Die **„Sammlung Vieweg“** hat sich die Aufgabe gestellt, Wissens- und Forschungsgebiete, Theorien, chemisch-technische Verfahren usw., die im Stadium der Entwicklung stehen, durch zusammenfassende Behandlung unter Beifügung der wichtigsten Literaturangaben weiteren Kreisen bekanntzumachen und ihren **augenblicklichen Entwicklungsstand zu beleuchten.** Sie will dadurch die Orientierung erleichtern und die Richtung zu zeigen suchen, welche die weitere Forschung einzuschlagen hat.

Verzeichnis der bisher erschienenen Hefte siehe dritte Umschlagseite.

Als Herausgeber der einzelnen Gebiete, auf welche sich die Sammlung Vieweg zunächst erstreckt, sind tätig und zwar für:

Physik (theoretische und praktische, und mathematische Probleme):

Herr Professor **Dr. Karl Scheel,** Physikal.-Techn. Reichsanstalt, Charlottenburg;

Kosmische Physik (Astrophysik, Meteorologie und wissenschaftliche Luftfahrt — Aerologie — Geophysik):

Herr Geh. Reg.-Rat Professor **Dr. med. et phil. R. Assmann,** Königl. Aeronaut. Observatorium Lindenberg (Kr. Beeskow);

Chemie (Allgemeine, Organische und Anorganische Chemie, Physikal. Chemie, Elektrochemie, Technische Chemie, Chemie in ihrer Anwendung auf Künste und Gewerbe, Photochemie, Metallurgie, Bergbau):

Herr Professor **Dr. B. Neumann,** Techn. Hochschule, Breslau;

Technik (Elektro-, Maschinen-, Schiffbautechnik, Flugtechnik, Motoren, Brückenbau):

Herr Professor **Dr.-Ing. h. c. Fritz Emde,** Techn. Hochschule, Stuttgart;

Biologie (Allgemeine Biologie der Tiere und Pflanzen, Biophysik, Biochemie, Immunitätsforschung, Pharmakodynamik, Chemotherapie):

Herr Professor **Dr. phil. et med. Carl Oppenheimer,** Berlin-Grunewald.

KRÄFTE UND SPANNUNGEN

DAS GRAVITATIONS- UND STRAHLENFELD

VON

PROF. DR. MAX. B. WEINSTEIN

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDR. VIEWEG & SOHN

BRAUNSCHWEIG 1914

ISBN 978-3-663-00728-9 ISBN 978-3-663-02641-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-02641-9

Vorwort.

Die kleine Schrift soll einen Überblick über die modernen Theorien der Kräfte in der Natur vermitteln. Unsere jetzigen Anschauungen haben vieles vereinfacht; auf der anderen Seite aber, namentlich durch die Relativitätslehren, die hier voll berücksichtigt werden mußten, die Darstellung so sehr erschwert, daß ich kaum hoffen darf, alles hinreichend klar vorgeführt zu haben. Ich kann nicht einmal sagen, ob ich Vollständigkeit erreicht habe, denn die Zahl der Theorien ist fast unübersehbar. An sich ist es kein günstiges Zeichen für den Zustand einer Wissenschaft, wenn so viel Verschiedenes geboten wird, und wenn das Einzelne mit kompliziertestem mathematischen Apparat ausgestattet werden muß, daß die Formeln fast nicht mehr auszumessen sind. Aber wir dürfen doch hoffen, daß bald eine Klärung eintritt, die nach manchen Anzeichen sich jetzt schon anbahnt. Vielleicht trägt diese Schrift einiges dazu bei. Ich habe vor allem die Spannungstheorien der Kräfte, die ja für die moderne Wissenschaft zur Hauptbedeutung gelangt sind, behandelt, darunter vollständig die Theorie der elektromagnetischen Kräfte. Außerdem sind die Gravitationslehren besprochen. Eötvös auf experimentellem, Einstein auf theoretischem Gebiet, haben in diesen Lehren namentlich Berücksichtigung gefunden. Dem ersteren bin ich zu hohem Danke für Mitteilung seiner Beobachtungsergebnisse verpflichtet, die ich in diese Schrift habe aufnehmen dürfen. Daß so oft mein Buch „Physik der bewegten Materie und die Relativitätstheorie“ angeführt ist, bitte ich nicht ungünstig zu beurteilen; nachdem ich mich einmal für dieses Buch durch die berghohe Literatur durchgearbeitet habe, glaubte ich von seinen Darlegungen Gebrauch machen zu sollen. Doch sind selbstverständlich die Hauptarbeiten namhaft gemacht.

Charlottenburg, im Mai 1914.

Weinstein.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Vorwort III

Inhaltsverzeichnis V

1. Ursprung der Auffassung von Kräften 1
   Stammbegriff der Ursächlichkeit 1
   Ursachen und Kräfte 2

2. Elementargesetze 3
   Notwendigkeit ihrer Annahme 3
   Unsicherheit ihrer Fassung 4

3. Vektoren und Tensoren 5

4. Die Maxwellschen Spannungen im elektromagnetischen Felde 8
   Maxwells Theorie 9
   Verallgemeinerung, Vektorformeln 11

5. Minkowskis Erweiterung auf das Raumzeitgebiet und für Bewegungen 14
   Die Minkowskischen Matrizes 14
   Die Minkowskischen elektromagnetischen Gleichungen 15
   Formeln der Minkowskischen Relativitätslehre 16
   Die Spannungen 16
   Ableitung ihrer Ausdrücke 19
   Kräfte und Spannungen nach Minkowski 23
   Energie der Spannungen 24

6. Max Abrahams Ansätze für das elektromagnetische Feld . 24
   Formeln, Impulsdichte 24
   Absolute und relative Spannungen 25

7. Spannungen und Striktion 26
   Die Helmholtz-Kirchhoffschen Gleichungen 26
   Erweiterung auf das Raumzeitgebiet 28

8. Bedeutung der Spannungen 29
   Maxwells Berechnungen 29
   Die verschiedenen Äthertheorien 30

Seite
9. Spannungen und Energie 30
Ableitung der Spannungen aus der Energie 30
Verhältnis zu den verschiedenen Theorien des Elektromagnetismus 33

10. Theorie der Spannungen von Heinrich Hertz 34

11. Die mechanischen Kräfte 37
Darstellung durch Spannungen 37
Max Abrahams Ansätze für die Spannungen 39
Schwierigkeit der Ansätze überhaupt 41
Spannungen und Potential 42
Unmöglichkeit eines Potentials in Minkowskis Theorie 42

12. Die Gravitation und das Gravitationsfeld 44
Verbreitung der Gravitation 44
Anomalien in den Sternbewegungen 45
Jaumanns Theorie 45
Versuche von Eötvös 47
Einsteins Äquivalenzhypothese 49
Einsteins erste Theorie der Schwerkraft und des Strahlenfeldes . 49
Max Abrahams Theorie der Schwerkraft 50
Abweichung der Strahlen an einem Himmelskörper nach Einstein 53
Einsteins zweite Theorie der Schwerkraft und des Strahlenfeldes 55
Minkowskis astronomische Gleichungen 61

13. Die Induktionskräfte in der Relativitätslehre 62
Die Lorentz-Einsteinschen Transformationen 62
Die Formeln der Relativitätslehre für die elektromagnetischen Kräfte 63
Deutung im Sinne der Relativitätslehre 64

1. Ursprung der Auffassung von Kräften.

Es ist in der Art: wie wir die Welt auffassen, begründet, daß wir zu allen Begriffen auch ein „Etwas“ bilden, ein Gegenständliches, daß wir also, kurz ausgedrückt, Begriffe auch vergegenständlichen. Wir meinen sogar die Begriffe dadurch erst unserer Vorstellung zugänglich gemacht zu haben, daß wir ihnen ein Gegenständliches an die Seite setzen. Ob dieses für das gesamte Gebiet der Begriffe oder nur für einen Teil zutrifft, zu untersuchen, ist hier nicht der Ort. Das darf aber mit Sicherheit behauptet werden, daß die Kräfte, mit denen wir es hier besonders zu tun haben, durchaus Vergegenständlichungen sind zu unserem Stammbegriffe der Ursächlichkeit. Wir sind durch unsere Geistesbeschaffenheit gezwungen, alles zu verknüpfen, alles ursächlich aufzufassen, sowohl das Bestehende wie das Geschehende, gleichgültig, ob wir das a priori tun, weil die Ursächlichkeit überhaupt zu den Eigenarten unseres Geistes gehört, wie ich persönlich glaube, oder a posteriori aus der Erfahrung in der langen Reihe der Wesen, deren Endglied wir sind, wie so viele andere annehmen zu müssen meinen. Der Begriff der Ursächlichkeit ist bei weitem umfassender als der der Ursache, wie das nicht anders sein kann. Nicht jede Vergegenständlichung zu einer Ursächlichkeit ist eine Ursache. So z. B. müssen wir auch den Zufall als Vergegenständlichung zur Ursächlichkeit auffassen, oder auch den Gegensatz, oder ein koordiniert Nebenhergehendes usf., was aber niemand als Ursache ansehen wird. Das Ursächliche gibt allgemeinen Zusammenhang, die Ursache unmittelbare oder mittelbare Verbindung. Während sich darum das Ursächliche nach rückwärts an einer endlosen Kette abspielt, sozusagen zum Beginn der Schöpfung führt, geht die Ursache auf ein Bestimmtes. Und selbst wenn wir Ursachen für Ursachen ansetzen, kommen wir immer zu einem Anfang. So z. B. kann das Herumwirbeln eines Magnetpols um einen elektrischen Strom die Kraft dieses Stromes zur Ursache haben, diese Kraft wiederum zur Ursache ein Bewegungsmoment von Elektrizität, letztere eine Potentialdifferenz, diese wieder einen Wärmestrom. Hier hört die Reihe nach rückwärts gerechnet auf, wenn wir uns nicht in Unwesentlichkeiten verlieren wollen. Wir gehen in der Reihe so weit, als eines für das andere unmittelbar bestimmend ist, in dem Beispiel also bis zum Wärmestrom. Dieser seinerseits kann selbstverständlich noch besondere Ursachen haben, die wiederum Ursachen aufweisen usf. Aber für die Bestimmung des Endergebnisses, des Herumwirbelns des Magnetpols, kommt es auf sie nicht mehr an; der Wärmestrom mag so oder anders bewirkt sein, auf die von ihm hervorgebrachte Potentialdifferenz hat es keinen Einfluß. Da es noch viele andere Mittel gibt, die Potentialdifferenz zu schaffen, so hätten wir auch schon bei dieser stehen bleiben können. Ja auch schon bei dem Bewegungsmoment durften wir die Reihe abbrechen, weil auch dieses in mannigfacher Weise hervorgebracht zu werden vermag. Es entspricht aber der gesunden Entwickelung der Wissenschaft, wenn wir jede Reihe an sich so weit verfolgen, als die Natur den Weg in jedem Falle zeigt. Um Schwierigkeiten in der Darstellung und in der mathematischen Entwickelung zu vermeiden, bricht man aber meist die Reihe sehr viel früher ab. Für unsere Zwecke genügt es völlig, nur die unmittelbaren Ursachen zu betrachten.

Damit, daß wir Ursachen setzen, brauchen wir noch nicht zu meinen, daß solche auch vorhanden sind. Aus der Verwechselung von Ursächlichkeit und Ursache ist der Wissenschaft viel unnötiger Streit und Hader erwachsen. Wir halten beides scharf auseinander. Daß Ursachen überhaupt vorhanden sind, wird niemand leugnen können, der z. B. ruht und dann nach einem Stoß plötzlich sich bewegen muß, oder eine Anstrengung machen muß, sich nicht zu bewegen. Was wir aber an uns erkennen, übertragen wir sofort auf die Außenwelt. Es ist neuerdings eine große Kontroverse darüber entstanden, wie weit wir zu einer solchen Übertragung berechtigt sind. An sich ist diese Kontroverse uralt, und sie wird noch in die Ewigkeit gehen, weil sie metaphysische Fragen betrifft, die überhaupt nicht gelöst werden können, da das einzige, was der Mensch als Sonderwesen kennt und nur zu kennen vermag, er selbst, als Wesen für sich, ist. Sprechen wir rein physisch, so haben wir die Berechtigung zur Übertragung zweifellos, und wir könnten gar keine Menschengemeinschaft bilden, ja nicht einmal in der Welt leben, wenn wir von ihr keinen Gebrauch machen wollten. Physisch müssen wir also sagen, es gibt in der Welt Ursachen. Und das muß selbst der Zwangsmechanist sagen, für den der Stoß und die Bewegung oder die Anstrengung, sie zu vermeiden, nicht verbunden, sondern durch den Zwangsmechanismus der Welt so aneinandergeordnet sind, daß die Bewegung oder die Anstrengung nach dem Stoß folgt, denn er wird nie behaupten, daß dem Stoß jemals keine Bewegung oder Anstrengung folgt. Wenigstens bin ich einer solchen Behauptung noch nicht begegnet. Eine andere Frage ist es natürlich, ob auch überall Ursachen da sind, wo wir solche annehmen oder ansetzen. Aber auch das kann sich nur auf bestimmte Ursachen beziehen. Das bekannteste Beispiel ist die allgemeine Annäherung der Körper aneinander. Wenn wir als ihre Ursache in bestimmter Weise die Anziehung, die die Körper aufeinander ausüben, bezeichnen, existiert denn auch wirklich eine solche Anziehung? Wollte jemand behaupten, die Lebenserscheinungen hätten, auch nur zur Leitung, die Seele als Ursache, so würde er bei den physischen Monisten einen sogenannten Sturm der Entrüstung erregen und mindestens als rückständig gekennzeichnet werden. Die moderne Physik beschäftigt sich eifrig gerade mit der Frage nach der Art der von ihr angenommenen Kräfte, und ich habe sogleich von diesen Ergebnissen Rechenschaft abzulegen. Doch löst die Relativitätslehre die Kräfte entweder ganz auf oder setzt ihnen wenigstens ein Erscheinendes an die Seite.

2. Elementargesetze.

Es ist eigentümlich, daß wir von den Kräften formal bei weitem besser unterrichtet sind als sachlich. Wir kennen ihre Gesetze, vielfach bis zu einem hohen Grade der Genauigkeit, soweit es sich um Wirkungen ausgedehnter Substanzen (wozu wir überhaupt alles Wirksame und Wirkende rechnen) auf ausgedehnte Substanzen handelt, also soweit Beobachtung in Betracht kommt. Aber über die Natur der Kräfte sind wir auf Vermutungen angewiesen. Selbst ihre Gesetze werden vieldeutig, sobald wir von den ausgedehnten Substanzen übergehen zu den Elementen, aus denen die Substanzen bestehen, z. B. zu den Atomen oder zu den Stromelementen oder zu den Elektronen, und es ist nur Übereinkommen, wenn für die Elementargesetze die gleichen Ausdrücke festgestellt werden, die in gewissen Fällen für ausgedehnte Substanzen sich als zutreffend erwiesen haben. So ist das Elementargesetz der Gravitation eine Übertragung des Anziehungsgesetzes zweier ausgedehnter, konzentrisch geschichteter Kugeln auf zwei Atome oder Korpuskeln, oder welches die letzten Teilchen der greifbaren Materie sind. Die Form der Summanden wird gleichgesetzt der Form der Summe im Ausgangsfall, und wie wenig das zuzutreffen braucht, ist ja bekannt geworden namentlich an dem Ampèreschen Gesetz für Stromelemente, das in unendlich vielfacher Weise abgeändert werden kann, ohne daß im Ergebnis für geschlossene Ströme etwas Verschiedenes herauskommt. Mehr und mehr hat man in der neueren Zeit ermittelt, daß in den letzten Teilchen der Substanzen ganz besondere Zustände herrschen, die sich an den Vergesellschaftungen dieser Teilchen mit Ausnahme weniger Fälle fast gar nicht verraten. Ein Staat kann nach außen als Ganzes durchaus den Eindruck eines stabilen, fast neutralen Gebildes machen, und doch aus Individuen bestehen, die der wildesten Leidenschaften und Taten fähig sind. So verhält es sich mit den Vergesellschaftungen der letzten Teilchen und diesen letzten Teilchen selbst. Die Vergesellschaftung wirkt wie im menschlichen Staate ausgleichend nach Raum wie nach Zeit. Wo sie es nicht tut, da sehen wir den fortschreitenden oder explosiven Zerfall. Und nichts war in dieser Beziehung so lehrreich wie die neuzeitliche Untersuchung der radioaktiven Stoffe und der Strahlungen, die uns einen Einblick in die ungeheuren Energien gewährt haben, welche gerade in den letzten Teilchen, wie aufgespeichert, sich finden. Umsomehr müssen wir Zweifel hegen, ob die Übertragungen der Gesetze auf diese letzten Teilchen zulässig sind. Allein wir können von diesen Übertragungen nicht absehen, denn die Übertragungen geschehen aus besonderen Vergesellschaftungsfällen, und wir bedürfen ihrer nun für alle Fälle, um die Berechnungen ausführen zu können. Oft glaubt man, daß die erfahrungsmäßige Bestätigung der Ergebnisse der Berechnung die Richtigkeit der Übertragung feststelle. Das ist keineswegs der Fall. An dem Beispiel der geschlossenen Ströme sieht man das unmittelbar;

welche Gestalt und welchen Umfang diese Ströme haben mögen, die zu dem Ampèreschen Elementargesetz hinzufügbaren Glieder heben sich unter allen Umständen auf. In anderen Fällen, z. B. in dem der Massenanziehung, erweist die bezeichnete Bestätigung nichts weiter, als daß für unsere Untersuchungsmöglichkeit die Ausgleichung zwischen den letzten Individuen schon nicht mehr von der Größe und der Form ihrer Vergesellschaftung abhängt. Manche glauben exakter sich auszudrücken, wenn sie die Elementargesetze nicht auf die letzten Individuen beziehen, sondern auf ihre Vergesellschaftungen, die sie dann so zusammengedrängt annehmen, daß ihre Abmessungen gegen die Abmessungen in unseren Untersuchungsfällen nicht in Betracht kommen. Dann soll man die Form und die innere Verteilung so annehmen dürfen wie in den Ausgangsfällen, von denen aus die Gesetze übertragen werden. Das ist mathematisch gedacht, nicht physikalisch, und gewährt selbstverständlich nicht die geringste Einsicht in das Wesen der Sache. Allein es läßt sich im gegenwärtigen Stande unseres Wissens noch so gut wie gar nichts zur Aufhellung dieser Verhältnisse tun. Wir müssen hier noch bei den alten Methoden bleiben. Und so hat man beispielsweise nicht einmal Bedenken getragen, die elektromagnetischen Kraftgesetze unmittelbar auf ein einzelnes Elektron zu übertragen, obwohl dieses, es mag sich noch so rasch bewegen, keinen geschlossenen elektrischen Strom, nicht einmal ein Stromstück, abgeben kann, worauf sich doch jene Kraftgesetze beziehen, und für die allein sie als der Erfahrung entsprechend nachgewiesen werden können. Und gerade die moderne Physik ist auf solche Übertragung angewiesen, da sie die Welt überhaupt in letztes Einzelnes auflöst.

3. Vektoren und Tensoren.

Alle Kräfte, mit denen wir es gegenwärtig in der Physik zu tun haben, verhalten sich erfahrungsmäßig in ihrem Wirkungsgebiet (der dreidimensionale Raum oder das vierdimensionale Raumzeitgebiet Minkowskis) wie die Abmessungen dieses Gebietes oder wie deren Quadrate und Produkte. Wir haben so Vektorkräfte und Tensorkräfte. Der Satz für die Vektorkräfte ist nichts anderes als der alte Satz vom Parallelogramm der Kräfte in seiner allgemeinsten Fassung. Man drückt den ganzen

Satz bekanntlich auch so aus, daß man sagt: Beim Übergang von einem Bezugssystem (Koordinatensystem) im Wirkungsgebiet auf ein anderes ändern sich die Komponenten der Kräfte kovariant zu den Komponenten der Abmessungen, oder zu den Quadraten und Produkten dieser Komponenten. Dementsprechend haben auch Vektorkräfte so viele Komponenten wie ihr Wirkungsgebiet Dimensionen, Tensorkräfte so viele wie das Quadrat der Dimensionszahl dieses Gebietes.

Das Gebiet habe n Dimensionen, ein Vektor V die Komponenten V_1, V_2, ..., V_n, ein Tensor T die T_{11}, T_{12}, ..., T_{1n}; T_{21}, T_{22}, ..., T_{2n}; ...; T_{n1}, T_{n2}, ..., T_{nn} (die Komponenten T_{ik}, $k = 1, 2, \ldots n$ beziehen sich auf den Tensor T_i gegen die Ebene senkrecht zur Koordinatenachse x_i, wenn x_1, x_2, ..., x_n diese Koordinatenachsen und Längen auf ihnen bedeuten). Setzen wir noch

$$\alpha_{ik} = \cos(x_i, x'_k),$$

so ist für ein Achsensystem x'_1, x'_2, ..., x'_n, das mit x_1, x_2, ..., x_n den gleichen Ausgangspunkt hat,

$$\left.\begin{array}{lll} 1) & x'_i = \sum\limits_{l=1}^{l=n} \alpha_{il}\, x_l, & \\ 2) & V'_i = \sum\limits_{l=1}^{l=n} \alpha_{il}\, V_l, & \\ 3_1) & T'_{ik} = \sum\limits_{l=1}^{l=n} \alpha_{il} \sum\limits_{m=1}^{m=n} \alpha_{km}\, T_{lm}. & \end{array}\right\} i, k = 1, 2, \ldots, n$$

Die Gleichung für die Tensoren kann auch durch eine doppelte Vektortransformation gewonnen werden. Man bildet erst vektoriell Größen:

$$4) \qquad \overline{T}_{ik} = \sum_{m=1}^{m=n} \alpha_{km}\, T_{im},$$

so ist abermals in Vektortransformation:

$$3_2) \qquad T'_{ik} = \sum_{l=1}^{l=n} \alpha_{il}\, \overline{T}_{lk}.$$

Wir nennen deshalb die Tensoren auch Vektoren zweiter Ordnung, wie die Skalaren, Stufengrößen, auch Vektoren nullter

Ordnung heißen könnten. Ob diese drei Arten von Vektoren ausreichen, ist zweifelhaft; sollten sich noch weitere Arten als erforderlich erweisen, so würden die Transformationen sich lediglich fortsetzen. Hiernach bestünden die Transformationen für Vektoren $k$ter Ordnung aus k sich aneinanderschließenden Transformationen erster Ordnung, die sich auf n^k Größen in je k Gruppen erstrecken würden, wobei bei jedem Übergang von einer vektoriellen Transformation zur folgenden die Indizes dieser Größen sich in bestimmter Folge vertauschen müssen. Doch könnte die Transformation auch nach dem Schema der Transformation von $x_1^\alpha x_2^\beta \ldots x_n^\nu$ mit $\alpha + \beta + \cdots + \nu = k$ durchgeführt werden. Statt der Bezeichnung Vektor wird auch der Tensor angewendet. Tensoren nullten Ranges sind die Skalaren, solche ersten Ranges die Vektoren, zweiten, die sonst überhaupt Tensoren heißen usf. [Neuerdings nennt man auch in Ausdrücken: $T_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ die Größen T Tensoren, und zwar vom Range λ. Die Transformation geschieht also nach dem Schema [1]):

$$5)\qquad T'_{k_1 k_2 \ldots k_\lambda} = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda} \beta_{i_1 k_1} \beta_{i_2 k_2} \ldots \beta_{i_\lambda k_\lambda} T_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda}, \left(\beta_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_k}\right),$$

T' und T sind Kovariant-Tensoren vom Range λ. Kehren wir diese Gleichungen gewissermaßen um und schreiben:

$$6)\qquad \Theta_{k_1 k_2 \ldots k_\lambda} = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda} \alpha_{i_1 k_1} \alpha_{i_2 k_2} \ldots \alpha_{i_\lambda k_\lambda} \Theta'_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda}, \left(\alpha_{ik} = \frac{\partial x'_k}{\partial x_i}\right),$$

wo $\beta_{i_\alpha k_\alpha}$ ist die zu $\alpha_{i_\alpha k_\alpha}$ adjungierte Unterdeterminante der Hauptdeterminante $|\alpha_{i_\alpha k_\alpha}|$ noch dividiert durch diese Hauptdeterminante, so bedeute Θ', Θ Kontravariant-Tensoren vom Range λ.]

Im Minkowskischen Raumzeitgebiet könnte man noch einen Tensor vom dritten Range mit 64 Komponenten begründen, von denen je 16 zu einem der vier dreidimensionalen Normalschnitte zu den vier Achsen gehören würden. Drei sich in der angegebenen Weise aneinanderschließende Transformationen erster Ordnung würden die Transformation dieser Vektoren ergeben.

---

[1]) Marcel Großmann in der später zu benutzenden Arbeit von Einstein u. Großmann: „Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation". B. G. Teubner, 1913.

Wenn die α den gewöhnlichen Transformationsformeln genügen, nämlich:

$$7_1)\quad \sum_{l=1}^{l=n} \alpha_{lk}^2 = 1, \qquad 7_2)\quad \sum_{l=1}^{l=n} \alpha_{kl}^2 = 1,$$

$$8_1)\quad \sum_{l=1}^{l=n} \alpha_{li}\alpha_{lk} = 0\ (i \neq k), \qquad 8_2)\quad \sum_{l=1}^{l=n} \alpha_{il}\alpha_{kl} = 0\ (i \neq k),$$

$$9)\quad |\alpha_{ik}| = +1$$

so nennen wir die Transformationen kongruent. In solchen kongruenten Transformationen ist:

$$10_1)\quad \Sigma V'^2 = \Sigma V^2, \qquad 10_2)\quad \Sigma T'^2 = \Sigma T^2,$$

wobei die Summen sich auf alle Komponentenquadrate beziehen. Nichtkongruente Transformationen hat Einstein in die Physik eingeführt (s. S. 56).

4. Die Maxwellschen Spannungen im elektromagnetischen Felde.

Die Unterscheidung der Kräfte als Vektoren und Tensoren hat auch physikalisch eine bestimmte Bedeutung. Zu den Vektoren können wir alle treibenden und hemmenden Kräfte rechnen, wie Anziehungen, Abstoßungen, drehende Kräfte, Widerstände usf. Den Tensoren weisen wir Zuge und Drucke — wir sagen allgemein Spannungen — zu. Während jene Kräfte anscheinend durch den Raum von Stelle zu Stelle wirken und darum auch als Fernkräfte bezeichnet werden, sollen diese die Stoffe unmittelbar angreifen, so daß man sie als Berührungskräfte ansehen dürfte. Angesichts unserer jetzigen durch die Erfahrung aufgezwungenen Auffassung der Materie, sowohl der greifbaren wie der Elektrizität, des Magnetismus, des elektrischen Stromes, als durchaus atomistisch gebaut, kann es fraglich erscheinen, ob die Berührungskräfte wirklich in der Berührung wirken, ob sie nicht auch Fernkräfte sind, die nur durch die Art ihrer Anwendung in den mathematischen Theorien als Vektoren zweiter Ordnung erscheinen. Indessen hat man immer in der weit überwiegenden Zahl der Naturforscher und Philosophen die Wirkung lebloser Dinge in der Berührung für vorstellbar gehalten, die in die Ferne dagegen nicht. Darum war man auch immer bestrebt, die Wirkung der Fernkräfte auf solche von Berührungskräften zurückzuführen. Der Versuche hierzu ist Legion, namentlich in bezug auf die bekannteste Fernkraft, die allgemeine Massenanziehung. Da ich hier nur von den jetzigen Lehren spreche, habe ich lediglich die Verbindung der Vektorkräfte mit den Tensorkräften zu behandeln. Der bequemeren Ausdrucksweise wegen nennen wir erstere nunmehr einfach Kräfte, letztere Spannungen.

Ausgangspunkt für die Herstellung dieser Verbindung bilden die genialen Untersuchungen Maxwells, die einleitend angeführt werden müssen. (Electricity and Magnetism, deutsche Übersetzung von Weinstein, Bd. I, S. 152 ff. und Bd. II, S. 331 ff.) Es seien E_1, E_2 zwei Elektrizitätsansammlungen mit den wahren Dichten ϱ_1, ϱ_2 im freien Raum (wo die Dielektrizitätskonstante gleich 1 angesetzt wird). Die Kraftwirkung von E_2 auf E_1 in Richtung p beträgt dann, wenn

$$\psi_1 = \iiint \frac{\varrho_1}{r}\, dx_1\, dy_1\, dz_1, \quad \psi_2 = \iiint \frac{\varrho_2}{r}\, dx_2\, dy_2\, dz_2,$$

$$r^2 = (\overline{x_2 - x_1}^2 + \overline{y_2 - y_1}^2 + \overline{z_2 - z_1}^2)$$

gesetzt wird, wobei nach Laplace-Poisson

$$4\pi\varrho_1 = \Delta\psi_1, \quad 4\pi\varrho_2 = \Delta\psi_2, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

sich findet,

$$A_p = -\iiint \frac{\partial\psi_2}{\partial p}\varrho_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1 = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\partial\psi_2}{\partial p}\Delta\psi_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1.$$

Setzt man

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2, \quad \psi = \psi_1 + \psi_2$$

und beachtet, daß in E_1 die Größen ϱ_2 und $\Delta\psi_2$ Null sind, und daß auch

$$-\iiint \frac{\partial\psi_1}{\partial p}\varrho_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1 = 0$$

sein muß, als Kraft der Ansammlung auf sich selbst, so findet man leicht

11) $$A_p = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\partial\psi}{\partial p}\Delta\psi\, d\tau$$

genommen über den ganzen Raum τ ausschließlich des Teiles, den die Ansammlung E_2 ausfüllt. Indem man nun bemerkt, daß

$$\frac{\partial \psi}{\partial p}\frac{\partial^2 \psi}{\partial p'^2} = \frac{\partial}{\partial p'}\left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\frac{\partial \psi}{\partial p'}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial \psi}{\partial p'}\right)^2, \quad p, p' = x, y, z$$

ist, findet man

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \psi}{\partial p}\Delta\psi = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}, \quad p = x, y, z, \quad P = X, Y, Z$$

und es ist

$$12)\left\{\begin{array}{l} X_x = \frac{1}{8\pi}(2X^2 - R^2), \ Y_y = \frac{1}{8\pi}(2Y^2 - R^2), \ Z_z = \frac{1}{8\pi}(2Z^2 - R^2), \\ X_y = Y_x = \frac{1}{4\pi}XY, \ Y_z = Z_y = \frac{1}{4\pi}YZ, \ Z_x = X_z = \frac{1}{4\pi}ZX \end{array}\right.$$

mit

$$X = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Da hiernach wird

$$13)\left\{\begin{array}{l} A_x = -\iiint\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right)d\tau = \iint[X_x \cos(n, x) \\ \qquad + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z)]\, d\sigma, \\ A_y = -\iiint\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)d\tau = \iint[Y_x \cos(n, x) \\ \qquad + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z)]\, d\sigma, \\ A_z = -\iiint\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)d\tau = \iint[Z_x \cos(n, x) \\ \qquad + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z)]\, d\sigma, \end{array}\right.$$

wo σ eine Oberfläche bedeutet, die E_1 ganz einschließt, E_2 ganz ausschließt, also die Oberfläche σ_1 von E_1 selbst sein kann, und n die Normale angibt, so können die P als Spannungen angesehen werden, die an der Fläche σ_1 angreifend auf die Ansammlung E_1 die gleiche Wirkung ausüben wie die Kraft der Ansammlung E_2. Die neun Größen P sind die Tensorkomponenten.

Im allgemeinen Falle eines beliebigen Mediums, innerhalb dessen die elektrische Kraft wirkt, hat man, wenn $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{E}_z$ die Komponenten dieser Kraft an einer bestimmten Stelle auf eine daselbst befindliche oder gedachte Elektrizitätseinheit angeben und $\mathfrak{D}_x$, $\mathfrak{D}_y$, $\mathfrak{D}_z$ die der elektrischen Polarisierungen daselbst[1]).

14) ↓

$$X_x^{(e)} = \frac{4\pi}{2}(2\,\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x - \overline{\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x + \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_z}),$$

$$Y_y^{(e)} = \frac{4\pi}{2}(2\,\mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_y - \overline{\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x + \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_z}),$$

$$Z_z^{(e)} = \frac{4\pi}{2}(2\,\mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_z - \overline{\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x + \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_z}),$$

$$X_y^{(e)} = 4\pi\,\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_y, \quad Y_x^{(e)} = 4\pi\,\mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_x,$$

$$Y_z^{(e)} = 4\pi\,\mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_z, \quad Z_y^{(e)} = 4\pi\,\mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_y,$$

↑ 14)

$$Z_x^{(e)} = 4\pi\,\mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_x, \quad X_z^{(e)} = 4\pi\,\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_z.$$

Entsprechende Gleichungen finden statt für die magnetischen Wirkungen, nennt man $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$ die Komponenten der magnetischen Kräfte an einer bestimmten Stelle auf eine daselbst befindliche oder gedachte Einheit Magnetismus und $\mathfrak{B}_x$, $\mathfrak{B}_y$, $\mathfrak{B}_z$ die zugehörigen Komponenten der magnetischen Polarisierung, so wird

15) ↓

$$X_x^{(m)} = \frac{4\pi}{2}(2\,\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x - \overline{\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z}),$$

$$Y_y^{(m)} = \frac{4\pi}{2}(2\,\mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y - \overline{\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z}),$$

$$Z_z^{(m)} = \frac{4\pi}{2}(2\,\mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z - \overline{\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z}),$$

$$X_y^{(m)} = 4\pi\,\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_y, \quad Y_x^{(m)} = 4\pi\,\mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_x,$$

$$Y_z^{(m)} = 4\pi\,\mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_z, \quad Z_y^{(m)} = 4\pi\,\mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_y,$$

↑ 15)

$$Z_x^{(m)} = 4\pi\,\mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_x, \quad X_z^{(m)} = 4\pi\,\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_z.$$

Diese beiden Systeme von Gleichungen lassen wir gelten, welcher Art auch die elektrischen oder magnetischen Kräfte sein mögen. In Materien, die nicht isotrop sind, vertreten diese Spannungen die Kräfte auch im statischen Felde, jedoch nur dann,

---

[1]) Mit der Änderung, daß noch der Faktor 4π hinzugefügt wird, wegen der später noch zu berücksichtigenden Spannungen.

wenn zwischen den Dielektrizitätskonstanten $K_{pp'}$; $p, p' = x, y, z$ und zwischen den Magnetisierungskonstanten $\mu_{pp'}$; $p, p' = x, y, z$ die Beziehungen bestehen

$$K_{pp'} = K_{p'p}, \quad \mu_{pp'} = \mu_{p'p},$$

wobei mindestens im Ruhezustande ist

$$4\pi \mathfrak{D}_p = K_{px} \mathfrak{E}_x + K_{py} \mathfrak{E}_y + K_{pz} \mathfrak{E}_z, \tag{16}$$

$$4\pi \mathfrak{B}_p = \mu_{px} \mathfrak{H}_x + \mu_{py} \mathfrak{H}_y + \mu_{pz} \mathfrak{H}_z. \tag{17}$$

Bildet man nämlich den Ausdruck der Kraft A_p in Richtung einer Achse p nach den Formeln 13), S. 10, so wird in der Schreibweise der Vektorrechnung [1])

$$A_p = -\iiint \left(\mathfrak{E}_p \, div \, \mathfrak{D} + (\mathfrak{D} \nabla) \mathfrak{E}_p - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} (\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{D}}) \right) d\tau; \quad p = x, y, z. \tag{18}$$

---

[1]) Ich stelle die wichtigsten Formeln dieser Rechnung zusammen:

α) $(\overline{AB}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$, skalares Produkt zweier Vektoren A, B.

β) $[AB]_x = \begin{vmatrix} A_y A_z \\ B_y B_z \end{vmatrix}$, $[AB]_y = \begin{vmatrix} A_z A_x \\ B_z B_x \end{vmatrix}$, $[AB]_z = \begin{vmatrix} A_x A_y \\ B_x B_y \end{vmatrix}$, Vektorprodukt.

γ) $curl_x A = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$, $curl_y A = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$, $curl_z A = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$, statt *curl* auch rot.

δ) $div\, A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$.

ε) $(A\nabla) B_p = A_x \frac{\partial B_p}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_p}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_p}{\partial z}$, $p = x, y, z$.

ζ) $(\overline{AB}) = (\overline{BA})$.

η) $[AB] = -[BA]$.

ϑ] $(\overline{A[BC]}) = (\overline{B[CA]}) = (\overline{C[AB]}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$.

ι) $[A[BC]] = B(\overline{AC}) - C(\overline{AB})$.

κ) $(\overline{[AB][CD]}) = \begin{vmatrix} (\overline{AC}) & (\overline{AD}) \\ (\overline{BC}) & (\overline{BD}) \end{vmatrix}$.

λ) $[[AB][CD]] = B(\overline{A[CD]}) - A(\overline{B[CD]})$.

μ) $div\,[AB] = (\overline{B\, curl\, A}) - (\overline{A\, curl\, B})$.

ν) $curl_p\, curl\, A = \frac{\partial}{\partial p} div\, A - \Delta A$.

ξ) $div\, curl\, A = 0$.

ο) $\nabla_p = grad_p = \frac{\partial}{\partial p}$.

Da $div\,\mathfrak{D} = \varrho$ und im elektrostatischen Felde

$$\mathfrak{E}_p = -\frac{\partial \psi}{\partial p}$$

ist, so müssen wir haben

$$(\mathfrak{D}\nabla)\mathfrak{E}_p - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p}(\underline{\mathfrak{E}\mathfrak{D}}) = 0; \quad p = x, y, z$$

oder

$$\left(\overline{\mathfrak{E}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial p}}\right) - \left(\overline{\mathfrak{D}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial p}}\right) = 0; \quad p = x, y, z.$$

Setzen wir für $\mathfrak{D}$ den Wert nach 16), S. 12 ein, so geht diese Gleichung über in

$$\left(\overline{\mathfrak{E}\left(K\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial p}\right)}\right) - \left(\overline{\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial p}(\underline{K\mathfrak{E}})}\right) = 0,$$

das gibt

$$\left(\overline{[K]\left[\mathfrak{E}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial p}\right]}\right) = 0.$$

Also müssen wir haben $[K] = 0$, d. h.

$$K_{xy} - K_{yx} = 0, \quad K_{yz} - K_{zy} = 0, \quad K_{zx} - K_{xz} = 0$$

die angegebene Bedingung. Ähnlich folgt

$$\mu_{xy} - \mu_{yx} = 0, \quad \mu_{yz} - \mu_{zy} = 0, \quad \mu_{zx} - \mu_{xz} = 0.$$

Noch sei darauf hingewiesen, daß die Annahmen der Elastizitätslehre

$$X_y = Y_x, \quad Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z$$

hier nur in isotropen Medien erfüllt sind, in kristallinischen Stoffen würden die Spannungen also Zerreißung bewirken können.

Die Größen $\frac{1}{2}(\underline{\mathfrak{E}\mathfrak{D}})$ und $\frac{1}{2}(\underline{\mathfrak{H}\mathfrak{B}})$ sind die Energiedichten des elektromagnetischen Feldes. Setzen wir

$$\tfrac{1}{2}(\underline{\mathfrak{E}\mathfrak{D}}) + \tfrac{1}{2}(\underline{\mathfrak{H}\mathfrak{B}}) = \mathfrak{R},$$

so werden die Gesamtspannungen

19)
$$\begin{aligned}
X_x &= 4\pi(\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x - \mathfrak{R}),\\
Y_y &= 4\pi(\mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y - \mathfrak{R}),\\
Z_z &= 4\pi(\mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z - \mathfrak{R}),\\
X_y &= 4\pi(\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_y),\\
X_z &= 4\pi(\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_z),\\
Y_x &= 4\pi(\mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_x),\\
Y_z &= 4\pi(\mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_z),\\
Z_x &= 4\pi(\mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_x),\\
Z_y &= 4\pi(\mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_y).
\end{aligned}$$
19)

5. Minkowskis Erweiterung auf das Raumzeitgebiet und für Bewegungen.

Minkowski[1]) hat diese Darstellungen auf sein Raumzeitgebiet ausgedehnt, es treten dann noch sieben Spannungen zur Berücksichtigung der Zeitdimension hinzu. Die Darstellung erfolgt zusammen mit den neun obigen Spannungen bei Minkowski in folgender Weise. In allen Maxwellschen Spannungen sind Produkte der Kräfte und Polarisierungen enthalten, er betrachtet sie darum als aus dem Produkt zweier Matrizes hervorgegangen, die beide Kräfte und Polarisierungen enthalten, und zwar eine Matrix magnetische Kräfte und elektrische Polarisierungen, die andere elektrische Kräfte und magnetische Polarisierungen. Sie sind

$$20_1)\quad \left\|\begin{matrix} 0 & \mathfrak{H}_z & -\mathfrak{H}_y & -4\pi i\mathfrak{D}_x \\ -\mathfrak{H}_z & 0 & \mathfrak{H}_x & -4\pi i\mathfrak{D}_y \\ \mathfrak{H}_y & -\mathfrak{H}_x & 0 & -4\pi i\mathfrak{D}_z \\ 4\pi i\mathfrak{D}_x & 4\pi i\mathfrak{D}_y & 4\pi i\mathfrak{D}_z & 0 \end{matrix}\right\|$$

$$21_1)\quad \left\|\begin{matrix} 0 & 4\pi\mathfrak{B}_z & -4\pi\mathfrak{B}_y & -i\mathfrak{E}_x \\ -4\pi\mathfrak{B}_z & 0 & 4\pi\mathfrak{B}_x & -i\mathfrak{E}_y \\ 4\pi\mathfrak{B}_y & -4\pi\mathfrak{B}_x & 0 & -i\mathfrak{E}_z \\ i\mathfrak{E}_x & i\mathfrak{E}_y & i\mathfrak{E}_z & 0 \end{matrix}\right\|$$

Ihr Produkt setzt Minkowski gleich

$$22)\quad \left\|\begin{matrix} X_x-L & Y_x & Z_x & -iT_x \\ X_y & Y_y-L & Z_y & -iT_y \\ X_z & Y_z & Z_z-L & -iT_z \\ -iX_t & -iY_t & -iZ_t & T_t-L \end{matrix}\right\| \quad L=\tfrac{1}{2}\left[(\mathfrak{H}\mathfrak{B})-(\mathfrak{E}\mathfrak{D})\right].$$

Nach den Regeln der Multiplikation solcher Matrizes erhält man dann für die $X_x, \ldots, Z_z$ die früher angegebenen Werte und außerdem folgen als Spannungen zur Berücksichtigung der Zeitdimensionen:

---

[1]) Ges. Abh., Teubner 1911, Bd. II, S. 352 ff.

$$
\begin{aligned}
&23)\downarrow \quad T_t = 4\pi\mathfrak{R} = \frac{4\pi}{2}\left[(\underline{\mathfrak{E}\mathfrak{D}}) + (\underline{\mathfrak{H}\mathfrak{B}})\right],\\
&T_x = \mathfrak{H}_z\mathfrak{E}_y - \mathfrak{H}_y\mathfrak{E}_z = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_x,\\
&T_y = \mathfrak{H}_x\mathfrak{E}_z - \mathfrak{H}_z\mathfrak{E}_x = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_y,\\
&T_z = \mathfrak{H}_y\mathfrak{E}_x - \mathfrak{H}_x\mathfrak{E}_y = [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_z,\\
&X_t = (4\pi)^2(\mathfrak{B}_z\mathfrak{D}_y - \mathfrak{D}_z\mathfrak{B}_y) = (4\pi)^2[\mathfrak{D}\mathfrak{B}]_x,\\
\uparrow\ &Y_t = (4\pi)^2(\mathfrak{B}_x\mathfrak{D}_z - \mathfrak{D}_x\mathfrak{B}_z) = (4\pi)^2[\mathfrak{D}\mathfrak{B}]_y,\\
23)\ &Z_t = (4\pi)^2(\mathfrak{B}_y\mathfrak{D}_x - \mathfrak{D}_y\mathfrak{B}_x) = (4\pi)^2[\mathfrak{D}\mathfrak{B}]_z.
\end{aligned}
$$

Hiernach sind T_x, T_y, T_z von X_t, Y_t, Z_t auch für isotrope Körper verschieden, und nur im freien Äther ($K = 1$, $\mu = 1$) einander gleich. Die Spannungen X_x, Y_y, Z_z, T_t erfüllen die Gleichung:

24) $$X_x + Y_y + Z_z + T_t = 0.$$

Minkowskis Ansätze hängen zusammen mit seiner besonderen Fassung der elektromagnetischen Gleichungen. Bezeichnet man die Größen in den angegebenen Matrizes mit f_{ik}, F_{ik}; $i, k = 1, 2, 3, 4$, so daß diese Matrizes die Form haben:

$$
20_2)\quad \begin{Vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14}\\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24}\\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34}\\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{Vmatrix} \qquad 21_2)\quad \begin{Vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14}\\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24}\\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34}\\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{Vmatrix}
$$

wobei

$$f_{ii} = 0,\quad F_{ii} = 0;\qquad f_{ik} = -f_{ki},\quad F_{ik} = -F_{ki}$$

ist, und setzt ferner:

25) $$\frac{4\pi}{C} J_x = s_1,\quad \frac{4\pi}{C} J_y = s_2,\quad \frac{4\pi}{C} J_z = s_3,\quad 4\pi i\varrho = s_4,$$

wo J_x, J_y, J_z die Komponenten eines elektrischen Leitungsstromes bedeuten, so lautet die Minkowskische Form der bekannten Maxwellschen Gleichungen:

$$
26)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_4} &= s_1,\\
\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_4} &= s_2,\\
\frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{33}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_4} &= s_3,\\
\frac{\partial f_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{44}}{\partial x_4} &= s_4;
\end{aligned}
\right.
$$

$$
27)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} &= 0,\\
\frac{\partial F_{43}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_4} &= 0,\\
\frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{33}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} &= 0,\\
\frac{\partial F_{32}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{21}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{44}}{\partial x_4} &= 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Dabei stehen x_1, x_2, x_3, x_4 für x, y, z, iCt, und C bedeutet eine Weltkonstante, nämlich die resultierende Bewegungsgeschwindigkeit aller Dinge der Welt — ob sie im Raume ruhen oder dort sich irgend wie bewegen — im Raumzeitgebiet. Man setzt diese Konstante bekanntlich gleich der Verbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes im freien Raum, nach früherer Auffassung im freien Äther. Die Gleichungssysteme 19) und 23) für die 16 Spannungen gelten nach Minkowski auch wenn das Feld und die Substanzen nicht in Ruhe verharren, sondern sich bewegen, die Werte der Größen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ beziehen sich dann auf den Bewegungszustand. Minkowski hat gelehrt, diese Gleichungen so umzuformen, daß als Kräfte und Polarisierungen nur Größen vertreten sind, die aus dem Ruhezustand abgeleitet werden.

Es seien die elektrischen und magnetischen Kräfte im Ruhezustand $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ entsprechend die Polarisierungen $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{B}'$. Wir setzen:

28) $$C\mathfrak{E}'_\varkappa = \Phi_\varkappa, \quad C\mathfrak{H}'_\varkappa = \Psi_\varkappa, \quad C4\pi\mathfrak{D}'_\varkappa = \varphi_\varkappa, \quad C4\pi\mathfrak{B}'_\varkappa = \psi_\varkappa; \quad \varkappa = 1, 2, 3;$$

so ist für isotrope Stoffe, und auf diese soll sich die Rechnung beschränken:

29) $$\varphi_\varkappa = K\Phi_\varkappa, \quad \psi_\varkappa = \mu\Psi_\varkappa.$$

Wir führen noch Werte für Φ_4 und Ψ_4 ein nach den Beziehungen:

$$\Phi_4 = -\frac{1}{\mathfrak{g}_4}(\mathfrak{g}_1\Phi_1 + \mathfrak{g}_2\Phi_2 + \mathfrak{g}_3\Phi_3), \quad \Psi_4 = -\frac{1}{\mathfrak{g}_4}(\mathfrak{g}_1\Psi_1 + \mathfrak{g}_2\Psi_2 + \mathfrak{g}_3\Psi_3),$$

so daß also

30) $$(\overline{\underline{\mathfrak{g}\,\Phi}}) = 0, \quad (\overline{\underline{\mathfrak{g}\,\Psi}}) = 0$$

ist. Die $\mathfrak{g}$ bedeuten die Geschwindigkeiten der Bewegung in den vier Richtungen des Raumzeitgebietes, wobei als Zeit die Minkowskische Eigenzeit τ zu benutzen ist, welche definiert wird durch:

31) $$iC\tau = \int\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - C^2dt^2},$$

so daß wir haben:

32) $$\mathfrak{g}_1 = \frac{dx_1}{d\tau}, \quad \mathfrak{g}_2 = \frac{dx_2}{d\tau}, \quad \mathfrak{g}_3 = \frac{dx_3}{d\tau}, \quad \mathfrak{g}_4 = \frac{dx_4}{d\tau}$$

und es ist:

33) $$\mathfrak{g}_1^2 + \mathfrak{g}_2^2 + \mathfrak{g}_3^2 + \mathfrak{g}_4^2 = -C^2.$$

Aus Minkowskis Relativitätslehre folgt dann[1]):

34) $$\mathfrak{E}_x = \frac{1}{i}\{\mathfrak{g}_4\Phi_1 - \mathfrak{g}_1\Phi_4 + \mu(\mathfrak{g}_3\Psi_2 - \mathfrak{g}_2\Psi_3)i\}\frac{1}{C^2},$$

$$\mathfrak{E}_y = \frac{1}{i}\{\mathfrak{g}_4\Phi_2 - \mathfrak{g}_2\Phi_4 + \mu(\mathfrak{g}_1\Psi_3 - \mathfrak{g}_3\Psi_1)i\}\frac{1}{C^2},$$

$$\mathfrak{E}_z = \frac{1}{i}\{\mathfrak{g}_4\Phi_3 - \mathfrak{g}_3\Phi_4 + \mu(\mathfrak{g}_2\Psi_1 - \mathfrak{g}_1\Psi_2)i\}\frac{1}{C^2},$$

$$\mathfrak{H}_x = \{K(\mathfrak{g}_2\Phi_3 - \mathfrak{g}_3\Phi_2) + i(\mathfrak{g}_1\Psi_4 - \mathfrak{g}_4\Psi_1)\}\frac{1}{C^2},$$

$$\mathfrak{H}_y = \{K(\mathfrak{g}_3\Phi_1 - \mathfrak{g}_1\Phi_3) + i(\mathfrak{g}_2\Psi_4 - \mathfrak{g}_4\Psi_2)\}\frac{1}{C^2},$$

$$\mathfrak{H}_z = \{K(\mathfrak{g}_1\Phi_2 - \mathfrak{g}_2\Phi_1) + i(\mathfrak{g}_3\Psi_4 - \mathfrak{g}_4\Psi_3)\}\frac{1}{C^2},$$

$$4\pi\mathfrak{D}_x = \frac{1}{i}\{K(\mathfrak{g}_4\Phi_1 - \mathfrak{g}_1\Phi_4) + i(\mathfrak{g}_3\Psi_2 - \mathfrak{g}_2\Psi_3)\}\frac{1}{C^2},$$

$$4\pi\mathfrak{D}_y = \frac{1}{i}\{K(\mathfrak{g}_4\Phi_2 - \mathfrak{g}_2\Phi_4) + i(\mathfrak{g}_1\Psi_3 - \mathfrak{g}_3\Psi_1)\}\frac{1}{C^2},$$

$$4\pi\mathfrak{D}_z = \frac{1}{i}\{K(\mathfrak{g}_4\Phi_3 - \mathfrak{g}_3\Phi_4) + i(\mathfrak{g}_2\Psi_1 - \mathfrak{g}_1\Psi_2)\}\frac{1}{C^2},$$

$$4\pi\mathfrak{B}_x = \{(\mathfrak{g}_2\Phi_3 - \mathfrak{g}_3\Phi_2) + \mu(\mathfrak{g}_1\Psi_4 - \mathfrak{g}_4\Psi_1)i\}\frac{1}{C^2},$$

$$4\pi\mathfrak{B}_y = \{(\mathfrak{g}_3\Phi_1 - \mathfrak{g}_1\Phi_3) + \mu(\mathfrak{g}_2\Psi_4 - \mathfrak{g}_4\Psi_2)i\}\frac{1}{C^2},$$

34) $$4\pi\mathfrak{B}_z = \{(\mathfrak{g}_1\Phi_2 - \mathfrak{g}_2\Phi_1) + \mu(\mathfrak{g}_3\Psi_4 - \mathfrak{g}_4\Psi_3)i\}\frac{1}{C^2}.$$

Führt man diese Werte in die Ausdrücke für die Spannungen ein, so erhält man, wenn

35) $$\left\{\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \mathfrak{g}_1 & \mathfrak{g}_2 & \mathfrak{g}_3 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 \end{vmatrix} = +\frac{1}{i}\Omega_4, \quad \begin{vmatrix} \mathfrak{g}_2 & \mathfrak{g}_3 & \mathfrak{g}_4 \\ \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \\ \Psi_2 & \Psi_3 & \Psi_4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{i}\Omega_1, \\ &\begin{vmatrix} \mathfrak{g}_3 & \mathfrak{g}_4 & \mathfrak{g}_1 \\ \Phi_3 & \Phi_4 & \Phi_1 \\ \Psi_3 & \Psi_4 & \Psi_1 \end{vmatrix} = +\frac{1}{i}\Omega_2, \quad \begin{vmatrix} \mathfrak{g}_4 & \mathfrak{g}_1 & \mathfrak{g}_2 \\ \Phi_4 & \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Psi_4 & \Psi_1 & \Psi_2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{i}\Omega_3; \end{aligned}\right.$$

und

36) $$\Phi^2 = \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 + \Phi_4^2, \quad \Psi^2 = \Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \Psi_3^2 + \Psi_4^2$$

[1]) Die vollständige Ableitung habe ich in meinem Buche: Die Physik der bewegten Materie und die Relativitätslehre gegeben. Im folgenden ist es mit Ph. d. b. M. bezeichnet.

gesetzt wird:

37) ↓

$$
\begin{aligned}
C^4 X_x &= -\tfrac{1}{2} K C^2 \Phi^2 - \tfrac{1}{2} \mu\, C^2 \Psi^2 + K(C^2 \Phi_1^2 - \mathfrak{g}_1^2 \Phi^2) \\
&\quad + \mu\,(C^2 \Psi_1^2 - \mathfrak{g}_1^2 \Psi^2) - (1 + K\mu)\, \mathfrak{g}_1 \Omega_1, \\
C^4 Y_y &= -\tfrac{1}{2} K C^2 \Phi^2 - \tfrac{1}{2} \mu\, C^2 \Psi^2 + K(C^2 \Phi_2^2 - \mathfrak{g}_2^2 \Phi^2) \\
&\quad + \mu\,(C^2 \Psi_2^2 - \mathfrak{g}_2^2 \Psi^2) - (1 + K\mu)\, \mathfrak{g}_2 \Omega_2, \\
C^4 Z_z &= -\tfrac{1}{2} K C^2 \Phi^2 - \tfrac{1}{2} \mu\, C^2 \Psi^2 + K(C^2 \Phi_3^2 - \mathfrak{g}_3^2 \Phi^2) \\
&\quad + \mu\,(C^2 \Psi_3^2 - \mathfrak{g}_3^2 \Psi^2) - (1 + K\mu)\, \mathfrak{g}_3 \Omega_3, \\
C^4 T_t &= -\tfrac{1}{2} K C^2 \Phi^2 - \tfrac{1}{2} \mu\, C^2 \Psi^2 + K(C^2 \Phi_4^2 - \mathfrak{g}_4^2 \Phi^2) \\
&\quad + \mu\,(C^2 \Psi_4^2 - \mathfrak{g}_4^2 \Psi^2) - (1 + K\mu)\, \mathfrak{g}_4 \Omega_4, \\
C^4 X_y &= K(C^2 \Phi_1 \Phi_2 - \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 \Phi^2) + \mu\,(C^2 \Psi_1 \Psi_2 - \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 \Psi^2) \\
&\quad - \mathfrak{g}_1 \Omega_2 - K\mu\, \mathfrak{g}_2 \Omega_1, \\
C^4 X_z &= K(C^2 \Phi_1 \Phi_3 - \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_3 \Phi^2) + \mu\,(C^2 \Psi_1 \Psi_3 - \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_3 \Psi^2) \\
&\quad - \mathfrak{g}_1 \Omega_3 - K\mu\, \mathfrak{g}_3 \Omega_1, \\
-i\, C^4 X_t &= K(C^2 \Phi_1 \Phi_4 - \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_4 \Phi^2) + \mu\,(C^2 \Psi_1 \Psi_4 - \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_4 \Psi^2) \\
&\quad - \mathfrak{g}_1 \Omega_4 - K\mu\, \mathfrak{g}_4 \Omega_1, \\
C^4 Y_x &= K(C^2 \Phi_2 \Phi_1 - \mathfrak{g}_2 \mathfrak{g}_1 \Phi^2) + \mu\,(C^2 \Psi_2 \Psi_1 - \mathfrak{g}_2 \mathfrak{g}_1 \Psi^2) \\
&\quad - \mathfrak{g}_2 \Omega_1 - K\mu\, \mathfrak{g}_1 \Omega_2, \\
C^4 Y_z &= K(C^2 \Phi_2 \Phi_3 - \mathfrak{g}_2 \mathfrak{g}_3 \Phi^2) + \mu\,(C^2 \Psi_2 \Psi_3 - \mathfrak{g}_2 \mathfrak{g}_3 \Psi^2) \\
&\quad - \mathfrak{g}_2 \Omega_3 - K\mu\, \mathfrak{g}_3 \Omega_2, \\
-i\, C^4 Y_t &= K(C^2 \Phi_2 \Phi_4 - \mathfrak{g}_2 \mathfrak{g}_4 \Phi^2) + \mu\,(C^2 \Psi_2 \Psi_4 - \mathfrak{g}_2 \mathfrak{g}_4 \Psi^2) \\
&\quad - \mathfrak{g}_2 \Omega_4 - K\mu\, \mathfrak{g}_4 \Omega_2, \\
C^4 Z_x &= K(C^2 \Phi_3 \Phi_1 - \mathfrak{g}_3 \mathfrak{g}_1 \Phi^2) + \mu\,(C^2 \Psi_3 \Psi_1 - \mathfrak{g}_3 \mathfrak{g}_1 \Psi^2) \\
&\quad - \mathfrak{g}_3 \Omega_1 - K\mu\, \mathfrak{g}_1 \Omega_3, \\
C^4 Z_y &= K(C^2 \Phi_3 \Phi_2 - \mathfrak{g}_3 \mathfrak{g}_2 \Phi^2) + \mu\,(C^2 \Psi_3 \Psi_2 - \mathfrak{g}_3 \mathfrak{g}_2 \Psi^2) \\
&\quad - \mathfrak{g}_3 \Omega_2 - K\mu\, \mathfrak{g}_2 \Omega_3, \\
-i\, C^4 Z_t &= K(C^2 \Phi_3 \Phi_4 - \mathfrak{g}_3 \mathfrak{g}_4 \Phi^2) + \mu\,(C^2 \Psi_3 \Psi_4 - \mathfrak{g}_3 \mathfrak{g}_4 \Psi^2) \\
&\quad - \mathfrak{g}_3 \Omega_4 - K\mu\, \mathfrak{g}_4 \Omega_3, \\
-i\, C^4 T_x &= K(C^2 \Phi_4 \Phi_1 - \mathfrak{g}_4 \mathfrak{g}_1 \Phi^2) + \mu\,(C^2 \Psi_4 \Psi_1 - \mathfrak{g}_4 \mathfrak{g}_1 \Psi^2) \\
&\quad - \mathfrak{g}_4 \Omega_1 - K\mu\, \mathfrak{g}_1 \Omega_4, \\
-i\, C^4 T_y &= K(C^2 \Phi_4 \Phi_2 - \mathfrak{g}_4 \mathfrak{g}_2 \Phi^2) + \mu\,(C^2 \Psi_4 \Psi_2 - \mathfrak{g}_4 \mathfrak{g}_2 \Psi^2) \\
&\quad - \mathfrak{g}_4 \Omega_2 - K\mu\, \mathfrak{g}_2 \Omega_4, \\
-i\, C^4 T_z &= K(C^2 \Phi_4 \Phi_3 - \mathfrak{g}_4 \mathfrak{g}_3 \Phi^2) + \mu\,(C^2 \Psi_4 \Psi_3 - \mathfrak{g}_4 \mathfrak{g}_3 \Psi^2) \\
&\quad - \mathfrak{g}_4 \Omega_3 - K\mu\, \mathfrak{g}_3 \Omega_4.
\end{aligned}
$$

↑ 37)

Die Gleichungen sind trotz ihrer Länge sehr übersichtlich gebaut. Es folgt aus ihnen:

38)

$$
\begin{aligned}
X_y - Y_x &= \frac{1 - K\mu}{C^4}(\mathfrak{g}_2 \Omega_1 - \mathfrak{g}_1 \Omega_2),\\
Y_z - Z_y &= \frac{1 - K\mu}{C^4}(\mathfrak{g}_3 \Omega_2 - \mathfrak{g}_2 \Omega_3),\\
Z_x - X_z &= \frac{1 - K\mu}{C^4}(\mathfrak{g}_1 \Omega_3 - \mathfrak{g}_3 \Omega_1),\\
T_x - X_t &= \frac{1 - K\mu}{i\,C^4}(\mathfrak{g}_4 \Omega_1 - \mathfrak{g}_1 \Omega_4),\\
T_y - Y_t &= \frac{1 - K\mu}{i\,C^4}(\mathfrak{g}_4 \Omega_2 - \mathfrak{g}_2 \Omega_4),\\
T_z - Z_t &= \frac{1 - K\mu}{i\,C^4}(\mathfrak{g}_4 \Omega_3 - \mathfrak{g}_3 \Omega_4).
\end{aligned}
$$

38)

Im freien Äther, wo $K\mu = 1$ ist, haben wir

$$X_y = Y_x,\quad Y_z = Z_y,\quad Z_x = X_z,\quad T_x = X_t,\quad T_y = Y_t,\quad T_z = Z_t.$$

Gleiches würde gelten, wenn

$$\mathfrak{g}_1 : \mathfrak{g}_2 : \mathfrak{g}_3 : \mathfrak{g}_4 = \Omega_1 : \Omega_2 : \Omega_3 : \Omega_4$$

sein sollte. Da man aber aus 35) leicht erschließt, daß

39) $$(\overline{\mathfrak{g}\Omega}) = 0$$

ist, so würde jene Beziehung ergeben:

$$\mathfrak{g}_1^2 + \mathfrak{g}_2^2 + \mathfrak{g}_3^2 + \mathfrak{g}_4^2 = 0,$$

was nicht sein kann, weil $\mathfrak{g}_4$ immer von Null verschieden ist. Aus letzterem Grunde sind auch stets, in der Ruhe wie in der Bewegung, $T_x - X_t$, $T_y - Y_t$, $T_z - Z_t$ von Null verschieden, während $X_y - Y_x$, $Y_z - Z_y$, $Z_x - X_z$ wenigstens im Ruhezustand Null sind.

Ich will hier die Ableitung der Spannungsgleichungen nachholen, die Minkowski nicht gegeben hat und die auch in meinem S. 12 genannten Buche übergangen ist, die Zwischenformeln brauchen wir später. Wir haben nur die in den ursprünglichen Gleichungen 19) und 23) enthaltenen Produkte $\mathfrak{E}\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{E}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}\mathfrak{B}$ nach den Gleichungen 34) zu ermitteln. Als Abkürzungen dienen für 32 Determinanten aus den $\mathfrak{g}$ und Φ und aus den $\mathfrak{g}$ und Ψ:

40) $$A_{ik} = \begin{vmatrix} \mathfrak{g}_i & \mathfrak{g}_k \\ \Phi_i & \Phi_k \end{vmatrix}, \qquad a_{ik} = i \begin{vmatrix} \mathfrak{g}_i & \mathfrak{g}_k \\ \Psi_i & \Psi_k \end{vmatrix}; \qquad i, k = 1, 2, 3, 4,$$

von denen jedoch nur 12 in Frage kommen:

41)
$$\begin{aligned}
C^4 4\pi \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_x &= -(K A_{14}^2 + \mu a_{23}^2 + (1+K\mu) A_{14} a_{23}),\\
C^4 4\pi \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_y &= -(K A_{24}^2 + \mu a_{31}^2 + (1+K\mu) A_{24} a_{31}),\\
C^4 4\pi \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_z &= -(K A_{34}^2 + \mu a_{12}^2 + (1+K\mu) A_{34} a_{12}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C^4 4\pi \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_x &= \mu a_{14}^2 + K A_{23}^2 + (1+K\mu) a_{14} A_{23},\\
C^4 4\pi \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_y &= \mu a_{24}^2 + K A_{31}^2 + (1+K\mu) a_{24} A_{31},\\
C^4 4\pi \mathfrak{H}_z \mathfrak{B}_z &= \mu a_{34}^2 + K A_{12}^2 + (1+K\mu) a_{34} A_{12}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C^4 4\pi \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_y &= K A_{23} A_{31} + \mu a_{14} a_{24} + A_{31} a_{14} + K\mu A_{23} a_{24},\\
C^4 4\pi \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_z &= K A_{23} A_{12} + \mu a_{14} a_{34} + A_{12} a_{14} + K\mu A_{23} a_{34},\\
C^4 4\pi \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_x &= K A_{31} A_{23} + \mu a_{24} a_{14} + A_{23} a_{24} + K\mu A_{31} a_{14},\\
C^4 4\pi \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_z &= K A_{31} A_{12} + \mu a_{24} a_{34} + A_{12} a_{24} + K\mu A_{31} a_{34},\\
C^4 4\pi \mathfrak{H}_z \mathfrak{B}_x &= K A_{12} A_{23} + \mu a_{34} a_{14} + A_{23} a_{34} + K\mu A_{12} a_{14},\\
C^4 4\pi \mathfrak{H}_z \mathfrak{B}_y &= K A_{12} A_{31} + \mu a_{34} a_{24} + A_{31} a_{34} + K\mu A_{12} a_{24}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C^4 4\pi \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_y &= -(\mu a_{23} a_{31} + K A_{14} A_{24} + a_{31} A_{14} + K\mu a_{23} A_{24}),\\
C^4 4\pi \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_z &= -(\mu a_{23} a_{12} + K A_{14} A_{34} + a_{12} A_{14} + K\mu a_{23} A_{34}),\\
C^4 4\pi \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_x &= -(\mu a_{31} a_{23} + K A_{24} A_{14} + a_{23} A_{24} + K\mu a_{31} A_{14}),\\
C^4 4\pi \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_z &= -(\mu a_{31} a_{12} + K A_{24} A_{34} + a_{12} A_{24} + K\mu a_{31} A_{34}),\\
C^4 4\pi \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_x &= -(\mu a_{12} a_{23} + K A_{34} A_{14} + a_{23} A_{34} + K\mu a_{12} A_{14}),\\
C^4 4\pi \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_y &= -(\mu a_{12} a_{31} + K A_{34} A_{24} + a_{31} A_{34} + K\mu a_{12} A_{24}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C^4 \mathfrak{H}_z \mathfrak{E}_y &= -\frac{1}{i}(K A_{12} A_{24} + \mu a_{31} a_{34} + A_{24} a_{34} + K\mu A_{12} a_{31}),\\
C^4 \mathfrak{H}_x \mathfrak{E}_z &= -\frac{1}{i}(K A_{23} A_{34} + \mu a_{12} a_{14} + A_{34} a_{14} + K\mu A_{23} a_{12}),\\
C^4 \mathfrak{H}_y \mathfrak{E}_x &= -\frac{1}{i}(K A_{31} A_{14} + \mu a_{23} a_{24} + A_{14} a_{24} + K\mu A_{31} a_{23}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C^4 \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y &= -\frac{1}{i}(\mu a_{12} a_{24} + K A_{31} A_{34} + a_{24} A_{34} + K\mu a_{12} A_{31}),\\
C^4 \mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_z &= -\frac{1}{i}(\mu a_{23} a_{34} + K A_{12} A_{14} + a_{34} A_{14} + K\mu a_{23} A_{12}),\\
C^4 \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_x &= -\frac{1}{i}(\mu a_{31} a_{14} + K A_{23} A_{24} + a_{14} A_{24} + K\mu a_{31} A_{23}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C^4 (4\pi)^2 \mathfrak{B}_z \mathfrak{D}_y &= -\frac{1}{i}(K A_{24} A_{12} + \mu a_{34} a_{31} + A_{12} a_{31} + K\mu A_{24} a_{34}),\\
C^4 (4\pi)^2 \mathfrak{B}_x \mathfrak{D}_z &= -\frac{1}{i}(K A_{34} A_{23} + \mu a_{14} a_{12} + A_{23} a_{12} + K\mu A_{34} a_{14}),\\
C^4 (4\pi)^2 \mathfrak{B}_y \mathfrak{D}_x &= -\frac{1}{i}(K A_{14} A_{31} + \mu a_{24} a_{23} + A_{31} a_{23} + K\mu A_{14} a_{24}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C^4 (4\pi)^2 \mathfrak{D}_z \mathfrak{B}_y &= -\frac{1}{i}(\mu a_{24} a_{12} + K A_{34} A_{31} + a_{12} A_{31} + K\mu a_{24} A_{34}),\\
C^4 (4\pi)^2 \mathfrak{D}_x \mathfrak{B}_z &= -\frac{1}{i}(\mu a_{34} a_{23} + K A_{14} A_{12} + a_{23} A_{12} + K\mu a_{34} A_{14}),
\end{aligned}$$

41) $$C^4 (4\pi)^2 \mathfrak{D}_y \mathfrak{B}_x = -\frac{1}{i}(\mu a_{14} a_{31} + K A_{24} A_{23} + a_{31} A_{23} + K\mu a_{14} A_{24}).$$

Die Gleichungen sind sehr übersichtlich gebaut, ich habe die Übersichtlichkeit durch die Trennungsstriche zu erhöhen gesucht. Die beiden durch einen schwachen Strich geschiedenen Systeme zwischen zwei starken Strichen gehen durch Vertauschen von K und μ und der A mit den a ineinander über.

Aus den beiden ersten Teilsystemen bekommt man noch für die beiden zur Bildung der $X_x, \ldots, Z_z$ erforderlichen Energiedichten:

$$42)\quad 4\pi \mathfrak{R}_e = \frac{4\pi}{2}(\underline{\mathfrak{E}\mathfrak{D}}) = -\frac{1}{2C^4}[K(\mathfrak{g}_4^2 \Phi^2 - C^2 \Phi_4^2) + \mu(\mathfrak{g}_4^2 \Psi^2 - C^2 \Psi_4^2) + \mu C^2 \Psi^2 + (1 + K\mu)\mathfrak{g}_4 \Omega_4],$$

$$43)\quad 4\pi \mathfrak{R}_m = \frac{4\pi}{2}(\underline{\mathfrak{H}\mathfrak{B}}) = -\frac{1}{2C^4}[\mu(\mathfrak{g}_4^2 \Psi^2 - C^2 \Psi_4^2) + K(\mathfrak{g}_4^2 \Phi^2 - C^2 \Phi_4^2) + KC^2 \Phi^2 + (1 + K\mu)\mathfrak{g}_4 \Omega_4].$$

Bei der Ableitung dieser Ausdrücke hat man die Gleichungen 30) und 33) zu beachten.

Man bekommt nämlich in dem Ausdruck für die elektrische Energiedichte als Faktor von $-K$:

$$\begin{aligned} A_{14}^2 + A_{24}^2 + A_{34}^2 &= (\mathfrak{g}_1 \Phi_4 - \mathfrak{g}_4 \Phi_1)^2 + (\mathfrak{g}_2 \Phi_4 - \mathfrak{g}_4 \Phi_2)^2 + (\mathfrak{g}_3 \Phi_4 - \mathfrak{g}_4 \Phi_3)^2 \\ &= \Phi_4^2(\mathfrak{g}_1^2 + \mathfrak{g}_2^2 + \mathfrak{g}_3^2) + \mathfrak{g}_4^2(\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2) \\ &\qquad - 2\mathfrak{g}_4 \Phi_4(\mathfrak{g}_1 \Phi_1 + \mathfrak{g}_2 \Phi_2 + \mathfrak{g}_3 \Phi_3) \\ &= -\Phi_4^2(C^2 + \mathfrak{g}_4^2) + \mathfrak{g}_4^2(\Phi^2 - \Phi_4^2) + 2\mathfrak{g}_4^2 \Phi_4^2, \end{aligned}$$

das gibt $\mathfrak{g}_4^2 \Phi^2 - C^2 \Phi_4^2$.

Der Faktor von $-\mu$ ist:

$$\begin{aligned} a_{23}^2 + a_{31}^2 + a_{12}^2 &= -(\mathfrak{g}_2 \Psi_3 - \mathfrak{g}_3 \Psi_2)^2 - (\mathfrak{g}_3 \Psi_1 - \mathfrak{g}_1 \Psi_3)^2 - (\mathfrak{g}_1 \Psi_2 - \mathfrak{g}_2 \Psi_1)^2 \\ &= -\Psi_3^2(\mathfrak{g}_1^2 + \mathfrak{g}_2^2) - \Psi_1^2(\mathfrak{g}_2^2 + \mathfrak{g}_3^2) - \Psi_2^2(\mathfrak{g}_3^2 + \mathfrak{g}_1^2) \\ &\quad + \mathfrak{g}_3 \Psi_3(\mathfrak{g}_2 \Psi_2 + \mathfrak{g}_1 \Psi_1) + \mathfrak{g}_1 \Psi_1(\mathfrak{g}_3 \Psi_3 + \mathfrak{g}_2 \Psi_2) \\ &\quad + \mathfrak{g}_2 \Psi_2(\mathfrak{g}_3 \Psi_3 + \mathfrak{g}_1 \Psi_1). \end{aligned}$$

Die Glieder in den letzten beiden Zeilen kann man auch schreiben:

$$-\mathfrak{g}_3 \Psi_3(\mathfrak{g}_3 \Psi_3 + \mathfrak{g}_4 \Psi_4) - \mathfrak{g}_1 \Psi_1(\mathfrak{g}_1 \Psi_1 + \mathfrak{g}_4 \Psi_4) - \mathfrak{g}_2 \Psi_2(\mathfrak{g}_2 \Psi_2 + \mathfrak{g}_4 \Psi_4),$$

also alle Glieder zusammen:

$$-\Psi_3^2(\mathfrak{g}_1^2 + \mathfrak{g}_2^2 + \mathfrak{g}_3^2) - \Psi_1^2(\mathfrak{g}_1^2 + \mathfrak{g}_2^2 + \mathfrak{g}_3^2) - \Psi_2^2(\mathfrak{g}_1^2 + \mathfrak{g}_2^2 + \mathfrak{g}_3^2) - \mathfrak{g}_4 \Psi_4(\mathfrak{g}_1 \Psi_1 + \mathfrak{g}_2 \Psi_2 + \mathfrak{g}_3 \Psi_3),$$

das gibt:

$$+(C^2 + \mathfrak{g}_4^2)(\Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \Psi_3^2) + \mathfrak{g}_4^2 \Psi_4^2$$

oder $+(C^2 + \mathfrak{g}_4^2)(\Psi^2 - \Psi_4^2) + \mathfrak{g}_4^2 \Psi_4^2$, also $+\mathfrak{g}_4^2 \Psi^2 - C^2 \Psi_4^2 + C^2 \Psi^2$.

Endlich bekommt man für den Faktor von $-(1 + K\mu)$:

$$A_{14} a_{23} + A_{24} a_{31} + A_{34} a_{12} = i[(\mathfrak{g}_2 \Phi_4 - \mathfrak{g}_4 \Phi_2)(\mathfrak{g}_1 \Psi_3 - \mathfrak{g}_3 \Psi_1) + (\mathfrak{g}_2 \Phi_4 - \mathfrak{g}_4 \Phi_2)(\mathfrak{g}_3 \Psi_1 - \mathfrak{g}_1 \Psi_3) + (\mathfrak{g}_3 \Phi_4 - \mathfrak{g}_4 \Phi_3)(\mathfrak{g}_1 \Psi_2 - \mathfrak{g}_2 \Psi_1)].$$

Nach der Ausmultiplizierung heben sich sechs Glieder paarweise auf und der Rest gibt:

$$i\,\mathfrak{g}_4[\mathfrak{g}_1(\Phi_2 \Psi_3 - \Phi_3 \Psi_2) + \mathfrak{g}_2(\Phi_3 \Psi_1 - \Phi_1 \Psi_3) + \mathfrak{g}_3(\Phi_1 \Psi_2 - \Phi_2 \Psi_1)],$$

was eben nach 35), S. 17, gleich $\mathfrak{g}_4 \Omega_4$ ist. Ebenso leitet man $\mathfrak{R}_m$ ab.

Insgesamt ist die Energiedichte:

$$44)\quad 4\pi C^4 \mathfrak{R} = K(C^2\Phi_4^2 - \mathfrak{g}_4^2\Phi^2) + \mu(C^2\Psi_4^2 - \mathfrak{g}_4^2\Psi^2) - \frac{K}{2}C^2\Phi^2 - \frac{\mu}{2}C^2\Psi^2 - (1+K\mu)\mathfrak{g}_4\Omega_4.$$

Will man nun z. B. X_x bilden, so hat man als Faktor von K aus $\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x$:

$$A_{23}^2 - A_{14}^2 = (\mathfrak{g}_2\Phi_3 - \mathfrak{g}_3\Phi_2)^2 - (\mathfrak{g}_1\Phi_4 - \mathfrak{g}_4\Phi_1)^2$$
$$= \mathfrak{g}_2^2\Phi_3^2 + \mathfrak{g}_3^2\Phi_2^2 - \mathfrak{g}_1^2\Phi_4^2 - \mathfrak{g}_4^2\Phi_1^2 - 2\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3\Phi_2\Phi_3 + 2\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_4\Phi_1\Phi_4.$$

Die doppelten Produkte schreibe ich zufolge $(\overline{\mathfrak{g}\Phi}) = 0$ in der Form:

$$-2\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3\Phi_2\Phi_3 = +(\mathfrak{g}_1\Phi_1 + \mathfrak{g}_3\Phi_3 + \mathfrak{g}_4\Phi_4)\mathfrak{g}_3\Phi_3 + (\mathfrak{g}_1\Phi_1 + \mathfrak{g}_2\Phi_2 + \mathfrak{g}_4\Phi_4)\mathfrak{g}_2\Phi_2,$$
$$+2\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_4\Phi_1\Phi_4 = -(\mathfrak{g}_1\Phi_1 + \mathfrak{g}_2\Phi_2 + \mathfrak{g}_3\Phi_3)\mathfrak{g}_1\Phi_1 - (\mathfrak{g}_2\Phi_2 + \mathfrak{g}_3\Phi_3 + \mathfrak{g}_4\Phi_4)\mathfrak{g}_4\Phi_4.$$

Sie geben also zusammen

$$\mathfrak{g}_3^3\Phi_3^2 + \mathfrak{g}_2^2\Phi_2^2 - \mathfrak{g}_1\Phi_1^2 - \mathfrak{g}_4^2\Phi_4^2,$$

so daß man hat:

$$A_{23}^2 - A_{14}^2 = (\Phi_2^2 + \Phi_3^2)(\mathfrak{g}_2^2 + \mathfrak{g}_3^2) - (\Phi_1^2 + \Phi_4^2)(\mathfrak{g}_1^2 + \mathfrak{g}_4^2)$$

und zufolge 33), S. 16:

$$A_{23}^2 - A_{14}^2 = -(\Phi_2^2 + \Phi_3^2)(C^2 + \mathfrak{g}_1^2 + \mathfrak{g}_4^2) - (\Phi_1 + \Phi_4^2)(\mathfrak{g}_1^2 + \mathfrak{g}_4^2)$$
$$= -C^2(\Phi^2 - \Phi_1^2 - \Phi_4^2) - \Phi^2(\mathfrak{g}_1^2 + \mathfrak{g}_4^2).$$

Vereinigt man das mit dem entsprechenden Gliede in $-4\pi\mathfrak{R}$, so ergeben sich die im Ausdruck für C^4X_x mit K multiplizierten Glieder. Entsprechend folgen die mit μ multiplizierten Glieder, da ja Symmetrie herrscht. Für die $(1+K\mu)$ multiplizierten hat man als Faktor:

$$a_{14}A_{23} - A_{14}a_{23} = i(\mathfrak{g}_1\Psi_4 - \mathfrak{g}_4\Psi_1)(\mathfrak{g}_2\Phi_3 - \mathfrak{g}_3\Phi_2) - i(\mathfrak{g}_1\Phi_4 - \mathfrak{g}_4\Phi_1)(\mathfrak{g}_2\Psi_3 - \mathfrak{g}_3\Psi_2).$$

Nach Ausführung der Multiplikation und Hinzufügung der Größe $+\mathfrak{g}_4\Omega_4$ von dem Betrage der Energiedichte heben sich von den 14 Gliedern 8 paarweise auf und die 6 übrigbleibenden Glieder geben $\mathfrak{g}_1\Omega_1$. Ähnlich sind alle anderen Druckkomponenten zu berechnen.

Zuletzt bemerke ich noch, daß die Differenz der Energiedichten die Beziehung gibt:

$$45)\qquad L = 4\pi(\mathfrak{R}_m - \mathfrak{R}_e) = \frac{1}{2C^2}(K\Phi^2 - \mu\Psi^2).$$

Die Spannung T_t entspricht der elektromagnetischen Energiedichte $\mathfrak{R}$ im Raume. Man hat nach 37), S. 18 und 44), S. 22:

$$46)\qquad \mathfrak{R} = \frac{1}{4\pi}T_t.$$

Die Spannungen T_x, T_y, T_z sind proportional der Poyntingschen Energieströmung im Raume. Bedeuten $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y$, $\mathfrak{P}_z$ deren Komponenten, so hat man:

$$47)\qquad \frac{1}{C}\mathfrak{P}_x = T_x,\quad \frac{1}{C}\mathfrak{P}_y = T_y,\quad \frac{1}{C}\mathfrak{P}_z = T_z.$$

Die Spannungen X_t, Y_t, Z_t gleichen Poyntingschen Vektoren, jedoch mit Polarisierungen statt der Feldintensitäten, abgesehen vom Faktor $\frac{1}{(4\pi)^2 C}$. Im Ruhezustande und für isotrope Stoffe sind sie den Poyntingschen Vektoren proportional; es ist dann auch

$$\mathfrak{P}_x = \frac{C}{K\mu} X_t, \quad \mathfrak{P}_y = \frac{C}{K\mu} Y_t, \quad \mathfrak{P}_z = \frac{C}{K\mu} Z_t.$$

Hiernach berechnen sich die aus der Annahme der vierten Dimension folgenden sieben Spannungen nach dem Muster von aus der Lehre des Elektromagnetismus bekannten Größen.

Beziehen wir diese Spannungen statt auf die Zeitachse auf die $\mathfrak{x}_4$-Achse, so haben wir ihre Werte mit i zu multiplizieren, weshalb in dem System 37), S. 18 sogleich die Formeln für $-iT_x$ usf. gegeben sind.

Aus den Spannungen berechnet Minkowski die Kräfte im elektromagnetischen Felde nicht nach dem Muster unter 13), S. 10 sondern er fügt zu den nach diesem Muster anzusetzenden Kräften noch besondere Kräfte hinzu. Hat man nämlich nach diesem Muster:

$$48)\quad \begin{cases} K_1 = \dfrac{\partial X_x}{\partial x_1} + \dfrac{\partial X_y}{\partial x_2} + \dfrac{\partial X_z}{\partial x_3} + \dfrac{\partial(-iX_t)}{\partial x_4}, \\ K_2 = \dfrac{\partial Y_x}{\partial x_1} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial x_2} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial x_3} + \dfrac{\partial(-iY_t)}{\partial x_4}, \\ K_3 = \dfrac{\partial Z_x}{\partial x_1} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial x_2} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial x_3} + \dfrac{\partial(-iZ_t)}{\partial x_4}, \\ -iCK_4 = \dfrac{\partial(-iT_x)}{\partial x_1} + \dfrac{\partial(-iT_y)}{\partial x_2} + \dfrac{\partial(-iT_z)}{\partial x_3} + \dfrac{\partial T_t}{\partial x_4}, \end{cases}$$

so nimmt Minkowski für die Kraftkomponenten nach den vier Koordinatenachsen an:

$$49)\quad \begin{cases} X_1 = X = K_1 + \dfrac{1}{C^2}\,\mathfrak{g}_1\,(\overline{\underline{\mathfrak{g}K}}), \\ X_2 = Y = K_2 + \dfrac{1}{C^2}\,\mathfrak{g}_2\,(\overline{\underline{\mathfrak{g}K}}), \\ X_3 = Z = K_3 + \dfrac{1}{C^2}\,\mathfrak{g}_3\,(\overline{\underline{\mathfrak{g}K}}), \\ X_4 = T = K_4 + \dfrac{1}{C^2}\,\mathfrak{g}_4\,(\overline{\underline{\mathfrak{g}K}}). \end{cases}$$

Die Begründung für diesen Ansatz werden wir später kennen lernen. Wir schreiben in leicht verständlicher Abkürzung:

$$50)\quad \begin{vmatrix} X_x & X_y & X_z & -iX_t \\ Y_x & Y_y & Y_z & -iY_t \\ Z_x & Z_y & Z_z & -iZ_t \\ -iT_x & -iT_y & -iT_z & T_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} & S_{41} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} & S_{42} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{43} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{vmatrix}$$

so ist die Energie aller Spannungen im Raumzeitgebiet V gleich $\iiiint dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$ gegeben durch

$$51)\quad P = \iiiint \sum_{i,k} S_{ik} \frac{\partial \mathfrak{g}_k}{\partial x_i} dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4; \quad i, k = 1, 2, 3, 4.$$

6. Max Abrahams Ansätze für das elektromagnetische Feld.

Max Abraham[1]) setzt in Beschränkung auf die Verhältnisse im dreidimensionalen Raum:

$$52_1)\quad \begin{cases} X = \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z} - \dfrac{d G_x}{d t} - G_x \, div\, g \\ Y = \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z} - \dfrac{d G_y}{d t} - G_y \, div\, g, \\ Z = \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z} - \dfrac{d G_z}{d t} - G_z \, div\, g. \end{cases}$$

Die X_x usf. haben die früher angegebenen Werte, g bedeutet die Geschwindigkeit im Raum und in der Zeit t. G nennt Max Abraham die Impulsdichte und definiert sie durch die Gleichungen in Vektorschreibweise:

$$53)\quad \left(\overline{G \frac{dg}{dt}}\right) = \frac{4\pi}{2}\left(\overline{\mathfrak{E}\frac{d\mathfrak{D}}{dt} + \mathfrak{H}\frac{d\mathfrak{B}}{dt} - \mathfrak{D}\frac{d\mathfrak{E}}{dt} - \mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{H}}{dt}}\right),$$

$$54)\quad [Gg] = 4\pi[\mathfrak{E}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\mathfrak{B}],$$

so daß für die drei Komponenten von G zwar vier Gleichungen bestehen, von denen jedoch nur drei voneinander unabhängig sind, wenn die Feldintensitäten und Polarisierungen der Bedingung genügen:

$$55)\quad (\overline{g\,[\mathfrak{E}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\mathfrak{B}]}) = 0,$$

---

[1]) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **28** (1909), 2. semestre. Vgl. Ph. d. b. M., S. 242 ff.

was bei den bis jetzt aufgestellten Theorien im allgemeinen der Fall ist. Man hat dann auch:

56) $$(\overline{G[\mathfrak{E}\mathfrak{D}+\mathfrak{H}\mathfrak{B}]})=0$$

als Gegengleichung zu 55) und bedarf von dem Satz von Gleichungen 54) nur einer Gleichung.

Beachtet man die Bedeutung von $\frac{dG}{dt}$, so folgt:

$$\begin{aligned}\frac{dG}{dt}+G\,div\,g &= \frac{\partial G}{\partial t}+g_x\frac{\partial G}{\partial x}+g_y\frac{\partial G}{\partial y}+g_z\frac{\partial G}{\partial z}+G\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial g_z}{\partial z}\right)\\ &= \frac{\partial G}{\partial t}+\frac{\partial G g_x}{\partial x}+\frac{\partial G g_y}{\partial y}+\frac{\partial G g_z}{\partial z}.\end{aligned}$$

Die Gleichungen für die Kräfte werden also auch:

$$52_2)\left\{\begin{aligned} X &= \frac{\partial(X_x-G_xg_x)}{\partial x}+\frac{\partial(X_y-G_xg_y)}{\partial y}+\frac{\partial(X_z-G_xg_z)}{\partial z}-\frac{\partial G_x}{\partial t},\\ Y &= \frac{\partial(Y_x-G_yg_x)}{\partial x}+\frac{\partial(Y_y-G_yg_y)}{\partial y}+\frac{\partial(Y_z-G_yg_z)}{\partial z}-\frac{\partial G_y}{\partial t},\\ Z &= \frac{\partial(Z_x-G_zg_x)}{\partial x}+\frac{\partial(Z_y-G_zg_y)}{\partial y}+\frac{\partial(Z_z-G_zg_z)}{\partial z}-\frac{\partial G_z}{\partial t}.\end{aligned}\right.$$

In der Form entsprechen diese Gleichungen den Minkowskischen für die Kräfte K nach 48), S. 23, und es wäre namentlich:

57) $$CG_x=X_t\quad CG_y=Y_t,\quad CG_z=Z_t.$$

Aber die neuen Spannungen:

$$58)\left\{\begin{array}{l|l|l} X'_x=X_x-G_xg_x & Y'_x=Y_x-G_yg_x & Z'_x=Z_x-G_zg_x\\ X'_y=X_y-G_xg_y & Y'_y=Y_y-G_yg_y & Z'_y=Z_y-G_zg_y\\ X'_z=X_z-G_xg_z & Y'_z=Y_z-G_yg_z & Z'_z=Z_z-G_zg_z\end{array}\right.$$

würden nicht den Minkowskischen gleich sein, sie unterscheiden sich von ihnen durch die Glieder Gg. Max Abraham nennt die Spannungen $X'_x, \ldots$ absolute, die $X_x, \ldots$ relative. Das relative Spannungssystem $X_x, \ldots$ hat ein Drehungsmoment, da allgemein $X_y \gtrless Y_x$ usf. ist. Im absoluten Spannungssystem ist z. B.:

$$\begin{aligned}X'_y-Y'_x &= X_y-Y_x+G_yg_x-G_xg_y\\ &= 4\pi(\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_y+\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_y-\mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_x-\mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_x)-G_xg_y+G_yg_x,\end{aligned}$$

d. h.

$$X'_y-Y'_x=-[Gg]+4\pi[\mathfrak{E}\mathfrak{D}+\mathfrak{H}\mathfrak{B}]=0$$

nach 54). Also wird:

59) $$X'_y=Y'_x,\qquad Y'_z=Z'_y,\qquad Z'_x=X'_z,$$

das absolute Spannungssystem genügt der Bedingung der elastischen Spannungen. Wir werden später sehen (S. 38), daß Heinrich Hertz der gleichen Bedingung auch für die relativen Spannungen mit anderer Voraussetzung zu entsprechen sucht.

7. Spannungen und Striktion.

Wir kehren zu den Ausgangsgleichungen 12), S. 10, den Maxwellschen für isotrope Stoffe, zurück. In diesen Gleichungen ist auf die durch die Spannungen selbst etwa verursachten Deformationen der Stoffe keine Rücksicht genommen. Helmholtz und Kirchhoff haben sie darum abgeändert, indem sie allgemeiner schreiben:

$$
\begin{aligned}
X_x^{(e)} &= \frac{1}{8\pi}(2L_e'' X_e^2 - L_e' R_e^2) \\
Y_y^{(e)} &= \frac{1}{8\pi}(2L_e'' Y_e^2 - L_e' R_e^2) \\
Z_z^{(e)} &= \frac{1}{8\pi}(2L_e'' Z_e^2 - L_e' R_e^2) \\
X_y^{(e)} &= Y_x^{(e)} = \frac{1}{4\pi} L_e'' X_e Y_e \\
Y_z^{(e)} &= Z_y^{(e)} = \frac{1}{4\pi} L_e'' Y_e Z_e \\
Z_x^{(e)} &= X_z^{(e)} = \frac{1}{4\pi} L_e'' Z_e X_e
\end{aligned}
\tag{60}
$$

$$
\begin{aligned}
X_x^{(m)} &= \frac{1}{8\pi}(2L_m'' X_m^2 - L_m' R_m^2) \\
Y_y^{(m)} &= \frac{1}{8\pi}(2L_m'' Y_m^2 - L_m' R_m^2) \\
Z_z^{(m)} &= \frac{1}{8\pi}(2L_m'' Z_m^2 - L_m' R_m^2) \\
X_y^{(m)} &= Y_x^{(m)} = \frac{1}{4\pi} L_m'' X_m Y_m \\
Y_z^{(m)} &= Z_y^{(m)} = \frac{1}{4\pi} L_m'' Y_m Z_m \\
Z_x^{(m)} &= X_z^{(m)} = \frac{1}{4\pi} L_m'' Z_m X_m
\end{aligned}
\tag{61}
$$

Die L'', L' sind Größen, die in folgender Weise zu bestimmen sind[1]. Nennt man λ_1, λ_2, λ_3 die drei Hauptdilatationen, ξ, η, ζ ihre Richtung und Ξ, H, Z die Komponenten der elektrischen oder magnetischen Kräfte; setzt man ferner in üblicher Annahme für die Komponenten der dielektrischen Polarisierung in Richtung dieser Hauptdilatationen:

$$
\left\{
\begin{aligned}
P_\xi^{(e)} &= (\varkappa_e - \varkappa_e' [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3] - \varkappa_e'' \lambda_1)\, \Xi_e, \\
P_\eta^{(e)} &= (\varkappa_e - \varkappa_e' [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3] - \varkappa_e'' \lambda_2)\, H_e, \\
P_\zeta^{(e)} &= (\varkappa_e - \varkappa_e' [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3] - \varkappa_e'' \lambda_3)\, Z_e,
\end{aligned}
\right.
\tag{62}
$$

und entsprechend für die magnetische Polarisierung:

$$
\left\{
\begin{aligned}
P_\xi^{(m)} &= (\varkappa_m - \varkappa_m' [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3] - \varkappa_m'' \lambda_1)\, \Xi_m, \\
P_\eta^{(m)} &= (\varkappa_m - \varkappa_m' [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3] - \varkappa_m'' \lambda_2)\, H_m, \\
P_\zeta^{(m)} &= (\varkappa_m - \varkappa_m' [\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3] - \varkappa_m'' \lambda_3)\, Z_m,
\end{aligned}
\right.
\tag{63}
$$

[1]) Vgl. meine Thermodynamik und Kinetik der Körper **3**, 1, S. 270 ff.

so ist

$$64_1)\qquad L''_e = 1 + 4\pi\varkappa_e + \frac{4\pi\varkappa''_e}{2},\quad L'_e = 1 + 4\pi\varkappa_e - 4\pi\varkappa'_e,$$

$$65_1)\qquad L''_m = 1 + 4\pi\varkappa_m + \frac{4\pi\varkappa''_m}{2},\quad L'_m = 1 + 4\pi\varkappa_m - 4\pi\varkappa'_m,$$

und zugleich haben wir:

$$66)\qquad 1 + 4\pi\varkappa_e = K,\qquad 1 + 4\pi\varkappa_m = \mu,$$

also

$$64_2)\qquad L''_e = K + \frac{4\pi\varkappa''_e}{2},\qquad L'_e = K - 4\pi\varkappa'_e,$$

$$65_2)\qquad L''_m = \mu + \frac{4\pi\varkappa''_m}{2},\qquad L'_m = \mu - 4\pi\varkappa'_m,$$

$\varkappa'$, $\varkappa''$ bestimmen sich aus den obigen Gleichungen.

Bilden wir nun die Kräfte, so ist für eine Raumeinheit:

$$67)\quad A'_p = \frac{L''}{4\pi}\left\{P\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) + X\frac{\partial P}{\partial x} + Y\frac{\partial P}{\partial y} + Z\frac{\partial P}{\partial z}\right\}$$
$$-\frac{L'}{4\pi}R\frac{\partial R}{\partial p};\quad P = X, Y, Z;\quad p = x, y, z.$$

Im Fall die Kräfte ein Potential besitzen, wird

$$X\frac{\partial P}{\partial x} + Y\frac{\partial P}{\partial y} + Z\frac{\partial P}{\partial z} = X\frac{\partial X}{\partial p} + Y\frac{\partial Y}{\partial p} + Z\frac{\partial Z}{\partial p} = \frac{1}{2}\frac{\partial R^2}{\partial p};$$
$$p = x, y, z,$$

also

$$68_1)\quad A'_p = L''P\varrho' + \frac{1}{8\pi}(L'' - L')\frac{\partial R^2}{\partial p};\quad P = X, Y, Z;\quad p = x, y, z,$$

wo die freie Dichte ϱ' bestimmt ist durch

$$\varrho' = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right).$$

Nach den Werten von L'', L' findet sich so:

$$68_2)\qquad A'_p = L''P\varrho' + \frac{1}{4}(\varkappa'' + 2\varkappa')\frac{\partial R^2}{\partial p}.$$

Bei Deformationen bestimmen sich also die Kräfte aus den Spannungen anders als nach der Theorie der Fernkräfte. Die Unterschiede betragen $\frac{\varkappa'' + 2\varkappa'}{4}\frac{\partial R^2}{\partial p}$. Die Spannungen bewirken hiernach eine akzessorische Kraft, die ein Potential $\frac{\varkappa'' + 2\varkappa'}{4}R^2$ hat. Die Anwesenheit einer Ladung oder eines Magnets bewirkt so überhaupt in dem sie umgebenden Medium, ob dort andere

Ladungen vorhanden sind oder nicht bestehen, deformierende Kräfte, die man bekanntlich der Elektrostriktion oder Magnetostriktion zuschreibt[1]). Die modernen Theorien nehmen auf diese aus den Deformationen fließenden Kräfte keine Rücksicht. Man kann sie jedoch auch hier in gleicher Weise in Rechnung nehmen. Wir bedürfen dazu aber einer anderen Darstellung für die Spannungen. Indem wir von ursprünglichen Formeln 19) und 23), S. 13, 15, ausgehen, ersetzen wir sie durch folgendes System, das dem Helmholtz-Kirchhoffschen entspricht:

$$\begin{aligned}
\text{69)}\downarrow\quad X_x &= 4\pi\left\{N_e''\,\mathfrak{E}_x\,\mathfrak{D}_x + N_m''\,\mathfrak{H}_x\,\mathfrak{B}_x - \frac{1}{2}N_e'(\underline{\mathfrak{E}\mathfrak{D}}) - \frac{1}{2}N_m'(\underline{\mathfrak{H}\mathfrak{B}})\right\},\\
Y_y &= 4\pi\left\{N_e''\,\mathfrak{E}_y\,\mathfrak{D}_y + N_m''\,\mathfrak{H}_y\,\mathfrak{B}_y - \frac{1}{2}N_e'(\underline{\mathfrak{E}\mathfrak{D}}) - \frac{1}{2}N_m'(\underline{\mathfrak{H}\mathfrak{B}})\right\},\\
Z_z &= 4\pi\left\{N_e''\,\mathfrak{E}_z\,\mathfrak{D}_z + N_m''\,\mathfrak{H}_z\,\mathfrak{B}_z - \frac{1}{2}N_e'(\underline{\mathfrak{E}\mathfrak{D}}) - \frac{1}{2}N_m'(\underline{\mathfrak{H}\mathfrak{B}})\right\},\\
T_t &= 4\pi\left\{\frac{1}{2}N_e'(\underline{\mathfrak{E}\mathfrak{D}}) + \frac{1}{2}N_m'(\underline{\mathfrak{H}\mathfrak{B}})\right\},\\
X_y &= 4\pi\,(N_e''\,\mathfrak{E}_x\,\mathfrak{D}_y + N_m''\,\mathfrak{H}_x\,\mathfrak{B}_y),\\
X_z &= 4\pi\,(N_e''\,\mathfrak{E}_x\,\mathfrak{D}_z + N_m''\,\mathfrak{H}_x\,\mathfrak{B}_z),\\
Y_x &= 4\pi\,(N_e''\,\mathfrak{E}_y\,\mathfrak{D}_x + N_m''\,\mathfrak{H}_y\,\mathfrak{B}_x),\\
Y_z &= 4\pi\,(N_e''\,\mathfrak{E}_y\,\mathfrak{D}_z + N_m''\,\mathfrak{H}_y\,\mathfrak{B}_z),\\
Z_x &= 4\pi\,(N_e''\,\mathfrak{E}_z\,\mathfrak{D}_x + N_m''\,\mathfrak{H}_z\,\mathfrak{B}_x),\\
Z_y &= 4\pi\,(N_e''\,\mathfrak{E}_z\,\mathfrak{D}_y + N_m''\,\mathfrak{H}_z\,\mathfrak{B}_y),\\
T_x &= M_1\,\mathfrak{H}_z\,\mathfrak{E}_y - M_2\,\mathfrak{H}_y\,\mathfrak{E}_z,\\
T_y &= M_1\,\mathfrak{H}_x\,\mathfrak{E}_z - M_2\,\mathfrak{H}_z\,\mathfrak{E}_x,\\
T_z &= M_1\,\mathfrak{H}_y\,\mathfrak{E}_x - M_2\,\mathfrak{H}_x\,\mathfrak{E}_y,\\
X_t &= (4\pi)^2(M_1'\,\mathfrak{B}_z\,\mathfrak{D}_y - M_2'\,\mathfrak{B}_y\,\mathfrak{D}_z),\\
Y_t &= (4\pi)^2(M_1'\,\mathfrak{B}_x\,\mathfrak{D}_z - M_2'\,\mathfrak{B}_z\,\mathfrak{D}_x),\\
\text{69)}\uparrow\quad Z_t &= (4\pi)^2(M_1'\,\mathfrak{B}_y\,\mathfrak{D}_x - M_2'\,\mathfrak{B}_x\,\mathfrak{D}_y).
\end{aligned}$$

Die N, M sind die neuen Konstanten, und man hat wohl $M_1 = M_2 = 1$ zu setzen. Die Ausdrücke durch die Ruhekräfte erhält man durch Einführung der Werte für die $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ usf. nach den Gleichungen 34), S. 17.

---

[1]) Eingehende Beispiele habe ich in meinem S. 26 genannten Buche gerechnet.

8. Bedeutung der Spannungen.

Da die elektromagnetischen Störungen so verbreitet werden wie das Licht, so ist der Sitz der Spannungen der Äther, der freie oder der in den Körpern enthaltene. Nun war es bereits Maxwell nicht zweifelhaft, daß gewöhnliche greifbare Materie Spannungen, wie sie z. B. durch seine Gleichungen 12), S. 10, dargestellt sind, von denen ja alle anderen nur Verallgemeinerungen bedeuten, nicht standhalten kann, denn diese Spannungen zerren die Materie sowohl längs den Kraftlinien als auch quer dazu.

Maxwells[1]) Ableitung besteht in folgendem. Ist S eine Niveaufläche mit der an dS nach außen gerichteten Normale n, so hat man

$$R = -\frac{\partial \psi}{\partial p}, \quad R\alpha = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad R\beta = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad R\gamma = -\frac{\partial \psi}{\partial z},$$

wo α, β, γ die Richtungskosinus der Normale n bedeuten. Also

$$X_x = \frac{R^2}{8\pi}(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2), \quad Y_y = \frac{R^2}{8\pi}(\beta^2-\gamma^2-\alpha^2), \quad Z_z = \frac{R^2}{8\pi}(\gamma^2-\alpha^2-\beta^2),$$

$$X_y = Y_x = \frac{R^2}{4\pi}\beta\alpha, \qquad Y_z = Z_y = \frac{R^2}{4\pi}\gamma\beta, \qquad Z_x = X_z = \frac{R^2}{4\pi}\alpha\gamma.$$

Da die Komponenten N_x, N_y, N_z der zu dS senkrechten Spannung N sind:

$$N_x = \alpha X_x + \beta X_y + \gamma X_z, \quad N_y = \alpha Y_x + \beta Y_y + \gamma Y_z,$$
$$N_z = \alpha Z_x + \beta Z_y + \gamma Z_z,$$

so erhält man hiernach

$$N_x = \frac{R^2}{8\pi}\alpha, \quad N_y = \frac{R^2}{8\pi}\beta, \quad N_z = \frac{R^2}{8\pi}\gamma, \qquad N = \frac{R^2}{8\pi},$$

d. h. die Spannung zieht senkrecht zur Niveaufläche und mit der Kraft $\frac{R^2}{8\pi}$.

Nehmen wir für S eine Kraftfläche S' mit der Normale n' und den Richtungskosinus α', β', γ', so ist z. B. die x-Komponente der Spannung senkrecht zu dS' gleich

$$N'_x = \alpha' X_x + \beta' X_y + \gamma' X_z = \frac{1}{8\pi}\left[\alpha'\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 - \alpha'\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 - \alpha'\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 + 2\beta'\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} + 2\gamma'\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right].$$

Andererseits muß

$$\alpha'\frac{\partial \psi}{\partial x} + \beta'\frac{\partial \psi}{\partial y} + \gamma'\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

sein, die obige Gleichung und die ihr entsprechenden für N'_y, N'_z geben also

$$N'_x = -\frac{R^2}{8\pi}\alpha', \quad N'_y = -\frac{R^2}{8\pi}\beta', \quad N'_z = -\frac{R^2}{8\pi}\gamma'; \quad N' = -\frac{R^2}{8\pi}.$$

---

[1]) Electricity and Magnetism, deutsche Übersetzung, Bd. I, 1, 156 f.

N' ist hiernach entgegengesetzt gerichtet zu N; parallel den Niveauflächen besteht so ein Druck von gleicher Größe wie der Zug senkrecht zu ihnen.

Übertragen wir unsere Anschauungen von der greifbaren Materie auf den Äther, so muß also dieser Äther unter dem Einfluß dieser Spannungen in Bewegung geraten. Helmholtz[1]) hat für diese Bewegung die Gleichungszusätze aufgestellt. Das Problem ist aber sehr verwickelt, da die Bewegung die Spannungen ihrerseits ändert[2]). Vermehrt werden die Schwierigkeiten, wenn man mit Maxwell und Heinrich Hertz annimmt, daß der Äther in den Körpern unlösbar an diese Körper gebunden ist. Das ist wohl mit ein Grund, warum die Annahme von H. A. Lorentz in seiner Elektronentheorie, daß nämlich der Äther überhaupt unbeweglich ist und seinerseits zwar auf Körper wirkt, nicht aber von Körpern irgend eine Gegenwirkung erfährt, so viel Anklang gefunden hat. Es genügt dann die Aufstellung der Spannungen, ohne daß es nötig ist, zu untersuchen, wie sie den Äther beeinflussen, denn er soll ja seiner Natur nach durch sie nicht in Bewegung versetzt werden können. Indessen rückt dann die ganze Betrachtung in das formal Mathematische, denn von den elastischen Verhältnissen in absolut starren Stoffen wissen wir aus der Erfahrung nichts. Die mathematische Behandlung wird aber durch die Annahme der Starrheit freilich sehr erleichtert.

9. Spannungen und Energie.

Die meisten elektrodynamischen Theorien, die man bisher aufgestellt hat, führen zu den Formelsystemen

$$+ C\, curl_p\, \mathfrak{H} = 4\pi \frac{D\mathfrak{D}_p}{Dt} + 4\pi J_p, \tag{70}$$

$$- C\, curl_p\, \mathfrak{E} = 4\pi \frac{D\mathfrak{B}_p}{Dt}; \quad p = x, y\, z, \tag{71}$$

$$\varrho = div\, \mathfrak{D}, \tag{72}$$

$$0 = div\, \mathfrak{B}. \tag{73}$$

Dabei bedeutet D/Dt die Operation

$$\frac{DF_p}{Dt} = \frac{dF_p}{dt} - (F\nabla)g_p + F_p\, div\, g; \quad F = \mathfrak{D}, \mathfrak{B}, \tag{74}$$

[1]) Wied. Ann. f. Phys. **53**, 135 (1894).

[2]) Ph. d. b. M., S. 190 ff.

in der

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + g_x \frac{\partial}{\partial x} + g_y \frac{\partial}{\partial y} + g_z \frac{\partial}{\partial z}$$

ist und g_x, g_y, g_z die Komponenten der etwaigen Bewegungsgeschwindigkeit im Raume nach der Zeit t angeben[1]). Hiernach haben wir

$$C[(\overline{\mathfrak{E}\, curl\, \mathfrak{H}}) - (\overline{\mathfrak{H}\, curl\, \mathfrak{E}}) = 4\pi \left[\overline{\left(\mathfrak{E}\frac{D\mathfrak{D}}{Dt}\right)} + \overline{\left(\mathfrak{H}\frac{D\mathfrak{B}}{Dt}\right)}\right] + 4\pi(\mathfrak{E}J).$$

Die linke Seite dieser Gleichung wird nach μ) in der Anm., S. 12

$$C[(\overline{\mathfrak{E}\, curl\, \mathfrak{H}}) - (\overline{\mathfrak{H}\, curl\, \mathfrak{E}})] = C\, div[\mathfrak{H}\mathfrak{E}] = -C\, div[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = -div\,\mathfrak{P},$$

wo

75) $$C[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_p = \mathfrak{P}_p; \quad p = x, y, z$$

den Poyntingschen Vektor bezeichnet. Die Glieder der rechten Seite geben nach der Definition 74) und in etwas anderer Anordnung

$$\frac{4\pi}{2}\frac{d}{dt}(\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\mathfrak{B}}) + \frac{4\pi}{2}\left\{\overline{\left(\mathfrak{E}\frac{d\mathfrak{D}}{dt}\right)} + \overline{\left(\mathfrak{H}\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right)} - \overline{\left(\mathfrak{D}\frac{d\mathfrak{E}}{dt}\right)} - \overline{\left(\mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{H}}{dt}\right)}\right\}$$
$$- 4\pi\{(\overline{\mathfrak{E}(\mathfrak{D}\nabla)g}) + (\overline{\mathfrak{H}(\mathfrak{B}\nabla)g})\} + 4\pi\{(\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\mathfrak{B}})\}\, div\, g + 4\pi(\overline{\mathfrak{E}J}).$$

Setzen wir hiernach

76) $$\left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}(\overline{\mathfrak{E}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\mathfrak{B}}) = \mathfrak{R}, \\ &\overline{\frac{1}{2}\left(\mathfrak{E}\frac{d\mathfrak{D}}{dt} + \mathfrak{H}\frac{d\mathfrak{B}}{dt} - \mathfrak{D}\frac{d\mathfrak{E}}{dt} - \mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{H}}{dt}\right)} = \mathfrak{R}', \\ &(\overline{\mathfrak{E}(\mathfrak{D}\nabla)g + \mathfrak{H}(\mathfrak{B}\nabla)g}) = \mathfrak{Q}, \\ &4\pi(\mathfrak{E}J) = Q, \end{aligned}\right.$$

so wird also

$$-div\,\mathfrak{P} = 4\pi\left(\frac{d\mathfrak{R}}{dt} + \mathfrak{R}' - \mathfrak{Q} + 2\mathfrak{R}\, div\, g\right) + Q.$$

Da

$$div\, g = \frac{1}{dV}\frac{d(dV)}{dt}$$

ist, wo dV ein Volumenelement darstellt, so hat man

77) $$-(div\,\mathfrak{P} + Q) = 4\pi\left(\frac{1}{dV}\frac{d(\mathfrak{R}\,dV)}{dt} + \mathfrak{R}' - (\mathfrak{Q} - \mathfrak{R}\, div\, g)\right).$$

---

[1]) Ph. d. b. M., S. 131 f. und 242 ff., wo auch die Bedeutung für die verschiedenen Theorien behandelt ist.

Das ist die Energiegleichung. Die Größe $\mathfrak{R}'$ ist in der Maxwell-Hertzschen Theorie gleich Null. Die Größe $\mathfrak{Q} - \mathfrak{R}\, div\, g$ stellt die mechanische Energie dar. Ausgeschrieben und etwas zusammengezogen haben wir

$$\mathfrak{Q} = (\mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_x) \frac{\partial g_x}{\partial x} + (\mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_y) \frac{\partial g_y}{\partial y} + (\mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_z \mathfrak{B}_z) \frac{\partial g_z}{\partial z}$$
$$+ (\mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_y) \frac{\partial g_x}{\partial y} + (\mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_z) \frac{\partial g_x}{\partial z} + (\mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_x) \frac{\partial g_y}{\partial x}$$
$$+ (\mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_z) \frac{\partial g_y}{\partial z} + (\mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_z \mathfrak{B}_x) \frac{\partial g_z}{\partial x} + (\mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_z \mathfrak{B}_y) \frac{\partial g_z}{\partial y}$$

Fügen wir die Größe $-\mathfrak{R}\, div\, g$ hinzu, so wird die mechanische Energie in der Raumeinheit

$$78)\quad \left\{ \begin{aligned} M' = {} & X_x \frac{\partial g_x}{\partial x} + Y_y \frac{\partial g_y}{\partial y} + Z_z \frac{\partial g_z}{\partial z} + X_y \frac{\partial g_x}{\partial y} \\ & + X_z \frac{\partial g_x}{\partial z} + Y_x \frac{\partial g_y}{\partial x} + Y_z \frac{\partial g_y}{\partial z} + Z_x \frac{\partial g_z}{\partial x} + Z_y \frac{\partial g_z}{\partial y} \end{aligned} \right.$$

und die X_x usf. haben die uns schon bekannten Werte. Für den Raum V ist diese Energie

$$79_1)\quad \left\{ \begin{aligned} M = \iiint \Big(& X_x \frac{\partial g_x}{\partial x} + Y_y \frac{\partial g_y}{\partial y} + Z_z \frac{\partial g_z}{\partial z} + X_y \frac{\partial g_x}{\partial y} \\ & + X_z \frac{\partial g_x}{\partial z} + Y_x \frac{\partial g_y}{\partial x} + Y_z \frac{\partial g_y}{\partial z} + Z_x \frac{\partial g_z}{\partial x} + Z_y \frac{\partial g_z}{\partial y} \Big) dx\, dy\, dz. \end{aligned} \right.$$

Nun hat man z. B.

$$\iiint X_x \frac{\partial g_x}{\partial x} dx\, dy\, dz = \iiint \frac{\partial}{\partial x}(g_x X_x)\, dx\, dy\, dz - \iiint g_x \frac{\partial X_x}{\partial x} dx\, dy\, dz$$
$$= \iint g_x X_x \cos(n, x)\, d S - \iiint g_x \frac{\partial X_x}{\partial x} dx\, dy\, dz,$$

wo S die Oberfläche von V bedeutet. Und ähnlich für die anderen Integrale. So bekommt man mit

$$80)\quad K_p = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}; \quad P = X, Y, Z, \quad p = x, y, z.$$

$$81)\quad U_p = g_x X_p + g_y Y_p + g_z Z_p; \quad p = x, y, z.$$

$$79_2)\quad \begin{aligned} M = {} & - \iiint (g_x K_x + g_y K_y + g_z K_z)\, d V \\ & + \iint (U_x \cos(n, x) + U_y \cos(n, y) + U_z \cos(n, z))\, d S. \end{aligned}$$

Die K bedeuten also mechanische Kräfte, wie früher.

Ich habe nun einige Bemerkungen zu machen. In den Theorien von Maxwell-Heaviside-Hertz und Cohn bedeuten $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ die Feldintensitäten und Polarisierungen im Zustande der Bewegung, falls eine solche besteht. Das gleiche gilt für Minkowskis Theorie, jedoch stellen hier die Formeln 70), 71), 74) nur Annäherungen dar. In der vollständigen Theorie Minkowskis vermag man in der angegebenen Weise nicht zu rechnen. Minkowski hat aber seine Matrixrechnung (S. 14) so eingerichtet, daß für die Spannungen formal die gleichen Ansätze herauskommen, die auch jene Gleichungen finden lassen. Diese Matrixrechnung gibt zugleich auch die Spannungen zur Berücksichtigung der Zeitdimension seines Raumzeitgebietes, die man sonst nicht erhalten kann.

Für die Theorie von H. A. Lorentz kann man zwar die gleichen Formeln 70), 71), 74) benutzen, aber dann bedeuten nur $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ die Werte dieser Größen im bewegten Felde, $\mathfrak{H}$ dagegen ist die magnetische Feldintensität in diesem Felde, wenn keine Bewegung stattfindet. Ist jedoch Bewegung vorhanden, so stellt $\mathfrak{H}$ eine andere Größe dar als die tatsächliche magnetische Feldintensität [1]). Wird letztere mit $\mathfrak{H}^*$ bezeichnet und der Wert von $\mathfrak{D}$ in reinem Äther mit $\mathfrak{D}_0$, so hat man

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^* - \frac{4\pi}{C}[g\,\mathfrak{D}_0]$$

und dieser Wert wäre in die Spannungsgleichungen einzutragen. Nach einer von mir selbst aufgestellten Theorie [2]) würden im reinen Äther Spannungen unter Umständen, nämlich wenn er sich sollte bewegen können, überhaupt nicht vorhanden sein, sondern nur im Äther, der die greifbaren Stoffe erfüllt. Es kommt darauf hinaus, daß, sofern Bewegung besteht, in den Spannungsgleichungen alle elektrischen Größen mit dem Faktor $1 - k\frac{K_0}{K}$, alle magnetischen mit dem $1 - k\frac{\mu_0}{\mu}$ multipliziert werden, wo K_0, μ_0 sich auf reinen Äther beziehen, k eine Konstante bedeutet, die auch 1 sein könnte.

---

[1]) Ph. d. b. M., S. 210, 242, 253.

[2]) l. c. S. 188 und 249.

Im ganzen ist die Begründung der Gleichungen für die Spannungen keine befriedigende. Ich führe darum noch die Theorie hierüber von Heinrich Hertz an.

10. Theorie der Spannungen von Heinrich Hertz.

Heinrich Hertz [1]) geht von dem Ausdruck für die Energie aus. So ist die magnetische Energie

$$E_m = \tfrac{1}{2}\iiint(\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z)\,dx\,dy\,dz.$$

Wenn das Medium sich bewegt, so kann es Translationen, Rotationen und Deformationen erfahren. Nur die letzteren sollen in Betracht kommen. Sie bewirken aber, daß selbst ein isotropes Mittel sich entweder wie ein kristallinisches verhält, oder daß es wenigstens Verdichtung oder Verdünnung erfährt. Also ist allgemein entsprechend 17), S. 12

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z &= \mu_{11}\mathfrak{H}_x^2 + \mu_{12}\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_y + \cdots \\ &= \mu'_{11}\mathfrak{B}_x^2 + \mu'_{12}\mathfrak{B}_x\mathfrak{B}_y + \cdots\end{aligned}$$

und die Änderung der magnetischen Energie im Raum dV wird

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[(\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z)dV] &= \Big[\frac{d\mathfrak{B}_x}{dt}(\mu'_{11}\mathfrak{B}_x + \mu'_{12}\mathfrak{B}_y + \mu'_{13}\mathfrak{B}_z) \\ &+ \frac{d\mathfrak{B}_y}{dt}(\mu'_{21}\mathfrak{B}_x + \mu'_{22}\mathfrak{B}_y + \mu'_{23}\mathfrak{B}_z) + \frac{d\mathfrak{B}_z}{dt}(\mu'_{31}\mathfrak{B}_x + \mu'_{32}\mathfrak{B}_y + \mu'_{33}\mathfrak{B}_z)\Big]dV \\ &+ \frac{1}{2}\Big[\mathfrak{B}_x^2\frac{d\mu'_{11}}{dt} + \mathfrak{B}_x\mathfrak{B}_y\frac{d\mu'_{12}}{dt} + \mathfrak{B}_x\mathfrak{B}_z\frac{d\mu'_{13}}{dt} + \mathfrak{B}_y\mathfrak{B}_x\frac{d\mu'_{21}}{dt} + \mathfrak{B}_y^2\frac{d\mu'_{22}}{dt} + \cdots\Big]d \\ &+ \frac{1}{2}[\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z]\frac{d(dV)}{dt}\end{aligned}$$

Darin setzt Heinrich Hertz $\mu'_{ik} = \mu'_{ki}$. Dann wird unter Berücksichtigung von 17) und weil $d(dV) = V\,dt\,div\,g$ ist:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[(\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z)\,dV] &= \Big[\mathfrak{H}_x\frac{d\mathfrak{B}_x}{dt} + \mathfrak{H}_y\frac{d\mathfrak{B}_y}{dt} + \mathfrak{H}_z\frac{d\mathfrak{B}_z}{dt}\Big]dV \\ + \frac{1}{2}\Big[\mathfrak{B}_x^2\frac{d\mu'_{11}}{dt} + \mathfrak{B}_y^2\frac{d\mu'_{22}}{dt} + \mathfrak{B}_z^2\frac{d\mu'_{33}}{dt} &+ 2\mathfrak{B}_x\mathfrak{B}_y\frac{d\mu'_{12}}{dt} + 2\mathfrak{B}_x\mathfrak{B}_z\frac{d\mu'_{13}}{dt} + 2\mathfrak{B}_y\mathfrak{B}_z\frac{d\mu'_{23}}{dt}\Big]d \\ + \frac{1}{2}(\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z)&\Big(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}\Big)dV.\end{aligned}$$

---

[1]) Ges. Abhandl. **2**, 275 ff.; Wiedem. Ann. d. Phys. **41**, 369 ff. (1890).

Da die mechanische Arbeit nur für die Deformation zu berechnen ist, behalten wir in den Gleichungen 71) zur Bestimmung der $\frac{d\mathfrak{B}}{dt}$ nur die von den Deformationsgrößen $\frac{\partial g_x}{\partial x}$ usf. abhängigen Glieder, setzen also nach 74) ein

$$\text{für } \frac{d\mathfrak{B}_x}{dt} = -\mathfrak{B}_x\left(\frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}\right) + \mathfrak{B}_y \frac{\partial g_x}{\partial y} + \mathfrak{B}_z \frac{\partial g_x}{\partial z},$$

$$\text{„ } \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{dt} = -\mathfrak{B}_y\left(\frac{\partial g_z}{\partial z} + \frac{\partial g_x}{\partial x}\right) + \mathfrak{B}_z \frac{\partial g_y}{\partial z} + \mathfrak{B}_x \frac{\partial g_y}{\partial x},$$

$$\text{„ } \frac{d\mathfrak{B}_z}{dt} = -\mathfrak{B}_z\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + \mathfrak{B}_x \frac{\partial g_z}{\partial x} + \mathfrak{B}_y \frac{\partial g_z}{\partial y}.$$

Die Glieder in der ersten und die der letzten Zeile geben dann:

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x - \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y - \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z)\frac{\partial g_x}{\partial x} + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y - \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z - \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x)\frac{\partial g_y}{\partial y}$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z - \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x - \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y)\frac{\partial g_z}{\partial z}$$
$$+ \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_y\frac{\partial g_x}{\partial y} + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_x\frac{\partial g_y}{\partial x} + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_z\frac{\partial g_x}{\partial z} + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_x\frac{\partial g_z}{\partial x}$$
$$+ \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_z\frac{\partial g_y}{\partial z} + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_y\frac{\partial g_z}{\partial y}.$$

Man schreibe z. B.:

$$\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_y\frac{\partial g_x}{\partial y} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_y\left(\frac{\partial g_x}{\partial y} + \frac{\partial g_y}{\partial x}\right) + \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_y\left(\frac{\partial g_x}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial x}\right),$$

so hängt das zweite Glied von der Rotation $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_x}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial x}\right)$ der Teile des Mediums ab. Heinrich Hertz wirft dieses Glied ab, dann kann man die zweite und dritte Zeile schreiben:

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_x)\left(\frac{\partial g_x}{\partial y} + \frac{\partial g_y}{\partial x}\right) + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_z + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_y)\left(\frac{\partial g_y}{\partial z} + \frac{\partial g_z}{\partial y}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_z)\left(\frac{\partial g_z}{\partial x} + \frac{\partial g_x}{\partial z}\right).$$

Beide Zeilen geben, indem wir die X_x, usf. überstreichen:

$$82)\quad M' = \left[\overline{X}_x\frac{\partial g_x}{\partial x} + \overline{Y}_y\frac{\partial g_y}{\partial y} + \overline{Z}_z\frac{\partial g_z}{\partial z} + \tfrac{1}{2}(\overline{X}_y + \overline{Y}_x)\left(\frac{\partial g_x}{\partial y} + \frac{\partial g_y}{\partial x}\right)\right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{2}(\overline{Y}_z + \overline{Z}_y)\left(\frac{\partial g_y}{\partial z} + \frac{\partial g_z}{\partial y}\right) + \tfrac{1}{2}(\overline{Z}_x + \overline{X}_z)\left(\frac{\partial g_z}{\partial x} + \frac{\partial g_x}{\partial z}\right)\right]dV,$$

entsprechend früheren Darstellungen. Ob es zulässig ist, die von der Rotation abhängigen Glieder fortzulassen, kann fraglich erscheinen, man gewinnt aber dadurch die wünschenswerten Beziehungen:

$$X_y = Y_x, \quad Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z.$$

Es bleiben in der Theorie von Heinrich Hertz noch die von den $\frac{d\mu}{dt}$ abhängigen Glieder. Nennt man die elastischen Verschiebungen ξ, η, ζ, so nimmt er die $\frac{d\mu}{dt}$ als bestimmt an durch die Zeitänderungen der Deformationen $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}, \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}$, so daß, wenn wir sie bezeichnen mit $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi, \chi$, man allgemein hat:

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{\partial \mu}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \mu}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dt} + \frac{\partial \mu}{\partial \gamma}\frac{d\gamma}{dt} + \frac{\partial \mu}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial \mu}{\partial \psi}\frac{d\psi}{dt} + \frac{\partial \mu}{\partial \chi}\frac{d\chi}{dt},$$

und da

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{d\zeta}{dt}, \text{ usf.}$$

gesetzt werden darf, weil die ξ, η, ζ nur kleine Größen sein werden, so hat man:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial g_x}{\partial x}, \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial g_y}{\partial y}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial g_z}{\partial z}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial g_x}{\partial y} + \frac{\partial g_y}{\partial x},$$
$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial g_y}{\partial z} + \frac{\partial g_z}{\partial y}, \quad \frac{d\chi}{dt} = \frac{\partial g_z}{\partial x} + \frac{\partial g_x}{\partial z}.$$

Hiernach treten zu den früheren Gliedern weitere Glieder hinzu, die von den Verzerrungsfaktoren in derselben Weise abhängen wie diese, und man hat nunmehr für die Spannungskomponenten:

83) ↓

$$X_x^{(m)} = 4\pi\left[\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_x - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}\mathfrak{B}) + \sum_p\sum_q M_{pq}^{(1)}\mathfrak{B}_p\mathfrak{B}_q\right],$$
$$Y_y^{(m)} = 4\pi\left[\mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_y - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}\mathfrak{B}) + \sum_p\sum_q M_{pq}^{(2)}\mathfrak{B}_p\mathfrak{B}_q\right],$$
$$Z_z^{(m)} = 4\pi\left[\mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_z - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{H}\mathfrak{B}) + \sum_p\sum_q M_{pq}^{(3)}\mathfrak{B}_p\mathfrak{B}_q\right],$$
$$X_y^{(m)} = \frac{4\pi}{2}\left(\mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_x + \sum_p\sum_q M_{pq}^{(4)}\mathfrak{B}_p\mathfrak{B}_q\right),$$
$$Y_z^{(m)} = \frac{4\pi}{2}\left(\mathfrak{H}_y\mathfrak{B}_z + \mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_y + \sum_p\sum_q M_{pq}^{(5)}\mathfrak{B}_p\mathfrak{B}_q\right),$$

↑ 83)

$$Z_x^{(m)} = \frac{4\pi}{2}\left(\mathfrak{H}_z\mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_x\mathfrak{B}_z + \sum_p\sum_q M_{pq}^{(6)}\mathfrak{B}_p\mathfrak{B}_q\right).$$

$$
\begin{aligned}
&84) \quad X_x^{(e)} = 4\pi\left[\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_x - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + \sum_p\sum_q E_{pq}^{(1)}\mathfrak{D}_p\mathfrak{D}_q\right],\\
& Y_y^{(e)} = 4\pi\left[\mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_y - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + \sum_p\sum_q E_{pq}^{(2)}\mathfrak{D}_p\mathfrak{D}_q\right],\\
& Z_z^{(e)} = 4\pi\left[\mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_z - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + \sum_p\sum_q E_{pq}^{(3)}\mathfrak{D}_p\mathfrak{D}_q\right],\\
& X_y^{(e)} = \frac{4\pi}{2}\left(\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_x + \sum_p\sum_q E_{pq}^{(4)}\mathfrak{D}_p\mathfrak{D}_q\right),\\
& Y_z^{(e)} = \frac{4\pi}{2}\left(\mathfrak{E}_y\mathfrak{D}_z + \mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_y + \sum_p\sum_q E_{pq}^{(5)}\mathfrak{D}_p\mathfrak{D}_q\right),\\
&84) \quad Z_x^{(e)} = \frac{4\pi}{2}\left(\mathfrak{E}_z\mathfrak{D}_x + \mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_z + \sum_p\sum_q E_{pq}^{(6)}\mathfrak{D}_p\mathfrak{D}_q\right).
\end{aligned}
$$

Die entsprechenden Gleichungen für die elektrischen Druckkomponenten mit $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$ und $E^{(i)}$ an Stelle von $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ und $M^{(i)}$ sind gleich hinzugefügt. Die M, E sind aus den je sechs Differentialquotienten der μ', K' nach den Größen $\alpha, \ldots, \chi$ zu bilden. Die Gleichungen erinnern an die Helmholtz-Kirchhoffschen Formeln unter 60), 61) S. 26, in denen die Striktion berücksichtigt ist. In der Tat weist Heinrich Hertz nach, daß sie für Stoffe, die trotz der Deformation isotrop bleiben, in diese Gleichungen der Form nach übergehen. Doch sollen die in ihnen mit L_e'', L_m'' bezeichneten Konstanten gleich K und μ werden.

11. Die mechanischen Kräfte.

Noch schwieriger wird die Lehre von den Spannungen, wenn wir zu den mechanischen Kräften übergehen. An sich gelten für alle Kräfte, die ein Potential besitzen, die einfachen Maxwellschen Entwickelungen S. 10. Wir könnten also die Maxwellschen Formeln 12), S. 10, ohne weiteres auch auf ein Feld übertragen, in dem z. B. lediglich die allgemeine Schwerkraft herrscht. Und die Verhältnisse sind hier noch besonders einfach, weil diese Formeln dann allgemein gelten dürften, denn für die Schwerkraft ist, soviel wir wissen, in allen Stoffen $K = 1$, $\mu = 1$. Auch würden die Gleichungen zunächst ebenfalls bestehen, wenn im Medium Bewegung herrschen sollte. Davon sprechen wir noch (S. 38). Diese Übertragung der elektromagnetischen Verhältnisse auf mechanische hat man schon ziemlich früh vorgenommen. Allgemein aber verdanken wir ihre Ausbildung Minkowski, der sie gleich für sein Raumzeitgebiet durchgeführt hat.

Maßgebend für Minkowski ist, daß jede Bewegung eines Körpers im Raum oder im Raumzeitgebiet abhängt von Spannungen in seiner Umgebung, die unmittelbar auf ihn wirken und so ihn drängen oder stoßen.

Die Arbeit dieser Spannungen, die auch hier S_{ik}; $i, k = 1, 2, 3, 4$ bezeichnen, für irgend welche virtuelle Verrückungen δx_k, $k = 1, 2, 3, 4$ — Minkowski nennt diese Arbeit die Spannungswirkung — setzen wir entsprechend 51), S. 24:

85) $$\delta W = -\frac{i}{C^2}\iiiint S_{ik}\frac{\partial \delta x_k}{\partial x_i}\,d x_1\,d x_2\,d x_3\,d x_4.$$

Mit dieser Spannungswirkung und dem, was er Massenwirkung nennt, leitet Minkowski nach einem dem Hamiltonschen Prinzip der klassischen Mechanik nachgebildeten Prinzip seine bekannten Gleichungen der Raumzeitmechanik ab. Indem er zugleich die Bedingung, daß in der fundamentalen Beziehung 31), S. 16, für die Eigenzeit τ die Größe C eine absolute Weltkonstante sein soll, einführt, erhält er für die Raumzeitkomponenten der mechanischen Kräfte als Ausdrücke durch die Spannungen mit

86) $$\left\{\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial S_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial S_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial S_{31}}{\partial x_3}+\frac{\partial S_{41}}{\partial x_4},\\ Y_1 &= \frac{\partial S_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial S_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial S_{32}}{\partial x_3}+\frac{\partial S_{42}}{\partial x_4},\\ Z_1 &= \frac{\partial S_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial S_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial S_{33}}{\partial x_3}+\frac{\partial S_{43}}{\partial x_4},\\ i\,C\,T_1 &= \frac{\partial S_{14}}{\partial x_1}+\frac{\partial S_{24}}{\partial x_2}+\frac{\partial S_{34}}{\partial x_3}+\frac{\partial S_{44}}{\partial x_4},\end{aligned}\right.$$

die Werte:

87) $$\left\{\begin{aligned} X &= X_1+\frac{1}{C^2}\,\mathfrak{g}_1\,(\underline{\overline{\mathfrak{g}\,R_1}}),\\ Y &= Y_1+\frac{1}{C^2}\,\mathfrak{g}_2\,(\underline{\overline{\mathfrak{g}\,R_1}}),\\ Z &= Z_1+\frac{1}{C^2}\,\mathfrak{g}_3\,(\underline{\overline{\mathfrak{g}\,R_1}}),\\ i\,C\,T &= i\,C\,T_1+\frac{1}{C^2}\,\mathfrak{g}_4\,(\underline{\overline{\mathfrak{g}\,R_1}}),\end{aligned}\right.$$

wobei

88) $$(\underline{\overline{\mathfrak{g}\,R_1}}) = \mathfrak{g}_1 X_1 + \mathfrak{g}_2 Y_1 + \mathfrak{g}_3 Z_1 + \mathfrak{g}_4\, i\,C\,T_1$$

ist. Die Zusatzglieder zu X_1, Y_1, Z_1, T_1, wir nennen sie Minkowskische Zusatzkräfte, ergeben sich aus der angeführten Bedingung für die Weltgröße C, und sie dürfen nicht fortgelassen werden, ohne die Minkowskische Theorie grundsätzlich zu ändern [1]. Dementsprechend sind die Gleichungen 48), 49), S. 23 für die elektromagnetischen Kräfte angegeben.

Aber wie sind nun die Spannungen S. 24 anzusetzen? Im Vergleich mit den elektromagnetischen Spannungen haben wir nach dem Schema auf S. 24:

$$
89)\quad \begin{cases}
S_{11} = X_x, & S_{12} = Y_x, \quad S_{13} = Z_x, \quad S_{14} = -i\,T_x, \\
S_{21} = X_y, & S_{22} = Y_y, \quad S_{23} = Z_y, \quad S_{24} = -i\,T_y, \\
S_{31} = X_z, & S_{32} = Y_z, \quad S_{33} = Z_z, \quad S_{34} = -i\,T_z, \\
S_{41} = -i\,X_t, & S_{42} = -i\,Y_t, \quad S_{43} = -i\,Z_t, \quad S_{44} = T_t.
\end{cases}
$$

Für die Spannungen im Raum allein könnte man, wie schon hervorgehoben, die Maxwellschen Beziehungen 12), S. 10 benutzen. Max Abraham [2] hat darum diese Beziehungen auf das Raumzeitgebiet schematisch erweitert. Es seien im Raumzeitgebiet Kräfte $R^{(1)}$, $R^{(2)}, \ldots, R^{(n)}$ mit den Gesamtkomponenten R_1, R_2, R_3, R_4 vorhanden; so setzt er:

$$
90)\quad \begin{array}{rl}
4\pi S_{11} &= \Sigma\left(R_1^2 - \tfrac{1}{2} R^2\right), \\
4\pi S_{22} &= \Sigma\left(R_2 - \tfrac{1}{2} R^2\right), \\
4\pi S_{33} &= \Sigma\left(R_3 - \tfrac{1}{2} R^2\right), \\
4\pi S_{44} &= \Sigma\left(R_4 - \tfrac{1}{2} R^2\right), \\
4\pi S_{21} = 4\pi S_{12} &= \Sigma\left(R_1 R_2\right), \\
4\pi S_{32} = 4\pi S_{23} &= \Sigma\left(R_2 R_3\right), \\
4\pi S_{13} = 4\pi S_{31} &= \Sigma\left(R_3 R_1\right), \\
4\pi S_{41} = 4\pi S_{14} &= \Sigma\left(R_1 R_4\right), \\
4\pi S_{42} = 4\pi S_{24} &= \Sigma\left(R_2 R_4\right), \\
4\pi S_{43} = 4\pi S_{34} &= \Sigma\left(R_3 R_4\right),
\end{array} \quad 90)
$$

wo

$$
R^2 = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2
$$

ist.

Es mag sein, daß diese Gleichungen auf die mechanischen Kräfte angewendet werden dürfen. Von den Ausdrücken für die elektromagnetischen Spannungen sind sie weit entfernt, namentlich hinsichtlich der Zeitdimension und des Wegfalls der Unter-

---

[1] Weinstein, Ann. d. Phys. **43**, 929 (1914).

[2] Phys. Zeitschr. 1912, S. 1, 310, 793.

scheidung zwischen Feldintensität und Polarisierung, zumal sich bei den mechanischen Kräften oft auch jedes Feld als isotrop darstellt. Diejenigen Kräfte, die sich momentan verbreiten, wie abermals die Gravitation es zu tun scheint, sind auch von den Bewegungen unabhängig, für sie berechnen sich also die Spannungen wie im statischen Felde, wenn auch gerade hier die Berechnung mehr formale als sachliche Bedeutung beanspruchen kann (S. 44).

Eine andere von Max Abraham gewählte Form für die Spannungen ist vielleicht noch bedeutungsvoller. ω sei eine Funktion von x, y, z, t, die aus folgender Gleichung zu bestimmen ist:

91)
$$E = g_x X + g_y Y + g_z Z$$
$$= \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \omega}{\partial t}\left\{\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} - \frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)\right\},$$

woselbst α eine universelle Weltkonstante bedeuten soll. Es wird

92)
$$\alpha S_{11} = -\left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{C^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2\right] + \tfrac{1}{2} W^2,$$
$$\alpha S_{22} = -\left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{C^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2\right] + \tfrac{1}{2} W^2,$$
$$\alpha S_{33} = -\left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{C^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2\right] + \tfrac{1}{2} W^2,$$
$$\alpha S_{44} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \omega}{\partial z}\Big)\right] + \frac{1}{2C^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 = \tfrac{1}{2} W^2,$$
$$\alpha S_{21} = \alpha S_{12} = -\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y},$$
$$\alpha S_{32} = \alpha S_{23} = -\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial z},$$
$$\alpha S_{13} = \alpha S_{31} = -\frac{\partial \omega}{\partial z}\frac{\partial \omega}{\partial x},$$
$$\alpha S_{41} = \alpha S_{14} = -\frac{1}{C}\frac{\partial \omega}{\partial t}\frac{\partial \omega}{\partial x},$$
$$\alpha S_{42} = \alpha S_{24} = -\frac{1}{C}\frac{\partial \omega}{\partial t}\frac{\partial \omega}{\partial y},$$

92)
$$\alpha S_{43} = \alpha S_{34} = -\frac{1}{C}\frac{\partial \omega}{\partial t}\frac{\partial \omega}{\partial z},$$

mit

93)
$$W^2 = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{C^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2.$$

Für die Kraftkomponenten gelten in beiden Fällen die Ansätze unter 52), S. 24, und es ist die Impulsdichte G im letzten Falle bestimmt durch

$$94_1)\qquad \alpha C^2 G_x = -\frac{\partial \omega}{\partial t}\frac{\partial \omega}{\partial x},\quad \alpha C^2 G_y = -\frac{\partial \omega}{\partial t}\frac{\partial \omega}{\partial y},$$

$$\alpha C^2 G_z = -\frac{\partial \omega}{\partial t}\frac{\partial \omega}{\partial z},$$

d. h.:

$$94_2)\qquad C G_x = S_{41} = S_{14},\quad C G_y = S_{42} = S_{24},\quad C G_z = S_{43} = S_{34},$$

im ersten durch

$$95)\qquad G_x = S_{41} = S_{14},\quad G_y = S_{42} = S_{24},\quad G_z = S_{43} = S_{34}.$$

Zu den Minkowskischen Ansätzen für die Kraftkomponenten verhalten sich die Max Abrahamschen wiederum so, als wenn in jenen die Zusatzkräfte, die aus der angenommenen Konstanz von C sich ergeben, fortfielen [1]). In der Tat läßt auch, wie wir noch sehen werden, Max Abraham C variabel.

Indessen ist die Abweichung von Minkowskis Schema für die elektromagnetischen Spannungen doch gar zu groß und zu wesentlich.

Da nun die einzigen Spannungen, für die Ausdrücke wenigstens mit einiger Wahrscheinlichkeit angesetzt werden können, gerade die des elektromagnetischen Feldes sind, wird man besser versuchen müssen, die mechanischen Kräfte auf elektromagnetische zurückzuführen, also ein System von elektromagnetischen Kräften aufzustellen, das im Ergebnis z. B. solche Kräfte darstellt, wie die allgemeine Gravitation, oder die elektrische Kraft von statischen Ladungen, oder die magnetische Kraft von ruhenden Magnetpolen. Dazu ist noch nicht einmal ein Anfang gemacht. Selbst Minkowski hat in dem allein von ihm behandelten Beispiel, nämlich der astronomischen Bewegung für die Newtonsche Gravitation, im Raumzeitgebiet einen bestimmten Ansatz gemacht, ohne auf die Definition durch die Spannungen einzugehen. Darüber sprechen wir noch. Will man aber von den gesicherteren Maxwellschen Formeln 12) wenigstens im Raum Gebrauch machen, ohne auf Berücksichtigung der Zeitdimension ganz zu verzichten, so wird es einer Umrechnung der Raumkräfte

[1]) Ph. d. b. M., S. 378 ff., wo der Druckfehler bei S_{44} zu verbessern ist.

nach den Lehren der Relativität bedürfen, indem man sie mit dem Faktor $\sqrt{1-\frac{g^2}{C^2}}$ multipliziert, wo g die Geschwindigkeit des Stoffes im Raum allein bedeutet.

Minkowskis Lehre führt zu der eigenartigen Folgerung, daß im Raumzeitgebiet die Kräfte ein Potential nicht haben können, was im Raum von den Kräften gerade so oft angenommen wird. Seine Mechanik ergibt nämlich als Energiesatz:

96) $$\mathfrak{g}_1 X + \mathfrak{g}_2 Y + \mathfrak{g}_3 Z + \mathfrak{g}_4 T = -\frac{m}{2}\frac{d}{d\tau}(C^2),$$

wo m die Maße des sich bewegenden Substanzpunktes bedeutet. Nun soll aber C absolut konstant sein, also bleibt

97) $$\mathfrak{g}_1 X + \mathfrak{g}_2 Y + \mathfrak{g}_3 Z + \mathfrak{g}_4 T = 0.$$

Hätte nun die Kraft ein Potential Φ im Raumzeitgebiet, so wäre hiernach

$$\mathfrak{g}_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \mathfrak{g}_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \mathfrak{g}_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \mathfrak{g}_4 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} = 0,$$

d. h.:

$$\frac{d\Phi}{d\tau} - \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = 0.$$

Diese Gleichung kann aber nicht bestehen, da unter allen Umständen mindestens $\mathfrak{g}_4$ von Null, also $\frac{d\Phi}{d\tau}$ von $\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}$ mindestens um das Glied $\mathfrak{g}_4 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4}$ verschieden ist. Nur wenn Φ von x_4, also von der Zeit nicht abhängt, kann ein Potential wenigstens im Ruhezustand im Raum bestehen. Unabhängigkeit der Kräfte von der Zeit wurde früher fast immer angenommen, sie liegt aber nicht im Sinne von Minkowskis Vierdimensionallehre, denn sie könnte selbst bei größter Allgemeinheit hier überhaupt nur vorhanden sein, wenn die Bewegung im Raum konstant ist, also nur in einem ganz besonderen Fall. In Minkowskis Lehre ist die Verbindung der Kräfte mit den Bewegungen eine bei weitem engere als in der früheren Mechanik. Und das kann auch nicht anders sein angesichts des Umstandes, daß die Arbeit dieser Kräfte im Raumzeitgebiet immer Null ist, die Bewegung im Raum mag sein wie sie will. Bis zu einem gewissen Grade trifft das für die Relativitätslehre überhaupt zu. Der Begriff der konservativen Kräfte findet in diesen neueren Theorien keinen Platz.

Sicher nicht in der Minkowskischen Theorie, wie ja schon die Ausdrücke 87), S. 38 für die Kraftkomponenten unmittelbar lehren.

Wenn die Bewegungsgeschwindigkeit g im Raum allein gegen die Weltgeschwindigkeit C (die also der Lichtgeschwindigkeit im freien Äther gleichgesetzt wird) gering ist, kann man freilich bis auf Größen von der Ordnung $\frac{g^2}{C^2}$ die X_1, Y_1, Z_1 an Stelle von X, Y, Z ansetzen. Alsdann kann wenigstens für den im Raum wirkenden Teil der Kraft ein Potential angenommen werden (s. u.). Die Kraft T wird aber unter gleicher Vernachlässigung gleich $\left(\frac{g_x}{C} X_1 + \frac{g_y}{C} Y_1 + \frac{g_z}{C} Z_1\right)$, sie kann also an jenem etwaigen Potential nicht teilnehmen.

Max Abraham hat in seinen Theorien nicht nur X, Y, Z durch X_1, Y_1, Z_1 ersetzt, sondern auch T durch T_1. Leicht ist dann zu beweisen, daß, wenn in dem Gleichungssystem 90), S. 39 die R ein Potential besitzen, dieses Potential auch für die durch die Spannungen darzustellende Kraft gilt, d. h. eigentlich, daß die Gleichungssysteme 90) und 86) widerspruchsfrei bestehen.

Wir nehmen nur eine Kraft und setzen

$$R_1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad R_2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \quad R_3 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}, \quad R_4 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_4}$$

mit der Laplace-Poissonschen Bedingung

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_4^2} = -4\pi\mu,$$

so haben wir

$$4\pi X_x = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right)^2 - \tfrac{1}{2} R^2 \text{ usf.}$$

also nach 86):

$$4\pi X_1 = 2\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_4}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_4}$$
$$+ \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_4^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_4}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_4}$$

Die Glieder rechts vom Gleichheitszeichen ziehen sich zusammen zu der Laplaceschen Größe, die gleich $-4\pi\mu$ sein sollte, multipliziert mit $\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$, also bekommen wir für die X_1, Y_1, Z_1, T_1 dieselben Ausdrücke wie für die R multipliziert mit μ.

Nach der Minkowskischen Theorie ist aber der Ersatz von T durch T_1 unter allen Umständen, selbst für geringe Bewegungen, unzulässig. Die modernen Theorien räumen eben mit früheren fast selbstverständlichen Annahmen von Grund aus und unnachsichtig auf.

12. Die Gravitation und das Gravitationsfeld.

Eine erschöpfende Darstellung der Anschauungen über die allgemeine Gravitation, fast bis zum Schluß des vergangenen Jahrhunderts, verdanken wir dem so liebenswürdigen und leider so früh dahingeschiedenen Drude[1]). Wir haben es hier nur mit den neuesten, wesentlich diesem Jahrhundert angehörigen Entwickelungen zu tun, müssen aber einiges aus früherer Zeit wenigstens kurz dabei erwähnen. Am meisten Schwierigkeit bereitet, daß für die Verbreitung der Gravitation eine endliche Geschwindigkeit nicht hat nachgewiesen werden können. Alle seit je gemachten Versuche hierzu haben lediglich das Ergebnis gehabt, daß, wenn eine solche Geschwindigkeit vorhanden sein sollte, sie jedenfalls selbst gegen die Geschwindigkeit des Lichtes außerordentlich groß sein müsse. Die Astronomie, die hier die Entscheidung gibt, stellt sie nach der niedrigsten Schätzung 10-millionenmal, nach anderen Schätzungen gar an 500-millionenmal so groß fest. Dadurch ist die Auffassung der Gravitation als durch Spannungen in der Umgebung verursacht, erschwert. Denn Spannungen in einem Stoff bedürfen zu ihrer ordnungsmäßigen Herstellung Zeit, und es ist kaum noch zu begreifen, wie sie sich bei der Bewegung der Körper immer sofort bis in äußerste Weiten so genau der Lage der Körper entsprechend herstellen sollen, daß es nicht möglich ist, irgend eine Abhängigkeit von dieser Bewegung nachzuweisen. Gleichwohl wird gegenwärtig angenommen, daß die Verbreitung der Gravitation nicht mit absoluter Unendlichkeit der Geschwindigkeit erfolgt, sondern mit endlicher; ja nicht wenige halten die Verbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes für diese Geschwindigkeit. Warum man sie im letzteren Falle gleichwohl nicht merkt, wird aus der Relativitätslehre zu erklären versucht. Die konsequenteste derartige Theorie, die Einsteinsche, wird bald dargestellt werden.

---

[1]) Ann. d. Phys. **62**, 1 bis 49 (1897).

Eine eigenartige Anschauung hat Jaumann[1]) entwickelt. Er nimmt an, daß die Gravitation sich durch den Äther mit ungeheurer Geschwindigkeit verbreitet, aber nicht wie das Licht oder wie die elektromagnetischen Wellen, sondern wie die Wärme in Stoffen, also diffundierend. Seine Theorie hängt noch mit folgendem zusammen.

Seit langer Zeit weiß man, daß die Planeten, Monde und Kometen in ihren Bewegungen Erscheinungen bieten, die sich aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz nicht ableiten lassen, die darum als Anomalien aufgefaßt werden. So bleibt in der Säkularbewegung des Perihels des Merkur ein so großer Betrag wie 40 bis 41 Bogensekunden auf das Jahrhundert unerklärt. Das gleiche gilt von einer Beschleunigung des Mondes in seiner Bahn, die 6 Bogensekunden im Jahrhundert beträgt, von Eigenheiten in der Bewegung der Knoten der Venusbahn, von der jährlichen Beschleunigung von $2^1/_2$ Stunden des Enckeschen Kometen usf. Außer durch die Annahme von Störungen durch Massen (Meteore, Staubwolken usf.), deren Vorhandensein an den betreffenden Stellen aber noch nicht hat festgestellt werden können, von Reibungswiderstand im Äther usf. versuchte man durch andere Fassung des Gravitationsgesetzes der Schwierigkeit Herr zu werden, indem man z. B. den Exponenten 2 vergrößerte oder einen Absorptionsfaktor hinzufügte oder Glieder, die von der Geschwindigkeit der Bewegung abhängen, einführte. Aber das hatte nur den vorausgesehenen Erfolg, daß, was an dem einen Himmelskörper gebessert wurde, an anderen Himmelskörpern zu einer Verschlechterung führte. Jaumanns Gedanke besteht darin, die Korrektion des Gravitationsgesetzes sozusagen in die Himmelskörper selbst zu verlegen, sie jedesmal auf diese Körper unmittelbar zuzuschneiden, was die Einführung von Gliedern bedingt, die nur an diesen Himmelskörpern einen angebbaren Wert haben, und zwar einen von der Beschaffenheit dieser Körper abhängigen. Dieser Gedanke ist sehr anmutend. Jaumann fügt außerdem noch ein Glied hinzu, welches die Verbreitung der Gravitation von der Zeit in der schon angegebenen Weise abhängig macht.

---

[1]) Sitzungsber. d. mathem.-naturw. Klasse der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien **121**, Abt. IIa, S. 95 ff. (1912).

Hiernach schreibt er an Stelle der Laplace-Poissonschen Potentialgleichung

$$\alpha\,\varrho\,\frac{d\,\Phi}{d\,t} + \beta\,\Phi\,div\,(g\,\bar{\varrho}) + 4\,\pi\,k\,\bar{\varrho} = \varDelta\,n\,\Phi. \tag{98}$$

Darin ist ϱ die Dichte des Stoffes an der Stelle, für die das Potential Φ bestimmt werden soll, $\bar{\varrho} = \varrho - \varrho_0$; wo ϱ_0 die Dichte des freien Äthers feststellt, entspricht α einer Wärmekapazität, n einer Wärmeleitungsfähigkeit, gibt $\frac{n}{\varrho\,\alpha}$ die Verbreitungsgeschwindigkeit der Gravitation und hängt k ab von der Gravitationskonstante. Ist $\varrho = \varrho_0$, die Stelle im freien Äther gelegen, so findet sich, da dann $\varrho = \varrho_0$ sehr kleinen Betrag besitzt, $\varDelta\,\Phi = 0$. Also im freien Äther herrscht das gewöhnliche Newtonsche Gesetz. Nur in den Körpern, wo ϱ von ϱ_0 verschieden und erheblich ist, tritt Abweichung ein, die jedesmal durch den betreffenden Körper selbst bestimmt wird. Die schwierigen Störungsrechnungen, die Jaumann hiernach ausführt, muß ich übergehen. Er gelangt aber zu dem, wenn seine Theorie sich bestätigen sollte, höchst bedeutenden Ergebnis, daß die Weltsysteme gerade durch die in ihren einzelnen Körpern liegenden Zusatzkräfte nach dem obigen allgemeinen Gesetz in Stabilität gehalten werden, selbst größeren Störungen gegenüber. „Wenn durch eine solche Störung die Elemente der Planetenbahnen gänzlich verändert würden, doch so, daß die Bahnen nicht nahezu parabolisch werden, so würden die neuen Gravitationskräfte beträchtliche Variationen der Bahngröße und Exzentrizität von dem Sinne bewirken, daß die Planetenbahnen im Laufe langer Zeit genau in die Form zurückkehren werden, welche sie gegenwärtig haben.“ Doch ist es schwer angesichts des Umstandes, daß die Gravitation sich so sehr als von jeglicher Materie unabhängig erwiesen hat, daß sie fast mathematisch-symbolisch sich äußert, einer solchen Theorie sich sofort anzuschließen. Was innerhalb eines Stoffes alles geschehen kann, wissen wir freilich nicht, wie ja auch nach der alten Theorie die Kraftberechnung im Inneren der Stoffe durchaus willkürlich ist. Jene Theorie verlangt eine Äußerung der Stoffe aus sich heraus und verletzt damit das Prinzip der Gegenwirkung. Das hebt aber Jaumann selbst hervor, und an solche Abweichungen stoßen wir uns nicht mehr seit der modernen Elektronentheorie, die das gleiche Prinzip beiseite schiebt.

Zu den anderen Theorien, die zum Teil auf der Relativitätslehre beruhen, ist folgendes vorauszuschicken. Die Relativitätslehre hatte zu dem Ergebnis geführt, daß die träge Masse eines Stoffes durch seinen Energieinhalt bestimmt ist. Wächst der Energieinhalt um dE, so beträgt die Zunahme der trägen Masse dE/C^2. Und man hat überhaupt die träge Masse als durch den Energieinhalt gegeben angesehen und sie geradezu gleich E/C^2 angesetzt. Von der „trägen“ Masse müssen wir unterscheiden die „schwere“ Masse. Es ist das außerordentliche Verdienst von Eötvös[1]), experimentell nachgewiesen zu haben, daß, wenn diese beiden Massen von einer konstanten Proportionalität abweichen sollten, die Abweichung kaum ein Fünfzigmilliontel ihres Betrages erreichen dürfte. Mit Erlaubnis dieses Forschers drucke ich hier einen Abschnitt aus einem Brief ab, den er an mich auf meine Bitte geschrieben hat.

„Setzen wir die Anziehung der Erde auf die Masseneinheit eines Stoffes gleich $\mathfrak{H}$, auf die Masseneinheit eines anderen Stoffes gleich $\mathfrak{H}'$, so schreibe ich

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}(1+k),$$

wo $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ proportional sind den Gravitationskonstanten betreffend die Anziehung der Erde auf beide Stoffe. Als Normalsubstanz, für welche $\mathfrak{H}$ gelten sollte, wählte ich Platin. Ihre Frage bezieht sich nun darauf, wie groß der Wert von k ist, den ich in meinen Beobachtungen noch erkennen konnte?

Die ersten Versuche, deren Ergebnisse ich 1890 bekannt gemacht habe, geschahen mit äußerst empfindlichen Apparaten. Eine Drehung des Torsionskastens um 180° aus einer Ostwestlage in eine Westostlage hätte, wenn $k = \frac{1}{10\,000\,000}$ sein sollte, eine Drehung des Wagebalkens um 1 Minute (gleich ein Skalenteil der Ablesungseinrichtung) bewirken müssen. Der mittlere Fehler einer Beobachtung betrug aber nur ungefähr die Hälfte einer Minute,

---

[1]) Mathem. u. Naturw. Berichte aus Ungarn 8, 65 ff., Berlin und Budapest 1890; Ann. d. Phys. **59**, 354 ff. (1896); Die Niveauflächen und die Gradienten am Balatonsee, Budapest 1908; XV. u. XVI. Allgemeine Konferenz der Internationalen Erdmessung 1907 und 1910.

so daß ich die Grenze des bemerkbaren Wertes von k zu $\frac{1}{20\,000\,000}$ ansetzte.

Heute und zur Zeit meiner Beobachtungen für die Göttinger Preisschrift steht die Sache noch günstiger. Im Laufe zweier Jahrzehnte ist es mir gelungen, die Torsionswage zu einem Präzisionsinstrument zu vervollkommnen, mit dem ich die Elliptizität der Niveauflächen und die Krümmung der Schwerkraftlinien auch unter freiem Himmel beobachten kann. Derartige Arbeiten veranlaßten mich zur Benutzung von Apparaten etwas geringerer Empfindlichkeit, aber bedeutend größerer Präzision. Bei Benutzung dieser Apparate müßte die Drehung von Ostwest nach Westost, im Falle daß $k = \frac{1}{10\,000\,000}$ sein sollte, eine Drillung von 40 Bogensekunden (ein halber Skalenteil der Ablesungseinrichtung) bewirken, der mittlere Fehler einer Beobachtung war aber immer kleiner als ein Zehntel eines Skalenteiles, das ist kleiner als 8 Bogensekunden. Der Grenzwert des noch feststellbaren k darf also sicher als unter $\frac{1}{50\,000\,000}$ liegend angenommen werden. Die nach diesem Verfahren erzielten Resultate waren die folgenden.

Als Normalstoff Platin gewählt, war in

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{pt}\,[1 + (k - k_{pt})]$$

Magnalium	$k - k_{pt}$	$= +4 \times 10^{-9} \pm 1 \times 10^{-9}$
Schlangenholz	„	$= -1 \times 10^{-9} \pm 2 \times 10^{-9}$
Kupfer	„	$= +4 \times 10^{-9} \pm 2 \times 10^{-9}$
Wasser	„	$= -6 \times 10^{-9} \pm 3 \times 10^{-9}$
Kupfersulfat in Kristallen	„	$= +1 \times 10^{-9} \pm 3 \times 10^{-9}$
Kupfersulfatlösung . . .	„	$= -3 \times 10^{-9} \pm 3 \times 10^{-9}$
Asbest	„	$= +1 \times 10^{-9} \pm 3 \times 10^{-9}$
Talg	„	$= -2 \times 10^{-9} \pm 3 \times 10^{-9}$

Die angegebenen Werte sind Mittelwerte aus je hundert Einzelwerten mit ihren mittleren Fehlern. Diese Mittelwerte sind in drei Fällen etwas größer als ihre mittleren Fehler, berechtigen aber doch nicht zu dem Schluß, daß k von Null verschieden ist. Eine Ausschließung herausfallender Beobachtung, selbst wenn fremde Einflüsse vermutet werden durften, hat bei der Mittel-bildung nicht stattgefunden. Erwähnen muß ich noch, daß unglücklicherweise eben zur Zeit dieser Beobachtungen in unmittelbarer Nähe des Beobachtungsraumes (15 m entfernt) ein Neubau ausgeführt wurde. Jedenfalls darf heute noch nicht das letzte Wort in dieser hochwichtigen Frage ausgesprochen werden; die von mir erprobten Methoden lassen eine noch vielfach vergrößerbare Genauigkeit ihrer Beantwortung zu. Mit Bestimmtheit getraue ich mich aber schon heute auszusprechen, daß für die oben angeführten Stoffe k kleiner als $\frac{1}{100\,000\,000}$ sei." Die Untersuchung radioaktiver Stoffe hat Eötvös begonnen, jedoch wegen zu geringer ihm zur Verfügung gestellter Mengen noch nicht durchführen können. Soweit Eötvös, dem die Wissenschaft für seine mühseligen Versuche, die auch für die Bestimmung des Geoids so große Bedeutung gewonnen haben, nicht dankbar genug sein kann.

Einstein[1]) identifiziert hiernach schwere Masse und träge Masse vollständig, so daß die schwere Masse in derselben Weise dem Energieinhalt proportional (der Proportionalitätsfaktor wäre $1/C^2$) sich ändern würde wie die träge Masse. Er stellt demzufolge als Äquivalenzhypothese auf, „daß ein (unendlich wenig ausgedehntes homogenes) Schwerefeld sich durch einen Beschleunigungszustand des Bezugssystems physikalisch vollständig ersetzen lasse." Er drückt das anschaulich auch so aus: „Ein in einem Kasten eingeschlossener Beobachter kann auf keine Weise entscheiden, ob der Kasten sich ruhend in einem statischen Gravitationsfelde befindet, oder ob sich der Kasten in einem von Gravitationsfeldern freien Raume in beschleunigter Bewegung befindet, die durch an den Kasten angreifende Kräfte aufrecht erhalten wird."

Wenden wir die Lagrangeschen Gleichungen in der Helmholtzschen Form auf die zweite Betrachtungsweise an, so ist mit H als Bezeichnung für die Wirkungsfunktion

99) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial H}{\partial x} \text{ usf.}; \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}.$$

[1]) Ann. d. Phys. **35**, 898 ff. (1911); **38**, 355 ff. u. 443 ff. (1912); Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation. B. G. Teubner, Leipzig 1913.

Im Falle eines einzelnen Punktes wird nach Max Planck im Sinne der älteren Relativitätstheorie gesetzt

100) $$H = m\frac{ds}{dt}, \quad ds = \sqrt{-dx^2 - dy^2 - dz^2 + C^2 dt^2},$$

und so ergibt sich

101) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{C^2 - g^2}}\right) = -\frac{mC\dfrac{\partial C}{\partial x}}{\sqrt{C^2 - g^2}} \text{ usf.}$$

Die Größe rechts vom Gleichheitszeichen spielt die Rolle einer Kraft, und diese Kraft hätte bis auf eine Konstante ein Potential $\sqrt{C^2 - g^2}$, wo C als Variable, g als Konstante zu behandeln wäre. Für $g = 0$, im Zustande der Ruhe, wäre dieses Potential geradezu $C - C_0$ selbst, die Differenz der Verbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes im freien Äther gegen einen Anfangswert.

Frühere Berechnungen Einsteins[1]) hatten ein anderes Ergebnis zur Folge gehabt, indem im Ruhezustande $\frac{1}{2}(C^2 - C_0^2)$ das Potential war.

Es genügt, wenn ich Max Abrahams[2]) Ableitung anführe. Er geht von Minkowskis Energiesatz, Gl. 96), S. 42, aus, läßt aber Minkowskis Zusatzkräfte fallen. Dann ist ein Potential Φ zulässig (S. 43), und es wird nach diesem Energiesatz

$$m\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{d\tau} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\frac{dx_3}{d\tau} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_4}\frac{dx_4}{d\tau}\right) = \frac{m}{2}\frac{dC^2}{d\tau}$$

oder

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{dC^2}{dt},$$

d. h.

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dC^2}{dt}$$

oder

102) $$\Phi - \Phi_0 = \tfrac{1}{2}(C^2 - C_0^2).$$

Diese Gleichung oder für statische Verhältnisse die frühere

103) $$C - C_0 = \Phi - \Phi_0$$

stände mit der älteren Relativitätslehre in Widerspruch, wenn man nicht annehmen will, daß die Gravitation ein überall konstantes Potential besitzt, also Kräfte nicht äußert. Die vollständige Minkowskische Theorie, unter Einbeziehung der Zusatzkräfte

---

1) In den erwähnten Abhandlungen in den Annalen.

2) Physik. Zeitschr. 1912, S. 1 ff., 310 ff., 793 ff.

(S. 39), gibt eine solche widersprechende Gleichung nicht. Selbst wenn die R (S. 43) ein Potential haben sollten, findet man[1])

104)
$$\begin{cases} X = -\mu\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + \dfrac{g_x}{C^2 - g^2}\dfrac{d\Phi}{d\tau}\right), \\ Y = -\mu\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} + \dfrac{g_y}{C^2 - g^2}\dfrac{d\Phi}{d\tau}\right), \\ Z = -\mu\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial z} + \dfrac{g_z}{C^2 - g^2}\dfrac{d\Phi}{d\tau}\right), \\ iCT = -\mu\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial (iCt)} + \dfrac{iC}{C^2 - g^2}\dfrac{d\Phi}{d\tau}\right). \end{cases}$$

Und diese Gleichungen erfüllen Minkowskis Energiesatz gerade wenn C absolut konstant ist. μ giebt die Masse des betreffenden Körpers für Raumeinheit. Die Anwendung dieser Gleichungen liegt außerhalb der Aufgaben dieser Schrift. Will man die Anwendung auf den Raum beschränken, jedoch der Theorie Rechnung tragen, so sind die Gleichungen für x, y, z noch mit $d\tau/dt = \sqrt{1 - \frac{g^2}{C^2}}$ zu multiplizieren.

Eine andere Berechnung hat Max Abraham auf Grund seines zweiten Ansatzes für die Spannungskräfte 92), S. 40 ausgeführt. Er setzt voraus, daß ω nur von C abhängen soll, also so weit variiert, als diese Größe veränderlich ist. Alsdann gibt eine einfache Rechnung für die Kräfte, bezogen auf Volumeinheit des substantiellen Punktes:

105) $$X = -\frac{1}{\alpha}\Box\omega\frac{\partial\omega}{\partial x}, \quad Y = -\frac{1}{\alpha}\Box\omega\frac{\partial\omega}{\partial y}, \quad Z = -\frac{1}{\alpha}\Box\omega\frac{\partial\omega}{\partial z},$$

wo

106) $$\Box\omega = \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} - \frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)$$

ist. Die Größe $\frac{1}{\alpha}\Box\omega$ vertritt die Dichte der betreffenden Materie an dem Orte, wo die Kraft wirken soll. Wo Materie nicht vorhanden ist, wird deshalb

107) $$\Box\omega = 0$$

---

[1]) Ph. d. b. M., S. 375.

gesetzt. Für den mit Materie erfüllten Raum ist $\square w$ von Null verschieden, und zwar soll

108) $$\square \omega = \frac{2\alpha}{\omega}\eta$$

sein, wo η die Dichte des Energieinhalts der Materie bedeutet. Die Leistung E der Kräfte ist dann [Gleichung 91), S. 40]:

109) $$E = \frac{2\eta}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial t}.$$

Nun wird

110) $$\omega = \sqrt{C}$$

angesetzt. Dadurch erhält man:

111) $$\square \omega = -\frac{1}{4}\frac{1}{C\sqrt{C}}\left[\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial z}\right)^2 - \frac{3}{C^2}\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{C}}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}\right).$$

112) $$X = -\frac{\eta}{C}\frac{\partial C}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\eta}{C}\frac{\partial C}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\eta}{C}\frac{\partial C}{\partial z},$$

und wenn man H den Gesamtenergieinhalt des substantiellen Punktes nennt, für diesen ganzen Punkt als Kraftkomponenten

113_1) $$\mathfrak{K}_x = \sum X = -\frac{H}{C}\frac{\partial C}{\partial x}, \quad \mathfrak{K}_y = \sum Y = -\frac{H}{C}\frac{\partial C}{\partial y},$$
$$\mathfrak{K}_z = \sum Z = -\frac{H}{C}\frac{\partial C}{\partial z}.$$

Max Abraham setzt nun:

114) $$H = MC, \quad M = \frac{H}{C},$$

worin M eine Konstante und unabhängig sein soll von C. Hiernach wäre die Kraft:

$$\mathfrak{K} = -\,grad\, H = -\,M\, grad\, C,$$

d. h.:

113_2) $$\mathfrak{K}_x = -M\frac{\partial C}{\partial x}, \quad \mathfrak{K}_y = -M\frac{\partial C}{\partial y}, \quad \mathfrak{K}_z = -M\frac{\partial C}{\partial z},$$

oder:

113_3) $$\mathfrak{K}_x = -2M\omega\frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \mathfrak{K}_y = -2M\omega\frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \mathfrak{K}_z = -2M\omega\frac{\partial \omega}{\partial z}.$$

C entspricht so einem Potential. Die Größe M ist dem obigen zufolge so bestimmt, daß die Schwere eines Systems proportional ist seinem Energieinhalt, und M ist der Proportionalitätsfaktor. Die träge Masse selbst wird für den Ruhezustand (wegen der Ableitung ist auf die Abhandlung zu verweisen):

115) $$m = \zeta \frac{M}{C} = \zeta \frac{H}{C^2}$$

gesetzt, wo ζ eine Zahl bedeutet, die in der früheren Relativitätstheorie 1 sein sollte. Die obigen Gleichungen für die Schwerkraft sollen für ein ruhendes wie für ein bewegtes Feld gelten. Daß seine Ansätze mit der Relativitätslehre nicht zusammenstimmen, hat Max Abraham selbst hervorgehoben, und die Vergleichung mit den Formeln der Einsteinschen Theorien lehrt dieses auch unmittelbar.

In diesen Theorien ist dem Gravitationsfeld ein Strahlenfeld äquivalent an die Seite gesetzt, so daß die Verbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes oder eine Funktion von ihr so variiert, wie das Potential der Gravitation in dem Felde. Hiernach verhält sich das Feld wie ein an verschiedenen Stellen verschieden brechender Stoff, in dem also auch die Strahlen gekrümmte Wege einschlagen. Was zunächst bildlich scheinen könnte, ist als ein dem ruhenden Beobachter wirklich Erscheinendes aufgefaßt worden: die Lichtstrahlen sollen im Gravitationsfelde z. B. der Sonne krumme Bahnen einschlagen wie etwa in der Atmosphäre. In seiner ersten Theorie berechnet Einstein die Ablenkung α eines Lichtstrahles auf einer Wegstrecke s_2 bis s_1 nach der Formel:

$$\alpha = -\int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial n} ds,$$

wo n die Normale an s bedeutet und die Ablenkung positiv sein soll, wenn sie nach Richtung der wachsenden n erfolgt. In dieser ersten Theorie hatte er nun als die dem Gravitationspotential Φ äquivalente Größe bis auf eine Konstante $\frac{1}{2} C^2$ gefunden, also war:

$$\alpha = -\int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{C^2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds,$$

und indem er Φ gleich dem gewöhnlich angenommenen Wert setzte, erhielt er z. B. für das Gravitationsfeld der Sonne:

$$\alpha = +\int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{C^2} \frac{\varkappa M}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} ds,$$

wo $\varkappa$ die Gravitationskonstante, M die Sonnenmasse bedeutet. Für einen Strahl, der an der Sonnenoberfläche vorbeigeht, ist hiernach:

$$\alpha = \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{1}{C^2} \frac{\varkappa M}{r^2} \cos\vartheta \, ds,$$

wo ϑ den Winkel bedeutet, den r bildet mit einem zum Strahl senkrechten Sonnenradius. Und da man mit hinlänglicher Annäherung $ds = r\,d\vartheta$ und $r =$ dem Sonnenradius R und C konstant setzen darf, wäre die Ablenkung vom Herantreten des Strahles zur Sonne bis zum Abgehen von ihr:

$$\alpha = \frac{1}{C^2} \frac{\varkappa M}{R} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \, d\vartheta = \frac{2\varkappa M}{C^2 R}.$$

Mit den bekannten Werten für die einzelnen rechtsstehenden Größen findet Einstein $\alpha = 0{,}83$ Bogensekunden, um welche ein unmittelbar an der Sonne stehender Fixstern von ihr fortgelenkt erscheinen würde.

Max Abraham hat zwar ebenfalls ein Strahlenfeld äquivalent dem Gravitationspotentialfeld, allein es gilt für dieses Potential eine andere Beziehung, als die übliche Theorie voraussetzt, nämlich die Beziehung unter 108), die z. B. für statische Verhältnisse gibt:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = \frac{2\alpha\eta}{\omega}.$$

Im freien Raume gilt das gewöhnliche Potential. Schreiben wir es $A + B/r$, so folgt nach 113_3) für die Gravitationskraft, daß das Newtonsche Gravitationsgesetz die Form haben sollte:

$$K = \frac{A'}{r^2} - \frac{B'}{r^3},$$

wo $B'/A' = 10^{-8}$ betrüge, so daß das zweite Glied zu klein wäre, um die Planetenbewegung merklich zu beeinflussen. Für C hätten wir:

$$\sqrt{C} = A + \frac{B}{r} = \sqrt{C_\infty} + \frac{B}{r},$$

wodurch die Variabilität von C bestimmt ist.

Einstein[1]) aber hat seine Gravitationslehre sehr erheblich erweitert. Die Erweiterung kommt darauf hinaus, statt des Ausdruckes unter 100), S. 50, für ds in den Formeln 99) auf S. 49 den allgemeineren zu setzen:

116) $$ds = \sqrt{\sum_{ik} \sigma_{ik}\, dx_i\, dx_k}; \qquad i, k = 1, 2, 3, 4;$$
$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = t,$$

wo die σ Funktionen sollen sein können der x, und

117) $$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$$

ist. Hiernach wäre

118) $$H = -m \sqrt{\sum_{ik} \sigma_{ik}\, \dot{x}_i \dot{x}_k},$$

und es ist mit denselben Bedingungen:

119) $$\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_l} = G_i = -m \sum_k \sigma_{lk} \frac{dx_k}{ds},$$

120) $$\frac{\partial H}{\partial x_l} = \mathfrak{K}_i = -\frac{1}{2} m \sum_{ik} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_l} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{dt},$$

121) $$E = -\sum_k \dot{x}_k \frac{\partial H}{\partial \dot{x}_k} + H = -m \sum_k \sigma_{4k} \frac{dx_k}{ds}.$$

Die erste Gleichung gibt die Impulse, die zweite die Kräfte, die dritte die Energie. Einstein dehnt diese Gleichungen auf Aggregate unzusammenhängender Substanzpunkte m aus und rechnet hiernach auf Volumeneinheit um, dividiert also durch das Volumen V im Bewegungsgebiet. Für das Verhältnis dieses Volumens mit dem Ruhvolumen (in Minkowskis Theorie: dem Volumen im Raumquerschnitt senkrecht zur Weltlinie) V_0 leitet er die Beziehung ab:

122) $$V = V_0 \frac{ds}{dt} \frac{1}{\sqrt{-D}}, \qquad D = |\sigma_{ik}|,$$

die eine Verallgemeinerung der in der gewöhnlichen Relativitätslehre und auch in der Minkowskischen Lehre geltenden darstellt. Indem er noch $m/V_0 = \varrho_0$ setzt, erhält er so:

---

[1]) Siehe die S. 49 genannte Abhandlung.

$$\left.\begin{aligned}
&123)\quad \frac{1}{V} G_l = - \varrho_0 \sqrt{-D} \sum_k \sigma_{lk} \frac{d x_k}{d s}\frac{d x_4}{d s}\\
&124)\quad \frac{1}{V} \mathfrak{K}_l = -\frac{1}{2} \varrho_0 \sqrt{-D} \sum_{ik} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_l}\frac{d x_i}{d s}\frac{d x_k}{d s}\\
&\qquad\qquad = -\frac{1}{2}\sum_{ik} \sqrt{-D}\, \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_l}\, \Theta_{ik}\\
&125)\quad \frac{1}{V} E = - \varrho_0 \sqrt{-D} \sum_k \sigma_{4k} \frac{d x_k}{d s}\frac{d x_4}{d s}
\end{aligned}\right\};\quad \begin{aligned} i, k &= 1, 2, 3, 4;\\ l &= 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Die Größe:

$$126)\qquad \Theta_{ik} = \varrho_0 \frac{d x_i}{d s}\frac{d x_k}{d s}$$

wird von ihm kontravarianter Spannungs-Energietensor der materiellen Strömung genannt. Marcel Grossmann, dem der rein mathematische Teil zu Einsteins S. 49 an dritter Stelle genannten Abhandlung zu verdanken ist, hat bewiesen, daß die Divergenz dieses Tensors die Form hat:

$$127)\qquad (div\, \Theta_{ik})_i = \sum_k \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{\partial}{\partial x_k}(\sqrt{D}\, \Theta_{ik}) + \sum_{kl} \begin{Bmatrix} k\, l \\ i \end{Bmatrix} \Theta_{kl},$$

woselbst

$$\begin{Bmatrix} k\, l \\ i \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\sum_m \gamma_{im}\left(\frac{\partial \sigma_{km}}{\partial x_l} + \frac{\partial \sigma_{lm}}{\partial x_k} - \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_m}\right)$$

ist und γ_{im} die zu σ_{im} adjungierte Unterdeterminante der Determinante D angibt, dividiert durch D. Diese Divergenz ist ein kontravarianter Vektor. Bildet man dazu den reziproken kovarianten Vektor $R_l = \sum_k \sigma_{lk}\, (div\, \Theta_{lk})_k$, in welchem die σ Stufengrößen (Skalare) sind, so findet sich nach einiger Zwischenrechnung:

$$128)\qquad R_l = \sum_{ik} \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{D}\, \sigma_{li}\, \Theta_{ik}\right) - \frac{1}{2}\sum_{ik} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_l}\, \Theta_{ik}.$$

Diesen Vektor setzt Einstein gleich Null und bekommt so:

$$129)\qquad \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{-D}\; \sigma_{li}\, \Theta_{ik}\right) - \frac{1}{2}\sum_{ik} \sqrt{-D}\, \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_l}\, \Theta_{ik} = 0.$$

Die Gleichung stellt vier Gleichungen dar. Die drei ersten Gleichungen ($l = 1, 2, 3$) sollen die Impulsgleichungen abgeben, die letzte Gleichung ($l = 4$) soll der Energiesatz sein. Doch heißt es: „Man vermutet aus dem Vorhergehenden, daß der Impuls-

Energiesatz die Form haben wird ..." Zufolge der Gleichung 124) ist hiernach weiter auch:

$$130)\quad -\frac{1}{V}\mathfrak{K}_l = \sum_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}(\sqrt{-D}\,\sigma_{li}\,\Theta_{ik}) = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\sum_i (\sqrt{-D}\,\sigma_{li}\,\Theta_{ik}).$$

Die Größe rechts setzt sich additiv aus einzelnen Differentialquotienten zusammen. Nun besteht zwar auch der unmittelbare Ausdruck 124), S. 56, für die Kräfte aus Gliedern, die Differentialquotienten enthalten, diese sind aber mit den variablen Faktoren $\sqrt{-D}\,\Theta$ multipliziert. Einstein bemerkt aber, daß z. B. in der Elektrostatik die Kräfte in der Form ausgedrückt werden können:

$$A_i' = -\frac{1}{4\pi}\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\frac{\partial \Psi}{\partial x_k}\right) + \frac{1}{8\pi}\sum_k \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_k}\right)^2,$$

wie sich auch aus den Maxwellschen Gleichungen 12), 13), S. 10, sofort ergibt. Hiernach stellt er die Forderung auf, daß in der Gleichung 124), S. 56, für die Kräfte $\mathfrak{K}$ die Größen $\sqrt{-D}\,\Theta$ so bestimmt werden sollen, daß diese Gleichung die obige Form für die A_i' annimmt. Die Beziehung 129) oder 130) enthält dann in beiden Gliedern nur Differentialquotienten, die additiv mit konstanten Faktoren aneinandergereiht sind. Der Tensor Θ ist dabei, weil die σ Skalare bedeuten, so daß auch $\sqrt{-D}$ einen Skalar ergibt, ein solcher gewöhnlicher Art, d. h. er verhält sich gegen lineare Substitutionen wie Produkte und Quadrate von Vektoren, obwohl er von der Art einer Dichte ist. Die Frage, ob im Gravitationsfeld der Tensor Θ nicht höherer Art sein kann, will Einstein offen lassen. Es zeigt sich nun, daß in der Tat eine Formel vorhanden ist, die eine Größe, welche dem zweiten Gliede der Gleichung 129) entspricht, in lauter Differentialquotienten mit konstanten Faktoren auflöst. Diese Identität ist[1]):

$$131)\quad \sum_{\alpha\beta\tau\varrho}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-D}\,\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta}\frac{\partial \sigma_{\tau\varrho}}{\partial x_l}\right) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\tau\varrho}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sqrt{-D}\,\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta}\frac{\partial \sigma_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha}\right)$$
$$= \sum_{ik}\sqrt{-D}\,\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_l}\left\{\sum_{\alpha\beta}\frac{1}{\sqrt{-D}}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\gamma_{\alpha\beta}\sqrt{-D}\,\frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_\beta}\right)\right.$$
$$\left. - \sum_{\alpha\beta\tau\varrho}\left[\gamma_{\alpha\beta}\,\sigma_{\tau\varrho}\frac{\partial \gamma_{i\tau}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \gamma_{k\varrho}}{\partial x_\beta} - \left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha i}\gamma_{\beta k} - \frac{1}{4}\gamma_{ik}\gamma_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial \sigma_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta}\right]\right\}.$$

[1]) Der Beweis findet sich in dem mathematischen Teile von Grossmann und ist auch sonst leicht zu führen.

γ hat die früher angegebene Bedeutung. Hieraus folgt, daß die in $\{\}$ stehende Größe bis auf einen konstanten Faktor λ für Θ_{ik} zu setzen sein würde. Das zweite Glied der Gleichung 129) geht dann in die links vom Gleichheitszeichen geschriebene Größe über, die aber nur aus Differentialquotienten mit konstanten Faktoren besteht. Und da alles nunmehr durch die γ und σ bestimmt ist, so wäre auch das Gravitationsfeld bestimmt.

Einstein führt noch folgende Größen ein:

132) $$-\lambda\,\vartheta_{ik} = \sum_{\alpha\beta\tau\varrho}\left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha i}\,\gamma_{\beta k} - \frac{1}{4}\gamma_{ik}\,\gamma_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial\sigma_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha}\,\frac{\partial\gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta},$$

133) $$\varDelta_{ik}(\gamma) = \sum_{\alpha\beta}\frac{1}{\sqrt{-D}}\,\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\gamma_{\alpha\beta}\sqrt{-D}\,\frac{\partial\gamma_{ik}}{\partial x_\beta}\right) - \sum_{\alpha\beta\tau\varrho}\gamma_{\alpha\beta}\,\sigma_{\tau\varrho}\,\frac{\partial\gamma_{i\tau}}{\partial x_\alpha}\,\frac{\partial\gamma_{k\varrho}}{\partial x_\beta}$$

und hat hiernach:

134) $$\lambda\,\Theta_{ik} = \varDelta_{ik}(\gamma) - \lambda\,\vartheta_{ik}.$$

ϑ wird als kontravariante Spannungs-Energietension des Gravitationsfeldes bezeichnet, während Θ der Tensor war der materiellen Strömung; jener also bezieht sich auf das statische Gravitationsfeld, dieser auf die beschleunigte Substanzbewegung in gravitationsfreiem Felde. Und die Gleichung zeigt, „daß der Tensor ϑ des Gravitationsfeldes in gleicher Weise felderregend auftritt wie der Tensor Θ der materiellen Vorgänge“, und damit ist eine Forderung erfüllt, die nach Einstein „an eine Relativitätstheorie der Gravitation notwendig gestellt werden muß“. Diese Relativitätstheorie löst eben alles in rein Erscheinendes auf, ohne für sie eine Ursache zu statuieren.

Da man nach 134) hat:

135) $$\varDelta_{ik}(\gamma) = \lambda\,(\Theta_{ik} + \vartheta_{ik}),$$

so geht die Identität 131) über in:

136) $$\sum_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{-D}\,\sigma_{li}\,\vartheta_{ik}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{ik}\sqrt{-D}\,\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_l}\,\Theta_{ik}.$$

Dieses zusammen mit der Impuls-Energiegleichung 129) gibt:

137) $$\sum_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\sqrt{-D}\,\sigma_{li}\,(\Theta_{ik} + \vartheta_{ik})\right] = 0;\quad i, k, l = 1, 2, 3, 4.$$

„Hieraus sieht man, daß für Materie und Gravitationsfeld zusammen die Erhaltungssätze gelten.“

Einstein gibt noch eine andere Form für seine Gleichungen an. Setzt man:

138) $$\Theta'_{ik} = \sum_{\alpha\beta} \sigma_{i\alpha}\, \sigma_{k\beta}\, \Theta_{\alpha\beta},$$

so geht zunächst die Formel 129) über in die entsprechend gebaute:

139) $$\sum_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{-D}\, \gamma_{ik}\, \Theta'_{il}\right) + \frac{1}{2} \sum_{ik} \sqrt{-D}\, \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_l}\, \Theta'_{ik} = 0,$$

und indem man entsprechend den Formeln 132) und 133) als Abkürzungen einführt:

140) $$-\lambda'\, \vartheta'_{ik} = \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \left(\frac{1}{2}\, \frac{\partial \sigma_{\tau\varrho}}{\partial x_i}\, \frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_k} - \frac{1}{4}\, \sigma_{ik}\, \gamma_{\alpha\beta}\, \frac{\partial \sigma_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha}\, \frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta}\right),$$

141) $$\varDelta'_{ik}(\sigma) = \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{-D}}\, \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-D}\, \gamma_{\alpha\beta}\, \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_\beta}\right) - \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \gamma_{\alpha\beta}\, \gamma_{\tau\varrho}\, \frac{\partial \sigma_{i\tau}}{\partial x_\alpha}\, \frac{\partial \sigma_{k\varrho}}{\partial x_\beta},$$

erhält man als Gegenstück zu 134)

142) $$\lambda'\, \Theta'_{ik} = -\varDelta'_{ik}(\sigma) - \lambda'\, \vartheta'_{ik},$$

ferner zu 135)

143) $$-\varDelta'_{ik}(\sigma) = \lambda'\left(\Theta'_{ik} + \vartheta'_{ik}\right)$$

und zu 137)

144) $$\sum_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{-D}\, \gamma_{li}\left(\Theta'_{ik} + \vartheta'_{ik}\right)\right) = 0.$$

Die Gleichungen 135) oder 143), je 16 an der Zahl, sind die Gravitationsgleichungen des Feldes und sollen der Laplace-Poissonschen Potentialgleichung entsprechen. Da aber Θ, Θ' von der Art einer Dichte sind und λ, λ' durch die Gravitationskonstante bestimmt werden, so entsprechen eigentlich die $\Gamma = \varDelta(\gamma) - \lambda\vartheta$, $\Gamma' = -\varDelta'(\sigma) - \lambda'\vartheta'$ der Laplaceschen Operation $\varDelta\Phi$, wie übrigens Einstein a. a. O. hervorhebt. Die je 16 Gleichungen bestimmen die σ, wenn die Bewegungsbahn gegeben ist.

Als so großartig diese Theorie bezeichnet werden muß, so sehr widerstrebt die Unsicherheit ihrer Grundlagen und die fast nicht mehr zu übersehende Kompliziertheit der Formeln und Ableitungen. Und dabei hat Einstein schon sehr viel zu ihrer Vereinfachung getan und manches deshalb auch an Allgemeinheit geopfert. Ihr Wert wird erst gewürdigt werden können, wenn besondere Anwendungen vorliegen. Mit der Minkowskischen Theorie läßt sie sich nicht vereinigen, nach dieser ist eine Darstellung der Kräfte durch Reihen von Differentialquotienten mit konstanten Faktoren nicht möglich, können also Gleichungen schon von der Form 131) nicht vorhanden sein. Das liegt an den Zusatzkräften, die Minkowski im Sinne seiner Theorie hat einführen müssen, und die für diese Theorie so kennzeichnend sind.

Es ist auch noch nicht alles ganz klar in dieser Einsteinschen Theorie. So sollen sämtliche σ Stufengrößen, Skalare, sein, also auch die σ_{i4} und die ihnen gleichen σ_{4i}. Einstein sagt ausdrücklich, daß x_4 in Länge gemessen werden soll. Aber wie? da nach ihm x_4 lediglich für t steht. Bei Minkowski ist $x_4 = i\,Ct$, wie in der älteren Relativitätslehre. Soll das doch auch hier der Fall sein? Nehmen wir als Beispiel die ältere Relativitätstheorie. Für diese ist $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -1$, σ_{44} lassen wir noch so stehen, die anderen σ sind Null. Dementsprechend haben wir $\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = -1$, $\gamma_{44} = +\frac{1}{\sigma_{44}}$, und die anderen γ geben Null. Hiernach wäre nach 132), S. 58

$$-\lambda\,\vartheta_{ik} = \sum_{\alpha\beta}\left(\tfrac{1}{2}\gamma_{\alpha i}\gamma_{\beta k} - \tfrac{1}{4}\gamma_{ik}\gamma_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial\sigma_{44}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{44}}{\partial x_\beta}$$
$$= -\frac{1}{\sigma_{44}^2}\sum_{\alpha\beta}\left(\tfrac{1}{2}\gamma_{\alpha i}\gamma_{\beta k} - \tfrac{1}{4}\gamma_{ik}\gamma_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial\sigma_{44}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\sigma_{44}}{\partial x_\beta}.$$

Sodann nach 133), S. 58

$$\varDelta_{ik}(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{44}}}\sum_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\gamma_{\alpha\alpha}\sqrt{\sigma_{44}}\,\frac{\partial\gamma_{ik}}{\partial x_\alpha}\right) - \sum_{\alpha\tau}\gamma_{\alpha\alpha}\,\sigma_{\tau\tau}\frac{\partial\gamma_{i\tau}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{k\tau}}{\partial x_\alpha};$$

d. h.

$$\varDelta_{ii}(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{44}}}\sum_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\gamma_{\alpha\alpha}\sqrt{\sigma_{44}}\,\frac{\partial\gamma_{ii}}{\partial x_\alpha}\right) - \sum_\alpha\gamma_{\alpha\alpha}\,\sigma_{ii}\left(\frac{\partial\gamma_{ii}}{\partial x_\alpha}\right)^2,$$

$$\varDelta_{ik}(\gamma) = 0,\quad i \gtrless k.$$

Überhaupt bleibt nur

$$\varDelta_{44}(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{44}}}\sum_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\gamma_{\alpha\alpha}\sqrt{\sigma_{44}}\,\frac{\partial\gamma_{44}}{\partial x_\alpha}\right) - \sum_\alpha\gamma_{\alpha\alpha}\,\sigma_{44}\left(\frac{\partial\gamma_{44}}{\partial x_\alpha}\right)^2$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{\sigma_{44}}}\sum_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\gamma_{\alpha\alpha}\,\sigma_{44}^{-3/2}\frac{\partial\sigma_{44}}{\partial x_\alpha}\right) - \sum_\alpha\gamma_{\alpha\alpha}\,\sigma_{44}^{-3}\left(\frac{\partial\sigma_{44}}{\partial x_\alpha}\right)^2,$$

alle anderen $\varDelta(\gamma)$ sind Null.

Fassen wir σ_{44} als skalar auf, so kann hier (in der gewöhnlichen Relativitätslehre) kein anderer Wert stattfinden als 1. Dann wären aber alle ϑ und $\varDelta$ gleich Null, und es müßten auch die $\varTheta$ Null sein, was unzulässig ist. Also darf hier σ_{44} nicht 1 sein und x_4 stände in der Tat für t. Ist dieses aber der Fall, so kann σ_{44} keine Stufengröße bedeuten. Und wenn man die erweiterte Theorie Einsteins von der Annahme, daß C eine Variable ist, freimachen will, so müssen die σ_{i4}, σ_{4i} entweder überhaupt von C frei sein, wodurch die Bedeutung dieser Größe für die Relativitätslehre verloren ginge, oder sie müssen für $i \neq 4$ außer C, für $i = 4$ außer C^2, noch einen Faktor enthalten, der skalare Eigenschaften besäße, und die Variabilität bezöge sich auf diesen Faktor. Ein Rückgang auf die gewöhnliche Relativitätstheorie wäre dann freilich ausgeschlossen. Ich weiß nicht, ob der Erfinder dieser Entwickelungen sich die Verhältnisse so gedacht hat.

Minkowski stellt für die Gravitationskraft Ausdrücke auf, welche die Form haben, die man ihr in der gewöhnlichen Mechanik zuschreibt, mit Ausnahme der Kraft für die vierte, die Zeitdimension. Im Raum haben wir nach ihm, wenn die Anziehung vom Koordinatenursprung ausgeht und τ die Eigenzeit bedeutet, wie in der gewöhnlichen Mechanik

$$145)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} &= -\frac{mx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} &= -\frac{my}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \\ \frac{d^2z}{d\tau^2} &= -\frac{mz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Für die Zeitdimension gibt er als Gleichung

$$146)\qquad \frac{d^2t}{d\tau^2} = -\frac{m}{x^2+y^2+z^2}\,\frac{d\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{dt}.$$

Die Grundgleichungen seiner Theorie sind durch diese Ansätze erfüllt. Man kann diese Gleichungen schreiben

$$147)\qquad \frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{\partial\frac{m}{r}}{\partial x},\quad \frac{d^2y}{d\tau^2} = \frac{\partial\frac{m}{r}}{\partial y},\quad \frac{d^2z}{d\tau^2} = \frac{\partial\frac{m}{r}}{\partial z},\quad \frac{d^2t}{d\tau^2} = \frac{d\frac{m}{r}}{dt};$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

so daß die Gravitation im Raumzeitgebiet das gleiche Potential besäße wie im Raumgebiet [1]).

Wisniewski [2]) hat die obigen Minkowskischen Ansätze für die Kräfte im Raum noch mit dem Faktor $dt/d\tau$ multipliziert. Das liegt nicht im Sinne der Minkowskischen Theorie [3]).

13. Die Induktionskräfte in der Relativitätslehre.

Nirgend spricht sich die Neigung der Relativitätslehre, als vorhanden Angenommenes durch Erscheinendes zu ersetzen, so scharf aus wie bei den Induktionskräften. Die alten, klassischen, Theorien faßten diese Kräfte als real eintretend auf, sobald in einem elektromagnetischen Felde irgend welche Veränderungen vorfallen, z. B. Bewegungen. Demgegenüber sieht die Relativitätstheorie von der Realität dieser Kräfte ab; die Kräfte des Feldes gleichen an sich trotz der Bewegung völlig den Kräften in der Ruhe, wenn nur der Beobachter die räumlichen und zeitlichen Abmessungen so vornimmt, wie sie für den Ablauf der Erscheinungen nun entscheidend sind. Diese Abmessungen sind aber nicht diejenigen, die ein ruhender Beobachter von seinem Ruhezustande aus zugrunde legt, sondern mit ihnen durch die Relativitätstransformation (die Lorentz-Einsteinsche oder die Minkowskische oder die jetzige Einsteinsche) verbunden. Urteilt ein ruhender Beobachter nach Abmessungen, die seinem Ruhezustand entsprechen, so erhält er nicht die Kräfte, die im Ruhezustand des Feldes herrschen, sondern veränderte Kräfte, deren Abweichung von jenen Kräften er als Induktionskräfte auffaßt. Es seien die Raumabmessungen und die Zeitabmessung, nach denen die elektromagnetischen Vorgänge sich abspielen, wenn Bewegung besteht, ξ', η', ζ'; τ' und die entsprechenden Abmessungen für den ruhenden Beobachter, genommen wie in einer ruhenden Umgebung, x, y, z; t,

---

[1]) Ich habe aber Minkowskis Argumentation für diese Gleichungen nicht folgen können und weiß auch nicht, wie ich sie mit seiner vollständigen Theorie vereinigen soll, da in dieser Theorie es einen festen Punkt im Raumzeitgebiet überhaupt nicht gibt, so daß es nicht einmal möglich ist, die Gleichungen auf einen Beobachter zu beschränken, der die Bewegung des angezogenen Punktes von dem im Raum als fest angenommenen Anziehungspunkt verfolgt.

[2]) Ann. d. Phys. **40**, 387 u. 668 (1913).

[3]) Weinstein, Ann. d. Phys. **43**, 929 (1914).

so ist z. B. nach der Lorentz-Einsteinschen Transformation für jede gleichförmige in Richtung der x-Achse erfolgende Bewegung von der Geschwindigkeit p:

$$148)\quad \left\{\begin{array}{l|l} \xi' = \beta(x - pt), & x = \beta(\xi' + p\tau'), \\ \eta' = y, & y = \eta', \\ \zeta' = z; & z = \zeta'; \\ \tau' = \beta\left(t - \frac{p}{C^2}x\right). & t = \beta\left(\tau' + \frac{p}{C^2}\xi'\right). \end{array}\right.$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{C^2}}}.$$

Und die Relativitätslehre ergibt, daß, wenn man mit ξ', η', ζ'; τ' die elektrischen und magnetischen Kräfte $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{H}'$ des Feldes so berechnet, als wenn Ruhe herrschte, d. h. nach den bekannten Maxwellschen Gleichungen für diesen Fall, etwa noch unter der Annahme des Leitungsstromes als Elektronenstrom im Sinne der H. A. Lorentzschen Theorie, daß alsdann der ruhende Beobachter mit seiner Beurteilung der Abmessungen als x, y, z; t nicht diese Kräfte $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{H}'$ erhält, sondern Kräfte $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, die sich aus jenen bestimmen durch

$$149)\quad \mathfrak{E} = \left(\mathfrak{E}' - \left[\frac{p}{C}\mathfrak{H}'\right]\right)\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{C^2}}}, \quad \mathfrak{H} = \left(\mathfrak{H}' + \left[\frac{p}{C}\mathfrak{E}'\right]\right)\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{C^2}}}.$$

Abgesehen vom Faktor $1\Big/\sqrt{1 - \frac{p^2}{C^2}}$, der der Lorentz-Einsteinschen Lehre an sich eigen ist, stellen die Größen $-\left[\frac{p}{C}\mathfrak{H}'\right]$, $+\left[\frac{p}{C}\mathfrak{E}'\right]$ die Induktionskräfte dar. Sie wären also keine durch die Bewegung an sich neu auftretenden Kräfte, sondern für einen Beobachter, der in einem Raumzeitgebiet ξ', η', ζ'; τ' lebte, überhaupt nicht vorhanden, und sie bestehen nur für einen Beobachter, der alles von seinem Raumzeitgebiet aus beurteilt, als Transformation der Erscheinung aus jenem Raumzeitgebiet ξ', η', ζ'; τ' auf dieses sein Raumzeitgebiet. Man berechnet hiernach mit ξ', η', ζ'; τ' als Koordinaten und Zeit die Kräfte so, als wenn Ruhe herrschte, bestimmt darauf das Feld an allen durch ξ', η', ζ'; τ' fixierten Stellen und transformiert nun mit den Lorentz-Einsteinschen Beziehungen zwischen ξ', η', ζ'; τ' und x, y, z; t, so erhält man das Feld des ruhenden Beobachters, und dieser findet nun die Kräfte wie oben angegeben und faßt den durch die Transformation neu hinzukommenden Teil als neue, induzierte, Kraft auf.

Welchen außerordentlichen Schwierigkeiten diese Auffassung nicht allein der Anschauung, daran kann man sich ja schließlich gewöhnen, sondern auch der objektiven Darstellung begegnet, und wie viele Nebenhypothesen sie einschließt, habe ich an anderen Stellen auseinandergesetzt. Diese Schwierigkeiten sind selbst in der Minkowskischen, konsequentesten, Theorie vorhanden. Sie sind überhaupt nicht zu vermeiden, weil eine mathematische Transformationslehre eine physikalische Vorgangslehre nun einmal nicht ersetzen kann.

Bisher erschienene Hefte
der
Sammlung Vieweg

Heft 1. Dr. Robert Pohl und Dr. P. Pringsheim-Berlin: *Die lichtelektrischen Erscheinungen.* Mit 36 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 2. Dr. C. Freiherr von Girsewald-Berlin-Halensee: *Peroxyde und Persalze.* M. 2,40.

Heft 3. Diplomingenieur Paul Béjeuhr-Charlottenburg: *Der Blériot-Flugapparat und seine Benutzung durch Pégoud vom Standpunkte des Ingenieurs.* Mit 26 Abbildungen. M. 2,—.

Heft 4. Dr. Stanislaw Loria-Krakau: *Die Lichtbrechung in Gasen als physikalisches und chemisches Problem.* Mit 3 Abbildungen und 1 Tafel. M. 3,—.

Heft 5. Professor Dr. A. Gockel-Freiburg i. d. Schweiz: *Die Radioaktivität von Boden und Quellen.* Mit 10 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 6. Ingenieur D. Sidersky-Paris: *Brennereifragen: Kontinuierliche Gärung der Rübensäfte. — Kontinuierliche Destillation und Rektifikation.* Mit 24 Abbildungen. M. 1,60.

Heft 7. Hofrat Professor Dr. Ed. Donath und Dr. A. Gröger-Brünn: *Die flüssigen Brennstoffe, ihre Bedeutung und Beschaffung.* Mit 1 Abbildung. M. 2,—.

Heft 8. Geh. Reg.-Rat, Professor Dr. Max B. Weinstein-Berlin: *Kräfte und Spannungen. Das Gravitations- und Strahlenfeld.* M. 2,—.

Heft 9/10. Geh. Reg.-Rat, Professor Dr. O. Lummer-Breslau: *Verflüssigung der Kohle und Herstellung der Sonnentemperatur.* Mit 50 Abbildungen. M. 5,—.

Heft 11. Dr. E. Przybyllok: *Polhöhen-Schwankungen.* Mit 8 Abbildungen. M. 1,60.

Heft 12. Professor Dr. Albert Oppel-Halle a. S.: *Gewebekulturen.* Mit 32 Abbildungen. M. 3,—.