewendet werden, so ist zu setzen:  $n_2^2 = 0,5$ . Man erhält also hiermit dieselben Resultate wie mit abgestimmten Sieben, die nach den Vorschriften der Leitungstheorie gebaut sind. Die zu erzielenden Resonanzkurven sind demnach auch für die hier betrachteten Siebe durch Abb. 7 wiedergegeben.

Wir haben diese Eigenschaften eines verstimmten Siebes nach Abb. 11 aus der Theorie gekoppelter Systeme abgeleitet, weil wir es eben bei diesem Sieb auch mit einer Anzahl gekoppelter Schwingungskreise zu tun haben. Die von H. Muth<sup>1)</sup> geäußerte Ansicht, daß, wenn man „an Stelle der Siebketten wenig gedämpfte, gekoppelte Schwingungskreise verwenden“ würde, man weniger günstige Resultate erhalten würde, ist also physikalisch unzutreffend; die von ihm beschriebenen Siebketten sind selbst nichts anderes als wenig gedämpfte, gekoppelte Schwingungskreise. An der gleichen Stelle wird es als ein Vorzug dieser Kette bezeichnet, daß sie mit zwei Gliedern dasselbe erreiche, was man sonst nur mit einer fünfgliedrigen Kette erreichen könne. Dazu ist zu bemerken, daß vom physikalischen Standpunkt die Kette

<sup>1)</sup> H. Muth: Mehrfach-Telephonie und -Telegraphie längs Leitungen, Telefunken-Zeitschrift, VI, 34, S. 42.

in Wirklichkeit als ein fünfgliedriges System zu betrachten ist und daher natürlich auch die Eigenschaften solcher Systeme zeigen muß. Die Einteilung in zwei Glieder ist nur durch die leitungstheoretischen Behandlung entstanden, die, wie sich auch hieraus wieder<sup>1)</sup> ergibt, die Gefahr in sich birgt, die wirklichen physikalischen Tatsachen aus dem Auge zu verlieren.

Wir haben also gefunden, daß man sowohl mit abgestimmten, wie mit verstimmtten Sieben dieselben Resultate erhalten kann. Dabei haben die hier betrachteten verstimmtten Siebe den Vorzug, daß die für sie abgeleiteten Resultate in voller Strenge gültig sind, ohne die Vernachlässigung  $\eta = 1$ . Der Hauptgrund dafür liegt darin, daß bei diesen Gebilden induktive und kapazitive Kuppelung abwechseln. Dieser Vorzug ist jedoch, wie wir oben gezeigt haben, nicht sehr erheblich. Es dürfte sich vielmehr vielleicht gerade in den Fällen, wo große Genauigkeit gefordert werden muß, empfehlen, abgestimmte Siebe zu verwenden, weil es hierbei leicht möglich ist, ohne Veränderung der Schaltung, die zu Änderung der wirksamen Kapazitäten führen kann, die Erfüllung der Abstimmungsbedingungen zu prüfen, was bei verstimmtten Sieben nicht zutrifft. Außerdem ist man bei den hier betrachteten verstimmtten Sieben bezüglich des Aufbaues sehr eingeengt, wenn man optimale Energieübertragung erhalten will; eine Spannungstransformation ist dann in der Schaltung der Abb. 10 und 11 nicht möglich ohne Verwendung von Transformatoren, während die abgestimmten Siebe hierzu auch ohne dies Hilfsmittel im allgemeinen die Möglichkeit bieten.

### Zusammenfassung.

Mit Hilfe der Rieggerschen Rekursionsformeln werden Formeln abgeleitet, die zur Berechnung der Resonanzkurven von Sieben beliebiger Gliederzahl dienen können. Mit Hilfe dieser Formeln werden einige allgemeine Eigenschaften von Sieben bestimmter Form, der Normalform, bewiesen. Die allgemeinen Gleichungen werden auf drei-, vier- und fünfgliedrige abgestimmte Siebe der Normalform angewandt und deren Resonanzkurven diskutiert. Schließlich werden drei- und fünfgliedrige nicht abgestimmte Siebe einer speziellen Form gleichfalls mit Hilfe der Rieggerschen Rekursionsformeln betrachtet, und bezüglich ihrer Resonanzkurvenformen auf abgestimmte Siebe der Normalform von gleicher Gliederzahl zurückgeführt.

<sup>1)</sup> Siehe Anm. <sup>2)</sup> a. S. 33 a. a. O.

# Über Messungen der Wärmeausdehnung.

Von Hans Gerdien und Werner Jubitz.

Mit 7 Textabbildungen.

Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium Siemensstadt.

Eingegangen am 13. Januar 1925.

## 1.

Die genaue Kenntnis der Wärmeausdehnung der technischen Baustoffe und ihrer Veränderung mit der Temperatur hat in letzter Zeit größere Bedeutung gewonnen. Einmal erlangen Temperaturbeständigkeitsverbindungen von zwei verschiedenen Werkstoffen in der neuzeitlichen Hochvakuumtechnik große Wichtigkeit, dann aber stellen auch die neuzeitlichen Bearbeitungsmethoden, besonders der Metalle und Legierungen, die Aufgabe, die durch sie bewirkten Eigenschaftsänderungen möglichst vollständig verfolgen zu können. Besonders die letztere Aufgabe machte in unserem Laboratorium die Durchbildung von Methoden notwendig, welche die Messung der Wärmeausdehnung über ein erhebliches Temperaturbereich mit relativ hoher Genauigkeit in bequemer Weise gestatten. Da eine große Reihe von Schlüssen auf die thermische und mechanische Vorbehandlung eines metallischen Werkstoffes sich bereits ziehen läßt, wenn man die Koeffizienten der Wärmeausdehnung nur in den Temperaturintervallen zwischen Zimmertemperatur und  $100^{\circ}$  genügend genau kennt, und da eine große Anzahl von Legierungen durch eine wesentlich höhere Erhitzung bereits merkliche Gefügeänderungen erleidet, so haben wir unsere Bemühungen zunächst darauf gerichtet, die Meßmethode für das Temperaturintervall Zimmertemperatur-Siedetemperatur des Wassers zu entwickeln. Da es erwünscht ist, sämtliche physikalischen Messungen an einem und demselben Prüfstabe einer Legierung auszuführen, haben wir auch den nun zu beschreibenden Apparat zur Messung der Wärmeausdehnung so eingerichtet, daß nicht nur der gewöhnlich für die Dehnungs- und Zerreißfestigkeitsprobe verwendete 10-mm-Normalstab von 225 mm Länge, sondern auch der neuerdings vorgeschlagene verkürzte Normalrundstab von 20 mm Dicke und 300 mm Länge ohne weiteres mit dem Apparat durchgemessen werden kann. Andere stabförmige Proben können herab bis zu einer Länge von 60 mm untersucht werden. Ebenso können drahtförmige Proben von 0,5, 1,0, 1,5, 2,0 mm Dicke und 120 bis 130 mm Länge mit Hilfe einer besonderen Vorrichtung in analoger Weise wie stabförmige Proben gemessen werden.

„Apparat zur Messung der Wärmeausdehnung fester Körper in dem Temperaturintervall von Zimmertemperatur bis  $100^{\circ}$ .“

Der Apparat gestattet eine absolute Messung der mit veränderter Temperatur eintretenden Längenänderung der Probe. Diese Längenänderung der Probe wird mittels einer nahezu unveränderlich gehaltenen Basis aus Invarstahl gemessen, die

in Form eines Rohres von 20 mm äußerem Durchmesser und 2 mm Wandstärke bei 580 mm Gesamtlänge ( $A$  in Abb. 3) vorliegt. Das Rohr liegt wagerecht in zwei

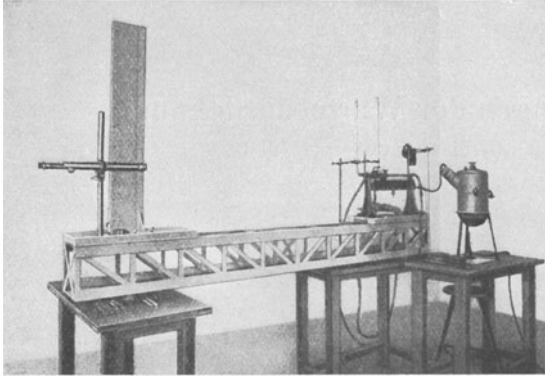


Abb. 1.

schellenartigen Haltern, die auf einer Grundplatte befestigt sind, und ist in dem einen Halter fest eingespannt, während es sich in dem anderen frei strecken kann. Das Rohr wird während der Messung von Kühlwasser durchflossen, dessen Temperatur durch ein in das Rohr eingebautes Thermometer gemessen werden kann<sup>1)</sup>. Unterhalb des Rohres wird an zwei festen oder einstellbaren Haken aus Neusilber die Probe aufge-

hängt (vgl. Abb. 1 und 2). Diese legt sich rechts gegen einen kugelförmigen Anschlag  $Z$  (Abb. 2). Der Anschlag sitzt in einem vorläufig aus Bronze hergestellten Widerlager, welches mittels der Klemme  $U$  (Abb. 2) an jeder beliebigen Stelle des Basisrohres festgeklemmt werden kann. Das Widerlager ist so stark gebaut, daß störende Schwin-

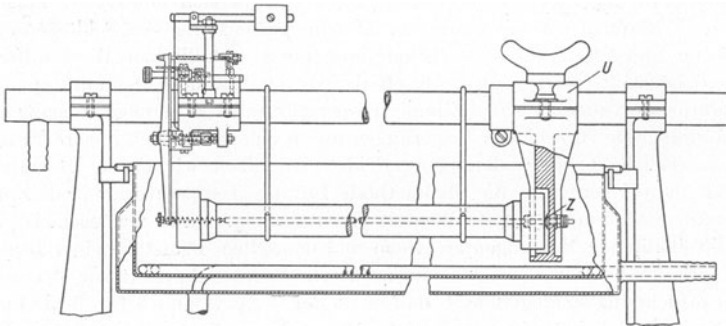


Abb. 2.

gungen infolge von Erschütterungen die Messung nicht beeinträchtigen können. Es ist ferner so ausgebildet, daß die Berührungsstelle zwischen dem rechten Ende der

<sup>1)</sup> Die Messung der thermischen Ausdehnung von drahtförmigen Proben wird mittels einiger für die genannten Drahtdurchmesser vorbereiteten Klemmvorrichtungen ausgeführt. Diese bestehen aus je 2 Klemmen, welche die Enden des zu messenden Drahtes sicher festhalten. Die eine der Klemmen ist mit drei parallelen Messingstäben ausgerüstet, welche in drei an der anderen Klemme befestigten parallelen Messingröhrchen gleiten und durch einstellbare Schraubenfedern so voneinander abgepreßt werden, daß die eingespannte Drahtprobe unter einem schwachen, einstellbaren Zug gehalten werden kann. Die Endflächen der Klemmböcken sind eben und senkrecht zur Längsachse des Drahtes gearbeitet, so daß die ganze Vorrichtung mit eingespanntem Draht wie ein Stab gemessen werden kann. An jeder Klemmböcke muß für ein je 1 cm langes Stück der Klemme die thermische Ausdehnung dieses aus Messing bestehenden Stückes in Abzug gebracht werden.

Probe und dem kugeligen Anschlag in der gleichen Vertikalebene erfolgt wie die Klemmung mittels der Klemme *U*. Zu diesem Zweck ist die Klemme symmetrisch von beiden Seiten ein wenig konisch ausgerieben, so daß beim Anziehen der Klemme sich zunächst ein schmaler, nach innen vorspringender Wulst klemmend an das Rohr anlegt. Um den Wärmeübergang vom Widerlager zur Basis herabzusetzen, berührt der Klemmwulst die Basis nicht unmittelbar, sondern nur unter Zwischenlage eines Rohres aus Pertinax von 1 mm Wandstärke. Durch die Lage des Berührungspunktes innerhalb der bei elastischer Beanspruchung des Widerlagers neutralen Ebene werden

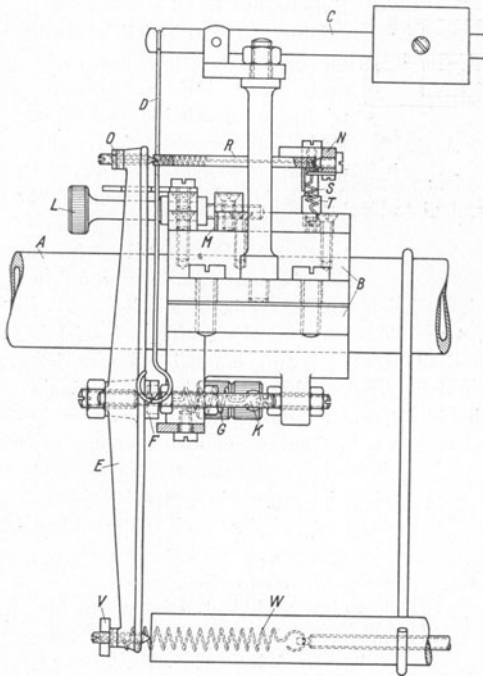


Abb. 3.

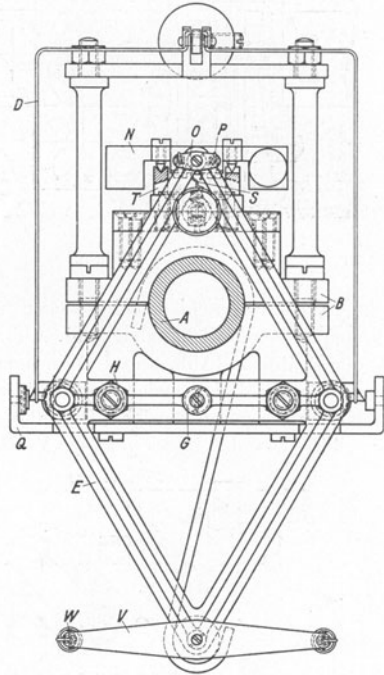


Abb. 4.

unerwünschte Verlagerungen dieses Berührungspunktes, die etwa bei ungleichmäßigem Erwärmen des Widerlagers auftreten könnten, auf ein Mindestmaß beschränkt. Selbstverständlich würde auch als Baustoff für das Widerlager am besten Invarstahl verwendet werden können. Wir haben aus Ersparnisrücksichten zunächst Bronzezug für das Widerlager verwendet und bisher keine merklichen Störungen dadurch gehabt. Das linke Ende der Probe (vgl. Abb. 2, 3 und 4) wird von einem Fühlhebel *E* berührt, welcher aus Invarstahl hergestellt ist und an seinen Enden eingesetzte Spitzschrauben aus gehärtetem Stahl (Abb. 3, 4 und 5) und in der Mitte zwei Schneiden, ebenfalls aus gehärtetem Stahl, trägt. Die sichere Anlage des unteren Fühlhebeldes am linken Ende der Probe und gleichzeitig die sichere Anlage des rechten Endes der Probe an den Anschlag des Widerlagers wird dadurch bewirkt, daß das untere Ende des

Fühlhebels *E* mittels des Querbalkens *V* (Abb. 4) und der Schraubenfedern *W* (Abb. 3) durch eine einstellbare Kraft, welche durch zwei zu beiden Seiten neben der Probe verlaufende Drähte auf das Widerlager übertragen wird, angepreßt werden kann.

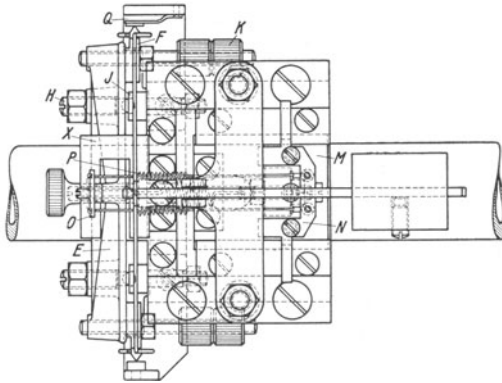


Abb. 5.

Der Fühlhebel ist als gleicharmiger Hebel ausgebildet mit Schenkellängen von 50 mm. Die zur Übertragung der zu messenden Verschiebung dienenden Schneiden in der Mitte des Hebels sind in Diskusform ausgebildet, werden lediglich durch horizontale Kräfte beansprucht und legen sich in stumpfwinklig ausgearbeitete Kimmen *F* (Abb. 3) aus gehärtetem Stahl, welche ihrerseits in der auf der Basis stehenden Klemme *B* (Abb. 3) sitzen. In der geometrischen Achse, welche durch die beiden Berührungspunkte

der Diskusschneiden geht, liegen zwei, lediglich durch vertikale Kräfte zu beanspruchende Schneiden (vgl. Abb. 3, 4 und 5) an denen der Fühlhebel mittels der Drähte *D* (Abb. 3 und 4) an dem Gewichtshebel *C* so aufgehängt ist, daß er sich gerade im Gleichgewicht befindet und auf die Diskusschneiden keinerlei vertikale Kräfte ausgeübt werden. Die „Tragschneiden“ sind an ihren Enden schräg angeschliffen, so daß in der genauen Verlängerung der Schneiden nach außen gekehrt zwei Spitzen entstehen, von denen die eine sich gegen ein vertikales Widerlager (vgl. Abb. 4 und 5) die andere sich gegen eine mittels einer Drahtfeder *Q* angepreßte Platte aus gehärtetem Stahl legt. Die eigentlichen

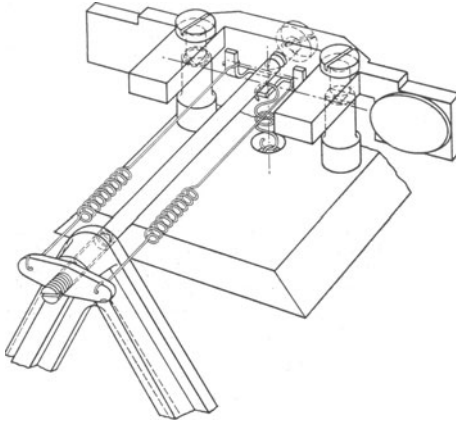


Abb. 6.

„Meßschneiden“ werden durch eine Schraubenfeder *G* (vgl. Abb. 3 und 4) mit einer konstanten Kraft gegen die Kimmen gepreßt. Gegen die im oberen Ende des Fühlhebels sitzende Spitzschraube legt sich (vgl. Abb. 3) die an beiden Enden mit Hohlkernen versehene Stoßstange *R* aus Invarstahl von 32 mm Länge und 2 mm Dicke. Diese überträgt die Bewegungen des oberen Fühlhebeldes auf einen Spiegelhebel

(vgl. Abb. 6) der in folgender Weise gebaut ist: Durch ein flaches Stückchen Invarstahl sind im Abstände von 20 mm zwei gehärtete vertikale Spitzschrauben gezogen, deren Spitzen einerseits in einer Steinschraube, andererseits in einer

gehärteten Stahlkimme ruhen. In der Mitte zwischen den beiden Spitzschrauben wird der Spiegelträger von einer horizontal liegenden dritten Spitzschraube durchdrungen, deren Spitze in der gleichen vertikalen Ebene wie die Spitzen der beiden Schrauben liegt, um welche sich der „Spiegelreiter“ drehen kann. Diese mittlere Spitzschraube liegt mit ihrer Spitze in dem zweiten Hohlkerner der Stoßstange *R*. Spiegelreiter und oberes Fühlhebelende werden durch ein Paar in der Abb. 5 sichtbare Schraubenfedern *P* mit einer konstanten Kraft gegeneinander gezogen, so daß die Auflage der beiderseits in den Hohlkernen der Stoßstange liegenden Spitzen gesichert ist. Der Hebelarm, an welchen die Stoßstange am Spiegelreiter angreift, hat eine Länge von 1,70 mm. Die Auflage des Spiegelreiters auf der ihn tragenden Hohlsteinschraube und Kimme wird ebenfalls durch eine in der Abb. 3 sichtbare Schraubenfeder *S* gesichert. Der Spiegelreiter trägt an einem seitlichen Vorsprung einen planen, rückwärts versilberten Glasspiegel, in welchem mittels Fernrohr und Skala die Drehung des Spiegelreiters beobachtet werden kann. Das Gewicht des Spiegels und des ihn tragenden Vorsprunges ist auf der anderen Seite des Spiegelreiters durch das Gewicht eines entsprechenden Vorsprunges ausgeglichen.

Ein Anschlag *X* (Abb. 5), der den Fühlhebel an seinem oberen Ende umfaßt, verhindert, daß der Hebel um mehr als 0,25 mm aus seiner Ruhelage gebracht werden kann, damit beim Einbau eines Stabes der Spiegel nicht zu stark gekippt oder gar aus seinen Lagern gerissen werden kann.

Die beschriebene Bauweise des Fühlhebels, des Spiegelreiters und ihrer Verbindungsorgane im Zusammenhang mit dem Gewichtsausgleich für den Fühlhebel und der federnden Anpressung der Meßschneiden und der federnden Anpressung des unteren Fühlhebelendes an die Probe und der Probe an den Anschlag bezwecken und erreichen eine hohe Präzision der Messung und eine fast vollkommene Unabhängigkeit der Ablesungen von Erschütterungen. Diese Bauweise hat es erreichen lassen, daß der Apparat mit verhältnismäßig hoher Genauigkeit (vgl. unten) auch zu vergleichenden Längenmessungen nach wiederholtem Aus- und Einbauen der Probe mit Erfolg benutzt werden konnte, da sämtliche Teile des Meßmechanismus zwangsläufig in eine sehr genau definierte Anfangslage gebracht werden können.

Um die Anfangslage mit geringer Mühe auch für die Skalenablesung genügend genau herstellen zu können, ist der Spiegelreiterträger mittels einer Mikrometerschraube *L* auf dem Schlitten *M* (Abb. 3) in der Richtung der Basis verschiebbar. Der ganze Apparat ruht mit einer schweren schmiedeeisernen Grundplatte auf einem in Abb. 1 sichtbaren Gitterrohrträger von 2,5 m Länge. Dieser trägt nahe seinem anderen Ende das Ablesefernrohr und eine 1 m lange Mattglasskala, welche in Millimeter geteilt ist und eine Strichstärke von 0,04 mm aufweist. Die Glasskala sitzt frei verschiebbar in einem Metallgehäuse und ruht nur mit ihrem unteren Ende auf der für Fernrohrhalter und Skalenhalter gemeinsamen schweren eisernen Grundplatte auf. Der Abstand der Skala vom Spiegel beträgt 1700 mm. Bei gleichmäßiger Beleuchtung der Mattglasskala von rückwärts durch kleine Glühlampen lassen sich 0,05 mm auf der Skala ziemlich sicher schätzen. Zwischen Beleuchtungslampen und Skala ist ein Milchglasstreifen eingebaut, welcher den Zweck hat, die Beleuchtungsstärke der Skala auszugleichen und die unmittelbare Erwärmung der Skala zu verhindern. Dem gleichen Zweck dient eine Anzahl Öffnungen am oberen und unteren Ende des Skalenhalters, durch welche ein Luftstrom zwischen der Skala und der Milchglasplatte hindurchstreichen kann. Der Gitterträger liegt auf

vier Gummipuffern auf, welche ihn und die Meßapparate vor Erschütterungen schützen.

Die Temperaturmessung wird einerseits in dem Basisrohr mittels eines in  $\frac{1}{100}^{\circ}$  geteilten Thermometers vorgenommen, dessen Gefäß 100 mm lang ist und dessen Skala innerhalb eines nach dem Austritt aus dem Basisrohr vertikal nach oben gebogenen Rohrteiles sich befindet. Das Thermometer hat einen Meßbereich, der von  $9,70$  bis  $20,10^{\circ}$  reicht. Die Temperatur des Bades wird ebenfalls mittels in  $\frac{1}{100}^{\circ}$  geteilter Quecksilberthermometer abgelesen und zwar werden im wesentlichen zwei Thermometer benutzt, deren Meßbereiche von  $13,85$  bis  $22,10$  und von  $96,85$  bis  $104,20^{\circ}$  reichen.

Im allgemeinen wird zur Konstanterhaltung der Temperatur des Probestabes ein Bad benutzt, welches aus einem doppelwandigen Messingblechkasten besteht,

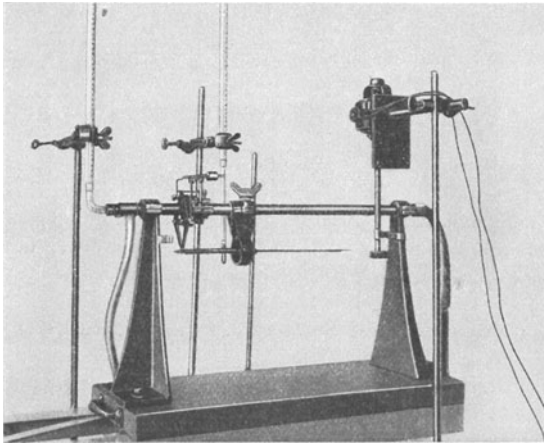


Abb. 7.

bei dem der Zwischenraum zwischen den Wänden durch Asbestwolle ausgefüllt ist. Der Kasten besitzt eine im Innern auf seinem Boden verlegte Heizschlange aus Messingrohr, durch welche zur Heizung des Bades Wasserdampf strömen kann. Der Kasten samt der Badflüssigkeit wird nach Einsetzen des Probestabes gehoben und liegt mit je zwei an seinen Enden befestigten Vorsprüngen auf Auflagern auf, die an den beiden Trägern des Basisrohres angebracht sind. Es wird so immer die gleiche Lage des

Bades gegenüber dem Basisrohr gesichert. Der Kasten wird oben durch eine Reihe doppelwandiger, aus Messingblech hergestellter Deckel abgeschlossen, die in verschiedenen großen und mit verschiedenen Durchbrechungen ausgeführten Teilen vorhanden sind, so daß der Fühlhebel, die den Probestab tragenden Haken, das Widerlager, das Thermometer zur Messung der Badtemperatur und die Rührvorrichtung frei von oben eingeführt werden können. Die Rührvorrichtung besteht aus einer kleinen Zentrifugalpumpe mit vertikaler Achse, welche durch einen an besonderem Stativ befestigten Elektromotor angetrieben wird und die Badflüssigkeit nahe der Oberfläche ansaugt und sie dicht über dem Boden in der Längsrichtung des Bades ausstößt. Es läßt sich so eine sehr intensive Rührung erzielen, ohne daß der Meßmechanismus störenden Erschütterungen ausgesetzt wird. Als Badflüssigkeit wird in den Intervallen von Zimmertemperatur bis etwa  $100^{\circ}$  Petroleum benutzt, für höhere Temperaturen bis etwa  $150^{\circ}$  wurde gelegentlich Paraffinöl verwendet, und für Messungen bis zu der Temperatur der flüssigen Luft herunter wurde unmittelbar flüssige Luft in den Kasten gefüllt und während der Messungen zu konstantem Niveau ergänzt. Für Messungen



außerhalb der Zimmertemperatur und der Nachbarschaft von  $100^{\circ}$  steht ein anderer Kasten zur Verfügung, welcher statt der Heizschlange mit einem elektrischen Heizkörper ausgerüstet ist. Dieser ist in Gestalt einer mit Widerstandsdraht bewickelten Glimmerplatte wenige Millimeter über dem Boden des Kastens angebracht. Es lassen sich mittels dieser Einrichtung auch Temperaturen in den Intervallen zwischen Zimmertemperatur und  $100^{\circ}$  und darüber genügend genau für die Zeit der Messung konstant halten.

**Fehlerquellen.** Die bei der Apparatur vorhandenen Fehlerquellen wurden eingehend untersucht. Zunächst wurde die Konstanz der Basislänge geprüft und festgestellt, daß bei einer Probestablänge von 250 mm eine Temperaturänderung der Basis von  $1^{\circ}$  einem Ausschlag auf der Skala von rund 1,5 Skalenteilen entspricht. Die Kontrollmessung wurde ausgeführt mittels eines Probestabes aus Quarzglas von 250 mm Länge, indem die Temperatur des Bades konstant gehalten und die Temperatur des das Basisrohr durchströmenden Wassers langsam verändert wurde. Da die Temperatur des für gewöhnlich benutzten Leitungswassers während der Dauer einer Messung höchstens um  $0,01^{\circ}$  schwankt, liegen selbst bei der großen Stablänge von 250 mm die durch diese Temperaturänderungen verursachten Fehler weit unter der Ablesemöglichkeit.

Von größter Wichtigkeit für den Ausfall der Messung ist naturgemäß die Gleichförmigkeit der Temperaturverteilung über die verschiedenen wichtigsten Teile der Meßapparatur. Wir haben diese mittels eines Silber-Konstantan-Thermoelementes geprüft und geben die Resultate einer derartigen Kontrollmessung in der nebenstehenden Tabelle.

Bemerkenswert ist, daß der Spiegelträger, während das Bad auf  $96^{\circ}$  gehalten wurde, sich auf der Temperatur der Basis von  $13^{\circ}$  befindet. Es ist also die Länge des kurzen Hebelarmes, der bei der Ver-

	Milli-Volt	Grad
Bad . . . . .	3,09	96
Badaußenwand . . . . .	2,45	81
Deckeloberfläche . . . . .	2,70	87
Rohroberfläche . . . . .	0,30	13
Spiegelträgeroberfläche . . . . .	0,30	13
Hebelmitte . . . . .	1,50	59
Hebelspitze . . . . .	1,00	47
Widerlager (oben) . . . . .	0,90	44

größerung des Ausschlages benutzt wird, genügend definiert. Für den gleicharmigen Fühlhebel wird nach Eintreten des stationären Zustandes bei Einhaltung einer bestimmten Flüssigkeitshöhe des Bades, wodurch also die Eintauchtiefe des Fühlhebels in das Bad festgelegt wird, für jede Badtemperatur eine reproduzierbar gleiche sein. Um die durch verschiedene thermische Ausdehnung der oberen und unteren Fühlhebelhälfte entstehenden Fehler abzuschätzen, wollen wir die Temperatur der oberen Hälfte im Mittel auf  $50^{\circ}$ , die der unteren im Mittel auf  $90^{\circ}$  ansetzen. Es ergibt sich dann für die obere Hälfte eine Länge von 50,003 mm, für die untere von 50,007 mm. Einer zu messenden Verschiebung des unteren Fühlhebeldes von 0,2000 mm (das waren die maximal vorkommenden Verschiebungen bei unseren Messungen) entspricht dann eine Verschiebung des oberen Fühlhebeldes von 0,199984 mm. Es wird also durch die ungleichförmige Verteilung der Temperatur ein Fehler von 0,08 % hervorgerufen.

Da die untere Fühlhebelspitze ohne jedes Zwischenglied das Ende des Probestabes berührt, so können bei der Drehung des Fühlhebels um die Schneiden in seiner Mitte kleine vertikale Verlagerungen der unteren Fühlhebelspitze an der Endfläche des Probestabes vorkommen. Diese betragen bei einer zu messenden Verschiebung

von 0,2 mm 0,004 mm. Fehler dürften durch eine Gleitung von derartig geringer Größe nur bei Probestäben vorkommen, deren Endflächen an der Berührungsstelle in ganz grober Weise von der Lage senkrecht zur Längsachse des Probestabes abweichen.

Da die Schneiden und Fühlhebelspitzen vorläufig aus gehärtetem Stahl hergestellt sind, ergibt sich ein bei der Messung zu berücksichtigender Fehler infolge der thermischen Ausdehnung dieser Organe, welcher zwischen Zimmertemperatur und  $100^{\circ}$  einem Ausschlag von 2,4 Skalenteilen entspricht<sup>1)</sup>.

Die thermische Ausdehnung des Gitterträgers und der Skala braucht bei der hier angestrebten Genauigkeit der Messung innerhalb der vorkommenden Schwankungen der Zimmertemperatur nicht berücksichtigt zu werden. Dagegen müssen Änderungen des Abstandes zwischen Spiegel und Skala, welche durch Einstellen des Skalenbildes auf einen bestimmten Skalenteil mittels des oben erwähnten mikrometrisch verstellbaren Schlittens entstehen, schon berücksichtigt werden.

Die Temperaturgleichheit zwischen Probestab und Badflüssigkeit wurde mittels des Silber-Konstantan-Thermoelementes kontrolliert. Der größte Verdacht, daß eine Temperaturverschiedenheit zwischen Badflüssigkeit und Stab bestehen könnte, liegt für das rechte Ende des Probestabes vor, welches den Anschlag des Widerlagers berührt, da hier eine immerhin merkliche Wärmeableitung nach oben durch das Widerlager stattfinden muß. Bei diesen Messungen wurde die eine Lötstelle des Thermoelementes in eine Bohrung des Probestabes eingesetzt, die quer zur Längsrichtung wenige Millimeter von seinem rechten Ende angebracht war. Die Messung wurde mit einem Stab aus Silber (sehr hohes Wärmeleitvermögen) und mit einem Stab aus Neusilber (kleines Wärmeleitvermögen) vorgenommen und ergab in beiden Fällen keine Temperaturdifferenz zwischen Bad und Stab, welche  $0,01^{\circ}$  überschritten hätte.

Die Badtemperatur selbst läßt sich für die Dauer der Messung leicht auf  $0,01^{\circ}$  konstant halten. Das wird auch durch die Konstanz des Skalenausschlages bei Annäherung an die Temperaturkonstanz sehr genau kontrollierbar.

Eichung. Um die absolute Größe der thermischen Ausdehnung des Koeffizienten zu erhalten, könnte man unter Anwendung der elementaren Theorie der Meßvorrichtung nach Ausmessung der beiden Hebelarme des Fühlhebels und des kleinen Hebelarmes am Spiegelreiter sowie des Skalenabstandes zu einer absoluten Auswertung der Angaben des Apparates gelangen. Dabei treten jedoch Schwierigkeiten auf bei der Messung des am Spiegelreiter in Betracht kommenden kleinen Hebelarmes. Es erschien uns daher zuverlässiger, eine unmittelbare Eichung des Apparates durchzuführen. Diese kann natürlich leicht ausgeführt werden, indem man einen Normalstab von bekanntem (beispielsweise in der Physikalisch-technischen Reichsanstalt gemessenen) Koeffizienten der thermischen Ausdehnung verwendet und an diesem Stab mittels geeichter Thermometer die Ausdehnung beobachtet. Ein Stab aus Feinsilber dürfte hierzu gut geeignet sein.

Wir haben die Eichung dadurch ausgeführt, daß wir zwei Längen von bekannter Längendifferenz zwischen Widerlager und unterer Spitze des Fühlhebels einbauten und bei normaler, konstant gehaltener Badtemperatur die Ausschläge an der Skala beobachteten. Einmal wurde ein Schraubenmikrometer in der beschriebenen Weise eingebaut und durch Drehen der Trommel die Längendifferenz von 0,100 und 0,200 mm hergestellt. Ferner verwendeten wir zwei für diesen Zweck besonders hergestellte

<sup>1)</sup> In letzter Zeit sind bereits die beiden Fühlhebelspitzen aus gehärtetem Stahl durch solche aus Invarstahl ersetzt worden. Auch die Schneiden des Fühlhebels sollen aus Invarstahl hergestellt werden.

Normalendmaßstäbe von 100,000 mm und 100,200 mm Länge bei 20° zur Eichung der Apparatur<sup>1)</sup>.

Die Länge des kurzen Hebelarmes am Spiegelreiter ergab sich aus diesen Eichungen zu 1,71 mm, so daß für eine Längenänderung von 0,2 mm einem Skalenteil 0,000502 mm Längenänderung entspricht. Die Berechnung ergibt dann:

für eine Längenänderung von 0,15 mm ein Skalenteil =	0,000503 mm
„ „ „ „ 0,10 mm „ „ =	0,000504 mm
„ „ „ „ 0,05 mm „ „ =	0,000506 mm

Eine weitere Möglichkeit, den Apparat zu eichen, ergibt sich, wenn man die Mikrometerschraube *L* durch eine Präzisionsschraube mit Teilkreis und Mikroskopablesung ersetzt und den Schlitten mit den Spiegellagern um einen genau bekannten Betrag verschiebt. Auch durch eine Verschiebung der Lager des Fühlhebels würde das gleiche erreicht. Diese Änderung würde zugleich eine bedeutende Steigerung der Empfindlichkeit erlauben, wenn man mit der Länge des Spiegelhebelarmes bis an die Grenze heruntergeht, bei der noch eine zuverlässige Einstellung erfolgt. Die Gesamtausdehnung würde so in zahlreiche Teilmessungen zerlegt. Man steigert die Badtemperatur nur so weit, bis die ganze Skala durchwandert ist, und führt dann durch Drehen der Präzisionsschraube den Apparat auf den Nullpunkt zurück, steigert die Temperatur wieder um einen kleinen Betrag usw. Bedingung für eine genaue Messung ist natürlich, daß es gelingt, die Badtemperatur zwischen den einzelnen Messungen genau konstant zu halten.

Nach Einbau des Versuchsstabes wird mit Hilfe der Mikrometerschraube *L* der Apparat auf den Nullpunkt der Skala gebracht. Das Bad wird eingefüllt und der Rührer angestellt. Hat das Bad die gewünschte Ausgangstemperatur angenommen, so werden Skalenausschlag, Rohr- und Badtemperatur genau abgelesen. Beim Heizen des Bades wird das Wandern der Skala fortwährend beobachtet. Nach etwa 1/4 St. ist die Höchsttemperatur erreicht. Skalenausschlag und die beiden Temperaturen werden wieder abgelesen. Der Versuch wird drei- bis viermal wiederholt, wobei besonders darauf geachtet wird, ob bei der Ausgangstemperatur die Nullage wieder erreicht wird.

Als Beispiel für die mit der Apparatur zu erreichende Genauigkeit geben wir zwei Bestimmungen des thermischen Ausdehnungskoeffizienten für einen Stahlstab von 99,60 mm Länge bei 20° mit 1,23% Kohlenstoff, 0,35% Mangan und 0,17% Silizium, im weichen und im gehärteten Zustande:

Vers. I	Skalent. b. Zimm.-T.	Skalent. b. ca. 100°	Diff.	Korr. Diff. <sup>2)</sup>	Verläng. in mm	t <sub>1</sub>	t <sub>2</sub>	t <sub>2</sub> - t <sub>1</sub>	α
1	299,8	466,2	166,4	163,5	0,08257	18,03	97,80	79,77	0,00001039
2	300,1	466,0	165,9	163,0	0,08232	18,13	97,53	79,40	0,00001041
3	299,5	466,8	167,3	164,0	0,08282	18,00	97,83	79,83	0,00001042
1	303,5	503,0	199,5	195,8	0,09868	18,00	97,70	79,70	0,00001243
2	297,5	490,7	193,2	190,0	0,09756	19,25	97,10	77,85	0,00001235
3	293,7	490,5	196,8	193,6	0,09757	18,37	97,55	79,18	0,00001237

<sup>1)</sup> Durch das abwechselnde Einbauen verschiedener Stäbe wird eine etwas geringere Genauigkeit erzielt als bei der wirklichen Messung des thermischen Ausdehnungskoeffizienten, bei der der Stab unverändert in seiner Lage bleibt; die so erreichte Genauigkeit ist allerdings nur wenig geringer, da bei vorsichtigem Ein- und Ausbauen des Stabes nach einiger Übung mit Sicherheit eine Skaleneinstellung zu erreichen ist, die um weniger als 0,1 Skalenteil von der entsprechenden früheren Einstellung abweicht.

<sup>2)</sup> Enthält die Korrektion für Wassertemperatur und Fühlhebelspitzen sowie die Reduktion auf den Winkel.

Bei dem gehärteten Stahl nahm bei dem ersten Versuch bei  $100^{\circ}$  nach Erreichung eines Höchstausschlages der Ausschlag ca. 1 bis 1,5 Skalenteile ab. Auch bei Versuch 2 und 3 zeigte sich ein Zurückgehen, aber wesentlich geringer.

Die Resultate der Messung zeigen, daß der Ausdehnungskoeffizient mit einem Fehler behaftet ist, der etwa drei Einheiten der vierten bezifferten Dezimale beträgt.

Wie wir schon bei Besprechung der Eichung der Apparatur mittels zweier Normalendmaßstäbe erwähnten, läßt sich die Apparatur bei Aufwand einiger Vorsicht mit Erfolg als Dilatometer verwenden, so daß mittels der Vorrichtung sehr leicht und genau auch kleine Längenänderungen eines Probestabes aus einer Legierung nachgewiesen werden können, der inzwischen etwa einer Wärmebehandlung ausgesetzt wurde. Es ist dabei nicht notwendig, nach Ausführung der ersten Längenmessung die Apparatur unverändert stehenzulassen, bis die zweite Längenmessung möglich wird. Man kann vielmehr inzwischen beliebige andere Messungen ausführen, wenn man nur das Widerlager mit hinreichender Genauigkeit in die ursprüngliche Stellung relativ zum Spiegelhebel bringt. Wir haben das erreicht, indem wir für Probestäbe von normalisierter Länge (z. B. von rund 100 mm Länge) einen Normalstab aus Quarzglas mit planparallel geschliffenen Endflächen verwendeten, der zur Justierung des Apparates eingebaut wird, so daß er das Widerlager berührt, worauf dann nach Anlegen des Fühlhebels an sein anderes Ende der Spiegelreiter mittels der mikrometrischen Einstellvorrichtung so justiert wird, daß wieder der gleiche Skalenteil wie bei der ersten Messung im Beobachtungsfernrohr erscheint. Hat man mittels des Normalquarzstabes so die Apparatur justiert, so kann die Längenmessung am Probestab unmittelbar darauf mit einer Genauigkeit ausgeführt werden, die etwa 0,1 Skalenteil entspricht.

### Zusammenfassung.

Es wird eine Einrichtung zur Messung der Wärmeausdehnung von stabförmigen und drahtförmigen Proben, vorzugsweise für das Temperaturintervall von Zimmertemperatur bis  $100^{\circ}$  beschrieben, die den Temperaturkoeffizienten der thermischen Ausdehnung mit einer Genauigkeit zu messen gestattet, die etwa drei Einheiten der vierten bezifferten Stelle erreicht.

# Über die Größe und Verteilung von Eigenspannungen in kaltgerecktem Rundmessing.

Von Georg Masing und Carl Haase.

Mit 6 Textabbildungen.

Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium Siemensstadt.

Eingegangen am 13. Dezember 1924.

In einer früheren Arbeit der Verfasser über das Aufreißen von kaltgerecktem Messing wurde darauf hingewiesen, daß die Aufreißgefahr mit dem Kaltreckungsgrade erst ansteigt und dann wieder fällt<sup>1)</sup>. Aus einer ähnlichen Beobachtung an gewalztem Messing zogen Geiss und v. Lie m p t<sup>2)</sup> den Schluß, daß das Maximum der inneren Spannungen bei einem Walzgrade von 22% liegt. Da die mechanische Verfestigung mit zunehmendem Walzgrade weiter ansteigt, schlossen sie hieraus weiter, daß eine theoretische Verknüpfung derselben mit den Eigenspannungen unzulässig sei.

Die Verfasser wiesen jedoch bereits in ihrer oben angeführten Arbeit darauf hin, daß zwischen der Größe der inneren Spannungen und der Gefahr des Aufreißen kein eindeutiger Zusammenhang besteht. Das wurde unmittelbar an elastisch gebogenen Bändern festgestellt, bei denen die Beträge der leicht berechenbaren Spannungen mit steigendem Kaltreckungsgrade ständig zunahmen, während die Aufreißgefahr nach Überschreitung eines Maximums wieder zurückging.

Trotzdem die Unzulässigkeit, aus dem Aufreißen des Messings auf die Größe der inneren Spannungen zu schließen, hiermit erwiesen war, erschien es von Interesse, die im Verlaufe des Walzprozesses auftretenden Eigenspannungen direkt zu messen, einerseits, um sie mit den Resultaten von Geiss und von Lie m p t zu vergleichen, und andererseits, um ein vollständigeres Bild von der Entwicklung der Eigenspannungen im Verlaufe eines technischen Kaltreckungsvorganges zu gewinnen. Messungen von Eigenspannungen an kaltgereckten Metallen sind zwar schon vielfach ausgeführt worden, so z. B. von Heyn und Bauer<sup>3)</sup> und von Moore und Beckinsale<sup>4)</sup>, sie sind jedoch anscheinend noch nicht in Abhängigkeit von der Kaltreckung systematisch verfolgt worden.

Als Kaltreckungsvorgang wurde das Kaliberwalzen und als Material in Anschluß an die bisherigen Arbeiten über Eigenspannungen das Messing mit 70% Cu gewählt. Es wurde in Kokillen von 20 mm Durchmesser und 200 Höhe vergossen und durch

<sup>1)</sup> G. Masing und C. Haase: Wissenschaftl. Veröffentl. a. d. Siemens-Konzern Bd. 3, H. 2, S. 22. 1924. — G. Masing: Z. Metallkunde Bd. 16, S. 257. 1924.

<sup>2)</sup> W. Geiss und J. A. M. v. Lie m p t: Z. f. anorg. u. allg. Chem. Bd. 133, S. 107. 1924.

<sup>3)</sup> E. Heyn und O. Bauer: Internat. Z. f. Metallographie Bd. 1, S. 16. 1911.

<sup>4)</sup> H. Moore und S. Beckinsale: Engg. Bd. 1, S. 337. 1922.

zweistündiges Glühen bei  $700^\circ$  homogenisiert, so daß reines  $\alpha$ -Gefüge ohne Zonenbildung vorlag. Die Stäbe wurden sauber überdreht und um Beträge von 20%, 40% und 60% vom Durchmesser bei je 5 bis 6 Stichen pro 20% kaltgewalzt. Zwischen der Herstellung der gewalzten Stäbe und dem Anfang der Messungen lagen etwa 2 Monate. Eine Abnahme um 60% entspricht etwa der maximalen in der Technik vorkommenden

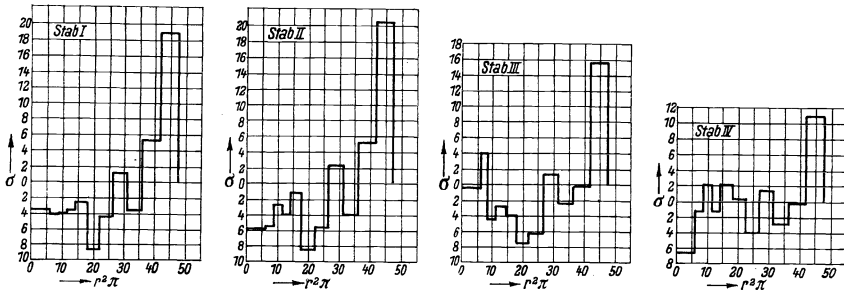


Abb. 1. Eigenspannungen in rundgewalztem Messing in  $\text{kg}/\text{mm}^2$ . Walzgrad 60%.

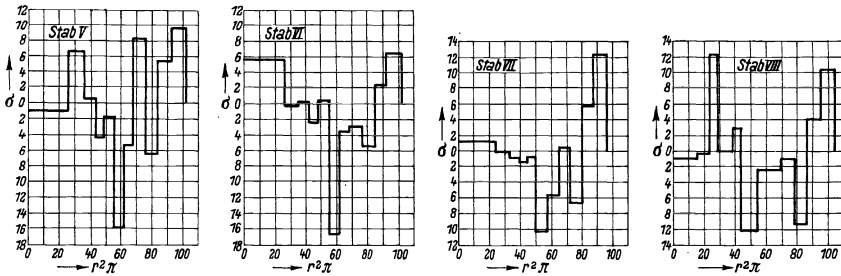


Abb. 2. Eigenspannungen in rundgewalztem Messing in  $\text{kg}/\text{mm}^2$ . Walzgrad 40%.

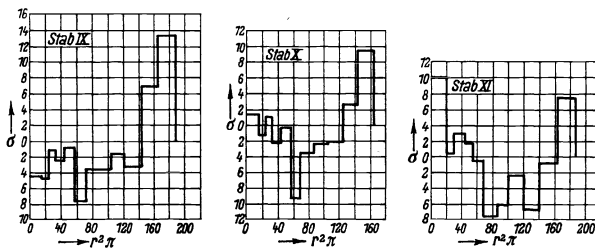


Abb. 3. Eigenspannungen in rundgewalztem Messing in  $\text{kg}/\text{mm}^2$ . Walzgrad 20%.

Verfestigung des Messings. Durch erhöhte Sorgfalt beim Walzen wurde erreicht, daß die Stangen für die Messungen ausreichend gerade waren. Sie wurden nicht gerichtet.

Die Berechnung der inneren Spannungen wurde an Hand der Längenmessungen nach dem Abdrehen von konzentrischen Schichten von ca. 0,25 bis 0,5 mm Dicke nach Heyn und Bauer<sup>1)</sup> vorgenommen. Zur Längenmessung wurden die Stäbe mit plan-

<sup>1)</sup> E. Heyn und O. Bauer: Internat. Z. f. Metallographie Bd. 1, S. 16. 1911.

parallelen Endflächen versehen und die Längen in einer Hommel-Meßmaschine gemessen. Die Messungen erfolgten alle bei einer Temperatur von 20°. Die Meßgenauigkeit betrug ca. 0,001 mm. Durch Stichproben wurde festgestellt, daß diese Meßgenauigkeit tatsächlich eingehalten wurde.

Die Versuchsergebnisse sind in der Darstellung von E. Heyn und O. Bauer in Tabelle 1 bis 3 und Abb. 1 bis 3 wiedergegeben. Auf der Abbildung ist jedesmal nur

Tabelle 1. Gewalztes Material. Walzgrad 60%.

Stab Nr. 1			Stab Nr. 2			Stab Nr. 3			Stab Nr. 4		
Radius in mm	Länge in mm	Spannung $\sigma$ kg/mm <sup>2</sup>	Radius in mm	Länge in mm	Spannung $\sigma$ kg/mm <sup>2</sup>	Radius in mm	Länge in mm	Spannung $\sigma$ kg/mm <sup>2</sup>	Radius in mm	Länge in mm	Spannung $\sigma$ kg/mm <sup>2</sup>
3,90	100,068		3,90	100,037		3,90	100,090		3,90	100,067	
3,65	100,094	+18,77	3,65	100,065	+20,22	3,65	100,112	+15,88	3,65	100,082	+10,83
3,40	100,106	+5,18	3,40	100,077	+4,95	3,40	100,115	-0,27	3,40	100,084	-0,20
3,15	100,106	-3,80	3,15	110,077	-4,00	3,15	100,116	-1,88	3,15	100,082	-2,90
2,90	100,114	+1,06	2,90	100,088	+2,19	2,90	100,123	+1,36	2,90	100,087	+1,32
2,65	100,115	-4,41	2,65	100,087	-5,63	2,65	100,117	-6,39	2,65	100,083	-4,07
2,40	100,106	-8,79	2,40	100,079	-8,62	2,40	100,102	-9,49	2,40	100,069	+0,20
2,15	100,109	-2,60	2,15	100,081	-1,39	2,15	100,104	-3,90	2,15	100,070	+2,12
1,90	100,110	-3,78	1,90	100,082	-4,05	1,90	100,100	-2,70	1,90	100,067	-1,35
1,66	100,111	-3,80	1,66	100,087	-2,79	1,64	100,090	-4,11	1,66	100,073	+2,08
1,40	100,112	-4,02	1,39	100,084	-5,71	1,40	100,105	+4,00	1,40	100,071	-1,48
0	—	-3,70	0	—	-5,93	0	—	-0,57	0	—	-6,62

Tabelle 2. Gewalztes Material. Walzgrad 40%.

Stab Nr. 5			Stab Nr. 6			Stab Nr. 7			Stab Nr. 8		
Radius in mm	Länge in mm	Spannung $\sigma$ kg/mm <sup>2</sup>	Radius in mm	Länge in mm	Spannung $\sigma$ kg/mm <sup>2</sup>	Radius in mm	Länge in mm	Spannung $\sigma$ kg/mm <sup>2</sup>	Radius in mm	Länge in mm	Spannung $\sigma$ kg/mm <sup>2</sup>
5,70	100,051		5,70	100,088		5,55	100,061		5,75	100,092	
5,45	100,060	+9,65	5,45	100,094	+6,43	5,30	100,073	+12,30	5,50	100,102	+10,70
5,20	100,066	+5,12	5,20	100,097	+2,40	5,05	100,080	+5,87	5,25	100,107	+4,01
4,95	100,052	-6,38	4,95	100,092	-5,76	4,80	100,075	-6,76	5,00	100,099	-9,43
4,70	100,061	+8,10	4,70	100,089	-3,13	4,55	100,077	+0,42	4,75	100,099	-0,70
4,45	100,056	-5,31	4,45	100,085	-3,55	4,30	100,072	-5,74	4,00	100,092	-2,44
4,20	100,073	-16,0	4,20	100,064	-16,81	4,00	100,058	-10,24	3,75	100,078	-10,22
3,95	100,036	-1,90	3,95	100,061	+0,06	3,80	100,057	-6,60	3,55	100,080	+3,16
3,70	100,028	-4,34	3,70	100,054	-2,41	3,55	100,055	-1,20	3,05	100,075	-0,22
3,40	100,025	+0,69	3,40	100,047	$\pm$ 0	3,25	100,052	-0,97	2,75	100,100	+12,50
2,90	100,040	+6,60	2,90	100,024	-0,20	2,73	100,048	-0,05	2,25	100,103	-0,18
0	—	-0,91	0	—	+5,63	0	—	+1,29	0	—	-0,95

Tabelle 3. Gewalztes Material. Walzgrad 20%.

Stab Nr. 9			Stab Nr. 10			Stab Nr. 11		
Radius in mm	Länge in mm	Spannung $\sigma$ kg/mm <sup>2</sup>	Radius in mm	Länge in mm	Spannung $\sigma$ kg/mm <sup>2</sup>	Radius in mm	Länge in mm	Spannung $\sigma$ kg/mm <sup>2</sup>
7,75	100,047		7,25	100,084		7,70	100,043	
7,25	100,066	+13,38	6,75	100,098	+9,53	7,20	100,044	+7,09
6,75	100,080	+6,97	6,25	100,105	+2,73	6,70	100,044	-1,00
6,25	100,080	-3,32	5,75	100,105	-2,15	6,20	100,034	-6,98
5,75	100,083	-1,61	5,25	100,105	-2,23	5,70	100,030	-2,18
4,80	100,083	-3,59	4,75	100,102	-3,42	5,20	100,017	-6,10
4,30	100,073	-7,69	4,30	100,086	-9,15	4,70	99,996	-7,74
3,80	100,078	-0,79	3,80	100,087	-0,16	4,20	99,993	-0,46
3,30	100,080	-2,43	3,30	100,081	-2,14	3,65	99,985	+1,69
2,76	100,089	-1,26	2,75	100,083	+0,75	3,13	99,977	+2,68
2,24	100,086	-4,73	2,25	100,074	-1,47	2,62	99,963	+0,25
0	—	-4,53	0	—	+1,25	0	—	+10,0

die Spannungsverteilung in einem halben Querschnitt rechts von der Achse aufgetragen. Die Spannungsverteilung links von der Achse wiederholt sich spiegelbildlich. Als Abszissen sind die Werte der Querschnitte  $\pi r^2$  aufgetragen, als Ordinaten die Spannungen, und zwar die Zugspannungen nach oben. In dieser Darstellung ergeben die von den gebrochenen Linien umgrenzten Flächen direkt die auf den Stab wirkenden inneren Kräfte, und ihr Gleichgewicht am ganzen Stab erfordert, daß die Flächen unterhalb und oberhalb der Abszissen gleich sein müssen.

Die Gesamtheit der Figuren ergibt trotz größerer Abweichungen im Prinzip daselbe Bild. In der Außenschicht herrschen starke Zugspannungen, die im Prinzip ein Aufreißen unter der Einwirkung eines auslösenden Agens ermöglichen. Auf die äußere Zone der Zugspannungen folgt ein vorwiegend unter Druckspannungen stehendes Gebiet, an das sich in der unmittelbaren Nähe der Achse ein Gebiet mit geringeren, öfter wieder positiven Spannungen anschließt. Aus dieser Spannungsverteilung ergibt sich, daß beim Walzvorgang in der Hauptsache die mittlere, nach dem Walzen unter Druckspannungen stehende Schicht plastisch vorgetrieben wird, während die innere und besonders die äußere in ihrem Vortrieb zurückgehalten werden müssen. Das stimmt mit der bekannten Gestalt der Endfläche rundgewalzter Stäbe

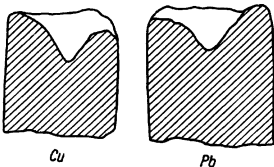


Abb. 4. Endfläche eines runden Walzstückes.

überein, die in der Mitte eine Höhlung und in der Nähe des Randes eine Wulst aufweisen. In Abb. 4 sind die Endflächen je einer an vielen kleinen Stichen um 50% gewalzten Blei- und Kupferstange im Längsschnitt durch die Achse wiedergegeben<sup>1)</sup>.

Abgesehen von diesem allgemeinen Charakter finden sich zwischen den Stäben erhebliche Unterschiede in der Spannungsverteilung. So schwankt die maximale gemessene Spannung in der äußersten Schicht beim Walzgrad von 20% von 7,09 bis 13,38 kg/mm<sup>2</sup>, bei 40% von 6,43 bis 12,3 kg/mm<sup>2</sup> und bei 60% von 10,83 bis 20,22 kg/mm<sup>2</sup>. Sie ist also von Fall zu Fall recht verschieden, was vermutlich auf die Einzelheiten des Walzvorganges zurückzuführen ist. Ihre Schwankungen bleiben unabhängig

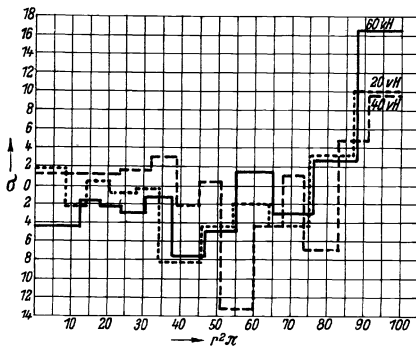


Abb. 5. Mittelwerte der Eigenspannungen in kg/mm<sup>2</sup> bei verschiedenen Walzgraden.

Tabelle 4. Mittelwerte der einzelnen Walzstufen.

Walzgrad 60%, Stab 1 bis 4		Walzgrad 40%, Stab 5 bis 8		Walzgrad 20%, Stab 9 bis 11	
Prozente des Anfangs- quer- schnitts	Span- nungen $\sigma$ kg/mm <sup>2</sup>	Prozente des Anfangs- quer- schnitts	Span- nungen $\sigma$ kg/mm <sup>2</sup>	Prozente des Anfangs- quer- schnitts	Span- nungen $\sigma$ kg/mm <sup>2</sup>
100		100		100	
87,8	+ 16,4	91,2	+ 9,77	87,2	+ 10,0
76,3	+ 2,4	83,0	+ 4,35	75,2	+ 2,9
65,2	- 3,2	75,1	- 7,08	64,3	- 4,15
55,3	+ 1,5	67,5	+ 1,17	54,1	- 2,0
46,3	- 5,1	57,5	- 4,26	45,5	- 4,4
38,0	- 6,7	50,7	- 13,32	34,3	- 8,2
30,4	- 1,4	45,2	+ 0,18	27,1	- 0,47
23,4	- 3,0	38,6	- 2,04	20,4	- 1,00
18,1	- 2,2	32,1	+ 3,05	14,5	+ 0,7
12,9	- 1,8	23,0	+ 1,52	8,8	- 2,0
0	- 4,22	0	+ 1,52	0	+ 1,7

<sup>1)</sup> Vgl. Ludw. : Über Kaltbearbeitung durch Walzen und Ziehen. Zeitschr. Österr. Ing., Arch. Ver. Bd. 67, S. 597. 1915.



vom Walzgrade bestehen. In Abb. 5 und in der Tabelle 4 sind die Mittelwerte der gemessenen Spannungen für je eine Walzstufe wiedergegeben. Als Abszissen sind die Werte von  $\pi r^2$  in % des gesamten Querschnittes aufgetragen, so daß die Verteilung der Spannungen innerhalb der Stäbe bei verschiedenen Walzgraden besser verglichen werden kann. Man sieht, daß die Spannung in der äußersten Schicht, abgesehen von der kleineren Abweichung beim Walzgrad von 40%, mit dem Walzgrad erheblich zunimmt. Trotzdem nimmt, wie erwähnt, die Gefahr des Aufreißens ab.

Zum Vergleich wurde eine ähnliche Untersuchung an einer aus einem Metallwerk bezogenen gezogenen und gerichteten Stange von 63er Messing gemacht.

Die Ergebnisse finden sich in Tabelle 5 und Abb. 6. Die Spannungen in der äußersten Schicht sind sehr klein. Dann treten starke Zugspannungen auf, die nach einigen Schwankungen durch starke Druckspannungen in der Nähe der Achse ersetzt

Tabelle 5. Gezogenes und gerichtetes Material.

Stab Nr. 12			Stab Nr. 13		
Radien in mm	Länge in mm	Spannungen $\sigma$ kg/mm <sup>2</sup>	Radien in mm	Länge in mm	Spannungen $\sigma$ kg/mm <sup>2</sup>
10,00	100,108		10,00	100,066	
9,50	100,109	+ 0,90	9,50	100,069	+ 2,80
9,00	100,125	+13,88	9,00	100,084	+12,81
8,50	100,140	+10,67	8,50	100,112	+18,93
8,00	100,163	+14,66	8,00	100,121	+ 5,90
7,50	100,172	+ 0,84	7,50	100,132	+ 2,15
7,00	100,173	- 5,90	7,00	100,131	- 7,27
6,50	100,181	- 1,63	6,50	100,139	- 1,63
6,00	100,190	- 1,84	6,00	100,148	- 1,85
5,46	100,199	- 0,38	5,47	100,164	$\pm 0$
0	—	- 9,78	0	—	- 10,13

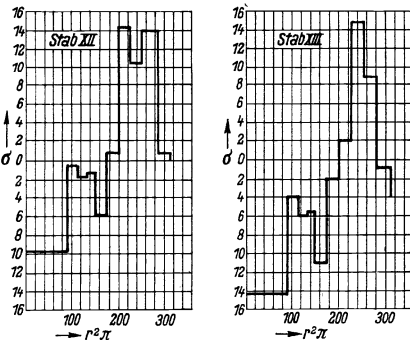


Abb. 6. Eigenspannungen an zwei gezogenen und gerichteten Messingstäben in kg/mm<sup>2</sup>.

werden. Diese sind nicht in den einzelnen Schichten untersucht worden. Nach den Versuchen von Heyn und Bauer ist jedoch anzunehmen, daß in unmittelbarer Nähe der Achse sehr erhebliche Maximalwerte der Druckspannungen auftreten.

Gegenüber den Abbildungen von Heyn und Bauer besteht der Unterschied, daß die Spannungen in der äußersten Schicht fehlen. Das ist offenbar die Wirkung des Richtens, bei dem der Stab zwischen Walzen abrollt, wobei die Außenschicht vermutlich etwas plastisch nachgedehnt wird.

Gegenüber der Spannungsverteilung beim Walzen besteht der charakteristische Unterschied, daß beim gezogenen Material das Maximum der Druckspannungen in der Nähe der Achse liegt. Hieraus folgt, daß der Kern beim Ziehen voreilen muß. Das wird durch die bekannte Gestalt der im Inneren von überzogenen Drähten auftretenden Risse bestätigt.

Aus der betrachteten Abhängigkeit der Eigenspannungen vom Walzgrade lassen sich weder für ihren Zusammenhang mit der Verfestigung noch gegen einen solchen Schlüsse ziehen. Unsere Methoden zur Spannungsmessung in Metallen beruhen auf Formänderungen und sind alle makroskopisch. Bei der Verfestigung wird es hingegen auf die der direkten Messung verborgene mikroskopische Spannungsverteilung ankommen.

# Einfluß der plastischen Dehnung und Stauchung auf die Festigkeitseigenschaften und inneren Spannungen des Messings.

Von Georg Masing und Wilhelm Mauksch.

Mit 7 Textabbildungen.

Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium Siemensstadt.

Eingegangen am 17. Dezember 1924.

## 1.

Wenn ein Versuchsstab aus Metall auf Zug oder Druck plastisch beansprucht wird, so erleiden hierbei seine mechanischen Eigenschaften eine Reihe von Veränderungen, die zum Teil recht kompliziert sind und auch bis heute noch nicht genau gedeutet werden können. Diese Veränderungen, sei es unter dem Einfluß einer einmaligen oder wiederholten Zug- oder Druckbeanspruchung, sind besonders eingehend am Eisen von Bauschinger<sup>1)</sup> und später unter anderen z. B. von Muir<sup>2)</sup>, Rudeloff<sup>3)</sup> und Körber<sup>4)</sup> untersucht worden. Unter diesen Veränderungen beansprucht besonders eine Gruppe ein großes Interesse, nämlich die unsymmetrischen Effekte, d. h. solche, bei denen das Material sich dem Druck und dem Zug gegenüber verschieden verhält. So wird bekanntlich nach Bauschinger durch überelastische Zugbeanspruchung die Grenze des elastischen Widerstandes gegen Zug<sup>5)</sup> erhöht und gegen Druck erniedrigt.

Bauschinger hatte seine Versuche in erster Linie an Eisenmaterialien ausgeführt. Bei diesen kommt der Streckgrenze bekanntlich eine besondere Bedeutung zu, die sich bei den meisten anderen Materialien nicht wiederfindet, indem beim Eisen hierbei ein abruptes Fließen bei konstanter oder sogar fallender Last stattfindet, während die Dehnungskurve eines normalen Metalles ohne Diskontinuitäten bis zum Bruch verläuft. Die scharfe Unterscheidung, die Bauschinger deshalb zwischen der Proportionalitäts- und der Streckgrenze beim Eisen gemacht hat, hat in Anwendung auf andere Materialien keine Berechtigung. Für diese haben die Proportionalitätsgrenze, die Elastizitätsgrenze und die Streckgrenze im Prinzip alle dieselbe Bedeutung, nämlich auf Grund verschiedener Anzeichen und mit verschiedener Genauigkeit den Beginn des plastischen Fließens anzuzeigen. In diesem Sinne sollen im folgenden die Ausdrücke Streckgrenze beim Zugversuch und Stauchgrenze beim Druckversuch

<sup>1)</sup> Civing. 1881, S. 289; Mittlg. München 1886, Heft 13.

<sup>2)</sup> Phil. Trans. Roy. Soc. London A Bd. 193, S. 1. 1900; Bd. 198, S. 1. 1902.

<sup>3)</sup> Mitt. Kgl. Techn. Vers.-Anstalt Berlin Bd. 19, Erg.-H. 1. 1901.

<sup>4)</sup> Mitt. Eisenforsch. Bd. 5, S. 37. 1924.

<sup>5)</sup> Evtl. nach der Alterung.

benutzt werden. Sie geben Lasten an, bei denen eine plastische Formänderung von einem konventionell festgesetzten Betrage bereits nachweisbar ist, und sind deshalb ein Maß für die Elastizitätsgrenze. Sie haben jedoch nichts mit der Streckgrenze beim Eisen zu tun.

Während bei Eisen wie auch bei anderen Metallen die Streckgrenze und die Stauchgrenze im Normalfall einander gleich sind, besteht zwischen ihnen nach vorangegangener Zug- oder Druckbeanspruchung eine erhebliche Differenz. Die Erklärung dieser Differenz mußte auf große Schwierigkeiten stoßen, da alle unsere Vorstellungen über die Änderung der Metalle durch Kaltreckung zu symmetrischen Effekten führen mußten.

Heyn<sup>1)</sup> hat die besondere Bedeutung des Bauschinger-Effektes erkannt und ihn zur Grundlage seiner Theorie der verborgen elastischen Spannungen zur Erklärung der Verfestigung durch Kaltreckung gemacht. Er hat gezeigt, daß verborgen elastische Spannungen unter bestimmten Voraussetzungen sowohl eine Erhöhung der Streckgrenze als auch eine Erniedrigung der Stauchgrenze nach einer vorangegangenen plastischen Dehnung erklären können.

Im normalen Fall wird die Festigkeitsgrenze (Stauch- oder Streckgrenze) eines Metalles durch innere Spannungen herabgesetzt. Es sei die in Frage kommende Festigkeitsgrenze des spannungsfreien Metalles  $\sigma_f$ , der Querschnitt des betrachteten Stückes sei  $q$ . Wenn der Stab mit Eigenspannungen behaftet ist, und zwar so, daß der Teil  $q_1$  des Querschnittes unter einer Zugspannung  $+\sigma_1$  und der Rest des Querschnittes  $q - q_1$  unter einer Druckspannung  $-\sigma_2$  steht, so muß zunächst die Beziehung  $q_1 \sigma_1 - (q - q_1) \sigma_2 = 0$  bestehen, da auf den Stab ja keine äußeren Kräfte wirken. Um die Streckgrenze dieses Stabes zu erreichen, genügt offenbar eine äußere Spannung  $\sigma_f - \sigma_1$ , da hierbei bereits die Streckgrenze der vorher auf Zug beansprucht gewesenen Teile erreicht wird und der Körper zu fließen beginnt. Durch eine ähnliche einfache Betrachtung ergibt sich, daß auch die Stauchgrenze durch innere Spannungen herabgesetzt ist, wobei es diesmal auf die Druckspannung  $-\sigma_2$ , die schon vorher in einem Teil des Körpers aufgespeichert war, ankommt. Bei allen diesen Betrachtungen ist es ziemlich gleichgültig, wie groß das Verhältnis der entgegengesetzt beanspruchten Querschnitte  $q_1$  und  $q - q_1$  ist, es kommt vielmehr nur auf die Spannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  an. Daher sind die starken Spannungen an einer auch sehr dünnen Außenschicht so gefährlich.

Das sind bekannte technische Überlegungen<sup>2)</sup>. Ihre Voraussetzung ist, daß  $\sigma_f$  für alle Teile des Körpers gleich groß ist; ist das nicht der Fall, so verlieren sie ihre Gültigkeit. Wir nehmen einen Verbundkörper an, dessen Teilquerschnitt  $q_1$  die Streckgrenze  $\sigma_f$  und der Teil  $q - q_1$  die Streckgrenze  $\frac{\sigma_f}{n}$  hat. Bei Abwesenheit von Eigenspannungen wird seine Streckgrenze dann durch den zweiten, schwächeren Teil bestimmt, ist also  $\frac{\sigma_f}{n}$ . Steht jedoch der erste Teil unter einer Zugspannung  $+\sigma_1$ , und der zweite unter der Druckspannung  $-\sigma_2$ , so wird die Streckgrenze des ersten Teiles bei einer äußeren Zugspannung  $\sigma_f - \sigma_1$  und die des zweiten Teiles bei einer Zugspannung  $\frac{\sigma_f}{n} + \sigma_2$  erreicht werden. Ist  $\sigma_f - \sigma_1$  größer als  $\frac{\sigma_f}{n} + \sigma_2$ , so wird die Streckgrenze gleich der letzteren Größe sein. Sie ist also größer als die vorher für den span-

<sup>1)</sup> E. Heyn: Festschrift d. Kaiser Wilhelm-Gesellschaft 1921.

<sup>2)</sup> Vgl. z. B. E. Heyn: Stahleisen 1917, S. 442; Mitt. Materialpr.-Amt Bd. 35, S. 1. 1917.

nungsfreien Fall berechnete. Ist dahingegen  $\sigma_f - \sigma_1$  kleiner als  $\frac{\sigma_f}{n} + \sigma_2$ , so wird die Streckgrenze durch das erste festere Material bestimmt und ist erhöht, solange  $\sigma_f - \sigma_1$  größer als  $\frac{\sigma_f}{n}$  ist.

Man sieht sofort, daß die Stauchgrenze des Gesamtkörpers unter denselben Bedingungen herabgesetzt sein muß. Im spannungsfreien Zustand ist sie  $-\frac{\sigma_f}{n}$ , jetzt jedoch nur  $-\left(\frac{\sigma_f}{n} - \sigma_2\right)$ . In unserem Verbundkörper ist also der Bauschinger-Effekt verwirklicht. Wenn man berechtigt ist, ein Metall als aus einer Reihe von Teilen mit verschiedenen Elastizitätsgrenzen bestehend zu denken, und wenn ferner nach einer plastischen Zugbeanspruchung ein derartiger Zustand der inneren Spannungen entsteht, daß die festeren Teile unter Zug und die weniger festen unter Druck stehen, so ist damit sowohl eine Verfestigung gegen Zug als auch eine Schwächung gegen Druck, also der Bauschinger-Effekt verständlich gemacht worden.

In einer ausführlicheren Arbeit hat einer der Verfasser<sup>1)</sup> gezeigt, daß man auf diesem Wege tatsächlich in Abänderung der He y n'schen Betrachtung den Bauschinger-Effekt erklären kann. Der Unterschied gegenüber der He y n'schen Auffassung besteht in der Hauptsache darin, daß He y n zur Erklärung des Bauschinger-Effektes und allgemeiner der Verfestigung „verborgen elastische“ Spannungen annimmt, die er den Eigenspannungen im üblichen Sinne prinzipiell gegenüberstellt, wohingegen Masing die letzteren zur Deutung derselben Erscheinungen wie He y n seine „verborgen elastischen“ Spannungen benutzt hat.

## 2.

Es erschien für die Frage der Kaltreckung von Wichtigkeit zu prüfen, welche Auffassung vorzuziehen ist. Die Möglichkeit dazu bot sich in dem verschiedenen Verhalten der Eigenspannungen und der Verfestigung einer geringeren Temperaturerhöhung gegenüber. Bekanntlich gehen die Eigenspannungen oft schon nach einer Erhitzung auf Temperaturen heraus, bei denen noch kaum Entfestigung festzustellen ist. Besonders eingehend sind diese Verhältnisse beim Messing untersucht worden und deshalb schien das Messing ein geeignetes Material zu sein.

Es wurde eine Stange technisches Messing mit 58% Cu verwendet<sup>2)</sup>. Der Einfluß der Erhitzung auf die Härte dieses Materials ist in Tabelle 1 wiedergegeben.

Tabelle 1. Brinell-Härte der Messingstange.

Nicht erhitzt . . . . .	109
7 Std. auf 200° erhitzt . . . . .	114
7 Std. auf 225° erhitzt . . . . .	107
7 Std. auf 250° erhitzt . . . . .	108

Demnach beginnt die Entfestigung sich bei 225° leicht bemerkbar zu machen. Auf Grund früherer Erfahrungen war dahingegen mit Sicherheit anzunehmen, daß die durch die verhältnismäßig geringen Formänderungen im Verlaufe der Versuche hervorgerufenen inneren Spannungen bei 200° bereits in der Hauptsache beseitigt sein würden.

<sup>1)</sup> G. Masing; Wissenschaftl. Veröffentl. a. d. Siemens-Konzern Bd. 3, H. 1, S. 231.

<sup>2)</sup> Laut Analyse 58,18% Cu, 0,22% Sn, 1,60% Pb, 0,28% Fe, Rest Zn.

Man brauchte also nur zu prüfen, ob eine Erhitzung auf 200 bis 250° den Bau-schinger-Effekt beseitigt oder nicht, um zu entscheiden, ob derselbe mit den Eigen-spannungen oder mit der Verfestigung als solcher verbunden ist.

Die Ausführung der Versuche erfolgte auf einer Universal-Prüfmaschine der Firma Mohr und Federhaff von 50 t Höchstbelastung. Der Antrieb ist hydraulisch und die Lastanzeige geschieht durch Meßdose und Manometer. Die Maschine war zuvor mit Kontrollstab geeicht worden.

Da es sich hier um Zug- und Stauchversuche am gleichen Probestab handelte, waren einige Schwierigkeiten betreffs der Form und Einspannungen der Proben zu überwinden. Wegen der Gefahr des Ausknickens beim Stauchversuch mußte die Länge des Stabes im Verhältnis zum Durchmesser möglichst klein sein. Mit dem Verhältnis von Probedurchmesser zur zylindrischen Höhe des Probestabes wie 2 : 3 (Abb. 1) wurden die besten Erfahrungen gemacht. Es konnte zur Messung der elastischen und bleibenden Verformung noch das Martenssche Spiegelgerät mit 50 mm Meßlänge verwendet werden. Dieses Verhältnis 2 : 3 kommt den Abmessungen der normalen Stauchprobe (Durchmesser gleich Höhe) am nächsten. Noch kürzere Meßfedern zu nehmen ist wegen der prozentual stärker auftretenden Fehler des Meßverfahrens bedenklich. Es würde hier besonders der Fehler infolge Kippens der Meßfedern um ihre am Stab anliegenden Schneiden bei größeren Drehwinkeln der Spiegelschneiden ins Gewicht fallen. Der Durchmesser der Probe von 40 mm war noch klein genug, um auch bei weitgehender Verfestigung der Probe ein Durchziehen der Maschine zu gewährleisten.

Beim Stauchversuch wurden auf den Stab 2 schwere Eisenscheiben von 195 mm Durchmesser aufgeschraubt und damit der Belastungsfall eines beider-seits eingespannten Balkens geschaffen, der auf Knickung beansprucht wird (Abb. 1). Beim Zugversuch dienten die Gewindemuffen, wie sie bei Eichung durch den Kontrollstab benutzt werden, als Einspannköpfe.

Vor jeder Versuchsreihe wurde der Durchmesser der Probe mit einer Mikrometer-schraube neu festgestellt. Wegen der kurzen Meßlänge machte sich der Einfluß der Stabköpfe bemerkbar. Der ursprünglich zylindrische Stab nahm Tonnen- bzw. Sattel-form an; der Unterschied im Durchmesser betrug bis zu 0,2 mm = 0,5%. Der mittlere Durchmesser wurde durch je 5 Messungen in zwei zueinander senkrecht stehenden Längsebenen des Stabes gemessen und daraus der Mittelwert gebildet.

Die durch diese Fehlerquelle bedingte Unsicherheit in der Spannungsmessung beträgt höchstens 1% und bleibt somit innerhalb der Fehlergrenzen der Messung. Da die Querschnittsbestimmung ein unmittelbares Maß für plastische Dehnung oder Kontraktion an der betreffenden Stelle ist, so sind also die Angaben über diese Form-änderungen nur als Mittelwerte für den ganzen Stab aufzufassen und sind für die einzelnen Teile bis auf höchstens 1% unsicher. Wie aus dem folgenden ersichtlich ist, haben die plastischen Formänderungen bei den Versuchen zwischen 2% und 7% geschwankt, ohne daß diese Schwankungen auf die Versuchsergebnisse von nennens-

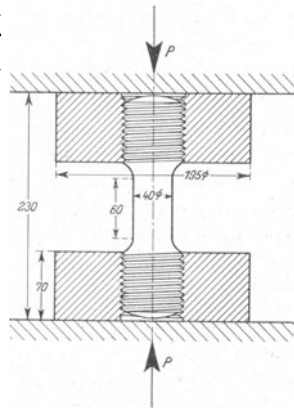


Abb. 1. Stauchvorrichtung und Abmessungen des Versuchsstabes.

wertem Einfluß wären. Auch die Unsicherheit bis zu 1% in der Messung der plastischen Dehnung ist somit für das weitere belanglos. Im elastischen Gebiet sind die Dehnungen annähernd den Spannungen proportional und können höchstens um 1%, als unterhalb der Fehlergrenzen der Messungen, unsicher sein.

Die Dehnungsmessung erfolgte in der üblichen Weise mit dem Martensschen Spiegelgerät. Als Proportionalitätsgrenze wurde diejenige Spannung bezeichnet, bei welcher trotz gleichbleibendem Belastungszuwachs die Dehnung vom Mittelwert der vorhergehenden Teildehnungen für den Lastzuwachs um einen bestimmten Betrag abweicht. Dieser Betrag wurde nach dem Vorschlag von Wawrzyniak zu 0,0005% der Meßlänge für 1 kg/mm<sup>2</sup> Lastzuwachs gewählt. Dieser Betrag bei vorliegenden Versuchen 1,6 kg/mm<sup>2</sup>. Der Dehnungszuwachs darf also höchstens um  $50 \cdot \frac{0,0005}{100} \cdot 1,6 = 0,0004$  mm vom Mittelwert abweichen.

Die Versuchsergebnisse sind in den Tabellen 2 bis 6 und in den Abb. 2 bis 7 wiedergegeben. Als Maß der Elastizitätsgrenze wurde ursprünglich die  $\sigma_{0,1}$ -Grenze, d. h. diejenige Spannung, bei der die bleibende Dehnung 0,1% beträgt, gewählt. Diese Grenze wurde auf den Kurven in der Weise abgegriffen, daß auf der Achse der Dehnungen im

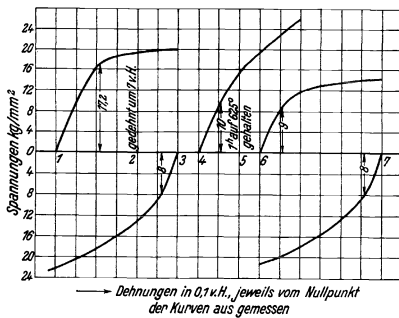


Abb. 2. Versuche mit Stab Nr. 1.

Abstände von 0,1% vom Anfangspunkt der Dehnungskurve eine gerade Linie parallel zur Dehnungskurve bei geringen Lasten bis zu ihrem Schnittpunkt mit dieser gezogen wurde und die Ordinate des Schnittpunktes als die  $\sigma_{0,1}$ -Grenze angesehen wurde. Wie zu erwarten war, entsprach dieser Streckgrenze auf den Dehnungskurven in keiner Weise ein ausgezeichneter Punkt. Deshalb wurde für die Deutung der Resultate noch eine andere Spannung herangezogen, die nämlich der maximalen Krümmung der Dehnungs-Spannungskurven entsprach. Die so ermittelte Streckgrenze soll im folgenden mit  $\sigma_m$  bezeichnet werden. Es stellte sich heraus, daß dieser Punkt maximaler Krümmung in allen Fällen bei bleibenden Dehnungen liegt, die weniger als 0,1% betragen. Die  $\sigma_m$ -Streckgrenze konnte auf allen Kurven mit genügender Sicherheit festgestellt werden. Sie zeigt durchweg ähnliche Regelmäßigkeiten wie die  $\sigma_{0,1}$ -Grenze. Da sie jedoch mit der Gestalt der Spannungs-Dehnungskurven in unmittelbarem Zusammenhang steht, ist sie bei der Beurteilung der Resultate der  $\sigma_{0,1}$ -Grenze vorzuziehen. In die Tabellen sind beide Grenzen eingetragen worden, auf den Kurven der Abb. 2 bis 7 jedoch sind nur die  $\sigma_m$ -Grenzen angegeben worden. In den Tabellen ist auch die Proportionalitätsgrenze angegeben worden, trotzdem sie keine charakteristischen Zusammenhänge zeigt und für die Deutung der Resultate nicht von Bedeutung zu sein scheint. Auch über die Proportionalitätsgrenze ist ja allgemein dasselbe zu sagen, wie über die Elastizitätsgrenze. Sie ist eine nur konventionell definierte Grenze, die einer geraden merkbaren Abweichung vom geradlinigen Verlauf der Spannungs-Dehnungskurve entspricht. Ihre Bestimmung ist mit großer Unsicherheit behaftet und hängt bei vielkristallinen Metallen ganz und gar von der Genauigkeit der Messungen ab.

Bei den Stauchversuchen wurden ebenso die  $-\sigma_{0,1}$ - und  $-\sigma_m$ -Grenzen ermittelt.

In der Abb. 2 und Tabelle 2 ist die Reihenfolge der thermischen und mechanischen Behandlungen wiedergegeben, denen der erste Versuchsstab ausgesetzt wurde. 1 ist eine Spannungs-Dehnungskurve des Stabes im angelieferten Zustand. Die  $\sigma_m$ -Grenze beträgt 17,2 kg pro mm<sup>2</sup>. Nach der Aufnahme dieser Kurve wurde der Stab um 7% in der Zerreißmaschine gedehnt (Operation 2). Hierauf wurde die Stauchkurve 3 aufgenommen. Man sieht, daß die  $\sigma_m$ -Stauchgrenze nur 8 kg pro mm<sup>2</sup> beträgt. Durch die vorangegangene plastische Dehnung ist also die Stauchgrenze nicht nur unter die nach der Dehnung erreichte, in dieser Versuchsreihe nicht bestimmte Streckgrenze, sondern auch weit unter die anfängliche herabgeworfen worden. Mit anderen Worten, es ist beim Messing in charakteristischer Weise der Bauschinger-Effekt eingetreten.

Tabelle 2. Stab Nr. 1.

Versuch Nr.	Behandlung des Stabes	kg/mm <sup>2</sup>		
		Proportionalitätsgrenze	$\sigma_m$	$\sigma_{0,1}$
1	Streckgrenze	+ 8,4	17,2	18,5
2	Dehnung um 7%			
3	Stauchgrenze	- 7,4	- 8	- 14
4	Streckgrenze	+ 5,9	+ 10	+ 19,5
5	Glühung bei 625° 1 St.			
6	Dehnungskurve	Nicht vorhanden	+ 9	+ 13
7	Stauchgrenze	Nicht vorhanden	- 8	- 13,5

Tabelle 3. Stab Nr. 2.

Versuch Nr.	Behandlung des Stabes	kg/mm <sup>2</sup>				
		Proportionalitätsgrenze	$\sigma_m$	$\Delta$	$\sigma_{0,1}$	$\Delta$
1	Dehnung um 4%					
2	Streckgrenze	Nicht vorhanden	+ 28,5	36,9	+ 30	44
3	Stauchgrenze	Nicht vorhanden	- 8,4		- 14	
4	Stauchung um 1,9%					
5	Stauchgrenze	Nicht vorhanden	- 28	36	- 29	44
6	Streckgrenze		+ 8		+ 15	
7	Dehnung um 3%					
8	Streckgrenze	Nicht vorhanden	+ 32		+ 33	
9	8 St. auf 200° erhitzt					
10	Stauchgrenze	- 6,7	- 17,5		- 20,5	
11	Stauchung um 1%					
12	Stauchgrenze	- 6,7	- 24		- 25	
	Der Stab ausgeknickt					

Tabelle 4. Stab Nr. 3.

Versuch Nr.	Behandlung des Stabes	kg/mm <sup>2</sup>				
		Proportionalitätsgrenze	$\sigma_m$	$\Delta$	$\sigma_{0,1}$	$\Delta$
1	Streckgrenze	+ 7,9	+ 24	(48)	+ 28,5	(57)
2	Dehnung um 3%					
3	Streckgrenze	+ 6,5	+ 33,4	41	+ 35	51
4	Stauchgrenze	- 4,9	- 8		- 15,7	
5	Stauchung um 3%					
6	Stauchgrenze	- 4,77	- 33,6	43	- 35	52
7	Streckgrenze	+ 6,3	+ 9,5		+ 17	
8	Dehnung um 1,4%					
9	Streckgrenze	+ 7,9	+ 35		+ 36	
10	7 St. auf 200° erhitzt					
11	Stauchgrenze	- 6,5	- 21,6		- 26	

Tabelle 5. Stab Nr. 4.

Versuch Nr.	Behandlung des Stabes	kg/mm <sup>2</sup>				
		Proportionalitätsgrenze	$\sigma_m$	$\Delta$	$\sigma_{0,1}$	$\Delta$
1	Stauchgrenze	- 6,4	- 17,6	(35)	- 21	(42)
2	Stauchung um 1,7%					
3	Stauchgrenze	- 4,7	- 28,7	37,2	- 29,5	44
4	Streckgrenze	Nicht vorhanden	+ 8,5		+ 14,3	
5	Dehnung um 1,6%					
6	Streckgrenze	+ 6,4	+ 32,2		+ 33	48
7	Stauchgrenze	- 4,9	- 9	41,2	- 15	
8	Stauchung um 1,8%					
9	7 St. bei 225° gegläht					
10	Streckgrenze	Nicht vorhanden	+ 18		+ 22	
11	Stauchung um 2%					
12	7 St. bei 250° gegläht					
13	Stauchgrenze	- 8,2	- 22,3		- 24,5	

Tabelle 6. Stab Nr. 5.

Ver- such Nr.	Behandlung des Stabes	kg/mm <sup>2</sup>		
		Pro- portionalitäts- grenze	$\sigma_m$	$\sigma_{0,1}$
1	Stauchung um 1,9%			
2	Stauchgrenze	- 6,4	- 27,5	- 28,7
3	7 St. bei 250° gegläht			
4	Streckgrenze	+ 6,4	+ 19,5	+ 20,8
5	Stauchung um 2%			
6	7 St. bei 200° gegläht			
7	Stauchgrenze	- 7,9 <sub>6</sub>	- 23	- 24,5

Die unmittelbar nach der Kurve 3 aufgenommene Dehnungskurve 4 hat einen recht unübersichtlichen Verlauf. Dieser Verlauf wird bestimmt durch die Wechselwirkung der vorangegangenen Einflüsse der plastischen Dehnung um 7% und der darauffolgenden Aufnahme der Stauchkurve 3. Die pla-

stische Stauchung bei der letzteren hat ausgereicht, um die ursprünglich zweifellos viel höher gelegene Streckgrenze auf ca. 10 kg herabzubringen (Bauschinger-Effekt). Sie war aber zu gering, um die Wirkung der vorangegangenen Dehnung völlig zu verwischen, und deshalb hat die Kurve 4 die so wenig charakteristische Gestalt.

Hierauf wurde der Stab während einer Stunde auf 625° erhitzt (Operation 5); die danach aufgenommene Dehnungskurve 6 zeigt eine Streckgrenze von nur 9 kg. Auch ist diese Streckgrenze jetzt weniger ausgeprägt als auf der ursprünglichen Dehnungskurve 1 des Materials im Anlieferungszustande. Durch die Erhitzung auf 625° ist also das Messing, wie zu erwarten war, weichgeglüht worden.

Auf der danach aufgenommenen Stauchkurve 7 sieht man die  $\sigma_m$ -Stauchgrenze bei 8 kg pro mm<sup>2</sup>. Die Stauchgrenze ist hier viel weniger scharf ausgeprägt als die Streckgrenze auf der Kurve 6. Auch nach dem Überschreiten der Stauchgrenze steigt die Kurve noch ziemlich steil an, viel steiler als die Kurve 6. Über die Stauchkurve 7 läßt sich dasselbe sagen wie über die Dehnungskurve 4. Sie ist wenig übersichtlich und zeigt sowohl Anzeichen einer Entfestigung im Sinne des Bauschinger-Effektes, als auch einer Verfestigung durch die Kaltreckung des weichgeglühten Materials bei der Aufnahme der Kurve 6.

## 3.

Nachdem auf diese Weise nachgewiesen worden war, daß der Bauschinger-Effekt nicht nur beim Eisen, sondern auch beim Messing charakteristisch auftritt, wurde er systematisch verfolgt und der Einfluß der oben erwähnten Erhitzung auf 200 bis 250°



zur Beseitigung von Eigenspannungen untersucht. Der Stab 2 wurde der aus Abb. 3 und Tabelle 3 ersichtlichen Reihenfolge von Operationen unterworfen. Eine Dehnungskurve im Anfangszustand wurde nicht aufgenommen, sondern der Stab sofort um 4% in der Zerreißmaschine plastisch gedehnt. Hierauf wurde zur Ermittlung der hierdurch erreichten Streckgrenze die Dehnungskurve 2 und darauf die Stauchkurve 3 aufgenommen. Die Streckgrenze betrug 28,5 kg pro mm<sup>2</sup>, die darauf aufgenommene Stauchgrenze 8,4 kg/mm<sup>2</sup>. Auch hier finden wir den Bauschinger-Effekt in der ausgeprägtesten Weise. Nach der Aufnahme der Stauchkurve 3 wurde der Stab um 1,9% plastisch gestaucht (Operation 4) und darauf die Stauchkurve 5 aufgenommen. Man sieht, daß dadurch die Stauchgrenze in einer ganz ähnlichen Weise auf 28 kg/mm<sup>2</sup> erhöht worden ist, wie vorhin die Streckgrenze durch die plastische Dehnung. Nach der Feststellung der Stauchkurve 5 wurde die Dehnungskurve 6 aufgenommen, auf der sich spiegelbildlich zur Stauchkurve 3 genau in derselben Weise der Bauschinger-Effekt zeigte. Die Streckgrenze lag nur bei 8 kg/mm<sup>2</sup>. Wie auch zu erwarten gewesen ist, verhalten sich also in dieser Beziehung Dehnung und Stauchung genau gleich, und ebenso, wie durch eine vorangegangene plastische Dehnung die Stauchgrenze erniedrigt wird, sinkt auch die Streckgrenze nach einer vorangegangenen Stauchung.

An dieser Stelle müssen noch einige Worte über die Reihenfolge der an den Stäben vorgenommenen mechanischen Operationen und ihre Wechsel-

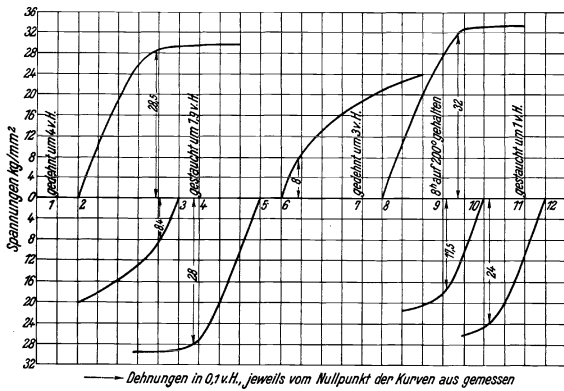


Abb. 3. Versuche mit Stab Nr. 2.

wirkung gesagt werden. Wir hatten beim Stab Nr. 1 in der Abb. 2 gesehen, wie stark das Material durch die Aufnahme einer Dehnungs- oder Stauchkurve beeinflusst werden kann, was ja auch verständlich ist, da bei der Aufnahme dieser Kurven plastische Formänderungen auftreten. Wir hatten gesehen, daß der Einfluß der Stauchoperation 3, Abb. 2 auf den nachfolgenden Dehnungsvorgang 4 und der Einfluß des Dehnungsvorganges 6 auf den nachfolgenden Stauchvorgang 7 ein derartiger war, daß eine fruchtbare Deutung der Kurven 4 und 7 überhaupt kaum möglich ist. Man kann sich fragen, ob nicht auch bei den Kurven der Abb. 3 etwas ähnliches der Fall sein könnte, d. h. ob z. B. der Dehnungsvorgang 2 nicht den darauffolgenden Stauchvorgang 3 und der Stauchvorgang 5 nicht den darauffolgenden Dehnungsvorgang 6 in unerlaubter Weise beeinflusst. Dieses ist nicht der Fall, und zwar aus folgenden Gründen: Vor der Aufnahme der Dehnungskurve 2 war der Stab um 4% plastisch gedehnt worden. Die plastische Deformation bei der Aufnahme der Dehnungskurve 2 ist die Fortsetzung genau derselben Dehnung wie sie vorher am Stab ausgeführt worden war und kann also auf den Stab keinen neuartigen Einfluß ausüben, der von dem Einfluß der vorangegangenen Operation 1 prinzipiell abweicht. Der Einfluß

der Dehnung 2 besteht nur darin, daß dadurch die vom Material erlittene Gesamtdehnung etwa um 0,5 bis 1% vergrößert wird. Da die Beeinflussung des Materials durch plastische Formänderungen in der Zerreißmaschine am stärksten in ihren Anfangsstadien ist und später immer mehr zurücktritt, wie man es ja aus jeder Dehnungs-Spannungskurve sieht, so ist also der Einfluß der Aufnahme der Dehnungskurve 2 auf die darauffolgende Stauchung auch dem Betrage nach zu vernachlässigen. Es ist also gestattet, die Stauchkurve 3, Abb. 3 als Charakteristikum des Zustandes vor der Aufnahme der Dehnungskurve 2 zu betrachten. Genau dasselbe gilt für die Wechselwirkung der Kurven 5 und 6, Abb. 3 nach einer vorangegangenen plastischen Stauchung. Gänzlich verfehlt wäre es hingegen, die Reihenfolge dieser Kurven zu vertauschen, d. h. nach einer plastischen Dehnung beispielsweise erst eine Stauchkurve und dann eine Dehnungskurve aufzunehmen. Durch die Stauchkurve, mit der eine plastische Formänderung vom entgegengesetzten Vorzeichen wie die vorangegangene verbunden ist, würde das Material tiefgehend beeinflusst werden und man würde bei der darauffolgenden Aufnahme einer Dehnungskurve ebenso unübersichtliche Verhältnisse finden wie bei den Kurven 3 und 4, Abb. 2, bei denen gerade dieses geschehen ist.

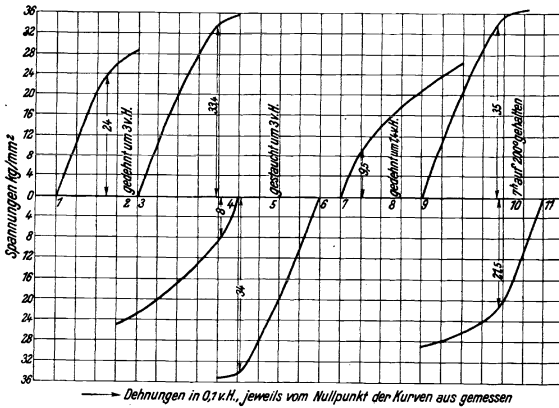


Abb. 4. Versuche mit Stab Nr. 3.

Hierbei kommt es also, allgemein gesprochen, darauf an, daß die plastische Formänderung bei der Kaltreckung (Reckflu nach v. Mllendorf und Czochralski)<sup>1)</sup> mit der

plastischen Deformation bei der unmittelbar darauf vorgenommenen Materialprüfung (Präfluß) dem Charakter nach identisch sein muß.

Nach der Aufnahme der Kurve 6 wurde der Stab Nr. 2 um 3% gedehnt und die Dehnungskurve 8 aufgenommen. Hierauf wurde er 8 Stunden auf 200° erhitzt (Operation 9), und dann die Stauchkurve 10 aufgenommen. Hätte man die Erhitzung nicht vorgenommen, so würde man hierbei infolge des Bauschinger-Effektes eine Stauchgrenze von 8 bis 10 kg pro mm<sup>2</sup> erwartet haben. In Wirklichkeit blieb sie bei 17,5 kg pro mm<sup>2</sup>, d. h. der Größenordnung nach etwa in derselben Höhe, wie die Stauch- und Streckgrenze des Materials im Anlieferungszustande gewesen war (diese Stauchgrenze ist aus Abb. 5 und Tabelle 5 ersichtlich). Durch eine Erhitzung auf 200° ist also der Bauschinger-Effekt im wesentlichen beseitigt worden. Es folgt hieraus, daß er nicht mit der wahren Verfestigung des Materials, sondern mit inneren Spannungen zusammenhängt.

Nach der Aufnahme der Stauchkurve 10 (Abb. 3), wurde der Stab um 1% plastisch gestaucht und hierauf die Stauchkurve 12 aufgenommen. Wie zu erwarten war, ist die Stauchgrenze wieder gestiegen, wenn auch weniger als bei den vorangegangenen

<sup>1)</sup> W. v. Mllendorf und I. Czochralski: Z. V. d. I. 1913, S. 931 u. 1014.

plastischen Deformationen, was darauf zurückzuführen ist, daß der Stab hierbei ausgeknickt ist.

In Abb. 4 und Tabelle 4 sind die Versuchsergebnisse mit dem Stab Nr. 3 wiedergegeben. Diese Versuchsserie ist eine Wiederholung der mit dem Stabe Nr. 2 vorgenommenen, soeben besprochenen Versuche, nur mit dem Unterschied, daß zu Beginn auch die Dehnungskurve des Stabes im Anlieferungszustand aufgenommen wurde. Diese Versuchsreihe bestätigt die früheren Resultate hinsichtlich des Bauschinger-Effektes und hinsichtlich seiner Beseitigung durch die Erhitzung auf 200° vollständig. Es ist zu erwähnen, daß die Werte der Streck- und Stauchgrenze bei dem Stab Nr. 3 durchweg merklich höher liegen als bei den anderen Stäben. Worauf diese Ungleichmäßigkeit im Material zurückzuführen ist, kann nicht angegeben werden, da sämtliche Versuchsstäbe ein und derselben Messingstange entnommen wurden. Prinzipielle Abweichungen lassen sich in diesem Zusammenhang nicht feststellen.

Am Stabe Nr. 4 (Abb. 5 und Tabelle 5) wurden die Versuche zunächst in umgekehrter Reihenfolge durchgeführt. Es wurde zuerst die Stauchkurve 1 des Materials im

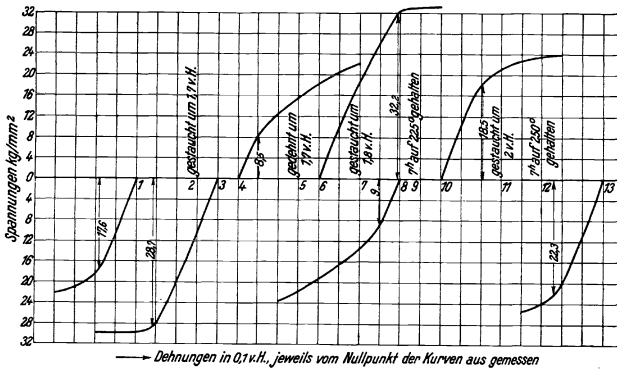


Abb. 5. Versuche mit Stab Nr. 4.

Anlieferungszustand aufgenommen. Die  $\sigma_m$ -Stauchgrenze wurde zu 17,6 kg pro mm<sup>2</sup> festgestellt. Sie ist praktisch gleich der am Stab Nr. 1 festgestellten  $\sigma_m$ -Streckgrenze (17,2 kg pro mm<sup>2</sup>). Hinsichtlich der Streck- und Stauchgrenze verhält sich also das Ausgangsmaterial symmetrisch und sein Zustand ist in dieser Beziehung normal. Durch die Operationen 2 bis 7 wurde festgestellt, daß dieser Stab sich sowohl qualitativ als auch quantitativ genau ebenso verhält wie die bisher betrachteten Stäbe. Der Stab wurde nun um 1,8% gestaucht, 7 Stunden auf 225° erhitzt und die Streckkurve 10 aufgenommen. Die Streckgrenze wurde zu 18,5 kg pro mm<sup>2</sup> festgestellt. Wie zu erwarten war, ist der Bauschinger-Effekt durch die Zwischenerhitzung auch in diesem Falle beseitigt worden. Bei weiteren Versuchen sind wir von folgenden Überlegungen ausgegangen.

Wie man aus den zugehörigen Stauch- und Dehnungskurven, etwa 1, 3 und 4 (Abb. 4 und 5) ersieht, hat die plastische Formänderung in der Zerreißmaschine zweierlei Wirkung auf das Material: nach vorangegangener plastischer Streckung wird einerseits die Streckgrenze erhöht und andererseits die Stauchgrenze erniedrigt (Bauschinger-Effekt). Nach einer vorangegangenen plastischen Stauchung tritt das Um-

gekehrte ein. Nachdem festgestellt worden ist, daß die zweite Wirkung der plastischen Formänderung, also der Bauschinger-Effekt, durch eine Erhitzung auf  $200^{\circ}$ , bei der die inneren Spannungen ganz oder zum größten Teil beseitigt werden, aufgehoben wird, lag die Vermutung nahe, daß dasselbe auch für den positiven Effekt der Erhöhung der Streck- resp. Stauchgrenze gelten würde. Allerdings sprachen die bisher vorliegenden Erfahrungen an anderen Metallen anscheinend dagegen. Einerseits ist nach den Arbeiten von Bauschinger, Muir und Körber<sup>1)</sup> bekannt, daß beim Eisen, das in der Zerreißmaschine plastisch gedehnt worden ist, die Elastizitätsgrenze durch geringe Erhitzung erheblich erhöht wird, und zweitens hat man oft beobachtet, daß die Streck- und Elastizitätsgrenze kaltgereckter Nichteisenmetalle und Legierungen ebenfalls durch geringe Erhitzung ansteigt. Diese Erfahrungen konnten jedoch für unseren Fall nicht als maßgebend betrachtet werden; beim Eisen, weil dieses Metall sich überhaupt ganz unnormal verhält (siehe weiter unten), und in den anderen Fällen, weil die Kaltreckung der geprüften Materialien durch technische Formgebung und nicht in der Prüfmaschine erfolgt war. Die oben erwähnte grundlegende Beziehung zwischen Prüf- und Reckfluß war also in diesem Falle in keiner Weise erfüllt.

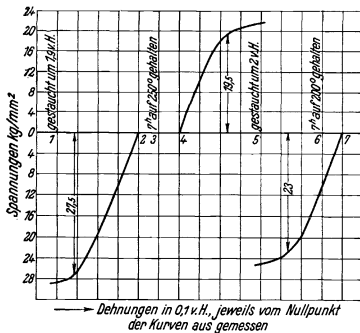


Abb. 6. Versuche mit Stab Nr. 5.

Die Versuche haben unsere Vermutungen bestätigt. Der Stab Nr. 4 wurde um 2% gestaucht (Operation 11, Abb. 5), 7 Stunden auf  $250^{\circ}$  erhitzt und seine Stauchkurve ermittelt. Die Stauchgrenze liegt bei  $22,3 \text{ kg pro mm}^2$ . Sie ist also erheblich niedriger als etwa nach Operation 2 an demselben Stab ( $27,7 \text{ kg pro mm}^2$ ). Die zu erwartende Erhöhung der Stauchgrenze durch die plastische Stauchung ist also durch die geringe Erhitzung ebenfalls teilweise beseitigt worden.

Der Stab Nr. 5 wurde nach einer plastischen Stauchung um 1,9% und der Aufnahme der Stauchkurve (2, Tabelle 5 und Abb. 6 und Tabelle 6) während 7 Stunden auf  $250^{\circ}$  erhitzt. Hierauf wurde die Dehnungskurve 4 aufgenommen. Die Streckgrenze betrug  $19,5 \text{ kg}$ . Dadurch war zunächst das bei den Stäben Nr. 3 und 4 festgestellte Resultat, daß der Bauschinger-Effekt durch die spannungsbeseitigende Erhitzung behoben wird, bestätigt. Hierauf wurde der Stab noch einmal um 2% gestaucht und danach 7 Stunden auf  $200^{\circ}$  erhitzt. Die darauf aufgenommene Stauchkurve 7 (Abb. 6) ergab in Bestätigung der Versuche mit Stab Nr. 4 eine Stauchgrenze von nur  $23 \text{ kg pro mm}^2$ , während eine ähnliche Deformation vorher eine Stauchgrenze von  $27,5$  ergeben hatte (Kurve 2, Abb. 5).

#### 4.

Aus den bisher beschriebenen Versuchen ergeben sich also zunächst drei Tatsachen:

1. das Auftreten des Bauschinger-Effektes beim Messing unter ähnlichen Bedingungen wie beim Eisen,
2. seine Beseitigung durch eine Erhitzung auf 200 bis  $250^{\circ}$ ,

<sup>1)</sup> a. a. O.

3. die Beseitigung, wenigstens zum größeren Teil, der durch das Kaltrecken in der Zerreißmaschine bewirkten Erhöhung der Streckgrenze, ebenfalls durch eine Erhitzung auf 200 bis 250°.

Die Stäbe Nr. 2 bis 5, an denen diese letzten Resultate festgestellt worden sind, wurden vorher, wie geschildert, durch eine Reihe von Dehnungs- und Stauchbeanspruchungen auf ihr normales Verhalten und darauf geprüft, ob bei jedem tatsächlich der Bauschinger-Effekt überhaupt auftritt. Ehe darüber Erfahrungen vorlagen, konnte man im Zweifel sein, ob er bei allen Stäben auftreten würde, und dann hätte die Prüfung seiner Beseitigung durch die Erhitzung auf 200 bis 250° gar keinen Sinn gehabt. Aus dem Obigen ergibt sich, daß der Bauschinger-Effekt mit der größten Regelmäßigkeit bei allen Versuchen wiederkehrt und daß auch der allgemeine Charakter der Kurven durchaus derselbe bleibt und von der bereits erwähnten Abweichung beim Stab Nr. 3 unabhängig ist. Das umfangreichere Tatsachenmaterial, das bei diesen Versuchen gewonnen wurde, ergab die Möglichkeit, aus den beschriebenen Resultaten noch weitere Gesetzmäßigkeiten abzuleiten. In den Tabellen 3 bis 6 sind

Tabelle 7. Zusammenstellung der  $\sigma_m$ -Grenzen nach verschiedenen Behandlungen der Stäbe.

Stab befand sich vor Bestimmung von $\sigma_m$	Stab Nr.	Vor Erhitzung		bei °C	Nach Erhitzung	
		Streckgrenze + $\sigma_m$ kg/mm <sup>2</sup>	Stauchgrenze - $\sigma_m$ kg/mm <sup>2</sup>		Streckgrenze + $\sigma_m$ kg/mm <sup>2</sup>	Stauchgrenze - $\sigma_m$ kg/mm <sup>2</sup>
Im Anlieferungszustand	1	+ 17,2		625	+ 9,0	(- 8,0)
	3	+ 24,0				
	4		- 17,6			
	Mittel	+ 20,6	- 17,6			
In plastisch gedehntem Zustand	2	+ 28,5	- 8,4	200		- 17,5
		+ 32,0				
	3	+ 33,4	- 8,0	200		- 21,6
		+ 35,0				
	4	+ 32,2	- 9,0			
	Mittel	+ 32,2	- 8,5			- 19,5
In plastisch gestauchtem Zustände	2	+ 8,0	- 28,0			
	3	+ 9,5	- 33,6			
	4	+ 8,5	- 28,7	250	+ 18,0	
				225		- 22,3
	5			250	+ 19,5	- 23,0
		200				- 23,0
	Mittel	+ 8,7	- 30,1		+ 18,7	- 22,6

unter den Rubriken A die Differenzen der zugehörigen Streck- und Stauchgrenzen des Materials eingetragen. Die Stauchgrenzen sind hierbei negativ zu rechnen, so daß die erwähnten Differenzen den Summen der absoluten Beträge gleichkommen. Bei ihrer Betrachtung fällt es auf, daß, während die einzelnen Werte der Streck- und Stauchgrenzen sich außerordentlich stark, oft um 100% und mehr, verschieben, diese Differenzen annähernd konstant bleiben. Noch deutlicher als bei den einzelnen Werten kommt das bei den Mittelwerten zum Ausdruck. In der Tabelle 7 sind die Mittelwerte der Streck- und

Tabelle 8. Abstände der zugehörigen Streck- und Stauchgrenzen.

Vorbehandlung des Materials	$\sigma_m + \sigma_{-m}$
Bei 625° ausgeglüht . . . . .	(17)
Anlieferungszustand . . . . .	(38,2)
Gedehnt . . . . .	40,7
Gestaucht . . . . .	38,8
Gestaucht und auf 200 bis 250° erhitzt	41,3
Gedehnt und auf 200 bis 250° erhitzt .	(40 bis 42)

Stauchgrenzen nach den verschiedenen Behandlungsarten berechnet worden und in der Tabelle 8 ihre Differenzen zusammengestellt. In den Fällen, in welchen keine Bestimmungen beider entgegengesetzten  $\sigma_m$ -Grenzen vorlagen, sind ihre Differenzen indirekt ermittelt worden, und zwar ist für den ausgeglühten Zustand angenommen worden, daß die Stauchgrenze mit entgegengesetzten Vorzeichen gleich der Streckgrenze ist. Für den gestreckten und auf 200 bis 250° erhitzten Zustand ist diese Differenz auf Grund des durchaus analogen Verhaltens mit dem gestauchten und auf 250° erhitzten Material als in derselben Größenordnung wie bei diesem liegend angenommen worden. Die so ermittelten beiden Werte sind in der Tabelle eingeklammert eingetragen worden. Wie man sieht, zeigt die Differenz der Streck- und Stauchgrenze bis auf den ausgeglühten Zustand eine bemerkenswerte Konstanz. Eine bessere Übereinstimmung zwischen den Einzelwerten wäre kaum zu erwarten gewesen, erstens, weil bei den beschriebenen Versuchen die Beträge der plastischen Deformationen recht erheblich geschwankt haben und zweitens, weil der ein abweichendes Verhalten zeigende Stab Nr. 3 bei der Mittelung mit berücksichtigt worden ist.

In groben Zügen ergibt sich also das folgende Bild: Die Differenz der Streck- und Stauchgrenzen oder mit anderen Worten der senkrechte Abstand zwischen beiden in den Abb. 3 bis 6 wird durch die hier beschriebenen Versuche ohne Änderung seiner Größe nach oben oder unten hin und her geschoben. Das betrifft nicht nur die plastischen Formänderungen allein, sondern auch den Einfluß der Erhitzungen auf Temperaturen von 200 bis 250°. Wenn man also nach einer Reihe von Operationen wieder annähernd den symmetrischen Zustand erreicht hat, bei dem die Streck- und Stauchgrenze einander gleich sind, so ist dieser Zustand hinsichtlich seines Verhaltens beim Dehnungs- und Stauchversuch von dem Ausgangszustand nicht zu unterscheiden. Etwas wie eine größere, bleibende Verfestigung durch die beschriebene Behandlung des Materials in der Zerreißmaschine läßt sich also nicht feststellen. Vielmehr bestehen die ganzen, im Verlaufe der Versuche hervorgerufenen Veränderungen im Material in Verschiebungen der inneren Spannungen. Es ist bemerkenswert, daß He y n ebenso wie einer der Verfasser bei dem Versuch, den Bauschinger-Effekt unter der Annahme von Eigenspannungen zu erklären, als Nebenergebnis gerade die Konstanz der Differenz der Stauch- und Streckgrenzen erhalten haben. Im Zusammenhang mit den beschriebenen Versuchen kann es als bewiesen gelten, daß die inneren Spannungen tatsächlich unter Wahrung der Konstanz dieser Differenz den Bauschinger-Effekt sowie die damit zusammenhängende Verschiebung der entgegengesetzten  $\sigma_m$ -Grenze hervorrufen können. Gleichzeitig zeigt es sich aber, daß alle diese Vorgänge mit der eigentlichen Verfestigung des Materials nichts zu tun haben und daß die He y n'schen Betrachtungen deshalb nicht die Grundlage einer Theorie der Verfestigung sein können, wenn He y n auch insofern einen richtigen Blick gehabt hat, als die verborgenen elastischen Spannungen in anderem Zusammenhange eine wesentliche Bedeutung für das verfestigte Metall haben müssen.

Die annähernde Gleichheit der Zustände, in denen das Messing vor unseren Versuchen und nach ihnen war, konnte noch durch einen weitergehenden Versuch bestätigt werden. Der Stab Nr. 4 wurde nach der Aufnahme der Stauchkurve 13 (Abb. 5) noch einmal während 7 Stunden auf 250° erhitzt und dann daraufhin geprüft, ob seine Streckgrenze durch plastische Dehnung ebenso beeinflußt wird wie im Anlieferungszustande. Zu diesem Zwecke wurde erst seine Streckgrenze festgestellt

(Kurve 1, Abb. 7), dann der Stab um 2% plastisch gedehnt (Operation 2) und wieder eine Dehnungskurve 3 aufgenommen. Man sieht, daß die Streckgrenze durch die plastische Dehnung von 17 kg pro mm<sup>2</sup> auf 29,5 kg pro mm<sup>2</sup> angestiegen ist. Innerhalb der Fehlergrenzen wird der Stab also durch die plastische Beanspruchung genau ebenso beeinflußt wie die anderen Stäbe im Anlieferungszustande.

Wie ist es nun möglich, daß die oft nicht unerheblichen plastischen Formänderungen, die das Messing im Verlaufe unserer Versuche erlitten hat, keine wirklich bleibende Verfestigung hervorgerufen haben, trotzdem es sich hierbei zweifellos um Kaltstreckungen handelte? Folgende Überlegung scheint hierfür eine Erklärung zu geben: Das Material lag im gepreßten und kaltgezogenen Zustand vor. Die Ziehoperation bedeutet aber für das Material eine viel stärkere Zwangsbeanspruchung als die Dehnung in der Zerreißmaschine. Das ergibt sich schon daraus, daß während des Ziehprozesses dem Material durch die Düse die äußere Form aufgezwungen wird, während es bei der Dehnung in der Zerreißmaschine in dieser Beziehung nicht unter äußerem Zwang steht. Auch ist es bekannt, daß bei einer Kaltstreckung die Verfestigung in der Hauptsache in den Anfangsstadien der ersten schnell und bei weiterer Kaltstreckung immer langsamer erfolgt.

Es ist also möglich, daß die geringe Verfestigung, die das Material auch bei der Behandlung in der Zerreißmaschine erfahren mußte, gegenüber dem bei dem Ziehen bereits aufgenommenen Verfestigungsbetrage und gegenüber den bei den Versuchen auftretenden Änderungen der

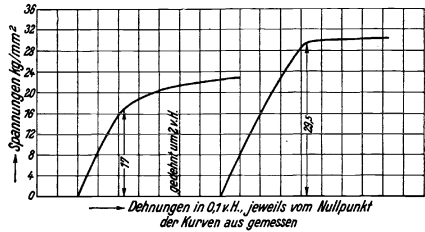


Abb. 7.

inneren Spannungen zu vernachlässigen war. In Übereinstimmung mit dieser Auffassung steht auch die Tatsache, daß die Differenz der Streck- und Stauchgrenzen bei den einzelnen Stäben im Verlauf der plastischen Deformationen nicht ganz konstant zu sein scheint, sondern eine geringe steigende Tendenz aufweist. Das Material wird also doch, wenn auch sehr wenig, verfestigt.

Ganz anders muß sich jedoch das völlig ausgeglühte Material verhalten. Es ist schon erwähnt worden, daß für dieses die Differenz der  $\sigma_m$ -Grenzen viel geringer (18 kg pro mm<sup>2</sup>) ist. Für dieses Material ist zu erwarten, daß auch die Behandlung in der Zerreißmaschine eine wesentliche Verfestigung herbeiführen wird. Es ist ja aus den Versuchen von Polanyi<sup>1)</sup> bekannt, wie außerordentlich empfindlich Metalle, die vorher plastisch nicht beansprucht worden waren, gegen plastische Dehnung in der Zerreißmaschine sind. Auch findet diese Annahme eine indirekte Bestätigung in dem Versuch mit dem Stabe 1. Wir sehen in der Abb. 2, daß die Dehnungskurve 1 im Anlieferungszustande und die Dehnungskurve 9 im ausgeglühten Zustande ganz verschieden sind. Bei der ersten findet ein starkes plastisches Fließen erst bei ca. 20 kg pro mm<sup>2</sup>, bei der zweiten bereits bei ca. 14 kg pro mm<sup>2</sup> statt. Die darauf aufgenommenen Stauchkurven 3 und 7 lassen jedoch bereits so gut wie gar keinen Unterschied untereinander erkennen. Wenn auch die Gleichheit der Stauchgrenzen hierbei durch den starken Bauschinger-Effekt im Falle der Kurve 3 vorgetäuscht wird, so

<sup>1)</sup> Übersicht über die Arbeiten von Polanyi und seinen Mitarbeitern s. Erg. der e. Naturwissenschaften II. S. 177. 1923.

zeigt doch der starke Anstieg der Kurve 7 zu Spannungen über 20 kg im Gegensatz zur Kurve 6, daß eine erhebliche Verfestigung des Materials bereits stattgefunden haben muß.

Inwiefern für alle beschriebenen Gesetzmäßigkeiten die eventuelle Ausbildung einer Faserstruktur von Einfluß sein kann, läßt sich vorläufig nicht sagen.

##### 5.

Aus obigem ergibt sich, daß man zwischen einer wahren und einer scheinbaren Verfestigung unterscheiden muß. Eine scheinbare Verfestigung kann durch Verschiebungen der inneren Spannungen vorgetäuscht werden. Ihr Kennzeichen besteht darin, daß gleichzeitig mit einer Verfestigung gegenüber einer bestimmten Beanspruchung eine entsprechende Schwächung gegenüber einer entgegengesetzten Beanspruchung eintritt. Diese scheinbare Verfestigung läßt sich durch Erhitzung auf mäßige Temperaturen ohne Rekristallisation beseitigen. Inwiefern bei derselben die Härte beeinflußt wird, ist noch nicht untersucht. Es ist jedoch zu vermuten, daß auch diese, und zwar in verschiedenen Richtungen, in verschiedener Weise verändert werden wird.

Im Gegensatz zu einer scheinbaren Verfestigung muß es eine tiefer liegende, wahre Verfestigung geben, die von den makroskopischen Spannungsverteilungen im Metall unabhängig ist und erst durch Rekristallisation beseitigt werden kann. Daß es eine solche Verfestigung gibt, unterliegt keinem Zweifel und auch der Verlauf der Härten in Tabelle 1 ist ein Beispiel dafür. Nur für diese Verfestigung haben die verschiedentlich angestellten Überlegungen über die tiefere Natur der Verfestigung eine wirkliche Bedeutung, während die Spannungsverfestigung in der Hauptsache unabhängig hiervon betrachtet werden muß.

Im Zusammenhang damit ergibt es sich auch, daß die so oft und insbesondere in der letzten Zeit empfohlene Bestimmung der Elastizitäts- oder Streckgrenze als Materialprüfungsmethode<sup>1)</sup>, ganz abgesehen von ihrer schwierigen Ausführbarkeit in der Technik, Mängel hat. Bei einem zu prüfenden Material weiß man meistens nicht genau, in welchem Spannungszustande es vorliegt. Es kann vorkommen, daß durch die letzte vorangegangene Behandlung seine inneren Spannungen so beschaffen sind, daß dadurch eine erhöhte Streckgrenze hervorgerufen wird. Diese ist dann aber mit einer erniedrigten Stauchgrenze verbunden, und die Beurteilung des Materials auf Grund der Streckgrenze kann zu einer Überschätzung führen. Frei von diesem Übelstand wäre dahingegen die Bestimmung der Differenz der Streck- und Stauchgrenzen, die allerdings wegen ihrer technischen Umständlichkeit meistens nicht in Frage kommt. Die Bestimmung der technischen Zerreißfestigkeit, der ja vorgeworfen wird, daß sie gar nicht die Größe mißt, auf die es bei der technischen Beanspruchung tatsächlich ankommt (Elastizitätsgrenze), hat der Bestimmung der Streckgrenze gegenüber den Vorteil, daß sie von den Spannungsverteilungen im Ausgangszustand unabhängig sein muß und deshalb eine reproduzierbare Materialkonstante liefert.

Man sieht, daß der Bauschinger-Effekt und die damit verknüpfte Spannungsverteilung die technischen Eigenschaften des Materials wesentlich beeinflussen können, trotzdem sein wahrer Verfestigungszustand dadurch nicht verändert wird. Infolge der spezifischen Abhängigkeit der Widerstandsfähigkeit von der Art der Beanspruchung ist die technische Beurteilung eines derartigen Materials überhaupt sehr schwierig

<sup>1)</sup> Vgl. Ludvik: Z. Metallkunde. 1924.



und hat mit der größten Vorsicht zu geschehen. Eine ausreichende Sicherheit in dieser Beziehung wird auch nicht die Bestimmung der Zerreißfestigkeit bringen können, die ja das Material nur unabhängig von den betrachteten Eigenspannungen charakterisiert, sondern nur die gleichzeitige Bestimmung der Streck- und Stauchgrenze. Das Verhalten des Messings bei unseren Versuchen im Anlieferungszustande scheint jedoch dafür zu sprechen, daß diese Gefahr immerhin nur in Ausnahmefällen der technischen Kaltreckung vorliegen wird.

Einige Bemerkungen über die Eigenspannungen in Metallen mögen hier noch Platz finden. In der Einleitung sind bereits zwei verschiedene Fälle betrachtet worden, in denen die Spannungen entweder eine Schwächung oder eine einseitige Verfestigung herbeiführen können. Der erste Fall ist schon lange bekannt. Erstens scheint er bei dem Eisen vorzuliegen, das vorher in der Zerreißmaschine plastisch beansprucht worden war. Es ist bekannt<sup>1)</sup>, daß das Eisen in diesem Zustande bei sehr viel niedrigeren Beanspruchungen als vor der plastischen Dehnung fließt, und daß dieser Zustand durch Altern bei gewöhnlicher Temperatur oder durch mäßige Erhitzung beseitigt wird, wobei an Stelle der ursprünglichen Erniedrigung der Elastizitätsgrenze eine erhebliche Erhöhung tritt. Zweitens werden solche Spannungen in allen den Fällen anzunehmen sein, wo die kaltgereckten Metalle oder Legierungen durch geringe Erhitzung unterhalb der Rekristallisationstemperatur eine weitere Verfestigung erfahren, ohne daß andere Vorgänge (Umwandlung und dgl. mehr) in ihnen auftreten. Ein Beispiel hierfür ist wieder das Verhalten der Härte laut Tabelle 1 beim Messing. Die vorliegende Untersuchung hat gezeigt, daß es außerdem aber tatsächlich auch Spannungen der zweiten Art gibt, durch die das Material einen unsymmetrischen Charakter gewinnt und gleichzeitig gegen eine Art der Beanspruchung verfestigt und gegen die entgegengesetzte geschwächt wird. Experimentell unterscheiden sich die Spannungen dieser zweiten Art von denen der ersten anscheinend dadurch, daß sie sich schwerer ausgleichen. Es ist nämlich bekannt, daß beim Eisen der Bauschinger-Effekt durch das Altern, das die Spannungen der ersten Art beseitigt, nicht beeinflußt wird, und es ist kaum zu bezweifeln, daß die Natur des Bauschinger-Effektes beim Eisen dieselbe, wie beim Messing ist, d. h. daß er auf Spannungen der zweiten Art zurückzuführen ist. Auch konnten bei unseren Versuchen am Messing keine Alterungserscheinungen wahrgenommen werden, die z. B. bei der Arbeit von Körber und Wieland<sup>2)</sup> uerst störend auftraten.

Außer diesen beiden Gruppen von Spannungen muß es noch eine dritte geben, nämlich die verborgenen Spannungen im eigentlichen Sinne des Wortes. Das sind die Spannungen, die als Begleiterscheinung der Biegegleitung auftreten müssen und die mit der Verfestigung auf das engste verknüpft sind.

Durch welche inneren Vorgänge die verschiedenen Arten von Spannungszuständen entstehen und wodurch ihr voneinander abweichendes Verhalten zu erklären ist, kann zur Zeit noch nicht genau gesagt werden. Einige Überlegungen in dieser Richtung finden sich in den Arbeiten eines der Verfasser über das Aufreißen von Messing<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Siehe z. B. Bauschinger: a. a. O.

<sup>2)</sup> Mitt. Eisenforsch. Bd. 3. S. 57.

<sup>3)</sup> G. Masing und C. Haase: Wissenschaftl. Veröffentl. a. d. Siemens-Konzern III, 2, S. 22. 1924.  
— G. Masing: Z. Metallkunde Bd. 15. 1924.

### Zusammenfassung.

1. Es wird beim kaltgereckten Messing das schon oft angenommene Auftreten des Bauschinger-Effekts (Erniedrigung der Stauchgrenze) beim Stauchen eines vorgestreckten Stabes experimentell nachgewiesen.

2. Der Bauschinger-Effekt wird durch Erhitzung des Messings auf 200 bis 250°, bei der noch keine nennenswerte Entfestigung (Härteabnahme) eintritt, beseitigt.

3. Die bei der plastischen Dehnung auftretende Erhöhung der Streckgrenze wird gleichfalls durch Erhitzung auf 200 bis 250° zum größeren Teil beseitigt.

4. Bei allen in der Zerreißmaschine durchgeführten Dehnungen und Stauchungen im Betrage bis zu 5 bis 7% oder auch Erhitzungen auf 200 bis 250° werden die Stauch- und Streckgrenze immer in entgegengesetztem Sinne beeinflusst, und ihre Differenz (Summe der absoluten Werte) bleibt annähernd unverändert.

5. Aus 2 und 3 folgt, daß sowohl der Bauschinger-Effekt, als auch die Erhöhung der Streckgrenze auf Eigenspannungen zurückzuführen sind.

6. Es ist also zwischen einer scheinbaren Verfestigung durch Verschiebung der inneren Spannungen und einer tiefer liegenden wahren Verfestigung zu unterscheiden. Zur letzteren hat der Bauschinger-Effekt keine unmittelbare Beziehung.

---

# Über das elektrische Leitvermögen des kaltgereckten Aluminiums.

Von Georg Masing und Georg Hohorst.

Mit 9 Textabbildungen.

Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium Siemensstadt.

Eingegangen am 23. Dezember 1924.

## I.

Die elektrische Leitfähigkeit des Aluminiums in Abhängigkeit von seinem Reinheitsgrade und von der thermischen Behandlung des kaltgereckten Materials ist schon öfter Gegenstand der eingehenden Untersuchung gewesen. Die ausführlichsten Angaben über die diesbezügliche Literatur finden sich in der Monographie von A. Schulze<sup>1)</sup>. Für unser Problem sind von größtem Interesse die Arbeiten von Gewecke<sup>2)</sup>, Holborn<sup>3)</sup>, Guillet<sup>4)</sup> und Wunder<sup>5)</sup>.

Bekanntlich wird das elektrische Leitvermögen der Metalle durch die Kaltreckung meistens erniedrigt und durch die darauffolgende Erhitzung wieder erhöht. Bei dieser Erhitzung geht jedoch die Verfestigung des Metalles wieder verloren, so daß man dann ein Metall zwar im Zustande der höchsten Leitfähigkeit, aber auch einer geringen Festigkeit hat. Wird die Erhitzung bei zu hoher Temperatur vorgenommen, so sinkt das elektrische Leitvermögen wieder, so daß man normalerweise für die Abhängigkeit desselben von der Erhitzungstemperatur des kaltgereckten Metalles etwa die ausgezogene Kurve, Abb. 1 erhält. Die wieder eintretende Erniedrigung des elektrischen Leitvermögens wird nach Tamann<sup>6)</sup> auf die einsetzende grobe Rekristallisation zurückgeführt. Gewecke hat nun versucht, durch vorsichtige Erhitzung des Aluminiums einen optimalen Zustand mit einer bereits guten Leitfähigkeit und noch mit einer brauchbaren Festigkeit zu erzielen. Das von ihm benutzte Aluminium hatte folgende Zusammensetzung:

Al . . . . .	98,82%
Si . . . . .	0,49%
Fe . . . . .	0,61%.

<sup>1)</sup> W. Gürtler: Metallographie 2. Bd., 2. Teil, 6. Heft. Berlin: Verlag Gebr. Bornträger 1924, A. S. Die elektrische und Wärmeleitfähigkeit.

<sup>2)</sup> H. Gewecke: Über die Erhöhung der Leitfähigkeit von Reinaluminium. Z. V. d. I. Bd. 57, Nr. 34, S. 1344 bis 1345. 1913.

<sup>3)</sup> L. Holborn: Über die Abhängigkeit des Widerstandes reiner Metalle von der Temperatur. I. Teil. Ann. Physik Bd. 59, H. 10, S. 155 bis 158. 1919. II. Teil. Z. Phys. Bd. 8, S. 62. 1922.

<sup>4)</sup> L. Guillet: Conductibilité électrique de l'aluminium commercial. Influence des impuretés et des traitements Rev. d. Mét. Bd. 21, S. 12. 1924.

<sup>5)</sup> W. Wunder: Vorkommen, Gewinnung, Eigenschaften und Verwendung des Aluminiums in der Elektrotechnik. ETZ 1924, H. 42.

<sup>6)</sup> G. Tamann: Lehrbuch der Metallographie, 3. Aufl., S. 149. Leipzig: Leopold Voss 1923.

Die von ihm erzielten prozentischen Leitfähigkeitserhöhungen von kaltgerecktem Aluminiumblech von 1 mm Dicke in Abhängigkeit von der Erhitzungstemperatur sind in Tabelle 1 verkürzt wiedergegeben. Auf

Tabelle 1. Die prozentischen Leitfähigkeitserhöhungen von kaltgerecktem Aluminiumblech von 1 mm Dicke in Abhängigkeit von der Erhitzungstemperatur (nach Gewecke).

Erhitzungstemperatur in ° C	Prozentische Zunahmen der elektrischen Leitfähigkeit	
	bei einer Erhitzungszeit von	
	60 Min. %	120 Min. %
160	2,11	2,94
200	5,08	5,31
230	5,89	6,48
270	6,81	6,94

seine Festigkeitsmessungen soll hier nicht eingegangen werden.

Holborn hat in mehreren Arbeiten die Leitfähigkeit des sehr reinen Aluminiums und ihren Temperaturkoeffizienten untersucht und gibt an, daß die maximale Leitfähigkeit eines kaltgereckten und danach ausgeglühten Aluminiums nach einer Glühung von 3 St. bei 250° erreicht wird. Er stellt fest, daß eine Erhitzung auf 500° keine erhebliche Leitfähigkeitsänderung des kaltgereckten Materials herbeiführt. Für den spezifischen Widerstand  $\sigma_{20}$  fand Holborn an einem Al VI mit 0,02% Si

und 0,06% Cu: hart  $2,84 \cdot 10^{-6}$  und bei 250° angelassen  $2,75 \cdot 10^{-6}$ , was einer Leitfähigkeit von 35,21 und 36,73 entspricht<sup>1)</sup>.

Guillet hat die elektrische Leitfähigkeit verschiedener Aluminiumqualitäten nach verschiedenen Warm- und Kaltreckungen und nach einer Erhitzung auf 450° während 30' gemessen. Er findet, daß das Silizium einen stärkeren Einfluß auf die Leitfähigkeit hat, als das Eisen. Die Warmreckung (400 bis 450°) ist ohne nachweislichen Einfluß auf die Leitfähigkeit; durch Kaltreckung wird sie erniedrigt, und

zwar bei verunreinigtem Material stärker als bei reinerem. Bei Aluminium mit 0,21% Si und 0,24% Fe änderte sich die Leitfähigkeit des auf 7 mm warm vorgewalzten Materials von 35,1 beim Durchmesser 5,72 mm auf 34,6 bis 35,1 beim Durchmesser 2,5 bis 2,0 mm. Bei Aluminium mit 0,89% Si und 0,91% Fe war die Leitfähigkeit beim Durchmesser 5,74 nur 31,6 und sank beim Durchmesser 2,55 mm auf 30,8. Für Materialien von mittleren Reinheitsgraden liegen die Leitfähigkeiten dazwischen. Durch eine Er-

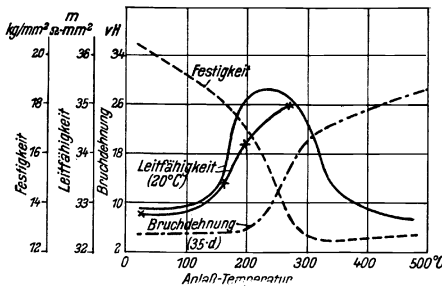


Abb. 1. Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit und der technischen Eigenschaften des Aluminiums von der Anlaßtemperatur nach Wunder.

hitzung auf 450° stieg die Leitfähigkeit der gezogenen Drähte aus dem reinsten Aluminium so gut wie gar nicht, die des am meisten verunreinigten um ca. 6 bis 9%. Bei den Versuchen von Guillet haben die Gesichtspunkte, die uns bei unserer Arbeit in der Hauptsache geleitet haben, keine Berücksichtigung gefunden.

Wunder hat für die Abhängigkeit der technischen Eigenschaften des Aluminiums mit 99,3% Reingehalt von der Erhitzung auf verschiedene Temperaturen, gemessen am Draht von 4 mm Durchmesser, die Kurven Abb. 1 veröffentlicht. Wunder gibt an, daß das Maximum der Leitfähigkeitserhöhung durch Anlassen bei ca. 260°

<sup>1)</sup> Hier und im Folgendem wird die Leitfähigkeit immer auf 1 m Länge und auf den Querschnitt von 1 mm bezogen.

bei einer einstündigen Erhitzung liegt. Aus der Abb. 1 sieht man, daß das Maximum ein scharf ausgeprägtes und der Abfall nach beiden Seiten ein recht steiler ist, so daß man zur Erreichung der maximalen Leitfähigkeit sich an ein ziemlich enges Temperaturgebiet halten muß.

Die mit Kreuzen versehene Kurve in Abb. 1 gibt den Gang der Leitfähigkeit in Abhängigkeit von der Erhitzung nach Gewecke unter der Voraussetzung wieder, daß die Leitfähigkeit dieses Materials im Ausgangszustande etwa dieselbe wie bei Wunder gewesen ist.

Die Resultate von Wunder bestätigen also die Angaben von Holborn, daß das Maximum der elektrischen Leitfähigkeit bei einer Erhitzung auf Temperaturen in der Nähe von  $250^\circ$  erreicht wird.

Die Veranlassung für die vorliegende Untersuchung boten die länger zurückliegenden technischen Schwierigkeiten, die elektrische Leitfähigkeit des Aluminiums gemäß den Angaben von Gewecke resp. Holborn und Wunder bei Wahrung einer gewissen Festigkeit zu erhöhen. Hierbei sollte auch versucht werden, den Einfluß der Verunreinigungen auf die Veränderungen des elektrischen Leitvermögens von dem Einfluß der Rekristallisation an und für sich zu trennen, was bisher anscheinend noch nicht durchgeführt worden ist.

## II.

Das Aluminium gehört bekanntlich zu den Metallen, die in der Technik immer in verunreinigtem Zustande benutzt werden. Der Reinheitsgehalt des technischen Aluminiums übersteigt nicht ca. 99,5%. Die folgenden Untersuchungen wurden an einem Material von folgender Zusammensetzung durchgeführt:

Fe . . . . .	0,30%
Si . . . . .	0,42%
Al . . . . .	99,28%

Nach Fuß<sup>1)</sup> befindet sich das Eisen im Aluminium bekanntlich im Zustande der Verbindung  $\text{FeAl}_3$ , während das Silizium in elementarer Form vorliegt, sofern beide nicht mit Aluminium Mischkristalle bilden und sich mikroskopisch nachweisen lassen. Sie bilden dann ternäre eutektische Einschlüsse in einer manchmal nicht normalen Ausbildung<sup>2)</sup>. Im Gegensatz zu Fuß geben Hanson und Gayler<sup>3)</sup> an, daß in den ternären Al-Si-Fe-Legierungen in der Nähe des reinen Aluminiums eine neue Strukturkomponente auftritt. Dieses Resultat scheint jedoch noch nicht sehr sicher zu sein, da sowohl die thermischen als auch die mikroskopischen Untersuchungen in diesem Konzentrationsbereich sehr schwierig sind und Hanson und Gayler nur durch Kombination ihrer Beobachtungen zu obigem Resultate kommen. Im folgenden wird die einfachere Annahme gemacht, daß diese neue Komponente sich nicht bildet. Im übrigen ist diese Frage für das Weitere insofern von untergeordneter Bedeutung, als die Erörterung der Leitfähigkeits- und Festigkeitsmessungen sich ebensogut unter Annahme der Existenz dieser Komponente, wie auch ohne sie, durchführen läßt.

Das Silizium bildet nach Hanson und Gayler mit dem Aluminium Mischkristalle bis zu etwa  $1\frac{1}{2}\%$  Silizium. Ihre Resultate sind in Abb. 2 wiedergegeben.

<sup>1)</sup> V. Fuß: Über die Konstitution von Dreistofflegierungen des Aluminiums. Z. Metallkunde H. 1, S. 24 bis 25. 1924.

<sup>2)</sup> J. Czoehrański: Der Einfluß des Silizium und Eisen auf die Eigenschaften des Aluminiums. Z. Metallkunde H. 5, S. 162 bis 174. 1924.

<sup>3)</sup> Siehe z. B. W. Rosenhain, S. L. Archbutt and D. Hanson: Eleventh Report to the Alloys Research Committee.

Es erscheint zweifelhaft, ob es möglich ist, beim Aluminium mikroskopisch durch Anlaßversuche die wahren Löslichkeitsgrenzen festzustellen. Erstens gehört Aluminium zu den Metallen, die sich verhältnismäßig schlecht polieren lassen und deren mikroskopische Untersuchung dementsprechend schwierig ist. Zweitens kennen wir vom Duralumin und verwandten Legierungen her sichere Fälle, wo Entmischungsercheinungen in Aluminiumlegierungen sich der mikroskopischen Feststellung hartnäckig entziehen. Aus diesen Gründen ist anzunehmen, daß die Löslichkeitsgrenzen des Siliziums im Aluminium in Wirklichkeit niedriger als die von Hanson und Gayler angenommenen sind. Auch ist für die Löslichkeit im Gegensatz zu Hanson und Gayler mit Sicherheit eine Temperaturabhängigkeit anzunehmen, wie sich aus dem Folgenden ergeben wird.

Eine Aufnahme des Eisens in aluminiumreiche Mischkristalle ist unseres Wissens bisher noch nicht festgestellt worden. Jedoch ist auch dieses Resultat in Anbetracht der oben erwähnten Untersuchungsschwierigkeiten nur als ein vorläufiges zu betrachten.

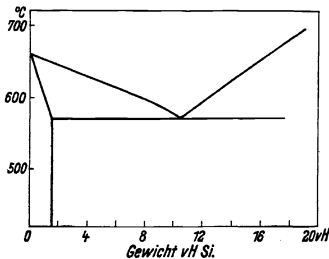


Abb. 2. Konstitutionsdiagramm der Al-Si-Legierungen.

Über die Grenzen der aluminiumreichen Mischkristalle im ternären System Aluminium-Silizium-Eisen ist noch nichts Sicheres bekannt. Auch die Untersuchungen von Hanson und Gayler<sup>1)</sup> haben hierüber keine vollständige Klarheit ergeben.

Im folgenden werden sich auf Grund der Leitfähigkeitsmessungen einige, wenn auch indirekte Hinweise zur Klärung dieser Verhältnisse ergeben.

Wenn das Aluminium Silizium und Eisen in solchen Mengen enthält, daß ein Teil davon bei höherer Temperatur als Mischkristalle aufgenommen, aber

bei tieferer Temperatur wieder ausgeschieden wird, so kann das von Einfluß sowohl auf das elektrische Leitvermögen, als auch auf die Festigkeit des Materials sein. Bekanntlich sinkt das Leitvermögen immer und steigt die Festigkeit meistens durch Mischkristallbildung. Wenn die Bildung und vor allen Dingen der Zerfall des übersättigten Mischkristalles nur träge erfolgt, wie das beim Aluminium anzunehmen ist, so wird bei zu schneller Abkühlung, etwa an der Luft, der den höheren Temperaturen entsprechende Zustand zum Teil bei gewöhnlicher Temperatur fixiert werden, und dadurch werden die Eigenschaften des Materials beeinflußt werden. Bei der Erhitzung eines kaltgereckten Aluminiums werden sich also zwei Vorgänge überdecken, erstens die gewöhnliche Rekristallisation unter Beseitigung der Wirkungen der Kaltreckung, und zweitens eine Veränderung der im Mischkristall aufgenommenen Silizium- und Eisenmengen. Es war vor allen Dingen wünschenswert, den zweiten Vorgang unabhängig vom ersten zu untersuchen. Zu diesem Zwecke wurden die Änderungen des elektrischen Leitvermögens in Abhängigkeit von der thermischen Behandlung an völlig rekristallisierten Aluminiumdrähten untersucht. Kokillengußstücke von 20 mm Durchmesser wurden ohne jede Zwischenglühung kalt bis auf 3 mm in einer Kaliberwalze heruntergewalzt und von da ab auf einen Durchmesser von ca. 1 mm gezogen. Um die Hauptfehlerquelle bei Messungen des elektrischen Leitvermögens — die Ungleichmäßigkeiten des Querschnittes — zu verringern, wurden für die letzten Züge Präzisions-Ziehdufen benutzt. Die Drähte wurden alle während einer Stunde auf 600° erhitzt. Hierbei

<sup>1)</sup> a. a. O.

mußte bereits grobe Rekristallisation eintreten und die Leitfähigkeit etwa gemäß Abb. 1 stark sinken. Nach der Erhitzung wurden die Drähte alle in Wasser abgeschreckt. Es war anzunehmen, daß während der nun folgenden thermischen Behandlung bei Temperaturen unterhalb 600° keine nennenswerte weitere Rekristallisation und keine dadurch verursachte Leitfähigkeitsänderung eintreten würden. Die Richtigkeit dieser Annahme wurde dadurch bestätigt, daß eine weitere Erhitzung während einer Stunde auf 600° mit nachfolgender Abschreckung keine Veränderung der Leitfähigkeit herbeiführte. Die völlig rekristallisierten und abgeschreckten Drähte wurden je eine Stunde auf verschiedene Temperaturen erhitzt und wieder abgeschreckt, um den Zustand bei diesen Temperaturen zu fixieren. Die Messung der Leitfähigkeit erfolgte durch Bestimmung des durch den Draht durchfließenden Stromes und der an einer gemessenen Länge abgeklebten Spannung. Beide Ablesungen wurden direkt an Zeigerinstrumenten ausgeführt. Bei dieser Art von Messung ist vor allen Dingen wichtig, dafür zu sorgen, daß die Ausschläge beider Meßinstrumente gleichzeitig groß sind. Durch geeignete Nebenschlüsse und Vorschalt-

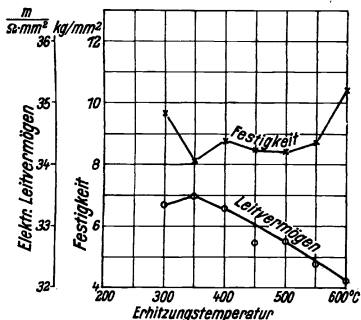


Abb. 3. Einfluß der Erhitzung auf verschiedene Temperaturen auf die technischen Eigenschaften des rekristallisierten Aluminiums.

Tabelle 2. Einfluß der einstündigen Erhitzung auf verschiedene Temperaturen mit nachfolgendem Abschrecken auf die elektrische Leitfähigkeit und Festigkeit des bei 600°C rekristallisierten Aluminiums.

Abschrecktemperatur in °C	Elektrische Leitfähigkeit bei 20° C in Einheiten $\frac{m}{\Omega \text{ mm}^2}$				Festigkeit in kg/mm²
	1.	2.	3.	Mittelwert	
300	33,17	33,55	33,34	33,35	9,7
350	33,52	33,52	33,45	33,50	8,1
400	33,22	33,39	33,22	33,28	8,8
450	32,70	32,55	32,90	32,72	8,5
500	32,95	32,72	32,57	32,75	8,4
550	32,44	32,65	32,87	32,65	8,7
600	32,30	32,11	31,88	32,10	10,4

widerstände wurde erreicht, daß beide Ausschläge mindestens je 100 Skalenteile betragen. Wenn man die Genauigkeit der Ablesung mit 0,1 Skalenteil schätzt, ergibt sich für das Leitvermögen ein möglicher Ablesungsfehler von 0,2%, der von dem Fehler, der durch die Unsicherheit der Querschnittsmessung entsteht, übertroffen wurde. Deshalb konnte auf die Anwendung einer Kompensationsschaltung zur Spannungsmessung verzichtet werden. Die Genauigkeit der einzelnen Messung ist mit  $\pm 1\%$  zu schätzen, bei dem mit Si und Fe verunreinigten Al ist sie etwas geringer.

In Tabelle 2 und Abb. 3 sind Resultate der Messungen der elektrischen Leitfähigkeit und der Festigkeit in Abhängigkeit von der Abschrecktemperatur für bei 600° rekristallisierte Drähte wiedergegeben. Man sieht, daß die Leitfähigkeit mit sinkender Abschrecktemperatur bis 350° steigt, um dann wieder abzufallen.

Die Festigkeit verhält sich umgekehrt, wie die Leitfähigkeit, sie sinkt mit sinkender Abschrecktemperatur, um nach dem Abschrecken von 300° abwärts wieder einen scheinbaren Anstieg zu zeigen. Da durch das Abschrecken der Zustand in der Nähe der Abschrecktemperatur fixiert wird, so folgt aus den Beobachtungen, daß das Aluminium bei 600° wahrscheinlich eine gewisse Menge der Verunreinigungen Silizium

und Eisen in fester Lösung enthält, und daß ihre Menge bei sinkender Temperatur abnimmt, wodurch die Erhöhung der Leitfähigkeit und die Herabsetzung der Festigkeit erklärt wird. Die niedrigere Leitfähigkeit und höhere Festigkeit bei der Abschreckung von 300°, als von 350° ab, sind dadurch zu erklären, daß bei der einstündigen Erhitzung auf diese Temperatur im Gegensatz zu höheren Temperaturen der Gleichgewichtszustand auch noch nicht annähernd erreicht wurde. Das Aluminium ist also in diesem Fall an Verunreinigungen übersättigt. Die Abweichungen der Kurven der Festigkeit und elektrischen Leitfähigkeit von einem gleichmäßigen Verlauf liegen innerhalb der Fehlergrenzen und haben wahrscheinlich keine reelle Bedeutung. Ob die beobachteten Eigenschaftsänderungen auf die Ausscheidung von Eisen oder von Silizium zurückzuführen sind, läßt sich nicht sagen. Auch die Schliche haben hierüber keine Aufklärung bringen können.

Diese von der Rekristallisation unabhängigen Änderungen der elektrischen Leitfähigkeit und der Festigkeit müssen sich bei der Glühung von kaltgerecktem Aluminium den Einflüssen der Rekristallisation überlagern. Wenn der Ausgangszustand des Materials jedoch ein bekannter ist, lassen sie sich eliminieren. Arbeitet

Tabelle 3.

Erhitzungs- und Abschreckungs-temperatur	Zunahme der Leitfähigkeit
300	+ 1,25
350	+ 1,40
400	+ 1,12
450	+ 0,84
500	+ 0,56
550	+ 0,28
600	0

man z. B. mit Kokillenguß, der ohne jede Zwischenglühung kaltgereckt wird, wie das im folgenden meistens geschehen ist, so muß die im Mischkristall enthaltene Menge der Verunreinigungen annähernd dem Zustand bei 600° entsprechen. Durch Ausscheidung dieser Verunreinigungen wird also das Leitvermögen des kaltgereckten Aluminiums bei einer Erhitzung und nachfolgender Abschreckung, unabhängig von der Rekristallisation, etwas erhöht, wie es in Tabelle 3 bei linearer Interpolation der Zwischenwerte angegeben ist.

Liegt das Aluminium umgekehrt im Zustande der maximalen Leitfähigkeit vor, so läßt sich aus dieser Tabelle die Erniedrigung der Leitfähigkeit durch Erhitzung auf eine gegebene Temperatur berechnen.

### III.

Nach der Feststellung des Einflusses der Erhitzung auf die Leitfähigkeit des rekristallisierten Aluminiums wurde ihr Einfluß auf die Leitfähigkeit von kaltgerecktem Aluminium untersucht.

Das Aluminium war in Kokillen von 20 mm Durchmesser gegossen und dann kalt gewalzt und gezogen worden. Es wurde auf jede Temperatur eine Stunde lang erhitzt und darauf langsam im Verlaufe von 10 Stunden im elektrischen Ofen abgekühlt. Die Resultate der Leitfähigkeitsmessungen sind in Tabelle 4 und Abb. 4 (voll ausgezogene Kurve *cnbqd*) wiedergegeben. Bei verschiedenen Versuchsserien sind nicht immer die Höchstwerte der Tabelle 4, die mit den Angaben von Gewecke gut übereinstimmen aber erheblich höher als der Wert 35,3 von Wunder sind, erreicht worden, ohne daß die Ursache der Schwankungen bisher mit Sicherheit erkannt worden wäre. Der charakteristische Gang der Leitfähigkeit bleibt derselbe, In Abb. 4 sind nicht die Werte der Versuchsserie der Tabelle 4, sondern die Mittelwerte aus verschiedenen Versuchsserien aufgetragen worden; die weitere Erörterung geschieht an Hand der Kurvenwerte.

Die Ergebnisse weichen von denen von Wunder nicht unerheblich ab. Erstens tritt bei unseren Versuchen die starke Zunahme der Leitfähigkeit bei höherer Tempe-



Tabelle 4. Einfluß der Erhitzung auf verschiedene Temperaturen mit nachfolgender langsamer Abkühlung oder Abschreckung auf die elektrische Leitfähigkeit des kaltgereckten 99,3proz. Aluminiums. Draht von 1 mm Durchmesser.

Erhitzungs- temperatur in ° C	Elektrische Leitfähigkeit bei 20° C in $\frac{m}{\Omega \text{ mm}^2}$											
	1 St. bei verschiedenen Temperaturen geglüht und langsam abgekühlt						1 St. bei verschiedenen Temperaturen geglüht und in Wasser abgeschreckt					
	1.	2.	3.	4.	5.	Mittelwert	1.	2.	3.	4.	5.	Mittelwert
—	32,68	32,75				32,72						
200	34,04	34,07	34,07	34,21	34,10	34,10	35,06	35,60	35,28	35,03		35,24
250	35,54	35,54	35,52	35,45	35,42	35,50	36,29	35,86	35,71	35,67		35,88
300	36,08	35,94	36,41	36,19	35,97	36,12	35,97	35,57	35,93	35,86		35,83
350	36,15	36,07	35,96	36,31	36,41	36,20	35,98	36,27	35,60	36,36		36,05
400	35,70	35,43	35,73	35,82	35,36	35,61	34,15	34,32	34,39	34,46		34,33
450	35,18	35,29	35,04	35,01	34,76	35,05						
500	33,75	34,06	34,20	33,85	34,24	34,02						
550	33,92	33,74	33,50	33,64	33,57	33,67						
600	33,50	33,60	33,57	33,71	33,36	33,55						

ratur ein als bei Wunder, und das Maximum wird erst nach einer Erhitzung auf 350° erreicht. Dieser Unterschied ist wahrscheinlich, wenigstens zum Teil, auf einen abweichenden Zustand des Ausgangsmaterials zurückzuführen. Aus Wunders Arbeit ist mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit zu entnehmen, daß das Aluminium vor dem Kaltziehen warmgewalzt wurde. Hierbei dürfte eine Erhitzungstemperatur von 300 bis 400° erreicht worden sein. Nach den Resultaten des vorigen Paragraphen mußte das Aluminium hierbei hinsichtlich der Beeinflussung durch isomorphe Beimengungen sich etwa im Zustande der maximalen Leitfähigkeit befinden. Demgegenüber war unser in Kokillen gegossenes Aluminium infolge der schnellen Abkühlung im Zustande einer wesentlich schlechteren Leitfähigkeit, die etwa dem Gehalt an isomorphen Verunreinigungen bei 600° entsprochen haben mochte. Auf Grund der Tabelle 2 des vorhergehenden Paragraphen sind wir in der Lage, die von uns gemessenen Leitfähigkeiten für den bei Wunder vorliegenden Fall zu korrigieren. Danach ist die Leitfähigkeit des auf 300° erhitzten Stückes um 0,15 Einheiten zu erhöhen. Wenn wir ferner annehmen, daß bei 200° während einer Stunde noch gar kein Zerfall der übersättigten Mischkristalle eintritt, so haben wir den Wert bei 200° um 1,4 Einheiten zu erhöhen. Wir erhalten so den punktierten Kurvengang *m a b*, wobei der Wert für die Erhitzungstemperatur von 250° unsicher ist. Das Maximum der Leitfähigkeitskurve verschiebt sich hierdurch zu niedrigen Temperaturen zwischen 250 und 300°, übereinstimmend mit Wunder.

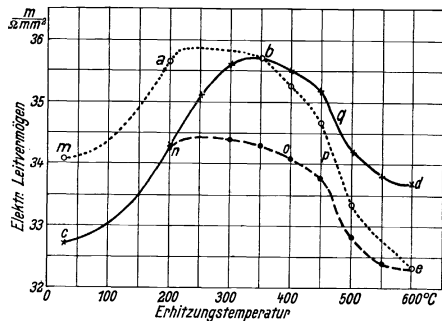


Abb. 4. Einfluß des Anlassens auf die elektrische Leitfähigkeit des Aluminiums mit 99,3% Reingehalt.

Der Teil der Leitfähigkeitskurve rechts vom Maximum liegt zweitens erheblich höher als bei Wunder und höher als im Ausgangszustande vor der Glühung. Die Leitfähigkeit des bei 600° rekristallisierten und langsam abgekühlten Aluminiums (33,7)

ist um 1,6 Einheiten größer, als die des bei  $600^\circ$  abgeschreckten Materials (Tabelle 2), und stimmt praktisch überein mit dem bei  $600^\circ$  abgeschreckten und bei  $350^\circ$  getemperten Material (33,5). Hieraus schließen wir, daß die Abkühlung bei der betrachteten Versuchsserie so langsam erfolgte, daß der Gleichgewichtszustand annähernd erreicht wurde, und daß die oberhalb  $350^\circ$  geglühten Drähte nach der Abkühlung nur etwa so viel Verunreinigungen im Mischkristall enthielten, wie dem Gleichgewichtszustand bei dieser Temperatur entspricht. Die durch die Kurve *c n b q d* (Abb. 4) angegebenen Leitfähigkeitsänderungen des Aluminiums geben also nicht die reine Rekristallisationswirkung wieder, vielmehr tritt zu dieser der Leitfähigkeit erhöhende Einfluß des Zerfalls des übersättigten Mischkristalls hinzu. Wollen wir diesen Einfluß eliminieren, so können wir entweder den Teil der Kurve links vom Maximum auf den Gleichgewichtszustand bei  $350^\circ$  hinaufkorrigieren, und erhalten so die Kurve *m a b q d*, die die reine Rekristallisationswirkung eines bei 300 bis  $350^\circ$  im Phasengleichgewicht befindlichen Materials wiedergibt. Diese Kurve muß experimentell realisierbar sein, wenn man ein bis 300 bis  $350^\circ$  vorbehandeltes Material kaltreckt. Oder wir können das ganze auf ein Material beziehen, wie es in unseren Versuchen vorlag, das also einem Gleichgewichtszustande bei  $600^\circ$  entspricht, die Verunreinigungen in übersättigter Lösung enthält. Wir müssen dann die Werte an Hand der Tabelle 3 herunterkorrigieren und erhalten die Kurve *c n o e*. Diese Kurve ist identisch mit *m a b q d*, ihre Ordinaten sind nur durchweg um 1,4 Einheiten geringer als bei jener. Sie gibt die reine Rekristallisationswirkung für das bei  $600^\circ$  im Phasengleichgewicht befindliche Material. Sie ist jedoch, im Gegensatz zur Kurve *m a b q d*, nicht direkt experimentell realisierbar, weil bei den mittleren Temperaturen von 300 bis  $500^\circ$  stets unvermeidlich ein Zerfall des übersättigten Mischkristalles eintreten wird. Bei schneller Abkühlung (Abschreckung) wird man dann statt der Kurve *c n o e* die Kurve *c n b p e* erhalten.

Aus dem steilen Abfall der Leitfähigkeitskurve von Wunder ergibt sich, daß seine Drähte wahrscheinlich nach der Erhitzung schnell abgekühlt wurden. Als eine seinen Versuchsbedingungen entsprechende Kurve würden wir also etwa *m a b p e* erhalten. Diese Kurve gibt nicht die reine Rekristallisationswirkung auf die Leitfähigkeit wieder, vielmehr tritt bei ihr, im Gegensatz zu unserer Kurve *c n b q d*, bei höheren Temperaturen eine Erniedrigung der Leitfähigkeit infolge der Aufnahme von Verunreinigungen in fester Lösung hinzu.

Die bedeutend niedrigeren Anfangswerte von Wunder erklären sich vielleicht durch den sehr viel höheren Festigkeitsgrad seines Materials. Die Ausgangsfestigkeit betrug bei seinen Versuchen ca. 35 kg pro  $\text{mm}^2$ , bei unseren 26 kg pro  $\text{mm}^2$ .

Der Einfluß der Erhitzung und langsamen Abkühlung des kaltgezogenen Aluminiums auf die Festigkeit ist normal und bestätigt die Resultate von Wunder, siehe Abb. 5 und Tabelle 5.

In der Technik wird oft angenommen, daß die Abkühlungsgeschwindigkeit von Einfluß auf die Festigkeit von Aluminium ist, und zwar auch für Erhitzungstemperaturen von 300 bis  $350^\circ$ . Aus Tabelle 2 und Abb. 3 sieht man, daß das für Temperaturen über ca.  $350^\circ$  zutrifft. Beim Abschrecken wird hierbei ein Teil von Verunreinigungen im Mischkristall erhalten, der bei langsamer Abkühlung sich ausgeschieden hätte. Für tiefere Temperaturen war ein derartiger Einfluß nicht zu erwarten. Um diese Annahme zu prüfen, wurde eine Vergleichsserie nach je einer einstündigen Erhitzung auf verschiedene Temperaturen abgeschreckt und die Festigkeit gemessen. Die Resultate

Tabelle 5. Einfluß der Erhitzung auf verschiedene Temperaturen mit nachfolgender langsamer Abkühlung oder Abschreckung auf die Festigkeit des kaltgereckten Aluminiums. Draht von 1 mm Durchmesser.

Festigkeit in kg/mm <sup>2</sup>								Erhitzungs- temperatur in ° C.
1 St. bei verschiedenen Temperaturen gegläht und langsam abgekühlt				1 St. bei verschiedenen Temperaturen gegläht und in Wasser abgeschreckt				
1.	2.	3.	Mittelwert	1.	2.	3.	Mittelwert	
25,7	26,0		25,9				25,9	—
23,2	23,4	23,4	23,3	20,8	20,3	21,6	20,9	200
15,2	14,3	14,6	14,7	12,1	13,4	11,7	12,4	250
10,4	10,4	10,4	10,4	10,9	10,6	10,6	10,7	300
10,2	10,2	10,4	10,3	10,6	10,6	10,6	10,6	350
10,2	10,4	10,4	10,3	11,9	11,9	11,7	11,8	400
10,6	10,6	10,6	10,6					450
10,6	10,6	10,4	10,5	11,8	12,1	11,8	11,9	500
9,2	9,6	10,4	9,7					550
8,4	9,6	7,8	8,6					600

sind in Tabelle 5 und in Abb. 5 wiedergegeben. Man sieht, daß die Festigkeitswerte der abgeschreckten Drähte etwas höher liegen, daß jedoch die Abweichungen innerhalb der Fehlergrenzen liegen und deshalb wohl zufälliger Natur sind. Es trifft also nicht zu, daß die Festigkeit des bei 300 bis 350° geglähten, 99,3 proz. Aluminiums sich durch Abschrecken von diesen Temperaturen erhöhen läßt.

Auch die Leitfähigkeit wird durch die Abkühlungsgeschwindigkeit in diesem Temperaturintervall praktisch nicht beeinflusst (siehe Tabelle 4).

Man sieht, wie kompliziert der Einfluß der Erhitzung auf das elektrische Leitvermögen von Aluminium ist und wie mannigfaltig die Resultate sein können, je nach dem Zustand des Ausgangsmaterials und je nach den Versuchsbedingungen. In der Praxis wird meistens keine der experimentell möglichen Grenzkurven *ma b q d*

und *cn b p e* Abb. 4 erreicht werden, vielmehr wird man schwankende Zwischenwerte erhalten. Es ist zu erwähnen, daß alle bisher betrachteten Kurven für eine Erhitzungsdauer von einer Stunde gelten. Für andere Erhitzungsdauern werden entsprechende Verschiebungen eintreten, und insbesondere wird bei längeren Erhitzungsdauern der den beiden Kurven gemeinsame Punkt *b* zu tieferen Temperaturen herabrücken, bei denen innerhalb der betreffenden Erhitzungszeit noch das Phasengleichgewicht praktisch erreicht wird.

Die maximale Erhöhung der Leitfähigkeit beträgt nach dem Erhitzen ca. 2,9 Einheiten, wovon 1,4 auf den Zerfall der übersättigten Mischkristalle und 1,5 auf die reine Rekristallisation zurückzuführen ist.

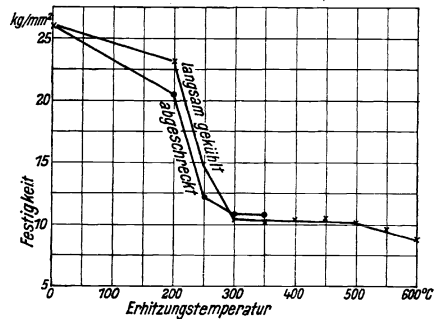


Abb. 5. Einfluß der Abkühlungsgeschwindigkeit auf die Festigkeit des angelassenen Aluminiums.

## IV.

In der Elektrotechnik wird vielfach ein Aluminium verlangt, das eine möglichst hohe elektrische Leitfähigkeit mit einer größeren Festigkeit verbindet. Versucht man auf Grund der bisher beschriebenen Betrachtungen die elektrische Leitfähigkeit zu erhöhen, so kommt man zu folgenden Ergebnissen.

Eine thermische Behandlung, die das Material noch nicht wesentlich entfestigen darf, muß unterhalb der Temperaturen des rapiden Festigkeitsabfalles erfolgen. Der schnelle Festigkeitsabfall schwankt erfahrungsgemäß sowohl in seinem Charakter (Steilheit des Abfalles) als auch in der Temperatur, bei der er beginnt, bis zu einem gewissen Maße von Stück zu Stück. Wenn man hierzu noch die unvermeidliche Unsicherheit der Temperatureinstellung bei einer technischen Glühung berücksichtigt, so ergibt sich, daß man beim Erhitzen in dem Intervall des schnellen Festigkeitsabfalles zu außerordentlich schwankenden Festigkeitswerten gelangen kann. Die Erhitzung muß also unterhalb etwa 175° erfolgen. Hierbei übersteigt aber die Leitfähigkeitszunahme nicht etwa 3% nach den Messungen von Gewecke (auch nach Wunder kann man in Anbetracht des steilen Verlaufes seiner Leitfähigkeitskurve in diesem Temperaturgebiet nicht mit Sicherheit mit höheren Werten rechnen), die Leitfähigkeit wird also nur um eine Einheit zu steigern sein.

Auf Grund der Erfahrungen mit anderen Metallen müßte der andere Weg, die Leitfähigkeit durch Erhitzung auf ca. 350° durch Herstellung des Phasengleichgewichts auf das Maximum zu bringen, und das Material danach durch Kaltrecken zu verfestigen, infolge der Erniedrigung der Leitfähigkeit beim Kaltrecken zweifelhaft erscheinen. Das Aluminium verhält sich jedoch in dieser Beziehung anders, als z. B. das Kupfer. Eine einmal erreichte hohe Leitfähigkeit wird durch nachträglichen Kaltrecken nicht wieder nennenswert erniedrigt, wie man aus den folgenden Versuchen ersieht.

Ein Draht von 2 mm Durchmesser wurde durch einstündige Erhitzung auf 350° auf die Leitfähigkeit 35,7 gebracht und darauf unter ständiger Verfolgung der Leitfähigkeit und Festigkeit bis auf den Durchmesser 0,5 mm heruntergezogen. Die Resultate finden sich in Tabelle 6.

Tabelle 6. Einfluß des Kaltziehens auf die elektrische Leitfähigkeit und Festigkeit des bei 350° C ausgeglühten Aluminiums.

Behandlung des Materials	Elektrische Leitfähigkeit bei 20° C in Einheiten $\frac{m}{\Omega \text{ mm}^2}$	Festigkeit in kg/mm <sup>2</sup>
Al-Draht, 2 mm $\varnothing$ , 1 St. bei 350° C geglüht, langsam gekühlt	35,7	10,6
Dann bis 1,8 mm $\varnothing$ kaltgezogen . . . . .	35,8	12,0
„ „ 1,6 „ $\varnothing$ „ . . . . .	35,9	14,7
„ „ 1,4 „ $\varnothing$ „ . . . . .	36,0	15,6
„ „ 1,2 „ $\varnothing$ „ . . . . .	35,9	14,3
„ „ 1,0 „ $\varnothing$ „ . . . . .	35,8	17,8
„ „ 0,75 „ $\varnothing$ „ . . . . .	36,1	19,0
„ „ 0,50 „ $\varnothing$ „ . . . . .	35,7	18,5

Man sieht: Trotz einer Querschnittsabnahme beim Kaltrecken um ca. 94% hat die Leitfähigkeit überraschenderweise den ursprünglichen maximalen Wert 35,7 behalten. Bei dieser Kaltreckung ist eine Erhöhung der Zerreißfestigkeit um ca. 80% eingetreten, die jedoch ohne jeden Einfluß auf die Leitfähigkeit geblieben ist.

Bei einer Wiederholung dieses Versuches wurde ein Kokillenguß von 20 mm Durchmesser auf 10 mm heruntergewalzt und eine Stunde auf 350° erhitzt. Hierauf wurde er erst auf 4 mm kalt heruntergewalzt und dann kalt gezogen. Beim Durchmesser 2,5 mm war die Leitfähigkeit 36 bei einer Festigkeit von 16,0 kg pro mm<sup>2</sup>, beim Durchmesser 1,0 mm 35,7 bei 19,1 kg pro mm<sup>2</sup>. Trotz einer Querschnittabnahme von 99% ist die Leitfähigkeit auch hier nicht verändert worden.

Ähnliche Resultate wurden bei flach gewalztem Blech erhalten. Eine gegossene Platte von 8 mm Dicke wurde auf 2 mm flach heruntergewalzt, eine Stunde auf 350° erhitzt und weiter kaltgewalzt. Ihre Leitfähigkeiten sind aus der Tabelle 7 ersichtlich. Die maximale Leitfähigkeit blieb erhalten, wenn sie auch niedriger war, als bei den beschriebenen Versuchen mit Drähten.

Tabelle 7. Einfluß des Kaltflachwalzens auf die elektrische Leitfähigkeit und Festigkeit des bei 350° ausgeglühten Aluminiums.

Behandlung des Materials	Elektrische Leitfähigkeit bei 20° in Einheiten $\frac{m}{\Omega \text{ mm}^2}$	Festigkeit in kg/mm <sup>2</sup>
Al-Blech, 2 mm stark, 1 St. bei 350° geglüht, langsam gekühlt	34,5	
Dann bis 1,8 mm kalt flachgewalzt . . . . .	34,8	
„ „ 1,6 „ „ . . . . .	34,6	
„ „ 1,4 „ „ . . . . .	34,8	
„ „ 1,2 „ „ . . . . .	35,0	
„ „ 1,0 „ „ . . . . .	34,6	13,6

Tabelle 8. Einfluß des Kaltziehens auf die elektrische Leitfähigkeit und Festigkeit des vom Gußzustand ab kaltgereckten Aluminiums.

Behandlung des Materials	Elektrische Leitfähigkeit bei 20° in Einheiten $\frac{m}{\Omega \text{ mm}^2}$	Festigkeit in kg/qmm
Al-Kokillenguß, 20 mm $\varnothing$ , kaltgerecht bis 2 mm $\varnothing$ . . . . .	32,8	23,0
Dann bis 1,8 mm kaltgezogen . . . . .	32,7	23,6
„ „ 1,6 „ „ . . . . .	32,7	25,0
„ „ 1,4 „ „ . . . . .	32,9	27,0
„ „ 1,2 „ „ . . . . .	32,7	26,8
„ „ 1,0 „ „ . . . . .	32,7	27,9
„ „ 0,75 „ „ . . . . .	32,8	32,1
„ „ 0,50 „ „ . . . . .	33,4	35,0

Wird die Platte dahingegen im Gußzustande auf 350° erhitzt, so ist das ohne Einfluß auf die Leitfähigkeit in kaltgerecktem Zustande; sie sank beim Flachwalzen auf 32,2 bei einer Stärke von 1 mm, die Festigkeit erreichte hierbei den Wert von 18,7 kg pro mm<sup>2</sup>.

Tabelle 8 gibt zum Vergleich die Leitfähigkeits- und Festigkeitswerte eines vom Gußzustand aus kaltgereckten Drahtes von 2 bis 0,5 mm Durchmesser wieder. Wie man sieht, ändert sich hierbei die Leitfähigkeit ebenfalls nicht, während die Festigkeit noch sehr erheblich ansteigt.

Zwischen der Verfestigung und der Leitfähigkeitsabnahme des Aluminiums besteht also allgemein kein eindeutiger Zusammenhang. Es gibt Verfestigungsvorgänge, die ohne eine Änderung der elektrischen Leitfähigkeit verlaufen. T a m m a n n hat bereits an Hand der Versuche von Gewecke und Addicks darauf hingewiesen, daß die Leitfähigkeitsabnahme nach einer Querschnittsabnahme von ca. 70% durch Kaltrecken auf-

hört<sup>1)</sup>. Da die Festigkeitswerte der Drähte hierbei nicht gemessen worden waren, ergab sich hieraus keine Beziehung zur Verfestigung. Unsere Tabelle bestätigt das und zeigt, daß die Festigkeit trotzdem noch erheblich ansteigen kann. Bei dem auf 350° erhitzten Material liegt jedoch insofern ein ganz neuer Fall vor, als das Metall hierbei mechanisch vollkommen entfestigt worden war. Sachs<sup>2)</sup> weist darauf hin, daß die Angaben über den Einfluß der Kaltreckung auf die Leitfähigkeit von Metallen sich vielfach widersprechen, und daß das ganze Gebiet sehr der Klärung bedarf.

Tammann führt das Konstantwerden der Leitfähigkeit bei fortgesetzter Kaltreckung, fußend auf seiner Annahme von der Richtungsabhängigkeit der Leitfähigkeit in Metallkristall, auf die Entwicklung einer bevorzugten Orientierung, also der Faserstruktur in der heutigen Terminologie zurück. Wenn diese Faserstruktur sich hergestellt hat, besteht bei der Fortsetzung derselben Kaltreckungsart keine Veranlassung zu einer weiteren Leitfähigkeitsabnahme. Es konnte jedoch gezeigt werden, daß in kaltgewalzten Blechen aus Aluminium und Kupfer, trotz der beobachteten Herabsetzung der Leitfähigkeit, keine Richtungsabhängigkeit derselben vorhanden war<sup>3)</sup>. Eine einfache Beziehung zwischen der Faserstruktur und der Leitfähigkeitsabnahme ist also nicht vorhanden.

Weitere Versuche zur Klärung dieser Fragen, auch an anderen Metallen, sind eingeleitet.

## V.

Das in der Technik verwendete Aluminium ist oft erheblich weniger rein als das von uns bisher benutzte. Aus diesem Grunde erschien es wichtig, auch das Verhalten der Leitfähigkeit bei stärker verunreinigtem Aluminium zu untersuchen. Zu diesem Zweck wurden aus dem 99,3proz. Aluminium durch Zusatz von 1% Eisen resp. 1% Silizium zwei neue Legierungen hergestellt. Die Analysen der erhaltenen Legierungen waren: Leg. 1: 1,30% Fe; Leg. 2: 1,02% Si. Es scheint, daß der analytisch bestimmte Siliziumgehalt etwas zu niedrig ist.

Diese Legierungen wurden in ähnlicher Weise wie das reine Aluminium behandelt, d. h. sie wurden in Kokillen von 20 mm Durchmesser vergossen, bis zum Durchmesser von 4 mm kalt gewalzt und weiter bis auf das Endmaß kalt gezogen. Die Kaltreckung dieser Legierungen war natürlich schwieriger als die des reinen Aluminiums, insbesondere rissen die Drähte beim Ziehen öfters. Es gelang jedoch, Draht im Durchmesser von 1 mm in einer für die Untersuchung genügenden Menge herzustellen.

Es sei erwähnt, daß sich das mit Silizium verunreinigte Aluminium schlechter verarbeiten läßt, als das mit Eisen versetzte.

Die kaltgereckten Drähte wurden nun erhitzt und zwar auf drei verschiedene Arten. Erstens wurden sie durch eine einstündige Erhitzung, beim eisenhaltigen Material auf 600° und beim siliziumhaltigen Material auf 550°, weitgehend rekristallisiert. Eine Erhitzung des siliziumhaltigen Materials auf höhere Temperaturen als 550° erwies sich wegen der Nähe des eutektischen Punktes als unzuverlässig. Die Legierungen wurden von dieser Temperatur abgeschreckt, auf verschiedene Tempe-

<sup>1)</sup> G. Tammann: Metallographie S. 147. 3. Auflage.

<sup>2)</sup> G. Sachs: Grundbegriffe der mechanischen Technologie der Metalle. Akad. Verlagsgesellschaft Leipzig 1925.

<sup>3)</sup> G. Masing und M. Polanyi. Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften II (1923), S. 177.

peraturen je eine Stunde erhitzt und wiederum von diesen Temperaturen im Wasser abgeschreckt. Auf diese Weise wurde, wie auch beim reineren Aluminium, der Einfluß der Rekristallisation eliminiert und die Wirkung der Verschiebung der Phasengleichgewichte allein auf die Leitfähigkeit studiert.

Zweitens wurde das kaltgereckte Material auf verschiedene Temperaturen während je einer Stunde erhitzt und langsam während ca. 10 St. abgekühlt, und drittens wurde es nach einer solchen Erhitzung abgeschreckt.

Tabelle 9.

Einfluß verschiedener Wärmebehandlung auf die elektrische Leitfähigkeit des kaltgereckten Aluminiums mit 1% Fe-Zusatz. Elektrische Leitfähigkeit in  $\frac{m}{\Omega \text{ mm}^2}$  bei 20°C.

Glüh-temperatur in °	1 St. auf verschiedene Temperaturen erhitzt und langsam abgekühlt				1 St. auf verschiedene Temperaturen erhitzt und in Wasser abgeschreckt				zunächst durch Glühen 1 St. bis 600° und Abschrecken rekristallisiert, dann 1 St. erhitzt und abgeschreckt			
	1.	2.	3.	Mittelwert	1.	2.	3.	Mittelwert	1.	2.	3.	Mittelwert
				30,50				30,50				30,50
200	32,23	32,16	32,21	32,20	32,16	32,13	32,09	32,13				
250	32,92	32,97	32,80	32,90	33,07	33,04	32,90	33,00	32,45	32,21		32,33
300	33,77	33,87	33,64	33,76	33,52	33,59	33,82	33,64	33,51	33,41		33,46
350	34,07	33,99	33,97	34,01	33,69	33,53	33,53	33,58	33,41	33,17		33,29
400	33,93	34,10	34,08	34,04	33,48	33,33	33,38	33,40	33,38	33,17		33,28
450	33,91	33,97	34,20	34,03	33,22	33,30	33,07	33,20	33,65	33,52		33,59
500	34,07	33,89	34,06	34,01	33,12	33,07	32,95	33,04	32,83	33,29		33,06
550	34,05	34,01	34,00	34,02	32,47	32,50	32,52	32,50				
600	33,83	34,11	34,09	34,01	32,38	32,40	32,38	32,39	32,38	32,40		32,38

Für das mit Eisen verunreinigte Aluminium finden sich die Resultate in der Tabelle 9 und in der Abb. 6. Die Leitfähigkeitswerte unterhalb der Erhitzungstemperaturen 200° sind interpoliert und deshalb unsicher (Anfang der Kurve). Die Kreuze geben die Leitfähigkeitswerte für langsam gekühlte, die Punkte für abgeschreckte Drähte. Die Kreise beziehen sich auf völlig rekristallisierte und darauf von verschiedenen Temperaturen abgeschreckte Drähte.

Die Kurve der Leitfähigkeiten der auf verschiedene Temperaturen erhitzten und langsam abgekühlten Drähte zeigt eine ganz andere Gestalt, als bei Reinaluminium. Die Leitfähigkeit steigt zunächst bis 350° auf 34 an und behält auch nach Erhitzung auf höhere Temperaturen diesen Wert.

Hieraus ist zweierlei zu schließen. Erstens tritt bei diesen Legierungen auch bis zu den höchsten Erhitzungstemperaturen von 600° noch keine Erniedrigung der Leitfähigkeit durch grobe Rekristallisation ein, und zweitens erfolgt die Einstellung des Löslichkeitsgleichgewichtes der gesättigten Mischkristalle bei diesen Legierungen so schnell, daß bei den gewählten Abkühlungsgeschwindigkeiten (Abkühlungszeit im Ofen 10 St.), das Gleichgewicht voll erreicht

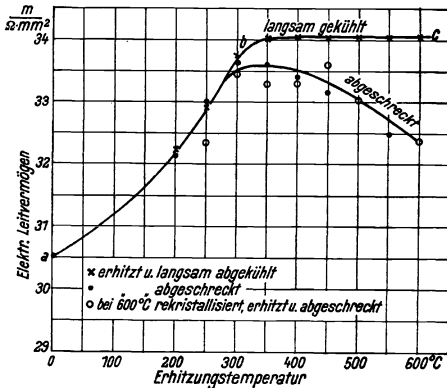


Abb. 6. Einfluß der Erhitzung auf das elektrische Leitvermögen des Aluminiums mit 1% Si-Zusatz bei 20°.

wird, wenigstens herab bis zu 350°. Die Kurve gibt also oberhalb 350° nur den Einfluß der Rekristallisation wieder, während bei tieferen Temperaturen zu diesem noch eine Verschiebung durch Ausscheidung von Verunreinigungen aus übersättigten Mischkristallen hinzukommen kann.

Entsprechend der Tatsache, daß die Rekristallisation allein oberhalb 350° keine Änderung der Leitfähigkeit mehr hervorruft, muß sie auch ohne Einfluß auf die Leitfähigkeiten der in diesem Temperaturbereich abgeschreckten Legierungen sein. Demgemäß finden sich zwischen den Leitfähigkeitswerten des vorher bei 600° völlig rekristallisierten und nachher von verschiedenen Temperaturen abgeschreckten Materials sowie desjenigen, das nicht vorher auf 600° erhitzt worden war, keine Unterschiede, die die Fehlergrenzen überschreiten. Die Werte des völlig rekristallisierten Materials sind unregelmäßiger, zeigen jedoch keine systematischen Abweichungen von den anderen. Dementsprechend können diese beiden Versuchsserien gemeinsam diskutiert werden.

Man sieht, daß die Verschiebung des inneren Gleichgewichtes mit der Temperatur eine gleichmäßige Steigerung der Leitfähigkeit von der Abschrecktemperatur 600° bis zu ca. 300° bewirkt. Diese Steigerung ist, wie auch bei reinerem Aluminium, zweifellos darauf zurückzuführen, daß das Aluminium bei höheren Temperaturen mehr Verunreinigungen in fester Lösung enthält als bei tiefen. Mit dem Sinken der Abschrecktemperatur unterhalb 300° fällt die Leitfähigkeit wieder schnell, was ebenso wie im Fall des Reinaluminiums darauf zurückzuführen ist, daß bei diesen Temperaturen das Gleichgewicht nur träge erreicht wird. Bei 200° findet während der Erhitzungszeit von einer Stunde offenbar überhaupt noch keine Veränderung im Material statt, da die erreichte Leitfähigkeit innerhalb der Fehlergrenze mit der des bei 600° abgeschreckten Materials übereinstimmt.

Es ist zu beachten, daß die Differenz zwischen der höchsten und niedrigsten erreichten Leitfähigkeit ca. 1,25 bis 1,5 Einheiten beträgt. Diese Differenz stimmt mit der bei reinerem Aluminium festgestellten (1,4 Einheiten) überein. Die Erhöhung des Eisengehaltes hat also die Abhängigkeit der Leitfähigkeit des rekristallisierten Aluminiums von der Abschrecktemperatur nicht beeinflußt. Auch der absoluten Größe nach stimmen die Leitfähigkeiten des völlig rekristallisierten und abgeschreckten Materials in beiden Fällen überein.

Hieraus kann mit großer Wahrscheinlichkeit der Schluß gezogen werden, daß die Löslichkeitsgrenze für Eisen bei dem reineren Aluminium bereits überschritten oder erreicht worden ist und daß die weiteren zugesetzten Eisenmengen im Material restlos als heterogene Beimengungen vorliegen.

Man sieht, daß, während man bei reinem Aluminium die Leitfähigkeit durch zu hohe Erhitzung erheblich erniedrigen kann, das beim Eisen nicht der Fall ist, ja, im Fall der langsamen Abkühlung ist nach einer Erhitzung auf 550 bis 600° die Leitfähigkeit des eisenhaltigen Materials besser als die des reinen Aluminiums. Der optimale Wert der Leitfähigkeit wird durch Zusatz von 1% Eisen um ca. 1,6 Einheiten herabgesetzt.

Ein wesentlich anderes Bild ergibt sich bei dem mit Silizium verunreinigten Aluminium, siehe Tabelle 10 und Abb. 7. Auch hier findet man zwar zwischen den Leitfähigkeitswerten des von verschiedenen Temperaturen abgeschreckten Materials und eines solchen, das vorher bei 550° rekristallisiert worden war, im Temperaturbereich oberhalb 300° keine systematischen Abweichungen, so daß der Schluß be-



Tabelle 10.

Einfluß verschiedener Wärmebehandlung auf die elektrische Leitfähigkeit des kaltgereckten Aluminiums mit 1% Si-Zusatz. Elektrische Leitfähigkeit in  $\frac{m}{\Omega mm^2}$  bei 20°C.

Glüh-temperatur in °C	1 St. auf verschiedene Temperaturen erhitzt und langsam gekühlt				1 St. auf verschiedene Temperaturen erhitzt und in Wasser abgeschreckt				Zunächst durch Glühen 1 St. bei 550°C und Abschrecken rekristallisiert, dann 1 St. erhitzt und abgeschreckt			
	1.	2.	3.	Mittelwert	1.	2.	3.	Mittelwert	1.	2.	3.	Mittelwert
				30,76				30,76				30,76
200	33,95	34,15	33,57	33,89	33,54	33,39	33,87	33,60				
250	34,34	34,19	34,45	34,33	34,01	33,70	34,47	34,06	32,45	32,75		32,60
									33,77 <sup>1)</sup>	33,92 <sup>1)</sup>		33,85 <sup>1)</sup>
300	34,20	34,45	34,78	34,48	34,45	34,60	34,36	34,47	34,04	34,02		34,03
350	34,45	34,86	34,81	34,71	34,00	34,08		34,04	34,25	34,22		34,24
400	34,50	34,65	34,53	34,56	33,86	33,99	34,10	33,98	33,10	33,08		33,09
450	34,37	34,15	34,39	34,30	31,87	31,97	31,78	31,88	32,09	32,08		32,09
500	33,61	33,69	33,02	33,44	30,41	36,64	30,57	30,54	30,24	30,22		30,23
	(34,22)	(34,12)		(34,17)								
550	31,74	32,43	32,16	32,11	29,80	29,86	29,90	29,86	30,32	30,20		30,26
	(33,95)	(34,21)	(33,95)	(34,04)								

( ) Die eingeklammerten Werte sind nach 3 St. Nachglühen bei 400° erhalten.  
<sup>1)</sup> 3 St. bei 250° nachgeglüht.

rechtigt ist, daß die beiden Kurven zusammenfallen und die grobe Rekristallisation an und für sich keine Erniedrigung der Leitfähigkeit bewirkt. Der Umstand, daß der Leitfähigkeitswert des rekristallisierten Materials nach einer Abschreckung bei 250° tiefer bleibt, als bei nicht völlig rekristallisiertem Material, ist vermutlich auf eine verzögerte Einstellung des Phasengleichgewichtes beim Ersteren zurückzuführen. Diese Überlegung wurde dadurch bestätigt, daß man nach einer weiteren Erhitzung während 3 St. auf 250° eine wesentliche Erhöhung der Leitfähigkeit bei den völlig rekristallisierten Drähten erhielt (Doppelkreis in Abb. 7), während die Leitfähigkeit der anderen sich nicht merklich verschob.

Man sieht aus Abb. 7, daß der Einfluß der Verschiebung des Phasengleichgewichtes auf die Leitfähigkeit bei den siliziumhaltigen Legierungen ein sehr viel größerer ist, als bei den eisenhaltigen, und die Größenordnung von vier Einheiten erreicht. Daraus ergibt sich, daß das Silizium, wenigstens bei höheren Temperaturen, noch in wesentlich größeren Mengen in fester Lösung aufgenommen werden kann, als es im reinen Aluminium vorhanden war. Bei Temperaturerniedrigung wird ein Teil des Siliziums ausgeschieden. Seine Löslichkeit im kristallisierten Aluminium muß also eine erhebliche Temperaturabhängigkeit zeigen.

Die Leitfähigkeitskurven der langsam gekühlten Legierungen zeigen ein wesentlich anderes Bild als beim eisenhaltigen Material, nach Erhitzung über 350° sinken die

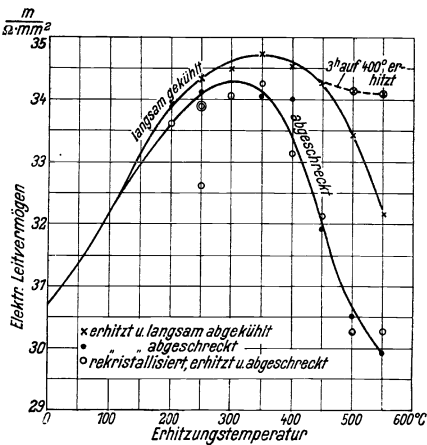


Abb. 7. Einfluß der Erhitzung auf das elektrische Leitvermögen des Aluminiums mit 1% Si-Zusatz bei 20°.

Leitfähigkeiten erheblich. Da nach dem Verhalten der abgeschreckten Drähte anzunehmen war, daß die grobe Rekristallisation keinen Einfluß auf die Leitfähigkeit dieses Materials hat, so war das Sinken der Leitfähigkeit bei langsamer Abkühlung von hohen Temperaturen nur dadurch zu erklären, daß die Abkühlungsgeschwindigkeit, die ebenso groß wie bei den eisenhaltigen Legierungen gewesen ist, in diesem Fall zu groß war, so daß die Einstellung des Löslichkeitsgleichgewichtes ihr nicht zu folgen vermochte. Dieser Schluß wurde durch einen Kontrollversuch bestätigt, bei welchem die auf 500° und 550° erhitzt gewesenen Drähte, die die angegebene niedrige Leitfähigkeit von 33,02 resp. 32,11 hatten, während 3 Stunden auf 400° erhitzt wurden. Danach hatten sie die Leitfähigkeiten 34,17 resp. 34,04 (in Abb. 7 durch Kreise mit Kreuzen angedeutet). Damit ist die Trägheit der Einstellung des Gleichgewichtes in den siliziumhaltigen Legierungen erwiesen.

Tabelle 11. Einfluß der Erhitzung auf verschiedene Temperaturen mit nachfolgender langsamer Abkühlung oder Abschreckung auf die Festigkeit von kaltgerecktem Aluminium mit 1% Fe- oder 1% Si-Zusatz. (Festigkeit in kg/mm<sup>2</sup>.)

Erhitzungs- temperatur in °	Aluminium mit 1% Fe-Zusatz						Aluminium mit 1% Si-Zusatz					
	bei langsamer Abkühlung			bei Abschreckung			bei langsamer Abkühlung			bei Abschreckung		
	kg/mm <sup>2</sup>	kg/mm <sup>2</sup>	Mittel	kg/mm <sup>2</sup>	kg/mm <sup>2</sup>	Mittel	kg/mm <sup>2</sup>	kg/mm <sup>2</sup>	Mittel	kg/mm <sup>2</sup>	kg/mm <sup>2</sup>	Mittel
200	31,9	32,0	32,0	27,5	27,5	27,5	22,5	22,5	22,5	23,2	22,8	23,0
250	19,9	20,8	20,4	21,0	20,4	20,7	16,3	17,2	16,8	15,9	18,6	17,3
300	14,4	13,7	14,1	15,4	15,2	15,3	13,2	12,3	12,8	12,9	13,5	13,7
350	13,2	12,8	13,0	13,9	13,7	13,8	11,5	11,5	11,5	12,6	12,0	12,3
400	13,0	13,1	13,1	13,7	13,8	13,8	11,5	11,5	11,5	12,2	12,6	12,4
450	12,3	12,1	12,2	13,3	13,3	13,3	11,7	11,8	11,8	13,8	13,3	13,6
500	12,0	12,1	12,1	12,8	13,3	13,1	11,5	—	11,5	12,7	14,3	13,5
550	10,5	10,1	10,3	13,3	13,3	13,3	13,3	11,5	11,5	13,6	14,0	13,8
600	10,6	10,6	10,6	13,2	13,0	13,1	—	—	—	—	—	—

In der Tabelle 11 und in den Abb. 8 und 9 ist der Einfluß der Erhitzung auf die Festigkeit der eisen- und der siliziumhaltigen Legierungen wiedergegeben. Im

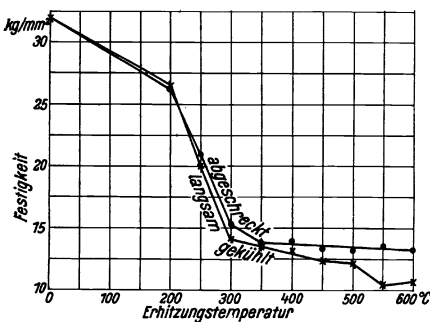


Abb. 8. Einfluß der Erhitzung auf die Festigkeit des Al mit 1% Fe-Zusatz.

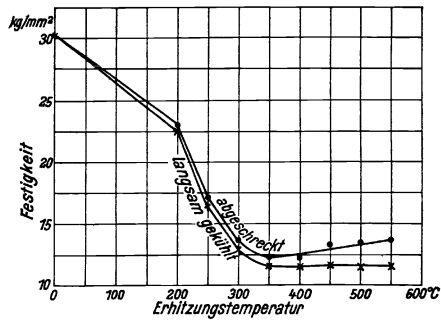


Abb. 9. Einfluß der Erhitzung auf die Festigkeit des Al mit 1% Si-Zusatz.

großen und ganzen entspricht ihr Verlauf den Erwartungen. Nach Erhitzung auf höhere Temperaturen oberhalb 400° sind die Festigkeiten der abgeschreckten Legierungen nicht unerheblich größer als die der langsam gekühlten, aber auch bei Er-

hitzungstemperaturen auf 300 bis 400° ist ein kleinerer Unterschied in derselben Richtung zu bemerken, im Gegensatz zum Verhalten des reinen Aluminiums, wie wir oben gesehen haben. Dieses abweichende Verhalten hängt vermutlich mit der langsameren Einstellung des Gleichgewichtes in diesen Legierungen zusammen. Der Verlauf der Festigkeiten der langsam gekühlten Legierungen wird durch die Wechselwirkung zweier Faktoren, nämlich der Rekristallisation und der Verschiebung des Phasengleichgewichtes, bestimmt. Ihre genaue Diskussion ist auf Grund des vorliegenden Materials nicht möglich.

Auch bei dem mit Eisen und mit Silizium verunreinigten Aluminium wurde in einer unabhängigen Versuchsreihe der Einfluß einer Zwischenglühung und des Weiterziehens verfolgt. Zu diesem Zweck wurden Drähte von 2,5 mm Durchmesser eine Stunde auf 350° erhitzt, langsam gekühlt und weiter bis auf 1 mm gezogen. Die Leit-

Tabelle 12. Einfluß des Kaltziehens auf die elektrische Leitfähigkeit des bei 350° ausgeglühten und langsam abgekühlten Aluminiums mit 1% Fe-Zusatz bzw. 1% Si-Zusatz.

Behandlung des Materials	Elektrische Leitfähigkeit bei 20° in Einheiten $\frac{m}{\Omega \text{ mm}^2}$	
	Al + 1% Fe-Zusatz	Al + 1% Si-Zusatz
2,5 mm Draht, 1 St. bei 350° ausgeglüht, langsam gekühlt . . . . .	34,0	34,3
Dann bis 1,5 mm kaltgezogen . . . . .	33,5	34,0
„ „ 1,0 „ „ . . . . .	33,7	34,2
Unausgeglüht bis 2,5 mm kaltgereckt . . . . .	30,5	30,7

fähigkeitswerte sind in Tabelle 12 angegeben. Man sieht, daß der erreichte Maximalwert beim Weiterziehen annähernd erhalten bleibt.

Welche Verunreinigung, das Eisen oder das Silizium, im Aluminium mit 99,3% Reingehalt für die Änderung der Leitfähigkeit durch Verschiebung der Löslichkeitsgrenze bestimmend ist, läßt sich aus den mitgeteilten Versuchen noch nicht mit voller Sicherheit entscheiden. Es scheint jedoch, wie bereits erwähnt, in erster Linie das Eisen zu sein, während die Löslichkeitsgrenzen des Siliziums höher liegen und sein Einfluß deshalb erst bei höherem Siliziumgehalt, dann aber sehr kräftig, zum Ausdruck kommt.

### Zusammenfassung.

1. Es wurde der Einfluß der Erhitzung auf verschiedene Temperaturen auf das elektrische Leitvermögen des technischen, bei 600° rekristallisierten Aluminiums mit 99,3% Reingehalt untersucht. Nach einer Erhitzung (und Abschreckung) auf 600° ist es um ca. 1,5 Einheiten geringer als nach einer Erhitzung auf 350°. Diese Änderungen rühren von den Änderungen der Sättigungsmengen der aluminiumreichen Mischkristalle mit Si und Fe.

2. Es wurden die Leitfähigkeitsänderungen des kaltgereckten Aluminiums von demselben Reinheitsgrade in Abhängigkeit von der Rekristallisationstemperatur untersucht und der Einfluß der reinen Rekristallisation von dem der Verunreinigungen (1) getrennt. Durch Rekristallisation allein stieg die Leitfähigkeit um etwa 1,7 Einheiten, durch Rekristallisation und Ausscheidung der Verunreinigungen zusammen bis um 3 Einheiten.

Die optimale Leitfähigkeit wurde nach einstündiger Erhitzung auf 300 bis 350° erreicht und betrug 35,5 bis 36,0.

3. Es wurde festgestellt, daß diese Leitfähigkeit bei nachträglicher weiterer Kaltreckung erhalten bleibt.

4. Es wurde unter denselben Bedingungen die Leitfähigkeit des 99,3%-Aluminiums mit Zusätzen von 1% Fe und 1% Si untersucht. Bei diesen Legierungen wird die Leitfähigkeit durch grobe Rekristallisation nicht erniedrigt. Der Einfluß des Fe und des Si auf die Leitfähigkeit des völlig rekristallisierten Materials läßt darauf schließen, daß die Grenze der Mischkristallbildung im 99,3%-Aluminium für Eisen bei ca. 0,4% bereits erreicht ist, beim Silizium dahingegen bedeutend höher liegt. Die unter 1. angegebenen Leitfähigkeitsänderungen sind also vermutlich in erster Linie auf das Fe zurückzuführen.

---

# Zur Konstitution der Kupfer-Aluminium-Legierungen.

Von Georg Masing und Lisel Koch.

Mit 4 Textabbildungen.

Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium Siemensstadt.

Eingegangen am 24. Januar 1925.

Das Konstitutionsdiagramm der Kupfer-Aluminium-Legierungen im Konzentrationsbereich von ca. 16 Atom-% bis ca. 67 Atom-% Aluminium ist recht kompliziert, wie man es an der Abb. 1 sieht, die die Konstitution der Kupfer-Aluminium-Legierungen nach der neuesten Untersuchung von Stockdale<sup>1)</sup> wiedergibt. Bei der Abkühlung vom flüssigen Zustande bildet sich eine Reihe von Kristallarten, die teils bei weiterer Abkühlung zerfallen, teils thermische Effekte zeigen, die auf Umwandlungen hinweisen und deren einwandfreie und sichere Deutung recht schwierig ist. Besonders erschwert wird die Untersuchung dadurch, daß das innere Gleichgewicht in den Legierungen dieser Zusammensetzung sich nur sehr langsam einstellt. Nach dem in Abb. 1 dargestellten Zustandsdiagramm existieren bei gewöhnlicher Temperatur folgende Kristallarten:

1. die festen Lösungen von Aluminium und Kupfer bis etwa 20 Atom-% Aluminium ( $\alpha$ -Mischkristalle).
2. die intermediäre Kristallart  $\delta$  mit ca. 32 bis 41 Atom-% Al,
3. die intermediäre Kristallart  $\eta$  mit ca. 43 bis 50 Atom-% Al,
4. die Verbindung  $\text{CuAl}_2$  mit 66,7 Atom-% Al.

Die Kristallart  $\beta$ , die bei höheren Temperaturen zwischen  $\alpha$  und  $\gamma$  aus der Schmelze entsteht, erleidet bei ca. 540° einen eutektoiden Zerfall.

Diese Ergebnisse von Stockdale bestätigen im wesentlichen das Zustandsdiagramm, das in Deutschland auf Grund der zusammenfassenden Kritik von Borne-

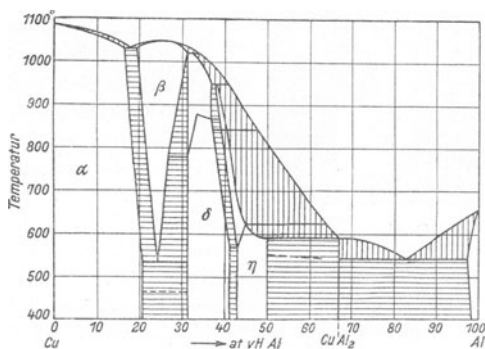


Abb. 1. Konstitutionsdiagramm der Cu-Al-Legierungen nach Stockdale.

Senkrecht gestrichelt = Schmelze und Kristalle.  
Wagrecht gestrichelt = Gemenge 2 Kristallarten.  
Hell = eine homogene Kristallart.

<sup>1)</sup> D. Stockdale: J. Inst. Metals Bd. 31, S. 275. 1924. In seinen Einzelheiten enthält das Diagramm von Stockdale manche theoretische Unkorrektheit. In Abb. 1 ist es in der von Stockdale gegebenen Form unverändert wiedergegeben worden.

mann<sup>1)</sup> schon seit 1909 ziemlich allgemein angenommen war. Die Untersuchung von Carpenter und Edwards<sup>2)</sup>, nach welcher statt der beiden Kristallarten  $\delta$  und  $\eta$  bei gewöhnlicher Temperatur nur eine Kristallart mit etwas abweichenden Grenzen bestehen sollte, wurde bis in der letzten Zeit in England noch vielfach für richtig gehalten, galt jedoch in Deutschland meistens als bereits durch spätere Konstitutionsuntersuchungen widerlegt.

Neuerdings haben E. Jette, G. Phragmen und A. Westgren<sup>3)</sup> die Kupfer-Aluminium-Legierungen bis zu 66,7 Atom-% des letzteren röntgenometrisch untersucht und auf diesem Wege festgestellt, daß zwischen den  $\alpha$ -Mischkristallen und der Verbindung  $\text{CuAl}_2$  nur noch ein neuer Gittertypus, in Übereinstimmung mit der Auffassung von Carpenter und Edwards, auftritt. Die Diskussion dieser Frage zwischen Westgren einerseits und Stockdale andererseits führte nicht zu einer Klärung, da Westgren auch auf Grund von neuen Stichversuchen seine Angaben nur bestätigen konnte.

$$v = 100$$



$\text{CuAl}_2$        $\alpha$

Abb. 2. Diffusionsschicht zwischen  $\text{CuAl}_2$  und den  $\alpha$ -Kristallen nach einer  $\frac{1}{4}$  stündigen Erhitzung auf  $400^\circ$ — $450^\circ$ .

Es erschien deshalb von Interesse, zur Klärung der strittigen Frage, ob zwischen den  $\alpha$ -Kristallen und  $\text{CuAl}_2$  eine oder zwei selbstständige Kristallarten bei gewöhnlicher Temperatur beständig sind, die Methode der Diffusion im festen Zustande anzuwenden, mit deren Hilfe Masing<sup>4)</sup> vor zwei Jahren die Stabilität der  $\beta$ -Kristalle im reinen Messing bis unterhalb  $200^\circ$  nachweisen konnte.

Ein Gußblockchen mit 8% Al und 92% Cu, das durch Tempern homogenisiert worden war, wurde zentral eingebohrt und in der Bohrung eine vorher hergestellte Legierung etwa von der Konzentration  $\text{CuAl}_2$  eingeschmolzen. Es stellte sich heraus, daß bei diesem Verfahren noch keine genügende Berührung zwischen den beiden Schichten eingetreten war, wahrscheinlich wegen der Oxydbildung des Aluminiums. Deshalb wurden später die Berührungsflächen zwischen der flüssigen Schmelze und den  $\alpha$ -Kristallen mit einem Messer gekratzt, um die Oxydhaut wenigstens lokal zu durchreißen, und die Schmelze dann erstarren lassen. Die Herstellung des Schliffes sofort nach der Abkühlung eines solchen Stückes war wegen des Herausbrechens der spröden Verbindung  $\text{CuAl}_2$  nicht möglich. Deshalb wurde das Stück erst eine Viertelstunde auf  $400$  bis  $450^\circ$  erhitzt und dann abgeschliffen. Die Berührungsschicht zwischen den beiden Teilen ist in diesem Zustande in Abb. 2 wiedergegeben. Man sieht rechts die homogenen, mit Zwillingen versehenen  $\alpha$ -Mischkristalle und links die graue Verbindung  $\text{CuAl}_2$ , die einen gewissen Überschuß an einer kupferreicheren weißen Kristallart aufweist, die wahrscheinlich während des Schmelzens aus den  $\alpha$ -Kristallen aufgenommen worden ist. Man sieht, daß bereits während dieser kurzen Erhitzung auf dem Bereich des Schliffbildes stellenweise eine Diffusion begonnen hat, die zur Ausbildung zweier dünner weißer Säume geführt hat, die mit den weißen Einschlüssen in der Verbindung  $\text{CuAl}_2$  anscheinend identisch sind. Zwischen den beiden Säumen

<sup>1)</sup> Bornemann: Die binären Metallegierungen. Halle a. d. S.: W. Knapp 1909.

<sup>2)</sup> Carpenter and Edwards: Proc. Inst. Mech. E. 1907. „Eight Report to the Alloys Research Committee.“

<sup>3)</sup> J. Inst. Metales Bd. 31, S. 193. 1924.

<sup>4)</sup> Wissenschaftl. Veröffentl. a. d. Siemens-Konzern Bd. 3, S. 240. 1923.

findet sich eine Strecke, wo keine Diffusion stattgefunden hat, vermutlich, weil die Berührung mangelhaft gewesen ist. Auf den Diffusionssäumen erkennt man noch deutlich die ursprüngliche Trennungslinie des äußeren und inneren Teiles und sieht, daß die weiße Kristallart über diese Linie hinweg in die  $\alpha$ -Kristalle eingedrungen ist.

Dasselbe Stück wurde nun während 8 Stunden auf 550 bis 575°, also unterhalb der Temperatur der beginnenden Schmelzung, erhitzt. Die Struktur der Übergangsschicht ist in Abb. 3 nach einer kombinierten Ätzung mit ammoniakalischem Kupfersulfat und mit verdünnter Natronlauge wiedergegeben. Diese doppelte Ätzung war notwendig, um alle in Frage kommenden Bestandteile klar hervortreten zu lassen. Durch die ammoniakalische Kupfersulfatlösung werden die  $\alpha$ -Kristalle angegriffen, während durch die Natronlauge in der Hauptsache die aluminiumreicheren Strukturbestandteile dunkel gefärbt werden. Auf Abb. 3 sieht man rechts die homogenen  $\alpha$ -Kristalle und ganz links die dunkel gefärbte, nicht ganz reine Verbindung  $\text{CuAl}_2$ . Dazwischen befinden sich im ganzen drei Säume von verschiedener Färbung. Der

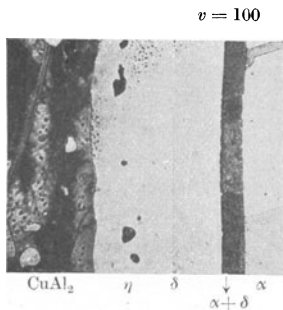


Abb. 3. Diffusionsschicht zwischen  $\text{CuAl}_2$  und  $\alpha$  nach einer 8 stündigen Erhitzung auf 550°—575°.

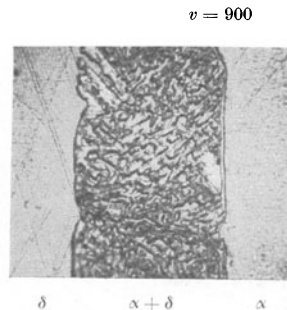


Abb. 4. Die  $(\alpha + \delta)$ -Schicht der Abb. 3 bei stärkerer Vergrößerung.

schmale, dunkle Saum, der an  $\alpha$  grenzt, ist das eutektoidische Zerfallsprodukt der  $\beta$ -Kristalle, wie seine Aufnahme bei stärkerer Vergrößerung in Abb. 4 zeigt. Die Bildung des  $\beta$ -Saumes ist nur dadurch ermöglicht worden, daß die Diffusionstemperatur oberhalb seiner Zerfallstemperatur lag. Das ist für die vorliegende Untersuchung ohne Bedeutung, ist aber geeignet, die Leistungsfähigkeit der Diffusionsmethode zu zeigen. Außerdem haben sich aber zwischen  $\alpha$  und der Verbindung  $\text{CuAl}_2$  noch zwei Kristallarten gebildet, die im Zusammenhang mit dem in Abb. 1 dargestellten Strukturdiagramm nur als  $\delta$  und  $\eta$  angesehen werden können.

Beim Diffusionsversuch ist also eine Synthese dieser beiden Kristallarten unterhalb 575° durchgeführt worden, und damit ist der Nachweis erbracht, daß die Annahme von Westgren, daß an der Stelle von  $\delta$  und  $\eta$  nur eine Kristallart anzunehmen ist, nicht richtig sein kann.

Bei näherer Überlegung findet man aber, daß zwischen dem Röntgenbefund von Westgren und den Ergebnissen der unmittelbaren metallographischen Strukturuntersuchung gar kein Widerspruch zu bestehen braucht. Es sind schon einige andere Fälle bekannt, in denen zwei Kristallarten mit gleichen oder ähnlichen Gittern miteinander keine ununterbrochene Reihe von Mischkristallen zu bilden vermögen. Das bekannteste Beispiel hierfür ist das Paar Kupfer-Silber, das nur in beschränktem

Umfange Mischkristalle bildet, während das Kupfer mit dem Gold, das ein mit Silber identisches Gitter hat, unbeschränkt mischbar ist. Es ist möglich, daß ein ähnlicher Fall auch bei den  $\delta$ - und  $\eta$ -Mischkristallen vorliegt. Dann ist es aber auch klar, daß die Röntgenanalyse diese beiden Kristallarten gar nicht unterscheiden kann.

Diese Schwäche haftet der Röntgenanalyse bei der Untersuchung von Kristallstrukturen allgemein an. Während man mit Tammann<sup>1)</sup> annehmen kann, daß die röntgenometrische Feststellung eines neuen Gittertypus als ein sicherer Nachweis einer Mischungslücke zu betrachten ist, folgt umgekehrt aus der Ähnlichkeit oder Identität der röntgenometrischen Strukturen noch nicht, daß zwischen den Kristallarten keine Mischungslücken vorliegen.

Es ist beabsichtigt, die Richtigkeit der ausgesprochenen Annahme über die  $\delta$ - und  $\eta$ -Mischkristalle durch unmittelbare Versuche zu prüfen.

#### Zusammenfassung.

Durch Diffusionsversuche wird nachgewiesen, daß in den Kupfer-Aluminium-Legierungen zwischen den kupferreichen  $\alpha$ -Mischkristallen und der Verbindung  $\text{CuAl}_2$ , abgesehen von  $\beta$ , noch zwei unabhängige Kristallarten  $\delta$  und  $\eta$  bestehen. Der scheinbare Widerspruch gegenüber dem Befund der Röntgenuntersuchung wird durch die Annahme erklärt, daß  $\delta$  und  $\eta$  ähnliche Gitterstrukturen haben.

---

<sup>1)</sup> S. z. B. G. Tammann, Lehrbuch der Metallographie, 3. Aufl. 1923.



# Zur Frage der umgekehrten Blockseigerung.

Von Georg Masing und Carl Haase.

Mit 5 Textabbildungen.

Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium Siemensstadt.

Eingegangen am 14. Januar 1925.

Bei der Erstarrung aus einer homogenen Schmelze zeigen die entstehenden Legierungen im festen Zustande oft räumliche Unterschiede der Zusammensetzung. Diese Erscheinung wird allgemein als „Seigerung“ bezeichnet und beruht darauf, daß die aus der Schmelze sich ausscheidenden Krystalle jeweils eine andere Zusammensetzung als die Schmelze haben. Die Blockseigerung, d. h. Unterschiede der Zusammensetzung in den verschiedenen makroskopischen Teilen des erstarrten Blockes, ist dann entweder darauf zurückzuführen, daß die zuerst sich ausscheidenden Kristalle entsprechend dem Unterschied ihres spezifischen Gewichtes gegenüber der Schmelze sich oben oder unten ansammeln oder darauf, daß die Kristallisation von gewissen bevorzugten Stellen der Schmelze, z. B. von den zuerst abgekühlten Oberflächen-teilen aus fortschreitet, und daß die Restschmelze nach den zu- letzt erstarrenden Teilen hin abfließt und auf diese Weise Unter- schiede der Zusammensetzung bewirkt. Ist die Legierung im Gleichgewichtszustande heterogen, d. h. besteht sie aus mehreren Kristallarten, so spielt der Unterschied im spez. Gewicht die entscheidende Rolle, während Seigerungserscheinungen der zwei- ten Art für diesen Fall nicht bekannt geworden sind. Dement- sprechend ist eine langsame Abkühlung für die Seigerung einer heterogenen Legierung günstig, weil hierbei die sich zuerst aus- scheidenden Kristalle Zeit haben, sich oben oder unten anzu- sammeln. Anders liegen die Verhältnisse bei den Legierungen, die im Gleichgewichtszustande aus homogenen Mischkristallen bestehen. Da der Dichteunterschied zwischen Schmelze und Kristalle in diesem Falle immer ziemlich gering ist, so spielt die erste Ursache der Blockseigerung nur eine untergeordnete Rolle. Die Blockseigerung entsteht hier in der Hauptsache dadurch, daß die Erstarrung eines Teiles innerhalb der eines anderen voreilt und ist also an größere Temperaturunterschiede innerhalb des erstarrenden Blockes und somit an eine schnelle Abkühlung gebunden. Die Erstarrung erfolgt in diesem Fall gemäß Abb. 1. Aus einer Schmelze von der Zu- sammensetzung  $m$  scheidet sich zuerst der an der Komponente  $A$  reichere Mischkri- stall  $N$  aus, der sich nachher im Verlaufe der Kristallisation durch Diffusion an der Komponente  $B$  anreichert, bis er im Gleichgewichtszustande die Zusammensetzung der Gesamtschmelze erreicht hat. Wird die Diffusion durch schnelle Abkühlung zum

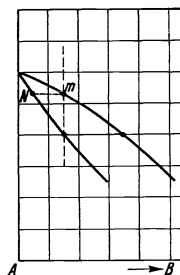


Abb. 1.  
Erstarrungsschema von  
Mischkristallen.

Teil unterbunden, so ist normalerweise zu erwarten, daß sich an der Oberfläche des Stückes entsprechend der Zusammensetzung der sich zuerst ausscheidenden Kristalle die Komponente *A* anreichern muß, während der Kern umgekehrt *B*-reicher sein muß. Demgegenüber wird jedoch in den meisten Fällen beobachtet, daß in Mischkristallen bei schneller Abkühlung entgegen der theoretischen Voraussicht an der Oberfläche eine Anreicherung an der Komponente *B* und im Innern an *A* stattfindet. Diese Erscheinung, die dem Verständnis große Schwierigkeiten macht, und die den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung bildet, wird nach dem Vorgange von Bauer und Arndt<sup>1)</sup> als umgekehrte Blockseigerung bezeichnet (Inverse Segregation auf englisch).

Die oben geschilderten bekannten Seigerungserscheinungen sind in der letzten Zeit insbesondere von Bauer und Arndt, und von Bauer<sup>1)</sup> eingehend erörtert worden. Es sei bemerkt, daß auch abgesehen von der umgekehrten Blockseigerung, hier noch manche theoretische Unklarheit besteht. So scheint es, daß beim Mischkristall im Fall der langsamen Kristallisation auch abgesehen von den geringen Unterschieden des spez. Gewichtes noch andere Momente das Hoch- oder Niedergehen der zuerst ausgeschiedenen Kristalle hindern. Andererseits scheint die geschilderte Seigerung bei schneller Abkühlung, die zunächst nicht nur beim Mischkristall, sondern auch

bei heterogenen Legierungen erwartet werden könnte, dort aus einem nicht ohne weiteres ersichtlichen Grunde nicht aufzutreten. Diese Fragen, die mit den Einzelheiten des Kristallisationsvorganges und mit dem Habitus der sich zuerst ausscheidenden Kristalle zusammenhängen, bedürfen noch der weiteren Klärung, wozu zur Zeit auch geeignetes Experimentiermaterial fehlt. Hier soll darauf nicht weiter eingegangen werden.

Die umgekehrte Blockseigerung ist schon öfter Gegenstand der Beobachtung gewesen, insbesondere haben sich englische Forscher in den

letzten Jahren in steigendem Maße eingehend mit ihr beschäftigt. Bauer und Arndt haben diese Frage zuerst systematisch untersucht und den Hauptbeitrag zu unserer Kenntnis dieser Erscheinung geliefert. In Tabelle 1 sind nach Bauer und Arndt diejenigen Legierungen zusammengestellt, bei denen umgekehrte Blockseigerung festgestellt worden ist. Zugleich ist der Betrag der Konzentrationsunterschiede im Kern und an der Oberfläche des Blockes angegeben. Es ist bisher gelungen, folgende Zusammenhänge der umgekehrten Blockseigerung mit anderen Erscheinungen festzustellen, die wir in der Hauptsache Bauer und Arndt verdanken, die jedoch zum Teil auch in der englischen Literatur anzutreffen sind.

1. Die umgekehrte Blockseigerung wird durch die Neigung zu einem Zonen-  
aufbau der Mischkristalle außerordentlich gefördert. Bauer und Arndt sprechen sogar davon, daß dieser Aufbau eine Voraussetzung für die umgekehrte Blockseigerung sei. Auf Grund unserer Erfahrungen scheint dieser Satz keine allgemeine Gültigkeit zu haben. An der großen Bedeutung der Zonenbildung für die umgekehrte Blockseigerung ist jedoch nicht zu zweifeln.

<sup>1)</sup> O. Bauer und H. Arndt: Z. Metallkunde Bd. 13, S. 497 und 559. 1921. — Ledebur-Bauer: Die Legierungen in ihrer Anwendung für gewerbliche Zwecke. 6. Aufl. Berlin: M. Krayn 1924.

Tabelle 1.

Legierung	Gehalt der zweiten Komponente in %		
	a außen	i innen	a-i in %
Cu-Sn	7,92	7,11	0,81
Mn-Cu	28,36	26,78	1,58
	83,83	84,28	0,45
	90,65	91,15	0,50
Al-Zn	17,76	16,1	1,66
Al-Cu	1,48	1,05	0,43
	3,47	2,79	0,68
Cu-Ag	88,2 ?	90,6	2,4 ?

Die Zonenbildung im Mischkristall entsteht bekanntlich durch Konzentrationsunterschiede infolge mangelhafter Diffusion. Ein mäßiges Diffusionsvermögen ist also eine Bedingung der umgekehrten Blockseigerung.

2. Abgesehen hiervon ist die Voraussetzung für die Ausbildung ausgeprägter Zonen natürlich das ursprüngliche Vorhandensein größerer Konzentrationsunterschiede zwischen Kristall und Schmelze. Diese Konzentrationsunterschiede nehmen mit wachsendem Temperaturintervall der Erstarrung zu. Damit kommen wir zur zweiten Gesetzmäßigkeit, daß ein großes Temperaturintervall der Erstarrung die umgekehrte Blockseigerung fördert.

3. Unabhängig hiervon betrachten Bauer und Arndt drittens die Neigung der Kristalle zum dendritisch gerichteten Wachstum als eine Voraussetzung für die umgekehrte Blockseigerung.

Außer diesen Gesetzmäßigkeiten hat Kühnel<sup>1)</sup> neuerdings darauf hingewiesen, daß die umgekehrte Blockseigerung anscheinend mit abnormen Volumenänderungen bei der Erstarrung der Legierungen ursächlich verknüpft ist.

Zur Erklärung der umgekehrten Blockseigerung sind außer einigen Ansätzen, die sich in der englischen Literatur finden, die aber nicht weiter diskutiert werden sollen, zwei Gesichtspunkte vorgeschlagen worden. Der eine stammt von Bauer und Arndt und besteht im wesentlichen darin, daß die sich beim Beginn der Kristallisation in der Nähe der Oberfläche ausbildenden Dendrite „über den ihnen zustehenden Raum hinaus“ in das Innere der Schmelze vordringen, und, da sie reicher an der Komponente *A* Abb. 1 als die Schmelze sind, damit der Außenschicht die Komponente *A* entziehen. In die dadurch entstehenden Hohlräume fließt die *B*-reiche Restschmelze nach, und es entsteht auf diese Weise in den Außenschichten eine Anreicherung an *B* und im Kern eine Anreicherung an *A*. Die physikalische Grundlage dieser Vorstellung erschien recht unklar. Es war insbesondere nicht einzusehen, wie das Vordringen der primären Dendrite „über den ihnen zustehenden“ Raum hinaus vorzustellen sei. Bauer und Arndt führen das auf starke Neigung der Kristalle zum gerichteten Wachsen zurück. Aber auch wenn diese wie Nadeln nach dem Innern vorschießen, so können sie nicht weiter vordringen, als es ihrer Sättigungstemperatur entspricht. Beim Wachsen entziehen sie die *A*-Komponente der Schmelze immer in der unmittelbaren Umgebung des wachsenden Teiles und es bleibt in diesem Zusammenhang unverständlich, wieso durch das Vordringen einer Dendritenspitze in das Innere des Gußblockes hinein eine Verarmung an der *A*-Komponente in der äußeren Schicht bewirkt werden soll.

Da somit eine klare Vorstellung für das Zustandekommen der umgekehrten Blockseigerung in der Art, wie Bauer und Arndt sie sich dachten, Schwierigkeiten machte, so hat einer der Verfasser<sup>2)</sup> den Versuch gemacht, zu ihrer Erklärung die Unterkühlung bei der schnellen Erstarrung heranzuziehen. Wie es ihm erst nachträglich bekannt wurde, hat bereits Johnson im Jahre 1918<sup>3)</sup> eine Erklärung vorgeschlagen, die mit derjenigen des Verfassers in der Hauptsache übereinstimmt. Der Grundgedanke besteht darin, daß infolge einer starken Unterkühlung unter die Gleichgewichtstemperatur die zuerst sich ausscheidenden Kristalle eine abnorme Zusammensetzung haben, die reicher an *B* ist, als dem Gleichgewichtszustande entspricht.

<sup>1)</sup> R. Kühnel: Z. Metallkunde Bd. 14, S. 462. 1922.

<sup>2)</sup> G. Masing: Z. Metallkunde Bd. 14, S. 204. 1922.

<sup>3)</sup> F. Johnson: J. Inst. Metals Bd. 21, S. 413. 1918 und Bd. 20, S. 279. 1918.

Nach der Vorstellung von Johnson kann das nur für die sich zuerst ausscheidenden Kristalle gelten, die bei ihrem weiteren Wachstum alsbald der normalen Konzentration zustreben. Nach der Vorstellung von Masing wird die Annäherung an das Gleichgewicht jedoch außerdem durch ein Zurückbleiben des Konzentrationsausgleiches in der Restschmelze verhindert, so daß es möglich ist, daß Kristallkerne, auch wenn sie ohne Unterkühlung entstanden sind, unter abnormen Bedingungen weiter wachsen und dadurch reicher an *B* werden.

Dadurch, daß die in der Außenschicht sich ausbildenden primären Kristalle zu viel von der Komponente *B*, evtl. mehr als der Gesamtzusammensetzung der Legierung entspricht, enthalten, kann eine Anreicherung dieser Schicht an *B* eintreten.

Wenn auch eine derartige Wirkung der Unterkühlung theoretisch möglich ist, so fehlte doch jeder experimentelle Nachweis, daß sie bei der Erstarrung der Legierungen tatsächlich auftritt. Johnson hat zwar festgestellt, das bei der Erstarrung des Gun-Metalles (Kanonenbronze mit 88% Kupfer, 10% Zinn und 2% Zink) die Menge des zinnreicheren  $\delta$ -Bestandteiles in der äußeren Schicht geringer war als im Kern, trotzdem in der Außenschicht eine analytisch festgestellte Anreicherung um etwa 1% Zinn stattgefunden hatte. Daraus wäre also zu schließen, daß die primär ausgeschiedenen Kristalle in der Außenschicht tatsächlich mehr Zinn enthalten. Dieser Schluß kann jedoch noch nicht als sicher gelten, da die Bestimmung der relativen Mengenverhältnisse verschiedener Kristallarten auf Schlifflinien bekanntlich recht schwierig ist, und da trotz sorgfältiger Strukturuntersuchungen an reiner Kupfer-Zinnbronze<sup>1)</sup> vielleicht die Möglichkeit besteht, daß die Aufnahmefähigkeit der  $\alpha$ -Kristalle für Zinn in unmittelbarer Nähe der Solidus mit der Temperatur stark ansteigt, wie das neuerdings von Hanson und Ford<sup>2)</sup> bei Kupfer und Eisen beobachtet worden ist. Bei schneller Abkühlung können auf diese Weise übersättigte Mischkristalle entstehen, die an der Außenschicht, wo die Abkühlung schneller ist, mehr Zinn oder Zink enthalten, als in der Mitte.

Für die weitere Klärung der Frage der umgekehrten Blockseigerung war also weiteres Tatsachenmaterial erforderlich. Günstig wäre vor allen Dingen ein Fall gewesen, in dem die umgekehrte Blockseigerung einen möglichst großen Betrag erreicht und in dem es möglich wäre, sie mit anderen Erscheinungen quantitativ zu verknüpfen. Dieses Ziel ist weitgehend durch eine Arbeit von Jokibe<sup>3)</sup> über Kupfer-Zink-Legierungen, die sich bei der Erstarrung ausdehnen, erreicht worden. Diese Arbeit ist auf der Frühjahrsversammlung 1924 des Institute of Metals vorgetragen worden und hat eine lebhafte Diskussion ausgelöst. Merkwürdigerweise wurden weder in der Arbeit noch in der Diskussion die theoretischen Schlußfolgerungen gezogen, die den Verfassern naheliegend und wichtig für die Theorie der umgekehrten Blockseigerung erscheinen. Im folgenden sollen erst die Resultate der Arbeit von Jokibe, dann die eigenen Versuche der Verfasser, die im Anschluß an diese Arbeit durchgeführt wurden, besprochen, resp. beschrieben werden und eine allgemeine Erklärung der umgekehrten Blockseigerung versucht werden.

Jokibe hat die schon früher festgestellte Ausdehnung der Zink-reichen Kupfer-Zink-Legierungen bei der Erstarrung eingehend untersucht und festgestellt, daß ihr

<sup>1)</sup> O. Bauer und O. Vollenbrück: Mitt. a. d. Materialprüfungsamt 1922. Heft 5, S. 181. — Z. f. Metallkunde 1923, S. 119, 191. — Tominatu Isihara: J. Inst. Metals Bd. 31, S. 315. 1924.

<sup>2)</sup> Hanson, Ford u. a.: J. Inst. Metals Bd. 30. 1923.

<sup>3)</sup> Kei Jokibe: J. Inst. Metals Bd. 31, S. 225. 1924.

Maximum in der zweiten Hälfte des Erstarrungsintervalls liegt. Die Ausdehnung ist um so größer, je langsamer die Abkühlung ist und erfolgt mit einer solchen Gewalt, daß die Tiegel und oft auch die äußeren, bereits erstarrten Schichten des Regulus gesprengt werden. Eigentümlicherweise hat es sich jedoch herausgestellt, daß mit dieser Ausdehnung keine Verringerung der Dichte verbunden ist, sondern daß das Material stark porös wird. Diese Ausdehnung wird bei allen Legierungen mit 0 bis 40% Kupfergehalt beobachtet. Ihre Abhängigkeit von der Konzentration ist nach Jokibe in Abb. 2 durch die gestrichelte Kurve angegeben.

Auffallenderweise geht die umgekehrte Blockseigerung mit dieser Ausdehnung ausgesprochen parallel. In Abb. 2 geben die beiden ausgezogenen Kurven die umgekehrte Blockseigerung in Abhängigkeit von der Durchschnittskonzentration in Differenzen des prozentualen Kupfergehaltes im Kern und an der Oberfläche für Gußblöcke von ca. 30 mm und von ca. 50 mm Durchmesser wieder. Der Zusammenhang der Kurve der Ausdehnungen mit denjenigen der umgekehrten Blockseigerung ist unverkennbar. Diesem Zusammenhang ist in der Diskussion der Arbeit von Jokibe nur verhältnismäßig wenig Aufmerksamkeit geschenkt worden. Jokibe selbst weist auf diesen Zusammenhang hin, macht aber weder für diesen, noch für die beobachtete Ausdehnung nennenswerte Erklärungsversuche.

Ferner hat auch Jokibe den bereits früher von Bauer und Arndt und von Kühnel betonten Zusammenhang der umgekehrten Blockseigerung mit der Größe des Erstarrungsintervalles bestätigen können.

Für die beobachtete Ausdehnung bei der Erstarrung hat Desch<sup>1)</sup> in der mündlichen Diskussion zum Vortrag von Jokibe eine Erklärung gegeben, die uns richtig zu sein scheint. Er weist zunächst darauf hin, daß Fälle einer ähnlichen Ausdehnung unter gleichzeitiger Porenbildung auch sonst in der Chemie bekannt sind. So ist z. B. das Volumen des Kalziumhydroxyds geringer als die Summe der Volumina des in ihm enthaltenen Wassers und Kalziumoxydes. Trotzdem erfolgt das Ablöschen des Kalkes unter erheblicher Volumenzunahme. Die Erklärung für diese Erscheinungen liegt offenbar in der gerichteten Kristallisation. Im Falle der Legierungen haben die bereits vorhandenen primär gebildeten Kristallskelette auch weiterhin das Bestreben, nach bestimmten bevorzugten Richtungen zu wachsen. Die hierzu nötige Zufuhr der Materie kann, solange Restschmelze noch vorhanden ist, z. B. durch kapillare Kräfte erfolgen.

Außer dieser Möglichkeit, die Desch offenbar im Auge hat, kann eine Verschiebung der Materie und damit auch ein gerichtetes Wachstum unter Formveränderung des Körpers auch im festen Zustande erfolgen, wenn die Wanderungsgeschwindigkeiten zweier ineinander diffundierender Stoffe sehr verschieden sind.

Der Zusammenhang der Ausdehnung mit der Größe des Erstarrungsintervalls ist von diesen Gesichtspunkten aus verständlich. Solange Restschmelze noch vor-

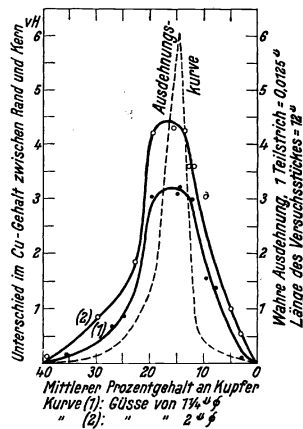


Abb. 2. Ausdehnung und umgekehrte Blockseigerung der Zn-Cu-Legierungen nach Jokibe.

<sup>1)</sup> C. H. Desch: J. Inst. Metals Bd. 31, S. 251. 1924.

handen ist, erfolgt die Ausdehnung dadurch, daß aneinanderstoßende Dendrite jeder für sich weiter gerichtet wachsen, ohne sich an den Wachstumstellen zu vereinigen. Eine derartige Vereinigung würde ja sofort die Voraussetzung für das gerichtete Wachstum, die in der Gestalt der Berührungsfläche zwischen Kristall und Schmelze liegt, aufheben. Aus diesem Grunde sind derartige Erscheinungen auch nicht bei reinen Metallen zu erwarten, die nach unseren sonstigen Erfahrungen zweifellos dendritisch wachsen, wie z. B. Kupfer. Bei einem reinen Metall müssen nämlich die aneinanderstoßenden Dendrite alsbald verwachsen, sie bilden dann ein zusammenhängendes Gerüst, das sich nicht mehr durch Verschiebung der einzelnen Teile ausdehnen kann. Das Verwachsen der Einzeldendrite bei Legierungen wird offenbar nur durch das Vorhandensein der trennenden Schicht einer tiefer erstarrenden Restschmelze verhindert, und je größer der Abstand zwischen der Erstarrungstemperatur der ersten Dendriten und der Erstarrungstemperatur der Restschmelze, mit anderen Worten, je größer das Erstarrungsintervall ist, desto günstiger sind die Bedingungen für das gerichtete Weiterwachsen der einzelnen Dendrite und für die Volumenzunahme des ganzen Körpers. Auch sofern die Volumenzunahme durch einen Diffusionsvorgang unmittelbar nach der Erstarrung im festen Zustande bewirkt wird, ist es klar, daß dieser Einfluß der Diffusion um so größer sein muß, je größer der Konzentrationsunterschied zwischen dem Kristallskelett und der Restschmelze, also auch in der Mehrzahl der Fälle, je größer das Erstarrungsintervall ist.

Nach Beobachtungen von Jokibe scheinen besonders diejenigen Legierungen eine Neigung zur Ausdehnung während der Erstarrung zu zeigen, in denen während der Erstarrung primär  $\delta$ -Kristalle (Kristallart VI nach Guertler) entstehen. Diese zerfallen bei der weiteren Abkühlung in  $\gamma$ - und  $\epsilon$ -Kristalle (VII nach Guertler). Jedoch ist die Erscheinung keineswegs daran gebunden, da ja auch Legierungen mit 25 bis 40%, sowie mit 0 bis 14% Kupfer eine Ausdehnung, wenn auch in viel geringem Maße, zeigen.

Der absolute Betrag der Ausdehnung erreicht nach Jokibe maximal ca. 0,8%.

Die von Jokibe festgestellte Blockseigerung beträgt bis zu 4,3% bei einem durchschnittlichen Kupfergehalt von 15%. Diese außerordentlich starke umgekehrte Blockseigerung ließ erwarten, daß man durch mikroskopische Beobachtung der Schliche nähere Aufschlüsse über den Vorgang der Kristallisation und über die Faktoren erhalten würde, die die umgekehrte Blockseigerung herbeiführen. Es wurde eine Reihe von Zink-Kupfer-Legierungen in dem angegebenen Konzentrationsintervall in Kokillen von 35 mm gegossen und zunächst gefunden, daß die von Jokibe angegebene Blockseigerung der Größenordnung nach erreicht wird. Allerdings traten in den Resultaten Schwankungen auf, die noch nicht aufgeklärt werden konnten. Ein Zusammenhang mit der Temperatur der Schmelze oder der Temperatur der Kokille konnte nicht festgestellt werden.

Bei einigen Versuchen, wenn der Gesamtbetrag der umgekehrten Blockseigerung in den oberen Teilen des Gußstückes nur gering war, wurde festgestellt, daß im unteren Teil eine normale Blockseigerung stattgefunden hatte. Allgemein wurde gefunden, daß der Betrag der umgekehrten Blockseigerung von oben nach unten abnimmt. In der Tabelle 2 sind einige Analysenresultate zusammengestellt.

Für die mikroskopische Untersuchung eigneten sich besonders diejenigen Legierungen, die bei einer starken Blockseigerung zwei Strukturbestandteile aufwiesen. In den Abb. 3 und 4 sind Querschliffe der Blöckchen mit 10% und 22% Cu innen und

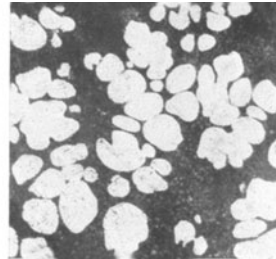
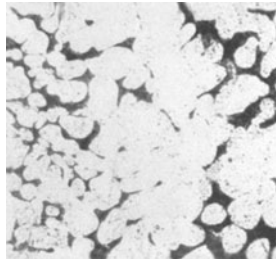
Tabelle 2.

Konzentration nach Einwage	Temperatur und Art der Kokille	Analyt. best. Cu - Gehalt		Blockseigerung in % Cu n = normal u = umgekehrt
		Rand	Kern	
14% Cu	Dünnwand. Rohr bei 20°	12,40	14,07	u 1,67
	Dickwand. Kokille bei 300°	12,6	14,7	u 2,1
14% Cu	Dickwand. Kokille bei 200°	12,5	13,9	u 1,4
	Dickwand. Kokille bei 20°	12,3	16,7	u 4,4
10% Cu	Dickwand. Kokille bei 20°	oben 9,26	11,12	u 1,86
		unten 9,12	10,50	u 1,38
10% Cu	Dickwand. Kokille bei 20°	oben 8,70	9,79	u 1,09
		unten 8,65	8,92	u 0,27
13% Cu	Dickwand. Kokille bei 20°	oben 12,48	14,15	u 1,67
		unten 12,30	14,17	u 1,87
13% Cu	Dickwand. Kokille bei 20°	oben 11,1	16,0	u 4,9
		unten 11,2	13,0	u 1,8
17% Cu	Dickwand. Kokille bei 20°	oben 16,5	18,9	u 2,4
		unten 17,4	15,9	n 1,5
22% Cu	Dickwand. Kokille bei 20°	oben 21,8	24,4	u 2,6
		unten 21,23	19,33	n 1,90
22% Cu	Dickwand. Kokille bei 20°	oben 20,24	23,83	u 3,59
		unten 21,86	22,51	u 0,65
28% Cu	Dickwand. Kokille bei 20°	oben 25,70	26,9	u 1,2
		unten 25,8	26,2	u 0,4

außen wiedergegeben. Man sieht auf beiden, daß die Menge des dunkleren, zinkreicheren Bestandteiles in den äußeren Schichten bedeutend größer ist als im Kern. Wie man auf Abb. 3 sieht, ist die Struktur überall normal, d. h. der kupferreiche Bestandteil (Kristallart VII nach Guertler) hat sich zuerst ausgeschieden und der zinkreichere, dem Erstarrungsdiagramm entsprechend, erst zuletzt. Diese Beobachtungen ergaben also keine Anhaltspunkte für die Annahme einer Unterkühlung entsprechend dem oben erwähnten Ansatz von Johnson und von Masing. Das wurde durch die Beobach-

v = 400

v = 400



Kern.

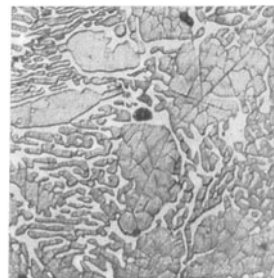
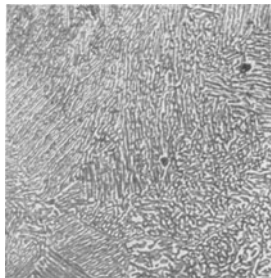
Abb. 3.

Außenschicht.

Umgekehrte Blockseigerung einer Legierung mit 10% Cu und 90% Zn.

v = 400

v = 400



Kern.

Abb. 4.

Außenschicht.

Umgekehrte Blockseigerung einer Legierung mit 22% Cu und 78% Zn.

tung von getemperten Schliften bestätigt. Querschlitze mit 9% und 13% Kupfer, die eine ausgesprochen umgekehrte Blockseigerung zeigten, wurden während 48 Stunden auf 400° gehalten und noch einmal mikroskopisch untersucht. In der Struktur konnten keine Änderungen festgestellt werden. Wäre die Zusammensetzung der primären kupferreichen Kristallart infolge der Unterkühlung abnorm zinkreich gewesen, so hätte man ihren Zerfall durch Tempern feststellen müssen. Da dieses nicht der Fall war, so war für die Erklärung des Strukturbefundes keine andere Annahme möglich, als daß die zinkreiche Restschmelze nach Beginn der Erstarrung vorwiegend in die äußeren Teile der Gußstücke eingedrungen war und damit die umgekehrte Blockseigerung hervorgerufen hatte.

Wie ist jedoch die Bildung der für das Nachdringen dieser Restschmelze notwendigen Zwischenräume zwischen den primären Kristalliten zu erklären?

Die Möglichkeit dazu bietet die von Jokibe beobachtete Ausdehnung der Legierungen bei der Erstarrung. Wir haben uns den Erstarrungsvorgang in der Kokille folgendermaßen vorzustellen. Die Erstarrung beginnt an der Kokillenwand und schreitet nur allmählich unter Bildung von primären Kristallskeletten nach dem Innern vor. Die Bedingungen, die der Volumenzunahme entsprechen, werden zuerst in der Außenschicht erreicht. Diese kann sich auch unter fortgesetztem, gerichtetem Wachstum der primären Kristalle nach innen hin ausdehnen, weil der innere Teil des Gußstückes in der Erstarrung zurückgeblieben ist. Es findet also buchstäblich derjenige Vorgang statt, den Bauer und Arndt nur unbestimmt angedeutet hatten. Die primären Kristalle verschieben sich von den äußeren nach den inneren Zonen hin unter Überschreitung „des ihnen zuständigen Bereiches“. In die entstandenen Lücken wird aus dem Innern die Restschmelze nachgepreßt. Mit zunehmendem Abstand von der Oberfläche spielt sich dieser Vorgang in immer geringerem Maße ab.

Bei der Erstarrung des Kernes kann er überhaupt nicht mehr eintreten, denn der erstarrende Restkern ist ja bereits von einer festen Metallmasse umgeben. Auch nach oben, nach dem Lunker hin, kann keine Ausdehnung erfolgen, da die Oberfläche bereits erstarrt ist. Unter diesen Bedingungen können sich im Innern überhaupt keine Hohlräume entwickeln. Die im Verlauf der Erstarrung stattgefundenen Verschiebungen innerhalb des Metalls entziehen sich also gänzlich einer äußeren Feststellung an der Form des Gußstückes. Es zeigt einen normalen Lunker, und nur der Umstand, daß es sich aus der Kokille nur schwer entfernen läßt, deutet darauf hin, daß es im Verlauf der Erstarrung die Neigung gehabt hat, sich auszudehnen.

Es ist verständlich, daß im Gegensatz hierzu bei der langsamen Abkühlung die Ausdehnung sich auch äußerlich bemerkbar macht. In diesem Fall ist die Temperaturdifferenz zwischen dem äußeren und dem inneren Teil des Regulus nur gering, diese erstarren beinahe gleichzeitig, und die äußeren Teile haben noch keine genügende Festigkeit, um dem Ausdehnungsdruck von innen zu widerstehen.

Aus obigem ergibt sich, daß die umgekehrte Blockseigerung bei den zinkreichen Zink-Kupfer-Legierungen als restlos aufgeklärt gelten kann. Es besteht keine Veranlassung, außer den betrachteten Verschiebungen der primären Kristallskelette, die unter anderen Bedingungen zu einer Ausdehnung des Gußstückes führen, in diesem Fall nach anderen Gründen, z. B. einer Unterkühlung, für die umgekehrte Blockseigerung zu suchen.

Es fragt sich, ob es bei der Erstarrung nicht noch andere Vorgänge gibt, die eine relative Verschiebung von ausgeschiedenen Kristallen und Restschmelze, ein Nachfließen der letzteren hervorrufen können.



Als ein solcher kommt die wahre Volumenabnahme bei der Erstarrung in Frage, die bei den Metallen bis zu 5 und 7% beträgt<sup>1)</sup>. Sobald sich ein zusammenhängendes Kristallskelett gebildet hat, muß die Erstarrung der Schmelze in den dendritischen Zwischenräumen zur Bildung von Hohlräumen führen, in die aus den tiefer liegenden Schichten Schmelze nachfließen kann. Da in einer senkrecht gegossenen zylindrischen Kokille die Erstarrung von außen nach innen fortschreitet, so führt das zu einer Wanderung der Restschmelze umgekehrt von innen nach außen im Verlauf der Erstarrung. Hierbei schreitet die Kristallisation fort, und die Schmelze reichert sich immer mehr an der Komponente *B* Abb. 1 an. Es sei *ab* in Abb. 5 die Kokillenwand links, von der sich die kristallisierende Schmelze befindet. Die Restschmelze wandert in Richtung des Pfeiles. Greifen wir die Schicht *m n o p* heraus, so tritt in dieselbe von links durch die Fläche *m n* Restschmelze ein, gibt bis *o p* einen Teil ihres Gehaltes an *A* ab und verläßt hier die betrachtete Schicht in einem an *B* angereicherten Zustande. Derjenige Teil der Schmelze, der im Verlaufe der Kristallisation durch eine Schicht hindurchtritt, um die Hohlräume der früher erstarrten Außenschichten auszufüllen, bewirkt also stets eine Anreicherung der Schicht an der Komponente *A*. Je weiter die betrachtete Schicht von der Kokillenwand ist, desto größer wird die Menge der hindurchtretenden Schmelze und desto stärker die dadurch bewirkte Anreicherung an *A*. Demgegenüber bewirkt die Restschmelze, die zur Ausfüllung der Hohlräume innerhalb der Schicht dient, stets eine Erhöhung des *B*-Gehaltes. Durch die Außenschicht *c d a b* fließt überhaupt keine Restschmelze hindurch, demgemäß ist hier der *B*-Gehalt am größten, während nach dem Innern hin in immer stärkerem Maße der zuerst betrachtete Einfluß der durch die Schicht durchgesetzten Schmelze überwiegt, wodurch die beobachtete steigende Anreicherung an *A* zur Mitte hin bei Legierungen, die umgekehrte Blockseigerung zeigen, verständlich werden könnte.

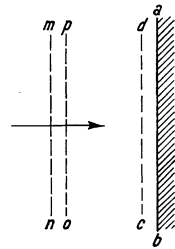


Abb. 5. Schema der Erstarrung einer Schmelze in der Nähe der Kokillenwand.

Eine einigermaßen zuverlässige rechnerische Verfolgung der Konzentrationsverschiebungen im Innern der Legierung, die hierdurch hervorgerufen werden, ist wegen der Kompliziertheit des Erstarrungsvorganges bei den Legierungen, die Mischkristalle bilden, nicht möglich. Es läßt sich aber die Konzentrationsänderung der äußersten Schicht, *c d a b*, durch die keine Schmelze hindurchfließt, schätzen. Es sei die wahre Volumenabnahme bei der Erstarrung, bezogen auf die Einheit des Volumens,  $s$ , die Konzentration der Komponente *B* in der Gesamtschmelze  $c_0$ , und in der Restschmelze beim Ende der Erstarrung  $c_L$ . In die Gewichtseinheit der Legierung strömt dann höchstens die Gewichtsmenge  $s$  der Schmelze nach. In Wirklichkeit wird die nachströmende Menge geringer sein, da beim Beginn der Erstarrung die primären Kristalle noch frei beweglich sind und ein Vorbei- und Nachströmen im Sinne der obigen Betrachtungen erst anfängt, sobald ein zusammenhängendes Kristallgerüst entstanden ist. Die Zusammensetzung der nachströmenden Schmelze ist beim Beginn der Erstarrung  $c_0$  und beim Ende  $c_L$ .

Wir nehmen für ihre durchschnittliche Zusammensetzung ihre Konzentration  $c'$  bei der Temperatur an, bei welcher die Legierung zur Hälfte aus Kristallen und zur Hälfte aus der Schmelze besteht. Diese Konzentration kann am Erstarrungsdiagramm

<sup>1)</sup> G. Tammann: Lehrbuch der Metallographie. III. Aufl. Leipzig: Leopold Voss 1923.

abgelesen werden. Wenn sie auf diese Weise auch etwas zu niedrig gegriffen wird, so gleicht sich dieser Fehler mehr als vollständig durch die Vernachlässigung der Diffusion aus.

In ein Gramm der erstarrenden Legierung fließen somit  $s$  Gramm der Schmelze und darin  $s \cdot c'$  Gramm der Komponente  $B$  nach; die Konzentration von  $B$  in der betrachteten Grenzschicht ist nach der Erstarrung also

$$\frac{c_0 + s c'}{1 + s} = \frac{c_0(1 + s) + s(c' - c_0)}{1 + s}.$$

Die Anreicherung dieser Schicht gegenüber der Ausgangsschmelze an  $B$  ist also  $\Delta c = s(c' - c_0)$ .

Hieraus kann man die durch die Erstarrungskontraktion hervorgerufene umgekehrte Blockseigerung berechnen. Für eine Bronze mit 8% Sn und 92% Cu erhält man, wenn man  $c' - c_0 = 3\% = 0,03$  und  $s$  mit Bornemann gleich 0,01 setzt, für  $\Delta c = 0,0003 = 0,03\%$ . Die Stichproben an Hand der Angaben von Bauer<sup>1)</sup> und von Jokibe<sup>2)</sup> haben gezeigt, daß die Gesamtzusammensetzung einer umgekehrt geseigerten Legierung etwa dem Mittelwert der Außenschicht und des Kernes ist. Die Konzentrationsdifferenz zwischen Kern und Außenschicht berechnet sich also zu  $2 \Delta c = 0,06\%$ . Demgegenüber ist sie laut Tabelle 1 gleich 0,81%. Bei der Aluminium-Zink-Legierung mit 17% Zn ist die Volumenabnahme etwa gleich der des Aluminiums = 0,05 anzunehmen,  $c' - c_0 = \text{ca. } 0,13$ , also  $2 \Delta c = 0,013 = 1,3\%$ , während 1,66% beobachtet worden sind. Bei der Kupfer-Aluminium-Legierung mit 1,2% Cu ist  $s = \text{ca. } 0,05$ , und  $c' - c_0 = \text{ca. } 0,012$  also  $2 \Delta c = 0,0012 = 0,12\%$ , gegenüber den beobachteten 0,43%, bei einem Gehalt von 3,1% Cu ist  $c' - c_0 = 0,04$  und  $2 \Delta c = 0,004 = 0,4\%$ , während die Beobachtung 0,68% ergeben hat.

In einigen Fällen erreicht also die so berechnete Konzentrationsverschiebung die Größenordnung der beobachteten umgekehrten Blockseigerung, in anderen nicht. Hierbei ist zu berücksichtigen, daß die Rechnung recht unsicher ist, und insbesondere der Ausgleich durch Diffusion und die damit zusammenhängende Neigung zur normalen Blockseigerung vernachlässigt worden ist. Die tatsächlich beobachtete umgekehrte Blockseigerung wird immer nur Resultante der zur normalen Blockseigerung führenden und der überwiegenden umgekehrten Prozesse sein. Als allgemeines Erklärungsprinzip kommt die betrachtete Erscheinung also für die umgekehrte Blockseigerung nicht in Frage.

Es scheint andererseits, daß den bei den Zink-Kupfer-Legierungen beobachteten Ausdehnungserscheinungen eine allgemeine Bedeutung für die umgekehrte Blockseigerung zukommt.

Wir haben bereits gesehen, daß die durch das gerichtete Wachstum hervorgerufene Ausdehnung der Legierung sich im Kokillenguß nicht auswirken kann. Allgemeiner wird man sagen, daß sie von den Erstarrungsbedingungen außerordentlich stark abhängig sein muß, und daß es schwer sein wird, Versuchsbedingungen zu finden, um sie ungestört zu beobachten. Zu den Erstarrungsbedingungen gehört aber auch die Gestalt des Erstarrungsdiagrammes. Es ist deshalb sehr wohl möglich, daß bei vielen anderen Legierungen die Bedingungen für ihre äußere Wahrnehmung viel ungünstiger sind und die mit dem gerichteten Wachstum verbundenen inneren Verschiebungen entweder ganz übersehen werden oder sich nur in Unregelmäßigkeiten der Schwin-

<sup>1)</sup> a. a. O.

<sup>2)</sup> a. a. O.

dungskurven bemerkbar machen. Solche Unregelmäßigkeiten sind insbesondere bei Bronzen, bei denen die Erklärung der umgekehrten Blockseigerung durch Kontraktion bei der Erstarrung besonders deutlich versagt, tatsächlich oft beobachtet worden. Daß die Neigung zum gerichteten (dendritischen) Wachstum bei den meisten Metallen und Legierungen tatsächlich besteht, kann als sicher angenommen werden. Als Kriterium für diese Neigung kann im großen und ganzen die Beobachtung des dendritischen Gefüges im Schliff betrachtet werden, wengleich seine Wahrnehmung zuweilen auch durch gewisse Umstände verhindert wird.

Wir kommen zu dem Ergebnis, daß die infolge des dendritischen Wachstums auftretenden Kräfte, die zur Verschiebung der Kristallkonglomerate innerhalb der erstarrenden Legierung führen, und das Nachfließen der Restschmelze infolge der Volumenabnahme bei der Erstarrung der Außenschichten ausreichen, um die Erscheinungen der umgekehrten Blockseigerung zu erklären. In den Fällen starker Blockseigerung, wie bei den Zink-Kupfer-Legierungen von Jokibe oder bei den Bronzen, ist der Einfluß des zweiten Faktors dem ersten gegenüber zu vernachlässigen. Ob der zweite Faktor in den Fällen geringer umgekehrter Blockseigerung von größerer Bedeutung ist, ist zur Zeit unsicher. Allgemein läßt sich aber sagen, daß eine gegenseitige Verschiebung von Kristall und Restschmelze im Sinne des ursprünglichen Absatzes von Bauer und Arndt in einem Umfange, der für die Erklärung der umgekehrten Blockseigerung ausreicht, möglich ist.

Ob noch andere Vorgänge, z. B. die Unterkühlung im Sinne von Johnson und Masing, die umgekehrte Seigerung beeinflussen können, läßt sich zur Zeit nicht sagen. Der Unterkühlung wird man schon wegen ihres theoretischen Interesses größere Aufmerksamkeit schenken müssen.

Das dendritisch gerichtete Wachstum und die dadurch bewirkten inneren Verschiebungen in erstarrenden Schmelzen scheinen eine viel allgemeinere Erscheinung zu sein, als man bisher annahm. Durch eine geeignete Wahl der Versuchsbedingungen muß es möglich sein, das gerichtete Wachstum in den Legierungen viel empfindlicher nachzuweisen, als es bisher an Hand der Schwindungskurve geschah und seine Bedeutung für die umgekehrte Blockseigerung zu untersuchen.

Für die Beurteilung der gegossenen Metalle und Legierungen und für den Gießereibetrieb ergibt sich aus dem Obigen ein nicht unwichtiger Gesichtspunkt. Bisher kannte man nur zwei Gründe für die Undichtigkeit des Gußstückes, nämlich eine Gasentwicklung und die Volumenabnahme bei der Erstarrung. Zu diesen tritt nun als dritter das gerichtete oder dendritische Wachstum hinzu, das insbesondere die kleinen Hohlräume, die über den Gesamtquerschnitt eines Gußstückes verstreut sind, oft erklären könnte. Es liegt auf der Hand, daß zur Bekämpfung dieser Quelle der Undichtigkeiten andere technische Maßnahmen zu ergreifen sind, als zur Bekämpfung der Gasblasenbildung und der Lunkerung.

### Zusammenfassung.

Auf Grund von bereits vorliegenden und von einigen eigenen Versuchen wird die umgekehrte Blockseigerung auf Verschiebung der primären Kristalle infolge des dendritischen Wachstums zurückgeführt. Ob neben dieser Erscheinung auch Volumenänderungen bei der Erstarrung oder Unterkühlungen von größerem Einfluß sind, läßt sich noch nicht mit Sicherheit sagen.

# Energetik der Wandströme in Quecksilberdampfentladungen.

Von Jürgen v. Issendorff.

Mit 21 Textabbildungen.

Rostocker Dissertation.

Eingegangen am 6. Januar 1925.

Beim Betrieb der Quecksilberdampf-Großgleichrichter hat sich ein eigenartiges Verhalten des eisernen Gehäuses gegenüber der Lichtbogenentladung im Innern gezeigt. Diese Erscheinung ist zuerst von den Herren Dr. Schenkel und Prof. Dr. Schottky<sup>1)</sup> beschrieben und experimentell sowie theoretisch untersucht worden.

Das Gehäuse nimmt nämlich im isolierten Zustande beim Stromdurchgang ein gegen die Lichtbogenkathode positives Potential von der Größe 6 bis 14 Volt an, erteilt man dem Gehäuse jedoch künstlich eine andere positive oder negative Spannung, so führt es selbst Ströme, deren Richtung und Größe am besten durch die folgende, der zitierten Arbeit entnommene Charakteristik wiedergegeben wird (Abb. 1).

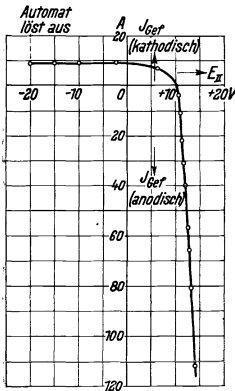


Abb. 1.

Der Strom  $J_{Gef}$  zeigt im kathodischen Teil der Darstellung einen ausgesprochenen Sättigungscharakter, und diese Unsymmetrie gegenüber dem anodischen Kurventeil hat die Autoren schließlich zu der Annahme geführt, daß bei negativem Gehäusepotential  $E_H$  (gemessen gegen Kathode) der Strom nur durch lichtelektrisch ausgelöste Elektronen übertragen werden konnte, da bei allen anderen hier möglichen Formen des Ladungstransports eine Abhängigkeit vom Potentialgefälle nach bisherigen Erfahrungen angenommen werden mußte. Allerdings hätte die lichtelektrische Ausbeute einen außerordentlich hohen Wert erreicht; infolgedessen erwog W. Schottky<sup>2)</sup> noch eine Erklärungsmöglichkeit durch einen „konvektiven lichtelektrischen Effekt“, d. h. durch Quecksilberatome, die durch Resonanzstrahlung oder langsame Elektronenstöße von unter 10,38 bis 4,9 Volt angeregt worden sind und kurz darauf, innerhalb von  $10^{-8}$  sec, infolge ihrer thermischen Geschwindigkeit gegen die Gehäusewand prallen, wo sie ihre noch nicht ausgestrahlte Energie gewissermaßen konzen-

<sup>1)</sup> M. Schenkel und W. Schottky: Wissenschaftl. Veröffentl. a. d. Siemens-Konzern Bd. 2, S. 252. 1922.

<sup>2)</sup> W. Schottky: Phys. Z. Bd. 24, S. 350. 1923.

triert zur Auslösung von Elektronen abgeben können, ein Effekt, der allerdings noch experimentell bestätigt werden müßte.

Trotzdem zeigten sich bald schwerwiegende Gegenargumente: Einmal war anzunehmen, daß die am Gehäuse ausgelösten Elektronen eine dem negativen Potential desselben entsprechende Geschwindigkeit erlangen müßten und dadurch zu einer ebenfalls entsprechenden Zahl von Stoßionisierungen befähigt wären. Infolgedessen müßten direkt am Gehäuse auch Dissoziationen, Anregung und Lichtausstrahlung mit dem negativen Sondenpotential steigen und es wäre nicht einzusehen, warum der Gehäusestrom trotzdem konstant bliebe. Zum anderen Male zeigten Versuche, die bei den S. S. W. sowie auch bei der A. E. G. angestellt wurden, daß der an einer Sonde im Lichtbogen übergehende „Gefäßstrom“ um ein Vielfaches ansteigt, wenn man entweder die Sonde selbst oder die benachbarte Gefäßwand soweit abkühlte, daß eine Kondensationsströmung des Hg-Dampfes aus dem Lichtbogen heraus zur Sonde hin entstand. Diese Tatsache wäre höchstens noch mit dem „konvektiven Photo-Effekt“ als verträglich anzusehen.

Die vorliegende Arbeit hatte nun das Ziel, die beschriebenen Vorgänge in der Quecksilberdampfentladung zu klären und auf experimentellem Wege zu entscheiden, ob es sich bei dem kathodischen Sättigungsstrom um eine Elektronenauslösung oder Ionenanziehung an der Wand handelt<sup>1)</sup>.

### I. Untersuchungsmethode.

Die Untersuchung einer Gasentladung von Lichtbogencharakter (also in Hg-Dampf bei Stromdichten der Größenordnung  $10^{-2}$  bis  $1 \frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2}$ ) die eine direkte Messung des prozentualen Anteils von Elektronen und Trägern am Ladungstransport zum Ziel hat, stößt insofern auf große Schwierigkeiten, als eine räumliche Trennung derselben, etwa durch starke elektrische oder magnetische Felder, zunächst kaum möglich erscheint; denn eine Ansammlung gleichnamiger Träger von entsprechender Konzentration wie im Lichtbogen würde zu ungeheueren Raumladungen und zur Ausbildung elektrischer Felder führen, die die künstlich angelegten weitgehendst kompensieren würden. Besonders starke Raumladungen scheinen z. B. beim Einschalten des Belastungsstromes von Glasgleichrichtern in kalten Räumen unter  $0^\circ$  durch Ionenverarmung zu entstehen, sie vermögen den Lichtbogen in den Anodenarmen kurzzeitig ( $< 10^{-4}$  sec) zu unterbrechen, trotzdem das Anodenpotential wegen der vorhandenen Induktivitäten hierbei auf mehrere kV springt.

Erst am Schluß dieser Arbeit wird eine Methode beschrieben, nach der mit sehr feinen Sonden in Raumladungsgebieten von wenigen Millimeter Ausdehnung Messungen der Elektronenstromdichte versucht wurden.

In folgendem wird eine energetische Methode angewandt, die mit Hilfe von Erwärmungsmessungen an einer Sonde definitiv darüber entscheiden soll, ob bei negativem Sondenpotential gegenüber dem Lichtbogen der Sondenstrom getragen wird von freien, an der Sondenoberfläche ausgelösten Elektronen oder von positiven Ionen, die aus der Entladungsbahn stammend sich an der Sonde unter Abgabe

<sup>1)</sup> Die nachstehend beschriebenen Versuche, die im Prinzip von Herrn Prof. Dr. Schottky angeregt waren, wurden im Gleichrichterlaboratorium des Dynamowerkes der Siemens-Schuckert-Werke ausgeführt. Vor Beendigung derselben erschien eine Arbeit I. Langmuirs (Gen. El. Rev., Nov. 1923), in der zwei andersartige Versuche beschrieben sind, welche zugunsten der Ionenanziehung sprechen.

ihrer Ladung neutralisieren. Die beim Durchwandern des Sondenfalls erlangte kinetische Energie wird dann im ersten Fall in die Entladungsbahn gelangen und dort durch Erhöhung der Dissoziation und Anregung in Erscheinung treten, im zweiten Fall aber an der Sonde abgegeben und muß deren Temperatur erhöhen.

Die Richtigkeit dieser Behauptungen ergibt sich aus folgender Überlegung: Die im Sondenpotentialfall erlangte kinetische Energie der Elektronen würde nur dann in Form von Wärme zum Teil zur Sonde zurückkehren können, wenn eine erhebliche Abgabe dieser Bewegungsenergie an die Dampf-atome in nächster Nähe der Sonde erfolgte. Entweder müßten die Atome entsprechende thermische Geschwindigkeiten erlangen, so daß eine Wärmerückübertragung möglich wäre, oder sie müßten ausschließlich zur Strahlung angeregt werden, die wiederum von der Sonde absorbiert werden könnte. In diesen ungünstigsten Fällen wäre also eine Rückkehr von 50% der Elektronenenergie denkbar, der Rest müßte sich entfernen, da von einem Punkt der Sondenoberfläche aus der freie Raum unter dem gleichen Raumwinkel  $2\pi$  wie die Sonde selbst erscheint. Nun ist aber erstens das Massenverhältnis zwischen Hg-Atom und Elektron so groß, daß die beim elastischen Stoß abgegebene Impulsenergie äußerst gering bleibt, sie beträgt nach G. Hertz<sup>1)</sup> das  $\frac{2m^-}{M}$ -fache  $\left(= \frac{1}{184\,500}\right)$  der kinetischen Energie  $\frac{m^- \cdot v^2}{2}$  des Elektrons, wo  $m^-$  die Masse des letzteren und  $M$  die des neutralen Hg-Atoms bezeichnet. Auch bei anregenden und ionisierenden Stößen ist nach G. Joos und H. Kulenkampff die abgegebene Impulsenergie von derselben geringen Größenordnung<sup>2)</sup>. Eine nennenswerte molekulare Wärmeübertragung ist hiernach ausgeschlossen. Zweitens wird ein Elektron bei hohen Voltgeschwindigkeiten vorwiegend solche Stöße ausführen, die zur Ionisierung führen, also keine Anregungsstöße, somit wird die kinetische Elektronenenergie fast ausschließlich zur Erhöhung der Dissoziation in der Entladungsbahn beitragen und nicht durch Strahlung zur Sonde gelangen. Es müßte sich also der Potentialgradient der Hauptentladung entsprechend erniedrigen, da dem Hauptstrom ein Teil seiner Ionisierungsarbeit hierdurch gewissermaßen abgenommen würde<sup>3)</sup>. Für den Fall des Ladungstransportes durch Hg-Ionen ist zu erwähnen, daß eine vollkommen elastische Reflexion derselben an der Sonde allgemein nicht angenommen wird. Entweder bleibt das Ion schon beim ersten Anprall an der Sonde haften, oder, wenn es mit verminderter Energie noch einmal reflektiert werden sollte, so kommt es doch nicht aus dem Potentialfallgebiet der Sonde heraus, bleibt bei einem späteren Anpralle haften, wird neutralisiert und das wiedergebildete neutrale Atom geht schließlich mit einer der Sondentemperatur entsprechenden thermischen Geschwindigkeit fort, falls nicht dauernde Kondensation eintritt. Infolgedessen muß die Bewegungsenergie der Ionen bis auf den letzteren, meist zu vernachlässigenden Betrag ganz zur Erwärmung der Sonde dienen.

Die Untersuchung besteht also in der Aufnahme des Ganges der Sondentemperatur mit der Zeit, und zwar zuerst bei nach außen isolierter Sonde vom Einschalten des Lichtbogens an, bis eine konstante Grenztemperatur erreicht ist, wobei also die aus dem Lichtbogen aufgenommene Wärme den gleichen Betrag wie die, hauptsäch-

<sup>1)</sup> G. Hertz: Verhandl. Phys. Ges. Bd. 19, S. 268. 1917.

<sup>2)</sup> G. Joos und H. Kulenkampff: Phys. Z. Bd. 25, S. 257. 1924.

<sup>3)</sup> Eine Verminderung des Spannungsabfalls der Hauptentladung mit steigendem negativen Sondenpotential, die zugunsten der photoelektrischen Elektronenauslösung sprechen würde, ist jedoch bisher nicht beobachtet worden.

lich durch Wärmestrahlung in den umgebenden Raum abgegebene Wärmeleistung erreicht hat. Darauf wird ein bestimmtes negatives Potential an die Sonde gelegt und der weitere Verlauf der Sondentemperatur beobachtet. Im ersten genannten Fall des Ladungstransports darf die Sondentemperatur keine wesentliche Änderung mehr zeigen, im zweiten Fall muß sie dagegen ansteigen, bis ein höherer Grenzwert erreicht ist. Durch eine angebrachte Heizwicklung kann man nun ermitteln, welche zusätzliche Leistung erforderlich ist, um — bei gleicher Hauptentladung — die isolierte Sonde bis zum gleichen Grenzwert zu erwärmen. Ist die erforderliche Heizleistung gleich dem Wert Sondenfall  $\times$  Sondenstrom, so wäre der Beweis erbracht, daß der Sondenstrom ein reiner Ionenstrom ist; ist dagegen die Heizleistung geringer, die zu der gleichen Endtemperatur führt, so müssen entweder auch freie Elektronen einen Teil des Stromes tragen oder die kinetische Energie der Ionen ist nicht vollständig an die Sonde abgegeben worden, wie z. B. an der Glimmkathode<sup>1)</sup>, wo das Kathodenfallgebiet sich über mehrere freie Ionen-Weglängen erstreckt, so daß nach Günther - Schulze ein Teil der kinetischen Ionenenergie an neutrale, in Kathodennähe befindliche Gasmoleküle abgegeben wird.

## II. Versuchsanordnung.

Zur Durchführung des beschriebenen Versuchs wurde eine Sonde hergestellt, deren erste Ausführung in Abb. 2a und deren spätere Ausführung in Abb. 2b dargestellt ist.

Ein Eisenzylinder *E* (Abb. 2a) ist mit einer Heizwicklung *H* aus Chrom-Nickelband vom Querschnitt  $1,0 \cdot 0,1$  mm versehen, deren drei Lagen mittels Glimmer

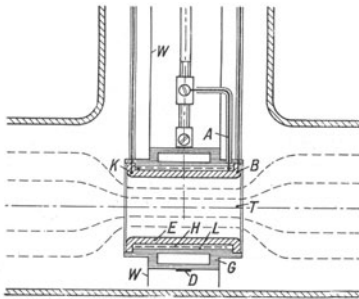


Abb. 2 a.

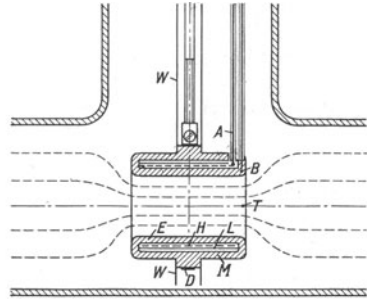


Abb. 2 b.

von ca. 0,1 mm Stärke isoliert sind. Der Anfang der Wicklung ist an dem Körper angeschweißt, das Ende bei *A* ausgeführt. Über der Heizwicklung befindet sich noch eine Lage *L* Heizband, die nur dem mechanischen Schutz dient und eine Verschiebung nebst Windungsschluß der Heizwicklung verhindern soll. Über dieser befindet sich eine größere Schicht aufgewickelter Glimmerstreifen *G*, die eine direkte Ableitung und -strahlung der Heizwärme nach außen möglichst verhindern soll, wozu noch ein Hohlraum ausgespart ist. Ein Ring *D* aus Kupferblech hält das ganze und ist durch Schraubverbindung an einem Einschmelzstab aus EMK-Metall befestigt, der den

<sup>1)</sup> A. Günther - Schulze: Z. Phys. Bd. 15, S. 8. 1923. Vgl. dagegen R. Seeliger: Z. Phys. Bd. 16, S. 211. 1923.

Heizstrom nach  $A$  zuführt. Bei  $K$  ist ein Kupferdraht eingeschweißt, der zu einer Finkdraht-Einschmelzung führt und entweder als Sondenstromzuleitung oder zweite Heizstromzuleitung dient. Bei  $T$  befindet sich an der Zylinderinnenseite die Thermo-element-Schweißstelle, dort verläuft ein Konstantandraht durch ein Loch radial nach außen, dann in einem Viertelkreis innerhalb der Glimmerschicht<sup>1)</sup> bis zu dem bei  $B$  angeschweißten Eisendraht und wird von hier aus mit diesem gemeinsam nach oben geführt. Alle äußeren Drähte sind mittels Glasröhrchen und Glimmer sorgfältig gegen den Lichtbogen isoliert und führen zu einem Schliff, dessen Lage aus der Schaltungsskizze (Abb. 3) hervorgeht. Die Thermo-elementdrähte sind durch ein gebohrtes Loch im Schliff ausgeführt und mit Schellack verkittet, was sich nicht als nachteilig erwiesen hat, da der Schliff auch bei mehrstündigen Versuchen sich nicht über  $25^\circ$  erwärmte und bei den Versuchen dauernd mit in Serie geschalteten 2 Ölkapselpumpen und einer Quecksilberdampfdiffusionspumpe gepumpt wurde. Das Vakuum (Druck

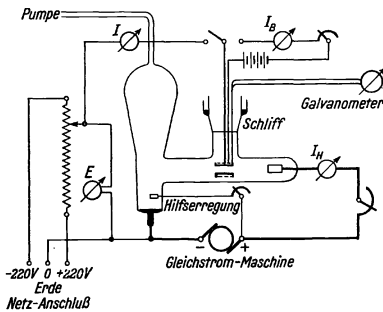


Abb. 3.

der Fremdgase) betrug im Gefäß ständig 0,0002 bis 0,0005 mm Hg-Säule. Von Vorteil war hierbei, daß die kalte Thermo-element-Lötstelle außerhalb des Gefäßes lag und überwacht werden konnte.

Zunächst ist noch die Sondenform  $II$  (Abb. 2b) zu beschreiben, die aus der Form  $I$  dadurch entstanden ist, daß der äußere Glimmerbelag  $G$  durch einen an den Rändern aufgeschweißten Eisenmantel  $M$  ersetzt wurde. Nur eine schmale Öffnung ist für die Durchführung der Heizstromleitung  $A$  und der Thermodrähte  $B$  und  $T$  in den Mantel eingefleht worden. Die

Halterung  $D$  dient hier als Sondenstromleitung, so daß die Schweißstelle  $K$  fortfällt. Bei beiden Sondenformen wird das Entladungsrohr außerhalb der Sonde durch Glimmerwände  $W$  bis in die Nähe des Schliffes hin abgesperrt. Alle Schweißarbeiten wurden mit einer elektrischen Punktschweißmaschine ausgeführt, da Lötstellen im Quecksilberdampf vermieden werden mußten.

Das Sondenpotential  $E$  läßt sich mit Hilfe eines Spannungsteilers (Abb. 3), der am Gleichstromnetz liegt, zwischen  $\pm 200$  Volt gegen die Gefäßkathode variieren, der Hauptentladungsstrom  $I_H$  wird durch eine Maschine und der Heizstrom  $I_B$  durch eine Akkumulatorenatterie geliefert. Die Thermodrähte sind an ein Zeigergalvanometer von Siemens & Halske gelegt, dessen Empfindlichkeit  $0,57 \cdot 10^{-6}$  Amp. beträgt.

Durch die gewählte Form der Sonde werden folgende Bedingungen möglichst erfüllt:

a) Der Lichtbogen ist gezwungen, ausschließlich durch das Sondeninnere zu gehen, da äußere Glimmerscheiben den Raum zwischen Sonde und Glaswand versperren. Somit ist wegen des Kreisquerschnittes eine gleichmäßige Berührung von Lichtbogen und Eisenkörper längs dessen Innenbohrung gewährleistet, während eine nicht hohle Sonde nicht gleichmäßig vom Lichtbogen umgeben wäre, da der Lichtbogen namentlich bei höheren Stromdichten das Bestreben hat, sich in dem hier zur Verfügung stehenden Raum zwischen Sonde und Glaswand nach einer Stelle hin zusammenzuziehen, evtl. hin und her zu flackern, so daß sich die Erwärmungsverhältnisse noch während eines Versuches ändern können.

<sup>1)</sup> Um ein allmähliches Wärmegefälle in der Nähe der Schweißstelle des Drahtes zu erzielen.



b) Die durch die Heizwicklung zugeführte Wärme tritt von außen an fast denselben Stellen in die Sonde ein wie der größte Teil der aus dem Lichtbogen stammenden Wärme von innen, die Wand ist hier 2 mm stark, so daß beide Leistungen direkt miteinander verglichen werden können.

c) Das im Sondenkörper entstehende Temperaturgefälle erreicht nur die Größenordnung weniger Grade, d. h. weniger Prozent der Sondenübertemperatur gegen den umgebenden Raum, wie im Abschnitt „Fehlerquellen“ näher ausgeführt wird; infolgedessen ist es nicht erforderlich, das Thermolement in dem Punkte maximaler Erwärmung anzubringen, zumal, wie schon erwähnt, der Wärmestrom aus dem Lichtbogen bzw. aus der Heizwicklung fast gleichartig in die Sonde eintreten.

d) Durch die Einschnürung des Lichtbogens in der Sonde wird eine höhere Stromdichte und daher eine Verstärkung des zu erwartenden Effektes erzielt.

### III. Fehlerquellen.

Von besonderer Wichtigkeit ist es, das Temperaturgefälle in der Sonde zu kennen. Es war ein Nachteil der Sondenform I, daß sie einer Durchrechnung unzugänglich war, infolgedessen konnte nicht ermittelt werden, welcher Teilbetrag der mittels der Heizwicklung zugeführten Energie seinen Weg direkt durch die umgebende Glimmerschicht nach außen nahm. Wegen des hierdurch entstandenen Verlustes mußte zur Erreichung einer bestimmten Sondentemperatur eine entsprechend höhere Heizenergie zugeführt werden, so daß die Genauigkeit der Messungen entsprechend vermindert war. Der Versuch bestätigte zwar das Vorhandensein des Fehlers, ergab aber nichts über dessen Absolutgröße. Diese Überlegung führte zur Ausführung II der Sonde, die ebenfalls einen direkten Energieübergang durch Strahlung von der Außenfläche der Heizwicklung zur Außenwand des Sondenkörpers zuläßt, jedoch ist die Größe des hierdurch entstehenden Fehlers unter gewissen Annahmen angenähert zu berechnen.

Zunächst wurde ermittelt, welche Übertemperatur die Oberfläche der Heizwicklung gegenüber der Innenwand der Sonde in Abhängigkeit von der zugeführten Heizleistung annahm. Dazu wurde ein Versuch angestellt, noch ehe der Sondenkörper durch den äußeren Eisenzylinder abgeschlossen war. Durch gleichmäßig fließendes Quecksilber wurde die Sonde innen gekühlt, während Heizenergie zugeführt wurde. Die gesuchte Übertemperatur  $\Delta t$  wurde als Differenz an zwei Thermometern abgelesen, von denen das eine in Quecksilber, das andere auf der Heizwicklung angebracht war. Es ergaben sich folgende Werte für  $\Delta t$ :

Tabelle 1.

$I_b^2 \cdot R$	Watt	0,231	0,925	3,70
$\Delta t$	°C	0,9	3,5	11,1

Als Mittelwert ergibt sich aus diesen Messungen ein Temperaturgefälle von etwa  $3,5 \frac{^\circ\text{C}}{\text{Watt}}$  in radialer Richtung von der Oberfläche der Heizwicklung bis zur Sondeninnenwand, bezogen auf die zugeführte Heizleistung. Diese Angabe ist für die beabsichtigte Fehlerberechnung von genügender Genauigkeit.

Um den vollständigen Temperaturverlauf im eisernen Sondenkörper zu er rechnen, kann man von folgenden Annahmen über den Wärmeeintritt und -austritt ausgehen: 1. Der gesamte Wärmefluß tritt in die Sondeninnenwand ein und aus der Sondenaußenwand aus. Die Beteiligung der Stirnflächen ist einmal wegen deren Schmalheit zu vernachlässigen, ferner, weil hier zugleich Zuführung und Ausstrahlung erfolgt, also ein gewisser Ausgleich beider Effekte vorhanden ist. 2. Es wird zunächst der ungünstigste Fall zugrunde gelegt, in dem alle Energie bei  $M_1$  eintritt und bei  $M_2$  austritt (Abb. 4). Dann teilt sich der Weg des Wärmeflusses und es entsteht ein linearer Temperaturverlauf, wie er gestrichelt über dem zugehörigen Teil des Sondenquerschnittes aufgetragen ist. Für die Rechnung soll jedoch der wahrscheinliche Fall des gleichmäßig verteilten Ein- und Austrittes angenommen werden, den die Pfeile angeben und der, wie sich zeigt, in einfachem Verhältnis zu dem genannten ungünstigsten Falle steht. Durch den gleichmäßig verteilten Wärmeübergang entsteht bekanntlich kein linearer Temperaturverlauf in axialer Richtung der Sondenwände, sondern ein parabolischer, der auch in Abb. 4 in Gestalt zweier Parabelsegmente eingezeichnet ist. Eine analytische Durchrechnung erübrigt sich hier aus der einfachen geometrischen Beziehung, daß die gestrichelten Linien zugleich Tangenten der Parabeln sind, und daß die Entfernung der Spitzen  $T_{M_1}$  und  $T_{M_2}$  doppelt so groß ist wie die der Parabelscheitel  $\Delta T_s$ . Infolgedessen läßt sich das Temperaturgefälle  $\Delta T_s$  der Sonde zwischen  $M_1$  und  $M_2$  aus Querschnitt und Wärmeleitfähigkeit berechnen.

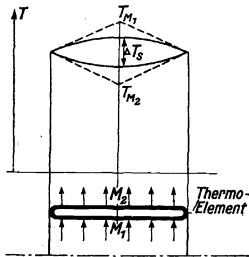


Abb. 4.

die der Parabelscheitel  $\Delta T_s$ . Infolgedessen läßt sich das Temperaturgefälle  $\Delta T_s$  der Sonde zwischen  $M_1$  und  $M_2$  aus Querschnitt und Wärmeleitfähigkeit berechnen.

$$\Delta T_s = \frac{T_{M_1} - T_{M_2}}{2} = \frac{W \cdot l}{8\alpha} \left( \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \right). \quad (1)$$

$W$  bedeutet den Wärmefluß in Watt,  $l$  den Weg des Wärmeflusses von  $M_1$  bis  $M_2$ ,  $\alpha$  die Wärmeleitzahl des Eisens und  $q_1$  bzw.  $q_2$  den radialen Querschnitt der inneren bzw. äußeren Sondenwand. Nach Einsetzen folgender Werte:

$$l = 3,2 \text{ cm}, \quad q_1 = 1,13 \text{ cm}^2, \quad \alpha = 56 \frac{\text{Cal}}{(\text{°C}) \cdot \text{St.} \cdot \text{m}}, \quad (\text{nach Hütte})$$

$$q_2 = 1,63 \text{ cm}^2, \quad = 0,651 \frac{\text{Watt}}{(\text{°C}) \cdot \text{cm}},$$

ergibt sich

$$\frac{\Delta T_s}{W} = 0,922 \frac{\text{°C}}{\text{Watt}}.$$

Nun empfängt die Sonde, wie später gezeigt wird, aus einem 2 Amp.-Lichtbogen im stromlosen Zustand eine Wärmemenge  $W \sim 4$  Watt, so daß sich  $\Delta T_s$  zu rund  $3,7^\circ$  ergibt. Somit wird die Wärmemenge, die von der inneren zur äußeren Sondenwand bei Annahme schwarzer Strahlung übergeht, nach Stefan-Boltzmann:

$$W_{\text{str}} = 5,7 \cdot 10^{-12} \cdot (T_1^4 - T_0^4) \cdot F \text{ Watt},$$

oder wenn man die mittels des Thermoelements gemessene absolute mittlere Sonden-temperatur  $T_s$  einführt und  $T_1 - T_0$  durch  $\Delta T_s$  ersetzt, wobei  $\Delta T_s$  gegen  $T_s$  als verschwindend klein angesehen werden kann:

$$W_{\text{str}} = 5,7 \cdot 10^{-12} \cdot T_s^3 \cdot 4 \Delta T_s \cdot F \text{ Watt}. \quad (2)$$

Hier bedeutet  $F$  die wirksame Strahlungsfläche, d. h. etwa die halbe Oberfläche der Heizwicklung. Es ist zu setzen:

$$F = 8,2 \text{ cm}^2, \quad \Delta T_s = 3,7^\circ, \\ T_s \approx 450^\circ \text{ abs. (bei } I_H = 1 \text{ Amp.)},$$

dann ergibt sich:

$$W_{\text{str}} = 0,063 \text{ Watt.}$$

Es zeigt sich schon durch diese überschlägige Rechnung, daß im Falle der höchsten, bei den Versuchen erreichten Temperatur der isolierten Sonde die durch Strahlung übergehende Wärmemenge so gering ist, daß die hierdurch hervorgerufene Verringerung der kleinen Größe  $\Delta T_s$  vernachlässigt werden kann. Es fragt sich nun, welcher Fehler entsteht bei der Temperaturmessung, wenn man die durch den kathodischen Nebenstrom verursachte Wärmeerhöhung der Sonde vergleicht mit der durch Heizung verursachten?

Da das Thermolement gerade auf dem halben Wege des Wärmeflusses angebracht ist, kann man a priori als höchste Fehlergrenze den halben Temperaturabfall im Sondenkörper angeben. Daß der wirkliche Fehler jedoch nur einen Bruchteil dieses Grenzwertes erreicht und vernachlässigt werden kann, soll an Hand eines Beispiels bewiesen werden, das sich auf den (ungünstigsten) Fall der höchsten, in den Versuchen angewandten Heizleistung bezieht. Für diesen Fall geht in die Gleichung (2) noch die Größe  $\Delta T_H$  ein:

$$W_{\text{str}} = 22,4 \cdot 10^{-12} \cdot T_s^3 \cdot (\Delta T_s + \Delta T_H) \cdot F.$$

Durch Kombination mit Gleichung (1) ergibt sich dann unter Berücksichtigung, daß an Stelle von  $W$  die Wärmemenge  $W - W_{\text{str}}$  durch den Sondenkörper fließt:

$$W_{\text{str}} = \frac{\Delta T_H + \frac{W \cdot l}{8 \alpha} \left( \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \right)}{\frac{10^{12}}{22,4 \cdot T_s^3 \cdot F} + \frac{l}{8 \alpha} \left( \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \right)} = \frac{\Delta T_H + 0,922 W}{\frac{22,4 T_s^3 10^{12}}{F} + 0,922}, \quad (3)$$

worin zu setzen ist:

Höchste angewandte Heizleistung 3,85 Watt

$$\Delta T_H = 3,85 \cdot 3,5 = 13,5^\circ, \quad T_s = 529^\circ \text{ abs.}$$

Gesamter Wärmefluß  $W = 4 + 3,85 \approx 8$  Watt

$$F = 16 \text{ cm}^2 (\approx 1/1 \text{ Oberfläche der Heizwicklung}).$$

Es ergibt sich dann:

$$W_{\text{str}} = 1,05 \text{ Watt.}$$

Wird dagegen die gesamte Energie vom Lichtbogen allein geliefert, so daß man in erster Annäherung<sup>1)</sup>  $\Delta T_H = 0$  setzen kann, so erhält man  $W_{\text{str}} = 0,37$  Watt.

Im Falle der Heizung geht hier also etwa  $1/8$  des ganzen Wärmeflusses in Form von Strahlung quer durch den Sondenhohlraum, und zwar 0,68 Watt mehr als im Falle der Erwärmung durch kathodischen Nebenstrom. Dieser Differenz entspricht nach Gleichung (1)  $\Delta T_s = 0,62^\circ$  oder der größtmögliche Fehler, der durch die Vergleichsmessungen der Sondenwärmerhöhung entstehen kann, beträgt  $0,31^\circ$  und liegt

<sup>1)</sup> In der Heizwicklung wird wegen der radial hindurchgeleiteten Wärmemenge  $W_{\text{str}}$  noch ein geringer Temperaturabfall entstehen, der  $W_{\text{str}}$  verkleinert.

damit im Schwankungsbereich der Sondentemperaturen, der für das gewählte Beispiel mit  $\pm 4^\circ$  anzusetzen ist, so daß sich eine rechnerische Korrektur der Sondenmessungen erübrigt.

Die Schwankungen der Sondentemperatur haben verschiedene Ursachen, sie stehen in erster Linie im Zusammenhang mit den Schwankungen des Sondenstroms bei konstantem Sondenpotential. Diese rühren her von der Änderung des Dampfdrucks im Gefäß, der nach dem Einschalten der Hauptentladung ansteigt und nach etwa 30 Min. einen Endwert erreicht, wenn das Glasgefäß sich entsprechend erwärmt hat. Durch einen Druckanstieg von 1 bis ca. 100  $\mu$  kann sich der kathodische Nebenstrom verdoppeln. Da jedoch die Raumtemperatur im Laboratorium nicht konstant blieb und zeitweise Luftströmungen entstanden, die eine beträchtliche Kühlwirkung auf die Gefäßwände ausübten, blieb der Sondenstrom nur ungefähr innerhalb 4% konstant. Von starkem Einfluß erwies sich auch der Gehalt an Fremdgasen im Gefäß, wenn deren Partialdruck 1  $\mu$  überstieg, unterhalb dieser Grenze wird die Störung jedoch unmerklich. Fremdgase, soweit sie elektronegativen Charakter haben, scheinen wie Katalysatoren zur Wiedervereinigung zu wirken, weshalb sie den Spannungsabfall in der positiven Säule erhöhen, d. h. auch die freiwerdende Energie pro Einheit des Weges und damit die Temperatur der Sonde. Aus den genannten Gründen wurde mit Messungen erst begonnen, wenn das Gefäß ca. 1 St. konstant belastet und der Fremdgasdruck durch Pumpen auf unter 0,5  $\mu$  Hg-Säule gebracht worden war.

Einen weiteren Einfluß auf die Erreichung der Sondenendtemperatur wird der Beschlag der der Sonde benachbarten Glaswände mit Quecksilbertröpfchen ausgeübt haben, indem diese die freie Ausstrahlung behinderten. Trotzdem stellte sich die Endtemperatur z. B. der isolierten Sonde, die immer zu Anfang und Ende einer Versuchsreihe kontrolliert wurde, mit befriedigender Schärfe immer wieder ein. Sie schwankte innerhalb einer Versuchsreihe mit der Sonde *II* um etwa  $\pm 1\%$  und an verschiedenen Tagen um etwa 3% der vom Thermoelement angezeigten Temperaturdifferenz mit der Raumtemperatur. Die Erwärmung der Sonde *I* verursachte wegen zu reichlicher Verwendung von Glimmer eine feine Zerstäubung desselben, so daß die Glaswände allmählich gebräunt wurden, und die Sondentemperatur einen ansteigenden Gang zeigte.

Trotz der geschilderten Nachteile, die durch Ermittlung der Endtemperaturen für die Meßgenauigkeit erwachsen, ist doch der vorliegenden Methode der Vorzug gegeben worden vor der sonst üblichen, die von der Ermittlung des Temperaturanstieges durch Anlegen von Tangenten an die Erwärmungskurven ausgeht. Die benutzte Sondenform erwies sich für diese zweite Methode als nicht geeignet, da der Wärmeausgleich im Sondenkörper zu langsam erfolgte und die aufgenommenen Kurven, wie die folgende Abb. 5 zeigt, ein Anlegen von Tangenten in den Anfangspunkten nicht mit genügender Genauigkeit gestatten.

Als Thermoelement wurden die Metalle: Eisen und Konstantan verwendet, die gegenüber der Kombination: Kupfer-Konstantan den Vorteil bieten, daß die EMK bei gleicher Temperaturdifferenz größer ist, der Anstieg der EMK mit der Temperatur bis 500° praktisch linear erfolgt (im Gegensatz zu den meisten anderen Kombinationen) und Temperaturen bis zu 1000° gut vertragen werden<sup>1)</sup>. Ein Vorteil der angewandten vergleichenden Methode ist es ferner, daß auf eine genaue Eichung des Thermoelementes verzichtet werden konnte; zur Orientierung, sowie zu der oben angestellten

<sup>1)</sup> Vgl. G. Keinath: Die elektrischen Temperaturmeßgeräte. Verlag Oldenbourg 1923.

Fehlerberechnung wurde im Gebiet zwischen  $0$  und  $100^\circ$  der Anstieg zu  $5,5 \frac{m \text{ Volt}}{100^\circ}$  oder zu  $55 \frac{\text{Skalent.}}{100^\circ}$  ermittelt, der mit dem Keinhathschen Wert von  $5,4 \frac{m \text{ Volt}}{100^\circ}$  gut übereinstimmt. Aus Gründen der Einfachheit sind auch die Thermoelementmessungen immer in Skalenteilen des Galvanometers angegeben, die wahren Temperaturen, die niemals  $500^\circ$  übersteigen, können ungefähr daraus bestimmt werden, da die Raumtemperatur bei den aufgenommenen Versuchsreihen im Mittel  $18^\circ$  mit stündlichen Schwankungen von  $\pm 2^\circ$  betrug, die durch Öffnen eines in der Nähe befindlichen großen Fabriktors hervorgerufen wurden.

Die Heizleistung wurde berechnet aus dem Heizstrom und -widerstand. Letzterer wurde für verschiedene Temperaturen bestimmt mittels der Brückenmethode und zeigt die geringe Temperaturabhängigkeit der Chromnickellegierungen von ungefähr  $4,05 \frac{\%}{100^\circ}$ . Die

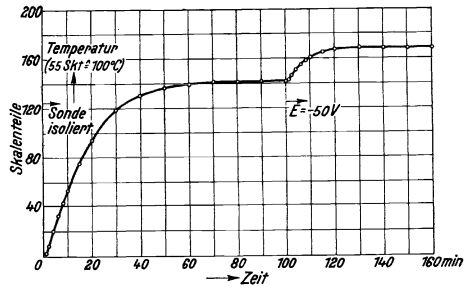


Abb. 5.

Ströme und Spannungen wurden gemessen mit  $10 \Omega$  Instrumenten von Siemens & Halske in Verbindung mit entsprechenden Nebenschlüssen und Vorwiderständen. Die möglichen Fehler betragen bei Strom- und Spannungsmessungen unter  $\pm 1\%$ , bei der Heizleistung etwa  $\pm 2\%$ .

Das Kathodenpotential als Nullpunkt für Spannungsmessungen ergab den Nachteil, daß durch das Wandern des Kathodenflecks Schwankungen von  $\pm 1$  Volt eintraten; es wurden daher nur Mittelwerte abgelesen. Für negative Sondenpotentiale sind die relativen Schwankungen jedoch gering. Ebenso ist für diesen Bereich der Spannungsabfall von etwa 2 Volt, den der Lichtbogen längs der Sonde erfährt, ohne Einfluß auf die Genauigkeit der Potentialmessungen, da nicht der Absolutbetrag des gemessenen Potentials  $E$ , sondern die Größe  $\frac{dL}{dE}$  zur Auswertung benutzt wird ( $L = \text{Leistung}$ ), so daß nur die Änderung von  $E$  in die Rechnung eingeht. Für das Gebiet positiver Sondenpotentiale soll hierauf nochmals eingegangen werden.

Faßt man alle bisher aufgezählten Fehlerquellen zusammen, so ergibt sich, daß im Durchschnitt eine Genauigkeit der Meßresultate von 90% überschritten werden wird, nur in dem Gebiet positiver oder geringer negativer Sondenpotentiale wird der Gesamtfehler wegen der kleinen Temperaturunterschiede mehr als 10% betragen können, sodaß hier die Messungen zum Teil wiederholt worden sind, um Mittelwerte zu gewinnen. Infolgedessen soll zur Auswertung nur der Potentialbereich zwischen  $E = -20$  Volt und  $E = -150$  Volt herangezogen werden, so daß mit einem Fehler von höchstens  $\pm 10\%$  gerechnet werden kann.

#### IV. Versuchsergebnisse und sekundäre Effekte.

In Abb. 5 ist der Gang der Erwärmung der Sonde  $I$  in einer Hauptentladung  $I_H = 2$  Amp. dargestellt, wenn sie zur Zeit des Einschaltens derselben noch Zimmertemperatur besaß und nach außen elektrisch isoliert war. Nach Erreichung

des stationären Zustandes wurde an die Sonde das Potential  $E = -50$  Volt gelegt (Schaltung Abb. 3), wobei eine weitere Erwärmung auftrat, während ein kathodischer Sondenstrom von 0,0335 Amp. gemessen wurde. Dieser erneute Temperaturanstieg war bereits als ein deutlicher Hinweis anzusehen, daß der Sondenstrom mindestens zu einem Teil von positiven Ionen getragen wurde, die zur Sonde hinströmten. Der Versuch wurde bei konstanter Hauptentladung, aber verschiedenen Sondenpotentialen wiederholt und die erreichten Temperaturdifferenzen  $T_u$  gegenüber der Temperatur der isolierten Sonde über dem Sondenpotential dargestellt, da angenommen wurde, daß die Sonde im stromlosen Zustand das Temperaturminimum aufweisen würde. Durch Variation des Hauptstromes entstanden somit Kurven, die in Abb. 6 wiedergegeben sind.

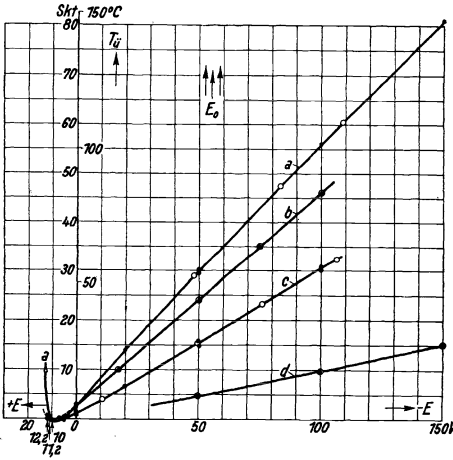


Abb. 6.

Es bedeutet

- Kurve a: Sonde I bei  $I_H = 2$  Amp.
- „ b: „ II „  $I_H = 2$  „
- „ c: „ II „  $I_H = 1$  „
- „ d: „ II „  $I_H = 0,1$  „

Es zeigt sich hier, daß die Sonden­temperatur nochetwas abnimmt, wenn das Potential der isolierten Sonde um wenige Volt verringert wird, bis ein fast linearer Wiederanstieg der Temperatur im negativen Potentialgebiet erfolgt, das in der Darstellung nach rechts verlegt ist. Der überraschende Abkühlungseffekt bei positivem  $E$

wird im folgenden Abschnitt näher diskutiert werden.

Bei gleichem Hauptstrom wurde darauf die isolierte Sonde mittels Akkumulatorenstroms geheizt, die erreichten Übertemperaturen wurden auf den zugehörigen Kurven in Abb. 6 als Kreise eingetragen und die Abszissen  $E$  derselben ermittelt. Die gemessenen Heizleistungen  $L$  konnten dann in Abb. 7, abhängig von dem Sondenpotential, dargestellt werden, das jeweils der Abb. 6 entnommen wurde, und ergeben die ausgezogenen Kurven. (Die gestrichelten Kurven werden weiter unten besprochen.) Abb. 7 zeigt also die der Sonde durch den Zustrom positiver Ionen erteilte Erwärmung direkt in energetischem Maß, so daß sich hier in einfacher Weise der Anteil positiver Ionen am Sondenstrom ermitteln läßt. Ändert man nämlich  $E$  um  $dE$ , so muß die Größe  $dL$  einerseits gleich sein  $\frac{dL}{dE} \cdot dE$ , andererseits  $I' dE$ , wobei  $I'$  den Strom positiver Ionen bedeutet, der zur Sonde fließt und in erster Annäherung als unabhängig von  $E$  angenommen werden kann. Bildet man also den Quotienten

$$\frac{dL}{dE} = \frac{I'}{I} = k',$$

so gibt  $k'$  den experimentell ermittelten Anteil der positiven Ionen an dem gesamten Strom  $I$  an. Man findet also  $I'$  einfach als Steigung der ausgezogenen Kurven in

Abb. 7. In der folgenden Tabelle sind für verschiedene Sondenpotentiale  $E$  die gemessenen Ströme  $I$  und die in der genannten Weise ermittelten Werte von  $k'$  zusammengestellt:

Tabelle 2.

E Volt	Kurve											
	a			b			c			d		
	I	I'	$k' = \frac{I'}{I}$	I	I'	$k = \frac{I'}{I}$	I	I'	$k' = \frac{I'}{I}$	I	I'	$k' = \frac{I'}{I}$
	mA	mA	—	mA	mA	—	mA	mA	—	mA	mA	—
- 20	32,6	—	—	36,7	38,5	1,05	15,0	18,2	1,21	—	—	—
- 50	33,5	43,5	1,30	38,0	39,5	1,04	16,9	20,0	1,18	2,2	2,85	1,30
- 100	36,0	52,6	1,46	40,7	41,0	1,01	18,2	22,0	1,21	2,68	3,4	1,27
- 150	38,2	—	—	—	—	—	—	—	—	3,03	4,55	1,5

Hiernach ergeben sich merkwürdigerweise durchweg zu hohe Werte für  $k'$ , während nach den angestellten Überlegungen als Höchstwert  $k' = 1$  mit einer Streuung von  $\pm 10\%$  zu erwarten war, da in dem benutzten Potentialbereich der Zustrom negativer Ladungsträger zur Sonde als verschwindend klein, also  $I' \leq I$  angenommen werden mußte. Die

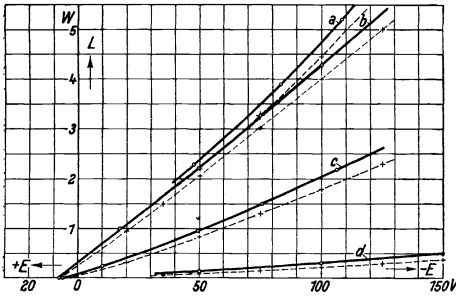


Abb. 7.

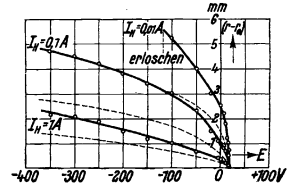


Abb. 8.

gefundenen Werte von  $k'$  liegen aber zum Teil so hoch, daß die bereits erörterten Fehlerquellen keinesfalls zur Erklärung dieser Diskrepanz ausreichen.

Hier ist nun ein Effekt zu erwähnen, der nach einer Theorie Langmuirs<sup>1)</sup> an jeder negativen Sonde in einer Gasentladung auftreten muß, nämlich die Vorlagerung eines Gebietes positiver Raumladung an der Sondenoberfläche. Dieses Gebiet, in dem nach Langmuirs Annahme die Ionen unter dem Einfluß des elektrischen Feldes der Sonde frei fallen — entsprechend wie Elektronen in Hochvakuumröhren (Childscher Entladungstypus) — prägt sich bei der angewandten Hohlsonde als deutlicher Dunkelraum aus, während dieser Effekt bei anderen Sondenformen, z. B. kugelförmigen, nur äußerst schwach sichtbar und daher wohl bisher nicht beobachtet ist<sup>2)</sup>. Bei verschiedenen Hauptentladungsströmen  $I_H$  wurde in Abhängigkeit vom Sondenpotential  $E$  die radiale Ausdehnung des Dunkelraums mittels Fernrohrs und Vergleichsmaßstabes etwa auf  $\pm 0,1$  mm genau geschätzt und in Abb. 8 dargestellt (ausgezogene Kurven).

<sup>1)</sup> I. Langmuir: Gen. Rev. El. Bd. 26, S. 371. 1923.

<sup>2)</sup> Vgl. die vorläufige Mitteilung: W. Schottky und J. v. Issendorff, Z. f. Ph. Bd. 26, S. 85. 1924.

Zur Kontrolle wurde die Ausdehnung des Ionenfallgebietes auch nach der von Langmuir angegebenen Formel

$$i = 14,6 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{\frac{m^-}{m^+}} \cdot \frac{V^{\frac{3}{2}}}{r \cdot \beta^2} \dots \quad (4)$$

berechnet und in Abb. 8 gestrichelt eingetragen. Hier bedeutet  $i$  den Strom je Zentimeter axialer Sondenlänge, also  $i = \frac{I}{3,4}$ , wenn  $I = I^+$  und die wirksame Sondenlänge zu 3,4 cm angenommen wird;  $m^-$  bedeutet die Elektronen-,  $m^+$  die Ionenmasse, so daß im Hg-Dampf  $\sqrt{\frac{m^-}{m^+}} \approx \frac{1}{608}$ ; mit  $V$  ist die Potentialdifferenz zwischen Entladungsbahn und Sonde, mit  $r$  der Radius der Sondenbohrung und mit  $r_0$  der Radius der Emissionselektrode, also der zylindrischen Grenzfläche der Entladungsbahn innerhalb der Sonde bezeichnet. Eine Funktion des Verhältnisses  $\frac{r}{r_0}$  ist ersetzt durch die Größe  $\beta^2$ . Man kann dann für den aus der Formel (4) errechneten Wert von  $\beta^2$  die Größe von  $\frac{r}{r_0}$  aus einer von Langmuir gegebenen Tabelle<sup>1)</sup> finden und damit  $r - r_0$  als die Breite der Raumladungsschicht. Als Nullpunkt für  $V$  wurde dasjenige Sondenpotential angenommen, bei dem der Dunkelraum verschwand, also etwa bei  $E = +20$  Volt. Es muß besonders darauf hingewiesen werden, daß bei isolierter Sonde und  $I_H < 1$  Amp. der Dunkelraum noch deutlich erkennbar war, so daß mit Sicherheit angenommen werden konnte, daß das Potential der isolierten Sonde nicht mit dem wahren Lichtbogenpotential übereinstimmte. Der Verlauf der beobachteten und der berechneten Kurven ist von gleichem Charakter, nur sind die beobachteten Dunkelräume bei höherem Entladungsstrom um ca. 30%, bei geringerem bis ca. 60% größer.

Die Gründe für diese Verschiedenheit lassen sich nach der Raumladungstheorie schwer angeben, jedenfalls konnte durch geringe Veränderung der in die Formel eingehenden Größen keine Übereinstimmung erzielt werden. Die Erscheinung wird jedoch vielleicht aus der Diffusionstheorie der positiven Säule (siehe weiter unten) verständlich, wenn man beachtet, daß hiernach auch in dem „raumladungskompensierten“ Gebiet der Entladung schon ein Abfall des Potentials nach außen und damit eine Verarmung an schnelleren Elektronen, den Erzeugern der Lichtwirkung, einsetzen muß. Um die verhältnismäßig scharfe Begrenzung des Dunkelraums zu zeigen, wurden photographische Aufnahmen (Abb. 9 und 10) gemacht, die eine Hauptentladung von 0,02 Amp. mit Sondenpotentialen von 0 bzw. — 100 Volt darstellen.

Von Wichtigkeit für die vorliegende Untersuchung ist die Tatsache, daß durch Erhöhung des negativen Sondenpotentials der Querschnitt der Entladungsbahn verkleinert wird und zugleich der longitudinale Potentialgradient ansteigt, wie man durch Beobachtung des gesamten Lichtbogenabfalls feststellen kann, allerdings wegen der dauernden Schwankungen desselben nur angenähert. Infolgedessen steigt auch die innerhalb der Sonde freiwerdende Stromwärme, von der in erster Annäherung angenommen werden möge, daß sie vollständig zur Sonde übergeführt wird. Dann läßt sich an der gemessenen Wärmefaufnahme der Sonde eine Korrektur anbringen, deren Anwendbarkeit jedoch erst später bewiesen werden kann, da der logische Gang der

<sup>1)</sup> Phys. Rev. Bd. 24, S. 347. 1923.



Untersuchung sonst durch die notwendige Vorwegnahme eines Resultates gestört werden würde.

Die durch Einschnürung des Lichtbogens verursachte Wärmeerhöhung der Sonde kann größenordnungsmäßig unter Zugrundelegung der Beziehung bestimmt werden, daß der Potentialgradient in einem Gasentladungsrohr dem Rohrradius näherungsweise umgekehrt proportional ist. Diese Beziehung wird experimentell gestützt durch die Messungen von Wills<sup>1)</sup> und G. Claude<sup>2)</sup> und ist kürzlich abgeleitet worden von W. Schottky<sup>3)</sup> aus einer neuen Theorie der Diffusion von Ladungs-

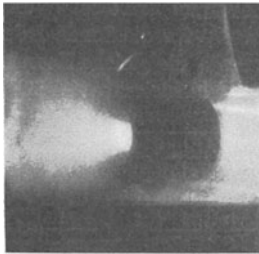


Abb. 9.

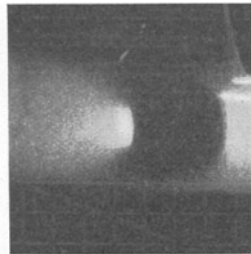


Abb. 10.

trägern in Gasentladungen. Hiernach gilt die Proportionalität streng, wenn alle übrigen Daten, z. B. Temperatur und Beweglichkeit der Ladungsträger konstant bleiben. Die letztere Bedingung ist in der Versuchsanordnung annähernd erfüllt. Da hiernach die vom Hauptstrom längs eines bestimmten Weges abgegebene Stromwärme sich umgekehrt wie der Radius des Lichtbogenquerschnittes verhalten muß, so läßt sich folgender Ansatz aufstellen:

$$\frac{L_E}{L_{E_0}} = \frac{r_{E_0}}{r_E}.$$

Hier bedeutet  $L$  die in der Sekunde im Hg-Dampf an die Sonde abgegebene Wärme (jedoch mit Ausschluß der Sondenfallenergie) und  $r$  den Radius des Lichtbogenquerschnittes in der Sonde, während die Indizes das jeweilige Sondenpotential angeben.  $E_0$  sei das Potential der isolierten Sonde. Zur Bestimmung der Leistung  $L_{E_0}$ , die in Abb. 5 der vor Anlegen des Potentials  $E$  erreichten Endtemperatur entspricht, wurde die Abhängigkeit der erreichten Sondentemperatur  $T_s$  von der Heizung ohne Hauptentladung (jedoch mit brennender Hilfsrerregung) aufgenommen und in Abb. 11 dargestellt.

Ogleich die Wärmeleitfähigkeitsverhältnisse des Hg-Dampfes bei verschiedenen Entladungsströmen nicht konstant sein können, soll trotzdem aus dieser Darstellung die Wärmeleistung bestimmt werden, die eine isolierte Sonde durch den Lichtbogen erfährt, da es sich hier nur um die Anbringung einer Korrektur am Versuchsergebnis handelt. Es zeigt sich ferner, daß die Leitfähigkeit des Hg-Dampfes zwischen Sonde und Glaswand so gering ist, daß die Wärmeableitung gegenüber der Wärmestrahlung hier zu vernachlässigen ist.

<sup>1)</sup> Marx' Handbuch Bd. IV, S. 280. 1917.

<sup>2)</sup> Comptes Rendus Bd. 158, S. 692. 1914.

<sup>3)</sup> Phys. Z. Bd. 25, S. 342. 1924. (Vorläufiger Bericht.)

Die Werte von  $\frac{r_{E_0}}{r_E}$  wurden aus den in Abb. 8 dargestellten Dunkelraummessungen unter der Annahme ermittelt, daß die leuchtende Säule der Entladung den gleichen Querschnitt wie die Strombahn derselben besitzt, trotzdem der Vergleich mit der Rechnung vermuten ließ, daß das wahre Strombett (der Elektronen) sich noch etwas weiter ausdehnt. Es ergeben sich dann mit Hilfe von Abb. 11 die Werte  $L_E = L_{E_0} \frac{r_{E_0}}{r_E}$ , die in der Tabelle 3 zusammengestellt sind. Die hieraus zu bildenden Differenzen  $L_E - L_{E_0}$  wurden von den zugehörigen Ordinaten der Abb. 7 subtrahiert, da jene Energiewerte, wie erwähnt, um  $L_E - L_{E_0}$  zu hoch waren. Auf diese Weise entstanden die gestrichelt gezeichneten korrigierten Kurven. Da für die Sonde  $I$  der Wert  $L_{E_0}$  nicht bestimmt worden war, wurde bei der Kurve  $a$  die gleiche Korrektur wie bei der Kurve  $b$  vorgenommen, die unter denselben elektrischen Bedingungen aufgenommen ist.

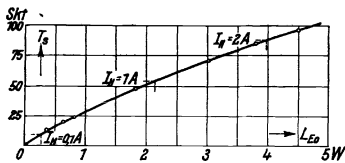


Abb. 11.

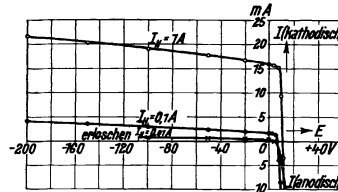


Abb. 12.

Außer der Änderung der in der Bohrung des Eisenkörpers freiwerdenden Stromwärme muß noch die Änderung des kathodischen Nebenstromes mit  $E$  berücksichtigt werden, die bisher vernachlässigt wurde. Die an der Sonde abgegebene Leistung desselben beträgt

$$L = I^+ (E_0 - E),$$

wenn man  $E_0 - E$  in erster Annäherung als die wahre Potentialdifferenz zwischen Lichtbogen und Sonde ansieht und mit  $I^+$  den von positiven Ionen getragenen Anteil des Nebenstromes bezeichnet. Das Vorzeichen von  $E$  soll hier sowie für die folgenden Berechnungen immer berücksichtigt werden. Die Differentiation ergibt:

$$\frac{dL}{dE} = \frac{dI^+}{dE} (E_0 - E) - I^+,$$

also

$$I^+ = -\frac{dL}{dE} + \frac{dI^+}{dE} (E_0 - E).$$

Die Größe  $\frac{dL}{dE}$ , die als Steigung der gestrichelten Kurven in Abb. 7 ermittelt wurde, ist in der Tabelle 3 unter der Bezeichnung  $I''$  aufgeführt (zur Unterscheidung von dem nicht auf Einschnürung korrigierten Wert  $I'$ ), während das zweite Glied der rechten Seite unter der Annahme  $I^+ \sim I$  aus Strom-Spannungscharakteristiken der Zylindersonde ermittelt wurde<sup>1)</sup>, wie sie die folgende Abb. 12

<sup>1)</sup> Wahrscheinlich ist  $I^+ < I$ ; die hiermit begangene Vernachlässigung wird jedoch zum Teil kompensiert durch die weiter oben erwähnte, daß  $E_0$  hier als das wahre Potential des Lichtbogens vor der Sonde angenommen wird. Die Frage des wahren Potentials wird später behandelt, für den vorliegenden Fall genügt die Angabe, daß der resultierende Fehler von geringerer Größenordnung als das Korrektionsglied  $\frac{dI^+}{dE} (E_0 - E)$  ist.

zeigt. Daraus ergeben sich die Werte von  $I^+$  und den Verhältniszahlen  $k = \frac{I^+}{I}$ , die ebenfalls in die Tabelle 3 eingetragen sind. Hier zeigt sich nun, daß  $k$  unter der Gruppe  $a$ , welche der ungenügend wärmeisolierten Sondenform  $I$  zugehört, noch den Grenzwert 1 erheblich überschreitet. An dieser Sonde entstand, wie schon erwähnt, ein beträchtlicher Verlust an Heizenergie, so daß die Gruppe  $a$  hier ausgeschieden werden muß. Unter den übrigen Gruppen ist  $k$  zwar durchweg kleiner als 1, jedoch erscheinen die  $k$ -Werte unter  $d$  besonders niedrig im Vergleich mit denjenigen unter  $b$  und  $c$ . Hier könnte wegen der Breite des Dunkel-

Tabelle 3.

$E$ Volt	Kurve							
	$a$			$b$				
	$I''$ mA	$I^+$ mA	$k = \frac{I^+}{I}$ —	$\frac{r_{E_0}}{r_E}$ —	$L_E$ Watt	$I''$ mA	$I^+$ mA	$k = \frac{I^+}{I}$ —
$= E_0$	—	—	—	1,000	3,98	—	—	—
— 20	—	—	—	1,030	4,10	36,7	35,2	0,96
— 35	—	—	—	1,037	4,13	—	—	—
— 50	41,9	39,1	1,17	1,045	4,16	37,6	34,8	0,92
— 75	—	—	—	1,058	4,21	—	—	—
— 100	49,0	43,9	1,22	1,071	4,27	38,2	33,1	0,81
— 125	—	—	—	1,082	4,32	—	—	—

$E$ Volt	Kurve									
	$c$					$d$				
	$\frac{r_{E_0}}{r_E}$ —	$L_E$ Watt	$I''$ Am	$I^+$ mA	$k = \frac{I^+}{I}$ —	$\frac{r_{E_0}}{r_E}$ —	$L_E$ Watt	$I''$ mA	$I^+$ mA	$k = \frac{I^+}{I}$ —
$= E_0$	1,000	2,15	—	—	—	1,000	0,230	—	—	—
— 20	1,045	2,250	15,6	14,8	0,98	—	—	—	—	—
— 35	1,061	2,282	—	—	—	1,182	0,272	—	—	—
— 50	1,072	2,304	18,2	16,6	0,98	1,243	0,286	2,36	1,93	0,88
— 75	1,097	2,360	—	—	—	1,335	0,294	—	—	—
— 100	1,119	2,404	19,4	16,8	0,92	1,418	0,326	3,02	2,22	0,83
— 125	1,141	2,458	—	—	—	1,49	0,342	—	—	—
— 150	—	—	—	—	—	1,57	0,361	3,68	2,57	0,85

raums an einen Verlust kinetischer Ionenenergie an neutrale Atome gedacht werden, es zeigt sich jedoch, daß das Verhältnis der freien Ionenweglänge zur Breite des Ionenfallgebietes bei  $I_H = 0,1$  Amp. etwa eine Zehnerpotenz größer als bei den höheren Hauptströmen und auch bei diesen mehrfach größer als 1 ist, so daß ein solcher Energieverlust unter Gruppe  $d$  überhaupt nicht merklich in Frage kommt<sup>1)</sup>. Daher ist die hier erhaltene Abweichung der angebrachten Korrektur, und zwar der subtrahierten Größe  $L_{E_0} \frac{r_{E_0}}{r_E}$  zuzuschreiben, die bei schwachem Hauptstrom relativ hohe Werte erreicht, wie weiter unten noch abgeleitet werden wird<sup>2)</sup>. Die in der Korrektur enthaltenen Unsicherheiten haben also in diesem Falle einen so wesentlichen Einfluß

<sup>1)</sup> Abgesehen davon, daß nach R. Seeliger (l. c.) derartige Stoßverluste an Kanalstrahlen nicht beobachtet worden sind.

<sup>2)</sup> S. 154.

erlangt, daß auch den Ergebnissen der Gruppe *d* eine geringere Bedeutung beizumessen ist.

Unter den übrigen Gruppen *b* und *c* sind die angebrachten Korrekturen dagegen relativ klein, so daß die angenommene Fehlergrenze von  $\pm 10\%$  aufrechterhalten werden kann. Hier zeigt *b* einen fallenden Gang mit wachsender Ionengeschwindigkeit, der jedoch bis  $E = -100$  Volt noch zu geringfügig ist, um an Hand der vorliegenden Messungen näher untersucht zu werden. Durch den Effekt der Einschnürung der Entladungsbahn würde wegen der geringen Kenntnis vom Verhalten des Ausbeutefaktors  $\kappa$  — dessen Konstanz hier vorausgesetzt war — eine exakte Bestimmung des Ionenstromes bei höheren negativen Sondenpotentialen in der vorliegenden Anordnung nicht möglich sein. Es läßt sich nur aussagen, daß bei geringeren Sondenpotentialen  $E \sim 0$  das Verhältnis  $\frac{I^+}{I}$  sich dem Wert 1 nähert, welches Verhalten schon Schlüsse hinsichtlich der Art der Auslösung zu ziehen gestattet. Aus der Tatsache, daß angeregter Hg-Dampf kurzwellige, also lichtelektrisch wirksame Strahlung emittiert, ist zweifellos ein gewisser, wenn auch sehr kleiner Betrag lichtelektrisch ausgelöster Elektronen zu erwarten; andererseits haben die Untersuchungen Baerwalds<sup>1)</sup> ergeben, daß Kanalstrahlteilchen beim Stoß gegen eine metallische Wand recht intensiv Elektronen auszulösen vermögen, so daß dasselbe von Hg-Ionen angenommen werden muß, wenn sie genügende Geschwindigkeiten besitzen. Nur für die letztere Auslösungsart kann eine wesentliche Abhängigkeit vom Sondenpotential bestehen, es ist also zu vermuten, daß die Zahl der lichtelektrisch ausgelösten Elektronen hier die Größenordnung von etwa 1% des kathodischen Nebenstromes nicht übersteigt<sup>2)</sup>, während die Zahl der durch Ionenstoß ausgelösten bei einem Gefälle von 100 Volt schon die Größenordnung von 10% erreichen könnte. Das Ergebnis der angestellten Sondenmessungen kann daher folgendermaßen ausgesprochen werden:

Der von einer negativen Sonde in einer Hg-Dampfentladung geführte Strom wird bei geringer Potentialdifferenz von wenigen Volt gegenüber der Entladung praktisch nur von positiven Ionen getragen. Mit steigendem negativen Sondenpotential ist nach den Versuchen eine Beteiligung von ausgelösten Elektronen am Ladungstransport denkbar, die bei  $-100$  Volt bis zur Größenordnung von 10% des kathodischen Nebenstromes gehen könnte. Wegen einer größeren Zahl von Fehlerquellen ist mit einem möglichen Fehler von 10% bei der Bestimmung des Anteils positiver Ionen am Ladungstransport zu rechnen, während nur unter der ungünstigen, doch unwahrscheinlichen Annahme, daß die Hälfte der von den ausgelösten Elektronen erlangten Energie zur Sonde zurückzukehren vermag, der doppelte Prozentsatz als obere Fehlergrenze erreicht werden könnte.

Der Absolutbetrag der ausgelösten Elektronen, der an sich von hohem Interesse ist, ergibt sich hiernach als Differenz zweier wenig verschiedener Größen und konnte daher nur ganz roh ermittelt werden. Auch bei möglichster Ausschaltung aller Fehlerquellen würde mit der bisher benutzten Versuchsanordnung keine genügende Genauigkeit erreicht werden. Hier ist daher eine Methode mit Vorteil anzuwenden, die den Elektronenanteil des kathodischen Nebenstroms in Nähe der Sondenoberfläche direkt

<sup>1)</sup> H. Baerwald: Ann. Physik Bd. 65, S. 167. 1921.

<sup>2)</sup> Damit würde sich für 1 Watt Hauptstromleistung als obere Grenze für die Stromstärke der Photoelektronen hier etwa 0,1 mA ergeben, was dem 2000. Teil des theoretisch möglichen Stroms entspricht. Vgl. hierzu die von W. Schottky (Phys. Z. Bd. 24, S. 350. 1923) aufgestellte Energiebilanz des lichtelektrischen Auslösungsvorgangs in der Hg-Dampfentladung.

zu messen gestattet. Der Versuch einer solchen Messung wird am Schluß dieser Arbeit beschrieben, während hier nunmehr das merkwürdige Verhalten der Sondentemperatur im Grenzgebiet des kathodischen und anodischen Sondenstroms diskutiert werden soll.

### V. Diskussion der vollständigen Sondentemperaturkurven.

Die in Abb. 6 dargestellte Abhängigkeit der Sondentemperatur vom Potential zeigt die zunächst überraschende Tatsache, daß das Temperaturminimum gar nicht beim Potential der isolierten Sonde auftritt, sondern bei einem um wenige Volt negativeren. Das Minimum ist zwar recht flach und unterscheidet sich von der Temperatur der isolierten Sonde hier um weniger als  $2^\circ$ , doch konnte seine Existenz durch eine größere Zahl wiederholter Messungen unzweifelhaft nachgewiesen werden. Um zu einer Erklärung dieses Verhaltens zu gelangen, wird man zunächst ausgehen von der früher allgemein verbreiteten Annahme, daß eine Sonde immer das Potential des von ihr berührten Lichtbogenteils anzunehmen bestrebt ist. Da die hier verwendete Sonde aber eine solche Ausdehnung besitzt, daß der Lichtbogen innerhalb derselben bereits einen Abfall von etwa 2 Volt erleidet, wie aus den energetischen Messungen hervorgeht ( $\frac{L_{F_0}}{I_H} \sim 2 \text{ Volt}$ ), so ist zu schließen, daß das eine Ende der Sonde positiv, das andere negativ gegenüber dem benachbarten Lichtbogenteil geladen sein wird und die Sonde infolgedessen einen Nebenschlußkreis bildet. Dann wird die durch Wärmeleitung aus der Entladungsbahn zugeführte Wärme also noch erhöht durch die kinetische Energie der an den Enden absorbierten Elektronen und Hg-Ionen. Rechnet man mit Durchschnittsgeschwindigkeiten von etwa 1 Volt, da nur 2 Volt Gesamtabfall zur Verfügung stehen, zu denen noch die spontanen (thermischen) Geschwindigkeiten der Ladungsträger von gleicher bzw. kleinerer Größenordnung hinzukommen, wie im folgenden ausgeführt wird, so zeigt sich, daß diese Leistung des Nebenstromes bei weitem nicht zur Erklärung des Temperaturverlaufes ausreicht, wie ihn z. B. die Kurve a in Abb. 6 zeigt. Ferner ist der Abkühlungseffekt durchaus nicht an eine achsial lange Sondenform gebunden, sondern zeigt sich ebenso bei dem weiter unten beschriebenen Versuch mit einer kleineren Kugelsonde.

Zu einer vollständigen Erklärung gelangt man dagegen durch Annahmen, die sich aus folgenden Überlegungen ergeben: In der Entladungsbahn befinden sich zwar praktisch gleich viel positive und negative Ladungsträger in der Volumeneinheit, jedoch muß die mittlere ungeordnete Geschwindigkeit derselben, gemessen in Volt, beträchtlich verschieden sein. Dies ergibt sich einmal aus der Tatsache, daß positive Ionen eine kürzere freie Weglänge als Elektronen besitzen, nämlich nach der einfachsten Theorie die  $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ -fache, nach Ergebnissen von Messungen sogar noch weniger, andererseits verlieren die Hg-Ionen beim Zusammenstoß mit neutralen Atomen einen beträchtlichen Teil ihres Impulses, die Elektronen, soweit sie elastisch stoßen, dagegen nur einen verschwindend geringen, so daß die letzteren befähigt sind, im Feld der Hauptentladung bedeutend höhere Voltgeschwindigkeiten zu erreichen. Daraus ergibt sich aber zwingend, daß das Potential der Sonde durch die Elektronen, die mit größerer mittlerer Geschwindigkeit, also auch häufiger auftreten, soweit herabgedrückt werden muß, bis die Zahl derjenigen Elektronen, die das Gegenpotential noch zu überwinden vermögen, gleich der Zahl der absorbierten Ionen geworden und damit ein stationärer Zustand erreicht ist. Infolge des sich ausbildenden elektrischen

Feldes müssen also die Ionen zur Sondenwand „fallen“, die Elektronen „steigen“, und man kann bei genügend großer freier Weglänge aus den Gesetzen des freien Falles ableiten, daß in der Nähe der Wand die Dichte der Ionen bei weitem überwiegt. Es entsteht hier also ein Gebiet positiver Raumladung vor der negativ aufgeladenen isolierten Sonde. Diese Überlegung wird gestützt durch die schon erwähnte Beobachtung des auch an der äußerlich stromlosen Sonde auftretenden Dunkelraums.

Schätzt man das gegen die Entladung negative Potential der Sonde auf etwa 5 Volt<sup>1)</sup>, so ist anzunehmen, daß diese auch dann noch positive Ionen absorbiert, wenn ihr Potential künstlich um einige Volt erhöht wird, und zwar wird in dem geschätzten Potentialbereich der positive Ionenstrom nicht wesentlich verschieden sein von dem bei negativen Sondenpotentialen bis zu hunderten von Volt beobachteten konstanten Sättigungsstrom. Der Zustrom positiver Ionen zur Sondenwand behält also solange seinen Sättigungscharakter, bis das Potential derselben das wahre Potential im Lichtbogen überschritten hat; dann erst wird er gemäß der Geschwindigkeitsverteilung der Hg-Ionen in der Entladung auf 0 abklingen, was natürlich wegen des bereits einsetzenden intensiven Elektronenstroms nicht mehr erkennbar ist.

Abweichungen von dem Sättigungscharakter des Ionenstromes sind in erster Linie in der Sondenform begründet, wenn nämlich entweder die Hauptentladung durch das Gebiet positiver Raumladung eingeschnürt wird, also die Stromdichte steigt, oder

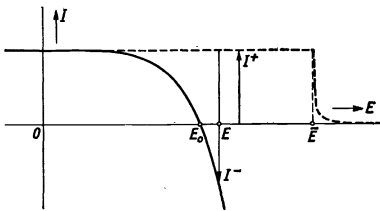


Abb. 13.

wenn die wirksame Oberfläche der Sonde durch die Raumladungsschicht vergrößert wird<sup>2)</sup>. Die meisten Sondenformen werden eine dieser Eigenschaften besitzen, z. B. auch die verwendete Zylindersonde, deren Charakteristik für verschiedene Hauptströme in Abb. 12 wiedergegeben ist. Jedoch wird die geringe Änderung des Ionenstromes für die folgende Überlegung nur in

einem kleinen, noch näher zu bezeichnenden Potentialbereich merklich sein, in dem die Elektronenabsorption beginnt.

Auf Grund der angestellten Überlegungen läßt sich nun eine beliebige Stromspannungscharakteristik, wie sie Abb. 13 zeigt, in einfacher Weise zerlegen. Der als Ordinate aufgetragene Sondenstrom  $I$  zerfällt in einen von Ionen getragenen Anteil  $I^+$  und einen von Elektronen getragenen, daher in umgekehrter Richtung zu zeichnenden Anteil  $I^-$ . Für das Gebiet negativen Sondenpotentials ergab sich nun innerhalb der Meßgenauigkeit  $I = I^+$  und gemäß der angestellten Überlegung muß  $I^+$  auch bei positiver Sonde noch seinen konstanten Wert beibehalten, bis das wahre Potential  $\bar{E}$  des Lichtbogens erreicht ist, um dann bei Überschreitung von  $\bar{E}$  nach einer hier willkürlich angenommenen Funktion der Geschwindigkeitsverteilung der Ionen abzuklingen, wie gestrichelt angegeben ist. Im Bereich der positiven Sondenspannung (Nullpunkt ist auch hier das Kathodenpotential) beginnt zugleich die Absorption von Elektronen merklich zu werden, wobei zunächst nur die schnellsten derselben zur Sonde gelangen, so daß  $I$  kleiner als  $I^+$  wird und zwar um den absoluten Betrag von  $I^-$ . Es erfolgt mit wachsendem  $E$  ein rapider Anstieg von  $I^-$ , wobei sich im Punkt  $E_0$  die

<sup>1)</sup> Diese Behauptung haben bereits M. Schenkel und W. Schottky, l. c. S. 272, ausgesprochen.

<sup>2)</sup> Diesen Fall untersuchte I. Langmuir.

Stromrichtung von  $I$  umkehrt, bis die Sonde zur selbständigen Anode wird und die betrachtete Aufladungskurve in eine Lichtbogencharakteristik übergeht.

Bei einem in Abb. 13 angegebenen beliebigen Potential  $E$  werden nun die eingezeichneten Ströme  $I^+$  und  $I^-$  zur Sonde fließen und zwar läßt die Abbildung zugleich die kinetischen Energien erkennen, mit denen die Ladungsträger aufprallen müssen, da die im Fallgebiet noch befindlichen neutralen Atome nicht merklich stören, wie sich für die Ionen bereits ergab und für die Elektronen daher um so sicherer angenommen werden kann. Für die Ionen ergibt sich als Fallenergie  $\mathcal{E}^+ = I^+ \cdot (\bar{E} - E)$ , die in der Zeiteinheit an die Sonde abgegeben werden muß, wobei das Abklingungsgebiet bei  $\bar{E}$ , das sich in einer normalen Hg-Dampfentladung nur über etwa 0,1 Volt erstrecken kann, vernachlässigt wurde, ebenso wie die von den neutralisierten Hg-Ionen, die die Sonde mit einer der Sondentemperatur entsprechenden mittleren thermischen Geschwindigkeit verlassen, fortgeführte Energie vernachlässigt ist.

Im Gegensatz zu den Ionen schwankt die Geschwindigkeit der zur Sonde gelangenden Elektronen in weiten Grenzen und auch die Einfallsrichtungen sind durchaus nicht senkrecht zur Oberfläche. Die Gesamtenergie  $\mathcal{E}^-$  kann daher nur durch Integration gefunden werden und zwar folgendermaßen:

#### A. Untersuchung der Elektronengeschwindigkeitsverteilung.

Bezeichnet man mit  $V$  das Voltäquivalent der zur Sondenoberfläche normalen Komponente der Elektronengeschwindigkeit vor dem Durchlaufen des verzögernden Feldes, so können nur diejenigen Elektronen zur Sonde gelangen, für die  $V - \bar{E} + E > 0$  gilt. Erhöht man alle Komponenten  $V$  um  $dV$  oder  $E$  um (das gleich große Differential)  $dE$ , so wird  $I^-$  um einen Betrag  $dI^-$  wachsen, und es zeigt sich, daß die  $I^-$ ,  $V$ -Kurve und die  $I^-$ ,  $(E - \bar{E})$ -Kurve übereinstimmen, weil sie gleiche Differentialquotienten besitzen, und weil für den Fall  $V = 0$  oder  $E = \bar{E}$ , der noch später behandelt wird,  $I^-$  zum Gesamtstrom der Elektronen aller positiven Geschwindigkeiten wird. Es läßt sich also schreiben:

$$\mathcal{E}^- = \int_0^{I^-} (V - \bar{E} + E) dI^- + f(I^-),$$

wo  $f(I^-)$  denjenigen Energiebetrag darstellt, der unter Berücksichtigung der Querkomponenten der Elektronengeschwindigkeiten noch hinzutritt und weiter unten abgeleitet werden soll. Hier soll angenommen werden, daß die Ausdehnung des verzögernden Feldes klein gegen die Krümmungsradien der Sondenoberfläche ist, so daß die Zerlegung in Normal- und Querkomponenten berechtigt erscheint. Da bei Betrachtung eines bestimmten Sondenpotentials  $E$  nur  $V$  variabel ist, läßt sich auch schreiben:

$$\mathcal{E}^- = \int_0^{I^-} V dI^- - (\bar{E} - E) I^- + f(I^-). \quad (5)$$

Um  $\mathcal{E}^-$  angenähert berechnen zu können, wurde eine analytische Form der  $I^-$ -Kurve der Abb. 13, beginnend mit  $I^- = 0$ , auf empirischem Wege gesucht und zu diesem Zweck wurde der Teilstrom  $I^-$ , obgleich eine Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen nur in dem Bereich elastischer Stöße, also  $V < 5$  Volt zu erwarten war, in logarithmischem Maßstab dargestellt. Bei verschiedenen Hauptentladungsströmen, die in Tabelle 4 angegeben sind, ergibt sich dann eine Kurven-

schar, die in Abb. 14 für die Zylindersonde und in Abb. 15 für eine später zu beschreibende Kugelsonde wiedergegeben ist. Als Abszisse ist hier der besseren Übersicht halber nicht  $E$ , sondern  $E - E_0$  gewählt, um ein gegenseitiges Überschneiden der Kurven zu vermeiden. Es zeigt sich zunächst ein ziemlich linearer Verlauf über Bereiche von zum Teil mehr als 10 Volt, so daß für diese mit genügender Genauigkeit die Funktion des Elektronenstroms gebildet werden kann, und zwar in der Form:

$$I^- = I_0^- e^{\frac{E - E_0}{\mathfrak{B}}}, \tag{6}$$

wo  $I_0^-$  den bei äußerlich stromloser Sonde oder  $E = E_0$  fließenden Elektronenstrom bezeichnet. Die in Volt zu messende Größe  $\mathfrak{B}$ , die für ein und dieselbe Hauptentladung konstant bleibt, muß dann mit der Temperatur, die dieser Verteilung der Elektronen entspricht, d. h. bei der sie dieselbe Geschwindigkeitsverteilung hätten, in der Beziehung stehen:  $\mathfrak{B} = 300 \frac{k T}{e}$ . ( $k$  Boltzmannsche Konstante.) In der Gleichung (6) ist nun als Variable nicht die Differenz  $E - E_0$ , sondern  $\bar{E} - E$

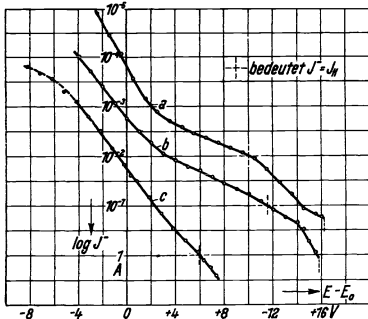


Abb. 14.

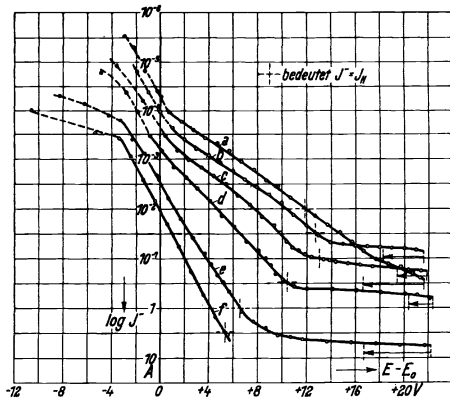


Abb. 15.

erwünscht — zur Kombination mit Gleichung (5) — bisher konnten jedoch über das Potential  $\bar{E}$  noch keine bestimmten Angaben gemacht werden<sup>1)</sup>. Zweifellos ändert

<sup>1)</sup> Es erscheint notwendig, die hier eingeführte und auch zu Rechnungen benutzte Größe  $\bar{E}$  noch näher zu erörtern, da sie sich von dem an einer Sonde gemessenen Potential  $E_0$  sehr weitgehend unterscheidet und bisher nur einen hypothetischen Charakter besitzt. Zieht man hier zum Vergleich eine unipolare Entladung zwischen geometrisch einfachen Elektroden, z. B. diejenige in einer Ventilröhre heran, so ist es verhältnismäßig einfach, das Potential an irgendeiner Stelle des Entladungsraumes zu definieren, es liegt um den gleichen Voltbetrag über dem der Kathode, um den sich die Geschwindigkeit der Elektronen an der betreffenden Stelle unterscheidet von der Austrittsgeschwindigkeit an der Kathode. Die gleiche Definition wäre auch noch anwendbar für einen hypothetischen Fall ambipolarer Entladung, bei dem weder Neubildungen noch Zusammenstöße im Raum stattfinden, also die positiven Träger nur von der Anode, die negativen nur von der Kathode ausgehen müßten. Nachdem verschiedene Wandstromuntersuchungen in letzter Zeit jedoch zu der Erkenntnis geführt hatten, daß diese Bedingungen bei Gasentladungen keineswegs erfüllt sind, und dauernd Verluste an kinetischer Energie eintreten, so muß nach einer mehr allgemein gültigen Definition gesucht werden. Theoretisch ist  $\bar{E}$  der räumliche Mittelwert des Potentials an der untersuchten Stelle der Entladung, da aber im umgebenden Raum nur punktförmige Ladungen von extrem hohen positiven und negativen Potentialen vorhanden sind, so läßt sich aus dieser Definition des wahren Potentials direkt noch kein brauchbares Kriterium für die Sondenmessungen gewinnen. Macht man jedoch Gebrauch von der Tatsache, daß das Potential eines Raumpunktes sich nicht ändert, wenn in benachbarten Raumelementen je gleich viel positive und negative Ladungen angehäuft werden (dazu ist auch neutrale Materie oder ein Leiter vom Potential  $\bar{E}$  zu



sich  $E$  in einem Punkte der Entladungsbahn, wenn dieser parallel zur Rohrachse verschoben wird, entsprechend dem axialen Potentialgradienten, doch kann die Beeinflussung einer axialen langen Sonde rechnerisch leicht ermittelt werden, wie später ausgeführt wird. Dagegen zeigt  $\bar{E}$ , wie aus der Schottkyschen Diffusionstheorie hervorgeht, auch in radialer Richtung eine Änderung, und zwar einen Abfall nach der Wand hin. Hier wird man  $\bar{E}$  vorteilhaft als das Potential einer zur Sonde coaxialen Fläche ansehen, die die Entladungsbahn einhüllt und zwar so, daß außerhalb derselben bis zur Sondenwand keine Neubildungen von Trägern mehr stattfindet. Ist diese Bedingung aber erfüllt und außerdem  $E \sim E_0$ , so werden die Elektronen, die wirklich zur Sonde gelangen, bei radialer Verschiebung der Emissionsfläche nach negativerem  $\bar{E}$  eine entsprechend geringere Normalenergie  $V$  besitzen, so daß der Ausdruck  $V - \bar{E}$  von der Wahl der Emissionsfläche unabhängig ist.

Geht man nun aber zu stärker positiven  $E$ -Werten über, so kehren immer mehr von den auf die Sonde zufliegenden Elektronen nicht zurück, und damit beginnt sich ein Einfluß des Sondenpotentials auch außerhalb des Ionen-Fallraumes, im Gebiet der quasineutralen Hauptentladung, geltend zu machen. Alle Querpotentialdifferenzen, die im obigen Falle die Elektronendiffusion nach außen praktisch zum Stillstand brachten, verringern sich und werden sich sogar umkehren, wenn nämlich die übergelagerte, nach der Wand hin gerichtete geordnete Elektronenbewegung gegenüber der ungeordneten beträchtlich geworden ist. Daraus geht schon hervor, daß für  $E \sim \bar{E}$  die  $I^-$ -Kurve nicht mehr die Geschwindigkeitsverteilung angeben kann. Trotzdem wird man für eine gegen den Entladungsquerschnitt sehr kleine Sonde von geometrisch einfacher Form schließen können, daß sie die Geschwindigkeitsverteilung im größten Teil des Querschnittes nicht mehr beeinflusst, und daß im Falle  $E = \bar{E}$  auch die langsamsten Elektronen zur Sonde und damit zur Absorption gelangen können. Bei weiter wachsendem  $E$  würde dann  $I^-$  an sich nicht mehr zunehmen dürfen, doch bildet sich jetzt um die Sonde wegen der Abstoßung der positiven Ionen ein Fallgebiet für die Elektronen, dessen Grenzfläche im allgemeinen größer als die Sondenoberfläche sein wird, so daß  $I^-$  trotz konstanter Sättigungsstromdichte weiter ansteigt. Dieser sekundäre Anstieg läßt sich dann rechnerisch verfolgen<sup>1)</sup>, er wird meist kleiner sein wie der durch die Maxwell-Verteilung bedingte primäre, weshalb die Erreichung des wahren Potentials durch die Sonde sich durch einen Knick in der  $I^-$ -Kurve ausprägen muß.

rechnen), so wird man mit  $\bar{E}$  und der mittleren Feldstärke — grad  $\bar{E}$  wieder einen von der korpuskularen Struktur der Elektrizität unabhängigen Sinn verbinden können, wenn man die folgende Definition benutzt: Eine Sonde besitzt dann das wahre Potential des von ihr berührten Teils der Entladung, wenn durch ihre Anwesenheit keinerlei Feldänderungen im angrenzenden Gebiet entstehen. Allerdings ist die Sonde jetzt dahin zu idealisieren, daß sie entweder als unendlich feines Gitter alle Träger ungehindert hindurchläßt oder, falls die Geschwindigkeiten der Ladungsträger merklich ungeordnet sind, daß sie alle elastisch reflektiert oder endlich, daß sie ebensoviel Träger beides Vorzeichens mit derselben Geschwindigkeit zu emittieren vermag, wie sie absorbiert. Nur der erste der 3 Idealfälle ist auch auf eine unipolare Entladung anwendbar, während zu einer praktischen Verwirklichung der Methode nur der letzte einigermaßen geeignet ist. Hierzu gehören die Messungen mit glühenden Sonden, die auch I. Langmuir für den Quecksilberbogen vorgeschlagen hat, weil die Beweglichkeit der Hg-Ionen so gering gegenüber derjenigen der Elektronen ist, daß nur die Emission der letzteren an der Sondenoberfläche erforderlich wird. Dabei ist die Höhe der Emissionstemperatur allerdings nicht exakt vorzubestimmen. Es scheint jedoch auch die hier durchgeführte Auswertung der Aufladungskurven zur Bestimmung von  $E$  wegen der Beeinflussung der Hauptentladung recht unsicher zu sein.

<sup>1)</sup> Es sind hierbei 2 Spezialfälle zu unterscheiden: Der Fall, der gegen die Sondenabmessungen großen freien Weglänge, ist nach dem Beispiel I. Langmuirs (l. c.) zu behandeln, der Fall sehr kleiner freier Weglängen mit Hilfe der Schottkyschen Diffusionstheorie (negativ unipolare Diffusion).

Ist dagegen, wie in den vorliegenden Fällen, die Sonde sehr groß und  $I^-$  mit dem Hauptstrom kommensurabel, so liegen die Verhältnisse viel komplizierter. Zunächst wird der Hauptstrom auf der Strecke zwischen Kathode und Sonde um den Sondenstrom erhöht und hier der Spannungsabfall verringert. Dies zeigt sich besonders durch Sinken des Potentials der Hauptanode, wobei Änderungen bis zur Größenordnung von 1 Volt eintreten können. Ferner wird sich  $\bar{E}$  bei der Zylindersonde wegen des erwähnten Verschwindens der Querpotentialdifferenzen um einen, allerdings schwer zu schätzenden Betrag erhöhen. Endlich kann auch der vermutete, bei  $E = \bar{E}$  zu erreichende Sättigungsstrom gefälscht werden durch eine in der Nähe der Sonde einsetzende Stoßionisation, wodurch sich auch die ganze Strombilanz der positiven Säule ändern muß. Infolgedessen ist den in Abb. 14 und 15 dargestellten Kurven in ihrem Verhalten bei höheren Sondenpotentialen nur eine mehr orientierende Bedeutung beizumessen.

Das oben beschriebene Verhalten der  $I^-$ -Kurve zeigt Abb. 15 in recht auffallendem Maße. Es treten hier bei den Kurven (b) bis (f) Knicke auf, deren Abszissen  $\bar{E} - E_0$  in der Tabelle 4 zusammengestellt sind. In Abb. 14 fehlen die entsprechenden Knicke, was wohl mit der stärkeren Rückwirkung der Zylindersonde auf die Hauptentladung und insbesondere mit dem Einsetzen stärkerer Stoßionisation an der inneren Zylinderwandung zusammenhängt, wodurch die Zylindersonde bald zur selbständigen Anode wird. Dagegen steht die gegebene Erklärung des schwachen Anstieges der Aufladungskurven bei der Kugelsonde oberhalb  $\bar{E}$  als Fallgebiet negativer Elektronen in gutem Einklang mit einer Beobachtung, die während des Versuches gemacht wurde. Die Kugel zeigte sich nämlich umgeben von einer ziemlich scharf begrenzten, hellen Schicht, die im Gegensatz zu der an der Zylindersonde beobachteten dunklen Schicht positiver Raumladung etwas stärker als die umgebende positive Säule leuchtete.

Tabelle 4.

Abb.	Kurve	$I_H$ Amp.	$E_0$ Volt	$\bar{E} - E_0$ Volt	$\bar{E}$ Volt	$\mathcal{E}$ Volt
14	a	0,01	4,5	—	—	4,12
	b	0,1	6,0	—	—	3,46
	c	1,0	11,1	—	—	1,41
15	a	0,01	6,3	—	—	2,45
	b	0,03	7,0	14	21	2,45
	c	0,1	7,6	11	18,6	2,06
	d	0,3	8,9	10	18,9	1,60
	e	1,0	12,3	7	19,3	1,11
	f	3,0	13,4	—	—	0,96

Wurde das Potential der Sonde weiter gesteigert, so trat schließlich unter Aufleuchten kleiner Lichtfackeln an der Kugeloberfläche ein Rücksprung um mehrere Volt ein, der in Abb. 15 durch Pfeile angegeben ist, weil anscheinend die negative Raumladungsschicht jetzt an einzelnen Stellen durch neugebildete Ionen kompensiert und die Sonde zur selbständigen Anode wird. Eigenartig ist, daß für alle  $I_H$  der Rücksprung bei  $E - E_0 \approx 22$  erfolgt, so daß die Kugelsonde bei  $I_H = 1$  Amp. eine Spannung  $E = 22 + 12,3 = 34,3$  Volt erreicht, während an der Lichtbogenanode nur  $E_H = 23,7$  Volt als Gesamtabfall gemessen wird. Bei der Zylindersonde dagegen war kein ausgeprägter Knick am positiven Ende der Aufladungskurve und auch beim Übergang zur selbständigen Anode kein Spannungsrücksprung zu bemerken.

Im negativen Abszissengebiet von  $E - E_0$  wird die Bestimmung von  $I^-$  deshalb unsicher, weil  $I^-$  klein gegen  $I^+$  wird und ein geringer Gang von  $I^+$  nicht exakt berücksichtigt werden kann. Daher sind die Kurven hier gestrichelt gezeichnet und die auftretenden Knicke ohne besondere Bedeutung. Die aus der mittleren Steigung der Kurven ermittelte Größe  $\mathfrak{B}$  ist in der Tabelle 4 ebenfalls verzeichnet und zeigt Änderungen, die hauptsächlich durch den Anstieg der Dampfdichte mit  $I_H^1$  und bei gleicher Dampfdichte durch den Unterschied der Sondenformen hervorgerufen sind<sup>2)</sup>. Die Kurven a und b der Abb. 14 lassen durch besondere Knicke erkennen, daß die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung hier nur in eingeschränktem Maße vorliegt. Es erscheint bei diesen beiden Beispielen noch nicht angängig, aus dem gegenseitigen Abstand der Knicke Schlüsse auf die Ionisierungsspannung usw. zu ziehen.

Nachdem die logarithmische Darstellung der anodischen Sondenströme wesentlich zur Klärung der Stromvorgänge beigetragen hat, läßt sich nun die Gleichung (6) auch in folgender Form schreiben:

$$I^- = (\bar{I})^- e^{-\frac{\bar{E} - E}{\mathfrak{B}}}, \quad (7)$$

wo  $(\bar{I})^-$  den Elektronensättigungsstrom beim Gegenpotential  $\bar{E} - E = 0$  bezeichnet. Aus Abb. 13 geht hervor, daß beim Verringern des eingezeichneten Potentials  $E$  um  $dE$  eine Abnahme des Elektronenstromes  $I^-$  um einen Betrag  $dI^-$  erfolgt, die dadurch erklärt werden kann, daß die Elektronen mit Geschwindigkeiten  $V$  zwischen  $\bar{E} - E$  und  $\bar{E} - E + dE$  (absolut genommen) die Sonde nicht mehr erreichen. Daraus ergibt sich, daß für das Differential  $V dI^-$  in der Gleichung (5) auch gesetzt werden kann  $(\bar{E} - E) dI^-$ , während aus Gleichung (7) folgt:

$$\bar{E} - E = \mathfrak{B} \ln \frac{(\bar{I})^-}{I^-}.$$

Daher kann man für Gleichung (5) schreiben:

$$\mathfrak{C}^- = \mathfrak{B} \int_0^{I^-} \ln \frac{(\bar{I})^-}{I^-} dI^- - I^- \mathfrak{B} \ln \frac{(\bar{I})^-}{I^-} + f(I^-),$$

in der nur  $I^-$  als Variable auftritt. Die Auflösung ergibt:

$$\mathfrak{C}^- = \mathfrak{B} I^- + f(I^-). \quad (8)$$

Dieses Resultat zeigt die Eigenschaft von  $\mathfrak{B}$  als mittlere transportierte Energie aller Geschwindigkeiten der absorbierten Elektronen in der Normalrichtung zur absorbierenden Fläche. In Analogie zu  $\mathfrak{B}$  kann jetzt angenommen werden, daß auch den Querkomponenten der Geschwindigkeiten ein gewisser, von  $I^-$  unabhängiger Energiebetrag  $A$  zukommt, so daß sich in Gleichung (8) die Funktion  $f(I^-)$  ersetzen läßt durch den Ausdruck  $AI^-$ . Nach Tabelle 4 ist  $\mathfrak{B}$  in dem benutzten Versuchsgefäß von der Größenordnung 1 Volt, das Zusatzglied  $A$  wird schätzungsweise von gleicher oder kleinerer Größenordnung sein, so daß man imstande ist, zur Erklärung des eigentümlichen Abkühlungsvorganges der Sonde bei  $E < E_0$  die folgende Berechnung anzustellen:

<sup>1)</sup> Vgl. I. Langmuir: J. Frankl. Inst., Dez. 1923.

<sup>2)</sup> Der Unterschied der  $\mathfrak{B}$ -Werte für gleiche  $I_H$  ist wohl dem Umstand zuzuschreiben, daß wegen zahlreicher Neubildungen im Innern der Zylindersonde und wegen der vorhandenen großen Elektronenweglängen noch nicht der Zustand vollkommener Unordnung und damit eine eindeutige Elektronentemperatur erreicht ist.

Läßt man das Sondenpotential von  $E_0$  ausgehend (Abb. 13) fortlaufend um Beträge von  $dE$  abnehmen, d. h. negativer werden, so erhöht sich die sekundliche Energie der aufprallenden Ionen um konstante Beträge von  $I^+ dE$  und die der Elektronen vermindert sich um die abnehmenden Beträge von  $(\mathfrak{R} + A) \cdot dI^-$  (gemessen in Watt). Aus Gleichung (6) folgt durch Differentiation:

$$dI^- = I_0^- \cdot \frac{1}{\mathfrak{R}} \cdot e^{\frac{E-E_0}{\mathfrak{R}}} dE,$$

daher ist wegen der Gleichheit von  $I_0^-$  und  $I^+$

$$(\mathfrak{R} + A)dI^- = \frac{\mathfrak{R} + A}{\mathfrak{R}} I^+ e^{\frac{E-E_0}{\mathfrak{R}}} dE.$$

Eine Abkühlung der Sonde kann nur dann erfolgen, wenn

$$I^+ dE < (\mathfrak{R} + A)dI^-,$$

oder

$$\frac{\mathfrak{R} + A}{\mathfrak{R}} e^{\frac{E-E_0}{\mathfrak{R}}} > 1,$$

welche Bedingung tatsächlich in der Nähe von  $E_0$  erfüllt ist, da die  $e$ -Funktion hier den Wert 1 erreicht. Also muß hiernach immer eine Abkühlung erfolgen, deren Betrag nur noch von der unbekanntem Größe  $A$  abhängt. Nach Abb. 6 erstreckt sich das Abkühlungsgebiet, wo die Sondenerwärmung geringer als im isolierten Zustand  $E = E_0$  ist, und das  $\Delta E$  bezeichnet werden möge, über ungefähr 6 Volt, d. h. es muß die über  $\Delta E$  erstreckte Summe der Energiezuwächse des Ionenstromes gleich der Energieabnahme des Elektronenstromes sein:

$$I^+ \int_{E_0 - \Delta E}^{E_0} dE = I^+ \int_{\frac{E_0}{\mathfrak{R}} - \frac{\Delta E}{\mathfrak{R}}}^{\frac{E_0}{\mathfrak{R}}} \frac{\mathfrak{R} + A}{\mathfrak{R}} e^{\frac{E-E_0}{\mathfrak{R}}} dE.$$

Die Auflösung ergibt unter der Annahme, daß  $A$  von  $E$  unabhängig ist:

$$\Delta E = (\mathfrak{R} + A) \left( 1 - e^{-\frac{\Delta E}{\mathfrak{R}}} \right). \quad (9)$$

Für  $\mathfrak{R} = 1$  Volt und  $\Delta E = 6$  Volt wird hier unter Vernachlässigung der  $e$ -Potenz  $A$  den 5fachen Wert von  $\mathfrak{R}$  besitzen müssen, was als ausgeschlossen gelten kann. Hier wird man einen Ausweg nur darin erblicken können, daß bei der Absorption eines Elektrons ein bisher nicht berücksichtigter Energiebetrag von einigen Volt frei wird, der die Umkehrung der bei der thermischen Elektronenemission beobachteten Austrittswärme darstellt<sup>1)</sup>. Zunächst soll jedoch eine theoretische Ableitung über die Größe von  $A$  Aufschluß geben:

Unter der Voraussetzung, daß die Geschwindigkeiten der Elektronen streng das Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilungsgesetz befolgen, läßt sich die gesamte kinetische Energie der unelastisch gegen eine ebene Wand stoßenden Elektronen berechnen. Die absorbierende Fläche der Sonde ist zwar mehrfach gekrümmt, es sei jedoch hervorgehoben, daß das verzögernde Feld nur in so kleinem Abstand von ihr wirkt, daß die Krümmungsradien dagegen groß erscheinen, und die Fläche als quasi eben angesehen werden kann.

Nun ist zwar die Annahme der restlosen Absorption aller aufprallenden Elektronen durchaus nicht erfüllt, vielmehr tritt an blanken Metallflächen zum Teil voll-

<sup>1)</sup> Z. B. A. Wehnelt und E. Liebreich: Phys. Z. Bd. 15, S. 549. 1914.

kommene Reflexion langsamer Elektronen ein, deren Gang mit der Geschwindigkeit von A. Gehrts<sup>1)</sup> untersucht worden ist. Hier ist die Frage von Wichtigkeit, ob die reflektierten Elektronen etwa einen Teil ihrer Bewegungsenergie abgegeben haben, der zu der Energie der absorbierten hinzukäme. Zunächst kann man voraussagen, daß eine Elektronenreflexion am festen Körper (nicht im Gegenfeld) einen ganz diffusen Charakter haben muß, da es für die kleinsten Bausteine der Materie keine festen spiegelnden Flächen mehr geben kann. Es ist zu vermuten, daß keine Richtung bevorzugt, d. h. vom Einfallswinkel abhängig sei, dann muß die Gesamtwirkung entsprechen etwa der Strahlungsverteilung eines glühenden Körpers, der bekanntlich aus allen Richtungen betrachtet, gleiche Flächenhelligkeit besitzt. Unter dieser Voraussetzung muß die Zahl der nach der Gegenspannungsmethode gemessenen reflektierten Elektronen gleicher Einfallsgeschwindigkeit, wie eine Berechnung nach bekannter Methode ergibt, eine lineare Funktion der Gegenspannung sein; bei der Gegenspannung 0 muß sie ihren Maximalwert erreichen und bei der Gegenspannung, die gleich ist der Voltgeschwindigkeit des einfallenden Kathodenstrahls, muß sie zu 0 werden. Diese Abhängigkeit ist in der zitierten Arbeit tatsächlich annähernd gefunden worden, wie die dortige Fig. 15 zeigt, es muß also geschlossen werden, daß die Reflexion tatsächlich ohne Geschwindigkeitsverlust erfolgt, sonst müßte die experimentelle Kurve bei der Gegenspannung 0 beträchtlich steiler verlaufen. Die gleichen Verhältnisse sollen auch in der Hg-Entladung angenommen werden, wo wegen der gefundenen Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung die geringen Voltgeschwindigkeiten bei weitem überwiegen. Bei diesen ist außerdem der Betrag reflektierter Elektronen relativ klein, so daß im Hinblick auf den vollkommen elastischen Charakter der Reflexion eine Berücksichtigung derselben in der folgenden Ableitung ganz unterbleiben konnte.

Bezeichnet man mit  $n$  die Zahl der Elektronen in einem Raumelement, das sich in unmittelbarer Nähe der Sondenwand befinden möge, mit  $m^-$  die Maße eines Elektrons, mit  $u$ ,  $v$  und  $w$  die Komponenten der augenblicklichen Geschwindigkeit eines beliebigen Elektrons in der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung und mit  $\alpha$  die wahrscheinlichste Geschwindigkeit<sup>2)</sup>, so ist die kinetische Energie aller aus dem betrachteten Raumelement zur absorbierenden Wand, die hier mit der  $y$ ,  $z$ -Ebene identisch sei, gelangenden Elektronen nach Maxwell:

$$\mathfrak{E}_x = \frac{n}{(\alpha \sqrt{\pi})^3} \int_{u_1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m^-}{2} (u^2 + v^2 + w^2) u e^{-\frac{u^2+v^2+w^2}{\alpha^2}} du dv dw - \frac{m^-}{2} u_1^2 \mathfrak{N}_x. \quad (10)$$

Das erste Glied der rechten Seite gibt die gesamte kinetische Energie der absorbierten Elektronen mit Geschwindigkeiten  $u$  zwischen  $u_1$  und  $\infty$  vor dem Durchheilen des Gegenfeldes der Sonde an, wobei  $u_1$  die zur Überwindung desselben gerade ausreichende Geschwindigkeit bedeutet:  $\frac{m^-}{2} u_1^2 = \frac{300}{\epsilon} (\bar{E} - E)$ , während das zweite Glied die im Gegenfeld verlorene Energie der zur Absorption gelangenden Anzahl  $\mathfrak{N}_x$  der Elektronen darstellt.

$$\mathfrak{N}_x = \frac{n}{(\alpha \sqrt{\pi})^3} \int_{u_1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-\frac{u^2+v^2+w^2}{\alpha^2}} du dv dw. \quad (11)$$

<sup>1)</sup> A. Gehrts: Berliner Dissertation 1911. (Auszug: Ann. Physik Bd. 36, S. 495. 1911.)

<sup>2)</sup>  $\alpha$  steht mit  $\mathfrak{B}$  in der Beziehung:  $\frac{m^-}{2} \alpha^2 = \frac{\epsilon \mathfrak{B}}{300}$ . Vgl. w. u.

Bekanntlich ist in den Integranden der Faktor  $u$  einzusetzen, um der Bedingung des stationären Verteilungszustandes zu genügen; denn in dem betrachteten Raumteil wird ein Elektron sich nur eine gewisse Zeit aufhalten, die umgekehrt proportional der (hier allein in Frage kommenden)  $u$ -Komponente seiner Geschwindigkeit ist. Die Integration des ersten Gliedes von Gleichung (10) ergibt:

$$\frac{n\alpha}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{m^{-}\alpha^2}{2} \cdot e^{-\frac{u_1^2}{\alpha^2}} \left( \frac{u_1^2}{\alpha^2} + 2 \right)$$

und die Integration der Gleichung (11):

$$\mathfrak{N}_x = \frac{n\alpha}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u_1^2}{\alpha^2}}.$$

Folglich erhält man

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_x &= \frac{n\alpha}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u_1^2}{\alpha^2}} \left[ \frac{m^{-}\alpha^2}{2} \left( \frac{u_1^2}{\alpha^2} + 2 \right) - \frac{m^{-}u_1^2}{2} \right] \\ &= \mathfrak{N}_x m^{-}\alpha^2. \end{aligned}$$

Ersetzt man ferner  $\frac{m^{-}u_1^2}{2}$  durch  $\frac{\varepsilon(\bar{E} - E)}{300}$  und  $\frac{m^{-}\alpha^2}{2}$  durch  $\frac{\varepsilon\mathfrak{B}}{300}$ , wo  $\varepsilon$  die elektrostatische Elementarladung bedeutet, so wird

$$\mathfrak{N}_x = \frac{n\alpha}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\bar{E} - E}{\mathfrak{B}}}, \quad (12)$$

$$\mathfrak{S}_x = \mathfrak{N}_x \cdot \frac{2\varepsilon\mathfrak{B}}{300}. \quad (13)$$

Multipliziert man beide Seiten der Gleichung (12) mit der Elektronenladung, so erkennt man die völlige Übereinstimmung mit der empirischen Gleichung (7), da  $\varepsilon\mathfrak{N}_x$  offenbar die Dimension einer Stromstärke besitzt. Geht man zur Messung in Ampere über, so wird  $\varepsilon\mathfrak{N}_x = I_{\text{Amp}}^{-} \cdot 3 \cdot 10^9$ , also

$$\mathfrak{S}_x = 2 I_{\text{Amp}}^{-} \cdot \mathfrak{B} \cdot 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{sec}} = 2 I_{\text{Amp}}^{-} \cdot \mathfrak{B} \text{ Watt}. \quad (13')$$

Aus dem Vergleich der Beziehungen (8) und (13) geht nun hervor, daß das zusätzliche Glied  $f(I^{-})$ , welches die auf die Komponenten  $v$  und  $w$  entfallende Energie darstellt, gleich ist der auf die  $u$ -Komponente entfallenden  $\mathfrak{S}I^{-}$ , und daß es berechtigt war, den Ausdruck  $AI^{-}$  für  $f(I^{-})$  einzuführen. Die auf die  $u$ -Komponente entfallende Energie ergibt sich natürlich auch direkt aus Gleichung (10), wenn man an Stelle des Faktors  $(u^2 + v^2 + w^2)$  nur  $u^2$  allein einsetzt. Die Größe  $\mathfrak{B}$  kann, wie erwähnt, mit Hilfe der Beziehung  $\varepsilon\mathfrak{B} = 300 kT$  noch durch die „Temperatur“ der Elektronen ersetzt werden, wobei  $\mathfrak{B} = 1$  Volt einer Temperatur von  $11\,630^\circ$  entspricht. Die „Temperatur“ der positiven Träger wird, wie schon erwähnt, wegen der geringeren freien Weglänge und der beträchtlichen Impulsabgabe bei Zusammenstößen wesentlich geringer sein.

Nach der kinetischen Gastheorie ist die mittlere Energie der in einem gewissen Volumen befindlichen Elementarteilchen  $\frac{3}{2} kT$ ; also für die Elektronen in Volt gemessen gleich  $\frac{3}{2} \mathfrak{B}$ . Diesen Wert hat Langmuir auf demselben Wege wie wir für verschiedene Hg-Dampfdrucke ermittelt. Extrapoliert man seine Ergebnisse, so würde sich für  $\mathfrak{B} = 1$  Volt ein Druck von 0,05 mm ergeben, der für den Fall  $I_H = 1$  Amp. auch-schätzungsweise in unserem Versuchsgefäß geherrscht hat.

## B. Bestimmung der Eintrittsenergie.

Nimmt man die aus den Aufladungskurven für die Normalrichtung erwiesene Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung auch für die Querrichtungen an, was wegen der Kleinheit der Fortschreibungsbewegung der Elektronen gegenüber ihrer ungeordneten Bewegung berechtigt erscheint, so werden wir also in Gleichung (9)  $A = \mathfrak{B}$  zu setzen haben, müssen dann jedoch noch eine weitere zusätzliche Größe  $\Phi^-$  einsetzen, um die Übereinstimmung des Potentialbereiches  $\Delta E$  mit dem Versuchsergebnis zu erzielen. Die Gleichung lautet dann:

$$\Delta E = (2\mathfrak{B} + \Phi^-) \left(1 - e^{-\frac{\Delta E}{\mathfrak{B}}}\right). \quad (14)$$

Für den hier vorliegenden Fall  $\frac{\Delta E}{\mathfrak{B}} > 3$  ist die  $e$ -Funktion ohne weiteres zu vernachlässigen, so daß sich ergibt:

$$\Phi^- = \Delta E - 2\mathfrak{B}. \quad (14a)$$

Die Größe  $\Phi^-$ , die sich für die eiserne Zylindersonde mit ihrer verhältnismäßig großen Wärmekapazität nur ganz roh ermitteln läßt (Tabelle 5), muß nun als die bei der

Tabelle 5.

Sonde	$I_H$	$\mathfrak{B}$	$\Phi^-$
I	2 Amp.	1,1 Volt	3,9 Volt
II	1 Amp.	1,4 Volt	3,7 Volt

Absorption eines Elektrons thermisch frei werdende „Eintrittsenergie“ definiert werden<sup>1)</sup>, die aus praktischen Gründen in Volt gemessen wurde. Es ist also anzunehmen, daß  $\Phi^-$  nicht abhängig ist von den Entladungsvorgängen selbst, sondern nur vom Material der absorbierenden Elektrode, vorausgesetzt, daß die Elektronen im freien Zustand auftreffen. (Bei Entladungen in unedlen Gasen können Elektronen im Zustand der Anlagerung an Gasmoleküle oder der Bindung an Molekülreste, d. h. als negative Träger, zur Anode gelangen, so daß  $\Phi^-$  um die potentielle Energie der Anlagerung bzw. Bindung verringert erscheinen wird.) Meines Wissens ist in den bisher veröffentlichten experimentellen Arbeiten<sup>2)</sup> über die Anodenerwärmung eine „Elektronen-Eintrittsarbeit“ nicht berücksichtigt worden, obgleich sie z. B. in einer Hg-Dampfentladung mit ihrem besonders geringen Anodenfall die Energiebilanz stark beeinflussen muß.

Im Anschluß hieran ist noch die Frage zu beantworten, wie sich positive Ionen bei ihrer Neutralisation an einer Elektrode energetisch verhalten. Nimmt man an, der Stoß gegen die absorbierende Wand erfolge vollkommen unelastisch, so wird das Ion also an der Wand haften bleiben und in dieser Stellung ein Elektron aus dem Gefüge der Wand zu sich heranziehen, mit dem es sich zu einem neutralen Molekül vereinigt. Dieses verdampft dann wieder. Im ganzen wird also (außer der kinetischen Energie) die Ionisationsenergie des betreffenden Gases frei, jedoch nicht vollständig, da das neutralisierende Elektron nicht im freien Zustand war. Ein Teil der Ionisationsenergie wird vielmehr dazu verbraucht werden, ein Elektron aus dem molekularen Gefüge der Wand zu befreien, wozu die durch die Einsteinsche lichtelektrische Quan-

<sup>1)</sup> O. W. Richardson hat die Eintrittsenergie zuerst erwähnt und zu messen versucht. Hierbei haben jedoch die unbekanntenen Kontaktpotentiale zwischen heißen und kalten Leitern gestört, von welchem Effekt die vorliegende Meßmethode dagegen frei ist.

<sup>2)</sup> Z. B. Hodgson: Phil. Mag. Bd. 25, S. 453. 1913; Bd. 27, S. 189. 1914. — L. Peters: Z. Phys. Bd. 4, S. 432. 1921. — A. Günther-Schulze: Z. Phys. Bd. 13, S. 378. 1923.

tenbeziehung definierte „Austrittsarbeit“ benötigt wird, die wir gleich der Eintrittswärme  $\Phi^-$  setzen können<sup>1)</sup>. Bezeichnet man die bei dem geschilderten Vorgang frei werdende Wärme mit  $Q^+$ , so erhält man also  $Q^+ = \Phi_I - \Phi^-$ , wo  $\Phi_I$  die Ionisationsenergie bedeutet.

Für Quecksilberdampf besitzt  $\Phi_I$  den Wert 10,38 Volt, infolgedessen würde  $Q^+$  hier ungefähr 6 Volt betragen. Ein experimenteller Beweis für die vermutete Größe von  $Q^+$  kann jedoch aus den angestellten Versuchen nicht gegeben werden, weil es für eine solche Messung nötig wäre, in einem Gebiet, wo der Elektronenstrom schon sehr klein ist, eine stärkere Veränderlichkeit von  $I^+$  mit  $E$  zu haben, die bei den benutzten Sonden zu gering war. Hierzu wären Temperaturmessungen an dünnen, drahtförmigen Sonden, wie sie Langmuir benutzte<sup>2)</sup>, erfolgversprechender, da bei diesen der Sättigungscharakter des kathodischen Nebenstromes verschwindet.

### VI. Nachprüfung der angebrachten Korrekturen.

Nachdem die Größen  $\mathfrak{B}$ ,  $\Phi^-$  und  $Q^+$  genügend diskutiert worden sind, ist jetzt die Möglichkeit gegeben, die Anwendbarkeit der an den Erwärmungsmessungen wegen der Einschnürung des Lichtbogens bei negativer Sonde angebrachten Korrekturen nachzuprüfen. Die hierfür anzustellende Berechnung kann insofern nicht als strenger Beweis angesehen werden, als sie sich auf Grundlagen aufbaut, die sich zwar aus Versuchserfahrungen ergaben, aber noch nicht exakt bewiesen worden sind, doch steht die Berechnung im engsten Zusammenhang mit der von W. Schottky aufgestellten Diffusionstheorie<sup>3)</sup>. Zugrunde gelegt sind die folgenden zwei Sätze:

1. Die Wiedervereinigung von Trägern in einer Hg-Dampfentladung erfolgt in überwiegendem Maße an den Rohrwänden. Besonders in dem vorliegenden Falle ist eine räumliche Wiedervereinigung gänzlich zu vernachlässigen, da der Sondendurchmesser nur die Größe weniger freier Ionenweglängen besitzt. Diese Tatsache, auf welche zuerst Langmuir hingewiesen hat<sup>4)</sup>, steht durchaus im Einklang mit den theoretischen Vorstellungen, die man sich von dem Mechanismus der Wiedervereinigung von Trägern machen kann. Da man im Hg-Dampf nur mit positiven Ionen und freien Elektronen zu rechnen hat, ist es zur Wiedervereinigung erforderlich, daß ein Elektron, das sich mit beliebiger Geschwindigkeit einem Ion zufällig nähert, imstande ist, in die äußerste Quantenbahn desselben hineinzuschlüpfen und gleichzeitig die richtige Umlaufgeschwindigkeit und -phase zu erlangen, so daß es dann den Fall zur innersten Quantenbahn unter Lichtemission ausführen kann. Die Wahrscheinlichkeit für den ersteren Vorgang muß außerordentlich gering sein, es ist vielmehr anzunehmen, daß das Elektron nur durch das Feld eines dritten Körpers, z. B. eines anderen Ions, so abgelenkt werden kann, daß es in eine Ellipsenbahn hineinspringt, entsprechend etwa wie ein aus dem unendlichen Raum stammender Komet infolge einer zufälligen Ablenkung durch einen Planeten zu dauerndem Verbleiben im Sonnensystem gezwungen wird. Sind dagegen elektronenaffine Fremdgase vorhanden, so bilden sich auch negativ geladene Moleküle, für welchen Vorgang aller-

<sup>1)</sup> Bei dieser ganzen Betrachtung ist der (kleine) Unterschied zwischen der Austrittsarbeit und der Austrittswärme vernachlässigt (vgl. W. Schottky: *Jahrb. Rd. u. El.* Bd. 12, S. 147. 1915), ebenso die Bohrsche Korrektur, die sich auf den Unterschied zwischen statischer und stationärer Wärmeentwicklung bezieht.

<sup>2)</sup> I. Langmuir: *Gen. El. Rev.* Bd. 26, S. 371. 1923.

<sup>3)</sup> W. Schottky: *Phys. Z.* Bd. 25, S. 342. 1924.

<sup>4)</sup> I. Langmuir: *l. c.*



dings noch eine besondere Erklärung nötig wäre, die bei dem Zusammenstoß mit Hg-Ionen wegen ihrer trägen Masse dem anhaftenden Elektron genügend Zeit zum Übergang lassen. Hiernach ist es verständlich, daß die räumliche Wiedervereinigung im Quecksilberbogen nur dann eine Rolle spielt, wenn unedle Fremdgase in größerer Menge vorhanden sind, oder wenn der Gefäßdurchmesser sehr groß gegenüber der freien Ionenweglänge ist, so daß Zusammenstöße mit Molekülen der nie vollkommen zu beseitigenden Fremdgasreste in merklicher Zahl erfolgen können. Diese Bedingungen dürfen in der Versuchsanordnung als vermieden gelten.

2. Derjenige Anteil der Hauptstromleistung, der zur Ionisation des Hg-Dampfes dient und mit dem Faktor  $\kappa$  bezeichnet wird<sup>1)</sup>, sei in erster Näherung als unabhängig angenommen von der Einschnürung der Entladungsbahn, also auch vom Spannungsabfall im Innern des Sondenzyllinders. Nimmt man auch für die Temperatur und Beweglichkeit der Ladungsträger die gleiche Unabhängigkeit an, so folgt aus der Schottkyschen Diffusionstheorie, daß der Potentialgradient umgekehrt proportional dem Radius der Entladungsbahn ist. Die letztere Folgerung wurde durch die erwähnten experimentellen Arbeiten gestützt, während die aus Punkt 1 und 2 kombinierte Folgerung, daß der bei konstantem Hauptstrom zur Wand fließende Ionenstrom umgekehrt proportional dem Radius  $r$  der Entladungsbahn ist, durch eigene Messungen des Verfassers ungefähr bestätigt wurde. Also ist:

$$\frac{I^+}{I_0^+} = \frac{r_0}{r} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta E_H}{(\Delta E_H)_0} = \frac{r_0}{r},$$

wo der Index  $_0$  sich auf das Potential  $E_0$  der isolierten Sonde und den dazu gehörigen Entladungsquerschnitt bezieht, und  $\Delta E_H$  wieder den Spannungsabfall in der Zylinder-sonde bezeichnet. Nach Annahme 2 muß  $(1 - \kappa)$  den Teil der Hauptstromleistung angeben, der durch Strahlung bzw. durch Wärmeleitung zur Sonde gelangt, also ist die Wärmeaufnahme der isolierten Sonde:

$$L_0 = (1 - \kappa) I_H (\Delta E_H)_0 + I_0^+ (Q^+ + \bar{E} - E_0) + I_0^- (\Phi^- + 2 \mathfrak{B}),$$

worin  $I_0^- = I_0^+$  zu setzen ist. Die Wärmeaufnahme der Sonde bei beliebigem negativen Potential  $E$ , wo  $I^-$  verschwindet, beträgt:

$$L = (1 - \kappa) I_H \Delta E_H + I^+ (Q^+ + \bar{E} - E).$$

Hier bedeutet  $\bar{E}$  wieder das wahre Lichtbogenpotential vor der Sonde, d. h. der bereits erwähnten koaxialen Fläche, die als ionenemittierend anzusehen ist. Durch Kombination der aufgestellten 4 Beziehungen ergibt sich:

$$L = L_0 \frac{r_0}{r} + I_0^+ \frac{r_0}{r} (E_0 - E - \Phi_1 - 2 \mathfrak{B}). \quad (15)$$

Durch Differentiation dieser Gleichung findet man

$$I^+ = I_0^+ \frac{r_0}{r} = L_0 \frac{d \frac{r_0}{r}}{dE} - \frac{dL}{dE} + I_0^+ \frac{d \frac{r_0}{r}}{dE} (E_0 - E - \Phi_1 - 2 \mathfrak{B}) \quad (16)$$

als den nach den gemachten Voraussetzungen wahren Wert des Ionenstromes bei höheren negativen Sondenpotentialen. Dagegen war bei der ersten Auswertung der Erwärmungskurven für den Ionenstrom gesetzt worden:

$$I' = - \frac{dL}{dE} \quad (17)$$

<sup>1)</sup> „Ausbeutefaktor“, vgl. W. Schottky: l. c.

(das Vorzeichen wurde damals vernachlässigt), während die später angebrachten Korrekturen sich durch die folgende Beziehung zusammenfassen lassen:

$$L = L_0 \frac{r_0}{r} + (I^+) (E_0 - E),$$

wo ( $I^+$ ) durch die Klammern von dem wahren Wert  $I^+$  der Gleichung (16) unterschieden werden soll. Die Differentiation ergibt unter Vernachlässigung des hier unwesentlichen Unterschiedes zwischen  $d(I^+)$  und  $dI^+$

$$(I^+) = L_0 \frac{d \frac{r_0}{r}}{dE} - \frac{dL}{dE} + I_0^+ \frac{d \frac{r_0}{r}}{dE} (E_0 - E). \quad (18)$$

Durch Subtraktion der Beziehungen (17) und (18) von (16) findet man nun die Absolutwerte der gegebenen Fehler:

$$I^+ - I' = L_0 \frac{d \frac{r_0}{r}}{dE} + I_0^+ \frac{d \frac{r_0}{r}}{dE} (E_0 - E - \Phi_I - 2 \mathfrak{B}), \quad (19)$$

$$I^+ - (I^+) = I_0^+ \frac{d \frac{r_0}{r}}{dE} (-\Phi_I - 2 \mathfrak{B}). \quad (20)$$

Bei der graphischen Ermittlung dieser Ausdrücke aus den Abb. 8, 11 und 12

ergibt sich eine weitgehende Unveränderlichkeit von  $\frac{d \frac{r_0}{r}}{dE}$  über einen großen Bereich von  $E$ , so daß es genügt, wenn für jede Hauptstromstärke nur Mittelwerte angegeben werden. Ferner sind für  $\mathfrak{B}$  und  $E_0$  die bereits ermittelten Werte und für  $\Phi_I$  der Wert 10,4 Volt eingesetzt. Aus der Zusammenstellung der Zahlenergebnisse in Tabelle 6 erkennt man, daß der durch die Beziehung (19) ausgedrückte Fehler gegenüber dem

Tabelle 6.

—			(19)		(20)
$I_H$	$I_0^+$	$\frac{d \frac{r_0}{r}}{dE}$	$L_0 \frac{d \frac{r_0}{r}}{dE}$	$I_0^+ \frac{d \frac{r_0}{r}}{dE} (E_0 - E - \Phi_I - 2 \mathfrak{B})$	$I_0^+ \frac{d \frac{r_0}{r}}{dE} (-\Phi_I - 2 \mathfrak{B})$
Amp.	mAmp.	Volt <sup>-1</sup>	mAmp.	mAmp	mAmp.
0,1	1,75	— 0,0032	— 0,74	0,063 + 0,0056 $E$	0,0965
1	15,5	— 0,00095	— 2,04	0,029 + 0,0147 $E$	0,194
2	33	— 0,00042	— 1,68	0,006 + 0,0139 $E$	0,175

Wert von  $I_0^+$  namentlich bei schwachem Hauptstrom sehr beträchtlich werden kann und zugleich mit dem (in Volt einzusetzenden) negativen Sondenpotential  $E$  ansteigt. Dagegen erweist sich der nach der angewandten Korrektur noch verbleibende Fehler (20) von so geringer Größenordnung, daß er bei  $I_H = 1$  und 2 Amp. vernachlässigt werden kann, während er bei  $I_H = 0,1$  Amp. ca. + 6% beträgt und damit die Ermittlung einer zu kleinen Verhältniszahl  $k$  zur Folge hat. Hiernach muß die Berechtigung unserer Art der Korrektur als erwiesen angesehen werden.

## VII. Untersuchung des Einflusses der axialen Sondenlänge.

Als Schlußbetrachtung zu diesem Abschnitt soll hier noch der Beweis erbracht werden, daß die axiale Ausdehnung der Sonde, die sich, wie erwähnt, über einen Potentialabfall von ca. 2 Volt in der Hauptentladung erstreckt, auf die Genauigkeit

der Bestimmung von  $\Phi^-$  ohne Einfluß ist. Nennt man  $i^-$  bzw.  $i^+$  den auf die Einheit der axialen Sondenlänge bezogenen Elektronen- bzw. Ionenstrom und  $s$  die axiale Sondenlänge, so ist wegen des Sättigungscharakters  $I^+ = i^+s$ , dagegen kann  $I^-$  nur durch eine Summierung  $\int i^- ds$  ausgedrückt werden, da nach Formel (7) gilt:

$$i^- = (\bar{i})^- e^{-\frac{\bar{E}-E}{\mathfrak{B}}}$$

und  $\bar{E}$  hier in einem Bereich von 2 Volt schwankt. Bezeichnet man mit  $\Delta E_H = \bar{E}_2 - \bar{E}_1$  den absoluten Spannungsabfall längs der Sonde, so läßt sich  $I^-$  wegen der Konstanz des Potentialgradienten

$$\frac{d\bar{E}}{ds} = \frac{\Delta E_H}{s}$$

angeben:

$$I^- = \frac{s}{\Delta E_H} \int_{\bar{E}_1}^{\bar{E}_2} i^- d\bar{E}$$

oder

$$I^- = \frac{(\bar{i})^- s}{\Delta E_H} \int_{\bar{E}_1}^{\bar{E}_2} e^{-\frac{\bar{E}-E}{\mathfrak{B}}} d\bar{E}.$$

Die Ausführung der Integration ergibt:

$$I^- = \frac{(\bar{i})^- s \mathfrak{B}}{\Delta E_H} e^{-\frac{\bar{E}_1-E}{\mathfrak{B}}} \left(1 - e^{-\frac{\Delta E_H}{\mathfrak{B}}}\right).$$

Hieraus erkennt man sofort, daß der Nenner des variablen Exponenten  $\frac{E}{\mathfrak{B}}$  der gleiche geblieben ist, daß also die Elektronentemperatur auch mit langer Sonde richtig gemessen wird<sup>1)</sup>. Führt man ferner ein beliebiges Potential  $\bar{E}_m$  ein, das zwischen den Grenzen  $\bar{E}_1$  und  $\bar{E}_2$  liegt, so daß  $\bar{E}_m = \bar{E}_1 + X$  gesetzt werden kann, wo  $X$  einen ebenfalls beliebigen Potentialwert darstellt, so erhält man

$$I^- = \frac{(\bar{i})^- s \mathfrak{B}}{\Delta E_H} e^{-\frac{\bar{E}_m-E}{\mathfrak{B}}} \left(e^{\frac{X}{\mathfrak{B}}} - e^{-\frac{\Delta E_H - X}{\mathfrak{B}}}\right).$$

Endlich kann man noch entsprechend Gleichung (7) schreiben:

$$i_m^- = (\bar{i})^- e^{-\frac{\bar{E}_m-E}{\mathfrak{B}}},$$

wo  $i_m^-$  zunächst einen dem Wert  $\bar{E}_m$  zugeordneten Strom pro Längeneinheit darstellt, und erhält:

$$I^- = i_m^- s \frac{\mathfrak{B}}{\Delta E_H} \left(e^{\frac{X}{\mathfrak{B}}} - e^{-\frac{\Delta E_H - X}{\mathfrak{B}}}\right). \quad (21)$$

Es zeigt sich also, daß der von Elektronen getragene Sondenstrom  $I^-$  sich nur durch einen konstanten, d. h. von  $\bar{E}$  nicht abhängigen Faktor von dem Wert  $i_m^- s$  unterscheidet, den man bei Annahme einer über die ganze Sondenlänge konstanten Stromdichte oder  $\infty$  kurzer Sonde erhalten würde.  $i_m^-$  ist also als mittlere Stromdichte einer axial langen Sonde zu definieren und zugleich  $\bar{E}_m$  als das wahre Lichtbogenpotential

<sup>1)</sup> Falls der in Fußnote <sup>2)</sup> S. 147 genannte Effekt nicht wesentlich stört.

vor demjenigen Teil der Sonde, der gerade die mittlere Stromdichte  $i_m^-$  führt, für den also der konstante Faktor zu 1 wird:

$$\frac{\mathfrak{B}}{\Delta E_H} \left( e^{\frac{X}{\mathfrak{B}}} - e^{-\frac{\Delta E_H - X}{\mathfrak{B}}} \right) = 1.$$

Daraus ergibt sich:

$$X = \mathfrak{B} \ln \frac{\Delta E_H}{\mathfrak{B} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta E_H}{\mathfrak{B}}} \right)}. \quad (22)$$

Die Größe  $X$  ist hiernach unabhängig vom Sondenpotential  $E$ , es läßt sich also eine beliebig lange Sonde ersetzen durch eine unendlich kurze, die den Lichtbogenteil mit dem Potential  $\bar{E} = \bar{E}_m$  berührt<sup>1)</sup>. Infolgedessen ist ebenso wie  $\mathfrak{B}$  auch die Größe  $\Delta E$  der Gleichung (14) unabhängig von der Sondenlänge, so daß dasselbe von der daraus zu ermittelnden Größe  $\Phi^-$  gilt.

Es ist noch hinzuzufügen, daß  $X$  nur bei kurzen Sonden sich seinem Maximalwert  $\frac{\Delta E_H}{2}$  nähert, wie sich aus der Beziehung (22) finden läßt, daß also das mit langer Sonde ermittelte Lichtbogenpotential  $\bar{E}_m$  nicht vor der Sondenmitte liegt, sondern nach dem der Gefäßkathode zugekehrten Sondenende hin verschoben ist.

### VIII. Versuche mit einer kugelförmigen Sonde.

Der an der Zylindersonde gefundene Abkühlungseffekt in dem Spannungsbereich  $\Delta E$  war wegen der bedeutenden Wärmekapazität und daher langen Erwärmungszeiten der Zylindersonde nur ziemlich roh gemessen worden. Es sollte daher

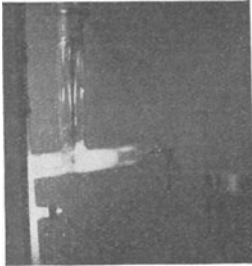


Abb. 16.

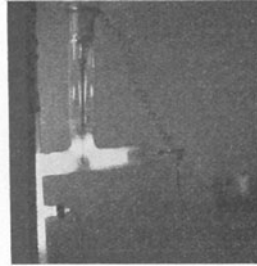


Abb. 17.

dieses Gebiet nochmals mittels einer Sonde von möglichst geringer Wärmekapazität untersucht werden, die zur Variation der äußeren Gestalt in Kugelform ausgeführt wurde. Allerdings ist in diesem Falle eine gleichmäßige Berührung mit dem Lichtbogen nicht mehr gewährleistet; wie anfangs erwähnt, hat der Lichtbogen durchaus nicht das Bestreben, den ihm zur Verfügung stehenden Querschnitt homogen auszufüllen, sondern er bevorzugt diejenigen Stellen, die von ionenabsorbierenden Wänden möglichst weit entfernt liegen. Stellt man z. B. in die Entladungsbahn ein sieb-

<sup>1)</sup> Voraussetzung für dieses Ergebnis ist natürlich, daß an den Stirnflächen der Sonde keine „Randeffekte“ auftreten. Wie die photographischen Aufnahmen Abb. 9 und 10 einigermaßen erkennen lassen, bleibt die Dicke des Dunkelraums im Innern der Sonde bis nahe zum Rande konstant, so daß man auf einen geringen Einfluß der „Randeffekte“ schließen kann.

artiges Gitter, so benutzt der Lichtbogen nur ganz wenig Löcher desselben und zwar diejenigen mit dem größten Öffnungsquerschnitt. Wenn eine Kugel einen beträchtlichen Teil des Rohrquerschnittes einnimmt, so treten auch hier Änderungen in der Stromdichteverteilung ein, die sich besonders in labilen Schwankungen des kathodischen Sondenstroms bemerkbar machen. Bei schwachen Hauptentladungen kann die Verschiebung sogar deutlich sichtbar werden, wenn man den Ionenfallraum (das Child-Gebiet) genügend vergrößert, dessen Begrenzungsfläche ebenfalls im erwähnten Sinne Ionenabsorbierend wirkt. Es wurden zwei photographische Aufnahmen bei  $I_H = 0,010$  Amp. und  $E = 0$  Volt (Abb. 16) sowie  $E = -100$  Volt (Abb. 17) gemacht, deren Vergleich die Verschiebung des Lichtbogens in das obere Ansatzrohr hinein und die Ausbreitung des Dunkelraums unterhalb der Kugel zeigt. Dieser Effekt ist jedoch bei den zur Untersuchung gewählten Hauptströmen von 1 bis 3 Amp. unmerklich. In anderer Hinsicht bietet die Kugelgestalt den Vorteil, daß an der negativen Sonde ausgelöste Elektronen, die im Childgebiet kinetische Energie aufgenommen haben, diese Energie mit viel geringerer Wahrscheinlichkeit als Wärme zur Sonde zurückgeben können, als im Fall der Zylinderausführung. Trotzdem wird man einen merklichen Unterschied in den Erwärmungsmessungen von vornherein nicht erwarten, da bereits mit der Zylindersonde der Ionenanteil nicht viel geringer als zu 100% bestimmt wurde, es konnte also im Hinblick darauf, daß auch bei der Kugelsonde das Korrektionsglied  $\frac{dI^+}{dE} (E_0 - E)$  eine beträchtliche Größe erreichen würde, von einer erneuten und doch kaum genaueren Bestimmung der Größe  $I^+$  abgesehen werden.

Eine in der Kugelsonde nur schwer unterzubringende Heizwicklung wurde also erspart und die Wärmekapazität der Sonde auf ein Minimum beschränkt.

Die Sonde wurde auf elektrolytischem Wege hergestellt (Abb. 18). Die auf ein kugelig gehämmertes Nickelblech Ni aufgeschweißten Drähte *a*, *b*, *c* wurden mit einer Wackugel umgeben, deren Oberfläche mittels Graphit leitend gemacht wurde. Darauf erfolgte erst ein Kupferüberzug von ca. 0,2 mm Stärke, darüber ein Nickelüberzug von ca. 0,02 mm, worauf das Wachs herausgeschmolzen wurde. Von den Drähten diente *a* (Eisen) als Stromzuführung, *b* und *c* (Eisen bzw. Konstanten), die zur Vermeidung der Wärmeableitung schraubenförmig auf konzentrische Glasröhrchen aufgewunden waren, als Thermoelement. Der Außendurchmesser betrug 1,6 cm. Gegen die Entladung waren die Zuleitungsdrähte durch Glasröhrchen isoliert. Die Lage der Kugelsonde in der Entladungsbahn geht aus Abb. 16 und 17 hervor.

Es wurden wieder einige Erwärmungskurven entsprechend Abb. 6 aufgenommen, die sich jedoch nur über den kleinen Hauptstrombereich von 1 bis 3 Amp. erstrecken, da bei niederen Strömen die Glaswand zu wenig erwärmt wurde, so daß sich Hg-Tröpfchen niederschlugen und die Ausstrahlung störten. Diese Kurven zeigt

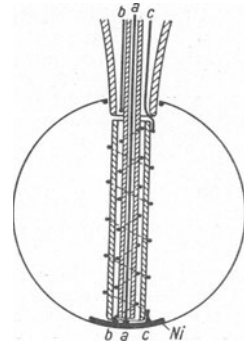


Abb. 18.

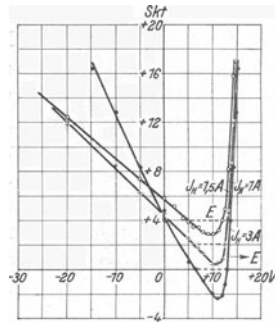


Abb. 19.

Abb. 19, in der besonderer Wert auf die Ermittlung der auf der Abszissenachse ausgeschnittenen Strecken  $\Delta E$  gelegt wurde. Deshalb sind die drei Achsen zueinander parallel verschoben gezeichnet, und zwar um 2 bzw. 4 Skalenteile.

Auf diese Weise konnte die Größe  $\Delta E$  auf etwa  $\pm 0,2$  Volt genau bestimmt werden, da der Abkühlungseffekt der Sonde hier besonders deutlich in Erscheinung tritt. In der Tabelle 7 sind die Versuchsergebnisse zusammengestellt und  $\Phi^-$  nach

Tabelle 7.

$I_H$ Amp.	$\Phi^-$ Volt	$\Delta E$ Volt	$\Phi^-$ Volt
1	1,16	6,9	4,58
1,5	1,40	6,5	4,42
3	0,95	6,3	4,40

der Beziehung (14a) ermittelt:

Danach beträgt die Elektroneneintrittsenergie für Nickel  $4,47 \pm 0,2$  Volt. Trotz der mannigfaltigen störenden Einflüsse ist die geringe Streuung der Werte für  $\Phi^-$  bemerkenswert.

Die Kurven der Abb. 19 können an sich auch noch ausgewertet werden, indem man beliebige Parallele zur Abszissenachse zieht und die abgeschnittenen Strecken entnimmt, für die man dann besondere Energiebilanzen aufzustellen hätte. Mit wachsender Entfernung von der Abszissenachse (nach höheren Temperaturen) ergeben sich jedoch allmählich steigende Werte von  $\Phi^-$ , offenbar weil die der Beziehung (14) zugrundeliegende Voraussetzung  $I^+ = \text{const.}$  nicht mehr erfüllt ist. Eine anzubringende Korrektur würde jedoch die unbekannte Größe  $\Phi^+$  enthalten, über die hier nur allgemeine Angaben gemacht werden konnten, so daß diese allgemeinere Form der Auswertung wieder verlassen worden ist.

## IX. Versuch zur direkten Bestimmung des Elektronenanteils am Nebenstrom.

Als Abschluß dieser Arbeit soll noch ein Versuch kurz geschildert werden, der den Zweck hatte, die an einer negativen Sonde ausgelösten Elektronen — sei es durch Photoeffekt, sei es durch Ionenstoß — direkt nachzuweisen. Es konnte hierzu wieder

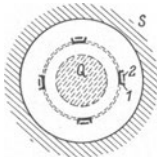


Abb. 20.

die beschriebene Zylindersonde benutzt werden, an der sich der Childsche Ionenfallraum so deutlich als Dunkelschicht ausbildete, nur mußten in diese Schicht noch gewisse Elektroden hineingebracht werden, und zwar von solcher Form, daß sie erstens an bestimmten Stellen den „Ionen-Regen“ abzuschirmen imstande sind und zweitens im „Kernschatten“ dieser Schirme, wo sich die entstandenen Lücken noch nicht wieder geschlossen haben, die vermuteten, in umgekehrter Richtung fallenden Elektronen auffangen können. Diese Vorrichtung wurde als konzentrisch in den Sonden-zylinder eingefügtes doppeltes Gitter ausgebildet, dessen Querschnitt senkrecht zur Achse in Abb. 20 skizziert ist. Darin bedeutet  $Q$  den Querschnitt der Entladungsbahn, die durch ein entsprechend negatives Potential des Sondenkörpers  $S$  eingengt wird. Diesem zugekehrt liegt die Fangsonde (2), bestehend aus 4 achsenparallelen feinen Eisenstäbchen, die auf der Innenseite umgeben sind von der aus dünnen, gebogenen Eisenblechen bestehenden Schirmsonde (1). Beide Sonden und ihre Zuführungsleitungen sind mittels Glas und Glimmer gut isoliert. Es mußten die folgenden Bedingungen erfüllt werden: 1.  $Q$  darf die Sonden nicht berühren, 2. die Schirmsonde muß auf dasjenige Potential gebracht werden, das der von ihr eingenommenen Stelle im Child-Gebiet zukommt, 3. die Breite der Schirmsonde muß klein sein gegen deren Entfernung von der Wand. Hiervon waren Punkt 1 und 2 mit Hilfe der Dunkelraummessungen (Abb. 8) nach Ausführung einiger Interpolationen unschwer zu

erfüllen, hingegen Punkt 3 offenbar nur ungenügend, da das Verhältnis Breite : Abstand nach Konstruktion 1,7 mm : 3 mm betrug. Auf letzteren Umstand ist wohl das unbefriedigende Ergebnis dieses Versuchs zurückzuführen.

Es wurde der von der Fangsonde aufgenommene Strom  $I_2$  in Abhängigkeit von dem ihr erteilten Potential  $E_2$  bei verschiedenen Potentialen  $E$  der Zylindersonde aber konstanten Hauptstrom  $I_H = 0,05$  Amp. gemessen und in Abb. 21 dargestellt. Der anodische Teil der Darstellung muß hier den Verlauf des an gewissen Teilen der Wand ausgelösten Elektronenstroms angeben, die der Fangsonde gegenüberliegen, während der kathodische Kurventeil, welcher anzeigt, daß bei  $E_2 < E_1$  anscheinend auch abgelenkte positive Ionen zur Sonde gelangen, von geringer Bedeutung ist. Das an die Schirmsonde gelegte Potential  $E_1$  ist in der Darstellung durch vertikale Linien gekennzeichnet. Das besondere Verhalten von  $I_2$  bei  $E = -100$  Volt ist der absichtlichen Nichterfüllung der obigen Bedingung 1 zuzuschreiben, weil hierbei Elektronen der Hauptentladung zur Fangsonde gelangen können.

Die Erwartung, daß  $I_2$  bei den höheren negativen Wandpotentialen, wo die Elektronen der Hauptentladung nicht mehr zu stören vermögen, einen Sättigungscharakter aufweisen würde, hat sich leider nicht erfüllt. Da Neubildungen im Child-Gebiet nicht wesentlich in Frage kommen, ist der recht gleichförmige Stromanstieg nur durch eine bis zur Wand reichende Schattenwirkung der Schirmsonde zu erklären — wegen ungenügender Erfüllung der Bedingung 3 —, so daß auch der Strom ausgelöster Elektronen Lücken aufweist, die sich bis zur Fangsonde nur zum Teil geschlossen haben. Durch Vergleich der aus den wirksamen Sondenflächen errechneten Stromdichten ergibt sich für den Elektronenanteil des kathodischen Nebenstromes im vorliegenden Bereich die Größenordnung weniger Prozente für  $E = -200$  bis  $-400$  Volt, woraus nur geschlossen werden kann, daß der wahre Wert der Elektronenausbeute bei diesen Ionengeschwindigkeiten wesentlich höher liegt, also sicher mehr als 5% beträgt.

Dieses an sich wenig befriedigende Versuchsergebnis ist hier angeführt worden, da sich immerhin erkennen läßt, daß nach der vorliegenden Methode unipolare Ströme in Gasentladungen quantitativ meßbar sind.

## X. Vergleich der Elektronenauslösung durch Quecksilberionen und Wasserstoffkanalstrahlen.

Die bereits zitierten Messungen H. Baerwalds sollen hier noch zu einem quantitativen Vergleich herangezogen werden. Es wurde dort gefunden, daß 1 austretendes Kanalstrahlteilchen (Wasserstoff) bei einer Geschwindigkeit von ungefähr 300 Volt an einer Messingfläche im Vakuum 2 Elektronen auslöst, wobei von 4 austretenden Kanalstrahlteilchen nur etwa 1 positiv geladen war. Demnach betrug die Elektronenausbeute im obigen Sinne 200% bzw. 800%. Schätzt man dagegen die Zahl der durch Hg-Ionen von 300 Volt Geschwindigkeit ausgelösten Elektronen nach dem Ergebnis

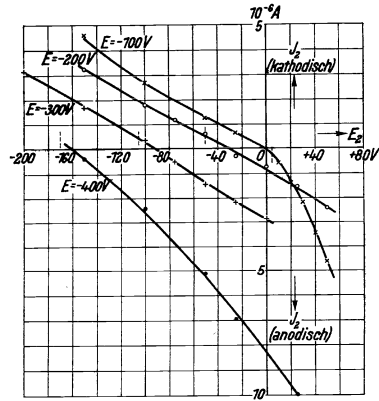


Abb. 21.

der energetischen Messungen auf ca. 10% der Zahl der auslösenden Ionen, so zeigt sich, daß die Ausbeute hier nur den 20. bzw. 80. Teil beträgt. Nun verhalten sich bei gleicher Volt-Geschwindigkeit die Absolutgeschwindigkeiten der Ionen umgekehrt wie die Wurzeln aus ihren Massen, also bei Hg und H etwa wie 1 : 14, so daß die Vermutung nahe liegt, daß bei dem Anprall von Ionen (oder neutralen Teilchen) gegen eine metallische Wand mehr die Absolutgeschwindigkeit als die kinetische Energie für die Elektronenauslösung maßgebend ist. Da jedoch die Ausbeute bekanntlich keine lineare Funktion der Ionen- bzw. Teilchengeschwindigkeit ist, und die Daten für höhere Geschwindigkeiten beim Hg fehlen, so können hier noch keine genaueren Schlüsse gezogen werden<sup>1)</sup>.

Nachdem die energetischen Versuche dieser Arbeit zu der Erkenntnis geführt hatten, daß der „Gehäusestrom“ in Großgleichrichtern praktisch als reiner Ionenstrom bezeichnet werden kann, erscheint es notwendig, noch kurz auf die Frage des Sättigungscharakters dieses Stromes zurückzukommen. Diese Frage ist bereits durch Arbeiten von I. Langmuir<sup>2)</sup> behandelt worden, so daß sich hier eine eingehendere Diskussion erübrigt. Die Erklärung Langmuirs lautet, daß vor der negativ geladenen Wand ein Gebiet positiver Raumladung entsteht, in dem die Ionen frei fallen, so daß jedes beliebige negative Potential durch eine sich automatisch bildende, entsprechende positive Schicht kompensiert wird und aus der Entladungsbahn nur soviel positive Ionen herausgezogen werden, als spontan zum Rand dieser Schicht gelangen. Diese Theorie, die durch die vorliegende Arbeit weitgehendst gestützt wird, ist inzwischen verfeinert worden durch die bereits erwähnte Schottkysche Diffusionstheorie.

Mit diesen Bemerkungen soll die vorliegende Behandlung des Gehäusestromproblems abgeschlossen werden. Im Einverständnis mit den Herren Dr. Schenkel und Prof. Dr. Schottky ist die in der zitierten Arbeit beider Autoren ausgesprochene Erklärung der lichtelektrischen Auslösung des Gehäusestromes hiermit berichtigt worden.

<sup>1)</sup> Nachtrag: Während des Druckes dieser Arbeit erschien eine Abhandlung von Dällenbach, Gerecke und Stoll (Phys. Zeitschr. Bd. 26, 10, 1925) in der u. a. über einen Versuch berichtet wird, der die Ermittlung des an einer Eisenfläche durch Stoß von Quecksilberionen ausgelösten Elektronenstroms zum Ziel hatte. Es wurde bis zu Ionengeschwindigkeiten von 3000 Volt noch keine meßbare Elektronenausbeute (unter ca. 1%) gefunden. Dieses Ergebnis unterscheidet sich weitgehend von dem entsprechenden der vorliegenden Arbeit und überrascht auch insofern, als hiernach die Aufrechterhaltung einer Glimmentladung im Hg-Dampf bei einem Kathodenfall von etwa 500 Volt kaum zu erklären ist. Vielmehr müssen nach einer Untersuchung von A. Günther-Schulze (Zeitschr. f. Phys. Bd. 20, 153, 1923) höchstens je etwa 50 Hg-Ionen an der Glimmkathode ein Elektron auslösen, um die Entladung aufrecht zu erhalten. Wird die im Kathodenfall erlangte kinetische Energie des ausgelösten Elektrons nicht vollkommen zu Ionisierungen verbraucht, so wird sich die Zahl der zur Auslösung nötigen Ionen entsprechend vermindern. Es erscheint zweifelhaft, ob in dem von Dällenbach, Gerecke und Stoll angestellten Versuch der Ionenstrom zur Nebenelektrode tatsächlich unabhängig vom angelegten Potential gewesen ist, da die Breite des vorgelagerten Childgebietes in der Größenordnung der Sendendimensionen lag und seine Begrenzung nicht eben, sondern zylindrisch gekrümmt sein mußte, entsprechend der von der Mitte der Entladungsbahn nach außen abnehmenden Ionendichte. Diese Krümmung konnte aber bei steigendem negativen Elektrodenpotential eine Abnahme des Ionenstroms, also Kompensation des ausgelösten Elektronenstroms, bewirken haben. Es sei jedoch nochmals betont, daß die aus Tabelle 3 der vorliegenden Arbeit zu entnehmenden Ausbeuten von etwa 10% bei  $E = -100$  Volt noch innerhalb der angenommenen Fehlergrenze liegen, also keinen Anspruch auf Genauigkeit erheben können.

Es ist ferner noch hinzuweisen auf eine Arbeit von I. Langmuir und H. Mott-Smith Jr. (Gen. El. Rev. Bd. 27, Heft 7—9, 1924) in der zum Teil ähnliche Probleme behandelt werden wie in der vorliegenden. Da ich zu spät Kenntnis dieser interessanten Untersuchungen erhielt, ist mir ein näheres Eingehen auf dieselben wegen Raum mangels leider nicht mehr möglich.

<sup>2)</sup> I. Langmuir: Gen. El. Rev. Bd. 26, S. 371. 1923.



Die als Nebenergebnis aufgefundenen „Elektroneneintrittsarbeiten“ in Eisen- und Nickelelektroden sind nur verhältnismäßig roh ermittelt worden und erheben, namentlich bei ersteren, keinen hohen Anspruch auf Genauigkeit. Zweifellos wird sich aber die hierfür angewandte Methode noch verfeinern und auch auf Edelgasentladungen ausdehnen lassen, um namentlich diejenigen zahlreichen Metalle untersuchen zu können, die von Hg-Dampf angegriffen werden.

Es ist mir ein Bedürfnis, Herrn Professor Dr. Schottky für sein förderndes Interesse und für viele wertvolle Anregungen zu dieser Arbeit meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Auch Herrn Professor Dr. Seeliger und Herrn Dr. Gehrts habe ich für freundlichst erteilte Ratschläge bestens zu danken.

### Zusammenfassung.

1. Es wird die Erwärmung einer Nebenelektrode in einer Quecksilberdampfentladung bei verschiedenen an die Elektrode gelegten Potentialen gemessen. Durch Vergleich mit einer Widerstandsheizung wird die aufgenommene Wärmeleistung in energetischem Maß abhängig vom angelegten Potential dargestellt.

2. Für Elektrodenpotentiale, die negativ gegen das Kathodenpotential sind, zeigt die Kurve bei merklich konstantem Nebenstrom einen fast geradlinigen Verlauf mit der Spannung, und es konnte nach Anbringung von Korrekturen aus der Neigung dieser Kurve geschlossen werden, daß die kinetische Energie der den kathodischen Nebenstrom transportierenden Ladungsträger bei einem Spannungsabfall von wenigen Volt innerhalb der Meßgenauigkeit (etwa 10%) vollständig an die Elektrode abgegeben wird. Es muß also erstens dieser Spannungsabfall in unmittelbarer Nähe der Nebenelektrode liegen und zweitens müssen die in Frage kommenden Ladungsträger nur aus auf die Elektrode zufliegenden (positiven) Teilchen bestehen, da von den sich in entgegengesetzter Richtung bewegendenden Elektronen nur ein verschwindend kleiner Teil der Kathodenfallenergie als Rückwärme zur Nebenelektrode fließen würde.

3. Bei steigendem negativen Sondenpotential scheint es, daß der Nebenstrom nicht mehr allein von positiven Ionen getragen wird, d. h. daß sekundär ausgelöste Kathodenstrahlen in steigendem Maße beteiligt sind. Der Anteil derselben am Nebenstrom könnte nach den Messungen bei einem Potential von etwa  $-100$  Volt (gegen Kathode) die Größenordnung von 10% erreichen.

4. Das Fallgebiet der Ionen zur negativ geladenen Sonde prägt sich bei geeigneter Form derselben und genügend geringen Stromdichten als deutlicher Dunkelraum aus, der erst dann verschwindet, wenn die Sonde zur selbständigen Anode wird.

5. Die Nebenelektrode zeigt eine Temperaturabnahme, wenn ihr Potential vom stromlosen Zustand ausgehend um wenige Volt erniedrigt wird. Aus diesem Ergebnis wird abgeleitet, daß bei Absorption von Elektronen an einem leitenden Material ein als „Eintrittsarbeit“ bezeichneter Energiebetrag thermisch frei wird, der bei Eisen bzw. Nickel einem Potentialfall von  $3,8 (\pm 1)$  bzw.  $4,47 (\pm 0,2)$  Volt entspricht.

6. Die Dunkelraumbescheinungen und die thermische Wirkung der Eintrittsarbeit in Verbindung mit früheren Messungen der Anodenerwärmung sind wichtige Stützen für die Behauptung, daß das Potential der äußerlich stromlosen Nebenelektrode um mehrere Volt negativer als das wahre Potential an der betreffenden Stelle in der Entladungsbahn ist.

# Die Grenzen der voreilenden Belastung von Turbo-Synchrongeneratoren.

Von **Karl Krapp.**

Mit 4 Textabbildungen.

Mitteilung aus dem Dynamowerk der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H.,  
Siemensstadt.

Eingegangen am 14. November 1924.

Der Ausbau großer Hochspannungsnetze in Kabel und die Verwendung von Synchronmaschinen zur Regelung des Netz- $\cos\varphi$  und der Netzspannung bringen es neuerdings mit sich, daß von Synchronmaschinen die Abgabe großer voreilender Blindströme verlangt wird. Da die Abgabe voreilenden Blindstromes gleichbedeutend ist mit Aufnahme nacheilenden oder Magnetisierungsstromes, laufen solche Maschinen mit geringer eigener Erregung.

Der untererregte Betrieb stellte neue Anforderungen an die Erregermaschinen und Schnellregler; die Lösung dieser Probleme ist noch im Werden und hat zum Teil schon zu befriedigenden Ergebnissen geführt. Wenn wir die Möglichkeit beliebiger Regelung der Erregerspannung voraussetzen, so bleibt noch die Frage offen, welche Grenzen der voreilenden Blindleistung im Generator selbst gezogen sind, ob wir bei jedem voreilenden  $\cos\varphi$  der Maschine den vollen Normalstrom entnehmen können (dessen Größe durch die Erwärmung der Maschine bestimmt ist), oder ob sich schon vorher eine anderweitig erzwungene Grenze ergibt.

Die folgende Untersuchung zeigt für Turbogeneratoren die Grenze der voreilenden Belastung, die wir einhalten müssen, wenn ein stabiler Betrieb des Generators gewährleistet werden soll. Die dabei angewandten Gedankengänge sind in ihren Einzelheiten nicht neu und es mag sein, daß im Zusammenhang mit einem anderen Hauptthema in der Literatur auch auf die hier gezeigte Grenze des stabilen Betriebes schon hingewiesen wurde. Jedoch ist unseres Wissens die wichtige Einschränkung, die sich für Turbogeneratoren bei Blindbelastung ergibt, in der Literatur noch nicht derart betont worden, daß sie heute bei der Projektierung allgemein berücksichtigt würde.

Der Turbogenerator enthält als rotierenden Induktor einen genuteten Eisenzylinder, dem man mit hinreichender Genauigkeit gleiche magnetische Leitfähigkeit in allen radialen Richtungen zuschreiben kann. Daraus ergibt sich eine gleichartige sinusförmig angenommene Ausbildung der in der Maschine auftretenden Felder, die in einfacher Weise zusammenwirken, wie in Abb. 1 dargestellt ist. Bei den folgenden Überlegungen sind Kupfer- und Eisenverluste nicht berücksichtigt.

In Abb. 1 ist die Statorbohrung des Generators durch einen Kreis dargestellt. Die Statorwicklung ist durch 2 aufeinander senkrecht stehende Windungen außerhalb

des Kreises zum Ausdruck gebracht, die Erregerwicklung durch eine Windung innerhalb des Kreises. Das Drehfeld, das die Klemmenspannung erzeugt und dieser um  $90^\circ$  voreilt, ist in der Abbildung in seiner Richtung festgehalten und durch den Vektor  $F_k$  dargestellt. Induziert der Vektor  $F_k$  die Klemmenspannung  $K$ , so fließt der Wirkstrom  $J_w$  in der horizontal liegenden Statorwindung, der Blindstrom  $J_b$  in der vertikal liegenden Statorwindung. Die Stromrichtung in den Leitern ist in der üblichen Weise gekennzeichnet:  $\oplus$  für Strom, der vom Beschauer wegfließt,  $\ominus$  für Strom, der zum Beschauer fließt. Der Vektor des Stromes ist gleichgerichtet mit dem Feld, das er erzeugt.

Die hier gezeichneten Feldvektoren sind mit den Bezeichnungen der erzeugenden Ströme versehen, da sie nicht nur phasengleich, sondern auch proportional den Strömen sind, solange wir konstante Sättigung der Maschine annehmen. Das können wir für unsere Betrachtungen mit genügender Genauigkeit tun, da wir es bei Untererregung nur mit geringer Sättigung zu tun haben. Die Größe der einzelnen Feldkomponenten ist bestimmt durch den Fluß, der für die EMK-Bildung wirksam ist; das ist von jedem Fluß der Teil, der, wenn er allein bestünde, mit der Statorwicklung verkettet wäre, also der vom Erregerstrom  $i_m$  erzeugte Fluß ohne Streufluß und der vom Statorstrom  $J$  erzeugte Fluß mit Streufluß.

In Abb. 1 a bis d sind einige charakteristische Belastungsfälle gezeichnet: a) Leerlauf. Das Feld  $F_k$  wird nur durch die Erregung  $i_m$  hervorgerufen.

b) Reine Wirkbelastung. Sie führt zu einer Verdrehung des Vektors  $i_m$  (Maschinenvektor oder Polradvektor) gegenüber dem Vektor  $F_k$  (Netzvektor) um den Winkel  $\vartheta$ .

c) bis d) Reine Blindbelastung und Untererregung.  $\vartheta = 0$ . Bei d) ist die voreilende Blindlast gerade so groß, daß das Feld  $J_b = F_k$ . Erregung  $i_m$  muß also  $= 0$  sein. Vergleich mit Abb. 1 a.

In Abb. 1 e bis g sind verschiedene Wirkbelastungen bei konstanter Erregung gezeichnet. Wollen wir das Vektordiagramm für eine gewisse Wirklast konstruieren, so liegt  $F_k$  fest.  $i_m = \text{const.}$  ist durch einen Kreis um das Ende von  $F_k$  gegeben. Zu dem gewählten  $J_w$  müssen wir vom Endpunkte noch  $J_b$  horizontal bis zum Kreise  $i_m = \text{const.}$  hinzufügen, damit das Vektordiagramm vollständig ist. Je größer  $J_w$  ist, um so höher rückt das Ende von  $J_b$  (und damit das Ende von  $J = J_w + J_b$ ) auf dem Kreis  $i_m = \text{const.}$ , und um so größer werden die Winkel  $\varphi$  und  $\vartheta$ . Zwischen den Vektorgrößen und Winkeln bestehen die Beziehungen:

$$F_k = J_b + i_m \cdot \cos \vartheta = J \cdot \sin \varphi + i_m \cdot \cos \vartheta, \tag{1}$$

$$J_w = J \cdot \cos \varphi = -i_m \cdot \sin \vartheta. \tag{2}$$

Das Maximum für  $J_w$  ergibt sich für  $\sin \vartheta = 1$ ;  $\vartheta = 90^\circ$ .

Dieser Betriebszustand  $\vartheta = 90^\circ$ , der in Abb. 1 f dargestellt ist, bildet die Grenze des stabilen Betriebes der Maschine. Das ergibt sich aus folgender Überlegung: Jede Vergrößerung der Wirkbelastung einer Synchron-

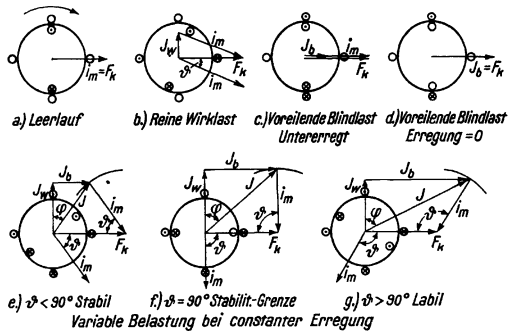


Abb. 1.

maschine — sei es mechanische Belastung als Motor oder elektrische Belastung als Generator — sucht den Winkel  $\vartheta$  zwischen Netz- und Maschinenvektor zu vergrößern. Wir können uns vorstellen, die elastische magnetische Kupplung zwischen Netz und Maschine werde durch größere Belastung auseinandergezogen. Wächst nun mit der Vergrößerung von  $\vartheta$  die in der Maschine übertragene Wirkleistung  $J_w$ , so wird  $\vartheta$  so lange zunehmen, bis  $J_w$  der neuen benötigten Wirkleistung entspricht. Dieser Betrieb ist stabil. Nimmt aber mit wachsendem  $\vartheta$  die übertragene Wirkleistung  $J_w$  ab, wie das für  $\vartheta > 90^\circ$  der Fall ist, (siehe Abb. 1g), so kann durch Zunahme von  $\vartheta$  kein neuer Gleichgewichtszustand zwischen benötigter und übertragener Wirkleistung erreicht werden. Der Betrieb ist unstabil. Selbst wenn wir annehmen, wir befänden uns im Betriebszustand  $\vartheta > 90^\circ$  etwa nach Abb. 1g, der ja wegen der größeren Blindstromabgabe  $J_b$  erwünscht sein kann, so würde jede Belastungsschwankung das labile Gleichgewicht endgültig stören, die Maschine fiel aus dem Tritt und würde sich bestenfalls in dem stabilen Zustand, wie er etwa Abb. 1e entspricht, also mit kleinem  $J_b$  wieder fangen.

Die Abhängigkeit der übertragenen Wirkleistung bzw. des übertragenen Moments vom Winkel  $\vartheta$  wird uns in ihrer physikalischen Bedeutung klar aus der Überlegung,

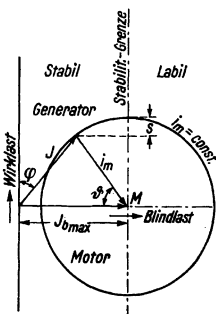


Abb. 2.

daß das größte Moment dann auftritt, wenn die am Umfang verteilten Rotorleiter die günstigste Lage zum Feld der Maschine haben, d. h. wenn alle Leiter mit gleicher Stromrichtung im Feld gleicher Richtung liegen und dadurch ein Moment im gleichen Drehsinn entwickeln. Diese günstigste Lage ist bei  $\vartheta = 90^\circ$  gegeben. Solange  $\vartheta < 90^\circ$ , wird durch Vergrößerung von  $\vartheta$  infolge zunehmender Belastung die Lage der Rotorleiter verbessert, also das Moment vergrößert (stabiler Betrieb); ist jedoch  $\vartheta > 90^\circ$ , so wird durch eine weitere Vergrößerung von  $\vartheta$  die Lage der Leiter verschlechtert, das Moment vermindert (labiler Betrieb). Der Grenzzustand des stabilen Betriebes,  $\vartheta = 90^\circ$ , darf also nicht überschritten werden.

Kehren wir zu Abb. 1f,  $\vartheta = 90^\circ$  zurück. Für  $\sin \vartheta = 1$  geht Gleichung (2) über in  $J_w = -i_m$  (3); das besagt, daß die gesamte Erregung  $i_m$  nur dazu dient, das Feld des Wirkstromes  $J_w$  zu vernichten. Die Größe der Erregung wird also nur durch die Wirklast bestimmt und wird zu 0 für  $J_w = 0$ .

Gleichung (1) geht für  $\vartheta = 90^\circ$  über in  $F_k = J_b$ ; das besagt: der Blindstrom hat das ganze Hauptfeld  $F_k$  zu decken, die Maschine kann also nur mit so viel Blindstrom belastet werden, als sie zur Aufbringung des Feldes  $F_k$  benötigt. Für eine gegebene Maschine liegt dieser Wert  $J_{b\max} = F_k$  fest. Soll eine Maschine mit möglichst großem  $J_{b\max}$  neu entworfen werden, so ist danach zu trachten, daß zur Felderzeugung ein möglichst hoher Strom nötig ist (was erreicht wird durch Vergrößerung des Luftspaltes und Verringerung der Statorwindungszahl) und daß das Feld  $F_k$  möglichst hoch ist (bedingt ebenfalls geringe Statorwindungszahl). Alle diese Maßnahmen haben eine Vergrößerung der Rotorbelastung zur Folge und lassen sich vor allem dann nur in beschränktem Maße anwenden, wenn von dem Generator auch nachteilige Belastung verlangt wird. Die Zurücksetzung der Statorwindungszahl bedeutet zudem eine Zurücksetzung der Reaktanz und damit der Kurzschlußsicherheit, ist also auch dadurch an gewisse Grenzen gebunden.

In Abb. 2 sind die Ergebnisse unserer bisherigen Überlegung in einem Betriebsdiagramm dargestellt, das dem Heylandkreis des Asynchronmotors entspricht. Es dient uns als Strom- bzw. Leistungsdiagramm für konstante Spannung  $K$  und Erregung  $i_m$  und läßt die Grenzen zwischen stabilem und labilem Betrieb bei Generator- und Motorzustand erkennen.

Die wenigen zur Konstruktion benötigten Daten können den normalen Prüfkurven (Leerlaufcharakteristik mit eingezeichnetem Potierdreieck) sofort entnommen werden. Die einzige wichtige Größe ist  $J_{b\max}$ , das den Abstand der Stabilitätsgrenze von der Ordinatenachse bestimmt und den Mittelpunkt  $M$  aller Kreise  $i_m = \text{const.}$  ergibt.  $J_{b\max}$  ist die Blindleistung, die der Generator bei Erregung 0 abgibt, und ist durch die Größe des Potierdreieckes gegeben, dessen Spitze auf  $i_m = 0$  liegt (Abb. 3). Wenn wir die Stabilitätsgrenze kennen und wissen, daß eine Belastungsänderung bei konstanter Erregung ein Wandern des Endpunktes von  $J$  auf einem Kreis um  $M$  zur Folge hat, so interessiert es uns in den meisten Fällen nicht mehr, welcher Erregerstromwert zu irgend einem Feldwert  $i_m$  gehört. Benötigen wir ihn jedoch, so sagt uns ein Vergleich der Abb. 1a und 1d, daß für Leerlauferregung das Feld  $i_m = F_k = J_{b\max}$  ist. Für Leerlauferregung würde also der Kreis  $i_m = \text{const.}$  durch den Ordinatenanfängspunkt gehen.

Wie Abb. 2 zeigt, ist der Generator im gewählten Belastungszustand um den Betrag  $s$  (kW) bei konstanter Erregung überlastbar.  $J_b$  wächst bei dieser Überlastung auf  $J_{b\max}$ . Man sieht, daß die Forderung,  $J_b$  möglichst groß, womöglich  $= J_{b\max}$  zu machen, durch die notwendige Überlastbarkeit eingeschränkt wird. Je nach Art der Energieabnehmer ist mit verschiedenen großen plötzlichen Belastungstößen zu rechnen, die dem Generator höhere Energie entziehen, bevor der Regler eine Korrektur der Erregung bewirken kann. Diese momentane Mehrbelastung geht auf Kosten der Energie der rotierenden Massen, bis der Kraftregler eine Erhöhung der Energiezufuhr bewirkt. Da solche Belastungstöße vom Generator ohne Änderung der Erregung aufgenommen werden müssen, sind wir gezwungen, die Sicherheit  $s$  größer zu halten als die zu erwartenden Stöße. An Stelle der Stabilitätsgrenze tritt also für unseren Generator eine Grenzlinie gleicher Sicherheit wie sie in Abb. 4 dargestellt ist. Wir gelangen zu dieser Kurve, wenn wir auf verschiedenen Kreisen  $i_m = \text{const.}$  um den Wirklastbetrag  $s$  von der Stabilitätsgrenze aus zurückgehen. Die Angaben von Abb. 4 beziehen sich auf einen 10 000 kVA-Generator, die Sicherheit für Stoßbelastung beträgt 800 kW, d. i. 10% der normalen Wirklast bei  $\cos \varphi = 0,8$ . Eine Norm für die zu wählende Sicherheit läßt sich nicht aufstellen, diese muß sich nach dem Abnehmerbetrieb der Kraftwerke richten und nach der Geschwindigkeit, mit der die Erregung den Belastungsänderungen folgen kann. Aus registrierenden Leistungszeigern läßt sich die im Kraftwerke auftretende Stoßbelastung ablesen. Die Verteilung der Belastungs-

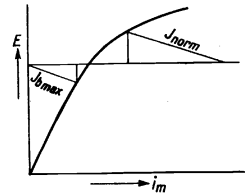


Abb. 3.

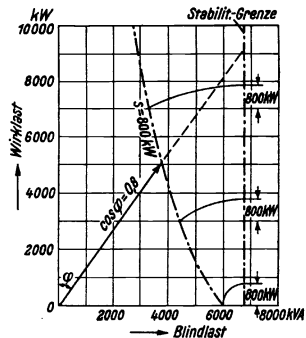


Abb. 4.

stöße auf die parallel arbeitenden Generatoren erfolgt, solange die Kraftregler nicht wirken, proportional den eingebauten  $\frac{GD^2}{p}$ . ( $GD^2$  = Schwungmoment;  $p$  = Polparzahl).

Abb. 4 zeigt uns, daß die Rücksicht auf die mögliche Stoßbelastung uns zwingt die zulässige voreilende Blindbelastung mit wachsender Wirklast immer stärker zu reduzieren und daß wir meistens bei  $\cos \varphi = 0,8$  voreilend dem Generator noch nicht die volle kVA-Leistung entnehmen können.

### Zusammenfassung.

Es wird gezeigt, daß die voreilende Strombelastung von Turbogeneratoren nicht nur durch die Reguliermöglichkeit begrenzt ist. Eine weitere Grenze liegt darin, daß von einer ganz bestimmten Blindlast ab der Betrieb der Maschine instabil wird. Bei dieser Blindlast ist für beliebige Erregung immer der Winkel  $\vartheta$  zwischen Netz- und Maschinenvektor =  $90^\circ$  und die Wirklast hat ihr Maximum (Kipplast). Da eine gewisse Überlastbarkeit immer vorhanden sein muß, ist es nicht möglich, praktisch bis zur Blindlast der Stabilitätsgrenze zu gehen; es ergibt sich daraus eine weitere, ziemlich erhebliche Beschränkung.

---

# Der Anlauf- und Bremsvorgang bei Asynchronmotoren mit Wirbelstromläufer.

Von Michael Liwtschitz.

Mit 21 Textabbildungen.

Mitteilung aus dem Dynamowerk der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H.,  
Siemensstadt.

Eingegangen am 11. Dezember 1924.

## A. Einleitung.

In einem demnächst an anderer Stelle<sup>1)</sup> erscheinenden Aufsätze über „Kurzschlußläufermotoren mit veränderlichem Läufer-Scheinwiderstand“ sind die Hauptgleichungen der Motoren mit Wirbelstromläufer und der mit Doppelkäfig nach Boucherot abgeleitet. Diesen beiden Läufern ist gemeinsam, daß sowohl ihr Ohmscher Widerstand wie ihr Streu-Blindwiderstand aus zwei Teilen besteht, von denen einer unveränderlich ist, während der andere seinen Wert mit dem Schlupf ändert.

Bezeichnen (alle Größen pro Phase, die Läufergrößen auf den Ständer reduziert):

$R_1$  den Ohmschen Widerstand der Ständerwicklung,

$x_1$  den Streu-Blindwiderstand der Ständerwicklung,

$a$  den unveränderlichen Teil des Ohmschen Widerstandes der Läuferwicklung,

$b$  den mit dem Schlupf veränderlichen Teil des Widerstandes der Läuferwicklung,

$l$  den unveränderlichen Teil des Streu-Blindwiderstandes der Läuferwicklung,

$m$  den mit dem Schlupf veränderlichen Teil des Streu-Blindwiderstandes der Läuferwicklung,

$n_s$  die synchrone Drehzahl des Motors,

$n$  die jeweilige Drehzahl des Motors,

$\sigma = \frac{n_s - n}{n_s}$  den Schlupf des Motors,

$\varphi(\sigma)$  die Funktion, nach der sich der veränderliche Teil des Ohmschen Widerstandes der Läuferwicklung in Abhängigkeit vom Schlupf ändert,

$\psi(\sigma)$  die Funktion, nach der sich der veränderliche Teil des Streu-Blindwiderstandes der Läuferwicklung in Abhängigkeit vom Schlupf ändert,

$m_1$  die Phasenzahl des Ständers,

$P_1$  die Klemmenspannung des Ständers,

$\tau_1$  den Heylandschen Streufaktor,

---

<sup>1)</sup> M. Liwtschitz: Kurzschlußläufermotoren mit veränderlichem Läufer-Scheinwiderstand. Arch. Elektrot. 1925, Bd. XIV, Heft 6.

so gilt für die Drehfeldleistung des Motors mit Wirbelstrom- oder Boucherotläufer die Beziehung:

$$N_d = \frac{m_1 P_1 \frac{a + b \cdot \varphi(\sigma)}{\sigma}}{\left[ R_1 + (1 + \tau_1) \frac{a + b \cdot \varphi(\sigma)}{\sigma} \right]^2 + \{x_1 + (1 + \tau_1)[l + m \cdot \psi(\sigma)]\}^2} \text{ Watt} \quad (1)$$

und für den auf den Ständer reduzierten Läuferstrom:

$$J_2' = \frac{P_1}{\sqrt{\left[ R_1 + (1 + \tau_1) \frac{a + b \cdot \varphi(\sigma)}{\sigma} \right]^2 + \{x_1 + (1 + \tau_1)[l + m \cdot \psi(\sigma)]\}^2}} \text{ Amp.} \quad (2)$$

Der totale Ohmsche Widerstand des Läufers, auf den Ständer reduziert, ist

$$R_2' = a + b \cdot \varphi(\sigma) \quad (3)$$

und der totale Streu-Blindwiderstand des Läufers, ebenfalls auf den Ständer reduziert,

$$x_2' = l + m \cdot \psi(\sigma). \quad (4)$$

Wir betrachten im weiteren den Motor mit Wirbelstromläufer und beschränken uns auf den praktisch wichtigsten Fall des nicht unterteilten Leiters. Die für diesen gewonnenen Resultate lassen sich ohne weiteres auf den Wirbelstromläufer mit unterteiltem Leiter übertragen.

Für den Wirbelstromläufer mit nicht unterteiltem Leiter ist<sup>1)</sup>

$$\varphi(\sigma) = \xi \frac{\Im \sin 2\xi + \sin 2\xi}{\mathfrak{O} \sqrt{2\xi - \cos 2\xi}} \quad (5)$$

und

$$\psi(\sigma) = \frac{3 \Im \sin 2\xi - \sin 2\xi}{2\xi \mathfrak{O} \sqrt{2\xi - \cos 2\xi}}, \quad (6)$$

wo

$$\xi = 2\pi t_k \sqrt{\frac{b_k f_1}{b_n \varrho}} \sqrt{\sigma}. \quad (7)$$

Abb. 1. Nut eines Motors mit Wirbelstromläufer.

Die Bedeutung der Größen  $t_k$ ,  $b_k$  und  $b_n$  geht aus Abb. 1 hervor.  $f_1$  ist die Ständerperiodenzahl pro Sekunde und  $\varrho$  der spezifische Widerstand des Leitermaterials in absol. Einheiten (für warmes Kupfer = 2000). Für  $f_1 = 50$  Per./sec., Kupfer als Leitermaterial und  $\sigma = 1$  (Stillstand), ist  $\xi$  annähernd gleich der Leiterhöhe.

Abb. 2 und 3 zeigen  $\varphi(\sigma)$  und  $\psi(\sigma)$  in Abhängigkeit von  $\xi^2$ . Während  $\varphi(\sigma)$  mit zunehmendem  $\xi$  (zunehmender Nutentiefe) wächst (Widerstandsvermehrung), nimmt  $\psi(\sigma)$  mit zunehmender Nutentiefe ab (Induktivitätsverminderung).

Führt man die Gleichungen (5) und (6) für  $\varphi(\sigma)$  und  $\psi(\sigma)$  in die Gleichungen (1) und (2) für die Drehfeldleistung  $N_d$  und den Läuferstrom  $J_2'$ , die in den Gleichungen für die Anlauf- und Bremswärme bzw. die Anlauf- und Bremszeit auftreten, ein, so stößt die Lösung der für die Wärme und die Zeit gewonnenen Gleichungen auf mathematische Schwierigkeiten; dort, wo die Lösung möglich ist, wird sie kompliziert und unübersichtlich. Es sollen daher für die Funktionen  $\varphi(\sigma)$  und  $\psi(\sigma)$  Näherungsgleichungen eingeführt werden und zwar sollen die Kurven der Abb. 2 und 3 durch gebrochene

<sup>1)</sup> Siehe A. B. Field: Am. Proceed. 1905; F. Emde: El. u. Maschinenb. 1908, 1909; W. Rogowski: Arch. Elektrot. Bd. 2; R. Rüdtenberg: ETZ 1918.



Linien ersetzt werden. Wie in dem oben erwähnten Aufsatz über „Kurzschlußläufermotoren mit veränderlichem Läufer-Scheinwiderstand“ gezeigt ist, führt diese Näherungsrechnung zu Resultaten, die mit der Praxis sehr gut übereinstimmen.

In den Abb. 2 und 3 sind  $\varphi(\sigma)$  und  $\psi(\sigma)$  in Abhängigkeit von  $\xi^2$  aufgetragen. Man könnte  $\varphi(\sigma)$  und  $\psi(\sigma)$  in Abhängigkeit von  $\xi$  auftragen und diese Kurven durch gebrochene Linien ersetzen. Die Gleichungen für die Wärme und die Zeit werden jedoch einfacher, wenn man  $\xi^2$  und nicht  $\xi$  einführt.

Nach Gleichung (7) ist:

$$\xi^2 = 4 \pi^2 t_k^2 \frac{b_k}{b_n} \frac{f_1}{\varrho} \cdot \sigma = F \cdot \sigma,$$

$$F = 4 \pi^2 t_k^2 \frac{b_k}{b_n} \frac{f_1}{\varrho} . \tag{8}$$

Für  $f_1 = 50$  Per./sec. und Kupfer als Leitermaterial ist  $F$  angenähert gleich dem Quadrat der Leiterhöhe.

Mit Rücksicht auf das Optimum für die Widerstandsvermehrung wird man beim Wirbelstromläufer mit nicht unterteiltem Leiter die Leiterhöhe nicht über etwa 3,5 cm

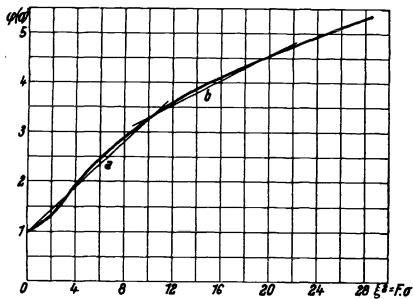


Abb. 2. Widerstandsvermehrung in Abhängigkeit vom Schlupf.

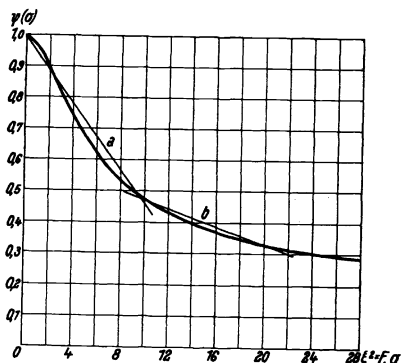


Abb. 3. Induktivitätsverminderung in Abhängigkeit vom Schlupf.

machen<sup>1)</sup>. Dem entspricht  $F = 10$  bis 11. Für den Anlauf ist der größte Wert von  $\sigma$  gleich 1, für das Bremsen gleich 2, so daß beim nicht unterteilten Leiter der Maximalwert von  $\xi^2$  für den Anlauf gleich 10 bis 11, für das Bremsen gleich 20 bis 22 ist. Die gebrochenen Linien, die in dem Gebiet zwischen  $\xi^2 = 0$  und  $\xi^2 = 22$  die Kurven für  $\varphi(\sigma)$  und  $\psi(\sigma)$  ersetzen sollen, sind in den Abb. 2 und 3 angedeutet. Die mit  $a$  bezeichneten Geraden gelten für das Gebiet zwischen  $\xi^2 = 0$  und  $\xi^2 = 11$ , also für den Anlauf bei allen Leiterhöhen bis zu 3,5 cm und für das Bremsen bei Leiterhöhen bis zu 2,5 cm; die mit  $b$  bezeichneten Geraden gelten für das Gebiet  $\xi^2 = 8$  bis  $\xi^2 = 22$  und sind somit für das Bremsen bei Leiterhöhen über 2,5 bis 3,5 cm zu verwenden.

Die Näherungsrechnung gibt uns die Möglichkeit zu setzen:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\sigma) &= \alpha \cdot \sigma + \beta, \\ \psi(\sigma) &= \gamma \cdot \sigma + \delta. \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

<sup>1)</sup> Siehe R. Rüdberg, l. c. — M. Liwitschitz: Asynchronmotoren mit Kurzschlußläufer für hohes Anlaufmoment und niedrigen Anlaufstrom. Siemens-Z. 1925, Heft 2/3.

Die Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  bzw.  $\gamma$  und  $\delta$  sind für jede der beiden Geraden, die die Kurven der Abb. 2 und 3 ersetzen, verschieden.  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\delta$  sind positiv,  $\gamma$  ist negativ.

Für den Anlauf bei Leiterhöhen bis 3,5 cm und für das Bremsen bei Leiterhöhen bis zu 2,5 cm entnimmt man den Abb. 2 und 3 (Geraden  $a$ ):

$$\begin{aligned}\alpha &= 0,22 F, & \beta &= 1,0, \\ \gamma &= -0,055 F, & \delta &= 1,0,\end{aligned}$$

und für das Bremsen bei Leiterhöhen über 2,5 bis 3,5 cm entnimmt man diesen Bildern (Geraden  $b$ ):

$$\begin{aligned}\alpha &= 0,122 F, & \beta &= 2,1, \\ \gamma &= -0,013 F, & \delta &= 0,6.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Gleichung (9) erhält man aus der Gleichung (3)

$$R_2 = a + b \cdot \varphi(\sigma) = (a + \beta b) + \alpha b \cdot \sigma = c + d \cdot \sigma, \quad (10)$$

wo

$$\left. \begin{aligned}c &= a + \beta b, \\ d &= \alpha b,\end{aligned} \right\} \quad (11)$$

und aus der Gleichung (4)

$$x_2' = l + m \cdot \psi(\sigma) = (l + \delta m) + \gamma m \cdot \sigma = p + q \cdot \sigma, \quad (12)$$

wo

$$\left. \begin{aligned}p &= l + \delta m, \\ q &= \gamma m.\end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$1 + \tau_1 = k, \quad (14)$$

so erhält man durch Einsetzen der Gleichungen (10) und (12) in die Gleichung (1) für die Drehfeldleistung des Motors mit Wirbelstromläufer

$$N_d = \frac{m_1 P_1^2 \frac{c + d \cdot \sigma}{\sigma}}{\left[ R_1 + k \frac{c + d \cdot \sigma}{\sigma} \right]^2 + [x_1 + k(p + q \cdot \sigma)]^2} \text{ Watt} \quad (15)$$

und durch Einsetzen der Gleichungen (10) und (12) in die Gleichung (2) für den Läuferstrom

$$J_2' = \frac{P_1}{\sqrt{\left[ R_1 + k \frac{c + d \cdot \sigma}{\sigma} \right]^2 + [x_1 + k(p + q \cdot \sigma)]^2}} \text{ Amp.} \quad (16)$$

## B. Die Anlauf- und Bremswärme bei Überwindung von Massenträgheit.

1. Die Anlauf- und Bremswärme der Läuferwicklung. Der Anlauf- wie Bremsvorgang des Motors mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer sind von Rüdénberg<sup>1)</sup> unter Benutzung der von Kloss<sup>2)</sup> für den Asynchronmotor auf Grund des Heylanddiagramms aufgestellten einfachen Beziehungen eingehend untersucht worden. Wir werden im weiteren die für den Motor mit Wirbelstromläufer gewonnenen Resultate mit den für den Motor mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer gültigen Beziehungen vergleichen.

<sup>1)</sup> Der Anlaufvorgang bei Asynchronmotoren mit Kurzschlußanker. El. u. Maschinenb. 1919, Heft 44 und 45.

<sup>2)</sup> Arch. Elektrot. Bd. V, Heft 3.

Es soll zunächst gezeigt werden, daß die mit Hilfe des Heylanddiagramms abgeleitete Beziehung für die Anlauf- und Bremswärme des Läufers allgemeine Gültigkeit hat. Diese Beziehung läßt sich nämlich ohne Benutzung des Kreisdiagramms mit Hilfe der Grundgleichungen der Asynchronmaschine ableiten und gilt infolgedessen unabhängig davon, ob das Stromdiagramm ein Kreis ist oder nicht.

Die Stromwärmeverluste der Läuferwicklung betragen

$$\mathfrak{A}_2 = \int_{t_a}^{t_e} m_1 J_2'^2 R_2' dt \text{ Wattsek.} \quad (17)$$

$t_a$  entspricht dem Anfangszustand,  $t_e$  dem Endzustand. Sowohl  $J_2'$  wie  $R_2'$  sind Funktionen des Schlupfes  $\sigma$ .  $m_1 J_2'^2 R_2'$  ist die elektrische Leistung des Läufers; diese steht mit der Drehfeldleistung in der Beziehung

$$m_1 J_2'^2 R_2' = \sigma N_d. \quad (18)$$

Das Drehmoment des Motors  $M$  (in mkg) steht mit der Drehfeldleistung in der Beziehung

$$M \frac{2\pi n_s}{60} 9,81 = N_d. \quad (19)$$

Da es sich nur um Beschleunigung bzw. Verzögerung von Massen handelt, muß andererseits das Drehmoment des Motors gleich sein

$$M = \frac{GD^2}{4g} \frac{2\pi}{60} \frac{dn}{dt}, \quad (20)$$

wo  $GD^2$  das Schwungmoment der zu beschleunigenden bzw. zu verzögernden Massen in  $\text{kgm}^2$  und  $g$  die Erdbeschleunigung bedeuten. Weiter gilt, da

$$\frac{n_s - n}{n_s} = \sigma$$

ist,

$$dn = -n_s d\sigma. \quad (21)$$

Setzt man die Gleichungen (18), (19), (20) und (21) in die Gleichung (17) ein, so erhält man für die Läuferwärme

$$\mathfrak{A}_2 = \left(\frac{\pi}{60}\right)^2 GD^2 n_s^2 \int_{\sigma_e}^{\sigma_a} \sigma d\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{60}\right)^2 GD^2 n_s^2 (\sigma_a^2 - \sigma_e^2) \text{ Wattsek.} \quad (22)$$

Für den Anlauf ist  $\sigma_a = 1$ ,  $\sigma_e = 0$ ; für das Bremsen ist  $\sigma_a = 2$ ,  $\sigma_e = 1$ .

Während des Anlaufes ist der Zusammenhang zwischen der Läuferwärme und dem Schlupf gegeben durch die Beziehung

$$\mathfrak{A}_{2a} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{60}\right)^2 GD^2 n_s^2 (1 - \sigma^2) \quad (23)$$

und während des Bremsens durch die Beziehung

$$\mathfrak{A}_{2b} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{60}\right)^2 GD^2 n_s^2 (4 - \sigma^2). \quad (24)$$

Den Verlauf dieser beiden Größen in Abhängigkeit vom Schlupf zeigen die Abb. 4 und 5.

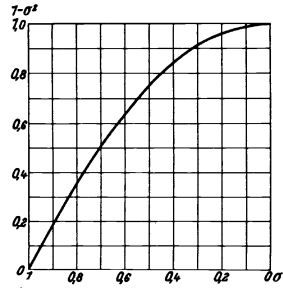


Abb. 4. Anlaufwärme der Läuferwicklung in Abhängigkeit vom Schlupf.

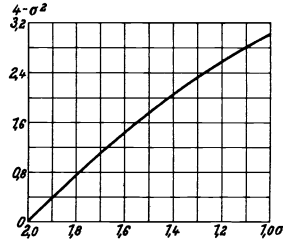


Abb. 5. Bremswärme der Läuferwicklung in Abhängigkeit vom Schlupf.

Die gesamte Anlaufwärme des Läufers beträgt

$$\mathfrak{Q}_{2ag} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{60} \right)^2 G D^2 n_s^2 \text{ Wattsek.} \quad (25)$$

und die gesamte Bremswärme

$$\mathfrak{Q}_{2bg} = \frac{3}{2} \left( \frac{\pi}{60} \right)^2 G D^2 n_s^2 = 3 \mathfrak{Q}_{2ag} \text{ Wattsek.} \quad (26)$$

Wie aus den Gleichungen (22) bis (26) hervorgeht, sind sowohl die Anlauf- wie die Bremswärme des Läufers von der Ausführung der Maschine vollkommen unabhängig. Bei Überwindung von Massenträgheit sind für die Anlauf- wie für die Bremswärme des Läufers einzig und allein das Schwungmoment der zu beschleunigenden bzw. der zu verzögernden Massen und die synchrone Drehzahl des Motors maßgebend. Die Bremswärme ist dreimal so groß wie die Anlaufwärme<sup>1)</sup>.

2. Die Anlauf- und Bremswärme der Ständerwicklung. Die Stromwärmeverluste in der Ständerwicklung betragen

$$\mathfrak{Q}_1 = \int_{t_a}^{\epsilon} m_1 J_1^2 R_1 dt \text{ Wattsek.} \quad (27)$$

Von dem Motor mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer her ist bekannt, daß der Magnetisierungsstrom auf die Anlaufwärme der Ständerwicklung nur einen ganz geringen Einfluß hat. Bei größeren Schlüpfen ist der Magnetisierungsstrom nämlich gering; er fängt erst dann an eine Rolle zu spielen, wo der Motor sich beinahe bis auf seine synchrone Drehzahl heraufgearbeitet hat und wo die gesamte Anlaufwärme bereits fast ihren vollen Wert erreicht hat (vgl. Abb. 4). Noch geringer ist der Einfluß des Magnetisierungsstromes auf die Bremswärme. Die Berücksichtigung des Magnetisierungsstromes würde hier zu komplizierten Resultaten führen; er soll daher außer acht gelassen werden.

Aus den Gleichungen (19), (20) und (21) erhält man zunächst

$$dt = - \left( \frac{\pi}{60} \right)^2 G D^2 n_s^2 \frac{d\sigma}{N_d} = -A \frac{d\sigma}{N_d}, \quad (28)$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$\left( \frac{\pi}{60} \right)^2 G D^2 n_s^2 = A. \quad (29)$$

Führt man die Gleichung (16) für  $J_2'$  und die Gleichungen (15) und (28) in die Gleichung (27) ein, so erhält man für die Stromwärme der Ständerwicklung

$$\mathfrak{Q}_1 = A R_1 \int_{\sigma_e}^{\sigma_a} \frac{\sigma d\sigma}{c + d \cdot \sigma} = A R_1 \frac{1}{d^2} [(c + d \cdot \sigma) - c \ln(c + d \cdot \sigma)]_{\sigma_e}^{\sigma_a}. \quad (30)$$

Wie oben ist für den Anlauf  $\sigma_a = 1$ ,  $\sigma_e = 0$  und für das Bremsen  $\sigma_a = 2$ ,  $\sigma_e = 1$ .

Wir führen folgende Verhältnißgrößen ein:

$$\frac{c}{d} = \frac{a + \beta b}{\alpha b} = \lambda \quad (31)$$

und

$$\frac{c}{R_2' g} = \frac{a + \beta b}{a + b} = \nu. \quad (32)$$

<sup>1)</sup> Vgl. R. Rüdberg: Asynchronmotoren mit Selbstanlauf durch tertiäre Wirbelströme. ETZ, 1918.

$\lambda$  ist also das Verhältnis des konstanten Teiles des Läuferwiderstandes [Gleichung (10)] zu dem mit dem Schlupf veränderlichen Teil des Läuferwiderstandes und bildet ein Maß für die Größe der Widerstandsvermehrung. Je größer die Widerstandsvermehrung, je tiefer die Nut ist, desto kleiner ist  $\lambda$ . Es schwankt je nach der Nutentiefe für den Anlauf etwa zwischen 0,7 und 2 (Nutentiefe = 3,5 bis 2,0 cm), für das Bremsen etwa zwischen 2 und 3,5 (Nutentiefe 3,5 bis 2,5 cm).  $\nu$  ist das Verhältnis des konstanten Teiles des Läuferwiderstandes [Gleichung (10)] zu dem Gleichstromwiderstand der Läuferwicklung  $R'_{2g} = a + b$ ; im Anlauf ist  $\beta = 1$  und somit  $\nu = 1$ . Da  $\beta \geq 1$ , so ist auch  $\nu \geq 1$ .

Mit den Gleichungen (31) und (32) erhält man aus der Gleichung (30)

$$\mathfrak{A}_1 = A \frac{R_1}{R'_{2g}} \frac{\lambda}{\nu} [\sigma - \lambda \ln(\lambda + \sigma)]_{\sigma}^{a} \text{ Wattsek.} \quad (33)$$

Wie beim Motor mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer ist die Ständerwärme nicht nur vom Ständerwiderstand, sondern auch noch vom Läuferwiderstand abhängig und zwar ist die Ständerwärme um so kleiner, je größer der Läuferwiderstand ist.

Während des Anlaufes ist der Zusammenhang zwischen der Ständerwärme und dem Schlupf gegeben durch die Beziehung

$$\mathfrak{A}_{1a} = A \frac{R_1}{R'_{2g}} \frac{\lambda}{\nu} \left[ (1 - \sigma) - \lambda \ln \frac{\lambda + 1}{\lambda + \sigma} \right] \text{ Wattsek.} \quad (34)$$

Die Größe

$$\lambda \left[ (1 - \sigma) - \lambda \ln \frac{\lambda + 1}{\lambda + \sigma} \right]$$

in Abhängigkeit von  $\sigma$  für drei verschiedene Werte von  $\lambda$  zeigt Abb. 6. Sie ist stets kleiner als 1, und zwar um so mehr, je kleiner  $\lambda$  ist, d. h. die Anlaufwärme der Ständerwicklung ist um so kleiner, je größer die Widerstandsvermehrung und somit je tiefer die Nut ist.

Beim Motor mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer ist die Anlaufwärme der Ständerwicklung in Abhängigkeit vom Schlupf gleich

$$\mathfrak{A}_{1a} = \mathfrak{A}_{2ag} \frac{R_1}{R'_{2g}} (1 - \sigma^2) = \frac{A}{2} \frac{R_1}{R'_{2g}} (1 - \sigma^2). \quad (35)$$

Das Verhältnis der Ständeranlaufwärme des Motors mit Wirbelstromläufer zu der des Motors mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer ist demnach (gleiche Gleichstromwiderstände bei beiden Läufers vorausgesetzt):

$$k_1 = \frac{2}{\nu} \frac{\lambda \left[ (1 - \sigma) - \lambda \ln \frac{\lambda + 1}{\lambda + \sigma} \right]}{1 - \sigma^2}. \quad (36)$$

Diese Größe in Abhängigkeit von  $\sigma$  für dieselben drei Werte von  $\lambda$  wie in Abb. 6, zeigt Abb. 7. Dem Schlupf  $\sigma = 0$  entspricht die gesamte Anlaufwärme. Bei  $\lambda = 0,7$  (Nutentiefe gleich ca. 3,5 cm) beträgt somit beim Motor mit Wirbelstromläufer die (gesamte) Anlaufwärme der Ständerwicklung nur 53% von der Ständeranlaufwärme des Motors mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer und bei  $\lambda = 2$  (Nutentiefe gleich ca. 2 cm)

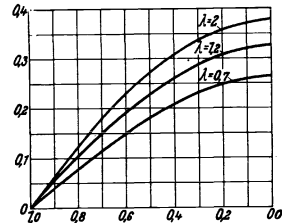


Abb. 6. Anlaufwärme der Ständerwicklung in Abhängigkeit vom Schlupf bei verschiedenen Nutentiefen.

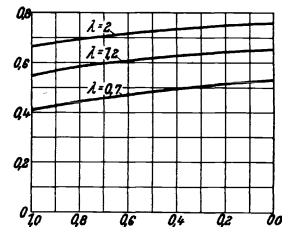


Abb. 7. Verhältnis der Ständeranlaufwärme des Motors mit Wirbelstromläufer zu der des Motors mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer in Abhängigkeit vom Schlupf bei verschiedenen Nutentiefen.

beträgt die Ständeranlaufwärme des Motors mit Wirbelstromläufer 76% von der Ständeranlaufwärme des Motors mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer.

Das Verhältnis der gesamten Anlaufwärme der Ständerwicklung zu der gesamten Anlaufwärme der Läuferwicklung ergibt sich aus der Gleichung (34), wenn man dort  $A = 2\mathfrak{A}_{2ag}$  und  $\sigma = 0$  setzt, zu

$$\frac{\mathfrak{A}_{1ag}}{\mathfrak{A}_{2ag}} = \frac{R_1}{R'_{2g}} \frac{1}{\nu} 2\lambda \left[ 1 - \lambda \ln \frac{\lambda + 1}{\lambda} \right]. \quad (37)$$

Die Größe

$$2\lambda \left[ 1 - \lambda \ln \frac{\lambda + 1}{\lambda} \right]$$

in Abhängigkeit von  $\lambda$  zeigt Abb. 8. Vernachlässigt man den Magnetisierungsstrom, so ist beim Motor mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer das Verhältnis der Anlaufwärme der Ständerwicklung zu der Anlaufwärme der Läuferwicklung gleich  $\frac{R_1}{R'_{2g}}$ . Beim Motor mit Wirbelstromläufer ist dieses Verhältnis infolge der

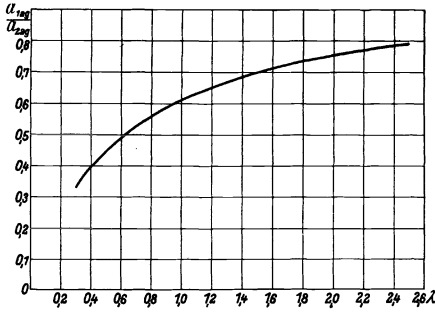


Abb. 8. Verhältnis der gesamten Anlaufwärme der Ständerwicklung zu der gesamten Anlaufwärme der Läuferwicklung in Abhängigkeit von der Nutentiefe ( $\lambda$ ).

Widerstandsvermehrung stets kleiner als  $\frac{R_1}{R'_{2g}}$ , und zwar um so kleiner, je kleiner  $\lambda$  bzw. je größer die Nutentiefe ist.

Wir setzen

$$\lambda = \frac{a + \beta b}{\alpha b}.$$

Für den Motor mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer ist  $\nu = 1$ ,  $\beta = 1$  und  $\alpha = 0$ , d. h.  $\lambda = \infty$ . Bildet man

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{2\lambda}{\nu} \left[ 1 - \lambda \ln \frac{\lambda + 1}{\lambda} \right],$$

so erhält man den Wert 1 und die Gleichung (37) geht über in die für den Motor mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer bekannte ebenerwähnte Beziehung

$$\frac{\mathfrak{A}_{1ag}}{\mathfrak{A}_{2ag}} = \frac{R_1}{R'_{2g}}. \quad (38)$$

Für den Zusammenhang zwischen der Bremswärme der Ständerwicklung und dem Schlupf erhält man aus Gleichung (33) die Beziehung

$$\mathfrak{A}_{1b} = A \frac{R_1}{R'_{2g}} \frac{\lambda}{\nu} \left[ (2 - \sigma) - \lambda \ln \frac{\lambda + 2}{\lambda + \sigma} \right] \text{ Wattsek.} \quad (39)$$

Die Größe

$$\lambda \left[ (2 - \sigma) - \lambda \ln \frac{\lambda + 2}{\lambda + \sigma} \right]$$

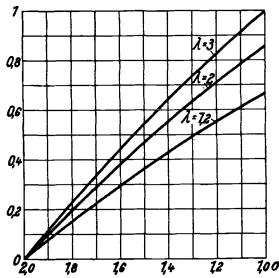


Abb. 9. Bremswärme der Ständerwicklung in Abhängigkeit vom Schlupf bei verschiedenen Nutentiefen.

in Abhängigkeit von  $\sigma$  für drei verschiedene Werte von  $\lambda$  zeigt Abb. 9. Wie die Anlaufwärme ist auch die

Bremswärme der Ständerwicklung um so kleiner, je kleiner  $\lambda$  bzw. je tiefer die Nut ist, d. h. je größer die Widerstandsvermehrung ist.

Beim Motor mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer ist die Bremswärme der Ständerwicklung in Abhängigkeit vom Schlupf gleich

$$\mathcal{Q}_{1b} = \mathcal{Q}_{2ag} \frac{R_1}{R'_{2g}} (4 - \sigma^2) = \frac{A}{2} \frac{R_1}{R'_{2g}} (4 - \sigma^2). \quad (40)$$

Das Verhältnis der Ständerbremswärme des Motors mit Wirbelstromläufer zu der des Motors mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer ist demnach (gleiche Gleichstromwiderstände bei beiden Läufern vorausgesetzt):

$$k_2 = \frac{1}{\nu} 2\lambda \frac{\left[ (2 - \sigma) - \lambda \ln \frac{\lambda + 2}{\lambda + \sigma} \right]}{4 - \sigma^2}. \quad (41)$$

Diese Größe in Abhängigkeit von  $\sigma$  für dieselben drei Werte von  $\lambda$  wie in Abb. 9 und für  $\nu = 1$  zeigt Abb. 10. Dem Schlupf  $\sigma = 1$  entspricht die gesamte Bremswärme. Für  $\nu = 1$  beträgt somit bei  $\lambda = 2,0$  (Nutentiefe gleich ca. 3,5 cm) die Bremswärme der Ständerwicklung des Motors mit Wirbelstromläufer nur 58% von der Ständerbremswärme des Motors mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer und bei  $\lambda = 3$  (Nutentiefe gleich ca. 3 cm) beträgt die Ständerbremswärme des Motors mit Wirbelstromläufer 67% von der Ständerbremswärme des Motors mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer. Beim Bremsen ist  $\nu = 1$  nur bei Nutentiefen bis 2,5 cm; bei größeren Nutentiefen ist  $\nu > 1$ . Bei einer Nutentiefe von 3,5 cm ist z. B.  $\nu = 1,7$ , so daß bei einer Nutentiefe von 3,5 cm die Ständerbremswärme des Motors mit Wirbelstromläufer nur  $\frac{58}{1,7} = 34\%$  der Ständerbremswärme des Motors mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer beträgt.

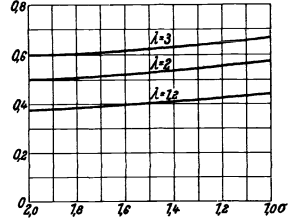


Abb. 10. Verhältnis der Ständerbremswärme des Motors mit Wirbelstromläufer zu der des Motors mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer in Abhängigkeit vom Schlupf bei verschiedenen Nutentiefen.

Das Verhältnis der gesamten Bremswärme der Ständerwicklung zu der gesamten Bremswärme der Läuferwicklung ergibt sich aus der Gleichung (39), wenn man dort  $A = \frac{2}{3} \mathcal{Q}_{2bg}$  und  $\sigma = 1$  setzt, zu

$$\frac{\mathcal{Q}_{1bg}}{\mathcal{Q}_{2bg}} = \frac{R_1}{R'_{2g}} \frac{1}{3} \frac{2\lambda}{\nu} \left[ 1 - \lambda \ln \frac{\lambda + 2}{\lambda + 1} \right]. \quad (42)$$

Die Größe

$$\frac{2\lambda}{3} \left[ 1 - \lambda \ln \frac{\lambda + 2}{\lambda + 1} \right]$$

in Abhängigkeit von  $\lambda$  zeigt Abb. 11. Beim Motor mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer ist das Verhältnis der Bremswärme der Ständerwicklung zu der Bremswärme der Läuferwicklung gleich  $\frac{R_1}{R'_{2g}}$ . Beim Motor mit Wirbelstromläufer ist dieses Verhältnis bedeutend kleiner als  $\frac{R_1}{R'_{2g}}$ , und zwar um so kleiner, je größer die Widerstandsvermehrung ist.

Bildet man

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu} \frac{2\lambda}{3} \left[ 1 - \lambda \ln \frac{\lambda + 2}{\lambda + 1} \right],$$

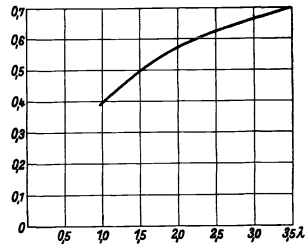


Abb. 11. Verhältnis der gesamten Bremswärme der Ständerwicklung zu der gesamten Bremswärme der Läuferwicklung in Abhängigkeit von der Nutentiefe ( $\lambda$ ).

so erhält man den Wert 1 und die Gleichung (42) geht über in die für den Motor mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer bekannte Beziehung

$$\frac{\mathfrak{M}_{1bg}}{\mathfrak{M}_{2bg}} = \frac{R_1}{R_2'g} \tag{42a}$$

Die für den Motor mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer gültigen Gleichungen (38) und (42a) stellen somit Spezialfälle der Gleichungen (37) und (42) für  $\lambda = \infty$  dar.

### C. Die Anlauf- und Bremszeit bei Überwindung von Massenträgheit.

Unter Berücksichtigung der Gleichung (28) gilt für die Anlauf- bzw. für die Bremszeit

$$t = \int_{t_a}^{t_e} dt = A \int_{\sigma_e}^{\sigma_a} \frac{d\sigma}{N_d} \tag{43}$$

Die Anlauf- bzw. die Bremszeit sind umgekehrt proportional der Drehfeldleistung, d. h. dem Drehmoment des Motors. Da der Motor mit Wirbelstromläufer zwischen  $\sigma = 2$  und nahe dem Synchronismus höhere Drehmomente entwickelt als der Motor mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer, so sind bei ihm kleinere Anlauf- wie Bremszeiten zu erwarten als beim Motor mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer. Die Drehmomentenkurve eines Motors für 11 kW und  $n_s = 1000$  Umdr./Min. bei Ausführung mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer und Wirbelstromläufer zeigt Abb. 12. Wie aus dem Vergleich der Drehmomentenflächen der beiden Läufer hervorgeht, wird sich die günstige Wirkung der Stromverdrängung namentlich beim Bremsen zeigen. Die Induktivitätsverminderung, die an sich prozentual viel kleiner ist als die prozentuale Widerstandsvermehrung, hat dabei, wie aus der Gleichung (15) für die Drehfeldleistung  $N_d$  ersichtlich, einen viel

Abb. 12. Nennleistung 11 kW,  $n_s = 1000$  Umdr./min. Drehmoment in Abhängigkeit vom Schlupf:  
 a) in Ausführung mit Wirbelstromläufer,  
 b) in Ausführung mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer.

geringeren Einfluß als die Widerstandsvermehrung.

Wir führen außer den Abkürzungen Gleichungen (31) und (32) noch die Abkürzung

$$\frac{x_1 + kp}{kq} = -\mu \tag{44}$$

ein.  $\mu$  ist ein Maß für die Größe der Induktivitätsverminderung. Je größer die Induktivitätsverminderung, je tiefer also die Nut ist, desto kleiner ist der absolute Wert von  $\mu$ . Es schwankt je nach der Nutentiefe für den Anlauf etwa zwischen 4 und 15 (Nutentiefe 3,5 bis 2,0 cm), für das Bremsen etwa zwischen 12 und 25 (Nutentiefe 3,5 bis 2,5 cm).

Führt man die Gleichung (15) und die Abkürzungen Gleichungen (31), (32) und (44) in die Gleichung (43) ein, so erhält man nach Umformung und Weglassen einiger



bedeutungsloser Glieder, die mit dem Ständerwiderstand zusammenhängen, für die Anlauf- bzw. die Bremszeit die Beziehung

$$t = \frac{A}{m_1 P_1^2} \frac{(x_1 + k p)^2}{r R_{2g}} \frac{\lambda}{\mu^2} \left[ \frac{1}{3} (\lambda + \sigma)^3 - \left( \mu + \frac{3}{2} \lambda \right) (\lambda + \sigma)^2 + (\mu + 2\lambda)^2 (\lambda + \sigma) - \lambda (\mu + \lambda)^2 \ln (\lambda + \sigma) \right] \Big|_{\sigma_e}^{\sigma_a} + \frac{A}{m_1 P_1^2} k^2 c \ln \sigma \Big|_{\sigma_e}^{\sigma_a}. \quad (45)$$

Der Zusammenhang zwischen der Anlaufzeit und dem Schlupf ist gegeben durch die Beziehung

$$t_a = \frac{A}{m_1 P_1^2} \frac{(x_1 + k p)^2}{r R_{2g}} \frac{\lambda}{\mu^2} \left\{ \frac{1}{3} [(\lambda + 1)^3 - (\lambda + \sigma)^3] - \left( \mu + \frac{3}{2} \lambda \right) [(\lambda + 1)^2 - (\lambda + \sigma)^2] + (\mu + 2\lambda)^2 (1 - \sigma) - \lambda (\mu + \lambda)^2 \ln \frac{\lambda + 1}{\lambda + \sigma} \right\} + \frac{A}{m_1 P_1^2} k^2 c \ln \frac{1}{\sigma}. \quad (46)$$

Wie beim Motor mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer wird die Anlaufzeit für  $\sigma = 0$  unendlich groß. Die Anlaufzeit ist umgekehrt proportional dem Läuferwiderstand; durch die Widerstandsvermehrung wird also die Anlaufzeit verkürzt. Der Einfluß der Widerstandsvermehrung äußert sich in dem Glied

$$\frac{\lambda}{\mu^2} \left\{ \frac{1}{3} [(\lambda + 1)^3 - (\lambda + \sigma)^3] - \left( \mu + \frac{3}{2} \lambda \right) [(\lambda + 1)^2 - (\lambda + \sigma)^2] + (\mu + 2\lambda)^2 (1 - \sigma) - \lambda (\mu + \lambda)^2 \ln \frac{\lambda + 1}{\lambda + \sigma} \right\} = \chi(\sigma). \quad (47)$$

Seine Größe in Abhängigkeit vom Schlupf  $\sigma$  für  $\mu = 7$  und drei verschiedene Werte von  $\lambda$  zeigt Abb. 13. Je kleiner  $\lambda$  ist, d. h. je größer die Nutentiefe ist, desto kleiner wird dieser Ausdruck und desto kleiner wird die Anlaufzeit.

Um einen direkten Vergleich mit dem gewöhnlichen Kurzschlußläufer zu erhalten, formen wir die Gleichung (46) um.

Für den Anlauf ist  $\beta = 1$  und somit  $r = 1$ . Da weiter für den Anlauf auch  $\delta = 1$  ist, so ist für den Anlauf  $p = l + m = x'_{2g}$ , d. h. gleich der Läuferstreuung, die vorhanden wäre, wenn die Induktivitätsverminderung gleich Null wäre oder wenn durch die Läuferwicklung Gleichstrom flösse. Vernachlässigt man den Magnetisierungsstrom, was wir bei dieser Umformung machen wollen, so wird  $k = 1 + \tau_1 = 1$ .

Bezeichnen:

$J'_{2ki}$  den ideellen Kurzschlußstrom des Läufers, auf den Ständer reduziert,

$\sigma_k$  den Kippschlupf,

$N_{dk}$  die synchrone Kippleistung,

die der Motor hätte, wenn in seinem Läufer keine Stromverdrängung aufgetreten wäre, und

$E'_2$  die Läufer-EMK im Stillstand bei offener Läuferwicklung, auf den Ständer reduziert, so ist

$$\frac{J'_{2ki} R'_{2g}}{E'_2} = \sigma_k \quad \text{und} \quad m_1 J'_{2ki} E'_2 = 2 N_{dk}.$$

Führen wir weiter nach Rüdenberg für das Verhältnis  $\frac{A}{N_{dk}}$  die Bezeichnung  $T$  (Anlaufzeitkonstante) ein, so daß

$$T = \left( \frac{\pi}{60} \right)^2 \frac{GD^2 n_s^2}{N_{dk}} \quad (48)$$

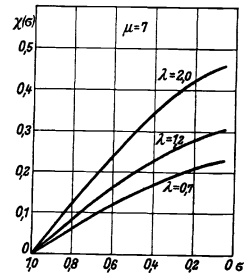


Abb. 13. Anlaufzeit. Einfluß der Widerstandsvermehrung.

ist, so erhält man für die Größe

$$\frac{A}{m_1 P_1^2} \frac{(x_1 + k p)^2}{v R'_{2g}}$$

den Wert

$$\frac{A}{m_1 P_1^2} \frac{(x_1 + k p)^2}{v R'_{2g}} = \frac{A}{m_1 P_1^2} \frac{(x_1 + x'_{2g})^2}{R'_{2g}} = \frac{A}{m_1 J_{2ki}^2 R'_{2g}} = \frac{A}{2 \sigma_k N_{Ak}} = T \frac{1}{2 \sigma_k},$$

und für die Größe

$$\frac{A}{m_1 P_1^2} k^2 c$$

den Wert

$$\frac{A}{m_1 P_1^2} k^2 c = \frac{A}{m_1 P_1^2} \frac{R'_{2g}}{T} T = \frac{R'_{2g} m_1 J_{2ki} E'_2}{2 m_1 E_2^2} T = T \frac{\sigma_k}{2},$$

so daß die Anlaufzeit wird

$$\begin{aligned} \frac{t_a}{T} = \frac{1}{2 \sigma_k} \frac{\lambda}{\mu^2} \left\{ \frac{1}{3} [(\lambda+1)^3 - (\lambda+\sigma)^3] - \left( \mu + \frac{3}{2} \lambda \right) [(\lambda+1)^2 - (\lambda+\sigma)^2] + (\mu+2\lambda)^2 (1-\sigma) \right. \\ \left. - \lambda (\mu + \lambda)^2 \ln \frac{\lambda+1}{\lambda+\sigma} \right\} + \frac{\sigma_k}{2} \ln \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{2 \sigma_k} \chi(\sigma) + \frac{\sigma_k}{2} \ln \frac{1}{\sigma}. \end{aligned} \quad (49)$$

Für den Motor mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer gilt

$$\frac{t_a}{T} = \frac{1}{2 \sigma_k} \frac{1-\sigma^2}{2} + \frac{\sigma_k}{2} \ln \frac{1}{\sigma}.$$

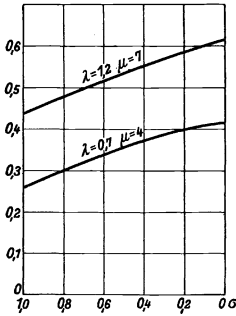


Abb. 14. Anlaufzeit. Einfluß der Nutentiefe.

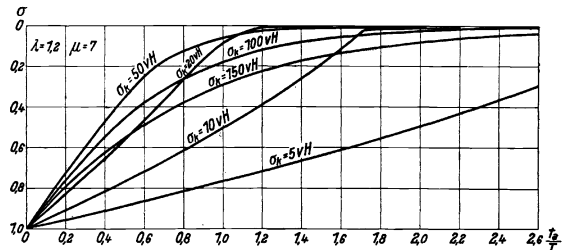


Abb. 15. Zusammenhang zwischen Anlaufzeit und Schlupf (Drehzahl) bei verschiedenen Kippschlüpfen.

Die Gleichung (49) für den Wirbelstromläufer unterscheidet sich von dieser Gleichung dadurch, daß dort an Stelle des Faktors  $\frac{1-\sigma^2}{2}$  die Größe  $\chi(\sigma)$  tritt. Das Verhältnis

$$\frac{\chi(\sigma)}{1-\sigma^2}$$

für die Werte  $\lambda = 0,7$  und  $\mu = 4$  (Nutentiefe 3,5 cm) bzw.  $\lambda = 1,2$  und  $\mu = 7$  (Nutentiefe ca. 3,0 cm) zeigt Abb. 14. Es ist bedeutend kleiner als 1 und zwar um so mehr, je größer die Nutentiefe ist. Die Anlaufzeitkonstante  $T$  ist beim Motor mit Wirbelstromläufer meistens etwas größer als beim Motor gleicher Leistung und Drehzahl mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer.

Den Zusammenhang zwischen dem Schlupf und der Zeit  $\frac{t_a}{T}$  für verschiedene Werte des Kippschlupfes  $\sigma_k$  zeigt Abb. 15, und zwar für eine Nutentiefe von ca. 3 cm

( $\lambda = 1,2, \mu = 7$ ). Wie der gewöhnliche Kurzschlußläufer setzt sich auch der Wirbelstromläufer bei kleineren Kippschlüpfen, d. h. bei kleineren Läuferwiderständen ( $R'_{2g}$ ), schleichend in Bewegung, während er bei größeren Kippschlüpfen sich schnell in Bewegung setzt. Zu jedem Schlupf bzw. jeder Drehzahl, die erreicht werden soll, gibt es einen bestimmten Kippschlupf, den günstigsten Kippschlupf, bei dem diese Drehzahl am schnellsten erreicht wird.

In Abb. 16 ist die Anlaufzeit  $\frac{t_a}{T}$  in Abhängigkeit vom Kippschlupf  $\sigma_k$  für vier verschiedene Endschlüpfe  $\sigma = 2\%, 5\%, 10\%$  und  $20\%$  aufgetragen. Wie in Abb. 15 ist  $\lambda = 1,2$

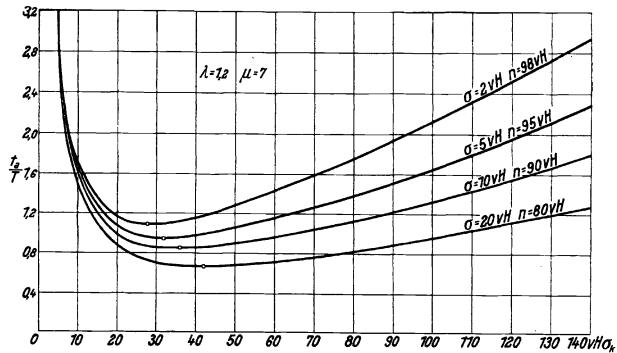


Abb. 16. Zusammenhang zwischen Anlaufzeit und Kippschlupf bei verschiedenen Enddrehzahlen (Endschlüpfen).

und  $\mu = 7$  (Nutentiefe gleich ca. 3 cm) angenommen. Soll der Motor, vorausgesetzt, daß sein Nennschlupf dies zuläßt, so schnell wie möglich auf 95% seiner synchronen Drehzahl hochlaufen, so muß man ihm einen Kippschlupf von 32% geben; bei 90% der Drehzahl müßte sein Kippschlupf 36% betragen. Diese günstigsten Kippschlüpfen sind hier kleiner als beim Motor mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer.

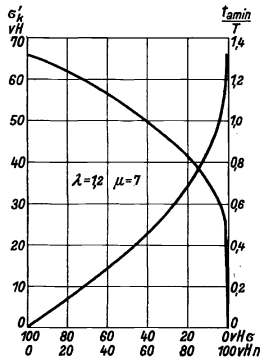


Abb. 17. Günstigster Kippschlupf und kleinste Anlaufzeit in Abhängigkeit von der Enddrehzahl.

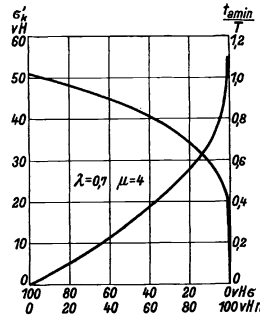


Abb. 18. Günstigster Kippschlupf und kleinste Anlaufzeit in Abhängigkeit von der Enddrehzahl.

Den zur Erreichung eines bestimmten Endschlupfes  $\sigma$  zugehörigen günstigsten Kippschlupf  $\sigma'_k$  erhält man, indem man Gleichung (49) nach  $\sigma_k$  differenziert. Es ergibt sich

$$\sigma'_k = \sqrt{\frac{\chi(\sigma)}{\ln \frac{1}{\sigma}}} \quad (50)$$

Setzt man diese Beziehung in die Gleichung (49) ein, so erhält man für die geringste Anlaufzeit den Wert

$$t_{a \min} = T \sqrt{\chi(\sigma) \ln \frac{1}{\sigma}}. \quad (51)$$

In den Abb. 17 und 18 sind sowohl  $\sigma'_k$  wie  $\frac{t_{a \min}}{T}$  in Abhängigkeit vom Endschlupf  $\sigma$  für die Werte  $\lambda = 1,2$  und  $\mu = 7$  (Nutentiefe ca. 3 cm) bzw. die Werte  $\lambda = 0,7$  und  $\mu = 4$  (Nutentiefe ca. 3,5 cm) aufgetragen. Sowohl der günstigste Kippschlupf  $\sigma'_k$  wie die minimale Anlaufzeit  $t_{a \min}$  sind im zweiten Falle, wo die Stromverdrängung größer ist, kleiner als im ersten Falle.

Aus den Abb. 15 bis 18 geht hervor, daß bei Antrieben, bei welchen die Überwindung der Massenträgheit die Hauptrolle spielt, es nicht zweckmäßig ist, mit der Enddrehzahl über 90 bis 95% der synchronen Drehzahl zu gehen, falls größere Spielzahlen pro Stunde in Frage kommen<sup>1)</sup>.

Der Zusammenhang zwischen der Bremszeit und dem Schlupf ist gegeben durch die Beziehung

$$t_b = \frac{A}{m_1 P_1^2} \frac{(x_1 + kp)^2}{v R_{2g}^2} \frac{\lambda}{\mu^2} \left\{ \frac{1}{3} [(\lambda + 2)^3 - (\lambda + \sigma)^3] - \left( \mu + \frac{3}{2} \lambda \right) [(\lambda + 2)^2 - (\lambda + \sigma)^2] \right. \\ \left. + (\mu + 2\lambda)^2 (2 - \sigma) - \lambda (\mu + \lambda)^2 \ln \frac{\lambda + 2}{\lambda + \sigma} \right\} + \frac{A}{m_1 P_1^2} k^2 c \ln \frac{2}{\sigma}. \quad (52)$$

Den Faktor

$$\frac{\lambda}{\mu^2} \left\{ \frac{1}{3} [(\lambda + 2)^3 - (\lambda + \sigma)^3] - \left( \mu + \frac{3}{2} \lambda \right) [(\lambda + 2)^2 - (\lambda + \sigma)^2] + (\mu + 2\lambda)^2 (2 - \sigma) \right. \\ \left. - \lambda (\mu + \lambda)^2 \ln \frac{\lambda + 2}{\lambda + \sigma} \right\} = \chi'(\sigma) \quad (53)$$

in Abhängigkeit vom Schlupf  $\sigma$  für  $\mu = 15$  bei drei verschiedenen Werten von  $\lambda$  zeigt Abb. 19. Je kleiner  $\lambda$  ist, desto kleiner wird  $\chi'(\sigma)$  und desto kleiner wird die Bremszeit.

Führt man ein

$$\frac{x_1 + p}{x_1 + x'_{2g}} = \frac{x_1 + l + \delta m}{x_1 + l + m} = \varepsilon, \quad (54)$$

so erhält man ähnlich wie für die Anlaufzeit

$$\frac{t_b}{T} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{\sigma_k v} \chi'(\sigma) + v \frac{\sigma_k}{2} \ln \frac{2}{\sigma}. \quad (55)$$

Für Nutentiefen bis zu 2,5 cm ist  $\varepsilon = 1$  und  $v = 1$ . Für größere Nutentiefen ist im Mittel  $\varepsilon = 0,83$  und  $v = 1,5$  bis 1,8.

Für die gesamte Bremszeit ( $\sigma_g = 1$ ) gilt

$$\frac{t_{bg}}{T} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{\sigma_k v} \chi'(1) + v \frac{\sigma_k}{2} \ln 2. \quad (56)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich der günstigste Kippschlupf in bezug auf die Bremszeit zu

$$\sigma'_k = \frac{\varepsilon}{v} \sqrt{\frac{\chi'(1)}{\ln 2}}. \quad (57)$$

Abb. 20 zeigt die Bremszeit in Abhängigkeit vom Kippschlupf für  $\varepsilon = 0,83$  und  $v = 1,7$  und zwar bei  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 12$

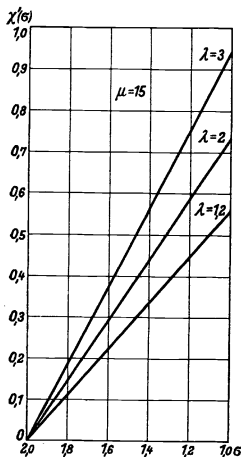


Abb. 19. Bremszeit. Einfluß der Widerstandsvermehrung.

<sup>1)</sup> Vgl. R. Rüdénberg, l. c.

(Nutentiefe ca. 3,5 cm) und bei  $\lambda = 3, \mu = 20$  (Nutentiefe ca. 3 cm). Der günstigste Kippschlupf in bezug auf die Bremszeit beträgt im ersten Falle 49%, im zweiten Falle 57%, während er bei dem Motor mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer 147% beträgt. Je tiefer die Nut, desto kleiner wird der günstigste Kippschlupf in bezug auf die Bremszeit.

Abb. 21 zeigt die Umsteuerzeit (Bremszeit + Anlaufzeit) in Abhängigkeit vom Kippschlupf für die 3,5 cm tiefe Nut (Anlauf  $\lambda = 0,7, \mu = 4$ , Bremsen  $\lambda = 2, \mu = 12$ ) bei drei verschiedenen Werten des Anlauf-Endschlupfes. Der günstigste Kippschlupf in bezug auf die Umsteuerzeit ist von dem günstigsten Kippschlupf in bezug auf die Bremszeit verschieden und zwar kleiner als dieser, weil der günstigste Kippschlupf in bezug auf die Anlaufzeit bedeutend kleiner ist, als der in bezug auf die Bremszeit. Bei der 3,5 cm tiefen Nut und einem Endschlupf  $\sigma = 5\%$  beträgt der günstigste Kipp-

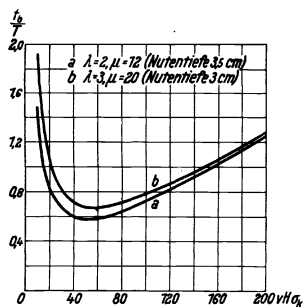


Abb. 20. Bremszeit in Abhängigkeit vom Kippschlupf.

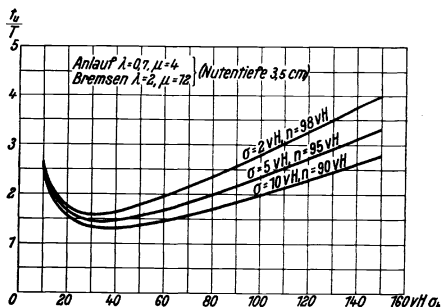


Abb. 21. Zusammenhang zwischen Umsteuerzeit und Kippschlupf bei verschiedenen Enddrehzahlen.

schlupf in bezug auf die Umsteuerzeit 35%, bei dem Motor mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer und einem Anlauf-Endschlupf von 5% beträgt dagegen der günstigste Kippschlupf in bezug auf die Umsteuerzeit 74%.

Für Nutentiefen bis 2,5 cm kann die Umsteuerzeit direkt berechnet werden nach der Beziehung (s. Gleichung 45)

$$t_u = \frac{A}{m_1 P_1^2} \frac{(x_1 + k x'_{2g})^2}{R_{2g}^2} \frac{\lambda}{\mu^2} \left\{ \frac{1}{3} [(\lambda + 2)^3 - (\lambda + \sigma)^3 + \left( \mu + \frac{3}{2} \lambda \right) [(\lambda + 2)^2 - (\lambda + \sigma)^2] + (\mu + 2\lambda)^2 [(\lambda + 2) - (\lambda + \sigma)] - \lambda (\mu + \lambda)^2 \ln \frac{\lambda + 2}{\lambda + \sigma} \right\} + \frac{A}{m_1 P_1^2} k^2 R_{2g}^2 \ln \frac{2}{\sigma}, \quad (58)$$

wo für  $\sigma$  der Endschlupf, der beim Anlaufen erreicht werden soll, einzusetzen ist.

Das Größenverhältnis der Anlauf- und Bremswärme wie der Anlauf- und Bremszeit von Motoren mit Wirbelstromläufern zu denen von Motoren mit gewöhnlichen Kurzschlußläufern ist für ein bestimmtes Beispiel im Abschnitt D angegeben.

### D. Der Anlaufvorgang bei Überwindung von Massenträgheit und anderen Gegenmomenten.

Hat der Motor im Anlauf außer der Massenträgheit noch andere Gegenmomente zu überwinden, so werden, gleiches Schwungmoment wie bei Überwindung von Massenträgheit allein vorausgesetzt, sowohl die Anlaufwärme wie die Anlaufzeit vergrößert. Wir bestimmen zunächst die Läuferwärme.

Bezeichnet man mit  $M$  wie oben das vom Motor entwickelte Moment, mit  $M_g$  das Gegenmoment und mit  $M_b = M - M_g$  das für die Überwindung der Massenträgheit zur Verfügung stehende Moment, so tritt an Stelle der Gleichung (20) die Beziehung

$$M_b = M - M_g = \frac{GD^2}{4g} \frac{2\pi}{60} \frac{dn}{dt}. \quad (59)$$

Die Gleichungen (17), (18), (19) und (21) bleiben dagegen bestehen. Multipliziert man beide Seiten der Gleichung (59) mit dem Faktor  $9,81 \frac{2\pi n_s}{60}$ , d. h. drückt man alle Drehmomente in synchronen Watt aus, so gilt unter Berücksichtigung der Gleichungen (21) und (29)

$$N_b = N_d - N_g = \left(\frac{\pi}{60}\right)^2 GD^2 n_s \frac{dn}{dt} = -A \frac{d\sigma}{dt}. \quad (60)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (17), (18) und (60) erhält man dann für die Anlaufwärme der Läuferwicklung

$$\mathfrak{A}_2 = A \int_{\sigma_c}^{\sigma_a} \frac{d\sigma}{\sigma \left(1 - \frac{N_g}{N_d}\right)} \text{ Wattsek.} \quad (61)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (27), (15), (16) und (60) erhält man in ähnlicher Weise für die Anlaufwärme der Ständerwicklung

$$\mathfrak{A}_1 = A R_1 \int_{\sigma_c}^{\sigma_a} \frac{d\sigma}{\frac{1}{\sigma} (c + d \cdot \sigma) \left(1 - \frac{N_g}{N_d}\right)} \text{ Wattsek.} \quad (62)$$

Für die Anlaufzeit ergibt sich nach Gleichung (60)

$$t = A \int_{\sigma_c}^{\sigma_a} \frac{d\sigma}{N_d - N_g}. \quad (63)$$

Zur Lösung der Gleichungen (61), (62) und (63) wird man in ähnlicher Weise wie bei dem gewöhnlichen Kurzschlußläufer zu graphischen Verfahren greifen müssen. Man berechnet die Funktionen von  $\sigma$

$$\frac{1}{\sigma \left(1 - \frac{N_g}{N_d}\right)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\frac{1}{\sigma} (c + d \cdot \sigma) \left(1 - \frac{N_g}{N_d}\right)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{N_d - N_g}$$

für die verschiedenen Werte von  $\sigma$  und findet das betreffende Integral durch Planimetrierung.

### E. Berechnungsbeispiel.

Für den 11 kW-Motor ( $n_s = 1000$  Umdr./Min.), dessen Drehmomentenkurven in Ausführung mit Wirbelstromläufer bzw. gewöhnlichem Kurzschlußläufer Abb. 12 zeigt, gilt in Ausführung mit Wirbelstromläufer:

$$\begin{array}{ll} P_1 = 289 \text{ Volt} & a = 0,191 \text{ Ohm} \\ m_1 = 3 & b = 0,32 \text{ Ohm} \\ R_1 = 0,42 \text{ Ohm} & R'_{2g} = a + b = 0,511 \\ x_1 = 2,08 \text{ Ohm} & l = 0,73 \text{ Ohm} \\ \tau_1 = 0,074 & m = 2,3 \text{ Ohm} \\ k = 1 + \tau_1 = 1,074 & F = 10,55 \text{ (Nutentiefe} = 3,5 \text{ cm).} \\ GD^2 = 2 \text{ kgm}^2 & \end{array}$$

Für den Anlauf wird somit:

$$\begin{aligned} c &= 0,511 & p &= 3,03 \\ d &= 0,743 & q &= -1,35 \\ \lambda &= \frac{c}{d} = 0,686 & \mu &= -\frac{x_1 + kp}{kq} = 3,67 \\ \nu &= \frac{c}{a+b} = 1 \end{aligned}$$

und für das Bremsen:

$$\begin{aligned} c &= 0,863 & p &= 2,11 \\ d &= 0,412 & q &= -0,316 \\ \lambda &= 2,09 & \mu &= 12,65 \\ \nu &= 1,69 \end{aligned}$$

In Ausführung mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer ist:

$$\begin{aligned} T &= 0,203 \text{ sek.} & J_{1ki} &= 80 \text{ Amp.} \\ \sigma_k &= 0,148 \end{aligned}$$

a) Überwindung von Massenträgheit allein. Die gesamte Anlaufwärme der Läuferwicklung ergibt sich nach Gleichung (25) zu

$$\mathcal{Q}_{2ag} = 2740 \text{ Wattsek.}$$

und die gesamte Bremswärme der Läuferwicklung nach Gleichung (26) zu

$$\mathcal{Q}_{2bg} = 8220 \text{ Wattsek.}$$

Da die Läuferwärme bei Überwindung von Massenträgheit allein unabhängig von der Ausführung der Maschine ist, so gelten dieselben Werte auch für den Läufer in gewöhnlicher Ausführung.

Die gesamte Anlaufwärme der Ständerwicklung ergibt sich nach Gleichung (34) für  $\sigma = 0$  zu

$$\mathcal{Q}_{1ag} = 1200 \text{ Wattsek.}$$

und die gesamte Bremswärme der Ständerwicklung nach Gleichung (39) für  $\sigma = 1$  zu

$$\mathcal{Q}_{1bg} = 2300 \text{ Wattsek.}$$

Für den Motor mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer ergibt sich nach Gleichungen (38) und (46) des obenerwähnten Aufsatzes von Rüdtenberg:

$$\mathcal{Q}_{1ag} = 2700 \text{ Wattsek. ,}$$

$$\mathcal{Q}_{1bg} = 8100 \text{ Wattsek. ,}$$

also beim Anlauf eine 2,2 mal größere, beim Bremsen eine 3,5 mal größere Wärme als beim Motor mit Wirbelstromläufer.

Für die Anlaufzeit bis auf  $\sigma = 5\%$  erhält man nach Gleichung (46)

$$t_a = 0,29 \text{ sek.}$$

und für die Bremszeit nach Gleichung (52)

$$t_b = 0,35 \text{ sek.}$$

Für die Ausführung mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer erhält man nach Gleichungen (14) und (50) des obenerwähnten Aufsatzes

$$t_a = 0,38 \text{ sek. ,}$$

$$t_b = 1,05 \text{ sek. ,}$$

d. h. eine 1,3 mal größere Anlaufzeit und eine 3 mal größere Bremszeit als beim Motor mit Wirbelstromläufer.

b) Überwindung von Massenträgheit und anderen Gegenmomenten. Noch größer ist der Unterschied in der Anlaufwärme bzw. in der Anlaufzeit zwischen dem Motor mit Wirbelstromläufer und dem mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer, wenn während des Anlaufes außer Massenträgheit noch ein anderes Gegenmoment zu überwinden ist. Nimmt man z. B. ein konstantes Gegenmoment, das dem 0,6 fachen Nennmoment des Motors gleich ist, an, so erhält man mit Hilfe der Abb. 12 und der Gleichungen (61), (62) und (63) für den Motor mit Wirbelstromläufer:

$$\begin{aligned} t_a &= 0,51 \text{ sek. ,} \\ \mathcal{A}_{1ag} &= 2000 \text{ Wattsek. ,} \\ \mathcal{A}_{2ag} &= 4600 \text{ Wattsek.} \end{aligned}$$

und für den Motor mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer:

$$\begin{aligned} t_a &= 1,1 \text{ sek. ,} \\ \mathcal{A}_{1ag} &= 6800 \text{ Wattsek. ,} \\ \mathcal{A}_{2ag} &= 8300 \text{ Wattsek.} \end{aligned}$$

In der nebenstehenden Tabelle sind die unter a) und b) gewonnenen Resultate zusammengestellt:

Anlauf.				
Ausführungsart des Läufers	Anlaufwärme der Ständerwicklung Wattsek.	Anlaufwärme der Läuferwicklung Wattsek.	Anlaufzeit Sek.	Art der Belastung
Wirbelstromläufer . . . . .	1200	2740	0,29	} Nur Massenträgheit
Gewöhnlicher Kurzschlußläufer . . . . .	2700	2740	0,38	
Wirbelstromläufer . . . . .	2000	4600	0,51	} Massenträgheit u. konstantes Gegenmoment
Gewöhnlicher Kurzschlußläufer . . . . .	6800	8300	1,1	

Bremsen.				
Ausführungsart des Läufers	Bremswärme der Ständerwicklung Wattsek.	Bremswärme der Läuferwicklung Wattsek.	Bremszeit Sek.	Art der Belastung
Wirbelstromläufer . . . . .	2300	8220	0,35	} Massenträgheit
Gewöhnlicher Kurzschlußläufer . . . . .	8100	8220	1,05	

### Zusammenfassung.

Mit Hilfe der für Kurzschlußläufermotoren mit veränderlichem Läufer-Scheinwiderstand aufgestellten Gleichungen für die Drehfeldleistung und den Läuferstrom sind der Anlauf- und Bremsvorgang (Läuferwärme, Ständerwärme sowie Anlauf und Bremszeit) des Asynchronmotors mit Wirbelstromläufer analytisch untersucht worden. Im Vergleich zu dem Asynchronmotor mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer ergibt sich, daß für Antriebe, bei welchen der Anlauf- bzw. Bremsvorgang eine Rolle spielt, der Motor mit Wirbelstromläufer sowohl mit Rücksicht auf die Schnelligkeit des Anlaufes und Bremsens wie mit Rücksicht auf die Erwärmung der Wicklungen dem Motor mit gewöhnlichem Kurzschlußläufer vorzuziehen ist.



# Ein Beitrag zur schnellen Lösung von Wechselstromaufgaben durch eine kombinierte rechnerisch-graphische Methode.

Von Theodor Kocpzyński.

Mit 2 Textabbildungen.

Mitteilung aus dem Dynamowerk der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H.,  
Siemensstadt.

Eingegangen am 14. November 1924.

Es ist ein weitverbreiteter Irrtum, anzunehmen, daß die Zeitvektoren der Wechselstromtechnik wirkliche Vektoren seien, wie sie häufig in der Physik betrachtet werden. Den Zeitvektoren der Wechselstromtechnik fehlt so ziemlich alles, was einen echten Vektor ausmacht. Es fehlt ihnen vor allen Dingen die Richtung im Raume, und es werden auf sie nicht die Regeln der Vektorrechnung angewendet. Wenige der einfachen Operationen, z. B. Addition, Subtraktion, können nach den Gesetzen der Vektorrechnung erfolgen, vorausgesetzt, daß die Wechselstromgrößen Spannung, Strom usw. sich sinusförmig mit der Zeit ändern.

Große Vorteile bietet die Anwendung der komplexen Zahlen, der Gauss'schen Ebene, weil dann auf die Zeitvektoren die einfachen algebraischen Operationen anwendbar sind. Es sind nur wenige Regeln, mit denen man sich vertraut machen muß, um diese Rechnungsweise auf die Aufgaben der Wechselstromtechnik anzuwenden. Aber auch der Zusammenhang des Zeitvektors mit der komplexen Zahl ist ein rein äußerlicher; es ist einfach die Zerlegung des Zeitvektors in 2 zueinander senkrecht stehenden Komponenten, von denen die eine mit dem Zeichen  $j = \sqrt{-1}$  behaftet wird und in der Tat lassen sich auf diese Darstellung der Zeitvektoren alle Operationen anwenden, die für die Rechnung mit komplexen Zahlen gelten. Da aber viele sich an der Erlernung der wenigen Regeln dennoch stoßen werden, sei im nachstehenden gezeigt, wie man verhältnismäßig komplizierte Aufgaben lösen kann ohne Anwendung der komplexen Zahlen<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> In diesem Zusammenhang möchte ich auch auf die nachstehenden Arbeiten von Fr. Natalis hinweisen, in denen er die Verwendung der komplexen Zahlen grundsätzlich meidet und doch auf elegante Weise Lösungen findet:

- a) Vektorverhältnisse und Vektorprodukte. Wissenschaftl. Veröffentl. a. d. Siemens-Konzern Bd. II, S. 275.
- b) Berechnung von Gleich- und Wechselstromsystemen. 1. Aufl. Berlin: Jul. Springer 1920.
- c) Dasselbe. 2. Aufl. S. 146. Berlin: Jul. Springer 1924.

Meine Meinung ist jedoch die, daß man sich nicht nur auf ein Verfahren beschränken sollte, sondern man wählt das passendste Werkzeug je nach der Aufgabe.

Als schönes Beispiel für die Anwendung der Rechnung mit komplexen Zahlen möchte ich anführen das von O. Bloch: Zur Theorie des Heylandschen Dreiphasen-Repulsionsmotors (Arch. Elektrot. Heft 12,

Das vorliegende Verfahren beruht darauf, daß alle EMKK und Ströme der Schaltung in den allermeisten Fällen proportional der aufgedrückten Klemmenspannung sind, d. h. daß das Diagramm bei Änderung der Klemmenspannung immer konform (winkeltreu) bleibt, und das ist der Fall, wenn die Frequenz des Wechselstromes für alle Zweige immer dieselbe bleibt. Diese letzte Bedingung soll immer vorausgesetzt werden.

Um sich die Aufgabe zu erleichtern, wird zunächst auf bekannte Weise das Raumdiagramm der Schaltung aufgezeichnet, darin der Windungssinn der Wicklungen durch Pfeile gekennzeichnet. Die Pfeile geben zugleich an, in welchem Sinne die elektrischen Größen (Strom, Spannung, Felder usw.) positiv zu zählen sind. Unter Berücksichtigung der Kirchhoffschen Gesetze und der über Magnetismus und Induktion gibt das Diagramm ein System von Gleichungen ersten Grades zwischen den elektrischen Größen. Diese Gleichungen lassen sich am besten mit Hilfe von Determinanten lösen und das Resultat gibt dann an, in welcher Weise die einzelnen Zeitvektoren zu einem Diagramm zusammenzufügen sind. Die Rechnung kann ganz

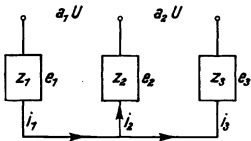


Abb. 1. Das Raumdiagramm eines Erregerkreises.

symbolisch durchgeführt werden, d. h. ohne Zerlegung in Komponenten. Und da das Diagramm für alle Klemmenspannungen stets winkeltreu bleibt, so ist zunächst der gewählte Maßstab gleichgültig, und die Konstruktion des Diagrammes kann an dem Ende begonnen werden, wo es am bequemsten ist. Wenn das Diagramm fertiggestellt ist, so ist auch der Maßstab für die Klemmenspannung leicht zu ermitteln, und daraus ergibt sich das übrige.

Nachstehend soll das Gesagte durch ein Beispiel erläutert werden<sup>1)</sup>.

In Abb. 1 sind drei Impedanzen  $z_1$ ,  $z_2$  und  $z_3$  auf die Teilspannungen  $a_1 U$  und  $a_2 U$  der Klemmenspannung  $U$  geschaltet und zwar soll  $a_1 + a_2 = 1$  sein.

Die Abb. 1 liefert uns folgende Gleichungen:

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \quad (1) \quad e_1 = -i_1 z_1 \quad (4)$$

$$a_1 U + e_1 + e_2 = 0 \quad (2) \quad e_2 = -i_2 z_2 \quad (5)$$

$$a_2 U - e_2 + e_3 = 0 \quad (3) \quad e_3 = -i_3 z_3 \quad (6)$$

Durch einfache Substitution der Gleichung (4) bis (6) in die Gleichung (1) bis (3) erhalten wir:

$$i_1 z_1 + i_2 z_2 + 0 = a_1 U \quad (7)$$

$$0 - i_2 z_2 + i_3 z_3 = a_2 U \quad (8)$$

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0 \quad (1)$$

Die Lösung der Gleichung (1), (7) und (8) gibt folgende Resultate:

$$i_1 = U \frac{\begin{vmatrix} a_1 & z_2 & 0 \\ a_2 - z_2 & z_3 & \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & 0 \\ 0 & -z_2 & z_3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \quad (9)$$

Bd. IV. 1916 und Heft 5, Bd. V) und als Bindeglied beider Verfahren die auch historisches Interesse beanspruchende Arbeit von M. Schenk: Geometrische Örter an Wechselstromdiagrammen (ETZ 1901, Heft 51), auf die ich in meinem Aufsatz „Aus der Kindheit der Ortskurven der graphischen Wechselstromtechnik in symbolischer Form“ (ETZ 1923, Heft 13) näher eingegangen bin, und vor allen Dingen die Ergänzung von F. Emde zu meinem Artikel, ebenfalls ETZ 1923, Heft 22.

<sup>1)</sup> Das Beispiel stellt einen von H. Kann angegebenen Erregerkreis für Fremderregung eines Einphasenkollektor-Motors dar.

$$i_2 = U \frac{\begin{vmatrix} z_1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & z_3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & 0 \\ 0 & -z_2 & z_3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \quad (10)$$

$$i_3 = U \frac{\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & a_1 \\ 0 & -z_2 & a_2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & 0 \\ 0 & -z_2 & z_3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \quad (11)$$

Aus den Gleichungen (9) bis (11) sieht man sofort, daß die Ströme den gemeinsamen Faktor haben:

$$A = - \frac{U}{\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & 0 \\ 0 & -z_2 & z_3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \quad (12)$$

Die Gleichungen (9) bis (11) gehen dann über in: (1)

$$i_1 = -A \begin{vmatrix} a_1 & z_2 & 0 \\ a_2 - z_2 & z_3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = A (z_2 + a_1 z_3) \quad (13)$$

$$i_2 = -A \begin{vmatrix} z_1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & z_3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = A (-a_2 z_1 + a_1 z_3) \quad (14)$$

$$i_3 = -A \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & a_1 \\ 0 & -z_2 & a_2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = A (z_2 + a_2 z_1) \quad (15)$$

Der Faktor  $A$  verdreht uns also den Vektor von  $i$  in der Zeichenebene und ändert auch seine Länge, also den Maßstab. Da uns aber der Maßstab und auch die Lage in der Ebene zunächst gleichgültig sind, so brauchen wir uns um die Größe  $A$  jetzt nicht zu kümmern und wie wir gleich sehen werden, auch später nicht. Wir dürfen also statt  $i_1$ ,  $i_2$  und  $i_3$  die Größen  $\frac{i_1}{A}$ ,  $\frac{i_2}{A}$  und  $\frac{i_3}{A}$  setzen und wie diese zu ermitteln sind, geben uns darauf die Gleichungen (13) bis (15) Aufschluß, also am besten graphisch, d. h. die Vektoren werden, wie das die Gleichungen (13) bis (15) fordern, aneinandergereiht. In Abb. 2 ist das dargestellt und zwar für folgende Werte:

$$\begin{array}{lll} a_1 = 0,4 & a_2 = 0,6 & U = 1000 \text{ Volt} \\ z_1 = 0,8 \Omega & z_2 = (0,2 + j 0,5) \Omega & z_3 = (0,125 + j 1,6) \Omega. \end{array}$$

Die Abb. 2 zeigt, daß sie sich von dem endgültigen Diagramm nur durch den Faktor  $\frac{1}{A}$  unterscheidet, d. h. daß das endgültige Diagramm sich von dem der Abb. 2 nur im Maßstab unterscheidet und um einen gewissen Winkel in der Ebene als Ganzes verdreht ist. Da uns aber die Lage in der Zeichenebene wie auch der

Maßstab gleichgültig ist, so können wir auch die Abb. 2 selbst als das endgültige Diagramm ansehen; der Maßstab für das Spannungsdiagramm ist ja durch den Wert von  $U = 1000 \text{ Volt} = 21,25 \text{ cm}$  leicht zu ermitteln und daraus folgt durch Abgreifen<sup>1)</sup>:

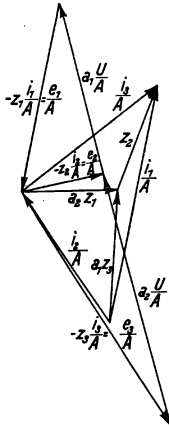


Abb. 2. Das Zeitdiagramm der elektrischen Größen eines Erregerkreises.

$$e_1 = 9,3 \text{ cm} = 438 \text{ Volt}$$

$$a_1 U = 400 \text{ Volt}$$

$$e_2 = 4,2 \text{ cm} = 198 \text{ Volt}$$

$$a_2 U = 600 \text{ Volt.}$$

$$e_3 = 13,6 \text{ cm} = 640 \text{ Volt}$$

$i_1$  ergibt sich aus  $-\frac{e_1}{z_1} = 548 \text{ Amp.} = 11,7 \text{ cm}$ , daraus durch Abgreifen:

$$i_2 = 7,7 \text{ cm} = 360 \text{ Amp.}$$

$$i_3 = 8,5 \text{ cm} = 398 \text{ Amp.}$$

Mit diesen wenigen Strichen ist also eine Aufgabe gelöst, die sonst eine umständliche und unübersichtliche Rechnung erfordern würde.

Der Vorteil des Verfahrens wird besonders kraß, wenn nach der Änderung des Diagrammes gefragt wird, die eintritt, wenn eine oder mehrere der Bedingungen sich ein wenig ändern; z. B. die Widerstände der einzelnen Zweige oder sogar die Frequenz. In diesen Fällen würde man die Ortskurven heranziehen, aber das Aufzeichnen der Ortskurven ist meistens ziemlich umständlich und bei kleineren Änderungen der Bedingungen entbehrlich, besonders wenn die kleine Änderung der Bedingungen stetige Änderung des Diagrammes hervorruft.

### Zusammenfassung.

Im vorstehenden ist ein Verfahren geschildert, das gestattet, durch Kombination von Rechnung mit Zeichnung auf schnelle und einfache Weise Aufgaben aus der Wechselstromtechnik zu lösen. Da in den meisten Aufgaben die Ströme und EMKK sich direkt mit der Klemmenspannung ändern, so kommen gemeinsame Faktoren (meistens komplexe Zahlen) vor, die man bei Anwendung der vorliegenden Methode nicht auszurechnen braucht, die aber sonst ermittelt werden müssen und die Rechnung mit unnötigem Ballast beschweren.

<sup>1)</sup> Die Abb. 2 ist aus Raumersparnis in  $\frac{1}{3}$  der ursprünglichen Größe dargestellt.

# Maxima und Minima von Vektorfunktionen.

Von Friedrich Natalis.

Mit 5 Textabbildungen.

Mitteilung aus dem Charlottenburger Werk der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H.

Eingegangen am 30. Oktober 1924.

Jede Vektorgleichung enthält zwei Aussagen.

Ist z. B.

$$e = \mathfrak{f},$$

so sind

1. die Phasenwinkel  $\varphi_e$  und  $\varphi_f$  von  $e$  bzw.  $\mathfrak{f}$  gegen die Nullzeitlinie ( $X$ -Achse) gleich

$$\varphi_e = \varphi_f,$$

2. die Beträge der beiden Vektoren gleich

$$|e| = |\mathfrak{f}|.$$

Sucht man daher die Maxima bzw. Minima (nachstehend abgekürzt Grenzwerte genannt) einer Vektorfunktion auf, so kann sich diese Untersuchung entweder auf die Phasenwinkel oder die Beträge der Vektoren erstrecken.

Ferner kann man auch einen Vektor in zwei zueinander recht- (oder schief-) winklig stehende Komponenten zerlegen:

$$e = e_x + e_y; \quad \mathfrak{f} = \mathfrak{f}_x + \mathfrak{f}_y.$$

Ist daher  $e = \mathfrak{f}$ , so ist auch:

$$e_x = \mathfrak{f}_x \text{ und } e_y = \mathfrak{f}_y.$$

Man kann daher auch untersuchen, unter welchen Umständen  $e_x$  oder  $e_y$  ein Grenzwert wird.

Es sind daher 3 Arten von Grenzwerten und die Bedingungen für ihr Auftreten zu entwickeln.

Die Vektorfunktion sei als Funktion mehrerer bekannter, unveränderlicher Vektoren  $\mathfrak{k}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}$  und eines veränderlichen reellen Parameters  $v$  dargestellt, wobei  $v$  der Reihe nach alle Werte von  $-\infty$  bis  $+\infty$  durchlaufen soll.

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{f}(\mathfrak{k}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, v) = \mathfrak{f}(v)^1 \quad (\text{abgekürzt geschrieben}). \quad (1)$$

## A. Grenzwerte der Phasenwinkel.

In Abb. 1, in der als Beispiel für die Vektorfunktion eine Ellipse dargestellt ist, tritt ein Minimum des Phasenwinkels  $\varphi_1$  für den Vektor  $\mathfrak{z}_1$ , und ein Maximum  $\varphi_2$  für den Vektor  $\mathfrak{z}_2$  auf. Die Bedingung dafür lautet:

<sup>1)</sup> Vgl. die Berechnung von Gleich- und Wechselstromsystemen von Fr. Natalis, 2. Aufl. Berlin: Julius Springer 1924.

$d\beta$  muß die gleiche Richtung besitzen wie  $\beta$ , oder, da wir  $d\beta$  durch den reellen Zahlenwert  $dv$  dividieren können, ohne dadurch die Richtung von  $d\beta$  zu verändern,

$$\beta = C \frac{d\beta}{dv}, \tag{2}$$

worin  $C$  ein reeller Zahlenwert ist, oder

$$f(\xi, l, m, v) = C f'(\xi, l, m, v); \quad f(v) = C f'(v), \tag{3}$$

In dieser Gleichung sind zwei Unbekannte  $v$  und  $C$  enthalten, zu deren Berechnung zwei Gleichungen erforderlich sind. Diese erhält man, wenn man  $\xi, l, m$  in die Komponenten  $\xi_x, l_x, m_x$  bzw.  $\xi_y, l_y, m_y$  zerlegt:

$$f(\xi_x l_x m_x, v) = C f'(\xi_x l_x m_x, v), \tag{4}$$

$$f(\xi_y l_y m_y, v) = C f'(\xi_y l_y m_y, v); \tag{5}$$

oder allgemein:

$$f_x(v) = C f'_x(v); \quad \frac{f_x(v)}{f'_x(v)} = C, \tag{6}$$

$$f_y(v) = C f'_y(v); \quad \frac{f_y(v)}{f'_y(v)} = C. \tag{7}$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann sofort  $C$  eliminiert werden:

$$\frac{f_x(v)}{f'_x(v)} = \frac{f_y(v)}{f'_y(v)}, \tag{8}$$

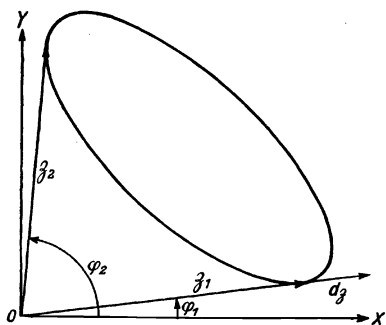


Abb. 1.

und man erhält dadurch eine Gleichung für  $v$ , aus der sich die Werte  $v_1, v_2 \dots$  ermitteln lassen, für die die Grenzwerte des Phasenwinkels auftreten. Ob es sich dabei um ein Maximum oder Minimum handelt, läßt sich entweder aus der Darstellung direkt oder durch Entwicklung der zweiten Ableitung  $f''(v)$  erkennen.

### B. Grenzwerte der Vektorbeträge.

Aus Abb. 2 ist zu erkennen, daß ein größeres Minimum des Vektorbetrages bei  $\beta_1$  und ein kleineres bei  $\beta_2$  vorhanden ist. Beschreibt man mit  $\beta_1$  bzw.  $\beta_2$  je einen Kreis um  $O$ , so treten ersichtlich zwei Maxima bei  $\beta_3$  und  $\beta_4$  an den Stellen auf, wo die Kurve dem radial zugeordneten Kreisstück parallel verläuft. In den Punkten  $P_1, P_2, P_3, P_4$  muß die Tangente senkrecht zu dem Vektor stehen. Zerlegt man sowohl  $\beta$  wie  $d\beta$  in seine Komponenten, so muß

$$\frac{\beta_y}{\beta_x} = \frac{d\beta_y}{d\beta_x} = C \tag{9}$$

oder

$$f_x(v) f'_x(v) = f_y(v) f'_y(v) \tag{10}$$

sein.

### C. Grenzwerte der Vektorkomponenten.

Diese Untersuchung ist besonders dann von Interesse, wenn es sich darum handelt, die Maxima des Wirk- oder Blindstromes oder eines Motormomentes zu bestimmen.

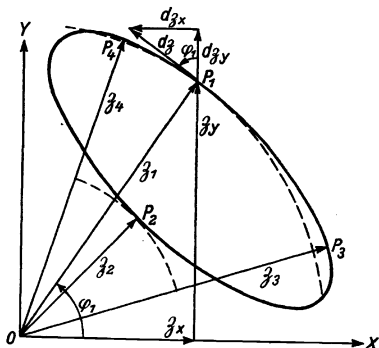


Abb. 2.

Aus Abb. 3 ist zu erkennen, daß

$$\zeta \sin \varphi \text{ ein Maximum oder Minimum wird, wenn } d\zeta = C \mathfrak{z} \quad (11)$$

ist, worin  $x$  ein Einheitsvektor in Richtung der  $X$ -Achse ist, und daß  $\zeta \cos \varphi$  ein Maximum oder Minimum wird für

$$d\zeta = C \mathfrak{y}, \quad (12)$$

Gleichung (11) wird erfüllt, wenn die  $y$ -Komponente von  $d\zeta$  und Gleichung (12), wenn die  $x$ -Komponente von  $d\zeta$  gleich Null ist, daraus ergibt sich:

$$d\zeta_y = 0 \text{ oder } \left. \begin{array}{l} f'_y(v) = 0 \end{array} \right\} \text{ für } \zeta \sin \varphi_{\min}, \quad (11 a)$$

$$f'_y(v) = 0 \left. \begin{array}{l} d\zeta_x = 0 \text{ oder } \end{array} \right\} \text{ für } \zeta \cos \varphi_{\max}, \quad (12 a)$$

$$d\zeta_x = 0 \text{ oder } \left. \begin{array}{l} f'_x(v) = 0 \end{array} \right\} \text{ für } \zeta \sin \varphi_{\min}, \quad (11 b)$$

$$f'_x(v) = 0 \left. \begin{array}{l} d\zeta_y = 0 \text{ oder } \end{array} \right\} \text{ für } \zeta \cos \varphi_{\max}, \quad (12 b)$$

Es sollen nunmehr die entwickelten Formeln auf einfache Vektorfunktionen angewendet werden, und zwar auf

- I die Gerade,
- II die Parabel,
- III die Ellipse bzw. Hyperbel.

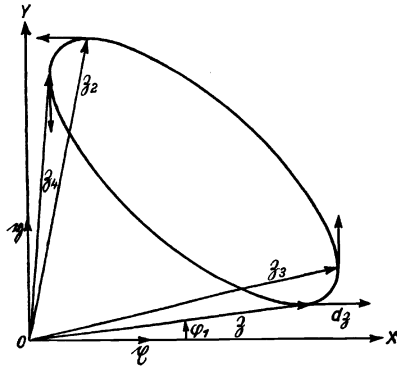


Abb. 3.

### I. Gerade.

Die Resultate lassen sich zwar ohne Berechnung erraten, die Untersuchung dient daher mehr zur Prüfung der Formeln bzw. zur systematischen Entwicklung für Kurven ersten, zweiten und drittens . . . Grades.

Die Gleichung der Geraden lautet:

$$\zeta = a + b v = f(v), \quad (13)$$

$$f'(v) = b. \quad (14)$$

#### A. Grenzwerte der Phasenwinkel.

Nach Gleichung (8), (13), (14) ist:

$$\frac{a_x + b_x v}{b_x} = \frac{a_y + b_y v}{b_y}, \quad (15)$$

$$v(b_x b_y - b_y b_x) = a_y b_x - a_x b_y, \quad (16)$$

$$v = \frac{a_y b_x - a_x b_y}{0} = \infty. \quad (17)$$

Dieser Wert ergibt aber kein eigentliches Maximum, da derselbe mit dem unendlich fernen Punkt der Geraden zusammenfällt.

#### B. Grenzwerte der Vektorbeträge.

Nach Gleichung (10), (13), (14) ist

$$(a_x + b_x v) b_x = (a_y + b_y v) b_y, \quad (18)$$

$$v = \frac{a_x b_x - a_y b_y}{b_y^2 - b_x^2}, \quad (19)$$

$$\zeta_{\min} = a + b \frac{a_x b_x - a_y b_y}{b_y^2 - b_x^2}. \quad (20)$$

Gleichung (20) ist daher die Vektorgleichung des Lotes vom Ursprung auf die Gerade.

Der Wert von  $v$  nach Gleichung (19) muß ein Skalar sein. Dieses ist zu beweisen und der Weg für die Berechnung oder Konstruktion zu ermitteln. Die Grundlagen dafür sind in der oben angegebenen Literaturstelle gegeben (S. 38 bis 47), mögen aber hier zum leichteren Verständnis nochmals entwickelt werden.

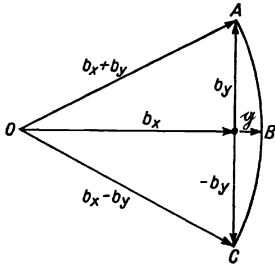


Abb. 4.

Wir können nach Abb. 4 schreiben:

$$b_x^2 - b_y^2 = (b_x + b_y)(b_x - b_y) = g^2, \quad (21)$$

$$\frac{b_x + b_y}{g} = \frac{g}{b_x - b_y}. \quad (22)$$

Diese Vektorverhältnisgleichung besagt, daß die Dreiecke  $AOB$  und  $BOC$  ähnlich sind. Da aber ferner  $OA = OC$  ist, so müssen sie kongruent und  $|g| = OB = OA = OC$  sein.

$g$  ist daher ein Vektor in der  $X$ -Achse, und sein Betrag ist

$$|g| = |b_x + b_y| = |b_x - b_y| = \sqrt{|b_x|^2 + |b_y|^2} = |b|. \quad (23)$$

Bei dem Zähler der Gleichung (19) verfahren wir in ähnlicher Weise, nachdem wir zuvor die Ausdrücke

$a_x b_x$  bzw.  $a_y b_y$  in zwei Quadrate

$$a_x b_x = \eta_x^2; \quad |\eta_x| = \sqrt{|a_x| |b_x|}; \quad (24)$$

$$a_y b_y = \eta_y^2; \quad |\eta_y| = \sqrt{|a_y| |b_y|} \quad (25)$$

verwandelt haben:

$$a_x b_x - a_y b_y = \eta_x^2 - \eta_y^2 = \eta^2. \quad (26)$$

Die Richtung der Vektoren  $g$  und  $\eta$  nach Abb. 4 fällt in die Richtung der  $X$ -Achse und wird durch die Richtung des positiven Vektorquadrates ( $\eta_x^2$ ) bestimmt. Hier- nach ergibt sich

$$v = -\frac{\eta^2}{g^2}. \quad (27)$$

Daraus ergibt sich, daß  $v$  ein Skalar ist.

### C. Grenzwerte der Komponenten.

Diese kommen bei Kurven ersten Grades nicht in Frage.

## II. Parabel.

Die Gleichung der Parabel lautet:

$$\xi = \zeta + m v + \xi v^2 = f(v), \quad (28)$$

$$f'(v) = m + 2 \xi v. \quad (29)$$

### A. Grenzwerte der Phasenwinkel.

Nach Gleichung (8), (28), (29) ist:

$$\frac{\zeta_x + m_x v + \xi_x v^2}{m_x + 2 \xi_x v} = \frac{\zeta_y + m_y v + \xi_y v^2}{m_y + 2 \xi_y v}. \quad (30)$$

Bei der Entwicklung der Kreuzprodukte heben sich die Glieder mit der höchsten Potenz ( $v^3$ ), und es ergibt sich

$$v^2 (\xi_x m_y - \xi_y m_x) + 2 v (\zeta_x \xi_y - \zeta_y \xi_x) + (\zeta_x m_y - \zeta_y m_x) = 0. \quad (31)$$

<sup>1)</sup> Da man das Ordinatensystem beliebig wählen kann, so kann man beispielsweise die  $X$ -Achse in die Richtung von  $\xi$  legen. In diesem Fall wird  $\xi_x = 0$ . Auf diese Vereinfachung wird nachstehend verzichtet, um den systematischen Aufbau der Gleichungen nicht zu beeinträchtigen.



Die Bedeutung der Klammerausdrücke geht aus Abb. 5 hervor. Setzt man

$$\mathfrak{f}_x m_y = \mathfrak{f}_1^2 \quad \text{oder} \quad \frac{\mathfrak{f}_x}{\mathfrak{f}_1} = \frac{\mathfrak{f}_1}{m_y},$$

so sind die Dreiecke  $AOB$  und  $BOC$  ähnlich;  $OB$  halbiert daher den rechten Winkel  $AOC$ . Der Vektor  $\mathfrak{f}_1$  verläuft somit unter  $45^\circ$ , und sein Betrag ist

$$|\mathfrak{f}_1| = \sqrt{|\mathfrak{f}_x| |m_y|}.$$

Ebenso kann man  $\mathfrak{f}_y m_x = \mathfrak{f}_2^2$  und

$$|\mathfrak{f}_2|^2 = |\mathfrak{f}_1|^2 - |\mathfrak{f}_2|^2 \tag{32}$$

setzen. In gleicher Weise kann man

$$l_x \mathfrak{f}_y - l_y \mathfrak{f}_x = g^2 \quad \text{und} \quad l_x m_y - l_y m_x = h^2 \tag{33}$$

setzen. Damit nimmt Gleichung (21) die Form

$$v^2 \mathfrak{f}^2 + 2 v g^2 + h^2 = 0 \tag{34}$$

an.

$$v = \frac{1}{\mathfrak{f}^2} (-g^2 \pm \sqrt{g^4 - \mathfrak{f}^2 h^2}). \tag{35}$$

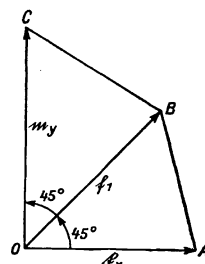


Abb. 5.

Es gibt daher für die Grenzwerte der Phasenwinkel zwei reelle oder konjugiert komplexe Werte von  $v$ .

### B. Grenzwerte der Vektorbeträge.

Nach Gleichung (10), (28), (29) ist

$$(l_x + m_x v + \mathfrak{f}_x v^2) (m_x + 2 \mathfrak{f}_x v) = (l_y + m_y v + \mathfrak{f}_y v^2) (m_y + 2 \mathfrak{f}_y v) \tag{36}$$

eine Gleichung dritten Grades in  $v$ , welche drei Werte  $v_1, v_2, v_3$  ergibt. Sind diese Wurzeln reell, so besitzt die Parabel ein Maximum und zwei Minima, wobei der Ursprung innerhalb der Parabel liegt. Liegt derselbe außerhalb der Parabel, so sind zwei Werte  $v_2, v_3$  komplex und die Parabel hat nur ein Minimum.

### C. Grenzwerte der Komponenten.

Nach Gleichung (11b) bzw. (12b) und (29) ist

$$m_x + 2 \mathfrak{f}_x v = 0 \quad \text{bzw.} \quad m_y + 2 \mathfrak{f}_y v = 0, \tag{37}$$

$$v = -\frac{m_x}{2 \mathfrak{f}_x}, \tag{38}$$

wenn  $\mathfrak{z} \cos \varphi$  ein Minimum und

$$v = -\frac{m_y}{2 \mathfrak{f}_y}, \tag{39}$$

wenn  $\mathfrak{z} \sin \varphi$  ein Minimum sein soll.

In beiden Fällen gibt es nur je einen reellen Wert von  $v$ , welcher die Bedingung erfüllt.

## III. Ellipse und Hyperbel.

Die allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes lautet:

$$\mathfrak{z} = \frac{A l + B m v + \mathfrak{f} v^2}{A + B v + v^2} = f(v), \tag{40}$$

worin  $A, B, v$  reelle Zahlen und  $l, m, \mathfrak{f}$  Vektoren sind.



**C. Grenzwerte der Komponenten.**

Nach Gleichung (12b) bzw. (11b) und (41) ist:

$$(A + Bv + v^2)(Bm_x + 2f_x v) - (A l_x + Bm_x v + f_x v^2)(B + 2v) = 0, \tag{51}$$

wenn  $\xi \cos \varphi$  ein Grenzwert sein soll.

Aus dieser Gleichung heben sich die beiden Glieder  $2f_x v^3$  und  $-2f_x v^3$ ; es wird daher

$$AB(m_x - l_x) + 2A(f_x - l_x)v + B(f_x - m_x)v^2 = 0. \tag{52}$$

Dieses ist eine skalare Gleichung zweiten Grades in  $v$ , da die in den Klammern stehenden Vektordifferenzen sämtlich gleiche Richtung haben.

In gleicher Weise erhält man

$$AB(m_y - l_y) + 2A(f_y - l_y)v + B(f_y - m_y)v^2 = 0, \tag{53}$$

wenn  $\xi \sin \varphi$  ein Grenzwert sein soll.

Gleichung (52) bzw. (53) geben daher je zwei Grenzwerte für  $\xi \cos \varphi$  bzw.  $\xi \sin \varphi$ .

**IV. Anzahl der Grenzwerte.**

Aus vorstehendem ergibt sich die Anzahl der Grenzwerte zu:

Kurve		Anzahl der Grenzwerte			
		des Phasenwinkels	der Vektorbeträge	$\xi \cos \varphi$	$\xi \sin \varphi$
ersten Grades	Gerade	0	1	—	—
zweiten Grades	Parabel	2	3	1	1
	Ellipse bzw. Hyperbel	2	4	2	2

Es interessiert nun ganz allgemein zu wissen, wie die Anzahl der Grenzwerte mit der Ordnungszahl der Kurve wächst.

Die allgemeine Vektorgleichung einer Kurve  $n$ -ten Grades lautet:

$$\xi = f(v) = \frac{Al + Bm v \dots + Mp v^{n-1} + Nq v^n}{A + Bv \dots + Mv^{n-1} + Nv^n}, \tag{54}$$

$$f(v) = \frac{1}{(A + Bv \dots + Mv^{n-1} + Nv^n)^2} [(A + Bv \dots + Mv^{n-1} + Nv^n)(Bm \dots + M_1 p v^{n-2} + N_1 q v^{n-1}) - (Al + Bm v \dots + Mp v^{n-1} + Nq v^n)(B \dots + M_1 v^{n-2} + N_1 v^{n-1})]. \tag{55}$$

**A. Grenzwerte der Phasenwinkel.**

Nach Gleichung (8) ist

$$\frac{(Al + Bm v \dots + Mp v^{n-1} + Nq v^n)_x}{(A + Bv \dots + Mv^{n-1} + Nv^n)(Bm \dots + M_1 p v^{n-2} + N_1 q v^{n-1})_x} - \frac{(Al + Bm v \dots + Mp v^{n-1} + Nq v^n)_y}{(A + Bv \dots + Mv^{n-1} + Nv^n)(B \dots + M_1 v^{n-2} + N_1 v^{n-1})} \tag{56}$$

gleich derselben Funktion mit dem Index  $y$ , wobei der Index  $x$  bzw.  $y$  bedeutet, daß die betr. Vektorkomponenten  $l_x l_y, m_x m_y, \dots$  in die Formel eingesetzt werden sollen.

Setzen wir

$$\frac{B \dots + M_1 v^{n-2} + N_1 v^{n-1}}{A + Bv \dots + Mv^{n-1} + Nv^n} = V, \tag{57}$$

so wird Gleichung (56):

$$\frac{(Al + Bm v \dots + Mp v^{n-1} + Nq v^n)_x}{(Bm \dots + M_1 p v^{n-2} + N_1 q v^{n-1})_x} - (Al + Bm v \dots + Mp v^{n-1} + Nq v^n)_x V \tag{58}$$

Bei der Bildung der Kreuzprodukte heben sich erstens die mit  $V$  behafteten Glieder und zweitens die Glieder der höchsten Potenz von  $v$ :

$$Nq_x v^n \cdot N_1 q_y v^{n-1} = NN_1 q_x q_y v^{2n-1},$$

so daß sich eine Gleichung mit der höchsten Potenz  $v^{2n-2}$  ergibt. Diese Gleichung hat  $2n - 2$  Wurzeln.

Es ergeben sich daher für eine Kurve:

$$\begin{array}{l} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \dots \text{ten Grades} \\ 0 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \dots \text{Grenzwerte des Phasenwinkels.} \end{array}$$

### B. Grenzwerte der Vektorbeträge.

Nach Gleichung (10), (54), (55) ist

$$(A + Bm v \dots + Mp v^{n-1} + Nq v^n)_x [(A + Bv \dots + Mv^{n-1} + Nv^n) (Bm \dots + M_1 p v^{n-2} + N_1 q v^{n-1})_x - (A + Bm v \dots + Mp v^{n-1} + Nq v^n)_x (B \dots + M_1 v^{n-2} + N_1 v^{n-1})] \quad (59)$$

gleich derselben Funktion mit dem Index  $y$ .

In dieser Funktion heben sich in der [ ] Klammer die höchsten Glieder  $NN_1 q_x v^{2n-1}$ , so daß nur Glieder bis zur Potenz  $v^{2n-2}$  übrigbleiben. Die höchsten Potenzen der ganzen Funktion sind daher vom Grade

$$v^n \cdot v^{2n-2} = v^{3n-2},$$

daraus ergibt sich eine Gleichung vom  $(3n - 2)$ -ten Grade mit der gleichen Anzahl Wurzeln von  $v$ .

Es ergeben sich daher für eine Kurve:

$$\begin{array}{l} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \dots \text{ten Grades} \\ 1 \quad 4 \quad 7 \quad 10 \dots \text{Grenzwerte der Vektorbeträge.} \end{array}$$

### C. Grenzwerte der Komponenten.

Nach Gleichung (11b) und (55) ist für die Grenzwerte von  $\zeta \sin \varphi$

$$(A + Bv \dots + Mv^{n-1} + Nv^n) (Bm \dots + M_1 p v^{n-2} + N_1 q v^{n-1})_y - (A + Bm v \dots + Mp v^{n-1} + Nq v^n)_y (B \dots + M_1 v^{n-2} + N_1 v^{n-1}) = 0. \quad (60)$$

Hierin heben sich wieder die Glieder höchster Ordnung  $NN_1 q_y v^{2n-1}$ , so daß sich eine Gleichung in  $v$  vom Grade  $2n - 2$  ergibt. Es besitzt daher eine Kurve:

$$\begin{array}{l} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \dots \text{ten Grades} \\ 0 \quad 2 \quad 4 \quad 6 \dots \text{Grenzwerte von } \zeta \sin \varphi. \end{array}$$

Das gleiche gilt für die Grenzwerte von  $\zeta \cos \varphi$ .

### Zusammenfassung.

In ähnlicher Weise wie für eine Funktion in orthogonalen Koordinaten lassen sich für eine Vektorfunktion Maxima und Minima herleiten. Da aber ein Vektor durch zwei Parameter, den Phasenwinkel und den Vektorbetrag, gekennzeichnet ist, so lassen sich die Grenzbeträge für beide Arten entwickeln. Außerdem kommen noch die bekannten orthogonalen Grenzwerte in Frage. Die verschiedenen Grenzwerte sind für Kurven ersten und zweiten und ihre Anzahl allgemein für Kurven  $n$ -ten Grades berechnet.

# Die Temperaturverteilung in den Nuten von Zweistabwicklungen.

Von Wilhelm Peters.

Mit 21 Textabbildungen.

Mitteilung aus der Wissenschaftlichen Abteilung der Siemens-Schuckertwerke  
G. m. b. H., Siemensstadt.

Eingegangen am 13. Dezember 1924.

## Inhaltsübersicht.

1. Aufgabestellung. S. 197. — a) Grundlagen. 2. Die physikalischen Voraussetzungen. S. 198.  $\alpha$ ) Das Temperaturfeld. S. 198.  $\beta$ ) Die thermischen Konstanten. S. 198. — 3. Analytische Formulierung der Aufgabe. S. 199. — 4. Die Methode der Lösung. S. 200. b) Durchführung. 5. Gleiche Temperaturen von Ober- und Unterstab. S. 201.  $\alpha$ ) Unendlich dünne Leiter. S. 201.  $\beta$ ) Leiter endlicher Dicke. S. 203.  $\gamma$ ) Unendlich dicke Leiter. S. 207. — 6. Ungleiche Temperaturen von Ober- und Unterstab. S. 210. — 7. Berücksichtigung der thermischen Anisotropie S. 211.  $\alpha$ ) Die Leitfähigkeiten der Längs- und Querwege. S. 211.  $\beta$ ) Zurückführung des anisotropen Falles auf den isotropen Fall. S. 211. — 8. Praktisches Beispiel. S. 213. — 9. Zusammenfassung und Ergebnisse.

## 1. Aufgabestellung.

Die Ausnutzungsfähigkeit einer elektrischen Maschine ist durch die im Isoliermaterial auftretenden höchsten Temperaturen und die Temperaturverteilung in der Nähe dieser Punkte begrenzt. Die lokale Messung dieser Temperaturen wird durch Thermolemente ermöglicht, die an die höchstemperierten Stellen eingebaut werden müssen. Aus Sicherheitsgründen muß nun aber ein der elektrischen Spannung der Maschine genügender minimaler Isolationsabstand zwischen Thermokreis und spannungführenden Leiter gefordert werden. Beide Bedingungen sind nicht gleichzeitig zu erfüllen. Als Kompromiß ist vorgeschlagen worden<sup>1)</sup>: der Meßort ist bei Doppelstabwicklung in die Mitte zwischen die Leiter einer Nut zu legen (Abb. 1). Meßfehler entstehen bei dieser Anordnung durch den endlichen Wert des Temperaturgefälles zwischen Leiter und Meßpunkt. So fanden Newbury und Fechheimer<sup>2)</sup> beispielsweise bei einer bestimmten Anordnung experimentell bis zu 30% Fehler. Die Möglichkeit derart starker Fehlermessungen macht es wünschenswert, das Temperaturgefälle Leiter-Meßpunkt für beliebige Abmessungen voraus zu bestimmen.

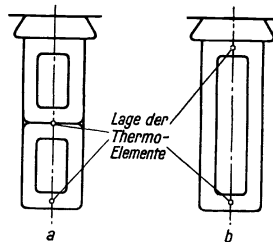


Abb. 1.

<sup>1)</sup> Z. B. Standards of the Am. Inst. Electr. Eng. 1922, Nr. 2323.

<sup>2)</sup> E. D. Newbury und C. F. Fechheimer: Electric Journal Nr. 9, 17. Bd., Sept. 1920, S. 410 bis 418. Some Practical Experience with Embedded Temperature Detectors. Dieselben: J. Am. Inst. Electr. Eng. 1920, S. 549.

## 2. Die physikalischen Voraussetzungen.

### α) Das Temperaturfeld.

Nach dem Einschalten der Belastung steigt infolge der Stromwärme die Temperatur der Wicklungen an. Die in den Leitern entwickelte Wärmeleistung fließt als Wärmestrom teils durch die Leiter selbst zu den Wickelköpfen, teils durch die Leiterumkleidung nach der Nutwand; von hier aus verteilt sie sich weiter durch das Eisen der Maschine und wird an die umgebende Luft abgeführt. Wir beschränken uns in

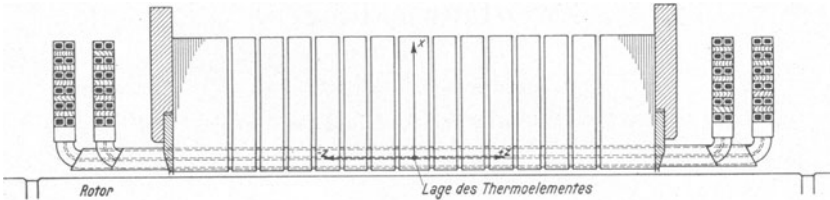


Abb. 2.

dieser Arbeit auf die Untersuchung des thermischen Gleichgewichtszustandes. Er ist dadurch gekennzeichnet, daß die Temperatur  $\vartheta$  und der Wärmestrom  $\varphi$  zeitlich konstant sind. Aus den Symmetrieeigenschaften der Maschine folgt, daß die Wärme von einer durch die Achse der Maschine gelegten Mittelebene aus nach beiden Seiten gleichmäßig abfließt (Abb. 2). In der Mittelebene selbst muß daher die Wärmeströmung rein radial verlaufen; diese Feststellung wird uns später gestatten, in bezug auf diese Ebene in guter Annäherung die Wärmeleitungsaufgabe als ebenes Problem zu behandeln.

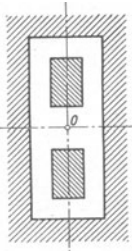


Abb. 3.

In Abb. 3 ist ein Querschnittsbild der Nut gezeichnet. Die Stäbe mögen rechteckigen Querschnitt (mit scharfen Kanten) besitzen; desgleichen wird die Nut als rechteckig vorausgesetzt. Die Leiterumkleidung soll den Raum zwischen Leiter und Nutenwand samt Verschlußkeil vollkommen ausfüllen. Abweichungen von diesen Voraussetzungen werden durch Korrekturen Berücksichtigung finden. Sind die Temperaturen der Stäbe gleich ( $\Theta_1 = \Theta_2$ ), so ist auch das Temperaturfeld in bezug auf die Mittellinien der Nut symmetrisch. In diesem Falle liegt also das Thermoelement im Sattelpunkt des Feldes.

Bei ungleicher Leitertemperatur tritt nur eine Symmetrie in bezug auf die Nutenlängsachse auf.

### β) Die thermischen Konstanten.

Die Beziehung zwischen Temperaturgefälle und Wärmestrom ist durch die Beziehung

$$\varphi = \lambda \cdot \text{grad } \vartheta \quad (1)$$

gegeben, wo  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit des Materials bedeutet. Für Kupfer, Eisen und Verschlußkeil wird  $\lambda = \infty$  gesetzt. Damit dann der Wärmestrom endlich bleibt, fordert (1) in den Leitern

$$\vartheta = \text{const.} \quad (2)$$

Die Voraussetzung  $\lambda = \infty$  ist somit, soweit wir uns auf Leiter- und Nutwand beschränken, identisch mit der Voraussetzung konstanter Temperatur auf denselben.

Eine zahlenmäßige Abschätzung erweist diese Annahme für alle praktischen Fälle zulässig. Wir brauchen somit nur die Wärmeleitfähigkeit des Isoliermaterials zu kennen.

In erster Näherung kann das Isoliermaterial als isotrop und thermisch homogen angesehen werden; die Wärmeleitfähigkeit ist dann ein im Isoliermaterial örtlich konstanter Skalar. Eine genauere Rechnung muß indessen auf die schichtartige Struktur der Leiterumwicklung eingehen, wie sie etwa in Abb. 19 dargestellt ist; sie berücksichtigt diese Anisotropie durch Einführung eines Wärmeleitungstensors, der sich im vorliegenden Falle auf 2 Komponenten: in Schichtungsrichtung und senkrecht hierzu reduziert; sie werden im folgenden als Längsleitfähigkeit  $\lambda_l$  und Querleitfähigkeit  $\lambda_q$  unterschieden.

### 3. Analytische Formulierung der Aufgabe.

Die Temperatur auf der Nutwand einerseits, auf der Leiterwand andererseits, ist nach  $2\beta$  konstant. Die Temperaturverteilung im Isoliermaterial ist durch die Gesetze der Wärmeströmung geregelt. Da im Isoliermaterial keine Wärme entwickelt wird — die Wärmeerzeugung durch dielektrische Hysterese und Isolationsströme ist bedeutungslos — muß derselbe Wärmestrom, der vom Leiter aus in das Isoliermaterial eintritt, es an der Nutwand wieder verlassen. Die Wärmeströmung ist quellenfrei:

$$\operatorname{div} \vartheta = 0.$$

Durch Einführung der Temperatur mittels Gleichung (1) finden wir hieraus:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vartheta = \nabla^2 \vartheta = 0. \quad (3)$$

Wir legen der Behandlung dieser Gleichung ein rechtwinkliges Koordinatensystem  $x, y, z$  zugrunde, dessen  $z$ -Achse in die Richtung der Leiterachse falle (Abb. 2). Hierdurch geht Gleichung (3) in die speziellere Form

$$\nabla^2 \vartheta = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = 0 \quad (3a)$$

über. Die doppelte Abhängigkeit der Temperatur sowohl von der Lage der Querschnittsebene als auch von den Ebenenkoordinaten  $x$  und  $y$  berücksichtigen wir durch den Produktansatz:

$$\vartheta = f(z) \cdot \psi(x, y).$$

Gleichung (3a) verlangt für die Funktionen  $f$  und  $\psi$

$$f(z) \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] + \psi \cdot \frac{d^2 f}{dz^2} = 0. \quad (3b)$$

Soll  $f(z)$  der nach (2a) vorliegenden Symmetrie gerecht werden, so ist diese Funktion als gerade Funktion zu wählen. Die physikalischen Bedingungen der Temperaturverteilung in der Umgebung der Mittelebene legen den Ansatz

$$f(z) = \alpha - \beta \cdot z^4 \quad (4)$$

nahe; denn ein scharfer Temperatursturz kann erst in der Umgebung der Ventilations-schlitze einsetzen.

Mit Gleichung (4) geht Gleichung (3b) in

$$(\alpha - \beta \cdot z^4) \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] - 4 \cdot 3 \cdot \beta \cdot z^2 \cdot \psi = 0$$

über. Beschränken wir uns auf die Mittelebene  $z = 0$ , so entsteht

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (3c)$$

Hiernach ist zufolge Gleichung (4) die Wärmeabströmung in die Umgebung der Mittelebene so gering, daß die Strömung merklich als eben betrachtet werden kann; dieses ist physikalisch in der Lamellierung des Eisens und dem im Verhältnis zum Wärmefluß in Längsrichtung der Isoliermaterials viel größerem radialen durch das Eisen gehenden Querfluß begründet.

Nach Gleichung (3c) ist zusammen mit den Randbedingungen die Temperaturverteilung eindeutig<sup>1)</sup> bestimmt. Im folgenden sei festgesetzt:

$\Theta_1$  = Temperatur des im positiven Teil der  $z$ -Ebene liegenden Leiters,

$\Theta_2$  = Temperatur des im negativen Teil der  $z$ -Ebene liegenden Leiters,

$O$  = Temperatur der Nutwand,

$\vartheta_p, \psi_p$  = Temperatur des Thermopunktes,

so daß also sämtliche Temperaturen auf die Nutwand bezogen sind.

#### 4. Die Methode der Lösung.

Eine Methode, die im vorhergehenden beschriebene Randwertaufgabe zu lösen, liefert die Anwendung des Prinzips der konformen Abbildung. Diese Methode verlangt für den vorliegenden Fall die Überführung des im umrandeten Teil der Abb. 4

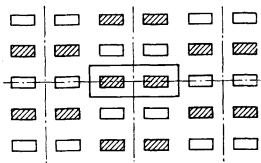


Abb. 4.

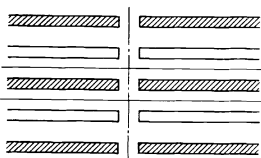


Abb. 5.

gezeichneten 3fach zusammenhängenden unbegrenzt spiegelungsfähigen Bereiches auf einen Parallelstreifen mittels einer analytischen Funktion des komplexen Argumentes  $x + iy$ ; dieser mathematische Aufwand lohnt sich indessen für unser Problem nicht, da das Feld in allen praktisch vorkommenden Fällen im Raume zwischen Nut- und Leiterwand sehr nahezu homogen ist (vgl. Abb. 10—15). Da es uns zudem hauptsächlich darauf ankommt, die Temperatur des Punktes mitten zwischen den Leitern genau zu erhalten, ist es hinreichend, das doppelperiodische Gitterfeld durch das einfachperiodische der Abb. 5 zu ersetzen, was physikalisch die Streckung der Nut bis ins Unendliche bedeutet. Hierdurch ist der Feldbereich einfach zusammenhängend geworden.

Die Abbildungsaufgabe wird gelöst durch das Theorem von Schwarz<sup>2) 3)</sup>, das allgemein die Abbildung eines Polygons auf die unendliche Halbebene liefert. Wir wenden das Verfahren an, sowohl um unser gradlinig begrenztes Flächenstück in

<sup>1)</sup> Die Eindeutigkeit der Lösung, die — wie man zeigen kann — das Maximum der Feldenergie ergibt, ist unter dem Namen des Dirichletschen Prinzips bekannt.

<sup>2)</sup> H. A. Schwarz: Gesammelte Abhandlungen. S. 64: Über einige Abbildungsaufgaben (auch Crelle Bd. 70, S. 105. 1869); S. 144: Über die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen.

<sup>3)</sup> E. B. Cristoffel: Gesammelte Abhandlungen Bd. 1, S. 245. Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie.



der  $z$ -Ebene (rechtwinklige Koordinaten  $x$  und  $y$ ), als auch unseren unendlich langen Parallelstreifen in der  $w$ -Ebene (rechtwinklige Koordinaten  $\varphi$  und  $\psi$ ) auf die  $t$ -Ebene, die unendliche Halbebene (rechtwinklige Koordinaten  $u$  und  $v$  entsprechend parallel  $x, y$  bzw.  $\varphi, \psi$ ), konform abzubilden. Nach bekannten Sätzen<sup>1)</sup> ist dann auch die  $z$ -Ebene auf die  $w$ -Ebene konform abgebildet, wobei Linien der Berandung der  $z$ - und  $w$ -Ebene in die reelle  $u$ -Achse übergegangen sind und wir durch entsprechende Zuordnung von Liniestücken derselben zu den Geraden  $\psi = \text{const}$  der  $w$ -Ebene die Randwerte in der  $z$ -Ebene vorgeschrieben haben. Mit Hilfe des Theorems kann man sogleich den Differentialquotienten  $\frac{dz}{dt}$  der Abbildungsfunktion angeben, wobei die vieldeutige Funktion  $\frac{dz}{dt}$  eindeutig durch folgende Festsetzung gemacht wird: Für einen Punkt in der  $t$ -Ebene wird ihr Wert vorgeschrieben, es wird nur die positive Halbebene betrachtet und aus dieser noch die Null- und Unendlichkeitsstellen der Funktion, die in der Schwarzschen Transformation den Ecken der Abbildung in der  $z$ -Ebene entsprechen, durch Halbkreise mit unendlich kleinem Radius ausgeschlossen; hierdurch ist  $\frac{dz}{dt}$  überall eindeutig und stetig. Die Schwarzsche Gleichung lautet:

$$\frac{dz}{dt} = C \cdot (t - t_1)^{\alpha_1 - 1} \cdot (t - t_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (t - t_n)^{\alpha_n - 1}, \tag{5}$$

wo  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$  die inneren Winkel des Polygons in der  $z$ -Ebene bedeuten,  $t_1, t_2 \dots t_n$  sind reelle Konstante, und zwar die den Eckpunkten in der  $z$ -Ebene entsprechenden  $u$ -Werte, von denen drei willkürlich angenommen werden können. Hierdurch ist die Abbildung völlig bestimmt.

### 5. Symmetrischer Fall ( $\theta_1 = \theta_2$ ).

Hier besteht das Feldbild aus 4 kongruenten Teilen; daher genügt die Abbildung eines einzigen Quadranten. Wir bringen die Lösung für die Grenzfälle  $\alpha$ ) und  $\gamma$ ), weil hier die elliptischen Funktionen in einfachperiodische zerfallen, so daß sich für die Bestimmung der Schnittpunkte der Isothermen mit den Berandungslinien besonders einfach auswertbare Formeln ergeben. Der Grenzfall  $\gamma$ ) ist übrigens schon bei  $\frac{c}{z} = 4$  praktisch erreicht.

$\alpha$ ) Unendlich dünne Leiter.

Wir wollen zunächst die Methode an diesem einfachen Beispiel zeigen.

In Anlehnung an Abb. 6 ergibt das Schwarzsche Theorem die Transformationsgleichungen:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{C}{\sqrt{t} \cdot \sqrt{t+1}}, \tag{6}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{B}{\sqrt{t} \cdot \sqrt{t+b}}. \tag{7}$$

Die Konstante  $C$  bestimmt sich durch Integration über den unendlich großen Halbkreis in der  $t$ -Ebene folgendermaßen:

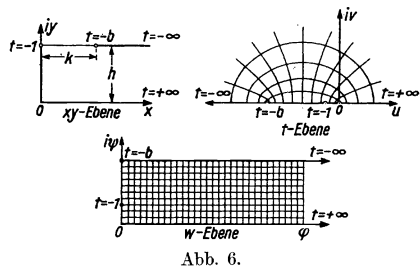


Abb. 6.

<sup>1)</sup> cf. Riemann-Weber: Partielle Differentialgleichung. 6. Aufl. Bd. I. S. 115ff.

Ist  $t$  sehr groß; so geht Gleichung (6) über in

$$\frac{dz}{dt} = \frac{C}{t}, \quad (8)$$

woraus durch Integration folgt:

$$z = C \ln t. \quad (9)$$

Bei der Integration über den unendlich großen Halbkreis können wir setzen:

$$t = R \cdot e^{i\eta}, \quad (10)$$

wo  $R$  unendlich groß ist und  $\eta$  sich von 0 bis  $\pi$  ändert, wenn  $t$  von  $+\infty$  nach  $-\infty$  geht. Hierbei ändert sich also  $z$  um

$$C [\ln R + i\eta]_0^\pi = i \cdot C \cdot \pi. \quad (11)$$

Da wir diesen Zuwachs mit  $i \cdot h$  festgesetzt haben, so ist

$$C = \frac{h}{\pi}. \quad (12)$$

Die Integration von (6) liefert auf den verschiedenen Seiten der Berandung:

$$0 < t < +\infty \quad z = \frac{h}{\pi} \ln(1 + 2t + 2 \cdot \sqrt{t^2 + t^2}), \quad (13)$$

wo die Integrationskonstante = 0 ist, damit  $z = 0$  für  $t = 0$ .

$$0 > t > -1 \quad z = i \cdot \frac{h}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin(2t - 1) \right], \quad (14)$$

wo die Integrationskonstante  $i \cdot \frac{h}{2}$  so gewählt, daß  $z = 0$  für  $t = 0$

$$-1 > t > -\infty \quad z = \frac{h}{\pi} \left[ \ln(2t - 1 + 2 \cdot \sqrt{t^2 - t}) + i\pi \right], \quad (15)$$

wo die Integrationskonstante  $i \cdot h$  so gewählt, daß, wenn  $t$  alle Werte durchläuft, von  $-1$  bis  $-\infty$  ( $t = -1$  ausgenommen),  $z$  alle Werte durchläuft  $y = ih$ ,  $x = 0$  bis  $x = -\infty$  ( $x = 0$  ausgenommen).

Die Konstante  $b$  bestimmt sich aus den Abmessungen  $k$  und  $h$  (vgl. Abb. 6) wie folgt. Für  $t = -b$  gilt:

$$k + h \cdot i = \frac{h}{\pi} \cdot \ln[2b - 1 + 2 \cdot \sqrt{b^2 - b}] + h \cdot b, \quad (16)$$

und für  $\frac{k}{h} = 1$

$$e^\pi = 2b - 1 + 2 \cdot \sqrt{b^2 - b}, \quad (17)$$

woraus sich der Wert von  $b$  errechnet zu  $b = 6,1$ .

Die Integration der Gleichung (7) ergibt für

$$t > 0 \quad w = \varphi + i\psi = B [\ln(b + 2t + 2 \cdot \sqrt{t^2 + t \cdot b}) - \ln b], \quad (18)$$

wo die Integrationskonstante sich aus der Bedingung bestimmt, daß  $w = 0$ , wenn  $t = 0$

$$-b < t < 0 \quad w = \frac{B}{i} \left[ \arcsin \frac{2t - b}{b} + \frac{\pi}{2} \right], \quad (19)$$

wo die Integrationskonstante so gewählt, daß  $w = 0$ , wenn  $t = 0$ .

Die Konstante  $B$  bestimmt sich aus der Bedingung, daß für

$$t = -b \quad w = 0 + i\Theta$$

ist. Also

$$w = i \cdot \Theta = -i \cdot B \cdot \pi.$$

Folglich: 
$$B = -\frac{\Theta}{\pi}, \tag{20}$$

Dieses in Gleichung (19) eingesetzt ergibt:

$$\psi_x = \frac{\Theta}{\pi} \cdot \left[ \arcsin \frac{2t-b}{b} + \frac{\pi}{2} \right], \tag{21}$$

$$\psi_{t=-1} = \frac{\Theta}{\pi} \cdot \left[ \arcsin \frac{2-b}{b} + \frac{\pi}{2} \right].$$

Mit  $b = 6,1$  wird  $\psi_{t=-1} = 0,265 \Theta$ .

Um die Schnittpunkte der Äquipotentiallinie mit den Geraden  $iy$  ( $y$  von  $0 \rightarrow h$ ) und  $ih + x$  ( $x$  von  $0 \rightarrow k$ ) zu finden, bestimmen wir  $t$  aus Gleichung (21) und setzen seinen Wert in Gleichung (16) und (14) ein, die unter Einführung des Streckenteilverhältnisses  $\alpha$  bzw.  $\kappa$  übergehen in

$$i \cdot \alpha \cdot h = i \cdot \frac{h}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin(2t-1) \right] \tag{für } t < 1$$

bzw. 
$$e^{\alpha \cdot \pi} = 2t-1 + 2 \cdot \sqrt{t^2-1} \tag{für } t > 1.$$

Hierbei ergeben sich folgende tabellarisch zusammengestellte Werte:

$\frac{1}{\pi} \arcsin \frac{2t-b}{b} + 0,5$	$\arcsin \frac{2t-b}{b}$	$\frac{2t-b}{b}$	$t_x$	$e^{\alpha \cdot \pi}$	$\kappa \pi$	$\alpha, \kappa$
0	$-0,5 \pi$	-1,00	0,00	—	—	$\alpha = 0$
0,1	$-0,4 \pi$	-0,951	-0,15	—	—	0,25
0,2	$-0,3 \pi$	-0,809	-0,59	—	—	0,56
0,3	$-0,2 \pi$	-0,588	-1,25	2,62	0,963	$\kappa = 0,307$
0,4	$-0,1 \pi$	-0,309	-2,15	7,1	1,960	0,624
0,5	$0,0 \pi$	0,00	-3,05	11,00	2,398	0,710
0,6	$+0,1 \pi$	+0,309	-4,00	14,70	2,688	0,855
0,7	$+0,2 \pi$	+0,588	-4,85	17,50	2,862	0,910
0,8	$+0,3 \pi$	+0,809	-5,52	20,00	2,996	0,952
0,9	$+0,4 \pi$	+0,951	-5,95	21,80	3,085	0,982
1,0	$+0,5 \pi$	+1,000	-6,1	23,10	3,14	1,000

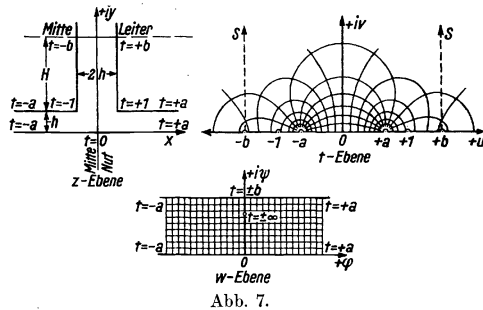
$\beta$ ) Symmetrischer Fall; Leiter endlicher Dicke.

Wir bringen die Abbildung für eine Symmetriehälfte des Feldbereiches, da wir die Lösung unter (6) verwenden werden.

Mit bezug auf Abb. 7 ergeben sich mittels des Schwarzschen Theorems die Transformationsgleichungen:

$$\frac{dz}{dt} = C \cdot \frac{\sqrt{t^2-1}}{(t^2-a^2) \cdot \sqrt{t^2-b^2}}, \tag{22}$$

$$\frac{dw}{dt} = B \cdot \frac{1}{(t^2-a^2) \cdot \sqrt{t^2-b^2}}. \tag{23}$$



Für Gleichung (22) läßt sich auch schreiben<sup>1)</sup>:

$$\frac{dz}{dt} = C \cdot \frac{\sqrt{1-t^2}}{\left(1 - \frac{1}{a^2} t^2\right) \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{b^2} t^2}} = C \cdot k^2 \cdot \frac{\sqrt{1-t^2}}{\left(1 - k^2 t^2\right) \cdot \sqrt{1 - k^2 t^2}}, \tag{24}$$

<sup>1)</sup> Bezeichnungen sind im Anschluß an Jahnke - Emde, Funktionentafeln, gewählt.

wenn wir

$$\bar{k} > 1; \quad k < 1 \qquad a = \frac{1}{k}; \quad b = \frac{1}{k} \qquad (25)$$

setzen.

Die Konstanten  $C, k, \bar{k}$  sind durch die Konstanten des  $z$ -Bildes  $H$  und  $h$  auszu-  
drücken. Eine Bestimmungsgleichung hierfür erhalten wir durch Integration über  
den Halbkreis mit unendlich kleinem Radius um den Punkt  $t = a$ :

$$\text{Ist} \qquad z = \int f(t) dt \quad \text{und} \quad f(t) = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)},$$

so folgt für das Residuum durch Entwicklung der Funktionen  $\varphi(t)$  und  $\psi(t)$  in La-  
rentsche Reihen in der Nähe des Poles  $t = a$  der Funktion  $f(t)$ :

$$\text{Residuum } f(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint f(t) dt = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)},$$

also für die Integration über den Halbkreis

$$\int_{\square} f(t) \cdot dt = \pi \cdot i \cdot \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \qquad (\text{Residuumsatz von Cauchy}).$$

Dieses ergibt mit Anwendung auf Gleichung (22)

$$C \cdot \frac{\bar{k} \cdot \sqrt{\bar{k}^2 - 1}}{2 \cdot \sqrt{k^2 - k^2}} \cdot \pi \cdot i = i \cdot h,$$

so daß

$$C = \frac{2 \cdot h \cdot \sqrt{\bar{k}^2 - k^2}}{\bar{k} \cdot \pi \cdot \sqrt{k^2 - 1}}. \qquad (26)$$

Die Integration von Gleichung (22) liefert:

$$z = \frac{2 \cdot h}{\pi \cdot \bar{k}} \cdot \frac{\sqrt{\bar{k}^2 - k^2}}{\sqrt{\bar{k}^2 - 1}} \cdot \left\{ \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2) \cdot (1-k^2 t^2)}} + (\bar{k}^2 - 1) \int_0^t \frac{dt}{(1-\bar{k}^2 t^2) \cdot \sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} \right\}, \qquad (27)$$

wobei die Integrationskonstante durch die Bedingung, daß  $z = 0$ , wenn  $t = 0$  ist, zu  
Null bestimmt ist.

$$\text{Setzen wir} \qquad t = \text{sn}(u, k); \qquad \frac{1}{\bar{k}} = a = \text{sn}(\alpha, k),$$

und daher

$$\sqrt{\bar{k}^2 - 1} = \text{ctn } \alpha; \qquad \sqrt{\bar{k}^2 - k^2} = \frac{\text{dn } \alpha}{\text{sn } \alpha}, \qquad (28)$$

und beachten wir, daß das 2. Integral der Gleichung (27) mit dem elliptischen Legendre-  
schen Integral dritter Gattung identisch ist:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1-h \cdot \sin^2 \varphi) \Delta \varphi} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta \varphi} - h \cdot \int_0^{\varphi} \frac{\sin^2 \varphi \cdot d\varphi}{(1+h \cdot \sin^2 \varphi) \Delta \varphi},$$

wenn wir  $\varphi = am u$ ,  $\Delta(\varphi) = 1 - k^2 \cdot \sin^2 \varphi$ ,  $h = -\bar{k}^2$  setzen, so erhalten wir für  
 $-\infty < h < -1$  <sup>1)</sup>

$$\int_0^t \frac{dt}{(1-\bar{k}^2 t^2) \cdot \sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = u - \frac{\text{tn } \alpha}{\text{dn } \alpha} \cdot \Pi(u, \alpha + iK'),$$

<sup>1)</sup> cf. Schlömilch: Vorlesungen über höhere Analysis. 2. Aufl. S. 468.

wo  $\Pi_0(q, k, -k^2)$  das bestimmte elliptische Integral dritter Gattung nach Jakobobi ist.

Also ist:

$$z = \frac{2 \cdot h}{\pi \cdot k} \cdot \frac{\sqrt{k^2 - k'^2}}{\sqrt{k^2 - 1}} \cdot \left\{ u + (k^2 - 1) \left[ u - \frac{\operatorname{tn} \alpha}{\operatorname{dn} \alpha} \cdot \Pi(u, \alpha + iK') \right] \right\}, \quad (29)$$

woraus folgt:

$$z = \frac{2 \cdot h}{\pi} \cdot \left\{ \frac{\operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{sn} \alpha \cdot \operatorname{cn} \alpha} \cdot u - \Pi(u, \alpha + iK') \right\}. \quad (30)$$

Die Doppelperiode der elliptischen Funktion ist in unserer Abb. 7 durch folgende Grenzbedingungen festgelegt: für

$$t = 1; \quad u = K; \quad z = h + ih, \quad (31 a)$$

$$t = b; \quad u = K + iK'; \quad z = h + i(h + H); \quad (31 b)$$

hieraus ergeben sich die zwei restlichen Bestimmungsgleichungen.

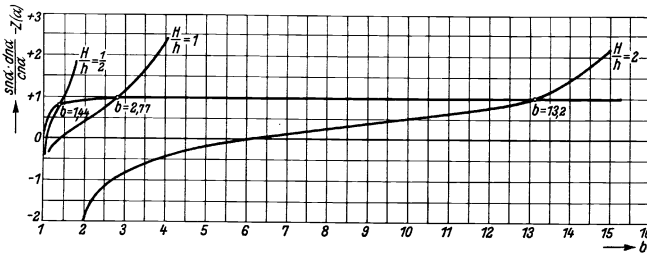


Abb. 8.

Wir wollen im folgenden die vollständigen Integrale dritter Gattung mittels der Jakobischen Transzendenten zweiter Gattung

$$Z(\alpha) = E(am \alpha) - \frac{E}{K} \cdot \alpha$$

auf die zweiter Gattung zurückführen. Hierfür gilt bekanntlich:

$$\Pi(K, \alpha + iK') = K \cdot Z(\alpha + iK'),$$

$$\Pi(K + iK', \alpha + iK') = (K + iK') \cdot Z(\alpha + iK') + \frac{i\pi(\alpha + iK')}{2K}$$

und

$$Z(\alpha + iK') = Z(\alpha) - \frac{i\pi}{2K} + \frac{\operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{tn} \alpha} \cdot 1).$$

Durch Einführung von Gleichung (31 a) und (31b) in Gleichung (30) ergibt sich schließlich

$$\alpha = K' - \frac{H}{h} \cdot K, \quad (32)$$

$$\frac{\pi}{2K} = \operatorname{tn} \alpha \cdot \operatorname{dn} \alpha - Z(\alpha). \quad (33)$$

In Abb. 8 ist die rechte und linke Seite für verschiedene  $\frac{H}{h}$  der Gleichung (33) als Funktion von  $b = \frac{1}{k}$  mit Hilfe von Gleichung (32) dargestellt. Die Schnittpunkte ergeben  $b$  als Funktion von  $\frac{H}{h}$ ; die Konstante  $a$  ergibt sich dann nach Gleichung (28).

1) cf. Schlömilch: Ebenda S. 466.

Die Integration von Gleichung (23) ergibt für  $t > b$

$$w = \varphi + i\psi = \frac{B}{2a \cdot \sqrt{b^2 - a^2}} \cdot \left\{ \arcsin \left( \frac{a}{b} - \frac{b^2 - a^2}{b(t-a)} \right) - \arcsin \left( -\frac{a}{b} - \frac{b^2 - a^2}{b(t+a)} \right) \right\}, \quad (34)$$

wobei die Integrationskonstante  $O$  ist, damit für  $t = b$

$$w = \frac{B}{2a \cdot \sqrt{b^2 - a^2}} \cdot \left\{ \arcsin \left( \frac{a}{b} - \frac{b^2 - a^2}{b^2 - ab} \right) - \arcsin \left( -\frac{a}{b} - \frac{b^2 - a^2}{b^2 + ab} \right) \right\} = 0 \quad \text{ist.}$$

Die Konstante  $B$  bestimmt sich durch Integration um  $t = a$  mit unendlich kleinem Radius aus Gleichung (23):

$$B \cdot \frac{1}{2a \cdot \sqrt{a^2 - b^2}} \cdot i \cdot \pi = i \cdot \Theta, \\ B = i \cdot \frac{\Theta}{\pi} \cdot 2a \cdot \sqrt{b^2 - a^2}. \quad (35)$$

Also ergibt sich durch Einsetzen von Gleichung (35) in Gleichung (34) für den Potentialabfall von  $t = b$  bis  $t = \infty$

$$i \cdot \Delta\psi = B \cdot \int_{t=b}^{t=\infty} \frac{dt}{(t^2 - a^2) \cdot \sqrt{t^2 - b^2}} = i \cdot \frac{\Theta}{\pi} \cdot 2 \cdot \arcsin \frac{a}{b}$$

oder für den Potentialabfall Sattelpunkt-Nutenwand

$$\psi_s = \Theta \left( 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{a}{b} \right). \quad (36)$$

Die Auswertung ergibt folgendes:

$\frac{c}{i}$	$\frac{H}{h}$	$b$	$a$	$\psi_s$ % von $\Theta$
0	0	1	0,916	26
1	$\frac{1}{2}$	1,44	0,772	64
2	1	2,77	0,717	82
4	2	13,2	0,706	97
10	5	1400	0,72	99,97
$\infty$	$\infty$	$\infty$	1	100

Sind die Leiter sehr dünn, so können wir setzen:

$$\frac{H}{h} = \infty, \quad b = \infty \quad \text{also:} \quad b = \frac{1}{k} = 1 + \varepsilon,$$

wobei  $\varepsilon$  eine sehr kleine Zahl ist, die nach Null geht, wenn  $b \rightarrow 1$  oder  $\frac{H}{h} \rightarrow 0$  geht, also:

$$k = \frac{1}{1 + \varepsilon} = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \dots, \quad k' = \sqrt{1 - k^2} = \sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2} = \infty \sqrt{2\varepsilon}.$$

Nun gilt bekanntlich für  $k = \sim 1$ ,  $k' = \infty$

$$K = \ln \left( \frac{4}{k'} \right), \quad K' = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \cdot k'^2 + \dots \right].$$

Um  $\frac{H}{h} = \frac{dy}{y_{\varepsilon=1}} = f(\varepsilon)$  zu erhalten, entwickeln wir die Funktionen der Gleichung (27) in der Nähe kleiner  $\varepsilon$ , wodurch die elliptischen Integrale zerfallen. Da nun

$$\lim_{\varepsilon=0} \varepsilon \cdot \ln \frac{4}{\sqrt{2\varepsilon}} = 0$$

ergibt, so folgt nach Gleichung (32)

$$\alpha_{k=1} = \frac{\pi}{2},$$

wodurch  $\alpha$ ) auf  $\beta$ ) zurückgeführt ist.

Der Kurvenanstieg in der Nähe kleiner  $\frac{H}{h}$  ergibt sich aus:

$$\vartheta = \Theta \cdot \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \arcsin \frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{1 + \operatorname{ctn}^2 \alpha}} \right\}$$

Die Abbildungsfunktionen für  $\alpha$ ) und  $\gamma$ ) folgen aus Gleichung (27) durch Einsetzen von  $k = 1$  ( $b = 1$ ) und  $k = 0$  ( $b = \infty$ ); so ergibt sich z. B. für  $\gamma$ ):

$$z = \frac{2ha}{\pi \cdot \sqrt{1 - a^2}} \cdot \left\{ \arcsin t + \frac{\sqrt{1 - a^2}}{2a} \cdot \ln \frac{(t+a)(1 - at + \sqrt{1 - a^2} \cdot \sqrt{1 - t^2})}{(t-a)(1 + at + \sqrt{1 - a^2} \cdot \sqrt{1 - t^2})} + i\pi \cdot \frac{\sqrt{1 - a^2}}{2a} \right\}.$$

Erwähnt sei ferner noch, daß der Fall drahtförmiger Leiter als weiterer Grenzfall wegen der doppelten Periodizität auf elliptische Funktionen als Abbildungsfunktionen führt.

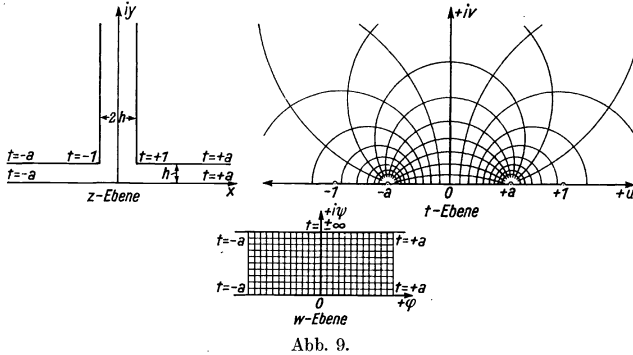


Abb. 9.

$\gamma$ ) Symmetrischer Fall; unendlich dicke Leiter.

Mit Bezug auf Abb. 9 ergeben sich die Transformationsgleichungen

$$\frac{dz}{dt} = C \cdot \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t^2 - a^2}, \tag{37}$$

$$\frac{dw}{dt} = B \cdot \frac{1}{t^2 - a^2}. \tag{38}$$

Die Konstante  $C$  bestimmt sich durch Integration über den unendlich großen Halbkreis in der  $t$ -Ebene [vgl.  $\alpha$ , Gleichung (10) bis (11)]:

$$C = -i \cdot \frac{2}{\pi} \cdot h. \tag{39}$$

Die Konstante  $a$  bestimmt sich durch Integration um den Punkt  $t = a$  mit unendlich kleinem Radius

$$h = h \cdot \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a},$$

woraus der Wert für

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,706 \tag{40}$$

folgt.

Die Integration der Gleichung (37) ergibt, wenn wir den Integrationsweg längs der imaginären  $v$ -Achse in der  $t$ -Ebene erstrecken ( $0 < z = iy < i \cdot \infty$ ):

$$y = \frac{2}{\pi} \cdot h \left[ \ln [v + \sqrt{1+v^2}] - \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \operatorname{arctg} \frac{(1 + \sqrt{1-a^2} \cdot \sqrt{1+v^2})v - a^2 \cdot v}{(1 + \sqrt{1-a^2} \cdot \sqrt{1+v^2}) \cdot a + a \cdot v} + \pi \frac{\sqrt{1-a^2}}{2a} \right], \quad (41)$$

wo die Integrationskonstante  $2 \cdot h \cdot \frac{\sqrt{1-a^2}}{2a}$  so gewählt, daß  $y = 0$ , wenn  $v = 0$  ist.

Die Integration der Gleichung (38) ergibt für imaginäre  $t$ - und  $w$ -Werte

$$\psi = -\frac{\Theta}{\pi} \cdot 2 \cdot \operatorname{arctg} \frac{v}{a} + \Theta = \Theta \left( 1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{v}{a} \right), \quad (42)$$

wo die Integrationskonstante  $\Theta$  so gewählt, daß  $\psi = 0$ , wenn  $v = 0$  und  $B$  sich durch Integration um  $t = a$  mit unendlich kleinem Radius ergab.

Aus Gleichung (42) folgt: 
$$v = a \cdot \operatorname{ctg} \left( 1 - \frac{\psi}{\Theta} \right) \cdot \frac{\pi}{2}. \quad (43)$$

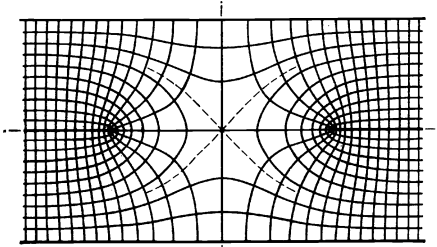


Abb. 10.  $\frac{c}{i} = 0$ .

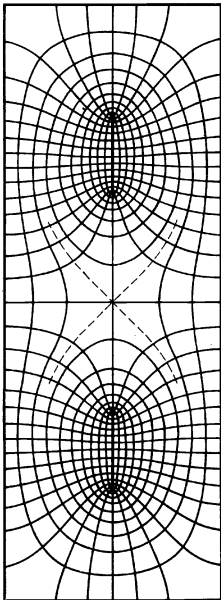


Abb. 11.  $\frac{c}{i} = 0$ .

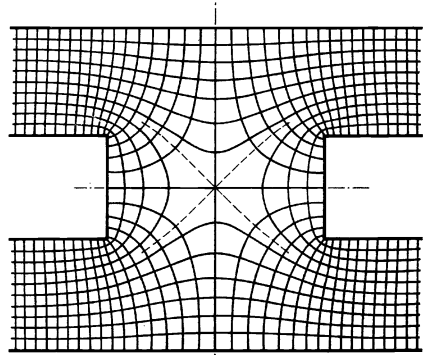


Abb. 12.  $\frac{c}{i} = 1$ .

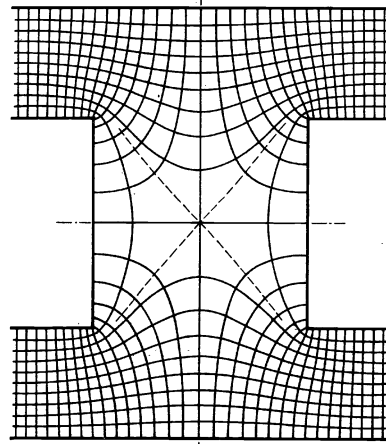


Abb. 13.  $\frac{c}{i} = 2$ .



Aus Gleichung (43) und (41) sind die Schnittpunkte der Äquipotentiallinien mit der imaginären Achse  $iy$  der  $z$ -Ebene ermittelt. Die Werte ergeben:

$\nu =$	$0,2 \vartheta$	$0,4 \vartheta$	$0,6 \vartheta$	$0,8 \vartheta$	$0,9 \vartheta$	$0,95 \vartheta$	$0,99375 \vartheta$	$1,0 \vartheta$
$v =$	0,23	0,513	0,976	2,17	4,47	8,97	73,5	$+\infty$
$y =$	$0,289 h$	$0,593 h$	$0,94 h$	$1,44 h$	$1,903 h$	$2,34 h$	$3,69 h$	$+\infty$

In den Abb. 10 bis 15 sind die Isothermen und Stromlinien dargestellt, und zwar für folgende Verhältnisse:

Feldbild Abb. 10  $\frac{c}{i} = 0$  unendliche Nutentiefe,

Feldbild Abb. 11  $\frac{c}{i} = 0$  endliche Nutentiefe

Feldbild Abb. 12  $\frac{c}{i} = 1$  endliche Nutentiefe,

Feldbild Abb. 13  $\frac{c}{i} = 2$  endliche Nutentiefe,

Feldbild Abb. 14  $\frac{c}{i} = 4$  endliche Nutentiefe,

Feldbild Abb. 15  $\frac{c}{i} = 10$  endliche Nutentiefe.

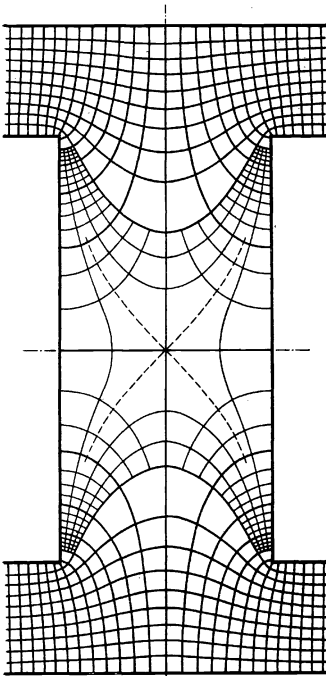


Abb. 14.  $\frac{c}{i} = 4$ .

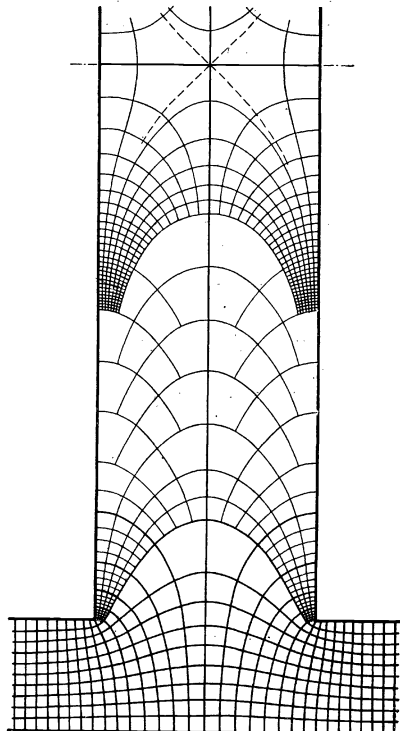


Abb. 15.  $\frac{c}{i} = 10$ .

In dem Feldbereich über 0,9  $\Theta$  im Bild 14 und 15 schreitet die Teilung für die Isothermen nach einer geometrischen Reihe fort.

Abb. 16 zeigt die Profile der Temperaturebene in den beiden Symmetrieschnitten der Nut, Abb. 17 die Abhängigkeit der Sattelpunkttemperatur vom Verhältnis  $\frac{c}{b}$ .

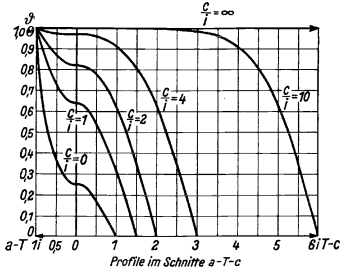


Abb. 16.

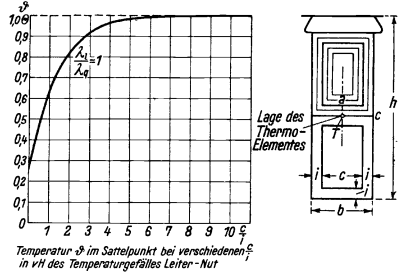


Abb. 17.

### 6. Unsymmetrischer Fall ( $\Theta_1 \neq \Theta_2$ ).

Wir hatten bisher angenommen, daß unser Feldbild in bezug auf die beiden Mittelachsen der Nut symmetrisch sein soll; hierfür war nicht nur die geometrische, sondern auch die thermische Symmetrie die Voraussetzung. Tatsächlich tritt nun durch erhöhte Stromverdrängung im Oberstab eine sehr viel stärkere Wärmeentwicklung auf als im Unterstab, besonders wenn die Nuten magnetisch wenig oder gar nicht geschlossen sind. Durch die auf den Stäben hierdurch im stationären Zustand sich einstellende verschiedene Temperatur wird daher die Feldverteilung nur in bezug auf die Nutenlängsachse symmetrisch, und der Thermopunkt liegt keineswegs mehr im Sattelpunkt. In der für das halbe Feldbild angeschriebenen Lösung (5β) gestattet nun die Abbildungsfunktion, die die  $t$ -Ebene auf die  $w$ -Ebene überführt, nicht mehr die Einführung dieser Grenzbedingungen. Wir werden daher den Parallelstreifen der Abb. 7c nochmals in einen Parallelstreifen überführen und bei dieser neuen Abbildung die geforderten Grenzwerte einsetzen. Hierfür lassen sich die Lösungen gleich hinschreiben.

War die Temperatur des Thermopunktes bei  $\Theta_1 = \Theta_2$  zu

$$\vartheta_p = \kappa \cdot \Theta \quad (44)$$

errechnet worden und ist die Temperatur des im positiven Teile der  $z$ -Ebene liegenden Leiters  $\Theta_1$ , des anderen  $\Theta_2$ , so ist das gesuchte Temperaturpotential

$$\psi_x = Jm \left[ \frac{\Theta_2}{\pi} \cdot \ln(v+1) - \frac{\Theta_1}{\pi} \ln(v-1) + i \cdot \Theta_1 \right],$$

$$\text{oder} \quad \psi_x = Jm \left[ \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\pi} \ln(v+1) + \frac{\Theta_1}{\pi} \ln \frac{v+1}{v-1} + i \cdot \Theta_1 \right], \quad (45)$$

wo  $v$  die imaginäre Komponente von  $t$ , analog wie in Gleichung (43) sich bestimmt zu

$$v = \text{ctg} (1 - \kappa) \cdot \frac{\pi}{2}. \quad (46)$$

Ist  $\kappa$  in der Nähe von 1, also  $v$  groß gegen 1, so geht Gleichung (45) über in

$$\psi_x = \frac{\Theta_2 + \Theta_1}{2}. \quad (45a)$$

In diesem Falle gibt also das Thermoelement die mittlere Temperatur an, mit deren Bestimmung man sich wohl auch im allgemeinen begnügen wird, da die genaue Rechnung des notwendigen Verhältnisses der Verluste in beiden Stäben ungenau sein dürfte; es kommt hinzu, daß die Kühlverhältnisse für beide Stäbe nicht gleich sind, da im allgemeinen der am Keil liegende Stab stärker gekühlt wird, was ausgleichend wirkt.

Die Umständlichkeit der doppelten Abbildung würde übrigens nicht aufgetreten sein, wenn wir die Transformation für das ganze Feldbild vorgenommen hätten. Da die Transformation der einmal überdeckten  $w$ -Ebene auf die vielblättrige  $t$ -Ebene mittels der durch multiplikatorische Hinzufügung einer rationalen Funktion erweiterten Schwarzschen Theorengleichung (allgemeinere Form) erfolgt — ihre Nullstellen entsprechen den Verzweigungspunkten — lassen sich hier die Grenzbedingungen ohne weiteres einführen. Diese Rechnung sei hier wegen ihrer Weitläufigkeit nicht mit aufgeführt.

## 7. Berücksichtigung der thermischen Anisotropie.

### $\alpha$ ) Die Leitfähigkeiten der Längs- und Querwege.

Infolge der fabrikatorischen Ausführung der Leiterumkleidung durch allmähliches Aufbringen isolierender Schichten erreicht die Wärmeleitfähigkeit in Schicht-richtung ( $\lambda_l$ ) viel größere Werte als die Wärmeleitfähigkeit senkrecht hierzu ( $\lambda_q$ ).

Beispielsweise ergeben sich Verhältniswerte  $\frac{\lambda_l}{\lambda_q} = 3 \rightarrow 10$  im fertig aufgewickelten

Zustande (vordem  $1,5 \rightarrow 4$ ). Die größten Werte erreichen die Mikafabrikate (5 im fertigen Zustande), wobei neben den Materialeigenschaften die Art des Fabrikationsprozesses (Tränkmasse, Höhe des Preßdruckes) von Einfluß sind<sup>1</sup>). Die Luftschicht, welche wegen des Spieles zwischen Isoliermaterial und Nut notwendig ist, kann durch Einführung einer entsprechend großen, thermisch äquivalenten Isolationschicht berücksichtigt werden<sup>2</sup>). Die Leiterabrundung, die wir übrigens in unsere

Abbildung durch ein korrigiertes  $\frac{c}{i}$  hätten berücksichtigen können, wollen wir hier außer acht lassen.

### $\beta$ ) Zurückführung des anisotropen Falles auf den isotropen Fall.

Wie betrachten ein eben geschichtetes Feld nach Abb. 18. Die  $x$ -Achse sei in Schicht-richtung, die  $y$ -Achse senkrecht hierzu orientiert. Die Querleitfähigkeit ist also mit  $\lambda_y$ , die Längsleitfähigkeit mit  $\lambda_x$  zu bezeichnen. Hiermit werden die Komponenten des Wärmestromes

$$q_x = \lambda_x \cdot \text{grad}_x \cdot \psi = \lambda_x \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$q_y = \lambda_y \cdot \text{grad}_y \cdot \psi = \lambda_y \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

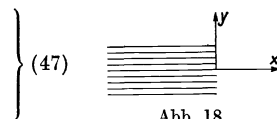


Abb. 18.

Die Bedingung quellenfreien Wärmestromes

$$\text{div } \varphi = 0$$

unterwirft mit Rücksicht auf (47) die Temperaturverteilung der partiellen Differentialgleichung

$$\lambda_x \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \lambda_y \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (48)$$

<sup>1</sup>) Ausführliche Meßresultate siehe bei T. S. Taylor: The thermal Conductivity of Insulating and other Materials. Electric Journal 1919, S. 526ff.

<sup>2</sup>) Zahlenmäßige Angaben hierfür werden in einer späteren Arbeit gegeben werden.

Mittels der Transformation

$$x = \sqrt{\lambda_x} \cdot \xi ; \quad y = \sqrt{\lambda_y} \cdot \eta \tag{49}$$

gehen wir von der  $x, y$ -Ebene auf eine  $\xi, \eta$ -Ebene über und erhalten aus (48):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0. \tag{50}$$

Diese Gleichung stimmt formal mit der auf S. 199 abgeleiteten Differentialgleichung der Wärmeströmung im isotropen Material überein: Ein eben geschichtetes Feld ist demnach einem isotropen Felde veränderter Abmessungen gleichwertig. Um das Maß der Änderung zu erkennen, schreiben wir (49) in der Form

$$x = \sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}} \cdot \sqrt{\lambda_y} \cdot \xi = \sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}} \cdot \xi' ; \quad y = \sqrt{\lambda_y} \cdot \eta = \eta',$$

wo  $\xi', \eta'$  den  $\xi, \eta$  proportional sind. Die Verschiedenheit der Längs- und Querleitfähigkeit wird hiernach durch Kürzung der Längsabmessungen im Verhältnis  $\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}}$  vollkommen erfaßt.

Indem wir berücksichtigen, daß in unserem Problem nach Abb. 17 die Größe  $\frac{c}{i}$  das Verhältnis der Längsabmessungen zu den Querabmessungen ausdrückt, finden

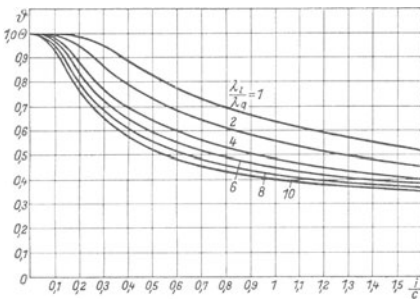


Abb. 20.

wir: Die Wärmeströmung der Zweistabwicklung mit anisotropem Isoliermaterial gleicht der Wärmeströmung in einer Zweistabwicklung mit isotropem Isoliermaterial, deren Abmessungen in dem korrigierten Verhältnis

$$\left(\frac{c}{i}\right)' = \frac{c'}{i'} = \sqrt{\frac{\lambda_l}{\lambda_q}} \cdot \frac{c}{i} \tag{51}$$

stehen. In Abb. 20 sind hiernach die Temperaturen des Sattelpunktes für die Verhältniswerte  $\frac{\lambda_l}{\lambda_q} = 2, 4, 6, 8, 10$  in

Abhängigkeit von den wirklichen Abmessungen  $\frac{i}{c}$  aufgetragen.

Wir wollen nicht verschweigen, daß die Übertragung der am ebenen Schichtfeld gefundenen Ergebnisse auf das krummlinige Feld der Zweistabwicklung eine

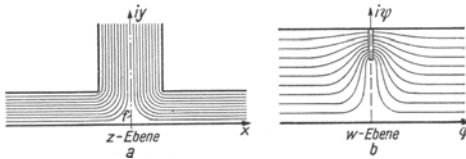


Abb. 19.

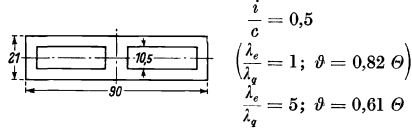
nicht ganz exakte Extrapolation darstellt. Bei genauer Formulierung der Aufgabe wird man auf eine nichtkonforme Abbildung geführt, deren mathematische Behandlung über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen würde. Erwähnt sei nur, daß die Wirkung des vom Bandmaterial leeren Raumes bei  $f$  (Abb. 19) auf die Wärmeströmung bei den in Betracht kommenden Verhältnissen  $\frac{i}{c}$  und  $\frac{\lambda_l}{\lambda_q}$  bei obiger Rechnung einigermaßen mit berücksichtigt wird.

### 8. Praktisches Beispiel.

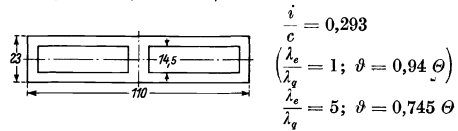
In Abb. 21 sind einige Nuten-schnitte mit den zugehörigen Leiterquerschnitten ausgeführter Hochspannungsturbogeneratoren abgebildet, für die wegen ihrer hohen Materialausnutzung in erster Linie das Meßverfahren Anwendung findet. Die Temperaturen des Sattelpunktes sind unter Zugrundelegung eines Verhältniswertes  $\frac{\lambda_l}{\lambda_q} = 5$  nach Abb. 20 berechnet.

Im ersten Beispiel tritt ein Fehler von 40% auf, der bei Höchstspannungsmaschinen indessen noch übertroffen werden dürfte. Berücksichtigt man, daß das Temperaturgefälle Leiter-Nut bis zu 50°C beträgt, so ist durch den Gebrauch der Kurven die Vermeidung erheblicher absoluter Fehler möglich.

1. Turbogenerator; 15 625 kVA; 10 500 V;  $n = 1500$ ;  
 $\cos \varphi = 0,8$ ;  $f = 50$  Per/sec.



2. Turbogenerator; 22 850 kVA; 5 250 V;  $n = 3000$ ;  
 $\cos \varphi = 0,7$ ;  $f = 50$  Per/sec.



3. Turbogenerator; 8 000 kVA; 5 250 V;  $n = 3000$ ;  
 $\cos \varphi = 0,8$ ;  $f = 50$  Per/sec.

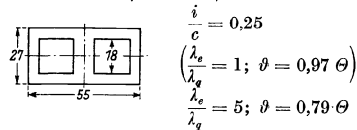


Abb. 21.

### 9. Zusammenfassung und Ergebnisse.

Mittels Anwendung der konformen Abbildung wird die Temperatur des Prüflthermoelementes mitten zwischen den Stäben bei Doppelstabwicklung in Prozenten des Temperaturgefälles Kupfer-Eisen für verschiedene Verhältniswerte  $\frac{i}{c} = \text{Nuten-Isolationsstärke}}{\text{Leiterbreite}}$  errechnet. Der Berechnung wird zunächst die Annahme eines isotropen Isolationsmaterials und gleicher Temperatur auf beiden Stäben zugrunde gelegt; hierfür werden auch die Temperaturfeldbilder entworfen. Die weitere Rechnung berücksichtigt die ungleiche Leitertemperatur und — als besonders wichtig — die Anisotropie des Isoliermaterials. Diese Eigenschaft desselben ruft bei den praktisch vorkommenden Werten

$$\frac{\lambda_l}{\lambda_q} = \frac{\text{Wärmeleitfähigkeit in Schichtrichtung des Isoliermaterials}}{\text{Wärmeleitfähigkeit quer zur Schichtrichtung des Isoliermaterials}}$$

eine erhebliche Veränderung der Temperaturverteilung gegenüber der des isotropen Materials hervor und vergrößert die Temperaturdifferenz Leiter-Thermopunkt noch beträchtlich.

Es wird gefunden, daß bei vorgegebenem  $\frac{\lambda_l}{\lambda_q}$  nur für Stäbe von erheblicher Breite im Verhältnis zur Isolationsdicke die Temperatur des Thermoelementes der Leitertemperatur etwa gleichzusetzen ist; bei wachsendem Verhältnis  $\frac{i}{c}$  ist die Temperatur stark von diesem abhängig, und zwar um so mehr, je größer das gegebene  $\frac{\lambda_l}{\lambda_q}$  ist. Bei Höchstspannungsmaschinen sind Fehler von 40 bis 50% möglich.

# Schwingungsvorgänge bei Nadelgleichrichtern.

Von **Manfred Tunkel.**

Mit 9 Textabbildungen.

Mitteilung aus der Wissenschaftlichen Abteilung der Siemens-Schuckertwerke  
G. m. b. H., Siemensstadt.

Eingegangen am 2. Januar 1925.

## 1. Einleitung.

Zur Erzeugung hochgespannten Gleichstromes zum Betrieb von Staubfiltern und Röntgenröhren sowie zur Hochspannungsprüfung von Isolatoren finden neben den neueren Vakuungleichrichtern Nadelgleichrichter Verwendung. Beim Betrieb von Nadelgleichrichteranlagen sind rasche elektrische Schwingungen und Überspannungen beobachtet worden, durch welche gelegentlich Wicklungsdurchschläge und Klemmenüberschläge der Hochspannungstransformatoren veranlaßt worden sind. Im folgenden soll daher die Abhängigkeit des zeitlichen Verlaufes der Ströme und Spannungen in einem derartigen Gleichrichterstromkreis von den Betriebsverhältnissen und den elektrischen Konstanten untersucht und Mittel zur Dämpfung der Schwingungen oder zur Erzielung eines schwingungsfreien Betriebes beschrieben werden.

## 2. Wirkungsweise des Nadelgleichrichters.

Die Wirkungsweise des Nadelgleichrichters, für den Abb. 1 eine häufig angewandte Schaltung<sup>1)</sup> darstellt, welche auch den weiteren Betrachtungen zugrunde

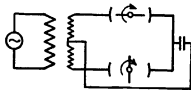


Abb. 1.

gelegt werden soll, besteht darin, daß zwei Paare feststehender Kontaktsegmente, welche einerseits mit den Klemmen eines Hochspannungstransformators, andererseits mit dem Gleichspannungsverbraucher verbunden sind, durch synchron umlaufende Kontaktarme während eines Teiles der Wechselstromperiode miteinander über Funken verbunden werden. Die Kontaktarme sind so eingestellt, daß durch sie die gegenüberliegenden Kontaktsegmente jeweils innerhalb eines Zeitabschnittes miteinander verbunden werden, während dessen die Wechselspannung durch die aufeinanderfolgenden Maximalwerte gleicher Spannungsrichtung hindurchgeht, so daß also an den Kontaktsegmenten des Gleichspannungsverbrauchers nur Spannungswerte eines Vorzeichens auftreten.

<sup>1)</sup> Andere Gleichrichterschaltungen siehe H. Greinacher: Über eine Methode Wechselstrom in hochgespannten Gleichstrom umzuwandeln. Z. f. Phys. Bd. 4, S. 195. 1921, und H. Greinacher: Erzeugung einer Gleichspannung vom vielfachen Betrage einer Wechselspannung ohne Transformator. Bull. d. Schweiz. El. Ver. Bd. 11, S. 59. 1920, sowie die Patentschriften D. R. P. 225 399, 237 234, 237 235, 310 356, 313 170 und 338 248.

Die Winkelgeschwindigkeit der Kontaktarme ist bei der betrachteten Gleichrichteranordnung gleich der halben elektrischen Winkelgeschwindigkeit. Da zwei Kontaktarme vorhanden sind, wird also innerhalb einer Wechselstromperiode 2 mal Kontakt gemacht. Bei einer Frequenz der Wechselspannung von  $f$  Per/sec ist die elektrische Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = 2\pi f \text{ 1/sec,}$$

daher die räumliche Winkelgeschwindigkeit der Kontaktarme

$$\bar{\omega} = \pi f \text{ 1/sec.}$$

Also entspricht einem elektrischen Phasenwinkel von  $\alpha$  Grad ein räumlicher Winkel von

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} f 360 \tau \text{ Grad,} \quad (1)$$

wenn  $\tau$  die Zeit in sec bedeutet. Die Zeit, innerhalb der der Kontaktarm das Segment mit dem Zentriwinkel  $\bar{\alpha}$  bestreicht, ist

$$\tau = \frac{\bar{\alpha}}{f \cdot 180} \text{ sec} \quad (2)$$

### 3. Ströme und Spannungen im Gleichrichterkreis.

Zur Berechnung des zeitlichen Verlaufes der Ströme und Spannungen in einem Gleichrichterstromkreis bedienen wir uns einer Ersatzschaltung nach Abb. 2. In dieser bedeutet  $L$  die Streuinduktivität und  $r$  den Widerstand der halben Oberspannungswicklung des Transformators. Die Streuinduktivität ergibt sich aus der prozentuellen Streuspannung  $e_s$ , dem Nennstrom  $i$  und der Nennspannung  $E$  des Transformators bei der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$  zu

$$L = \frac{e_s E}{100 \omega i}.$$

Der Gleichspannungsverbraucher wird durch eine Kapazität  $C$  mit parallel geschaltetem Verlustwiderstand  $R$  dargestellt.

Wir betrachten nun die Vorgänge in einem derartigen Stromkreis, wenn in demselben periodisch durch Schließen des Schalters  $S$  während einer Zeit  $\tau_1$  eine elektromotorische Kraft wirksam wird, die sich wie eine Wechselspannung ändert und hiernach der Schalter während der Zeit  $\tau_2$  offen bleibt. Dabei soll momentanes und funkenfreies Ein- und Ausschalten vorausgesetzt werden.

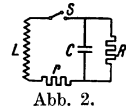


Abb. 2.

Unmittelbar vor dem Augenblick, in dem sich der Schalter schließt, wird die Spannung der hierdurch miteinander verbundenen Teile des Stromkreises noch einen endlichen Unterschied haben. Es wird daher eine Ausgleichsspannung auftreten, die je nach dem Wert der Konstanten des Stromkreises entweder oszillatorisch oder aperiodisch gegen Null abklingt. Die hierbei auftretenden Spannungswellen, welche sich der stationären Spannung überlagern, erzeugen dabei weit über die normalen Spannungswerte hinausgehende Überspannungen. Ebenso wird auch der Strom im Transformator, der bei offenem Schalter Null ist, unter Schwingungen oder aperiodisch in seinen stationären Wert übergehen. Hierbei verstehen wir unter „stationären Werten“ die Wechselströme und Spannungen, die nach genügend langer Zeit nach erfolgtem Schalterschluss bei dauernd geschlossenem Schalter auf-

treten würden. In Wirklichkeit wird zwar der Stromkreis nach einem Bruchteil der Halbperiode wieder unterbrochen, jedoch hat die später erfolgende Abschaltung keinen Einfluß auf den Einschaltvorgang, welcher so verläuft, als wenn der Schalter dauernd geschlossen bliebe, wobei noch vorausgesetzt ist, daß während der Öffnungsdauer die im Anschluß an die Schaltvorgänge einsetzenden Teilschwingungen auf den Zuleitungen zum Gleichrichter abgeklungen sind. Nach Öffnen des Schalters wird sich der Kondensator über den Widerstand  $R$  entladen, wobei auf ihm im Augenblick der Wiedereinschaltung eine Restspannung übrig bleiben wird.

Die Berechnung des zeitlichen Verlaufes von Spannung und Strom erfolgt in bekannter Weise<sup>1)</sup>, indem zunächst Spannung und Strom in stationärem Zustand, d. h. bei dauernd geschlossenem Schalter, bestimmt werden. Alsdann wird die Differentialgleichung der Ausgleichsschwingung aufgestellt und so integriert, daß die vor dem Schaltvorgang vorhandenen Spannungs- und Stromwerte ohne endlichen Sprung in die stationären Werte übergehen. Dies wird dadurch erreicht, daß der Wert der Ausgleichsgröße im Schaltmoment so gewählt wird, daß die Summe aus diesem und dem stationären Wert den tatsächlichen Augenblickswert der betrachteten Größe liefert.

#### a) Stationäre Größen.

Wir berechnen nunmehr die stationären Strom- und Spannungswerte bei dauernd geschlossenem Schalter. Die Transformator EMK sei

$$e_T = E \sin \omega t. \quad (3)$$

Dann ist der Transformatorstrom

$$i_T = \frac{e_T}{\Re},$$

wo  $\Re$  der Richtwiderstand des Stromkreises nach Abb. 2 ist, wobei noch der Verlustwiderstand des Kondensators durch die entsprechende Ableitung

$$A = \frac{1}{R}$$

ersetzt ist.

Der Richtwiderstand ist

$$\Re = r + j\omega L + \frac{1}{A + j\omega C}.$$

Wir bringen  $\Re$  in die Normalform

$$\Re = a + jb$$

und berechnen den Betrag

$$|\Re| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

und das Argument

$$\varphi = \arctg \frac{b}{a}.$$

Es ergibt sich

$$|\Re| = \sqrt{\left(r + \frac{A}{A^2 + \omega^2 C^2}\right)^2 + \left(\omega L - \frac{\omega C}{A^2 + \omega^2 C^2}\right)^2} \quad (4)$$

und

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{\omega C}{A^2 + \omega^2 C^2}}{r + \frac{A}{A^2 + \omega^2 C^2}}. \quad (5)$$

<sup>1)</sup> Vgl. R. Rüdberg: Elektrische Schaltvorgänge. Berlin 1923, S. 37.



Hiernach ist der stationäre Transformatorstrom

$$i_T = \frac{E}{|\Re|} \sin(\omega t - \varphi). \quad (6)$$

Nun berechnen wir die stationäre Kondensatorspannung als Spannungsabfall des Transformatorstromes  $i_T$  im Richtleitwert  $\alpha$  der Parallelschaltung von Kondensator und Ableitung

$$e_C = \frac{i_T}{\alpha}. \quad (7)$$

Der Richtleitwert ist

$$\alpha = A + j \omega C,$$

sein Betrag

$$|\alpha| = \sqrt{A^2 + \omega^2 C^2} \quad (8)$$

und sein Argument

$$\psi = \arctg \frac{\omega C}{A}, \quad (9)$$

daher

$$e_C = \frac{E}{|\Re| |\alpha|} \sin(\omega t - \varphi - \psi). \quad (10)$$

Endlich berechnen wir noch den stationären Kondensatorverluststrom, welcher die Ableitung  $A$  durchströmt, zu

$$i_A = A e_C = \frac{AE}{|\Re| |\alpha|} \sin(\omega t - \varphi - \psi). \quad (11)$$

### b) Ausgleichsgrößen.

Bei der nunmehr folgenden Berechnung der Ausgleichsvorgänge werden sämtliche Ausgleichsgrößen durch Überquerung der betreffenden Buchstaben gekennzeichnet werden, während sich die Indizes 1 und 2 auf den Einschalt- bzw. Ausschaltaugenblick beziehen.

Bei geschlossenem Schalter ergibt sich die Differentialgleichung des Ausgleichsstromes im Transformator aus der Bedingung, daß die Summe sämtlicher Spannungen bei fehlenden eingepprägten elektromotorischen Kräften zu Null wird oder die Spannungen am Transformator entgegengesetzt gleich der Spannung am Kondensator ist. Also ist mit Bezug auf Abb. 2 bei geschlossenem Schalter

$$\bar{i}_T r + L \frac{d\bar{i}_T}{dt} = - \frac{1}{C} \int \bar{i}_C dt = - \frac{\bar{i}_A}{A}$$

und

$$\bar{i}_C + \bar{i}_A = \bar{i}_T,$$

wobei die Zeit  $t$  für alle Ausgleichsströme und Spannungen vom Schaltmoment ab zählt. Hieraus folgt die Gleichung

$$\frac{d^2 \bar{i}_T}{dt^2} + \left( \frac{A}{C} + \frac{r}{L} \right) \frac{d\bar{i}_T}{dt} + \frac{1}{LC} (1 + Ar) \bar{i}_T = 0. \quad (12)$$

Nun ist

$$\frac{C}{A} = T_e \quad (13)$$

die elektrische Zeitkonstante des Belastungskreises und

$$\frac{L}{r} = T_m \quad (14)$$

die magnetische Zeitkonstante der Transformatoroberspannungswicklung. Führen wir jetzt den Dämpfungsfaktor der freien Schwingung ein,

$$\delta = \frac{1}{2} \left( \frac{A}{C} + \frac{r}{L} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T_e} + \frac{1}{T_m} \right), \quad (15)$$

dessen reziproker Wert die Dämpfungszeitkonstante

$$T = \frac{1}{\delta} = \frac{2 T_e T_m}{T_e + T_m}, \quad (16)$$

ist, und setzen

$$\frac{1}{LC} (1 + Ar) = \nu_0^2, \quad (17)$$

so geht Gleichung (12) über in

$$\frac{d^2 i_T}{dt^2} + 2\delta \frac{d \bar{i}_T}{dt} + \nu_0^2 i_T = 0. \quad (18)$$

Derselben Differentialgleichung genügt auch die Ausgleichsspannung am Kondensator  $\bar{e}_c$ .

Die Lösung ist für Spannung und Strom

$$\bar{e}_c = \varepsilon^{-\delta t} (\alpha \sin \nu t + \beta \cos \nu t) \quad (19)$$

und

$$\bar{i}_T = \varepsilon^{-\delta t} (a \sin \nu t + b \cos \nu t), \quad (20)$$

wenn die Eigenfrequenz des Stromkreises

$$\nu = \sqrt{\nu_0^2 - \delta^2} \quad (21)$$

gesetzt wird.

Bei geöffnetem Schalter ist die Differentialgleichung des Stromes  $i'_c$  im Kondensator mit Ableitung

$$\frac{i'_c}{A} + \frac{1}{C} \int i'_c dt = 0,$$

oder, unter Berücksichtigung von Gleichung (13)

$$\frac{d i'_c}{dt} + \frac{i'_c}{T_e} = 0, \quad (22)$$

woraus während der Dauer der Öffnung folgt

$$i'_c = i_2 \varepsilon^{-\frac{t}{T_e}} \quad (23)$$

und ebenso

$$e'_2 = e_2 \varepsilon^{-\frac{t}{T_e}}, \quad (24)$$

wobei  $i_2$  und  $e_2$  die Augenblickswerte des Kondensatorstromes und der Kondensatorspannung im Augenblick der Schalteröffnung zur Zeit  $t_2$  sind, und die Zeit  $t$  hier vom Ausschaltmoment ab zählt.

Im Dauerbetrieb wird der Kondensator im Augenblick des jedesmaligen Wiedereinschaltens noch eine Restspannung  $e_{cR}$  haben, welche stets dieselbe Größe besitzt.

Das liefert entsprechend Abb. 3 die Bedingung für stationären Betrieb

$$e_2 \varepsilon^{-\frac{\tau_2}{T_e}} = e_{cR}, \quad (25)$$

wobei

$$e_2 = e_{c2} + \bar{e}_{c2} \quad (26)$$

ist. Die Kontinuität der Spannung im Einschaltmoment gibt die Bedingung

$$e_{cR} = e_{c1} + \beta. \quad (27)$$

Aus Gleichung (25) und (27) folgt

$$e_2 \varepsilon^{-\frac{\tau_2}{T_e}} = e_{c1} + \beta \quad (28)$$

oder in Verbindung mit Gleichung (26)

$$(e_{c2} + \bar{e}_{c2}) \varepsilon^{-\frac{\tau_2}{T_e}} = e_{c1} + \beta. \quad (29)$$

Hier ist  $e_{c1}$  und  $e_{c2}$  durch Gleichung (10) gegeben; setzt man noch den Wert von  $\bar{e}_{cR}$  aus Gleichung (19) ein, so folgt

$$e_{c1} + \beta = \left[ e_{c2} + \varepsilon^{-\delta \tau_1} (\alpha \sin \nu \tau_1 + \beta \cos \nu \tau_1) \right] \varepsilon^{-\frac{\tau_2}{T_e}}. \quad (30)$$

Diese Gleichung, welche ganz allgemein bei einer beliebigen Einstellung der Kontakte gilt, liefert eine Beziehung zwischen  $\alpha$  und  $\beta$ , welche wir mit Gleichung (16) auch in der Form schreiben können

$$-\alpha \varepsilon^{-\left(\frac{\tau_1}{T} + \frac{\tau_2}{T_e}\right)} \sin \nu \tau_1 + \beta \left( 1 - \varepsilon^{-\left(\frac{\tau_1}{T} + \frac{\tau_2}{T_e}\right)} \cos \nu \tau_1 \right) = -e_{c1} + e_{c2} \varepsilon^{-\frac{\tau_2}{T_e}}. \quad (31)$$

Eine weitere Gleichung für die Bestimmung der Integrationskonstanten erhalten wir durch Betrachtung des Ausgleichsstromes im Transformator, welcher mit der Kondensatorausgleichsspannung in der Beziehung steht

$$\bar{i}_T = C \frac{d\bar{e}_c}{dt} + A \bar{e}_c. \quad (32)$$

Gleichung (32) gibt in Verbindung mit Gleichung (20)

$$\bar{i}_T = \varepsilon^{-\delta t} \left[ (A\alpha - \delta C\alpha - C\nu\beta) \sin \nu t + (A\beta - \delta C\beta + C\nu\alpha) \cos \nu t \right], \quad (33)$$

woraus durch Vergleich mit Gleichung (19) als Beziehung zwischen den Integrationskonstanten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a$  und  $b$  folgt

$$\alpha (A - \delta C) - \beta C\nu = a, \quad (34)$$

$$\alpha C\nu + \beta (A - \delta C) = b. \quad (35)$$

Endlich haben wir noch zu berücksichtigen, daß wegen der Kontinuität des Stromes im Einschaltmoment der aus Gleichung (20) folgende Augenblickswert des Ausgleichsstromes für  $t = 0$  gleich dem negativen Wert des stationären Stromes nach Gleichung (6) für  $t = t_1$  sein muß, also

$$b = -i_{T1}. \quad (36)$$

Durch die Gleichungen (31), (34), (35) und (36) sind um die 4 Integrationskonstanten von Gleichung (19) und (20) bestimmt und somit der zeitliche Verlauf des Ausgleichsstromes und der Ausgleichsspannung vollständig bekannt. Die tatsächlichen Strom- und Spannungswerte in jedem Augenblick ergeben sich durch Überlagerung der stationären und der Ausgleichswerte während der Einschaltdauer  $\tau_1$ , d. h. für

$$t_1 \leq t \leq t_2 \quad e = e_c + \bar{e}_c \quad (37)$$

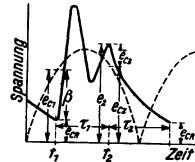


Abb. 3.

und

$$i = i_T + \bar{i}_T. \quad (38)$$

Während der Öffnungsdauer  $\tau_2$ , d. h. für  $t_2 \leq t \leq t_2 + \tau_2$  werden die Vorgänge durch die Gleichungen (23) und (24) beherrscht, so daß nunmehr Ströme und Spannungen für alle Zeiten bekannt sind.

#### 4. Dämpfung der Eigenschwingungen.

Als nächstliegendes Mittel, die Einschalterschwingungen zu vermeiden, erscheint die Möglichkeit, durch Anbringung eines Dämpfungswiderstandes<sup>1)</sup> den Einschaltvorgang aperiodisch zu machen. In diesem Fall ist die Frequenz der Ausgleichschwingung Null, und Gleichung (21) liefert die Bedingung

$$r_0^2 = \delta^2$$

oder

$$\frac{1}{LC}(1 + Ar) = \frac{1}{4} \left( \frac{A}{C} + \frac{r}{L} \right)^2,$$

hieraus folgt

$$r \cong \frac{L}{C} A \pm 2 \sqrt{\frac{L}{C}},$$

wobei natürlich  $r > 0$  sein muß.

Wir führen den Schwingungswiderstand

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (39)$$

ein, und erhalten

$$r \cong \pm 2Z + AZ^2. \quad (40)$$

Gleichung (40) zeigt, daß, wenn

$$A = \frac{2}{Z} \quad (41)$$

ist, der Einschaltvorgang auch aperiodisch verläuft, selbst wenn kein Dämpfungswiderstand  $r$  im Stromkreis vorhanden ist. In diesem Fall ist aber die Ableitung so groß, daß sie gewissermaßen einen Kurzschluß des Kondensators darstellt.

Macht man den Dämpfungswiderstand gleich dem durch Gleichung (40) gegebenen Grenzwert, so wird die Lösung von Gleichung (18) für Spannung und Strom<sup>2)</sup>

$$\bar{e}_c = (\alpha + \beta t) \varepsilon^{-\delta t} \quad (42)$$

und

$$\bar{i}_T = (a + b t) \varepsilon^{-\delta t}. \quad (43)$$

In gleicher Weise wie im vorhergehenden periodischen Fall werden die Integrationskonstanten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a$  und  $b$  berechnet, nachdem vorher die stationären Größen ermittelt worden sind. So ergeben sich die Gleichungen

$$\alpha \left( 1 - \varepsilon^{-\left(\frac{\tau_1}{T} + \frac{\tau_2}{T_0}\right)} \right) - \beta \tau_1 \varepsilon^{-\left(\frac{\tau_1}{T} + \frac{\tau_2}{T_0}\right)} = e_{c2} \varepsilon^{-\frac{\tau_2}{T_0}} - e_{c1}, \quad (44)$$

$$\alpha (A - \delta C) + C \beta = a, \quad (45)$$

$$\beta (A - \delta C) = b, \quad (46)$$

$$-i_{T1} = a, \quad (47)$$

<sup>1)</sup> Nach einem Vorschlag von G. Scharowsky und C. Roeren.

<sup>2)</sup> Vgl. z. B. Riemann-Weber: Die part. Differentialgleichung d. math. Phys. 6. Aufl. Braunschweig 1919. S. 145.

wovon sich noch Gleichung (44) vereinfacht, wenn  $\tau_1 \geq 3T$  ist und daher  $\varepsilon \frac{\tau_1}{T} \approx 0$  gesetzt werden kann, zu

$$\alpha = e_{c2} \varepsilon^{-\frac{\tau_2}{T}} - e_{c1}. \quad (48)$$

Die Überlagerung der stationären und Ausgleichsgrößen liefert wieder während der Einschaltdauer  $\tau_1$

$$e = e_c + \bar{e}_c \quad (49)$$

und

$$i = i_T + \bar{i}_T, \quad (50)$$

während innerhalb der Öffnungsdauer  $\tau_2$  wieder die Gleichung (23) und (24) gelten.

Für die Bemessung des Dämpfungswiderstandes ist außer dem Widerstandswert auch die in ihm in Wärme umgesetzte Leistung von Bedeutung.

Diese ist

$$w_r = \frac{1}{\tau_1} \int_{t_1}^{t_2} i^2 r dt \quad (51)$$

mit  $i$  entsprechend Gleichung (50). Dieses Integral ist zwar lösbar; jedoch ist das Ergebnis so kompliziert, daß es vorteilhafter ist, dasselbe numerisch auszuwerten.

Als Nutzleistung  $W_A$  der Gleichrichteranlage wollen wir die in der Ableitung des Kondensators verbrauchte Leistung ansehen. Diese erhält man durch Integration der mit der Ableitung multiplizierten Quadrate der durch die Gleichungen (24) und (49) dargestellten Spannungswerte über die entsprechenden Zeitintervalle.

$$w_A = \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^2 A dt. \quad (52)$$

Auch im periodischen Fall werden die Verluste durch Gleichung (51) und die Nutzleistung durch Gleichung (52) dargestellt, wobei aber der Strom  $i$  und die Spannung  $e$  entsprechend Gleichung (38) bzw. (24) und (37) einzusetzen sind. Diese Integrale werden ebenfalls am vorteilhaftesten numerisch berechnet.

Ein weiterer Weg zur Vermeidung von schädlichen Einschalterschwingungen und Überspannungen steht uns dadurch offen, daß wir durch geeignete Wahl des Einschaltmomentes die für die Amplitude der Schwingungen maßgebenden Spannungs- und Stromdifferenzen klein machen. Diese Forderung ist mit Bezug auf die Spannung leicht zu erfüllen, indem Einschaltmoment und Ausschaltmoment so gewählt werden, daß die Spannung am Verbraucher bis zum nächsten Wiedereinschalten auf einen Wert abgesunken ist, welcher der wiedereinzuschaltenden Spannung gleicht<sup>1)</sup>. Ebenso muß der Transformatorstrom, der bis zum Einschaltmoment Null ist, so geschaltet werden, daß er ohne Sprung in den stationären Wert übergeht, d. h. die Phase des stationären Stromes muß so beeinflußt werden, daß er im Einschaltmoment betriebsmäßig durch Null geht. Die mathematische Formulierung dieser Bedingungen liefert aber sehr komplizierte Gleichungen, die kaum zu einer praktischen Verwendung geeignet sind.

Es hat sich aber gezeigt, daß schon die Erfüllung der Bedingung für den sprungfreien Übergang der Spannungswerte im Einschaltmoment die Amplituden der Ausgleichsspannung, die dann nur noch von den Strompulsationen herrühren, im

<sup>1)</sup> Nach einem Vorschlag von R. Rüdénberg.

allgemeinen auf unschädliche Werte verringert. Wenn wir diese kleinen Spannungsschwingungen zulassen wollen, so können wir noch die Forderung stellen, daß im

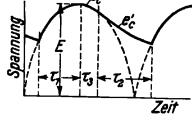


Abb. 4.

Ausschaltmoment die Neigung der Sinuskurve der Kondensatorspannung gleich der Neigung der anschließenden Exponentialkurve wird<sup>1)</sup>. Hierdurch wird der funkenfreie Ablauf des Kontaktarmes vom Segment begünstigt, da in dem dem Ablaufmomente folgenden Zeitintervall die Spannungsunterschiede zwischen den sich voneinander entfernenden Leitern klein gehalten werden, und gleichzeitig wird erreicht, daß der Mittelwert der Gleichspannung einen maximalen Wert erhält.

Die Bedingungen hierfür sind mit Bezug auf Abb. 4

$$E \cos \omega \tau_3 e^{-\frac{\tau_2}{T_e}} = E \cos \omega \tau_1 \quad (53)$$

und

$$\frac{d e_c}{d t} = \frac{d e'_c}{d t} \quad \text{für } t = \tau_3$$

oder

$$-E \omega \sin \omega \tau_3 = -\frac{1}{T_e} E \cos \omega \tau_3, \quad (54)$$

wobei noch

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \frac{\pi}{\omega} \quad (55)$$

ist. Wir setzen

$$\omega \tau_1 = \alpha, \quad \omega \tau_3 = \beta, \quad \omega \tau_2 = \gamma \quad \text{und} \quad \frac{1}{\omega T_e} = \kappa$$

und erhalten aus Gleichung (53), (54) und (55):

$$\cos \beta e^{-\kappa \gamma} = \cos \alpha, \quad (56)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \kappa, \quad (57)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi. \quad (58)$$

Nach einer bekannten Formel ist

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2}},$$

Daher nach Gleichung (56)

$$-\kappa \gamma = \ln \cos \alpha + \ln \sqrt{1 + \kappa^2} \quad (59)$$

und nach Gleichung (58)

$$\gamma = \pi - \alpha - \beta$$

und nach Gleichung (57)

$$\beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \kappa. \quad (60)$$

So erhalten wir aus Gleichung (59)

$$\kappa(\pi - \alpha) - \kappa \operatorname{arc} \operatorname{tg} \kappa + \ln \sqrt{1 + \kappa^2} = -\ln \cos \alpha. \quad (61)$$

Die Lösung dieser Gleichung (61) erfolgt in der Weise, daß wir

$$\kappa(\pi - \alpha) - \kappa \operatorname{arc} \operatorname{tg} \kappa + \ln \sqrt{1 + \kappa^2} = X_1$$

und

$$-\ln \cos \alpha = X_2$$

<sup>1)</sup> Nach einem Vorschlag von R. Rüdberg.

setzen und die verschiedenen  $\kappa$ -Werten, d. h. verschiedenen Zeitkonstanten entsprechenden geraden Linien  $X_1(\alpha)$  mit der Kurve  $X_2(\alpha)$  zum Schnitt bringen. Wir erhalten dann den Anlaufwinkel  $\alpha = \omega \tau_1$ , als Funktion der Zeitkonstanten  $T_e$ , wobei der Ablaufwinkel  $\beta = \omega \tau_3$  durch Gleichung (60) gegeben ist.

Aus den elektrischen Winkeln  $\omega \tau$  erhalten wir die entsprechenden räumlichen Winkel der Kontaktsegmente durch Umformung der Gleichung (2) zu

$$\bar{\alpha} = \omega \tau_1 \frac{180}{2\pi} \text{ Grad} \quad (62)$$

und

$$\bar{\beta} = \omega \tau_3 \frac{180}{2\pi} \text{ Grad} . \quad (63)$$

Das Kontaktsegment muß daher einen Öffnungswinkel von

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} = \frac{180}{2\pi} (\omega \tau_1 + \omega \tau_3) \text{ Grad} \quad (64)$$

erhalten und so eingestellt werden, daß die Kondensatorspannung ihren Maximalwert annimmt, wenn der Kontaktarm auf dem Segment einen Winkel von  $\bar{\alpha}$  Grad nach Gleichung (62) durchlaufen hat.

Die Lösungen der Gleichung (60) und (61) sind in Abb. 5 dargestellt, wo sowohl die elektrischen Winkel  $\omega \tau_1$  und  $\omega \tau_3$  als auch die räumlichen Winkel  $\bar{\alpha}$  und  $\bar{\beta}$  als Funktionen der Zeitkonstanten  $T_e$  bzw. der Größe  $\omega T_e$  dargestellt sind.

Die Überlegungen des letzten Abschnittes geben auch eine Lösung der Frage, auf welche Weise man ein Absinken der Spannung am Kondensator unter einem gegebenen Mindestwert verhindern und dadurch den Mittelwert der Gleichspannung erhöhen kann.

Soll die im Verlauf einer Arbeitsperiode auftretende Mindestspannung  $x\%$  der Spannungsamplitude betragen, so ist der Anlaufwinkel des Kontaktsegmentes gegeben durch

$$\omega \tau_1 = \arccos \frac{x}{100} . \quad (65)$$

Hierzu erhält man dann nach Abb. 5 den Ablaufwinkel  $\omega \tau_3$  bzw. die erforderlichen Segmentwinkel  $\bar{\alpha}$  und  $\bar{\beta}$ . Die zu  $\omega \tau_1$  gehörige Zeitkonstante sei  $T'_e$ , die ursprüngliche Zeitkonstante des Verbraucherkreises  $T_e$ .

Wenn

$$T_e \cong T'_e$$

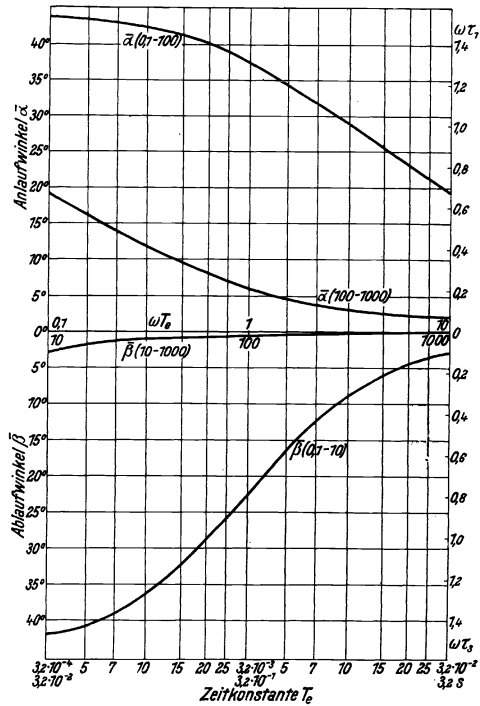


Abb. 5.

ist, so sinkt die Spannung überhaupt nicht unter den verlangten Grenzwert ab. Ist aber

$$T_e < T'_e,$$

so muß durch Zuschalten von Kapazität  $\Delta C$  im Verbraucherkreis die Zeitkonstante auf den erforderlichen Wert gebracht werden. Diese Bedingung liefert die Gleichung

$$T'_e = \frac{C + \Delta C}{A},$$

woraus folgt

$$\Delta C = A(T'_e - T_e). \quad (66)$$

Diese Frage ist von besonderer Bedeutung, wenn der Gleichrichter auf ein Staubfilter arbeitet. Die Wirkungsweise eines derartigen Filters beruht nämlich darauf, daß durch die Wirkung der „Sprühelektroden“ auf die Staubteilchen elektrische Ladungen übertragen werden, durch welche sie unter Einwirkung des elektrostatischen Feldes zu den „Niederschlagselektroden“ getrieben werden. Um eine möglichst günstige Ausnutzung des Filters zu erzielen, darf daher die Mindestspannung an den Sprühelektroden  $E_{\min}$  nicht den für die Durchbruchfeldstärke  $\mathcal{E}_r$  maßgebenden Wert unterschreiten<sup>1)</sup>, sondern soll besser noch etwas (20 bis 50%) darüber liegen.

Bestehen die Sprühelektroden aus einer Reihe von Drähten mit dem Radius  $r$  cm und dem Zwischenraum  $l$  cm, welche im Abstände  $h$  cm einer leitenden Fläche gegenübersteht, so ist die Mindestspannung, bei der der elektrische Durchbruch an der Drahtoberfläche beginnt, mit hinreichender Genauigkeit

$$E_{\min} = \mathcal{E}_r r \ln \frac{2h}{r}, \quad (67)$$

solange  $\frac{l}{2h} \cong 1,5$  ist. In diesem Fall beeinflussen sich die Felder der benachbarten Drähte nicht mehr<sup>2)</sup> und man kann die Feldstärke an der Drahtoberfläche so berechnen, als wenn nur ein einzelner Draht gegenüber einer leitenden Ebene vorhanden wäre. Die Werte der Durchbruchfeldstärke  $\mathcal{E}_r$  hängen, außer von der Luftdichte, wesentlich vom Drahtradius ab und sind experimentell ermittelt worden<sup>3)</sup>.

Hiernach geht die Gleichung (65) über in

$$\omega \tau_1 = \arccos \frac{(1,2 - 1,5) E_{\min}}{E_{\max}}, \quad (68)$$

wodurch auch  $\omega \tau_3$ ,  $T'_e$  und  $\Delta C$  bestimmt sind.

Im Anschluß an die vorhergehenden Betrachtungen wird zur Erhöhung der Leistungsfähigkeit eines Filters die Parallelschaltung von Kapazität oft zweckmäßig sein, zumal da die Kondensatoren durch eine nur wenig schwankende Gleichspannung außerordentlich günstig beansprucht werden und daher knapp dimensioniert und billig ausgeführt werden können.

## 5. Zahlenbeispiele.

Die im vorhergehenden Abschnitt entwickelten Formeln sollen jetzt an einem Zahlenbeispiel, welches sich auf eine bestimmte Elektrofilteranlage bezieht, erläutert werden. Dabei ist eine Gleichrichteranordnung entsprechend Abb. 1 zugrunde gelegt.

<sup>1)</sup> Nach einem Vorschlag von R. Rüdtenberg.

<sup>2)</sup> Vgl. F. Noether: Über eine Aufgabe der Kapazitätsberechnung. Wissenschaftl. Veröffentl. a. d. Siemens-Konzern Bd. II, S. 198. 1922.

<sup>3)</sup> Vgl. W. O. Schumann: Elektrische Durchbruchfeldstärke. Berlin: Julius Springer. 1923. S. 81.



Die Oberspannungsamplitude einer halben Transformatorwicklung sei

$$E = 65\,000 \cdot 1,41 = 92\,000 \text{ Volt,}$$

ihre Streuinduktivität

$$L = 25 \text{ Henry}$$

und ihr Widerstand

$$r = 10\,000 \text{ Ohm}$$

bei einer Kreisfrequenz von

$$\omega = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ Per}/2\pi \text{ sec.}$$

Das Filter habe eine Kapazität

$$C = 10^{-9} \text{ Farad}$$

und einen Widerstand von

$$R = 2 \cdot 10^6 \text{ Ohm}$$

entsprechend einer Ableitung von

$$A = 5 \cdot 10^{-7} \text{ Siemens.}$$

Wir wollen nun drei Fälle berücksichtigen, nämlich den Fall, bei welchem die Kontaktsegmente willkürlich bemessen sind und periodische Ausgleichsvorgänge auftreten, sodann den Fall, bei welchem bei willkürlicher Bemessung der Kontaktsegmente ein Dämpfungswiderstand verwendet wird, und endlich den Fall, bei welchem die Kontaktsegmente nach der gegebenen Vorschrift mit Rücksicht auf funkenfreien An- und Ablauf bemessen sind.

#### a) Periodischer Fall.

Mit den angegebenen Werten ist der Betrag des Richtwiderstandes  $\Re$  nach Gleichung (4)

$$|\Re| = 1,69 \cdot 10^6 \text{ Ohm}$$

und sein Argument nach Gleichung (5)

$$\varphi = -0,554 = -31^\circ 44',$$

daher der stationäre Transformatorstrom nach Gleichung (6)

$$i_T = 0,054 \sin(314t + 0,554) \text{ Amp.},$$

d. h. der Transformatorstrom eilt der Spannung um  $31^\circ 44'$  voraus.

Der Betrag des Richtleitwertes  $\alpha$  ist nach Gleichung (8)

$$|\alpha| = 5,9 \cdot 10^{-7} \text{ Siemens}$$

und sein Argument nach Gleichung (9)

$$\psi = 0,562 = 32^\circ 12',$$

daher die stationäre Kondensatorspannung nach Gleichung (10)

$$e_c = 92\,000 \sin(314t - 0,008).$$

Man sieht, daß die Kondensatorspannung sowohl der Größe als auch der Phase nach nahezu gleich der Transformatorspannung ist. Wir wollen annehmen, der Gleichrichter habe ein Kontaktsegment mit einem Öffnungswinkel von  $30^\circ$ , welches symmetrisch eingestellt sein soll, d. h. so, daß die Spannung durch ihren Maximalwert geht, wenn der Kontaktarm an der Mitte des Segmentes vorbeigeht. In diesem Fall ist die Kontaktzeit nach Gleichung (2)

$$\tau_1 = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$$

und die kontaktlose Zeit

$$\tau_2 = \frac{\pi}{\omega} - \tau_1 = 6,7 \cdot 10^{-3} \text{ sec.}$$

Das Einschalten erfolgt zur Zeit

$$t_1 = 3,35 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$$

und das Abschalten zur Zeit

$$t_2 = 6,65 \cdot 10^{-3} \text{ sec.}$$

Der stationäre Transformatorstrom im Einschaltmoment ist

$$i_{T_1} = 0,054 \text{ Amp.}$$

und die stationäre Kondensatorspannung im Einschaltmoment bzw. Ausschaltmoment

$$e_{c_1} = e_{c_2} = 80\,000 \text{ Volt.}$$

Die elektrische Zeitkonstante des Verbraucherkreises ist nach Gleichung (13)

$$T_e = 2 \cdot 10^{-3} \varepsilon c,$$

die magnetische Zeitkonstante des Transformatorkreises nach Gleichung (14)

$$T_m = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ sec.}$$

Der Dämpfungsfaktor der freien Schwingung nach Gleichung (15)

$$\delta = 450 \text{ 1/sec}$$

und die Dämpfungszeitkonstante der freien Schwingung nach Gleichung (16)

$$T = 2,22 \cdot 10^{-3} \text{ sec.}$$

Die Kreisfrequenz der freien Schwingung ist nach Gleichung (21)

$$\nu = 6300 \text{ Per}/2\pi \text{ sec}$$

entsprechend einer Frequenz von

$$f = 1000 \text{ Per/sec.}$$

Die Integrationskonstanten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a$  und  $b$  bestimmen sich aus den Gleichungen (31) (34), (35) und (36) zu

$$\begin{aligned} \alpha &= -2100 \text{ Volt} & \beta &= -77\,200 \text{ Volt} \\ a &= 0,486 \text{ Amp.} & \text{und } b &= -0,054 \text{ Amp.,} \end{aligned}$$

so daß der zeitliche Verlauf der Ausgleichsschwingungen gegeben ist durch

$$\bar{e}_c = -\varepsilon^{-450t} (2100 \sin 6300 t + 77\,200 \cos 6300 t) \text{ Volt}$$

und

$$\bar{i}_T = \varepsilon^{-450t} (0,486 \sin 6300 t - 0,054 \cos 6300 t) \text{ Amp.}$$

oder mit Hilfe einer einfachen trigonometrischen Formel umgeformt,

$$\bar{e}_c = -77\,230 \varepsilon^{-450t} \sin(6300 t + 1,544) \text{ Volt}$$

und

$$\bar{i}_T = 0,489 \varepsilon^{-450t} \sin(6300 t - 0,11) \text{ Amp.,}$$

wovon man die erste auch schreiben kann

$$\bar{e}_c = -77\,200 \varepsilon^{-450t} \cos 6300 t,$$

wenn man berücksichtigt, daß

$$1,544 = 88,5^\circ \approx \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

ist. Am Ende der Ausgleichperiode zur Zeit  $t_2$  hat die Kondensatorspannung den Wert

$$e_2 = 86\,500 \text{ Volt}$$

und verläuft während der Unterbrechungszeit entsprechend Gleichung (24) nach dem Gesetz

$$e'_c = 86\,500 \varepsilon^{-\frac{t}{2 \cdot 10^{-3}}} \text{ Volt.}$$

Der zeitliche Verlauf der Kondensatorspannung und des Transformatorstromes ist in Abb. 6 dargestellt.

#### b) Aperiodischer Fall.

Unter Zugrundelegung der gleichen Zahlenwerte wie im vorhergehenden Fall ist der Schwingungswiderstand entsprechend Gleichung (39)

$$Z = 1,58 \cdot 10^5 \text{ Ohm.}$$

Dann ist der zur aperiodischen Dämpfung erforderliche Widerstand nach Gleichung (40)

$$r = 3,29 \cdot 10^5 \text{ Ohm,}$$

wovon schon  $0,1 \cdot 10^5$  Ohm im natürlichen Widerstand der Transformatorwicklung vorhanden sind. Weiter ist

$$|\Re| = 1,97 \cdot 10^6 \text{ Ohm}$$

und

$$\varphi = -0,468 = -26,8^\circ,$$

sowie

$$|\alpha| = 5,9 \cdot 10^{-7} \text{ Siemens}$$

und

$$\psi = 0,562 = 32,2^\circ.$$

Der stationäre Transformatorstrom ist dann

$$i_T = 0,047 \sin(314t + 0,468) \text{ Amp.}$$

und die stationäre Kondensatorspannung

$$e_c = 80\,000 \sin(314t - 0,094) \text{ Volt.}$$

Der stationäre Transformatorstrom im Einschaltmoment ist

$$i_{T1} = 0,047 \text{ Amp.}$$

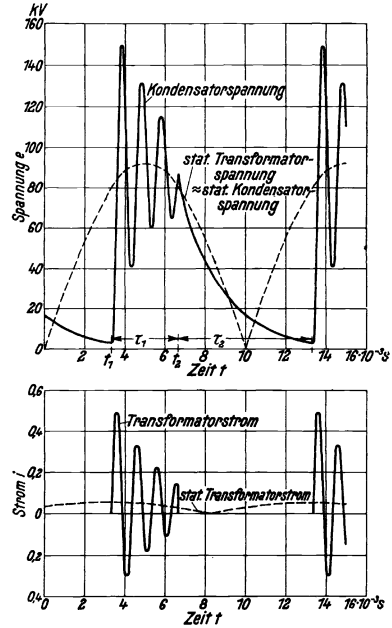


Abb. 6.

und die stationäre Kondensatorspannung im Einschalt- bzw. Ausschaltmoment

$$e_{e1} = 65\,000 \text{ Volt,}$$

$$e_{e2} = 73\,000 \text{ Volt.}$$

Die elektrische Zeitkonstante des Verbraucherkreises ist wieder

$$T_e = 2 \cdot 10^{-3} \text{ sec,}$$

die magnetische Zeitkonstante des Transformatorkreises jetzt

$$T_m = 7,6 \cdot 10^{-5} \text{ sec,}$$

der Dämpfungsfaktor

$$\delta = 6850 \text{ 1/sec}$$

und die Dämpfungszeitkonstante

$$T = 1,46 \cdot 10^{-4} \text{ sec.}$$

Die Integrationskonstanten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a$  und  $b$  bestimmen sich aus den Gleichungen (44) (45), (46) und (47) zu

$$\alpha = -63\,200 \text{ Volt,} \quad \beta = -4,47 \cdot 10^8 \text{ Volt/sec,}$$

$$a = -0,047 \text{ Amp.} \quad \text{und} \quad b = 2,84 \cdot 10^3 \text{ Amp./sec.}$$

Der Verlauf des Ausgleichvorganges wird demnach entsprechend Gleichung (42) und (43) wiedergegeben durch

$$\bar{e}_e = -\varepsilon^{-6850t} (63\,200 + 4,47 \cdot 10^8 t)$$

und

$$\bar{i}_T = \varepsilon^{-6850t} (-0,047 + 2840 t).$$

Die Kondensatorspannung klingt während der Unterbrechungszeit von dem Wert zur Zeit  $t_2$

$$e_2 \approx e_{e2} = 65\,000 \text{ Volt}$$

nach der Exponentialfunktion

$$e_e = 65\,000 \varepsilon^{-\frac{t}{2 \cdot 10^{-3}}} \text{ Volt}$$

ab.

Kondensatorspannung und Transformatorstrom sind in ihrem zeitlichen Verlauf in Abb. 7 dargestellt.

Durch numerische Integration wurde der Verlust im Dämpfungswiderstand  $W_r$ , entsprechend Gleichung (51), sowie die Nutzleistung  $W_A$  entsprechend Gleichung (52) bestimmt. Es ergab sich

$$W_r = 1,2 \text{ kW,}$$

$$W_A = 1,1 \text{ kW,}$$

woraus wir den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{W_A}{W_A + W_r} = 0,48$$

berechnen.

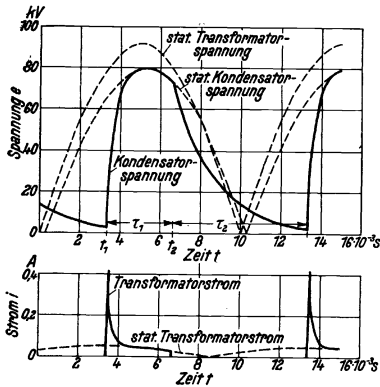


Abb. 7.

## c) Funkenfreier An- und Ablauf.

Unter Zugrundelegung der gleichen Zahlenwerte wie im periodischen Fall ist für eine elektrische Zeitkonstante des Verbraucherkreises

$$T_e = 2 \cdot 10^{-3} \text{ sec,}$$

nach Abb. 5

$$\bar{\alpha} = 40^\circ, \quad \bar{\beta} = 29^\circ,$$

daher nach Gleichung (2)

$$\tau_1 = 7,7 \cdot 10^{-3} \text{ sec,} \quad \tau_2 = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ sec,}$$

und

$$t_1 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ sec,} \quad t_2 = 8,2 \cdot 10^{-3} \text{ sec.}$$

Die Momentanwerte der Spannung und des Stromes im Einschalt- bzw. Ausschaltmoment sind

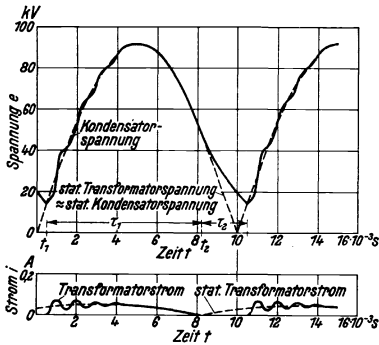


Abb. 8.

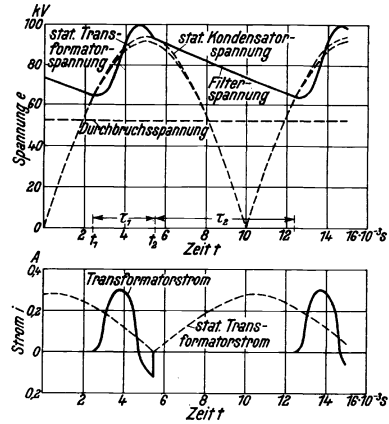


Abb. 9.

$$e_{c1} = 14\,000 \text{ Volt,} \quad e_{c2} = 49\,000 \text{ Volt,}$$

$$i_{T1} = 0,035 \text{ Amp.}$$

Dann berechnen sich die Konstanten der Ausgleichsschwingung zu

$$\alpha = -5600, \quad \beta = 0,$$

$$a = 0, \quad b = -0,035,$$

so daß der Verlauf der Ausgleichsgrößen gegeben ist durch

$$\bar{e}_c = -\varepsilon^{-450t} 5600 \sin 6300 t \text{ Volt}$$

und

$$\bar{i}_T = -\varepsilon^{-450t} 0,035 \cos 6300 t \text{ Amp.}$$

Während der Unterbrechungszeit klingt die Kondensatorspannung nach der Funktion

$$e'_c = 49\,000 \varepsilon^{-2 \cdot 10^{-3} t} \text{ Volt}$$

ab.

Ab. 8 zeigt den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung und des Transformatorstromes.

Bei der betrachteten Filteranlage sollen die Sprühelektroden aus Drähten mit einem Radius  $r = 0,25$  cm bestehen, und einen seitlichen Zwischenraum  $l = 36$  cm, sowie einen Abstand von der Niederschlagsselektrode von  $h = 10$  cm haben. Die Durchbruchfeldstärke ist für Drähte mit  $r = 0,25$  cm nach W. O. Schumann, Elektrische Durchbruchfeldstärke, S. 82, Abb. 42.

$$E_r = 48 \text{ kV/cm},$$

daher nach Gleichung (67)

$$E_{\min} = 52,5 \text{ kV}$$

und nach Gleichung (68)

$$\omega \tau_1 = \arccos \frac{1,2 \cdot 52,5}{92} = 47 \text{ el. Grad.}$$

Hierzu liefert Abb. 5 den Ablaufwinkel  $\omega \tau_2 = 0,16$  bzw.

$$\bar{\alpha} = 23,5^\circ, \quad \bar{\beta} = 4,5^\circ,$$

sowie die Zeitkonstante  $T'_e = 19 \cdot 10^{-3}$  sec.

Daher ist die zuzuschaltende Kapazität

$$\Delta C = 8,5 \cdot 10^{-9} \text{ Farad},$$

ein Wert, der sowohl mit Rücksicht auf den Raumbedarf als auch auf die Mehrkosten wohl ausführbar ist. Den unter diesen Umständen zu erwartenden Verlauf von Spannung und Strom zeigt Abb. 9.

## 6. Diskussion der Kurven.

Die Abb. 6, welche sich auf den periodischen Fall bezieht, zeigt, daß während des Schalterschlusses die Erscheinungen durch die Ausgleichsvorgänge beherrscht werden. Die Spannung sowohl als auch der Strom schwingen mit großen Amplituden. Die höchste auftretende Spannung ist 149 000 Volt entsprechend einer Überspannung von 62%. Da die Amplitude der Ausgleichsspannung, welche hier 84% der Amplitude der stationären Spannung beträgt, wesentlich von dem Spannungsunterschied der zusammenschaltenden Stromkreise abhängt, kann unter besonders ungünstigen Verhältnissen — Fehlen der Restspannung, Einschalten bei der Spannungsamplitude und kleiner Dämpfung — eine Überspannung bis zu 100% auftreten. Die Spannung beim Ablauf des Kontaktarmes vom Segment ist je nach der Segmentbreite größer oder kleiner als der stationäre Spannungswert. Beim Ausgleich der Spannungen treten Sprungwellen auf, welche sich von der Schaltstelle aus nach beiden Richtungen hin ausbreiten und beim Auftreffen auf die Transformatorwicklung die Eingangswindungen beschädigen können, während die hohen Überströme, welchen den neunfachen Wert des stationären Stromes erreichen, eine Zerstörung der Kontakte begünstigen und überflüssige Verluste hervorrufen.

Im aperiodischen Fall nach Abb. 7 werden zwar Überspannungen vermieden, jedoch tritt nicht nur im Dämpfungswiderstand ein beträchtlicher Spannungsabfall, sondern auch ein erheblicher Energieverlust auf. Bei einer Amplitude der Transformatorspannung von 92 000 Volt erscheint am Kondensator eine Höchstspannung von 80 000 Volt, so daß die nutzbare Gleichspannung ein Maximum von 87% der aufgewandten maximalen Wechselfeldspannung beträgt. Außerdem werden im Dämpfungswiderstand 52% der gesamten im Stromkreis umgesetzten Energie vernichtet und es

tritt immer noch eine ungünstige Belastung des Transformators durch die Stromspitze kurz nach dem Einschalten auf. So erscheint die Verwendung eines Dämpfungswiderstandes, selbst wenn man ihn nicht auf den aperiodischen Grenzwert steigern wollte, nicht als zweckmäßig.

Dagegen liefert eine Bemessung der Kontaktsegmente nach den vorher entwickelten Regeln, wie Abb. 8 zeigt, günstige Betriebsverhältnisse. Es treten zwar kleine Schwingungen auf; aber die Amplitude der Ausgleichsspannung ist jetzt nur noch 6% der stationären Spannungsamplitude und der höchste Überstrom ist nur das 1,3fache der stationären Stromamplitude. Ändert sich die Belastung, so kann man die Breite der Kontaktstücke von Hand oder automatisch der jeweiligen Belastung anpassen, oder aber durch Parallelschaltung von Wechselstromwiderständen, insbesondere von Kapazitäten, zum Verbraucherkreis, welche in Abhängigkeit von der Belastung reguliert werden, erreichen, daß Anlaufpunkt und Ablaufpunkt den durch Gleichung (60) und (61) gegebenen Bedingungen entsprechen. Ändert sich die Belastung in dem Sinne, daß der Widerstand des Verbraucherkreises größer wird (Entlastung Leerlauf), so ist bei unveränderter Einstellung der Kontaktsegmente die erste Amplitude der Ausgleichsschwingung nach unten gerichtet und es entsteht ebenfalls keine Überspannung.

Beim Zuschalten von Kapazität tritt, wie Abb. 9 zeigt, eine Spannungserhöhung von 2000 Volt am Kondensator auf. Die Frequenz der Ausgleichsschwingung ist auf  $\frac{1}{3}$  ihres bisherigen Wertes gesunken. Infolge der größeren Ströme ist jetzt die Amplitude der Ausgleichsschwingung auf 12 000 Volt entsprechend 13% der stationären Spannungsamplitude angestiegen. Es tritt daher eine geringe Überspannung von 11% der stationären Transformatorspannung auf, welche für die Anlage gefahrlos ist. Die Spannung am Filter bleibt dauernd oberhalb des Wertes der Durchbruchspannung, so daß das Filter während der ganzen Zeit arbeitet.

Bei den vorhergehenden Betrachtungen ist der Funkenwiderstand der beim Vorbeilauf des Kontaktarmes am Segment auftretenden Funken nicht berücksichtigt worden. Durch die Gestalt der Funkencharakteristik, welche wesentlich von der Schlagweite, der Eigenfrequenz des Stromkreises und der Größe der auftretenden Ströme abhängt, können natürlich Schwingungen angefacht werden, welche Abweichungen von dem berechneten Strom- und Spannungsverlauf verursachen.

## 7. Zusammenfassung.

Wenn ein Nadelgleichrichter auf einem Stromkreis arbeitet, welcher Kapazität und Verlustwiderstand besitzt, so treten infolge des Abfallens der Kondensatorspannung während der Ausschaltzeit beim jedesmaligen Wiedereinschalten rasche Schwingungen und Überspannung auf, welche im ungünstigsten Fall — Abfall der Verbraucherspannung auf Null und Wiedereinschalten bei der Amplitude der Betriebsspannung — den doppelten Wert der Betriebsspannung erreichen können. Die Überspannung nähert sich unter gedämpften Schwingungen, deren Frequenz wesentlich durch die Streuinduktivität des Transformators und die Kapazität des Spannungsverbrauchers bestimmt ist, dem Wert Null. Je nach dem Verhältnis von Eigenschwingungszeit zur Kontaktzeit kann beim Ablauf des Kontaktarmes vom Segment eine Über- oder Unterschreitung der gewünschten Spannung eintreten.

Die tatsächliche Größe der Überspannung hängt einerseits von der Größe der Dämpfung, andererseits von der Einstellung der Kontakte ab. Insbesondere läßt

es die Abhängigkeit der Überspannung von der Einstellung der Kontakte als zweckmäßig erscheinen, die erste Einstellung im Prüffeld bei verminderter Spannung vorzunehmen, um eine Gefährdung der Anlage zu vermeiden.

Das Auftreten der Schwingungen läßt sich verhindern durch Einschalten eines Dämpfungswiderstandes, für dessen geeigneten Widerstandswert eine Formel angegeben wird. Jedoch ist die Anwendung von Dämpfungswiderständen mit erheblichen Spannungs- und Energieverlusten verbunden.

Vorteilhafter ist es, die Kontaktsegmente so zu bemessen und einzustellen, daß im Augenblick des Einschaltens Kondensator- und Transformatorspannung einander gleich sind und im Augenblick des Abschaltens die Sinuskurve der Transformatorspannung und die Exponentialkurve der Kondensatorspannung gleiche Neigung haben. In diesem Fall tritt nicht nur praktisch schwingungsfreies Einschalten, sondern auch funkenfreies Abschalten ein und man erzielt gleichzeitig einen maximalen Mittelwert der Gleichspannung. Außerdem ist dann der Leerlauf ungefährlich, weil dabei keine Überspannungen auftreten.

In Fällen, wo ein möglichst hoher Mittelwert der Gleichspannung erwünscht ist, kann es zweckmäßig sein, dem Verbraucherkreis Kondensatoren parallel zu schalten. Da diese Kondensatoren durch eine nur schwach pulsierende Gleichspannung sehr günstig beansprucht sind, können sie im allgemeinen mit kleinem Raumbedarf und billig ausgeführt werden. Bei Staubfiltern ist es zur Steigerung der Leistungsfähigkeit zu empfehlen, die Spannung an den Sprühelektroden dauernd oberhalb des Wertes der Durchbruchsspannung zu halten, was ebenfalls durch Parallelschaltung von Kondensatoren in einfacher und billiger Weise erreicht werden kann. Mittelwert und Mindestwert fallen zusammen bei einer glatten Gleichspannungskurve. Demnach werden die beiden für eine leistungsfähige Gleichrichteranlage aufzustellenden Forderungen nach einem möglichst hohen Mittelwert und Mindestwert durch eine weitgehende Glättung der Spannungskurve gleichzeitig erfüllt. Über die durch Verwendung von Kondensatoren gegebenen Möglichkeiten hinaus können weitere Fortschritte in dieser Richtung durch Gleichrichtung von Mehrphasenspannungen erzielt werden.



# Ein hochempfindliches Röhrengalvanometer mit Gleichstromrückkoppelung.

Von Robert Jaeger und Helmut Scheffers.

Mit 5 Textabbildungen.

Eingegangen am 3. Januar 1925.

Mitteilung aus dem Physikalischen Laboratorium des Wernerwerkes M der Siemens & Halske A.-G. zu Siemensstadt.

An einer früheren Stelle<sup>1)</sup> dieser Zeitschrift wurde ein „Röhrengalvanometer“ beschrieben, mit dem sehr schwache Ströme unter Verwendung einer Verstärker- röhre mit einem gewöhnlichen Zeigerstrommesser gemessen werden können. In bezug auf die dabei einzuhaltenden physikalischen Bedingungen kann auf jene Arbeit verwiesen werden. Später sind noch eine ganze Reihe weiterer Veröffentlichungen anderer Autoren unter Aufwand von viel Druckerschwärze erschienen, die zeigen, daß die Verfasser sich das Prinzipielle der Methode nicht klargemacht haben.

Wir haben ausführlich die Bedin- gungen besprochen, die eingehalten wer- den müssen, wenn man eine Verstärker- röhre als hochempfindliches Gleich- stromgalvanometer benutzen will, und es wurde gezeigt, daß sich bei einem in- neren Widerstand von  $10^{10}$  Ohm ein Galvanometer bauen läßt mit einer Stromempfindlichkeit von etwa  $5 \cdot 10^{-13}$  Amp./scal. Diese Empfindlichkeits- grenze war unter anderem durch die erreichte Steilheit der Rohrcharakteri- stik bedingt.

Im folgenden soll nun ein neues Prinzip angegeben werden, das es er- möglicht, die statische Charakteristik des Rohres wesentlich steiler zu gestalten, nicht durch den Bau des Rohres selbst, der wohl damals schon ziemlich optimal war, son- dern durch eine besondere Schaltung. Dadurch kann man zu noch größeren Strom- empfindlichkeiten gelangen oder aber mit weniger hohen Widerständen auskommen.

Der weitere Vorteil liegt darin, daß man eine sehr bedeutende Spannungs- empfindlichkeit der Meßapparatur erhält. Der Gedanke der Schaltung liegt darin,

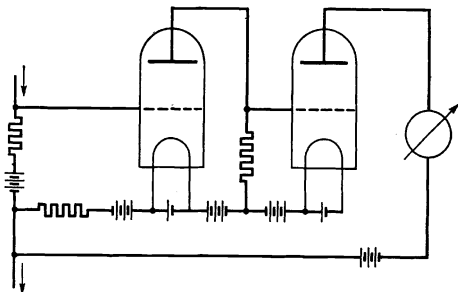


Abb. 1. Röhrengalvanometer mit zwei in Kaskade geschalteten Verstärkerröhren. Der Anodenstrom des zweiten Rohres fließt über einen im Gitterkreis des ersten Rohres liegenden zweiten Widerstand.

<sup>1)</sup> K. W. Hauber, R. Jaeger und W. Vahle: Röhrengalvanometer. Wissenschaftl. Veröffentl. a. d. Siemens-Konzern Bd. II. 1922.

den verstärkten Strom über einen zweiten Widerstand zu leiten, der so in den Gitterkreis gelegt wird, daß der an seinen Enden auftretende Spannungsunterschied die primäre Spannungsänderung des Gitters in gleichem Sinne beeinflusst, so daß eine sich gegenseitige unterstützende Verstärkung auftritt. Man hat es hier also mit einer Art galvanischer Gleichstromrückkopplung zu tun. Abb. 1 zeigt, wie dieses Prinzip mit Hilfe von zwei in Kaskade geschalteten Verstärkerröhren verwirklicht werden kann. In diesem Fall wird der Anodenstrom des zweiten Rohres über einen Widerstand dem Steuergitter des ersten Rohres wieder zugeführt. Fließt z. B. ein Strom in der angegebenen Richtung, so wird das Steuergitter des ersten Rohres positiver. Dies hat zur Folge, daß der Anodenstrom dieses Rohres größer wird. Dadurch wird die Spannung am Widerstand des zweiten Rohres negativer und der Anodenstrom des gleichen Rohres mithin kleiner. Wie sich aus der Betrachtung der Abbildung ergibt, gibt diese Stromänderung im Gitterkreis des ersten Rohres eine

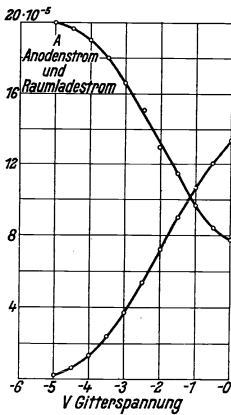


Abb. 2. Anodenstrom und Raumladestrom eines Verstärkerröhres in Abhängigkeit von der Gitterspannung.

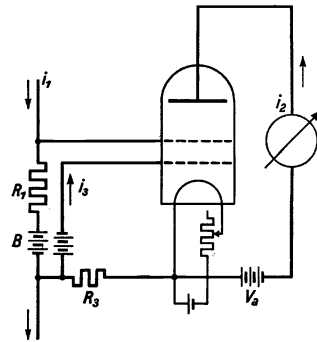


Abb. 3. Gleichstromrückkopplungsschaltung mit einem Verstärkerröhre bei Benutzung des Raumladestroms.

Gitterspannungsänderung im gleichen Sinn wie der primäre Strom. Benutzt man nur ein Rohr, so ist es nicht möglich, den Anodenstrom für die Rückkopplung zu benutzen, da die Änderung im falschen Sinne erfolgt. Abb. 2 zeigt aber, daß man bei Benutzung eines Raumladegitters auch mit einer Röhre zu einer brauchbaren Schaltung kommen kann, da Anoden- und Raumladestrom sich entgegengesetzt ändern. Die Schaltung mit einem Rohr gibt Abb. 3 wieder.

Die Stromrichtungen sind in der Abbildung angedeutet, so daß man sich leicht von der Wirkungsweise der Anordnung an Hand der Abbildung überzeugen kann. Der Widerstand  $R_1$  entspricht dem in dem ersten Röhrengalvanometer beschriebenen Gitterkreiswiderstand, d. h. er wird im Höchstfalle etwa  $10^{10} \Omega$  betragen können. Die Größe des Widerstandes  $R_3$  spielt für die Erhöhung des Verstärkungsgrades eine große Rolle. Ein Anhaltspunkt für seine Größe geht aus folgender Betrachtung hervor. Die gesamte Gitterspannung  $V_g$ , die zwischen dem Steuergitter und dem negativen Pol des Heizfadens liegt, setzt sich zusammen aus dem Spannungsabfall am Widerstand  $R_1$ , am Widerstand  $R_3$  und aus der notwendigen Vorspannung  $B$ . Es ist also

$$V_g = i_1 R_1 - i_3 R_3 + B. \quad (1)$$

Unter der Voraussetzung, daß die Charakteristiken durch gerade Linien ersetzt werden, gilt

$$i_3 = i_s - i_2, \tag{2}$$

wobei  $i_s$  den Sättigungsstrom des Rohres bedeutet, und

$$i_2 = \frac{V_g + \alpha V_A}{K}. \tag{3}$$

Man erhält also

$$V_g = \frac{i_1 R_1 + B - i_s R_3 + \frac{V_A}{K} \alpha R_3}{1 - \frac{R_3}{K}} \tag{4}$$

oder für die Abhängigkeit der Gitterspannung von dem über  $R_1$  fließenden Gleichstrom

$$\frac{dV_g}{d i_1} = \frac{R_1}{1 - \frac{R_3}{K}}, \tag{5}$$

Aus dieser Formel geht hervor, daß für  $R_3 > K$  der Ausdruck negativ wird und für unser Problem nicht in Frage kommt. Für  $R_3 = K$  erhält man „unendlich“ hohe Verstärkung, und für  $R_3 < K$  nimmt der Verstärkungsgrad mit fallendem  $R$  hyperbolisch ab. Er drückt sich aus in einer hohen Steilheit der statischen Charakteristik.

Die Wirkung der in den Raumladekreis geschalteten Widerstände haben wir experimentell untersucht. In der Abb. 4 sind einige Kennlinien mit verschiedenen Widerständen im Raumladekreis und zum Vergleich die Kennlinie ohne Widerstand in demselben aufgetragen.

Die Kurven wurden in folgender Weise aufgenommen.

An Stelle des hochohmigen Widerstandes, über den der zu messende Strom fließen müßte, wurde eine an einem Potentiometer liegende Gleichspannung angelegt. Würde man ohne weiteres die Abhängigkeit des Anodenstromes von dieser Spannung bei verschiedenen Widerständen  $R_3$  aufnehmen, so würde man nicht richtig verfahren, da sich gleichzeitig mit dem Anodenstrom der Raumladestrom ändert und mit diesem, wie man aus der Schaltung leicht erkennt, die Raumladespannung. Da man aber für die verschiedenen Charakteristiken von der gleichen Raumladespannung (7 Volt) und der gleichen Steuergittervorspannung (-2 Volt) ausgehen muß, ist es notwendig, für jede Kurve sich diese Verhältnisse durch entsprechenden Anodenstrom herzustellen. Dazu wurde folgendermaßen verfahren: Man schließt zunächst  $R_3$  kurz, stellt sich die richtigen Spannungen ein und mißt den Anodenstrom. Sodann wird  $R_3$  eingeschaltet, wobei jedoch das Steuergitter nach wie vor über die Vorspannungsbatterie an der Kathode angeschlossen ist, und reguliert die Raumladespannung so ein, daß sich der ursprüngliche Anodenstrom einstellt. Schließlich wird das Steuer-

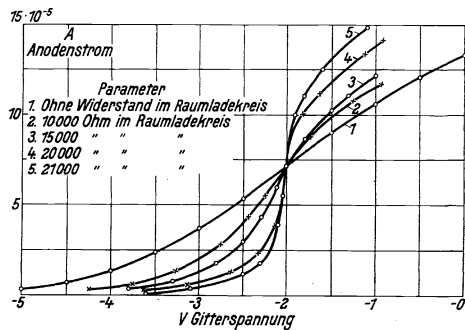


Abb. 4. Statische Kennlinienschar eines nach Abb. 3 geschalteten Rohres in Abhängigkeit von dem Widerstand  $R_3$  im Raumladekreis.

gitter an den Widerstand  $R_3$  angeschlossen, wie es die Schaltzeichnung Abb. 3 zeigt, und die Steuergittervorspannung so geändert, daß sich wiederum der alte Anodenstrom einstellt. Dann liegen überall die notwendigen Spannungen, und man hat den Ausgangspunkt, von dem aus man die Charakteristik aufnimmt.

Betrachtet man die Abb. 4, in der die Abszissen die Potentiometerspannungen, nach dem Gesagten also nur bei  $-2$  Volt, die wahre Gitterspannung darstellen, so sieht man, wie mit wachsendem Widerstand  $R_3$  die Steilheit der Charakteristik größer und größer wird. Die Steilheiten besitzen in Abhängigkeit von dem Widerstand folgende Werte:

$R_3$ $10^3$	Steilheit = $\Delta i$ für $\Delta V = 0,1$ Volt berechnet mit $K = 26\ 300$	exp.	$K$ berechnet	Steilheiten berechnet mit $K = 23\ 000$
0	$3,8 \cdot 10^{-6}$	$3,8 \cdot 10^{-6}$ Amp.	—	—
10	6,1	6,6	$2,36 \cdot 10^4$	6,7
15	8,8	12,8	$2,13 \cdot 10^4$	8,5
20	15,8	22,8	$2,40 \cdot 10^4$	27
21	18,7	40,0	$2,32 \cdot 10^4$	43
22	23,0	(200,0)	$2,24 \cdot 10^4$	84

Der aus der Theorie zu folgernde Wert, bei dem die maximalste Verstärkung auftritt, ist

$$R_3 = K = 2,63 \cdot 10^4, \quad \text{also} \quad 26\ 300 \ \Omega.$$

Dieser Wert von  $K$  wurde aus der normalen Charakteristik entnommen.

Daß die Abweichungen wenigstens z. T. auf die Unsicherheit der Bestimmung von  $K$  zurückzuführen sind, geht aus der vierten Rubrik hervor, die die aus den experimentell ermittelten Kurven berechneten  $K$  erhält. Ein verhältnismäßig kleiner Fehler von  $K$  bedingt nach unserer Formel einen ziemlich großen Fehler des Verstärkungsgrades. Deshalb werden mit einem mittleren  $K = 23\ 000$  die Steilheiten nochmals berechnet (5. Rubrik), die in besserer Übereinstimmung mit den experimentellen Werten sind.

Die Tabelle lehrt, daß die experimentell gefundene Steilheit in der Größenordnung ebenso mit dem Widerstand  $R_3$  im Raumladekreis ansteigt, wie es die Theorie verlangt, aber schneller. Bei einem Widerstand von etwa  $22\ 000 \ \Omega$  machen sich bereits Instabilitäten und Zieherscheinungen geltend, die im wesentlichen dem Heizstrom zuzuschreiben sind. Praktisch kann man bei den von uns gewählten Verhältnissen zu Vergrößerungen der Steilheit etwa um den Faktor 10 gelangen.

Im Augenblick bot es für das vorliegende Problem kein Interesse, diese Erscheinung weiter zu verfolgen.

Wir möchten nur noch kurz zeigen, wie durch den Heizstrom des Verstärkerrohres der Erreichung einer weiteren Erhöhung der Steilheit ein Ziel gesetzt wird. Rein qualitativ erklärt sich das dadurch, daß man, wenn im Raumladekreis ein Widerstand liegt, der einer recht steilen Charakteristik entspricht, eine schwache Änderung des Heizstromes eine entsprechend prozentual höhere Änderung des Emissionsstromes im Gefolge hat. Nehmen wir an, der Heizstrom hätte sich vergrößert, so würde außer dem Anodenstrom auch der Raumladegitterstrom größer. Eine Erhöhung desselben würde aber in dem Sinne wirken, daß das dem Steuergitter zugewandte Ende des im Raumladegitterkreis liegenden Widerstandes ein gegen die Kathode negativeres Potential erhält, so daß der Anodenstrom sinkt und der Raum-

ladestrom weiter steigt. Man hat also auch bei einer Veränderung des Heizstromes zwei Einflüsse, die sich in ihrer Wirkung unterstützen. Aus Gleichung (4) ist ersichtlich, daß sich für die Abhängigkeit der Gitterspannung vom Sättigungsstrom eine der Gleichung (5) ganz analoge Formel ergibt, es ist nämlich

$$\frac{dV_g}{d i_s} = \frac{-R_3}{1 - \frac{R_3}{K}}$$

Da ferner eine einprozentige Änderung des Heizstromes eine etwa 20 proz. Änderung des Emmissionsstromes bedingt, so ist die Abhängigkeit der Gitterspannung vom Heizstrom äußerst groß.

Abb. 5 zeigt, welchen Verlauf die Abhängigkeit des Anodenstromes vom Heizstrom hat für die folgenden Fälle: Einmal ohne Widerstand im Raumladekreis und bei den Widerständen  $R_3 = 22\,000$  und  $24\,000 \Omega$ . Daraus folgt die Notwendigkeit, bei einem Widerstand von  $22\,000 \Omega$ , also einer Verstärkung, die 50 mal größer ist als die normale, den Heizstrom auf Bruchteile eines Promille konstant zu halten. Bei unseren Messungen wurde der Heizstrom einer Akkumulatorenbatterie besonders hoher Kapazität entnommen.

Man kann die Empfindlichkeit der Schaltung noch wesentlich steigern, wenn im Anodenstromkreis eine Kompensationsschaltung benutzt und ein empfindliches Spiegelgalvanometer zur Messung der Anodenstromänderung verwendet wird. Dieses begegnet jedoch wegen der notwendigen Konstanz der Heizung großen experimentellen Schwierigkeiten.

Die Stromempfindlichkeit wird auch mit dem Zeiger galvanometer, dessen Stromwert pro Skalenteil ca.  $3 \cdot 10^{-7}$  Amp. entspricht, bei der zehnfachen Steilheit der Kennlinie bereits  $5 \cdot 10^{-14}$  Amp. (vgl. oben), so daß man damit schon an der Grenze der Isolationsfehler angelangt ist. Eine weitere Steigerung würde also rein praktisch nicht in Frage kommen.

Die Erhöhung der Spannungsempfindlichkeit, die für die Messung von Thermokräften usw. von Wichtigkeit ist, berechnet sich folgendermaßen: Ohne Kompensation ergab sich im Mittel für einen Skalenteil eine Spannungsänderung von  $10^{-3}$  Volt. Benutzt man im Anodenkreis ein Instrument von einer Empfindlichkeit von  $5 \cdot 10^{-10}$  Amp., also der tausendfachen Empfindlichkeit des Zeiger galvanometers, so ist man in der Lage, eine Spannungsänderung von  $10^{-6}$  Volt noch nachzuweisen.

### Zusammenfassung.

Bei dem Röhrengalvanometer fließt der zu messende Strom über einen im Gitterkreis liegenden hochohmigen Widerstand; die dadurch hervorgerufene Gitterspannungsänderung wird durch die Änderung des Anodenstromes gemessen. Die Voraus-

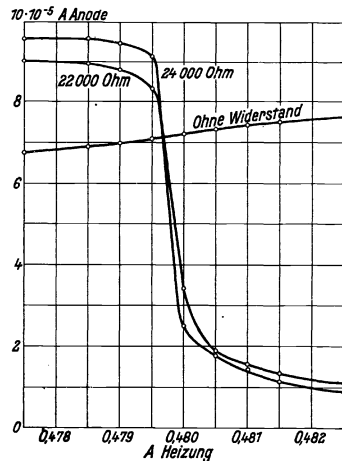


Abb. 5. Heizstromempfindlichkeit der Rückkopplungsschaltung bei verschiedenen Widerständen.

setzungen eines Röhrengalvanometers liegen in der Vermeidung jeden Nebenschlusses, also:

1. einer ausgezeichneten Gitterisolation,
2. Vermeidung von Ionisationsströmen im Rohr durch Verwendung einer Gitterspannung von nur 7 Volt.

Eine Erhöhung der Strom- und Spannungsempfindlichkeit des Instrumentes wird durch eine galvanische Gleichstromrückkopplung erreicht, die darin besteht, daß im Steuergitterstromkreis ein zweiter Widerstand  $R_3$  liegt, der so geschaltet ist, daß über diesen gleichzeitig der Raumladestrom fließt. Irgendeine primäre Änderung der Steuergitterspannung wirkt nun so, daß diese durch die am Widerstand  $R_3$  auftretende Spannungsänderung im gleichen Sinn weiter beeinflußt wird. Theoretisch läßt sich eine unendlich steile statische Charakteristik mit dieser Schaltung erzielen. Praktisch wurden wegen der auftretenden hohen Heizstromabhängigkeit nur ca. 10fach hohe Steilheiten benutzt. Die maximale Stromempfindlichkeit kann dann zu  $5 \cdot 10^{-14}$  Amp., die maximale Spannungsempfindlichkeit zu  $10^{-6}$  Volt angegeben werden.

---

#### Nachtrag bei der Korrektur.

Wie wir aus der neuen Auflage des Lehrbuches der drahtlosen Telegraphie von J. Zenneck und H. Rukop (F. Enke, Stuttgart, 1925) S. 613 ersehen, gibt es Röhrensenderschaltungen, welche eine Rückkopplung mittels eines im Anodenkreis einer zweiten Röhre liegenden Widerstandes benutzen. (M. Latour, Rad. Rev. 1, 471, 1920; L. B. Turner (Kallirotron), Rad. Rev. 1, 317, 469, 1920; A. Blondel, C. R. 169, 676, 1919; Scott-Taggart (Biotron), Radio Rev. 2, 601, 1921). Mit Hilfe der in unserer Arbeit angegebenen Phasenumkehr durch den Raumladegitterstrom lassen sich dieselben Schaltungen auch mit nur einer Röhre herstellen.

---

# Über die Strahlung der Feuergase.

Von Max Moeller und Hans Schmick.

Mit 7 Textabbildungen.

Mitteilung aus dem Wärmelaboratorium des Wernerwerk M der Siemens & Halske A.-G. Siemensstadt.

Eingegangen am 17. Januar 1925.

Kürzlich hat A. Schack<sup>1)</sup> einen allgemeinen Ausdruck für die Kohlensäure- und Wasserdampfstrahlung in technischen Feuerungen abgeleitet, aus dem sich quantitativ die Bedeutung ergibt, welche der Strahlung neben der Konvektion für den Wärmeübergang<sup>2)</sup> zukommt. Bekanntlich erfolgt die Emission und Absorption der Kohlensäure, des Wasserdampfes, des Kohlenoxyds usw. nicht kontinuierlich, sondern in bestimmten charakteristischen Bezirken des ultraroten Spektrums. Für jede der in Betracht kommenden ultraroten Banden eines Gases ermittelte nun Schack einmal den in das betreffende Wellenlängenintervall fallenden Teil der schwarzen Strahlung, dann die integrale Absorption dieser Strahlung in einer Gasschicht gegebener Stärke. Daraus folgt dann nach dem Kirchhoffschen Gesetz umgekehrt die Emission der Gasschicht in dem betreffenden Wellenlängengebiet. Die Schichtstärke ist dabei gegeben durch das Produkt  $p \cdot s$  aus Partialdruck  $p$  und Schichtdicke  $s$ . Tatsächlich dürfen bei konstantem Gesamtdruck des Gasvolumens, z. B. Atmosphärendruck, der Partialdruck und der Strahlenweg im Absorptionsgesetz miteinander vertauscht werden. Die genaueren Absorptionsdaten entnimmt Schack der Literatur. Sie wurden zumeist bei niedrigen Temperaturen gemessen, während doch die Strahlung für hohe Temperaturen berechnet werden soll. Es hat sich aber gezeigt, daß bei konstantem Gesamtdruck, z. B. Atmosphärendruck, die Absorption größenordnungsgemäß wenigstens bis zu etwa  $1000^\circ\text{C}$  temperaturunabhängig ist. Die Anwendung des Kirchhoffschen Gesetzes auf die Wärmestrahlung der Gase erscheint sichergestellt.

Auf Grund derartiger Überlegungen<sup>3)</sup> gelang es Schack, die vorliegenden physikalischen Messungen zu einer einheitlichen Gesetzmäßigkeit zusammenzufassen. Allerdings bietet die Berücksichtigung der Feinstruktur der Banden ziemliche Schwierigkeiten; ferner mußte der Abhängigkeit der Bandenbreite vom Partialdruck durch Hilfsfaktoren Rechnung getragen werden. Was das Zahlenmaterial betrifft, so lassen

<sup>1)</sup> A. Schack: Über die Strahlung der Feuergase und ihre praktische Berechnung. Z. techn. Phys. 1924, Nr. 6, S. 267. — Der Wärmeübergang in technischen Feuerungen unter dem Einfluß der Eigenstrahlung der Gase. Mitt. Nr. 55 Wärmestelle Düsseldorf. 10. Dez. 1923.

<sup>2)</sup> Vgl. A. Schack und K. Rummel: Die Anwendung der Gesetze des Wärmeüberganges und der Wärmestrahlung auf die Praxis. Mitt. Nr. 51 Wärmestelle Düsseldorf. 5. Aug. 1923.

<sup>3)</sup> Die eingehende Darlegung und die physikalische Literatur findet man bei A. Schack: Z. techn. Phys. 1924, Nr. 6, S. 267.

sich die Breite und die Absorptionszahlen der Banden mit einiger Sicherheit der Literatur entnehmen, doch sind nur wenige direkte Messungen der Emission quantitativ ausgeführt worden. Eine experimentelle Prüfung der Größenordnung der Gesamtstrahlung bei hohen Temperaturen erscheint daher berechtigt.

Lent und Thomas<sup>1)</sup> haben bereits eine derartige Prüfung an einer großen Brennerstrecke der Rheinischen Stahlwerke vorgenommen. Ihre Beobachtungen ergaben eine gute Bestätigung der Rechnung für die Verhältnisse der Praxis.

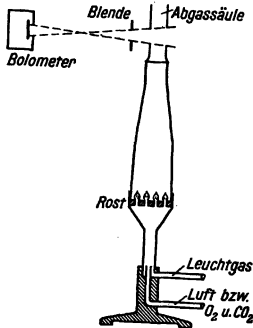


Abb. 1.

Wir haben nun ebenfalls, und zwar ursprünglich zu eigener Orientierung, versucht, die Größenordnung der Gasstrahlung zu messen, indem wir eine Reihe von Flammengasschichten am Bunsenbrenner untersuchten. Naturgemäß konnte es sich dabei nur um die Erlangung von Näherungswerten handeln, da einerseits das Zahlenmaterial, das der Schackschen Formel zugrunde liegt, noch ziemlich unvollkommen ist, da andererseits Messungen an kleinen Flammen eine Reihe nicht zu vermeidender Unsicherheiten mit sich bringen. Trotzdem erhielten wir eine Reihe von Vergleichszahlen, die übereinstimmende Größenordnung und übereinstimmende Abhängigkeit von Konzentration und Schichtdicke zeigten. Wir

berichten im folgenden über die Ergebnisse unserer Messungen, da wir glauben, daß derartige Versuche im Hinblick auf die sehr aktuelle Frage des Wärmeüberganges bei hohen Temperaturen allgemeinerem Interesse begegnen. Allerdings beziehen sich unsere Messungen nur auf bestimmte, leicht zu realisierende Fälle.

### I. Beschreibung der Versuchsanordnung.

Abb. 1 zeigt die Versuchsanordnung, soweit sie zur Strahlungsmessung diente.

Die Versuche wurden teils direkt an der Bunsenflamme, teils oberhalb eines auf den Brenner aufgesetzten Rohres ausgeführt. Der Rost verhinderte auch bei starker Luftzufuhr ein Durchschlagen der Flamme. Die dunkle Zone, an ihrem blaugrünen Saum kenntlich, bildete wie beim Mekerbrenner eine flache Schicht über dem Rost. Wurde das Rohr aufgesetzt, so erfolgte die Verbrennung je nach Luft- bzw. Sauerstoffzufuhr mehr oder minder vollständig im Inneren des Rohres. Auf diese Weise war es möglich, eine von unverbrannten Gasen freie Abgasschicht zu erhalten. Bei den meisten Versuchen hatte der kreisförmige, 3 mm starke Messingrost einen Durchmesser von 5 cm und enthielt 19 kreisförmige Löcher von 2,8 mm Weite. Die Leuchtgaszufuhr betrug 5 bis 10 l/Min. Das Aufsatzrohr aus Messing war mit einer wärmeisolierenden, 2 bis 4 mm starken Asbestschicht ausgekleidet und am oberen Ende etwas flachgedrückt, so daß ein Rechteck mit den Seitenlängen 19 und 45 mm entstand. Mit Hilfe geeigneter Strömungsmanometer, welche große Gasmengen durchließen, konnte die Gaszufuhr geregelt werden. Zur Konstanthaltung des Leuchtgases z. B. diente ein Schultzesches Mikromanometer. Mit dieser Anordnung erhielten wir bei genügender Gasgeschwindigkeit sehr glatt aufsteigende Gasschichten, deren Breitseite mit dem Bolometer anvisiert wurde.

<sup>1)</sup> H. Lent und K. Thomas: Versuche über die Eigenstrahlung der Gase. Mitt. Nr. 65 Wärmestelle Düsseldorf. 7. Okt. 1923.



Das Bolometer war als Wheatstonesche Brücke ausgebildet. Die 4 gleichartigen, durch ein starkwandiges Metallgehäuse geschützten Zweige der Brücke bestanden aus eng nebeneinander liegenden rußgeschwärzten Nickeldrahtspulen (Drahtstärke 0,07 mm) und hatten je etwa  $50 \Omega$  Widerstand. Zwei gegenüberliegende Zweige der Brücke boten der Strahlung zusammen eine Auffangfläche von etwa  $1 \text{ cm}^2$ . Ein wassergekühltes Ansatzrohr enthielt 2 kreisförmige Diaphragmen von 10 mm Durchmesser. Ihr Abstand betrug 50 mm (Blende Nr. 1) und 56 mm (Blende Nr. 2). Das innere Diaphragma befand sich dicht vor der Auffangfläche, das vordere so nahe am Strahler, daß der Öffnungskegel der Blende ganz mit der zu untersuchenden Strahlung ausgefüllt war. Es wurde wiederholt festgestellt, daß nur die innerhalb des Öffnungskegels eintretende Strahlung zur Wirksamkeit kam. Ein merklicher Einfluß der Luftkonvektion und der Wärmeleitung war nicht vorhanden.

Die Eichung des Bolometers erfolgte an einem besonders hergestellten schwarzen Körper, vgl. Abb. 2.

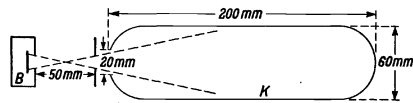


Abb. 2.

Dieser bestand aus einem durch 2 Halbkugeln abgeschlossenen kreiszylindrischen Eisenrohr. Das offene Ende des horizontal gelagerten Körpers wurde mittels eines kurzen Verbindungsrohres von 2 cm Durchmesser in der Seitenwand eines eisernen Topfes festgeschweißt. Die Heizung erfolgte mit Öl oder Natriumnitrit. Befand sich das Bolometer dicht vor der Öffnung, so war der Öffnungskegel vollständig mit schwarzer Strahlung ausgefüllt. Die Emission des beschriebenen Körpers dürfte der absolut schwarzen hinreichend nahe kommen. Zur Temperaturmessung bedienten wir uns eines geeichten Kupfer-Konstantan-Thermoelementes. Die Eichmessungen wurden immer erst dann ausgeführt, wenn das Thermoelement innerhalb des Hohlraumes und in der Heizflüssigkeit die gleiche Temperatur anzeigte. An einem leicht regulierbaren Kohlerohr, welcher ebenfalls weitgehend schwarz strahlte, untersuchten wir zunächst die Charakteristik des Bolometers. Innerhalb des Meßbereiches (die maximale Temperaturerhöhung der bestrahlten Zweige betrug nicht mehr als  $2^\circ$ ), ergab sich völlige Linearität des Bolometerausschlages in Abhängigkeit von der eingestrahltten Energie. Daher genügte an dem schwarzen Körper, dessen Temperatur nur sehr langsam verändert werden konnte, die Festlegung weniger Eichpunkte, welche geradlinig mit dem Nullpunkt verbunden wurden. Der Brückenausschlag wurde mit einem spitzengelagerten Präzisions-Millivoltmeter von Siemens & Halske, Meßbereich 15 mV, bei einem Primärstrom von 60 mA gemessen. Abb. 3 zeigt die Eichkurven der beiden zur Verwendung gekommenen Blendensysteme.

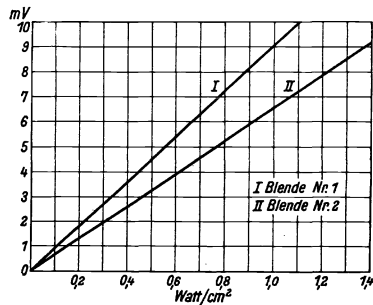


Abb. 3.

Blende Nr. 1 hatte 50 mm, Blende Nr. 2 56 mm Länge. Mit diesen Charakteristiken wurden die Messungen an der Flamme ausgewertet. Eine direkte Umrechnung der Strahlung des schwarzen Körpers auf die des Kohlerohrofens war wegen der Verschiedenheit der Öffnungskegel nicht möglich. Das Bolometer enthielt nämlich, wie

beschrieben, keine kontinuierliche Auffangfläche, sondern ein System von Drahtspulen, deren absorbierende Fläche sich nicht proportional dem Öffnungskegel ändert. Wir haben bei unseren Messungen vorausgesetzt, daß die mindestens  $30 \mu$  dicke Rußschicht des Bolometers keinen merklichen Gang der Absorption mit der Wellenlänge besitzt, so daß die Eichung bei tiefen Temperaturen (etwa  $300^\circ$ ) auf die Messung der Flammenstrahlung Anwendung finden darf.

Eine Auswertung der Strahlungsformel von Schack macht die Kenntnis der Temperatur und der chemischen Zusammensetzung der anvisierten Gasschicht erforderlich. Die Temperatur ermittelten wir nach der Methode des elektrisch geheizten Platindrahtes, welche von H. Schmidt<sup>1)</sup> erstmalig ausgeführt und eingehend beschrieben worden ist. Das Prinzip ist folgendes: Bringt man einen Platindraht in die Flamme, ohne elektrische Energie zuzuführen, so ist er infolge Abstrahlung erheblich kälter als die Flamme. Zunächst wird nun die Gesamtabstrahlung des horizontal ausgespannten, elektrisch erhitzten Drahtes bei einer Reihe von Temperaturen bolometrisch bestimmt. Wir erhalten eine Kurve der Abhängigkeit der Gesamtabstrahlung des Drahtes von der Temperatur (Kurve B in Abb. 4).

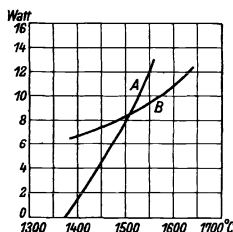


Abb. 4.

Zweitens wird die Abhängigkeit der elektrisch zugeführten Energie von der Temperatur gemessen, während der Draht sich in der frei brennenden, nichtleuchtenden Flamme befindet (Kurve A in Abb. 4). Beide Kurven kommen bei der Temperatur zum Schnitt, wo die abgestrahlte gleich der elektrisch aufgenommenen Energie ist. In diesem Falle nimmt der Pt-Draht keine Energie mehr aus der Flamme auf, hat also Flammentemperatur.

Die Drahttemperaturen wurden durch direktes Anvisieren mit dem Holborn-Kurlbaum-Pyrometer gemessen und mittels der für Platin bei einer Wellenlänge von  $0,65 \mu$  geltenden Beziehung zwischen der schwarzen und der wahren absoluten Temperatur<sup>2)</sup>

$$\frac{1}{S} - \frac{1}{T} = 495 \cdot 10^{-7}$$

auf  $^\circ\text{C}$  umgerechnet.

Mit Hilfe des oben beschriebenen Bolometers wurde die Gesamtabstrahlung des Meßdrahtes in Watt geeicht, so daß ein Vergleich mit der elektrisch zugeführten Energie möglich war. Der Draht von der Länge  $l$  war horizontal mitten im Gesichtsfeld des Bolometers dicht vor der vorderen Blendenöffnung ausgespannt.

Bezeichnet dann:

- $G$  die von einem  $\text{cm}^2$  der Drahtoberfläche abgestrahlte Gesamtenergie,
- $E$  die Gesamtabstrahlung des Meßdrahtes,
- $E_1$  die in das Bolometer hineingestrahlte Energie,
- $d$  den Drahtdurchmesser,
- $l_1$  die im Gesichtsfeld befindliche Drahtlänge,
- $f$  die Fläche der Blendenöffnungen,
- $a$  den Abstand beider Blenden,

<sup>1)</sup> H. Schmidt: Prüfung der Strahlungsgesetze der Bunsenflamme. Ann. Physik Bd. 29, S. 971. 1909.

<sup>2)</sup> F. Henning: Temperaturmessung. Anhang, Tabelle VII. Braunschweig 1915.

so strahlt der Draht unter Voraussetzung des Kosinus-Gesetzes mit einer wirksamen Fläche

$$l_1 \cdot d$$

und schiebt daher die Energie

$$E_1 = l_1 \cdot d \cdot G \frac{f}{a^2 \pi} \quad (1)$$

ins Bolometer. Andererseits ist

$$E = l d \cdot \pi \cdot G \quad (2)$$

die Gesamtabstrahlung des Meßdrahtes, so daß man aus (1) und (2) erhält:

$$E_1 = \frac{l_1}{l} \cdot \frac{E \cdot f}{\pi^2 \cdot a^2} \quad (3)$$

Bei der Messung entnimmt man nun aus der Eichkurve (Abb. 3) die den gemessenen mV entsprechende Strahlung  $S$  des schwarzen Körpers in Watt/cm<sup>2</sup>. Von dieser fällt in das Bolometer der Bruchteil

$$S \cdot \frac{f^2}{a^2 \cdot \pi}; \quad (4)$$

die vordere sowie die hintere Blende haben die Fläche  $f$ . Da wir mit großer Annäherung voraussetzen dürfen, daß alle Punkte der vorderen Blendenöffnung in bezug auf das Bolometer gleichwertig sind, so setzen wir (3) = (4). Daraus folgt

$$E = S \cdot f \cdot \pi \frac{l}{l_1}.$$

Für unseren Fall war nun  $f = \frac{\pi}{4}$  cm<sup>2</sup> und  $l_1 = 1$  cm. Daher erhalten wir für die Beziehung zwischen Eigenenergie und Gesamtenergie den Ausdruck

$$E = S \cdot l \cdot \frac{\pi^2}{4} \quad (5)$$

für die Gesamtabstrahlung des in einer Länge von  $l$  cm strahlenden Drahtes.

Der 6 bis 10 cm lange, 0,4 bis 0,5 mm starke Draht war mit dicken Kupferzuleitungen versehen und wurde horizontal, meist zur Schleife gebogen, in die Flamme gebracht. Da die Temperaturmessung nach Schmidt selbst auf eine Korrektur hinausläuft, so war eine Berücksichtigung der kälteren Drahtenden, welche etwa 5% der Gesamtlänge des Pt-Drahtes ausmachten, nicht notwendig.

Um die chemische Zusammensetzung der untersuchten Gassäule kennenzulernen, bedienten wir uns einer Platinkapillare von 0,2 mm Weite, deren nach unten gebogenes freies Ende sich in der Flamme befand. Die Kapillare war in einem Messingröhrchen luftdicht festgekittet. Nach vorheriger Wegnahme des Wasserdampfes in einem Phosphorperoxyd-Röhrchen wurde das Restgas in einer Hempelschen Bürette über Quecksilber aufgefangen und nach bekannten Methoden der Gasanalyse auf CO<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, CO, H<sub>2</sub> und Kohlenwasserstoffe untersucht. Der Wasserdampf wurde durch Wägung bestimmt. Wir arbeiteten mit Unterdrucken von 5 bis 15 cm Hg. Sind keine unverbrannten Gase mehr vorhanden, so liefert die Methode einwandfreie Ergebnisse. Aber auch bei Anwesenheit von CO und H<sub>2</sub> in der Flamme erhielten wir gleiche Resultate, wenn wir die Strömungsgeschwindigkeit um ein mehrfaches variierten; wir nahmen daher an, daß eine merkliche Vereinigung unverbrannter Gase mit vorhandenem Restsauerstoff innerhalb der Kapillare nicht erfolgte. Sollte trotz der hohen

Strömungsgeschwindigkeit in der Platinkapillare noch eine nachträgliche Verschiebung der Gaszusammensetzung eingetreten sein, so wäre dies für unser Resultat insofern ohne Bedeutung, als dann die  $\text{CO}_2$ - und  $\text{H}_2\text{O}$ -Gehalte zu hoch gemessen wären. Denn es kommt ja auf die Feststellung an, daß die aus der Konzentration errechnete Strahlung nicht wesentlich größer wird als die beobachtete. Trotzdem die Leuchtgaszusammensetzung Veränderungen unterworfen ist, erhielten wir mit 5% Spielraum stets die gleichen Analysen, wenn wir eine Versuchsreihe innerhalb eines Tages ausführten und die Strömungsgeschwindigkeiten reproduzierten.

## 2. Unterlagen für die Berechnung der Gasstrahlung.

Die von Schack angegebene Strahlungsformel enthält die Summe der Einzelstrahlungen aller merklich in Betracht kommenden Emissionsgebiete. Unsere Messungen bezogen sich auf denjenigen Teil der Gesamtstrahlung, der senkrecht von der anvisierten Gasschicht ausging und den schmalen Öffnungskegel des Bolometers durchsetzte. Sei  $\omega$  der Raumwinkel des Öffnungskegels,  $f$  die Fläche des vorderen Diaphragmas, sei ferner

$$p \cdot s \leq 0,01$$

(diese Bedingung war bei unseren Versuchen erfüllt), so erhält man nach Schack folgende Ausdrücke für die in das Bolometer fallende Strahlung:

Kohlensäure.

$$E_K = \frac{\omega f}{\pi} \left\{ K_1 \left( 1 - \frac{1 - e^{-k_1 p_K s}}{k_1 \cdot p_K \cdot s} \right) + 0,69 K_2 \left( 1 - \frac{1 - e^{-k_2 p_K s}}{k_2 p_K \cdot s} \right) + 0,45 K_3 \left( 1 - \frac{1 - e^{-k_3 p_K s}}{k_3 p_K \cdot s} \right) \right\}, \quad (7)$$

Wasserdampf.

$$E_W = \frac{\omega f}{\pi} \left\{ W_1 \left( 1 - \frac{1 - e^{-w_1 p_W s}}{w_1 p_W s} \right) + W_2 \left( 1 - \frac{1 - e^{-w_2 p_W s}}{w_2 p_W s} \right) \right\}. \quad (8)$$

Hierin bedeuten  $K_1, K_2, K_3$  und  $W_1, W_2$  die Gesamtstrahlungen der einzelnen Banden pro Flächeneinheit der strahlenden Fläche bei unendlicher Schichtdicke, sie enthalten die Temperaturabhängigkeit der Strahlung, wie aus folgenden Tabellen ersichtlich, die wir der Schackschen Arbeit entnehmen:

Tabelle 1. Kohlensäure.

Temperatur °C	Strahlung von		
	Streifen 1 $K_1$ WE/m <sup>2</sup> st	Streifen 2 $K_2$ WE/m <sup>2</sup> st	Streifen 3 $K_3$ WE/m <sup>2</sup> st
1000	6,8	5,4	1,4
1100	9,3	6,7	1,6
1200	12,3	8,3	1,9
1300	15,6	9,7	2,2
1400	19,2	11,2	2,4
1500	23	12,9	2,7
1600	28	14,6	3,0
1700	33	16,6	3,4
1800	38	18,7	3,8

Tabelle 2. Wasserdampf.

Temperatur °C	Strahlung von	
	Streifen 1 $W_1$ WE/m <sup>2</sup> st	Streifen 2 $W_2$ WE/m <sup>2</sup> st
1000	9,5	6,3
1100	13	7,4
1200	17	8,5
1300	22	9,6
1400	27	11
1500	33	12
1600	39	13
1700	45	15
1800	52	16

Bei endlicher Schichtdicke ist die Emission geringer, als in den Tabellen angegeben. Dieser Sachverhalt wird in den Ausdrücken (7) und (8) durch die Faktoren von der Form

$$1 - \frac{1 - e^{-x}}{x} = [x] \tag{9}$$

wiedergegeben. Die Funktion (9) ist in Abb. 5 gezeichnet. Sie bedeutet angenähert die integrale Absorption eines Streifens für die schwarze Strahlung des gleichen Wellenlängenintervalls und enthält für jeden Streifen die Abhängigkeit der emittierten Strahlung von dem Produkt  $p \cdot s$  aus Partialdruck in Prozenten und Schichtdicke in Metern. Je größer die Absorptionskonstanten  $k_1, k_2, k_3$  und  $w_1, w_2$  der Streifen sind, um so stärker absorbiert und emittiert der Streifen bei gegebener Schichtstärke. Setzt man die Schichtdicke in Meter ein, so erhält man nach Schack aus den Beobachtungen der Physiker

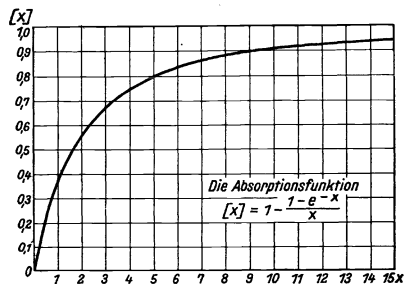


Abb. 5.

Tabelle 3. Kohlensäure.

Wellenlänge in $\mu$	Absorptionskonstante
$\lambda_2 = 2,7$	$k_1 = 16$
$\lambda_2 = 4,3$	$k_2 = 900$ bis $1800$
$\lambda_1 = 14,7$	$k_3 = 80$

Tabelle 4. Wasserdampf.

Wellenlänge in $\mu$	Absorptionskonstante
$\lambda_1 = 2,67$	$w_1 = 20$
$\lambda_2 = 6,6$	$w_2 = 45$

Bemerkenswert ist die Unsicherheit der Konstanten  $k_2$ .

Bei Aufstellung der Tabellen 1 bis 4 wurde die Feinstruktur der Banden berücksichtigt, soweit dies zur Zeit möglich ist. Die Faktoren 0,69 und 0,45 in (7) sind ein Ausdruck für die Verringerung der Streifenbreiten bei sehr geringer Schichtstärke ( $p \cdot s \leq 0,01$ ).

Die Eichkurven des Bolometers (Abb. 3) enthalten die Gesamtstrahlung (cos-Strahlung) des schwarzen Körpers pro Flächen- und Zeiteinheit. Multipliziert man mit

$$\frac{\omega f}{\pi},$$

so hat man analog (7) und (8) die im Bolometer wirksame Strahlung. Da nun auch die Strahlungen  $K$  und  $W$  in den Tabellen 1 und 2 Gesamt-(cos)-strahlungen bedeuten, so kann man den Faktor  $\frac{\omega f}{\pi}$  beim Vergleich fortlassen. Wir haben demnach die Strahlungsformel

$$E_{\text{gesamt}} = K_1 [k_1 p_K s] + 0,69 K_2 [k_2 p_K s] + 0,45 K_3 [k_3 p_K s] + W_1 [w_1 p_W s] + W_2 [w_2 p_W s]. \tag{10}$$

Der Einfluß des Kohlenoxyds war bei unseren Versuchen gering. Einer Arbeit von E. v. Bahr<sup>1)</sup> entnehmen wir folgende Annäherungswerte: Die Gesamtstrahlung

<sup>1)</sup> E. v. Bahr: Ann. Physik (4), Bd. 29, S. 780. 1909.

der einzigen in Betracht kommenden zwischen  $4,5$  und  $5 \mu$  gelegenen Bande ist bei unendlicher Schichtdicke ungefähr so groß, wie die des dicht daneben gelegenen  $\text{CO}_2$ -Streifens  $K_2$ . Die maximale Absorptionskonstante ist nahe 16. Kohlenoxyd liefert also größenordnungsgemäß die zusätzliche Strahlung

$$K_2 \cdot [16 p_{\text{CO}} \cdot s]. \quad (10a)$$

### 3. Durchrechnung eines Versuchsbeispiels.

Es erscheint zweckmäßig, die Ergebnisse eines Versuchsbeispiels im einzelnen darzustellen. Verbrennt das zugefügte Leuchtgas infolge ungenügender Luftzufuhr nur teilweise innerhalb des auf den Brenner aufgesetzten Rohres, so wird der Raum zwischen dem inneren und dem äußeren Kegel der Bunsenflamme künstlich auseinandergezogen. Man erhält oberhalb des Rohres eine glühende,  $\text{CO}$ ,  $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2$  und  $\text{H}_2\text{O}$ -haltige, von einem heißen Saum begrenzte Flammenschicht. Der Vorteil der Anordnung besteht darin, daß der heiße äußere Saum die Gasschicht sehr scharf begrenzt. Wir geben die Zahlen eines derartigen Versuchsbeispiels wieder.

#### Versuch Nr. 1.

##### I. Bolometrische Messung (Blende Nr. 2).

$$4,1 \pm 0,5 \text{ mV.}$$

Dieser Ausschlag entspricht nach Abb. 3.

$$0,63 \text{ Watt/cm}^2.$$

##### II. Untersuchung der Flamme.

###### 1. Chemische Analyse:

	$\text{CO}_2$	$\text{H}_2\text{O}$	$\text{CO}$	$\text{H}_2$	$\text{O}_2$
Volumprozent $p$	5	12	9	14	1

Innerhalb der Randschicht war die  $\text{CO}_2$ - und  $\text{H}_2\text{O}$ -Konzentration beinahe doppelt so groß.

###### 2. Temperaturmessung:

- a) Gesamtstrahlung des  $6,5$  cm langen und ca.  $0,4$  mm dicken Pt-Drahtes [vgl. Formel (5)].

Tabelle 5.

Bolometer Blende Nr. 2 mV	$S$ Watt/cm <sup>2</sup>	$E = S \cdot 6,5 \frac{\pi^2}{4}$ Watt	Temperatur °C
1,17	0,180	2,88	1180
1,68	0,257	4,12	1302
2,10	0,323	5,18	1402
2,80	0,481	6,90	1526

- b) Pt-Draht in der Flamme:

Tabelle 6.

Elektrische Watt	Temperatur	Bemerkung
0	1310	} Innerer der Flamme
2,04	1340	
6,0	1450	
8,3	1505	
0	1390	} Randschicht
5,25	1510	

Alle Temperaturangaben sind die Mittel aus zahlreichen Einzelbeobachtungen. Abb. 6 zeigt das Ergebnis:

Temperatur in der Flamme . . . 1440°,  
 Temperatur in der Randschicht . . 1560°.

3. Gesamtschichtdicke: 0,02 m.

Die Stärke der heißeren Randschicht betrug beiderseits ca. 1 mm. Die Temperaturerhöhung der Randschicht kommt wegen ihrer geringen Schichtdicke nicht wesentlich in Betracht, wohl dagegen die starke Zunahme der CO<sub>2</sub>- und H<sub>2</sub>O-Konzentration. Wir tragen dem Rechnung, indem wir eine Schichtdicke von 22 mm annehmen.

4. Anwendung der Strahlungsformel:

Bei der geringen Schichtstärke der untersuchten Flamme kommt die Unsicherheit der Absorptionskonstanten  $k_2$  der mittleren Kohlensäurebande stark zur Geltung, da diese Bande allein einen großen Teil der Strahlung liefert. Wir rechnen daher mit den beiden Grenzwerten  $k_2 = 900$  und  $k_2 = 1800$ . Wir erhalten zunächst:

$$\begin{aligned} \text{CO}_2: p \cdot s &= 0,00110 \\ \text{H}_2\text{O}: p \cdot s &= 0,00264 \\ \text{CO}: p \cdot s &= 0,00198 \end{aligned}$$

Dann folgt aus der Strahlungsformel (10) bzw. (10a) und den Tabellen 1 bis 4 für

$k_2 = 900$				$k_2 = 1800$		
$E_{\text{gesamt}}$	21	[0,0176]	} CO <sub>2</sub>	$E_{\text{gesamt}}$	21	[0,0176]
+	0,69 · 12	[0,99]		+	0,69 · 12	[1,98]
+	0,45 · 2,55	[0,088]		+	0,45 · 2,55	[0,088]
+	30	[0,0528]		+	30	[0,0528]
+	11,5	[0,119]	} H <sub>2</sub> O	+	11,5	[0,119]
+	12	[0,0317]		+	12	[0,0317]
			} CO	+	12	[0,0317]

Die Auswertung der eckigen Klammern nach Abb. 5 liefert für:

$$E_{\text{gesamt}} = 0,575 \text{ Watt/cm}^2 \quad k_2 = 900 \qquad E_{\text{gesamt}} = 0,755 \text{ Watt/cm}^2, \quad k_2 = 1800$$

während  $E_{\text{gesamt}} = 0,63 \text{ Watt/cm}^2$  beobachtet wurde. Die Größenordnung der berechneten Strahlung ist also vorhanden.

#### 4. Versuchsergebnisse.

1. Unter ganz ähnlichen Bedingungen machten wir Messungen an der freien Flamme, 3 cm oberhalb des Brenners. Die Löcher des Rostes bildeten hierbei ein Rechteck. Bei geeigneter Luftzufuhr befand sich die innere Verbrennungszone der Flamme dicht über dem Rost, während in dem heißen, die Flamme begrenzenden Saume die restliche Verbrennung an der Außenluft stattfand, so daß die CO- und H<sub>2</sub>-haltige Zwischenschicht den größten Teil der Flamme ausmachte. In der folgenden Tabelle geben wir zwei derartige Versuchsreihen wieder und fügen das Ergebnis des Versuches Nr. 1 hinzu.

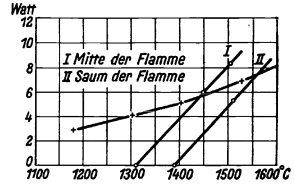


Abb. 6.

Tabelle 7.

Nr.	Temperatur C	Schichtdicke m	$p$ CO <sub>2</sub>	$p$ H <sub>2</sub> O	$p$ CO	Energie in Watt/cm <sup>2</sup>		
						berechnet für		beobachtet
						$k_2 = 900$	$k_2 = 1800$	
1	1450	0,022	5	12	9	0,58	0,76	0,63
2	1640	0,027	5	16	8	0,95	1,20	1,09
3	1640	0,042	5	16	8	1,33	1,57	1,41

Die Rechnung liefert also, soweit bei der Unsicherheit der Konstanten der Strahlungsformel eine Festlegung möglich ist, nicht nur die richtige Größenordnung, sondern auch die Abhängigkeit der Strahlung von der Schichtdicke (Versuch 2 und 3).

2. Eine weitere Reihe von Messungen wurde mit Hilfe des auf den Brenner gesetzten Rohres bei Luftüberschuß ausgeführt. Diese Abgasschichten waren vollkommen nichtleuchtend und enthielten keine unverbrannten Gase mehr. Hierbei war

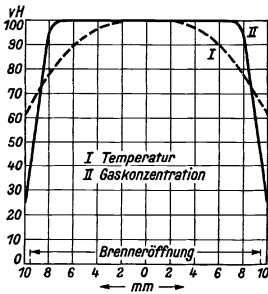


Abb. 7.

ein erhebliches Temperaturgefälle von der Mitte der Schicht bis zum Rande hin vorhanden. Abb. 7 zeigt eine aus mehreren Versuchen ermittelte, näherungsweise gültige Charakteristik des Querschnittes. Sie enthält die prozentuale Verteilung der Temperatur und der Partialdrucke der strahlenden Gase.

Bei der Temperaturbestimmung erhielten wir Relativkurven, wenn wir einen Pt-Draht oder ein Thermoelement durch den Querschnitt der Flamme führten. Aus einer Kurve der relativen Temperaturverteilung ergibt sich dann die wahre Verteilung, wenn man einzelne Punkte der Flamme nach der Methode von Schmidt untersucht.

Auf Grund der Abb. 7 haben wir bei der Auswertung eine Schichtdicke von  $s = 16$  mm und einen mittleren Temperaturabfall von  $250^\circ$  (Maximaltemperatur im Mittel  $1400^\circ$ ) der Rechnung zugrunde gelegt. Es liegt nahe, eine mittlere Temperatur anzunehmen. Wir rechnen der Einfachheit halber mit dem arithmetischen Mittel der Grenztemperaturen. Der hierbei, sowie bei Vernachlässigung der kühleren Randschicht gemachte Fehler kann die Größenordnung des Ergebnisses nicht mehr wesentlich beeinflussen. Tabelle 8 enthält 6 Versuchsreihen und die für  $k_2 = 900$  und  $k_2 = 1800$  berechneten Vergleichswerte.

Tabelle 8.

Nr.	Mittlere Temperatur C	Schichtdicke m	$p$ CO <sub>2</sub>	$p$ H <sub>2</sub> O	Energie in Watt/cm <sup>2</sup>		
					berechnet für		beobachtet
					$k_2 = 900$	$k_2 = 1800$	
4	1350	0,016	10,1	15	0,56	0,73	0,59
5	1360	0,016	9,7	14	0,55	0,72	0,59
6	1175	0,016	7,5	13	0,35	0,47	0,40
7	1250	0,016	8,5	14	0,42	0,58	0,44
8	1375	0,016	66	27	1,24	1,28	1,23
9	1300	0,016	70	22	1,08	1,11	1,15

Die Versuche 4 bis 7 wurden mit Leuchtgas und Preßluft ausgeführt. Hervorzuheben sind die beiden letzten Versuche, bei denen Sauerstoff und in großen Mengen Kohlensäure eingeleitet wurde, so daß der CO<sub>2</sub>-Gehalt außerordentlich stieg. Auf diese



Weise konnten wir den Bereich unserer Messungen erheblich erweitern. Auch bei diesen Versuchen stimmen die Größenordnungen der berechneten und der beobachteten Strahlung miteinander überein. Ein Vergleich der Versuche 5 und 8 zeigt, daß die beobachtete Verdoppelung der Strahlung bei hohem  $\text{CO}_2$ -Gehalt durch die Rechnung richtig wiedergegeben wird. Weniger gut ersichtlich ist die Abhängigkeit der Strahlung von der Temperatur. Bei größerer Schichtstärke, wie in Nr. 8 und Nr. 9, kommt die Unsicherheit der Konstanten  $k_2$  wenig mehr zur Geltung. In technischen Öfen ist dies fast immer der Fall. Um die technische Größenordnung zu fixieren, stellen wir in Tabelle 9 die von uns gemessenen Strahlungen in  $\text{WE}/\text{m}^2\text{st}$  zusammen.

Tabelle 9.

Versuch Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Strahlung in $\text{WE}/\text{m}^2\text{st} \cdot 10^3$	5,4	9,3	12,1	5,1	5,1	3,4	3,8	10,6	9,9

Wenn auch unsere orientierenden Versuche insofern einer Ergänzung bedürfen, als zur Nachprüfung namentlich der Temperaturabhängigkeit der Strahlung eingehendere Versuchsreihen notwendig sind, so kann doch kein Zweifel mehr darüber bestehen, daß bei kleiner Schichtstärke die von Schack errechnete Größe der Gasstrahlung zu Recht besteht. Der hier beschriebene einfache Weg der Untersuchung von Flammengasschichten ermöglichte eine ungefähre Festlegung der Gasstrahlung, deren exakte Ermittlung bei hohen Temperaturen mit außerordentlichen experimentellen Schwierigkeiten verbunden ist. Jedoch wäre es zu begrüßen, wenn das für die Wärmetechnik neugewonnene Hilfsmittel durch physikalische Einzeluntersuchungen noch sicherer fundiert würde, als dies bisher geschehen konnte.

### Zusammenfassung.

Zur Prüfung der Schackschen Strahlungsformel wurden an der Bunsenflamme in einer Reihe von Fällen die Temperatur, die chemische Zusammensetzung und die Gasstrahlung gemessen. Es zeigte sich, daß die in Abhängigkeit von Temperatur und Schichtstärke durch Rechnung gewonnenen Werte der Gasstrahlung mit den entsprechenden Werten der unmittelbaren Beobachtung sehr nahe übereinstimmen.

# Die Zusammensetzung und Teilung von Verkehrsmengen im Fernsprechwesen.

Von **Gottfried Rückle.**

Mitteilung aus der Vielfachselbstanschlußabteilung des Wernerwerkes F  
der Siemens & Halske A.-G. Siemensstadt.

Eingegangen am 16. Dezember 1924.

Die bisherige Kollektivmaßlehre bezieht sich auf Erscheinungen mit starken Schwankungen, sucht Mittelwerte zu bilden und Rechnungsregeln anzugeben, wie man von diesen Mittelwerten zu den Außenwerten gelangen kann. Der Fernsprechverkehr ist eine derartige Erscheinung und wird, wie bekannt, theoretisch mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelt. Die Übereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung ist in dieser Zeitschrift (1922, S. 436) erwiesen worden. Im Fernsprechverkehrswesen gibt es nun Erscheinungen, die durch die bisherige Kollektivmaßlehre noch nicht erfaßt werden. Das ist die Zusammensetzung und Teilung von Verkehrsmengen. Technisch liegt die Sache so: Angenommen sei eine große Stadt mit vielen Fernsprechämtern. Der in einem Amt erzeugte Verkehr teilt sich zunächst nach dem eigenen und allen anderen Ämtern, diese Teile sind selbstverständlich verschieden groß. Umgekehrt setzt sich der in einem Amt von allen anderen Ämtern ankommende Verkehr wieder zusammen. Wenn das Amt ein Durchgangsamt ist, z. B. für 3 oder 4 Vorortämter, so teilt sich dieser Verkehr noch einmal. Solche Teilungen und Zusammensetzungen von Verkehrsmengen kommen in Fernsprechanlagen mit Wählerbetrieb sehr viel häufiger vor, weil die Gruppeneinteilung in Wähleranlagen bis zur Einteilung in ganz kleine Gruppen und bis zur Hintereinanderschaltung von 6 oder 7 Schaltstufen getrieben wird. In jeder der Stufen teilt sich der Verkehr oder wird zusammengefaßt.

In der Natur des Fernsprechverkehrs liegt es, daß die stündliche Höchstzahl von Verbindungen von und nach den verschiedenen Richtungen nicht in die gleiche Tageszeit fallen. Der Höchstwert des gesamten ankommenden Verkehrs ist also nicht gleich der Summe der Höchstwerte der einzelnen Richtungen. Umgekehrt, wenn eine entstehende Verkehrsmenge in viele kleine Richtungen aufgeteilt wird, so ist der Höchstwert in einer Richtung größer als der proportionale Anteil dieser Richtung an der Stunde des stärksten entstehenden Verkehrs. Für den Zweck der Berechnung von Wählerzahlen ist nun ein bequemes Verfahren erwünscht, die Zuschläge und Abzüge bei Teilung und Zusammenfassung rechnerisch zu ermitteln.

Zu diesem Zweck muß die Kollektivmaßlehre erweitert werden, weil das Zusammenfließen oder Auseinanderschneiden schwankender Gebilde noch nicht behandelt wurde.

Man muß zuerst eine geeignete, die Schwankung kennzeichnende Größe suchen, deren zahlenmäßiger Wert sich aus den Verkehrsangaben ableitet. Dann muß ein Gesetz gefunden werden, wie sich diese Größe beim Zusammensetzen mehrerer Gebilde oder beim Auftrennen eines Gebildes in mehrere Teile umformt. Die nachfolgenden Untersuchungen gehen zunächst von den schon bekannten theoretischen Unterlagen für den Fernspreverkehr aus. Die wichtigsten Verkehrswerte sind die Belastung ( $y$ ) der Gruppe ausgedrückt in Belegungsstunden, und die Anzahl ( $v$ ) der Verbindungswege zur Bewältigung dieser Belastung unter der Voraussetzung eines kleinen Verlustes. Der Zusammenhang dieser Größen wird durch das Poissonsche Gesetz gegeben. So sind z. B. für  $y = 3,25$  St.  $v = 10$  Wege nötig. Die Abweichung  $\frac{v-y}{y} = 2,08$  kennzeichnet die Schwankungen dieser Gruppe im Zusammenhange mit dem vorgeschriebenen kleinen Verlust und wird mit dem Buchstaben  $\sigma$  bezeichnet. Diese relative Schwankung steht nun in engem Zusammenhange mit der mittleren Belastung ( $y$ ) der Gruppe und ihr Benehmen bei Veränderung der Gruppengröße (Zusammensetzung oder Teilung) kann theoretisch aufgesucht werden.

Irgendein System möge  $v$  Verbindungswege haben.

Die Verteilung der Anzahlen  $v$  gleichzeitig belegter Leitungen wird durch die Poissonsche Verteilungsfunktion bestimmt.

Es wird die Wahrscheinlichkeit  $w_v$  dafür, daß  $v$  Wege gleichzeitig belegt sind, daß also  $v$  Gespräche gleichzeitig stattfinden, in bekannter Weise gegeben durch die Funktion

$$w_v = \frac{e^{-y} \cdot y^v}{v!},$$

wo  $y$  ein Parameter ist, dessen Rolle im System sich in folgender Weise bestimmt.

Es ist die mathematische Erwartung der Anzahlen  $v$  gleichzeitig belegter Wege

$$E(v) = \sum_{v=1}^{\infty} v \cdot w_v = \sum_{v=1}^{\infty} v \frac{e^{-y} \cdot y^v}{v!} = e^{-y} \cdot y \cdot \sum_{v=1}^{\infty} \frac{y^{v-1}}{(v-1)!} = e^{-y} \cdot y \cdot e^y = y.$$

Der in der Poissonschen Funktion

$$w_v = \frac{e^{-y} \cdot y^v}{v!}$$

auf tretende Parameter  $y$  ist die mathematische Erwartung der Anzahlen gleichzeitig belegter Leitungen.

Es finden während der Dauer einer mittleren Gesprächslänge  $\bar{t}$  also  $y$ -Gespräche gleichzeitig statt.

Der Vergleich zwischen dem Bernoulli'schen Ansatz für die Wahrscheinlichkeit

$$w_v = \frac{c!}{v! (c-v)!} t^v (1-t)^{c-v},$$

$c$  = Gesamtzahl von Belegungen in der Zeit 1,  $t$  = mittlere (normale) Gesprächslänge mit dem Poissonschen Ansatz

$$w_v = e^{-y} \cdot \frac{y^v}{v!}$$

zeigt, daß  $y = c t$  wird und daß  $y$  dem ganzzahligen Wert  $v$  benachbart liegt, dem die maximale Wahrscheinlichkeit  $w_v$  zukommt. Die Darstellung  $y = c t$  zeigt, wie  $y$  ge-

gebenenfalls aus dem das System bestimmenden Größen  $c =$  Anzahl der Belegungen,  $t =$  mittlere Gesprächslänge einfach berechnet werden kann.

Eine erste Aufgabe der Praxis war die Bestimmung der Anzahl  $v$  von Leitungen, die zur Verfügung stehen müssen, damit von der Belegung  $y = ct$  nur  $\frac{y}{1000}$  durch den Mangel an Verbindungswegen  $v$  verloren gehen darf.

Die Diskussion der Verlustformel zeigt, daß für den Quotienten  $\frac{y}{v} = \zeta$ , der durchgängig als spezifische Belegung bezeichnet werden soll, eine Beziehung besteht der Form:

$\frac{y}{v} = \zeta = \kappa \cdot \ln v$ , wo  $\kappa$  eine mit  $v$  langsam veränderliche Größe ist. Diese Näherungsgleichung leistet insbesondere gute Dienste bei dem Übergang von einem System  $y, v$  zu einem wenig verschiedenen System  $y - \Delta y, v - \Delta v$ , auch sie ermöglicht unter anderem die Reduktion der normalen Belegung  $y$  auf  $y - \Delta y$  zu bestimmen in den Fällen, wo die normale durch die Poissonsche Verteilungsfunktion geregelte Verteilung der  $v$ -Werte durch anormal lange Gespräche gestört ist.

Diese Störung läßt sich rechnerisch in der Weise fassen, daß man annimmt, eine oder mehrere Leitungen seien während eines Bruchteils der Beobachtungszeit gesperrt, und man kann wegen der kleinen Änderung  $\Delta y$  der mittleren Belegung  $y$  setzen,  $\kappa(y - \Delta y) = \kappa(y)$ , so daß kommt

$$\frac{y - \Delta y}{y} = \frac{(v - \Delta v) \log(v - \Delta v)}{v \cdot \log v}.$$

Insbesondere zeigt die Funktion  $\zeta = \frac{y}{v} = \zeta(v)$ , daß die spezifische Belegung  $\zeta$  mit  $v$  also mit der Anzahl der Wege monoton wächst.

Bei den Fragen nach der zweckmäßigsten Anordnung und Verknüpfung der verfügbaren Verbindungswege, insbesondere bei dem Versuch, sie so gleichmäßig wie möglich auszunutzen, haben die Fernsprechtechniker gewisse Anordnungen (Staffelungen) der Leitungen als nutzbringend erkannt, und die Kurven für die spezifische Belegung  $\zeta = \frac{y}{v}$ , die sich aus umfangreichen Messungen ergeben haben, zeigen die Erhöhung der Leistung eines Systems durch diese Maßnahmen.

Zur rechnerischen Erfassung dieser Erscheinung sind zwei Aufgaben zu lösen:

1. Es sind Formeln aufzustellen für die Belegungswerte, die auf die einzelnen Leitungen entfallen.
2. Es ist die Zusammensetzung und die Trennung von Gruppen quantitativ zu bestimmen.

Die erste Frage ist an anderer Stelle<sup>1)</sup> untersucht worden.

Hier soll die zweite Fragestellung behandelt werden, wobei ich mich eines Verfahrens bediene, das sonst noch nicht zur Anwendung gelangt zu sein scheint.

Ich beginne die Untersuchung der Frage mit einem Beispiel.

Ein System mit  $C = 1000$  Belegungen soll zusammengesetzt werden aus 10 Teilsystemen, deren jedes rund  $c = 100$  Belegungen hat.

<sup>1)</sup> Vgl. die Schrift: Rückle-Lubberger: Der Fernsprechverkehr als Massenerscheinung mit großen Schwankungen. Berlin: Julius Springer 1924.

Die Erfahrung hat gezeigt, daß es bei Erfüllung der bekannten Bedingungen für die Zuverlässigkeit der Leistung gestattet ist, an den Teilgruppen Belegungszuschläge anzubringen, also  $c$  auf  $\bar{c} = c(1 + \vartheta)$  zu erhöhen, während das resultierende System im Mittel  $C = 1000$  und nicht  $\bar{C} = C(1 + \vartheta)$  Belegungen aufweist.

Diese Erscheinung liegt darin begründet, daß die weit vom Mittelwert  $y$  in den kleinen Gruppen abliegenden extremen Werte durch die Zusammensetzung zu Werten verknüpft werden, deren relative Schwankungen (Dilatation) gegen den Mittelwert  $y$  des großen Systems kleiner geworden sind.

Die einander zugeordneten Relativschwankungen  $\sigma_g$  in großen System und  $\sigma_k$  im kleinen System können gefunden werden aus der Bedingung gleicher Wahrscheinlichkeit ihres Vorkommens in beiden Fällen.

Ein erster Weg zu deren Feststellung bietet sich in der Heranziehung der asymptotischen Entwicklungen der Wahrscheinlichkeit  $w_v$ , die diese in der Form

$$w_v = w_{y \times d} = w_y \cdot e^{-\lambda d^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \cdot e^{-\lambda d^2}$$

geben.

Bleiben die Schwankungen  $d$  in engen Grenzen  $d \leq \lambda \sqrt{y}$ , so gilt die Darstellung

$$w_v = w_{y \times d} = w_y e^{-\frac{d^2}{2y}},$$

und die oben erwähnte Bedingung führt auf eine Beziehung

$$d = \alpha \sqrt{y}, \quad \text{also} \quad \sigma = \frac{d}{y} = \frac{\alpha}{\sqrt{y}}.$$

Versucht man ein asymptotisches Gesetz für  $w_v$  abzuleiten, wenn die Schwankungen  $d$  an keine obere Grenze gebunden sind, so zeigt sich, daß der bei  $y$  im Exponenten auftretende Zahlenfaktor 2 zu ersetzen ist durch  $2\lambda$ , wo  $\frac{1}{3} < \lambda < 1$  ist.

Es gilt näherungsweise für alle  $y > 8$ ,  $\lambda = \frac{1}{3}$ , während für  $y < 8$   $\lambda$  von  $\frac{1}{3}$  bis 1 gehen kann. Ein einheitliches Gesetz für den Exponenten, das uns für  $d$  und  $\sigma$  bindende Schlüsse zu ziehen erlaubt, gibt es nicht.

Zur Lösung der Frage soll deswegen ein etwas anderer Gedankengang herangezogen werden.

Die zu lösende Aufgabe fordert die Entwicklung der Fähigkeit, mit Systemen ähnlich leicht wie mit einzelnen Zahlenwerten zu rechnen.

Es kommt nach dem früher Bemerkten darauf an, ein Kollektiv durch eine typische Eigenschaft numerisch festzulegen. Kennzeichnend für das Kollektiv ist die mathematische Erwartung der mittleren quadratischen Abweichung von dem wahrscheinlichen Wert  $y$ :

$$C(M) = \sqrt{\sum_{v=1}^{v=\infty} (v - y)^2 \cdot w_v} = \sqrt{y}.$$

Von dieser grundlegenden Gleichung, die z. B. von Bortkewitsch in seiner Schrift „Gesetz der kleinen Zahlen“ hergeleitet ist, sei hier eine kurze Ableitung gegeben:

Zu bestimmen ist:

$$\sum_{v=1}^{v=\infty} (v - y)^2 w_v = \sum_{v=1}^{\infty} v^2 \cdot w_v - 2y \sum_{v=1}^{\infty} v \cdot w_v + y^2 \sum_{v=1}^{\infty} w_v.$$

Es ist für die Poissonverteilung

$$\sum_{v=1}^{\infty} v \cdot w_v = y, \quad \text{außerdem natürlich} \quad \sum_{v=1}^{\infty} w_v = 1.$$

Also kommt:

$$\sum_{v=1}^{\infty} (v-y)^2 w_v = \sum_{v=1}^{\infty} v^2 \cdot w_v - 2y \cdot y + y^2 = \sum_{v=1}^{\infty} v^2 \cdot w_v - y^2.$$

Zu bestimmen bleibt  $\sum_{v=1}^{\infty} v^2 w_v$ . Es kommt beim Einsetzen von  $w_v = \frac{e^{-y} \cdot y^v}{v!}$

$$\sum_{v=1}^{\infty} v^2 \cdot \frac{e^{-y} \cdot y^v}{v!} = e^{-y} \cdot y \left[ 1 + 2 \frac{y}{1} + 3 \frac{y^2}{2!} + \dots + \right].$$

Es ist

$$\left[ 1 + 2y + 3 \frac{y^2}{2!} + \dots + \right] = \frac{d}{dy} \left[ y \left( 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!} + \dots + \right) \right] = \frac{d}{dy} [y \cdot e^y] = e^y (1 + y).$$

Also wird:

$$\sum_{v=1}^{\infty} v^2 \cdot w_v = e^{-y} \cdot y e^y (1 + y) = y(1 + y), \quad \text{und es kommt} \quad M^2 = \sum_{v=1}^{\infty} v^2 w_v - y^2 = y:$$

$$\underline{M = \sqrt{y}}.$$

Als typische Größe des Systems führe ich  $\sigma_m = \frac{1}{\sqrt{y}}$ , also die mathematische Erwartung der mittleren relativen quadratischen Abweichung ein.

Setzt man aus  $n$  gleichen Systemen  $s_1, s_2, \dots, s$  ein System  $S$  zusammen, so entwickelt sich aus der in den Ausgangssystemen bestehenden mathematischen Erwartung der relativen Schwankung  $\sigma_m = \frac{1}{\sqrt{y}}$  im großen System der Wert:

$$\sum_m = \frac{1}{\sqrt{n \cdot y}} = \frac{\sigma_m}{\sqrt{n}}.$$

Irgendeine Relativschwankung  $\sigma$  in  $s_k$  wird nach Vollendung des Umbildungsprozesses übergegangen sein in eine Relativschwankung

$$\sum = \frac{\sigma}{a}, \quad \text{wo } a > 1 \text{ ist.}$$

Der zur Dilatation  $\sigma$  gehörige  $v$ -Wert wird sein  $v = y(1 + \sigma)$ , während der zu  $\sum = \frac{\sigma}{a}$  gehörige  $V$ -Wert im großen System wird

$$V = y(1 + \sum) = y \left( 1 + \frac{\sigma}{a} \right).$$

Der Divisor  $a$  ist als ein geeigneter Mittelwert zu bestimmen. Gingen die  $n$ -Systeme momentan in das System  $S$  mit den zu diesem großen Kollektiv gehörigen Eigenschaften über, so wäre nach den obigen Ausführungen zu setzen  $a = \sqrt{n}$ .

Der zu bestimmende Zuschlagsfaktor  $1 + \vartheta$  ist ein Mittelwert aus allen möglichen Quotienten  $q = \frac{1 + \sigma}{1 + \frac{\sigma}{a}}$ , und es ist zu beachten, daß bei der stetigen zeitlichen Folge aller

möglichen Teilumbildungen  $a$  die Werte im Intervall 1 bis  $\sqrt[n]{n}$  durchläuft, so daß als mittlerer Wert zunächst das geometrische Mittel

$$a = \sqrt[4]{1 \cdot \sqrt[n]{n}} = \sqrt[4]{n}$$

geeignet erscheint.

Diese Maßnahme stellt eine erste Mittelwertbildung dar. Sie sucht die Frage zu lösen: „Wenn  $n$ -Systeme mit je  $y$  mittlerer Belegung durch Zusammensetzung übergeführt werden in ein System mit  $Y = n \cdot y$ , welche mittlere Relativschwankung  $\bar{\sigma}$  darf während des Umbildungsprozesses in Ansatz gebracht werden?“

Eine zweite Mittelwertbildung kommt dadurch zustande, daß alle bei der Kollektivzusammensetzung in Frage kommenden Werte  $\sigma$  in Betracht zu ziehen sind. Das führt zur Integraldarstellung mit der Integrationsveränderlichen  $\sigma$ . Als Grenzen der Integration wähle ich zwei charakteristische  $\sigma$ -Werte:

1. Aus dem Endsystem (kleiner  $\sigma$ -Wert)

$$\sigma_a = \frac{V - Y}{y} = \frac{1}{z} - 1,$$

wo  $V$  die der mittleren Belegung  $Y$  zugeordnete Anzahl  $V = \frac{Y}{z}$  von Verbindungswegen ist.

2. Aus dem Anfangssystem (großen  $\sigma$ -Wert) entsprechend:

$$\sigma_\beta = \frac{v - y}{y} = \frac{1}{\zeta} - 1.$$

Der zum Integralansatz führende Grundgedanke ist der folgende:

Die mittlere Dilatation ist im großen System, in das die Teilsysteme übergehen, nur noch

$$1 + \sum = 1 + \frac{\sigma}{a},$$

also kann die mittlere Belegung  $y$  in den kleinen Systemen mit einem geeigneten mittleren Faktor  $\bar{\lambda} = \frac{1 + \sigma}{1 + \frac{\sigma}{a}}$  multipliziert werden, ohne daß der das große Kollektiv be-

grenzende  $V$ -Wert  $V = Y(1 + \sum)$  überschritten wird. Es wird  $1 + \vartheta = \bar{\lambda}$ , und es ergibt sich aus zwei Mittelwertbildungen der Wert

$$\bar{\lambda} = 1 + \vartheta = \frac{1}{\sigma_\beta - \sigma_\alpha} \int_{\sigma_\alpha}^{\sigma_\beta} \frac{1 + \sigma}{1 + \frac{\sigma}{a}} d\sigma.$$

Für die obere Grenze  $\sigma_\beta$  hat man nicht den Wert der Grenzschwankung  $\sigma_g$  im kleinen System  $\sigma_g = \frac{v - y}{y}$  zu setzen, da man von allen Anfang an nicht mit  $c$ , sondern mit  $c = \bar{c}(1 + \vartheta)$  Belegungen im kleinen System zu rechnen hat. Man kann als obere Grenze etwa rechnen  $\sigma_\beta = \sigma_g(1 - \mu)$ , wo man  $\mu = \frac{\vartheta}{2}$  annehmen wird.

Die Ausführung der Integration ergibt dann

$$1 + \vartheta = \frac{1}{\sigma_\beta - \sigma_\alpha} \int_{\sigma_\alpha}^{\sigma_\beta} \frac{1 + \sigma}{1 + \frac{\sigma}{a}} d\sigma = \frac{1}{\sigma_\beta - \sigma_\alpha} \int_{\sigma_\alpha}^{\sigma_\beta} \left( a + \frac{1 - a}{1 + \frac{\sigma}{a}} \right) d\sigma,$$

$$1 + \vartheta = a - \frac{a(a-1)}{\sigma_\beta - \sigma_\alpha} \lg \frac{1 + \frac{\sigma_\beta}{a}}{1 + \frac{\sigma_\alpha}{a}},$$

wo der natürliche Logarithmus zu nehmen ist.

Beispiel:  $c_1 = c_2 = \dots = c_{10} = 100, \quad C = 10 c = 1000,$   
 $\sigma_\beta = \sigma_y (1 - 0,2) = 1,60, \quad \sigma_a = 0,60,$   
 $y_1 = y_2 = \dots y_{10} = 2,5, \quad y = 25.$   
 $1 + \vartheta = 1,296,$

d. h. es ist ein Zuschlag von 29,6% mit Formel gefunden. Die Messung hat ergeben:  
 $1 + \vartheta = 1,28, \quad \vartheta = 28\%.$

Die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung ist zufriedenstellend. Etwas näher muß noch auf die Bestimmung des Parameters  $a$  eingegangen werden.

Unsere erste Überlegung führte zur Einführung des Parameters  $a = \sqrt[4]{n}$ , wo  $n = \frac{C}{c} = \frac{Y}{y}$  und  $Y$  und  $y$  die mittleren Belegungen im großen System bzw. im kleinen Ausgangssystem sind.

Den Gedanken der stetigen Umbildung der Teilsysteme in das Endsystem wollen wir uns später noch etwas anschaulich machen. Dabei wird auch die Wahl des geometrischen Mittels bei der Bestimmung von  $a$  augenscheinlich.

Man wird erkennen, daß die Umbildung der Systeme ineinander der Hauptsache nach von den im Mittel freien Teilen der Systeme, also von  $V - Y = V(1 - Z)$  und von  $v - y = v(1 - \zeta)$  abhängen muß.

Da  $y$  von  $v$  Verbindungswegen im Mittel belegt sind, so gibt  $v - y$  die mathematische Erwartung der Anzahl freier Leitungen an.

Es ist zu beachten, daß für festes  $n$  der Parameter  $a$  und damit der Gruppenzuschlag  $\vartheta$  umso kleiner werden muß, je größer  $v$  und  $V$  sind, je näher  $\zeta$  und  $Z$  sich dem Grenzwert 1 nähern.

Geht man von  $n$  Teilsystem aus, die selbst schon großes  $y$  und  $v$ , also einen  $\zeta$ -Wert nahe an 1,  $\zeta = 1 - \varepsilon$  haben, so ergäbe sich aus dem ersten Ansatz  $a = \sqrt[4]{n}$  ein großer  $a$ -Wert, wenn nur  $n$  hinreichend groß gewählt wird. Das steht mit der Tatsache im Widerspruch, daß dann  $\vartheta$  sehr klein und demzufolge  $a$  nahe an 1 liegen muß.

Soll ein Ansatz

$$a = \sqrt[4]{n \cdot \varphi(1 - \zeta, 1 - z)}$$

die Erscheinung richtig darstellen, so muß  $\varphi(1 - \zeta, 1 - z)$  eine solche symmetrische Funktion von  $1 - \zeta$  und  $1 - z$  sein, die für großes  $y$  und  $Y$  auch für den Fall sehr großes  $n$  die Bedingung erfüllt

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \zeta \rightarrow 1 \\ z \rightarrow 1}} n \cdot \varphi(1 - \zeta, 1 - z) = 1.$$



Diese Bedingung berücksichtige ich dadurch, daß ich für  $\varphi$  eine einfache symmetrische Funktion von  $1 - \zeta$  und  $1 - z$  setze, die der Bedingung genügt. Ich setze  $\varphi(1 - \zeta, 1 - z) = 1 - \bar{\zeta}$ , und nehme für  $\bar{\zeta}$  das harmonische Mittel  $\bar{\zeta} = \frac{2\zeta z}{\zeta + z}$  die spezifischen Belegungen  $\zeta$  und  $z$ .

Es ist an der Erfahrung zu prüfen, ob der Ansatz für  $a$  für die Darstellung der Erscheinungen ausreichend ist.

Der Vergleich der so errechneten  $\vartheta$ -Werte mit den Messungen ist zufriedenstellend.

Es soll also gesetzt werden

$$a = \sqrt[4]{n(1 - \bar{\zeta})}, \quad \text{wo} \quad \bar{\zeta} = \frac{2\zeta z}{\zeta + z} \text{ ist.}$$

Man kann sich den Übergang des kleinen Systems mit der mittleren Belegung  $y$  in das große System mit  $Y = n \cdot y$  an der Kurve  $\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt[4]{y}}$  veranschaulichen.

Geht man von einem Wert  $\sigma_1$  in einen Wert  $\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{1 + \varepsilon}$  über, so erhält  $y_1 = y_1(\sigma_1)$  den Faktor  $(1 + \varepsilon)^2$ , und es wird  $y_2 = y_1(1 + \varepsilon)^2$ . Bestimmt man dann im Intervall  $(y_1, y_2)$  den mittleren Wert  $y_m$  aus der Proportion:

$y_1 : y_m = y_m : y_2$ , so erhält  $y_m$  den Wert  $\sigma_m = \frac{\sigma_1}{\sqrt[4]{1 + \varepsilon}}$  als zugeordnete Relativschwankung.

Man kann die Frage nach dem Abzugsfaktor  $1 - \vartheta$  in dem Falle, daß ein System mit der mittleren Belegung

$Y = n \cdot y$  in  $n$ -Teilsystem mit den Einzelbelegungen  $y_k = y$  übergeht, in entsprechender Weise durchführen, und kommt dabei auf die Formel:

$$1 - \vartheta = \frac{1}{\sigma_\beta - \sigma_\alpha} \int_{\sigma_\alpha}^{\sigma_\beta} \frac{1 + \frac{\sigma}{a}}{1 + \sigma} d\sigma = \frac{1}{\sigma_\beta - \sigma_\alpha} \int_{\sigma_\alpha}^{\sigma_\beta} \left( \frac{1}{a} + \frac{a-1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \sigma} \right) d\sigma,$$

$$1 - \vartheta = \frac{1}{a} + \frac{a-1}{a(\sigma_\beta - \sigma_\alpha)} \log \cdot \frac{1 + \sigma_\beta}{1 + \sigma_\alpha}.$$

Berechnet man den Zuschlag mit  $\vartheta^{(+)}$ , den Abzug mit  $\vartheta^{(-)}$ , so wird durchgängig unter den gleichen Bedingungen  $\vartheta^{(+)} > \vartheta^{(-)}$ , d. h. bei der Zusammensetzung von  $n$ -Teilsystemen zu einem großen System ist der Zuschlag, den die Teilbelegungen erhalten dürfen, größer als den Abzug, den das Endsystem erhalten muß, wenn dieses in die gleichen kleinen Systeme unterteilt wird.

### Zusammenfassung.

Die theoretische Behandlung des Fernsprechverkehrs bringt Aufgaben, die mit der bisherigen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bzw. Kollektivmaßlehre nicht zu lösen sind. Es handelt sich um die Zusammensetzung und Teilung von Verkehrsmengen, d. h. stark schwankenden Gebilden. Erfahrungsgemäß verändern sich dabei alle die Schwankungen kennzeichnenden Größen. Die Wählerzahl in automatischen Fernsprechanlagen ist durch diese Veränderungen bedingt. Die theoretische Behandlung wird durch die Erfassung der Verkehrsgebilde mit zwei Mittelwertbildungen möglich.

# Die Umwandlung der Sonnenenergie, des Wassers und des Kohlenstoffes in der Landwirtschaft.

Von E. H. Reinau und F. Kertscher.

Mit 9 Textabbildungen.

Mitteilung aus der Versuchs- und Lehranstalt für Bodenfräskultur der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H., Gieshof b. Neubarnim.

Eingegangen am 19. Dezember 1924.

## I.

Pflanzen und Tiere sind die Erzeugnisse der Landwirtschaft. Phylogenetisch und schöpfungsgeschichtlich ist die Pflanzenerzeugung das Ursprünglichere dieses Gewerbes. Die Ökonomie des Ganzen ergibt indessen ein ganz folgerichtiges Zusammenspiel von Pflanzenbau und Heranzucht von Tieren. Diese erleichtern durch ihre größeren Kräfte viele Maßnahmen, die der Pflanzenbau erfordert, er aber erzeugt sehr oft nebensächliche Bestandteile, mit denen gefüttert die Tiere gerade jene notwendigen Kräfte leisten. Und schließlich hinterlassen die Tiere wiederum in den Fäkalien und Lagermaterialien Abfallstoffe von unverkennbar für den Pflanzenbau praktischem Wert. In sogenannten vieh- oder dunglosen Wirtschaften hat man versucht, aus diesem Rade der Dinge ein Stück zu lösen. Nach 2 bis 3 kurzen Generationen hat sich erwiesen, daß man so keine 4 Jahrtausende Landwirtschaft<sup>1)</sup> treiben könnte. Wir sind geneigt, dies besonders einer falschen Anschauung zuzuschreiben, welche man bis vor kurzem darüber hatte, woher der Kohlenstoff der Pflanzen stammt. Er kommt bei unseren ertragreichen Feldfrüchten zum großen Teil aus der Erde und nur zu 10 bis 20% aus der Luft<sup>2)</sup>. Solange man Vieh hielt, brachte man viel mehr Kohlenstoff wieder in den Acker zurück und erhielt ihn gesund. Wir lassen allerdings nicht wie Thaer und dessen Zeitgenossen den Kohlenstoff durch die Wurzeln in die Pflanzen übergehen, sondern wir veranlassen die Pflanzen, ihre grünen Blätter recht dicht über das Land zu breiten und tags und nachts den Kohlenstoff, der als gasförmige Kohlensäure jede Kulturerde immerwährend verläßt und in die Luft diffundiert, festzuhalten. Tags soll das Blattgrün mit Hilfe des sichtbaren Lichtes die Kohlensäure sofort in Zucker und Stärke verwandeln. Nachts aber mögen die Blätter verhindern, daß der Strom des Nährgases verweht, indem sie teilweise in ihrer Substanz die Kohlensäure auflösen, teils Winde völlig vernichten, so daß ein Polster des Nährgases innerhalb des Blätterraumes die diffundierende Abgabe aus dem Boden vermindert.

<sup>1)</sup> Techn. i. d. Landw. 1925, H. 3.

<sup>2)</sup> Techn. i. d. Landw. 1924, H. 5 und 10.

## II.

Zwischen Pflanze und Tier stehen die Lebewesen, die keinem der beiden Reiche eigentlich zugehörend den Ring schließen, da wo ihn die vieh- oder dunglose Wirtschaft zu sprengen trachtete: Was Pflanze, Tier und Mensch nicht mehr oder noch nicht benutzen können, kann ein Paradies für die Bakterien werden. Die Ökonomie des Landbaues muß diese Kleinlebewesen ebenso betreuen, wie sie Pflanzen und Tiere aufs sorgfältigste zu warten hat. Es steht heute fest, daß die Bakterien, ganz abgesehen von der Ökonomik mit den letzten, unansehnlichsten Abfallstoffen, den Pflanzen das Nährgas Kohlensäure im und aus dem Boden immer so stark und rechtzeitig liefern, wie hocherträgige Kulturen sie brauchen können<sup>1)</sup>. Wir wollen auch nicht unerwähnt lassen, daß Versuche Stoklasas<sup>2)</sup> und Erwägungen Abderhaldens<sup>3)</sup> es wahrscheinlich machen, daß diese Bodenbakterien außerdem beim Kreislaufe der Vitamine eine Rolle spielen.

## III.

Über den Urgrund des Pflanzenbaues und der Landwirtschaft genügt es zu sagen, daß wir bis heute kein anderes praktisches Mittel haben außer der grünen Pflanze, um zu menschlichen Nahrungsstoffen und Bekleidung zu gelangen. Kraft und Stoff sind in dem, was uns zur Nahrung dienen kann, so eng funktionell verflochten, daß nur solche chemischen Körper, die bei einer ganz bestimmten Form (Konstitution) gewisse Mengen von Kraft in sich bergen, Nahrungsmittel sein können. Der Kohlenstoff nimmt wegen seiner chemischen Wendigkeit die erste Stelle unter den Elementen ein, die diese Stoffe zusammensetzen können. Über den Stickstoff ist so viel geschrieben worden, daß es genüge, ihn als zweiten zu nennen, ehe wir den beiden Elementen des Wassers, dem Sauerstoff und dem Wasserstoff, ihren gebührenden Platz anweisen. Noch etwas Phosphor, Kali, Kalk, Magnesium und einen Schuß Eisen in die Retorte, dann ist alles versammelt, um die Kraft der Sonne zu meistern und mit grünem Chlorophyll aus Kohlensäure und Wasser die Potenz zu schaffen, daß der Kohlenstoff vom Sauerstoff und dieser vom Wasserstoff des Wassers getrennt wird, daß Kohlenhydrat und gasförmiger Sauerstoff entsteht. Um diese Trennung zu vollführen, ist verhältnismäßig viel Kraft nötig, und nur am organisierten Chlorophyll der Pflanzen kann Sonnenkraft chemisch sich wandeln. Der Schritt vom Kohlenhydrat zum Fett bzw. Eiweiß ist energetisch im wesentlichen ein intramolekularer Vorgang, wobei also von außerhalb keine neue Energie aufgenommen wird. Diese drei Stoffgruppen in ihren verschiedenen Abwandlungen sind dann das Bildmaterial der tierischen Organismen und liefern bei und nach dieser Funktion mit Sauerstoff zusammen-treffend Wärme, wobei Kohlensäure und Wasser entstehen. Diese beiden können vermittels des Blutes und der Lunge dank ihrer Gasform leicht das System verlassen und teils gasförmig, teils in flüssigem Zustand in den großen Kreislauf zurückkehren.

## IV.

Bis vor kurzem hätte es verständlich erscheinen können<sup>4)</sup>, daß das hochwertige und einzigartige Geschäft unserer landwirtschaftlichen Pflanzen, aus Licht chemische Kraft zu erzeugen, verhältnismäßig viel Flächenraum in Anspruch nimmt.

<sup>1)</sup> Techn. i. d. Landsw. Heft 10.

<sup>2)</sup> Schweiz. Landw. Monatsh. 1924, S. 19.

<sup>3)</sup> Z. angew. Chem. 1924.

<sup>4)</sup> Tidl. 1923.

Diese Flächenhaftigkeit der Pflanzenerzeugung ist ein bedeutender Hemmschuh in der Technisierung der Landwirtschaft. Da es eine weitverbreitete Ansicht ist und der allgemeine Zug dahin geht, den Fortschritt eines Gewerbes in seiner Technisierung zu sehen, so sei hier nebenher untersucht, ob und worin beim heutigen Stande unseres Wissens die Flächenhaftigkeit der Pflanzenerzeugung noch begründet ist, denn praktisch ist die Natur unserer drei Wachstumsfaktoren flächenhaft und könnte das Hemmnis der Technisierung sein.

Die Urfabrik von Weizenstärke oder Rübenzucker, also das Weizenfeld oder der Rübenacker, ist ein entsetzlich weitläufiges Ding mit Tausenden und Aber-tausenden von einzelnen Lichttransformatoren — Weizenpflanze und Rübenstaude, — zu deren jeder man gewisse Rohstoffe hinbringen, bei der man Maßnahmen vornehmen und deren Erzeugnisse man einsammeln muß. Viele Wege und Menschen sind nötig, und überdies handelt es sich um lebende Automaten, die mit Verständnis behandelt sein sollten. Schwer kontrollierbare, während eines Jahres oft wechselnde Menschen schaffen dann schließlich 5 bis 35 t Ware aus 10 000 m<sup>2</sup> Fläche, auf der beispielsweise ein modernes Kaliwerk täglich 1000 bis 2000 t Rohsalze in hochwertige Produkte umsetzt.

## V.

Bis vor kurzem war nur bekannt, daß landwirtschaftliche Kulturen höchstens zwischen 1 bis 3% der Energie der Sonnenstrahlen in nutzbare Stoffe bannen. Da das Licht auf die Fläche strahlt, aber zu schlecht genutzt wird, muß die Fläche sich sehr dehnen, wenn man große Produktion haben will. In wissenschaftlichen Blattexperimenten von verhältnismäßig kurzer Dauer und unter sonst ziemlich künstlichen Bedingungen war die Energieausbeute von Brown und Escombe auf 6%, von Willstätter<sup>1)</sup> auf 8% getrieben worden. Aber man konnte nicht ganz sicher entscheiden, ob der Unterschied daher rührte, daß beim Blattexperimente eben jedes Strahlenteilchen wirklich auf Blattgrün traf, während draußen auf dem Felde doch oft auch der Boden von Strahlen berührt wird, ja vielleicht berührt werden muß. Der erhöhte Gehalt an Kohlensäure in der Luft bei diesen Experimenten konnte auch, wie unten erläutert, zu dem besseren Energieeffekte beitragen.

Man hätte sich auch vorstellen können, daß das Chlorophyll nur einen ganz bestimmten Spektralteil des Sonnenlichtes, den es besonders stark absorbiert, verwerten kann, da auf die verschiedenen Absorptionsbanden des Chlorophylls vom Langley'schen Energiespektrum etwa 6% der ganzen Energie fielen. Nun haben aber neuere Untersuchungen von O. Warburg und E. Negelein<sup>2)</sup> ergeben, daß Wasser-algen Licht von  $\frac{1}{1000}$  Sonnenlichtstärke (0,00004 Kal./sec-cm<sup>2</sup> oder 1,44 Kal./m<sup>2</sup>-st aus den verschiedensten sichtbaren Spektralbezirken mit bis zu 70% Ausbeute umzusetzen vermögen.

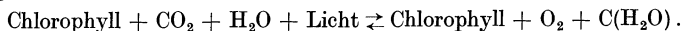
Die Spezifität gewisser Spektralbezirke kann also nicht aufrechterhalten bleiben. Daß gewisse Strahlen weitestgehend ausgenutzt werden, war schon immer angenommen worden<sup>3)</sup>. Wenn die Wirkung aber nicht für einzelne, sondern alle möglichen Spektral-teile vorhanden ist, so muß der Effekt des Lichtes sehr viel größer werden. Was ihn nun praktisch doch verkleinert, das kann man aus den genannten Experimenten

<sup>1)</sup> Willstätter und Stoll: Untersuchung über d. Assimil. der Kohlensäure 1918, S. 86.

<sup>2)</sup> Z. physiol. chem. BC 2, S. 235.

<sup>3)</sup> Reinau: Kohlensäure und Pflanzen S. 55ff.

ersehen. Um dies klarzulegen, zunächst einiges über die chemische Gleichung des Vorganges, die vereinfacht folgendermaßen aussieht:



Chlorophyll geht unverändert gewissermaßen als Katalysator aus der Reaktion hervor, Wasser ist immer im Überschuß vorhanden, und vom Sauerstoff ist anzunehmen, daß er dank seiner geringen Löslichkeit in Wasser das Reaktionsgemisch alsbald verläßt, also durch seine Konzentration die Geschwindigkeit derselben wenig beeinflußt. Darum wäre die Geschwindigkeit des Vorganges mit den bezüglichen Konzentrationen der Reagenzien wie folgt verbunden:

$$K = \frac{C_{\text{Licht}} \cdot C_{\text{CO}_2}}{C_{\text{C}(\text{H}_2\text{O})} \cdot C_{\text{O}_2}}.$$

Bei den Experimenten Warburgs und Negeleins war nun die Konzentration der Kohlensäure mindestens 100 mal größer wie in gewöhnlicher Luft, dagegen war die Lichtstärke sehr gering ( $1/1000$  Sonnenlicht). Andererseits wurde der Versuch nur ganz kurze Zeit — 10 Minuten — durchgeführt, so daß die Konzentration des Zuckers nur klein werden konnte. Der Divisor blieb also klein, und so wurde K sehr groß, d. h. die Reaktion schritt weit und rasch fort. Da bei Lichtschwächung der umgekehrte Vorgang unter Freiwerden von Energie — die Atmung — stattfindet, so könnte man an ein chemisches Gleichgewicht denken. Außerdem ist durch den Kunstgriff, einzelne Chlorophyllzellen zu verwenden, die als Algen im Wasser so dicht aufgeschwemmt waren, daß nichts von dem hereingelassenen Licht ungenutzt passieren konnte, noch erreicht worden, daß die Diskontinuität der bedeckten Fläche, welche beim Blatte Leitgefäße (Nervatur), Interzellularen, Plasma usw. verursachen, beseitigt war. Den Antransport von Kohlensäure besorgte und beschleunigte das geschüttelte Wasser, welches auch außerdem den ausgeschiedenen Sauerstoff rasch beseitigt. Eine Verzögerung der Reaktion, die sich eben in einem minderen Lichtnutzungseffekte ausgedrückt hätte, ist durch Unterstützung der Diffusion behoben worden. Geringe Diffusion ist aber sehr oft die größte Bremse chemischer Reaktionen. Alle neueren Erfolge mit  $\text{CO}_2$ -Düngung und die Erforschung der Bedeutung der bodenbürtigen  $\text{CO}_2$  für die Pflanzenproduktion bestätigen dies. Da bei den Warburg-Negeleinschen Versuchen größere Lichtstärken weniger günstig ausgenutzt wurden, müßte man praktisch mit Wasserschichten von ca. 30 bis 35 m Höhe arbeiten, damit schließlich auch die letzten Lichtreste genutzt werden. Immerhin haben diese Experimente einen Fingerzeig gegeben für einen Weg, den kommende Geschlechter zur Nahrungserzeugung gehen können. Denn wenn es mittels der Chlorophyllzelle möglich ist, anstatt wie heute nur ca. 1 bis 3% Licht 70% oder 50- bis 70 mal mehr transformierend zu nutzen, dann wird man anstatt 4000 bis 5000 m<sup>2</sup> landwirtschaftlicher Fläche pro Kopf der Bevölkerung nur noch 70 bis 80 m<sup>2</sup> benötigen. Ja man kann die Rechnung auf der jährlich 1 m<sup>2</sup> Boden in der Lage von Potsdam zustrahlten Lichtenergie (0,53 Mill. Kal.) basieren. Da man einen mittleren Jahresbedarf des Menschen von 1 Mill. Kal. ansetzt, so genügte in Zukunft sogar die geringe Fläche von 3 m<sup>2</sup> aus lichtenergetischen Gründen zur vegetarischen Ernährung des Menschen bzw. 10 m<sup>2</sup>, wenn  $1/3$  zunächst in Tierfleisch umgesetzt würde.

Unsere heutige Landwirtschaft mag immerhin also des Lichtes wegen weit gedehnt sein, die fortschreitende Nahrungsversorgung der Völker könnte vielleicht die Lichttransformation auf viel kleinere Fläche zusammendrängen.

## VI.

Der Gegensatz: In Zukunft Photosynthese mittels Wasserpflanzen, während derzeit Landpflanzen dazu benutzt werden, gibt innerlich Anlaß, eines weiteren wichtigen Momentes zu gedenken, das uns heute zwar auch zur Fläche drängt, aber doch wenigstens mit der schlechten Lichtnutzung aussöhnen wird. So bekannt es ist, daß alle unsere landwirtschaftlichen Gewächse ziemlich viel Wasser zum Wachsen verbrauchen — etwa 300 bis 500 mm Regenhöhe auf die Fläche oder ca. 300 kg Wasser für 1 kg Trockensubstanz —, so selten wird daran gedacht, daß dieses Wasser als Dampf die Blätter verläßt, und noch viel weniger daran, daß doch irgendwoher die zum Verdampfen nötige Energie kommen muß. Solange die Urpflanzen noch im Wasser völlig untergetaucht waren, standen ihnen die geringen Mengen von Nährsalzen, die sie brauchten, aus diesem Medium durch einfache Diffusion durch die Zellwandungen zur Verfügung. Das Wasser in seiner Masse war ihnen sehr gleichgültig. Anders wurde dies, als spätere Pflanzengeschlechter den Versuch begannen, sich aus dem Wasser zu erheben und auf dem Lande zu leben. Nach wie vor blieb die Gewohnheit, nur flüssige und gasförmige Nahrung zu sich zu nehmen. Kohlensäure und Sauerstoff folgten als Gase in das neue Medium, die Luft; aber die Salze blieben im Wasser zurück, und vermittels der Diffusion wäre der Beschaffungsweg zu lang, zu zeitraubend und ungenügend gewesen. Mit Erhebung in die freie Luft und ins freie Licht bot sich der Ausweg, das Wasser in Massen in sich hineinzuziehen und vermittels der Wärme verdampfend in die Luft zu befördern. Da 300 l Wasser aber zum Verdampfen 50mal soviel Wärme benötigen, wie ein Kilogramm Zucker chemisch zu bilden, so wird es schon begreiflich, warum die Landpflanzen nur etwa 2% des Lichtes chemisch ausnutzen. Den Rest verwenden sie, um aus dünnen, wäßrigen Lösungen die nötigen Nährsalze heranzuschaffen und zu konzentrieren. Denn an Leichtlöslichem sind die Bodenoberflächen ja ausgewaschen, und um Nährsalze aus dem Schwerlöslichen frei zu machen, bedarf es eben viel Wasser.

Die Landpflanzen pumpen also aus stammesgeschichtlichen Gründen während ihres Wachstums eine sehr große Menge des auf die Fläche hernieder regnenden Wassers als Substanz durch sich hindurch und machen es zu Dampf. Sie benötigen somit die Horizontalfläche sowohl als Regenfänger wie auch als Energiespender. Aus beiden folgt die Ausdehnung der Landwirtschaft über die Fläche und der schlechte photosynthetische Nutzeffekt.

## VII.

Man könnte uns nun vorwerfen, an alles mögliche für die Flächenverbundenheit der Landwirtschaft dächten wir, nur nicht an die allernährnde Erde. Indessen wir geben ihr den Platz, den sie logisch einnehmen sollte. Zwar hat im gegenwärtigen Gebäude unseres Wissens von den Bedingungen des Wachstums der landwirtschaftlichen Kulturen Geologie, Mineralogie und Chemie des Bodens einen größeren Raum, als dem Stande unserer Technik eigentlich entspricht, die der chemischen Bedeutung des Bodens fast jeden Boden entzieht.

Man weiß genau, welche Ernte wir 1913 hatten. Sie war ein Rekord! Den Gehalt an allen wesentlichen Salzen und an Stickstoff kann man berechnen, so daß man mit weitgehender Sicherheit sagen kann, in den Pflanzenmassen, die man 1913 von den Äckern und Wiesen wegnahm, waren 1,755 Mill. Tonnen Stickstoff, 1,885 Mill. Tonnen Kali und 0,75 Mill. Tonnen Phosphorsäure enthalten.

Klee, Luzerne und Wiesen versorgen sich durch eigene Klein-Leunabetriebe — Knöllchenbakterien — selbst mit ca. 0,7 Mill. Tonnen N, unsere deutschen Fabriken dürften etwa 0,800 Mill. Tonnen liefern. Von der Phosphorsäure sind 1913 etwa  $\frac{4}{5}$  durch Thomasmehl und Superphosphat gedeckt worden, und vom Kali, an dem wir reichlichen Überfluß haben, hat man etwa 0,5 bis 0,7 Mill. Tonnen auf die Äcker gebracht. Es würde weder große Kosten machen noch unmöglich sein, die ganze erforderliche Menge des Kalis unseren Bergwerken zu entnehmen und den Pflanzen zuzuführen. Nicht anders wäre es mit dem Kalke. Praktisch ernähren wir also unsere Kulturen heute schon so, wie es die Vorschrift für jede künstliche Sandkultur erheischt, und doch wird noch immer vom Nährstoffgehalt der Böden soviel gesprochen. Wenn wir aber von seinem Nährstoffgehalt theoretisch fast nichts mehr brauchen, so könnten wir rein mechanisch das Gefüge zum landwirtschaftlichen Betriebe einige Etagen höher auf Dachgärten auf einige Dezimeter dicke Schichten aus Sand, etwas Ton und Bimsstein verlegen, um unten für Autostraßen, Bahnen und Kanäle Wege zu lassen! Dort oben wäre die Pflanzenproduktion sogar der atmosphärischen Kohlensäure noch viel näher als jetzt, wo der Boden fast nur noch pflanzentragendes Substrat ist.

#### VIII.

In der Tat ist der Boden aber dennoch mehr Nährstoffgeber sowohl von Salzen als von Stickstoff, Wasser und Kohlensäure. Mit Land wirtschaften heißt, außer Pflanzen- und Tiererzeugen auch ökonomisches Verwerten all der vielen Abfallstoffe, die bei den ersten zwei Zweigen entfallen, und zwar ein Verwerten durch Bakterien des Bodens. Kohlenstoff ist aber die Seele dieser lichtscheuen Gestalten. Ihr Element ist der Humus, die alte Bodenkraft, jedes gefallene Leben und was sie ausatmen, ist Kohlensäure, der Treibriemen, der die Kraft der Sonne auf die grünen Gewächse dicht über dem Boden überträgt. Indessen, wenn ihre Seele und ihr Odem auch Kohlenstoff und Kohlensäure ist, ihr Wesen und ihr Leben ist noch vielerlei mehr. Sie verdauen all den lästigen Unrat des bäuerlichen Betriebes, daß er wieder für die Pflanzen bekömmlich wird. Sie zersetzen Felsen- und Gesteinskörnchen, sie vermögen Stickstoff aus der Luft zu binden in einem Boden, der Wasser und Sauerstoff enthält und genügend erwärmt ist. Prof. Remy schätzt die Mengen auf 2,5 Mill. Tonnen pro Jahr, d. h. so hoch, daß bei richtiger Ackerpflege jegliche künstliche Stickstoffdüngung Unsinn würde. Diese Bedingungen und Umstände können aber aus dem Wesen der Sache heraus nur in einer ganz beschränkten, belüfteten und befeuchteten Schicht der Erde von etwa 3 bis 30 cm Tiefe vor sich gehen. Da namentlich junge Wurzeln gegen ein Zuviel von Kohlensäure empfindlich sind, so ist ein Optimum zwischen Porosität und Tragfähigkeit des Bodens für die Pflanzen unerläßlich. Was ein mit Nährsalzen gedüngtes und gut gewässertes reines Tonsandgemisch nicht vermag, das kann der richtig kultivierte, Bakterienfutter haltende und belebte Boden, nämlich Kohlensäure, Stickstoff, Phosphorsäure und Kali in solchen Mengen hergeben, wie sie für höchste Ernten von den grünen Kulturgewächsen gebraucht werden. Nach unserer Ermittlung in Gieshof (vgl. Kapitel XV) können Deutschlands bebaute Böden während der Vegetationsperiode etwa 70 bis 80 Mill. Tonnen Kohlenstoff als Kohlensäure ausatmen, während in den wachsenden Pflanzen etwa 72 bis 75 Mill. Tonnen Kohlenstoff organisiert werden. Aber auch bezüglich des Kohlenstoffes wäre man geneigt zu fragen, wozu brauchen wir den Boden, da

wir doch das Doppelte von dieser Kohlenmenge aus Bergwerken fördern und größtenteils im Lande zu Kohlensäure wieder verbrennen. Haben nicht Dr. Riedel und Deutsch-Luxemburg. Bergwerks- und Hüttenverein — A.-G., gelehrt, mit solchen Abgasen Pflanzen wachsen zu lassen?<sup>1)</sup> Könnte man nicht diese viele Kohlensäure und die Unmengen von künstlichen Düngemitteln gemäß Warburg und Negelein in tiefen Weihern zusammen wirken lassen, wo geeignete Algen das Licht zu 70% in Pflanzenmassen umsetzen? Warum sollte man nicht, wenn das Land so knapp, die Menschen so viele und der Schrei nach Nahrung so groß würde, anstatt Filetbeefsteaks Algenschnitzel zum Diner begehren? Mag also eine Zukunft Malthus hohnlachen und Sonne, Wasser, Kohlensäure und Nährsalze ganz anders umsetzen, wir müssen wohl aus Kapitalmangel dabei verweilen, die Ökonomie unserer jetzigen flächenhaften Landwirtschaft mit Sonne, Wasser und Kohlensäure zu verbessern. Noch sind diese drei die unerschütterlichen Exponenten der Flächenhaftigkeit der Landwirtschaft, die Hemmnisse der Technisierung. Aber ist es nicht schon höchste photosynthetische Technologie, wie in dieser verkehrten technischen Welt des Bauern Licht verfeuert und aus Rauchgasen mit Dampf Kohle erzeugt wird?

#### IX.

Die Sonne strahlt Energie herab in den Bereich der Lufthülle der Erde und durch diese hindurch hinab auf den Boden; wo diese Strahlen Materie treffen, nimmt diese mehr oder weniger von deren Energie auf. Sei es, daß dann diese aufgenommene Energie chemische Änderungen, sei es, daß sie physikalische Vorgänge hervorruft, sei es, daß die Energie den inneren Schwingungszustand der Materie so verändert, daß sie selbst als Energiezentrum wieder ringsum ausstrahlt.

Relativ zur Bodenfläche eines bestimmten Punktes der Erde kann nun ein Sonnenstrahl tangential oder axial die Lufthülle durchdringen. Im ersteren Falle hat er ein Mehrfaches an Lufthülle zu passieren als im letzteren Falle. Er wird also mit mehr Materie zusammentreffen können und schließlich unwahrscheinlich wenig von seiner ursprünglichen Energie behalten. So hat z. B. das Licht der aufgehenden Sonne noch keine Kraft.

Da wir hier die Umsetzungen der Sonnenenergie in der Landwirtschaft behandeln, weichen wir von dem bei der Strahlungsforschung üblichen Maße ab, welche mit Rücksicht auf die benutzten Meßapparate und die schnellen Änderungen, denen die Stärke der Strahlung innerhalb kürzester Zeit unterliegt, ihre Angaben in Grammkalorien auf den Quadratcentimeter in der Minute bestrahlter Fläche zu machen pflegt. Unsere Angaben beziehen sich alle auf den Quadratmeter pro Stunde, und wir geben sie in großen Kilogramm-Kalorien an. Überdies beziehen sich unsere Werte immer auf die horizontale Fläche und nicht auf die Fläche, die senkrecht zur strahlenden Richtung liegt.

An der Grenze der Lufthülle strahlen nun auf einen senkrecht zur Lichtrichtung stehenden Quadratmeter in der Stunde 1200 Kal. Energie (2,0 Kal./cm<sup>2</sup>/min). Die einfache Dicke der Lufthülle, wenn sie auf dem kürzesten Wege, also axial von dieser Strahlungsenergie durchdrungen wird, nimmt daraus so viel Energie hinweg, daß in Meereshöhe auf der Erde um die Mittagszeit, wenn die Sonne im Zenit steht, nur noch 780 Kal. anlangen. Dies gilt nur von dem allerhellsten Wert und völliger Sichtigkeit der Luft. Enthält sie Trübungen von Staub, Wasserdunst oder gar

<sup>1)</sup> Mitt. Deutsche Landw.-Ges. 1920.



Wolken, so sinkt der gesamte Wert auf die Hälfte und weniger. An sich nehmen die Moleküle der Luft, Sauerstoff und Stickstoff, nur etwa 10% der Energie weg, die sie größtenteils zerstreuen. Dagegen hält der Wasserdampf der Luft, die Luftfeuchtigkeit, 20 und 30% strahlende Energie ab, wovon er 6 bis 8% festhält und 5 bis 20% wieder diffus ausstrahlt.  $\text{CO}_2$  absorbiert Licht und Wärme sehr stark. Das Bild von der energievereschlingenden Fähigkeit der Lufthülle ist vervollständigt mit der Angabe, daß ein fast tangential durch sie eilender Strahl mit etwa 10% Neigung an die 7- bis 8 mal so dicke Lufthülle 86% seiner Energie abgibt, wovon dann etwa 40% vom Sauerstoff und Stickstoff aufgenommen und zerstreut werden, während der Wasserdampf bis 43% zerstreut und 5% aufnimmt.

Nun treffen in der Tat ja in jedem Augenblicke auf die Lufthülle der Erde Sonnenstrahlen sowohl axial als auch tangential und unter allen möglichen Winkeln auf, und jeder wird einen entsprechenden Teil der Energie an die begegnenden Luftteilchen abgeben. Diese werden also von allen möglichen Richtungen her Energie beziehen und weitestgehend wieder ausstrahlen. In Summa macht dies die Helligkeit des blauen Himmels aus, und die Menge von Energie, welche sie dem Quadratmeter Erde zustrahlt, ist etwa 36 Kal./st.

Zunächst, gewissermaßen mit astronomischem Auge betrachtet, empfängt also das Quadratmeter Erde von dem kleinen Sonnenkreischen, das höchstens einige Bogensekunden seines Himmels einnimmt, rund 840 Kal. Aber gegenüber dem großen finsternen Weltenraum mit seiner absoluten Kälte ist dieses Quadratmeter wiederum ein Strahler, und zwar von ganz bedeutendem Ausmaße. Gemäß dem Stephanschen Strahlungsgesetze ist dieses sehr stark abhängig von der Temperatur dieses Quadratmeters und sie würde bei Abwesenheit der Lufthülle rund 180 Kal./qm bei minus  $23^\circ$  und 426 Kal. bei  $37^\circ$  oder Bluttemperatur betragen. Die Anwesenheit der Luft mag diese theoretischen Werte um etwa 40 bis 50% vermindern, immerhin sind es noch erhebliche Mengen von Wärme, die in jeder Stunde des 24stündigen Tages hinweggehen, während jene 840 Kal. doch nur in den mittagsnahen Lichtstunden bei klarstem Wetter herabkommen. Die Sonnenaufgangsstunde eines herrlichen Junimorgens bringt höchstens 10 bis 12 Kal.

## X.

Dieses Kommen und Gehen von strahlender Energie durch Luft und Erde äußert nun dort seine Wirkungen, wie schon gesagt, chemische und physikalische. Von letzteren interessiert den Landwirt nun vor allem die, welche er Wärme nennt und mit dem Thermometer messen kann. Geht mehr Energie weg als zustrahlt, so sinkt die Temperatur. Das Leben von Pflanze und Tier erstirbt mehr und mehr. Da ein gewisses Minimum von interzellularem Leben des Eiweißes diesem gewisse mikroskopisch geringe Bewegungen zur Bedingung macht, spielen sich wärmeabgebende Vorgänge auf Kosten seiner Substanz ab, die diese aufzehren und schließlich den Tod herbeiführen. Der Sinn der Landwirtschaft ist aber, Substanz und Energie gewinnen oder mindestens veredeln.

Nun weiß man, daß dasselbe Blatt zur Aufrechterhaltung des inneren Lebens etwa  $\frac{1}{10}$  bis  $\frac{1}{20}$  der Energie in der Zeiteinheit verbraucht, die es unter normalen Bedingungen assimilieren kann. Es genügen also täglich 1 bis 2 Stunden guter Assimilationstätigkeit, um das Vorhandene zu wahren. Zuwachs erfolgt nur, wenn das Chlorophyll wesentlich länger als diese Zeit arbeiten kann. Unglücklicherweise kommt

nun noch hinzu, daß bei sehr vielen Pflanzen die Chlorophyllfunktion aufhört, wenn die Temperatur unter 4, 0 oder minus 5° sinkt. Dann nützt kein Licht! Denn wenn auch an einem hellen Wintertage im Januar bei uns 300 Kal. starke strahlende Energie ein Blatt trifft, das minus 10° hat und frostfest ist, nur bei einem bißchen Wind strahlt es schon 180 bis 240 Kal. aus. Bei der gewöhnlichen Lichtnutzung könnten aus den restlichen 60 Kal. höchstens eine chemisch gebunden werden.

Es wird also zuallererst, ehe Assimilation und Wachstum beginnen können, mehr Energie zu- als wegstrahlen müssen: Temperaturerhöhung nötig sein. Hierzu trägt nun in unseren Breiten außer der direkten Sonnen- und Himmelsstrahlung noch ein Umstand bei, der für unsere klimatischen Verhältnisse besonders bedeutungsvoll ist. Wir erhalten nämlich eine Zusatzmenge von Energiestrahlen dadurch, daß am Äquator stark erhitzte leichte Luftmassen mit großem Energiegehalt emporsteigen und polwärts abfliegen. Diese Luftmengen wirken dann in den höheren Breiten als zusätzliche Energiestrahler. Den Wert dieser Energielieferung konnte man dadurch messen, daß man bei Nachtbeobachtungen ermittelte, daß die wirkliche Ausstrahlung von der Erde nicht die hohen Beträge von 180 bis 426 Kal. des schwarzen Körpers gegen den kalten Weltenraum hatte, sondern nur zwischen 125 und 66 Kal. Die Gegenstrahlung der Atmosphäre hat also ca. 70 bis 300 Kal. geliefert. Sie ist nicht zu verwechseln mit den etwa 36 Kal. des blauen Himmels. Überdies hat sie zum Unterschiede von letzterer eine 24stündige Dauer.

Wie wir schon oben angedeutet haben, hat nun die mehr oder minder große Klarheit der Luft, ihre Durchsetztheit mit Materie einen starken Einfluß auf die beiderseitigen Energiestrahungen zu und von der Erde, darunter besonders die Bewölkung. Um deshalb zu wissen, wieviel Sonnenenergie an einem Tage, in Wochen, Monaten oder zu bestimmten Jahreszeiten oder im ganzen Jahre auf ein Quadratmeter Land an einer bestimmten Stelle trifft, sind eine große Anzahl tägliche Ermittlungen der verschiedensten Art nötig: Strahlungsmessungen, wie sie im astrophysikalischen Institute in Potsdam oder von Prof. Dorno<sup>1)</sup> in Davos vorgenommen werden, ferner Bewölkungsschätzungen, Sonnenscheindauer usw. Überdies muß der geographische Ort des Erdflecks berücksichtigt werden und seine Neigung. Aus allen diesen Beobachtungen kann man dann schließlich mittlere Summen der zu-

Tabelle 1. Tagesgang der mittleren Wärmeintensität für Potsdam (wahre Sonnenzeit) an den 12 Monatsmitten in kg/Kal. pro Stunde und Quadratmeter auf die horizontale Fläche. (Bei klarem Himmel.)

Monat	4 <sup>a</sup> u. 8 <sup>p</sup>	5 <sup>a</sup> u. 7 <sup>p</sup>	6 <sup>a</sup> u. 6 <sup>p</sup>	7 <sup>a</sup> u. 5 <sup>p</sup>	8 <sup>a</sup> u. 4 <sup>p</sup>	9 <sup>a</sup> u. 3 <sup>p</sup>	10 <sup>a</sup> u. 2 <sup>p</sup>	11 <sup>a</sup> u. 1 <sup>p</sup>	Mittag	Tagessumme bei mittlerer Bewölkung
Januar	—	—	—	—	[—0,01]	43,1	72,6	160,7	178,9	200
Februar	—	—	—	—	45,7	145,5	221,5	281,3	302,3	480
März	—	—	—	40,9	143,0	246,7	333,2	390,6	412,0	1000
April	—	—	44,2	163,8	291,9	408,6	511,3	572,0	591,1	2130
Mai	—	22,7	113,6	246,2	359,7	480,3	578,9	638,7	656,9	2770
Juni	1,1	58,4	164,0	286,8	415,6	529,7	623,4	678,0	697,9	3310
Juli	0,2	55,0	157,1	273,4	394,3	506,3	588,9	636,3	660,3	2730
August	—	2,5	66,3	178,5	309,4	429,9	519,8	577,1	594,8	2380
September	—	—	2,2	72,1	183,6	290,5	380,9	440,6	462,9	1650
Oktober	—	—	—	3,1	83,8	170,3	276,4	336,2	355,7	600
November	—	—	—	—	5,4	75,3	154,4	207,5	226,4	320
Dezember	—	—	—	—	—	17,8	69,9	114,2	131,7	160

<sup>1)</sup> Dorno: Physik der Sonnen- und Himmelsstrahlung. Vieweg 1920.

gestrahlten Energie für einzelne Tage, Monate und das ganze Jahr erhalten. Die Summe der Sonnen- und Himmelsstrahlungen auf die horizontale Fläche unter Berücksichtigung der mittleren Bewölkung Potsdams macht für diesen Ort im Jahre 538 700 Kal. auf das Quadratmeter (vgl. Tabelle 1). Da der größte Teil der Energie dieser Sonnen-Himmels-Strahlung im sogenannten sichtbaren Teile des Spektrums liegt, so könnte man diesen Betrag auch als die Lichtsumme Potsdams bezeichnen. Hierzu käme nun nach den obigen Ausführungen noch die Gegenstrahlung der Atmosphäre, die im wesentlichen aus unsichtbaren Strahlen besteht, was man gemeinhin als Wärme zu bezeichnen pflegt, sie dürfte schätzungsweise das  $1\frac{1}{2}$ fache bis Doppelte der Lichtsumme betragen. Die Gesamtenergie auf das Quadratmeter im Jahr wäre dann ungefähr 1,3 bis 1,6 Mill. Kal. Da der Überschuß der ständigen Ausstrahlung über die Zustrahlung der Atmosphäre etwa pro  $m^2$ /st 60 bis 120 Kal. oder im Mittel 90 Kal. beträgt, so macht dies im Jahre rund 0,8 Mill. Kalorien. Diese Menge von der Gesamtsumme abgezogen, gibt die Energiemenge, von der man annehmen kann, daß sie für etwas anderes disponibel ist. Dieser Rest beträgt zwischen 0,5 bis 0,8 Mill. Kal. und steht gegebenen Falles zum Gebrauche der Landwirtschaft zur Verfügung.

## XI.

Auf der landwirtschaftlichen Fläche teilt diese Energiemenge sich wieder in 3 Teile: diffus zurückgeworfene, hindurchgehende und aufgenommene Energie. Um Anhaltspunkte zu gewinnen, wieviel Licht von landwirtschaftlichen Flächen zurückgeworfen wird, also für eine Lichtnutzung — es sei denn eben die Sichtbarmachung — ausschalten, haben wir zwar Messungen angestellt, die primitiven Hilfsmittel gestatteten uns aber nur zu ganz rohen Werten zu kommen. Deshalb seien hier nach Dorno die Zahlenwerte des Unterlichtes angeführt. Dasselbe beträgt über Sandboden 14 bis 30%, bei Acker 5 bis 11%. Grüne Flächen werden also mit 10% bei bedecktem und 20% bei klarem Himmel dazwischen liegen. Sicherer sind unsere zahlreichen Messungen über die Lichtmengen, welche das Grün der Kulturen durchdringen und auf den Boden gelangen (Tabelle 2). Grüner Hafer, gut bestanden, läßt etwa 5% Licht hindurch. Luzerne und Klee manchmal nur 3 bis 5%. Roggen je nach der Höhe 25 bis 55%. Man wird im allgemeinen annehmen können, daß auch die unsichtbaren Strahlen in ähnlicher Größenordnung auf den zurückgeworfenen, den hindurchgelassenen und den absorbierten Anteil treffen.

Der Teil von 3 bis 4% der oben aufstrahlenden Energie, welcher eine Grünschlucht durchdringt, wird dem Boden zugute kommen, dagegen verschwinden 70 bis 90% bei den Vorgängen innerhalb der Grünschlucht. Sie haben dort die wichtige Aufgabe der Assimilation und der Pump- und Verdampfarbeit der Blätter zu leisten. 70 bis 90% der 0,5 bis 0,8 Mill. Kal. könnten nun zwischen 640 bis 1040 kg Wasser verdampfen oder 640 bis 1400 mm Regen pro Jahr bzw. ein bißchen weniger, wenn erfahrungsgemäß  $\frac{1}{50}$  der Energie zum chemischen Assimilationsvorgang verbraucht wird.

Eine solche energetische Leistung im Blattgrün ließe dann vom Quadratmeter Fläche einen Substanzertrag von erfahrungsgemäß  $\frac{1}{300}$ stel des verdampften Wassers, also 2,0 bis 4 kg oberirdische Trockensubstanz erhoffen. Praktisch werden solche Erträge kaum erreicht und einige der hauptsächlichsten Gründe dafür seien genannt. Zunächst stehen landwirtschaftlichen Kulturen in der Höhe Potsdams keine 640 bis

Tabelle 2. Verhältnis von auffallendem zu durchgelassenem Lichte bei verschiedenen Kulturen und verschiedener Jahres- und Tageszeit und Bewölkung.

Ort, Art der Kultur	Jahreszeit	Witterung, Beleuchtung	Zeit	Auf- treffende Lichtmenge	Durch- gehende Lichtmenge	Durchgehendes Licht in % des Auftreffenden
				in absoluten Roscoe-Bunsen-Einheiten.		
Gieshof: Weizen, ca. 150 cm hoch, grün	Sommer	Sonnenaufgang	4 <sup>12</sup> bis 5 <sup>12</sup>	91,2	11,9	13,1
		Helle Sonne	5 <sup>42</sup> „ 10 <sup>25</sup>	2 873	747	26
		Helle Sonne	10 <sup>25</sup> „ 1 <sup>25</sup>	10 010	1060	10,5
		Helle Sonne, geg. Dämmerg.	5 <sup>05</sup> „ 7 <sup>22</sup>	912	121	13,5
		Trüber Tag	10 <sup>00</sup> „ 12 <sup>00</sup>	138	25,7	18,4
Gieshof: Klee, weite Reihe, 50 cm hoch	Sommer	Morgens, helles Wetter	8 <sup>00</sup> „ 10 <sup>20</sup>	1736	280	16,1
Wernersdorf: Klee, enge Reihe, 60 cm hoch	Mai	Etwas wechselnd geg. S.-Unterg.	4 <sup>15</sup> „ 5 <sup>15</sup>	260	15,7	6
Wernersdorf: Lu- zerne, 50 bis 60 cm hoch	Mai	Volle Sonne Bedeckt, regne- risch	2 <sup>55</sup> „ 3 <sup>55</sup> 3 <sup>00</sup> „ 4 <sup>00</sup>	695 226	97,5 64	14 28
Gieshof: Hafer, 80 bis 100 cm	Hoch- sommer	Abendsonne	5 <sup>30</sup> „ 7 <sup>22</sup>	990	52	5,2
Gieshof: Rüben	Herbst	Abendsonne	5 <sup>30</sup> „ 6 <sup>22</sup>	121	60	50
Gieshof: Ackerboh- nen, 110 bis 120 cm	Sommer	Helle Sonne, gelegentl. Wolken	11 <sup>45</sup> „ 4 <sup>00</sup>	860	91	10,6
Berlin: Gewächshaus, 3 m hoch,	Winter	Helle Sonne	1 <sup>30</sup> „ 2 <sup>00</sup>	184	105	60
Rohglas	Winter	Bedeckt	2 <sup>35</sup> „ 3 <sup>00</sup>	91	45	50

1040 mm Regen zur Verfügung, sondern nur 450 bis 550 mm. Nach Abzug der Versickerung (vgl. Kapitel XII.) bleiben höchstens 300 bis 500 mm verfügbar. Wieviel Grundwasser genützt werden kann, ist wenig erforscht. Keinesfalls sind aber die notwendigen großen Mengen Wasser vorhanden zu optimaler Nützung der zu- gestrahlten Energie.

Alsdann ist schon weiter oben an dem Spiel und Widerspiel von Ein- und Ausstrahlung im Laufe des Jahres, der Jahreszeiten und des Tages erörtert worden und geht aus unseren Schemata (Kapitel XVI.) auch hervor, daß oft trotz Zustrahlung weder im Boden noch in der Luft die zum Wachstum geeignete Temperaturstufe zustande kommt. In solcher Zeit kann naturgemäß auch die Energie nicht zum Wachstum ausgenützt werden. Gleiches ist der Fall für Zeiten, wo Kulturen die Felder noch gar nicht oder nur wenig bedecken. Um deshalb zu klaren Vorstellungen über den Umsatz der Gesamtenergie zu gelangen, werden wir weiter unten gewisse Grenzfälle in charakteristischen Zeitpunkten des Jahres unter verschiedenen Umständen behandeln.

## XII.

Die Bedeutung des Wassers für die Landwirtschaft ist eine mindestens 4fache. Zunächst sehen wir es oben bei der Assimilationsgleichung als chemisches Reagens mit Kohlensäure gewissermaßen als Reduktionsmittel auftreten und als Kohlenhydrat aus diesem Prozeß als chemischer Baustoff zu den Pflanzen beitragen. Außerdem

wissen wir, daß namentlich die grünen Pflanzen bis zu 90% Wasser osmotisch und kolloidal gebunden in ihrem Körper enthalten: das sogenannte Konstitutionswasser. Ferner sei an unsere phylogenetische Entwicklung der Landpflanzen aus den Wasserpflanzen erinnert, wie das Wasser ursprünglich nur als Medium rings um diese Wesen durch Diffusion Nährstoffe in die Pflanzen hineingab. Wie aber dann, als die Pflanzen aus dem Wasser stiegen, diese Nährstoffe nur dadurch in zureichender Menge zu erhalten waren, daß das Wasser als Masse vom vielfachen Gewichte der Pflanzen in sie hineingesaugt und von ihnen verdampft wurde: das Transpirationswasser. Seine Menge beträgt das 250 bis 400fache des oberirdischen Trockengewichtes der Pflanzen. Diese 3 Wassermengen stehen ihren Gewichte nach im Verhältnis von 1:10:300. Der Bedarf an letzterer Wassermenge aber entscheidet Sein oder Nichtsein der Kulturen.

Indessen hat diese große Wassermenge, noch ehe die Pflanzen sie dem Boden entnehmen, dort schon einmal, und zwar die alte Rolle als Lebensmedium von Pflanzen, nämlich bei den Bodenbakterien, gespielt. Denn erst bei einem gewissen Gehalt an Wasser können diese ihre Aufgaben im Boden richtig erfüllen und mit zunehmendem Wasser immer besser.

Obleich ein eigentlicher Umsatz von Wasser nicht erfolgt, so sei hier doch noch der beim Gefrieren des Wassers mechanisch bodenlockernden Wirkung gedacht.

Was die Herkunft des Wassers anlangt, das landwirtschaftlicher Nutzung unterliegt, so dominiert das Regenwasser. Zwischen 1000 mm Niederschlag an regenreichen und 500 mm an regenarmen Orten schwanken die Mengen. Westliche Höhenlagen in unseren Mittelgebirgen können bis zu 2000 mm, ja in den Alpen bis zu 2600 mm Niederschlag empfangen. Die Ostseiten liegen bei der hierzulande vorherrschenden Windrichtung aus Westen,

mit der die feuchtigkeitsbeladene Luft von den Meeren herkommt, meist im Windschatten der Gebirge, so daß die Luftströmungen bereits beim Aufsteigen ihren Wasserinhalt an der Westseite der Gebirge entleert haben. Diesen Zusammenhang zeigt sehr schön ein nur 105 km langes Profil quer über den Harz von Seesen bis Ober-Röblingen<sup>1)</sup>. (Tab. 3.)

Im übrigen gehört Ober-Röblingen überhaupt zu einem der regenärmsten Orte Deutschlands, nur in der Gegend von Dirschau-Marienburg gibt es noch Bezirke mit unter 400 mm Regen. Im Durchschnitt wird für Deutschland mit 610 mm Niederschlagshöhe gerechnet.

In dieser Niederschlagsmenge ist entsprechend der Methodik der Meßgeräte (Regenmesser) nur das Regen- und Schneewasser enthalten. Wasserabsonderungen aus der Feuchtigkeit der Luft, die durch örtliche Abkühlung entstehen und die sich besonders auf rauhen und stark ausstrahlenden und sich abkühlenden Oberflächen

Tabelle 3.

	Seehöhe (m)	Jährl. Niederschlag mm
Westen:		
Seesen . . . . .	200	829
Wildemann . . . . .	400	1193
Klausthal . . . . .	578	1336
Rose (Grabenhaus) . . . . .	550	1492
Torfhaus . . . . .	800	1538
Brocken . . . . .	1142	1637
Braunlage . . . . .	565	1199
Schierke . . . . .	620	1153
Grünthal . . . . .	513	1023
Hasselfelde . . . . .	450	722
Harzgerode . . . . .	398	615
Wippra . . . . .	215	566
Eisleben . . . . .	120	494
Seeburg . . . . .	95	440
Ober-Röblingen Osten . . . . .	94	430

<sup>1)</sup> G. Hellmann: Sitzungsber. Akad. Berlin 1920, S. 427.

absetzen, wie Nebelfeuchtigkeit, Tau, Reif und Raufrost wären hinzuzurechnen. Trotz der vereinzelt und sich ziemlich widersprechenden Messungen glauben wir doch, daß sie manchmal bis zu 1 mm pro Tag betragen können.

Die Wassermengen verteilen sich im allgemeinen sehr verschieden auf das Jahr, liegen aber bei uns in Deutschland im allgemeinen so, daß in die Hauptwachstumszeit unserer Pflanzen etwa die Hälfte davon, also etwa 300 bis 350 mm fallen (Abb. 1).

Wir erinnern an den Zusammenhang zwischen geerntetem Trockengewicht und Wasseraufwand (1:300) und an die verhältnismäßig große zustrahlende Energiemenge, die zur Verdampfung von 600 bis 1000 mm Wasser ausreichen müßte; wie leicht könnte dieser Wärmeüberschuß jenes Wassers Herr werden, wenn nicht durch ackerbauliche Kunst alles getan wird, um dieses Wasser der Verdunstung vom nackten Boden zu entziehen und es den Pflanzen zur nützlichen Verdunstung durch

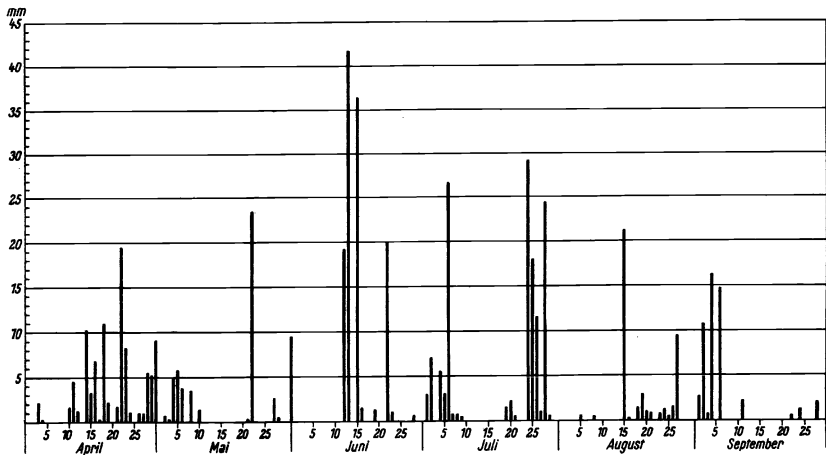


Abb. 1. Regenmenge Sommer 1924: Gieshof-Oderbruch.

die Pflanzenblätter zuzuführen. Im allgemeinen wird damit gerechnet, daß 20 bis 30% des Regens direkt am Boden verdunsten.

Aber noch ein weiterer Abzug ist von der Regenmenge zu machen, nämlich für Versickerung: ca. 50% im Winter, bis zwischen 5 und 0% im Sommer. Überdies kann bei geneigtem Boden zwischen 10 und 30° Gefälle 3 bis 6% Wasser oberflächlich ablaufen. Daß die Versickerung im Sommer sich so stark verringert, rührt aber von dem sehr starken Verbrauch der Kulturen her, die es mit ihren Wurzeln schon aus den obersten Schichten so stark aufnehmen, daß praktisch kein Regenwasser des Sommers mehr als 1 m tief hinabgelangt.

Die Maßnahmen, welche man trifft, um die oberflächliche Verdunstung herabzusetzen — eine lockere, feingekrümelte Schicht Erde von 2 bis 5 cm Dicke herstellen — verhindern auch das oberflächliche Abfließen. Das Versickern in die Tiefe wird durch eine gut gekrümelte, schwammartige Ackerschicht ohne Risse am besten vermieden. Ein zweckmäßiges Verhältnis zwischen dem Volumen von fester Bodensubstanz und Luft, und zwar in gewissermaßen kapillaren Hohlräumen zu der Bodensubstanz, gewährleistet am ersten das mechanische Festhalten des Regen-

wassers in der Ackerschicht. Quellbare Stoffe vermögen, ohne flüssig zu werden, das 8 bis 20fache Wasser aufzunehmen. Praktisch handelt es sich hierbei im Sommer bei uns im Maximum wohl darum, selbst noch tägliche Mengen von 40 bis 60 mm Niederschlag schwammartig festzuhalten, so daß trotzdem noch Lufträume übrig bleiben. Bei einem Bodenluftverhältnis von etwa 1:1 können so in einer 25 bis 30 cm tief bearbeiteten Ackerkrume je 60 mm Regen eindringen und doch noch etwa  $\frac{1}{4}$  Luftvolumen hinterlassen. Wir werden weiter unten sehen, wie wichtig diese Tatsache für den Gasaustausch des Bodens gerade nach Regen ist.

Der Anteil von Grundwasser an der Versorgung der landwirtschaftlichen Kulturen ist sehr wechselnd und hängt im wesentlichen ab von der Nähe des Grundwasserspiegels, also örtlichen geologischen Bedingungen, von der kapillaren Steigfähigkeit des Untergrundes für Wasser und schließlich davon, wie weit und rasch die betreffende Kultur ihre Wurzeln in den Bereich dieses kapillar aufsteigenden Wassers hinabzusenden vermag.

Für Höchsterträge ist es unter mittleren Regenverhältnissen bei uns unerlässlich, daß das Grundwasser täglich mit einigen Millimetern bzw. einigen Litern zum Wachstumsprozeß der Pflanzen beiträgt. Doch dürften die Funktionen von Grund- bzw. Regenwasser für den Ackerbau verschieden sein.

Wir haben im verflossenen Jahre zum erstenmal die gewissermaßen momentane Steigerung der bakteriellen Atmungstätigkeit von Ackerböden nach verhältnismäßig geringen Regenmengen — bis zu 20 mm — beobachtet (siehe Tabelle 6, S. 283). Da diese von dem Boden ausgeatmete Kohlensäure — wie im folgenden erörtert wird — das Übergewicht bei der Versorgung der Kulturen mit Kohlensäure hat, so ist es zweifellos, daß man die Versorgung der Oberkrume mit Wasser scharf zu trennen hat von dem Wasserbedarf der grünen Kulturgewächse, den sie aus dem Untergrunde holen. Die hierdurch angeregte Fragestellung ist sehr bedeutungsvoll sowohl für die Probleme der Bodenbearbeitung als auch für die der künstlichen Bewässerung.

### XIII.

Im zweiten Abschnitt ist auf die Bakterien, speziell auf die Bodenbakterien, hingewiesen worden, deren Bedeutung für den Energieumsatz und Kohlenstoffhaushalt ausführlicher behandelt werden muß.

Organische Stoffe werden in jedem landwirtschaftlichen Betriebe gewonnen und kommen als Abfallprodukte, wie Mist, Fäkalien, tierische Abfälle, Klärschlamm und Müll oder aber als jährlich anfallende Pflanzenrückstände des Ackers, als Unkraut und Gründüngung, in den Boden. Sie bestehen — neben mineralischen Bestandteilen — hauptsächlich aus Kohlenstoff und Stickstoff, enthalten aber nur sehr wenig aufnehmbare Nährstoffe. Der größere Teil ist für die Ernährung untauglich und muß in verwickelten Prozessen abgebaut und in aufnehmbare Form übergeführt werden, eine Arbeit, die zum größten Teil von den Bodenorganismen verrichtet wird und ein sehr wichtiges Glied im gesamten Kreislauf der Stoffe darstellt. Die Bedeutung dieser Leistungen der Bodenbakterien wird oft noch viel zu wenig gewürdigt. Würden alle diese wertlosen Abfallstoffe, die unverarbeitet sogar schädigend wirken können, durch die Bakterien nicht wieder aufnahmefähig gemacht, so würde die Wirtschaft nicht nur dauernd große Verluste erleiden, sondern — auf den Acker gebracht — wäre eine Übersättigung und Verpestung desselben die notwendige Folge. Um welche ungeheure Mengen es sich handelt, braucht nicht weiter aus-

geführt zu werden. Man vergegenwärtige sich nur die Arbeit der Großstädte, ihre Abfälle jeglicher Art zu entfernen und sich davon zu befreien, daß nicht nur Schäden vermieden, sondern die ersteren nützlich verwertet werden können. Leider sieht es auf diesem Gebiete noch schlimm aus und wir sind weit entfernt von dem Grade wirtschaftlicher Ausnützung, der bei östlichen Völkern seit Jahrhunderten erreicht ist<sup>1)</sup>.

Der Vorgang des Abbaues selbst soll später noch besprochen werden. Für die Ökonomik des Landwirts sind diese Vorgänge neben den eben skizzierten Vorteilen weiter von grundlegender Bedeutung. Die Humusbestandteile sind, um einen Ausdruck von Molisch<sup>2)</sup> zu gebrauchen, „die Energie-Akkumulatoren des Bodens“ und die Energiequelle der Bakterien. Von denselben wird die organische Substanz abgebaut, sodaß aus dieser wertvolle Stoffe für die Kulturpflanze, vornehmlich Kohlensäure und Stickstoff, geschaffen und die Energie gewonnen wird, um gleich wichtige andere Arbeiten im Boden zu leisten, sei es, um unaufnehmbare mineralische Dünger, vor allem Stickstoffdünger, in aufnahmefähige Form zu bringen, sei es, selbständig oder in Symbiose mit Kulturpflanzen Stickstoff aus der Luft einzufangen oder unlösliche Bodenbestandteile anzugreifen und in Lösung zu bringen. Eine große Zahl für den Ackerbau wichtigster Tätigkeiten wird also von den Bakterien übernommen, sobald zunächst einmal die Energiequelle vorhanden ist. Dabei tritt eine weitgehende Arbeitsteilung ein. Jede Bakterienart übernimmt ihr eigentümliche Sonderarbeit, tritt da auf und greift ein, wo gerade für sie die entsprechenden Lebensbedingungen gegeben sind. Nur ein Laboratoriumsbeispiel! Nimmt man z. B. gemahlene Torf<sup>3)</sup> und versetzt ihn mit einer Irterson-Nährlösung, impft das Gemisch mit Erde oder Pferdemist, so kann man nach einigen Wochen eine Kahmhaut feststellen, die von dem bekannten, freilebenden, stickstoffsammelnden *Azotobacter-chrooc.* gebildet wird. Der Torf bzw. die Sphagnum-Blatteilchen sind dicht überzogen von Zellulosebakterien, welche die Torf- und Sphagnum-Zellelemente angegriffen und die Wandverdickungen der hyalinen Zellen schon teilweise zum Verschwinden gebracht haben. Die hyalinen Zellen sind geradezu vollgepfropft mit Bakterien. Diesen Zellzerstörern sitzen nun wiederum die *Azotobakterkulturen* unmittelbar auf, um die entstehenden Spaltprodukte, lösliche C-Verbindungen, für sich zu verwerten. Dadurch wird der Energieakkumulator, d. h. die organische Substanz, gleichzeitig die Energiequelle für die stickstoffsammelnde Tätigkeit des *Azotobakt.* In entsprechender Weise wie bei den eben besprochenen Vorgängen tritt eine ähnliche Arbeitsteilung, ein gleiches Hand-in-Hand-Arbeiten der einzelnen Bakterienarten beim Umsatz der Stickstoffverbindungen ein. Eiweißverbindungen werden zum größten Teil durch bestimmte Bakterien bis zum Ammoniak abgebaut, welches, in gleicher Weise wie das in Form mineralischer Dünger gegebene, durch gewisse Arten von Bakterien zunächst in Nitrit übergeführt wird. Mit diesem letzten Prozeß ist die Tätigkeit der als *Bact. nitrosomonas* bezeichneten Kleinlebewesen beendet und eine andere Bakterienart, *Nitrobacter*, übernimmt die Weiterverarbeitung des Nitrits zu Nitrat. Man ist geneigt, an das Fabrikationsband in Fordschen Fabriken zu denken, welches ebenfalls jedem einzelnen Arbeiter eine ganz bestimmte Tätigkeit zuweist und die entsprechende Weiterverarbeitung des Halbfabrikates an zuständiger, dafür geeigneter Stelle ermöglicht.

<sup>1)</sup> King, Technik i. d. Landw. 1925. H. 3.

<sup>2)</sup> Molisch: Pflanzenphysiologie als Grundlage der Gärtnerei.

<sup>3)</sup> Schmidt: Zentralbl. Bakteriolog. II., Bd. 52, S. 13 bis 15. 1920.



Gleich wunderbar ist die Symbiose stickstoffsammelnder Bakterien mit bestimmten Kulturpflanzen, vornehmlich den Leguminosen. Es sei hier auf eine frühere Arbeit Reinaus verwiesen<sup>1)</sup>.

Für den Energieumsatz im Kohlenstoffhaushalt besonders bedeutungsvoll sind neben diesen Wechselbeziehungen in bezug auf Arbeitsteilung noch diejenigen zwischen Bakterien und Kulturpflanzen. Im Winter, wenn die Äcker wenig bestanden sind, die Kulturpflanzen nicht assimilieren können, ruht auch die Arbeit der Bakterien fast ganz (siehe Tabelle 7). Dadurch wird verhindert, daß lösliche Verbindungen entstehen, die ausgewaschen werden könnten, daß ferner große Mengen Kohlensäure produziert werden, die nicht verarbeitet würden. In der Zeit stärksten Wachstums, zu Beginn des Sommers und im Frühherbst, zeigt die Tätigkeit der Bakterien ein Maximum. Sobald jedoch einzelne Wachstumsfaktoren ins Minimum geraten, geht die Intensität der Bakterientätigkeit der des Wachstums der Kulturpflanzen fast parallel.

Für den praktischen Landwirt geben diese Hinweise Richtlinien für die gesamte Bodenkultur, als deren eine wesentliche Aufgabe die Schaffung günstiger Lebensbedingungen für die Kleinlebewesen des Bodens anzusehen ist. Zu den letzteren gehören neben der soeben abgehandelten Energiequelle, also Zufuhr organischer Substanz, Wasser, entsprechende Temperatur, genügender Grad der Durchlüftung des Bodens, d. h. reichlicher Sauerstoffvorrat und die notwendigen Nährstoffe.

Was das Wasser betrifft, so liegen schon zahlreiche Arbeiten vor, die klar beweisen, daß mit steigendem Feuchtigkeitsgehalt die Tätigkeit der Kleinlebewesen gefördert wird. Wird der Boden jedoch zu feucht, tritt also eine zu starke Verdrängung der Luft ein, so verlaufen die bakteriellen Prozesse langsamer. Von unseren Gieshofer Versuchen seien hier nur einige Ergebnisse angeführt für die Kohlensäureabgabe des Bodens, die einen Maßstab für die Tätigkeit der Bodenbakterien bildet. Es ergab sich als Durchschnittswert der CO<sub>2</sub>-Abgabe vor dem Regen bei einem Feuchtigkeitsgehalt des Bodens von 16% 150 mg/m<sup>2</sup>/st. nach Eintritt des Regens (es fielen ca. 3 mm) stieg die Kohlensäureabgabe auf 250 mg/m<sup>2</sup>/st. Ein mit künstlicher Beregnung durchgeführter Versuch bestätigte diese Ergebnisse, zeigte jedoch weiterhin, daß bei einer zu starken Durchnässung des Bodens, bei welcher das Boden-Wasser-Luft-Verhältnis sich zuungunsten des letzteren verschob, durch Verschlämmung eine Depression der CO<sub>2</sub>-Abgabe eintrat. Bei genügender Feuchtigkeit wird die Bewegungsfreiheit der Bakterien im Boden größer, die Nährsalze können gleichmäßiger verteilt und an die Stätten ihrer Verarbeitung geführt und der Ausgleich der bei diesen Prozessen entstehenden Produkte besser herbeigeführt werden.

Es besteht eine enge Beziehung zwischen Bakterien und Bodenwärme. Die von der Sonne niedergestrahlte Energie, die in der Erwärmung des Bodens zum Ausdruck kommt, schafft für die Bakterien nur die Möglichkeit zur Arbeit, wie ein normal erwärmtes Zimmer dem Menschen erst den Grad von Wohlbefinden bringt, den er für die Arbeit braucht. Es wird bei genügender Erwärmung des Bodens ein zu großer Wärmeverlust der Bakterien vermieden, der infolge der außerordentlich großen Oberfläche dieser kleinen Organismen bei unzureichender Bodenwärme sicher sehr groß ist.

<sup>1)</sup> Technik in der Landwirtschaft 1924, H. 11.

Mit steigender Temperatur erhöht sich die Intensität der Umsetzungen im Boden; das Optimum liegt ungefähr bei 35°. Als besterwärmte Schicht ist diejenige von 5 bis 25 cm anzusehen, in welche daher auch vor allem die organischen Dünger, wie Stallmist, unterzubringen sind, da eine tiefere Einbringung die Verrottung verlangsamt.

Die Verteilung in dieser Schicht ist allerdings nicht gleichmäßig, vielmehr werden sich an besonders fetten Pfründen sehr viele, an armen Sandstellen dagegen weniger Bakterien vorfinden, ferner zeigt sich bei einem bestandenen Felde eine im Vergleich zum sonstigen Acker bedeutende Anhäufung der Bakterien um die Wurzelsysteme herum. Man spricht von einer „Rhizosphäre“. Es bestehen, wenn man von der weitgehend geklärten Symbiose bei den Leguminosen absieht, gewisse Wechselbeziehungen, wobei die entsprechenden Bakterien den Kulturpflanzen Nährstoffe zur Verfügung stellen und ihrerseits von den Wurzeln derselben Vorteile ziehen. Besonders ausgeprägt findet man auch diese Verhältnisse bei Waldbäumen, von denen bei Erlen, Kiefern und Buchen usw. bestimmte Arten sich immer vorfinden. Bei landwirtschaftlichen Kulturgewächsen zeigt sich, daß außer bei den oben erwähnten Leguminosen auch bei anderen Pflanzen, z. B. bei den Rüben, diese Wechselbeziehungen sehr enge sind, so daß es Hiltner<sup>1)</sup> gelang, diese besonderen Bakterien herauszuzüchten und für Impfzwecke zu verwenden. Außer diesen starken Bakterienansammlungen in der Rhizosphäre finden sich in der Krumenschicht, je nach den Lebensbedingungen, unzählige Arten von Bakterien, die — wie Francés Untersuchungen schon gezeigt haben — ihrerseits wieder ganz verschieden tief in den Boden einwandern. Das Gesamtgewicht, um zu einem Größenverhältnis zu kommen, beträgt durchschnittlich trotz der außerordentlichen Kleinheit je Hektar 400 kg.

Während Wasser und Wärme für sämtliche Bodenorganismen gleich notwendig sind, muß beim Sauerstoff eine scharfe Trennung der verschiedenen Bakterienarten vorgenommen werden. Es gibt luftliebende und luftscheue, deren Arbeit im Ackerboden auf Grund dieses tiefgreifenden Unterschiedes grundsätzlich abweichende Vorbedingungen für ihre Tätigkeit verlangt, und deren Endprodukte gleichfalls weitgehend differenziert sind. Bei den aeroben Bakterien steigert bessere Durchlüftung die Zersetzungsenergie, bei den anaeroben wird sie herabgedrückt. Von den vielen Arten landwirtschaftlich wichtiger Bodenbakterien kann man im großen und ganzen sagen, daß die meisten Arten luftliebend sind, während viele unerwünschte Arten keinen Sauerstoff benötigen. Bei aerober Zersetzung organischer Substanzen entsteht meist neutraler, bei anaerober jedoch saurer Humus. Bei reichlichem Vorhandensein von Sauerstoff geht die Zersetzung bis zur Bildung vollständig oxydierter Stoffe, bei mangelndem Sauerstoff entstehen jedoch niedrig oxydierte Produkte.

Die neuerdings ausführlicher bearbeitete Säurefrage spielt auch für das Bakterienleben eine große Rolle. Die weitaus größte Zahl der erwünschten Arten verlangt eine neutrale, leicht basische Bodenreaktion und ist außerordentlich empfindlich gegen Säure. Dieses Verhalten gewisser Arten hat sogar zur Herausbildung einer besonderen Bodenuntersuchungsmethode, der Azotobakter-Methode nach Christensen, geführt. (Der außerordentlich säureempfindliche Azot. chrooc. wird in eine Nährlösung, welche mit dem zu untersuchenden Boden versetzt ist, geimpft. Bei saurem Boden unterbleibt jedes Wachstum, bei neutralem bzw. basischem bildet sich eine Azot.-Kahmhaut.) Wird durch falsche Düngung oder schlechte Pflege ein

<sup>1)</sup> Löhnis: Handb. d. landwirtschaftl. Bakteriologie.

Boden sauer, so dauert es nicht lange und die verschiedensten Pilze und allerhand Algen überwuchern und gewinnen sehr bald die Oberhand über die Bakterien, ein Vorgang, der also für das Leben im Boden und in bezug auf den Haushalt desselben an aufnehmbaren Nährstoffen für die Kulturpflanzen äußerst ungünstig ist.

Die letzteren selbst zeigen wiederum sehr verschiedenes Verhalten. Leguminosen und Rüben z. B. verlangen neutrale bis leichtbasische Boden, während Roggen und Weizen eine gewisse Mittelstellung einnehmen und Hafer und Kartoffeln noch weniger empfindlich gegen saure Reaktion des Bodens sind. Jedenfalls steht fest, daß zur Gesunderhaltung der Böden eine regelmäßige Einbringung von Kalk als Reaktionsregler sich notwendig erwiesen hat. Gieshofer Messungen mit dem Aziditätsmesser nach Dr. Trénel haben interessante Wechselbeziehungen zwischen  $p_H$ -Konzentration und Pflanzenwachstum, besonders bei Rüben, ergeben, die in Kürze gesondert veröffentlicht werden. Die hier durchgeführten Kalkungen haben in 1 $\frac{1}{2}$  Jahren sehr günstig sowohl auf die  $p_H$ -Konzentration als auf die Bearbeitbarkeit und das Pflanzenwachstum eingewirkt.

Von den mineralischen Nährsalzen ist nur zu sagen, daß die meisten von ihnen starken bakteriellen Umsetzungen unterliegen, daß die Zufuhr löslicher mineralischer Dünger die Intensität der Bakterientätigkeit bereits stark steigert und daß daher bei mineralischer Düngung auch ein um so kräftigerer Abbau organischer Substanz im Boden stattfindet, so daß intensive Wirtschaften mit kräftiger Düngung vor allem auch für reichliche Zufuhr von Humusstoffen zu dem Boden Sorge tragen müssen.

Alle die kurz skizzierten Lebensvorgänge der Bakterien verlangen, in die Praxis übertragen: gründliche Lockerung und Durchlüftung des Bodens (Tabelle 8), sparsames Wirtschaften mit der zur Verfügung stehenden Wassermenge, insbesondere also intensive Hackkultur, regelmäßige Zuführung genügender Mengen organischer Substanz und entsprechende mineralische Düngung. Sind diese Bedingungen erfüllt, dann tritt jener Zustand im Boden ein, den man als „Gare“ bezeichnet und den Adolf Meyer treffend als einen „Gleichgewichtszustand“ bezeichnet hat.

#### XIV.

Für die landwirtschaftlichen Kulturpflanzen, wie überhaupt für alle grünen Gewächse, ist die Luft, welche sie rings umgibt, das einzige Medium, dem sie den Kohlenstoff, der 40% ihrer Trockensubstanz ausmacht, als Kohlensäuregas entnehmen können. Der erste und älteste Vorkämpfer für Kohlensäure, Hauptmann Kranz, Memmingen<sup>1)</sup>, prägte hier den prägnanten Ausdruck: „Das Lufthemd der Pflanze.“

Die Eingangspforte selbst oder das Maul, durch welches die Kohlensäure in das Blattinnere dringt, sind viele siebartig angeordnete, feinste Öffnungen — Stomata oder Spaltöffnungen genannt — die nach dem Innern zu mit feinen Luftkanälchen, dem Durchlüftungssystem der Pflanzen, in Verbindung stehen. Diese feinen Eingangspforten sind rings umschlossen von einem organisierten Schleusenorganismus, den Schließzellen, der nicht nur, wie man früher annahm, empfindlich für die Feuchtigkeits- und Wasserabgabe ist, die auch durch dieselben Öffnungen geschieht, durch die übrigens auch der Sauerstoff eintritt, sondern der Mechanismus scheint auch für die Vorgänge der Kohlensäureaufnahme und -Assimilation sensibel zu sein.

Durch diese Öffnungen und die genannten Kanälchen wandern die eben genannten Gase, also Kohlensäure, Wasserdampf und Sauerstoff, gemäß den Gesetzen

<sup>1)</sup> „Binnenversorgung durch Bodenkraftmehrung.“ 1924.

der Diffusion in Richtung der bezüglichen kleinsten Konzentrationen. Die alte Ansicht, daß Luft als ganze Masse gewissermaßen in die Pflanze hineinwehe oder eingeatmet werde, ist nicht richtig.

Hinsichtlich der Kohlensäure ist es nun so, daß die Luftkanälchen vorbeiführen an Zellen, die teils mit Chlorophyllkörnern besetzt, teils ohne solche sind. Arbeitet nun das Chlorophyll unter Lichteinfluß Kohlensäure assimilierend und aufzehrend, so vermindert sich deren Partialdruck und es werden nach dorthin Kohlensäuremoleküle von außen hinwandern. Die anderen anstoßenden, nicht grünen Zellen geben bei ihrer normalen Lebensarbeit Kohlensäure ab und diese wird ebenfalls in das Innere der Kanälchen eindringen, so daß also von diesen Stellen aus eine Verstärkung des Kohlensäure-Teildruckes ausgeht. Ist die Assimilationstätigkeit der benachbarten

Chlorophyllzellen lebhaft, so wird eben auch diese Atmungskohlensäure vollständig herangezogen und verzehrt. Vermindert sich aber die Assimilationstätigkeit z. B. durch Lichtschwächung auf etwa  $\frac{1}{20}$  bis  $\frac{1}{10}$  der ursprünglichen, dann hält der Verbrauch dem Entstehen neuer Kohlensäure die Wage und es wird von der Außenluft her kein Diffusionsgefälle mehr nach dem Blattinnern sein. Vermindert sich nun die Assimilation noch weiter, dann muß im Innern die Atmungsstärke mehr Kohlensäure liefern als verbraucht wird, und ihr Bewegungsstrom aus dem Blattinnern nach der freien Luft zu sich umkehren; das Blatt atmet Kohlensäure aus.

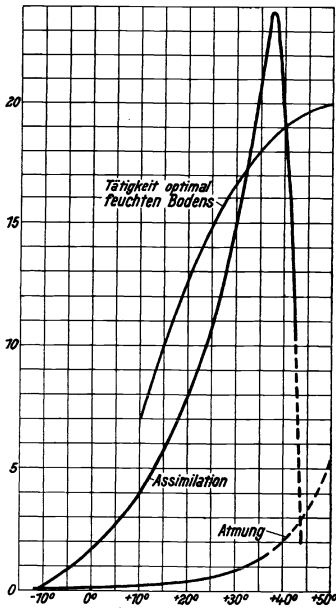


Abb. 2. Temperatureinfluß auf  $\text{CO}_2$ -Haushalt.

Offensichtlich ist also der  $\text{CO}_2$ -Partialdruck im Innern des Blattes eine funktionelle Größe, die mit steigender Assimilationstätigkeit abnimmt und mit zunehmender Atmungsstärke steigt. Beide sind gemäß der beigefügten Darstellungen (Abb. 2) stark von der Temperatur abhängig, ähnlich der üblichen Temperaturkurven chemischer Prozesse, aber doch darin verschieden, daß bald die Atmung gegenüber der Assimilation stark an Boden gewinnt und sie oberhalb  $37^\circ$ , wo die Assimilation rasch absinkt, übertrifft.

Als photosynthetischer Vorgang ist selbstverständlich die Assimilation abhängig von der Lichtstärke, die Atmung dagegen nicht, es sei denn, daß sie von der mit den üblichen Lichtwirkungen begleiteten Wärmewirkung affiziert wird. Sowohl bei zunehmender Temperatur als bei abnehmendem Licht wird also der innere Partialdruck an Kohlensäure ansteigen und zur Ausatmung von Kohlensäure Anlaß geben.

Gewissermaßen im Gegensatz zu diesem Sachverhalt steht nun das auf Grund der oben angeführten Reaktionsgleichung für die Assimilation bzw. die zugehörigen Geschwindigkeitsformeln dieser Reaktion zuerst von Reinau ausgesprochene Gesetz, daß „gleiche Produkte aus Kohlensäure-Konzentration und Lichtstärke gleiche Assimulationsleistungen“ ergeben. Es bedeutet dies praktisch, daß bei geringen Lichtstärken starke Kohlensäure-Konzentration und

umgekehrt bei großer Lichtfülle kleine Kohlensäurekonzentration gleiche Assimilationsleistungen ergeben. Dieses Gesetz wurde einige Jahre später von Harder für Wasserpflanzen und kurz darauf von Lundegårdh für Landpflanzen bestätigt. Praktisch folgt daraus für die Pflanze, daß sie bei abnehmendem Licht doch noch immer einen Teil der sich im Innern anstauenden Kohlensäure weiter gebraucht, also die Abgabe nach außen hin zeitlich verzögert wird, so daß die beiden Lebens-elemente der Pflanze: „Licht“ und „Kohlensäure“ ökonomischer genutzt werden können, und umgekehrt eine ähnliche Ökonomie, wenn bei starkem Lichte viel Kohlensäure verbraucht wird, daß selbst bei langsamen Nachstrom des Nährgases noch sehr geringe äußere Konzentrationen Kohlensäure nach dem Innern hin zu drücken vermögen.

Diese beiden Zusammenhänge bzw. Gesetze sind die gedanklichen Elemente der Kohlensäure - Resttheorie von Reinau, die besagt, daß es gewisse Kohlensäurekonzentrationen in der freien Luft geben muß, bei bestimmten Umständen von Licht und Temperatur (und Luftfeuchtigkeit), aus denen die Blätter keine Kohlensäure mehr zu entnehmen vermögen. Die bei Dämmerung und Dunkelheit positiv beobachtbare Ausatmung von Kohlensäure ist einer der handgreiflichen Belege für diese Theorie; das äußerst schwierige, und nur in den seltensten Fällen, und auch da noch nicht ganz mit Sicherheit festgestellte, völlige Aufbrauchen von Kohlensäure herab auf die Konzentration 0, ist der andere. Eine weitere Folgerung aus dieser Resttheorie war, daß derjenige Gehalt an Kohlensäure, welchen man in der freien, oberen Atmosphäre findet und der ungefähr mit großer Konstanz 0,03 bis 0,036 Vol. % beträgt, derjenige Partialdruck von Kohlensäure ist, der unter den mittleren Lebensbedingungen unserer grünen Pflanzen nicht mehr ausreicht, um diesen Kohlensäure zuzudrücken bzw. sich durch Diffusion zu bewegen. Diese Auffassung läßt sehr wohl bei über mittelstarker Belichtung, also z. B. vollem Sonnenlicht, mit der Restkonzentration noch Assimilation zu, aber nicht bei mittlerer Lichtstärke. Eine Folge ist ferner, daß der sog. „CO<sub>2</sub>-Gehalt der Luft“ nicht das Optimum für das Wachstum unserer Pflanzen darstellen kann.

Es war ein natürliches Ergebnis aus dem Produktgesetz und der einfachen Tatsache, daß das Sonnenlicht, wenn es auf eine Gruppe von gleichartigen Pflanzen, also einen landwirtschaftlichen Pflanzenbestand trifft, sich immer mehr und mehr schwächt, bis es — wie schon oben angeführt — z. B. in einem Luzernebestand nur noch 3% des ursprünglichen Wertes hat, daß folgendes sein müßte: wenn nämlich die Kohlensäure aus der freien Luft der Atmosphäre stammte, dann wären die obersten Blätter mit viel Licht und viel Kohlensäure versehen, die unteren Blätter aber bei notorisch weniger Licht, hätten höchstens nur ebensoviel Kohlensäure wie die oberen Blätter, wären also auf jeden Fall schlechter in ihrer Assimilationsversorgung bestellt. Entwicklungsgeschichtlich wäre dieser Zusammenhang nicht sehr wahrscheinlich gewesen, dazu kam aber, daß man in fast allen Zusammenstellungen über die Herkunft der Kohlensäure in der Natur schon seit Sennebiere und Saussures Zeiten Hinweise, ja bei Heiden etwa um 1840 schon sogar quantitativ angegeben findet, daß nächst dem vulkanischen Ursprung der Kohlensäure derjenige aus Ackererde der größte sei. Gedanklich hatte man in den letzten 60 Jahren diese Tatsache zwar nie völlig vergessen, aber doch angenommen, daß die Kohlensäure zwar größtenteils aus dem Boden käme, aber irgendwie in unbekannter Weise sich in dem oberen Luftraum verteile und dann von dorthier wieder von den grünen Gewächsen heran-

gezogen werde. Dieser etwas umständliche Umweg ist gemäß dem Produktgesetz nicht mehr nötig, sondern wir schlagen das direkte Verfahren ein und sagen: vom Boden steigt Kohlensäure auf, bildet dort in der untersten Luftschicht eine etwas

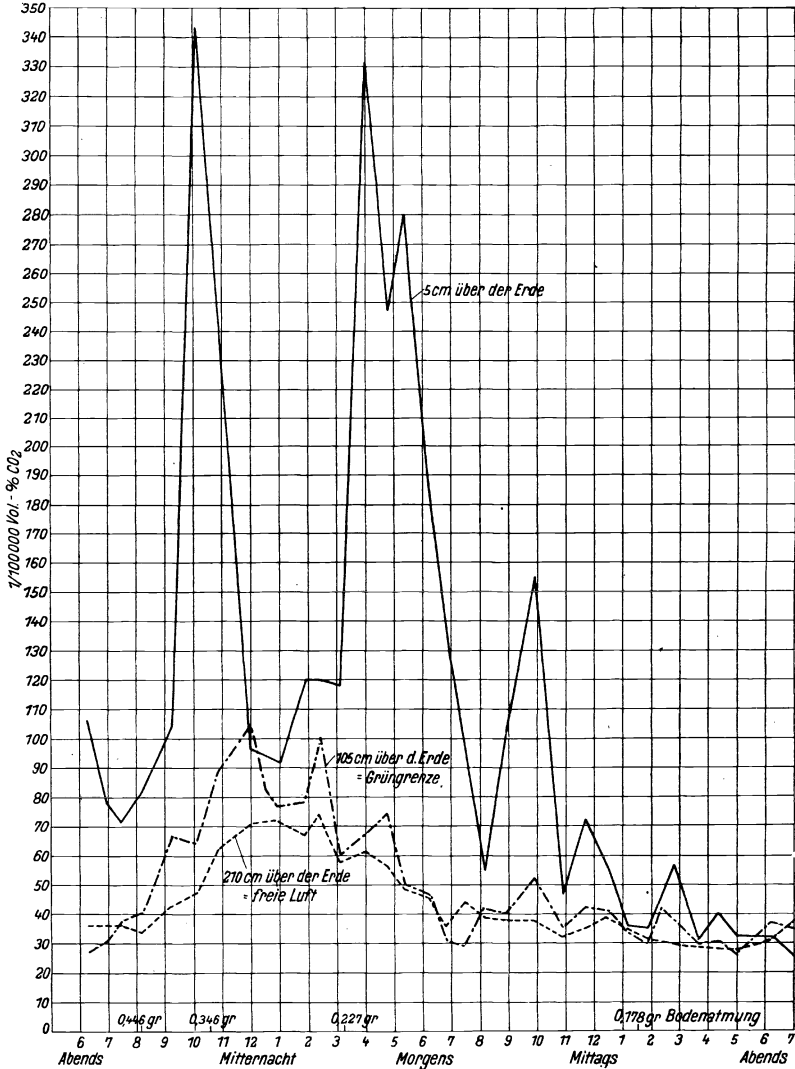


Abb. 3. CO<sub>2</sub>-Gehalte der Luft in einem Weizenfelde.

erhöhte Konzentration aus, so daß die untersten, lichtarmen Blätter mehr Kohlen säure haben, dagegen die oberen Blätter in ihrer Lichtfülle die wenige Kohlensäure, welche dann schließlich noch in der freien Atmosphäre übrig bleibt. An Stelle der

unnatürlichen bisherigen Denkweise setzen wir einen vollendeten Gegenstrom, wie ihn sich die Technik nicht schöner vorstellen kann und wie er in dem Produktgesetz einfach und logisch begründet ist. Die Bestätigung dieser Auffassung findet man in der beigefügten Abb. 3 und Abb. 4 in Kurvendarstellung, die nur ein Beispiel ist von zahlreichen hier wiederholten ähnlichen Untersuchungen.

Wenn nämlich die Kohlensäure vom Boden stammt und von den unteren Pflanzenblättern teilweise aufgezehrt wird, dann müssen über einem tätigen Boden grüne Blätter selbst noch in tiefem Schatten, also z. B. die untersten Blätter von Klee und Luzerne sich erhalten und wachsen. Mit zunehmender Höhe muß der Gehalt an Kohlensäure abnehmen, er muß sogar in der Höhe der obersten Blätter ein gewisses Minimum erreichen, ja er muß dort auch noch zeitweise — bei sehr guter Assimilation — niedriger werden können wie oben in der freien Luft, denn auch aus dieser kann ja Kohlensäure aufgenommen werden. Die umfangreichen Beobachtungen über diesen Sachverhalt, wie sie sowohl in Schlesien als auch im Oderbruch angestellt wurden, haben diese Annahme vollauf bestätigt.

Bezüglich der Einzelheiten der Messungen sei auf die schon angeführte Literaturstelle verwiesen<sup>1)</sup>.

Man sieht also in Abb. 3 und Tabelle 4 ganz deutlich, wie in der Nachtzeit, wo der Boden die Kohlensäure erzeugt, ohne daß sie verzehrt wird, der Gehalt in der erdnächsten Luftschicht beträchtlich zunimmt, daß sich diese Zunahme auch an der Grenze, wo die obersten grünen Blätter an die freie Luft stoßen, noch ziemlich bemerkbar macht, ja selbst in einer Höhe von 2,5 m über dem Boden noch nachwirkt. Bei Eintreten der Morgendämmerung, bald nach 2 Uhr früh, ändert sich das Bild. In der erdnächsten Schicht, wo es natürlich erst später hell wird, wächst der Kohlensäuregehalt zwar immer noch an, bei der Blattgrenze beginnt er rascher und rascher abzunehmen, um schließlich in der Zeit zwischen 6 und 8 Uhr früh unterhalb des Betrages in der freien Luft zu sinken und den Tag über mit kleinen Schwankungen ganz in der Nähe dieses Wertes hin und her zu schwanken.

Für den Haushalt des Kohlenstoffes in der Natur und in der Landwirtschaft ist die Beobachtung, daß sich die Kohlensäure im Laufe der Nacht anreichert, ebenso bemerkenswert wie es auffallend ist, daß diese Anreicherung sich nicht sehr stark in der kurzen Entfernung von 2,5 m über der Erde ausdrückt. Die Erscheinung ist eine Folge der geringen Diffusionsgeschwindigkeit der Kohlensäure und der verhältnismäßig großen vertikalen Ruhe der Luft während der Nacht. Man kann auf Grund

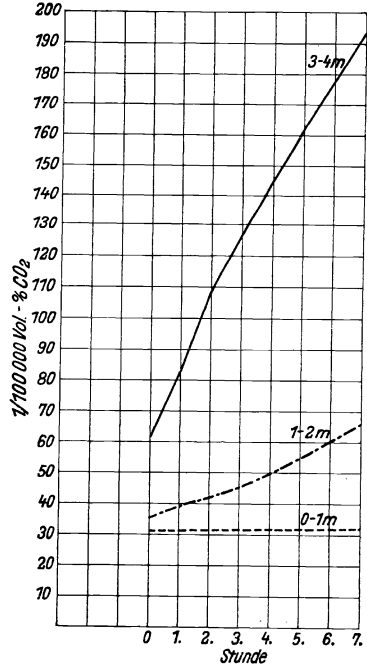


Abb. 4. Zunahme des CO<sub>2</sub>-Gehaltes durch Diffusion von einer Erdschicht her.

<sup>1)</sup> Technik in der Landwirtschaft 1924, H. 10.

Tabelle 4. 24stündiger Gang des CO<sub>2</sub>-Gehaltes der Luft in den den Pflanzen nahen Luftschichten. Sommer 1924. Gieshof.

Uhrzeit	Beleuchtung		Boden- temperatur	CO <sub>2</sub> -Gehalt in Schicht über der Erde			
	Wolken	Sonne		5 cm	105 cm	210 cm	
6 <sup>1</sup> <sup>2</sup>	etwas Stratus	verschleiert	19	106	27	36	
6 <sup>2</sup> <sup>2</sup>	Dunst	hell	18	78	30	36	
7 <sup>2</sup> <sup>2</sup>	—	verschleiert	17,5	72	38	36	
8 <sup>1</sup> <sup>2</sup>	—	—	17,5	82	40	34	
9 <sup>1</sup> <sup>2</sup>	—	—	17,7	104	67	42	
10 <sup>2</sup> <sup>2</sup>	—	—	16	343	64	47	
10 <sup>2</sup> <sup>2</sup>	—	—	15	216	88	62	
12 <sup>2</sup> <sup>2</sup>	—	—	15,5	97	105	71	
12 <sup>2</sup> <sup>2</sup>	—	—	15	92	77	72	
1 <sup>2</sup> <sup>2</sup>	—	Dämmerung Mondaufgang	15	120	79	67	
2 <sup>2</sup> <sup>2</sup>	—		—	14	120	100	74
3 <sup>2</sup> <sup>2</sup>	Nebel steigt Stratus	heller	14	118	60	58	
4 <sup>2</sup> <sup>2</sup>		geht auf	14	330	67	62	
4 <sup>1</sup> <sup>2</sup>	—	verschleiert	14	247	74	56	
5 <sup>2</sup> <sup>2</sup>	—	—	14	280	50	49	
6 <sup>1</sup> <sup>5</sup>	etwas dunstig, bezogen, verschleiert	voll,	14,5	188	47	46	
6 <sup>5</sup> <sup>0</sup>		aber etwas	14,7	130	30	36	
7 <sup>3</sup> <sup>0</sup>		verschleiert	15	—	29	44	
8 <sup>0</sup> <sup>8</sup>		—	16	55	42	39	
8 <sup>5</sup> <sup>0</sup>		trübe	16,2	98	40	38	
9 <sup>6</sup> <sup>1</sup>		schwach	17	145	52	38	
10 <sup>5</sup> <sup>0</sup>		—	19	46	35	32	
11 <sup>4</sup> <sup>0</sup>		etwas heiß	20	72	42	35	
12 <sup>2</sup> <sup>5</sup>		Kumulus	schwül	23	56	41	39
1 <sup>1</sup> <sup>0</sup>		Gewitterneigung	hell	24	36	34	35
1 <sup>5</sup> <sup>0</sup>	bedeckt		21	35	30	31	
2 <sup>2</sup> <sup>3</sup>	Gewitterneigung	heller	21	—	42	30	
3 <sup>3</sup> <sup>8</sup>	Kumulus (grau)	bedeckt	21	31	30	29	
4 <sup>2</sup> <sup>1</sup>	Kumulus (weiß)	bedeckt	20	40	30,5	—	
5 <sup>0</sup> <sup>0</sup>	Kumulus (grau)	bedeckt	20	32	26	28	
6 <sup>2</sup> <sup>1</sup>	Stratus-Kumulus	hell	20	32	37	31	
6 <sup>2</sup> <sup>2</sup>	Kumulus	bedeckt	19,5	26	35	37	

der Diffusionsvorgänge, und ohne exakt mathematische Ableitung, ausrechnen, wie der Gehalt an Kohlensäure in verschiedenen Schichten von je 1 m Dicke von Meter zu Meter aufsteigend sich im Verlauf von einer Anzahl von Stunden steigern muß, wenn der Boden selbst in dieser Zeit gewisse Mengen, beim hier angeführten Beispiel 0,466 g/m<sup>2</sup> und Stunde, abgibt. Die Tabelle 5 und Abb. 4 belegen dies. Vergleicht man den

Tabelle 5. Theoretische Kohlensäuregehalte in  $\frac{1}{100000}$  Vol. - Teilen. In den Luftschichten zunächst der Erde bei 0,460 g CO<sub>2</sub> Bodenatmung je Stunde und Quadratmeter und unterbrochener Assimilation. Reine Diffusion.

Schicht	Beginn	Nach 1 Stde.	Nach 2 Stdn.	Nach 3 Stdn.	Nach 4 Stdn.	Nach 5 Stdn.	Nach 6 Stdn.	Nach 7 Stdn.
0 bis 1 m	60	83	108,5	127,5	145,1	161,9	177,4	194
1 „ 2 m	35	39	41,5	45,4	49,9	55,05	60,7	66,6
2 „ 3 m	32	32,3	32,7	33,15	33,8	34,75	35,5	37,16
3 „ 4 m	31	31,2	31,3	31,3	31,4	31,45	31,58	31,78
4 „ 5 m	30	30,05	30,1	30,1	30,17	30,18	30,19	30,2

Anstieg der 3 Linien in Abb. 4, welche die Werte im 1., 2. und 4. m<sup>3</sup> über der Erde darstellen, mit den aufsteigenden Ästen bei den natürlichen Beobachtungen auf dem Weizenfelde in Abb. 3, so sieht man, wie die theoretische Erklärung mit dem prak-



tischen Befunde übereinstimmt. Die Schwankungen in der praktischen Kurve können Gründe pflanzenphysiologischer Natur haben; zunächst den, daß die Atemöffnungen der Blätter sich nur langsam schließen, also noch zeitweise zusätzliche Kohlensäure ausatmen zu derjenigen, die der Boden liefert. Ferner haben Willstaetter und Stoll beobachtet, daß die Gesamsubstanz des Blattes mit abnehmender Temperatur stark zunehmende Mengen von Kohlensäure auflöst, so daß also zeitweise bei der fehlenden Temperatur  $\text{CO}_2$  verbraucht wird.

Die Verhältnisse in der freien Natur zwischen Licht und Kohlensäure bestätigen also:

1. Das Produktgesetz.
2. Die Entstehung der Kohlensäure vom Boden her.
3. Die geringe Bedeutung der atmosphärischen Kohlensäure,

und ergeben also die praktische Forderung für das landwirtschaftliche Handeln, dafür zu sorgen und zu überwachen, daß ein Boden während der Vegetationszeit wirklich die nötigen Mengen von Kohlensäure abgibt.

Welche Mengen nötig und wirtschaftlich sind, können gewisse Überlegungen zeigen und außerdem sogenannte Düngungsversuche mit Kohlensäure. Um die letzteren hier kurz zu streifen, seien die Arbeiten von Dr. H. Fischer<sup>1)</sup>, die ersten großen Experimente von Dr. Reinau<sup>2)</sup>, Bornemann und schließlich die großzügigen Freilandbegasungen von Dr. Fr. Riedel gemeinschaftlich mit der Deutsch-Luxemburgischen Bergwerks- und Hüttenvereins-A.-G., Horst b. Essen erwähnt.

Sowohl in kleinen Glaskästen als in gärtnerischen Treibhäusern und in Freiland hat die Zufuhr von Kohlensäure doppelte bis  $2\frac{1}{2}$ -fache Erträge abgegeben. Das von Dr. Reinau ausgearbeitete „OCO-Düngverfahren“ für Gewächshäuser hat es überdies möglich gemacht, in zahlreichen Gärtnereien die Kohlensäuredüngung praktisch einzuführen, wodurch auch der Beweis geliefert wurde, daß die Maßnahme wirtschaftlich ist<sup>3)</sup>.

## XV.

Für die landwirtschaftliche Praxis kann man nun einigermaßen ausrechnen, welche Mengen von Kohlensäure bei einem gewissen zu erwartenden mittleren Höchstertrage eine bestimmte Kultur pro Quadratmeter und Stunde assimilieren muß, damit eben jener Höchstertrag zustande kommt. Unter Berücksichtigung der Wachstumszeit, der mittleren Anzahl von Tagesstunden und ferner unter Berücksichtigung dessen, was die Pflanzen im Laufe der Nacht durch ihre Blätter ausatmen bzw. was die Wurzeln für ihre Arbeit verbrauchen, kann man generell sagen, daß eine mittlere Kohlensäureabgabe von etwa 0,2 bis 0,5 g/m<sup>2</sup> und Stunde, das ist, was eine Ernte von etwa 20 bis 22 dz pro Hektar Körner oder etwa 270 dz pro Hektar Kartoffeln braucht. Diese Zahl gilt unter der Annahme, daß die nächtlicherweile entwickelte Kohlensäure größtenteils am Tage wieder ausgenutzt wird. Bezüglich dessen, was unter natürlichen Verhältnissen 1 m<sup>2</sup> Pflanzenblatt an Kohlensäure assimilieren kann, werden Zahlen von 0,3 bis 0,6 g Kohlensäure pro Quadratmeter und Stunde, gelegentlich auch etwas höhere, genannt. Blattreiche Pflanzenarten, wie z. B. Klee, Luzerne, Hafer decken über die bestandene Bodenfläche bis zu 10- und 15fache Blatt-

<sup>1)</sup> Gartenflora 1912.

<sup>2)</sup> Dtsch. Chem.-Ztg. 1914 und Gartenwelt 1914.

<sup>3)</sup> Deutscher Erwerbsgartenbau 1924, Möllers Deutsche Gärtnerzeitung 1925.

fläche. Sie sind dadurch in der Lage, sowohl die vom Boden aufsteigende Kohlensäure vor Winden zu schützen, als auch weitgehendst auszunützen wie auch von dem Licht zu profitieren.

Es sind noch zwei Einwände gegen diese neuen Auffassungen zu erledigen:

1. Sand- und Wasserkulturen wachsen doch nur mit atmosphärischer Kohlensäure, und
2. Humus kann sich doch nur auf Kosten angezogener Luftkohlensäure gebildet haben.

Um deshalb eine mathematische Vorstellung davon zu geben, woher es kommt, daß eine einsame Palme auf einem Atoll in der Südsee auf vulkanischem und sandigem Strande aufgegangen — wo ringsum kein Humus tätig ist —, nur auf die atmosphärische Kohlensäure, andererseits aber unsere landwirtschaftlichen Flächen bei hohen Erträgen auf die Kohlensäure vom Boden angewiesen sind, bringen wir die beiden Fälle in ein Schema. Ein freistehender Baum stellt gewissermaßen in seiner Gesamtoberfläche eine Kugel dar, deren Querschnitt man als die Standfläche dieses Baumes bezeichnen kann. Denken wir uns, daß derselbe Querschnitt in einem homogenen landwirtschaftlichen Bestande von Klee, Hafer usw. eingenommen würde, so steht dessen horizontale, freie Oberfläche bezüglich der Kohlensäurediffusion und dem Lichte zu derjenigen der Palme im Verhältnis von Kugelquerschnitt zu Kugeloberfläche, d. h. wie 1 : 4; also schon aus diesem Grunde wird der Zustrom von Kohlensäuregas aus der Atmosphäre bei einem freistehenden Baum viermal größer sein als wie bei einem geschlossenen Bestande. Dazu kommt noch die Massenbewegung der Luft, die bei einzelstehenden Pflanzen in jedem Moment eine Luft heranführt, die noch den mittleren Kohlensäuregehalt besitzt, aus dem vollbelichtete Gewächse noch Kohlensäure entnehmen können. Bei geschlossenen Beständen in Erdnähe bringt eine horizontale Luftbewegung, die ja an sich in Erdnähe doch sehr gering wird bzw. verschwindet, keine Kohlensäurekonzentration heran, die eine nennenswerte Ausnutzung zulassen. Die vertikale Luftbewegung aber kann zwar gelegentlich Nährgas heranwehen, das Korrelat ist aber unbedingt auch ein Verwehen von Bodenkohlensäure. Unsere zahlreichen Beobachtungen, für die auch Tabelle 4 und Abb. 3 Belege beibringen, zeigen, daß unter obigen Verhältnissen mehr Kohlensäure vom Boden weggeht, als aus der Luft zu den Kulturen hereindringt.

Die verschiedenen Pflanzenarten und Kulturweisen der Landwirtschaft bieten nun Fälle und haben Perioden, wo einzelne Gewächse bzw. Blattbüsche stellenweise über die Gesamtfläche des Grünen hervorragen, und in solchen Fällen besteht die Wahrscheinlichkeit, Kohlensäure aus der oberen Luft einzufangen. Wir sind geneigt, besondere Wiesen und Getreidearten nächst dem Walde für die Pflanzengesellschaften bzw. Arten zu halten, die befähigt sind, Kohlensäure aus der Luft anzuziehen. Andererseits haben wir Gründe dafür anzunehmen, daß gewisse Leguminosen eher Gelegenheit zur Verschwendung von Bodenkohlensäure bieten. Wie man also stickstoffbindende und -zehrende Pflanzen unterscheidet, wird man in Zukunft kohlenstoffwerbende und kohlenstoffzehrende Pflanzen unterscheiden müssen.

Welche Umstände sind es nun, die aus dem Boden die Entwicklung von Kohlensäure verursachen? Praktisch sind 2 Lebensvorgänge die Ursache hierfür; zunächst das Leben der schon oft erwähnten Bakterien im Boden und zweitens die Anwesenheit von lebenden Wurzeln der angebauten Kulturen. Jede lebende Zelle muß zum Unterhalte ihrer intrazellularen Plasmaströmungen Energie entwickeln, welche durch

Verbrennung von Kohlenhydraten und anderen Pflanzenstoffen geliefert wird. Dabei wird Kohlensäure frei, und da kein Licht und keine Chlorophyllzellen an den Wurzeln sind, wird sie nach außen abgestoßen. Die Bakterien ihrerseits leben von all den Resten, welche Pflanzen und Tiere bei ihrem Absterben oder Kranksein oder auch bei normaler Lebensfunktion hinterlassen. Die kohlenstoffhaltigen Bestandteile dieser Stoffe liefern der Mehrzahl der Bakterien das Energiematerial für ihren Lebensprozeß und schließlich CO<sub>2</sub>.

Die Abgabe von Kohlensäure aus einem Boden ist dann eine Funktion des kohlenstoffhaltigen Materials in demselben, man pflegt die Summe von 100 000 verschiedenen Stoffen, die hier in Betracht kommen, mit dem einfachen Wort „Humus“, das deshalb auch so vielsagend ist, zu bezeichnen. Alsdann müssen lebende Bakterien oder tätige Pflanzenwurzeln vorhanden sein, beide brauchen aber, damit sie leben können, Sauerstoff, also muß der Boden, der Kohlensäure abgeben soll, auch Sauerstoff aufnehmen können, also einen gewissen Luftgehalt und eine gewisse Porosität besitzen, denn durch dieselben Poren, durch die die Kohlensäure austritt, muß Sauerstoff eintreten können.

Wie wir weiter oben schon angeführt haben, sowohl für die Bakterien als auch für die Pflanzen, nimmt deren Lebenstätigkeit zu mit steigender Temperatur, und überdies sind beide als Wassergeschöpfe auf das Vorhandensein von verhältnismäßig viel Wasser angewiesen. Die zahlreichen Messungen von Bodenatmungen, welche auf

Tabelle 6. Einfluß des Regens auf die Oberkrume landwirtschaftlicher Böden, auf die Bakterientätigkeit, gemessen an der Bodenatmung.  
g/CO<sub>2</sub> pro Quadratmeter in einer Stunde.

	Ausgangs- stadium	Nach wenig Regen	Nach viel Regen	Abtrocknungs- periode
Weizenacker . . . . .	0,166	0,395	0,303	—
Rübenfeld . . . . .	0,114	—	0,062	0,144
Noch weiter abgetrocknet . . . . .	—	—	—	0,324
Über Nacht neuer Regen . . . . .	—	—	0,091	0,114
Gartenland . . . . .	0,145	0,297	0,446	0,310
Acker flach gepflügt, 10 cm . . . . .	0,041	0,134	—	—
„ mitteltief gepflügt, 20 bis 25 cm . . . . .	0,211	0,262	—	—
„ tief gepflügt, 30 cm . . . . .	0,242	0,251	—	—

Gieshof gemacht worden sind, bestätigen vollauf alle diese Ausführungen. Tabelle 6 erläutert den Einfluß von Feuchtigkeit und Regen auf die Höhe der Bodenatmung,

Tabelle 7 gibt Anhaltspunkte für den Einfluß, den die Anwesenheit von größeren Mengen leicht zersetzlichen organischen Materials (etwa Stallmist) auf die Bodenatmung ausübt. Abb. 5 zeigt den mittleren Jahresverlauf sämtlicher Bodenatmungsbestimmungen, wie von

Tabelle 7. Einfluß von Stallmist auf CO<sub>2</sub>-Abgabe des Bodens.

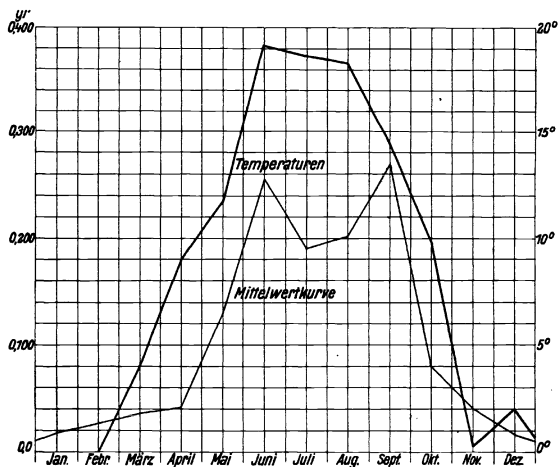
Datum	Ohne Mist	Stallmist
23. November 1923 . . . . .	0,033	0,050
1. April 1924 . . . . .	0,016	0,030
Juni 1924 . . . . .	0,139	0,309
Juli 1924 . . . . .	0,161	0,181
Ernteergebnisse pro ha	189,2 dz	214 dz Kartoffeln

Monat zu Monat mit ansteigender Temperatur die Bodenatmung von dem verschwindenden Betrage von etwa 2 bis 3 mg im Dezember und Januar bis zu 800 mg, dem Höchstwerte (nicht eingezeichnet) im Sommer, unter günstigsten Bedingungen

Tabelle 8. Durchschnittswerte von Bodenatmung unter dem Einflusse verschiedener Bearbeitung. Gramm CO<sub>2</sub> pro Quadratmeter und Stunde.

Bearbeitungsart und Bestellung	Winter	Frühjahr	Sommer		Herbst
			feucht	trocken	
Dampfpflug	0,028	0,016	0,328	0,124	—
Fräse					
Gepflügter	0,024	0,026	0,383	0,172	—
Gefräster					
Gehackter	—	—	0,161	0,181	0,155
Nicht gehackter					
Gehackter	—	—	0,226	0,173	0,150
Gefräster					
Flach bearbeitet, 10 cm	—	—	0,242	—	—
Tiefer bearbeitet, 25 cm					
	—	—	0,182	—	—
	—	—	0,114	—	—
	—	—	0,321	—	—
	—	—	0,134	0,041	—
	—	—	0,262	0,211	—

ansteigt. Den Einfluß der verschiedenen Bearbeitung, also der Porosität des Bodens, seiner Luftgehalte und seiner guten Durchmischung, erläutert Tabelle 8.

Abb. 5. Mittlerer Jahresverlauf der CO<sub>2</sub>-Abgabe landwirtschaftlicher Kulturböden.

Auf eine besonders bedeutungsvolle Tatsache, die die Kohlensäureabgabe des Bodens stark beeinflußt, hat schon vor Jahren Dr. H. Fischer aufmerksam gemacht, und sie hat durch Lundegårdhs exakte Experimente Bestätigung gefunden: Die üblichen Handelsdünger, also Kalisalze, Phosphate und Stickstoffdünger regen ebenfalls die Lebenstätigkeit der Bakterien im Boden so an, daß sie die dort vorhandenen kohlenstoffhaltigen Substanzen rascher abbauen. Dieser raschere Abbau hat sich nach Beobachtungen Lundegårdhs sogar so bemerkbar gemacht,

daß die Bodenatmung stark gedüngter Versuchsstücke so groß wurde, daß die darüberstehenden Kulturpflanzen die entwickelte Kohlensäure nicht verarbeiten konnten, so daß über diesen Kulturen die Kohlensäuregehalte der Luft anstiegen. Düngung mit Nährsalzen bewirkt also auch automatisch eine Kohlensäuredüngung, wenn der Boden hinreichend humos ist. Es ist im Verfolg dieses Tatbestandes an anderer Stelle und mit Rücksicht auf ausgedehnte Bestimmungen des Humusgehaltes in Böden aus sogenannten „viehlosen Wirtschaften“ nachgewiesen worden, daß einseitige Kulturmaßnahmen zu einer gefährlichen Verarmung unserer Böden an Humus und damit unbedingt zu einer Verminderung von deren Ertragsfähigkeit führen müssen<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Technik in der Landwirtschaft 1924, H. 11.

Stickstoff, wenn sie von diesen Pflanzen ihre Nahrung in Form von Zucker bekommen. Dieser ist gewissermaßen Feuerungsmaterial der kleinen Stickstoffwerke. Ihre Rauchgase addieren sich nun zu der gewöhnlichen Atmungstätigkeit der Pflanzenwurzeln und zu der des Bodens. So kommt eine wesentlich größere Atmung zustande als sonst. Wir haben diesen höchst bedeutsamen Zusammenhang zuerst in Gieshof gefunden und geben in der Tabelle 9 die dazugehörigen Belege. Die Knöllchenbakterien sind derart auf die Zulieferung von Nahrung aus der grünen Pflanze angewiesen, daß sie schon ihren Betrieb einstellen, wenn sie nur 3 bis 6 Stunden lang nichts mehr von dort erhalten. Es geht dann die Bodenatmung bedeutend zurück.

Tabelle 9. Einfluß der Pflanzenart auf die CO<sub>2</sub>-Abgabe des Bodens. Stickstoffsammelnde Pflanzen gegenüber anderen.  
Angabe in Gramm CO<sub>2</sub> pro Quadratmeter in einer Stunde.

	Stickstoffsammler	Andere Pflanzen oder nackter Boden
2jähriger Klee . . . . .	0,418	—
Angrenzender Roggen . . . . .	—	0,285
Junger Klee (sofort nach dem Schnitte) . . . . .	0,558	—
6 Stunden nach dem Schnitte . . . . .	0,331	—
Angrenzender Senf . . . . .	—	0,224
Seradella . . . . .	0,305	—
Senf . . . . .	—	0,218
Dicke Bohnen (sofort nach dem Schnitte) . . . . .	0,135	—
6 Stunden nach dem Schnitte . . . . .	0,092	—
Darin befindliche völlig von Pflanzen freie Stelle . . . . .	—	0,040

Wenn der Bestand der Leguminosen dicht geschlossen ist, wird die starke Beschattung die große Kohlensäureproduktion des Bodens sicherlich aufs beste ausnutzen, aber die heranwachsenden Kulturen, die noch nicht völlig den Boden bedecken, können Anlaß zu Verlusten von Bodenkohlensäure geben.

Wenn wir die Tabelle 1 über den jährlichen Gang der Lichtstrahlung, die Abb. 5 über die Kohlensäureabgabe des Bodens betrachten, und wenn wir außerdem weiter unten bei der Behandlung von einigen Grenzfällen das Zusammenwirken von Licht-, Wasser- und Kohlensäure ins Auge fassen, so sehen wir deutlich, daß es rein vom Standpunkt der ökonomischen Nutzung dieser Reagenzien unnötig ist, in den Wintermonaten die photosynthetischen Apparate der Landwirtschaft, also ihre Pflanzen aufzustellen. Es sind so geringe Mengen an Lichtenergie, die da verloren gehen, und höchstens  $\frac{1}{9}$  bis  $\frac{1}{10}$  der gesamten im Jahre erzeugten Kohlensäuremengen, die weggehen, daß der Verlust sehr gering ist. Anders ist es in den Zeiten kurz vor der Ernte, also Ende Juli, August und September, und im Frühjahr, im April und Mai, da ist es wohl schon möglich, Energie zu fangen, also wünschenswert, mit Grün völlig bezogene Flächen angelegt zu haben. Es kann also ökonomisch äußerst bedeutungsvoll sein, daß man winterharte Kulturen oder rasch wachsende Zwischenfrüchte schnell und rechtzeitig auf das Land bringt.

Erinnern wir uns der in Abschnitt V gegebenen Erklärungen für die stufenweise, in der Größenordnung verbesserte Ausnutzung der Lichtenergie bei 1. landwirtschaftlicher Kultur, 2. beim Blattexperiment und 3. Wasseralgenversuch, so ist unverkennbar, daß ein geschlossener Überzug von Grün hierbei eine große Rolle spielt. Die landwirtschaftliche Praxis, die es nötig macht, die Pflanzen nach ihrer Saat noch verschiedentlich zu bearbeiten, hat die Vorteile der Reihenkultur unbestreitbar ergeben.

Tabelle 10. Reihenweitenversuchsergebnisse 1923/24.

Jahr	Fruchtart	Reihenweite in cm	Aussaatmengen in kg pro ha	Ernteertrag in dz je ha	
				Korn	Stroh
1923	Winterroggen	25	90	33,2	59,34
	„	40/10	90	<b>31,06</b>	40,68
	„	55/20	60	<b>35,16</b>	54,0
	„	50	45	30,0	50,68
1924	Winterroggen	25	90	28,86	58,8
	„	40/10	90	24,6	44,74
	„	55/20	60	<b>24,4</b>	39,14
	„	50	45	<b>29,8</b>	54,4
1924	Ackerbohnen	25	180	35,26	—
	„	25	120	30,8	—
	„	55/20	120	<b>30,8</b>	—
	„	55/20	80	<b>36,2</b>	—
	„	50	100	35,4	—
	„	50	70	27,4	—
1924	Erbsen	25	150	<b>19,82</b>	46,1
	„	40/10	150	<b>21,2</b>	43,04
	„	55/20	120	17,9	40,38
	„	50	90	19,96	36,22

die Bodenoberfläche hindurch. Daß man ohne Schaden für den Ertrag in der Verbreiterung der Reihenweiten sehr weit gehen kann, haben entsprechende Versuche in Gieshof gelehrt, die in der obigen Tabelle 10 zusammengestellt sind.

Der Vorteil wiederholter gründlicher Bearbeitung des Bodens und der Beseitigung des Unkrautes wiegt also die etwaigen Nachteile von weniger Luft oder schlechter CO<sub>2</sub>-Nutzung auf. Ja man könnte sogar annehmen bei mineralischem Boden von geringerer CO<sub>2</sub>-Abgabe, daß die CO<sub>2</sub> wegen des leichteren Standes der Kulturen besser verwertet wird.

Es ergibt sich aus der Tabelle 10, daß ein Optimum besteht, bei dem aus dem Zusammenspiel der vielen Wachstumsfaktoren ein höchster Ertrag sich erzielen läßt, und es kann hier nicht die Aufgabe sein, im einzelnen die Gründe dieses Optimums gerade für den Fall der Weizen- und Haferpflanzen auseinanderzusetzen.

## XVI.

Im Abschnitt XI war als einer der Abnehmer für die zugestrahlte Energie der Boden angeführt worden und in Abschnitt XIII war bezüglich der Bakterien wie in Abschnitt XV bezüglich der von ihnen erzeugten Kohlensäure deutlich gemacht, wie wichtig es ist, daß eine gewisse Temperaturstufe im Boden möglichst bald erreicht wird. In nördlichen Breiten ist dieser Umstand wegen der immer mehr sich zusammendrängenden Wachstumszeit von ganz besonderer Bedeutung, da in einem erwärmten Boden die Keimung rascher von statten geht. Diese Schnelligkeit des Keimens ist nicht nur des Zeitgewinnes wegen, sondern auch zum Schutze des Saatkorns gegen die vielfachen Bakterien und Krankheitsattacken wichtig. Daß und inwiefern verschiedene Bodenbearbeitung die Leitung und das Festhalten zugestrahlter Energie beeinflußt, haben genaue Temperaturbeobachtungen bei angrenzenden Parzellen, von denen die einen nach den Regeln der Pflugkultur, die anderen nach denen der Fräskultur bearbeitet waren, ergeben. Auf der beigefügten Abb. 6 ist dies im einzelnen zu sehen. Der gefräste Boden erwärmt sich leichter und stärker und gibt

Es werden infolgedessen zu gewissen Zeiten verhältnismäßig große Flächen ohne Grün gelassen, weshalb sowohl die Nutzung des Lichtes als der Kohlensäure geringer wird. Ein baldiger Schluß des Grüns infolge guter Bestockung ist deshalb immer anzustreben, soweit es sich mit der ebenfalls notwendigen wiederholten Lockerung des Bodens vereinigen läßt. Bodenlockerung, so sagten wir schon oben, ist eine Notwendigkeit für den richtigen Wasserhaushalt und die Gaszirkulation durch

diese Wärme auch besser nach den tieferen Schichten zu ab. Die oberste Schicht gibt dann zwar nachts die Wärme auch entsprechend etwas stärker ab, aber im ganzen bleibt bei steigender Wärmezustrahlung der Temperaturgewinn von Tag zu Tag größer. Wir haben nun aus der mittleren Stärke der einzelnen Schichten, in welchen die Temperatur beobachtet wurde (5, 25, 45 cm) bis zu 60 cm Tiefe 3 Horizontalschichten angenommen von 100, 250 und 200 l Inhalt pro Quadratmeter und rechnen aus den bezüglichlichen Bodengewichten (siehe Tabelle 11) der bezüglichlichen spezifischen Wärme des Bodens, dem Temperaturgewinn der Schicht innerhalb des Tages bzw. seiner Temperaturabgabe in der darauffolgenden Zeit, daß in die beiden verschieden bearbeiteten Böden die in der untenstehenden Tabelle verzeichneten Wärmemengen

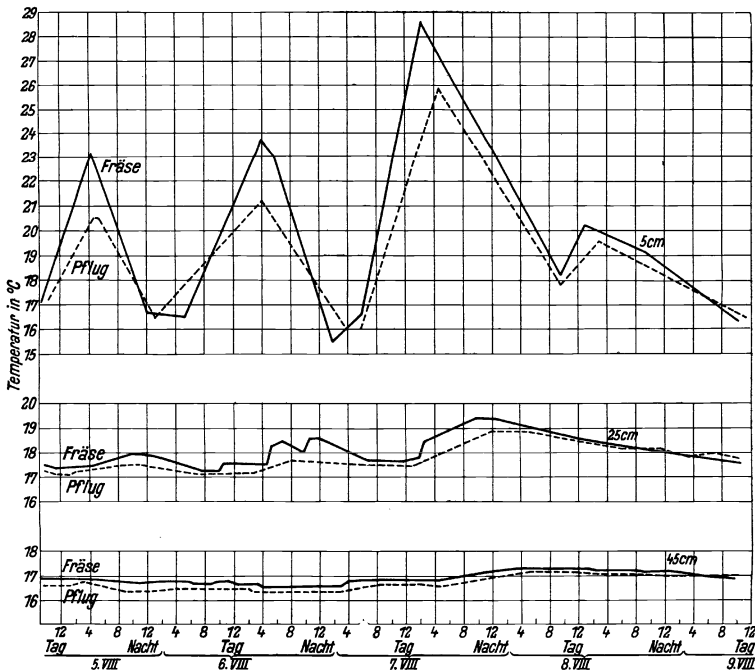


Abb. 6. Temperaturgang verschieden bearbeiteten Bodens in verschiedener Tiefe.

eingegangen sind. Es hat also der gefräste Boden das  $1\frac{1}{2}$ fache an Wärme aufgenommen und teilweise behalten bzw. nach den unteren Schichten abgegeben. In Summa hat der gefräste Boden 467 Kal. festgehalten, der gepflügte nur 244 pro Quadratmeter und Tag. Die 370 Kal., welche in den Fräsboden mehr eindringen, hätten zur Verdunstung von 0,5 l Wasser oder 0,5 mm Regen ausgereicht, und soviel Wasser hat der gepflügte Boden in der Tat je Tag verloren.

Die Untersuchung, auf welchem Umstand dies beruht, führt uns zunächst auf den günstigen Wasserhaushalt. Im ersteren Falle hat der Wassergehalt des gefrästen Bodens während der Versuchsdauer von 6 Tagen dauernd zugenommen, während derjenige des gepflügten Landes dauernd abgenommen hat. Die Abnahme des Wassers bei gepflügtem Land kann nur darauf zurückgeführt werden, daß er mehr Wasser

Tabelle 11. Schema über den effektiven Gang der Wärme desselben Bodens bei verschiedener Bearbeitung.

Fräskultur.	Pflugkultur.
A. Unterlagen der Berechnung gemäß Text S. 288 ff. und Abb. 6 u. 7.	
I. Schicht:	
144 kg: Spez. Wärme 0,283, Temperatur: Tägl. Schwankung 9,1°, Tägl. Zunahme 4,7°.	147 kg: Spez. Wärme 0,270, Temperatur: Tägl. Schwankung 6,3°, Tägl. Zunahme 2,0°.
II. Schicht:	
400 kg: Spez. Wärme 0,300, Temperatur: Tägl. Schwankung 1,5°, Tägl. Zunahme 1,3°.	405 kg: Spez. Wärme 0,300, Temperatur: Tägl. Schwankung 1,05°, Tägl. Zunahme 0,7°.
III. Schicht:	
360 kg: Spez. Wärme 0,320, Temperatur: Tägl. Schwankung 0,8°, Tägl. Zunahme 0,8°.	360 kg: Spez. Wärme 0,320, Temperatur: Tägl. Schwankung 0,7°, Tägl. Zunahme 0,7°.

B. Gang der Kalorien im ganzen und in den einzelnen Schichten.

Gesamteingang	Auf Vorrat	Durchgang	Gesamtausgang	Gesamteingang	Auf Vorrat	Durchgang	Gesamtausgang
1133 + x		→ 371 →	666 + y	761,5 + x'		→ 310 →	517,6 + y'
	↘ 196		↑ I. Schicht.		↘ 79		↑
566 + x		→ 180 →	295 + y	372,5 + x'		→ 127,6 →	207,6 + y'
	↘ 156		↑ II. Schicht.		↘ 85		↑
230 + x		→ 115 →	115 + y	160 + x'		→ 80 →	80 + y'
	↘ 115		↑ III. Schicht.		↘ 80		↑
x			y	Tiefe. x'			y'

verdunstet hat, und durch diese Verdunstung ist Wärme aufgebraucht worden. Diese Wärme aber muß der Wärmezufuhr und dem Wärmeinhalt des Bodens entgangen sein. Der höhere Wassergehalt des Bodens ergibt überdies eine größere Wärmekapazität und eine stärkere Leitfähigkeit, was sich beides eben wieder darin ausdrückt, daß der gefräste Boden die Wärme besser in die tieferen Schichten ableitet und außerdem in jeder Schicht selbst mehr Wärme zurückbehält (Abb. 6).

Geht man überdies noch einen Schritt weiter in der Erklärung der Zusammenhänge, warum nun der gefräste Boden wiederum das Wasser besser festhält, so können dafür folgende Momente in Betracht kommen:

1. Größere Serien von Untersuchungen über das Verhältnis zwischen Luftvolumen eines bestimmten Volumens Boden, so wie er nach der Bearbeitung fällt, zu dem Anteil an fester Bodensubstanz ergaben, daß der gefräste Boden im Durchschnitt etwa 52 bis 53%, der gepflügte bzw. gepflügt-geeggte Boden nur etwa 47 bis 49% Luft enthält. Diese Luft ist natürlich mehr oder weniger gleichmäßig mit den festen Bodenteilen vermischt und kann bei Befuchtung des Bodens rein mechanisch fast ganz durch Wasser verdrängt werden. Der gefräste Boden kann, da er mehr Luftraum hat, also entsprechend mehr Wasser aufnehmen, ohne dadurch an seiner Porosität (Durchlüftbarkeit) zu leiden. Er könnte also zwischen 3 bis 5% mehr Wasser halten (Tabelle 12).

Tabelle 12. Porenvolumen. Vol.-Proz. Luft desselben, gleichzeitig aber verschiedenen bearbeiteten Bodens.

Pflug	Fräse
59,5%	60,5%
57,5%	65,0%
55,5%	60,0%
48,5%	55,5%
56,0%	63,5%
Mittel 55,4%	60,9%

Der Natur der Sache nach ist mit dem Verhältnis zwischen Luft- und Bodensubstanz zu-

zuleiten.



nächst nichts ausgesagt, denn man kann sich vorstellen, daß in einem Liter Raum ein völlig kompakter Klob Erd von  $\frac{1}{2}$  l Inhalt so untergebracht wäre, daß ein anderer ähnlicher Klumpen nicht mehr in diesen Liter hereingezwängt werden könnte. Das Luftvolumen in der Erde ist durch das Verhältnis der Mengen der verschiedenen feinen und allerfeinsten Bodenteilchen, Krümel, zueinander bedingt. Daß bei einem gefrästen Boden in dieser Beziehung gewisse Unterschiede vorliegen, dafür sind eine ganze Anzahl von vorgenommenen Krümelanalysen ein Beweis.

Tabelle 13. Krümelanalysen.

Schlag	20 (Oberfläche)		19 (Ackerkrume)		4a (Oberfläche)	
	gefräst	gepflügt	gefräst	gepflügt	Im Frühjahr	
Art					gefräst	geeggt
Datum	12. 5. 1924	12. 5. 1924	24. 5. 1924	24. 5. 1924	3. 5. 1924	3. 5. 1924
Krümelgröße	%	%	%	%	%	%
80 mm	0,0	0,0	0,0	29,0	4,4	0,0
40 mm	7,0	11,0	24,0	28,5	1,7	8,3
20 mm	21,0	8,5	24,0	16,0	14,5	14,7
10 mm	20,0	15,0	21,0	13,5	12,3	11,0
5 mm	20,0	15,0	13,0	5,5	14,6	11,0
2 mm	15,0	14,0	8,5	4,5	12,9	12,1
1 mm	5,0	12,0	5,5	1,5	14,5	18,9
0 mm	10,0	14,0	4,0	1,5	25,1	24,0
In der Größe von 20 bis 5 mm	61,0	38,5	58,0	34,0	41,4	36,7

Aus den Überlegungen und Berechnungen über die Schichtung von kleinsten Kugeln scheint sich zu ergeben, daß gewisse Mischungen von verschiedenen Größen solcher Kugeln ein gewisses Optimum ergeben, bei dem man verhältnismäßig viel Luft neben verhältnismäßig großer Gesamtoberfläche der Kugeln erzielen kann. Aus diesen Überlegungen heraus sollen die Krümel, welche durch ein Sieb von 20, 10, 5 mm zurückgehalten werden, zusammen möglichst viel von der gesamten Bodensubstanz betragen. Deshalb sind in der obigen Tabelle die Anteile dieser Krümelgrößen in Prozenten des gesamten Bodens ausgedrückt. Daß selbstverständlich die hier bei gefrästen Böden ermittelten oft doppelt so hohen Werte dieser Fraktionen (20 bis 10 bis 5 mm) nicht besagen, daß deswegen nun die ersteren Böden doppelt so gut wie die letzteren hinsichtlich der schließlichen Ertragsfähigkeit wären, ist einleuchtend. Die Zahlen geben nur einen Vergleichsmaßstab über die mechanische Zerkrümelung des Bodens.

2. Die unter 1. angeführten Gründe, wie durch geeignete Mischung bestimmter Krümelgrößen eine Verbesserung des Verhältnisses zwischen Luft und Boden erzielt werden kann, bewirken ebenfalls durch diese Mischung, daß die Oberfläche des Bodens, wenn er gefräst ist, im allgemeinen ein glatteres und weniger rauhes Aussehen erhält als in anderer Weise bearbeitetes Land, und es wird auch dieser Umstand noch dahin wirken, daß die glattere Oberfläche nicht so leicht das Wasser verdunstet.

3. Der höhere Wassergehalt des gefrästen Bodens könnte auch dadurch zustande kommen, daß er besser das Wasser aus dem Untergrunde nach oben leitet, also etwa die gleichen Mengen verdunsteten Wassers rascher ersetzt und so den dauernd höheren Wassergehalt ergibt. Dann wäre allerdings schwer begreiflich, warum ein solcher Boden dann überdies noch wärmer werden kann als der andere, von welcher Tatsache aus wir ja unsere ganze Kette von Schlüssen haben ausgehen lassen.

Man könnte einwenden, daß, nachdem sowohl ein höherer Wassergehalt als auch ein höherer Luftgehalt bei dem gefrästen Boden ermittelt ist, schon dadurch die spezifische Wärme des Bodens und seine Wärmeleitfähigkeit so verändert wäre, daß die obige kursorische Berechnung (Tabelle 11) der durch die einzelnen Schichten hindurchgehenden und von ihnen aufgenommenen Wärmemengen stark beeinflußt würden. Eine kurze Überlegung zeigt aber, daß wenn man die spezifische Wärme der Luft in diesem Falle gleich 0, diejenige des Wassers aber gleich 1 setzt, für die relative Vermehrung beider um je etwa 2 bis 3% des Volumens für diese 2,5% Anteil am ganzen Bodenvolumen bzw. Gewicht anstatt der angenommenen spezifischen Wärme von 0,28 eine solche von 0,35 besitzen würde. Ganz ähnliches dürfte auch für die Leitfähigkeit zutreffen, so daß sich ergibt, daß andere Gründe wie spezifische Wärme und spezifische Leitfähigkeit für den günstigeren Wärmehaushalt des gefrästen Bodens maßgebend sind.

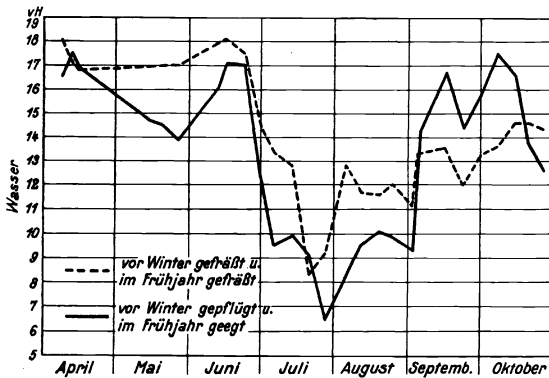


Abb. 7. Wasserhaushalt verschieden bearbeiteter Böden.

gleichmäßiger war als auf dem gepflügten. Z. B. in der Periode von Mitte April bis gegen Ende Mai verliert der gepflügte Boden etwa 3% mehr Wasser wie der gefräste Boden. Bei einer 25 cm tiefen Bodenschicht macht dies auf den Quadratmeter 13,5 kg Wasser entsprechend einem kalorischen Verdampfungswerte von rund 8100 Kal. aus; auf jeden der 30 Tage kommen also bei gepflügtem Land ein Mehrverlust von 270 Kal., das macht auf jedes Kilogramm Erde 0,6 Kal. bzw. bei der spezifischen Wärme von 0,35 eine bessere Erwärmung von 1,7° in dieser Schicht. So viel Temperaturzunahme ergibt sich aber oben, wenn wir auf Abb. 6 das Mittel zwischen der Temperaturerhöhung von 25 und 5 cm Tiefe im Fräsland gegenüber dem im Pflugland nehmen. Ähnliche Perioden, die zu ähnlichen Ergebnissen führen, haben wir zwischen dem 25. Mai und 25. Juni (auch Abb. 7) und noch in verschiedenen späteren Perioden. Die Erscheinungen gegen Ende September, daß der Wassergehalt im gepflügten Lande stark ansteigt, während er in Fräsland gleichmäßiger bleibt, hängt mit den damals, wie aus der Regentabelle Abb. 1 hervorgeht, verhältnismäßig starken Niederschlägen zusammen.

Es ist früher an anderer Stelle die Anregung gegeben worden<sup>1)</sup>, die verschiedensten landwirtschaftlich wichtigen Maßnahmen und Vorkommnisse auf dem Acker und bei seiner Bestellung irgendwie auf ein kalorisches Maß zurückzuführen, und

<sup>1)</sup> Mitteilg. d. Deutsch. Landw. Gesellsch. 1920.

Wir werden noch weiter unten sehen, welcher großen Anteil überhaupt die Verdunstungswärme von Wasser im ganzen Energiehaushalt des Bodens hat, worauf wir ja bereits am Ende des Abschnittes XII aufmerksam machten.

Auf der graphischen Darstellung Abb. 7 ist beispielsweise der Haushalt mit Wasser auf einem Kartoffelacker wiedergegeben. Es ist mit einem Blicke ersichtlich, daß auf dem gefrästen Lande der Wasserhaushalt ein viel

dann an diesem Maß die mehr oder minder große Bedeutung dieser Umstände, Maßnahmen und Vorkommnisse abzuwiegen. Es hätte dies den Vorteil, daß man wirklich in der Lage wäre, seine Maßnahmen dem Wichtigsten zu- und dem Nebensächlichen abzuwenden. Wenn wir also im folgenden Abschnitte nun in einigen Schemabildern kalorisch zur Darstellung bringen, wie Kohlensäure, Wasser und Sonnenenergie sich umsetzen, so geschieht dies also nicht nur, um den Umsatz dieser Sonnenenergie vorzuführen, sondern auch den Umsatz der beiden anderen hier behandelten Wachstumsfaktoren, die wir eben nur deshalb in ihrem kalorischen Werte anführen, um das eine gegen das andere abwiegen zu können.

Um zunächst an einem Beispiel zu erläutern, wie dieses Abwiegen gemeint ist, wollen wir eine Frage behandeln, die gerade bei der Bodenbearbeitung sehr nahe liegt. Man stößt öfters auf die Meinung, daß das Lockern der Ackererde für die Pflanzen so wichtig wäre, weil sie sonst rein mechanisch gehindert seien, im Boden ihr Wurzelwerk auszubilden. Es läge nun nahe, bei dem leichten und lockeren, gefrästen Lande gegenüber kompakterem gepflügten zu glauben, daß das Wachstum im letzteren Falle den Wurzeln wesentlich mehr Arbeit bereitet, und daß sich dies in einer Verminderung des Ertrages geltend machen wird. Wir haben in den Abb. 8A, B, C einige Diagramme über den Stechwiderstand, gemessen mit dem v. Meyenburgschen<sup>1)</sup> Bodendruckmesser wiedergegeben.

Die Spitze dieses Druckmessers stellt einen Konus dar, der auf 1,2 cm Höhe auf 1,5 cm<sup>2</sup> Fläche anwächst. Nach rechts zu auf den Diagrammen folgen die Eindringtiefen bis zu 40 cm und aufsteigend ist der beim Einstechen des Apparates aufzuwendende Druck angegeben. Man sieht bei manchen Proben gegen Herbst zu eine sehr starke Verdichtung, so daß durchgehend ein Druck von 60 kg zum Durchstoßen der Erdschichten nötig ist. Nehmen wir diesen Kraftaufwand von 60 kg auf 25 cm wirkend an, so ergibt dies 15 mkg, die beim Einstechen auf 25 cm erforderlich sind. Denken wir uns nun in entsprechender Vergrößerung des Konusses des Widerstandsmessers eine ideale Wurzel einer Zuckerrübe von 25 cm Länge und 12 cm oberem Durchmesser. Die Fläche des oberen Durchschnittes wäre dann 114,5 cm<sup>2</sup>. Wir rechnen nun entweder so, daß ein Zylinder von der Hälfte dieser Fläche auf 25 cm einzubringen ist oder die ganze Fläche auf die halbe Tiefe und erhalten dann als Arbeitsaufwand  $38 \cdot 2 \times 15 = 537$  mkg = 1,35 Kal. Andererseits wiegt eine Rübe, die diesem Kegel entspricht, etwa 1,5 kg und kann ungefähr 300 g Zucker enthalten, was wiederum etwa 1140 Kal. entspricht. Um also den Boden zu durchdringen, hätte diese Rübe unter den ungünstigsten Verhältnissen 1,3 Kal. von den im ganzen mindestens von ihr aufgespeicherten 1140 verbrauchen müssen, was noch nicht ganz 0,1% der Energie entspricht. Es ist leicht zu übersehen, daß an diesem Resultate wenig geändert wird, auch wenn der Druck sich verdoppelt und vermehrfacht, um eine Spitze in den Boden einzupressen. Nun findet man aber trotzdem, daß in der Tat absichtlich sehr kompakt gestampfte Böden, z. B. bei Kartoffeln, auf etwa 66% verringerte Erträge gaben. Und es ist auch andererseits auf gefrästem Lande eine Ertragssteigerung gegenüber dem mehr Widerstand bietenden gepflügten Lande beobachtet worden. Dieser Mehrertrag bezog sich sowohl auf das Gesamtgewicht pro Hektar mit etwa 6%, wie auch auf den Zucker- und Stärkegehalt der einzelnen Pflanzen. Ersterer war um 2% höher. 2% Zucker indessen bei der Rübe in unserem obigen Beispiel würden den 11. Teil von den 1140 Kal.

<sup>1)</sup> Intern. Mittlg. f. Bodenkunde 1924.

oder 100 Kal. ausmachen, während die Mehrarbeit beim gepflügten Lande für die Wurzelarbeit höchstens 1,3 Kal. betragen könnte, wenn sie beim Fräslande 0 wäre. Aus dieser Gegenüberstellung können wir ganz eindeutig aussagen: dasjenige Moment,

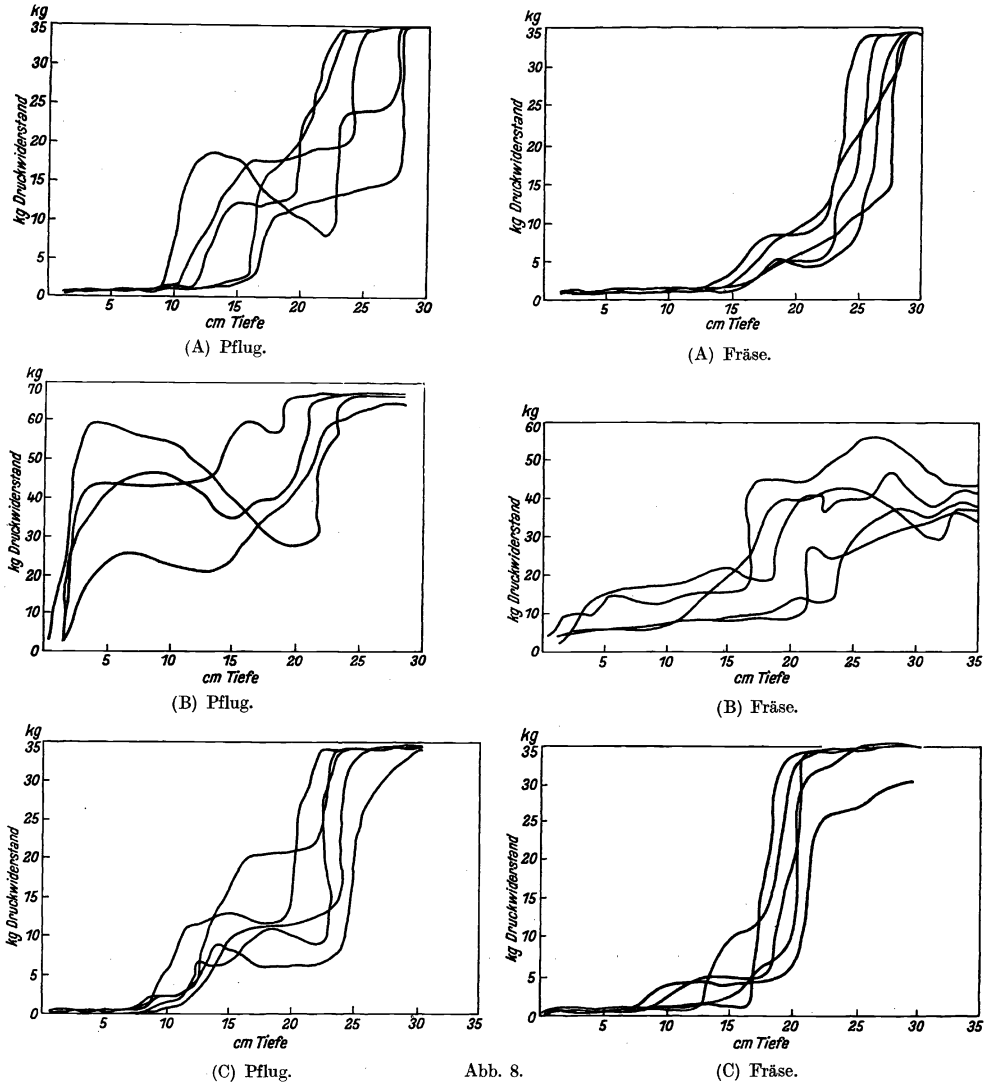


Abb. 8.

welches die Ertragssteigerung der Rübe beim gefrästen Lande veranlaßt, kann nicht der Umstand sein, daß man der Rübe die rein mechanische Arbeit des Zerreißen oder Überwindens der Kohäsion des Bodens abnimmt, dadurch, daß man den Boden feiner zerkrümelte hat.

Die Lockerheit des Bodens ist bei Pflanzen wie Rüben und Kartoffeln zunächst eine Forderung des Umstandes, daß deren Wurzeln eine sehr große Atmungsintensität haben, wie dies von Stoklasa ermittelt und schon oben in Abschnitt VIII angedeutet wurde. Auch hat die Rübe in der Nähe ihrer Wurzeln einen großen Bakterienreichtum, der seinerseits wiederum eine Verstärkung der Atmung im Boden ergibt. In beiden Fällen ist zum günstigen Verlaufe der Vorgänge eine gute Porosität der Erde nötig, damit die entbundene Kohlensäure leicht aus der Erde empor- und Sauerstoff hineindiffundieren kann. Man sieht aber, wie in Abschnitt XV, Tabelle 8 gezeigt, daß die Bodenatmung auf dem gefrästem Lande durchschnittlich 8 bis 12% höher ist, als auf dem gepflügten, also wohl als das in Betracht kommt, was günstig wirken kann.

Die dem Boden in regem Tempo entströmte Kohlensäure muß aber auch in den nächsten Zentimetern über dem Boden eine Erhöhung des Kohlensäuregehaltes hervorrufen und so zur Erhaltung der unteren Blätter, wenn sie von den oberen beschattet werden, beitragen; Blätter, die sonst ohne dieses Mehr an Kohlensäure früher vergilben und eine Minderung des Ertrages ergeben würden. Nehmen wir dazu die bessere Wasser- und Wärmehaltung des Bodens, wovon die höhere Temperaturstufe sowohl den Wachstumskoeffizienten der Bakterien als den der Wurzeln, selbst bei nur 1° dauerndem Unterschied zwischen 10 und 20°, wohl um 10% steigern kann. Vom Wasser aber wissen wir nach Abschnitt XII und XIII, wie wichtig es für die Pflanzen und Bakterien ist.

Bessere Durchlüftung, bessere Wasserhaltung, mehr Wärme, verstärktes bakterielles Leben und Bodenaufschluß, dies alles wirkt zusammen zum besseren Wachstum der Pflanzen.

## XVII.

Man ist leicht geneigt, sich bei rein physikalischen und chemischen Vorgängen und Experimenten mit der Feststellung von Zuständen zu begnügen, um einen Vorgang zu beschreiben. Die Lehren der Chemie bekamen einen bedeutenden Anstoß genau wie alles, was mit Molekularphysik zusammenhängt, als man an Stelle der zuständlichen Beobachtungsweise eine dynamische, eines Spiels und Widerspiels von Kräften und Vorgängen einführte. Man braucht nur die Worte „chemisches Gleichgewicht und Reaktionsgeschwindigkeit“, „kinetische Gastheorie“, „Wärmelehre“ usw. zu erwähnen, um dies zu illustrieren.

Wir haben es an unseren Entdeckungen hinsichtlich des Kohlensäuregehaltes in der Luft, welche die wachsenden Pflanzen wirklich umgibt, selbst erlebt, wie fruchtbar eine Hypothese wurde, die an Stelle der starren Auffassung von der Konstanz des Kohlensäuregehaltes der Luft den Begriff eines dynamischen Gleichgewichtes setzt zwischen Erzeugung dieses Nährgases vom Boden aus und seinen Verbrauch durch die grünen Pflanzen.

Der Bewegung, welche im Laufe der Sonne liegt, kann sich nichts entziehen. Es ist deshalb zunächst von wenig Bedeutung, zu wissen, daß in einem ganzen Jahre die Sonne etwa 0,5 Mill. Kal. auf den Quadratmeter Lichtenergie herabwirft. Man muß vielmehr wissen und verfolgen, wie diese Energie an jedem einzelnen Tage zu den verschiedenen Jahreszeiten, ja bis zu den einzelnen Stunden des Tages dahin gelangt. Genau so ist es mit der Menge des Regens. Wir haben noch kein Mittel, um den halben Kubikmeter Regenwasser, der auf einen Quadratmeter Erde im ganzen Jahr zu mindestens fällt, in schönen Behältern auf den einen Viertelkubikmeter Krümelnschicht

Erde und die weitere 30 bis 50 cm Untergrund zu verteilen. Die Winterniederschläge auf nacktem Boden gehen im allgemeinen mindestens zur Hälfte in eine Schicht unterhalb von einem Meter verloren. Auf bestandenem Lande versickert im Sommer höchstens 5% wie schon oben angeführt. Es kommt also auch bei Wasser und Regen darauf an, die jahreszeitliche und tägliche Dynamik desselben zu beachten.

Die höchsten landwirtschaftlichen Erträge können natürlich nur erreicht werden, wenn im Verlaufe des gesamten Wachstums ein Maximum von Zeitmomenten gegeben ist, wo alle Zusammenwirkenden in sich ergänzenden Höchstwerte zusammentreffen. Bei der Vielheit der in Betracht kommenden Faktoren beschränken wir uns darauf, uns die Bewegung, die ihr Rhythmus hervorruft und ihr Zusammenspiel in potenziertem Maße ergibt, nicht an einem mittleren Falle, sondern an der Verfolgung von Grenzwerten deutlich werden zu lassen. In der Abb. 9 sind zu diesem Zwecke verschiedene extreme Tage des Jahres schematisch dargestellt, hinsichtlich dessen, was an ihnen mit Strahlungsaustausch an Energie, Umsetzung des Wassers und der Kohlensäure gemäß ermittelten Daten und Befunden vor sich gehen kann.

- I. ist ein klarer Sommertag des Juli,
- II. ein bedeckter Sommertag mit Regen, ebenfalls im Juli,
- III. ein heller Wintertag im Januar,
- IV. ein bedeckter Wintertag,
- V. ein mittlerer Frühlingstag.

Es sind jeweils als Balken nebeneinander die Mengen des zugestrahlten Lichtes und der Wärme aufgetragen und diese Energie dann wiederum aufgeteilt nach ihren verschiedenen Funktionen, sei es zu direkter Rückstrahlung der Erde zum kalten Weltenraume, sodann die Menge des reflektierten Lichtes, die Mengen, welche gemäß unseren obigen Angaben zur Bodenerwärmung beitragen, außerdem die, welche dann noch frei bleiben für Wasserverdunstung, sei es vom Boden direkt oder durch darauf wachsende Pflanzen und schließlich zur Abführung durch Konvektion von Luft. Außerdem findet man jeweils einen ganz verschwindenden Betrag von dieser großen Menge, der chemisch durch die Assimilationsarbeit der Pflanzen in Substanz festgehalten wird als Ertragszuwachs und schließliche Ernte. Die Menge von Wasser, die mit der nach Abzug aller anderen Abnehmer noch vorhandenen Restmengen von Wärme im Maximum verdampft werden könnte, ist proportional der gewellt schraffierten Kalorienzahl für Verdunstung.

Es ist klar, daß eine Fläche, die absolut trocken ist, diese überschüssige Wärmemenge nicht durch Verdampfen von Wasser abgeben kann; in einem solchen Fall wird der Boden die Wärme aufnehmen, sich stärker erwärmen und dadurch die aufgenommene Energie teilweise in verstärktem Maße nach dem Erdinnern zu abgeben bzw. umgekehrt seine Strahlung zurück zum Himmel oder zum kalten Raume verstärken. Obgleich an sich der kräftig ausgezogene schwarze Strich am linken Ende im Balken proportional ist mit der Menge des chemisch umgesetzten Kohlenstoffes, ist doch, da er ja sehr klein ist, wegen der schlechten Vergleichbarkeit bei jedem Schema noch unterhalb des Balkens ein horizontaler, dieser Kohlenstoffmenge proportionaler kleinerer Balken gezeichnet. Er entspricht jeweils dem Maximum an Kohlensäure-Assimilation, das nach den bisher bekannten Zusammenhängen unter den gegebenen Verhältnissen möglich gewesen wäre. An Wintertagen ist in dieser Beziehung leicht mit einem negativen Betrage zu rechnen, da dann die Veratmung von Kohlensäure

den Assimilationsgewinn in den wenigen lichten Momenten überwiegen kann. Dicht unterhalb des großen Balkens sind zur Demonstration des Wärmeganges in die Erde

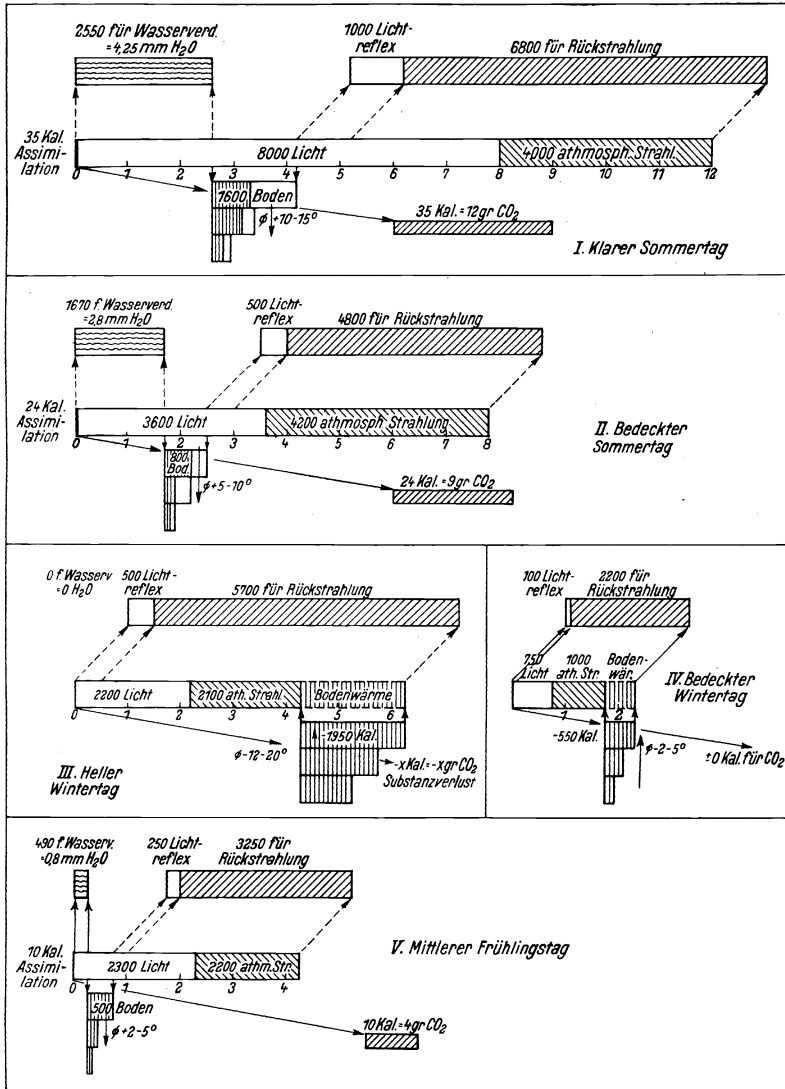


Abb. 9. Grenzfülle des Umsatzes von Lichtwärme, Wasser und Kohlensäure.

hinein einige kleinere Balken in anderer Schraffur gezeichnet, die jeweils proportional den Wärmemengen sind, die in die verschiedenen Bodenschichten eindringen oder von dort ausgestrahlt werden.

Die Tabellen sind gezeichnet auf Grund der Angaben, die sich an verschiedenen Stellen von Dornos Abhandlung finden<sup>1)</sup>. Bezüglich der Sonnenstrahlung wird auf die beigegefügte auf Quadratmeter und Stunden umgerechnete Tabelle der Stundenwerte um die Monatsmitten in Potsdam verwiesen (Tabelle 1).

Zunächst dürfte auffallen, wie überraschend gering die Energiemenge ist, um deren Einheimstung willen schließlich das ganze Geschäft des Landwirtes geht, im Vergleich zu den großen Energiemengen, die z. B. im Sommer auf den 1 m<sup>2</sup> Erde bis zu 12 000 Kal. herabkommen, von denen etwa 8000 die Sonnenstrahlung ausmachen. Die sehr geringe Nutzung dieser Energie erscheint in einem besseren Lichte, sobald man sich eben erinnert, daß die landwirtschaftlichen Transformatoren nur auf einem warmen Boden gedeihen und zur Bewegung ihrer Maschinerie große Mengen von Wasser verdampfen müssen (vgl. IV und V). Die Nutzung steigt dann immerhin von etwa 0,3% auf etwa 33 bzw. 20%. Schließlich ist auch das reflektierte Licht nicht als Verlust zu buchen, da wir ihm doch die Sichtigkeit und Arbeitsmöglichkeit am Tage verdanken. Die verschiedenen Darstellungen bezüglich der Wärme im Boden zeigen bei den Winterbildern 3 und 4 recht plastisch, warum in dieser Zeit der Boden sich so stark abkühlt, weil eben die Rückstrahlung um so viel größer ist wie die Sonnenstrahlung nebst der Wärmestrahlung nach Abzug der Lichtreflektion. Diese rückstrahlende Energie kann nur auf Kosten der Erdwärme erfolgen, die sich also dauernd verringert. Im Gegensatz dazu sieht man an den mittleren Frühlingstagen, wie dort die Bilanz eine kleine Menge zugestrahler Wärme im Überschuß läßt, so daß ein Temperaturzuwachs im Boden möglich wird.

Der an sich geringe Betrag von 12 g assimilierter Kohlensäure am heißen Sommertage unter günstigsten Bedingungen erscheint kleiner als er in Wirklichkeit ist. Er bedeutet in Wirklichkeit einen Gewinn an Pflanzensubstanz, entsprechend mindestens einem Doppelzentner Trockensubstanz auf den Hektar oder etwa 0,3 bis 0,4 dz Körner für 1 Tag. Es wäre vielleicht nicht ohne Interesse, von diesem Gesichtspunkte aus gelegentlich die für nördliche Klimaten besonders geeigneten landwirtschaftlichen Züchtungen, soweit sie schon jetzt vorhanden sind, zu betrachten, denn aus was setzt sich schließlich der Begriff der klimatisch verschiedenen Sorten zusammen, als aus Fähigkeit, die Energie der Sonne bestens auszunützen?

Es ist ganz klar, daß bei einer so weitgehenden Nutzung der Energie entsprechende Mengen Kohlensäure und auch alle übrigen Nährstoffe im Boden in greifbarer Form vorliegen müssen. Damit dies aber geschehen kann, ist ein Haupterfordernis, daß auch das nötige Wasser vorhanden ist. 4 mm Wasserverbrauch an einem Tage macht 300 mm in etwa 70 Tagen, und damit ist schon die Regenmenge des Sommers in der norddeutschen Tiefebene völlig aufgezehrt. Würden deshalb auch die täglichen 1600 Kal. Bodenwärme für Assimilation verbraucht, so würden die dazu nötigen 200 mm Regen für 70 solche Tage schon den ganzen Rest des verbliebenen Winterwassers mit Beschlag belegen. Alsdann müßte das Grundwasser zur Ausnützung der Reflexion bei verbesserter Rückstrahlung herangezogen werden, falls man nicht zu künstlicher Bewässerung und Beregnung schreiten will.

Für bessere Energienutzung wäre danach zu streben, daß die Pflanzen ihre Nährstoffe aus konzentrierteren Lösungen aufnehmen, also weniger Wasser verdampfen müssen. Dies würde natürlich Boden mit großem Reichtum an leichtlöslichen Nährstoffen voraussetzen und wäre an hallophilen Pflanzen evtl. studierbar.

<sup>1)</sup> „Physik der Sonnen- und Himmelsstrahlung.“ Strahlentherapie Bd. 9 und 10. 1919.



70 solcher klarer Tage würden 21 bis 28 dz Getreideernte entsprechen. Der mittlere bedeckte Regentag im Sommer steht in seiner Leistung nicht weit dahinter zurück, immerhin würde sein Vorwiegen die Ernte etwa auf  $\frac{3}{4}$  mit obigem herabsetzen. Es ist zudem zu bemerken, daß auf einem mit Pflanzen gut beschatteten Boden der Betrag, der für Bodenerwärmung eingesetzt ist, der Assimilationsarbeit zugute kommen kann, wenn nur der Boden selbst in chemischer, physikalischer und biologischer Beschaffenheit so ist, daß er genug Feuchtigkeit enthält und anstatt 12 bis 20 g Kohlen-säure pro Quadratmeter und Stunde liefert; unter solchen Umständen kann anstatt 0,3 bis 0,4 dz Zuwachs ein solcher von 0,5 bis 0,6 dz erfolgen. Es scheint nicht ausgeschlossen, daß auch noch der Energiebetrag, der für Reflexion angesetzt ist, sich bei geeignet gezüchteten, stark das Licht absorbierenden Pflanzen-Rassen der landwirt-schaftlichen Verwertung zuführen ließe. Es sei hier an den tief dunkelgrünen Stahlroggen von großer Winterfestigkeit erinnert. Es liegt auch hier noch eine Möglichkeit von 20% Maximum Ertragssteigerung vor. Inwiefern das Gebiet der rückstrahlenden Energie noch ausgenutzt werden könnte, darüber möchten wir höchstens eine Mut-maßung anführen. Man könnte sich immerhin Pflanzenarten denken, die so intensiv Wasser aufzunehmen und zu verdunsten vermöchten, daß sie selbst sich kaum erwärmen und auch eine Erwärmung ihres Bestandes verhindern und die selbst bei verhältnismäßig niedriger Temperatur von 8 bis 10° noch stark assimilieren. Es würde dann dieser Bestand gegenüber einer sonstigen Temperatur von 17 bis 18° nur 8 bis 10° haben und dadurch automatisch die Rückstrahlung um täglich ca. 600 bis 800 Kal. zurückgehen, was ungefähr dem Betrage dessen gleichkommt, was bei Ausnützung der Reflexion zu gewinnen wäre.

### XVIII.

Indem wir die Umsetzung von Sonnenenergie, Wasser und Kohlenstoff in der Landwirtschaft besprachen, also scheinbar so abstrakte Momente behandelten, sind wir mitten in innerste Kernfragen praktischer Landwirtschaft und Biologie eingetreten und haben ganz neue Gesichtspunkte für gegenständliche Probleme gewonnen aus allen möglichen Gebieten dieser Uerzeugung, sei es Bodenbehandlung, Pflanzenbau, Züchtung oder Bakteriologie usw.

Es ist uns nicht darum zu tun, gewissermaßen ein pantheistisches Zusammenhängen von jedem mit allem hier zu konstruieren, sondern auf 3 große Koordinaten von Gewicht zu beziehen, was wir landwirtschaftlich tun, wissen und forschen können. Immer mehr geben uns die Arbeiten auf Gieshof die Gewißheit, wie folgerichtig und übersichtlich diese 3 Koordinaten zusammenstimmen und das landwirtschaftliche Geschehen in sich aufnehmen.

Ist die Raum-Zeit-Koordinate alles Geschehens etwas Gesamtverbindliches, so hat die Sonnenkraft in ihrer großen Menge etwas praktisch nicht Überbietbares und dürfte sich deshalb als eine solche Koordinate eignen. Wenn auch für gärtnerischen Betrieb künstliche Erwärmung üblich ist und nach hiesigen und amerikanischen Versuchen auch künstliche Beleuchtung<sup>1)</sup> verwandt wird, so ist doch die praktische Landwirtschaft noch ziemlich von der völligen Nutzung der Sonnenenergie entfernt. Sie mag oft daran gehindert sein, weil ihr nicht das nötige Wasser geboten ist oder weil sie zuviel davon hat und die Wärme zunächst benötigt wird in dem unrentabeln

<sup>1)</sup> Werner Siemens: Elektrotechn. Zeitschr. 1886, S. 481. — William Siemens: Siemens Scientific Works II (1889), S. 220 ff., 252 ff. — M. Gerlach und Gg. Erlwein: Mittlg. d. Kaiser Wilhelm-Institut f. Landwirtschaft. Bd. II. H. 4.

Geschäfte, den Acker abzutrocknen und begehbar zu machen. Drainage spart Sonnenenergie zur Erwärmung des Bodens und für Wachstum, aber sie entführt leicht auch Wasser, das im Hochsommer als Transpirationswasser die grünen Transformatoren nützlich beschäftigt hätte. Auch den Bakterien im Boden wäre dies Wasser nützlich gewesen in der Kohlenstoffökonomie der Landwirtschaft. Denn wir wissen heute sicher, daß weder Diffusion noch Massenbewegung der Luft atmosphärische Kohlensäure zu den landwirtschaftlichen Kulturen in solchen Mengen heranbringen können, wie stärkstes Wachstum und volle Sonnennützung dies erforderten. Es ist also vom Boden her die Kohlensäureversorgung zu fördern durch Bodenbearbeitung, Verwertung von organischen Abfallstoffen, Wassererhaltung usw. Eines hängt untrennbar mit dem anderen zusammen. Ganz im Gegensatze zu S. Arrhenius<sup>1)</sup> sind wir nicht der Meinung, daß den Tropen das Geschäft der Nahrungsbeschaffung zu überlassen sei. Wir zeigten im vorigen Kapitel noch verschiedene gangbare Möglichkeiten der besseren Verwertung des Lichtes mit Blattpflanzen des Landes. Könnten wir technisch die 600 mm Regen des Jahres sammeln, so daß sie in der warmen Jahreszeit nur durch grüne Pflanzen gehen, so ließen sich in dieser Periode schon die nötigen 360 000 Kal. Verdampfungswärme beschaffen, um gleichzeitig 8000 Kal. assimilatorisch festzulegen: 8000 Kal. Ertrag pro Quadratmeter hieße aber mit 125 m<sup>2</sup> einen Menschen ernähren. Dies alles wäre erreichbar in schrittweiser Verbesserung schon heute geübter Verfahren. Und dabei sind heute ganz naheliegende Gesichtspunkte noch gar nicht in ihrer Tragweite beachtet, wie z. B. daß bezüglich des Kohlenstoffhaushaltes Sorten sich unterscheiden in dem Aufwande, den sie für ihre eigene Atmung brauchen, so daß die mit größerem täglichen Kohlenstoffgewinn zwar wohl schon als besserwüchsig vielleicht ausgewählt werden, aber in ihrem Wesen noch gar nicht erkannt sind. Wir wissen, daß von landwirtschaftlichen Gewächsen die Gräser aus ihren Blättern Wasser nicht nur verdampfen, sondern auch in tropfbarer Form abgeben: durch Guttation. Man nimmt wohl an, daß dieses Wasser auch zum Antransporte von Nährsalzen gedient hat<sup>2)</sup> und durch eine noch nicht näher untersuchte Art Ultrafiltration von diesen beraubt und aus der Pflanze gestoßen wird. Welcher Wärmegewinn könnte die züchterische Verwertung dieser Eigenschaft bedeuten, ja welche Ökonomie mit dem Wasser, wenn es einfach zurück zur Erde tropfte und in kurzem Kreislaufe durch und um die Pflanze zirkulierte! Es wäre leicht möglich, daß an osmotischer Energie, um das Wasser in die Pflanze hinauszuhoben, viel weniger verbraucht wird, wie beim gewöhnlichen Verdampfen. Aber die Gefahr der Überhitzung ihrer dünnen Blätter wäre bei jedem direkten Lichtstrahl so groß, daß man solcherart auf Guttation gezüchtete Pflanzen nur im untersten Schattenparterre mehrstöckiger Kulturen bauen könnte. Der Möglichkeiten, Sonnenenergie durch Landpflanzen zu nützen, sind noch so viele, daß der Sprung zu den Wasseralgeln mit ihrer viel größeren Lichtnutzung und fast ohne Wasserverbrauch noch weite Wege hat und doch als Möglichkeit, in der Ferne stehend, eine große Sicherheit gewährt dessen, was noch möglich ist, in unseren Breiten aus Sonne, Wasser und Kohlenstoff zu nützen.

### Zusammenfassung.

1. Wechselwirkung zwischen Pflanzenbau und Tierhaltung. Betrachtung der Pflanzen als photosynthetische Apparate, in denen Sonnenenergie (Licht-Wärme), Wasser und Kohlenstoff und ferner Nährsalze umgesetzt werden.

<sup>1)</sup> Kgl. Sven. Akad. Bju. 1921.    <sup>2)</sup> Lemmermann: Landw. Jahrb. 1909.

2. Es wird untersucht, inwiefern die Flächenausdehnung der Landwirtschaft heute noch eine Folge der Benutzung des Bodens als Substanz und Träger für die Pflanzen ist und wieweit die Nutzung von Licht-Wärme und Wasser hier bedingend wirkt.

3. An sich brauchte nach dem heutigen Stand des technischen Wissens und physiologischer Erkenntnis die photosynthetische Nahrungsproduktion nicht so große Flächen einzunehmen, wie sie es tut, oder aber die in Anspruch genommenen Flächen könnten höheren Ertrag liefern.

4. Praktische Landwirtschaft ist Ökonomie mit den kleinsten und unscheinbarsten Dingen; im Widerspiel zu den photosynthetischen Apparaten arbeiten die Zerkleinerungsmaschinen der Bakterien.

5. Es werden im einzelnen die Schicksale und der Umsatz von Licht-Wärme und Wasser gemäß den neueren Erkenntnissen der Strahlungsforschung und pflanzenphysiologischen Erkenntnis erörtert. Anschließend wird die Wichtigkeit des Wassers als Lebensmedium für die Bakterien des Bodens besonders betont.

6. Das eigenartige Eingreifen der Bakterien des Bodens in den ganzen Vorgang wird dargestellt.

7. Nebst den allgemeinen Wirkungen des Kohlenstoffes im Pflanzenleben wird dessen Entstehung aus den pflanzlichen und tierischen Abfallstoffen im Boden auseinandergesetzt. In Kürze wird das den praktischen Assimilationsvorgang bei höheren grünen Pflanzen beherrschende Produktgesetz aus Lichtstärke und Kohlensäurekonzentration, die Kohlensäureresttheorie und die Bedeutung der bodenbürtigen Kohlensäure dargelegt.

8. Es wird an Hand dieser Gesetze der Unterschied zwischen einzelstehender Pflanzung und geschlossenem Pflanzenbestande aufgezeigt.

9. Die Pflanzen werden gemäß ihrem Aufbau und ihrer Vergesellschaftung in solche eingeteilt, die Kohlensäure aus der Atmosphäre werben, und solche, die eher noch Kohlenstoff aus dem Boden vergeuden.

10. Die Entstehung von Kohlensäure aus dem Boden wird in ihrer Abhängigkeit von Regen, Düngung, Temperatur, Bodenbearbeitung und Pflanzenart dargestellt.

11. An Hand von Ertragsversuchen bei verschiedenartiger Pflanzung von landwirtschaftlichen Gewächsen (Reihenweite) wird gezeigt, daß und wie das Zusammenspiel der verschiedensten Bedingungen übertriebene Maßnahmen ausschließt und bei gewissen mittleren Umständen die besten Wirkungen ergibt.

12. Es wird der Versuch gemacht, auf Grund verschiedener Beobachtungen über Bodentemperatur, Feuchtigkeitsgehalt, Widerstand des Bodens, Krümelzustand usw. zu zeigen, in welcher Richtung besonders Bodenbearbeitung für die Pflanzen wesentlich ist und wie die verschiedenartige Bodenbearbeitung unter Umständen zu einem Besten für das Pflanzenwachstum führen kann.

13. Da die 3 eingehend behandelten Wachstumsbedingungen in ihrer Umsetzbarkeit durch die Pflanzen teils sehr stark voneinander teils von äußeren Umständen abhängen, ist an Hand von einigen Grenzfällen die Bewegtheit dieses Umsatzes dargestellt.

14. Aus der Untersuchung der Ergebnisse dieser Grenzfälle lassen sich gewisse Richtlinien zur Verbesserung dieser Umsätze durch Bodenbearbeitung, Wässerung, Wahl der Pflanzensorten und Züchtung geeigneter Pflanzen geben, die völlig im Bereiche des praktisch Möglichen liegen.