HERMANN GRASSMANN

PROJEKTIVE GEOMETRIE DER EBLENE

UNTER BENUTZUNG DER PUNKTRECHNUNG

ZWEITER BAND: TERNARES

ZWEITER TEIL.

PROJEKTIVE GEOMETRIE DER EBENE

UNTER BENUTZUNG DER PUNKTRECHNUNG DARGESTELLT

VON

HERMANN GRASSMANN

ZWEITER BAND: TERNÄRES

ZWEITER TEIL

MIT 259 FIGUREN IM TEXT

1927

SPRINGER FACHMEDIEN WIESBADEN GMBH

ISBN 978-3-663-15277-4 ISBN 978-3-663-15843-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-15843-1

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1927

Vorrede.

Der vorliegende zweite Teil des zweiten Bandes bringt meine projektive Geometrie der Ebene zum Abschluß. Ich habe in ihm die schon im ersten Teil dieses Bandes mit der Darstellung der Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen begonnene Behandlung der *linearen Gebiete von Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse* fortgesetzt und zu Ende geführt, indem ich zunächst von *speziellen* Kegelschnittbüscheln und Kegelschnittscharen das Scharbüschel von Kurven zweiter Ordnung und die Büschelschar von Kurven zweiter Klasse der Betrachtung unterworfen habe, d. h. diejenigen *Gebiete zweiter Stufe* dieser Kurven, die unter ihren zerfallenden Kurven beziehlich eine Doppellinie und einen doppeltzählenden Punkt enthalten. Diese speziellen Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen erweisen sich sogleich als nützlich bei Aufsuchung der Lagenbeziehung zwischen den beiden Kernkurven einer beliebigen Reziprozität und bieten auch später ein brauchbares Hilfsmittel zur geometrischen Deutung gewisser Gleichungen zweiten Grades zwischen Punkt- und Linienkoordinaten.

Zur Vorbereitung auf *die linearen Kegelschnittgebiete höherer Stufe* entwickle ich sodann den Begriff *apolarer Reziprozitäten und Polarsysteme*, der dann wiederum bei der Beschränkung auf apolare *Polarsysteme* zu den Lücken- und Potenzformen zweiter Ordnung und zweiter Klasse, zu den algebraischen Produkten von Punkten und Stäben und zu den kombinatorischen Produkten von Potenzformen zweiter Ordnung und zweiter Klasse hinüberleitet. Es ergibt sich dabei, daß die Gesamtheit aller Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse in der Ebene je ein *lineares Gebiet sechster Stufe* bildet.

Für die Betrachtung der *linearen Kegelschnittgebiete dritter Stufe*, der Kegelschnittnetze und Kegelschnittgewebe, wird es notwendig, die mit diesen Gebieten eng zusammenhängenden *Kurven dritter Ordnung und dritter Klasse* ausführlich zu behandeln, insbesondere die Polarentheorie und den Begriff der syzygetischen Büschel und Scharen dieser Kurven darzustellen. In der Tat führt die Frage nach den in einem Kegelschnittnetz und -Gewebe enthaltenen *zerfallenden Kurven* auf gewisse Ordnungs- und Klassenkurven dritten Grades, nämlich auf die Hessesche und die Cayleysche Kurve dieses Kegelschnittnetzes und -gewebes, und die Übersicht über die in diesem Netze und Gewebe *überhaupt enthaltenen Kurven* wird wesentlich erleichtert durch Einführung der Urkurven dritter Ordnung und dritter Klasse, deren konische Polaren und konische Pole jene Kurven des Netzes und Gewebes sind. Bei den *linearen Kegelschnittgebieten vierter und fünfter Stufe* findet man die in ihnen vorkommenden zerfallenden Kurven durch Aufsuchung *der Paare konjugierter Geraden und Punkte in den Kegelschnittgebieten zweiter und erster Stufe,* die zu jenen Gebieten vierter und fünfter Stufe *apolar sind.*

Im letzten Drittel des Buches werden *die metrischen Eigenschaften der Figuren vom projektiven Standpunkte aus abgeleitet,* und zwar vorzugsweise ihre Beziehungen zum Kreispunktpaar, die sog. *Rechtwinkelgeometrie,* nachdem die *Parallelgeometrie,* d. h. die Beziehungen zur unendlich fernen Geraden ohne Auszeichnung der Kreispunkte auf ihr, zum Teil schon vorher gelegentlich eingeschaltet sind. Dazu führe ich den extensiven Bruch $\boldsymbol{K}$ des Kreispunktpaares ein, zuerst bezogen auf ein schiefwinkliges Fundamentaldreieck und einen beliebigen Einheitspunkt, sodann in bezug auf ein rechtwinkliges Cartesisches Koordinatensystem, und stelle endlich das Kreispunktpaar auch als algebraisches Produkt seiner konjugiert komplexen Punkte dar. Wurden schon früher in den parallelgeometrischen Einschaltungen parallele Geraden als Geraden charakterisiert, die sich auf der unendlich fernen Geraden, dem Träger des Kreispunktpaars, schneiden, und die Parabeln als nicht zerfallende Kurven zweiter Klasse, die die unendlich ferne Gerade berühren, so werden jetzt zwei aufeinander senkrechte Geraden als Geraden gekennzeichnet, die zum Kreispunktpaar konjugiert sind, die Kreise als Kurven zweiter Ordnung, die durch die Kreispunkte hindurchgehen, die gleichseitigen Hyperbeln als Kurven zweiter Ordnung, die zum Kreispunktpaar apolar sind, die Scharen konfokaler Kurven zweiter Klasse als Kegelschnittscharen, die unter ihren zerfallenden Kurven das Kreispunktpaar enthalten, der Direktorkreis einer Kurve zweiter Klasse als harmonische Kurve zweiter Ordnung zu dieser Kurve zweiter Klasse und dem Kreispunktpaar, schließlich die Steinersche Parabel eines Punktes hinsichtlich einer Kurve zweiter Klasse als Polarkegelschnitt dieses Punktes in bezug auf die mit jener Kurve konfokale Kegelschnittschar. Der Feuerbachsche Kreis eines Dreiecks, das entsteht, wenn man einer gleichseitigen Hyperbel ein Dreieck einschreibt und dieses Dreieck in einen Punkt zusammenschrumpfen läßt, führt zur Bestimmung des Krümmungskreises jener gleichseitigen Hyperbel in diesem Punkte.

Die drei letzten Abschnitte enthalten *projektive und metrische Spezialisierungen zur Erzeugung der Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse* durch projektive Strahlbüschel und Punktreihen, und *zu den Kegelschnittnetzen und -Geweben,* zum Teil in Anlehnung an Arbeiten von F. Dingeldey und E. Müller. Dabei ergibt sich das Gewebe monofokaler Kurven zweiter Klasse aus einem Kegelschnittgewebe, dessen Kurven zwei feste Geraden berühren, wenn man diese Geraden von einem reellen, im Endlichen liegenden Punkte nach den Kreispunkten laufen läßt. Ferner erhält man den Krümmungskreis in einem beliebigen Punkte einer nicht entartenden Kurve zweiter Klasse vermöge seiner Beziehung zu dem die Kurve in demselben Punkte berührenden und zu ihr apolaren Kreise, der dem bei der gleichseitigen Hyperbel verwerteten Feuerbachschen Kreise eines eingeschriebenen unendlich kleinen Dreiecks entspricht.

Von besonderem Nutzen war mir, namentlich für die Behandlung der Kegelschnittnetze und -Gewebe sowie für die Darstellung der Rechtwinkelgeometrie, das schöne Buch von S. Gundelfinger, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, herausgegeben von F. Dingeldey, Leipzig 1895. Für die Abschnitte über Kurven dritter Ordnung konnte ich mit Vorteil das Buch von H. Durège, Die ebenen Kurven dritter Ordnung, Leipzig 1871, zu Rate ziehen.

Meinem Freunde H. Wiener bin ich auch diesmal wieder für vielfache Anregungen verpflichtet, die er mir bei Abfassung des Buches in zahlreichen Besprechungen hat zu Teil werden lassen.

Gießen, im Dezember 1921.

H. Graßmann.

Nachwort.

Am 21. Januar 1922 hat mein verehrter Lehrer und Freund Hermann Graßmann seine Augen für immer geschlossen. In seinem Nachlaß befand sich ein umfangreiches, mit peinlicher Sorgfalt ausgearbeitetes Manuskript des Schlußbandes Zweiter Band, Zweiter Teil seiner Projektiven Geometrie der Ebene, das bereits in den letzten Kriegsjahren hätte veröffentlicht werden können. Aber auch nach dem Tode dieses prächtigen Mannes ließ es die wirtschaftliche Lage in Deutschland nicht zu, daß die Drucklegung sofort erfolgte.

Wenn es trotzdem jetzt schon gelang, diesen Band der Öffentlichkeit zu übergeben, so verdanken wir es in erster Linie der Tatkraft und dem Opfermut von Frau Professor Graßmann-Stettin, sowie der wertvollen Unterstützung folgender Freunde und Förderer der Ausdehnungslehre:

Gießener Hochschulgesellschaft,
Osann-Beulwitz-Stiftung,
Landesamt für das Bildungswesen in Darmstadt,
Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft in Berlin,
Edward Carus in La Salle (Illinois, U.S.A.),
Ein Industrieller in Stettin.

Für das Mitlesen der Korrektur danke ich gern auch an dieser Stelle den Herren Professor Dr. Mehmke in Stuttgart und Geheimrat Professor Dr. Dingeldey in Darmstadt.

Es war mir eine besondere Freude, daß ich diesen, wenn auch geringen Zoll des Dankes meinem verehrten Lehrer durch Überwachung der Drucklegung erstatten durfte.

Hannover, im November 1926.

G. Wolff.

Inhaltsverzeichnis.

Achter Hauptteil.

Ergänzungen zum Binären.

Abschnitt 39: *Projektive Geometrie auf einer Kurve zweiter Ordnung und zweiter Klasse.*

Abschnitt 40: *Äquianharmonisches.*

Neunter Hauptteil.

Das Scharbüschel von Kurven zweiter Ordnung und die Büschelschar von Kurven zweiter Klasse.

Abschnitt 41: *Begriff eines Scharbüschels von Kurven zweiter Ordnung und einer Büschelschar von Kurven zweiter Klasse.*

Seite

Abschnitt 44: *Konjugierte und adjungierte Reziprozitäten. Ihr Kernpunkt und ihre Kerngerade.*

Abschnitt 45: *Die Lagenbeziehung zwischen den beiden Kernkurven einer Reziprozität.*

Zehnter Hauptteil.

Die Apolarität.

Abschnitt 46: *Grundeigenschaften zweier apolaren Reziprozitäten und Polarsysteme.*

Elfter Hauptteil.

Weiteres über Apolarität.

Zwölfter Hauptteil.

Die ebenen Kurven dritter Ordnung.

Abschnitt 49: *Die Hessesche Kurve einer Kurve dritter Ordnung.*

Abschnitt 50: *Die neun Schnittpunkte zweier Kurven dritter Ordnung. Die Wendetangentialgleichung einer Kurve dritter Ordnung.*

Abschnitt 51: *Das System der neun Wendepunkte und die kanonische Form der Gleichung einer Kurve dritter Ordnung.*

Dreizehnter Hauptteil.

Die ebenen Kurven dritter Klasse.

Abschnitt 52: *Konische und punktuelle Pole in bezug auf eine Kurve dritter Klasse.*

Abschnitt 53: *Die Hessesche Kurve einer Kurve dritter Klasse.*

Abschnitt 54: *Die neun gemeinsamen Tangenten zweier Kurven dritter Klasse. Die Rückkehrpunktsgleichung einer Kurve dritter Klasse.*

Abschnitt 55: *Das System der neun Rückkehrtangenten und die kanonische Form der Gleichung einer Kurve dritter Klasse.*

Vierzehnter Hauptteil.

Das Kegelschnittnetz, das Kegelschnittgewebe und die zugehörigen Kurven dritter Ordnung und dritter Klasse.

Seite

Abschnitt 56: *Das Kegelschnittnetz und seine Hessesche Kurve.*

Abschnitt 57: *Das Kegelschnittgewebe und seine Hessesche Kurve.*

Abschnitt 58: *Apolare Gebiete von Polarsystemen.*

Abschnitt 59: *Die Cayleysche Kurve eines Kegelschnittnetzes und Kegelschnittgewebes.*

Seite

Fünfzehnter Hauptteil.

Beziehungen zum Kreispunktpaar.

Abschnitt 60: *Das Kreispunktpaar bezogen auf ein schiefwinkliges Fundamentaldreieck.*

Abschnitt 64: *Projektives und Metrisches zur Erzeugung der Kurven zweiter Klasse durch zwei projektive Punktreihen.*

Abschnitt 65: *Projektiv oder metrisch ausgezeichnete Kegelschnittnetze und -Gewebe.*

Achter Hauptteil.

Ergänzungen zum Binären.

Abschnitt 39.

Projektive Geometrie auf einer Kurve zweiter Ordnung und zweiter Klasse.

Begriff einer Projektivität auf einer Kurve zweiter Ordnung. Nach dem Satze 54 wird ein jedes Punktquadrupel einer Kurve zweiter Ordnung, *für dessen 4 Punkte eine bestimmte Rangordnung festgesetzt ist,* die unabhängig von der Lage der Punkte auf der Kurve angenommen werden kann, von allen Punkten dieser Kurve aus durch einen Strahlwurf von demselben Doppelverhältnis projiziert, und man kann daher auch dem betrachteten Punktquadrupel der Kurve zweiter Ordnung selbst ein Doppelverhältnis beilegen, nämlich jenes Doppelverhältnis aller dieser Strahlwürfe.

Dehnen wir daher den Begriff eines Punktwurfes, der bisher (vgl. S. 49 des ersten Bandes) auf 4 Punkte beschränkt wurde, *die auf einer Geraden liegen,* überhaupt auf ein System von 4 Punkten mit gegebener Rangordnung aus, *die ein Doppelverhältnis bestimmen,* so darf man zwar nicht 4 beliebige Punkte der Ebene ohne Angabe einer durch sie hindurchgelegten Kurve zweiter Ordnung als einen Punktwurf bezeichnen, da sie gar kein Doppelverhältnis festlegen. Sobald aber zugleich eine Kurve zweiter Ordnung gegeben ist, die durch die 4, in vorgeschriebener Rangordnung gedachten, Punkte hindurchgeht, kommt ihnen in bezug auf diese Kurve ein bestimmtes Doppelverhältnis zu, und wir nennen daher ein System von 4 Punkten einer Kurve zweiter Ordnung, falls für sie eine Rangordnung festgesetzt ist, einen Punktwurf auf dieser Kurve zweiter Ordnung.

Man kann dann weiter eine Kurve zweiter Ordnung *projektiv* auf eine geradlinige Punktreihe $a, b, c, \ldots$ mit beliebigem Träger beziehen, indem man sämtliche Punkte jener geradlinigen Punktreihe *mit einem beliebigen Punkte s jener Kurve zweiter Ordnung verbindet* (vgl. Fig. 1). Dann sind die zweiten

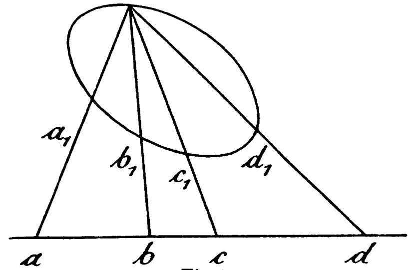


Fig. 1.

Schnittpunkte a_1, b_1, c_1, ... dieser Verbindungslinien mit der Kurve zweiter Ordnung *projektiv auf die Punkte a, b, c, ... jener geradlinigen Punktreihe bezogen;* denn je 4 so gewonnene Punkte der Kurve zweiter Ordnung haben mit den ihnen entsprechenden Punkten der geradlinigen Punktreihe, dasselbe Doppelverhältnis. Auch kann man sagen, jene Punktreihe a_1, b_1 c_1, ... der Kurve zweiter Ordnung sei zu der geradlinigen Punktreihe a, b, c, ... *perspektiv gelegen.*

Projiziert man nach dem soeben beschriebenen Verfahren zwei projektive Punktreihen einer Geraden von einem Punkte s einer Kurve zweiter Ordnung aus, oder auch von zwei verschiedenen Punkten s und t einer solchen Kurve aus, auf diese Kurve, so erhält man *auf der Kurve zweiter Ordnung zwei zueinander projektive Punktreihen,* und man spricht von einer Projektivität auf der Kurve zweiter Ordnung. Bilden die beiden projektiven Punktreihen auf der Geraden zusammen eine *Involution,* so gilt dasselbe von den zu ihnen perspektiven Punktreihen auf der Kurve zweiter Ordnung.

Harmonische Punktwürfe auf einer Kurve zweiter Ordnung. Für einen *harmonischen* Punktwurf einer Kurve zweiter Ordnung läßt sich auch leicht ein Merkmal angeben, das es entbehrlich macht, wie bei einem beliebigen Punktwurf der Kurve auf die Beziehung zu einem perspektiven, der Kurve eingeschriebenen Strahlwurf zurückzugreifen. Ein solches Merkmal liefert der folgende Satz mit seiner Umkehrung:

Satz 571: Bei einem harmonischen Punktwurf auf einer Kurve zweiter Ordnung geht die Verbindungslinie des einen Paares zugeordneter Punkte durch den Schnittpunkt der Tangenten der Kurve, in den Punkten des andern Paares gezogen. Oder anders ausgedrückt: Die Verbindungslinien der beiden Paare zugeordneter Punkte eines harmonischen Punktwurfs einer Kurve zweiter Ordnung sind hinsichtlich dieser Kurve konjugiert.

Beweis: Ist der Punktwurf $klmn$ einer Kurve zweiter Ordnung harmonisch, so werden die 4 Punkte k, l, m, n des Wurfes von jedem Punkte der Kurve, insbesondere also auch von den beiden letzten (einander zugeordneten) Punkten m und n des Wurfes, durch je einen harmonischen Strahlwurf projiziert (Fig. 2). Von diesen beiden Strahlwürfen enthält der eine die Tangente der Kurve im Punkte m, der andere diejenige im Punkte n. Es sind also die beiden Strahlwürfe

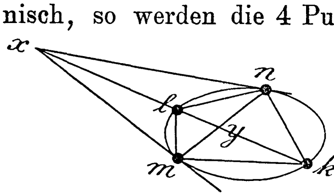


Fig. 2.

$$m(klmn) \quad \text{und} \quad n(klmn)$$

harmonisch, wo die Symbole $m(klmn)$ und $n(klmn)$ die Strahlwürfe bezeichnen sollen, die man erhält, wenn man den Punktwurf $klmn$ unserer Kurve zweiter Ordnung von den Punkten m und n aus projiziert.

Da aber nach dem Satze 35 ein harmonischer Strahlwurf auch harmonisch bleibt, wenn man zwei zugeordnete Strahlen miteinander vertauscht, so kann man den ersten Strahlwurf auch durch den Wurf $m(klnm)$ ersetzen. Die beiden harmonischen Strahlwürfe

$$m(klnm) \quad \text{und} \quad n(klmn)$$

schneiden nun aber die Verbindungsgerade $[kl]$ der beiden ersten (einander zugeordneten) Punkte des Wurfes $klmn$ in je einem harmonischen Punktwurf. Bezeichnen wir diese beiden harmonischen Punktwürfe für den Augenblick mit

$$klyx_1 \quad \text{und} \quad klyx_2,$$

so müssen diese Punktwürfe, da sie harmonisch sind und die 3 ersten Punkte k, l, y entsprechend gemein haben, auch die vierten Punkte x_1 und x_2 gemein haben, das heißt, *diese Punkte x_1 und x_2 müssen in einen und denselben Punkt x zusammenfallen.*

Die Tangenten, in den Punkten m und n an die Kurve zweiter Ordnung gezogen, treffen sich also in einem Punkte x der Geraden kl, oder anders ausgedrückt, der Pol x der Geraden mn hinsichtlich der betrachteten Kurve zweiter Ordnung liegt auf der Geraden kl, oder endlich, die beiden Geraden kl und mn sind hinsichtlich der Kurve zweiter Ordnung konjugiert.

Von diesem Satze gilt aber auch die Umkehrung, nämlich der Satz:

Satz 572: Umkehrung des Satzes 571: Geht eine Sekante einer Kurve zweiter Ordnung durch den Schnittpunkt zweier Tangenten der Kurve hindurch, so werden die beiden Schnittpunkte der Kurve mit der Sekante durch die Berührungspunkte der beiden Tangenten harmonisch getrennt.

Oder anders ausgedrückt: Zwei gerade Linien, welche hinsichtlich einer Kurve zweiter Ordnung konjugiert sind, bestimmen, falls sie beide die Kurve schneiden, auf ihr einen harmonischen Punktwurf.

Beweis: Es seien k und l die Schnittpunkte einer Kurve zweiter Ordnung mit einer Sekante und m und n die Berührungspunkte zweier Tangenten der Kurve, welche sich in einem Punkte x der Sekante kl schneiden, so ist zu beweisen: der Punktwurf $klmn$ der Kurve ist harmonisch.

Bezeichnet man den Schnittpunkt der beiden Sekanten kl und mn mit y, so ist der Punkt y ein Punkt der Polare von x in bezug auf die Kurve und wird also, da er zugleich mit k, l und x in einer Geraden liegt, durch die Punkte k und l von x harmonisch getrennt. Es ist daher auch der Strahlwurf $m(klxy)$ harmonisch, und somit ist auch der Punktwurf $klmn$ harmonisch, welchen dieser Strahlwurf aus der Kurve zweiter Ordnung ausschneidet.

Begriff einer Projektivität auf einer Kurve zweiter Klasse. Ganz entsprechende Beziehungen ergeben sich beim Dualistischen. Nach dem Satze 56 wird jedes Tangentenquadrupel einer Kurve zweiter Klasse, *für dessen 4 Geraden eine bestimmte Rangordnung festgesetzt ist,* die unabhängig von der Lage der Tangenten an der Kurve angenommen werden kann, durch alle Tangenten dieser Kurve in einem Punktwurf von demselben Doppelverhältnis geschnitten, und man kann daher auch dem betrachteten Tangentenquadrupel selbst ein Doppelverhältnis beilegen, nämlich jenes konstante Doppelverhältnis aller dieser Punktwürfe.

Dehnt man daher den Begriff eines Strahlwurfes, der bisher (vgl. S. 55ff. des ersten Bandes) auf 4 Strahlen beschränkt war, *die durch einen und denselben Punkt gehen,* überhaupt auf ein System von 4 Geraden der Ebene mit gegebener Rangordnung aus, *die ein Doppelverhältnis bestimmen,* so kann man von 4 in vorgeschriebener Rangordnung gedachten Tangenten einer Kurve zweiter Klasse sagen, *sie bilden einen Tangentenwurf dieser Kurve zweiter Klasse.*

Man kann dann weiter eine Kurve zweiter Klasse auf ein Strahlbüschel mit beliebigem Scheitel *projektiv* beziehen, indem man sämtliche Strahlen $A, B, C, \ldots$ jenes Strahlbüschels *mit einer beliebigen Tangente T jener Kurve zweiter Klasse schneidet.* Dann sind die zweiten Tangenten A_1, B_1, $C_1, \ldots$, die man von jenen Schnittpunkten an die Kurve zweiter Klasse legen kann (Fig. 3) *projektiv auf die Strahlen A, B, C, ... jenes Strahlbüschels bezogen;* denn je 4 so gewonnene Tangenten der Kurve zweiter Klasse haben mit den entsprechenden Strahlen des Strahlbüschels dasselbe Doppelverhältnis. Auch kann man sagen, jenes Tangentenbüschel $A_1, B_1, C_1, \ldots$ der Kurve zweiter Klasse sei zu dem Strahlbüschel $A, B, C, \ldots$ *perspektiv gelegen.*

Projiziert man nach dem soeben beschriebenen Verfahren zwei projektive Strahlbüschel mit demselben Scheitel von einer Tangente T einer Kurve zweiter Klasse aus, oder auch von zwei verschiedenen Tangenten S und T einer solchen Kurve aus, auf diese Kurve, so erhält man *auf der Kurve zweiter Klasse zwei zueinander projektive Tangentenbüschel,* und man spricht von einer Projektivität auf der Kurve zweiter Klasse. Bilden die beiden projektiven Strahlbüschel mit demselben Scheitel zusammen eine *Involution,* so gilt dasselbe von den beiden zu ihnen perspektiven Tangentenbüscheln der Kurve zweiter Klasse.

Harmonische Tangentenwürfe einer Kurve zweiter Klasse. Für einen harmonischen Tangentenwurf einer Kurve zweiter Klasse gelten die Sätze:

Satz 573: Bei einem harmonischen Tangentenwurf einer Kurve zweiter Klasse liegt der Schnittpunkt eines Paares zugeordneter Tangenten mit den Berührungspunkten des andern Tangentenpaares in einer Geraden.

Beweis: Ist der Tangentenwurf $KLMN$ einer Kurve zweiter Klasse harmonisch, so werden die Tangenten K, L, M, N des Wurfes von einer jeden Tangente der Kurve, insbesondere also auch von den beiden letzten (einander zugeordneten) Tangenten M und N des Wurfes, in je einem harmonischen Punktwurf geschnitten (Fig. 4). Von diesen beiden Punktwürfen enthält der eine den Berührungspunkt der Tangente M, der andere den Berührungspunkt der Tangente N. Es sind also die beiden Punktwürfe

$$M(KLMN) \quad \text{und} \quad N(KLMN)$$

harmonisch.

Da aber nach dem Satze 32 ein harmonischer Punktwurf auch harmonisch bleibt, wenn man zwei zugeordnete Punkte miteinander vertauscht,

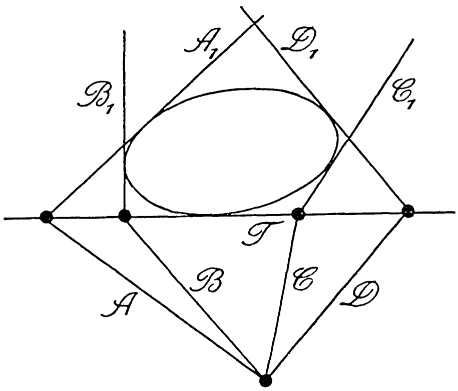


Fig. 3.

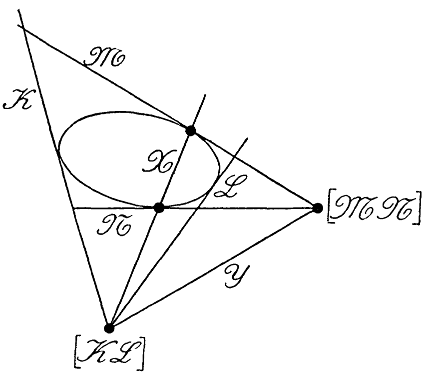


Fig. 4.

so kann man den ersten Punktwurf auch durch den Wurf $M(KLNM)$ ersetzen. Die beiden harmonischen Punktwürfe

$$M(KLNM) \quad \text{und} \quad N(KLMN)$$

werden nun aber von dem Schnittpunkte $[KL]$ der beiden ersten (einander zugeordneten) Tangenten des Wurfes $KLMN$ in je einem harmonischen Strahlwurf projiziert. Bezeichnen wir diese beiden harmonischen Strahlwürfe mit dem Scheitel $[KL]$ für den Augenblick mit

$$KLYX_1 \quad \text{und} \quad KLYX_2,$$

so müssen diese Strahlwürfe, da sie harmonisch sind und die 3 ersten Strahlen K, L, Y entsprechend gemein haben, auch die vierten Strahlen X_1 und X_2 gemein haben, das heißt, *diese Strahlen* X_1 und X_2 *müssen in einen und denselben Strahl* X *zusammenfallen.*

Die Verbindungslinie der Berührungspunkte der Tangenten M und N geht also durch den Punkt $[KL]$ hindurch, oder anders ausgedrückt, die Polare X des Punktes $[MN]$ hinsichtlich der Kurve zweiter Klasse enthält den Punkt $[KL]$, oder endlich, die beiden Punkte $[KL]$ und $[MN]$ sind hinsichtlich der Kurve zweiter Klasse konjugiert.

Und von diesem Satze gilt auch die Umkehrung, nämlich der Satz:

Satz 574: Umkehrung des Satzes 573: Geht die Berührungssekante zweier Tangenten einer Kurve zweiter Klasse durch den Schnittpunkt zweier anderen Tangenten der Kurve, so bilden die beiden Tangentenpaare einen harmonischen Tangentenwurf der Kurve.

Oder anders ausgedrückt: Liegen zwei Punkte, die hinsichtlich einer Kurve zweiter Klasse konjugiert sind, beide außerhalb der Kurve, so bilden die von ihnen ausgehenden Tangentenpaare einen harmonischen Tangentenwurf der Kurve.

Beweis: Es seien K und L zwei Tangenten einer Kurve zweiter Klasse und M und N zwei weitere Tangenten, deren Berührungssekante X durch den Schnittpunkt $[KL]$ der beiden ersten Tangenten hindurchgeht, so ist zu beweisen: der Tangentenwurf $KLMN$ der Kurve ist harmonisch.

Bezeichnet man noch die Verbindungslinie der beiden Tangentenschnittpunkte $[KL]$ und $[MN]$ mit Y, so enthält die Gerade Y den Pol $[MN]$ der Berührungssekante X (Fig. 4) und wird also, da sie zugleich durch den Schnittpunkt der beiden Tangenten K uud L und der Geraden X geht, nach dem Satze 412 durch die Tangenten K und L von der Geraden X harmonisch getrennt. Es ist daher auch der Punktwurf $M(KLXY)$ harmonisch und somit auch der Tangentenwurf $KLMN$ der Kurve zweiter Klasse, welcher „der Schein“ jenes Punktwurfes ist.

Mit den Sätzen 573 und 574 ist die Bedingung dafür, daß 4 Tangenten K, L, M, N einer Kurve zweiter Klasse einen harmonischen Tangentenwurf dieser Kurve bilden, losgelöst von dem Begriff eines harmonischen Punktwurfes einer Geraden, an den er seiner Erklärung zufolge zunächst gebunden war.

Die Involution auf einer Kurve zweiter Ordnung. Nach dem Satze 104 ist eine Projektivität in der Geraden eine Involution, sobald in den beiden einander durch die Projektivität zugeordneten Punktreihen irgend zwei getrennt liegende Punkte sich *wechselseitig* entsprechen. Derselbe Satz besteht dann offenbar auch für eine Projektivität auf einer Kurve zweiter Ordnung, da diese je aus einer Projektivität in der Geraden durch Projektion von einem Punkte der Kurve aus gewonnen wird, das heißt, es gilt der Satz:

Satz 575: Entsprechen sich in einer Projektivität auf einer Kurve zweiter Ordnung irgend zwei getrennt liegende Punkte wechselseitig, so ist die Projektivität eine Involution.

Da der entsprechende Satz für eine Projektivität in der Geraden auf rechnerischem Wege abgeleitet wurde, so hat es ein Interesse, den Satz 575 durch rein geometrische Schlüsse zu bestätigen, zumal sich dabei wichtige Eigenschaften einer Involution auf einer Kurve zweiter Ordnung ergeben werden. Wir beschränken uns hierzu auf eine nicht zerfallende Kurve zweiter Ordnung, da schon bei einer in ein Linienpaar zerfallenden Kurve zweiter Ordnung eine auf ihr erzeugte Involution doch wieder einer Geraden angehören würde, so daß also keine neuen Beziehungen hervortreten können.

Es seien also in einer Projektivität auf einer nicht zerfallenden Kurve zweiter Ordnung die Punkte a_1 und a_2 *zwei sich wechselseitig entsprechende Punkte*, und es sei ferner dem Punkte b_1 dieser Kurve der Punkt b_2 der

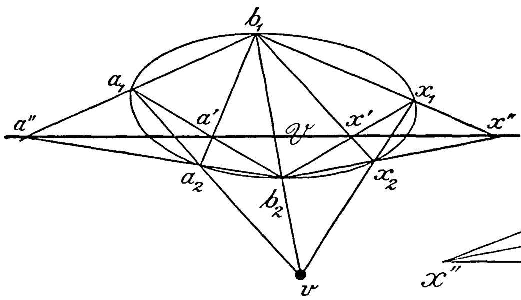


Fig. 5.

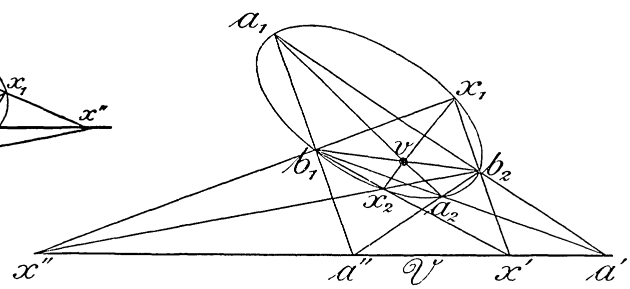


Fig. 6.

Kurve zugeordnet, so werden in den beiden projektiven Punktreihen jener Kurve zweiter Ordnung den 3 Punkten a_1, a_2, b_1 der ersten Punktreihe die drei Punkte a_2, a_1, b_2 der zweiten zugewiesen (Figg. 5 u. 6). Konstruiert man dann noch den Punkt

$$v = [a_1 a_2 \cdot b_1 b_2] \tag{1}$$

und außerdem seine Polare V in bezug auf die Kurve zweiter Ordnung, indem man zuerst die Punkte

$$\begin{cases} a' = [a_1 b_2 \cdot a_2 b_1] \quad \text{und} \\ a'' = [a_1 b_1 \cdot a_2 b_2] \end{cases} \tag{2}$$

bestimmt und dann a' mit a'' verbindet, so ist in der Tat nach S. 189 des ersten Teiles dieses Bandes die Verbindungslinie

$$V = [a' a''] \tag{3}$$

die Polare des Punktes v in bezug auf die Kurve zweiter Ordnung.

Entnimmt man jetzt aus den beiden projektiven Strahlbüscheln, welche die beiden projektiven Punktreihen der Kurve zweiter Ordnung von den Punkten b_2 und b_1 aus projizieren, die beiden Strahltripel

$$b_2(a_1 a_2 b_1) \quad \text{und} \quad b_1(a_2 a_1 b_2),$$

durch welche die projektive Beziehung jener beiden Strahlbüschel festgelegt wird, so sieht man, daß die beiden Strahlbüschel *perspektiv zueinander liegen;* denn die Verbindungslinie ihrer beiden Scheitel b_2 und b_1 entspricht sich selbst (vgl. Satz 48). Da ferner in den beiden Strahlbüscheln die Strahlen

$$b_2 a_1 \quad \text{und} \quad b_1 a_2$$

einander zugeordnet sind und ebenso die Strahlen

$$b_2 a_2 \quad \text{und} \quad b_1 a_1,$$

so ist wegen (2) und (3) die Gerade V die *Perspektivitätsachse* der beiden Strahlbüschel.

Man kann dann zeigen: Je zwei weitere Punkte x_1 und x_2 der betrachteten Kurve zweiter Ordnung, *welche mit dem Punkte v in einer Geraden liegen*, werden ebenso wie die Punkte a_1 und a_2 durch zwei Paare entsprechender Strahlen der beiden oben betrachteten perspektiven Strahlbüschel mit den Scheiteln b_2 und b_1 und der Perspektivitätsachse V projiziert. Denn nach S. 189 des ersten Teils dieses Bandes gehören auch die Punkte

$$\left\{\begin{aligned} x' &= [x_1 b_2 \cdot x_2 b_1] \quad \text{und} \\ x'' &= [x_1 b_1 \cdot x_2 b_2] \end{aligned}\right. \tag{4}$$

der Polare V des Punktes v an. Daraus aber folgt, daß in den beiden perspektiven Strahlbüscheln mit den Scheiteln b_2 und b_1 und der Perspektivitätsachse V die Strahlen

$$b_2 x_1 \quad \text{und} \quad b_1 x_2$$

und ebenso die Strahlen

$$b_2 x_2 \quad \text{und} \quad b_1 x_1$$

einander zugeordnet sind, und daß somit in der Projektivität auf der Kurve zweiter Ordnung, deren Punktreihen aus der Kurve durch die beiden perspektiven Strahlbüschel ausgeschnitten werden, *auch die Punkte x_1 und x_2 einander wechselseitig entsprechen*, womit wirklich eine Bestätigung des Satzes 575 gewonnen ist. Zugleich hat man den Satz:

Satz 576: Bei einer jeden Involution auf einer nicht zerfallenden Kurve zweiter Ordnung schneiden sich die Verbindungslinien je zweier entsprechenden Punkte in einem und demselben Punkte v, der das Zentrum der Involution auf jener Kurve zweiter Ordnung genannt wird. Und umgekehrt bilden die Punktpaare, welche aus einer nicht zerfallenden Kurve zweiter Ordnung durch die Geraden ausgeschnitten werden, die durch einen festen Punkt v ihrer Ebene hindurchgehen, die Punktpaare einer Involution auf dieser Kurve.

Die Richtigkeit der Umkehrung folgt, weil die auf die beschriebene Weise erzeugten Punktreihen a_1, b_1, x_1 und a_2, b_2, x_2 von den Punkten b_2 und b_1 der Kurve aus durch zwei perspektive Strahlbüschel projiziert werden, deren zugeordnete Strahlen sich *wechselseitig* entsprechen (vgl. die obigen Figg. 5 u. 6).

Man kann noch hinzufügen: Da die Verbindungslinie X je zweier entsprechenden Punkte x_1 und x_2 der in dem Satze 576 betrachteten Involution auf der Kurve zweiter Ordnung durch den Punkt v geht, so muß nach dem Satze 394 auch umgekehrt der Pol x jener Verbindungslinie, das heißt der Schnittpunkt der Tangenten, in irgend zwei zugeordneten Punkten x_1 und x_2 der Involution an die Kurve zweiter Ordnung gezogen, auf der Polare V des Punktes v gelegen sein (Fig. 7). Aus diesem Grunde nennt man die Gerade V die Achse der betrachteten Involution auf der Kurve zweiter Ordnung. Man hat also den Satz:

Satz 577: Die Tangenten, in irgend zwei entsprechenden Punkten einer Involution auf einer nicht zerfallenden Kurve zweiter Ordnung an die Kurve gezogen, schneiden sich in einem Punkte einer festen Geraden, welche die Achse der Involution auf der Kurve zweiter Ordnung genannt wird. Sie ist die Polare des Zentrums jener Involution in bezug auf diese Kurve.

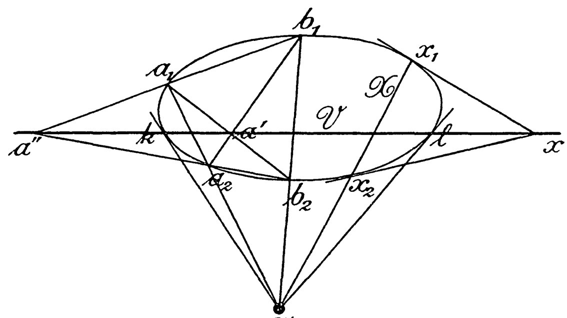


Fig. 7.

Aus diesem Satze folgt ferner: Verbindet man die etwaigen Schnittpunkte k und l einer Kurve zweiter Ordnung und der Achse V einer auf ihr gegebenen Involution mit dem zugehörigen Involutionszentrum v (Fig. 7), so sind die Verbindungslinien Tangenten der Kurve zweiter Ordnung. Und hieraus wieder geht hervor, daß diese Schnittpunkte k und l *die Doppelpunkte jener Involution auf der Kurve zweiter Ordnung* sind.

Man hat also den Satz:

Satz 578: Man erhält die Doppelpunkte einer Involution auf einer nicht zerfallenden Kurve zweiter Ordnung, indem man, nach Belieben, die Kurve mit der Involutionsachse schneidet oder von dem Involutionszentrum die beiden Tangenten an die Kurve legt. Dann sind die Schnittpunkte der Involutionsachse mit der Kurve oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Berührungspunkte jener beiden Tangenten die gesuchten Doppelpunkte der Involution.

Aus diesem Satze und dem Satze 576 folgt dann mit Rücksicht auf den Satz 572 der weitere Satz:

Satz 579: Die Doppelpunkte einer Involution auf einer nicht zerfallenden Kurve zweiter Ordnung werden durch jedes Paar zugeordneter Punkte dieser Involution harmonisch getrennt.

Und von diesem Satze gilt auch die folgende Umkehrung:

Satz 580: Umkehrung von Satz 579: Werden auf einer nicht zerfallenden Kurve zweiter Ordnung zwei Punktpaare a_1, a_2 und

b_1, b_2 durch zwei Punkte k, l der Kurve harmonisch getrennt, so sind diese Punkte k, l die Doppelpunkte der durch die Punktpaare a_1, a_2 und b_1, b_2 bestimmten Involution, und das Entsprechende gilt auch für eine Involution in der Geraden und im Strahlbüschel.

Beweis: Nach dem Satze 571 geht die Verbindungslinie V der Punkte k und l durch den Pol a der Geraden $a_1 a_2$ und ebenso durch den Pol b der Geraden $b_1 b_2$ hindurch (Fig. 8). Die Gerade V ist also die Verbindungslinie dieser beiden Pole a und b, ihr Pol v somit nach dem Satze 406 der Schnittpunkt der Polaren $a_1 a_2$ und $b_1 b_2$ von a und b.

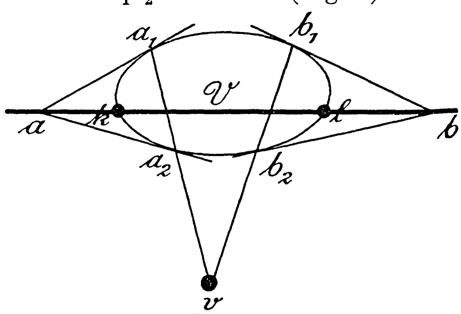


Fig. 8.

Nach dem Satze 576 aber ist der Schnittpunkt der Geraden $a_1 a_2$ und $b_1 b_2$, das heißt der Punkt v, das Zentrum der durch die Punktpaare a_1, a_2 und b_1, b_2 auf der Kurve zweiter Ordnung bestimmten Involution. Ferner ist nach dem Satze 577 die Gerade V die Achse, und endlich sind nach dem Satze 578 die Punkte k und l die Doppelpunkte dieser Involution.

Die obigen Figg. 5 u. 6 erläuterten die beiden Fälle, wo die Schnittpunkte der Involutionsachse mit der Kurve zweiter Ordnung getrennt reell oder konjugiert komplex sind, wo also die Involution zwei getrennt liegende reelle oder zwei konjugiert komplexe Doppelpunkte aufweist, d. h., wo die Involution hyperbolisch oder elliptisch ist (S. 160 des ersten Bandes). Als Pol der Involutionsachse (vgl. Satz 577) liegt dann das Involutionszentrum im ersten Falle außerhalb, im zweiten Falle innerhalb der Kurve zweiter Ordnung. Dagegen liegt bei einer parabolischen Involution, die nach dem Satze 135 zwei zusammenfallende reelle Doppelpunkte besitzt, das Involutionszentrum auf der Kurve zweiter Ordnung. Man hat daher den Satz:

Satz 581: Bei einer hyperbolischen Involution auf einer nicht zerfallenden Kurve zweiter Ordnung liegt das Involutionszentrum außerhalb, bei einer elliptischen Involution innerhalb, bei einer parabolischen Involution auf der Kurve.

Dieser Satz ergibt zugleich eine anschauliche Bestätigung des Satzes 158, nach welchem in einer elliptischen Involution je zwei Paare entsprechender Elemente einander trennen, und gestattet zugleich, ihm die entsprechende Eigenschaft einer hyperbolischen Involution an die Seite zu stellen. Man erhält so den Satz:

Satz 582: Bei einer elliptischen Involution trennen sich je zwei Paare entsprechender Elemente, bei einer hyperbolischen Involution trennen sie sich nicht.

Konstruktion des Pols einer Geraden in bezug auf eine Kurve zweiter Klasse. Um die Betrachtung der Involution auf einer Kurve zweiter Klasse vorzubereiten, schicken wir eine Konstruktion des Pols $V\boldsymbol{P}$ einer Geraden V in bezug auf ein Polarsystem zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$ mit reeller Polarkurve voraus, welche der auf S. 189 des ersten Teils dieses Bandes gegebenen Konstruktion der Polare eines Punktes in bezug auf ein Polarsystem zweiter Ordnung mit reeller Polkurve dual entspricht und sich auf den Satz 412 stützt.

Man nehme dazu auf der Geraden V zwei Punkte an, die außerhalb der Polarkurve von P gelegen sind (Figg. 9 u. 10), und ziehe von ihnen die

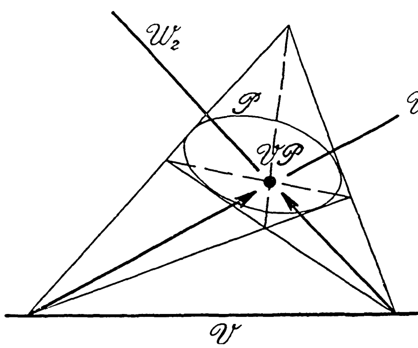


Fig. 9.

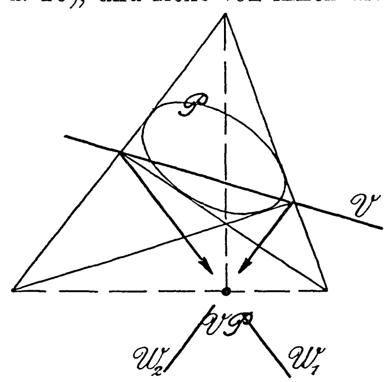


Fig. 10.

beiden Tangentenpaare an die Kurve, so bestimmen die so erhaltenen 4 Geraden die Seiten eines vollständigen Vierseits, von dem die Gerade V eine Nebenseite bildet. Konstruiert man daher noch die beiden andern Nebenseiten des vollständigen Vierseits, so ist ihr Schnittpunkt der gesuchte Pol $V\boldsymbol{P}$ der Geraden V in bezug auf das Polarsystem zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$.

Nach dem Satze 303 werden nämlich in dem konstruierten vollständigen Vierseit die von den beiden auf V liegenden Ecken ausgehenden Seiten des Vierseits durch die Nebenseite V und die nach der gegenüberliegenden Nebenecke laufenden Strahlen W_1 und W_2 harmonisch getrennt. Folglich ist nach dem Satze 412 diese Nebenecke der Pol $V\boldsymbol{P}$ der Geraden V. Man hat also den Satz:

Satz 583: Macht man eine Gerade V zu einer Nebenseite eines vollständigen Tangentenvierseits einer Kurve zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$, so schneiden sich die beiden andern Nebenseiten des Vierseits in dem Pole $V\boldsymbol{P}$ der Geraden V hinsichtlich der Kurve zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$.

Durch die beiden Figg. 9 u. 10 werden die beiden Fälle veranschaulicht, wo die Gerade V ganz außerhalb der Kurve zweiter Klasse verläuft, und wo sie dieselbe schneidet. In ihnen sind ferner die Strahlen W_1 und W_2 *für die Konstruktion entbehrlich* und nur des Beweises wegen hinzugefügt. Natürlich kann das Tangentenvierseit der Kurve zweiter Klasse auch so gelegen sein, daß die Kurve ihm nicht wie in den Figg. 9 u. 10 „eingeschrieben“, sondern „angeschrieben“ ist. Diese Lage zeigt die Fig. 11; in ihr sind die Strahlen W_1 und W_2 weggelassen.

Die Involution auf einer Kurve zweiter Klasse. Zur Charakterisierung einer Projektivität auf einer Kurve zweiter Klasse als Involution ist der folgende, dem Satze 575 dualistisch zugeordnete, Satz von Wichtigkeit:

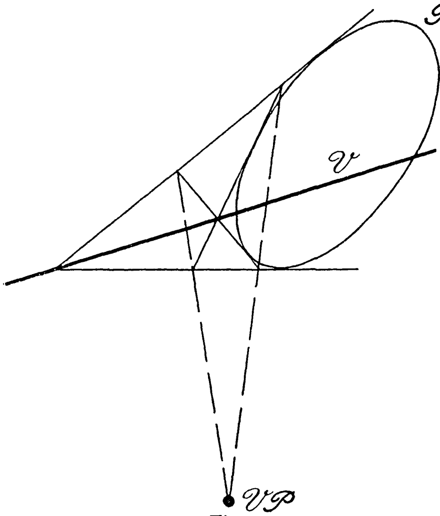


Fig. 11.

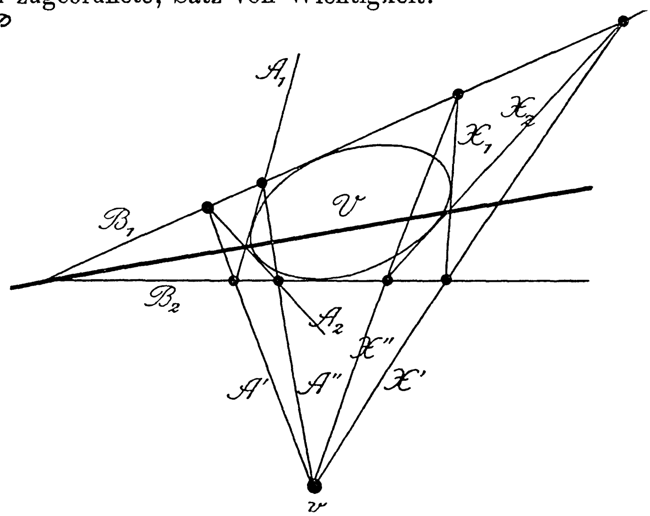


Fig. 12.

Satz 584: E n t s p r e c h e n s i c h i n e i n e r P r o j e k t i v i t ä t a u f e i n e r K u r v e z w e i t e r K l a s s e z w e i v o n e i n a n d e r v e r s c h i e d e n e T a n g e n t e n w e c h s e l s e i t i g, s o i s t d i e P r o j e k t i v i t ä t e i n e I n v o l u t i o n.

Seine Richtigkeit folgt unmittelbar aus der perspektiven Beziehung einer Projektivität auf einer Kurve zweiter Klasse zu einer Projektivität in einem Strahlbüschel. Aber man kann für den Satz auch eine direktere Bestätigung geben, wobei wir uns wieder auf eine nicht zerfallende Kurve zweiter Klasse beschränken.

Es seien in einer Projektivität auf einer nicht zerfallenden Kurve zweiter Klasse die Geraden A_1 und A_2 *zwei sich wechselseitig entsprechende Tangenten,* und es sei außerdem der Tangente B_1 der Kurve die Tangente B_2 zugeordnet, so werden in den beiden projektiven Tangentenbüscheln dieser Kurve zweiter Klasse den 3 Tangenten A_1, A_2, B_1 des ersten Tangentenbüschels die 3 Tangenten A_2, A_1, B_2 des zweiten Tangentenbüschels zugewiesen. Konstruiert man dann noch die Gerade

$$V = [A_1 A_2 \cdot B_1 B_2] \tag{5}$$

und außerdem ihren Pol v, indem man von dem vollständigen Vierseit $A_1 A_2 B_1 B_2$, von welchem die Gerade V eine Nebenseite bildet, die beiden andern Nebenseiten

$$(6) \qquad \begin{cases} A' = [A_1 B_2 \cdot A_2 B_1] \quad \text{und} \\ A'' = [A_1 B_1 \cdot A_2 B_2] \end{cases}$$

bestimmt, so ist nach dem Satze 583 ihr Schnittpunkt

$$(7) \qquad v = [A' A'']$$

der Pol der Geraden V in bezug auf die Kurve zweiter Klasse (Fig. 12). Entnimmt man jetzt aus den beiden projektiven Punktreihen, welche die beiden projektiven Tangentenbüschel der Kurve zweiter Klasse aus den Tangenten B_2 und B_1 ausschneiden, die beiden Punkttripel

$$B_2(A_1 A_2 B_1) \quad \text{und} \quad B_1(A_2 A_1 B_2),$$

durch welche die projektive Beziehung jener beiden Punktreihen festgelegt wird, so sieht man, daß diese beiden Punktreihen *perspektiv zueinander liegen;* denn der Schnittpunkt ihrer beiden Träger entspricht sich selbst (vgl. Satz 47). Da ferner in den beiden Punktreihen die Punkte

$$[B_2 A_1] \quad \text{und} \quad [B_1 A_2]$$

einander zugeordnet sind und ebenso die Punkte

$$[B_2 A_2] \quad \text{und} \quad [B_1 A_1],$$

so ist wegen (6) und (7) der Punkt v das Perspektivitätszentrum der beiden Punktreihen.

Man kann dann zeigen: Je zwei weitere Tangenten X_1 und X_2 der betrachteten Kurve zweiter Klasse, die sich auf der Geraden V schneiden, werden ebenso wie die Tangenten A_1 und A_2 von den Trägern B_2 und B_1 der beiden oben betrachteten perspektiven Punktreihen mit dem Perspektivitätszentrum v in zwei Paaren entsprechender Punkte geschnitten. Denn nach dem Satze 583 gehen auch die Geraden

$$(8) \qquad \begin{cases} X' = [X_1 B_2 \cdot X_2 B_1] \quad \text{und} \\ X'' = [X_1 B_1 \cdot X_2 B_2] \end{cases}$$

durch den Pol v der Geraden V hindurch, da in dem vollständigen Tangentenvierseit $B_1 B_2 X_1 X_2$ der Kurve zweiter Klasse die Gerade V eine Nebenseite bildet, während die Geraden X' und X'' die beiden andern Nebenseiten darstellen. Daraus aber folgt, daß in den beiden perspektiven Punktreihen mit den Trägern B_2 und B_1 und dem Perspektivitätszentrum v die Punkte

$$[B_2 X_1] \quad \text{und} \quad [B_1 X_2]$$

und ebenso die Punkte

$$[B_2 X_2] \quad \text{und} \quad [B_1 X_1]$$

einander zugeordnet sind, und daß somit in der Projektivität auf der Kurve zweiter Klasse, deren Tangentenbüschel zu jenen beiden Punktreihen perspektiv liegen, auch die Tangenten X_1 und X_2 einander *wechselseitig* entsprechen, womit wirklich eine Bestätigung des Satzes 584 gewonnen ist. Zugleich hat man den Satz:

Satz 585: Bei einer jeden Involution auf einer nicht zerfallenden Kurve zweiter Klasse liegen die Schnittpunkte je zweier entsprechenden Tangenten der Kurve auf einer und derselben Geraden V, welche die Achse der Involution auf jener Kurve zweiter Klasse genannt wird. Und umgekehrt bilden die Tangentenpaare, die sich an eine nicht zerfallende Kurve zweiter Klasse von den Punkten einer Geraden V legen lassen, eine Involution auf dieser Kurve zweiter Klasse.

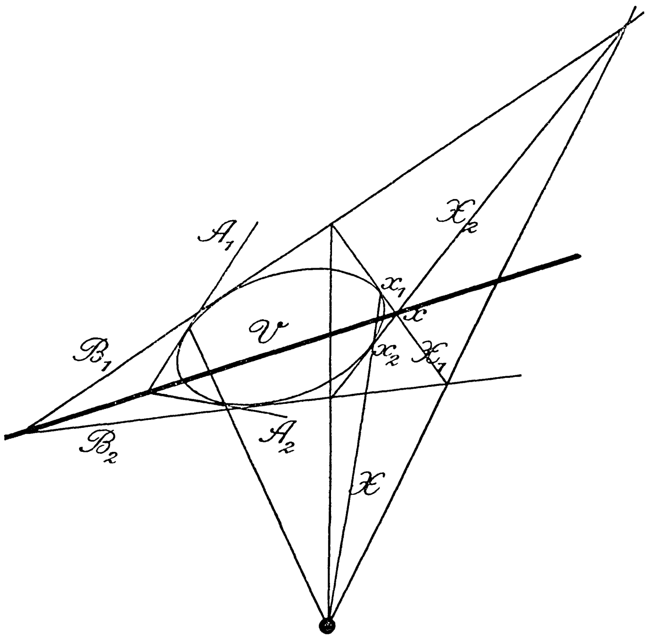


Fig. 13.

Die in diesem Satze enthaltene Umkehrung kann ebenso wie bei dem Dualistischen bewiesen werden.

Man kann noch hinzufügen: Da der Schnittpunkt x je zweier entsprechenden Tangenten X_1 und X_2 der in dem Satze 585 betrachteten Involution auf der Kurve zweiter Klasse der Geraden V angehört (Fig. 13), so muß auch umgekehrt die Polare X jenes Schnittpunktes x, d. h. die Berührungssekante $x_1 x_2$ je zweier einander zugeordneten Tangenten X_1 und X_2 jener Involution durch den Pol v der Geraden V hindurchgehen. Aus diesem Grunde nennt man den Punkt v *das Zentrum der betrachteten Involution auf der Kurve zweiter Klasse.* Man hat daher den Satz:

Satz 586: Die Berührungssekanten je zweier einander entsprechender Tangenten einer Involution auf einer nicht zerfallenden Kurve zweiter Klasse gehen durch einen festen Punkt, der das Zentrum der Involution auf der Kurve zweiter Klasse genannt wird. Er ist der Pol der Achse jener Involution in bezug auf diese Kurve.

Hält man diesen Satz mit den Sätzen 576, 577 und 585 zusammen, so ergibt sich der weitere Satz:

Satz 587: Die Berührungspunkte einer Tangenteninvolution auf einer nicht zerfallenden Kurve zweiter Klasse bilden eine Punktinvolution auf der zugehörigen Kurve zweiter Ordnung, und umgekehrt bilden die Tangenten in den Punkten einer Punktinvolution auf einer nicht zerfallenden Kurve zweiter Ordnung eine Tangenteninvolution auf der zugehörigen Kurve zweiter Klasse. Dabei sind in beiden Fällen das Zentrum und die Achse der beiden zusammengehörigen Involutionen identisch.

Dieser Satz steht in Zusammenhang mit dem folgenden allgemeinen Satz über projektive Zuordnung der Punkte einer Kurve zweiter Ordnung zu den Tangenten, in diesen Punkten gezogen:

Satz 588: Eine Punktreihe auf einer nicht zerfallenden Kurve zweiter Ordnung ist projektiv dem Tangentenbüschel zugeordnet, das man in den Punkten der Punktreihe an die Kurve legen kann, vorausgesetzt, daß man diese Tangenten als Hüllgeraden der mit der Kurve zweiter Ordnung zusammenfallenden Kurve zweiter Klasse auffaßt.

Beweis: Es sei $abcd$ ein einer nicht zerfallenden Kurve zweiter Ordnung eingeschriebenes einfaches Viereck und $ABCD$ das in denselben Punkten umschriebene einfache Vierseit (Fig. 14), dessen Ecken mit k, l, m, n bezeichnet sein mögen, indem man nämlich

$$[AB] = k, \quad [BC] = l,$$
$$[CD] = m, \quad [DA] = n$$

setzt. Dann gehen, falls man die Kurve zweiter Ordnung zugleich als Kurve zweiter Klasse auffaßt, was zulässig ist, da sie nach der Voraussetzung nicht zerfällt, nach dem Satze von Brianchon fürs einfache Vierseit (Satz 68)

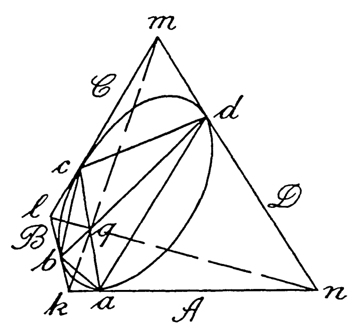


Fig. 14.

die Verbindungslinien ac und bd der Berührungspunkte der beiden Paare Gegenseiten A, C und B, D des einfachen Vierseits durch den Diagonalenschnittpunkt

$$q = [km \cdot ln]$$

des Vierseits hindurch.

Denkt man sich jetzt von den 4 Ecken des Vierecks $abcd$ die 3 ersten Ecken a, b, c fest, und ebenso die zugehörigen Tangenten A, B, C, die vierte Ecke d aber auf der Kurve zweiter Ordnung veränderlich, so wird die zugehörige Tangente D die laufende Gerade des die Kurve einhüllenden Tangentenbüschels, und es durchlaufen bei der Veränderung der Tangente D die Punkte m und q die Punktreihen mit den Trägern C und $[ac]$. Ferner ist die auf der Kurve zweiter Ordnung vom Punkte d beschriebene Punktreihe perspektiv bezogen auf das Strahlbüschel $[bd]$, das soll heißen auf das Strahlbüschel, das von dem Strahle $[bd]$ um den auf der Kurve liegenden *festen* Punkt b bei der Veränderung des Punktes d der Kurve beschrieben wird. Das Strahlbüschel $[bd]$ aber ist wieder perspektiv bezogen auf das Strahlbüschel $[km]$ mit dem Scheitel k vermittels der Punktreihe q mit dem Träger $[ca]$. Das Strahlbüschel $[km]$ endlich ist perspektiv bezogen auf die Punktreihe, beschrieben vom Punkte m auf der Tangente C, und diese Punktreihe m ist wieder perspektiv bezogen auf das Tangentenbüschel D der zu der Kurve zweiter Ordnung gehörenden Kurve zweiter Klasse. Folglich ist auch die Punktreihe d der Kurve zweiter Ordnung *projektiv* bezogen auf das Tangentenbüschel D der zugehörigen Kurve zweiter Klasse.

Harmonische Involutionen auf einer Kurve zweiter Ordnung. Auch für harmonische Involutionen liefert die Übertragung auf eine Kurve zweiter Ordnung oder zweiter Klasse einfache geometrische Beziehungen. Nach dem zweiten Satze von H. Wiener (Satz 248) können *zwei harmonische Involutionen* $\mathfrak{s}$ *und* $\mathfrak{t}$ *in einer Geraden* dadurch charakterisiert werden, daß ihr Folgeprodukt $\mathfrak{s}\mathfrak{t}$ wieder eine Involution darstellt; diese heiße $\mathfrak{u}$. Alsdann besteht also die Gleichung

$$\mathfrak{s}\mathfrak{t} = \mathfrak{u}. \tag{9}$$

Sind dabei noch die beiden Involutionen umkehrbar, d. h. weder parabolisch noch uneigentlich, so sind nach S. 326ff. des ersten Bandes alle drei Involutionen $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$ umkehrbar und zueinander harmonisch. *Bildet man jetzt diese drei umkehrbaren harmonischen Involutionen* $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$ *einer Geraden perspektiv auf eine Kurve zweiter Ordnung* ab und bezeichnet die zugehörigen *Involutionszentren* mit s, t, u, so kann man zeigen, daß diese drei Involutionszentren zu der zugehörigen Kurve zweiter Ordnung in derselben Beziehung stehen wie die Stéphanosschen Bilder der drei harmonischen Involutionen $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}, \mathfrak{u}$ in der Geraden zu der Bildkurve der parabolischen Involutionen dieser Geraden (vgl. S. 303ff. des ersten Bandes), daß sie nämlich die Ecken eines Polardreiecks jener Kurve bilden.

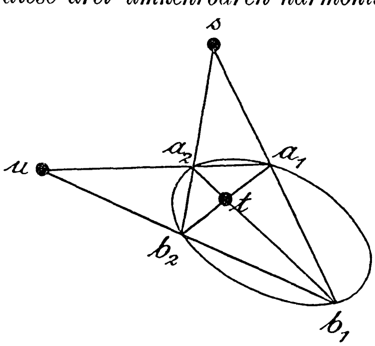


Fig. 15.

In der Tat sind a_1, b_1 und a_2, b_2 zwei Paare der Involution mit dem Zentrum s, und bilden zugleich die Punkte b_1 und a_2 ein Paar der Involution mit dem Zentrum t (Fig. 15), und sind endlich die Involutionen mit den Zentren s und t zueinander harmonisch, so bilden notwendig auch die Punkte a_1 und b_2 ein Paar der Involution mit dem Zentrum t. Denn, benutzt man für den Augenblick als Symbole *für die zu den Involutionen* $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$ *perspektiven Involutionen auf der Kurve zweiter Ordnung* die entsprechenden großen deutschen Buchstaben $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$, so bestehen die Gleichungen:

(10) $\begin{cases} a_1\mathfrak{S} = b_1 \\ b_1\mathfrak{S} = a_1 \end{cases}$ (11) $\begin{cases} a_2\mathfrak{S} = b_2 \\ b_2\mathfrak{S} = a_2 \end{cases}$ (12) $\begin{cases} b_1\mathfrak{T} = a_2 \\ a_2\mathfrak{T} = b_1 \end{cases}$

und somit auch die Gleichungen:

(13) $$a_1\mathfrak{S}\mathfrak{T} = b_1\mathfrak{T} = a_2$$

(14) $$b_1\mathfrak{S}\mathfrak{T} = a_1\mathfrak{T}$$

(15) $$b_2\mathfrak{S}\mathfrak{T} = a_2\mathfrak{T} = b_1.$$

Da nun aber das Folgeprodukt $\mathfrak{S}\mathfrak{T}$ selbst eine Involution $\mathfrak{U}$ darstellen soll, so daß also die Gleichung besteht:

(16) $$\mathfrak{S}\mathfrak{T} = \mathfrak{U},$$

so folgt aus der Gleichung (15), daß auch umgekehrt:

(17) $$b_1\mathfrak{S}\mathfrak{T} = b_2$$

und somit wegen (14):

(18) $$a_1\mathfrak{T} = b_2,$$

also auch

(19) $$b_2\mathfrak{T} = a_1$$

sein muß. Wegen (13) und (18) ist daher das Involutionszentrum t der Schnittpunkt der Geraden a_2b_1 und a_1b_2, während wegen (10) und (11) das Involutionszentrum s der Schnittpunkt der Geraden a_1b_1 und a_2b_2 war. Andererseits lassen sich wegen (16) die Gleichungen (13) und (17) auch in der Form schreiben:

(20) $$\begin{cases} a_1\mathfrak{U} = a_2 \\ b_1\mathfrak{U} = b_2, \end{cases}$$

welche zeigt, daß das Involutionszentrum u der Schnittpunkt der Geraden a_1a_2 und b_1b_2 ist.

Damit ist aber bewiesen, daß die 3 Involutionszentren s, t, u der 3 zueinander harmonischen Involutionen $\mathfrak{S}, \mathfrak{T}, \mathfrak{U}$ die Nebenecken des der Kurve zweiter Ordnung eingeschriebenen vollständigen Vierecks $a_1a_2b_1b_2$ bilden. Sie sind also (vgl. die Figur auf S. 308 des ersten Teils dieses Bandes) die Ecken eines Polardreiecks der Kurve zweiter Ordnung. Und da auch die umgekehrte Schlußweise zulässig ist, so hat man den Satz[1]):

1) In der vorstehenden Entwicklung ist vorübergehend an den Punkten a_1, b_1, a_2, b_2 nur ihre Lage, nicht auch ihr Maßwert (ihre Masse, einschließlich des Vorzeichens), festgehalten. Dementsprechend ist auch davon abgesehen worden, die elliptischen und hyperbolischen Involutionen durch das Vorzeichen des Folgequadrats ihres Symbols $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$ zu charakterisieren. Dies erscheint hier entbehrlich, da ja nach dem Satze 581 über den Charakter der Involution schon die Lage des Involutionszentrums entscheidet. In der Tat werden wegen (10) und (11) und wegen (12), (18) und (19) die beiden Folgequadrate $\mathfrak{S}^2$ und $\mathfrak{T}^2$ beide $= +1$, trotzdem nach der obigen Fig. 15 die Involution $\mathfrak{S}$ hyperbolisch und die Involution $\mathfrak{T}$ elliptisch ist, so daß für die zu diesen Involutionen perspektiven Involutionen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ *in der Geraden* das Folgequadrat $\mathfrak{s}^2$ positiv und das Folgequadrat $\mathfrak{t}^2$ negativ wird (vgl. Satz 116).

Satz 589: Drei umkehrbare Involutionen auf einer Kurve zweiter Ordnung sind dann und nur dann zueinander harmonisch, wenn ihre Involutionszentren ein Polardreieck der Kurve zweiter Ordnung bilden.

Auch kann man, wenn man sich auf *zwei* harmonische Involutionen beschränken will, den Satz aussprechen:

Satz 590: Die Zentren zweier harmonischen Involutionen auf einer Kurve zweiter Ordnung sind hinsichtlich dieser Kurve konjugiert.

Aus diesem Satze folgert man ferner den Satz:

Satz 591: Besitzt eine von zwei zueinander harmonischen Involutionen zwei reelle Doppelpunkte, so bilden diese ein Paar der anderen.

Sind nämlich s und t die Zentren zweier harmonischen Involutionen auf einer Kurve zweiter Ordnung, so geht nach dem Satze 590 die Polare des Punktes s hinsichtlich dieser Kurve durch den Punkt t hindurch. Besitzt nun aber die Involution mit dem Zentrum s zwei reelle Doppelpunkte $d_1 d_2$ (Fig. 16), so ist das Involutionszentrum s der Schnittpunkt der beiden Tangenten, die man in den Doppelpunkten d_1 und d_2 der Involution an die Kurve legen kann, die gerade Verbindungslinie $d_1 d_2$ dieser beiden Doppelpunkte also die Polare des Involutionszentrums in bezug auf die Kurve zweiter Ordnung. Sie geht daher nach dem Obigen durch den Punkt t hindurch. Hieraus folgt dann aber wirklich, daß die Doppelpunkte d_1 und d_2 der Involution s ein Paar der Involution mit dem Zentrum t bilden.

Um eine Anwendung harmonischer Involutionen zu geben, beweisen wir den Satz:

Satz 592: Ist ein vollständiges Viereck einer Kurve zweiter Ordnung eingeschrieben, so ist die Involution, die jenes vollständige Viereck auf einer beliebigen Geraden G ausschneidet, harmonisch zu der Involution, die diese Kurve zweiter Ordnung auf der Geraden G hervorruft.

Beweis[1]: Nach dem zweiten Satze von H. Wiener (Satz 248) hat man zu zeigen, daß die *Folge* aus der Involution, die das vollständige Viereck auf der Geraden G ausschneidet, und aus derjenigen Involution, welche die Kurve zweiter Ordnung auf der Geraden G hervorruft, *wieder eine Involution ist.*

Man bezeichne dazu die Ecken des der Kurve zweiter Ordnung eingeschriebenen vollständigen Vierecks mit k, l, m, n, seine drei Paare Gegen-

1) Der folgende Beweis ist unabhängig davon, ob die Schnittpunkte der Geraden G mit der Kurve zweiter Ordnung getrennt reell, zusammenfallend reell oder konjugiert komplex sind.

seiten mit $A, B,\quad C, D,\quad E, F$ (Fig. 17), setze also etwa

$$(21)\qquad \begin{cases} [mn] = A, & [lk] = B, \\ [nl] = C, & [mk] = D, \\ [lm] = E, & [nk] = F. \end{cases}$$

Ferner bezeichne man die Seiten des in den Punkten k, l, m, n der Kurve zweiter Ordnung umschriebenen vollständigen Vierseits mit K, L, M, N, seine drei Paare Gegenecken dem obigen entsprechend mit $a, b,\ c, d,\ e, f$, so daß also

$$(22)\qquad \begin{cases} [MN] = a, & [LK] = b, \\ [NL] = c, & [MK] = d, \\ [LM] = e, & [NK] = f, \end{cases}$$

wird. Weiter sei $\boldsymbol{p}$ das Polarsystem der Kurve zweiter Ordnung, der das Viereck $klmn$ eingeschrieben ist, $\boldsymbol{P}$ das adjungierte Polarsystem und $\overline{\boldsymbol{p}}$ das zu dem adjungierten Polarsystem $\boldsymbol{P}$ adjungierte Polarsystem. Dieses kann sich nach der Formel (38) des 31. Abschnitts für den Fall eines nicht entartenden Polarsystems $\overline{\boldsymbol{p}}$ von dem Polarsystem $\boldsymbol{p}$ nur um einen nicht verschwindenden Zahlfaktor unterscheiden, ist also geometrisch betrachtet mit ihm identisch. Dann wird:

$$(23)\qquad K = k\boldsymbol{p},\quad L = l\boldsymbol{p},\quad M = m\boldsymbol{p},\quad N = n\boldsymbol{p},$$

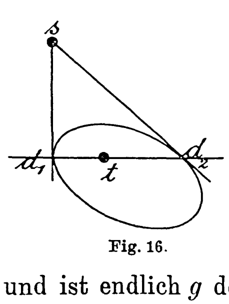


Fig. 16.

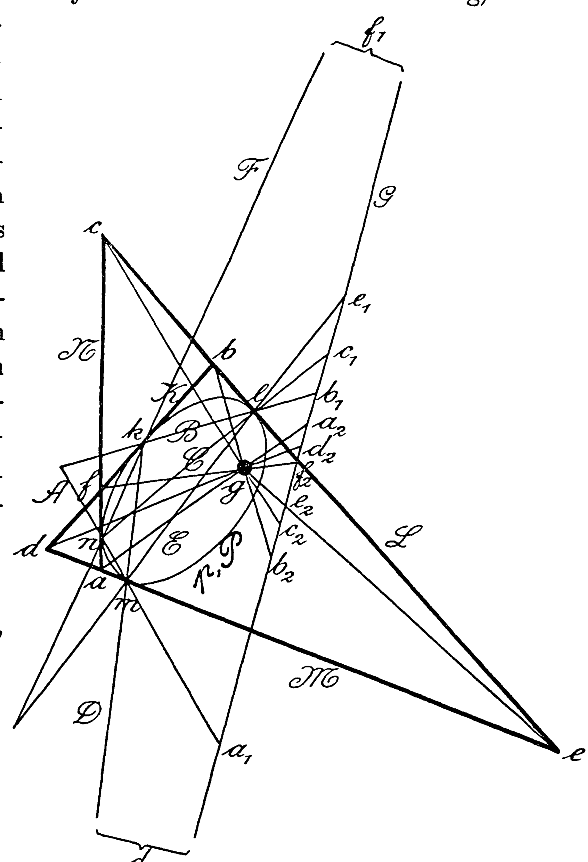


Fig. 17.

und ist endlich g der Pol von G in bezug auf die Kurve zweiter Ordnung, so wird:

$$(24)\qquad G\boldsymbol{P} = g.$$

Nun bilden die 3 Punktpaare:

$$(25) \qquad a_1 = [GA],\ b_1 = [GB],\quad c_1 = [GC],\ d_1 = [GD],$$
$$e_1 = [GE],\ f_1 = [GF],$$

welche die 3 Paare Gegenseiten $A, B,\ C, D,\ E, F$ des vollständigen Vierecks $klmn$ aus der Geraden G ausschneiden, nach dem Satze 532 eine Involution, und man hat die Folge dieser Involution und derjenigen Involution zu bilden, die das Polarsystem $\boldsymbol{p}$ oder $\overline{\boldsymbol{p}}$ auf der Geraden G hervorruft.

Es wird aber wegen (25), (24), (21) und (23):

$$a_1\overline{\boldsymbol{p}} = [GA]\overline{\boldsymbol{p}} = [G\boldsymbol{P} \cdot A\boldsymbol{P}] = [g \cdot A\boldsymbol{P}] = [g \cdot mn\boldsymbol{P}]$$
$$= [g \cdot m\boldsymbol{p}\, n\boldsymbol{p}] = [g \cdot MN],$$

das heißt wegen (22): $\qquad a_1\overline{\boldsymbol{p}} = [ga],$

und entsprechend wird: $\qquad b_1\overline{\boldsymbol{p}} = [gb],$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Für die Schnittpunktpaare $a_2, b_2,\ c_2, d_2,\ e_2, f_2$ der Geraden G mit diesen Polarenpaaren der Punktpaare (25) hinsichtlich des Polarsystems $\overline{\boldsymbol{p}}$ erhält man daher die Produktdarstellungen:

$$(26) \quad a_2 = [G \cdot ga],\ b_2 = [G \cdot gb],\quad c_2 = [G \cdot gc],\quad d_2 = [G \cdot gd],$$
$$e_2 = [G \cdot ge],\quad f_2 = [G \cdot gf].$$

Und es sind die 6 Punktpaare $a_1, a_2,\ b_1, b_2, \ldots$ 6 Punktpaare der Involution, welche die Kurve $\overline{\boldsymbol{p}}$ auf der Geraden G hervorruft. Könnte man also noch zeigen, daß die 3 Schnittpunktpaare (26) selbst 3 Paare einer Involution sind, so wäre der Beweis unseres Satzes erbracht.

Nach dem Satze 541 werden aber die 3 Paare Gegenecken a, b, c, d, e, f des vollständigen Vierseits $KLMN$ von jedem Punkte der Ebene, insbesondere also auch von dem Pole g der Geraden G aus, durch 3 Strahlpaare einer Strahlinvolution projiziert. Es gehören daher die 3 Strahlpaare

$$(27) \qquad [ga], [gb],\quad [gc], [gd],\quad [ge], [gf],$$

als Paare zugeordneter Strahlen einer Strahlinvolution an, und somit bilden auch die zu ihnen perspektiven Punktpaare (26) 3 Paare einer Punktinvolution.

Es ist also wirklich die Folge der Punktinvolution (25) und der Involution $a_1, a_2,\ b_1, b_2,\ \ldots$, welche die Kurve $\overline{\boldsymbol{p}}$ auf der Geraden G hervorruft, wieder eine Involution, woraus dann, wie schon oben bemerkt, nach dem zweiten Satze von H. Wiener folgt, daß die beiden erst genannten Involutionen zueinander harmonisch sind.

Wendet man den Satz 592 *auf den Fall an, wo die Gerade G die Kurve zweiter Ordnung schneidet, der das vollständige Viereck eingeschrieben ist,* so sind die Schnittpunkte zugleich die Doppelpunkte der Involution, die die Kurve zweiter Ordnung auf der Geraden G hervorruft (vgl. die Figur auf S. 191 des ersten Teils dieses Bandes). Und da diese Involution nach dem Satze 592 harmonisch ist zu der Involution, die das vollständige Viereck aus der Geraden G ausschneidet, so bilden jene Doppelpunkte nach dem Satze 591 in der letzteren Involution ein Paar. Damit hat man eine Bestätigung des von Desargues herrührenden Teils des Satzes von Desargues-Sturm[1]) (Satz 531), nämlich den Satz:

Satz 593: Involutionssatz von Desargues: Trifft eine Gerade G eine Kurve zweiter Ordnung in zwei reellen Punkten, so bilden diese Punkte ein Paar der Involution, die durch die beiden Punktpaare bestimmt wird, welche die beiden Paare Gegenseiten eines der Kurve zweiter Ordnung eingeschriebenen einfachen Vierecks aus der Geraden G ausschneiden. Oder kürzer:

Schneidet man eine Kurve zweiter Ordnung und die beiden Paare Gegenseiten eines ihr eingeschriebenen einfachen Vierecks durch eine Gerade, so bilden die drei Schnittpunktpaare drei Paare einer Involution.

Zugleich erkennt man, daß es nicht nötig war, den in dem Beweise des Satzes 592 zunächst ausgeschlossenen Fall eines entartenden Polarsystems in der Formulierung des Satzes wirklich auszunehmen, da nach dem Satze 532 der Satz 592 auch für eine in ein Linienpaar zerfallende Kurve zweiter Ordnung gültig bleibt. Der Fall einer in eine Doppellinie zerfallenden Kurve zweiter Ordnung kommt für eine Kurve, die einem Viereck umschrieben ist, überhaupt nicht in Frage.

Natürlich gelten auch die den beiden Sätzen 592 und 593 dualistisch entsprechenden Sätze, nämlich:

Satz 594: Ist ein vollständiges Vierseit einer Kurve zweiter Klasse umschrieben, so ist die Strahlinvolution, durch welche die drei Paare Gegenecken dieses vollständigen Vierseits von einem beliebigen Punkte g der Ebene projiziert werden, harmonisch zu der Involution, die diese Kurve zweiter Klasse in dem Punkte g. hervorruft.

Und

Satz 595: Dualistisches Gegenstück zum Involutionssatz von Desargues: Liegt ein Punkt g außerhalb einer Kurve zweiter Klasse, so bilden die beiden Tangenten, die sich von ihm an die Kurve legen lassen, ein Paar der Strahlinvolution, die durch die beiden Geradenpaare bestimmt wird, durch welche die beiden

1) Vgl. die Fußnote auf Seite 353 des ersten Teils dieses Bandes.

Paare Gegenecken eines der Kurve umschriebenen einfachen Vierseits vom Punkte g aus projiziert werden. Oder kürzer:

Zieht man von einem Punkte außerhalb einer Kurve zweiter Klasse die beiden Tangenten an die Kurve und projiziert zugleich von ihm aus die beiden Paare Gegenecken eines der Kurve umschriebenen einfachen Vierseits, so bilden die so gewonnenen drei Geradenpaare drei Paare einer Strahlinvolution.

Konstruktion der Doppelpunkte einer beliebigen Projektivität auf einer Kurve zweiter Ordnung. In dem Satze 578 und der ihm vorhergehenden Entwicklung (vgl. die obigen Figg. 5, 6 und 7) ist ein Verfahren angegeben worden, um von *einer Involution* auf einer Kurve zweiter Ordnung die Doppelpunkte zu konstruieren. Es soll dieser Konstruktion im folgenden eine Konstruktion an die Seite gestellt werden, welche die Doppelpunkte *einer beliebigen Projektivität* auf einer Kurve zweiter Ordnung ergibt.

Man lege eine projektive Beziehung auf einer Kurve zweiter Ordnung dadurch fest, daß man irgend 3 Punkten a_1, b_1, c_1 der Kurve irgend 3 andere Punkte a_2, b_2, c_2 der Kurve zuweist (Fig. 18). Dann sind auch die beiden Strahlbüschel einander projektiv zugeordnet, welche die beiden projektiven Punktreihen von irgend zwei Punkten der Kurve aus projizieren. Insbesondere gilt dies auch von den Scheinen jener projektiven Punktreihe, genommen von den Punkten a_2 und a_1 aus. Diesen Scheinen gehören die Strahltripel an:

$$a_2(a_1 b_1 c_1) \quad \text{und} \quad a_1(a_2 b_2 c_2).$$

Und da in diesen beiden Strahltripeln der Strahl $a_2 a_1 = a_1 a_2$ sich selbst entspricht, so sind die beiden durch die genannten Strahltripel bestimmten projektiven Strahlbüschel zueinander perspektiv, und die Perspektivitätsachse V geht durch die Punkte

$$b = [a_2 b_1 \cdot a_1 b_2] \quad \text{und} \quad c = [a_2 c_1 \cdot a_1 c_2] \tag{28}$$

hindurch.

Nach dem Pascalschen Satze, angewandt auf das einfache Sechseck $b_1 a_2 c_1 b_2 a_1 c_2$, ist die Perspektivitätsachse V zugleich die Pascalsche Gerade dieses Sechsecks. Denn wegen (28) schneiden sich seine beiden ersten Gegenseiten $b_1 a_2$ und $b_2 a_1$ in dem Punkte b der Geraden V und seine beiden zweiten Gegenseiten $a_2 c_1$ und $a_1 c_2$ in dem Punkte c der Geraden V. Daraus folgt bereits, daß die Gerade V die Pascalsche Gerade des oben genannten Sechsecks ist, und nach dem Pascalschen Satze gehört daher auch der Schnittpunkt

$$d = [c_1 b_2 \cdot c_2 b_1] \tag{29}$$

des dritten Paares Gegenseiten $c_1 b_2$ und $c_2 b_1$ des Sechsecks der Geraden V an.

Schneidet jetzt die Perspektivitätsgerade V die Kurve zweiter Ordnung in zwei reellen Punkten m und n, so sind diese Punkte die Doppelpunkte der Projektivität, die durch die beiden Punkttripel a_1, b_1, c_1 und $a_2, b_2\ c_2$ auf der Kurve zweiter Ordnung bestimmt wird. Denn die den Punkten m und n der

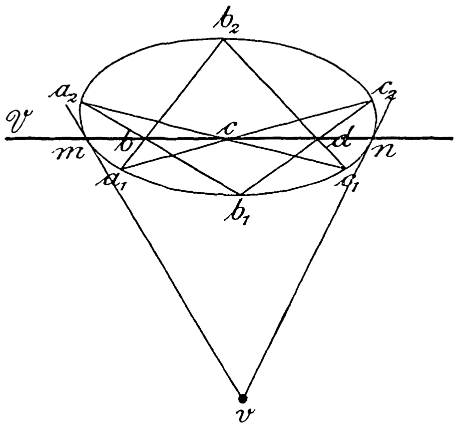


Fig. 18.

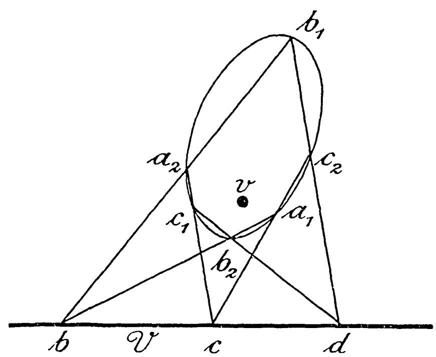


Fig. 19.

Perspektivitätsachse zugehörenden Punkte m_1, m_2 und n_1, n_2 der beiden projektiven Punktreihen fallen beziehlich mit den Punkten m und n zusammen.

Konstruiert man noch in den Punkten m und n die beiden Tangenten an die Kurve zweiter Ordnung und bezeichnet ihren Schnittpunkt mit v, so ist v das Zentrum der Doppelpunktsinvolution der betrachteten Projektivität auf der Kurve zweiter Ordnung, während die Gerade V die Achse dieser Doppelpunktsinvolution bildet.[1] Und dieselbe Eigenschaft besitzen auch der Pol v der Geraden V und diese Gerade V selbst, in dem Falle, wo diese die Kurve zweiter Ordnung nicht in reellen Punkten schneidet (Fig. 19).

Abschnitt 40.

Äquianharmonisches.

Können die Doppelverhältnisse $(abcd)$ und $(bcad)$ einander gleich werden? Nach den Sätzen 27, 28 und 29 kann man aus einem Punktwurf $abcd$, dessen Doppelverhältnis $(abcd)$ mit $\mathfrak{d}$ bezeichnet sein mag, durch Umstellung der 3 ersten Punkte a, b, c des Wurfes, einschließlich des ursprünglichen Wurfes, 6 Punktwürfe ableiten, deren Doppelverhältnisse im allgemeinen verschieden sein werden. Dieselben besitzen nach S. 49ff. des ersten Bandes die Werte:

1) Vgl. zum Begriff der Doppelpunktsinvolution einer Projektivität *in der Geraden* Bd. I, S. 263 ff.

$$(1)\qquad (abcd) = \mathfrak{d}, \quad (bcad) = \frac{\mathfrak{d}-1}{\mathfrak{d}}, \quad (cabd) = \frac{1}{1-\mathfrak{d}}$$

$$(2)\qquad (bacd) = \frac{1}{\mathfrak{d}}, \quad (cbad) = \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}-1}, \quad (acbd) = 1 - \mathfrak{d}.$$

Dabei sind die 6 Doppelverhältnisse in der Weise geordnet, daß in den Gleichungen (1) die Doppelverhältnisse derjenigen 3 Punktwürfe zusammengestellt sind, die aus einander durch zyklische Vertauschung der 3 ersten Punkte a, b, c des ursprünglichen Punktwurfes $abcd$ hervorgehen, während die 3 Punktwürfe der 3 Gleichungen (2) aus denen der Gleichungen (1) durch Vertauschung der beiden ersten Punkte dieser Würfe entstehen, so daß nach dem Satze 28 ihre Doppelverhältnisse gleich den reziproken Werten der Doppelverhältnisse (1) sind.

Von speziellen Punktwürfen haben wir bisher nur die harmonischen Punktwürfe behandelt, d. h. die Punktwürfe, deren Doppelverhältnis den Wert -1 hat. Für einen solchen Punktwurf sind dann nach dem Satze 32 die Doppelverhältnisse (1) beziehlich gleich den darunter stehenden Doppelverhältnissen (2). Es gibt aber noch einen anderen wichtigen Spezialfall eines Punktwurfes. Auf diesen wird man geführt, wenn man die Frage stellt, ob es vorkommen kann, daß zwei von den 3 Doppelverhältnissen (1) einander gleich werden, ob z. B. die beiden ersten Doppelverhältnisse (1) einander gleich werden können. Wir fragen also nach solchen Werten von $\mathfrak{d}$, für welche die Gleichung besteht:

$$(3)\qquad \mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{d}-1}{\mathfrak{d}}.$$

Wir schreiben diese Gleichung zunächst in der Form:

$$(\dagger)\qquad \mathfrak{d}^2 = \mathfrak{d} - 1 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{d} - \mathfrak{d}^2 = 1.$$

Und gibt man dieser Gleichung endlich die Gestalt:

$$(4)\qquad \mathfrak{d} = \frac{1}{1-\mathfrak{d}},$$

so sieht man, daß, wenn die Gleichung (3) erfüllt ist, d. h., wenn die beiden ersten Doppelverhältnisse (1) einander gleich sind, dann auch das erste Doppelverhältnis (1) gleich dem dritten ist, daß dann somit alle drei Doppelverhältnisse (1) einander gleich sind.

Bringt man ferner noch die Gleichung ($\dagger$) auf Null, verleiht ihr also die Form:

$$(5)\qquad \mathfrak{d}^2 - \mathfrak{d} + 1 = 0,$$

so zeigt sie, daß ein Doppelverhältnis eines Punktwurfes, das bei zyklischer Vertauschung der 3 ersten Punkte des Wurfes seinen Wert nicht ändert, notwendig komplex ist, nämlich einen der beiden konjugiert komplexen Werte

(6) $$\left.\begin{matrix}\mathfrak{d}\\ \mathfrak{d}'\end{matrix}\right\} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

besitzen muß, daß es somit einer der beiden konjugiert komplexen dritten Wurzeln aus der negativen Einheit gleich ist. In der Tat hat die Gleichung

(7) $$\mathfrak{d}^3 = -1$$

oder die Gleichung

(8) $$\mathfrak{d}^3 + 1 = 0$$

außer der reellen Wurzel

(9) $$\mathfrak{d} = -1$$

die beiden konjugiert komplexen Wurzeln, die sich ergeben, wenn man den Bruch

(10) $$\frac{\mathfrak{d}^3 + 1}{\mathfrak{d} + 1} = \mathfrak{d}^2 - \mathfrak{d} + 1$$

gleich Null setzt.

Die konjugiert komplexen dritten Wurzeln aus der negativen Einheit. Führt man noch für eine von den beiden konjugiert komplexen dritten Wurzeln aus der negativen Einheit das Zeichen η ein, setzt also etwa:

(11) $$\eta = e^{\frac{\pi i}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2},$$

so wird die zu (11) *konjugiert* komplexe dritte Wurzel der negativen Einheit, d. h. der in (6) angegebene Wert für $\mathfrak{d}'$, notwendig $= \frac{1}{\eta}\cdot$ Denn es wird wegen (11)

(12) $$\frac{1}{\eta} = e^{-\frac{\pi i}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\cdot$$

Die 3 dritten Wurzeln der negativen Einheit lassen daher die Darstellung zu:

(13) $$-1,\quad \eta,\quad \frac{1}{\eta},$$

und als Wurzeln der Gleichung (8) genügen sie dann der Gleichung:

(14) $$-1 + \eta + \frac{1}{\eta} = 0,$$

die, wenn man den Nenner beseitigt, die Form annimmt:

(15) $$\eta^2 - \eta + 1 = 0,$$

womit zugleich eine Bestätigung dafür gewonnen ist, daß η der Gleichung (5) Genüge leistet.

Da andererseits nach dem Begriff einer dritten Wurzel aus der negativen Einheit

(16) $$\eta^3 = -1$$

ist, so erhält man zwischen η und η^2 noch die Beziehung

(17) $$\frac{1}{\eta^2} = -\eta.$$

Die konjugiert komplexen dritten Wurzeln aus der negativen Einheit stehen aber auch in einer engen Beziehung zu den konjugiert komplexen dritten Wurzeln aus der positiven Einheit. Bezeichnet man eine von diesen konjugiert komplexen dritten Wurzeln aus der positiven Einheit mit ε, setzt also etwa

(18) $$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},$$

so besteht wegen (11) zwischen η und ε die Beziehung

(19) $$\eta^2 = \varepsilon,$$

und man kann daher die Gleichung (15) auch in der Form schreiben:

(20) $$1 + \varepsilon = \eta.$$

Die andere von den beiden konjugiert komplexen dritten Wurzeln aus der positiven Einheit wird dann wegen

(21) $$\varepsilon^3 = 1,$$

(22) $$\frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon^2 = e^{-\frac{2\pi i}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2},$$

woraus durch Vergleichung mit (11) folgt, daß

(23) $$\varepsilon^2 = -\eta \quad \text{ist.}$$

Begriff eines äquianharmonischen Wurfes. Nach dieser Einschaltung über die dritten Wurzeln aus der negativen Einheit kehren wir zu unserer Hauptuntersuchung zurück. Wir fanden: Wenn die 3 Doppelverhältnisse (1) einander gleich sein sollen, so sind sie notwendig gleich einer der beiden konjugiert komplexen dritten Wurzeln η und $\frac{1}{\eta}$ aus der negativen Einheit. Zugleich sind dann die 3 Doppelverhältnisse (2), die ebenfalls auseinander durch zyklische Vertauschung der 3 ersten Punkte der in ihnen enthaltenen Würfe hervorgehen, gleich der andern komplexen dritten Wurzel aus der negativen Einheit; denn diese 3 Doppelverhältnisse sind ja, wie schon oben erwähnt, die reziproken Werte der Doppelverhältnisse (1).

Man kann noch hinzufügen: Auch umgekehrt, wenn das Doppelverhältnis $(abcd)$ gleich einer komplexen Wurzel η und $\frac{1}{\eta}$ aus der negativen Einheit ist, so besitzen denselben Wert auch die beiden Doppelverhältnisse $(bcad)$ und $(cabd)$, deren Symbole aus dem Symbol $(abcd)$ durch zyklische Vertauschung der 3 ersten Punkte abc des Wurfes $abcd$ entstehen.

Bezeichnet man daher noch allgemein einen Punktwurf oder Strahlwurf, dessen Doppelverhältnis gleich einer der beiden konjugiert komplexen dritten Wurzeln η und $\frac{1}{\eta}$ aus der negativen Einheit ist, als äquianharmonisch, so kann man den Satz aussprechen:

Satz 596: Satz von Cremona[1]): Sind a, b, c, d vier solche Punkte einer Geraden, für welche die 3 Doppelverhältnisse:

$$(abcd), \quad (bcad), \quad (cabd)$$

einander gleich sind, so ist der gemeinschaftliche Wert dieser 3 Doppelverhältnisse eine der beiden konjugiert komplexen dritten Wurzeln aus der negativen Einheit und die 3 Punktwürfe

$$abcd, \quad bcad, \quad cabd$$

heißen äquianharmonisch. Und umgekehrt: Ist das Doppelverhältnis $(abcd)$ eines Punktwurfes gleich einer der beiden konjugiert komplexen dritten Wurzeln aus der negativen Einheit, so bestehen die Gleichungen:

$$(abcd) = (bcad) = (cabd). \tag{24}$$

Aus diesem Satze folgt noch: Von den 4 Punkten eines äquianharmonischen Punktwurfes ist notwendig wenigstens ein Punkt komplex; denn wären alle 4 Punkte reell, so könnte ihr Doppelverhältnis nicht komplex sein. Nimmt man also etwa die 3 Punkte a, b, c als reell und voneinander verschieden an, so gibt es 2 konjugiert komplexe Punkte d, für welche das Doppelverhältnis $(abcd)$ einen der beiden konjugiert komplexen Zahlwerte η und $\frac{1}{\eta}$ besitzt. Diese beiden konjugiert komplexen Punkte seien bezeichnet mit i und i'. Dann bestehen mit Rücksicht auf (24) die Gleichungen:

$$\begin{cases} (abci) = (bcai) = (cabi) = \eta, \\ (abci') = (bcai') = (cabi') = \frac{1}{\eta}. \end{cases} \tag{25}$$

Die Doppelpunkte einer gewissen zyklischen Projektivität. Betrachtet man diejenige zyklische Projektivität, welche den 3 räumlich verschiedenen

1) Vgl. L. Cremona, Einleitung in die geometrische Theorie der ebenen Kurven, deutsch von M. Curtze, Greifswald 1865, S. 21.

Punkten a, b, c die ihnen zyklisch entsprechenden Punkte b, c, a zuweist[1]), so sind wegen der in (25) enthaltenen Gleichungen:

$$(26)\qquad \begin{cases}(abci) = (bcai) \quad \text{und}\\ (abci') = (bcai')\end{cases}$$

die Punkte i und i' die konjugiert komplexen Doppelpunkte dieser zyklischen Projektivität.

Man kann von diesen konjugiert komplexen Doppelpunkten ein *greifbares Abbild* dadurch gewinnen, daß man eine *elliptische Involution angibt, welche die konjugiert komplexen Doppelpunkte i und i' ebenfalls zu Doppelpunkten hat*, und die daher als die Doppelpunktsinvolution der betrachteten nicht involutorischen zyklischen Projektivität bezeichnet werden kann (vgl. Bd. I, S. 227).

In der oben eingeführten zyklischen Projektivität entsprechen den 5 Punkten a, b, c, i, i' die 5 Punkte b, c, a, i, i'[2]), woraus mit Rücksicht auf Satz 36 die Gleichheit der Doppelverhältnisse folgt:

$$(27)\qquad \begin{cases}(abii') = (bcii'),\\ (caii') = (abii'),\\ (bcii') = (caii').\end{cases}$$

Nach dem Satze 27 ändert sich aber der Wert eines Doppelverhältnisses nicht, wenn man in jedem von seinen beiden Punktpaaren die beiden Punkte des Paares miteinander vertauscht. Wendet man die beschriebene Umformung auf die Doppelverhältnisse der linken Seiten der Gleichungen (27) an, so erhalten diese Gleichungen die Form:

$$(28)\qquad \begin{cases}(bai'i) = (bcii')\\ (aci'i) = (abii')\\ (cbi'i) = (caii').\end{cases}$$

Von ihnen zeigt die erste Gleichung, daß es eine hyperbolische Involution gibt, von welcher der Punkt b ein Doppelpunkt ist, während die Punkte i, i' und ebenso die Punkte a, c ein Paar bilden. Der andere Doppelpunkt dieser hyperbolischen Involution ist nach dem Satze 117 der dem Punkte b in bezug auf das Paar a, c harmonisch zugeordnete Punkt β (Fig. 20), der also die Gleichung befriedigt:

$$(29)\qquad (acb\beta) = -1.$$

1) Dieselbe ist sicher *nicht involutorisch*, da sie dem Punkte a den Punkt b, diesem aber den vom Punkte a räumlich verschiedenen Punkt c zuweist.

2) Vgl. zum Folgenden: H. Schröter, Zur Konstruktion eines äquianharmonischen Systems, Math. Ann. Bd. 10, S. 420ff.

Da nun aber auch die Punkte i und i' ein Paar dieser hyperbolischen Hilfsinvolution bilden, so muß auch das Paar i, i' die beiden Doppelpunkte b, β jener hyperbolischen Hilfsinvolution harmonisch trennen. Führt man ebenso 2 Punkte α und γ ein durch die Gleichungen

(30) $$(b c a \alpha) = -1 \quad \text{und}$$

(31) $$(a b c \gamma) = -1,$$

so beweist man wieder auf Grund der beiden letzten Gleichungen (28), daß die Punkte i, i' auch die beiden Punktpaare a, α und c, γ harmo-

Fig. 20.

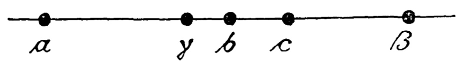


Fig. 21.

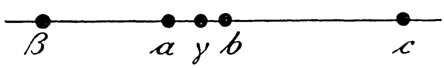


Fig. 22.

nisch trennen. Die Punkte i, i' bilden also die Doppelpunkte derjenigen Involution, der die 3 Paare a, α, b, β, c, γ angehören.

Und diese Involution ist sicher *elliptisch.* Denn folgen die 3 Punkte a, b, c auch ihrer Lage nach in dieser Reihenfolge aufeinander, d. h. fällt b zwischen a und c, so liegt wegen (29) der Punkt β außerhalb des Linienstückes ac, wobei der Punkt β aber noch *entweder* auf der Verlängerung von ac über c hinaus (Fig. 21) *oder* auf der Verlängerung von ca über a hinaus (Fig. 22) liegen kann.

Im *ersten Falle* fällt c zwischen b und β,

im *zweiten Falle* liegt c außerhalb des Linienstückes $b\beta$.

Im *ersten Falle* liegt ferner der Punkt γ, der wegen (31) zwischen a und b fällt, außerhalb des Linienstückes $b\beta$,

im *zweiten Falle* liegt der Punkt γ, der wegen (31) wieder zwischen a und b gelegen sein muß, innerhalb des Linienstückes $b\beta$.

In *beiden Fällen* aber trennen sich die Punktpaare b, β und c, γ gegenseitig. Die betrachtete Involution, die durch die Punktpaare b, β und c, γ bestimmt wird, ist somit nach dem Satze 159 elliptisch.

Da endlich die Doppelpunkte i und i' der oben betrachteten zyklischen Projektivität mit denen der soeben konstruierten elliptischen Involution übereinstimmen, so kann man sagen: Die konstruierte elliptische Involution ist die Doppelpunktsinvolution jener (nicht involutorischen) zyklischen Projektivität.

Abbildung der betrachteten zyklischen Projektivität und ihrer Doppelpunktsinvolution auf den Kreis. Um von der Beziehung zwischen unserer zyklischen Projektivität und ihrer elliptischen Doppelpunktsinvolution eine anschaulichere Vorstellung zu gewinnen, übertrage man die zyklische Projektivität, die den Punkten a, b, c die Punkte b, c, a zuweist, auf einen Kreis und bezeichne die den ersten 3 Punkten auf dem Kreise entsprechenden Punkte mit a_1, b_1, c_1, die den letzten 3 Punkten entsprechenden Punkte mit a_2, b_2, c_2. Dann wird

$$a_2 = b_1, \quad b_2 = c_1, \quad c_2 = a_1. \tag{32}$$

Ferner nehme man die Punkte a_1, b_1, c_1 als Ecken eines dem Kreise eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks an (Fig. 23), was offenbar auch bei ganz beliebiger Lage der 3 Punkte a, b, c auf ihrer Geraden möglich ist.[1]) Man konstruiert dann die Achse V der zugehörigen Doppelpunktsinvolution, indem man nach dem Vorbilde von S. 22 die Punkte

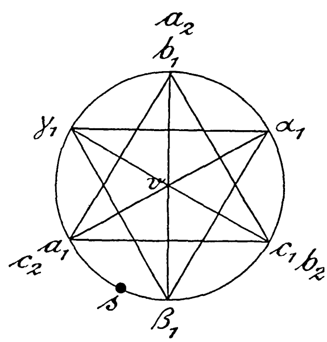


Fig. 23.

$$b = [a_2 b_1 \cdot a_1 b_2] \tag{33}$$

und

$$c = [a_2 c_1 \cdot a_1 c_2]$$

bestimmt. Diese liegen unendlich fern, da die Tangenten $a_2 b_1$ und $a_1 c_2$, in den Ecken des gleichseitigen Dreiecks an den Kreis gezogen, den gegenüberliegenden Seiten $a_1 b_2$ und $a_2 c_1$ des Dreiecks parallel laufen. Die Achse V der Doppelpunktsinvolution der betrachteten zyklischen Projektivität auf dem Kreise ist also die unendlich ferne Gerade. Hieraus folgt schon, daß das Involutionszentrum v jener Doppelpunktsinvolution, das ja den Pol der Involutionsachse in bezug auf den Kreis bildet, in den Mittelpunkt des Kreises fällt.

Dies bestätigt man sogleich, wenn man auch jene elliptische Involution auf den Kreis überträgt. Nach dem Obigen besitzt die elliptische Involution *auf der Geraden* diejenigen Punktepaare a, α, b, β, c, γ zu Punkten eines Paares, welche beziehlich die Punktpaare b, c, c, a, a, b harmonisch trennen. Bei der Übertragung auf den Kreis werden daher die den Punkten α, β, γ entsprechenden Punkte α_1, β_1, γ_1 nach dem Satze 571 die Endpunkte der Kreisdurchmesser sein müssen, die von den Punkten a_1, b_1, c_1 ausgehen, woraus in der Tat hervorgeht, daß der Mittelpunkt des Kreises das Zentrum v der fraglichen elliptischen Involution ist.

Projiziert man endlich sowohl die auf den Kreis übertragene zyklische Projektivität wie ihre elliptische Doppelpunktsinvolution von einem beliebigen Punkte s des Kreises aus durch eine zyklische Projektivität und eine elliptische Involution *im Strahlbüschel*, so erhält man als Schein der auf dem Kreise liegenden zyklischen Projektivität eine Strahlbüschel-

1) In der Tat braucht man nur das Punkttripel a, b, c dieser Geraden perspektiv so auf eine andere Gerade zu projizieren, daß das Bild eines seiner 3 Punkte ins Unendliche fällt, und dann den Abstand der Bilder der beiden anderen Punkte zur Seite eines gleichseitigen Dreiecks zu machen, dem der Kreis umschrieben wird

drehung um den Punkt s vom Winkel $\frac{\pi}{3}$ und als Schein der elliptischen Doppelpunktsinvolution mit den Paaren a_1, α_1, b_1, β_1, c_1, γ_1 eine Strahlbüscheldrehung um den Scheitel s vom Winkel $\frac{\pi}{2}$ (vgl. wieder die obige Fig. 23; in ihr sind die von s ausgehenden projizierenden Strahlen der Übersichtlichkeit halber weggelassen). Die letztgenannte Strahlbüscheldrehung vom Winkel $\frac{\pi}{2}$ ist die schon auf S. 217 des ersten Bandes betrachtete *Rechtwinkelinvolution* oder *Kreisinvolution.*

Da die Fig. 23 in bezug auf die beiden Punkttripel a_1, b_1, c_1 und α_1, β_1, γ_1 punktspiegelig ist, so werden auch die Punktpaare

$$\beta_1, \gamma_1, \quad \gamma_1, \alpha_1, \quad \alpha_1, \beta_1$$

beziehlich durch die Punktpaare

$$a_1, \alpha_1, \quad b_1, \beta_1, \quad c_1, \gamma_1$$

harmonisch getrennt, und Entsprechendes gilt dann auch von der jener elliptischen Involution a_1, α_1, b_1, β_1, c_1, γ_1 entsprechenden Involution a, α, b, β, c, γ in der Geraden. Man hat daher den Satz:

Satz 597: Konstruiert man in einer Geraden zu 3 beliebigen räumlich verschiedenen Punkten a, b, c die Punkte α, β, γ entsprechend den Gleichungen

$$(34) \qquad (bca\alpha) = -1, \quad (cab\beta) = -1, \quad (abc\gamma) = -1,$$

so daß also die Punktpaare

$$b, c, \quad c, a, \quad a, b$$

beziehlich durch die Punktpaare

$$a, \alpha, \quad b, \beta, \quad c, \gamma$$

harmonisch getrennt werden, so gelten auch die Gleichungen:

$$(35) \qquad (\beta\gamma a\alpha) = -1, \quad (\gamma\alpha b\beta) = -1, \quad (\alpha\beta c\gamma) = -1,$$

d. h., es werden auch die Punktpaare

$$\beta, \gamma, \quad \gamma, \alpha, \quad \alpha, \beta$$

beziehlich durch die Punktpaare

$$a, \alpha, \quad b, \beta, \quad c, \gamma$$

harmonisch getrennt.

IX. Hauptteil.

Das Scharbüschel von Kurven zweiter Ordnung und die Büschelschar von Kurven zweiter Klasse.

Abschnitt 41.

Begriff eines Scharbüschels von Kurven zweiter Ordnung und einer Büschelschar von Kurven zweiter Klasse.

Man gelangt zu speziellen Fällen eines Kegelschnittbüschels und einer Kegelschnittschar, wenn man eine von den beiden Grundkurven beziehlich durch eine doppeltzählende Gerade und durch einen doppeltzählenden Punkt ersetzt.

Betrachten wir zunächst die vier Fälle, die aus einem Kegelschnittbüschel und einer Kegelschnittschar hervorgehen, wenn man bei einem Büschel die eine Grundkurve in eine doppeltzählende Gerade, die andere in ein reelles oder konjugiert komplexes Linienpaar übergehen läßt, und wenn man bei einer Schar die eine Grundkurve zu einem doppeltzählenden Punkt, die andere zu einem reellen oder konjugiert komplexen Punktpaar entarten läßt.

Das Kegelschnittbüschel, das ein reelles Linienpaar und eine nicht durch dessen Doppelpunkt gehende Doppellinie zu Grundkurven hat. Zuerst also möge als erste Grundkurve eines Kegelschnittbüschels ein reelles Linienpaar, als zweite Grundkurve eine nicht durch dessen Doppelpunkt gehende Doppellinie angenommen werden.[1])

Man wird dabei am besten das Fundamentaldreieck so wählen, daß zwei von seinen Seiten, etwa die Seiten E_1 und E_2, mit den Linien des reellen Linienpaars zusammenfallen, während die dritte Seite E_3 durch die Doppellinie gebildet wird, und findet alsdann nach dem Satze 454 für das Polarsystem des reellen Linienpaars E_1, E_2 den Bruch:

$$(1) \qquad \boldsymbol{h} = \frac{E_2,\ E_1,\ 0}{e_1,\ e_2,\ e_3}$$

1) In dem Falle, wo die doppeltzählende Gerade durch den Doppelpunkt des Linienpaars hindurchgeht, entartet nach dem Satze 513 das Kegelschnittbüschel.

und für das Polarsystem der Doppellinie E_3 nach dem Satze 455 die Darstellung:

(2) $$d = \frac{0,\ 0,\ E_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}.$$

Für das durch diese beiden Polarsysteme zweiter Ordnung h und d bestimmte Büschel von Polarsystemen erhält man daher die Vielfachensumme:

(3) $$p = \mathfrak{f}h + \mathfrak{g}d$$

oder wegen (1) und (2) den Bruch:

(4) $$p = \frac{\mathfrak{f}E_2,\ \mathfrak{f}E_1,\ \mathfrak{g}E_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}.$$

Dieser aber zeigt nach dem Satze 453, daß die sämtlichen Kurven zweiter Ordnung des zugehörigen Kegelschnittbüschels dasselbe Tangentialdreieck besitzen, nämlich die beiden Geraden des Geradenpaars E_1, E_2 zu Tangenten und die Doppellinie E_3 zur Berührungssekante haben (Fig. 24). Und umgekehrt gehören sämtliche Kurven dieser Art dem Kegelschnittbüschel (3) an, und darunter als zerfallende Kurven zweiter Ordnung jenes Geradenpaar selbst (für $\mathfrak{g} = 0$) und jene Doppellinie (für $\mathfrak{f} = 0$).

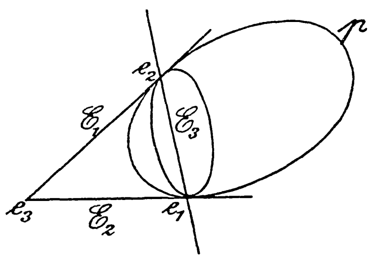


Fig. 24.

Die Kegelschnittschar, die ein reelles Punktpaar und einen nicht auf dessen Träger liegenden doppeltzählenden Punkt zu Grundkurven hat. Nimmt man andererseits als erste Grundkurve einer Kegelschnittschar ein reelles Punktpaar, als zweite Grundkurve einen nicht auf dessen Träger liegenden doppeltzählenden Punkt an[1]), läßt ferner die beiden Ecken e_1 und e_2 des Fundamentaldreiecks mit den Punkten des reellen Punktpaars zusammenfallen und legt die dritte Ecke e_3 dieses Dreiecks in den doppeltzählenden Punkt, so erhält man nach dem Satze 460 für das Polarsystem des reellen Punktpaars e_1, e_2 den Bruch:

(5) $$H = \frac{e_2,\ e_1,\ 0}{E_1,\ E_2,\ E_3}$$

und für das Polarsystem des doppeltzählenden Punktes e_3 nach Satz 461 die Darstellung:

(6) $$D = \frac{0,\ 0,\ e_3}{E_1,\ E_2,\ E_3}.$$

1) In dem Falle, wo der doppeltzählende Punkt auf dem Träger des Punktpaars liegt, entartet nach dem Satze 525 die Kegelschnittschar.

Für die durch diese beiden Polarsysteme zweiter Klasse $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{D}$ bestimmte Schar von Polarsystemen ergibt sich daher die Vielfachensumme:

$$\boldsymbol{P} = \mathfrak{f}\boldsymbol{D} + \mathfrak{g}\boldsymbol{H} \tag{7}$$

oder wegen (5) und (6) der Bruch:

$$\boldsymbol{P} = \frac{\mathfrak{g}e_2,\ \mathfrak{g}e_1,\ \mathfrak{f}e_3}{E_1,\ E_2,\ E_3}. \tag{8}$$

Dieser Bruch aber zeigt nach dem Satze 459, daß die sämtlichen Kurven der Schar (7) dasselbe Tangentialdreieck besitzen, nämlich die beiden Punkte des Punktpaars e_1, e_2 zu gemeinsamen Berührungspunkten und den doppeltzählenden Punkt e_3 zum zugehörigen Tangentenschnittpunkt haben (vgl. wieder Fig. 24). Und umgekehrt gehören sämtliche Kurven dieser Art der Kegelschnittschar (7) an, und darunter als zerfallende Kurven zweiter Klasse jenes Punktpaar selbst (für $\mathfrak{f} = 0$) und jener doppeltzählende Punkt (für $\mathfrak{g} = 0$).

Beziehung zwischen diesem Kegelschnittbüschel und dieser Kegelschnittschar. Dieses Ergebnis zeigt bereits, daß zwischen dem Kegelschnittbüschel (3) und der Kegelschnittschar (7) eine enge Beziehung herrscht. Und in der Tat beweist man auch leicht analytisch, *daß die adjungierten Polarsysteme zu den Polarsystemen des Büschels* (3) *im allgemeinen mit den Polarsystemen der Schar* (7) *identisch sind.* Nur ein Polarsystem der Schar (7), nämlich das in ihr enthaltene Punktpaar $\boldsymbol{H}$, läßt sich nicht als adjungiertes Polarsystem zu einem Polarsystem des Büschels (3) auffassen. Um dies zu zeigen, bilde man den Ausdruck $[p^2]$ für das zu (3) adjungierte Polarsystem und erhält so:

$$[\boldsymbol{p}^2] = [(\mathfrak{f}\boldsymbol{h} + \mathfrak{g}\boldsymbol{d})^2] \quad \text{oder:} \tag{9}$$

$$[\boldsymbol{p}^2] = \mathfrak{f}^2[\boldsymbol{h}^2] + 2\mathfrak{f}\mathfrak{g}[\boldsymbol{h}\boldsymbol{d}] + \mathfrak{g}^2[\boldsymbol{d}^2]. \tag{10}$$

Hierin aber ist nach der Gleichung (39) des dreißigsten Abschnitts:

$$[\boldsymbol{h}^2] = \frac{0,\ \ 0,\ -e_3}{E_1,\ E_2,\ E_3}, \quad \text{d. h. wegen (6):}$$

$$[\boldsymbol{h}^2] = -\boldsymbol{D}, \quad \text{ferner:} \tag{11}$$

$$[\boldsymbol{d}^2] = 0; \tag{12}$$

endlich nach der Gleichung (36) des dreißigsten Abschnitts (vgl. auch Gleichung (13) des siebenunddreißigsten Abschnitts):

$$[\boldsymbol{h}\boldsymbol{d}] = \frac{\frac{1}{2}[E_1 E_3],\ -\frac{1}{2}[E_2 E_3],\ 0}{E_1,\qquad E_2,\qquad E_3} = -\frac{1}{2}\,\frac{e_2,\ e_1,\ 0}{E_1,\ E_2,\ E_3} \quad \text{oder wegen (5):}$$

$$[\boldsymbol{h}\boldsymbol{d}] = -\tfrac{1}{2}\boldsymbol{H}. \tag{13}$$

Der Ausdruck (10) für das zu p adjungierte Polarsystem $[p^2]$ verwandelt sich also in:

(14) $$[p^2] = -\mathfrak{f}\{\mathfrak{f}\boldsymbol{D} + \mathfrak{g}\boldsymbol{H}\}$$

oder wegen (7) in:

(15) $$[p^2] = -\mathfrak{f}\boldsymbol{P}.$$

Die Abspaltung des Faktors $-\mathfrak{f}$ hat die Bedeutung, daß

erstens demjenigen Polarsystem des Büschels (3), welchem der Parameterwert $\mathfrak{f} = 0$ zugehört, nämlich dem Polarsystem $\boldsymbol{d}$ der doppeltzählenden Geraden E_3, als adjungiertes Polarsystem kein eigentliches Polarsystem der Schar (7) entspricht, sondern daß ihm das uneigentliche Polarsystem zweiter Klasse $[p^2] = 0$ zugeordnet ist, das man ja freilich auch jener Schar zurechnen kann, und daß dafür

zweitens das in der Schar (7) für $\mathfrak{f} = 0$, $\mathfrak{g} \neq 0$ enthaltene Punktpaar $\boldsymbol{H}$ keinem Polarsysteme des Büschels (3) adjungiert ist.

Hyperbolisches Scharbüschel und hyperbolische Büschelschar. Das Büschel (3) von Polarsystemen zweiter Ordnung mit gemeinsamem Tangentialdreieck hat also die Eigenschaft, daß die seinen Polarsystemen adjungierten Polarsysteme zweiter Klasse zugleich einer Schar von Polarsystemen angehören, und daß andererseits diese Schar außer jenen den Polarsystemen des Büschels adjungierten Polarsystemen nur noch das Polarsystem der gemeinsamen Berührungspunkte der Kurven des Büschels enthält. Aus diesem Grunde nennen wir das Büschel (3) von Polarsystemen zweiter Ordnung ein Scharbüschel von Polarsystemen zweiter Ordnung und die Schar (7) von Polarsystemen zweiter Klasse[1]) eine Büschelschar von Polarsystemen zweiter Klasse.[2])

Ferner sagen wir, jenes Scharbüschel und diese Büschelschar habe den Punkt e_3 zum Doppelpunkt und die Linie E_3 zur Doppellinie. Diese Doppellinie E_3 bildet dann übrigens wegen (4) und (8) hinsichtlich sämtlicher Polarsysteme des Büschels und der Schar die Polare des Doppelpunktes e_3.

Um endlich anzudeuten, daß das in dem Scharbüschel (3) enthaltene einfach entartende Polarsystem zweiter Ordnung h *das Polarsystem einer hyperbolischen Strahlinvolution* ist (vgl. S. 243 des ersten Teils dieses Bandes), wollen wir das Scharbüschel (3) speziell als ein hyperbolisches Scharbüschel bezeichnen, und entsprechend wollen wir der Büschelschar (7) den Namen einer hyperbolischen Büschelschar

1) Für deren adjungierte Polarsysteme offenbar entsprechende Beziehungen gelten.

2) Die Bezeichnung „Büschelschar" rührt von R. Sturm her, doch unterscheidet er nicht zwischen „Scharbüschel" und „Büschelschar". Vgl. Steiner-Schröter, Die Theorie der Kegelschnitte, 3. Auflage, durchgesehen von R. Sturm, Leipzig 1898, S. 328.

beilegen, weil das in dieser Büschelschar enthaltene einfach entartende Polarsystem zweiter Klasse H *das Polarsystem einer hyperbolischen Punktinvolution* ist (vgl. S. 250 von Teil I dieses Bandes). Auch wollen wir sagen, *die hyperbolische Büschelschar* (7) *sei zu dem hyperbolischen Scharbüschel* (3) *adjungiert* und umgekehrt *dieses Scharbüschel sei zu jener Büschelschar adjungiert.*

Das Kegelschnittbüschel, das ein konjugiert komplexes Linienpaar und eine nicht durch dessen Träger gehende Doppellinie zu Grundkurven hat. Ganz entsprechende Ergebnisse findet man, wenn man als erste Grundkurve *eines Kegelschnittbüschels* ein konjugiert komplexes Linienpaar, als zweite Grundkurve eine nicht durch dessen (stets reellen) Schnittpunkt gehende Doppellinie annimmt.

Für das Polarsystem des konjugiert komplexen Linienpaars, das die *erste Grundkurve des Kegelschnittbüschels* darstellen soll, kann man nach der Gleichung (23) des dreiunddreißigsten Abschnitts den Bruch ansetzen:

$$e = \frac{E_1,\ E_2,\ 0}{e_1,\ e_2,\ e_3}, \tag{16}$$

in welchem die Nenner durch die drei Ecken, und die beiden ersten Zähler durch die den entsprechenden Nennern *gegenüberliegenden* Seiten des Fundamentaldreiecks gebildet werden.

Man überzeugt sich leicht, daß wirklich das Polarsystem *eines jeden* konjugiert komplexen Linienpaares durch einen Bruch von der Form (16) dargestellt werden kann. Wie auf S. 239 f. des ersten Teils dieses Bandes gezeigt ist, drückt der Bruch (16) das Polarsystem desjenigen konjugiert komplexen Linienpaares aus, das in seinem Schnittpunkte (Träger) $e_3 = [E_1 E_2]$ die Involution:

$$\mathfrak{E} = \frac{E_2,\ -E_1}{E_1,\ E_2} \tag{†}$$

hervorruft, die durch die beiden sich harmonisch trennenden Paare E_1, E_2 und $E_2 + E_1$, $E_2 - E_1$ bestimmt wird. Auf die Form (†) aber läßt sich der Bruch einer jeden elliptischen Strahlinvolution mit dem Scheitel e_3 bringen, welche die Geraden der Stäbe E_1 und E_2 zu Geraden eines Paares der Involution hat. Denn, da es nach dem Satze 118 (vgl. auch den Satz 167) in einer elliptischen Involution zu jedem Paare ein (und nur ein) Paar gibt, das von ihm harmonisch getrennt wird, so kann man die Längen und den Sinn der Stäbe E_1 und E_2 so bestimmen, daß dieses von dem Paar E_1, E_2 harmonisch getrennte Paar gerade durch die Summe und Differenz $E_2 + E_1$ und $E_2 - E_1$ dargestellt wird.

Da ferner das konjugiert komplexe Linienpaar, das die Polkurve des Polarsystems (16) bildet, den Punkt e_3 zum Schnittpunkt hat, so kann man als *zweite Grundkurve des Kegelschnittbüschels* die doppeltzählende dritte Seite E_3 des Fundamentaldreiecks wählen. Für das zugehörige Polarsystem erhält man dann wieder wie in (2) die Darstellung:

(17) $$d = \frac{0,\ 0,\ E_3}{e_1,\ e_2,\ e_3},$$

für das durch die beiden Polarsysteme e und d bestimmte *Büschel von Polarsystemen* also die Vielfachensumme:

(18) $$p = \mathfrak{f}e + \mathfrak{g}d$$

oder wegen (16) und (17) den Bruch:

(19) $$p = \frac{\mathfrak{f}E_1,\ \mathfrak{f}E_2,\ \mathfrak{g}E_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}.$$

Dieser aber zeigt, daß das Büschel (18) die Gesamtheit aller Kurven zweiter Ordnung darstellt (Fig. 25), welche die Gerade E_3 zur Polare des Punktes e_3 haben und überdies in dem Punkte e_3 die elliptische Strahlinvolution:

(20) $$\mathfrak{E} = \frac{E_2,\ -E_1}{E_1,\ E_2}$$

hervorrufen. Das erste folgt unmittelbar aus der Form des Bruches (19). Aber auch das zweite ergibt sich sogleich.

Nach dem Satze 409 erhält man die Strahlinvolution, die das Polarsystem zweiter Ordnung p im Punkte e_3 erzeugt, indem man einen Punkt y die Polare E_3 des Punktes e_3 durchlaufen läßt und dann für jede Lage des Punktes y erstens seinen Verbindungsstrahl $[e_3 y]$ mit dem Punkte e_3 und zweitens seine Polare yp bestimmt. Dann bilden die beiden Strahlen $[e_3 y]$ und yp ein Paar der gesuchten Strahlinvolution.

Um einen analytischen Ausdruck für diese Strahlinvolution zu finden, hat man also:

$$y = \mathfrak{y}_1 e_1 + \mathfrak{y}_2 e_2$$

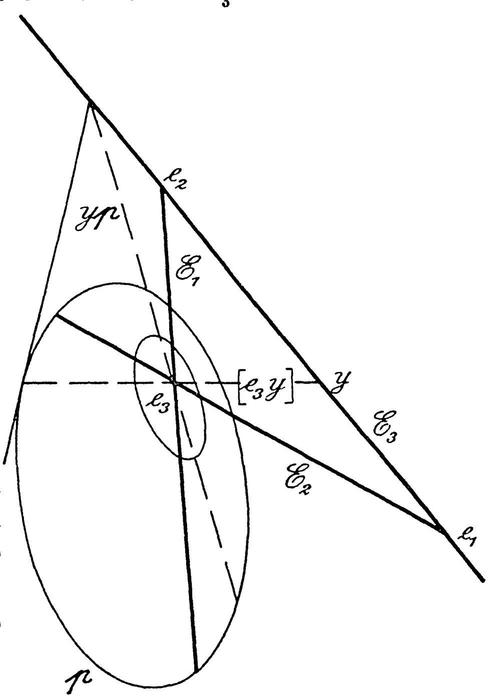


Fig. 25.

zu setzen, sodann die Produkte $[e_3 y]$ und yp zu bilden und ihre gegenseitige Beziehung aufzusuchen. Es wird aber:

$$[e_3 y] = \mathfrak{y}_1 [e_3 e_1] + \mathfrak{y}_2 [e_3 e_2] \quad \text{oder:}$$

$$[e_3 y] = \mathfrak{y}_1 E_2 - \mathfrak{y}_2 E_1 \quad \text{und wegen (19):}$$

$$yp = \mathfrak{f}(\mathfrak{y}_1 E_1 + \mathfrak{y}_2 E_2).$$

Die Vergleichung der beiden letzten Gleichungen zeigt dann, daß man die Strahlen yp durch Multiplikation mit dem Bruche:

(20)
$$\mathfrak{E} = \frac{E_2, \ -E_1}{E_1, \ \ E_2}$$

in die Strahlen:

$$\mathfrak{f}[e_3 y] = \mathfrak{f}(\mathfrak{y}_1 E_2 - \mathfrak{y}_2 E_1)$$

überführen kann, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Eine jede Kurve zweiter Ordnung p, die dem Büschel (19) angehört, ruft also wirklich im Punkte e_3 die elliptische Strahlinvolution $\mathfrak{E}$ hervor und hat die Gerade E_3 zur Polare des Punktes e_3. Und wie man sich leicht überzeugt, läßt sich diese Schlußweise auch umkehren, d. h. es gehören andererseits sämtliche Kurven zweiter Ordnung, welche die beiden genannten Eigenschaften haben, dem Büschel (18) (oder (19)) an und darunter, als zerfallende Kurven, jenes konjugiert komplexe Geradenpaar selbst (für $\mathfrak{g} = 0$) und jene Doppellinie (für $\mathfrak{f} = 0$).[1]

Man kann übrigens noch hinzufügen, daß die Kurven des Büschels (18) zugleich auch auf der Geraden E_3 die elliptische Punktinvolution:

(21)
$$\mathfrak{e} = \frac{e_2, \ -e_1}{e_1, \ \ e_2}$$

hervorrufen. Denn die von ihnen auf dieser Geraden erzeugte Punktinvolution ist nach S. 193 von Teil I dieses Bandes zu der elliptischen Strahlinvolution $\mathfrak{E}$ in (20) perspektiv und wird also aus ihr durch die Gerade E_3 ausgeschnitten. Nach dem Satze 79 erhält man aber den analytischen Ausdruck für die gesuchte Punktinvolution auf der Geraden E_3, indem man den Bruch (20) für die Strahlinvolution $\mathfrak{E}$ mit dem Stabe E_3 planimetrisch erweitert, und dadurch ergibt sich in der Tat der obige Bruch (21); denn es wird:

$$\frac{[E_3 E_2], \ -[E_3 E_1]}{[E_3 E_1], \ \ [E_3 E_2]} = \frac{-e_1, \ -e_2}{e_2, \ \ -e_1} = \frac{e_2, \ -e_1}{e_1, \ \ e_2} = \mathfrak{e}\,.$$

Die Kegelschnittschar, die ein konjugiert komplexes Punktpaar und einen nicht auf dessen Träger liegenden doppeltzählenden Punkt zu Grundkurven hat. Nimmt man andererseits als erste Grundkurve *einer Kegelschnittschar* ein konjugiert komplexes Punktpaar, als zweite Grundkurve einen nicht auf dessen Träger liegenden doppelt zählenden Punkt an und gibt dem

1) Zeichnerisch erhält man die Kurven des Büschels am leichtesten, indem man ein System konzentrischer Kreise mit ihrem Mittelpunkt und der unendlich fernen Geraden perspektiv kollinear abbildet; dann gehen die konzentrischen Kreise in die Kurven des Büschels, ihr gemeinsamer Mittelpunkt in den Träger e_3 des konjugiert komplexen Linienpaares und die unendlich ferne Gerade in die Doppellinie E_3 des Büschels über. Dies Verfahren ist beim Entwurf der obigen Fig. 25 verwendet worden.

Bruche für das konjugiert komplexe Punktpaar die Form (vgl. die Gleichung (58) des dreiunddreißigsten Abschnitts):

$$(22) \qquad \boldsymbol{E} = \frac{e_1,\ e_2,\ 0}{E_1,\ E_2,\ E_3},$$

dem Bruche für den doppeltzählenden Punkt aber wie oben in (6) die Darstellung:

$$(23) \qquad \boldsymbol{D} = \frac{0,\ 0,\ e_3}{E_1,\ E_2,\ E_3},$$

so findet man für die durch diese beiden Polarsysteme zweiter Klasse $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{D}$ bestimmte Schar von Polarsystemen die Vielfachensumme:

$$(24) \qquad \boldsymbol{P} = \mathfrak{f}\boldsymbol{D} + \mathfrak{g}\boldsymbol{E},$$

oder wegen (22) und (23) den Bruch:

$$(25) \qquad \boldsymbol{P} = \frac{\mathfrak{g}e_1,\ \mathfrak{g}e_2,\ \mathfrak{f}e_3}{E_1,\ E_2,\ E_3}.$$

Dieser Bruch aber zeigt, daß die Schar (24) die Gesamtheit der Kurven zweiter Klasse enthält, die den Punkt e_3 zum Pol der Geraden E_3 haben und überdies auf der Geraden E_3 die elliptische Punktinvolution:

$$(26) \qquad \mathfrak{e} = \frac{e_2,\ -e_1}{e_1,\ e_2}$$

hervorrufen, was man genau so wie bei der dualistisch entsprechenden Entwicklung begründen kann (vgl. wieder Fig. 25): Und umgekehrt gehören sämtliche Kurven dieser Art der Kegelschnittschar (24) an, und darunter als zerfallende Kurven zweiter Klasse jenes konjugiert komplexe Punktpaar selbst (für $\mathfrak{f} = 0$) und jener doppelt zählende Punkt (für $\mathfrak{g} = 0$).

Beziehung zwischen diesem Kegelschnittbüschel und dieser Kegelschnittschar. Dieses Ergebnis zeigt nun wieder, daß zwischen dem Kegelschnittbüschel (18) und der Kegelschnittschar (24) eine enge Beziehung herrscht. Und in der Tat kann man jetzt auch leicht analytisch beweisen, *daß die adjungierten Polarsysteme zu den Polarsystemen des Büschels* (18) *im allgemeinen mit den Polarsystemen der Schar* (24) *identisch sind.* Nur das in der Schar (24) enthaltene konjugiert komplexe Punktpaar $\mathfrak{E}$ läßt sich nicht als adjungiertes Polarsystem zu einem Polarsystem des Büschels (18) auffassen. Bildet man nämlich den Ausdruck $[\boldsymbol{p}^2]$ für das zu (18) adjungierte Polarsystem zweiter Klasse, so erhält man:

$$(27) \qquad [\boldsymbol{p}^2] = [(\mathfrak{f}\boldsymbol{e} + \mathfrak{g}\boldsymbol{d})^2] \quad \text{oder:}$$

$$(28) \qquad [\boldsymbol{p}^2] = \mathfrak{f}^2[\boldsymbol{e}^2] + 2\mathfrak{f}\mathfrak{g}[\boldsymbol{e}\boldsymbol{d}] + \mathfrak{g}^2[\boldsymbol{d}^2].$$

Hierin ist aber nach der Gleichung (39) des dreißigsten Abschnitts:

$$[\boldsymbol{e}^2] = \frac{0,\ 0,\ e_3}{E_1,\ E_2,\ E_3}, \quad \text{d. h. wegen (23):}$$

(29) $$[\boldsymbol{e}^2] = \boldsymbol{D}, \quad \text{ferner wird:}$$

(30) $$[\boldsymbol{d}^2] = 0$$

und endlich nach der Gleichung (36) des dreißigsten Abschnitts (vgl. auch Gleichung (13) des siebenunddreißigsten Abschnitts):

$$[\boldsymbol{e}\boldsymbol{d}] = \frac{\frac{1}{2}[E_2 E_3],\ -\frac{1}{2}[E_1 E_3],\ 0}{E_1,\qquad E_2,\qquad E_3} = \frac{1}{2}\,\frac{e_1,\ e_2,\ 0}{E_1,\ E_2,\ E_3} \quad \text{oder wegen (22):}$$

(31) $$[\boldsymbol{e}\boldsymbol{d}] = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{E}.$$

Der Ausdruck (28) für das zu $\boldsymbol{p}$ adjungierte Polarsystem $[\boldsymbol{p}^2]$ verwandelt sich also in:

(32) $$[\boldsymbol{p}^2] = \mathfrak{f}(\mathfrak{f}\boldsymbol{D} + \mathfrak{g}\boldsymbol{E}) \quad \text{oder wegen (24) in:}$$

(33) $$[\boldsymbol{p}^2] = \mathfrak{f}\boldsymbol{P}.$$

Diese Gleichungen (32) und (33) aber zeigen wirklich, daß die zu den Polarsystemen des Büschels (18) adjungierten Polarsysteme sämtlich der Schar (24) angehören, und daß umgekehrt jedes Polarsystem der Schar (24) mit alleiniger Ausnahme des konjugiert komplexen Punktpaares $\boldsymbol{E}$, das sich aus (24) für $\mathfrak{f} = 0$ ergibt, einem gewissen Polarsysteme des Büschels (18) adjungiert ist.

Elliptisches Scharbüschel und elliptische Büschelschar. Aus diesem Grunde nennen wir wieder das Büschel (18) ein Scharbüschel von Polarsystemen zweiter Ordnung und die Schar (24) eine Büschelschar von Polarsystemen zweiter Klasse. Ferner sagen wir wieder, jenes Scharbüschel und diese Büschelschar habe den Punkt e_3 zum Doppelpunkt und die Linie E_3 zur Doppellinie. Diese Doppellinie bildet dann wegen (19) und (25) hinsichtlich sämtlicher Polarsysteme des Büschels und der Schar die Polare des Doppelpunktes e_3.

Um endlich anzudeuten, daß das in dem Scharbüschel (18) enthaltene einfach entartende Polarsystem zweiter Ordnung $\boldsymbol{e}$ *das Polarsystem einer elliptischen Strahlinvolution* ist (vgl. S. 239f. von Teil I dieses Bandes), wollen wir das Scharbüschel (18) speziell als ein elliptisches Scharbüschel bezeichnen, und entsprechend wollen wir der Büschelschar (24) den Namen einer elliptischen Büschelschar beilegen, weil das in dieser Büschelschar enthaltene einfach entartende Polarsystem zweiter Klasse $\boldsymbol{E}$ *das Polarsystem einer elliptischen Punktinvolution* ist (vgl. S. 247f. von Teil I dieses Bandes). Auch wollen wir sagen, *die elliptische Büschelschar* (24) *sei zu dem elliptischen Scharbüschel* (18) *adjungiert,* und umgekehrt *dieses Scharbüschel sei zu jener Büschelschar adjungiert.*

Bei dem elliptischen Scharbüschel (18) und der elliptischen Büschelschar (24) spielen die konjugiert komplexen Doppelpunkte der elliptischen Punktinvolution $\mathfrak{e}$ und die konjugiert komplexen Doppelstrahlen der elliptischen Strahlinvolution $\mathfrak{E}$ analytisch dieselbe Rolle wie das reelle Punktepaar e_1, e_2 und das reelle Linienpaar E_1, E_2 bei dem hyperbolischen Scharbüschel (3) und der hyperbolischen Büschelschar (7). Hier bildeten ferner die Punkte e_1, e_2 die gemeinsamen Berührungspunkte, und die Geraden E_1, E_2 die gemeinsamen Tangenten der Kurven des hyperbolischen Scharbüschels und der hyperbolischen Büschelschar in jenen Punkten. Man sagt daher wohl auch, die Kurven des elliptischen Scharbüschels (18) und der elliptischen Büschelschar (24) *berühren sich in den konjugiert komplexen Doppelpunkten der elliptischen Punktinvolution* $\mathfrak{e}$ *und haben in ihnen die konjugiert komplexen Doppelstrahlen der Strahlinvolution* $\mathfrak{E}$ *zu Tangenten.* Dabei ist der Träger der reellen oder konjugiert komplexen Berührungspunkte die in dem Scharbüschel enthaltene Doppellinie, und ihr gemeinsamer Pol hinsichtlich des Scharbüschels oder der Büschelschar der in der Büschelschar vorkommende doppeltzählende Punkt.

Die neue Ausdrucksweise zeigt sich gelegentlich als vorteilhaft, wenn es sich darum handelt, gemeinschaftlichen Eigenschaften des hyperbolischen und elliptischen Scharbüschels oder der entsprechenden Büschelscharen auch einen gemeinsamen Wortausdruck zu verleihen.

Die zweipunktige Berührung zweier Kurven zweiter Ordnung. Der Übergang vom hyperbolischen zum elliptischen Scharbüschel und ebenso von der hyperbolischen zur elliptischen Büschelschar wird durch ein Büschel und eine Schar vermittelt, die man als parabolisches Scharbüschel und parabolische Büschelschar bezeichnen kann. Um diese Gebilde einzuführen, schicken wir eine Untersuchung über zweipunktige, dreipunktige und vierpunktige Berührung zweier Kurven zweiter Ordnung voraus.

Es seien also zwei Kurven zweiter Ordnung betrachtet, die sich an einer Stelle in gewöhnlicher Weise berühren, indem an dieser Stelle zwei von ihren vier Schnittpunkten, *wir bezeichnen sie als den ersten und zweiten Schnittpunkt,* in *einen* Punkt zusammengerückt sind. Wir sagen dann, daß die beiden Kurven an jener Stelle sich zweipunktig berühren oder eine Berührung erster Ordnung miteinander haben. Außerdem wollen wir von diesen Kurven noch voraussetzen, daß sie nicht zerfallen.

Dieser Fall einer Berührung erster Ordnung zwischen zwei Kurven zweiter Ordnung wurde bereits im ersten Teile dieses Bandes auf S. 322f. bei der Untersuchung eines Kegelschnittbüschels behandelt, dessen Grundkurven eine derartige Berührung aufweisen, wobei sich ergab, daß in einem solchen Kegelschnittbüschel zwei Linienpaare enthalten sind, von denen sicher eins reell ist. Dieses letztere wird aus der gemeinsamen Tangente der beiden Grundkurven in ihrem Berührungspunkte und dem Träger der beiden reellen oder konjugiert komplexen Punkte gebildet, welche die beiden Grundkurven des Büschels außer ihrem Berührungspunkte miteinander gemein haben. *Wir nennen diese Punkte für den Augenblick den dritten und vierten Schnittpunkt der beiden Grundkurven.* Das andere Linienpaar hat den Berührungspunkt der beiden Grundkurven zum Scheitel und führt von ihm nach jenem dritten und vierten Schnittpunkt der beiden Kurven.

Bezeichnet man die Polarsysteme der beiden Grundkurven des Büschels mit a und a', so läßt sich nach S. 322f. des ersten Teils dieses Bandes das Polarsystem eines jeden der beiden beschriebenen Linienpaare in der Form:

$$a - \mathfrak{g} a'$$

darstellen, wo $\mathfrak{g}$ von Null verschieden ist, da nach der obigen Voraussetzung (vgl. S. 41) die Polkurve von a nicht zerfallen soll. Insbesondere erhält man eine solche Darstellung für das erste der beiden genannten Linienpaare. Der Doppelpunkt dieses Linienpaars, er heiße e_1, ist dann ferner nach Satz 420 zu dessen Polarsystem apolar, d. h. es besteht für ihn eine Gleichung von der Form:

$$e_1(a - \mathfrak{g} a') = 0 \quad \text{oder:}$$

$$e_1 a = \mathfrak{g} e_1 a', \tag{34}$$

woraus hervorgeht, daß *der Punkt e_1 in bezug auf die Polarsysteme a und a' der beiden Grundkurven und damit hinsichtlich aller Kurven des Büschels dieselbe Polare hat.*

Wir wählen alsdann die beiden stets reellen Geraden des ersten Linienpaars zu zwei Seiten des Fundamentaldreiecks und bezeichnen etwa die gemeinsame Tangente der Kurven a und a', in ihrem Berührungspunkte gezogen, mit E_2 und den Träger des dritten und vierten Schnittpunktes der Kurven a und a' mit E_3. Der Scheitel dieses Linienpaares wurde dem entsprechend schon oben (S. 33) mit e_1 bezeichnet. Endlich verfügen wir noch über die erste Seite E_1 des Fundamentaldreiecks in der Weise, daß dieses Dreieck ein Polardreieck des zweiten Linienpaars wird. Dazu ist erforderlich, daß

erstens der Doppelpunkt des zweiten Linienpaars, d. h. der Berührungspunkt der Kurven a und a', eine Ecke des Fundamentaldreiecks bilde, — sie ist als Gegenecke von E_3 mit e_3 zu bezeichnen, — und daß

zweitens die durch diesen Punkt e_3 hindurchgehende erste Seite E_1 des Fundamentaldreiecks die Polare ihrer Gegenecke e_1 in bezug auf das zweite Linienpaar sei. Diese Eigenschaft aber hat die gemeinsame

Polare des Punktes e_1 in bezug auf die beiden Grundkurven a und a' des Büschels (Fig. 26).

Unter diesen Voraussetzungen über das Fundamentaldreieck läßt sich nach dem Satze 454 der extensive Bruch für das Polarsystem l_1 des ersten Linienpaars, d. h. des Linienpaars E_2, E_3, in der Form schreiben:

$$l_1 = \frac{0, \; E_3, \; E_2}{e_1, \; e_2, \; e_3} \tag{35}$$

und nach S. 238f. des ersten Teiles dieses Bandes der extensive Bruch für das Polarsystem l_2 des zweiten Linienpaares in der Form:

$$l_2 = \frac{a_{11} E_1, \; a_{22} E_2, \; 0}{e_1, \quad e_2, \quad e_3}, \tag{36}$$

wo das Linienpaar getrennt reell oder konjugiert komplex ist, je nach-

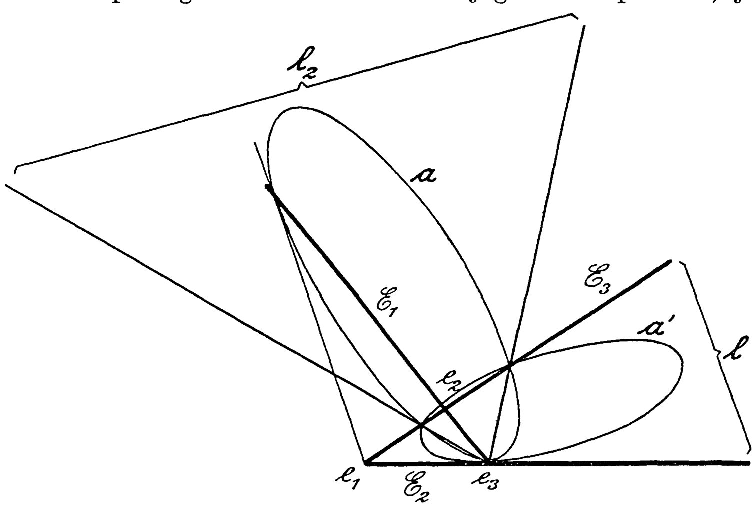


Fig. 26.

dem die Koeffizienten a_{11} und a_{22} entgegengesetztes oder gleiches Vorzeichen haben.

Die Polarsysteme a und a' der beiden Grundkurven des Büschels müssen sich daher in der Form darstellen lassen:

$$\begin{cases} a = l_2 + a_{23} l_1 \\ a' = l_2 + a'_{23} l_1 \end{cases} \tag{37}$$

oder mit Rücksicht auf die Werte (35) und (36) durch die extensiven Brüche:

$$\begin{cases} a = \dfrac{a_{11} E_1, \; a_{22} E_2 + a_{23} E_3, \; a_{32} E_2}{e_1, \quad e_2, \quad e_3}, \quad a_{32} = a_{23}, \\ a' = \dfrac{a_{11} E_1, \; a_{22} E_2 + a'_{23} E_3, \; a'_{32} E_2}{e_1, \quad e_2, \quad e_3}, \quad a'_{32} = a'_{23}, \end{cases} \tag{38}$$

und die Gleichungen ihrer Polkurven lauten somit:

$$(39)\qquad \begin{cases} a_{11}\mathfrak{x}_1^2 + a_{22}\mathfrak{x}_2^2 + 2a_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 = 0 \\ a_{11}\mathfrak{x}_1^2 + a_{22}\mathfrak{x}_2^2 + 2a'_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 = 0. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen müssen übrigens die Koeffizienten a_{11}, a_{23}, a'_{23} von Null verschieden sein, weil sonst in einem der Brüche (38) oder in beiden ein Zähler verschwinden würde, was ein Zerfallen der zugehörigen Polkurve zur Folge hätte. Ein solches aber haben wir oben (S. 41) ausgeschlossen.

Natürlich kann man die Gleichungsformen (39) der beiden Grundkurven auch leicht aus der allgemeinen Gleichung zweiten Grades unter Berücksichtigung der besonderen Lage des Fundamentaldreiecks ableiten. In der Tat sieht man sogleich, daß in den allgemeinen Gleichungen zweiten Grades für die Kurven α und α', d. h. in den Gleichungen:

$$(40)\qquad \begin{cases} a_{11}\mathfrak{x}_1^2 + a_{22}\mathfrak{x}_2^2 + a_{33}\mathfrak{x}_3^2 + 2a_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + 2a_{31}\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1 + 2a_{12}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = 0, \\ a'_{11}\mathfrak{x}_1^2 + a'_{22}\mathfrak{x}_2^2 + a'_{33}\mathfrak{x}_3^2 + 2a'_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + 2a'_{31}\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1 + 2a'_{12}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = 0, \end{cases}$$

jedesmal drei Koeffizienten verschwinden müssen. Dazu bezeichne man noch die zu den Nennern e_i gehörigen Zähler der extensiven Brüche für die Polarsysteme α und α' mit A_i und A'_i, $i = 1, 2, 3$, setze also:

$$(41)\qquad \alpha = \frac{A_1,\, A_2,\, A_3}{e_1,\, e_2,\, e_3} \quad \text{und} \quad \alpha' = \frac{A_1',\, A_2',\, A_3'}{e_1,\, e_2,\, e_3},$$

wo dann die Koeffizienten a_{ik} und a'_{ik} aus (40) zugleich die Ableitzahlen der Stäbe A_i und A_i' sind, und wo:

$$a_{ki} = a_{ik} \quad \text{und} \quad a'_{ki} = a'_{ik} \quad \text{ist.}$$

Aus der Tatsache, daß die Ecke e_3 des Fundamentaldreiecks den beiden Kurven α und α' angehört, folgert man dann nach dem Satze 448, daß:

$$(42)\qquad a_{33} = 0 \quad \text{und} \quad a'_{33} = 0$$

sein muß.

Da ferner die Seite E_2 die Tangente der Kurven α und α' im Punkte e_3 bildet, so müssen die Polaren von e_3 in bezug auf $\alpha\alpha'$, das heißt die zu e_3 gehörenden Zähler A_3 und A_3' der Brüche α und α', mit E_2 zusammenfallen, es muß also:

$$A_3 = a_{32}E_2 \quad \text{und} \quad A_3' = a'_{32}E_2$$

sein, woraus folgt, daß:

$$(43)\qquad a_{31} = 0 \quad \text{und} \quad a'_{31} = 0 \qquad \text{ist.}$$

Und da endlich der Punkt e_2 auf der gemeinsamen Polare des Punktes e_1 in bezug auf die Kurven α und α' liegt (vgl. S. 42), die Ecken e_1 und

c_2 somit hinsichtlich beider Kurven konjugiert sind, so wird nach dem Satze 449 auch:

(44) $$a_{12} = 0 \quad \text{und} \quad a'_{12} = 0.$$

Man findet daher vorläufig aus den Gleichungen (40) für die Polkurven der beiden Polarsysteme α und α' die Gleichungsformen:

(45) $$\begin{cases} a_{11}\mathfrak{x}_1{}^2 + a_{22}\mathfrak{x}_2{}^2 + 2a_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 = 0, \\ a'_{11}\mathfrak{x}_1{}^2 + a'_{22}\mathfrak{x}_2{}^2 + 2a'_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 = 0. \end{cases}$$

Doch ist in diesen Gleichungen die Forderung noch nicht zum Ausdruck gebracht, daß die Gerade E_3 mit dem Träger des dritten und vierten Schnittpunktes der beiden Kurven α und α' zusammenfallen soll; denn den Gleichungen (44) zufolge könnte der Punkt e_2 noch durch einen beliebigen Punkt der gemeinsamen Polare des Punktes e_1 in bezug auf α und α' gebildet werden, die Gerade E_3 also durch eine beliebige Gerade, die durch den Punkt e_1 hindurchgeht (Fig. 27).

Um nun aber die Vereinfachungen zu finden, die die Gleichungen (45) erfahren, wenn man der genannten Forderung hinsichtlich der Lage von E_3 Rechnung trägt (vgl. die obige Fig. 26), leite man aus den Gleichungen (45) durch lineare Verknüpfung die Gleichung des in dem Büschel enthaltenen Linienpaares ab, das aus der gemeinsamen Tangente E_2 und dem Träger des dritten und vierten Schnittpunktes der Kurven α und α' gebildet wird. Da dieses Linienpaar den Punkt e_1 zum Scheitel hat, so muß seine Gleichung, wenn sie durch irgendeinen Punkt der Ebene befriedigt wird, auch durch jeden weiteren Punkt erfüllt werden, dessen Koordinaten sich von denen jenes Punktes nur durch den Wert von $\mathfrak{x}_1$ unterscheiden. Daraus folgt, daß die Gleichung des Linienpaares von $\mathfrak{x}_1$ frei sein muß. Man erhält daher die gewünschte Gleichung, wenn man die Gleichungen (45) mit a'_{11} und $-a_{11}$ multipliziert und dann addiert, wodurch sich die Gleichung ergibt:

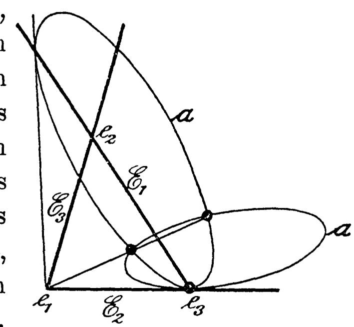


Fig. 27.

(46) $$\mathfrak{x}_2\{(a'_{11}a_{22} - a_{11}a'_{22})\mathfrak{x}_2 + 2(a'_{11}a_{23} - a_{11}a'_{23})\mathfrak{x}_3\} = 0.$$

Diese Gleichung entspricht dann immer noch der durch die Fig. 27 dargestellten Lage des Fundamentaldreiecks. Soll indes die Seite E_3 des Fundamentaldreiecks die besondere Lage der Fig. 26 haben, so wird die Gleichung (46) das Linienpaar E_2, E_3 darstellen und daher die Form

(47) $$\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 = 0$$

annehmen müssen, wozu erforderlich ist, daß sich der zweite Faktor der linken Seite von (46) auf seinen zweiten Summanden reduziere. Es muß also die Gleichung bestehen:

$$a'_{11} a_{22} - a_{11} a'_{22} = 0,$$

die man auch als Proportion, nämlich in der Form schreiben kann:

$$(48) \qquad a'_{11} : a'_{22} = a_{11} : a_{22},$$

und man wird daher die zweite Gleichung (45) durch Multiplikation mit einem passenden konstanten Faktor auch auf die Form der zweiten Gleichung (39) bringen können, bei der die Koeffizienten von $\mathfrak{x}_1{}^2$ und $\mathfrak{x}_2{}^2$ mit denen in der ersten Gleichung (39) übereinstimmen.

Damit ist von neuem gezeigt, daß die beiden sich zweipunktig berührenden Kurven a und a' bei der Verwendung des in der Fig. 26 zugrunde gelegten Fundamentaldreiecks sich durch zwei Gleichungen von der Form (39) darstellen lassen. Man hat also den Satz:

Satz 598: Besitzen zwei Kurven zweiter Ordnung in der Ecke e_3 des Fundamentaldreiecks eine zweipunktige Berührung und haben sie seine Seite E_2 zur gemeinschaftlichen Tangente in ihrem Berührungspunkte, ist ferner die Verbindungslinie der beiden anderen gemeinsamen Punkte beider Kurven zur Seite E_3 des Fundamentaldreiecks gewählt und die gemeinsame Polare des Schnittpunktes e_1 von E_2 und E_3 in bezug auf beide Kurven zur Seite E_1 des Fundamentaldreiecks, so lassen sich die Gleichungen beider Kurven in der Form darstellen:

$$(39) \qquad \begin{cases} a_{11} \mathfrak{x}_1{}^2 + a_{22} \mathfrak{x}_2{}^2 + 2 a_{23} \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3 = 0 \\ a_{11} \mathfrak{x}_1{}^2 + a_{22} \mathfrak{x}_2{}^2 + 2 a'_{23} \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3 = 0. \end{cases}$$

Zwei Kurven zweiter Ordnung in zweimaliger zweipunktiger Berührung. Eine besondere Betrachtung verdient noch der Fall, wo das Linienpaar l_2 (vgl. 43) in eine doppeltzählende Gerade übergeht, so daß in der Fig. 26 auch der dritte und vierte Schnittpunkt der beiden Kurven a und a' in einen Punkt zusammenrücken, die Gerade E_3 sich also ebenfalls in eine gemeinsame Tangente der beiden Kurven verwandelt, und der Punkt e_2 zu einem zweiten Berührungspunkt beider Kurven wird, während die gemeinsame Polare E_1 des Punktes e_1 in bezug auf die beiden Kurven mit jener doppeltzählenden Geraden zusammenfällt und somit die Berührungssekante der beiden sich in den Punkten e_3 und e_2 zweipunktig berührenden Kurven zweiter Ordnung darstellt (Fig. 28). Der Übergang des Linienpaares l_2 in die doppeltzählende Gerade E_1 vollzieht sich analytisch sehr einfach, indem in der Gleichung (36) der Koeffizient

$$(49) \qquad a_{22} = 0$$

gesetzt wird, wodurch diese Gleichung die Form annimmt:

$$(50) \qquad l_2 = \frac{a_{11} E_1,\ 0,\ 0}{e_1,\ \ e_2,\ e_3},$$

und die Gleichungen (39) der beiden Kurven a und a' übergehen in:

(51)
$$\begin{cases} a_{11}\mathfrak{x}_1^2 + 2a_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 = 0 \\ a_{11}\mathfrak{x}_1^2 + 2a'_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen (51) sind daher die Gleichungen zweier Kurven zweiter Ordnung, die in den Ecken e_2 und e_3 des Fundamentaldreiecks eine Berührung erster Ordnung aufweisen, und bei denen sich die gemeinsamen

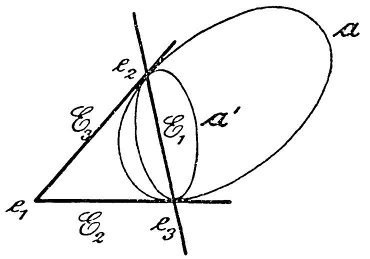


Fig. 28.

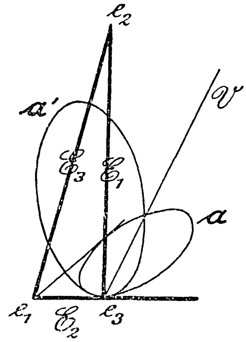


Fig. 29.

Tangenten, in den Berührungspunkten gezogen, in der Ecke e_1 des Fundamentaldreiecks schneiden. Damit ist zugleich eine Bestätigung des Satzes 453 gewonnen.

Die dreipunktige Berührung zweier Kurven zweiter Ordnung. Will man aus der Fig. 26 für eine zweipunktige Berührung zweier Kurven zweiter Ordnung a und a' den Fall einer dreipunktigen Berührung oder, wie man auch sagt, einer Berührung zweiter Ordnung oder Oskulation ableiten, so halte man den Berührungspunkt e_3 der beiden sich zweipunktig berührenden Kurven nebst der in ihm gezogenen gemeinschaftlichen Tangente E_2 der beiden Kurven fest, lasse aber noch einen von den beiden anderen gemeinsamen Punkten beider Kurven mit dem Berührungspunkte e_3 zusammenfallen.

Dann kann man aber nicht mehr wie bisher die Ecke e_1 des Fundamentaldreiecks in den Schnittpunkt der Geraden E_2 mit dem Träger des dritten und vierten Schnittpunktes der beiden Kurven verlegen; denn dieser Schnittpunkt fällt mit dem Berührungspunkt e_2 beider Kurven zusammen. Man lasse daher den Punkt e_1 auf der Geraden E_2 willkürlich. Dadurch wird freilich die Forderung unerfüllbar, daß der Punkt e_2 zum Punkte e_1 in bezug auf die beiden Kurven a und a' gleichzeitig konjugiert sein sollte. Doch kann man wenigstens noch den Punkt e_2 auf der Polare des Punktes e_1 in bezug auf die Kurve a annehmen (Fig. 29), und die Gleichung der Kurve a hat daher immer noch die in der ersten Gleichung (45) angegebene Form:

(52)
$$a_{11}\mathfrak{x}_1^2 + a_{22}\mathfrak{x}_2^2 + 2a_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 = 0,$$

wogegen die zweite Gleichung (45) und die zweite Gleichung (44) ihre Gültigkeit verlieren, so daß die Gleichung der Kurve α' die Form erhält:

$$(*) \qquad a_{11}\mathfrak{x}_1^2 + a'_{22}\mathfrak{x}_2^2 + 2a'_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + 2a'_{12}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = 0.$$

Dabei ist durch Multiplikation mit einem passenden Faktor sogleich dafür gesorgt, daß der Koeffizient von $\mathfrak{x}_1^2$ in der Gleichung (*) mit dem entsprechenden Koeffizienten der Gleichung (52) übereinstimmt.

Dann ist noch immer in dem durch die beiden Kurven (52) und (*) bestimmten Kegelschnittbüschel das Linienpaar enthalten, das aus der gemeinsamen Tangente E_3 der beiden Kurven α und α', in ihrem Berührungspunkte e_3 gezogen, und der Verbindungslinie V des Punktes e_3 mit dem noch verbleibenden weiteren Schnittpunkt besteht, den die beiden Kurven außer ihrem dreifach rechnenden Berührungspunkt e_3 gemein haben. Die Gleichung dieses Linienpaares kann man leicht dadurch gewinnen, daß man aus den Gleichungen (52) und (*) eine neue Gleichung ableitet, die den Faktor $\mathfrak{x}_2$ enthält. Man erreicht dies, indem man die Gleichung (*) von der Gleichung (52) subtrahiert, wodurch sich die Gleichung ergibt:

$$(**) \qquad \mathfrak{x}_2\{(a_{22} - a'_{22})\mathfrak{x}_2 + 2(a_{23} - a'_{23})\mathfrak{x}_3 - 2a'_{12}\mathfrak{x}_1\} = 0.$$

Diese Gleichung des Linienpaares zerfällt in die beiden Gleichungen:

$$(53) \qquad \mathfrak{x}_2 = 0 \quad \text{und}$$

$$(***) \qquad (a_{22} - a'_{22})\mathfrak{x}_2 + 2(a_{23} - a'_{23})\mathfrak{x}_3 - 2a'_{12}\mathfrak{x}_1 = 0.$$

Da aber die Gleichung (***) die Gleichung einer Geraden ist, die durch den Punkt e_3 hindurchgeht, also erfüllt werden muß, wenn man:

$$\mathfrak{x}_1 = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}_2 = 0$$

setzt, aber $\mathfrak{x}_3$ beliebig läßt, so muß für beliebiges $\mathfrak{x}_3$ die Gleichung bestehen:

$$2(a_{23} - a'_{23})\mathfrak{x}_3 = 0,$$

woraus folgt, daß

$$a'_{23} = a_{23}$$

sein muß. Die Gleichung der Kurve α' nimmt daher die Form an:

$$(54) \qquad a_{11}\mathfrak{x}_1^2 + a'_{22}\mathfrak{x}_2^2 + 2a_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + 2a'_{12}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = 0,$$

und die Gleichung (***) der Geraden V verkürzt sich zu:

$$(55) \qquad (a_{22} - a'_{22})\mathfrak{x}_2 - 2a'_{21}\mathfrak{x}_1 = 0.$$

Sie stellt die Verbindungslinie V des Berührungspunktes e_3 der Kurven α und α' mit dem einzigen neben ihm noch übrig gebliebenen Schnittpunkte beider Kurven dar.

Die Gleichungen (52), (54) und (55) erfahren noch eine weitere Vereinfachung, wenn man die Ecke e_2 des Fundamentaldreiecks in den soeben genannten noch übrig gebliebenen Schnittpunkt der Kurven α und

a' verlegt. Dann wird der Punkt e_1, der nach dem Obigen zu e_2 in bezug auf a konjugiert sein sollte, der Schnittpunkt der Geraden E_1 mit der Tangente in e_2 an die Kurve a gezogen (Fig. 30), und es wird mit Rücksicht auf die Lage von e_2:

$$(56) \qquad a_{22} = 0 \quad \text{und} \quad a'_{22} = 0.$$

Die Gleichungen (52) und (54) der Kurven a und a' nehmen also die Form an:

$$(57) \qquad a_{11}\mathfrak{x}_1{}^2 + 2a_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 = 0 \quad \text{und}$$

$$(58) \qquad a_{11}\mathfrak{x}_1{}^2 + 2a_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + 2a'_{12}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = 0,$$

und man hat den Satz:

Satz 599: Besitzen zwei Kurven zweiter Ordnung a und a' in der Ecke e_3 des Fundamentaldreiecks eine dreipunktige Berührung, und wählt man den Punkt, den die beiden Kurven außer dem dreifach zählenden Berührungspunkt miteinander gemein haben, zur Ecke e_2 des Fundamentaldreiecks und den Schnittpunkt der Tangenten der Kurve a, in den Punkten e_3 und e_2 gezogen, zur Ecke e_1 dieses Dreiecks, so lassen sich die Gleichungen der Kurven a und a' in der Form darstellen:

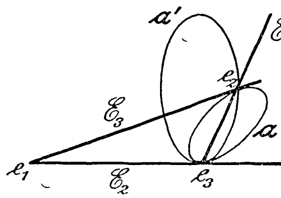


Fig. 30.

$$(57) \qquad a_{11}\mathfrak{x}_1{}^2 + 2a_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 = 0 \quad \text{und}$$

$$(58) \qquad a_{11}\mathfrak{x}_1{}^2 + 2a_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + 2a'_{12}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = 0.$$

Dieses Ergebnis läßt sich leicht bestätigen. Denn die Gleichungsform (57) der Kurve a entspricht wieder dem Satze 453 in Teil 1 dieses Bandes, und die Gleichungsform (58) der Kurve a' drückt die Tatsache aus, daß die Kurve a' eine beliebige Kurve des Kegelschnittbüschels bildet, das durch die Kurve a (Gleichung (57)) und durch das Linienpaar der beiden Seiten E_1 und E_2 des Fundamentaldreiecks bestimmt wird. In der Tat lautet die Gleichung dieses Linienpaares:

$$(59) \qquad \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = 0,$$

und die linke Seite von (58) geht aus den linken Seiten der Gleichungen (57) und (59) durch lineare Verknüpfung hervor.

Die vierpunktige Berührung zweier Kurven zweiter Ordnung. Die ursprünglich entwickelten Gleichungsformen (52) und (54) der sich dreifach berührenden Kurven a und a' erweisen sich als nützlich, wenn man den Übergang zur vierpunktigen Berührung zweier Kurven zweiter Ordnung machen will. Diese Gleichungen entsprachen der in der Fig. 29 angegebenen Lage des Fundamentaldreiecks, bei der die Verbindungsgerade V des dreifach zählenden Berührungspunktes e_3 der Kurven a und a' mit dem vierten Schnittpunkte beider Kurven noch nicht (wie in der Fig. 30) mit der Seite E_1 des Fundamentaldreiecks identisch war, sondern durch die Gleichung:

$$(a_{22} - a'_{22})\mathfrak{x}_2 - 2\,a'_{12}\mathfrak{x}_1 = 0 \tag{55}$$

dargestellt wurde. Man wird daher diese Verbindungsgerade V um den Punkt e_3 drehen können, ohne an dem Fundamentaldreieck und der Kurve a etwas zu ändern, wenn man nur dabei die Kurve a' sich in einer solchen Weise umwandeln läßt, daß die Gerade V eine gemeinsame Sekante der beiden Kurven a und a' bleibt und zugleich die dreipunktige Berührung beider Kurven im Punkte e_3 aufrecht erhalten wird. Insbesondere wird man diese Drehung der Geraden V um den Punkt e_3 so weit fortsetzen können, bis die Gerade V mit der gemeinsamen Tangente E_2 der Kurven a und a' zusammenfällt. Dann rückt der bisher von e_3 verschiedene Schnittpunkt der Geraden V mit der Kurve a an den Berührungspunkt e_3 heran, die dreipunktige Berührung beider Kurven geht also in eine vierpunktige Berührung oder Berührung dritter Ordnung über, und zugleich reduziert sich die Gleichung (55) auf die Form:

$$\mathfrak{x}_2 = 0, \tag{60}$$

so daß also der Koeffizient

$$a'_{12} = 0 \tag{61}$$

wird. Hieraus folgt: Während bei dem beschriebenen Übergang von der dreipunktigen zur vierpunktigen Berührung der Kurven a und a' die Gleichung der Kurve a ihre alte Form beibehält, nämlich nach wie vor lautet:

$$a_{11}\mathfrak{x}_1^2 + a_{22}\mathfrak{x}_2^2 + 2\,a_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 = 0, \tag{62}$$

verkürzt sich die Gleichung (54) der Kurve a' zu der Gleichung

$$a_{11}\mathfrak{x}_1^2 + a'_{22}\mathfrak{x}_2^2 + 2\,a_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 = 0. \tag{63}$$

Man entnimmt aus der Gleichung (61) noch das geometrische Ergebnis, daß die Ecken e_1 und e_2 des Fundamentaldreiecks nicht nur hinsichtlich der Kurve a, sondern auch hinsichtlich der Kurve a' einander konjugiert sind, daß also die zweiten Tangenten, die man außer der Geraden E_2 vom Punkte e_1 an die Kurven a und a' ziehen kann, ihre Berührungspunkte auf der Geraden E_1 haben (Fig. 31). Und da der Punkt e_1 ein ganz beliebiger Punkt der Geraden E_2 war (vgl. S. 47), so hat man den Satz:

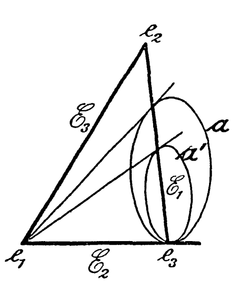


Fig. 31.

Satz 600: Haben zwei Kurven zweiter Ordnung in einem Punkte e_3 eine vierpunktige Berührung, und legt man von einem Punkte der gemeinsamen Tangente ihres Berührungspunktes an die beiden Kurven die zweiten Tangenten, so liegen ihre Berührungspunkte mit dem Berührungspunkte e_3 der vierpunktigen Berührung in einer Geraden.

Ferner kann man den Inhalt der Gleichungen (62) und (63) in der Form aussprechen:

Satz 601: Haben zwei Kurven zweiter Ordnung in der Ecke e_3 des Fundamentaldreiecks eine vierpunktige Berührung, und ist die Seite E_2 dieses Dreiecks die gemeinsame Tangente in diesem Punkte, sind endlich die Ecken e_1 und e_2 des Fundamentaldreiecks hinsichtlich einer und damit (nach Satz 600) auch hinsichtlich der anderen Kurve einander konjugiert, so lassen sich die Gleichungen beider Kurven auf die Form bringen:

(62) $$a_{11}\mathfrak{x}_1^2 + a_{22}\mathfrak{x}_2^2 + 2a_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 = 0$$

und

(63) $$a_{11}\mathfrak{x}_1^2 + a'_{22}\mathfrak{x}_2^2 + 2a_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 = 0.$$

Umgekehrt stellen je zwei Gleichungen von der Form (62) und (63) zwei Kurven zweiter Ordnung dar, die sich in der Ecke e_3 des Fundamentaldreiecks vierpunktig berühren und in dem Berührungspunkte die Seite E_2 dieses Dreiecks zur gemeinsamen Tangente haben.

Man erhält endlich für die Polarsysteme $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{a}'$ der beiden sich vierpunktig berührenden Kurven die Brüche:

(64) $$\boldsymbol{a} = \frac{a_{11}E_1,\ a_{22}E_2 + a_{23}E_3,\ a_{32}E_2}{e_1,\ \ e_2,\ \ e_3}, \quad a_{32} = a_{23},$$

(65) $$\boldsymbol{a}' = \frac{a_{11}E_1,\ a'_{22}E_2 + a_{23}E_3,\ a_{32}E_2}{e_1,\ \ e_2,\ \ e_3}, \quad a_{32} = a_{23},$$

aus deren Form man noch folgern kann, daß die Polarsysteme $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{a}'$ die Summendarstellungen gestatten:

(66) $$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{q} + a_{22}\boldsymbol{d}$$

und

(67) $$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{q} + a'_{22}\boldsymbol{d},$$

in denen $\boldsymbol{q}$ und $\boldsymbol{d}$ wieder zwei Polarsysteme sind, deren extensive Brüche lauten:

(68) $$\boldsymbol{q} = \frac{a_{11}E_1,\ a_{23}E_3,\ a_{32}E_2}{e_1,\ \ e_2,\ \ e_3}, \quad a_{32} = a_{23},$$

und

(69) $$\boldsymbol{d} = \frac{0,\ E_2,\ 0}{e_1,\ e_2,\ e_3}.$$

Von diesen beiden Polarsystemen q und d hat nach dem Satze 453 das Polarsystem q eine Kurve zweiter Ordnung zur Polkurve, die die Seiten E_2 und E_3 des Fundamentaldreiecks zu Tangenten und die Seite E_1 zur Berührungssekante hat, während nach dem Satze 455 die Polkurve des Polarsystems d durch die doppeltzählende Seite E_2 des Fundamentaldreiecks gebildet wird (Fig. 32). Die Summendarstellungen (66) und (67) zeigen dann, daß die beiden sich vierpunktig berührenden Kurven zweiter Ordnung a und a' dem Kegelschnittbüschel angehören, das durch die beiden Polarsysteme q und d bestimmt wird.

Das Kegelschnittbüschel, das eine nicht entartende Kurve zweiter Ordnung und eine sie berührende doppeltzählende Gerade zu Grundkurven hat. Ein beliebiges Polarsystem p des durch die Polarsysteme q und d bestimmten Büschels von Polarsystemen läßt sich durch die Vielfachensumme darstellen:

$$p = \mathfrak{f} q + \mathfrak{g} d, \tag{70}$$

in der $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ zwei Zahlgrößen sind, oder wegen (68) und (69) durch den Bruch:

$$p = \frac{\mathfrak{f} a_{11} F_1,\ \mathfrak{g} F_2 + \mathfrak{f} a_{23} E_3,\ \mathfrak{f} a_{32} E_2}{e_1,\qquad e_2,\qquad e_3}, \quad a_{32} = a_{23}. \tag{71}$$

Die Gleichung seiner Polarkurve lautet daher:

$$\mathfrak{f} a_{11} \mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{g} \mathfrak{x}_2^2 + 2 \mathfrak{f} a_{23} \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3 = 0 \tag{72}$$

und kann, wenn:

$$\mathfrak{f} \neq 0 \tag{73}$$

ist, wenn also die Kurve p von der doppeltzählenden Geraden d verschieden ist, auch in der Form geschrieben werden:

$$a_{11} \mathfrak{x}_1^2 + \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{f}} \mathfrak{x}_2^2 + 2 a_{23} \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3 = 0, \tag{74}$$

in der sie sich von der Gleichung (63) der Kurve a' nur noch dadurch unterscheidet, daß an Stelle des Koeffizienten a'_{22} der Bruch $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{f}}$ steht. Daraus aber folgt nach dem Satze 601, daß eine jede Kurve des Büschels (70) mit alleiniger Ausnahme der doppeltzählenden Geraden d zu der Kurve a in derselben Beziehung steht wie die Kurve a', d. h. mit ihr im Punkte e_3 eine vierpunktige Berührung aufweist und dabei die Gerade E_2 zur gemeinsamen Tangente in dem Berührungspunkte hat (Fig. 33).

Die Polarsysteme zweiter Klasse, die zu den Polarsystemen des betrachteten Kegelschnittbüschels adjungiert sind, gehören einer Schar an. Bildet man zu den Polarsystemen p des Büschels (70) die adjungierten Polarsysteme $[p^2]$, so erhält man für diese Polarsysteme zweiter Klasse die Darstellung:

$$(75)\qquad [p^2] = [(\mathfrak{f}q + \mathfrak{g}d)^2]$$

oder:

$$(76)\qquad [p^2] = \mathfrak{f}^2[q^2] + 2\mathfrak{f}\mathfrak{g}[qd] + \mathfrak{g}^2[d^2].$$

Hierin besitzen nach der Gleichung (39) des 30. Abschnitts die zu q und

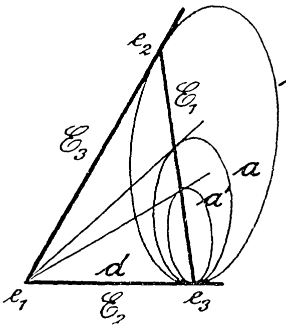


Fig. 32.

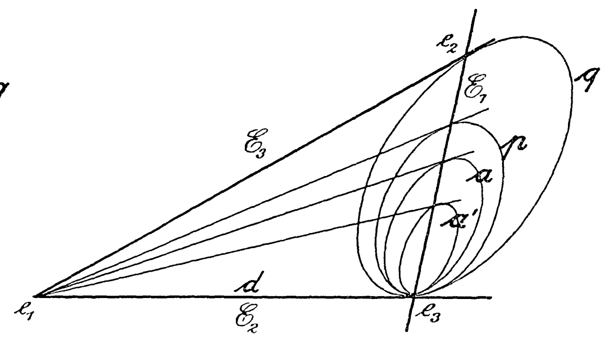


Fig. 33.

d adjungierten Polarsysteme $[q^2] = Q$ und $[d^2]$ mit Rücksicht auf (68) und (69) die Werte:

$$(77)\qquad [q^2] = Q = \frac{-a_{23}^2 e_1,\ -a_{23}a_{11}e_3,\ -a_{23}a_{11}e_2}{E_1,\ \quad E_2,\ \quad E_3}$$

und

$$(78)\qquad [d^2] = 0,$$

und nach der Gleichung (36) des 30. Abschnitts (vgl. auch die obige Gleichung (6)) wird:

$$(79)\qquad [qd] = \frac{0,\ 0,\ \frac{1}{2}a_{11}e_3}{E_1,\ E_2,\ E_3} = \frac{a_{11}}{2}\,\frac{0,\ 0,\ e_3}{E_1,\ E_2,\ E_3} = \frac{a_{11}}{2}\boldsymbol{D},$$

wo $\boldsymbol{D}$ das Polarsystem des doppeltzählenden Berührungspunktes e_3 des Büschels (70) ist. Die Gleichung (76) nimmt daher die Form an:

$$(80)\qquad [p^2] = \mathfrak{f}(\mathfrak{f}Q + \mathfrak{g}a_{11}\boldsymbol{D}),$$

in der nach S. 44:

$$a_{11} \neq 0$$

ist. Diese Gleichung zeigt, daß die adjungierten Polarsysteme des Büschels (70) sämtlich Polarsysteme der Schar:

$$(81)\qquad \boldsymbol{P} = \mathfrak{f}Q + \mathfrak{g}\boldsymbol{D}$$

sind, deren Grundkurven die zur Kurve zweiter Ordnung q adjungierte Kurve zweiter Klasse Q und der doppeltzählende gemeinsame Berührungspunkt e_3 der Kurven des Büschels sind, dessen Polarsystem oben mit $\boldsymbol{D}$ bezeichnet wurde.

Die Abspaltung des Faktors $\mathfrak{f}$ in der Gleichung (80) hat wieder eine ganz entsprechende Bedeutung wie bei dem hyperbolischen und elliptischen Scharbüschel. Sie zeigt nämlich, daß dem Polarsystem $\boldsymbol{d}$ der Doppellinie E_2 des Büschels, welchem nach (70) der Parameterwert $\mathfrak{f} = 0$ zugehört, als adjungiertes Polarsystem kein eigentliches Polarsystem der Schar (81) entspricht, sondern das uneigentliche Polarsystem $[p^2] = 0$ zugeordnet ist, und daß andererseits das in der Schar (81) für $\mathfrak{f} = 0$ enthaltene Polarsystem $\boldsymbol{D}$ des doppeltzählenden gemeinsamen Berührungspunktes e_3 aller Kurven des Büschels (70) sich nicht als adjungiertes Polarsystem zu einem Polarsysteme dieses Büschels auffassen läßt.

Parabolisches Scharbüschel und parabolische Büschelschar. Wegen dieses engen Zusammenhanges des Büschels (70) mit der Schar (81) nennen wir das Büschel (70) ein Scharbüschel von Kurven zweiter Ordnung und die Schar (81) eine Büschelschar von Kurven zweiter Klasse, und zwar speziell ein parabolisches Scharbüschel und eine parabolische Büschelschar (vgl. S. 41).

Ferner bezeichnen wir den Punkt e_3 als den Doppelpunkt, die Linie E_2, die übrigens wegen (71) wieder hinsichtlich sämtlicher Polarsysteme des Büschels und der Schar die Polare des Doppelpunktes e_3 bildet, als die Doppellinie des parabolischen Scharbüschels und der parabolischen Büschelschar.

Weiter sagen wir wieder, *die parabolische Büschelschar* (81) *sei zu dem parabolischen Scharbüschel* (70) *adjungiert* und umgekehrt *dieses zu jenem adjungiert.*

Die Bezeichnung *parabolisch* für das Scharbüschel und die Büschelschar rechtfertigt sich dadurch, daß die Kurven des parabolischen Scharbüschels und der parabolischen Büschelschar auf ihrer Doppellinie und in ihrem Doppelpunkte eine *parabolische Involution* hervorrufen.

Endlich sagt man auch wohl in Übereinstimmung mit S. 40 von zwei Kurven eines parabolischen Scharbüschels oder einer parabolischen Büschelschar, sie hätten in dem Doppelpunkte des Scharbüschels oder der Büschelschar zwei zusammenfallende reelle Berührungspunkte miteinander gemein; das würde also besagen, daß sie sich in diesem Punkte vierpunktig berühren.

Allgemeiner Begriff eines Scharbüschels von Polarsystemen zweiter Ordnung und einer Büschelschar von Polarsystemen zweiter Klasse. Betrachtet man die drei oben untersuchten Vielfachensummen von Polarsystemen zweiter Ordnung:

(3) $$p = \mathfrak{f}\boldsymbol{h} + \mathfrak{g}\boldsymbol{d}$$

(18) $$p = \mathfrak{f}e + \mathfrak{g}\boldsymbol{d}$$

(70) $$p = \mathfrak{f}q + \mathfrak{g}\boldsymbol{d},$$

welche das durch die Polarsysteme $\boldsymbol{h}$ und $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$ und $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{q}$ und $\boldsymbol{d}$ bestimmte hyperbolische, elliptische und parabolische Scharbüschel darstellten und berücksichtigt, daß in dem hyperbolischen Scharbüschel (3) nur die entartenden Polarsysteme $\boldsymbol{h}$ und $\boldsymbol{d}$, in dem elliptischen Scharbüschel (18) nur die entartenden Polarsysteme $\boldsymbol{e}$ und $\boldsymbol{d}$ und in dem parabolischen Scharbüschel (70) nur das entartende Polarsystem $\boldsymbol{d}$ enthalten ist, so kann man hinzufügen, daß die durch die Gleichungen (3), (18) und (70) dargestellten Polarsysteme $\boldsymbol{p}$ nicht entarten können, vorausgesetzt, daß man in den drei Gleichungen die Ableitzahlen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ als von Null verschieden annimmt. Da ferner wegen $\mathfrak{f} \neq 0$ ein jedes von den drei Scharbüscheln auch durch die drei Polarsysteme $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{d}$ bestimmt wird, so sieht man, daß die Vielfachensumme:

$$(82) \qquad \boldsymbol{s} = \mathfrak{p}\boldsymbol{p} + \mathfrak{d}\boldsymbol{d}$$

ganz allgemein der Ausdruck eines Scharbüschels ist, welches ein gewisses nicht entartendes Polarsystem zweiter Ordnung $\boldsymbol{p}$ und das Polarsystem $\boldsymbol{d}$ einer doppeltzählenden Geraden zu Grundsystemen hat, wobei die Doppellinie $\boldsymbol{d}$ von der Kurve $\boldsymbol{p}$ geschnitten, berührt oder überhaupt nicht getroffen werden kann, und wo dementsprechend dann das Scharbüschel hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch sein wird.

Man kann übrigens auch leicht unabhängig vom Vorhergehenden beweisen, daß dabei $\boldsymbol{p}$ ein ganz beliebiges nicht entartendes Polarsystem zweiter Ordnung sein kann, daß also jede Vielfachensumme von der Form:

$$(82) \qquad \boldsymbol{s} = \mathfrak{p}\boldsymbol{p} + \mathfrak{d}\boldsymbol{d},$$

in der $\boldsymbol{d}$ das Polarsystem einer doppeltzählenden Geraden und $\boldsymbol{p}$ ein beliebiges, nicht entartendes Polarsystem zweiter Ordnung ist, die charakteristischen Eigenschaften eines Scharbüschels von Polarsystemen zweiter Ordnung besitzt.

In der Tat erhält man für das zu $\boldsymbol{s}$ adjungierte Polarsystem zweiter Klasse $[\boldsymbol{s}^2]$ den Ausdruck:

$$(83) \qquad [\boldsymbol{s}^2] = \mathfrak{p}^2[\boldsymbol{p}^2] + 2\mathfrak{p}\mathfrak{d}[\boldsymbol{p}\boldsymbol{d}] + \mathfrak{d}^2[\boldsymbol{d}^2].$$

Nun ist aber nach dem Satze 430 das zur Doppellinie $\boldsymbol{d}$ adjungierte Polarsystem:

$$(84) \qquad [\boldsymbol{d}^2] = 0.$$

Ferner wird nach dem Satze 536 das Produkt:

$$(85) \qquad 2[\boldsymbol{p}\boldsymbol{d}] = \boldsymbol{A}$$

ein entartendes Polarsystem zweiter Klasse, dessen Polarkurve das getrennt reelle, zusammenfallend reelle oder konjugiert komplexe Schnittpunkt-paar der Kurve $\boldsymbol{p}$ und der Geraden $\boldsymbol{d}$ ist. Bezeichnet man daher noch das zu $\boldsymbol{p}$ adjungierte Polarsystem zweiter Klasse mit $\boldsymbol{P}$, setzt also:

$$(86) \qquad [\boldsymbol{p}^2] = \boldsymbol{P},$$

so nimmt die Gleichung (83) die Form an:

$$(87) \qquad [\boldsymbol{s}^2] = \mathfrak{p}(\mathfrak{p}\boldsymbol{P} + \mathfrak{d}\boldsymbol{A}),$$

welche zeigt, daß die adjungierten Polarsysteme des Büschels (82) sämtlich der Schar:

$$(88) \qquad \mathfrak{p}\boldsymbol{P} + \mathfrak{d}\boldsymbol{A}$$

angehören. Damit aber ist das Büschel (82) als Scharbüschel charakterisiert.

Dabei hat entsprechend wie in den drei vorausgeschickten Spezialfällen eines Scharbüschels die Abspaltung des Zahlfaktors $\mathfrak{p}$ in der Gleichung (87) die folgende Bedeutung: Der Doppellinie $\boldsymbol{d}$ des Büschels (82), welcher nach der Gleichung (82) der Parameterwert $\mathfrak{p} = 0$ zugehört, während zugleich $\mathfrak{d} \neq 0$ ist, entspricht als adjungiertes Polarsystem kein eigentliches Polarsystem der Schar (88), sondern wegen (87) das uneigentliche Polarsystem $[\boldsymbol{s}^2] = 0$. Andererseits läßt sich das in der Schar (88) für $\mathfrak{p} = 0$, $\mathfrak{d} \neq 0$ enthaltene Punktpaar:

$$\boldsymbol{A} = 2[\boldsymbol{p}\boldsymbol{d}]$$

nicht als adjungiertes Polarsystem zu einem Polarsystem des Büschels (82) auffassen: denn für $\mathfrak{p} = 0$ verwandelt sich die Gleichung (87) eben in $[\boldsymbol{s}^2] = 0$.

Man kann noch hinzufügen: Jedes nicht entartende Kegelschnittbüschel, das unter seinen Kurven eine Doppellinie enthält, ist ein Scharbüschel von Kurven zweiter Ordnung. Denn wählt man zu Grundkurven des Kegelschnittbüschels eine in ihm vorkommende nicht entartende Kurve zweiter Ordnung $\boldsymbol{p}$ und jene Doppellinie $\boldsymbol{d}$, so erhält man für das Kegelschnittbüschel gerade eine Vielfachensumme von der Form (82), durch die nach dem Obigen ein Kegelschnitt als Scharbüschel von Kurven zweiter Ordnung gekennzeichnet war. Und da auch umgekehrt nach der Gleichung (82) jedes Scharbüschel $\boldsymbol{s}$ eine Doppellinie $\boldsymbol{d}$ enthält, *so kann man allgemein ein Scharbüschel von Kurven zweiter Ordnung auch charakterisieren als ein nicht entartendes Kegelschnittbüschel, das unter seinen Kurven eine Doppellinie enthält.*

Aus der Darstellung (82) eines Scharbüschels leitet man leicht eine allgemeine Eigenschaft eines Scharbüschels ab, wenn man die Geraden aufsucht, die einem beliebigen Punkte y der Doppellinie $\boldsymbol{d}$ durch die Polarsysteme $\boldsymbol{s}$ des Scharbüschels (82) als Polaren zugewiesen werden. Da nämlich nach S. 215 des ersten Teils dieses Bandes ein jeder Punkt y

der Doppellinie des Scharbüschels zu dem Polarsystem $\boldsymbol{d}$ dieser Doppellinie apolar ist, also der Gleichung:

$$yd = 0 \tag{89}$$

genügt, so erhält man für die Polare ys eines solchen Punktes y hinsichtlich einer beliebigen Kurve s des Scharbüschels den Ausdruck:

$$ys = \mathfrak{p}yp. \tag{90}$$

Die Polaren ys eines beliebigen Punktes y der Doppellinie $\boldsymbol{d}$ des Scharbüschels (82), genommen in bezug auf die Kurven z des Scharbüschels, fallen also sämtlich mit der Polare yp des Punktes y hinsichtlich des Polarsystems p zusammen. Und diese Polare yp geht nach der zweiten Grundeigenschaft des Polarsystems (Satz 394) durch den Pol $\boldsymbol{D}$ der Geraden $\boldsymbol{d}$ hinsichtlich des Polarsystems p hindurch (Fig. 34). Dieser Pol aber ist, wie oben für alle drei Fälle des Scharbüschels bewiesen ist (vgl. S. 35, 40 u. 54), der Doppelpunkt des Scharbüschels, und er ist zugleich auch hinsichtlich sämtlicher Kurven s des Scharbüschels der Doppellinie $\boldsymbol{d}$ des Scharbüschels als Pol zugeordnet. Man hat also den Satz:

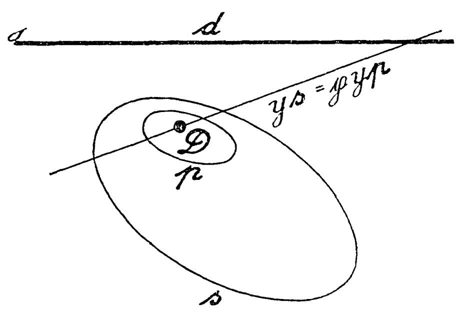


Fig. 34.

Satz 602: Die Polaren eines jeden Punktes der Doppellinie eines Scharbüschels von Kurven zweiter Ordnung, genommen hinsichtlich der Kurven des Scharbüschels, fallen in eine und dieselbe Gerade zusammen, die durch den Doppelpunkt des Scharbüschels hindurchgeht.

Geht man andererseits von den drei Vielfachensummen:

$$\boldsymbol{P} = \mathfrak{f}\boldsymbol{D} + \mathfrak{g}\boldsymbol{H} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{P} = \mathfrak{f}\boldsymbol{D} + \mathfrak{g}\boldsymbol{E} \tag{24}$$

$$\boldsymbol{P} = \mathfrak{f}\boldsymbol{Q} + \mathfrak{h}\boldsymbol{D} \tag{81}$$

aus, welche die durch die Polarsysteme $\boldsymbol{D}$ und $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$ und $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{Q}$ und $\boldsymbol{D}$ bestimmte hyperbolische, elliptische und parabolische Büschelschar darstellten, und berücksichtigt, daß in der hyperbolischen Büschelschar (7) nur die entartenden Polarsysteme $\boldsymbol{D}$ und $\boldsymbol{H}$, in der elliptischen Büschelschar (24) nur die entartenden Polarsysteme $\boldsymbol{D}$ und $\boldsymbol{E}$ und in der parabolischen Büschelschar (81) nur das entartende Polarsystem $\boldsymbol{D}$ enthalten ist, so kann man hinzufügen, daß die durch die Gleichungen (7), (24) und (81) dargestellten Polarsysteme nicht entarten können, vorausgesetzt, daß man in den drei Gleichungen die Ableitzahlen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ als von Null verschieden annimmt. Da ferner diese Büschelschar, wenn der Koeffizient von $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{Q}$ ungleich Null ist, auch durch die Polarsysteme $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{D}$ bestimmt wird, so sieht man, daß die Vielfachensumme:

$$\boldsymbol{B} = \mathfrak{p}\boldsymbol{P} + \mathfrak{d}\boldsymbol{D} \tag{91}$$

ganz allgemein der Ausdruck einer Büschelschar ist, welche ein gewisses nicht entartendes Polarsystem zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$ und das Polarsystem $\boldsymbol{D}$ eines doppeltzählenden Punktes zu Grundsystemen hat, wobei der doppeltzählende Punkt außerhalb, auf oder innerhalb der Kurve $\boldsymbol{P}$ liegen kann, und wo dementsprechend die Büschelschar hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch sein wird.

Man kann übrigens wiederum auch leicht beweisen, daß dabei $\boldsymbol{P}$ ein ganz beliebiges nicht entartendes Polarsystem zweiter Klasse sein kann, daß also jede Vielfachensumme von der Form:

$$\boldsymbol{B} = \mathfrak{p}\boldsymbol{P} + \mathfrak{d}\boldsymbol{D}, \tag{91}$$

in der $\boldsymbol{D}$ das Polarsystem eines doppeltzählenden Punktes und $\boldsymbol{P}$ ein beliebiges nicht entartendes Polarsystem zweiter Klasse ist, die charakteristischen Eigenschaften einer Büschelschar von Polarsystemen zweiter Klasse besitzt.

In der Tat erhält man für das zu $\boldsymbol{B}$ adjungierte Polarsystem zweiter Ordnung $[\boldsymbol{B}^2]$ den Ausdruck:

$$[\boldsymbol{B}^2] = \mathfrak{p}^2[\boldsymbol{P}^2] + 2\mathfrak{p}\mathfrak{d}[\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}] + \mathfrak{d}^2[\boldsymbol{D}^2]. \tag{92}$$

Nun ist aber nach dem Satze 442 das zum Doppelpunkt $\boldsymbol{D}$ adjungierte Polarsystem:

$$[\boldsymbol{D}^2] = 0. \tag{93}$$

Ferner wird nach dem Satze 545 das Produkt:

$$2[\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}] = \boldsymbol{a} \tag{94}$$

ein entartendes Polarsystem zweiter Ordnung, dessen Polkurve das getrennt reelle, zusammenfallend reelle oder konjugiert komplexe Tangentenpaar ist, das sich vom Punkte $\boldsymbol{D}$ an die Kurve $\boldsymbol{P}$ legen läßt. Bezeichnet man daher noch das zu $\boldsymbol{P}$ adjungierte Polarsystem zweiter Ordnung mit $\overline{\boldsymbol{p}}$, setzt also:

$$[\boldsymbol{P}^2] = \overline{\boldsymbol{p}}, \tag{95}$$

so nimmt die Gleichung (92) die Form an:

$$[\boldsymbol{B}^2] = \mathfrak{p}(\mathfrak{p}\overline{\boldsymbol{p}} + \mathfrak{d}\boldsymbol{a}), \tag{96}$$

welche zeigt, daß die adjungierten Polarsysteme der Schar (91) sämtlich dem Büschel:

$$\mathfrak{p}\overline{\boldsymbol{p}} + \mathfrak{d}\boldsymbol{a} \tag{97}$$

angehören. Damit aber ist die Schar (91) als Büschelschar charakterisiert.

Dabei hat entsprechend wie in den drei vorausgeschickten Spezialfällen die Abspaltung des Faktors $\mathfrak{p}$ in der Gleichung (96) die folgende Bedeutung: Dem Doppelpunkte der Schar (91), welchem nach der Gleichung (91) der Parameterwert $\mathfrak{p} = 0$ zugehört, während $\mathfrak{d} \neq 0$ ist, entspricht als adjungiertes Polarsystem kein eigentliches Polarsystem des Büschels (97), sondern wegen (96) das uneigentliche Polarsystem $[\boldsymbol{B}^2] = 0$. Andererseits läßt sich das in der Schar (88) für $\mathfrak{p} = 0$, $\mathfrak{d} \neq 0$ enthaltene Geradenpaar:

$$\boldsymbol{a} = 2[\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}]$$

nicht als adjungiertes Polarsystem zu einem Polarsystem der Schar (91) auffassen; denn für $\mathfrak{p} = 0$ verwandelt sich die Gleichung (96) eben in $[\boldsymbol{B}^2] = 0$.

Daraus folgt dann wieder genau wie bei dem Dualistischen, *daß man eine Büschelschar von Kurven zweiter Klasse auch geradezu charakterisieren kann als eine nicht entartende Kegelschnittschar, die unter ihren Kurven einen doppeltzählenden Punkt enthält.*

Aus der Darstellung (91) einer Büschelschar ergibt sich dann wieder eine allgemeine Eigenschaft einer Büschelschar, wenn man die Punkte aufsucht, die einer beliebigen Geraden V des Strahlbüschels mit dem Scheitel $\boldsymbol{D}$ durch die Polarsysteme $\boldsymbol{B}$ der Büschelschar (91) als Pole zugewiesen werden. Da nämlich nach S. 227 des ersten Teils dieses Bandes eine jede Gerade V des Strahlbüschels mit dem Scheitel $\boldsymbol{D}$ zu dem Polarsysteme $\boldsymbol{D}$ des Doppelpunktes apolar ist, also der Gleichung:

$$V\boldsymbol{D} = 0 \tag{98}$$

genügt, so erhält man für den Pol $V\boldsymbol{B}$ einer solchen Geraden V hinsichtlich einer beliebigen Kurve $\boldsymbol{B}$ der Büschelschar den Ausdruck:

$$V\boldsymbol{B} = \mathfrak{p}\, V\boldsymbol{P}. \tag{99}$$

Die Pole $V\boldsymbol{B}$ einer beliebigen Geraden V, die durch den Doppelpunkt $\boldsymbol{D}$ einer Büschelschar geht, genommen in bezug auf die Kurven $\boldsymbol{B}$ der Büschelschar, fallen also sämtlich mit dem Pole $V\boldsymbol{P}$ der Geraden V hinsichtlich des Polarsystems $\boldsymbol{P}$ zusammen. Und dieser Pol $V\boldsymbol{P}$ liegt nach der zweiten Grundeigenschaft des Polarsystems (Satz 410) auf der Polare $\boldsymbol{d}$ des Punktes $\boldsymbol{D}$ hinsichtlich des Polarsystems $\boldsymbol{P}$ (Fig. 35). Diese Polare aber ist,

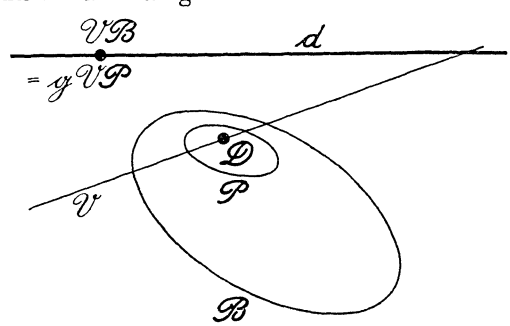


Fig. 35.

wie oben für alle drei Fälle der Büschelschar bewiesen ist (vgl. S. 35, 40 und 54) die Doppellinie der Büschelschar, und sie ist zugleich auch hinsichlich sämtlicher Kurven $\boldsymbol{B}$ der Büschelschar dem Doppelpunkte $\boldsymbol{D}$ des Scharbüschels als Polare zugeordnet. Man hat also den Satz:

Satz 603: Ein jeder Strahl eines Strahlbüschels, das den Doppelpunkt einer Büschelschar von Kurven zweiter Klasse zum Scheitel hat, besitzt hinsichtlich sämtlicher Kurven der Büschelschar einen und denselben Pol; und zwar liegt er auf der Doppellinie der Büschelschar.

Das Scharbüschel homoasymptotischer Hyperbeln. Bei dem oben (auf S. 35—36) betrachteten hyperbolischen Scharbüschel bildeten die Seiten E_1 und E_2 seines gemeinsamen Tangentialdreiecks die Tangenten, die dritte Seite E_3 die Berührungssekante. Hält man jetzt die Geraden der beiden gemeinsamen Tangenten E_1 und E_2 eines hyperbolischen Scharbüschels fest, läßt aber die Berührungssekante E_3 in die unendlich ferne Gerade übergehen, so werden alle Kurven des Scharbüschels zu Hyperbeln, die gemeinsamen Tangenten E_1 und E_2 zu gemeinsamen Asymptoten aller dieser Hyperbeln. Das Scharbüschel besteht also aus der Gesamtheit aller Hyperbeln mit den gemeinsamen Asymptoten E_1 und E_2. Wir nennen ein solches Scharbüschel von Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptoten ein Scharbüschel homoasymptotischer Hyperbeln.[1])

Analytisch vollzieht man den beschriebenen Übergang dadurch, daß man in dem Fundamentaldreieck, das in der obigen Entwicklung mit dem Tangentialdreieck des Scharbüschels zusammenfiel, die der Seite E_3 angehörenden Ecken e_1 und e_2 durch zwei Strecken ersetzt. Dadurch verwandelt sich das in der Gleichung (2) angegebene Polarsystem $\boldsymbol{d}$ der Doppellinie des ursprünglichen hyperbolischen Scharbüschels in das Polarsystem $\boldsymbol{j}$ der doppeltzählenden unendlich fernen Geraden:

$$\boldsymbol{j} = \frac{0,\ 0,\ E_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}, \tag{100}$$

in dem jetzt e_1 und e_2 zwei Strecken sind, während das Polarsystem (1) der hyperbolischen Strahlinvolution

$$\boldsymbol{h} = \frac{E_2,\ E_1,\ 0}{e_1,\ e_2,\ e_3} = \frac{[e_3 e_1],\ [e_2 e_3],\ 0}{e_1,\ e_2,\ e_3} \tag{101}$$

1) In seiner „Geometrie der Lage“ (Bd. I, vierte Auflage, Leipzig 1899, S. 196) nennt Th. Reye die oben als „homoasymptotisch“ bezeichneten Hyperbeln „homothetisch und konzentrisch“. Da indes das Wort „homothetisch“ sonst in der Bedeutung „ähnlich oder ähnlich liegend“ gebraucht wird, so paßt der Ausdruck „homothetische und konzentrische Hyperbeln“ nicht für zwei solche Hyperbeln des oben betrachteten Scharbüschels, die nicht in demselben von den gemeinsamen Asymptoten gebildeten Scheitelwinkelpaar liegen, indem ja zwei derartige Hyperbeln gar nicht ähnlich sind. (Vgl. auch den unten auf S. 64 eingeführten Begriff „homoasymptotischer Ellipsen“.)

seine geometrische Bedeutung beibehält, nämlich noch immer das Linienpaar E_1, E_2 zur Polkurve hat, wenn auch in seinem analytischen Ausdruck (101) jetzt die Größen e_1 und e_2, welche die beiden ersten Nenner bilden und auch in den beiden ersten Zählern als Faktoren enthalten sind, durch die unendlich fernen Punkte der Geraden dieses Linienpaares, d. h. durch gewisse Strecken, vertreten werden.

Ein beliebiges Polarsystem:

$$p = h - 2\mathfrak{g} j \tag{102}$$

des durch die Polarsysteme h und j bestimmten Scharbüschels homoasymptotischer Hyperbeln läßt sich dann durch den Bruch darstellen:

$$p = h - 2\mathfrak{g} j = \frac{E_2,\ E_1,\ -2\mathfrak{g} E_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}. \tag{103}$$

Und, sind $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ die Dreieckskoordinaten in bezug auf das neue Fundamentaldreieck, von dem die unendlich ferne Gerade eine Seite bildet, so lautet die Gleichung der zum Polarsystem p gehörenden Polkurve (vgl. S. 241 f. des ersten Teiles dieses Bandes):

$$\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{g} \mathfrak{x}_3^2. \tag{104}$$

Dabei kann der „Parameter" $\mathfrak{g}$ jeden beliebigen reellen Zahlwert annehmen.

Will man die Gleichung (104) durch eine Gleichung in Cartesischen Koordinaten ersetzen, so denke man sich die Strecken e_1 und e_2 gleich lang, und zwar von der Länge $\frac{1}{\sqrt[3]{\sin \mathfrak{f}}}$, unter $\mathfrak{f}$ der Winkel zwischen den Stäben $[e_3 e_1]$ und $[e_3 e_2]$ verstanden, und gebe überdies auch noch dem Punkte e_3 die Masse $\frac{1}{\sqrt[3]{\sin \mathfrak{f}}}$. Dann werden nach dem Satze 296 die Brüche $\frac{\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{x}_3}$ und $\frac{\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_3}$ gerade die Cartesischen Koordinaten des Punktes x mit den Dreieckskoordinaten $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ in bezug auf die Geraden der Stäbe $[e_3 e_1]$ und $[e_3 e_2]$ als Koordinatenachsen. Bezeichnet man also diese Koordinaten mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, so wird

$$\frac{\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{x}_3} = \mathfrak{x} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_3} = \mathfrak{y}, \tag{105}$$

und die Gleichung (104) nimmt die Form an:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \mathfrak{g}. \tag{106}$$

Diese Gleichung bestätigt die schon gewonnenen Ergebnisse; denn sie stellt nach S. 271 des ersten Teiles dieses Bandes für jeden Wert der reellen Zahlgröße $\mathfrak{g}$ eine Hyperbel dar, welche die Geraden der Stäbe $[e_3 e_1]$ und $[e_3 e_2]$ oder, was dasselbe ist, das Linienpaar h zu Asymptoten hat, und welche bei positivem $\mathfrak{g}$ in dem Winkel $\angle\ ([e_3 e_1], [e_3 e_2])$ und dessen Scheitelwinkel liegt, bei negativem $\mathfrak{g}$ in dem dazugehörigen Nebenwinkelpaar.

Läßt man den Parameter $\mathfrak{g}$ alle reellen Werte von $\mathfrak{g} = -\infty$ bis $\mathfrak{g} = +\infty$ durchlaufen, so erhält man sämtliche Hyperbeln, die das Linienpaar $\boldsymbol{h}$ zu Asymptoten haben, d. h. das ganze zum Linienpaar $\boldsymbol{h}$ gehörende Scharbüschel homoasymptotischer Hyperbeln.

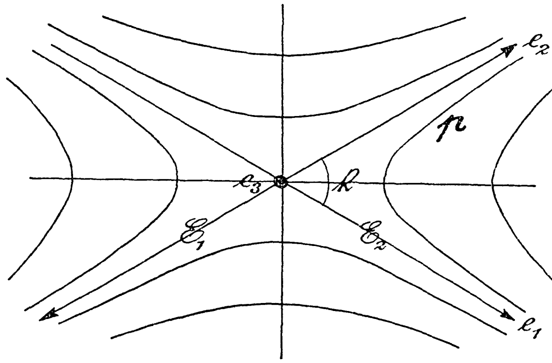


Fig. 36.

Man kann leicht zeigen, daß alle diejenigen Hyperbeln eines solchen Scharbüschels, die in einem und demselben von den Asymptoten gebildeten Scheitelwinkelpaar liegen, ähnlich und ähnlich gelegen (perspektiv ähnlich) sind und ihren gemeinsamen Mittelpunkt zum Ähnlichkeitspunkt haben. Unterwirft man nämlich eine beliebige von den Hyperbeln des Scharbüschels (106) einer perspektiven Ähnlichkeitstransformation (Streckung) von ihrem Mittelpunkte aus, indem man setzt:

$$\begin{cases} \mathfrak{x}' = \mathfrak{n}\mathfrak{x} \\ \mathfrak{y}' = \mathfrak{n}\mathfrak{y}, \end{cases} \tag{107}$$

wo $\mathfrak{n}$ eine reelle Zahlgröße ist, und substituiert die aus diesen Gleichungen entspringenden Werte von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$:

$$\begin{cases} \mathfrak{x} = \dfrac{\mathfrak{x}'}{\mathfrak{n}} \\ \mathfrak{y} = \dfrac{\mathfrak{y}'}{\mathfrak{n}} \end{cases} \tag{108}$$

in die Gleichung (106), so erhält man für die vom Bildpunkte $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}'$ des Punktes $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ beschriebene Kurve die Gleichung

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{y}' = \mathfrak{n}^2\mathfrak{g}, \tag{109}$$

d. h. man erhält wieder eine Kurve des Scharbüschels homoasymptotischer Hyperbeln (106), und zwar eine Kurve, deren Parameter

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{n}^2\mathfrak{g} \tag{110}$$

mit dem Parameter $\mathfrak{g}$ der abgebildeten Kurve dasselbe Vorzeichen hat, die also mit der abgebildeten Kurve in demselben von den Asymptoten gebildeten Scheitelwinkelpaar liegt. Man hat daher den Satz (Fig. 36):

Satz 604: Alle Kurven eines Scharbüschels homoasymptotischer Hyperbeln, die in demselben von den gemeinsamen Asymptoten gebildeten Scheitelwinkelpaar liegen, sind einander ähnlich und ähnlich gelegen und haben ihren gemeinsamen Mittelpunkt zum Ähnlichkeitspunkt.

Das Scharbüschel homoasymptotischer Ellipsen. Bei dem oben auf S. 40 bis 41 betrachteten elliptischen Scharbüschel von Kurven zweiter Ordnung stellte die Seite E_3 des Fundamentaldreiecks die in dem Scharbüschel enthaltene Doppellinie dar, während seine beiden Seiten E_1 und E_2 die Nennerstäbe der elliptischen Strahlinvolution:

$$(20) \qquad \mathfrak{E} = \frac{E_2,\ -E_1}{E_1,\ E_2}$$

bildeten, die von den Polarsystemen des elliptischen Scharbüschels im Doppelpunkte des Scharbüschels hervorgerufen wird.

Hält man jetzt die Geraden dieser Nennerstäbe einstweilen fest, läßt aber die Doppellinie E_3 des Scharbüschels in die unendlich ferne Gerade übergehen, so hat man wieder die der Seite E_3 angehörenden Ecken e_1 und e_2 des Fundamentaldreiecks durch zwei Strecken zu ersetzen. Dadurch verwandelt sich entsprechend wie oben auf S. 60 das durch die Gleichung (17) ausgedrückte Polarsystem $\boldsymbol{d}$ der Doppellinie des ursprünglichen elliptischen Scharbüschels in das Polarsystem $\boldsymbol{j}$ der doppeltzählenden unendlich fernen Geraden:

$$(111) \qquad \boldsymbol{j} = \frac{0,\ 0,\ E_3}{e_1,\ e_2,\ e_3},$$

indem jetzt e_1 und e_2 zwei Strecken sind, während das Polarsystem (16) der elliptischen Strahlinvolution, d. h. das Polarsystem:

$$(112) \qquad \boldsymbol{e} = \frac{E_1,\ E_2,\ 0}{e_1,\ e_2,\ e_3} = \frac{[e_2 e_3],\ [e_3 e_1],\ 0}{e_1,\ e_2,\ e_3},$$

zwar seine geometrische Bedeutung beibehält, nämlich noch immer das Polarsystem derjenigen elliptischen Strahlinvolution (20) darstellt, welche die Linienpaare E_1, E_2 und $E_2 + E_1$, $E_2 - E_1$ zu Paaren der Involution hat, wenn auch in seinem analytischen Ausdruck (112) die Größen e_1 und e_2 durch die unendlich fernen Punkte, d. h. durch gewisse Strecken der Geraden der Stäbe E_2 und E_1 vertreten werden.

Ein beliebiges Polarsystem:

$$(113) \qquad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{e} - \mathfrak{g}\boldsymbol{j}$$

des durch $\boldsymbol{e}$ und $\boldsymbol{j}$ bestimmten Scharbüschels läßt sich dann durch den Bruch ausdrücken:

$$(114) \qquad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{e} - \mathfrak{g}\boldsymbol{j} = \frac{E_1,\ E_2,\ -\mathfrak{g}E_3}{e_1,\ e_2,\ e_3},$$

in welchem der „Parameter“ $\mathfrak{g}$ jeden beliebigen reellen Zahlwert annehmen kann. Diese Bruchdarstellung bestätigt das schon oben auf S. 40 für jedes elliptische Scharbüschel ausgesprochene Ergebnis, daß in bezug auf jedes Polarsystem des Scharbüschels der Doppelpunkt e_3 des Scharbüschels der Pol der Doppellinie E_3 des Scharbüschels ist. Da diese aber in dem vorliegenden Fall in die unendlich ferne Gerade übergegangen ist, so folgt, daß bei dem besonderen Scharbüschel (114) der Doppelpunkt e_3 des Scharbüschels den gemeinsamen Mittelpunkt aller Polarsysteme des Scharbüschels bilden muß.

Aber die Polarsysteme des Scharbüschels sind *nicht nur konzentrisch*, sondern sie rufen auch *in ihrem gemeinsamen Mittelpunkte* e_3 *dieselbe Strahleninvolution hervor*, d. h. sie besitzen dieselbe Involution konjugierter Durchmesser, und zwar ist diese Involution nichts anderes als die durch den Bruch (20) dargestellte elliptische Strahlinvolution $\mathfrak{E}$. Und überdies erzeugen die Polarsysteme des Scharbüschels auch auf der Polare des gemeinsamen Mittelpunkts, d. h. auf der unendlich fernen Geraden, die zu jener Strahlinvolution perspektive elliptische Punktinvolution, woraus man noch folgern kann, daß die Kurven des Scharbüschels aus lauter reellen oder imaginären Ellipsen bestehen.

Bezeichnet man ferner die konjugiert komplexen Doppelstrahlen der gemeinsamen Involution konjugierter Durchmesser als die konjugiert komplexen Asymptoten der Polarsysteme des Scharbüschels, so kann man auch sagen: Die Polarsysteme des Scharbüschels haben dieselben (konjugiert komplexen) Asymptoten, und man kann daher das Scharbüschel (114) ein Scharbüschel homoasymptotischer Ellipsen nennen.

Sind ferner $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ die Dreieckskoordinaten eines Punktes in bezug auf das neue Fundamentaldreieck, von dem die unendlich ferne Gerade eine Seite bildet, so lautet wegen (114) die Gleichung des Scharbüschels homoasymptotischer Ellipsen

$$\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2 = \mathfrak{g}\mathfrak{x}_3^2, \tag{115}$$

wo wieder der Parameter $\mathfrak{g}$ jeden beliebigen reellen Zahlwert annehmen kann.

Um aus dieser Gleichung ähnliche Schlüsse ziehen zu können wie bei der entsprechenden Untersuchung über das Scharbüschel homoasymptotischer Hyperbeln, verfüge man in besonderer Weise über die Seiten E_1 und E_2 des Fundamentaldreiecks, welche zugleich die Nennerstäbe der elliptischen Strahlinvolution $\mathfrak{E}$ in (20) sind, deren Doppelstrahlen das gemeinsame konjugiert komplexe Asymptotenpaar des Scharbüschels darstellen. Diese Nennerstäbe sind nur der Bedingung unterworfen, daß erstens ihre Geraden selbst ein Paar jener Involution bilden, und daß zweitens dasselbe auch von den Geraden der Stäbe $E_2 + E_1$ und $E_2 - E_1$ gilt. Nun ist nach dem Satze 169 in jeder Strahlinvolution ein Paar zueinander senkrechter Strahlen enthalten, die man als die Achsen der Involution bezeichnet. Wollte man zwei Stäbe E_1 und E_2 dieser Achsen als Nennerstäbe der Involution verwenden, wobei dann nach dem obigen die Länge dieser Stäbe so bestimmt werden müßte, daß auch die Geraden der Stäbe $E_2 + E_1$ und $E_2 - E_1$ ein Paar der Involution bilden, so würden die Stäbe $E_2 + E_1$ und $E_2 - E_1$ gleich lang werden und in zwei geraden Linien liegen, deren Winkel durch die Achsen der Involution halbiert werden (Fig. 37).

Aber man kann andererseits auch diese gleich langen und zu den Achsen der Involution symmetrisch liegenden Stäbe zu Nennerstäben E_1 und E_2 der Involution machen; dann gehören umgekehrt die Stäbe $E_2 + E_1$ und

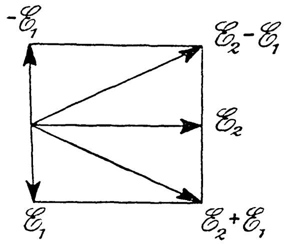


Fig. 37.

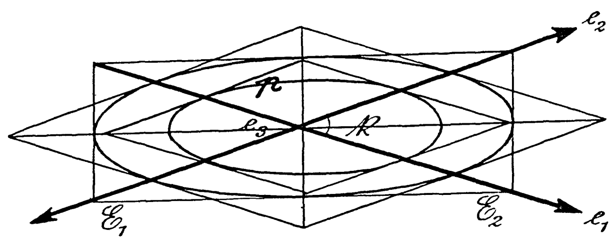


Fig. 38.

$E_2 - E_1$ den Achsen der Involution an. Diese letztere Wahl erweist sich nützlich, wenn man die Diskussion der Gleichung (115) des Scharbüschels homoasymptotischer Ellipsen entsprechend derjenigen der Gleichung (104) des Scharbüschels homoasymptotischer Hyperbeln gestalten will.

In der Tat, bezeichnet man noch einen von den beiden Winkeln, den die Geraden dieser Stäbe miteinander einschließen, mit $\mathfrak{t}$ und gibt zwei Strecken e_1 und e_2 auf den Geraden der Stäbe E_2 und E_1 die gemeinsame Länge $\frac{1}{\sqrt[3]{\sin \mathfrak{t}}}$ und nimmt auch die Masse des Schnittpunktes e_3 der Geraden dieser Stäbe $= \frac{1}{\sqrt[3]{\sin \mathfrak{t}}}$, so werden die Brüche $\frac{\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{x}_3}$ und $\frac{\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_3}$ die Cartesischen Koordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ des Punktes $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ in bezug auf die Stäbe $[e_3 e_1]$ und $[e_3 e_2]$ als Koordinatenachsen. Es bestehen also wieder die Gleichungen (105) und die Gleichung (115) nimmt daher die Form an:

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = \mathfrak{g}. \tag{116}$$

Diese Gleichung (116) aber stellt für jeden positiven Wert von $\mathfrak{g}$ eine reelle Ellipse dar, für welche die Koordinatenachsen, d. h. die Durchmesser $[e_3 e_1]$ und $[e_3 e_2]$, einander konjugiert sind, und die von diesen Durchmessern, vom Mittelpunkt der Kurve aus gerechnet, Stücke von der gleichen Länge $\sqrt{\mathfrak{g}}$ abschneidet. Die in den vier Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen gezogenen Ellipsentangenten bilden also den der Ellipse „konjugiert umschriebenen Rhombus“, das soll heißen, denjenigen Rhombus, dessen Mittellinien die Berührungsdurchmesser der Rhombusseiten sind (Fig. 38).

Da die Mittellinien des konjugiert umschriebenen Rhombus durch die Ecken des „konjugiert umschriebenen Rechtecks“ gehen, d. h. desjenigen

Rechtecks, dessen Seiten die Kurve in ihren Scheiteln berühren, so kann man weiter folgern, daß alle Ellipsen, die durch die Gleichung (116) bei positivem $\mathfrak{g}$ dargestellt werden, die Ecken ihrer konjugiert umschriebenen Rechtecke auf den Koordinatenachsen haben, woraus noch hervorgeht, daß die Achsen dieser Ellipsen einander proportional, die Ellipsen also ähnlich sind.

Dies kann man aber leicht auch mehr rechnerisch begründen. Unterwirft man nämlich eine beliebige von den Ellipsen (116) der durch die Gleichungen (107) und (108) ausgedrückten perspektiven Ähnlichkeitstransformation (Streckung) von ihrem Mittelpunkte aus, so erhält man für die Bildkurve dieser Ellipse (116) die Gleichung

$$(117) \qquad \mathfrak{x}'^2 + \mathfrak{y}'^2 = \mathfrak{n}^2 \mathfrak{g},$$

welche wieder genau die Form der Gleichung (116) hat, und bei der auch die rechte Seite dasselbe Vorzeichen besitzt wie bei der Originalkurve (116). Die Bildkurve ist also wieder eine Ellipse aus dem Scharbüschel (116).

Insbesondere erhält man durch die beschriebene perspektive Ähnlichkeitstransformation aus einer gegebenen *reellen* Ellipse eines Scharbüschels homoasymptotischer Ellipsen alle übrigen reellen Ellipsen dieses Büschels, und man hat den Satz:

Satz 605: Alle reellen Kurven eines Scharbüschels homoasymptotischer Ellipsen sind einander ähnlich und ähnlich gelegen und haben ihren gemeinsamen Mittelpunkt zum Ähnlichkeitspunkt.

Außer den Polarsystemen, deren Polkurven durch dieses System reeller, konzentrischer, ähnlicher und ähnlich gelegener Ellipsen gebildet werden, umfaßt aber das Scharbüschel homoasymptotischer Ellipsen noch diejenigen Polarsysteme, deren Polkurven die imaginären Ellipsen sind, die durch die Gleichung (116) bei negativem $\mathfrak{g}$ ausgedrückt werden. Diese Polarsysteme kann man wieder wie auf Seite 291 des ersten Teiles dieses Bandes als Folgeprodukte aus dem Polarsystem der zugehörigen reellen Ellipse und einer Spiegelung an ihrem Mittelpunkte darstellen. Dabei ist unter der zugehörigen reellen Ellipse diejenige Ellipse des Scharbüschels (116) zu verstehen, deren Parameter sich von demjenigen der betrachteten imaginären Ellipse nur durch das Vorzeichen unterscheidet.

Abschnitt 42.

Kollineationen, die ein gewisses Scharbüschel und eine gewisse Büschelschar in sich überführen.

Bestimmung einer Kurve zweiter Ordnung durch drei Punkte und die Tangenten in zweien von ihnen und das dualistisch Entsprechende. Da bei einem hyperbolischen und elliptischen Scharbüschel und bei den entsprechenden Büschelscharen der Doppelpunkt und die Doppellinie getrennt liegen, so waren dieselben geeignet als Träger der Ecken des Fundamentaldreiecks und ergaben besonders einfache Darstellungen für die Polarsysteme dieser Scharbüschel und Büschelscharen. Die Einfachheit dieser analytischen Ausdrücke aber ermöglicht noch eine Reihe geometrischer Folgerungen.

Wir beginnen mit dem Ausdrucke für die Punkt-Stab-Abbildung der Polarsysteme eines hyperbolischen Scharbüschels, welcher lautete (vgl. die Gleichungen (1) bis (4) des vorigen Abschnittes):

(1) $$\boldsymbol{p} = f\boldsymbol{h} + \mathfrak{g}\boldsymbol{d}, \quad \text{wo}$$

(2) $$\boldsymbol{h} = \frac{E_2,\ E_1,\ 0}{e_1,\ e_2,\ e_3} \quad \text{und}$$

(3) $$\boldsymbol{d} = \frac{0,\ 0,\ E_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}, \quad \text{so daß also}$$

(4) $$\boldsymbol{p} = \frac{fE_2,\ fE_1,\ \mathfrak{g}E_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}$$

wird. Wie oben gezeigt ist, geht dabei die Polkurve eines jeden Polarsystems dieses Scharbüschels durch die Punkte e_1 und e_2 hindurch und hat in ihnen die Geraden E_2 und E_1 zu Tangenten.

Fordert man jetzt noch weiter, die Polkurve eines speziellen Polarsystems $\boldsymbol{q}$ des Scharbüschels (1) oder (4) solle auch noch durch einen dritten Punkt e hindurchgehen, der nicht einer Seite des Fundamentaldreiecks angehört, und nimmt man etwa diesen Punkt e zum Einheitspunkt, verfügt also über die Massen der drei Grundpunkte e_1, e_2, e_3 in der Weise, daß:

(5) $$e_1 + e_2 + e_3 = e \quad \text{und:}$$

(6) $$[e_1 e_2 e_3] = 1$$

wird, so braucht man nur das Verhältnis $\mathfrak{f} : \mathfrak{g}$ der Ableitzahlen von $\boldsymbol{p}$ so zu bestimmen, daß der Punkt e der Gleichung der Polkurve von (4) Genüge leistet, daß also die Gleichung besteht:

(7) $$[e \cdot e\boldsymbol{p}] = 0.$$

Nun ist:
$$e\boldsymbol{p} = (e_1 + e_2 + e_3)\boldsymbol{p} = \mathfrak{f}(E_1 + E_2) + \mathfrak{g}E_3;$$

die Gleichung (7) verwandelt sich also in:

$$[(e_1 + e_2 + e_3)(\mathfrak{f}(E_1 + E_2) + \mathfrak{g}E_3)] = 0$$

oder in:

(8) $$2\mathfrak{f} + \mathfrak{g} = 0.$$

Nimmt man also etwa:

(9) $$\mathfrak{f} = 1 \quad \text{an, so wird:}$$

(10) $$\mathfrak{g} = -2,$$

und man erhält für das spezielle aus (1) oder (4) hervorgehende Polarsystem q, dessen Ableitzahlen den Gleichungen (9) und (10) entsprechen, die Darstellung:

(11) $$q = \frac{E_2,\ E_1,\ -2E_3}{e_1,\ e_2,\ \ e_3}.$$

Die Tangente: $$A = eq,$$

im Punkte e an die Polkurve von q gezogen, wird ferner:

(12) $$A = E_1 + E_2 - 2E_3.$$

Übrigens läßt sich noch aus der oben gestellten Bedingung, der Punkt e solle nicht auf einer Seite des Fundamentaldreiecks enthalten sein, die Folgerung ziehen, daß das Polarsystem q nicht entarten kann. Dem Scharbüschel (1) oder (4) gehören nämlich nur die beiden entartenden Polarsysteme h und d an, und von der Polkurve des Polarsystems d liegt ein jeder Punkt auf der Geraden $[e_1 e_2]$ und von der Polkurve des Polarsystems h liegt ein jeder Punkt auf einer der Geraden $[e_3 e_1]$ und $[e_3 e_2]$. Die Forderung, die Polkurve des Polarsystems q solle durch den Punkt e hindurchgehen, schließt also in der Tat mit Rücksicht auf die obige Bedingung über die Lage des Punktes e entartende Polarsysteme aus. Man hat also den Satz (Fig. 39):

Satz 606: Sind e_1, e_2, e_3 und e vier Punkte, von denen keine drei in einer Geraden liegen, und ist:

(5) $$e_1 + e_2 + e_3 = e \quad \text{und:}$$

(6) $$[e_1 e_2 e_3] = 1,$$

so lautet der extensive Bruch für das Polarsystem zweiter Ordnung, dessen Polkurve durch die drei Punkte e_1, e_2 und e geht und in den beiden Punkten e_1 und e_2 die Geraden der Stäbe:

$$E_2 = [e_3 e_1] \quad \text{und} \quad E_1 = [e_2 e_3]$$

zu Tangenten hat:

(11) $$q = \frac{E_2,\ E_1,\ -2E_3}{e_1,\ e_2,\ \ e_3}.$$

Dabei stellt die Summe der drei Zähler:

(12) $$A = E_1 + E_2 - 2E_3$$

die Tangente der Polkurve in dem dritten Punkte e dar. Diese Kurve kann mit Rücksicht auf die obige Voraussetzung über die Lage der vier Punkte e_1, e_2, e_3 und e zueinander nicht zerfallen.

Geht man anstatt von dem hyperbolischen Scharbüschel (1) von der

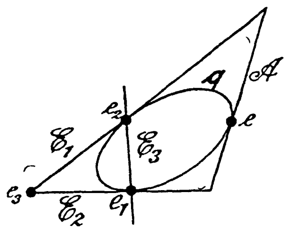


Fig. 39.

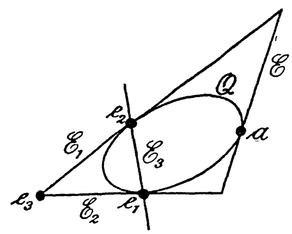


Fig. 40.

entsprechenden hyperbolischen Büschelschar aus (vgl. die Gleichungen (5) bis (8) des vorigen Abschnittes), d. h. von der Gleichung:

(13) $$\boldsymbol{P} = \mathfrak{f}\boldsymbol{D} + \mathfrak{g}\boldsymbol{H}, \quad \text{in der:}$$

(14) $$\boldsymbol{H} = \frac{e_2,\ e_1,\ 0}{E_1,\ E_2,\ E_3} \quad \text{und}$$

(15) $$\boldsymbol{D} = \frac{0,\ 0,\ e_3,}{E_1,\ E_2,\ E_3}$$

war, so daß also:

(16) $$\boldsymbol{P} = \frac{\mathfrak{g}e_2,\ \mathfrak{g}e_1,\ \mathfrak{f}e_3}{E_1,\ E_2,\ E_3}$$

wird, so beweist man genau ebenso den dem Satze 606 dualistisch entsprechenden Satz (Fig. 40).

Satz 607: Sind E_1, E_2, E_3 und E vier Stäb aus vier Geraden, von denen keine drei durch einen Punkt gehen, und ist:

(17) $$E_1 + E_2 + E_3 = E \quad \text{und}$$

(18) $$[E_1 E_2 E_3] = 1,$$

so lautet der extensive Bruch für das Polarsystem zweiter Klasse, dessen Polarkurve die Geraden der drei Stäbe E_1, E_2 und E zu Tangenten hat und die beiden ersren Geraden in den Punkten:
$$e_2 = [E_3 E_1] \quad \text{und} \quad e_1 = [E_2 E_3] \quad \text{berührt:}$$

(19) $$\boldsymbol{Q} = \frac{e_2,\ e_1,\ -2e_3}{E_1,\ E_2,\ E_3}.$$

Dabei stellt die Summe der drei Zähler:

(20) $$a = e_1 + e_2 - 2e_3$$

den Berührungspunkt der dritten Geraden E ar. Diese Kurve kann mit Rücksicht auf die obige Vorauss tzung über die Lage der vier Geraden der Stäbe E_1, E_2, E_3 und E gegeneinander nicht zerfallen.

Zugleich hat man die beiden sich dualistisch entsprechenden Sätze bewiesen:

Satz 608: Durch drei Punkte und die Tangenten in zweien von ihnen ist eine Kurve zweiter Ordnung eindeutig bestimmt. Und:

Satz 609: Durch drei Tangenten und die Berührungspunkte zweier von ihnen ist eine Kurve zweiter Klasse eindeutig bestimmt.

Die allgemeine Fassung dieser Sätze ist zulässig; denn auch in dem Falle, wo der im Beweise des Satzes 606 eingeführte dritte Punkt e auf der Geraden $[e_1 e_2]$ oder auf einer der Geraden $[e_2 e_3]$ und $[e_3 e_1]$ liegen sollte, bleibt die in jenem Satze beschriebene Kurve zweiter Ordnung bestimmt. Sie ist nämlich im ersteren Falle die in dem Scharbüschel (1) enthaltene Doppellinie, und im zweiten Falle das dem Scharbüschel angehörende Linienpaar. Damit ist die allgemeine Fassung von Satz 608 gerechtfertigt und Entsprechendes gilt von Satz 609.

Eine besondere Art der kollinearen Abbildung einer Kurve zweiter Ordnung auf eine andere Kurve zweiter Ordnung und das dualistisch Entsprechende. Um aus den Sätzen 606 und 607 weitere Folgerungen zu ziehen, denke man sich neben den Ecken e_1, e_2, e_3 des Fundamentaldreiecks drei neue ein Dreieck bildende Punkte e_1', e_2', e_3' von beliebiger Lage gegeben und deren Massen wieder in der Weise bestimmt, daß ein beliebiger, aber nicht auf den Seitenlinien des Dreiecks $e_1' e_2' e_3'$ gelegener vierter Punkt e' der zugehörige Einheitspunkt wird, daß also:

$$e' = e_1' + e_2' + e_3', \tag{21}$$

und daß zugleich das äußere Produkt der drei Punkte:

$$[e_1' e_2' e_3'] = 1 \tag{22}$$

wird. Weiter setze man:

$$[e_2' e_3'] = E_1', \quad [e_3' e_1'] = E_2', \quad [e_1' e_2'] = E_3' \tag{23}$$

und führe endlich neben dem Polarsystem:

$$q = \frac{E_2,\ E_1,\ -2E_3}{e_1,\ e_2,\ \ e_3} \tag{11}$$

ein zweites ebenfalls nicht entartendes Polarsystem q' ein, das aus den Größen e_i' und E_i' in ganz entsprechender Weise aufgebaut ist wie das Polarsystem q aus den Größen e_i und E_i, das also durch den Bruch definiert wird:

$$q' = \frac{E_2',\ E_1',\ -2E_3'}{e_1',\ e_2',\ \ e_3'}. \tag{24}$$

Die Polkurve dieses Polarsystems geht dann nach dem Satze 579 durch die Punkte e_1', e_2' und $e' = e_1' + e_2' + e_3'$ hindurch und hat in den Punkten

e_1' und e_2' die Geraden der Stäbe $E_2' = [e_3' e_1']$ und $E_1' = [e_2' e_3']$ zu Tangenten. Ferner führt die Kollineation:

$$\mathfrak{k} = \frac{e_1',\ e_2',\ e_3'}{e_1,\ e_2,\ e_3} \tag{25}$$

das Polarsystem q in das Polarsystem q' über; denn sie verwandelt nicht nur die Nenner von q in die Nenner von q', sondern ebenso auch die Zähler von q in die ganz entsprechend gebauten Zähler von q'. Dabei können die Polkurven der beiden Polarsysteme q und q' als zwei ganz beliebige nicht zerfallende Kurven zweiter Ordnung und die Punkte e_1, e_2, e und e_1', e_2', e' wiederum als ganz beliebige Punkte dieser beiden Kurven aufgefaßt werden. Denn sind zwei beliebige nicht zerfallende Kurven zweiter Ordnung gegeben (Fig. 41), und bezeichnet man drei beliebige Punkte der ersten Kurve mit e_1, e_2, e und den Schnittpunkt der Tangenten in den Punkten e_1 und e_2 mit e_3, so kann man immer noch über die Massen der drei Punkte e_1, e_2, e_3 entsprechend den beiden obigen Gleichungen:

$$e = e_1 + e_2 + e_3 \quad \text{und} \tag{5}$$

$$[e_1 e_2 e_3] = 1 \tag{6}$$

verfügen (vgl. S. 1ff. des ersten Teils dieses Bandes), und Entsprechendes gilt von der zweiten Kurve. Da ferner die Kollineation $\mathfrak{k}$ die Polkurve von q in die Polkurve von q' in der Weise überführt, daß den Punkten e_1, e_2, e die Punkte e_1', e_2', e' und den Tangenten E_1, E_2 die Tangenten E_1', E_2' entsprechen, so hat man den Satz:

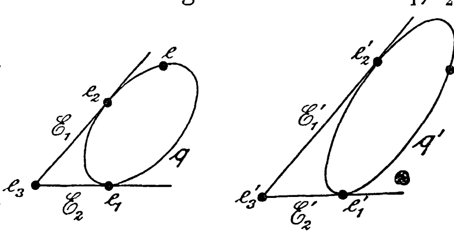


Fig. 41.

Satz 610: Man kann stets eine Kollineation angeben, die eine beliebig gegebene nicht zerfallende Kurve zweiter Ordnung in der Weise in eine zweite ebenfalls beliebig gegebene nicht zerfallende Kurve zweiter Ordnung überführt, daß drei beliebigen Punkten der ersten Kurve drei beliebig gegebene Punkte der zweiten zugewiesen werden, und daß den Tangenten in zweien von den drei Punkten der ersten Kurve die Tangenten in den homologen Punkten der zweiten Kurve entsprechen.

Sind andererseits:

$$E_1,\ E_2,\ E_3 \quad \text{und} \quad E \quad \text{und ebenso:}$$

$$E_1',\ E_2',\ E_3' \quad \text{und} \quad E'$$

je vier Stäbe von vier Geraden, von denen keine drei durch einen Punkt gehen, und hat man über die Längen und den Sinn der Stäbe:

$$E_1,\ E_2,\ E_3 \quad \text{und} \quad E_1',\ E_2',\ E_3'$$

in der Weise verfügt, daß:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 \quad \text{und} \quad [E_1\,E_2\,E_3] = 1 \quad \text{und:}$$
$$E' = E_1' + E_2' + E_3' \quad \text{und} \quad [E_1'E_2'E_3'] = 1$$

wird, so sind die Brüche:

(26) $$Q = \frac{e_2,\ e_1,\ -2\,e_3}{E_1,\ E_2,\ E_3} \quad \text{und:}$$

(27) $$Q' = \frac{e_2',\ e_1',\ -2\,e_3'}{E_1',\ E_2',\ E_3'}$$

die Ausdrücke für zwei nicht entartende Polarsysteme zweiter Klasse, deren Polarkurven beziehlich die Geraden der Stäbe:

$$E_1,\ E_2 \quad \text{und} \quad E \qquad \text{und:}$$
$$E_1',\ E_2' \quad \text{und} \quad E'$$

zu Tangenten und die Punkte:

$$e_2 = [E_3\,E_1], \quad e_1 = [E_2\,E_3] \quad \text{ferner:}$$
$$e_2' = [E_3'E_1'], \quad e_1' = [E_2'E_3']$$

zu Berührungspunkten haben.

Ferner führt die Kollineation:

(28) $$\mathfrak{K} = \frac{E_1',\ E_2',\ E_3'}{E_1,\ E_2,\ E_3}$$

die erste Kurve in der Weise in die zweite über, daß die Elemente, die mit zusammengehörigen Buchstaben bezeichnet sind, einander entsprechen. Man hat also den Satz (Fig. 42):

Satz 611: Man kann stets eine Kollineation angeben, die eine beliebig gegebene nicht zerfallende Kurve zweiter Klasse in der Weise in eine zweite ebenfalls beliebig gegebene nicht zerfallende Kurve zweiter Klasse überführt, daß drei belie-

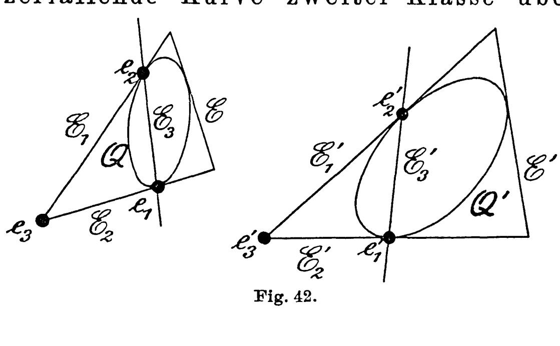


Fig. 42.

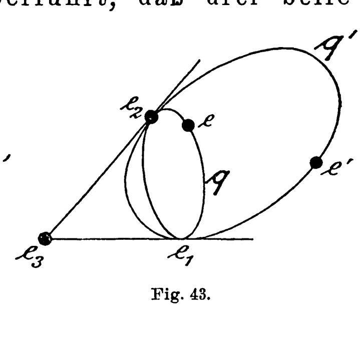


Fig. 43.

bigen Tangenten der ersten Kurve drei beliebige Tangenten der zweiten Kurve zugewiesen werden, und daß den Berührungspunkten von zweien der drei Tangenten der ersten Kurve die Berührungspunkte der homologen Tangenten der zweiten Kurve entsprechen.

Kollineare Abbildung einer Kurve eines hyperbolischen Scharbüschels von Kurven zweiter Ordnung auf eine andere Kurve dieses Scharbüschels. Läßt man in der obigen Fig. 41 die Punkte e_1', e_2', e_3' mit den Punkten e_1, e_2, e_3 zusammenfallen (Fig. 43), setzt also:

$$(29)\qquad \begin{cases} e_1' = \mathfrak{t}_1 e_1, \\ e_2' = \mathfrak{t}_2 e_2, \\ e_3' = \mathfrak{t}_3 e_3, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$ drei reelle Zahlgrößen bedeuten, zwischen denen wegen (6) und (22) die Beziehung besteht:

$$(30)\qquad \mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_3 = 1,$$

so nimmt der Kollineationsbruch $\mathfrak{k}$ die Gestalt an:

$$(31)\qquad \mathfrak{k} = \frac{\mathfrak{t}_1 e_1,\ \mathfrak{t}_2 e_2,\ \mathfrak{t}_3 e_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}.$$

Die Kollineation hat also die Punkte e_1, e_2, e_3 zu Doppelpunkten und führt überdies die Polkurve des Polarsystems q in eine im allgemeinen von q verschiedene Kurve q' desjenigen hyperbolischen Scharbüschels über, das die Punkte e_1 und e_2 zu „Grundpunkten" und die Geraden $[e_3 e_1]$ und $[e_3 e_2]$ zu Tangenten in diesen Grundpunkten hat, nämlich diejenige Kurve q dieses Scharbüschels, die den Punkt:

$$(5)\qquad e = e_1 + e_2 + e_3$$

enthält, in diejenige Kurve q' desselben Scharbüschels, auf welcher der Punkt:

$$(32)\qquad e' = \mathfrak{t}_1 e_1 + \mathfrak{t}_2 e_2 + \mathfrak{t}_3 e_3 \quad \text{liegt.}$$

Kollineare Abbildung einer Kurve zweiter Ordnung und zweiter Klasse in sich. Fordert man endlich noch, der durch die Gleichung (32) dargestellte Punkt e' solle der Polkurve des Polarsystems q angehören, also der Gleichung:

$$(33)\qquad [e' \cdot e' q] = 0$$

Genüge leisten (Fig. 44), so werden die Polkurven der beiden Polarsysteme q und q'

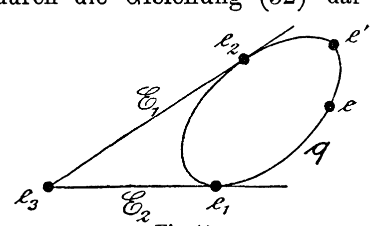


Fig. 44.

identisch, und die Kollineation $\mathfrak{f}$ führt daher die Polkurve des Polarsystems q in sich über.

Zugleich erhält man aus (33) zwischen den drei Zahlgrößen $\mathfrak{t}_i$ neben der Gleichung (30) noch eine weitere Gleichung. Wegen (32) und (11) läßt sich nämlich die Gleichung (33) auch in der Form schreiben:

$$[(\mathfrak{t}_1 e_1 + \mathfrak{t}_2 e_2 + \mathfrak{t}_3 e_3)(\mathfrak{t}_2 E_1 + \mathfrak{t}_1 E_2 - 2\mathfrak{t}_3 E_3)] = 0.$$

Diese Gleichung aber verwandelt sich bei Ausführung der Multiplikation in:

$$2\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2 - 2\mathfrak{t}_3^2 = 0 \quad \text{oder in:}$$

$$\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{t}_3^2,$$

woraus durch Multiplikation mit $\mathfrak{t}_3$ und bei Berücksichtigung von (30) folgt:

$$1 = \mathfrak{t}_3^3.$$

Und da $\mathfrak{t}_3$ nach der Voraussetzung reell sein soll, so wird:

(34) $$\mathfrak{t}_3 = 1,$$

die Gleichung (30) reduziert sich also auf:

$$\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2 = 1$$

und liefert für $\mathfrak{t}_2$ den Wert:

(35) $$\mathfrak{t}_2 = \frac{1}{\mathfrak{t}_1}.$$

Unterdrückt man schließlich noch bei $\mathfrak{t}_1$ den Index, so erhält man für die Kollineation $\mathfrak{f}$ in (31), welche die Polkurve von q in sich überführt, den Wert:

(36) $$\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{t}e_1,\ \frac{1}{\mathfrak{t}}e_2,\ e_3}{e_1,\ e_2,\ e_3},$$

während sich für den Punkt e', der dabei dem Punkte $e = e_1 + e_2 + e_3$ zugewiesen wird, die Summendarstellung ergibt:

(37) $$e' = e\mathfrak{f} = \mathfrak{t}e_1 + \frac{1}{\mathfrak{t}}e_2 + e_3.$$

Man hat also den Satz:

Satz 612: H a b e n d i e v i e r P u n k t g r ö ß e n e_1, e_2, e_3 u n d e d i e s e l b e B e d e u t u n g w i e i m S a t z e 606, s o w i r d d i e n i c h t z e r f a l l e n d e K u r v e z w e i t e r O r d n u n g, d i e d u r c h d i e d r e i P u n k t e e_1, e_2 u n d e h i n d u r c h g e h t u n d i n d e n b e i d e n e r s t e n P u n k t e n d i e G e r a d e n:

$$E_2 = [e_3 e_1] \quad \text{und} \quad E_1 = [e_2 e_3]$$

z u T a n g e n t e n h a t, d u r c h d i e K o l l i n e a t i o n:

(36) $$\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{t}e_1,\ \frac{1}{\mathfrak{t}}e_2,\ e_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}$$

in der Weise in sich übergeführt, daß die Punkte e_1 und e_2 und die Tangenten E_2 und E_1, freilich unter Veränderung ihrer Massen und Längen, in sich übergehen, während der Punkt:

$$(5) \qquad e = e_1 + e_2 + e_3$$

in den ebenfalls der Kurve angehörenden Punkt:

$$(37) \qquad e' = e\mathfrak{t} = \mathfrak{t}e_1 + \frac{1}{\mathfrak{t}} e_2 + e_3$$

verwandelt wird.

Ersetzt man ferner in der Gleichung (37) die bisher als fest gedachte Zahlgröße $\mathfrak{t}$ durch eine veränderliche Zahlgröße $\mathfrak{x}$ und bezeichnet den dadurch aus dem festen Punkt e' hervorgehenden veränderlichen Punkt der betrachteten Kurve mit x, so erhält man die Gleichung:

$$(38) \qquad x = \mathfrak{x}e_1 + \frac{1}{\mathfrak{x}} e_2 + e_3$$

und damit den Satz (Fig. 45):

Satz 613: Haben die vier Punktgrößen e_1, e_2, e_3 und e wieder dieselbe Bedeutung wie im Satze 606, so ist die Gleichung:

$$(38) \qquad x = \mathfrak{x}e_1 + \frac{1}{\mathfrak{x}} e_2 + e_3$$

eine Parameterdarstellung derjenigen nicht zerfallenden Kurve zweiter Ordnung, die durch die drei Punkte e_1, e_2 und e hindurchgeht und in den beiden ersten Punkten die Geraden:

$$E_2 = [e_3 e_1] \quad \text{und} \quad E_1 = [e_2 e_3]$$

zu Tangenten hat.

Aus den Sätzen 612 und 613 ergeben sich die dualistisch entsprechen-

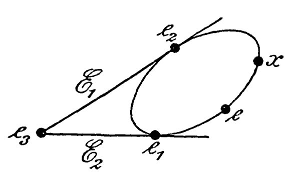


Fig. 45.

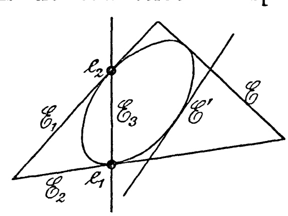


Fig. 46.

den Sätze durch eine bloße Buchstabenvertauschung. Man erhält so die Sätze (Fig. 46):

Satz 614: Haben die vier Stäbe E_1, E_2, E_3 und E dieselbe Bedeutung wie im Satze 607, so wird die nicht zerfallende Kurve zweiter Klasse, welche die Geraden der drei Stäbe E_1, E_2 und E zu Tangenten hat und von den beiden ersten Geraden in den Punkten:

$$e_2 = [E_3 E_1] \quad \text{und} \quad e_1 = [E_2 E_3]$$

berührt wird, durch die Kollineation:

$$(39) \qquad \mathfrak{K} = \frac{\mathfrak{t}E_1, \ \frac{1}{\mathfrak{t}}E_2, \ E_3}{E_1, \ E_2, \ E_3}$$

in der Weise in sich übergeführt, daß die Tangenten E_1 und E_2 und ihre Berührungspunkte:

$$e_2 = [E_3 E_1] \quad \text{und} \quad e_1 = [E_2 E_3],$$

freilich unter Veränderung ihrer Längen und Massen in sich übergehen, während die Tangente:

$$(17) \qquad E = E_1 + E_2 + E_3$$

in die ebenfalls die Kurve berührende Gerade:

$$(40) \qquad E' = E\mathfrak{K} = \mathfrak{t}E_1 + \frac{1}{\mathfrak{t}}E_2 + E_3$$

verwandelt wird. Und

Satz 615: Haben wieder die vier Stäbe E_1, E_2, E_3 und E dieselbe Bedeutung wie im Satze 607, so ist die Gleichung:

$$(41) \qquad U = \mathfrak{u}E_1 + \frac{1}{\mathfrak{u}}E_2 + E_3$$

die Parameterdarstellung derjenigen nicht zerfallenden Kurve zweiter Klasse, welche die drei Geraden der Stäbe E_1, E_2 und E zu Tangenten hat und von den beiden ersten Tangenten in den Punkten:

$$e_2 = [E_3 E_1] \quad \text{und} \quad e_1 = [E_2 E_3]$$

berührt wird.

Man kann sich übrigens auch leicht ein Bild davon machen, in welcher Weise die in dem Satze 612 charakterisierte Kurve zweiter Ordnung durch die in demselben Satze beschriebene Kollineation $\mathfrak{k}$ in sich übergeführt wird. Denn, da jeder beliebige Punkt:

$$(42) \qquad x = \mathfrak{x}e_1 + \frac{1}{\mathfrak{x}}e_2 + e_3$$

dieser Kurve mit Rücksicht auf den in der Gleichung (36) angegebenen Wert von $\mathfrak{k}$ in den Punkt:

$$(43) \qquad x\mathfrak{k} = \mathfrak{x}\mathfrak{t}e_1 + \frac{1}{\mathfrak{x}\mathfrak{t}}e_2 + e_3$$

verwandelt wird, so nimmt das Produkt $[x \cdot x\mathfrak{k}]$, d. h. der Ausdruck für die Geraden, welche die Punkte x der Kurve (42) mit den ihnen durch die Kollineation $\mathfrak{k}$ zugeordneten Punkten $x\mathfrak{k}$ dieser Kurve verbinden, den Wert an:

$$[x \cdot x\mathfrak{k}] = \left[\left(\mathfrak{x} e_1 + \frac{1}{\mathfrak{x}} e_2 + e_3\right)\left(\mathfrak{x}\mathfrak{t} e_1 + \frac{1}{\mathfrak{x}\mathfrak{t}} e_2 + e_3\right)\right]$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\mathfrak{x}}[e_2 e_3] - \frac{1}{\mathfrak{x}\mathfrak{t}}[e_2 e_3] \\ + \mathfrak{x}\mathfrak{t}[e_3 e_1] - \mathfrak{x}[e_3 e_1] \\ + \frac{1}{\mathfrak{t}}[e_1 e_2] - \mathfrak{t}[e_1 e_2] \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\mathfrak{x}}\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{t}}\right) E_1 \\ + \mathfrak{x}\,(\mathfrak{t} - 1) E_2 \\ + \quad \left(\frac{1}{\mathfrak{t}} - \mathfrak{t}\right) E_3 \end{array}\right\}.$$

Und führt man noch für die als Faktoren von $\frac{1}{\mathfrak{x}}$, $\mathfrak{x}$ und 1 auftretenden Produkte kurze Bezeichnungen ein, indem man setzt:

$$(44) \qquad \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{t}}\right) E_1 = E_1', \quad (\mathfrak{t} - 1) E_2 = E_2', \quad \left(\frac{1}{\mathfrak{t}} - \mathfrak{t}\right) E_3 = E_3',$$

so erhält man für das gesuchte Produkt $[x \cdot x\mathfrak{k}]$ die Darstellung:

$$(45) \qquad [x \cdot x\mathfrak{k}] = \frac{1}{\mathfrak{x}} E_1' + \mathfrak{x} E_2' + E_3'.$$

Diese stimmt aber ihrer Form nach mit der rechten Seite von (41) genau überein. Und da sich ferner nach den Gleichungen (44) die Stäbe E_1', E_2', E_3' von den Stäben E_1, E_2, E_2 nur um einen Zahlfaktor unterscheiden, so ist nach dem Satze 615 die Gleichung (45) die Parameterdarstellung derjenigen Kurve zweiter Klasse, welche die Geraden der Stäbe E_1, E_2 und:

$$(46) \qquad E' = E_1' + E_2' + E_3' = \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{t}}\right) E_1 + (\mathfrak{t} - 1) E_2 + \left(\frac{1}{\mathfrak{t}} - \mathfrak{t}\right) E_3$$

zu Tangenten hat, und von den beiden ersteren Tangenten in den Punkten:

$$e_2 = [E_3 E_1] \quad \text{und} \quad e_1 = [E_2 E_3]$$

berührt wird, und die also der durch die Gleichungen (13) oder (16) dargestellten Büschelschar von Kurven zweiter Klasse angehört (Fig. 47). Die soeben angewendete Schlußweise würde jedenfalls erlaubt sein, wenn das Produkt $[E_1' E_2' E_3') = 1$ wäre. Dies wird nun freilich im allgemeinen nicht zutreffen. Aber man wird, wenigstens so lange das Produkt:

$$[E_1' E_2' E_3'] \neq 0$$

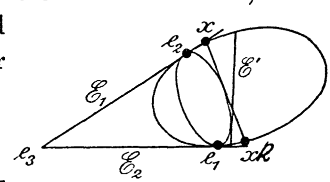


Fig. 47.

ist, aus den Größen E_1', E_2', E_3' durch Multiplikation mit einem passenden, *für alle drei Größen gleichen* Zahlfaktor leicht drei solche Größen $\bar{E}_1'$, $\bar{E}_2'$, $\bar{E}_3'$ ableiten können, die der Bedingung:

$$[\bar{E}_1' \bar{E}_2' \bar{E}_3'] = 1$$

Genüge leisten, ohne daß dadurch bei den Geraden dieser Stäbe oder denjenigen der Stäbe:

$$E' = E_1' + E_2' + E_3' \quad \text{und:}$$

$$[x \cdot x\mathfrak{f}] = \frac{1}{\mathfrak{x}} E_1' + \mathfrak{x} E_2' + E_3'$$

eine Lagenänderung bedingt wäre, da die beiden letzteren Stäbe sich, bei Einführung der Größen $\overline{E}_i'$ anstatt der Größen E_i', nur mit einem Zahlfaktor multiplizieren würden.

Wäre aber:

$$[E_1' E_2' E_3'] = 0,$$

so würde wegen (44) und (18) zugleich:

$$\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{t}}\right)(\mathfrak{t} - 1)\left(\frac{1}{\mathfrak{t}} - \mathfrak{t}\right) = 0, \quad \text{also:}$$

$$(1 - \mathfrak{t})^3 (1 + \mathfrak{t}) = 0 \quad \text{oder endlich:}$$

$$\mathfrak{t} = \pm 1$$

sein. Aber es wird dann wegen (36) *entweder:*

$$\mathfrak{f} = \frac{e_1, e_2, e_3}{e_1, e_2, e_3},$$

die Kollineation $\mathfrak{f}$ also die *Identität* (vgl. S. 107 des ersten Teils dieses Bandes) und somit:

$$x\mathfrak{f} = x.$$

Das Produkt $[x \cdot x\mathfrak{f}]$ verschwindet alsdann für jeden Wert von x, und die Gleichung (45) verliert daher ihre Bedeutung. Dieser Fall ist demnach von der Betrachtung auszuschließen. *Oder* es wird:

$$\mathfrak{f} = \frac{-e_1, -e_2, e_3}{e_1, e_2, e_3}.$$

Die Kollineation $\mathfrak{f}$ ist dann eine (harmonische) *Spiegelung am Punkte* e_3 *und der Geraden* $[e_1 e_2]$ (vgl. S. 100f. des ersten Teils dieses Bandes), und die Geraden $[x \cdot x\mathfrak{f}]$ umhüllen somit den Punkt e_3. Dieser Punkt aber kann doppeltzählend als Kurve zweiter Klasse aufgefaßt werden, die der Büschelschar (13) oder (16) angehört. Man hat daher den Satz:

Satz 616: Bildet man eine nicht zerfallende Kurve zweiter Ordnung nach dem im Satze 612 angegebenen Verfahren kollinear in sich ab, wobei nur vorausgesetzt werden mag, daß die dort beschriebene Kollineation $\mathfrak{f}$ von der Identität verschieden sei, und verbindet einen jeden Punkt x der Kurve mit seinem Bildpunkt $x\mathfrak{f}$, so umhüllen die Verbindungslinien eine Kurve zweiter Klasse, die der Büschelschar (13) oder (16) angehört.

Und ebenso gilt offenbar der dualistisch entsprechende Satz (Fig. 48):

Satz 617: Bildet man eine nicht zerfallende Kurve zweiter Klasse nach dem im Satze 614 angegebenen Verfahren in sich ab, wobei nur vorausgesetzt werden mag, daß die dort beschriebene Kollineation $\mathfrak{K}$ von der Identität verschieden sei, und schneidet man jede Tangente U der Kurve mit ihrer Bildgeraden $U\mathfrak{K}$, so erfüllen die Schnittpunkte eine Kurve zweiter Ordnung, die dem Scharbüschel (1) oder (4) angehört.

Man kann die durch die Kollineation $\mathfrak{k}$ in (36) bewirkte Abbildung der Kurve zweiter Ordnung (42) in sich noch in anderer Weise charakterisieren. Es läßt sich nämlich zeigen, daß dieselbe eine projektive Zuordnung auf dieser Kurve bewirkt. Denn projiziert man die beiden Punkte (42) und (43) dieser Kurve, etwa von dem Punkte e_1 aus, der durch die Kollineation $\mathfrak{k}$ in sich übergeführt wird und zugleich der Kurve zweiter Ordnung angehört, so erhält man zwei einander in der Kollineation $\mathfrak{k}$ entsprechende Strahlbüschel, und diese sind nach dem Satze 323 zueinander projektiv. Die Punktreihen aber, welche zwei zueinander projektive Strahlbüschel mit gemeinsamem Scheitel auf einer Kurve zweiter Ordnung ausschneiden, die durch diesen Scheitel hindurchgeht, sind selbst projektiv.

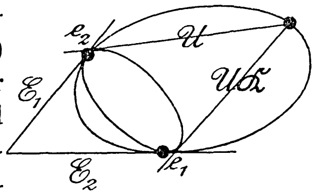


Fig. 48.

Die entsprechende Abbildung eines ganzen hyperbolischen Scharbüschels von Kurven zweiter Ordnung und einer ganzen hyperbolischen Büschelschar von Kurven zweiter Klasse. Man sieht leicht, daß sich die Sätze 612 und 614, 616 und 617 auf jede Kurve des Scharbüschels (4) und der Büschelschar (16) übertragen lassen. In der Tat wird man ja von dem oben betrachteten Polarsystem:

$$(11) \qquad q = \frac{E_2,\ E_1,\ -2E_3}{e_1,\ e_2,\ \ e_3}$$

zu dem Polarsystem q'' einer beliebigen Kurve desjenigen Scharbüschels geführt, das die Geraden:

$$E_2 = [e_3 e_1] \quad \text{und} \quad E_1 = [e_2 e_3]$$

zu Tangenten und die Punkte e_1 und e_2 zu Berührungspunkten hat, wenn man an die Stelle der Punkte e_1, e_2, e_3 die mit ihnen zusammenfallenden Punkte:

$$(47) \qquad \begin{cases} e_1'' = \mathfrak{h}_1 e_1, \\ e_2'' = \mathfrak{h}_2 e_2, \\ e_3'' = \mathfrak{h}_3 e_3 \end{cases}$$

treten läßt, die aus den Punkten e_1, e_2, e_3 durch Multiplikation mit den Zahlfaktoren $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{h}_3$ hervorgehen. Denn man kann über diese Zahlfaktoren von $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{h}_3$ in der Weise verfügen, daß

erstens ihr Produkt $\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_3 = 1$, also wegen (47) und (6) auch:

(48) $$[e_1''e_2''e_3''] = 1$$

wird, und daß

zweitens ein der Lage nach beliebiger Punkt e'' der Einheitspunkt der drei Punkte e_1'', e_2'', e_3'' wird, d. h.:

(49) $$e'' = e_1'' + e_3'' + e_3''$$

oder wegen (47):

(50) $$e'' = \mathfrak{h}_1 e_1 + \mathfrak{h}_2 e_2 + \mathfrak{h}_3 e_3$$

wird. Setzt man dann noch:

(51) $$[e_2''e_3''] = E_1'', \quad [e_3''e_1''] = E_2'', \quad [e_1''e_2''] = E_3'',$$

so stellt der Bruch:

(52) $$q'' = \frac{E_2', \ E_1'', \ -2E_3''}{e_1'', \ e_2'', \ e_3''}$$

dasjenige Polarsystem dar, dessen Polkurve durch die Punkte e_1'', e_2'' und e'' geht und in den beiden ersten Punkten die Geraden E_2'' und E_1'' zu Tangenten hat. Das ist aber wegen der Willkürlichkeit der Lage von e'' eine ganz beliebige Kurve des oben charakterisierten Scharbüschels.

Nun wird aber mit Rücksicht auf (50) und (36):

$$e''\mathfrak{k} = \mathfrak{h}_1 \mathfrak{t} e_1 + \frac{\mathfrak{h}_2}{\mathfrak{t}} e_2 + \mathfrak{h}_3 e_3$$

oder wegen (47):

(53) $$e''\mathfrak{k} = \mathfrak{t} e_1'' + \frac{1}{\mathfrak{t}} e_2'' + e_3''.$$

Und diese Summe ist nach Satz 613 wieder der Ausdruck für einen Punkt der Polkurve von q''. Ebenso entspricht ferner einem beliebigen Punkte y dieser Kurve, der nach dem Satze 613 die Darstellung gestattet:

(54) $$y = \mathfrak{y} e_1'' + \frac{1}{\mathfrak{y}} e_2'' + e_3'',$$

in der Kollineation $\mathfrak{k}$ der Punkt:

(55) $$y\mathfrak{k} = \mathfrak{y}\mathfrak{t} e_1'' + \frac{1}{\mathfrak{y}\mathfrak{t}} e_2'' + e_3'',$$

d. h. wieder ein Punkt der Polkurve von q''. Auch beweist man genau so wie oben (S. 78), daß die Verbindungslinien $[y \cdot y\mathfrak{k}]$ der Originalpunkte y der Kurve q'' mit ihren Bildpunkten $y\mathfrak{k}$ in der Kollineation $\mathfrak{k}$ eine Kurve der Büschelschar (16) umhüllen, nämlich diejenige Kurve dieser Büchelschar, welche die Gerade:

$$(1-\mathfrak{t})E_1'' + (\mathfrak{t}-1)E_2'' + \left(\frac{1}{\mathfrak{t}} - \mathfrak{t}\right)E_3''$$

zur Tangente hat. Man hat also den Satz:

Satz 618: Durch die Kollineation:

$$\mathfrak{k} = \frac{\mathfrak{t} e_1, \ \frac{1}{\mathfrak{t}} e_2, \ e_3}{e_1, \ e_2, \ e_3}$$

wird nicht nur die im Satze 612 genannte Kurve zweiter Ordnung, sondern überhaupt eine jede Kurve des diese Kurve enthaltenden hyperbolischen Scharbüschels (4) in sich übergeführt; und ist dabei die Kollineation $\mathfrak{k}$ von der Identität verschieden, so umhüllen die Verbindungslinien der Punkte x dieser Kurven mit ihren in der Kollineation $\mathfrak{k}$ entsprechenden Punkten $x\mathfrak{k}$ eine Kurve zweiter Klasse, welche der dem Scharbüschel (4) adjungierten Büschelschar (16) angehört.

Ebenso gilt der dualistisch entsprechende Satz:

Satz 619: Durch die Kollineation:

$$\mathfrak{K} = \frac{\mathrm{t}E_1, \ \frac{1}{\mathrm{t}}E_2, \ E_3}{E_1, \quad E_2, \quad E_3}$$

wird nicht nur die in dem Satze 614 genannte Kurve zweiter Klasse, sondern überhaupt eine jede Kurve der diese Kurve enthaltenden hyperbolischen Büschelschar (16) in sich übergeführt; und ist dabei die Kollineation $\mathfrak{K}$ von der Identität verschieden, so erfüllen die Punkte, die man erhält, wenn man die Tangenten U einer solchen Kurve mit ihren Bildgeraden $U\mathfrak{K}$ schneidet, eine Kurve zweiter Ordnung, welche dem zu der Büschelschar (16) adjungierten Scharbüschel (4) angehört.

Der Fall einer involutorischen kollinearen Abbildung eines solchen Scharbüschels und einer solchen Büschelschar. Schließlich mögen noch ein paar Bemerkungen über den schon oben auf S. 43f. gestreiften Fall Platz finden, wo die Kollineationen (36) und (39) perspektiv sind. Nach der Gleichung (45) des achtundzwanzigsten Abschnitts wird die Kollineation (36) perspektiv, wenn

(56) $$\mathrm{t} = \frac{1}{\mathrm{t}}$$

ist, und dies tritt (außer in dem Falle der Identität, für welchen $\mathrm{t} = 1$ ist) dann und nur dann ein, wenn:

(57) $$\mathrm{t} = -1$$

ist. Dann wird die Kollineation $\mathfrak{k}$ in (36) (vgl. S. 100f. des ersten Teils dieses Bandes) zugleich involutorisch und möge daher für diesen besonderen Fall mit dem Buchstaben $\mathfrak{s}$ (Spiegelung) bezeichnet werden. Wir setzen also:

(58) $$\mathfrak{s} = \frac{-e_1, \ -e_2, \ e_3}{e_1, \quad e_2, \quad e_3},$$

wo dann $\mathfrak{s}$, wie an der eben zitierten Stelle gezeigt ist, eine (harmonische) Spiegelung an dem Punkte e_3 und der Geraden $E_3 = [e_1 e_2]$ darstellt. Der

Bruch $\mathfrak{s}$ hat daher die Eigenschaft, eine jede Kurve des hyperbolischen Scharbüschels (4) durch eine Spiegelung an den beiden genannten Elementen in sich überzuführen (Fig. 49), und man hat somit den Satz:

Satz 620: Die Spiegelung:

$$\mathfrak{s} = \frac{-e_1, -e_2, e_3}{e_1, \quad e_2, \quad e_3} \tag{58}$$

an dem Punkte e_3 und der Geraden $E_3 = [e_1 e_2]$ führt eine jede Kurve des hyperbolischen Scharbüschels (4) perspektiv in

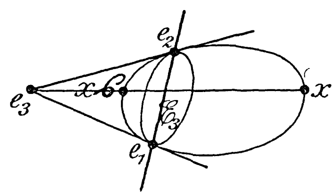


Fig. 49.

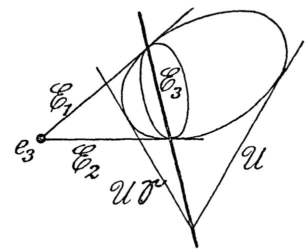


Fig. 50.

sich über. Sie weist nämlich jedem Punkte x einer solchen Kurve denjenigen Punkt $x\mathfrak{s}$ zu, in welchem diese Kurve zum zweiten Male von der Geraden $[xe_3]$ geschnitten wird.

Ebenso gilt auch der dualistisch entsprechende Satz (Fig. 50):

Satz 621: Die Spiegelung:

$$\mathfrak{S} = \frac{-E_1, -E_2, E_3}{E_1, \quad E_2, \quad E_3} \tag{59}$$

an der Geraden E_3 und dem Punkte $e_3 = [E_1 E_2]$ führt eine jede Kurve der hyperbolischen Büschelschar (16) perspektiv in sich über. Sie weist nämlich jeder Tangente U einer solchen Kurve die zweite Tangente zu, die sich vom Punkte $[UE_3]$ an die Kurve legen läßt.

Abschnitt 43.

Begriff der Kernkurven einer Reziprozität. Das Nullsystem zweiter Ordnung und zweiter Klasse.

Die Punkt-Stab-Abbildung einer Reziprozität und die adjungierte Stab-Punkt-Abbildung. Die zu diesen Abbildungen inversen Reziprozitäten. Nachdem wir in den Abschnitten 31 bis 38, 41 und 42 die Eigenschaften der Polarsysteme und ihrer Büschel und Scharen erledigt haben, ist es nicht mehr schwer, die bereits im 30. Abschnitt begonnene Untersuchung *einer beliebigen Reziprozität* zu Ende zu führen. Es sei wie im 30. Abschnitt der Bruch:

$$r = \frac{A_1, A_2, A_3}{e_1, \ e_2, \ e_3} \tag{1}$$

der analytische Ausdruck der Punkt-Stab-Abbildung einer Reziprozität. Dabei sollen wie dort die Nenner e_1, e_2, e_3 die Einheiten erster Stufe, d. h. die mit gewissen Massen versehenen Ecken des Fundamentaldreiecks, darstellen, während die Zähler A_1, A_2, A_3 Stäbe sind, die aus den Einheiten zweiter Stufe:

(2) $$E_1 = [e_2 e_3], \quad E_2 = [e_3 e_1], \quad E_3 = [e_1 e_2]$$

mittels der Ableitzahlen $\mathfrak{a}_{ik}$ numerisch abgeleitet sind, so daß also:

(3) $$\begin{cases} A_1 = \mathfrak{a}_{11} E_1 + \mathfrak{a}_{12} E_2 + \mathfrak{a}_{13} E_3 \\ A_2 = \mathfrak{a}_{21} E_1 + \mathfrak{a}_{22} E_2 + \mathfrak{a}_{23} E_3 \\ A_3 = \mathfrak{a}_{31} E_1 + \mathfrak{a}_{32} E_2 + \mathfrak{a}_{33} E_3 \end{cases}$$

ist. Ferner sei wieder:

(4) $$\boldsymbol{R} = [\boldsymbol{r}^2] = \frac{a_1,\ a_2,\ a_3}{E_1,\ E_2,\ E_3}$$

der zu $\boldsymbol{r}$ adjungierte Bruch, also:

(5) $$a_1 = [A_2 A_3], \quad a_2 = [A_3 A_1], \quad a_3 = [A_1 A_2].$$

Dann wird (vgl. die Gleichungen (15) des 30. Abschnitts):

(6) $$\begin{cases} a_1 = \mathfrak{A}_{11} e_1 + \mathfrak{A}_{12} e_2 + \mathfrak{A}_{13} e_3 \\ a_2 = \mathfrak{A}_{21} e_1 + \mathfrak{A}_{22} e_2 + \mathfrak{A}_{23} e_3 \\ a_3 = \mathfrak{A}_{31} e_1 + \mathfrak{A}_{32} e_2 + \mathfrak{A}_{33} e_3, \end{cases}$$

wo die $\mathfrak{A}_{ik}$ die Unterdeterminanten der Determinante:

(7) $$\mathfrak{a} = |\mathfrak{a}_{ik}|, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

sind.

Aus den Gleichungen (3) und (6) folgt noch durch Auflösung nach den E_i und e_i:

(8) $$\begin{cases} \mathfrak{a} E_1 = \mathfrak{A}_{11} A_1 + \mathfrak{A}_{21} A_2 + \mathfrak{A}_{31} A_3 \\ \mathfrak{a} E_2 = \mathfrak{A}_{12} A_1 + \mathfrak{A}_{22} A_2 + \mathfrak{A}_{32} A_3 \\ \mathfrak{a} E_3 = \mathfrak{A}_{13} A_1 + \mathfrak{A}_{23} A_2 + \mathfrak{A}_{33} A_3 \end{cases}$$

und:

(9) $$\begin{cases} \mathfrak{a} e_1 = \mathfrak{a}_{11} a_1 + \mathfrak{a}_{21} a_2 + \mathfrak{a}_{31} a_3 \\ \mathfrak{a} e_2 = \mathfrak{a}_{12} a_1 + \mathfrak{a}_{22} a_2 + \mathfrak{a}_{32} a_3 \\ \mathfrak{a} e_3 = \mathfrak{a}_{13} a_1 + \mathfrak{a}_{23} a_2 + \mathfrak{a}_{33} a_3. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen (8) und (9) sind die Ableitzahlen $\mathfrak{A}_{ki}$ und $\mathfrak{a}_{ki}$ gegen die Ableitzahlen der Gleichungen (6) und (3) transponiert.

Ist das kombinatorische Produkt der Zähler von $\boldsymbol{r}$, d. h. das Produkt:

(10) $$[A_1 A_2 A_3] = [\boldsymbol{r}^3] = \mathfrak{a} = |\mathfrak{a}_{ik}|, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

von Null verschieden und damit auch das kombinatorische Produkt der Zähler des zu $\boldsymbol{r}$ adjungierten Bruches $\boldsymbol{R}$, nämlich das Produkt:

(11) $$[a_1 a_2 a_3] = [\boldsymbol{R}^3] = \mathfrak{A} = |\mathfrak{A}_{ik}| = \mathfrak{a}^2$$

ungleich Null, so besitzen nach S. 162ff. des ersten Teiles dieses Bandes auch die reziproken Werte von $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{R}$, d. h. die Ausdrücke $\frac{1}{\boldsymbol{r}}$ und $\frac{1}{\boldsymbol{R}}$, einen Sinn und stellen die zu den Abbildungen $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{R}$ inversen Abbildungen dar. Für diese beiden inversen Abbildungen $\frac{1}{\boldsymbol{r}}$ und $\frac{1}{\boldsymbol{R}}$ erhält man dann die extensiven Brüche:

(12)
$$\frac{1}{\boldsymbol{r}} = \frac{e_1,\ e_2,\ e_3}{A_1,\ A_2,\ A_3}$$

und

(13)
$$\frac{1}{\boldsymbol{R}} = \frac{E_1,\ E_2,\ E_3}{a_1,\ a_2,\ a_3}.$$

Für den besonderen Fall eines Polarsystems $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$ bestanden dann nach dem 31. Abschnitt zwischen den Ableitzahlen $\mathfrak{a}_{ik}$ die Gleichungen:

$$\mathfrak{a}_{ki} = \mathfrak{a}_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

und insbesondere bei einem nicht entartenden Polarsystem $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$ zwischen den Brüchen $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{R}$ selbst noch die Beziehung:

$$\boldsymbol{r} = \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}},$$

welche das Polarsystem als eine *involutorische* Abbildung charakterisierte, und das Zusammenfallen der Pol- und Polarkurve bedingte.

Schließen wir daher jetzt den Fall des Polarsystems von der Betrachtung aus, setzen also voraus, *es sei wenigstens für ein Indexpaar i, k*:

(14)
$$\mathfrak{a}_{ki} \neq \mathfrak{a}_{ik},$$

und beschränken uns somit auf eine allgemeine Reziprozität, so ist *zunächst* zu untersuchen, ob es bei einer beliebigen Reziprozität ein Gebilde gibt, das der Pol- und Polarkurve eines Polarsystems entspricht, und

andererseits, ob nicht doch auch vielleicht bei einer allgemeinen Reziprozität zwischen den vier extensiven Brüchen:

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}, & \boldsymbol{R} \\ \frac{1}{\boldsymbol{r}}, & \frac{1}{\boldsymbol{R}} \end{cases}$$

Beziehungen irgendwelcher Art obwalten.

Begriff der Kernkurven einer Reziprozität: Reziprozitäten zweiter Ordnung und zweiter Klasse. Um die *erste Frage* zu erledigen, suchen wir *einmal* genau so wie bei dem Polarsystem nach denjenigen Punkten x, die auf ihren zugeordneten Geraden liegen, und erhalten für sie die Gleichung:

(15)
$$[x \cdot x\boldsymbol{r}] = 0,$$

d. h. wieder eine Zahlgleichung zweiten Grades in x. Dieser Gleichung genügen, falls man von dem unten näher zu behandelnden Ausnahmefall absieht, wo die Gleichung (15) überhaupt durch *jeden* Punkt x der Ebene erfüllt wird, die Punkte einer Kurve *zweiter Ordnung*; man nennt sie die Polkurve der Reziprozität $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$.

Fragt man *ferner* nach denjenigen Geraden U, die durch ihren zugeordneten Punkt $U\boldsymbol{R}$ gehen, so bekommt man die Gleichung:

$$(16) \qquad [U \cdot U\boldsymbol{R}] = 0,$$

welche, wenn man auch hier wieder den Ausnahmefall ausschließt, wo die Gleichung (16) überhaupt durch *jede* Gerade U der Ebene erfüllt wird, als Zahlgleichung zweiten Grades in U eine Kurve *zweiter Klasse* darstellt; man nennt sie die Polarkurve der Reziprozität $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$.

Man hat also die Sätze:

Satz 622: In jeder Reziprozität $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$, die nicht jedem Punkte der Ebene eine durch ihn hindurchgehende Gerade zuweist, erfüllen die Punkte, die auf ihren zugeordneten Geraden liegen, eine Kurve zweiter Ordnung, die Polkurve der Reziprozität. Die Gleichung dieser Kurve lautet:

$$(15) \qquad [x \cdot x\boldsymbol{r}] = 0.$$

Und

Satz 623: In jeder Reziprozität $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$, die nicht jeder Geraden der Ebene einen in ihr liegenden Punkt zuweist, umhüllen alle Geraden, die durch ihre zugeordneten Punkte hindurchgehen, eine Kurve zweiter Klasse, die Polarkurve der Reziprozität. Die Gleichung dieser Kurve lautet:

$$(16) \qquad [U \cdot U\boldsymbol{R}] = 0.$$

Mit Rücksicht auf diese beiden Sätze nennen wir die Punkt-Stab-Zuordnung $\boldsymbol{r}$ einer Reziprozität $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$ eine Reziprozität zweiter Ordnung und die Stab-Punkt-Zuordnung $\boldsymbol{R}$ der Reziprozität $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$ eine Reziprozität zweiter Klasse.

Man bezeichnet die Polkurve und Polarkurve einer Reziprozität $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$ auch wohl mit gemeinsamem Namen als die beiden Kernkurven der Reziprozität. Für den besonderen Fall eines nicht entartenden Polarsystems fielen diese beiden Kernkurven in eine einzige Kurve zusammen. Bei einer allgemeinen Reziprozität dagegen ist dies, wie sich sogleich zeigen wird, nicht der Fall, und es würde daher darauf ankommen, zu untersuchen, ob sich über die Lage beider Kurven zueinander etwas aussagen läßt. Dazu wird es nötig, zuerst etwaige Beziehungen zwischen den vier extensiven Brüchen $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$, $\frac{1}{\boldsymbol{r}}$, $\frac{1}{\boldsymbol{R}}$ zu ermitteln.

Die zu einer Reziprozität zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$ konjugierte Reziprozität $\boldsymbol{r}'$. Nach dem Begriffe des extensiven Bruches sind die Nenner e_i des Bruches

$\boldsymbol{r}$ (vgl. die Gleichung (1)) mit seinen Zählern A_i durch die Gleichungen verknüpft:

$$e_i \boldsymbol{r} = A_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{17}$$

für die man wegen (3) auch schreiben kann:

$$e_i \boldsymbol{r} = \mathfrak{a}_{i1} E_1 + \mathfrak{a}_{i2} E_2 + \mathfrak{a}_{i3} E_3, \quad i = 1, 2, 3. \tag{18}$$

Andererseits folgen aus den Gleichungen (9), die sich auch unter der Form zusammenfassen lassen:

$$\mathfrak{a} e_i = \mathfrak{a}_{1i} \mathfrak{a} + \mathfrak{a}_{2i} a_2 + \mathfrak{a}_{3i} a_3, \quad i = 1, 2, 3 \tag{19}$$

unter der Voraussetzung, daß die Reziprozität $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$ umkehrbar sei, durch Multiplikation mit $\frac{1}{\boldsymbol{R}}$ wegen (13) die Gleichungen:

$$e_i \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}} = \mathfrak{a}_{1i} E_1 + \mathfrak{a}_{2i} E_2 + \mathfrak{a}_{3i} E_3, \quad i = 1, 2, 3, \tag{20}$$

in denen sich die Ableitzahlen der rechten Seite von denen der rechten Seite von (18) *nur durch die Indexfolge unterscheiden.* Dies kann man auch so ausdrücken: Es sind die Ableitzahlen des Gleichungssystems (20) gegen diejenigen des Gleichungssystems (18) *transponiert.*

Nennt man daher diejenige Reziprozität zweiter Ordnung, die aus der Reziprozität $\boldsymbol{r}$ durch Transposition der Ableitzahlen $\mathfrak{a}_{ik}$ ihrer Zähler entsteht, die zu $\boldsymbol{r}$ konjugierte Reziprozität[1]) und bezeichnet sie mit $\boldsymbol{r}'$, setzt also:

$$e_i \boldsymbol{r}' = \mathfrak{a}_{1i} E_1 + \mathfrak{a}_{2i} E_2 + \mathfrak{a}_{3i} E_3, \quad i = 1, 2, 3, \tag{21}$$

so führen die beiden Reziprozitäten $\boldsymbol{r}'$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ nach (20) und (21) die drei Grundpunkte e_i in dieselben Stäbe und somit überhaupt jeden Punkt der Ebene in denselben Stab über. Man kann daher setzen:

$$\boldsymbol{r}' = \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}. \tag{22}$$

Dabei wird die zu $\boldsymbol{r}$ konjugierte Reziprozität $\boldsymbol{r}'$ durch den Bruch dargestellt:

$$\boldsymbol{r}' = \frac{A_1', \; A_2', \; A_3'}{e_1, \; e_2, \; e_3}, \tag{23}$$

in welchem

$$A_i' = \mathfrak{a}_{1i} E_1 + \mathfrak{a}_{2i} E_2 + \mathfrak{a}_{3i} E_3, \quad i = 1, 2, 3, \tag{24}$$

ist. Man hat also den Satz:

---

1) Vgl. z. B. Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, Bd. II, Leipzig 1891, S. 402. Nach R. Mehmke, Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung, Erster Band: Punktrechnung, Erster Teilband, Leipzig und Berlin 1913, S. 262f. tritt der Begriff konjugierter Reziprozitäten wohl zuerst bei Hamilton auf. Vgl. Sir W. R. Hamilton, Lectures on Quaternions, Dublin 1853, S. 87.

Satz 624: Die konjugierte Reziprozität r' einer umkehrbaren Reziprozität zweiter Ordnung r ist nur um einen Zahlfaktor von der zur adjungierten Reziprozität R inversen Reziprozität $\frac{1}{R}$ verschieden. Es besteht nämlich die Gleichung:

$$r' = \frac{\mathfrak{a}}{R},$$

in der $\mathfrak{a}$ die Determinante der Ableitzahlen der Zähler von r, oder was dasselbe ist, der Potenzwert der Reziprozität r ist.

Die uneigentliche Reziprozität zweiter Ordnung und das Nullsystem zweiter Ordnung. Um weitere Beziehungen aufzufinden, stellen wir uns die Frage, ob es eintreten kann, daß die beiden konjugierten Reziprozitätsbrüche r und r' bis auf einen Zahlfaktor einander gleich werden. Wir fragen also, ob es Reziprozitäten gibt, die einer Gleichung von der Form:

$$r = \mathfrak{g} r' \tag{25}$$

Genüge leisten, in der $\mathfrak{g}$ einen Zahlfaktor bedeutet. Wäre dies der Fall, so müßte:

$$e_i r = \mathfrak{g} e_i r', \quad i = 1, 2, 3, \tag{26}$$

also wegen (18) und (21):

$$\mathfrak{a}_{i1} E_1 + \mathfrak{a}_{i2} E_2 + \mathfrak{a}_{i3} E_3 = \mathfrak{g}(\mathfrak{a}_{1i} E_1 + \mathfrak{a}_{2i} E_2 + \mathfrak{a}_{3i} E_3), \quad i = 1, 2, 3, \tag{27}$$

sein. Jede von diesen drei extensiven Gleichungen zerfällt aber in drei Zahlgleichungen; es müßten daher im ganzen die neun Zahlgleichungen bestehen:

$$\mathfrak{a}_{ik} = \mathfrak{g} \mathfrak{a}_{ki}, \quad i, k = 1, 2, 3, \tag{28}$$

in denen wegen (14):

$$\mathfrak{g} \neq 1 \tag{29}$$

angenommen werden muß.

Von diesen neun Zahlgleichungen (28) greifen wir *zunächst* diejenigen drei Gleichungen heraus, für die $k = i$ ist; dieselben lauten:

$$\mathfrak{a}_{ii} = \mathfrak{g} \mathfrak{a}_{ii}, \quad i = 1, 2, 3,$$

und lassen sich auch in der Form schreiben:

$$\mathfrak{a}_{ii}(1 - \mathfrak{g}) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{30}$$

Wegen (29) aber reduzieren sich diese Gleichungen auf die Form:

$$\mathfrak{a}_{ii} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{31}$$

Von den übrigen sechs Gleichungen (28) wählen wir *zuerst* diejenigen drei Gleichungen aus, in denen $i < k$ ist, d. h. die Gleichungen:

$$\mathfrak{a}_{ik} = \mathfrak{g} \mathfrak{a}_{ki}, \quad i, k = 1, 2, 3, \tag{32}$$

mit der Bedingung $i < k$.

Bei den noch übrigbleibenden drei Gleichungen wird dann der erste Index der *linken Seite* größer sein als der zweite. Wir können diese Gleichungen aber auch unter Vertauschung der Buchstaben i und k in der Form schreiben:

$$\mathfrak{a}_{ki} = \mathfrak{g}\,\mathfrak{a}_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3, \tag{33}$$

mit der Bedingung $i < k$.

Setzt man sodann den Wert von $\mathfrak{a}_{ki}$ aus den Gleichungen (33) in die Gleichungen (32) ein, so verwandeln sie sich in:

$$\mathfrak{a}_{ik} = \mathfrak{g}^2\mathfrak{a}_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3, \tag{34}$$

zunächst für $i < k$.

Die Gleichungen (34) gelten aber auch für den Fall, wo $i > k$ ist, wie man sofort sieht, wenn man den Wert von $\mathfrak{a}_{ik}$ aus (32) in (33) substituiert.

Lassen wir ferner den trivialen Fall unberücksichtigt, wo auch sämtliche $\mathfrak{a}_{ik}$, $i \neq k$ verschwinden, schließen wir also den Fall einer „uneigentlichen Reziprozität zweiter Ordnung", bei welcher der Reziprozitätsbruch $\boldsymbol{r}$ die Form hat:

$$\boldsymbol{r} = \frac{0,\ 0,\ 0}{e_1,\ e_2,\ e_3}, \tag{35}$$

und die daher überhaupt einem jeden Punkte der Ebene die Zahlgröße Null zuweist, von der Betrachtung aus, so folgt aus den Gleichungen (34), daß

$$\mathfrak{g}^2 = 1 \tag{36}$$

sein muß, und hieraus wegen (29), daß

$$\mathfrak{g} = -1 \tag{37}$$

ist. Die Gleichungen (28) nehmen also die Form an:

$$\mathfrak{a}_{ki} = -\,\mathfrak{a}_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3. \tag{38}$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichungen (38), die übrigens auch wieder die Gleichungen (31) nach sich ziehen, lassen sich sämtliche neun Koeffizienten der Gleichungen (3) durch die drei Koeffizienten $\mathfrak{a}_{23}$, $\mathfrak{a}_{31}$, $\mathfrak{a}_{12}$ ausdrücken; denn es wird:

$$\begin{cases} \mathfrak{a}_{11} = 0, & \mathfrak{a}_{22} = 0, & \mathfrak{a}_{33} = 0, \\ \mathfrak{a}_{32} = -\,\mathfrak{a}_{23}, & \mathfrak{a}_{13} = -\,\mathfrak{a}_{31}, & \mathfrak{a}_{21} = -\,\mathfrak{a}_{12}, \end{cases} \tag{39}$$

und die Gleichungen (3) gehen daher über in:

$$\begin{cases} A_1 = \quad 0 \quad + \mathfrak{a}_{12}E_2 - \mathfrak{a}_{31}E_3 \\ A_2 = -\,\mathfrak{a}_{12}E_1 + \quad 0 \quad + \mathfrak{a}_{23}E_3 \\ A_3 = \quad \mathfrak{a}_{31}E_1 - \mathfrak{a}_{23}E_2 + \quad 0, \end{cases} \tag{40}$$

wofür man mit Rücksicht auf die Werte der E_i (vgl. die Gleichungen (2)) auch schreiben kann:

$$\begin{cases} A_1 = \quad 0 \quad + \mathfrak{a}_{12}[e_3 e_1] - \mathfrak{a}_{31}[e_1 e_2] = [(\ 0 \ + \mathfrak{a}_{31} e_2 + \mathfrak{a}_{12} e_3) e_1] \\ A_2 = - \mathfrak{a}_{12}[e_2 e_3] + \quad 0 \quad + \mathfrak{a}_{23}[e_1 e_2] = [(\mathfrak{a}_{23} e_1 + \ 0 \ + \mathfrak{a}_{12} e_3) e_2] \\ A_3 = \quad \mathfrak{a}_{31}[e_2 e_3] - \mathfrak{a}_{23}[e_3 e_1] + \quad 0 \quad = [(\mathfrak{a}_{23} e_1 + \mathfrak{a}_{31} e_2 + \ 0 \ ) e_3]. \end{cases}$$

Diese Produktdarstellungen der drei Stäbe A_1, A_2, A_3 lassen sich aber durch lineale Änderung des ersten Faktors (vgl. Satz 8) in der Weise umformen, daß alle drei Stäbe A_i als äußere Produkte aus *einem und demselben Punkte:*

(41) $$a = \mathfrak{a}_{23} e_1 + \mathfrak{a}_{31} e_2 + \mathfrak{a}_{12} e_3$$

und demjenigen Grundpunkte e_i erscheinen, dem der Stab A_i durch die Reziprozität r zugewiesen wird. In der Tat erhält man die Gleichungen:

(42) $$A_1 = [a e_1], \quad A_2 = [a e_2], \quad A_3 = [a e_3].$$

Bezeichnet man daher eine Reziprozität zweiter Ordnung, deren Ableitzahlen den Gleichungen (39) Genüge leisten, ohne zugleich sämtlich zu verschwinden, oder was dasselbe ist, eine eigentliche Reziprozität, die sich von ihrer konjugierten Reziprozität nur dem Vorzeichen nach unterscheidet (vgl. die Gleichungen (25) und (37)), mit dem besonderen Buchstaben n, setzt also:

(43) $$n = \frac{A_1, \ A_2, \ A_3}{e_1, \ e_2, \ e_3}, \quad \mathfrak{a}_{ki} = - \mathfrak{a}_{ik},$$

und nennt eine solche Reziprozität mit Rücksicht auf die mechanische Bedeutung der entsprechenden Abbildung des Raumes „ein Nullsystem zweiter Ordnung“, so lassen sich die Gleichungen (42) auch in der Form scheiben:

(44) $$e_1 n = [a e_1], \quad e_2 n = [a e_2], \quad e_3 n = [a e_3],$$

und es wird also:

(45) $$n = \frac{[a e_1], \ [a e_2], \ [a e_3]}{e_1, \quad e_2, \quad e_3}.$$

Ein beliebiger Punkt:

(46) $$x = \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3$$

wird dann durch die Abbildung n in den Stab übergeführt:

$$x n = \mathfrak{x}_1 [a e_1] + \mathfrak{x}_2 [a e_2] + \mathfrak{x}_3 [a e_3] = [a(\mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3)],$$

d. h. wegen (46) in den Stab:

(47) $$x n = [a x]$$

(Fig. 51). Diese Gleichung (47) nimmt in dem besonderen Falle, wo der Punkt x mit dem festen Punkte a zusammenfällt, die Form an:

$$a n = [a a],$$

d. h. die Form:

$$(48) \qquad an = 0.$$

Das Nullsystem zweiter Ordnung n weist somit einem jeden, von dem festen Punkte a verschiedenen Punkte x der Ebene seine Verbindungslinie mit diesem Punkte a zu, während dem Punkte a selbst die Zahlgröße 0 zugeordnet wird. Dieser Punkt a möge daher der **Nullpunkt des Nullsystemes zweiter Ordnung** genannt werden.

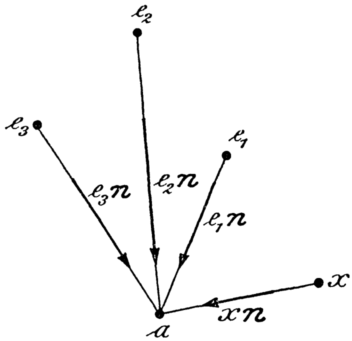


Fig. 51.

Aus dieser *„Grundeigenschaft eines Nullsystems zweiter Ordnung"* geht insbesondere hervor, daß dasselbe *eine entartende Reziprozität zweiter Ordnung ist;* denn sowohl die drei Zählerstäbe A_1, A_2, A_3 der Reziprozität n wie überhaupt jeder Stab xn, der einem von dem Nullpunkte a verschiedenen Punkte x zugewiesen wird, geht durch den Nullpunkt a des Nullsystems hindurch. Dadurch wird es bedingt, daß zu einem Nullsystem zweiter Ordnung eine inverse Abbildung nicht existiert.

Ferner sieht man, daß bei einem Nullsystem zweiter Ordnung auch von einer Polkurve nicht die Rede sein kann; denn wegen (47) wird die Gleichung:

$$(49) \qquad [x \cdot xn] = 0$$

überhaupt durch jeden Punkt x der Ebene befriedigt.

Aber von diesem Ergebnis gilt auch die Umkehrung. Man kann nämlich zeigen: Sobald eine eigentliche Reziprozität zweiter Ordnung r einer Gleichung von der Form (49), d. h. also der Gleichung:

$$(50) \qquad [x \cdot xr] = 0,$$

für jeden Punkt x der Ebene Genüge leistet, so ist sie notwendig ein Nullsystem zweiter Ordnung.

In der Tat, setzt man in der Gleichung (50):

$$x = y + \mathfrak{z},$$

wo y und $\mathfrak{z}$ zwei ganz beliebige Punkte der Ebene sind, so verwandelt sie sich in:

$$[(y + \mathfrak{z}) \cdot (y + \mathfrak{z})r] = 0$$

oder, wenn man ausmultipliziert und berücksichtigt, daß die Gleichung (50) insbesondere auch für die Punkte y und $\mathfrak{z}$ gelten muß, in:

$$(51) \qquad [\mathfrak{z} \cdot yr] = -[y \cdot \mathfrak{z}r].$$

Legt man in dieser Gleichung den Punkten $\mathfrak{z}$ und y die speziellen Werte

$$\mathfrak{z} = e_i \quad \text{und} \quad y = e_k, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

bei, so erhält man die besonderen Gleichungen:

(52) $$[e_i \cdot e_k r] = -[e_k \cdot e_i r], \quad i, k = 1, 2, 3,$$

oder wegen (1) und (3):

(53) $$\mathfrak{a}_{ki} = -\mathfrak{a}_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3.$$

Diese Gleichungen aber waren gerade die Bedingungsgleichungen des Nullsystems zweiter Ordnung (vgl. die Gleichungen (38)).

Durch diese Entwicklung haben wir zugleich in der Gleichung (51) eine wichtige Gleichung gewonnen, der ein Nullsystem zweiter Ordnung n genügen muß. Wir können die betreffende Gleichung aber auch leicht direkt aus der Gleichung (47) herleiten; denn es wird:

$$[\mathfrak{z} \cdot yn] = [\mathfrak{z} \cdot ay] = [\mathfrak{z}ay] = -[ya\mathfrak{z}] = -[y \cdot a\mathfrak{z}] = -[y \cdot \mathfrak{z}n].$$

Es ist also wirklich:

(54) $$[\mathfrak{z} \cdot yn] = -[y \cdot \mathfrak{z}n].$$

Aus der Gleichung (54) folgt noch, daß das Nullsystem zweiter Ordnung (ebenso wie das Polarsystem zweiter Ordnung) eine involutorische Reziprozität ist. Sobald nämlich die Gleichung besteht:

(55) $$[\mathfrak{z} \cdot yn] = 0,$$

d. h. sobald der Punkt $\mathfrak{z}$ auf der zugeordneten Geraden, „der Nullinie“ yn des Punktes y liegt, gilt wegen (54) auch die Gleichung:

(56) $$[y \cdot \mathfrak{z}n] = 0,$$

es liegt also dann auch der Punkt y auf der Nullinie $\mathfrak{z}n$ des Punktes $\mathfrak{z}$.

Dieses Ergebnis versteht sich geometrisch von selbst; denn nach der Grundeigenschaft des Nullsystems zweiter Ordnung (Gleichung (47)) stellt das Produkt yn die Verbindungsgerade des Punktes y mit dem Nullpunkte a des Nullsystems dar. Geht nun diese Verbindungslinie durch den Punkt $\mathfrak{z}$ hindurch, so geht selbstverständlich auch die Verbindungslinie des Punktes $\mathfrak{z}$ mit dem Nullpunkte a des Nullsystems durch den Punkt y hindurch, da ja beide Verbindungslinien miteinander identisch sind.

Man kann die gewonnenen Ergebnisse in dem folgenden Satze zusammenstellen:

Satz 625: Unterliegen die Ableitzahlen einer eigentlichen Reziprozität zweiter Ordnung den Bedingungsgleichungen:

$$\mathfrak{a}_{ki} = -\mathfrak{a}_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

so ist die Abbildung involutorisch und heißt ein (eigentliches) Nullsystem zweiter Ordnung. Ist:

$$a = \mathfrak{a}_{23} e_1 + \mathfrak{a}_{31} e_2 + \mathfrak{a}_{12} e_3,$$

so weist das Nullsystem einem jeden Punkte der Ebene, der von dem festen Punkte a verschieden ist, als „Nullinie“ seine

Verbindungslinie mit dem festen Punkte a zu, während jenem Punkte a selbst die Zahlgröße 0 zugeordnet wird. Dieser Punkt a heißt der Nullpunkt des Nullsystems. Das Nullsystem zweiter Ordnung ist daher zugleich eine entartende Reziprozität zweiter Ordnung. Bezeichnet man den extensiven Bruch eines Nullsystems zweiter Ordnung mit $\boldsymbol{n}$, so verschwindet die quadratische Form $[x \cdot x\boldsymbol{n}]$ für jeden Punkt x der Ebene. Umgekehrt ist jede eigentliche Reziprozität zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$, die der Gleichung $[x \cdot x\boldsymbol{r}] = 0$ für jeden beliebigen Punkt x Genüge leistet ein (eigentliches) Nullsystem zweiter Ordnung.

Um übrigens im folgenden nicht immer den Fall der uneigentlichen Reziprozität ausnehmen zu müssen, bemerken wir noch, daß die uneigentliche Reziprozität zweiter Ordnung sowohl als uneigentliches Polarsystem wie als uneigentliches Nullsystem zweiter Ordnung aufgefaßt werden kann; denn die Definitionsgleichungen der uneigentlichen Reziprozität zweiter Ordnung:

(57) $$\mathfrak{a}_{ik} = 0, \quad i, k = 1, 2, 3$$

ziehen sowohl die Bedingungsgleichungen:

(58) $$\mathfrak{a}_{ki} = \mathfrak{a}_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

des Polarsystems, wie die Bedingungsgleichungen:

(59) $$\mathfrak{a}_{ki} = -\mathfrak{a}_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3$$

des Nullsystems zweiter Ordnung nach sich.

Ferner sieht man, daß auch umgekehrt jede Reziprozität zweiter Ordnung, die zugleich ein Polarsystem und Nullsystem ist, notwendig eine uneigentliche Reziprozität zweiter Ordnung sein muß, da die Gleichungen (58) und (59) nur dann zusammen bestehen können, wenn zugleich die Gleichungen (57) erfüllt sind. Man hat also den Satz:

Satz 626: Jede uneigentliche Reziprozität zweiter Ordnung kann sowohl als uneigentliches Polarsystem wie als uneigentliches Nullsystem zweiter Ordnung aufgefaßt werden, und umgekehrt kann eine Reziprozität zweiter Ordnung, die zugleich ein Polarsystem und ein Nullsystem zweiter Ordnung ist, nur eine uneigentliche Reziprozität zweiter Ordnung sein.

Der Satz 625 läßt noch einige wichtige analytische Folgerungen zu. Wir setzen voraus, es sei eine Anzahl Reziprozitäten zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \ldots$ gegeben, und es bestehe zwischen den zugehörigen quadratischen Formen $[x \cdot x\boldsymbol{r}]$, $[x \cdot x\boldsymbol{s}]$, ... eine lineare Beziehung, d. h., es werde für beliebige Werte von x eine Gleichung von der Form:

(60) $$\mathfrak{g}[x \cdot x\boldsymbol{r}] + \mathfrak{h}[x \cdot x\boldsymbol{s}] + \cdots = 0$$

erfüllt, in der $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, ... konstante, d. h. von x unabhängige Zahlgrößen sind. Dann gebe man dieser Gleichung die Gestalt:

$$[x \cdot x(\mathfrak{g}\boldsymbol{r} + \mathfrak{h}\boldsymbol{s} + \cdots)] = 0, \tag{61}$$

so folgt nach dem Satze 625 (vgl. auch Satz 626), daß die Reziprozität:

$$\mathfrak{g}\boldsymbol{r} + \mathfrak{h}\boldsymbol{s} + \cdots$$

ein eigentliches oder uneigentliches Nullsystem zweiter Ordnung darstellt.

Es gilt daher der Satz:

Satz 627: Sind $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$, ... eine Anzahl Reziprozitäten zweiter Ordnung, und besteht zwischen den zugehörigen quadratischen Formen $[x \cdot x\boldsymbol{r}]$, $[x \cdot x\boldsymbol{s}]$, ... für jeden Wert von x eine lineare Beziehung von der Form:

$$\mathfrak{g}[x \cdot x\boldsymbol{r}] + \mathfrak{h}[x \cdot x\boldsymbol{s}] + \cdots = 0,$$

in der $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, ... konstante, d. h. von x unabhängige Zahlgrößen sind, so ist die Reziprozität:

$$\mathfrak{g}\boldsymbol{r} + \mathfrak{h}\boldsymbol{s} + \cdots$$

ein eigentliches oder uneigentliches Nullsystem zweiter Ordnung.

Herrscht insbesondere zwischen den quadratischen Formen $[x \cdot x\boldsymbol{p}]$, $[x \cdot x\boldsymbol{q}]$, ... einer Anzahl Polarsysteme zweiter Ordnung $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, ... für jeden Wert von x eine lineare Beziehung von der Form:

$$\mathfrak{g}[x \cdot x\boldsymbol{p}] + \mathfrak{h}[x \cdot x\boldsymbol{q}] + \cdots = 0, \tag{62}$$

und bildet man aus diesen Polarsystemen, die der linken Seite von (62) entsprechende Vielfachensumme:

$$\mathfrak{g}\boldsymbol{p} + \mathfrak{h}\boldsymbol{q} + \cdots$$

so stellt dieselbe nach dem Satze 627 ein Nullsystem zweiter Ordnung dar. Andererseits ist sie aber als Vielfachensumme von Polarsystemen zweiter Ordnung zugleich selbst ein Polarsystem zweiter Ordnung (vgl. den ersten Teil dieses Bandes, S. 293f.). Und das ist nach dem Satze 626 nur dann möglich, wenn diese Vielfachensumme eine uneigentliche Reziprozität zweiter Ordnung, d. h. die Zahlgröße 0, darstellt. Es muß also in diesem Falle neben der Gleichung (62) auch die Gleichung bestehen:

$$\mathfrak{g}\boldsymbol{p} + \mathfrak{h}\boldsymbol{q} + \cdots = 0. \tag{63}$$

Man hat daher den Satz:

Satz 628: Herrscht zwischen den quadratischen Formen $[x \cdot x\boldsymbol{p}]$, $[x \cdot x\boldsymbol{q}]$, ... einer Anzahl Polarsysteme zweiter Ordnung p, q, ... eine für jeden Punkt x geltende lineare Beziehung, d. h. eine Gleichung von der Form:

$$\mathfrak{g}[x \cdot xp] + \mathfrak{h}[x \cdot xq] + \cdots = 0, \tag{62}$$

in der $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, ... konstante, d. h. von x unabhängige Zahlgrößen sind, so besteht die entsprechende Beziehung auch zwischen den Polarsystemen $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, ... selbst, es wird also auch die Gleichung befriedigt:

$$\mathfrak{g}\boldsymbol{p} + \mathfrak{h}\boldsymbol{q} + \cdots = 0. \tag{63}$$

Die adjungierte Abbildung eines Nullsystems zweiter Ordnung. Um die adjungierte Abbildung eines Nullsystems zweiter Ordnung:

$$[\boldsymbol{n}^2] = \frac{[A_2 A_3],\ [A_3 A_1],\ [A_1 A_2]}{[e_2 e_3],\ \ [e_3 e_1],\ \ [e_1 e_2]} \tag{64}$$

eines Nullsystems zweiter Ordnung $\boldsymbol{n}$ zu bestimmen, berücksichtige man, daß nach der Gleichung (42) des 30. Abschnitts, der Gleichung (47) des vorliegenden und der Gleichung (8) des dritten Abschnitts:

$$[y\mathfrak{z}][\boldsymbol{n}^2] = [y\mathfrak{z}\boldsymbol{n}^2] = [y\boldsymbol{n} \cdot \mathfrak{z}\boldsymbol{n}] = [ay \cdot a\mathfrak{z}] = [ay\mathfrak{z}]a = [a \cdot y\mathfrak{z}]a \tag{65}$$

ist. Setzt man also:

$$[y\mathfrak{z}] = V, \tag{66}$$

so wird:

$$V[\boldsymbol{n}^2] = [V\boldsymbol{n}^2] = [aV]a; \tag{67}$$

und hieraus ergibt sich durch äußere Multiplikation mit einem beliebigen Stabe W die Gleichung:

$$[W \cdot V\boldsymbol{n}^2] = [aV][aW]. \tag{68}$$

Und da in ihr die beiden Faktoren $[aV]$ und $[aW]$ der rechten Seite als Zahlgrößen miteinander vertauschbar sind, so folgt, daß auch:

$$[W \cdot V\boldsymbol{n}^2] = [V \cdot W\boldsymbol{n}^2] \tag{69}$$

ist. Diese Gleichung aber zeigt, daß die durch das kombinatorische Quadrat $[n^2]$ eines Nullsystems zweiter Ordnung ausgedrückte Reziprozität zweiter Klasse der Grundgleichung des Polarsystems Genüge leistet und also die Stab-Punkt-Abbildung eines Polarsystems darstellt.

Um die Polarkurve dieses Polarsystems zu finden, beachte man, daß sich wegen (68) die quadratische Form $[U \cdot U\boldsymbol{n}^2]$ als Quadrat einer linearen Form ausdrücken läßt; denn es wird:

$$[U \cdot U\boldsymbol{n}^2] = [aU]^2, \tag{70}$$

so daß die Gleichung der Polarkurve jenes Polarsystems:

$$[U \cdot U\boldsymbol{n}^2] = 0 \tag{71}$$

die Form annimmt:

$$(72) \qquad [a\,U]^2 = 0$$

und also das doppelt zu zählende Strahlbüschel darstellt, das den Nullpunkt a des Nullsystems n zum Scheitel hat. Man hat daher den Satz:

Satz 629: Die adjungierte Abbildung eines Nullsystems zweiter Ordnung ist ein zweifach entartendes Polarsystem zweiter Klasse, dessen Polarkurve durch den doppeltzählenden Nullpunkt des Nullsystems gebildet wird.

Das Nullsystem zweiter Klasse und die uneigentliche Reziprozität zweiter Klasse. Es bleibt schließlich noch die dem Nullsystem zweiter Ordnung dualistisch entsprechende Abbildung zu behandeln. Dieselbe wird sich ergeben, wenn man in der obigen Entwicklung, die zu dem Nullsystem zweiter Ordnung führte, die Punkte durch Stäbe ersetzt und umgekehrt. Man gehe dazu aus von einem Bruche:

$$\frac{a_1,\ a_2,\ a_3}{E_1,\ E_2,\ E_3}$$

für eine Reziprozität zweiter Klasse, bei dem die Ableitzahlen $\mathfrak{A}_{ik}$ seiner drei Zähler a_i (vgl. die Gleichungen (6)) den Bedingungen:

$$(73) \qquad \mathfrak{A}_{ki} = -\mathfrak{A}_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

Genüge leisten. Dann lassen sich die sämtlichen Ableitzahlen der rechten Seite von (6) durch die drei Koeffizienten $\mathfrak{A}_{23}$, $\mathfrak{A}_{31}$, $\mathfrak{A}_{12}$ ausdrücken, indem nämlich die Gleichungen bestehen:

$$(74) \qquad \begin{cases} \mathfrak{A}_{11} = 0, & \mathfrak{A}_{22} = 0, & \mathfrak{A}_{33} = 0 \\ \mathfrak{A}_{32} = -\mathfrak{A}_{23}, & \mathfrak{A}_{13} = -\mathfrak{A}_{31}, & \mathfrak{A}_{21} = -\mathfrak{A}_{12}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (6) gehen daher über in die Gleichungen:

$$(75) \qquad \begin{cases} a_1 = \quad 0 \quad + \mathfrak{A}_{12} e_2 - \mathfrak{A}_{31} e_3 \\ a_2 = -\mathfrak{A}_{12} e_1 + \quad 0 \quad + \mathfrak{A}_{23} e_3 \\ a_3 = \mathfrak{A}_{31} e_1 - \mathfrak{A}_{23} e_2 + \quad 0, \end{cases}$$

für die man nach den Gleichungen (83) des 30. Abschnitts auch schreiben kann:

$$\begin{aligned} a_1 &= \quad 0 \quad + \mathfrak{A}_{12}[E_3 E_1] - \mathfrak{A}_{31}[E_1 E_2] = [(\ 0\ + \mathfrak{A}_{31} E_2 + \mathfrak{A}_{12} E_3) E_1] \\ a_2 &= -\mathfrak{A}_{12}[E_2 E_3] + \quad 0 \quad + \mathfrak{A}_{23}[E_1 E_2] = [(\mathfrak{A}_{23} E_1 + \ 0\ + \mathfrak{A}_{12} E_3) E_2] \\ a_3 &= \mathfrak{A}_{31}[E_2 E_3] - \mathfrak{A}_{23}[E_3 E_1] + \quad 0 \quad = [(\mathfrak{A}_{23} E_1 + \mathfrak{A}_{31} E_2 + \ 0\ ) E_3]. \end{aligned}$$

Diese Produktdarstellungen der drei Punkte a_1, a_2, a_3 lassen sich aber druch lineale Änderung in der Weise umformen, daß alle drei Punkte a_i als planimetrische Produkte *aus einem und demselben Stabe:*

$$(76) \qquad A = \mathfrak{A}_{23} E_1 + \mathfrak{A}_{31} E_2 + \mathfrak{A}_{12} E_3$$

und demjenigen Grundstabe E_i erscheinen, welchem der Punkt a_i durch die betrachtete Reziprozität zugewiesen wird. In der Tat erhält man die Gleichungen:

$$a_1 = [AE_1], \quad a_2 = [AE_2], \quad a_3 = AE_3. \tag{77}$$

Bezeichnet man daher die Stab-Punkt-Abbildung einer Reziprozität, deren Ableitzahlen den Gleichungen (73) Genüge leisten, mit dem besonderen Buchstaben N, setzt also:

$$N = \frac{a_1, \; a_2, \; a_3}{E_1, \; E_2, \; E_3}, \tag{78}$$

und nennt eine solche Reziprozität zweiter Klasse „ein Nullsystem zweiter Klasse", so lassen sich die Gleichungen (77) in der Form schreiben:

$$E_1 N = [AE_1], \quad E_2 N = [AE_2], \quad E_3 N = [AE_3], \tag{79}$$

und es wird also:

$$N = \frac{[AE_1], \; [AE_2], \; [AE_3]}{E_1, \; E_2, \; E_3}. \tag{80}$$

Ferner folgt aus den Gleichungen (79) durch lineare Verknüpfung, daß auch für einen beliebigen Stab:

$$U = u_1 E_1 + u_2 E_2 + u_3 E_3; \tag{81}$$

$$UN = [A\,U] \tag{82}$$

wird. Das Nullsystem zweiter Klasse weist also einem jeden Stabe U, dessen Gerade nicht mit der Geraden des festen Stabes A zusammenfällt, seinen Schnittpunkt mit der Geraden dieses festen Stabes A zu, während einem jeden Stabe der Geraden des Stabes A die Zahlgröße 0 zugeordnet wird. Die Gerade des Stabes A möge daher die Nullachse des Nullsystems zweiter Klasse genannt werden.

Aus dieser *„Grundeigenschaft eines Nullsystems zweiter Klasse"* folgert man wieder, daß dasselbe *eine entartende Reziprozität zweiter Klasse* ist; denn sowohl die drei Zählerpunkte a_1, a_2, a_3 der Reziprozität N, wie überhaupt jeder Punkt UN, der einem nicht auf der Nullachse A des Nullsystems liegenden Stabe U zugewiesen wird, liegt auf der Nullachse A des Nullsystems. Dadurch wird es bedingt, daß zu einem Nullsystem zweiter Klasse eine inverse Abbildung nicht existiert.

Ferner sieht man, daß bei einem Nullsystem zweiter Klasse auch von einer Polarkurve nicht die Rede sein kann; denn wegen (82) wird die Gleichung:

$$[U \cdot UN] = 0 \tag{83}$$

überhaupt durch jeden Stab U der Ebene befriedigt.

Aber von diesem Ergebnis gilt auch die Umkehrung. Man kann nämlich zeigen: Sobald eine eigentliche Reziprozität zweiter Klasse $\boldsymbol{R}$ einer Gleichung von der Form (83), d. h. also der Gleichung:

$$[U \cdot U\boldsymbol{R}] = 0, \tag{84}$$

für jeden Stab U der Ebene Genüge leistet, ist sie notwendig ein Nullsystem zweiter Klasse.

In der Tat, setzt man in die Gleichung (84):

$$U = V + W,$$

wo V und W zwei ganz beliebige Stäbe sind, so verwandelt sie sich in:

$$[(V + W) \cdot (V + W)\boldsymbol{R}] = 0,$$

woraus folgt, wenn man ausmultipliziert und berücksichtigt, daß die Gleichung (84) auch für die Stäbe V und W gelten muß,

$$[W \cdot V\boldsymbol{R}] = -[V \cdot W\boldsymbol{R}]; \tag{85}$$

insbesondere wird also:

$$[E_i \cdot E_k\boldsymbol{R}] = -[E_k \cdot E_i\boldsymbol{R}], \quad i, k = 1, 2, 3, \tag{86}$$

oder wegen (4) und (6):

$$\mathfrak{A}_{ki} = -\mathfrak{A}_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3. \tag{87}$$

Die Gleichungen (87) aber waren gerade die Bedingungsgleichungen des Nullsystems zweiter Klasse.

Durch diese Entwicklung haben wir zugleich in der Gleichung (85) eine wichtige Gleichung gewonnen, der ein Nullsystem zweiter Klasse $\boldsymbol{N}$ genügen muß. Wir können die betreffende Gleichung aber auch direkt aus der Gleichung (82) herleiten; denn es wird:

$$[W \cdot V\boldsymbol{N}] = [W \cdot AV] = [WAV] = -[V \cdot AW] = -[V \cdot W\boldsymbol{N}].$$

Es ist also wirklich:

$$[W \cdot V\boldsymbol{N}] = -[V \cdot W\boldsymbol{N}]. \tag{88}$$

Aus der Gleichung (88) folgt dann wieder, daß das Nullsystem zweiter Klasse (ebenso wie das Polarsystem zweiter Klasse) eine involutorische Reziprozität ist. Sobald nämlich die Gleichung besteht:

$$[W \cdot V\boldsymbol{N}] = 0, \tag{89}$$

d. h. sobald die Gerade W durch den zugeordneten Punkt, „den Nullpunkt" $V\boldsymbol{N}$ des Stabes V geht, gilt wegen (88) auch die Gleichung:

$$[V \cdot W\boldsymbol{N}] = 0, \tag{90}$$

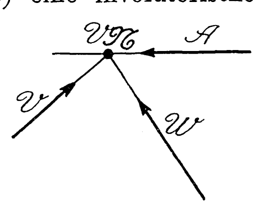


Fig. 52.

es geht also dann auch die Gerade V durch den Nullpunkt des Stabes W hindurch (Fig. 52).

Dieses Ergebnis versteht sich geometrisch von selbst; denn nach der Grundeigenschaft des Nullsystems zweiter Klasse (Gleichung (82)) stellt das Produkt VN den Schnittpunkt der Geraden V mit der Nullachse A des Nullsystems dar. Liegt nun dieser Schnittpunkt zugleich auf der Geraden des Stabes W, so liegt selbstverständlich auch der Schnittpunkt des Stabes W mit der Nullachse A des Nullsystems auf der Geraden des Stabes V, da ja beide Schnittpunkte miteinander identisch sind.

Bezeichnet man endlich noch eine Reziprozität zweiter Klasse, deren sämtliche Zähler verschwinden, deren Bruch also die Form hat:

$$\boldsymbol{R} = \frac{0,\ 0,\ 0}{E_1,\ E_2,\ E_3} \tag{91}$$

als „uneigentliche Reziprozität zweiter Klasse", jede andere Reziprozität zweiter Klasse als „eigentliche Reziprozität zweiter Klasse"; so kann man die gewonnenen Ergebnisse in dem folgenden Satze zusammenfassen:

Satz 630: Unterliegen die Ableitzahlen einer eigentlichen Reziprozität zweiter Klasse den Bedingungsgleichungen:

$$\mathfrak{A}_{ki} = -\mathfrak{A}_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

so ist die Abbildung involutorisch und heißt ein (eigentliches) Nullsystem zweiter Klasse. Ist:

$$A = \mathfrak{A}_{23} E_1 + A_{31} E_2 + \mathfrak{A}_{12} E_3,$$

so weist das Nullsystem einem jeden Stabe U der Ebene, der nicht in die Gerade des festen Stabes A fällt, seinen Schnittpunkt mit der festen Geraden A zu, während einem jeden Stabe jener Geraden A selbst die Zahlgröße 0 zugeordnet wird. Diese Gerade A heißt die Nullachse des Nullsystems. Das Nullsystem zweiter Klasse ist daher zugleich eine entartende Reziprozität zweiter Klasse. Bezeichnet man den extensiven Bruch eines Nullsystems zweiter Klasse mit $\boldsymbol{N}$, so verschwindet die quadratische Form $[U \cdot U\boldsymbol{N}]$ für jeden Stab U der Ebene. Umgekehrt ist jede eigentliche Reziprozität zweiter Klasse $\boldsymbol{N}$, die der Gleichung $[U \cdot U\boldsymbol{N}] = 0$ für jeden Stab U der Ebene Genüge leistet, ein (eigentliches) Nullsystem zweiter Klasse.

Ferner erhält man in derselben Weise wie bei der dualistischen Entwicklung noch die folgenden Sätze:

Satz 631: Jede uneigentliche Reziprozität zweiter Klasse kann sowohl als uneigentliches Polarsystem wie als uneigentliches Nullsystem zweiter Klasse aufgefaßt werden, und umgekehrt kann eine Reziprozität zweiter Klasse, die zugleich ein Polarsystem und ein Nullsystem ist, nur eine uneigentliche Reziprozität zweiter Klasse sein.

Satz 632: Sind $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$, ... eine Anzahl Reziprozitäen zweiter Klasse, und besteht zwischen den zugehörigen quadratischen Formen $[U \cdot U\boldsymbol{R}]$, $[U \cdot U\boldsymbol{S}]$, ... für jeden Wert des Stabes U eine lineare Beziehung von der Form:

$$(92) \qquad \mathfrak{g}[U \cdot U\boldsymbol{R}] + \mathfrak{h}[U \cdot U\boldsymbol{S}] + \cdots = 0,$$

so ist die Reziprozität:

$$\mathfrak{g}\boldsymbol{R} + \mathfrak{h}\boldsymbol{S} + \cdots$$

ein eigentliches oder uneigentliches Nullsystem zweiter Klasse.

Satz 633: Herrscht zwischen den quadratischen Formen $[U \cdot U\boldsymbol{P}]$, $[U \cdot U\boldsymbol{Q}]$, ... einer Anzahl Polarsysteme zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, ... für jeden Wert des Stabes U eine lineare Beziehung, d. h. eine Gleichung von der Form:

$$(93) \qquad \mathfrak{g}[U \cdot U\boldsymbol{P}] + \mathfrak{h}[U \cdot U\boldsymbol{Q}] + \cdots = 0,$$

so besteht die entsprechende Beziehung auch zwischen den Polarsystemen $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, ... selbst, d. h. es wird auch die Gleichung befriedigt:

$$(94) \qquad \mathfrak{g}\boldsymbol{P} + \mathfrak{h}\boldsymbol{R} + \cdots = 0.$$

Die adjungierte Abbildung eines Nullsystems zweiter Klasse. Um die adjungierte Abbildung:

$$(95) \qquad [\boldsymbol{N}^2] = \frac{[\alpha_2 \alpha_3], \quad [\alpha_3 \alpha_1], \quad [\alpha_1 \alpha_2]}{[E_2 E_3], [E_3 E_1], [E_1 E_2]}$$

eines Nullsystems zweiter Klasse $\boldsymbol{N}$ zu bestimmen, berücksichtige man, daß nach der Gleichung (75) des 30. Abschnittes, der Gleichung (82) des vorliegenden und der Gleichung (39) des dritten Abschnittes:

$$(96) \qquad \begin{aligned} [VW][\boldsymbol{N}^2] &= [VW\boldsymbol{N}^2] = [V\boldsymbol{N} \cdot W\boldsymbol{N}] = [AV \cdot AW] \\ &= [AVW]A = [A \cdot VW]A \end{aligned}$$

ist. Setzt man also noch:

$$(97) \qquad [VW] = y,$$

so wird:

$$(98) \qquad y[\boldsymbol{N}^2] = [y\boldsymbol{N}^2] = [Ay]A;$$

und hieraus ergibt sich durch äußere Multiplikation mit einem beliebigen Punkte z:

$$(99) \qquad [z \cdot y\boldsymbol{N}^2] = [Ay][Az].$$

Da hier auf der rechten Seite die beiden Faktoren $[Ay]$ und $[Az]$ als Zahlgrößen miteinander vertauschbar sind, so folgt aus (99), daß:

$$(100) \qquad [z \cdot y\boldsymbol{N}^2] = [y \cdot z\boldsymbol{N}^2]$$

ist. Diese Gleichung aber zeigt, daß die durch das kombinatorische Quadrat $[N^2]$ ausgedrückte Reziprozität zweiter Ordnung der Grundgleichung des Polarsystems Genüge leistet und also die Punkt-Stab-Abbildung eines Polarsystems darstellt.

Um die Polkurve dieses Polarsystems zu finden, beachte man, daß sich wegen (99) die quadratische Form $[x \cdot x N^2]$ als Quadrat einer linearen Form ausdrücken läßt; denn es wird:

(101) $$[x \cdot x N^2] = [Ax]^2,$$

so daß die Gleichung der Polkurve jenes Polarsystems:

(102) $$[x \cdot x N^2] = 0$$

die Form annimmt:

(103) $$[Ax]^2 = 0.$$

Diese Gleichung aber stellt die doppelt zu zählende Nullinie A des Nullsystems dar, und man hat den Satz:

Satz 634: Die adjungierte Abbildung eines Nullsystems zweiter Klasse ist ein zweifach entartendes Polarsystem zweiter Ordnung, dessen Polkurve durch die doppelt zu zählende Nullachse des Nullsystems gebildet wird.

Abschnitt 44.

Konjugierte und adjungierte Reziprozitäten, ihr Kernpunkt und ihre Kerngerade.

Beziehungen zwischen zwei konjugierten Reziprozitäten zweiter Ordnung. Der Kernpunkt einer Reziprozität zweiter Ordnung. Wir kehren jetzt zu unserer bereits im vorigen Abschnitt begonnenen Untersuchung zurück, in der es sich um die Beziehungen zwischen den vier extensiven Brüchen r, R, $\frac{1}{r}$ und $\frac{1}{R}$ handelte. Dabei setzen wir jetzt ausdrücklich voraus, daß die Reziprozität r, R von einem Polarsystem verschieden und überdies umkehrbar sei. Durch die zweite Forderung ist dann zugleich der Fall des Nullsystems von der Betrachtung ausgeschlossen. Ferner können alsdann die beiden Brüche für die konjugierten Reziprozitäten r und $r' = \frac{\mathfrak{a}}{R}$ auch nicht nur um einen Zahlfaktor voneinander verschieden sein. Denn wie auf S. 87f. gezeigt ist, könnte dieser Zahlfaktor nur entweder $= +1$ oder $= -1$ sein. Im ersten Falle aber wäre die Reziprozität ein Polarsystem, im zweiten Falle ein Nullsystem, was beides mit unseren Voraussetzungen in Widerspruch steht.

Übrigens überzeugt man sich leicht, daß eine von einem Polarsystem verschiedene Reziprozität zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$, d. h. (vgl. S. 87) eine Reziprozität $\boldsymbol{r}$, die der Ungleichung Genüge leistet:

(1) $$\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}',$$

unter $\boldsymbol{r}'$ die zu $\boldsymbol{r}$ konjugierte Reziprozität verstanden, trotz der Ungleichung (1) sehr wohl für einen einzelnen Punkt:

(2) $$c = \mathfrak{c}_1 e_1 + \mathfrak{c}_2 e_2 + \mathfrak{c}_3 e_3$$

eine Gleichung von der Form:

(3) $$c\boldsymbol{r} = c\boldsymbol{r}'$$

befriedigen kann. Denn es ist:

$$c\boldsymbol{r} = (\mathfrak{c}_1 e_1 + \mathfrak{c}_2 e_2 + \mathfrak{c}_3 e_3) = \mathfrak{c}_1 A_1 + \mathfrak{c}_2 A_2 + \mathfrak{c}_3 A_3$$

oder nach den Formeln (3) des vorigen Abschnitts:

(4) $$c\boldsymbol{r} = (\mathfrak{c}_1 \mathfrak{a}_{11} + \mathfrak{c}_2 \mathfrak{a}_{21} + \mathfrak{c}_3 \mathfrak{a}_{31}) E_1 + (\mathfrak{c}_1 \mathfrak{a}_{12} + \mathfrak{c}_2 \mathfrak{a}_{22} + \mathfrak{c}_3 \mathfrak{a}_{32}) E_2 \\ + (\mathfrak{c}_1 \mathfrak{a}_{13} + \mathfrak{c}_2 \mathfrak{a}_{23} + \mathfrak{c}_3 \mathfrak{a}_{33}) E_3 .$$

Andererseits wird wegen der Gleichung (23) des vorigen Abschnittes:

$$c\boldsymbol{r}' = (\mathfrak{c}_1 e_1 + \mathfrak{c}_2 e_2 + \mathfrak{c}_3 e_3)\boldsymbol{r}' = \mathfrak{c}_1 A_1' + \mathfrak{c}_2 A_2' + \mathfrak{c}_3 A_3'$$

oder wegen der Gleichungen (24) desselben Abschnittes:

(5) $$c\boldsymbol{r}' = (\mathfrak{c}_1 \mathfrak{a}_{11} + \mathfrak{c}_2 \mathfrak{a}_{12} + \mathfrak{c}_3 \mathfrak{a}_{13}) E_1 + (\mathfrak{c}_1 \mathfrak{a}_{21} + \mathfrak{c}_2 \mathfrak{a}_{22} + \mathfrak{c}_3 \mathfrak{a}_{23}) E_2 \\ + (\mathfrak{c}_1 \mathfrak{a}_{31} + \mathfrak{c}_2 \mathfrak{a}_{32} + \mathfrak{c}_3 \mathfrak{a}_{33}) E_3 .$$

Die Gleichung (3) läßt sich daher erfüllen, und zwar auch nur in der Weise erfüllen, daß man setzt:

(6) $$\begin{cases} \mathfrak{c}_2(\mathfrak{a}_{21} - \mathfrak{a}_{12}) + \mathfrak{c}_3(\mathfrak{a}_{31} - \mathfrak{a}_{13}) = 0 \\ \mathfrak{c}_3(\mathfrak{a}_{32} - \mathfrak{a}_{23}) + \mathfrak{c}_1(\mathfrak{a}_{12} - \mathfrak{a}_{21}) = 0 \\ \mathfrak{c}_1(\mathfrak{a}_{13} - \mathfrak{a}_{31}) + \mathfrak{c}_2(\mathfrak{a}_{23} - \mathfrak{a}_{32}) = 0. \end{cases}$$

Aus diesen drei Gleichungen aber folgt für die Ableitzahlen $\mathfrak{c}_i$ des Punktes c die laufende Proportion:

(7) $$\mathfrak{c}_1 : \mathfrak{c}_2 : \mathfrak{c}_3 = \mathfrak{a}_{23} - \mathfrak{a}_{32} : \mathfrak{a}_{31} - \mathfrak{a}_{13} : \mathfrak{a}_{12} - \mathfrak{a}_{21} .$$

Der Punkt c ist daher, abgesehen von seiner Masse, die willkürlich bleibt, eindeutig bestimmt; er möge „der Kernpunkt der Reziprozität $\boldsymbol{r}$", genannt werden und ist, weil auch umgekehrt $\boldsymbol{r}$ zu $\boldsymbol{r}'$ konjugiert ist, zugleich der Kernpunkt von $\boldsymbol{r}'$. Man hat also den Satz:

Satz 635: Für eine jede von einem Polarsystem verschiedene Reziprozität zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$ gibt es stets einen, aber auch nur einen Punkt c, dem durch die Reziprozität $\boldsymbol{r}$ und ihre konjugierte Reziprozität $\boldsymbol{r}'$ auch der Länge und dem Sinne nach derselbe Stab zugeordnet wird, für welchen also die Gleichung besteht:

$$c\boldsymbol{r} = c\boldsymbol{r}'$$

Dieser Punkt c heißt „der Kernpunkt der Reziprozität $\boldsymbol{r}$"; er ist zugleich der Kernpunkt der Reziprozität $\boldsymbol{r}'$.

Man kann aber weiter noch fragen, ob es nicht Punkte gibt, die durch zwei voneinander verschiedene konjugierte umkehrbare Reziprozitäten zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r}' = \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$, wenn auch nicht in dieselben Stäbe, aber doch wenigstens in *Stäbe der nämlichen Geraden* übergeführt werden, ob es also Punkte d_t gibt, die einer Gleichung von der Form:

$$d_t\boldsymbol{r} = \mathfrak{r}_t d_t \boldsymbol{r}' \tag{8}$$

oder, was wegen der Gleichung (22) des vorigen Abschnittes dasselbe ist, einer Gleichung von der Form:

$$d_t\boldsymbol{r} = \mathfrak{r}_t d_t \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}} \tag{9}$$

Genüge leisten, unter $\mathfrak{r}_t$ eine von 1 verschiedene Zahlgröße verstanden.

Um diese Frage zu beantworten, multipliziere man die Gleichung (9) mit der zur Reziprozität $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ inversen Reziprozität $\frac{\boldsymbol{R}}{\mathfrak{a}}$. Man erhält so die Gleichung:

$$d_t\boldsymbol{r}\frac{\boldsymbol{R}}{\mathfrak{a}} = \mathfrak{r}_t d_t. \tag{10}$$

In ihr stellt das Folgeprodukt $\boldsymbol{r}\frac{\boldsymbol{R}}{\mathfrak{a}}$ nach dem Satze 383 die Punkt-Punkt-Abbildung einer Kollineation dar. Bezeichnet man dieselbe mit $\mathfrak{k}$, setzt also:

$$\boldsymbol{r}\frac{\boldsymbol{R}}{\mathfrak{a}} = \mathfrak{k}, \tag{11}$$

so verwandelt sich die Gleichung (10) in:

$$d_t\mathfrak{k} = r_t d_t, \tag{12}$$

d. h. man erhält gerade die Gleichung für die Doppelpunkte der Kollineation $\mathfrak{k}$, in der freilich auch $\mathfrak{r}_t = 1$ sein kann (vgl. die Gleichung (1) des 28. Abschnittes). Es gibt daher neben dem Kernpunkte der Reziprozität, für den der Zahlfaktor $\mathfrak{r}_t = 1$ wird, noch zwei weitere Punkte, denen durch die beiden konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r}'$ Stäbe derselben Geraden zugewiesen werden; diese Punkte können allerdings auch konjugiert komplex sein (vgl. den 28. Abschnitt, insbesondere Satz 328).

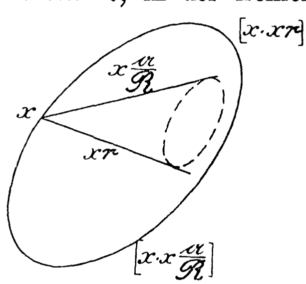


Fig. 53.

Einem jeden Punkte x hingegen, der nicht wie die Punkte c und d_t einer Gleichung von der Form (3) oder (8) Genüge leistet, werden durch die konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r}' = \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ zwei Stäbe $x\boldsymbol{r}$ und $x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ *zweier verschiedenen Geraden* zugeordnet (vgl. hierzu die Fig. 53).

Die zu zwei konjugierten Reziprozitäten zweiter Ordnung gehörigen bilinearen und quadratischen Formen. Um andere Beziehungen zwischen zwei konjugierten Reziprozitäten aufzufinden, gehen wir von den Gleichungen (18) des vorigen Abschnittes aus, welche lauteten:

$$(13)\qquad e_i \boldsymbol{r} = \mathfrak{a}_{i1} E_1 + \mathfrak{a}_{i2} E_2 + \mathfrak{a}_{i3} E_3, \quad i = 1, 2, 3,$$

und stellen zu ihnen die Gleichungen (20) desselben Abschnitts, in denen wir nur den Buchstaben i durch den Buchstaben k ersetzen wollen; wir schreiben sie also in der Form:

$$(14)\qquad e_k \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}} = \mathfrak{a}_{1k} E_1 + \mathfrak{a}_{2k} E_2 + \mathfrak{a}_{3k} E_3, \quad k = 1, 2, 3.$$

Diese Gleichungen (13) und (14) multiplizieren wir vorne äußerlich mit e_k und e_i und erhalten die Gleichungen:

$$(15)\qquad \left.\begin{cases} [e_k \cdot e_i \boldsymbol{r}] = \mathfrak{a}_{ik} & \text{und} \\ \left[e_i \cdot e_k \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right] = \mathfrak{a}_{ik} & \end{cases}\right\}, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

aus denen durch Gleichsetzung der linken Seiten folgt, daß:

$$(16)\qquad [e_k \cdot e_i \boldsymbol{r}] = \left[e_i \cdot e_k \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right], \quad i, k = 1, 2, 3,$$

ist. Aus den Gleichungen (16) aber folgert man wie auf S. 175 des ersten Teiles dieses Bandes durch einfaches Ausmultiplizieren, daß auch für zwei beliebige Punkte y und z die entsprechende Gleichung besteht:

$$(17)\qquad [z \cdot y \boldsymbol{r}] = \left[y \cdot z \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right],$$

die man übrigens wegen der Gleichung (22) des vorigen Abschnitts auch in der Form schreiben kann:

$$(18)\qquad [z \cdot y \boldsymbol{r}] = [y \cdot z \boldsymbol{r}'].$$

Insbesondere wird daher:

$$(19)\qquad [x \cdot x \boldsymbol{r}] = \left[x \cdot x \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right].$$

Beachtet man ferner, daß die Ungleichung (1), die für eine jede von einem Polarsystem verschiedene Reziprozität $\boldsymbol{r}$ galt, in dem Falle, wo $\boldsymbol{r}$ umkehrbar ist, auch in der Form:

$$(20)\qquad \boldsymbol{r} \neq \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$$

geschrieben werden kann, und daß nach dem Satze 635 für jeden von dem Kernpunkte c der Reziprozität verschiedenen Punkt x auch:

$$(21)\qquad x \boldsymbol{r} \neq x \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$$

ist, so kann man das gewonnene Ergebnis in dem Satze zusammenfassen:

Satz 636: Ist $\mathfrak{a}$ die Determinante einer umkehrbaren Reziprozität zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$, die überdies von einem Polarsystem verschieden ist, und ist $\boldsymbol{R}$ die zu $\boldsymbol{r}$ adjungierte Reziprozität, so ist zwar

$$\boldsymbol{r} \neq \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}, \tag{20}$$

und es ist auch für jeden beliebigen Punkt x, der nicht mit dem Kernpunkte der Reziprozität $\boldsymbol{r}$ zusammenfällt,

$$x\boldsymbol{r} \neq x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}. \tag{21}$$

Ja, es sind *im allgemeinen* die beiden Stäbe $x\boldsymbol{r}$ und $x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ auch nicht etwa nur um einen Zahlfaktor voneinander verschieden, sondern sie gehören zwei getrennten Geraden an. Dagegen gilt für einen jeden Punkt x der Ebene die Gleichung:

$$[x \cdot x\boldsymbol{r}] = \left[x \cdot x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right], \tag{19}$$

d. h. es sind die beiden quadratischen Formen $[x \cdot x\boldsymbol{r}]$ und $\left[x \cdot x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right]$ für jeden Wert von x einander gleich. Ferner besteht zwischen den bilinearen Formen $[z \cdot y\boldsymbol{r}]$ und $\left[y \cdot z\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right]$ für beliebige Werte von y und z die Beziehung:

$$[z \cdot y\boldsymbol{r}] = \left[y \cdot z\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right]. \tag{17}$$

Aus der Gleichheit der beiden quadratischen Formen in (19) folgt insbesondere, daß von den beiden Gleichungen

$$[x \cdot x\boldsymbol{r}] = 0 \quad \text{und} \tag{22}$$

$$\left[x \cdot x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right] = 0 \tag{23}$$

jede die andere nach sich zieht. Nun stellt aber nach dem Satze 595 die Gleichung (22) die Polkurve der Reziprozität $\boldsymbol{r}$ dar, und die Gleichung (23) ist dementsprechend die Gleichung für die Polkurve der zu $\boldsymbol{r}$ konjugierten Reziprozität $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$. Das Zusammenbestehen der Gleichungen (22) und (23) zeigt daher, daß diese beiden Polkurven zusammenfallen, und man hat den Satz:

Satz 637: Bei jeder umkehrbaren Reziprozität zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$ fällt die Polkurve

$$[x \cdot x\boldsymbol{r}] = 0$$

mit der Polkurve $\qquad \left[x \cdot x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right] = 0$

der konjugierten Reziprozität $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ zusammen (vgl. Fig. 53).

Man kann aber die Tatsache des Zusammenbestehens der Gleichungen (22) und (23) auch noch in anderer Weise deuten. Bezeichnet man nämlich das System der Punkte x und der Stäbe U, dessen Abbildung durch die Reziprozität $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$ vermittelt wird, wie schon auf S. 146 des ersten Teiles dieses Bandes geschehen, als das erste System und das System der Stäbe und Punkte

(24) $$U' = x\boldsymbol{r} \quad \text{und} \quad x' = U\boldsymbol{R},$$

in welche die Punkte und Stäbe x und U des ersten Systems durch die Reziprozität $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$ übergeführt werden, als das zweite System, so bewirkt die zur Reziprozität $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$ inverse Reziprozität $\frac{1}{\boldsymbol{r}}$, $\frac{1}{\boldsymbol{R}}$ die Rückverwandlung des zweiten Systems in das erste denn nach den Sätzen 384 und 385 folgen aus den Gleichungen (24) durch Auflösung nach x und U die Gleichungen:

(25) $$x = U'\frac{1}{\boldsymbol{r}} \quad \text{und} \quad U = x'\frac{1}{\boldsymbol{R}}.$$

Man kann daher sagen, daß die Punkte und Stäbe x und U des ersten Systems, oder was wegen (25) dasselbe ist, die Punkte $U'\frac{1}{\boldsymbol{r}}$ und $x'\frac{1}{\boldsymbol{R}}$ des ersten Systems den Stäben und Punkten U' und x' des zweiten Systems in der Reziprozität $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}$ „rückwärts entsprechen".

Ändert man schließlich noch die Bezeichnung, so kann man auch behaupten, daß

die Punkte und Stäbe $U\frac{1}{\boldsymbol{r}}$ und $x\frac{1}{\boldsymbol{R}}$ den Stäben und Punkten U und x rückwärts entsprechen.

Nun sagt die Gleichung der Polkurve von $\boldsymbol{r}$, d. h. die obige Gleichung:

(22) $$[x \cdot x\boldsymbol{r}] = 0,$$

daß der Punkt x auf dem ihm in der Reziprozität $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$ *vorwärts entsprechenden Stabe* $x\boldsymbol{r}$ liegt,

und die Gleichung der mit jener Polkurve zusammenfallenden Polkurve der konjugierten Reziprozität $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$, d. h. die obige Gleichung:

(23) $$\left[x \cdot x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right] = 0,$$

daß der Punkt x auf dem ihm in der Reziprozität $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$ *rückwärts entsprechenden Stabe* $x\frac{1}{\boldsymbol{R}}$ liegt, dessen Gerade ja mit der des Stabes $x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ identisch ist.

Aus dem Zusammenbestehen der Gleichungen (22) und (23) folgt also auch noch der Satz:

Satz 638: Wenn in einer umkehrbaren Reziprozität $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$ ein Punkt x auf dem ihm vorwärts entsprechenden Stabe $x\boldsymbol{r}$ liegt, so liegt er zugleich auch auf dem ihm rückwärts entsprechenden Stabe $x\frac{1}{\boldsymbol{R}}$ und umgekehrt.

Übrigens kann man die Gleichheit der beiden quadratischen Formen $[x \cdot x\boldsymbol{r}]$ und $\left[x \cdot x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right]$ (vgl. die Gleichung (19), aus der die obigen Ergebnisse gefolgert wurden) auch leicht durch Einführung ihrer Ausdrücke in Punktkoordinaten beweisen. Setzt man nämlich wie gewöhnlich:

$$x = \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3, \tag{26}$$

so wird:

$$x\boldsymbol{r} = \mathfrak{x}_1 \quad e_1\boldsymbol{r} + \mathfrak{x}_2 \quad e_2\boldsymbol{r} + \mathfrak{x}_3 \quad e_3\boldsymbol{r} \quad \text{und} \tag{27}$$

$$x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}} = \mathfrak{x}_1 \quad e_1\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}} + \mathfrak{x}_2 \quad e_2\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}} + \mathfrak{x}_3 \quad e_3\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}. \tag{28}$$

Aus diesen beiden Gleichungen aber folgen, wenn man sie äußerlich mit der Gleichung (26) vormultipliziert, die Gleichungen:

$$[x \cdot x\boldsymbol{r}] = \mathfrak{x}_1^2[e_1 \cdot e_1\boldsymbol{r}] + \cdots + \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3\{[e_3 \cdot e_2\boldsymbol{r}] + [e_2 \cdot e_3\boldsymbol{r}]\} + \cdots \tag{29}$$

und

$$\left[x \cdot x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right] = \mathfrak{x}_1^2\left[e_1 \cdot e_1\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right] + \cdots + \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3\left\{\left[e_3 \cdot e_2\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right] + \left[e_2 \cdot e_3\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right]\right\} + \cdots \tag{30}$$

oder wegen (15):

$$[x \cdot x\boldsymbol{r}] = \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{x}_1^2 + \cdots + \{\mathfrak{a}_{23} + \mathfrak{a}_{32}\}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + \cdots \quad \text{und} \tag{31}$$

$$\left[x \cdot x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right] = \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{x}_1^2 + \cdots + \{\mathfrak{a}_{32} + \mathfrak{a}_{23}\}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + \cdots. \tag{32}$$

Und diese beiden Ausdrücke für die beiden quadratischen Formen $[x \cdot x\boldsymbol{r}]$ und $\left[x \cdot x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right]$ unterscheiden sich nur durch die Anordnung der Glieder in den Summen, welche die Koeffizienten der Produkte $\mathfrak{x}_i\mathfrak{x}_k$ $(i \neq k)$ bilden, so daß damit die Gleichung (19) von neuem bewiesen ist.

Die zu zwei konjugierten Reziprozitäten zweiter Klasse gehörigen bilinearen und quadratischen Formen. Die Kerngerade einer Reziprozität zweiter Klasse. Nach dem Begriff des extensiven Bruches sind die Nenner E_i des Reziprozitätsbruches zweiter Klasse:

$$\boldsymbol{R} = \frac{a_1,\ a_2,\ a_3}{E_1,\ E_2,\ E_3} \tag{33}$$

mit seinen Zählern a_i durch die Gleichungen verknüpft:

$$E_i\boldsymbol{R} = a_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

für die man wegen der Gleichungen (6) des vorigen Abschnittes auch schreiben kann:

$$E_i\boldsymbol{R} = \mathfrak{A}_{i1}e_1 + \mathfrak{A}_{i2}e_2 + \mathfrak{A}_{i3}e_3, \quad i = 1, 2, 3. \tag{34}$$

Faßt man ferner die Reziprozität zweiter Klasse $\boldsymbol{R}$ als adjungierte Abbildung einer Reziprozität zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$ auf, und setzt von dieser voraus, daß sie umkehrbar sei, woraus die gleiche Eigenschaft für die adjungierte Reziprozität $\boldsymbol{R}$ folgt, so ergeben sich aus den Gleichungen (8) des vorigen Abschnitts durch Multiplikation mit $\frac{1}{\boldsymbol{r}}$ die Gleichungen:

$$\mathfrak{a} E_k \frac{1}{\boldsymbol{r}} = (\mathfrak{A}_{1k} A_1 + \mathfrak{A}_{2k} A_2 + \mathfrak{A}_{3k} A_3) \frac{1}{\boldsymbol{r}}, \quad k = 1, 2, 3,$$

oder wegen der Gleichung (12) desselben Abschnitts die Gleichungen:

$$E_k \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}} = \mathfrak{A}_{1k} e_1 + \mathfrak{A}_{2k} e_2 + \mathfrak{A}_{3k} e_3, \quad k = 1, 2, 3. \tag{35}$$

Dann zeigt die Vergleichung der Gleichungen (33) und (35) *zunächst*, daß die Ableitzahlen für die Zähler der Brüche $\boldsymbol{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ gegeneinander transponiert sind. Nennt man daher wieder diejenige Reziprozität zweiter Klasse, die aus der Reziprozität $\boldsymbol{R}$ durch Transposition der Ableitzahlen $\mathfrak{A}_{ik}$ ihrer Zähler entsteht, die zu $\boldsymbol{R}$ konjugierte Reziprozität und bezeichnet sie mit $\boldsymbol{R}'$, setzt also:

$$\boldsymbol{R}' = \frac{a_1',\ a_2',\ a_3'}{E_1,\ E_2,\ E_3}, \tag{36}$$

wo:

$$a_k' = \mathfrak{A}_{1k} e_1 + \mathfrak{A}_{2k} e_2 + \mathfrak{A}_{3k} e_3, \quad k = 1, 2, 3, \tag{37}$$

ist, so wird:

$$\boldsymbol{R}' = \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}, \tag{38}$$

und man hat den Satz:

Satz 639: Bezeichnet man die Determinante der Ableitzahlen für die Zähler einer umkehrbaren Reziprozität zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$ mit $\mathfrak{a}$ und die zu $\boldsymbol{r}$ adjungierte Reziprozität zweiter Klasse mit $\boldsymbol{R}$, endlich die zu $\boldsymbol{R}$ konjugierte Reziprozität mit $\boldsymbol{R}'$, so ist:

$$\boldsymbol{R}' = \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}. \tag{38}$$

Aus den Gleichungen (34) und (35) ergeben sich aber *ferner*, wenn man sie beziehlich mit E_k und E_i äußerlich vormultipliziert, die Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{ll} [E_k \cdot E_i \boldsymbol{R}] = \mathfrak{A}_{ik} & \text{und} \\ \left[E_i \cdot E_k \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}\right] = \mathfrak{A}_{ik} & \end{array}\right\}, \quad i, k = 1, 2, 3, \tag{39}$$

aus denen durch Gleichsetzen der linken Seiten folgt, daß:

$$[E_k \cdot E_i \boldsymbol{R}] = \left[E_i \cdot E_k \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}\right], \quad i, k = 1, 2, 3, \tag{40}$$

ist. Aus diesen Gleichungen (40) aber folgert man wieder durch einfaches Ausmultiplizieren, daß auch für zwei beliebige Stäbe die entsprechende Gleichung besteht:

(41) $$[W \cdot V\boldsymbol{R}] = \left[V \cdot W\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}\right].$$

Insbesondere wird daher:

(42) $$[U \cdot U\boldsymbol{R}] = \left[U \cdot U\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}\right].$$

Bevor wir dieses Ergebnis in Satzform aussprechen, berücksichtigen wir noch, daß sich die obige Ungleichung:

(1) $$\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}'$$

wegen der Gleichung (22) des vorigen Abschnitts auch in der Form schreiben läßt:

(43) $$\boldsymbol{r} \neq \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$$

oder auch in der Form:

(44) $$\boldsymbol{R} \neq \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$$

oder endlich wegen (37) in der Form:

(45) $$\boldsymbol{R} \neq \boldsymbol{R}',$$

welche aussagt, daß, wenn die konjugierten Reziprozitäten zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r}'$ voneinander verschieden sind, dasselbe auch von den konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{R}'$ gilt.

Übrigens zeigt wegen der Gleichung (53) des einunddreißigsten Abschnitts (vgl. auch Satz 391) die Gleichung (44) oder (45) noch, daß die Reziprozität zweiter Klasse $\boldsymbol{R}$ von einem Polarsystem zweiter Klasse verschieden ist.

Ferner kann trotz der Ungleichung (45) sehr wohl für einen einzelnen Stab C oder für die Stäbe einer einzelnen Geraden eine Gleichung von der Form bestehen:

(46) $$C\boldsymbol{R} = C\boldsymbol{R}'.$$

In der Tat sieht man sofort, daß der Stab:

(47) $$C = c\boldsymbol{r}$$

die Gleichung (46) befriedigt, denn es wird wegen (3) und wegen der Gleichung (22) des vorigen Abschnitts:

(48) $$C\boldsymbol{R} = c\boldsymbol{r}\boldsymbol{R} = c\boldsymbol{r}'\boldsymbol{R} = c\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R} = \mathfrak{a}c$$

und wegen (47) und (37) wird:

(49) $$C\boldsymbol{R}' = c\boldsymbol{r}\boldsymbol{R}' = c\boldsymbol{r}\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}} = \mathfrak{a}c;$$

folglich wird der obigen Gleichung:

(46) $$C\boldsymbol{R} = C\boldsymbol{R}'$$

wirklich durch den Stab (47) Genüge geleistet, d. h. durch denjenigen Stab C, in welchen der Kernpunkt c der Reziprozität $\boldsymbol{r}$ durch diese Reziprozität übergeführt wird. Die Gleichungen (48) und (49) zeigen dann noch, daß auch umgekehrt der Stab C durch die beiden konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{R}'$ in den mit dem Kernpunkt c zusammenfallenden Punkt $\mathfrak{a}c$ zurückgeführt wird.

Man überzeugt sich ferner leicht, daß die Stäbe, die mit dem Stabe C in eine Gerade fallen, auch die einzigen Stäbe sind, die eine Gleichung von der Form (46) erfüllen. Ist nämlich:

$$C = \mathfrak{C}_1 E_1 + \mathfrak{C}_2 E_2 + \mathfrak{C}_3 E_3 \tag{50}$$

ein Stab, der die Gleichung (46) befriedigt, so wird wegen (32):

$$C\boldsymbol{R} = (\mathfrak{C}_1 E_1 + \mathfrak{C}_2 E_2 + \mathfrak{C}_3 E_3)\boldsymbol{R} = \mathfrak{C}_1 a_1 + \mathfrak{C}_2 a_2 + \mathfrak{C}_3 a_3$$

oder nach den Gleichungen (6) des vorigen Abschnitts:

$$\begin{aligned} C\boldsymbol{R} = (\mathfrak{C}_1 \mathfrak{A}_{11} + \mathfrak{C}_2 \mathfrak{A}_{21} + \mathfrak{C}_3 \mathfrak{A}_{31}) e_1 &+ (\mathfrak{C}_1 \mathfrak{A}_{12} + \mathfrak{C}_2 \mathfrak{A}_{22} + \mathfrak{C}_3 \mathfrak{A}_{32}) e_2 \\ &+ (\mathfrak{C}_1 \mathfrak{A}_{13} + \mathfrak{C}_2 \mathfrak{A}_{23} + \mathfrak{C}_3 \mathfrak{A}_{33}) e_3 . \end{aligned} \tag{51}$$

Andererseits wird wegen (35):

$$C\boldsymbol{R}' = (\mathfrak{C}_1 E_1 + \mathfrak{C}_2 E_2 + \mathfrak{C}_3 E_3)\boldsymbol{R}' = \mathfrak{C}_1 a_1' + \mathfrak{C}_2 a_2' + \mathfrak{C}_3 a_3'$$

oder wegen der Gleichungen (36):

$$\begin{aligned} C\boldsymbol{R}' = (\mathfrak{C}_1 \mathfrak{A}_{11} + \mathfrak{C}_2 \mathfrak{A}_{12} + \mathfrak{C}_3 \mathfrak{A}_{13}) e_1 &+ (\mathfrak{C}_1 \mathfrak{A}_{21} + \mathfrak{C}_2 \mathfrak{A}_{22} + \mathfrak{C}_3 \mathfrak{A}_{23}) e_2 \\ &+ (\mathfrak{C}_1 \mathfrak{A}_{31} + \mathfrak{C}_2 \mathfrak{A}_{32} + \mathfrak{C}_3 \mathfrak{A}_{33}) e_3 . \end{aligned} \tag{52}$$

Die Gleichung (46) läßt sich daher dadurch befriedigen, und überdies auch nur in der Weise befriedigen, daß man setzt:

$$\begin{cases} \mathfrak{C}_2 (\mathfrak{A}_{21} - \mathfrak{A}_{12}) + \mathfrak{C}_3 (\mathfrak{A}_{31} - \mathfrak{A}_{13}) = 0 , \\ \mathfrak{C}_3 (\mathfrak{A}_{32} - \mathfrak{A}_{23}) + \mathfrak{C}_1 (\mathfrak{A}_{12} - \mathfrak{A}_{21}) = 0 , \\ \mathfrak{C}_1 (\mathfrak{A}_{13} - \mathfrak{A}_{31}) + \mathfrak{C}_2 (\mathfrak{A}_{23} - \mathfrak{A}_{32}) = 0 . \end{cases} \tag{53}$$

Aus diesen Gleichungen aber folgt für die Ableitzahlen $\mathfrak{C}_i$ des Stabes C die laufende Proportion:

$$\mathfrak{C}_1 : \mathfrak{C}_2 : \mathfrak{C}_3 = \mathfrak{A}_{23} - \mathfrak{A}_{32} : \mathfrak{A}_{31} - \mathfrak{A}_{13} : \mathfrak{A}_{12} - \mathfrak{A}_{21} . \tag{54}$$

Der Stab C ist also durch die Gleichung (46), abgesehen von seiner Länge und seinem Sinn, eindeutig bestimmt, oder was auf dasselbe hinauskommt, durch jene Gleichung wird die Gerade des Stabes C eindeutig festgelegt. Diese Gerade möge „die Kerngerade der Reziprozität $\boldsymbol{R}$“ genannt werden und ist, weil auch umgekehrt R zu R' konjugiert ist, zugleich die Kerngerade von R'. Man hat also den Satz:

Satz 640: Für eine jede von einem Polarsystem verschiedene umkehrbare Reziprozität zweiter Klasse $\boldsymbol{R}$ gibt es eine, aber auch nur eine Gerade, welche die Eigenschaft hat, daß jedem ihrer Stäbe durch die Reziprozität $\boldsymbol{R}$ und ihre konjugierte Reziprozität $\boldsymbol{R}'$ auch der Masse nach ein und derselbe Punkt zugeordnet wird, so daß also für jeden Stab C dieser Geraden die Gleichung:

$$C\boldsymbol{R} = C\boldsymbol{R}'$$

besteht. Diese Gerade heißt „die Kerngerade der Reziprozität $\boldsymbol{R}$“; sie ist zugleich die Kerngerade der Reziprozität $\boldsymbol{R}'$. Jener Punkt, der ihren Stäben durch die beiden konjugierten Reziprozitäten zugewiesen wird, fällt mit dem Kernpunkt der Reziprozität zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$ zusammen, zu der die Reziprozität zweiter Klasse $\boldsymbol{R}$ adjungiert ist.

Es gibt aber wieder noch zwei weitere Geraden, die allerdings auch konjugiert komplex sein können, deren Stäbe durch die beiden voneinander verschiedenen umkehrbaren konjugierten Reziprozitäten zweiter Klasse $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{R}' = \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ in zwei zusammenfallende Bildpunkte übergeführt werden, wenn auch die Massen dieser beiden Bildpunkte verschieden sind, d. h. es gibt zwei weitere Geraden, deren Stäbe D_t einer Gleichung von der Form:

$$(55) \qquad D_t\boldsymbol{R} = \mathfrak{r}_t D_t \boldsymbol{R}'$$

Genüge leisten, unter $\mathfrak{r}_t$ eine von 1 verschiedene Zahlgröße verstanden.

In der Tat sieht man sogleich, daß die Stäbe:

$$(56) \qquad D_t = d_t \boldsymbol{r}$$

die Gleichung (55) befriedigen, wo die Punkte d_t durch die Gleichung (8) definiert sind. Wegen der Gleichung (9), die eine Folge von (8) ist, wird nämlich mit Rücksicht auf (56):

$$(57) \qquad D_t\boldsymbol{R} = d_t\boldsymbol{r}\boldsymbol{R} = \mathfrak{a}\mathfrak{r}_t d_t,$$

und wegen (56) und (37) wird:

$$(58) \qquad D_t\boldsymbol{R}' = d_t\boldsymbol{r}\boldsymbol{R}' = d_t\boldsymbol{r}\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}} = \mathfrak{a} d_t.$$

Hier geht aber die rechte Seite von (57) aus derjenigen von (58) durch Multiplikation mit $\mathfrak{r}_t$ hervor; folglich besteht die entsprechende Beziehung auch zwischen den linken Seiten. Und damit ist die Gleichung (55) bewiesen.

Es sind also wirklich neben der Kerngeraden einer Reziprozität $\boldsymbol{R}$ noch zwei weitere Geraden vorhanden, deren Stäben durch die beiden konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{R}'$ zwei zusammenfallende Bildpunkte zugewiesen werden. Einem jeden Stabe U hingegen, der nicht wie die Stäbe C und D_t einer Gleichung von der Form (46) oder (55) Genüge leistet, werden durch die konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{R}' = \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ zwei *auch der Lage nach verschiedene Punkte* $U\boldsymbol{R}$ und $U\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ zugeordnet (vgl. hierzu die weiter unten folgende Fig. 54).

Man kann die gewonnenen Ergebnisse in dem Satze zusammenfassen:

Satz 641: Ist $\mathfrak{a}$ die Determinante einer umkehrbaren Reziprozität zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$, die überdies von einem Polarsystem verschieden ist, und ist $\boldsymbol{R}$ die zu $\boldsymbol{r}$ adjungierte Reziprozität, so ist zwar:

$$\boldsymbol{R} \neq \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}, \tag{44}$$

und es ist auch für jeden Stab U der Ebene, der nicht auf die Kerngerade der Reziprozität $\boldsymbol{R}$ fällt:

$$U\boldsymbol{R} \neq U\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}. \tag{59}$$

Ja, es unterscheiden sich *im allgemeinen* die Punkte $U\boldsymbol{R}$ und $U\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ auch nicht nur um einen Zahlfaktor, sondern sie sind auch ihrer Lage nach voneinander verschieden. Dagegen gilt für einen jeden Stab U der Ebene die Gleichung:

$$[U \cdot U\boldsymbol{R}] = \left[U \cdot U\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}\right], \tag{42}$$

d. h. es sind die beiden quadratischen Formen $[U \cdot U\boldsymbol{R}]$ und $\left[U \cdot U\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}\right]$ für jeden Wert von U einander gleich. Ferner besteht zwischen den beiden bilinearen Formen $[W \cdot V\boldsymbol{R}]$ und $\left[V \cdot W\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}\right]$ für beliebige Werte der Stäbe V und W die Beziehung:

$$[W \cdot V\boldsymbol{R}] = \left[V \cdot W\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}\right]. \tag{41}$$

Aus der Gleichheit der beiden quadratischen Formen in (42) folgt dann wieder, daß von den beiden Gleichungen:

$$[U \cdot U\boldsymbol{R}] = 0 \tag{60}$$

und

$$\left[U \cdot U\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}\right] = 0 \tag{61}$$

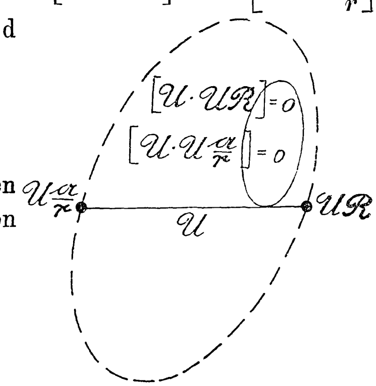


Fig. 54.

jede die andere nach sich zieht. Nun stellt aber nach dem Satze 623 die Gleichung (60) die Polarkurve der Reziprozität $\boldsymbol{R}$ dar, und die Gleichung (61) ist dementsprechend die Gleichung für die Polarkurve der zu $\boldsymbol{R}$ konjugierten Reziprozität $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$. Das Zusammenbestehen der Gleichungen (60) und (61) zeigt daher, daß diese beiden Polarkurven zusammenfallen, und man hat den Satz:

Satz 642: Bei jeder umkehrbaren Reziprozität zweiter Klasse $\boldsymbol{R}$ fällt die Polarkurve:

$$[U \cdot U\boldsymbol{R}] = 0$$

mit der Polarkurve: $\left[U \cdot U\frac{\mathfrak{a}}{r}\right] = 0$

der konjugierten Reziprozität $\frac{\mathfrak{a}}{r}$ zusammen (Fig. 54).

Da ferner, wie oben auf S. 105 gezeigt ist, der Punkt $U\boldsymbol{R}$ dem Stabe U in der Reziprozität $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}$ vorwärts und der Punkt $U\frac{1}{r}$ demselben Stabe rückwärts entspricht, so sagt die obige Gleichung:

(60) $$[U \cdot U\boldsymbol{R}] = 0$$

aus, daß der Stab U durch seinen ihm in der Reziprozität $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}$ vorwärts entsprechenden Punkt $U\boldsymbol{R}$ hindurchgeht, während die Gleichung:

(61) $$\left[U \cdot U\frac{\mathfrak{a}}{r}\right] = 0$$

besagt, daß der Stab U durch den ihm rückwärts ensprechenden Punkt $U\frac{1}{r}$ hindurchgeht, der ja mit dem Punkte $U\frac{\mathfrak{a}}{r}$ zusammenfällt.

Aus dem Zusammenbestehen der Gleichungen (60) und (61) folgt also auch noch der Satz:

Satz 643: Wenn in einer umkehrbaren Reziprozität $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}$ ein Stab durch seinen vorwärts entsprechenden Punkt geht, so geht er zugleich auch durch seinen ihm rückwärts entsprechenden Punkt hindurch und umgekehrt.

Schließlich kann man noch entsprechend der Entwickelung auf S. 106 die quadratischen Formen $[U \cdot U\boldsymbol{R}]$ und $\left[U \cdot U\frac{\mathfrak{a}}{r}\right]$ durch ihre Ausdrücke in Linienkoordinaten ersetzen und so die Identität (42) auch anderweitig bestätigen. Man erhält, wenn man wie gewöhnlich:

(62) $$U = \mathfrak{u}_1 E_1 + \mathfrak{u}_2 E_2 + \mathfrak{u}_3 E_3$$

setzt:

(63) $$U\boldsymbol{R} = \mathfrak{u}_1 \quad E_1\boldsymbol{R} + \mathfrak{u}_2 \quad E_2\boldsymbol{R} + \mathfrak{u}_3 \quad E_3\boldsymbol{R}$$

und

(64) $$U\frac{\mathfrak{a}}{r} = \mathfrak{u}_1 \quad E_1\frac{\mathfrak{a}}{r} + \mathfrak{u}_2 \quad E_2\frac{\mathfrak{a}}{r} + \mathfrak{u}_3 \quad E_3\frac{\mathfrak{a}}{r}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen aber folgen durch planimetrisches Vormultiplizieren mit (62) für die quadratischen Formen $[U \cdot U\boldsymbol{R}]$ und $\left[U \cdot U\frac{\mathfrak{a}}{r}\right]$ die Ausdrücke:

(65) $$[U \cdot U\boldsymbol{R}] = \mathfrak{u}_1^2[E_1 \cdot E_1\boldsymbol{R}] + \cdots + \mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_3\{[E_3 \cdot E_2\boldsymbol{R}] + [E_2 \cdot E_3\boldsymbol{R}]\} + \cdots$$

und

(66) $$\left[U \cdot U\frac{\mathfrak{a}}{r}\right] = \mathfrak{u}_1^2\left[E_1 \cdot E_1\frac{\mathfrak{a}}{r}\right] + \cdots + \mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_3\left\{\left[E_3 \cdot E_2\frac{\mathfrak{a}}{r}\right] + \left[E_2 \cdot E_3\frac{\mathfrak{a}}{r}\right]\right\} + \cdots$$

oder wegen (38) und (39):

(67) $$[U \cdot U\boldsymbol{R}] = \mathfrak{A}_{11}\mathfrak{u}_1^2 + \cdots + \{\mathfrak{A}_{23} + \mathfrak{A}_{32}\}\mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_3 + \cdots$$

und

$$(68)\qquad \left[U \cdot U\frac{\mathfrak{a}}{r}\right] = \mathfrak{A}_{11}\mathfrak{u}_1{}^2 + \cdots + \{\mathfrak{A}_{32} + \mathfrak{A}_{23}\}\mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_3 + \cdots.$$

Und diese beiden Ausdrücke unterscheiden sich nur durch die Anordnung der Glieder in den Summen, welche die Koeffizienten der Produkte $\mathfrak{u}_i\mathfrak{u}_k$ $(i \neq k)$ bilden, und es ist somit wirklich die Identität (42) von neuem bewiesen.

Die adjungierte Abbildung der zu einer Reziprozität zweiter Ordnung oder zweiter Klasse konjugierten Reziprozität. Schließlich möge noch (vgl. die Sätze 624 und 639) von der zu der Reziprozität:

r konjugierten Reziprozität $\frac{\mathfrak{a}}{R}$ die adjungierte Abbildung $\left[\left(\frac{\mathfrak{a}}{R}\right)^2\right]$ und ebenso von der zu der Reziprozität:

R konjugierten Reziprozität $\frac{\mathfrak{a}}{r}$ die adjungierte Abbildung $\left[\left(\frac{\mathfrak{a}}{r}\right)^2\right]$ gebildet werden. Es wird wegen der Gleichungen (13) und (12) des vorigen Abschnitts:

$$\frac{\mathfrak{a}}{R} = \mathfrak{a}\frac{E_1,\ E_2,\ E_3}{a_1,\ a_2,\ a_3} \qquad \text{und} \qquad \frac{\mathfrak{a}}{r} = \mathfrak{a}\frac{e_1,\ e_2,\ e_3}{A_1,\ A_2,\ A_3}, \quad \text{also:}$$

$$\left[\left(\frac{\mathfrak{a}}{R}\right)^2\right] = \mathfrak{a}^2\frac{e_1,\qquad e_2,\qquad e_3}{[a_2a_3],\ [a_3a_1],\ [a_1a_2]} \qquad \text{und} \qquad \left[\left(\frac{\mathfrak{a}}{r}\right)^2\right] = \mathfrak{a}^2\frac{E_1,\qquad E_2,\qquad E_3}{[A_2A_3],\ [A_3A_1],\ [A_1A_2]},$$

oder wegen der Gleichungen (79) und (84) des dreißigsten Abschnitts:

$$\left[\left(\frac{\mathfrak{a}}{R}\right)^2\right] = \mathfrak{a}^2\frac{e_1,\ e_2,\ e_3}{\mathfrak{a}A_1,\ \mathfrak{a}A_2,\ \mathfrak{a}A_3} = \mathfrak{a}\frac{e_1,\ e_2,\ e_3}{A_1,\ A_2,\ A_3} \qquad \text{und} \qquad \left[\left(\frac{\mathfrak{a}}{r}\right)^2\right] = \mathfrak{a}^2\frac{E_1,\ E_2,\ E_3}{a_1,\ a_2,\ a_3},$$

d. h. wieder mit Rücksicht auf die Gleichungen (12) und (13) des vorigen Abschnitts:

$$(69)\qquad \left[\left(\frac{\mathfrak{a}}{R}\right)^2\right] = \frac{\mathfrak{a}}{r} \qquad \text{und} \qquad (70)\qquad \left[\left(\frac{\mathfrak{a}}{r}\right)^2\right] = \mathfrak{a}\frac{\mathfrak{a}}{R}.$$

Hier ist aber die Reziprozität $\frac{\mathfrak{a}}{r}$ nach Satz 639 die zur Reziprozität R konjugierte Reziprozität und ebenso nach Satz 624 die Reziprozität $\frac{\mathfrak{a}}{R}$ die zu r konjugierte Reziprozität. Man hat also die Sätze:

Satz 644: Die zu der Reziprozität $\frac{\mathfrak{a}}{R}$ adjungierte Reziprozität $\left[\left(\frac{\mathfrak{a}}{R}\right)^2\right]$ ist identisch mit der zu der Reziprozität R konjugierten Reziprozität $\frac{\mathfrak{a}}{r}$;

oder anders ausgedrückt:

Die adjungierte Reziprozität zur konjugierten Reziprozität einer Reziprozität zweiter Ordnung r ist identisch mit der konjugierten Reziprozität zur adjungierten Reziprozität derselben Reziprozität r. Und

Satz 645: Die zu der Reziprozität $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ adjungierte Reziprozität $\left[\left(\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}\right)^2\right]$ geht aus der zu $\boldsymbol{r}$ konjugierten Reziprozität $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ durch Multiplikation mit der Determinante $\mathfrak{a}$ des Bruches $\boldsymbol{r}$ hervor;

oder anders ausgedrückt:

Die adjungierte Reziprozität zur konjugierten Reziprozität einer Reziprozität zweiter Klasse $\boldsymbol{R}$ ist identisch mit der konjugierten Reziprozität zur adjungierten Reziprozität derselben Reziprozität $\boldsymbol{R}$.

Die Richtigkeit der zweiten Fassung dieser beiden Sätze folgt aus der Tatsache, daß sich die Gleichungen (69) und (70) auch in der Form schreiben lassen:

(71) $\quad [r'^2] = \boldsymbol{R}'$ $\quad$ und $\quad$ (72) $\quad [\boldsymbol{R}'^2] = \mathfrak{a}\boldsymbol{r}' = \bar{\boldsymbol{r}}'$,

wo wie bisher $\boldsymbol{R}$ die zu $\boldsymbol{r}$ adjungierte Reziprozität, $\bar{\boldsymbol{r}}$ die zu $\boldsymbol{R}$ adjungierte Reziprozität, und wo $\boldsymbol{r}', \boldsymbol{R}', \bar{\boldsymbol{r}}'$ die zu den Reziprozitäten $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}, \bar{\boldsymbol{r}}$ konjugierten Reziprozitäten sind, und wo für die Begründung der Gleichung (72) zu berücksichtigen ist, daß die Gleichung (82) des dreißigsten Abschnitts zwischen den Reziprozitäten $\boldsymbol{r}$ und $\bar{\boldsymbol{r}}$ die entsprechende Gleichung zwischen den zu $\boldsymbol{r}$ und $\bar{\boldsymbol{r}}$ konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{r}'$ und $\bar{\boldsymbol{r}}'$ nach sich zieht.

Die Abbildung der Kernkurven einer Reziprozität durch die ursprüngliche und durch die konjugierte Reziprozität. Um den Zusammenhang der vier Reziprozitäten:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{r}, & \boldsymbol{R} \\ \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}, & \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}} \end{Bmatrix}$$

noch von einer anderen Seite zu beleuchten, transformieren wir die beiden oben entwickelten Gleichungsformen für die Polkurve, welche lauteten:

$$(21) \qquad [x \cdot x\boldsymbol{r}] = 0$$

und

$$(22) \qquad \left[x \cdot x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right] = 0$$

nach dem Satze 370. Wir ersetzen nämlich die Punktfaktoren x der Produkte der linken Seite dieser beiden Gleichungen durch diejenigen Stäbe $x\boldsymbol{r}$ und $x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$, die jenen Punktfaktoren x in den beiden zueinander konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ entsprechen und zugleich die Stabfaktoren $x\boldsymbol{r}$ und $x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ durch diejenigen Punkte $x\boldsymbol{r}\boldsymbol{R}$ und $x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$, die ihnen in den zu jenen beiden Reziprozitäten adjungierten Reziprozitäten $\boldsymbol{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ zugeordnet werden. Durch diese Transformation wird nach dem genannten

Satze die Gültigkeit der Gleichungen (21) und (22) nicht gestört. Dieselben nehmen bei der beschriebenen Umwandlung die Form an:

$$(73)\qquad \begin{cases} [x\boldsymbol{r}\cdot x\boldsymbol{r}\boldsymbol{R}] = 0 \quad \text{und} \\ \left[x\dfrac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\cdot x\dfrac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\dfrac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}\right] = 0. \end{cases}$$

Setzt man aber hierin:

$$(74)\qquad \begin{cases} x\boldsymbol{r} = U \quad \text{und:} \\ x\dfrac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}} = U_1, \end{cases}$$

indem man berücksichtigt, daß nach dem Satze 636 im allgemeinen:

$$x\boldsymbol{r} \neq x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$$

ist, ja daß sich die Stäbe $x\boldsymbol{r}$ und $x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ im allgemeinen auch nicht etwa nur um einen Zahlfaktor voneinander unterscheiden, so verwandeln sich die Gleichungen (73) in:

$$(75)\qquad \begin{cases} [U\cdot U\boldsymbol{R}] = 0 \quad \text{und} \\ \left[U_1\cdot U_1\dfrac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}\right] = 0. \end{cases}$$

Jede von diesen beiden Gleichungen (75) aber ist die Gleichung der gemeinsamen Polarkurve der beiden konjugierten Reziprozitäten zweiter Klasse $\boldsymbol{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$. Und da der laufende Stab U und U_1 dieser Polarkurve nach den Gleichungen (74) gerade dem laufenden Punkte x der gemeinsamen Polkurve der beiden konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ durch diese Reziprozitäten zugeordnet wird, so sieht man, daß die gemeinschaftliche Polkurve der beiden konjugierten Reziprozitäten zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$, durch diese Reziprozitäten selbst in die gemeinsame Polarkurve der zu ihnen adjungierten Reziprozitäten $\boldsymbol{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ übergeführt wird. Man hat somit den Satz:

Satz 646: Die gemeinsame Polkurve zweier konjugierten Reziprozitäten zweiter Ordnung wird durch diese Reziprozitäten in die gemeinsame Polarkurve der beiden jenen konjugierten Reziprozitäten zweiter Ordnung adjungierten Reziprozitäten zweiter Klasse übergeführt.

Zugleich kann man aus der obigen Entwicklung die geometrische Bedeutung der Stäbe U und U_1 entnehmen. Da nämlich die Geraden der Stäbe:

$$U = x\boldsymbol{r} \quad \text{und} \quad U_1 = x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}},$$

die einem beliebigen Punkte x der Polkurve der konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ durch diese Reziprozitäten zugewiesen werden, den Gleichungen

(21) und (22) zufolge durch jenen Punkt x der Polkurve hindurchgehen, und andererseits nach den Gleichungen (75) die Polarkurve der adjungierten Reziprozitäten $\boldsymbol{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ berühren, so sind die Geraden der Stäbe U und U_1 nichts anderes als die beiden Tangenten, die sich von jenem Punkte x der Polkurve an diese Polarkurve ziehen lassen, d. h. es gilt der Satz:

Satz 647: Man erhält zu einem Punkte x der gemeinsamen Polkurve zweier konjugierten Reziprozitäten zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ die ihm hinsichtlich dieser beiden Reziprozitäten zugeordneten Geraden, indem man von dem Punkte x an die gemeinsame Polarkurve der zu jenen Reziprozitäten zweiter Ordnung adjungierten Reziprozitäten zweiter Klasse $\boldsymbol{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ die beiden Tangenten legt (Fig. 55).

Man kann noch hinzufügen: Da nach S. 143 des ersten Teils dieses Bandes die neun Ableitzahlen $\mathfrak{a}_{ik}$ der Reziprozität $\boldsymbol{r}$ als reell vorausgesetzt sind, und somit auch die aus jenen Ableitzahlen durch Transposition hervorgehenden Ableitzahlen der konjugierten Reziprozität $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ reell sind, so wird einem jeden reellen Punkte der Ebene durch eine jede von den beiden konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ ein reeller Stab zugewiesen. Da ferner die den Punkten der Polkurve zugeordneten Stäbe die Polarkurve umhüllen,

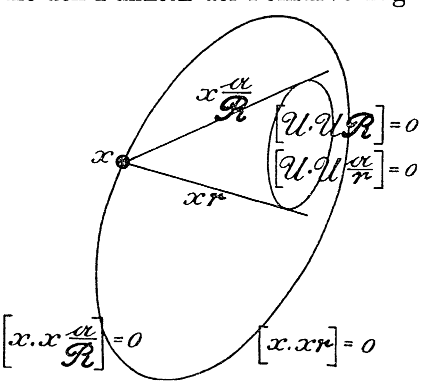


Fig. 55.

so gehört zu einer reellen Polkurve auch eine reelle Polarkurve. Und da endlich die Punkte der Polkurve auf den entsprechenden Tangenten der Polarkurve liegen, so kann kein Punkt der Polkurve innerhalb der Polarkurve liegen (vgl. S. 259f. des ersten Teils dieses Bandes). Man hat somit den Satz:

Satz 648: Ist die Polkurve einer Reziprozität reell, so gilt dasselbe auch von ihrer Polarkurve. Dabei kann kein Punkt der Polkurve innerhalb der Polarkurve liegen.

Jetzt transformiere man andererseits in entsprechender Weise die beiden Gleichungsformen der Polarkurve, welche lauteten:

(60) $$[U \cdot U\boldsymbol{R}] = 0 \quad \text{und}$$

(61) $$\left[U \cdot U\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}\right] = 0,$$

indem man wieder nach dem Satze 370 die Punktfaktoren $U\boldsymbol{R}$ und $U\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ der Produkte der linken Seite dieser beiden Gleichungen durch diejenigen

Stäbe $\boldsymbol{URr}$ und $U\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ ersetzt, die jenen Punktfaktoren $\boldsymbol{UR}$ und $U\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ durch die beiden zueinander konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ zugewiesen werden, und zugleich die Stabfaktoren U durch diejenigen Punkte $\boldsymbol{UR}$ und $U\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$, die ihnen in den zu jenen beiden Reziprozitäten adjungierten Reziprozitäten $\boldsymbol{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ entsprechen. Durch diese Transformation nehmen die Gleichungen (60) und (61) die Form an:

$$(76)\qquad \begin{cases} [\boldsymbol{UR}\cdot\boldsymbol{URr}]=0 \quad \text{und} \\ \left[U\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}\cdot U\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right]=0. \end{cases}$$

In ihnen wollen wir dann, entsprechend dem obigen, für die Punkte $\boldsymbol{UR}$ und $U\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ kurze Bezeichnungen einführen. Für den letzten Punkt sind wir dabei durch eine frühere Festsetzung gebunden. Aus der ersten Gleichung (74) folgt nämlich, daß:

$$(77)\qquad U\frac{1}{\boldsymbol{r}}=x, \quad \text{also:}$$

$$(78)\qquad U\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}=\mathfrak{a}x$$

ist. Den Punkt $\boldsymbol{UR}$, der nach dem Satze 641 von dem Punkte x im allgemeinen auch der Lage nach verschieden sein wird, bezeichnen wir mit x_1, setzen somit:

$$(79)\qquad \boldsymbol{UR}=x_1.$$

Bei Einführung dieser Bezeichnungen nehmen die Gleichungen (76), wenn man noch die zweite Gleichung mit $\mathfrak{a}^2$ dividiert, die Gestalt an:

$$(80)\qquad \begin{cases} [x_1\cdot x_1\boldsymbol{r}]=0 \quad \text{und} \\ \left[x\cdot x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right]=0. \end{cases}$$

Jede von diesen beiden Gleichungen (80) aber ist die Gleichung der gemeinsamen Polkurve der beiden konjugierten Reziprozitäten zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$. Und da der laufende Punkt x_1 und x dieser Polkurve nach den Gleichungen (79) und (77) oder (78) gerade der laufenden Tangente U der gemeinsamen Polarkurve der beiden konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ durch diese Reziprozitäten zugeordnet wird, so sieht man, daß die gemeinsame Polarkurve der beiden konjugierten Reziprozitäten zweiter Klasse $\boldsymbol{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ durch diese Reziprozitäten selbst in die gemeinsame Polkurve derjenigen beiden zueinander konjugierten Reziprozitäten zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ übergeführt wird, denen jene beiden konjugierten Reziprozitäten zweiter Klasse adjungiert sind. Man hat somit den Satz:

Satz 649: Die gemeinsame Polarkurve zweier konjugierten Reziprozitäten zweiter Klasse wird durch diese Reziprozitäten in die gemeinsame Polkurve derjenigen beiden konjugierten Reziprozitäten zweiter Ordnung übergeführt, zu denen jene beiden konjugierten Reziprozitäten zweiter Ordnung adjungiert sind (Fig. 56).

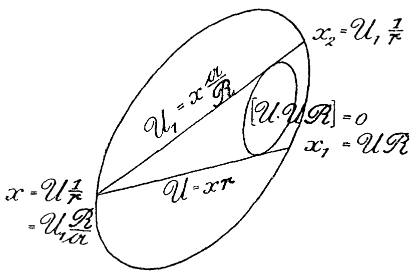


Fig. 56.

Zugleich kann man aus der obigen Entwicklung die geometrische Bedeutung der Punkte x und x_1 entnehmen. Da nämlich die Punkte:

$$x = U\frac{1}{\boldsymbol{r}} \quad \text{und} \quad x_1 = U\boldsymbol{R},$$

die einer beliebigen Tangente U der Polarkurve der beiden einander konjugierten Reziprozitäten $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ und $\boldsymbol{R}$ durch die Reziprozitäten $\frac{1}{\boldsymbol{r}}$ und $\boldsymbol{R}$ zugewiesen werden, den Gleichungen (61) und (60) zufolge auf der Tangente U jener Polarkurve liegen und andererseits nach den Gleichungen (80) auch der gemeinsamen Polkurve der zueinander konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ angehören, so sind die Punkte x und x_1 nichts anderes als die beiden Schnittpunkte, welche die Tangente U der gemeinsamen Polarkurve der beiden einander konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ mit der gemeinsamen Polkurve der zueinander konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ gemein hat. Und da der Punkt $\mathfrak{a}x = U\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ mit dem Punkte x zusammenfällt, so hat man den Satz:

Satz 650: Einer Tangente der gemeinsamen Polarkurve zweier umkehrbaren konjugierten Reziprozitäten zweiter Klasse $\boldsymbol{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ werden durch diese beiden Reziprozitäten ihre Schnittpunkte mit der gemeinsamen Polkurve derjenigen beiden einander konjugierten Reziprozitäten zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ zugeordnet, deren adjungierte Reziprozitäten jene Reziprozitäten zweiter Klasse sind (vgl. die obige Fig. 56).

Wendet man den Satz 650 speziell auf die zweite vom Punkte x der Polkurve an die Polarkurve gezogene Tangente U_1 an und beachtet, daß wegen der zweiten Gleichung (74):

$$U_1\boldsymbol{R} = \mathfrak{a}x, \quad \text{also:} \tag{81}$$

$$x = U_1\frac{\boldsymbol{R}}{\mathfrak{a}} \tag{82}$$

ist, so folgt, daß der andere Schnittpunkt der Geraden U_1 mit der Polkurve durch das Produkt:

$$U_1 \frac{\mathfrak{a}}{r}$$

dargestellt wird. Mit diesem Punkte aber fällt der Punkt:

$$x_2 = U_1 \frac{1}{r} \tag{83}$$

zusammen, und man hat den Satz:

Satz 651: Zieht man von einem Punkte x der gemeinsamen Polkurve zweier konjugierten Reziprozitäten zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ an die gemeinsame Polarkurve der zu jenen Reziprozitäten zweiter Ordnung adjungierten Reziprozitäten zweiter Klasse $\boldsymbol{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ die Tangenten:

$$U = x\boldsymbol{r} \quad \text{und} \quad U_1 = x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}},$$

so schneiden diese Tangenten die Polkurve außer in dem Punkte x beziehlich noch in den weiteren Punkten:

$$x_1 = U\boldsymbol{R} \quad \text{und} \quad x_2 = U_1 \frac{1}{\boldsymbol{r}}$$

(vgl. wieder Fig. 56).

Die kombinatorischen Produkte $[\mathfrak{k}\mathfrak{l}\boldsymbol{r}]$ *und* $[\mathfrak{M}\boldsymbol{r}]$. Um das kombinatorische Produkt aus zwei Punkt-Punkt-Kollineationen $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$ und einer Reziprozität zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$ einzuführen, definiere man zunächst, wie im ersten Teil dieses Bandes S. 61 das kombinatorische Produkt:

$$[xyz \cdot \mathfrak{k}\mathfrak{l}\boldsymbol{r}]$$

durch die Gleichung[1]:

$$[xyz \cdot \mathfrak{k}\mathfrak{l}\boldsymbol{r}] = \frac{1}{3!}\left\{\begin{array}{l} [y\mathfrak{k}\; z\mathfrak{l}\; x\boldsymbol{r}] + [z\mathfrak{k}\; x\mathfrak{l}\; y\boldsymbol{r}] + [x\mathfrak{k}\; y\mathfrak{l}\; z\boldsymbol{r}] \\ -[z\mathfrak{k}\; y\mathfrak{l}\; x\boldsymbol{r}] - [x\mathfrak{k}\; z\mathfrak{l}\; y\boldsymbol{r}] - [y\mathfrak{k}\; x\mathfrak{l}\; z\boldsymbol{r}] \end{array}\right\}. \tag{84}$$

Aus dieser Erklärungsformel folgt wie auf S. 61 des ersten Teiles dieses Bandes, daß das so definierte Produkt $[xyz \cdot \mathfrak{k}\mathfrak{l}\boldsymbol{r}]$ verschwindet, sobald zwei von seinen drei Punktfaktoren einander gleich werden, und daß es entgegengesetzten Wert annimmt, wenn man zwei von diesen Faktoren

1) Vgl. hierzu die durch mich veranlaßte Gießener Dissertation von H. Braun, Über ternäre kombinatorische Produkte linearer Abbildungen, Mainz 1917, in welcher der Verfasser den von mir eingeführten Begriff des kombinatorischen Produktes dreier Kollineationen oder dreier Reziprozitäten insofern einer Verallgemeinerung unterwirft, als er auch dreifaktorige kombinatorische Produkte in Betracht zieht, in denen *gleichzeitig* Kollineationen und Reziprozitäten als Faktoren auftreten.

miteinander vertauscht. Daraus wiederum kann man dann ebenso wie dort folgern, daß, falls das Produkt:

$$[xyz] \neq 0 \tag{85}$$

ist, der Bruch:

$$\frac{[xyz \cdot \mathfrak{k}\mathfrak{l}\boldsymbol{r}]}{[xyz]} \tag{86}$$

unabhängig von der Lage und Masse der Punkte x, y, z ist, so daß, wenn insbesondere e_1, e_2, e_3 die Ecken des Fundamentaldreiecks sind, für welche die Gleichung

$$[e_1 e_2 e_3] = 1 \quad \text{besteht:} \tag{87}$$

$$\frac{[xyz \cdot \mathfrak{k}\mathfrak{l}\boldsymbol{r}]}{[xyz]} = \frac{[e_1 e_2 e_3 \cdot \mathfrak{k}\mathfrak{l}\boldsymbol{r}]}{[e_1 e_2 e_3]} \tag{88}$$

wird. Man kann daher für den Bruch (86) ein Symbol einführen, das nur noch die 3 Abbildungen $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, $\boldsymbol{r}$ enthält. Wir wählen das Zeichen $[\mathfrak{k}\mathfrak{l}\boldsymbol{r}]$, setzen also:

$$[\mathfrak{k}\mathfrak{l}\boldsymbol{r}] = \frac{[xyz \cdot \mathfrak{k}\mathfrak{l}\boldsymbol{r}]}{[xyz]}, \tag{89}$$

wo x, y, z drei ganz beliebige nicht in einer Geraden liegende Punkte sind, und nennen die so definierte Größe $[\mathfrak{k}\mathfrak{l}\boldsymbol{r}]$ das kombinatorische Produkt aus den beiden Punkt-Punkt-Kollineationen $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$ und der Reziprozität zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$. Wegen (88) und (87) wird dann insbesondere:

$$[\mathfrak{k}\mathfrak{l}\boldsymbol{r}] = [e_1 e_2 e_3 \cdot \mathfrak{k}\mathfrak{l}\boldsymbol{r}] \tag{90}$$

oder wegen (84):

$$[\mathfrak{k}\mathfrak{l}\boldsymbol{r}] = \frac{1}{3!}\left\{\begin{array}{l} [e_2\mathfrak{k}\ e_3\mathfrak{l}\ e_1\boldsymbol{r}] + [e_3\mathfrak{k}\ e_1\mathfrak{l}\ e_2\boldsymbol{r}] + [e_1\mathfrak{k}\ e_2\mathfrak{l}\ e_3\boldsymbol{r}] \\ -[e_3\mathfrak{k}\ e_2\mathfrak{l}\ e_1\boldsymbol{r}] - [e_1\mathfrak{k}\ e_3\mathfrak{l}\ e_2\boldsymbol{r}] - [e_2\mathfrak{k}\ e_1\mathfrak{l}\ e_3\boldsymbol{r}] \end{array}\right\}. \tag{91}$$

Die Bezeichnung $[\mathfrak{k}\mathfrak{l}\boldsymbol{r}]$ für den Bruch auf der rechten Seite von (89) oder für die rechte Seite von (91) erscheint auch insofern berechtigt, als der Ausdruck $[\mathfrak{k}\mathfrak{l}\boldsymbol{r}]$ sich auf Grund von (91) auch als eine Funktion des auf S. 57f. des ersten Teiles dieses Bandes definierten zweifaktorischen Produktes $[\mathfrak{k}\mathfrak{l}]$ der beiden Kollineationen $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{l}$ und der Reziprozität $\boldsymbol{r}$ ausdrücken läßt. In der Tat wird wegen (91):

$$[\mathfrak{k}\mathfrak{l}\boldsymbol{r}] = \frac{1}{3}\left\{\left[\frac{[e_2\mathfrak{k} \cdot e_3\mathfrak{l}] - [e_3\mathfrak{k} \cdot e_2\mathfrak{l}]}{2} e_1\boldsymbol{r}\right] + \cdots\right\},$$

also nach Gleichung (33) und (31) des 27. Abschnittes:

$$[\mathfrak{k}\mathfrak{l}\boldsymbol{r}] = \frac{1}{3}\{[[e_2 e_3][\mathfrak{k}\mathfrak{l}] \cdot e_1\boldsymbol{r}] + [[e_3 e_1][\mathfrak{k}\mathfrak{l}] \cdot e_2\boldsymbol{r}] + [[e_1 e_2][\mathfrak{k}\mathfrak{l}] \cdot e_3\boldsymbol{r}], \tag{92}$$

womit die geforderte Darstellung des Produktes $[\mathfrak{k}\mathfrak{l}\boldsymbol{r}]$ als Funktion des kombinatorischen Produktes $[\mathfrak{k}\mathfrak{l}]$ und der Reziprozität $\boldsymbol{r}$ geleistet ist.

Daraus folgt insbesondere, daß, wenn man das kombinatorische Produkt $[\mathfrak{f}\mathfrak{l}]$ der beiden Punkt-Punkt-Kollineationen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{l}$:

$$(93)\qquad [\mathfrak{f}\mathfrak{l}] = \mathfrak{M}$$

setzt, wo $\mathfrak{M}$ nach S. 55 des ersten Teiles dieses Bandes eine Stab-Stab-Kollineation bedeutet, in der Formel (92) *auch linker Hand* für das Produkt der beiden ersten Faktoren $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{l}$ diese Stab-Stab-Kollineation $\mathfrak{M}$ gesetzt werden darf, wodurch diese Formel, wenn man zugleich für die Produkte $[e_2 e_3]$, $[e_3 e_1]$, $[e_1 e_2]$ ihre Werte:

$$(94)\qquad [e_2 e_3] = E_1, \quad [e_3 e_1] = E_2, \quad [e_1 e_2] = E_3$$

einführt, übergeht in:

$$(95)\qquad [\mathfrak{M}\boldsymbol{r}] = \frac{1}{3}\{[E_1\mathfrak{M} \cdot e_1\boldsymbol{r}] + [E_2\mathfrak{M} \cdot e_2\boldsymbol{r}] + [E_3\mathfrak{M} \cdot e_3\boldsymbol{r}]\}$$

Das kombinatorische Produkt $[\boldsymbol{I}\boldsymbol{r}]$ *und der Kernpunkt der Reziprozität* $\boldsymbol{r}$, *das kombinatorische Produkt* $[\mathbf{1}\boldsymbol{R}]$ *und die Kerngerade der Reziprozität* $\boldsymbol{R}$. Sind insbesondere die beiden Punkt-Punkt-Kollineationen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{l}$ gleich der Punkt-Punkt-Identität $\mathbf{1}$, also:

$$(96)\qquad \mathfrak{f} = \mathfrak{l} = \mathbf{1},$$

nnter $\mathbf{1}$ den Bruch:

$$(97)\qquad \mathbf{1} = \frac{e_1,\ e_2,\ e_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}$$

verstanden, so wird das kombinatorische Produkt $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{l}$:

$$(98)\qquad \mathfrak{M} = [\mathfrak{f}\mathfrak{l}] = [\mathbf{1}^2] = \boldsymbol{I},$$

wo die Abbildung $\boldsymbol{I}$ die zur Punkt-Punkt-Identität $\mathbf{1}$ adjungierte Stab-Stab-Identität bedeutet (vgl. die Gleichung (44) des 37. Abschnittes), wo also:

$$(99)\qquad \boldsymbol{I} = \frac{E_1,\ E_2,\ E_3}{E_1,\ E_2,\ E_3}$$

ist, so nimmt die Gleichung (95) die Gestalt an:

$$(100)\qquad [\boldsymbol{I}\boldsymbol{r}] = \frac{1}{3}\{[E_1 \cdot e_1\boldsymbol{r}] + [E_2 \cdot e_2\boldsymbol{r}] + [E_3 \cdot e_3\boldsymbol{r}]\}.$$

Ist speziell die Reziprozität zweiter Klasse $\boldsymbol{R}$ die adjungierte Abbildung zu der Reziprozität zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$, so stellen die beiden Produkte $[\boldsymbol{I}\boldsymbol{r}]$ und $[\mathbf{1}\boldsymbol{R}]$, falls sie nicht verschwinden, beziehlich *den Kernpunkt und die Kerngerade der Reziprozität* $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$ dar. In der Tat wird dann wegen:

$$(102)\qquad \boldsymbol{r} = \frac{A_1,\ A_2,\ A_3}{e_1,\ e_2,\ e_3} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{R} = \frac{a_1,\ a_2,\ a_3}{E_1,\ E_2,\ E_3}$$

$$(103)\qquad [\boldsymbol{I}\boldsymbol{r}] = \frac{1}{3}\{[E_1 A_1] + [E_2 A_2] + [E_3 A_3]\},$$

$$(104)\qquad [\mathbf{1}\boldsymbol{R}] = \frac{1}{3}\{[e_1 a_1] + [e_2 a_2] + [e_3 a_3]\}.$$

Aus diesen Formeln (103) und (104) folgt zunächst mit Rücksicht auf die Gleichungen (63) und (65) des 31. Abschnittes, daß jede von den beiden Gleichungen

$$[\boldsymbol{Ir}] = 0 \quad \text{und} \tag{105}$$

$$[\mathbf{1}\boldsymbol{R}] = 0 \tag{106}$$

die Bedingung dafür enthält, daß die Reziprozität $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$ ein Polarsystem ist. Man hat also den Satz:

Satz 652: Ist $\boldsymbol{r}$ eine Reziprozität zweiter Ordnung und $\boldsymbol{R}$ die zu ihr adjungierte Reziprozität zweiter Klasse, und ist ferner $\boldsymbol{I}$ die identische Stab-Stab-Kollineation, $\mathbf{1}$ die identische Punkt-Punkt-Kollineation, so ist jede von den beiden Gleichungen:

$$[\boldsymbol{Ir}] = 0 \quad \text{und} \quad [\mathbf{1}\boldsymbol{R}] = 0$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Reziprozität $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$ ein Polarsystem sei.[1])

Ist aber eins von den beiden Produkten $[\boldsymbol{Ir}]$ und $[\mathbf{1}\boldsymbol{R}]$, und damit nach S. 177f. des ersten Teils dieses Bandes auch das andere, von Null verschieden, so ist wegen (103) und (104) das erste Produkt der Ausdruck für einen Punkt, das zweite der Ausdruck für einen Stab. Da aber (vgl. die Gleichungen (62) und (64) des einunddreißigsten Abschnitts):

$$(107)\quad \begin{cases} [E_1 A_1] = \mathfrak{a}_{12} e_3 - \mathfrak{a}_{13} e_2, \\ [E_2 A_2] = \mathfrak{a}_{23} e_1 - \mathfrak{a}_{21} e_3, \\ [E_3 A_3] = \mathfrak{a}_{31} e_2 - \mathfrak{a}_{32} e_1 \end{cases} \quad \text{und} \quad (108)\quad \begin{cases} [e_1 a_1] = \mathfrak{A}_{12} E_3 - \mathfrak{A}_{13} E_2, \\ [e_2 a_2] = \mathfrak{A}_{23} E_1 - \mathfrak{A}_{21} E_3, \\ [e_3 a_3] = \mathfrak{A}_{31} E_2 - \mathfrak{A}_{32} E_1, \end{cases}$$

so nehmen die Gleichungen (103) und (104), falls man rechter Hand beziehlich nach den e_i und E_i ordnet, die Form an:

$$[\boldsymbol{Ir}] = \tfrac{1}{3}\{(\mathfrak{a}_{23} - \mathfrak{a}_{32}) e_1 + (\mathfrak{a}_{31} - \mathfrak{a}_{13}) e_2 + (\mathfrak{a}_{12} - \mathfrak{a}_{21}) e_3\} \tag{109}$$

$$[\mathbf{1}\boldsymbol{R}] = \tfrac{1}{3}\{(\mathfrak{A}_{23} - \mathfrak{A}_{32}) E_1 + (\mathfrak{A}_{31} - \mathfrak{A}_{13}) E_2 + (\mathfrak{A}_{12} - \mathfrak{A}_{21}) E_3\}. \tag{110}$$

Dieselben zeigen mit Rücksicht auf die Gleichungen (2) und (7), (50) und (54), daß:

$$[\boldsymbol{Ir}] = c \quad \text{und} \tag{111}$$

$$[\mathbf{1}\boldsymbol{R}] = C \tag{112}$$

ist, wo c den Kernpunkt und C die Kerngerade der Reziprozität $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$ bedeutet. Man hat also den Satz:

Satz 653: Ist $\boldsymbol{r}$ eine von einem Polarsystem verschiedene Reziprozität zweiter Ordnung und $\boldsymbol{R}$ die zu ihr adjungierte Reziprozität zweiter Klasse, und ist ferner $\boldsymbol{I}$ die identische Stab-

1) Dieser Satz ist das ternäre Gegenstück des Satzes 106 (vgl. auch den Satz 201).

Stab-Kollineation, $\mathbf{1}$ die identische Punkt-Punkt-Kollineation, so stellt das kombinatorische Produkt $[\boldsymbol{Ir}]$ den Kernpunkt c und das kombinatorische Produkt $[\mathbf{1}\boldsymbol{R}]$ die Kerngerade C der Reziprozität $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}$ dar.

Mit Rücksicht auf Satz 652 kann man noch den Satz hinzufügen:

Satz 654: Bei einem Polarsystem ist sowohl der Kernpunkt wie die Kerngerade unbestimmt.

Der Satz 653 läßt sich ferner mit geringen Veränderungen auch auf das Nullsystem übertragen, wobei freilich zu berücksichtigen ist, daß nach den Sätzen 629 und 634 die adjungierte Abbildung $[\boldsymbol{n}^2]$ eines Nullsystems zweiter Ordnung $\boldsymbol{n}$ ein (zweifach entartendes) Polarsystem zweiter Klasse und die adjungierte Abbildung $[\boldsymbol{N}^2]$ eines Nullsystems zweiter Klasse $\boldsymbol{N}$ ein (zweifach entartendes) Polarsystem zweiter Ordnung ist.

Zunächst nämlich gilt die Gleichung (110) unabhängig davon, ob die Reziprozität zweiter Klasse $\boldsymbol{R}$ die adjungierte Abbildung zur Reziprozität zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$ in (109) ist, oder nicht.

Setzt man aber in der Formel (109) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}$ und berücksichtigt die für das Nullsystem zweiter Ordnung $\boldsymbol{n}$ geltenden Formeln (39) des vorigen Abschnitts, so nimmt sie die Gestalt an:

$$[\boldsymbol{In}] = \tfrac{2}{3}\,\{\mathfrak{a}_{23}e_1 + \mathfrak{a}_{31}e_2 + \mathfrak{a}_{12}e_3\}$$

oder nach der Gleichung (41) des vorigen Abschnitts die Form:

$$[\boldsymbol{In}] = \tfrac{2}{3}\,a, \tag{113}$$

wo a der *Nullpunkt* des Nullsystems $\boldsymbol{n}$ ist. Der Kernpunkt eines Nullsystems zweiter Ordnung fällt also mit dessen Nullpunkt zusammen, während die Kerngerade mit Rücksicht auf die Bedeutung der zum Nullsystem $\boldsymbol{n}$ adjungierten Abbildung $[\boldsymbol{n}^2]$ unbestimmt wird (Satz 654).

Setzt man andererseits in der Formel (110) $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{N}$ und benutzt die für das Nullsystem zweiter Klasse $\boldsymbol{N}$ geltenden Formeln (74) des vorigen Abschnitts, so nimmt sie die Gestalt an:

$$[\mathbf{1}\boldsymbol{N}] = \tfrac{2}{3}\,\{\mathfrak{A}_{23}E_1 + \mathfrak{A}_{31}E_2 + \mathfrak{A}_{12}E_3\}$$

oder nach der Gleichung (71) des vorigen Abschnitts die Form:

$$[\mathbf{1}\boldsymbol{N}] = \tfrac{2}{3}A, \tag{114}$$

wo A die *Nullachse* des Nullsystems $\boldsymbol{N}$ ist. Die Kerngerade eines Nullsystems zweiter Klasse fällt also mit seiner Nullachse zusammen, während sein Kernpunkt mit Rücksicht auf die Bedeutung der zum Nullsystem $\boldsymbol{N}$ adjungierten Abbildung $[\boldsymbol{N}^2]$ unbestimmt wird (vgl. Satz 654).

Man hat somit den Satz:

Satz 655: Der Kernpunkt $[\boldsymbol{In}]$ eines Nullsystems zweiter Ordnung $\boldsymbol{n}$ fällt mit dessen Nullpunkt, die Kerngerade $[\mathbf{1}\boldsymbol{N}]$ eines

Nullsystems zweiter Klasse N mit der Nullachse desselben zusammen. Dagegen ist die Kerngerade eines Nullsystems zweiter Ordnung und ebenso der Kernpunkt eines Nullsystems zweiter Klasse unbestimmt.

Abschnitt 45.

Die Lagenbeziehung zwischen den beiden Kernkurven einer Reziprozität.

Darstellung zweier konjugierten Reziprozitäten zweiter Ordnung durch ein Polarsystem und ein Nullsystem zweiter Ordnung. Um über die Lage der beiden Kernkurven einer Reziprozität gegeneinander Aufschluß zu erhalten, gehen wir auf den Satz 637 zurück, nach welchem die Polkurven zweier umkehrbaren konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ in eine einzige Kurve zusammenfallen, deren Gleichung je nach Belieben in der Form:

$$[x \cdot x\boldsymbol{r}] = 0 \quad \text{und} \tag{1}$$

$$\left[x \cdot x\,\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right] = 0 \tag{2}$$

geschrieben werden kann. Bezeichnet man ferner noch die halbe Summe entsprechender Ableitzahlen der beiden konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ mit $\mathfrak{b}_{ik}$ und die halbe Differenz mit $\mathfrak{c}_{ik}$, führt somit die Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{b}_{ik} &= \frac{\mathfrak{a}_{ik} + \mathfrak{a}_{ki}}{2} && (3)\\ \mathfrak{c}_{ik} &= \frac{\mathfrak{a}_{ik} - \mathfrak{a}_{ki}}{2} && (4) \end{aligned}\right\} \quad i, k = 1, 2, 3,$$

so wird:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{b}_{ki} &= \mathfrak{b}_{ik} && (5)\\ \mathfrak{c}_{ki} &= -\,\mathfrak{c}_{ik} && (6) \end{aligned}\right\} \quad i, k = 1, 2, 3,$$

insbesondere also:

$$\mathfrak{c}_{ii} = 0. \tag{7}$$

Setzt man daher noch:

$$\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{r} + \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right) = \boldsymbol{p} \quad \text{und} \tag{8}$$

$$\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{r} - \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right) = \boldsymbol{n}, \tag{9}$$

so ist wegen (5) und (6) $\boldsymbol{p}$ ein Polarsystem und $\boldsymbol{n}$ ein Nullsystem zweiter Ordnung. Und zwar ist die Polkurve:

$$[x \cdot x\boldsymbol{p}] = 0 \tag{10}$$

des Polarsystems zweiter Ordnung $\boldsymbol{p}$ identisch mit der gemeinsamen Polkurve der beiden konjugierten Reziprozitäten zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$ und

$\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$, deren Gleichung sowohl in der Form (1) wie in der Form (2) dargestellt werden konnte. Denn nach der Gleichung (8) wird:

(11) $$[x \cdot x\boldsymbol{p}] = \frac{1}{2}\left\{[x \cdot x\boldsymbol{r}] + \left[x \cdot x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right]\right\}.$$

Da aber die beiden Summanden in der geschweiften Klammer rechter Hand für jeden Punkt x der gemeinsamen Polkurve der beiden konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ gleichzeitig verschwinden, so verschwindet für diese Punkte auch die linke Seite von (11). Die Polkurve des Polarsystems $\boldsymbol{p}$ ist somit wirklich identisch mit der gemeinsamen Polkurve der beiden konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$.

Übrigens läßt sich wegen der Gleichung (19) des vorigen Abschnitts die Gleichung (11) noch in die beiden Gleichungen zerfällen:

(12) $$[x \cdot x\boldsymbol{r}] = [x \cdot x\boldsymbol{p}] \quad \text{und}$$

(13) $$\left[x \cdot x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right] = [x \cdot x\boldsymbol{p}],$$

welche zeigen, daß die drei quadratischen Formen $[x \cdot x\boldsymbol{r}]$, $\left[x \cdot x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right]$ und $[x \cdot x\boldsymbol{p}]$ einander gleich sind.

Andererseits hat nach dem Satze 625 das Nullsystem $\boldsymbol{n}$ den Punkt:

(14) $$c = \mathfrak{c}_{23} e_1 + \mathfrak{c}_{31} e_2 + \mathfrak{c}_{12} e_3$$

zum Nullpunkt und führt die drei Punkte e_1, e_2, e_3 in die Stäbe:

(15) $$C_1 = [ce_1], \quad C_2 = [ce_2], \quad C_3 = [ce_3]$$

über, so daß man setzen kann:

(16) $$\boldsymbol{n} = \frac{C_1,\ C_2,\ C_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}.$$

Ferner wird allgemein:

(17) $$x\boldsymbol{n} = [cx],$$

d. h., das Nullsystem zweiter Ordnung $\boldsymbol{n}$ weist allgemein einem jeden Punkte x seine Verbindungslinie $[cx]$ mit dem Nullpunkte c des Nullsystems zu.

Löst man die Gleichungen (8) und (9) nach den beiden konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ auf, so erhält man für dieselben die Werte:

(18) $$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{n} \quad \text{und}$$

(19) $$\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{n}.$$

Für die Stäbe $x\boldsymbol{r}$ und $x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$, die einem beliebigen Punkte x durch diese beiden Reziprozitäten zugewiesen werden, ergeben sich daher die Darstellungen:

(20) $$\begin{cases} x\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{p} + x\boldsymbol{n}, \\ x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}} = x\boldsymbol{p} - x\boldsymbol{n} \end{cases}$$

oder wegen (17) die Gleichungen:

$$(21)\qquad \begin{cases} x\boldsymbol{r} = x\mathfrak{p} + [cx], \\ x\dfrac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}} = x\mathfrak{p} - [cx], \end{cases}$$

welche *zunächst* zeigen, daß die Geraden $x\boldsymbol{r}$ und $x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ durch den Schnittpunkt der Geraden $[cx]$ mit der Polare $x\mathfrak{p}$ des Punktes x in dem Polarsystem $\mathfrak{p}$ hindurchgehen, und *ferner*, daß die vier Stäbe:

$$x\boldsymbol{r},\quad x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}},\quad x\mathfrak{p}\quad \text{und}\quad [cx]$$

einen harmonischen Strahlwurf bilden (Figg. 57 u. 58).

Beachtet man noch, daß der Nullpunkt c des Nullsystems zweiter Ordnung $\boldsymbol{n}$ nach den Gleichungen (4) und (14) und der Proportion (7) des vorigen

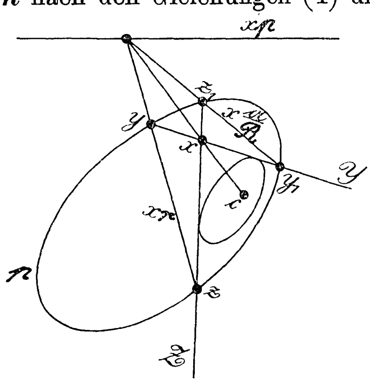


Fig. 57.

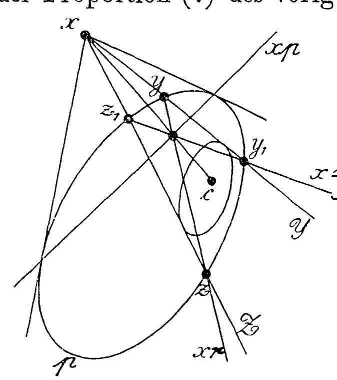


Fig. 58.

Abschnitts mit dem Kernpunkt der beiden konjugierten Reziprozitäten zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ zusammenfällt, so kann man das gewonnene Ergebnis in dem Satze zusammenfassen:

Satz 656: Konstruiert man in zwei umkehrbaren konjugierten Reziprozitäten zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ zu einem beliebigen Punkte x die zugeordneten Geraden $x\boldsymbol{r}$ und $x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$, außerdem die Polare $x\mathfrak{p}$ des Punktes x in bezug auf die gemeinsame Polkurve der beiden konjugierten Reziprozitäten und die Verbindungslinie $[cx]$ des Punktes x mit dem Kernpunkt c der beiden Reziprozitäten, so gehen die beiden ersten Linien durch den Schnittpunkt der beiden letzten Linien hindurch und werden durch sie harmonisch getrennt.

Konstruktion der beiden zu einem Punkte x in zwei konjugierten Reziprozitäten zugeordneten Geraden. Die Konstruktion der Geraden $x\boldsymbol{r}$ und $x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ kann man dabei, wenigstens in dem Falle, wo x außerhalb der Polarkurve liegt, in folgender Weise vollziehen: Man lege zunächst von x aus die beiden Tangenten Y und Z an die Polarkurve und verfüge über die Länge und den Sinn der Stäbe Y und Z in der Weise, daß:

(22) $$[YZ] = x$$

wird. Dann sind nach dem Satze 650 die vier Punkte:

(23) $$\begin{cases} Y\boldsymbol{R} = y \\ Z\boldsymbol{R} = z \end{cases}$$ und (24) $$\begin{cases} Y\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}} = y_1 \\ Z\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}} = z_1, \end{cases}$$

in welche die beiden Tangenten Y und Z der Polarkurve durch die konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ übergeführt werden, nichts anderes als die Schnittpunkte jener beiden Tangenten mit der Polkurve (vgl. die obigen Figg. 57 u. 58). Aus den Gleichungen (23) aber folgt durch planimetrische Multiplikation:

$$[Y\boldsymbol{R} \cdot Z\boldsymbol{R}] = [yz]$$

oder nach der Gleichung (86) des 30. Abschnitts:

$$\mathfrak{a}[YZ]\boldsymbol{r} = [yz]$$

oder wegen (22):

(25) $$x\boldsymbol{r} = \frac{[yz]}{\mathfrak{a}}.$$

Andererseits erhält man aus den Gleichungen (24) durch Auflösung nach Y und Z:

$$Y = y_1\frac{\boldsymbol{r}}{\mathfrak{a}} \quad \text{und}$$

$$Z = z_1\frac{\boldsymbol{r}}{\mathfrak{a}}$$

und hieraus durch planimetrische Multiplikation unter Benutzung von (22):

$$x = \left[y_1\frac{\boldsymbol{r}}{\mathfrak{a}} \cdot z_1\frac{\boldsymbol{r}}{\mathfrak{a}}\right] = \frac{1}{\mathfrak{a}^2}[y_1\boldsymbol{r} \cdot z_1\boldsymbol{r}]$$

oder nach der Gleichung (19) des 30. Abschnitts:

$$x = \frac{1}{\mathfrak{a}^2}[y_1 z_1]\boldsymbol{R},$$

woraus für das Bild des Punktes x in der Reziprozität $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ der Wert folgt:

(26) $$x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}} = \frac{[y_1 z_1]}{\mathfrak{a}}.$$

Man hat also den Satz:

Satz 657: Sind $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ zwei konjugierte Reziprozitäten zweiter Ordnung und $\boldsymbol{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ die zu ihnen adjungierten Reziprozitäten zweiter Klasse, so findet man zu einem Punkte x, der außerhalb der gemeinsamen Polarkurve der Reziprozitäten liegt, die in den konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ zugeordneten Stäbe, indem man von x die beiden Tangenten Y und Z an die Polarkurve legt und dieselben mit der Polkurve zum Schnitt bringt in den Punkten y, y_1 und z, z_1, wobei man bei der Bezeichnung dieser Schnittpunkte die Buchstaben y, y_1 und z, z_1 in der Weise auf diese Schnittpunkte zu verteilen hat, daß:

$$\begin{cases} Y\boldsymbol{R} = y \\ Z\boldsymbol{R} = z \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} Y\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}} = y_1 \\ Z\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}} = z_1 \end{cases}$$

gesetzt wird. Dann sind die gesuchten, dem Punkte x in den konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ zugeordneten Geraden beziehlich die Verbindungslinien der Punkte y und z und der Punkte y_1 und z_1. Es ist nämlich:

$$(25) \qquad x\boldsymbol{r} = \frac{[yz]}{\mathfrak{a}} \quad \text{und} \quad (26) \quad x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}} = \frac{[y_1 z_1]}{\mathfrak{a}}.$$

Von dem Satze 656 erhält man einen bemerkenswerten Sonderfall, wenn man den Punkt x auf die gemeinsame Polkurve der beiden konjugierten Reziprozitäten rücken läßt. In diesem Falle sind nach dem Satze 647 die beiden Stäbe $x\boldsymbol{r}$ und $x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ nichts anderes als die vom Punkte x an die Polarkurve gezogenen Tangenten; ferner ist $x\boldsymbol{p}$ die Tangente im Punkte x an die Polkurve. Man erhält daher als Sonderfall des Satzes 656 den Satz:

Satz 658: Zieht man von einem Punkte der gemeinsamen Polkurve zweier konjugierten Reziprozitäten die beiden Tangenten an die Polarkurve und außerdem die Tangente an die Polkurve, so wird diese durch die beiden andern Tangenten von dem Kernpunkt der beiden Reziprozitäten harmonisch getrennt (Fig. 59).

Man kann noch die Frage aufwerfen[1]): Wie müssen zwei Punkte y und z liegen, damit die Gleichung bestehe:

$$(27) \qquad [y \cdot z\boldsymbol{r}] = [z \cdot y\boldsymbol{r}],$$

oder was nach der Gleichung (17) des vorigen Abschnitts dasselbe ist, damit

$$(28) \qquad [y \cdot z\boldsymbol{r}] = \left[y \cdot z\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right]$$

sei? Um diese Frage zu beantworten, beachte man, daß aus den Gleichungen (18) und (19) durch Vormultiplizieren mit z und y die Gleichungen

1) Vgl. hierzu: R. Mehmke, Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung: Erster Band: Punktrechnung. Erster Teilband. Leipzig und Berlin 1913. S. 281ff.

entspringen:

(29) $$[y \cdot z\boldsymbol{r}] = [y \cdot z\boldsymbol{p}] + [y \cdot z\boldsymbol{n}]$$

(30) $$\left[y \cdot z\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right] = [y \cdot z\boldsymbol{p}] - [y \cdot z\boldsymbol{n}].$$

Aus ihnen aber folgt unter der Voraussetzung des Bestehens der Gleichung (28) durch Subtraktion und durch Division mit 2, daß:

(31) $$[y \cdot z\boldsymbol{n}] = 0$$

sein muß, oder wegen (17), daß:

(32) $$[y \cdot cz] = 0$$

ist. Und da man auch umgekehrt von der Gleichung (32) auf die Gleichung (27) zurückschließen kann, so sieht man, daß die Gleichung (27) dann und

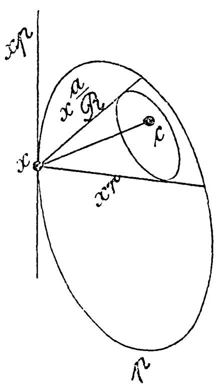


Fig. 59.

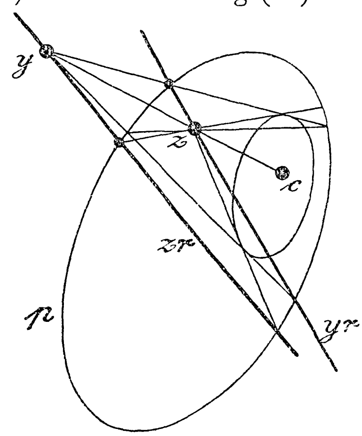


Fig. 60.

nur dann erfüllt wird, wenn die Punkte y und z auf einer durch den Kernpunkt c der Reziprozität gehenden Geraden, oder wie wir sagen wollen, einer „Kernpunktsgeraden der Reziprozität", liegen.

Wenn zwei Punkte y und z einer solchen Geraden *überdies der Gleichung:*

(33) $$[y \cdot z\boldsymbol{r}] = 0$$

Genüge leisten, so besteht für sie wegen (27) auch die Gleichung:

(34) $$[z \cdot y\boldsymbol{r}] = 0.$$

Das heißt: Wenn von zwei Punkten y und z einer Kernpunktsgeraden einer Reziprozität $\boldsymbol{r}$ der Punkt y auf der dem Punkte z durch die Reziprozität $\boldsymbol{r}$ zugeordneten Geraden $z\boldsymbol{r}$ liegt (Fig. 60), so liegt auch umgekehrt der Punkt z auf der dem Punkte y durch die Reziprozität $\boldsymbol{r}$ zugeordneten Geraden $y\boldsymbol{r}$. Je zwei der Gleichung (33) genügende Punkte einer Kernpunktsgeraden *entsprechen sich also wechselseitig.*

Ferner nimmt wegen (31) für zwei Punkte y und z einer Kernpunktsgeraden die Gleichung (29) die einfachere Form an:

(35) $$[y \cdot z\boldsymbol{r}] = [y \cdot z\boldsymbol{p}].$$

Die obige Gleichung:

(33) $$[y \cdot zr] = 0$$

ist also für die Punkte einer Kernpunktsgeraden gleichwertig mit der Gleichung:

(36) $$[y \cdot zp] = 0,$$

das heißt: Je zwei auf einer solchen Geraden durch die Reziprozität r vermöge der Gleichung (33) einander zugeordnete Punkte y und z sind einander hinsichtlich der Polkurve der Reziprozität konjugiert, oder anders ausgedrückt (vgl. Satz 408): Eine Reziprozität zweiter Ordnung r ruft auf einer jeden ihrer Kernpunktsgeraden eine Punktinvolution hervor, die identisch ist mit der von ihrer Polkurve auf dieser Geraden erzeugten Punktinvolution. Die Doppelpunkte dieser Involution sind daher die Schnittpunkte jener Geraden mit der Polkurve der Reziprozität.

Auf einer von einer Kernpunktsgeraden verschiedenen Geraden der Ebene dagegen wird durch eine Reziprozität zweiter Ordnung r vermöge der Gleichung (33) eine nicht involutorische Projektivität erzeugt. Daß die Beziehung zwischen den Punkten y und z einer solchen Geraden projektiv ist, läßt sich genau so begründen, wie es auf S. 191 des ersten Teiles dieses Bandes für ein Polarsystem geschehen ist. Nur war hier wegen der zweiten Grundeigenschaft des Polarsystems diese Projektivität zugleich stets involutorisch, während dies bei einer nicht involutorischen umkehrbaren Reziprozität eben nur für die Kernpunktsgeraden zutrifft. Man hat also den Satz:

Satz 659: Eine nicht involutorische umkehrbare Reziprozität zweiter Ordnung ruft auf einer jeden Geraden ihrer Ebene eine Projektivität hervor. Diese Projektivität wird nur in dem Falle involutorisch, wo die Gerade durch den Kernpunkt der Reziprozität hindurchgeht. Und zwar wird sie dann identisch mit derjenigen Punktinvolution, welche die Polkurve der Reziprozität auf jener Geraden erzeugt. Ihre Doppelpunkte sind daher die Schnittpunkte ihres Trägers mit der Polkurve.

Auf Grund der beiden obigen Gleichungen:

(21) $$\begin{cases} xr = xp + [cx] \quad \text{und} \\ x\,\dfrac{\mathfrak{a}}{R} = xp - [cx] \end{cases}$$

kann man übrigens leicht eine Bestätigung der auf S. 102ff. gewonnenen Ergebnisse finden.

Wir benutzen dabei wieder wie schon in Bd. I, S. 282ff. nach dem Vorgange von A. F. Möbius[1]) für die Beziehung zweier extensiven Größen,

1) Vgl. A. F. Möbius, Der barycentrische Calcul. Leipzig 1827. § 15 (Gesammelte Werke, Bd. 1.) Siehe auch H. Graßmann, Die Ausdehnungslehre. Berlin 1862. Nr. 2. (Gesammelte mathematische und physikalische Werke, Bd. 1, Teil 2. Leipzig 1896.)

„die bis auf einen Zahlfaktor einander gleich sind", das Zeichen $\equiv$ (gelesen „zusammenfallend mit" oder auch „kongruent").

Fragt man sodann, wie an der soeben genannten Stelle (S. 102), ob es Punkte x gibt, denen durch die beiden konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ Stäbe einer und derselben Geraden zugewiesen werden, so zeigen die Gleichungen (21), daß

erstens der Kernpunkt c der beiden konjugierten Reziprozitäten ein solcher Punkt ist. Denn die beiden Stäbe $x\boldsymbol{r}$ und $x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ werden nach den Gleichungen (21) sogar einander gleich, nämlich beide $= x\boldsymbol{p}$, wenn

$$[cx] = 0 \tag{37}$$

ist, d. h. wenn:

$$x \equiv c \tag{38}$$

ist, und es wird dann:

$$x\boldsymbol{r} = x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}} = x\boldsymbol{p} \equiv c\boldsymbol{r} \equiv c\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}} \equiv c\boldsymbol{p}. \tag{39}$$

Die beiden zusammenfallenden, dem Kernpunkte c hinsichtlich der beiden konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ zugeordneten Geraden sind somit zugleich identisch mit der Polare $c\boldsymbol{p}$ des Kernpunktes c in bezug auf die Polkurve der Reziprozität. Und da nach S. 108f. der Stab $c\boldsymbol{r} = c\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ überdies der Kerngeraden der Reziprozität $\boldsymbol{R}$ angehört, so hat man nebenbei den Satz:

Satz 660: Die Kerngerade einer Reziprozität ist die Polare des Kernpunktes in bezug auf die Polkurve der Reziprozität.

Zweitens werden den Gleichungen (21) zufolge die beiden Stäbe $x\boldsymbol{r}$ und $x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ auch dann in eine Gerade zusammenfallen, wenn:

$$x\boldsymbol{p} \equiv [cx] \tag{40}$$

ist. Wenn aber die Gerade $[cx]$ die Polare $x\boldsymbol{p}$ des Punktes x in bezug auf das Polarsystem $\boldsymbol{p}$ ist, so geht diese Polare $x\boldsymbol{p}$ durch ihren eigenen Pol x hindurch und ist also die Tangente der Polkurve von $\boldsymbol{p}$ mit dem Punkte x als Berührungspunkt.

Da andererseits wegen (40) diese Tangente $x\boldsymbol{p}$ auch den Kernpunkt c der Reziprozitäten $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ enthält, so ist sie eine der beiden Tangenten, die man von dem Punkte c an die gemeinsame Polkurve des Polarsystems $\boldsymbol{p}$ und der beiden konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ legen kann.

Man erhält somit als Punkte x, die der oben gestellten Forderung genügen, daß ihnen durch die beiden konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ Stäbe derselben Geraden zugewiesen werden, außer dem Kernpunkte c der beiden konjugierten Reziprozitäten noch die Berührungspunkte a und b der beiden Tangenten $[ca]$ und $[cb]$, die sich von dem Kernpunkte c jener beiden Reziprozitäten an ihre gemeinsame Polkurve ziehen lassen. Natürlich können diese beiden Punkte a und b auch konjugiert komplex sein, während der Kernpunkt c einer (reellen) Reziprozität stets reell ist.

Darstellung zweier konjugierten Reziprozitäten zweiter Klasse durch ein Polarsystem und ein Nullsystem zweiter Klasse. Ganz entsprechende Folgerungen lassen sich aus dem Satze 642 ziehen, nach welchem auch die Polarkurven zweier umkehrbaren konjugierten Reziprozitäten zweiter Klasse $\boldsymbol{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ in eine einzige Kurve zweiter Klasse zusammenfallen. Die Gleichung dieser Kurve zweiter Klasse kann nach den Gleichungen (60) und (61) des vorigen Abschnitts je nach Belieben in einer der beiden Formen:

(41) $$[U \cdot U\boldsymbol{R}] = 0 \quad \text{und}$$

(42) $$\left[U \cdot U\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}\right] = 0$$

geschrieben werden.

Bezeichnet man dann wieder die halbe Summe der entsprechenden Ableitzahlen der beiden konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ mit $\mathfrak{B}_{ik}$ und die halbe Differenz mit $\mathfrak{C}_{ik}$, führt somit die Bezeichnungen ein:

(43), (44) $$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B}_{ik} &= \frac{\mathfrak{A}_{ik} + \mathfrak{A}_{ki}}{2} \\ \mathfrak{C}_{ik} &= \frac{\mathfrak{A}_{ik} - \mathfrak{A}_{ki}}{2} \end{aligned}\right\} \quad i, k = 1, 2, 3,$$

so wird:

(45), (46) $$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B}_{ki} &= \mathfrak{B}_{ik} \\ \mathfrak{C}_{ki} &= -\mathfrak{C}_{ik} \end{aligned}\right\} \quad i, k = 1, 2, 3,$$

insbesondere also:

(47) $$\mathfrak{C}_{ii} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Setzt man daher noch:

(48) $$\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{R} + \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}\right) = \boldsymbol{Q} \quad \text{und}$$

(49) $$\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{R} - \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}\right) = \boldsymbol{N},$$

so ist wegen (45) und (46) $\boldsymbol{Q}$ ein Polarsystem und $\boldsymbol{N}$ ein Nullsystem zweiter Klasse. Und zwar ist die Polarkurve:

(50) $$[U \cdot U\boldsymbol{Q}] = 0$$

des Polarsystems zweiter Klasse $\boldsymbol{Q}$ identisch mit der gemeinsamen Polarkurve der beiden konjugierten Reziprozitäten zweiter Klasse $\boldsymbol{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$, deren Gleichung sowohl in der Form (41) wie in der Form (42) dargestellt werden konnte. Denn nach Gleichung (48) wird:

(51) $$[U \cdot UQ] = \frac{1}{2}\left\{[U \cdot UR] + \left[U \cdot U\frac{\mathfrak{a}}{r}\right]\right\} \cdot$$

Die beiden Summanden in der geschweiften Klammer rechter Hand aber verschwinden gleichzeitig für jede beliebige Tangente U der gemeinsamen Polarkurve der beiden konjugierten Reziprozitäten R und $\frac{\mathfrak{a}}{r}$.

Übrigens läßt sich wegen der Gleichung (42) des vorigen Abschnitts die Gleichung (51) auch in die beiden Gleichungen zerfällen:

(52) $$[U \cdot UR] = [U \cdot UQ] \quad \text{und}$$

(53) $$\left[U \cdot U\frac{\mathfrak{a}}{r}\right] = [U \cdot UQ],$$

welche zeigen, daß die drei quadratischen Formen zweiter Klasse $[U \cdot UR]$, $\left[U \cdot U\frac{\mathfrak{a}}{r}\right]$ und $[U \cdot UQ]$ einander gleich sind.

Andererseits hat nach dem Satze 630 das Nullsystem zweiter Klasse N die Gerade des Stabes:

(54) $$C = \mathfrak{C}_{23}E_1 + \mathfrak{C}_{31}E_2 + \mathfrak{C}_{12}E_3$$

zur Nullachse und führt die drei Grundstäbe E_1, E_2, E_3 in die Punkte:

(55) $$c_1 = [CE_1], \quad c_2 = [CE_2], \quad c_3 = [CE_3]$$

über, so daß man setzen kann:

(56) $$N = \frac{c_1, c_2, c_3}{E_1, E_2, E_3}.$$

Ferner wird allgemein:

(57) $$UN = [CU],$$

d. h. das Nullsystem zweiter Klasse N weist allgemein einem jeden Stabe U seinen Schnittpunkt $[CU]$ mit der Nullachse C des Nullsystems zu.

Löst man die Gleichungen (48) und (49) nach den beiden konjugierten Reziprozitäten R und $\frac{\mathfrak{a}}{r}$ auf, so erhält man für dieselben die Werte:

(58) $$R = Q + N \quad \text{und}$$

(59) $$\frac{\mathfrak{a}}{r} = Q - N.$$

Für die Punkte UR und $U\frac{\mathfrak{a}}{r}$, die einem beliebigen Stabe U durch diese beiden konjugierten Reziprozitäten zugewiesen werden, ergeben sich daher die Darstellungen:

(60) $$\begin{cases} UR = UQ + UN \\ U\frac{\mathfrak{a}}{r} = UQ - UN, \end{cases}$$

oder wegen (57) die Gleichungen:

$$(61) \qquad \begin{cases} U\boldsymbol{R} = U\boldsymbol{Q} + [CU] \\ U\frac{\mathfrak{a}}{r} = U\boldsymbol{Q} - [CU], \end{cases}$$

welche zeigen, daß die vier Punkte:

$$U\boldsymbol{R}, \quad U\frac{\mathfrak{a}}{r}, \quad U\boldsymbol{Q} \quad \text{und} \quad [CU]$$

einen harmonischen Punktwurf bilden (Fig. 61).

Beachtet man jetzt noch, daß die Nullachse C des Nullsystems zweiter Klasse $\boldsymbol{N}$ nach den Gleichungen (44) und (54) und der Proportion (54) des vorigen Abschnitts mit der Kerngeraden der beiden konjugierten Reziprozitäten zweiter Klasse $\boldsymbol{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{r}$ zusammenfällt, so kann man das gewonnene Ergebnis in dem Satze zusammenfassen:

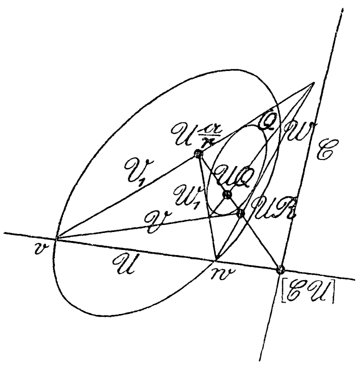


Fig. 61.

Satz 661: Konstruiert man in zwei umkehrbaren konjugierten Reziprozitäten zweiter Klasse $\boldsymbol{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{r}$ zu einem beliebigen Stabe U die zugeordneten Punkte $U\boldsymbol{R}$ und $U\frac{\mathfrak{a}}{r}$, außerdem den Pol $U\boldsymbol{Q}$ des Stabes U in bezug auf die gemeinsame Polarkurve der beiden konjugierten Reziprozitäten und den Schnittpunkt $[CU]$ des Stabes U mit der Kerngeraden C der beiden Reziprozitäten, so liegen die beiden ersten Punkte mit den beiden letzten Punkten in einer Geraden und werden durch sie harmonisch getrennt.

Konstruktion der beiden zu einem Stabe U in zwei konjugierten Reziprozitäten zugeordneten Punkte. Die Konstruktion der Punkte $U\boldsymbol{R}$ und $U\frac{\mathfrak{a}}{r}$ kann man dabei, wenigstens in dem Falle, wo die Gerade des Stabes U die gemeinsame Polkurve der beiden konjugierten Reziprozitäten r und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ schneidet, in folgender Weise vollziehen. Man bringe zunächst die Gerade des Stabes U zum Schnitt mit dieser Polkurve in den Punkten v und w und denke sich über die Massen der beiden Schnittpunkte in der Weise verfügt, daß:

$$(62) \qquad [vw] = U$$

wird. Dann sind nach dem Satze 647 die vier Stäbe:

$$(63) \qquad \begin{cases} vr = V \\ wr = W \end{cases} \quad \text{und} \quad (64) \qquad \begin{cases} v\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}} = V_1 \\ w\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}} = W_1, \end{cases}$$

in welche die beiden Schnittpunkte v und w der Polkurve durch die Reziprozitäten $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ übergeführt werden, nichts anderes als die Tangenten, die man von jenen beiden Schnittpunkten an die Polarkurve legen kann (vgl. wieder Fig. 61).

Aus den Gleichungen (63) folgt aber durch planimetrische Multiplikation:

$$[v\boldsymbol{r} \cdot w\boldsymbol{r}] = [VW]$$

oder nach der Gleichung (19) des 30. Abschnitts:

$$[vw]\boldsymbol{R} = [VW],$$

d. h. wegen (62):

(65) $$U\boldsymbol{R} = [VW].$$

Andererseits erhält man aus den Gleichungen (64) durch Auflösung nach v und w:

$$v = V_1 \frac{\boldsymbol{R}}{\mathfrak{a}} \quad \text{und}$$

$$w = W_1 \frac{\boldsymbol{R}}{\mathfrak{a}}$$

und hieraus durch planimetrische Multiplikation unter Benutzung von (62)

$$U = \left[V_1 \frac{\boldsymbol{R}}{\mathfrak{a}} \cdot W_1 \frac{\boldsymbol{R}}{\mathfrak{a}}\right] = \frac{1}{\mathfrak{a}^2}[V_1\boldsymbol{R} \cdot W_1\boldsymbol{R}]$$

oder nach der Gleichung (86) des 30. Abschnitts:

$$U = \frac{1}{\mathfrak{a}}[V_1 W_1]\boldsymbol{r},$$

woraus für das Bild des Stabes U in der Reziprozität $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ der Wert folgt:

(66) $$U\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}} = [V_1 W_1].$$

Man hat also den Satz:

Satz 662: Man findet zu einer Geraden U die beiden in den konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ zugeordneten Punkte, indem man die Gerade U zum Schnitt mit der gemeinsamen Polkurve der Reziprozitäten $\boldsymbol{r}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ bringt in v und w und von den Schnittpunkten die Tangenten V, V_1 und W, W_1 an die gemeinsame Polarkurve der Reziprozitäten $\boldsymbol{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ legt, wobei man bei der Bezeichnung dieser Tangenten die Buchstaben V, V_1 und W, W_1 in der Weise auf diese Tangenten zu verteilen hat, daß:

$$\begin{matrix} v\boldsymbol{r} = V \\ w\boldsymbol{r} = W \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} v\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}} = V_1 \\ w\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}} = W_1 \end{matrix}$$

gesetzt wird. Dann sind die gesuchten, dem Stabe U in den Reziprozitäten $\boldsymbol{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{r}$ zugeordneten Punkte die Schnittpunkte der Geraden V und W und der Geraden V_1 und W_1, nämlich:

$$U\boldsymbol{R} = [VW] \quad \text{und} \quad U\frac{\mathfrak{a}}{r} = [V_1 W_1].$$

Man kann noch die Frage aufwerfen[1]): Wie müssen zwei Geraden V und W gelegen sein, damit die Gleichung bestehe:

$$[V \cdot W\boldsymbol{R}] = [W \cdot V\boldsymbol{R}], \tag{67}$$

oder was nach der Gleichung (41) des vorigen Abschnitts dasselbe ist, damit:

$$[V \cdot W\boldsymbol{R}] = \left[V \cdot W\frac{\mathfrak{a}}{r}\right] \tag{68}$$

sei? Um diese Frage zu beantworten, beachte man, daß aus den Gleichungen (58) und (59) durch Vormultiplizieren mit W und V die Gleichungen entspringen:

$$[V \cdot W\boldsymbol{R}] = [V \cdot W\boldsymbol{Q}] + [V \cdot W\boldsymbol{N}] \tag{69}$$

$$\left[V \cdot W\frac{\mathfrak{a}}{r}\right] = [V \cdot W\boldsymbol{Q}] - [V \cdot W\boldsymbol{N}]. \tag{70}$$

Aus ihnen aber folgt unter der Voraussetzung des Bestehens der Gleichung (68) durch Subtraktion und durch Division mit 2, daß:

$$[V \cdot W\boldsymbol{N}] = 0 \tag{71}$$

sein muß, oder wegen (57), daß

$$[V \cdot CW] = 0 \tag{72}$$

ist. Und da man auch umgekehrt von der Gleichung (72) auf die Gleichung (67) zurückschließen kann, so sieht man, daß die Gleichung (67) dann und nur dann erfüllt wird, wenn die Geraden der Stäbe V und W sich in einem Punkte der Kerngeraden C der Reziprozität $\boldsymbol{R}$ schneiden.

Besteht für zwei solche Stäbe V und W, deren Geraden sich in einem Punkte der Kerngeraden schneiden, *überdies noch die Gleichung:*

$$[V \cdot W\boldsymbol{R}] = 0, \tag{73}$$

so genügen sie wegen (67) auch der Gleichung:

$$[W \cdot V\boldsymbol{R}] = 0. \tag{74}$$

Das heißt: Wenn von zwei Geraden V und W, die sich auf der Kerngeraden C der Reziprozität $\boldsymbol{R}$ schneiden, die Gerade V durch den der Geraden W zugeordneten Punkt $W\boldsymbol{R}$ geht, so geht auch umgekehrt die Gerade W durch

1) Vgl. auch hier wieder die auf S. 128 zitierte Stelle aus R. Mehmke. Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung.

den der Geraden V zugeordneten Punkt $V\boldsymbol{R}$. Je zwei der Gleichung (73) genügende Geraden V und W, die sich außerdem auf der Kerngeraden schneiden, *entsprechen sich also wechselseitig.*

Ferner nimmt wegen (71) für zwei Geraden V und W eines Strahlbüschels, das seinen Scheitel auf der Kerngeraden der Reziprozität $\boldsymbol{R}$ hat, die Gleichung (69) die Form an:

$$(75) \qquad [V \cdot W\boldsymbol{R}] = [V \cdot WQ].$$

Die obige Gleichung:

$$(73) \qquad [V \cdot W\boldsymbol{R}] = 0$$

ist also für zwei Strahlen V und W eines solchen Strahlbüschels gleichwertig mit der Gleichung:

$$(76) \qquad [V \cdot WQ] = 0,$$

d. h.: Je zwei in einem solchen Strahlbüschel durch die Reziprozität $\boldsymbol{R}$ vermöge der Gleichung (73) einander zugeordnete Strahlen V und W sind einander hinsichtlich der Polarkurve der Reziprozität konjugiert, oder anders ausgedrückt (vgl. Satz 416): Eine Reziprozität ruft in jedem Punkte ihrer Kerngeraden eine Strahlinvolution hervor, die identisch ist mit der von ihrer Polarkurve in diesem Punkte erzeugten Strahlinvolution. Die Doppelstrahlen dieser Involution sind daher die Tangenten von jenem Punkte an die Polarkurve.

In jedem Punkte der Ebene, der nicht auf der Kerngeraden liegt, wird dagegen durch eine Reziprozität zweiter Klasse $\boldsymbol{R}$ vermöge der Gleichung (73) eine nichtinvolutorische Projektivität erzeugt, was man genau so wie bei dem Dualistischen begründen kann.

Man hat also den Satz:

Satz 663: Eine nicht involutorische umkehrbare Reziprozität zweiter Klasse ruft in jedem Punkte ihrer Ebene eine Projektivität im Strahlbüschel hervor. Diese Projektivität wird nur in dem Falle involutorisch, wo der Punkt auf der Kerngeraden der Reziprozität liegt. Und zwar wird sie identisch mit derjenigen Strahlinvolution, welche die Polarkurve der Reziprozität in jenem Punkte erzeugt. Ihre Doppelstrahlen sind daher die Tangenten, die man von ihrem Träger an die Polarkurve ziehen kann.

Auf Grund der beiden obigen Gleichungen:

$$(61) \qquad \begin{cases} U\boldsymbol{R} = UQ + [CU], \\ U\frac{\mathfrak{a}}{r} = UQ - [CU] \end{cases}$$

kann man dann wieder leicht eine Bestätigung der auf S. 110ff. gewonnenen Ergebnisse finden. Fragt man nämlich wieder, wie an der genannten Stelle, ob es Stäbe U gibt, denen durch die beiden konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{r}$ zwei zusammenfallende Punkte zugewiesen werden, so zeigen die Gleichungen (61), daß

erstens die Kerngerade C der beiden konjugierten Reziprozitäten eine solche Gerade ist. Denn die beiden Punkte $U\boldsymbol{R}$ und $U\frac{\mathfrak{a}}{r}$ fallen nach den Gleichungen (61) nicht nur in einen Punkt zusammen, sondern sind sogar auch ihrer Masse nach gleich, nämlich beide $= U\boldsymbol{Q}$, sobald:

$$[CU] = 0, \tag{77}$$

d. h. sobald:

$$U \equiv C \tag{78}$$

ist[1]), und es wird dann:

$$U\boldsymbol{R} = U\frac{\mathfrak{a}}{r} = U\boldsymbol{Q} \equiv C\boldsymbol{R} \equiv C\frac{\mathfrak{a}}{r} \equiv C\boldsymbol{Q}. \tag{79}$$

Die beiden zusammenfallenden Punkte, welche der Kerngeraden C durch die beiden konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{r}$ zugeordnet werden, sind somit einmal identisch mit dem Kernpunkte der Reziprozität $\boldsymbol{r}$ (vgl. S. 110); ferner aber zeigen die Gleichungen (79), daß der Kernpunkt der Reziprozität $\boldsymbol{r}$ zugleich der Pol $C\boldsymbol{Q}$ der Kerngeraden C in bezug auf die Polarkurve der Reziprozität ist.

Man hat somit nebenbei den Satz:

Satz 664: Der Kernpunkt einer Reziprozität ist der Pol der Kerngeraden in bezug auf die Polarkurve der Reziprozität.

Diesen Satz kann man endlich mit dem Satze 660 zu dem folgenden Satze zusammenfassen:

Satz 665: Der Kernpunkt einer Reziprozität bildet sowohl hinsichtlich der Polkurve wie hinsichtlich der Polarkurve der Reziprozität den Pol der Kerngeraden.

Zweitens werden den Gleichungen (61) zufolge die beiden Punkte $U\boldsymbol{R}$ und $U\frac{\mathfrak{a}}{r}$ auch dann in einen Punkt zusammenfallen, wenn:

$$U\boldsymbol{Q} \equiv [CU] \tag{80}$$

ist. Wenn aber der Punkt $[CU]$ der Pol $U\boldsymbol{Q}$ von U in bezug auf das Polarsystem $\boldsymbol{Q}$ ist, so liegt der Pol $U\boldsymbol{Q}$ auf seiner eigenen Polare U. Diese Polare ist also eine Tangente der Polarkurve von $\boldsymbol{Q}$ und der Punkt $U\boldsymbol{Q} = [CU]$ ihr Berührungspunkt.

Da andererseits dieser Berührungspunkt $U\boldsymbol{Q}$ wegen (80) auch der Kerngeraden C der Reziprozität angehört, so ist er einer der beiden Schnittpunkte der Polarkurve von $\boldsymbol{Q}$ mit der Kerngeraden C der Reziprozität.

---

1) Über das Symbol $\equiv$ vgl. S. 131.

Man erhält somit als Geraden, die der obigen Forderung genügen, daß ihnen durch die beiden konjugierten Reziprozitäten $\boldsymbol{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$ zwei zusammenfallende Punkte zugewiesen werden, außer der Kerngeraden C der Reziprozität noch die beiden Tangenten A und B, die sich in den Schnittpunkten der Kerngeraden C der Reziprozität mit der Polarkurve von $\boldsymbol{Q}$ an diese Kurve legen lassen. Natürlich können diese beiden Tangenten auch konjugiert komplex sein, während die Kerngerade C einer (reellen) Reziprozität stets reell ist.

Die Lage der beiden Kernkurven gegeneinander. Wir wenden uns nunmehr der Aufgabe zu, die Lagenbeziehung zwischen den beiden Kernkurven einer Reziprozität aufzusuchen. Nach den Gleichungen (12) und (52) stimmen die beiden der Reziprozität $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}$ zugehörigen Formen zweiter Ordnung und zweiter Klasse $[x \cdot x\boldsymbol{r}]$ und $[U \cdot U\boldsymbol{R}]$ mit den quadratischen Formen $[x \cdot x\boldsymbol{p}]$ und $[U \cdot U\boldsymbol{Q}]$ der Polarsysteme der beiden Kernkurven überein. Insbesondere ist die Form zweiter Klasse:

$$[U \cdot U\boldsymbol{R}] = [U \cdot U\boldsymbol{Q}]. \tag{81}$$

Nun läßt sich aber die Reziprozität *zweiter Klasse* $\boldsymbol{R}$ auch durch das Polarsystem *zweiter Ordnung* $\boldsymbol{p}$ der Polkurve und das Nullsystem zweiter Ordnung $\boldsymbol{n}$ des Kernpunktes der Reziprozität ausdrücken. Denn nach (18) ist die zugehörige Reziprozität zweiter Ordnung:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{n}. \tag{18}$$

Also wird nach dem Satze 373 die zu $\boldsymbol{r}$ adjungierte Reziprozität zweiter Klasse $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R} = [\boldsymbol{r}^2] = [(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{n})^2] = [\boldsymbol{p}^2] + [\boldsymbol{n}^2] + 2[\boldsymbol{p}\boldsymbol{n}]$$

oder wegen (8) und (9):

$$\boldsymbol{R} = [\boldsymbol{p}^2] + [\boldsymbol{n}^2] + \frac{1}{2}\left[\left(\boldsymbol{r} + \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right)\left(\boldsymbol{r} - \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right)\right]$$

oder endlich (vgl. Satz 372):

$$\boldsymbol{R} = [\boldsymbol{p}^2] + [\boldsymbol{n}^2] + \frac{1}{2}[\boldsymbol{r}^2] - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right)^2\right]. \tag{82}$$

Bezeichnet man daher noch das zum Polarsystem zweiter Ordnung $\boldsymbol{p}$ adjungierte Polarsystem zweiter Klasse $[\boldsymbol{p}^2]$ mit $\boldsymbol{P}$ und das zu dem Nullsystem zweiter Ordnung $\boldsymbol{n}$ adjungierte zweifach entartende Polarsystem zweiter Klasse $[\boldsymbol{n}^2]$ mit $\boldsymbol{D}$ (vgl. Satz 629), setzt somit:

(83) $[\boldsymbol{p}^2] = \boldsymbol{P}$ und (84) $[\boldsymbol{n}^2] = \boldsymbol{D}$,

und berücksichtigt ferner, daß:

$$[\boldsymbol{r}^2] = \boldsymbol{R} \quad \text{und} \quad \left[\left(\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}\right)^2\right] = \frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{r}}$$

ist (vgl. Satz 644), so verwandelt sich die Gleichung (82) in:

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{R} - \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{a}}{\mathbf{r}}. \tag{85}$$

Aus dieser Gleichung zwischen Reziprozitäten folgt aber durch zweimaliges Vormultiplizieren mit U die analoge Gleichung zwischen den entsprechenden quadratischen Formen:

$$[U \cdot U\mathbf{R}] = [U \cdot U\mathbf{P}] + [U \cdot U\mathbf{D}] + \frac{1}{2}[U \cdot U\mathbf{R}] - \frac{1}{2}\left[U \cdot U\frac{\mathfrak{a}}{\mathbf{r}}\right],$$

die sich endlich wegen der Gleichung (42) des vorigen Abschnitts und der Gleichung (81) reduziert auf:

$$[U \cdot U\mathbf{Q}] = [U \cdot U\mathbf{P}] + [U \cdot U\mathbf{D}]. \tag{86}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich ferner nach dem Satze 633 die entsprechende Gleichung:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P} + \mathbf{D} \tag{87}$$

zwischen den drei Polarsystemen zweiter Klasse $\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}$ und $\mathbf{D}$ selbst. In ihr ist $\mathbf{P}$ das adjungierte Polarsystem zu dem Polarsystem $\mathbf{p}$ der Polkurve und $\mathbf{D}$ das zweifach entartende Polarsystem zweiter Klasse des doppeltzählenden Kernpunktes der beiden konjugierten Reziprozitäten $\mathbf{r}$, $\mathbf{R}$ und $\frac{\mathfrak{a}}{\mathbf{R}}$, $\frac{\mathfrak{a}}{\mathbf{r}}$; und wenn wir noch voraussetzen, daß das Polarsystem zweiter Ordnung $\mathbf{p}$ nicht entartet, so gilt dasselbe auch von dem Polarsysteme zweiter Klasse $\mathbf{P}$; die beiden Polarsysteme $\mathbf{P}$ und $\mathbf{D}$ sind also sicher voneinander verschieden. Da sich endlich das Polarsystem $\mathbf{Q}$ der Polarkurve der beiden konjugierten Reziprozitäten als Summe der beiden Polarsysteme zweiter Klasse $\mathbf{P}$ und $\mathbf{D}$ darstellt, von denen das Polarsystem $\mathbf{D}$ zweifach entartet, so ist mit Rücksicht auf die Gleichung (91) des einundvierzigsten Abschnitts das Polarsystem $\mathbf{Q}$ der gemeinsamen Polarkurve der beiden konjugierten Reziprozitäten in derjenigen Büschelschar enthalten, welche bestimmt wird durch die zur Polkurve $\mathbf{p}$ der beiden Reziprozitäten adjungierte Kurve zweiter Klasse $\mathbf{P}$ und den doppeltzählenden Kernpunkt c der beiden konjugierten Reziprozitäten. Man hat daher den Satz:

Satz 666: Erster Satz von Plücker[1]): Die gemeinsame Polarkurve einer Reziprozität $\mathbf{r}$, $\mathbf{R}$ und der konjugierten Reziprozität $\frac{\mathfrak{a}}{\mathbf{R}}$, $\frac{\mathfrak{a}}{\mathbf{r}}$ ist eine Kurve derjenigen Büschelschar, welche durch die zur Polkurve adjungierte Kurve zweiter Klasse und das doppeltzählende Strahlbüschel des gemeinsamen Kernpunktes der beiden konjugierten Reziprozitäten bestimmt wird.

Je nachdem der Kernpunkt der beiden konjugierten Reziprozitäten $\mathbf{r}$ und

1) Vgl. J. Plücker, System der analytischen Geometrie. Berlin 1835. S. 75—80.

$\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ innerhalb, auf oder außerhalb der Polkurve liegt, *wird die Büschelschar, der die beiden Kernkurven angehören, elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch* (Fig. 62—64).

Scheidung zwischen den beiden Tangenten $x\boldsymbol{r}$ und $x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$, die sich von einem Punkte x der Polkurve an die Polarkurve der Reziprozität ziehen lassen. Wir schicken zwei Sätze über entartende Reziprozitäten voraus:

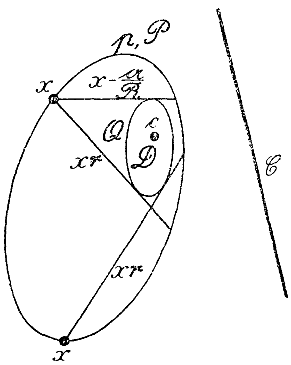


Fig. 62.

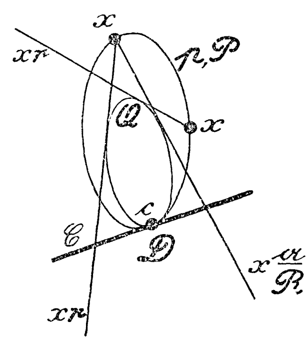


Fig. 63.

Satz 666a: Unterliegt eine Reziprozität zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$ auch nur für irgendeinen Punkt s einer Gleichung von der Form:

(88) $$s\boldsymbol{r} = 0,$$

so entartet die Reziprozität $\boldsymbol{r}$, und der Punkt s gehört der Polkurve der Reziprozität $\boldsymbol{r}$ an.

Setzt man nämlich für den Punkt s seinen Ableitausdruck:

(89) $$s = \mathfrak{s}_1 e_1 + \mathfrak{s}_2 e_2 + \mathfrak{s}_3 e_3,$$

in dem wenigstens eine der Ableitzahlen $\mathfrak{s}_i$ von Null verschieden sein muß, so läßt sich die Gleichung (88) auch in der Form schreiben:

$$\mathfrak{s}_1 \quad e_1\boldsymbol{r} + \mathfrak{s}_2 \quad e_2\boldsymbol{r} + \mathfrak{s}_3 \quad e_3\boldsymbol{r} = 0,$$

oder wegen der Gleichung (1) des dreiundvierzigsten Abschnitts in der Form:

(90) $$\mathfrak{s}_1 A_1 + \mathfrak{s}_2 A_2 + \mathfrak{s}_3 A_3 = 0.$$

Diese aber zieht zwischen den Größen A_i die Gleichung nach sich:

(91) $$[A_1 A_2 A_3] = 0,$$

welche aussagt, daß *die Reziprozität zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$ entartet* (vgl. S. 154 des ersten Teils dieses Bandes).

Auch ergibt sich aus der Gleichung (88) durch Vormultiplizieren mit s die Gleichung:

(92) $$[s \cdot s\boldsymbol{r}] = 0,$$

durch die gezeigt wird, daß der Punkt s der Polkurve der Reziprozität $\boldsymbol{r}$ angehört.

Ebenso beweist man den dualistisch entsprechenden Satz:

Satz 666b: Unterliegt eine Reziprozität zweiter Klasse $\boldsymbol{R}$ auch nur für einen Stab S einer Gleichung von der Form:

$$SR = 0, \tag{93}$$

so entartet die Reziprozität $\boldsymbol{R}$, und der Stab S bildet eine Hüllgerade der Polarkurve von $\boldsymbol{R}$.

Nach dieser Einschiebung wenden wir uns der Frage zu, welche von den beiden Tangenten, die man von einem Punkte x der Polkurve an die Polarkurve der Reziprozität $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$ ziehen kann, ihm durch die Reziprozität $\boldsymbol{r}$, und welche Tangente ihm durch die konjugierte Reziprozität $\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ zugeordnet wird.

Am einfachsten erledigt sich diese Frage für den Fall, wo die beiden Kernkurven einer elliptischen oder parabolischen Büschelschar angehören (Fig. 62 und 63). Wird dann irgendeinem Punkte x der Polkurve durch die Reziprozität $\boldsymbol{r}$ eine Gerade $x\boldsymbol{r}$ zugewiesen, die, gerechnet vom Punkte x nach dem Berührungspunkte mit der Polarkurve hin, die Polarkurve etwa zur Linken hat, so gilt dasselbe überhaupt für jeden Punkt x der Polkurve (Fig. 62). Denn einem stetigen Fortschreiten des Punktes x auf der Polkurve entspricht ja auch eine stetige Änderung der zugehörigen Geraden $x\boldsymbol{r}$. Und da die beiden Tangenten $x\boldsymbol{r}$ und $x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ bei einer elliptischen Büschelschar nirgends in *eine* Gerade zusammenfallen und außerdem nach dem Satze 666a die beiden Produkte $x\boldsymbol{r}$ und $x\frac{\mathfrak{a}}{\boldsymbol{R}}$ bei einer nicht entartenden Reziprozität niemals verschwinden können, so kann eine Tangente $x\boldsymbol{r}$, die die Polarkurve zur Linken hat, bei stetiger Fortbewegung des Punktes x auf der Polkurve niemals in eine Tangente der anderen Art übergehen.[1]) Und Entsprechendes gilt auch für zwei Kernkurven, die in einer parabolischen Büschelschar enthalten sind (Fig. 63).

Anders liegen die Verhältnisse indessen in dem Falle, wo die beiden Kernkurven einer hyperbolischen Büschelschar angehören. Alsdann wird die Polkurve durch ihre beiden Berührungspunkte mit der Polarkurve in zwei Teile zerlegt, die sich verschieden verhalten. Wird nämlich einem Punkte x des einen dieser beiden Teile der Polkurve wieder durch die Reziprozität $\boldsymbol{r}$ eine Gerade $x\boldsymbol{r}$ zugewiesen, welche, falls sie vom Punkte x nach dem Berührungspunkte mit der Polarkurve hin gerechnet wird, *die Polarkurve zur Linken hat*, so gilt dasselbe überhaupt für jeden Punkt x dieses Teils der Polkurve. Dagegen tritt *das Entgegengesetzte* ein, sobald der Punkt x in den anderen Teil der Polkurve übertritt.

1) Dies ist bei den obigen Figuren 57 und 58 bereits berücksichtigt.

Nach der ersten Formel (21), d. h. nach der Formel:

(94) $$xr = xp + [cx],$$

hat *zunächst* der Durchgang des Punktes x der Polkurve durch einen Berührungspunkt der beiden Kernkurven die Folge, daß der Stab xp seine Lage gegen den Stab $[cx]$ wechselt (Fig. 64). Trotzdem ändert sich dabei die Lage des Stabes xr stetig, ohne zu verschwinden, da ja die Reziprozität r nicht entarten soll (Satz 666a).

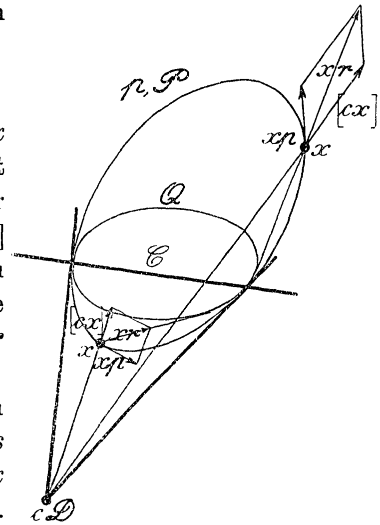


Fig. 64.

Aber der Durchgang des Punktes x durch einen dieser Berührungspunkte *bedingt es zugleich, daß der Sinn der Tangente, von x an die Polarkurve gezogen, sich umkehrt.* Wenn also die Polarkurve vor dem Durchgang des Punktes x durch einen Berührungspunkt der beiden Kernkurven *links von der Tangente xr lag,* immer diese Tangente gerechnet vom Punkte x nach ihrem Berührungspunkte hin, so liegt sie nach dem Durchgange des Punktes x durch jenen Berührungspunkt *rechts von der Tangente xr.*

Zehnter Hauptteil.

Die Apolarität.

Abschnitt 46.

Grundeigenschaften zweier apolaren Reziprozitäten und Polarsysteme.

Das kombinatorische Produkt einer Reziprozität zweiter Ordnung und zweiter Klasse. Wir gehen aus von der im 30. Abschnitte in der Gleichung (43) gegebenen Erklärung des kombinatorischen Produktes:

$$[xyz \cdot \boldsymbol{rst}],$$

in welchem die Faktoren x, y, z drei beliebige Punkte und die Faktoren $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$ drei Reziprozitäten zweiter Ordnung bedeuteten. Nach dieser Gleichung war:

$$(1)\quad [xyz \cdot \boldsymbol{rst}] = \frac{1}{3!}\left\{\begin{array}{l} \quad [x\boldsymbol{r} \cdot y\boldsymbol{s} \cdot z\boldsymbol{t}] + [y\boldsymbol{r} \cdot z\boldsymbol{s} \cdot x\boldsymbol{t}] + [z\boldsymbol{r} \cdot x\boldsymbol{s} \cdot y\boldsymbol{t}] \\ - [x\boldsymbol{r} \cdot z\boldsymbol{s} \cdot y\boldsymbol{t}] - [y\boldsymbol{r} \cdot x\boldsymbol{s} \cdot z\boldsymbol{t}] - [z\boldsymbol{r} \cdot y\boldsymbol{s} \cdot x\boldsymbol{t}] \end{array}\right\}.$$

Faßt man hier rechter Hand die untereinander stehenden Produkte zu *einem* Produkte zusammen und zieht zugleich den in dem Bruche $\frac{1}{3!}$ steckenden Faktor $\frac{1}{2}$ in die geschweifte Klammer hinein, so erhält man für jenes kombinatorische Produkt die neue Darstellung:

$$(2)\qquad [xyz \cdot \boldsymbol{rst}] = \tfrac{1}{3}\left\{[x\boldsymbol{r} \cdot \tfrac{1}{2}([y\boldsymbol{s} \cdot z\boldsymbol{t}] - [z\boldsymbol{s} \cdot y\boldsymbol{t}])] + \cdots\right\}.$$

Nun ist aber nach der Gleichung (23) des 30. Abschnitts:

$$\tfrac{1}{2}([y\boldsymbol{s} \cdot z\boldsymbol{t}] - [z\boldsymbol{s} \cdot y\boldsymbol{t}]) = [yz \cdot \boldsymbol{st}].$$

Die Gleichung (2) verwandelt sich somit in:

$$(3)\quad [xyz \cdot \boldsymbol{rst}] = \tfrac{1}{3}\left\{[x\boldsymbol{r}[yz \cdot \boldsymbol{st}]] + [y\boldsymbol{r}[zx \cdot \boldsymbol{st}]] + [z\boldsymbol{r}[xy \cdot \boldsymbol{st}]]\right\}.$$

Setzt man daher noch:

$$(4)\qquad [xyz \cdot \boldsymbol{r}[\boldsymbol{st}]] = [xyz \cdot \boldsymbol{rst}] \quad \text{und:}$$

$$(5)\qquad [\boldsymbol{st}] = \boldsymbol{S}, \quad \text{ferner:}$$

$$(6)\qquad [yz] = X, \quad [zx] = Y, \quad [xy] = Z,$$

so nimmt die Gleichung (3) die Form an:

$$(7)\qquad [xyz \cdot \boldsymbol{rS}] = \tfrac{1}{3}\left\{[x\boldsymbol{r} \cdot X\boldsymbol{S}] + [y\boldsymbol{r} \cdot Y\boldsymbol{S}] + [z\boldsymbol{r} \cdot Z\boldsymbol{S}]\right\}.$$

Definiert man ferner das kombinatorische Produkt $[\boldsymbol{r}S]$ entsprechend der Gleichung (46) des 30. Abschnitts durch die Formel:

$$(8) \qquad [\boldsymbol{r}S] = \frac{[xyz \cdot \boldsymbol{r}S]}{[xyz]},$$

in der x, y, z drei beliebige Punkte sind, deren äußeres Produkt:

$$(9) \qquad [xyz] \neq 0$$

ist, so wird:

$$(10) \qquad [\boldsymbol{r}S] = \frac{1}{3[xyz]}\{[x\boldsymbol{r} \cdot XS] + [y\boldsymbol{r} \cdot YS] + [z\boldsymbol{r} \cdot ZS]\}.$$

Die Gleichung:

$$(11) \qquad [\boldsymbol{r}S] = 0$$

läßt sich daher auch in der Form schreiben:

$$(12) \qquad [x\boldsymbol{r} \cdot XS] + [y\boldsymbol{r} \cdot YS] + [z\boldsymbol{r} \cdot ZS] = 0\,.$$

Schließlich bemerken wir noch, daß für eine jede beliebige Reziprozität zweiter Klasse S eine Produktdarstellung von der Form (5) möglich ist. In der Tat ist:

$$(13) \qquad \boldsymbol{s} = \frac{A_1,\ A_2,\ A_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}, \quad \boldsymbol{t} = \frac{B_1,\ B_2,\ B_3}{e_1,\ e_2,\ e_3} \quad \text{und}$$

$$(14) \qquad S = \frac{c_1,\ c_2,\ c_3}{E_1,\ E_2,\ E_3},$$

so wird nach der Gleichung (36) des 30. Abschnitts:

$$(15) \quad [\boldsymbol{s}\boldsymbol{t}] = \frac{\tfrac{1}{2}\{[A_2B_3] - [A_3B_2]\},\ \tfrac{1}{2}\{[A_3B_1] - [A_1B_3]\},\ \tfrac{1}{2}\{[A_1B_2] - [A_2B_1]\}}{E_1,\qquad E_2,\qquad E_3}.$$

Damit also die Gleichung (5) erfüllt werde, müssen die drei Gleichungen bestehen:

$$(16) \qquad c_1 = \tfrac{1}{2}\{[A_2B_3] - [A_3B_2]\}, \quad c_2 = \tfrac{1}{2}\{[A_3B_1] - [A_1B_3]\},$$
$$c_3 = \tfrac{1}{2}\{[A_1B_2] - [A_2B_1]\}.$$

Denkt man sich aber in diesen drei extensiven Gleichungen sowohl die Punkte c_i wie die Stäbe A_i und B_i durch ihre Ableitausdrücke ersetzt und nach Ausführung der Multiplikation die Koeffizienten von e_1, e_2, e_3 einander gleich gesetzt, so erhält man neun Zahlgleichungen, in denen die Ableitzahlen der c_i als lineare Funktionen sowohl der A_i wie der B_i ausgedrückt sind. Sind daher etwa die Brüche S und $\boldsymbol{s}$ fest gegeben, also auch die Punkte c_i und die Stäbe A_i, so hat man für die neun Ableitzahlen der Stäbe B_i neun nicht homogene lineare Gleichungen, die zu deren Bestimmung gerade ausreichen werden, vorausgesetzt, daß man sich $\boldsymbol{s}$ so gegeben denkt, daß nicht gerade die Determinante dieser neun Gleichungen verschwindet.

Die obigen Ergebnisse gelten daher nicht nur für jede beliebige Reziprozität zweiter Ordnung $\boldsymbol{r}$, sondern auch für jede beliebige Reziprozität zweiter Klasse $\boldsymbol{S}$. Insbesondere können diese Reziprozitäten auch entarten.

Man hat also den Satz:

Satz 667: Sind x, y, z drei beliebige, nicht in gerader Linie liegende Punkte, und ist:

$$[yz] = X, \quad [zx] = Y, \quad [xy] = Z, \tag{6}$$

ist ferner $\boldsymbol{r}$ eine Reziprozität zweiter Ordnung und $\boldsymbol{S}$ eine Reziprozität zweiter Klasse, so zieht die Gleichung:

$$[\boldsymbol{r}\boldsymbol{S}] = 0 \tag{11}$$

die Gleichung nach sich:

$$[x\boldsymbol{r} \cdot X\boldsymbol{S}] + [y\boldsymbol{r} \cdot Y\boldsymbol{S}] + [z\boldsymbol{r} \cdot Z\boldsymbol{S}] = 0. \tag{12}$$

Und umgekehrt: Sobald die Gleichung (12) für irgend drei nicht in gerader Linie liegende Punkte x, y, z befriedigt wird, gilt auch die Gleichung (11), und es wird dann die Gleichung (12) auch für je drei nicht in gerader Linie liegende Punkte x, y, z erfüllt.

Von diesem Satze ist der dualistisch entsprechende Satz nur seiner Form nach verschieden. Er lautet:

Satz 668: Sind U, V, W drei beliebige Stäbe, deren Geraden nicht durch einen und denselben Punkt gehen, und ist:

$$[VW] = u, \quad [WU] = v, \quad [UV] = w, \tag{17}$$

ist ferner $\boldsymbol{r}$ eine Reziprozität zweiter Ordnung, $\boldsymbol{S}$ eine Reziprozität zweiter Klasse, so zieht die Gleichung:

$$[\boldsymbol{r}\boldsymbol{S}] = 0 \tag{11}$$

die Gleichung nach sich:

$$[u\boldsymbol{r} \cdot U\boldsymbol{S}] + [v\boldsymbol{r} \cdot V\boldsymbol{S}] + [w\boldsymbol{r} \cdot W\boldsymbol{S}] = 0. \tag{18}$$

Und umgekehrt: Sobald die Gleichung (18) für irgend drei Stäbe U, V, W befriedigt wird, deren Geraden nicht durch denselben Punkt gehen, gilt auch die Gleichung (11), und es wird dann die Gleichung (18) auch für je drei nicht durch denselben Punkt gehende Stäbe U, V, W erfüllt.

Diese beiden Sätze gelten insbesondere auch für zwei *Polarsysteme* zweiter Ordnung und zweiter Klasse $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{Q}$.

Geometrische Deutung der Gleichung $[\boldsymbol{r}\boldsymbol{S}] = 0$. Der Satz 667 liefert unmittelbar eine geometrische Deutung der Gleichung:

$$[\boldsymbol{r}\boldsymbol{S}] = 0. \tag{11}$$

Denn nach diesem Satze wird die Gleichung (11) befriedigt, sobald für irgend drei Punkte x, y, z, die der Ungleichung (9) unterliegen, und die mit den drei Stäben X, Y, Z durch die drei Gleichungen (6) verbunden sind, die Gleichung erfüllt wird:

$$(12) \qquad [x\boldsymbol{r} \cdot X\boldsymbol{S}] + [y\boldsymbol{r} \cdot Y\boldsymbol{S}] + [z\boldsymbol{r} \cdot Z\boldsymbol{S}] = 0\,.$$

Und umgekehrt zieht das Bestehen der Gleichung (11) die Gleichung (12) für je drei Punkte x, y, z nach sich, die nicht in gerader Linie liegen.

Läßt man aber in der Gleichung (12) die beiden Punkte x und y beliebig und verfügt über den dritten Punkt z, der nach (6) auch als Faktor in den Produkten X und Y auftritt, in der Weise, daß die Gleichungen erfüllt werden:

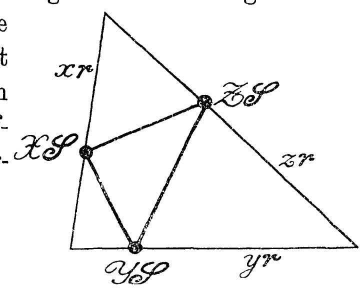


Fig. 65.

$$(19) \qquad [x\boldsymbol{r} \cdot X\boldsymbol{S}] = 0 \quad \text{und}$$

$$(20) \qquad [y\boldsymbol{r} \cdot Y\boldsymbol{S}] = 0\,,$$

welche aussagen, daß die Punkte $X\boldsymbol{S}$ und $Y\boldsymbol{S}$ auf den Geraden $x\boldsymbol{r}$ und $y\boldsymbol{r}$ liegen, so verkürzt sich die Gleichung (12) zu:

$$(21) \qquad [z\boldsymbol{r} \cdot Z\boldsymbol{S}] = 0\,.$$

Und diese Gleichung zeigt, daß dann auch der Punkt $Z\boldsymbol{S}$ der Geraden $z\boldsymbol{r}$ angehört, daß also das Dreieck $X\boldsymbol{S}$ $Y\boldsymbol{S}$ $Z\boldsymbol{S}$ dem Dreiseit $x\boldsymbol{r}$ $y\boldsymbol{r}$ $z\boldsymbol{r}$ eingeschrieben ist (Fig. 65).

Wegen der Willkürlichkeit der Punkte x und y gibt es ∞^4 Dreieckspaare, welche diese Eigenschaft haben (vgl. S. 114 des ersten Teils dieses Bandes).

Nennt man noch zwei Reziprozitäten zweiter Ordnung und zweiter Klasse $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{S}$, die der Gleichung:

$$(11) \qquad [\boldsymbol{r}\boldsymbol{S}] = 0$$

unterliegen, in Anlehnung an eine Bezeichnung von Th. Reye[1]) „zueinander apolar", so kann man das gewonnene Ergebnis in folgender Weise in Satzform aussprechen:

Satz 669: Sind zwei Reziprozitäten zweiter Ordnung und zweiter Klasse $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{S}$ zueinander apolar, so gibt es ∞^4 Dreiecke $X\boldsymbol{S}$ $Y\boldsymbol{S}$ $Z\boldsymbol{S}$, die den Dreiseiten $x\boldsymbol{r}$ $y\boldsymbol{r}$ $z\boldsymbol{r}$ eingeschrieben sind, vorausgesetzt, daß die Stäbe X, Y, Z mit den Punkten x, y, z durch die Gleichungen (6) verbunden sind. Und umgekehrt: Ist unter derselben Voraussetzung auch nur ein Dreieck $X\boldsymbol{S}$ $Y\boldsymbol{S}$ $Z\boldsymbol{S}$ dem

1) Vgl. Reye, Erweiterung der Polarentheorie algebraischer Flächen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 78 (1874), S. 97.

Dreiseit $xr\ yr\ zr$ eingeschrieben, so sind die Reziprozitäten r und S zueinander apolar.

Neue Form der Bedingungsgleichung für die Apolarität zweier Reziprozitäten, insbesondere zweier Polarsysteme. Ersetzt man in der Gleichung (10) für das kombinatorische Produkt $[rS]$, in der die Punkte x, y, z nur an die Bedingung (9) gebunden und die Stäbe X, Y, Z durch die Gleichungen (6) definiert sind, die Punkte x, y, z durch die drei Ecken e_1, e_2, e_3 des Fundamentaldreiecks, setzt also:

$$x = e_1, \quad y = e_2, \quad z = e_3 \quad \text{und somit}$$
$$X = E_1, \quad Y = E_2, \quad Z = E_3,$$

und berücksichtigt, daß:
$$[e_1 e_2 e_3] = 1$$
ist, so verwandelt sich die Gleichung (10) in:

$$[rS] = \tfrac{1}{3}\{[e_1 r \cdot E_1 S] + [e_2 r \cdot E_2 S] + [e_3 r \cdot E_3 S]\}, \tag{22}$$

oder wenn man wie gewöhnlich setzt:

$$r = \frac{A_1,\ A_2,\ A_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}, \quad S = \frac{b_1,\ b_2,\ b_3}{E_1,\ E_2,\ E_3}, \quad \text{so daß} \tag{23}$$

$$\begin{cases} e_1 r = A_1 & E_1 S = b_1 \\ e_2 r = A_2 & E_2 S = b_2 \\ e_3 r = A_3 & E_3 S = b_3 \end{cases} \tag{24}$$

wird, so nimmt die Gleichung (23) die Form an:

$$[rS] = \tfrac{1}{3}\{[A_1 b_1] + [A_2 b_2] + [A_3 b_3]\}. \tag{25}$$

Führt man endlich für die Stäbe A_i und die Punkte b_i ihre Ableitungsausdrücke ein, setzt also:

$$\begin{cases} A_i = \mathfrak{a}_{i1} E_1 + \mathfrak{a}_{i2} E_2 + \mathfrak{a}_{i3} E_3 \\ b_i = \mathfrak{B}_{i1} e_1 + \mathfrak{B}_{i2} e_2 + \mathfrak{B}_{i3} e_3 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3 \tag{26}$$

so geht die Gleichung (25) über in:

$$[rS] = \tfrac{1}{3}\left\{\begin{array}{l} \quad [(\mathfrak{a}_{11} E_1 + \mathfrak{a}_{12} E_2 + \mathfrak{a}_{13} E_3)(\mathfrak{B}_{11} e_1 + \mathfrak{B}_{12} e_2 + \mathfrak{B}_{13} e_3)] \\ + [(\mathfrak{a}_{21} E_1 + \mathfrak{a}_{22} E_2 + \mathfrak{a}_{23} E_3)(\mathfrak{B}_{21} e_1 + \mathfrak{B}_{22} e_2 + \mathfrak{B}_{23} e_3)] \\ + [(\mathfrak{a}_{31} E_1 + \mathfrak{a}_{32} E_2 + \mathfrak{a}_{33} E_3)(\mathfrak{B}_{31} e_1 + \mathfrak{B}_{32} e_2 + \mathfrak{B}_{33} e_3)] \end{array}\right\},$$

oder wenn man rechter Hand ausmultipliziert, in:

$$[rS] = \tfrac{1}{3}\left\{\begin{array}{l} \quad \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{B}_{11} + \mathfrak{a}_{12}\mathfrak{B}_{12} + \mathfrak{a}_{13}\mathfrak{B}_{13} \\ + \mathfrak{a}_{21}\mathfrak{B}_{21} + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{B}_{22} + \mathfrak{a}_{23}\mathfrak{B}_{23} \\ + \mathfrak{a}_{31}\mathfrak{B}_{31} + \mathfrak{a}_{32}\mathfrak{B}_{32} + \mathfrak{a}_{33}\mathfrak{B}_{33} \end{array}\right\}$$

oder in:

$$[rS] = \tfrac{1}{3}\{\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{B}_{11} + \cdots + (\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{B}_{23} + \mathfrak{a}_{32}\mathfrak{B}_{32}) + \cdots\}, \tag{27}$$

wobei die durch Punkte angedeuteten Glieder aus den hingeschriebenen durch zyklische Vertauschung der Zahlen 1, 2, 3 hervorgehen.

Läßt man insbesondere an die Stelle der Reziprozitäten r und S zwei Polarsysteme p und Q treten, setzt somit voraus, daß:

$$(28) \qquad \mathfrak{a}_{ki} = \mathfrak{a}_{ik} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}_{ki} = \mathfrak{B}_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

sei, so erhält man für das entsprechende kombinatorische Produkt $[pQ]$ die Darstellung:

$$(29) \qquad [pQ] = \tfrac{1}{3}\{\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{B}_{11} + \cdots + 2\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{B}_{23} + \cdots\}.$$

Die Apolaritätsbedingung (11) für zwei Reziprozitäten (23), deren Ableitzahlen durch die Gleichungen (26) definiert sind, läßt sich also wegen (27) in der Form schreiben:

$$(30) \qquad \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{B}_{11} + \cdots + (\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{B}_{23} + \mathfrak{a}_{32}\mathfrak{B}_{32}) + \cdots = 0,$$

während sich wegen (29) für zwei entsprechend definierte Polarsysteme die Apolaritätsgleichung vereinfacht zu:

$$(31) \qquad \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{B}_{11} + \cdots + 2\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{B}_{23} + \cdots = 0.$$

Man hat also den Satz:

Satz 670: Die Bedingungsgleichung:

$$[rS] = 0$$

für die Apolarität zweier Reziprozitäten r und S, die durch die extensiven Brüche:

$$r = \frac{A_1, A_2, A_3}{e_1, e_2, e_3} \quad \text{und} \quad S = \frac{b_1, b_2, b_3}{E_1, E_2, E_3}$$

ausgedrückt werden, läßt sich, wenn man die Ableitzahlen der Zähler dieser Brüche mit $\mathfrak{a}_{ik}$ und $\mathfrak{B}_{ik}$ bezeichnet, auch durch die Gleichung ersetzen:

$$(30) \qquad \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{B}_{11} + \cdots + (\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{B}_{23} + \mathfrak{a}_{32}\mathfrak{B}_{32}) + \cdots = 0.$$

Für den Fall zweier Polarsysteme nimmt die Apolaritätsgleichung die einfachere Form an:

$$(31) \qquad \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{B}_{11} + \cdots + 2\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{B}_{23} + \cdots = 0.$$ [1]

---

1) In dieser Form tritt die Apolaritätsgleichung zweier Polarsysteme zum erstenmal bei O. Hesse auf, der überhaupt die Wichtigkeit des Begriffs der Apolarität zweier Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse zuerst erkannte, wenn er auch nicht sogleich einen Namen für diese Beziehung zweier solchen Kurven einführte. Vgl. O. Hesse, Über die geometrische Bedeutung der linearen Bedingungsgleichung zwischen den Koeffizienten einer Gleichung zweiten Grades, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 45 (1853), S. 86f. Die Ausdehnung des Begriffs der Apolarität auch auf nicht involutorische Reziprozitäten auf Grund der obigen Gleichung (30) rührt von Rosanes her. Vgl. Rosanes, Zur Theorie der reziproken Verwandtschaft, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 90 (1881) S. 304.

Erste Lagenbeziehung zweier apolaren Polarsysteme, auch für den Fall, wo das Polarsystem zweiter Klasse einfach entartet. In dem besonderen Falle, wo an die Stelle zweier allgemeinen Reziprozitäten zweiter Ordnung und zweiter Klasse r und S zwei *Polarsysteme* getreten sind, kann man auch eine Deutung der Apolaritätsgleichung geben, die zu der Pol- und Polarkurve der beiden Polarsysteme in Beziehung steht.

Es seien also p und Q zwei Polarsysteme zweiter Ordnung und zweiter Klasse, und es werde nach der geometrischen Bedeutung der Apolaritätsgleichung:

(32) $$[pQ] = 0$$

gefragt. Man ersetze die Gleichung (32) wieder durch die nach Satz 667 mit ihr gleichwertige Gleichung:

(33) $$[xp \cdot XQ] + [yp \cdot YQ] + [zp \cdot ZQ] = 0$$

und wähle als Dreieck xyz ein Polardreieck des Polarsystems p; dann wird mit Rücksicht auf (6):

(34) $$xp = \mathfrak{x}X, \quad yp = \mathfrak{y}Y, \quad zp = \mathfrak{z}Z,$$

wo *in dem Falle eines nicht entartenden Polarsystems* p:

(35) $$\mathfrak{x} \neq 0, \quad \mathfrak{y} \neq 0, \quad \mathfrak{z} \neq 0$$

ist. Die Gleichung (33) erhält dann die Form:

(36) $$\mathfrak{x}[X \cdot XQ] + \mathfrak{y}[Y \cdot YQ] + \mathfrak{z}[Z \cdot ZQ] = 0.$$

Dabei hat man den drei Punkten x, y, z durch die drei Gleichungen (34) drei Bedingungen auferlegt. In der Tat gestattet die durch diese drei Gleichungen (34) ausgedrückte Forderung, daß die drei Punkte x, y, z ein Polardreieck des Polarsystems p bilden sollen, noch einen von den drei Punkten, etwa den Punkt x, willkürlich anzunehmen. Dann muß über den Punkt y in der Weise verfügt werden, daß er auf der Polare xp des Punktes x hinsichtlich p liegt, während seine Lage auf dieser willkürlich bleibt. Das kommt *einer Bedingung* gleich. Endlich muß für z der Schnittpunkt der Polaren xp und yp der Punkte x und y hinsichtlich p gewählt werden, was noch *zwei weitere Bedingungen* für die drei Punkte x, y, z liefert.

Da es aber ∞^6 Punkttripel x, y, z gibt, so hat man noch drei Bedingungen frei. Man unterwerfe daher die drei Punkte noch *den beiden weiteren Bedingungen:*

(37) $$[X \cdot XQ] = 0 \quad \text{und} \quad [Y \cdot YQ] = 0,$$

welche aussagen, daß die Seiten X und Y des Polardreiecks xyz von p die Polarkurve des Polarsystems Q berühren sollen. Damit ist dann allerdings vorausgesetzt, *daß die Polarkurve von Q reell sei.*

Infolge der Gleichungen (37) verkürzt sich mit Rücksicht auf (35) die Gleichung (36) zu der Gleichung:

$$[Z \cdot ZQ] = 0, \tag{38}$$

welche zeigt, daß auch die dritte Seite des Polardreiecks xyz von p die Polarkurve von Q berührt, daß also jenes Polardreieck von p der Polarkurve von Q umschrieben ist (Fig. 66). Dabei gibt es noch ∞^1 Dreiecke, die zu

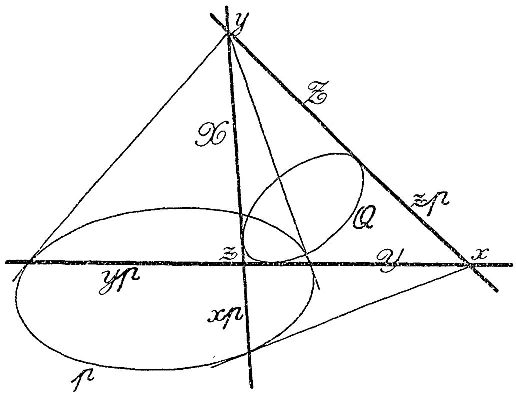


Fig. 66.

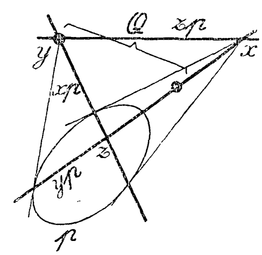


Fig. 67.

den beiden Polarsystemen p und Q die angegebene Lage haben, denn man hat die drei Punkte x, y, z im ganzen nur fünf Bedingungen unterworfen.

Ferner ist noch zu bemerken, daß die Polarkurve von Q, da sie einem eigentlichen Dreiseit eingeschrieben sein soll, wenigstens *nicht zweifach entarten darf.* Dagegen ist ein einfaches Entarten dieser Polarkurve nicht ausgeschlossen (Fig. 67). In diesem Falle sind die Punkte des Punktpaars, in das die Polarkurve von Q zerfällt, hinsichtlich des Polarsystems p konjugiert.

Da man endlich von den Gleichungen (37), (38) und (34) auf die Gleichung (33) zurückschließen kann, und aus dieser sich wieder nach dem Satze 667 die Apolaritätsgleichung (32) folgern läßt, sobald die Gleichung (33) für irgend drei nicht in gerader Linie liegende Punkte x, y, z erfüllt wird, so hat man den Satz:

Satz 671: Erste Lagenbeziehung zweier apolaren Polarsysteme: Ist ein nicht entartendes Polarsystem zweiter Ordnung p zu einem Polarsystem zweiter Klasse Q mit reeller Polarkurve apolar, und entartet das Polarsystem Q wenigstens nicht zweifach, so gibt es ∞^1 Poldreiseite des Polarsystems p, denen die Polarkurve des Polarsystems Q eingeschrieben ist. Und umgekehrt: Sobald die Polarkurve eines Polarsystems zweiter

Klasse Q irgendeinem eigentlichen Poldreiseit eines nicht entartenden Polarsystems zweiter Ordnung p eingeschrieben ist, sind die Polarsysteme p und Q zueinander apolar.

Man sagt auch wohl von der *Polkurve* eines Polarsystems zweiter Ordnung und der *Polarkurve* eines zu diesem Polarsystem zweiter Ordnung apolaren Polarsystems zweiter Klasse, sie seien zueinander apolar. Auch sagt man nach dem Vorschlage von Reye[1]) von jener Polkurve, sie „stütze" diese Polarkurve, und umgekehrt von dieser Polarkurve, sie „ruhe" auf jener Polkurve.

Weiteres über apolare Polarsysteme, von denen eins oder beide entarten. Die hier ausgeschlossenen Fälle, wo das Polarsystem zweiter Klasse Q zweifach entartet, und wo das Polarsystem zweiter Ordnung p einfach oder zweifach entartet, sind der Hauptsache nach schon gelegentlich im ersten Teile dieses Bandes behandelt.

In der Tat lautete ja die Bedingungsgleichung des Satzes 507:

$$(39) \qquad [p q^2] = 0;$$

und in ihr bedeutete q ein einfach entartendes Polarsystem zweiter Ordnung. Setzt man daher noch:

$$(40) \qquad [q^2] = Q,$$

so wird Q ein zweifach entartendes Polarsystem zweiter Klasse, dessen Polarkurve der doppeltzählende Punkt ist, der mit dem Doppelpunkt des Linienpaars q zusammenfällt, und zugleich verwandelt sich die Gleichung (39) in die obige Gleichung:

$$(32) \qquad [p Q] = 0,$$

welche aussagt, daß die Polarsysteme p und Q zueinander apolar sind. Man kann daher dem Satze 507 auch die Form verleihen:

Satz 672: Ein Polarsystem zweiter Ordnung p und ein zweifach entartendes Polarsystem zweiter Klasse Q sind dann und nur dann zueinander apolar, wenn der doppeltzählende Punkt, der die Polarkurve von Q bildet, auf der Polkurve von p liegt (vgl. die Figg. 68, 69 u. 70).

Ebenso läßt sich der dem Satze 507 dualistisch entsprechende Satz 508 in der Form aussprechen:

Satz 673: Ein zweifach entartendes Polarsystem zweiter Ordnung p und ein beliebiges Polarsystem zweiter Klasse Q sind dann und nur dann zueinander apolar, wenn die doppeltzählende

---

1) Vgl. Reye, Über Systeme und Gewebe von algebraischen Flächen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 82 (1877), S. 1f. und Reye, Die Geometrie der Lage. Erste Abteilung. Vierte Auflage. Leipzig 1899. S. 266.

Gerade, die die Polkurve von p bildet, eine Tangente der Polarkurve von Q ist (vgl. die Figg. 71, 72 und die obige Fig. 70).

Endlich kann man dieselbe Umformung auch mit dem Satze 509 vornehmen. Nach dem Satze 509 ist ein einfach entartendes Polarsystem zweiter Ordnung p mit reeller Polkurve zu einem nicht entartenden oder zu einem zweifach entartenden Polarsystem zweiter Klasse Q apolar, wenn die Geraden des Linienpaars p hinsichtlich des Polarsystems Q konjugiert sind.

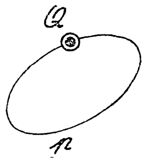


Fig. 68.

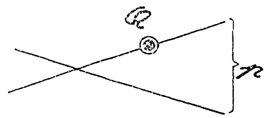


Fig. 69.

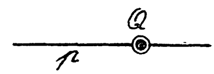


Fig 70.

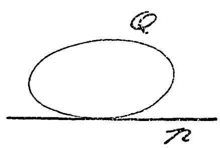


Fig. 71.

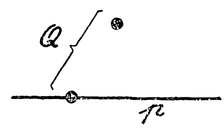


Fig. 72.

Man überzeugt sich aber leicht, daß es möglich ist, auch noch den Fall mit einzuschließen, wo das Polarsystem zweiter Klasse Q *einfach entartet.* Dabei kann man außerdem den Satz zugleich auch noch *von der Voraussetzung befreien, daß das Linienpaar des Polarsystems p reell sei.*

In der Tat wurde ja die Ausschließung des Falles eines einfach entartenden Polarsystems zweiter Klasse Q dadurch bedingt, daß bei der Ableitung des Satzes 509 das Polarsystem zweiter Klasse Q als adjungierte Abbildung $[q^2]$ eines Polarsystems zweiter Ordnung q eingeführt ist, daß sich aber ein einfach entartendes Polarsystem zweiter Klasse nicht als adjungierte Abbildung eines Polarsystems zweiter Ordnung ausdrücken läßt.

Bei unserer jetzigen Entwicklung dagegen war in der Apolaritätsgleichung:

(11) $$[rS] = 0$$

die Reziprozität zweiter Klasse S nach der Gleichung (5) aus dem kombinatorischen Produkte $[st]$ zweier Reziprozitäten zweiter Ordnung s und t hervorgegangen. Ebenso aber kann man das Polarsystem zweiter Klasse Q als kombinatorisches Produkt zweier Polarsysteme zweiter Ordnung darstellen. Und eine solche Darstellung ist nach dem Satze 536 insbesondere auch für ein einfach entartendes Polarsystem zweiter Klasse, d. h. für ein Punktpaar, möglich.

Wir nehmen daher die Frage nach der Bedeutung der Gleichung

(32) $$[pQ] = 0$$

von neuem auf unter der Voraussetzung, daß das Polarsystem zweiter Ordnung p einfach entartet, daß also die Polkurve von p ein reelles oder konjugiert komplexes Linienpaar ist. Dazu ersetzen wir die Gleichung (32) wieder durch die gleichwertige Gleichung:

(33) $$[xp \cdot XQ] + [yp \cdot YQ] + [zp \cdot ZQ] = 0$$

und wählen dabei wie bisher für das eigentliche Dreieck xyz ein Polardreieck des Polarsystems p. Nach S. 238f. des ersten Teils dieses Bandes wird bei einem einfach entartenden Polarsystem zweiter Ordnung p ein Polardreieck aus dem stets reellen Doppelpunkt des zugehörigen Linienpaars und zwei solchen Punkten einer beliebigen nicht durch ihn hindurchgehenden Geraden gebildet, die einander in bezug auf p konjugiert sind. Man verlege also etwa den Punkt z in den Doppelpunkt des Linienpaars p, was nach S. 207ff. des ersten Teils dieses Bandes zur Folge hat, daß

(41) $$zp = 0$$

wird, und wähle ferner die Punkte x und y als konjugierte Punkte hinsichtlich p auf einer nicht durch z hindurchgehenden Geraden, unterwerfe sie also der Bedingung:

(42) $$[x \cdot yp] = 0,$$

die man wegen der ersten Grundgleichung des Polarsystems (Gleichung (61) des 31. Abschnitts) auch in der Form schreiben kann:

(43) $$[y \cdot xp] = 0.$$

Nach diesen Gleichungen (43) und (42) gehen die Polaren xp und yp der Punkte x und y in bezug auf p beziehlich durch die Punkte y und x hindurch, und da sie überdies nach dem Satze 420 auch den Doppelpunkt z des Linienpaars enthalten müssen, so fallen sie mit den Geraden:

$$[yz] = X \quad \text{und} \quad [zx] = Y$$

zusammen, d. h., es bestehen die Gleichungen:

(44) $$xp = \mathfrak{x} X \quad \text{und} \quad yp = \mathfrak{y} Y,$$

in denen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zwei Zahlgrößen bedeuten, die von Null verschieden sind, da ein einfach entartendes Polarsystem zweiter Ordnung nur *einen* Nullpunkt besitzt, und wo die Geraden X und Y ein Paar derjenigen Strahlinvolution bilden, die das Polarsystem p nach Teil I dieses Bandes S. 212 in seinem Nullpunkte z hervorruft. Von diesen beiden Geraden kann übrigens nicht etwa eine mit einem Doppelstrahl dieser Involution, d. h. mit einer Geraden des Linienpaars, zusammenliegen, das die Polkurve von p darstellt, weil sonst die *beiden* Geraden X und Y in diesen Strahl zusammenfallen würden, was unserer obigen Voraussetzung widerspricht, daß die Punkte x, y, z ein eigentliches Dreieck bilden sollen.

Bei Einführung der Werte (44) und (41) nimmt die Gleichung (33) die Form an:

(45) $$\mathfrak{x}[X \cdot XQ] + \mathfrak{y}[Y \cdot YQ] = 0.$$

Und unterwirft man jetzt noch die drei Punkte x, y, z, für die man noch drei Bedingungen frei hat, der Gleichung:

$$(46) \qquad [X \cdot XQ] = 0,$$

welche aussagt, daß die Gerade X die Polarkurve des Polarsystems Q berühren soll, womit wiederum vorausgesetzt wird, daß die Polarkurve von Q reell ist, und berücksichtigt man ferner, daß dem Obigen zufolge

$$\mathfrak{y} \neq 0$$

ist, so verkürzt sich die Gleichung (45) zu der Gleichung:

$$(47) \qquad [Y \cdot YQ] = 0.$$

Diese Gleichung aber zeigt, daß auch der in dem Strahlbüschel mit dem Scheitel z zum Strahle X in bezug auf p konjugierte Strahl Y die Polarkurve von Q berührt (Fig. 73). Und da auch wieder die umgekehrte Schlußweise möglich ist, so hat man den Satz:

Satz 674: *Läßt sich von dem Nullpunkte (Doppelpunkte) eines einfach entartenden Polarsystems zweiter Ordnung p an die Polarkurve eines Polarsystems zweiter Klasse Q ein reelles Tangentenpaar legen, so sind diese beiden Polarsysteme dann und nur dann zueinander apolar, wenn dieses Tangentenpaar ein Paar der Strahlinvolution bildet, die das Polarsystem p in seinem Nullpunkte hervorruft.*

Die Gültigkeit des Satzes auch für den Fall, wo das Polarsystem zweiter Klasse Q zweifach entartet, ist schon weiter oben bewiesen (vgl. den Satz 672 und die Fig. 69). Und der Fall eines einfach entartenden Polarsystems zweiter Klasse Q (Fig. 74) ist in dem soeben gegebenen Beweise mit erledigt.

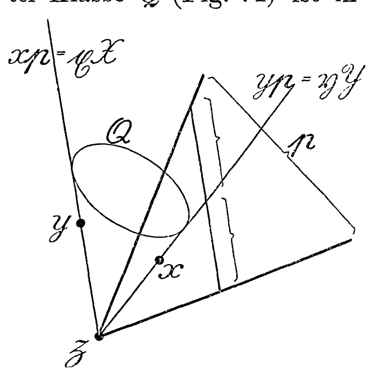


Fig. 73.

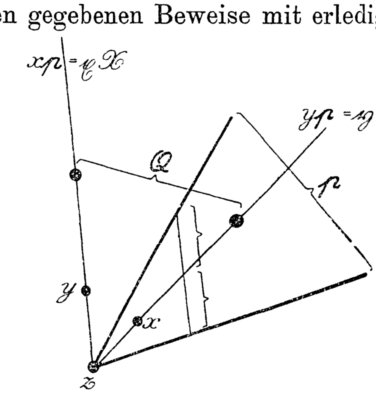


Fig. 74.

Um die in dem Satze 674 ausgeschlossenen Fälle zu behandeln, machen wir den Nullpunkt des Linienpaares p zur Ecke e_3 des Fundamentaldreiecks. Ist dabei außerdem das Linienpaar p reell, so wählen wir seine Geraden zu Seiten E_1 und E_2 des Fundamentaldreiecks, während die Lage der dritten

Seite E_3 willkürlich bleibt. Dann gestattet der extensive Bruch p für das Polarsystem dieses Linienpaars nach dem ersten Teil dieses Bandes S. 243 die Darstellung:

$$p = \frac{E_2,\ E_1,\ 0}{e_1,\ e_2,\ e_3}. \tag{48}$$

Ferner läßt sich nach dem Satze 667 die Apolaritätsgleichung (32) auch durch die Gleichung ersetzen:

$$[e_1 p \cdot E_1 Q] + [e_2 p \cdot E_2 Q] + [e_3 p \cdot E_3 Q] = 0 \tag{49}$$

oder wegen (48) durch die Gleichung:

$$[E_2 \cdot E_1 Q] + [E_1 \cdot E_2 Q] = 0,$$

die sich wegen der zweiten Grundgleichung des Polarsystems (Gleichung (118) des 31. Abschnitts) verkürzt zu:

$$[E_1 \cdot E_2 Q] = 0. \tag{50}$$

Und da man auch von der Gleichung (50) auf die Gleichung (32) zurückschließen kann, so sieht man: Die Apolaritätsgleichung (32) ist für den Fall, wo die Polkurve des Polarsystems p durch das reelle Linienpaar E_1, E_2 gebildet wird, durch die Gleichung (50) ersetzbar; diese aber besagt, daß die Geraden E_1 und E_2 hinsichtlich des Polarsystems Q konjugiert sind.

Ein reelles Linienpaar ist also dann und nur dann zu einer Kurve zweiter Klasse apolar, wenn seine beiden Geraden hinsichtlich der Kurve zweiter Klasse konjugiert sind (vgl. die weiter unten folgenden Figg. 75, 76 u. 77 und die Bemerkungen dazu auf S. 157 f.).

Dasselbe Ergebnis findet man aber auch für ein konjugiert komplexes Linienpaar. Nach S. 36 des vorliegenden Teils und S. 239 des ersten Teils dieses Bandes gestattet nämlich das Polarsystem p eines konjugiert komplexen Linienpaars die Darstellung:

$$p = \frac{E_1,\ E_2,\ 0}{e_1,\ e_2,\ e_3}, \tag{51}$$

vorausgesetzt, daß der Punkt $e_3 = [E_1 E_2]$ der reelle Scheitel des konjugiert komplexen Linienpaars ist, und daß die beiden zueinander harmonischen Strahlpaare E_1, E_2 und $E_2 + E_1$, $E_2 - E_1$ zwei Paare derjenigen Involution bilden, die das konjugiert komplexe Linienpaar geometrisch vertritt, und die von ihm überdies in seinem Doppelpunkte erzeugt wird.

Dem Ausdrucke (51) für das Polarsystem p entspricht nach der zuletzt angeführten Stelle die Darstellung des zugehörigen konjugiert komplexen Linienpaars durch die Gleichung:

$$\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2 = 0, \tag{52}$$

die in die beiden linearen Gleichungen zerfälllt:

$$\mathfrak{x}_1 + i\mathfrak{x}_2 = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}_1 - i\mathfrak{x}_2 = 0; \tag{53}$$

und diese kann man auch in der Form schreiben:

$$[(E_1 + iE_2)x] = 0 \quad \text{und} \quad [(E_1 - iE_2)x] = 0, \tag{54}$$

so daß sich die beiden konjugiert komplexen *Geraden* auch durch die konjugiert komplexen *Stäbe:*

$$(55) \qquad E_1 + \mathrm{i}E_2 \quad \text{und} \quad E_1 - \mathrm{i}E_2$$

ausdrücken lassen.

Die Apolaritätsgleichung (49) nimmt ferner wegen (51) die Form an:

$$(56) \qquad [E_1 \cdot E_1 Q] + [E_2 \cdot E_2 Q] = 0,$$

und dieser Gleichung kann man auch die Gestalt verleihen:

$$(57) \qquad [(E_1 + \mathrm{i}E_2) \cdot (E_1 - \mathrm{i}E_2) Q] = 0,$$

in der sie in der Tat aussagt, daß die beiden Linien $E_1 + \mathrm{i}E_2$ und $E_1 - \mathrm{i}E_2$ des konjugiert komplexen Linienpaars (55) hinsichtlich des Polarsystems Q konjugiert sind. Man hat also wirklich den Satz:

Satz 675: Ein einfach entartendes Polarsystem zweiter Ordnung p ist zu einem Polarsystem zweiter Klasse Q dann und nur dann apolar, wenn die Linien des reellen oder konjugiert komplexen Linienpaars, das die Polkurve des Polarsystems zweiter Ordnung p bildet, hinsichtlich des Polarsystems zweiter Klasse Q konjugiert sind.

Es ist beachtenswert, daß dieser Satz auch dann einen durchaus greifbaren, der Anschauung zugänglichen Inhalt besitzt, wenn das Imaginäre hineinspielt. Um dies zu zeigen, mögen die in dem Satze enthaltenen Fälle durch vier verschiedene Figuren erläutert werden.

Die drei Figuren 75, 76 und 77 veranschaulichen die Lagenbeziehung eines reellen Linienpaars E_1, E_2, das die Polkurve eines Polarsystems zweiter Ordnung p bildet, und einer zu ihm apolaren Kurve zweiter Klasse Q, und zwar die Fig. 75 für den Fall, wo *das Tangentenpaar T_1, T_2, das man vom Doppelpunkte e_3 des Linienpaars an die Kurve Q legen kann, reell ist*, und die Figg. 76 und 77 für den Fall, wo *dieses Tangentenpaar konjugiert komplex* ist. Im zweiten Falle ergeben sich noch zwei Unterfälle. Es kann nämlich entweder noch *die Kurve Q reell sein, der Doppelpunkt e_3 von p aber innerhalb der Kurve Q liegen* (Erster Unterfall: Fig. 76), oder

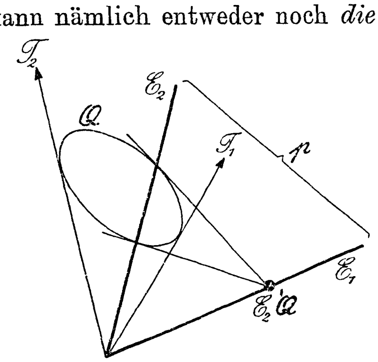


Fig. 75.

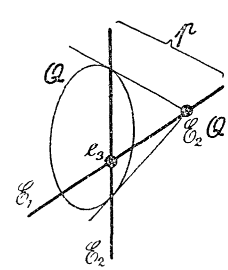


Fig. 76.

es kann *die Kurve Q imaginär* sein, also eine imaginäre Ellipse darstellen (Zweiter Unterfall: Fig. 77). Für diesen zweiten Unterfall ist nach dem Vorbilde von S. 292 des ersten Teils dieses Bandes die zu der imaginären Ellipse des Polarsystems Q gehörende reelle Ellipse gestrichelt angedeutet und ihr Polarsystem mit Q' bezeichnet. Ferner ist zu der Geraden E_2 des Linienpaars p zunächst der Pol $E_2 Q'$ in bezug auf diese reelle Ellipse Q' konstruiert; dann ergibt sich der gesuchte Pol $E_2 Q$ der Geraden E_2 hinsichtlich des Polarsystems Q der zugehörigen imaginären Ellipse, indem man den Hilfspunkt $E_2 Q'$ an dem Mittelpunkte m jener reellen Ellipse spiegelt, d. h. als „Antipol“ der Geraden E_2 hinsichtlich der reellen Ellipse.

In allen diesen Fällen geht jede von den beiden Geraden E_1 und E_2 des reellen Linienpaars p durch den Pol der andern Geraden in bezug auf die Kurve Q hindurch. In dem zuerst betrachteten Falle, wo das Tangenten-

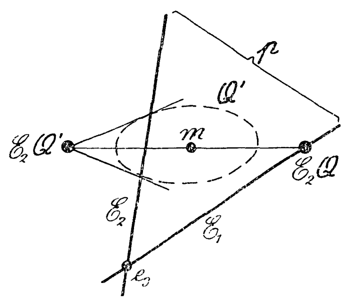


Fig. 77.

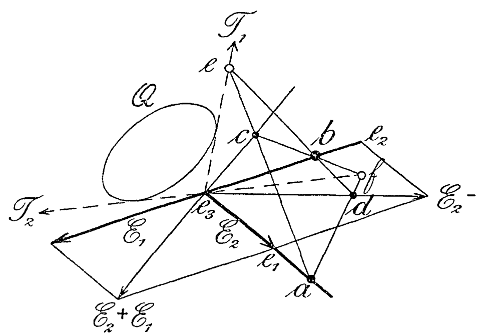


Fig. 78.

paar T_1, T_2 reell ist (Fig. 75), bilden zugleich diese beiden Tangenten T_1 und T_2 mit den beiden Geraden E_1 und E_2 des reellen Linienpaars einen harmonischen Strahlwurf.

Will man sich andererseits die geometrische Bedeutung des Satzes 675 auch für den Fall eines konjugiert komplexen Linienpaars $E_1 + iE_2$, $E_1 - iE_2$ klar machen, das die Polkurve von p bildet, so berücksichtige man, daß, wenn das konjugiert komplexe Linienpaar p zu der Kurve Q konjugiert sein soll, die beiden Tangenten T_1 und T_2, die man vom Doppelpunkte e_3 des Linienpaars p an die Kurve Q ziehen kann, ebenfalls zu dem konjugiert komplexen Linienpaar p konjugiert sein müssen, woraus nach dem Satze 224 folgt, daß *diese Tangenten reell* sein müssen.

Die Geraden eines reellen Linienpaars aber sind hinsichtlich eines konjugiert komplexen Linienpaars mit demselben Doppelpunkte dann und nur dann konjugiert, wenn sie ein Paar zugeordneter Strahlen in derjenigen Strahlinvolution bilden, die das konjugiert komplexe Linienpaar in seinem Doppelpunkte hervorruft. Dies wird also insbesondere von den beiden reellen Tangenten T_1 und T_2 gelten müssen, die man von dem reellen Doppelpunkt e_3 des konjugiert komplexen Linienpaars p an die zu ihm apolare Kurve zweiter

Klasse legen kann. In der Fig. 78 ist daher die Lagenbeziehung eines konjugiert komplexen Linienpaars und einer zu ihm apolaren Kurve zweiter Klasse dadurch veranschaulicht, daß von der elliptischen Strahlinvolution, die das konjugiert komplexe Linienpaar $E_1 + iE_2, E_1 - iE_2$ in seinem Doppelpunkte e_3 hervorruft, außer den beiden sie bestimmenden Strahlpaaren E_1, E_2 und $E_2 + E_1, E_2 - E_1$ auf Grund des Satzes 541 ein drittes Paar konstruiert worden ist, das dann als Tangentenpaar T_1, T_2 einer zum Polarsystem $\mathfrak{p}$ apolaren Kurve zweiter Klasse Q verwendet ist.

Nach dem Satze 541 kann man nämlich leicht die Aufgabe lösen:

Aufgabe: Eine Strahlinvolution mit dem Scheitel s ist durch zwei Paare konjugierter Strahlen A, B und C, D gegeben. Es soll zu einem beliebigen fünften Strahle E der ihm in der Involution zugeordnete Strahl F konstruiert werden.

In der Tat braucht man nur auf dem Strahle E einen beliebigen Punkt e anzunehmen und durch ihn zwei gerade Linien zu legen, von denen die eine die *nicht gepaarten* Strahlen A und C in den Punkten a und c, die andere die beiden andern Strahlen B und D in den Punkten b und d schneiden möge (Fig. 79). Vervollständigt man dann das durch die Punktpaare a, b und c, d *als Gegenecken* bestimmte einfache Vierseit zu einem vollständigen Vierseit, indem man die Verbindungslinien der *benachbarten Ecken* a und d, b und c des einfachen Vierseits zum Schnitt bringt in f, so ist in dem entstehenden vollständigen Vierseit der Punkt f die Gegenecke zu e, und seine Verbindungslinie F mit dem Scheitel s der Strahlinvolution der gesuchte, zum Strahle E zugeordnete Strahl der Involution.

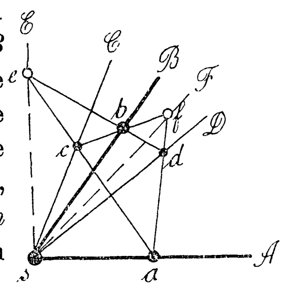


Fig. 79.

Dasselbe Verfahren ist auch bei der Zeichnung der Fig. 78 verwendet worden, in der

den Stäben	A,	B,	C,	D,	E,	F	der Fig. 79
die Stäbe	E_2,	E_1,	$E_2 + E_1$,	$E_2 - E_1$,	T_1,	T_2	entsprechen.

Jetzt kann man ferner auch das folgende Gegenstück des Satzes 674 aussprechen:

Satz 676: Ist das Tangentenpaar, das von dem Nullpunkte (Doppelpunkte) eines einfach entartenden Polarsystems zweiter Ordnung $\mathfrak{p}$ an eine zu ihm apolare Kurve zweiter Klasse Q führt, konjugiert komplex, so ist das Linienpaar $\mathfrak{p}$ notwendig reell, und seine Geraden bilden ein Paar der Strahlinvolution, die das Polarsystem Q in dem Nullpunkte von $\mathfrak{p}$ hervorruft.

Schließlich kann man die drei letzten Sätze unter Benutzung des Begriffs und der Eigenschaften harmonischer Involutionen in einen einzigen Satz zusammenfassen. In dem 21. Abschnitt wurde zunächst der allgemeinere Begriff zweier *harmonischen Projektivitäten* einer und derselben Geraden eingeführt, und zwei solche Projektivitäten definiert als Projektivitäten, deren binäres kombinatorisches Produkt verschwindet. Dieser Begriff ließ sich dann insbesondere auf zwei *harmonische Involutionen* derselben Geraden übertragen. Die Eigenschaften harmonischer Involutionen ergeben sich demgemäß unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften harmonischer Projektivitäten derselben Geraden. So liefern die Sätze 199 und 200, die von einer Projektivität und einer zu ihr harmonischen Involution handeln, auf zwei Involutionen derselben Geraden angewandt, den Satz:

Satz 677: Zwei Punktinvolutionen derselben Geraden sind dann und nur dann zueinander harmonisch, wenn die Doppelpunkte der einen ein Paar der andern bilden.

Und aus diesem folgt wieder ohne Weiteres der entsprechende Satz für zwei harmonische Strahlinvolutionen mit demselben Scheitel, nämlich der Satz:

Satz 678: Zwei Strahlinvolutionen mit demselben Scheitel sind dann und nur dann zueinander harmonisch, wenn die Doppelstrahlen der einen ein Paar der anderen bilden.

Für die Beurteilung der Bedeutung dieser beiden Sätze ist dabei noch der Satz 224 von Wichtigkeit, nach welchem von zwei harmonischen Involutionen auf demselben Träger immer wenigstens eine zwei reelle Doppelelemente enthalten muß.

Der Satz 678 ermöglicht dann endlich in der Tat die Zusammenfassung der Sätze 674, 675 und 676 in dem einen Satze:

Satz 679: Ein einfach entartendes Polarsystem zweiter Ordnung p ist zu einem Polarsystem zweiter Klasse Q dann und nur dann apolar, wenn die Strahlinvolutionen, die die beiden Polarsysteme p und Q in dem Nullpunkte von p hervorrufen, zueinander harmonisch sind.

Zweite Lagenbeziehung zweier apolaren Polarsysteme. Man kann aber der Apolaritätsgleichung (32) noch eine zweite geometrische Deutung geben, die der auf S. 151ff. entwickelten Deutung dualistisch entspricht. Dazu gehe man auf den Satz 668 zurück. Nach diesem ist die Gleichung (32) auch gleichwertig mit der Gleichung:

$$(58) \qquad [up \cdot UQ] + [vp \cdot VQ] + [wp \cdot WQ] = 0,$$

in welcher U, V, W drei beliebige Stäbe sind, deren Geraden nicht durch einen Punkt gehen, und in der:

$$(59) \qquad [VW] = u, \quad [WU] = v, \quad [UV] = w$$

ist. Wählt man überdies dem Dualistischen entsprechend als Dreiseit UVW ein Poldreiseit von Q, so wird mit Rücksicht auf (59):

(60) $$UQ = \mathfrak{u}u, \quad VQ = \mathfrak{v}v, \quad WQ = \mathfrak{w}w,$$

wo *in dem Falle eines nicht entartenden Polarsystems Q:*

(61) $$\mathfrak{u} \neq 0, \quad \mathfrak{v} \neq 0, \quad \mathfrak{w} \neq 0$$

ist. Die Gleichung (38) erhält dann die Form:

(62) $$\mathfrak{u}\,[u \cdot u\boldsymbol{p}] + \mathfrak{v}\,[v \cdot v\boldsymbol{p}] + \mathfrak{w}\,[w \cdot w\boldsymbol{p}] = 0\,.$$

Dabei hat man den Geraden der drei Stäbe U, V, W durch die drei Gleichungen (60) drei Bedingungen auferlegt, was man ebenso wie bei dem Dualistischen begründen kann. Da es aber in der Ebene ∞^6 Geradentripel gibt, so hat man für die Geraden der drei Stäbe U, V, W noch *drei Bedingungen frei.* Man unterwerfe daher diese Geraden noch *den beiden weiteren Bedingungen:*

(63) $$[u \cdot u\boldsymbol{p}] = 0 \quad \text{und} \quad [v \cdot v\boldsymbol{p}] = 0\,,$$

welche aussagen, daß die Ecken u und v des Poldreiseits UVW von Q der Polkurve des Polarsystems $\boldsymbol{p}$ angehören sollen. Damit ist dann allerdings vorausgesetzt, *daß die Polkurve von $\boldsymbol{p}$ reell sei.*

Infolge der Gleichungen (63) verkürzt sich mit Rücksicht auf (64) die Gleichung (62) zu der Gleichung:

(64) $$[w \cdot w\boldsymbol{p}] = 0\,,$$

welche zeigt, daß auch die dritte Ecke w des Poldreiseits UVW von Q auf der Polkurve von $\boldsymbol{p}$ gelegen ist, daß also jenes Poldreiseit von Q der Polkurve von $\boldsymbol{p}$ eingeschrieben ist (Fig. 80). Dabei gibt es noch ∞^1 Dreiseite, die zu den beiden Polarsystemen Q und $\boldsymbol{p}$ die angegebene Lage haben, denn wir haben die Geraden der Stäbe U, V, W im ganzen nur fünf Bedingungen unterworfen.[1])

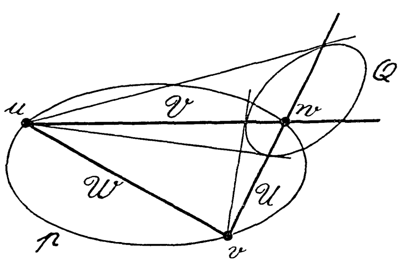


Fig. 80.

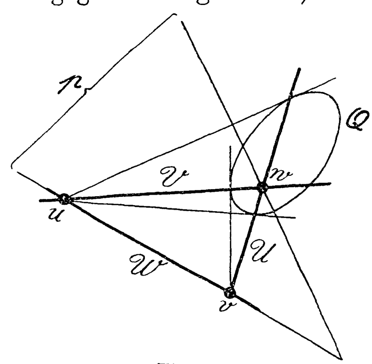


Fig. 81.

Ferner ist zu bemerken, daß die Polkurve von $\boldsymbol{p}$, da sie einem eigentlichen Dreieck umschrieben sein soll, wenigstens nicht zweifach entarten darf. Dagegen ist ein einfaches Entarten dieser Polkurve nicht ausgeschlossen (Fig. 81). In diesem Falle sind die Geraden des Linienpaares, in das die

1) Weiter unten, auf S. 167, wird gezeigt, wie sich diese ∞^1 Poldreiseite von Q finden lassen.

Polkurve von p zerfällt, hinsichtlich des Polarsystems Q konjugiert. Da endlich auch hier wieder die Schlußweise umkehrbar ist, so hat man den Satz:

Satz 680: Zweite Lagenbeziehung zweier apolaren Polarsysteme: Ist ein nicht entartendes Polarsystem zweiter Klasse Q zu einem Polarsystem zweiter Ordnung p mit reeller Polkurve apolar, das wenigstens nicht zweifach entartet, so gibt es ∞^1 Poldreiseite des Polarsystems Q, denen die Polkurve von p umschrieben ist. Und umgekehrt: Sobald die Polkurve eines Polarsystems zweiter Ordnung p irgendeinem eigentlichen Poldreiseit eines nicht entartenden Polarsystems zweiter Klasse Q umschrieben ist, sind die Polarsysteme p und Q zueinander apolar.

Beziehung zwischen den beiden Involutionen, die zwei zueinander apolare Polarsysteme p und Q auf der Polare eines Punktes der Kurve p hinsichtlich der Kurve Q hervorrufen, und das Dualistische. Um zu erfahren, in welcher Weise man bei zwei zueinander apolaren Polarsystemen p und Q ∞^1 Dreiecke finden kann, die der Kurve zweiter Ordnung p eingeschrieben sind und zugleich ein Poldreiseit der Kurve zweiter Klasse Q bilden, verfügen wir über das Fundamentaldreieck in der Weise, daß wir *erstens* den Punkt e_3 auf der Kurve p annehmen und *zweitens* die Polare von e_3 in bezug auf Q zu der zur Ecke e_3 gegenüberliegenden Seite E_3 des Fundamentaldreiecks machen. Dann besteht *erstens* die Gleichung:

(65) $$[e_3 \cdot e_3 p] = 0, \quad \text{oder falls}$$

(66) $$p = \frac{A_1,\ A_2,\ A_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}$$

gesetzt wird, die Gleichung:
$$[e_3 A_3] = 0,$$

die man, wenn man an der gewöhnlichen Bezeichnung der Ableitzahlen für die Zählerstäbe A_i des Bruches p festhält, auch in der Form schreiben kann:

(67) $$\mathfrak{a}_{33} = 0.$$

Setzen wir andererseits wieder voraus, daß das Polarsystem zweiter Klasse Q nicht entartet, so läßt sich dasselbe als adjungierte Abbildung eines Polarsystems zweiter Ordnung q auffassen, und es wird, wenn man die Zählerstäbe von q mit B_i, ihre Ableitzahlen mit $\mathfrak{b}_{ik}$ bezeichnet, mit Rücksicht auf unsere *zweite* Verfügung über das Fundamentaldreieck das Polarsystem q darstellbar durch den Bruch:

(68) $$q = \frac{B_1,\ B_2,\ \mathfrak{b}_{33} E_3}{e_1,\ e_2,\ e_3},$$

so daß die Gleichungen erfüllt werden:

(69) $$\mathfrak{b}_{13} = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}_{23} = 0.$$

Für das zu q adjungierte Polarsystem Q erhält man ferner die Darstellung:

$$(70)\qquad Q = [q^2] = \frac{\mathfrak{b}_{33}[B_2 E_3],\ \mathfrak{b}_{33}[E_3 B_1],\ [B_1 B_2]}{E_1,\qquad E_2,\qquad E_3}.$$

Hierin wird:

$$[B_2 E_3] = [(\mathfrak{b}_{21} E_1 + \mathfrak{b}_{22} E_2 + \mathfrak{b}_{23} E_3) E_3] = -\mathfrak{b}_{21} e_2 + \mathfrak{b}_{22} e_1,$$

$$[E_3 B_1] = [E_3 (\mathfrak{b}_{11} E_1 + \mathfrak{b}_{12} E_2 + \mathfrak{b}_{13} E_3)] = \mathfrak{b}_{11} e_2 - \mathfrak{b}_{12} e_1,$$

und es ergibt sich somit für den Bruch Q der neue Ausdruck:

$$(71)\qquad Q = \frac{\mathfrak{b}_{22}\mathfrak{b}_{33} e_1 - \mathfrak{b}_{21}\mathfrak{b}_{33} e_2,\ -\mathfrak{b}_{12}\mathfrak{b}_{33} e_1 + \mathfrak{b}_{11}\mathfrak{b}_{33} e_2,\ [B_1 B_2]}{E_1,\qquad E_2,\qquad E_3},$$

aus dem für die Ableitzahlen $\mathfrak{B}_{ik}$ der Zähler von Q die Werte folgen:

$$(72)\qquad \begin{cases} \mathfrak{B}_{11} = \mathfrak{b}_{22}\mathfrak{b}_{33}, & \mathfrak{B}_{22} = \mathfrak{b}_{11}\mathfrak{b}_{33}, \quad \mathfrak{B}_{12} = -\mathfrak{b}_{21}\mathfrak{b}_{33}, \\ \mathfrak{B}_{13} = 0, & \mathfrak{B}_{23} = 0. \end{cases}$$

Nun ist nach (29):

$$(29)\qquad [p\,Q] = \tfrac{1}{3}\{\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{B}_{11} + \cdots + 2\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{B}_{23} + \cdots\},$$

mithin wird in dem vorliegenden Falle wegen (67)—(72):

$$(73)\qquad [p\,Q] = \tfrac{1}{3}\mathfrak{b}_{33}\{\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{b}_{22} + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{b}_{11} - 2\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{b}_{21}\}.$$

Setzen wir daher noch voraus, daß:

$$(74)\qquad \mathfrak{b}_{33} \neq 0$$

sei, daß also die Ecke e_3 des Fundamentaldreiecks, die nach unserer ersten Voraussetzung der Kurve p angehören sollte, nicht auch zugleich ein Punkt der Kurve q sei, so läßt sich die Apolaritätsgleichung:

$$(32)\qquad [p\,Q] = 0$$

auch in der Form schreiben:

$$(75)\qquad \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{b}_{22} + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{b}_{11} - 2\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{b}_{21} = 0.$$

Diese Gleichung enthält nur noch die Koeffizienten der von $\mathfrak{x}_3$ freien Glieder der Gleichungen:

$$(76)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{a}_{33}\mathfrak{x}_3^2 + 2\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + 2\mathfrak{a}_{31}\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1 + 2\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = 0, \\ \mathfrak{b}_{11}\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{b}_{22}\mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{b}_{33}\mathfrak{x}_3^2 + 2\mathfrak{b}_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + 2\mathfrak{b}_{31}\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1 + 2\mathfrak{b}_{12}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = 0 \end{cases}$$

der Kurven p und q. Sie ist also zugleich eine Beziehung zwischen den Koeffizienten der Gleichungen:

$$(77)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{x}_2^2 + 2\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = 0, \\ \mathfrak{b}_{11}\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{b}_{22}\mathfrak{x}_2^2 + 2\mathfrak{b}_{12}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = 0, \end{cases}$$

welche die Schnittpunktpaare darstellen, die die Kurven (76) auf der Geraden $\mathfrak{x}_3 = 0$, d. h. auf der Seite E_3 des Fundamentaldreiecks, bilden oder, was dasselbe ist, eine Beziehung zwischen den Involutionen, die die Kurven p

und q auf der Geraden E_3 hervorrufen. Man wird daher zur Deutung der Gleichung (75) auf die Entwicklungen für das binäre Gebiet zurückgreifen können. In Bd. I, S. 293f. ergab sich uns *als Bedingung für die harmonische Lage zweier Involutionen* $\mathfrak{s}$ *und* $\mathfrak{t}$ *derselben Geraden:*

$$(78)\qquad \begin{cases} \mathfrak{s} = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{h}_2 + \mathfrak{a}_3 \mathfrak{e}\,, \\ \mathfrak{t} = \mathfrak{b}_1 \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{b}_2 \mathfrak{h}_2 + \mathfrak{b}_3 \mathfrak{e} \end{cases}$$

die Gleichung:

$$(79)\qquad \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 - \mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_3 = 0\,.$$

Dabei waren die beiden Involutionen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ vermöge der Gleichungen (78) als Vielfachensummen von drei zueinander harmonischen Involutionen ihrer Geraden $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{e}$ ausgedrückt, die nach S. 292 desselben Bandes durch die Brüche definiert waren:

$$(80)\qquad \mathfrak{h}_1 = \frac{e_1\,,\ -e_2}{e_1\,,\ \ e_2}\,,\quad \mathfrak{h}_2 = \frac{e_2\,,\ e_1}{e_1\,,\ e_2}\,,\quad \mathfrak{e} = \frac{e_2\,,\ -e_1}{e_1\,,\ \ e_2}\,,$$

unter e_1 und e_2 die Grundpunkte des binären Gebiets verstanden.

Die Gleichungen der Doppelpunkte der beiden Involutionen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ ferner lassen sich durch die Gleichungen darstellen:

$$(81)\qquad \begin{cases} [x \cdot x\mathfrak{s}] = 0\,, \\ [x \cdot x\mathfrak{t}] = 0\,. \end{cases}$$

Um daher die Gleichung (75) mit der Gleichung (79) in Beziehung zu setzen, kommt es darauf an, die Gleichungen (81) zunächst auf die Form (77) zu bringen. Dazu stelle man zunächst die Involutionen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ als extensive Brüche dar, deren Nenner die Grundpunkte e_1, e_2 der Geraden E_3 sind, indem man die Werte (80) für $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ und $\mathfrak{e}$ in die Vielfachensummen (78) substituiert. Für die Involution $\mathfrak{s}$ ergibt sich auf diese Weise der Ausdruck:

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{a}_1 \frac{e_1\,,\ -e_2}{e_1\,,\ \ e_2} + \mathfrak{a}_2 \frac{e_2\,,\ e_1}{e_1\,,\ e_2} + \mathfrak{a}_3 \frac{e_2\,,\ -e_1}{e_1\,,\ \ e_2}\,,$$

also, wenn man die drei Glieder zu einem Bruche vereinigt, der Bruch:

$$(82)\qquad \mathfrak{s} = \frac{\mathfrak{a}_1 e_1 + (\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3) e_2\,,\ (\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_3) e_1 - \mathfrak{a}_1 e_2}{e_1\,,\qquad\qquad e_2}\,.$$

Drückt man daher auch einen beliebigen Punkt x der Geraden E_3 durch ihre Grundpunkte e_1 und e_2 aus, indem man setzt:

$$(83)\qquad x = \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2\,,\quad \text{so wird:}$$

$$(84)\qquad x\mathfrak{s} = \mathfrak{x}_1 \{\mathfrak{a}_1 e_1 + (\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3) e_2\} + \mathfrak{x}_2 \{(\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_3) e_1 - \mathfrak{a}_1 e_2\} \quad \text{und somit}$$

$$(85)\qquad [x \cdot x\mathfrak{s}] = (\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3) \mathfrak{x}_1^2 + (\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_2) \mathfrak{x}_2^2 - 2 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2\,,$$

vorausgesetzt, daß man im binären Gebiet wie gewöhnlich das Produkt $[e_1 e_2] = 1$ nimmt. Die Vergleichung mit der ersten Gleichung (77) zeigt alsdann, daß:

$$(86)\qquad \mathfrak{a}_{11} = \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3\,,\quad \mathfrak{a}_{22} = \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_2\,,\quad \mathfrak{a}_{12} = -\,\mathfrak{a}_1$$

zu setzen ist, und entsprechend

(87) $$\mathfrak{b}_{11} = \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_3, \quad \mathfrak{b}_{22} = \mathfrak{b}_3 - \mathfrak{b}_2, \quad \mathfrak{b}_{12} = - \mathfrak{b}_1 .$$

Für die linke Seite der Gleichung (75) erhält man daher den Wert:

(88) $$\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{b}_{22} + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{b}_{11} - 2\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{b}_{21} = -2(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2 - \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_3) .$$

Damit aber ist gezeigt, daß die Gleichung (75) mit der Gleichung (79) gleichbedeutend ist, und daß somit die Gleichung (75) aussagt, *daß die beiden von den Polarsystemen p und Q auf der Geraden E_3 hervorgerufenen Involutionen zueinander harmonisch sind.* Hierbei macht es keinen Unterschied, ob diese beiden Involutionen hyperbolisch sind, also reelle Doppelpunkte haben (Fig. 82), oder eine von ihnen elliptisch ist, d. h. zwei konjugiert komplexe Doppelpunkte besitzt. In dem letzten Falle bilden die

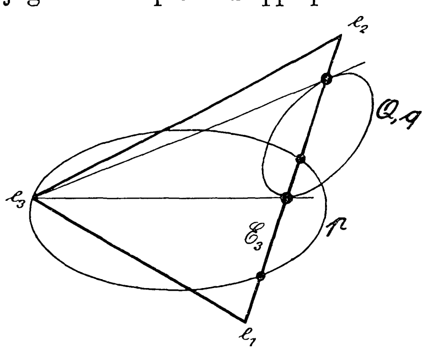


Fig. 82.

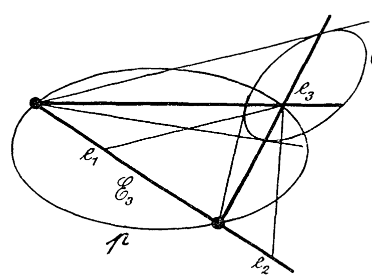


Fig. 83.

Schnittpunkte der Geraden E_3 mit der einen Kurve ein Paar der elliptischen Involution, die die andere Kurve auf der Geraden E_3 hervorruft (Fig. 83).

Übrigens würde dies Ergebnis auch nicht gestört werden, wenn die Ungleichung (74) nicht befriedigt würde, wenn also $\mathfrak{b}_{33} = 0$ wäre, der Punkt e_3 somit in einen Schnittpunkt der beiden Kurven p und q fiele. Denn dann würde seine Polare E_3 in bezug auf Q in die Tangente übergehen, die man im Punkte e_3 an die Kurve Q legen kann, und diese schneidet aus der Kurve Q ein mit dem Punkte e_3 zusammenfallendes Punktpaar und aus der Kurve p ein reelles Punktpaar aus, dem der Punkt e_3 angehört. Zwei solche Punktpaare sind aber ebenfalls zueinander harmonisch. Indes bietet dieser Fall kein besonderes Interesse, da für die in einem Schnittpunkte zweier Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse an eine dieser Kurven gezogene Tangente die harmonische Beziehung der Schnittpunktpaare auch für zwei ganz beliebige, insbesondere auch für zwei *nicht apolare* Kurven dieser Art gilt. Damit hängt es zusammen, daß, während man sonst von der Gleichung (75) auf die Apolaritätsgleichung (32) zurückschließen kann, so daß also auch die Umkehrung unseres Ergebnisses gilt, dies nicht mehr möglich ist, wenn $\mathfrak{b}_{33} = 0$ ist, insofern dann die Gerade E_3 durch den Punkt e_3 hindurchgeht und damit ihre Brauchbarkeit als Gegenseite der

Ecke e_3 des Fundamentaldreiecks verliert. Mit Rücksicht hierauf kann man unsere Ergebnisse in den folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 681: Zwei zueinander apolare Polarsysteme zweiter Ordnung und zweiter Kasse p und Q, von denen das letztere nicht entartet, rufen auf der Polare eines jeden Punktes der Kurve p, genommen hinsichtlich des zu Q adjungierten Polarsystems $\bar{q}$, zwei zueinander harmonische Involutionen hervor. Und umgekehrt: Rufen zwei Polarsysteme zweiter Ordnung und zweiter Klasse p und Q, von denen das letztere nicht entartet, auf der Polare eines nicht zugleich auf Q liegenden Punktes der Kurve p, diese Polare genommen hinsichtlich der Kurve $\bar{q}$, zwei zueinander harmonische Involutionen hervor, so sind die beiden Polarsysteme zueinander apolar.

Ebenso beweist man den dualistisch entsprechenden Satz:

Satz 682: Dualistisches Gegenstück zu Satz 681: Zwei zueinander apolare Polarsysteme zweiter Ordnung und zweiter Klasse p und Q, von denen das erste nicht entartet, rufen in dem Pol einer jeden Tangente der Kurve Q, genommen hinsichtlich des zu p adjungierten Polarsystems P, zwei zueinander harmonische Involutionen hervor. Und umgekehrt: Rufen zwei Polarsysteme zweiter Ordnung und zweiter Klasse p und Q, von denen das erste nicht entartet, in dem Pole irgendeiner Tangente der Kurve Q, die nicht zugleich eine Tangente der Kurve p ist, dieser Pol genommen hinsichtlich der Kurve p, zwei zueinander harmonische Involutionen hervor, so sind die beiden Polarsysteme zueinander apolar.

Die Figuren 84 und 85 veranschaulichen den Satz 682 *für die beiden Fälle*, wo die zueinander harmonischen Involutionen, welche die beiden

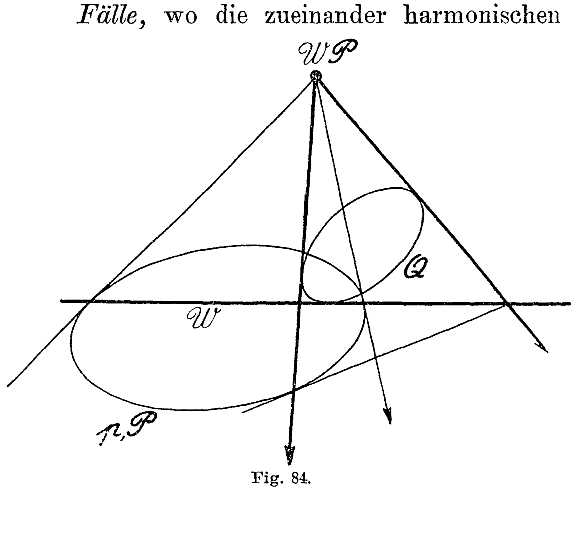


Fig. 84.

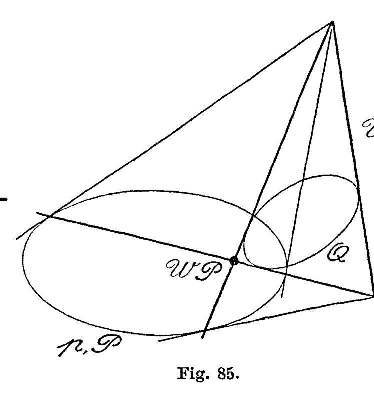


Fig. 85.

Polarsysteme p und Q in dem Pole WP einer Tangente W der Kurve Q erzeugen, *beide hyperbolisch* sind, und wo *eine von ihnen elliptisch* ist. In dem letzten Falle sind die Tangenten, vom Punkte WP an die eine von den beiden Kurven gezogen, konjugiert in bezug auf die andere.

Konstruktion beliebig vieler Poldreiseite einer Kurve zweiter Klasse, die zugleich einer zu ihr apolaren Kurve zweiter Ordnung eingeschrieben sind, und das Dualistische. Der Satz 681 ergibt jetzt unmittelbar die Konstruktion beliebig vieler Poldreiseite von Q, die der Kurve p eingeschrieben sind

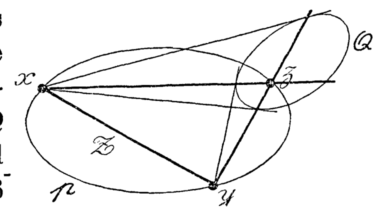


Fig. 86.

Zunächst weiß man, daß ein Poldreiseit des Polarsystems Q, wenn dessen Polarkurve reell ist und nicht zerfällt, eine Ecke enthalten muß, die innerhalb der Kurve Q liegt. Soll also die Kurve p einem Poldreiseit von Q umschrieben sein, so muß die Kurve p in das Innere der Kurve Q eindringen (Fig. 86). Nimmt man jetzt auf demjenigen Teil der Kurve p, der innerhalb Q liegt, *einen beliebigen Punkt* z an und bestimmt seine Polare Z in bezug auf Q, so rufen nach dem Satze 681 die Kurven p und Q auf der Geraden Z zwei zueinander harmonische Involutionen hervor. Da aber die Gerade Z die Kurve Q nicht schneidet, so ist die von Q auf Z erzeugte Involution elliptisch, nach dem Satze 224 somit die von der Kurve p auf der Geraden Z hervorgerufene Involution hyperbolisch, d. h. *die Gerade Z schneidet die Kurve p in zwei reellen Punkten,* sie seien bezeichnet mit x und y. Diese Punkte x und y sind dabei nach Teil 1, S. 191 hinsichtlich der Kurve Q konjugiert, und da sie ferner als Punkte der Polare Z von z in bezug auf Q auch zum Punkte z hinsichtlich Q konjugiert sind, so bilden die drei Punkte xyz die Ecken eines Poldreiseits von Q, das der Kurve p eingeschrieben ist.

In dem Falle eines Polarsystems Q mit imaginärer Polarkurve kann der Punkt z ganz beliebig auf der Kurve p angenommen werden, weil ein solches Polarsystem auf jeder Geraden der Ebene, also auch auf der Polare Z jenes Punktes z in bezug auf Q, eine elliptische Involution hervorruft, woraus wieder nach dem Satze 224 folgt, daß die Gerade Z von der Kurve p in zwei reellen Punkten geschnitten wird.

Ganz ebenso liefert der Satz 682 die Konstruktion beliebig vieler Polardreiecke von p, die der Kurve Q umschrieben sind. Ein Polardreieck des Polarsystems p muß nämlich, falls die Polkurve von p reell ist, eine Seite enthalten, die ganz außerhalb der Kurve liegt. Soll also die Kurve Q einem Polardreieck von p eingeschrieben sein, so muß die Kurve Q sicher zum Teil außerhalb der Kurve p verlaufen (Fig. 87). Wählt man daher eine beliebige Tangente W der Kurve Q aus, die ganz außerhalb der Kurve p

gelegen ist, und bestimmt ihren Pol w in bezug auf p, so liegt w innerhalb der Kurve p, und es rufen nach dem Satze 682 die Polarsysteme p und Q in dem Punkte w zwei zueinander harmonische Involutionen hervor. Da aber die in w durch die Kurve p erzeugte Involution elliptisch ist, so ist nach dem Satze 224 die von der Kurve Q im Punkte w hervorgerufene Involution hyperbolisch, d. h. *es gehen von dem Punkte w zwei reelle Tangenten an die Kurve Q.* Diese seien bezeichnet mit U und V; dann bilden die Geraden U, V, W die Seiten eines Polardreiecks von p, das der Kurve Q umschrieben ist.

Für den Fall einer imaginären Polkurve von p gilt Entsprechendes wie bei dem Dualistischen.

Weiteres über apolare entartende Polarsysteme. Der in dem Satze 671 ausgeschlossene Fall, wo das Polarsystem p oder Q zweifach entartet, ist schon in den Sätzen 672 und 673 erledigt. Aber es bleibt noch das dualistische Gegenstück zu dem Satze 674 zu entwickeln, d. h. der Fall zu behandeln, wo das Polarsystem zweiter Klasse Q einfach entartet, und somit die Polarkurve von Q ein reelles oder konjugiert komplexes Punktpaar ist.

Es sei also Q das Polarsystem eines reellen oder konjugiert komplexen Punktpaares, und man frage wieder nach der geometrischen Bedeutung der Apolaritätsgleichung (32) oder der gleichwertigen Gleichung:

$$(58) \qquad [up \cdot UQ] + [vp \cdot VQ] + [wp \cdot WQ] = 0\,.$$

Man wähle dabei wie auf S. 161 für das eigentliche Dreiseit UVW ein Poldreiseit des Polarsystems Q. Nach S. 246 des ersten Teils dieses Bandes wird bei einem einfach entartenden Polarsystem zweiter Klasse Q ein Poldreiseit aus dem stets reellen Träger des zugehörigen Punktpaares und aus zwei beliebigen Geraden gebildet, die sich nicht auf dem Träger des Punktpaares schneiden und hinsichtlich des Polarsystems Q konjugiert sind. Man verlege also etwa den Stab W in den Träger des Punktpaares Q, was nach S. 221 ff. des ersten Teils dieses Bandes zur Folge hat, daß:

$$(89) \qquad WQ = 0$$

ist, und wähle ferner die Stäbe U und V als konjugierte Stäbe hinsichtlich Q, doch so, daß sich ihre Geraden nicht auf der Geraden des Stabes W schneiden; man unterwerfe sie also der Bedingung:

$$(90) \qquad [U \cdot VQ] = 0\,,$$

die man nach der zweiten Grundgleichung des Polarsystems (Gleichung (118) des 31. Abschnitts) auch in der Form schreiben kann:

$$(91) \qquad [V \cdot UQ] = 0\,.$$

Nach diesen Gleichungen (91) und (90) liegen die Pole UQ und VQ der Stäbe U und V beziehlich auf den Geraden der Stäbe V und U, und da sie überdies nach dem Satze 432 auch auf der Nullinie (dem Träger) W des Punktpaares Q enthalten sein müssen, so fallen sie mit den Punkten:

$$[VW] = u \quad \text{und} \quad [WU] = v$$

zusammen, d. h. es bestehen die Gleichungen:

$$UQ = \mathfrak{u}u \quad \text{und} \quad VQ = \mathfrak{v}v, \tag{92}$$

in denen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ zwei Zahlgrößen bedeuten, die von Null verschieden sind, da ein einfach entartendes Polarsystem zweiter Klasse nur eine Nullinie besitzt, und wo die Punkte u und v ein Paar derjenigen Punktinvolution bilden, die das Polarsystem Q nach Teil 1 dieses Bandes, S. 225, auf seiner Nullinie W hervorruft. Von diesen beiden Punkten kann übrigens nicht

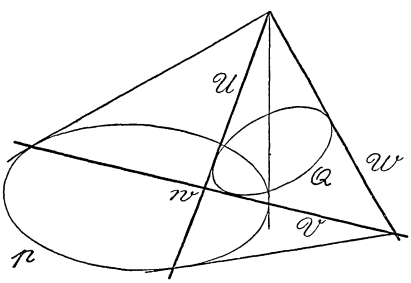


Fig. 87.

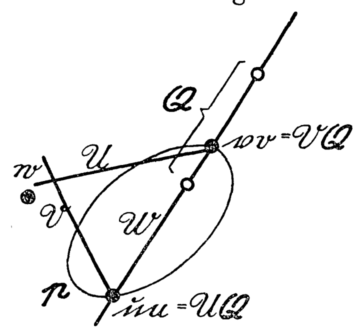


Fig. 88.

etwa einer mit einem Doppelpunkte dieser Involution, d. h. mit einem Punkte des Punktpaares, zusammenliegen, das die Polarkurve von Q darstellt, weil sonst die *beiden* Punkte u und v in diesen Punkt zusammenfallen müßten, was unserer obigen Voraussetzung widerspricht, daß die Geraden U, V, W nicht durch *einen* Punkt gehen sollen.

Bei Einführung der Werte (92) und (89) nimmt die Gleichung (58) die Form an:

$$\mathfrak{u}[u \cdot u\boldsymbol{p}] + \mathfrak{v}[v \cdot v\boldsymbol{p}] = 0. \tag{93}$$

Und unterwirft man jetzt noch die Geraden der drei Stäbe U, V, W, für die man noch drei Bedingungen frei hat, der Gleichung:

$$[u \cdot u\boldsymbol{p}] = 0, \tag{94}$$

welche aussagt, daß der Punkt u der Polkurve des Polarsystems $\boldsymbol{p}$ angehören soll, womit wiederum vorausgesetzt wird, daß die Polkurve von $\boldsymbol{p}$ reell ist, und berücksichtigt ferner, daß dem Obigen zufolge:

$$\mathfrak{v} \neq 0$$

ist, so verkürzt sich die Gleichung (93) zu der Gleichung:

$$[v \cdot v\boldsymbol{p}] = 0. \tag{95}$$

Diese Gleichung aber zeigt, daß auch der zu u in bezug auf Q konjugierte Punkt v der Nullinie von Q auf der Polkurve von $\boldsymbol{p}$ enthalten ist (Fig. 88).

Und da auch wieder die umgekehrte Schlußweise möglich ist, so hat man den Satz:

Satz 683: Schneidet die Nullinie (der Träger) eines einfach entartenden Polarsystems zweiter Klasse Q die Polkurve eines Polarsystems zweiter Ordnung p in zwei reellen Punkten, so sind diese beiden Polarsysteme dann und nur dann zueinander apolar, wenn diese beiden Punkte ein Paar der Involution bilden, die das Polarsystem Q auf seiner Nullinie hervorruft.

Die Gültigkeit des Satzes auch für den Fall, wo das Polarsystem zweiter Ordnung p zweifach entartet, ist schon weiter oben bewiesen (vgl. den Satz 673 und die Fig. 71). Und der Fall eines einfach entartenden Polar-

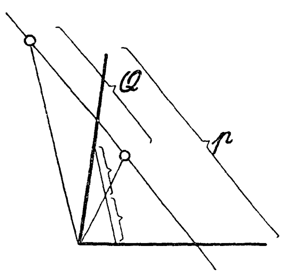


Fig. 89.

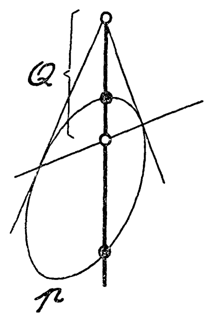


Fig. 90.

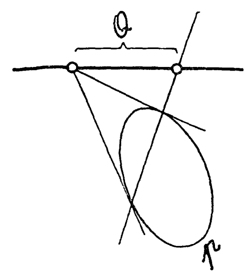


Fig. 91.

systems zweiter Ordnung p (Fig. 89) ist in dem soeben gegebenen Beweise mit erledigt.

Die in dem Satze 683 ausgeschlossenen Fälle lassen sich ebenso wie bei dem Dualistischen behandeln und liefern die Sätze:

Satz 684: Ein einfach entartendes Polarsystem zweiter Klasse Q ist zu einem Polarsystem zweiter Ordnung p dann und nur dann apolar, wenn die Punkte des reellen oder konjugiert komplexen Punktpaares, das die Polarkurve des Polarsystems zweiter Klasse Q bildet, hinsichtlich des Polarsystems zweiter Ordnung p konjugiert sind (Figg. 90 und 91). Und

Satz 685: Ist das Punktpaar, das von der Nullinie (dem Träger) eines einfach entartenden Polarsystems zweiter Klasse Q aus einer zu ihm apolaren Kurve zweiter Ordnung p ausgeschnitten wird, konjugiert komplex, so ist das Punktpaar Q notwendig reell, und seine Punkte bilden ein Paar derjenigen Involution, die das Polarsystem p auf der Nullinie von Q hervorruft (vgl. die obige Fig. 91).

Endlich kann man die drei letzten Sätze auf Grund des Satzes 677 in den einen Satz zusammenfassen:

Satz 686: Ein einfach entartendes Polarsystem zweiter Klasse Q ist zu einem Polarsystem zweiter Ordnung p dann und nur dann apolar, wenn die Involutionen, die die beiden Polarsysteme p und Q auf der Nullinie (dem Träger) von Q hervorrufen, zueinander harmonisch sind.

Abschnitt 47.

Die Lücken- und Potenzformen zweiter Ordnung und zweiter Klasse. Das algebraische Produkt. Weiteres über apolare Polarsysteme.

Begriff eines Lückenausdrucks. Die Lückenform zweiter Ordnung. Bei den letzten Entwicklungen über apolare Polarsysteme wurde gelegentlich das Hineinspielen der Reellitätsfragen unbequem, da es verhinderte, manche Sätze sogleich in ihrer vollen Allgemeinheit auszusprechen. Um die Entwicklung von der Reellität der auftretenden Gebilde unabhängig zu machen und zugleich die rechnerischen Hilfsmittel etwas mehr den besonderen Eigenschaften der Polarsysteme anzupassen, die gegenüber den allgemeinen Reziprozitäten durch ihre beiden Grundgleichungen[1]) gekennzeichnet sind, führen wir eine neue Produktbildung ein und schicken dazu den Begriff eines „Lückenausdrucks" voraus. Dabei gehen wir von einem Beispiele aus.

Ist, wie bisher, der extensive Bruch:

(1) $$p = \frac{A_1\,,\; A_2\,,\; A_3}{e_1\,,\; e_2\,,\; e_3}$$

der Ausdruck für ein Polarsystem zweiter Ordnung, wo:

(2, $$\begin{cases} A_1 = \mathfrak{a}_{11} E_1 + \mathfrak{a}_{12} E_2 + \mathfrak{a}_{13} E_3 \\ A_2 = \mathfrak{a}_{21} E_1 + \mathfrak{a}_{22} E_2 + \mathfrak{a}_{23} E_3 \\ A_3 = \mathfrak{a}_{31} E_1 + \mathfrak{a}_{32} E_2 + \mathfrak{a}_{33} E_3\,, \end{cases}$$

und worin wiederum:

(3) $$\mathfrak{a}_{ki} = \mathfrak{a}_{ik}\,, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

ist, so wird für jeden Punkt:

(4) $$x = \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3$$

seine Polare xp hinsichtlich des Polarsystems p:

(5) $$xp = \mathfrak{x}_1 A_1 + \mathfrak{x}_2 A_2 + \mathfrak{x}_3 A_3\,.$$

Nun folgen aber aus (4) durch äußere Multiplikation mit E_1, E_2, E_3 die Gleichungen:

(6) $$[xE_1] = \mathfrak{x}_1\,, \quad [xE_2] = \mathfrak{x}_2\,, \quad [xE_3] = \mathfrak{x}_3\,.$$

1) Vgl. die Gleichung (60) oder die Gleichungen (50) des 31. Abschnitts und die Gleichung (118) oder die Gleichungen (51) desselben Abschnitts.

Die Substitution dieser Werte in die Gleichung (5) ergibt daher für die Polare xp des Punktes x den Ausdruck:

$$(7)\qquad xp = [xE_1]A_1 + [xE_2]A_2 + [xE_3]A_3 = \sum_1^3{}^i [xE_i]A_i.$$

Und aus dieser Gleichung folgt durch äußere Multiplikation mit x für die quadratische Form $[x \cdot xp]$ die Darstellung:

$$(8)\quad [x \cdot xp] = [xE_1][xA_1] + [xE_2][xA_2] + [xE_3][xA_3] = \sum_1^3{}^i [xE_i][xA_i].$$

Hier kommt in jedem Gliede der rechten Seite zweimal der Faktor x vor. Es liegt daher nahe, die Potenz x^2 aus der Summe rechter Hand herauszuziehen. Bei der Wichtigkeit aber, welche die Stellung und die Art der Zusammenfassung der Faktoren eines Produktes extensiver Größen besitzt, wird es dann nötig, die Stellen, an denen die beiden Faktoren x gestanden haben, und in die sie also beim Ausmultiplizieren wieder einrücken müßten, durch irgendein Zeichen zu markieren. Wir wählen dazu den Buchstaben l, setzen also überall in die „Lücken", die durch das Herausziehen der beiden Faktoren x entstehen, das Zeichen l (gelesen „Lücke"). Dabei soll die Wahl des *kleinen lateinischen Buchstabens* (l) darauf hinweisen, daß der dieser Lücke zugehörende Faktor — die „Füllgröße der Lücke" — eine Größe erster Stufe, d. h. ein Punkt sein muß, der insbesondere durch eine Strecke vertreten werden kann.

Durch die beschriebene Umformung nimmt die Gleichung (8) die Gestalt an:

$$(9)\quad [x\cdot xp] = \{[lE_1][lA_1] + [lE_2][lA_2] + [lE_3][lA_3]\}x^2 = \left(\sum_1^3{}^i [lE_i][lA_i]\right)x^2.$$

Hier tritt als Faktor von x^2 ein „Lückenausdruck"[1]) auf, der in jedem Gliede zwei „Punktlücken" enthält, und der sich ferner bei Ausfüllung dieser Lücken in eine Zahl verwandelt. Wir wollen einen solchen Lückenausdruck eine „Lückenform zweiter Ordnung" nennen oder etwas bestimmter, da x in einem Gebiete dritter Stufe variieren kann, eine „ternäre Lückenform zweiter Ordnung". Wir bezeichnen ihn mit einem großen lateinischen *fettgedruckten* Buchstaben, dem wir den unteren Index 2 anhängen, um damit die Ordnung der Lückenform anzudeuten. In unserem

1) Der Begriff des Lückenausdrucks findet sich schon, wenn auch unter anderer Bezeichnung, in der ersten Bearbeitung der Ausdehnungslehre meines Vaters. Siehe H. Graßmann, Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844, § 172 (Gesammelte Werke, Bd. I, Teil I). Der Name Lückenausdruck und die obige Bezeichnung wurden von ihm erst in seiner zweiten Bearbeitung der Ausdehnungslehre eingeführt. Siehe H. Graßmann, Die Ausdehnungslehre, Berlin 1862, Nr. 353 ff. (Gesammelte Werke, Bd. I, Teil II.)

Falle möge derselbe $= \boldsymbol{A}_2$ gesetzt werden, so daß also:

$$(10)\qquad \boldsymbol{A}_2 = [lE_1][lA_1] + [lE_2][lA_2] + [lE_3][lA_3] = \sum_1^3{}^i [lE_i][lA_i]$$

wird. Führt man in diesen Ausdruck anstatt der Stäbe A_1, A_2, A_3 ihre Werte aus (2) ein und multipliziert aus, so erhält man mit Rücksicht auf (3) für die ternäre Lückenform zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}_2$ eine Summe von sechs Gliedern, nämlich den Ausdruck:

$$(11)\qquad \begin{aligned} \boldsymbol{A}_2 = \mathfrak{a}_{11}[lE_1]^2 + \mathfrak{a}_{22}[lE_2]^2 + \mathfrak{a}_{33}[lE_3]^2 + 2\mathfrak{a}_{23}[lE_2][lE_3] \\ + 2\mathfrak{a}_{31}[lE_3][lE_1] + 2\mathfrak{a}_{12}[lE_1][lE_2]. \end{aligned}$$

Die quadratische Form $[x \cdot xp]$ nimmt bei Anwendung des Symbols $\boldsymbol{A}_2$ für die in (9) auftretende Lückenform zweiter Ordnung die Gestalt an:

$$(12)\qquad [x \cdot x\boldsymbol{p}] = \boldsymbol{A}_2 x^2,$$

und die Gleichung der Polkurve von $\boldsymbol{p}$ verwandelt sich daher in:

$$(13)\qquad \boldsymbol{A}_2 x^2 = 0.$$

Unsere Begriffsbestimmungen bedürfen aber noch einer Ergänzung, wenn man wünscht, aus der Lückenform zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}_2$ auch die bilineare Form $[y \cdot x\boldsymbol{p}]$ entwickeln zu können. Aus (7) ergibt sich durch äußeres Vormultiplizieren mit y für diese bilineare Form die Darstellung:

$$(14)\qquad [y \cdot x\boldsymbol{p}] = \sum_1^3{}^i [xE_i][yA_i];$$

und aus ihr folgt durch Vertauschung von x und y:

$$(15)\qquad [x \cdot y\boldsymbol{p}] = \sum_1^3{}^i [yE_i][xA_i].$$

Da aber nach der ersten Grundgleichung des Polarsystems (Gleichung (61) des 31. Abschnitts):

$$(16)\qquad [y \cdot x\boldsymbol{p}] = [x \cdot y\boldsymbol{p}]$$

ist, so wird:

$$(17)\qquad [y \cdot x\boldsymbol{p}] = [x \cdot y\boldsymbol{p}] = \sum_1^3{}^i \frac{[xE_i][yA_i] + [yE_i][xA_i]}{2}.$$

Nun könnte man entsprechend der Gleichung (14):

$$[y \cdot x\boldsymbol{p}] = \left(\sum_1^3{}^i [lE_i][lA_i]\right)\{xy\}$$

setzen mit der Bestimmung, daß der außerhalb des Lückenausdrucks in der geschweiften Klammer zuerst aufgeführte Faktor x in jedem Gliede des

Lückenausdrucks in die erste Lücke einzurücken habe, der an zweiter Stelle stehende Faktor y in die zweite Lücke. Und entsprechend der Gleichung (15) würde dann gesetzt werden müssen:

$$[x \cdot yp] = \left(\sum_1^3 {}_i [lE_i][lA_i]\right)\{yx\}.$$

Indes ist es noch vorteilhafter, von einer solchen Bindung der Lücken an bestimmte Faktoren abzusehen, zumal damit zugleich eine Rangordnung der Füllfaktoren eingeführt werden würde, die für die weitere Entwicklung lästig werden könnte. Man kann sich aber mit Rücksicht auf die Gleichung (17) leicht in der Weise helfen, daß man ein Produkt aus einer Lückenform zweiter oder höherer Ordnung mit einem Produkte entsprechend vieler Füllfaktoren definiert *als das arithmetische Mittel der Ausdrücke, die man erhält, wenn man diese Faktoren in allen möglichen Reihenfolgen in die Lücken der Lückenform einrücken läßt.* Dieser Bestimmung entsprechend wäre dann wirklich:

$$(18) \qquad A_2\{xy\} = \left(\sum_1^3 [lE_i][lA_i]\right)\{xy\}$$

$$= \sum_1^3 {}_i \frac{[xE_i][yA_i] + [yE_i][xA_i]}{2} = [y \cdot xp] = [x \cdot yp],$$

also namentlich, wie gefordert:

$$(19) \qquad [x \cdot yp] = [y \cdot xp] = A_2\{xy\} = A_2\{yx\}.$$

Die Bedingung des Konjugiertseins der Punkte x und y hinsichtlich des Polarsystems zweiter Ordnung p lautet somit:

$$(20) \qquad A_2\{xy\} = 0.$$

Will man schließlich noch den Ausdruck $A_2\{xy\}$ von der das Produkt xy umschließenden Klammer befreien, so braucht man nur noch das Produkt $A_2 x$ als diejenige „Lückenform erster Ordnung" zu definieren, die aus dem Ausdrucke (18) für das Produkt $A_2\{xy\}$ hervorgeht, wenn man in ihm den Faktor y durch eine Lücke l ersetzt, also die Erklärung aufzustellen:

$$(21) \qquad A_2 x = \left(\sum_1^3 {}_i [lE_i][lA_i]\right) x = \sum_1^3 {}_i \frac{[xE_i][lA_i] + [lE_i][xA_i]}{2}.$$

Dann wird der Ausdruck $A_2 xy$, den man erhält, wenn man die Lückenform A_2 zuerst mit x multipliziert und sodann das Ergebnis mit y:

$$(22) \qquad A_2 xy = \sum_1^3 {}_i \frac{[xE_i][yA_i] + [yE_i][xA_i]}{2}$$

also, wie die Vergleichung mit (18) zeigt, gerade:

$$A_2 xy = A_2 \{xy\}. \tag{23}$$

Die Gleichung (19) läßt sich daher auch in der Form schreiben:

$$[x \cdot yp] = [y \cdot xp] = A_2 xy, \tag{24}$$

und die Bedingung für das Konjugiertsein zweier Punkte x und y hinsichtlich des Polarsystems A_2 oder p nimmt die Gestalt an:

$$A_2 xy = 0. \tag{25}$$

Das algebraische Produkt zweier Punkte. Das Wesentliche an den soeben eingeführten neuen Begriffsbestimmungen liegt darin, daß vermöge derselben die beiden geometrisch gleichberechtigten Punkte x und y, welche hinsichtlich des Polarsystems A_2 oder p einander konjugiert sind, auch formell als gleichwertig erscheinen, und daß sich andererseits in dem Produkte xy, welches in der Gleichung (18) als Faktor der Lückenform A_2 auftritt, eine neue Art des Produktes zweier Punkte darbietet, welche für das Folgende eine grundlegende Bedeutung gewinnen wird.

Formell ist dieses Produkt xy im Gegensatze zu dem kombinatorischen (äußeren) Produkte $[xy]$ zweier Punkte dadurch charakterisiert, daß *seine beiden Faktoren miteinander ohne Zeichenwechsel vertauschbar sind* (vgl. die Gleichung (19)). Das Produkt xy unterscheidet sich daher nur noch insofern von einem gewöhnlichen Produkte der Algebra, als die verknüpften Größen nicht Zahlen, sondern Punkte sind. Hinsichtlich seiner Rechengesetze aber stimmt es mit einem solchen Produkte durchaus überein. Aus diesem Grunde wollen wir das Produkt xy ein algebraisches Produkt nennen[1]) und wie die gewöhnlichen Produkte der Algebra durch einfaches Nebeneinanderstellen seiner Faktoren (ohne umschließende scharfe Klammern) bezeichnen. Sollte eine besondere Bezeichnung zur Unterscheidung von einem kombinatorischen Produkte notwendig werden, sollte z. B. ein algebraisches Produkt in einem von einer scharfen Klammer umschlossenen kombinatorischen Produkte auftreten, so wollen wir das algebraische Produkt in eine geschweifte Klammer einschließen, die wir als eine Schutzklammer bezeichnen können, denn sie soll andeuten, daß die Kraft der scharfen Klammer nur bis zu dieser geschweiften Klammer reichen solle. Auch wenn aus einem anderen Grunde die Einschließung eines algebraischen Produktes in eine Klammer geboten sein sollte, werden wir dazu eine geschweifte Klammer verwenden, wie dies bereits gelegentlich auf S. 173ff. geschehen ist.

Die geometrische Bedeutung des algebraischen Produktes xy wird sich uns weiter unten ergeben (vgl. S. 183).

---

1) Vgl. H. Graßmann, Die Ausdehnungslehre, Berlin 1862, Nr. 364ff. (Gesammelte Werke, Bd. I, Teil II.)

Das algebraische Produkt zweier Stäbe und die Potenzform zweiter Ordnung. Es ist beachtenswert, daß auch jedem einzelnen Gliede der beiden Lückenformen (10) und (11) eine geometrische Bedeutung zukommt. Ein jedes Glied jener beiden Lückenformen ist nämlich, wenn man von den in dem Ausdrucke (11) auftretenden Zahlfaktoren absieht, ein Produkt von zwei Faktoren, welche als *Lückenformen erster Ordnung* bezeichnet werden können, insofern sie Ausdrücke mit je einer Punktlücke sind, die bei Ausfüllung dieser Lücke in Zahlgrößen übergehen. Dadurch wird es bedingt, daß an der Bedeutung eines solchen Produktes nichts geändert wird, wenn man seine Faktoren, d. h. jene Lückenformen erster Ordnung, miteinander vertauscht.

Die Ausdrücke ferner, die aus jenen Produkten bei Ausfüllung ihrer Lücken durch einen veränderlichen Punkt x hervorgehen, haben die Eigenschaft, zu verschwinden, wenn der Punkt x dem Linienpaar angehört, das durch die beiden in den Faktoren enthaltenen Stäbe bestimmt wird. So verschwindet das Produkt $[xE_1][xA_1]$, sobald der Punkt x ein Punkt des Linienpaars ist, das die Stäbe E_1 und A_1 enthält, während bei den quadratischen Gliedern in (11) das betreffende Linienpaar in eine Doppellinie übergeht. Man kann daher sagen, daß die Produkte in den einzelnen Gliedern der Lückenformen (10) und (11) Linienpaare darstellen, aufgefaßt als zerfallende Kurven zweiter Ordnung. Und man kann an dieser Bedeutung jener Produkte auch dann noch festhalten, wenn man zur Vereinfachung der Schreibung der Ausdrücke (10) und (11) die Lücken und die zugehörigen scharfen Klammern wegläßt und die übrigbleibenden Stabfaktoren $E_1, A_1, \ldots$ zu je einem Produkte $E_1 A_1, \ldots$ vereinigt, zu dessen Grundeigenschaften entsprechend der oben erwähnten Eigenschaft der ursprünglichen Produkte $[lE_1][lA_1], \ldots$ die Vertauschbarkeit der Faktoren gehört. Die Produkte $E_1 A_1, \ldots$ sind daher ebenso wie oben das Produkt xy als *algebraische Produkte* zu bezeichnen.

Es bleibt noch übrig, für den Ausdruck, der aus der Lückenform A_2 durch Weglassung seiner Lücken und Vereinigung der in jedem Gliede übrigbleibenden Stabfaktoren zu einem algebraischen Produkte entsteht, eine Bezeichnung und einen Namen einzuführen. Wir bezeichnen ihn mit dem Symbol $\mathsf{A}^{(2)}$ und nennen ihn die der Lückenform zweiter Ordnung A_2 entsprechende Potenzform zweiter Ordnung. Wir setzen also:

$$(26) \qquad \mathsf{A}^{(2)} = E_1 A_1 + E_2 A_2 + E_3 A_3$$

und andererseits

$$(27) \qquad \mathsf{A}^{(2)} = \mathfrak{a}_{11} E_1^2 + \mathfrak{a}_{22} E_2^2 + \mathfrak{a}_{33} E_3^2 + 2\mathfrak{a}_{23} E_2 E_3 + 2\mathfrak{a}_{31} E_3 E_1 + 2\mathfrak{a}_{12} E_1 E_2.$$

Weiter fügen wir dieser formellen Erklärung der Potenzform zweiter Ordnung $\mathsf{A}^{(2)}$ noch die begriffliche Bestimmung hinzu, sie solle dieselbe Kurve zweiter Ordnung darstellen, die auch durch die Gleichung:

$$(28) \qquad \mathsf{A}_2 x^2 = 0,$$

oder, was dasselbe ist, durch die der Potenzform $A^{(2)}$ entsprechende Lückenform A_2 ausgedrückt wird. Auch wollen wir das Polarsystem dieser Kurve geradezu als „das Polarsystem zweiter Ordnung $A^{(2)}$“ bezeichnen.

Man sieht ferner noch, daß die oben angegebene geometrische Bedeutung des algebraischen Produktes zweier Stäbe allgemein gilt. Denn sind U und V zwei ganz beliebige Stäbe, so läßt sich das durch sie bestimmte Linienpaar durch die Gleichung darstellen:

$$[x U][x V] = 0;$$

und diese kann man auch in der Form schreiben:

$$[l U][l V]x^2 = 0.$$

Die dem Linienpaar zugehörige Lückenform zweiter Ordnung A_2 besitzt daher den Wert:

$$A_2 = [l U][l V],$$

und der Ausdruck für die ihr entsprechende Potenzform $A^{(2)}$ lautet somit:

$$A^{(2)} = U V.$$

Das algebraische Produkt UV zweier Stäbe U und V stellt also das Linienpaar dar, das durch die beiden Stäbe U und V bestimmt wird. Insbesondere ist das algebraische Quadrat U^2 eines Stabes U der Ausdruck für die doppeltzählende Gerade des Stabes U.

Man kann noch hinzufügen, daß man umgekehrt aus einer Potenzform zweiter Ordnung $A^{(2)}$ die zugehörige Lückenform A_2 dadurch ableiten kann, daß man einem jeden in der Potenzform $A^{(2)}$ auftretenden algebraischen Stabfaktor eine Punktlücke l *voranstellt* und sie mit jenem Stabfaktor durch eine scharfe Klammer zusammenschließt, d. h. zu einem äußeren Lückenprodukte vereinigt.

Aus der in der Gleichung (27) gegebenen Darstellung der Potenzform $A^{(2)}$ folgt mit Rücksicht auf die Willkürlichkeit der sechs Zahlgrößen $\mathfrak{a}_{ik}$, daß die Potenzform zweiter Ordnung $A^{(2)}$ der allgemeinste Ausdruck ist, der sich aus „den sechs Einheiten zweiter Ordnung“:

$$E_1^2, \quad E_2^2, \quad E_3^2, \quad E_2 E_3, \quad E_3 E_1, \quad E_1 E_2$$

numerisch ableiten läßt. Dabei sind dann nach dem soeben über die Bedeutung der algebraischen Produkte von Stäben Gesagten diese sechs Einheiten zweiter Ordnung nichts anderes als die drei Doppellinien und die drei Linienpaare, die man aus den Seiten E_1, E_2, E_3 des Fundamentaldreiecks bilden kann, und die aufgefaßt sind als zerfallende Kurven zweiter Ordnung.

Da überdies die Potenzform zweiter Ordnung $A^{(2)}$ ebenso wie die Gleichung (28) jede beliebige Kurve zweiter Ordnung darstellen kann, so erhält man den Satz:

Satz 687: Die allgemeinste Potenzform zweiter Ordnung, die sich aus den sechs Einheiten zweiter Ordnung numerisch ab-

leiten läßt, ist der Ausdruck für eine beliebige Kurve zweiter Ordnung.

Endlich kann man noch hinzufügen, daß die Potenzform $A^{(2)}$ in ihrem Aufbau mit der algebraischen zweiten Potenz eines Stabes:

$$U = u_1 E_1 + u_2 E_2 + u_3 E_3, \tag{29}$$

d. h. mit dem Ausdruck:

$$\begin{aligned} U^2 = \mathfrak{u}_1{}^2 E_1{}^2 + \mathfrak{u}_2{}^2 E_2{}^2 + \mathfrak{u}_3{}^2 E_3{}^2 \\ + 2\mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_3 E_2 E_3 + 2\mathfrak{u}_3\mathfrak{u}_1 E_3 E_1 + 2\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2 E_1 E_2, \end{aligned} \tag{30}$$

vollkommene Analogie darbietet und als eine Verallgemeinerung desselben erscheint. Und eine ganz entsprechende Beziehung herrscht auch zwischen einer Potenzform $n$ter Ordnung $A^{(n)}$ und der algebraischen $n$ten Potenz U^n eines Stabes U, wodurch sich die Wahl des Namens Potenzform für Ausdrücke von der Form $A^{(n)}$ erklärt.

Vergleicht man noch den Ausdruck (27) für die Potenzform zweiter Ordnung $A^{(2)}$ mit der die Gleichung (28) ersetzenden Gleichung der zugehörigen Kurve zweiter Ordnung in Punktkoordinaten (siehe auch Satz 446):

$$\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{x}_1{}^2 + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{x}_2{}^2 + \mathfrak{a}_{33}\mathfrak{x}_3{}^2 + 2\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + 2\mathfrak{a}_{31}\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1 + 2\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = 0, \tag{31}$$

so ergibt sich der Satz:

Satz 688: *Aus der linken Seite der Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung in Punktkoordinaten in bezug auf ein beliebiges Fundamentaldreieck erhält man die dieser Kurve zugehörige Potenzform zweiter Ordnung, indem man die Dreieckskoordinaten $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ des laufenden Punktes der Kurve durch die Grundstäbe E_1, E_2, E_3 des Fundamentaldreiecks ersetzt.*

Aus diesem Satze folgen sogleich eine Anzahl Sondersätze: So ist nach dem Satze 448 die Gleichung:

$$\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + \mathfrak{a}_{31}\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{a}_{12}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = 0 \tag{32}$$

die Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung, die dem Fundamentaldreieck $e_1 e_2 e_3$ umschrieben ist. Und hieraus kann man nach dem Satze 687 ohne weiteres den Satz folgern:

Satz 689: *Die Potenzform zweiter Ordnung:*

$$\mathfrak{a}_{23} E_2 E_3 + \mathfrak{a}_{31} E_3 E_1 + \mathfrak{a}_{12} E_1 E_2 \tag{33}$$

stellt eine Kurve zweiter Ordnung dar, die dem Fundamentaldreieck $e_1 e_2 e_3$ umschrieben ist, und umgekehrt hat die Potenzform einer jeden dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kurve zweiter Ordnung die in (33) angegebene Gestalt.

Auf ganz dieselbe Weise liefern die Sätze 450 und 453 die folgenden Sätze über Potenzformen:

Satz 690: Die Potenzform zweiter Ordnung:

$$(34) \qquad \mathfrak{a}_{11} E_1{}^2 + \mathfrak{a}_{22} E_2{}^2 + \mathfrak{a}_{33} E_3{}^2$$

stellt eine Kurve zweiter Ordnung dar, die das Fundamentaldreieck $e_1 e_2 e_3$ zum Polardreieck hat, und umgekehrt hat die Potenzform einer jeden Kurve zweiter Ordnung, von der das Fundamentaldreieck ein Poldreieck ist, die Form (34).

Und

Satz 691: Die Potenzform zweiter Ordnung:

$$(35) \qquad \mathfrak{a}_{33} E_3{}^2 + 2\,\mathfrak{a}_{12} E_1 E_2$$

stellt eine Kurve zweiter Ordnung dar, welche die Geraden der Stäbe E_1 und E_2 zu Tangenten und die Gerade des Stabes E_3 zur Berührungssehne hat; und umgekehrt hat die Potenzform einer jeden Kurve zweiter Ordnung dieser Art die Gestalt (35).

Offenbar können in den Sätzen 689—691 an die Stelle der drei Grundstäbe E_1, E_2, E_3, die der Bedingung:

$$[E_1 E_2 E_3] = 1$$

unterliegen, auch drei beliebige Stäbe A, B, C treten, deren planimetrisches Produkt:

$$(36) \qquad [ABC] \neq 0$$

ist, deren Geraden also nicht durch *einen* Punkt gehen. Insbesondere stellt daher unter der Voraussetzung (36) die Potenzform:

$$(37) \qquad \mathfrak{D}^{(2)} = \mathfrak{a} A^2 + \mathfrak{b} B^2 + \mathfrak{c} C^2$$

eine Kurve zweiter Ordnung dar, von der das Dreieck mit den Seiten A, B, C ein *Polardreieck* ist.

Hieraus folgt noch, daß eine Kurve zweiter Ordnung und die 3 doppeltzählenden Seiten eines Polardreiecks dieser Kurve, aufgefaßt als zerfallende Kurven zweiter Ordnung, *nicht linear unabhängig voneinander sind.*

Aus der Gleichung (17) des 33. Abschnitts ergibt sich ferner, daß die Potenzform zweiter Ordnung:

$$(38) \qquad \mathfrak{a}_{11} E_1{}^2 + \mathfrak{a}_{22} E_2{}^2$$

der Ausdruck für das Linienpaar ist, das aus den Geraden der beiden Stäbe:

$$(39) \qquad \sqrt{\mathfrak{a}_{11}}\, E_1 + \sqrt{-\mathfrak{a}_{22}}\, E_2 \quad \text{und} \quad \sqrt{\mathfrak{a}_{11}}\, E_1 - \sqrt{-\mathfrak{a}_{22}}\, E_2$$

gebildet wird, das also den Punkt $e_3 = [E_1 E_2]$ zum Doppelpunkt hat und reell oder konjugiert komplex ist, je nachdem die Koeffizienten $\mathfrak{a}_{11}$ und $\mathfrak{a}_{22}$ entgegengesetztes oder gleiches Vorzeichen haben, während nach der Gleichung (19) des 33. Abschnitts das Polarsystem q dieses reellen oder konjugiert komplexen Linienpaars durch den Bruch dargestellt wurde:

$$q = \frac{\mathfrak{a}_{11} E_1,\ \mathfrak{a}_{22} E_2,\ 0}{e_1,\quad e_2,\quad e_3}. \tag{40}$$

In dem Falle eines *reellen Linienpaars*, d. h. in dem Falle, wo die Koeffizienten $\mathfrak{a}_{11}$ und $\mathfrak{a}_{22}$ entgegengesetztes Vorzeichen haben, liegen seine beiden Geraden (39) harmonisch zu den Geraden E_1 und E_2, und die Geraden E_1 und E_2 bilden daher ein Paar der hyperbolischen Involution, die das Geradenpaar (39) in seinem Doppelpunkte e_3 hervorruft (vgl. den ersten Teil dieses Bandes S. 212 oben), woraus folgt, daß das Fundamentaldreieck e_1, e_2, e_3 ein Polardreieck jenes reellen Linienpaars ist, was auch aus der Gestalt der Potenzform (38) oder des Bruches (40) entnommen werden kann.

In dem Falle eines *konjugiert komplexen Linienpaars*, d. h. in dem Falle, wo die Koeffizienten $\mathfrak{a}_{11}$ und $\mathfrak{a}_{22}$ dasselbe Vorzeichen haben, kann man fast wörtlich die Entwicklung des ersten Teils dieses Bandes S. 239f. wiederholen. In der Tat stellt in diesem Falle die Potenzform (38) die beiden konjugiert komplexen Geraden:

$$\sqrt{\mathfrak{a}_{11}}\, E_1 + \mathrm{i}\sqrt{\mathfrak{a}_{22}}\, E_2 \quad \text{und} \quad \sqrt{\mathfrak{a}_{11}}\, E_1 - \mathrm{i}\sqrt{\mathfrak{a}_{22}}\, E_2 \tag{41}$$

dar, deren Schnittpunkt wieder reell ist, nämlich mit der Ecke e_3 des Fundamentaldreiecks zusammenfällt, und dessen Polarsystem $\boldsymbol{e}$, wie oben in (40) durch den Bruch:

$$\boldsymbol{e} = \frac{\mathfrak{a}_{11} E_1,\ \mathfrak{a}_{22} E_2,\ 0}{e_1,\quad e_2,\quad e_3} \tag{42}$$

ausgedrückt wird, nur daß jetzt die Koeffizienten $\mathfrak{a}_{11}$ und $\mathfrak{a}_{22}$ dasselbe Vorzeichen haben.

Die geometrische Bedeutung des Polarsystems $\boldsymbol{e}$, dessen Polkurve das konjugiert komplexe Linienpaar ist, ergibt sich wieder durch seine Beziehung zu der elliptischen Strahlinvolution:

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{a}_{22} E_2,\ -\mathfrak{a}_{11} E_1}{E_1,\quad E_2}, \tag{43}$$

d. h. zu derjenigen elliptischen Strahlinvolution mit dem Scheitel e_3, welche durch die beiden *sich trennenden Strahlpaare:*

$$E_1,\ \ E_2 \quad \text{und} \quad E_1 + E_2,\ \ -\mathfrak{a}_{11} E_1 + \mathfrak{a}_{22} E_2$$

bestimmt wird. Man kann nämlich den Bruch für die elliptische Strahlinvolution $\mathfrak{E}$ auch in der Form schreiben:

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{a}_{11} E_1,\ \mathfrak{a}_{22} E_2}{-E_2,\quad E_1} = \frac{\mathfrak{a}_{11} E_1,\ \mathfrak{a}_{22} E_2}{[e_1 e_3],\ [e_2 e_3]}. \tag{44}$$

Ist daher:

$$x = \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3 \tag{45}$$

ein beliebiger Punkt der Ebene, so wird der Strahl, der ihn mit dem Scheitel e_3 der betrachteten Strahlinvolution verbindet, durch die Summe dargestellt:

$$(46) \qquad [xe_3] = \mathfrak{x}_1[e_1e_3] + \mathfrak{x}_2[e_2e_3].$$

Dieser Strahl aber wird durch die elliptische Strahlinvolution $\mathfrak{E}$ wegen (44) übergeführt in den Strahl:

$$(47) \qquad [xe_3]\mathfrak{E} = \mathfrak{x}_1\mathfrak{a}_{11}E_1 + \mathfrak{x}_2\mathfrak{a}_{22}E_2.$$

In genau denselben Stab wird aber der Punkt x durch das Polarsystem $\boldsymbol{e}$ umgewandelt. Wegen (42) wird nämlich:

$$(48) \qquad x\boldsymbol{e} = \mathfrak{x}_1\mathfrak{a}_{11}E_1 + \mathfrak{x}_2\mathfrak{a}_{22}E_2,$$

und es besteht daher zwischen den Brüchen $\boldsymbol{e}$ und $\mathfrak{E}$ die Beziehung:

$$(49) \qquad x\boldsymbol{e} = [xe_3]\mathfrak{E}.$$

Man sieht also: Das Polarsystem $\boldsymbol{e}$ ist von der elliptischen Strahlinvolution $\mathfrak{E}$ nur unwesentlich verschieden; denn dasselbe weist einem jeden Punkte x der Ebene einen Strahl des Strahlbüschels mit dem Scheitel e_3 zu, und zwar gerade denselben Strahl, welcher der Verbindungslinie des Punktes x und des Scheitels e_3 durch die elliptische Strahlinvolution $\mathfrak{E}$ zugeordnet wird.

Hieraus folgt zugleich mit Rücksicht auf den ersten Teil dieses Bandes, S. 212 oben, daß die elliptische Strahlinvolution $\mathfrak{E}$ diejenige Involution ist, die das einfach entartende Polarsystem $\boldsymbol{e}$ in seinem Nullpunkte (Doppelpunkte) hervorruft.

Eine Bestätigung dieser Beziehungen zwischen dem Polarsystem $\boldsymbol{e}$ und der elliptischen Strahlinvolution $\mathfrak{E}$ gewinnt man leicht, indem man zeigt, daß die beiden durch die Potenzform (38) dargestellten konjugiert komplexen Geraden (41), die die Polkurve des Polarsystems $\boldsymbol{e}$ bilden, die Doppelstrahlen der elliptischen Involution $\mathfrak{E}$ sind, also durch Multiplikation mit dem Bruche $\mathfrak{E}$ bis auf einen Zahlfaktor in sich übergeführt werden. In der Tat folgt aus (43), daß:

$$\begin{aligned}(\sqrt{\mathfrak{a}_{11}}E_1 \pm \mathrm{i}\sqrt{\mathfrak{a}_{22}}E_{22})\mathfrak{E} &= \mathfrak{a}_{22}\sqrt{\mathfrak{a}_{11}}E_2 \mp \mathrm{i}\mathfrak{a}_{11}\sqrt{\mathfrak{a}_{22}}E_1 \\ &= \mp \mathrm{i}\sqrt{\mathfrak{a}_{11}}\sqrt{\mathfrak{a}_{22}}(\sqrt{\mathfrak{a}_{11}}E_1 \pm \mathrm{i}\sqrt{\mathfrak{a}_{22}}E_2)\end{aligned}$$

ist. Auf Grund dieser Zusammenhänge zwischen den Abbildungen $\boldsymbol{e}$ und $\mathfrak{E}$ nennen wir in Übereinstimmung mit dem ersten Teil dieses Bandes, S. 240 das Polarsystem $\boldsymbol{e}$ *„das Polarsystem der elliptischen Strahlinvolution* $\mathfrak{E}$".

Übrigens läßt sich auch leicht dasjenige Strahlpaar der elliptischen Strahlinvolution $\mathfrak{E}$ angeben, das von dem Strahlpaar E_1, E_2 *harmonisch getrennt wird* (vgl. den Satz 118). Offenbar ist dies das Strahlpaar:

$$(50) \qquad \mathfrak{a}_{11}E_1^{\,2} - \mathfrak{a}_{22}E_2^{\,2}$$

oder, was dasselbe ist, das Strahlpaar:

$$(51) \qquad \sqrt{\mathfrak{a}_{11}}E_1 + \sqrt{\mathfrak{a}_{22}}E_2, \quad \sqrt{\mathfrak{a}_{11}}E_1 - \sqrt{\mathfrak{a}_{22}}E_2$$

Denn der Bruch (43) zeigt, daß dem Strahle:

$$(52) \qquad \sqrt{\mathfrak{a}_{11}}E_1 + \sqrt{\mathfrak{a}_{22}}E_2$$

durch die elliptische Involution $\mathfrak{E}$ der Strahl:

$$\mathfrak{a}_{22}\sqrt{\mathfrak{a}_{11}}E_2 - \mathfrak{a}_{11}\sqrt{\mathfrak{a}_{22}}E_1$$

zugewiesen wird oder, was dasselbe ist, der Strahl:

$$(53) \qquad -\sqrt{\mathfrak{a}_{11}}\sqrt{\mathfrak{a}_{22}}(\sqrt{\mathfrak{a}_{11}}E_1 - \sqrt{\mathfrak{a}_{22}}E_2),$$

womit die obige Behauptung bewiesen ist.

Den Hauptinhalt dieser Ergebnisse kann man in dem Satze zusammenfassen:

Satz 692: Die Potenzform zweiter Ordnung:

$$(38) \qquad \mathfrak{a}_{11}E_1^2 + \mathfrak{a}_{22}E_2^2$$

stellt ein Linienpaar mit dem Doppelpunkt $[E_1E_2]$ dar, und zwar ein reelles oder konjugiert komplexes Linienpaar, je nachdem die Koeffizienten $\mathfrak{a}_{11}$ und $\mathfrak{a}_{22}$ entgegengesetztes oder gleiches Vorzeichen haben. In dem letzteren Falle bildet das durch die Potenzform (38) dargestellte konjugiert komplexe Linienpaar die Doppelstrahlen derjenigen elliptischen Strahlinvolution, welche die beiden sich harmonisch trennenden Geradenpaare E_1, E_2 und

$$(50) \qquad \mathfrak{a}_{11}E_1^2 - \mathfrak{a}_{22}E_2^2$$

zu Paaren der Involution hat.

Die Lücken- und Potenzform zweiter Klasse. Zu ganz entsprechenden Lücken- und Potenzformen wird man geführt, wenn man von dem Bruche:

$$(54) \qquad \boldsymbol{P} = \frac{a_1, \ a_2, \ a_3}{E_1, \ E_2, \ E_3}$$

für ein Polarsystem zweiter Klasse ausgeht, wo:

$$(55) \qquad \begin{cases} a_1 = \mathfrak{A}_{11}e_1 + \mathfrak{A}_{12}e_2 + \mathfrak{A}_{13}e_3 \\ a_2 = \mathfrak{A}_{21}e_1 + \mathfrak{A}_{22}e_2 + \mathfrak{A}_{23}e_3 \\ a_3 = \mathfrak{A}_{31}e_1 + \mathfrak{A}_{32}e_2 + \mathfrak{A}_{33}e_3, \end{cases}$$

und worin wiederum:

$$(56) \qquad \mathfrak{A}_{ki} = \mathfrak{A}_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

ist. Für jeden beliebigen Stab:

$$(57) \qquad U = \mathfrak{u}_1E_1 + \mathfrak{u}_2E_2 + \mathfrak{u}_3E_3$$

wird dann sein Pol hinsichtlich des Polarsystems $\boldsymbol{P}$:

(58) $$U\boldsymbol{P} = \mathfrak{u}_1 a_1 + \mathfrak{u}_2 a_2 + \mathfrak{u}_3 a_3.$$

Nun folgen aber aus (57) durch Vormultiplizieren mit e_1, e_2, e_3 die Gleichungen:

(59) $$[e_1 U] = \mathfrak{u}_1, \quad [e_2 U] = \mathfrak{u}_2, \quad [e_3 U] = \mathfrak{u}_3,$$

und die Substitution dieser Werte in die Gleichung (58) ergibt für den Pol $U\boldsymbol{P}$ den Ausdruck:

(60) $$U\boldsymbol{P} = [e_1 U]a_1 + [e_2 U]a_2 + [e_3 U]a_3 = \sum_1^3{}^i [e_i U]\, a_i.$$

Aus dieser Gleichung folgt ferner durch äußere Multiplikation mit U für die quadratische Form $[U \cdot U\boldsymbol{P}]$ die Darstellung:

(61) $$[U \cdot U\boldsymbol{P}] = [e_1 U][a_1 U] + [e_2 U][a_2 U] + [e_3 U][a_3 U] = \sum_1^3{}^i [e_i U][a_i U].$$

Jetzt bezeichnen wir eine Lücke, in die eine Größe zweiter Stufe, d. h. ein Stab, einrücken soll, der insbesondere auch durch ein Feld vertreten werden kann, mit dem Buchstaben L und setzen den Lückenausdruck, der aus der rechten Seite von (61) hervorgeht, wenn man an die Stelle des Stabes U die Lücke L treten läßt $= \boldsymbol{a}_2$, setzen also:

(62) $$\boldsymbol{a}_2 = [e_1 L][a_1 L] + [e_2 L][a_2 L] + [e_3 L][a_3 L] = \sum_1^3{}^i [e_i L][a_i L],$$

und nennen den Ausdruck $\boldsymbol{a}_2$ eine „ternäre Lückenform zweiter Klasse“.

Man bekommt für sie eine zweite Darstellung, wenn man in (62) anstatt der Punkte a_1, a_2, a_3 ihre Werte aus (55) einführt und unter Berücksichtigung von (56) ausmultipliziert. Dadurch ergibt sich für $\boldsymbol{a}_2$ der Ausdruck:

(63) $$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_2 = {} & \mathfrak{A}_{11}[e_1 L]^2 + \mathfrak{A}_{22}[e_2 L]^2 + \mathfrak{A}_{33}[e_3 L]^2 \\ & + 2\mathfrak{A}_{23}[e_2 L][e_3 L] + 2\mathfrak{A}_{31}[e_3 L][e_1 L] + 2\mathfrak{A}_{12}[e_1 L][e_2 L].\end{aligned}$$

Ferner erhält man für die quadratische Form $[U \cdot U\boldsymbol{P}]$ und die bilineare Form $[U \cdot V\boldsymbol{P}]$ die Darstellung:

(64) $$[U \cdot U\boldsymbol{P}] = \boldsymbol{a}_2 U^2$$

(65) $$[U \cdot V\boldsymbol{P}] = [V \cdot U\boldsymbol{P}] = \boldsymbol{a}_2\{UV\} = \boldsymbol{a}_2 UV.$$

Die Gleichung der Polarkurve von $\boldsymbol{P}$ verwandelt sich daher in:

(66) $$\boldsymbol{a}_2 U^2 = 0,$$

und die Bedingung für das Konjugiertsein zweier Geraden U und V hinsichtlich des Polarsystems zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$ nimmt die Form an:

(67) $$\boldsymbol{a}_2\{UV\} = 0 \quad \text{oder auch}$$

(68) $$\boldsymbol{a}_2 UV = 0.$$

Endlich findet man für die der Lückenform zweiter Klasse α_2 entsprechende Potenzform zweiter Klasse $\alpha^{(2)}$ die Darstellung:

$$\alpha^{(2)} = e_1 a_1 + e_2 a_2 + e_3 a_3 \quad \text{oder auch} \tag{69}$$

$$\alpha^{(2)} = \mathfrak{A}_{11} e_1{}^2 + \mathfrak{A}_{22} e_2{}^2 + \mathfrak{A}_{33} e_3{}^2 + 2\mathfrak{A}_{23} e_2 e_3 + 2\mathfrak{A}_{31} e_3 e_1 + 2\mathfrak{A}_{12} e_1 e_2, \tag{70}$$

wobei wir wieder zu dieser formellen Erklärung der Potenzform zweiter Klasse $\alpha^{(2)}$ die begriffliche Bestimmung hinzufügen, die Potenzform zweiter Klasse $\alpha^{(2)}$ solle dieselbe Kurve zweiter Klasse darstellen, die auch durch die Gleichung (66) oder, was dasselbe ist, durch die der Potenzform $\alpha^{(2)}$ entsprechende Lückenform α_2 ausgedrückt wird. Auch wollen wir wieder das Polarsystem dieser Kurve geradezu als „das Polarsystem zweiter Klasse $\alpha^{(2)}$“ bezeichnen.

Hiermit erledigt sich zugleich die oben aufgeworfene Frage nach der geometrischen Bedeutung des algebraischen Produktes xy zweier Punkte x und y. Man erkennt, daß dasselbe nichts anderes darstellt als das Punktpaar x, y. Denn die Stabgleichung dieses Punktpaars lautet:

$$[xU][yU] = 0;$$

und diese kann man auch in der Form schreiben:

$$[xL][yL]U^2 = 0;$$

die dem Punktpaar zugehörige Lückenform zweiter Klasse α_2 besitzt daher den Wert: $\alpha_2 = [xL][yL]$, und der Ausdruck für die ihr entsprechende Potenzform $\alpha^{(2)}$ lautet somit:

$$\alpha^{(2)} = xy.$$

Das algebraische Produkt xy zweier Punkte x und y stellt also wirklich das Punktpaar x, y dar. Insbesondere ist das algebraische Punktquadrat x^2 der Ausdruck für den doppeltzählenden Punkt x.

Man kann noch hinzufügen, daß man umgekehrt aus einer Potenzform zweiter Klasse $\alpha^{(2)}$ die zugehörige Lückenform dadurch ableiten kann, daß man *hinter einem jeden* in der Potenzform $\alpha^{(2)}$ auftretenden algebraischen Punktfaktor eine „Stablücke“ L einschaltet und sie mit jenem Punktfaktor durch eine scharfe Klammer zusammenschließt, d. h. zu einem äußeren Lückenprodukte vereinigt.[1])

Aus der in der Gleichung (54) gegebenen Darstellung der Potenzform $\alpha^{(2)}$ folgt ferner wieder wegen der Willkürlichkeit der sechs Zahlgrößen $\mathfrak{A}_{ik}$, daß die Potenzform zweiter Klasse $\alpha^{(2)}$ der allgemeinste Ausdruck ist, der sich aus „den sechs Einheiten zweiter Klasse“:

$$e_1{}^2, \quad e_2{}^2, \quad e_3{}^2, \quad e_2 e_3, \quad e_3 e_1, \quad e_1 e_2$$

1) In der Geometrie der Ebene würde es keinen Unterschied bedingen, wenn man entsprechend wie beim Dualistischen die Stablücke dem Punktfaktor *voranstellte,* statt sie ihm *folgen zu lassen.* Die oben gegebene Festsetzung hat aber den Vorzug, eine unmittelbare Übertragung auf den Raum zu gestatten.

numerisch ableiten läßt. Dabei sind dann nach dem soeben über die algebraischen Produkte von Punkten Gesagten diese sechs Einheiten zweiter Klasse nichts anderes als die drei doppeltzählenden Punkte und die drei Punktpaare, die man aus den Ecken e_1, e_2, e_3 des Fundamentaldreiecks bilden kann, und die aufgefaßt sind als zerfallende Kurven zweiter Klasse.

Und da ferner die Potenzform zweiter Klasse $\alpha^{(2)}$ ebenso wie die Gleichung (66) jede beliebige Kurve zweiter Klasse darstellen kann, so hat man den Satz:

Satz 693: Die allgemeinste Potenzform zweiter Klasse, die sich aus den sechs Einheiten zweiter Klasse numerisch ableiten läßt, ist der Ausdruck für eine beliebige Kurve zweiter Klasse.

Endlich sieht man noch, daß die Potenzform zweiter Klasse $\alpha^{(2)}$ mit der algebraischen zweiten Potenz eines Punktes:

$$(71) \qquad x = \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3,$$

d. h. mit dem Ausdruck:

$$(72) \qquad x^2 = \mathfrak{x}_1{}^2 e_1{}^2 + \mathfrak{x}_2{}^2 e_2{}^2 + \mathfrak{x}_3{}^2 e_3{}^2 + 2\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 e_2 e_3 + 2\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1 e_3 e_1 + 2\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 e_1 e_2,$$

vollkommene Analogie darbietet und als Verallgemeinerung desselben erscheint, wodurch sich die Bezeichnung Potenzform zweiter Klasse erklärt.

Vergleicht man den Ausdruck (70) für die Potenzform zweiter Klasse $\alpha^{(2)}$ mit der Gleichung der zugehörigen Kurve zweiter Klasse in Linienkoordinaten (siehe Satz 447):

$$(73) \qquad \mathfrak{A}_{11}\mathfrak{u}_1{}^2 + \mathfrak{A}_{22}\mathfrak{u}_2{}^2 + \mathfrak{A}_{33}\mathfrak{u}_3{}^2 + 2\mathfrak{A}_{23}\mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_3 + 2\mathfrak{A}_{31}\mathfrak{u}_3\mathfrak{u}_1 + 2\mathfrak{A}_{12}\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2 = 0,$$

so ergibt sich der Satz:

Satz 694: Aus der linken Seite der Gleichung einer Kurve zweiter Klasse in Linienkoordinaten in bezug auf ein beliebiges Fundamentaldreieck erhält man die dieser Kurve zugehörige Potenzform zweiter Klasse, indem man die Dreieckskoordinaten $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3$ der laufenden Tangente der Kurve durch die Grundpunkte e_1, e_2, e_3 des Fundamentaldreiecks ersetzt.

Aus diesem Satze folgen wieder eine Anzahl Sondersätze: So ist nach dem Satze 456 die Gleichung:

$$(74) \qquad \mathfrak{A}_{23}\mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_3 + \mathfrak{A}_{31}\mathfrak{u}_3\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2 = 0$$

die Gleichung einer Kurve zweiter Klasse, die dem Fundamentaldreieck $e_1 e_2 e_3$ eingeschrieben ist. Und hieraus kann man nach dem Satze 694 ohne weiteres den Satz folgern:

Satz 695: Die Potenzform zweiter Klasse:

$$(75) \qquad \mathfrak{A}_{23} e_2 e_3 + \mathfrak{A}_{31} e_3 e_1 + \mathfrak{A}_{12} e_1 e_2$$

stellt eine Kurve zweiter Klasse dar, die dem Fundamentaldreieck $e_1 e_2 e_3$ eingeschrieben ist, und umgekehrt hat die Potenzform einer jeden dem Fundamentaldreieck eingeschriebenen Kurve zweiter Klasse die in (75) angegebene Gestalt.

Auf ganz dieselbe Weise liefern die Gleichungen (50) und (68) des 33. Abschnitts die folgenden Sätze über Potenzformen:

Satz 696: Die Potenzform zweiter Klasse:

$$\mathfrak{A}_{11} e_1^2 + \mathfrak{A}_{22} e_2^2 + \mathfrak{A}_{33} e_3^2 \tag{76}$$

stellt eine Kurve zweiter Klasse dar, die das Fundamentaldreiseit $E_1 E_2 E_3$ zum Poldreiseit hat, und umgekehrt hat die Potenzform einer Kurve zweiter Klasse, von der das Fundamentaldreiseit ein Poldreiseit ist, die Gestalt (76).

Und

Satz 697: Die Potenzform zweiter Klasse:

$$\mathfrak{A}_{33} e_3^2 + 2\mathfrak{A}_{12} e_1 e_2 \tag{77}$$

stellt eine Kurve zweiter Klasse dar, welche durch die Punkte e_1 und e_2 hindurchgeht und in ihnen von den Geraden $[e_3 e_1]$ und $[e_3 e_2]$ berührt wird; und umgekehrt hat die Potenzform einer jeden Kurve zweiter Klasse dieser Art die Gestalt (77).

Auch hier kann man wieder in den Sätzen 695—697 die drei Grundpunkte e_1, e_2, e_3, die der Bedingung:

$$[e_1 e_2 e_3] = 1$$

unterliegen, durch irgend drei Punkte a, b, c ersetzen, deren äußeres Produkt:

$$[abc] \neq 0 \tag{78}$$

ist, die also nicht in einer geraden Linie liegen. Insbesondere stellt daher unter der Voraussetzung (78) die Potenzform:

$$\mathfrak{a}^{(2)} = \mathfrak{a} a^2 + \mathfrak{b} b^2 + \mathfrak{c} c^2 \tag{79}$$

eine Kurve zweiter Klasse dar, die das Dreiseit mit den Ecken a, b, c zum Poldreiseit hat.

Hieraus folgt noch, daß eine Kurve zweiter Klasse und die 3 doppeltzählenden Ecken eines Poldreiseits dieser Kurve, aufgefaßt als zerfallende Kurven zweiter Klasse, *nicht linear unabhängig voneinander sind.*

Aus der Gleichung (52) des 33. Abschnitts ergibt sich ferner, daß die Potenzform zweiter Klasse:

$$\mathfrak{A}_{11} e_1^2 + \mathfrak{A}_{22} e_2^2 \tag{80}$$

der Ausdruck für das Punktpaar ist, das aus den Punkten:

$$\sqrt{\mathfrak{A}_{11}}\, e_1 + \sqrt{-\mathfrak{A}_{22}}\, e_2 \quad \text{und} \quad \sqrt{\mathfrak{A}_{11}}\, e_1 - \sqrt{-\mathfrak{A}_{22}}\, e_2 \tag{81}$$

gebildet wird, das also die Gerade $[e_1 e_2]$ zum Träger hat und reell oder konjugiert komplex ist, je nachdem die Koeffizienten $\mathfrak{A}_{11}$ und $\mathfrak{A}_{22}$ entgegengesetztes oder gleiches Vorzeichen haben.

In dem Falle eines *reellen Punktpaares* liegen seine Punkte harmonisch zu den Punkten e_1 und e_2; in dem Falle eines *konjugiert komplexen Punktpaares* kann man auch sagen: Die Potenzform (80) stellt bei gleichem Vorzeichen der Koeffizienten $\mathfrak{A}_{11}$ und $\mathfrak{A}_{22}$ die Doppelpunkte derjenigen elliptischen Punktinvolution dar, die durch die beiden *sich trennenden Punktpaare* e_1, e_2 und $e_1 + e_2$, $-\mathfrak{A}_{11} e_1 + \mathfrak{A}_{22} e_2$ oder auch durch die beiden *sich harmonisch trennenden Punktpaare* e_1, e_2 und

(82) $$\mathfrak{A}_{11} e_1^{\,2} - \mathfrak{A}_{22} e_2^{\,2}$$

bestimmt wird (vgl. das Dualistische auf S. 180f.).

Den Hauptinhalt dieser Ergebnisse kann man in dem Satze zusammenfassen:

Satz 698: Die Potenzform zweiter Klasse:

(80) $$\mathfrak{A}_{11} e_1^{\,2} + \mathfrak{A}_{22} e_2^{\,2}$$

stellt ein Punktpaar mit dem Träger $[e_1 e_2]$ dar, und zwar ein reelles oder konjugiert komplexes Punktpaar, je nachdem die Koeffizienten $\mathfrak{A}_{11}$ und $\mathfrak{A}_{22}$ entgegengesetztes oder gleiches Vorzeichen haben. In dem letzteren Falle bildet das durch die Potenzform (80) dargestellte konjugiert komplexe Punktpaar die Doppelpunkte derjenigen elliptischen Punktinvolution, welche die beiden sich harmonisch trennenden Punktpaare e_1, e_2 und

(82) $$\mathfrak{A}_{11} e_1^{\,2} - \mathfrak{A}_{22} e_2^{\,2}$$

zu Paaren der Involution hat.

Das kombinatorische Produkt aus einer Potenzform zweiter Ordnung und einer Potenzform zweiter Klasse. Von besonderem Interesse sind die Produkte, die entstehen, wenn man eine Potenzform zweiter Ordnung mit einer Potenzform zweiter Klasse kombinatorisch multipliziert oder umgekehrt, d. h. kombinatorische Produkte von der Form:

$$[A^{(2)} b^{(2)}] \quad \text{und} \quad [b^{(2)} A^{(2)}],$$

unter $A^{(2)}$ und $b^{(2)}$ beziehlich zwei Potenzformen zweiter Ordnung und zweiter Klasse verstanden.

Wir definieren diese beiden kombinatorischen Produkte durch die Gleichungen:

(83) $[A^{(2)} b^{(2)}] = A_2 b^{(2)}$ und (84) $[b^{(2)} A^{(2)}] = b_2 A^{(2)}$,

d. h. wir setzen diese kombinatorischen Produkte denjenigen Produkten gleich, die sich ergeben, wenn man jedesmal die erste von den beiden in dem kombinatorischen Produkt enthaltenen Potenzformen durch die ihr zugehörende Lückenform ersetzt, während man die extensiven Faktoren *der*

Glieder der zweiten Potenzform als Füllgrößen ansieht, die zur Ausfüllung der Lücken jener Lückenform dienen sollen.[1])

Insbesondere wird dann wegen (83) (vgl. auch S. 173f.):

$$[\{E_iE_k\}\{e_re_s\}] = [lE_i][lE_k]e_re_s \quad \text{oder}$$

$$(85) \qquad [\{E_iE_k\}\{e_re_s\}] = \frac{[e_rE_i][e_sE_k] + [e_sE_i][e_rE_k]}{2}.$$

Ist daher das Indexpaar i, k, auch abgesehen von der Reihenfolge der beiden Indizes, verschieden von dem Indexpaar r, s, also:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{sowohl} & \text{(a)}\ \ i, k \neq r, s \\ \text{wie auch} & \text{(b)}\ \ i, k \neq s, r\end{array}\right\},$$

so verschwindet das erste Glied des Zählers der rechten Seite von (85) wegen (a) und das zweite Glied wegen (b); es gilt also die Gleichung:

$$(86) \qquad [\{E_iE_k\}\{e_re_s\}] = 0, \quad \text{sobald} \quad \left\{\begin{array}{ll}\text{sowohl} & i, k \neq r, s \\ \text{wie auch} & i, k \neq s, r.\end{array}\right.$$

Insbesondere wird:

$$(87) \qquad [E_i^2 e_r^2] = 0, \quad \text{sobald} \quad i \neq r.$$

Dagegen wird für $i \neq k$:

$$\begin{aligned}[\{E_iE_k\}\{e_ie_k\}] &= [lE_i][lE_k]e_ie_k \\ &= \frac{[e_iE_i][e_kE_k] + [e_kE_i][e_iE_k]}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Und da in dem algebraischen Produkte e_ie_k die beiden Faktoren ohne Zeichenwechsel vertauschbar sind, so besitzt denselben Wert auch das Produkt:

$$[\{E_iE_k\}\{e_ke_i\}],$$

d. h. es gelten die Formeln:

$$(88) \qquad \left\{\begin{array}{l}[\{E_iE_k\}\{e_ie_k\}] = \frac{1}{2} \\ [\{E_iE_k\}\{e_ke_i\}] = \frac{1}{2},\end{array}\right. \qquad i \neq k.$$

---

1) Vgl. hierzu und zum folgenden: H. Graßmann, Verwendung der Ausdehnungslehre für die allgemeine Theorie der Polaren und den Zusammenhang algebraischer Gebilde, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 84 (1878), S. 277f. (Gesammelte Werke, Bd. II, Teil I, S. 287f.) Eine Verallgemeinerung der in dieser Arbeit eingeführten Produktbildungen sind die *mehrfaltigen Produkte* E. Müllers, die zu dem Gordanschen Faltungsprozeß in Beziehung stehen. Siehe: E. Müller, Eine Weiterbildung der Graßmannschen Ausdehnungslehre im Sinne der Invariantentheorie, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 23 (1914), S. 102ff., und: E. Müller, Beiträge zur Graßmannschen Ausdehnungslehre, II. Mitteilung: Äußere Produkte und Faltprodukte binärer algebraischer Größen, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathem.-naturw. Klasse, Abteilung IIa, Bd. 127 (1918), S. 1651ff.

Ferner wird:
$$[E_i^2 e_i^2] = [lE_i][lE_i]e_i^2 = [e_i E_i][e_i E_i] = 1\,, \quad \text{also:}$$

(89)
$$[E_i^2 e_i^2] = 1\,.$$

Auf Grund der so gewonnenen Formeln kann man leicht die Ableitzahlen $\mathfrak{a}_{ik}$ einer Potenzform zweiter Ordnung $A^{(2)}$ durch diese Potenzform ausdrücken. Wegen der Formeln (86) bis (89) folgen nämlich aus (27) durch kombinatorische Multiplikation mit e_i^2 und $e_i e_k$, $i, k = 1, 2, 3$, die Gleichungen:

(90)
$$[A^{(2)} e_i^2] = \mathfrak{a}_{ii}\,, \qquad i = 1, 2, 3\,, \quad \text{und}$$

(91)
$$[A^{(2)}\{e_i e_k\}] = \mathfrak{a}_{ik}\,, \quad i, k = 1, 2, 3\,.$$

Ferner wird nach (27) und (70):
$$[A^{(2)} b^{(2)}] = [(\mathfrak{a}_{11} E_1^2 + \cdots + 2\,\mathfrak{a}_{23} E_2 E_3 + \cdots)(\mathfrak{B}_{11} e_1^2 + \cdots + 2\,\mathfrak{B}_{23} e_2 e_3 + \cdots)].$$

Und wegen (86) bis (89) erhält man hieraus beim Ausmultiplizieren der rechten Seite:

(92)
$$[A^{(2)} b^{(2)}] = \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{B}_{11} + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{B}_{22} + \mathfrak{a}_{33}\mathfrak{B}_{33} + 2\,\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{B}_{23} + 2\,\mathfrak{a}_{31}\mathfrak{B}_{31} + 2\,\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{B}_{12}.$$

Ebenso beweist man auf Grund der Gleichung (84), daß:

(93)
$$[b^{(2)} A^{(2)}] = \mathfrak{B}_{11}\mathfrak{a}_{11} + \mathfrak{B}_{22}\mathfrak{a}_{22} + \mathfrak{B}_{33}\mathfrak{a}_{33} + 2\,\mathfrak{B}_{23}\mathfrak{a}_{23} + 2\,\mathfrak{B}_{31}\mathfrak{a}_{31} + 2\,\mathfrak{B}_{12}\mathfrak{a}_{12}$$

ist, woraus noch folgt, daß:

(94)
$$[A^{(2)} b^{(2)}] = [b^{(2)} A^{(2)}]$$

ist. Man hat also den Satz:

Satz 699: Die Faktoren eines kombinatorischen Produktes aus einer Potenzform zweiter Ordnung und zweiter Klasse sind ohne Zeichenwechsel vertauschbar.

Aus diesem Satze ergibt sich noch mit Rücksicht auf die Gleichungen (83) und (84), daß man zur Bildung des kombinatorischen Produktes zweier Potenzformen zweiter Ordnung und zweiter Klasse ebenso gut wie die erste Potenzform auch die zweite Potenzform durch ihre zugehörige Lückenform ersetzen und dafür die extensiven Faktoren der Glieder der ersten Potenzform als Füllgrößen ansehen kann, die zur Ausfüllung der Lücken jener Lückenform dienen sollen.

Zur Bestätigung möge das Produkt $[\{E_i E_k\}\{e_r e_s\}]$ nach dem soeben angedeuteten Verfahren entwickelt werden. Es wird:
$$[\{E_i E_k\}\{e_r e_s\}] = E_i E_k [e_r L][e_s L] = \frac{[e_r E_i][e_s E_k] + [e_r E_k][e_s E_i]}{2}\,,$$

was mit der Gleichung (85), abgesehen von der Stellung der Zahlfaktoren im zweiten Gliede des Zählers der rechten Seite, übereinstimmt.

Beziehung zwischen dem kombinatorischen Produkt zweier Potenzformen zweiter Ordnung und zweiter Klasse und dem kombinatorischen Produkt der *zugehörigen extensiven Brüche.* Man überzeugt sich ferner leicht, daß das kombinatorische Produkt der beiden Potenzformen $\boldsymbol{A}^{(2)}$ und $\boldsymbol{b}^{(2)}$ zu dem kombinatorischen Produkt der extensiven Brüche $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{Q}$, die den beiden Potenzformen $\boldsymbol{A}^{(2)}$ und $\boldsymbol{b}^{(2)}$ zugehören, in einer engen Beziehung steht.

Um diesen Zusammenhang zu finden, braucht man nur die Gleichung (29) des vorigen Abschnitts, d. h. die Gleichung:

$$(95)\quad [\boldsymbol{p}\boldsymbol{Q}] = \tfrac{1}{3}\{\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{B}_{11} + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{B}_{22} + \mathfrak{a}_{33}\mathfrak{B}_{33} + 2\,\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{B}_{23} + 2\,\mathfrak{a}_{31}\mathfrak{B}_{31} + 2\,\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{B}_{12}\}$$

mit der Gleichung (92) zu vergleichen, wodurch man die gewünschte Beziehung erhält:

$$(96)\qquad [\boldsymbol{p}\boldsymbol{Q}] = \tfrac{1}{3}[\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{b}^{(2)}].$$

Sie enthält den Satz:

Satz 700: Das kombinatorische Produkt aus den extensiven Brüchen zweier Polarsysteme zweiter Ordnung und zweiter Klasse ist gleich dem dritten Teil des kombinatorischen Produktes aus den entsprechenden Potenzformen zweiter Ordnung und zweiter Klasse.

Apolare Potenzformen zweiter Ordnung und zweiter Klasse. Auf Grund des Satzes 700 läßt sich die Bedingungsgleichung:

$$[\boldsymbol{p}\boldsymbol{Q}] = 0$$

für die Apolarität zweier Polarsysteme zweiter Ordnung und zweiter Klasse $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{Q}$ unter Benutzung der entsprechenden Potenzformen $\boldsymbol{A}^{(2)}$ und $\boldsymbol{b}^{(2)}$ auch in der Form schreiben:

$$(97)\qquad [\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{b}^{(2)}] = 0,$$

und man hat den Satz:

Satz 701: Zwei Potenzformen zweiter Ordnung und zweiter Klasse sind dann und nur dann zueinander apolar, wenn ihr kombinatorisches Produkt verschwindet, d. h. wenn die Gleichung besteht:

$$(97)\qquad [\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{b}^{(2)}] = 0.$$

Es ist dabei wohl zu beachten, daß die Form (97) der Apolaritätsgleichung speziell den Eigenschaften der *Polarsysteme* angepaßt ist (vgl. S. 150f. und 152f.). Für zwei *nicht involutorische Reziprozitäten* $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{S}$ dagegen muß man auf die alte Form der Apolaritätsgleichung, nämlich die Gleichung:

$$[\boldsymbol{r}\boldsymbol{S}] = 0,$$

zurückgreifen.

Das kombinatorische Produkt aus einer Potenzform zweiter Ordnung und einem algebraischen Punktquadrat oder einem algebraischen Produkt zweier

Punkte. Ersetzt man in der Gleichung (97) die Potenzform zweiter Klasse $\mathfrak{b}^{(2)}$ durch ein algebraisches Punktquadrat x^2, so nimmt die Apolaritätsgleichung (97) die Form an:

(98) $$[A^{(2)} x^2] = 0,$$

und dieser kann man nach (83) auch die Gestalt geben:

(99) $$A_2 x^2 = 0,$$

welche mit der Gleichung (13) übereinstimmt. Die Gleichung (98) sagt also aus, daß der Punkt x auf der Polkurve des Polarsystems zweiter Ordnung $A^{(2)}$ liegt. Man hat daher den Satz:

Satz 702: Eine Kurve zweiter Ordnung $A^{(2)}$ ist zu einem doppeltzählenden Punkte x^2 dann und nur dann apolar, wenn der Punkt x auf der Kurve $A^{(2)}$ liegt.

Dieser Satz ist nur eine andere Fassung des Satzes 672.

Legt man ferner in der Gleichung (97) der Potenzform $\mathfrak{b}^{(2)}$ den Wert xy bei, wo x und y zwei Punkte sind, so erhält die Apolaritätsgleichung (97) die Form:

(100) $$[A^{(2)}\{xy\}] = 0,$$

welche wiederum gleichbedeutend ist mit der Gleichung:

(101) $$A_2 xy = 0,$$

die mit der obigen Gleichung (25) übereinstimmt; und man hat somit nach S. 175 den Satz:

Satz 703: Ein Polarsystem zweiter Ordnung $A^{(2)}$ ist zu einem Punktpaar xy dann und nur dann apolar, wenn die Punkte x, y des Punktpaares hinsichtlich des Polarsystems $A^{(2)}$ konjugiert sind.

Siebenter Satz von Chr. v. Staudt. Begriff eines Polvierseits eines Polarsystems zweiter Ordnung. Dritte Lagenbeziehung zweier apolaren Polarsysteme. Auf Grund dieses Satzes kann man leicht einen wichtigen Satz entwickeln, der von Chr. v. Staudt bewiesen worden ist.

Sind nämlich die Punkte der beiden Punktpaare ab und cd hinsichtlich eines Polarsystems zweiter Ordnung $A^{(2)}$ konjugiert, bestehen also die Gleichungen:

(102) $$\begin{cases} [A^{(2)}\{ab\}] = 0 \quad \text{und} \\ [A^{(2)}\{cd\}] = 0, \end{cases}$$

so folgt aus ihnen durch Multiplikation mit zwei beliebigen Zahlgrößen $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ und Addition die Gleichung:

(103) $$[A^{(2)}(\mathfrak{g}ab + \mathfrak{h}cd)] = 0,$$

welche aussagt, daß auch die Potenzform zweiter Klasse:

$$b^{(2)} = \mathfrak{g}ab + \mathfrak{h}cd \tag{104}$$

zu der Potenzform zweiter Ordnung $A^{(2)}$ apolar ist.

Die Potenzform zweiter Klasse (104) stellt aber eine Kurve zweiter Klasse dar, die dem Vierseit mit den Gegenecken a und b, c und d eingeschrieben ist. In der Tat wird die Gleichung:

$$\mathfrak{g}[aU][bU] + \mathfrak{h}[cU][dU] = 0 \tag{105}$$

der zu der Potenzform (104) zugehörigen Kurve zweiter Klasse durch jeden Stab U erfüllt, der mit einer der vier Seiten $[ac]$, $[ad]$, $[bc]$, $[bd]$ dieses Vierseits in eine Gerade fällt.

Man hat also den Satz:

Satz 704: Die Potenzform zweiter Klasse:

$$b^{(2)} = \mathfrak{g}ab + \mathfrak{h}cd \tag{104}$$

stellt eine Kurve zweiter Klasse dar, die dem vollständigen Vierseit eingeschrieben ist, das die Punkte des Punktpaares ab und ebenso die des Punktpaares cd zu Gegenecken hat (vgl. die weiter unten folgende Fig. 92).

Bezeichnet man noch das dritte Paar Gegenecken des soeben beschriebenen vollständigen Vierseits mit e, f, so läßt sich auch das Punktpaar ef als Vielfachensumme der Punktpaare ab und cd, d. h. in der Form:

$$ef = \mathfrak{g}ab + \mathfrak{h}cd, \tag{106}$$

ausdrücken. Denn auch dieses Punktpaar kann als eine dem Vierseit eingeschriebene Kurve zweiter Klasse aufgefaßt werden (vgl. auch den ersten Teil dieses Bandes, S. 332ff., sowie S. 88ff. des ersten Bandes). Nach (103) besteht also auch die Gleichung:

$$[A^{(2)}\{ef\}] = 0; \tag{107}$$

und diese zeigt, daß auch die Punkte e und f hinsichtlich des Polarsystems zweiter Ordnung $A^{(2)}$ konjugiert sind. Zur Erläuterung kann die unten folgende Fig. 92 dienen. Man hat somit den Satz:

Satz 705: Siebenter Satz von Chr. v. Staudt[1]): Sind zwei Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits hinsichtlich eines

---

1) Vgl. v. Staudt, Über die Kurven II. Ordnung (Programmschrift). Nürnberg 1831. Nr. 52. Neun Jahre später wurde der Satz auch von O. Hesse veröffentlicht in seiner Dissertation: De octo punctis intersectionis trium superficierum secundi ordinis, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 20 (1840), S. 301 (Gesammelte Werke, München 1897, S. 41). Der Satz wird daher vielfach als Satz von Hesse bezeichnet. Vgl. hierzu Th. Reye, Die Geometrie der Lage. Erste Abteilung. Fünfte Auflage. S. 251.

Polarsystems zweiter Ordnung konjugiert, so gilt dasselbe auch von dem dritten Paar.

Sagt man dann noch von einem vollständigen Vierseit, von dem zwei Paare Gegenecken und damit nach dem siebenten Satze von Chr. v. Staudt (Satz 705) auch das dritte Paar hinsichtlich eines Polarsystems (einer Kurve) zweiter Ordnung konjugiert sind („konjugierte Pole“ sind), es sei ein „Polvierseit jenes Polarsystems (jener Kurve) zweiter Ordnung“, so kann man mit Rücksicht auf S. 190 den Satz 704 auch in der Form aussprechen (Fig. 92):

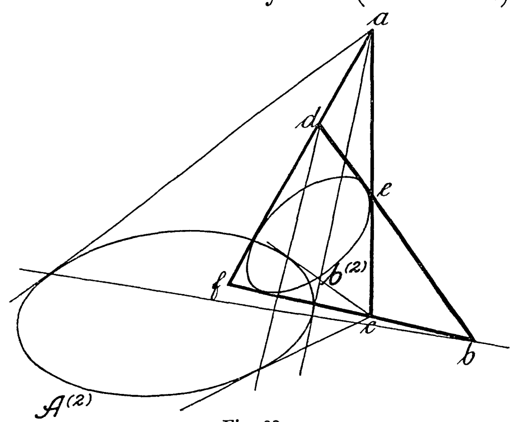


Fig. 92.

Satz 706: Dritte Lagenbeziehung zweier apolaren Polarsysteme[1]): Ist die Polarkurve eines Polarsystems zweiter Klasse $\boldsymbol{b}^{(2)}$ einem Polvierseit eines Polarsystems zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}^{(2)}$ eingeschrieben, so besteht zwischen den Potenzformen beider Polarsysteme die Gleichung:

$$[\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{b}^{(2)}] = 0, \tag{97}$$

d. h. die beiden Polarsysteme sind zueinander apolar.

Das kombinatorische Produkt aus einer Potenzform zweiter Klasse und einem Stabquadrat. Die Vielfachensumme von vier algebraischen Stabquadraten und ihre Reduktion auf eine Vielfachensumme von drei Stabquadraten. Zu dem Satze 702 erhält man das dualistische Gegenstück, wenn man die Apolaritätsgleichung in der Form schreibt:

$$[\boldsymbol{b}^{(2)}\boldsymbol{A}^{(2)}] = 0 \tag{108}$$

und in ihr die Potenzform zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}^{(2)}$ durch das Stabquadrat U^2 ersetzt. Dadurch erhält die Gleichung (108) die Form:

$$[\boldsymbol{b}^{(2)}U^2] = 0, \tag{109}$$

die man nach (84) auch durch die Gleichung ersetzen kann:

$$\boldsymbol{b}_2 U^2 = 0, \tag{110}$$

welche ihrer Form nach mit der Gleichung (66) übereinstimmt. Die Gleichung (109) sagt daher aus, daß die Gerade des Stabes U die Polarkurve des Polarsystems zweiter Klasse $b^{(2)}$ berührt. Man hat somit den Satz:

1) Vgl. auch die Umkehrung in Satz 714.

Satz 707: Eine Kurve zweiter Klasse $\boldsymbol{b}^{(2)}$ ist zu einem doppeltzählenden Stabe U^2 dann und nur dann apolar, wenn die Gerade des Stabes U eine Tangente der Kurve $\boldsymbol{b}^{(2)}$ ist.

Sind vier algebraische Stabquadrate A^2, B^2, C^2, D^2 zu einer Kurve zweiter Klasse $\boldsymbol{b}^{(2)}$ apolar, bestehen somit die vier Gleichungen:

$$(111) \qquad [\boldsymbol{b}^{(2)}A^2]=0, \quad [\boldsymbol{b}^{(2)}B^2]=0, \quad [\boldsymbol{b}^{(2)}C^2]=0, \quad [\boldsymbol{b}^{(2)}D^2]=0,$$

so wird nach dem Satze 707 die Kurve $\boldsymbol{b}^{(2)}$ von den Geraden der vier Stäbe A, B, C, D berührt, ist also dem von ihnen bestimmten Vierseit eingeschrieben, und es folgt durch lineare Verknüpfung der vier Gleichungen (111), daß zugleich auch die Gleichung:

$$(112) \qquad [\boldsymbol{b}^{(2)}(\mathfrak{a}A^2+\mathfrak{b}B^2+\mathfrak{c}C^2+\mathfrak{d}D^2)]=0$$

erfüllt wird. Sie zeigt, daß auch die Potenzform zweiter Ordnung:

$$(113) \qquad \boldsymbol{A}^{(2)}=\mathfrak{a}A^2+\mathfrak{b}B^2+\mathfrak{c}C^2+\mathfrak{d}D^2$$

zu der Potenzform zweiter Klasse $\boldsymbol{b}^{(2)}$ apolar ist.

Die geometrische Bedeutung der Potenzform zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}^{(2)}$ in (113) läßt sich leicht angeben. In der Tat erkennt man sogleich, daß das Polarsystem zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}^{(2)}$ das Vierseit $ABCD$ zum Polvierseit hat. Um dies nachzuweisen, braucht man nur zu zeigen, daß zwei Paar Gegenecken des Vierseits $ABCD$, etwa die beiden Paare Gegenecken:

$$[AB],\ [CD] \quad \text{und} \quad [AC],\ [BD],$$

hinsichtlich des Polarsystems zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}^{(2)}$ konjugiert sind. Dies ergibt sich aber ohne weiteres; denn es wird:

$$[\{[AB][CD]\}(\mathfrak{a}A^2+\mathfrak{b}B^2+\mathfrak{c}C^2+\mathfrak{d}D^2)]=[ABL][CDL](\mathfrak{a}A^2+\mathfrak{b}B^2+\mathfrak{c}C^2+\mathfrak{d}D^2) \\ =0.$$

Bei Auflösung der runden Klammer rechter Hand und Einführung der Faktoren der Stabquadrate A^2, B^2, C^2, D^2 in die Lücken L entsteht nämlich in jedem Gliede ein Produkt zweier planimetrischen Produkte, von denen sicher eins verschwindet. Es wird daher auch das Produkt:

$$[\{[AC][BD]\}(\mathfrak{a}A^2+\mathfrak{b}B^2+\mathfrak{c}C^2+\mathfrak{d}D^2)]=0.$$

Folglich ist das Vierseit $ABCD$ wirklich ein Polvierseit von $\boldsymbol{A}^{(2)}$, und man hat somit den Satz:

Satz 708: Die Potenzform zweiter Ordnung:

$$(113) \qquad \boldsymbol{A}^{(2)}=\mathfrak{a}A^2+\mathfrak{b}B^2+\mathfrak{c}C^2+\mathfrak{d}D^2$$

stellt ein Polarsystem zweiter Ordnung dar, welches das Vierseit $ABCD$ zum Polvierseit hat.

Damit ist zugleich eine Bestätigung des Satzes 706 gewonnen; denn mit Rücksicht auf den Satz 708 sagt das Zusammenbestehen der Gleichungen (111) und (112) aus, daß eine Kurve zweiter Klasse $\boldsymbol{b}^{(2)}$, die dem Polvierseit $ABCD$ des Polarsystems zweiter Ordnung:

$$\boldsymbol{A}^{(2)} = \mathfrak{a}A^2 + \mathfrak{b}B^2 + \mathfrak{c}C^2 + \mathfrak{d}D^2$$

eingeschrieben ist, zu diesem Polarsystem $\boldsymbol{A}^{(2)}$ apolar ist.

In dem besonderen Falle, wo in der Gleichung (113) eine von den vier Ableitzahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ verschwindet, wo also etwa:

$$\mathfrak{d} = 0$$

ist, verkürzt sich die Gleichung (113) zu der einfacheren Form:

$$\boldsymbol{A}^{(2)} = \mathfrak{a}A^2 + \mathfrak{b}B^2 + \mathfrak{c}C^2. \tag{114}$$

Alsdann hat nach dem Satze 690 (vgl. auch S. 179) das Polarsystem zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}^{(2)}$ das Dreiseit ABC zum Poldreiseit. Da aber die Gleichung (114) einen Sonderfall der Gleichung (113) darstellt, insofern sie auch in der Form geschrieben werden kann:

$$\boldsymbol{A}^{(2)} = \mathfrak{a}A^2 + \mathfrak{b}B^2 + \mathfrak{c}C^2 + 0D^2,$$

in der D ein ganz beliebiger Stab ist, so kann man mit Rücksicht auf den Satz 708 den weiteren Satz aussprechen:

Satz 709: Ein jedes Poldreiseit ABC eines Polarsystems zweiter Ordnung wird durch eine beliebige Gerade D ihrer Ebene zu einem Polvierseit des Polarsystems ergänzt.

Diesen Satz bestätigt man leicht rein geometrisch. Ist nämlich ABC ein Poldreiseit eines Polarsystems zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}^{(2)}$, so ist jede Seite dieses Dreiseits die Polare ihrer Gegenecke in bezug auf das Polarsystem $\boldsymbol{A}^{(2)}$. Z. B. ist die Seite A die Polare ihrer Gegenecke $[BC]$ und die Seite B die Polare ihrer Gegenecke $[CA]$.

Nimmt man jetzt zu dem Poldreiseit ABC noch eine ganz beliebige vierte Gerade D hinzu, so überzeugt man sich sogleich, daß in dem Vierseit $ABCD$ zwei Paare Gegenecken in bezug auf das Polarsystem $\boldsymbol{A}^{(2)}$ konjugiert sind, daß dieses Vierseit also ein Polvierseit dieses Polarsystems ist.

In der Tat sind ja die Gegenecken $[AD]$ und $[BC]$ in bezug auf das Polarsystem $\boldsymbol{A}^{(2)}$ konjugiert, denn die Ecke $[AD]$ liegt als Punkt der Geraden A auf der Polare der Ecke $[BC]$. Und ebenso sind die Gegenecken $[BD]$ und $[CA]$ in bezug auf das Polarsystem $\boldsymbol{A}^{(2)}$ konjugiert, denn die Ecke $[BD]$ liegt als Punkt der Geraden B auf der Polare der Ecke $[CA]$ (Fig. 93).

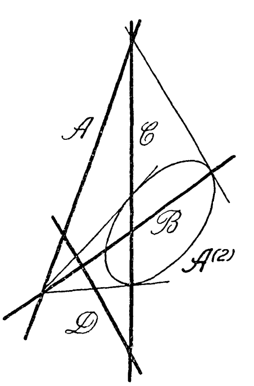


Fig. 93.

Damit ist der Satz 709 auch rein geometrisch bewiesen.

Man kann aber zu diesem Satze noch eine wichtige Ergänzung hinzufügen. Aus dem Satze 690 läßt sich nämlich folgern:

Sobald drei Seiten A, B, C eines Polvierseits $ABCD$ eines Polarsystems zweiter Ordnung ein Poldreiseit des Polarsystems bilden, verschwindet in der Gleichung (113) der Koeffizient $\mathfrak{d}$ des Quadrats der vierten Seite D.

Ist dagegen das in einem Polvierseit $ABCD$ eines Polarsystems zweiter Ordnung enthaltene Dreiseit ABC *nicht ein Poldreiseit* des Polarsystems, so ist in der Gleichung (113) der Koeffizient $\mathfrak{d}$ des Quadrates D^2 der vierten Seite D des Polvierseits von Null verschieden. Die Gleichung (113) ist daher nach D^2 auflösbar und liefert einen Ausdruck von der Form:

$$D^2 = \mathfrak{f}A^{(2)} + \mathfrak{g}A^2 + \mathfrak{h}B^2 + \mathfrak{k}C^2. \tag{115}$$

Bevor wir dieses Ergebnis in Satzform aussprechen, beweisen wir noch den folgenden mit ihm eng zusammenhängenden Satz:

Satz 710: Zu jedem beliebigen Dreiseit ABC, das von einem Poldreiseit eines Polarsystems zweiter Ordnung $A^{(2)}$ verschieden ist, gibt es eine und nur eine Gerade D, die das Dreiseit ABC zu einem Polvierseit $ABCD$ jenes Polarsystems ergänzt.

In der Tat, sind A_1, B_1, C_1 die Polaren der Ecken $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ des Dreiseits ABC hinsichtlich des Polarsystems $A^{(2)}$ (Fig. 94), so ist die Gerade

$$D = [AA_1 \cdot BB_1] \tag{116}$$

die gesuchte vierte Seite des Polvierseits $ABCD$ jenes Polarsystems $A^{(2)}$. Denn nach dem Begriff des Polvierseits eines Polarsystems zweiter Ordnung (vgl. S. 192) muß die Gegenecke von $[BC]$ in diesem Polvierseit zu dieser Ecke $[BC]$ hinsichtlich des Polarsystems $A^{(2)}$ konjugiert sein, also auf der Polare A_1 der Ecke $[BC]$ in bezug auf das Polarsystem $A^{(2)}$ liegen; und da sie außerdem als Gegenecke von $[BC]$ in dem Vierseit $ABCD$ auch auf der Geraden A enthalten sein muß, so ist sie der Schnittpunkt $[AA_1]$ der Geraden A und A_1.

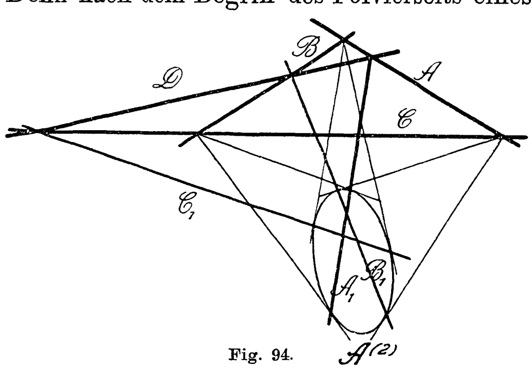


Fig. 94.

Ebenso beweist man, daß die Gegenecke von $[CA]$ mit dem Punkte $[BB_1]$ zusammenfällt und diejenige von $[AB]$ mit dem Punkte $[CC_1]$. Die vierte Seite D des Polvierseits $ABCD$, die alle drei Gegenecken $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ der drei Ecken $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ des vollständigen Vierseits $ABCD$ enthalten muß, läßt sich daher wirklich durch das Produkt auf der rechten

Seite von (116) darstellen oder auch durch eins der Produkte $[BB_1 \cdot CC_1]$ und $[CC_1 \cdot AA_1]$.

Man hat also den Satz:

Satz 711: Ist das Dreiseit ABC kein Poldreiseit eines Polarsystems zweiter Ordnung $A^{(2)}$, so erhält man diejenige Gerade D, die das Dreiseit ABC zu einem Polvierseit $ABCD$ jenes Polarsystems ergänzt, indem man zu den Ecken:

$$[BC], \quad [CA], \quad [AB]$$

des Dreiseits ABC die Polaren:

$$A_1, \quad B_1, \quad C_1$$

hinsichtlich des Polarsystems zweiter Ordnung $A^{(2)}$ konstruiert und irgend zwei von den Punkten:

$$[AA_1], \quad [BB_1], \quad [CC_1]$$

miteinander verbindet (vgl. die obige Fig. 94).

Beachtet man noch, daß die Gerade D die Perspektivitätsachse der Dreiseite ABC und $A_1B_1C_1$ ist, so kann man noch den weiteren Satz aussprechen:

Satz 712: Ist das Dreiseit ABC kein Poldreiseit einer Kurve zweiter Ordnung $A^{(2)}$, und konstruiert man zu den Ecken $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ des Dreiseits ABC die Polaren A_1, B_1, C_1 in bezug auf die Kurve $A^{(2)}$, wobei dann nach dem ersten Satze von Chr. v. Staudt (Satz 398) das Dreiseit $A_1B_1C_1$ zu dem Dreiseit ABC perspektiv liegt, so ergänzt die zugehörige Perspektivitätsachse D das ursprüngliche Dreiseit ABC zu einem Polvierseit des Polarsystems zweiter Ordnung $A^{(2)}$.

Nunmehr kann man auch das in der Gleichung (115) enthaltene Ergebnis in folgender Weise in Worte fassen:

Satz 713: Ist das Dreiseit ABC kein Poldreiseit eines Polarsystems zweiter Ordnung $A^{(2)}$, so gestattet das Quadrat eines Stabes D derjenigen Geraden, die das Dreiseit ABC zu einem Polvierseit $ABCD$ des Polarsystems zweiter Ordnung $A^{(2)}$ ergänzt, die Darstellung:

$$(115) \qquad D^2 = \mathfrak{f} A^{(2)} + \mathfrak{g} A^2 + \mathfrak{h} B^2 + \mathfrak{k} C^2.$$

Die Gleichung (115) zeigt noch, daß eine Kurve zweiter Ordnung und 3 doppelt zählende Geraden, die nur nicht gerade die Seiten eines Polardreiecks dieser Kurve bilden, *linear unabhängig voneinander sind.*

Ist ferner $\mathfrak{b}^{(2)}$ die Potenzform einer Kurve zweiter Klasse, die zu einem Polarsystem zweiter Ordnung $A^{(2)}$ apolar ist und die Geraden der drei Stäbe

A, B, C zu Hüllgeraden hat, so daß also die Gleichungen bestehen:

(117) $\quad [\mathfrak{b}^{(2)} A^{(2)}] = 0\,, \quad [\mathfrak{b}^{(2)} A^2] = 0\,, \quad [\mathfrak{b}^{(2)} B^2] = 0\,, \quad [\mathfrak{b}^{(2)} C^2] = 0\,,$

so folgt durch Multiplikation der Gleichung (115) mit $\mathfrak{b}^{(2)}$ die Gleichung:

(118)
$$[\mathfrak{b}^{(2)} D^2] = 0\,,$$

welche aussagt, daß auch die Gerade D von der Kurve $\mathfrak{b}^{(2)}$ berührt wird.

Darin liegt der Satz:

Satz 714: Umkehrung zu Satz 706: Weiteres zur dritten Lagenbeziehung zweier apolaren Polarsysteme: Ist $\mathfrak{b}^{(2)}$ die Potenzform einer Kurve zweiter Klasse, die zu einem Polarsystem zweiter Ordnung $A^{(2)}$ apolar ist und die Geraden dreier Stäbe A, B, C zu Hüllgeraden hat, und bilden diese drei Geraden nicht gerade ein Poldreiseit von $A^{(2)}$, so berührt die Kurve zweiter Klasse $\mathfrak{b}^{(2)}$ auch diejenige Gerade D, die das Dreiseit ABC zu einem Polvierseit des Polarsystems zweiter Ordnung $A^{(2)}$ ergänzt.

Das kombinatorische Produkt aus einer Potenzform zweiter Klasse und einem algebraischen Produkte zweier Stäbe. Der achte Satz von Chr. v. Staudt. Begriff eines Polarvierecks eines Polarsystems zweiter Klasse. Vierte Lagenbeziehung zweier apolaren Polarsysteme. Dem Satze 703 entspricht dualistisch der Satz:

Satz 715: Ein Polarsystem zweiter Klasse $\mathfrak{b}^{(2)}$ ist dann und nur dann zu einem Linienpaare UV apolar, d. h. es besteht dann und nur dann die Gleichung:

(119)
$$[\mathfrak{b}^{(2)} \{UV\}] = 0\,,$$

wenn die Linien des Linienpaares UV zu dem Polarsystem $\mathfrak{b}^{(2)}$ konjugiert sind.

Auf Grund dieses Satzes kann man jetzt leicht das dualistische Gegenstück des siebenten Satzes von Chr. v. Staudt, d. h. des Satzes 705, beweisen.

Sind nämlich die Geraden der beiden Stabpaare AB und CD hinsichtlich eines Polarsystems zweiter Klasse $\mathfrak{b}^{(2)}$ konjugiert, bestehen also die Gleichungen:

(120)
$$\begin{cases} [\mathfrak{b}^{(2)} \{AB\}] = 0 \quad \text{und} \\ [\mathfrak{b}^{(2)} \{CD\}] = 0\,, \end{cases}$$

so folgt aus ihnen durch Multiplikation mit zwei beliebigen Zahlgrößen $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ und Addition die Gleichung:

(121)
$$[\mathfrak{b}^{(2)} (\mathfrak{g} AB + \mathfrak{h} CD)] = 0\,,$$

welche aussagt, daß die Potenzform zweiter Ordnung:

(122)
$$A^{(2)} = \mathfrak{g} AB + \mathfrak{h} CD$$

auch zu der Potenzform zweiter Klasse $\mathfrak{b}^{(2)}$ apolar ist.

Die Potenzform zweiter Ordnung (122) stellt aber eine Kurve zweiter Ordnung dar, die dem Viereck mit den Gegenseiten A und B, C und D umschrieben ist. In der Tat wird die Gleichung:

$$(123) \qquad \mathfrak{g}[xA][xB] + \mathfrak{h}[xC][xD] = 0$$

der zu der Potenzform (122) gehörigen Kurve zweiter Ordnung durch jeden Punkt x erfüllt, der mit einer der vier Ecken $[AC]$, $[AD]$, $[BC]$, $[BD]$ dieses Vierecks zusammenfällt.

Man hat also den Satz:

Satz 716: Die Potenzform zweiter Ordnung:

$$(122) \qquad \mathfrak{A}^{(2)} = \mathfrak{g}AB + \mathfrak{h}CD$$

stellt eine Kurve zweiter Ordnung dar, die dem vollständigen Viereck umschrieben ist, das die Geraden des Stabpaares AB und ebenso die des Stabpaares CD zu Gegenseiten hat.

Bezeichnet man noch das dritte Paar Gegenseiten des soeben beschriebenen vollständigen Vierecks mit E, F, so läßt sich auch das Stabpaar EF als Vielfachensumme der Stabpaare AB und CD, d. h. in der Form:

$$(124) \qquad EF = \mathfrak{g}AB + \mathfrak{h}CD,$$

ausdrücken. Denn auch dieses Stabpaar kann als eine dem Viereck umschriebene Kurve zweiter Ordnung aufgefaßt werden (vgl. auch den ersten Teil dieses Bandes, S. 301 ff., sowie S. 85 ff. des ersten Bandes). Nach (121) besteht also die Gleichung:

$$(125) \qquad [\mathfrak{b}^{(2)}\{EF\}] = 0;$$

und diese zeigt, daß auch die Geraden der Stäbe E und F hinsichtlich des Polarsystems zweiter Klasse $\mathfrak{b}^{(2)}$ konjugiert sind. Zur Erläuterung kann die unten folgende Fig. 95 dienen. Man hat somit den Satz:

Satz 717: Achter Satz von Chr. v. Staudt: Sind zwei Paare Gegenseiten eines vollständigen Vierecks hinsichtlich eines Polarsystems zweiter Klasse konjugiert, so gilt dasselbe auch von dem dritten Paar.

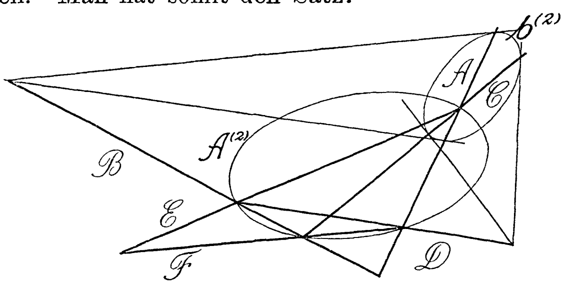


Fig. 95.

Sagt man dann noch von einem vollständigen Viereck, von dem zwei Paare Gegenseiten und damit nach Satz 717 auch das dritte Paar hinsichtlich eines Polarsystems (einer Kurve) zweiter Klasse konjugiert sind („konjugierte Polaren“ sind), es sei ein „Polarviereck jenes Polarsystems (jener Kurve) zweiter Klasse“, so kann man mit Rücksicht auf S. 195 f. den Satz aussprechen (Fig. 95):

Satz 718: Vierte Lagenbeziehung zweier apolaren Polarsysteme[1]**:** Ist die Polkurve eines Polarsystems zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}^{(2)}$ einem Polarviereck eines Polarsystems zweiter Klasse $\boldsymbol{b}^{(2)}$ umschrieben, so besteht zwischen den beiden Polarsystemen die Gleichung:

$$[\boldsymbol{b}^{(2)}\boldsymbol{A}^{(2)}] = 0, \tag{126}$$

d. h. die beiden Polarsysteme sind zueinander apolar.

Die Vielfachensumme von vier Punktquadraten und ihre Reduktion auf eine Vielfachensumme von drei Punktquadraten. Sind vier Punktquadrate zu einer Kurve zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}^{(2)}$ apolar, gelten somit die vier Gleichungen:

$$[\boldsymbol{A}^{(2)}a^2] = 0, \quad [\boldsymbol{A}^{(2)}b^2] = 0, \quad [\boldsymbol{A}^{(2)}c^2] = 0, \quad [\boldsymbol{A}^{(2)}d^2] = 0, \tag{127}$$

so geht nach dem Satze 702 die Kurve $\boldsymbol{A}^{(2)}$ durch die vier Punkte a, b, c, d hindurch, ist also dem von ihnen bestimmten Viereck umschrieben, und es folgt durch lineare Verknüpfung der vier Gleichungen (127), daß auch die Gleichung:

$$[\boldsymbol{A}^{(2)}(\mathfrak{a}a^2 + \mathfrak{b}b^2 + \mathfrak{c}c^2 + \mathfrak{d}d^2)] = 0 \tag{128}$$

erfüllt wird. Sie zeigt, daß auch die Potenzform zweiter Klasse:

$$\boldsymbol{b}^{(2)} = \mathfrak{a}a^2 + \mathfrak{b}b^2 + \mathfrak{c}c^2 + \mathfrak{d}d^2 \tag{129}$$

zu der Potenzform zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}^{(2)}$ apolar ist.

Die geometrische Bedeutung der Potenzform zweiter Klasse $\boldsymbol{b}^{(2)}$ in (129) läßt sich leicht angeben. In der Tat erkennt man sogleich, daß das Polarsystem zweiter Klasse $\boldsymbol{b}^{(2)}$ das Viereck $abcd$ zum Polarviereck hat. Um dies nachzuweisen, braucht man nur zu zeigen, daß zwei Paare Gegenseiten des Vierecks $abcd$, etwa die beiden Paare Gegenseiten:

$$[ab],\ [cd] \quad \text{und} \quad [ac],\ [bd],$$

hinsichtlich des Polarsystems zweiter Klasse $\boldsymbol{b}^{(2)}$ konjugiert sind. Dies ergibt sich aber ohne weiteres; denn es wird:

$$[\{[ab][cd]\}(\mathfrak{a}a^2 + \mathfrak{b}b^2 + \mathfrak{c}c^2 + \mathfrak{d}d^2)] = [lab][lcd](\mathfrak{a}a^2 + \mathfrak{b}b^2 + \mathfrak{c}c^2 + \mathfrak{d}d^2) = 0.$$

Bei Auflösung der runden Klammer rechter Hand und Einführung der Faktoren der Punktquadrate a^2, b^2, c^2, d^2 in die Lücken l entsteht nämlich in jedem Gliede ein Produkt zweier äußeren Produkte, von denen sicher eins verschwindet. Es wird daher auch das Produkt:

$$[\{[ac][bd]\}(\mathfrak{a}a^2 + \mathfrak{b}b^2 + \mathfrak{c}c^2 + \mathfrak{d}d^2)] = 0.$$

Folglich ist das Viereck $abcd$ wirklich ein Polarviereck von $\boldsymbol{b}^{(2)}$, und man hat somit den Satz:

1) Vgl. auch die Umkehrung in Satz 725.

Satz 719: Die Potenzform zweiter Klasse:

(129) $$b^{(2)} = \mathfrak{a} a^2 + \mathfrak{b} b^2 + \mathfrak{c} c^2 + \mathfrak{d} d^2$$

stellt ein Polarsystem zweiter Klasse dar, welches das Viereck $abcd$ zum Polarviereck hat.

Damit ist zugleich eine Bestätigung des Satzes 718 gewonnen; denn mit Rücksicht auf den Satz 719 sagt das Zusammenbestehen der Gleichungen (127) und (128) aus, daß eine Kurve zweiter Ordnung $A^{(2)}$, die dem Polarviereck $abcd$ des Polarsystems zweiter Klasse:

$$b^{(2)} = \mathfrak{a} a^2 + \mathfrak{b} b^2 + \mathfrak{c} c^2 + \mathfrak{d} d^2$$

umschrieben ist, zu diesem Polarsystem $b^{(2)}$ apolar ist.

In dem besonderen Fall, wo in der Gleichung (129) eine von den vier Ableitzahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ verschwindet, wo also etwa:

$$\mathfrak{d} = 0$$

ist, verkürzt sich die Gleichung (129) zu der einfacheren Form:

(130) $$b^{(2)} = \mathfrak{a} a^2 + \mathfrak{b} b^2 + \mathfrak{c} c^2.$$

Alsdann hat nach dem Satze 696 (vgl. auch S. 186) das Polarsystem zweiter Klasse $b^{(2)}$ das Dreieck abc zum Polardreieck. Da aber die Gleichung (130) einen Sonderfall der Gleichung (129) darstellt, insofern sie auch in der Form geschrieben werden kann:

$$b^{(2)} = \mathfrak{a} a^2 + \mathfrak{b} b^2 + \mathfrak{c} c^2 + 0 d^2,$$

in der d ein ganz beliebiger Punkt ist, so kann man mit Rücksicht auf den Satz 719 den weiteren Satz aussprechen:

Satz 720: Ein jedes Polardreieck abc eines Polarsystems zweiter Klasse wird durch einen beliebigen Punkt d seiner Ebene zu einem Polarviereck des Polarsystems ergänzt.

Auch hier kann man wieder den Satz leicht durch rein geometrische Schlüsse bestätigen. Ist nämlich abc ein Polardreieck eines Polarsystems zweiter Klasse $a^{(2)}$, so ist jede Ecke dieses Dreiecks der Pol ihrer Gegenseite in bezug auf das Polarsystem $a^{(2)}$. Zum Beispiel ist die Ecke a der Pol ihrer Gegenseite $[bc]$ und die Ecke b der Pol ihrer Gegenseite $[ca]$.

Nimmt man jetzt zu dem Polardreieck abc noch einen ganz beliebigen vierten Punkt d hinzu, so überzeugt man sich sogleich, daß in dem Viereck $abcd$ zwei Paare Gegenseiten in bezug auf das Polarsystem $a^{(2)}$ konjugiert sind, daß dieses Viereck also ein Polarviereck des Polarsystems ist.

In der Tat sind ja die Gegenseiten $[ad]$ und $[bc]$ in bezug auf das Polarsystem $a^{(2)}$ konjugiert, denn die Seite $[ad]$ geht durch den Pol a ihrer Gegenseite $[bc]$; und ebenso sind die Gegenseiten $[bd]$ und $[ca]$ in bezug auf das

Polarsystem $\boldsymbol{a}^{(2)}$ konjugiert, denn die Seite $[bd]$ geht durch den Pol b ihrer Gegenseite $[ca]$ (Fig. 96).

Damit ist der Satz 720 auch rein geometrisch bewiesen.

Man kann ihm aber noch eine wichtige Ergänzung hinzufügen. Aus dem Satze 696 läßt sich folgern:

Sobald drei Ecken a, b, c eines Polarvierecks $abcd$ eines Polarsystems zweiter Klasse ein Polardreieck des Polarsystems bilden, verschwindet in der Gleichung (129) der Koeffizient $\mathfrak{d}$ des Quadrats der vierten Ecke d.

Ist dagegen das in einem Polarviereck $abcd$ eines Polarsystems zweiter Klasse enthaltene Dreieck abc *nicht ein Polardreieck* des Polarsystems, so ist in der Gleichung (129) der Koeffizient $\mathfrak{d}$ des Quadrats d^2 der vierten Ecke d des Polarvierecks von Null verschieden. Die Gleichung (129) ist daher nach d^2 auflösbar und liefert für d^2 einen Ausdruck von der Form:

$$d^2 = \mathfrak{f}\boldsymbol{b}^{(2)} + \mathfrak{g}a^2 + \mathfrak{h}b^2 + \mathfrak{k}c^2. \tag{131}$$

Bevor wir dieses Ergebnis in Satzform aussprechen, beweisen wir noch den folgenden mit ihm eng zusammenhängenden Satz:

Satz 721: Zu jedem beliebigen Dreieck abc, das von einem Polardreieck eines Polarsystems zweiter Klasse $\boldsymbol{b}^{(2)}$ verschieden ist, gibt es einen und nur einen Punkt d, der das Dreieck abc zu einem Polarviereck $abcd$ jenes Polarsystems ergänzt.

In der Tat, sind a_1, b_1, c_1 die Pole der Seiten $[bc]$, $[ca]$, $[ab]$ des Dreiecks abc hinsichtlich des Polarsystems $\boldsymbol{b}^{(2)}$, so ist der Punkt:

$$d = [aa_1 \cdot bb_1] \tag{132}$$

die gesuchte vierte Ecke des Polarvierecks $abcd$ jenes Polarsystems $\boldsymbol{b}^{(2)}$. Denn nach dem Begriff des Polarvierecks eines Polarsystems zweiter Klasse (vgl. S. 199) muß die Gegenseite von $[bc]$ zu dieser Seite $[bc]$ hinsichtlich des Polarsystems $\boldsymbol{b}^{(2)}$ konjugiert sein, also durch den Pol a_1 der Seite $[bc]$ in bezug auf das Polarsystem $\boldsymbol{b}^{(2)}$ hindurchgehen; und da sie außerdem als Gegenseite von $[bc]$ in dem Viereck $abcd$ auch den Punkt a enthalten muß, so ist sie die Verbindungslinie $[aa_1]$ der Punkte a und a_1.

Ebenso beweist man, daß die Gegenseite von $[ca]$ mit der Geraden $[bb_1]$ zusammenfällt und diejenige von $[ab]$ mit der Geraden $[cc_1]$. Die vierte Ecke d des Polarvierecks $abcd$, die auf allen drei Gegenseiten $[aa_1]$, $[bb_1]$, $[cc_1]$ der drei Seiten $[bc]$, $[ca]$, $[ab]$ des vollständigen Vierecks $abcd$ enthalten sein muß, läßt sich daher wirklich durch das Produkt auf der rechten Seite von (132) darstellen, oder auch durch eins der Produkte $[bb_1 \cdot cc_1]$ und $[cc_1 \cdot aa_1]$.

Man hat also den Satz:

Satz 722: Ist ein Dreieck abc von einem Polardreieck eines Polarsystems zweiter Klasse $\boldsymbol{b}^{(2)}$ verschieden, so erhält man denjenigen Punkt d, der das Dreieck abc zu einem Polarviereck $abcd$ jenes Polarsystems ergänzt, indem man zu den Seiten:

$$[bc], \quad [ca], \quad [ab]$$

des Dreiecks abc die Pole:

$$a_1, \quad b_1, \quad c_1$$

hinsichtlich des Polarsystems zweiter Klasse $\mathfrak{b}^{(2)}$ konstruiert und irgend zwei von den Geraden der drei Stäbe:

$$[aa_1], \quad [bb_1], \quad [cc_1]$$

zum Schnitt bringt (Fig. 97).

Die gegebene Begründung des Satzes 722 enthält zugleich eine Bestätigung des achten Satzes von Chr. v. Staudt (Satz 717).

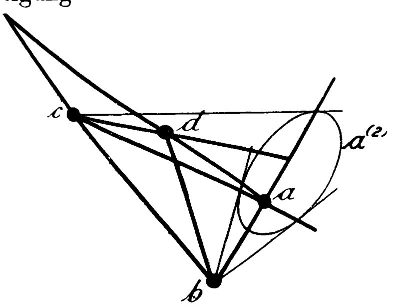


Fig. 96.

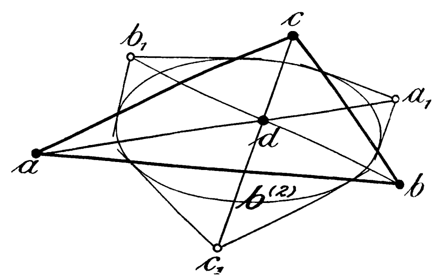


Fig. 97.

Beachtet man ferner, daß der Punkt d das Perspektivitätszentrum der Dreiecke abc und $a_1b_1c_1$ ist, so kann man noch den weiteren Satz aussprechen:

Satz 723: Ist das Dreieck abc von einem Polardreieck einer Kurve zweiter Klasse $\mathfrak{b}^{(2)}$ verschieden, und konstruiert man zu den Seiten $[bc]$, $[ca]$, $[ab]$ des Dreiecks abc die Pole a_1, b_1, c_1 in bezug auf die Kurve $\mathfrak{b}^{(2)}$, wobei dann nach dem ersten Satze von Chr. v. Staudt (Satz 398) das Dreieck $a_1b_1c_1$ zu dem Dreieck abc perspektiv liegt, so ergänzt das zugehörige Perspektivitätszentrum d das ursprüngliche Dreieck abc zu einem Polarviereck der Kurve zweiter Klasse $\mathfrak{b}^{(2)}$.

Nunmehr kann man auch das in der Gleichung (131) enthaltene Ergebnis in folgender Weise in Worte fassen:

Satz 724: Ist das Dreieck abc von einem Polardreieck eines Polarsystems zweiter Klasse $\mathfrak{b}^{(2)}$ verschieden, so gestattet das Quadrat desjenigen Punktes d, der das Dreieck abc zu einem Polarviereck $abcd$ des Polarsystems zweiter Klasse $\mathfrak{b}^{(2)}$ ergänzt, die Darstellung:

$$d^2 = \mathfrak{f}\mathfrak{b}^{(2)} + \mathfrak{g}a^2 + \mathfrak{h}b^2 + \mathfrak{k}c^2. \tag{131}$$

Die Gleichung (131) zeigt noch, daß eine Kurve zweiter Klasse und 3 doppelt zählende Punkte, die nur nicht gerade die Ecken eines Polardreiecks dieser Kurve bilden, *linear unabhängig voneinander sind.*

Ist ferner $A^{(2)}$ die Potenzform einer Kurve zweiter Ordnung, die zu einem Polarsystem zweiter Klasse $b^{(2)}$ apolar ist und durch die drei Punkte a, b, c hindurchgeht, so daß die vier Gleichungen bestehen:

$$(133)\qquad [A^{(2)}b^{(2)}] = 0, \quad [A^{(2)}a^2] = 0, \quad [A^{(2)}b^2] = 0, \quad [A^{(2)}c^2] = 0,$$

so folgt durch Multiplikation der Gleichung (131) mit $A^{(2)}$ die Gleichung:

$$(134)\qquad [A^{(2)}d^2] = 0,$$

welche aussagt, daß die Kurve $A^{(2)}$ auch durch den Punkt d hindurchgeht.

Darin liegt der Satz:

Satz 725: Umkehrung zu Satz 718. Weiteres zur vierten Lagenbeziehung zweier apolaren Polarsysteme: Ist $A^{(2)}$ die Potenzform einer Kurve zweiter Ordnung, die zu einem Polarsystem zweiter Klasse $b^{(2)}$ apolar ist und durch die drei Punkte a, b, c hindurchgeht, und bilden diese drei Punkte nicht gerade ein Polardreieck von $b^{(2)}$, so geht die Kurve zweiter Ordnung $A^{(2)}$ auch durch denjenigen Punkt d hindurch, der das Dreieck abc zu einem Polarviereck des Polarsystems zweiter Klasse $b^{(2)}$ ergänzt.

Weiteres über die erste und zweite Lagenbeziehung zweier apolaren Polarsysteme. Eine Ergänzung der Sätze 671 und 680 und der zugehörigen Sätze über entartende Polarsysteme erhält man, wenn man die Sätze 690 und 695 oder die ihnen dualistisch entsprechenden Sätze 696 und 689 miteinander kombiniert und die Bedingung für die Apolarität zweier Potenzformen zweiter Ordnung und zweiter Klasse aus Satz 701 anwendet.

Nach dem Satze 690 stellt die Potenzform zweiter Ordnung:

$$(135)\qquad A^{(2)} = \mathfrak{a}_{11}E_1{}^2 + \mathfrak{a}_{22}E_2{}^2 + \mathfrak{a}_{33}E_3{}^2$$

eine Kurve zweiter Ordnung dar, die das Fundamentaldreieck $e_1e_2e_3$ zum Polardreieck hat, und nach dem Satze 695 ist die Potenzform zweiter Klasse:

$$(136)\qquad b^{(2)} = \mathfrak{B}_{23}e_2e_3 + \mathfrak{B}_{31}e_3e_1 + \mathfrak{B}_{12}e_1e_2$$

der Ausdruck einer Kurve zweiter Klasse, die dem Fundamentaldreieck $e_1e_2e_3$ eingeschrieben ist.

Nun war nach dem Satze 701 das Verschwinden des kombinatorischen Produktes:

$$[A^{(2)}b^{(2)}]$$

die Bedingung für die Apolarität der beiden Kurven (Polarsysteme) $A^{(2)}$ und $\mathfrak{b}^{(2)}$. Nach der Gleichung (86) aber ist in der Tat das Produkt:

$$(137)\quad [(\mathfrak{a}_{11} E_1{}^2 + \mathfrak{a}_{22} E_2{}^2 + \mathfrak{a}_{33} E_3{}^2)(\mathfrak{B}_{23} e_2 e_3 + \mathfrak{B}_{31} e_3 e_1 + \mathfrak{B}_{12} e_1 e_2)] = 0,$$

d. h. es ist:

$$(138)\qquad [A^{(2)} \mathfrak{b}^{(2)}] = 0.$$

Da endlich das Fundamentaldreieck ein ganz beliebiges eigentliches Dreieck ist, so hat man den folgenden Satz, der eine Ergänzung des zweiten Teils von Satz 671 bildet:

Satz 726: Ist die Polarkurve eines Polarsystems zweiter Klasse $\mathfrak{b}^{(2)}$ einem eigentlichen Poldreiseit eines Polarsystems zweiter Ordnung $A^{(2)}$ eingeschrieben, so sind die beiden Polarsysteme zueinander apolar.

Andererseits stellt nach dem Satze 696 die Potenzform zweiter Klasse:

$$(139)\qquad \mathfrak{b}^{(2)} = \mathfrak{B}_{11} e_1{}^2 + \mathfrak{B}_{22} e_2{}^2 + \mathfrak{B}_{33} e_3{}^2$$

eine Kurve zweiter Klasse dar, die das Fundamentaldreiseit $E_1 E_2 E_3$ zum Poldreiseit hat, und nach dem Satze 689 ist die Potenzform zweiter Ordnung:

$$(140)\qquad A^{(2)} = \mathfrak{a}_{23} E_2 E_3 + \mathfrak{a}_{31} E_3 E_1 + \mathfrak{a}_{12} E_1 E_2$$

der Ausdruck einer Kurve zweiter Ordnung, die dem Fundamentaldreieck $e_1 e_2 e_3$ umschrieben ist.

Nach der Gleichung (86) wird aber:

$$(141)\quad [(\mathfrak{a}_{23} E_2 E_3 + \mathfrak{a}_{31} E_3 E_1 + \mathfrak{a}_{12} E_1 E_2)(\mathfrak{B}_{11} e_1{}^2 + \mathfrak{B}_{22} e_2{}^2 + \mathfrak{B}_{33} e_3{}^2)] = 0,$$

das heißt:

$$(142)\qquad [A^{(2)} \mathfrak{b}^{(2)}] = 0.$$

Da endlich das Fundamentaldreiseit ein ganz beliebiges eigentliches Dreiseit ist, so hat man den Satz:

Satz 727: Ist die Polkurve eines Polarsystems zweiter Ordnung $A^{(2)}$ einem eigentlichen Polardreieck eines Polarsystems zweiter Klasse $\mathfrak{b}^{(2)}$ umschrieben, so sind die beiden Polarsysteme zueinander apolar.

Das kombinatorische Produkt einer Potenzform erster Ordnung und zweiter Klasse und dasjenige einer Potenzform erster Klasse und zweiter Ordnung. Zum Schlusse dieses Abschnitts möge endlich noch von dem kombinatorischen Produkte, dessen Faktoren durch eine Potenzform zweiter Ordnung und zweiter Klasse gebildet werden, der Übergang zu einem kombinatorischen Produkte $[U\mathfrak{a}^{(2)}]$ gemacht werden, von dem ein Faktor eine Potenzform erster Ordnung, d. h. ein Stab U, der andere eine Potenzform zweiter Klasse

$\alpha^{(2)}$ ist, und andererseits zu einem kombinatorischen Produkte $[x\mathbf{A}^{(2)}]$, dessen einer Faktor eine Potenzform erster Klasse, d. h. ein Punkt x ist, während der andere durch eine Potenzform zweiter Ordnung $\mathbf{A}^{(2)}$ gebildet wird.

Für die erste Art der beiden in Frage kommenden Produkte stellen wir die folgende Erklärung auf:

Erklärung: Unter dem kombinatorischen Produkte $[U\alpha^{(2)}]$ aus dem Stabe U und der Potenzform zweiter Klasse $\alpha^{(2)}$ soll derjenige Punkt verstanden werden, der mit jedem Stabe V der Ebene äußerlich multipliziert das kombinatorische Produkt $[\{UV\}\alpha^{(2)}]$ liefert, und denselben Wert soll das Produkt $[\alpha^{(2)}U]$ besitzen.

Aus dieser Erklärung folgt unmittelbar, daß das kombinatorische Produkt $[U\alpha^{(2)}]$ den Pol der Geraden U in bezug auf das Polarsystem zweiter Klasse $\alpha^{(2)}$ darstellt. Nach dem Satze 684 nämlich verschwindet das Produkt $[\{UV\}\alpha^{(2)}]$ für jeden Stab V, der zu dem Stabe U in bezug auf das Polarsystem $\alpha^{(2)}$ konjugiert ist, und nur für einen solchen Stab. Unserer Erklärung zufolge muß also der Punkt $[U\alpha^{(2)}]$ mit jedem zu U, in bezug auf $\alpha^{(2)}$ konjugierten Stabe V äußerlich multipliziert, den Zahlwert Null liefern, d. h. der Punkt $[U\alpha^{(2)}]$ muß auf einer jeden Geraden enthalten sein, die durch einen solchen Stab V bestimmt wird. Diese Eigenschaft aber kommt nur dem Pol von U hinsichtlich des Polarsystems $\alpha^{(2)}$ zu.

Übrigens läßt sich dies Ergebnis auch leicht anderweitig bestätigen und damit zugleich über die Masse des Punktes $[U\alpha^{(2)}]$ Aufschluß gewinnen. Nach den Gleichungen (94) und (84) ist das kombinatorische Produkt:

(143) $$[\{UV\}\alpha^{(2)}] = [\alpha^{(2)}\{UV\}] = \alpha_2\{UV\} = \alpha_2 UV.$$

Der Ausdruck $\alpha_2\{UV\}$ aber ist mit Rücksicht auf die Gleichung (65) gleich $[V \cdot U\mathbf{P}]$, und es wird also:

(144) $$[\{UV\}\alpha^{(2)}] = [V \cdot U\mathbf{P}].$$

Das kombinatorische Produkt $[U\alpha^{(2)}]$, welches denjenigen Punkt darstellen sollte, der mit jedem Stabe V äußerlich multipliziert das kombinatorische Produkt $[\{UV\}\alpha^{(2)}]$ liefert, ist daher mit dem Produkte $U\mathbf{P}$ geradezu identisch und somit wirklich der Pol der Geraden des Stabes U in bezug auf das Polarsystem zweiter Klasse $\mathbf{P}$, und man hat die Formel:

(145) $$[U\alpha^{(2)}] = U\mathbf{P},$$

welche zeigt, daß der durch das kombinatorische Produkt $[U\alpha^{(2)}]$ ausgedrückte Punkt *auch seiner Masse nach* mit unserer bisherigen Darstellung $U\mathbf{P}$ des Pols der Geraden U übereinstimmt.

Ersetzt man in der obigen Erklärung die Potenzform zweiter Klasse $\alpha^{(2)}$ insbesondere durch das algebraische Produkt zweier Punkte a und b, bildet also das kombinatorische Produkt $[U\{ab\}]$ und berücksichtigt, daß nach dem Begriff des kombinatorischen Produktes $[\{UV\}\{ab\}]$:

$$[\{UV\}\{ab\}] = [lU][lV]ab, \quad \text{d. h.:}$$

(146) $$[\{UV\}\{ab\}] = \frac{[aU][bV] + [bU][aV]}{2}$$

ist, so folgt nach der Erklärung auf S. 206 für das Produkt $[U\{ab\}]$ der Wert:

(147) $$[U\{ab\}] = \frac{[aU]b + [bU]a}{2}.$$

Um eine Probe für dieses Ergebnis zu machen, beachte man, daß dem Obigen zufolge das Produkt $[U\{ab\}]$ den Pol der Geraden U in bezug auf das Punktpaar ab darstellt. Nach dem Satze 432 aber ist der Pol einer Geraden U in bezug auf ein Punktpaar ab nichts anderes als derjenige Punkt der Geraden $[ab]$, der von ihrem Schnittpunkte mit der Geraden U durch das Punktpaar ab harmonisch getrennt wird. Und diese Bedeutung besitzt wirklich die rechte Seite von (147). Denn der Schnittpunkt der Geraden $[ab]$ und U wird nach der Gleichung (27) des 4. Abschnitts durch die Formel ausgedrückt:

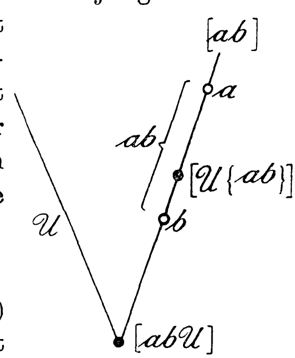


Fig. 98.

(148) $$[abU] = [aU]b - [bU]a,$$

er wird also in der Tat von dem Punkte (147) durch das Punktpaar ab harmonisch getrennt (Fig. 98).

Der Erklärung des kombinatorischen Produktes $[Ua^{(2)}]$ steht die folgende Erklärung dualistisch gegenüber:

Erklärung: Unter dem kombinatorischen Produkte $[xA^{(2)}]$ aus dem Punkte x und der Potenzform zweiter Ordnung $A^{(2)}$ soll derjenige Stab verstanden werden, der mit jedem Punkte y der Ebene äußerlich multipliziert das kombinatorische Produkt $[\{xy\}A^{(2)}]$ liefert, und denselben Wert soll das Produkt $[A^{(2)}x]$ besitzen.

Aus dieser Erklärung folgt, daß das kombinatorische Produkt $[xA^{(2)}]$ die Polare des Punktes x in bezug auf das Polarsystem zweiter Ordnung $A^{(2)}$ darstellt. Nach dem Satze 672 nämlich verschwindet das Produkt $[\{xy\}A^{(2)}]$ für jeden Punkt y, der zu dem Punkte x in bezug auf das Polarsystem $A^{(2)}$ konjugiert ist, und nur für einen solchen Punkt. Unserer letzten Erklärung zufolge muß also der Stab $[xA^{(2)}]$ mit jedem zu x konjugierten Punkte y äußerlich multipliziert den Zahlwert Null liefern, d. h. die Gerade des Stabes $[xA^{(2)}]$ muß einen jeden solchen Punkt y enthalten. Diese Eigenschaft kommt aber nur der Polaren des Punktes x hinsichtlich des Polarsystems $A^{(2)}$ zu.

Auch hier läßt sich dies Ergebnis wieder leicht auf eine andere Weise gewinnen, die uns zugleich über die Länge des Stabes $[xA^{(2)}]$ Aufschluß gibt. Nach den Gleichungen (94), (83) und (23) ist das kombinatorische Produkt:

$$(149) \qquad [\{xy\}\boldsymbol{A}^{(2)}] = [\boldsymbol{A}^{(2)}\{xy\}] = \boldsymbol{A}_2\{xy\} = \boldsymbol{A}_2 xy.$$

Der Ausdruck $\boldsymbol{A}_2 xy$ aber ist der Gleichung (24) zufolge gleich $[y \cdot x\boldsymbol{p}]$, und es wird also:

$$(150) \qquad [\{xy\}\boldsymbol{A}^{(2)}] = [y \cdot x\boldsymbol{p}].$$

Das kombinatorische Produkt $[x\boldsymbol{A}^{(2)}]$, welches denjenigen Stab darstellen sollte, der mit jedem Punkte y äußerlich multipliziert das Produkt $[\{xy\}\boldsymbol{A}^{(2)}]$ liefert, ist daher mit dem Produkte $x\boldsymbol{p}$ geradezu identisch und somit wirklich die Polare des Punktes x in bezug auf das Polarsystem zweiter Ordnung $\boldsymbol{p}$, und man hat die Formel:

$$(151) \qquad [x\boldsymbol{A}^{(2)}] = x\boldsymbol{p},$$

welche zeigt, daß der durch das kombinatorische Produkt $[x\boldsymbol{A}^{(2)}]$ ausgedrückte Stab *auch seiner Länge und seinem Sinne nach* mit unserer bisherigen Darstellung $x\boldsymbol{p}$ der Polare des Punktes x übereinstimmt.

Ersetzt man in der letzten Erklärung die Potenzform zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}^{(2)}$ insbesondere durch das algebraische Produkt zweier Stäbe A und B, bildet also das kombinatorische Produkt $[x\{AB\}]$ und berücksichtigt, daß nach dem Begriff des kombinatorischen Produktes $[\{xy\}\{AB\}]$:

$$[\{xy\}\{AB\}] = [xL][yL]AB, \quad \text{d. h.:}$$

$$(152) \qquad [\{xy\}\{AB\}] = \frac{[xA][yB] + [xB][yA]}{2}$$

ist, so folgt nach der Erklärung auf S. 207 für das Produkt $[x\{AB\}]$ der Wert:

$$(153) \qquad [x\{AB\}] = \frac{[xA]B + [xB]A}{2}.$$

Man erhält eine Probe für dieses Ergebnis, wenn man beachtet, daß das Produkt $[x\{AB\}]$ dem Obigen zufolge die Polare des Punktes x in bezug auf das Linienpaar AB darstellt. Nach dem Satze 420 aber ist die Polare eines Punktes x in bezug auf ein Linienpaar AB nichts anderes als derjenige Strahl des Strahlbüschels mit dem Scheitel $[AB]$, der von dem Punkte x durch das Linienpaar AB harmonisch getrennt wird. Und diese Bedeutung besitzt wirklich die rechte Seite von (153). Denn der Verbindungsstrahl des Scheitels $[AB]$ jenes Strahlbüschels mit dem Punkte x wird nach der zur Formel (148) dualistisch entsprechenden Formel:

$$(154) \qquad [ABx] = [Ax]B - [Bx]A.$$

Er wird also in der Tat von dem Stabe (153) durch das Linienpaar AB harmonisch getrennt (Fig. 99).

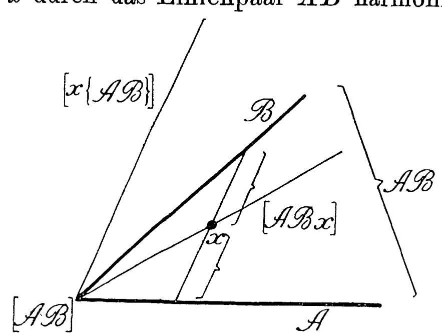


Fig. 99.

Zwölfter Hauptteil.

Die ebenen Kurven dritter Ordnung.

Abschnitt 48.

Konische und gerade Polaren in bezug auf eine Kurve dritter Ordnung.

Die ternäre Lückenform dritter Ordnung. Die allgemeinste homogene Zahlgleichung dritten Grades zwischen den Dreieckskoordinaten $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ eines Punktes x läßt sich in der Form schreiben:

$$(1)\qquad \mathfrak{f}_3(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) = \left\{\begin{array}{l} \quad \mathfrak{a}_{111}\mathfrak{x}_1{}^3 + \mathfrak{a}_{222}\mathfrak{x}_2{}^3 + \mathfrak{a}_{333}\mathfrak{x}_3{}^3 \\ + 3\,\mathfrak{a}_{112}\mathfrak{x}_1{}^2\mathfrak{x}_2 + 3\,\mathfrak{a}_{113}\mathfrak{x}_1{}^2\mathfrak{x}_3 + 3\,\mathfrak{a}_{122}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2{}^2 \\ + 3\,\mathfrak{a}_{133}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_3{}^2 + 3\,\mathfrak{a}_{223}\mathfrak{x}_2{}^2\mathfrak{x}_3 + 3\,\mathfrak{a}_{233}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3{}^2 \\ + 6\,\mathfrak{a}_{123}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 \end{array}\right\} = 0.$$

Hält man an den Bezeichnungen des Fundamentaldreiecks aus dem 25. Abschnitt fest und setzt wie gewöhnlich:

$$(2)\qquad x = \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3,$$

so wird:

$$(3)\qquad \mathfrak{x}_1 = [xE_1],\quad \mathfrak{x}_2 = [xE_2],\quad \mathfrak{x}_3 = [xE_3].$$

Und führt man diese Werte für die Dreieckskoordinaten $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ des Punktes x in die Gleichung (1) ein, so nimmt der Ausdruck für die „ternäre Form dritter Ordnung" $\mathfrak{f}_3(\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3)$ die Gestalt an:

$$(4)\qquad \mathfrak{f}_3(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) = \mathfrak{a}_{111}[xE_1]^3 + \cdots + 3\,\mathfrak{a}_{112}[xE_1]^2[xE_2] + \cdots \\ + 6\,\mathfrak{a}_{123}[xE_1][xE_2][xE_3].$$

Bezeichnet man daher noch den Lückenausdruck, der entsteht, wenn man auf der rechten Seite von (4) den Punkt x überall durch eine Punktlücke l ersetzt, mit $\boldsymbol{A}_3$, setzt also:

$$(5)\qquad \boldsymbol{A}_3 = \mathfrak{a}_{111}[lE_1]^3 + \cdots + 3\,\mathfrak{a}_{112}[lE_1]^2[lE_2] + \cdots \\ + 6\,\mathfrak{a}_{123}[lE_1][lE_2][lE_3],$$

so ist $\boldsymbol{A}_3$ ein konstanter Lückenausdruck mit 3 Punktlücken in jedem Gliede, der bei Ausfüllung dieser Lücken in eine Zahl übergeht, oder, wie wir in

Übereinstimmung mit S. 172 sagen wollen, eine „ternäre Lückenform dritter Ordnung“, und man kann der Gleichung dritten Grades (1) auch die Form geben:

$$A_3 x^3 = 0. \tag{6}$$

Zugleich wird die ternäre Form dritter Ordnung aus (1):

$$\mathfrak{f}_3(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) = A_3 x^3, \tag{7}$$

wo mit Rücksicht auf den aus (2) folgenden Wert von x^3:

$$A_3 x^3 = \begin{cases} \quad A_3 e_1^3 \quad \mathfrak{x}_1^3 + A_3 e_2^3 \quad \mathfrak{x}_2^3 + A_3 e_3^3 \quad \mathfrak{x}_3^3 \\ + 3 A_3 e_1^2 e_2 \quad \mathfrak{x}_1^2 \mathfrak{x}_2 + 3 A_3 e_1^2 e_3 \quad \mathfrak{x}_1^2 \mathfrak{x}_3 + 3 A_3 e_1 e_2^2 \quad \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2^2 \\ + 3 A_3 e_1 e_3^2 \quad \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_3^2 + 3 A_3 e_2^2 e_3 \quad \mathfrak{x}_2^2 \mathfrak{x}_3 + 3 A_3 e_2 e_3^2 \quad \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3^2 \\ + 6 A_3 e_1 e_2 e_3 \quad \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3 \end{cases} \tag{8}$$

ist. Die Vergleichung dieses Ausdrucks für die ternäre Form dritter Ordnung:

$$A_3 x^3 = \mathfrak{f}_3(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3)$$

mit dem Ausdruck (1) liefert dann für die Koeffizienten $\mathfrak{a}_{ijk}$ in (1) die Werte:

$$\mathfrak{a}_{ijk} = A_3 e_i e_j e_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad i \leqq j \leqq k. \tag{9}$$

Und setzt man ferner noch fest, daß sich die Werte der Koeffizienten $\mathfrak{a}_{ijk}$ nicht ändern sollen, wenn man ihre 3 Indizes in beliebiger Weise miteinander vertauscht, daß also:

$$\mathfrak{a}_{ijk} = \mathfrak{a}_{jki} = \mathfrak{a}_{kij} = \mathfrak{a}_{ikj} = \mathfrak{a}_{jik} = \mathfrak{a}_{kji} \tag{10}$$

sein soll, und verfügt endlich in Übereinstimmung mit S. 174 ff. über die Rechengesetze eines „algebraischen Produktes $\{xyz\}$ dreier Punkte x, y, z“, mit dem die ternäre Lückenform dritter Ordnung A_3 multipliziert werden soll, und über seine Verknüpfung mit der Lückenform A_3 in der Weise, daß jede Art der Zusammenfassung und Vertauschung der Faktoren jenes algebraischen Produktes zulässig wird, so hat man zu setzen:

$$A_3\{xyz\} = A_3\{x\{yz\}\} = A_3 xyz \quad \text{und} \tag{11}$$

$$\begin{cases} [lE_1]^3 xyz = [xE_1][yE_1][zE_1] \\ \quad [lE_1]^2 [lE_2] xyz \\ = \frac{1}{3}\{[xE_1][yE_1][zE_2] + [yE_1][zE_1][xE_2] + [zE_1][xE_1][yE_2]\} \\ \quad [lE_1][lE_2][lE_3] xyz \\ = \frac{1}{6}\left\{\begin{array}{l} \quad [xE_1][yE_2][zE_3] + [yE_1][zE_2][xE_3] + [zE_1][xE_2][yE_3] \\ + [xE_1][zE_2][yE_3] + [yE_1][xE_2][zE_3] + [zE_1][yE_2][xE_3] \end{array}\right\}. \end{cases} \tag{12}$$

Dann wird allgemein:

$$[lE_i][lE_j][lE_k] xyz = [lE_i][lE_j][lE_k] yzx = \cdots, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \tag{13}$$

und auch

(14) $$A_3 xyz = A_3 yzx = \cdots.$$

Es gelten daher wegen (10) und (14) die in (9) angegebenen Gleichungen auch ohne die einschränkenden Bedingungen:

$$i \leqq j \leqq k,$$

d. h., es wird:

(15) $$\mathfrak{a}_{ijk} = A_3 e_i e_j e_k,$$

vorausgesetzt, daß das Gebinde ijk irgendeine Variation mit Wiederholung zur dritten Klasse aus den Elementen 1, 2, 3 darstellt.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (10) kann man übrigens den Ausdruck (5) für die ternäre Lückenform dritter Ordnung A_3 auch in der Form schreiben:

(16) $$A_3 = \sum \mathfrak{a}_{ijk} [lE_i][lE_j][lE_k],$$

wo die Summe zu erstrecken ist über alle Variationen mit Wiederholung zur dritten Klasse, die sich aus den Elementen 1, 2, 3 bilden lassen.

Begriff einer ebenen Kurve dritter Ordnung. Wir stellen die folgende Erklärung auf:

Erklärung: Man nennt ein Punktgebilde einer Ebene, dessen laufende Dreieckskoordinaten $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ einer nicht durch jeden Punkt der Ebene erfüllten, in bezug auf $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ homogenen Zahlgleichung dritten Grades Genüge leisten, eine ebene Kurve dritter Ordnung.

Hierfür kann man, wie die Vergleichung von (1) und (4) zeigt, auch sagen: Man nennt ein Punktgebilde einer Ebene, dessen laufende Punkte x einer nicht durch jeden Punkt der Ebene erfüllten, in bezug auf x homogenen Zahlgleichung dritten Grades Genüge leisten, eine ebene Kurve dritter Ordnung.

Auf Grund dieser Erklärung kann man dann den Satz aussprechen:

Satz 728: Ist A_3 die durch die Gleichung (5) definierte ternäre Lückenform dritter Ordnung und x ein Punkt der Ebene, so stellt die Gleichung:

(6) $$A_3 x^3 = 0,$$

falls sie nicht durch jeden Punkt der Ebene erfüllt wird, eine ebene Kurve dritter Ordnung dar, und zwar die allgemeinste ebene Kurve dritter Ordnung, wenn die 10 Koeffizienten $\mathfrak{a}_{ijk}$ der Lückenform (5) ganz beliebige Zahlgrößen sind.

In der Tat ist ja die linke Seite der Gleichung (1) bei beliebigen Werten der Koeffizienten $\mathfrak{a}_{ijk}$ der allgemeinste Ausdruck dritten Grades, der sich aus den Dreieckskoordinaten $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ des Punktes x bilden läßt, und also der nach der Gleichung (7) mit jener linken Seite der Gleichung (1) gleichwertige Ausdruck $A_3 x^3$ der allgemeinste Ausdruck einer ternären Form dritter Ordnung.

Schnittpunkte einer ebenen Kurve dritter Ordnung mit einer Geraden. Schneidet man die Kurve dritter Ordnung (6), oder, wie wir auch sagen wollen, die Kurve dritter Ordnung A_3, mit einer beliebigen Geraden $[yz]$, nämlich mit der Verbindungsgeraden zweier beliebigen, aber fest gegebenen Punkte y und z ihrer Ebene, so wird sich der Ausdruck für einen solchen Schnittpunkt x durch eine Vielfachensumme von der Form:

$$x = y + \mathfrak{h} z \tag{17}$$

darstellen lassen, bei welcher der Parameter $\mathfrak{h}$ in der Weise zu bestimmen ist, daß der Ausdruck (17) die Gleichung (6) der Kurve A_3 befriedigt. Man erhält also für den Parameter $\mathfrak{h}$ eines Schnittpunktes der Geraden $[yz]$ mit der Kurve A_3 die Gleichung:

$$A_3(y + \mathfrak{h} z)^3 = 0 \tag{18}$$

oder, falls man die Klammer auflöst, die Gleichung:

$$A_3 y^3 + 3\mathfrak{h} A_3 y^2 z + 3\mathfrak{h}^2 A_3 y z^2 + \mathfrak{h}^3 A_3 z^3 = 0, \tag{19}$$

d. h. es ergibt sich für die Parameter $\mathfrak{h}$ der Schnittpunkte eine Zahlgleichung dritten Grades, deren 4 Koeffizienten:

$$A_3 y^3, \quad 3A_3 y^2 z, \quad 3A_3 y z^2, \quad A_3 z^3 \tag{20}$$

konstante Zahlgrößen sind. Wird daher die Gleichung (19) nicht für jeden Wert von $\mathfrak{h}$ erfüllt, d. h. verschwinden nicht die 4 Koeffizienten (20) gleichzeitig, so liefert die Gleichung (19) für die Parameter $\mathfrak{h}$ der Schnittpunkte x der Geraden $[yz]$ mit der Kurve dritter Ordnung A_3 drei Werte. Bezeichnet man diese drei Wurzeln der Gleichung (19) mit $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{h}_3$, so findet man für die zugehörigen Schnittpunkte x_1, x_2, x_3 die Ausdrücke:

$$x_1 = y + \mathfrak{h}_1 z, \quad x_2 = y + \mathfrak{h}_2 z, \quad x_3 = y + \mathfrak{h}_3 z. \tag{21}$$

Die Kurve dritter Ordnung A_3 wird somit von der Geraden $[yz]$ in 3 Punkten geschnitten.

In dem Falle des Verschwindens aller 4 Koeffizienten (20) dagegen gehört die ganze Gerade $[yz]$ der Kurve dritter Ordnung A_3 an, und die Kurve dritter Ordnung zerfällt alsdann in diese Gerade und eine Kurve zweiter Ordnung. Dieser Fall tritt ein, sobald die Gerade $[yz]$ mit der Kurve dritter Ordnung mehr als 3 Punkte gemein hat. Man hat also den Satz:

Satz 729: Eine ebene Kurve dritter Ordnung wird von einer jeden Geraden ihrer Ebene, die nicht ganz der Kurve angehört, in drei Punkten geschnitten, die allerdings auch komplex sein können. Hat eine Gerade mit einer Kurve dritter Ordnung mehr als drei

Punkte gemein, so bildet die ganze Gerade einen Teil der Kurve dritter Ordnung.

Setzen wir die Koeffizienten a_{ijk} der Gleichung (1) und also auch die des Lückenausdrucks (5) als reell voraus und bezeichnen die zugehörige Kurve dritter Ordnung als „reelle ebene Kurve dritter Ordnung", so sind die Wurzeln der Gleichung (19) entweder alle 3 reell, oder es ist eine von ihnen reell, die beiden anderen konjugiert komplex. Und Entsprechendes gilt dann von den Schnittpunkten der Kurve A_3 mit der Geraden $[yz]$. Es ergibt sich demnach als Ergänzung des Satzes 729 der speziellere Satz:

Satz 730: Eine reelle ebene Kurve dritter Ordnung wird von einer jeden Geraden ihrer Ebene, die nicht ganz der Kurve angehört, in drei reellen Punkten oder in einem reellen und in zwei konjugiert komplexen Punkten geschnitten.

Die Asymptoten einer Kurve dritter Ordnung. Der Satz 730 läßt sich insbesondere auf die Schnittpunkte einer reellen ebenen Kurve dritter Ordnung mit der unendlich fernen Geraden anwenden. Bezeichnet man daher eine nicht ganz im Unendlichen liegende Tangente, die man an eine ebene Kurve in einem Punkte legen kann, den sie mit der unendlich fernen Geraden gemein hat, als eine Asymptote der Kurve, so folgt aus dem Satze 730 ohne weiteres, daß eine reelle ebene Kurve dritter Ordnung, der nicht die unendlich ferne Gerade selbst als Teil angehört, *mit der unendlich fernen Geraden entweder drei reelle Punkte oder einen reellen Punkt und zwei konjugiert komplexe Punkte gemein hat.*

Wird also *in dem ersten Falle* die Kurve dritter Ordnung nicht von der unendlich fernen Geraden berührt, so besitzt sie *drei reelle Asymptoten* (vgl. die Kurve dritter Ordnung H_3 in der weiter unten folgenden Fig. 109). *In dem zweiten Falle* besitzt sie *eine reelle Asymptote* (vgl. die unten folgende Fig. 100).

Der Übergang zwischen diesen beiden Fällen wird durch den Fall vermittelt, wo die Kurve dritter Ordnung mit der unendlich fernen Geraden *zwei zusammenfallende und einen weiteren reellen Punkt* gemein hat, wo also *die unendlich ferne Gerade eine Tangente der Kurve bildet, außerdem aber noch eine reelle Asymptote vorhanden ist.*

Fallen dagegen *alle drei Schnittpunkte der Kurve dritter Ordnung mit der unendlich fernen Geraden in einen Punkt zusammen,* so hat die Kurve *die unendlich ferne Gerade zur Wendetangente* (vgl. den folgenden Abschnitt) und *besitzt keine Asymptote.*

Polaren in bezug auf eine Kurve dritter Ordnung. Um den Begriff der Polaren in bezug auf eine Kurve dritter Ordnung zu entwickeln, knüpfen wir an den Begriff *der Polare eines Punktes in bezug auf eine Kurve zweiter Ordnung an.* Wir wiederholen dazu zunächst die auf S. 184 ff. des ersten

Teils dieses Bandes gegebene Einführung der Polare eines Punktes y in bezug auf eine Kurve zweiter Ordnung mit der Veränderung, daß wir jetzt die Gleichung der Kurve zweiter Ordnung in der auf S. 173 des vorliegenden Teils entwickelten Form:

$$A_2 x^2 = 0 \tag{22}$$

voraussetzen, in der A_2 eine ternäre Lückenform *zweiter* Ordnung bedeutete.

Die Gleichung der Polare eines Punktes y in bezug auf eine Kurve zweiter Ordnung ging aus der Forderung hervor, diejenigen Punkte z der Ebene zu bestimmen, die vom Punkte y durch die Kurve zweiter Ordnung harmonisch getrennt werden. Nun erhält man die Schnittpunkte der Kurve zweiter Ordnung A_2 mit einer Geraden $[yz]$, indem man in der Gleichung (22) der Kurve A_2 für x den Wert:

$$x = y + \mathfrak{h} z \tag{23}$$

einsetzt, und es ergibt sich dadurch für die Parameter $\mathfrak{h}$ jener Schnittpunkte die Gleichung:

$$A_2 (y + \mathfrak{h} z)^2 = 0 \tag{24}$$

oder entwickelt die Gleichung:

$$A_2 y^2 + 2\mathfrak{h} A_2 yz + \mathfrak{h}^2 A_2 z^2 = 0\,. \tag{25}$$

Sind $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ die Wurzeln dieser in bezug auf $\mathfrak{h}$ quadratischen Zahlgleichung, und also:

$$x_1 = y + \mathfrak{h}_1 z \quad \text{und} \quad x_2 = y + \mathfrak{h}_2 z \tag{26}$$

die Schnittpunkte der Geraden $[yz]$ mit der Kurve zweiter Ordnung A_2, so ist die obige Forderung, daß der Punktwurf yzx_1x_2 harmonisch sei, gleichbedeutend mit der Vorschrift, daß die beiden Parameter $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ der Schnittpunkte (26) einander entgegengesetzt gleich seien, oder daß:

$$\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 = 0 \tag{27}$$

sei. Diese Bedingung aber wird dann und nur dann erfüllt, wenn der Koeffizient von $\mathfrak{h}$ in der Gleichung (25) verschwindet, d. h., wenn die Gleichung besteht:

$$A_2 yz = 0\,. \tag{28}$$

Die Gleichung (28) wird also durch diejenigen Punkte z befriedigt, die der obigen Forderung Genüge leisten, oder, was dasselbe ist, die Gleichung (28) ist die Gleichung der Polare des Punktes y in bezug auf die Kurve zweiter Ordnung A_2. Und da die Gleichung (28) in bezug auf z vom ersten Grade ist, so bestätigt sie den im ersten Teil dieses Bandes bewiesenen Satz 404, nach welchem die Polare eines Punktes y in bezug auf eine Kurve zweiter Ordnung eine gerade Linie ist.

Nach dieser Einschaltung über die Polare eines Punktes y hinsichtlich einer Kurve zweiter Ordnung kehren wir zu den Kurven dritter Ordnung zurück. Wir betrachten in den Gleichungen (17) bis (19) und in den Ausdrücken (20) nur den Punkt y als fest, den Punkt z aber als veränderlich, und fragen unter dieser Voraussetzung nach der Bedeutung des Verschwindens der Koeffizienten von $\mathfrak{h}^2$ und $\mathfrak{h}$ in der Gleichung (19), d. h. nach der geometrischen Bedeutung der Gleichungen:

(29) $$A_3 y z^2 = 0 \quad \text{und}$$

(30) $$A_3 y^2 z = 0 .$$

Man kann zunächst bemerken, daß bei fest gegebenem y der Ausdruck $A_3 y$ ein konstanter Lückenausdruck mit nur noch zwei Punktlücken in jedem Gliede, und der Ausdruck $A_3 y^2$ ein konstanter Lückenausdruck mit nur noch einer Punktlücke in jedem Gliede ist. Und da überdies beide Ausdrücke bei Ausfüllung ihrer Lücken in eine Zahl übergehen, so ist der Ausdruck $A_3 y$ eine Lückenform zweiter Ordnung und der Ausdruck $A_3 y^2$ eine Lückenform erster Ordnung. Bei veränderlichem z stellt daher die Gleichung (29) *eine Kurve zweiter Ordnung*, die Gleichung (30) *eine gerade Linie* dar.

Man nennt die Kurve zweiter Ordnung (29) oder, wie wir auch sagen wollen, die Kurve zweiter Ordnung $A_3 y$ die erste Polare oder auch die konische Polare des Punktes y in bezug auf die Kurve dritter Ordnung A_3, und die Gerade (30) oder, wie wir auch sagen wollen, die Gerade $A_3 y^2$ die zweite Polare oder auch die gerade Polare des Punktes y in bezug auf die Kurve dritter Ordnung A_3, den Punkt y den Pol jener Polaren in bezug auf diese Kurve.

Um die geometrische Bedeutung dieser beiden Polaren zu finden, berücksichtige man, daß wegen (19):

(31) $$-\frac{3 A_3 y z^2}{A_3 z^3} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 + \mathfrak{h}_3 \quad \text{und}$$

(32) $$\frac{3 A_3 y^2 z}{A_3 z^3} = \mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_3 + \mathfrak{h}_3 \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2$$

ist, wobei wir vor der Hand voraussetzen, daß:

(33) $$A_3 z^3 \neq 0$$

sei, daß also der Punkt z nicht der Kurve dritter Ordnung A_3 angehört. Man sieht daher, daß zugleich mit den Gleichungen (29) und (30) beziehlich auch die Gleichungen:

(34) $$\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 + \mathfrak{h}_3 = 0 \quad \text{und}$$

(35) $$\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_3 + \mathfrak{h}_3 \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2 = 0$$

befriedigt werden, von denen die Gleichung (34) der Gleichung (27) für die Polare in bezug auf eine Kurve zweiter Ordnung entspricht, so daß die Bezeichnung „Polare des Punktes y in bezug auf die Kurve dritter Ordnung A_3“ für die Kurve (29) gerechtfertigt erscheint.

Die geometrische Bedeutung der Gleichungen (34) und (35) aber erkennt man folgendermaßen. Aus der obigen Gleichung:

$$x = y + \mathfrak{h} z \tag{17}$$

folgt durch äußeres Vormultiplizieren mit x die Gleichung:

$$0 = [xy] + \mathfrak{h}\,[xz],$$

also für den Parameter $\mathfrak{h}$ des Punktes x der Wert:

$$\mathfrak{h} = \frac{[yx]}{[xz]}. \tag{36}$$

Sind somit y und z einfache Punkte, so ist der Parameter $\mathfrak{h}$ das Abstandsverhältnis des Punktes x von den Punkten y und z. Insbesondere wird:

$$\mathfrak{h}_1 = \frac{[yx_1]}{[x_1 z]}, \quad \mathfrak{h}_2 = \frac{[yx_2]}{[x_2 z]}, \quad \mathfrak{h}_3 = \frac{[yx_3]}{[x_3 z]}. \tag{37}$$

Die Gleichungen (34) und (35) verwandeln sich daher in:

$$\frac{[yx_1]}{[x_1 z]} + \frac{[yx_2]}{[x_2 z]} + \frac{[yx_3]}{[x_3 z]} = 0 \quad \text{und} \tag{38}$$

$$\frac{[yx_2]\,[yx_3]}{[x_2 z]\,[x_3 z]} + \frac{[yx_3]\,[yx_1]}{[x_3 z]\,[x_1 z]} + \frac{[yx_1]\,[yx_2]}{[x_1 z]\,[x_2 z]} = 0. \tag{39}$$

Hier sind die drei Summanden der linken Seite von (38) die drei Abstandsverhältnisse der drei Schnittpunkte x_1, x_2, x_3 der Geraden $[yz]$ mit der Kurve dritter Ordnung A_3 von den Punkten y und z. Man kann daher die Punkte z der konischen Polare (29) des Punktes y in bezug auf die Kurve dritter Ordnung A_3 auch dadurch charakterisieren, daß für sie die Summe dieser drei Abstandsverhältnisse verschwindet, während die Punkte z der geraden Polare (30) des Punktes y in bezug auf die Kurve dritter Ordnung A_3 dadurch gekennzeichnet sind, daß für sie die Summe der Produkte zu je zweien aus diesen Abstandsverhältnissen null wird.

Da ferner die Gleichungen (38) und (39), wie man bei Beseitigung ihrer Nenner erkennt, in bezug auf z beziehlich vom zweiten und ersten Grade sind, so liefern sie eine Bestätigung dafür, daß die erste Polare (38) eines Punktes y hinsichtlich einer Kurve dritter Ordnung eine Kurve zweiter Ordnung, die zweite Polare (39) aber eine gerade Linie ist.

Man kann noch bemerken, daß bei festgehaltenem z und veränderlichem y die Gleichung (29) wegen der Vertauschbarkeit der Faktoren y und z^2 die zweite (gerade) Polare des Punktes z in bezug auf die Kurve dritter Ordnung A_3 darstellt, und unter derselben Voraussetzung die Gleichung (30) wegen der Vertauschbarkeit der Faktoren y^2 und z die erste (konische) Polare des Punktes z in bezug auf die Kurve A_3.

Aus dieser doppelten Bedeutung der Gleichung (29) kann man folgern: Enthält die konische Polare $A_3 y$ eines Punktes y in bezug auf eine Kurve dritter Ordnung A_3 einen Punkt z, wird also die Gleichung (29) für gegebenes y durch den Punkt z erfüllt, so geht andererseits auch die gerade Polare $A_3 z^2$ des Punktes z in bezug auf jene Kurve dritter Ordnung A_3 durch den Punkt y hindurch und umgekehrt (Fig. 100).

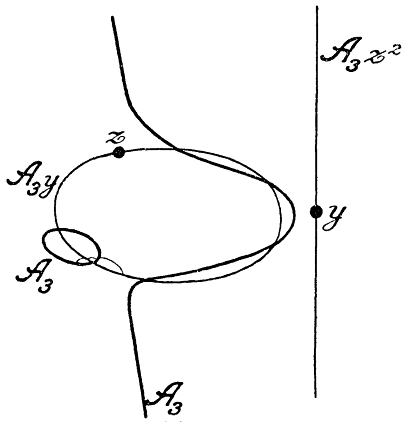


Fig. 100.

Man hat also den folgenden Satz, der einer bekannten Polareneigenschaft der Kurven zweiter Ordnung entspricht (vgl. Satz 394):

Satz 731: Geht die konische Polare $A_3 y$ eines Punktes y hinsichtlich einer Kurve dritter Ordnung A_3 durch einen Punkt z hindurch, so geht andererseits auch die gerade Polare $A_3 z^2$ des Punktes z durch den Punkt y hindurch und umgekehrt.

Es ist ferner zu beachten, daß man auf die Gleichung:

$$(30) \qquad A_3 y^2 z = 0$$

der geraden Polare des Punktes y hinsichtlich der Kurve dritter Ordnung A_3 auch geführt wird, wenn man in bezug auf die konische Polare des Punktes y hinsichtlich dieser Kurve dritter Ordnung, d. h. in bezug auf die Kurve zweiter Ordnung:

$$(29) \qquad A_3 y z^2 = 0,$$

die erste und einzige Polare des Punktes y bildet.

In der Tat braucht man nur zu berücksichtigen, daß der Ausdruck $A_3 y$ eine Lückenform zweiter Ordnung ist. Setzt man aber:

$$(40) \qquad A_3 y = A_2,$$

so nimmt die Gleichung (29) die Form an:

$$(41) \qquad A_2 z^2 = 0,$$

und in bezug auf die Kurve zweiter Ordnung (41) lautet die Gleichung der Polare des Punktes y:

$$(42) \qquad A_2 y z = 0,$$

oder wegen (40) wie oben:

$$(30) \qquad A_3 y^2 z = 0,$$

und man hat somit den Satz:

Satz 732: Die zweite oder gerade Polare $A_3 y^2$ eines Punktes y hinsichtlich einer Kurve dritter Ordnung A_3 ist zugleich die Polare desselben Punktes y hinsichtlich der ersten oder konischen Polare $A_3 y$ dieses Punktes in bezug auf jene Kurve dritter Ordnung (Fig. 101).

Das Auftreten eines Doppelpunktes bei einer Kurve dritter Ordnung. Bevor wir in der geometrischen Deutung der geraden und der konischen Polare eines Punktes y hinsichtlich einer Kurve dritter Ordnung fortfahren, scheiden wir noch den Fall aus, wo die Gleichung:

$$(30) \qquad A_3 y^2 z = 0$$

der geraden Polare eines Punktes y hinsichtlich der Kurve dritter Ordnung A_3 *durch jeden Punkt z der Ebene erfüllt wird,* so daß also jene gerade Polare ganz unbestimmt bleibt.

Zunächst kann man in diesem Falle die Gleichung (30) etwas einfacher in der Form schreiben:

$$(43) \qquad A_3 y^2 = 0,$$

in der die linke Seite eine Lückenform erster Ordnung darstellt. Eine solche Lückenform erster Ordnung werden wir nämlich, entsprechend wie früher einen extensiven Bruch, der Punkte in Stäbe überführt (vgl. z. B. S. 218f. des ersten Teils dieses Bandes), dann und nur dann gleich Null setzen, wenn sie mit *jedem* Punkte der Ebene multipliziert Null liefert. Insbesondere wird man also die Lückenform $A_3 y^2$ dann und nur dann gleich Null setzen dürfen, wenn die Gleichung (30) für jeden Punkt z der Ebene erfüllt wird. Hieraus folgt, daß die Gleichung (43) auch die Gleichung:

$$(44) \qquad A_3 y^3 = 0$$

nach sich zieht, die aus (30) hervorgeht, wenn man $z = y$ setzt, und welche zeigt, daß der Punkt y der Kurve A_3 angehört.

In der Gleichung (19) für die Parameter $\mathfrak{h}$ der Schnittpunkte der Geraden $[yz]$ mit der Kurve dritter Ordnung A_3 verschwinden dann ferner unter der Voraussetzung des Bestehens der Gleichung (43) wegen (44) und (30) die beiden ersten Koeffizienten $A_3 y^3$ und $3 A_3 y^2 z$, und zwar der letztere *für beliebige Werte von z.* Die Gleichung (19) besitzt daher zwei gleiche Wurzeln $\mathfrak{h} = 0$, und die durch den Punkt y der Kurve A_3 gelegte Gerade $[yz]$ schneidet demnach, *wie auch der Punkt z liegen mag,* die Kurve dritter Ordnung A_3 in zwei mit dem Punkte y zusammenfallenden Punkten (Fig. 102).[1]

1) Die obigen Figg. 102, 105, 108 und 109 der Kurven dritter Ordnung mit Doppelpunkt oder Spitze sind, zum Teil verkleinert, dem Buche von H. Wieleitner, Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung, Leipzig 1905, entnommen, in dem mit Recht auf sorgfältige Zeichnung der behandelten Kurven besonderer Wert gelegt ist.

Ein Punkt y, der diese Eigenschaft hat, heißt „ein Doppelpunkt der Kurve dritter Ordnung“, und man hat den Satz:

Satz 733: Ist A_3 eine ternäre Lückenform dritter Ordnung, so ist die Gleichung:

$$A_3 y^2 = 0 \tag{43}$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Punkt y ein Doppelpunkt der Kurve dritter Ordnung A_3 sei.

Man kann noch hinzufügen:

Satz 734: Die gerade Polare $A_3 y^2$ eines Punktes y in bezug auf eine Kurve dritter Ordnung A_3 wird dann und nur dann un-

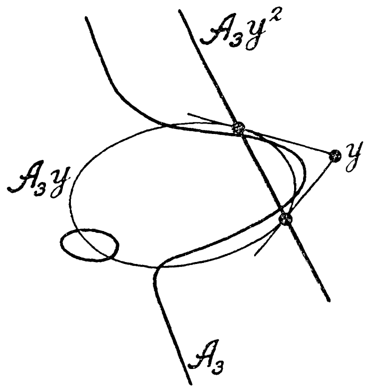


Fig. 101.

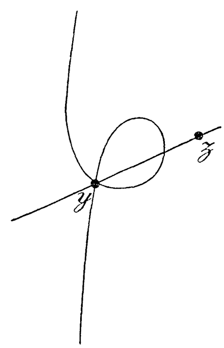


Fig. 102.

bestimmt, wenn ihr Pol y in einen Doppelpunkt der Kurve dritter Ordnung fällt.

Schließlich sei noch bemerkt, *daß nicht jede Kurve dritter Ordnung einen Doppelpunkt aufweisen wird,* d. h. also einen Punkt y, der die Gleichung (43) befriedigt. Multipliziert man nämlich die Gleichung (43) mit den Ecken e_1, e_2, e_3 des Fundamentaldreiecks, so erhält man die drei Gleichungen:

$$A_3 y^2 e_1 = 0\,, \quad A_3 y^2 e_2 = 0\,, \quad A_3 y^2 e_3 = 0\,. \tag{45}$$

Und führt man in sie für y seinen Ableitausdruck:

$$y = \mathfrak{y}_1 e_1 + \mathfrak{y}_2 e_2 + \mathfrak{y}_3 e_3 \tag{46}$$

ein, so verwandeln sie sich in drei homogene quadratische Gleichungen in bezug auf $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$, $\mathfrak{y}_3$, deren Koeffizienten von der Form:

$$A_3 e_i e_j e_k\,, \quad i, j, k = 1, 2, 3\,,$$

sind, also nach (15) mit den Koeffizienten $\mathfrak{a}_{ijk}$ der ternären Lückenform dritter Ordnung A_3 übereinstimmen. Aus diesen drei homogenen quadratischen Gleichungen aber kann man die Verhältnisse $\frac{\mathfrak{y}_1}{\mathfrak{y}_3}$ und $\frac{\mathfrak{y}_2}{\mathfrak{y}_3}$ eliminieren und erhält so eine Bedingungsgleichung zwischen den Koeffizienten $\mathfrak{a}_{ijk}$ der ternären Lückenform dritter Ordnung A_3 allein. Damit aber ist gezeigt, daß eine Kurve dritter Ordnung nur dann einen Doppelpunkt aufweisen wird, wenn zwischen den Koeffizienten der zugehörigen ternären Lückenform dritter Ordnung A_3 eine gewisse Bedingungsgleichung herrscht.

Die gerade Polare eines Punktes einer Kurve dritter Ordnung in bezug auf diese Kurve. Nach dieser Einschaltung über den Doppelpunkt einer Kurve dritter Ordnung kehren wir zur geometrischen Deutung der geraden und konischen Polare eines Punktes y hinsichtlich einer Kurve dritter Ordnung zurück. Die gerade Polare gewinnt eine besonders einfache Bedeutung, wenn ihr Pol y selbst der Bezugskurve dritter Ordnung angehört, ohne in einen Doppelpunkt dieser Kurve zu fallen. Alsdann genügt der Punkt y der Gleichung:

(44) $$A_3 y^3 = 0\,,$$

während zugleich das Produkt:

(47) $$A_3 y^2 \neq 0$$

ist. Ist jetzt z ein Punkt der geraden Polare eines solchen Punktes y, so besteht zusammen mit der Gleichung (44) zwischen den Punkten y und z die obige Gleichung:

(30) $$A_3 y^2 z = 0\,.$$

Und da diese Gleichung wegen (47) nicht mehr für jeden Punkt z der Ebene erfüllt wird, so stellt sie eine gerade Linie dar, und diese gerade Linie ist wegen (44) identisch mit der Geraden $[yz]$. Nun verschwinden aber wegen (44) und (30) in der Gleichung dritten Grades (19) für die Parameter $\mathfrak{h}$ der Schnittpunkte $y + \mathfrak{h}z$ der Geraden $[yz]$ mit der Kurve dritter Ordnung A_3 wieder die beiden ersten Koeffizienten, und die Gleichung (19) besitzt daher zwei gleiche Wurzeln $\mathfrak{h} = 0$, d. h. es fallen von den 3 Schnittpunkten der Geraden $[yz]$ mit der Kurve dritter Ordnung A_3 2 Schnittpunkte mit dem Punkte y zusammen. Es ist also die Gerade $[yz]$ oder, was dasselbe ist, die gerade Polare (30) des Punktes y, die Tangente der Kurve dritter Ordnung im Punkte y. Damit ist der Satz bewiesen:

Satz 735: Die zweite oder gerade Polare $A_3 y^2$ eines Punktes y in bezug auf eine Kurve dritter Ordnung A_3 ist, falls der Pol y auf dieser Kurve dritter Ordnung liegt, ohne mit einem Doppelpunkt der Kurve zusammenzufallen, die Tangente der Kurve dritter Ordnung in dem Pole y.

Die konische Polare eines beliebigen Punktes in bezug auf eine Kurve dritter Ordnung. Aus dem Satze 735 folgt dann wieder ein weiterer Satz, der zu einer anschaulichen Darstellung der konischen Polare eines beliebigen Punktes y hinsichtlich einer Kurve dritter Ordnung hinführt, nämlich der Satz:

Satz 736: Die erste oder konische Polare $A_3 y$ eines beliebigen Punktes y in bezug auf eine Kurve dritter Ordnung A_3 geht durch die Berührungspunkte der Tangenten hindurch, die man von dem Punkte y an die Kurve dritter Ordnung legen kann, und umgekehrt ist jeder Schnittpunkt einer Kurve dritter Ordnung A_3 mit der konischen Polare $A_3 y$ eines beliebigen Punktes y hinsichtlich dieser Kurve, falls er nicht ein Doppelpunkt der Kurve dritter Ordnung ist, der Berührungspunkt einer Tangente, die man von dem Punkte y an die Kurve dritter Ordnung ziehen kann.

In der Tat, ist z der Berührungspunkt einer Tangente, die vom Punkte y an die Kurve dritter Ordnung A_3 geht (Fig. 103), so ist diese Tangente nach dem Satze 735 die gerade Polare des Punktes z in bezug auf die Kurve dritter Ordnung A_3. Sie genügt also nach S. 215f. der Gleichung:

$$A_3 z^2 u = 0 ,$$

in der u den laufenden Punkt der Tangente bezeichnet. Und diese Gleichung muß insbesondere befriedigt werden, wenn man $u = y$ setzt, da die Tangente im Punkte z nach der Voraussetzung durch den Punkt y gehen soll, d. h., es muß die Gleichung bestehen:

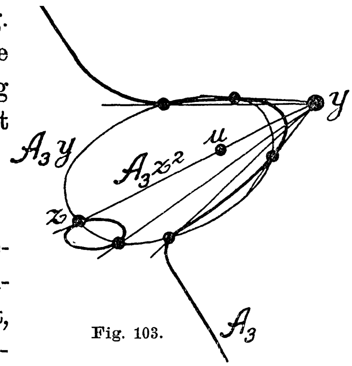


Fig. 103.

$$(48) \qquad A_3 z^2 y = 0$$

oder, was dasselbe ist, die Gleichung:

$$(29) \qquad A_3 y z^2 = 0 .$$

Diese Gleichung aber ist, wenn y als fester Punkt aufgefaßt wird, zugleich die Gleichung der konischen Polare des Punktes y in bezug auf die Kurve dritter Ordnung A_3. Die Gleichung (29) zeigt daher, daß der Berührungspunkt z einer jeden Tangente, die man von einem beliebigen Punkte y der Ebene an eine Kurve dritter Ordnung ziehen kann, auf der konischen Polare des Punktes y hinsichtlich der Kurve dritter Ordnung A_3 liegt. Und damit ist der erste Teil des Satzes 736 bewiesen.

Aber auch die Richtigkeit der im zweiten Teil des Satzes 736 enthaltenen Umkehrung leuchtet sofort ein. Denn, wenn ein *Punkt* z sowohl auf der Kurve dritter Ordnung A_3 liegt, also die Gleichung:

$$(49) \qquad A_3 z^3 = 0$$

befriedigt, wie auch der konischen Polare $A_3 y$ des Punktes y hinsichtlich der Kurve A_3 angehört, d. h. der Gleichung (29) Genüge leistet, so erfüllt der *Punkt* y zugleich die mit (29) gleichwertige Gleichung (48); und diese stellt, wenn man den Punkt z als fest gegeben, den Punkt y aber als veränderlich auffaßt und ferner voraussetzt, daß:

$$(50) \qquad A_3 z^2 \neq 0,$$

der Punkt z also kein Doppelpunkt der Kurve dritter Ordnung A_3 sei, nach dem Satze 735 die Tangente der Kurve dritter Ordnung A_3 im Punkte z dar. Diese Tangente geht somit nach der Gleichung (48) durch den Punkt y, den Pol der konischen Polare (29), hindurch.

Zugleich ergibt sich ohne weiteres aus der Form der Gleichung (29) der konischen Polare eines Punktes y hinsichtlich der Kurve dritter Ordnung A_3, daß diese konische Polare einen etwaigen Doppelpunkt z der Kurve dritter Ordnung enthalten muß, wo auch der Pol y der konischen Polare liegen mag. Denn für einen Doppelpunkt z der Kurve A_3 besteht nach dem Satze 733 die Gleichung:

$$(51) \qquad A_3 z^2 = 0,$$

und aus dieser folgt für einen jeden Punkt y der Ebene die Gleichung (29). Mat hat daher den Satz:

Satz 737: Die erste oder konische Polare eines beliebigen Punktes y hinsichtlich einer Kurve dritter Ordnung geht durch einen etwaigen Doppelpunkt dieser Kurve hindurch.

Die Anzahl der Tangenten, die sich an eine ebene Kurve dritter Ordnung ohne Doppelpunkt von einem Punkte ihrer Ebene legen lassen. Um aus dem Satze 736 weitere Folgerungen zu ziehen, setzen wir aus der allgemeinen Theorie der algebraischen Kurven den Satz von Bézout voraus, nämlich den Satz:

Satz 738: Satz von Bézout: Zwei ebene algebraische Kurven von der $m$ten und $n$ten Ordnung schneiden sich in mn Punkten.[1])

Dabei ist nach Analogie von S. 211f. unter einer ebenen algebraischen Kurve $n$ter Ordnung ein Punktgebilde einer Ebene zu verstehen, dessen laufende Dreieckskoordinaten $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ einer nicht durch jeden Punkt der Ebene erfüllten, in bezug auf $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ homogenen, algebraischen Zahlgleichung $n$ten Grades Genüge leisten. Natürlich kann man auch sagen: Eine ebene algebraische Kurve $n$ter Ordnung ist ein Punktgebilde einer Ebene, dessen laufende Punkte x einer nicht durch jeden Punkt der Ebene erfüllten, in bezug auf x homogenen Zahlgleichung $n$ten Grades genügen.

Ferner ist zu bemerken, daß die mn Schnittpunkte des Satzes 738 nicht notwendig voneinander verschieden und nicht alle reell zu sein brauchen.

---

1) Vgl. den von F. Klein herrührenden, von F. Lindemann mitgeteilten Beweis dieses Satzes in Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie. Erste Auflage. Bd. I (Leipzig 1876). S. 281f. Zweite Auflage. Ersten Bandes erster Teil. Zweite Lieferung (1910). S. 502f.

Aus dem Satze von Bézout folgt zunächst, daß eine Kurve dritter Ordnung A_3 von der ihr zugehörenden konischen Polare A_3y eines beliebigen Punktes y in 6 Punkten geschnitten wird, und hieraus ergibt sich dann nach dem Satze 736 für den Fall, wo die Kurve dritter Ordnung keinen Doppelpunkt hat, daß sich von einem beliebigen Punkte y an eine solche Kurve dritter Ordnung 6 Tangenten legen lassen (vgl. die obige Fig. 103).

Man hat daher den Satz:

Satz 739: An eine ebene Kurve dritter Ordnung, die keinen Doppelpunkt enthält, lassen sich von einem beliebigen Punkte ihrer Ebene 6 Tangenten legen.

Die konische Polare eines Punktes einer Kurve dritter Ordnung in bezug auf diese Kurve. Das Doppelverhältnis einer Kurve dritter Ordnung. Ein besonderes Interesse bietet wiederum der Fall, wo der Pol y der konischen Polare hinsichtlich einer Kurve dritter Ordnung A_3 selbst dieser Kurve dritter Ordnung angehört. Wir können nämlich zeigen, daß in diesem Falle die konische Polare A_3y des Punktes y von der Kurve dritter Ordnung in ihrem Pole y berührt wird (Fig. 104).

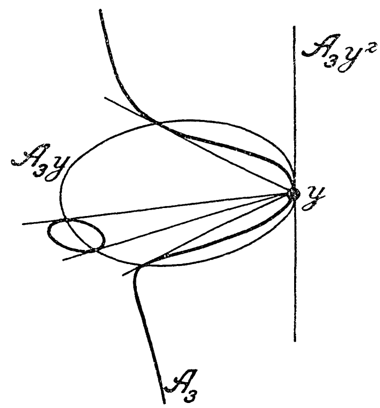


Fig. 104.

Zunächst geht sicher unter der gemachten Voraussetzung die konische Polare des Punktes y durch ihren Pol y selbst hindurch. Denn nach dem Satze 736 enthält sie die Berührungspunkte aller Tangenten, die man vom Punkte y an die Kurve dritter Ordnung A_3 ziehen kann, insbesondere also auch den Berührungspunkt derjenigen Tangente, welche *die Kurve dritter Ordnung im Punkte y selbst berührt,* d. h. eben ihren eigenen Pol y.

Aber man überzeugt sich auch sogleich, daß die Kurve dritter Ordnung A_3 und die konische Polare:

$$(29) \qquad A_3yz^2 = 0$$

eines beliebigen Punktes y der Kurve A_3 *ihre Tangente im Punkte y miteinander gemein haben.* Denn die Tangente der Kurve dritter Ordnung A_3 in einem ihrer Punkte y stimmt, falls dieser Punkt von einem Doppelpunkt der Kurve dritter Ordnung verschieden ist, nach dem Satze 735 mit der geraden Polare A_3y^2 dieses Punktes hinsichtlich der Kurve dritter Ordnung überein; ihre Gleichung lautet also:

$$(30) \qquad A_3y^2z = 0$$

Genau dieselbe Gleichung besitzt aber die Polare des Punktes y hinsichtlich der Kurve zweiter Ordnung (29), d. h. die Tangente der konischen Polare des Punktes y im Punkte y. Folglich sind beide Tangenten identisch, und die beiden Kurven berühren sich somit im Punkte y. Man hat daher den Satz:

Satz 740: Die erste oder konische Polare $A_3 y$ eines Punktes y in bezug auf eine gegebene Kurve dritter Ordnung A_3 ist, falls der Punkt y auf dieser Kurve gelegen ist, eine Kurve zweiter Ordnung, welche die gegebene Kurve dritter Ordnung in dem Pole y berührt.

Daß es nicht nötig ist, in diesem Satze den Fall des Doppelpunktes auszuschließen, wird weiter unten gezeigt werden (vgl. den Satz 745).

Da die konische Polare eines Punktes y einer Kurve dritter Ordnung in bezug auf diese Kurve nach dem Satze 740 die Kurve dritter Ordnung in dem Pole y berührt, so fallen von den 6 Schnittpunkten, die nach S. 222 die konische Polare mit der Kurve dritter Ordnung gemein hat, zwei Schnittpunkte in jenen Pol y zusammen. Es bleiben also nur noch 4 weitere Schnittpunkte übrig.

Nach dem Satze 736 gehen daher von einem Punkte y der Kurve dritter Ordnung, falls diese nicht einen Doppelpunkt aufweist, außer der Tangente, die sich in dem Punkte y selbst an die Kurve dritter Ordnung ziehen läßt, noch 4 weitere Tangenten an diese Kurve. Dabei ist vorausgesetzt, daß die konische Polare des Punktes y mit der Kurve dritter Ordnung an der Stelle y nicht mehr als zwei Punkte gemein hat (vgl. unten den Satz 756).

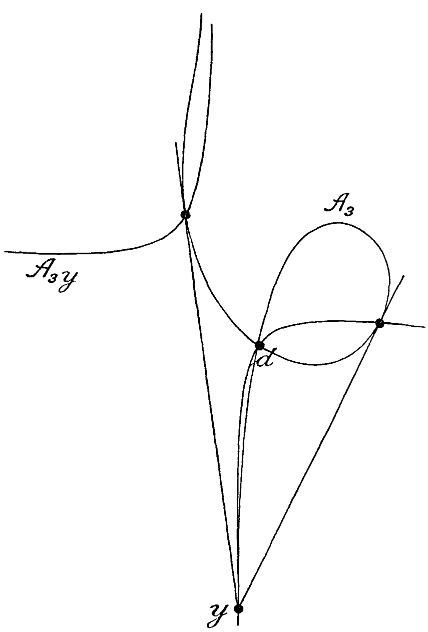


Fig. 105.

Besitzt dagegen die Kurve dritter Ordnung A_3 einen, aber auch nur einen Doppelpunkt d, so geht nach dem Satze 737 die konische Polare $A_3 y$ eines Punktes y der Kurve A_3, der von dem Doppelpunkte d der Kurve verschieden ist, auch durch diesen Doppelpunkt d hindurch (Fig. 105). Von den 6 Schnittpunkten der Kurve dritter Ordnung mit der konischen Polare des Punktes y fallen also 2 Schnittpunkte in den Doppelpunkt d der Kurve dritter Ordnung, 2 andere, wie oben gezeigt ist, in den Pol y der konischen Polare. Es bleiben demnach nur noch 2 weitere Schnittpunkte übrig, und dementsprechend lassen sich nach dem Satze 736 außer der Tangente im Punkte y selbst nur noch 2 weitere Tangenten vom Punkte y an die Kurve dritter Ordnung legen. Man hat somit den Satz:

Satz 741: Von einem Punkte y einer Kurve dritter Ordnung ohne Doppelpunkt lassen sich außer der Tangente im Punkte y selbst noch 4 weitere Tangenten an die Kurve legen. Dagegen gehen bei einer Kurve dritter Ordnung mit einem und nur einem Doppelpunkt von einem Punkte y der Kurve, der von dem Doppelpunkt verschieden ist, außer der Tangente im Punkte y selbst nur noch 2 weitere Tangenten an die Kurve.

Aus diesem Satze folgert man leicht den weiteren Satz (Fig. 106):

Satz 742: Satz von Salmon: Zieht man von einem Punkte y einer Kurve dritter Ordnung ohne Doppelpunkt die 4 außer der Tangente im Punkte y selbst möglichen Tangenten an die Kurve, so bleibt das Doppelverhältnis dieser 4 Tangenten konstant, wenn der Punkt y auf der Kurve fortrückt.[1])

Beweis: Sind a, b, c, d die 4 Punkte, in denen die Tangenten, von einem Punkte y der Kurve dritter Ordnung A_3 an diese Kurve gezogen, die Kurve berühren, so geht nach dem Satze 736 die konische Polare $A_3 y$ des Punktes y in bezug auf die Kurve A_3 durch die 4 Punkte a, b, c, d hindurch. Nach dem Satze 740 aber berührt andererseits diese konische Polare $A_3 y$ die Kurve dritter Ordnung A_3 im Punkte y.

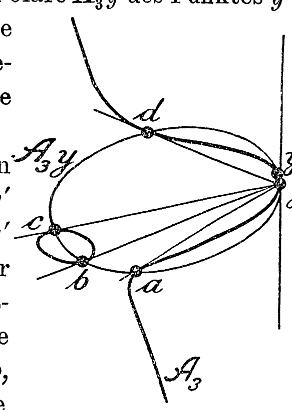


Fig. 106.

Bezeichnet man mit y' einen unendlich nahe an y liegenden Punkt der Kurve A_3 und zieht von y' von neuem die 4 von der Tangente des Punktes y' selbst verschiedenen Tangenten an die Kurve dritter Ordnung, so sind die Schnittpunkte mit den entsprechenden 4 Tangenten, vom Punkte y an die Kurve gezogen, nichts anderes als die Punkte a, b, c, d, weil 2 unendlich nahe Tangenten der Kurve dritter Ordnung sich auf der Kurve schneiden.

Dabei liegen die 4 Schnittpunkte a, b, c, d der Tangenten von y und y' an die Kurve dritter Ordnung mit den Punkten y und y' zugleich auf einer und derselben Kurve zweiter Ordnung, nämlich auf der konischen Polare $A_3 y$ des Punktes y in bezug auf die Kurve A_3. Es ist daher nach dem Satze 54 das Doppelverhältnis:

$$y'(abcd) = y(abcd).$$

Das Doppelverhältnis der 4 Tangenten, die sich vom Punkte y an die Kurve dritter Ordnung A_3 legen lassen, bleibt somit unverändert, wenn man den Punkt y auf der Kurve A_3 fortrücken läßt. Damit ist unser Satz bewiesen.

Man nennt das Doppelverhältnis $y(abcd)$ der 4 Tangenten $[ya]$, $[yb]$, $[yc]$, $[yd]$ „das Doppelverhältnis der Kurve dritter Ordnung A_3“.

1) Vgl. G. Salmon, Théorèmes sur les courbes de troisième degré, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 42 (1851), S. 274.

Man gewinnt eine Bestätigung des Satzes 740, indem man den folgenden Satz beweist (Fig. 107):

Satz 743: Legt man durch einen Punkt y einer Kurve dritter Ordnung:

$$A_3 x^3 = 0 \tag{6}$$

das Büschel Sekanten, welche die Kurve in den beiden weiteren Punkten x_1 und x_2 schneiden mögen, und konstruiert auf jeder Sekante yx_1x_2 den vom Punkte y durch die Punkte x_1 und x_2 harmonisch getrennten Punkt z, so liegen die so gewonnenen Punkte z auf der konischen Polare A_3y des Punktes y in bezug auf die Kurve dritter Ordnung A_3.

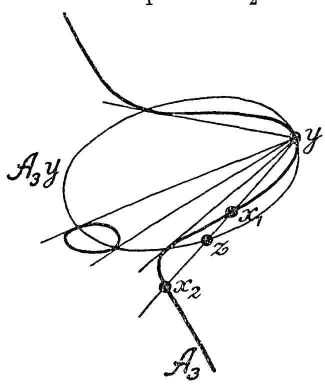


Fig. 107.

Ist nämlich $[yz]$ eine Sekante, die durch einen Punkt y einer Kurve dritter Ordnung A_3 gelegt ist, während der Punkt z vor der Hand noch beliebig in der Ebene angenommen werden mag, und sind x_1 und x_2 die beiden Punkte, die diese Sekante $[yz]$ mit der Kurve A_3 außer dem Punkte y selbst gemein hat, so gestatten die Punkte x_1 und x_2 die Darstellung:

$$\begin{cases} x_1 = \mathfrak{g}_1 y + z \\ x_2 = \mathfrak{g}_2 y + z. \end{cases} \tag{52}$$

Dabei sind die Zahlgrößen $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ diejenigen beiden Wurzeln $\mathfrak{g}_i$ der Zahlgleichung dritten Grades:

$$A_3(\mathfrak{g}_i y + z)^3 = 0,$$

welche diese Gleichung außer der Wurzel $\mathfrak{g}_i = \infty$ aufweist, die dem Ausgangspunkt y der Sekante zugehört.

Diese Zahlgleichung dritten Grades in bezug auf $\mathfrak{g}_i$ lautet entwickelt:

$$\mathfrak{g}_i^3 A_3 y^3 + 3\mathfrak{g}_i^2 A_3 y^2 z + 3\mathfrak{g}_i A_3 y z^2 + A_3 z^3 = 0. \tag{53}$$

Und in ihr muß, da nach der Voraussetzung der Punkt y auf der Kurve A_3 liegen soll:

$$A_3 y^3 = 0 \tag{54}$$

sein. Wegen (54) aber verkürzt sich die Gleichung dritten Grades (53) zu der Gleichung zweiten Grades:

$$3\mathfrak{g}_i^2 A_3 y^2 z + 3\mathfrak{g}_i A_3 y z^2 + A_3 z^3 = 0, \tag{55}$$

wobei zugleich die dem Punkte y zugehörende Wurzel $\mathfrak{g}_i = \infty$ ausscheidet.

Unterwerfen wir jetzt noch den bisher willkürlich gelassenen Punkt z der Bedingung, er solle vom Punkte y durch die Punkte x_1 und x_2 harmonisch getrennt werden, so muß die in bezug auf $\mathfrak{g}_i$ quadratische Zahlgleichung (55) zwei entgegengesetzt gleiche Wurzeln $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ besitzen, woraus folgt, daß in ihr der Koeffizient von $\mathfrak{g}_i$ verschwinden muß, daß also die Gleichung besteht:

(56) $$A_3 y z^2 = 0.$$

Diese aber besagt wirklich, daß der Punkt z der konischen Polare $A_3 y$ des Punktes y in bezug auf die Kurve dritter Ordnung A_3 angehört. Und das war die Behauptung unseres Satzes.

Da es ferner zu einem jeden Punkttripel $y x_1 x_2$ einer Geraden nur *einen* Punkt z dieser Geraden gibt, der durch die Punkte x_1 und x_2 vom Punkte y harmonisch getrennt wird, so gilt auch die folgende Umkehrung des Satzes 743:

Satz 744: Umkehrung zu Satz 743: Konstruiert man zu einem Punkte y einer Kurve dritter Ordnung A_3 hinsichtlich dieser Kurve die konische Polare $A_3 y$, welche nach dem Satze 740 durch den Punkt y hindurchgeht und in ihm die Kurve A_3 berührt, und zeichnet man das Sekantenbüschel, das den Punkt y zum Scheitel hat, so wird auf jeder Sekante der zweite Schnittpunkt z mit jener konischen Polare $A_3 y$ durch die beiden andern Schnittpunkte x_1 und x_2 der Sekante und der Kurve dritter Ordnung A_3 vom Scheitel y des Sekantenbüschels harmonisch getrennt.

Die konische Polare eines Doppelpunktes einer Kurve dritter Ordnung. Die konische Polare eines Doppelpunktes einer Kurve dritter Ordnung hat eine besonders einfache Bedeutung. Um diese zu finden, setzen wir

erstens voraus, der Punkt y sei ein Doppelpunkt der Kurve dritter Ordnung A_3, d. h., er genüge der obigen Bedingungsgleichung des Doppelpunktes:

(43) $$A_3 y^2 = 0,$$

welche, wie wir wissen, die beiden Gleichungen:

(44) $$A_3 y^3 = 0 \quad \text{und}$$

(30) $$A_3 y^2 z = 0$$

nach sich zieht, wobei die letzte Gleichung für jeden Punkt z der Ebene erfüllt wird.

Zweitens aber wollen wir annehmen, daß die Lage des bisher willkürlich gelassenen Punktes z jetzt noch der Gleichung:

(56) $$A_3 y z^2 = 0$$

unterworfen werde, so daß er der konischen Polare des Doppelpunktes y der Kurve dritter Ordnung A_3 in bezug auf diese Kurve angehört.

Dann verschwinden in der Gleichung (19) wegen des gleichzeitigen Bestehens der Gleichungen (44), (30) und (56) die 3 ersten Koeffizienten. Die Gleichung besitzt daher 3 gleiche Wurzeln $\mathfrak{h} = 0$, und die Gerade $[yz]$ schneidet somit die Kurve dritter Ordnung A_3 in 3 mit dem Punkte y zusammenfallenden Punkten. Sie berührt also die Kurve dritter Ordnung in ihrem Doppelpunkte y (Fig. 108).

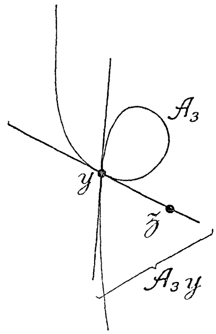


Fig. 108.

Wenn man andererseits die Gerade $[yz]$ festhält, welche eine Tangente der Kurve dritter Ordnung im Doppelpunkte y bildet, den zu ihrer vollständigen Bestimmung benutzten Punkt z aber auf dieser Geraden beliebig verschiebt, so wird doch noch immer die Gleichung (19) drei gleiche Wurzeln $\mathfrak{h} = 0$ aufweisen müssen, d. h. auch für den durch jene Verschiebung entstandenen Punkt z werden die 3 ersten Koeffizienten der Gleichung (19) verschwinden müssen. Insbesondere muß er daher der Gleichung:

$$A_3 y z^2 = 0 \tag{56}$$

genügen, was besagt, daß er der konischen Polare des Doppelpunktes y angehört. Diese konische Polare $A_3 y$ des Doppelpunktes y zerfällt demnach in ein Linienpaar, dessen Scheitel der Doppelpunkt y der Kurve dritter Ordnung A_3 ist, und besteht aus den beiden Tangenten, die man im Doppelpunkte y an die Kurve dritter Ordnung legen kann. Man hat also den Satz:

Satz 745: Die erste oder konische Polare $A_3 y$ eines Doppelpunktes y einer Kurve dritter Ordnung in bezug auf diese Kurve wird durch das Tangentenpaar gebildet, das man in dem Doppelpunkte y an die Kurve dritter Ordnung legen kann.

Abschnitt 49.

Die Hessesche Kurve einer Kurve dritter Ordnung.

Das kombinatorische Produkt dreier ternären Lückenformen erster Ordnung. Sind G_1, G_2, G_3 drei Stäbe in der Ebene, und ist l eine Punktlücke, so sind die Ausdrücke $[G_1 l]$, $[G_2 l]$, $[G_3 l]$ drei ternäre Lückenformen erster Ordnung. Und definiert man genau so wie bei der Einführung des kombinatorischen Produktes der Punkt-Punkt-Abbildungen dreier Kollineationen in der Ebene[1]) das kombinatorische Produkt $[xyz \cdot G_1 l \quad G_2 l \quad G_3 l]$ durch die Formel[2]):

1) Vgl. den ersten Teil dieses Bandes S. 61ff. Siehe auch dort das Entsprechende für Reziprozitäten, S. 152ff.

2) Um die Zahl der Klammern einzuschränken, verleihen wir wie schon bisher dem Zwischenraum zwischen 2 Faktoren (zum Beispiel oben dem Zwischenraum zwischen

$$(1)\qquad [xyz\cdot G_1l\quad G_2l\quad G_3l]$$
$$=\frac{1}{3!}\left\{\begin{array}{l}[G_1x][G_2y][G_3z]+[G_1y][G_2z][G_3x]+[G_1z][G_2x][G_3y]\\ -[G_1x][G_2z][G_3y]-[G_1y][G_2x][G_3z]-[G_1z][G_2y][G_3x]\end{array}\right\},$$

so beweist man wie dort, daß das Produkt $[xyz\cdot G_1l\quad G_2l\quad G_3l]$ verschwindet, wenn zwei von seinen 3 Punktfaktoren x, y, z einander gleich werden, und daß es den entgegengesetzten Wert annimmt, wenn man zwei von diesen Faktoren miteinander vertauscht. Daraus folgt dann wieder wie dort, daß, falls das Produkt:

$$(2)\qquad [xyz]\neq 0$$

ist, der Bruch:

$$(3)\qquad \frac{[xyz\cdot G_1l\quad G_2l\quad G_3l]}{[xyz]}$$

unabhängig von der Lage und Masse der Punkte x, y, z ist, so daß, wenn insbesondere e_1, e_2, e_3 die Ecken des Fundamentaldreiecks sind, für welche die Gleichung:

$$(4)\qquad [e_1e_2e_3]=1\quad\text{besteht,}$$

$$(5)\qquad \frac{[xyz\cdot G_1l\quad G_2l\quad G_3l]}{[xyz]}=\frac{[e_1e_2e_3\cdot G_1l\quad G_2l\quad G_3l]}{[e_1e_2e_3]}$$

wird. Man kann daher für den Bruch (3) ein Symbol einführen, das nur noch die ternären Lückenformen erster Ordnung $[G_1l]$, $[G_2l]$, $[G_3l]$ enthält. Wir wählen das Zeichen $[G_1l\cdot G_2l\cdot G_3l]$, setzen also:

$$(6)\qquad [G_1l\cdot G_2l\cdot G_3l]=\frac{[xyz\cdot G_1l\quad G_2l\quad G_3l]}{[xyz]},$$

wo x, y, z drei ganz beliebige, aber nicht in einer Geraden liegende Punkte sind, und nennen die so definierte Größe $[G_1l\cdot G_2l\cdot G_3l]$ das kombinatorische Produkt der 3 ternären Lückenformen erster Ordnung $[G_1l]$, $[G_2l]$, $[G_3l]$. Wegen (5) und (4) wird dann insbesondere:

$$(7)\qquad [G_1l\cdot G_2l\cdot G_3l]=[e_1e_2e_3\cdot G_1l\quad G_2l\quad G_3l]$$

oder wegen (1):

$$(8)\qquad [G_1l\cdot G_2l\cdot G_3l]$$
$$=\frac{1}{3!}\left\{\begin{array}{l}[G_1e_1][G_2e_2][G_3e_3]+[G_1e_2][G_2e_3][G_3e_1]+[G_1e_3][G_2e_1][G_3e_2]\\ -[G_1e_1][G_2e_3][G_3e_2]-[G_1e_2][G_2e_1][G_3e_3]-[G_1e_3][G_2e_2][G_3e_1]\end{array}\right\}.$$

Drückt man hier die Stäbe G_i durch die Grundstäbe E_1, E_2, E_3 des Fundamentaldreiecks aus, führt also für die Stäbe G_i ihre Ableitausdrücke:

$$(9)\qquad G_i=\mathfrak{g}_{i1}E_1+\mathfrak{g}_{i2}E_2+\mathfrak{g}_{i3}E_3,\quad i=1, 2, 3,$$

---

den Faktoren G_1l und G_2l oder zwischen G_2l und G_3l) sowie dem Multiplikationspunkt zugleich die Kraft einer Klammer. Wo der Zwischenraum und der Multiplikationspunkt miteinander in Wettbewerb treten, soll dem Zwischenraum der Vorrang eingeräumt werden, so daß die durch den Zwischenraum angedeutete Multiplikation zuerst ausgeführt wird.

ein, aus denen für die in (8) auftretenden Produkte $[G_i e_k]$ die Werte folgen:

(10) $$[G_i e_k] = \mathfrak{g}_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

so erhält man für das kombinatorische Produkt $[G_1 l \cdot G_2 l \cdot G_3 l]$ in (8) die Darstellung:

$$[G_1 l \cdot G_2 l \cdot G_3 l] = \frac{1}{3!}\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{g}_{11}\mathfrak{g}_{22}\mathfrak{g}_{33} + \mathfrak{g}_{12}\mathfrak{g}_{23}\mathfrak{g}_{31} + \mathfrak{g}_{13}\mathfrak{g}_{21}\mathfrak{g}_{32} \\ - \mathfrak{g}_{11}\mathfrak{g}_{23}\mathfrak{g}_{32} - \mathfrak{g}_{12}\mathfrak{g}_{21}\mathfrak{g}_{33} - \mathfrak{g}_{13}\mathfrak{g}_{22}\mathfrak{g}_{31} \end{array}\right\} \quad \text{oder}$$

(11) $$[G_1 l \cdot G_2 l \cdot G_3 l] = \frac{1}{3!}|\mathfrak{g}_{ik}|, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

oder endlich

(12) $$[G_1 l \cdot G_2 l \cdot G_3 l] = \frac{1}{3!}[G_1 G_2 G_3].$$

Die Gleichung:
$$[G_1 l \cdot G_2 l \cdot G_3 l] = 0$$
besagt daher ebenso wie die Gleichung:
$$[G_1 G_2 G_3] = 0,$$
daß die Geraden der 3 Stäbe G_1, G_2, G_3 einen Punkt miteinander gemein haben, und man hat den Satz:

Satz 746: Sind G_1, G_2, G_3 3 Stäbe, und ist l eine Punktlücke, so ist die Gleichung:
$$[G_1 l \cdot G_2 l \cdot G_3 l] = 0$$
dann und nur dann erfüllt, wenn die Geraden der 3 Stäbe G_1, G_2, G_3 einen Punkt miteinander gemein haben.[1])

Ferner folgt aus der Gleichung (12), daß das kombinatorische Produkt:
$$[G_1 l \cdot G_2 l \cdot G_3 l]$$
sein Zeichen wechselt, wenn man irgend zwei von seinen Faktoren $[G_i l]$ miteinander vertauscht.

Da sich endlich jede ternäre Lückenform erster Ordnung $\boldsymbol{A}_1$, d. h. jeder ternäre Lückenausdruck mit je einer Punktlücke in jedem Gliede, der sich bei Ausfüllung dieser Lücke in eine Zahl verwandelt, in der Form $[Gl]$ darstellen läßt, wo der Stab G der Geraden $\boldsymbol{A}_1 x = 0$ angehört, so gelten, wenn $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{C}_1$ drei solche Lückenformen erster Ordnung sind, für das kombinatorische Produkt:
$$[\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{C}_1]$$
die Sätze:

Satz 747: Sind $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{C}_1$ drei ternäre Lückenformen erster Ordnung, so wird die Gleichung:
$$[\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{C}_1] = 0$$

1) Vgl. hierzu und zum folgenden: H. Graßmann, Über zusammengehörige Pole und ihre Darstellung durch Produkte, Göttinger Nachrichten 1872, S. 571f. (Gesammelte Werke, Bd. II, Teil I, S. 252f.)

dann und nur dann erfüllt, wenn die 3 Geraden:

$$\boldsymbol{A}_1 x = 0, \quad \boldsymbol{B}_1 x = 0, \quad \boldsymbol{C}_1 x = 0$$

einen Punkt miteinander gemein haben.

Und

Satz 748: Das kombinatorische Produkt $[\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{C}_1]$ dreier ternärer Lückenformen erster Ordnung $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{C}_1$ ändert sein Vorzeichen, nicht aber seinen absoluten Wert, wenn man irgend zwei von seinen drei Faktoren miteinander vertauscht.

Natürlich kann man den Satz 748 auch beweisen, indem man berücksichtigt, daß entsprechend den Formeln (7) und (8) für das kombinatorische Produkt $[\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{C}_1]$ der ternären Lückenformen erster Ordnung $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{C}_1$ die Formeln bestehen:

(13) $$[\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{C}_1] = [e_1 e_2 e_3 \cdot \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{C}_1] \quad \text{und}$$

(14) $$[\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{C}_1] = \frac{1}{3!}\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{A}_1 e_1 \boldsymbol{B}_1 e_2 \boldsymbol{C}_1 e_3 + \boldsymbol{A}_1 e_2 \boldsymbol{B}_1 e_3 \boldsymbol{C}_1 e_1 + \boldsymbol{A}_1 e_3 \boldsymbol{B}_1 e_1 \boldsymbol{C}_1 e_2 \\ - \boldsymbol{A}_1 e_1 \boldsymbol{B}_1 e_3 \boldsymbol{C}_1 e_2 - \boldsymbol{A}_1 e_2 \boldsymbol{B}_1 e_1 \boldsymbol{C}_1 e_3 - \boldsymbol{A}_1 e_3 \boldsymbol{B}_1 e_2 \boldsymbol{C}_1 e_1 \end{array}\right\}.$$

Denn da die Faktoren $\boldsymbol{A}_1 e_i$, $\boldsymbol{B}_1 e_j$, $\boldsymbol{C}_1 e_k$ der Produkte in der geschweiften Klammer der rechten Seite von (14) nach dem Begriffe der ternären Lückenformen erster Ordnung Zahlgrößen sind, also ohne Zeichenwechsel umgestellt werden können, so geht bei der Vertauschung von irgend zweien der 3 Größen $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{C}_1$ ein jedes Glied jener geschweiften Klammer in ein anderes Glied dieser Klammer über, das entgegengesetztes Vorzeichen hat; die geschweifte Klammer ändert also bei dieser Vertauschung lediglich ihr Zeichen. Dasselbe gilt daher auch *von der linken Seite* der Gleichung (14), d. h. von dem kombinatorischen Produkte $[\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{C}_1]$. Das aber war die Behauptung des Satzes 748.

Begriff der Hesseschen Kurve einer Kurve dritter Ordnung. Sie geht durch einen etwaigen Doppelpunkt dieser Kurve hindurch. Die Gleichung der konischen Polare des Punktes y in bezug auf die Kurve dritter Ordnung $\boldsymbol{A}_3$ lautete nach der Gleichung (29) des vorigen Abschnitts:

(15) $$\boldsymbol{A}_3 y z^2 = 0.$$

Damit diese konische Polare einen Doppelpunkt enthalte, er sei bezeichnet mit z, ist notwendig und hinreichend, daß die Gleichung besteht:

(16) $$\boldsymbol{A}_3 y z = 0.$$

Ist nämlich die Gleichung:

(*) $$\boldsymbol{A}_2 z^2 = 0,$$

in der $\boldsymbol{A}_2$ *eine ternäre Lückenform zweiter Ordnung* bedeutet, die Gleichung einer Kurve *zweiter* Ordnung, so findet man als Bedingung dafür, daß diese

Kurve den Punkt z zum Doppelpunkt habe, daß also jeder durch den Punkt z gehende Strahl $[zx]$ zwei mit dem Punkte z zusammenfallende Punkte mit der Kurve (*) gemein habe, die Forderung, daß die Gleichung:

$$A_2(z + \mathfrak{g}x)^2 = 0,$$

oder entwickelt die Gleichung:

$$A_2 z^2 + 2\mathfrak{g} A_2 zx + \mathfrak{g}^2 A_2 x^2 = 0,$$

für beliebige Werte von x zwei gleiche Wurzeln $\mathfrak{g} = 0$ besitze. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn die beiden Gleichungen bestehen:

$$(**) \qquad A_2 z^2 = 0 \quad \text{und} \quad A_2 zx = 0,$$

wie auch der Punkt x gelegen sein mag. Die beiden Gleichungen (**) werden aber gleichzeitig befriedigt, wenn:

$$(***) \qquad A_2 z = 0 \quad \text{ist.}$$

In dem Falle der Gleichung (15) ist nun:

$$A_2 = A_3 y.$$

Die Bedingung, daß der Punkt z ein Doppelpunkt der konischen Polare (15) ist, lautet daher wie oben:

$$(16) \qquad A_3 yz = 0,$$

und diese Gleichung wiederum ist gleichbedeutend mit den 3 Gleichungen:

$$(17) \qquad \begin{cases} A_3 yze_1 = 0 \\ A_3 yze_2 = 0 \\ A_3 yze_3 = 0, \end{cases}$$

die aus ihr durch Multiplikation mit e_1, e_2, e_3 hervorgehen. Sucht man also den geometrischen Ort der Doppelpunkte aller in ein Linienpaar zerfallenden konischen Polaren in bezug auf die Kurve dritter Ordnung A_3 auf, d. h. diejenige Kurve, die von den Doppelpunkten z der unter den konischen Polaren enthaltenen Linienpaare beschrieben wird, so müssen ihre Pole y, zusammen mit den zugehörigen Doppelpunkten z, der Gleichung (16) genügen und somit auch den Gleichungen (17).

Will man aber *eine Gleichung für den geometrischen Ort jener Doppelpunkte z allein* haben, so hat man aus den Gleichungen (17) die Pole y jener konischen Polaren zu eliminieren. Dazu schreibe man die Gleichungen (17) in der Form:

$$(18) \qquad \begin{cases} A_3 ze_1 \quad y = 0 \\ A_3 ze_2 \quad y = 0 \\ A_3 ze_3 \quad y = 0. \end{cases}$$

Hier sind bei gegebenem z die 3 Ausdrücke $A_3 ze_1$, $A_3 ze_2$, $A_3 ze_3$ 3 konstante Lückenausdrücke mit je einer Punktlücke in jedem Gliede, die sich bei Ausfüllung dieser Lücke in eine Zahl verwandeln, d. h. sie sind 3 ternäre Lückenformen erster Ordnung. Jede von den 3 Gleichungen (18) stellt also bei konstantem z und veränderlichem y eine gerade Linie dar.

Die 3 Gleichungen (18) sagen daher aus, daß diese drei geraden Linien durch einen und denselben Punkt y hindurchgehen. Nach dem Satze 747 folgt somit aus ihnen die Gleichung:

$$(19) \qquad [A_3 z e_1 \cdot A_3 z e_2 \cdot A_3 z e_3] = 0.$$

Und diese Gleichung zeigt als Zahlgleichung dritten Grades in bezug auf den Punkt z, daß der geometrische Ort der Doppelpunkte z aller konischen Polaren in bezug auf die Kurve dritter Ordnung A_3 *selbst eine Kurve dritter Ordnung ist*, wenigstens unter der Voraussetzung, daß die Gleichung (19) nicht durch jeden Punkt z der Ebene erfüllt wird.

Da die linke Seite der Gleichung (19), d. h. das kombinatorische Produkt:

$$[A_3 z e_1 \cdot A_3 z e_2 \cdot A_3 z e_3],$$

ebenso wie die Form $A_3 z^3$ eine ternäre Form dritter Ordnung ist, die zu der Form $A_3 z^3$ in einer engen Beziehung steht, so erscheint es zweckmäßig, für dieses Produkt eine besondere Bezeichnung und einen Namen einzuführen. Wir wählen die Bezeichnung $H_3 z^3$, setzen also:

$$(20) \qquad H_3 z^3 = [A_3 z e_1 \cdot A_3 z e_2 \cdot A_3 z e_3],$$

und nennen die ternäre Form dritter Ordnung (20) „die Hessesche Form“ der ternären Form dritter Ordnung $A_3 z^3$.[1])

Dabei soll das in der Gleichung (20) auftretende Symbol H_3 die zu der Hesseschen Form $H_3 z^3$ gehörende ternäre Lückenform dritter Ordnung darstellen, so daß also:

$$(21) \qquad H_3 = [A_3 l e_1 \cdot A_3 l e_2 \cdot A_3 l e_3]$$

1) Sie ist der 36te Teil der Determinante der zweiten partiellen Differentialquotienten der ternären Form dritter Ordnung:

$$\mathfrak{f}_3(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3) = A_3 z^3,$$

genommen nach $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3$. Diese Determinante wurde von O. Hesse eingeführt in seiner Arbeit: Über die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Variabeln, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 28 (1844), S. 83ff. (Gesammelte Werke, München 1897, S. 106ff.) In seiner Arbeit: Über die Wendepunkte der Kurven dritter Ordnung, aus demselben Band des Journals für die reine und angewandte Mathematik, S. 104 (Gesammelte Werke, S. 131) erweitert dann Hesse den Begriff seiner Determinante, indem er auch bei einer ternären Form n ter Ordnung $\mathfrak{f}_n(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3)$ die Determinante aus den zweiten partiellen Differentialquotienten dieser Form nach $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3$ bildet und sie als Determinante der Form $\mathfrak{f}_n$ bezeichnet. Nach dem Vorschlage Sylvesters nennt man jetzt allgemein diese Determinanten die Hesseschen Determinanten der ternären Formen $\mathfrak{f}_3$ und $\mathfrak{f}_n$.

wird, und es zeigt dann die Vergleichung von (20) und (21), daß in der ternären Form dritter Ordnung $\boldsymbol{H}_3 z^3$ die Faktoren der Potenz z^3 *als Füllgrößen für die explizite geschriebenen Lücken der Lückenform* $\boldsymbol{H}_3$ *zu dienen haben,* nicht etwa für die in $\boldsymbol{A}_3$ steckenden Lücken.

Wir nennen ferner die durch die Gleichung (19) dargestellte Kurve dritter Ordnung „die Hessesche Kurve der Kurve dritter Ordnung $\boldsymbol{A}_3$" oder auch wohl „die Hessiane der Kurve dritter Ordnung $\boldsymbol{A}_3$".

Ihr gehören nach dem Obigen die Doppelpunkte z der zerfallenden konischen Polaren in bezug auf die Kurve $\boldsymbol{A}_3$ an (Fig. 109). Man überzeugt sich

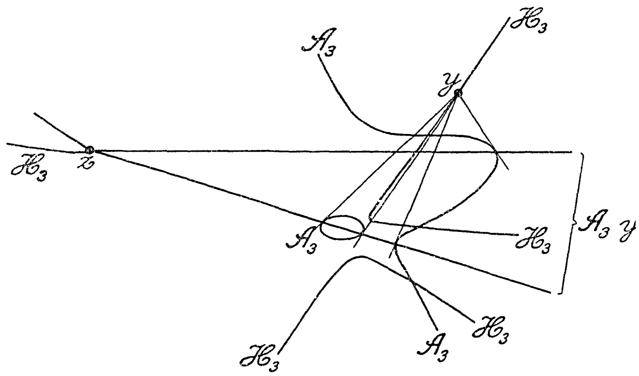


Fig. 109.

aber sogleich, daß auch die Pole y dieser zerfallenden konischen Polaren auf der Hesseschen Kurve enthalten sind. Denn, da die Gleichung (16) ihre Gültigkeit nicht verliert, wenn die Faktoren y und z miteinander vertauscht werden, so muß auch die aus (16) gefolgerte Gleichung (19) bestehen bleiben, wenn man in ihr den Doppelpunkt z der konischen Polare durch deren Pol y ersetzt, d. h. es muß auch die Gleichung befriedigt werden:

$$(22) \qquad [\boldsymbol{A}_3 y e_1 \cdot \boldsymbol{A}_3 y e_2 \cdot \boldsymbol{A}_3 y e_3] = 0,$$

welche in der Tat zeigt, daß auch die Pole y der zerfallenden konischen Polaren in bezug auf $\boldsymbol{A}_3$ der Hesseschen Kurve von $\boldsymbol{A}_3$ angehören. Man hat also den Satz:

Satz 749: Der geometrische Ort aller Punkte y der Ebene, deren konische Polare in bezug auf eine gegebene Kurve dritter Ordnung $\boldsymbol{A}_3$ in ein Linienpaar zerfällt, ist die Hessesche Kurve dieser Kurve dritter Ordnung. Dieselbe enthält zugleich die Doppelpunkte jener konischen Polaren. Sie ist selbst eine Kurve dritter Ordnung und wird durch die Gleichung (22) dargestellt.

Man kann der Hesseschen Form (20) auch die Gestalt einer Determinante geben. In der Tat wird wie oben in (7) bis (12):

$$\begin{aligned}[A_3 z e_1 \cdot A_3 z e_2 \cdot A_3 z e_3] &= [e_1 e_2 e_3 \cdot A_3 z e_1 \quad A_3 z e_2 \quad A_3 z e_3] \\ &= \frac{1}{3!}\left\{\begin{aligned} &A_3 z e_1^{\,2} \quad A_3 z e_2^{\,2} \quad A_3 z e_3^{\,2} + A_3 z e_1 e_2 \quad A_3 z e_2 e_3 \quad A_3 z e_3 e_1 \\ &\qquad + A_3 z e_1 e_3 \quad A_3 z e_2 e_1 \quad A_3 z e_3 e_2 \\ &- A_3 z e_1^{\,2} \quad A_3 z e_2 e_3 \quad A_3 z e_3 e_2 - A_3 z e_1 e_2 \quad A_3 z e_2 e_1 \quad A_3 z e_3^{\,2} \\ &\qquad - A_3 z e_1 e_3 \quad A_3 z e_2^{\,2} \quad A_3 z e_3 e_1 \end{aligned}\right\},\end{aligned}$$

das heißt:

$$(23)\qquad [A_3 z e_1 \cdot A_3 z e_2 \cdot A_3 z e_3] = \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} A_3 z e_1^{\,2}, & A_3 z e_1 e_2, & A_3 z e_1 e_3 \\ A_3 z e_2 e_1, & A_3 z e_2^{\,2}, & A_3 z e_2 e_3 \\ A_3 z e_3 e_1, & A_3 z e_3 e_2, & A_3 z e_3^{\,2} \end{vmatrix}.$$

Die Gleichung (19) der Hesseschen Kurve dritter Ordnung A_3 läßt sich daher auch in der Form schreiben:

$$(24)\qquad \begin{vmatrix} A_3 z e_1^{\,2}, & A_3 z e_1 e_2, & A_3 z e_1 e_3 \\ A_3 z e_2 e_1, & A_3 z e_2^{\,2}, & A_3 z e_2 e_3 \\ A_3 z e_3 e_1, & A_3 z e_3 e_2, & A_3 z e_3^{\,2} \end{vmatrix} = 0.$$

Auf Grund dieser Gleichung der Hesseschen Kurve einer Kurve dritter Ordnung A_3 kann man auch anderweitig den ersten Teil des Satzes 749 bestätigen, welcher aussagte, daß die Pole der in ein Linienpaar zerfallenden konischen Polaren hinsichtlich der Kurve A_3 der Hesseschen Kurve von A_3 angehören. Führt man nämlich für den laufenden Punkt z der konischen Polare (15) eines Punktes y hinsichtlich der Kurve A_3 seinen Ableitausdruck:

$$(25)\qquad z = \mathfrak{z}_1 e_1 + \mathfrak{z}_2 e_2 + \mathfrak{z}_3 e_3$$

ein, so nimmt die Gleichung (15) der konischen Polare des Punktes y die Form an:

$$(26)\qquad A_3 y (\mathfrak{z}_1 e_1 + \mathfrak{z}_2 e_2 + \mathfrak{z}_3 e_3)^2 = 0$$

oder entwickelt die Form:

$$(27)\qquad A_3 y e_1^{\,2} \quad \mathfrak{z}_1^{\,2} + \cdots + 2 A_3 y e_2 e_3 \quad \mathfrak{z}_2 \mathfrak{z}_3 + \cdots = 0.$$

Damit aber die durch diese Gleichung zweiten Grades in bezug auf $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3$ dargestellte Kurve zweiter Ordnung in ein Linienpaar zerfalle, ist nach dem ersten Teil dieses Bandes, S. 205ff., notwendig und hinreichend, daß ihre Determinante verschwindet, d. h. daß die Gleichung besteht:

$$(28)\qquad \begin{vmatrix} A_3 y e_1^{\,2}, & A_3 y e_1 e_2, & A_3 y e_1 e_3 \\ A_3 y e_2 e_1, & A_3 y e_2^{\,2}, & A_3 y e_2 e_3 \\ A_3 y e_3 e_1, & A_3 y e_3 e_2, & A_3 y e_3^{\,2} \end{vmatrix} = 0.$$

Und diese Gleichung zeigt in der Tat, daß der Pol y einer zerfallenden konischen Polare hinsichtlich A_3 auf der Hesseschen Kurve (24) der Kurve A_3 enthalten ist.

Auch bestätigt man leicht rein analytisch das obige Ergebnis, daß die konische Polare eines Doppelpunktes y einer Kurve dritter Ordnung in ein Linienpaar zerfällt. Die Bedingungsgleichung für einen Doppelpunkt y der Kurve dritter Ordnung A_3 in (43) des vorigen Abschnitts, d. h. die Gleichung:

$$A_3 y^2 = 0, \tag{29}$$

zieht nämlich, wie schon oben auf S. 219 u. 232 gezeigt ist, die drei Gleichungen:

$$\begin{cases} A_3 y^2 e_1 = 0 \\ A_3 y^2 e_2 = 0 \\ A_3 y^2 e_3 = 0 \end{cases} \tag{30}$$

und auch die Gleichung:

$$A_3 y^3 = 0 \tag{31}$$

nach sich. Und ersetzt man in den drei Gleichungen (30) jedesmal *einen* Faktor y durch seinen Ableitausdruck:

$$y = \mathfrak{y}_1 e_1 + \mathfrak{y}_2 e_2 + \mathfrak{y}_3 e_3, \tag{32}$$

so verwandeln sie sich in:

$$\begin{cases} \mathfrak{y}_1 \quad A_3 y e_1{}^2 + \mathfrak{y}_2 \quad A_3 y e_1 e_2 + \mathfrak{y}_3 \quad A_3 y e_1 e_3 = 0 \\ \mathfrak{y}_1 \quad A_3 y e_2 e_1 + \mathfrak{y}_2 \quad A_3 y e_2{}^2 + \mathfrak{y}_3 \quad A_3 y e_2 e_3 = 0 \\ \mathfrak{y}_1 \quad A_3 y e_3 e_1 + \mathfrak{y}_2 \quad A_3 y e_3 e_2 + \mathfrak{y}_3 \quad A_3 y e_3{}^2 = 0. \end{cases} \tag{33}$$

Damit diese 3 in bezug auf $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$, $\mathfrak{y}_3$ linearen homogenen Gleichungen (33) ein Lösungssystem $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$, $\mathfrak{y}_3$ zulassen, das von dem Lösungssystem $\mathfrak{y}_1 = 0$, $\mathfrak{y}_2 = 0$, $\mathfrak{y}_3 = 0$ verschieden ist, ist notwendig und hinreichend, daß ihre Determinante verschwindet. Das ist aber gerade die obige Determinante auf der linken Seite der Gleichung (28). Und da diese Gleichung die Bedingungsgleichung des Zerfallens der konischen Polare des Punktes y war, so ist auch durch bloße Rechnung bewiesen, daß die konische Polare eines Doppelpunktes der Kurve dritter Ordnung A_3 in ein Linienpaar zerfällt. Da ferner die Gleichung (28) (oder (24)) zugleich die Gleichung der Hesseschen Kurve der Kurve dritter Ordnung A_3 ist, so hat man überdies den Satz, der übrigens auch schon aus den Sätzen 745 und 749 folgt:

Satz 750: Die Hessesche Kurve einer Kurve dritter Ordnung geht durch einen etwaigen Doppelpunkt dieser Kurve hindurch.

Man darf aber selbstverständlich keineswegs folgern wollen, daß jeder Schnittpunkt einer Kurve dritter Ordnung mit ihrer Hesseschen Kurve ein Doppelpunkt jener Kurve sei. Denn es folgen zwar die Gleichungen (28) und (31) aus der Bedingungsgleichung (29) eines Doppelpunktes, nicht aber umgekehrt die 3 Zahlgleichungen vertretende extensive Gleichung (29) aus den beiden Zahlgleichungen (28) und (31).

Das kombinatorische Produkt dreier ternären Lückenformen zweiter Ordnung. Neue Gleichungsform der Hesseschen Kurve einer Kurve dritter Ordnung. Sind A_2, B_2, C_2 drei ternäre Lückenformen zweiter Ordnung, und definiert man das kombinatorische Produkt:

$$[xyz \cdot A_2 B_2 C_2]$$

durch die Formel:

(34)
$$[xyz \cdot A_2 B_2 C_2] = \frac{1}{3!}\left\{\begin{array}{l} [A_2 x B_2 y C_2 z] + [A_2 y B_2 z C_2 x] + [A_2 z B_2 x C_2 y] \\ -[A_2 x B_2 z C_2 y] - [A_2 y B_2 x C_2 z] - [A_2 z B_2 y C_2 x] \end{array}\right\},$$

so folgt wieder wie auf S. 61ff. des ersten Teils dieses Bandes (vgl. auch S. 229ff. des vorliegenden Teils), daß, falls das Produkt:

(35)
$$[xyz] \neq 0$$

ist, der Bruch:

(36)
$$\frac{[xyz \cdot A_2 B_2 C_2]}{[xyz]}$$

unabhängig ist von der Lage und Masse der Punkte x, y, z, so daß, wenn insbesondere e_1, e_2, e_3 die Ecken des Fundamentaldreiecks sind:

(37)
$$\frac{[xyz \cdot A_2 B_2 C_2]}{[xyz]} = \frac{[e_1 e_2 e_3 \cdot A_2 B_2 C_2]}{[e_1 e_2 e_3]}$$

wird. Man kann daher für den Bruch (36) ein Symbol einführen, das nur noch die Lückenformen zweiter Ordnung A_2, B_2, C_2 enthält. Wir wählen dem Obigen entsprechend das Zeichen $[A_2 B_2 C_2]$, setzen also:

(38)
$$[A_2 B_2 C_2] = \frac{[xyz \cdot A_2 B_2 C_2]}{[xyz]},$$

wo x, y, z drei ganz beliebige, nicht in einer Geraden liegende Punkte sind, und nennen die so definierte Größe das kombinatorische Produkt der drei Lückenformen zweiter Ordnung $A_2 B_2 C_2$.

Wegen (37) und (4) wird dann insbesondere:

(39)
$$[A_2 B_2 C_2] = [e_1 e_2 e_3 \cdot A_2 B_2 C_2],$$

oder wegen (33):

(40)
$$[A_2 B_2 C_2] = \frac{1}{3!}\left\{\begin{array}{l} [A_2 e_1 \quad B_2 e_2 \quad C_2 e_3] + [A_2 e_2 \quad B_2 e_3 \quad C_2 e_1] + [A_2 e_3 \quad B_2 e_1 \quad C_2 e_2] \\ -[A_2 e_1 \quad B_2 e_3 \quad C_2 e_2] - [A_2 e_2 \quad B_2 e_1 \quad C_2 e_3] - [A_2 e_3 \quad B_2 e_2 \quad C_2 e_1] \end{array}\right\}$$

Hieraus entspringt eine wichtige Spezialformel, wenn man:

(41)
$$A_2 = B_2 = C_2$$

setzt und für das kombinatorische Produkt von drei gleichen ternären Lückenformen zweiter Ordnung A_2 abgekürzt schreibt:

(42)
$$[A_2 A_2 A_2] = [A_2{}^3].$$

Durch die Substitution (41) verwandelt sich nämlich die Formel (40) in:

$$(43) \qquad [\boldsymbol{A}_2{}^3] = [\boldsymbol{A}_2 e_1 \quad \boldsymbol{A}_2 e_2 \quad \boldsymbol{A}_2 e_3].$$

Denn nach dem Satze 748 sind in den 6 aus den kombinatorischen Produkten auf der rechten Seite von (40) durch die Substitution (41) entstehenden Produkten die drei ternären Lückenformen erster Ordnung $\boldsymbol{A}_2 e_1, \boldsymbol{A}_2 e_2, \boldsymbol{A}_2 e_3$ mit Zeichenwechsel vertauschbar. Alle diese Produkte, einschließlich ihrer Vorzeichen, werden daher einander gleich, so daß sich die rechte Seite auf die in (43) angegebene Form verkürzt.

Die Gleichung (43) liefert eine neue Form der Bedingungsgleichung für das Zerfallen einer Kurve zweiter Ordnung. Ist nämlich:

$$(44) \qquad p = \frac{A_1, \; A_2, \; A_3}{e_1, \; e_2, \; e_3} \text{ [1]}$$

der extensive Bruch für das Polarsystem der Kurve zweiter Ordnung:

$$(45) \qquad \boldsymbol{A}_2 x^2 = 0,$$

so gestattet die quadratische Form $\boldsymbol{A}_2 x^2$ die Darstellung:

$$(46) \qquad \boldsymbol{A}_2 x^2 = [x \cdot x\boldsymbol{p}],$$

und es wird daher die Lückenform zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}_2$:

$$(47) \qquad \boldsymbol{A}_2 = [l \cdot l\boldsymbol{p}].$$

Für die in (43) auftretenden Faktoren $\boldsymbol{A}_2 e_i$ erhält man daher die Werte:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_2 e_i &= [l \cdot l\boldsymbol{p}] e_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ &= \tfrac{1}{2}\{[e_i \cdot l\boldsymbol{p}] + [l \cdot e_i \boldsymbol{p}]\} \end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf die erste Grundgleichung des Polarsystems (Gleichung (61) des 31. Abschnitts):

$$\boldsymbol{A}_2 e_i = [l \cdot e_i \boldsymbol{p}], \quad i = 1, 2, 3.$$

Wegen (44) ergeben sich also für jene Faktoren $\boldsymbol{A}_2 e_i$ die Werte:

$$(48) \qquad \boldsymbol{A}_2 e_i = [l A_i] = [A_i l], \quad i = 1, 2, 3,$$

so daß sich die Gleichung (43) in der Form schreiben läßt:

$$(49) \qquad [\boldsymbol{A}_2{}^3] = [A_1 l \cdot A_2 l \cdot A_3 l]$$

oder wegen (12) in der Form:

$$(50) \qquad [\boldsymbol{A}_2{}^3] = \frac{1}{3!}[A_1 A_2 A_3].$$

Nun war nach der Gleichung (3) des 32. Abschnitts die Gleichung:

$$(51) \qquad [A_1 A_2 A_3] = 0$$

1) Es wird zu keinen Verwechslungen Anlaß geben, wenn hier vorübergehend neben den *fettgedruckten* Buchstaben $\boldsymbol{A}_2$ und $\boldsymbol{A}_3$, welche beziehlich ternäre Lückenformen zweiter und dritter Ordnung darstellten, die *nicht fettgedruckten* Buchstaben A_1, A_2, A_3 für Stäbe verwendet sind.

die Bedingung des Zerfallens der Kurve zweiter Ordnung $[x \cdot xp] = 0$ oder, was nach (46) dasselbe ist, der Kurve (45). Wegen (50) aber kann man dieser Bedingungsgleichung (51) auch die Form verleihen:

(52) $$[A_2{}^3] = 0,$$

und man hat den Satz:

Satz 751: Eine Kurve zweiter Ordnung:

(45) $$A_2 x^2 = 0$$

zerfällt dann und nur dann, wenn die Gleichung besteht:

(52) $$[A_2{}^3] = 0.$$

Ist jetzt die ternäre Lückenform zweiter Ordnung A_2 das Produkt aus einer ternären Lückenform dritter Ordnung A_3 und einem Punkte y, also:

(53) $$A_2 = A_3 y,$$

so verwandelt sich die Gleichung (45) in die Gleichung:

(54) $$A_3 y x^2 = 0$$

der konischen Polare des Punktes y in bezug auf die Kurve dritter Ordnung A_3, und die Bedingung des Zerfallens dieser konischen Polare erhält man, indem man in die Bedingungsgleichung (52) des Zerfallens der Kurve zweiter Ordnung A_2 für A_2 seinen Wert (53) substituiert. Dadurch aber entsteht die Gleichung:

(55) $$[(A_3 y)^3] = 0.$$

Diese Gleichung ist somit eine neue Form der Gleichung der Hesseschen Kurve der Kurve dritter Ordnung A_3. Sie ist durchaus gleichbedeutend mit der obigen Gleichung (22), und man hat den Satz:

Satz 752: Man kann der Gleichung der Hesseschen Kurve einer Kurve dritter Ordnung A_3 auch die Gestalt verleihen:

(55) $$[(A_3 y)^3] = 0.$$

Dieselbe drückt in dieser Form direkt die Tatsache aus, daß die Hessesche Kurve der Kurve dritter Ordnung A_3 der geometrische Ort derjenigen Punkte y ist, deren konische Polaren hinsichtlich dieser Kurve A_3 zerfallen.

Auch bestätigt die Gleichung (55), da sie in bezug auf y eine Zahlgleichung dritten Grades ist, den letzten Teil des Satzes 749, nach welchem die Hessesche Kurve einer Kurve dritter Ordnung selbst von der dritten Ordnung ist.[1])

---

1) Die in der Gleichung (55) gegebene Darstellung der Hesseschen Kurve einer Kurve dritter Ordnung läßt sich ohne weiteres auf die Hessesche Kurve einer Kurve $n$ter Ordnung übertragen. In der Tat kann man zunächst einer jeden ternären Form

Man kann übrigens auch leicht zeigen, daß die Hessesche Form:

$$(56)\qquad \boldsymbol{H}_3 y^3 = [\boldsymbol{A}_3 y e_1 \cdot \boldsymbol{A}_3 y e_2 \cdot \boldsymbol{A}_3 y e_3]$$

der ternären Form dritter Ordnung $\boldsymbol{A}_3 y^3$ mit der linken Seite der Gleichung (55) geradezu identisch ist. Führt man nämlich in die Gleichung (43) an Stelle der Lückenform zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}_2$ die besondere Lückenform zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}_3 y$ ein, so nimmt diese Gleichung die Gestalt an:

$$(57)\qquad [(\boldsymbol{A}_3 y)^3] = [\boldsymbol{A}_3 y e_1 \cdot \boldsymbol{A}_3 y e_2 \cdot \boldsymbol{A}_3 y e_3],$$

aus der durch Vergleichung mit (56) die Gleichung folgt:

$$(58)\qquad \boldsymbol{H}_3 y^3 = [(\boldsymbol{A}_3 y)^3].$$

Man hat also den Satz:

Satz 753: Die Hessesche Form $\boldsymbol{H}_3 y^3$ einer ternären Form dritter Ordnung $\boldsymbol{A}_3 y^3$ gestattet die Darstellung:

$$(58)\qquad \boldsymbol{H}_3 y^3 = [(\boldsymbol{A}_3 y)^3].$$

Man erhält ferner für die ternäre Lückenform dritter Ordnung $\boldsymbol{H}_3$ der Hesseschen Kurve einer „Urkurve dritter Ordnung" $\boldsymbol{A}_3$ die neue Darstellung:

$$(59)\qquad \boldsymbol{H}_3 = [(\boldsymbol{A}_3 l)^3],$$

wobei wieder zu bemerken ist, daß dann in der ternären Form dritter Ordnung:

$$\boldsymbol{H}_3 y^3 = [(\boldsymbol{A}_3 l)^3]\, y^3$$

die Faktoren der Potenz y^3 *als Füllgrößen der explizite geschriebenen Lücke l zu dienen haben*, nicht etwa für die in $\boldsymbol{A}_3$ steckenden Lücken (vgl. S. 234).

Rückkehrpunkt und isolierter Doppelpunkt einer Kurve dritter Ordnung. Wenn die beiden Tangenten einer Kurve dritter (oder auch n ter) Ordnung

---

n ter Ordnung $\mathfrak{f}_n(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3)$ auch die Gestalt verleihen:

$$\mathfrak{f}_n(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) = \boldsymbol{A}_n x^n,$$

in der $\boldsymbol{A}_n$ eine ternäre Lückenform n ter Ordnung ist, d. h. ein Lückenausdruck mit n Punktlücken in jedem Gliede, der bei Ausfüllung dieser Lücken durch einen beliebigen Punkt der Ebene in eine Zahl übergeht. Die Gleichung einer jeden Kurve n ter Ordnung läßt sich daher auf die Form bringen:

$$(*)\qquad \boldsymbol{A}_n x^n = 0.$$

Definiert man ferner die erste, zweite, ..., $(n-1)$ te Polare eines Punktes y in bezug auf die Kurve n ter Ordnung (*) entsprechend wie bei einer Kurve dritter Ordnung, so wird die $(n-2)$ te oder konische Polare eines Punktes y in bezug auf die Kurve n ter Ordnung (*) durch die Gleichung:

$$(**)\qquad \boldsymbol{A}_n y^{n-2} x^2 = 0$$

ausgedrückt. Der geometrische Ort aller Punkte y der Ebene, deren konische Polaren in bezug auf die Kurve n ter Ordnung (*) zerfallen, besitzt endlich, wie man sofort sieht, die Gleichung:

$$(***)\qquad [(\boldsymbol{A}_n y^{n-2})^3] = 0,$$

welche zeigt, daß die Hessesche Kurve einer Kurve n ter Ordnung von $(3n-6)$ ter Ordnung ist.

in einem Doppelpunkte der Kurve in eine Gerade zusammenfallen, so heißt der Doppelpunkt ein Rückkehrpunkt oder eine Spitze der Kurve, die Tangente in ihm eine Rückkehrtangente der Kurve (Fig. 110). Ein Doppelpunkt einer Kurve dritter Ordnung, der nicht zugleich ein Rückkehrpunkt der Kurve ist, möge ein Doppelpunkt im engeren Sinne genannt werden. Ein Doppelpunkt einer Kurve dritter Ordnung, dessen beide Tangenten konjugiert komplex sind, heißt ein isolierter Doppelpunkt der Kurve; im Gegensatz dazu wird ein Doppelpunkt einer Kurve dritter Ordnung mit zwei getrennten reellen Tangenten als ein Knotenpunkt der Kurve dritter Ordnung bezeichnet.

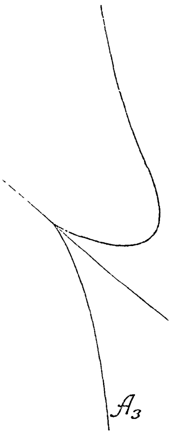


Fig. 110.

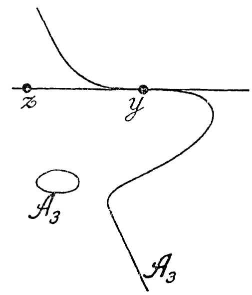


Fig. 111.

Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung; ihre konischen Polaren in bezug auf die Kurve zerfallen in die Wendetangente und die harmonische Polare des Wendepunktes. Schließen wir jetzt den Fall, wo der Punkt y in einen Doppelpunkt im engeren Sinne oder in einen Rückkehrpunkt der Kurve dritter Ordnung A_3 fällt, von der Betrachtung aus, setzen aber immer noch voraus, daß der Punkt y der Kurve A_3 angehört, so daß zwar die Gleichung:

$$(31) \qquad A_3 y^3 = 0,$$

nicht aber die Gleichung (29) erfüllt wird, und lassen sodann den Punkt y seine Lage auf der Kurve A_3 so lange verändern, bis für ihn und gewisse Lagen eines Punktes z die beiden Gleichungen befriedigt werden:

$$(60) \qquad A_3 y^2 z = 0 \quad \text{und}$$

$$(61) \qquad A_3 y z^2 = 0,$$

so besitzt wegen (31), (60) und (61) die Gleichung (19) des vorigen Abschnitts 3 gleiche Wurzeln $\mathfrak{h} = 0$, und es hat daher die Gerade $[yz]$ im Punkte y *eine dreipunktige Berührung* mit der Kurve dritter Ordnung A_3.

Man nennt einen solchen Punkt y einen Wendepunkt der Kurve dritter Ordnung und die Gerade $[yz]$ die zugehörige Wendetangente (Fig. 111).

Aus demselben Grunde wie auf S. 215f. genügt dann zugleich mit dem zur Festlegung der Wendetangente $[yz]$ benutzten Punkte z ein jeder Punkt z dieser Wendetangente den Gleichungen (60) und (61). Man hat also den Satz:

Satz 754: Ist A_3 eine ternäre Lückenform dritter Ordnung, und genügen 2 Punkte y und z den 3 Gleichungen (31), (60) und (61), während zugleich $A_3 y^2 \neq 0$ ist, so ist der Punkt y ein Wendepunkt und die Gerade $[yz]$ die zugehörige Wendetangente der Kurve dritter Ordnung A_3. Und umgekehrt bestehen für jeden Wendepunkt y einer Kurve dritter Ordnung A_3 und einen jeden Punkt z der Wendetangente $[yz]$ des Punktes y die 3 Gleichungen (31), (60) und (61).

Um über *die konische Polare eines Wendepunktes* Aufschluß zu erhalten, bemerke man, daß nach dem Satze 735 *die gerade Polare* eines jeden Punktes y einer Kurve dritter Ordnung, der von einem Doppelpunkt dieser Kurve verschieden ist, durch die Tangente der Kurve im Punkte y gebildet wird. Wenn also der Punkt y *ein Wendepunkt* der Kurve dritter Ordnung A_3 ist, so ist *seine gerade Polare* $A_3 y^2$ mit der Gleichung (60) nichts anderes als *die Wendetangente* W dieses Wendepunktes. Da aber nach dem Satze 754 für einen jeden Punkt z dieser Wendetangente zugleich die Gleichung (61), d. h. die Gleichung der konischen Polare des Wendepunktes y, erfüllt ist, so *enthält die konische Polare* $A_3 y$ *eines Wendepunktes* y *dessen Wendetangente* W *als Teil* und zerfällt somit in *ein Linienpaar, dessen eine Gerade diese Wendetangente* W *ist.*

Über *die zweite Gerade dieses Linienpaares* geben die Sätze 743 und 744 Aufschluß, nach denen die konische Polare eines jeden Punktes y einer Kurve dritter Ordnung den geometrischen Ort der Punkte bildet, die von dem Punkte y durch die Kurve dritter Ordnung harmonisch getrennt werden. Dies trifft insbesondere auch für den Fall zu, wo jener Punkt y der Kurve dritter Ordnung, welcher den Pol der konischen Polare bildet, ein Wendepunkt der Kurve dritter Ordnung ist, wo also die konische Polare in ein Linienpaar zerfällt, nämlich in die Wendetangente W jenes Wendepunktes und eine zweite Gerade. Von der Wendetangente W besitzt selbstverständlich jeder Punkt z die angegebene Eigenschaft, denn ein Tripel von drei zusammenfallenden Punkten y einer Geraden wird durch jeden Punkt z dieser Geraden zu einem harmonischen Punktwurf ergänzt.

Ein größeres Interesse gewinnt diese Eigenschaft für die zweite Gerade H jenes Linienpaares, da ja ihr zufolge jeder Punkt dieser Geraden H von dem zugehörigen Wendepunkte durch die Kurve dritter Ordnung harmonisch getrennt wird. Diese Gerade H heißt daher die harmonische Polare des Wendepunktes. Dieselbe geht insbesondere durch die Berührungspunkte der Tangenten hindurch, die man außer der Wendetangente von dem Wendepunkte y an die Kurve dritter Ordnung ziehen kann (Fig. 112).

Man kann das Ergebnis auch so ausdrücken: *Die Kurve dritter Ordnung* A_3 *geht an einem Wendepunkte und seiner harmonischen Polare* H *harmonisch gespiegelt in sich über.*

Und man hat ferner den Satz:

Satz 755: Die konische Polare A_3y eines Wendepunktes y einer Kurve dritter Ordnung A_3 in bezug auf diese Kurve ist das Linienpaar, das aus der Wendetangente W und der harmonischen Polare H des Wendepunktes gebildet wird.

Um die Anzahl der Tangenten zu bestimmen, die man von einem Wendepunkte y einer Kurve dritter Ordnung außer der Wendetangente W dieses Wendepunktes an die Kurve dritter Ordnung ziehen kann, beachte man, daß hier gerade der im Beweise des Satzes 741 ausgeschlossene Ausnahmefall eintritt, daß die konische Polare des Punktes y mit der Kurve dritter Ordnung im Punkte y 3 zusammenfallende Punkte gemein hat. Von den 6 Schnittpunkten der Kurve dritter Ordnung mit der konischen Polare des Wendepunktes y fallen daher 3 Schnittpunkte in diesen Wendepunkt y hinein, und es bleiben somit nur noch 3 weitere Schnittpunkte übrig. Nach dem Satze 736 und nach S. 242 gehen demnach von einem Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung ohne Doppelpunkt außer der Wendetangente W dieses Wendepunktes nur noch *3 weitere Tangenten* an die Kurve, und ihre 3 Berührungspunkte liegen nach dem Obigen auf der harmonischen Polare H jenes Wendepunktes (vgl. die obige Fig. 112).

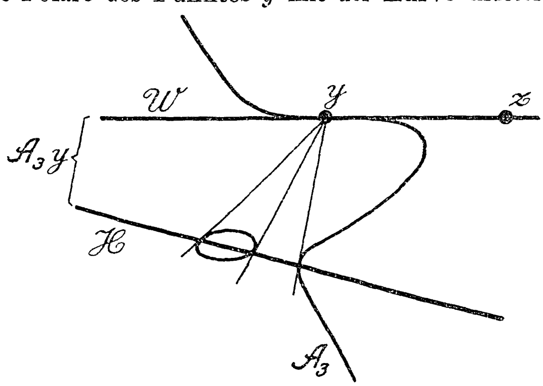


Fig. 112.

Bei einer Kurve dritter Ordnung mit einem und nur einem Doppelpunkt dagegen vermindert sich die Anzahl dieser Tangenten noch um 2, d. h. es geht an eine solche Kurve von einem Wendepunkte außer der zugehörigen Wendetangente nur noch *eine weitere Tangente* an die Kurve. Man hat somit den Satz:

Satz 756: Von einem Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung ohne Doppelpunkt lassen sich außer der Wendetangente dieses Wendepunktes noch 3 weitere Tangenten an die Kurve legen, an eine Kurve dritter Ordnung mit einem und nur einem Doppelpunkt nur noch eine weitere Tangente.

Auch jeder Wendepunkt einer Kurve dritter Ordnung gehört ihrer Hesseschen Kurve an. Anzahl der Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung ohne Doppelpunkt. Da nach dem Satze 749 die Hessesche Kurve einer Kurve dritter Ordnung A_3 der geometrische Ort aller Punkte der Ebene ist, deren konische Polare hinsichtlich der Kurve A_3 in ein Linienpaar zerfällt, und nach dem Satze 755 dies für die konische Polare eines Wendepunktes zutrifft, so müssen die Wendepunkte der Kurve dritter Ordnung A_3 zugleich auf der Hesseschen Kurve dieser Kurve gelegen sein. Es ist aber ganz besonders wichtig, daß von diesem Satze auch eine Umkehrung gilt, daß nämlich auch umgekehrt jeder Schnittpunkt einer Kurve dritter Ordnung A_3 mit ihrer Hesseschen Kurve, falls er nicht ein Doppelpunkt oder Rückkehrpunkt der Kurve A_3 ist, einen Wendepunkt dieser Kurve bildet.

Um dies zu beweisen, setzen wir voraus, ein Punkt y der Kurve dritter Ordnung A_3 sei von einem Doppelpunkt und Rückkehrpunkt der Kurve verschieden, also ein einfacher Punkt der Kurve, er genüge somit der Gleichung:

$$(30) \qquad A_3 y^3 = 0,$$

während zugleich $A_3 y^2 \neq 0$ ist. Dann weiß man von der konischen Polare $A_3 y$ des Punktes y, d. h. von der Kurve zweiter Ordnung:

$$(61) \qquad A_3 y z^2 = 0,$$

nach dem Satze 740, daß sie nicht nur durch den Punkt y hindurchgeht, sondern auch die Kurve dritter Ordnung A_3 in dem Punkte y berührt.

Wenn nun aber der Punkt y zugleich auch der Hesseschen Kurve (22) angehört, so zerfällt seine konische Polare (61) in ein Linienpaar, und da sie überdies die Kurve dritter Ordnung A_3 im Punkte y berührt, so muß eine von ihren beiden Geraden eine Tangente der Kurve dritter Ordnung A_3 im Punkte y sein, sich also durch eine Gleichung von der Form:

$$(60) \qquad A_3 y^2 z = 0$$

darstellen lassen.

Für die Punkte z einer Tangente der Kurve dritter Ordnung A_3 in einem Punkte y dieser Kurve, der aus ihr durch die Hessesche Kurve ausgeschnitten wird, ohne ein Doppelpunkt oder Rückkehrpunkt der Kurve zu sein, bestehen somit die Gleichungen (60) und (61), während für den Punkt y zugleich die Gleichung (30) befriedigt wird. Diese 3 Gleichungen aber waren nach dem Satze 754 zusammen mit der Nebenbedingung $A_3 y^2 \neq 0$ die Bedingungsgleichungen dafür, daß der Punkt y ein Wendepunkt der Kurve dritter Ordnung A_3 ist, und zugleich stellte die Gleichung (60) die zugehörige Wendetangente dar. Man hat also den Satz:

Satz 757: Jeder Wendepunkt einer Kurve dritter Ordnung gehört ihrer Hesseschen Kurve an, und umgekehrt ist jeder von einem Doppelpunkt und Rückkehrpunkt einer Kurve dritter Ordnung verschiedene Schnittpunkt dieser Kurve mit ihrer Hesseschen Kurve ein Wendepunkt der Kurve dritter Ordnung.

Der Satz von Bézout (Satz 738) gibt dann zugleich Aufschluß über die Anzahl der Wendepunkte, die eine Kurve dritter Ordnung besitzt, wenigstens für den Fall, wo die Kurve dritter Ordnung keinen Doppelpunkt und Rückkehrpunkt enthält. Da nämlich nach dem Satze 749 die Hessesche Kurve einer Kurve dritter Ordnung ebenfalls von der dritten Ordnung ist, und sich nach dem Bézoutschen Satze zwei Kurven dritter Ordnung in 9 Punkten schneiden, so folgt aus dem Satze 757 der Satz:

Satz 758: Eine Kurve dritter Ordnung, die keinen Doppel- und Rückkehrpunkt hat, besitzt neun Wendepunkte.

Abschnitt 50.

Die neun Schnittpunkte zweier Kurven dritter Ordnung. Die Wendetangentialgleichung einer Kurve dritter Ordnung.

Die Anzahl der Punkte, die eine Kurve n ter, insbesondere dritter Ordnung, bestimmen. Bei einer *ternären quadratischen Form* lauten die Koeffizienten:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a}_{11}, & \mathfrak{a}_{12}, & \mathfrak{a}_{13}, \\ & \mathfrak{a}_{22}, & \mathfrak{a}_{23}, \\ & & \mathfrak{a}_{33}. \end{array}$$

Ihre Anzahl ν_2 ist gleich der Anzahl $3^{\cdot\cdot 2}$ der Kombinationen mit Wiederholung aus den 3 Elementen $1, 2, 3$ zur zweiten Klasse[1]), d. h. es ist:

$$\nu_2 = 3^{\cdot\cdot 2} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 6\,. \tag{1}$$

Die Anzahl $\mathfrak{P}_2$ der Punkte, die eine Kurve zweiter Ordnung bestimmen, ist um 1 kleiner als die Anzahl ν_2 der Koeffizienten der ternären quadratischen Form, es ist also:

$$\mathfrak{P}_2 = \nu_2 - 1 = 5 \tag{2}$$

Bei einer *ternären kubischen Form* lauten die Koeffizienten:

$$\begin{array}{cccccc} \mathfrak{a}_{111}, & \mathfrak{a}_{112}, & \mathfrak{a}_{113}, & \mathfrak{a}_{122}, & \mathfrak{a}_{123}, & \mathfrak{a}_{133}, \\ & & & \mathfrak{a}_{222}, & \mathfrak{a}_{223}, & \mathfrak{a}_{233}, \\ & & & & & \mathfrak{a}_{333}. \end{array}$$

---

1) Vgl. hierzu die Bezeichnungen meines Vaters für die Anzahl der Kombinationen und Variationen ohne und mit Wiederholung. Er bezeichnet in Anlehnung an C. G. Scheibert die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung aus n Elementen zur p ten Klasse mit $n^{\cdot p}$ (gelesen n Punkt p), die Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung aus n Elementen zur p ten Klasse durch das Symbol $n^{\cdot\cdot p}$ (gelesen n Punkt Punkt p), die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung aus n Elementen zur p ten Klasse mit $n^{\backprime p}$ (gelesen n Strich p) und die Anzahl der Variationen mit Wiederholung aus n Elementen zur p ten Klasse mit $n^{\backprime\backprime p}$ (gelesen n Strich Strich p). Siehe H. Graßmann, Lehrbuch der Arithmetik. Stettin 1860. Nr. 406 und C. G. Scheibert, Versuch, die Prinzipien der Kombinationslehre als einer selbständigen Wissenschaft festzustellen, nebst einer Bezeichnungsmethode in derselben. Programm. Stettin 1834.

Ihre Anzahl v_3 ist gleich der Anzahl $3^{\cdot\cdot 3}$ der Kombinationen mit Wiederholung zur dritten Klasse aus den Elementen 1, 2, 3, d. h., es ist:

$$v_3 = 3^{\cdot\cdot 3} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10\,. \tag{3}$$

Die Anzahl $\mathfrak{P}_3$ der Punkte, die eine Kurve dritter Ordnung bestimmen, ist um 1 kleiner als die Anzahl v_3 der Koeffizienten der ternären kubischen Form, es ist somit:

$$\mathfrak{P}_3 = v_3 - 1 = 9\,. \tag{4}$$

Man hat daher den Satz:

Satz 759: Eine Kurve dritter Ordnung ist im allgemeinen durch 9 Punkte bestimmt.

Es ist durchaus nötig, hier die Beschränkung „im allgemeinen“ hinzuzufügen; denn es können, wie wir sogleich sehen werden, 9 Punkte der Ebene auch so liegen, daß durch sie *unendlich viele* Kurven dritter Ordnung hindurchgehen.

Entsprechend wird bei einer *ternären Form n ter Ordnung* die Anzahl v_n ihrer Koeffizienten:

$$v_n = 3^{\cdot\cdot n} = \frac{3 \cdot 4 \cdots (n-1)\, n\, (n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdots (n-3)(n-2)(n-1)\, n} \quad \text{oder} \tag{5}$$

$$v_n = \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} = (n+1)^{\cdot\cdot 2}. \tag{6}$$

Die Anzahl $\mathfrak{P}_n$ der Punkte, die eine Kurve n ter Ordnung bestimmen, ist somit:

$$\mathfrak{P}_n = v_n - 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2} \tag{7}$$

und man hat den Satz:

Satz 760: Eine Kurve $n$ter Ordnung ist im allgemeinen durch $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte bestimmt.

Auch hier kann für *besondere Lagen* der $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte der Fall eintreten, daß sie *unendlich vielen* Kurven n ter Ordnung gemein sind, daß sie also zur Bestimmung einer solchen Kurve nicht ausreichen.

Der Plückersche Schnittpunktsatz für zwei Kurven n ter Ordnung. Im allgemeinen gehen aber erst durch:

$$\mathfrak{P}_n - 1 = \frac{n(n+3)}{2} - 1$$

Punkte unendlich viele Kurven n ter Ordnung hindurch. In der Tat kann man auf Grund der gegebenen $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ Punkte nur ebenso viele lineare Gleichungen zur Bestimmung der $\frac{n(n+3)}{2}$ Verhältnisse der Koeffizienten der Kurvengleichung $A_n x^n = 0$ bilden, d. h. eine Gleichung weniger, als zu deren Bestimmung erforderlich sind. Es gibt daher unendlich viele Kurven n ter Ordnung, welche die gegebenen Punkte enthalten.

Man überzeugt sich aber leicht, daß je zwei solche Kurven, wenigstens für $n > 2$, auch noch mehr Punkte miteinander gemein haben. Sind nämlich:

$$\text{(8)} \qquad \boldsymbol{A}_n x^n = 0 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B}_n x^n = 0$$

die Gleichungen zweier Kurven n ter Ordnung, welche durch die $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ Punkte hindurchgehen, so stellt die Gleichung:

$$\text{(9)} \qquad \mathfrak{h} \boldsymbol{A}_n x^n + \mathfrak{k} \boldsymbol{B}_n x^n = 0,$$

in der $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$ zwei konstante Zahlgrößen bedeuten, für jedes Wertpaar dieser beiden Zahlgrößen eine Kurve n ter Ordnung dar, welche die sämtlichen Schnittpunkte der beiden Kurven (8), also auch die gegebenen $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ Schnittpunkte enthält.

Die Anzahl aller Schnittpunkte der Kurven n ter Ordnung (8) ist aber nach dem Satze von Bézout (Satz 740) $= n^2$. Die Anzahl $\mathfrak{Q}_n$ der weiteren Punkte, welche die beiden Kurven (8) außer den gegebenen $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ Punkten miteinander gemein haben, beträgt daher:

$$\mathfrak{Q}_n = n^2 - \frac{n(n+3)}{2} + 1,$$

d. h. es ist diese Anzahl:

$$\text{(10)} \qquad \mathfrak{Q}_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Es kann aber andererseits auch jede durch die gegebenen $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ Punkte gehende Kurve n ter Ordnung durch eine Gleichung von der Form (9) dargestellt werden. Denn, ist p ein beliebiger Punkt der Ebene, der von den n^2 Schnittpunkten der Kurven (8) verschieden ist, so kann man stets eine Kurve (9) angeben, die außer durch die n^2 Schnittpunkte der Kurven (8) auch durch den Punkt p hindurchgeht. Die Gleichung:

$$\text{(11)} \qquad \mathfrak{h} \boldsymbol{A}_n p^n + \mathfrak{k} \boldsymbol{B}_n p^n = 0$$

ergibt nämlich für das Parameterverhältnis $\frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{h}}$ der fraglichen Kurve den Wert:

$$\text{(12)} \qquad \frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{h}} = -\frac{\boldsymbol{A}_n p^n}{\boldsymbol{B}_n p^n},$$

und dieser wird nur unbestimmt, wenn die Gleichungen:

$$\text{(13)} \qquad \boldsymbol{A}_n p^n = 0 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B}_n p^n = 0$$

gleichzeitig erfüllt werden. Das aber tritt nur ein, wenn der Punkt p einer von den n^2 Schnittpunkten der beiden Kurven (8) ist, was oben ausgeschlossen wurde.

In diesen Ergebnissen ist zunächst der folgende von Julius Plücker herrührende Satz enthalten[1]):

Satz 761: Zweiter Satz von Plücker (Plückerscher Schnittpunktsatz): Durch $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ Punkte der Ebene gehen unendlich viele Kurven $n$ter Ordnung hindurch. Alle Kurven $n$ter Ordnung aber, welche diese Punkte enthalten, haben auch noch weitere:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Punkte miteinander gemein.

Anwendung des Plückerschen Schnittpunktsatzes auf Kurven dritter Ordnung. Das Büschel von Kurven n ter, insbesondere von Kurven dritter Ordnung. Aus dem zweiten Satze von Plücker folgt speziell für Kurven dritter Ordnung der Satz:

Satz 762: Durch 8 Punkte der Ebene gehen unendlich viele Kurven dritter Ordnung hindurch. Alle Kurven dritter Ordnung aber, welche diese 8 Punkte enthalten, haben noch einen neunten Punkt miteinander gemein.

Bezeichnet man ferner noch die Gesamtheit der durch die Gleichung (9) für beliebige reelle Werte von $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$ dargestellten Kurven n ter Ordnung als ein Büschel von Kurven $n$ter Ordnung und nennt die beiden Kurven (8) seine Grundkurven, die n^2 Schnittpunkte der beiden Grundkurven die Grundpunkte des Büschels, so kann man zugleich den Satz aussprechen:

Satz 763: Die n^2 Grundpunkte eines Büschels von Kurven $n$ter Ordnung, d. h. die n^2 Schnittpunkte seiner beiden Grundkurven, gehören sämtlichen Kurven des Büschels an. Dagegen geht durch einen jeden Punkt der Ebene, der von den n^2 Grundpunkten des Büschels verschieden ist, eine und nur eine Kurve des Büschels hindurch.

Insbesondere heißt die Gesamtheit aller Kurven dritter Ordnung, die für beliebige Werte der reellen Zahlgrößen $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$ durch eine Gleichung von der Form:

$$\mathfrak{h} \boldsymbol{A}_3 x^3 + \mathfrak{k} \boldsymbol{B}_3 x^3 = 0 \tag{14}$$

---

1) Vgl. J. Plücker, Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. I (1828), S. 228f., ferner die Abhandlung von C. G. J. Jacobi, De relationibus, quae locum habere debent inter puncta intersectionis duarum curvarum vel trium superficierum algebraicarum dati ordinis, simul cum enodatione paradoxi algebraici. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 15 (1836), S. 285 ff. (Gesammelte Werke, Bd. 3, S. 331 ff.)

dargestellt werden, unter $\boldsymbol{A}_3$ und $\boldsymbol{B}_3$ zwei ternäre Lückenformen dritter Ordnung verstanden, ein Büschel von Kurven dritter Ordnung, die Kurven:

(15) $$\boldsymbol{A}_3 x^3 = 0 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B}_3 x^3 = 0$$

heißen die Grundkurven des Büschels und die 9 Schnittpunkte der beiden Grundkurven die Grundpunkte des Büschels. Für ein solches Büschel von Kurven dritter Ordnung folgt aus dem Satze 763 der Satz:

Satz 764: Die 9 Grundpunkte eines Büschels von Kurven dritter Ordnung, d. h. die 9 Schnittpunkte seiner beiden Grundkurven, gehören sämtlichen Kurven des Büschels an. Dagegen geht durch jeden Punkt der Ebene, der von den 9 Grundpunkten des Büschels verschieden ist, eine und nur eine Kurve des Büschels hindurch.

Folgerungen für den Fall, wo eine von den Kurven eines Büschels von Kurven dritter Ordnung zerfällt. Wendet man den Satz 762 auf den Fall an, wo eine von den Kurven dritter Ordnung in eine Kurve zweiter Ordnung und eine gerade Linie zerfällt (vgl. S. 212), so folgert man:

Geht eine Kurve zweiter Ordnung durch 6 von den 9 Schnittpunkten zweier Kurven dritter Ordnung hindurch, so enthält die gerade Verbindungslinie zweier von den 3 anderen Schnittpunkten dieser Kurven dritter Ordnung auch den dritten von diesen 3 Schnittpunkten.

Und: Liegen 3 von den 9 Schnittpunkten zweier Kurven dritter Ordnung in einer geraden Linie, so geht die Kurve zweiter Ordnung, die durch 5 von den 6 übrigen Schnittpunkten dieser Kurven dritter Ordnung bestimmt wird, auch durch den sechsten von jenen 6 Schnittpunkten hindurch.

Man hat also den Satz:

Satz 765: Liegen von den 9 Schnittpunkten zweier Kurven dritter Ordnung 6 Punkte auf einer Kurve zweiter Ordnung, so liegen die 3 anderen Schnittpunkte in einer Geraden und umgekehrt.

Aus diesem Satze folgt insbesondere, da zwei gerade Linien zusammen eine Kurve zweiter Ordnung bilden, der Satz:

Satz 766: Liegen von den 9 Schnittpunkten zweier Kurven dritter Ordnung zweimal drei Punkte in je einer geraden Linie, so liegen auch die letzten 3 Punkte in einer Geraden.

Und aus ihm ergibt sich wiederum der Satz (Fig. 113):

Satz 767: Sind a, a', a'' drei in einer Geraden liegende Punkte einer Kurve dritter Ordnung, b, b', b'' drei weitere solche Punkte, und schneiden die Verbindungslinien ab, $a'b'$, $a''b''$ die Kurve dritter Ordnung in den Punkten c, c', c'', so liegen auch diese drei Punkte in einer geraden Linie.[1])

Beweis: Man fasse die drei geraden Linien abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$ zusammen als eine zweite Kurve dritter Ordnung auf. Dann liegen von den 9 Schnittpunkten $a, b, \ldots c''$ der gegebenen Kurve dritter Ordnung mit jener zweiten Kurve dritter Ordnung zweimal drei Punkte, nämlich die Punkte a, a', a'' und die Punkte b, b', b'' in je einer Geraden. Folglich gilt nach dem Satze 766 dasselbe auch von den drei Punkten c, c', c''.

Aus dem Satze 767 kann man noch einen Sondersatz dadurch ableiten, daß man die beiden Geraden $aa'a''$ und $bb'b''$ in eine Gerade zusammen-

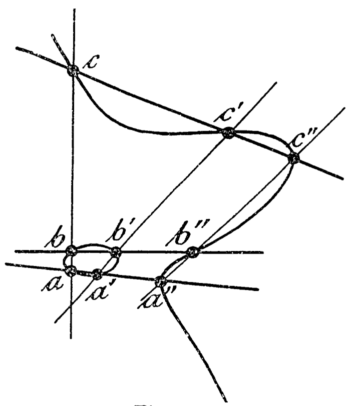


Fig. 113.

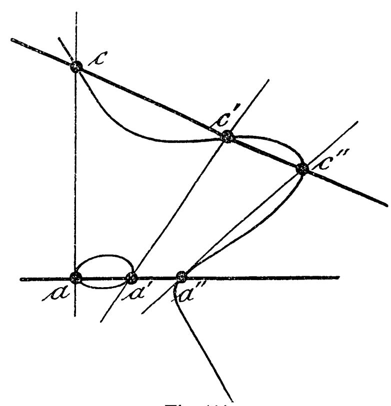


Fig. 114.

fallen läßt und zugleich die entsprechend bezeichneten Punkte a und b, a' und b', a'' und b'' zu je einem Punkte vereinigt (Fig. 114). Dann werden die Verbindungslinien ab, $a'b'$, $a''b''$ drei Tangenten der Kurve dritter Ordnung, deren Berührungspunkte in einer geraden Linie liegen, und die Punkte c, c', c'' werden die Schnittpunkte, welche diese Tangenten mit der Kurve dritter Ordnung außer ihren Berührungspunkten a, a', a'' gemein haben, die sogenannten Tangentialpunkte jener Berührungspunkte a, a', a''. Man hat also den Satz:

Satz 768: Liegen drei Punkte a, a', a'' einer Kurve dritter Ordnung in einer Geraden, so liegen auch ihre Tangentialpunkte c, c', c'' in einer Geraden.

Von diesem Satze kann man eine wichtige Anwendung auf die Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung machen. Ein Wendepunkt einer Kurve dritter Ordnung kann nämlich charakterisiert werden als ein Punkt einer Kurve dritter Ordnung, der mit seinem Tangentialpunkte zusammenfällt. Sind daher w_1 und w_2 zwei Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung und schneidet ihre Verbindungslinie die Kurve dritter Ordnung in dem Punkte w_3

1) Vgl. zum folgenden die Darstellung bei H. Durège, Die ebenen Kurven dritter Ordnung, Leipzig 1871, Nr. 229 ff.

(Fig. 115), so kann man zeigen, daß auch der Punkt w_3 ein Wendepunkt der Kurve dritter Ordnung sein muß.

In der Tat fallen ja die Tangentialpunkte der Wendepunkte w_1 und w_2 nach dem soeben Gesagten mit den Punkten w_1 und w_2 zusammen. Nach dem Satze 768 muß somit auch der Tangentialpunkt des Punktes w_3 mit dem Punkte w_3 vereint liegen, d. h. auch der Punkt w_3 ist ein Wendepunkt der Kurve dritter Ordnung. Man hat daher den Satz:

Satz 769: Satz von De Gua: Die gerade Verbindungslinie zweier Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung schneidet aus der Kurve noch einen dritten Wendepunkt aus.[1])

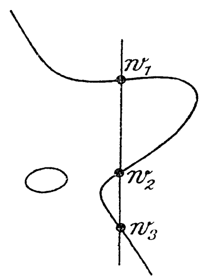


Fig. 115.

Die Gleichung einer Kurve dritter Ordnung ausgedrückt durch die Wendetangenten dreier in einer Geraden liegenden Wendepunkte und durch diese Gerade. Erster Perspektivitätssatz für Kurven dritter Ordnung. Aus dem Satze von De Gua entspringt eine wichtige Gleichungsform einer Kurve dritter Ordnung.[2]) Sind nämlich A, B, C, D 4 Stäbe aus 4 Geraden, von denen keine 3 durch einen Punkt gehen, und ist $\mathfrak{k}$ eine reelle Zahlgröße, so stellt die Gleichung:

$$(16) \qquad [Ax][Bx][Cx] - \mathfrak{k}[Dx]^3 = 0$$

ein Büschel von Kurven dritter Ordnung dar, dessen *Grundkurven* durch das Geradentripel A, B, C und durch die dreifach zählende Gerade D gebildet werden. Die 9 *Grundpunkte* dieses Büschels sind daher die 3 dreifach zählenden Schnittpunkte $[AD]$, $[BD]$, $[CD]$ der 3 ersten Geraden A, B, C mit der vierten Geraden D. Diese dreifach zählenden Schnittpunkte der Geraden D bilden also für jede von den Kurven dritter Ordnung des Büschels (16) 3 Wendepunkte und die Geraden A, B, C die zugehörigen Wendetangenten. Man hat somit den Satz:

---

1) Vgl. De Gua, Usages de l'analyse de Descartes pour découvrir sans le secours du calcul différentiel les propriétés ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres. Paris 1740. S. 225 und 315. Auf die geschichtliche Bedeutung von De Gua für die Entwicklung der Kurvenlehre wies zuerst A. Brill hin: Siehe A. Brill und M. Noether, Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 3 (1892—93), S. 132—134. Eine ausführliche Darstellung der Leistungen von De Gua findet man bei P. Sauerbeck, Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven nach den Methoden von Jean Paul De Gua de Malves. Leipzig 1902. Siehe ferner: H. Wieleitner, Theorie der algebraischen Kurven höherer Ordnung. Leipzig 1905. S. 200.

2) Vgl. zum folgenden: J. Plücker, System der analytischen Geometrie. Berlin 1835, Nr. 320ff. Siehe auch H. Durège, Die ebenen Kurven dritter Ordnung. Leipzig 1871, Nr. 352.

Satz 770: Dritter Satz von Plücker: Die Gleichung:

$$[Ax][Bx][Cx] - \mathfrak{k}[Dx]^3 = 0, \tag{16}$$

in der A, B, C, D 4 Stäbe aus 4 Geraden sind, von denen keine 3 durch einen Punkt gehen, und in der $\mathfrak{k}$ eine Zahlgröße bedeutet, stellt ein Büschel von Kurven dritter Ordnung dar, welche die 3 in der Geraden D liegenden Punkte:

$$w_1 = [AD], \quad w_2 = [BD], \quad w_3 = [CD] \tag{17}$$

zu Wendepunkten und die Geraden A, B, C zu Wendetangenten haben.

Die Gleichung (16) einer Kurve dritter Ordnung erinnert an die auf ein Tangentialdreieck bezogene Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung (vgl. die Gleichung (34) des 33. Abschnitts) und möge die Wendetangentialgleichung einer Kurve dritter Ordnung genannt werden.

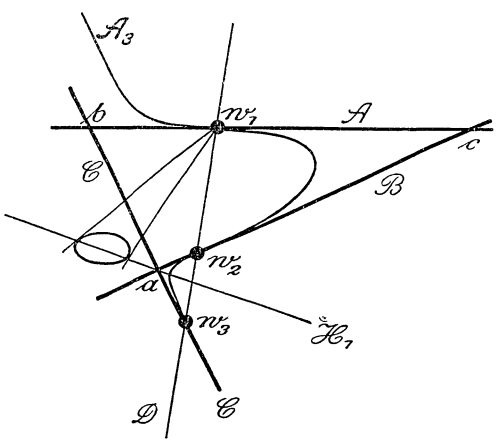


Fig. 116.

Bezeichnet man noch die den Seiten A, B, C des Wendetangentendreiseits ABC gegenüberliegenden Ecken mit a, b, c, setzt also etwa:

$$a = [BC], \quad b = [CA], \quad c = [AB], \tag{18}$$

so läßt sich zeigen, daß die harmonische Polare eines jeden von den 3 Wendepunkten w_1, w_2, w_3, genommen hinsichtlich irgendeiner Kurve des Büschels (16), durch diejenige Ecke des Wendetangentendreiseits ABC hindurchgeht, die der Wendetangente des betreffenden Wendepunktes gegenüberliegt (Fig. 116).

Wir zeigen etwa, daß die harmonische Polare H_1 des Wendepunktes $w_1 = [AD]$ die Ecke $a = [BC]$ des Wendetangentendreiseits ABC enthält. Dazu setze man den der linken Seite von (16) entsprechenden Lückenausdruck:

$$[Al][Bl][Cl] - \mathfrak{k}[Dl]^3 = A_3, \tag{19}$$

so daß die Gleichung (16) unseres Büschels von Kurven dritter Ordnung in der Form geschrieben werden kann:

$$A_3 x^3 = 0. \tag{20}$$

Nun zerfällt nach dem Satze 755 die konische Polare eines Wendepunktes einer Kurve dritter Ordnung in bezug auf diese Kurve in die harmonische Polare des betrachteten Wendepunktes und seine Wendetangente. Da aber der Punkt a als Gegenecke der Seite A des Dreiseits ABC nicht der Seite A, d. h. nicht der Wendetangente A des Wendepunktes w_1, angehören kann, so muß er, falls er in der konischen Polare des Wendepunktes w_1 enthalten sein sollte, auf der harmonischen Polare H_1 des Wendepunktes w_1 gelegen sein.

Daß aber der Punkt a der konischen Polare des Punktes w_1 in bezug auf die Kurve (20) angehören muß, zeigt man in folgender Weise: Die Gleichung der konischen Polare des Wendepunktes w_1 in bezug auf die Kurve (20) lautet:

(21) $$A_3 w_1 z^2 = 0.$$

Soll also der Punkt a dieser konischen Polare angehören, so muß er die Gleichung befriedigen:

(22) $$A_3 w_1 a^2 = 0.$$

Diese Gleichung aber wird in der Tat erfüllt, denn wegen (17), (18) und (19) läßt sich ihre linke Seite in der Form schreiben:

$$\begin{aligned} A_3[AD][BC]^2 &= [Al][Bl][Cl][AD][BC]^2 - \mathfrak{k}[Dl]^3[AD][BC]^2 \\ &= \tfrac{1}{3}\{[AAD][BBC][CBC] + [ABC][BBC][CAD] + [ABC][BAD][CBC]\} \\ &\quad - \mathfrak{k}[DAD][DBC]^2. \end{aligned}$$

Und dieser Ausdruck wird $= 0$, da in jedem Gliede wenigstens eins von den dreifaktorigen Stabprodukten verschwindet. Damit ist die Gleichung (22) bewiesen. Man hat also den Satz:

Satz 771: Erster Perspektivitätssatz für Kurven dritter Ordnung: Die beiden Wendetangenten zweier Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung schneiden sich auf der harmonischen Polare desjenigen dritten Wendepunktes dieser Kurve, der mit den beiden ersten Wendepunkten in einer geraden Linie liegt.

Abschnitt 51.

Das System der neun Wendepunkte und die kanonische Form der Gleichung einer Kurve dritter Ordnung.

Rechnerische Beziehungen der dritten Wurzeln der Einheit zu gewissen ternären kubischen Formen. Ist ε eine von den beiden konjugiert komplexen dritten Wurzeln der Einheit, also etwa wie oben auf S. 26:

(1) $$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

so lassen die 3 dritten Wurzeln der Einheit die Darstellung zu (vgl. S. 26):

$$1, \quad \varepsilon, \quad \varepsilon^2.$$

Als Wurzeln der Gleichung:

$$\mathfrak{x}^3 - 1 = 0$$

genügen diese dann den Gleichungen:

$$(2) \qquad 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0 \quad \text{und}$$

$$(3) \qquad \varepsilon^3 = 1,$$

von denen die letztere Gleichung auch unmittelbar aus der Gleichung (1) oder auch aus dem Begriff einer dritten Wurzel der Einheit folgt.

Bildet man jetzt das Produkt[1]):

$$(\mathfrak{x} + \mathfrak{y} + \mathfrak{z})(\mathfrak{x} + \varepsilon\mathfrak{y} + \varepsilon^2\mathfrak{z})(\mathfrak{x} + \varepsilon^2\mathfrak{y} + \varepsilon\mathfrak{z}),$$

so ergibt sich durch Ausmultiplizieren auf Grund der Gleichungen (2) und (3) der Wert:

$$\mathfrak{x}^3 + \mathfrak{y}^3 + \mathfrak{z}^3 - 3\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z},$$

d. h. man erhält die Gleichung:

$$(4) \quad \mathfrak{x}^3 + \mathfrak{y}^3 + \mathfrak{z}^3 - 3\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z} = (\mathfrak{x} + \mathfrak{y} + \mathfrak{z})(\mathfrak{x} + \varepsilon\mathfrak{y} + \varepsilon^2\mathfrak{z})(\mathfrak{x} + \varepsilon^2\mathfrak{y} + \varepsilon\mathfrak{z}).$$

Hier ist die linke Seite eine symmetrische Funktion von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$. Es darf daher auch die rechte Seite ihren Wert nicht ändern, wenn man $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{y}$ oder $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{z}$ vertauscht, d. h. es gelten auch die beiden neuen Gleichungen:

$$(5) \quad \mathfrak{x}^3 + \mathfrak{y}^3 + \mathfrak{z}^3 - 3\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z} = (\mathfrak{x} + \mathfrak{y} + \mathfrak{z})(\varepsilon\mathfrak{x} + \mathfrak{y} + \varepsilon^2\mathfrak{z})(\varepsilon^2\mathfrak{x} + \mathfrak{y} + \varepsilon\mathfrak{z}),$$

$$(6) \quad \mathfrak{x}^3 + \mathfrak{y}^3 + \mathfrak{z}^3 - 3\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z} = (\mathfrak{x} + \mathfrak{y} + \mathfrak{z})(\varepsilon\mathfrak{x} + \varepsilon^2\mathfrak{y} + \mathfrak{z})(\varepsilon^2\mathfrak{x} + \varepsilon\mathfrak{y} + \mathfrak{z}).$$

Substituiert man ferner in die Gleichung (4) den Wert $\varepsilon\mathfrak{x}$ anstatt $\mathfrak{x}$ und andererseits den Wert $\varepsilon^2\mathfrak{x}$ anstatt $\mathfrak{x}$, so ergeben sich nach geringen Umformungen die Gleichungen:

$$(7) \quad \mathfrak{x}^3 + \mathfrak{y}^3 + \mathfrak{z}^3 - 3\varepsilon\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z} = \varepsilon^2(\varepsilon\mathfrak{x} + \mathfrak{y} + \mathfrak{z})(\mathfrak{x} + \varepsilon\mathfrak{y} + \mathfrak{z})(\mathfrak{x} + \mathfrak{y} + \varepsilon\mathfrak{z})$$

$$(8) \quad \mathfrak{x}^3 + \mathfrak{y}^3 + \mathfrak{z}^3 - 3\varepsilon^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z} = \varepsilon(\varepsilon^2\mathfrak{x} + \mathfrak{y} + \mathfrak{z})(\mathfrak{x} + \varepsilon^2\mathfrak{y} + \mathfrak{z})(\mathfrak{x} + \mathfrak{y} + \varepsilon^2\mathfrak{z}).$$

Die 12 Wendepunktslinien einer Kurve dritter Ordnung. Ihre Gruppierung zu 4 Dreiseiten, den 4 Wendepunktsdreiseiten. Nach dem Satze 758 besitzt eine Kurve dritter Ordnung ohne Doppel- und Rückkehrpunkt 9 Wendepunkte. Denkt man sich zunächst von jedem dieser 9 Wendepunkte die Strahlen nach den 8 übrigen Wendepunkten gezogen, so würde man $9 \cdot 8 = 72$ Verbindungsstrahlen erhalten, von denen indes immer 2 Verbindungsstrahlen in dieselbe Gerade fallen. Da aber nach dem Satze 769 die Verbindungslinie zweier Wendepunkte der Kurve stets noch einen dritten Wendepunkt enthält, so fallen von jenen 72 an sich denkbaren Verbindungs-

1) Vgl. zum folgenden: H. Durège, Die ebenen Kurven dritter Ordnung. Leipzig 1871, Nr. 10.

strahlen sogar immer 6 in eine Gerade zusammen, nämlich, wenn jene 3 Wendepunkte w_1, w_2, w_3 heißen, die 6 Verbindungsstrahlen:

$$\begin{array}{ll} w_2 w_3, & w_3 w_2, \\ w_3 w_1, & w_1 w_3, \\ w_1 w_2, & w_2 w_1. \end{array}$$

Und, da auch nicht mehr als 3 Wendepunkte der Kurve dritter Ordnung in einer Geraden enthalten sein können, so ergeben sich im ganzen $\frac{72}{6} = 12$ verschiedene Verbindungslinien der 9 Wendepunkte oder, wie wir sagen wollen, 12 verschiedene „Wendepunktslinien".

Durch einen jeden von den 9 Wendepunkten gehen dabei so viele von den 12 Wendepunktslinien hindurch, als nötig sind, um die 8 übrigen Wendepunkte zu erschöpfen. Da aber jede von diesen Wendepunktslinien außer dem Ausgangspunkte noch zwei weitere Wendepunkte enthält, so gehen von jedem Wendepunkte 4 Wendepunktslinien aus, d. h. man hat den Satz:

Satz 772: Die 9 Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung ohne Doppel- und Rückkehrpunkt liegen zu je dreien in einer Geraden, der diesen 3 Wendepunkten zugehörenden Wendepunktslinie. Und zwar gibt es 12 solche Wendepunktslinien, und von ihnen gehen durch jeden Wendepunkt immer 4 Wendepunktslinien hindurch.

Wählt man von den 12 Wendepunktslinien einer Kurve dritter Ordnung diejenigen Geraden aus, welche 3 auf einer Wendepunktslinie liegende Wendepunkte w_1, w_2, w_3 enthalten, so gehen außer der Wendepunktslinie $w_1 w_2 w_3$ selbst durch jeden von den 3 Wendepunkten w_1, w_2, w_3 noch 3 weitere Wendepunktslinien hindurch. Man erhält so im ganzen als Wendepunktslinien, die durch die 3 Wendepunkte w_1, w_2, w_3 gehen, 10 gerade Linien, und es bleiben also noch 2 Wendepunktslinien übrig, die keinem von den 3 Wendepunkten w_1, w_2, w_3 zugehören. Eine von ihnen geht daher durch 3 von den 6 übrigen Wendepunkten. Da aber nach den Sätzen 757 und 758 die 9 Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung ohne Doppel- und Rückkehrpunkt die Schnittpunkte der Kurve dritter Ordnung mit ihrer Hesseschen Kurve sind, so läßt sich auf die 9 Wendepunkte der Satz 767 anwenden. Dieser besagt: Wenn von den 9 Schnittpunkten zweier Kurven dritter Ordnung zweimal 3 Punkte in einer Geraden liegen, so liegen auch die letzten 3 in einer Geraden. Es müssen daher auch die letzten 3 von den 9 Wendepunkten in einer Geraden enthalten sein.

Wenn man somit von einer derjenigen 4 Wendepunktslinien ausgeht, welche einem bestimmten Wendepunkte, etwa dem Wendepunkte w_1, zugehören, es sei die Gerade $w_1 w_2 w_3$, so bekommt man auf die beschriebene Art 3 Wendepunktslinien, die zusammen alle 9 Wendepunkte enthalten. Und wendet man dies Verfahren auf alle 4 Wendepunktslinien an, die vom Punkte

w_1 auslaufen, so gelangt man zu 4 Gruppen von je 3 Wendepunktslinien, von denen eine jede Gruppe alle 9 Wendepunkte enthält.

Jede von diesen 4 Gruppen von 3 Wendepunktslinien bildet also ein Dreiseit, dessen Seiten zusammen durch alle 9 Wendepunkte der Kurve dritter Ordnung hindurchgehen. Die 4 Dreiseite mögen daher die 4 Wendepunktsdreiseite der Kurve dritter Ordnung genannt werden. Man hat somit den Satz:

Satz 773: Die 12 Wendepunktslinien einer Kurve dritter Ordnung lassen sich in 4 Gruppen von je 3 geraden Linien einteilen, in der Weise, daß auf jeder von diesen 4 Gruppen von Wendepunktslinien alle 9 Wendepunkte enthalten sind. Die von diesen 4 Gruppen von Geraden gebildeten Dreiseite heißen die 4 Wendepunktsdreiseite der Kurve dritter Ordnung.

Wieviel Wendepunkte einer reellen Kurve dritter Ordnung sind reell? Man gelangt zur rechnerischen Bestimmung der 9 Wendepunkte, der 9 Wendetangenten und der 12 Wendepunktslinien einer Kurve dritter Ordnung, wenn man die Gleichung der Kurve dritter Ordnung auf die sog. „kanonische Form“ bringt, nämlich auf die Form:

$$[E_1 x]^3 + [E_2 x]^3 + [E_3 x]^3 - 3\,\mathfrak{k}[E_1 x][E_2 x][E_3 x] = 0, \tag{9}$$

in der E_1, E_2, E_3 die Grundstäbe eines neuen Fundamentaldreiecks sind, also der Gleichung:

$$[E_1 E_2 E_3] = 1 \tag{10}$$

unterliegen, und in der $\mathfrak{k}$ eine Zahlgröße ist. Die Darstellung (9) für eine beliebig gegebene Kurve dritter Ordnung ist möglich, denn die Gleichung (9) enthält außer der Zahlgröße $\mathfrak{k}$ noch die 9 Bestimmungsstücke der 3 Grundstäbe E_1, E_2, E_3 des neuen Fundamentaldreiecks in bezug auf das alte. Zwischen diesen Grundstäben herrscht aber noch die Beziehung (10), so daß im ganzen 9 Zahlgrößen verfügbar sind. Das stimmt aber gerade zu der Zahl der Punkte, durch die nach dem Satze 759 eine Kurve dritter Ordnung festgelegt wird.[1])

---

1) Die kanonische Form der Gleichung einer Kurve dritter Ordnung findet sich (in einer von der Gleichung (9) wenig abweichenden Schreibung) zuerst in der ersten der beiden auf S. 233 zitierten Arbeiten von Hesse auf S. 90. (Gesammelte Werke, S. 115ff.) Vgl. dazu auch die beiden späteren Arbeiten von Hesse: Über Curven dritter Classe und Curven dritter Ordnung, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 38 (1849), S. 249ff. (Gesammelte Werke, S. 202ff.) und: Eigenschaften der Wendepunkte der Curven dritter Ordnung und der Rückkehrtangenten der Curven dritter Classe, in demselben Band, S. 257ff. (Gesammelte Werke, S. 211ff.), sowie die Darstellung von Durège, Die ebenen Kurven dritter Ordnung, Leipzig 1871, Nr. 354. Die oben gegebene Begründung für die Möglichkeit, die Gleichung einer beliebigen Kurve dritter Ordnung in der kanonischen Form darzustellen, benutzt die von Plücker

Die Gleichung (9) läßt sich auch in den folgenden drei Formen schreiben:

$$(11)\quad [\mathfrak{k}E_1\;\; x]^3+[E_2x]^3+[E_3x]^3-3[\mathfrak{k}E_1\;\; x][E_2x][E_3x]=(\mathfrak{k}^3-1)[E_1x]^3,$$

$$(12)\quad [E_1x]^3+[\mathfrak{k}E_2\;\; x]^3+[E_3x]^3-3[E_1x][\mathfrak{k}E_2\;\; x][E_3x]=(\mathfrak{k}^3-1)[E_2x]^3,$$

$$(13)\quad [E_1x]^3+[E_2x]^3+[\mathfrak{k}E_3\;\; x]^3-3[E_1x][E_2x][\mathfrak{k}E_3\;\; x]=(\mathfrak{k}^3-1)[E_3x]^3,$$

und aus ihnen folgen, wenn man auf die linken Seiten die Formel (4) anwendet, aus jedem der dadurch linker Hand entstehenden 9 Zahlfaktoren den Faktor x herauszieht und auf Grund der Gleichung (3) dafür sorgt, daß die Glieder mit $\mathfrak{k}$ von ε und ε^2 frei bleiben, die drei neuen Gleichungen:

$$(14)\quad [(\mathfrak{k}E_1+E_2+E_3)x][(\mathfrak{k}E_1+\varepsilon E_2+\varepsilon^2E_3)x][(\mathfrak{k}E_1+\varepsilon^2E_2+\varepsilon E_3)x] = (\mathfrak{k}^3-1)[E_1x]^3,$$

$$(15)\quad [(E_1+\mathfrak{k}E_2+E_3)x][(\varepsilon^2E_1+\mathfrak{k}E_2+\varepsilon E_3)x][(\varepsilon E_1+\mathfrak{k}E_2+\varepsilon^2E_3)x] = (\mathfrak{k}^3-1)[E_2x]^3,$$

$$(16)\quad [(E_1+E_2+\mathfrak{k}E_3)x][(\varepsilon E_1+\varepsilon^2E_2+\mathfrak{k}E_3)x][(\varepsilon^2E_1+\varepsilon E_2+\mathfrak{k}E_3)x] = (\mathfrak{k}^3-1)[E_3x]^3.$$

Diese drei Gleichungen (14), (15), (16) haben die Form der Gleichung (16) des vorigen Abschnitts und stellen überdies, da sie durch bloße Umformung der Gleichung (9) entstanden sind, alle drei eine und dieselbe Kurve dritter Ordnung dar. Nach dem Satze 770 sind dann von dieser Kurve die Geraden E_1, E_2, E_3 drei *Wendepunktslinien*, d. h. drei Linien, von denen eine jede 3 Wendepunkte der Kurve enthält. Ferner sind nach demselben Satze die 9 Faktoren in den runden Klammern der linken Seiten jener drei Gleichungen, d. h. die 9 Größen:

$$(17)\quad \mathfrak{k}E_1+E_2+E_3,\quad \mathfrak{k}E_1+\varepsilon E_2+\varepsilon^2E_3,\quad \mathfrak{k}E_1+\varepsilon^2E_2+\varepsilon E_3,$$

$$(18)\quad E_1+\mathfrak{k}E_2+E_3,\quad \varepsilon^2E_1+\mathfrak{k}E_2+\varepsilon E_3,\quad \varepsilon E_1+\mathfrak{k}E_2+\varepsilon^2E_3,$$

$$(19)\quad E_1+E_2+\mathfrak{k}E_3,\quad \varepsilon E_1+\varepsilon^2E_2+\mathfrak{k}E_3,\quad \varepsilon^2E_1+\varepsilon E_2+\mathfrak{k}E_3,$$

Stäbe aus den *Wendetangenten der Kurven*, und zwar gehören, wieder nach dem Satze 770, die Wendetangenten (17) den Wendepunkten der Wendepunktslinie E_1 zu, die Wendetangenten (18) den Wendepunkten der Wendepunktslinie E_2 und die Wendetangenten (19) den Wendepunkten der Wendepunktslinie E_3.

Man sieht dann noch, daß unter der Voraussetzung reeller Grundstäbe E_1, E_2, E_3 von den 9 Wendetangenten (17), (18), (19) nur die 3 Wendetangenten der ersten Spalte, d. h. die 3 Wendetangenten:

$$(20)\quad T_1=\mathfrak{k}E_1+E_2+E_3,\quad T_2=E_1+\mathfrak{k}E_2+E_3,\quad T_3=E_1+E_2+\mathfrak{k}E_3,$$

reell sind.

---

mit Vorliebe angewandte Methode der Konstantenabzählung. Vgl. J. Plücker, System der analytischen Geometrie, Berlin 1835, Vorrede, S. III f. und S. 123 ff. Siehe dazu auch: F. Klein, Einleitung in die höhere Geometrie I, Göttingen 1893, S. 34 f.

Schließlich erhält man eine Darstellung der *9 Wendepunkte selbst,* indem man die Ausdrücke (17), (18), (19) für die 9 Wendetangenten beziehlich mit den Stäben E_1, E_2, E_3 der zugehörigen Wendepunktslinien planimetrisch multipliziert, wobei man nach Belieben einen von Null verschiedenen Zahlfaktor hinzufügen oder weglassen kann. Man bekommt so für die 9 Wendepunkte die Produktdarstellungen:

$$(21)\quad \begin{cases} w_1 = [(E_2 + E_3)E_1], & w_4 = [(\varepsilon^2 E_2 + E_3)E_1], \quad w_7 = [(\varepsilon E_2 + E_3)E_1], \\ w_2 = [(E_3 + E_1)E_2], & w_5 = [(\varepsilon^2 E_3 + E_1)E_2], \quad w_8 = [(\varepsilon E_3 + E_1)E_2], \\ w_3 = [(E_1 + E_2)E_3], & w_6 = [(\varepsilon^2 E_1 + E_2)E_3], \quad w_9 = [(\varepsilon E_1 + E_2)E_3]. \end{cases}$$

Und wenn man berücksichtigt, daß die Produkte zu je zweien aus den Grundstäben E_1, E_2, E_3 des Fundamentaldreiecks dessen Grundpunkte e_1, e_2, e_3 ergeben, daß nämlich:

$$(22)\qquad [E_2 E_3] = e_1, \quad [E_3 E_1] = e_2, \quad [E_1 E_2] = e_3$$

ist, so findet man für die 9 Wendepunkte die Ausdrücke:

$$(23)\qquad \begin{cases} w_1 = e_2 - e_3, & w_4 = e_2 - \varepsilon^2 e_3, \quad w_7 = e_2 - \varepsilon e_3, \\ w_2 = e_3 - e_1, & w_5 = e_3 - \varepsilon^2 e_1, \quad w_8 = e_3 - \varepsilon e_1, \\ w_3 = e_1 - e_2, & w_6 = e_1 - \varepsilon^2 e_2, \quad w_9 = e_1 - \varepsilon e_2. \end{cases}$$

Aus diesen 9 Gleichungen entnimmt man zunächst, daß nur die 3 Wendepunkte w_1, w_2, w_3 *reell* sind, was das obige Ergebnis über die Reellität der Wendetangenten bestätigt. Beachtet man ferner, daß die Größen ε und ε^2 als nicht reelle dritte Wurzeln der Einheit *konjugiert komplex* sind, was auch direkt aus den Formeln (18) und (22) des 40. Abschnitts hervorgeht, so kann man hinzufügen, daß die Wendepunkte w_4 und w_7 und ebenso die Wendepunkte w_5 und w_8 und endlich auch die Wendepunkte w_6 und w_9 *konjugiert komplex* sind.

Ganz besonders wichtig ist es aber, daß die Ausdrücke (23) von $\mathfrak{k}$ unabhängig sind. Die Gleichungen (23) zeigen daher, daß alle 9 Wendepunkte dem ganzen Büschel von Kurven dritter Ordnung gemeinsam sind, das durch die Gleichung (9) bei veränderlichem $\mathfrak{k}$ dargestellt wird, daß also die 9 Wendepunkte (23) zugleich die Grundpunkte des Büschels (9) sind. Nach einem Vorschlage von Cremona[1]) nennt man aus diesem Grunde das Büschel (9) ein syzygetisches Büschel von Kurven dritter Ordnung, das soll heißen, ein Büschel von Kurven dritter Ordnung mit lauter gemeinsamen Wendepunkten. In dem zu einer Kurve dritter Ordnung gehörenden syzygetischen Büschel von Kurven dritter Ordnung ist nach dem Satze 757 insbesondere die Hessesche Kurve jener Kurve dritter Ordnung enthalten.

---

1) Vgl. L. Cremona, Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven, deutsch von M. Curtze. Greifswald 1865. S. 228.

Durch Addition der 3 Gleichungen aus der ersten Spalte von (23) folgt endlich noch, daß:

$$(24) \qquad w_1 + w_2 + w_3 = 0$$

ist; und man erhält so eine Bestätigung des Satzes von De Gua (Satz 769), denn die Gleichung (24) besagt, daß die 3 reellen Wendepunkte w_1, w_2, w_3 in einer geraden Linie liegen. Dabei ist mit Rücksicht auf die 3 Werte von w_1, w_2, w_3 in (23) *die zu diesen 3 Wendepunkten gehörende Wendepunktslinie die Gerade E des Einheitsstabes des Fundamentaldreiecks.* Denn nach S. 15 f. des ersten Teiles dieses Bandes geht die Gerade E des Einheitsstabes durch die 3 Punkte $e_2 - e_3$, $e_3 - e_1$, $e_1 - e_2$ hindurch.

Wieviel Wendepunktsdreiseite einer reellen Kurve dritter Ordnung sind reell? Die letzte Entwicklung hat bereits 4 von den 12 Wendepunktslinien geliefert, nämlich die 4 Geraden E_1, E_2, E_3 und E. Von ihnen gehen nach den Gleichungen (21) die drei Wendepunktslinien:

$$E_1, \qquad E_2, \qquad E_3$$

beziehlich durch die Wendepunkte:

$$w_1, w_4, w_7, \quad w_2, w_5, w_8, \quad w_3, w_6, w_9$$

hindurch, während, wie soeben gezeigt ist, die Wendepunktslinie:

$$E$$

die 3 Wendepunkte: w_1, w_2, w_3 enthält.

Um auch die übrigen 8 Wendepunktstripel aufzufinden, die immer einer und derselben Wendepunktslinie angehören, schreibe man die Gleichung (9) in den folgenden 3 Formen:

$$(25) \qquad \begin{aligned}[][E_1x]^3 + [E_2x]^3 + [E_3x]^3 - 3[E_1x][E_2x][E_3x] \\ = 3(\mathfrak{k} - 1)[E_1x][E_2x][E_3x],\end{aligned}$$

$$(26) \qquad \begin{aligned}[][E_1x]^3 + [E_2x]^3 + [E_3x]^3 - 3\varepsilon[E_1x][E_2x][E_3x] \\ = 3(\mathfrak{k} - \varepsilon)[E_1x][E_2x][E_3x],\end{aligned}$$

$$(27) \qquad \begin{aligned}[][E_1x]^3 + [E_2x]^3 + [E_3x]^3 - 3\varepsilon^2[E_1x][E_2x][E_3x] \\ = 3(\mathfrak{k} - \varepsilon^2)[E_1x][E_2x][E_3x]\end{aligned}$$

und wende auf die linken Seiten dieser 3 Gleichungen die 3 Formeln (4), (7), (8) an, wobei man zugleich aus jedem dann linker Hand auftretenden Zahlfaktor den Faktor x herausziehen kann. Dadurch erhält man die 3 neuen Gleichungsformen:

$$(28) \qquad \begin{aligned}[][(E_1 + E_2 + E_3)x][(E_1 + \varepsilon E_2 + \varepsilon^2 E_3)x][(E_1 + \varepsilon^2 E_2 + \varepsilon E_3)x] \\ = 3(\mathfrak{k} - 1)[E_1x][E_2x][E_3x],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(29)\quad & \varepsilon^2[(\varepsilon E_1 + E_2 + E_3)x][(E_1 + \varepsilon E_2 + E_3)x][(E_1 + E_2 + \varepsilon E_3)x] \\ & \qquad = 3(\mathfrak{k} - \varepsilon)[E_1 x][E_2 x][E_3 x],\\ (30)\quad & \varepsilon[(\varepsilon^2 E_1 + E_2 + E_3)x][(E_1 + \varepsilon^2 E_2 + E_3)x][(E_1 + E_2 + \varepsilon^2 E_3)x] \\ & \qquad = 3(\mathfrak{k} - \varepsilon^2)[E_1 x][E_2 x][E_3 x].\end{aligned}$$

Dabei sind diese 3 Gleichungen als 3 neue Formen der Gleichung (9) der betrachteten Kurve dritter Ordnung aufzufassen, und da sie erfüllt werden, wenn man irgendeinen der 3 in scharfe Klammern geschlossenen Faktoren rechter Hand und zugleich irgendeinen von den 3 in scharfen Klammern stehenden Faktoren linker Hand gleich Null setzt, so folgt, daß den 3 Gleichungen (28), (29), (30) und also auch der gleichwertigen Gleichung (9) der Kurve dritter Ordnung die Punkte genügen, die von den Geraden der 3 Stäbe:

$$(31)\qquad E_1, \quad E_2, \quad E_3$$

aus den Geraden der 9 Stäbe:

$$(32)\quad \begin{cases} E = E_1 + E_2 + E_3, & F = E_1 + \varepsilon E_2 + \varepsilon^2 E_3, \quad G = E_1 + \varepsilon^2 E_2 + \varepsilon E_3,\\ E' = \varepsilon E_1 + E_2 + E_3, & F' = E_1 + \varepsilon E_2 + E_3, \quad G' = E_1 + E_2 + \varepsilon E_3,\\ E'' = \varepsilon^2 E_1 + E_2 + E_3, & F'' = E_1 + \varepsilon^2 E_2 + E_3, \quad G'' = E_1 + E_2 + \varepsilon^2 E_3 \end{cases}$$

ausgeschnitten werden. Es ergeben sich daher scheinbar 27 Punkte. Da aber diese Punkte der Kurve dritter Ordnung (9) angehören und zugleich den 3 Wendepunktslinien E_1, E_2, E_3, und diese aus der Kurve dritter Ordnung (9) alle ihre 9 Wendepunkte ausschneiden, so müssen sich jene 27 Punkte auf die 9 Wendepunkte dieser Kurve reduzieren. Und wirklich ergibt die planimetrische Multiplikation der Stäbe (32) mit den Stäben (31) mit Rücksicht auf die Gleichungen (3) und (21) für die Schnittpunkte der Wendepunktslinien E_1, E_2, E_3 mit den 9 Geraden (32) Ausdrücke, die mit den Ausdrücken (23) entweder ganz identisch sind oder sich von ihnen nur um einen der konjugiert komplexen Zahlfaktoren ε und ε^2 unterscheiden. In der Tat wird:

$$(33)\qquad \begin{cases} [EE_1] = w_1, & [FE_1] = \varepsilon^2 w_4, & [GE_1] = \varepsilon w_7,\\ [EE_2] = w_2, & [FE_2] = w_5, & [GE_2] = w_8,\\ [EE_3] = w_3, & [FE_3] = \varepsilon w_6, & [GE_3] = \varepsilon^2 w_9,\\ [E'E_1] = w_1, & [F'E_1] = w_7, & [G'E_1] = \varepsilon w_4,\\ [E'E_2] = \varepsilon w_5, & [F'E_2] = w_2, & [G'E_2] = w_8,\\ [E'E_3] = w_9, & [F'E_3] = \varepsilon w_6, & [G'E_3] = w_3,\\ [E''E_1] = w_1, & [F''E_1] = w_4, & [G''E_1] = \varepsilon^2 w_7,\\ [E''E_2] = \varepsilon^2 w_8, & [F''E_2] = w_2, & [G''E_2] = w_5,\\ [E''E_3] = w_6, & [F''E_3] = \varepsilon^2 w_9, & [G''E_3] = w_3. \end{cases}$$

Daraus folgt dann, daß die 8 letzten Geraden (32), d. h. die 8 Geraden:

$$F, \quad G, \quad E', \quad F', \quad G', \quad E'', \quad F'', \quad G'',$$

die 8 uns noch fehlenden Wendepunktslinien bilden.

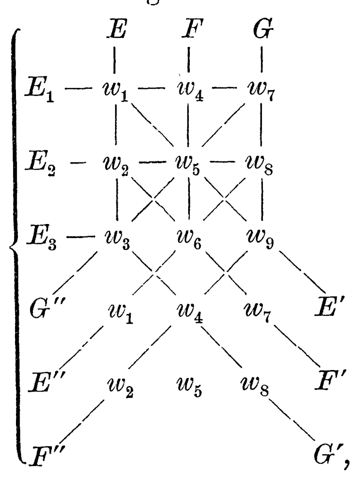
Diese 8 Wendepunktslinien sind, wie aus den Gleichungen (32) hervorgeht, sämtlich komplex, und zwar sind die Stäbe F und G konjugiert komplex, da ihre Summe mit Rücksicht auf die aus (2) folgende Beziehung:

$$\varepsilon + \varepsilon^2 = -1$$

reell ist. Und dasselbe gilt von den Stäben E' und E'', F' und F'', G' und G''.

Zugleich ergeben die Gleichungen (33) die Verteilung der 9 Wendepunkte auf die 4 reellen und 8 komplexen Wendepunktslinien. Um einen Überblick über diese Verteilung zu erhalten, stellen wir die Symbole der 9 Wendepunkte in 3 Zeilen eines quadratischen Schemas entsprechend der Anordnung in den Gleichungen (23) zusammen, setzen darunter noch einmal die Symbole der Wendepunkte der beiden ersten Zeilen und verbinden immer die Symbole der 3 auf einer Wendepunktslinie liegenden Wendepunkte durch eine Gerade, der wir die Bezeichnung der zugehörigen Wendepunktslinie beifügen. Dadurch erhalten wir die folgende Zusammenstellung:

(34)



welche zunächst eine Bestätigung des Satzes 773 liefert, indem sie zeigt, daß die in diesem Satze genannten 4 Wendepunktsdreiseite durch die 4 Geradentripel gebildet werden:

$$\begin{array}{lll} E_1, & E_2, & E_3, \\ E, & F, & G, \\ E', & F', & G', \\ E'', & F'', & G''. \end{array}$$

Hieraus folgt, daß von den 4 Wendepunktsdreiseiten *nur das erste,* nämlich das Dreiseit $E_1E_2E_3$ *vollständig reell* ist, während *das zweite Dreiseit,* nämlich das Dreiseit EFG, *nur teilweise reell* ist und *die beiden anderen Dreiseite $E'F'G'$ und $E''F''G''$ ganz komplex* sind.

Die Zusammenstellung (34) zeigt ferner, daß von den beiden ganz komplexen Wendepunktsdreiseiten $E'F'G'$ und $E''F''G''$ die entsprechend bezeichneten Seiten beider Dreiseite, nämlich die Wendepunktslinien E' und E'', F' und F'', G' und G'', welche nach S. 261 *konjugiert* komplex sind, sich beziehlich in den 3 reellen Wendepunkten w_1, w_2, w_3 schneiden, was man auch durch Ausrechnung der planimetrischen Produkte $[E'E'']$, $[F'F'']$, $[G'G'']$ unter Benutzung der Werte (32) bestätigen kann.

Übrigens besteht ganz allgemein die Beziehung, daß *die Geraden zweier konjugiert komplexen Stäbe einen reellen Punkt miteinander gemein haben.* In der Tat, sind $A + \mathfrak{i}B$ und $A - \mathfrak{i}B$ zwei konjugiert komplexe Stäbe, zwei Stäbe nämlich, die aus den reellen Stäben A und B durch die Zahlgrößen $1, +\mathfrak{i}$ und $1, -\mathfrak{i}$ abgeleitet sind, so wird der Schnittpunkt ihrer Geraden, d. h. ihr planimetrisches Produkt:

$$[(A + \mathfrak{i}B)(A - \mathfrak{i}B)] = \mathfrak{i}[BA] - \mathfrak{i}[AB] = -2\mathfrak{i}[AB],$$

also, abgesehen von dem rein imaginären Zahlfaktor $-2\mathfrak{i}$, reell. Und ebenso ist *die Verbindungslinie zweier konjugiert komplexen Punkte stets reell*, was man genau entsprechend beweisen kann.

Es muß daher auch das erste von den auf S. 261f. genannten 4 Paaren konjugiert komplexer Wendepunktslinien, nämlich das Geradenpaar F, G, einen reellen Schnittpunkt aufweisen. Und es wird wirklich das Produkt:

$$(35) \qquad \begin{aligned}[FG] &= [(E_1 + \varepsilon E_2 + \varepsilon^2 E_3)(E_1 + \varepsilon^2 E_2 + \varepsilon E_3)] \\ &= (\varepsilon^2 - \varepsilon)\{e_1 + e_2 + e_3\},\end{aligned}$$

d. h. es ist reell bis auf den rein imaginären Zahlfaktor $\varepsilon^2 - \varepsilon$, nämlich abgesehen von diesem Zahlfaktor gleich dem Einheitspunkt:

$$(36) \qquad e = e_1 + e_2 + e_3$$

des Fundamentaldreiecks $e_1e_2e_3$, das mit dem ganz reellen Wendepunktsdreiseit zusammenfiel. Und da nach S. 259f. zugleich die Gerade der 3 reellen Wendepunkte den Einheitsstab E dieses Dreiseits bildete, so ist nach dem Satze 285 der Schnittpunkt der beiden konjugiert komplexen Seiten F und G des teilweise reellen Wendepunktsdreiseits, d. h. die Gegenecke seiner reellen Seite E, der Harmonikalpunkt jener reellen Seite, also der Harmonikalpunkt der Linie der 3 reellen Wendepunkte in bezug auf das ganz reelle Wendepunktsdreiseit $e_1e_2e_3$ (Fig. 117). Endlich sind

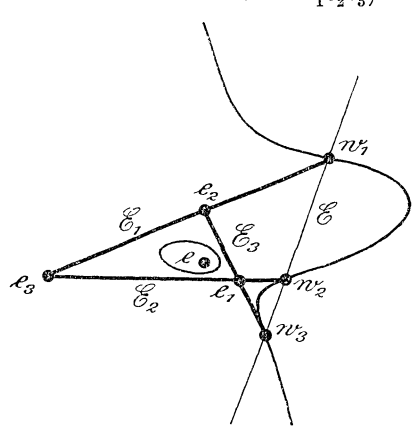


Fig. 117.

offenbar die den konjugiert komplexen Seiten F und G gegenüberliegenden Ecken f und g des teilweise reellen Wendepunktsdreiseits ebenfalls konjugiert komplex und gehören der reellen Seite E dieses Dreiseits an.

Man hat daher den folgenden von Plücker herrührenden[1]) Satz:

Satz 774: Vierter Satz von Plücker: Von den 4 Wendepunktsdreiseiten einer reellen Kurve dritter Ordnung ohne Doppel- und Rückkehrpunkt ist nur ein Wendepunktsdreiseit ganz reell. Seine Seiten sind charakterisiert als diejenigen drei Wendepunktslinien, die durch je einen von den 3 reellen Wendepunkten w_1, w_2, w_3 hindurchgehen, und von denen im übrigen jede Linie noch 2 konjugiert komplexe Wendepunkte enthält. Ein zweites Wendepunktsdreiseit ist nur teilweise reell. Es besitzt als einzige reelle Seite die Gerade der 3 reellen Wendepunkte, seine beiden andern Seiten sind konjugiert komplex; dagegen ist ihr Schnittpunkt wieder reell, und zwar ist er der Harmonikalpunkt der reellen Seite dieses Dreiseits in bezug auf das ganz reelle Wendepunktsdreiseit. Die beiden letzten Wendepunktsdreiseite endlich sind ganz komplex. Doch sind bei ihnen wenigstens die Seiten des einen konjugiert komplex mit den Seiten des andern, und die entsprechenden Seiten beider Dreiecke schneiden sich in je einem von den 3 reellen Wendepunkten.

Dieser Satz bestätigt die Entwicklungen von S. 261ff. Denn durch jeden von den 3 Wendepunkten der Wendepunktslinie $w_1 w_2 w_3$ gehen außer dieser Wendepunktslinie selbst noch 3 andere Wendepunktslinien hindurch, eine, die dem ganz reellen Wendepunktsdreiseit angehört, und je eine, die in den ganz komplexen Wendepunktsdreiseiten enthalten ist. Damit hat man also die 10 auf S. 261 genannten Wendepunktslinien, auf denen die 3 Wendepunkte w_1, w_2, w_3 liegen. Die beiden noch übrig bleibenden Wendepunktslinien, welche keinen von den 3 Wendepunkten w_1, w_2, w_3 enthalten, sind die konjugiert komplexen Seiten des teilweise reellen Wendepunktsdreiseits.

Zugleich kann man noch bemerken, daß das den Gleichungen (9)ff. dieses Abschnitts zugrunde gelegte Fundamentaldreieck mit dem reellen Wendepunktsdreiseit der betrachteten Kurve dritter Ordnung und des zugehörigen syzygetischen Büschels zusammenfällt, und daß die Gerade des Einheitsstabes dieses Fundamentaldreiecks von der reellen Seite des teilweise reellen Wendepunktsdreiseits, d. h. von der Linie der 3 reellen Wendepunkte jener Kurve und dieses Büschels, gebildet wird.

Beziehung der 4 Wendepunktsdreiseite einer Kurve dritter Ordnung zu dem dieser Kurve zugehörenden syzygetischen Büschel. Es ist beachtenswert, daß

1) Vgl. J. Plücker, System der analytischen Geometrie. Berlin 1835. Nr. 322.

die 4 Wendepunktsdreiseite als zerfallende Kurven des syzygetischen Büschels von Kurven dritter Ordnung aufgefaßt werden können, das durch die Gleichung dritten Grades (9) bei veränderlichem $\mathfrak{k}$ ausgedrückt wird. Schreibt man nämlich die Gleichungen (28), (29), (30), welche die Kurve dritter Ordnung (9) darstellten, in der Form:

$$(37)\qquad \begin{cases} [Ex][Fx][Gx] = 3(\mathfrak{k}-1)[E_1x][E_2x][E_3x], \\ \varepsilon^2[E'x][F'x][G'x] = 3(\mathfrak{k}-\varepsilon)[E_1x][E_2x][E_3x], \\ \varepsilon[E''x][F''x][G''x] = 3(\mathfrak{k}-\varepsilon^2)[E_1x][E_2x][E_3x], \end{cases}$$

so liefern sie für $\mathfrak{k}=\infty$, $\mathfrak{k}=1$, $\mathfrak{k}=\varepsilon$, $\mathfrak{k}=\varepsilon^2$ die Gleichungen:

$$(38)\qquad \begin{cases} [E_1x][E_2x][E_3x] = 0, \\ [Ex][Fx][Gx] = 0, \\ [E'x][F'x][G'x] = 0, \\ [E''x][F''x][G''x] = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung (9) ist also für $\mathfrak{k}=\infty$ die Gleichung des reellen Wendepunktsdreiseits $E_1E_2E_3$ des Büschels (9), für $\mathfrak{k}=1$ die Gleichung des teilweise reellen Wendepunktsdreiseits EFG und für $\mathfrak{k}=\varepsilon$ und $\mathfrak{k}=\varepsilon^2$ die Gleichung je eines der beiden komplexen Wendepunktsdreiseite $E'F'G'$ und $E''F''G''$. Wegen der Gleichungen (25), (26), (27) und (37) kann man den 3 letzten Gleichungen (38) auch die Form verleihen:

$$(39)\qquad \begin{cases} [E_1x]^3+[E_2x]^3+[E_3x]^3-3[E_1x][E_2x][E_3x] = 0, \\ [E_1x]^3+[E_2x]^3+[E_3x]^3-3\varepsilon[E_1x][E_2x][E_3x] = 0, \\ [E_1x]^3+[E_2x]^3+[E_3x]^3-3\varepsilon^2[E_1x][E_2x][E_3x] = 0 \end{cases}$$

und hat damit je eine neue Form der Gleichung des teilweise reellen und der beiden komplexen Wendepunktsdreiseite.

Den Hauptinhalt dieser Ergebnisse kann man in dem Satze zusammenstellen:

Satz 775: Die 4 Wendepunktsdreiseite einer Kurve dritter Ordnung können als zerfallende Kurven des der Kurve dritter Ordnung zugehörenden syzygetischen Büschels aufgefaßt werden. Schreibt man die Gleichung des syzygetischen Büschels in der kanonischen Form:

$$(9)\qquad [E_1x]^3+[E_2x]^3+[E_3x]^3-3\mathfrak{k}[E_1x][E_2x][E_3x] = 0,$$

so entsprechen den 4 Wendepunktsdreiseiten die Parameterwerte:

$$\mathfrak{k}=\infty,\quad \mathfrak{k}=1,\quad \mathfrak{k}=\varepsilon,\quad \mathfrak{k}=\varepsilon^2,$$

unter ε eine komplexe dritte Wurzel der Einheit verstanden.

Perspektive Beziehungen im System der 9 Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung. Bevor wir zur geometrischen Deutung der komplexen Wendepunkte und Wendepunktslinien einer Kurve dritter Ordnung übergehen, schicken wir zwei Sätze über perspektive Beziehungen im System der 9 Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung voraus.

Verbindet man die Ecken e_1, e_2, e_3 des Fundamentaldreiecks, d. h. die Ecken des ganz reellen Wendepunktsdreiseits, mit dem Einheitspunkt e, der zugleich die reelle Ecke des teilweise reellen Wendepunktsdreiseits bildet (Fig. 118), und führt für die Schnittpunkte dieser Verbindungslinien beziehlich mit den Seiten E_1, E_2, E_3 des Fundamentaldreiecks die Bezeichnungen p_1, p_2, p_3 ein, setzt also etwa:

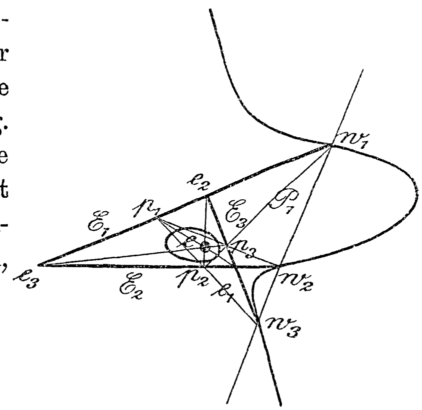


Fig. 118.

(40)
$$\begin{cases} [E_1 \cdot e e_1] = p_1, \\ [E_2 \cdot e e_2] = p_2, \\ [E_3 \cdot e e_3] = p_3, \end{cases}$$

so werden die 3 Punkte p_1, p_2, p_3 die 3 Zurückleitungen des Einheitspunktes e auf die 3 Seiten des Fundamentaldreiecks unter Ausschluß ihrer Gegenecken (vgl. die Gleichung (51) des 25. Abschnitts).

Dies kann man auch durch Ausrechnung der linken Seiten der Gleichungen (40) bestätigen. Denn es wird:

$$[e e_1] = [(e_1 + e_2 + e_3) e_1] = E_2 - E_3,$$

also:
$$p_1 = [E_1 \cdot e e_1] = [E_1(E_2 - E_3)] = e_2 + e_3.$$

Es bestehen somit die 3 Gleichungen:

(41)
$$\begin{cases} p_1 = e_2 + e_3, \\ p_2 = e_3 + e_1, \\ p_3 = e_1 + e_2, \end{cases}$$

durch die in der Tat die Punkte p_1, p_2, p_3 ebenfalls als die oben genannten Zurückleitungen charakterisiert werden (vgl. S. 41 f. des ersten Bandes).

Jetzt verbinde man weiter je zwei von den 3 Punkten p_1, p_2, p_3 miteinander und bilde, um die Verbindungslinien als Vielfachensummen der Einheiten zweiter Stufe E_1, E_2, E_3 darzustellen, zunächst etwa das Produkt $[p_2 p_3]$. Man erhält:

$$[p_2 p_3] = [(e_3 + e_1)(e_1 + e_2)] = [e_3 e_1] + [e_3 e_2] + [e_1 e_2] = -E_1 + E_2 + E_3.$$

Bezeichnet man daher noch die 3 Produkte:

$$[p_2 p_3], \quad [p_3 p_1], \quad [p_1 p_2]$$

beziehlich mit:
$$P_1, \quad P_2, \quad P_3,$$

so wird:

$$(42)\qquad \begin{cases} P_1 = [p_2 p_3] = -E_1 + E_2 + E_3, \\ P_2 = [p_3 p_1] = E_1 - E_2 + E_3, \\ P_3 = [p_1 p_2] = E_1 + E_2 - E_3. \end{cases}$$

Endlich findet man für die Schnittpunkte der Geraden P_1, P_2, P_3 mit den entsprechenden Seiten E_1, E_2, E_3 des Fundamentaldreiecks durch Ausmultiplizieren und mit Rücksicht auf die Gleichungen (23) die Werte:

$$(43)\qquad \begin{cases} [P_1 E_1] = e_2 - e_3 = w_1, \\ [P_2 E_2] = e_3 - e_1 = w_2, \\ [P_3 E_3] = e_1 - e_2 = w_3. \end{cases}$$

Man hat also den Satz:

Satz 776: Zweiter Perspektivitätssatz für Kurven dritter Ordnung: Bildet man die Zurückleitungen der reellen Ecke des teilweise reellen Wendepunktsdreiseits einer Kurve dritter Ordnung auf die Seiten des ganz reellen Wendepunktsdreiseits unter Ausschluß der Gegenecken dieses Dreiseits, so gehen die Verbindungslinien je zweier von diesen Zurückleitungen durch die 3 reellen Wendepunkte der Kurve hindurch. Und zwar enthält jedesmal die Verbindungslinie der Zurückleitungen auf irgend zwei Seiten des reellen Wendepunktsdreiseits denjenigen Wendepunkt, welcher der dritten Seite dieses Dreiseits angehört.

Eine andere Perspektivitätsbeziehung für das System der 9 Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung ist in dem folgenden Satze enthalten:

Satz 777: Dritter Perspektivitätssatz für Kurven dritter Ordnung: Die harmonischen Polaren der 3 reellen Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung gehen durch diejenigen Ecken des reellen Wendepunktsdreiseits hindurch, welche der den betreffenden Wendepunkt enthaltenden Seite dieses Dreiseits gegenüberliegen.

Wir beweisen, daß die *harmonische Polare* des Wendepunktes w_1 der Kurve dritter Ordnung (9), deren Gleichung wir abgekürzt in der Form schreiben:

$$(44)\qquad A_3 x^3 = 0,$$

durch die Ecke e_1 des reellen Wendepunktsdreiseits hindurchgeht, und zeigen dazu zunächst, daß der Punkt e_1 auf der *konischen Polare* des Wendepunktes w_1 hinsichtlich jener Kurve dritter Ordnung enthalten ist. Nun lautet die Gleichung der konischen Polare des Wendepunktes w_1 in bezug auf die Kurve (44):

$$(45)\qquad A_3 w_1 z^2 = 0.$$

Man hat also den Nachweis zu erbringen, daß diese Gleichung für $z = e_1$ erfüllt wird, daß somit die Gleichung besteht:

$$(46)\qquad A_3 w_1 e_1^2 = 0.$$

Es ist aber, wie die Vergleichung von (44) und (9) zeigt:

$$(47)\qquad A_3 = [E_1 l]^3 + [E_2 l]^3 + [E_3 l]^3 - 3\mathfrak{k}[E_1 l][E_2 l][E_3 l],$$

ferner ist:

$$(48)\qquad w_1 = [EE_1].$$

Es wird daher die linke Seite von (46):

$$(49)\qquad A_3 w_1 e_1^2 = A_3 [EE_1] e_1^2,$$

d. h. wegen (47):

$$A_3 w_1 e_1^2 = \left\{\begin{matrix} [E_1 l]^3 [EE_1] e_1^2 + [E_2 l]^3 [EE_1] e_1^2 + [E_3 l]^3 [EE_1] e_1^2 \\ - 3\mathfrak{k}[E_1 l][E_2 l][E_3 l][EE_1] e_1^2 \end{matrix}\right\}.$$

Hier verschwindet aber rechter Hand jedes einzelne Glied; denn es wird:

$$[E_1 l]^3 [EE_1] e_1^2 = [E_1 EE_1][E_1 e_1]^2 = 0,$$
$$[E_2 l]^3 [EE_1] e_1^2 = [E_2 EE_1][E_2 e_1]^2 = 0,$$
$$[E_3 l]^3 [EE_1] e_1^2 = [E_3 EE_1][E_3 e_1]^2 = 0,$$
$$[E_1 l][E_2 l][E_3 l][EE_1] e_1^2$$
$$= \tfrac{1}{3}\{[E_1 EE_1][E_2 e_1][E_3 e_1] + [E_1 e_1][E_2 e_1][E_3 EE_1] + [E_1 e_1][E_2 EE_1][E_3 e_1]\} = 0.$$

Die Gleichung (46) wird also wirklich befriedigt, und der Punkt e_1 gehört somit der konischen Polare des Wendepunktes w_1 an. Dabei gilt dies Ergebnis *für jeden beliebigen Wert des Parameters* $\mathfrak{k}$.

Die konische Polare eines Wendepunktes zerfällt aber nach Satz 755 in die Wendetangente und die harmonische Polare dieses Wendepunktes. Kann man daher noch zeigen, daß der Punkt e_1 nicht auf der Wendetangente:

$$(50)\qquad A_3 w_1^2 z = 0$$

des Wendepunktes w_1 gelegen ist, so muß er notwendig auf der harmonischen Polare des Wendepunktes w_1 enthalten sein.

Aber man überzeugt sich leicht, daß, falls nicht gerade $\mathfrak{k} = 0$ ist, das Produkt:

$$(51)\qquad A_3 w_1^2 e_1 \neq 0$$

ist. Denn es verschwinden in der Entwicklung von $A_3 w_1^2 e_1$ alle Glieder mit Ausnahme eines einzigen, das $= \mathfrak{k}$ wird. In der Tat wird wegen (47) und (48):

$$A_3 w_1^2 e_1 = \left\{\begin{matrix} [E_1 l]^3 [EE_1]^2 e_1 + [E_2 l]^3 [EE_1]^2 e_1 + [E_3 l]^3 [EE_1]^2 e_1 \\ - 3\mathfrak{k}[E_1 l][E_2 l][E_3 l][EE_1]^2 e_1 \end{matrix}\right\}$$
$$= -\mathfrak{k}\{[E_1 EE_1][E_2 EE_1][E_3 e_1] + [E_1 EE_1][E_2 e_1][E_3 EE_1]$$
$$+ [E_1 e_1][E_2 EE_1][E_3 EE_1]\} = \mathfrak{k}.$$

Falls daher $\mathfrak{k}$ von Null verschieden ist, kann der Punkt e_1 nicht der Wendetangente (50) angehören, sondern muß auf der harmonischen Polare des Wendepunktes w_1 liegen.

Aber auch der Fall $\mathfrak{k} = 0$ brauchte in dem Satze 777 nicht ausgenommen zu werden. Für diesen Fall reduziert sich nämlich die Lückenform dritter Ordnung $\boldsymbol{A}_3$ in (47) auf die Lückenform:

$$\boldsymbol{B}_3 = [E_1 l]^3 + [E_2 l]^3 + [E_3 l]^3, \tag{52}$$

und die ihr zugehörende Kurve dritter Ordnung:

$$\boldsymbol{B}_3 x^3 = 0 \tag{53}$$

ist ebenso wie die 4 Wendepunktsdreiseite in dem syzygetischen Büschel (9) enthalten und besitzt in ihm eben den Parameter $\mathfrak{k} = 0$.

Die konische Polare des Wendepunktes w_1 in bezug auf die Kurve (53) aber hat, wie man sich leicht überzeugt, den Punkt e_1 zum Doppelpunkt. Denn ihre Gleichung lautet:

$$\boldsymbol{B}_3 w_1 z^2 = 0$$

oder wegen (48):

$$\boldsymbol{B}_3 [E E_1] z^2 = 0. \tag{54}$$

Und damit diese konische Polare an der Stelle e_1 einen Doppelpunkt aufweise, ist nach der Gleichung (16) des 49. Abschnitts notwendig und hinreichend das Bestehen der Gleichung:

$$\boldsymbol{B}_3 [E E_1] e_1 = 0, \tag{55}$$

oder, was wegen (52) dasselbe ist, das Bestehen der Gleichung:

$$[E_1 l]^3 [E E_1] e_1 + [E_2 l]^3 [E E_1] e_1 + [E_3 l]^3 [E E_1] e_1 = 0. \tag{56}$$

Diese Gleichung aber wird in der Tat erfüllt, da jedes einzelne Glied ihrer linken Seite verschwindet; denn es ist:

$$[E_1 l]^3 [E E_1] e_1 = [E_1 E E_1][E_1 e_1][E_1 l] = 0,$$
$$[E_2 l]^3 [E E_1] e_1 = [E_2 E E_1][E_2 e_1][E_2 l] = 0,$$

und ebenso verschwindet auch das dritte Glied der linken Seite von (56). Als Doppelpunkt der konischen Polare des Wendepunktes w_1 gehört endlich der Punkt e_1 insbesondere auch der harmonischen Polare des Wendepunktes w_1 an (vgl. wieder Satz 755).

Bezeichnet man noch die harmonischen Polaren der Wendepunkte w_1, w_2, w_3 in bezug auf die Kurve dritter Ordnung (9) mit H_1, H_2, H_3 (Fig. 119), so gehen nach dem Satze 777 die Geraden H_1, H_2, H_3 beziehlich durch die Punkte e_1, e_2, e_3 hindurch.

Bringt man ferner die harmonischen Polaren H_1, H_2, H_3 der 3 reellen Wendepunkte w_1, w_2, w_3 zum Schnitt mit der Wendepunktslinie E dieser

3 reellen Wendepunkte in den Punkten h_1, h_2, h_3, so wird nach dem Begriff der harmonischen Polare eines Wendepunktes der Punkt h_1 vom Punkte w_1 durch die Punkte w_2 und w_3 harmonisch getrennt, ebenso der Punkt h_2 vom Punkte w_2 durch die Punkte w_3 und w_1 und der Punkt h_3 vom Punkte w_3 durch die Punkte w_1 und w_2. Und da diese Beziehungen für jeden Wert des Parameters $\mathfrak{k}$ gelten (vgl. S. 258), so folgt noch, daß die harmonischen Polaren H_1, H_2, H_3 der 3 Wendepunkte w_1, w_2, w_3 sämtlichen Kurven des syzygetischen Büschels gemeinsam sind. Man hat also den Satz:

Satz 778: Die 3 reellen Wendepunkte eines syzygetischen Büschels von Kurven dritter Ordnung haben hinsichtlich sämtlicher Kurven des Büschels dieselbe harmonische Polare.

Man kann noch hinzufügen:

Satz 779: Ein syzygetisches Büschel von Kurven dritter Ordnung geht bei der harmonischen Spiegelung an irgendeinem seiner 3 reellen Wendepunkte und dessen harmonischer Polare kurvenweise in sich über.

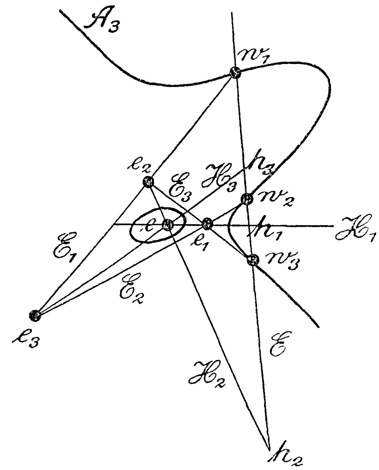


Fig. 119.

Man bestätigt endlich jetzt leicht den Satz 777 und zeigt zugleich, daß die harmonischen Polaren der 3 reellen Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung durch die reelle Ecke e des teilweise reellen Wendepunktsdreiseits dieser Kurve hindurchgehen, wenn man berücksichtigt, daß nach dem Satze 778 die harmonische Polare eines jeden reellen Wendepunktes, z. B. die harmonische Polare H_1 des Wendepunktes w_1 in bezug auf diese Kurve, zugleich die harmonische Polare dieses Wendepunktes in bezug auf das reelle Wendepunktsdreiseit ist, das ja als entartende Kurve dritter Ordnung in dem zur Kurve gehörenden syzygetischen Büschel enthalten ist. Daraus folgt nämlich, daß sie

erstens durch den Schnittpunkt e_1 der Seiten E_2 und E_3 des Fundamentaldreiecks geht, und daß sie

zweitens den Punkt e enthalten muß; denn dieser wird als Harmonikalpunkt der Geraden E der 3 reellen Wendepunkte hinsichtlich des reellen Wendepunktsdreiseits von dem Wendepunkt w_1 durch die beiden Seiten E_2 und E_3 dieses Dreiseits harmonisch getrennt (vgl. S. 48 des ersten Teils dieses Bandes). Man hat daher den Satz:

Satz 780: Vierter Perspektivitätssatz einer Kurve dritter Ordnung: Die harmonischen Polaren der 3 reellen Wendepunkte

einer Kurve dritter Ordnung gehen durch den Harmonikalpunkt der Linie dieser 3 Wendepunkte in bezug auf das reelle Wendepunktsdreiseit hindurch.

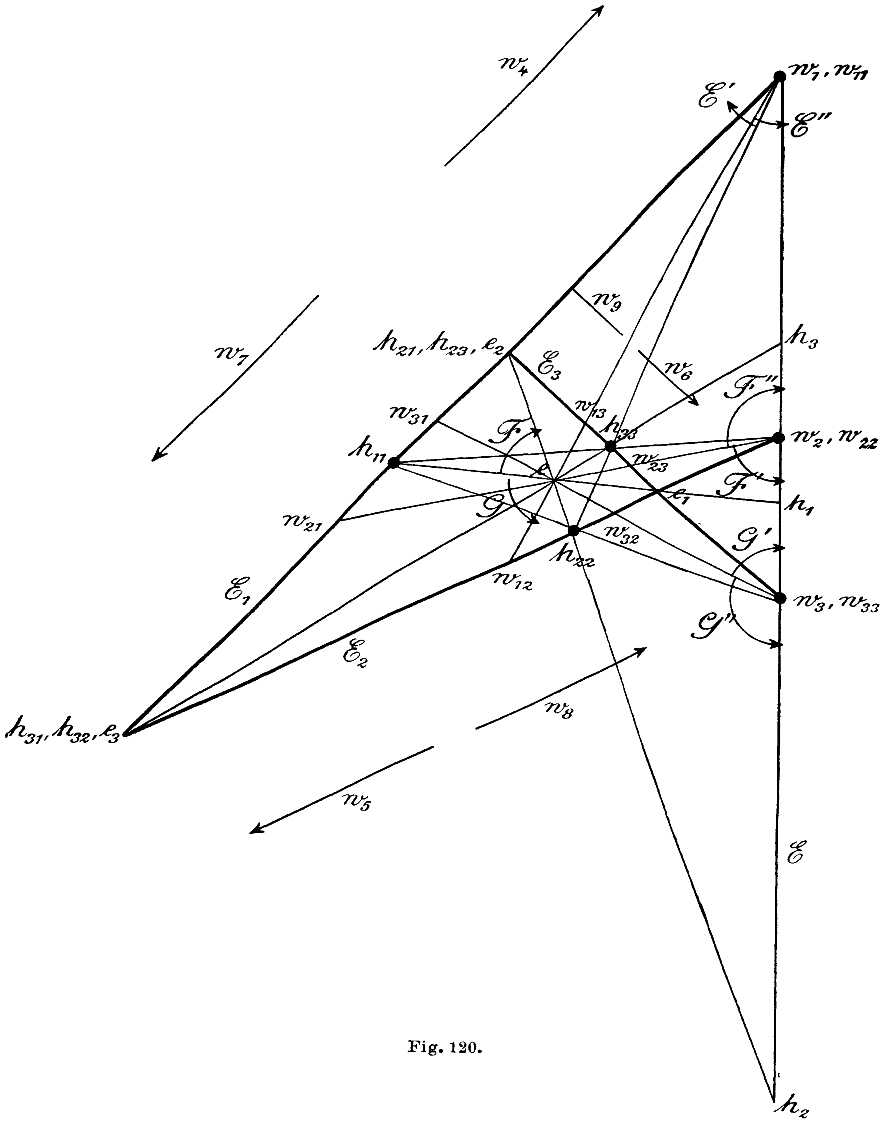


Fig. 120.

Zugleich erhält man für die harmonischen Polaren H_1, H_2, H_3 der 3 reellen Wendepunkte die folgende analytische Darstellung (vgl. S. 258):

$$(57) \qquad \begin{cases} H_1 = [ee_1] = E_2 - E_3, \\ H_2 = [ee_2] = E_3 - E_1, \\ H_3 = [ee_3] = E_1 - E_2. \end{cases}$$

Geometrische Deutung der konjugiert komplexen Wendepunkte und Wendepunktslinien einer Kurve dritter Ordnung. Nach dem Satze 532 sind die 3 Punktpaare $w_1, h_1, \quad w_2, h_2, \quad w_3, h_3$ drei Punktpaare einer Involution. Denn in dem vollständigen Viereck $e_1 e_2 e_3 e$ bilden die 3 Geradenpaare:

$$e_2 e_3, \, e e_1, \quad e_3 e_1, \, e e_2, \quad e_1 e_2, \, e e_3$$

die 3 Paare von Gegenseiten, und diese schneiden aus der Geraden E die 3 Punktpaare:

$$w_1, h_1, \quad w_2, h_2, \quad w_3, h_3$$

aus. Diese Involution aber kann nach S. 28ff. zugleich *als die Doppelpunktsinvolution derjenigen zyklischen Projektivität charakterisiert werden, die den Punkten w_1, w_2, w_3 die Punkte w_2, w_3, w_1 zuordnet,* und diese Doppelpunktsinvolution ist, wie dort gezeigt ist, eine *elliptische Involution.* Mit dieser elliptischen Involution aber hängen die konjugiert komplexen Wendepunkte und Wendepunktslinien des syzygetischen Büschels von Kurven dritter Ordnung eng zusammen.

Projiziert man nämlich die elliptische Involution mit den Punktpaaren:

$$w_1, h_1, \quad w_2, h_2, \quad w_3, h_3 \tag{58}$$

von der reellen Ecke e des teilweise reellen Wendepunktsdreiseits aus auf die Seiten E_1, E_2, E_3 des ganz reellen Wendepunktsdreiseits und bezeichnet die den 6 Punkten (58) entsprechenden Projektionen auf die Seiten E_1, E_2, E_3 beziehlich durch Hinzufügung eines zweiten Index 1, 2, 3, so erhält man auf den 3 Geraden E_1, E_2, E_3 *drei elliptische Involutionen mit den Punktpaaren:*

$$w_{11}, h_{11}, \quad w_{21}, h_{21}, \quad w_{31}, h_{31}, \tag{59}$$

$$w_{12}, h_{12}, \quad w_{22}, h_{22}, \quad w_{32}, h_{32}, \tag{60}$$

$$w_{13}, h_{13}, \quad w_{23}, h_{23}, \quad w_{33}, h_{33} \tag{61}$$

(Fig. 120), und man kann zeigen, daß die konjugiert komplexen Doppelpunkte dieser 3 elliptischen Involutionen beziehlich die konjugiert komplexen Wendepunkte:

$$\begin{matrix} w_4, & w_7, \\ w_5, & w_8, \\ w_6, & w_9, \end{matrix}$$

des syzygetischen Büschels sind.

Da nämlich dem Obigen entsprechend die Doppelpunkte der elliptischen Involution (59) zugleich die Doppelpunkte der zyklischen Projektivität sind, die den Punkten w_{11}, w_{21}, w_{31} die Punkte w_{21}, w_{31}, w_{11} zuweist, und nach S. 26ff. die Doppelpunkte dieser zyklischen Projektivität dadurch gekennzeichnet sind, daß sie die 3 Punkte w_{11}, w_{21}, w_{31} zu einem Punktwurf ergänzen, dessen Doppelverhältnis gleich einer der beiden konjugiert komplexen dritten Wurzeln η und $\frac{1}{\eta}$ aus der negativen Einheit sind, so hat man nur zu zeigen, daß das Doppelverhältnis $(w_{11} w_{21} w_{31} w_4)$ einen von diesen beiden Werten besitzt, während dem Doppelverhältnis $(w_{11} w_{21} w_{31} w_7)$ der andere von diesen beiden Werten zukommt.

Es wird aber nach (23) und (36):

$$
\begin{aligned}
(62) \qquad & w_{11} = w_1 = e_2 - e_3; \\
& w_{21} = [E_1 \cdot e w_2] \\
& \quad = [E_1 \cdot (e_1 + e_2 + e_3)(e_3 - e_1)] \\
& \quad = [E_1(E_1 - 2E_2 + E_3)] \\
& \quad = -2e_3 - e_2, \quad \text{d. h.:}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(63) \qquad & w_{21} = -(e_2 + 2e_3); \\
& w_{31} = [E_1 \cdot e w_3] \\
& \quad = [E_1 \cdot (e_1 + e_2 + e_3)(e_1 - e_2)] \\
& \quad = [E_1(E_1 + E_2 - 2E_3)], \quad \text{somit:}
\end{aligned}
$$

$$(64) \qquad w_{31} = e_3 + 2e_2;$$

ferner nach (23):

$$(65) \qquad w_4 = e_2 - \varepsilon^2 e_3.$$

Also erhält man für das gewünschte Doppelverhältnis den Wert:

$$
\begin{aligned}
(w_{11} w_{21} w_{31} w_4) &= \frac{[w_{11} w_{31}]}{[w_{31} w_{21}]} : \frac{[w_{11} w_4]}{[w_4 w_{21}]} \\
&= \frac{[(e_2 - e_3)(e_3 + 2e_2)]}{[(e_3 + 2e_2)(e_2 + 2e_3)]} : \frac{[(e_2 - e_3)(e_2 - \varepsilon^2 e_3)]}{[(e_2 - \varepsilon^2 e_3)(e_2 + 2e_3)]} \\
&= \frac{2 + \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} = \frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon^2} = \frac{1}{1 + \varepsilon} = \frac{1}{\eta},
\end{aligned}
$$

das letztere nach der Gleichung (2) des vorliegenden und der Gleichung (20) des 40. Abschnitts. Es wird daher:

$$(66) \qquad (w_{11} w_{21} w_{31} w_4) = \frac{1}{\eta},$$

und da nach (23) der Wendepunkt w_7:

$$(67) \qquad w_7 = e_2 - \varepsilon e_3$$

also wegen (65) zu w_4 konjugiert komplex ist, so kann sich das Doppelverhältnis $(w_{11} w_{21} w_{31} w_7)$ von dem Doppelverhältnis (66) nur durch das Vorzeichen von i unterscheiden, d. h., es wird:

$$(68) \qquad (w_{11} w_{21} w_{31} w_7) = \eta .$$

Damit ist aber wirklich unsere obige Behauptung bewiesen, daß die konjugiert komplexen Wendepunkte w_4 und w_7 die Doppelpunkte der elliptischen Punktinvolution (59) sind, und ebenso beweist man, daß die konjugiert komplexen Wendepunkte w_5 und w_8 die Doppelpunkte der elliptischen Punktinvolution (60) und die konjugiert komplexen Wendepunkte w_6 und w_9 die Doppelpunkte der elliptischen Involution (61) sind.

Daraus folgt weiter: Die Doppelstrahlen der Strahlinvolution, durch welche die elliptische Punktinvolution (58) von e aus projiziert wird, sind die konjugiert komplexen Seiten F und G des teilweise reellen Wendepunktsdreiseits, wobei nach dem Schema (34) die komplexe Gerade F den 3 komplexen Wendepunkten w_4, w_5, w_6, und die zu ihr konjugiert komplexe Gerade G den 3 komplexen Wendepunkten w_7, w_8, w_9 zugehört.

Man kann diese Zusammengehörigkeit der komplexen Wendepunkte w_4, w_5, w_6 mit der komplexen Geraden F, und andererseits diejenige der komplexen Wendepunkte w_7, w_8, w_9 mit der zu F konjugierten Geraden G dadurch veranschaulichen, daß man nach dem Vorgange v. Staudts je eines von den beiden konjugiert komplexen Doppelelementen einer elliptischen Involution mit einem bestimmten Durchlaufungssinn dieser Involution verknüpft[1]), was nach dem Satze 164 und dem entsprechenden Satze über eine Strahlinvolution möglich ist.

Man kann also etwa dem komplexen Doppelpunkte w_4 den Durchlaufungssinn w_{11}, w_{21}, w_{31} der Involution (59) zuordnen und dem zu w_4 konjugiert komplexen Doppelpunkt w_7 den umgekehrten Durchlaufungssinn w_{11}, w_{31}, w_{21}, und entsprechend bei den Wendepunkten w_5, w_7 und w_8, w_9 verfahren (siehe Fig. 120, S. 270) und endlich auch bei der elliptischen Strahlinvolution mit dem Scheitel e. Und man kann die mit einem bestimmten Sinn begabte Involution geradezu als das greifbare Abbild des zugehörigen komplexen Doppelelements betrachten. Danach wäre also insbesondere der mit dem Sinne w_1, w_2, w_3 begabte, vom Punkte e aus genommene Schein der Involution (58) das greifbare Abbild der komplexen Geraden F und der mit dem entgegengesetzten Sinn begabte Schein dieser Involution das Abbild der zur Geraden F konjugiert komplexen Geraden G.

Ebenso kann man auch den konjugiert komplexen Geraden E' und E'' eine reelle Figur, nämlich eine sinnbegabte Strahlinvolution eindeutig-um-

1) Vgl. Chr. v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, erstes Heft, Nürnberg 1856, Nr. 116ff. Siehe auch J. Lüroth, Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen, Math. Ann. Bd. 8 (1875), S. 145ff. und E. Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, erstes Heft, Leipzig und Berlin 1911, S. 3ff.

kehrbar zuordnen. Nach dem Schema (34) enthält nämlich die komplexe Gerade E' die Wendepunkte w_1, w_5, w_9 und die zu ihr konjugiert komplexe Gerade E'' die Wendepunkte w_1, w_6, w_8. Es ist aber, wie bereits oben angedeutet wurde, das Abbild des komplexen Wendepunktes w_5 die elliptische Punktinvolution (60) versehen mit dem Sinn:

$$w_{12}, \quad w_{22}, \quad w_{32} \tag{69}$$

und das Abbild des komplexen Wendepunktes w_9 die elliptische Punktinvolution (61) versehen mit dem Sinn:

$$w_{13}, \quad w_{33}, \; w_{23}. \tag{70}$$

Sollen nun die Punkte w_5 und w_9 mit dem Punkte w_1 in einer komplexen Geraden liegen, so bedeutet das: Die beiden mit dem angegebenen Sinn begabten elliptischen Punktinvolutionen (60) und (61) sind einschließlich dieses Sinnes perspektiv aufeinander bezogen durch eine sinnbegabte elliptische Strahlinvolution vom Scheitel w_1. Und dies ist in der Tat der Fall. Denn es treffen sich nicht nur die Geraden $w_{12}w_{13}$ und $w_{22}w_{33}$ im Punkte w_1, sondern es geht auch die Verbindungslinie der Punkte h_{32} und h_{23}, welche den Punkten w_{32} und w_{23} beziehlich in den Involutionen (60) und (61) zugeordnet sind, durch den Punkt w_1 hindurch, woraus wegen:

$$(w_{12}w_{22}h_{32}w_{32}) = -1 \quad \text{und} \quad (w_{13}w_{33}h_{23}w_{23}) = -1$$

noch folgt, daß auch die Verbindungslinie der Punkte w_{32} und w_{23} durch den Punkt w_1 hindurchgehen muß.

Es ist also eine jede von den beiden involutorisch gepaarten Punktreihen der Involution (60) vom Zentrum w_1 aus perspektiv bezogen auf die durch die Zuweisung der Punkte:

$$w_{12}, w_{13}, \quad w_{22}, w_{33}, \quad w_{32}, w_{23}$$

und der entsprechenden Punkte h_{ik} bestimmte Punktreihe der Involution (61), oder, was dasselbe ist, die beiden Involutionen (60) und (61), behaftet mit dem durch die Folgen (69) und (70) angegebenen Sinn, werden von w_1 aus durch eine und dieselbe Strahlinvolution projiziert, wobei diese Strahlinvolution versehen ist mit dem der Folge (69) entsprechenden Sinn:

$$w_1(w_{12}, w_{22}, w_{32}),$$

der wiederum mit dem der Folge (70) entsprechenden Sinn:

$$w_1(w_{13}, w_{33}, w_{23})$$

übereinstimmt. Die mit diesem Sinn begabte Strahlinvolution ist daher das Abbild der komplexen Geraden E', und dieselbe Strahlinvolution in entgegengesetztem Sinn genommen das Abbild der zu E' konjugiert komplexen Geraden E'', oder was dasselbe ist, das Bild der komplexen Verbindungslinie des reellen Wendepunktes w_1 mit den komplexen Wendepunkten w_6 und w_8.[1])

Ebenso zeigt man, daß die konjugiert komplexen Geraden F' und F'' die sinnbegabten Involutionen w_6, w_7 und w_4, w_9 von w_2 aus projizieren, also als sinnbegabte Strahlinvolutionen vom Scheitel w_2 anzusehen sind, und daß die konjugiert komplexen Geraden G' und G'' die sinnbegabten Involutionen w_4, w_8 und w_5, w_7 von w_3 aus projizieren und somit als sinnbegabte Strahlinvolutionen vom Scheitel w_3 aufgefaßt werden können.

1) Vgl. hierzu H. Wiener, Die Einteilung der ebenen Kurven und Kegel dritter Ordnung in 13 Gattungen, Halle 1901, S. 30ff.

Dreizehnter Hauptteil.

Die ebenen Kurven dritter Klasse.

Abschnitt 52.

Konische und punktuelle Pole in bezug auf eine Kurve dritter Klasse.

Die ternäre Lückenform dritter Klasse. Begriff einer ebenen Kurve dritter Klasse. Die allgemeinste homogene Zahlgleichung dritten Grades zwischen den Dreieckskoordinaten $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$ eines Stabes U läßt sich in der Form schreiben:

$$(1)\quad \mathfrak{F}_3(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3) = \mathfrak{A}_{111}\mathfrak{u}_1{}^3 + \cdots + 3\mathfrak{A}_{112}\mathfrak{u}_1{}^2\mathfrak{u}_2 + \cdots + 6\mathfrak{A}_{123}\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_3 = 0.$$

Hält man an den Bezeichnungen des Fundamentaldreiecks aus dem 25. Abschnitte fest und setzt wie gewöhnlich:

$$(2)\qquad U = \mathfrak{u}_1 E_1 + \mathfrak{u}_2 E_2 + \mathfrak{u}_3 E_3,$$

so wird:

$$(3)\qquad \mathfrak{u}_1 = [e_1 U],\quad \mathfrak{u}_2 = [e_2 U],\quad \mathfrak{u}_3 = [e_3 U].$$

Und führt man diese Werte für die Dreieckskoordinaten $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3$ des Stabes U in die Gleichung (1) ein, so nimmt der Ausdruck für die „ternäre Form dritter Klasse" $\mathfrak{F}_3(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3)$ die Gestalt an:

$$(4)\qquad \mathfrak{F}_3(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3) = \mathfrak{A}_{111}[e_1 U]^3 + \cdots + 3\mathfrak{A}_{112}[e_1 U]^2[e_2 U] + \cdots \\ + 6\mathfrak{A}_{123}[e_1 U][e_2 U][e_3 U].$$

Bezeichnet man daher noch einen Lückenausdruck, der entsteht, wenn man auf der rechten Seite von (4) den Stab U überall durch eine Stablücke L ersetzt, mit a_3, führt also die Bezeichnung ein:

$$(5)\qquad a_3 = \mathfrak{A}_{111}[e_1 L]^3 + \cdots + 3\mathfrak{A}_{112}[e_1 L]^2[e_2 L] + \cdots \\ + 6\mathfrak{A}_{123}[e_1 L][e_2 L][e_3 L],$$

so ist a_3 ein konstanter Lückenausdruck mit 3 Stablücken in jedem Gliede, der bei Ausfüllung dieser Lücken in eine Zahl übergeht, oder wie wir in Übereinstimmung mit S. 183 sagen wollen, eine „ternäre Lückenform dritter Klasse", und man erhält für *die ternäre Form dritter Klasse* $\mathfrak{F}_3(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3)$ die Darstellung:

$$\mathfrak{F}_3(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3) = a_3 U^3 \tag{6}$$

und für die allgemeinste homogene *Gleichung dritten Grades* (1) zwischen den Dreieckskoordinaten $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3$ eines Stabes U die Gestalt:

$$a_3 U^3 = 0. \tag{7}$$

Nennt man ferner ein Tangentengebilde einer Ebene, dessen Tangenten U einer nicht durch jeden Stab U der Ebene erfüllten, in bezug auf U homogenen Zahlgleichung dritten Grades Genüge leisten, eine „ebene Kurve dritter Klasse", so hat man den Satz:

Satz 781: Ist a_3 die durch die Gleichung (5) definierte ternäre Lückenform dritter Klasse und U ein Stab der Ebene, so stellt die Gleichung:

$$a_3 U^3 = 0, \tag{7}$$

falls sie nicht durch jeden Stab der Ebene erfüllt wird, eine ebene Kurve dritter Klasse dar, und zwar die allgemeinste ebene Kurve dritter Klasse, wenn die 10 Koeffizienten $\mathfrak{A}_{ijk}$ der Lückenform (5) ganz beliebige Zahlgrößen sind.

Endlich verfüge man wie beim Dualistischen (vgl. S. 210) über die Rechengesetze eines algebraischen Produktes $\{UVW\}$ dreier Stäbe U, V, W, mit dem eine ternäre Lückenform dritter Klasse a_3 multipliziert werden soll, und über seine Verknüpfung mit der Lückenform a_3 in der Weise, daß jede Art der Zusammenfassung und Vertauschung der Faktoren dieses algebraischen Produktes zulässig wird.

Die Tangenten, die sich an eine ebene Kurve dritter Klasse von einem Punkte ihrer Ebene legen lassen. Zieht man an die Kurve dritter Klasse (7), oder wie wir auch sagen wollen, an die Kurve dritter Klasse a_3, die Tangenten von einem beliebigen Punkte $[VW]$ ihrer Ebene, nämlich von dem Schnittpunkte der Geraden zweier beliebig aber fest gegebenen Stäbe V, W ihrer Ebene, so wird sich der Ausdruck für eine solche Tangente U durch eine Vielfachensumme von der Form:

$$U = V + \mathfrak{h} W \tag{8}$$

darstellen lassen, bei welcher der Parameter $\mathfrak{h}$ in der Weise zu bestimmen ist, daß der Ausdruck (8) die Gleichung (7) der Kurve a_3 befriedigt. Man erhält also für den Parameter $\mathfrak{h}$ einer vom Punkte $[VW]$ ausgehenden Tangente der Kurve a_3 die Gleichung:

$$a_3(V + \mathfrak{h} W)^3 = 0 \quad \text{oder} \tag{9}$$

$$a_3 V^3 + 3\mathfrak{h} a_3 V^2 W + 3\mathfrak{h}^2 a_3 V W^2 + \mathfrak{h}^3 a_3 W^3 = 0, \tag{10}$$

d. h. es ergibt sich für die Parameter $\mathfrak{h}$ der gesuchten Tangenten eine Zahlgleichung dritten Grades, deren 4 Koeffizienten:

$$(11) \qquad a_3 V^3, \quad 3a_3 V^2 W, \quad 3a_3 V W^2, \quad a_3 W^3$$

konstante Zahlgrößen sind. Wird daher die Gleichung (10) nicht für jeden Wert von $\mathfrak{h}$ erfüllt, d. h. verschwinden nicht die 4 Koeffizienten (11) gleichzeitig, so liefert die Gleichung (10) für die Parameter $\mathfrak{h}$ der gesuchten Tangenten vom Punkte $[VW]$ an die Kurve dritter Klasse a_3 drei Werte. Bezeichnet man diese 3 Wurzeln der Gleichung (10) mit $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3$, so findet man für die 3 zugehörigen Tangenten U_1, U_2, U_3 die Ausdrücke:

$$(12) \qquad U_1 = V + \mathfrak{h}_1 W, \quad U_2 = V + \mathfrak{h}_2 W, \quad U_3 = V + \mathfrak{h}_3 W.$$

An die Kurve dritter Klasse a_3 lassen sich somit vom Punkte $[VW]$ 3 Tangenten legen.

In dem Falle des Verschwindens aller 4 Koeffizienten (11) dagegen gehört das ganze Strahlbüschel mit dem Scheitel $[VW]$ der Kurve dritter Klasse an, und die Kurve dritter Klasse zerfällt alsdann in dieses Strahlbüschel und in eine Kurve zweiter Klasse. Dieser Fall tritt ein, sobald von einem Punkte $[VW]$ mehr als 3 Tangenten an die Kurve dritter Klasse gehen. Man hat also den Satz:

Satz 782: An eine ebene Kurve dritter Klasse lassen sich von einem jeden Punkte ihrer Ebene drei Tangenten legen, die allerdings auch komplex sein können. Gehen von einem Punkte mehr als drei Tangenten an eine Kurve dritter Klasse, so gehört das ganze Strahlbüschel, das jenen Punkt zum Scheitel hat, der Kurve dritter Klasse an.

Setzen wir die Koeffizienten $\mathfrak{A}_{ijk}$ der Gleichung (1) und also auch die des Lückenausdrucks (5) als reell voraus und bezeichnen die zugehörige Kurve dritter Klasse als „reelle ebene Kurve dritter Klasse", so sind die Wurzeln der Gleichung (10) entweder alle 3 reell, oder es ist eine von ihnen reell, die beiden andern konjugiert komplex, und Entsprechendes gilt dann von den Tangenten, die man vom Punkte $[VW]$ an die Kurve a_3 ziehen kann. Es ergibt sich also als Ergänzung des Satzes 782 der speziellere Satz:

Satz 783: An eine reelle nicht zerfallende ebene Kurve dritter Klasse lassen sich von jedem Punkte ihrer Ebene drei reelle oder eine reelle und zwei konjugiert komplexe Tangenten legen.

Pole einer Geraden in bezug auf eine Kurve dritter Klasse. Betrachten wir in den Gleichungen (8) bis (10) und in den Ausdrücken (11) nur den Stab V als fest, den Stab W aber als veränderlich, so kann man nach der Bedeutung des Verschwindens der Koeffizienten von $\mathfrak{h}^2$ und $\mathfrak{h}$ in der Gleichung (10), d. h. nach der geometrischen Bedeutung der Gleichung:

$$(13) \qquad a_3 V W^2 = 0$$

und der Gleichung:

(14) $$a_3 V^2 W = 0$$

fragen. Zunächst bemerke man, daß bei fest gegebenem V der Ausdruck $a_3 V$ ein konstanter Lückenausdruck mit nur noch zwei Stablücken in jedem Gliede und der Ausdruck $a_3 V^2$ ein konstanter Lückenausdruck mit nur noch einer Stablücke in jedem Gliede ist. Und da überdies beide Ausdrücke bei Ausfüllung ihrer Lücken in eine Zahl übergehen, so ist der Ausdruck $a_3 V$ eine Lückenform zweiter Klasse und der Ausdruck $a_3 V^2$ eine Lückenform erster Klasse. Bei veränderlichem W stellt daher die Gleichung (13) *eine Kurve zweiter Klasse*, die Gleichung (14) *einen Punkt* dar.

Wir nennen die Kurve zweiter Klasse (13) oder, wie wir auch sagen wollen, die Kurve zweiter Klasse $a_3 V$ den ersten Pol oder auch den konischen Pol der Geraden V in bezug auf die Kurve dritter Klasse a_3 und den Punkt (14) oder, wie wir auch sagen wollen, den Punkt $a_3 V^2$ den zweiten Pol oder auch den punktuellen Pol der Geraden V in bezug auf diese Kurve dritter Klasse und ferner die Gerade V die Polare jener Pole in bezug auf diese Kurve.

Es ist noch zu beachten, daß bei festgehaltenem W und veränderlichem V die Gleichung (13) wegen der Vertauschbarkeit der Faktoren V und W^2 den zweiten (punktuellen) Pol der Geraden W in bezug auf die Kurve dritter Klasse a_3 ausdrückt und unter derselben Voraussetzung die Gleichung (14) wegen der Vertauschbarkeit von V^2 und W den ersten (konischen) Pol der Geraden W in bezug auf die Kurve a_3.

Aus dieser doppelten Bedeutung der Gleichung (13) kann man folgern: Enthält der konische Pol $a_3 V$ einer Geraden V in bezug auf eine Kurve dritter Klasse a_3 eine Gerade W als Tangente, wird also die Gleichung (13) für gegebenes V durch eine Gerade W erfüllt, so liegt andererseits auch der punktuelle Pol $a_3 W^2$ der Geraden W in bezug auf die Kurve dritter Klasse a_3 auf der Geraden V und umgekehrt (Fig. 121). Man hat also den Satz:

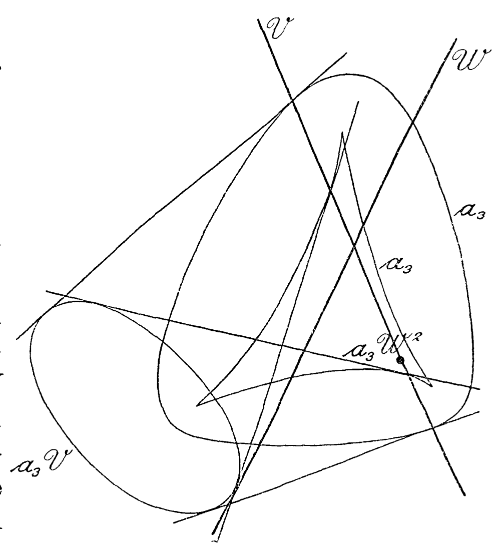


Fig. 121.

Satz 784: Enthält der konische Pol $a_3 V$ einer Geraden V hinsichtlich einer Kurve dritter Klasse a_3 eine Gerade W als Tangente, so liegt andererseits auch der punktuelle Pol $a_3 W^2$ der Geraden W auf der Geraden V und umgekehrt.

Man kann ferner bemerken, daß man auf die Gleichung:

$$(14) \qquad a_3 V^2 W = 0$$

des punktuellen Pols der Geraden V hinsichtlich einer Kurve dritter Klasse a_3 auch geführt wird, wenn man in bezug auf den konischen Pol der Geraden V hinsichtlich dieser Kurve dritter Klasse, d. h. in bezug auf die Kurve zweiter Klasse:

$$(13) \qquad a_3 V W^2 = 0,$$

den Pol der Geraden V bildet. Man hat somit den Satz:

Satz 785: Der zweite oder punktuelle Pol einer jeden Geraden V hinsichtlich einer Kurve dritter Klasse ist zugleich der Pol derselben Geraden V hinsichtlich des ersten oder konischen Pols dieser Geraden in bezug auf jene Kurve dritter Klasse.

Das Auftreten einer Doppeltangente bei einer Kurve dritter Klasse. Bevor wir in der geometrischen Deutung des punktuellen und konischen Pols einer Geraden V hinsichtlich einer Kurve dritter Klasse fortfahren, scheiden wir den Fall aus, wo die Gleichung:

$$(14) \qquad a_3 V^2 W = 0$$

des punktuellen Pols einer Geraden V hinsichtlich einer Kurve dritter Klasse a_3 durch jede Gerade W der Ebene befriedigt wird, so daß also jener punktuelle Pol ganz unbestimmt bleibt.

Zunächst kann man in diesem Falle die Gleichung (14) etwas einfacher in der Form schreiben:

$$(15) \qquad a_3 V^2 = 0,$$

in der die linke Seite eine Lückenform erster Klasse darstellt. Eine solche Lückenform erster Klasse werden wir nämlich dann und nur dann gleich Null setzen, wenn sie mit *jedem* Stabe der Ebene multipliziert Null liefert. Insbesondere wird man also die Lückenform $a_3 V^2$ dann und nur dann gleich Null setzen dürfen, wenn die Gleichung (14) für jeden Stab W der Ebene erfüllt wird. Hieraus folgt, daß die Gleichung (15) auch die Gleichung:

$$(16) \qquad a_3 V^3 = 0$$

nach sich zieht, die aus (14) hervorgeht, wenn man $W = V$ setzt, und welche zeigt, daß die Gerade V eine Tangente der Kurve a_3 ist.

In der Gleichung (10) für die Parameter $\mathfrak{h}$ der Tangenten, die man von dem Punkte $[VW]$ an die Kurve dritter Klasse a_3 legen kann, verschwinden dann ferner unter der Voraussetzung des Bestehens der Gleichung (15) wegen (16) und (14) die beiden ersten Koeffizienten $a_3 V^3$ und $3 a_3 V^2 W$, und zwar *für beliebige Werte von W.* Die Gleichung (10) besitzt daher zwei gleiche Wurzeln $\mathfrak{h} = 0$, und von dem Punkte $[VW]$ der Tangente V der Kurve a_3 lassen sich, *wie auch die Gerade W liegen mag,* zwei mit der Geraden V zusammenfallende Tangenten an die Kurve a_3 legen (Fig. 122). Eine solche Tangente V heißt „eine Doppeltangente der Kurve dritter Klasse“, und man hat den Satz:

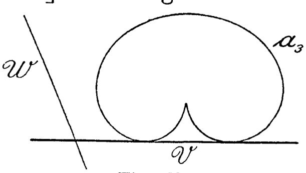


Fig. 122.

Satz 786: Ist a_3 eine ternäre Lückenform dritter Klasse, so ist die Gleichung:

$$(15) \qquad a_3 V^2 = 0$$

eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Gerade V eine Doppeltangente der Kurve dritter Klasse a_3 ist.

Man kann noch hinzufügen:

Satz 787: Der punktuelle Pol einer Geraden V in bezug auf eine Kurve dritter Klasse wird dann und nur dann unbestimmt, wenn seine Polare V in eine Doppeltangente der Kurve dritter Klasse fällt.

Ganz wie beim Dualistischen kann man endlich wieder zeigen, daß *nicht jede Kurve dritter Klasse eine Doppeltangente aufweist,* da das Bestehen der Gleichung (15) eine Bedingungsgleichung zwischen den Koeffizienten der Lückenform dritter Klasse a_3 nach sich zieht.

Der punktuelle Pol einer Tangente einer Kurve dritter Klasse. Nach dieser Einschaltung über die Doppeltangente einer Kurve dritter Klasse kehren wir zur geometrischen Deutung des punktuellen und konischen Pols einer Geraden V hinsichtlich einer Kurve dritter Klasse zurück. Der punktuelle Pol gewinnt eine besonders einfache Bedeutung, wenn seine Polare V selbst eine Tangente der Bezugskurve dritter Klasse bildet, ohne mit einer Doppeltangente dieser Kurve zusammenzufallen. Alsdann genügt die Gerade V der Gleichung:

$$(16) \qquad a_3 V^3 = 0,$$

während zngleich das Produkt:

$$(17) \qquad a_3 V^2 \neq 0$$

ist. Ist jetzt W ein Strahl des Strahlbüschels, dessen Scheitel der punktuelle Pol einer solchen Tangente V ist, so besteht zwischen den Stäben V und W zusammen mit der Gleichung (16) die obige Gleichung:

$$(14) \qquad a_3 V^2 W = 0.$$

Und da diese Gleichung wegen (17) nicht mehr für jede Gerade W der Ebene erfüllt wird, so stellt sie einen Punkt dar, und dieser Punkt ist, wenn die Gerade des Stabes W von der des Stabes V verschieden ist, identisch mit dem Punkte $[VW]$, denn die Gleichung (14) wird wegen (16) auch durch den Stab V erfüllt.

Nun verschwinden aber wegen (16) und (14) in der Gleichung dritten Grades (10) für den Parameter $\mathfrak{h}$ der Tangenten $V + \mathfrak{h} W$, die von dem Punkte $[VW]$ an die Kurve dritter Klasse a_3 gehen, die beiden ersten Koeffizienten, und die Gleichung (10) besitzt daher zwei gleiche Wurzeln $\mathfrak{h} = 0$, d. h., es fallen von den 3 Tangenten, die man vom Punkte $[VW]$ an die Kurve dritter Klasse legen kann, 2 Tangenten mit der Geraden V zusammen. Der Punkt $[VW]$ oder, was nach dem Obigen dasselbe ist, der punktuelle Pol (14) der Tangente V, ist also der Berührungspunkt der Kurve dritter Klasse a_3 mit der Tangente V. Damit ist der Satz bewiesen:

Satz 788: Der zweite oder punktuelle Pol $a_3 V^2$ einer Geraden V in bezug auf eine Kurve dritter Klasse a_3 ist, falls die Gerade V die Kurve dritter Klasse berührt, ohne mit einer Doppeltangente der Kurve zusammenzufallen, der Berührungspunkt der Kurve dritter Klasse mit ihrer Tangente V.

Der konische Pol einer beliebigen Geraden in bezug auf eine Kurve dritter Klasse. Aus dem Satze 788 folgt dann ein weiterer Satz, der zu einer anschaulichen Darstellung des konischen Pols einer beliebigen Geraden V hinsichtlich einer Kurve dritter Klasse führt, nämlich der Satz:

Satz 789: Der erste oder konische Pol $a_3 V$ einer beliebigen Geraden V in bezug auf eine Kurve dritter Klasse a_3 berührt die Tangenten, die man in den Schnittpunkten der Geraden V mit der Kurve dritter Klasse a_3 an diese Kurve legen kann, und umgekehrt berührt eine jede gemeinsame Tangente einer Kurve dritter Klasse a_3 und des konischen Pols $a_3 V$ einer beliebigen Geraden V hinsichtlich dieser Kurve a_3, falls sie nicht eine Doppeltangente der Kurve dritter Klasse ist, diese Kurve in einem Schnittpunkte mit der Geraden V.

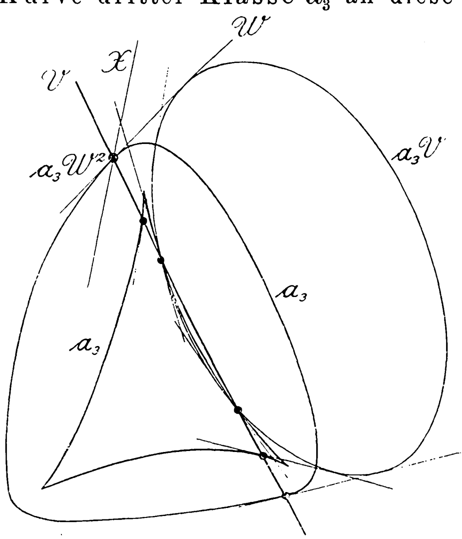


Fig. 123.

In der Tat, ist W eine Tangente, die man in einem Schnittpunkte der Geraden V mit der Kurve dritter Klasse a_3 an diese Kurve legen kann (Fig. 123), so ist ihr Berührungspunkt mit der Kurve a_3

nach dem Satze 788 der punktuelle Pol $a_3 W^2$ der Geraden W in bezug auf a_3. Nach S. 279 lautet also seine Gleichung:

$$a_3 W^2 X = 0,$$

wo X den laufenden Strahl des Strahlbüschels bezeichnet, das den Berührungspunkt der Geraden W mit der Kurve a_3 zum Scheitel hat. Und diese Gleichung muß insbesondere auch befriedigt werden, wenn man $X = V$ setzt, da der Berührungspunkt der Geraden W mit der Kurve a_3 nach der Voraussetzung der Geraden V angehören soll, d. h. es muß die Gleichung bestehen:

$$a_3 W^2 V = 0 \tag{18}$$

oder, was dasselbe ist, die Gleichung:

$$a_3 V W^2 = 0 \tag{13}$$

Diese Gleichung aber ist, wenn V als feste Gerade aufgefaßt wird, zugleich die Gleichung des konischen Pols der Geraden V in bezug auf die Kurve a_3. Die Gleichung (13) zeigt daher, daß die Tangente W, die man in einem Schnittpunkte einer beliebigen Geraden V mit der Kurve dritter Klasse a_3 an diese Kurve ziehen kann, eine Hüllgerade des konischen Pols der Geraden V hinsichtlich der Kurve a_3 ist. Damit ist der erste Teil des Satzes 789 bewiesen.

Aber auch die Richtigkeit der im zweiten Teil dieses Satzes enthaltenen Umkehrung leuchtet sofort ein. Denn, wenn eine Gerade W sowohl die Kurve a_3 berührt, also die Gleichung:

$$a_3 W^3 = 0 \tag{19}$$

befriedigt, wie auch eine Hüllgerade des konischen Pols $a_3 V$ der Geraden V hinsichtlich der Kurve a_3 ist, d. h. der Gleichung (13) Genüge leistet, so erfüllt die Gerade V zugleich die mit der Gleichung (13) gleichwertige Gleichung (18). Diese aber stellt, wenn man die Gerade V als fest gegeben, die Gerade W aber als veränderlich auffaßt, und ferner voraussetzt, daß:

$$a_3 W^2 \neq 0 \tag{20}$$

ist, daß also die Gerade W von einer Doppeltangente der Kurve a_3 verschieden ist, nach dem Satze 788 den Berührungspunkt der Kurve a_3 mit der Geraden W dar. Dieser Berührungspunkt liegt somit nach der Gleichung (18) auf der Geraden V.

Zugleich ergibt sich ohne weiteres aus der Form der Gleichung (13) des konischen Pols $a_3 V$ einer Geraden V hinsichtlich einer Kurve dritter Klasse a_3, daß dieser konische Pol eine etwaige Doppeltangente der Kurve a_3 als Hüllgerade enthalten muß, wie auch die Polare V des konischen Pols gelegen sein mag. Denn für eine Doppeltangente W der Kurve a_3 besteht nach dem Satze 786 die Gleichung:

$$(21) \qquad a_3 W^2 = 0,$$

und aus dieser folgt für jeden Stab V der Ebene die Gleichung (13). Man hat daher den Satz:

Satz 790: Der erste oder konische Pol einer beliebigen Geraden V hinsichtlich einer Kurve dritter Klasse hat eine etwaige Doppeltangente dieser Kurve zur Hüllgeraden.

Anzahl der Punkte, in denen eine ebene Kurve dritter Klasse ohne Doppeltangente von einer Geraden ihrer Ebene geschnitten wird. Wir setzen aus der allgemeinen Theorie der algebraischen Kurven den Satz voraus, der das dualistische Gegenstück des Satzes von Bézout bildet, nämlich den Satz:

Satz 791: Zwei ebene algebraische Kurven $m$ter und $n$ter Klasse haben mn gemeinsame Tangenten.

Dabei ist unter einer ebenen algebraischen Kurve $n$ter Klasse ein Geradengebilde einer Ebene zu verstehen, dessen laufende Hüllgeraden U einer nicht durch jeden Stab der Ebene erfüllten, in bezug auf U homogenen Zahlgleichung $n$ten Grades Genüge leisten.

Aus dem Satze 791 ergibt sich dann genau so wie beim Dualistischen der Satz:

Satz 792: Eine Kurve dritter Klasse, die keine Doppeltangente enthält, wird von einer jeden Geraden ihrer Ebene in 6 Punkten geschnitten.

Der konische Pol einer Tangente einer Kurve dritter Klasse. Ein besonderes Interesse bietet wiederum der Fall, wo die Polare V des konischen Pols hinsichtlich einer Kurve dritter Klasse a_3 eine Tangente dieser Kurve ist. Wir können nämlich zeigen, daß in diesem Falle der konische Pol $a_3 V$ der Geraden V die Kurve a_3 in dem Berührungspunkte seiner Polare V mit dieser Kurve ebenfalls berührt (Fig. 124).

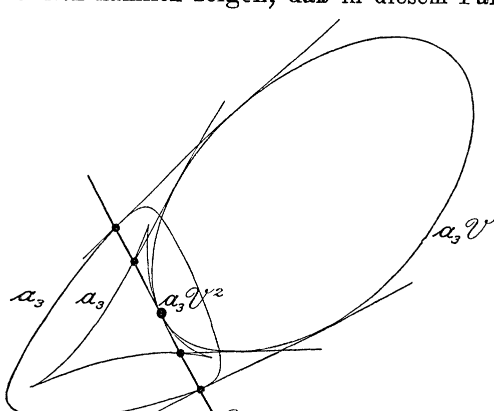


Fig. 124.

Zunächst berührt sicher unter der gemachten Voraussetzung der konische Pol $a_3 V$ der Geraden V seine Polare V. Denn nach dem Satze 789 berührt er eine jede Tangente, die man in den Schnittpunkten der Kurve a_3 mit der Geraden V an diese Kurve legen kann, insbesondere also auch die Gerade V selbst, die ja nach der Voraussetzung die Kurve a_3 berühren soll. Aber man überzeugt sich sogleich, daß die Kurve dritter Klasse a_3 und der konische Pol:

$$(13) \qquad a_3 V W^2 = 0$$

einer beliebigen Tangente V der Kurve a_3 ihren Berührungspunkt an der Geraden V miteinander gemein haben. Denn *der Berührungspunkt der Kurve a_3 mit einer ihrer Tangenten V* stimmt, falls diese Tangente von einer Doppeltangente der Kurve dritter Klasse verschieden ist, nach dem Satze 788 mit dem punktuellen Pol $a_3 V^2$ dieser Tangente hinsichtlich der Kurve dritter Klasse überein. Seine Gleichung lautet also:

$$(14) \qquad a_3 V^2 W = 0.$$

Genau dieselbe Gleichung besitzt aber der Pol der Geraden V hinsichtlich der Kurve (13), d. h. *der Berührungspunkt des konischen Pols der Geraden V mit dieser Geraden.* Folglich fallen die Berührungspunkte, die diese beiden Kurven mit der Geraden V gemein haben, in einen Punkt zusammen. In diesem Punkte berühren sich somit auch die beiden Kurven untereinander. Man hat daher den Satz:

Satz 793: Der erste oder konische Pol $a_3 V$ einer Geraden V in bezug auf eine gegebene Kurve dritter Klasse a_3 ist, falls die Gerade V diese Kurve berührt, eine Kurve zweiter Klasse, welche die gegebene Kurve dritter Klasse a_3 in ihrem Berührungspunkt mit der Geraden V ebenfalls berührt.

Auch hier ist es wiederum nicht nötig, den Fall der Doppeltangente auszuschließen (vgl. das Dualistische).

Da der konische Pol einer Tangente V einer Kurve dritter Klasse in bezug auf diese Kurve nach dem Satze 793 die Kurve dritter Klasse in dem Berührungspunkte der Tangente V berührt, so fallen von den 6 Tangenten, die der konische Pol nach dem Satze 791 mit der Kurve dritter Klasse gemein hat, zwei gemeinschaftliche Tangenten in jene Polare V zusammen. Es bleiben also nur noch 4 weitere gemeinsame Tangenten übrig. Nach dem Satze 789 hat daher eine Tangente V einer Kurve dritter Klasse mit dieser Kurve, falls diese nicht eine Doppeltangente aufweist, außer ihrem Berührungspunkte noch 4 weitere Punkte mit der Kurve dritter Klasse gemein. Dabei ist vorausgesetzt, daß der konische Pol mit der Kurve dritter Klasse an der Berührungsstelle der Geraden V nicht mehr als zwei Tangenten gemeinsam hat (vgl. unten den Satz 805).

Besitzt dagegen die Kurve dritter Klasse a_3 eine und nur eine Doppeltangente D, so hat nach dem Satze 790 der konische Pol $a_3 V$ einer Tangente V von a_3, die von der Doppeltangente D verschieden ist, diese Doppeltangente D zur Hüllgeraden (Fig. 125). Von den 6 gemeinsamen Tangenten der Kurve dritter Klasse a_3 und des konischen Pols $a_3 V$ der Geraden V fallen also 2 gemeinsame Tangenten in die Doppeltangente D der Kurve a_3, 2 andere, wie oben gezeigt worden ist, in die Polare V des konischen Pols, der von dieser Polare in ihrem Berührungspunkte mit der Kurve a_3 ebenfalls berührt wird. Nach dem Satze 789 hat somit die Gerade V außer ihrem Berührungspunkte mit der Kurve a_3 nur noch 2 weitere Punkte mit dieser Kurve gemein, und man hat den Satz:

Satz 794: Eine Tangente V einer Kurve dritter Klasse ohne Doppeltangente hat mit der Kurve außer ihrem Berührungspunkte

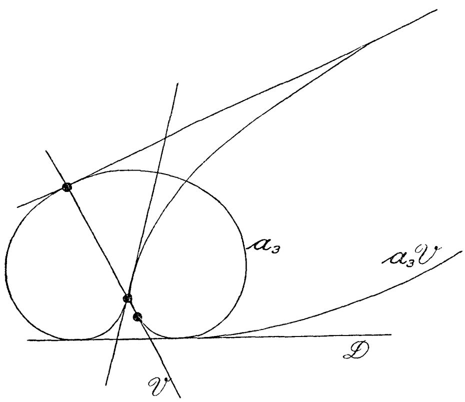


Fig. 125.

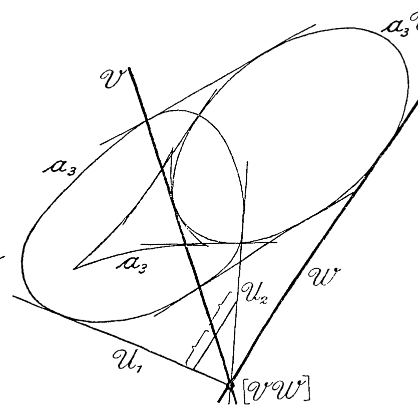


Fig. 126.

noch 4 weitere Punkte gemein. Besitzt dagegen eine Kurve dritter Klasse eine und nur eine Doppeltangente, so hat eine von dieser Doppeltangente verschiedene Tangente V der Kurve mit dieser Kurve außer ihrem Berührungspunkte nur noch 2 weitere Punkte gemeinsam.

Man gewinnt eine Bestätigung des Satzes 793, wenn man den folgenden Satz beweist (Fig. 126):

Satz 795: Läßt man einen Punkt eine Tangente V einer Kurve dritter Klasse a_3 durchlaufen und legt von ihm die beiden weiteren Tangenten U_1 und U_2 an die Kurve und konstruiert bei jedem so erhaltenen Strahltripel $V U_1 U_2$ den von dem Strahle V durch das Strahlpaar $U_1 U_2$ harmonisch getrennten Strahl W, so umhüllen die so gewonnenen Strahlen W den konischen Pol $a_3 V$ der Tangente V der Kurve a_3 in bezug auf diese Kurve.

Ist nämlich V eine Tangente einer Kurve dritter Klasse a_3 und $[V W]$ ein beliebiger Punkt dieser Tangente, indem vor der Hand der Stab W ganz beliebig in der Ebene angenommen werden mag, so lassen die beiden Tangenten U_1 und U_2, die man vom Punkte $[VW]$ außer der Tangente V selbst an die Kurve α_3 legen kann, die Darstellung zu:

$$(22)\qquad \begin{cases} U_1 = \mathfrak{g}_1 V + W \\ U_2 = \mathfrak{g}_2 V + W. \end{cases}$$

Dabei sind die Zahlgrößen $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ diejenigen beiden Wurzeln $\mathfrak{g}_i$ der Zahlgleichung dritten Grades:

$$\alpha_3(\mathfrak{g}_i V + W)^3 = 0,$$

welche diese Gleichung außer der Wurzel $\mathfrak{g}_i = \infty$ aufweist, die der Tangente V zugehört, auf welcher der Punkt $[VW]$ gelegen ist.

Diese Zahlgleichung dritten Grades in bezug auf $\mathfrak{g}_i$ lautet entwickelt:

$$(23)\qquad \mathfrak{g}_i^3 \alpha_3 V^3 + 3\mathfrak{g}_i^2 \alpha_3 V^2 W + 3\mathfrak{g}_i \alpha_3 V W^2 + \alpha_3 W^3 = 0;$$

und in ihr muß, da die Gerade V die Kurve α_3 berühren soll:

$$(24)\qquad \alpha_3 V^3 = 0$$

sein. Die Gleichung (23) verkürzt sich daher zu der Gleichung zweiten Grades:

$$(25)\qquad 3\mathfrak{g}_i^2 \alpha_3 V^2 W + 3\mathfrak{g}_i \alpha_3 V W^2 + \alpha_3 W^3 = 0,$$

wobei zugleich die der Tangente V zugehörende Wurzel $\mathfrak{g}_i = \infty$ ausscheidet.

Unterwerfen wir jetzt den bisher willkürlich gelassenen Stab W der Bedingung, er solle von der Tangente V durch die Tangenten U_1 und U_2 harmonisch getrennt werden, so muß die in bezug auf $\mathfrak{g}_i$ quadratische Gleichung (25) zwei entgegengesetzt gleiche Wurzeln $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ besitzen, woraus folgt, daß in ihr der Koeffizient von $\mathfrak{g}_i$ verschwinden muß, daß also die Gleichung besteht:

$$(26)\qquad \alpha_3 V W^2 = 0.$$

Diese aber besagt wirklich, daß die Gerade W eine Tangente des konischen Pols $\alpha_3 V$ der Tangente V der Kurve α_3 in bezug auf diese Kurve bildet. Und das war die Behauptung unseres Satzes.

Da es ferner zu einem jeden Strahltripel $V U_1 U_2$ eines Strahlbüschels nur einen Strahl W dieses Strahlbüschels gibt, der durch die Strahlen U_1 und U_2 vom Strahle V harmonisch getrennt wird, so gilt auch die folgende Umkehrung des Satzes 795:

Satz 796: Umkehrung zu Satz 795: Konstruiert man zu einer Tangente V einer Kurve dritter Klasse α_3 hinsichtlich dieser Kurve den konischen Pol $\alpha_3 V$, der nach dem Satze 793 die Gerade V in ihrem Berührungspunkte mit der Kurve α_3 ebenfalls berührt, und legt von einem beliebigen Punkte der Tangente V die beiden andern Tangenten U_1 und U_2 an die Kurve dritter Klasse α_3 und die zweite Tangente W an den konischen Pol $\alpha_3 V$, so werden die beiden Tangenten U_1 und U_2 der Kurve a_3 von den beiden Tangenten V und W des konischen Pols harmonisch getrennt.

Der konische Pol einer Doppeltangente einer Kurve dritter Klasse. Der konische Pol einer Doppeltangente einer Kurve dritter Klasse hat eine besonders einfache Bedeutung. Um diese zu finden, setzen wir

erstens voraus, die Gerade V sei eine Doppeltangente der Kurve dritter Klasse a_3, das heißt, sie genüge der obigen Bedingungsgleichung der Doppeltangente:

(15) $$a_3 V^2 = 0,$$

welche, wie wir wissen, die beiden Gleichungen:

(16) $$a_3 V^3 = 0 \quad \text{und}$$

(14) $$a_3 V^2 W = 0$$

nach sich zieht, wobei die letzte Gleichung für jeden Stab W der Ebene erfüllt wird.

Zweitens aber wollen wir annehmen, daß die Lage des bisher willkürlich gelassenen Stabes W jetzt noch der Gleichung:

(26) $$a_3 V W^2 = 0$$

unterworfen werde, so daß seine Gerade eine Hüllgerade des konischen Pols der Doppeltangente V der Kurve a_3 in bezug auf diese Kurve bildet.

Dann verschwinden in der Gleichung (10) wegen des gleichzeitigen Bestehens der Gleichungen (16), (14) und (26) die 3 ersten Koeffizienten. Die Gleichung besitzt daher 3 gleiche Wurzeln $\mathfrak{h} = 0$, und es gehen somit von dem Punkte $[VW]$ drei mit der Geraden V zusammenfallende Tangenten an die Kurve a_3. Der Punkt $[VW]$ liegt also mit einem Berührungspunkte der Doppeltangente V zusammen (Fig. 127).

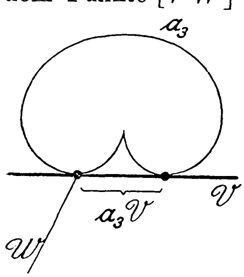


Fig. 127.

Wenn man andererseits den Punkt $[VW]$ festhält, welcher einen Berührungspunkt der Kurve dritter Klasse mit der Doppeltangente V bildet, den zu seiner vollständigen Bestimmung benutzten Stab W aber das Strahlbüschel mit dem Scheitel $[VW]$ durchlaufen läßt, so wird die Gleichung (10) doch immer noch 3 gleiche Wurzeln $\mathfrak{h} = 0$ aufweisen müssen, das heißt, es werden für jeden Stab W jenes Strahlbüschels die 3 ersten Koeffizienten der Gleichung (10) verschwinden müssen. Insbesondere muß daher dieser Strahl W der Gleichung:

(26) $$a_3 V W^2 = 0$$

genügen, was besagt, daß er eine Hüllgerade des konischen Pols der Doppeltangente V bildet. Dieser konische Pol zerfällt demnach in ein Punktpaar, dessen Träger die Doppeltangente V der Kurve dritter Klasse ist, und er besteht aus den beiden Berührungspunkten, welche die Doppeltangente V der Kurve dritter Klasse mit dieser Kurve gemein hat. Man hat also den Satz:

Satz 797: Der erste oder konische Pol einer Doppeltangente einer Kurve dritter Klasse in bezug auf diese Kurve wird durch das Punktpaar gebildet, in welchem die Doppeltangente von der Kurve dritter Klasse berührt wird.

Abschnitt 53.

Die Hessesche Kurve einer Kurve dritter Klasse.

Das kombinatorische Produkt dreier ternären Lückenformen erster Klasse. Sind s_1, s_2, s_3 drei Punkte in der Ebene, und ist L eine Stablücke, so sind die Ausdrücke $[s_1 L]$, $[s_2 L]$, $[s_3 L]$ drei ternäre Lückenformen erster Klasse. Und definiert man genau ebenso wie bei der Einführung des kombinatorischen Produktes der Stab-Stab-Abbildung dreier Kollineationen der Ebene[1]) das kombinatorische Produkt:

$$[UVW \cdot s_1 L \quad s_2 L \quad s_3 L]$$

durch die Formel:

$$(1) \quad \begin{cases} [UVW \cdot s_1 L \quad s_2 L \quad s_3 L] \\ = \frac{1}{3!} \begin{Bmatrix} [s_1 U][s_2 V][s_3 W] + [s_1 V][s_2 W][s_3 U] + [s_1 W][s_2 U][s_3 V] \\ -[s_1 U][s_2 W][s_3 V] - [s_1 V][s_2 U][s_3 W] - [s_1 W][s_2 V][s_3 U] \end{Bmatrix}, \end{cases}$$

so beweist man wie dort, daß das Produkt $[UVW \cdot s_1 L \quad s_2 L \quad s_3 L]$ verschwindet, wenn zwei von seinen drei Stabfaktoren U, V, W einander gleich werden, und daß es entgegengesetzten Wert annimmt, wenn man zwei von diesen Faktoren miteinander vertauscht. Daraus folgt dann ferner wie dort, daß, falls das Produkt:

$$(2) \qquad [UVW] \neq 0$$

ist, der Bruch:

$$(3) \qquad \frac{[UVW \cdot s_1 L \quad s_2 L \quad s_3 L]}{[UVW]}$$

unabhängig von der Lage, der Länge und dem Sinn der Stäbe U, V, W ist, so daß man für ihn das Symbol:

$$(4) \qquad [s_1 L \cdot s_2 L \cdot s_3 L]$$

einführen kann. Und es wird, wenn E_1, E_2, E_3 die Einheiten zweiter Stufe sind, für welche:

$$(5) \qquad [E_1 E_2 E_3] = 1 \text{ ist,}$$

$$(6) \qquad [s_1 L \cdot s_2 L \cdot s_3 L] = [E_1 E_2 E_3 \cdot s_1 L \quad s_2 L \quad s_3 L]$$

1) Vgl. den ersten Teil dieses Bandes S. 75ff. Siehe auch dort das Entsprechende über Reziprozitäten S. 159ff.

oder wegen (1):

$$(7)\quad \begin{cases} [s_1L\cdot s_2L\cdot s_3L] \\ =\frac{1}{3!}\left\{\begin{array}{l}[s_1E_1][s_2E_2][s_3E_3]+[s_1E_2][s_2E_3][s_3E_1]+[s_1E_3][s_2E_1][s_3E_2] \\ -[s_1E_1][s_2E_3][s_3E_2]-[s_1E_2][s_2E_1][s_3E_3]-[s_1E_3][s_2E_2][s_3E_1]\end{array}\right\}, \end{cases}$$

und man beweist, wie beim Dualistischen, daß:

$$(8)\qquad [s_1L\cdot s_2L\cdot s_3L]=\frac{1}{3!}[s_1s_2s_3]$$

ist. Die Gleichung:

$$[s_1L\cdot s_2L\cdot s_3L]=0$$

besagt daher ebenso wie die Gleichung:

$$[s_1s_2s_3]=0,$$

daß die 3 Punkte s_1, s_2, s_3 in einer geraden Linie liegen, und man hat den Satz:

Satz 798: Sind s_1, s_2, s_3 drei Punkte, und ist L eine Stablücke, so ist die Gleichung:

$$[s_1L\cdot s_2L\cdot s_3L]=0$$

dann und nur dann erfüllt, wenn die drei Punkte s_1, s_2, s_3 in einer geraden Linie liegen.

Ferner folgt aus der Gleichung (8), daß das kombinatorische Produkt $[s_1L\cdot s_2L\cdot s_3L]$ sein Zeichen wechselt, wenn man irgend zwei von seinen Faktoren $[s_iL]$ miteinander vertauscht.

Da sich endlich jede ternäre Lückenform erster Klasse $\mathfrak{a}_1$, das heißt jeder ternäre Lückenausdruck mit je einer Lücke in jedem Gliede, der sich bei Ausfüllung dieser Lücke in eine Zahl verwandelt, in der Form $[sL]$ darstellen läßt, wo s den Scheitel des Strahlbüschels $\mathfrak{a}_1U=0$ bildet, so gelten, wenn $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ drei solche Lückenformen erster Klasse sind, für das kombinatorische Produkt:

$$[\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1]$$

die Sätze:

Satz 799: Sind $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ drei ternäre Lückenformen erster Klasse, so wird die Gleichung:

$$[\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1]=0$$

dann und nur dann erfüllt, wenn die drei Punkte:

$$\mathfrak{a}_1U=0,\quad \mathfrak{b}_1U=0,\quad \mathfrak{c}_1U=0$$

in einer Geraden liegen. Und

Satz 800: Das kombinatorische Produkt $[\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1]$ dreier ternären Lückenformen erster Klasse $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ ändert sein Vorzeichen, nicht aber seinen absoluten Wert, wenn man irgend zwei von seinen drei Faktoren miteinander vertauscht.

Natürlich kann man für den Satz 800 auch eine Begründung geben, die dem zweiten Beweise des Satzes 748 in der dualistischen Entwicklung entspricht.

Begriff der Hesseschen Kurve einer Kurve dritter Klasse. Sie berührt eine etwaige Doppeltangente dieser Kurve. Die Gleichung des konischen Pols eines Stabes V in bezug auf eine Kurve dritter Klasse a_3 lautet nach der Gleichung (13) des vorigen Abschnitts:

$$a_3 V W^2 = 0. \tag{9}$$

Damit dieser konische Pol in ein Punktpaar zerfalle, dessen Träger die Gerade des Stabes W ist, ist notwendig und hinreichend, daß die Gleichung besteht:

$$a_3 V W = 0. \tag{10}$$

(Vgl. die ausführliche Begründung beim Dualistischen.) Die Gleichung (10) aber ist wieder gleichbedeutend mit den 3 Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} a_3 V W E_1 &= 0,\\ a_3 V W E_2 &= 0,\\ a_3 V W E_3 &= 0, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

die aus ihr durch Multiplikation mit E_1, E_2, E_3 hervorgehen. Sucht man also die Hüllkurve der Träger W aller in ein Punktpaar zerfallenden konischen Pole in bezug auf die Kurve dritter Klasse a_3, so müssen ihre Polaren V zusammen mit den zugehörigen Trägern W jener Punktpaare der Gleichung (10) genügen und somit auch den Gleichungen (11).

Will man aber *eine Gleichung für die Hüllkurve jener Träger W allein* haben, so hat man aus den Gleichungen (11) die Polaren V jener konischen Pole zu eliminieren. Dazu schreibe man die Gleichungen (11) in der Form:

$$\left\{\begin{aligned} a_3 W E_1 \quad V &= 0,\\ a_3 W E_2 \quad V &= 0,\\ a_3 W E_3 \quad V &= 0. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Hier sind bei *gegebenem* W die 3 Ausdrücke $a_3 W E_i$ 3 konstante Lückenausdrücke mit je einer Stablücke in jedem Gliede, die sich bei Ausfüllung dieser Lücke in eine Zahl verwandeln, das heißt, sie sind 3 ternäre Lückenformen erster Klasse. Jede von den 3 Gleichungen (12) stellt also bei konstantem W und veränderlichem V einen Punkt dar. Die 3 Gleichungen (12) sagen daher aus, daß diese 3 Punkte in einer und derselben Geraden V liegen. Nach dem Satze 799 folgt somit aus ihnen die Gleichung:

$$[a_3 W E_1 \cdot a_3 W E_2 \cdot a_3 W E_3] = 0. \tag{13}$$

Und diese Gleichung zeigt als Zahlgleichung dritten Grades in bezug auf den Stab W, daß die Hüllkurve der Träger aller in ein Punktpaar zerfallenden konischen Pole hinsichtlich der Kurve dritter Klasse a_3 selbst eine Kurve dritter Klasse ist, wenigstens unter der Voraussetzung, daß die Gleichung (13) nicht durch jeden Stab W der Ebene erfüllt wird.

Wir bezeichnen die ternäre Form dritter Klasse auf der linken Seite von (13) mit $h_3 W^3$, setzen daher:

(14) $$h_3 W^3 = [a_3 W E_1 \cdot a_3 W E_2 \cdot a_3 W E_3],$$

und nennen die ternäre Form dritter Klasse (14) „die Hessesche Form der ternären Form dritter Klasse $a_3 W^3$“. Dabei soll das in der Gleichung (14) auftretende Symbol h_3 die zu der Hesseschen Form $h_3 W^3$ gehörende ternäre Lückenform dritter Klasse darstellen, so daß also:

(15) $$h_3 = [a_3 L E_1 \cdot a_3 L E_2 \cdot a_3 L E_3]$$

wird. Und es zeigt dann die Vergleichung von (14) und (15), daß in der ternären Form dritter Klasse $h_3 W^3$ die Faktoren der Potenz W^3 *als Füllgrößen für die explizite geschriebenen Lücken der Lückenform* h_3 *zu dienen haben,* nicht etwa für die in a_3 steckenden Lücken.

Wir nennen ferner die durch die Gleichung (13) dargestellte Kurve dritter Klasse h_3 „die Hessesche Kurve der Kurve dritter Klasse a_3“ oder auch wohl „die Hessiane der Kurve dritter Klasse a_3“.

Ihr gehören nach dem Obigen die Träger W der in ein Punktpaar zerfallenden konischen Pole $a_3 V$ in bezug auf die Kurve a_3 als Hüllgeraden an (Fig. 128). Man überzeugt sich aber sogleich, daß auch die Polaren V dieser zerfallenden konischen Pole Tangenten der Hesseschen Kurve bilden. Denn, da die Gleichung (10) ihre Gültigkeit nicht verliert, wenn die Faktoren V und W miteinander vertauscht werden, so muß auch die aus (10) gefolgerte Gleichung (13) bestehen bleiben, wenn man in ihr den Träger W des zerfallenden konischen Pols durch dessen Polare V ersetzt, das heißt, es muß die Gleichung befriedigt werden:

(16) $$[a_3 V E_1 \cdot a_3 V E_2 \cdot a_3 V E_3] = 0,$$

welche in der Tat zeigt, daß auch die Polaren V der zerfallenden konischen Pole in bezug auf a_3 die Hessesche Kurve h_3 von a_3 berühren. Man hat also den Satz:

Satz 801: Die Hüllkurve aller Geraden V der Ebene, deren konische Pole in bezug auf eine gegebene Kurve dritter Klasse a_3 in je ein Punktpaar zerfallen, ist die Hessesche Kurve dieser Kurve dritter Klasse. Dieselbe hat zugleich die Träger W der in ein Punktpaar zerfallenden konischen Pole als Hüllgeraden. Sie ist selbst eine Kurve dritter Klasse und wird durch die Gleichung (16) dargestellt.

Aus den Sätzen 797 und 801 folgt noch der Satz:

Satz 802: Die Hessesche Kurve einer Kurve dritter Klasse berührt eine etwaige Doppeltangente dieser Kurve.

Rückkehrtangenten einer Kurve dritter Klasse; ihre konischen Pole zerfallen in den Rückkehrpunkt und den harmonischen Pol der Rückkehrtangente. Schließen wir jetzt den Fall, wo die Gerade V in eine Doppeltangente der Kurve dritter Klasse a_3 fällt, von der Betrachtung aus, setzen aber immer noch voraus, daß die Gerade V eine Tangente der Kurve a_3 bildet, so daß zwar die Gleichung:

(17) $$a_3 V^3 = 0$$

erfüllt wird, aber andererseits die Ungleichung:

(18) $$a_3 V^2 \neq 0$$

besteht, und lassen sodann die Tangente V ihre Lage an der Kurve a_3 solange verändern, bis für sie und

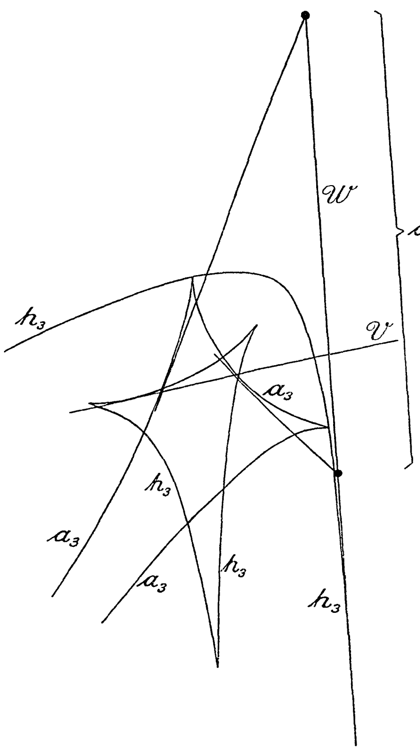


Fig. 128.

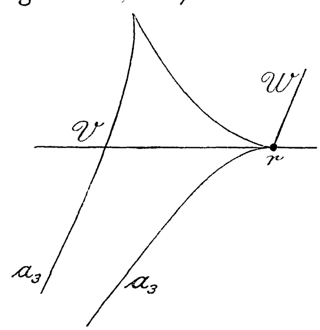


Fig. 129.

für gewisse Lagen einer Geraden W die beiden Gleichungen befriedigt werden:

(19) $$a_3 V^2 W = 0 \quad \text{und}$$

(20) $$a_3 V W^2 = 0,$$

so besitzt wegen (17), (19) und (20) die Gleichung (10) des vorigen Abschnitts 3 gleiche Wurzeln $\mathfrak{h} = 0$, und es gehen daher vom Punkte $[V W]$ 3 mit der Geraden V zusammenfallende Tangenten an die Kurve dritter Klasse a_3. Die Gerade V ist also eine „Rückkehrtangente der Kurve a_3" und der Punkt $[V W]$ der zugehörige „Rückkehrpunkt r" (Fig. 129).

Aus demselben Grunde wie auf S. 241 f. genügt dann zugleich mit dem zur Festlegung des Rückkehrpunktes $r = [V W]$ benutzten Stabe W ein jeder Stab W des Strahlbüschels, das den Rückkehrpunkt r zum Scheitel hat, den Gleichungen (19) und (20). Man hat daher den Satz:

Satz 803: Ist a_3 eine ternäre Lückenform dritter Klasse, und genügen 2 Stäbe V und W den drei Gleichungen (17), (19) und (20), während zugleich die Ungleichung (18) besteht, so ist die Gerade V eine Rückkehrtangente und der Punkt $[VW]$ der zugehörige Rückkehrpunkt r der Kurve dritter Klasse a_3. Und umgekehrt gelten für jede Rückkehrtangente V einer Kurve dritter Klasse a_3 und einen jeden Stab W des Strahlbüschels, das den zugehörigen Rückkehrpunkt r zum Scheitel hat, die 3 Gleichungen (17), (19) und (20).

Um über *den konischen Pol einer Rückkehrtangente* Aufschluß zu erhalten, bemerke man, daß nach dem Satze 788 *der punktuelle Pol* einer jeden Tangente V einer Kurve dritter Klasse, die von einer Doppeltangente dieser Kurve verschieden ist, durch den Berührungspunkt der Tangente V mit der Kurve gebildet wird. Wenn also die Gerade V *eine Rückkehrtangente* der Kurve dritter Klasse a_3 ist, so ist *ihr punktueller Pol* $a_3 V^2$, mit der Gleichung (19), nichts anderes als der dieser Rückkehrtangente zugehörende *Rückkehrpunkt* r. Da aber nach dem Satze 803 für jede Gerade W des Strahlbüschels, dessen Scheitel jener Rückkehrpunkt r ist, zugleich die Gleichung (20), das heißt *die Gleichung des konischen Pols* der Rückkehrtangente V, erfüllt ist, so *enthält der konische Pol* $a_3 V$ *einer Rückkehrtangente* V *den zugehörigen Rückkehrpunkt* r *als Teil* und zerfällt somit in *ein Punktpaar, dessen einer Punkt dieser Rückkehrpunkt* r ist.

Über den zweiten Punkt dieses Punktpaars geben die Sätze 795 und 796 Aufschluß, nach denen der konische Pol einer jeden Tangente V einer Kurve dritter Klasse die Hüllkurve derjenigen Geraden bildet, die von der Geraden V durch die Kurve dritter Klasse harmonisch getrennt werden. Dies trifft insbesondere auch für den Fall zu, wo jene Tangente V der Kurve dritter Klasse, welche die Polare des konischen Pols bildet, eine Rückkehrtangente der Kurve dritter Klasse ist, wo also der konische Pol in ein Punktpaar zerfällt, nämlich in den Rückkehrpunkt r und einen zweiten Punkt. Für den Rückkehrpunkt r besitzt selbstverständlich jede durch ihn gehende Gerade W die angegebene Eigenschaft; denn ein Tripel von drei zusammenfallenden Strahlen V eines Strahlbüschels wird durch jeden Strahl W dieses Strahlbüschels zu einem harmonischen Strahlwurf ergänzt.

Ein größeres Interesse gewinnt diese Eigenschaft für den zweiten Punkt h jenes Punktpaars, da ja ihr zufolge jeder Strahl W des Strahlbüschels, das diesen Punkt h zum Scheitel hat, von der zugehörigen Rückkehrtangente V durch die Kurve dritter Klasse, das heißt durch die beiden andern vom Punkte $[VW]$ ausgehenden Tangenten U_1 und U_2 der Kurve, harmonisch getrennt wird (Fig. 130). Dieser Punkt h heißt daher der harmonische Pol der Rückkehrtangente. Derselbe gehört insbesondere denjenigen Tangenten an, die man in den Punkten an die Kurve dritter Klasse ziehen kann, welche die Rückkehrtangente außer ihrem Rückkehrpunkte mit der Kurve gemein hat. Denn für jeden von dem Rückkehrpunkte r verschiedenen

Schnittpunkt s der Rückkehrtangente mit der Kurve a_3 fallen die beiden von ihm ausgehenden Tangenten der Kurve a_3 in eine einzige Gerade zusammen. Die Gerade W, welche von der Rückkehrtangente V durch jene beiden zusammenfallenden Tangenten harmonisch getrennt wird, muß also ebenfalls mit jenen beiden Tangenten identisch sein.

Man kann das Ergebnis auch so ausdrücken: *Die Kurve dritter Klasse a_3 geht an einer Rückkehrtangente und ihrem harmonischen Pole h harmonisch gespiegelt in sich über.* Und man hat ferner den Satz:

Satz 804: Der konische Pol $a_3 V$ einer Rückkehrtangente V einer Kurve dritter Klasse a_3 in bezug auf diese Kurve ist das Punktpaar, das aus dem Rückkehrpunkte r und dem harmonischen Pole h der Rückkehrtangente gebildet wird.

Man beweist ferner genau so wie beim Dualistischen den Satz:

Satz 805: Eine Rückkehrtangente einer Kurve dritter Klasse ohne Doppeltangente hat außer dem Rückkehrpunkte dieser Rückkehrtangente noch 3 weitere Punkte mit der Kurve gemein, (von denen natürlich auch zwei Punkte konjugiert komplex sein können), dagegen mit einer Kurve dritter Klasse, die eine Doppeltangente aufweist, nur noch einen weiteren Punkt.

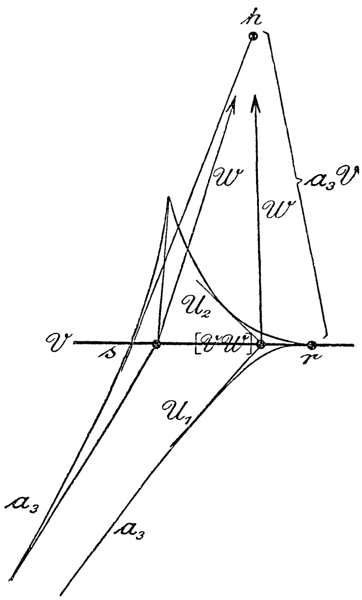


Fig. 130.

Auch jede Rückkehrtangente einer Kurve dritter Klasse ist eine Hüllgerade der Hesseschen Kurve dieser Kurve. Anzahl der Rückkehrtangenten einer Kurve dritter Klasse ohne Doppeltangente. Da nach dem Satze 801 die Hessesche Kurve einer Kurve dritter Klasse a_3 das Hüllgebilde aller Geraden der Ebene ist, deren konischer Pol hinsichtlich der Kurve a_3 in ein Punktpaar zerfällt, und nach dem Satze 804 dies für den konischen Pol $a_3 R$ einer Rückkehrtangente R der Kurve a_3 zutrifft, so müssen die Rückkehrtangenten R der Kurve dritter Klasse a_3 zugleich auch Tangenten der Hesseschen Kurve dieser Kurve sein (Fig. 131).

Es ist aber ganz besonders wichtig, daß von diesem Satze auch eine Umkehrung gilt, daß nämlich auch umgekehrt jede gemeinsame Tangente einer Kurve dritter Klasse a_3 und ihrer Hesseschen Kurve, falls sie nicht eine Doppeltangente der Kurve a_3 ist, eine Rückkehrtangente dieser Kurve bildet.

Um dies zu beweisen, setzen wir voraus, eine Tangente V der Kurve dritter Klasse a_3 sei von einer Doppeltangente der Kurve verschieden, also eine einfache Tangente der Kurve, sie genüge somit der Gleichung:

(17) $$a_3 V^3 = 0,$$

während zugleich die Ungleichung besteht:

(18) $$a_3 V^2 \neq 0.$$

Dann weiß man von dem konischen Pol $a_3 V$ der Geraden V, das heißt von der Kurve zweiter Klasse:

(20) $$a_3 V W^2 = 0,$$

nach dem Satze 793, daß er nicht nur die Gerade V berührt, sondern daß der Berührungspunkt, den er mit der Geraden V gemein hat, mit dem Berührungspunkte dieser Geraden V und der Kurve a_3 zusammenfällt, so daß diese Kurven $a_3 V$ und a_3 sich selbst in diesem Punkte berühren (vgl. die obige Fig. 124).

Wenn nun aber die Gerade V auch eine Hüllgerade der Hesseschen Kurve

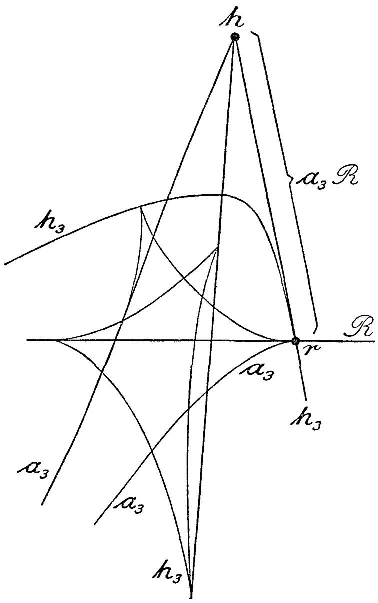


Fig. 131.

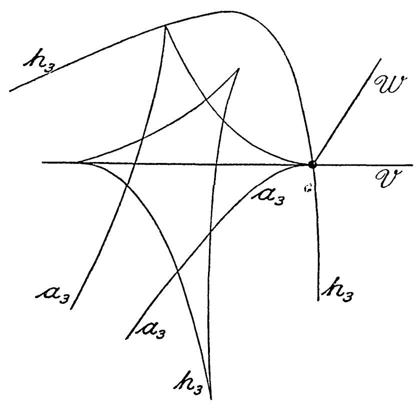


Fig. 132.

(16) bildet, so zerfällt dieser konische Pol (20) in ein Punktpaar, und da er überdies die Kurve dritter Klasse a_3 in ihrem Berührungspunkte mit der Geraden V berührt, so muß einer von den beiden Punkten des Punktpaars der Berührungspunkt der Kurve dritter Klasse a_3 mit der Geraden V sein, also mit dem punktuellen Pol der Geraden V hinsichtlich a_3 zusammenfallen, das heißt, der Gleichung:

(19) $$a_3 V^2 W = 0$$

Genüge leisten.

Für die Strahlen W eines Strahlbüschels, das den Berührungspunkt der Kurve a_3 mit einer gemeinsamen Tangente V dieser Kurve dritter Klasse a_3 und ihrer Hesseschen Kurve h_3 zum Scheitel hat, ohne daß dabei V eine Doppeltangente der Kurve a_3 wäre, bestehen somit die Gleichungen (19) und (20), während für die Gerade V zugleich die Gleichung (17) und die Ungleichung (18) befriedigt wird. Die 3 Gleichungen (17), (19) und (20) zusammen mit der Nebenbedingung (18) waren aber nach dem Satze 803 die Bedingungsgleichungen dafür, daß die Gerade V eine Rückkehrtangente der Kurve α_3 ist, und zugleich stellte die Gleichung (19) den zugehörigen Rückkehrpunkt dar (Fig. 132). Man hat daher den Satz:

Satz 806: Jede Rückkehrtangente einer Kurve dritter Klasse α_3 berührt auch ihre Hessesche Kurve, und umgekehrt ist auch jede von einer Doppeltangente einer Kurve dritter Klasse α_3 verschiedene gemeinsame Tangente dieser Kurve und ihrer Hesseschen Kurve eine Rückkehrtangente der Kurve α_3.

Der Satz 791 gibt dann Aufschluß über die Anzahl der Rückkehrtangenten, die eine Kurve dritter Klasse besitzt, wenigstens für den Fall, wo die Kurve keine Doppeltangente enthält. Da nämlich nach dem Satze 801 die Hessesche Kurve einer Kurve dritter Klasse ebenfalls von der dritten Klasse ist, so folgt aus dem Satze 806 der Satz:

Satz 807: Eine Kurve dritter Klasse, die keine Doppeltangente hat, besitzt neun Rückkehrtangenten.

Abschnitt 54.

Die neun gemeinsamen Tangenten zweier Kurven dritter Klasse. Die Rückkehrpunktsgleichung einer Kurve dritter Klasse.

Die Anzahl der Tangenten, die eine Kurve n ter, insbesondere dritter Klasse, bestimmen. Man beweist genau so wie beim Dualistischen (im 50. Abschnitt) die Sätze:

Satz 808: Eine Kurve dritter Klasse ist im allgemeinen durch 9 Tangenten bestimmt. Und

Satz 809: Eine Kurve n ter Klasse ist im allgemeinen durch $\frac{n(n+3)}{2}$ Tangenten bestimmt.

In beiden Sätzen kann es eintreten, daß es für besondere Lagen der 9 oder $\frac{n(n+3)}{2}$ Tangenten *unendlich viele* Kurven dritter oder n ter Klasse gibt, denen jene Tangenten gemeinsam sind, daß diese Tangenten also zur Bestimmung einer solchen Kurve nicht ausreichen.

Im allgemeinen aber gibt es erst zu $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ gegebenen Geraden unendlich viele Kurven n ter Klasse, welche diese Geraden berühren, und man beweist wieder ebenso wie beim Dualistischen, daß diese Kurven noch $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ weitere Tangenten miteinander gemein haben, so daß sie im ganzen n^2 gemeinsame Tangenten aufweisen. Sind:

(1) $$\alpha_n U^n = 0 \quad \text{und} \quad b_n U^n = 0$$

die Gleichungen zweier Kurven n ter Klasse, welche $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ gegebene Tangenten miteinander gemein haben, so kommt dieselbe Eigenschaft auch sämtlichen Kurven des Systems von Kurven n ter Klasse:

(2) $$\mathfrak{h}\,a_n U^n + \mathfrak{k}\,b_n U^n = 0$$

zu, und alle diese Kurven haben nach dem Obigen außerdem noch:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

weitere Tangenten miteinander gemein, im ganzen also n^2 gemeinschaftliche Tangenten.

Ist T ein Stab einer Geraden der Ebene, die von den n^2 gemeinsamen Tangenten der Kurven (1) verschieden ist, so kann man stets eine Kurve (2) angeben, die außer den n^2 gemeinsamen Tangenten der Kurven (1) auch noch die Gerade T berührt. Die Gleichung:

(3) $$\mathfrak{h}\,a_n T^n + \mathfrak{k}\,b_n T^n = 0$$

ergibt nämlich für das Parameterverhältnis $\frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{h}}$ der fraglichen Kurve den Wert:

(4) $$\frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{h}} = -\frac{a_n T^n}{b_n T^n},$$

und dieser wird nur unbestimmt, wenn die Gleichungen:

(5) $$a_n T^n = 0 \quad \text{und} \quad b_n T^n = 0$$

gleichzeitig erfüllt werden. Das aber tritt wiederum nur ein, wenn T eine von den n^2 gemeinsamen Tangenten der Kurven (1) ist, was oben ausgeschlossen wurde.

In diesen Ergebnissen ist zunächst der folgende Satz enthalten:

Satz 810: Es gibt unendlich viele Kurven n ter Klasse, welche $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ gegebene Geraden der Ebene zu Tangenten haben. Aber diese Kurven n ter Klasse haben noch $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ weitere Tangenten miteinander gemein.

Aus diesem Satze folgt ferner speziell für Kurven dritter Klasse der Satz:

Satz 811: Es gibt unendlich viele Kurven dritter Klasse, welche 8 gegebene Geraden der Ebene zu Tangenten haben, aber alle diese Kurven dritter Klasse haben noch eine neunte Tangente miteinander gemein.

Bezeichnet man ferner noch die Gesamtheit der durch die Gleichung (2) für beliebige Werte von $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$ dargestellten Kurven n ter Klasse als eine Schar von Kurven n ter Klasse und nennt die beiden Kurven (1) die Grundkurven der Schar, die n^2 gemeinsamen Tangenten ihrer beiden

Grundkurven die Grundgeraden der Schar, so kann man zugleich den folgenden Satz aussprechen:

Satz 812: Die n^2 Grundgeraden einer Schar von Kurven $n$ter Klasse, d. h. die n^2 gemeinsamen Tangenten ihrer beiden Grundkurven, berühren die sämtlichen Kurven der Schar. Dagegen wird eine jede Gerade der Ebene, die von den n^2 Grundgeraden der Schar verschieden ist, von einer und nur von einer Kurve der Schar berührt.

Insbesondere heißt die Gesamtheit aller Kurven dritter Klasse, die für beliebige Werte der reellen Zahlgrößen $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$ durch eine Gleichung von der Form:

$$\mathfrak{h}\,\mathfrak{a}_3 U^3 + \mathfrak{k}\,\mathfrak{b}_3 U^3 = 0 \tag{6}$$

dargestellt werden, unter $\mathfrak{a}_3$ und $\mathfrak{b}_3$ zwei ternäre Lückenformen dritter Klasse verstanden, eine Schar von Kurven dritter Klasse, die Kurven:

$$\mathfrak{a}_3 U^3 = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{b}_3 U^3 = 0 \tag{7}$$

heißen die Grundkurven der Schar und die 9 gemeinsamen Tangenten der beiden Grundkurven die Grundgeraden der Schar. Für eine solche Schar von Kurven dritter Klasse folgt aus dem Satze 812 der Satz:

Satz 813: Die 9 Grundgeraden einer Schar von Kurven dritter Klasse, d. h. die 9 gemeinsamen Tangenten ihrer beiden Grundkurven, berühren sämtliche Kurven der Schar. Dagegen wird eine jede Gerade der Ebene, die von den 9 Grundgeraden der Schar verschieden ist, von einer und nur einer Kurve der Schar berührt.

Folgerungen aus dem Satze 811 für den Fall, wo eine von den Kurven einer Schar von Kurven dritter Klasse zerfällt. Wendet man den Satz 811 auf den Fall an, wo eine von den Kurven dritter Klasse dieses Satzes in eine Kurve zweiter Klasse und in ein Strahlbüschel zerfällt (vgl. S. 249f.), so folgert man:

Hat eine Kurve zweiter Klasse mit zwei Kurven dritter Klasse 6 Tangenten gemein, so geht durch den Schnittpunkt zweier von den 3 andern gemeinsamen Tangenten der beiden Kurven dritter Klasse auch die dritte von diesen 3 gemeinsamen Tangenten hindurch.

Und

Schneiden sich 3 von den 9 gemeinsamen Tangenten zweier Kurven dritter Klasse in einem Punkte, so berührt die Kurve zweiter Klasse, die durch 5 von den 6 andern gemeinsamen Tangenten der beiden Kurven dritter Klasse bestimmt wird, auch die sechste von jenen gemeinsamen Tangenten:

Man hat also den Satz:

Satz 814: Berühren 6 von den 9 gemeinsamen Tangenten zweier Kurven dritter Klasse eine Kurve zweiter Klasse, so gehen die

3 andern gemeinsamen Tangenten durch einen und denselben Punkt hindurch, und umgekehrt.

Aus diesem Satze folgt insbesondere, da zwei Strahlbüschel zusammen eine Kurve zweiter Klasse bilden, der Satz:

Satz 815: Schneiden sich von den 9 gemeinsamen Tangenten zweier Kurven dritter Klasse zweimal 3 Tangenten in je einem Punkte, so schneiden sich auch die letzten 3 Tangenten in einem Punkte.

Und aus ihm ergibt sich wiederum der Satz (Fig. 133):

Satz 816: Sind A, A', A'' drei durch einen Punkt gehende Tan-

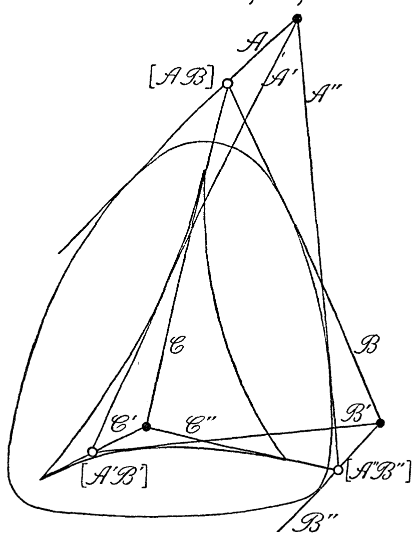


Fig. 133.

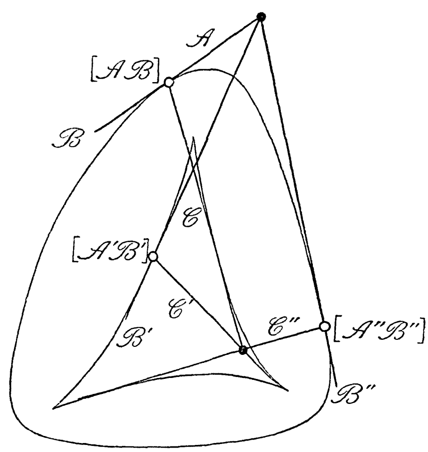


Fig. 134.

genten einer Kurve dritter Klasse, B, B', B'' drei weitere solche Tangenten, und legt man von den Punkten $[AB]$, $[A'B']$, $[A''B'']$ an die Kurve dritter Klasse die dritten Tangenten C, C', C'', so schneiden sich auch diese drei Tangenten in *einem* Punkte.

Beweis: Man fasse die drei Scheitel der drei Strahltripel ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ zusammen als eine zweite Kurve dritter Klasse auf. Dann gehen von den 9 gemeinsamen Hüllinien $A, B, \ldots, C''$ der gegebenen Kurve dritter Klasse mit jener zweiten Kurve dritter Klasse zweimal drei Hülllinien, nämlich die Geraden A, A', A'' und die Geraden B, B', B'' durch je einen Punkt. Folglich gilt nach dem Satze 815 dasselbe auch von den Geraden C, C', C''.

Aus diesem Satze 816 kann man noch einen Sondersatz dadurch ableiten, daß man die beiden Punkte $AA'A''$ und $BB'B''$ in *einen* Punkt zusammenrücken läßt und zugleich die Geraden A und B, A' und B', A'' und B'' zu je einer Geraden vereinigt (Fig. 134). Dann werden die Punkte $[AB]$,

$[A'B']$, $[A''B'']$ die Berührungspunkte dreier Tangenten A, A', A'' der Kurve dritter Klasse, die durch einen Punkt gehen, und die Linien C, C', C' gehen über in die drei Tangenten der Kurve dritter Klasse, die man von den Berührungspunkten der drei Tangenten A, A', A'' außer diesen Tangenten selbst an die Kurve ziehen kann. Wir nennen sie die Tangentialgeraden jener Tangenten A, A', A''. Man hat also den Satz:

Satz 817: Schneiden sich 3 Tangenten A, A', A'' einer Kurve dritter Klasse in einem Punkte, so schneiden sich auch ihre Tangentialgeraden C, C', C'' in einem Punkte.

Von diesem Satze kann man eine wichtige Anwendung auf die Rückkehrtangenten einer Kurve dritter Klasse machen. Eine Rückkehrtangente einer Kurve dritter Klasse kann nämlich charakterisiert werden als eine Tangente der Kurve dritter Klasse, die mit ihrer Tangentialgeraden zusammenfällt. Sind daher R_1 und R_2 zwei Rückkehrtangenten einer Kurve dritter Klasse, und legt man von ihrem Schnittpunkte die dritte Tangente R_3 an die Kurve (Fig. 135), so kann man zeigen, daß auch die Tangente R_3 eine Rückkehrtangente der Kurve dritter Klasse sein muß. In der Tat fallen die Tangentialgeraden der Rückkehrtangenten R_1 und R_2 nach dem soeben gesagten mit den Geraden R_1 und R_2 zusammen. Nach dem Satze 817 muß somit auch die Tangentialgerade der Tangente R_3 mit der Geraden R_3 vereint liegen, d. h.: Auch die Gerade R_3 ist eine Rückkehrtangente der Kurve dritter Klasse. Man hat daher den Satz:

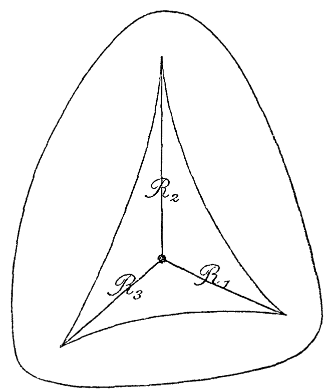


Fig. 135.

Satz 818: Durch den Schnittpunkt zweier Rückkehrtangenten einer Kurve dritter Klasse geht noch eine dritte Rückkehrtangente hindurch.

Die Gleichung einer Kurve dritter Klasse ausgedrückt durch die Rückkehrpunkte dreier in einem Punkte sich schneidender Rückkehrtangenten und durch diesen Schnittpunkt. Erster Perspektivitätssatz für Kurven dritter Klasse. Aus dem Satze 818 entspringt eine wichtige Gleichungsform einer Kurve dritter Klasse. Sind nämlich a, b, c, d 4 Punkte, von denen keine 3 in einer Geraden liegen, und ist $\mathfrak{k}$ eine reelle Zahlgröße, so stellt die Gleichung:

$$(8) \qquad [a\,U][b\,U][c\,U] - \mathfrak{k}[d\,U]^3 = 0$$

eine Schar von Kurven dritter Klasse dar, deren *Grundkurven* durch das Punkttripel a, b, c und durch den dreifach zählenden Punkt d gebildet werden. Die 9 *Grundgeraden* dieser Schar sind die 3 dreifach zählenden Verbindungslinien $[ad]$, $[bd]$, $[cd]$ der 3 ersten Punkte a, b, c mit dem vierten

Punkte d. Diese dreifach zählenden, sich im Punkte d schneidenden Geraden bilden also für jede von den Kurven dritter Klasse (8) 3 Rückkehrtangenten, und die Punkte a, b, c sind die zugehörigen Rückkehrpunkte (Fig. 136). Man hat somit den Satz:

Satz 819: Die Gleichung:

$$[a\,U][b\,U][c\,U] - \mathfrak{k}[d\,U]^3 = 0, \tag{8}$$

in der a, b, c, d 4 Punkte sind, von denen keine 3 in einer Geraden liegen, und in der $\mathfrak{k}$ eine Zahlgröße bedeutet, stellt eine Schar

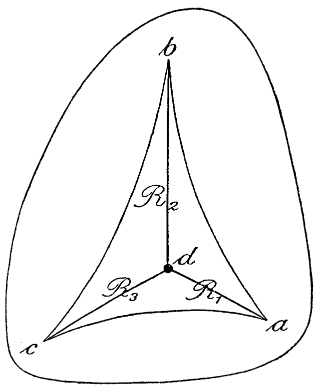


Fig. 136.

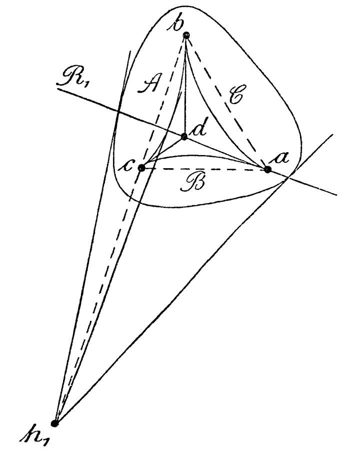


Fig. 137.

von Kurven dritter Klasse dar, welche die 3 durch den Punkt d gehenden Geraden:

$$R_1 = [ad], \quad R_2 = [bd], \quad R_3 = [cd] \tag{9}$$

zu Rückkehrtangenten, den Punkt d also zum Rückkehrtangententreffpunkt haben, und von denen die Punkte a, b, c beziehlich die Rückkehrpunkte dieser Rückkehrtangenten sind.

Die Gleichung (8) möge die Rückkehrpunktsgleichung der Kurve dritter Klasse genannt werden.

Bezeichnet man noch die den Ecken a, b, c des Rückkehrpunktsdreiecks gegenüberliegenden Seiten mit A, B, C, setzt also etwa:

$$A = [bc], \quad B = [ca], \quad C = [ab] \tag{10}$$

(Fig. 137), so läßt sich genau so wie beim Dualistischen zeigen, daß der harmonische Pol einer jeden von den 3 Rückkehrtangenten R_1, R_2, R_3, genommen hinsichtlich irgendeiner Kurve der Schar (8), auf derjenigen Seite des Rückkehrpunktsdreiecks abc gelegen ist, die dem Rückkehrpunkte der betreffenden Rückkehrtangente gegenüberliegt. Man hat also den Satz:

Satz 820: Erster Perspektivitätssatz für Kurven dritter Klasse: Die Verbindungslinie der Rückkehrpunkte zweier Rückkehrtangenten einer Kurve dritter Klasse geht durch den harmonischen Pol derjenigen dritten Rückkehrtangente dieser Kurve, die sich mit den beiden ersten Rückkehrtangenten in einem Punkte schneidet.

Abschnitt 55.

Das System der neun Rückkehrtangenten und die kanonische Form der Gleichung einer Kurve dritter Klasse.

Die 12 Treffpunkte der Rückkehrtangenten einer Kurve dritter Klasse. Ihre Gruppierung zu 4 Dreiecken, den Treffpunktsdreiecken der Rückkehrtangenten der Kurve. Nach dem Satze 807 besitzt eine Kurve dritter Klasse ohne Doppeltangente 9 Rückkehrtangenten. Man beweist dann wieder wie beim Dualistischen den Satz:

Satz 821: Die 9 Rückkehrtangenten einer Kurve dritter Klasse ohne Doppeltangente gehen zu je dreien durch einen Punkt, den Treffpunkt dieser 3 Rückkehrtangenten. Und zwar gibt es 12 solche Rückkehrtangententreffpunkte, und von ihnen gehören einer jeden Rückkehrtangente immer 4 derartige Treffpunkte an.

Wählt man von diesen 12 Treffpunkten der Rückkehrtangenten diejenigen Punkte aus, welche in 3 durch einen solchen Treffpunkt gehenden Rückkehrtangenten R_1, R_2, R_3 enthalten sind, so liegen außer dem Treffpunkte $R_1 R_2 R_3$ selbst auf jeder von den 3 Rückkehrtangenten R_1, R_2, R_3 noch 3 weitere Treffpunkte von Rückkehrtangenten. Man erhält so im ganzen als Treffpunkte, die auf den 3 Rückkehrtangenten R_1, R_2, R_3 liegen, 10 Treffpunkte, und es bleiben also noch 2 Treffpunkte übrig, die keiner von den 3 Rückkehrtangenten R_1, R_2, R_3 angehören. Einer von ihnen ist daher der Treffpunkt dreier von den 6 übrigen Rückkehrtangenten. Da aber nach den Sätzen 806 und 807 die 9 Rückkehrtangenten einer Kurve dritter Klasse ohne Doppeltangente die gemeinsamen Tangenten der Kurve dritter Klasse und ihrer Hesseschen Kurve sind, so läßt sich auf die 9 Rückkehrtangenten der Satz 816 anwenden. Dieser besagt: Wenn von den 9 gemeinsamen Tangenten zweier Kurven dritter Klasse zweimal 3 Tangenten sich in *einem* Punkte schneiden, so treffen sich auch die letzten 3 von den 9 gemeinsamen Tangenten in *einem* Punkte.

Wenn man somit von einem derjenigen Treffpunkte der Rückkehrtangenten ausgeht, welche einer bestimmten Rückkehrtangente, etwa der Rückkehrtangente R_1, zugehören, es sei der Treffpunkt $R_1 R_2 R_3$, so bekommt man auf die beschriebene Art 3 Treffpunkte von Rückkehrtangenten, durch die zusammen alle 9 Rückkehrtangenten hindurchgehen. Und wendet man dies Verfahren auf alle 4 Treffpunkte von Rückkehrtangenten an, die in der Geraden R_1 enthalten sind, so gelangt man zu 4 Gruppen von je 3 Treffpunkten von Rückkehrtangenten, von denen jede Gruppe die Eigenschaft hat, daß mit den 3 Tripeln von Rückkehrtangenten, die in ihnen zusammenlaufen, alle 9 Rückkehrtangenten erschöpft sind.

Die von den 4 Gruppen von je 3 Treffpunkten der Rückkehrtangenten gebildeten 4 Dreiecke mögen die 4 **Treffpunktsdreiecke der Rückkehrtangenten der Kurve dritter Klasse** genannt werden. Man hat somit den Satz:

Satz 822: **Die 12 Treffpunkte der 9 Rückkehrtangenten einer Kurve dritter Klasse lassen sich in 4 Gruppen von je 3 Treffpunkten einteilen, in der Weise, daß eine jede von diesen 4 Gruppen von Treffpunkten 3 Punkte enthält, welche die Scheitel von 3 Strahltripeln bilden, deren Strahlen zusammen alle 9 Rückkehrtangenten der Kurve darstellen.**

Wie viele Rückkehrtangenten einer reellen Kurve dritter Klasse sind reell? Man gelangt zur rechnerischen Bestimmung der 9 Rückkehrtangenten, der 9 Rückkehrpunkte und der 12 Treffpunkte der Rückkehrtangenten einer Kurve dritter Klasse $\mathfrak{a}_3$, wenn man die Gleichung der Kurve dritter Klasse auf ihre „**kanonische Form**“ bringt, nämlich auf die Form:

(1) $$[e_1 U]^3 + [e_2 U]^3 + [e_3 U]^3 - 3\mathfrak{K}[e_1 U][e_2 U][e_3 U] = 0,$$

in der e_1, e_2, e_3 die Ecken eines neuen Fundamentaldreiecks sind, also der Gleichung:

(2) $$[e_1 e_2 e_3] = 1$$

unterliegen, und in der $\mathfrak{K}$ eine reelle Zahlgröße ist. Die Möglichkeit einer solchen Darstellung der Kurve zeigt man genau so wie beim Dualistischen. Die Gleichung (1) läßt sich auch in den folgenden drei Formen schreiben:

(3) $$[\mathfrak{K}e_1 \quad U]^3 + [e_2 U]^3 + [e_3 U]^3 - 3[\mathfrak{K}e_1 \quad U][e_2 U][e_3 U] = (\mathfrak{K}^3 - 1)[e_1 U]^3,$$

(4) $$[e_1 U]^3 + [\mathfrak{K}e_2 \quad U]^3 + [e_3 U]^3 - 3[e_1 U][\mathfrak{K}e_2 \quad U][e_3 U] = (\mathfrak{K}^3 - 1)[e_2 U]^3,$$

(5) $$[e_1 U]^3 + [e_2 U]^3 + [\mathfrak{K}e_3 \quad U]^3 - 3[e_1 U][e_2 U][\mathfrak{K}e_3 \quad U] = (\mathfrak{K}^3 - 1)[e_3 U]^3.$$

Aus ihnen folgen, wenn man auf die linken Seiten die Formel (4) des 51. Abschnitts anwendet und aus jedem der dadurch linker Hand entstehenden 9 Zahlfaktoren den Faktor U herauszieht, die drei neuen Gleichungen:

(6) $$[(\mathfrak{K}e_1 + e_2 + e_3)U][(\mathfrak{K}e_1 + \varepsilon e_2 + \varepsilon^2 e_3)U][(\mathfrak{K}e_1 + \varepsilon^2 e_2 + \varepsilon e_3)U] = (\mathfrak{K}^3 - 1)[e_1 U]^3,$$

$$(7)\qquad [(e_1 + \mathfrak{K}e_2 + e_3)U][(\varepsilon^2 e_1 + \mathfrak{K}e_2 + \varepsilon e_3)U][(\varepsilon e_1 + \mathfrak{K}e_2 + \varepsilon^2 e_3)U] = (\mathfrak{K}^3 - 1)[e_2 U]^3,$$

$$(8)\qquad [(e_1 + e_2 + \mathfrak{K}e_3)U][(\varepsilon e_1 + \varepsilon^2 e_2 + \mathfrak{K}e_3)U][\varepsilon^2 e_1 + \varepsilon e_2 + \mathfrak{K}e_3)U] = (\mathfrak{K}^3 - 1)[e_3 U]^3.$$

Die drei Gleichungen (6), (7), (8) haben die Form der Gleichung (8) des vorigen Abschnitts und stellen überdies, da sie durch bloße Umformung der Gleichung (1) entstanden sind, alle 3 eine und dieselbe Kurve dritter Klasse dar. Nach dem Satze 819 sind dann von dieser Kurve die Punkte e_1, e_2, e_3 drei *Treffpunkte von Rückkehrtangenten*, d. h. drei Punkte, in deren jedem 3 Rückkehrtangenten der Kurve zusammenlaufen. Ferner sind nach demselben Satze die 9 Faktoren in den runden Klammern der linken Seiten jener drei Gleichungen, d. h. die 9 Größen:

$$(9)\qquad \mathfrak{K}e_1 + e_2 + e_3, \quad \mathfrak{K}e_1 + \varepsilon e_2 + \varepsilon^2 e_3, \quad \mathfrak{K}e_1 + \varepsilon^2 e_2 + \varepsilon e_3,$$

$$(10)\qquad e_1 + \mathfrak{K}e_2 + e_3, \quad \varepsilon^2 e_1 + \mathfrak{K}e_2 + \varepsilon e_3, \quad \varepsilon e_1 + \mathfrak{K}e_2 + \varepsilon^2 e_3,$$

$$(11)\qquad e_1 + e_2 + \mathfrak{K}e_3, \quad \varepsilon e_1 + \varepsilon^2 e_2 + \mathfrak{K}e_3, \quad \varepsilon^2 e_1 + \varepsilon e_2 + \mathfrak{K}e_3,$$

die *Rückkehrpunkte der Kurve*, und zwar gehören wieder nach dem Satze 819 die Rückkehrpunkte (9) den Rückkehrtangenten mit dem Treffpunkte e_1 zu, die Rückkehrpunkte (10) den Rückkehrtangenten mit dem Treffpunkte e_2 und die Rückkehrpunkte (11) den Rückkehrtangenten mit dem Treffpunkte e_3.

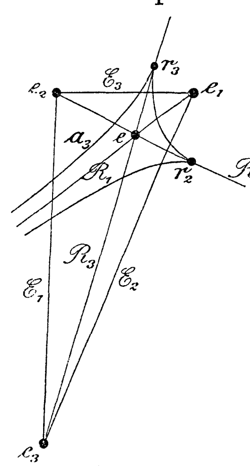


Fig. 138.

Man sieht dann noch, daß, unter der Voraussetzung reeller Treffpunkte e_1, e_2, e_3, von den 9 Rückkehrpunkten (9), (10), (11) nur die 3 Rückkehrpunkte der ersten Spalte, d. h. die 3 Rückkehrpunkte:

$$(12)\qquad r_1 = \mathfrak{K}e_1 + e_2 + e_3, \quad r_2 = e_1 + \mathfrak{K}e_2 + e_3, \quad r_3 = e_1 + e_2 + \mathfrak{K}e_3,$$

reell sind (Fig. 138).

Schließlich erhält man noch eine Darstellung der *9 Rückkehrtangenten selbst*, indem man die Ausdrücke (9), (10), (11) für die 9 Rückkehrpunkte mit den zugehörigen Treffpunkten e_1, e_2, e_3 der entsprechenden Rückkehrtangenten äußerlich multipliziert, wobei man nach Belieben einen von Null verschiedenen Zahlfaktor hinzufügen oder weglassen kann. Man bekommt so für die 9 Rückkehrtangenten die Produktdarstellungen:

$$(13)\qquad \begin{cases} R_1 = [(e_2 + e_3)e_1], & R_4 = [(\varepsilon^2 e_2 + e_3)e_1], & R_7 = [(\varepsilon e_2 + e_3)e_1], \\ R_2 = [(e_3 + e_1)e_2], & R_5 = [(\varepsilon^2 e_3 + e_1)e_2], & R_8 = [(\varepsilon e_3 + e_1)e_2], \\ R_3 = [(e_1 + e_2)e_3], & R_6 = [(\varepsilon^2 e_1 + e_2)e_3], & R_9 = [(\varepsilon e_1 + e_2)e_3]. \end{cases}$$

Und wenn man berücksichtigt, daß die Produkte aus je zweien von den Ecken e_1, e_2, e_3 des Fundamentaldreiecks dessen Grundstäbe E_1, E_2, E_3 ergeben, daß nämlich:

$$(14) \qquad [e_2 e_3] = E_1, \quad [e_3 e_1] = E_2, \quad [e_1 e_2] = E_3$$

ist, so findet man für die 9 Rückkehrtangenten die Ausdrücke:

$$(15) \qquad \begin{cases} R_1 = E_2 - E_3, & R_4 = E_2 - \varepsilon^2 E_3, & R_7 = E_2 - \varepsilon E_3, \\ R_2 = E_3 - E_1, & R_5 = E_3 - \varepsilon^2 E_1, & R_8 = E_3 - \varepsilon E_1, \\ R_3 = E_1 - E_2, & R_6 = E_1 - \varepsilon^2 E_2, & R_9 = E_1 - \varepsilon E_2. \end{cases}$$

Aus diesen 9 Gleichungen entnimmt man zunächst, daß nur die 3 Rückkehrtangenten R_1, R_2, R_3 *reell* sind, was das obige Ergebnis über die Reellität der Rückkehrpunkte bestätigt. Ferner zeigen sie, daß die Rückkehrtangenten R_4 und R_7 und ebenso die Rückkehrtangenten R_5 und R_8 und endlich auch die Rückkehrtangenten R_6 und R_9 *konjugiert komplex* sind.

Ganz besonders wichtig ist es aber, daß die Ausdrücke (15) von $\mathfrak{K}$ unabhängig sind. Die Gleichungen (15) zeigen daher, daß alle 9 Rückkehrtangenten der ganzen Schar von Kurven dritter Klasse gemeinsam sind, die durch die Gleichung (1) bei veränderlichem $\mathfrak{K}$ dargestellt wird, daß also die 9 Rückkehrtangenten (15) zugleich die Grundgeraden der Schar (1) sind. Wir nennen deshalb die Schar (1) eine *syzygetische Schar von Kurven dritter Klasse*, das soll heißen, eine Schar von Kurven dritter Klasse mit lauter gemeinsamen Rückkehrtangenten. In der zu einer Kurve dritter Klasse gehörenden syzygetischen Schar ist insbesondere die Hessesche Kurve jener Kurve dritter Klasse enthalten, da sie ja nach dem Satze 806 ihre Rückkehrtangenten mit der Kurve (1) gemein hat.

Durch Addition der Gleichungen aus der ersten Spalte von (15) folgt ferner noch die Gleichung:

$$(16) \qquad R_1 + R_2 + R_3 \equiv 0,$$

durch welche bestätigt wird, daß sich die 3 reellen Rückkehrtangenten der Kurve dritter Klasse (1) in einem Punkte schneiden. Zugleich ergeben sich aus den Gleichungen der ersten Spalte von (13), falls man in ihnen den ersten Faktor der rechten Seiten beziehlich um e_1, e_2, e_3 vermehrt und

$$(17) \qquad e_1 + e_2 + e_3 = e$$

setzt, die Gleichungen:

$$(18) \qquad R_1 = [e e_1], \quad R_2 = [e e_2], \quad R_3 = [e e_3],$$

welche zeigen, daß der Einheitspunkt e des Fundamentaldreiecks der zu den 3 reellen Rückkehrtangenten R_1, R_2, R_3 gehörende Treffpunkt ist (vgl. wieder die obige Fig. 138). Zugleich bestätigen sie das frühere Ergebnis, daß diese Rückkehrtangenten R_1, R_2, R_3 beziehlich durch die Ecken e_1, e_2, e_3 des Fundamentaldreiecks hindurchgehen. In der Tat folgte dies ja schon aus der Entwicklung auf S. 305 ff. (vgl. auch die erste Spalte der Gleichungen (13) und (15)).

Man zeigt dann wieder wie beim Dualistischen, daß *außer dem ganz reellen Treffpunktsdreieck* der Rückkehrtangenten, das mit dem Fundamentaldreieck $e_1 e_2 e_3$ zusammenfällt, *nur noch ein teilweise reelles Treffpunktsdreieck* vorhanden ist, von dem nur eine Ecke reell ist, die durch den Einheitspunkt e des Fundamentaldreiecks gebildet wird, während außerdem die beiden andern Ecken konjugiert komplex sind, und nur ihr Träger, das heißt die Gegenseite der reellen Ecke e, reell ist und durch die Harmonikale E des Punktes e in bezug auf das Fundamentaldreieck dargestellt wird.

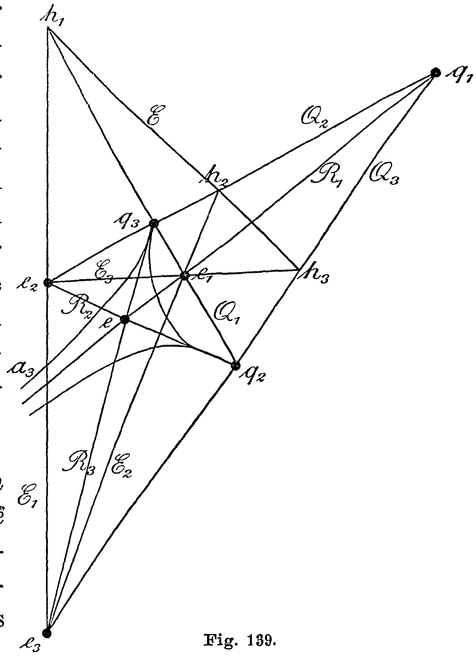


Fig. 139.

Perspektive Beziehungen im System der 9 Rückkehrtangenten einer Kurve dritter Klasse. Bringt man die Seiten E_1, E_2, E_3 des Fundamentaldreiecks, das heißt die Seiten des ganz reellen Treffpunktsdreiecks, zum Schnitt mit der Geraden des Einheitsstabes E, die zugleich die reelle Seite des teilweise reellen Treffpunktsdreiecks bildet, und führt für die Verbindungslinien dieser Schnittpunkte h_1, h_2, h_3 beziehlich mit den Gegenecken e_1, e_2, e_3 des Fundamentaldreiecks die Bezeichnungen Q_1, Q_2, Q_3 ein, setzt also etwa:

$$(19) \qquad \begin{cases} [e_1 \cdot EE_1] = Q_1, \\ [e_2 \cdot EE_2] = Q_2, \\ [e_3 \cdot EE_3] = Q_3, \end{cases}$$

so werden die 3 Geraden Q_1, Q_2, Q_3 die 3 Zurückleitungen des Einheitsstabes E auf die 3 Ecken des Fundamentaldreiecks unter Ausschluß der Gegenseiten (Fig. 139).

Man kann dies auch durch Ausrechnung der linken Seiten der Gleichungen (19) bestätigen. Denn es wird:

$$[EE_1] = [(E_1 + E_2 + E_3)E_1] = e_2 - e_3,$$

also: $$Q_1 = [e_1 \cdot EE_1] = [e_1(e_2 - e_3)] = E_2 + E_3.$$

Bezeichnet man daher noch die 3 Produkte:

$$[Q_2 Q_3], \quad [Q_3 Q_1], \quad [Q_1 Q_2]$$

beziehlich mit:

$$q_1, \qquad q_2, \qquad q_3,$$

so wird:

$$(21) \qquad \begin{cases} q_1 = [Q_2 Q_3] = -e_1 + e_2 + e_3, \\ q_2 = [Q_3 Q_1] = e_1 - e_2 + e_3, \\ q_3 = [Q_1 Q_2] = e_1 + e_2 - e_3. \end{cases}$$

Endlich findet man für die Verbindungslinien der Punkte q_1, q_2, q_3 mit den entsprechenden Ecken e_1, e_2, e_3 des Fundamentaldreiecks und mit Rücksicht auf die Gleichungen (15) die Werte:

$$(22) \qquad \begin{cases} [q_1 e_1] = E_2 - E_3 = R_1, \\ [q_2 e_2] = E_3 - E_1 = R_2, \\ [q_3 e_3] = E_1 - E_2 = R_3. \end{cases}$$

Es bestehen somit die 3 Gleichungen:

$$(20) \qquad \begin{cases} Q_1 = E_2 + E_3, \\ Q_2 = E_3 + E_1, \\ Q_3 = E_1 + E_2, \end{cases}$$

durch die in der Tat die Stäbe Q_1, Q_2, Q_3 ebenfalls als die oben genannten Zurückleitungen charakterisiert werden (vgl. S. 43f. des ersten Bandes).

Jetzt bringe man weiter je zwei von den 3 Geraden Q_1, Q_2, Q_3 miteinander zum Schnitt und bilde, um die Schnittpunkte als Vielfachensummen der Ecken e_1, e_2, e_3 des Fundamentaldreiecks darzustellen, zunächst etwa das Produkt $[Q_2 Q_3]$. Man erhält:

$$\begin{aligned}[Q_2 Q_3] = [(E_3 + E_1)(E_1 + E_2)] &= [E_3 E_1] + [E_3 E_2] + [E_1 E_2] \\ &= -e_1 + e_2 + e_3.\end{aligned}$$

Man hat also den Satz:

Satz 823: Zweiter Perspektivitätssatz für Kurven dritter Klasse: Bildet man die Zurückleitungen Q_1, Q_2, Q_3 der reellen Seite E des teilweise reellen Treffpunktsdreiecks der Rückkehrtangenten einer Kurve dritter Klasse α_3 auf die Ecken e_1, e_2, e_3 des ganz reellen Treffpunktsdreiecks unter Ausschluß der Gegenseiten E_1, E_2, E_3 dieses Dreiecks, so gehören die Schnittpunkte q_1, q_2, q_3 der Zurückleitungen auf irgend zwei Ecken des reellen Treffpunktsdreiecks derjenigen Rückkehrtangente an, welche durch die dritte Ecke dieses Dreiecks hindurchgeht (vgl. die obige Fig. 139).

Eine andere Perspektivitätsbeziehung für das System der 9 Rückkehrtangenten einer Kurve dritter Klasse ist in dem folgenden Satze enthalten, der ebenso wie beim Dualistischen bewiesen werden kann:

Satz 824: Dritter Perspektivitätssatz für Kurven dritter Klasse: Die harmonischen Pole h_1, h_2, h_3 der 3 reellen Rückkehrtangenten R_1, R_2, R_3 einer Kurve dritter Klasse $\mathfrak{a}_3$ liegen auf denjenigen Seiten des reellen Treffpunktsdreiecks $e_1\,e_2\,e_3$ der Rückkehrtangenten, welche der die betreffende Rückkehrtangente enthaltenden Ecke des Dreiecks gegenüberliegen, und gehören überdies der Harmonikale E des Treffpunkts e der 3 reellen Rückkehrtangenten hinsichtlich des reellen Treffpunktsdreiecks an.

Vierzehnter Hauptteil.

Das Kegelschnittnetz, das Kegelschnittgewebe und die zugehörigen Kurven dritter Ordnung und dritter Klasse.

Abschnitt 56.

Das Kegelschnittnetz und seine Hessesche Kurve.

Begriff eines Kegelschnittnetzes. Im siebenten Hauptteil behandelten wir die linearen Systeme *„zweiter Stufe“* von Kurven zweiter Ordnung oder zweiter Klasse, das heißt diejenigen Systeme von Kurven zweiter Ordnung oder zweiter Klasse, deren Polarsysteme sich beziehlich als Vielfachensummen *zweier* linear unabhängigen Polarsysteme zweiter Ordnung oder zweiter Klasse darstellen lassen, und gelangten so zu zwei wesentlich voneinander verschiedenen Kegelschnittsystemen *zweiter Stufe*, nämlich dem Kegelschnittbüschel oder der Kegelschnittschar, je nachdem wir von zwei Polarsystemen zweiter Ordnung oder von zwei Polarsystemen zweiter Klasse ausgingen.

Im folgenden sollen die linearen Systeme *„dritter Stufe“* von Kurven zweiter Ordnung oder zweiter Klasse untersucht werden, das heißt die Systeme von Kurven zweiter Ordnung oder zweiter Klasse, deren Polarsysteme beziehlich die Vielfachensummen *dreier* linear unabhängigen Polarsysteme zweiter Ordnung oder zweiter Klasse sind. Wir werden dabei geradeso wie bei den Kegelschnittsystemen zweiter Stufe, den Kegelschnittbüscheln und Kegelschnittscharen, zu zwei wesentlich verschiedenen Kegelschnittsystemen dritter Stufe gelangen, je nachdem wir die Vielfachensummen von Polarsystemen zweiter Ordnung oder von Polarsystemen zweiter Klasse bilden. Wir bezeichnen diese beiden Arten von Kegelschnittsystemen dritter Stufe beziehlich als „Kegelschnittnetz“ und „Kegelschnittgewebe“.[1])

Es seien also p, q, r die extensiven Brüche für drei Polarsysteme *zweiter Ordnung*, die linear unabhängig voneinander sind[2]) oder, was dasselbe ist, die nicht einem und demselben Büschel von Polarsystemen angehören, und es sei:

$$(1)\quad p = \frac{A_1, A_2, A_3}{e_1, e_2, e_3}, \qquad (2)\quad q = \frac{B_1, B_2, B_3}{e_1, e_2, e_3}, \qquad (3)\quad r = \frac{C_1, C_2, C_3}{e_1, e_2, e_3}.$$

---

1) Vgl. zum Folgenden: S. Gundelfinger, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, herausgegeben von F. Dingeldey, Leipzig 1895, S. 218ff.

2) Über den Begriff der linearen Unabhängigkeit projektiver Abbildungen vergleiche S. 256 des ersten Bandes und S. 293 des ersten Teiles des vorliegenden Bandes.

Es soll die Gesamtheit der Polarsysteme zweiter Ordnung untersucht werden, die sich unter der Form:

$$\mathfrak{g}p + \mathfrak{h}q + \mathfrak{k}r$$

darstellen lassen, vorausgesetzt, daß $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ drei reelle Zahlgrößen sind. Wir nennen die Gesamtheit dieser Polarsysteme zweiter Ordnung „ein Netz von Polarsystemen", so wie wir bereits oben die Gesamtheit der Polkurven dieser Polarsysteme als „ein Kegelschnittnetz" bezeichnet haben.

Man kann dann ein Kegelschnittnetz auch als die Gesamtheit der Kurven zweiter Ordnung charakterisieren, die sich durch eine Gleichung von der Form:

$$\mathfrak{g}[x \cdot xp] + \mathfrak{h}[x \cdot xq] + \mathfrak{k}[x \cdot xr] = 0$$

ausdrücken lassen, unter $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ 3 reelle Zahlgrößen, unter p, q, r 3 linear unabhängige Polarsysteme zweiter Ordnung verstanden.

Die Hessesche Kurve eines Kegelschnittnetzes. Um einen Überblick über die Kurven eines Kegelschnittnetzes zu gewinnen, bemerke man, daß einem beliebigen Punkte z in der Ebene im allgemeinen durch die drei „Grundkurven" p, q, r des Netzes drei gerade Linien zp, zq, zr als Polaren zugewiesen werden, die ein eigentliches Dreiseit bilden.

Von besonderem Interesse für den Aufbau des Netzes sind indes solche Punkte x der Ebene, deren Polaren xp, xq, xr hinsichtlich der drei Grundkurven p, q, r *durch einen und denselben Punkt gehen*, die also der Gleichung genügen:

$$[xp \cdot xq \cdot xr] = 0. \tag{4}$$

Diese Zahlgleichung dritten Grades in bezug auf den Punkt x stellt, da sie wegen der linearen Unabhängigkeit der drei Polarsysteme p, q, r nicht durch jeden Punkt x der Ebene befriedigt werden kann, genau so wie die Zahlgleichung dritten Grades:

$$A_3 x^3 = 0$$

(vgl. Satz 728), eine Kurve dritter Ordnung H_3 dar und zeigt somit, daß die Punkte x der Ebene, deren Polaren hinsichtlich der drei Polarsysteme p, q, r durch einen und denselben Punkt gehen, auf einer Kurve dritter Ordnung liegen.

Diese Kurve dritter Ordnung heißt die „Hessesche Kurve des Kegelschnittnetzes" oder auch wohl die „Hessiane des Netzes".[1])

Bezeichnet man noch den Punkt, in dem die drei Polaren xp, xq, xr

1) O. Hesse veröffentlichte seine Untersuchungen über die nach ihm benannte Kurve in der zweiten auf S. 233 zitierten Arbeit, S. 104 ff. (Gesammelte Werke, S. 132 ff.)

eines Punktes x der Hesseschen Kurve $\boldsymbol{H}_3$ hinsichtlich der drei Grundkurven $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ des Netzes sich schneiden, mit x', so wird:

$$(5) \qquad x' \equiv [x\boldsymbol{q} \cdot x\boldsymbol{r}] \equiv [x\boldsymbol{r} \cdot x\boldsymbol{p}] \equiv [x\boldsymbol{p} \cdot x\boldsymbol{q}].$$

Ferner genügt der Punkt x', da er einer jeden von den drei Polaren $x\boldsymbol{p}$, $x\boldsymbol{q}$, $x\boldsymbol{r}$ angehört, den drei Gleichungen:

$$(6) \qquad [x' \cdot x\boldsymbol{p}] = 0, \quad [x' \cdot x\boldsymbol{q}] = 0, \quad [x' \cdot x\boldsymbol{r}] = 0,$$

aus denen man zunächst durch lineare Verknüpfung folgern kann, daß auch die Gleichung besteht:

$$(7) \qquad [x' \cdot x(\mathfrak{g}\boldsymbol{p} + \mathfrak{h}\boldsymbol{q} + \mathfrak{k}\boldsymbol{r})] = 0,$$

daß also auch die Polare:

$$x(\mathfrak{g}\boldsymbol{p} + \mathfrak{h}\boldsymbol{q} + \mathfrak{k}\boldsymbol{r})$$

des Punktes x hinsichtlich eines beliebigen Polarsystems:

$$\mathfrak{g}\boldsymbol{p} + \mathfrak{h}\boldsymbol{q} + \mathfrak{k}\boldsymbol{r}$$

des Netzes durch den Punkt x' hindurchgeht. Daraus folgt, daß die drei Grundkurven $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ des Netzes in bezug auf die Hessesche Kurve des Netzes keine ausgezeichnete Stellung einnehmen.

Dies läßt sich noch in folgender Weise bestätigen: Man suche die Bedingung dafür auf, daß sich die Polaren eines Punktes x hinsichtlich irgend dreier linear unabhängigen Kurven des Netzes in *einem* Punkte schneiden. Es seien die Vielfachensummen:

$$(8) \qquad \begin{cases} \mathfrak{g}_1\boldsymbol{p} + \mathfrak{h}_1\boldsymbol{q} + \mathfrak{k}_1\boldsymbol{r}, \\ \mathfrak{g}_2\boldsymbol{p} + \mathfrak{h}_2\boldsymbol{q} + \mathfrak{k}_2\boldsymbol{r}, \\ \mathfrak{g}_3\boldsymbol{p} + \mathfrak{h}_3\boldsymbol{q} + \mathfrak{k}_3\boldsymbol{r} \end{cases}$$

die Ausdrücke für drei linear unabhängige Polarsysteme des Netzes:

$$\mathfrak{g}\boldsymbol{p} + \mathfrak{h}\boldsymbol{q} + \mathfrak{k}\boldsymbol{r},$$

so werden die Polaren eines Punktes x in bezug auf die drei Polarsysteme (8) durch einen und denselben Punkt hindurchgehen, wenn die Gleichung besteht:

$$[x(\mathfrak{g}_1\boldsymbol{p} + \mathfrak{h}_1\boldsymbol{q} + \mathfrak{k}_1\boldsymbol{r}) \cdot x(\mathfrak{g}_2\boldsymbol{p} + \mathfrak{h}_2\boldsymbol{q} + \mathfrak{k}_2\boldsymbol{r}) \cdot x(\mathfrak{g}_3\boldsymbol{p} + \mathfrak{h}_3\boldsymbol{q} + \mathfrak{k}_3\boldsymbol{r})] = 0$$

oder

$$[(\mathfrak{g}_1 x\boldsymbol{p} + \mathfrak{h}_1 x\boldsymbol{q} + \mathfrak{k}_1 x\boldsymbol{r})\,(\mathfrak{g}_2 x\boldsymbol{p} + \mathfrak{h}_2 x\boldsymbol{q} + \mathfrak{k}_2 x\boldsymbol{r})\,(\mathfrak{g}_3 x\boldsymbol{p} + \mathfrak{h}_3 x\boldsymbol{q} + \mathfrak{k}_3 x\boldsymbol{r})] = 0$$

oder

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{g}_1 & \mathfrak{h}_1 & \mathfrak{k}_1 \\ \mathfrak{g}_2 & \mathfrak{h}_2 & \mathfrak{k}_2 \\ \mathfrak{g}_3 & \mathfrak{h}_3 & \mathfrak{k}_3 \end{vmatrix} [x\boldsymbol{p} \cdot x\boldsymbol{q} \cdot x\boldsymbol{r}] = 0$$

Hier ist die Determinante:

(10) $$|\mathfrak{g}_1 \mathfrak{h}_2 \mathfrak{k}_3| \neq 0,$$

da nach unserer Voraussetzung die 3 Polarsysteme (8) linear unabhängig voneinander sind. Folglich verkürzt sich die Gleichung (9) zu:

(4) $$[x\boldsymbol{p} \cdot x\boldsymbol{q} \cdot x\boldsymbol{r}] = 0,$$

das heißt zu der obigen Gleichung der Hesseschen Kurve des Netzes. Damit ist aber in der Tat gezeigt, daß die Hessesche Kurve des Netzes zu allen Kurven des Netzes dieselbe Stellung einnimmt, wodurch dann zugleich der Ausdruck Hessesche Kurve *des Netzes* gerechtfertigt ist; denn die Kurve kann nach dem soeben bewiesenen auch als der geometrische Ort derjenigen Punkte aufgefaßt werden, deren Polaren hinsichtlich sämtlicher Kurven des Netzes durch einen Punkt gehen, oder auch als geometrischer Ort der Punkte, deren Polaren hinsichtlich irgend dreier linear unabhängigen Kurven des Netzes durch einen Punkt gehen.

Man kann aber aus den Gleichungen (6) noch eine andere Folgerung ableiten. Wendet man nämlich auf die linke Seite der Gleichungen (6) die erste Grundgleichung des Polarsystems an (vgl. Gleichung (61) des 31. Abschnitts), so sieht man, daß die drei Gleichungen (6) auch die drei Gleichungen nach sich ziehen:

(11) $$[x \cdot x'\boldsymbol{p}] = 0, \quad [x \cdot x'\boldsymbol{q}] = 0, \quad [x \cdot x'\boldsymbol{r}] = 0.$$

Darin aber liegt das Ergebnis: Wenn die Polaren eines Punktes x der Hesseschen Kurve $\boldsymbol{H}_3$ eines Kegelschnittnetzes, genommen hinsichtlich der Kurven des Netzes, sich in *einem* Punkte x' schneiden, so schneiden sich auch umgekehrt die Polaren des Punktes x' hinsichtlich dieser Kurven in *einem* Punkte, nämlich in jenem Punkte x. Hieraus folgt nach dem Begriffe der Hesseschen Kurve eines Netzes, daß ihr auch der Punkt x' angehört. Und in der Tat ergibt sich ja aus den drei Gleichungen (11) durch Elimination von x die Gleichung:

(12) $$[x'\boldsymbol{p} \cdot x'\boldsymbol{q} \cdot x'\boldsymbol{r}] = 0,$$

welche zeigt, daß auch der Punkt x' der Gleichung der Hesseschen Kurve des Netzes Genüge leistet.

Da die Punkte x und x' zufolge der Gleichung (7) hinsichtlich einer jeden Kurve des Netzes konjugiert sind, so bezeichnet man sie als konjugierte Punkte des Netzes oder auch als konjugierte Punkte der Hesseschen Kurve des Netzes. Auch sagt man, das Punktpaar x, x' sei hinsichtlich des Netzes oder hinsichtlich der Hesseschen Kurve des Netzes konjugiert.

Man kann die gewonnenen Ergebnisse in dem Satze zusammenfassen:

Satz 825: Erster Satz von Hesse: Der geometrische Ort aller Punkte x der Ebene, deren Polaren in bezug auf sämtliche Kurven eines Kegelschnittnetzes durch einen und denselben Punkt gehen, ist eine Kurve dritter Ordnung, welche nach ihrem Entdecker als die Hessesche Kurve des Netzes bezeichnet wird. Der Punkt x', durch den alle jene Polaren hindurchgehen, gehört selbst der

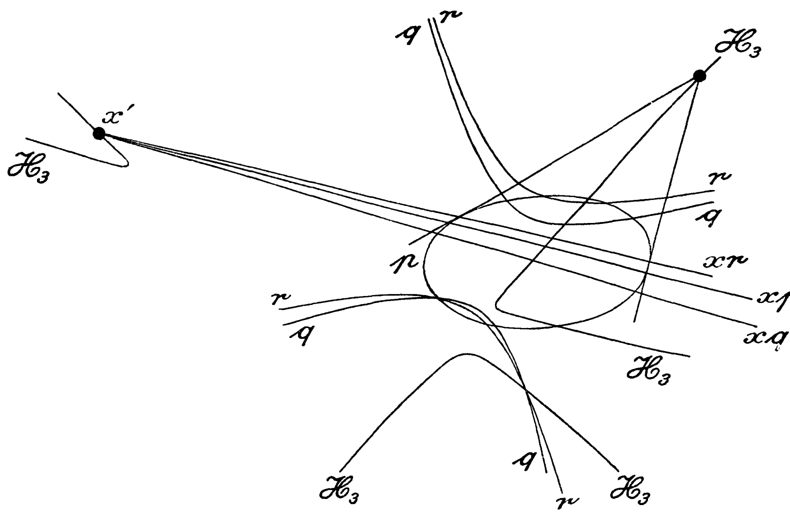


Fig. 140.

Hesseschen Kurve des Netzes an und heißt dem Punkte x hinsichtlich der Hesseschen Kurve (oder auch hinsichtlich des Netzes) konjugiert (Fig. 140).

Die in einem Kegelschnittnetz enthaltenen Kegelschnittbüschel. Einem Kegelschnittnetze:

$$(13) \qquad \mathfrak{g}p + \mathfrak{h}q + \mathfrak{k}r$$

gehören ∞^2 räumlich verschiedene Kurven zweiter Ordnung an; denn jedes von den beiden Verhältnissen $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{k}}$ und $\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{k}}$ kann alle ∞^1 Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen. Aber das Netz enthält auch ∞^2 verschiedene Kegelschnittbüschel. Wir schicken dem Beweise dieser Behauptung zwei weitere Eigenschaften des Netzes voraus.

Sind zunächst:

$$\mathfrak{g}_1 p + \mathfrak{h}_1 q + \mathfrak{k}_1 r \quad \text{und} \quad \mathfrak{g}_2 p + \mathfrak{h}_2 q + \mathfrak{k}_2 r$$

die Polarsysteme zweier voneinander verschiedenen Kurven zweiter Ordnung des Netzes (13), so stellt die Vielfachensumme:

$$(14) \qquad \begin{cases} \mathfrak{f}_1(\mathfrak{g}_1 p + \mathfrak{h}_1 q + \mathfrak{k}_1 r) + \mathfrak{f}_2(\mathfrak{g}_2 p + \mathfrak{h}_2 q + \mathfrak{k}_2 r) \\ = (\mathfrak{f}_1 \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{f}_2 \mathfrak{g}_2) p + (\mathfrak{f}_1 \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{f}_2 \mathfrak{h}_2) q + (\mathfrak{f}_1 \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{f}_2 \mathfrak{k}_2) r \end{cases}$$

bei veränderlichem $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ ein Kegelschnittbüschel dar, dessen Kurven mit Rücksicht auf die rechte Seite der Gleichung (14) dem Netze (13) angehören.

Sind ferner:

$$\mathfrak{g}_3 p + \mathfrak{h}_3 q + \mathfrak{k}_3 r \quad \text{und} \quad \mathfrak{g}_4 p + \mathfrak{h}_4 q + \mathfrak{k}_4 r$$

die Polarsysteme zweier weiteren Kurven des Netzes, so ist die Vielfachensumme:

$$(15) \quad \begin{cases} \mathfrak{f}_3(\mathfrak{g}_3 p + \mathfrak{h}_3 q + \mathfrak{k}_3 r) + \mathfrak{f}_4(\mathfrak{g}_4 p + \mathfrak{h}_4 q + \mathfrak{k}_4 r) \\ = (\mathfrak{f}_3 \mathfrak{g}_3 + \mathfrak{f}_4 \mathfrak{g}_4) p + (\mathfrak{f}_3 \mathfrak{h}_3 + \mathfrak{f}_4 \mathfrak{h}_4) q + (\mathfrak{f}_3 \mathfrak{k}_3 + \mathfrak{f}_4 \mathfrak{k}_4) r \end{cases}$$

bei veränderlichem $\mathfrak{f}_3$ und $\mathfrak{f}_4$ der Ausdruck eines zweiten in dem Netze (13) enthaltenen Kegelschnittbüschels.

Man überzeugt sich dann leicht, daß die beiden Kegelschnittbüschel (14) und (15) des Netzes (13), falls sie nicht miteinander identisch sind, *eine und nur eine Kurve zweiter Ordnung miteinander gemein haben.* Damit nämlich die für bestimmte Werte der Koeffizienten f_i durch die Ausdrücke (14) und (15) dargestellten Kurven zweiter Ordnung identisch seien, ist notwendig und hinreichend, daß die Koeffizienten der rechten Seiten jener beiden Gleichungen proportional sind, das heißt, daß drei Gleichungen von der Form bestehen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_1 \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{f}_2 \mathfrak{g}_2 &= u \mathfrak{f}_3 \mathfrak{g}_3 + u \mathfrak{f}_4 \mathfrak{g}_4, \\ \mathfrak{f}_1 \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{f}_2 \mathfrak{h}_2 &= u \mathfrak{f}_3 \mathfrak{h}_3 + u \mathfrak{f}_4 \mathfrak{h}_4, \\ \mathfrak{f}_1 \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{f}_2 \mathfrak{k}_2 &= u \mathfrak{f}_3 \mathfrak{k}_3 + u \mathfrak{f}_4 \mathfrak{k}_4, \end{aligned}$$

in denen u der Proportionalitätsfaktor ist. Diese drei in den vier Zahlgrößen $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$, $u\mathfrak{f}_3$, $u\mathfrak{f}_4$ linearen homogenen Gleichungen bestimmen die Verhältnisse dieser vier Größen eindeutig, so lange nicht sämtliche Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{g}_1 & \mathfrak{g}_2 & \mathfrak{g}_3 & \mathfrak{g}_4 \\ \mathfrak{h}_1 & \mathfrak{h}_2 & \mathfrak{h}_3 & \mathfrak{h}_4 \\ \mathfrak{k}_1 & \mathfrak{k}_2 & \mathfrak{k}_3 & \mathfrak{k}_4 \end{vmatrix}$$

verschwinden.[1]) Dies aber tritt gerade nur in dem oben ausgeschlossenen Ausnahmefall ein, wo die beiden Kegelschnittbüschel überhaupt identisch sind. Man hat also den Satz:

Satz 826: Zwei in einem Kegelschnittnetz enthaltene voneinander verschiedene Kegelschnittbüschel haben stets eine aber auch nur eine Kurve zweiter Ordnung miteinander gemein.

Aus diesem Satze läßt sich ein weiterer Satz folgern, wenn man bedenkt, daß die Kurve zweiter Ordnung, die zwei einem Kegelschnittnetz entnommenen Kegelschnittbüscheln gemeinsam ist, durch die vier Grundpunkte eines jeden der beiden Kegelschnittbüschel hindurchgehen muß. Man erhält so den Satz:

1) Vgl. zum Beispiel: P. Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie, herausgegeben von G. Kerschensteiner. Erster Band: Determinanten. Leipzig 1885, Nr. 103.

Satz 827: Die acht Grundpunkte zweier aus einem Kegelschnittnetz entnommenen Kegelschnittbüschel liegen auf einer Kurve zweiter Ordnung.[1])

Es bleibt noch die obige Behauptung zu beweisen, daß in einem Kegelschnittnetz ∞^2 Kegelschnittbüschel enthalten sind. Dazu denke man sich die ∞^2 Kurven des Netzes auf die ∞^2 Punkte einer Ebene abgebildet, indem man den Grundkurven $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ des Netzes die Grundpunkte eines Fundamentaldreiecks dieser Ebene entsprechen läßt, und einer jeden Kurve $\mathfrak{g}\boldsymbol{p} + \mathfrak{h}\boldsymbol{q} + \mathfrak{k}\boldsymbol{r}$ des Netzes denjenigen Punkt der Ebene zuordnet, der in bezug auf jenes Fundamentaldreieck die Dreieckskoordinaten $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ besitzt. Dann entsprechen den Kurven eines Kegelschnittbüschels die Punkte einer Geraden jener Ebene und umgekehrt, und es gibt in dem Netz ebensoviele Kegelschnittbüschel, wie Geraden in der Ebene enthalten sind. Das sind aber ∞^2 Geraden. Folglich enthält auch ein Kegelschnittnetz ∞^2 Kegelschnittbüschel.

Die Hessesche Kurve eines Kegelschnittnetzes als geometrischer Ort für die Doppelpunkte der in dem Netz enthaltenen Linienpaare. Das Polarsystem einer jeden Kurve zweiter Ordnung des Kegelschnittnetzes (13), insbesondere also auch das Polarsystem z einer in ein Linienpaar zerfallenden Kurve des Netzes, läßt sich als Vielfachensumme von $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$, das heißt in der Form darstellen:

(16) $$z = \mathfrak{p}\boldsymbol{p} + \mathfrak{q}\boldsymbol{q} + \mathfrak{r}\boldsymbol{r},$$

in der $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ drei Zahlgrößen sind.

Der Doppelpunkt (Träger) t einer in ein Linienpaar zerfallenden Kurve zweiter Ordnung ist nun aber nach dem Satze 420 zugleich der Nullpunkt des Polarsystems z dieses Linienpaars, das heißt, er genügt der Gleichung:

(17) $$tz = 0,$$

die man wegen (16) auch in der Form schreiben kann:

(18) $$\mathfrak{p}\, t\boldsymbol{p} + \mathfrak{q}\, t\boldsymbol{q} + \mathfrak{r}\, t\boldsymbol{r} = 0;$$

und diese Gleichung zieht die Gleichung nach sich:

(19) $$[t\boldsymbol{p} \cdot t\boldsymbol{q} \cdot t\boldsymbol{r}] = 0,$$

welche zeigt, daß der Doppelpunkt t eines jeden Linienpaars z des Kegelschnittnetzes (13) auf der Hesseschen Kurve $\boldsymbol{H}_3$ des Netzes liegt (Fig. 141; in ihr ist t' der zu t konjugierte Punkt der Hesseschen Kurve des Netzes). Umgekehrt folgt für jeden Punkt t, welcher der Gleichung (19) der Hesseschen Kurve des Netzes Genüge leistet, auf Grund dieser Gleichung

1) Vgl. H. Schröter, Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung, auf synthetisch-geometrischem Wege abgeleitet. Leipzig. 1888

zugleich das Bestehen einer Gleichung von der Form (18), also auch das Bestehen einer Gleichung von der Form (17), in der z die Bedeutung (16) hat. Die Gleichung (17) ist aber auch eine *hinreichende* Bedingung für das Zerfallen der Kurve zweiter Ordnung z. Es ist somit bewiesen, daß auch umgekehrt jeder Punkt t der Hesseschen Kurve des Netzes der Doppelpunkt eines in dem Netze enthaltenen Linienpaars ist, und man hat somit den Satz:

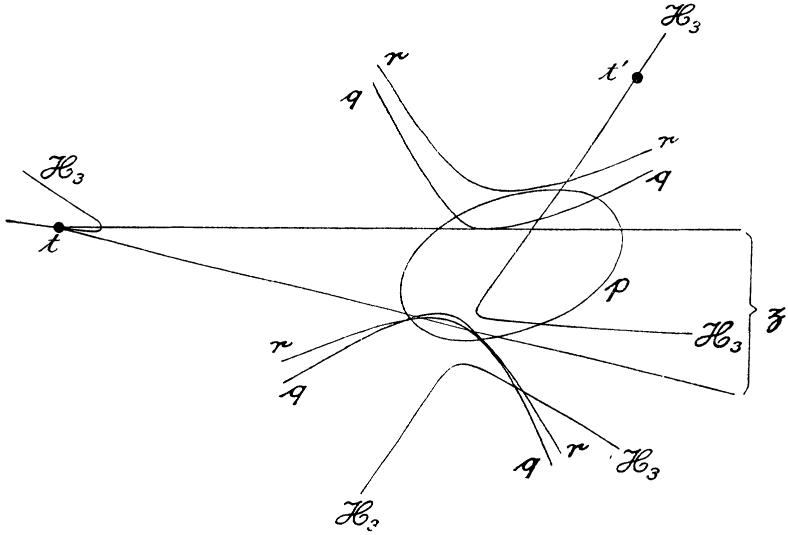


Fig. 141.

Satz 828: Zweiter Satz von Hesse: Die Hessesche Kurve eines Kegelschnittnetzes ist der geometrische Ort für die Doppelpunkte aller in dem Netze enthaltenen Linienpaare.

Eigenschaften konjugierter Punkte der Hesseschen Kurve eines Kegelschnittnetzes. Man gelangt zu neuen Sätzen über die Hessesche Kurve eines Kegelschnittnetzes, wenn man den siebenten Satz von Chr. v. Staudt (Satz 705) auf die drei Grundkurven des Kegelschnittnetzes anwendet.[1]

Es seien also x und x', y und y' zwei Paare konjugierter Punkte der Hesseschen Kurve eines Kegelschnittnetzes; dann sind nach S. 313 ff. die Punkte dieser beiden Punktpaare hinsichtlich der drei Grundkurven p, q, r des Netzes, und damit überhaupt hinsichtlich sämtlicher Kurven des Netzes, konjugiert. Und konstruiert man sich *das vollständige Vierseit*, das die Punkte x und x' und ebenso die Punkte y und y' zu Gegenecken hat, dessen Seiten also die Seiten des einfachen Vierecks $xyx'y'$, d. h. die Geraden:

---

1) Vgl. zum Folgenden die Arbeit von O. Hesse: Über Kurven dritter Ordnung und über die Kegelschnitte, welche diese Kurven in drei verschiedenen Punkten berühren, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 36 (1848), S. 147 ff. (Gesammelte Werke, S. 160 ff.)

$$[xy], \quad [yx'], \quad [x'y'], \quad [y'x]$$

sind, so folgt nach dem siebenten Satze von Chr. v. Staudt, daß auch die Punkte:

$$(20) \qquad z = [xy \cdot x'y'] \quad \text{und} \quad z' = [yx' \cdot y'x],$$

des dritten Paares Gegenecken dieses vollständigen Vierseits hinsichtlich sämtlicher Kurven des Netzes konjugiert sind, woraus hervorgeht, daß

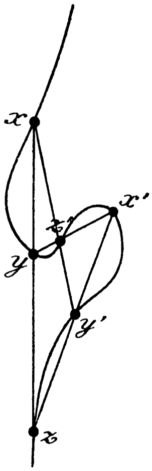


Fig. 142.

erstens die Punkte z und z' auf der Hesseschen Kurve des Netzes liegen, und daß sie

zweitens auch als konjugierte Punkte der Hesseschen Kurve bezeichnet werden dürfen (Fig. 142).

Satz 829: Sind zwei Paare Gegenecken eines vollständigen Vierseits konjugierte Punkte der Hesseschen Kurve eines Kegelschnittnetzes, so liegen auch die Punkte des dritten Paares Gegenecken dieses vollständigen Vierseits auf der Hesseschen Kurve des Netzes und bilden auf ihr ebenfalls ein Paar konjugierte Punkte.

Konstruktion einzelner Punkte der Hesseschen Kurve eines Kegelschnittnetzes. Man kann auf Grund der entwickelten Sätze jetzt von der Hesseschen Kurve eines durch drei Kurven zweiter Ordnung p, q, r als Grundkurven bestimmten Kegelschnittnetzes $\mathfrak{g}p + \mathfrak{h}q + \mathfrak{k}r$ ziemlich leicht eine ganze Reihe von Punkten finden.

Erstens nämlich erhält man jedesmal drei Punkte der Hesseschen Kurve des Netzes, wenn man *von irgend zweien der drei Grundkurven* p, q, r *des Netzes, z. B. von den Kurven* q *und* r, *die vier Schnittpunkte aufsucht und in dem durch sie bestimmten vollständigen Viereck die Nebenecken konstruiert,* d. h. die drei Paare Gegenseiten dieses vollständigen Vierecks zum Schnitt bringt. Dann bilden diese Schnittpunkte, sie mögen heißen a, b, c, die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks des dem Netze angehörenden Kegelschnittbüschels $\mathfrak{h}q + \mathfrak{k}r$. Nach S. 301 ff. des ersten Teils dieses Bandes sind aber die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks des Büschels $\mathfrak{h}q + \mathfrak{k}r$ zugleich die Doppelpunkte der drei in dem Büschel enthaltenen, in ein Linienpaar zerfallenden Kurven zweiter Ordnung, und diese Linienpaare sind nichts anderes als die drei Paare Gegenseiten des zur Konstruktion des gemeinsamen Polardreiecks des Büschels benutzten vollständigen Vierecks. Da endlich die zerfallenden Kurven des Büschels $\mathfrak{h}q + \mathfrak{k}r$, wie alle Kurven dieses Büschels, auch dem Netze $\mathfrak{g}p + \mathfrak{h}q + \mathfrak{k}r$ angehören, *so hat man in den drei Punkten* a, b, c *zugleich die Doppelpunkte dreier in dem Netze enthaltenen Linienpaare und damit nach Satz 828* *drei Punkte der Hesseschen Kurve des Netzes.* Auf dieselbe Weise erhält man in den Ecken d, e, f und g, h, i der gemeinsamen Polardreiecke der Kurven $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ sechs weitere Punkte der Hesseschen Kurve des Netzes und gewinnt also durch dreimalige Konstruktion eines vollständigen Vierecks gemeinsamer Punkte von zwei Grundkurven des Netzes und Hinzufügung seiner Nebenecken im ganzen neun Punkte:

$$a,\ b,\ c,\quad d,\ e,\ f,\quad g,\ h,\ i$$

der Hesseschen Kurve des Netzes.[1])

Zweitens kann man leicht zu einem jeden von den neun Punkten $a, b, \ldots, i$ der Hesseschen Kurve des Netzes *die konjugierten Punkte dieser Kurve bestimmen.* Da nämlich die neun Punkte:

$$a,\ b,\ c,\quad d,\ e,\ f,\quad g,\ h,\ i$$

die Ecken der gemeinsamen Polardreiecke der Kurvenpaare:

$$\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r},\quad \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p},\quad \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$$

bilden, so lassen sich die ihnen konjugierten Punkte $a', b', \ldots, i'$ entsprechend den Formeln konstruieren:

$$(21)\qquad \begin{cases} a' = [a\boldsymbol{p} \cdot bc], & d' = [d\boldsymbol{q} \cdot ef], \quad g' = [g\boldsymbol{r} \cdot hi], \\ b' = [b\boldsymbol{p} \cdot ca], & e' = [e\boldsymbol{q} \cdot fd], \quad h' = [h\boldsymbol{r} \cdot ig], \\ c' = [c\boldsymbol{p} \cdot ab], & f' = [f\boldsymbol{q} \cdot de], \quad i' = [i\boldsymbol{r} \cdot gh], \end{cases}$$

indem ja z. B. der zu a konjugierte Punkt a' sowohl auf der Polare $a\boldsymbol{p}$ des Punktes a hinsichtlich der Kurve $\boldsymbol{p}$ wie auch auf der gemeinsamen Polare $[bc]$ von a hinsichtlich der Kurven $\boldsymbol{q}$ und $\boldsymbol{r}$ liegen muß.

Auf diese Weise hat man bis jetzt drei Tripel von Paaren konjugierter Punkte der Hesseschen Kurve des Netzes gewonnen, nämlich:

$$(22)\qquad \begin{cases} \text{das Tripel} \quad a, a', \quad b, b', \quad c, c', & \text{ferner} \\ \text{das Tripel} \quad d, d', \quad e, e', \quad f, f', & \text{und endlich} \\ \text{das Tripel} \quad g, g', \quad h, h', \quad i, i'. \end{cases}$$

Man hat also bereits 18 Punkte der Kurve.

Drittens endlich liefern dann *je zwei Paar konjugierter Punkte* der Hesseschen Kurve des Netzes nach dem Satze 829 *noch ein weiteres Paar* konjugierter Punkte. Konstruiert man nämlich in einem vollständigen Vierseit, in welchem zwei Paare konjugierter Punkte der Hesseschen Kurve des

1) Sollten 2 von den 3 Grundkurven des Netzes sich nicht in 4 reellen Punkten schneiden, aber dafür 4 reelle gemeinsame Tangenten besitzen, so kann man nach dem Satze 520 zur Bestimmung der 3 Ecken des gemeinschaftlichen Polardreiecks (Poldreiseits) beider Kurven auch das vollständige Vierseit der 4 gemeinsamen Tangenten dieser beiden Kurven benutzen und dessen Nebendreiseit konstruieren.

Netzes zwei Paare Gegenecken bilden, das dritte Paar Gegenecken, so sind nach dem genannten Satze diese Gegenecken, ebenso wie die beiden ersten Paare Gegenecken dieses Vierseits, nicht nur überhaupt Punkte der Hesseschen Kurve des Netzes, sondern auch *konjugierte* Punkte dieser Kurve.

Dabei muß man freilich die beiden Paare konjugierter Punkte, durch die man ein neues Paar konjugierter Punkte der Hesseschen Kurve bestimmen will, zwei *verschiedenen* von den drei unter (22) aufgeführten Tripeln von Paaren konjugierter Punkte entnehmen, weil zwei Punktpaare eines und desselben Tripels eben nur das dritte Punktpaar dieses Tripels und somit kein neues Punktpaar ergeben würden.

Will man etwa dasjenige Paar konjugierter Punkte k, k' ermitteln, das durch die beiden Paare konjugierter Punkte a, a' und d, d' der Hesseschen Kurve des Netzes bestimmt wird, so konstruiere man zunächst die vier Seiten des vollständigen Vierseits, das die Punkte a und a', d und d' zu Gegenecken hat, dessen Seiten also die Seiten des einfachen Vierecks $ada'd'$, d. h. die Geraden:

$$[ad],\quad [da'],\quad [a'd'],\quad [d'a]$$

sind. Dann bildet das dritte Paar Gegenecken dieses vollständigen Vierseits, d. h. das Punktpaar:

$$k = [ad \cdot a'd'] \quad \text{und} \quad k' = [da' \cdot d'a] \tag{23}$$

(vgl. S. 318), das gesuchte dritte Paar konjugierter Punkte der Hesseschen Kurve des Netzes.[1])

Weiteres über konjugierte Punkte der Hesseschen Kurve eines Kegelschnittnetzes. Von dem Satze 829 läßt sich leicht die folgende Umkehrung beweisen:

Satz 830: Umkehrung von Satz 829: Verbindet man einen Punkt z der Hesseschen Kurve eines Kegelschnittnetzes, von der wir voraussetzen wollen, daß sie nicht zerfällt, mit zwei konjugierten Punkten x und x' dieser Kurve, so schneiden die Verbindungslinien $[zx]$ und $[zx']$ die Kurve in je einem weiteren Punkte y und y', und diese Punkte y und y' sind ebenfalls hinsichtlich der Kurve einander konjugiert, und außerdem treffen sich die Geraden $[xy']$ und $[yx']$ in dem zu z konjugierten Punkte z' der Hesseschen Kurve des Netzes.

Aus dem Satze 730 folgt nämlich, daß die Verbindungslinie zweier reellen Punkte der Hesseschen Kurve eines Kegelschnittnetzes sicher noch einen

1) Vgl. hierzu: H. Schröter, Über eine besondere Curve 3ter Ordnung und eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen Curve 3 ter Ordnung, Mathematische Annalen, Bd. 5 (1872), S. 68.

dritten reellen Punkt mit der Kurve gemein haben muß. Denkt man sich daher die Punkte z und x der Hesseschen Kurve durch eine Gerade verbunden und bezeichnet den dritten Punkt, in welchem die Verbindungslinie die Hessesche Kurve schneidet, mit y (Fig. 143) und den zu dem Punkte y konjugierten Punkt einstweilen mit y'', so muß nach dem Hauptsatze (Satz 829) die Verbindungslinie von x' und y'' sich mit der Geraden $[xy]$ in einem Punkte der Hesseschen Kurve treffen. Dieser Punkt aber kann kein anderer sein als der Punkt z; denn, da die Hessesche Kurve nach der Voraussetzung nicht zerfallen soll, so hat die Gerade $[xy]$ außer den Punkten x und y nur noch den Punkt z mit der Hesseschen Kurve gemein.

Da aber die Punkte x', y'', z in einer Geraden liegen und zugleich der Hesseschen Kurve angehören, und dasselbe nach der im Satze 830 angegebenen Konstruktion auch von den Punkten x', y', z' gilt, und endlich die Kurve als nicht zerfallende Kurve dritter Ordnung mit der Geraden $[x'z]$ nur drei Punkte gemein hat, so muß der Punkt y'' mit dem Punkte y' zusammenfallen, d. h.: Auch die Punkte y und y' sind konjugierte Punkte der Hesseschen Kurve des Netzes. Und dasselbe gilt dann nach dem Hauptsatze auch von den Punkten z und z'. Damit ist die Umkehrung bewiesen.

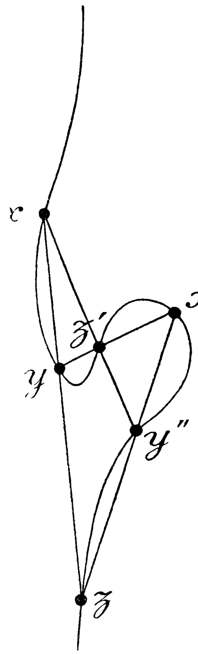


Fig. 143.

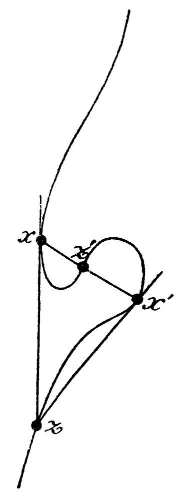


Fig. 144.

Läßt man in dem Satze 829 den Punkt y unendlich nahe an den Punkt x heranrücken, so rückt auch der Punkt y' unendlich nahe an den Punkt x', und man erhält aus dem Satze 829 den folgenden Sondersatz:

Satz 831: Die Tangenten in zwei konjugierten Punkten x und x' der Hesseschen Kurve eines Kegelschnittnetzes an diese Kurve schneiden sich in einem Punkte z der Hesseschen Kurve, und zwar ist dieser Punkt der Hesseschen Kurve konjugiert zu dem dritten Schnittpunkt z' der Geraden $[xx']$ mit der Kurve (Fig. 144).

Da ferner zu jedem Punkte der Hesseschen Kurve eines Kegelschnittnetzes sein konjugierter Punkt eindeutig bestimmt ist, so gilt auch die Umkehrung:

Satz 832: Umkehrung zu Satz 831: Sind x und x' zwei konjugierte Punkte der Hesseschen Kurve eines Kegelschnittnetzes, ist weiter z' der dritte Punkt, den die Gerade $[xx']$ mit der Hesseschen Kurve des Netzes gemein hat, und ist endlich z der zu z' konjugierte Punkt der Hesseschen Kurve, so sind die Geraden $[xz]$ und $[x'z]$ die Tangenten dieser Hesseschen Kurve in den Punkten x und x'. Man kann dies auch so ausdrücken (vgl. S. 250): Die Tangentialpunkte zweier konjugierten Punkte der Hesseschen Kurve eines Kegelschnittnetzes fallen in einen und denselben Punkt dieser Kurve zusammen, und dieser Punkt ist konjugiert zu dem dritten Schnittpunkt, den die Verbindungslinie jener beiden konjugierten Punkte mit der Hesseschen Kurve gemein hat.

Die Hessesche Kurve eines Kegelschnittnetzes und einer Kurve dritter Ordnung. Um endlich noch den Zusammenhang der Hesseschen Kurve *eines Kegelschnittnetzes* mit der Hesseschen Kurve *einer Kurve dritter Ordnung* zu entwickeln, zeige man zunächst, daß die konischen Polaren sämtlicher Punkte der Ebene in bezug auf eine Kurve dritter Ordnung ein Kegelschnittnetz bilden.

Man stelle dazu die Gleichung der Kurve dritter Ordnung wie im 48. Abschnitt in der Form:

$$A_3 x^3 = 0 \tag{24}$$

dar, in der A_3 eine ternäre Lückenform dritter Ordnung bedeutet, und bilde zunächst die 3 konischen Polaren der 3 Ecken e_1, e_2, e_3 des Fundamentaldreiecks in bezug auf die Kurve dritter Ordnung (24). Dieselben lassen sich durch die 3 Gleichungen ausdrücken:

$$A_3 e_1 x^2 = 0, \quad A_3 e_2 x^2 = 0, \quad A_3 e_3 x^2 = 0. \tag{25}$$

Ist dann h ein beliebiger Punkt der Ebene, und sind $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3$ seine Dreieckskoordinaten, ist also:

$$h = \mathfrak{h}_1 e_1 + \mathfrak{h}_2 e_2 + \mathfrak{h}_3 e_3, \tag{26}$$

so lautet die Gleichung der konischen Polare des Punktes h in bezug auf die Kurve (24):

$$A_3 h x^2 = 0 \tag{27}$$

oder wegen (26):

$$\mathfrak{h}_1 A_3 e_1 x^2 + \mathfrak{h}_2 A_3 e_2 x^2 + \mathfrak{h}_3 A_3 e_3 x^2 = 0. \tag{28}$$

Läßt man aber in dieser Gleichung die Größen $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{h}_3$ alle möglichen reellen Zahlwerte durchlaufen, so stellt die Gleichung (28) das Kegelschnittnetz dar, das die 3 linear unabhängigen Kurven zweiter Ordnung (25) zu Grundkurven hat.

Daß nämlich die 3 Kurven zweiter Ordnung (25) linear unabhängig sind, leuchtet sofort ein. Denn den Punkten:

$$\mathfrak{y} y + \mathfrak{z} z$$

einer Geraden $[yz]$ entsprechen als konische Polaren hinsichtlich der Kurve dritter Ordnung A_3 die Kurven zweiter Ordnung:

$$\mathfrak{y} A_3 y x^2 + \mathfrak{z} A_3 z x^2 = 0,$$

und diese bilden bei festgehaltenen Punkten y und z und veränderlichen Zahlwerten $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ ein Kegelschnittbüschel. Und damit umgekehrt 3 konische Polaren hinsichtlich einer Kurve dritter Ordnung A_3 einem Kegelschnittbüschel angehören, müssen ihre Pole in einer Geraden liegen. Diese Bedingung aber wird durch die 3 Ecken e_1, e_2, e_3 des Fundamentaldreiecks nicht erfüllt. Die konischen Polaren (25) können daher nicht in einem und demselben Kegelschnittbüschel enthalten sein und sind somit *linear unabhängig voneinander.*

Man hat also wirklich den Satz bewiesen:

Satz 833: Die konischen Polaren sämtlicher Punkte der Ebene in bezug auf eine Kurve dritter Ordnung bilden zusammen ein Kegelschnittnetz.

Bei der Begründung dieses Satzes ergab sich ferner der Satz:

Satz 834: Die konischen Polaren der Punkte einer Geraden hinsichtlich einer Kurve dritter Ordnung bilden ein Kegelschnittbüschel, und umgekehrt gehören allen Kurven eines Kegelschnittbüschels, das in dem Netze der konischen Polaren hinsichtlich einer Kurve dritter Ordnung enthalten ist, als Pole die Punkte einer Geraden zu.

Man kann jetzt aber weiter zeigen, daß die Hessesche Kurve des Netzes (28) der konischen Polaren einer Kurve dritter Ordnung (24) mit der Hesseschen Kurve dieser Kurve dritter Ordnung selbst identisch ist.

Die Gleichung der Hesseschen Kurve des Netzes (28) ergibt sich, wenn man nach solchen Punkten y der Ebene fragt, deren Polaren in bezug auf die 3 Grundkurven (25) des Netzes durch einen und denselben Punkt z gehen. Nun besitzen die 3 Polaren eines festen Punktes y in bezug auf die 3 Grundkurven (25) des Netzes die Gleichungen:

$$A_3 e_1 y z = 0, \quad A_3 e_2 y z = 0, \quad A_3 e_3 y z = 0, \tag{29}$$

wobei z den laufenden Punkt dieser Polaren bedeutet. Sollen also diese 3 Polaren *durch denselben Punkt:*

$$z = \mathfrak{z}_1 e_1 + \mathfrak{z}_2 e_2 + \mathfrak{z}_3 e_3 \tag{30}$$

hindurchgehen, so müssen die 3 Gleichungen (29) durch diesen Puukt z gleichzeitig befriedigt werden. Diese Gleichungen (29) nehmen aber bei Einführung des Ableitausdruckes (30) die Form an:

$$\begin{cases} \mathfrak{z}_1 A_3 y e_1^2 + \mathfrak{z}_2 A_3 y e_1 e_2 + \mathfrak{z}_3 A_3 y e_1 e_3 = 0, \\ \mathfrak{z}_1 A_3 y e_2 e_1 + \mathfrak{z}_2 A_3 y e_2^2 + \mathfrak{z}_3 A_3 y e_2 e_3 = 0, \\ \mathfrak{z}_1 A_3 y e_3 e_1 + \mathfrak{z}_2 A_3 y e_3 e_2 + \mathfrak{z}_3 A_3 y e_3^2 = 0. \end{cases} \tag{31}$$

Und damit diese 3 Gleichungen ein von dem Lösungssystem:

$$\mathfrak{z}_1 = 0, \quad \mathfrak{z}_2 = 0, \quad \mathfrak{z}_3 = 0$$

verschiedenes Lösungssystem aufweisen, ist notwendig und hinreichend, daß die Determinante der Gleichungen (31) verschwindet, daß also die Gleichung besteht:

$$(32) \qquad \begin{vmatrix} A_3 y e_1^2, & A_3 y e_1 e_2, & A_3 y e_1 e_3 \\ A_3 y e_2 e_1, & A_3 y e_2^2, & A_3 y e_2 e_3 \\ A_3 y e_3 e_1, & A_3 y e_3 e_2, & A_3 y e_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist somit die Gleichung der Hesseschen Kurve des Netzes (28). Nach der Gleichung (24) des 49. Abschnitts ist aber die Gleichung (32) zugleich die Gleichung der Hesseschen Kurve der Kurve dritter Ordnung A_3. Man hat daher den Satz:

Satz 835: Die Hessesche Kurve eines Kegelschnittnetzes, das von den konischen Polaren einer Kurve dritter Ordnung gebildet wird, ist zugleich die Hessesche Kurve dieser Kurve dritter Ordnung selbst.

Man kann noch hinzufügen: Wie die Vergleichung der Gleichungen (29) mit den Gleichungen (17) des 49. Abschnitts zeigt, ist die Zuordnung konjugierter Punkte auf der Hesseschen Kurve des Netzes der konischen Polaren einer Kurve dritter Ordnung A_3 identisch mit der Zuordnung zwischen den Doppelpunkten der in ein Linienpaar zerfallenden konischen Polaren der Kurve A_3 und ihren Polen hinsichtlich dieser Kurve.

Die eindreideutige Beziehung zwischen einer Kurve dritter Ordnung und ihrer Hesseschen Kurve. Die Gleichung der Hesseschen Kurve H_3 einer Kurve dritter Ordnung A_3 lautet nach (32), wenn man den laufenden Punkt der Hesseschen Kurve statt wie bisher mit y jetzt mit x bezeichnet:

$$(33) \qquad \begin{vmatrix} A_3 x e_1^2 & A_3 x e_1 e_2 & A_3 x e_1 e_3 \\ A_3 x e_2 e_1 & A_3 x e_2^2 & A_3 x e_2 e_3 \\ A_3 x e_3 e_1 & A_3 x e_3 e_2 & A_3 x e_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Hessesche Kurve H_3 einer „Urkurve“ A_3 durch diese Urkurve eindeutig bestimmt wird. Zugleich ist aber durch Angabe der Urkurve A_3 auf der Hesseschen Kurve H_3 auch eine Zuordnung konjugierter Punkte festgelegt, die man etwa dadurch gewinnen kann, daß man zu jedem Punkte x der Hesseschen Kurve denjenigen Punkt x' aufsucht, der zu x hinsichtlich irgend zweier konischen Polaren von A_3 (und damit hinsichtlich aller dieser konischen Polaren) konjugiert ist. Dieser Punkt x' gehört dabei nach dem Satze 825 wieder der Hesseschen Kurve H_3 an.

Es bleibt aber noch zu untersuchen, ob auch umgekehrt, wenn eine Kurve dritter Ordnung $\boldsymbol{H}_3$ vorliegt, welche die Hessesche Kurve einer Urkurve dritter Ordnung $\boldsymbol{A}_3$ bilden soll, diese Urkurve durch die angegebene Forderung bereits eindeutig festgelegt ist.[1]) Nach S. 258f. stimmen die Wendepunkte der Hesseschen Kurve $\boldsymbol{H}_3$ mit den Wendepunkten ihrer Urkurve $\boldsymbol{A}_3$ überein. Durch die Hessesche Kurve $\boldsymbol{H}_3$ sind also insbesondere die 4 Wendepunktsdreiseite der zugehörigen Urkurve $\boldsymbol{A}_3$ mit gegeben. Bezieht man daher die Gleichung der gesuchten Urkurve $\boldsymbol{A}_3$ auf das ganz reelle Wendepunktsdreiseit $E_1 E_2 E_3$ der Hesseschen Kurve $\boldsymbol{H}_3$ und wählt zugleich die reelle Ecke des teilweise reellen Wendepunktsdreiseits zum Einheitspunkt (vgl. S. 263), so erhält diese Gleichung die oben im 51. Abschnitt in Gleichung (9) zugrunde gelegte kanonische Form:

$$(34) \qquad [E_1 x]^3 + [E_2 x]^3 + [E_3 x]^3 - 3\mathfrak{k}[E_1 x][E_2 x][E_3 x] = 0.$$

Die jener Urkurve zugehörige Lückenform $\boldsymbol{A}_3$ lautet somit:

$$(35) \qquad \boldsymbol{A}_3 = [E_1 l]^3 + [E_2 l]^3 + [E_3 l]^3 - 3\mathfrak{k}[E_1 l][E_2 l][E_3 l].$$

Um auf Grund dieser Darstellung der Lückenform $\boldsymbol{A}_3$ die Gleichung (33) der Hesseschen Kurve $\boldsymbol{H}_3$ der Urkurve $\boldsymbol{A}_3$ zu entwickeln, beachte man, daß:

$$[E_i l]^3 x e_i^2 = [E_i x][E_i e_i]^2 = [E_i x], \quad i = 1, 2, 3,$$

und

$$[E_1 l][E_2 l][E_3 l] x e_2 e_3 = \tfrac{1}{6}[E_1 x][E_2 e_2][E_3 e_3] = \tfrac{1}{6}[E_1 x], \ldots \text{(zykl.)}$$

ist, daß dagegen alle übrigen Produkte verschwinden, die sich bei Ausrechnung der Elemente der Determinante auf der linken Seite der Gleichung (33) ergeben. Es wird demnach:

$$\boldsymbol{A}_3 x e_1^2 = [E_1 x], \quad \boldsymbol{A}_3 x e_2 e_3 = -\frac{\mathfrak{k}}{2}[E_1 x],$$

$$\boldsymbol{A}_3 x e_2^2 = [E_2 x], \quad \boldsymbol{A}_3 x e_3 e_1 = -\frac{\mathfrak{k}}{2}[E_2 x],$$

$$\boldsymbol{A}_3 x e_3^2 = [E_3 x], \quad \boldsymbol{A}_3 x e_1 e_2 = -\frac{\mathfrak{k}}{2}[E_3 x].$$

Und die Gleichung (33) der Hesseschen Kurve $\boldsymbol{H}_3$ der Urkurve $\boldsymbol{A}_3$ verwandelt sich in:

$$(36) \qquad \begin{vmatrix} [E_1 x], & -\frac{\mathfrak{k}}{2}[E_3 x], & -\frac{\mathfrak{k}}{2}[E_2 x] \\ -\frac{\mathfrak{k}}{2}[E_3 x], & [E_2 x], & -\frac{\mathfrak{k}}{2}[E_1 x] \\ -\frac{\mathfrak{k}}{2}[E_2 x], & -\frac{\mathfrak{k}}{2}[E_1 x], & [E_3 x] \end{vmatrix} = 0,$$

1) Vgl. zum Folgenden die erste der beiden auf S. 256 zitierten Arbeiten von O. Hesse aus Bd. 38 des Journals für die reine und angewandte Mathematik (1849), S. 249ff. (Gesammelte Werke, S. 202ff.)

oder in:

$$(37)\qquad [E_1x]^3 + [E_2x]^3 + [E_3x]^3 - \frac{4-\mathfrak{k}^3}{\mathfrak{k}^2}[E_1x][E_2x][E_3x] = 0,$$

oder, wenn man:

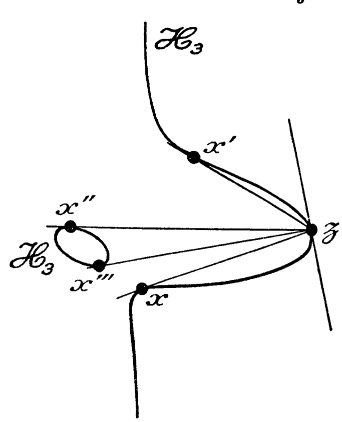
$$(38)\qquad \frac{4-\mathfrak{k}^3}{\mathfrak{k}^2} = 3\mathfrak{h}$$

setzt, in:

$$(39)\qquad [E_1x]^3 + [E_2x]^3 + [E_3x]^3 - 3\mathfrak{h}[E_1x][E_2x][E_3x] = 0.$$

Damit ist auch die Gleichung der Hesseschen Kurve $\boldsymbol{H}_3$ der Urkurve (34) in der kanonischen Form dargestellt. Ihr Parameter $\mathfrak{h}$ ist dabei mit dem Parameter $\mathfrak{k}$ der zugehörigen Urkurve durch die Gleichung (38) verbunden. Und da diese Gleichung in $\mathfrak{h}$ linear und in bezug auf $\mathfrak{k}$ vom dritten Grade ist, so bestätigt sie *zunächst* das obige Ergebnis, daß die Hessesche Kurve einer Urkurve dritter Ordnung durch diese Urkurve *eindeutig* bestimmt wird. *Zweitens* aber zeigt sie, daß es umgekehrt zu einer gegebenen Hesseschen Kurve dritter Ordnung $\boldsymbol{H}_3$ *drei* im allgemeinen verschiedene Urkurven $\boldsymbol{A}_3'$, $\boldsymbol{A}_3''$, $\boldsymbol{A}_3'''$ gibt, die den 3 aus der Gleichung (38) bei gegebenem $\mathfrak{h}$ entspringenden Werten von $\mathfrak{k}$, sie mögen heißen $\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{k}''$, $\mathfrak{k}'''$, zugehören. Und da einer jeden von den 3 Urkurven auch ein Netz von konischen Polaren entspricht, und jedes solche Netz auf der Hesseschen Kurve $\boldsymbol{H}_3$ eine Zuordnung konjugierter Punkte bestimmt, so erhält man auf der Hesseschen Kurve $\boldsymbol{H}_3$ auch drei im allgemeinen verschiedene Zuordnungen konjugierter Punkte, die man als konjugiert in Rücksicht auf die Urkurve $\boldsymbol{A}_3'$ oder auf die Urkurve $\boldsymbol{A}_3''$ oder endlich auf die Urkurve $\boldsymbol{A}_3'''$ bezeichnen kann.

Dieses Ergebnis wird dadurch bestätigt, daß auch die Umkehrung der dem Satze 831 entsprechenden Konstruktion dreideutig wird. Nach diesem Satze schneiden sich die Tangenten, in zwei konjugierten Punkten x und x' der Hesseschen Kurve $\boldsymbol{H}_3$ an die Kurve gezogen, in einem weiteren Punkte z der Hesseschen Kurve. Zieht man aber umgekehrt in x die Tangente an die Hessesche Kurve $\boldsymbol{H}_3$ und bestimmt den Tangentialpunkt z des Punktes



x, d. h. (vgl. S. 250) denjenigen Punkt z, den die Tangente des Punktes x außer ihrem Berührungspunkte x mit der Kurve gemein hat, so lassen sich nach dem Satze 741 vom Punkte z außer der Tangente im Punkte x und der doppelt zu zählenden Tangente im Punkte z selbst noch *drei weitere* Tangenten an die Hessesche Kurve legen; ihre Berührungspunkte mögen bezeichnet werden mit x', x'', x''' (Fig. 145). Und je nachdem man den Punkt x' oder den Punkt x'' oder endlich den Punkt x''' als konjugierten Punkt des Punktes x auffaßt, erhält man auf der Hesseschen Kurve $\boldsymbol{H}$

drei verschiedene Systeme konjugierter Punkte. Denn man kann ja nach dem im Satze 830 angegebenen Verfahren zu jedem weiteren Punkte y der Hesseschen Kurve den konjugierten Punkt y' (oder y'' oder y''') konstruieren, sobald ein Paar zugeordneter Punkte x und x' (oder x und x'' oder x und x''') gegeben ist.

Weitere geometrische Beziehungen zwischen einer Kurve dritter Ordnung und ihrer Hesseschen Kurve. Nach dem Satze 749 zerfällt die konische

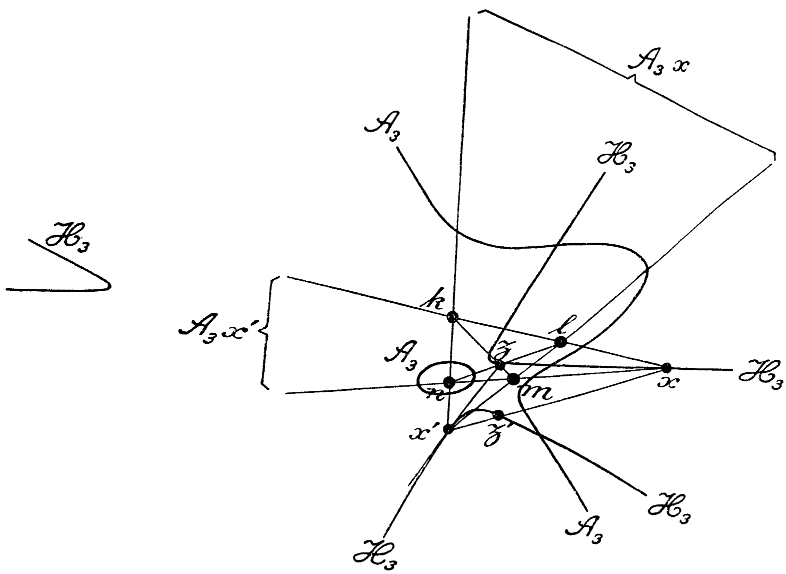


Fig. 146.

Polare eines Punktes der Hesseschen Kurve $\boldsymbol{H}_3$ einer Kurve dritter Ordnung $\boldsymbol{A}_3$ genommen hinsichtlich dieser Urkurve $\boldsymbol{A}_3$ in ein Linienpaar. Insbesondere sind also die konischen Polaren $\boldsymbol{A}_3 x$ und $\boldsymbol{A}_3 x'$ *zweier konjugierten Punkte* x und x' der Hesseschen Kurve $\boldsymbol{H}_3$, genommen hinsichtlich der Urkurve $\boldsymbol{A}_3$, zwei Linienpaare, und zwar hat nach S. 324 die konische Polare des Punktes x den Punkt x' zum Doppelpunkt, und umgekehrt die konische Polare des Punktes x' den Punkt x zum Doppelpunkt.

Die vier Schnittpunkte, welche die beiden Linienpaare $\boldsymbol{A}_3 x$ und $\boldsymbol{A}_3 x'$ miteinander gemein haben, bilden dann die Grundpunkte des nach dem Satze 834 der Geraden $[xx']$ zugeordneten Büschels:

$$\mathfrak{x}\boldsymbol{A}_3 x + \mathfrak{x}'\boldsymbol{A}_3 x' \tag{40}$$

von konischen Polaren der Kurve $\boldsymbol{A}_3$. Bezeichnet man diese 4 Schnittpunkte mit k, l, m, n in der Verteilung, daß das Linienpaar $[kl]$, $[mn]$ den Punkt x zum Doppelpunkte hat und zugleich die konische Polare $\boldsymbol{A}_3 x'$ von x' darstellt, während das Linienpaar $[kn]$, $[lm]$ den Punkt x' zum Doppelpunkte hat und die konische Polare $\boldsymbol{A}_3 x$ des Punktes x bildet (Fig. 146), so entsprechen nach dem Satze 834 den sämtlichen konischen Polaren des Kegelschnittbüschels, das die 4 Punkte $klmn$ zu Grundpunkten hat, als Pole hinsichtlich der Kurve $\boldsymbol{A}_3$ die Punkte der Geraden $[xx']$.

Nun ist aber in diesem Kegelschnittbüschel außer den beiden genannten Linienpaaren noch ein drittes Linienpaar, nämlich das Linienpaar $[km]$, $[ln]$, enthalten. Sein Doppelpunkt z gehört somit nach dem Satze 749 der Hesseschen Kurve $\boldsymbol{H}_3$ an, und dasselbe gilt von dem Pole z' dieses Linienpaares hinsichtlich der Kurve $\boldsymbol{A}_3$. Dieser aber ist als Pol einer Kurve des Büschels (40) nach dem Satze 834 zugleich auf der Geraden $[xx']$ enthalten, und ist also, da er von den Punkten x und x' verschieden sein muß, der dritte Schnittpunkt, den die Hessesche Kurve $\boldsymbol{H}_3$ mit der Geraden $[xx']$ gemein hat. Zugleich ist der Punkt z', als Pol der in ein Linienpaar zerfallenden konischen Polare mit dem Doppelpunkt z, zum Punkte z in bezug auf die Hessesche Kurve $\boldsymbol{H}_3$ konjugiert; und als konjugierter Punkt zum Punkte z' ist nach dem Satze 832 der Punkt z der gemeinsame Tangentialpunkt der Punkte x und x' der Hesseschen Kurve $\boldsymbol{H}_3$, das heißt, die Geraden $[xz]$ und $[x'z]$ sind *die Tangenten der Hesseschen Kurve* $\boldsymbol{H}_3$ *in den Punkten* x *und* x'.

Die Geraden $[x'z]$ und $[xz]$ haben nun aber auch eine Bedeutung für die Urkurve $\boldsymbol{A}_3$. Es ist nämlich *die Gerade* $[x'z]$ *die gerade Polare des Punktes* x *in bezug auf die Kurve dritter Ordnung* $\boldsymbol{A}_3$ und *die Gerade* $[xz]$ *die gerade Polare des Punktes* x' *in bezug auf dieselbe Kurve.* Denn die gerade Polare des Punktes x hinsichtlich der Kurve $\boldsymbol{A}_3$ ist zugleich die Polare des Punktes x in bezug auf die konische Polare $\boldsymbol{A}_3 x$ des Punktes x hinsichtlich $\boldsymbol{A}_3$, das heißt in bezug auf das Linienpaar $[kn]$, $[lm]$. Und die Polare des Punktes x in bezug auf dieses Linienpaar geht nach dem Satze 420 durch den Doppelpunkt x' des Linienpaars hindurch und wird von dem Punkte x durch dieses Linienpaar harmonisch getrennt. Sie ist also nach dem Satze 298 identisch mit der Geraden $[x'z]$. Ebenso beweist man, daß die Gerade $[xz]$ die gerade Polare des Punktes x' hinsichtlich der Kurve $\boldsymbol{A}_3$ ist, und man hat den Satz:

Satz 836: Die gerade Polare eines Punktes x der Hesseschen Kurve $\boldsymbol{H}_3$ einer Kurve dritter Ordnung $\boldsymbol{A}_3$ in bezug auf die Urkurve $\boldsymbol{A}_3$ berührt die Hessesche Kurve in demjenigen Punkte x', der dem Punkte x der Hesseschen Kurve $\boldsymbol{H}_3$ in Rücksicht auf die Urkurve $\boldsymbol{A}_3$ konjugiert ist (S. 313).

Diesen Satz wende man insbesondere auf einen Wendepunkt w_i der Kurve dritter Ordnung $\boldsymbol{A}_3$, zum Beispiel auf den Wendepunkt w_1, an. Nach dem Satze 735 ist die gerade Polare eines jeden Punktes einer Kurve dritter Ordnung (der nicht gerade mit einem Doppelpunkte der Kurve zusammenfällt), die Tangente der Kurve in diesem Punkte. *Die gerade Polare* $\boldsymbol{A}_3 w_1^2$ *des Wendepunktes* w_1 der Kurve $\boldsymbol{A}_3$ in bezug auf diese Kurve wird also durch die Wendetangente der Kurve $\boldsymbol{A}_3$ im Punkte w_1 gebildet (Fig. 147). Andererseits zerfällt *die konische Polare $A_3 w_1$ des Wendepunktes w_1* in bezug auf die Kurve A_3 nach dem Satze 755 in die Wendetangente und die harmonische Polare H_1 dieses Wendepunktes w_1.

Nun gehört der Wendepunkt w_1 der Kurve A_3 zugleich ihrer Hesseschen Kurve H_3 als Wendepunkt an, und der zu ihm in Rücksicht auf die Urkurve A_3 konjugierte Punkt k_1 der Hesseschen Kurve H_3 ist der Doppelpunkt der konischen Polare $A_3 w_1$ des Wendepunktes w_1 hinsichtlich A_3, das heißt derjenige Punkt, in welchem die Wendetangente des Wendepunktes w_1

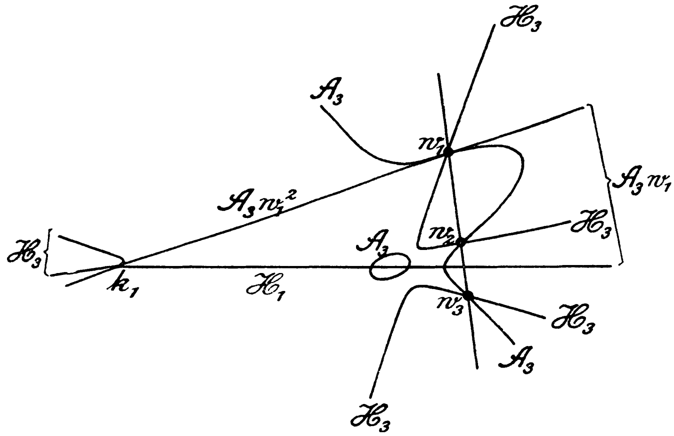


Fig. 147.

der Kurve A_3 von der harmonischen Polare H_1 dieses Wendepunktes geschnitten wird.

Da aber nach dem Satze 836 die gerade Polare eines jeden Punktes x der Hesseschen Kurve H_3 in bezug auf die Urkurve A_3 die Hessesche Kurve H_3 in dem zu x in Rücksicht auf die Urkurve A_3 konjugierten Punkte x' der Kurve H_3 berührt, so muß auch die gerade Polare des Wendepunktes w_1 der Kurve A_3, das heißt eben die Wendetangente der Kurve A_3 im Punkte w_1, zugleich eine Tangente der Hesseschen Kurve H_3 sein, und ihr Berührungspunkt muß mit dem Doppelpunkte k_1 der konischen Polare $A_3 w_1$ des Wendepunktes w_1 hinsichtlich A_3 zusammenfallen. Mit andern Worten: Die Hessesche Kurve H_3 muß die zum Punkte w_1 gehörende Wendetangente der Kurve A_3 in demjenigen Punkte k_1 berühren, in welchem sie von der harmonischen Polare H_1 des Wendepunktes w_1 geschnitten wird. Man hat also den Satz:

Satz 837: Die Hessesche Kurve H_3 einer Kurve dritter Ordnung A_3 berührt die Wendetangenten dieser Kurve in denjenigen Punkten, in denen sie von den harmonischen Polaren der zugehörigen Wendepunkte geschnitten werden (vgl. die obige Fig. 147).

Aus dem Beweise des Satzes 836 kann man noch eine andere Folgerung ziehen. Nach diesem Beweise sind die geraden Polaren der Punkte x und x'

hinsichtlich der Kurve A_3 beziehlich die Geraden $[x'z]$ und $[xz]$. Diese *geraden Polaren* enthalten also beide den Punkt z. Nach dem Satze 731 muß dann umgekehrt die *konische Polare* des Punktes z durch die Punkte x und x' hindurchgehen. Da aber der Pol z dieser konischen Polare der Hesseschen Kurve H_3 von A_3 angehört, so zerfällt diese konische Polare in ein Linienpaar, und der Doppelpunkt dieses Linienpaars wird durch den zu z konjugierten Punkt z' der Hesseschen Kurve H_3 gebildet. Da ferner der Doppelpunkt z' mit den Punkten x und x' in einer Geraden liegt, so ist die Gerade $xz'x'$ die eine Gerade dieses Linienpaars (vgl. die obige Fig. 146). Damit ist der Satz bewiesen:

Satz 838: Die Verbindungslinie $[xx']$ zweier in Rücksicht auf eine Urkurve dritter Ordnung A_3 konjugierten Punkte x und x' ihrer Hesseschen Kurve H_3 ist zugleich der eine Teil eines Linienpaars, das die konische Polare eines weiteren Punktes der Hesseschen Kurve in bezug auf die Urkurve bildet, nämlich desjenigen Punktes z der Hesseschen Kurve, der dem dritten Schnittpunkte z' dieser Kurve mit der Geraden $[xx']$ in Rücksicht auf die Urkurve A_3 konjugiert ist.

Den andern Teil des Linienpaars $A_3 z$ findet man, indem man einen nicht auf der Geraden $[xx']$ liegenden Berührungspunkt t einer Tangente, vom Punkte z an die Kurve A_3 gezogen, mit dem Doppelpunkte z' des Linienpaars verbindet. (Die Konstruktion des Punktes t und seine Verbindungslinie mit z' ist in der Figur 146 weggelassen.)

Abschnitt 57.

Das Kegelschnittgewebe und seine Hessesche Kurve.

Begriff eines Kegelschnittgewebes. Es seien P, Q, R die extensiven Brüche für drei Polarsysteme *zweiter Klasse*, die linear unabhängig voneinander sind, die also nicht einer und derselben Schar von Polarsystemen angehören, und es sei:

$$(1)\quad P = \frac{a_1, a_2, a_3}{E_1, E_2, E_3}, \qquad (2)\quad Q = \frac{b_1, b_2, b_3}{E_1, E_2, E_3}, \qquad (3)\quad R = \frac{c_1, c_2, c_3}{E_1, E_2, E_3}.$$

Es soll die Gesamtheit der Polarsysteme zweiter Klasse untersucht werden, die sich unter der Form:

$$\mathfrak{g}P + \mathfrak{h}Q + \mathfrak{k}R$$

darstellen lassen, vorausgesetzt, daß $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ drei reelle Zahlgrößen sind. Wir nennen die Gesamtheit dieser Polarsysteme zweiter Klasse „ein Gewebe von Polarsystemen“, sowie wir bereits oben (S. 310) die Gesamtheit der

Polarkurven dieser Polarsysteme als „ein Kegelschnittgewebe“ bezeichnet haben.[1])

Die Hessesche Kurve eines Kegelschnittgewebes. Um einen Überblick über die Kurven eines Kegelschnittgewebes zu gewinnen, bemerke man, daß einem beliebigen Stabe W im allgemeinen durch die drei „Grundkurven“ $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ des Gewebes drei Punkte $W\boldsymbol{P}, W\boldsymbol{Q}, W\boldsymbol{R}$ als Pole zugewiesen werden, die ein eigentliches Dreieck bilden.

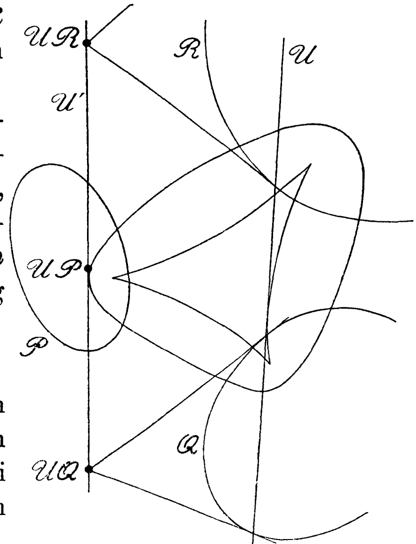


Fig 148.

Von besonderem Interesse für den Aufbau des Gewebes sind indes solche Geraden U der Ebene, deren Pole $U\boldsymbol{P}$, $U\boldsymbol{Q}$, $U\boldsymbol{R}$ hinsichtlich der drei Grundkurven $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ *auf einer und derselben Geraden liegen*, die also der Gleichung genügen:

$$(4) \qquad [U\boldsymbol{P} \cdot U\boldsymbol{Q} \cdot U\boldsymbol{R}] = 0.$$

Diese Zahlgleichung dritten Grades in bezug auf den Stab U stellt, da sie wegen der linearen Unabhängigkeit der drei Polarsysteme $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ nicht durch jeden Stab U der Ebene befriedigt werden kann, eine Kurve dritter Klasse dar und zeigt somit, daß die Geraden U, deren Pole hinsichtlich der Polarsysteme $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ auf einer und derselben Geraden liegen, eine Kurve dritter Klasse umhüllen.

Diese Kurve dritter Klasse heißt die „Hessesche Kurve des Kegelschnittgewebes“ oder auch wohl die „Hessiane des Gewebes“.[2])

Bezeichnet man noch die Gerade, auf der die drei Pole $U\boldsymbol{P}$, $U\boldsymbol{Q}$, $U\boldsymbol{R}$ der Tangente U der Hesseschen Kurve hinsichtlich der drei Grundkurven $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ des Gewebes liegen, mit U', so wird (Fig. 148):

$$(5) \qquad U' \equiv [U\boldsymbol{Q} \cdot U\boldsymbol{R}] \equiv [U\boldsymbol{R} \cdot U\boldsymbol{P}] \equiv [U\boldsymbol{P} \cdot U\boldsymbol{Q}].$$

Ferner genügt der Stab U', da seine Gerade durch jeden von den drei Polen $U\boldsymbol{P}$, $U\boldsymbol{Q}$, $U\boldsymbol{R}$ hindurchgeht, den drei Gleichungen:

$$(6) \qquad [U' \cdot U\boldsymbol{P}] = 0, \quad [U' \cdot U\boldsymbol{Q}] = 0, \quad [U' \cdot U\boldsymbol{R}] = 0,$$

1) Die Bezeichnung „*Kegelschnittgewebe*“ rührt von H. Schröter her. Vgl. dessen Arbeit: Ueber eine besondere Curve 3ter Ordnung und eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen Curve 3ter Ordnung, Mathematische Annalen, Bd. 5 (1872), S. 72. — Th. Reye nennt das Kegelschnittgewebe eine „*Kegelschnittscharschar*“. Vgl. seine Geometrie der Lage, erste Abteilung, vierte Auflage, Leipzig 1899, S. 278 ff.

2) Sie tritt zum ersten Male auf in der Arbeit von O. Hesse: Über Curven dritter Classe und Curven dritter Ordnung, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 38 (1849), S. 246 (Gesammelte Werke, S. 198).

aus denen man zunächst durch lineare Verknüpfung folgern kann, daß auch die Gleichung besteht:

$$(7) \qquad [U' \cdot U(\mathfrak{g}\boldsymbol{P} + \mathfrak{h}\boldsymbol{Q} + \mathfrak{k}\boldsymbol{R})] = 0,$$

daß also auch der Pol:

$$U(\mathfrak{g}\boldsymbol{P} + \mathfrak{h}\boldsymbol{Q} + \mathfrak{k}\boldsymbol{R})$$

des Stabes U hinsichtlich eines beliebigen Polarsystems:

$$\mathfrak{g}\boldsymbol{P} + \mathfrak{h}\boldsymbol{Q} + \mathfrak{k}\boldsymbol{R}$$

des Gewebes auf der Geraden des Stabes U' liegt. Daraus folgt, daß die drei Grundkurven des Gewebes in bezug auf die Hessesche Kurve des Gewebes keine ausgezeichnete Stellung einnehmen, wodurch dann zugleich der Ausdruck Hessesche Kurve *des Gewebes* gerechtfertigt ist.

Natürlich kann man zur Begründung der Gleichwertigkeit aller Kurven des Gewebes gegenüber seiner Hesseschen Kurve auch den zweiten Beweis dualistisch übertragen, der auf S. 312ff. für die entsprechende Eigenschaft der Hesseschen Kurve eines *Netzes* gegeben ist.

Man kann aber aus den Gleichungen (6) noch eine andere Folgerung ableiten. Wendet man nämlich auf die linke Seite der Gleichungen (6) die zweite Grundgleichung des Polarsystems an (Gleichung (118) des 31. Abschnitts), so sieht man, daß die drei Gleichungen (6) auch die drei Gleichungen nach sich ziehen:

$$(8) \qquad [U \cdot U'\boldsymbol{P}] = 0, \quad [U \cdot U'\boldsymbol{Q}] = 0, \quad [U \cdot U'\boldsymbol{R}] = 0.$$

Darin aber liegt das Ergebnis: Wenn die Pole einer Hüllgeraden U der Hesseschen Kurve eines Kegelschnittgewebes hinsichtlich der Grundkurven des Gewebes (und damit hinsichtlich aller Kurven des Gewebes) auf einer Geraden U' liegen, so liegen auch umgekehrt die Pole der Geraden U' hinsichtlich dieser Kurven auf einer Geraden, nämlich auf jener Geraden U. Hieraus folgt nach dem Begriff der Hesseschen Kurve eines Gewebes, daß auch die Gerade U' eine Hüllgerade der Hesseschen Kurve des Gewebes bildet. Und in der Tat ergibt sich ja aus den drei Gleichungen (8) durch Elimination von U die Gleichung:

$$(9) \qquad [U'\boldsymbol{P} \cdot U'\boldsymbol{Q} \cdot U'\boldsymbol{R}] = 0,$$

welche zeigt, daß auch die Gerade U' der Gleichung der Hesseschen Kurve des Gewebes Genüge leistet.

Da die Geraden U und U' zufolge der Gleichung (7) hinsichtlich einer jeden Kurve des Gewebes konjugiert sind, so bezeichnet man sie als **konjugierte Geraden des Gewebes** oder auch als **konjugierte Hüllgeraden der Hesseschen Kurve des Gewebes**. Auch sagt man, das **Geradenpaar UU' sei hinsichtlich des Gewebes oder hinsichtlich der Hesseschen Kurve des Gewebes konjugiert.**

Man kann die gewonnenen Ergebnisse in dem Satze zusammenfassen:

Satz 839: Dritter Satz von Hesse: Die Hüllkurve aller Geraden U der Ebene, deren Pole in bezug auf sämtliche Kurven eines Kegelschnittgewebes auf einer und derselben Geraden liegen, ist eine Kurve dritter Klasse, welche nach ihrem Entdecker als die Hessesche Kurve des Gewebes bezeichnet wird. Die Gerade U', auf der alle jene Pole liegen, ist selbst eine Hüllgerade der Hesseschen Kurve des Gewebes und heißt der Geraden U hinsichtlich der Hesseschen Kurve (oder auch hinsichtlich des Gewebes) konjugiert (vgl. Fig. 148, S. 331).

Die in einem Kegelschnittgewebe enthaltenen Kegelschnittscharen. Einem Kegelschnittgewebe:

$$\mathfrak{g}\boldsymbol{P} + \mathfrak{h}\boldsymbol{Q} + \mathfrak{k}\boldsymbol{R} \tag{10}$$

gehören ∞^2 räumlich verschiedene Kurven zweiter Klasse an. Aber es enthält auch ∞^2 verschiedene Kegelschnittscharen, was man ebenso wie bei dem Dualistischen beweisen kann.

Ferner ergeben sich wieder wie auf S. 315ff. die Sätze:

Satz 840: Zwei in einem Kegelschnittgewebe enthaltene voneinander verschiedene Kegelschnittscharen haben stets eine aber auch nur eine Kurve zweiter Klasse miteinander gemein. Und

Satz 841: Die acht Grundgeraden zweier aus einem Kegelschnittgewebe entnommenen Kegelschnittscharen sind Tangenten einer und derselben Kurve zweiter Klasse.

Die Hessesche Kurve eines Kegelschnittgewebes als Hüllkurve der Träger der in dem Gewebe enthaltenen Punktpaare. Das Polarsystem einer jeden Kurve zweiter Klasse des Kegelschnittgewebes (10), insbesondere auch das Polarsystem $\boldsymbol{Z}$ einer in ein Punktpaar zerfallenden Kurve des Gewebes, läßt sich in der Form darstellen:

$$\boldsymbol{Z} = \mathfrak{p}\boldsymbol{P} + \mathfrak{q}\boldsymbol{Q} + \mathfrak{r}\boldsymbol{R}, \tag{11}$$

in der $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ drei Zahlgrößen sind.

Der Träger T einer in ein Punktpaar zerfallenden Kurve zweiter Klasse ist nun aber nach dem Satze 432 zugleich die Nullinie des Polarsystems $\boldsymbol{Z}$ dieses Punktpaars, das heißt, er genügt der Gleichung:

$$T\boldsymbol{Z} = 0, \tag{12}$$

die man wegen (11) auch in der Form schreiben kann:

$$\mathfrak{p}\, T\boldsymbol{P} + \mathfrak{q}\, T\boldsymbol{Q} + \mathfrak{r}\, T\boldsymbol{R} = 0; \tag{13}$$

und diese Gleichung zieht die Gleichung nach sich:

$$[T\boldsymbol{P} \cdot T\boldsymbol{Q} \cdot T\boldsymbol{R}] = 0, \tag*{[14]}$$

welche zeigt: Der Träger T eines jeden in dem Kegelschnittgewebe (10) enthaltenen Punktpaars Z ist eine Tangente der Hesseschen Kurve des Gewebes. Umgekehrt folgt für jede Gerade T, die der Gleichung (14) der Hesseschen Kurve des Gewebes Genüge leistet, auf Grund dieser Gleichung zugleich das Bestehen einer Gleichung von der Form (13), also auch das Bestehen einer Gleichung von der Form (12), in der Z die Bedeutung (11) hat. Die Gleichung (12) ist aber auch eine hinreichende Bedingung für das Zerfallen der Kurve zweiter Klasse Z. Es ist somit bewiesen, daß auch umgekehrt jede Tangente T der Hesseschen Kurve des Gewebes der Träger eines in dem Gewebe enthaltenen Punktpaars ist, und man hat somit den Satz:

Satz 842: Vierter Satz von Hesse: Die Hessesche Kurve eines Kegelschnittgewebes ist die Hüllkurve der Träger aller in dem Gewebe enthaltenen Punktpaare.

Eigenschaften konjugierter Hüllgeraden der Hesseschen Kurve eines Kegelschnittgewebes. Man gelangt zu neuen Sätzen über die Hessesche Kurve eines Kegelschnittgewebes, wenn man den achten Satz von Chr. v. Staudt (Satz 717) auf die drei Grundkurven des Kegelschnittgewebes anwendet.

Es seien also U und U', V und V' zwei Paare konjugierter Hüllgeraden der Hesseschen Kurve eines Kegelschnittgewebes; dann sind die beiden Geradenpaare hinsichtlich der drei Grundkurven $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ des Gewebes und damit überhaupt hinsichtlich sämtlicher Kurven des Gewebes konjugiert. Und konstruiert man sich *das vollständige Viereck,* das die Geraden U und U' und ebenso auch die Geraden V und V' zu Gegenseiten hat, dessen Ecken also die Ecken des einfachen Vierseits $U V U' V'$ sind, d. h. die Punkte:

$$[UV], \quad [VU'], \quad [U'V'], \quad [V'U],$$

so folgt nach dem Satze 717, daß auch die Geraden:

$$W = [UV \cdot U'V'] \quad \text{und} \quad W' = [VU' \cdot UV']$$

des dritten Paars Gegenseiten dieses vollständigen Vierecks hinsichtlich sämtlicher Kurven des Gewebes konjugiert sind, woraus hervorgeht, daß

erstens die Geraden W und W' zwei Hüllgeraden der Hesseschen Kurve des Gewebes sind, und daß sie

zweitens auch als konjugierte Hüllgeraden der Hesseschen Kurve bezeichnet werden dürfen (Fig. 149).

Man hat also den Satz:

Satz 843· Sind zwei Paare Gegenseiten eines vollständigen Vierecks konjugierte Hüllgeraden der Hesseschen Kurve eines Kegelschnittgewebes, so sind auch die Geraden des dritten Paars Gegenseiten dieses vollständigen Vierecks zwei Hüllgeraden dieser

Hesseschen Kurve, und zwar ebenfalls ein Paar *konjugierte* Hüllgeraden der Kurve.

Konstruktion einzelner Hüllgeraden der Hesseschen Kurve eines Kegelschnittgewebes. Man kann auf Grund der entwickelten Sätze von der Hesseschen Kurve eines durch drei Kurven zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ als Grundkurven bestimmten Kegelschnittgewebes $\mathfrak{g}\boldsymbol{P} + \mathfrak{h}\boldsymbol{Q} + \mathfrak{k}\boldsymbol{R}$ jetzt ziemlich leicht eine ganze Reihe von Hüllgeraden finden.

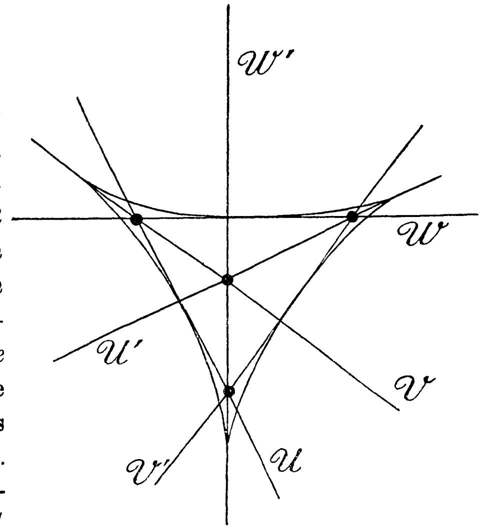


Fig. 149.

Erstens nämlich erhält man jedesmal drei Hüllgeraden der Hesseschen Kurve des Gewebes, wenn man *an irgend zwei von den drei Grundkurven $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ des Gewebes, z. B. an die Kurven $\boldsymbol{Q}$ und $\boldsymbol{R}$, die vier gemeinsamen Tangenten legt und in dem so bestimmten vollständigen Vierseit die Nebenseiten konstruiert*, d. h. die drei Paare Gegenecken dieses vollständigen Vierseits verbindet. Dann bilden diese Verbindungslinien, sie mögen heißen A, B, C, die Seiten des gemeinsamen Poldreiseits der dem Gewebe angehörenden Kegelschnittschar $\mathfrak{h}\boldsymbol{Q} + \mathfrak{k}\boldsymbol{R}$. Nach S. 332 ff. des ersten Teils dieses Bandes sind aber die Seiten des gemeinsamen Poldreiseits der Schar $\mathfrak{h}\boldsymbol{Q} + \mathfrak{k}\boldsymbol{R}$ zugleich die Träger der drei in der Schar enthaltenen, in ein Punktpaar zerfallenden Kurven zweiter Klasse, und diese Punktpaare sind nichts anderes als die drei Paare Gegenecken des zur Konstruktion des gemeinsamen Poldreiseits der Schar benutzten vollständigen Vierseits. Da endlich die zerfallenden Kurven der Schar $\mathfrak{h}\boldsymbol{Q} + \mathfrak{k}\boldsymbol{R}$ wie alle Kurven dieser Schar auch dem Gewebe $\mathfrak{g}\boldsymbol{P} + \mathfrak{h}\boldsymbol{Q} + \mathfrak{k}\boldsymbol{R}$ angehören, *so hat man in den Geraden A, B, C zugleich die Träger dreier in dem Gewebe enthaltenen Punktpaare und damit nach Satz 842 drei Hüllgeraden der Hesseschen Kurve des Gewebes.* Auf dieselbe Weise erhält man in den Seiten D, E, F und G, H, J der gemeinsamen Poldreiseite der Kurven $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ sechs weitere Hüllgeraden der Hesseschen Kurve des Gewebes und gewinnt also durch dreimalige Konstruktion eines vollständigen Vierseits gemeinsamer Tangenten an zwei Grundkurven des Gewebes und Hinzufügung seiner Nebenseiten im Ganzen neun Hüllgeraden:

$$A,\ B,\ C,\quad D,\ E,\ F,\quad G,\ H,\ J$$

der Hesseschen Kurve des Gewebes.

Zweitens kann man leicht zu jeder von den neun Hüllgeraden A, $B, \ldots, J$ der Hesseschen Kurve des Gewebes *die konjugierten Hüllgeraden dieser Kurve bestimmen.* Da nämlich die neun Hüllgeraden:

$$A, B, C, \quad D, E, F, \quad G, H, J$$

die Seiten der gemeinsamen Poldreiseite der Kurvenpaare:

$$\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}, \quad \boldsymbol{R}, \boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$$

bilden, so lassen sich die ihnen konjugierten Hüllgeraden $A', B', \ldots, J'$ entsprechend den Formeln konstruieren:

$$(15) \quad \begin{cases} A' = [A\boldsymbol{P} \cdot BC], & D' = [D\boldsymbol{Q} \cdot EF], & G' = [G\boldsymbol{R} \cdot HJ], \\ B' = [B\boldsymbol{P} \cdot CA], & E' = [E\boldsymbol{Q} \cdot FD], & H' = [H\boldsymbol{R} \cdot JG], \\ C' = [C\boldsymbol{P} \cdot AB], & F' = [F\boldsymbol{Q} \cdot DE], & J' = [J\boldsymbol{R} \cdot GH], \end{cases}$$

indem ja z. B. die zu A konjugierte Hüllgerade A' durch den Pol $A\boldsymbol{P}$ von A hinsichtlich $\boldsymbol{P}$ und durch den gemeinsamen Pol $[BC]$ von A hinsichtlich der Kurven $\boldsymbol{Q}$ und $\boldsymbol{R}$ hindurchgehen muß.

Auf diese Weise hat man bis jetzt drei Tripel von Paaren konjugierter Hüllgeraden der Hesseschen Kurve des Gewebes gewonnen, nämlich:

$$(15) \quad \begin{cases} \text{das Tripel } A, A', \; B, B', \; C, C', \text{ ferner} \\ \text{das Tripel } D, D', \; E, E', \; F, F', \text{ und endlich} \\ \text{das Tripel } G, G', \; H, H', \; J, J'. \end{cases}$$

Man hat also bereits 18 Hüllgeraden der Kurve.

Drittens endlich liefern dann *je zwei Paare konjugierter Hüllgeraden* der Hesseschen Kurve des Gewebes nach dem Satze 843 *noch ein weiteres Paar* konjugierter Hüllgeraden. Konstruiert man nämlich zu einem vollständigen Viereck, von dem zwei Paare konjugierter Hüllgeraden der Hesseschen Kurve des Gewebes zwei Paare Gegenseiten bilden, das dritte Paar Gegenseiten, so sind nach dem genannten Satze diese Gegenseiten ebenso wie die beiden ersten Paare Gegenseiten nicht nur überhaupt Hüllgeraden der Hesseschen Kurve des Gewebes, sondern auch *konjugierte* Hüllgeraden dieser Kurve.

Dabei muß man freilich die beiden Paare konjugierter Hüllgeraden, durch die man ein neues Paar konjugierter Hüllgeraden der Hesseschen Kurve des Gewebes bestimmen will, zwei *verschiedenen* von den drei unter (15) aufgeführten Tripeln von Paaren konjugierter Hüllgeraden entnehmen, weil zwei Geradenpaare eines und desselben Tripels eben nur das dritte Geradenpaar dieses Tripels und somit kein neues Geradenpaar liefern würden.

Will man etwa dasjenige Paar konjugierter Hüllgeraden K, K' ermitteln, das durch die beiden Paare konjugierter Hüllgeraden A, A' und D, D' der Hesseschen Kurve des Gewebes bestimmt wird, so konstruiere man zunächst die vier Ecken des vollständigen Vierecks, das die Geraden A und A', D und D' zu Gegenseiten hat, dessen Ecken also die Ecken des einfachen Vierseits $ADA'D'$, d. h. die Punkte:

$$[AD], \quad [DA'], \quad [A'D'], \; [D'A] \quad \text{sind.}$$

Dann bildet das dritte Paar Gegenseiten dieses vollständigen Vierecks, d. h. das Geradenpaar:

$$(16) \qquad K = [AD \cdot A'D'] \quad \text{und} \quad K' = [DA' \cdot D'A]$$

(S. 334), das gesuchte dritte Paar konjugierter Hüllgeraden der Hesseschen Kurve des Gewebes.

Weiteres über konjugierte Hüllgeraden der Hesseschen Kurve eines Kegelschnittgewebes. Von dem Satze 843 läßt sich genau so wie bei dem Dualistischen die folgende Umkehrung beweisen (vgl. die obige Fig. 149):

Satz 844: Umkehrung von Satz 843: Bringt man eine Hüllgerade W der Hesseschen Kurve eines Kegelschnittgewebes, von der wir voraussetzen wollen, daß sie nicht zerfällt, zum Schnitt mit zwei konjugierten Hüllgeraden U und U' dieser Kurve, so geht von den Schnittpunkten $[WU]$ und $[WU']$ noch je eine weitere Hüllgerade V und V' an die Kurve, und diese Hüllgeraden V und V' sind ebenfalls hinsichtlich der Kurve einander konjugiert, und außerdem ist die Verbindungslinie W' der Punkte $[UV']$ und $[VU']$ die zu der Hüllgeraden W konjugierte Hüllgerade der Hesseschen Kurve des Gewebes.

Aus dem Satze 843 ergibt sich endlich noch ein Sondersatz, wenn man die beiden Hüllgeraden U und V und damit dann auch die beiden Hüllgeraden U' und V' in je eine einzige Hüllgerade U und U' zusammenrücken läßt. Dann verwandeln sich die Ecken $[UV]$ und $[U'V']$ des in dem Satze 843 genannten vollständigen Vierecks in die Berührungspunkte der Hüllgeraden U und U' mit der Hesseschen Kurve des Gewebes, und man erhält den Satz:

Satz 845: Verbindet man die Berührungspunkte zweier konjugierten Hüllgeraden U und U' der Hesseschen Kurve eines Kegelschnittgewebes, so ist die Verbindungslinie W wiederum eine Hüllgerade der Hesseschen Kurve, und zwar ist diese Hüllgerade konjugiert zu der dritten Tangente W', die sich vom Punkte $[UU']$ an die Hessesche Kurve des Gewebes legen läßt (Fig. 150).

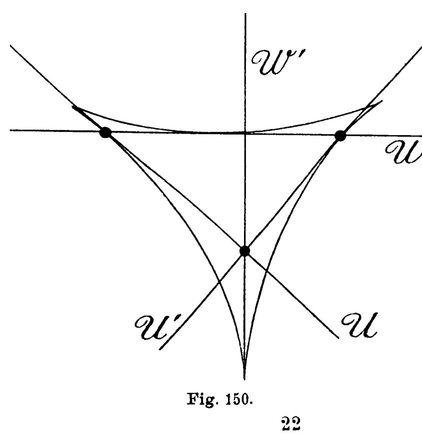


Fig. 150.

Da ferner zu einer jeden Hüllgeraden der Hesseschen Kurve eines Kegelschnittgewebes ihre konjugierte Hüllgerade eindeutig bestimmt ist, so gilt auch die Umkehrung:

Satz 846: Umkehrung zu Satz 845: Sind U und U' zwei konjugierte Hüllgeraden der Hesseschen Kurve eines Kegelschnittgewebes, ist weiter W' die dritte Tangente, die sich von dem Schnittpunkte $[UU']$ jener beiden Hüllgeraden an die Hessesche Kurve des Gewebes legen läßt, und ist endlich W die zu W' konjugierte Hüllgerade der Hesseschen Kurve, so sind die Punkte $[UW]$ und $[U'W]$ die Berührungspunkte dieser Hesseschen Kurve mit ihren Hüllgeraden U und U'. Man kann dies auch so ausdrücken (vgl. S. 301): Die Tangentialgeraden zweier konjugierten Hüllgeraden der Hesseschen Kurve eines Kegelschnittgewebes fallen in eine einzige Hüllgerade dieser Kurve zusammen, und diese Hüllgerade ist konjugiert zu der dritten Tangente, die sich von dem Schnittpunkte jener beiden konjugierten Hüllgeraden an die Hessesche Kurve legen läßt.

Die Hessesche Kurve eines Kegelschnittgewebes und einer Kurve dritter Klasse. Ist die Gleichung einer Kurve dritter Klasse wie im 52. Abschnitt in der Form gegeben:

$$a_3 U^3 = 0, \tag{17}$$

wo a_3 eine ternäre Lückenform dritter Klasse ist, und ist:

$$G = \mathfrak{g}_1 E_1 + \mathfrak{g}_2 E_2 + \mathfrak{g}_3 E_3 \tag{18}$$

ein Stab einer beliebigen Geraden der Ebene, so lautet die Gleichung ihres konischen Pols in bezug auf die Kurve (17):

$$a_3 G U^2 = 0 \tag{19}$$

oder wegen (18):

$$\mathfrak{g}_1 a_3 E_1 U^2 + \mathfrak{g}_2 a_3 E_2 U^2 + \mathfrak{g}_3 a_3 E_3 U^2 = 0. \tag{20}$$

Läßt man in dieser Gleichung die Zahlgrößen $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ alle möglichen reellen Zahlwerte durchlaufen, so stellt die Gleichung (20) das Kegelschnittgewebe dar, das die Kurven zweiter Klasse:

$$a_3 E_1 U^2 = 0, \quad a_3 E_2 U^2 = 0, \quad a_3 E_3 U^2 = 0, \tag{21}$$

d. h. die konischen Pole der Seiten des Fundamentaldreiecks, zu Grundkurven hat, und man hat den Satz:

Satz 847: Die konischen Pole sämtlicher Geraden der Ebene in bezug auf eine Kurve dritter Klasse bilden zusammen ein Kegelschnittgewebe.

Ferner beweist man wie beim Dualistischen den Satz:

Satz 848: Die konischen Pole der Geraden eines Strahlbüschels hinsichtlich einer Kurve dritter Klasse bilden eine Kegelschnittschar, und umgekehrt gehören zu allen Kurven einer Kegelschnittschar, die in einem Gewebe konischer Pole hinsichtlich einer Kurve dritter Klasse enthalten sind, als Polaren die Geraden eines Strahlbüschels.

Man kann jetzt aber weiter zeigen, daß die Hessesche Kurve des Gewebes (20) der konischen Pole einer Kurve dritter Klasse (17) mit der Hesseschen Kurve dieser Kurve dritter Klasse selbst identisch ist.

Die Gleichung der Hesseschen Kurve des Gewebes (20) ergibt sich, wenn man nach solchen Geraden V der Ebene fragt, deren Pole in bezug auf die 3 Grundkurven (21) des Gewebes in einer und derselben Geraden W liegen. Nun lauten die Gleichungen der 3 Pole einer festen Geraden V in bezug auf die 3 Grundkurven (21) des Gewebes:

$$(22)\qquad a_3 E_1 V W = 0, \quad a_3 E_2 V W = 0, \quad a_3 E_3 V W = 0,$$

wobei W den laufenden Strahl der Strahlbüschel bedeutet, die diese 3 Pole zu Scheiteln haben. Sollen also diese 3 Pole *in derselben Geraden:*

$$(23)\qquad W = \mathfrak{w}_1 E_1 + \mathfrak{w}_2 E_2 + \mathfrak{w}_3 E_3$$

enthalten sein, so müssen die 3 Gleichungen (22) durch diese Gerade W gleichzeitig befriedigt werden. Diese Gleichungen (22) nehmen aber bei Einführung des Ableitausdrucks (23) die Form an:

$$(24)\qquad \begin{cases} \mathfrak{w}_1 a_3 V E_1^2 + \mathfrak{w}_2 a_3 V E_1 E_2 + \mathfrak{w}_3 a_3 V E_1 E_3 = 0, \\ \mathfrak{w}_1 a_3 V E_2 E_1 + \mathfrak{w}_2 a_3 V E_2^2 + \mathfrak{w}_3 a_3 V E_2 E_3 = 0, \\ \mathfrak{w}_1 a_3 V E_3 E_1 + \mathfrak{w}_2 a_3 V E_3 E_2 + \mathfrak{w}_3 a_3 V E_3^2 = 0. \end{cases}$$

Und damit diese 3 Gleichungen ein von dem Lösungssystem:

$$\mathfrak{w}_1 = 0, \quad \mathfrak{w}_2 = 0, \quad \mathfrak{w}_3 = 0$$

verschiedenes Lösungssystem aufweisen, ist notwendig und hinreichend, daß die Determinante der Gleichungen (24) verschwindet, daß also die Gleichung bestehe:

$$(25)\qquad \begin{vmatrix} a_3 V E_1^2, & a_3 V E_1 E_2, & a_3 V E_1 E_3 \\ a_3 V E_2 E_1, & a_3 V E_2^2, & a_3 V E_2 E_3 \\ a_3 V E_3 E_1, & a_3 V E_3 E_2, & a_3 V E_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist somit die Gleichung der Hesseschen Kurve des Gewebes (20). Sie ist aber mit der Gleichung (16) des 53. Abschnitts für die Hessesche Kurve der Kurve dritter Klasse a_3 gleichbedeutend, wie beim Dualistischen ausführlich bewiesen worden ist. Man hat daher den Satz:

Satz 849: Die Hessesche Kurve eines Kegelschnittgewebes, das von den konischen Polen einer Kurve dritter Klasse gebildet wird, ist zugleich die Hessesche Kurve dieser Kurve dritter Klasse selbst.

Man kann noch hinzufügen: Wie die Vergleichung der Gleichungen (22) mit den Gleichungen (11) des 53. Abschnitts zeigt, ist die Zuordnung konjugierter Hüllgeraden der Hesseschen Kurve des Gewebes konischer Pole einer Kurve dritter Klasse $\boldsymbol{a}_3$ identisch mit der Zuordnung zwischen den Trägern der in ein Punktpaar zerfallenden konischen Pole der Kurve $\boldsymbol{a}_3$ und ihren Polaren hinsichtlich dieser Kurve.

Die eindreideutige Beziehung zwischen einer Kurve dritter Klasse und ihrer Hesseschen Kurve. Wie oben auf S. 306ff. gezeigt ist, besitzt eine Kurve dritter Klasse $\boldsymbol{a}_3$ mit ihrer Hesseschen Kurve $\boldsymbol{h}_3$ dieselben Rückkehrtangenten und somit auch dieselben Treffpunktsdreiecke ihrer Rückkehrtangenten. Die kanonischen Formen der Gleichungen beider Kurven können sich daher nur durch ihren Parameter unterscheiden. Bezeichnet man den Parameter der kanonischen Form der Kurve $\boldsymbol{a}_3$ mit $\mathfrak{K}$, denjenigen der kanonischen Form der Hesseschen Kurve $\boldsymbol{h}_3$ mit $\mathfrak{H}$, so lauten die kanonischen Formen der Gleichungen beider Kurven:

$$(26) \qquad [e_1 U]^3 + [e_2 U]^3 + [e_3 U]^3 - 3\mathfrak{K}[e_1 U][e_2 U][e_3 U] = 0,$$

$$(27) \qquad [e_1 U]^3 + [e_2 U]^3 + [e_3 U]^3 - 3\mathfrak{H}[e_1 U][e_2 U][e_3 U] = 0,$$

und man beweist dann wieder wie beim Dualistischen, daß zwischen den Parametern $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{H}$ der Kurven $\boldsymbol{a}_3$ und $\boldsymbol{h}_3$ die Beziehung herrscht:

$$(28) \qquad \frac{4 - \mathfrak{K}^3}{\mathfrak{K}^2} = 3\mathfrak{H},$$

d. h. eine Gleichung, die in bezug auf $\mathfrak{H}$ linear und in bezug auf $\mathfrak{K}$ vom dritten Grade ist. Es wird also wieder die Hessesche Kurve $\boldsymbol{h}_3$ durch die Urkurve dritter Klasse $\boldsymbol{a}_3$ *eindeutig* bestimmt, während es umgekehrt zu einer gegebenen Hesseschen Kurve dritter Klasse $\boldsymbol{h}_3$ *drei* im allgemeinen verschiedene Urkurven $\boldsymbol{a}_3'$, $\boldsymbol{a}_3''$ $\boldsymbol{a}_3'''$ gibt, die den 3 aus der Gleichung (28) bei gegebenem $\mathfrak{H}$ entsprechenden Werten von $\mathfrak{K}$ zugehören. Und da einer jeden von den 3 Urkurven ein Gewebe von konischen Polen entspricht, und ein jedes solche Gewebe auf der Hesseschen Kurve $\boldsymbol{h}_3$ eine Zuordnung konjugierter Tangenten bestimmt, so erhält man auf der Hesseschen Kurve $\boldsymbol{h}_3$ auch drei im allgemeinen verschiedene Zuordnungen konjugierter Tangenten, die man als konjugiert in Rücksicht auf die Urkurve $\boldsymbol{a}_3'$ oder auf die Urkurve $\boldsymbol{a}_3''$ oder endlich auf die Urkurve $\boldsymbol{a}_3'''$ bezeichnen kann.

Dieses Ergebnis wird dadurch bestätigt, daß auch die Umkehrung der dem Satze 845 entsprechenden Konstruktion dreideutig wird. Nach diesem Satze ist die Verbindungslinie der Berührungspunkte zweier konjugierten

Hüllgeraden U und U' der Hesseschen Kurve eine weitere Hüllgerade W der Hesseschen Kurve. Markiert man aber umgekehrt den Berührungspunkt einer Hüllgeraden U der Hesseschen Kurve und bestimmt die Tangentialgerade W der Tangente U, d. h. (vgl. S. 301) diejenige Tangente W der Hesseschen Kurve, die sich von dem Berührungspunkte der Tangente U außer dieser Tangente U selbst an die Hessesche Kurve ziehen läßt, so schneidet nach dem Satz 794 die Tangente W die Hessesche Kurve außer in dem Berührungspunkte der Geraden U und dem doppelt zu zählenden Berührungspunkte der Geraden W selbst noch in 3 weiteren Punkten. Die Tangenten in diesen 3 Punkten an die Hessesche Kurve mögen bezeichnet werden mit U', U'', U''' (Fig. 151). Und je nachdem man die Tangente U' oder die Tangente U'' oder endlich die Tangente U''' als konjugierte Hüllgerade der Tangente U auffaßt, erhält man auf der Hesseschen Kurve *drei verschiedene Systeme konjugierter Hüllgeraden.* Denn man kann ja nach dem im Satze 844 angegebenen Verfahren zu jeder weiteren Tangente V der Hesseschen Kurve die konjugierte Tangente V' (oder V'' oder V''') konstruieren, sobald ein Paar zugeordneter Tangenten U und U' (oder U und U'' oder U und U''') gegeben ist.

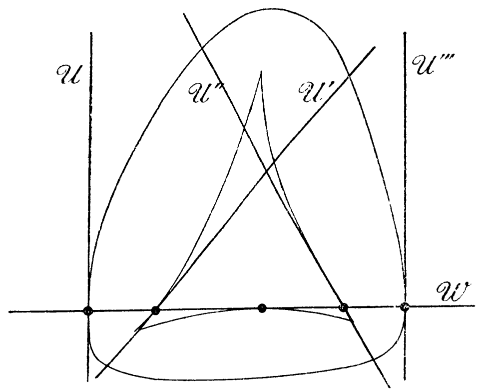


Fig. 151.

Weitere geometrische Beziehungen zwischen einer Kurve dritter Klasse und ihrer Hesseschen Kurve. Nach dem Satze 801 zerfällt der konische Pol $\mathfrak{a}_3 U$ einer Hüllgeraden U der Hesseschen Kurve $\mathfrak{h}_3$ einer Kurve dritter Klasse $\mathfrak{a}_3$ hinsichtlich dieser Urkurve $\mathfrak{a}_3$ in ein Punktpaar. Insbesondere sind also die konischen Pole $\mathfrak{a}_3 U$ und $\mathfrak{a}_3 U'$ *zweier konjugierten Hüllgeraden* U und U' der Hesseschen Kurve $\mathfrak{h}_3$ hinsichtlich der Urkurve $\mathfrak{a}_3$ zwei Punktpaare, und zwar hat nach S. 340 der konische Pol $\mathfrak{a}_3 U$ der Geraden U die Gerade U' zum Träger, und umgekehrt der konische Pol $\mathfrak{a}_3 U'$ der Geraden U' die Gerade U zum Träger.

Die 4 Verbindungslinien, welche die Punkte des Punktpaars $\mathfrak{a}_3 U$ mit denen des Punktpaars $\mathfrak{a}_3 U'$ verbinden, bilden dann die Grundgeraden der nach dem Satze 848 dem Strahlbüschel mit dem Scheitel $[UU']$ zugeordneten Schar:

$$\mathfrak{u}\mathfrak{a}_3 U + \mathfrak{u}'\mathfrak{a}_3 U' \tag{29}$$

von konischen Polen der Kurve $\mathfrak{a}_3$. Bezeichnet man diese 4 Verbindungslinien mit K, L, M, N in der Verteilung, daß das Punktpaar $[NM]$, $[KL]$ die Gerade U' zum Träger hat und den konischen Pol $\mathfrak{a}_3 U$ der Geraden U darstellt, während das Punktpaar $[NK]$, $[LM]$ die Gerade U zum Träger hat und den konischen Pol $a_3 U'$ der Geraden U' bildet (Fig. 152), so entsprechen nach dem Satze 848 den sämtlichen konischen Polen (29), d. h. den Kurven der Kegelschnittschar, welche die 4 Geraden K, L, M, N zu Grundgeraden hat, als Polaren hinsichtlich der Kurve a_3 die Strahlen des Strahlbüschels mit dem Scheitel $[UU']$.

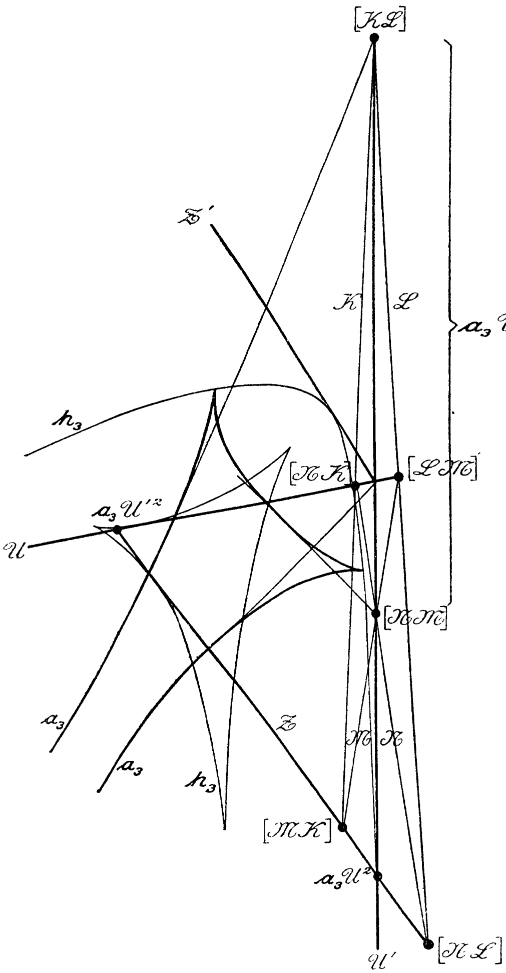


Fig. 152.

Nun ist aber in dieser Kegelschnittschar außer den beiden genannten Punktpaaren noch ein drittes Punktpaar, nämlich das Punktpaar $[NL]$, $[MK]$, enthalten. Sein Träger Z ist also nach dem Satze 801 eine Tangente der Hesseschen Kurve h_3, und dasselbe gilt von der Polare Z' dieses Punktpaars hinsichtlich der Kurve a_3. Diese aber gehört als Polare einer Kurve der Schar (29) nach dem Satze 848 zugleich auch dem Strahlbüschel mit dem Scheitel $[UU']$ an, und ist also, da sie von den Geraden U und U' verschieden sein muß, die dritte Tangente, die man vom Punkte $[UU']$ an die Hessesche Kurve h_3 ziehen kann. Zugleich ist die Gerade Z', als Polare des in ein Punktpaar zerfallenden konischen Pols mit dem Träger Z, zu der Geraden Z in bezug auf die Hessesche Kurve h_3 konjugiert; und als konjugierte Gerade zur Geraden Z' ist nach dem Satze 846 die Gerade Z die gemeinsame Tangentialgerade der Hüllgeraden U und U' der Hesseschen Kurve h_3, d. h. die Punkte $[UZ]$ und $[U'Z]$ sind die Berührungspunkte der Hesseschen Kurve h_3 mit den Hüllgeraden U und U'.

Die Punkte $[U'Z]$ und $[UZ]$ haben nun aber auch eine Bedeutung für die Urkurve a_3. Es ist nämlich der Punkt $[U'Z]$ der punktuelle Pol $a_3 U^2$ der Geraden U in bezug auf die Kurve a_3 und der Punkt $[UZ]$ der punktuelle Pol $a_3 U'^2$ der Geraden U' in bezug auf dieselbe Kurve. Denn der punktuelle Pol der Geraden U hinsichtlich der Kurve a_3 ist zugleich der Pol der Geraden U in bezug auf den konischen Pol $a_3 U$ der Geraden U hinsichtlich a_3, d. h. in bezug auf das Punktpaar $[NM]$, $[KL]$, und der Pol der Geraden U in bezug auf dieses Punktpaar liegt nach dem Satze 432 auf dem Träger U' des Punktpaars und wird von der Geraden U durch dieses Punktpaar harmonisch getrennt.

In dem vollständigen Vierseit $KLMN$ bilden nun aber die Geraden:

$$U = [NK \cdot LM],$$
$$Z = [NL \cdot MK],$$
$$U' = [NM \cdot KL]$$

die 3 Nebenseiten, und nach dem Satze 302 werden in diesem vollständigen Vierseit die von der Nebenecke $[UZ]$ ausgehenden Nebenseiten U und Z durch die auf der gegenüberliegenden Nebenseite U' gelegenen Ecken $[NM]$ und $[KL]$ des Vierseits harmonisch getrennt. Folglich ist der Punkt $[U'Z]$ der Pol der Geraden U in bezug auf das Punktpaar $[NM]$ und $[KL]$, also auch der punktuelle Pol $a_3 U^2$ der Geraden U in bezug auf die Kurve a_3. Man hat daher den Satz:

Satz 850: Der punktuelle Pol $a_3 U^2$ einer Hüllgeraden U der Hesseschen Kurve h_3 einer Kurve dritter Klasse a_3 in bezug auf die Urkurve a_3 ist der Berührungspunkt der Hesseschen Kurve h_3 mit derjenigen Tangente U', die der Tangente U der Hesseschen Kurve in Rücksicht auf die Urkurve a_3 konjugiert ist (vgl. die obige Fig. 152).

Diesen Satz wende man insbesondere auf eine Rückkehrtangente R_i der Kurve dritter Klasse a_3, z. B. auf die Rückkehrtangente R_2 an.[1]) Dazu bedarf es noch einiger Vorbereitungen: Nach dem Satze 788 ist der punktuelle Pol einer jeden Tangente einer Kurve dritter Klasse (die nicht gerade mit einer Doppeltangente der Kurve zusammenfällt), der Berührungspunkt dieser Tangente mit der Kurve. Der *punktuelle Pol* $a_3 R_2{}^2$ *der Rückkehrtangente* R_2 der Kurve a_3 in bezug auf diese Kurve wird also durch den Rückkehrpunkt k_2 der Rückkehrtangente R_2 gebildet[2]) (Fig. 153). Andererseits zerfällt *der konische Pol* $a_3 R_2$ *der Rückkehrtangente* R_2 in bezug auf die Kurve a_3 nach dem Satze 804 in den Rückkehrpunkt k_2 und den harmonischen Pol h_2 dieser Rückkehrtangente R_2. Nun gehört nach dem Satze 806 die Rückkehr-

1) Vgl. zum Folgenden: H. Wieleitner, Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung, Leipzig 1905, S. 232ff.

2) Wir bezeichnen von jetzt ab mit Rücksicht auf eine später zu entwickelnde Beziehung der Kurve dritter Klasse a_3 zu einer gewissen Kurve dritter Ordnung (vgl. Satz 872), die bisher mit r_1, r_2, r_3 bezeichneten reellen Rückkehrpunkte der Kurve a_3 mit k_1, k_2, k_3, wodurch dann die Buchstaben r_1, r_2, r_3 für die Rückkehrpunkte der Hesseschen Kurve h_3 von a_3 frei werden.

tangente R_2 der Kurve a_3 zugleich ihrer Hesseschen Kurve h_3 als Rückkehrtangente an, und die zu dieser Rückkehrtangente in Rücksicht auf die Urkurve a_3 konjugierte Tangente T_2 der Hesseschen Kurve h_3 ist der Träger des konischen Pols $a_3 R_2$ der Rückkehrtangente R_2 hinsichtlich a_3, d. h. diejenige Gerade, welche den Rückkehrpunkt k_2 der Rückkehrtangente R_2 der Kurve a_3 mit dem harmonischen Pole h_2 dieser Rückkehrtangente in bezug auf a_3 verbindet.

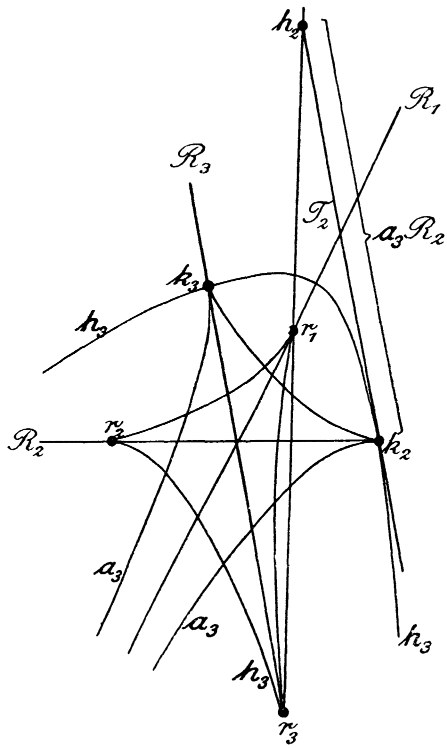


Fig. 153.

Nunmehr greifen wir auf den Satz 850 zurück. Nach ihm ist der punktuelle Pol einer jeden Hüllgeraden U der Hesseschen Kurve h_3 in bezug auf die Urkurve a_3 der Berührungspunkt der Hesseschen Kurve h_3 mit derjenigen Tangente U' der Kurve h_3, die der Tangente U der Hesseschen Kurve in Rücksicht auf die Urkurve a_3 konjugiert ist; es muß also auch der punktuelle Pol der Rückkehrtangente R_2 der Kurve a_3 in bezug auf diese Kurve, d. h. eben der Rückkehrpunkt k_2 der Rückkehrtangente R_2 von a_3, zugleich ein Punkt der Hesseschen Kurve sein, und die Tangente im Punkte k_2 an die Hessesche Kurve h_3 muß mit dem Träger T_2 des konischen Pols $a_3 R_2$ der Rückkehrtangente R_2 hinsichtlich a_3 zusammenfallen. Mit andern Worten: Die Hessesche Kurve h_3 geht nicht nur durch den zur Rückkehrtangente R_2 gehörenden Rückkehrpunkt k_2 der Kurve a_3 hindurch, sondern sie berührt in ihm zugleich diejenige Gerade T_2, die diesen Rückkehrpunkt k_2 mit dem harmonischen Pol h_2 der Rückkehrtangente R_2 verbindet. Man hat also den Satz:

Satz 851: Die Hessesche Kurve h_3 einer Kurve dritter Klasse a_3 geht durch die Rückkehrpunkte dieser Kurve hindurch und hat in ihnen diejenigen Geraden zu Tangenten, die diese Rückkehrpunkte mit den harmonischen Polen der zugehörigen Rückkehrtangenten verbinden (vgl. wieder die obige Fig. 153).

Aus dem Beweise des Satzes 850 kann man noch eine andere Schlußfolgerung ziehen. Nach diesem Beweise sind die punktuellen Pole der Geraden U und U' hinsichtlich der Kurve a_3 beziehlich die Punkte $[U'Z]$ und

$[UZ]$. Diese punktuellen Pole liegen somit beide auf der Geraden Z. Nach dem Satze 784 muß dann umgekehrt der konische Pol der Geraden Z die Geraden U und U' zu Hüllgeraden haben. Da aber die Polare Z dieses konischen Pols eine Tangente der Hesseschen Kurve $\mathfrak{h}_3$ von α_3 bildet, so zerfällt dieser konische Pol in ein Punktpaar, und der Träger dieses Punktpaars ist die zu Z konjugierte Tangente Z' der Hesseschen Kurve. Da ferner der Träger Z' des Punktpaars mit den Geraden U und U' durch einen Punkt geht, so ist der Punkt $UZ'U'$ der eine Punkt dieses Punktpaars (vgl. die obige Fig. 152). Damit ist der Satz bewiesen:

Satz 852: Der Schnittpunkt $[UU']$ zweier in Rücksicht auf eine Urkurve dritter Klasse α_3 konjugierten Hüllgeraden U und U' ihrer Hesseschen Kurve $\mathfrak{h}_3$ ist zugleich der eine Teil eines Punktpaars, das den konischen Pol einer weiteren Hüllgeraden der Hesseschen Kurve $\mathfrak{h}_3$ in bezug auf die Urkurve α_3 bildet, nämlich derjenigen Hüllgeraden Z der Hesseschen Kurve $\mathfrak{h}_3$, die in Rücksicht auf die Urkurve α_3 konjugiert ist zu der dritten Tangente Z', die sich von dem Punkte $[UU']$ an die Hessesche Kurve $\mathfrak{h}_3$ legen läßt.

Den andern Punkt des Punktpaars $\alpha_3 Z$ findet man, indem man eine nicht durch den Punkt $[UU']$ gehende Tangente T eines Schnittpunktes der Geraden Z und der Kurve α_3 mit der Geraden Z' zum Schnitt bringt.

Abschnitt 58.

Apolare Gebiete von Polarsystemen.

Die Gebiete sechster Stufe aller Potenzformen zweiter Ordnung und zweiter Klasse. Die Begriffe Kegelschnittnetz und Kegelschnittgewebe gestatten es, die oben entwickelten Eigenschaften apolarer Polarsysteme nach verschiedenen Seiten hin zu ergänzen. Nach S. 177 läßt sich jede Potenzform zweiter Ordnung $A^{(2)}$ als Vielfachensumme der sechs „Einheiten zweiter Ordnung“:

$$E_1^2, \quad E_2^2, \quad E_3^2, \quad E_2E_3, \quad E_3E_1, \quad E_1E_2$$

d. h. durch eine Summe von der Form darstellen:

$$A^{(2)} = \mathfrak{a}_{11}E_1^2 + \mathfrak{a}_{22}E_2^2 + \mathfrak{a}_{33}E_3^2 + 2\mathfrak{a}_{23}E_2E_3 + 2\mathfrak{a}_{31}E_3E_1 + 2\mathfrak{a}_{12}E_1E_2. \tag{1}$$

Und diese Potenzform war der analytische Ausdruck für diejenige Kurve zweiter Ordnung, deren Gleichung lautet:

$$[A^{(2)}x^2] = 0 \tag{2}$$

oder in Dreieckskoordinaten $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$:

$$\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{a}_{33}\mathfrak{x}_3^2 + 2\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + 2\mathfrak{a}_{31}\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1 + 2\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = 0. \tag{3}$$

Nun wollen wir eine Potenzform zweiter Ordnung $A^{(2)}$ dann und nur dann gleich Null setzen, wenn sie mit *jedem* Punktquadrat x^2 kombinatorisch multipliziert die Zahlgröße 0 liefert, wenn also für sie die Gleichung (2) identisch, d. h. für jeden Wert von x, erfüllt wird, oder was auf dasselbe hinauskommt, wenn die Gleichung (3) für jedes Wertsystem $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ befriedigt wird. Da dies aber nur dann eintritt, wenn alle sechs Koeffizienten $\mathfrak{a}_{ik}$ der Gleichung (3) $= 0$ sind, so darf die Summe auf der rechten Seite von (1) auch *nur dann* $= 0$ gesetzt werden, wenn alle sechs Größen $\mathfrak{a}_{ik}$, $i, k = 1, 2, 3$, verschwinden. Daraus folgt, daß zwischen den sechs Einheiten zweiter Ordnung:

$$E_1^2, \quad E_2^2, \quad E_3^2, \quad E_2E_3, \quad E_3E_1, \quad E_1E_2$$

keine lineare Beziehung herrscht, daß *diese sechs Einheiten zweiter Ordnung also linear unabhängig voneinander sind.*

Und da nach der Gleichung (1) jede Potenzform *zweiter Ordnung* als Vielfachensumme der *sechs* voneinander linear unabhängigen Einheiten zweiter Ordnung darstellbar ist, und entsprechend sich jede Potenzform *zweiter Klasse* als Vielfachensumme der *sechs* voneinander linear unabhängigen Einheiten zweiter Klasse:

$$e_1^2, \quad e_2^2, \quad e_3^2, \quad e_2e_3, \quad e_3e_1, \quad e_1e_2$$

ausdrücken läßt, so hat man den Satz:

Satz 853: Die Gesamtheit aller Potenzformen zweiter Ordnung und ebenso die Gesamtheit aller Potenzformen zweiter Klasse in der Ebene bildet ein Gebiet sechster Stufe.

Wir sagen nämlich in Einklang mit Bd. I, S. 290f. von der Gesamtheit aller Größen, die sich als Vielfachensummen von n linear unabhängigen Größen darstellen lassen, sie bilden ein Gebiet $n$ter Stufe.

Das Gebiet fünfter Stufe von Potenzformen zweiter Klasse und die zu ihm apolare Potenzform zweiter Ordnung. Sind *fünf* voneinander linear unabhängige Potenzformen zweiter Klasse gegeben, d. h. fünf Potenzformen *zweiter Klasse:*

$$(4)\quad \begin{cases} a^{(2)} = \mathfrak{A}_{11}e_1^2 + \mathfrak{A}_{22}e_2^2 + \mathfrak{A}_{33}e_3^2 + 2\mathfrak{A}_{23}e_2e_3 + 2\mathfrak{A}_{31}e_3e_1 + 2\mathfrak{A}_{12}e_1e_2, \\ b^{(2)} = \mathfrak{B}_{11}e_1^2 + \mathfrak{B}_{22}e_2^2 + \mathfrak{B}_{33}e_3^2 + 2\mathfrak{B}_{23}e_2e_3 + 2\mathfrak{B}_{31}e_3e_1 + 2\mathfrak{B}_{12}e_1e_2, \\ c^{(2)} = \mathfrak{C}_{11}e_1^2 + \mathfrak{C}_{22}e_2^2 + \mathfrak{C}_{33}e_3^2 + 2\mathfrak{C}_{23}e_2e_3 + 2\mathfrak{C}_{31}e_3e_1 + 2\mathfrak{C}_{12}e_1e_2, \\ d^{(2)} = \mathfrak{D}_{11}e_1^2 + \mathfrak{D}_{22}e_2^2 + \mathfrak{D}_{33}e_3^2 + 2\mathfrak{D}_{23}e_2e_3 + 2\mathfrak{D}_{31}e_3e_1 + 2\mathfrak{D}_{12}e_1e_2, \\ e^{(2)} = \mathfrak{E}_{11}e_1^2 + \mathfrak{E}_{22}e_2^2 + \mathfrak{E}_{33}e_3^2 + 2\mathfrak{E}_{23}e_2e_3 + 2\mathfrak{E}_{31}e_3e_1 + 2\mathfrak{E}_{12}e_1e_2, \end{cases}$$

von denen sich keine als Vielfachensumme der vier andern darstellen läßt, so wird eine Potenzform *zweiter Ordnung:*

$$(5)\quad A^{(2)} = \mathfrak{a}_{11}E_1^2 + \mathfrak{a}_{22}E_2^2 + \mathfrak{a}_{33}E_3^2 + 2\,\mathfrak{a}_{23}E_2E_3 + 2\,\mathfrak{a}_{31}E_3E_1 + 2\,\mathfrak{a}_{12}E_1E_2$$

bis auf einen Zahlfaktor durch die Forderung bestimmt, sie solle zu den fünf Potenzreihen zweiter Klasse (4) apolar sein[1]).

1) Vgl. zum Folgenden: Rosanes, Über Systeme von Kegelschnitten, Mathematische Annalen, Bd. 6 (1873), S. 264ff.

In der Tat läßt sich ja diese Forderung durch die fünf Gleichungen ausdrücken:

(6) $[\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{a}^{(2)}] = 0,\ [\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{b}^{(2)}] = 0,\ [\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{c}^{(2)}] = 0,\ [\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{d}^{(2)}] = 0,\ [\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{e}^{(2)}] = 0,$

und diese wiederum lassen sich nach der Gleichung (69) des 47. Abschnitts in der Form schreiben:

$$(7)\quad \begin{cases} \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{A}_{11} + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{A}_{22} + \mathfrak{a}_{33}\mathfrak{A}_{33} + 2\,\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{A}_{23} + 2\,\mathfrak{a}_{31}\mathfrak{A}_{31} + 2\,\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{A}_{12} = 0, \\ \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{B}_{11} + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{B}_{22} + \mathfrak{a}_{33}\mathfrak{B}_{33} + 2\,\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{B}_{23} + 2\,\mathfrak{a}_{31}\mathfrak{B}_{31} + 2\,\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{B}_{12} = 0, \\ \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{C}_{11} + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{C}_{22} + \mathfrak{a}_{33}\mathfrak{C}_{33} + 2\,\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{C}_{23} + 2\,\mathfrak{a}_{31}\mathfrak{C}_{31} + 2\,\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{C}_{12} = 0, \\ \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{D}_{11} + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{D}_{22} + \mathfrak{a}_{33}\mathfrak{D}_{33} + 2\,\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{D}_{23} + 2\,\mathfrak{a}_{31}\mathfrak{D}_{31} + 2\,\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{D}_{12} = 0, \\ \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{E}_{11} + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{E}_{22} + \mathfrak{a}_{33}\mathfrak{E}_{33} + 2\,\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{E}_{23} + 2\,\mathfrak{a}_{31}\mathfrak{E}_{31} + 2\,\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{E}_{12} = 0. \end{cases}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der fünf Potenzformen zweiter Klasse $\boldsymbol{a}^{(2)}, \boldsymbol{b}^{(2)}, \boldsymbol{c}^{(2)}, \boldsymbol{d}^{(2)}, \boldsymbol{e}^{(2)}$ aber bestimmen die fünf in bezug auf die sechs Größen $\mathfrak{a}_{ik}$ linearen homogenen Gleichungen (7) die Verhältnisse der sechs Größen $\mathfrak{a}_{ik}$ eindeutig und damit die Potenzform $\boldsymbol{A}^{(2)}$ bis auf einen Zahlfaktor. Man hat also den Satz:

Satz 854: Eine Potenzform zweiter Ordnung ist bis auf einen Zahlfaktor eindeutig bestimmt, sobald fünf linear unabhängige Potenzformen zweiter Klasse gegeben sind, zu denen sie apolar sein soll. Oder: Eine Kurve zweiter Ordnung wird durch fünf linear unabhängige Kurven zweiter Klasse, zu denen sie apolar sein soll, eindeutig festgelegt.

Dabei sollen n Kurven zweiter Ordnung oder zweiter Klasse als linear unabhängig voneinander bezeichnet werden, wenn sich keine von den n zugehörigen Potenzformen (oder quadratischen Formen) als Vielfachensumme der $n-1$ übrigen darstellen läßt.

Aus den Gleichungen (6) folgt durch lineare Verknüpfung, daß die Potenzform zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}^{(2)}$, die zu den fünf Potenzformen zweiter Klasse (4) apolar ist, zugleich zu sämtlichen Potenzformen zweiter Klasse apolar ist, die sich aus jenen Potenzformen zweiter Klasse (4) numerisch ableiten lassen.

Aber es bleibt noch zu zeigen, daß auch umgekehrt, wenn die Potenzform zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}^{(2)}$ zu irgendeiner sechsten Potenzform zweiter Klasse $\boldsymbol{f}^{(2)}$ apolar ist, d. h. wenn neben den Gleichungen (6) die Gleichung:

$$(8)\qquad [\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{f}^{(2)}] = 0$$

besteht, daß dann die Potenzform $\boldsymbol{f}^{(2)}$ sich als Vielfachensumme der fünf Potenzformen (4) ausdrücken läßt.

In der Tat tritt dann ja zu den fünf Gleichungen (7) noch die sechste Gleichung hinzu:

$$(9)\qquad \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{F}_{11} + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{F}_{22} + \mathfrak{a}_{33}\mathfrak{F}_{33} + 2\,\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{F}_{23} + 2\,\mathfrak{a}_{31}\mathfrak{F}_{31} + 2\,\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{F}_{12} = 0.$$

Die sechs in bezug auf die sechs Größen $\mathfrak{a}_{ik}$ linearen homogenen Gleichungen (7) und (9) aber ergeben für diese sechs Größen $\mathfrak{a}_{ik}$ nur dann ein nicht verschwindendes Lösungssystem, wenn die Determinante des Systems der Gleichungen (7) und (9) verschwindet, d. h., wenn die Determinante:

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{A}_{22} & \mathfrak{A}_{33} & \mathfrak{A}_{23} & \mathfrak{A}_{31} & \mathfrak{A}_{12} \\ \mathfrak{B}_{11} & \mathfrak{B}_{22} & \mathfrak{B}_{33} & \mathfrak{B}_{23} & \mathfrak{B}_{31} & \mathfrak{B}_{12} \\ \mathfrak{C}_{11} & \mathfrak{C}_{22} & \mathfrak{C}_{33} & \mathfrak{C}_{23} & \mathfrak{C}_{31} & \mathfrak{C}_{12} \\ \mathfrak{D}_{11} & \mathfrak{D}_{22} & \mathfrak{D}_{33} & \mathfrak{D}_{23} & \mathfrak{D}_{31} & \mathfrak{D}_{12} \\ \mathfrak{E}_{11} & \mathfrak{E}_{22} & \mathfrak{E}_{33} & \mathfrak{E}_{23} & \mathfrak{E}_{31} & \mathfrak{E}_{12} \\ \mathfrak{F}_{11} & \mathfrak{F}_{22} & \mathfrak{F}_{33} & \mathfrak{F}_{23} & \mathfrak{F}_{31} & \mathfrak{F}_{12} \end{vmatrix} = 0$$

ist. Diese Gleichung aber läßt sich, da die fünf Potenzformen $\boldsymbol{a}^{(2)}$, $\boldsymbol{b}^{(2)}$, $\boldsymbol{c}^{(2)}$, $\boldsymbol{d}^{(2)}$, $\boldsymbol{e}^{(2)}$ linear unabhängig voneinander sind, nicht anders befriedigen, als wenn:

$$(11) \qquad \mathfrak{F}_{ik} = \mathfrak{a}\mathfrak{A}_{ik} + \mathfrak{b}\mathfrak{B}_{ik} + \mathfrak{c}\mathfrak{C}_{ik} + \mathfrak{d}\mathfrak{D}_{ik} + \mathfrak{e}\mathfrak{E}_{ik}, \qquad i, k = 1, 2, 3,$$

oder, was dasselbe ist, wenn:

$$(12) \qquad \boldsymbol{f}^{(2)} = \mathfrak{a}\boldsymbol{a}^{(2)} + \mathfrak{b}\boldsymbol{b}^{(2)} + \mathfrak{c}\boldsymbol{c}^{(2)} + \mathfrak{d}\boldsymbol{d}^{(2)} + \mathfrak{e}\boldsymbol{e}^{(2)}$$

ist. Darin liegt der Satz:

Satz 855: Ist eine Potenzform zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}^{(2)}$ zu fünf linear unabhängigen Potenzformen zweiter Klasse $\boldsymbol{a}^{(2)}$, $\boldsymbol{b}^{(2)}$, $\boldsymbol{c}^{(2)}$, $\boldsymbol{d}^{(2)}$, $\boldsymbol{e}^{(2)}$ apolar, so ist sie auch zu jeder Potenzform zweiter Klasse apolar, die sich aus jenen fünf Potenzformen zweiter Klasse numerisch ableiten läßt, und außer den Potenzformen des auf diese Weise bestimmten Gebiets fünfter Stufe von Potenzformen zweiter Klasse gibt es keine weiteren Potenzformen zweiter Klasse, die zu der Potenzform zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}^{(2)}$ apolar wären.

Ist $\boldsymbol{f}^{(2)}$ eine Potenzform zweiter Klasse, die dem Gebiete fünfter Stufe von Polarsystemen zweiter Klasse angehört, das durch die fünf Potenzformen zweiter Klasse:

$$\boldsymbol{a}^{(2)}, \ \boldsymbol{b}^{(2)}, \ \boldsymbol{c}^{(2)}, \ \boldsymbol{d}^{(2)}, \ \boldsymbol{e}^{(2)}$$

bestimmt wird, ist also wie oben:

$$(12) \qquad \boldsymbol{f}^{(2)} = \mathfrak{a}\boldsymbol{a}^{(2)} + \mathfrak{b}\boldsymbol{b}^{(2)} + \mathfrak{c}\boldsymbol{c}^{(2)} + \mathfrak{d}\boldsymbol{d}^{(2)} + \mathfrak{e}\boldsymbol{e}^{(2)},$$

so kann man nach den in dem Gebiet fünfter Stufe (12) enthaltenen Potenzformen $\boldsymbol{f}^{(2)}$ fragen, *die einfach oder zweifach entarten.* Ist $\boldsymbol{A}^{(2)}$ diejenige Potenzform zweiter Ordnung, die zu den Potenzformen zweiter Klasse jenes Gebietes fünfter Stufe apolar ist, so genügt eine jede Potenzform zweiter Klasse $\boldsymbol{f}^{(2)}$ dieses Gebietes der Gleichung:

$$(13) \qquad [\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{f}^{(2)}] = 0.$$

Soll nun die Potenzform zweiter Klasse $f^{(2)}$ *einfach entarten*, so muß sie sich als algebraisches Produkt zweier Punkte y und z, d. h. in der Form:

(14) $$f^{(2)} = yz,$$

darstellen lassen. Die Gleichung (13) nimmt also die Form an:

(15) $$[A^{(2)}\{yz\}] = 0$$

und besagt, daß die Punkte y und z in bezug auf die Kurve $A^{(2)}$ konjugiert sind. Nun gibt es auf einer jeden Geraden der Ebene ∞^1 solche Punktpaare, die einander hinsichtlich einer Kurve zweiter Ordnung konjugiert sind. Dieselben bilden auf ihrer Geraden eine Involution, deren Doppelpunkte die Schnittpunkte der Geraden mit der Kurve $A^{(2)}$ sind. Und da eine Ebene ∞^2 gerade Linien enthält, so sind im ganzen in der Ebene ∞^3 Punktpaare vorhanden, die in bezug auf die Kurve $A^{(2)}$ konjugiert sind. Es kommen also unter den ∞^4 räumlich verschiedenen Kurven zweiter Klasse des Gebiets fünfter Stufe (12) ∞^3 einfach entartende, d. h. in ein Punktpaar zerfallende Kurven zweiter Klasse vor. Man hat daher den Satz:

Satz 856: In einem Gebiet fünfter Stufe von Polarsystemen zweiter Klasse sind ∞^3 Punktpaare enthalten. Dieselben sind identisch mit denjenigen Punktpaaren, die in bezug auf das zu jenem Gebiet apolare Polarsystem zweiter Ordnung $A^{(2)}$ konjugiert sind. Auf einer jeden Geraden der Ebene bilden daher die Punktpaare jenes Gebiets eine Involution, und die Doppelpunkte dieser Involution sind die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Kurve $A^{(2)}$.

Ebenso erledigt sich die Frage nach den *zweifach entartenden* Polarsystemen des betrachteten Gebiets fünfter Stufe. Da nämlich die Potenzform $f^{(2)}$ eines solchen Polarsystems zweiter Klasse sich als Punktquadrat, also in der Form:

(16) $$f^{(2)} = x^2$$

muß darstellen lassen, so nimmt für sie die Gleichung (13) die Form an:

(17) $$[A^{(2)}x^2] = 0,$$

woraus hervorgeht, daß die Punkte x, welche doppeltzählend dem Gebiet fünfter Stufe angehören, nichts anderes sind als die Punkte der Kurve zweiter Ordnung $A^{(2)}$, die zu dem Gebiet fünfter Stufe apolar ist. Es gibt also ∞^1 solche Punkte, und man hat den Satz:

Satz 857: In einem Gebiet fünfter Stufe von Polarsystemen zweiter Klasse gibt es ∞^1 zweifach entartende, d. h. einen doppeltzählenden Punkt bildende, Kurven zweiter Klasse. Der geometrische Ort dieser Punkte ist diejenige Kurve zweiter Ordnung $A^{(2)}$, die zu jenem Gebiet fünfter Stufe apolar ist.

Das Gebiet vierter Stufe von Potenzformen zweiter Klasse und das zu ihm apolare Kegelschnittbüschel. Sind nur *vier* linear unabhängige Potenzformen zweiter Klasse $a^{(2)}$, $b^{(2)}$, $c^{(2)}$, $d^{(2)}$ gegeben, und wird nach der Gesamtheit der Potenzformen zweiter Ordnung gefragt, die zu ihnen apolar sind, so nehme man zunächst noch eine fünfte Potenzform zweiter Klasse $e^{(2)}$ hinzu, die von den *vier* gegebenen Potenzformen zweiter Klasse linear unabhängig ist. Dann ist nach dem Satze 854 durch die fünf Potenzformen zweiter Klasse $a^{(2)}$, $b^{(2)}$, $c^{(2)}$, $d^{(2)}$, $e^{(2)}$ eine zu ihnen apolare Potenzform zweiter Ordnung $A^{(2)}$ bis auf einen Zahlfaktor eindeutig bestimmt. Ist ferner $f^{(2)}$ noch eine sechste Potenzform zweiter Klasse, die wiederum von den *fünf* Potenzformen $a^{(2)}$, $b^{(2)}$, $c^{(2)}$, $d^{(2)}$, $e^{(2)}$ linear unabhängig ist, so ist nach dem Satze 855 die Potenzform zweiter Klasse $f^{(2)}$ sicher nicht zu der Potenzform zweiter Ordnung $A^{(2)}$ apolar. Und da nach dem Satze 854 auch die fünf Potenzformen zweiter Klasse $a^{(2)}$, $b^{(2)}$, $c^{(2)}$, $d^{(2)}$, $f^{(2)}$ eine zu ihnen apolare Potenzform zweiter Ordnung $B^{(2)}$ bis auf einen Zahlfaktor bestimmen, so muß diese von der Potenzform $A^{(2)}$ wesentlich, d. h. nicht nur um einen Zahlfaktor, verschieden sein; denn $B^{(2)}$ ist zu $f^{(2)}$ apolar, $A^{(2)}$ dagegen nicht.

Stellt man schließlich die acht Gleichungen zusammen, welche aussagen, daß die beiden Potenzformen zweiter Ordnung $A^{(2)}$ und $B^{(2)}$ zu den vier ursprünglich gegebenen Potenzformen zweiter Klasse $a^{(2)}$, $b^{(2)}$, $c^{(2)}$, $d^{(2)}$ apolar sind, so erhält man das Gleichungssystem:

$$(18)\quad \begin{cases} [A^{(2)}a^{(2)}] = 0, & [A^{(2)}b^{(2)}] = 0, \quad [A^{(2)}c^{(2)}] = 0, \quad [A^{(2)}d^{(2)}] = 0, \\ [B^{(2)}a^{(2)}] = 0, & [B^{(2)}b^{(2)}] = 0, \quad [B^{(2)}c^{(2)}] = 0, \quad [B^{(2)}d^{(2)}] = 0. \end{cases}$$

Und multipliziert man je zwei solcher Gleichungen, welche dieselbe Potenzform zweiter Klasse enthalten, mit zwei beliebigen reellen Zahlgrößen $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ und addiert, so ergeben sich die vier neuen Gleichungen:

$$(19)\quad \begin{cases} [(\mathfrak{g}A^{(2)} + \mathfrak{h}B^{(2)})a^{(2)}] = 0, & [(\mathfrak{g}A^{(2)} + \mathfrak{h}B^{(2)})b^{(2)}] = 0, \\ [(\mathfrak{g}A^{(2)} + \mathfrak{h}B^{(2)})c^{(2)}] = 0, & [(\mathfrak{g}A^{(2)} + \mathfrak{h}B^{(2)})d^{(2)}] = 0, \end{cases}$$

welche zeigen, daß es ein ganzes Büschel $\mathfrak{g}A^{(2)} + \mathfrak{h}B^{(2)}$ von Potenzformen zweiter Ordnung gibt, die zu den vier linear unabhängigen Potenzformen zweiter Klasse $a^{(2)}$, $b^{(2)}$, $c^{(2)}$, $d^{(2)}$ apolar sind.

Man überzeugt sich ferner leicht, daß mit den Potenzformen des Büschels:

$$(20)\qquad \mathfrak{g}A^{(2)} + \mathfrak{h}B^{(2)}$$

auch die sämtlichen Potenzformen zweiter Ordnung erschöpft sind, die diese Eigenschaft haben.

In der Tat, ist $C^{(2)}$ eine Potenzform zweiter Ordnung, die sich von einer jeden der beiden Potenzformen $A^{(2)}$ und $B^{(2)}$ nicht nur um einen Zahlfaktor unterscheidet, und die wie diese zu den Potenzformen $a^{(2)}$, $b^{(2)}$, $c^{(2)}$, $d^{(2)}$ apolar ist, und ist andererseits $g^{(2)}$ eine sowohl von $a^{(2)}$, $b^{(2)}$, $c^{(2)}$, $d^{(2)}$, $e^{(2)}$

wie von $\boldsymbol{a}^{(2)}$, $\boldsymbol{b}^{(2)}$, $\boldsymbol{c}^{(2)}$, $\boldsymbol{d}^{(2)}$, $\boldsymbol{f}^{(2)}$ linear unabhängige Potenzform zweiter Klasse, welche ebenso wie die Potenzformen $\boldsymbol{a}^{(2)}$, $\boldsymbol{b}^{(2)}$, $\boldsymbol{c}^{(2)}$, $\boldsymbol{d}^{(2)}$ zu $\boldsymbol{C}^{(2)}$ apolar ist, so wird:

(21) $$[\boldsymbol{C}^{(2)}\boldsymbol{g}^{(2)}] = 0,$$

während zugleich:

(22) $$[\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{g}^{(2)}] \neq 0 \qquad \text{und} \qquad [\boldsymbol{B}^{(2)}\boldsymbol{g}^{(2)}] \neq 0$$

ist, und es wird außerdem nach Satz 854 die Potenzform $\boldsymbol{C}^{(2)}$ durch die fünf zu ihr apolaren und voneinander linear unabhängigen Potenzformen zweiter Klasse $\boldsymbol{a}^{(2)}$, $\boldsymbol{b}^{(2)}$, $\boldsymbol{c}^{(2)}$, $\boldsymbol{d}^{(2)}$, $\boldsymbol{g}^{(2)}$ bis auf einen Zahlfaktor eindeutig bestimmt. Es sei jetzt etwa:

(23) $$[\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{g}^{(2)}] = \mathfrak{a} \qquad \text{und} \qquad [\boldsymbol{B}^{(2)}\boldsymbol{g}^{(2)}] = \mathfrak{b},$$

wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Zahlgrößen bedeuten, die nach (22) von Null verschieden sind. Man sieht dann, daß die Potenzform $\boldsymbol{C}^{(2)}$ die Darstellung gestatten muß:

(24) $$\boldsymbol{C}^{(2)} = \mathfrak{g}\,\boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h}\,\boldsymbol{B}^{(2)};$$

denn es läßt sich leicht ein Wertepaar $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ angeben, für das die Gleichung (21) zugleich mit den Gleichungen:

(25) $$[\boldsymbol{C}^{(2)}\boldsymbol{a}^{(2)}] = 0, \quad [\boldsymbol{C}^{(2)}\boldsymbol{b}^{(2)}] = 0, \quad [\boldsymbol{C}^{(2)}\boldsymbol{c}^{(2)}] = 0, \quad [\boldsymbol{C}^{(2)}\boldsymbol{d}^{(2)}] = 0$$

erfüllt wird, wenn man in sie für $\boldsymbol{C}^{(2)}$ den Wert (24) einsetzt.

Zunächst werden die Gleichungen (25) durch den Ausdruck (24) für jeden Wert der Zahlgrößen $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ befriedigt. Die Substitution des Ausdrucks (24) in die Gleichung (21) aber ergibt für $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ die Gleichung:

$$\mathfrak{g}\,[\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{g}^{(2)}] + \mathfrak{h}\,[\boldsymbol{B}^{(2)}\boldsymbol{g}^{(2)}] = 0$$

oder wegen (23) die Gleichung:

$$\mathfrak{g}\,\mathfrak{a} + \mathfrak{h}\,\mathfrak{b} = 0,$$

aus der für die Zahlfaktoren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ die Proportion folgt:

(26) $$\mathfrak{g} : \mathfrak{h} = \mathfrak{b} : -\mathfrak{a}.$$

Damit aber ist bewiesen, daß jede Potenzform zweiter Klasse, die zu den vier Potenzformen zweiter Klasse $\boldsymbol{a}^{(2)}$, $\boldsymbol{b}^{(2)}$, $\boldsymbol{c}^{(2)}$, $\boldsymbol{d}^{(2)}$ apolar ist, dem Büschel $\mathfrak{g}\,\boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h}\,\boldsymbol{B}^{(2)}$ angehört, und man hat den Satz:

Satz 858: Erster Satz von Smith: Sind zwei voneinander linear unabhängige Polarsysteme zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}^{(2)}$ und $\boldsymbol{B}^{(2)}$ zu vier voneinander linear unabhängigen Polarsystemen zweiter Klasse $\boldsymbol{a}^{(2)}$, $\boldsymbol{b}^{(2)}$, $\boldsymbol{c}^{(2)}$, $\boldsymbol{d}^{(2)}$ apolar, so gilt dasselbe auch von allen Polarsystemen des Büschels $\mathfrak{g}\,\boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h}\,\boldsymbol{B}^{(2)}$, und es gibt außer den Polarsystemen dieses Büschels keine weiteren Polarsysteme, welche die angegebene Eigenschaft haben.

Aber man kann zu diesem Satze noch eine wichtige Ergänzung entwickeln. Sind wieder vier linear unabhängige Potenzformen zweiter Klasse $\boldsymbol{a}^{(2)}$, $\boldsymbol{b}^{(2)}$, $\boldsymbol{c}^{(2)}$, $\boldsymbol{d}^{(2)}$ zu zwei linear unabhängigen Potenzformen zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}^{(2)}$ und $\boldsymbol{B}^{(2)}$ apolar und damit nach Satz 856 auch zu sämtlichen Potenzformen zweiter Ordnung apolar, die in dem Büschel $\mathfrak{g}\,\boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h}\,\boldsymbol{B}^{(2)}$ enthalten sind, so gilt dasselbe auch von allen Potenzformen zweiter Klasse, die dem Gebiet vierter Stufe von Potenzformen zweiter Klasse:

$$\mathfrak{a}\,\boldsymbol{a}^{(2)} + \mathfrak{b}\,\boldsymbol{b}^{(2)} + \mathfrak{c}\,\boldsymbol{c}^{(2)} + \mathfrak{d}\,\boldsymbol{d}^{(2)} \tag{27}$$

angehören; denn aus den Gleichungen (19) folgt durch Multiplikation mit ganz beliebigen Zahlgrößen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und Addition die Gleichung:

$$[(\mathfrak{g}\,A^{(2)} + \mathfrak{h}\,B^{(2)})\,(\mathfrak{a}\,a^{(2)} + \mathfrak{b}\,b^{(2)} + \mathfrak{c}\,c^{(2)} + \mathfrak{d}\,d^{(2)})] = 0. \tag{28}$$

Andererseits sind mit den Potenzformen des Gebiets vierter Stufe (27) von Potenzformen zweiter Klasse auch die sämtlichen Potenzformen erschöpft, die zu den Potenzformen des Büschels $\mathfrak{g}\,\boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h}\,\boldsymbol{B}^{(2)}$ apolar sind. Denn wäre eine Potenzform zweiter Klasse $\boldsymbol{e}^{(2)}$, die nicht in jenem Gebiete vierter Stufe enthalten ist, die also von den Potenzformen $\boldsymbol{a}^{(2)}$, $\boldsymbol{b}^{(2)}$, $\boldsymbol{c}^{(2)}$, $\boldsymbol{d}^{(2)}$ linear unabhängig ist, zu den Potenzformen des Büschels $\mathfrak{g}\,\boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h}\,\boldsymbol{B}^{(2)}$, insbesondere also auch zu dessen „Grundformen" $\boldsymbol{A}^{(2)}$ und $\boldsymbol{B}^{(2)}$ apolar, so müßten die beiden Potenzformen $\boldsymbol{A}^{(2)}$ und $\boldsymbol{B}^{(2)}$ nach dem Satze 798 bis auf einen Zahlfaktor identisch sein, wären also gegen unsere Voraussetzung nicht linear unabhängig voneinander.

Man hat daher den Satz:

Satz 859: Zweiter Satz von Smith: Sind vier voneinander linear unabhängige Polarsysteme zweiter Klasse $\boldsymbol{a}^{(2)}$, $\boldsymbol{b}^{(2)}$, $\boldsymbol{c}^{(2)}$, $\boldsymbol{d}^{(2)}$ zu zwei voneinander linear unabhängigen Polarsystemen zweiter Ordnung apolar, so gilt dasselbe auch von allen Polarsystemen des Gebiets vierter Stufe von Polarsystemen zweiter Klasse:

$$\mathfrak{a}\,\boldsymbol{a}^{(2)} + \mathfrak{b}\,\boldsymbol{b}^{(2)} + \mathfrak{c}\,\boldsymbol{c}^{(2)} + \mathfrak{d}\,\boldsymbol{d}^{(2)},$$

und es gibt außer den Polarsystemen dieses Gebiets vierter Stufe keine weiteren Polarsysteme, welche die angegebene Eigenschaft haben.

Ist $\boldsymbol{e}^{(2)}$ eine Potenzform zweiter Klasse, die dem Gebiet vierter Stufe von Polarsystemen zweiter Klasse angehört, das durch die vier Potenzformen zweiter Klasse:

$$\boldsymbol{a}^{(2)},\ \boldsymbol{b}^{(2)},\ \boldsymbol{c}^{(2)},\ \boldsymbol{d}^{(2)}$$

bestimmt wird, ist also:

$$\boldsymbol{e}^{(2)} = \mathfrak{a}\,\boldsymbol{a}^{(2)} + \mathfrak{b}\,\boldsymbol{b}^{(2)} + \mathfrak{c}\,\boldsymbol{c}^{(2)} + \mathfrak{d}\,\boldsymbol{d}^{(2)}, \tag{29}$$

so kann man wieder nach denjenigen Potenzformen zweiter Klasse $\boldsymbol{e}^{(2)}$ fragen, *die einfach oder zweifach entarten.*

Nach den Sätzen 858 und 859 wird durch das Gebiet vierter Stufe:

$$\mathfrak{a}\,\boldsymbol{a}^{(2)} + \mathfrak{b}\,\boldsymbol{b}^{(2)} + \mathfrak{c}\,\boldsymbol{c}^{(2)} + \mathfrak{d}\,\boldsymbol{d}^{(2)}$$

ein Kegelschnittbüschel: $\quad \mathfrak{g}\,\boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h}\,\boldsymbol{B}^{(2)}$

eindeutig bestimmt, dessen sämtliche Potenzformen zu denen jenes Gebiets vierter Stufe apolar sind, so daß also eine jede Potenzform $\boldsymbol{e}^{(2)}$ dieses Gebietes für beliebiges $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ der Gleichung Genüge leistet:

$$(30) \qquad [(\mathfrak{g}\,\boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h}\,\boldsymbol{B}^{(2)})\,\boldsymbol{e}^{(2)}] = 0.$$

Soll nun die Potenzform zweiter Klasse $\boldsymbol{e}^{(2)}$ *einfach entarten*, so muß sie sich als algebraisches Produkt zweier Punkte y und z, also in der Form:

$$(31) \qquad \boldsymbol{e}^{(2)} = y\,z$$

darstellen lassen. Die Gleichung (30) nimmt daher die Form an:

$$(32) \qquad [(\mathfrak{g}\,\boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h}\,\boldsymbol{B}^{(2)})\,\{y\,z\}] = 0$$

und besagt, daß die Punkte y und z in bezug auf sämtliche Polarsysteme des Kegelschnittbüschels $\mathfrak{g}\,\boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h}\,\boldsymbol{B}^{(2)}$ konjugiert sind. Durch das Kegelschnittbüschel $\mathfrak{g}\boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h}\boldsymbol{B}^{(2)}$ wird aber nach S. 377ff. des ersten Teils dieses Bandes eine Steinersche Punkt-Punkt-Abbildung in der Ebene festgelegt, indem einem jeden Punkte y der Ebene derjenige Punkt z zugeordnet wird, der ihm hinsichtlich der beiden Grundkurven $\boldsymbol{A}^{(2)}$ und $\boldsymbol{B}^{(2)}$ des Büschels und damit hinsichtlich sämtlicher Kurven des Büschels konjugiert ist. Und da durch die Steinersche Abbildung einem jeden Punkte y der Ebene, der nicht gerade mit einer Ecke des gemeinsamen Polardreiecks des Büschels $\mathfrak{g}\,\boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h}\boldsymbol{B}^{(2)}$ zusammenfällt, ein und nur ein Punkt z zugewiesen wird, so gibt es ∞^2 in ein Punktpaar zerfallende Kurven zweiter Klasse, die in dem Gebiet vierter Stufe:

$$\mathfrak{a}\,\boldsymbol{a}^{(2)} + \mathfrak{b}\,\boldsymbol{b}^{(2)} + \mathfrak{c}\,\boldsymbol{c}^{(2)} + \mathfrak{d}\,\boldsymbol{d}^{(2)}$$

enthalten sind. Man hat also den Satz:

Satz 860: In jedem Gebiet vierter Stufe von Polarsystemen zweiter Klasse gibt es ∞^2 einfach entartende, d. h. in ein Punktpaar zerfallende, Kurven zweiter Klasse. Ist:

$$\mathfrak{g}\,\boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h}\,\boldsymbol{B}^{(2)}$$

das Kegelschnittbüschel, das zu dem Gebiet vierter Stufe von Polarsystemen zweiter Klasse apolar ist, so erhält man zu jedem Punkte y der Ebene denjenigen Punkt z, der den Punkt y zu einem Punktpaar jenes Gebiets vierter Stufe ergänzt, indem man hinsichtlich zweier Kurven des Kegelschnittbüschels $\mathfrak{g}\boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h}\boldsymbol{B}^{(2)}$ zu dem Punkte y die Polaren konstruiert; dann ist ihr Schnittpunkt der gesuchte Punkt z.

Bewegt sich der Punkt y auf einer Geraden U, so beschreibt nach dem Satze 550 der vermöge der Gleichung (32) ihm zugeordnete Punkt z *den Polkegelschnitt der Geraden U hinsichtlich des Kegelschnittbüschels* $\mathfrak{g}\boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h}\boldsymbol{B}^{(2)}$.

Man kann aber auch leicht die in dem Gebiet vierter Stufe von Kurven zweiter Klasse enthaltenen ∞^2 Punktpaare *anders gruppieren*. Es läßt sich nämlich nicht nur zu jedem Punkte y der Ebene ein Punkt z finden, der ihn zu einem Punktpaar jenes Gebiets ergänzt, sondern es ist auch in jeder Geraden U der Ebene das Paar der Schnittpunkte, das diese Gerade mit ihrem eigenen Polkegelschnitt hinsichtlich des Kegelschnittbüschels $\mathfrak{g}\boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h}\boldsymbol{B}^{(2)}$ gemein hat, ein solches Punktpaar (vgl. die Fig. 158 auf S. 373 des ersten Teils dieses Bandes, wo die Punkte o_1, o_2 der Geraden U ein derartiges Punktpaar bilden). Oder anders ausgedrückt: Auf jeder Geraden sind die Doppelpunkte derjenigen Involution, die das Kegelschnittbüschel $\mathfrak{g}\boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h}\boldsymbol{B}^{(2)}$ auf dieser Geraden hervorruft, zwei Punkte der verlangten Art (vgl. Fig. 149 S. 350 des ersten Teils dieses Bandes, wo die Punkte d_1 und d_2 der Geraden V für das dort gezeichnete Kegelschnittbüschel den gestellten Bedingungen entsprechen).

Man kann endlich noch hinzufügen: Ein *zweifach entartendes* Polarsystem zweiter Klasse, d. h. ein doppeltzählender Punkt, gehört dann und nur dann einem Gebiet vierter Stufe von Polarsystemen zweiter Klasse an, wenn er mit einem der vier Grundpunkte desjenigen Kegelschnittbüschels $\mathfrak{g}\boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h}\boldsymbol{B}^{(2)}$ zusammenfällt, das zu jenem Gebiet vierter Stufe apolar ist. Denn diese vier Grundpunkte sind die einzigen Punkte x der Ebene, die der Gleichung:

$$[(\mathfrak{g}\boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h}\boldsymbol{B}^{(2)})x^2] = 0$$

für beliebige Werte von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ Genüge leisten.

Der erste Satz von Smith (Satz 858) liefert eine Bestätigung des obigen Satzes 725, nach welchem alle Kurven zweiter Ordnung, die zu einer Kurve zweiter Klasse apolar sind und durch 3 feste Punkte gehen, die nicht die Ecken eines Polardreiecks dieser Kurve zweiter Klasse bilden, *auch noch einen vierten festen Punkt miteinander gemein haben.*

In der Tat braucht man nur von den 4 Kurven zweiter Klasse des ersten Satzes von Smith 3 Kurven durch 3 doppeltzählende feste Punkte zu ersetzen, *die nicht die Ecken eines Polardreiecks der vierten Kurve sind,* dann gehen alle Kurven zweiter Ordnung, die zu den 4 Kurven zweiter Klasse apolar sind, durch jene 3 Punkte hindurch. Da sie aber nach dem ersten Satze von Smith zugleich einem Kegelschnittbüschel angehören, so enthalten sie noch einen vierten festen Punkt[1]).

Dabei ergibt sich die oben aus dem Begriff des Polarvierecks einer Kurve

1) Vgl. hierzu und zum folgenden: E. Müller, Über Krümmungseigenschaften der Kegelschnitte samt Anwendungen auf beständig gleichartig gekrümmte Kurven. Monatshefte für Mathematik und Physik. XXVIII. Jahrgang, 1917. S. 53.

zweiter Klasse abgeleitete Konstruktion des vierten festen Punktes (S. 202f.) auch aus den Eigenschaften des Kegelschnittbüschels. Nach Seite 308 des ersten Teils dieses Bandes enthält nämlich ein Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten a, b, c, d 3 Geradenpaare, von denen die Geraden des ersten Paars durch die Punktpaare bc und ad, die des zweiten durch die Punktpaare ca und bd, die des dritten durch die Punktpaare ab und cd hindurchgehen. Da aber die Kurven des Kegelschnittbüschels auch zu der gegebenen Kurve zweiter Klasse apolar sind, so sind die Geraden der 3 Geradenpaare hinsichtlich dieser Kurve zweiter Klasse konjugiert. Das besagt, daß die zweite Gerade des ersten Geradenpaars den Pol a_1 der Geraden $[bc]$ hinsichtlich jener Kurve zweiter Klasse enthält, die zweite Gerade des zweiten Geradenpaars durch den Pol b_1 der Geraden $[ca]$ geht und die zweite Gerade des dritten Geradenpaars durch den Pol c_1 der Geraden $[ab]$. Sind also von den 4 Grundpunkten a, b, c, d des Kegelschnittbüschels nur die 3 Punkte a, b, c gegeben, so findet man den vierten Punkt d als gemeinsamen Schnitt der Geraden $[aa_1]$, $[bb_1]$, $[cc_1]$, was mit der Konstruktion auf S. 203 übereinstimmt.

Das Kegelschnittgewebe und das zu ihm apolare Kegelschnittnetz. Sind jetzt weiter nur *drei* linear unabhängige Potenzformen zweiter Klasse $\boldsymbol{a}^{(2)}, \boldsymbol{b}^{(2)}, \boldsymbol{c}^{(2)}$ gegeben, und fragt man wieder nach der Gesamtheit der Potenzformen zweiter Ordnung, die zu ihnen apolar sind, so nehme man zunächst noch drei weitere Potenzformen zweiter Klasse $\boldsymbol{d}^{(2)}, \boldsymbol{e}^{(2)}, \boldsymbol{f}^{(2)}$ hinzu, die zusammen mit den Potenzformen $\boldsymbol{a}^{(2)}, \boldsymbol{b}^{(2)}, \boldsymbol{c}^{(2)}$ ein System von sechs linear unabhängigen Potenzformen zweiter Klasse bilden. Dann bestimmen nach Satz 854 die fünf Potenzformen zweiter Klasse:

$$\boldsymbol{a}^{(2)}, \boldsymbol{b}^{(2)}, \boldsymbol{c}^{(2)}, \boldsymbol{d}^{(2)}, \boldsymbol{e}^{(2)}$$

eine zu ihnen apolare Potenzform zweiter Ordnung:

$$\boldsymbol{A}^{(2)},$$

und ebenso die fünf Potenzformen zweiter Klasse:

$$\boldsymbol{a}^{(2)}, \boldsymbol{b}^{(2)}, \boldsymbol{c}^{(2)}, \boldsymbol{f}^{(2)}, \boldsymbol{d}^{(2)}$$

eine zu ihnen apolare Potenzform zweiter Ordnung:

$$\boldsymbol{B}^{(2)},$$

endlich die fünf Potenzformen zweiter Klasse:

$$\boldsymbol{a}^{(2)}, \boldsymbol{b}^{(2)}, \boldsymbol{c}^{(2)}, \boldsymbol{e}^{(2)}, \boldsymbol{f}^{(2)}$$

eine zu ihnen apolare Potenzform zweiter Ordnung:

$$\boldsymbol{C}^{(2)}.$$

Und diese drei Potenzformen zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}^{(2)}, \boldsymbol{B}^{(2)}, \boldsymbol{C}^{(2)}$ sind wieder linear unabhängig voneinander; denn die Potenzformen $\boldsymbol{A}^{(2)}$ und $\boldsymbol{B}^{(2)}$ sind sicher nicht nur um einen Zahlfaktor von einander verschieden, weil sonst nach Satz 855 die Potenzform zweiter Klasse $f^{(2)}$ von den fünf Potenzformen:

$$a^{(2)}, b^{(2)}, c^{(2)}, d^{(2)}, e^{(2)}$$

linear abhängen müßte, indem ja dann alle sechs Potenzformen zweiter Klasse:

$$a^{(2)}, b^{(2)}, c^{(2)}, d^{(2)}, e^{(2)}, f^{(2)}$$

zu einer und derselben Potenzform zweiter Ordnung ($A^{(2)} \equiv B^{(2)}$) apolar wären.

Aber es kann auch nicht etwa die Potenzform $C^{(2)}$ dem durch die Potenzformen $A^{(2)}$ und $B^{(2)}$ bestimmten Büschel angehören. Da nämlich die beiden Potenzformen zweiter Ordnung $A^{(2)}$ und $B^{(2)}$ zu den vier Potenzformen zweiter Klasse:

$$a^{(2)}, b^{(2)}, c^{(2)}, d^{(2)}$$

apolar sind, so gilt dasselbe nach Satz 858 auch von allen Potenzformen jenes Büschels. Wenn daher $C^{(2)}$ in dem Büschel enthalten wäre, so müßte auch $C^{(2)}$ zu diesen vier Potenzformen zweiter Klasse apolar sein, insbesondere auch zu $d^{(2)}$. Dann aber wäre außer den fünf nach der Voraussetzung zu $C^{(2)}$ apolaren Potenzformen zweiter Klasse:

$$a^{(2)}, b^{(2)}, c^{(2)}, e^{(2)}, f^{(2)}$$

noch die sechste Potenzform zweiter Klasse $d^{(2)}$ zu $C^{(2)}$ apolar und somit nach dem Satze 754 gegen die Voraussetzung die Potenzform zweiter Klasse $d^{(2)}$ von den fünf Potenzformen:

$$a^{(2)}, b^{(2)}, c^{(2)}, e^{(2)}, f^{(2)}$$

linear abhängig. Also sind alle drei Potenzformen zweiter Ordnung $A^{(2)}, B^{(2)}, C^{(2)}$ linear unabhängig von einander.

Zwischen diesen drei Potenzformen zweiter Ordnung $A^{(2)}, B^{(2)}, C^{(2)}$ und den sechs Potenzformen zweiter Klasse:

$$a^{(2)}, b^{(2)}, c^{(2)}, d^{(2)}, e^{(2)}, f^{(2)}$$

bestehen nun nach dem obigen die 15 Gleichungen:

$$(33)\quad \begin{cases} [A^{(2)} a^{(2)}] = 0,\ [A^{(2)} b^{(2)}] = 0,\ [A^{(2)} c^{(2)}] = 0,\ [A^{(2)} d^{(2)}] = 0,\ [A^{(2)} e^{(2)}] = 0, \\ [B^{(2)} a^{(2)}] = 0,\ [B^{(2)} b^{(2)}] = 0,\ [B^{(2)} c^{(2)}] = 0,\ [B^{(2)} f^{(2)}] = 0,\ [B^{(2)} d^{(2)}] = 0, \\ [C^{(2)} a^{(2)}] = 0,\ [C^{(2)} b^{(2)}] = 0,\ [C^{(2)} c^{(2)}] = 0,\ [C^{(2)} e^{(2)}] = 0,\ [C^{(2)} f^{(2)}] = 0. \end{cases}$$

Und aus den neun Gleichungen der drei ersten Spalten folgen durch Multiplikation mit drei beliebigen Zahlfaktoren $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ und Addition die drei weiteren Gleichungen:

$$(34)\quad [(\mathfrak{g} A^{(2)} + \mathfrak{h} B^{(2)} + \mathfrak{k} C^{(2)})\, a^{(2)}] = 0,\ [(\mathfrak{g} A^{(2)} + \mathfrak{h} B^{(2)} + \mathfrak{k} C^{(2)})\, b^{(2)}] = 0,$$
$$[(\mathfrak{g} A^{(2)} + \mathfrak{h} B^{(2)} + \mathfrak{k} C^{(2)})\, c^{(2)}] = 0.$$

In ihnen stellt die Gesamtheit der Potenzformen $\mathfrak{g}A^{(2)}+\mathfrak{h}B^{(2)}+\mathfrak{k}C^{(2)}$ ein Netz von Polarsystemen dar; die Gleichungen (34) zeigen also, daß es ein ganzes Netz von Polarsystemen zweiter Ordnung gibt, die zu drei gegebenen, voneinander linear unabhängigen Polarsystemen zweiter Klasse apolar sind.

Aber man beweist wieder ebenso wie auf S. 225 ff., daß mit den Polarsystemen dieses Netzes auch sämtliche Polarsysteme erschöpft sind, die diese Eigenschaft haben. Man nehme dazu eine beliebige Potenzform zweiter Ordnung $D^{(2)}$ an, die ebenso wie die drei Potenzformen zweiter Ordnung $A^{(2)}, B^{(2)}, C^{(2)}$ zu den drei Potenzformen zweiter Klasse $a^{(2)}, b^{(2)}, c^{(2)}$ apolar ist, die also die drei Gleichungen befriedigt:

$$(35) \qquad [D^{(2)}a^{(2)}]=0, \quad [D^{(2)}b^{(2)}]=0, \quad [D^{(2)}c^{(2)}]=0.$$

Diese Potenzform zweiter Ordnung $D^{(2)}$ kann man sich dadurch festgelegt denken, daß man noch zwei weitere Potenzformen zweiter Klasse $g^{(2)}$ und $h^{(2)}$ angibt, die von ihr gestützt werden, so daß also neben den Gleichungen (35) noch die beiden Gleichungen bestehen:

$$(36) \qquad [D^{(2)}g^{(2)}]=0 \quad \text{und} \quad [D^{(2)}h^{(2)}]=0.$$

Dabei wird man die Auswahl der beiden Potenzformen zweiter Klasse $g^{(2)}$ und $h^{(2)}$ so zu treffen haben, daß

einmal der triviale Fall ausgeschlossen wird, wo die Potenzform $D^{(2)}$ mit einer der drei Potenzformen $A^{(2)}, B^{(2)}, C^{(2)}$ bis auf einen Zahlfaktor übereinstimmt, und daß

andererseits die fünf Potenzformen zweiter Klasse $a^{(2)}, b^{(2)}, c^{(2)}, g^{(2)}, h^{(2)}$ die Potenzform zweiter Ordnung $D^{(2)}$ abgesehen von einem Zahlfaktor auch wirklich bestimmen.

Der *ersten Forderung* wird man gerecht, wenn man dafür sorgt, daß wenigstens eine von den beiden Potenzformen zweiter Klasse $g^{(2)}$ und $h^{(2)}$, etwa die Potenzform $g^{(2)}$, sowohl von den fünf Potenzformen zweiter Klasse:

$$a^{(2)}, b^{(2)}, c^{(2)}, d^{(2)}, e^{(2)}$$

linear unabhängig ist, zu denen die Potenzform zweiter Ordnung $A^{(2)}$ apolar ist, wie auch von den fünf Potenzformen zweiter Klasse:

$$a^{(2)}, b^{(2)}, c^{(2)}, f^{(2)}, d^{(2)},$$

die auf der Potenzform zweiter Ordnung $B^{(2)}$ ruhen, wie endlich zu den fünf Potenzformen zweiter Klasse:

$$a^{(2)}, b^{(2)}, c^{(2)}, e^{(2)}, f^{(2)},$$

die von der Potenzform zweiter Ordnung $C^{(2)}$ gestützt werden.

Diese Verfügung über die Potenzform $g^{(2)}$ bedingt es dann, daß die Ungleichungen bestehen:

$$(37) \qquad [A^{(2)}g^{(2)}]\neq 0, \quad [B^{(2)}g^{(2)}]\neq 0, \quad [C^{(2)}g^{(2)}]\neq 0.$$

Um auch die *zweite der oben gestellten Forderungen* zu erfüllen, entnehme man die Potenzform $\boldsymbol{h}^{(2)}$ dem Gebiete fünfter Stufe von Potenzformen zweiter Klasse, das sich aus den fünf Potenzformen:

$$\boldsymbol{a}^{(2)}, \boldsymbol{b}^{(2)}, \boldsymbol{c}^{(2)}, \boldsymbol{d}^{(2)}, \boldsymbol{g}^{(2)}$$

numerisch ableiten läßt, setze somit:

$$\boldsymbol{h}^{(2)} = \mathfrak{p}\boldsymbol{a}^{(2)} + \mathfrak{q}\boldsymbol{b}^{(2)} + \mathfrak{r}\boldsymbol{c}^{(2)} + \mathfrak{s}\boldsymbol{d}^{(2)} + \mathfrak{t}\boldsymbol{g}^{(2)}, \tag{38}$$

wobei noch die Bestimmung hinzugefügt werden mag, daß wenigstens die beiden letzten Ableitzahlen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ von Null verschieden seien, daß also

$$\mathfrak{s} \neq 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{t} \neq 0 \tag{39}$$

sei. Alsdann wird durch die fünf Potenzformen zweiter Klasse $\boldsymbol{a}^{(2)}, \boldsymbol{b}^{(2)}, \boldsymbol{c}^{(2)}, \boldsymbol{g}^{(2)}, \boldsymbol{h}^{(2)}$ eine beliebige zu den Potenzformen $\boldsymbol{a}^{(2)}, \boldsymbol{b}^{(2)}, \boldsymbol{c}^{(2)}$ apolare und von den Potenzformen zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}^{(2)}, \boldsymbol{B}^{(2)}, \boldsymbol{C}^{(2)}$ verschiedene Potenzform zweiter Ordnung $\boldsymbol{D}^{(2)}$ bis auf einen Zahlfaktor festgelegt, und man kann beweisen, daß sich drei Zahlgrößen $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ finden lassen, für die:

$$\boldsymbol{D}^{(2)} = \mathfrak{g}\boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h}\boldsymbol{B}^{(2)} + \mathfrak{k}\boldsymbol{C}^{(2)} \tag{40}$$

ist.

Zunächst befriedigt der Ausdruck (40) nach (34) die drei Gleichungen (35) *für beliebige Werte von* $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß sich die drei Zahlgrößen $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ so bestimmen lassen, daß durch den Ausdruck (40) auch die Gleichungen (36) erfüllt werden. Die Substitution des Ausdrucks (40) in die Gleichungen (36) ergibt für die Ableitzahlen $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ von $\boldsymbol{D}^{(2)}$ die Gleichungen:

$$\begin{cases} \mathfrak{g}\,[\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{g}^{(2)}] + \mathfrak{h}\,[\boldsymbol{B}^{(2)}\boldsymbol{g}^{(2)}] + \mathfrak{k}\,[\boldsymbol{C}^{(2)}\boldsymbol{g}^{(2)}] = 0, \\ \mathfrak{g}\,[\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{h}^{(2)}] + \mathfrak{h}\,[\boldsymbol{B}^{(2)}\boldsymbol{h}^{(2)}] + \mathfrak{k}\,[\boldsymbol{C}^{(2)}\boldsymbol{h}^{(2)}] = 0. \end{cases} \tag{41}$$

Und bezeichnet man die in diesen Gleichungen auftretenden kombinatorischen Produkte der Reihe nach mit:

$$\begin{matrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, \\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, \end{matrix}$$

setzt also:

$$\begin{cases} [\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{g}^{(2)}] = \mathfrak{a},\ [\boldsymbol{B}^{(2)}\boldsymbol{g}^{(2)}] = \mathfrak{b},\ [\boldsymbol{C}^{(2)}\boldsymbol{g}^{(2)}] = \mathfrak{c}, \\ [\boldsymbol{A}^{(2)}\boldsymbol{h}^{(2)}] = \mathfrak{A},\ [\boldsymbol{B}^{(2)}\boldsymbol{h}^{(2)}] = \mathfrak{B},\ [\boldsymbol{C}^{(2)}\boldsymbol{h}^{(2)}] = \mathfrak{C}, \end{cases} \tag{42}$$

wo wegen (37) die drei Zahlgrößen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ von Null verschieden sind, so lassen sich die Gleichungen (41) auch durch die Gleichungen ersetzen:

$$\begin{cases} \mathfrak{g}\mathfrak{a} + \mathfrak{h}\mathfrak{b} + \mathfrak{k}\mathfrak{c} = 0, \\ \mathfrak{g}\mathfrak{A} + \mathfrak{h}\mathfrak{B} + \mathfrak{k}\mathfrak{C} = 0, \end{cases} \tag{43}$$

aus denen für die Ableitzahlen $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ von $\boldsymbol{D}^{(2)}$ die laufende Proportion folgt:

$$\mathfrak{g} : \mathfrak{h} : \mathfrak{k} = \begin{vmatrix} \mathfrak{b} & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{B} & \mathfrak{C} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \mathfrak{c} & \mathfrak{a} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{A} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} \\ \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \end{vmatrix}. \tag{44}$$

Und diese Proportion würde die Verhältnisse der drei Zahlgrößen $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ nur dann unbestimmt lassen, wenn sich verhalten würde:

$$(\dagger) \qquad \mathfrak{A} : \mathfrak{B} : \mathfrak{C} = \mathfrak{a} : \mathfrak{b} : \mathfrak{c}.$$

Das Bestehen dieser Proportion (†) aber ist durch die Ungleichungen (39) ausgeschlossen; denn es wird wegen (42) und (38)

$$\begin{cases} \mathfrak{A} = [\boldsymbol{A}^{(2)} \boldsymbol{h}^{(2)}] = [\boldsymbol{A}^{(2)} (\mathfrak{p}\boldsymbol{a}^{(2)} + \mathfrak{q}\boldsymbol{b}^{(2)} + \mathfrak{r}\boldsymbol{c}^{(2)} + \mathfrak{s}\boldsymbol{d}^{(2)} + \mathfrak{t}\boldsymbol{g}^{(2)})], \\ \mathfrak{B} = [\boldsymbol{B}^{(2)} \boldsymbol{h}^{(2)}] = [\boldsymbol{B}^{(2)} (\mathfrak{p}\boldsymbol{a}^{(2)} + \mathfrak{q}\boldsymbol{b}^{(2)} + \mathfrak{r}\boldsymbol{c}^{(2)} + \mathfrak{s}\boldsymbol{d}^{(2)} + \mathfrak{t}\boldsymbol{g}^{(2)})], \\ \mathfrak{C} = [\boldsymbol{C}^{(2)} \boldsymbol{h}^{(2)}] = [\boldsymbol{C}^{(2)} (\mathfrak{p}\boldsymbol{a}^{(2)} + \mathfrak{q}\boldsymbol{b}^{(2)} + \mathfrak{r}\boldsymbol{c}^{(2)} + \mathfrak{s}\boldsymbol{d}^{(2)} + \mathfrak{t}\boldsymbol{g}^{(2)})] \end{cases}$$

oder wegen (33):

$$\begin{cases} \mathfrak{A} = \qquad \mathfrak{t}[\boldsymbol{A}^{(2)} \boldsymbol{g}^{(2)}], \\ \mathfrak{B} = \qquad \mathfrak{t}[\boldsymbol{B}^{(2)} \boldsymbol{g}^{(2)}], \\ \mathfrak{C} = \mathfrak{s}[\boldsymbol{C}^{(2)} \boldsymbol{d}^{(2)}] + \mathfrak{t}[\boldsymbol{C}^{(2)} \boldsymbol{g}^{(2)}] \end{cases}$$

oder endlich wegen (42):

$$(45) \qquad \begin{cases} \mathfrak{A} = \qquad \mathfrak{t}\mathfrak{a}, \\ \mathfrak{B} = \qquad \mathfrak{t}\mathfrak{b}, \\ \mathfrak{C} = \mathfrak{s}[\boldsymbol{C}^{(2)} \boldsymbol{d}^{(2)}] + \mathfrak{t}\mathfrak{c}. \end{cases}$$

Und diese Gleichungen zeigen, da nach (39) die Zahlgrößen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ von Null verschieden sind, und wegen der linearen Unabhängigkeit der sechs Potenzformen zweiter Klasse:

$$\boldsymbol{a}^{(2)}, \boldsymbol{b}^{(2)}, \boldsymbol{c}^{(2)}, \boldsymbol{d}^{(2)}, \boldsymbol{e}^{(2)}, \boldsymbol{f}^{(2)}$$

auch:

$$(46) \qquad [\boldsymbol{C}^{(2)} \boldsymbol{d}^{(2)}] \neq 0$$

ist, daß die Proportion (†) mit den gemachten Voraussetzungen unvereinbar ist. Man hat daher den Satz:

Satz 861: Dritter Satz von Smith: Sind drei voneinander linear unabhängige Polarsysteme zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}^{(2)}, \boldsymbol{B}^{(2)}, \boldsymbol{C}^{(2)}$ zu drei voneinander linear unabhängigen Polarsystemen zweiter Klasse $\boldsymbol{a}^{(2)}, \boldsymbol{b}^{(2)}, \boldsymbol{c}^{(2)}$ apolar, so gilt dasselbe auch von allen Polarsystemen des Kegelschnittnetzes:

$$\mathfrak{g}\boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h}\boldsymbol{B}^{(2)} + \mathfrak{k}\boldsymbol{C}^{(2)},$$

und es gibt außer den Polarsystemen dieses Netzes keine weiteren Polarsysteme, welche die angegebene Eigenschaft haben.

Aber auch hier wieder gilt zu diesem Satze eine wichtige Ergänzung. Sind nämlich abermals drei linear unabhängige Potenzformen zweiter Klasse $\boldsymbol{a}^{(2)}, \boldsymbol{b}^{(2)}, \boldsymbol{c}^{(2)}$ zu drei linear unabhängigen Potenzformen zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}^{(2)}, \boldsymbol{B}^{(2)}, \boldsymbol{C}^{(2)}$ apolar und damit nach dem Satze 861 auch zu sämtlichen Potenzformen zweiter Ordnung apolar, die in dem Netze $\mathfrak{g}\boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h}\boldsymbol{B}^{(2)} + \mathfrak{k}\boldsymbol{C}^{(2)}$

enthalten sind, so gilt dasselbe auch von allen Potenzformen zweiter Klasse, die dem Gewebe:

(47) $$\mathfrak{p}\,\boldsymbol{a}^{(2)} + \mathfrak{q}\,\boldsymbol{b}^{(2)} + \mathfrak{r}\,\boldsymbol{c}^{(2)}$$

angehören; denn aus den Gleichungen (34) folgt durch Multiplikation mit drei ganz beliebigen Zahlgrößen $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ und Addition die Gleichung

(48) $$[(\mathfrak{g}\boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h}\boldsymbol{B}^{(2)} + \mathfrak{k}\boldsymbol{C}^{(2)})(\mathfrak{p}\,\boldsymbol{a}^{(2)} + \mathfrak{q}\,\boldsymbol{b}^{(2)} + \mathfrak{r}\boldsymbol{c}^{(2)})] = 0.$$

Andererseits sind mit den Potenzformen des Gewebes (47) auch die sämtlichen Potenzformen erschöpft, die zu den Potenzformen des Netzes:

(49) $$\mathfrak{g}\boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h}\boldsymbol{B}^{(2)} + \mathfrak{k}\boldsymbol{C}^{(2)}$$

apolar sind. Denn wäre eine Potenzform zweiter Klasse $\boldsymbol{d}^{(2)}$, die nicht in jenem Gewebe enthalten ist, die also von den Potenzformen $\boldsymbol{a}^{(2)}, \boldsymbol{b}^{(2)}, \boldsymbol{c}^{(2)}$ linear unabhängig ist, zu den Potenzformen des Netzes (49), insbesondere also auch zu dessen „Grundformen" $\boldsymbol{A}^{(2)}, \boldsymbol{B}^{(2)}, \boldsymbol{C}^{(2)}$ apolar, so müßten nach dem Satze 858 die drei Potenzformen $\boldsymbol{A}^{(2)}, \boldsymbol{B}^{(2)}, \boldsymbol{C}^{(2)}$ einem und demselben Büschel angehören, wären also gegen unsere Voraussetzung nicht linear unabhängig voneinander. Man hat daher den Satz:

Satz 862: Vierter Satz von Smith: Sind drei voneinander linear unabhängige Polarsysteme zweiter Klasse $\boldsymbol{a}^{(2)}, \boldsymbol{b}^{(2)}, \boldsymbol{c}^{(2)}$ zu drei voneinander linear unabhängigen Polarsystemen zweiter Ordnung apolar, so gilt dasselbe von allen Polarsystemen des Kegelschnittgewebes: $$\mathfrak{p}\,\boldsymbol{a}^{(2)} + \mathfrak{q}\,\boldsymbol{b}^{(2)} + \mathfrak{r}\,\boldsymbol{c}^{(2)},$$ und es gibt außer den Polarsystemen dieses Gewebes keine weiteren Polarsysteme, welche die angegebene Eigenschaft haben.

Dieser Satz bildet zugleich das dualistische Gegenstück des Satzes 861.

Die Kegelschnittschar und das zu ihr apolare Gebiet vierter Stufe von Potenzformen zweiter Ordnung. Die Potenzform zweiter Klasse und das zu ihr apolare Gebiet fünfter Stufe von Potenzformen zweiter Ordnung. Man kann schließlich auch die Sätze 858 und 859 und ebenso die Sätze 854 und 855 dualistisch übertragen. Man erhält so aus den Sätzen 858 und 859 den Satz:

Satz 863: Sind zwei voneinander linear unabhängige Polarsysteme zweiter Klasse $\boldsymbol{a}^{(2)}$ und $\boldsymbol{b}^{(2)}$ zu vier linear unabhängigen Polarsystemen zweiter Ordnung $\boldsymbol{A}^{(2)}, \boldsymbol{B}^{(2)}, \boldsymbol{C}^{(2)}, \boldsymbol{D}^{(2)}$ apolar, so gilt dasselbe auch von allen Polarsystemen der Schar:

$$\mathfrak{g}\,\boldsymbol{a}^{(2)} + \mathfrak{h}\,\boldsymbol{b}^{(2)},$$

und es gibt außer den Polarsystemen dieser Schar keine weiteren Polarsysteme, die die angegebene Eigenschaft haben. Umgekehrt sind dann auch alle Polarsysteme des Gebiets vierter Stufe von Polarsystemen zweiter Ordnung:

$$\mathfrak{a}A^{(2)}+\mathfrak{b}B^{(2)}+\mathfrak{c}C^{(2)}+\mathfrak{d}D^{(2)}$$

und nur diese Polarsysteme zweiter Ordnung zu den Polarsystemen jener Schar apolar.

Und ebenso ergibt sich aus den Sätzen 854 und 855 der Satz:

Satz 864: Eine Potenzform zweiter Klasse ist bis auf einen Zahlfaktor eindeutig bestimmt, sobald fünf linear unabhängige Potenzformen zweiter Ordnung gegeben sind, zu denen sie apolar sein soll. Oder: Eine Kurve zweiter Klasse wird durch fünf linear unabhängige Kurven zweiter Ordnung, zu denen sie apolar sein soll, eindeutig festgelegt. Umgekehrt: Ist eine Potenzform zweiter Klasse $\alpha^{(2)}$ zu fünf linear unabhängigen Potenzformen zweiter Ordnung $A^{(2)}, B^{(2)}, C^{(2)}, D^{(2)}, E^{(2)}$ apolar, so ist sie auch zu allen Potenzformen des Gebiets fünfter Stufe von Polarsystemen zweiter Ordnung:

$$\mathfrak{a}A^{(2)}+\mathfrak{b}B^{(2)}+\mathfrak{c}C^{(2)}+\mathfrak{d}D^{(2)}+\mathfrak{e}E^{(2)}$$

apolar, aber auch nur zu diesen Polarsystemen zweiter Ordnung.

Abschnitt 59.

Die Cayleysche Kurve eines Kegelschnittnetzes und Kegelschnittgewebes.

Das Doppelverhältnis eines Punktwurfes einer Geraden, dessen Punkte aus 2 Grundpunkten dieser Geraden durch die Zahlgrößen 1 *und* $\mathfrak{g}_i$, $i=1,2,3,4$, *abgeleitet sind.* Auf S. 54 des ersten Bandes wurde das Doppelverhältnis eines Punktwurfes a, b, c, d einer Geraden bestimmt, von dem die beiden letzten Punkte c und d durch die beiden ersten Punkte a und b vermöge der Gleichungen:

(1) $$c=a+\mathfrak{g}b \quad \text{und} \quad d=a+\mathfrak{h}b$$

ausgedrückt sind. Es ergab sich für das Doppelverhältnis $(abcd)$ jenes Wurfes der Wert:

(2) $$(abcd)=\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}.$$

Es ist aber noch von Interesse, auch den Wert des Doppelverhältnisses von 4 Punkten a_i, $i=1,2,3,4$, einer Geraden zu bestimmen, die mit Hilfe der Zahlgrößen 1 und g_i, $i=1,2,3,4$, aus 2 beliebigen Punkten a und b dieser Geraden, „ihren Grundpunkten" abgeleitet sind, falls man also für diese 4 Punkte a_i die Darstellung hat:

(3) $$a_i=a+\mathfrak{g}_i b,\ i=1,2,3,4.$$

Es wird dann das Doppelverhältnis $(a_1 a_2 a_3 a_4)$:

$$(a_1 a_2 a_3 a_4) = \frac{[a_1 a_3]}{[a_3 a_2]} : \frac{[a_1 a_4]}{[a_4 a_2]}$$

$$= \frac{[(a + \mathfrak{g}_1 b)(a + \mathfrak{g}_3 b)]}{[(a + \mathfrak{g}_3 b)(a + \mathfrak{g}_2 b)]} : \frac{[(a + \mathfrak{g}_1 b)(a + \mathfrak{g}_4 b)]}{[(a + \mathfrak{g}_4 b)(a + \mathfrak{g}_2 b)]},$$

das heißt:

(4) $$(a_1 a_2 a_3 a_4) = \frac{\mathfrak{g}_3 - \mathfrak{g}_1}{\mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_3} : \frac{\mathfrak{g}_4 - \mathfrak{g}_1}{\mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_4}.$$

Die Bedingung dafür, daß der Punktwurf $(a_1 a_2 a_3 a_4)$ harmonisch sei, daß also sein Doppelverhältnis den Wert 1 annehme, lautet somit:

(5) $$\frac{\mathfrak{g}_3 - \mathfrak{g}_1}{\mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_3} + \frac{\mathfrak{g}_4 - \mathfrak{g}_1}{\mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_4} = 0,$$

eine Gleichung, der man auch die Form geben kann[1]):

(6) $$\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2)(\mathfrak{g}_3 + \mathfrak{g}_4) + \mathfrak{g}_3 \mathfrak{g}_4 = 0.$$

Man hat daher den Satz:

Satz 865: Damit 4 Punkte einer Geraden ab, nämlich die Punkte $a_i = a + \mathfrak{g}_i b$, $i = 1, 2, 3, 4$, einen harmonischen Punktwurf a_1, a_2, a_3, a_4 bilden, ist notwendig und hinreichend, daß zwischen ihren 4 Parametern $\mathfrak{g}_i$ die Beziehung herrsche:

(6) $$\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2)(\mathfrak{g}_3 + \mathfrak{g}_4) + \mathfrak{g}_3 \mathfrak{g}_4 = 0.$$

Die Geraden der Linienpaare eines Kegelschnittnetzes als Träger konjugierter Punkte seiner Hesseschen Kurve. Durch irgend zwei Kurven eines Kegelschnittnetzes:

(7) $$\mathfrak{g} A^{(2)} + \mathfrak{h} B^{(2)} + \mathfrak{k} C^{(2)},$$

etwa durch die beiden ersten Grundkurven $A^{(2)}$ und $B^{(2)}$ des Netzes, wird auf einer jeden Geraden V der Ebene eine Punktinvolution bestimmt, nämlich diejenige Punktinvolution, die nach dem Satze von Desargues — Sturm (Satz 531) durch das in dem Netz enthaltene Kegelschnittbüschel:

(8) $$\mathfrak{g} A^{(2)} + \mathfrak{h} B^{(2)}$$

aus der Geraden V ausgeschnitten wird. Die Doppelpunkte n_1 und n_2 dieser Punktinvolution sind dann, — mögen sie nun reell oder konjugiert komplex sein, — in bezug auf die Kurven $A^{(2)}$ und $B^{(2)}$ konjugiert.

Gehört insbesondere die Gerade V einer in ein Linienpaar zerfallenden Kurve $L^{(2)}$ des Netzes als Teil an, so sind die Doppelpunkte n_1 und n_2 jener Punktinvolution auch hinsichtlich dieser zerfallenden Kurve $L^{(2)}$ einander konjugiert; *denn auf einer Geraden V eines solchen Linienpaares $L^{(2)}$ sind überhaupt je 2 beliebige Punkte hinsichtlich dieses Linienpaares $L^{(2)}$*

1) Vgl. hierzu: O. Hesse, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. Zweite Auflage. Leipzig 1873. S. 29.

konjugiert. Da nämlich ein jeder Punkt x einer Geraden V dieses Linienpaars die Gerade V selbst zur Polare hinsichtlich des Linienpaars hat, so muß wirklich jeder Punkt x der Geraden V zu jedem Punkte x' dieser Geraden in bezug auf das Linienpaar $L^{(2)}$ konjugiert sein (vgl. Fig. 154). Die Doppelpunkte n_1 und n_2 der betrachteten Punktinvolution sind also für eine Gerade V, die einem Linienpaar $L^{(2)}$ des Kegelschnittnetzes (7) angehört, hinsichtlich der 3 Kurven $A^{(2)}, B^{(2)}, L^{(2)}$ des Netzes konjugiert. Ist daher das Linienpaar $L^{(2)}$ nicht gerade in dem durch die Kurven $A^{(2)}$ und $B^{(2)}$ bestimmten Kegelschnittbüschel (8) enthalten, sind somit die 3 Kurven zweiter Ordnung $A^{(2)}, B^{(2)}, L^{(2)}$ linear unabhängig voneinander, so sind die Punkte n_1 und n_2 *überhaupt hinsichtlich sämtlicher Kurven des Netzes* (7) *konjugiert,* insbesondere auch in bezug auf die dritte Grundkurve $C^{(2)}$ des Netzes.

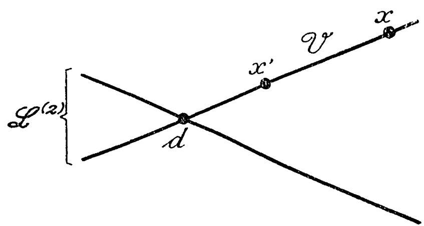


Fig. 154.

Nach dem ersten Satze von Hesse (Satz 825) gehören somit die Punkte n_1 und n_2 auch beide der Hesseschen Kurve des Netzes an, und zwar sind sie konjugierte Punkte dieser Kurve. Man kann übrigens auch leicht den dritten Punkt angeben, den die Hessesche Kurve des Netzes (7) mit der Geraden V gemein hat. Denn, da nach dem Satze 828 die Hessesche Kurve eines Kegelschnittnetzes der geometrische Ort der Doppelpunkte aller Linienpaare ist, die in dem Netze enthalten sind, so muß die Hessesche Kurve des Netzes (7) insbesondere auch durch den Doppelpunkt d des Linienpaars $L^{(2)}$ hindurchgehen, welchem nach der Voraussetzung die Gerade V angehört.[1])

Bedingungsgleichung für ein Punktpaar, das die Verbindungslinie zweier konjugierten Punkte eines Kegelschnittnetzes bestimmt. Sind y und z zwei Punkte einer Geraden, die zwei konjugierte Punkte n_1 und n_2 eines Kegelschnittnetzes, oder was nach S. 313f. dasselbe ist, zwei konjugierte Punkte der Hesseschen Kurve des Netzes, miteinander verbindet, so bekommt man für die Schnittpunkte der Geraden $[yz]$ mit den Grundkurven $A^{(2)}$, $B^{(2)}$, $C^{(2)}$ des Netzes die Gleichungen:

$$(9)\qquad \begin{cases} [A^{(2)}(y + \mathfrak{s} z)^2] = 0, \\ [B^{(2)}(y + \mathfrak{t} z)^2] = 0, \\ [C^{(2)}(y + \mathfrak{u} z)^2] = 0, \end{cases}$$

1) Vgl. übrigens auch die obige Fig. 146, in der die Punkte n_1 n_2 durch die Punkte x, x' vertreten werden und der Punkt d durch den Punkt z'.

in denen $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$ drei Zahlgrößen sind, die jenen Schnittpunkten als Parameter angehören. Diese Gleichungen (9) lassen sich aber auch in der Form schreiben:

$$(10)\qquad \begin{cases} [A^{(2)}y^2] + 2\mathfrak{s}[A^{(2)}\{yz\}] + \mathfrak{s}^2[A^{(2)}z^2] = 0, \\ [B^{(2)}y^2] + 2\mathfrak{t}\,[B^{(2)}\{yz\}] + \mathfrak{t}^2\,[B^{(2)}z^2] = 0, \\ [C^{(2)}y^2] + 2\mathfrak{u}\,[C^{(2)}\{yz\}] + \mathfrak{u}^2[C^{(2)}z^2] = 0. \end{cases}$$

Bezeichnet man daher die Wurzeln dieser in bezug auf $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$ quadratischen Zahlgleichungen mit $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, so bestehen für die Produkte und Summen dieser 3 Wurzelpaare die Beziehungen:

$$(11)\qquad \begin{cases} \mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2 = \dfrac{[A^{(2)}y^2]}{[A^{(2)}z^2]}, & -\dfrac{1}{2}(\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2) = \dfrac{[A^{(2)}\{yz\}]}{[A^{(2)}z^2]}, \\ \mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2 = \dfrac{[B^{(2)}y^2]}{[B^{(2)}z^2]}, & -\dfrac{1}{2}(\mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2) = \dfrac{[B^{(2)}\{yz\}]}{[B^{(2)}z^2]}, \\ \mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2 = \dfrac{[C^{(2)}y^2]}{[C^{(2)}z^2]}, & -\dfrac{1}{2}(\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2) = \dfrac{[C^{(2)}\{yz\}]}{[C^{(2)}z^2]}, \end{cases}$$

und setzt man noch:

$$(12)\qquad \begin{cases} s_1 = y + \mathfrak{s}_1 z, & s_2 = y + \mathfrak{s}_2 z, \\ t_1 = y + \mathfrak{t}_1 z, & t_2 = y + \mathfrak{t}_2 z, \\ u_1 = y + \mathfrak{u}_1 z, & u_2 = y + \mathfrak{u}_2 z, \end{cases}$$

so sind s_1, s_2, t_1, t_2, u_1, u_2 die Punktpaare, welche die Gerade $[yz]$ aus den Grundkurven $A^{(2)}$, $B^{(2)}$, $C^{(2)}$ des Netzes ausschneidet (Fig. 155).

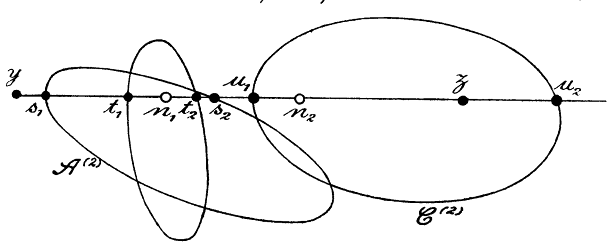


Fig. 155.

Ist endlich

$$(13)\qquad n_1 = y + \mathfrak{n}_1 z, \quad n_2 = y + \mathfrak{n}_2 z$$

dasjenige Punktpaar der Geraden $[yz]$, das zu den Punktpaaren s_1, s_2 und t_1, t_2 harmonisch liegt, so ist es mit Rücksicht auf die Bedeutung der Geraden $[yz]$ auch harmonisch zu dem Punktpaar u_1, u_2, und es werden nach dem Satze 865 gleichzeitig die 3 Gleichungen befriedigt:

$$(14)\qquad \begin{cases} \mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2 - \frac{1}{2}(\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2)(\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2) + \mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2 = 0, \\ \mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2 - \frac{1}{2}(\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2)(\mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2) + \mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2 = 0, \\ \mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2 - \frac{1}{2}(\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2)(\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2) + \mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2 = 0 \end{cases}$$

oder wegen (11) die Gleichungen:

$$(15)\qquad \begin{cases} \mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2[A^{(2)}z^2] + (\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2)[A^{(2)}\{yz\}] + [A^{(2)}y^2] = 0, \\ \mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2[B^{(2)}z^2] + (\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2)[B^{(2)}\{yz\}] + [B^{(2)}y^2] = 0, \\ \mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2[C^{(2)}z^2] + (\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2)[C^{(2)}\{yz\}] + [C^{(2)}y^2] = 0. \end{cases}$$

Diese 3 in bezug auf die 3 Größen $\mathfrak{n}_1\mathfrak{n}_2$, $\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2$ und 1 linearen homogenen Zahlgleichungen (15) können aber nicht anders zusammen bestehen, als wenn ihre Determinante verschwindet, d. h., als wenn die Gleichung befriedigt wird:

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} [\boldsymbol{A}^{(2)}y^2], & [\boldsymbol{A}^{(2)}\{yz\}], & [\boldsymbol{A}^{(2)}z^2] \\ [\boldsymbol{B}^{(2)}y^2], & [\boldsymbol{B}^{(2)}\{yz\}], & [\boldsymbol{B}^{(2)}z^2] \\ [\boldsymbol{C}^{(2)}y^2], & [\boldsymbol{C}^{(2)}\{yz\}], & [\boldsymbol{C}^{(2)}z^2] \end{vmatrix} = 0.$$

Schattenzahlen und Schattenstäbe. In der Gleichung (16) kann man die 9 quadratischen und bilinearen Formen $[\boldsymbol{A}^{(2)}y^2]$, $[\boldsymbol{A}^{(2)}\{yz\}]$, ... noch etwas anders schreiben. Setzt man nämlich wie gewöhnlich:

$$(17)\qquad \begin{cases} y = \mathfrak{y}_1 e_1 + \mathfrak{y}_2 e_2 + \mathfrak{y}_3 e_3, \\ z = \mathfrak{z}_1 e_1 + \mathfrak{z}_2 e_2 + \mathfrak{z}_3 e_3, \end{cases}$$

so erhält man wegen der Grundgleichungen der algebraischen Produkte:

$$(18)\qquad e_i e_k = e_k e_i, \quad i, k = 1, 2, 3$$

für das algebraische Produkt yz den Wert:

$$(19)\qquad yz = \mathfrak{y}_1 \mathfrak{z}_1 e_1{}^2 + \cdots + (\mathfrak{y}_2 \mathfrak{z}_3 + \mathfrak{y}_3 \mathfrak{z}_2) e_2 e_3 + \cdots,$$

also für die in (16) auftretende bilineare Form $[\boldsymbol{A}^{(2)}\{yz\}]$ den Ausdruck:

$$(20)\qquad (\boldsymbol{A}^{(2)}\{yz\}] = [\boldsymbol{A}^{(2)}e_1{}^2]\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1 + \cdots + [\boldsymbol{A}^{(2)}\{e_2 e_3\}](\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_3 + \mathfrak{y}_3\mathfrak{z}_2) + \cdots$$

oder wegen der Gleichungen (90) und (91) des 47. Abschnitts die Darstellung:

$$(21)\qquad [\boldsymbol{A}^{(2)}\{yz\}] = \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_{23}(\mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_3 + \mathfrak{y}_3\mathfrak{z}_2) + \cdots,$$

aus der sich, wenn man $y = z$ setzt, für die quadratischen Formen:

$$[\boldsymbol{A}^{(2)}y^2] \quad \text{und} \quad [\boldsymbol{A}^{(2)}z^2]$$

in (16) die Werte ergeben:

$$(22)\qquad [\boldsymbol{A}^{(2)}y^2] = \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{y}_1{}^2 + \cdots + 2\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_3 + \cdots,$$

$$(23)\qquad [\boldsymbol{A}^{(2)}z^2] = \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{z}_1{}^2 + \cdots + 2\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{z}_2\mathfrak{z}_3 + \cdots,$$

und entsprechende Ausdrücke findet man für die Elemente der zweiten und dritten Zeile der Determinante auf der linken Seite von (16).

Jetzt setze man noch:

$$(24)\qquad \begin{cases} [\boldsymbol{A}^{(2)}y^2] = [\mathfrak{A}y]^2, & [\boldsymbol{A}^{(2)}\{yz\}] = [\mathfrak{A}y][\mathfrak{A}z], & [\boldsymbol{A}^{(2)}z^2] = [\mathfrak{A}z]^2, \\ [\boldsymbol{B}^{(2)}y^2] = [\mathfrak{B}y]^2, & [\boldsymbol{B}^{(2)}\{yz\}] = [\mathfrak{B}y][\mathfrak{B}z], & [\boldsymbol{B}^{(2)}z^2] = [\mathfrak{B}z]^2, \\ [\boldsymbol{C}^{(2)}y^2] = [\mathfrak{C}y]^2, & [\boldsymbol{C}^{(2)}\{yz\}] = [\mathfrak{C}y][\mathfrak{C}z], & [\boldsymbol{C}^{(2)}z^2] = [\mathfrak{C}z]^2, \end{cases}$$

man führe also 3 Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ein, die, wie schon durch ihre Bezeichnung mit großen lateinischen Buchstaben angedeutet ist, zwar insofern den

Charakter von Stäben haben, als sie sich als eine Art von Vielfachensummen der Grundstäbe E_1, E_2, E_3, nämlich in der Form:

$$(25) \qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \mathfrak{a}_1 E_1 + \mathfrak{a}_2 E_2 + \mathfrak{a}_3 E_3, \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{b}_1 E_1 + \mathfrak{b}_2 E_2 + \mathfrak{b}_3 E_3, \\ \mathfrak{C} &= \mathfrak{c}_1 E_1 + \mathfrak{c}_2 E_2 + \mathfrak{c}_3 E_3, \end{aligned}\right.$$

darstellen lassen, die aber doch nur in uneigentlichem Sinne als Stäbe zu betrachten sind und darum auch durch Anwendung von Rundschrifttypen von gewöhnlichen Stäben unterschieden sind, weil die 9 Ableitzahlen:

$$\mathfrak{a}_i, \quad \mathfrak{b}_i, \quad \mathfrak{c}_i, \quad i = 1, 2, 3$$

der Vielfachensummen (25) keine eigentlichen Zahlen, sondern nur symbolische Zahlen sind, die wir in Anlehnung an ein Kunstwort von Sylvester als „*Schattenzahlen*" bezeichnen wollen und als solche durch Anwendung fetter Buchstaben kenntlich gemacht haben.

Jede einzelne von diesen 9 Schattenzahlen $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{c}_i$, $i = 1, 2, 3$, für sich genommen stellt nämlich gar keinen Zahlwert dar; sondern erst *die Produkte aus je zweien mit demselben Buchstaben bezeichneten* und mit gleichem oder verschiedenem Index versehenen Schattenzahlen sollen einen Zahlwert besitzen, indem diese Produkte entsprechend den Gleichungen (21) bis (24) durch die Gleichungen definiert werden:

$$(26) \qquad \mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}_k \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_{ik}, \quad \mathfrak{b}_i \mathfrak{b}_k = \mathfrak{b}_k \mathfrak{b}_i = \mathfrak{b}_{ik}, \quad \mathfrak{c}_i \mathfrak{c}_k = \mathfrak{c}_k \mathfrak{c}_i = \mathfrak{c}_{ik}.$$

In der Tat wird dann, wenn sonst mit den Schattenzahlen wie mit gewöhnlichen Zahlen gerechnet wird, wegen (17):

$$(27) \qquad [\mathfrak{A} y] = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{y}_1 + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{y}_2 + \mathfrak{a}_3 \mathfrak{y}_3, \quad [\mathfrak{A} z] = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{a}_3 \mathfrak{z}_3,$$

also:

$$[\mathfrak{A} y]^2 = \mathfrak{a}_1^2 \mathfrak{y}_1^2 + \cdots + 2 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \mathfrak{y}_2 \mathfrak{y}_3 + \cdots$$

oder wegen (26):

$$[\mathfrak{A} y]^2 = \mathfrak{a}_{11} \mathfrak{y}_1^2 + \cdots + 2 \mathfrak{a}_{23} \mathfrak{y}_2 \mathfrak{y}_3 + \cdots.$$

Mit Rücksicht auf (22) ist somit wirklich:

$$(28) \qquad [\mathfrak{A} y]^2 = [\boldsymbol{A}^{(2)} y^2].$$

Andererseits wird wegen (27):

$$\begin{aligned} [\mathfrak{A} y][\mathfrak{A} z] &= (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{y}_1 + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{y}_2 + \mathfrak{a}_3 \mathfrak{y}_3)(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{z}_2 + \mathfrak{a}_3 \mathfrak{z}_3) \\ &= \mathfrak{a}_1^2 \mathfrak{y}_1 \mathfrak{z}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 (\mathfrak{y}_2 \mathfrak{z}_3 + \mathfrak{y}_3 \mathfrak{z}_2) + \cdots, \end{aligned}$$

d. h. wegen (26):

$$[\mathfrak{A} y][\mathfrak{A} z] = \mathfrak{a}_{11} \mathfrak{y}_1 \mathfrak{z}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_{23} (\mathfrak{y}_2 \mathfrak{z}_3 + \mathfrak{y}_3 \mathfrak{z}_2) + \cdots.$$

Mit Rücksicht auf (21) ist daher auch:

$$(29) \qquad [\mathfrak{A} y][\mathfrak{A} z] = [\boldsymbol{A}^{(2)} \{y z\}].$$

Endlich beweist man wie oben bei (28), daß ebenso:

$$(30) \qquad [\mathfrak{A}z]^2 = [A^{(2)}z^2] \quad \text{ist.}$$

Die Gleichungen (28), (29), (30) stimmen aber mit den Gleichungen der ersten Zeile des Systems (24) überein, und die Gleichungen der beiden anderen Zeilen von (24) ergeben sich auf dieselbe Weise. Es ist also gezeigt, daß sich die 9 Gleichungen (24) vermöge des Ansatzes (25) erfüllen lassen, vorausgesetzt, daß die 9 Größen $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i, \mathfrak{c}_i$, $i = 1, 2, 3$, den Gleichungen (26) unterworfen werden.

Die durch die Gleichungen (25) mit Hilfe der 9 Schattenzahlen $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i, \mathfrak{c}_i$ aus den 3 Grundstäben E_i abgeleiteten uneigentlichen Stäbe $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ können dann endlich als „*Schattenstäbe*“ bezeichnet werden.

Die Cayleysche Kurve eines Kegelschnittnetzes. Auf Grund der Gleichungen (24) nimmt nun aber die Gleichung (16) die Form an:

$$(31) \qquad \begin{vmatrix} [\mathfrak{A}y]^2, & [\mathfrak{A}y][\mathfrak{A}z], & [\mathfrak{A}z]^2 \\ [\mathfrak{B}y]^2, & [\mathfrak{B}y][\mathfrak{B}z], & [\mathfrak{B}z]^2 \\ [\mathfrak{C}y]^2, & [\mathfrak{C}y][\mathfrak{C}z], & [\mathfrak{C}z]^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Und dieser Gleichung kann man auch die Gestalt verleihen[1]):

$$(32) \qquad \begin{vmatrix} [\mathfrak{A}y], & [\mathfrak{A}z] \\ [\mathfrak{B}y], & [\mathfrak{B}z] \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} [\mathfrak{A}y], & [\mathfrak{A}z] \\ [\mathfrak{C}y], & [\mathfrak{C}z] \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} [\mathfrak{B}y], & [\mathfrak{B}z] \\ [\mathfrak{C}y], & [\mathfrak{C}z] \end{vmatrix} = 0.$$

In der Tat liefert das Produkt der 3 Determinanten zweiten Grades auf der linken Seite von (32) gerade die Determinante dritten Grades auf der linken Seite von (31); denn es wird:

$$\begin{aligned}
&([\mathfrak{A}y][\mathfrak{B}z] - [\mathfrak{A}z][\mathfrak{B}y])([\mathfrak{A}y][\mathfrak{C}z] - [\mathfrak{A}z][\mathfrak{C}y])([\mathfrak{B}y][\mathfrak{C}z] - [\mathfrak{B}z][\mathfrak{C}y]) \\
&= \{[\mathfrak{A}y]^2[\mathfrak{B}z][\mathfrak{C}z] - [\mathfrak{A}y][\mathfrak{A}z][\mathfrak{B}y][\mathfrak{C}z] - [\mathfrak{A}y][\mathfrak{A}z][\mathfrak{B}z][\mathfrak{C}y] \\
&\qquad + [\mathfrak{A}z]^2[\mathfrak{B}y][\mathfrak{C}y]\} \cdot ([\mathfrak{B}y][\mathfrak{C}z] - [\mathfrak{B}z][\mathfrak{C}y]) \\
&= [\mathfrak{A}y]^2[\mathfrak{B}y][\mathfrak{B}z][\mathfrak{C}z]^2 - [\mathfrak{A}y][\mathfrak{A}z][\mathfrak{B}y]^2[\mathfrak{C}z]^2 \\
&\qquad - [\mathfrak{A}y][\mathfrak{A}z][\mathfrak{B}y][\mathfrak{B}z][\mathfrak{C}y][\mathfrak{C}z] + [\mathfrak{A}z]^2[\mathfrak{B}y]^2[\mathfrak{C}y][\mathfrak{C}z] \\
&\qquad - [\mathfrak{A}y]^2[\mathfrak{B}z]^2[\mathfrak{C}y][\mathfrak{C}z] + [\mathfrak{A}y][\mathfrak{A}z][\mathfrak{B}z]^2[\mathfrak{C}y]^2 \\
&\qquad + [\mathfrak{A}y][\mathfrak{A}z][\mathfrak{B}y][\mathfrak{B}z][\mathfrak{C}y][\mathfrak{C}z] - [\mathfrak{A}z]^2[\mathfrak{B}y][\mathfrak{B}z][\mathfrak{C}y]^2.
\end{aligned}$$

Von diesen 8 Gliedern heben sich diejenigen beiden Glieder gegenseitig auf, die in den 6 Größen $[\mathfrak{A}y]$, $[\mathfrak{A}z]$, $[\mathfrak{B}y]$, $[\mathfrak{B}z]$, $[\mathfrak{C}y]$, $[\mathfrak{C}z]$ linear sind, und die 6 übrig bleibenden Glieder stimmen gerade mit den 6 Gliedern

1) Vgl. hierzu: Rosanes, Über Systeme von Kegelschnitten, Math. Ann. Bd. 6 (1873), S. 274.

überein, die man erhält, wenn man die Determinante auf der linken Seite von (31) entwickelt.

Der Gleichung (32) aber kann man nach Satz 26 auch die Gestalt geben:

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot yz][\mathfrak{A}\mathfrak{C} \cdot yz][\mathfrak{B}\mathfrak{C} \cdot yz] = 0, \tag{33}$$

die, wenn man noch:

$$[yz] = U \tag{34}$$

setzt, die Form annimmt:

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}U][\mathfrak{A}\mathfrak{C}U][\mathfrak{B}\mathfrak{C}U] = 0. \tag{35}$$

Führt man endlich für den Stab U seinen Ableitausdruck:

$$U = \mathfrak{u}_1 E_1 + \mathfrak{u}_2 E_2 + \mathfrak{u}_3 E_3 \tag{36}$$

ein, so wird das Produkt $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}U]$:

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}U] = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1, & \mathfrak{a}_2, & \mathfrak{a}_3 \\ \mathfrak{b}_1, & \mathfrak{b}_2, & \mathfrak{b}_3 \\ \mathfrak{u}_1, & \mathfrak{u}_2, & \mathfrak{u}_3 \end{vmatrix}, \tag{37}$$

und entsprechende Werte ergeben sich für die Produkte $[\mathfrak{A}\mathfrak{C}U]$ und $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}U]$. Da aber nach (26) nur die Produkte zweier mit demselben Buchstaben bezeichneten Schattenzahlen $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}_k$ oder $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{b}_k$ oder $\mathfrak{c}_i$, $\mathfrak{c}_k$ wirkliche Zahlgrößen sind, so gibt es keinen Sinn, wenn man eins von den Produkten $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}U]$, $[\mathfrak{A}\mathfrak{C}U]$, $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}U]$ auf der linken Seite von (35) für sich gleich Null setzt, da diese Produkte ja sowohl in bezug auf die Schattenzahlen $\mathfrak{a}_i$, wie in bezug auf die Schattenzahlen $\mathfrak{b}_i$ und $\mathfrak{c}_i$ linear sind; sondern man muß zuerst die genannten 3 Produkte oder die nach (37) mit ihnen gleichwertigen Determinanten miteinander multiplizieren, wodurch man eine Gleichung erhält, die sowohl in bezug auf die $\mathfrak{a}_i$ wie in bezug auf die $\mathfrak{b}_i$ und $\mathfrak{c}_i$ homogen vom zweiten Grade ist, so daß bei Benutzung der Gleichungen (26) aus (35) eine Gleichung entsteht, die sowohl in bezug auf die $\mathfrak{a}_{ik}$ wie auf die $\mathfrak{b}_{ik}$ und $\mathfrak{c}_{ik}$ linear und homogen ist, während sie in bezug auf die $\mathfrak{u}_i$ homogen vom dritten Grade ist. Die Gleichung (35) zeigt daher, daß die ihr genügenden Stäbe *U eine Kurve dritter Klasse umhüllen.*

Diese Kurve dritter Klasse heißt die Cayleysche Kurve des Kegelschnittnetzes. Die Cayleysche Kurve eines Kegelschnittnetzes ist somit das Hüllgebilde der Verbindungslinien aller Paare konjugierter Punkte der Hesseschen Kurve des Netzes. Und man hat den Satz:

Satz 866: Die Hüllkurve der Verbindungslinien aller Paare konjugierter Punkte der Hesseschen Kurve eines Kegelschnittnetzes ist eine Kurve dritter Klasse. Sie heißt die Cayleysche Kurve des Kegelschnittnetzes.[1])

---

1) Dieser Satz sowie der dualistisch entsprechende Satz findet sich zuerst bei Hesse in der schon mehrfach zitierten Arbeit aus dem Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 38 (1849) auf S. 252 (Gesammelte Werke, S. 205). Nach

Beziehung zwischen der Cayleyschen Kurve eines Kegelschnittnetzes und dessen Urkurve. Nach der Entwicklung auf S. 362ff. gehören der Cayleyschen Kurve eines Kegelschnittnetzes als Tangenten alle Geraden der Linienpaare an, die als entartende Kurven zweiter Ordnung in dem Netze enthalten sind (vgl. auch den Satz 838). Man hat daher den Satz:

Satz 867: Die Cayleysche Kurve eines Kegelschnittnetzes ist zugleich die Hüllkurve aller Geraden der Linienpaare des Netzes.

Auf Grund dieses Satzes kann man die Gleichung der Cayleyschen Kurve eines Kegelschnittnetzes in der kanonischen Form darstellen, wenn man von derjenigen Kurve dritter Ordnung ausgeht, die das Kegelschnittnetz zum Netz der konischen Polaren hat, und dabei die Gleichung dieser Kurve dritter Ordnung *auf die kanonische Form bringt.* Ist zunächst die Gleichung:

$$A_3 x^3 = 0 \tag{38}$$

die Gleichung der beschriebenen Kurve dritter Ordnung *in bezug auf ein beliebiges Fundamentaldreieck,* so lautet die Gleichung der konischen Polare eines Punktes y in bezug auf die Kurve (38):

$$A_3 y x^2 = 0. \tag{39}$$

Ersetzt man in ihr den Punkt x durch seinen Ableitausdruck:

$$x = \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3, \tag{40}$$

so nimmt die Gleichung (39) die Form an:

$$\mathfrak{x}_1^2 \quad A_3 y e_1^2 + \cdots + 2\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 \quad A_3 y e_2 e_3 + \cdots = 0. \tag{41}$$

Um von dieser Gleichung zu der Gleichung der Cayleyschen Kurve des Netzes der konischen Polaren der Kurve (38) zu gelangen, frage man nach der Kurve, die von den Geraden der in ein Linienpaar zerfallenden konischen Polaren (41) der Kurve A_3 umhüllt wird. Man suche daher die Bedingung auf, unter der die Gleichung (41) die Form:

$$[Ux][Vx] = 0 \tag{42}$$

annimmt. Diese Gleichung läßt sich, wenn man noch:

$$\begin{cases} U = \mathfrak{u}_1 E_1 + \mathfrak{u}_2 E_2 + \mathfrak{u}_3 E_3, \\ V = \mathfrak{v}_1 E_1 + \mathfrak{v}_2 E_2 + \mathfrak{v}_3 E_3 \end{cases} \tag{43}$$

setzt, wo $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3, \quad \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3$ die Linienkoordinaten der Stäbe U und V sind, auch in der Form schreiben:

$$(\mathfrak{u}_1\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{u}_2\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{u}_3\mathfrak{x}_3)(\mathfrak{v}_1\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{v}_2\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{v}_3\mathfrak{x}_3) = 0, \tag{44}$$

---

ihm beschäftigte sich A. Cayley mit der Kurve in seiner Arbeit: A memoir on curves of the third order, Phil. Trans. Bd. 147, Teil II, (1857), S. 415ff. (The collected mathematical papers, Bd. II, Cambridge 1898, S. 381ff.) Auf Cremonas Vorschlag wird die Kurve die Cayleysche Kurve des Netzes genannt (vgl. das auf S. 258 zitierte Werk Cremonas, S. 215).

oder endlich in der Form:

$$\mathfrak{u}_1\mathfrak{v}_1\mathfrak{x}_1^2 + \cdots + (\mathfrak{u}_2\mathfrak{v}_3 + \mathfrak{u}_3\mathfrak{v}_2)\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + \cdots = 0. \tag{45}$$

Die beiden Gleichungen (41) und (45) werden nun aber sicher dieselbe Kurve darstellen, wenn

$$A_3 y e_1^2 = \mathfrak{u}_1\mathfrak{v}_1, \ldots \quad \text{und} \quad 2A_3 y e_2 e_3 = \mathfrak{u}_2\mathfrak{v}_3 + \mathfrak{u}_3\mathfrak{v}_2, \ldots \quad \text{ist.}^{1)} \tag{46}$$

Denkt man sich jetzt die Lückenform dritter Ordnung A_3 *auf die kanonische Form gebracht*, also auf das reelle Wendepunktsdreiseit als Fundamentaldreieck bezogen und zugleich die reelle Ecke des teilweise reellen Wendepunktsdreiseits zum Einheitspunkt genommen (vgl. S. 256ff., insbesondere S. 263), so erhält man für die Lückenform A_3 die Darstellung:

$$A_3 = [E_1 l]^3 + [E_2 l]^3 + [E_3 l]^3 - 3\mathfrak{k}[E_1 l][E_2 l][E_3 l], \tag{47}$$

und es wird:

$$[E_i l]^3 y e_i^2 = \mathfrak{y}_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$[E_1 l][E_2 l][E_3 l] y e_2 e_3 = \tfrac{1}{6}\mathfrak{y}_1, \ldots \text{(zykl.)},$$

während die übrigen Produkte, die sich bei Ausrechnung der linken Seiten von (46) ergeben, sämtlich verschwinden. Es wird daher:

$$\begin{cases} A_3 y e_1^2 = \mathfrak{y}_1, & 2A_3 y e_2 e_3 = -\mathfrak{k}\mathfrak{y}_1, \\ A_3 y e_2^2 = \mathfrak{y}_2, & 2A_3 y e_3 e_1 = -\mathfrak{k}\mathfrak{y}_2, \\ A_3 y e_3^2 = \mathfrak{y}_3, & 3A_3 y e_1 e_2 = -\mathfrak{k}\mathfrak{y}_3. \end{cases} \tag{48}$$

Die Gleichungen (46) nehmen somit die Form an:

$$\begin{cases} \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{u}_1\mathfrak{v}_1, & -\mathfrak{k}\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{u}_2\mathfrak{v}_3 + \mathfrak{u}_3\mathfrak{v}_2, \\ \mathfrak{y}_2 = \mathfrak{u}_2\mathfrak{v}_2, & -\mathfrak{k}\mathfrak{y}_2 = \mathfrak{u}_3\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{u}_1\mathfrak{v}_3, \\ \mathfrak{y}_3 = \mathfrak{u}_3\mathfrak{v}_3, & -\mathfrak{k}\mathfrak{y}_3 = \mathfrak{u}_1\mathfrak{v}_2 + \mathfrak{u}_2\mathfrak{v}_1. \end{cases}$$

Eliminiert man aber aus diesen 6 Gleichungen die Größen $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3$ und ordnet die sich ergebenden Gleichungen nach $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3$, so findet man die Gleichungen:

$$\begin{cases} \mathfrak{k}\mathfrak{u}_1\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{u}_3\mathfrak{v}_2 + \mathfrak{u}_2\mathfrak{v}_3 = 0, \\ \mathfrak{u}_3\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{k}\mathfrak{u}_2\mathfrak{v}_2 + \mathfrak{u}_1\mathfrak{v}_3 = 0, \\ \mathfrak{u}_2\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{u}_1\mathfrak{v}_2 + \mathfrak{k}\mathfrak{u}_3\mathfrak{v}_3 = 0, \end{cases} \tag{49}$$

aus denen durch Elimination von $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3$ die Gleichung folgt:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{k}\mathfrak{u}_1, & \mathfrak{u}_3, & \mathfrak{u}_2 \\ \mathfrak{u}_3, & \mathfrak{k}\mathfrak{u}_2, & \mathfrak{u}_1 \\ \mathfrak{u}_2, & \mathfrak{u}_1, & \mathfrak{k}\mathfrak{u}_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{50}$$

---

1) Vgl. hierzu: H. Wieleitner, Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung, Leipzig 1905, S. 230f.

oder

(51) $$\mathfrak{k}(\mathfrak{u}_1^3 + \mathfrak{u}_2^3 + \mathfrak{u}_3^3) - (2 + \mathfrak{k}^3)\mathfrak{u}_1 \cdot \mathfrak{u}_2 \cdot \mathfrak{u}_3 = 0.$$

Diese Gleichung ist also die Gleichung der Cayleyschen Kurve des betrachteten Kegelschnittnetzes. Schreibt man die Gleichung (51) in der Form:

(52) $$[e_1 U]^3 + [e_2 U]^3 + [e_3 U]^3 - 3\frac{2+\mathfrak{k}^3}{3\mathfrak{k}}[e_1 U][e_2 U][e_3 U] = 0$$

und vergleicht sie mit der kanonischen Form der Gleichung einer beliebigen Kurve dritter Klasse der zugehörigen syzygetischen Schar, d. h. mit der Gleichung:

(53) $$[e_1 U]^3 + [e_2 U]^3 + [e_3 U]^3 - 3\mathfrak{C}[e_1 U][e_2 U][e_3 U] = 0,$$

in der $\mathfrak{C}$ den Parameter der Kurve bezeichnet, so kann man aus ihr folgern:

Erstens: Die kanonische Form der Gleichung der Cayleyschen Kurve c_3 eines Kegelschnittnetzes ist auf dasselbe Fundamentaldreieck und denselben Einheitspunkt bezogen wie die kanonische Form der Gleichung der Kurve dritter Ordnung A_3, deren konische Polaren das betrachtete Kegelschnittnetz bilden. Das besagt, daß die Ecken des ganz reellen und teilweise reellen Treffpunktsdreiecks der Rückkehrtangenten der Cayleyschen Kurve c_3 mit den Ecken des ganz reellen und teilweise reellen Wendepunktsdreiseits der Kurve A_3 übereinstimmen.

Und daraus folgt dann insbesondere noch, wenn man die Ausdrücke (57) des 51. Abschnitts für die harmonischen Polaren der 3 reellen Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung mit den Ausdrücken (15) des 55. Abschnitts für die reellen Rückkehrtangenten der Cayleyschen Kurve eines Kegelschnittnetzes zusammenhält, daß die 3 reellen Rückkehrtangenten der Cayleyschen Kurve c_3 eines Kegelschnittnetzes mit den harmonischen Polaren der reellen Wendepunkte derjenigen Kurve dritter Ordnung A_3 zusammenfallen, die das Kegelschnittnetz zum Netz der konischen Polaren hat, und daß andererseits die harmonischen Pole der reellen Rückkehrtangenten der Cayleyschen Kurve mit den reellen Wendepunkten der Kurve A_3 vereint liegen. Man hat also den Satz:

Satz 868: Die 3 reellen Rückkehrtangenten der Cayleyschen Kurve c_3 eines Kegelschnittnetzes fallen zusammen mit den harmonischen Polaren der 3 reellen Wendepunkte derjenigen Kurve dritter Ordnung A_3, die das Kegelschnittnetz zum Netz der konischen Polaren hat, und die harmonischen Pole der reellen Rückkehrtangenten der Cayleyschen Kurve c_3 liegen vereint mit den reellen Wendepunkten der Kurve A_3.

Zweitens zeigt die Vergleichung der Gleichungen (52) und (53), daß der Parameter $\mathfrak{C}$ der Cayleyschen Kurve c_3 des Netzes zu dem Parameter $\mathfrak{k}$ von dessen Urkurve A_3 in der Beziehung steht:

(54) $$\mathfrak{C} = \frac{2+\mathfrak{k}^3}{3\mathfrak{k}}.$$

Mit Rücksicht auf diese Beziehung bezeichnen wir im folgenden die Cayleysche Kurve dritter Klasse c_3 des Netzes der konischen Polaren der Kurve dritter Ordnung A_3 auch kurz als *die Cayleysche Kurve der Kurve dritter Ordnung* A_3. Dieselbe kann charakterisiert werden als die Hüllkurve aller Geraden der Linienpaare, die unter den konischen Polaren der Kurve A_3 enthalten sind.

Beziehung zwischen der Cayleyschen Kurve eines Kegelschnittnetzes und der Hesseschen Kurve des zu dem Netze apolaren Kegelschnittgewebes und das Dualistische. Sind x und x', y und y', z und z' drei Paare konjugierter Punkte der Hesseschen Kurve eines Kegelschnittnetzes:

$$\mathfrak{g} A^{(2)} + \mathfrak{h} B^{(2)} + \mathfrak{k} C^{(2)}, \tag{55}$$

so sind die Punkte eines jeden dieser 3 Punktpaare zu allen Kurven des Netzes (55) konjugiert, oder, was dasselbe ist, die 3 Punktpaare sind, aufgefaßt als zerfallende Kurven zweiter Klasse, zu allen Kurven dieses Netzes apolar.

Bilden ferner die 3 Punktpaare xx', yy', zz' nicht gerade die 3 Paare Gegenecken eines vollständigen Vierseits, so bestimmen sie ein Kegelschnittgewebe, das sich als Vielfachensumme jener 3 Punktpaare, d. h. in der Form:

$$\mathfrak{x}\ xx' + \mathfrak{y}\ yy' + \mathfrak{z}\ zz', \tag{56}$$

darstellen läßt, und dessen *sämtliche* Kurven zweiter Klasse zu allen Kurven zweiter Ordnung des Netzes (55) apolar sind. Insbesondere sind also auch die in dem Gewebe enthaltenen Punktpaare apolar zu allen Kurven des Netzes (55).

Man kann dann zeigen, daß die Cayleysche Kurve des Netzes (55) mit der Hesseschen Kurve des Gewebes (56) identisch ist. Die Cayleysche Kurve des Netzes (55) war nach dem Satze 866 die Hüllkurve der Verbindungslinien aller Paare konjugierter Punkte des Netzes (55), und diese konjugierten Punkte des Netzes gehören zugleich der Hesseschen Kurve des Netzes an. Die Hessesche Kurve eines Kegelschnittgewebes ist aber nach dem Satze 842 die Hüllkurve der Träger aller in ein Punktpaar zerfallenden Kurven des Gewebes. Und da diese Punktpaare des Gewebes, wie schon oben erwähnt, zu allen Kurven des Netzes (55) apolar sind, so fallen sie mit den Paaren konjugierter Punkte des Netzes zusammen, und demgemäß ist auch die Cayleysche Kurve des Netzes (55) identisch mit der Hesseschen Kurve des Gewebes (56). Man hat daher den Satz:

Satz 869: Die Cayleysche Kurve eines Kegelschnittnetzes fällt zusammen mit der Hesseschen Kurve des zu dem Netz apolaren Kegelschnittgewebes.

Definiert man andererseits die Cayleysche Kurve eines Kegelschnittgewebes als den geometrischen Ort der Schnittpunkte aller Paare konjugierter Geraden des Gewebes, so ergibt sich wie auf S. 369ff. der zu dem Satze 867 dualistisch entsprechende Satz:

Satz 870: Die Cayleysche Kurve eines Kegelschnittgewebes ist zugleich der geometrische Ort aller Punkte der Punktpaare des Gewebes.

Man beweist ferner ebenso wie auf S. 372ff. den zum Satze 869 dualistisch entsprechenden Satz:

Satz 871: Die Cayleysche Kurve eines Kegelschnittgewebes fällt zusammen mit der Hesseschen Kurve des zu dem Gewebe apolaren Kegelschnittnetzes.

Auch hier kann man wieder wie auf S. 372 die Ausdrucksweise vereinfachen, indem man die Cayleysche Kurve eines Kegelschnittgewebes zugleich als die Cayleysche Kurve derjenigen Kurve dritter Klasse $\mathfrak{a}_3$ bezeichnet, deren konische Pole die Kurven jenes Kegelschnittgewebes sind. Die Cayleysche Kurve C_3 einer Kurve dritter Klasse $\mathfrak{a}_3$ ist also diejenige Kurve dritter Ordnung, die den geometrischen Ort aller Punktpaare bildet, die unter den konischen Polen der Kurve dritter Klasse vorkommen.

Die Kurve dritter Klasse, deren Hessesche Kurve mit der Cayleyschen Kurve einer Kurve dritter Ordnung zusammenfällt, und deren Cayleysche Kurve zugleich mit der Hesseschen Kurve dieser Kurve dritter Ordnung übereinstimmt. Ihre Rückkehrpunkte. Geht man von einer nicht zerfallenden Kurve dritter Ordnung A_3 aus und bestimmt zu ihr ihre Hessesche Kurve H_3 und ihre Cayleysche Kurve c_3 und fragt sodann nach derjenigen Kurve dritter Klasse $\mathfrak{a}_3$, deren Hessesche Kurve h_3 mit der Cayleyschen Kurve c_3 von A_3 zusammenfällt, und deren Cayleysche Kurve C_3 zugleich mit der Hesseschen Kurve H_3 von A_3 übereinstimmt, so kann man den Parameter $\mathfrak{K}$ dieser Kurve $\mathfrak{a}_3$ durch den Parameter $\mathfrak{k}$ der Ausgangskurve A_3 ausdrücken.[1])

Man stelle dazu zunächst die Beziehungen zusammen, die zwischen den Parametern einer Urkurve dritter Ordnung A_3, ihrer Hesseschen Kurve H_3 und ihrer Cayleyschen Kurve c_3 gelten, und ebenso die Beziehungen zwischen den Parametern einer Urkurve dritter Klasse $\mathfrak{a}_3$, ihrer Hesseschen Kurve h_3 und ihrer Cayleyschen Kurve C_3. Nach der Gleichung (38) des 56. Abschnitts (S. 326) besteht zwischen dem Parameter $\mathfrak{k}$ einer Urkurve dritter Ordnung A_3 und dem Parameter $\mathfrak{h}$ ihrer Hesseschen Kurve H_3 die Gleichung:

$$(57) \qquad \frac{4-\mathfrak{k}^3}{\mathfrak{k}^2} = 3\mathfrak{h},$$

---

1) Vgl. zum Folgenden wieder: H. Wieleitner, Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung, S. 234f.

und ebenso herrscht nach der Gleichung (28) des 57. Abschnitts (S. 340) zwischen dem Parameter $\mathfrak{K}$ einer Urkurve dritter Klasse $\boldsymbol{a}_3$ und dem Parameter $\mathfrak{H}$ ihrer Hesseschen Kurve $\boldsymbol{h}_3$ die Gleichung:

$$\frac{4-\mathfrak{K}^3}{\mathfrak{K}^2}=3\mathfrak{H}. \tag{58}$$

Zu diesen Gleichungen kommt noch die obige Formel (54) zwischen dem Parameter $\mathfrak{k}$ der Urkurve dritter Ordnung $\boldsymbol{A}_3$ und dem Parameter $\mathfrak{C}$ ihrer Cayleyschen Kurve $\boldsymbol{c}_3$, die man auch in der Form schreiben kann:

$$\frac{2+\mathfrak{k}^3}{\mathfrak{k}}=3\mathfrak{C}. \tag{59}$$

Und bezeichnet man endlich noch den Parameter der Cayleyschen Kurve $\boldsymbol{C}_3$ der Kurve dritter Klasse $\boldsymbol{a}_3$ mit $\mathfrak{c}$, setzt also deren Gleichung in der Form voraus:

$$[E_1x]^3+[E_2x]^3+[E_3x]^3-3\mathfrak{c}[E_1x][E_2x][E_3x]=0 \tag{60}$$

(vgl. die Gleichung (39) des 56. Abschnitts), so gilt für den Parameter $\mathfrak{c}$ nach Analogie von (59) die Formel:

$$\frac{2+\mathfrak{K}^3}{\mathfrak{K}}=3\mathfrak{c}. \tag{61}$$

Nun stimmt nach dem Satze 869 die Cayleysche Kurve $\boldsymbol{c}_3$ der Urkurve $\boldsymbol{A}_3$ eines Kegelschnittnetzes mit der Hesseschen Kurve $\boldsymbol{a}_3$ des zu dem Netze apolaren Kegelschnittgewebes überein. Es müssen also die Parameter $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{H}$ von $\boldsymbol{c}_3$ und $\boldsymbol{h}_3$ einander gleich sein, d. h. es muß wegen (58) und (59) die Gleichung bestehen:

$$\frac{4-\mathfrak{K}^3}{\mathfrak{K}^2}=\frac{2+\mathfrak{k}^3}{\mathfrak{k}}, \tag{62}$$

wo $\mathfrak{k}$ den gegebenen Parameter der Ausgangskurve dritter Ordnung A_3 und $\mathfrak{K}$ den gesuchten Parameter der Kurve dritter Klasse a_3 bedeutet. Da diese Gleichung in bezug auf den gesuchten Parameter $\mathfrak{K}$ vom dritten Grade ist, so ist dieser Parameter $\mathfrak{K}$ bei gegebenem $\mathfrak{k}$ durch die Gleichung (62) noch nicht eindeutig bestimmt. Man kann aber den Parameter $\mathfrak{K}$ von a_3 vollständig festlegen, wenn man berücksichtigt, daß nach dem Satze 871 auch umgekehrt die Cayleysche Kurve $\boldsymbol{C}_3$ der Urkurve a_3 des Gewebes mit der Hesseschen Kurve $\boldsymbol{H}_3$ der Urkurve $\boldsymbol{A}_3$ des zu dem Gewebe apolaren Netzes zusammenfällt. Es müssen also auch die Parameter $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{h}$ von $\boldsymbol{C}_3$ und $\boldsymbol{H}_3$ einander gleich sein, d. h., es muß wegen (61) und (57) auch die Gleichung bestehen:

$$\frac{4-\mathfrak{k}^3}{\mathfrak{k}^2}=\frac{2+\mathfrak{K}^3}{\mathfrak{K}}. \tag{63}$$

Man überzeugt sich leicht, daß die beiden so für den Parameter $\mathfrak{K}$ von a_3 gewonnenen Gleichungen (62) und (63) miteinander verträglich sind, und daß sie zugleich zusammen nur *einen* Wert des Parameters $\mathfrak{K}$ liefern. Denn beseitigt man in ihnen die Unbekannte $\mathfrak{K}$ aus dem Nenner und ordnet die entstehenden Gleichungen nach fallenden Potenzen von $\mathfrak{K}$, so nehmen sie die Form an:

(64) $$\mathfrak{K}^3 + \frac{2+\mathfrak{k}^3}{\mathfrak{k}}\mathfrak{K}^2 - 4 = 0 \quad \text{und}$$

(65) $$\mathfrak{K}^3 - \frac{4-\mathfrak{k}^3}{\mathfrak{k}^2}\mathfrak{K} + 2 = 0.$$

Die linken Seiten dieser beiden Gleichungen besitzen aber den größten gemeinschaftlichen Teiler $\mathfrak{K} + \frac{2}{\mathfrak{k}}$, wovon man sich durch das bekannte Divisionsverfahren überzeugen kann. Die Gleichungen (64) und (65) haben also die gemeinsame Wurzel:

(66) $$\mathfrak{K} = -\frac{2}{\mathfrak{k}}$$

und überdies nur diese eine gemeinsame Wurzel.

Die dem Parameter $\mathfrak{K} = -\frac{2}{\mathfrak{k}}$ zugehörende und auf dasselbe Fundamentaldreieck und denselben Einheitspunkt wie die Kurven $\boldsymbol{A}_3$, $\boldsymbol{H}_3$ und $\boldsymbol{c}_3$ bezogene Kurve dritter Klasse ist also die gewünschte Kurve $\boldsymbol{a}_3$.

Man kann auf Grund der Gleichung (66) ziemlich leicht den Beweis dafür erbringen, daß die reellen Rückkehrpunkte r_1, r_2, r_3 der Kurve dritter Klasse $\boldsymbol{a}_3$ mit den Schnittpunkten k_1, k_2, k_3 der reellen Wendetangenten T_1, T_2, T_3 der Kurve dritter Ordnung $\boldsymbol{A}_3$ und der harmonischen Polaren H_1, H_2, H_3 ihrer reellen Wendepunkte zusammenfallen, die zugleich die Berührungspunkte der Hesseschen Kurve $\boldsymbol{H}_3$ von $\boldsymbol{A}_3$ mit jenen Tangenten bilden.

Nach den Gleichungen (20) des 51. Abschnitts lautet der Ausdruck T_1 für die Wendetangente der Kurve dritter Ordnung $\boldsymbol{A}_3$ im Wendepunkte w_1:

(67) $$T_1 = \mathfrak{k}E_1 + E_2 + E_3,$$

während sich für die harmonische Polare H_1 des Wendepunktes w_1 in den Gleichungen (57) desselben Abschnittes der Wert ergab:

(68) $$H_1 = E_2 - E_3.$$

Für den Schnittpunkt k_1 beider Geraden erhält man also den Ausdruck:

$$k_1 = [T_1 H_1],$$

d. h. wegen (67) und (68):

$$= [(\mathfrak{k}E_1 + E_2 + E_3)(E_2 - E_3)] \quad \text{oder}$$

(69) $$k_1 = -2e_1 + \mathfrak{k}(e_2 + e_3).$$

Andererseits fanden wir in den Gleichungen (12) des 55. Abschnitts (S. 305) für den Rückkehrpunkt r_1 der Kurve dritter Klasse $\boldsymbol{a}_3$ mit dem Parameter

$\mathfrak{K}$ den Ausdruck:

$$r_1 = \mathfrak{K} e_1 + e_2 + e_3. \tag{70}$$

In unserem Falle, wo nach (66)

$$\mathfrak{K} = -\frac{2}{\mathfrak{k}} \text{ ist, wird also}$$

$$r_1 = -\frac{2}{\mathfrak{k}} e_1 + e_2 + e_3, \tag{71}$$

was mit (69) bis auf den Zahlfaktor $\mathfrak{k}$ übereinstimmt. Man hat also den Satz:

Satz 872: **Die Kurve dritter Klasse a_3, deren Hessesche Kurve h_3 mit der Cayleyschen Kurve c_3 einer nicht zerfallenden Kurve dritter Ordnung A_3 übereinstimmt, und deren Cayleysche Kurve C_3 zugleich mit der Hesseschen Kurve H_3 jener Kurve A_3 zusammenfällt, hat ihre reellen Rückkehrpunkte in denjenigen Punkten k_1, k_2, k_3, in denen die reellen Wendetangenten der Kurve A_3 von den harmonischen Polaren der zugehörigen Wendepunkte geschnitten werden.**

Die Lagenbeziehung zwischen der Hesseschen und der Cayleyschen Kurve einer nicht zerfallenden Kurve dritter Ordnung. Nach dem Satze 837 berührt die Hessesche Kurve H_3 einer Kurve dritter Ordnung A_3 die reellen Wendetangenten der Kurve A_3 in den im letzten Satze charakterisierten Punkten k_1, k_2, k_3. Und aus der Entwicklung von S. 368 folgt ferner, daß die reellen Wendetangenten $[w_1 k_1]$, $[w_2 k_2]$, $[w_3 k_3]$ dieser Urkurve A_3 zugleich Tangenten ihrer Cayleyschen Kurve c_3 sind. Denn nach dem Begriff der Cayleyschen Kurve c_3 von A_3 ist diese Kurve c_3 das Hüllgebilde der Verbindungslinien aller Paare konjugierter Punkte der Hesseschen Kurve H_3 von A_3. Solche Paare konjugierter Punkte der Hesseschen Kurve H_3 sind aber nach S. 329 die Punktpaare w_1, k_1, w_2, k_2, w_3, k_3, und diese Verbindungslinien sind eben die reellen Wendetangenten $[w_1 k_1]$, $[w_2 k_2]$, $[w_3 k_3]$ der Urkurve A_3.

Da endlich die Cayleysche Kurve c_3 einer nicht zerfallenden Kurve dritter Ordnung A_3 mit der Hesseschen Kurve h_3 der im Satze 872 gekennzeichneten Kurve dritter Klasse a_3 übereinstimmt, und diese nach dem Satze 851 durch die Rückkehrpunkte von a_3 hindurchgeht, die wieder nach dem Satze 872 mit den Punkten k_1, k_2, k_3 übereinstimmen, so läßt sich erwarten, daß die Berührungspunkte der Geraden $[w_1 k_1]$, $[w_2 k_2]$, $[w_3 k_3]$ mit der Cayleyschen Kurve c_3 von A_3 eben die Punkte k_1, k_2, k_3 sind.

Dies läßt sich aber auch leicht durch Rechnung beweisen. Schreibt man nämlich die Gleichung (52) der Cayleyschen Kurve c_3 in der Form:

$$\mathfrak{u}_1^3 + \mathfrak{u}_2^3 + \mathfrak{u}_3^3 - \frac{2 + \mathfrak{k}^3}{\mathfrak{k}} \mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_2 \mathfrak{u}_3 = 0 \tag{72}$$

und bezeichnet die linke Seite dieser Gleichung mit $\mathfrak{F}$, so wird die Gleichung:

$$(73) \qquad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{u}_1}\mathfrak{v}_1 + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{u}_2}\mathfrak{v}_2 + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{u}_3}\mathfrak{v}_3 = 0$$

die Gleichung des Berührungspunktes einer beliebigen Hüllgeraden:

$$(74) \qquad U = \mathfrak{u}_1 E_1 + \mathfrak{u}_2 E_2 + \mathfrak{u}_3 E_3$$

der Kurve (72), wobei $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ die laufenden Linienkoordinaten des Berührungspunktes sind. Nun wird mit Rücksicht auf die Bedeutung von $\mathfrak{F}$:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{u}_1} = 3\mathfrak{u}_1{}^2 - \frac{2+\mathfrak{k}^3}{\mathfrak{k}}\mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_3,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{u}_2} = 3\mathfrak{u}_2{}^2 - \frac{2+\mathfrak{k}^3}{\mathfrak{k}}\mathfrak{u}_3\mathfrak{u}_1,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{u}_3} = 3\mathfrak{u}_3{}^2 - \frac{2+\mathfrak{k}^3}{\mathfrak{k}}\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2.$$

Und ist jetzt die Hüllgerade U der Cayleyschen Kurve (72) von $\boldsymbol{A}_3$ die Wendetangente:

$$(67) \qquad T_1 = \mathfrak{k}E_1 + E_2 + E_3$$

von $\boldsymbol{A}_3$, besitzen also die Linienkoordinaten von U die Werte:

$$(75) \qquad \mathfrak{u}_1 = \mathfrak{k}, \quad \mathfrak{u}_2 = 1, \quad \mathfrak{u}_3 = 1,$$

so wird:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{u}_1} = 3\mathfrak{k}^2 - \frac{2+\mathfrak{k}^3}{\mathfrak{k}} = 2\,\frac{\mathfrak{k}^3-1}{\mathfrak{k}},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{u}_2} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{u}_3} = 3 - \frac{2+\mathfrak{k}^3}{\mathfrak{k}}\cdot\mathfrak{k} = 1 - \mathfrak{k}^3,$$

die Gleichung (73) verwandelt sich also in:

$$(76) \qquad (1-\mathfrak{k}^3)\left(-\frac{2}{\mathfrak{k}}\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_3\right) = 0.$$

Das ist daher die Gleichung des gesuchten Berührungspunktes. Und diese Gleichung vereinfacht sich, da für eine nicht zerfallende Kurve dritter Ordnung $\boldsymbol{A}_3$:

$$\mathfrak{k}^3 \neq 1$$

ist (vgl. S. 264ff.), zu der Gleichung:

$$(77) \qquad -\frac{2}{\mathfrak{k}}\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 + \mathfrak{v}_3 = 0,$$

und der Ausdruck für den Berührungspunkt der Wendetangente T_1 von $\boldsymbol{A}_3$ mit der Cayleyschen Kurve $\boldsymbol{c}_3$ von $\boldsymbol{A}_3$ ist somit:

$$(78) \qquad -\frac{2}{\mathfrak{k}}e_1 + e_2 + e_3.$$

Dieser aber unterscheidet sich nur um einen konstanten Zahlfaktor von dem Ausdruck (69) für k_1.

Damit ist die Richtigkeit unserer oben ausgesprochenen Vermutung bewiesen. Und faßt man das Ergebnis mit dem obigen Satze 837 zusammen, so erhält man den Satz:

Satz 873: Auch die Cayleysche Kurve c_3 einer nicht zerfallenden Kurve dritter Ordnung A_3 berührt die reellen Wendetangenten dieser Kurve A_3 in ihren Schnittpunkten mit den harmonischen Polaren der zugehörigen Wendepunkte, und sie wird somit auch von der Hesseschen Kurve H_3 jener Kurve dritter Ordnung A_3 in diesen Punkten berührt.

Fünfzehnter Hauptteil.

Beziehungen zum Kreispunktpaar.

Abschnitt 60.

Das Kreispunktpaar bezogen auf ein schiefwinkliges Fundamentaldreieck.

Projektive Geometrie, Parallelgeometrie, Rechtwinkelgeometrie. In den bisherigen Entwicklungen dieses Bandes beschränkten wir uns dem Titel des Buches entsprechend

> *in erster Linie* auf projektive Eigenschaften der Gebilde, d. h. auf solche Eigenschaften, die bei einer beliebigen Zentralprojektion unverändert bleiben, und die im Grunde immer darauf hinauslaufen, daß *3 Punkte in einer geraden Linie liegen,* oder daß *3 Linien durch einen und denselben Punkt gehen,* und daß *4 Punkte einer Geraden oder 4 Strahlen eines Strahlbüschels ein bestimmtes Doppelverhältnis haben.*
>
> Auf solche Beziehungen, die sich gegenüber einer jeden Zentralprojektion invariant verhalten, waren die von uns benutzten Dreieckskoordinaten zugeschnitten. Denn nach den Sätzen 279 und 287 sind die *3 Verhältnisse* der 3 Dreieckskoordinaten eines Punktes oder eines Stabes *gewissen Doppelverhältnissen gleich;* und Doppelverhältnisse werden bei der Zentralprojektion, ja sogar bei einer beliebigen kollinearen oder reziproken Abbildung, nicht geändert. Dasselbe gilt also auch von allen *homogenen Gleichungen* zwischen den Dreieckskoordinaten eines Punktes oder Stabes.
>
> *In zweiter Linie,* und mehr nebenbei, haben wir auch parallelgeometrische Eigenschaften der Figuren in den Kreis unserer Betrachtungen gezogen, oder wie wir vom projektiven Standpunkte sagen können, Beziehungen der Figuren zu der unendlich fernen Geraden. In der Tat lassen sich ja parallele Geraden projektiv als solche Geraden definieren, die sich auf der unendlich fernen Geraden schneiden. Derartige Beziehungen zur unendlich fernen Geraden behandelten wir bei der Einteilung der nicht zerfallenden Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse in Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln, beim Begriff der Fluchtlinie und Verschwindungslinie einer beliebigen Kollineation, bei der Einführung der Affinität, bei der Betrachtung der Mittelpunkts- und Durchmessereigenschaften einer Kurve zweiter Ordnung und zweiter Klasse, bei der Unter-

suchung des Scharbüschels homoasymptotischer Hyperbeln oder Ellipsen, und beim Übergange von einem Stabe zu seiner Strecke.

Die *Möglichkeit*, auch die Parallelgeometrie in die Behandlung mit einzubeziehen, wurde dadurch geboten, daß bei der Darstellung der Punkte und Stäbe auf Grund unseres Dreieckskoordinatensystems ein jeder Punkt der unendlich fernen Geraden sich als Differenz zweier *gleichmassigen*, mit ihm in einer Geraden liegenden Punkte ausdrücken ließ, und daß *die Linienkoordinaten der unendlich fernen Geraden durch die Massen der 3 Ecken des Fundamentaldreiecks gebildet wurden.*

Dagegen haben wir, abgesehen von einigen Stellen bei der Einführung der Dreieckskoordinaten, wo wir der leichteren Faßlichkeit halber den Abstand eines Punktes von einer Geraden benutzt haben, und abgesehen von gelegentlichen vorbereitenden Bemerkungen über die Hauptachsen eines Polarsystems, *es bisher durchaus vermieden, Fragen zu erörtern, bei denen das Senkrechtstehen eine Rolle spielt, und, was damit zusammenhängt, die Länge der Linien und die Größe der Winkel.* Demgemäß mußten der Kreis, die gleichseitige Hyperbel, die konfokalen Kurven zweiter Klasse, die Normalen und die Krümmungsmittelpunkte einer Kurve und verwandte Fragen von der Untersuchung ausgeschlossen bleiben.

Wir begreifen solche Eigenschaften der Figuren unter dem Namen „Rechtwinkelgeometrie“, während wir die Parallelgeometrie und Rechtwinkelgeometrie unter dem Namen „metrische Geometrie“ zusammenfassen und sie damit *in Gegensatz zur projektiven Geometrie stellen.*

Will man jetzt, wie es im folgenden geschehen soll, auch die Rechtwinkelgeometrie im Rahmen der projektiven Geometrie und Parallelgeometrie entwickeln, also dabei die in diesen beiden Geometrien gewonnenen Ergebnisse und Methoden verwerten, so muß man zunächst *irgendwie einen rechten Winkel einführen*, den man sich als Hälfte eines gestreckten Winkels definiert denken kann. Dabei hat man zur Vergleichung der beiden Teilwinkel des Gestreckten von einem Aufeinanderlegen Gebrauch zu machen, also den Begriff der Kongruenz zu benutzen, welcher der projektiven Geometrie und der Parallelgeometrie fremd ist. Man kann dann entweder von vornherein ein rechtwinkliges Achsenkreuz der Untersuchung zugrunde legen, oder, was des Anschlusses an die projektive Geometrie wegen vorzuziehen ist, ein Fundamentaldreieck einführen, in dem rechte Winkel auftreten. Am vorteilhaftesten ist es dabei, das Fundamentaldreieck selbst schiefwinklig zu lassen und auch seinen Einheitspunkt nicht zu spezialisieren, *dafür aber zur Feststellung der Bedingung des Senkrechtstehens zweier beliebigen Geraden die Höhen des Fundamentaldreiecks zu benutzen.*

Wir verwenden in dem vorliegenden Abschnitt das letzte Verfahren, werden aber in den beiden folgenden Abschnitten, in denen die Achsen der

Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse eine besondere Bedeutung gewinnen werden, auch *auf ein rechtwinkliges Cartesisches Koordinatensystem* zurückgreifen.[1])

Der extensive Bruch für das Polarsystem des Kreispunktpaars unter der Voraussetzung eines schiefwinkligen Fundamentaldreiecks und eines beliebigen Einheitspunktes. Man stelle sich die Aufgabe, einen extensiven Bruch zu bilden, der einem jeden Stabe der Ebene eine mit ihm gleichlange und von ihm in vorgeschriebenem Sinne um einen rechten Winkel abweichende Strecke zuweist. Dazu suche man zunächst die analytischen Ausdrücke für 3 Strecken, die mit den Seitenstäben des Fundamentaldreiecks gleichlang sind und von ihnen in gleichem Sinne um einen rechten Winkel abweichen. Diese Strecken werden die Richtung der Höhen des Dreiecks haben müssen. Man bilde also zunächst die Ausdrücke für 3 Stäbe, die den Linien der 3 Höhen des Fundamentaldreiecks angehören. Dabei setze man noch voraus, daß dieses Dreieck ganz im Endlichen gelegen sei.

Bezeichnet man den Höhenschnittpunkt des Fundamentaldreiecks (mit beliebiger Masse genommen) mit h, seine Dreieckskoordinaten in bezug auf das Fundamentaldreieck und einen beliebig gelegenen Einheitspunkt mit $\mathfrak{x}_1^{(h)}$, $\mathfrak{x}_2^{(h)}$, $\mathfrak{x}_3^{(h)}$, so daß also:

$$h = \mathfrak{x}_1^{(h)} e_1 + \mathfrak{x}_2^{(h)} e_2 + \mathfrak{x}_3^{(h)} e_3 \tag{1}$$

wird, so läßt sich ein Stab der vom Punkte e_1 ausgehenden Höhe durch das planimetrische Produkt darstellen:

$$[h e_1] = [(\mathfrak{x}_1^{(h)} e_1 + \mathfrak{x}_2^{(h)} e_2 + \mathfrak{x}_3^{(h)} e_3) e_1],$$

das man auch in der Form schreiben kann:

$$[h e_1] = \mathfrak{x}_3^{(h)} [e_3 e_1] - \mathfrak{x}_2^{(h)} [e_1 e_2]. \tag{2}$$

Man erhält also, wenn man noch die Gleichungen:

$$[e_2 e_3] = E_1, \quad [e_3 e_1] = E_2, \quad [e_1 e_2] = E_3$$

verwertet und zugleich die Ausdrücke für $[h e_2]$ und $[h e_3]$ hinzufügt:

$$\begin{cases} [h e_1] = \mathfrak{x}_3^{(h)} E_2 - \mathfrak{x}_2^{(h)} E_3, \\ [h e_2] = \mathfrak{x}_1^{(h)} E_3 - \mathfrak{x}_3^{(h)} E_1, \\ [h e_3] = \mathfrak{x}_2^{(h)} E_1 - \mathfrak{x}_1^{(h)} E_2. \end{cases} \tag{3}$$

1) Vgl. zur Gegenüberstellung der projektiven Geometrie mit der Parallelgeometrie und der Rechtwinkelgeometrie (Orthogonalgeometrie): Heffter und Köhler, Lehrbuch der analytischen Geometrie, Bd. 1, Leipzig und Berlin 1905, und Heffter, Analyse und Synthese in der Geometrie, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, 27. Bd., S. 1ff. Leipzig 1918. Vgl. ferner F. Klein, Nicht-Euklidische Geometrie I, Zweiter Abdruck. Göttingen 1893, S. 2f.

Aus diesen Darstellungen der 3 *Stäbe* $[h e_i]$ entwickelt man nach Satz 161 die Ausdrücke für die jenen Stäben zugehörenden *Strecken*, indem man diese Stäbe mit der *Feldeinheit:*

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{m}_1 E_1 + \mathfrak{m}_2 E_2 + \mathfrak{m}_3 E_3 \tag{4}$$

nachmultipliziert. Dadurch findet man für die erste von diesen Strecken den Ausdruck:

$$[h e_1 \mathfrak{J}] = \mathfrak{x}_3^{(h)}[E_2 \mathfrak{J}] - \mathfrak{x}_2^{(h)}[E_3 \mathfrak{J}]$$

oder wegen (4):

$$[h e_1 \mathfrak{J}] = \mathfrak{x}_3^{(h)}[E_2(\mathfrak{m}_1 E_1 + \mathfrak{m}_2 E_2 + \mathfrak{m}_3 E_3)] - \mathfrak{x}_2^{(h)}[E_3(\mathfrak{m}_1 E_1 + \mathfrak{m}_2 E_2 + \mathfrak{m}_3 E_3)],$$

d. h. wegen: $\quad [E_2 E_3] = e_1, \quad [E_3 E_1] = e_2, \quad [E_1 E_2] = e_3$:

$$[h e_1 \mathfrak{J}] = \mathfrak{x}_3^{(h)}(\mathfrak{m}_3 e_1 - \mathfrak{m}_1 e_3) - \mathfrak{x}_2^{(h)}(\mathfrak{m}_1 e_2 - \mathfrak{m}_2 e_1).$$

Es wird also:

$$\begin{cases} [h e_1 \mathfrak{J}] = (\mathfrak{m}_2 \mathfrak{x}_2^{(h)} + \mathfrak{m}_3 \mathfrak{x}_3^{(h)}) e_1 - \mathfrak{m}_1(\mathfrak{x}_2^{(h)} e_2 + \mathfrak{x}_3^{(h)} e_3), \\ [h e_2 \mathfrak{J}] = (\mathfrak{m}_3 \mathfrak{x}_3^{(h)} + \mathfrak{m}_1 \mathfrak{x}_1^{(h)}) e_2 - \mathfrak{m}_2(\mathfrak{x}_3^{(h)} e_3 + \mathfrak{x}_1^{(h)} e_1), \\ [h e_3 \mathfrak{J}] = (\mathfrak{m}_1 \mathfrak{x}_1^{(h)} + \mathfrak{m}_2 \mathfrak{x}_2^{(h)}) e_3 - \mathfrak{m}_3(\mathfrak{x}_1^{(h)} e_1 + \mathfrak{x}_2^{(h)} e_2). \end{cases} \tag{5}$$

In diesen 3 Gleichungen sind die $\mathfrak{m}_i \neq 0$, da das Dreieck $e_1 e_2 e_3$ ganz im Endlichen liegt, und der Einheitspunkt nach S. 1 des ersten Teils dieses Bandes keiner von den Seiten des Fundamentaldreiecks angehört. Schließen wir ferner noch den Fall aus, daß irgend zwei von den Ableitzahlen $\mathfrak{x}_i^{(h)}$ des Höhenschnittpunktes h gleichzeitig verschwinden, d. h. den Fall, wo der Höhenschnittpunkt h mit einer Ecke des Fundamentaldreiecks zusammenfällt, wo also das Fundamentaldreieck rechtwinklig ist, und berücksichtigen wir ferner, daß auch die in den 3 ersten Klammern der rechten Seiten von (5) enthaltenen Vielfachensummen der $\mathfrak{x}_i^{(h)}$ nicht verschwinden können, weil sonst einer der drei Höhenfußpunkte des Fundamentaldreiecks ins Unendliche fallen würde, also auch das Dreieck selbst nicht ganz im Endlichen liegen könnte, so kann man die erste von den 3 Gleichungen (5) auch in der Form schreiben:

$$[h e_1 \mathfrak{J}] = (\mathfrak{m}_2 \mathfrak{x}_2^{(h)} + \mathfrak{m}_3 \mathfrak{x}_3^{(h)})\, \mathfrak{m}_1 \left\{ \frac{e_1}{\mathfrak{m}_1} - \frac{\mathfrak{x}_2^{(h)} e_2 + \mathfrak{x}_3^{(h)} e_3}{\mathfrak{x}_2^{(h)} \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{x}_3^{(h)} \mathfrak{m}_3} \right\}. \tag{6}$$

Hier sind die Brüche in der geschweiften Klammer *einfache Punkte*, denn ihre Nenner sind nach der Gleichung (28) des 25. Abschnitts gerade die Massen der Zählerpunkte. Dabei ist der Subtrahendus:

$$\frac{\mathfrak{x}_2^{(h)} e_2 + \mathfrak{x}_3^{(h)} e_3}{\mathfrak{x}_2^{(h)} m_2 + \mathfrak{x}_3^{(h)} m_3}$$

der Fußpunkt der von der Ecke e_1 des Fundamentaldreiecks ausgehenden Höhe, und der Minuendus ist der mit dieser Ecke e_1 zusammenfallende einfache Punkt $\mathfrak{f}_1 = \frac{e_1}{m_1}$. Die Differenz in der geschweiften Klammer stellt also die Strecke jener Höhe dar, gerechnet von ihrem Fußpunkte aus bis zu der Ecke e_1 des Fundamentaldreiecks, von der sie gefällt ist. Bezeichnet man daher noch die Strecken der 3 Höhen, gerechnet von ihren Fußpunkten bis zu der sie begrenzenden Ecke des Dreiecks, mit h_1, h_2, h_3, so entnimmt man aus der Gleichung (6) und den zyklisch entsprechenden Gleichungen für diese 3 Höhenstrecken des als schiefwinklig vorausgesetzten Fundamentaldreiecks die Darstellung:

$$(7)\qquad \begin{cases} h_1 = \dfrac{e_1}{\mathfrak{m}_1} - \dfrac{\mathfrak{x}_2^{(h)} e_2 + \mathfrak{x}_3^{(h)} e_3}{\mathfrak{x}_2^{(h)} \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{x}_3^{(h)} \mathfrak{m}_3}, \\ h_2 = \dfrac{e_2}{\mathfrak{m}_2} - \dfrac{\mathfrak{x}_3^{(h)} e_3 + \mathfrak{x}_1^{(h)} e_1}{\mathfrak{x}_3^{(h)} \mathfrak{m}_3 + \mathfrak{x}_1^{(h)} \mathfrak{m}_1}, \\ h_3 = \dfrac{e_3}{\mathfrak{m}_3} - \dfrac{\mathfrak{x}_1^{(h)} e_1 + \mathfrak{x}_2^{(h)} e_2}{\mathfrak{x}_1^{(h)} \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{x}_2^{(h)} \mathfrak{m}_2}. \end{cases}$$

Damit hat man bereits die Ausdrücke für 3 Strecken gewonnen, die von den Seiten des Fundamentaldreiecks *in demselben Sinne* um einen rechten Winkel abweichen und *die Längen der 3 Höhen des Fundamentaldreiecks haben.* Es war aber oben gefordert, die Ausdrücke für 3 Strecken zu ermitteln, die *erstens* von den zugehörigen Seiten des Fundamentaldreiecks *in einem vorgeschriebenen Sinne* um einen rechten Winkel abweichen und *zweitens* mit ihnen *gleich lang* sind.

Die *zweite Forderung* erfüllt man, wenn man die Ausdrücke (7) mit den Brüchen $\frac{|\mathfrak{s}_i|}{|\mathfrak{h}_i|}$, $i = 1, 2, 3$, multipliziert, in denen die Zähler $|\mathfrak{s}_i|$ die absoluten Werte der Längen $\mathfrak{s}_i$ der Seiten des Fundamentaldreiecks und die Nenner $|\mathfrak{h}_i|$ diejenigen der Längen $\mathfrak{h}_i$ der zugehörigen Höhen desselben bedeuten.

Aber man kann auch leicht der *ersten Forderung* gerecht werden. Rechnet man einen Winkel positiv, wenn sein Sinn demjenigen des Winkels $\sphericalangle(c_3 c_1, c_3 c_2)$ der Blatteinheit entspricht, im andern Falle negativ (vgl. S. 27 des ersten Bandes und S. 2 ff. des ersten Teils des vorliegenden Bandes), und bezeichnet die mit den Ecken des Fundamentaldreiecks zusammenfallenden einfachen Punkte wie oben mit $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3$, so sieht man, daß man bei einem Fundamentaldreieck, für welches:

$$[\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3] > 0,$$

dessen Umlaufssinn also demjenigen der Blatteinheit entspricht, von den Seiten:

$$[\mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3],\ [\mathfrak{f}_3 \mathfrak{f}_1],\ [\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_2]$$

des Fundamentaldreiecks um einen *positiven* rechten Winkel abbiegen muß, um die zugehörigen Höhenstrecken (7) zu erhalten, während man bei einem Fundamentaldreieck, für welches:

$$[\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3] < 0$$

ist, um einen *negativen* rechten Winkel abbiegen muß.

Erinnert man sich aber weiter, daß nach S. 8 und 12 des ersten Teils dieses Bandes die Vorzeichen der Seitenlängen $\mathfrak{s}_i$ und der Höhenlängen $\mathfrak{h}_i$ so gewählt waren, daß die Brüche $\frac{\mathfrak{s}_i}{\mathfrak{h}_i}$ dasselbe Vorzeichen besitzen wie das planimetrische Produkt $[\mathfrak{k}_1\,\mathfrak{k}_2\,\mathfrak{k}_3]$, so wird:

$$\frac{\mathfrak{s}_i}{\mathfrak{h}_i} = \pm \frac{|\mathfrak{s}_i|}{|\mathfrak{h}_i|}, \text{ je nachdem } [\mathfrak{k}_1\,\mathfrak{k}_2\,\mathfrak{k}_3] \gtrless 0 \text{ ist.}$$

Multipliziert man daher die Strecken (7) anstatt mit $\frac{|\mathfrak{s}_i|}{|\mathfrak{h}_i|}$ mit den Brüchen $\frac{\mathfrak{s}_i}{\mathfrak{h}_i}$, so wird durch diese Multiplikation neben der angegebenen Längenänderung der Strecken (7) in dem Falle, wo $[\mathfrak{k}_1\,\mathfrak{k}_2\,\mathfrak{k}_3] < 0$ ist, der Sinn dieser Strecken umgekehrt; wenn dagegen $[\mathfrak{k}_1\,\mathfrak{k}_2\,\mathfrak{k}_3] > 0$ ist, so bleibt er erhalten. Daraus folgt: Sowohl in dem Falle, wo $[\mathfrak{k}_1\,\mathfrak{k}_2\,\mathfrak{k}_3] > 0$ ist, wie auch in dem Falle, wo $[\mathfrak{k}_1\,\mathfrak{k}_2\,\mathfrak{k}_3] < 0$ ist, weichen die Strecken:

$$(8)\qquad \begin{cases} g_1 = h_1 \dfrac{\mathfrak{s}_1}{\mathfrak{h}_1} = \left(\dfrac{e_1}{\mathfrak{m}_1} - \dfrac{\mathfrak{x}_2^{(h)} e_2 + \mathfrak{x}_3^{(h)} e_3}{\mathfrak{x}_2^{(h)} \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{x}_3^{(h)} \mathfrak{m}_3}\right) \dfrac{\mathfrak{s}_1}{\mathfrak{h}_1}, \\[2ex] g_2 = h_2 \dfrac{\mathfrak{s}_2}{\mathfrak{h}_2} = \left(\dfrac{e_2}{\mathfrak{m}_2} - \dfrac{\mathfrak{x}_3^{(h)} e_3 + \mathfrak{x}_1^{(h)} e_1}{\mathfrak{x}_3^{(h)} \mathfrak{m}_3 + \mathfrak{x}_1^{(h)} \mathfrak{m}_1}\right) \dfrac{\mathfrak{s}_2}{\mathfrak{h}_2}, \\[2ex] g_3 = h_3 \dfrac{\mathfrak{s}_3}{\mathfrak{h}_3} = \left(\dfrac{e_3}{\mathfrak{m}_3} - \dfrac{\mathfrak{x}_1^{(h)} e_1 + \mathfrak{x}_2^{(h)} e_2}{\mathfrak{x}_1^{(h)} \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{x}_2^{(h)} \mathfrak{m}_2}\right) \dfrac{\mathfrak{s}_3}{\mathfrak{h}_3} \end{cases}$$

beziehlich von den Stäben:

$$(9)\qquad \begin{cases} S_1 = \dfrac{E_1}{\mathfrak{m}_2\,\mathfrak{m}_3}, \\[2ex] S_2 = \dfrac{E_2}{\mathfrak{m}_3\,\mathfrak{m}_1}, \\[2ex] S_3 = \dfrac{E_3}{\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{m}_2} \end{cases}$$

in positivem Sinne um einen rechten Winkel ab (vgl. Fig. 156).

Setzt man daher noch:

$$(10)\qquad \boldsymbol{K} = \frac{g_1,\ g_2,\ g_3}{S_1,\ S_2,\ S_3},$$

so ist $\boldsymbol{K}$ eine Stabpunktreziprozität, die wenigstens die 3 Seitenstäbe S_1, S_2, S_3 des Fundamentaldreiecks in 3 Strecken überführt, die mit ihnen gleich lang sind und aus ihnen durch eine Drehung um einen positiven rechten Winkel hervorgehen.

Aber man überzeugt sich leicht, daß der Bruch $\boldsymbol{K}$ auch bei jedem belie-

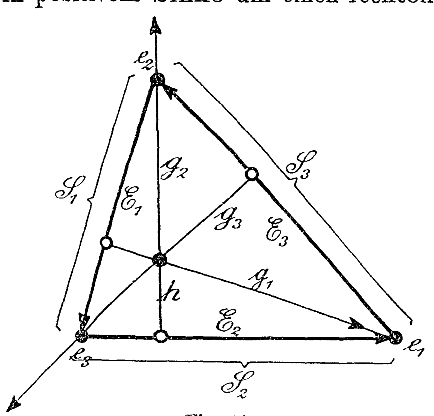


Fig. 156.

bigen im Endlichen liegenden Stabe U der Ebene eine entsprechende Umwandlung hervorruft. In der Tat, ist:

(11) $$U = \mathfrak{u}_1 E_1 + \mathfrak{u}_2 E_2 + \mathfrak{u}_3 E_3$$

ein beliebiger Stab, so läßt er sich als Vielfachensumme der Nenner von $\boldsymbol{K}$ in der Form darstellen (vgl. die Gleichungen (18) des 25. Abschnitts):

(12) $$U = \mathfrak{u}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3 S_1 + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{m}_3 \mathfrak{m}_1 S_2 + \mathfrak{u}_3 \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 S_3;$$

die ihm durch den Bruch $\boldsymbol{K}$ zugeordnete Strecke besitzt daher den Wert:

(13) $$U\boldsymbol{K} = \mathfrak{u}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3 g_1 + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{m}_3 \mathfrak{m}_1 g_2 + \mathfrak{u}_3 \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 g_3.$$

Da aber die Strecken g_1 und g_2 aus den Stäben S_1 und S_2 durch Drehung um einen positiven rechten Winkel hervorgehen, so gilt dasselbe auch von den Summierungsparallelogrammen, die den Summen:

$$\mathfrak{u}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3 g_1 + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{m}_3 \mathfrak{m}_1 g_2 \text{ und}$$
$$\mathfrak{u}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3 S_1 + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{m}_3 \mathfrak{m}_1 S_2$$

zugehören, also auch von diesen Summen selbst, und dann wieder aus demselben Grunde von den Summen (13) und (12) (vgl. die Fig. auf S. 24 des ersten Teils dieses Bandes). Dabei ist vorausgesetzt, daß die Summe (12) überhaupt einen im Endlichen liegenden Stab und nicht etwa ein Feld ergibt (vgl. S. 7 des ersten Teils dieses Bandes). Man hat daher den Satz:

Satz 874: Die durch die Gleichungen (8) bis (10) definierte Reziprozität zweiter Klasse $\boldsymbol{K}$ weist einem jeden im Endlichen liegenden Stabe U der Ebene eine mit ihm gleich lange und von ihm um einen positiven rechten Winkel abweichende Strecke zu.

Sieht man von der in diesem Satze enthaltenen Beziehung zwischen der Länge und dem Sinn des Stabes U und seiner Bildstrecke $U\boldsymbol{K}$ ab, so kann man ihm auch die folgende Fassung geben:

Satz 875: Die durch die Gleichungen (8) bis (10) definierte Reziprozität zweiter Klasse $\boldsymbol{K}$ ordnet einem jeden im Endlichen liegenden Stabe U den gemeinsamen unendlich fernen Punkt aller Geraden zu, die auf der Geraden des Stabes U senkrecht stehen, oder nach der Ausdrucksweise von Gundelfinger[1]) „das Normalenzentrum der Geraden des Stabes U“.

Wenn aber das Produkt $U\boldsymbol{K}$ für jeden im Endlichen liegenden Stab U eine mit ihm gleich lange und von ihm um einen positiven rechten Winkel abweichende Strecke darstellt, so wird das Produkt $[U \cdot U\boldsymbol{K}]$ gleich dem Quadrat der Länge dieses Stabes. Bezeichnet man daher den absoluten Wert der Länge des Stabes U mit $\mathfrak{u}$, so wird:

(14) $$[U \cdot U\boldsymbol{K}] = \mathfrak{u}^2,$$

und man hat den Satz:

1) Vgl. S. Gundelfinger, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, herausgegeben von F. Dingeldey, Leipzig 1895, S. 13.

Satz 876: Die durch die Gleichungen (8) bis (10) definierte Reziprozität zweiter Klasse $\boldsymbol{K}$ hat die Eigenschaft, daß die ihr zugehörende quadratische Form $[U \cdot U\boldsymbol{K}]$ für jeden im Endlichen liegenden Stab U das Quadrat seiner Länge darstellt.

Aber auch ein Produkt von der Form $[V \cdot W\boldsymbol{K}]$ besitzt eine einfache geometrische Bedeutung. Denn sind $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ die absolut genommenen Längen zweier im Endlichen gelegenen Stäbe V und W, so wird (vgl. Fig. 157):

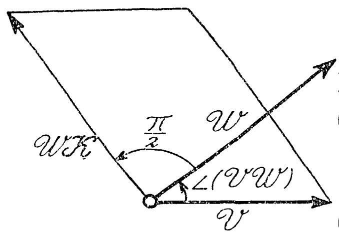


Fig. 157.

$$[V \cdot W\boldsymbol{K}] = \mathfrak{v}\mathfrak{w} \sin\left(\sphericalangle (VW) + \frac{\pi}{2}\right) \text{ oder}$$

(15) $$[V \cdot W\boldsymbol{K}] = \mathfrak{v}\mathfrak{w} \cos(VW)$$

Man hat somit den Satz:

Satz 877: Für die durch die Gleichungen (8) bis (10) definierte Reziprozität zweiter Klasse $\boldsymbol{K}$ ist die bilineare Form $[V \cdot W\boldsymbol{K}]$ das Produkt der absolut genommenen Längen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ der Stäbe V und W multipliziert mit dem cos des von diesen Stäben eingeschlossenen Winkels.

Aus diesem Satze folgt insbesondere noch, daß

(16) $$[W \cdot V\boldsymbol{K}] = [V \cdot W\boldsymbol{K}]$$

ist. Diese Gleichung aber charakterisiert nach S. 194 des ersten Teils dieses Bandes die Reziprozität zweiter Klasse $\boldsymbol{K}$ als *ein Polarsystem*. Von diesem Polarsystem zweiter Klasse kann man noch aussagen, daß es *einfach entartet*, daß also *seine Polarkurve ein Punktpaar* ist; denn das äußere Produkt der 3 Zähler von $\boldsymbol{K}$ verschwindet nach Satz 21 als Produkt dreier Strecken, während die 3 Produkte zu je zweien von ihnen als Produkte nicht paralleler Strecken von Null verschieden sind (vgl. S. 221 des ersten Teils dieses Bandes). Man hat daher den Satz:

Satz 878: Die durch die Gleichungen (8) bis (10) definierte Reziprozität zweiter Klasse $\boldsymbol{K}$ ist ein einfach entartendes Polarsystem zweiter Klasse.

Man kann aber auch leicht die Zahlbeziehung angeben, die zwischen den Zählerstrecken g_1, g_2, g_3 des Polarsystems $\boldsymbol{K}$ herrscht (vgl. die Gleichung (78) des 32. Abschnitts). Denn da die Nennerstäbe S_1, S_2, S_3 von $\boldsymbol{K}$ stetig aneinander liegen und ein geschlossenes Dreieck bilden, so muß man auch ein geschlossenes Dreieck erhalten, wenn man die mit den Stäben S_1, S_2, S_3 gleich langen und gegen sie um einen positiven rechten Winkel gedrehten Strecken g_1, g_2, g_3 stetig aneinander setzt, woraus hervorgeht, daß sie der Gleichung:

(17) $$g_1 + g_2 + g_3 = 0$$

Genüge leisten müssen. Denn aus dem Satze 2 folgt ohne weiteres der Satz:

Satz 879: Ergeben drei Strecken, wenn man sie unter Beibehaltung ihrer Länge, ihrer Richtung und ihres Sinnes stetig aneinanderlegt, einen geschlossenen Linienzug, so ist ihre Summe $= 0$[1]).

Man kann weiter auch leicht den Bruch $\boldsymbol{K}$ so umformen, daß seine Nenner anstatt durch die Seitenstäbe S_1, S_2, S_3 des Fundamentaldreiecks durch die Einheiten zweiter Stufe E_1, E_2, E_3 gebildet werden. In der Tat hängen ja diese mit jenen Seitenstäben durch die Gleichungen zusammen:

$$E_1 = \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3 S_1, \quad E_2 = \mathfrak{m}_3 \mathfrak{m}_1 S_2, \quad E_3 = \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 S_3, \tag{18}$$

und man braucht daher nur die ersten, zweiten, dritten Zähler und Nenner des Bruches (10) beziehlich mit den Produkten:

$$\mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3, \ \mathfrak{m}_3 \mathfrak{m}_1, \ \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2$$

zu multiplizieren und erhält so für den Bruch $\boldsymbol{K}$ die gewünschte neue Form:

$$\boldsymbol{K} = \frac{\mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3 g_1, \ \mathfrak{m}_3 \mathfrak{m}_1 g_2, \ \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 g_3}{E_1, \quad E_2, \quad E_3} \tag{19}$$

oder, wenn man:

$$\mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3 g_1 = k_1, \quad \mathfrak{m}_3 \mathfrak{m}_1 g_2 = k_2, \quad \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 g_3 = k_3 \tag{20}$$

setzt, die Darstellung:

$$\boldsymbol{K} = \frac{k_1, k_2, k_3}{E_1, E_2, E_3}. \tag{21}$$

Und wegen (20) läßt sich dann die Gleichung (17) auch in der Form schreiben:

$$\frac{k_1}{\mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3} + \frac{k_2}{\mathfrak{m}_3 \mathfrak{m}_1} + \frac{k_3}{\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2} = 0 \tag{22}$$

oder, wenn man mit dem Produkte $m_1 m_2 m_3$ multipliziert, in der Form:

$$\mathfrak{m}_1 k_1 + \mathfrak{m}_2 k_2 + \mathfrak{m}_3 k_3 = 0. \tag{23}$$

Diese Gleichung zwischen den Zählerstrecken des extensiven Bruches (21) zeigt (vgl. S. 221 ff. des ersten Teils dieses Bandes), daß der Stab, dessen Ableitzahlen die Koeffizienten $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3$ der Zahlbeziehung (23) sind, das heißt der Stab:

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{m}_1 E_1 + \mathfrak{m}_2 E_2 + \mathfrak{m}_3 E_3 \tag{24}$$

(vgl. Gleichung (4)), zu dem Polarsystem $\boldsymbol{K}$ apolar ist, oder wie wir das auch ausdrückten, die Nullinie des Polarsystems $\boldsymbol{K}$ bildet. Das besagt, daß der Stab $\mathfrak{J}$ der Gleichung genügt.:

$$\mathfrak{J}\boldsymbol{K} = 0. \tag{25}$$

1) Ein entsprechender Satz gilt übrigens offenbar auch für beliebig viele Strecken.

Die Gerade dieses Stabes $\mathfrak{J}$ ist aber nach S. 6 des ersten Teils dieses Bandes *die unendlich ferne Gerade. Ihr gehört daher* nach Satz 432 *das Punktpaar an,* das die Polarkurve des einfach entartenden Polarsystems zweiter Klasse $\boldsymbol{K}$ bildet. Man überzeugt sich ferner auch sofort, daß dieses Punktpaar der unendlich fernen Geraden *konjugiert komplex* ist. Denn, da die Strecke $U\boldsymbol{K}$, welche einem beliebigen Stabe U durch den Bruch $\boldsymbol{K}$ zugewiesen wird, auf dem Stabe U senkrecht steht, so gibt es keinen reellen Stab U, der seiner zugeordneten Strecke $U\boldsymbol{K}$ parallel ist, also durch den zu dieser Strecke gehörenden unendlich fernen Punkt hindurchgeht. Die Stabgleichung der Polarkurve des Bruches $\boldsymbol{K}$, das heißt die Gleichung:

$$[U \cdot U\boldsymbol{K}] = 0, \tag{26}$$

wird somit durch keinen reellen Stab U befriedigt; das durch die Gleichung (26) dargestellte Punktpaar ist daher wirklich konjugiert komplex.

Nach dem Satze 433 kann man weiter eine in ein Punktpaar zerfallende Kurve zweiter Klasse als das Doppelelementenpaar derjenigen Punktinvolution ansehen, die das zugehörige Polarsystem auf seiner Nullinie hervorruft. Das konjugiert komplexe Punktpaar, das die Kurve zweiter Klasse (26) darstellt, läßt sich daher als das Doppelelementenpaar derjenigen Punktinvolution auffassen, die das Polarsystem $\boldsymbol{K}$ auf der unendlich fernen Geraden $\mathfrak{J}$ erzeugt, also als das Doppelelementenpaar der Punktinvolution, durch welche dem Schnittpunkte der Geraden eines jeden Stabes U mit der unendlich fernen Geraden $\mathfrak{J}$, das heißt dem unendlich fernen Punkte (der Strecke) $[U\mathfrak{J}]$ des Stabes U, die zu diesem Stabe senkrechte Strecke $U\boldsymbol{K}$ zugewiesen wird, oder, wenn man will, als das Doppelelementenpaar derjenigen Punktinvolution, die eine beliebige Rechtwinkelinvolution aus der unendlich fernen Geraden ausschneidet (vgl. Bd. I, S. 217 f.), oder kürzer ausgedrückt als das Doppelelementenpaar „der Involution senkrechter Richtungen“.

Genau dieselbe Involutionszuordnung auf der unendlich fernen Geraden bewirkt nun aber jeder beliebige Kreis der Ebene. In der Tat, faßt man die Gesamtheit der Geraden ins Auge, deren Pole hinsichtlich eines beliebig gegebenen Kreises auf der unendlich fernen Geraden liegen, das heißt das Strahlbüschel seiner Durchmesser, so wird einem jeden von diesen Durchmessern als Pol in bezug auf diesen Kreis das Normalenzentrum jenes Durchmessers zugeordnet, das heißt: der Kreis ruft wirklich auf der unendlich fernen Geraden die Involution des konjugiert komplexen Punktpaars:

$$[U \cdot U\boldsymbol{K}] = 0 \tag{26}$$

hervor. Man pflegt dies kurz in der Weise auszudrücken, daß man sagt: Jeder Kreis der Ebene geht durch die Punkte des konjugiert komplexen Punktpaars (26) hindurch. Und man nennt aus diesem Grunde das konjugiert komplexe Punktpaar (26) „das Kreispunktpaar“ und das Polarsystem $\boldsymbol{K}$ „das Polarsystem des Kreispunktpaars“, endlich die oben definierte „Involution senkrechter Richtungen“, deren Doppelpunkte die Kreispunkte bilden, auch „die Involution des Kreispunktpaars“.

Man frage ferner nach der Bedeutung der Gleichung:

$$(27) \qquad [V \cdot W\boldsymbol{K}] = 0,$$

in der V und W zwei im Endlichen liegende Stäbe sind. Da das Produkt $W\boldsymbol{K}$ eine zum Stabe W senkrechte Strecke, oder wie wir auch sagten, „das Normalenzentrum von W“ darstellt, so muß ein Stab V, welcher der Gleichung (27) genügt, der also die Richtung der Strecke $W\boldsymbol{K}$ hat, auf dem Stabe W senkrecht stehen. Die Gleichung (27) sagt somit aus, daß die Geraden der Stäbe V und W aufeinander senkrecht stehen.

Und umgekehrt: Wenn die Geraden zweier Stäbe V und W aufeinander senkrecht stehen, so geht jede von ihnen durch das Normalenzentrum der andern, die Stäbe genügen daher der Gleichung (27), und man hat den Satz:

Satz 880: Damit zwei Stäbe V und W aufeinander senkrecht stehen, ist notwendig und hinreichend, daß sie einander hinsichtlich des Kreispunktpaars konjugiert sind, oder, was dasselbe ist, daß sie der Gleichung:

$$(27) \qquad [V \cdot W\boldsymbol{K}] = 0$$

Genüge leisten, unter $\boldsymbol{K}$ den extensiven Bruch für das Polarsystem des Kreispunktpaars verstanden.

Man kann noch hinzufügen, daß auch umgekehrt eine Kurve zweiter Ordnung notwendig ein Kreis ist, wenn sie die unendlich ferne Gerade $\mathfrak{J}$ in dem Kreispunktpaar:

$$(26) \qquad [U \cdot U\boldsymbol{K}] = 0$$

schneidet, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn sie auf der unendlich fernen Geraden $\mathfrak{J}$ die Punktinvolution $[V\mathfrak{J}]$, $[W\mathfrak{J}]$ hervorruft, welche aus ihr ausgeschnitten wird durch zwei veränderliche Stäbe V und W, die der Gleichung

$$(27) \qquad [V \cdot W\boldsymbol{K}] = 0$$

unterliegen.

In der Tat hat keine andere Kurve zweiter Ordnung als der Kreis die Eigenschaft, daß er in seinem Mittelpunkt, dem Pole der unendlich fernen Geraden, eine Involution senkrechter Strahlen erzeugt (vgl. den Satz 409).

Wir stellen zu der Bedingungsgleichung (27) des *Senkrechtstehens* noch die Bedingung des *Parallelismus* der Geraden zweier Stäbe V und W. Dieselbe lautet offenbar:

$$(27\text{a}) \qquad [VW\mathfrak{J}] = 0;$$

denn sie hat ja nur auszudrücken, daß der Schnittpunkt $[VW]$ der Geraden V und W der unendlich fernen Geraden $\mathfrak{J}$ angehört.

Die Bedingungsgleichung des Parallelismus enthält also wie alle Formeln der Parallelgeometrie *die unendlich ferne Gerade* $\mathfrak{J}$, nicht aber wie die Formeln der Rechtwinkelgeometrie den extensiven Bruch $\boldsymbol{K}$ des Kreispunktpaars.

Die 9 Ableitzahlen $\mathfrak{K}_{tu}$ des Polarsystems $\boldsymbol{K}$ des Kreispunktpaars. Bezeichnet man die Ableitzahlen der Zähler $\mathfrak{k}_t$ des Bruches $\boldsymbol{K}$ mit $\mathfrak{K}_{tu}$, setzt also:

$$(28)\qquad \begin{cases} k_1 = \mathfrak{K}_{11} e_1 + \mathfrak{K}_{12} e_2 + \mathfrak{K}_{13} e_3, \\ k_2 = \mathfrak{K}_{21} e_1 + \mathfrak{K}_{22} e_2 + \mathfrak{K}_{23} e_3, \\ k_3 = \mathfrak{K}_{31} e_1 + \mathfrak{K}_{32} e_2 + \mathfrak{K}_{33} e_3, \end{cases}$$

so wird mit Rücksicht auf die Gleichung (116) des 31. Abschnitts und die Gleichungen (18) und (14) des vorliegenden Abschnitts:

$$\mathfrak{K}_{11} = [E_1 \cdot E_1 \boldsymbol{K}] = (\mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3)^2 [S_1 \cdot S_1 \boldsymbol{K}] = (\mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3)^2 \mathfrak{s}_1{}^2,$$

oder da nach den Gleichungen (33) des 25. Abschnitts:

$$\mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3 \mathfrak{s}_1 = \frac{1}{\mathfrak{m}'} \frac{1}{\mathfrak{p}_1{}'}$$

ist, so erhält man für $\mathfrak{K}_{11}$ und die entsprechenden Ableitzahlen $\mathfrak{K}_{22}$ und $\mathfrak{K}_{33}$ die Werte:

$$(29)\qquad \mathfrak{K}_{11} = \frac{1}{\mathfrak{m}'^2} \frac{1}{\mathfrak{p}_1{}'^2}, \quad \mathfrak{K}_{22} = \frac{1}{\mathfrak{m}'^2} \frac{1}{\mathfrak{p}_2{}'^2}, \quad \mathfrak{K}_{33} = \frac{1}{\mathfrak{m}'^2} \frac{1}{\mathfrak{p}_3{}'^2}.$$

Ganz ähnlich gebaute Ausdrücke findet man auch für die Ableitzahlen $\mathfrak{K}_{tu}$, $t \neq u$. Es wird nämlich nach den Gleichungen (116) des 31. Abschnitts und den Gleichungen (18) und (15) des vorliegenden Abschnitts:

$$\mathfrak{K}_{23} = [E_3 \cdot E_2 \boldsymbol{K}] = \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \cdot \mathfrak{m}_3 \mathfrak{m}_1 [S_3 \cdot S_2 \boldsymbol{K}] = m_1 m_2 \cdot m_3 m_1 \,|\mathfrak{s}_2|\, |\mathfrak{s}_3| \cos(S_2 S_3).$$

Nun sind nach S. 8 des ersten Teils dieses Bandes die Größen $\mathfrak{s}_2$ und $\mathfrak{s}_3$ positiv oder negativ, je nachdem die Produkte $[\mathfrak{f} S_2]$ und $[\mathfrak{f} S_3]$, in denen $\mathfrak{f}$ den mit dem Einheitspunkt e zusammenfallenden *einfachen* Punkt bezeichnet, positiv oder negativ sind.

Danach ist, falls der Einheitspunkt e in einem der „Vierecksräume" liegt (vgl. S. 3 des ersten Teils dieses Bandes), welche an die Seiten S_2 und S_3 anstoßen, *die eine von den beiden Größen $\mathfrak{s}_2$ und $\mathfrak{s}_3$ positiv, die andere negativ*, und zwar sowohl, wenn der Umlaufssinn des Dreiecks $[\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3]$ positiv ist (vgl. Fig. 158), wie wenn er negativ ist (vgl. Fig. 159). Gleichzeitig aber wird in diesem Falle, wenn man wie auf S. 9 ff. des ersten Teils dieses Bandes die (absolut genommenen) Abstände des Einheitspunktes von den Seiten des Fundamentaldreiecks mit $\mathfrak{p}_1{}', \mathfrak{p}_2{}', \mathfrak{p}_3{}'$ bezeichnet:

$$\cos(S_2 S_3) = -\cos(\mathfrak{p}_2{}' \mathfrak{p}_3{}').$$

Und dasselbe gilt ebenso nicht nur hinsichtlich der Vorzeichen von $\mathfrak{s}_2$ und $\mathfrak{s}_3$, sondern auch hinsichtlich des $\cos(S_2 S_3)$ für den Fall, wo der Einheitspunkt e in einem der äußeren „Dreiecksräume" liegt, die sich an die Ecken e_2 und e_3 anschließen.

Andererseits sind *die Größen* $\mathfrak{s}_2$ *und* $\mathfrak{s}_3$ *beide positiv oder beide negativ*, wenn der Einheitspunkt in dem Vierecksraum liegt, der an die Seite S_1 anstößt, und dann ist wiederum gleichzeitig:

$$\cos(S_2 S_3) = +\cos(\mathfrak{p}_2' \mathfrak{p}_3').$$

Und dasselbe gilt wieder nicht nur hinsichtlich der Vorzeichen von $\mathfrak{s}_2$ und $\mathfrak{s}_3$, sondern auch hinsichtlich des $\cos(S_2 S_3)$ für den Fall, wo der Einheits-

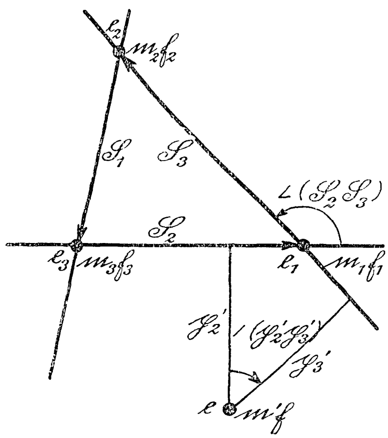


Fig. 158.

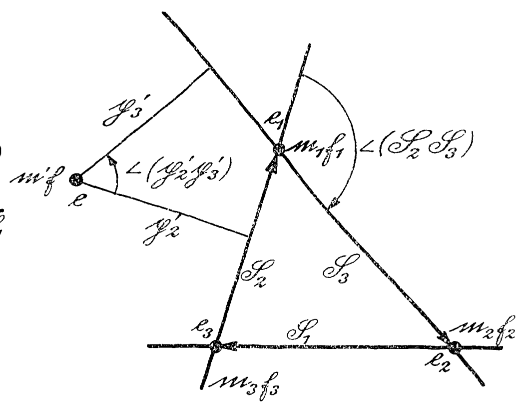


Fig. 159.

punkt in dem inneren Dreiecksraum liegt oder in demjenigen äußeren Dreiecksraum, der sich an die Ecke e_1 anschließt.

In jedem Falle wird also:

$$|\mathfrak{s}_2|\,|\mathfrak{s}_3| \cos(S_2 S_3) = \mathfrak{s}_2 \mathfrak{s}_3 \cos(\mathfrak{p}_2' \mathfrak{p}_3'),$$

und der obige Ausdruck für $\mathfrak{K}_{23}$ verwandelt sich daher in:

$$\mathfrak{K}_{23} = \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \cdot \mathfrak{m}_3 \mathfrak{m}_1 \mathfrak{s}_2 \mathfrak{s}_3 \cos(\mathfrak{p}_2' \mathfrak{p}_3').$$

Und da nach den Gleichungen (33) des 25. Abschnitts:

$$\mathfrak{m}_3 \mathfrak{m}_1 \mathfrak{s}_2 = \frac{1}{\mathfrak{m}'} \frac{1}{\mathfrak{p}_2'} \quad \text{und} \quad \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{s}_3 = \frac{1}{\mathfrak{m}'} \frac{1}{\mathfrak{p}_3'}$$

ist, unter $\mathfrak{m}'$ die Masse des Einheitspunktes e verstanden, so erhält man für $\mathfrak{K}_{23}$ und die zyklisch entsprechenden Größen $\mathfrak{K}_{31}$ und $\mathfrak{K}_{12}$ die Werte:

$$(30) \qquad \begin{cases} \mathfrak{K}_{23} = \dfrac{1}{\mathfrak{m}'^2} \dfrac{\cos(\mathfrak{p}_2' \mathfrak{p}_3')}{\mathfrak{p}_2' \mathfrak{p}_3'}, \\[2ex] \mathfrak{K}_{31} = \dfrac{1}{\mathfrak{m}'^2} \dfrac{\cos(\mathfrak{p}_3' \mathfrak{p}_1')}{\mathfrak{p}_3' \mathfrak{p}_1'}, \\[2ex] \mathfrak{K}_{12} = \dfrac{1}{\mathfrak{m}'^2} \dfrac{\cos(\mathfrak{p}_1' \mathfrak{p}_2')}{\mathfrak{p}_1' \mathfrak{p}_2'}. \end{cases}$$

Auf Grund dieser Formeln kann man leicht die Dreieckskoordinaten des Höhenschnittpunktes h des Fundamentaldreiecks mit den Ableitzahlen $\mathfrak{K}_{tu}$ des Bruches $\boldsymbol{K}$ in Beziehung setzen. Dazu drücke man zunächst den Abstand he_3 des Höhenschnittpunktes h von der Ecke e_3 des Fundamentaldreiecks durch die Abstände $\mathfrak{p}_1^{(h)}$ und $\mathfrak{p}_2^{(h)}$ des Punktes h von den Seiten E_1 und E_2 des Fundamentaldreiecks aus, wobei diese Abstände mit demjenigen Vorzeichen versehen zu denken sind, das der Bestimmung auf S. 8 des ersten Teils dieses Bandes entspricht. Bezeichnet man dazu noch die Innenwinkel des Fundamentaldreiecks mit $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \mathfrak{i}_3$, und setzt für den Augenblick voraus, daß sowohl der Höhenschnittpunkt wie der Einheitspunkt im Innern des Fundamentaldreiecks liegt (Fig. 160), so erhält man für den absolut genommenen Abstand he_3 der Punkte h und e_3 die beiden Ausdrücke:

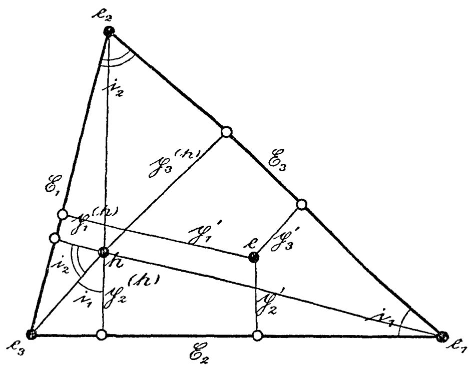


Fig. 160.

$$he_3 = \frac{\mathfrak{p}_1^{(h)}}{\cos \mathfrak{i}_2} = \frac{\mathfrak{p}_1^{(h)}}{-\cos(\mathfrak{p}_3'\,\mathfrak{p}_1')} \quad \text{und}$$

$$he_3 = \frac{\mathfrak{p}_2^{(h)}}{\cos \mathfrak{i}_1} = \frac{\mathfrak{p}_2^{(h)}}{-\cos(\mathfrak{p}_2'\,\mathfrak{p}_3')}.$$

Aus ihnen folgt die Gleichung

$$\frac{\mathfrak{p}_1^{(h)}}{\cos(\mathfrak{p}_3'\,\mathfrak{p}_1')} = \frac{\mathfrak{p}_2^{(h)}}{\cos(\mathfrak{p}_2'\,\mathfrak{p}_3')},$$

die man auch in der Form der folgenden Proportion schreiben kann:

$$\mathfrak{p}_1^{(h)} : \mathfrak{p}_2^{(h)} = \frac{1}{\cos(\mathfrak{p}_2'\,\mathfrak{p}_3')} : \frac{1}{\cos(\mathfrak{p}_3'\,\mathfrak{p}_1')}.$$

Und da entsprechende Proportionen *für je zwei Abstände* des Höhenschnittpunktes von den Seiten des Fundamentaldreiecks herrschen, so gilt auch die laufende Proportion:

$$(31) \qquad \mathfrak{p}_1^{(h)} : \mathfrak{p}_2^{(h)} : \mathfrak{p}_3^{(h)} = \frac{1}{\cos(\mathfrak{p}_2'\,\mathfrak{p}_3')} : \frac{1}{\cos(\mathfrak{p}_3'\,\mathfrak{p}_1')} : \frac{1}{\cos(\mathfrak{p}_1'\,\mathfrak{p}_2')},$$

und diese Proportion bleibt auch bestehen, wenn der Höhenschnittpunkt oder der Einheitspunkt oder beide außerhalb des Fundamentaldreiecks liegen.

Nach der Gleichung (35) des 25. Abschnitts genügen andererseits die Dreieckskoordinaten $\mathfrak{x}_1^{(h)}, \mathfrak{x}_2^{(h)}, \mathfrak{x}_3^{(h)}$ des Höhenschnittpunktes h der Proportion:

$$\mathfrak{x}_1^{(h)} : \mathfrak{x}_2^{(h)} : \mathfrak{x}_3^{(h)} = \frac{\mathfrak{p}_1^{(h)}}{\mathfrak{p}_1'} : \frac{\mathfrak{p}_2^{(h)}}{\mathfrak{p}_2'} : \frac{\mathfrak{p}_3^{(h)}}{\mathfrak{p}_3'}.$$

Bei Anwendung der Proportion (31) läßt sich aber dieser Proportion auch die Form verleihen:

$$\mathfrak{x}_1^{(h)} : \mathfrak{x}_2^{(h)} : \mathfrak{x}_3^{(h)} = \frac{1}{\mathfrak{p}_1' \cos(\mathfrak{p}_2' \mathfrak{p}_3')} : \frac{1}{\mathfrak{p}_2' \cos(\mathfrak{p}_3' \mathfrak{p}_1')} : \frac{1}{\mathfrak{p}_3' \cos(\mathfrak{p}_1' \mathfrak{p}_2')},$$

oder wenn man das laufende Verhältnis der rechten Seite mit dem Produkte $\mathfrak{p}_1' \mathfrak{p}_2' \mathfrak{p}_3'$ erweitert, die Form:

$$\mathfrak{x}_1^{(h)} : \mathfrak{x}_2^{(h)} : \mathfrak{x}_3^{(h)} = \frac{\mathfrak{p}_2' \mathfrak{p}_3'}{\cos(\mathfrak{p}_2' \mathfrak{p}_3')} : \frac{\mathfrak{p}_3' \mathfrak{p}_1'}{\cos(\mathfrak{p}_3' \mathfrak{p}_1')} : \frac{\mathfrak{p}_1' \mathfrak{p}_2'}{\cos(\mathfrak{p}_1' \mathfrak{p}_2')}. \tag{32}$$

Wegen (30) verhält sich daher:

$$\mathfrak{x}_1^{(h)} : \mathfrak{x}_2^{(h)} : \mathfrak{x}_3^{(h)} = \frac{1}{\mathfrak{K}_{23}} : \frac{1}{\mathfrak{K}_{31}} : \frac{1}{\mathfrak{K}_{12}}. \tag{33}$$

Schließlich kann man noch aus der Stabgleichung (26) des Kreispunktpaares auf Grund des Satzes 447 die Gleichung des Kreispunktpaares in Linienkoordinaten ableiten. Dieselbe lautet:

$$\mathfrak{K}_{11}\mathfrak{u}_1^2 + \mathfrak{K}_{22}\mathfrak{u}_2^2 + \mathfrak{K}_{33}\mathfrak{u}_3^2 + 2\,\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_3 + 2\,\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{u}_3\mathfrak{u}_1 + 2\,\mathfrak{K}_{12}\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2 = 0, \tag{34}$$

und ihre linke Seite ist nach der Gleichung (11) des 33. Abschnitts zugleich der Ausdruck für die quadratische Form $[U \cdot U\boldsymbol{K}]$, d. h., es ist[1]):

$$\begin{aligned}[U \cdot U\boldsymbol{K}] = \mathfrak{K}_{11}\mathfrak{u}_1^2 + \mathfrak{K}_{22}\mathfrak{u}_2^2 + \mathfrak{K}_{33}\mathfrak{u}_3^2 + 2\,\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_3 + 2\,\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{u}_3\mathfrak{u}_1 \\ + 2\,\mathfrak{K}_{12}\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2.\end{aligned} \tag{35}$$

---

1) Die quadratische Form $[U \cdot U\boldsymbol{K}]$ ist nur um einen konstanten Zahlfaktor verschieden von der bei der Behandlung des Kreispunktpaares von S. Gundelfinger eingeführten Funktion:

$$\omega_{(u,u)} = \omega_{11}\mathfrak{u}_1^2 + \omega_{22}\mathfrak{u}_2^2 + \omega_{33}\mathfrak{u}_3^2 + 2\,\omega_{23}\mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_3 + 2\,\omega_{31}\mathfrak{u}_3\mathfrak{u}_1 + 2\,\omega_{12}\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2. \tag{*}$$

In der Tat besteht die Beziehung:

$$\omega_{(u,u)} = m'^2 [U \cdot U\boldsymbol{K}], \tag{**}$$

wo m' die Masse des Einheitspunktes bedeutet.

Da die quadratische Form $[U \cdot U\boldsymbol{K}]$ stets das Quadrat der Länge des Stabes U darstellt, wie auch das schiefwinklige Fundamentaldreieck beschaffen sein, und wie auch der Einheitspunkt gelegen sein mag, während nach der Gleichung (11) des 25. Abschnitts die Masse m' des Einheitspunktes von der Beschaffenheit des Fundamentaldreiecks sowie von der Lage des Einheitspunktes abhängt, so gilt nach der obigen Formel (**) dasselbe auch für die Gundelfingersche Funktion $\omega_{(c,u)}$. Und diese Abhängigkeit hat gelegentlich lästige Rechnungen zur Folge. Es schien mir daher geboten, eine geringe Änderung in der Bezeichnung einzuführen, die übrigens die meisten Gundelfingerschen Formeln fast unverändert läßt, da wegen (**) die Koeffizienten ω_{rs} der Funktion $\omega_{(u,u)}$ mit den Ableitzahlen $\mathfrak{K}_{rs}$ der quadratischen Form $[U \cdot U\boldsymbol{K}]$ *proportional* sind, indem allgemein:

$$\omega_{rs} = \mathfrak{m}'^2 \mathfrak{K}_{rs}, \quad r, s = 1, 2, 3, \tag{***}$$

ist. Vgl. S. Gundelfinger, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, herausgegeben von F. Dingeldey, Leipzig 1895, S. 6 ff.

Aus der linken Seite der Gleichung (34) ergibt sich zugleich nach Satz 694 der Ausdruck für die Potenzform zweiter Klasse $k^{(2)}$ des Kreispunktpaars, indem man die laufenden Linienkoordinaten $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3$ der Gleichung durch die Grundpunkte e_1, e_2, e_3 des Fundamentaldreiecks ersetzt. Man erhält so für die Potenzform $k^{(2)}$ des Kreispunktpaars die Darstellung:

$$(36)\qquad k^{(2)} = \mathfrak{K}_{11} e_1^{\,2} + \mathfrak{K}_{22} e_2^{\,2} + \mathfrak{K}_{33} e_3^{\,2} + 2\,\mathfrak{K}_{23} e_2 e_3 + 2\mathfrak{K}_{31} e_3 e_1 + 2\,\mathfrak{K}_{12} e_1 e_2 .$$

Die einem Dreieck umschriebenen gleichseitigen Hyperbeln. Die Proportion (33) ermöglicht die Ableitung einer wichtigen Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel. Zunächst liefert sie für die Produkte zu je zweien aus den Dreieckskoordinaten $\mathfrak{x}_1^{(h)}, \mathfrak{x}_2^{(h)}, \mathfrak{x}_3^{(h)}$ des Höhenschnittpunktes h die weitere Proportion:

$$\mathfrak{x}_2^{(h)} \mathfrak{x}_3^{(h)} : \mathfrak{x}_3^{(h)} \mathfrak{x}_1^{(h)} : \mathfrak{x}_1^{(h)} \mathfrak{x}_2^{(h)} = \frac{1}{\mathfrak{K}_{31}\,\mathfrak{K}_{12}} : \frac{1}{\mathfrak{K}_{12}\,\mathfrak{K}_{23}} : \frac{1}{\mathfrak{K}_{23}\,\mathfrak{K}_{31}},$$

die man auch in der Form schreiben kann:

$$(37)\qquad \mathfrak{x}_2^{(h)} \mathfrak{x}_3^{(h)} : \mathfrak{x}_3^{(h)} \mathfrak{x}_1^{(h)} : \mathfrak{x}_1^{(h)} \mathfrak{x}_2^{(h)} = \mathfrak{K}_{23} : \mathfrak{K}_{31} : \mathfrak{K}_{12} .$$

Um aus dieser Proportion die gewünschte Eigenschaft einer gleichseitigen Hyperbel zu entwickeln, beachte man, daß nach dem Satze 448 in der Gleichung:

$$\mathfrak{a}_{11} \mathfrak{x}_1^{\,2} + \mathfrak{a}_{22} \mathfrak{x}_2^{\,2} + \mathfrak{a}_{33} \mathfrak{x}_3^{\,2} + 2\,\mathfrak{a}_{23} \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3 + 2\,\mathfrak{a}_{31} \mathfrak{x}_3 \mathfrak{x}_1 + 2\,\mathfrak{a}_{12} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 = 0$$

einer Kurve zweiter Ordnung in Dreieckskoordinaten der Koeffizient $\mathfrak{a}_{ii}$ eines Quadrates $\mathfrak{x}_i^{\,2}$ einer Koordinate des laufenden Punktes der Kurve dann und nur dann verschwindet, wenn die Kurve zweiter Ordnung durch die jenem Quadrate entsprechende Ecke des Fundamentaldreiecks hindurchgeht. Daraus folgt ohne weiteres der Satz, dessen erster Teil bereits auf S. 178 erwähnt ist:

Satz 881: Sind $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ die Dreieckskoordinaten eines Punktes in bezug auf ein beliebiges Fundamentaldreieck, so ist die Gleichung:

$$(38)\qquad \mathfrak{a}_{23} \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3 + \mathfrak{a}_{31} \mathfrak{x}_3 \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{a}_{12} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 = 0$$

die Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung, die dem Fundamentaldreieck umschrieben ist, und umgekehrt läßt sich eine jede Kurve zweiter Ordnung, die dem Fundamentaldreieck umschrieben ist, durch eine Gleichung von der Form (38) ausdrücken.

Wir stellen diesem Satze auch sogleich den dualistisch entsprechenden Satz an die Seite, auf den übrigens auch schon oben (auf S. 185) Bezug genommen wurde, nämlich den Satz:

Satz 882: Sind $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3$ die Dreieckskoordinaten eines Stabes in bezug auf ein beliebiges Fundamentaldreieck, so ist die Gleichung:

$$(39)\qquad \mathfrak{A}_{23} \mathfrak{u}_2 \mathfrak{u}_3 + \mathfrak{A}_{31} \mathfrak{u}_3 \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{A}_{12} \mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_2 = 0$$

die Gleichung einer Kurve zweiter Klasse, die dem Fundamentaldreieck eingeschrieben ist, und umgekehrt läßt sich eine jede Kurve zweiter Klasse, die dem Fundamentaldreieck eingeschrieben ist, durch eine Gleichung von der Form (39) darstellen.

Jetzt frage man weiter nach der Bedingung dafür, daß die dem Fundamentaldreieck umschriebene Kurve zweiter Ordnung (38) eine gleichseitige Hyperbel sei. Eine Kurve zweiter Ordnung ist als gleichseitige Hyperbel dadurch charakterisiert, daß *erstens* wie bei jeder Hyperbel ihre Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden reell sind, und daß *zweitens* ihre Asymptoten, d. h. die Tangenten in jenen Schnittpunkten mit der unendlich fernen Geraden an die Kurve, aufeinander senkrecht stehen.

Die Schnittpunkte einer gleichseitigen Hyperbel mit der unendlich fernen Geraden werden also zugleich aus der unendlich fernen Geraden von den Schenkeln eines rechten Winkels ausgeschnitten und bilden somit nach S. 388 ein Paar der Involution, die das Kreispunktpaar auf der unendlich fernen Geraden hervorruft. Nach dem Satze 683 ist daher das Polarsystem $\mathfrak{p}$ einer gleichseitigen Hyperbel zu dem Polarsystem $\boldsymbol{K}$ des Kreispunktpaars apolar, d. h. es besteht zwischen den beiden Polarsystemen $\mathfrak{p}$ und $\boldsymbol{K}$ die Beziehung:

$$(40) \qquad [\mathfrak{p}\boldsymbol{K}] = 0.$$

Und umgekehrt, wenn ein Polarsystem zweiter Ordnung $\mathfrak{p}$ der Gleichung (40) Genüge leistet, so ist seine Polkurve eine gleichseitige Hyperbel. Man hat somit den Satz:

Satz 883: Die Polkurve eines Polarsystems zweiter Ordnung $\mathfrak{p}$ ist dann und nur dann eine gleichseitige Hyperbel, wenn dasselbe zum Kreispunktpaar $\boldsymbol{K}$ apolar ist, d.h. wenn die Gleichung besteht:

$$(40) \qquad [\mathfrak{p}\boldsymbol{K}] = 0.$$

Ist nun überdies, wie oben vorausgesetzt wurde, die gleichseitige Hyperbel, welche die Polkurve des Polarsystems $\mathfrak{p}$ bildet, dem Fundamentaldreieck umschrieben, genügen ihre laufenden Dreieckskoordinaten $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ also der Gleichung (38), so läßt sich nach dem Satze 670 die Gleichung (40) mit Rücksicht auf die Gleichungen (38) und (35) für die Pol- und Polarkurve der Polarsysteme $\mathfrak{p}$ und $\boldsymbol{K}$ auch in der Form schreiben:

$$(41) \qquad \mathfrak{a}_{23}\mathfrak{K}_{23} + \mathfrak{a}_{31}\mathfrak{K}_{31} + \mathfrak{a}_{12}\mathfrak{K}_{12} = 0.$$

Die Gleichung (41) aber zieht infolge der Proportion (37) die Gleichung nach sich:

$$(42) \qquad \mathfrak{a}_{23}\mathfrak{x}_2^{(h)}\mathfrak{x}_3^{(h)} + \mathfrak{a}_{31}\mathfrak{x}_3^{(h)}\mathfrak{x}_1^{(h)} + \mathfrak{a}_{12}\mathfrak{x}_1^{(h)}\mathfrak{x}_2^{(h)} = 0,$$

welche zeigt, daß die Koordinaten $\mathfrak{x}_1^{(h)}, \mathfrak{x}_2^{(h)}, \mathfrak{x}_3^{(h)}$ des Höhenschnittpunktes des Fundamentaldreiecks die Gleichung (38) einer jeden dem Fundamentaldreieck umschriebenen gleichseitigen Hyperbel befriedigen, daß somit eine jede dem Fundamentaldreieck umschriebene gleichseitige Hyperbel auch durch dessen Höhenschnittpunkt hindurchgeht (Fig. 161). Man hat also den Satz:

Satz 884: Jede einem Dreieck umschriebene gleichseitige Hyperbel geht auch durch dessen Höhenschnittpunkt hindurch.

Es ist nämlich nicht nötig, in dem Satze 884 die oben auf S. 392 gemachte Beschränkung auf ein schiefwinkliges Dreieck aufrecht zu erhalten, da für ein rechtwinkliges Dreieck der Höhenschnittpunkt mit dem Scheitel des rechten Winkels des Dreiecks zusammenfällt, so daß der Satz auch für ein rechtwinkliges Dreieck noch gültig bleibt, wenn er auch freilich in diesem Falle trivial wird.

Da übrigens die Gleichung (42) unter der Voraussetzung eines schiefwinkligen Fundamentaldreiecks auf Grund der Proportion (37) auch rückwärts die Gleichung (40) nach sich zieht, so gilt von dem Satze 884 auch die folgende Umkehrung:

Satz 885: Umkehrung von Satz 884: Geht eine einem schiefwinkligen Dreieck umschriebene Kurve zweiter Ordnung durch dessen Höhenschnittpunkt hindurch, so ist sie eine gleichseitige Hyperbel.

Man kann den Satz 884 auch ohne Rechnung begründen. Dazu wende man die Schlußweise von S. 354 auf den Fall an, wo die benutzte Kurve zweiter Klasse das Kreispunktpaar ist. Dann werden die Kurven des zu jener Kurve zweiter Klasse und den doppelt zählenden Punkten e_1^2, e_2^2, e_3^2 apolaren Kegelschnittbüschels zu Kurven zweiter Ordnung, die zum Kreispunktpaar apolar sind und durch die Punkte e_1, e_2, e_3 hindurchgehen, d. h. zu gleichseitigen Hyperbeln, die dem Dreieck $e_1 e_2 e_3$ umschrieben sind. Sie müssen daher, da sie ein Kegelschnittbüschel bilden, noch einen vierten festen Punkt enthalten, und dieser vierte feste Punkt kann kein anderer sein als der Höhenschnittpunkt h des Dreiecks $e_1 e_2 e_3$. Denn die in dem Büschel gleichseitiger Hyperbeln auftretenden Geradenpaare bestehen aus je einer Seite des Dreiecks $e_1 e_2 e_3$ und ihrer hinsichtlich des Kreispunktpaars konjugierten Geraden durch die Gegenecke des Dreiecks, d. h. aus der zu jener Seite gehörigen Höhe des Dreiecks $e_1 e_2 e_3$. Diese drei Geradenpaare aber haben außer den drei Ecken des Dreiecks dessen Höhenschnittpunkt h miteinander gemein (vgl. die obige

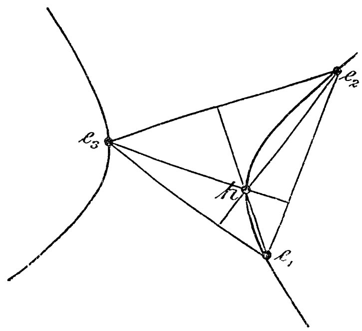


Fig. 161.

Fig. 161). Der vierte Grundpunkt des Hyperbelbüschels ist somit der Höhenschnittpunkt h des Dreiecks $e_1 e_2 e_3$ [1]).

Aus dem Satze 884 kann man leicht *eine Tangentenkonstruktion der gleichseitigen Hyperbel* folgern (Fig. 162). Schreibt man nämlich einer gleichseitigen Hyperbel ein rechtwinkliges Dreieck abc ein, das seinen rechten Winkel bei a hat, so fällt auch der Höhenschnittpunkt h des Dreiecks, der nach dem Satze 884 ebenfalls auf der gleichseitigen Hyperbel enthalten ist, mit dem Punkte a zusammen. Und da der Höhenschnittpunkt h zugleich der Hypotenusenhöhe ad angehört, so ist diese Hypotenusenhöhe

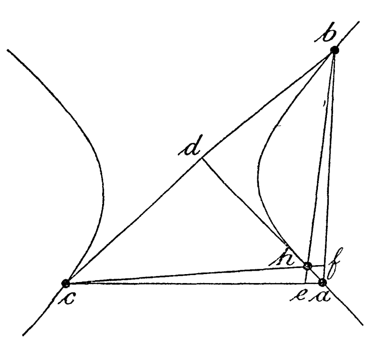


Fig. 162.

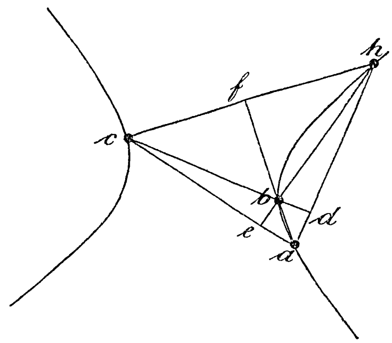


Fig. 163.

ad die Tangente der gleichseitigen Hyperbel im Punkte a. Man hat also den Satz:

Satz 886: Man findet die Tangente eines beliebigen Punktes einer gleichseitigen Hyperbel, indem man der Kurve ein rechtwinkliges Dreieck einschreibt, das jenen Punkt zum Scheitel des rechten Winkels hat; dann ist die Hypotenusenhöhe dieses Dreiecks die gesuchte Tangente.

Eine zweite Begründung dieses Satzes findet man, wenn man zwei Ecken a und b eines schiefwinkligen, einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreiecks abc in einen Punkt zusammenrücken läßt (Fig. 163). Dann fallen die Höhenfußpunkte d und e der beiden Höhen ad und be mit den vereint liegenden Punkten a und b ebenfalls zusammen, und die von c auf ab gefällte Höhe cf trifft die gleichseitige Hyperbel im Höhenschnittpunkt h des Dreiecks abc. Wegen des Zusammenfallens der 4 Punkte $abde$ ist dann das Dreieck cah rechtwinklig bei a, und seine Hypotenusenhöhe af ist die Tangente der gleichseitigen Hyperbel im Punkte a.

Das zu dem Polarsystem $\boldsymbol{K}$ *des Kreispunktpaars adjungierte Polarsystem* $\bar{k}$. Es ist noch von Interesse, den Ausdruck für das zu dem Polarsystem zweiter Klasse $\boldsymbol{K}$ des Kreispunktpaars adjungierte Polarsystem zweiter

1) Vgl. hierzu und zum Folgenden die schon oben auf S. 354 zitierte Arbeit von E. Müller, Monatshefte für Mathematik und Physik, XXVIII. Jahrgang, 1917, S. 53f.

Ordnung zu bestimmen. Es wird wegen (10):

$$(43)\qquad \bar{k} = \frac{[g_2\, g_3],\quad [g_3\, g_1],\quad [g_1\, g_2]}{[S_2\, S_3],\quad [S_3\, S_1],\quad [S_1\, S_2]}.$$

Setzt man dann noch:

$$(44)\quad F = [(\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3)(\mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_1)] = [\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3] + [\mathfrak{f}_3\mathfrak{f}_1] + [\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2] = [(\mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_1)(\mathfrak{f}_3 - \mathfrak{f}_2)]$$
$$= [(\mathfrak{f}_3 - \mathfrak{f}_2)(\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3)],$$

wo wie bisher $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3$ die mit den Ecken e_1, e_2, e_3 des Fundamentaldreiecks zusammenfallenden *einfachen* Punkte sind, so ist $\mathfrak{F}$ ein Feld, das nach Größe und Sinn mit dem Blatte $[\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3]$ übereinstimmt. Nun sind aber die 3 Strecken:

$$\mathfrak{f}_3 - \mathfrak{f}_2,\quad \mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3,\quad \mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_1$$

die Strecken der 3 Seiten: $\quad S_1,\quad S_2,\quad S_3$

des Fundamentaldreiecks, und aus ihnen gehen die Strecken g_1, g_2, g_3 durch eine Drehung um einen positiven rechten Winkel hervor (Fig. 164). Daraus folgt, daß die Produkte aus je zweien der Strecken g_1, g_2, g_3 denselben Wert besitzen wie die Produkte aus je zwei entsprechenden Strecken $\mathfrak{f}_3 - \mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3$, $\mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_1$, d. h., es wird auch:

$$(45)\quad [g_2 g_3] = [g_3 g_1] = [g_1 g_2] = \mathfrak{F}.$$

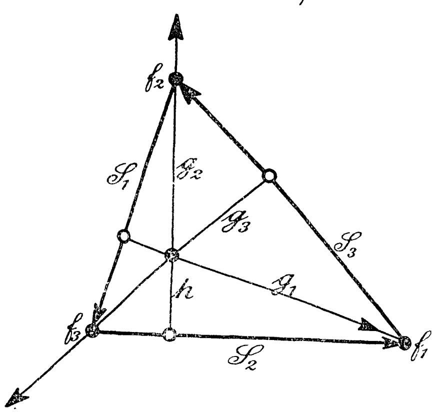


Fig. 164.

Bezeichnet man ferner noch das dem Felde F zugehörige Blatt $[\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3]$, das sich nach (44) aus dem Felde F durch planimetrische Multiplikation mit dem einfachen Punkte $\mathfrak{f}_1$ ableiten läßt, mit dem Buchstaben $\mathfrak{F}$, setzt also:

$$(46)\qquad [\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3] = \mathfrak{F},$$

so ist $\mathfrak{F}$ diejenige Zahlgröße, deren absoluter Wert gleich dem doppelten Flächeninhalt des Fundamentaldreiecks ist, und welche positiv oder negativ ist, je nachdem der Umlaufssinn des Blattes $[\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3]$ demjenigen der Blatteinheit entspricht oder nicht (vgl. Bd. I, S. 126), und es wird:

$$[S_2 S_3] = [\mathfrak{f}_3\mathfrak{f}_1 \cdot \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2] = [\mathfrak{f}_3\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2]\,\mathfrak{f}_1 = [\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3]\,\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{F}\mathfrak{f}_1, \quad \text{also:}$$
$$(47)\qquad [S_2 S_3] = \mathfrak{F}\mathfrak{f}_1,\quad [S_3 S_1] = \mathfrak{F}\mathfrak{f}_2,\quad [S_1 S_2] = \mathfrak{F}\mathfrak{f}_3.$$

Da ferner $\mathfrak{F}$ die Flächenzahl des Feldes F ist, und die in Bd. I, S. 27 eingeführte Feldeinheit mit der oben in (5) benutzten Größe $\mathfrak{J}$ identisch ist, so wird:

$$(48)\qquad \frac{F}{\mathfrak{F}} = \mathfrak{J}, \quad \text{d. h.}$$

$$(49)\qquad F = \mathfrak{F}\mathfrak{J}.$$

Die Gleichungen (45) lassen sich daher auch in der Form schreiben:

$$(50)\qquad [g_2 g_3] = \mathfrak{F}\mathfrak{J},\quad [g_3 g_1] = \mathfrak{F}\mathfrak{J},\quad [g_1 g_2] = \mathfrak{F}\mathfrak{J}.$$

Substituiert man aber die Werte (47) und (50) in die Gleichung (43) und kürzt dann den Bruch rechter Hand mit $\mathfrak{F}$, so erhält man für das zu dem Polarsystem $\boldsymbol{K}$ des Kreispunktpaars adjungierte Polarsystem $\overline{\boldsymbol{k}}$ die neue Darstellung:

$$(51)\qquad \overline{\boldsymbol{k}} = \frac{\mathfrak{J},\ \mathfrak{J},\ \mathfrak{J}}{\mathfrak{f}_1,\ \mathfrak{f}_2,\ \mathfrak{f}_3},$$

oder wenn man den ersten, zweiten, dritten Zähler und Nenner beziehlich mit $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3$ multipliziert, die Form:

$$(52)\qquad \overline{\boldsymbol{k}} = \frac{\mathfrak{m}_1\mathfrak{J},\quad \mathfrak{m}_2\mathfrak{J},\quad \mathfrak{m}_3\mathfrak{J}}{e_1,\quad e_2,\quad e_3}.$$

Ein beliebiger Punkt:

$$(53)\qquad x = \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3$$

der Ebene wird daher durch den Bruch $\overline{\boldsymbol{k}}$ übergeführt in den Stab:

$$(54)\qquad x\overline{\boldsymbol{k}} = (\mathfrak{m}_1\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{m}_2\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{m}_3\mathfrak{x}_3)\,\mathfrak{J}.$$

Für die dem Bruche $\overline{\boldsymbol{k}}$ zugehörende quadratische Form $[x \cdot x\overline{\boldsymbol{k}}]$ erhält man somit die Darstellung:

$$(55)\qquad [x \cdot x\overline{\boldsymbol{k}}] = (\mathfrak{m}_1\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{m}_2\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{m}_3\mathfrak{x}_3)\,[x\mathfrak{J}].$$

Nun folgt aber ferner aus der Gleichung:

$$(4)\qquad \mathfrak{J} = \mathfrak{m}_1 E_1 + \mathfrak{m}_2 E_2 + \mathfrak{m}_3 E_3$$

durch planimetrische Multiplikation mit x für das Produkt $[x\mathfrak{J}]$ der Wert:

$$(56)\qquad [x\mathfrak{J}] = \mathfrak{m}_1\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{m}_2\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{m}_3\mathfrak{x}_3.$$

Die Gleichung (54) nimmt daher die Form an:

$$(57)\qquad [x \cdot x\overline{\boldsymbol{k}}] = [x\mathfrak{J}]^2,$$

durch die *zunächst* bestätigt wird, daß das zu dem Polarsystem zweiter Klasse $\boldsymbol{K}$ des Kreispunktpaars adjungierte Polarsystem zweiter Ordnung $\overline{\boldsymbol{k}}$ die doppelt zählende unendlich ferne Gerade $\mathfrak{J}$ zur Polkurve hat.

Berücksichtigt man *ferner*, daß:

$$(58)\qquad [x \cdot x\overline{\boldsymbol{k}}] = \overline{\mathfrak{k}}_{11}\mathfrak{x}_1^2 + \cdots + 2\overline{\mathfrak{k}}_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + \cdots$$

ist, unter $\overline{\mathfrak{k}}_{tu}$ die Unterdeterminanten der Elemente $\mathfrak{K}_{tu}$ der Determinante:

$$|\mathfrak{K}_{tu}|,\quad t, u = 1, 2, 3,$$

des Kreispunktpaars verstanden, und daß:

$$(59)\qquad [x\mathfrak{J}]^2 = \mathfrak{m}_1^2\mathfrak{x}_1^2 + \cdots + 2\mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + \cdots$$

ist, so hat man die Gleichungen:

(60) $$\bar{\mathfrak{k}}_{tu} = \mathfrak{m}_t \mathfrak{m}_u, \quad t, u = 1, 2, 3.$$

Da endlich:

$$\bar{\mathfrak{k}}_{11} = \begin{vmatrix} \mathfrak{K}_{22} & \mathfrak{K}_{23} \\ \mathfrak{K}_{32} & \mathfrak{K}_{33} \end{vmatrix} = \mathfrak{K}_{22}\mathfrak{K}_{33} - \mathfrak{K}_{23}^2 \quad \text{und}$$

$$\bar{\mathfrak{k}}_{23} = -\begin{vmatrix} \mathfrak{K}_{11} & \mathfrak{K}_{12} \\ \mathfrak{K}_{31} & \mathfrak{K}_{32} \end{vmatrix} = \mathfrak{K}_{12}\mathfrak{K}_{31} - \mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{11}$$

ist, und ebenso die zyklisch entsprechenden Gleichungen gelten, so folgen aus (60) die Beziehungen:

(61) $$\begin{cases} \bar{\mathfrak{k}}_{11} = \mathfrak{K}_{22}\mathfrak{K}_{33} - \mathfrak{K}_{23}^2 = \mathfrak{m}_1^2, \\ \bar{\mathfrak{k}}_{22} = \mathfrak{K}_{33}\mathfrak{K}_{11} - \mathfrak{K}_{31}^2 = \mathfrak{m}_2^2, \\ \bar{\mathfrak{k}}_{33} = \mathfrak{K}_{11}\mathfrak{K}_{22} - \mathfrak{K}_{12}^2 = \mathfrak{m}_3^2, \end{cases}$$

(62) $$\begin{cases} \bar{\mathfrak{k}}_{23} = \mathfrak{K}_{12}\mathfrak{K}_{31} - \mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{11} = \mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3, \\ \bar{\mathfrak{k}}_{31} = \mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{12} - \mathfrak{K}_{31}\mathfrak{K}_{22} = \mathfrak{m}_3\mathfrak{m}_1, \\ \bar{\mathfrak{k}}_{12} = \mathfrak{K}_{31}\mathfrak{K}_{23} - \mathfrak{K}_{12}\mathfrak{K}_{33} = \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2. \end{cases}$$

Das algebraische Produkt der beiden konjugiert komplexen Punkte des Kreispunktpaars. Für manche Fragen ist es wünschenswert, das Kreispunktpaar als algebraisches Produkt seiner beiden konjugiert komplexen Punkte darzustellen. Man suche dazu zunächst *den Ausdruck für ein Punktpaar der Involution des Kreispunktpaars*, indem man etwa von dem Einheitsstabe E *erstens* seine Strecke $[E\mathfrak{J}]$ bildet durch Multiplikation des Stabes E mit dem unendlich fernen Stabe (der Feldeinheit) $\mathfrak{J}$ (vgl. den Satz 161), und indem man *zweitens* die mit ihr gleich lange, zu ihr senkrechte und von ihr um einen positiven rechten Winkel abweichende Strecke EK bestimmt durch Multiplikation des Stabes E mit dem extensiven Bruche K des Kreispunktpaars (vgl. den Satz 874).

Die Summe der algebraischen Quadrate dieser beiden Strecken, d. h. die Summe:

(63) $$[E\mathfrak{J}]^2 + [EK]^2$$

ist dann nach S. 187 f. der Ausdruck für das Doppelpunktpaar derjenigen elliptischen Involution auf der unendlich fernen Geraden $\mathfrak{J}$, die die Strecken:

$$[E\mathfrak{J}] \quad \text{und} \quad EK$$

und ebenso die Strecken:

$$[E\mathfrak{J}] + EK \quad \text{und} \quad -[E\mathfrak{J}] + EK$$

zu Strecken eines Paares der Involution hat. Da aber die letzten Strecken ebenfalls gleich lang sind und aufeinander senkrecht stehen, und die zweite

Strecke von der ersten wieder um einen positiven rechten Winkel abweicht (Fig. 165), so ist die elliptische Involution auf der unendlich fernen Geraden, deren Doppelpunktpaar durch die Summe (63) ausgedrückt wird, nichts anderes als die Involution des Kreispunktpaars, *die Summe* (63) *also eine Darstellung des Kreispunktpaars.*

Will man es vermeiden, daß der Ausdruck für das Kreispunktpaar von der Länge des Einheitsstabes E abhängig werde, so kann man noch die Summe (63) durch das Quadrat der Länge von E, d. h. durch den Ausdruck $[E \cdot EK]$, dividieren und erhält so *für das Kreispunktpaar den neuen Ausdruck:*

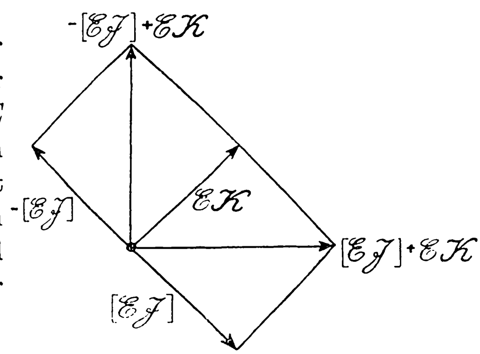


Fig. 165.

$$(64) \qquad \frac{[E\mathfrak{J}]^2+(EK)^2}{[E \cdot EK]}.$$

Aus ihm ergibt sich ohne weiteres die gewünschte Darstellung des Kreispunktpaars als algebraisches Produkt der beiden Kreispunkte; denn es wird:

$$(65) \qquad \frac{[E\mathfrak{J}]^2+(EK)^2}{[E \cdot EK]} = \frac{[E\mathfrak{J}]+\mathrm{i}\;EK}{\sqrt{[E \cdot EK]}}\,\frac{[E\mathfrak{J}]-\mathrm{i}\;EK}{\sqrt{[E \cdot EK]}},$$

wobei die Quadratwurzel positiv genommen werden mag. Setzt man daher noch:

$$(66) \qquad \begin{cases} \dfrac{[E\mathfrak{J}]+\mathrm{i}\;EK}{\sqrt{[E \cdot EK]}} = j, \\[2ex] \dfrac{[E\mathfrak{J}]-\mathrm{i}\;EK}{\sqrt{[E \cdot EK]}} = j', \end{cases}$$

so wird der obige Ausdruck (65) für das Kreispunktpaar:

$$(67) \qquad \frac{[E\mathfrak{J}]^2+(EK)^2}{[E \cdot EK]} = jj',$$

und man überzeugt sich zugleich durch Ausrechnung der linken Seite von (67) unter Benutzung der Formeln (24), (35), (36), (61) und (62), daß dieselbe *nur eine andere Darstellung für die Potenzform zweiter Klasse* $k^{(2)}$ *des Kreispunktpaars* ist, so daß also die Gleichung besteht:

$$(68) \qquad k^{(2)} = jj'.$$

Dabei sind die Kreispunkte j und j' analytisch durch die Gleichungen (66) bestimmt.

Das System konzentrischer Kreise aufgefaßt als Scharbüschel oder Büschelschar von Kurven zweiter Ordnung oder zweiter Klasse. Ist m der Mittelpunkt eines Kreises, x der laufende Punkt des Kreises, und sind beide Punkte *einfache Punkte,* so stellt das äußere Produkt $[mx]$ den Stab eines beliebigen Radius des Kreises dar. Bezeichnet man daher noch die Länge des Radius mit $\mathfrak{r}$, so wird nach dem Satze 876 das Produkt:

$$(69) \qquad [mx \cdot mx\boldsymbol{K}] = \mathfrak{r}^2,$$

und die Gleichung (69) ist somit die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt m und dem Radius $\mathfrak{r}$ unter der Voraussetzung, daß die Punkte m und x einfache Punkte sind.

Aber man kann auch leicht die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt m und dem Radius $\mathfrak{r}$ für den Fall angeben, daß die Punkte m und x *vielfache Punkte* sind. Nach S. 27 des ersten Teils dieses Bandes verwandelt nämlich die äußere Multiplikation mit der Feldeinheit $\mathfrak{J}$ einen einfachen Punkt in die Zahleinheit. Daraus ergibt sich ohne weiteres, daß die äußere Multiplikation mit der Feldeinheit $\mathfrak{J}$ einen vielfachen Punkt in seine Masse überführt. *Die Produkte* $[m\mathfrak{J}]$ *und* $[x\mathfrak{J}]$ *stellen daher die Massen der Punkte* m *und* x *dar.*

Hieraus folgt: Man wird für den Fall vielfacher Punkte m und x aus dem Ausdruck:

$$[mx \cdot mx\boldsymbol{K}]$$

auf der linken Seite von (69) das Quadrat der Länge $\mathfrak{r}$ des Abstandes der Punkte m und x erhalten, wenn man diesen Ausdruck mit dem Produkt aus den Quadraten der Massen der Punkte m und x, d. h. mit dem Produkte:

$$[m\mathfrak{J}]^2[x\mathfrak{J}]^2,$$

dividiert. Für zwei vielfache Punkte m und x ist demnach die Formel (69) durch die Formel zu ersetzen:

$$(70) \qquad \frac{[mx \cdot mx\boldsymbol{K}]}{[m\mathfrak{J}]^2[x\mathfrak{J}]^2} = \mathfrak{r}^2.$$

Die Punktgleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt m und dem Radius $\mathfrak{r}$ lautet demgemäß unter der Voraussetzung vielfacher Punkte m und x:

$$(71) \qquad [mx \cdot mx\boldsymbol{K}] - \mathfrak{r}^2[m\mathfrak{J}]^2[x\mathfrak{J}]^2 = 0.$$

Und diese Gleichung (71) stellt, wenn man den Radius $\mathfrak{r}$ alle Werte von 0 bis ∞ durchlaufen läßt, das System aller konzentrischen Kreise mit dem Mittelpunkt m dar.

Zugleich aber zeigt sie, daß dieses System konzentrischer Kreise als ein Scharbüschel von Kurven zweiter Ordnung aufgefaßt werden kann, das durch den mit dem Mittelpunkt des Systems zusammenfallenden Kreis vom Radius 0 mit der Gleichung:

$$(72) \qquad [mx \cdot mx\boldsymbol{K}] = 0$$

und durch die doppeltzählende unendlich ferne Gerade mit der Gleichung

$$(73) \qquad [x\mathfrak{J}]^2 = 0$$

bestimmt wird. Dabei kann die Gleichung (72) (vgl. die Gleichung (137) des 31. Abschnitts) auch als die Gleichung der konjugiert komplexen Doppelstrahlen derjenigen Kreisinvolution (Rechtwinkelinvolution) angesehen werden, die ein beliebiger Kreis des Scharbüschels (71), oder auch das in diesem Scharbüschel nicht enthaltene Kreispunktpaar $\boldsymbol{K}$ in dem gemeinsamen Mittelpunkte m des Scharbüschels konzentrischer Kreise hervorruft.

Man kann ferner auch leicht die Stabgleichung des Kreises mit dem Mittelpunkte m und dem Radius $\mathfrak{r}$ aufstellen. Ist nämlich U ein Stab einer Tangente dieses Kreises, so wird das äußere Produkt $[m\,U]$ der mit der Masse des Mittelpunktes m und der Länge des Stabes U multiplizierte positiv oder negativ genommene Abstand des Mittelpunktes m von der Tangente U, d. h. der mit jenen Faktoren multiplizierte positiv oder negativ genommene Radius des Kreises. Und da das Quadrat der Länge des Stabes U gleich $[U \cdot U\boldsymbol{K}]$ und das Quadrat der Masse des Punktes m gleich $[m\mathfrak{J}]^2$ ist, so wird der Bruch:

$$(74) \qquad \frac{[m\,U]^2}{[m\mathfrak{J}]^2[U \cdot U\boldsymbol{K}]} = \mathfrak{r}^2.$$

Die Stabgleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt m und dem Radius $\mathfrak{r}$ lautet daher:

$$(75) \qquad [m\,U]^2 - \mathfrak{r}^2[m\mathfrak{J}]^2[U \cdot U\boldsymbol{K}] = 0.$$

Sieht man in ihr wieder den Radius $\mathfrak{r}$ als veränderlich an, so stellt die Gleichung wieder das System konzentrischer Kreise mit dem gemeinsamen Mittelpunkte m dar und zeigt zugleich, daß dieses System konzentrischer Kreise sich auch als eine Büschelschar von Kurven zweiter Klasse auffassen läßt, deren Grundkurven durch den doppelt zählenden gemeinsamen Mittelpunkt m der Büschelschar mit der Gleichung:

$$(76) \qquad [m\,U]^2 = 0$$

und durch das Kreispunktpaar:

$$(26) \qquad [U \cdot U\boldsymbol{K}] = 0$$

gebildet werden. Diese beiden Grundkurven sind dabei gleichzeitig die in der Büschelschar enthaltenen zerfallenden Kurven zweiter Klasse.

Das Kreispunktpaar und die Schar konfokaler Kurven zweiter Klasse. Zu weiteren rechtwinkelgeometrischen Sätzen gelangt man, wenn man eine Kegelschnittschar betrachtet, der das Kreispunktpaar als zerfallende Kurve zweiter Klasse angehört. Am einfachsten verwendet man zur Darstellung einer solchen Schar das Kreispunktpaar selbst als eine Grundkurve, und daneben als zweite Grundkurve ein reelles Punktpaar, etwa das Punktpaar der beiden Ecken e_1 und e_2 des Fundamentaldreiecks. Das Polarsystem $\boldsymbol{F}$ dieses Punktpaars gestattet nach S. 250 des ersten Teils dieses Bandes die Darstellung:

$$(77) \qquad \boldsymbol{F} = \frac{e_2,\ e_1,\ 0}{E_1, E_2, E_3}.$$

Wir stellen uns daher die Aufgabe, die Schar der Polarsysteme zu untersuchen, die durch die Differenz:

$$(78) \qquad \boldsymbol{K} - \mathfrak{h}\boldsymbol{F}$$

ausgedrückt wird, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Kegelschnittschar, deren Gleichung lautet:

$$(79) \qquad [U \cdot U(\boldsymbol{K} - \mathfrak{h}\boldsymbol{F})] = 0.$$

Nach S. 361 des ersten Teils dieses Bandes gehen bei einer jeden Kegelschnittschar von einem beliebigen Punkte y ihrer Ebene 2 reelle oder konjugiert komplexe Strahlen D_1 und D_2 aus, die in dem Punkte y von je einer Kurve der Schar berührt werden; und diese beiden Tangenten sind überdies nach dem Satze 539 hinsichtlich einer jeden Kurve der Schar konjugiert.

In dem vorliegenden Falle, d. h. bei der speziellen durch die Gleichung (79) dargestellten Kegelschnittschar, sind also jene beiden Tangenten D_1 und D_2 insbesondere auch hinsichtlich des Kreispunktpaars $\boldsymbol{K}$ und des reellen Punktpaars $\boldsymbol{F}$ konjugiert. Als konjugierte Geraden hinsichtlich des Kreispunktpaars $\boldsymbol{K}$ stehen sie aber nach dem Satze 880 aufeinander senkrecht. Und als konjugierte Geraden hinsichtlich des reellen Punktpaars e_1, e_2 gehören sie derjenigen hyperbolischen Strahlinvolution an, welche die beiden Strahlen $[ye_1]$ und $[ye_2]$ zu Doppelstrahlen hat, die man vom Punkte y nach den beiden Punkten e_1 und e_2 des reellen Punktpaars $\boldsymbol{F}$ ziehen kann.

Durch diese beiden Eigenschaften sind aber nach Satz 169 die beiden Tangenten D_1 und D_2 eindeutig bestimmt, und zwar sind sie nach dem Satze 170 nichts anderes als die Halbierungslinien der von den beiden Strahlen $[ye_1]$ und $[ye_2]$ gebildeten Winkel (Fig. 166). Insbesondere sind also die beiden Tangenten D_1 und D_2 bei der Schar (73) für jeden Punkt y der Ebene reell.

Hieraus folgt noch: Durch jeden Punkt y der Ebene gehen 2 Kurven der Schar (79) hindurch, schneiden sich in ihm senkrecht und halbieren die Winkel zwischen den Strahlen $[ye_1]$ und $[ye_2]$. Dies kann man auch so ausdrücken: Jede Kurve der Kegelschnittschar (79) reflektiert die Strahlen, die von einem Punkte des Punktpaars e_1, e_2 ausgehen, in der Weise, daß sie nach dem andern Punkte des Punktpaars hinstreben, oder von ihm herzukommen scheinen.

Aus diesem Grunde heißen die Punkte e_1 und e_2 des Punktpaars $\boldsymbol{F}$ die (reellen) Brennpunkte der Kurven der Kegelschnittschar (79) und die Strahlen $[ye_1]$ und $[ye_2]$ von einem beliebigen Punkte y einer solchen Kurve nach den Brennpunkten e_1 und e_2 die Brennstrahlen des Punktes y. Da ferner die Brennpunkte e_1 und e_2 allen Kurven der Schar gemeinsam sind, so nennt man die Kurven der Schar konfokal. Man kann daher die obigen Ergebnisse in den Satz zusammenfassen:

Satz 887: Durch ein reelles Punktpaar und das Kreispunktpaar wird eine Schar konfokaler Kurven zweiter Klasse bestimmt, deren Brennpunkte die Punkte des reellen Punktpaars sind. Durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei Kurven der konfokalen Schar hindurch, schneiden sich in ihm senkrecht und halbieren die Winkel zwischen den beiden Brennstrahlen jenes Punktes.

Die in diesem Satze ausgesprochene Beziehung zwischen je zwei sich schneidenden Kurven einer konfokalen Kegelschnittschar und den Brenn-

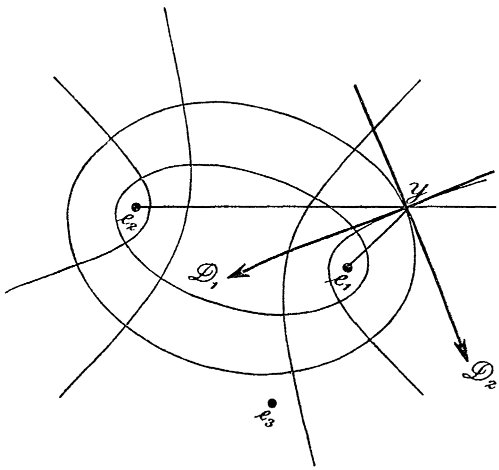


Fig. 166.

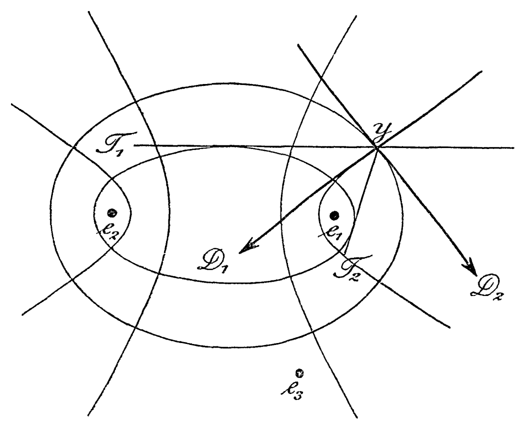


Fig. 167.

strahlen ihres Schnittpunktes y läßt sich übrigens auf Grund des Satzes 539 ohne weiteres noch verallgemeinern, wenn man an die Stelle der Brennstrahlen des Punktes y die beiden von ihm an irgend eine Kurve der Schar gelegten Tangenten setzt. Denn nach dem Satze 539 sind die beiden Tangenten D_1 und D_2, die sich in dem Punkte y an die durch ihn hindurchgehenden Kurven der Schar legen lassen, auch konjugiert hinsichtlich jeder Kurve der Schar. Sie trennen also insbesondere die beiden von dem Punkte y an irgend eine Kurve der Schar gelegten Tangenten T_1 und T_2 harmonisch (Fig. 167).

Nun kann man den Hauptinhalt des Satzes 170 auch in der Form aussprechen:

Satz 888: Stehen in einem harmonischen Strahlwurf zwei zugeordnete Strahlen aufeinander senkrecht, so halbieren sie die Winkel zwischen den beiden andern zugeordneten Strahlen.

Nach diesem Satze müssen dann die beiden Tangenten D_1, D_2, im Punkte y an die durch ihn hindurchgehenden Kurven der konfokalen Schar (73) gezogen, die beiden Winkel halbieren, welche die beiden vom Punkte y an eine beliebige Kurve der Schar gezogenen Tangenten T_1 und T_2 miteinander bilden. Man hat daher den Satz:

Satz 889: Die beiden Tangenten, die man in irgend einem Punkte der Ebene an die beiden durch ihn gehenden Kurven einer konfokalen Kegelschnittschar legen kann, halbieren die Winkel zwischen den beiden Tangenten von demselben Punkte an eine beliebige Kurve der Schar.

Die Involution, die eine Kurve zweiter Klasse in einem ihrer Brennpunkte hervorruft. Man kann aus unserer Darstellung (79) einer konfokalen Kegelschnittschar leicht eine wichtige Eigenschaft der Brennpunkte einer Kurve zweiter Klasse ableiten. Das Polarsystem $\boldsymbol{F}$ des Brennpunktpaars e_1, e_2 ordnet einem jeden Strahle eines der beiden Strahlbüschel, die einen von den beiden Brennpunkten e_1 und e_2 zum Scheitel haben, als konjugierten Strahl einen jeden beliebigen Strahl dieses Strahlbüschels zu. Durch das Polarsystem $\boldsymbol{K}$ des Kreispunktpaars aber wird demselben Strahl der zu ihm senkrechte Strahl dieses Strahlbüschels zugewiesen.

Jede Vielfachensumme:

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{K}-\mathfrak{h}\boldsymbol{F}$$

des Kreispunktpaars $\boldsymbol{K}$ und des Brennpunktpaars $\boldsymbol{F}$, d. h. jede Kurve zweiter Klasse, die das Punktpaar e_1, e_2 zu Brennpunkten hat, ordnet daher jedem Strahle $V, V', \cdots$ der beiden Strahlbüschel mit den Scheiteln e_1 und e_2 als konjugierten Stab den in diesem Strahlbüschel zu ihm senkrechten Strahl $W, W', \cdots$ zu, ruft somit in den beiden Brennpunkten e_1 und e_2 eine Rechtwinkelinvolution hervor (Fig. 168).

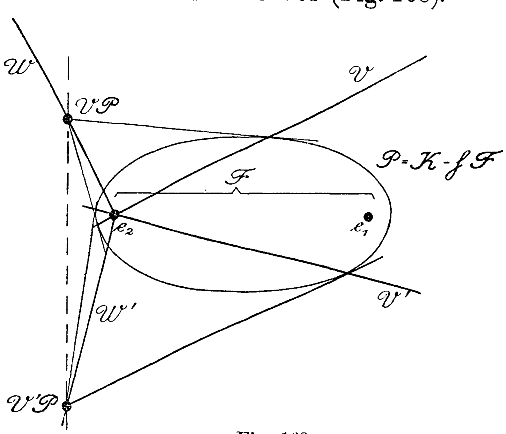


Fig. 168.

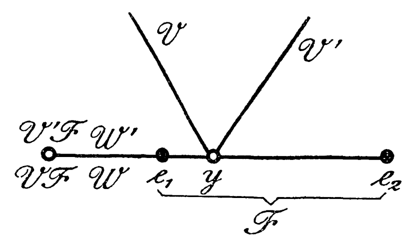


Fig. 169.

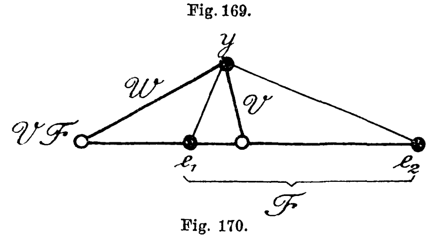


Fig. 170.

Aber man kann auch zeigen, daß außer den beiden Brennpunkten e_1 und e_2 kein anderer Punkt der Ebene diese Eigenschaft hat. In jedem andern Punkt y der Ebene erzeugt nämlich das Punktpaar e_1, e_2 eine bestimmte, *von der Rechtwinkelinvolution verschiedene* Involution. Dieselbe ist *parabolisch,* wenn der Punkt y auf der Geraden $[e_1 e_2]$ liegt, ohne mit einem der Punkte e_1 und e_2 zusammenzufallen; denn sie ordnet alsdann sämtlichen Strahlen

$V, V', \cdots$ des Strahlbüschels mit dem Scheitel y in diesem Strahlbüschel lauter Strahlen $W, W', \cdots$ zu, die mit der Geraden $[e_1 e_2]$ vereint liegen (Fig. 169). Sie ist ferner *hyperbolisch*, wenn der Punkt y nicht in der Geraden $[e_1 e_2]$ enthalten ist; sie hat nämlich dann die beiden getrennten Strahlen $[y e_1]$ und $[y e_2]$ zu Doppelstrahlen (Fig. 170). Die Vielfachensumme $\boldsymbol{K} - \mathfrak{h}\boldsymbol{F}$ kann also unmöglich in einem Punkte y, der von e_1 und e_2 verschieden ist, die Rechtwinkelinvolution hervorrufen. Man hat somit den Satz (vgl. die obige Fig. 168):

Satz 890: Satz von De la Hire[1]): Eine Kurve zweiter Klasse erzeugt in jedem von ihren beiden (reellen) Brennpunkten und in keinem andern Punkte der Ebene eine Rechtwinkelinvolution. Oder speziell ausgesprochen für den Fall einer *reellen* Kurve zweiter Klasse: Verbindet man einen reellen Brennpunkt einer reellen Kurve zweiter Klasse mit dem Schnittpunkte zweier Tangenten der Kurve, deren Berührungssehne durch den Brennpunkt geht, so steht die Verbindungslinie auf der Berührungssehne senkrecht (vgl. Satz 908).

Die Höhenstäbe, die Höhenfußpunkte und die Verbindungslinien je zweier Höhenfußpunkte des Fundamentaldreiecks. Die Harmonikale des Höhenschnittpunktes in bezug auf dieses Dreieck. Da die Masse des Höhenschnittpunktes h des Fundamentaldreiecks beliebig gelassen ist, so kann man in der Proportion (34) den Proportionalitätsfaktor $=1$ annehmen. Alsdann erhält man für die 3 Ableitzahlen des Höhenschnittpunktes die Werte:

$$\mathfrak{x}_1^{(h)} = \frac{1}{\mathfrak{K}_{23}}, \quad \mathfrak{x}_2^{(h)} = \frac{1}{\mathfrak{K}_{31}}, \quad \mathfrak{x}_3^{(h)} = \frac{1}{\mathfrak{K}_{12}}. \tag{80}$$

Der obige Ausdruck für den Höhenschnittpunkt h des Fundamentaldreiecks verwandelt sich also in:

$$h = \frac{1}{\mathfrak{K}_{23}} e_1 + \frac{1}{\mathfrak{K}_{31}} e_2 + \frac{1}{\mathfrak{K}_{12}} e_3, \tag{81}$$

während die Gleichungen (3) für die Stäbe $[h e_1]$, $[h e_2]$, $[h e_3]$ aus den 3 Höhen die Form annehmen:

$$\left\{\begin{aligned} [h e_1] &= \frac{1}{\mathfrak{K}_{12}} E_2 - \frac{1}{\mathfrak{K}_{31}} E_3, \\ [h e_2] &= \frac{1}{\mathfrak{K}_{23}} E_3 - \frac{1}{\mathfrak{K}_{12}} E_1, \\ [h e_3] &= \frac{1}{\mathfrak{K}_{31}} E_1 - \frac{1}{\mathfrak{K}_{23}} E_2. \end{aligned}\right. \tag{82}$$

---

1) Siehe De la Hire, Sectiones conicae, Paris, 1685, S. 189 ff.

Für die 3 Höhenfußpunkte ergeben sich somit die Werte (Fig. 171):

$$(83)\qquad \begin{cases} [E_1 \cdot h e_1] = \dfrac{1}{\mathfrak{K}_{31}}\, e_2 + \dfrac{1}{\mathfrak{K}_{12}}\, e_3, \\ [E_2 \cdot h e_2] = \dfrac{1}{\mathfrak{K}_{12}}\, e_3 + \dfrac{1}{\mathfrak{K}_{23}}\, e_1, \\ [E_3 \cdot h e_3] = \dfrac{1}{\mathfrak{K}_{23}}\, e_1 + \dfrac{1}{\mathfrak{K}_{31}}\, e_2. \end{cases}$$

Endlich findet man für die Verbindungslinie der beiden letzten Höhenfußpunkte $[E_2 \cdot h e_2]$ und $[E_3 \cdot h e_3]$ den Ausdruck:

$$\begin{aligned} [E_2\, h e_2 \cdot E_3\, h e_3] &= \left[\left(\frac{1}{\mathfrak{K}_{12}}\, e_3 + \frac{1}{\mathfrak{K}_{23}}\, e_1\right)\left(\frac{1}{\mathfrak{K}_{23}}\, e_1 + \frac{1}{\mathfrak{K}_{31}}\, e_2\right)\right] \\ &= -\frac{1}{\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{K}_{12}}\, E_1 + \frac{1}{\mathfrak{K}_{12}\mathfrak{K}_{23}}\, E_2 + \frac{1}{\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31}}\, E_3. \end{aligned}$$

Wenn man also noch mit dem Produkt $\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{K}_{12}$ multipliziert, das Produkt:

$$\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{K}_{12}\,[E_2\, h e_2 \cdot E_3\, h e_3] = H_{23}$$

setzt und die zyklisch entsprechenden Ausdrücke für H_{31} und H_{12} hinzufügt, so bekommt man für die Verbindungslinien H_{23}, H_{31}, H_{12} der 3 Höhenfußpunkte die Ausdrücke[1]):

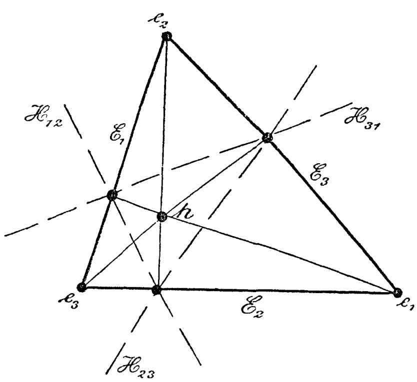


Fig. 171.

$$(84)\qquad \begin{cases} H_{23} = -\mathfrak{K}_{23} E_1 + \mathfrak{K}_{31} E_2 + \mathfrak{K}_{12} E_3, \\ H_{31} = \mathfrak{K}_{23} E_1 - \mathfrak{K}_{31} E_2 + \mathfrak{K}_{12} E_3, \\ H_{12} = \mathfrak{K}_{23} E_1 + \mathfrak{K}_{31} E_2 - \mathfrak{K}_{12} E_3. \end{cases}$$

Auch findet man leicht die geometrische Bedeutung derjenigen Summe, die man erhält, wenn man auf den rechten Seiten der Gleichungen (84) das Minuszeichen durch ein Pluszeichen ersetzt. Zunächst ergeben sich für die 3 Punkte q_1, q_2, q_3, die von den 3 Höhenfußpunkten (83) durch die Endpunkte der Seiten des Fundamentaldreiecks, auf denen sie liegen, harmonisch getrennt werden, die Ausdrücke:

$$(85)\qquad \begin{cases} q_1 = \dfrac{1}{\mathfrak{K}_{31}}\, e_2 - \dfrac{1}{\mathfrak{K}_{12}}\, e_3, \\ q_2 = \dfrac{1}{\mathfrak{K}_{12}}\, e_3 - \dfrac{1}{\mathfrak{K}_{23}}\, e_1 \\ q_3 = \dfrac{1}{\mathfrak{K}_{23}}\, e_1 - \dfrac{1}{\mathfrak{K}_{31}}\, e_2. \end{cases}$$

---

1) Vgl. hierzu: Gundelfinger-Dingeldey, Kegelschnitte, Leipzig 1895, Anhang, Nr. 24.

Diese 3 Punkte q_1, q_2, q_3 sind aber nach dem Satze 283 in einer Geraden enthalten, welche die Harmonikale des Höhenschnittpunktes h bildet. Und man bekommt für einen Stab $[q_2 q_3]$ dieser Harmonikale H des Punktes h die Darstellung:

$$\begin{aligned}[q_2 q_3] &= \left[\left(\frac{1}{\mathfrak{K}_{12}} e_3 - \frac{1}{\mathfrak{K}_{23}} e_1\right)\left(\frac{1}{\mathfrak{K}_{23}} e_1 - \frac{1}{\mathfrak{K}_{31}} e_2\right)\right],\\ &= \frac{1}{\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{K}_{12}} E_1 + \frac{1}{\mathfrak{K}_{12}\mathfrak{K}_{23}} E_2 + \frac{1}{\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31}} E_3,\\ &= \frac{1}{\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{K}_{12}}\{\mathfrak{K}_{23} E_1 + \mathfrak{K}_{31} E_2 + \mathfrak{K}_{12} E_3\}.\end{aligned}$$

Die Harmonikale H des Höhenschnittpunktes h des Fundamentaldreiecks in bezug auf dieses Dreieck läßt sich also durch die Summe ausdrücken:

$$H = \mathfrak{K}_{23} E_1 + \mathfrak{K}_{31} E_2 + \mathfrak{K}_{12} E_3, \tag{86}$$

und man hat den Satz:

Satz 891: Bezeichnet man mit $\mathfrak{K}_{tu}$, $t, u = 1, 2, 3$, die Ableitzahlen des Polarsystems $\boldsymbol{K}$ des Kreispunktpaars, so gestatten die Verbindungslinien H_{23}, H_{31}, H_{12} der Höhenfußpunkte des Fundamentaldreiecks die Stabdarstellung (84) und die Harmonikale des Höhenschnittpunktes des Fundamentaldreiecks in bezug auf dieses Dreieck die Darstellung (86).

Die Dreieckskoordinaten für den Mittelpunkt des dem Fundamentaldreieck eingeschriebenen Kreises und für die Mittelpunkte der 3 ihm angeschriebenen Kreise. Bezeichnet man den Mittelpunkt des dem Fundamentaldreieck eingeschriebenen Kreises, diesen Mittelpunkt mit beliebiger Masse genommen, mit m, diejenigen der ihm angeschriebenen Kreise, wieder mit beliebiger Masse genommen, mit m_1, m_2, m_3, und die zugehörigen Dreieckskoordinaten mit $\mathfrak{x}_1^{(m)}, \mathfrak{x}_2^{(m)}, \mathfrak{x}_3^{(m)}, \mathfrak{x}_1^{(m_i)}, \mathfrak{x}_2^{(m_i)}, \mathfrak{x}_3^{(m_i)}, \mathrm{i} = 1, 2, 3,$ so bestehen nach der Gleichung (35) des 25. Abschnitts die Proportionen:

$$\begin{cases} \mathfrak{x}_1^{(m)} : \mathfrak{x}_2^{(m)} : \mathfrak{x}_3^{(m)} = \dfrac{\mathfrak{p}_1^{(m)}}{\mathfrak{p}_1'} : \dfrac{\mathfrak{p}_2^{(m)}}{\mathfrak{p}_2'} : \dfrac{\mathfrak{p}_3^{(m)}}{\mathfrak{p}_3'}, \\ \mathfrak{x}_1^{(m_i)} : \mathfrak{x}_2^{(m_i)} : \mathfrak{x}_3^{(m_i)} = \dfrac{\mathfrak{p}_1^{(m_i)}}{\mathfrak{p}_1'} : \dfrac{\mathfrak{p}_2^{(m_i)}}{\mathfrak{p}_2'} : \dfrac{\mathfrak{p}_3^{(m_i)}}{\mathfrak{p}_3'}, \end{cases} \tag{87}$$

wo die Größen $\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3'$ die absolut genommenen Abstände des Einheitspunktes von den Seiten des Fundamentaldreiecks sind, während die Größen:

$$\mathfrak{p}_1^{(m)}, \mathfrak{p}_2^{(m)}, \mathfrak{p}_3^{(m)}, \mathfrak{p}_1^{(m_i)}, \mathfrak{p}_2^{(m_i)}, \mathfrak{p}_3^{(m_i)}$$

die mit einem gewissen Vorzeichen versehenen Abstände der Punkte m und m_i von den Seiten des Fundamentaldreiecks bedeuten, nämlich die positiv oder negativ genommenen Abstände, je nachdem der Punkt m oder m_i auf derselben oder der entgegengesetzten Seite der Seiten E_1, E_2, E_3 des Fundamentaldreiecks liegt wie der Einheitspunkt.

Nimmt man also den Einheitspunkt im Innern des Fundamentaldreiecks an, so wird (Fig. 172 und 173):

$$(88)\qquad \begin{cases} \mathfrak{p}_1^{(m)} = \mathfrak{p}_2^{(m)} = \mathfrak{p}_3^{(m)}, \\ -\mathfrak{p}_1^{(m_1)} = \mathfrak{p}_2^{(m_1)} = \mathfrak{p}_3^{(m_1)}, \\ \mathfrak{p}_1^{(m_2)} = -\mathfrak{p}_2^{(m_2)} = \mathfrak{p}_3^{(m_2)}, \\ \mathfrak{p}_1^{(m_3)} = \mathfrak{p}_2^{(m_3)} = -\mathfrak{p}_3^{(m_3)} \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf diese Beziehungen nehmen die Proportionen (87) die Gestalt an:

$$(89)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x}_1^{(m)} : \mathfrak{x}_2^{(m)} : \mathfrak{x}_3^{(m)} = \dfrac{1}{\mathfrak{p}_1'} : \dfrac{1}{\mathfrak{p}_2'} : \dfrac{1}{\mathfrak{p}_3'}, \\ \mathfrak{x}_1^{(m_1)} : \mathfrak{x}_2^{(m_1)} : \mathfrak{x}_3^{(m_1)} = -\dfrac{1}{\mathfrak{p}_1'} : \dfrac{1}{\mathfrak{p}_2'} : \dfrac{1}{\mathfrak{p}_3'}, \\ \mathfrak{x}_1^{(m_2)} : \mathfrak{x}_2^{(m_2)} : \mathfrak{x}_3^{(m_2)} = \dfrac{1}{\mathfrak{p}_1'} : -\dfrac{1}{\mathfrak{p}_2'} : \dfrac{1}{\mathfrak{p}_3'}, \\ \mathfrak{x}_1^{(m_3)} : \mathfrak{x}_2^{(m_3)} : \mathfrak{x}_3^{(m_3)} = \dfrac{1}{\mathfrak{p}_1'} : \dfrac{1}{\mathfrak{p}_2'} : -\dfrac{1}{\mathfrak{p}_3'}. \end{cases}$$

Wegen (29) erhält man also die Proportionen:

$$(90)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x}_1^{(m)} : \mathfrak{x}_2^{(m)} : \mathfrak{x}_3^{(m)} = \sqrt{\mathfrak{K}_{11}} : \sqrt{\mathfrak{K}_{22}} : \sqrt{\mathfrak{K}_{33}}, \\ \mathfrak{x}_1^{(m_1)} : \mathfrak{x}_2^{(m_1)} : \mathfrak{x}_3^{(m_1)} = -\sqrt{\mathfrak{K}_{11}} : \sqrt{\mathfrak{K}_{22}} : \sqrt{\mathfrak{K}_{33}}, \\ \mathfrak{x}_1^{(m_2)} : \mathfrak{x}_2^{(m_2)} : \mathfrak{x}_3^{(m_2)} = \sqrt{\mathfrak{K}_{11}} : -\sqrt{\mathfrak{K}_{22}} : \sqrt{\mathfrak{K}_{33}}, \\ \mathfrak{x}_1^{(m_3)} : \mathfrak{x}_2^{(m_3)} : \mathfrak{x}_3^{(m_3)} = \sqrt{\mathfrak{K}_{11}} : \sqrt{\mathfrak{K}_{22}} : -\sqrt{\mathfrak{K}_{33}}, \end{cases}$$

in denen die Quadratwurzeln absolut zu nehmen sind. Man hat somit den Satz[1]):

Satz 892: Liegt der Einheitspunkt im Innern des Fundamentaldreiecks, so stehen die Dreieckskoordinaten $\mathfrak{x}_1^{(m)}, \mathfrak{x}_2^{(m)}, \mathfrak{x}_3^{(m)}$ des

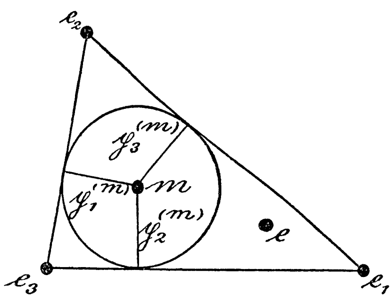


Fig. 172.

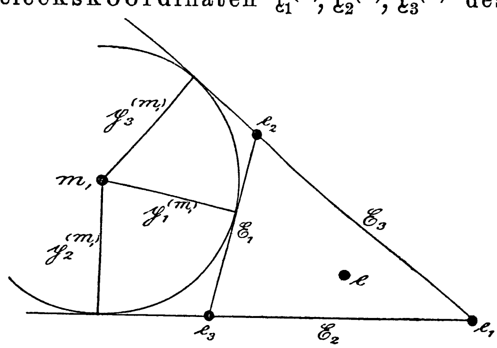


Fig. 173.

Mittelpunktes m des dem Fundamentaldreieck eingeschriebenen Kreises und die Dreieckskoordinaten $\mathfrak{x}_1^{(m_i)}, \mathfrak{x}_2^{(m_i)}, \mathfrak{x}_3^{(m_i)}$ der Mittel-

1) Vgl. hierzu und zum Folgenden: Gundelfinger-Dingeldey, Kegelschnitte, Leipzig 1895, Anhang, Nr. 16, 18, 28, 29, 73, 75, 140, 164.

punkte m_i der dem Fundamentaldreieck angeschriebenen Kreise zu den Ableitzahlen $\mathfrak{K}_{ii}$ des Kreispunktpaars in den Beziehungen (90).

Die Dreieckskoordinaten für den Mittelpunkt des dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kreises. Bezeichnet man den Mittelpunkt des dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kreises, mit beliebiger Masse genommen, mit n und seine Dreieckskoordinaten mit $\mathfrak{x}_1^{(n)}, \mathfrak{x}_2^{(n)}, \mathfrak{x}_3^{(n)}$, den Radius des Kreises mit $\mathfrak{r}$, so besteht wieder nach der Gleichung (35) des 25. Abschnitts die Proportion:

$$(91) \qquad \mathfrak{x}_1^{(n)} : \mathfrak{x}_2^{(n)} : \mathfrak{x}_3^{(n)} = \frac{\mathfrak{p}_1^{(n)}}{\mathfrak{p}_1'} : \frac{\mathfrak{p}_2^{(n)}}{\mathfrak{p}_2'} : \frac{\mathfrak{p}_3^{(n)}}{\mathfrak{p}_3'},$$

in der die Größen $\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3'$ dieselbe Bedeutung haben wie auf S. 409, während die Größen $\mathfrak{p}_1^{(n)}, \mathfrak{p}_2^{(n)}, \mathfrak{p}_3^{(n)}$ die positiv oder negativ genommenen Abstände des Punktes n von den Seiten des Fundamentaldreiecks sind, je nachdem der Punkt n auf derselben oder auf der entgegengesetzten Seite der Seiten E_1, E_2, E_3 des Fundamentaldreiecks liegt wie der Einheitspunkt.

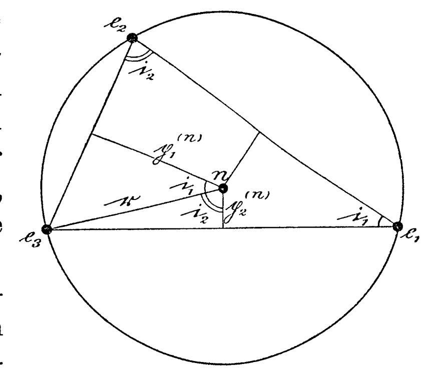


Fig. 174.

Ist nun zunächst das Fundamentaldreieck spitzwinklig, und liegt zugleich der Einheitspunkt im Innern dieses Dreiecks (Fig. 174), und bezeichnet man die Innenwinkel des Fundamentaldreiecks mit $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \mathfrak{i}_3$, den Radius des ihm umschriebenen Kreises mit $\mathfrak{r}$, so wird:

$$\mathfrak{p}_1^{(n)} = \mathfrak{r} \cos \mathfrak{i}_1,$$
$$\mathfrak{p}_2^{(n)} = \mathfrak{r} \cos \mathfrak{i}_2,$$
$$\mathfrak{p}_3^{(n)} = \mathfrak{r} \cos \mathfrak{i}_3.$$

Es verhält sich also:

$$(92) \qquad \mathfrak{p}_1^{(n)} : \mathfrak{p}_2^{(n)} : \mathfrak{p}_3^{(n)} = \cos \mathfrak{i}_1 : \cos \mathfrak{i}_2 : \cos \mathfrak{i}_3$$

und da:

$$\sphericalangle(\mathfrak{p}_2' \mathfrak{p}_3') = \pi - \mathfrak{i}_1, \quad \sphericalangle(\mathfrak{p}_3' \mathfrak{p}_1') = \pi - \mathfrak{i}_2, \quad \sphericalangle(\mathfrak{p}_1' \mathfrak{p}_2') = \pi - \mathfrak{i}_3,$$

so folgt aus (92) auch die Proportion:

$$(93) \qquad \mathfrak{p}_1^{(n)} : \mathfrak{p}_2^{(n)} : \mathfrak{p}_3^{(n)} = \cos(\mathfrak{p}_2' \mathfrak{p}_3') : \cos(\mathfrak{p}_3' \mathfrak{p}_1') : \cos(\mathfrak{p}_1' \mathfrak{p}_2').$$

Diese Proportion (93) aber hat vor der Proportion (92) den Vorzug, daß sie auch bestehen bleibt, wenn das Fundamentaldreieck stumpfwinklig oder rechtwinklig ist, und auch wenn der Einheitspunkt eine beliebige Lage hat. Auf Grund der Proportion (93) aber nimmt die Proportion (91) die Gestalt an:

$$(94) \qquad \mathfrak{x}_1^{(n)} : \mathfrak{x}_2^{(n)} : \mathfrak{x}_3^{(n)} = \frac{\cos(\mathfrak{p}_2' \mathfrak{p}_3')}{\mathfrak{p}_1'} : \frac{\cos(\mathfrak{p}_3' \mathfrak{p}_1')}{\mathfrak{p}_2'} : \frac{\cos(\mathfrak{p}_1' \mathfrak{p}_2')}{\mathfrak{p}_3'},$$

oder wenn man die Glieder des rechten laufenden Verhältnisses mit dem Produkte $\mathfrak{p}_1' \mathfrak{p}_2' \mathfrak{p}_3'$ dividiert, die Form:

$$(95) \qquad \mathfrak{x}_1^{(n)} : \mathfrak{x}_2^{(n)} : \mathfrak{x}_3^{(n)} = \frac{1}{\mathfrak{p}_1'^2} \frac{\cos(\mathfrak{p}_2' \mathfrak{p}_3')}{\mathfrak{p}_2' \mathfrak{p}_3'} : \frac{1}{\mathfrak{p}_2'^2} \frac{\cos(\mathfrak{p}_3' \mathfrak{p}_1')}{\mathfrak{p}_3' \mathfrak{p}_1'} : \frac{1}{\mathfrak{p}_3'^2} \frac{\cos(\mathfrak{p}_1' \mathfrak{p}_2')}{\mathfrak{p}_1' \mathfrak{p}_2'}$$

oder endlich wegen (29) und (30) die Form:

$$(96) \qquad \mathfrak{x}_1^{(n)} : \mathfrak{x}_2^{(n)} : \mathfrak{x}_3^{(n)} = \mathfrak{K}_{11} \mathfrak{K}_{23} : \mathfrak{K}_{22} \mathfrak{K}_{31} : \mathfrak{K}_{33} \mathfrak{K}_{12}.$$

Man hat also den Satz:

Satz 893: Die Dreieckskoordinaten $\mathfrak{x}_1^{(n)}, \mathfrak{x}_2^{(n)}, \mathfrak{x}_3^{(n)}$ des Mittelpunktes n des dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kreises stehen zu den Ableitzahlen $\mathfrak{K}_{tu}$ des Kreispunktpaars in der Beziehung (96).

Die Gleichung der Kurve zweiter Ordnung, die dem Fundamentaldreieck umschrieben ist und einen gegebenen Punkt zum Mittelpunkte hat. Die Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung, die dem Fundamentaldreieck umschrieben ist, lautet nach dem Satze 881:

$$(38) \qquad \mathfrak{a}_{23} \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3 + \mathfrak{a}_{31} \mathfrak{x}_3 \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{a}_{12} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 = 0.$$

Es sollen die Koeffizienten $\mathfrak{a}_{23}, \mathfrak{a}_{31}, \mathfrak{a}_{12}$ für den Fall ermittelt werden, daß die Dreieckskoordinaten $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3$ des Mittelpunktes y der Kurve gegeben sind[1]).

Der Mittelpunkt y der Kurve (38) kann dadurch charakterisiert werden, daß seine Polare yp hinsichtlich der Kurve (38) mit der unendlich fernen Geraden:

$$(97) \qquad \mathfrak{J} = \mathfrak{m}_1 E_1 + \mathfrak{m}_2 E_2 + \mathfrak{m}_3 E_3$$

zusammenfällt, daß also die Gleichung besteht:

$$(98) \qquad yp = \mathfrak{g} \mathfrak{J} = \mathfrak{g}(\mathfrak{m}_1 E_1 + \mathfrak{m}_2 E_2 + \mathfrak{m}_3 E_3),$$

unter

$$(99) \qquad p = \frac{A_1, \ A_2, \ A_3}{e_1, \ e_2, \ e_3}$$

das Polarsystem der Kurve zweiter Ordnung (38) und unter $\mathfrak{g}$ einen Zahlfaktor verstanden. Es wird daher wegen (38)

$$(100) \qquad \begin{cases} A_1 = \phantom{\mathfrak{a}_{21} E_1 +{}} \mathfrak{a}_{12} E_2 + \mathfrak{a}_{13} E_3, \\ A_2 = \mathfrak{a}_{21} E_1 \phantom{{}+ \mathfrak{a}_{12} E_2} + \mathfrak{a}_{23} E_3, \quad \mathfrak{a}_{ki} = \mathfrak{a}_{ik}, \\ A_3 = \mathfrak{a}_{31} E_1 + \mathfrak{a}_{32} E_2, \end{cases}$$

1) Diese und die folgende Aufgabe (auf S. 413) gehören eigentlich dem Gebiete der *Parallelgeometrie* an. Sie sind aber hier eingeschoben worden, da ihre Behandlung für die Lösung der dann folgenden Aufgaben aus der *Rechtwinkelgeometrie* als Vorbereitung dienen soll.

und die linke Seite der Gleichung (98) verwandelt sich in:

$$y p = (\mathfrak{y}_1 e_1 + \mathfrak{y}_2 e_2 + \mathfrak{y}_3 e_3) p = \mathfrak{y}_1 A_1 + \mathfrak{y}_2 A_2 + \mathfrak{y}_3 A_3$$

oder wegen (100) in:

$$(101)\quad y p = (\mathfrak{y}_2 \mathfrak{a}_{21} + \mathfrak{y}_3 \mathfrak{a}_{31}) E_1 + (\mathfrak{y}_3 \mathfrak{a}_{32} + \mathfrak{y}_1 \mathfrak{a}_{12}) E_2 + (\mathfrak{y}_1 \mathfrak{a}_{13} + \mathfrak{y}_2 \mathfrak{a}_{23}) E_3 .$$

Die Vergleichung mit (98) liefert daher für die Koeffizienten $\mathfrak{a}_{23}, \mathfrak{a}_{31}, \mathfrak{a}_{12}$ der Gleichung (38) die 3 linearen Gleichungen:

$$(102)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{y}_2 \mathfrak{a}_{21} + \mathfrak{y}_3 \mathfrak{a}_{31} &= \mathfrak{g}\, \mathfrak{m}_1, \\ \mathfrak{y}_3 \mathfrak{a}_{32} + \mathfrak{y}_1 \mathfrak{a}_{12} &= \mathfrak{g}\, \mathfrak{m}_2, \\ \mathfrak{y}_1 \mathfrak{a}_{13} + \mathfrak{y}_2 \mathfrak{a}_{23} &= \mathfrak{g}\, \mathfrak{m}_3, \end{aligned}\right\} \mathfrak{a}_{ki} = \mathfrak{a}_{ik},$$

deren Auflösung für diese Koeffizienten die Werte ergibt:

$$(103)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{h}\, \mathfrak{a}_{23} &= \mathfrak{y}_1 (-\mathfrak{m}_1 \mathfrak{y}_1 + \mathfrak{m}_2 \mathfrak{y}_2 + \mathfrak{m}_3 \mathfrak{y}_3), \\ \mathfrak{h}\, \mathfrak{a}_{31} &= \mathfrak{y}_2 (\mathfrak{m}_1 \mathfrak{y}_1 - \mathfrak{m}_2 \mathfrak{y}_2 + \mathfrak{m}_3 \mathfrak{y}_3) \\ \mathfrak{h}\, \mathfrak{a}_{12} &= \mathfrak{y}_3 (\mathfrak{m}_1 \mathfrak{y}_1 + \mathfrak{m}_2 \mathfrak{y}_2 - \mathfrak{m}_3 \mathfrak{y}_3), \end{aligned}\right.$$

in denen die Zahlgröße $\mathfrak{h}$ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Man hat daher den Satz:

Satz 894: Damit die dem Fundamentaldreieck umschriebene Kurve zweiter Ordnung (38) den Punkt mit den Dreieckskoordinaten $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3$ zum Mittelpunkte habe, ist notwendig und hinreichend, daß die Koeffizienten $\mathfrak{a}_{23}, \mathfrak{a}_{31}, \mathfrak{a}_{12}$ die Werte (103) besitzen, in denen die Zahlgröße $\mathfrak{h}$ einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet, während $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3$ die der Lage des Einheitspunktes zugehörigen Massen der Ecken des Fundamentaldreiecks sind.

Die Gleichung der Kurve zweiter Klasse, die dem Fundamentaldreieck eingeschrieben ist und einen gegebenen Punkt zum Mittelpunkte hat. Ist $\boldsymbol{P}$ das Polarsystem einer beliebigen dem Fundamentaldreieck eingeschriebenen Kurve zweiter Klasse, so hat ihre Gleichung die Form:

$$(104)\qquad 0 = [U \cdot U\boldsymbol{P}] = 2 (\mathfrak{A}_{23} \mathfrak{u}_2 \mathfrak{u}_3 + \mathfrak{A}_{31} \mathfrak{u}_3 \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{A}_{12} \mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_2),$$

während ihr Polarsystem $\boldsymbol{P}$ die Bruchdarstellung besitzt:

$$(105)\qquad \boldsymbol{P} = \frac{\mathfrak{A}_{12} e_2 + \mathfrak{A}_{13} e_3,\ \ \mathfrak{A}_{21} e_1 + \mathfrak{A}_{23} e_3,\ \ \mathfrak{A}_{31} e_1 + \mathfrak{A}_{32} e_2}{E_1,\qquad\qquad E_2,\qquad\qquad E_3},\quad \mathfrak{A}_{ki} = \mathfrak{A}_{ik}.$$

Der Mittelpunkt:

$$(106)\qquad y = \mathfrak{y}_1 e_1 + \mathfrak{y}_2 e_2 + \mathfrak{y}_3 e_3$$

der Kurve zweiter Klasse (104) fällt nun aber mit dem Pol der unendlich fernen Geraden hinsichtlich dieser Kurve zusammen, und es wird daher, wenn $\mathfrak{g}$ eine Zahlgröße bedeutet,

$$(107)\qquad \mathfrak{g}\, y = \mathfrak{J}\boldsymbol{P} = (\mathfrak{m}_1 E_1 + \mathfrak{m}_2 E_2 + \mathfrak{m}_3 E_3)\, \boldsymbol{P}$$

oder wegen (105):

$$\mathfrak{g}y = \mathfrak{m}_1(\mathfrak{A}_{12}e_2 + \mathfrak{A}_{13}e_3) + \mathfrak{m}_2(\mathfrak{A}_{21}e_1 + \mathfrak{A}_{23}e_3) + \mathfrak{m}_3(\mathfrak{A}_{31}e_1 + \mathfrak{A}_{32}e_2),$$

oder endlich, wenn man behufs Vergleichung mit (106) rechter Hand nach e_1, e_2, e_3 ordnet:

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}y = (\mathfrak{m}_2\mathfrak{A}_{21} + \mathfrak{m}_3\mathfrak{A}_{31})e_1 + (\mathfrak{m}_3\mathfrak{A}_{32} + \mathfrak{m}_1\mathfrak{A}_{12})e_2 + (\mathfrak{m}_1\mathfrak{A}_{13}\\ + \mathfrak{m}_2\mathfrak{A}_{23})e_3, \quad \mathfrak{A}_{ki} = \mathfrak{A}_{ik}.\end{aligned} \tag{108}$$

Für die Dreieckskoordinaten $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3$ des Mittelpunktes y der Kurve zweiter Klasse (104) ergeben sich also die Werte:

$$\begin{cases}\mathfrak{g}\mathfrak{y}_1 = \phantom{\mathfrak{m}_3\mathfrak{A}_{23}+{}} \mathfrak{m}_3\mathfrak{A}_{31} + \mathfrak{m}_2\mathfrak{A}_{12},\\ \mathfrak{g}\mathfrak{y}_2 = \mathfrak{m}_3\mathfrak{A}_{23} \phantom{+\mathfrak{m}_3\mathfrak{A}_{31}} + \mathfrak{m}_1\mathfrak{A}_{12},\\ \mathfrak{g}\mathfrak{y}_3 = \mathfrak{m}_2\mathfrak{A}_{23} + \mathfrak{m}_1\mathfrak{A}_{31}.\end{cases} \tag{109}$$

Faßt man in diesen 3 Gleichungen die Koordinaten $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3$ des Mittelpunktes der Kurve als gegeben und die Koeffizienten $\mathfrak{A}_{23}, \mathfrak{A}_{31}, \mathfrak{A}_{12}$ der Kurve (104) als unbekannt auf, so liefern die 3 Gleichungen für diese Koeffizienten die Proportion:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_{23} : \mathfrak{A}_{31} : \mathfrak{A}_{12} = \mathfrak{m}_1(-\mathfrak{m}_1\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{m}_2\mathfrak{y}_2 + \mathfrak{m}_3\mathfrak{y}_3)\\ : \mathfrak{m}_2(\mathfrak{m}_1\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{m}_2\mathfrak{y}_2 + \mathfrak{m}_3\mathfrak{y}_3)\\ : \mathfrak{m}_3(\mathfrak{m}_1\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{m}_2\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{m}_3\mathfrak{y}_3).\end{aligned} \tag{110}$$

Die Gleichung (104) nimmt daher die Form an:

$$\left.\begin{cases}\mathfrak{m}_1(-\mathfrak{m}_1\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{m}_2\mathfrak{y}_2 + \mathfrak{m}_3\mathfrak{y}_3)\mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_3\\ + \mathfrak{m}_2(\mathfrak{m}_1\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{m}_2\mathfrak{y}_2 + \mathfrak{m}_3\mathfrak{y}_3)\mathfrak{u}_3\mathfrak{u}_1\\ + \mathfrak{m}_3(\mathfrak{m}_1\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{m}_2\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{m}_3\mathfrak{y}_3)\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2\end{cases}\right\} = 0, \tag{111}$$

und man hat den Satz:

Satz 895: Eine Kurve zweiter Klasse, die dem Fundamentaldreieck eingeschrieben ist, und deren Mittelpunkt die Dreieckskoordinaten $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3$ hat, besitzt die Gleichung (111), vorausgesetzt, daß $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3$ die der Lage des Einheitspunktes zugehörigen Massen der Ecken des Fundamentaldreiecks sind.

Die Gleichung des dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kreises in Dreieckskoordinaten. Weiter frage man nach der Bedingung dafür, daß eine dem Fundamentaldreieck umschriebene Kurve zweiter Ordnung ein Kreis sei. Nach dem Satze 881 lautet die Gleichung einer beliebigen dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kurve zweiter Ordnung:

$$\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + \mathfrak{a}_{31}\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{a}_{12}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = 0. \tag{38}$$

Soll nun der Mittelpunkt dieser Kurve zweiter Ordnung mit dem Mittelpunkt des dem Dreieck umschriebenen Kreises zusammenfallen, so müssen nach dem Satze 893 die Dreieckskoordinaten $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3$ des Mittelpunktes der Kurve der Proportion genügen:

$$(112) \qquad \mathfrak{y}_1 : \mathfrak{y}_2 : \mathfrak{y}_3 = \mathfrak{K}_{11}\mathfrak{K}_{23} : \mathfrak{K}_{22}\mathfrak{K}_{31} : \mathfrak{K}_{33}\mathfrak{K}_{12}.$$

Andererseits bestehen nach dem Satze 894 für die Koeffizienten $\mathfrak{a}_{23}, \mathfrak{a}_{31}, \mathfrak{a}_{12}$ einer jeden Kurve zweiter Ordnung, die durch die Ecken des Fundamentaldreiecks geht und den Punkt mit den Dreieckskoordinaten $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3$ zum Mittelpunkte hat, die Gleichungen:

$$(103) \qquad \begin{cases} \mathfrak{h}\,\mathfrak{a}_{23} = \mathfrak{y}_1(-\mathfrak{m}_1\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{m}_2\mathfrak{y}_2 + \mathfrak{m}_3\mathfrak{y}_3), \\ \mathfrak{h}\,\mathfrak{a}_{31} = \mathfrak{y}_2(\mathfrak{m}_1\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{m}_2\mathfrak{y}_2 + \mathfrak{m}_3\mathfrak{y}_3), \\ \mathfrak{h}\,\mathfrak{a}_{12} = \mathfrak{y}_3(\mathfrak{m}_1\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{m}_2\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{m}_3\mathfrak{y}_3). \end{cases}$$

Und diese nehmen bei Einführung der zu $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3$ proportionalen Produkte der rechten Seite von (112) die Form an:

$$(113) \qquad \begin{cases} \mathfrak{g}\,\mathfrak{a}_{23} = \mathfrak{K}_{11}\mathfrak{K}_{23}(-\mathfrak{m}_1\mathfrak{K}_{11}\mathfrak{K}_{23} + \mathfrak{m}_2\mathfrak{K}_{22}\mathfrak{K}_{31} + \mathfrak{m}_3\mathfrak{K}_{33}\mathfrak{K}_{12}), \\ \mathfrak{g}\,\mathfrak{a}_{31} = \mathfrak{K}_{22}\mathfrak{K}_{31}(\mathfrak{m}_1\mathfrak{K}_{11}\mathfrak{K}_{23} - \mathfrak{m}_2\mathfrak{K}_{22}\mathfrak{K}_{31} + \mathfrak{m}_3\mathfrak{K}_{33}\mathfrak{K}_{12}), \\ \mathfrak{g}\,\mathfrak{a}_{12} = \mathfrak{K}_{33}\mathfrak{K}_{12}(\mathfrak{m}_1\mathfrak{K}_{11}\mathfrak{K}_{23} + \mathfrak{m}_2\mathfrak{K}_{22}\mathfrak{K}_{31} - \mathfrak{m}_3\mathfrak{K}_{33}\mathfrak{K}_{12}). \end{cases}$$

Hier lassen aber die Klammersummen der rechten Seite eine erhebliche Vereinfachung zu. Nach S. 387 besteht nämlich zwischen den 3 Zählern k_i des extensiven Bruches $\boldsymbol{K}$ die lineare Beziehung (23), und diese nimmt bei Einführung der Werte (28) für die k_i die Form an:

$$(114) \qquad \begin{aligned} &\mathfrak{m}_1(\mathfrak{K}_{11}e_1 + \mathfrak{K}_{12}e_2 + \mathfrak{K}_{13}e_3) + \mathfrak{m}_2(\mathfrak{K}_{21}e_1 + \mathfrak{K}_{22}e_2 + \mathfrak{K}_{23}e_3) \\ &\qquad + \mathfrak{m}_3(\mathfrak{K}_{31}e_1 + \mathfrak{K}_{32}e_2 + \mathfrak{K}_{33}e_3) = 0. \end{aligned}$$

Diese extensive Gleichung aber zerfällt in die 3 Zahlgleichungen:

$$(115) \qquad \begin{cases} \mathfrak{m}_1\mathfrak{K}_{11} + \mathfrak{m}_2\mathfrak{K}_{21} + \mathfrak{m}_3\mathfrak{K}_{31} = 0, \\ \mathfrak{m}_1\mathfrak{K}_{12} + \mathfrak{m}_2\mathfrak{K}_{22} + \mathfrak{m}_3\mathfrak{K}_{32} = 0, \\ \mathfrak{m}_1\mathfrak{K}_{13} + \mathfrak{m}_2\mathfrak{K}_{23} + \mathfrak{m}_3\mathfrak{K}_{33} = 0. \end{cases} \quad \text{wo } (116)\ \mathfrak{K}_{ut} = \mathfrak{K}_{tu}.$$

Um nun die erste Klammersumme von (113) zu erhalten, multipliziere man die 3 Gleichungen (115) beziehlich mit $-\mathfrak{K}_{23}, \mathfrak{K}_{31}, \mathfrak{K}_{12}$ und addiere; man erhält so unter Berücksichtigung von (116) für diese Klammersumme den Wert:

$$-\mathfrak{m}_1\mathfrak{K}_{11}\mathfrak{K}_{23} + \mathfrak{m}_2\mathfrak{K}_{22}\mathfrak{K}_{31} + \mathfrak{m}_3\mathfrak{K}_{33}\mathfrak{K}_{12} = -2\,\mathfrak{m}_1\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{K}_{12},$$

und entsprechende Werte ergeben sich für die beiden andern Klammersummen aus (113), so daß die Gleichungen (113) die Form annehmen:

$$\begin{cases} \mathfrak{g}\,\mathfrak{a}_{23} = -2\,\mathfrak{m}_1\mathfrak{K}_{11}\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{K}_{12}, \\ \mathfrak{g}\,\mathfrak{a}_{31} = -2\,\mathfrak{m}_2\mathfrak{K}_{22}\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{K}_{12}, \\ \mathfrak{g}\,\mathfrak{a}_{12} = -2\,\mathfrak{m}_3\mathfrak{K}_{33}\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{K}_{12}. \end{cases}$$

Diese 3 Gleichungen aber kann man durch die laufende Proportion ersetzen:

(117) $$\mathfrak{a}_{23} : \mathfrak{a}_{31} : \mathfrak{a}_{12} = \mathfrak{m}_1 \mathfrak{K}_{11} : \mathfrak{m}_2 \mathfrak{K}_{22} : \mathfrak{m}_3 \mathfrak{K}_{33}.$$

Die Gleichung (38) für eine dem Fundamentaldreieck umschriebene Kurve zweiter Ordnung nimmt also für den Fall, wo diese Kurve der dem Dreieck umschriebene Kreis ist, die Form an:

(118) $$\mathfrak{m}_1 \mathfrak{K}_{11} \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3 + \mathfrak{m}_2 \mathfrak{K}_{22} \mathfrak{x}_3 \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{m}_3 \mathfrak{K}_{33} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 = 0,$$

und man hat daher den Satz:

Satz 896: Die Gleichung des dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kreises lautet in Dreieckskoordinaten:

(118) $$\mathfrak{m}_1 \mathfrak{K}_{11} \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3 + \mathfrak{m}_2 \mathfrak{K}_{22} \mathfrak{x}_3 \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{m}_3 \mathfrak{K}_{33} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 = 0,$$

wo die $\mathfrak{m}_i$ und $\mathfrak{K}_{ii}$ dieselbe Bedeutung haben wie bisher.

Der Mittelpunkt, die Gleichung und der Radius desjenigen Kreises, der das Fundamentaldreiseit zum Poldreiseit hat. Die auf ein Poldreiseit bezogene Gleichung einer Kurve zweiter Klasse besitzt nach S. 245 des ersten Teils dieses Bandes die Form:

(119) $$\mathfrak{A}_{11} \mathfrak{u}_1^2 + \mathfrak{A}_{22} \mathfrak{u}_2^2 + \mathfrak{A}_{33} \mathfrak{u}_3^2 = 0.$$

Andererseits lautet die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkte y nach (75):

(120) $$[y U]^2 - \mathfrak{r}^2 [y \mathfrak{J}]^2 [U \cdot U \boldsymbol{K}] = 0,$$

oder wenn man das Produkt $[y U]$ entwickelt und die quadratische Form $(U \cdot U\boldsymbol{K}]$ durch ihren Wert aus (35) ersetzt:

(121) $$(\mathfrak{y}_1 \mathfrak{u}_1 + \mathfrak{y}_2 \mathfrak{u}_2 + \mathfrak{y}_3 \mathfrak{u}_3)^2 - \mathfrak{r}^2 [y \mathfrak{J}]^2 (\mathfrak{K}_{11} \mathfrak{u}_1^2 + \cdots + 2 \mathfrak{K}_{23} \mathfrak{u}_2 \mathfrak{u}_3 + \cdots) = 0.$$

Soll jetzt die Gleichung (119) denselben Kreis darstellen wie die Gleichung (121), so darf sie sich von der Gleichung (121) nur um einen konstanten Zahlfaktor unterscheiden. Insbesondere müssen also die Koeffizienten der Produkte $\mathfrak{u}_2 \mathfrak{u}_3$, $\mathfrak{u}_3 \mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_2$, die sich beim Ordnen der Gleichung (121) ergeben, verschwinden, d. h. es müssen die Gleichungen bestehen:

(122) $$\begin{cases} \mathfrak{y}_2 \mathfrak{y}_3 = \mathfrak{r}^2 [y \mathfrak{J}]^2 \mathfrak{K}_{23}, \\ \mathfrak{y}_3 \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{r}^2 [y \mathfrak{J}]^2 \mathfrak{K}_{31}, \\ \mathfrak{y}_1 \mathfrak{y}_2 = \mathfrak{r}^2 [y \mathfrak{J}]^2 \mathfrak{K}_{12} \end{cases}$$

Durch Multiplikation je zweier von diesen 3 Gleichungen aber erhält man die 3 neuen Gleichungen:

$$\begin{cases} \mathfrak{y}_1 \mathfrak{y}_2 \mathfrak{y}_3 \cdot \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{r}^4 [y \mathfrak{J}]^4 \mathfrak{K}_{31} \mathfrak{K}_{12}, \\ \mathfrak{y}_1 \mathfrak{y}_2 \mathfrak{y}_3 \cdot \mathfrak{y}_2 = \mathfrak{r}^4 [y \mathfrak{J}]^4 \mathfrak{K}_{12} \mathfrak{K}_{23}, \\ \mathfrak{y}_1 \mathfrak{y}_2 \mathfrak{y}_3 \cdot \mathfrak{y}_3 = \mathfrak{r}^4 [y \mathfrak{J}]^4 \mathfrak{K}_{23} \mathfrak{K}_{31}, \end{cases}$$

aus denen die laufende Proportion folgt:

$$(123) \qquad \mathfrak{y}_1 : \mathfrak{y}_2 : \mathfrak{y}_3 = \mathfrak{K}_{31}\mathfrak{K}_{12} : \mathfrak{K}_{12}\mathfrak{K}_{23} : \mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31}$$

oder auch die Proportion:

$$(124) \qquad \mathfrak{y}_1 : \mathfrak{y}_2 : \mathfrak{y}_3 = \frac{1}{\mathfrak{K}_{23}} : \frac{1}{\mathfrak{K}_{31}} : \frac{1}{\mathfrak{K}_{12}}.$$

Die Vergleichung dieser Proportion mit der Proportion (33) zeigt dann, daß der Mittelpunkt des Kreises, der das Fundamentaldreiseit zum Poldreiseit hat, der Höhenschnittpunkt dieses Dreiseits ist. Und da das Fundamentaldreiseit ein ganz beliebiges schiefwinkliges Dreiseit war, so hat man den Satz (Fig. 175):

Satz 897: Der Mittelpunkt eines Kreises, der ein schiefwinkliges Dreiseit zum Poldreiseit hat, ist der Höhenschnittpunkt dieses Dreiseits.

Setzt man die 3 andern Koeffizienten der Gleichungen (119) und (121) einander proportional, so erhält man die Proportion:

$$\mathfrak{A}_{11} : \mathfrak{A}_{22} : \mathfrak{A}_{33} = \mathfrak{y}_1{}^2 - \mathfrak{r}^2 [y\mathfrak{J}]^2 \mathfrak{K}_{11} : \cdots \text{ (zykl.)},$$

oder da nach (122):

$$\mathfrak{r}^2 [y\mathfrak{J}]^2 = \frac{\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_3}{\mathfrak{K}_{23}}$$

ist, die Proportion:

$$\mathfrak{A}_{11} : \mathfrak{A}_{22} : \mathfrak{A}_{33} = \mathfrak{y}_1{}^2 - \frac{\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_3}{\mathfrak{K}_{23}} \mathfrak{K}_{11} : \cdots \text{ (zykl.)},$$

die sich wegen (123) auch in der Form schreiben läßt:

$$\mathfrak{A}_{11} : \mathfrak{A}_{22} : \mathfrak{A}_{33} = \mathfrak{K}_{31}\mathfrak{K}_{12}(\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{K}_{12} - \mathfrak{K}_{11}\mathfrak{K}_{23}) : \cdots \text{ (zykl.)}.$$

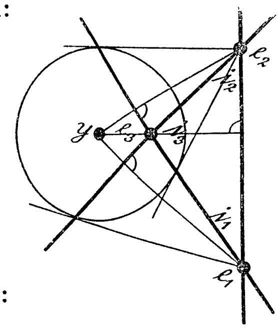


Fig. 175.

Hier ist nach (62) die Klammer gleich der zu dem Elemente $\mathfrak{K}_{23}$ gehörenden Unterdeterminante $\bar{k}_{23}$ der Determinante $|\mathfrak{K}_{tu}|$, $t, u = 1, 2, 3$. Die obige Proportion nimmt daher die Form an:

$$(125) \qquad \mathfrak{A}_{11} : \mathfrak{A}_{22} : \mathfrak{A}_{33} = \mathfrak{K}_{31}\mathfrak{K}_{12}\bar{k}_{23} : \mathfrak{K}_{12}\mathfrak{K}_{23}\bar{k}_{31} : \mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31}\bar{k}_{12},$$

oder wegen (60) die Form:

$$(126) \qquad \mathfrak{A}_{11} : \mathfrak{A}_{22} : \mathfrak{A}_{33} = \mathfrak{K}_{31}\mathfrak{K}_{12}\mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3 : \mathfrak{K}_{12}\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{m}_3\mathfrak{m}_1 : \mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2.$$

Die Gleichung des Kreises, der das Fundamentaldreiseit zum Poldreiseit hat, lautet somit wegen (119):

$$(127) \qquad \mathfrak{K}_{31}\mathfrak{K}_{12}\mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3\mathfrak{u}_1{}^2 + \mathfrak{K}_{12}\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{m}_3\mathfrak{m}_1\mathfrak{u}_2{}^2 + \mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\mathfrak{u}_3{}^2 = 0,$$

und man hat den Satz:

Satz 898: Der Kreis, der das als schiefwinklig vorausgesetzte Fundamentaldreiseit zum Poldreiseit hat, besitzt, aufgefaßt als Kurve zweiter Klasse, die Gleichung (127), in der die $\mathfrak{K}_{tu}$ und $\mathfrak{m}_i$ dieselbe Bedeutung haben wie bisher.

Aus der Gleichung (127) folgt noch, daß das dem Kreise (127) zugehörige Polarsystem zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$ die Bruchdarstellung zuläßt:

$$(128) \qquad \boldsymbol{P} = \frac{\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{K}_{12}\mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3 e_1,\quad \mathfrak{K}_{12}\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{m}_3\mathfrak{m}_1 e_2,\quad \mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 e_3}{E_1,\qquad\qquad E_2,\qquad\qquad E_3}.$$

Ferner läßt sich auch der Ausdruck für das zum Polarsystem zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$ adjungierte Polarsystem zweiter Ordnung $\overline{\boldsymbol{p}}$ ebenfalls sofort hinschreiben. Er lautet nach der Gleichung (37) des 31. Abschnitts:

$$(129) \qquad \overline{\boldsymbol{p}} = \mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{K}_{12}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3 \frac{\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{m}_1 E_1,\quad \mathfrak{K}_{31}\mathfrak{m}_2 E_2,\quad \mathfrak{K}_{12}\mathfrak{m}_3 E_3}{e_1,\qquad\qquad e_2,\qquad\qquad e_3},$$

und die Gleichung des Kreises (127) in Punktkoordinaten heißt daher:

$$(130) \qquad \mathfrak{K}_{23}\mathfrak{m}_1\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{K}_{31}\mathfrak{m}_2\mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{K}_{12}\mathfrak{m}_3\mathfrak{x}_3^2 = 0.$$

Man hat also den Satz:

Satz 899: Der Kreis, der das als schiefwinklig vorausgesetzte Fundamentaldreieck zum Polardreieck hat, besitzt, aufgefaßt als Kurve zweiter Ordnung, die Gleichung:

$$(130) \qquad \mathfrak{K}_{23}\mathfrak{m}_1\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{K}_{31}\mathfrak{m}_2\mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{K}_{12}\mathfrak{m}_3\mathfrak{x}_3^2 = 0.$$

Um den Radius $\mathfrak{r}$ des betrachteten Kreises zu berechnen, benutze man die erste Gleichung (122) und ersetze in ihr das Produkt $[y\mathfrak{J}]$ durch seinen Wert:

$$(131) \qquad [y\mathfrak{J}] = \mathfrak{y}_1\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{y}_2\mathfrak{m}_2 + \mathfrak{y}_3\mathfrak{m}_3.$$

Dadurch nimmt diese Gleichung die Form an:

$$\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_3 = \mathfrak{r}^2(\mathfrak{y}_1\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{y}_2\mathfrak{m}_2 + \mathfrak{y}_3\mathfrak{m}_3)^2\mathfrak{K}_{23}$$

oder bei Anwendung der Proportion (123) und Division mit $\mathfrak{K}_{23}$ die Form:

$$(132) \qquad \mathfrak{K}_{12}\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31} = \mathfrak{r}^2(\mathfrak{m}_1\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{K}_{12} + \mathfrak{m}_2\mathfrak{K}_{12}\mathfrak{K}_{23} + \mathfrak{m}_3\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31})^2.$$

Diese Gleichung läßt sich noch dadurch vereinfachen, daß man rechter Hand die Summe der Glieder in der Klammer mit den Koeffizienten $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ durch $\mathfrak{m}_3$ ausdrückt. Nach der dritten Gleichung (115) ist:

$$\mathfrak{m}_1\mathfrak{K}_{13} + \mathfrak{m}_2\mathfrak{K}_{23} = -\mathfrak{m}_3\mathfrak{K}_{33},$$

woraus durch Multiplikation mit $\mathfrak{K}_{12}$ folgt, daß:

$$\mathfrak{m}_1\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{K}_{12} + \mathfrak{m}_2\mathfrak{K}_{12}\mathfrak{K}_{23} = -\mathfrak{m}_3\mathfrak{K}_{12}\mathfrak{K}_{33}$$

ist. Die Gleichung (132) verwandelt sich daher in:

$$\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{K}_{12} = \mathfrak{r}^2\mathfrak{m}_3^2(\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31} - \mathfrak{K}_{12}\mathfrak{K}_{33})^2$$

oder wegen der dritten Gleichung (62) in:

$$(133) \qquad \mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{K}_{12} = \mathfrak{r}^2\mathfrak{m}_1^2\mathfrak{m}_2^2\mathfrak{m}_3^2.$$

Hieraus ergibt sich für den Radius $\mathfrak{r}$ des Kreises der Wert:

$$(134)\qquad \mathfrak{r} = \frac{\sqrt{\mathfrak{K}_{23}\,\mathfrak{K}_{31}\,\mathfrak{K}_{12}}}{\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{m}_2\,\mathfrak{m}_3},$$

oder mit Rücksicht auf die Werte der Größen $\mathfrak{K}_{tu}$ in (30):

$$(135)\qquad \mathfrak{r} = \frac{\sqrt{\cos(\mathfrak{p}_2'\,\mathfrak{p}_3')\cos(\mathfrak{p}_3'\,\mathfrak{p}_1')\cos(\mathfrak{p}_1'\,\mathfrak{p}_2')}}{\mathfrak{m}'^3\,\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{m}_2\,\mathfrak{m}_3\,\mathfrak{p}_1'\,\mathfrak{p}_2'\,\mathfrak{p}_3'}.$$

Liegt nun der Einheitspunkt im Innern des Fundamentaldreiseits, und bezeichnet man wie oben auf S. 411 die Innenwinkel des Fundamentaldreiseits mit $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \mathfrak{i}_3$, so wird:

$$(136)\qquad \begin{cases} \cos(\mathfrak{p}_2'\mathfrak{p}_3') = -\cos\mathfrak{i}_1, \\ \cos(\mathfrak{p}_3'\mathfrak{p}_1') = -\cos\mathfrak{i}_2, \\ \cos(\mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}_2') = -\cos\mathfrak{i}_3, \end{cases}$$

und die Gleichung (135) verwandelt sich in:

$$(137)\qquad \mathfrak{r} = \frac{\sqrt{-\cos\mathfrak{i}_1\,\cos\mathfrak{i}_2\,\cos\mathfrak{i}_3}}{\mathfrak{m}'^3\,\mathfrak{m}_1\,\mathfrak{m}_2\,\mathfrak{m}_3\,\mathfrak{p}_1'\,\mathfrak{p}_2'\,\mathfrak{p}_3'}.$$

Diese Gleichung zeigt, daß der Radius $\mathfrak{r}$ des betrachteten Kreises nur dann reell ist, wenn einer von den 3 Innenwinkeln $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \mathfrak{i}_3$ des Fundamentaldreiseits stumpf oder aber ein rechter Winkel ist, das Fundamentaldreiseit also stumpfwinklig oder rechtwinklig ist (vgl. die obige Fig. 175). Für den letzten Fall reduziert sich, *ein ganz im Endlichen liegendes Fundamentaldreiseit vorausgesetzt,* für das nach S. 2 ff. des ersten Teils dieses Bandes alle 3 Massen $\mathfrak{m}_i \neq 0$ sind, die Gleichung (137) auf:

$$(138)\qquad \mathfrak{r} = 0.$$

Der Kreis, der dieses rechtwinklige Dreiseit zum Poldreiseit hat, schrumpft also in einen Punkt zusammen, der mit dem Scheitel des rechten Winkels des Dreiseits zusammenfällt. Für den Fall eines spitzwinkligen Dreiseits dagegen ist der Radius des Kreises, der dieses Dreiseit zum Poldreiseit hat, imaginär. Man hat somit den Satz:

Satz 900: Ein Poldreiseit eines reellen Kreises ist notwendig stumpfwinklig oder rechtwinklig. Ist das Poldreiseit rechtwinklig und zugleich ganz im Endlichen gelegen, so zieht sich der Kreis, dem es zugehört, in einen Punkt zusammen, nämlich in den Scheitel des rechten Winkels dieses Dreiseits.

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller einem Dreieck eingeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln. Nach S. 413 lautet die Gleichung einer Kurve zweiter Klasse, die dem Fundamentaldreieck eingeschrieben ist:

$$(104)\qquad 0 = [U \cdot UP] = 2(\mathfrak{A}_{23}\mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_3 + \mathfrak{A}_{31}\mathfrak{u}_3\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2),$$

wo $\boldsymbol{P}$ das zu der Kurve gehörige Polarsystem zweiter Klasse bedeutet, also durch den Bruch (105) dargestellt wird, und wo die Determinante $\mathfrak{A}$ der Kurve den Wert besitzt:

$$(139) \qquad \mathfrak{A} = \begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{A}_{12} & \mathfrak{A}_{13} \\ \mathfrak{A}_{21} & 0 & \mathfrak{A}_{23} \\ \mathfrak{A}_{31} & \mathfrak{A}_{32} & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{A}_{ki} = \mathfrak{A}_{ik}.$$

Soll nun die Kurve (104) eine gleichseitige Hyperbel sein, so muß nach der Gleichung (40) die Gleichung bestehen:

$$(140) \qquad [\bar{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{K}] = 0,$$

in der $\bar{\boldsymbol{p}}$ das zu dem Polarsystem zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$ adjungierte Polarsystem zweiter Ordnung bedeutet, woraus folgt, daß die Ableitzahlen $\overline{\mathfrak{a}_{ik}}$ von $\bar{\boldsymbol{p}}$ die Unterdeterminanten der Determinante (139) sind. Es ist somit insbesondere:

$$(141) \qquad \begin{cases} \overline{\mathfrak{a}_{11}} = \begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{A}_{23} \\ \mathfrak{A}_{32} & 0 \end{vmatrix} = -\mathfrak{A}_{23}{}^2, \ \overline{\mathfrak{a}_{22}} = -\mathfrak{A}_{31}{}^2, \ \overline{\mathfrak{a}_{33}} = -\mathfrak{A}_{12}{}^2, \\ \overline{\mathfrak{a}_{23}} = -\begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{A}_{12} \\ \mathfrak{A}_{31} & \mathfrak{A}_{32} \end{vmatrix} = \mathfrak{A}_{31}\mathfrak{A}_{12}, \ \overline{\mathfrak{a}_{31}} = \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_{23}, \ \overline{\mathfrak{a}_{12}} = \mathfrak{A}_{23}\mathfrak{A}_{31}. \end{cases}$$

Die Gleichung der Kurve zweiter Klasse (104) in Punktkoordinaten, d. h. die Gleichung der Polkurve des Polarsystems zweiter Ordnung $\bar{\boldsymbol{p}}$, lautet daher:

$$(142) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{A}_{23}{}^2\mathfrak{x}_1{}^2 + \mathfrak{A}_{31}{}^2\mathfrak{x}_2{}^2 + \mathfrak{A}_{12}{}^2\mathfrak{x}_3{}^2 - 2\,\mathfrak{A}_{31}\mathfrak{A}_{12}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 - 2\,\mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_{23}\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1 \\ - 2\,\mathfrak{A}_{23}\mathfrak{A}_{31}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = 0, \end{aligned}$$

und die Gleichung (140) nimmt also nach dem Satze 670 die Form an:

$$(143) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{A}_{23}{}^2\mathfrak{K}_{11} + \mathfrak{A}_{31}{}^2\mathfrak{K}_{22} + \mathfrak{A}_{12}{}^2\mathfrak{K}_{33} - 2\,\mathfrak{A}_{31}\mathfrak{A}_{12}\mathfrak{K}_{23} - 2\,\mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_{23}\mathfrak{K}_{31} \\ - 2\,\mathfrak{A}_{23}\mathfrak{A}_{31}\mathfrak{K}_{12} = 0. \end{aligned}$$

Nun stehen aber außerdem die Koeffizienten $\mathfrak{A}_{23}, \mathfrak{A}_{31}, \mathfrak{A}_{12}$ der Gleichung einer dem Fundamentaldreieck eingeschriebenen Kurve zweiter Klasse zu den Dreieckskoordinaten $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3$ ihres Mittelpunktes in der Beziehung (110), die man, wenn man noch:

$$(144) \qquad \begin{cases} -\mathfrak{m}_1\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{m}_2\mathfrak{y}_2 + \mathfrak{m}_3\mathfrak{y}_3 = \mathfrak{r}_y, \\ \mathfrak{m}_1\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{m}_2\mathfrak{y}_2 + \mathfrak{m}_3\mathfrak{y}_3 = \mathfrak{s}_y, \\ \mathfrak{m}_1\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{m}_2\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{m}_3\mathfrak{y}_3 = \mathfrak{t}_y \end{cases}$$

setzt, auch in der Form schreiben kann:

$$(145) \qquad \mathfrak{A}_{23} : \mathfrak{A}_{31} : \mathfrak{A}_{12} = \mathfrak{m}_1\mathfrak{r}_y : \mathfrak{m}_2\mathfrak{s}_y : \mathfrak{m}_3\mathfrak{t}_y.$$

Für die Koeffizienten der Größen $\mathfrak{K}_{tu}$ in der Gleichung (143) ergibt sich somit die Proportion:

$$\begin{gathered} \mathfrak{A}_{23}^2 : \mathfrak{A}_{31}^2 : \mathfrak{A}_{12}^2 : \mathfrak{A}_{31}\mathfrak{A}_{12} : \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_{23} : \mathfrak{A}_{23}\mathfrak{A}_{31} \\ = \mathfrak{m}_1{}^2\mathfrak{r}_y{}^2 : \mathfrak{m}_2{}^2\mathfrak{s}_y{}^2 : \mathfrak{m}_3{}^2\mathfrak{t}_y{}^2 : \mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3\mathfrak{s}_y\mathfrak{t}_y : \mathfrak{m}_3\mathfrak{m}_1\mathfrak{t}_y\mathfrak{r}_y : \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\mathfrak{r}_y\mathfrak{s}_y. \end{gathered}$$

Die Gleichung (143) nimmt daher die Form an:

$$(146)\qquad \left.\begin{array}{l}\mathfrak{m}_1{}^2\mathfrak{r}_y{}^2\mathfrak{K}_{11}+\mathfrak{m}_2{}^2\mathfrak{s}_y{}^2\mathfrak{K}_{22}+\mathfrak{m}_3{}^2\mathfrak{t}_y{}^2\mathfrak{K}_{33}\\ -2\mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3\mathfrak{s}_y\mathfrak{t}_y\mathfrak{K}_{23}-2\mathfrak{m}_3\mathfrak{m}_1\mathfrak{t}_y\mathfrak{r}_y\mathfrak{K}_{31}-2\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\mathfrak{r}_y\mathfrak{s}_y\mathfrak{K}_{12}\end{array}\right\}=0.$$

Aus dieser aber lassen sich noch die Größen $\mathfrak{K}_{ii}$ mit Hilfe der linearen Relationen (115) eliminieren, und man erhält so die Gleichung:

$$\mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3(\mathfrak{s}_y+\mathfrak{t}_y)^2\mathfrak{K}+\mathfrak{m}_3\mathfrak{m}_1(\mathfrak{t}_y+\mathfrak{r}_y)^2\mathfrak{K}+\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2(\mathfrak{r}_y+\mathfrak{s}_y)^2\mathfrak{K}_{12}=0,$$

der man endlich, da wegen (144):

$$(147)\qquad \mathfrak{s}_y+\mathfrak{t}_y=2\mathfrak{m}_1\mathfrak{y}_1,\quad \mathfrak{t}_y+\mathfrak{r}_y=2\mathfrak{m}_2\mathfrak{y}_2,\quad \mathfrak{r}_y+\mathfrak{s}_y=2\mathfrak{m}_3\mathfrak{y}_3$$

ist, auch die Gestalt verleihen kann:

$$(148)\qquad \mathfrak{m}_1\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{y}_1{}^2+\mathfrak{m}_2\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{y}_2{}^2+\mathfrak{m}_3\mathfrak{K}_{12}\mathfrak{y}_3{}^2=0,$$

welche mit der Gleichung (130) des Kreises übereinstimmt, der das Fundamentaldreieck zum Polardreieck hat. Die Gleichung (148) zeigt also, daß die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, die dem Fundamentaldreieck eingeschrieben sind, diesem Kreise angehören.

Da übrigens nach S. 419f. dieser Kreis nur reell ist, wenn das Fundamentaldreieck stumpfwinklig oder rechtwinklig ist, so hat man den Satz:

Satz 901: Nur einem stumpfwinkligen oder rechtwinkligen Dreieck läßt sich eine gleichseitige Hyperbel einschreiben. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, die einem stumpfwinkligen Dreieck eingeschrieben sind, ist der Kreis, der dieses Dreieck zum Polardreieck hat. Einem ganz im Endlichen liegenden rechtwinkligen Dreieck läßt sich nur die eine gleichseitige Hyperbel einschreiben, die durch die Katheten des Dreiecks als Asymptoten und die Hypotenuse als weitere Tangente bestimmt wird.

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller einem Dreieck umschriebenen gleichseitigen Hyperbeln. Man kann auch leicht den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller einem Dreieck umschriebenen gleichseitigen Hyperbeln angeben.[1]) Dazu wende man die Eigenschaften des Polkegelschnitts einer Geraden hinsichtlich eines Kegelschnittbüschels insbesondere auf den Polkegelschnitt der unendlich fernen Geraden in bezug auf das Büschel gleichseitiger Hyperbeln an, das einem Dreieck umschrieben ist (vgl. S. 396f.). Man gelangt dadurch zu dem Mittelpunktskegelschnitt jenes Büschels gleichseitiger Hyperbeln. Dieser geht nach S. 374 des ersten Teils dieses Bandes durch die Doppelpunkte der Involution hindurch, die das Hyperbelbüschel

1) Vgl. hierzu wieder die auf S. 354 zitierte Arbeit von E. Müller, Monatshefte für Mathematik und Physik, XXVIII. Jahrgang, 1917, S. 53f.

auf der unendlich fernen Geraden hervorruft, d. h. durch die beiden Kreispunkte. Eine Kurve zweiter Ordnung aber, die das Kreispunktpaar auf sich enthält, ist nach S. 389 ein Kreis. Damit ist bewiesen: Der geometrische Ort der Mittelpunkte o aller gleichseitigen Hyperbeln, die einem Dreieck umschrieben sind, ist ein Kreis. Und dieser Kreis ist offenbar der Feuerbachsche Kreis des Dreiecks; denn er muß ja auch die Mittelpunkte der in ein Linienpaar zerfallenden Kurven des Büschels, also ihre Doppelpunkte, enthalten, und das sind die Höhenfußpunkte des Dreiecks (vgl. S. 396). Der Kreis durch die Höhenfußpunkte eines Dreiecks aber ist dessen Feuerbachscher Kreis. Man hat daher den Satz (Fig. 176):

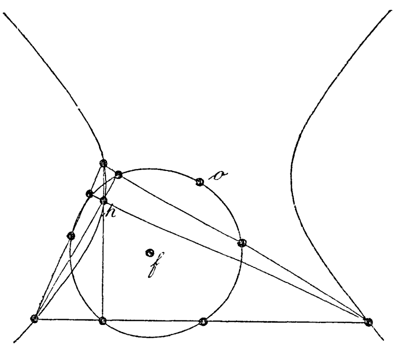


Fig. 176.

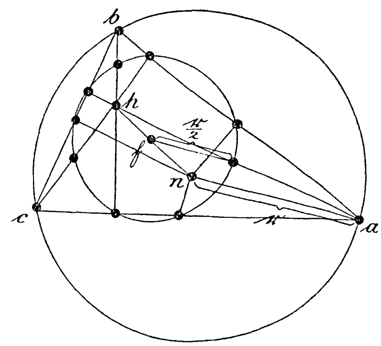


Fig. 177.

Satz 902: Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, die einem Dreieck umschrieben sind, ist der Feuerbachsche Kreis dieses Dreiecks.

Die Krümmungskreise einer gleichseitigen Hyperbel. Da der Feuerbachsche Kreis eines Dreiecks auch mit den Krümmungskreisen einer gleichseitigen Hyperbel in engem Zusammenhange steht, so stellen wir vor der Hand einige aus der Elementargeometrie bekannte Eigenschaften des Feuerbachschen Kreises zusammen (Fig. 177).

Satz 903: In jedem Dreieck liegen die Mittelpunkte der 3 Seiten, die Fußpunkte der 3 Höhen und die Mittelpunkte der 3 an den Ecken liegenden Höhenabschnitte auf einem und demselben Kreise. Dieser Kreis heißt der Kreis der 9 Punkte oder der Feuerbachsche Kreis des Dreiecks. Sein Mittelpunkt $\mathfrak{f}$ ist die Mitte desjenigen Linienstücks, das den Höhenschnittpunkt h des Dreiecks mit dem Mittelpunkte n des umschriebenen Kreises verbindet, und sein Radius ist halb so groß wie der Radius $\mathfrak{r}$ des umschriebenen Kreises.

Satz 904: Der Höhenschnittpunkt h eines Dreiecks ist der äußere Ähnlichkeitspunkt, der Schwerpunkt s des Dreiecks der innere

Ähnlichkeitspunkt für den Feuerbachschen Kreis und den umschriebenen Kreis des Dreiecks (vgl. die obige Fig. 177 und Fig. 178).

Dabei ist unter dem *äußeren Ähnlichkeitspunkt* zweier Kreise derjenige Punkt zu verstehen, in dem sich die Verbindungslinien der Endpunkte aller *gleichläufigen*[1]) Radien beider Kreise treffen, während der *innere Ähnlichkeitspunkt* der Punkt sein soll, in dem sich die Verbindungslinien der Endpunkte aller *gegenläufigen*[1]) Radien beider Kreise schneiden.

Satz 905: Der Schwerpunkt und der Höhenschnittpunkt eines

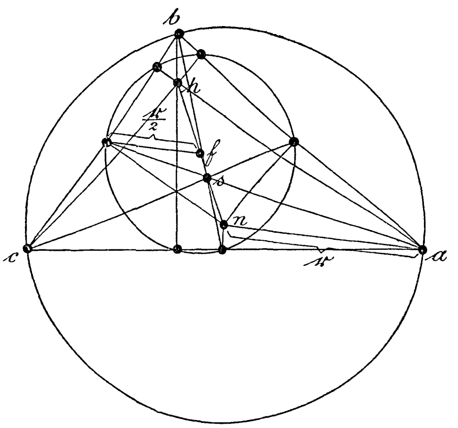


Fig. 178.

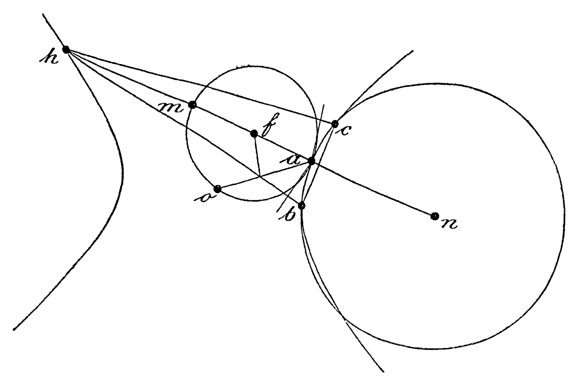


Fig. 179.

Dreiecks teilen den Abstand der Mittelpunkte des umschriebenen und des Feuerbachschen Kreises innerlich und äußerlich, also harmonisch, im Verhältnis 2 : 1.

Auf Grund dieser drei Sätze lassen sich aus den Sätzen 884 und 902 einige weitere Folgerungen ziehen.[2]) Läßt man nämlich alle 3 Ecken eines einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreiecks abc in einen Punkt, den Punkt a, zusammenrücken (Fig. 179), so wird nach dem Satze 884 sein Höhenschnittpunkt h zum zweiten Schnittpunkt der Normale des Punktes a mit der gleichseitigen Hyperbel, und der dem Dreieck abc umschriebene Kreis wird der Krümmungskreis der gleichseitigen Hyperbel im Punkte a, sein Mittelpunkt n wird daher der Krümmungsmittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel für den Punkt a. Der Schwerpunkt s, der immer ein innerer Punkt des Dreiecks ist, fällt mit a zusammen. Der Mittelpunkt $\mathfrak{f}$ des Feuerbachschen Kreises ferner liegt auf der Verlängerung der Normale $ns = na$ und zwar so (vgl. Satz 905), daß $af = \frac{1}{2} na$ wird. Und da der Radius des Feuerbachschen Kreises halb so groß wie der des umschriebenen Kreises

1) Gleichläufig = parallel und von gleichem Sinn, gegenläufig = parallel und von entgegengesetztem Sinn.

2) Vgl. auch hier wieder: E. Müller, Monatshefte für Mathematik und Physik, XXVIII. Jahrgang, 1917, S. 54f.

ist (vgl. Satz 903), so ist fa der Radius des Feuerbachschen Kreises. Der Feuerbachsche Kreis des in den Punkt a zusammengeschrumpften Dreiecks berührt also den Krümmungskreis des Punktes a in a von außen.

Nach dem Satze 902 geht er weiter durch den Mittelpunkt o der Hyperbel, und nach dem Satze 903 halbiert er den an der Ecke a des Dreiecks liegenden Höhenabschnitt ah; der Halbierungspunkt heiße m. Da endlich wieder nach dem Satze 903 der Radius des umschriebenen Kreises eines Dreiecks gleich dem Durchmesser des Feuerbachschen Kreises ist, so ist:

$$an = ma$$

oder, was nach dem obigen dasselbe ist:

$$an = \tfrac{1}{2} ha.$$

Man hat somit den Satz:

Satz 906: Man findet den Krümmungsmittelpunkt n eines beliebigen Punktes a einer gleichseitigen Hyperbel, indem man in diesem Punkte a die Normale der gleichseitigen Hyperbel errichtet bis zum zweiten Schnittpnnkt h mit der Kurve; dann erhält man den Krümmungsmittelpunkt n jenes Punktes a, indem man die Hyperbelsehne ha über a hinaus um ihre Hälfte verlängert.

Der analytische Charakter der Formeln der Rechtwinkelgeometrie und Parallelgeometrie. Überblicken wir die in diesem Abschnitt gefundenen rechnerischen Ergebnisse, so bemerken wir, daß *alle von uns gewonnenen Formeln der Rechtwinkelgeometrie entweder den extensiven Bruch* $\boldsymbol{K}$ *des Kreispunktpaars oder seine Ableitzahlen* $\mathfrak{K}_{tu}$, t, $u = 1, 2, 3$, *enthalten*, zu denen gelegentlich noch der Stab $\mathfrak{J}$ der unendlich fernen Geraden oder die Linienkoordinaten $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$ dieser Geraden hinzutreten, *die ja den Träger des Kreispunktpaars bildet.* Damit hängt es zusammen, daß sich diese Linienkoordinaten $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$ der unendlich fernen Geraden, d. h. die Massen der Ecken des Fundamentaldreiecks, auch durch die Ableitzahlen $\mathfrak{K}_{tu}$ des Kreispunktpaars ausdrücken lassen (vgl. die Formeln (61) und (62)). Dagegen kommen in den Gleichungen, welche parallelgeometrische Eigenschaften der Gebilde darstellen[1]), nur der Stab $\mathfrak{J}$ der unendlich fernen Geraden oder dessen Ableitzahlen $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$ vor, nicht aber der Bruch $\boldsymbol{K}$ und seine Ableitzahlen $\mathfrak{K}_{tu}$. Es ist also bewiesen, daß die von uns entwickelten besonderen Eigenschaften der Rechtwinkelgeometrie als Beziehungen der betrachteten Gebilde zum Kreispunktpaar $\boldsymbol{K}$ aufgefaßt werden können, während die parallelgeometrischen Eigenschaften der Figuren sich als Beziehungen zur

1) Vgl. S. 379 bis 381 und die früheren Entwicklungen im ersten Bande, S. 229f., ferner im ersten Teil dieses Bandes, S. 82ff., S. 253ff. und S. 278ff., und aus dem vorliegenden Teil dieses Bandes S. 412 bis 414.

unendlich fernen Geraden schlechthin (ohne Auszeichnung des Kreispunktpaars) erweisen.

In den folgenden beiden Abschnitten tritt die analytische Abhängigkeit der Rechtwinkelgeometrie von dem Kreispunktpaar nicht so deutlich hervor, weil hier die Ableitzahlen des Kreispunktpaars spezielle Werte, nämlich die Werte:
$$\mathfrak{K}_{tt} = 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}_{tu} = 0, \quad (t \neq u),$$
besitzen, die sich naturgemäß in den Formeln nicht augenfällig bemerkbar machen.

Im Anschluß hieran möge noch eine andere Bemerkung Platz finden. Die *projektive Geometrie* der Ebene war dadurch ausgezeichnet, daß *sich jedem ihrer Sätze ein dualistisch entsprechender Satz an die Seite stellen ließ*, den man dadurch erhielt, daß man die Begriffe Punkt und Gerade miteinander vertauschte. *Diese Möglichkeit fällt in der Parallelgeometrie und Rechtwinkelgeometrie*, d. h. in den *beiden metrischen Geometrien, fort.* Denn es gibt in der Ebene keinen ausgezeichneten Punkt, welcher der unendlich fernen Geraden dualistisch entspräche, und man kann auch kein konjugiert komplexes Linienpaar angeben, das dem Kreispunktpaar dualistisch gegenüberstände. Da aber die metrischen Sätze entweder eine Beziehung der Gebilde zur unendlich fernen Geraden schlechtweg oder eine solche zum Kreispunktpaar darstellen, so können die metrischen Sätze eine dualistische Übertragung nicht zulassen.

Abschnitt 61.

Das Kreispunktpaar bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem.

Der extensive Bruch und die Gleichung des Kreispunktpaars unter der Voraussetzung eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Der Ausdruck für das Polarsystem K des Kreispunktpaars wurde bisher für den Fall entwickelt, daß das Fundamentaldreieck ein im Endlichen liegendes schiefwinkliges Dreieck sei. Für manche Zwecke, z. B. für alle Fragen, die mit den Hauptachsen der Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse zusammenhängen, ist es indessen vorteilhafter, statt dessen ein rechtwinkliges Cartesisches Koordinatensystem zugrunde zu legen, oder was nach dem Satze 297 auf dasselbe hinauskommt, ein Fundamentaldreieck, von dem eine Ecke e_3 ein im Endlichen liegender einfacher Punkt ist, der mit dem Anfangspunkt des Cartesischen Systems zusammenfällt, während seine beiden andern Ecken e_1 und e_2 unendlich fern liegen, und zwar zwei zueinander senkrechte Strecken von der Länge 1 bestimmen, für die der Winkel $\sphericalangle (e_3 e_1, e_3 e_2)$ ein positiver rechter Winkel wird.

Da die Massen $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ der unendlich fernen Punkte e_1 und e_2 *als Massen zweier Strecken* verschwinden, und die Masse $\mathfrak{m}_3$ nach der Voraussetzung $= 1$ ist, so wird zufolge der Gleichung (4) des vorigen Abschnitts der mit der Feldeinheit identische unendlich ferne Stab $\mathfrak{J}$:

$$\mathfrak{J} = E_3. \tag{1}$$

Versteht man also unter $\boldsymbol{K}$ nach wie vor einen extensiven Bruch, der die Stäbe der Ebene in gleich lange und von ihnen um einen positiven rechten Winkel abweichende Strecken überführt, so nimmt die Apolaritätsgleichung (25) des vorigen Abschnitts die Form an:

$$E_3 \boldsymbol{K} = 0. \tag{2}$$

Und da andererseits die Stäbe E_1 und E_2 durch das Polarsystem $\boldsymbol{K}$ in die mit ihnen gleich langen und von ihnen um einen positiven rechten Winkel abweichenden Strecken e_1 und e_2 übergeführt werden (Fig. 180), so findet man für das Polarsystem $\boldsymbol{K}$ des Kreispunktpaars die Darstellung:

$$\boldsymbol{K} = \frac{e_1,\ e_2,\ 0}{E_1,\ E_2,\ E_3}, \tag{3}$$

die wir als die Normalform des extensiven Bruches für das Kreispunktpaar bezeichnen wollen.

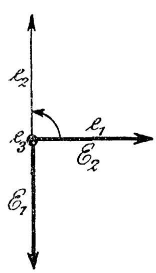


Fig. 180.

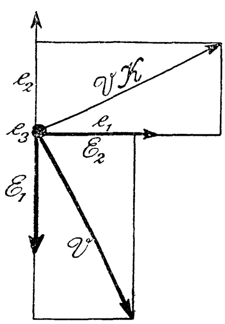


Fig. 181.

In der Tat führt der Bruch (3) nicht nur die Grundstäbe E_1 und E_2 in die mit ihnen gleichlangen und von ihnen um einen positiven rechten Winkel abweichenden Strecken e_1 und e_2 über, sondern er ruft eine entsprechende Umwandlung bei jedem durch den Punkt e_3 gehenden Stabe:

$$V = \mathfrak{v}_1 E_1 + \mathfrak{v}_2 E_2 \tag{4}$$

hervor, da das ganze Summierungsrechteck, welches der Gleichung (4) entspricht, durch eine Drehung um einen positiven rechten Winkel in das Summierungsrechteck der dem Stabe V entsprechenden Strecke:

$$V\boldsymbol{K} = \mathfrak{v}_1 e_1 + \mathfrak{v}_2 e_2 \tag{5}$$

verwandelt wird (Fig. 181). Und da endlich jeder beliebige Stab U der Ebene aus einem durch e_3 gehenden und mit dem Stabe U streckengleichen Stabe V durch Hinzufügung eines Vielfachen von E_3 erzeugt werden kann, also durch eine Summe von der Form:

$$U = V + \mathfrak{h} E_3 \tag{6}$$

darstellbar ist, so wird wegen (3):

$$U\boldsymbol{K} = V\boldsymbol{K}, \tag{7}$$

d. h. es wird überhaupt jeder Stab U der Ebene bei der Multiplikation mit dem Bruche (3) in eine Strecke von gleicher Länge verwandelt, die von dem

Stabe U um einen positiven rechten Winkel abweicht. Der Bruch (3) entspricht also den an den extensiven Bruch des Kreispunktpaars gestellten Forderungen.

Setzt man jetzt wie gewöhnlich:

$$U = \mathfrak{u}_1 E_1 + \mathfrak{u}_2 E_2 + \mathfrak{u}_3 E_3 = \mathfrak{u}_3 \left(\frac{\mathfrak{u}_1}{\mathfrak{u}_3} E_1 + \frac{\mathfrak{u}_2}{\mathfrak{u}_3} E_2 + E_3\right)$$

oder wegen der Gleichungen (121) des 25. Abschnitts:

$$U = \mathfrak{u}_3(\mathfrak{u} E_1 + \mathfrak{v} E_2 + E_3), \tag{8}$$

wo nach Satz 297 die Größen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ die Hesseschen Linienkoordinaten in bezug auf das rechtwinklige Achsenkreuz $[e_3 e_1]$, $[e_3 e_2]$ sind, so nimmt die Gleichung:

$$[U \cdot U\boldsymbol{K}] = 0 \tag{9}$$

des Kreispunktpaars bei Einführung jener rechtwinkligen Hesseschen Linienkoordinaten die Form an:

$$\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 = 0. \tag{10}$$

Man hat daher den Satz:

Satz 907: Die Gleichung des Kreispunktpaars in rechtwinkligen Hesseschen Linienkoordinaten lautet:

$$\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 = 0. \tag{10}$$

Die Hauptachsen einer Kurve zweiter Klasse. Die Normalform des Bruches für das Kreispunktpaar erweist sich z. B. als nützlich, wenn man die Symmetrieachsen einer Kurve zweiter Klasse aufsuchen will. Es sei also $\boldsymbol{P}$ das Polarsystem einer Kurve zweiter Klasse bezogen auf ein Fundamentaldreieck der auf S. 425 beschriebenen Art, und zwar möge insbesondere der Anfangspunkt e_3 mit dem Mittelpunkt m der Kurve zusammenfallen. Die Stabpunktzuordnung $\boldsymbol{P}$ des Polarsystems dieser Kurve wird dann in diesem, wie überhaupt in jedem Koordinatensystem, durch einen Bruch von der Form:

$$\boldsymbol{P} = \frac{a_1,\ a_2,\ a_3}{E_1,\ E_2,\ E_3} \tag{11}$$

dargestellt werden, während das Polarsystem des Kreispunktpaars, wie oben gezeigt ist, durch einen Bruch von der besonderen Form:

$$\boldsymbol{K} = \frac{e_1,\ e_2,\ 0}{E_1,\ E_2,\ E_3} \tag{3}$$

ausgedrückt wird.

Ist jetzt T ein Stab, dessen Gerade durch den Mittelpunkt m des Polarsystems $\boldsymbol{P}$ hindurchgeht, so wird sein Pol $T\boldsymbol{P}$ hinsichtlich des Polarsystems $\boldsymbol{P}$ ein unendlich ferner Punkt (eine Strecke), und man kann nach denjenigen Durchmessern T_i des Polarsystems $\boldsymbol{P}$ fragen, für welche die Strecke $T_i\boldsymbol{P}$ auf dem zugehörigen Durchmesser T_i senkrecht steht, für die also abgesehen von einem Zahlfaktor die Strecke $T_i\boldsymbol{P}$ mit der Strecke $T_i\boldsymbol{K}$ übereinstimmt. Zwischen den beiden Strecken $T_i\boldsymbol{P}$ und $T_i\boldsymbol{K}$ wird dann eine Gleichung von der Form bestehen:

(12) $$T_i\boldsymbol{P} = u_i\, T_i\boldsymbol{K} \quad \text{oder}$$

(13) $$T_i(\boldsymbol{P} - u_i\boldsymbol{K}) = 0,$$

unter u_i einen Zahlfaktor verstanden. Nun sei:

(14) $$T_i = \mathfrak{t}_{i1} E_1 + \mathfrak{t}_{i2} \mathrm{E}_2.$$

Bei Einführung dieses Wertes verwandelt sich die Gleichung (13) in:

$$\mathfrak{t}_{i1} E_1 (\boldsymbol{P} - u_i\boldsymbol{K}) + \mathfrak{t}_{i2} E_2 (\boldsymbol{P} - u_i\boldsymbol{K}) = 0$$

oder wegen (11) und (3) in:

(15) $$\mathfrak{t}_{i1}(a_1 - u_i e_1) + \mathfrak{t}_{i2}(a_2 - u_i e_2) = 0,$$

eine Gleichung, die man auch durch die in u_i quadratische Gleichung ersetzen kann:

(16) $$[(a_1 - u_i e_1)(a_2 - u_i e_2)] = 0.$$

Sind u_1 und u_2 ihre beiden Wurzeln, und sind diese voneinander verschieden, so liefert die Gleichung (15) die Verhältnisse der Ableitzahlen der zugehörigen Werte T_1 und T_2 von T_i. Aus (15) folgen nämlich für diese Ableitzahlen $\mathfrak{t}_{11}, \mathfrak{t}_{12}$, $\mathfrak{t}_{21}, \mathfrak{t}_{22}$ die Proportionen:

(17) $$\begin{cases} \mathfrak{t}_{11} : \mathfrak{t}_{12} = -(a_2 - u_1 e_2) : (a_1 - u_1 e_1), \\ \mathfrak{t}_{21} : \mathfrak{t}_{22} = -(a_2 - u_2 e_2) : (a_1 - u_2 e_1). \end{cases}$$

Was die geometrische Bedeutung der beiden so bestimmten Durchmesser T_i der Kurve zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$ anlangt, so überzeugt man sich sogleich, daß diese Durchmesser T_i zwei Symmetrieachsen der Kurve zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$ bilden. Nach der Grundeigenschaft des Poles $V\boldsymbol{P}$ einer Geraden V hinsichtlich einer Kurve zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$ (vgl. Satz 412) trennt nämlich das Tangentenpaar, von einem beliebigen Punkte y jener Geraden V an die Kurve $\boldsymbol{P}$ gezogen, die Gerade V von ihrem Pole $V\boldsymbol{P}$ harmonisch. Wendet man diese Grundeigenschaft des Pols insbesondere auf einen der beiden oben erwähnten Durchmesser T_i an, deren Pol $T_i\boldsymbol{P}$ eine zu T_i senkrechte Strecke bestimmt, d. h., das Normalenzentrum des Durchmessers T_i bildet (vgl. S. 385), so folgt: Für einen jeden Punkt y eines dieser beiden Durchmesser T_i werden die beiden vom Punkte y ausgehenden Tangenten durch den Durchmesser T_i und das auf ihm in y errichtete Lot harmonisch getrennt (Fig. 182). Nach dem Satze 888 halbiert also der Durchmesser T_i den Winkel zwischen den

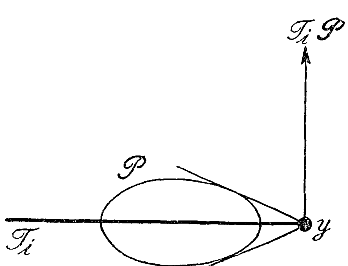


Fig. 182.

beiden vom Punkte y ausgehenden Tangenten oder, was dasselbe ist, diese beiden Tangenten sind die Spiegelbilder voneinander in bezug auf den Durchmesser T_i. Und da dies Ergebnis für jeden Punkt y der Geraden T_i gilt, so kann man sagen: Die Kurve zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$ geht, an dem Durchmesser T_i gespiegelt, in sich über. Jeder von den beiden Durchmessern T_i ist somit eine *Symmetrieachse* der Kurve zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$.

Um endlich die Lage der beiden Symmetrieachsen T_1 und T_2 zueinander zu bestimmen, stelle man die Definitionsgleichung (12) der Stäbe T_i für jeden einzelnen von den beiden Stäben T_1 und T_2 auf, bilde also die beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} T_1 \boldsymbol{P} = u_1 T_1 \boldsymbol{K}, \\ T_2 \boldsymbol{P} = u_2 T_2 \boldsymbol{K}, \end{cases}$$

und multipliziere sie beziehlich äußerlich mit T_2 und T_1, wodurch sich die Gleichungen ergeben:

$$[T_2 \cdot T_1 \boldsymbol{P}] = u_1 [T_2 \cdot T_1 \boldsymbol{K}],$$
$$[T_1 \cdot T_2 \boldsymbol{P}] = u_2 [T_1 \cdot T_2 \boldsymbol{K}].$$

Aus ihnen aber folgt, wenn man auf die Polarsysteme $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{K}$ die zweite Grundgleichung des Polarsystems anwendet (Gleichung (118) des 31. Abschnitts), durch Subtraktion die Gleichung:

$$(18) \qquad 0 = (u_1 - u_2)[T_1 \cdot T_2 \boldsymbol{K}],$$

die sich, da oben vorausgesetzt wurde, daß:

$$(19) \qquad u_1 \neq u_2$$

ist, auf die Gleichung reduziert:

$$(20) \qquad [T_1 \cdot T_2 \boldsymbol{K}] = 0.$$

Und diese sagt aus, daß unter der Voraussetzung (19) die beiden Symmetrieachsen T_1 und T_2 der Kurve zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$ aufeinander senkrecht stehen.

In Übereinstimmung mit der auf S. 284 ff. des ersten Teils dieses Bandes für ein Polarsystem *zweiter Ordnung* eingeführten Bezeichnung nennt man diese beiden aufeinander senkrechten Symmetrieachsen einer Kurve *zweiter Klasse* „die Hauptachsen der Kurve zweiter Klasse“, oder auch kürzer „die Achsen dieser Kurve“.

Die Schar konfokaler Mittelpunktskurven zweiter Klasse auf ihre Hauptachsen bezogen. Wählt man den Mittelpunkt einer reellen Ellipse oder Hyperbel zum Anfangspunkt e_3 eines rechtwinkligen Koordinatensystems und die große Achse der Ellipse oder bei der Hyperbel diejenige Achse der Kurve, welche die Hyperbel schneidet, zur Achse $[e_3 e_1]$, die andere Achse der Kurve zur Achse $[e_3 e_2]$ des rechtwinkligen Koordinatensystems und bezeichnet das Polarsystem der Ellipse oder Hyperbel, diese Kurve aufgefaßt als Kurve zweiter Klasse, mit $\boldsymbol{P}$, während $\boldsymbol{K}$ wieder das Polarsystem (3) des Kreispunktpaars darstellt, so läßt sich zeigen, daß die Gleichung:

$$(21) \qquad [U \cdot U(\mathfrak{g}\boldsymbol{K} + \mathfrak{h}\boldsymbol{P})] = 0$$

eine Kegelschnittschar ausdrückt, die mit der Kurve zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$ konfokal ist. Es genügt dazu der Nachweis, daß in der Schar (21) das Brennpunktpaar der Kurve $\boldsymbol{P}$ als entartende Kurve zweiter Klasse enthalten ist.

Nach S. 290 des ersten Teils dieses Bandes lautet der Bruch für das Polarsystem *zweiter Ordnung* $\mathfrak{p}_1$ einer Ellipse mit den Halbachsen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, die den Koordinatenachsen $[e_3 e_1]$ und $[e_3 e_2]$ angehören:

$$(22) \qquad \mathfrak{p}_1 = \frac{\frac{1}{\mathfrak{a}^2} E_1, \quad \frac{1}{\mathfrak{b}^2} E_2, \quad -E_3}{e_1, \quad e_2, \quad e_3},$$

und der Bruch für das Polarsystem *zweiter Ordnung* $\mathfrak{p}_2$ einer Hyperbel mit den Halbachsen $\mathfrak{a}$ und $i\mathfrak{b}$, die auf denselben Koordinatenachsen enthalten sind:

$$(23) \qquad \mathfrak{p}_2 = \frac{\frac{1}{\mathfrak{a}^2} E_1, \quad -\frac{1}{\mathfrak{b}^2} E_2, \quad -E_3}{e_1, \quad e_2, \quad e_3}.$$

Die Brüche für die adjungierten Polarsysteme *zweiter Klasse* $\boldsymbol{P}_1$ und $\boldsymbol{P}_2$ besitzen daher die Werte:

$$(24) \qquad \boldsymbol{P}_1 = \frac{-\frac{1}{\mathfrak{b}^2} e_1, \quad -\frac{1}{\mathfrak{a}^2} e_2, \quad -\frac{1}{\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2} e_3}{E_1, \quad E_2, \quad E_3} \quad \text{und}$$

$$(25) \qquad \boldsymbol{P}_2 = \frac{\frac{1}{\mathfrak{b}^2} e_1, \quad -\frac{1}{\mathfrak{a}^2} e_2, \quad -\frac{1}{\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2} e_3}{E_1, \quad E_2, \quad E_3}.$$

Stellt man zu diesen beiden Polarsystemen zweiter Klasse den Bruch:

$$(3) \qquad \boldsymbol{K} = \frac{e_1,}{E_1,} \frac{e_2,}{E_2,} \frac{0}{E_3}$$

für das Kreispunktpaar, so sieht man, daß die drei Polarsysteme $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{K}$ das Fundamentaldreiseit $E_1 E_2 E_3$ zum gemeinsamen Poldreiseit besitzen. Nach dem Satze 521 müssen also die drei in der Schar $\mathfrak{g}\boldsymbol{K} + \mathfrak{h}\boldsymbol{P}_1$ oder in der Schar $\mathfrak{g}\boldsymbol{K} + \mathfrak{h}\boldsymbol{P}_2$ enthaltenen Punktpaare den drei Seiten E_1, E_2, E_3 dieses Dreiseits angehören. Insbesondere ist nach S. 388 das Kreispunktpaar $\boldsymbol{K}$ auf der unendlich fernen Geraden E_3 gelegen. Um die beiden in der Schar $\mathfrak{g}\boldsymbol{K} + \mathfrak{h}\boldsymbol{P}_1$ außer dem Kreispunktpaar $\boldsymbol{K}$ vorkommenden Punktpaare zu finden, multipliziere man die Gleichungen (3) und (24) mit solchen Faktoren, daß bei der Addition einmal der erste Zähler des entstehenden Bruches und dann der zweite Zähler verschwindet, so daß das durch diese lineare Verknüpfung gewonnene Polarsystem das eine Mal ein Punktpaar der Seite E_1 des Fundamentaldreiecks, das andere Mal ein Punktpaar der Seite E_2 zur Polarkurve hat. Dazu eignen sich die Faktoren $\mathfrak{a}^2$ und $\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2$ und andererseits die Faktoren $\mathfrak{b}^2$ und $\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2$. Man erhält so die Polarsysteme:

$$(26) \qquad \mathfrak{a}^2 \boldsymbol{K} + \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 \boldsymbol{P}_1 = \frac{0, \ (\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2)\, e_2, \ e_3}{E_1, \ E_2, \ E_3} \quad \text{und}$$

$$(27) \qquad \boldsymbol{F} = \mathfrak{b}^2 \boldsymbol{K} + \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 \boldsymbol{P}_1 = \frac{(\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2)\, e_1, \ 0, \ e_3}{E_1, \ E_2, \ E_3}.$$

Die Gleichungen der zugehörigen Polarkurven lauten dann:

$$(\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2)\,\mathfrak{v}^2 = -1 \quad \text{und}$$

$$(\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2)\,\mathfrak{u}^2 = -1.$$

Aus ihnen folgt, wenn man noch berücksichtigt, daß der obigen Voraussetzung zufolge *bei der Ellipse:*

$$(28) \qquad \mathfrak{a} > \mathfrak{b}$$

sein sollte, daß für das Punktpaar (26):

$$(29) \qquad \mathfrak{v} = \pm \frac{1}{i\sqrt{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2}}$$

und für das Punktpaar (27):

$$(30) \qquad \mathfrak{u} = \pm \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2}}$$

wird.

Die letzte Gleichung stellt ein reelles Punktpaar *der großen Achse* $[e_3 e_1]$ *der Ellipse* $\boldsymbol{P}_1$ mit den Halbachsen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ dar, dessen Punkte vom Mittelpunkte e_3 der Ellipse den Abstand:

$$(31) \qquad \mathfrak{e} = \sqrt{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2}$$

haben (vgl. S. 34 des ersten Teils dieses Bandes). Und da die Kegelschnittschar $\mathfrak{g}\boldsymbol{K} + \mathfrak{h}\boldsymbol{P}_1$ auch durch das Kreispunktpaar $\boldsymbol{K}$ und das reelle Punktpaar $\boldsymbol{F}$ in (27) als Grundkurven bestimmt wird, so ist nach dem Satze 887 das Punktpaar $\boldsymbol{F}$ das Brennpunktpaar nicht nur der Ellipse (24) mit den Halbachsen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, sondern auch aller Kurven der Schar $\mathfrak{g}\boldsymbol{K} + \mathfrak{h}\boldsymbol{P}_1$. Diese Schar ist also, wie oben behauptet wurde, mit der Ellipse (24) konfokal.

Aus der Gleichung (31) folgt ferner noch, daß man das reelle Brennpunktpaar $\boldsymbol{F}$ einer Ellipse erhält, indem man um einen Endpunkt ihrer kleinen Achse mit ihrer großen Halbachse $\mathfrak{a}$ den Kreis schlägt, dann schneidet dieser aus der großen Achse das reelle Brennpunktpaar $\boldsymbol{F}$ der Ellipse aus (Fig. 183). Der Abstand $\mathfrak{e}$ der beiden reellen Brennpunkte vom Mittelpunkte der Ellipse heißt die „lineare Exzentrizität der Ellipse“.

Das in der konfokalen Schar enthaltene und *der kleinen Achse* $[e_3 e_2]$ *der Ellipse* $\boldsymbol{P}_1$ angehörende Punktpaar ist, wie die Gleichung (29) zeigt, konjugiert komplex, und seine Punkte haben dieser Gleichung zufolge von dem Mittelpunkt der Ellipse den rein imaginären Abstand:

$$i\mathfrak{e} = i\sqrt{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2}. \tag{32}$$

Man nennt die Punkte dieses Punktpaars die konjugiert komplexen Brennpunkte der Ellipse mit den Halbachsen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

Aus den Formeln (29) und (30) ergeben sich die Gleichungen für die beiden Punktpaare, die in der durch das Kreispunktpaar $\boldsymbol{K}$ und die Hyperbel $\boldsymbol{P}_2$ bestimmten Kegelschnittschar $\mathfrak{g}\boldsymbol{K} + \mathfrak{h}\boldsymbol{P}_2$ außer dem Kreispunkt-

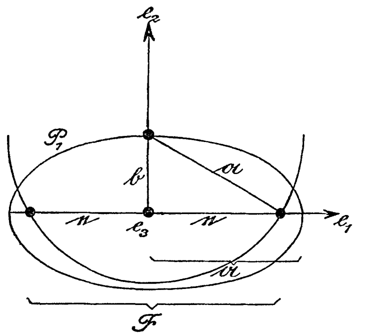


Fig. 183.

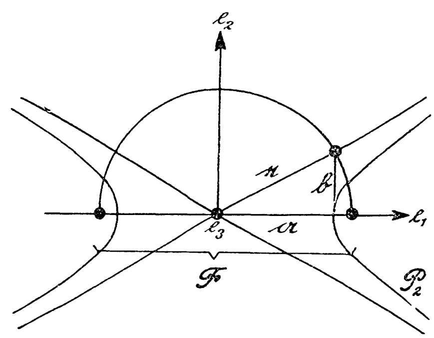


Fig. 184.

paar $\boldsymbol{K}$ selbst enthalten sind, indem man in ihnen $\mathfrak{b}^2$ durch $-\mathfrak{b}^2$ ersetzt. Dadurch erhält man für die beiden Punktpaare die Gleichungen:

$$\mathfrak{v} = \pm \frac{1}{i\sqrt{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2}} \quad \text{und} \tag{33}$$

$$\mathfrak{u} = \pm \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2}}. \tag{34}$$

Die zweite von diesen Gleichungen stellt das reelle, die erste das konjugiert komplexe Brennpunktpaar dar. Das reelle Brennpunktpaar liegt auf derjenigen Achse der Hyperbel, welche die Kurve schneidet, oder, wie man auch sagt, auf der „inneren Achse der Hyperbel", im Abstande:

$$\mathfrak{e} = \sqrt{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2} \tag{35}$$

von ihrem Mittelpunkte e_3. Man erhält es, indem man auf der inneren Achse $[e_3 e_1]$ der Hyperbel in einem Scheitel der Kurve das Lot errichtet bis zum Schnitt mit einer Asymptote in $\mathfrak{c}$ und um den Mittelpunkt e_3 der Hyperbel mit dem Radius $e_3\mathfrak{c} = \mathfrak{e}$ den Kreis schlägt. Dann schneidet dieser aus der Achse $[e_3 e_1]$ das reelle Brennpunktpaar $\boldsymbol{F}$ der Hyperbel aus (Fig. 184). Auch hier heißt wieder der Abstand der beiden reellen Brennpunkte vom Mittelpunkt der Kurve die „lineare Exzentrizität der Hyperbel".

Das konjugiert komplexe Brennpunktpaar der Hyperbel gehört der die Kurve nicht schneidenden Achse $[e_3 e_2]$ an, und seine Punkte haben vom

Mittelpunkte der Hyperbel den rein imaginären Abstand:

$$(36) \qquad \mathfrak{i}\mathfrak{e} = \mathfrak{i}\sqrt{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2}.$$

Die in der Schar konfokaler Mittelpunktskurven zweiter Klasse enthaltenen imaginären Ellipsen. Um alle in der Schar:

$$\mathfrak{g}\boldsymbol{K} + \mathfrak{h}\boldsymbol{P}_1$$

vorkommenden Kurven zweiter Klasse überschauen zu können, frage man *zunächst* noch nach den Brennpunkten einer imaginären Ellipse mit den Halbachsen $\mathfrak{i}\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{i}\mathfrak{b}$, die beziehlich den Koordinatenachsen $[e_3 e_1]$ und $[e_3 e_2]$ angehören. Man wird die Gleichungen der beiden Brennpunktpaare dieser imaginären Ellipse erhalten, indem man in den Gleichungen (29) und (30) für die beiden Brennpunktpaare der zugehörigen reellen Ellipse mit den Halbachsen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Größen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ durch die Größen $\mathfrak{i}\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{i}\mathfrak{b}$ ersetzt. Dadurch bekommt man für die beiden Brennpunktpaare jener imaginären Ellipse die Gleichungen:

$$(37) \qquad \mathfrak{v} = \mp \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2}} \quad \text{und}$$

$$(38) \qquad \mathfrak{u} = \pm \frac{1}{\mathfrak{i}\sqrt{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2}}.$$

Die imaginäre Ellipse mit den Halbachsen $\mathfrak{i}\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{i}\mathfrak{b}$, die beziehlich den Koordinatenachsen $[e_3 e_1]$ und $[e_3 e_2]$ angehören, hat somit — immer unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$ ist, — ihre reellen Brennpunkte auf der $[e_3 e_2]$-Achse in der Entfernung:

$$(31) \qquad \mathfrak{e} = \sqrt{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2}$$

vom Mittelpunkte e_3, und ihre konjugiert komplexen Brennpunkte auf der Achse $[e_3 e_1]$ in dem rein imaginären Abstande:

$$(32) \qquad \mathfrak{i}\mathfrak{e} = \mathfrak{i}\sqrt{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2}$$

vom Mittelpunkt e_3.

Will man also erreichen, daß die Brennpunkte einer imaginären Ellipse von den Halbachsen $\mathfrak{i}\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{i}\mathfrak{b}$ *mit denen der oben betrachteten reellen Ellipse* $\boldsymbol{P}_1$ *von den Halbachsen* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zusammenfallen,* so muß man die Halbachse $\mathfrak{i}\mathfrak{a}$ der imaginären Ellipse auf die Koordinatenachse $[e_3 e_2]$ verlegen und die Halbachse $\mathfrak{i}\mathfrak{b}$ auf die Koordinatenachse $[e_3 e_1]$.

Man hat daher in dem Ausdruck (118) des 34. Abschnitts für das Polarsystem der imaginären Ellipse mit den Halbachsen $\mathfrak{i}\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{i}\mathfrak{b}$, die den Koordinatenachsen $[e_3 e_1]$ und $[e_3 e_2]$ zugehören, die Längenfaktoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der imaginären Halbachsen miteinander zu vertauschen und erhält so für das Polarsystem zweiter Ordnung p_3 der imaginären Ellipse, deren Halbachsen beziehlich auf den Koordinatenachsen $[e_3 e_2]$ und $[e_3 e_1]$ enthalten sind, die Darstellung:

$$p_3 = \frac{-\frac{1}{\mathfrak{b}^2} E_1, \quad -\frac{1}{\mathfrak{a}^2} E_2, \quad -E_3}{e_1, \quad e_2, \quad e_3}, \tag{39}$$

für das zugehörige Polarsystem zweiter Klasse also den Ausdruck:

$$\boldsymbol{P}_3 = \frac{\frac{1}{\mathfrak{a}^2} e_1, \quad \frac{1}{\mathfrak{b}^2} e_2, \quad \frac{1}{\mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}^2} e_3}{E_1, \quad E_2, \quad E_3}. \tag{40}$$

Andererseits geht das Polarsystem zweiter Klasse $\boldsymbol{P}_3'$ der zugehörigen reellen Ellipse aus dem Polarsystem $\boldsymbol{P}_1$ in (24) ebenfalls durch Vertauschung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ hervor und besitzt daher den Wert:

$$\boldsymbol{P}_3' = \frac{-\frac{1}{\mathfrak{a}^2} e_1, \quad -\frac{1}{\mathfrak{b}^2} e_2, \quad \frac{1}{\mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}^2} e_3}{E_1, \quad E_2, \quad E_3}. \tag{41}$$

Das Polarsystem zweiter Klasse $\boldsymbol{P}_3$ der betrachteten imaginären Ellipse läßt sich also durch das Folgeprodukt darstellen:

$$\boldsymbol{P}_3 = \boldsymbol{P}_3' \mathfrak{s}, \tag{42}$$

in welchem $\mathfrak{s}$ „die Spiegelung am Punkte e_3“ bedeutet, nämlich diejenige Punkt-Punkt-Kollineation:

$$\mathfrak{s} = \frac{-e_1, \quad -e_2, \quad e_3}{e_1, \quad e_2, \quad e_3} \tag{43}$$

ausdrückt, die einen jeden Punkt der Ebene in sein Spiegelbild in bezug auf den Punkt e_3 verwandelt. Man sieht daher, daß man zu einer beliebigen Geraden V ihren Pol $V\boldsymbol{P}_3$ hinsichtlich des Polarsystems $\boldsymbol{P}_3$ der imaginären Ellipse (40) finden kann, indem man zunächst den Pol $V\boldsymbol{P}_3'$ der Geraden V in bezug auf das Polarsystem $\boldsymbol{P}_3'$ der zugehörigen reellen Ellipse bestimmt und diesen Pol am Mittelpunkte e_3 der reellen Ellipse spiegelt. Der Pol einer Geraden V in bezug auf die imaginäre Ellipse $\boldsymbol{P}_3$ fällt daher zusammen mit dem „Antipol“ der Geraden V in bezug auf die zugehörige reelle Ellipse $\boldsymbol{P}_3'$ (vgl. S. 292 des ersten Teils dieses Bandes).

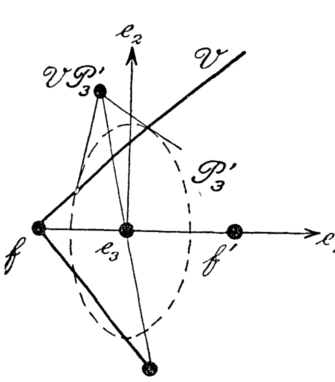


Fig. 185.

Geht insbesondere die Gerade V durch einen reellen Brennpunkt $\mathfrak{f}$ der imaginären Ellipse $\boldsymbol{P}_3$ hindurch, so steht nach dem Satze von De la Hire (Satz 890) die Verbindungslinie des Brennpunktes $\mathfrak{f}$ mit dem Pole $V\boldsymbol{P}_3$ der Geraden V hinsichtlich der imaginären Ellipse senkrecht auf der Geraden V (Fig. 185). Man hat also den Satz:

Satz 908: Konstruiert man zu einer Geraden V, die durch einen reellen Brennpunkt $\mathfrak{f}$ einer imaginären Ellipse $\boldsymbol{P}_3$ geht, den Pol $V\boldsymbol{P}_3$ hinsichtlich dieser Ellipse und verbindet ihn mit jenem Brennpunkte $\mathfrak{f}$, so steht die Verbindungslinie senkrecht auf der Geraden V.

Aus den Formeln (31) und (32) und aus den Formeln (35) und (36), sowie aus den Bemerkungen auf S. 431f. geht noch hervor, daß für alle Kurven einer konfokalen Schar von Mittelpunktskurven zweiter Klasse nicht nur die reellen Brennpunkte, sondern ebenso auch die konjugiert komplexen Brennpunkte übereinstimmen.

Legt man in dem Ausdruck:

$$\mathfrak{g}\boldsymbol{K} + \mathfrak{h}\boldsymbol{P}_1 \tag{44}$$

für die mit der reellen Ellipse $\boldsymbol{P}_1$ konfokale Kegelschnittschar in Übereinstimmung mit den Gleichungen (26) und (27) dem Parameter $\mathfrak{h}$ den Wert $\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2$ bei, ersetzt somit die Vielfachensumme (44) durch den Ausdruck:

$$\mathfrak{g}\boldsymbol{K} + \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2\boldsymbol{P}_1 = \frac{(\mathfrak{g}-\mathfrak{a}^2)\,e_1, \quad (\mathfrak{g}-\mathfrak{b}^2)\,e_2, \quad e_3}{E_1, \qquad\qquad E_2, \qquad E_3}, \tag{45}$$

so stellt derselbe, falls man $\mathfrak{g}$ von $-\infty$ bis $+\infty$ variieren läßt, noch immer die ganze Schar konfokaler Kurven zweiter Klasse dar, und zwar ergibt sich für:

$$-\infty < \mathfrak{g} < \mathfrak{b}^2$$

eine *reelle Ellipse*, deren große Achse auf die Gerade $[e_3 e_1]$ fällt, für:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{b}^2$$

das *reelle Brennpunktpaar*, für:

$$\mathfrak{b}^2 < \mathfrak{g} < \mathfrak{a}^2$$

eine *Hyperbel*, deren innere Achse auf der Geraden $[e_3 e_1]$ liegt, für:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}^2$$

das *konjugiert komplexe Brennpunktpaar*, für:

$$\mathfrak{a}^2 < \mathfrak{g} < \infty$$

eine *imaginäre Ellipse*, deren zugehörige reelle Ellipse ihre große Halbachse auf der Geraden $[e_3 e_2]$ hat, endlich für:

$$\mathfrak{g} = \pm\infty$$

das *Kreispunktpaar*.

Die zu einer Mittelpunktskurve zweiter Klasse und dem Kreispunktpaar gehörige harmonische Kurve zweiter Ordnung. Nach dem sechsten Satze von Chr. v. Staudt (Satz 544) gehört ein Punkt dann und nur dann der harmonischen Kurve zweiter Ordnung h zu einer Mittelpunktskurve zweiter

Klasse P und dem Kreispunktpaar K an, wenn die von diesem Punkte ausgehenden Tangenten der Kurve P hinsichtlich des Kreispunktpaars konjugiert sind, d. h. aufeinander senkrecht stehen. Die harmonische Kurve zweiter Ordnung:

$$h = [PK] \tag{46}$$

der Mittelpunktskurve zweiter Klasse P und des Kreispunktpaars K ist also der geometrische Ort der Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel die Kurve P berühren. Man erhält daher 4 auf den Achsen der Kurve P gelegene Punkte der harmonischen Kurve h, indem man an die Kurve P die 4 Tangenten legt, welche die Achsen unter dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ schneiden. Die harmonische Kurve zweiter Ordnung h geht somit durch die 4 Ecken

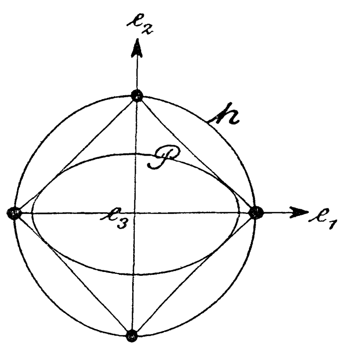


Fig. 186.

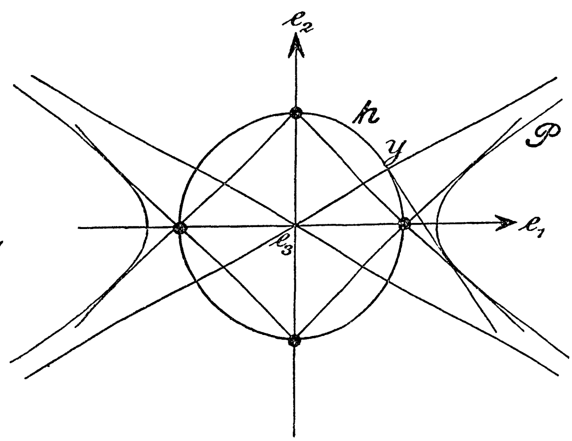


Fig 187.

des Quadrats hindurch, das seine Ecken auf den Achsen der Kurve P hat und dieser Kurve umschrieben ist. Und da die Kurve h zugleich aus Symmetriegründen mit der Kurve P die Achsen gemein hat, so ist sie der Kreis, der jenem Quadrat umschrieben ist (vgl. die Fig. 186 und 187).

Ist die Kurve zweiter Klasse P eine Hyperbel, so kann man insbesondere 4 Punkte des Kreises h dadurch finden, daß man an die Hyperbel die 4 Tangenten legt, die auf den Asymptoten der Hyperbel senkrecht stehen; dann sind die Schnittpunkte y dieser 4 Tangenten mit den zugehörigen Asymptoten 4 Punkte des Kreises h.

Das gewonnene Ergebnis läßt sich in dem folgenden Satze zusammenstellen:

Satz 909: Die harmonische Kurve zweiter Ordnung zu einer Mittelpunktskurve zweiter Klasse P und dem Kreispunktpaar ist ein Kreis, der dem Quadrat umschrieben ist, das seine Ecken auf den Achsen der Kurve P hat, und dessen Seiten diese Kurve berühren.

Man bestätigt und vervollständigt dies Ergebnis leicht durch Ausrechnung des kombinatorischen Produktes $[PK]$. Nach den Gleichungen (24) und (25) lautet der Ausdruck P für das Polarsystem einer Mittelpunktskurve zweiter Klasse, bezogen auf das dort beschriebene Koordinatensystem:

$$(47)\qquad P = \frac{\mp \frac{1}{\mathfrak{b}^2} e_1, \quad -\frac{1}{\mathfrak{a}^2} e_2, \quad \pm \frac{1}{\mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}^2} e_3}{E_1, \quad E_2, \quad E_3},$$

wo die oberen Vorzeichen einer Ellipse, die unteren einer Hyperbel zugehören, während nach (3) der Bruch K für das Kreispunktpaar in demselben Koordinatensystem die Form besitzt:

$$(3)\qquad K = \frac{e_1, \quad e_2, \quad 0}{E_1, \quad E_2, \quad E_3}.$$

Es wird also nach der allgemeinen Formel für das kombinatorische Produkt zweier Reziprozitäten zweiter Klasse (vgl. die Formel (70) des 30. Abschnitts):

$$h = [PK] = \frac{\frac{1}{2}\{[a_2 b_3] - [a_3 b_2]\}, \quad \frac{1}{2}\{[a_3 b_1] - [a_1 b_3]\}, \quad \frac{1}{2}\{[a_1 b_2] - [a_2 b_1]\}}{e_1, \quad e_2, \quad e_3},$$

in der für den Augenblick die Buchstaben a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3 die Zähler von P und K bezeichnen. Es wird also mit Rücksicht auf die Werte (47) und (3):

$$h = \frac{\pm \frac{1}{2\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2} E_1, \quad \pm \frac{1}{2\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2} E_2, \quad \frac{1}{2}\left\{\mp \frac{1}{\mathfrak{b}^2} - \frac{1}{\mathfrak{a}^2}\right\} E_3}{e_1, \quad e_2, \quad e_3} \qquad \text{oder}$$

$$(48)\qquad h = \pm \frac{1}{2\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2} \, \frac{E_1, \quad E_2, \quad -(\mathfrak{a}^2 \pm \mathfrak{b}^2) E_3}{e_1, \quad e_2, \quad e_3},$$

wo immer noch das obere Vorzeichen der Ellipse, das untere der Hyperbel zugehört. Der Ausdruck (48) stellt aber mit Rücksicht auf (22) in der Tat das Polarsystem eines Kreises dar um den Mittelpunkt e_3 der $\left\{\begin{array}{l}\text{Ellipse oder}\\\text{Hyperbel}\end{array}\right\}$, geschlagen beziehlich mit dem Radius:

$$\mathfrak{r} = \sqrt{\mathfrak{a}^2 \pm \mathfrak{b}^2}.$$

Man nennt ihn den Direktorkreis dieser Kurven, und man hat den Satz

Satz 910: Der geometrische Ort für die Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel eine Ellipse oder Hyperbel berühren, ist der sogenannte Direktorkreis dieser Kurven, d. h. der um den Mittelpunkt der Kurven beziehlich mit dem Radius $\sqrt{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2}$ oder $\sqrt{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2}$ geschlagene Kreis, unter $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a}$ und $i\mathfrak{b}$ die Halbachsen der Ellipse oder Hyperbel verstanden.

Die harmonische Kurve zweiter Ordnung zu einer Parabel und dem Kreispunktpaar. Schreiben wir die auf die Symmetrieachse als $\mathfrak{x}$-Achse und die

Scheitelangente als $\mathfrak{y}$-Achse bezogene Gleichung einer Parabel[1]):

$$\mathfrak{y}^2 = 2\mathfrak{p}\mathfrak{x}$$

in Dreieckskoordinaten in bezug auf das durch die Symmetrieachse $[e_3 e_1]$, die Scheiteltangente $[e_3 e_2]$ und die unendlich ferne Gerade $[e_1 e_2]$ gebildete rechtwinklige Fundamentaldreieck, für das wir die Bestimmungen von S. 425 festhalten, so nimmt die Gleichung der Parabel die Form an:

$$\mathfrak{x}_2{}^2 - 2\mathfrak{p}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_3 = 0. \tag{49}$$

Hieraus folgt, daß ihre Gleichung in Linienkoordinaten in bezug auf dasselbe Fundamentaldreieck lautet[2]):

$$-\mathfrak{p}^2\mathfrak{u}_2{}^2 + 2\mathfrak{p}\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_3 = 0, \tag{50}$$

während man für das Polarsystem zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$ dieser Parabel den Bruch erhält:

$$\boldsymbol{P} = \frac{\mathfrak{p}e_3, \ -\mathfrak{p}^2 e_2, \ \mathfrak{p}e_1}{E_1, \quad E_2, \quad E_3}. \tag{51}$$

Stellt man zu diesem Bruch den Bruch (3) für das Kreispunktpaar, d. h. den Bruch:

$$\boldsymbol{K} = \frac{e_1, \ e_2, \ 0}{E_1, \ E_2, \ E_3}, \tag{3}$$

so findet man für das Polarsystem $\boldsymbol{h} = [\boldsymbol{PK}]$ der harmonischen Kurve zweiter Ordnung von $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{K}$ den Ausdruck (vgl. die Entwicklung auf S. 437):

$$\boldsymbol{h} = \frac{-\frac{1}{2}\mathfrak{p}E_3, \quad 0, \quad -\frac{1}{2}\mathfrak{p}E_1 - \frac{1}{2}\mathfrak{p}^2 E_3}{e_1, \quad e_2, \quad e_3}. \tag{52}$$

Die harmonische Kurve zweiter Ordnung $\boldsymbol{h}$ zerfällt also in ein Linienpaar, dessen Doppelpunkt nach S. 277, des ersten Teils dieses Bandes der unendlich ferne Punkt e_2 der Scheiteltangente ist, so daß seine Linien durch den unendlich fernen Punkt der Scheiteltangente hindurchgehen. Dies wird bestätigt durch die Gleichung der Kurve $\boldsymbol{h}$, welche lautet:

$$(\tfrac{1}{2}\mathfrak{p}\mathfrak{x}_3 + \mathfrak{x}_1)\,\mathfrak{x}_3 = 0. \tag{53}$$

Die Kurve zerfällt daher in die unendlich ferne Gerade:

$$\mathfrak{x}_3 = 0 \tag{54}$$

und die Gerade:

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{p}\mathfrak{x}_3 + \mathfrak{x}_1 = 0, \tag{55}$$

---

1) Vgl. S. 277 des ersten Teils dieses Bandes.

2) Etwas weiter unten (auf S. 440) ist das Verfahren zur Bildung der Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung in Linienkoordinaten aus derjenigen in Punktkoordinaten ausführlich auseinandergesetzt.

deren Gleichung man, wenn man wieder Cartesische Koordinaten in bezug auf die Achsen $[e_3 e_1]$ und $[e_3 e_2]$ einführt, auch in der Form schreiben kann:

$$\mathfrak{x} = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{p}. \tag{56}$$

Das ist aber die Gleichung der Leitlinie L der Parabel.

Man hat somit die Sätze:

Satz 911: Die harmonische Kurve zweiter Ordnung zu einer Parabel und dem Kreispunktpaar zerfällt in die Leitlinie der Parabel und die unendlich ferne Gerade. Und

Satz 912: Die Tangenten von einem Punkte der Leitlinie einer Parabel an die Kurve stehen aufeinander senkrecht. Und um-

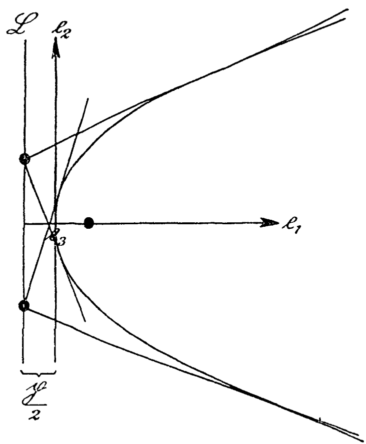


Fig. 188.

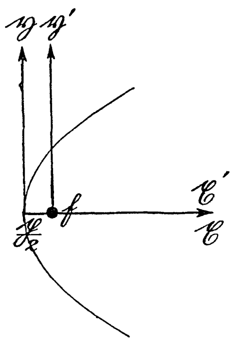


Fig. 189.

gekehrt: Man erhält die Leitlinie einer Parabel, indem man zwei im Endlichen gelegene Scheitel zweier rechter Winkel miteinander verbindet, deren Schenkel die Parabel berühren. (Fig. 188).

Die Schar konfokaler Parabeln. Transformiert man die auf die Symmetrieachse als $\mathfrak{x}$-Achse und die Scheiteltangente als $\mathfrak{y}$-Achse bezogene Gleichung einer Parabel mit dem Parameter $\mathfrak{p}$, d. h. die Gleichung:

$$\mathfrak{y}^2 = 2\mathfrak{p}\mathfrak{x},$$

auf ein zweites rechtwinkliges Achsenkreuz $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, dessen $\mathfrak{x}'$-Achse wieder mit der Symmetrieachse der Parabel zusammenfällt, und dessen $\mathfrak{y}'$-Achse im Brennpunkte f der Kurve auf der Symmetrieachse senkrecht steht, während der positive Sinn der neuen Achsen mit dem der alten übereinstimmt (Fig. 189), benutzt man also die Transformationsformeln:

$$\begin{cases} \mathfrak{x} = \mathfrak{x}' + \dfrac{\mathfrak{p}}{2} \\ \mathfrak{y} = \mathfrak{y}', \end{cases} \tag{57}$$

so nimmt die Parabelgleichung die Form an:

$$\mathfrak{y}'^2 = 2\mathfrak{p}\left(\mathfrak{x}' + \frac{\mathfrak{p}}{2}\right) \quad \text{oder}$$

$$\mathfrak{y}'^2 - 2\mathfrak{p}\mathfrak{x}' - \mathfrak{p}^2 = 0. \tag{58}$$

Führt man sodann noch die entsprechenden Dreieckskoordinaten $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ ein mittelst der Transformationsformeln:

$$\begin{cases} \mathfrak{x}' = \dfrac{\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{x}_3} \\ \mathfrak{y}' = \dfrac{\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_3}, \end{cases} \tag{59}$$

bezieht die Parabel also auf ein sich ins Unendliche erstreckendes Fundamentaldreieck, das den Angaben des Satzes 297 genügt, von dem nämlich die Ecke e_3 im Endlichen liegt und mit dem Anfangspunkt des Systems $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}'$, d. h. mit dem Brennpunkte f der Parabel, zusammenfällt, während die beiden Ecken e_1 und e_2 unendlich fern liegen, und zwar zwei zueinander senkrechte Strecken von der Länge 1 sind, die nach Richtung und Sinn beziehlich mit der $\mathfrak{x}'$- und $\mathfrak{y}'$-Achse übereinstimmen (Fig. 190), so nimmt die Gleichung der Parabel die Form an:

$$\mathfrak{x}_2^2 - 2\mathfrak{p}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_3 - \mathfrak{p}^2\mathfrak{x}_3^2 = 0. \tag{60}$$

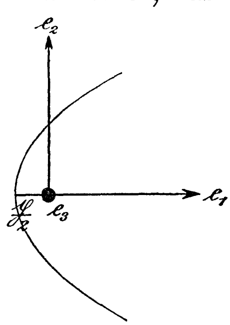


Fig. 190.

Um aus dieser Gleichung der Parabel die zugehörige Gleichung in Linienkoordinaten abzuleiten, hat man die Determinante $\mathfrak{a}$ der Gleichung (60) zu bilden, welche lautet:

$$\mathfrak{a} = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11}, & \mathfrak{a}_{12}, & \mathfrak{a}_{13} \\ \mathfrak{a}_{21}, & \mathfrak{a}_{22}, & \mathfrak{a}_{23} \\ \mathfrak{a}_{31}, & \mathfrak{a}_{32}, & \mathfrak{a}_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & 0, & -\mathfrak{p} \\ 0, & 1, & 0 \\ -\mathfrak{p}, & 0, & -\mathfrak{p}^2 \end{vmatrix},$$

und zu ihren Elementen $\mathfrak{a}_{ik}$ die Unterdeterminanten $\mathfrak{A}_{ik}$ zu bestimmen. Es wird:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{11} &= -\mathfrak{p}^2, \quad \mathfrak{A}_{12} = 0, \qquad \mathfrak{A}_{31} = \mathfrak{p}, \\ & \qquad\quad \mathfrak{A}_{22} = -\mathfrak{p}^2, \quad \mathfrak{A}_{23} = 0, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \mathfrak{A}_{33} = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung der Parabel (60) in Linienkoordinaten $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3$ in bezug auf dasselbe Fundamentaldreieck lautet daher:

$$-\mathfrak{p}^2\mathfrak{u}_1^2 - \mathfrak{p}^2\mathfrak{u}_2^2 + 2\mathfrak{u}_3\mathfrak{u}_1\mathfrak{p} = 0 \quad \text{oder} \tag{61}$$

$$-\mathfrak{p}(\mathfrak{u}_1^2 + \mathfrak{u}_2^2) + 2\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_3 = 0. \tag{62}$$

Bezieht man andererseits auf dieses Fundamentaldreieck auch die Gleichung des Kreispunktpaars, indem man in die Gleichung (10) des Kreispunktpaars für $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ die Werte einsetzt:

$$(63) \qquad \mathfrak{u} = \frac{\mathfrak{u}_1}{\mathfrak{u}_3}, \quad \mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{u}_2}{\mathfrak{u}_3}$$

(vgl. die Gleichungen [121], des 25. Abschnitts), so nimmt die Gleichung des Kreispunktpaars die Form an:

$$(64) \qquad \mathfrak{u}_1{}^2 + \mathfrak{u}_2{}^2 = 0.$$

Und verknüpft man diese Gleichung linear mit der Parabelgleichung (62), subtrahiert nämlich etwa ihr $\mathfrak{g}$-faches von der Gleichung (62), so erhält man für die durch die Parabel (62) und das Kreispunktpaar (64) bestimmte Kegelschnittschar die Darstellung:

$$(65) \qquad -(\mathfrak{p} + \mathfrak{g})(\mathfrak{u}_1{}^2 + \mathfrak{u}_2{}^2) + 2\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_3 = 0.$$

Diese Gleichung (65) stimmt aber ihrer Form nach mit der Parabelgleichung (62) genau überein, nur daß an die Stelle des Parameters $\mathfrak{p}$ der Parameter $\mathfrak{p} + \mathfrak{g}$ getreten ist. Sie ist daher bei fest gegebenem $\mathfrak{g}$ ebenfalls die Gleichung einer Parabel, und zwar einer Parabel, die mit der Parabel (62) den Brennpunkt e_3 und die Symmetrieachse $[e_3 e_1]$ gemein hat, deren Parameter aber $= \mathfrak{p} + \mathfrak{g}$ ist, und deren konkave Seite somit, falls $\mathfrak{p} + \mathfrak{g} > 0$ ist, nach derselben Seite weist wie die Strecke e_1, falls dagegen $\mathfrak{p} + \mathfrak{g} < 0$ ist, nach der andern Seite. Bei veränderlichem $\mathfrak{g}$ stellt die Gleichung (65) also eine Schar von Parabeln mit demselben Brennpunkte und derselben Symmetrieachse dar, die man als „Schar konfokaler Parabeln" bezeichnet, indem man den unendlich fernen Punkt e_1 der Symmetrieachse als zweiten gemeinsamen Brennpunkt der konfokalen Schar auffassen kann.

In der Tat wird in der elementaren analytischen Geometrie gezeigt, daß eine Ellipse (oder Hyperbel), bei der man einen Brennpunkt und den benachbarten Scheitel festhält, in eine Parabel übergeht, wenn man den Mittelpunkt und also auch den andern Brennpunkt ins Unendliche rücken läßt. Man kann daher wirklich den unendlich fernen Punkt der Achse einer Parabel als zweiten Brennpunkt der Kurve ansehen.

Für eine Schar konfokaler Parabeln gelten die auf S. 403 bis 406 entwickelten allgemeinen Eigenschaften einer konfokalen Kegelschnittschar. Insbesondere hat man die folgenden Sätze:

Satz 913: Durch eine beliebige Parabel und das Kreispunktpaar wird eine Schar konfokaler Parabeln bestimmt. Durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei Parabeln der konfokalen Schar, schneiden sich in ihm senkrecht und halbieren die Winkel zwischen dem Brennstrahl und dem Durchmesser jenes Punktes (Fig. 191). Und:

Satz 914: Die beiden Tangenten, die man in irgendeinem Punkte der Ebene an die beiden durch ihn gehenden Kurven einer konfokalen Parabelschar legen kann, halbieren die Winkel zwischen

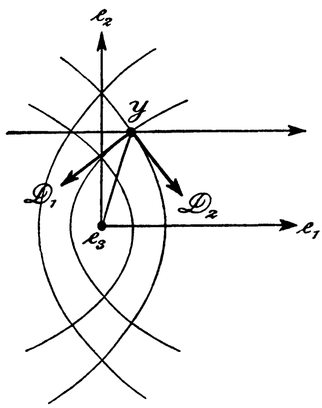


Fig. 191.

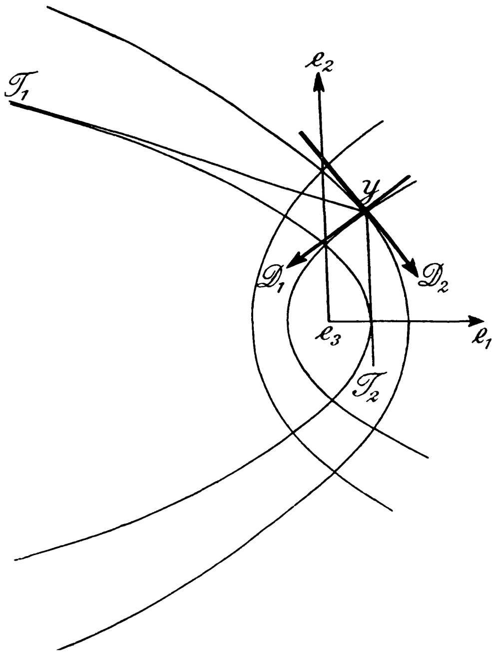


Fig. 192.

den beiden Tangenten von demselben Punkte an eine beliebige Parabel der Schar (Fig. 192).

Abschnitt 62.

Die Steinerschen Parabeln und die Apollonischen Hyperbeln einer Mittelpunktskurve zweiter Klasse.

Begriff der Steinerschen Parabel eines Punktes hinsichtlich einer Mittelpunktskurve zweiter Klasse. Man gelangt zu weiteren metrischen Beziehungen, wenn man *die allgemeinen Ergebnisse* des 38. Abschnitts *über den Polarkegelschnitt eines Punktes hinsichtlich einer Kegelschnittschar auf den Fall anwendet, wo diese Schar eine Schar konfokaler Mittelpunktskurven zweiter Klasse ist.*[1]) Ist also $\boldsymbol{P}$ das Polarsystem einer beliebigen Mittelpunktskurve zweiter Klasse und $\boldsymbol{K}$ das Polarsystem des Kreispunktpaars, und bezeichnet man mit U die laufende Tangente des Polarkegelschnitts eines Punktes x hinsichtlich der konfokalen Schar $\boldsymbol{K} - \mathfrak{h}\boldsymbol{P}$, so lautet nach Satz 565 die Gleichung dieses Polarkegelschnitts:

$$(1) \qquad [x \cdot U\boldsymbol{K} \cdot U\boldsymbol{P}] = 0.$$

1) Vgl. zu diesem Abschnitt: S. Gundelfinger, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, herausgegeben von F. Dingeldey, Leipzig 1895, S. 201 ff.

Wie in dem allgemeinen Falle enthält der durch diese Gleichung dargestellte Polarkegelschnitt als Tangenten die Verbindungslinien der 3 Punktpaare, die in der Schar enthalten sind, also

erstens die unendlich ferne Gerade J, welcher ja die eine Grundkurve der Schar, nämlich das Kreispunktpaar K, angehört. Wenn aber der Polarkegelschnitt von der unendlich fernen Geraden berührt wird, so ist er eine Parabel.

Zweitens hat der Polarkegelschnitt der konfokalen Schar auch die Hauptachsen der Kurve P zu Tangenten, denn in ihnen sind nach S. 430 ff. die beiden andern Punktpaare, nämlich die beiden gemeinsamen Brennpunktpaare der konfokalen Schar, enthalten.

Beides folgt übrigens auch direkt aus der Form der Gleichung (1). Denn da nach der Gleichung (25) des 60. Abschnitts:

$$JK = 0 \tag{2}$$

ist, so verschwindet für $U = J$ in dem Produkte auf der linken Seite von (1) der zweite Faktor und somit das ganze Produkt; die unendlich ferne Gerade bildet also eine Tangente des Polarkegelschnitts (1).

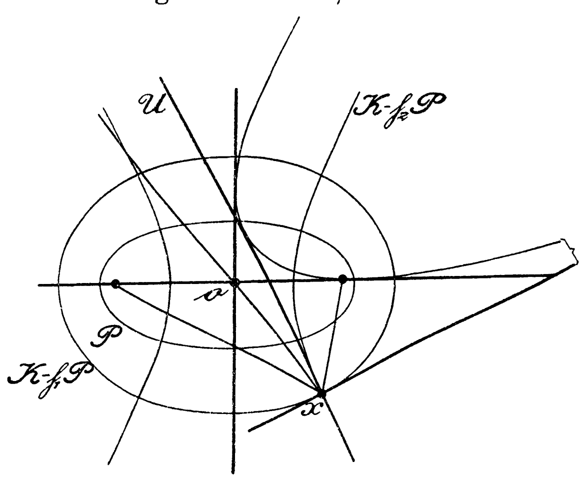


Fig. 193.

Setzt man andererseits den Stab U einem Stabe der beiden Hauptachsen der Kurve P gleich, so wird der dritte Faktor UP jenes Produktes, d. h. der Pol von U hinsichtlich P, eine zu U senkrechte Strecke und unterscheidet sich somit höchstens um einen Zahlfaktor von dem zweiten Faktor UK. Die linke Seite von (1) verschwindet daher auch in diesem Falle, und die Parabel, welche den Polarkegelschnitt bildet, hat also die Hauptachsen der Kurve P zu Tangenten.

Zwei weitere Tangenten dieser Parabel sind diejenigen beiden Tangenten der konfokalen Schar, die sich im Punkte x an die beiden durch ihn gehenden Kurven der Schar legen lassen (vgl. auch S. 389 des ersten Teils dieses Bandes). Dieselben stehen nach Satz 887 aufeinander senkrecht und sind die Halbierungslinien der Winkel zwischen den Brennstrahlen des Punktes x (Fig. 193).

Damit hat man außer der unendlich fernen Geraden 4 Tangenten der betrachteten Parabel, wodurch die Parabel eindeutig bestimmt ist. Übrigens kann man, falls der Punkt x im Endlichen liegt, auch die Leitlinie der Parabel leicht konstruieren; denn man braucht nur den Mittelpunkt o der Kurve zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$ mit dem „Pole x der Parabel hinsichtlich der Schar“ zu verbinden, so ist nach dem Satze 912 die Verbindungslinie die gesuchte Leitlinie, da die Punkte o und x die im Endlichen liegenden Scheitel zweier rechten Winkel sind, deren Schenkel die Parabel berühren.

Wir nennen mit S. Gundelfinger den so charakterisierten, durch die Gleichung (1) dargestellten Polarkegelschnitt des Punktes x in bezug auf die konfokale Schar $\boldsymbol{K} - \mathfrak{h}\boldsymbol{P}$ auch die Steinersche Parabel des Punktes x in bezug auf die Kurve zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$[1]) und den Punkt x den Pol der Steinerschen Parabel in bezug auf die Kurve $\boldsymbol{P}$, wobei freilich zu bemerken ist, daß die Steinersche Parabel ebenso gut auch jeder andern Kurve jener konfokalen Schar zugehört. In der Tat kann man die Gleichung (1) ja auch in der Form schreiben:

$$(3) \qquad [x \cdot U\boldsymbol{K} \cdot U(\boldsymbol{K} - \mathfrak{h}\boldsymbol{P})] = 0,$$

wo $\mathfrak{h}$ eine nicht verschwindende Zahlgröße bedeutet. Diese Gleichung aber zeigt, daß zu einem gegebenen Punkte x in bezug auf sämtliche Kurven der konfokalen Kegelschnittschar dieselbe Steinersche Parabel gehört.

Die Gleichungsform (3) der Steinerschen Parabel ergibt noch leicht eine Bestätigung des oben aus den allgemeinen Eigenschaften des Polarkegelschnitts einer Schar hergeleiteten Ergebnisses, daß die Tangenten, die sich in dem Punkte x an die beiden durch ihn gehenden Kurven der Schar $\boldsymbol{K} - \mathfrak{h}\boldsymbol{P}$ ziehen lassen, zugleich Tangenten der Steinerschen Parabel sind. Denn bezeichnet man die Parameter der beiden durch den Punkt x gehenden Scharkurven mit $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ und bezieht die Gleichung der Steinerschen Parabel auf eine von diesen beiden Kurven, schreibt sie also in der Form:

$$(4) \qquad [x \cdot U\boldsymbol{K} \cdot U(\boldsymbol{K} - \mathfrak{h}_i\boldsymbol{P})] = 0, \quad i = 1, 2,$$

so wird für eine Gerade U, welche eine der beiden durch x gehenden Kurven der konfokalen Schar in x berührt, der dritte Faktor $U(\boldsymbol{K} - \mathfrak{h}_i\boldsymbol{P})$ des Produktes auf der linken Seite von (4) nichts anderes als der Pol der Geraden U in bezug auf die Kurve zweiter Klasse $\boldsymbol{K} - \mathfrak{h}_i\boldsymbol{P}$, d. h. der Berührungspunkt der Geraden U mit dieser Kurve. Dieser Faktor ist also dem ersten Faktor jenes Produktes sicher bis auf einen Zahlfaktor gleich, woraus in der Tat folgt, daß dieses Produkt den Wert Null hat, daß also die Gerade U eine Tangente der Steinerschen Parabel ist.

Konstruktion beliebig vieler Tangenten der Steinerschen Parabel. In allen bisher betrachteten Fällen verschwand das Produkt auf der linken Seite der

---

1) Vgl. das soeben zitierte Werk von Gundelfinger, S. 202 Ferner J. Steiner, Über algebraische Kurven und Flächen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 49 (1854), S. 339. Gesammelte Werke, Bd. II, S. 629.

Gleichungen (1), (3) und (4), weil ein extensiver Faktor gleich Null war, oder zwei extensive Faktoren dieser Produkte bis auf einen Zahlfaktor einander gleich waren. Aber auch in dem allgemeinen Falle, wo erst das Produkt *aller drei* extensiven Faktoren null wird, besitzt die Gleichung (1) und die allgemeine Gleichungsform (3) eine einfache geometrische Bedeutung. Denn da $U\boldsymbol{K}$ eine zum Stabe U senkrechte Strecke und somit das Produkt $[x \cdot U\boldsymbol{K}]$ das vom Punkte x auf die Gerade des Stabes U gefällte Lot darstellt, ferner $U\boldsymbol{P}$ der Pol der Geraden U hinsichtlich des Polarsystems $\boldsymbol{P}$ ist, und $U(\boldsymbol{K} - \mathfrak{h}\boldsymbol{P})$ der Pol der Geraden U hinsichtlich eines beliebigen Polarsystems der Schar $\boldsymbol{K} - \mathfrak{h}\boldsymbol{P}$, und da endlich die Gleichungen (1) und (3) für jede beliebige Tangente U der Steinerschen Parabel erfüllt werden, so enthalten diese Gleichungen den Satz (Fig. 194):

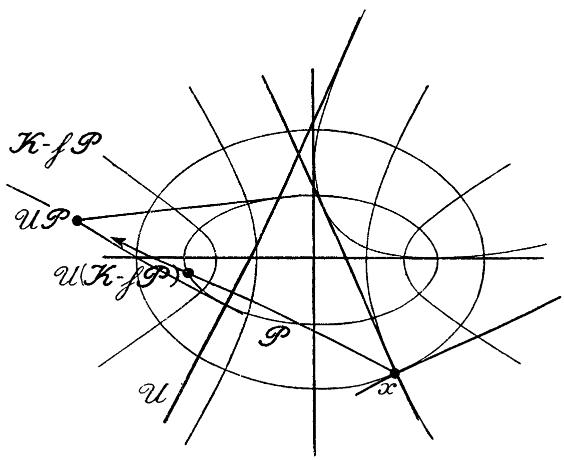


Fig. 194.

Satz 915: Das Lot von einem Punkte x auf eine beliebige Tangente U seiner Steinerschen Parabel hinsichtlich einer Mittelpunktskurve zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$ geht durch den Pol $U\boldsymbol{P}$ dieser Tangente U in bezug auf die Kurve $\boldsymbol{P}$ hindurch und zugleich durch den Pol in bezug auf jede beliebige Kurve der mit der Kurve $\boldsymbol{P}$ konfokalen Schar $\boldsymbol{K} - \mathfrak{h}\boldsymbol{P}$.

Dem ersten Teil dieses Satzes kann man auch die Fassung geben:

Satz 916: Ist U eine Tangente der Steinerschen Parabel eines Punktes x hinsichtlich einer Kurve zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$, und konstruiert man zu dieser Tangente den Pol in bezug auf die Kurve $\boldsymbol{P}$, so steht die Verbindungslinie $[x \cdot U\boldsymbol{P}]$ des Punktes x mit jenem Pole $U\boldsymbol{P}$ auf der Tangente U senkrecht.

Aber zugleich liest man aus der Gleichung (1) auch die Umkehrung ab:

Satz 917: (Umkehrung von Satz 916): Jede Gerade U, welche senkrecht steht auf der Verbindungslinie eines festen Punktes x mit dem Pole $U\boldsymbol{P}$ der Geraden U hinsichtlich einer Mittelpunktskurve zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$, ist eine Tangente der Steinerschen Parabel des Punktes x in bezug auf die Kurve $\boldsymbol{P}$. Oder anders ausgedrückt: Die Steinersche Parabel eines Punktes x hinsichtlich einer Mittelpunktskurve zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$ ist die Hüllkurve aller derjenigen Geraden U, welche auf der Verbindungslinie ihres Poles $U\boldsymbol{P}$ mit dem Punkte x senkrecht stehen.

Aus diesem Satze kann man leicht die Konstruktion einer beliebigen Tangente der Steinerschen Parabel herleiten. Man bezeichne einen durch x gehenden, sonst aber willkürlich angenommenen Strahl mit V (Fig. 195). Soll dann dieser Strahl V den Pol $U\boldsymbol{P}$ einer Tangente U der Steinerschen Parabel enthalten, so muß nach dem Satze 410 auch umgekehrt diese Tangente U durch den Pol $V\boldsymbol{P}$ der Geraden V hindurchgehen. Da aber überdies nach Satz 916 die Tangente U auf der Geraden $V = [x \cdot U\boldsymbol{P}]$ senk-

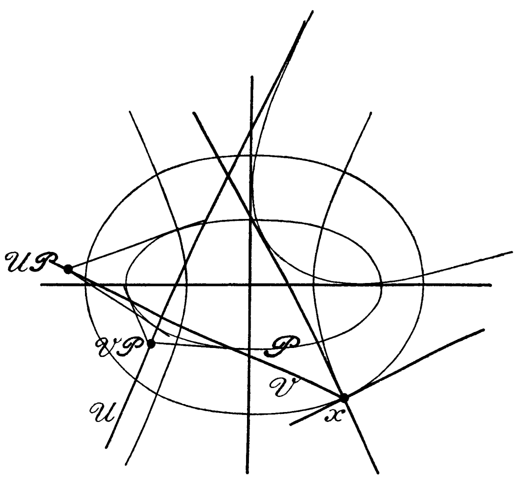


Fig. 195.

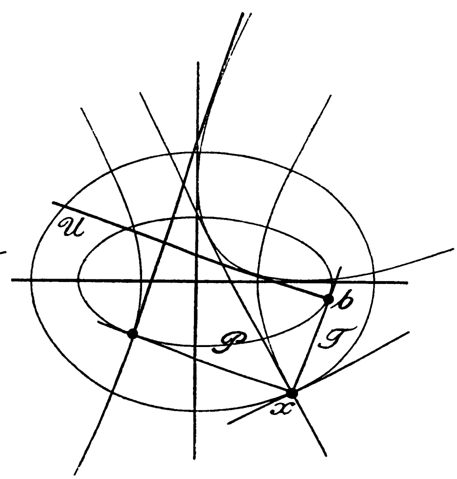


Fig. 196.

recht steht, so kann man die Gerade U finden, indem man von dem Pole $V\boldsymbol{P}$ der Geraden V auf die Gerade V das Lot fällt. Dann ist dieses Lot die gesuchte Tangente U der Steinerschen Parabel. Man hat daher den Satz:

Satz 918: Man findet beliebig viele Tangenten der Steinerschen Parabel des Punktes x einer Mittelpunktskurve zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$, indem man durch den Punkt x beliebig viele Strahlen V legt, zu jedem von ihnen den Pol $V\boldsymbol{P}$ in bezug auf die Kurve $\boldsymbol{P}$ konstruiert und von diesem Pole $V\boldsymbol{P}$ das Lot auf die Gerade V fällt. Jedes so gewonnene Lot ist dann eine Tangente U der Steinerschen Parabel.

Die Beziehung der Steinerschen Parabeln einer Mittelpunktskurve zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$ *zu den Normalen und Krümmungsmittelpunkten der Kurve* $\boldsymbol{P}$. Die gewonnenen Sätze gestatten eine Anzahl geometrischer Folgerungen. Denkt man sich, der Pol x der Steinerschen Parabel hinsichtlich der Kurve $\boldsymbol{P}$ liege außerhalb dieser Kurve (oder auch außerhalb der Kurve $\boldsymbol{K} - \mathfrak{h}\boldsymbol{P}$), und wählt als Strahl V des Strahlbüschels mit dem Scheitel x eine der beiden Tangenten, die man von x an die Kurve $\boldsymbol{P}$ ziehen kann, und bezeichnet sie mit T, ihren Berührungspunkt, der ja zugleich ihr Pol in bezug auf $\boldsymbol{P}$ ist, mit b, so ist $b = T\boldsymbol{P}$. Nach dem Satze 918 erhält man daher eine Tangente der Steinerschen Parabel, indem man in b das Lot auf der Tangente T errichtet (Fig. 196). Man hat also den Satz:

Satz 919: Die Steinersche Parabel eines Punktes x hinsichtlich einer Mittelpunktskurve zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$ berührt die beiden Normalen, die man in den Berührungspunkten der beiden vom Punkte x an die Kurve $\boldsymbol{P}$ gelegten Tangenten auf diesen Tangenten errichten kann.

Dieses Ergebnis aber bleibt, wie schon oben angedeutet wurde, auch dann noch gültig, wenn man an die

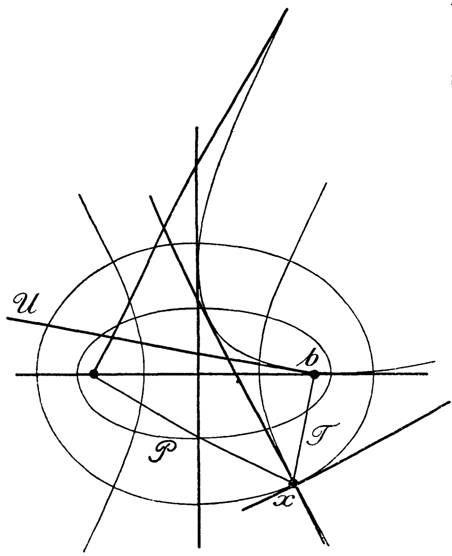


Fig. 197.

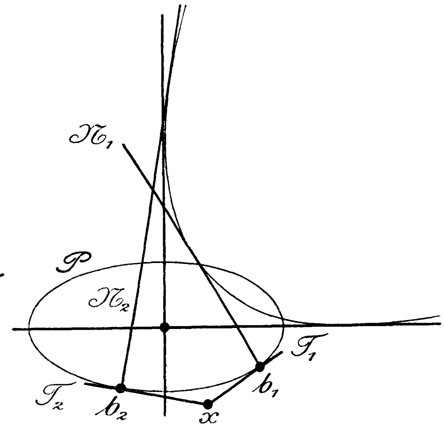


Fig. 198.

Stelle der Kurve $\boldsymbol{P}$ eine beliebige Kurve der konfokalen Schar $\boldsymbol{K} - \mathfrak{h}\boldsymbol{P}$ treten läßt, insbesondere auch, wenn man die Kurve $\boldsymbol{P}$ durch ihr Brennpunktpaar ersetzt. Man wird daher z. B. auch 2 Tangenten der Steinerschen Parabel erhalten, wenn man in den Brennpunkten der Kurve $\boldsymbol{P}$ auf den Brennstrahlen des Punktes x die Lote errichtet, d. h. man hat den Satz (Fig. 197):

Satz 920: Die Lote, in den Brennpunkten einer Mittelpunktskurve zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$ auf den Brennstrahlen eines beliebigen Punktes x errichtet, berühren die Steinersche Parabel des Punktes x hinsichtlich der Kurve $\boldsymbol{P}$.

Es gelten aber auch die Umkehrungen der beiden Sätze 919 und 920, nämlich zunächst der Satz:

Satz 921: (Umkehrung von Satz 919): Eine Parabel, welche die Achsen und zwei Normalen einer Mittelpunktskurve zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$ berührt, ist in bezug auf diese Kurve die Steinersche Parabel desjenigen Punktes x, in dem sich die Tangenten schneiden, welche die Fußpunkte der beiden Normalen zu Berührungspunkten haben (Fig. 198).

Denn nach Seite 443 und Satz 919 gehören der Steinerschen Parabel des Punktes x die Achsen der Kurve $\mathfrak{P}$ und ihre Normalen N_1 und N_2 in den Berührungspunkten b_1 und b_2 der von x an die Kurve $\mathfrak{P}$ gezogenen Tangenten T_1 und T_2 an. Die Parabel des Satzes 921 hat daher mit der Steinerschen Parabel des Punktes x 4 von der unendlich fernen Geraden verschiedene Tangenten gemein und ist also mit ihr identisch.

Aus denselben Gründen gilt auch die Umkehrung des Satzes 920, nämlich der Satz:

Satz 922: (Umkehrung von Satz 920): Legt man an eine Parabel, welche die Hauptachsen einer Mittelpunktskurve zweiter Klasse $\mathfrak{P}$ berührt, von den Brennpunkten dieser Kurve aus die zweiten Tangenten und errichtet auf ihnen in den Brennpunkten die Lote, so schneiden sich diese in einem Punkte x, dessen Steinersche Parabel hinsichtlich der Kurve $\mathfrak{P}$ jene Parabel bildet (vgl. Fig. 197 auf S. 447).

Der Satz 919 liefert noch einen wichtigen Spezialsatz, wenn man den Pol x der Steinerschen Parabel hinsichtlich einer Mittelpunktskurve zweiter Klasse $\mathfrak{P}$ auf diese Kurve $\mathfrak{P}$ selbst rücken läßt. Alsdann fallen nämlich die beiden Tangenten, die man von x an die Kurve $\mathfrak{P}$ legen kann, in eine gerade Linie, und ihre Berührungspunkte mit der Kurve $\mathfrak{P}$ in einen Punkt zusammen, nämlich in den Pol x der Steinerschen Parabel. Die in den beiden (zusammenfallenden) Berührungspunkten errichteten Normalen, welche nach dem Satze 919 Tangenten der Steinerschen Parabel bilden, sind daher unendlich benachbarte Normalen der Kurve $\mathfrak{P}$. Ihr Schnittpunkt m ist somit der Krümmungsmittelpunkt der Kurve $\mathfrak{P}$ für den Punkt x. Als Schnittpunkt unendlich benachbarter Tangenten der Steinerschen Parabel aber ist der Punkt m zugleich ein Punkt dieser Parabel, nämlich der Berührungspunkt der beiden zusammenfallenden Tangenten, und man hat also den Satz (Fig. 199):

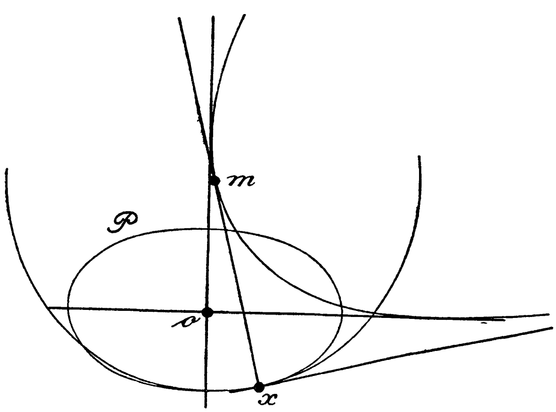


Fig. 199.

Satz 923: Liegt der Pol x der Steinerschen Parabel einer Mittelpunktskurve zweiter Klasse $\mathfrak{P}$ auf der Kurve $\mathfrak{P}$ selbst, so berührt die Normale dieser Kurve, im Punkte x errichtet, die Steinersche

Parabel in dem zum Punkte x gehörenden Krümmungsmittelpunkte m der Kurve **P**.

Denkt man sich an die Mittelpunktskurve zweiter Klasse **P** und die Steinersche Parabel eines beliebigen Punktes x hinsichtlich dieser Kurve die 4 gemeinsamen Tangenten U gelegt, so muß nach dem Satze 915 das Lot vom Punkte x auf irgendeine von diesen gemeinsamen Tangenten U durch ihren Pol $U\boldsymbol{P}$ in bezug auf **P**, d. h. durch den Berührungspunkt der gemeinsamen Tangente U mit der Kurve **P** hindurchgehen. Man hat daher den Satz:

Satz 924: Die 4 gemeinsamen Tangenten, die man an eine Mittelpunktskurve zweiter Klasse **P** und ihre Steinersche Parabel hinsichtlich eines Punktes x legen kann, berühren die Kurve **P** in den 4 Fußpunkten der 4 Normalen, die sich vom Punkte x auf die Kurve **P** fällen lassen (Fig. 200).

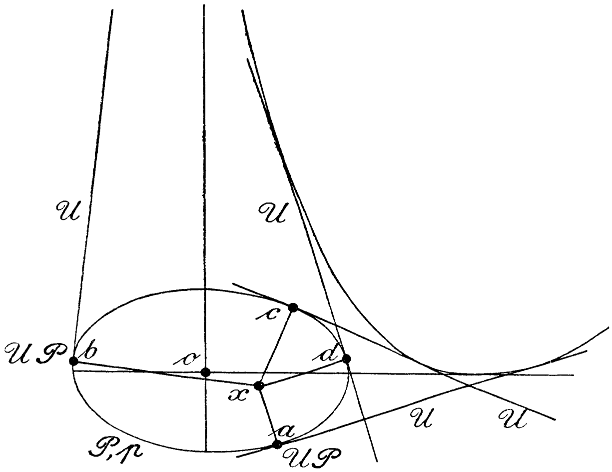


Fig. 200.

Die Apollonischen Hyperbeln einer nicht zerfallenden Mittelpunktskurve zweiter Klasse. Es ist noch von Interesse, die Fußpunkte a, b, c, d der 4 Normalen etwas direkter zu ermitteln. Dies gelingt durch Angabe einer gleichseitigen Hyperbel, die aus der Kurve zweiter Klasse **P** das Fußpunktviereck des Punktes x ausschneidet. Da nämlich nach Satz 924 die 4 Normalenfußpunkte a, b, c, d des Punktes x auf den 4 gemeinsamen Tangenten U der Steinerschen Parabel und der Kurve **P** gelegen sind, und zwar die Berührungspunkte dieser gemeinsamen Tangenten U mit der Kurve **P** darstellen, so sind diese Normalenfußpunkte die Pole jener 4 Parabeltangenten hinsichtlich der Kurve **P** und müssen als solche auf derjenigen *Kurve zweiter Ordnung* liegen, welche den geometrischen Ort für die Pole $\mathfrak{z}$ der Parabeltangenten U hinsichtlich der Kurve **P** bildet (vgl. wieder die obige Fig. 200).

Um ihre Gleichung zu finden, d. h. die Gleichung, welcher die Pole $\mathfrak{z}$ der Parabeltangenten U, genommen hinsichtlich der Kurve **P**, genügen (Fig. 201), berücksichtige man, daß eine jede Gerade U mit ihrem Pole $\mathfrak{z}$ hinsichtlich **P** durch die Gleichung verbunden ist:

$$\mathfrak{z} = U\boldsymbol{P}, \tag{5}$$

aus der, falls $\boldsymbol{P}$ nicht zerfällt, — und das soll vorausgesetzt werden, da der Fall einer zerfallenden Kurve $\boldsymbol{P}$ nur triviale Ergebnisse liefert —, die Gleichung folgt:

$$U = \mathfrak{z}\frac{1}{\boldsymbol{P}}. \tag{6}$$

Man wird daher die Gleichung jener Kurve zweiter Ordnung erhalten, wenn man in die Gleichung (1) der Steinerschen Parabel für den Stab U und seinen Pol $U\boldsymbol{P}$ die soeben angegebenen Werte

$$\mathfrak{z}\frac{1}{\boldsymbol{P}} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{z}$$

einsetzt. Dadurch findet man die Gleichung:

$$\left[x \cdot \mathfrak{z}\frac{1}{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{K} \cdot \mathfrak{z}\right] = 0,$$

für die man wegen:

$$\frac{1}{\boldsymbol{P}} = \frac{\boldsymbol{p}}{\mathfrak{a}} \tag{7}$$

(vgl. die Formel (54) des 31. Abschnitts) auch schreiben kann:

$$[x \cdot \mathfrak{z}\boldsymbol{p}\boldsymbol{K} \cdot \mathfrak{z}] = 0. \tag{8}$$

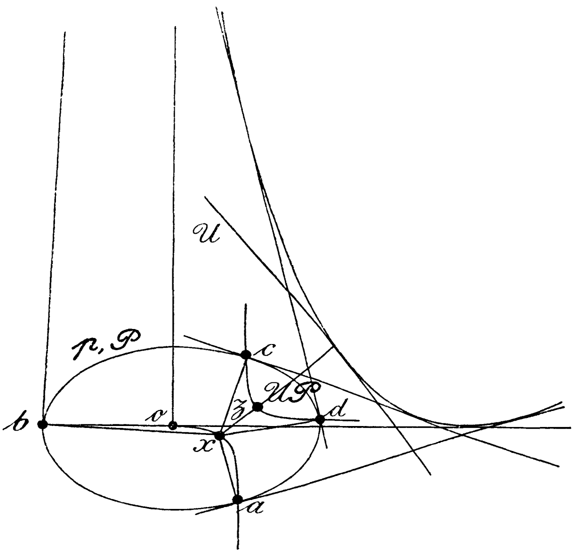


Fig. 201.

Dabei bedeutet $\boldsymbol{p}$ dasjenige Polarsystem zweiter Ordnung, dessen adjungiertes Polarsystem das Polarsystem zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$ bildet. Die Gleichung (8) aber stellt, aufgefaßt als Gleichung mit der Veränderlichen $\mathfrak{z}$, wie ihre Form zeigt, in der Tat eine Kurve zweiter Ordnung dar.

Man kann von dieser Kurve leicht eine ganze Anzahl Punkte angeben: *Erstens* nämlich geht sie zufolge der obigen Entwicklung durch die 4 Fußpunkte a, b, c, d der 4 Normalen, die man vom Punkte x auf die Kurve $\boldsymbol{P}$ fällen kann.

Um *weitere* Punkte der Kurve zu finden, frage man sodann wieder wie oben bei der Steinerschen Parabel, ob die Gleichung (8) dadurch befriedigt werden kann, daß einer von den drei extensiven Faktoren der linken Seite für sich, oder doch das Produkt zweier von diesen Faktoren verschwindet, so daß sich der eine extensive Faktor von dem andern nur um einen Zahlfaktor unterscheidet.

Der einzige extensive Faktor, der für sich verschwinden könnte, ist der Faktor $\mathfrak{z}\boldsymbol{p}\boldsymbol{K}$, und zwar wird er offenbar (vgl. die Gleichung (2)) dann und nur dann null werden, wenn die Polare $\mathfrak{z}\boldsymbol{p}$ des Punktes $\mathfrak{z}$ hinsichtlich $\boldsymbol{p}$ mit der unendlich fernen Geraden $\mathfrak{J}$ zusammenfällt, wenn also der Punkt $\mathfrak{z}$ selbst in den Mittelpunkt o der Kurve $\boldsymbol{p}$ zu liegen kommt. Der Mittelpunkt o der Kurve $\boldsymbol{p}$ gehört somit der Kurve (8) an.

Von den 3 Produkten aus je zweien der 3 Faktoren der linken Seite von (8) kann sicher das Produkt $[x \cdot \mathfrak{z}\boldsymbol{p}\boldsymbol{K}]$ nicht verschwinden, solange die Strecke $\mathfrak{z}\boldsymbol{p}\boldsymbol{K} \neq 0$ ist, und der Punkt x im Endlichen liegt, was wir voraussetzen wollen. Denn das Produkt einer von Null verschiedenen Strecke und eines im Endlichen liegenden Punktes (mit nicht verschwindender Masse) ist von Null verschieden. Wohl aber können die beiden andern Produkte verschwinden, da der Punkt $\mathfrak{z}$ sowohl mit x wie mit der Strecke $\mathfrak{z}\boldsymbol{p}\boldsymbol{K}$ zusammenfallen kann.

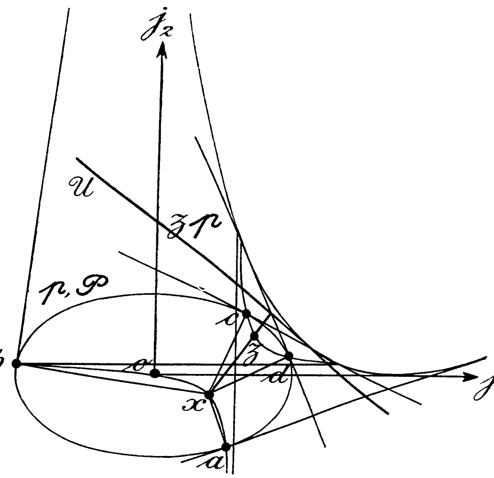


Fig. 202.

Zunächst verschwindet das Produkt $[x\mathfrak{z}]$ und damit auch die linke Seite von (8), wenn der Punkt $\mathfrak{z}$ auf den Punkt x fällt; folglich liegt der Punkt x, d. h. der Pol der Steinerschen Parabel, auf der Kurve (8).

Soll *andererseits* das Produkt $[\mathfrak{z}\boldsymbol{p}\boldsymbol{K} \cdot \mathfrak{z}]$ verschwinden, zwischen seinen Faktoren also eine Zahlbeziehung herrschen, d. h., eine Gleichung von der Form:

$$\mathfrak{z}\boldsymbol{p}\boldsymbol{K} = \mathfrak{g}\mathfrak{z} \tag{9}$$

bestehen, in der $\mathfrak{g}$ eine Zahlgröße bedeutet, so muß

einmal die Größe $\mathfrak{z}$ ebenso wie die Größe $\mathfrak{z}\boldsymbol{p}\boldsymbol{K}$ eine Strecke sein. Für diese Strecke $\mathfrak{z}$ aber stellt dann die Gleichung (9)

weiter die Forderung, ihre Polare $\mathfrak{z}\boldsymbol{p}$, d. h. der ihr konjugierte Durchmesser der Kurve $\boldsymbol{p}$, solle auf der Strecke $\mathfrak{z}$ senkrecht stehen, eine Forderung, der die unendlich fernen Punkte j_1 und j_2 der Hauptachsen der Kurve $\boldsymbol{p}$ Genüge leisten (Fig. 202). Die Kurve (8) geht daher durch die unendlich fernen Punkte j_1 und j_2 der Hauptachsen der Kurve $\boldsymbol{p}$ hindurch, woraus folgt, daß die Kurve zweiter Ordnung (8) zwei zueinander senkrechte Asymptoten hat, die den Achsen der Kurve $\boldsymbol{p}$ parallel laufen. Die Kurve (8) ist somit eine *gleichseitige Hyperbel*. Dieselbe möge nach dem Vorschlage von F. Dingeldey[1]) als die Apollonische Hyperbel des Punktes x hinsichtlich der Kurve zweiter Ordnung oder zweiter Klasse $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{P}$ bezeichnet werden. Der Punkt x möge der Pol der Apollonischen Hyperbel in bezug

1) Vgl. F. Dingeldey, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. III, Teil 2, Heft 1 (Leipzig 1903), S. 62.

auf die Kurve $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{P}$ heißen. Man kann dann die gewonnenen Ergebnisse in dem folgenden Satze zusammenfassen:

Satz 925: Das polare Abbild einer jeden Steinerschen Parabel einer nicht zerfallenden Mittelpunktskurve zweiter Klasse, genommen hinsichtlich dieser Kurve selbst, ist eine gleichseitige Hyperbel, die durch den Pol x der Steinerschen Parabel und den Mittelpunkt o jener Kurve zweiter Klasse geht, und deren Asymptoten den Achsen dieser Kurve parallel laufen. Dieselbe schneidet außerdem aus der Kurve zweiter Klasse die Fußpunkte der 4 Normalen aus, die man von dem Pole x der Steinerschen Parabel auf die Kurve fällen kann, und heißt die Apollonische Hyperbel des Punktes x hinsichtlich jener Kurve zweiter Klasse.

Schließlich bleibt noch die geometrische Bedeutung des allgemeinen Falles anzugeben, wo weder ein einzelner Faktor des Produktes in (8) noch auch das Produkt von zweien derselben verschwindet, sondern wo eben erst das Produkt aller 3 Faktoren $= 0$ wird. Man sieht sogleich, daß sich für diesen Fall die Gleichung (8) durch die Beziehung ersetzen läßt:

$$[x\mathfrak{z}] \perp \mathfrak{z}\mathfrak{p}. \tag{10}$$

Diese Beziehung aber trifft auch für die sämtlichen vorweg behandelten Spezialfälle zu, wenigstens falls man die unendlich ferne Gerade als senkrecht zu jeder Geraden der Ebene ansieht, und man erhält daher den folgenden Satz, der zugleich dazu dienen kann, die Apollonische Hyperbel unabhängig von der Steinerschen Parabel zu charakterisieren:

Satz 926: Der geometrische Ort aller derjenigen Punkte $\mathfrak{z}$ der Ebene, deren Polaren $\mathfrak{z}\mathfrak{p}$ hinsichtlich einer Mittelpunktskurve zweiter Ordnung $\mathfrak{p}$ auf der Verbindungslinie des Punktes $\mathfrak{z}$ mit einem festen Punkte x senkrecht stehen, ist eine gleichseitige Hyperbel, die durch jenen Punkt x, den Mittelpunkt o der Kurve $\mathfrak{p}$ und die unendlich fernen Punkte der Achsen dieser Kurve $\mathfrak{p}$ hindurchgeht. Diese gleichseitige Hyperbel schneidet aus der Kurve $\mathfrak{p}$ die Fußpunkte der 4 Lote aus, die man von dem Punkte x auf die Kurve $\mathfrak{p}$ fällen kann, und heißt die Apollonische Hyperbel des Punktes x hinsichtlich der Kurve $\mathfrak{p}$, jener Punkt x ihr Pol in bezug auf die Kurve $\mathfrak{p}$ (vgl. Fig. 202 auf S. 451).

Sechzehnter Hauptteil.

Projektives und Metrisches.

Abschnitt 63.

Projektives und Metrisches zur Erzeugung der Kurven zweiter Ordnung durch zwei projektive Strahlbüschel.

Rückblick auf die allgemeine Erzeugung einer Kurve zweiter Ordnung durch zwei projektive Strahlbüschel. Wir gehen aus von der im ersten Bande auf S. 92ff. gegebenen Erzeugung einer Kurve zweiter Ordnung:

$$(1) \qquad [xaBhDex] = 0$$

durch 2 projektive Strahlbüschel, ersetzen aber in der Gleichung (1) die Buchstaben: $a, \; B, \; D, \; e$
durch die Buchstaben: $s_1, \; H_1, \; H_2, \; s_2,$
so daß die Gleichung (1) die Form annimmt:

$$(2) \qquad [xs_1H_1hH_2s_2x] = 0.$$

Die Kurve zweiter Ordnung (2) ist dann das Erzeugnis zweier *projektiven Strahlbüschel mit den Scheiteln s_1 und s_2,* welche *perspektiv* bezogen sind auf zwei Hilfspunktreihen beziehlich mit den Trägern H_1 und H_2, während diese wiederum *einander perspektiv* zugeordnet sind durch ein Hilfsstrahlbüschel mit dem Scheitel h (Fig. 203).

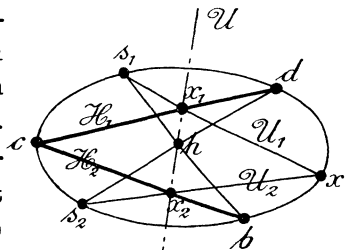


Fig. 203.

Dabei sind die Hilfsgeraden H_1 und H_2 nur der Bedingung unterworfen, daß H_1 nicht durch s_1 und H_2 nicht durch s_2 gehen darf.[1]) Es ist auf S. 94f. des ersten Bandes gezeigt, daß außer den Scheiteln s_1 und s_2 der beiden die Kurve erzeugenden projektiven Strahlbüschel auch die 3 Punkte:

$$c = [H_1 H_2], \quad b = [s_1 h H_2], \quad d = [s_2 h H_1]$$

der Kurve zweiter Ordnung angehören.

Will man auf einem beliebigen Strahle U_1 des Strahlbüschels mit dem Scheitel s_1 den zweiten auf ihm gelegenen Punkt x der Kurve (2) bestimmen,

[1]) Der Fall, wo der Punkt h auf der Geraden H_1 oder der Geraden H_2 liegt, braucht nicht unbedingt ausgeschlossen zu werden. Er liefert eine in ein Linienpaar zerfallende Kurve zweiter Ordnung, nämlich beziehlich das Linienpaar $[s_1 h]$, $[s_2 \cdot H_1 H_2]$ oder das Linienpaar $[s_2 h]$, $[s_1 \cdot H_1 H_2]$.

so bringe man den Strahl U_1 zum Schnitt mit dem Träger H_1 der ersten Hilfspunktreihe in x_1, verbinde x_1 mit dem Scheitel h des Hilfsstrahlbüschels und schneide diese Verbindungslinie U mit dem Träger H_2 der zweiten Hilfspunktreihe in x_2, verbinde endlich s_2 mit x_2 durch die Gerade U_2, so ist diese Gerade U_2 des zweiten Strahlbüschels zu der Geraden U_1 des ersten Strahlbüschels projektiv zugeordnet und schneidet daher aus der Geraden U_1 den gesuchten zweiten auf U_1 liegenden Punkt x der von den beiden projektiven Strahlbüscheln erzeugten Kurve zweiter Ordnung aus. Zugleich ist nach S. 96f. des ersten Bandes die Gerade U oder $x_1 h x_2$ die Pascalsche Gerade des einfachen der Kurve eingeschriebenen Sechsecks $x s_1 b c d s_2$.

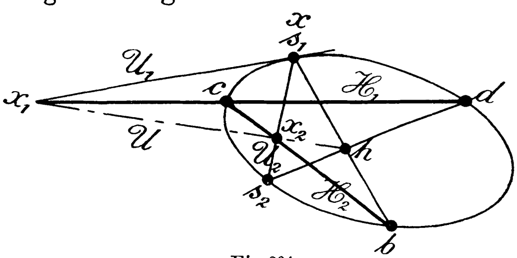


Fig. 204.

Läßt man den laufenden Punkt x der Kurve zweiter Ordnung unendlich nahe an den Scheitel s_1 des ersten von den beiden erzeugenden projektiven Strahlbüscheln heranrücken, so verwandelt sich der den Punkt x von s_1 aus projizierende Strahl U_1 dieses Strahlbüschels in die Tangente im Punkte s_1, während der dieser Tangente U_1 zugeordnete Strahl U_2 des Strahlbüschels mit dem Scheitel s_2 in die Verbindungslinie $[s_2 s_1]$ der Scheitel der beiden erzeugenden Strahlbüschel übergeht (Fig. 204).

Die Tangente U_1, im Punkte s_1 an die Kurve zweiter Ordnung gezogen, kann also gefunden werden, indem man die Verbindungslinie $[s_2 s_1] = U_2$ der Scheitel s_1 und s_2 der beiden erzeugenden Strahlbüschel mit dem Träger H_2 der zweiten Hilfspunktreihe zum Schnitt bringt in x_2, den Scheitel h des Hilfsstrahlbüschels mit x_2 verbindet und die Verbindungslinie U, d. h. die Pascalsche Gerade des auf ein Fünfeck reduzierten einfachen Sechsecks $x s_1 b c d s_2$, mit dem Träger H_1 der ersten Hilfspunktreihe schneidet in x_1; dann ist die Gerade $[s_1 x_1] = U_1$ die Tangente der Kurve zweiter Ordnung im Punkte s_1.

Ebenso findet man die Tangente im Punkte s_2 als denjenigen Strahl des Strahlbüschels mit dem Scheitel s_2, der zu der Verbindungslinie $[s_1 s_2]$ zugeordnet ist, diese Verbindungslinie aufgefaßt als Strahl des Strahlbüschels mit dem Scheitel s_1. Man hat somit den Satz:

Satz 927: Erzeugt man eine Kurve zweiter Ordnung durch 2 projektive Strahlbüschel, so sind die Strahlen, welche in den beiden Strahlbüscheln der Verbindungslinie ihrer Scheitel zugeordnet werden, die Tangenten der Kurve in diesen Scheiteln.

Besonderer Fall dieser Erzeugung einer Kurve zweiter Ordnung. Eine erhebliche Vereinfachung erfährt die in der Fig. 204 enthaltene Konstruktion der Tangente einer Kurve zweiter Ordnung in einem Scheitel der beiden erzeugenden Strahlbüschel, wenn man die Lage der Träger H_1 und H_2 der beiden Hilfspunktreihen zu den Scheiteln s_1 und s_2 der beiden die Kurve erzeugenden Strahlbüschel spezialisiert. Wie schon oben auf S. 453 erwähnt wurde, darf die Gerade H_1 der ersten Hilfspunktreihe nicht durch den Scheitel s_1 des ersten der beiden die Kurve erzeugenden Strahlbüschel hindurchgehen, und die Gerade H_2 der zweiten Hilfspunktreihe nicht durch den Scheitel s_2 des zweiten erzeugenden Strahlbüschels. Wohl aber darf der Punkt s_1 in der Geraden H_2 und der Punkt s_2 in der Geraden H_1 enthalten sein. *Wir spezialisieren* also die obige Fig. 203 dahin, daß wir die Gerade H_1 der ersten Hilfspunktreihe durch den Scheitel s_2 des zweiten von den beiden die Kurve erzeugenden Strahlbüscheln hindurchlegen und die Gerade H_2 der zweiten Hilfspunktreihe durch den Scheitel s_1 des ersten erzeugenden Strahlbüschels (Fig. 205).

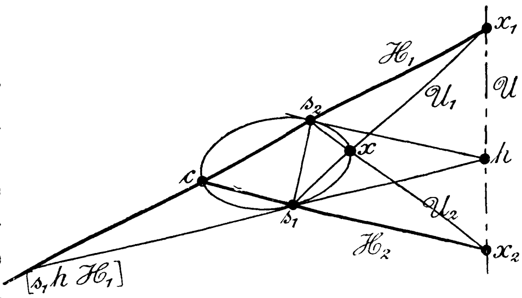


Fig. 205.

Bei der Konstruktion eines *beliebigen Punktes* x der Kurve zweiter Ordnung tritt gegenüber dem allgemeinen Fall (in Fig. 203) infolge der besonderen Lage der Geraden H_1 und H_2 *keine Veränderung* ein, wie die Fig. 205 zeigt. Dagegen *vereinfacht sich die Konstruktion der Tangenten in den Punkten s_1 und s_2.*

Nach dem Satze 927 sind diese beiden Tangenten diejenigen beiden Strahlen der Strahlbüschel mit den Scheiteln s_1 und s_2, die der Verbindungslinie $[s_1 s_2]$ der beiden Scheitel zugeordnet werden. Will man daher in dem Strahlbüschel mit dem Scheitel s_1 den entsprechenden Strahl zu dem Strahle $[s_2 s_1]$ des Strahlbüschels mit dem Scheitel s_2 konstruieren, so hat man nach dem allgemeinen Verfahren den Strahl $[s_2 s_1]$ mit dem Träger H_2 der zweiten Hilfspunktreihe zu schneiden. Der Schnittpunkt ist aber jetzt der Punkt s_1 selbst. Diesen Punkt hat man mit dem Scheitel h des Hilfsstrahlbüschels zu verbinden und die Verbindungslinie $[s_1 h]$ mit dem Träger H_1 der ersten Hilfspunktreihe zum Schnitt zu bringen in dem Punkte $[s_1 h H_1]$. Diesen Schnittpunkt endlich hat man mit s_1 zu verbinden. Dadurch aber kommt man wieder auf die Gerade $[s_1 h]$ zurück. Diese ist also die gesuchte Tangente im Punkte s_1. Man hat daher den Satz:

Satz 928: Erzeugt man eine Kurve zweiter Ordnung durch 2 projektive Strahlbüschel mit den Scheiteln s_1 und s_2 und stellt deren projektive Beziehung dadurch her, daß man sie perspektiv auf 2 Hilfspunktreihen mit den Trägern H_1 und H_2 bezieht, von denen

H_2 durch s_1 und H_1 durch s_2 geht, während diese beiden Punktreihen wieder perspektiv zu einem Hilfsstrahlbüschel mit dem Scheitel h liegen, so sind die Geraden $[s_1 h]$ und $[s_2 h]$ die Tangenten der Kurve zweiter Ordnung in den Punkten s_1 und s_2.

Übrigens kann man den Satz 928 auch beweisen, indem man in der Fig. 203 den Punkt s_1 mit dem Punkte b zusammenrücken läßt und den Punkt s_2 mit d. Dann werden die beiden Geraden $[s_1 b]$ und $[s_2 d]$, die in jener Figur den Scheitel h des Hilfsstrahlbüschels bestimmten, zu Tangenten der Kurve in den beiden Punkten $s_1 = b$ und $s_2 = d$ und die Fig. 203 geht in die Fig. 205 über.

Gleichung der so erzeugten Kurve zweiter Ordnung in Dreieckskoordinaten. Für die Ableitung der Gleichung der betrachteten Kurve zweiter Ordnung *in Dreieckskoordinaten* erscheint es bequem, die Bezeichnung ein wenig zu ändern. Wir machen nämlich die Punkte:

$$s_1, \quad s_2, \quad c$$

zu Ecken:

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3$$

des Fundamentaldreiecks (Fig. 206) und bezeichnen dementsprechend die bisher mit H_1 und H_2 benannten Geraden mit E_1 und E_2 und die Gerade $[e_1 e_2]$ mit E_3. Der bisher mit h benannte Tangentenschnittpunkt möge mit t bezeichnet werden. Die Gleichung (2) nimmt alsdann die Form an:

$$[x e_1 E_1 t E_2 e_2 x] = 0. \tag{3}$$

Will man aus dieser Gleichung eine Gleichung zwischen den Dreieckskoordinaten $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ des Punktes x in bezug auf das Dreieck $e_1 e_2 e_3$ als Fundamentaldreieck und einen beliebigen Punkt als Einheitspunkt entwickeln, so setze man:

$$x = \mathfrak{x}_1 e_1 + \mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3, \quad t = \mathfrak{t}_1 e_1 + \mathfrak{t}_2 e_2 + \mathfrak{t}_3 e_3. \tag{4}$$

Dann wird:

$$\begin{aligned}
[x e_1] &= -\mathfrak{x}_2 E_3 + \mathfrak{x}_3 E_2, \\
[x e_1 E_1] &= -\mathfrak{x}_2 e_2 - \mathfrak{x}_3 e_3 = -(\mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3), \\
[x e_1 E_1 t] &= -[(\mathfrak{x}_2 e_2 + \mathfrak{x}_3 e_3)(\mathfrak{t}_1 e_1 + \mathfrak{t}_2 e_2 + \mathfrak{t}_3 e_3)] \\
&= (\mathfrak{x}_3 \mathfrak{t}_2 - \mathfrak{x}_2 t_3) E_1 - \mathfrak{x}_3 t_1 E_2 + \mathfrak{x}_2 t_1 E_3, \\
[x e_1 E_1 t E_2] &= (\mathfrak{x}_3 \mathfrak{t}_2 - \mathfrak{x}_2 \mathfrak{t}_3) e_3 - \mathfrak{x}_3 \mathfrak{t}_1 e_1, \\
[x e_1 E_1 t E_2 e_2] &= (\mathfrak{x}_2 \mathfrak{t}_3 - \mathfrak{x}_3 \mathfrak{t}_2) E_1 - \mathfrak{x}_2 \mathfrak{t}_1 E_3, \\
[x e_1 E_1 t E_2 e_2 x] &= \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{t}_3 - \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_3 \mathfrak{t}_2 - \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3 \mathfrak{t}_1.
\end{aligned}$$

Die Gleichung (3) läßt sich also in der Form schreiben:

$$\mathfrak{t}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3 + \mathfrak{t}_2 \mathfrak{x}_3 \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{t}_3 \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 = 0.\text{[1]} \tag{5}$$

[1] Vgl. hierzu F. Dingeldey, Intorno alla generazione delle coniche secondo Braikenridge e Maclaurin. Atti del IV. Congresso Internazionale dei Matematici. Vol. II, S. 278 ff. Roma 1909. Und derselbe, Zur Erzeugung der Kegelschnitte nach Braikenridge und Maclaurin. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. 18 (1909), S. 99 ff.

Man kann diese Gleichung aber auch leicht auf einem anderen Wege gewinnen, wenn man sich die Aufgabe stellt:

Aufgabe: Es soll das Polarsystem:

$$p = \frac{A_1, A_2, A_3}{e_1, e_2, e_3} \tag{6}$$

und die Gleichung in Punktkoordinaten für diejenige Kurve zweiter Ordnung ermittelt werden, die durch die 3 Ecken e_1, e_2, e_3

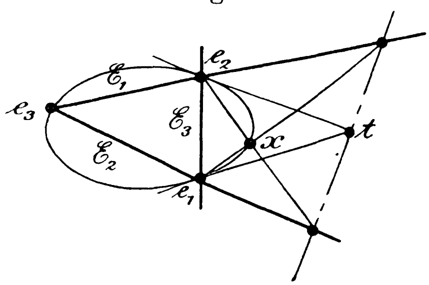


Fig 206.

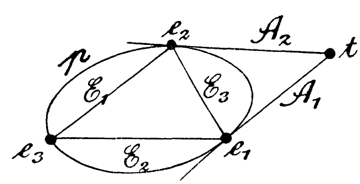


Fig 207.

des Fundamentaldreiecks hindurchgeht, und deren Tangenten, in den Ecken e_1 und e_2 gezogen, sich in einem gegebenen Punkte:

$$t = \mathfrak{t}_1 e_1 + \mathfrak{t}_2 e_2 + \mathfrak{t}_3 e_3$$

treffen (Fig. 207).

Die erste Forderung liefert für die Ableitzahlen $\mathfrak{a}_{ik}$ der 3 Zählerstäbe A_i des Bruches p die 3 Gleichungen:

$$\mathfrak{a}_{ii} = [e_i \cdot e_i p] = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{7}$$

Man erhält also für diese 3 Zählerstäbe die Ausdrücke:

$$\begin{cases} A_1 = \phantom{\mathfrak{a}_{21} E_1 +{}} \mathfrak{a}_{12} E_2 + \mathfrak{a}_{13} E_3, \\ A_2 = \mathfrak{a}_{21} E_1 \phantom{{}+ \mathfrak{a}_{12} E_2} + \mathfrak{a}_{23} E_3, \quad \mathfrak{a}_{ki} = \mathfrak{a}_{ik}, \\ A_3 = \mathfrak{a}_{31} E_1 + \mathfrak{a}_{32} E_2. \end{cases} \tag{8}$$

Um *der zweiten Forderung* gerecht zu werden, hat man die Gleichungen zu erfüllen:

$$\begin{cases} 0 = [A_1 t] = [(\mathfrak{a}_{12} E_2 + \mathfrak{a}_{13} E_3)(\mathfrak{t}_1 e_1 + \mathfrak{t}_2 e_2 + \mathfrak{t}_3 e_3)] = \mathfrak{a}_{12} \mathfrak{t}_2 + \mathfrak{a}_{13} \mathfrak{t}_3, \\ 0 = [A_2 t] = [(\mathfrak{a}_{21} E_1 + \mathfrak{a}_{23} E_3)(\mathfrak{t}_1 e_1 + \mathfrak{t}_2 e_2 + \mathfrak{t}_3 e_3)] = \mathfrak{a}_{21} \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{a}_{23} \mathfrak{t}_3, \end{cases} \tag{9}$$

d. h. man erhält die Proportionen:

$$\begin{cases} \mathfrak{a}_{13} : \mathfrak{a}_{12} = \mathfrak{t}_2 : - \mathfrak{t}_3, \\ \mathfrak{a}_{23} : \mathfrak{a}_{21} = \mathfrak{t}_1 : - \mathfrak{t}_3, \end{cases} \tag{10}$$

aus denen wegen $\mathfrak{a}_{ki} = \mathfrak{a}_{ik}$ die laufende Proportion folgt:

$$\mathfrak{a}_{23} : \mathfrak{a}_{31} : \mathfrak{a}_{12} = \mathfrak{t}_1 : \mathfrak{t}_2 : - \mathfrak{t}_3. \tag{11}$$

Die gesuchte Gleichung der betrachteten Kurve zweiter Ordnung lautet daher wie oben:

$$(5) \qquad \mathfrak{t}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3 + \mathfrak{t}_2 \mathfrak{x}_3 \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{t}_3 \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 = 0.$$

Man hat somit den Satz:

Satz 929: Die Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung, die dem Fundamentaldreieck $e_1 e_2 e_3$ umschrieben ist, und deren Tangenten, in den Ecken e_1 und e_2 dieses Dreiecks gezogen, durch den Punkt t mit den Dreieckskoordinaten $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$ hindurchgehen, lautet:

$$(5) \qquad \mathfrak{t}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_3 + \mathfrak{t}_2 \mathfrak{x}_3 \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{t}_3 \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 = 0.$$

Der Kreis, die gleichseitige Hyperbel, die Parabel und das Linienpaar als Kurve zweiter Ordnung, die durch 3 Punkte und die Tangenten in zweien von ihnen bestimmt wird.

Lage des zugehörigen Tangentenschnittpunktes. Man kann weiter die Frage stellen: Wie muß bei einer dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kurve zweiter Ordnung der Schnittpunkt t der beiden Tangenten gelegen sein, die man an die Kurve in den Ecken e_1 und e_2 des Fundamentaldreiecks ziehen kann, damit die Kurve *ein Kreis, eine gleichseitige Hyperbel, eine Parabel oder ein Linienpaar* werde?

Für den *Kreis* läßt sich die Frage sofort beantworten. Denn da ein Kreis durch die Forderung, er solle dem Fundamentaldreieck umschrieben sein, eindeutig bestimmt ist, so gibt es auch nur einen Punkt t, für den die Kurve zweiter Ordnung (3) oder (5) ein Kreis wird. Ist nämlich n der Mittelpunkt des dem Fundamentaldreieck $e_1 e_2 e_3$ umschriebenen Kreises, so ist der Punkt t nichts anderes als der Schnittpunkt der Lote, die man in den Punkten e_1 und e_2 auf den Geraden $n e_1$ und $n e_2$ errichten kann (Fig. 208).

Soll *zweitens* die Kurve zweiter Ordnung (5) eine *gleichseitige Hyperbel* sein, so muß nach dem Satze 883 ihr Polarsystem p der Gleichung:

$$(12) \qquad [\boldsymbol{p}\boldsymbol{K}] = 0$$

genügen, in der $\boldsymbol{K}$ das Polarsystem des Kreispunktpaars ist.

Nach dem Satze 670 nimmt aber die Gleichung (12) mit Rücksicht auf die Gleichung (5) in diesem und die Gleichung (35) des 60. Abschnitts die Form an:

$$(13) \qquad \mathfrak{t}_1 \mathfrak{K}_{23} + \mathfrak{t}_2 \mathfrak{K}_{31} - \mathfrak{t}_3 \mathfrak{K}_{12} = 0.$$

Diese Gleichung aber stellt eine *Gerade* dar, nämlich die Gerade, deren Stabdarstellung lautet:

$$(14) \qquad H_{12} = \mathfrak{K}_{23} E_1 + \mathfrak{K}_{31} E_2 - \mathfrak{K}_{12} E_3.$$

Und das ist nach der letzten Gleichung (84) des 60. Abschnitts der Ausdruck für die Verbindungslinie der Fußpunkte der beiden von den Ecken e_1 und e_2 ausgehenden Höhen des Fundamentaldreiecks (Fig. 209). Man hat daher den Satz:

Satz 930: Erster Satz von Dingeldey: Eine einem Dreieck umschriebene Kurve zweiter Ordnung, deren Tangenten, in 2 Ecken dieses Dreiecks gezogen, sich in einem Punkte t schneiden, ist dann und nur dann eine gleichseitige Hyperbel, wenn der Punkt t auf der Verbindungslinie der Fußpunkte der beiden Höhen liegt, die man von jenen beiden Ecken des Dreiecks auf ihre Gegenseiten fällen kann.[1])

Wir fragen *drittens:* Wie muß der Tangentenschnittpunkt t der im Satze 929 beschriebenen Kurve zweiter Ordnung gelegen sein, wenn diese Kurve eine *Parabel* werden soll? Damit eine nicht zerfallende Kurve zweiter Ordnung p

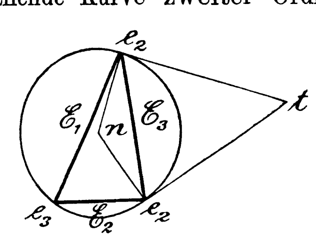


Fig. 208.

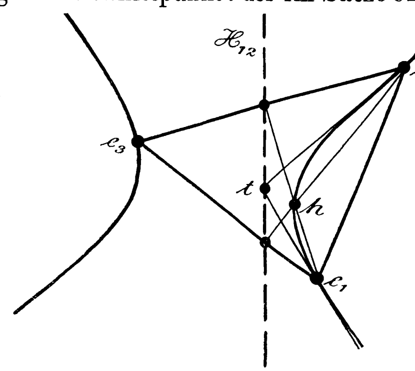


Fig. 209.

eine Parabel sei, ist nach dem Satze 464 notwendig und hinreichend, daß die Gleichung:

$$[\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{J} P] = 0 \tag{15}$$

erfüllt werde, in welcher $\mathfrak{J}$ einen Stab der unendlich fernen Geraden bedeutet, nämlich denjenigen Stab, der durch die Gleichung (4) des 60. Abschnitts definiert ist, und in der P das zu dem Polarsystem zweiter Ordnung p adjungierte Polarsystem zweiter Klasse ist. Um aber zu untersuchen, ob die Bedingung (15) für die Kurve (3) oder (5) erfüllt werde, hat man zunächst die Ableitzahlen der Zähler des Bruches P zu ermitteln, das sind die Unterdeterminanten zu den Elementen der Determinante $\mathfrak{a}$ der Kurve (5), d. h. die Unterdeterminanten der Determinante:

$$\mathfrak{a} = \begin{vmatrix} 0, & -\mathfrak{t}_3, & \mathfrak{t}_2 \\ -\mathfrak{t}_3, & 0, & \mathfrak{t}_1 \\ \mathfrak{t}_2, & \mathfrak{t}_1, & 0 \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Es wird:

$$\begin{cases} \mathfrak{A}_{11} = -\mathfrak{t}_1^2, & \mathfrak{A}_{22} = -\mathfrak{t}_2^2, & \mathfrak{A}_{33} = -\mathfrak{t}_3^2, \\ \mathfrak{A}_{23} = -\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3, & \mathfrak{A}_{31} = -\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_1, & \mathfrak{A}_{12} = +\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2. \end{cases} \tag{17}$$

Die Gleichung der Kurve zweiter Ordnung (5) in Linienkoordinaten lautet also:

$$0 = [U \cdot UP] = -\mathfrak{t}_1^2\mathfrak{u}_1^2 - \mathfrak{t}_2^2\mathfrak{u}_2^2 - \mathfrak{t}_3^2\mathfrak{u}_3^2 - 2\,\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3\mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_3 - 2\,\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_1\mathfrak{u}_3\mathfrak{u}_1 + 2\,\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2.$$

---

1) Vgl. zu diesem und dem folgenden Satze die beiden auf S. 456 zitierten Arbeiten von F. Dingeldey.

Insbesondere wird daher wegen der Gleichung (4) des 60. Abschnitts der Ausdruck $[\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{J}\boldsymbol{P}]$:

$$[\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{J}\boldsymbol{P}] = -\,\mathfrak{t}_1{}^2\mathfrak{m}_1{}^2 - \mathfrak{t}_2{}^2\mathfrak{m}_2{}^2 - \mathfrak{t}_3{}^2\mathfrak{m}_3{}^2 - 2\,\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3\mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3 - 2\,\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_1\mathfrak{m}_3\mathfrak{m}_1 + 2\,\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2,$$

d. h.:

$$(18)\qquad [\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{J}\boldsymbol{P}] = 4\,\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 - (\mathfrak{t}_1\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{t}_2\mathfrak{m}_2 + \mathfrak{t}_3\mathfrak{m}_3)^2$$

oder wegen (4) und der Gleichung (4) des 60. Abschnitts:

$$(19)\qquad [\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{J}\boldsymbol{P}] = 4\,\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 - [t\mathfrak{J}]^2.$$

Die Bedingung (15), welcher die Koordinaten des Punktes t genügen müssen, damit die Kurve (3) oder (5) eine Parabel werde, lautet demnach:

$$(20)\qquad 4\,\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 - (\mathfrak{t}_1\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{t}_2\mathfrak{m}_2 + \mathfrak{t}_3\mathfrak{m}_3)^2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$(21)\qquad 4\,\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 - [t\mathfrak{J}]^2 = 0.$$

Jede von diesen beiden Gleichungen stellt eine Kurve zweiter Ordnung dar, die dem Scharbüschel von Kurven zweiter Ordnung angehört, welches das durch die Geraden $\mathfrak{t}_1 = 0$ und $\mathfrak{t}_2 = 0$ oder, was dasselbe ist, durch die Seiten E_1 und E_2 des Fundamentaldreiecks und die unendlich ferne Gerade $\mathfrak{J}$ gebildete Dreieck zum Tangentialdreieck hat, und zwar die Seiten E_1 und E_2 zu Tangenten und die unendlich ferne Gerade zur Berührungssekante. Sie ist also eine *Hyperbel*, welche die Seiten E_1 und E_2 des Fundamentaldreiecks zu Asymptoten hat (Fig. 210). Man kann aber leicht noch ein fünftes Bestimmungsstück dieser Hyperbel angeben. Dazu frage man nach den Schnittpunkten der Hyperbel mit der dritten Seite E_3 des Fundamentaldreiecks. Man findet dieselben, indem man in der Gleichung (20) der Hyperbel:

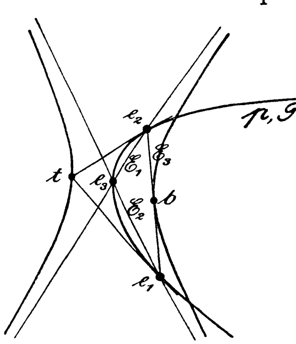


Fig. 210

$$(22)\qquad \mathfrak{t}_3 = 0$$

setzt, wodurch sich diese verwandelt in:

$$4\,\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 - (\mathfrak{t}_1\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{t}_2\mathfrak{m}_2)^2 = 0 \quad \text{oder in}$$

$$(23)\qquad (\mathfrak{t}_1\mathfrak{m}_1 - \mathfrak{t}_2\mathfrak{m}_2)^2 = 0.$$

Hieraus folgt, daß die beiden Schnittpunkte in *einen* Punkt zusammenfallen, daß also die Gerade E_3 eine Tangente der Hyperbel ist. Der Berührungspunkt b ist dann nach Satz 126 der Mittelpunkt der Seite $e_1 e_2$ des Fundamentaldreiecks. Dies ergibt sich aber auch aus den Gleichungen (23) und (22). Denn nach der Gleichung (23) besteht für die beiden ersten Ableitzahlen $\mathfrak{t}_i$ des Punktes b die Proportion:

$$\mathfrak{t}_1 : \mathfrak{t}_2 = \mathfrak{m}_2 : \mathfrak{m}_1,$$

während nach (22) zugleich seine dritte Ableitzahl $\mathfrak{t}_3$ verschwindet. Es wird also:

$$b = \mathfrak{m}_2 e_1 + \mathfrak{m}_1 e_2 \quad \text{oder} \tag{24}$$

$$b = \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \left(\frac{e_1}{\mathfrak{m}_1} + \frac{e_2}{\mathfrak{m}_2}\right). \tag{25}$$

Das ist aber, da $\frac{e_1}{\mathfrak{m}_1}$ und $\frac{e_2}{\mathfrak{m}_2}$ einfache Punkte sind, der Ausdruck für den Mittelpunkt der Seite $e_1 e_2$ des Fundamentaldreiecks.

Man hat somit den Satz:

Satz 931: Zweiter Satz von Dingeldey: Eine einem Dreieck umschriebene Kurve zweiter Ordnung, deren Tangenten, in 2 Ecken dieses Dreiecks gezogen, sich in einem Punkte t schneiden, ist dann und nur dann eine Parabel, wenn der Punkt t derjenigen Hyperbel angehört, welche die jenen beiden Ecken gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks zu Asymptoten und die dritte Seite ebenfalls zur Tangente hat.

Wir fragen endlich *viertens:* Wie muß der Punkt t mit den Dreieckskoordinaten $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$ gelegen sein, wenn die durch die Gleichung (3) oder (5) dargestellte Kurve zweiter Ordnung in ein *Linienpaar* zerfallen soll?

Nach S. 205ff. des ersten Teils dieses Bandes (vgl. auch den Satz 446) gilt der Satz:

Satz 932: Eine nicht identisch erfüllte Gleichung zweiten Grades zwischen den Dreieckskoordinaten $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ eines Punktes, d. h. eine Gleichung von der Form:

$$\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{a}_{33}\mathfrak{x}_3^2 + 2\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + 2\mathfrak{a}_{31}\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1 + 2\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = 0$$

stellt dann und nur dann ein Linienpaar dar, das auch zu einer Doppellinie entarten kann, wenn die Determinante der Koeffizienten:

$$\mathfrak{a} = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11}, & \mathfrak{a}_{12}, & \mathfrak{a}_{13} \\ \mathfrak{a}_{21}, & \mathfrak{a}_{22}, & \mathfrak{a}_{23} \\ \mathfrak{a}_{31}, & \mathfrak{a}_{32}, & \mathfrak{a}_{33} \end{vmatrix} = 0$$

ist, wobei wie stets bei einem Polarsystem $\mathfrak{a}_{ki} = \mathfrak{a}_{ik}$ gesetzt ist, $i, k = 1, 2, 3$.

Bei der Kurve zweiter Ordnung (5) wird nun aber:

$$\mathfrak{a}_{11} = \mathfrak{a}_{22} = \mathfrak{a}_{33} = 0, \quad \mathfrak{a}_{23} = \mathfrak{t}_1, \quad \mathfrak{a}_{31} = \mathfrak{t}_2, \quad \mathfrak{a}_{12} = -\mathfrak{t}_3.$$

Die Bedingung des Zerfallens der Kurve (5) lautet daher:

$$\begin{vmatrix} 0, & -\mathfrak{t}_3, & \mathfrak{t}_2 \\ -\mathfrak{t}_3, & 0, & \mathfrak{t}_1 \\ \mathfrak{t}_2, & \mathfrak{t}_1, & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{26}$$

oder was dasselbe ist:

$$(27) \qquad \mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2 \mathfrak{t}_3 = 0.$$

Und diese Gleichung zeigt, daß die Kurve zweiter Ordnung (5) dann und nur dann in ein Linienpaar zerfällt, *wenn der Punkt t auf einer der 3 Seiten des Fundamentaldreiecks liegt.* Aber dieses Linienpaar kann auch nicht etwa in eine Doppellinie übergehen, denn eine solche kann ja unmöglich dem Fundamentaldreieck umschrieben sein. Auch hiervon überzeugt man sich leicht analytisch.

Nach S. 214ff. des ersten Teils dieses Bandes ist die Polkurve eines Polarsystems zweiter Ordnung:

$$p = \frac{A_1,\ A_2,\ A_3}{e_1,\ e_2,\ e_3}$$

dann und nur dann eine doppeltzählende Gerade, wenn die Produkte zu je zweien aus den Zählern von p gleichzeitig verschwinden, ohne daß alle 3 Größen A_i selbst null sind, d. h., wenn die Gleichungen bestehen:

$$(28) \qquad [A_2 A_3] = [A_3 A_1] = [A_1 A_2] = 0$$

(vgl. die Gleichungen (37) des 32. Abschnitts), ohne daß zugleich alle Ableitzahlen $\mathfrak{a}_{ik}$ der Größen A_i null sind.

Nun sind aber die Ableitzahlen der 3 Produkte in (28) die Unterdeterminanten $\mathfrak{A}_{ik}$ der Determinante:

$$(29) \qquad \mathfrak{a} = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11}, & \mathfrak{a}_{12}, & \mathfrak{a}_{13} \\ \mathfrak{a}_{21}, & \mathfrak{a}_{22}, & \mathfrak{a}_{23} \\ \mathfrak{a}_{31}, & \mathfrak{a}_{32}, & \mathfrak{a}_{33} \end{vmatrix}.$$

Die Gleichungen (28) können daher nur erfüllt werden, wenn alle Unterdeterminanten $\mathfrak{A}_{ik}$ der Determinante (29) gleichzeitig verschwinden. Mit Rücksicht auf Satz 446 kann man also den Satz aussprechen:

Satz 933: Eine nicht identisch erfüllte Gleichung zweiten Grades zwischen den Dreieckskoordinaten $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ eines Punktes:

$$\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{a}_{33}\mathfrak{x}_3^2 + 2\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + 2\mathfrak{a}_{31}\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1 + 2\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = 0$$

stellt dann und nur dann eine doppelt zählende Gerade dar, wenn die sämtlichen Unterdeterminanten $\mathfrak{A}_{ik}$ der Determinante (29) ihrer Koeffizienten $\mathfrak{a}_{ik}$ gleichzeitig verschwinden.

Bei der Kurve zweiter Ordnung (5) wird nun die Determinante (29):

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11}, & \mathfrak{a}_{12}, & \mathfrak{a}_{13} \\ \mathfrak{a}_{21}, & \mathfrak{a}_{22}, & \mathfrak{a}_{23} \\ \mathfrak{a}_{31}, & \mathfrak{a}_{32}, & \mathfrak{a}_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & -\mathfrak{t}_3, & \mathfrak{t}_2 \\ -\mathfrak{t}_3, & 0, & \mathfrak{t}_1 \\ \mathfrak{t}_2, & \mathfrak{t}_1, & 0 \end{vmatrix},$$

ihre Unterdeterminanten $\mathfrak{A}_{ik}$ besitzen daher nach (17) die Werte:

$$(17) \qquad \begin{cases} \mathfrak{A}_{11} = -\mathfrak{t}_1^2, & \mathfrak{A}_{22} = -\mathfrak{t}_2^2, & \mathfrak{A}_{33} = -\mathfrak{t}_3^2, \\ \mathfrak{A}_{23} = -\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3, & \mathfrak{A}_{31} = -\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_1, & \mathfrak{A}_{12} = +\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2. \end{cases}$$

Diese 6 Größen aber verschwinden nur gleichzeitig, wenn alle 3 Größen $t_i = 0$ sind, was ausgeschlossen ist, da es sonst keinen Punkt t gäbe, für den die Gleichung (5) besteht. Man hat somit den Satz:

Satz 934: Eine einem Dreieck umschriebene Kurve zweiter Ordnung, deren Tangenten, in 2 Ecken des Dreiecks gezogen, sich in einem Punkte t schneiden, zerfällt dann und nur dann in ein Linienpaar, wenn der Punkt t auf einer Seite dieses Dreiecks gelegen ist. Dabei kann das Linienpaar nicht etwa in eine Doppellinie übergehen.

Man kann übrigens auch leicht das Linienpaar angeben, das man erhält, wenn das Dreieck, dem ein solches Linienpaar umschrieben ist, wieder wie

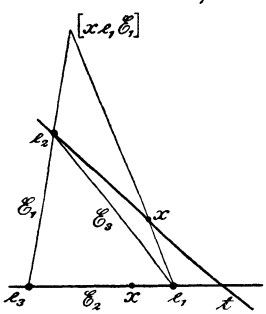


Fig. 211.

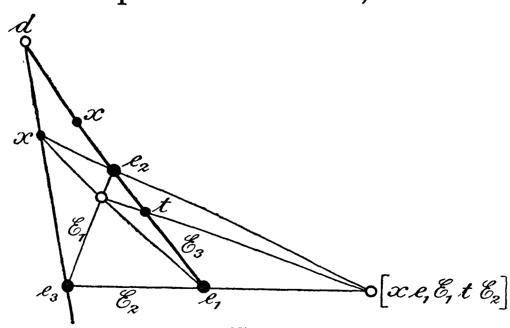


Fig. 212.

oben das Fundamentaldreieck $e_1 e_2 e_3$ ist, und der Tangentenschnittpunkt t der Tangenten in den Ecken e_1 und e_2 an das Linienpaar einer Seite E_1, E_2, E_3 des Fundamentaldreiecks angehört.

Ist der Punkt t etwa in der Geraden E_2 enthalten, so zerfällt die Kurve zweiter Ordnung:

$$(3) \qquad [x e_1 E_1 t E_2 e_2 x] = 0$$

in die Geraden $[te_2]$ und E_2.

In der Tat wird in diesem Falle für einen Punkt x der Geraden $[te_2]$ (Fig. 211) das Produkt der 5 ersten Faktoren der linken Seite von (3) kongruent mit dem Punkte t. Die Gleichung (3) wird somit für jeden Punkt x der Geraden $[te_2]$ erfüllt.

Liegt andererseits der Punkt x auf der Geraden E_2, so wird das Produkt der 4 ersten Faktoren der linken Seite von (3) kongruent mit E_2. Das Produkt ihrer 5 ersten Faktoren verschwindet also bereits, so daß für einen solchen Punkt x die Gleichung (3) ebenfalls befriedigt wird.

Genau so erledigt sich der Fall, wo der Punkt t der Geraden E_1 angehört.

Ist dagegen der Punkt t in der Geraden $E_3 = [e_1 e_2]$ enthalten (Fig. 212), so zerfällt die Kurve:

$$(3) \qquad [x e_1 E_1 t E_2 e_2 x] = 0$$

in die Gerade $E_3 = [e_1 e_2]$ und in diejenige durch die Ecke e_3 des Fundamentaldreiecks gehende Gerade, welche vom Punkte t durch die Seiten E_1 und E_2 des Fundamentaldreiecks harmonisch getrennt wird.

Für einen Punkt x der Geraden E_3 nämlich wird das Produkt der 5 ersten Faktoren der linken Seite von (3) kongruent mit dem Punkte e_1, woraus folgt, daß für einen solchen Punkt x die Gleichung (3) erfüllt wird.

Um in diesem Falle die zweite Gerade des Linienpaars zu erhalten, bestimme man auf einem beliebigen durch e_1 gelegten Strahle denjenigen Punkt x, der der Gleichung (3) Genüge leistet. Man bringe also entsprechend der Gleichung (3) diesen Strahl $[xe_1]$ zum Schnitt mit der Geraden E_1 im Punkte $[xe_1 E_1]$, verbinde den Schnittpunkt mit t durch die Gerade $[xe_1 E_1 t]$, schneide diese Gerade mit der Geraden E_2 im Punkte $[xe_1 E_1 t E_2]$ und verbinde endlich den Schnittpunkt mit dem Punkte e_2 durch die Gerade $[xe_1 E_1 t E_2 e_2]$, so muß diese aus dem Strahle $[xe_1]$ den ihm, außer dem Punkte e_1, angehörenden Punkt x der in ein Linienpaar zerfallenden Kurve zweiter Ordnung (3) ausschneiden.

Wendet man aber auf die Seite $e_1 t e_2$ des vollständigen Vierecks $e_1 e_2 e_3 x$ den Satz 299 an, so sieht man, daß seine Nebenecke d, welche den Schnittpunkt der Gegenseiten $[e_3 x]$ und $[e_1 e_2]$ jenes vollständigen Vierecks bildet, vom Punkte t durch die Ecken e_1 und e_2 harmonisch getrennt wird. Es wird daher auch der Punkt x durch die Seiten E_1 und E_2 vom Punkte t harmonisch getrennt, und alle Punkte x, welche diese Eigenschaft haben, liegen auf der Geraden $[e_3 d]$. Folglich ist diese Gerade $[e_3 d]$ die gesuchte zweite Gerade des Linienpaars, in das die Kurve zweiter Ordnung (3) zerfällt.

Die durch die Asymptoten und einen im Endlichen liegenden Punkt bestimmte Hyperbel als Erzeugnis zweier projektiven Strahlbüschel. Wir haben oben auf S. 453ff. die *allgemeine Erzeugung* einer Kurve zweiter Ordnung durch 2 projektive Strahlbüschel mit den Scheiteln s_1 und s_2 behandelt. Dabei wurde die projektive Beziehung der beiden Strahlbüschel dadurch hergestellt, daß man die Strahlbüschel mit den Scheiteln s_1 und s_2 perspektiv auf 2 Hilfspunktreihen beziehlich mit den Trägern H_1 und H_2 bezog, die wieder perspektiv zu einem Hilfsstrahlbüschel mit dem Scheitel h lagen (vgl. Fig. 203 auf S. 453).

In dem Satze 930 wurde alsdann der *besondere Fall* betrachtet, wo der Träger H_2 der zweiten Hilfspunktreihe durch den Scheitel s_1 des ersten erzeugenden Strahlbüschels geht und der Träger H_1 der ersten Hilfspunktreihe durch den Scheitel s_2 des zweiten erzeugenden Strahlbüschels. Dieser Fall war dadurch ausgezeichnet, daß die erzeugte Kurve zweiter Ordnung nicht nur wie im allgemeinen Fall durch den Schnittpunkt $c = [H_1 H_2]$ der Träger H_1 und H_2 der beiden Hilfspunktreihen und durch die beiden Scheitel

s_1 und s_2 der beiden erzeugenden Strahlbüschel hindurchgeht, sondern *daß sie überdies die Verbindungslinien* $[hs_1]$ *und* $[hs_2]$ *des Scheitels* h *des Hilfsstrahlbüschels mit den Scheiteln* s_1 *und* s_2 *der beiden erzeugenden Strahlbüschel zu Tangenten in den Punkten* s_1 *und* s_2 *hat* (vgl. Fig. 205 auf S. 455), so daß die erzeugte Kurve zweiter Ordnung durch die 3 Punkte c, s_1, s_2 hindurchgeht und in den beiden letzteren Punkten von den Geraden $[hs_1]$ und $[hs_2]$ berührt wird.[1])

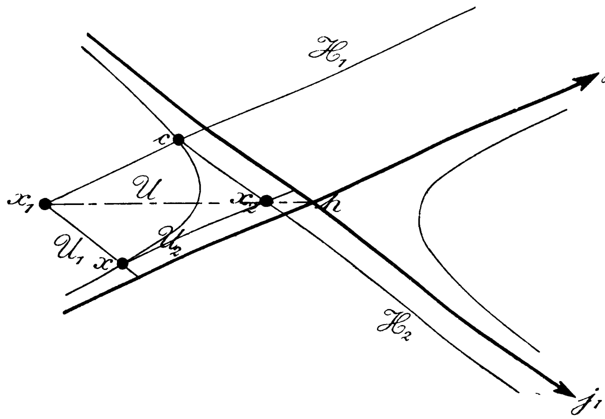


Fig. 213.

Wir *spezialisieren jetzt weiter* die so bestimmte Kurve zweiter Ordnung dadurch, daß wir die Scheitel s_1 und s_2 der beiden erzeugenden Strahlbüschel durch 2 getrennt liegende Punkte j_1 und j_2 der unendlich fernen Geraden J, oder was dasselbe ist, durch 2 Strecken von verschiedener Richtung ersetzen. Dann wird die von den beiden projektiven Strahlbüscheln erzeugte Kurve zweiter Ordnung *diejenige Hyperbel, die durch den Punkt* c *geht und die Geraden* $[hj_1]$ *und* $[hj_2]$ *zu Asymptoten, den Punkt* h *also zum Mittelpunkte hat* (vgl. die Figg. 213 u. 214). Die Träger H_1 und H_2 der beiden Hilfspunktreihen ferner, die in diesem Falle beziehlich durch die unendlich fernen Punkte j_2 und j_1 der Asymptoten hindurchgehen und sich wie bisher im Punkte c schneiden, gestatten jetzt die Darstellung:

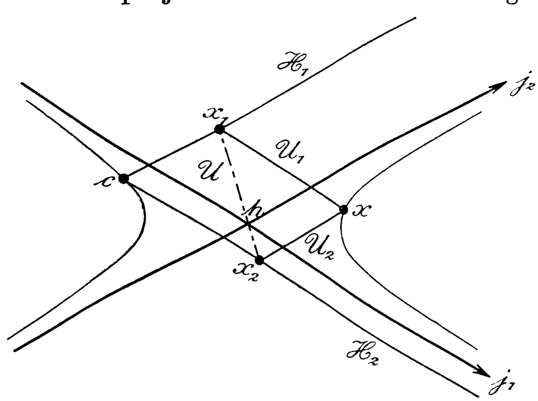


Fig. 214.

$$(30) \qquad H_1 = [cj_2] \quad \text{und} \quad H_2 = [cj_1];$$

sie laufen also beziehlich den Asymptoten:

$$[hj_2] \quad \text{und} \quad [hj_1]$$

---

1) Die Fig. 205 kann dabei als die Figur eines auf ein Viereck reduzierten Pascalschen Sechsecks aufgefaßt werden (vgl. Band I, S. 98f.).

parallel. Und die Gleichung (2) der erzeugten Kurve zweiter Ordnung geht in die Hyperbelgleichung über:

(31) $$[xj_1H_1hH_2j_2x] = 0,$$

der man wegen (30) auch die Form geben kann:

(32) $$[xj_1(cj_2)h(cj_1)j_2x] = 0.$$

Man erhält endlich den laufenden Punkt x der Hyperbel (31) oder (32), indem man durch den Mittelpunkt h dieser Hyperbel einen beliebigen Strahl U legt, ihn mit den zu den Asymptoten $[hj_2]$ und $[hj_1]$ parallelen Trägern H_1 und H_2 der beiden Hilfspunktreihen schneidet in x_1 und x_2 und durch die Schnittpunkte x_1 und x_2 zu den Asymptoten $[hj_1]$ und $[hj_2]$ die Parallelen U_1 und U_2 zieht. Dann schneiden sich diese Parallelen in einem Punkte x der Hyperbel.

Die Fig. 213 auf S. 465 erläutert den Fall, wo der Strahl U in demjenigen von den Asymptoten gebildeten Scheitelwinkelpaar liegt, das den gegebenen Punkt c und also die ganze Hyperbel enthält, und die Fig. 214 den Fall, wo der Strahl U in dem andern Scheitelwinkelpaar gelegen ist. In dem ersten Falle liefert die angegebene Konstruktion Punkte x desjenigen Hyperbelzweiges, der durch den Punkt c geht, in dem letzten Falle Punkte x des andern Hyperbelzweiges.

Unsere Konstruktion ergibt noch auf Grund des Satzes von den „Ergänzungsparallelogrammen" eine Bestätigung des Satzes 484, nach welchem alle Parallelogramme, die sich an die Asymptoten einer Hyperbel anlehnen und jedes Mal einen Punkt der Hyperbel zur Ecke haben, denselben Flächeninhalt besitzen. Von ihm bildet der folgende Satz, der die Ergebnisse der gewonnenen Konstruktion des laufenden Punktes x der Hyperbel zusammenfaßt und eine Erzeugungsweise einer Hyperbel durch 2 projektive Strahlbüschel mit unendlich fernen Scheiteln darstellt, eine Umkehrung:

Satz 935: Umkehrung des Satzes 484: Erste Fassung: Lehnt sich ein veränderliches Parallelogramm an 2 feste Geraden H_1 und H_2 an, die sich in einem im Endlichen liegenden Punkte c schneiden, und dreht sich die nicht durch c gehende Diagonale dieses Parallelogramms um einen festen Punkt h, so beschreibt die der Ecke c gegenüberliegende Ecke x eine Hyperbel, nämlich diejenige Hyperbel, die durch den Punkt c geht, den festen Punkt h zum Mittelpunkt hat, und deren Asymptoten den festen Geraden H_1 und H_2 parallel laufen.

Man kann diesem Satze auch die Fassung geben:

Satz 935: Zweite Fassung: Dreht sich die Grundseite eines veränderlichen Dreiecks um einen festen Punkt h, und gleiten zugleich ihre Endpunkte auf 2 festen Geraden H_1 und H_2, die sich in einem im Endlichen liegenden Punkte c schneiden, während die diesen Endpunkten gegenüberliegenden Schenkelseiten des Dreiecks jenen festen Geraden parallel bleiben, so beschreibt die Spitze des Dreiecks eine Hyperbel, nämlich diejenige Hyperbel, die durch den Punkt c geht, den festen Punkt h zum Mittelpunkt und die Geraden zu Asymptoten hat, die durch den Punkt h gehen und den festen Geraden H_1 und H_2 parallel laufen.

Abschnitt 64.

Projektives und Metrisches zur Erzeugung der Kurven zweiter Klasse durch zwei projektive Punktreihen.

Rückblick auf die allgemeine Erzeugung einer Kurve zweiter Klasse durch zwei projektive Punktreihen. Ganz analoge Untersuchungen lassen sich auch an die dualistisch entsprechende Darstellung der Kurve zweiter Klasse knüpfen. Wir gehen dabei aus von der im ersten Bande auf S. 101 ff. gegebenen Erzeugung einer Kurve zweiter Klasse:

(1) $$[UAbHdEU] = 0$$

durch 2 projektive Punktreihen, ersetzen aber in der Gleichung (1) die Buchstaben:

$$A, \; b, \; d, \; E$$

durch die Buchstaben:

$$G_1, \; h_1, \; h_2, \; G_2,$$

so daß die Gleichung (1) die Form annimmt:

(2) $$[UG_1h_1Hh_2G_2U] = 0.$$

Die Kurve zweiter Klasse (2) ist dann das Erzeugnis der beiden *projektiven Punktreihen mit den Trägern G_1 und G_2*, welche *perspektiv* bezogen sind auf zwei Hilfsstrahlbüschel beziehlich mit den Scheiteln h_1 und h_2, während diese wiederum *einander perspektiv* zugeordnet sind durch eine Hilfspunktreihe mit dem Träger H (Fig. 215).

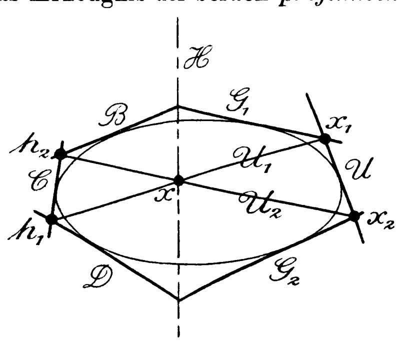


Fig. 215.

Dabei sind die Scheitel h_1 und h_2 der beiden Hilfsstrahlbüschel nur der Bedingung unterworfen, daß h_1 nicht auf G_1 und h_2 nicht auf G_2 liegen darf.[1]) Es ist auf S. 102 f. des ersten Bandes gezeigt, daß außer den Trägern G_1 und G_2 der beiden die Kurve erzeugenden Punktreihen auch die

1) Der Fall, wo die Gerade H durch den Punkt h_1 oder durch den Punkt h_2 geht, braucht wieder nicht ausgeschlossen zu werden. Er liefert eine in ein Punktpaar zerfallende Kurve zweiter Klasse.

3 Geraden:

$$C = [h_1 h_2], \quad B = [G_1 H h_2], \quad D = [G_2 H h_1]$$

zu den Hüllgeraden der Kurve zweiter Klasse gehören.

Will man zu einem beliebigen Punkte x_1 der Punktreihe mit dem Träger G_1 die zweite von ihm ausgehende Hüllgerade U der Kurve (2) bestimmen, so verbinde man den Punkt x_1 mit dem Scheitel h_1 des ersten Hilfsstrahlbüschels durch die Gerade U_1, schneide die Gerade U_1 mit dem Träger H der Hilfspunktreihe im Punkte x, verbinde den Punkt x mit dem Scheitel h_2 des zweiten Hilfsstrahlbüschels durch die Gerade U_2, schneide endlich die Gerade U_2 mit dem Träger G_2 der zweiten erzeugenden Punktreihe im Punkte x_2, so ist dieser Punkt x_2 der zweiten Punktreihe dem Punkte x_1 der ersten Punktreihe projektiv zugeordnet, seine Verbindungslinie U mit dem Punkte x_1 ist also die gesuchte zweite vom Punkte x_1 ausgehende Tangente der von den beiden projektiven Punktreihen erzeugten Kurve zweiter Klasse. Zugleich ist nach S. 102f. des ersten Bandes der Punkt x, d. h. der Schnittpunkt der Geraden U_1, H, U_2, der Brianchonsche Punkt des einfachen der Kurve umschriebenen Sechsseits $U G_1 B C D G_2$.

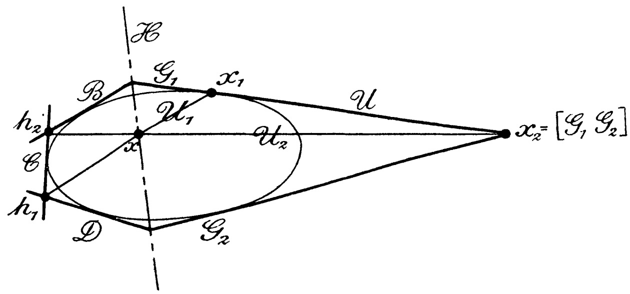


Fig. 216.

Läßt man die laufende Tangente U der Kurve zweiter Klasse mit dem Träger G_1 der ersten von den beiden erzeugenden Punktreihen in *eine* Gerade zusammenrücken (Fig. 216), so verwandelt sich der Schnittpunkt x_1 des Strahles U mit der Geraden G_1 in den Berührungspunkt der Tangente G_1, während der dem Berührungspunkt x_1 zugeordnete Punkt x_2 der Punktreihe mit dem Träger G_2 in den Schnittpunkt $[G_1 G_2]$ der Träger der beiden erzeugenden Punktreihen übergeht. Der Berührungspunkt x_1 der Tangente G_1 der Kurve zweiter Klasse kann daher gefunden werden, indem man den Schnittpunkt $[G_1 G_2] = x_2$ der Träger G_1 und G_2 der beiden erzeugenden Punktreihen mit dem Scheitel h_2 des zweiten Hilfsstrahlbüschels verbindet durch die Gerade U_2, den Träger H der Hilfspunktreihe mit der Verbindungslinie U_2 zum Schnitt bringt in x und den Punkt x, d. h. den Brianchonschen Punkt des auf ein Fünfseit reduzierten einfachen Sechsseits $U G_1 B C D G_2$, mit dem Scheitel h_1 des ersten Hilfsstrahlbüschels verbindet durch die Gerade U_1; dann ist der Schnittpunkt $[G_1 U_1] = x_1$ der gesuchte Berührungspunkt der Tangente G_1 der Kurve zweiter Klasse.

Ebenso findet man den Berührungspunkt der Tangente G_2 als denjenigen Punkt der Punktreihe mit dem Träger G_2, der zu dem Schnittpunkte $[G_1 G_2]$

zugeordnet ist, diesen Schnittpunkt aufgefaßt als Punkt der Punktreihe mit dem Träger G_1. Man hat somit den Satz:

Satz 936: Erzeugt man eine Kurve zweiter Klasse durch 2 projektive Punktreihen, so sind die Punkte, welche in den beiden Punktreihen dem Schnittpunkte ihrer Träger zugeordnet werden, die Berührungspunkte der Kurve mit diesen Trägern.

Besonderer Fall dieser Erzeugung einer Kurve zweiter Klasse. Eine erhebliche Vereinfachung erfährt die in der Fig. 216 enthaltene Konstruktion des Berührungspunktes eines der beiden Träger der erzeugenden Punktreihen, wenn man die Lage der Scheitel h_1 und h_2 der beiden Hilfsstrahlbüschel zu den Trägern G_1 und G_2 der beiden erzeugenden Punktreihen spezialisiert. Wie schon auf S. 467 erwähnt wurde, darf der Scheitel h_1 des ersten Hilfsstrahlbüschels nicht auf dem Träger G_1 der ersten der beiden die Kurve erzeugenden Punktreihen liegen und der Scheitel h_2 des zweiten Hilfsstrahlbüschels nicht auf dem Träger G_2 der zweiten erzeugenden Punktreihe. Wohl aber darf die Gerade G_1 durch den Punkt h_2 hindurchgehen und die Gerade G_2 durch den Punkt h_1. *Wir spezialisieren* also die Fig. 215 dahin, daß wir den Scheitel h_1 des ersten Hilfsstrahlbüschels auf den Träger G_2 der zweiten von den beiden die Kurve erzeugenden Punktreihen verlegen und den Scheitel h_2 des zweiten Hilfsstrahlbüschels auf den Träger G_1 der ersten erzeugenden Punktreihe (Fig. 217).

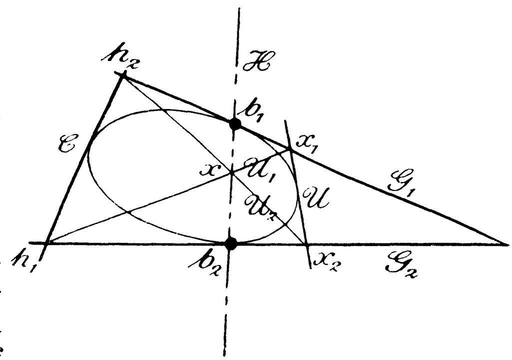


Fig. 217.

Bei der Konstruktion einer *beliebigen Hüllgeraden U* der Kurve zweiter Klasse tritt gegenüber dem allgemeinen Falle (vgl. Fig. 215 auf S. 467) infolge der besonderen Lage der Scheitel h_1 und h_2 der beiden Hilfsstrahlbüschel *keine Veränderung* ein, wie die Fig. 217 zeigt. Dagegen *vereinfacht sich die Konstruktion der Berührungspunkte der Tangenten G_1 und G_2 der Kurve.*

Nach dem Satze 936 sind diese beiden Berührungspunkte diejenigen beiden Punkte der Punktreihen mit den Trägern G_1 und G_2, die dem Schnittpunkte $[G_1 G_2]$ der beiden Träger zugeordnet sind. Will man daher in der Punktreihe mit dem Träger G_1 den entsprechenden Punkt zu dem Punkte $[G_1 G_2]$ der Punktreihe mit dem Träger G_2 konstruieren, so hat man nach dem allgemeinen Verfahren den Punkt $[G_1 G_2]$ mit dem Scheitel h_2 des zweiten Hilfsstrahlbüschels zu verbinden. Die Verbindungslinie ist aber jetzt die Gerade G_1 selbst. Diese Gerade hat man mit dem Träger H der Hilfspunktreihe zu schneiden und den Schnittpunkt $[G_1 H]$ mit dem Scheitel h_1 des ersten Hilfsstrahlbüschels zu verbinden durch die Gerade $[G_1 H h_1]$, die Verbindungslinie endlich mit der Geraden G_1 zu schneiden. Dadurch aber kommt man wieder auf den Punkt $[G_1 H]$ zurück. Dieser Punkt ist also der gesuchte Berührungspunkt b_1 der Geraden G_1 mit der Kurve. Ebenso ist der Punkt $[G_2 H]$ der Berührungspunkt b_2 der Geraden G_2 mit der Kurve. Man hat daher den Satz:

Satz 937: Erzeugt man eine Kurve zweiter Klasse durch 2 projektive Punktreihen mit den Trägern G_1 und G_2 und stellt deren projektive Beziehung dadurch her, daß man sie perspektiv auf 2 Hilfsstrahlbüschel mit den Scheiteln h_1 und h_2 bezieht, von denen h_2 auf G_1 und h_1 auf G_2 gelegen ist, während diese beiden Strahlbüschel wieder perspektiv zu einer Hilfspunktreihe mit dem Träger H liegen, so sind die Punkte $b_1 = [G_1 H]$ und $b_2 = [G_2 H]$ die Berührungspunkte der Kurve zweiter Klasse mit den Geraden G_1 und G_2.

Gleichung der so erzeugten Kurve zweiter Klasse in Dreieckskoordinaten. Für die Ableitung der Gleichung der betrachteten Kurve zweiter Klasse in Dreieckskoordinaten möge wieder die Bezeichnung ein wenig geändert werden. Wir machen nämlich die Geraden:

$$G_1, \quad G_2, \quad C$$

zu Seiten: $$E_1, \quad E_2, \quad E_3$$

des Fundamentaldreiecks (Fig. 218) und bezeichnen dementsprechend dann die bisher mit h_1 und h_2 benannten Punkte mit e_1 und e_2 und den Punkt $[E_1 E_2]$

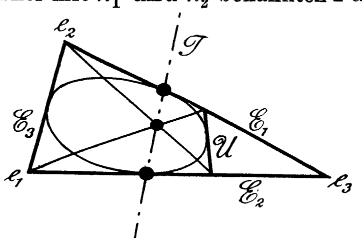


Fig. 218.

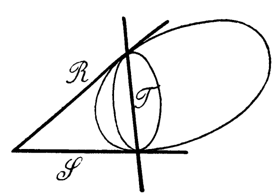


Fig. 219.

mit e_3. Die bisher mit H benannte Verbindungslinie der Berührungspunkte der Tangenten E_1 und E_2 möge mit T bezeichnet werden. Die Gleichung (2) für die durch die beiden projektiven Punktreihen erzeugte Kurve zweiter Klasse nimmt alsdann die Form an:

$$(3) \qquad [U E_1 e_1 T e_2 E_2 U] = 0.$$

Will man aus ihr eine Gleichung zwischen den Linienkoordinaten $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3$ des Stabes U in bezug auf das Fundamentaldreiseit $E_1 E_2 E_3$ und einen beliebigen Stab als Einheitsstab ableiten, so setze man:

$$(4)\qquad U = \mathfrak{u}_1 E_1 + \mathfrak{u}_2 E_2 + \mathfrak{u}_3 E_3, \quad T = \mathfrak{t}_1 E_1 + \mathfrak{t}_2 E_2 + \mathfrak{t}_3 E_3 .$$

Dann wird:

$$\begin{aligned}
[UE_1] &= -\mathfrak{u}_2 e_3 + \mathfrak{u}_3 e_2,\\
[UE_1 e_1] &= -\mathfrak{u}_2 E_2 - \mathfrak{u}_3 E_3 = -(\mathfrak{u}_2 E_2 + \mathfrak{u}_3 E_3),\\
[UE_1 e_1 T] &= -[(\mathfrak{u}_2 E_2 + \mathfrak{u}_3 E_3)(\mathfrak{t}_1 E_1 + \mathfrak{t}_2 E_2 + \mathfrak{t}_3 E_3)]\\
&= (\mathfrak{u}_3 \mathfrak{t}_2 - \mathfrak{u}_2 \mathfrak{t}_3) e_1 - \mathfrak{u}_3 \mathfrak{t}_1 e_2 + \mathfrak{u}_2 \mathfrak{t}_1 e_3,\\
[UE_1 e_1 T e_2] &= (\mathfrak{u}_3 \mathfrak{t}_2 - \mathfrak{u}_2 \mathfrak{t}_3) E_3 - \mathfrak{u}_2 \mathfrak{t}_1 E_1,\\
[UE_1 e_1 T e_2 E_2] &= (\mathfrak{u}_2 \mathfrak{t}_3 - \mathfrak{u}_3 \mathfrak{t}_2) e_1 - \mathfrak{u}_2 \mathfrak{t}_1 e_3,\\
[UE_1 e_1 T e_2 E_2 U] &= \mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_2 \mathfrak{t}_3 - \mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_3 \mathfrak{t}_2 - \mathfrak{u}_2 \mathfrak{u}_3 \mathfrak{t}_1 .
\end{aligned}$$

Die Gleichung (3) läßt sich daher in der Form schreiben:

$$(5)\qquad \mathfrak{t}_1 \mathfrak{u}_2 \mathfrak{u}_3 + \mathfrak{t}_2 \mathfrak{u}_3 \mathfrak{u}_1 - \mathfrak{t}_3 \mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_2 = 0.$$

Man hat also den Satz:

Satz 938; Die Gleichung einer Kurve zweiter Klasse, die dem Fundamentaldreieck eingeschrieben ist, und deren Berührungspunkte mit den Seiten E_1 und E_2 dieses Dreiecks durch die Gerade des Stabes T mit den Dreieckskoordinaten $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$ ausgeschnitten werden, lautet:

$$(5)\qquad \mathfrak{t}_1 \mathfrak{u}_2 \mathfrak{u}_3 + \mathfrak{t}_2 \mathfrak{u}_3 \mathfrak{u}_1 - \mathfrak{t}_3 \mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_2 = 0.$$ [1])

Die Darstellung spezieller Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen durch Gleichungen. Im 41. Abschnitt haben wir die Polarsysteme eines Scharbüschels von Kurven zweiter Ordnung und einer Büschelschar von Kurven zweiter Klasse durch extensive Brüche dargestellt, insbesondere auch die Polarsysteme eines Scharbüschels homoasymptotischer Hyperbeln oder Ellipsen. Im 61. Abschnitt ergab sich uns ferner der extensive Bruch für eine Schar konfokaler Kurven zweiter Klasse. Es mögen im folgenden noch einige *Gleichungen* zusammengestellt werden, durch die sich die genannten Kurvensysteme ausdrücken lassen.

Sind R, S, T die Stäbe dreier festen Geraden, die ein Dreieck miteinander bilden, und ist x ein veränderlicher Punkt, so ist die Gleichung:

$$(6)\qquad \mathfrak{f}\,[xR][xS] + \mathfrak{g}\,[xT]^2 = 0$$

die Gleichung des hyperbolischen Scharbüschels von Kurven zweiter Ordnung, dessen Kurven sich in den Punkten $[RT]$ und $[ST]$ berühren, und in ihnen die Geraden der Stäbe R und S zu gemeinschaftlichen Tangenten und daher die Gerade des Stabes T zur gemeinsamen Berührungssekante haben (Fig. 219).

[1]) Vgl. hierzu wieder die beiden auf S. 456 zitierten Arbeiten von F. Dingeldey.

Sind andererseits r, s, t drei feste Punkte, die ein Dreieck miteinander bilden, und ist U ein veränderlicher Stab, so ist die Gleichung:

(7) $$\mathfrak{f}[Ur][Us] + \mathfrak{g}[Ut]^2 = 0$$

die Gleichung der hyperbolischen Büschelschar von Kurven zweiter Klasse, welche die Punkte r und s zu gemeinschaftlichen Berührungspunkten und den Punkt t zum Schnittpunkt der beiden gemeinsamen Tangenten in diesen Punkten haben (Fig. 220).

Ist ferner $\boldsymbol{p}$ ein Polarsystem zweiter Ordnung und T ein fester Stab, so stellt die Gleichung:

(8) $$\mathfrak{f}[x \cdot xp] + \mathfrak{g}[xT]^2 = 0$$

das Scharbüschel von Kurven zweiter Ordnung dar, das durch die Polkurve von $\boldsymbol{p}$ und die doppeltzählende Gerade T bestimmt wird (vgl. die Figg. 221

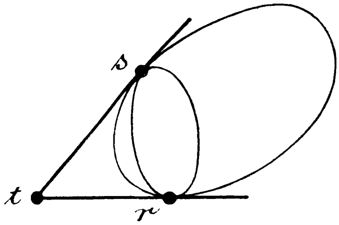


Fig. 220.

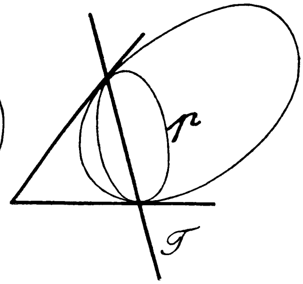


Fig. 221.

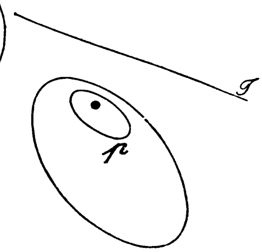


Fig. 222.

u. 222), d. h. die Gesamtheit aller Kurven zweiter Ordnung, welche der Geraden T denselben Pol zuweisen wie die Kurve $\boldsymbol{p}$, und auf ihr dieselbe Involution hervorrufen wie diese Kurve (vgl. S. 57).

Ist andererseits $\boldsymbol{P}$ ein Polarsystem zweiter Klasse und t ein fester Punkt, so stellt die Gleichung:

(9) $$\mathfrak{f}[U \cdot U\boldsymbol{P}] + \mathfrak{g}[Ut]^2 = 0$$

die Büschelschar von Kurven zweiter Klasse dar, die durch die Polarkurve von $\boldsymbol{P}$ und den doppelt zählenden Punkt t bestimmt wird, d. h. die Gesamtheit aller Kurven zweiter Klasse, welche dem Punkte t dieselbe Polare zuweisen wie die Kurve $\boldsymbol{P}$ und in ihm dieselbe Involution hervorrufen wie diese Kurve.

Aus den Gleichungen (6) und (8) folgt weiter durch metrische Spezialisierung, indem man den Stab T durch den Stab:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{m}_1 E_1 + \mathfrak{m}_2 E_2 + \mathfrak{m}_3 E_3$$

der unendlich fernen Geraden ersetzt, die Gleichung:

(10) $$\mathfrak{f}[xR][xS] + \mathfrak{g}[x\mathfrak{T}]^2 = 0.$$

Sie ist die Gleichung des Scharbüschels homoasymptotischer Hyperbeln (vgl. S. 60ff.), welche die Geraden R und S zu Asymptoten haben. Und ist $\boldsymbol{p}$

das Polarsystem zweiter Ordnung einer Ellipse oder Hyperbel, so ist die Gleichung:

$$\mathfrak{f}\,[x \cdot xp] + \mathfrak{g}\,[x\mathfrak{J}]^2 = 0 \tag{11}$$

die Gleichung desjenigen Scharbüschels homoasymptotischer Ellipsen oder Hyperbeln, das durch die Polkurve von p und die doppelt zählende unendlich ferne Gerade $\mathfrak{J}$ bestimmt wird.

Die Gleichung (79) des 60. Abschnitts zeigt endlich, daß die Gleichung:

$$\mathfrak{f}\,[U \cdot UK] + \mathfrak{g}\,[Ur]\,[Us] = 0 \tag{12}$$

die Gleichung der Schar konfokaler Kurven zweiter Klasse ist, welche die Punkte r und s zu gemeinsamen Brennpunkten haben.

Wann ist eine nicht entartende Kurve zweiter Klasse eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, wann eine reelle oder imaginäre Ellipse? Es sei die Gleichung einer nicht entartenden Kurve zweiter Klasse in der Form gegeben:

$$[U \cdot UP] = 0, \tag{13}$$

wo wie gewöhnlich:

$$P = \frac{a_1, \quad a_2, \quad a_3}{E_1, \quad E_2, \quad E_3} \quad \text{und} \tag{14}$$

$$\begin{cases} a_1 = \mathfrak{A}_{11} e_1 + \mathfrak{A}_{12} e_2 + \mathfrak{A}_{13} e_3, \\ a_2 = \mathfrak{A}_{21} e_1 + \mathfrak{A}_{22} e_2 + \mathfrak{A}_{23} e_3, \\ a_3 = \mathfrak{A}_{31} e_1 + \mathfrak{A}_{32} e_2 + \mathfrak{A}_{33} e_3 \end{cases} \tag{15}$$

ist, und wo der Potenzwert des Bruches P (seine Determinante) nicht verschwinden darf, wo also:

$$[P^3] = [a_1 a_2 a_3] = \left| \mathfrak{A}_{ik} \right|_{i,k=1,2,3} = \mathfrak{A} \neq 0 \tag{16}$$

ist. Dann lautet die Gleichung der zur Kurve zweiter Klasse (13) adjungierten Kurve zweiter Ordnung:

$$[x \cdot x\overline{p}] = 0, \tag{17}$$

wo $\overline{p}$ der zu P adjungierte Bruch ist, d. h., wo:

$$\overline{p} = \frac{[a_2 a_3], \quad [a_3 a_1], \quad [a_1 a_2]}{e_1, \quad e_2, \quad e_3} \tag{18}$$

ist. Nun folgt aus der dualistischen Entwicklung zu S. 203f. des ersten Teils dieses Bandes der dem Satze 418 dualistisch entsprechende Satz:

Satz 939: Unter der Voraussetzung, daß der Potenzwert (die Determinante) $\mathfrak{A}$ eines Polarsystems zweiter Klasse P von Null verschieden ist, fällt seine Polarkurve mit der Polkurve des zu P adjungierten Polarsystems zweiter Ordnung $\overline{p}$ zusammen.

Um daher zu erfahren, ob die durch die Gleichung (13) ausgedrückte nicht entartende *Kurve zweiter Klasse eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel* ist, wird man das in dem Satze 464 für eine Kurve *zweiter Ordnung* angegebene Kriterium auf die Kurve (17) anwenden können und hat damit dann zugleich ein Kriterium für die Kurve zweiter Klasse (13).

In dem Kriterium des Satzes 464 für eine Kurve zweiter Ordnung kommt nun aber das zu dem Polarsystem dieser Kurve zweiter Ordnung adjungierte Polarsystem zweiter Klasse vor. Man bilde also zu dem Polarsystem zweiter Ordnung $\overline{\boldsymbol{p}}$ in (18) das adjungierte Polarsystem zweiter Klasse $\overline{\boldsymbol{P}}$, setze somit:

(19) $$[\overline{\boldsymbol{p}}^2] = \overline{\boldsymbol{P}}.$$

Es wird dann nach dem Begriff des adjungierten Polarsystems mit Rücksicht auf (18):

(20) $$\overline{\boldsymbol{P}} = \frac{[a_3 a_1 \cdot a_1 a_2],}{E_1,} \frac{[a_1 a_2 \cdot a_2 a_3],}{E_2,} \frac{[a_2 a_3 \cdot a_3 a_1]}{E_3} \quad \text{oder}$$

$$\overline{\boldsymbol{P}} = \frac{[a_1 a_2 a_3]\, a_1,}{E_1,} \frac{[a_1 a_2 a_3]\, a_2,}{E_2,} \frac{[a_1 a_2 a_3]\, a_3}{E_3},$$

d. h. wegen (16): $$\overline{\boldsymbol{P}} = \mathfrak{A}\, \frac{a_1,}{E_1,} \frac{a_2,}{E_2,} \frac{a_3}{E_3}$$

oder wegen (14):

(21) $$\overline{\boldsymbol{P}} = \mathfrak{A}\boldsymbol{P},$$

eine Formel, die der Formel (38) des 31. Abschnitts genau entspricht.

Nun lautet nach dem Satze 464 das Kriterium für die Kurve (17): *Die nicht zerfallende Kurve zweiter Ordnung* (17) *ist eine*

$$\left.\begin{matrix} \textit{Hyperbel,} \\ \textit{Parabel oder} \\ \textit{Ellipse,} \end{matrix}\right\} \textit{je nachdem das Produkt } [\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{J}\overline{\boldsymbol{P}}] \left\{\begin{matrix} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{matrix}\right.$$

ist. Und hierfür kann man nach dem Satze 939 und nach der Formel (21) auch schreiben:

Die nicht zerfallende Kurve zweiter Klasse (13) *ist eine*

$$\left.\begin{matrix} \textit{Hyperbel,} \\ \textit{Parabel oder} \\ \textit{Ellipse,} \end{matrix}\right\} \textit{je nachdem das Produkt } \mathfrak{A}\,[\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{J}\boldsymbol{P}] \left\{\begin{matrix} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{matrix}\right.$$

ist. Dabei kann man die Bedingung für die Parabel wegen (16) *auch einfacher in der Form schreiben:*

(22) $$[\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{J}\boldsymbol{P}] = 0.$$

Man hat daher den folgenden dem Satze 464 dualistisch entsprechenden Satz:

Satz 940: Eine Kurve zweiter Klasse:

$$[U \cdot U\boldsymbol{P}] = 0,$$

deren Potenzwert (Determinante):

$$[\boldsymbol{P}^3] = \mathfrak{A}$$

nicht verschwindet, stellt eine

$\left.\begin{array}{l}\text{Hyperbel oder}\\ \text{Ellipse}\end{array}\right\}$ dar, je nachdem das Produkt $\mathfrak{A}[\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{J}\boldsymbol{P}]\left\{\begin{array}{l}\text{negativ oder}\\ \text{positiv}\end{array}\right.$

ist, und eine Parabel, wenn das Produkt:

$$[\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{J}\boldsymbol{P}] = 0$$

ist, unter $\mathfrak{J}$ einen Stab der unendlich fernen Geraden verstanden.

Man kann aber jetzt auch leicht ein *Unterscheidungsmerkmal zwischen einer reellen und imaginären Ellipse* hinzufügen. Da eine jede Ellipse, sowohl eine reelle wie eine imaginäre, von der unendlich fernen Geraden $\mathfrak{J}$ *nicht in reellen Punkten* geschnitten wird, so kann man Satz 465 anwenden. Dabei hat man wieder an die Stelle der Kurve zweiter Klasse (13) die nach dem Satze 939 mit ihr identische Kurve zweiter Ordnung (17) treten zu lassen. Nach dem Satze 465 hat dann für jeden Punkt g der unendlich fernen Geraden die quadratische Form $[g \cdot g\overline{\boldsymbol{p}}]$ dasselbe Vorzeichen. Man hat somit den Satz:

Satz 941: Ist $\boldsymbol{P}$ ein Polarsystem zweiter Klasse, $\overline{\boldsymbol{p}}$ das zu ihm adjungierte Polarsystem zweiter Ordnung und $\mathfrak{A}$ der Potenzwert (die Determinante) von $\boldsymbol{P}$, ist ferner das Produkt:

$$(23) \qquad \mathfrak{A}[\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{J}\boldsymbol{P}] > 0,$$

unter $\mathfrak{J}$ einen Stab der unendlich fernen Geraden verstanden, so hat das Produkt:

$$[g \cdot g\overline{\boldsymbol{p}}]$$

für jeden Punkt g der unendlich fernen Geraden dasselbe Vorzeichen.

Und hieraus folgt nach Satz 473 der weitere Satz:

Satz 942: Haben die Buchstaben $\boldsymbol{P}$, $\overline{\boldsymbol{p}}$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ dieselbe Bedeutung wie im vorigen Satze, und ist wieder das Produkt:

$$(23) \qquad \mathfrak{A}[\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{J}\boldsymbol{P}] > 0$$

und zugleich für irgendeinen Punkt g der unendlich fernen Geraden auch das Produkt:

$$(24) \qquad [g \cdot g\overline{\boldsymbol{p}}] > 0,$$

so ist die Polarkurve des Polarsystems $\boldsymbol{P}$ eine imaginäre Ellipse. Ist dagegen wieder unter der Voraussetzung (23) das Produkt:

$$(25) \qquad [g \cdot g\overline{\boldsymbol{p}}] < 0,$$

so ist diese Kurve eine reelle Ellipse.

Der Kreis, die gleichseitige Hyperbel, die Parabel und das Punktpaar als Kurve zweiter Klasse, die durch 3 Tangenten und die Berührungspunkte zweier von ihnen bestimmt wird. Lage der zugehörigen Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte. Nach dieser Zwischenuntersuchung knüpfen wir wieder an die mit Satz 937 abgebrochene Untersuchung über eine dem Fundamentaldreieck eingeschriebene Kurve zweiter Klasse an und stellen die Frage:

Wie muß bei einer dem Fundamentaldreieck eingeschriebenen Kurve zweiter Klasse die Verbindungslinie T der beiden Punkte gelegen sein, in denen die Kurve von den Seiten E_1 und E_2 des Fundamentaldreiecks berührt wird, damit die Kurve *ein Kreis, eine gleichseitige Hyperbel, eine Parabel oder ein Punktpaar* werde?

Wir fragen also *zuerst:* Was für eine Lage muß die Gerade T haben, damit die Kurve zweiter Klasse (3) oder (5) ein *Kreis* werde? Da der Kreis die 3 Seiten des Fundamentaldreiecks berühren soll, so kann er nur entweder der eingeschriebene Kreis (im engeren Sinne) oder einer von den 3 angeschriebenen Kreisen des Fundamentaldreiecks sein. Die Gerade T muß daher eine von den 4 Geraden bilden, welche die Berührungspunkte eines

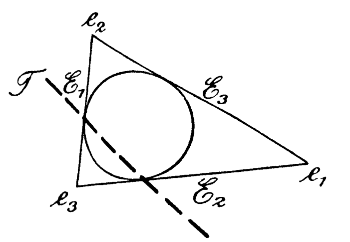


Fig. 223.

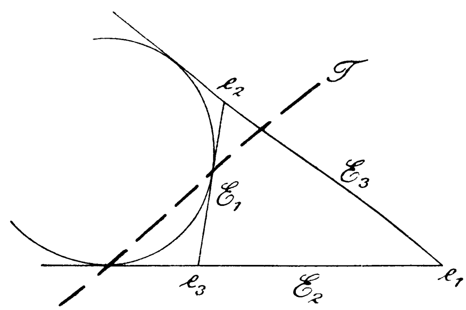


Fig. 224.

dieser 4 Kreise mit den Seiten E_1 und E_2 des Fundamentaldreiecks verbinden (vgl. die Figg. 223 u. 224). Die 4 Geraden T, die man auf diese Weise erhält, bilden die Seiten eines Rechtecks; denn zwei von ihnen stehen senkrecht auf der Halbierungslinie des Innenwinkels des Fundamentaldreiecks bei e_3, die beiden andern auf denen der Außenwinkel bei e_3 (Fig. 225).

Zweitens frage man: Welche Lage muß die Gerade T haben, damit die Kurve zweiter Klasse (3) oder (5) eine *gleichseitige Hyperbel* werde?

Wir bemerken vorweg, daß sich nach dem Satze 901 nur einem stumpfwinkligen oder rechtwinkligen Dreieck eine gleichseitige Hyperbel einschreiben läßt, und zwar einem ganz im Endlichen liegenden rechtwinkligen Dreieck nur die eine gleichseitige Hyperbel, welche die Katheten des Dreiecks zu Asymptoten und die Hypotenuse zur weiteren Tangente hat. In dem Falle eines im Endlichen liegenden rechtwinkligen Fundamentaldreiecks gibt es also überhaupt nur eine Gerade T, für welche die Kurve zweiter

Klasse (3) oder (5) eine gleichseitige Hyperbel wird, und diese Gerade T ist die unendlich ferne Gerade $\mathfrak{J}$. *Man kann daher die folgende Untersuchung auf ein stumpfwinkliges Fundamentaldreieck beschränken.*

Nach dem Satze 883 läßt sich eine gleichseitige Hyperbel als eine Kurve zweiter Ordnung charakterisieren, die zum Kreispunktpaar apolar ist, deren Polarsystem zweiter Ordnung p also der Gleichung:

$$[pK] = 0 \tag{26}$$

Genüge leistet, unter K das Polarsystem zweiter Klasse des Kreispunktpaars verstanden. Um daher die Bedingungsgleichung dafür zu finden, daß die

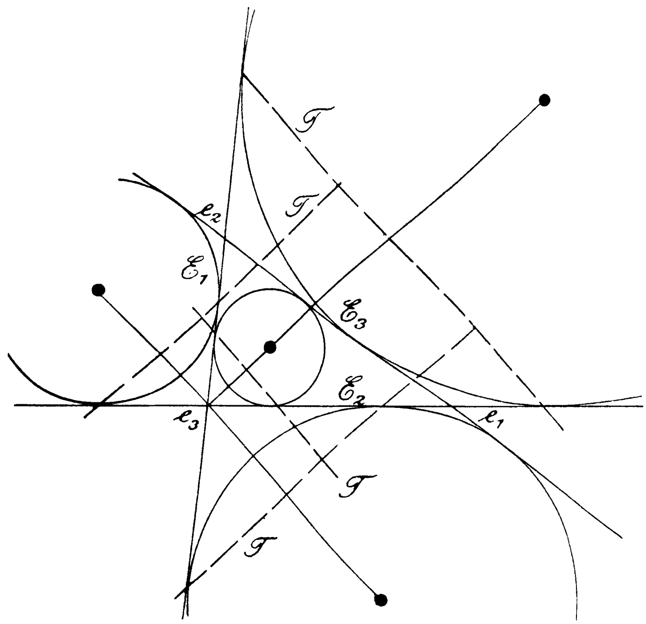


Fig. 225.

Kurve (3) oder (5) eine gleichseitige Hyperbel werde, hat man zunächst aus der Gleichung (5) die Gleichung der Kurve (5) in Punktkoordinaten abzuleiten.

Bezeichnet man die Determinante der Koeffizienten der Kurve zweiter Klasse (5) mit $\mathfrak{A}$, setzt also:

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_{11}, & \mathfrak{A}_{12}, & \mathfrak{A}_{13} \\ \mathfrak{A}_{21}, & \mathfrak{A}_{22}, & \mathfrak{A}_{23} \\ \mathfrak{A}_{31}, & \mathfrak{A}_{32}, & \mathfrak{A}_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & -\mathfrak{t}_3, & \mathfrak{t}_2 \\ -\mathfrak{t}_3, & 0, & \mathfrak{t}_1 \\ \mathfrak{t}_2, & \mathfrak{t}_1, & 0 \end{vmatrix},$$

so werden die Unterdeterminanten $\bar{\mathfrak{a}}_{ik}$ der Elemente $\mathfrak{A}_{ik}$ von $\mathfrak{A}$ wie in den Gleichungen (17) des vorigen Abschnitts:

$$\begin{cases} \bar{\mathfrak{a}}_{11} = -\mathfrak{t}_1^2, & \bar{\mathfrak{a}}_{22} = -\mathfrak{t}_2^2, & \bar{\mathfrak{a}}_{33} = -\mathfrak{t}_3^2 \\ \bar{\mathfrak{a}}_{23} = -\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3, & \bar{\mathfrak{a}}_{31} = -\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_1, & \bar{\mathfrak{a}}_{12} = +\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2. \end{cases}$$

Die Gleichung der Kurve (5) in Punktkoordinaten lautet daher:

$$(27)\qquad \mathfrak{t}_1^2\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{t}_2^2\mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{t}_3^2\mathfrak{x}_3^2 + 2\,\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + 2\,\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_1\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1 - 2\,\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = 0.$$

Soll diese Kurve zweiter Ordnung eine gleichseitige Hyperbel, also zum Kreispunktpaar $\boldsymbol{K}$ apolar sein, so muß ihr Polarsystem zweiter Ordnung $\boldsymbol{p}$ der Gleichung (26) genügen, d. h., es muß nach dem Satze 670 die Gleichung bestehen:

$$(28)\qquad \mathfrak{K}_{11}\mathfrak{t}_1^2 + \mathfrak{K}_{22}\mathfrak{t}_2^2 + \mathfrak{K}_{33}\mathfrak{t}_3^2 + 2\,\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3 + 2\,\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{t}_3\mathfrak{t}_1 - 2\,\mathfrak{K}_{12}\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$(29)\qquad [T\cdot T\boldsymbol{K}] - 4\,\mathfrak{K}_{12}\,[e_1 T]\,[e_2 T] = 0.$$

Diese Gleichung hat ganz die Form der Gleichung (12). Eine Gerade T, die als Bestimmungsstück der Kurve (27) (oder (5)) bewirkt, daß diese Kurve eine gleichseitige Hyperbel wird, ist somit notwendig eine Tangente einer gewissen Kurve zweiter Klasse (29) aus derjenigen konfokalen Schar, welche die Ecken e_1 und e_2 des Fundamentaldreiecks zu Brennpunkten hat, und umgekehrt hat jede Tangente der Kurve (29) die angegebene Eigenschaft.

Um die Kurve (29) vollständig zu charakterisieren, bestimme man noch ihre Gleichung in Punktkoordinaten. Dazu hat man zunächst die Unterdeterminanten $\bar{\mathfrak{a}}_{tu}$ der Determinante:

$$(30)\qquad \mathfrak{A} = \begin{vmatrix} \mathfrak{K}_{11}, & -\mathfrak{K}_{12}, & \mathfrak{K}_{13} \\ -\mathfrak{K}_{21}, & \mathfrak{K}_{22}, & \mathfrak{K}_{23} \\ \mathfrak{K}_{31}, & \mathfrak{K}_{32}, & \mathfrak{K}_{33} \end{vmatrix}$$

zu bilden.[1]) Dieselben werden mit den Unterdeterminanten $\bar{k}_{tu}$ der Determinante:

$$(31)\qquad \mathfrak{K} = \begin{vmatrix} \mathfrak{K}_{11}, & \mathfrak{K}_{12}, & \mathfrak{K}_{13} \\ \mathfrak{K}_{21}, & \mathfrak{K}_{22}, & \mathfrak{K}_{23} \\ \mathfrak{K}_{31}, & \mathfrak{K}_{32}, & \mathfrak{K}_{33} \end{vmatrix}$$

in engem Zusammenhang stehen. In der Tat wird:

$$(32)\qquad \bar{\mathfrak{a}}_{11} = \bar{k}_{11}, \quad \bar{\mathfrak{a}}_{22} = \bar{k}_{22}, \quad \bar{\mathfrak{a}}_{33} = \bar{k}_{33}.$$

Ferner ist: $\qquad \bar{\mathfrak{a}}_{12} = \mathfrak{K}_{21}\mathfrak{K}_{33} + \mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31},$

während andererseits:

$$(33)\qquad \bar{k}_{12} = -\,\mathfrak{K}_{21}\mathfrak{K}_{33} + \mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31}$$

ist. Die Vergleichung der Werte von $\bar{\mathfrak{a}}_{12}$ und $\bar{k}_{12}$ zeigt, daß zwischen diesen beiden Unterdeterminanten die Beziehung herrscht:

$$(34)\qquad \bar{\mathfrak{a}}_{12} = \bar{k}_{12} + 2\,\mathfrak{K}_{21}\mathfrak{K}_{33}.$$

---

[1]) Es wird zu keinen Verwechslungen Anlaß geben, wenn wir die bisher für die Determinante der Gleichung (5) und ihre Unterdeterminanten benutzten Bezeichnungen $\mathfrak{A}$ und $\bar{\mathfrak{a}}_{tu}$ von jetzt ab für die Determinante der Gleichung (28) und ihre Unterdeterminanten verwenden.

Ebenso findet man für $\bar{\mathfrak{a}}_{31}$ und $\bar{k}_{31}$ die Werte:

$$\bar{\mathfrak{a}}_{31} = -\mathfrak{K}_{12}\mathfrak{K}_{23} - \mathfrak{K}_{13}\mathfrak{K}_{22},$$
$$\bar{k}_{31} = +\mathfrak{K}_{12}\mathfrak{K}_{23} - \mathfrak{K}_{13}\mathfrak{K}_{22},$$

und es besteht somit die Beziehung:

$$\bar{\mathfrak{a}}_{31} = \bar{k}_{31} - 2\mathfrak{K}_{12}\mathfrak{K}_{23}. \tag{35}$$

Endlich wird:

$$\bar{\mathfrak{a}}_{23} = -\mathfrak{K}_{11}\mathfrak{K}_{32} - \mathfrak{K}_{12}\mathfrak{K}_{31}$$
$$\bar{k}_{23} = -\mathfrak{K}_{11}\mathfrak{K}_{32} + \mathfrak{K}_{12}\mathfrak{K}_{31},$$

so daß sich die Gleichung ergibt:

$$\bar{\mathfrak{a}}_{23} = \bar{k}_{23} - 2\mathfrak{K}_{12}\mathfrak{K}_{31}. \tag{36}$$

Die Gleichung der Kurve (28) oder (29) in Punktkoordinaten lautet also:

$$\left\{\begin{matrix} \bar{k}_{11}\mathfrak{x}_1^2 + \bar{k}_{22}\mathfrak{x}_2^2 + \bar{k}_{33}\mathfrak{x}_3^2 + 2\bar{k}_{23}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + 2\bar{k}_{31}\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1 + 2\bar{k}_{12}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 \\ -4\mathfrak{K}_{12}(\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + \mathfrak{K}_{23}\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{K}_{33}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2) \end{matrix}\right\} = 0. \tag{37}$$

Hier ist die Summe der 6 ersten Glieder gleich der quadratischen Form $[x \cdot xk]$, und diese ist nach der Gleichung (57) des 60. Abschnitts $= [xJ]^2$. Die Gleichung (37) läßt sich daher auch in der Form schreiben:

$$[xJ]^2 - 4\mathfrak{K}_{12}(\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + \mathfrak{K}_{23}\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{K}_{33}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2) = 0. \tag{38}$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Kurve zweiter Klasse (28) oder (29), aufgefaßt als Kurve zweiter *Ordnung*, zugleich dem Scharbüschel angehört, das durch die Hilfskurve:

$$\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 + \mathfrak{K}_{23}\mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{K}_{33}\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = 0 \tag{39}$$

und durch die doppelt zählende unendlich ferne Gerade bestimmt wird. Das aber besagt nach S. 60ff., daß sie *mit der Hilfskurve (39) homoasymptotisch ist.* Und diese Angabe genügt, um die Kurve (38) oder (29) eindeutig festzulegen.

Die Hilfskurve (39) ist nämlich, wie die Form ihrer Gleichung zeigt, dem Fundamentaldreiecke $e_1 e_2 e_3$ umschrieben. Sie geht also jedenfalls auch durch die Brennpunkte e_1 und e_2 der Kurve (29) hindurch. Wenn aber die mit der Kurve (29) homoasymptotische Kurve (39) durch die Brennpunkte von (29) geht, so ist sie mit ihr nicht nur homoasymptotisch, sondern, bestimmter ausgedrückt, *mit ihr konzentrisch, ähnlich und ähnlich gelegen.* Sie hat somit die Verbindungslinie der Brennpunkte e_1 und e_2 der Kurve (29) ebenfalls zur Achse der reellen Brennpunkte und die Punkte e_1 und e_2 selbst zu Scheiteln dieser Achse.

Daraus geht schon hervor, daß die Hilfskurve (39) eine Ellipse oder Hyperbel sein wird, je nachdem die Winkel des Fundamentaldreiecks bei e_1 und e_2 beide spitz sind oder einer von ihnen stumpf ist (vgl. die Figg. 226 und

227). Und dasselbe gilt dann auch von der mit der Kurve zweiter Ordnung (39) ähnlichen Kurve zweiter Ordnung (38), die, als Kurve zweiter Klasse aufgefaßt, die Hüllkurve der Träger der Berührungspunkte der Seiten E_1 und E_2 mit der dem Fundamentaldreieck eingeschriebenen gleichseitigen Hyperbel darstellt.

Man kann übrigens die Unterscheidung der beiden Fälle, wo die Gleichung (29) eine Ellipse oder eine Hyperbel darstellt, auch *rein analytisch* auf Grund

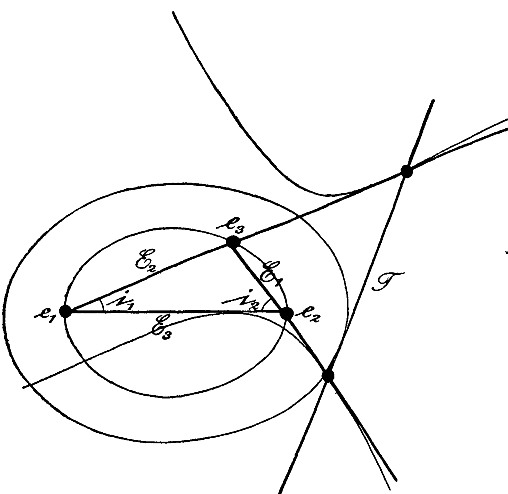


Fig. 226.

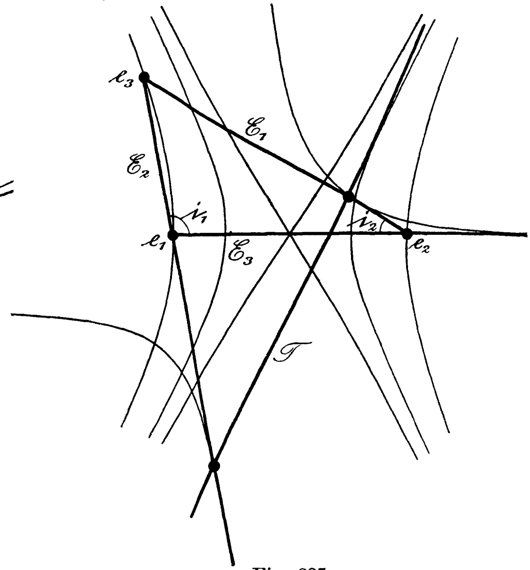


Fig. 227.

des Satzes 940 geben, nach welchem eine nicht entartende Kurve zweiter Klasse:

$$[U \cdot U\boldsymbol{P}] = 0$$

eine

(40) $\left\{\begin{matrix}\text{Ellipse oder}\\ \text{Hyperbel}\end{matrix}\right\}$ ist, je nachdem das Produkt $\mathfrak{A}[J \cdot J\boldsymbol{P}]$ $\left\{\begin{matrix}> 0 \text{ oder}\\ < 0\end{matrix}\right.$

ist, unter $\mathfrak{A}$ die Determinante des Polarsystems $\boldsymbol{P}$ und unter J einen Stab der unendlich fernen Geraden verstanden. Man hat also zunächst die Determinante $\mathfrak{A}$ des Polarsystems zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$ zu berechnen, das die Kurve zweiter Klasse (28) zur Polarkurve hat. Es wird:

$$(41) \qquad \mathfrak{A} = \begin{vmatrix} \mathfrak{K}_{11}, & -\mathfrak{K}_{12}, & \mathfrak{K}_{13} \\ -\mathfrak{K}_{21}, & \mathfrak{K}_{22}, & \mathfrak{K}_{23} \\ \mathfrak{K}_{31}, & \mathfrak{K}_{32}, & \mathfrak{K}_{33} \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{K}_{ut} = \mathfrak{K}_{tu},$$

Bei der Berechnung dieser Determinante kann man berücksichtigen, daß die Determinante $\mathfrak{K}$ des Kreispunktpaars, d. h. die Determinante:

$$(42) \qquad \mathfrak{K} = \begin{vmatrix} \mathfrak{K}_{11}, & \mathfrak{K}_{12}, & \mathfrak{K}_{13} \\ \mathfrak{K}_{21}, & \mathfrak{K}_{22}, & \mathfrak{K}_{23} \\ \mathfrak{K}_{31}, & \mathfrak{K}_{32}, & \mathfrak{K}_{33} \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{K}_{ut} = \mathfrak{K}_{tu},$$

verschwindet. Nun gestattet aber die Determinante $\mathfrak{K}$ des Kreispunktpaars die Darstellung:

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_{11}\bar{k}_{11} + \mathfrak{K}_{12}\bar{k}_{12} + \mathfrak{K}_{13}\bar{k}_{13},$$

wo $\bar{k}_{11}$, $\bar{k}_{12}$, $\bar{k}_{13}$ wie oben die zu den Elementen $\mathfrak{K}_{11}$, $\mathfrak{K}_{12}$, $\mathfrak{K}_{13}$ der Determinante $\mathfrak{K}$ gehörenden Unterdeterminanten sind. Es besteht daher die Gleichung:

$$0 = \mathfrak{K}_{11}\bar{k}_{11} + \mathfrak{K}_{12}\bar{k}_{12} + \mathfrak{K}_{13}\bar{k}_{13}. \tag{43}$$

Bezeichnet man ferner wieder die Unterdeterminanten der Determinante $\mathfrak{A}$ mit $\bar{\mathfrak{a}}_{ik}$, so wird:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{K}_{11}\bar{\mathfrak{a}}_{11} - \mathfrak{K}_{12}\bar{\mathfrak{a}}_{12} + \mathfrak{K}_{13}\bar{\mathfrak{a}}_{13}. \tag{44}$$

Hier stehen nach (32), (34), (35) und (36) die Unterdeterminanten $\bar{\mathfrak{a}}_{tu}$ mit den Unterdeterminanten $\bar{k}_{tu}$ in den Beziehungen:

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{\mathfrak{a}}_{11} = \bar{k}_{11}, \quad \bar{\mathfrak{a}}_{22} = \bar{k}_{22}, \quad \bar{\mathfrak{a}}_{33} = \bar{k}_{33} \\ \bar{\mathfrak{a}}_{23} = \bar{k}_{23} - 2\mathfrak{K}_{12}\mathfrak{K}_{31}, \quad \bar{\mathfrak{a}}_{31} = \bar{k}_{31} - 2\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{12}, \quad \bar{\mathfrak{a}}_{12} = \bar{k}_{12} + 2\mathfrak{K}_{21}\mathfrak{K}_{33}, \end{array}\right. \tag{45}$$

während zugleich allgemein:

$$\bar{k}_{ut} = \bar{k}_{tu} \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{a}}_{ut} = \bar{\mathfrak{a}}_{tu}$$

ist. Wegen (44) erhält man dann für die Determinante $\mathfrak{A}$ den Wert:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{K}_{11}\bar{k}_{11} - \mathfrak{K}_{12}(\bar{k}_{12} + 2\mathfrak{K}_{21}\mathfrak{K}_{33}) + \mathfrak{K}_{13}(\bar{k}_{13} - 2\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{12})$$

oder wegen (43):

$$\mathfrak{A} = -2\mathfrak{K}_{12}\bar{k}_{12} - 2\mathfrak{K}_{12}^2\mathfrak{K}_{33} - 2\mathfrak{K}_{13}\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{12}$$

oder endlich wegen (33):

$$\mathfrak{A} = -4\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{K}_{12}. \tag{46}$$

Andererseits wird, da $\boldsymbol{P}$ das Polarsystem zweiter Klasse sein sollte, das die Kurve (28) oder (29) zur Polarkurve hat, wegen (29):

$$[J \cdot J\boldsymbol{P}] = [J \cdot J\boldsymbol{K}] - 4\mathfrak{K}_{12}[e_1 J][e_2 J], \tag{47}$$

oder da wegen der Gleichung (25) des 60. Abschnitts:

$$[J \cdot J\boldsymbol{K}] = 0$$

und wegen der Gleichung (24) desselben Abschnitts:

$$[e_1 J] = \mathfrak{m}_1, \quad [e_2 J] = \mathfrak{m}_2$$

ist, so verkürzt sich die Gleichung (47) zu:

$$[J \cdot J\boldsymbol{P}] = -4\mathfrak{K}_{12}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2. \tag{48}$$

Für das über den Charakter der Polarkurve von $\boldsymbol{P}$ entscheidende Produkt $\mathfrak{A}[J \cdot J\boldsymbol{P}]$ findet man demnach die Darstellung:

$$\mathfrak{A}[J \cdot J\boldsymbol{P}] = +16\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31}\mathfrak{K}_{12}^2\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2. \tag{49}$$

Legt man jetzt den noch verfügbaren Einheitspunkt ins Innere des Fundamentaldreiecks, so sind nach S. 2ff. des ersten Teils dieses Bandes die Massen $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ der Ecken e_1 und e_2 des Fundamentaldreiecks entweder beide positiv oder beide negativ, und man kann das Kriterium (40) für eine Ellipse oder Hyperbel auch in der Form schreiben:

Die Polarkurve von $\boldsymbol{P}$, d. h. die Kurve (28) oder (29) wird eine

$$(50)\qquad \begin{Bmatrix}\text{Ellipse oder}\\ \text{Hyperbel,}\end{Bmatrix} \text{ je nachdem das Produkt } \mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31} \begin{Bmatrix}> 0 \text{ oder}\\ < 0 \text{ ist.}\end{Bmatrix}$$

Im Falle einer Hyperbel müssen also die beiden Größen $\mathfrak{K}_{23}$ und $\mathfrak{K}_{31}$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, und da nach den Gleichungen (30) des 60. Abschnitts:

$$(51)\qquad \mathfrak{K}_{23} = \frac{1}{\mathfrak{m}'^2}\frac{\cos(\mathfrak{p}_2'\mathfrak{p}_3')}{\mathfrak{p}_2'\mathfrak{p}_3'}, \quad \mathfrak{K}_{31} = \frac{1}{\mathfrak{m}'^2}\frac{\cos(\mathfrak{p}_3'\mathfrak{p}_1')}{\mathfrak{p}_3'\mathfrak{p}_1'}$$

ist, und die Winkel $<(\mathfrak{p}_2'\mathfrak{p}_3')$ und $<(\mathfrak{p}_3'\mathfrak{p}_1')$ für den Fall, wo der Einheitspunkt im Innern des Fundamentaldreiecks liegt, den Außenwinkeln $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ an den Ecken e_1 und e_2 des Fundamentaldreiecks gleich sind, so sieht man, daß von diesen beiden Außenwinkeln $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ bei einer Hyperbel der eine stumpf, der andere spitz sein muß; und dasselbe gilt dann auch von den beiden entsprechenden Innenwinkeln $\mathfrak{i}_1$ und $\mathfrak{i}_2$ (vgl. Fig. 227 auf S. 480).

In dem Falle einer Ellipse dagegen, d. h. in dem Falle, wo das Produkt:

$$\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31} > 0$$

ist, müssen die beiden Faktoren $\mathfrak{K}_{23}$ und $\mathfrak{K}_{31}$ negativ sein. Denn wären beide positiv, so würden die beiden Außenwinkel $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ spitz, die beiden Innenwinkel $\mathfrak{i}_1$ und $\mathfrak{i}_2$ also stumpf sein müssen, was unmöglich ist. Im Falle einer reellen oder imaginären Ellipse sind daher notwendig die beiden Innenwinkel $\mathfrak{i}_1$ und $\mathfrak{i}_2$ spitz.

Nun ist ferner nach dem Satze 942 eine durch die Gleichung (38) dargestellte Ellipse reell oder imaginär, je nachdem das Produkt $[g \cdot g\overline{\boldsymbol{p}}]$ negativ oder positiv ist. Dabei bedeutet $\overline{\boldsymbol{p}}$ den zu dem Polarsystem zweiter Klasse $\boldsymbol{P}$ der Kurve (28) oder (29) adjungierten Bruch. Es geht somit das Produkt $[g \cdot g\overline{\boldsymbol{p}}]$ aus der linken Seite von (38) dadurch hervor, daß man in ihr anstatt des Punktes x und seiner Ableitzahlen $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ einen Punkt g der unendlich fernen Geraden und seine Ableitzahlen $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ einsetzt. Man wähle etwa für den Punkt g den unendlich fernen Punkt der Seite E_3 des Fundamentaldreiecks, d. h., man setze:

$$(52)\qquad g = [JE_3] = [(\mathfrak{m}_1 E_1 + \mathfrak{m}_2 E_2 + \mathfrak{m}_3 E_3)E_3],$$

oder was dasselbe ist,

$$g = \mathfrak{m}_2 e_1 - \mathfrak{m}_1 e_2.$$

Die Ableitzahlen $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ von g besitzen alsdann die Werte:

$$(53)\qquad \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{m}_2, \quad \mathfrak{g}_2 = -\mathfrak{m}_1, \quad \mathfrak{g}_3 = 0.$$

Führt man aber diese Werte anstatt $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ in die Gleichung (38) ein und zugleich g anstatt x und berücksichtigt, daß wegen (52):

$$[gJ] = 0 \tag{54}$$

ist, so erhält man für das Produkt $[g \cdot g\overline{p}]$ den Wert:

$$[g \cdot g\overline{p}] = -4\,\mathfrak{K}_{12}\mathfrak{K}_{33}\,\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2. \tag{55}$$

Da aber auf der rechten Seite die Faktoren $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ entweder beide positiv oder beide negativ sind, weil der Einheitspunkt innerhalb des Fundamentaldreiecks angenommen ist, und ferner nach der dritten Gleichung (29) des 56. Abschnitts der Faktor

$$\mathfrak{K}_{33} = \frac{1}{\mathfrak{m}'^2}\,\frac{1}{\mathfrak{p}_3'^2}, \tag{56}$$

also positiv ist, so ist das Vorzeichen der rechten Seite von (55) mit dem von $\mathfrak{K}_{12}$ entgegengesetzt, und man kann daher sagen:

Sobald die beiden an der Seite E_3 des Fundamentaldreiecks liegenden Innenwinkel $\mathfrak{i}_1$ und $\mathfrak{i}_2$ dieses Dreiecks spitz sind, ist die Kurve zweiter Klasse (28) eine

reelle oder imaginäre Ellipse,

je nachdem der Koeffizient $\mathfrak{K}_{12}$

positiv oder negativ ist.

Nun ist aber nach der dritten Gleichung (30) des 60. Abschnitts:

$$\mathfrak{K}_{12} = \frac{1}{\mathfrak{m}'^2}\,\frac{\cos(\mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}_2')}{\mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}_2'}, \tag{57}$$

wo wieder $\sphericalangle(\mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}_2') = \mathfrak{a}_3$, dem Außenwinkel des Fundamentaldreiecks bei e_3 ist. Bezeichnet man daher noch den zugehörigen Innenwinkel des Dreiecks mit $\mathfrak{i}_3$, so kann man auch sagen:

Sind die Innenwinkel $\mathfrak{i}_1$ und $\mathfrak{i}_2$ des Fundamentaldreiecks spitz, so ist die Kurve (28) oder (29) eine

reelle oder imaginäre Ellipse,

je nachdem der Winkel $\mathfrak{i}_3$

stumpf oder spitz ist

(vgl. Fig. 227 auf S. 480).

Das damit gewonnene Ergebnis, daß die Kurve (28) imaginär wird, wenn das Fundamentaldreieck spitzwinklig ist, bestätigt von neuem den Satz 901, nach welchem sich einem spitzwinkligen Dreieck eine gleichseitige Hyperbel überhaupt nicht einschreiben läßt, und man hat die folgenden Sätze:

Satz 943: Dritter Satz von Dingeldey: Schreibt man einem stumpfwinkligen Dreieck alle möglichen gleichseitigen Hyperbeln ein und verbindet jedesmal die Berührungspunkte derjenigen beiden Dreiecksseiten miteinander, die den stumpfen Winkel des Dreiecks einschließen, so umhüllen die Verbindungslinien eine Ellipse, welche die Scheitel der beiden spitzen Winkel zu Brennpunkten hat und überdies mit derjenigen Ellipse ähnlich ist, die jene Brennpunkte zu Scheiteln der großen Achse hat und zugleich durch den Scheitel des stumpfen Winkels hindurchgeht. Umgekehrt schneidet jede Tangente der erstgenannten Ellipse aus den Schenkeln des stumpfen Dreieckswinkels die Berührungspunkte einer gleichseitigen Hyperbel aus, die dem Dreieck eingeschrieben ist[1]). Und:

Satz 944: Vierter Satz von Dingeldey: Schreibt man einem stumpfwinkligen Dreieck alle möglichen gleichseitigen Hyperbeln ein und verbindet jedesmal die Berührungspunkte zweier Dreiecksseiten, die einen spitzen Winkel des Dreiecks einschließen, so umhüllen die Verbindungslinien eine Hyperbel, welche die Scheitel der beiden andern Dreieckswinkel zu Brennpunkten hat und überdies mit derjenigen Hyperbel ähnlich ist, die diese Brennpunkte zu Scheiteln hat und außerdem durch den Scheitel jenes spitzen Winkels hindurchgeht. Umgekehrt schneidet jede Tangente der erstgnannten Hyperbel aus den Schenkeln des zugehörigen spitzen Winkels die Berührungspunkte einer gleichseitigen Hyperbel aus, die dem Dreieck eingeschrieben ist. (Vgl. Fig. 227 auf S. 480).

Wir stellen jetzt weiter *drittens* die Frage: Wie muß bei einer dem Fundamentaldreieck eingeschriebenen Kurve zweiter Klasse (3) oder (5) die Verbindungslinie T der Berührungspunkte der Seiten E_1 und E_2 des Fundamentaldreiecks gelegen sein, damit diese Kurve eine *Parabel* werde? Die Antwort lautet: Dies wird dann und nur dann eintreten, wenn diejenige Gleichung befriedigt wird, die aus der Gleichung (5) hervorgeht, falls man die in ihr auftretenden laufenden Koordinaten $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$ durch die Linienkoordinaten $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$ der unendlich fernen Geraden J ersetzt, d. h., wenn die Gleichung besteht:

$$\mathfrak{t}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3 + \mathfrak{t}_2 \mathfrak{m}_3 \mathfrak{m}_1 - \mathfrak{t}_3 \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 = 0. \tag{58}$$

Dieselbe nimmt bei der Division mit $\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3$ die Form an:

$$\frac{\mathfrak{t}_1}{\mathfrak{m}_1} + \frac{\mathfrak{t}_2}{\mathfrak{m}_2} - \frac{\mathfrak{t}_3}{\mathfrak{m}_3} = 0. \tag{59}$$

Man erhält also zwischen den Linienkoordinaten $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{t}_3$ der Geraden T eine Gleichung ersten Grades. Eine solche aber stellt ein Strahlbüschel dar, und speziell die Gleichung (59) das Strahlbüschel, dessen Scheitel die Punktkoordinaten:

$$\frac{1}{\mathfrak{m}_1}, \quad \frac{1}{\mathfrak{m}_2}, \quad -\frac{1}{\mathfrak{m}_3}$$

---

1) Vgl. auch zu diesem und den beiden folgenden Sätzen die auf S. 456 zitierten Arbeiten von F. Dingeldey.

besitzt. Nun sind die Punkte:

$$f_1 = \frac{e_1}{\mathfrak{m}_1}, \quad f_2 = \frac{e_2}{\mathfrak{m}_2}, \quad f_3 = \frac{e_3}{\mathfrak{m}_3}$$

die mit den Ecken e_1, e_2, e_3 des Fundamentaldreiecks zusammenfallenden *einfachen* Punkte. Der Punkt:

$$s = \frac{e_1}{\mathfrak{m}_1} + \frac{e_2}{\mathfrak{m}_2} + \frac{e_3}{\mathfrak{m}_3} = f_1 + f_2 + f_3$$

ist daher der geometrische Schwerpunkt des Fundamentaldreiecks, und die Brüche:

$$\frac{1}{\mathfrak{m}_1}, \quad \frac{1}{\mathfrak{m}_2}, \quad \frac{1}{\mathfrak{m}_3}$$

sind somit die Dreieckskoordinaten dieses Schwerpunktes. Die Größen:

$$\frac{1}{\mathfrak{m}_1}, \quad \frac{1}{\mathfrak{m}_2}, \quad -\frac{1}{\mathfrak{m}_3}$$

sind also die Dreieckskoordinaten desjenigen Punktes e_0 auf der von e_3 aus gezogenen Schwerlinie, der durch die Ecke e_3 und die gegenüberliegende

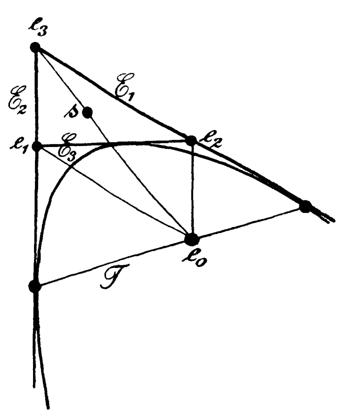


Fig. 228.

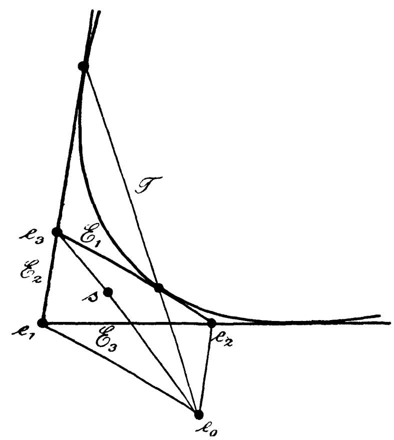


Fig. 229.

Seite E_3 des Fundamentaldreiecks von dessen Schwerpunkt s harmonisch getrennt wird, d. h. desjenigen Punktes e_0, den man erhält, wenn man die von der Ecke e_3 ausgehende Schwerlinie über die gegenüberliegende Seite E_3 hinaus um sich selbst verlängert, oder was auf dasselbe hinauskommt, die vierte Ecke des Parallelogramms, das die Seiten E_1 und E_2 des Fundamentaldreiecks zu anstoßenden Seiten hat (vgl. Figg. 228 und 229; diese beiden Figuren veranschaulichen die beiden Fälle, wo die Parabel in dem bei e_3 liegenden Innenwinkel des Fundamentaldreiecks oder in einem der beiden Außenwinkel bei e_3 gelegen ist). Man hat daher den Satz:

Satz 945: Fünfter Satz von Dingeldey: Schreibt man einem Dreieck alle möglichen Parabeln ein, so bilden die Verbindungslinien der Berührungspunkte dieser Parabeln mit zwei Seiten des Dreiecks ein Strahlbüschel, dessen Scheitel man erhält, wenn man die nach der dritten Seite gezogene Schwerlinie des Dreiecks über die Mitte dieser Seite hinaus um sich selbst verlängert. Und umgekehrt entspricht jedem Strahle dieses Strahlbüschels eine Parabel der angegebenen Art.

Wir fragen endlich *viertens:* Was für eine Lage muß die Gerade T haben, welche den Träger der Berührungspunkte der Seiten E_1 und E_2 des Fundamentaldreiecks mit der ihm eingeschriebenen Kurve zweiter Klasse (3) oder (5) bildet, wenn diese Kurve zweiter Klasse in ein *Punktpaar* zerfallen soll? Die Bedingung des Zerfallens einer beliebigen Kurve zweiter Klasse:

$$\mathfrak{A}_{11}\mathfrak{u}_1^2 + \mathfrak{A}_{22}\mathfrak{u}_2^2 + \mathfrak{A}_{33}\mathfrak{u}_3^2 + 2\mathfrak{A}_{23}\mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_3 + 2\mathfrak{A}_{31}\mathfrak{u}_3\mathfrak{u}_1 + 2\mathfrak{A}_{12}\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2 = 0$$

in ein Punktpaar lautet:

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_{11}, & \mathfrak{A}_{12}, & \mathfrak{A}_{13} \\ \mathfrak{A}_{21}, & \mathfrak{A}_{22}, & \mathfrak{A}_{23} \\ \mathfrak{A}_{31}, & \mathfrak{A}_{32}, & \mathfrak{A}_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \mathfrak{A}_{ki} = \mathfrak{A}_{ik}.$$

Die Bedingung dafür, daß die dem Fundamentaldreieck eingeschriebene Kurve zweiter Klasse (5) zerfällt, besitzt daher wie in der Gleichung (26) des vorigen Abschnitts die Form:

$$\begin{vmatrix} 0, & -\mathfrak{t}_3, & \mathfrak{t}_2 \\ -\mathfrak{t}_3, & 0, & \mathfrak{t}_1 \\ \mathfrak{t}_2, & \mathfrak{t}_1, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder was dasselbe ist, die Form:

$$\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_2\mathfrak{t}_3 = 0. \tag{60}$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Kurve zweiter Klasse (5) in ein Punktpaar zerfällt, *wenn die Gerade T durch eine von den 3 Ecken des Fundamentaldreiecks hindurchgeht;* und dieses Punktpaar kann auch nicht in einen doppelt zählenden Punkt übergehen, da ein solcher nicht dem Fundamentaldreieck eingeschrieben sein kann. Man hat also den Satz:

Satz 946: Eine einem Dreieck eingeschriebene Kurve zweiter Klasse, deren Berührungspunkte mit 2 Seiten des Dreiecks auf einer Geraden T liegen, zerfällt dann und nur dann in ein Punktpaar, wenn die Gerade T durch eine Ecke dieses Dreiecks hindurchgeht.

Man kann aber auch leicht die Punktpaare angeben, die man erhält, wenn das Dreieck, dem ein solches Punktpaar eingeschrieben ist, wieder wie oben das Fundamentaldreieck $e_1 e_2 e_3$ ist, und der Träger T der Berührungspunkte der Seiten E_1 und E_2 dieses Dreiecks mit jenem Punktpaar durch eine Ecke e_1, e_2, e_3 des Fundamentaldreiecks hindurchgeht.

Enthält die Gerade T die Ecke e_2 dieses Dreiecks (Fig. 230), so zerfällt die Kurve zweiter Klasse:

(3) $$[UE_1e_1Te_2E_2U] = 0$$

in die Punkte $[TE_2]$ und e_2.

In der Tat wird in diesem Falle für eine Gerade U des Strahlbüschels mit dem Scheitel $[TE_2]$ das Produkt der 5 ersten Faktoren der linken Seite von (3) kongruent mit der Geraden des Stabes T. Die Gleichung (3) wird somit für jeden Stab U des Strahlbüschels mit dem Scheitel $[TE_2]$ erfüllt.

Gehört andererseits die Gerade U dem Strahlbüschel mit dem Scheitel e_2 an, so wird das Produkt der 4 ersten Faktoren der linken Seite von (3)

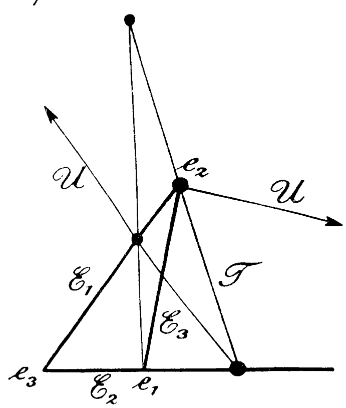


Fig. 230.

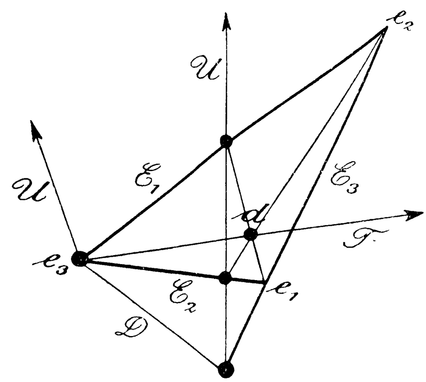


Fig. 231.

kongruent mit e_2. Das Produkt der 5 ersten Faktoren verschwindet also bereits, so daß auch für eine jede solche Gerade U die Gleichung (3) befriedigt wird.

Genau ebenso erledigt sich der Fall, wo die Gerade T den Punkt e_1 enthält.

Geht dagegen die Gerade T durch die Ecke e_3 des Fundamentaldreiecks hindurch (Fig. 231), so zerfällt die Kurve:

(3) $$[UE_1e_1Te_2E_2U] = 0$$

in den Punkt e_3 und in denjenigen auf der Seite E_3 des Fundamentaldreiecks liegenden Punkt, der von der Geraden T durch die Ecken e_1 und e_2 dieses Dreiecks harmonisch getrennt wird.

Für einen Strahl U des Strahlbüschels mit dem Scheitel e_3 nämlich wird das Produkt der 5 ersten Faktoren der linken Seite der Gleichung (3) kongruent mit der Geraden des Stabes E_1, woraus folgt, daß für einen solchen Strahl U die Gleichung (3) erfüllt wird.

Um in diesem Falle den zweiten Punkt des Punktpaars zu erhalten, bestimme man für einen beliebigen auf E_1 gelegenen Punkt denjenigen durch ihn hindurchgehenden Strahl U, welcher der Gleichung (3) Genüge leistet. Man verbinde also entsprechend der Gleichung (3) diesen Punkt $[UE_1]$ mit dem Punkte e_1 durch die Gerade $[UE_1 e_1]$, schneide die Verbindungslinie mit der Geraden T in dem Punkte $d = [UE_1 e_1 T]$, verbinde diesen Punkt mit dem Punkte e_2 durch die Gerade $[UE_1 e_1 T e_2]$ und schneide diese Verbindungslinie mit der Geraden E_2 in dem Punkte $[UE_1 e_1 T e_2 E_2]$, so muß dieser Punkt mit dem Punkte $[UE_1]$ verbunden denjenigen Strahl U der Kurve (3) ergeben, der in dem Strahlbüschel mit dem Scheitel $[UE_1]$ außer dem Strahle E_1 enthalten ist.

Wendet man aber auf die Ecke $E_1 T E_2$ des vollständigen Vierseits $E_1 E_2 E_3 U$ den Satz 303 an, so sieht man, daß seine Nebenseite D, welche die Verbindungslinie der Gegenecken $[E_3 U]$ und $[E_1 E_2]$ bildet, von der durch die gegenüberliegende Nebenecke d gehenden Geraden T durch die Seiten E_1 und E_2 harmonisch getrennt wird. Es wird daher auch die Gerade U durch die Ecken e_1 und e_2 von dem Punkte $[E_3 T]$ harmonisch getrennt, und alle Geraden U, welche diese Eigenschaft haben, gehen durch den Punkt $[E_3 D]$ hindurch. Folglich ist dieser Punkt $[E_3 D]$ der gesuchte zweite Punkt des Punktpaars, in das die Kurve zweiter Klasse (3) zerfällt.

Die durch die Asymptoten und eine weitere Tangente bestimmte Hyperbel als Erzeugnis zweier projektiven Punktreihen. Wir haben auf S. 467ff. die *allgemeine Erzeugung* einer Kurve zweiter Klasse durch 2 projektive Punktreihen mit den Trägern G_1 und G_2 behandelt. Dabei wurde die projektive Beziehung der beiden Punktreihen dadurch hergestellt, daß man die Punktreihen mit den Trägern G_1 und G_2 perspektiv auf 2 Hilfsstrahlbüschel beziehlich mit den Scheiteln h_1 und h_2 bezog, die wieder perspektiv zu einer Hilfspunktreihe mit dem Träger H lagen (vgl. Fig. 215).

In dem Satze 937 wurde alsdann der *besondere Fall* betrachtet, wo der Scheitel h_2 des zweiten Hilfsstrahlbüschels auf dem Träger G_1 der ersten erzeugenden Punktreihe liegt, und der Scheitel h_1 des ersten Hilfsstrahlbüschels auf dem Träger G_2 der zweiten erzeugenden Punktreihe. Dieser Fall war dadurch ausgezeichnet, daß die erzeugte Kurve zweiter Klasse nicht nur wie im allgemeinen Falle die Verbindungslinie $C = [h_1 h_2]$ der Scheitel h_1 und h_2 der beiden Hilfsstrahlbüschel und die Träger G_1 und G_2 der beiden erzeugenden Punktreihen zu Tangenten hat, *sondern daß überdies die Schnittpunkte* $b_1 = [G_1 H]$ *und* $b_2 = [G_2 H]$ *des Trägers* H *der Hilfspunktreihe mit den Trägern* G_1 *und* G_2 *der beiden erzeugenden Punktreihen die Berührungspunkte der Tangenten* G_1 *und* G_2 *bilden* (vgl. Fig. 217), so daß die erzeugte Kurve zweiter Klasse die 3 Geraden C, G_1, G_2 zu Tangenten hat und von den beiden letzten Tangenten in den Punkten $b_1 = [G_1 H]$ und $b_2 = [G_2 H]$ berührt wird.[1])

1) Die Fig. 217 kann dabei als die Figur eines auf ein Vierseit reduzierten Brianchonschen Sechsseits aufgefaßt werden (vgl. Bd. I, S. 106).

Wir *spezialisieren jetzt weiter* die so bestimmte Kurve zweiter Klasse dadurch, daß wir den Träger H der Hilfspunktreihe in die unendlich ferne Gerade $\mathfrak{J}$ verlegen. Dann wird die von den beiden projektiven Punktreihen erzeugte Kurve zweiter Klasse diejenige Hyperbel, welche die Gerade C zur Tangente und die Geraden G_1 und G_2 zu Asymptoten, den Punkt $m = [G_1 G_2]$ also zum Mittelpunkte hat (vgl. die Figg. 232 u. 233).

Die Gleichung dieser Hyperbel ergibt sich aus der Gleichung (2) einer beliebigen Kurve zweiter Klasse, wenn man in ihr $H = \mathfrak{J}$ setzt, wodurch die Gleichung hervorgeht:

$$[U G_1 h_1 \mathfrak{J} h_2 G_2 U] = 0, \tag{61}$$

oder wenn man für die Punkte h_1 und h_2 ihre Werte:

$$h_1 = [C G_2] \quad \text{und} \quad h_2 = [C G_1] \tag{62}$$

setzt, die Gleichung:

$$[U G_1 (C G_2) \mathfrak{J} (C G_1) G_2 U] = 0 \tag{63}$$

als *Gleichung der Hyperbel mit den Asymptoten G_1 und G_2 und der weiteren Tangente $C = [h_1 h_2]$*. Dabei bedeutet $\mathfrak{J}$ einen Stab der unendlich fernen Geraden.

Die laufende Tangente U der Hyperbel (61) oder (63) erhält man, wenn man berücksichtigt, daß in dem durch die Fig. 217 dargestellten Falle einer Kurve zweiter Klasse, bei welcher der Träger H der Hilfspunktreihe noch im Endlichen lag, der Brianchonsche Punkt x des auf ein Vierseit reduzierten Brianchonschen Sechsseits auf dem Träger H jener Hilfspunktreihe ganz beliebig gewählt werden konnte, und daß jeder Punkt x dieser Geraden eine Tangente U der Kurve zweiter Klasse lieferte. In der Tat ergab sich in diesem Falle eine Tangente U der durch die beiden projektiven Punktreihen erzeugten Kurve zweiter Klasse, indem man einen beliebigen Punkt x des Trägers H der Hilfspunktreihe mit den Scheiteln h_1 und h_2 der beiden Hilfsstrahlbüschel durch die Geraden:

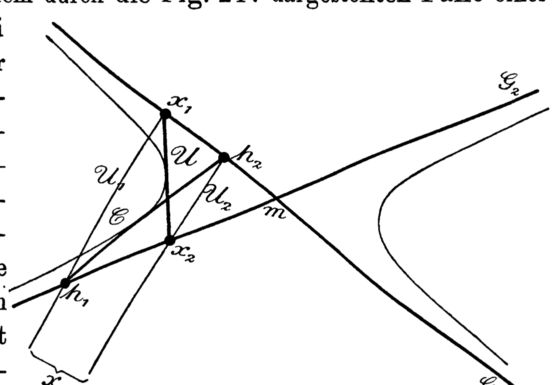


Fig. 232.

$$U_1 = [h_1 x] \quad \text{und} \quad U_2 = [h_2 x]$$

verband und die Verbindungslinien mit den Trägern G_1 und G_2 der beiden erzeugenden Punktreihen zum Schnitt brachte in den Punkten x_1 und x_2. Dann war die Verbindungslinie $U = [x_1 x_2]$ dieser beiden Schnittpunkte eine

Tangente der von den beiden projektiven Punktreihen erzeugten Kurve zweiter Klasse.

Bei der Hyperbel (61) oder (63) hat man also durch die Schnittpunkte $h_1 h_2$ der gegebenen Tangente C mit den Asymptoten G_2 und G_1 zwei Linien U_1 und U_2 zu ziehen, die nach einem beliebigen Punkte x der unendlich fernen Geraden $\mathfrak{J}$ laufen, d. h. man hat durch die Punkte h_1 und h_2 in beliebiger Richtung zwei parallele Linien U_1 und U_2 zu legen und sie mit den Asymptoten G_1 und G_2 zu schneiden in x_1 und x_2 und schließlich x_1 und x_2 zu verbinden. Dann ist die Verbindungslinie $U = [x_1 x_2]$ eine neue Tangente der Hyperbel (61) oder (63).

Die Fig. 232 erläutert den Fall, wo die beiden Parallelen U_1 und U_2 nur diejenigen Asymptotenhälften schneiden, welche auch von der Tangente C getroffen werden, die Fig. 233 den Fall, wo sie auch die andern Asymptotenhälften schneiden. Im ersten Falle liefert die angegebene Konstruktion eine Tangente U, die demselben Hyperbelzweige angehört wie die Tangente C, in dem letzten Falle eine Tangente U des anderen Hyperbelzweiges.

Unsere Entwicklung enthält die folgende Erzeugungsweise einer Hyperbel, aufgefaßt als Kurve zweiter Klasse:

Satz 947: Erste Fassung: Verändert sich ein einfaches Trapez, von dem eine Schenkelseite festliegt, in der Weise, daß seine 4 Ecken stets auf 2 festen Geraden bleiben, so umhüllt die andere Schenkelseite diejenige Hyperbel, deren Asymptoten die beiden festen Geraden sind, und der auch die festliegende Schenkelseite als Tangente angehört.[1])

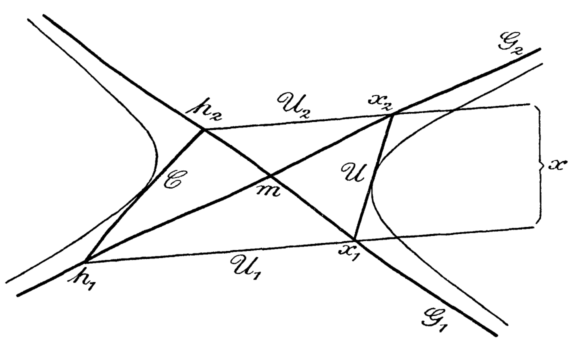


Fig. 233.

Man kann diesem Satze auch die Fassung geben:

Satz 947: Zweite Fassung: Man erzeugt eine Hyperbel, die durch ihre Asymptoten G_1 und G_2 und eine weitere Tangente C bestimmt wird, mittels zweier projektiven Punktreihen, die den Asymptoten angehören, indem man die Tangente C mit den Asymptoten G_1 und G_2 zum

[1]) Wir nennen ein einfaches Viereck, von dem 2 Gegenseiten parallel sind, ein *einfaches Trapez,* die beiden parallelen Seiten seine Grundseiten, die beiden anderen Seiten seine Schenkelseiten. Das einfache Trapez kann auch *überschlagene Form* haben. In dem obigen Satze handelt es sich um das einfache Trapez $h_1 x_1 x_2 h_2$, dessen Seiten die Geraden $U_1\, U U_2\, C$ bilden. In der Fig. 232 ist also das Trapez überschlagen.

Schnitt bringt bzw. in den Punkten h_2 und h_1, durch diese Punkte in beliebiger Richtung 2 Parallelen U_2 und U_1 zieht bis zum Schnitt mit den Asymptoten G_2 und G_1 in den Punkten x_2 und x_1. Dann ist ihre Verbindungslinie $U = [x_1 x_2]$ eine Tangente der Hyperbel.

Da in den Figg. 232 u. 233 die Dreiecke $x_2 h_2 x_1$ und $x_2 h_2 h_1$ gleichen Flächeninhalt haben, und aus beiden Dreiecken durch Addition (Fig. 232) oder Subtraktion (Fig. 233) des absoluten Werts des Dreiecks $m x_2 h_2$ die Dreiecke $x_2 m x_1$ und $h_1 m h_2$ hervorgehen, so haben auch diese beiden Dreiecke gleichen Flächeninhalt, und man hat den Satz:

Satz 948: Die Dreiecke, die sich an die Asymptoten einer Hyperbel anlehnen und jedesmal eine Tangente der Hyperbel zur Seite haben, besitzen gleichen Flächeninhalt.

Die Parabel als Erzeugnis zweier nicht perspektiven ähnlichen Punktreihen. Da nach S. 253 u. 275 des ersten Teils dieses Bandes (vgl. auch Satz 940) eine Parabel als eine nicht zerfallende Kurve zweiter Klasse charakterisiert werden kann, welche die unendlich ferne Gerade $\mathfrak{J}$ zur Tangente hat, so gelangt man von der auf S. 469 ff. betrachteten, dem Satze 937 entsprechenden, Erzeugung einer Kurve zweiter Klasse (Fig. 217) zu der Erzeugung einer *Parabel,* wenn man nicht wie bei der soeben betrachteten Erzeugung einer Hyperbel durch zwei projektive Punktreihen ihrer Asymptoten den Träger H der Hilfspunktreihe ins Unendliche rücken läßt, sondern eine Tangente, etwa die Tangente C der Kurve, durch die unendlich ferne Gerade $\mathfrak{J}$ ersetzt. Die Scheitel h_1 und h_2 der beiden Hilfsstrahlbüschel gehen dann in die unendlich fernen Punkte:

$$(64) \qquad j_1 = [G_2 \mathfrak{J}] \quad \text{und} \quad j_2 = [G_1 \mathfrak{J}]$$

der Träger G_2 und G_1 der beiden erzeugenden Punktreihen über, und die obige Gleichung (2) der von den beiden projektiven Punktreihen erzeugten Kurve zweiter Klasse nimmt die Form an:

$$(65) \qquad [U G_1 (G_2 \mathfrak{J}) H (G_1 \mathfrak{J}) G_2 U] = 0.$$

Damit die durch diese Gleichung zweiten Grades in U ausgedrückte Kurve zweiter Klasse nicht in ein Punktpaar zerfalle, dürfen

erstens die drei Tangenten G_1, G_2, $\mathfrak{J}$ sich nicht in *einem* Punkte schneiden, oder was dasselbe ist, die Träger G_1 und G_2 der beiden erzeugenden Punktreihen dürfen nicht einander parallel sein.

Zweitens aber darf auch die Berührungssekante H der beiden Tangenten G_1 und G_2 weder durch den Schnittpunkt $r = [G_1 G_2]$ noch durch einen der beiden unendlich fernen Punkte j_2 und j_1 dieser Geraden hindurchgehen.

Schließen wir beides aus, so stellt die Gleichung (65) eine *Parabel* dar.

Denkt man sich die beiden Tangenten G_1 und G_2, d. h. die Träger der beiden erzeugenden Punktreihen, und ihre Berührungspunkte b_1 und b_2 mit der Parabel gegeben (Fig. 234), so ist der Träger H der Hilfspunktreihe die Verbindungslinie jener Berührungspunkte b_1 und b_2, und man findet eine weitere Tangente U der Parabel, indem man auf der Geraden H einen beliebigen Punkt x annimmt, ihn mit den unendlich fernen Punkten j_1 und j_2 der Geraden G_2 und G_1 verbindet durch die Geraden U_1 und U_2, und die Verbindungslinien bzw. mit den Trägern G_1 und G_2 der erzeugenden Punktreihen schneidet in den Punkten x_1 und x_2. Dann sind die Punkte x_1 und x_2 zwei zugeordnete Punkte der beiden projektiven Punktreihen, und ihre Verbindungslinie $U = [x_1 x_2]$ ist somit eine weitere Tangente der Parabel.

Darin liegt die folgende *Erzeugungsweise einer Parabel:*

Satz 949: Gleiten die Ecken eines veränderlichen Dreiecks auf 3 festen Geraden, und bleiben dabei 2 Seiten des Dreiecks zweien

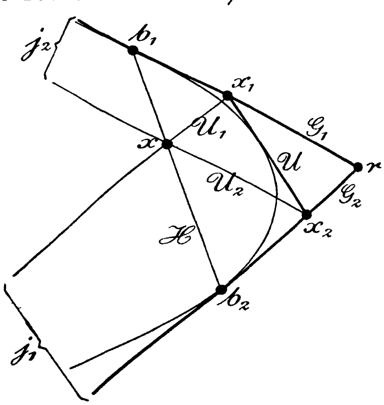


Fig. 234.

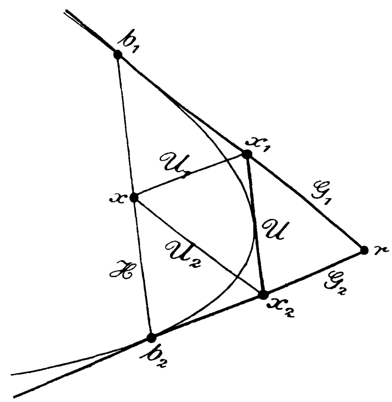


Fig. 235.

von diesen festen Geraden parallel, so umhüllt die dritte Seite eine Parabel. Dieselbe hat die beiden festen Geraden, denen jene zwei Seiten des veränderlichen Dreiecks parallel bleiben, ebenfalls zu Tangenten und die dritte feste Gerade zur Berührungssekante dieser beiden Tangenten.

Ein Interesse bietet noch diejenige Tangente $U = [x_1 x_2]$ der Parabel, die der Berührungssehne $b_1 b_2$ der beiden Tangenten G_1 und G_2 parallel läuft (Fig. 235). Da für diese Tangente nicht nur das Viereck $x x_1 r x_2$ ein Parallelogramm ist wie bei jeder Tangente der Parabel (vgl. die obige Fig. 234), sondern dasselbe auch von den beiden Vierecken $x b_1 x_1 x_2$ und $x b_2 x_2 x_1$ gilt, so halbiert in diesem Falle die Tangente $U = [x_1 x_2]$ in den Punkten x_1 und x_2 die Tangenten $r b_1$ und $r b_2$. Ferner halbiert der Punkt x die Berührungssehne $b_1 b_2$ der beiden Tangenten $r b_1$ und $r b_2$, und endlich ist die Tangente $x_1 x_2$ halb so groß wie diese Berührungssehne.

Man kann aber auch leicht noch den Berührungspunkt der Tangente U angeben. Nach dem Satze von Brianchon fürs *Dreiseit* (Satz 70) erhält man den Berührungspunkt b der Seite U des der Parabel umschriebenen

Dreiseits $G_1 G_2 U$, indem man von den Berührungspunkten b_1 und b_2 der Seiten G_1 und G_2 dieses Dreiseits die Linien nach den gegenüberliegenden Ecken x_2 und x_1 des Dreiseits zieht und den Schnittpunkt s der beiden Verbindungslinien, d. h. den Brianchonschen Punkt dieses Dreiseits, mit der dritten Ecke r des Dreiseits verbindet; dann schneidet diese Verbindungslinie aus der dritten Seite U des Dreiseits ihren Berührungspunkt b mit der Parabel aus (Fig. 236). Nun sind aber die beiden erstgenannten Verbindungslinien $b_1 x_2$ und $b_2 x_1$ zwei Schwerlinien des Dreiecks $r b_1 b_2$, der Punkt s ist also der Schwerpunkt dieses Dreiecks. Die Verbindungslinie rs bildet daher ebenfalls eine Schwerlinie des Dreiecks und geht somit durch den Mittelpunkt x der Seite $b_1 b_2$ hindurch. Daraus wiederum folgt endlich, daß auch der Berührungspunkt b der Mittelpunkt von $x_1 x_2$ ist.

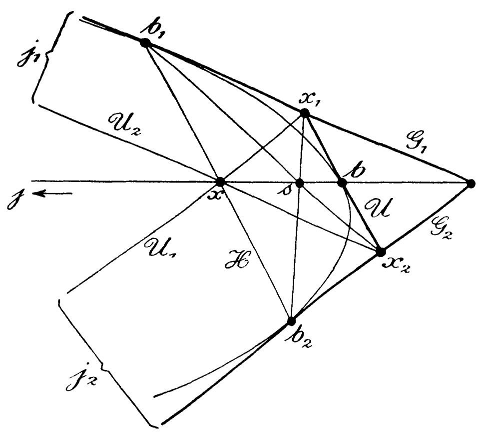


Fig 236.

Man kann noch hinzufügen, daß die Gerade rbx ein Durchmesser der Parabel ist. Nach S. 275 des ersten Teils dieses Bandes bezeichnet man als Durchmesser einer Parabel eine jede Gerade, die von einem im Endlichen liegenden Punkte b der Kurve nach dem Berührungspunkt j der Parabel mit der unendlich fernen Geraden $\mathfrak{J}$ führt, und jener Punkt b heißt der Scheitel dieses Durchmessers. Wendet man aber auf das einfache, der Parabel umschriebene Vierseit $\mathfrak{J} G_1 U G_2$ mit den Berührungspunkten j und b der Gegenseiten $\mathfrak{J}$ und U den Satz von Brianchon *fürs einfache Vierseit* (Satz 68) an, so sieht man, daß der Parabeldurchmesser bj durch den Brianchonschen Punkt x dieses Vierseits, d. h. durch den Schnittpunkt der Diagonalen $x_1 j_1$ und $x_2 j_2$ des Vierseits geht, und daraus folgt in der Tat, daß die Gerade rbx ein Durchmesser der Parabel ist, und dabei ist $rb = bx$, weil der Punkt b der Diagonalenschnittpunkt des Parallelogramms $x x_1 r x_2$ ist (vgl. die obige Fig. 236). Man hat also den Satz:

Satz 950: Legt man von einem Punkte r außerhalb einer Parabel die beiden Tangenten rb_1 und rb_2 an die Kurve mit den Berührungspunkten b_1 und b_2 und zieht außerdem zwischen ihnen diejenige dritte Tangente, die der Berührungssehne $b_1 b_2$ der beiden ersten Tangenten parallel ist, so halbiert diese Tangente die beiden ersten Tangenten rb_1 und rb_2, ist halb so groß wie deren Berührungssehne $b_1 b_2$ und wird selbst durch ihren Berührungspunkt b halbiert. Ferner geht der Durchmesser der Parabel, von dem Ausgangspunkte r der beiden ersten Tangenten aus gezogen, durch den Berührungspunkt b der dritten Tangente hindurch und halbiert die Berührungssehne $b_1 b_2$ der beiden ersten Tangenten. Endlich wird das Stück des Durchmessers zwischen dem Ausgangspunkt der beiden ersten Tangenten und dem Schnittpunkt x mit ihrer Berührungssehne durch den Scheitel b des Durchmessers halbiert.

Konstruiert man zu beliebig vielen Punkten $x, x', x'', \ldots$ des Trägers H der Hilfspunktreihe die zugehörigen Punkte $x_1, x_1', x_1'', \ldots$ der ersten erzeugenden Punktreihe, indem man durch jene Punkte $x, x', x'', \ldots$ der Hilfspunktreihe die Parallelen U_1, U_1', U_1'', ... zum Träger G_2 der zweiten erzeugenden Punktreihe zieht bis zum Schnitt mit dem Träger G_1 der ersten erzeugenden Punktreihe in den Punkten x_1, x_1', x_1'', ..., und konstruiert man ebenso die zugehörigen Punkte $x_2, x_2', x_2'', \ldots$ der zweiten erzeugenden Punktreihe mittels der Parallelen U_2, U_2', U_2'', ..., durch die Punkte x, x', x'', ... der Hilfspunktreihe zum Träger G_1 der ersten erzeugenden Punktreihe gezogen bis zum Schnitt mit dem Träger G_2 der zweiten erzeugenden Punktreihe, so sind die Geraden:

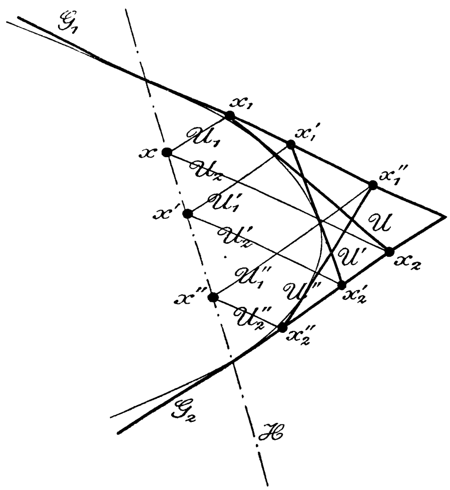


Fig. 237.

$$U = [x_1 x_2], \quad U' = [x_1' x_2'], \quad U'' = [x_1'' x_2''], \ldots$$

Tangenten der Parabel (Fig. 237).

Nennt man daher noch zwei Punktreihen zweier Geraden einander ähnlich, wenn sich die Abschnitte zwischen den Punkten der einen Punktreihe verhalten wie die entsprechenden Abschnitte auf der andern, so ist wegen des Parallelismus der Geraden U_1, U_1', U_1'', ...

die Punktreihe $x_1, x_1', x_1'', \ldots$ auf G_1 ähnlich mit der Punktreihe $x, x', x'', \ldots$ auf H

und wegen des Parallelismus der Geraden U_2, U_2', U_2'', ...

die Punktreihe $x_2, x_2', x_2'', \ldots$ auf G_2 ähnlich mit der Punktreihe $x, x', x'', \ldots$ auf H.

Folglich ist auch drittens

die Punktreihe $x_1, x_1', x_1'', \ldots$ auf G_1 ähnlich mit der Punktreihe $x_2, x_2', x_2'', \ldots$ auf G_2.

Da übrigens die Punktreihen $x_1, x_1', x_1'', \ldots$ und $x_2, x_2', x_2'', \ldots$ der Geraden G_1 und G_2 zwei projektive Punktreihen sind, die nur der Bedingung unterliegen, daß *ihre unendlich fernen Punkte einander entsprechen*, so hat man zugleich den Satz bewiesen:

Satz 951: Sind in zwei projektiven Punktreihen die unendlich fernen Punkte ihrer Geraden einander zugeordnet, so sind die Punktreihen ähnlich.

Ferner hat man für die Parabel die Beziehung:

Zwei projektive Punktreihen, welche eine Parabel erzeugen, sind einander ähnlich.

Und von diesem Ergebnis gilt auch die folgende Umkehrung:

Je zwei ähnliche Punktreihen einer Ebene, die nicht perspektiv liegen, erzeugen eine Parabel.

Da die Parabel als eine *nicht zerfallende* Kurve zweiter Klasse charakterisiert ist, welche die unendlich ferne Gerade zur Tangente hat, und das Erzeugnis zweier perspektiven Punktreihen in ein Punktpaar zerfällt, so ist es klar, daß für die Erzeugung einer Parabel der Fall *perspektiv ähnlicher* Punktreihen ausgeschlossen werden muß, und zwar für die beiden möglichen Fälle, wo

erstens die Träger der beiden ähnlichen Punktreihen parallel sind, wo also die beiden ähnlichen Punktreihen ein im Endlichen liegendes oder ein unendlich fernes Perspektivitätszentrum haben. (Letzteres wird zutreffen, wenn die beiden parallelen ähnlichen Punktreihen gleichsinnig kongruent sind.) Das Erzeugnis der beiden ähnlichen Punktreihen zerfällt dann in das im Endlichen oder Unendlichen liegende Perspektivitätszentrum und den unendlich fernen Schnittpunkt der beiden Träger.

Der *zweite Fall* der Perspektivität ähnlicher Punktreihen ist der, wo die Träger der beiden ähnlichen Punktreihen sich im Endlichen schneiden, das Perspektivitätszentrum aber unendlich fern liegt. Auch in diesem Falle zerfällt das Erzeugnis der beiden ähnlichen Punktreihen in ein Punktpaar, und zwar in ein Punktpaar, von dem ein Punkt unendlich fern, der andere im Endlichen liegt.

Schließen wir aber den Fall der perspektiven Lage ähnlicher Punktreihen aus und berücksichtigen, daß in zwei ähnlichen Punktreihen ihrem Begriffe zufolge die unendlich fernen Punkte ihrer Träger einander entsprechen, so kann man in der Tat umgekehrt folgern, daß das Erzeugnis zweier nicht perspektiven ähnlichen Punktreihen notwendig eine Parabel ist.

Denkt man sich nämlich von den ähnlichen Punktreihen zweier Geraden G_1 und G_2 außer den einander entsprechenden unendlich fernen Punkten ihrer Träger zwei Paare zugeordneter Punkte x_1, x_2 und x_1', x_2' gegeben, so kann man zu jedem weiteren Punkte x_1'' der ersten Punktreihe den entsprechenden Punkt x_2'' der zweiten Punktreihe nach dem Vorbilde der Fig. 237

durch mehrfache Anwendung der Perspektive gewinnen. Die ähnlichen Punktreihen sind also sicher auch *projektiv.*

Ihr Erzeugnis ist somit, falls diese Punktreihen nicht perspektiv liegen, eine nicht zerfallende Kurve zweiter Klasse, der die unendlich ferne Gerade als Tangente angehört, d. h. eine *Parabel.*

Faßt man dies mit dem oben auf S. 494 gefundenen Ergebnis zusammen, so hat man den Satz:

Satz 952: Zwei projektive Punktreihen, die eine Parabel erzeugen, sind einander ähnlich, und umgekehrt ist das Erzeugnis zweier nicht perspektiv liegenden ähnlichen Punktreihen mit zwei verschiedenen Trägern derselben Ebene eine Parabel.

Man kann übrigens die Erzeugung einer Parabel anstatt an die Fig. 217 eines auf ein Vierseit reduzierten Brianchonschen Sechsseits auch an die Fig. 215 des allgemeinen Brianchonschen Sechsseits anlehnen, indem man auch in ihr eine Seite des Sechsseits ins Unendliche verlegt. Hält man also in dieser Figur die Tangenten G_1 und G_2, d. h. die Träger der beiden erzeugenden Punktreihen, und ebenso die Tangenten B und D der von jenen Punktreihen erzeugten Kurve zweiter Klasse fest, und damit dann auch den Träger H der Hilfspunktreihe, der ja die Punkte $[G_1 B]$ und $[G_2 D]$ miteinander verbindet, läßt aber die fünfte Tangente C in die unendlich ferne Gerade $\mathfrak{J}$ übergehen, so daß die Scheitel h_1 und h_2 der beiden Hilfsstrahlbüschel auf den Tangenten D und B ins Unendliche rücken, so treten an die Stelle der Punkte h_1 und h_2 die Punkte

(66) $$j_1 = [D\mathfrak{J}] \quad \text{und} \quad j_2 = [B\mathfrak{J}],$$

und die Gleichung (2) nimmt die Form an:

(67) $$[UG_1(D\mathfrak{J})H(B\mathfrak{J})G_2U] = 0.$$

Der Kurve zweiter Klasse (67) gehört dann die unendlich ferne Gerade $\mathfrak{J}$ als Tangente an.

Setzen wir daher noch voraus, daß keine 3 von den 5 Tangenten G_1, G_2, B, D, $\mathfrak{J}$ der Kurve zweiter Klasse (67) sich in *einem* Punkte schneiden, oder was auf dasselbe hinauskommt, daß von den 4 im Endlichen liegenden Tangenten G_1, G_2, B, D keine 3 sich in *einem* Punkte schneiden und keine 2 einander parallel sind, so kann die Kurve zweiter Klasse (67) *auch nicht in ein Punktpaar zerfallen.* Denn von 5 Erzeugenden eines Punktpaares gehen notwendig mindestens 3 Erzeugende durch einen Punkt dieses Punktpaares hindurch.

Eine nicht zerfallende Kurve zweiter Klasse aber, welche die unendlich ferne Gerade zur Tangente hat, ist eine *Parabel.* Die Gleichung (67) stellt somit unter den gemachten Voraussetzungen diejenige Parabel dar, welche die Träger G_1 und G_2 der beiden erzeugenden Punktreihen und die Geraden B und D zu Tangenten hat.

Will man, daß in der Gleichung der Parabel *nur* diese 4 Tangenten G_1, G_2, B, D und die unendlich ferne Gerade $\mathfrak{J}$ auftreten, so hat man den Träger H der Hilfspunktreihe durch jene 4 Tangenten auszudrücken. Es wird:

$$H = [G_1 B \cdot G_2 D], \tag{68}$$

und die Gleichung (67) nimmt bei Einführung dieses Wertes die Gestalt an:

$$[U G_1 (D\mathfrak{J})(G_1 B \cdot G_2 D)(B\mathfrak{J}) G_2 U] = 0. \tag{69}$$

Für die laufende Tangente U der Parabel (67) oder (69) ergibt sich die folgende Konstruktion:

Man nehme auf dem Träger H der Hilfspunktreihe einen Punkt x beliebig an, ziehe durch ihn die Parallelen U_1 und U_2 zu den Tangenten D und B,

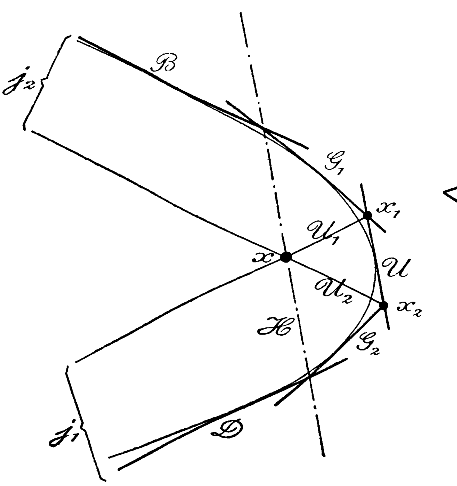


Fig. 238.

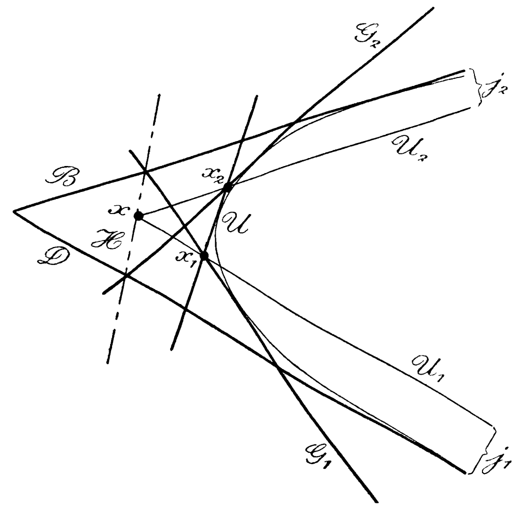


Fig: 239.

welche die Träger G_1 und G_2 der beiden erzeugenden Punktreihen beziehlich in den Punkten x_1 und x_2 schneiden mögen; dann ist die Gerade $U = [x_1 x_2]$ eine Tangente der Parabel (65).

Die Figg. 238 u. 239 erläutern die beschriebene Erzeugung für die beiden Fälle, wo von den Punkten $[G_1 B]$ und $[G_2 D]$ aus gerechnet die Geraden B und D nach derselben Seite konvergieren wie die Geraden G_1 und G_2 oder nach der anderen Seite. Man liest aus ihnen den Satz ab:

Satz 953: Bewegen sich die Ecken eines veränderlichen Dreiecks auf 3 festen Geraden, die ein im Endlichen liegendes eigentliches Dreieck bilden, in der Weise, daß 2 Seiten des Dreiecks zu zwei festen Geraden von verschiedener Richtung parallel bleiben, so umhüllt die dritte Seite eine Parabel.

Abschnitt 65.

Projektiv oder metrisch ausgezeichnete Kegelschnittnetze und -Gewebe.

Das Gewebe von Kurven zweiter Klasse, die zwei Tangenten gemein haben. Es soll das Kegelschnittgewebe untersucht werden, dessen Kurven sämtlich zwei feste Geraden T_1 und T_2 zu Tangenten haben.[1] Für ein solches Gewebe kann man *zunächst* zwei ihm angehörende Kurven zweiter Klasse $\mathfrak{a}^{(2)}$

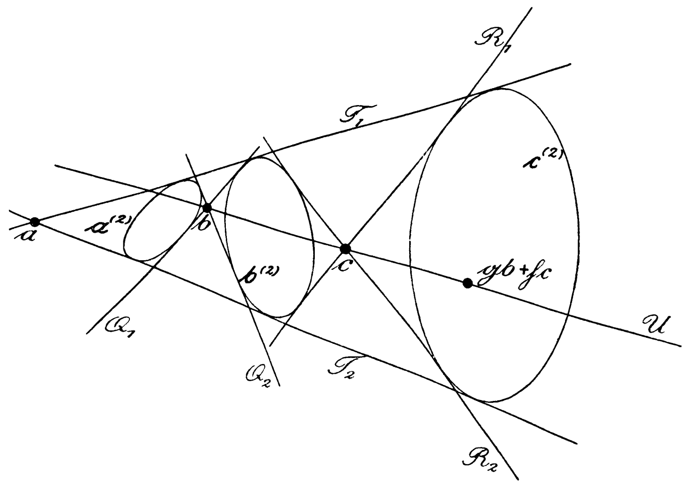


Fig. 240.

und $\mathfrak{b}^{(2)}$, die die festen Geraden T_1 und T_2 berühren, beliebig annehmen. Diese beiden Kurven bestimmen eine Kegelschnittschar:

$$(1) \qquad \mathfrak{g}\mathfrak{a}^{(2)} + \mathfrak{h}\mathfrak{b}^{(2)}.$$

Sind Q_1 und Q_2 die beiden gemeinsamen Tangenten, welche die Kurven $\mathfrak{a}^{(2)}$ und $\mathfrak{b}^{(2)}$ noch außer den dem ganzen Gewebe gemeinsamen Tangenten T_1 und T_2 aufweisen (Fig. 240), und schneiden sich die Tangenten T_1 und T_2 im Punkte a, die Tangenten Q_1 und Q_2 im Punkte b, so ist ab ein Punktpaar, das der Schar (1) als zerfallende Kurve zweiter Klasse angehört. Ebenso ist das Punktpaar $[Q_1 T_1]$, $[Q_2 T_2]$ und ferner auch das Punktpaar $[Q_1 T_2]$, $[Q_2 T_1]$ in dieser Schar enthalten.

Um das Kegelschnittgewebe *vollständig festzulegen*, kann man noch einen Punkt c in der Ebene beliebig wählen, der zusammen mit dem Punkte a eine zerfallende Kurve des Gewebes bilden soll. Dann gehört auch jede Kurve zweiter Klasse der Schar $\mathfrak{g}ab + \mathfrak{h}ac$ dem Gewebe an. Die Kurven dieser Schar aber zerfallen sämtlich in je ein Punktpaar; denn es ist:

$$(2) \qquad \mathfrak{g}ab + \mathfrak{h}ac = a(\mathfrak{g}b + \mathfrak{h}c).$$

1) Vgl. hierzu: E. Müller, Zur Theorie der linearen Systeme von Kurven und Flächen zweiten Grades. Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 12, 1903, S. 108ff.

Die Kurven der Schar (2) bestehen also aus den ∞^1 Punktpaaren, von denen immer *ein* Punkt der Punkt $a = [T_1 T_2]$ ist, während *der andere* Punkt durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{g}b + \mathfrak{h}c$ der Geraden:

(3) $$[bc] = U \quad \text{gebildet wird.}$$

Der Fall dreier voneinander linear unabhängiger Punktpaare von der Form ab, ac, ad, wo wieder $a = [T_1 T_2]$ ist, und wo die Punkte b, c, d *nicht in einer Geraden liegen, kann von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben.* Denn er liefert nur ein entartendes Kegelschnittgewebe, das soll heißen, ein Kegelschnittgewebe, dessen sämtliche Kurven in ein Punktpaar zerfallen. In der Tat wird ja:

(4) $$\mathfrak{g}ab + \mathfrak{h}ac + \mathfrak{k}ad = a(\mathfrak{g}b + \mathfrak{h}c + \mathfrak{k}d).$$

Das Gewebe (4) besteht also aus denjenigen ∞^2 Punktpaaren, die man erhält, wenn man den Punkt $a = [T_1 T_2]$ mit irgendeinem beliebigen Punkt $\mathfrak{g}b + \mathfrak{h}c + \mathfrak{k}d$ der Ebene zu einem Punktpaar vereinigt. Übrigens werden die durch die Gleichung (4) dargestellten Punktpaare auch nicht nur speziell von den Geraden T_1 und T_2 „berührt", sondern überhaupt von *jeder* Geraden die durch den Punkt a geht.

Nach Ausschließung dieses entartenden Kegelschnittgewebes kehren wir zu dem auf S. 498f. betrachteten Gewebe zurück. Ist in ihm der Punkt c beliebig angenommen, so kann man von ihm die beiden Tangenten R_1 und R_2 an die Kurve $\mathfrak{b}^{(2)}$ legen (vgl. die obige Fig. 240). Dann bestimmen diese Tangenten R_1 und R_2 zusammen mit den gemeinsamen Tangenten T_1 und T_2 des ganzen Gewebes eine weitere Schar des Gewebes, der in der Fig. 240 die Kurve $\mathfrak{c}^{(2)}$ angehört, und so liefert jeder Punkt $\mathfrak{g}b + \mathfrak{h}c$ der Geraden U eine neue Schar des Gewebes.

Ein jedes gemeinsame Tangentenvierseit, das irgend zwei Kurven des Gewebes zugehört, enthält in seinen 3 Paaren Gegenecken 3 Punktpaare des Gewebes. Zwei von ihnen haben einen von ihren Punkten auf der Geraden T_1, den andern auf der Geraden T_2; von dem dritten Punktpaar fällt der eine Punkt in den Punkt $a = [T_1 T_2]$, der andere liegt auf der Geraden U. Man hat also den Satz:

Satz 954: In einem nicht entartenden Kegelschnittgewebe, dessen Kurven zwei feste Geraden T_1 und T_2 berühren, liegen die Punkte, die zusammen mit dem Schnittpunkte $a = [T_1 T_2]$ der beiden festen Geraden ein Punktpaar des Gewebes bilden, auf einer Geraden U. Dieselbe wird bestimmt, wenn man zu zwei Scharen des Gewebes das Vierseit der gemeinsamen Tangenten konstruiert und in jedem von ihnen die Gegenecke b oder c zu der Ecke a aufsucht. Die Verbindungslinie $[bc]$ dieser beiden Ecken ist dann die gesuchte Gerade U. Die andern Punktpaare des Gewebes haben einen ihrer Punkte auf der Geraden T_1, den andern auf der Geraden T_2.

In diesem Satze ist insbesondere der von Plücker[1]) herrührende Satz enthalten (Fig. 241):

Satz 955: Fünfter Satz von Plücker: Wenn 3 Kurven zweiter Klasse zwei feste Geraden berühren, und die 3 Kurven nicht gerade in 3 Punktpaare zerfallen, von denen immer ein Punkt den Schnittpunkt der beiden festen Geraden bildet, so liegen die 3 Schnittpunkte der übrigen 3 mal 2 gemeinsamen Tangenten der 3 Kurven in einer Geraden.

Er ist eine Verallgemeinerung des Pascalschen Satzes fürs Geradenpaar T_1, T_2 (Fig. 242) und verwandelt sich in ihn, wenn man die 3 Kurven zweiter

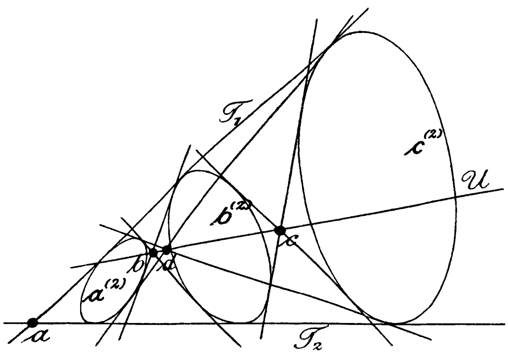


Fig. 241.

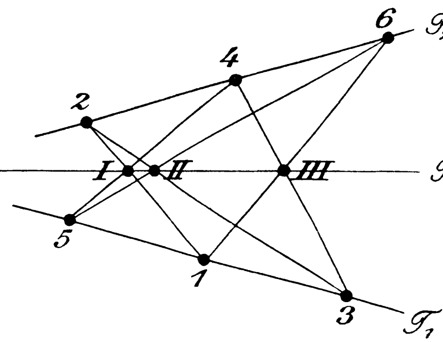


Fig. 242.

Klasse $\mathfrak{a}^{(2)}$, $\mathfrak{b}^{(2)}$, $\mathfrak{c}^{(2)}$ des Plückerschen Satzes in je ein Punktpaar übergehen läßt, von dem immer *ein* Punkt der Geraden T_1, *der andere* der Geraden T_2 angehört.

Sind die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 die Ecken des Pascalschen Sechsecks, und liegen die Punkte 1, 3, 5 auf der Geraden T_1, die Punkte 2, 4, 6 auf der Geraden T_2, und sind die Punkte:

$$\mathrm{I} = [12 \cdot 45],$$
$$\mathrm{II} = [23 \cdot 56],$$
$$\mathrm{III} = [34 \cdot 61],$$

die drei ausgezeichneten Punkte der Pascalschen Geraden P, so kann man etwa setzen:

$$\mathfrak{a}^{(2)} = 5,\ 2,$$
$$\mathfrak{b}^{(2)} = 1,\ 4,$$
$$\mathfrak{c}^{(2)} = 3,\ 6,$$

und es entsprechen dann den Punkten b, c, d der Geraden U der Fig. 241 die Punkte I, III, II der Pascalschen Geraden P in der Fig. 242.

1) Vgl. J. Plücker, Über eine neue Art, in der analytischen Geometrie Punkte und Kurven durch Gleichungen darzustellen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd 6, 1830, S. 131, oder: Gesammelte Abhandlungen, S. 202f. Nr. 51.

Aus dem Satze 954 kann man ferner noch die Form der Cayleyschen Kurve des betrachteten Gewebes entnehmen. Da dieselbe nämlich nach dem Satze 870 der geometrische Ort der Punkte aller Punktpaare des Gewebes ist, so besteht sie aus den Geraden T_1 und T_2 und der durch die Gleichung (3) bestimmten Geraden U. Man hat also den Satz:

Satz 956: Die Cayleysche Kurve eines nicht entartenden Gewebes von Kurven zweiter Klasse, die sämtlich zwei feste Geraden T_1 und T_2 berühren, ist das Dreiseit $T_1 T_2 U$, das von den beiden festen Geraden T_1 und T_2 und derjenigen Geraden U gebildet wird, auf der die Gegenecken des Punktes $a = [T_1 T_2]$ in den gemeinsamen Tangentenvierseiten liegen, die den Scharen des Gewebes zugehören.

Metrischer Sonderfall: Das Gewebe monofokaler Kurven zweiter Klasse. Zu den Geweben mit zwei gemeinsamen Tangenten T_1 und T_2 gehört auch das Gewebe, das man erhält, wenn man von einem reellen Punkte a die Geraden T_1 und T_2 nach den beiden Kreispunkten j, j' zieht (vgl. S. 401), dieses Kreispunktpaar jj' als *eine* Grundkurve des Gewebes auffaßt, und den Punkt a durch Hinzunahme je eines reellen Punktes b und c zu den Punktpaaren ab und ac ergänzt, die dann zusammen mit dem Kreispunktpaar jj' das Gewebe bestimmen. In diesem Gewebe sind nach dem Satze 887 die beiden konfokalen Kegelschnittscharen enthalten, die die beiden Punktpaare ab und ac zu reellen Brennpunkten haben, und jeder Punkt $\mathfrak{g}b + \mathfrak{h}c$ der Geraden:

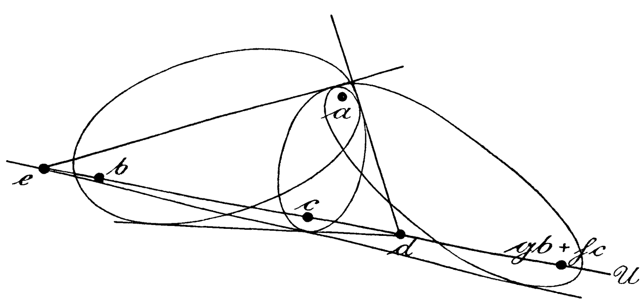


Fig. 243.

(3) $$[bc] = U$$

ergibt zusammen mit dem Punkte a das reelle Brennpunktpaar einer neuen in dem Gewebe enthaltenen konfokalen Schar (Fig. 243). Mit den Kurven der so gewonnenen ∞^1 konfokalen Scharen sind dabei die Kurven des Gewebes erschöpft.

Daß die Kurven zweiter Klasse des auf diese Weise erzeugten Gewebes die beiden konjugiert komplexen Geraden:

(5) $$T_1 = [aj] \quad \text{und} \quad T_2 = [aj']$$

zu gemeinsamen Tangenten haben, kann man sich so klar machen: Jede von den ∞^1 konfokalen Scharen des Gewebes hat die 4 Geraden, von ihren reellen

Brennpunkten nach den konjugiert komplexen Kreispunkten gezogen, zu gemeinsamen Tangenten. Alle diese ∞^1 Tangentenquadrupel haben aber die Linien T_1 und T_2, von dem gemeinschaftlichen Brennpunkte a nach den Kreispunkten j und j' gezogen, miteinander gemein.

Man kann das so gewonnene Gewebe von ∞^2 Kurven zweiter Klasse als *ein Gewebe monofokaler Kurven zweiter Klasse* bezeichnen. Dasselbe umfaßt aber nicht etwa alle Kurven zweiter Klasse, die den Brennpunkt a gemein haben, denn das würden ja ∞^3 Kurven sein. Diese Kurven würden also ein

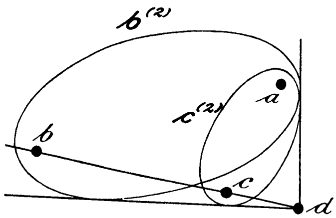


Fig. 244.

lineares System vierter Stufe von Kurven zweiter Klasse zusammensetzen, indem ja schon *die Brennpunkte dieser Kurven allein* das auf S. 353f. betrachtete entartende Gewebe von ∞^2 Kurven zweiter Klasse bilden würden. Sondern das monofokale Gewebe enthält eben nur die konfokalen Scharen, deren erster Brennpunkt der Punkt a ist, während die zweiten Brennpunkte durch die Punkte der Geraden U in (3) dargestellt werden.

Für die reellen Punktpaare dieses Gewebes gilt dann der Satz 954. Nach ihm gehören alle diejenigen Punkte $b, c, d, e, \ldots$ einer festen Geraden an, die zusammen mit dem allen Kurven des Gewebes gemeinsamen Brennpunkte a ein Punktpaar des Gewebes bilden. Diese Gerade ist bestimmt durch *irgend zwei* solche Punkte, z. B. also durch die beiden oben zur Festlegung des Gewebes neben dem Punkt a benutzten Punkte b und c, d. h. sie ist identisch mit der in der Gleichung (3) eingeführten Geraden U.

Sind somit $\boldsymbol{b}^{(2)}$ und $\boldsymbol{c}^{(2)}$ zwei Kurven des Gewebes, die beziehlich das Punktpaar ab und das Punktpaar ac zum reellen Brennpunktpaar haben, und besitzen die beiden Kurven $\boldsymbol{b}^{(2)}$ und $\boldsymbol{c}^{(2)}$ zwei reelle gemeinsame Tangenten mit dem Schnittpunkte d, so liegen die Punkte b, c, d in einer Geraden. Man hat daher den Satz (Fig. 244):

Satz 957: Haben zwei Kurven zweiter Klasse einen Brennpunkt miteinander gemein, und besitzen sie überdies zwei reelle gemeinsame Tangenten, so liegen die beiden zweiten Brennpunkte beider Kurven mit dem Schnittpunkte dieser beiden gemeinsamen Tangenten in einer Geraden.

Das Kegelschnittgewebe mit einem Doppelpunkt. Sind $\boldsymbol{a}^{(2)}$, $\boldsymbol{b}^{(2)}$, $\boldsymbol{c}^{(2)}$ drei linear unabhängige Potenzformen zweiter Klasse, so ist die Vielfachensumme:

$$\mathfrak{g}\boldsymbol{a}^{(2)} + \mathfrak{h}\boldsymbol{b}^{(2)} + \mathfrak{k}\boldsymbol{c}^{(2)}$$

der Ausdruck für das durch jene drei Potenzformen bestimmte Kegelschnittgewebe. Wir betrachten insbesondere den Fall, wo das Gewebe unter seinen zerfallenden Kurven einen und nur einen doppelt zählenden Punkt d enthält.[1]) Wir wollen es **ein Kegelschnittgewebe mit einem Doppelpunkt** nennen. Es gestattet die Darstellung:

$$\mathfrak{g}\boldsymbol{a}^{(2)} + \mathfrak{h}\boldsymbol{b}^{(2)} + \mathfrak{k}d^2, \tag{6}$$

in der die Kurven $\boldsymbol{a}^{(2)}$ und $\boldsymbol{b}^{(2)}$ nicht derselben Büschelschar angehören, sich also nicht in zwei getrennten reellen, zwei zusammenfallenden reellen oder in zwei konjugiert komplexen Punkten berühren dürfen (vgl. S. 35f. u. S. 40f.); denn wären sie in einer Büschelschar enthalten, die den Punkt d zum Doppelpunkt hat (vgl. S. 35), so würden die 3 Kurven $\boldsymbol{a}^{(2)}$, $\boldsymbol{b}^{(2)}$, d^2 nicht linear unabhängig voneinander sein, also gar kein Gewebe bestimmen; gehörten aber die Kurven $\boldsymbol{a}^{(2)}$ und $\boldsymbol{b}^{(2)}$ einer Büschelschar an, die einen vom Punkte d verschiedenen Punkt zum Doppelpunkt hat, so würde das Gewebe (6) gegen die Voraussetzung *zwei* Doppelpunkte besitzen.

Nun bestimmt das Punktquadrat d^2 mit jeder Kurve $\boldsymbol{c}^{(2)}$ der Kegelschnittschar:

$$\boldsymbol{c}^{(2)} = \mathfrak{g}\boldsymbol{a}^{(2)} + \mathfrak{h}\boldsymbol{b}^{(2)} \tag{7}$$

wieder eine Kegelschnittschar, die in dem Gewebe (6) enthalten ist, und zwar die Büschelschar von Kurven zweiter Klasse:

$$\boldsymbol{c}^{(2)} + \mathfrak{k}d^2 = (\mathfrak{g}\boldsymbol{a}^{(2)} + \mathfrak{h}\boldsymbol{b}^{(2)}) + \mathfrak{k}d^2. \tag{8}$$

Es gibt also in einem Kegelschnittgewebe von der besonderen Form (6) ∞^1 Büschelscharen, und die Kurven dieser ∞^1 Büschelscharen umfassen überdies *sämtliche* Kurven des Gewebes (6); denn jede Kurve (6) läßt sich nach dem Vorbilde der Gleichung (8) als Kurve einer jener ∞^1 Büschelscharen darstellen. Es kann daher auch umgekehrt eine jede von diesen ∞^1 Büschelscharen bestimmt werden durch den doppelt zählenden Punkt d^2 und eine beliebige von ihm verschiedene Kurve des Gewebes.

Nun haben aber nach dem Satze 840 zwei in einem Kegelschnittgewebe enthaltene voneinander verschiedene Kegelschnittscharen eine Kurve zweiter Klasse miteinander gemein. Insbesondere haben zwei Büschelscharen des Gewebes (6) dessen Doppelpunkt gemeinsam. Eine von diesen ∞^1 Büschelscharen verschiedene Kegelschnittschar des Gewebes ferner hat mit einer jeden Büschelschar des Gewebes eine jedenfalls nicht zweifach entartende Kurve zweiter Klasse gemein. Man hat somit den Satz:

Satz 958: **Besitzt ein Kegelschnittgewebe unter seinen Kurven einen und nur einen doppelt zählenden Punkt d^2, und sind $\boldsymbol{a}^{(2)}$ und $\boldsymbol{b}^{(2)}$ zwei voneinander verschiedene Kurven des Gewebes, die nicht derselben Büschelschar angehören, so daß also das Gewebe die Darstellung gestattet:**

$$\mathfrak{g}\boldsymbol{a}^{(2)} + \mathfrak{h}\boldsymbol{b}^{(2)} + \mathfrak{k}d^2,$$

---

1) Vgl. zum folgenden wieder die auf S. 498 zitierte Arbeit von E. Müller im Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 12, 1903, S. 107f.

so enthält das Gewebe ∞^1 Büschelscharen, und es gibt in jeder Schar des Gewebes, die von diesen Büschelscharen verschieden ist, z. B. in der Schar $\mathfrak{g}\boldsymbol{a}^{(2)} + \mathfrak{h}\boldsymbol{b}^{(2)}$, eine Kurve zweiter Klasse $\boldsymbol{c}^{(2)}$, die mit einer im Gewebe beliebig angenommenen Kurve zweiter Klasse $\boldsymbol{e}^{(2)}$ in derselben Büschelschar liegt, die somit jene Kurve $\boldsymbol{c}^{(2)}$ in zwei getrennten reellen, zwei zusammenfallenden reellen oder in zwei konjugiert komplexen Punkten berührt. Dabei ist der Pol der Berührungssehne S in bezug auf die beiden sich an zwei Stellen berührenden Kurven der in dem Gewebe enthaltene doppelt zählende Punkt d (Fig. 245). Insbesondere gibt es in jener Schar eine Kurve $\boldsymbol{c}^{(2)}$, die durch ein beliebig gegebenes Punktpaar $\mathfrak{f}\mathfrak{g}$ des Gewebes hindurchgeht, wobei dann der Pol des Trägers S des Punktpaars $\mathfrak{f}\mathfrak{g}$ in bezug auf die Kurve $\boldsymbol{c}^{(2)}$ der Doppelpunkt d des Gewebes ist.

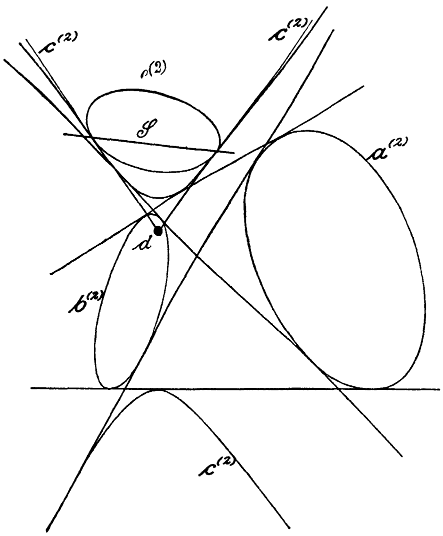


Fig. 245.

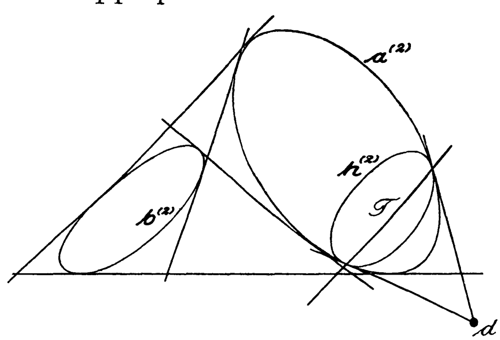


Fig. 246.

Ein Kegelschnittgewebe mit einem Doppelpunkt ist schon bestimmt, sobald von ihm zwei Kurven zweiter Klasse $\boldsymbol{a}^{(2)}$ und $\boldsymbol{b}^{(2)}$, die sich nicht an zwei Stellen berühren, und eine dritte Kurve $\boldsymbol{h}^{(2)}$ gegeben ist, die mit einer Kurve der Schar $\mathfrak{g}\boldsymbol{a}^{(2)} + \mathfrak{h}\boldsymbol{b}^{(2)}$, z. B. mit der Kurve $\boldsymbol{a}^{(2)}$, zwei getrennte reelle, zwei zusammenfallende reelle oder zwei konjugiert komplexe Berührungspunkte gemein hat, indem ja der gemeinsame Pol des Trägers T dieser Berührungspunkte in bezug auf die beiden sich berührenden Kurven $\boldsymbol{a}^{(2)}$ und $\boldsymbol{h}^{(2)}$ den Doppelpunkt d des Gewebes bildet (Fig. 246).

Ersetzt man weiter die Kurve $\boldsymbol{h}^{(2)}$, welche die Kurve $\boldsymbol{a}^{(2)}$ an zwei Stellen berührt, durch ein auf $\boldsymbol{a}^{(2)}$ liegendes Punktpaar ik, so ergibt dies Punktpaar ik zusammen mit der Kurve $\boldsymbol{a}^{(2)}$ wieder den Doppelpunkt d des Gewebes als Pol der Geraden $[ik]$ in bezug auf die Kurve $\boldsymbol{a}^{(2)}$ (Fig. 247). Dagegen bestimmt das Punktpaar ik zusammen mit der Kurve $\boldsymbol{b}^{(2)}$ eine von einer Büschelschar verschiedene Schar des Gewebes, und das gemeinsame

Tangentenvierseit dieser Schar wird gebildet aus den beiden Tangentenpaaren, die man von den Punkten i und k an die Kurve $\boldsymbol{b}^{(2)}$ legen kann. In dieser Schar muß dann nach dem Satze 958 eine Kurve zweiter Klasse $\boldsymbol{n}^{(2)}$ enthalten sein, die mit einer beliebig angenommenen Kurve des Gewebes in derselben Büschelschar liegt. Als diese beliebige Kurve des Gewebes wählen wir ein Punktpaar lm der Schar $\mathfrak{g}\boldsymbol{a}^{(2)} + \mathfrak{h}\boldsymbol{b}^{(2)}$, d. h. ein Paar Gegenecken lm des gemeinsamen Tangentenvierseits dieser Schar. Alsdann verwandelt sich der Satz 958 in den Satz:

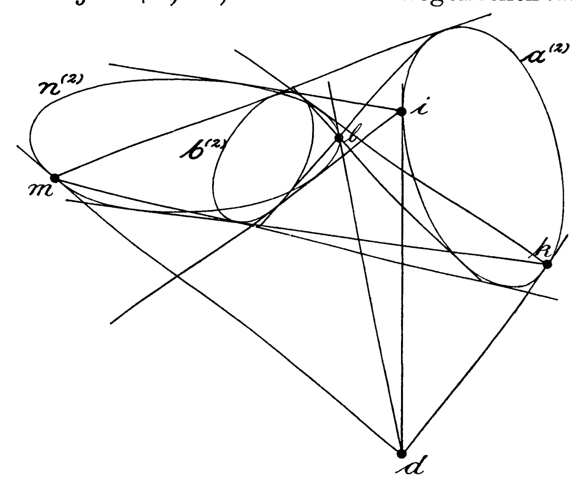


Fig. 247.

Satz 959: Satz von Darboux[1]): Sind $\boldsymbol{a}^{(2)}$ und $\boldsymbol{b}^{(2)}$ zwei Kurven zweiter Klasse, die nicht derselben Büschelschar angehören, und sind i und k zwei Punkte der Kurve $\boldsymbol{a}^{(2)}$, ist ferner d der Schnittpunkt der beiden Tangenten, in den Punkten i und k an die Kurve $\boldsymbol{a}^{(2)}$ gezogen, so geht durch jedes Paar Gegenecken lm des den Kurven $\boldsymbol{a}^{(2)}$ und $\boldsymbol{b}^{(2)}$ gemeinsamen Tangentenvierseits eine Kurve zweiter Klasse $\boldsymbol{n}^{(2)}$ hindurch, die dem Vierseit eingeschrieben ist, das durch die beiden Tangentenpaare bestimmt wird, die man von den Punkten i und k an die Kurve $\boldsymbol{b}^{(2)}$ ziehen kann. Diese Kurve $\boldsymbol{n}^{(2)}$ wird zugleich in den Punkten l und m von den Geraden $[ld]$ und $[md]$ berührt, welche die Punkte l und m mit dem Punkte d verbinden.

Um von diesem Satze eine Anwendung auf zwei konfokale Kurven zweiter Klasse zu machen, schicken wir die folgende Bemerkung voraus (vgl. S. 501 f.): Die 4 gemeinsamen Tangenten aller Kurven einer konfokalen Schar von Kurven zweiter Klasse müssen auch durch die Punkte der in ein Punktpaar zerfallenden Kurven der Schar, insbesondere durch die beiden reellen Brennpunkte $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ der Schar und durch die Punkte j, j' des Kreispunktpaares hindurchgehen, das ja ebenfalls in der konfokalen Schar enthalten ist. Jene gemeinsamen Tangenten sind also die 4 Geraden, die von den beiden reellen

1) Vgl. das Werk von G. Darboux, Sur une classe remarquable de courbes et surfaces etc. Paris 1872, S. 203. Der oben gegebene Beweis rührt von E. Müller her. Siehe die auf S. 498 zitierte Arbeit, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-vereinigung, Bd. 12, 1903, S. 108 ff.

Brennpunkten $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ nach den beiden komplexen Kreispunkten j und j' führen, und sind somit *im allgemeinen selbst komplex*, und zwar sind die von einem und demselben Brennpunkte ausgehenden gemeinsamen Tangenten *konjugiert komplex.*

Nur in dem Falle *konfokaler Parabeln* wird das von dem unendlich fernen Brennpunkte ausgehende gemeinsame Tangentenpaar *zusammenfallend reell;* es fällt nämlich mit der unendlich fernen Geraden, dem Träger des Kreispunktpaars, zusammen.

In jedem Falle aber gehören zu den 3 Paaren Gegenecken des gemeinsamen Tangentenvierseits der konfokalen Kurven zweiter Klasse die beiden Kreispunkte.

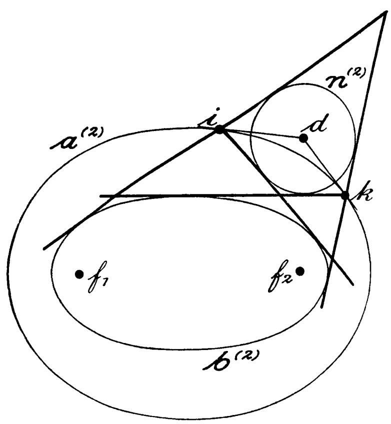


Fig. 248.

Wendet man daher den Satz von Darboux auf den Fall an, wo die beiden Kurven $\boldsymbol{a}^{(2)}$ und $\boldsymbol{b}^{(2)}$ konfokale Kurven zweiter Klasse sind, und wo die beiden in diesem Satze benutzten Gegenecken l, m des gemeinsamen Tangentenvierseits der Kurven $\boldsymbol{a}^{(2)}$ und $\boldsymbol{b}^{(2)}$ die beiden Kreispunkte j und j' sind, so wird die durch sie hindurchgehende Kurve zweiter Klasse $\boldsymbol{n}^{(2)}$ jenes Satzes ein Kreis, und dabei wird der Schnittpunkt d der Tangenten, in den Punkten i und k an die Kurve $\boldsymbol{a}^{(2)}$ gezogen, da er zugleich den Pol der unendlich fernen Geraden $[jj']$ in bezug auf den Kreis $\boldsymbol{n}^{(2)}$ bilden muß, zum Mittelpunkt dieses Kreises (Fig. 248). Der Satz von Darboux geht also über in den Satz:

Satz 960: *Satz von Chasles*[1]: *Sind $\boldsymbol{a}^{(2)}$ und $\boldsymbol{b}^{(2)}$ zwei konfokale Kurven zweiter Klasse, von denen die Kurve $\boldsymbol{a}^{(2)}$ die Kurve $\boldsymbol{b}^{(2)}$ einschließt, und sind i und k zwei Punkte der Kurve $\boldsymbol{a}^{(2)}$, so läßt sich dem Vierseit, das von den 4 Tangenten gebildet wird, die sich von den Punkten i und k an die Kurve $\boldsymbol{b}^{(2)}$ legen lassen, ein Kreis einschreiben. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist dabei der Schnittpunkt d der beiden Tangenten, in den Punkten i und k an die Kurve $\boldsymbol{a}^{(2)}$ gezogen.*

1) Der Satz wurde von Chasles ohne Beweis veröffentlicht in den Comptes Rendus de l'Acad. Roy. des Sciences, 23. Oct. 1843, Bd. XVII, S. 838 ff. Einen synthetischen Beweis gab Th. Reye in der Festschrift der naturforschenden Gesellschaft, Zürich 1896. II. Teil, S. 65 ff. Siehe auch Reye, Geometrie der Lage, Vierte Auflage 1899, S. 179 ff. und fünfte Auflage 1909, S. 173 f. und S. 241 ff. Der obige analytische Beweis auf Grund der Eigenschaften der Kegelschnittgewebe stammt von E. Müller. Siehe die bereits mehrfach zitierte Arbeit aus dem Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 12, S. 108.

Die Punktpaare einer hyperbolischen oder elliptischen Punktinvolution als Kurven einer entartenden Kegelschnittschar. Sind in dem Ausdrucke:

$$\mathfrak{a}^2 a^2 - \mathfrak{b}^2 b^2 = (\mathfrak{a} a + \mathfrak{b} b)(\mathfrak{a} a - \mathfrak{b} b) \tag{9}$$

die Größen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei veränderliche reelle Zahlgrößen und a und b zwei fest gegebene reelle Punkte, so stellt derselbe *diejenige hyperbolische Punktinvolution dar, welche die Punkte a und b zu Doppelpunkten hat.* Dabei entspricht einem jeden Werte des Verhältnisses $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ ein Paar dieser hyperbolischen Involution; denn, wie die rechte Seite der Gleichung (9) zeigt, stellt der Ausdruck (9) bei festgehaltenen Werten von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ein Punktpaar mit dem Träger $[ab]$ dar, das durch die Punkte a und b harmonisch getrennt wird.

Mit Rücksicht auf die linke Seite der Gleichung (9) kann man aber die Gesamtheit aller Punktpaare der hyperbolischen Involution (9) als die in ein Punktpaar zerfallenden Kurven zweiter Klasse einer entartenden Kegelschnittschar auffassen, deren Grundkurven die doppeltzählenden Punkte a^2 und b^2 sind. Die Gleichung (9) enthält also eine Bestätigung des Satzes 524, nach welchem eine Kegelschnittschar, deren Grundkurven durch zwei doppelt zählende Punkte gebildet werden, identisch ist mit derjenigen hyperbolischen Punktinvolution, deren Doppelpunkte jene doppelt zählenden Punkte sind.

Unter denselben Voraussetzungen über die Größen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, a, b ist das algebraische Produkt:

$$(\mathfrak{a} a + \mathfrak{b} b)(\mathfrak{a} b - \mathfrak{b} a) \tag{10}$$

der Ausdruck für *diejenige elliptische Punktinvolution, von der die Punkte a und b und ebenso die von ihnen harmonisch getrennten Punkte $b + a$ und $b - a$ ein Paar bilden.*

Denn der Bruch:

$$\mathfrak{e} = \frac{b, \; -a}{a, \; b} \tag{11}$$

ist nach der Gleichung (38) des 15. Abschnitts der Ausdruck der elliptischen Punktinvolution, die die Punkte a und b und ebenso die Punkte $b + a$ und $b - a$ zu Punkten eines Paares hat. Und diese Involution $\mathfrak{e}$ weist zugleich dem laufenden Punkte $\mathfrak{a} a + \mathfrak{b} b$ der Punktreihe mit dem Träger $[ab]$ den Punkt $\mathfrak{a} b = \mathfrak{b} a$ dieser Punktreihe zu, womit bewiesen ist, daß die Faktoren des algebraischen Produktes (10) die Punkte eines Paares der beschriebenen elliptischen Involution bilden.

Die Doppelpunkte dieser elliptischen Punktinvolution sind die beiden konjugiert komplexen Punkte

$$a + ib \quad \text{und} \quad a - ib, \tag{12}$$

was ebenso wie beim Dualistischen bewiesen werden kann (vgl. S. 156f.).

Auch hier kann man wieder die Gesamtheit aller Paare der elliptischen Punktinvolution (10) als die in ein Punktpaar zerfallenden Kurven zweiter Klasse einer entartenden Kegelschnittschar auffassen. In der Tat folgt aus (10) durch Ausmultiplizieren die Gleichung:

$$(13) \qquad (\mathfrak{a}a + \mathfrak{b}b)(\mathfrak{a}b - \mathfrak{b}a) = (\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2)ab + \mathfrak{a}\mathfrak{b}(b^2 - a^2),$$

durch die ein beliebiges Punktpaar der elliptischen Punktinvolution (10) als Vielfachensumme der Punktpaare ab und $(b + a)(b - a)$ dargestellt ist, d. h. als Vielfachensumme zweier solchen Punktpaare dieser elliptischen Involution, die einander harmonisch trennen (vgl. Satz 118).

Entsprechendes gilt von den Quadraten der beiden konjugiert komplexen Doppelpunkte (12) der elliptischen Involution (10); denn es wird:

$$(14) \qquad \begin{cases} (a + ib)^2 = (a^2 - b^2) + 2iab, \\ (a - ib)^2 = (a^2 - b^2) - 2iab. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt noch, daß:

$$(15) \qquad \begin{cases} b^2 - a^2 = -\frac{1}{2}\{(a + ib)^2 + (a - ib)^2\}, \\ \qquad ab = -\frac{i}{4}\{(a + ib)^2 - (a - ib)^2\} \end{cases}$$

ist. Nach der Gleichung (13) läßt sich daher auch jedes Paar der elliptischen Punktinvolution (10) als Vielfachensumme der doppelt zählenden konjugiert komplexen Doppelpunkte dieser Involution ausdrücken. Es wird:

$$(16) \qquad (\mathfrak{a}a + \mathfrak{b}b)(\mathfrak{a}b - \mathfrak{b}a) = \frac{-2\mathfrak{a}\mathfrak{b} + i(\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2)}{4}(a + ib)^2 - \frac{2\mathfrak{a}\mathfrak{b} + i(\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2)}{4}(a - ib)^2,$$

und man erhält, wenn man in Übereinstimmung mit Bd. I, S. 224 die Punkte a und b als die *Komponenten* der konjugiert komplexen Punkte $a + ib$ und $- ib$ bezeichnet, den folgenden Satz, der ein Gegenstück des Satzes 524 ist:

Satz 961: Eine Kegelschnittschar, deren Grundkurven durch zwei doppelt zählende konjugiert komplexe Punkte dargestellt werden, ist identisch mit derjenigen elliptischen Punktinvolution, von der die Komponenten jener konjugiert komplexen Punkte und die Summe und Differenz dieser Komponenten je ein Paar bilden.

Aus den Sätzen 524 und 961 folgt noch der weitere Satz:

Satz 962: Eine Kurve zweiter Klasse, die von einem jeden Punktpaar einer hyperbolischen oder elliptischen Punktinvolution verschieden ist, ist von den doppelt zählenden Doppelpunkten dieser Involution linear unabhängig.

Die Apolarität als Mittel zur Einführung projektiv oder rechtwinkelgeometrisch ausgezeichneter Kegelschnittnetze. Nach dem dritten Satze von Smith (Satz 861) bilden alle zu 3 linear unabhängigen Kurven zweiter Klasse apolaren Kurven zweiter Ordnung ein Kegelschnittnetz.

Läßt man von den 3 linear unabhängigen Kurven zweiter Klasse 2 Kurven in je einen reellen doppelt zählenden Punkt oder auch in zwei konjugiert komplexe doppelt zählende Punkte übergehen, so erhält man den Satz:

Satz 963: Die Gesamtheit aller Kurven zweiter Ordnung, die zu den doppelt zählenden Doppelpunkten einer hyperbolischen oder elliptischen Punktinvolution und überdies zu einer solchen Kurve zweiter Klasse apolar sind, die von einem jeden Punktpaar dieser Involution verschieden ist, bilden ein Kegelschnittnetz.

Ersetzt man die Doppelpunkte der elliptischen Involution durch die beiden Kreispunkte und berücksichtigt, daß nach dem Satze 702 eine Kurve zweiter Ordnung, die zu einem doppelt zählenden Punkte apolar ist, diesen Punkt auf sich enthält, und daß eine Kurve zweiter Ordnung, die durch die beiden Kreispunkte hindurchgeht, ein Kreis ist, und daß umgekehrt jeder Kreis die beiden Kreispunkte auf sich enthält, so ergibt sich der besondere Satz[1]):

Satz 964: Ist eine Kurve zweiter Klasse von einem jeden Punktpaar der Involution senkrechter Richtungen verschieden, so bilden die zu ihr apolaren Kreise ein Kegelschnittnetz.

Man nennt ein Kegelschnittnetz, das aus lauter Kreisen besteht, ein Kreisnetz.

Elementargeometrisches über Kreisnetze. Wir entnehmen aus der elementaren Geometrie einige Eigenschaften der Kreisnetze.[2]) Dieselben gründen sich auf den Begriff der Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis. Man versteht bekanntlich unter der Potenz eines Punktes c in bezug auf einen Kreis, falls der Punkt c außerhalb des Kreises liegt, das Produkt aus einer ganzen Sekante cd, die man vom Punkte c aus durch den Kreis legen kann, und ihrem äußeren Abschnitte ce, dieses Produkt *positiv*

---

1) Vgl. hierzu und zum folgenden die schon mehrfach zitierte Arbeit von E. Müller, Monatshefte für Mathematik und Physik, XXVIII. Jahrgang, 1917, S. 56.

2) Vgl. J. Steiner, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 30, 1846, S. 271f. Gesammelte Werke, Bd. II, S. 342. Ferner J. Wellstein in Weber und Wellstein, Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. II, dritte Auflage 1915, S. 37ff

genommen (Fig. 249). Falls dagegen der Punkt c innerhalb des Kreises liegt, so versteht man unter seiner Potenz in bezug auf den Kreis das *negativ genommene* Produkt aus den absolut gerechneten Abschnitten einer Sehne de des Kreises, die durch jenen Punkt c gelegt ist (Fig. 250).

Man kann die Potenz des Punktes c auch für beide Fälle *durch dieselbe Formel ausdrücken.* Dazu braucht man nur an den Linienstücken cd und ce ihren Sinn festzuhalten und etwa die sinnbegabten Linienstücke durch die Symbole $\overrightarrow{cd}$ und $\overrightarrow{ce}$ zu bezeichnen. Fügt man dann noch die Bestim-

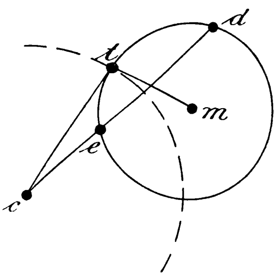


Fig. 249.

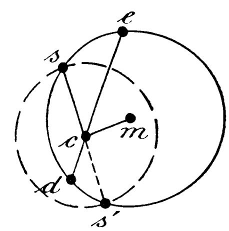


Fig. 250.

mung hinzu, es solle eine Verschiedenheit des Sinnes dieser Linienstücke durch entgegengesetzte Vorzeichen ausgedrückt werden, so daß, wenn:

$$\overrightarrow{cd} = + \,|cd| \quad \text{gesetzt wird,}$$
$$\overrightarrow{ce} = \pm \,|ce|$$

genommen werden muß, je nachdem $\overrightarrow{ce}$ mit $\overrightarrow{cd}$ denselben oder den entgegengesetzten Sinn hat, so wird sowohl für den Fall eines äußeren wie eines inneren Punktes c die Potenz $\mathfrak{P}$ des Punktes c in bezug auf den Kreis:

$$\mathfrak{P} = \overrightarrow{cd} \cdot \overrightarrow{ce}, \tag{17}$$

indem für den Fall eines äußeren Punktes c:

$$\mathfrak{P} = \overrightarrow{cd} \,.\, \overrightarrow{ce} = |cd| \cdot |ce| \tag{18}$$

und für den Fall eines inneren Punktes c:

$$\mathfrak{P} = \overrightarrow{cd} \cdot \overrightarrow{ce} = -\,|cd| \cdot |ce| = -\,|dc| \cdot |ce| \quad \text{wird.} \tag{19}$$

Will man die Potenz $\mathfrak{P}$ als *positiv oder negativ genommenes Quadrat* darstellen, so ziehe man bei einem äußeren Punkte c von ihm eine Tangente ct an den Kreis. Dann ist das Quadrat ihrer Länge die Potenz des Punktes c in bezug auf den Kreis. Denn nach dem Sekanten-Tangentensatze für den Kreis ist (Fig. 249):

$$|cd| \cdot |ce| = ct^2, \quad \text{also wegen (18):} \tag{20}$$

$$\mathfrak{P} = ct^2. \tag{21}$$

Bei einem inneren Punkte c verbinde man den Punkt c mit dem Mittelpunkt m des Kreises und errichte in c auf der Verbindungslinie cm das Lot nach irgendeiner Seite bis zum Schnitt mit dem Kreise in s (Fig. 250). Dann wird die Potenz $\mathfrak{P}$ des Punktes c in bezug auf den Kreis nach (19):

$$\mathfrak{P} = -|dc| \cdot |ce|.$$

Da aber nach dem Sehnensatze für den Kreis:

$$|dc| \cdot |ce| = cs^2, \tag{22}$$

so wird die Potenz $\mathfrak{P}$ des Punktes c:

$$\mathfrak{P} = -cs^2. \tag{23}$$

Schlägt man in dem Falle eines äußeren Punktes c um c den Kreis mit der Tangente ct (Fig. 249), so schneidet dieser Kreis den ursprünglichen Kreis senkrecht. Schlägt man dagegen in dem Falle eines inneren Punktes c um c den Kreis mit dem Lote cs auf cm errichtet, so wird dieser Kreis (Fig. 250) von dem ursprünglichen Kreise in zwei „Gegenpunkten" s und s', d. h. in den Endpunkten eines Durchmessers, geschnitten.

Man zeigt nun in der Elementargeometrie: *Jedes Kreisnetz wird aus der Gesamtheit der Kreise gebildet, die in einem und demselben Punkte dieselbe Potenz haben.*

Ist diese Potenz *positiv*, so sind die Tangenten von diesem Punkte an die Kreise des Kreisnetzes gezogen gleich lang und von Null verschieden. Der Kreis um jenen Punkt mit der Länge dieser Tangente geschlagen schneidet also die Kreise des Netzes senkrecht, und das Netz besitzt somit einen Orthogonalkreis mit nicht verschwindendem Radius.

Ist diese Potenz *null*, so zieht sich der Orthogonalkreis in einen Punkt zusammen, und alle Kreise des Netzes gehen durch diesen Punkt hindurch. Umgekehrt gehören alle Kreise, die einen und denselben Punkt enthalten, einem Kreisnetze an.

Ist endlich jene Potenz *negativ*, so gibt es einen Kreis, durch dessen Gegenpunktpaare die Kreise des Netzes hindurchgehen, der also von den Kreisen des Netzes in den Endpunkten eines Durchmessers geschnitten und deshalb als der Diametralkreis des Netzes bezeichnet wird. Man sagt in diesem Falle auch, *der Orthogonalkreis des Netzes sei imaginär* und werde durch den Diametralkreis vertreten.

Ist vor der Hand *der Orthogonalkreis O eines Kreisnetzes reell,* ist o sein Mittelpunkt, ist ferner sein Radius $\mathfrak{r}$ von Null verschieden, und soll man einen Kreis des Kreisnetzes konstruieren, der durch einen gegebenen Punkt p geht, so bestimme man zunächst denjenigen Punkt p', der zu dem Punkte p in bezug auf den Orthogonalkreis O invers ist, das soll heißen, denjenigen Punkt p', der auf der Geraden op liegt, und für den das Produkt:

$$\overrightarrow{op} \cdot \overrightarrow{op'} = \mathfrak{r}^2 \tag{24}$$

ist. Man ziehe dazu, wenn p *außerhalb des Orthogonalkreises O liegt*, von p an den Orthogonalkreis eine Tangente pt mit dem Berührungspunkt t und fälle von t das Lot tp' auf op, so ist p' der zu p inverse Punkt in bezug auf den Kreis O (Fig. 251).

Bei der Aufsuchung des inversen Punktes p' zu einem *inneren Punkte p des Orthogonalkreises* hat man nur die Reihenfolge der einzelnen Konstruktionsschritte umzukehren.

In *beiden Fällen* aber schneidet ein jeder durch p und p' gelegte Kreis, d. h. ein jeder Kreis N, der durch p geht und seinen Mittelpunkt m auf dem

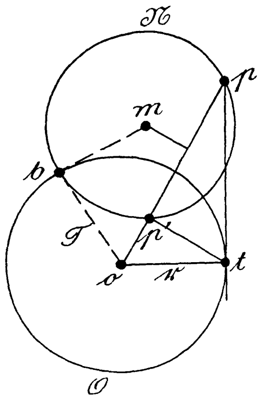


Fig. 251.

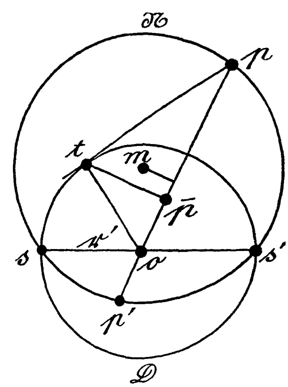


Fig. 252.

Mittellote von pp' hat, den Orthogonalkreis O *senkrecht*. Denn eine Tangente T vom Mittelpunkte o des Orthogonalkreises O an den Kreis N gezogen hat nach der Gleichung (24) die Länge $\mathfrak{r}$. Der Orthogonalkreis O geht also durch den Berührungspunkt b der Tangente T hindurch und wird somit von dem Kreise N senkrecht geschnitten. Der Kreis N ist daher wirklich ein Kreis des Kreisnetzes, woran auch die Bezeichnung N (Netzkreis) erinnern soll.

Ist dagegen *der Orthogonalkreis O eines Kreisnetzes imaginär*, ist also der Punkt o, in welchem die Kreise des Netzes dieselbe Potenz haben, ein innerer Punkt dieser Kreise, so besitzt das Netz einen Diametralkreis D mit dem Mittelpunkt o, sein Radius heiße $\mathfrak{r}'$ Soll man auch hier wieder einen Kreis des Netzes bestimmen, der durch einen gegebenen Punkt p geht (Fig. 252), so zeichne man zunächst den zu dem Punkte p in bezug auf den Diametralkreis D inversen Punkt $\bar{p}$, für den nach der Vorschrift der Gleichung (24):

$$\overrightarrow{op} \cdot \overrightarrow{o\bar{p}} = \mathfrak{r}'^2 \tag{25}$$

wird. Um sodann die Tatsache zu verwerten, daß für einen inneren Punkt o des gesuchten Netzkreises die Potenz negativ wird, suche man die Formel (25) so umzugestalten, daß auf der rechten Seite das negativ genommene Quadrat $-\mathfrak{r}'^2$ auftritt, und spiegele dazu den Punkt $\bar{p}$ an dem Mittelpunkte

o des Diametralkreises D, der Spiegelpunkt heiße p'. Man ersetze also den Punkt $\bar{p}$ durch denjenigen Punkt p' der Geraden op, für den:

$$\overrightarrow{op'} = -\overrightarrow{o\bar{p}} \tag{26}$$

ist. Dann nimmt die Gleichung (25) die Gestalt an:

$$\overrightarrow{op} \cdot \overrightarrow{op'} = -\mathfrak{r}'^2. \tag{27}$$

Dieser Gleichung zufolge aber schneidet jeder Kreis N, der durch die Punkte p und p' hindurchgeht, den Diametralkreis *in zwei Gegenpunkten* (vgl. S. 511) und gehört somit dem Kreisnetz mit dem Diametralkreis D an.

Übrigens kann der Punkt p' auch aufgefaßt werden als der inverse Punkt zum Punkte p in bezug auf einen imaginären Kreis, der mit dem Diametralkreis konzentrisch ist, dessen Radius aber rein imaginär ist, nämlich aus dem Radius $\mathfrak{r}'$ des Diametralkreises durch Multiplikation mit $\mathfrak{i}$ hervorgeht, so daß also:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i}\mathfrak{r}' \tag{28}$$

ist. Bei Einführung dieses Kreises mit rein imaginärem Radius $\mathfrak{r}$ nimmt die Gleichung (27) die Gestalt an:

$$\overrightarrow{op} \cdot \overrightarrow{op'} = \mathfrak{r}^2, \tag{29}$$

die genau die Form (24) hat, nur daß in (29) eben $\mathfrak{r}$ rein imaginär ist. Man sagt daher, die Punkte p und p' seien zueinander invers in bezug auf den imaginären Kreis mit dem Mittelpunkt o und dem rein imaginären Radius $\mathfrak{r} = \mathfrak{i}\mathfrak{r}'$, und nennt diesen imaginären Kreis geradezu *den imaginären Orthogonalkreis des Netzes.*

Der Diametralkreis des Netzes ist dann „*der zu dem imaginären Orthogonalkreis gehörende reelle Kreis*", das soll heißen, derjenige Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem des imaginären Orthogonalkreises zusammenfällt, und dessen Radius $\mathfrak{r}'$ der Längenfaktor des rein imaginären Radius $\mathfrak{r} = \mathfrak{i}\mathfrak{r}'$ des Orthogonalkreises ist.

Der Orthogonalkreis und der Diametralkreis des zu einer Kurve zweiter Klasse apolaren Kreisnetzes. Nach dieser Einschaltung über Kreisnetze gehen wir zu Anwendungen des Satzes 964 über und setzen zunächst wieder voraus, der Orthogonalkreis O des zu einer Kurve zweiter Klasse $\alpha^{(2)}$ apolaren Kreisnetzes sei reell und sein Radius von Null verschieden. Dann ist *dieser Orthogonalkreis zugleich der geometrische Ort der in dem Netze enthaltenen Nullkreise* oder, was dasselbe ist, der geometrische Ort der Scheitel s der in dem Netze auftretenden konjugiert komplexen Linienpaare. Da aber diese Linienpaare als entartende Kreise aufzufassen sind, und alle Kreise der Ebene durch die Kreispunkte hindurchgehen, *so laufen die Geraden eines* *jeden von diesen konjugiert komplexen Linienpaaren von seinem Scheitel s nach den Kreispunkten j und j'* (vgl. S. 388 f.). Als entartender Kreis des zur Kurve $\mathfrak{a}^{(2)}$ apolaren Kreisnetzes ist aber das Linienpaar $[sj]$, $[sj']$ zu der Kurve zweiter Klasse $\mathfrak{a}^{(2)}$ apolar, oder, was nach dem Satze 675 dasselbe ist, *die konjugiert komplexen Geraden $[sj]$ und $[sj']$ sind in bezug auf die Kurve $\mathfrak{a}^{(2)}$ konjugiert.* Und das besagt nach S. 389 ff.: Es gehen von dem Scheitel s des Linienpaars $[sj]$ und $[sj']$ zwei reelle Tangenten T_1 und T_2 an die Kurve $\mathfrak{a}^{(2)}$, die ein Paar der elliptischen Strahlinvolution bilden, deren Doppelstrahlen die beiden konjugiert komplexen Geraden $[sj]$ und $[sj']$ sind. Diese elliptische Strahlinvolution ist aber die in Bd. I, S. 217 f. behandelte *Rechtwinkelinvolution* mit dem Scheitel s. Die beiden Tangenten T_1 und T_2, vom Punkte s an die Kurve $\mathfrak{a}^{(2)}$ gezogen, stehen somit aufeinander senkrecht.

Der Orthogonalkreis O des Netzes ist also der sogenannte *Direktorkreis der Kurve zweiter Klasse $\mathfrak{a}^{(2)}$* (vgl. S. 437). Derselbe hat bei einer Ellipse mit den Halbachsen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ den Radius:

$$\mathfrak{r} = \sqrt{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2} \tag{30}$$

und bei einer Hyperbel mit den Halbachsen $\mathfrak{a}$ und $i\mathfrak{b}$ den Radius:

$$\mathfrak{r} = \sqrt{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2}. \tag{31}$$

Um einen Kreis des Netzes vollständig festzulegen, kann man noch zwei Punkte p und q, durch die er gehen soll, und die nicht zueinander hinsichtlich des Direktorkreises von $\mathfrak{a}^{(2)}$ invers sind, beliebig annehmen. Denn durch den Punkt p und den hinsichtlich des Direktorkreises von $\mathfrak{a}^{(2)}$ inversen Punkt p' geht noch ein ganzes Kreisbüschel des Netzes hindurch; durch den Punkt q und den zu q inversen Punkt q' geht ein zweites Büschel des Netzes. Zwei Büschel des Netzes aber haben nach Satz 826 einen und nur einen Kreis miteinander gemein.

Nimmt man ferner die beiden Punkte p und q, die zur Bestimmung dieses Kreises dienen sollen, auf der Kurve zweiter Klasse $\mathfrak{a}^{(2)}$ an und läßt sie auf ihr in *einen* Punkt zusammenrücken, so erhält man den dem Netze angehörenden und daher zur Kurve $\mathfrak{a}^{(2)}$ apolaren Kreis, der zugleich die Kurve $\mathfrak{a}^{(2)}$ im Punkte p berührt. Man findet seinen Mittelpunkt m, indem man den gemeinsamen Mittelpunkt o der Kurve $\mathfrak{a}^{(2)}$ und ihres Direktorkeises mit p verbindet (Figg. 253 u. 254) und auf der Verbindungslinie den zu p in bezug auf den Direktorkreis inversen Punkt p' aufsucht; dann schneidet das Mittellot von pp' die im Punkte p errichtete Normale der Kurve $\mathfrak{a}^{(2)}$ in dem Mittelpunkte m des zu der Kurve $\mathfrak{a}^{(2)}$ apolaren und zugleich diese Kurve in p berührenden Kreises.

Ist die Kurve zweiter Klasse $\mathfrak{a}^{(2)}$ eine *Ellipse*, so liegt der Punkt p innerhalb des Direktorkreises O (Fig. 253). Man bestimmt dann den zu p hinsichtlich des Direktorkreises inversen Punkt p', indem man auf op in p das Lot errichtet bis zum Schnittpunkte t mit dem Direktorkreise und dann in t die Tangente an den Direktorkreis legt, so schneidet diese aus der Geraden op den zu p inversen Punkt p' aus.

Ist dagegen die Kurve zweiter Klasse $\alpha^{(2)}$ eine *Hyperbel mit spitzem Asymptotenwinkel* (vgl. Fig. 254 und die Bezeichnung auf S. 514), so daß also $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$ und somit nach (31) der Direktorkreis O reell und sein Radius $\mathfrak{r}$ von Null verschieden ist, so liegt der Hyperbelpunkt p außerhalb des Direktorkreises O, und man findet den zu p hinsichtlich des Direktorkreises inversen

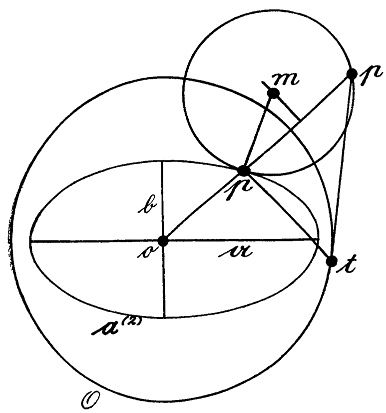


Fig. 253.

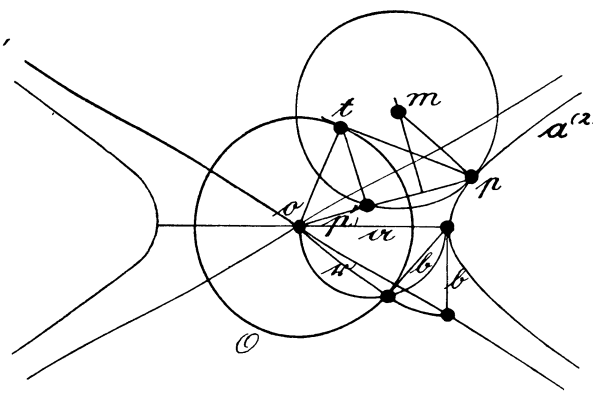


Fig 254.

Punkt p' durch Umkehrung des oben bei der Ellipse angewendeten Verfahrens, wie auch auf S. 512 ausführlich angegeben ist.

Ist die Kurve zweiter Klasse $\alpha^{(2)}$ eine *gleichseitige Hyperbel*, so schrumpft der Direktorkeis in den Mittelpunkt o der gleichseitigen Hyperbel zusammen. Die zu ihr apolaren Kreise gehen also durch den Mittelpunkt o der Hyperbel hindurch, und umgekehrt ist jeder Kreis, der den Mittelpunkt o der gleichseitigen Hyperbel enthält, zu dieser Hyperbel apolar.

Da ferner nach Satz 902 der Feuerbachsche Kreis eines Dreiecks, das einer gleichseitigen Hyperbel eingeschrieben ist, durch den Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel hindurchgeht, so ist insbesondere auch der Feuerbachsche Kreis eines jeden Dreiecks, das einer gleichseitigen Hyperbel eingeschrieben ist, zu dieser Hyperbel apolar, vorausgesetzt, daß sie als eine Kurve zweiter Klasse aufgefaßt wird. Man hat daher den Satz:

Satz 965: Der Feuerbachsche Kreis eines jeden einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreiecks ist zu der als Kurve zweiter Klasse aufgefaßten gleichseitigen Hyperbel apolar.

Dies gilt insbesondere auch von dem in der obigen Fig. 179 konstruierten, die gleichseitige Hyperbel *berührenden* Feuerbachschen Kreise (vgl. S. 423f.), und man hat den Satz:

Satz 966: Jeder eine gleichseitige Hyperbel berührende Kreis, der auf der entgegengesetzten Seite der Kurve liegt wie der Krümmungskreis seines Berührungspunktes, und dessen Radius halb so groß ist wie der Radius dieses Krümmungskreises, ist zu der als Kurve zweiter Klasse aufgefaßten gleichseitigen Hyperbel apolar.

Und da es nur einen eine gleichseitige Hyperbel in einem gegebenen Punkte berührenden und zu ihr als einer Kurve zweiter Klasse apolaren Kreis gibt, so gilt auch die Umkehrung:

Satz 967: Umkehrung von Satz 966: Der eine gleichseitige Hyperbel in einem gegebenen Punkte der Kurve berührende und zu ihr als einer Kurve zweiter Klasse apolare Kreis hat einen halb so großen Radius wie der Krümmungskreis dieses Punktes und liegt auf der anderen Seite der Kurve (Fig. 255).

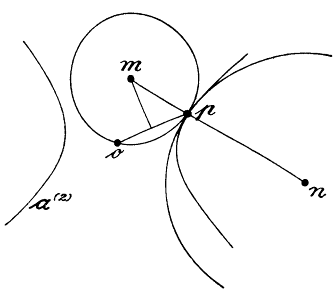


Fig. 255.

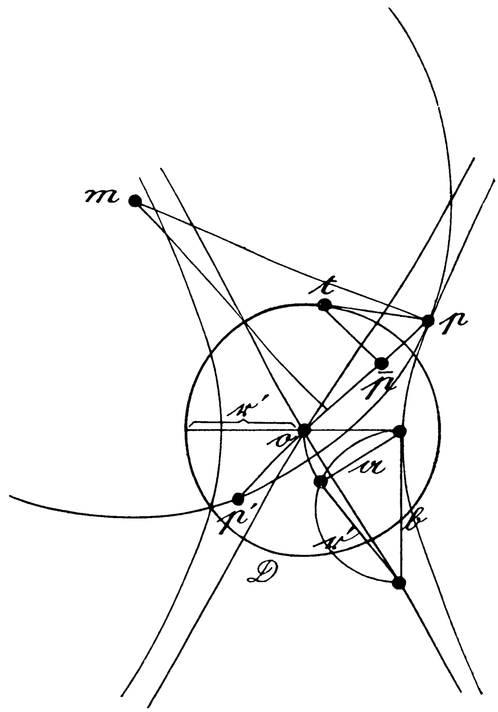


Fig. 256.

Man findet den *Mittelpunkt m* des eine gleichseitige Hyperbel in einem gegebenen Punkte p berührenden und zu ihr als einer Kurve zweiter Klasse apolaren Kreises, indem man die Normale des Punktes p der gleichseitigen Hyperbel mit dem Mittellote des Leitstrahls op schneidet, der von dem Mittelpunkte o der gleichseitigen Hyperbel nach dem Berührungspunkte p führt.

Es bleibt endlich noch in dem Falle einer *Hyperbel mit stumpfem Asymptotenwinkel* der die Hyperbel in einem gegebenen Punkte p berührende und zu ihr als einer Kurve zweiter Klasse apolare Kreis zu konstruieren (Fig. 256). Man hat alsdann an Stelle des hier wegen $\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$ imaginär gewordenen Direktorkeises der Hyperbel (vgl. Gleichung (31)), der zugleich den Orthogonalkreis des zur Hyperbel apolaren Kreisnetzes bildete, *den Diametral-*

kreis D des Netzes zur Konstruktion zu verwenden. Dieser ist nach S. 511 der zu dem imaginär gewordenen Orthogonalkreis (Direktorkeis) gehörende reelle Kreis. Da aber der Direktorkeis den Radius:

$$\mathfrak{r} = \sqrt{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2} = \mathfrak{i}\sqrt{\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2} \tag{32}$$

hat, wo $\sqrt{\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2}$ reell ist, so besitzt der Diametralkreis den Radius:

$$\mathfrak{r}' = \sqrt{\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2}, \tag{33}$$

während sein Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt o der Hyperbel zusammenfällt.

In der Fig. 256 ist der Formel (33) entsprechend der Radius $\mathfrak{r}'$ des Diametralkreises als zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks konstruiert, dessen Hypotenuse $= \mathfrak{b}$ und dessen erste Kathete $= \mathfrak{a}$ ist. Sodann wird der Kreis, der mit dem Radius $\mathfrak{r}'$ um den Mittelpunkt o der Hyperbel geschlagen werden kann, der Diametralkreis D des zur Hyperbel als einer Kurve zweiter Klasse apolaren Kreisnetzes. Man findet endlich den die Hyperbel in einem gegebenen Punkte p berührenden Kreis dieses Netzes, indem man zunächst nach der Vorschrift von S. 512f. zu dem Punkte p den hinsichtlich des Diametralkreises D inversen Punkt $\overline{p}$ konstruiert und diesen Punkt $\overline{p}$ an dem Mittelpunkte o des Diametralkreises D spiegelt. Dann ist der Spiegelpunkt p' zugleich zum Punkte p in bezug auf den imaginär gewordenen Orthogonalkreis des Netzes invers, und das Mittellot von pp' schneidet aus der Hyperbelnormale des Punktes p den Mittelpunkt m des die Hyperbel in p berührenden und zu ihr als einer Kurve zweiter Klasse apolaren Kreises aus.

Für eine *Parabel* zerfällt der Direktorkreis in die Leitlinie L der Parabel und die unendlich ferne Gerade (vgl. die Sätze 911 u. 912), und die zur Parabel als einer Kurve zweiter Klasse apolaren Kreise haben auch ihre Mittelpunkte auf der Leitlinie L; denn die um einen beliebigen Punkt der Leitlinie geschlagenen Kreise schneiden die Leitlinie senkrecht (Fig. 257). Der die Parabel in einem gegebenen Punkte p berührende und zu ihr als einer Kurve zweiter Klasse apolare Kreis wird also in der Weise gewonnen, daß man in dem Punkte p die Normale der Parabel errichtet und sie mit der Leitline L schneidet Dann ist der Schnittpunkt der Mittelpunkt m des gesuchten Kreises.

Für ein *Punktpaar* pq ist der Kreis, der die Punkte p und q zu Gegenpunkten hat, der Direktorkreis O, da ja die von einem beliebigen Punkte x dieses Kreises an das Punktpaar pq gezogenen Tangenten aufeinander senkrecht stehen (Fig. 258). Dagegen kann von einem zum Punktpaar pq apolaren und dasselbe etwa in p im Sinne

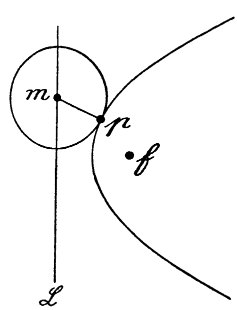


Fig. 257.

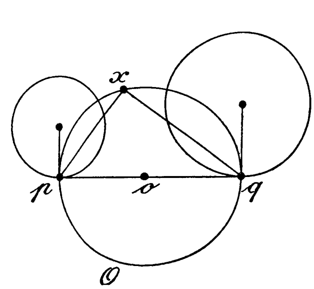


Fig 258.

von S. 514 berührenden Kreise nicht die Rede sein. Aber es ist die Gesamtheit aller Kreise, die die Gerade $[pq]$ in einem der Punkte p und q berühren, zu dem Punktpaar pq apolar, denn sie schneiden den Direktorkreis O des Punktpaars senkrecht.

Der die Kurven einer parabolischen Büschelschar von Kurven zweiter Klasse im Doppelpunkte der Schar berührende und zu ihr apolare Kreis. Ist $\boldsymbol{a}^{(2)}$ eine beliebige nicht entartende Kurve zweiter Klasse und d^2 ein doppelt zählender Punkt auf ihr, so bestimmen die beiden Kurven zweiter Klasse $\boldsymbol{a}^{(2)}$ und d^2 eine Kegelschnittschar:

$$(34) \qquad a^{(2)} + \mathfrak{f} d^2,$$

und zwar nach S. 53f. eine parabolische Büschelschar von Kurven zweiter Klasse, die sich, soweit sie nicht entarten, in dem Doppelpunkte d der Büschelschar vierpunktig berühren.[1]) Die nicht entartenden Kurven dieser Büschelschar sind identisch mit den nicht entartenden Kurven des adjungierten parabolischen Scharbüschels, das dann außer diesen Kurven als entartende Kurve die doppeltzählende gemeinsame Tangente D jener Kurven im Punkte d enthält (vgl. S. 54).

Ist $\boldsymbol{A}^{(2)}$ die zu der Potenzform zweiter Klasse $\boldsymbol{a}^{(2)}$ zugehörige Potenzform zweiter Ordnung, so gestattet dieses parabolische Scharbüschel die Darstellung:

$$(35) \qquad \boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{g} D^2.$$

Unter den Kurven dieses Scharbüschels ist eine gleichseitige Hyperbel:

$$(36) \qquad \boldsymbol{H}^{(2)} = \boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h} D^2$$

enthalten, die dadurch charakterisiert ist, daß sie zum Kreispunktpaar apolar ist, deren Parameter $\mathfrak{h}$ sich also aus der Gleichung bestimmt:

$$(37) \qquad [\boldsymbol{H}^{(2)} \boldsymbol{k}^{(2)}] = [(\boldsymbol{A}^{(2)} + \mathfrak{h} D^2) \boldsymbol{k}^{(2)}] = 0,$$

in der $\boldsymbol{k}^{(2)}$ die Potenzform zweiter Klasse des Kreispunktpaars bedeutet.

Betrachtet man die auf diese Weise als Kurve *zweiter Ordnung* eingeführte gleichseitige Hyperbel $\boldsymbol{H}^{(2)}$ jetzt als Kurve *zweiter Klasse* und bezeichnet sie in dieser Auffassung durch das Symbol $\boldsymbol{h}^{(2)}$, so gehört die Kurve $\boldsymbol{h}^{(2)}$ der Büschelschar (34) an. Da sich nun alle Kurven der parabolischen Büschelschar (34) im Punkte d vierpunktig berühren, so haben sie auch ihren Krümmungskreis im Punkte d miteinander gemein. Es ist aber andererseits der zu $\boldsymbol{a}^{(2)}$ apolare und die Kurve $\boldsymbol{a}^{(2)}$ in d berührende Kreis $\boldsymbol{C}^{(2)}$ nach dem Satze 672 auch zu dem doppelt zählenden Punkte d^2 und damit dann auch zu der ganzen Büschelschar (34) apolar, insbesondere also auch zu der gleichseitigen Hyperbel $\boldsymbol{h}^{(2)}$, und er berührt auch diese Hyperbel $\boldsymbol{h}^{(2)}$ in d. Nach dem Satze

1) Vgl. zum folgenden wieder die schon mehrfach zitierte Arbeit von E. Müller in den Monatsheften für Mathematik und Physik. 28. Jahrgang (1917), S. 57.

967 hat er somit einen halb so großen Radius wie der Krümmungskreis der gleichseitigen Hyperbel im Punkte d und liegt auf der anderen Seite der Kurve.

Da endlich der Kreis $C^{(2)}$ zu jeder Kurve der Büschelschar (34) apolar ist und sie in d berührt, und ebenso auch der Krümmungskreis des Punktes d allen nicht entartenden Kurven der Büschelschar (34) gemeinsam ist, so gilt die in dem Satze 967 ausgesprochene Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel auch für jede nicht entartende Kurve der Schar (34), insbesondere also für die zur Festlegung der Schar benutzte Kurve $a^{(2)}$ selbst, und man hat den Satz:

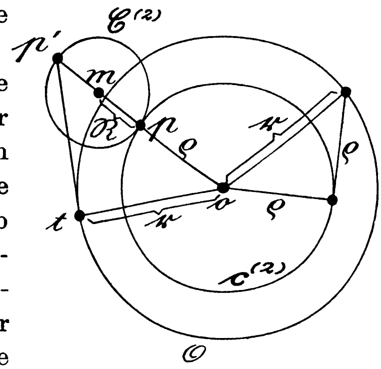


Fig. 259.

Satz 968: Satz von Steiner[1]): Eine nicht entartende Kurve zweiter Klasse $a^{(2)}$ wird dann und nur dann von einem zu ihr apolaren Kreise $C^{(2)}$ berührt, wenn sein Radius halb so groß ist wie der Krümmungsradius der Kurve $a^{(2)}$ im Berührungspunkte, und wenn er zugleich auf der entgegengesetzten Seite der Kurve liegt wie der Krümmungskreis.

Man kann leicht eine Bestätigung des Steinerschen Satzes dadurch gewinnen, daß man die in ihm für eine jede nicht entartende Kurve zweiter Klasse ausgesprochene Eigenschaft speziell für den Kreis auf andere Weise entwickelt. Dazu wende man die auf S. 514f. gegebene Konstruktion des eine Ellipse berührenden und zu ihr als einer Kurve zweiter Klasse apolaren Kreises auf den Fall an, wo die Ellipse in einen Kreis $c^{(2)}$ vom Mittelpunkt o und dem Radius ϱ übergegangen ist (Fig. 259).

Nach der Gleichung (30) wird der Radius $\mathfrak{r}$ des Direktorkreises eines Kreises mit dem Radius ϱ:

$$\mathfrak{r} = \sqrt{2\varrho^2} = \varrho\sqrt{2}. \tag{38}$$

Man schlage also mit dem Radius $\mathfrak{r}$ aus (38) den zu dem gegebenen Kreis $c^{(2)}$ vom Radius ϱ konzentrischen Kreis, so ist dieser Kreis der Direktorkreis O des Kreises $c^{(2)}$. Damit dann ein den Klassenkreis $c^{(\ )}$ in einem gegebenen Punkte p berührender Ordnungskreis $C^{(2)}$ zu dem Klassenkreis $c^{(2)}$ apolar sei, muß er den Direktorkreis O senkrecht schneiden. Man hat daher nach dem Vorbilde von S. 512 den zu p in bezug auf den Direktorkreis O inversen Punkt p' aufzusuchen, indem man in p auf op das Lot errichtet bis zum Schnitt mit dem Direktorkreis O in t und in dem Punkte t die Tangente an

1) Vgl. J. Steiner, Über eine Eigenschaft der Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 30 (1845), S. 271f., Gesammelte Werke Bd. II, S. 341f.

den Direktorkreis zieht. Diese schneidet die Verlängerung von op in p'. Dann wird hier, weil op zugleich die Normale des Kreises $c^{(2)}$ ist, der gesuchte Mittelpunkt m des Kreises $C^{(2)}$ direkt der Mittelpunkt von pp'. Der geforderte Kreis $C^{(2)}$ ist also der um m mit dem Radius $mp = \mathfrak{R}$ geschlagene Kreis.

Nun soll nach dem Satze von Steiner der Radius $\mathfrak{R}$ des Kreises $C^{(2)}$:

$$\mathfrak{R} = \tfrac{1}{2}\varrho$$

sein. Dies folgt aber sofort aus der soeben angegebenen Konstruktion. Denn, da das Dreieck opt wegen (38) gleichschenklig rechtwinklig ist, so gilt dasselbe auch von dem Dreieck otp', und es ist daher $pp' = op = \varrho$, so daß der Radius $\mathfrak{R}$ des Kreises $C^{(2)}$ in der Tat $= \frac{1}{2}\varrho$ wird. Und damit ist wirklich der Satz von Steiner für den Fall bestätigt, daß die in ihm vorkommende Kurve zweiter Klasse ein Kreis ist. Zugleich hat man den Sondersatz:

Satz 969: Ein einen Klassenkreis $c^{(2)}$ berührender Ordnungskreis $C^{(2)}$ ist dann und nur dann zu dem Klassenkreis $c^{(2)}$ apolar wenn sein Radius $\mathfrak{R}$ halb so groß ist wie der Radius ϱ des Klassenkreises, und sich beide Kreise von außen berühren.

Sachregister.

Namenregister.

Geometrie. (Encyklopädie der math. Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwend. Bd. III in 5 Teilen.) Redigiert von Geh. Reg.-Rat *W. Fr. Meyer*, Prof. an der Universität Königsberg und Dr. *H. Mohrmann*, Prof. an der Universität Basel.

I. Teil, I. Hälfte (Heft 1—4) 1907/1910. Kpl. Geh. ℛℳ 28.—, geb. ℛℳ 35.—. 1. Heft. 1907. ℛℳ 8.—. 2. Heft. 1907. ℛℳ 6.40. 3. Heft. 1909. ℛℳ 2.60. 4. Heft 1910. ℛℳ 11.—.

I. Teil, II. Hälfte. (Heft 5—10). 5. Heft. 1914. ℛℳ 7.20. 6. Heft. 1920. ℛℳ 8.—. 7. Heft. 1921. ℛℳ 9.40. 8. Heft. 1924. ℛℳ 6.40. 9. Heft. 1922. ℛℳ 5.—. 10. Heft. [In Vorb. 1927.]

II. Teil, I. Hälfte (Heft 1—6) 1903/1915. Kpl. Geh. ℛℳ 28.80, geb. ℛℳ 35.80. 1. Heft. 1903. ℛℳ 6,—. 2. Heft. 1904. ℛℳ 3 60. 3. Heft. 1906. ℛℳ 7.40. 4. Heft. 1909. ℛℳ 4.40. 5. Heft. 1915. ℛℳ 2 40. 6. Heft. 1915. ℛℳ 5.—.

II. Teil, II. Hälfte (Heft 7—12) 7. Heft. 1921. ℛℳ 7.60. 8. Heft. 1922. ℛℳ 11.—. 9.—12. Heft [In Vorb. 1927.]

III. Teil. (Heft 1—7). 1. Heft. 1902. ℛℳ 8.60. 2. u. 3. Heft. 1903. ℛℳ 9.60. 4. Heft. 1915. ℛℳ 3.80. 5. Heft. 1921. ℛℳ 2.40. 6. Heft. 1922. ℛℳ 4.60. 7. Heft. [In Vorb. 1927.]

Leonhardi Euleri opera omnia. Sub auspiciis societatis scientiarum naturalium helveticae edenda curaverunt *Ferdinand Rudio, Adolf Krazer, Paul Stäckel.* In 3 Serien. Jeder Band zu je etwa 60 Bogen. 4.

In den letzten Jahren erschienen neu folgende Bände des Euler-Werkes von Series I: Opera mathematica:

Series I. Vol. 6: **Commentationes algebraicae** ad theoriam aequationum pertinentis. Ed. *F. Rudio, A. Krazer, P. Stäckel.* [XXIX u. 509 S.] 1921. Kart. Schw. Frcs. 54.—

Vol. 7: **Commentationes algebraicae** ad theoriam combinationum et probabilitatum pertinentes. Ed. *L. G. Du Pasquier.* [LVIII u. 580 S.] 1923. Kart. Schw. Frcs. 65.—

Vol. 8: **Introductio in analysin infinitorum.** Edd. *A. Krazer* et *Fr. Rudio.* Tomus primus [XVIII u. 392 S.] 1922. Kart. Schw. Frcs. 40.—

Vol 14: **Commentationes analyticae** ad theoriam serierum infinitarum pertinentes. Vol. I. Edd. *E. Boehm* et *G. Faber.* [X u. 617 S.] 1925. Kart. Schw. Frcs. 60 —

Vol. 15: **Commentationes analyticae** ad theoriam serierum infinitarum pertinentes. Vol. II. Ed. *G. Faber.* [U. d. Pr. 1927]

Sophus Lie, Gesammelte Abhandlungen. Auf Grund einer Bewilligung aus dem Norwegischen Forschungsfonds von 1919 mit Unterstützung des Videnskapsselskap zu Oslo und der Akademie der Wissenschaften zu Leipzig herausgegeben von dem Norwegischen Mathematischen Verein durch Dr. *Fr. Engel,* Prof. an der Universität Gießen und Dr. *P. Heegaard,* Prof. an der Universität Oslo. III. Band: **Abhandlungen zur Theorie der Differentialgleichungen.** Erste Abteilung: Hrsg. von *Fr. Engel* [XIV u. 789 S.] gr. 8. 1922. Geb. ℛℳ 20.—. V. Band: **Abhandlungen über die Theorie der Transformationsgruppen.** Abt. 1. Hrsg. von *Fr. Engel.* [XII u. 776 S.] gr. 8. 1924. Geb. ℛℳ 20.—. U. d. Pr.: Band IV: **Abhandlungen zur Theorie der Differentialgleichungen.** Band VI: **Transformationsgruppen II.** In Vorber.: Band I/II **Geometrie.** Band VII: **Nachlaß.**

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Von Geh. Hofr. Dr. *M. Cantor,* weil. Prof. an d. Univ. Heidelberg. In 4 Bänden. gr. 8. I. Band: Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. 4. Aufl. (Nachdruck.) Mit 114 Fig. u. 1 lithogr. Taf. [VI u. 941 S.] 1922. Geh. ℛℳ 30.—, geb. ℛℳ 33.—. II. Band: Vom Jahre 1200 bis zum Jahre 1668. 2. Aufl. (Nachdruck.) Mit 190 Fig. [XII u. 943 S.] 1923. Geh. ℛℳ 30.—, geb. ℛℳ 33.—. III. Band: Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1758. 2. Aufl. (Nachdruck.) Mit 147 Fig. [X u. 923 S.] 1922. Geh ℛℳ 30 —, geb. ℛℳ 33.—. IV. Band: Vom Jahre 1759 bis zum Jahre 1799. Unter Mitarbeit von *V. Bobynin, A. v. Braunmühl, F. Cajori, S. Günther, V. Kommerell, G. Loria, E. Netto, G. Vivanti, C. R. Wallner,* hrsg. von *M. Cantor.* (Nachdruck.) [VI u. 113 S.] 1924. Geh. ℛℳ 35.—, geb. ℛℳ 39.—

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin