

**Zur Berechnung
des beiderseits eingemauerten Trägers
unter besonderer Berücksichtigung
der Längskraft**

Von

Fukuhei Takabeya

Japanischer a. o. Professor und Dr.-Ing.
an der Kaiserl. Kyushu-Universität, Japan

Mit 28 Textabbildungen
und 2 Formeltafeln



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH
1924



**Zur Berechnung
des beiderseits eingemauerten Trägers
unter besonderer Berücksichtigung
der Längskraft**

Von

Fukuhei Takabeya

japanischer a. o. Professor und Dr.-Ing.
an der Kaiserl. Kyushu-Universität, Japan

Mit 28 Textabbildungen
und 2 Formeltafeln



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1924

**Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.**

**Copyright 1924 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg
Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1924**

Additional material to this book can be downloaded from <http://extras.springer.com>

ISBN 978-3-662-27948-9

ISBN 978-3-662-29456-7 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-29456-7

Vorwort.

Als mich die Japanische Regierung zur Vollendung meiner Studien in den Ingenieurwissenschaften, besonders auf dem Gebiete der Festigkeitslehre, nach Deutschland schickte, faßte ich den Entschluß, meine in Japan begonnene Arbeit über den beiderseits eingemauerten Balken als Resultat meines Aufenthaltes in Deutschland in Buchform erscheinen zu lassen.

Den Anlaß zu diesem Thema gab mir die Arbeit meines hochverehrten Lehrers und Landsmannes Dr. K. Hayashi, der in einem Kapitel des Trägers auf elastischer Unterlage kurz auf dieses Problem aufmerksam macht.

In den bekannten Lehrbüchern der Statik findet man meist die Untersuchung des beiderseits eingespannten Trägers, wobei stillschweigend feste Einspannung vorausgesetzt wird. Bei einer solchen Befestigungsart müssen infolge der Durchbiegung des Trägers Längskräfte entstehen; diese werden jedoch bei statischen Berechnungen gewöhnlich nicht berücksichtigt. Da aber unserer Ansicht nach in der Praxis feste Einspannungen wegen der Nachgiebigkeit des Einmauerungsmaterials kaum denkbar sind, so treten neben den Längskräften auch Drehmomente auf. Bei einer exakten Untersuchung dürfen diese Kräfte nicht außer acht gelassen werden, da sie unter Umständen einen erheblichen Wert annehmen können.

Im folgenden ist eine Lösung dieser Aufgabe mit Hilfe der Elastizitätstheorie versucht. Erschöpfend ist aber die Aufgabe nicht gelöst; vorerst ist die Untersuchung auf einen Spezialfall beschränkt, nämlich auf den, daß der Träger durch eine Einzelast in der Mitte belastet ist; nur kurz ist der Fall behandelt, daß auf dem Träger eine gleichmäßig über die Spannweite verteilte Last ruht.

Zum Schluß sei es mir gestattet, auch an dieser Stelle meinen besonderen Dank Herrn S. Senga auszusprechen, der

meine wissenschaftlichen Bestrebungen stets förderte, sowie Herrn Dr. K. Hayashi, durch dessen freundliche Winke, namentlich in den Bemerkungen zum fünften Kapitel, mir die Herausgabe dieser Arbeit bedeutend erleichtert wurde.

Habe ich mit meiner Arbeit einen kleinen Beitrag zu dem schwierigen Problem über die Einspannung geliefert und vielleicht einige meiner Fachgenossen zu weiteren Untersuchungen angeregt, so erfüllt das Büchlein vollkommen seinen Zweck.

Berlin-Friedenau, im Sommer 1923.

F. Takabeya.

Inhaltsverzeichnis.

| | Seite |
|---|------------|
| Einleitung | 1 |
| I. Entwicklung der allgemeinen Gleichungen | 3 |
| § 1. Vorbemerkungen | 3 |
| § 2. Gleichung der elastischen Linie | 4 |
| § 3. Beziehungen zwischen den äußeren Kräften P, X, M_a und den Verschiebungen α, β | 6 |
| § 4. Sonderfälle | 10 |
| § 5. Bemerkungen | 13 |
| II. Der Träger ist vollkommen eingespannt und trägt nur eine Einzellast in der Mitte | 23 |
| § 6. Aufstellung der Gleichungen | 23 |
| § 7. Ergänzungsbeispiel | 27 |
| III. Das Einmauerungsmaterial ist in gewissem Grade nachgiebig | 29 |
| § 8. Vorbemerkungen | 29 |
| § 9. Der Träger ist beiderseits mit wagerecht unverschieb- baren Gelenken versehen | 30 |
| § 10. Die Mauer ist gegen wagerechten Zug vollkommen fest, aber gegen Verdrehung in gewissem Grade nach- giebig | 34 |
| § 11. Die Mauer ist gegen Verdrehung des Trägerendes voll- kommen unnachgiebig, gestattet aber eine gewisse wagerechte Verschiebung desselben | 36 |
| § 12. Der Träger ist beiderseits gelenkartig befestigt; eines der Gelenke ist in gewissem Grade wagerecht ver- schiebbar | 38 |
| § 13. Die Mauer ist sowohl für wagerechte Verschiebung als für Verdrehung des Trägers in gewissem Grade nachgiebig | 39 |
| § 14. Zusammenfassung der Rechnungsergebnisse | 40 |
| § 15. Nachbemerkungen | 43 |
| IV. Der Träger ist gleichmäßig beschwert | 43 |
| § 16. Allgemeine Gleichungen | 43 |
| § 17. Der Träger ist vollkommen eingespannt | 45 |
| § 18. Eines der Einmauerungsenden ist wagerecht verschiebbar | 47 |
| Formelübersicht | als Anhang |

Einleitung.

Bei der statischen Untersuchung eines eingemauerten Trägers setzt man ein vollkommen unnachgiebiges Einmauerungsmaterial voraus; die elastische Linie des Trägers besitzt danach an der Einmauerungsstelle eine unveränderliche Tangente.

Die Längskraft, durch die der Träger unter Umständen beansprucht werden kann, wird dabei gewöhnlich vollständig vernachlässigt. Es ist also unter einem eingemauerten Träger etwa ein solcher von der in Abb. 1 angedeuteten Konstruktion zu verstehen, bei der eines der Trägerenden in wagerechter Richtung verschiebbar ist. Dieses Trägerende möge als „verschiebbar eingemauert“ bezeichnet werden.



Abb. 1.

In der Praxis kommt bei derartigen Trägern gewöhnlich keine wagerechte Verschiebung in Frage, man sucht sogar eine solche durch konstruktive Ausbildung zu vermeiden. Erfährt der Träger durch lotrechte Belastung eine Durchbiegung, so existiert keine Nulllinie im Träger, deren Länge nach der Formänderung unveränderlich bleibt. Der Träger wird also gleichzeitig mit dem Biegemoment auch noch durch eine Längskraft beansprucht. Sie ist, wie einige Untersuchungen¹⁾ darüber zeigen, eine Zugkraft, die in der Regel auf die Beanspruchung des Trägers eine günstige Wirkung ausübt, indem sie eine Verminderung des Feldmomentes hervorruft.

Die statische Untersuchung des Trägers unter dieser Bedingung ist also eine in der Technik ziemlich häufig vor-

¹⁾ Bleich, F.: Die Theorie der nachgiebigen Tragsysteme. Der Eisenbau. 1916, S. 185. Hayashi, K.: Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage, Berlin 1921, S. 197.

kommende Aufgabe; trotzdem scheint diese Frage bisher in der Literatur noch nicht behandelt worden zu sein. Im folgenden soll versucht werden, mit Hilfe der Elastizitätstheorie eine Lösung dieser Aufgabe zu finden; und zwar wollen wir, von der Voraussetzung gewisser Verschiebungen des Trägers an der Einmauerungsstelle ausgehend, den wirklich herrschenden Gleichgewichtszustand, unter dem die Längskraft zur Wirkung gelangt, bestimmen.

I. Entwicklung der allgemeinen Gleichungen.

§ 1. Vorbemerkungen.

Um die allgemeine Gleichung zu entwickeln, beginnen wir mit der Untersuchung eines frei aufliegenden Trägers.

Der gerade Träger AB sei an beiden Enden unterstützt (Abb. 2). Eine der Stützen, z. B. die bei A sei wagerecht verschiebbar; eine derartige wagerechte Verschiebung wird in der Festigkeitslehre gewöhnlich nicht berücksichtigt, wenigstens nicht solange es sich um einen geraden Träger handelt. Doch wollen wir hierauf hindeuten, denn es wird die wagerechte Verschiebung des Stützpunktes A wegen der elastischen Formänderung in der Folge eine wichtige Rolle spielen.

Als äußere Kräfte seien eine Einzellast P in der Mitte, eine wagerechte Kraft X am Ende A und ein Moment M_a an derselben Stelle angenommen. Der Träger nehme infolge dieser Kräfte die neue, in Abb. 2 dargestellte Gleichgewichtsform $A'B$ an; das Ende B bleibt dabei unbeweglich.

Es werde am linken Ende X nach links, M_a gegen den Sinn des Uhrzeigers positiv gerechnet. Die wagerechte Verschiebung α sowie die Verdrehung β des Trägerendes A soll in der positiven Richtung von bzw. X , M_a positiv gerechnet werden.

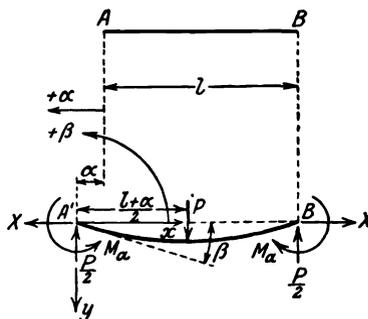


Abb. 2.

§ 2. Gleichung der elastischen Linie.

Erfährt ein Stabquerschnitt eine Biegung durch ein Moment M , und nimmt die ursprünglich gerade Stabachse eine krumme Linie mit dem Krümmungshalbmesser ϱ an, so gilt die bekannte Formel

$$\varrho = \frac{EJ}{M}.$$

Kommt eine Beanspruchung durch die Zugkraft N hinzu, so bleibt diese Grundgleichung bestehen, nur ist statt des Elastizitätsmaßes E der Wert

$$(1) \quad K = E + \sigma_z = E + \frac{N}{F}$$

einzuführen¹⁾. F bedeutet die Querschnittsfläche des Stabes. Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet daher

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M}{\left[E + \frac{N}{F} \right] J} = - \frac{M}{KJ},$$

wenn die Ordinaten y lotrecht nach unten positiv gerechnet werden. Da bei den gebräuchlichen Spannungswerten der Wert $\sigma_z = \frac{N}{F}$ gegen E zu vernachlässigen ist, so darf man an Stelle von K in der Praxis ohne weiteres E setzen. Wählt man den Punkt A' als Koordinatennullpunkt, so ist

$$(2) \quad M = \frac{P}{2}x - M_a - Xy.$$

Somit nimmt unsere Differentialgleichung die lineare Form

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{X}{KJ}y + \frac{1}{KJ} \left[\frac{P}{2}x - M_a \right] = 0$$

an. Im allgemeinen ist σ_z und somit die Größe K mit X veränderlich. Da aber im vorliegenden Fall eine geringe Durchbiegung in Frage kommt, so setzen wir die Längskraft N und daher auch σ_z über die ganze Trägerlänge als gleichbleibend

¹⁾ Tolle, M.: Die steife Kettenlinie. Z. V. d. I. 1897, S. 855—856.

voraus. Die Koeffizienten der Gleichung sind mithin konstant, und das allgemeine Integral lautet:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = C_1 e^{\frac{2\omega x}{l+\alpha}} + C_2 e^{-\frac{2\omega x}{l+\alpha}} + \frac{P}{2X} x - \frac{M_a}{X}, \\ \text{wobei} \\ \omega = \frac{l+\alpha}{2} \sqrt{\frac{X}{KJ}}. \end{array} \right.$$

Die Größe ω ist eine reelle oder imaginäre natürliche Zahl, je nachdem X positiv oder negativ ist.

Die zwei Integrationsfestwerte C_1, C_2 lassen sich folgendermaßen bestimmen: da am Ende A' , also für $x=0$ y verschwinden muß, ist

$$M_a = X[C_1 + C_2].$$

Der Symmetrie wegen muß für $x = \frac{l+\alpha}{2}$ $\frac{dy}{dx} = 0$ sein; dies liefert

$$C_1 e^{\omega} - C_2 e^{-\omega} + \frac{P(l+\alpha)}{4\omega X} = 0.$$

Aus diesen zwei Gleichungen erhält man:

$$C_1 = \frac{1}{2X \mathfrak{Cof} \omega} \left[M_a (\mathfrak{Cof} \omega - \mathfrak{Sin} \omega) - \frac{P(l+\alpha)}{4\omega} \right],$$

$$C_2 = \frac{1}{2X \mathfrak{Cof} \omega} \left[M_a (\mathfrak{Cof} \omega + \mathfrak{Sin} \omega) + \frac{P(l+\alpha)}{4\omega} \right].$$

Es folgt:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{P(l+\alpha)}{4\omega X \mathfrak{Cof} \omega} \left[\frac{2\omega x}{l+\alpha} \mathfrak{Cof} \omega - \mathfrak{Sin} \left(\frac{2x\omega}{l+\alpha} \right) \right] \\ \quad + \frac{M_a}{X \mathfrak{Cof} \omega} \left[\mathfrak{Cof} \left(\frac{2x}{l+\alpha} - 1 \right) \omega - \mathfrak{Cof} \omega \right]. \end{array} \right.$$

Die zweite Ableitung der Funktion lautet:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_a}{KJ} \frac{\mathfrak{Cof} \left(\frac{2x}{l+\alpha} - 1 \right) \omega}{\mathfrak{Cof} \omega} - \frac{P\omega}{X(l+\alpha)} \frac{\mathfrak{Sin} \left(\frac{2x\omega}{l+\alpha} \right)}{\mathfrak{Cof} \omega}.$$

In bezug auf die ursprüngliche Differentialgleichung erhält man somit

$$(5) \quad M = \frac{P(l + \alpha) \mathfrak{S}in\left(\frac{2x\omega}{l + \alpha}\right)}{4\omega \mathfrak{C}of\omega} - \frac{M_a \mathfrak{C}of\left(\frac{2x}{l + \alpha} - 1\right)\omega}{\mathfrak{C}of\omega}.$$

§ 3. Beziehungen zwischen den äußeren Kräften P, X, M_a und den Verschiebungen α, β .

Die Verschiebungen α, β rühren von der elastischen Beschaffenheit des Trägers her. Sie können also durch die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen festgestellt werden. Das Prinzip bezieht sich auf eine unendlich kleine Verrückung des Körpers. Wir setzen aber voraus, daß das Prinzip noch auf unsere Aufgabe anwendbar ist, da die Verrückungen α, β im Vergleich zu den Abmessungen des Trägers als kleine Größen aufgefaßt werden können. Es gelten dann zwischen α, β und den äußeren Kräften die bekannten Arbeitsgleichungen von der Form

$$(6)^1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\frac{l+\alpha}{2}} \left[\frac{M M_1}{K J} + \frac{N N_1}{K F} \right] dx = \alpha, \\ \int_0^{\frac{l+\alpha}{2}} \left[\frac{M M_2}{K J} + \frac{N N_2}{K F} \right] dx = \beta. \end{array} \right.$$

P, X, M_a stecken in M, N . Die virtuellen Größen M_1, N_1 und M_2, N_2 sind aus den in Abb. 3a, 3b angegebenen Belastungszuständen zu ersehen.

Wir befinden uns jetzt vor der großen Schwierigkeit, welche Trägerform wir für die virtuellen Belastungen annehmen sollen.

Bei der statischen Berechnung von statisch unbestimmten Konstruktionen, wie Rahmen, Gewölben, die man mit Hilfe der

¹⁾ Gl. (6a) s. S. 13.

Arbeitsgleichungen auszuführen pflegt, nimmt man für virtuelle Belastungen einen bestimmten Hauptträger an. Diesen denkt man sich in der Regel unabhängig von den äußeren Kräften also unabhängig von der Form der Konstruktion nach der



Abb. 3 a.

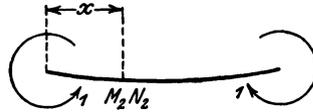


Abb. 3 b.

Deformation. Im vorliegenden Fall aber bedingt die eingetretene Durchbiegung des Trägers die Wirkung der äußeren Kraft X wesentlich oder unter Umständen gar ausschließlich. Würde man daher als Trägerform für virtuelle Belastungen entweder die ursprüngliche, gerade oder die deformierte, wenig gekrümmte annehmen, so würde man erkennen, daß die resultierenden virtuellen Größen in beiden Fällen nicht völlig übereinstimmen.

Bei der letzteren Annahme beträgt $M_1 = y$, während es bei der ersteren verschwindet.

Damit wir dennoch die angegebenen Arbeitsgleichungen in Anwendung bringen können, wollen wir uns in der Folge eine praktische Annäherung gestatten: Wir stellen uns für die virtuellen Belastungen einen von vornherein gekrümmten Träger vor, dessen Achse als mittlere der soeben erwähnten zwei Trägerformen entstanden sein möge; seine Spannweite sei $l + \alpha$, die Ordinaten seien halb so groß wie die wirklich auftretenden Durchbiegungen des in Rede stehenden Trägers (Abb. 4).

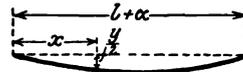


Abb. 4.

Von der Zulässigkeit unserer Annahme wenigstens für praktische Zwecke werden wir uns in § 5 überzeugen.

Es ist nun

$$(7) \quad \begin{cases} M_1 = -\frac{y}{2}, & N_1 = 1, \\ M_2 = -1, & N_2 = 0. \end{cases}$$

Da $N=X$, nimmt Gl. (6) die Gestalt

$$\begin{cases} \int_0^{\frac{l+\alpha}{2}} \left[\frac{M}{KJ} y - \frac{2X}{KF} \right] dx = -\alpha \\ \int_0^{\frac{l+\alpha}{2}} \frac{M}{KJ} dx = -\beta \end{cases}$$

an.

Führt man den Ausdruck für M aus Gl. (5) ein und wertet die Integrale aus¹⁾, so hat man

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{P^2}{16X^2 \cos^2 \omega} \left[\frac{3 \sin 2\omega}{2\omega} - 2 - \cos 2\omega \right] \\ & + \frac{PM_a}{X^2(l+\alpha) \cos \omega} \left[\cos \omega - 1 - \frac{\omega}{2} \mathfrak{I}g \omega \right] \\ & + \frac{M_a^2 \left[1 - \frac{\sin 2\omega}{2\omega} \right]}{4XKJ \cos^2 \omega} + \frac{X}{KF} - \frac{\alpha}{l+\alpha} = 0 \\ & M_a = \frac{2\omega KJ}{(l+\alpha) \mathfrak{I}g \omega} \left[\beta + \frac{P}{2X} \mathfrak{I}g \frac{\omega}{2} \mathfrak{I}g \omega \right]. \end{aligned} \right.$$

¹⁾ Wir erinnern hierbei an die Formeln:

$$\begin{aligned} \int \sin kx dx &= \frac{\cos kx}{k} + C & \int \cos k \left(x - \frac{l}{2} \right) dx &= \frac{\sin k \left(x - \frac{l}{2} \right)}{k} + C \\ \int \sin^2 kx dx &= \frac{\sin 2kx}{4k} - \frac{x}{2} + C \\ \int \cos^2 k \left(x - \frac{l}{2} \right) dx &= \frac{\sin k(2x-l)}{4k} + \frac{x}{2} + C \\ \int \sin kx \cos k \left(x - \frac{l}{2} \right) dx &= \frac{\cos k \left(2x - \frac{l}{2} \right)}{4k} + \frac{x}{2} \sin \frac{kl}{2} + C \\ \int x \sin kx dx &= \frac{x \cos kx}{k} - \frac{\sin kx}{k^2} + C \\ \int x \cos k \left(x - \frac{l}{2} \right) dx &= \frac{x \sin k \left(x - \frac{l}{2} \right)}{k} - \frac{\cos k \left(x - \frac{l}{2} \right)}{k^2} + C. \end{aligned}$$

Dies sind die Gleichungen, aus denen X, M_a bei gegebenen α, β festgestellt werden können. Setzt man den Ausdruck für M_a in die erste Gleichung ein und für X den aus Gl. (3) gewonnenen Wert

$$X = \frac{4\omega^3 KJ}{(l + \alpha)^2},$$

so folgt

$$(8a) \left\{ \begin{aligned} & \frac{2 + \mathfrak{Cof} \omega - \frac{3 \mathfrak{Sin} \omega}{\omega}}{\omega^6 \mathfrak{Cof}^2 \frac{\omega}{2}} - \frac{8\beta KJ [\mathfrak{Sin} \omega - \omega]}{P(l + \alpha)^2 \omega^5 \mathfrak{Cof}^2 \frac{\omega}{2}} \\ & + \frac{32\beta^2 K^2 J^2 [\mathfrak{Sin} 2\omega - 2\omega]}{P^2 (l + \alpha)^4 \omega^3 \mathfrak{Sin}^2 \omega} \\ & - \frac{1024 K^2 J^3}{P^2 (l + \alpha)^6 F} + \frac{256 \alpha K^2 J^2}{P^2 (l + \alpha)^5 \omega^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Mit dem Wert M_a aus Gl. (8) nimmt Gl. (4) weiter die Form

$$(4a) \left\{ \begin{aligned} & y = \frac{P}{2X} \left[x \frac{(l + \alpha) \mathfrak{Sin} \left(\frac{x\omega}{l + \alpha} \right) \mathfrak{Cof} \left(1 - \frac{2x}{l + \alpha} \right) \frac{\omega}{2}}{\omega \mathfrak{Cof} \frac{\omega}{2}} \right] \\ & + \frac{\beta(l + \alpha) \mathfrak{Sin} \left(\frac{x\omega}{l + \alpha} \right) \mathfrak{Sin} (x - l - \alpha) \frac{\omega}{l + \alpha}}{\omega \mathfrak{Sin} \omega} \end{aligned} \right.$$

an. Setzt man darin $x = \frac{l + \alpha}{2}$, so erhält man

$$(9) \quad y_{\text{Mitte}} = \frac{P(l + \alpha)}{2\omega X} \left[\frac{\omega}{2} - \mathfrak{I}g \frac{\omega}{2} \right] - \frac{\beta(l + \alpha)}{2\omega} \mathfrak{I}g \frac{\omega}{2}.$$

Für M ergibt sich

$$(5a) \quad M = \frac{P(l + \alpha)}{4\omega} \frac{\mathfrak{Sin} \left(\frac{2\omega x}{l + \alpha} - \frac{\omega}{2} \right)}{\mathfrak{Cof} \frac{\omega}{2}} - \frac{2\beta\omega KJ \mathfrak{Cof} \left(\omega - \frac{2x\omega}{l + \alpha} \right)}{(l + \alpha) \mathfrak{Sin} \omega}.$$

Schließlich, da $Q = \frac{dM}{dx}$, gilt

$$(10) \quad Q = \frac{P \cos\left(\frac{2\omega x}{l+\alpha} - \frac{\omega}{2}\right) + \beta X \sin\left(\omega - \frac{2x\omega}{l+\alpha}\right)}{2 \cos\frac{\omega}{2}}.$$

§ 4. Sonderfälle.

Es sei $M_a = 0$, $X = 0$. Dem Fall entspricht der sogenannte

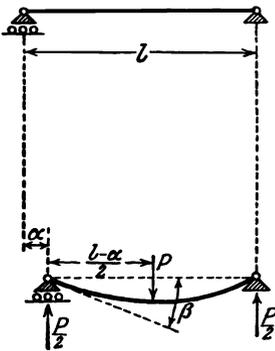


Abb. 5.

beiderseits unterstützte Träger mit einer Einzellast in der Mitte (Abb. 5). Man setzt dabei stillschweigend voraus, daß die Stützgelenke wagerecht vollkommen verschiebbar sind, und redet nicht von einer Längskraft, welche, bei unvollkommen verschiebbaren Stützgelenken, infolge der, wenn auch sehr kleinen, Längenänderung des Trägers entstehen könnte.

G. (8) liefert für die Verschiebungen am linken Ende:

$$(11) \quad \begin{cases} \alpha_0 = \frac{P^2 l^5}{960 E^2 J^2} \left[1 - \frac{\alpha_0}{l}\right]^5 \sim \frac{P^2 l^5}{960 E^2 J^2} \\ \beta_0 = \frac{P l^3}{16 E J} \left[1 - \frac{\alpha_0}{l}\right]^2 \sim \frac{P l^3}{16 E J}. \end{cases}$$

Die für diesen Fall erfolgenden Verschiebungen α_0 , β_0 gehen aus Abb. 5 hervor. Ferner erhält man aus Gln. (4), (5), indem man darin $\alpha = -\alpha_0$ setzt:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} y = \lim_{\substack{x=0 \\ M_a=0 \\ \alpha=-\alpha_0}} & \left[\frac{P(l+\alpha)}{4\omega X \cos\omega} \left(\frac{2\omega x}{l+\alpha} \cos\omega - \sin\left(\frac{2x\omega}{l+\alpha}\right) \right) \right. \\ & \left. + \frac{M_a}{X \cos\omega} \left(\cos\left(\frac{2x\omega}{l+\alpha} - \omega\right) - \cos\omega \right) \right] \\ & = \frac{P}{16 E J} \left[x l^2 \left(1 - \frac{P^2 l^4}{960 E^2 J^2}\right)^2 - \frac{4}{3} x^3 \right], \end{aligned} \right.$$

$$M = \lim_{\substack{X=0 \\ M_a=0 \\ \alpha=-\alpha_0}} \left[\frac{P(l+\alpha)}{4\omega} \frac{\mathfrak{S}\sin\left(\frac{2x\omega}{l+\alpha}\right)}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}\ \omega} - \frac{M_a \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}\left(\frac{2x\omega}{l+\alpha} - \omega\right)}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}\ \omega} \right] = \frac{P}{2} x.$$

Die eben gefundenen Formeln für y und M finden sich bei Vernachlässigung des Gliedes $P^2 l^4 / 960 E^2 J^2$ in zahlreichen Lehrbüchern.

Weiter folgt

$$(13) \quad \begin{cases} y_{\text{Mitte}} = \frac{Pl^3}{48 EJ} \left[1 - \frac{P^2 l^4}{960 E^2 J^2} \right]^3, \\ M_{\text{Mitte}} = \frac{Pl}{4} \left[1 - \frac{P^2 l^4}{960 E^2 J^2} \right]. \end{cases}$$

An zweiter Stelle sei $\beta = 0$, $X = 0$. Beschränkt man sich auf eine einzige äußere Kraft P , so liegt der sogenannte beiderseits eingespannte Träger vor, bei dessen Berechnung man auf einer Seite ein wagrecht vollkommen verschiebbares Einmauerungsende annimmt, ohne darauf besonders aufmerksam zu machen [Abb. 6]. Man hat danach für α , M_a

$$(14) \quad \begin{cases} \alpha_a \sim \frac{P^2 l^5}{15360 E^2 J^2}, \\ M_a \sim \frac{Pl}{8}. \end{cases}$$

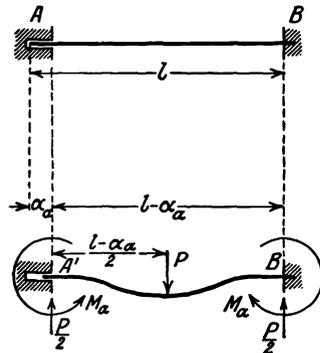


Abb. 6.

Die Verschiebung α_a findet ebenfalls nach rechts statt. Setzt man $\alpha = -\alpha_a$ in Gln. (4a) (5a), so erhält man

$$(15) \left\{ \begin{aligned} y &= \lim_{\substack{x=0 \\ \beta=0 \\ \alpha=-\alpha_a}} \left[\frac{P}{2X} \left(x \frac{(l+\alpha) \operatorname{Sin} \left(\frac{x\omega}{l+\alpha} \right) \operatorname{Cos} \left(\frac{\omega}{2} - \frac{x\omega}{l+\alpha} \right)}{\omega \operatorname{Cos} \frac{\omega}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta(l+\alpha) \operatorname{Sin} \left(\frac{x\omega}{l+\alpha} \right) \operatorname{Sin} \left(\frac{\omega x}{l+\alpha} - \omega \right)}{\omega \operatorname{Sin} \omega} \right] \\ &= \frac{P}{16EJ} \left[x^2 l \left(1 - \frac{P^2 l^4}{15360 E^2 J^2} \right) - \frac{4}{3} x^3 \right], \\ M &= \lim_{\substack{x=0 \\ \beta=0 \\ \alpha=-\alpha_a}} \left[\frac{P(l+\alpha) \operatorname{Sin} \left(\frac{2x\omega}{l+\alpha} - \frac{\omega}{2} \right)}{4\omega} \frac{\operatorname{Cos} \frac{\omega}{2}}{\operatorname{Cos} \frac{\omega}{2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\beta\omega KJ \operatorname{Cos} \left(\omega - \frac{2x\omega}{l+\alpha} \right)}{(l+\alpha) \operatorname{Sin} \omega} \right] \\ &= \frac{P}{2} x - \frac{Pl}{8} \left[1 - \frac{P^2 l^4}{15360 E^2 J^2} \right] \end{aligned} \right.$$

und daher

$$(16) \left\{ \begin{aligned} y_{\text{Mitte}} &= \frac{Pl^3}{192EJ} \left[1 - \frac{P^2 l^4}{15360 E^2 J^2} \right]^3, \\ M_{\text{Mitte}} &= \frac{Pl}{8} \left[1 - \frac{P^2 l^4}{15360 E^2 J^2} \right]. \end{aligned} \right.$$

Als Beispiel diene ein Doppel-T-Träger NP.10 mit

$$J = 170 \text{ cm}^4; \quad F = 10,6 \text{ cm}^2;$$

$$E = 2100000 \text{ kg / cm}^2; \quad l = 400 \text{ cm};$$

$$P = 100 \text{ kg}.$$

Die Berechnung liefert:

| | im Fall $X=0, \beta=0$ | im Fall $X=0, M_a=0$ |
|--------------------|------------------------|----------------------|
| α | 0,000052 cm | 0,00084 cm |
| β | 0 | 0,00280 |
| y_{Mitte} | 0,093371 cm | 0,37348 cm |
| M_{Mitte} | 5000,00 cm kg | 10000,00 cm kg |
| M_a | 5000,00 cm kg | 0 |

§ 5. Bemerkungen.

Zur Prüfung der Genauigkeit der vorhergehenden Theorie wollen wir eine weitere Untersuchung folgen lassen.

Wir machen darauf aufmerksam, daß gewöhnlich nur die Formänderungen des Trägers nach Eintritt der Deformation in Rechnung gestellt werden.

Setzt man aber ganz allmählich wachsende äußere Kräfte voraus, so erleidet der Träger in jedem Stadium der äußeren Kräfte in bezug auf Verschiebung sowie Verdrehung Zuschläge, welche von den bis zum betrachteten Augenblick erfolgenden Formänderungen des Trägers herrühren. Wir erteilen jetzt den äußeren Kräften irgendeine unendlich kleine mögliche Verrückung, infolge deren N, M die Veränderungen dN, dM erfahren mögen.

Bezeichnet man mit $d\alpha$ die dadurch erzeugte wirkliche Verschiebung, so lautet die Arbeitsgleichung:

$$(6a) \quad \int_s \frac{M_1 dM}{KJ} ds + \int_s \frac{N_1 dN}{KF} ds = d\alpha.^1)$$

Mit dieser Gleichung hat sich meines Wissens zum erstenmal Hayashi befaßt.

Unsere Gleichung gestattet den in Frage stehenden Hauptträger für verschiedene Annahmen zu entwickeln.

a) Es sei AB ein frei aufliegender Träger mit der Einzelast P in der Mitte, bei dem das Ende A wagrecht verschiebbar ist [Abb. 7a].

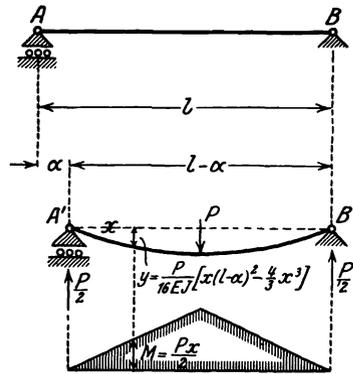


Abb. 7a.

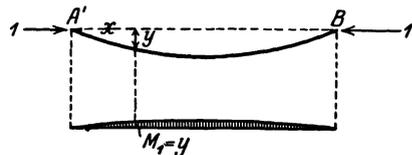


Abb. 7b.

¹⁾ Vgl. Müller-Breslau, H.: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, Leipzig, 1913. S. 95. Man setzt in der dort angegebenen Formel $t = 0$, ferner dN, dM an Stelle von N, M .

Die wagerechte Verschiebung α des Punktes A ist zu ermitteln.

Da $X=0$ ist, ergibt sich die Gl. (6a), wenn man $ds = dx$ setzt, in der Form

$$z = \frac{l-\alpha}{2}$$

$$\frac{2}{EJ} \int_{x=0} M_1 dM dx = d\alpha,$$

welche sich, da $dM = \frac{x dP}{2}$ ist,

$$(17) \quad \frac{dP}{EJ} \int_0^{\frac{l-\alpha}{2}} xy dx = d\alpha$$

schreiben läßt. Führt man den in Abb. 7a angegebenen Ausdruck für y ein, so vereinfacht sie sich zu

$$\frac{P(l-\alpha)^5 dP}{480(EJ)^2} = d\alpha.$$

Folglich ist

$$\frac{1}{480(EJ)^2} \int_0^P P dP = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{(l-\alpha)^5}.$$

Daraus hat man endgültig

$$(18) \quad \alpha = l \left[1 - \sqrt[4]{\frac{240(EJ)^2}{P^2 l^4 + 240(EJ)^2}} \right].$$

Entwickelt man den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in einer Reihe, so ist

$$\sqrt[4]{\frac{240(EJ)^2}{P^2 l^4 + 240(EJ)^2}} = 1 - \frac{1}{4} \frac{P^2 l^4}{P^2 l^4 + 240(EJ)^2} + \dots$$

Vernachlässigen wir in dieser Entwicklung die dem dritten Glied folgenden Glieder, ferner $P^2 l^4$ gegen $240(EJ)^2$, so gelangt man für α zu dem in Gl. (11) erhaltenen Ausdruck.

Es fragt sich nun wieder, ob sich ein Hauptträger finden läßt, aus dem man α durch Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen bestimmen kann.

Setzt man in (17) l an Stelle von $l - \alpha$, was bei zahlenmäßiger Durchführung der Rechnung immer gestattet ist, so haben wir

$$\frac{dP}{EJ} \int_0^{\frac{l}{2}} xy dx = d\alpha.$$

Für y hat man den Ausdruck

$$\begin{aligned} y &= \frac{P}{16 EJ} [xl^2 - \frac{4}{3}x^3] \\ &= mP, \end{aligned}$$

wenn m eine von P unabhängige Größe bezeichnet. Es folgt somit

$$d\alpha = \frac{PdP}{EJ} \int_0^{\frac{l}{2}} mx dx$$

und

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{EJ} \int_0^P PdP \int_0^{\frac{l}{2}} mx dx \\ &= \frac{2}{EJ} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{Px}{2} \frac{mP}{2} dx \\ (19) \quad &= \frac{2}{EJ} \int_0^{\frac{l}{2}} M \frac{y}{2} dx. \end{aligned}$$

Die Gl. (19) zeigt, daß eine Kurvenform, deren Ordinaten gerade die Hälfte der wirklich auftretenden Durchbiegungen y betragen, als Hauptträger dienen kann (Abb. 8).

Die letzte Formel für α mit $M = \frac{Px}{2}$, $y = mP$ führt zu (11).

Man sieht ohne weiteres, daß, wenn die Durchbiegung y des Trägers als eine lineare Funktion von P darstellbar ist, der durch (19) angegebene Satz immer bewiesen werden kann.

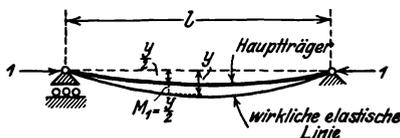


Abb. 8.

Die Verschiebung α in Abb. 7a werde noch auf einem anderen Wege ermittelt. Unter der Annahme der Unveränderlichkeit der Trägerlänge nach der Formänderung erhält man

$$l = 2 \int_0^{\frac{l-\alpha}{2}} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx$$

oder

$$l \sim 2 \int_0^{\frac{l-\alpha}{2}} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx.$$

In dieser Gleichung führen wir den Ausdruck für $\frac{dy}{dx}$ ein und integrieren zwischen den angegebenen Grenzen von x . Setzt man näherungsweise in der dadurch entstandenen Gleichung für α statt $l - \alpha$ l , so resultiert wiederum die Formel (11).

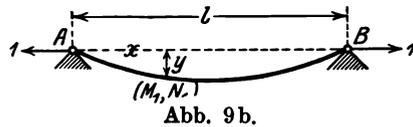
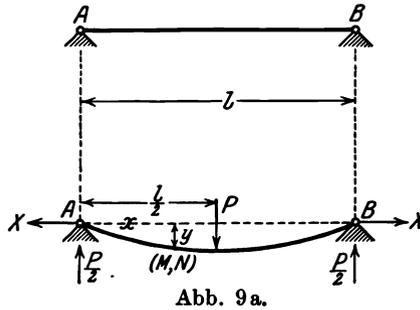
Unter analoger Erwägung gelangt man für den allgemeinen Fall (s. Abb. 2) zu der Gleichung

$$\frac{P^2}{16 X^2 \mathfrak{C} \mathfrak{O}^3 \omega} \left[\frac{3 \mathfrak{S} \mathfrak{in} 2 \omega}{2 \omega} - 2 - \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} 2 \omega \right] + \frac{P M_a}{X^2 (l + \alpha)} \frac{[\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \omega - 1 - \frac{\omega}{2} \mathfrak{X} \mathfrak{g} \omega]}{\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \omega} + \frac{M_a^2 \left[1 - \frac{\mathfrak{S} \mathfrak{in} 2 \omega}{2 \omega} \right]}{4 X K J \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f}^3 \omega} + \frac{X}{K F} - \frac{\alpha}{l + \alpha} = 0,$$

welche völlig mit Gl. (8) übereinstimmt.

b) Wir nehmen jetzt an, AB sei ein beiderseits gelenkartig gestützter, wagrecht unverschiebbarer Träger, d. h. es sei bei

dem oben behandelten frei aufliegenden Träger das Gelenk A auch wagerecht nicht verschiebbar. Wenn sich der Träger infolge der Mittellast P durchbiegt, tritt in ihm eine wagerechte Längskraft X auf (Abb. 9 a). Es soll X bestimmt werden.



Man stelle sich vor, daß das Gelenk A für einen Augenblick wagerecht verschiebbar sei. Da aber an dieser Stelle keine wagerechte Verschiebung stattfindet, also $\alpha = 0$ ist, muß die Gleichung [vgl. Gl. (6 a)]

$$(20) \quad \int_P \int_x \frac{M_1 dM}{KJ} dx + \int_P \int_x \frac{N_1 dN}{KF} dx = 0$$

befriedigt werden. Unter M_1, N_1 versteht man die virtuellen Größen, welche die im Punkt A angreifende virtuelle Belastung 1 in dem durch die äußere Kraft P wirklich deformierten Träger erzeugt (Abb. 9 b). Es ist danach $M_1 = -y, N_1 = 1$.

Um die Gleichung für y zu erhalten, geht man von der Differentialgleichung $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{KJ}$ aus, in der $M = \frac{Px}{2} - Xy$ ist.

Ziehen wir ferner die zwei Randbedingungen

$$\begin{cases} \text{für } x=0, & y=0 \\ \text{„ } x=\frac{l}{2}, & \frac{dy}{dx}=0 \end{cases}$$

in Betracht, so folgt schließlich:

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{P}{2X} \left[x - \frac{l \sin\left(\frac{2\omega x}{l}\right)}{2\omega \cos\omega} \right], \\ \text{worin} \\ \omega = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{X}{KJ}} \end{array} \right.$$

gesetzt ist.

Die Größe X hängt von der angreifenden äußeren Kraft P ab. Man setzt also $X=f(P)$ und hat aus (20) die Funktion $f(P)$ zu bestimmen. Da M, N als Funktionen von $f(P)$ darzustellen sind, erhält man für dM, dN Ausdrücke, die $f(P)$ und $\frac{\partial f(P)}{\partial P}$ in sich fassen. Die Beziehung (20) wird also eine

Funktionalgleichung ergeben, die $f(P)$ und $\frac{\partial f(P)}{\partial P}$ in einer äußerst komplizierten Form enthält. Die Auflösung einer solchen Gleichung würde große Schwierigkeiten bereiten.

Wir wollen daher einen anderen Weg einschlagen, um zu einer angenäherten Lösung zu gelangen. Das Problem sei folgendes:

Man lasse an dem Träger in Abb. 9a zuerst den Zug X wirken, wodurch die wagerechte Verschiebung α erfolgt; nach Eintritt der Ruhelage bringe man die Mittellast P an, um diese Verschiebung verschwinden zu lassen (Abb. 10a).

Die elastische Linie hat dann nach (21) die Gleichung

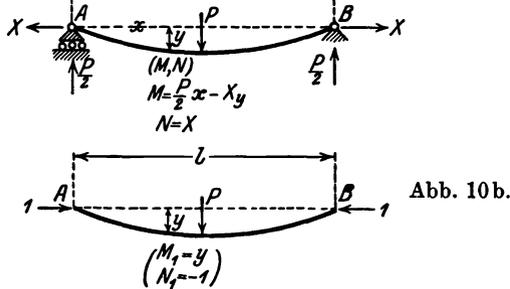
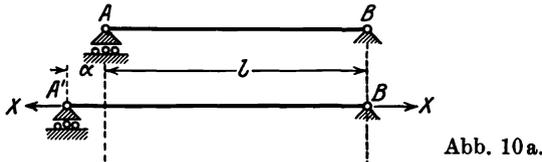
$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{P}{X} F_1, \\ \text{wenn} \\ F_1 = \frac{1}{2} \left[x - \frac{l \sin\left(\frac{2\omega x}{l}\right)}{2\omega \cos\omega} \right]. \end{array} \right.$$

Aus dieser Gleichung und Abb. 10a geht hervor:

$$\begin{cases} dM = \left[\frac{x}{2} - F_1 \right] dP \\ dN = 0 \end{cases}$$

und $M_1 = y$. Mit Rücksicht auf die Beziehung (6a) erhält man

$$d\alpha = \frac{1}{KJ} \int_s M_1 dM ds.$$



Wenn man $ds = dx$ setzt, so ist

$$\begin{aligned} x &= \frac{l}{2} \\ d\alpha &= \frac{2}{KJ} \int_{x=0}^{x=\frac{l}{2}} y dM dx \\ &= \frac{2}{KJ} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{PF_1}{X} \left[\frac{x}{2} - F_1 \right] dP dx. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2}{KJ} \int_{P=0}^{P=P} P dP \int_{x=0}^{x=\frac{l}{2}} \frac{F_1}{X} \left[\frac{x}{2} - F_1 \right] dx \\ &= \frac{2}{KJ} \int_{x=0}^{x=\frac{l}{2}} \frac{PF_1}{2X} P \left[\frac{x}{2} - F_1 \right] dx \\ &= \frac{2}{KJ} \int_{x=0}^{x=\frac{l}{2}} \frac{y}{2} M dx. \end{aligned}$$

Mithin ergibt sich

$$(22) \quad \frac{Xl}{KF} = \frac{2}{KJ} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y}{2} M dx.$$

Dieser Ausdruck besagt, daß α als virtuelle Verschiebung eines gebogenen Hauptträgers berechnet werden kann, der $\frac{y}{2}$ als Ordinaten besitzt.

c) Schließlich sei AB ein beiderseits eingemauerter Träger, der eine Einzellast P in der Mitte trägt (Abb. 11a).

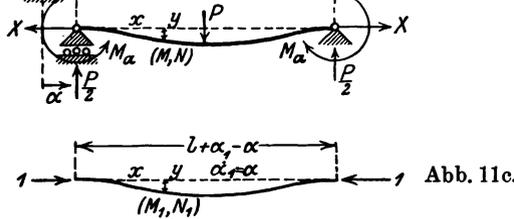
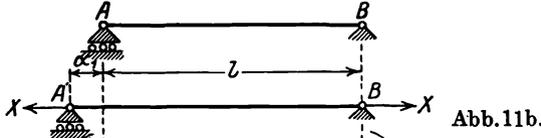
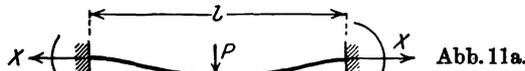
Wenn sich der Träger durchbiegt, entstehen nebst der Axialkraft X noch Biegemomente M_a an beiden Enden. Die Größen X , M_a hängen von P ab, also müßten sie bei ihrer Berechnung als Funktionen von P betrachtet werden. Eine exakte Lösung der Gleichungen würde zu weit führen. Daher greifen wir zu der folgenden Annäherung:

Wir denken uns vorläufig die Einmauerung des Trägers an den Enden beseitigt und statt derselben Gelenke angebracht, wobei dasjenige am Ende A außerdem wagerecht verschiebbar sein muß (Abb. 11b). Dann bringen wir am Träger den Zug X an; die Folge davon ist die wagerechte Verschiebung α_1 . Um diese Verschiebung rückgängig zu machen und gleichzeitig die Tangenten der elastischen Linie an beiden Enden in der horizontalen Lage zu halten, bringe man am Träger die Mittellast P und die Momente M_a an beiden Enden an.

Die zu erfüllenden zwei Bedingungen lassen sich in der Form

$$(23) \quad \begin{cases} \int_{(0,0)}^{(P, M_a)} \int_x \frac{M_1 dM}{KJ} dx + \int_{(0,0)}^{(P, M_a)} \int_x \frac{N_1 dN}{KF} dx = \alpha, \\ \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=0} = 0 \end{cases}$$

darstellen, worin $M_1 = y$, $N_1 = -1$ ist.



Die elastische Linie hat die Gleichung

$$(24) \quad \begin{cases} y = \frac{P}{X} F_1, \\ \text{wenn} \\ F_1 = \frac{l}{4\omega} \mathfrak{Cof} \omega \left[\frac{2\omega x}{l} \mathfrak{Cof} \omega - \mathfrak{Sin} \frac{2x\omega}{l} \right] + \frac{M_a}{P \mathfrak{Cof} \omega} \left[\mathfrak{Cof} \left(\frac{2x}{l} - 1 \right) \omega - \mathfrak{Cof} \omega \right] \\ \omega = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{X}{KJ}}. \end{cases}$$

In diesem Falle ist das Moment M eine Funktion von P und M_a , worin die zwei Größen als voneinander unabhängig zu betrachten sind; dM läßt sich also durch ein vollständiges

Differential der Funktion darstellen. Die erste Gleichung von (23) führt daher zur Integration eines vollständigen Differentials. Da aber hierdurch die Aufgabe verwickelt wird, müssen wir noch eine Annahme zwischen P und M_a machen, um die Aufgabe eindeutig bestimmbar zu gestalten.

Wir setzen nämlich voraus, daß M_a von P abhängig und zwar als eine lineare Funktion von P darstellbar sei. Diese Annahme bedeutet für praktische Fälle eine sachgemäße Annäherung. Man setzt danach

$$(25) \quad M_a = mP.$$

Die Einführung dieser Beziehung in F_1 läßt erkennen, daß die Funktion F_1 eine von P unabhängige ist.

Wir haben

$$\begin{cases} M = P \left[\frac{x}{2} - F_1 - m \right] \\ N = X \end{cases}$$

und also

$$\begin{cases} dM = \left[\frac{x}{2} - F_1 - m \right] dP \\ dN = 0. \end{cases}$$

Da ferner $M_1 = y$ ist, gestaltet sich die Gl. (6a)

$$(26) \quad d\alpha = \frac{2}{KJ} \int_{x=0}^{x=\frac{l+\alpha_1-\alpha}{2}} y dM dx,$$

wenn unter α eine von A' nach rechts gemessene Verschiebung des Trägerendes verstanden wird. Folglich ist

$$\int_0^{\alpha_1} d\alpha = \frac{2}{KJ} \int_{P=0}^{P=P} \int_{x=0}^{x=\frac{l+\alpha_1-\alpha}{2}} \frac{P F_1}{X} \left[\frac{x}{2} - F_1 - m \right] dP dx,$$

worin der Ausdruck in der Klammer von P unabhängig ist. Setzt man l an Stelle von $l + \alpha_1 - \alpha$, so ist

$$\begin{aligned}
 (27) \quad \alpha_1 &= \frac{Xl}{KF} = \frac{2}{KJ} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{PF_1}{2X} P \left[\frac{x}{2} - F_1 - m \right] dx \\
 &= \frac{2}{KJ} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y}{2} M dy.
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß es nötig ist, für virtuelle Belastungen einen anfänglich gekrümmten Träger anzunehmen, der $\frac{y}{2}$ als Ordinaten hat.

Zu bemerken ist, daß in der obigen Entwicklung ein gerades Verhältnis von M_a zu P vorausgesetzt ist; sonst läßt sich die Formel (27) in strengem Sinne nicht beweisen und die Aufgabe kann, wie schon erörtert, nicht eindeutig gelöst werden.

II. Der Träger ist vollkommen eingespannt und trägt nur eine Einzellast in der Mitte.

(Abb. 11 a.)

§ 6. Aufstellung der Gleichungen.

Unter „vollkommen eingespannt“ versteht man die Befestigungsart eines Trägers, bei welcher der Träger weder einer Verschiebung noch einer Verdrehung unterworfen ist.

Dem vorliegenden Fall entspricht also der im vorigen Abschnitt behandelte Träger, wenn man die Bedingungen

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

stellt. Das Moment M_a sowie die Kraft X , die in § 1 als äußere Ursachen bezeichnet wurden, treten jetzt bei dem in Frage stehenden Träger als innere Ursachen auf, hervorgerufen infolge der durch die Wirkung von P eintretenden Formänderung und unter Berücksichtigung der angegebenen Bedingung.

24 Der Träger ist vollkommen eingespannt u. trägt nur eine Einzellast.

Die X -Gleichung (8) rechnet sich um zu

$$(28) \quad \frac{2 + \cos \omega - \frac{3 \sin \omega}{\omega}}{\omega^6 \cos^2 \frac{\omega}{2}} = \frac{1024 K^2 J^3}{P^2 l^6 F}.$$

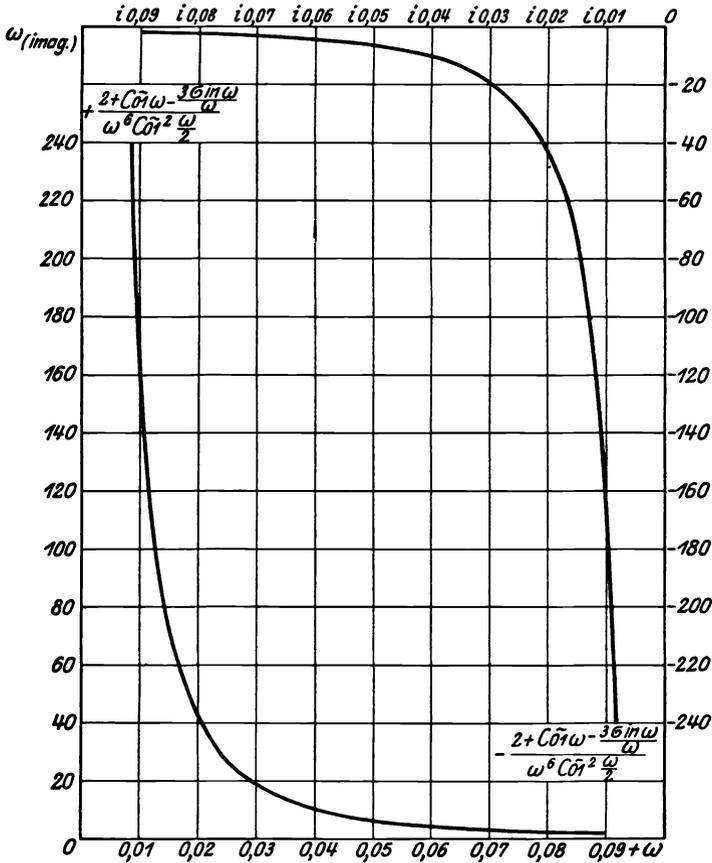


Abb. 12.

Die Gleichung ist in hohem Grade transzendent; man kann aus ihr keinen praktischen Schluß ziehen. Das Vorzeichen von X läßt sich indessen durch folgende Überlegung feststellen: es

handle sich um einen positiven Wert von X ; die Zahl $\omega = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{X}{KJ}}$

ist dann reell, und die Funktion $\frac{2 + \cos \omega - \frac{3 \sin \omega}{\omega}}{\omega^6 \cos^2 \frac{\omega}{2}}$ bleibt

stets positiv. Sie nimmt, wie die Tabelle 1 zeigt, mit ω ab. Wenn ω imaginär ist, was bei negativem X eintritt, hat die Funktion negatives Vorzeichen und nimmt mit ω zu. Es folgt daraus, daß die Gl. (28) keine negative Wurzel X gestattet, denn die rechte Seite derselben stellt für ein positives ebenso wie für ein negatives P stets eine positive Zahl dar. Die Kraft X ist also stets ein Zug ohne Rücksicht auf das Vorzeichen von P .

Die letzterwähnte Funktion ist in Abb. 12 graphisch dargestellt. Außerdem sind die Funktionswerte für imaginäre ω eingetragen.

Tabelle 1.

| ω | $\frac{2 + \cos \omega - \frac{3 \sin \omega}{\omega}}{\omega^6 \cos^2 \frac{\omega}{2}}$ | ω | $\frac{2 + \cos \omega - \frac{3 \sin \omega}{\omega}}{\omega^6 \cos^2 \frac{\omega}{2}}$ |
|----------|---|----------|---|
| 0 | ∞ | | |
| 0,001 | 16 666,663 29 | 0,021 | 37,789 53 |
| 2 | 4 166,663 29 | 22 | 34,431 89 |
| 3 | 1 851,848 47 | 23 | 31,502 61 |
| 4 | 1 041,663 29 | 24 | 28,931 81 |
| 5 | 666,663 29 | 25 | 26,663 29 |
| 6 | 462,959 59 | 26 | 24,651 46 |
| 7 | 340,132 68 | 27 | 22,858 99 |
| 8 | 260,413 29 | 28 | 21,255 13 |
| 9 | 205,757 94 | 29 | 19,814 31 |
| 0,010 | 166,663 29 | 0,030 | 18,515 15 |
| 11 | 137,737 68 | 31 | 17,339 68 |
| 12 | 115,737 37 | 32 | 16,272 67 |
| 13 | 98,615 96 | 33 | 15,301 19 |
| 14 | 85,030 64 | 34 | 14,414 16 |
| 15 | 74,070 70 | 35 | 13,602 07 |
| 16 | 65,100 79 | 36 | 12,856 71 |
| 17 | 57,666 76 | 37 | 12,170 96 |
| 18 | 51,436 96 | 38 | 11,538 64 |
| 19 | 46,164 68 | 39 | 10,954 33 |
| 0,020 | 41,663 29 | 0,040 | 10,413 29 |

26 Der Träger ist vollkommen eingespannt u. trägt nur eine Einzellast.

Tabelle 1 (Fortsetzung).

| ω | $\frac{2 + \mathfrak{Cof} \omega - \frac{3 \mathfrak{Sin} \omega}{\omega}}{\omega^6 \mathfrak{Cof}^2 \frac{\omega}{2}}$ | ω | $\frac{2 + \mathfrak{Cof} \omega - \frac{3 \mathfrak{Sin} \omega}{\omega}}{\omega^6 \mathfrak{Cof}^2 \frac{\omega}{2}}$ |
|----------|---|----------|---|
| 0,041 | 9,91136 | 0,071 | 3,30285 |
| 42 | 9,44485 | 72 | 3,21165 |
| 43 | 9,01051 | 73 | 3,12417 |
| 44 | 8,60544 | 74 | 3,04021 |
| 45 | 8,22708 | 75 | 2,95959 |
| 46 | 7,87312 | 76 | 2,88213 |
| 47 | 7,54152 | 77 | 2,80767 |
| 48 | 7,23042 | 78 | 2,73606 |
| 49 | 6,93818 | 79 | 2,66714 |
| 50 | 6,66329 | 0,080 | 2,60080 |
| 0,051 | 6,40442 | 81 | 2,53689 |
| 52 | 6,16034 | 82 | 2,47531 |
| 53 | 5,92994 | 83 | 2,41595 |
| 54 | 5,71222 | 84 | 2,35869 |
| 55 | 5,50627 | 85 | 2,30344 |
| 56 | 5,31126 | 86 | 2,25010 |
| 57 | 5,12641 | 87 | 2,19859 |
| 58 | 4,95105 | 88 | 2,14883 |
| 59 | 4,78453 | 89 | 2,10074 |
| 0,060 | 4,62626 | 0,090 | 2,05424 |
| 61 | 4,47571 | 91 | 2,00927 |
| 62 | 4,33239 | 92 | 1,96575 |
| 63 | 4,19584 | 93 | 1,92364 |
| 64 | 4,06564 | 94 | 1,88286 |
| 65 | 3,94140 | 95 | 1,84335 |
| 66 | 3,82277 | 96 | 1,80508 |
| 67 | 3,70953 | 97 | 1,76799 |
| 68 | 3,60101 | 98 | 1,73202 |
| 69 | 3,49729 | 99 | 1,69714 |
| 0,070 | 3,39799 | 100 | 1,66330 |
| | | ∞ | 0 |

Wollen wir nun die Gleichung für die elastische Linie entwickeln, so benutzen wir Gl. (4a) unter Beachtung obiger Bedingungen und erhalten:

$$(29) \quad y = \frac{P}{2X} \left[x - \frac{l \mathfrak{Sin} \left(\frac{x \omega}{l} \right) \mathfrak{Cof} \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\omega x}{l} \right)}{\omega \mathfrak{Cof} \frac{\omega}{2}} \right].$$

Setzt man darin $x = \frac{l}{2}$, so ergibt sich

$$(30) \quad y_{\text{Mitte}} = \frac{Pl}{2\omega X} \left[\frac{\omega}{2} - \mathfrak{X}g \frac{\omega}{2} \right].$$

Gln. (5a), (8), (10) liefern

$$(31) \quad \begin{cases} M = \frac{Pl}{4\omega} \frac{\mathfrak{S}in\left(\frac{2\omega x}{l} - \frac{\omega}{2}\right)}{\mathfrak{Cof}\frac{\omega}{2}} \\ M_a = \frac{Pl}{4\omega} \mathfrak{X}g \frac{\omega}{2} \\ Q = \frac{P \mathfrak{Cof}\left(\frac{2\omega x}{l} - \frac{\omega}{2}\right)}{2 \mathfrak{Cof}\frac{\omega}{2}} \end{cases}$$

§ 7. Ergänzungsbeispiel.

Es soll der in § 4 angegebene Träger bei vollkommener Einmauerung berechnet werden.

Es ist

$$\begin{aligned} K &= 2100000 + \frac{X}{10,6} \text{ [Gl. (1)]} \\ \omega &= \frac{400}{2} \sqrt{\frac{X}{170 \left[2100000 + \frac{X}{10,6} \right]}} \\ &\sim \frac{\sqrt{X}}{94,4722 \left[1 + \frac{X}{10^7 \cdot 4,452} \right]}. \end{aligned}$$

Somit läßt sich die Kraft X mittels der Gl. (28) durch Probieren berechnen. Man findet

$$X = 2,9 \text{ kg}$$

und ferner

$$\begin{aligned} y_{\text{Mitte}} &= 0,093368 \text{ cm} \\ M_{\text{Mitte}} &= 4999,86 \text{ cm kg.} \end{aligned}$$

In Abb. 13 ist X als Funktion von P aufgetragen. Man sieht daraus, daß die Zunahme von X mit P wächst.

Ferner sei bei unserem Träger die Lichtweite l veränderlich an Stelle von 400 cm eingeführt. In Abb. 14 sind die X -Kurven für $P=50, 100, 150$ kg dargestellt. Die Kraft X nimmt, wenn l größer ist als einige Meter, also mit l rasch zu.

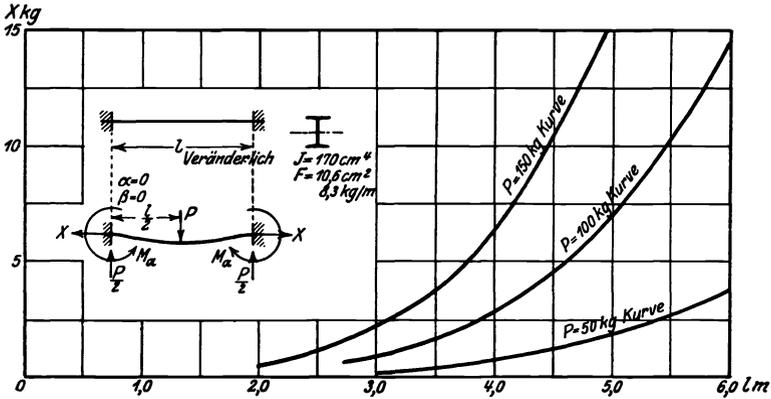


Abb. 14.

III. Das Einmauerungsmaterial ist in gewissem Grade nachgiebig.

§ 8. Vorbemerkungen.

Wir kommen jetzt zur Untersuchung des Falles, bei dem wir uns dem tatsächlichen Gleichgewichtszustand des Trägers am meisten nähern. Das Einmauerungsmaterial soll sich gegen Zug sowie gegen eine Drehung des eingemauerten Trägers im strengen Sinne des Wortes nicht widerstandsfähig erweisen; vielmehr möge es eine gewisse Nachgiebigkeit zeigen, die, wenn sie auch äußerst gering ist, doch auf den Gleichgewichtszustand des Trägers einen bedeutenden Einfluß ausüben kann.

Die Einspannung eines Trägers an einem eingemauerten Ende bei nachgiebigem Einmauerungsmaterial ist von Hayashi¹⁾

¹⁾ Hayashi, K., Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage, Berlin 1921, S. 180.

so definiert, daß der Träger daselbst durch ein negatives Biegemoment beansprucht wird, indem man sich auf von oben nach unten wirkende Lasten beschränkt. Von der wagerechten Verschiebung des Trägerendes, die ein Träger bei diesen Belastungen erleiden kann (vgl. Abb. 15), ist bei Hayashi

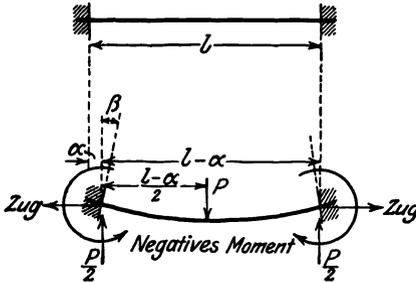


Abb. 15.

nicht die Rede. Zur schärferen Definition der Bezeichnung **Einspannung** möge hinzugefügt werden, daß der beiderseits eingemauerte Träger mit lotrechter Last als äußere Kraft noch als an den Enden eingespannt angesehen werden soll, auch wenn das Endmoment Null ist, solange das Einmauerungsmaterial eine Zugkraft an den Enden des Trägers ausüben vermag.

Nach diesen Voraussetzungen lassen sich verschiedene Fälle von eingespannten Trägern unterscheiden. X, M_a können dabei als äußere oder als innere Ursache betrachtet werden. Im vorliegenden Abschnitt wollen wir uns aber auf die Annahme beschränken, daß der Träger nur durch eine einzige äußere Kraft P belastet ist, also X, M_a nur als die von P herrührenden inneren Kräfte anzusehen sind.

§ 9. Der Träger ist beiderseits mit wagerecht unverschiebbaren Gelenken versehen.

Dem Fall entspricht $\alpha = 0, M_a = 0$ (Abb. 9a oder 16).

Für X erhält man aus Gl. (8), in der X durch $\left(\frac{2\omega}{l}\right)^2 KJ$ ersetzt wird:

$$(32) \quad \frac{2 + \mathfrak{Cof} 2\omega - \frac{3 \mathfrak{Sint} 2\omega}{2\omega}}{(2\omega)^6 \mathfrak{Cof}^2 \omega} = \frac{16 K^3 J^3}{P^2 l^6 F}.$$

Man sieht wieder ohne weiteres, daß am Trägerende eine Zugkraft herrscht.

Der Träger ist beiders. mit wagerecht unverschiebb. Gelenken versehen. 31

Die Funktion $\frac{2 + \mathfrak{Cof} 2\omega - \frac{3 \mathfrak{Sin} 2\omega}{2\omega}}{(2\omega)^6 \mathfrak{Cof}^2 \omega}$ ist in der Tabelle 2 zahlenmäßig angegeben.

Setzt man $M_a = 0$ in Gl. (8) so lautet der Ausdruck für die Verdrehung β

$$(33) \beta_1 = -\frac{P}{2X} \left[1 - \frac{1}{\mathfrak{Cof} \omega} \right].$$

Das Minuszeichen zeigt, daß die Verdrehung im Sinne des Uhrzeigers stattfindet (Abb. 16).

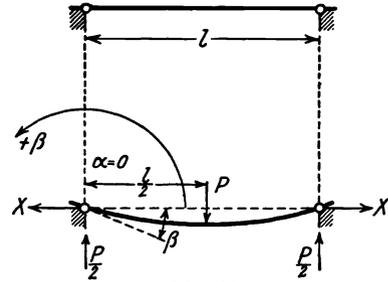


Abb. 16.

Ferner folgt:

$$(34) \begin{cases} y_{\text{Mitte}} = \frac{Pl}{4X} \left[1 - \frac{\mathfrak{I}g \omega}{\omega} \right], \\ M_{\text{Mitte}} = \frac{Pl}{4\omega} \mathfrak{I}g \omega. \end{cases}$$

Tabelle 2.

| ω | $\frac{2 + \mathfrak{Cof} 2\omega - \frac{3 \mathfrak{Sin} 2\omega}{2\omega}}{(2\omega)^6 \mathfrak{Cof}^2 \omega}$ | ω | $\frac{2 + \mathfrak{Cof} 2\omega - \frac{3 \mathfrak{Sin} 2\omega}{2\omega}}{(2\omega)^6 \mathfrak{Cof}^2 \omega}$ |
|----------|---|----------|---|
| 0 | ∞ | 0,021 | 9,444 85 |
| 0,001 | 4166,663 29 | 22 | 8,605 44 |
| 2 | 1041,663 29 | 23 | 7,873 12 |
| 3 | 462,959 59 | 24 | 7,230 42 |
| 4 | 260,413 29 | 25 | 6,663 29 |
| 5 | 166,663 29 | 26 | 6,160 34 |
| 6 | 115,737 37 | 27 | 5,712 22 |
| 7 | 85,030 64 | 28 | 5,311 26 |
| 8 | 65,100 79 | 29 | 4,951 05 |
| 9 | 51,436 96 | 0,030 | 4,626 26 |
| 0,010 | 41,663 29 | 31 | 4,332 39 |
| 11 | 34,431 89 | 32 | 4,065 64 |
| 12 | 28,931 81 | 33 | 3,822 77 |
| 13 | 24,651 46 | 34 | 3,601 01 |
| 14 | 21,255 13 | 35 | 3,397 99 |
| 15 | 18,515 15 | 36 | 3,211 65 |
| 16 | 16,272 67 | 37 | 3,040 21 |
| 17 | 14,414 16 | 38 | 2,882 13 |
| 18 | 12,856 71 | 39 | 2,736 06 |
| 19 | 11,538 64 | 0,040 | 2,600 80 |
| 0,020 | 10,413 29 | | |

Tabelle 2 (Fortsetzung).

| ω | $\frac{2 + \cos 2\omega - \frac{3 \sin 2\omega}{2\omega}}{(2\omega)^6 \cos^2 \omega}$ | ω | $\frac{2 + \cos 2\omega - \frac{3 \sin 2\omega}{2\omega}}{(2\omega)^6 \cos^2 \omega}$ |
|----------|---|----------|---|
| 0,041 | 2,47531 | 0,071 | 0,82319 |
| 42 | 2,35869 | 72 | 0,80039 |
| 43 | 2,25010 | 73 | 0,77852 |
| 44 | 2,14883 | 74 | 0,75753 |
| 45 | 2,05424 | 75 | 0,73738 |
| 46 | 1,96575 | 76 | 0,71801 |
| 47 | 1,88286 | 77 | 0,69940 |
| 48 | 1,80508 | 78 | 0,68150 |
| 49 | 1,73202 | 79 | 0,66427 |
| 50 | 1,66330 | 0,080 | 0,64768 |
| 0,051 | 1,59858 | 81 | 0,63171 |
| 52 | 1,53756 | 82 | 0,61631 |
| 53 | 1,47996 | 83 | 0,60147 |
| 54 | 1,42553 | 84 | 0,58716 |
| 55 | 1,37404 | 85 | 0,57334 |
| 56 | 1,32529 | 86 | 0,56001 |
| 57 | 1,27908 | 87 | 0,54713 |
| 58 | 1,23524 | 88 | 0,53469 |
| 59 | 1,19361 | 89 | 0,52267 |
| 0,060 | 1,15404 | 0,090 | 0,51105 |
| 61 | 1,11641 | 91 | 0,49980 |
| 62 | 1,08058 | 92 | 0,48893 |
| 63 | 1,04644 | 93 | 0,47840 |
| 64 | 1,01389 | 94 | 0,46820 |
| 65 | 0,98283 | 95 | 0,45833 |
| 66 | 0,95317 | 96 | 0,44876 |
| 67 | 0,92483 | 97 | 0,43948 |
| 68 | 0,89773 | 98 | 0,43049 |
| 69 | 0,87180 | 99 | 0,42177 |
| 0,070 | 0,84698 | 0,100 | 0,41331 |
| | | ∞ | 0 |

Berechnet man nach der hier angegebenen Bedingung den in § 4 behandelten Träger, so erhält man als X-Kurve für das veränderliche P eine parabelförmige Kurve (Abb. 17).

Sie möge mit hinreichender Genauigkeit durch die Gleichung

$$X = 0,0047 P^2$$

bestimmt sein. Darnach verändert sich die Zugkraft X mit P^2 . In der Figur ist die letztere Kurve gestrichelt eingezeichnet.

Der Träger ist beiders. mit wagerecht unverschiebb. Gelenken versehen. 33

Ist $P = 100$ kg, so berechnet sich

$$\begin{aligned} X &= 46 \text{ kg,} \\ |\beta| &= 0,0027978, \\ y_{\text{Mitte}} &= 0,37280 \text{ cm,} \\ M_{\text{Mitte}} &= 9982,87 \text{ cm kg.} \end{aligned}$$

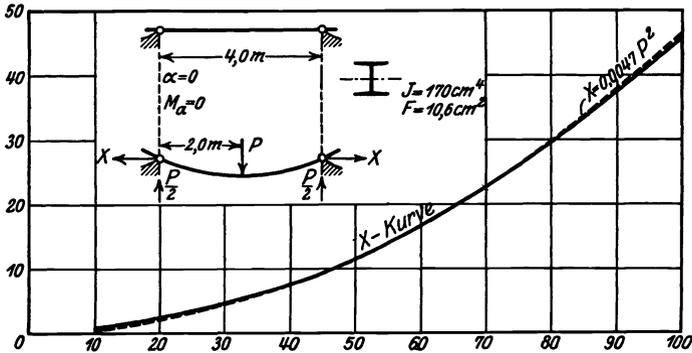


Abb. 17.

X ist etwa halb so groß wie P . Der Träger ist also durch eine verhältnismäßig große Längskraft beansprucht. Die größte Spannung in der Trägermitte berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{M_{\text{Mitte}}}{W} + \frac{X}{F} \\ &= \frac{9982,87}{34} + \frac{46}{10,6} \\ &= 297,95 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned}$$

Bei der Berechnung derartiger Träger pflegt man unter der Annahme wagerecht verschiebbarer Enden die Kraft X völlig außer acht zu lassen. In bezug auf § 4 ist σ

$$\sigma = \frac{5000}{37} = 147,06 \text{ kg/cm}^2.$$

Man sieht also, daß unter Voraussetzung wagerecht nicht verschiebbarer Enden die Nachgiebigkeit der Mauer gegen Verdrehung ungefähr eine Verdoppelung der maßgebenden Spannung zur Folge hat.

§ 10. Die Mauer ist gegen wagerechten Zug vollkommen fest, aber gegen Verdrehung in gewissem Grade nachgiebig (Abb. 18).

Es ist $\alpha = 0$. Die Verdrehung β ist nicht mehr gleich β_1 [Gl. (33)], sondern fällt absolut kleiner aus als $|\beta_1|$ und zwar nimmt $|\beta|$ mit der Widerstandsfähigkeit des Einmauerungsmaterials ab, bis β bei einem gegen Verdrehung vollkommen unnachgiebigen Einmauerungsmaterial einen Nullwert hat.

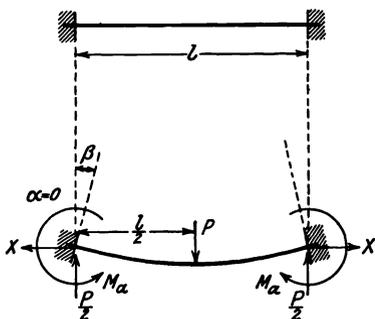


Abb. 18.

Das Endmoment M_a wächst dabei von Null an und erreicht schließlich einen bestimmten Wert; dies ist der Grenzwert, der den äußersten Widerstand ausdrückt, den die Mauer zu leisten vermag.

Der untere Grenzwert der Verdrehung ist also $\beta = 0$, denn eine weitere Abnahme von β würde eine Zunahme des positiven Betrages von β erfordern und nur dann möglich sein,

wenn ein äußeres Moment dem soeben genannten Wert von M_a hinzugefügt würde.

Setzt man in Gl. (8a) $\alpha = 0$, so gilt für die X-Gleichung

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{2 + \cos \omega - \frac{3 \sin \omega}{\omega}}{\omega^6 \cos^2 \frac{\omega}{2}} - \frac{8 \beta K J}{P l^2 \omega^5 \cos^2 \frac{\omega}{2}} [\sin \omega - \omega] \\ & + \frac{32 \beta^2 K^2 J^3}{P^2 l^4 \omega^3 \sin^2 \omega} [\sin 2\omega - 2\omega] - \frac{1024 K^2 J^3}{P^2 l^6 F} = 0. \end{aligned} \right.$$

Ferner folgt aus Gln. (9), (5a)

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} y_{\text{Mitte}} &= \frac{Pl}{2\omega X} \left[\frac{\omega}{2} - \mathfrak{I}g \frac{\omega}{2} \right] - \frac{\beta l}{2\omega} \mathfrak{I}g \frac{\omega}{2}, \\ M_{\text{Mitte}} &= \frac{Pl}{4\omega} \mathfrak{I}g \frac{\omega}{2} - \frac{2\beta \omega K J}{l \sin \omega}. \end{aligned} \right.$$

Zur näheren Erklärung berechnen wir den Träger in § 4 unter der vorliegenden Annahme. Die Rechnungsergebnisse sind in Abb. 19 aufgetragen. Die Tabelle 3, S. 49, erleichtert die Berechnung obiger Formeln.

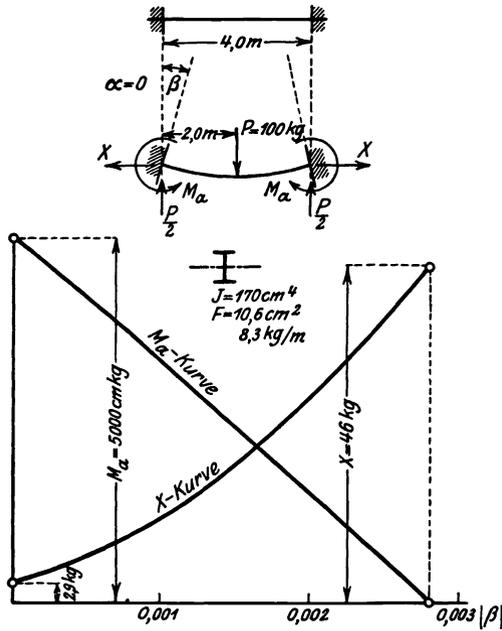


Abb. 19.

Die Längskraft X nimmt also mit $|\beta|$ verhältnismäßig rasch zu. Das Endmoment M_a nimmt mit wachsendem X ungefähr linear ab.

Ist

$$\beta = -0,001,$$

so berechnet sich

$$X = 12 \text{ kg}$$

und

$$y_{\text{Mitte}} = 0,19332 \text{ cm},$$

$$M_{\text{Mitte}} = 6784,04 \text{ cm kg}.$$

In bezug auf § 4 ist

$$\left. \begin{aligned} \frac{0,19332}{0,093371} &= 2,070 \\ \frac{0,19332}{0,37348} &= 0,518 \end{aligned} \right\} \text{für } y_{\text{Mitte}},$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{6784,04}{5000,00} &= 1,357 \\ \frac{6784,04}{10000,00} &= 0,678 \end{aligned} \right\} \text{für } M_{\text{Mitte}}.$$

Bei dem angenommenen β fällt also in der Trägermitte die Durchbiegung etwa zweimal, das Moment anderthalbmal so groß aus, als bei dem Träger, der mit wagerecht verschiebbarem Ende versehen ist. Im Vergleich zu dem Fall, wo der Träger mit wagerecht verschiebbaren Gelenken befestigt ist, vermindern sich diese Größen mit grober Annäherung auf 0,5.

§ 11. Die Mauer ist gegen Verdrehung des Trägerendes vollkommen unnachgiebig, gestattet aber eine gewisse wagerechte Verschiebung desselben (Abb. 20).

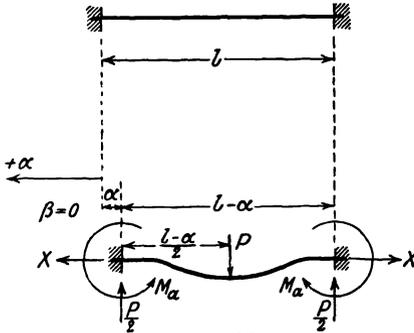


Abb. 20.

Das zu Anfang von § 10 für β Gesagte gilt hier für α . Es ist $\beta = 0$. Gl. (8a) liefert für X

$$(37) \frac{2 + \mathfrak{Cof} \omega - \frac{3 \mathfrak{Cin} \omega}{\omega}}{\omega^3 \mathfrak{Cof}^2 \frac{\omega}{2}} + \frac{256 \alpha K^2 J^2}{P^2 \omega^3 (l + \alpha)^5} - \frac{1024 K^2 J^3}{P^2 F (l + \alpha)^6} = 0.$$

Ferner erhält man

$$(38) \quad \begin{cases} y_{\text{Mitte}} = \frac{P(l + \alpha)}{2 \omega \bar{X}} \left[\frac{\omega}{2} - \bar{X} g \frac{\omega}{2} \right], \\ M_{\text{Mitte}} = \frac{P(l + \alpha)}{4 \omega} \bar{X} g \frac{\omega}{2}. \end{cases}$$

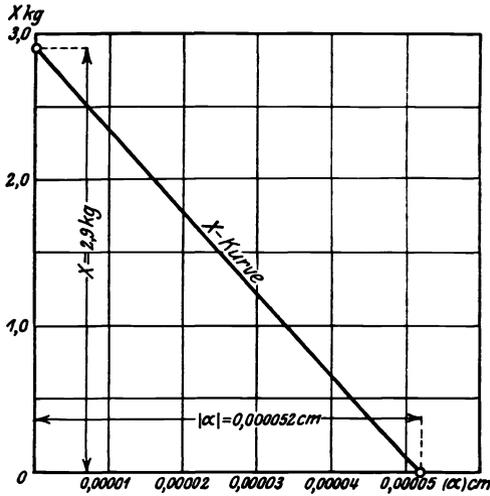
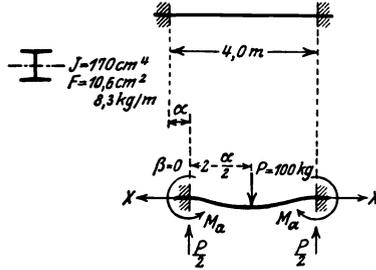


Abb. 21.

Zur Erläuterung diene folgendes Zahlenbeispiel:

Ist $\alpha = -0,00003$ cm, so beträgt

$$X = 1,2 \text{ kg,}$$

$$y_{\text{Mitte}} = 0,093369 \text{ cm,}$$

$$M_{\text{Mitte}} = 4999,94 \text{ cm/kg.}$$

38 Das Einmauerungsmaterial ist in gewissem Grade nachgiebig.

Mit Rücksicht auf § 4 ist zu bemerken, daß die angenommene Bedingung keinen wesentlichen Einfluß auf die letzten zwei Größen ausübt (vgl. § 4 den Fall $X=0$, $\beta=0$). In Abb. 21 ist die X -Kurve als Funktion der Verschiebung α dargestellt.

§ 12. Der Träger ist beiderseits gelenkartig befestigt; eines der Gelenke ist in gewissem Grade wagerecht verschiebbar.

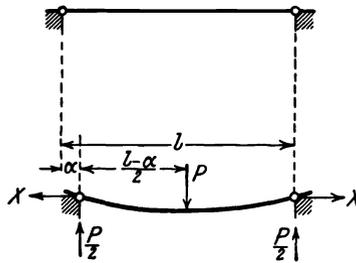


Abb. 22.

Ist $M_a=0$. Die X -Gleichung (8) geht somit in

$$(39) \quad \frac{2 + \mathfrak{Cof} 2\omega - \frac{3 \mathfrak{Cin} 2\omega}{2\omega}}{(2\omega)^6 \mathfrak{Cof}^2 \omega} + \frac{4\alpha K^2 J^3}{P^2 \omega^2 (l+\alpha)^5} - \frac{16 K^2 J^3}{P^2 F (l+\alpha)^6} = 0$$

über.

Die Verschiebung α muß notwendig kleiner sein als $\frac{P^2 l^5}{960 E^2 J^2}$ [vgl. Gl. (11)]. Ferner liefern Gln. (4), (5)

$$(40) \quad \begin{cases} y_{\text{Mitte}} = \frac{P(l+\alpha)}{4X} \left[1 - \frac{\mathfrak{Xg} \omega}{\omega} \right], \\ M_{\text{Mitte}} = \frac{P(l+\alpha)}{4\omega} \mathfrak{Xg} \omega. \end{cases}$$

Nimmt man bei dem in § 4 angegebenen Doppel-T-Träger $\alpha = -0,0002$ cm an, so erhält man aus Gl. (39)

$$X = 35 \text{ kg.}$$

Die Kraft X läßt sich also, wenn α ein Viertel seines Grenz-

wertes $0,00084 \text{ cm}$ (s. § 4) beträgt, nur auf $\frac{35}{46} \sim 0,76$ ihres Größtwertes vermindern.

Man bekommt ferner

$$y_{\text{Mitte}} = 0,37345 \text{ cm},$$

$$M_{\text{Mitte}} = 9986,93 \text{ cm kg}.$$

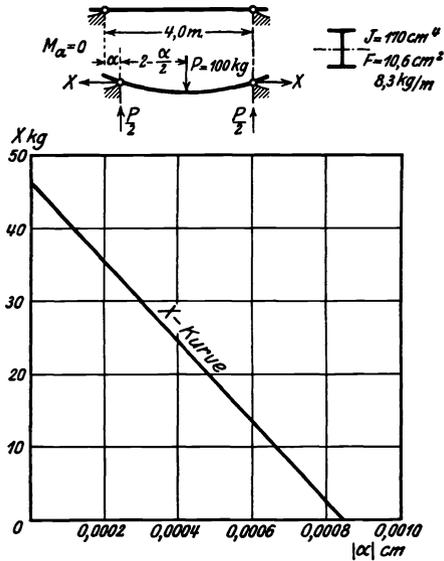


Abb. 23.

In Abb. 23 ist die X -Kurve als Funktion der Verschiebung α dargestellt. Wir erkennen daraus, daß die Gelenkkraft mit der Verschiebung etwa gleichmäßig abnimmt.

§ 13. Die Mauer ist sowohl für wagerechte Verschiebung als für Verdrehung des Trägers in gewissem Grade nachgiebig (Abb. 24).

Gln. (5 a), (9) und (8 a) gelten hierbei ohne weiteres. Es sei beispielsweise $\alpha = -0,00002 \text{ cm}$, $\beta = -0,002$.

40 Das Einmauerungsmaterial ist in gewissem Grade nachgiebig.

Mit den in § 4 angegebenen Zahlenwerten berechnet man

$$\begin{aligned} X &= 27 \text{ kg,} \\ y_{\text{Mitte}} &= 0,29331 \text{ cm,} \\ M_{\text{Mitte}} &= 8566,93 \text{ cm kg.} \end{aligned}$$

In bezug auf § 7 wird

$$\begin{aligned} \frac{0,29331}{0,093368} &= 3,14 \text{ für } y_{\text{Mitte}}, \\ \frac{8566,93}{4999,86} &= 1,71 \text{ für } M_{\text{Mitte}}. \end{aligned}$$

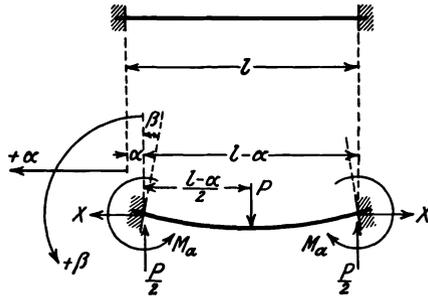


Abb. 24.

Der Träger erfährt also in der Mitte eine dreimal so große Senkung wie die eines entsprechenden vollkommen eingespannten Trägers, während das Moment etwa das Doppelte beträgt. Im Vergleich mit dem Beispiel in § 6 fällt X hier ungefähr zehnmal so groß aus, während es, da das Trägerende einer gewissen wagerechten Verschiebung unterworfen ist, im Gegenteil einen kleineren Wert erhalten müßte. Es ist leicht zu erkennen, daß dieser Unterschied nur durch die Voraussetzung $\beta = -0,002$ hervorgebracht ist; die Verdrehung β kann also, wie ersichtlich, einen bedeutenden Einfluß auf die Vermehrung der Gelenkkraft ausüben.

§ 14. Zusammenfassung der Rechnungsergebnisse.

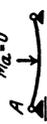
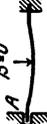
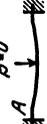
Der Übersichtlichkeit halber mögen die gewonnenen Ergebnisse für die gewählten Zahlenbeispiele folgendermaßen angegeben werden:

$J = 170 \text{ cm}^4$
 $F = 10,6 \text{ cm}^3$
 $8,3 \text{ kg/m}$
 $E = 210000 \text{ kg/cm}^2$

| | Gelenk A wagrecht vollkommen ver- schiebbar | Gelenk A in gewissem Grade verschiebbar | Gelenk A vollkommen starr | Ende A in gewissem Grade ver- schiebbar und verdrehbar | Ende A in gewissem Grade verdrehbar | Ende A wagrecht vollkommen verschiebbar | Ende A in gewissem Grade verschiebbar | Ende A vollkommen starr |
|--------------------------|---|--|---------------------------------|---|--|--|--|-------------------------------|
| y_{Mitte} cm | 0,37348 | 0,37345 | 0,37280 | 0,29331 | 0,19832 | 0,093871 | 0,093369 | 0,093368 |
| M_{Mitte} cm kg | 10000,00 | 9986,93 | 9982,87 | 8566,93 | 6784,04 | 5000,00 | 4999,94 | 4999,86 |
| X kg | 0 | 85 | 46 | 27 | 12 | 0 | 1,2 | 2,9 |

42 Das Einmauerungsmaterial ist in gewissem Grade nachgiebig.

Um den Vergleich zu erleichtern, fügen wir noch folgende Tafel hinzu, in welcher z. B. unter Angabe I y_{Mitte} , M_{Mitte} für den Fall $M_a = 0$, $X = 0$ als Einheit angenommen wurde.

| | | | | | | | | | | |
|-----|---|--------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| I | Gelenk A wagrecht vollkommen verschiebbar  | y_{Mitte} | 1,0 | 0,999920 | 0,998179 | 0,785343 | 0,517618 | 0,250003 | 0,249997 | 0,249995 |
| | | M_{Mitte} | 1,0 | 0,998693 | 0,998287 | 0,856693 | 0,678404 | 0,500000 | 0,499994 | 0,499994 |
| II | Ende A wagrecht vollkommen verschiebbar  | y_{Mitte} | 3,999957 | 3,999636 | 3,992674 | 3,141339 | 2,070450 | 1,0 | 0,999979 | 0,999968 |
| | | M_{Mitte} | 2,000000 | 1,997386 | 1,996574 | 1,713386 | 1,356808 | 1,0 | 0,999988 | 0,999972 |
| III | Ende A vollkommen starr  | y_{Mitte} | 4,000086 | 3,999764 | 3,992803 | 3,141440 | 2,070517 | 1,000032 | 1,000011 | 1,0 |
| | | M_{Mitte} | 2,000056 | 1,997442 | 1,996630 | 1,713434 | 1,356846 | 1,000028 | 1,000016 | 1,000016 |

Die einzelnen Zahlen der Tafel sind der vorigen Tabelle entsprechend aufzufassen.

§ 15. Nachbemerkungen.

In den vorhergehenden Paragraphen betrachteten wir die Verschiebungen α, β als beliebig angenommene Größen und zwar als solche, welche sowohl voneinander als auch von den äußeren Kräften, wozu auch X und M_a zählen, ganz unabhängig sind. Dies trifft in Wirklichkeit natürlich nicht zu, wenn der Träger mit der Mauer gewissen Verschiebungen unterliegt. Eine nähere Erklärung des wirklichen Zustandes könnte also nur dadurch erfolgen, daß man die Verschiebungen α, β als Funktionen aller übrigen Größen betrachtet. Am einfachsten möge

$$(41) \quad \begin{cases} \alpha = k_1 X, \\ \beta = k_2 M_a \end{cases}$$

gesetzt werden, wenn unter k_1, k_2 zwei Erfahrungszahlen verstanden sind. Bei weiterer Vervollständigung der Theorie in dieser Hinsicht kann die vorliegende Arbeit zweifellos als Grundlage dienen.

Unsere Formeln sind daher in sich unvollkommen, sie bedürfen einer weiteren Behandlung. Um sie in Anwendung bringen zu können, müssen die Verschiebungen α, β im einzelnen Fall mit irgendwelchen Meßinstrumenten hinreichend genau beobachtet werden.

IV. Der Träger ist gleichmäßig beschwert.

§ 16. Allgemeine Gleichungen.

Schließlich mögen die Formeln für den Fall beigelegt werden, bei dem sich die Einzellast P über die ganze Spannweite verteilen läßt (Abb. 25).

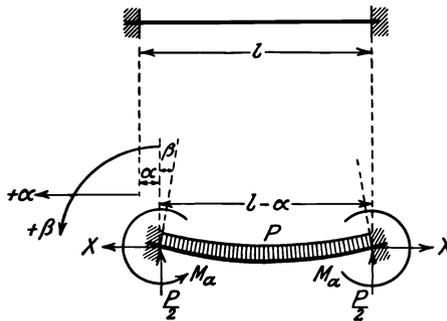


Abb. 25.

Es ist

$$q = \frac{P}{l + \alpha}.$$

Analog zu § 1 erhält man für die elastische Linie die Gleichung

$$\left\{ \begin{array}{l} y = C_1 e^{\frac{2\omega x}{l+\alpha}} + C_2 e^{-\frac{2\omega x}{l+\alpha}} + \frac{Px}{2X} - \frac{qx^2}{2X} - \frac{M_a}{X} - \frac{qKJ}{X^2}, \\ \text{worin} \\ \omega = \frac{l+\alpha}{2} \sqrt{\frac{X}{KJ}}. \end{array} \right.$$

Aus den Bedingungen $y=0$ für $x=0$ und $\frac{dy}{dx}=0$ für $x = \frac{l+\alpha}{2}$ berechnet man

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{XM_a + qKJ}{2X^2 \mathfrak{Cof} \omega} [\mathfrak{Cof} \omega - \mathfrak{Sin} \omega], \\ C_2 = \frac{XM_a + qKJ}{2X^2 \mathfrak{Cof} \omega} [\mathfrak{Cof} \omega + \mathfrak{Sin} \omega]. \end{array} \right.$$

Es folgt somit:

$$(42) \quad y = \frac{Px}{2X} \left[1 - \frac{x}{l+\alpha} \right] - \left[\frac{M_a}{X} + \frac{PKJ}{X^2(l+\alpha)} \right] \left[1 - \frac{\mathfrak{Cof} \left(\frac{2x\omega}{l+\alpha} - \omega \right)}{\mathfrak{Cof} \omega} \right]$$

und

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} M = \frac{PKJ}{X(l+\alpha)} \left[1 - \frac{\mathfrak{Cof} \left(\frac{2x\omega}{l+\alpha} - \omega \right)}{\mathfrak{Cof} \omega} \right] - \frac{M_a \mathfrak{Cof} \left(\frac{2x\omega}{l+\alpha} - \omega \right)}{\mathfrak{Cof} \omega}, \\ Q = \frac{\mathfrak{Sin} \left(\omega - \frac{2x\omega}{l+\alpha} \right)}{\mathfrak{Cof} \omega} \left[\frac{P}{2\omega} + \frac{2M_a\omega}{l+\alpha} \right]. \end{array} \right.$$

Wählt man den Hauptträger bei der vorliegenden gleichmäßig verteilten Last, so wie wir ihn bei einer Mittellast in § 5 gefunden haben, dann bekommt man zwischen den Verschiebungen α , β und übrigen gegebenen Größen die zwei Gleichungen:

$$(44) \left\{ \begin{aligned} & \frac{P^2}{96 \mathfrak{S} \sin^2 \omega} \left[4 \mathfrak{S} \sin^2 \omega - \frac{9 \mathfrak{S} \sin 2 \omega}{\omega} + \frac{24 \mathfrak{S} \sin^2 \omega}{\omega^2} - 6 \right] \\ & - \frac{P X \beta}{8 \mathfrak{S} \sin^2 \omega} \left[2 + \frac{\mathfrak{S} \sin 2 \omega}{\omega} - \frac{4 \mathfrak{S} \sin^2 \omega}{\omega^2} \right] + \frac{X^2 \beta^2}{8 \mathfrak{S} \sin^2 \omega} \left[\frac{\mathfrak{S} \sin 2 \omega}{\omega} - 2 \right] \\ & - \frac{X^3}{K F} + \frac{\alpha X^2}{l + \alpha} = 0, \\ & M_a = \frac{P(l + \alpha)}{4 \omega^2} \left[\frac{\omega}{\mathfrak{X} g \omega} - 1 \right] + \frac{\beta X(l + \alpha)}{2 \omega \mathfrak{X} g \omega}. \end{aligned} \right.$$

§ 17. Der Träger ist vollkommen eingespannt.

Man nehme als äußere Kraft nur die verteilte Last q an; X, M_a werden als von der erfolgten Formänderung herrührend angesehen. Dann gelten die obigen Gleichungen, wenn darin $\alpha = 0, \beta = 0$ gesetzt wird. Sie rechnen sich um zu:

$$(45) \left\{ \begin{aligned} & \frac{P^2}{96 \mathfrak{S} \sin^2 \omega} \left[4 \mathfrak{S} \sin^2 \omega - \frac{9 \mathfrak{S} \sin 2 \omega}{\omega} + \frac{24 \mathfrak{S} \sin^2 \omega}{\omega^2} - 6 \right] - \frac{X^3}{K F} = 0, \\ & M_a = \frac{P l}{4 \omega^2} \left[\frac{\omega}{\mathfrak{X} g \omega} - 1 \right], \\ & \text{wenn} \\ & \omega = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{X}{K J}}. \end{aligned} \right.$$

Die erste Gleichung gestaltet sich weiter zu

$$(46) \frac{1}{\omega^6 \mathfrak{S} \sin^2 \omega} \left[4 \mathfrak{S} \sin^2 \omega - \frac{9 \mathfrak{S} \sin 2 \omega}{\omega} + \frac{24 \mathfrak{S} \sin^2 \omega}{\omega^2} - 6 \right] - \frac{6144 K^2 J^3}{P^2 F l^6} = 0.$$

Das erste Glied ist in der Tabelle 4 zahlenmäßig angegeben.

Setzt man in Gl. (42) $M_a = \frac{P l}{4 \omega^2} \left[\frac{\omega}{\mathfrak{X} g \omega} - 1 \right], \alpha = 0,$ so erhält man

$$(47) y = \frac{P}{2 X} \left[x \left(1 - \frac{x}{l} \right) - \frac{l \mathfrak{S} \sin \left(\frac{x \omega}{l} \right) \mathfrak{S} \sin \left(\omega - \frac{x \omega}{l} \right)}{\omega \mathfrak{S} \sin \omega} \right]$$

und ferner

$$(48) \quad y_{\text{Mitte}} = \frac{Pl}{8X} \left[1 - \frac{\mathfrak{I}g \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} \right].$$

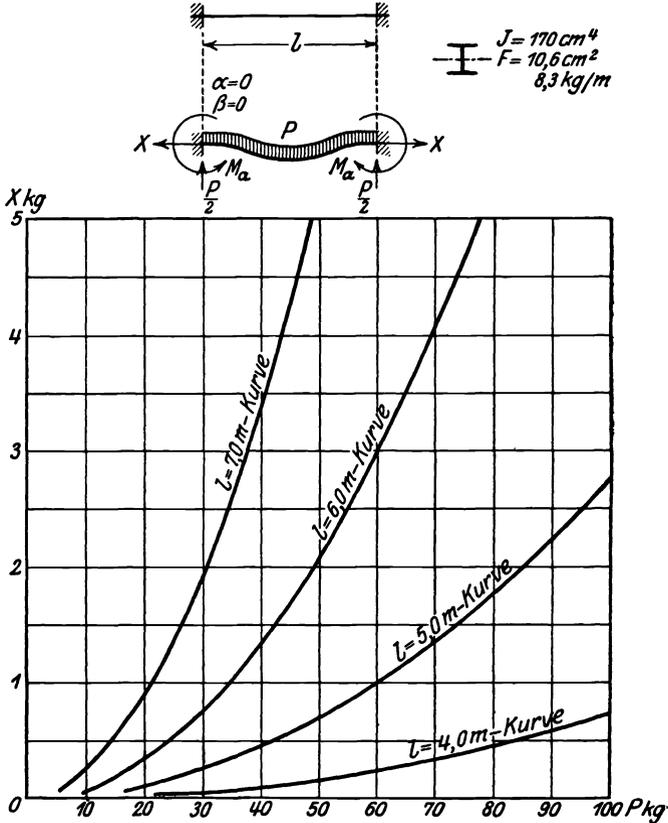


Abb. 26.

Der Ausdruck für M (Gl. 43) vereinfacht sich in

$$(49) \quad M = \frac{Pl}{4\omega^3} \left[1 - \frac{\omega \mathfrak{C}of \left(\frac{2x\omega}{l} - \omega \right)}{\mathfrak{S}in \omega} \right].$$

Daraus folgt:

$$(50) \quad M_{\text{Mitte}} = \frac{Pl}{4\omega^2} \left[1 - \frac{\omega}{\text{Sin } \omega} \right].$$

Es sei beispielsweise $q = \frac{100}{400} = 0,25 \text{ kg/cm}$.

Mit den Zahlenwerten in § 4 berechnet sich

$$\begin{aligned} X &= 0,74 \text{ kg,} \\ y_{\text{Mitte}} &= 0,04662 \text{ cm,} \\ M_{\text{Mitte}} &= 1666,64 \text{ cm kg.} \end{aligned}$$

Im Vergleich mit den Ergebnissen in § 7 vermindert sich die Kraft X etwa auf 25 v. H., die Mittelsenkung etwa auf 50 v. H. und das Moment M_{Mitte} auf 30 v. H.

Wir nehmen jetzt bei den in § 4 angegebenen Werten von J , F , E die Größe l als veränderlich an. Die X -Kurve ist in Abb. 26 für $l=400$, 500, 600 und 700 cm entworfen.

Die Vergrößerung der Spannweite hat also eine bedeutende Zunahme der Kraft X zur Folge.

§ 18. Eines der Einmauerungsenden ist wagerecht verschiebbar

(Abb. 27).

Es ist $\beta = 0$, $X = 0$. Mit bezug auf Gl. (44) erhält man

$$(51) \quad \begin{cases} \alpha_b \sim \frac{P^2 l^5}{60480 E^2 J^2}, \\ M_a \sim \frac{Pl}{12}. \end{cases}$$

Gln. (48), (50) liefern

$$(52) \quad \begin{cases} y_{\text{Mitte}} = \lim_{X=0} \frac{P(l-\alpha_b)}{8X} \left[1 - \frac{\text{Xg } \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} \right] = \frac{Pl^3}{384 EJ} \left[1 - \frac{P^2 l^4}{60480 E^2 J^2} \right]^3, \\ M_{\text{Mitte}} = \lim_{X=0} \frac{P(l-\alpha_b)}{4\omega^2} \left[1 - \frac{\omega}{\text{Sin } \omega} \right] = \frac{Pl}{24} \left[1 - \frac{P^2 l^4}{60480 E^2 J^2} \right]. \end{cases}$$

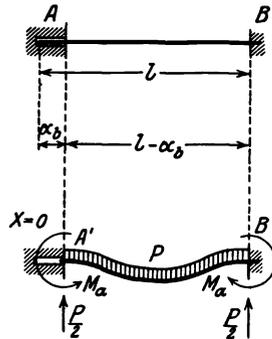


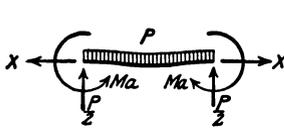
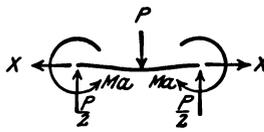
Abb. 27.

Mit den in § 4 angegebenen Zahlenwerten berechnet sich

$$\begin{aligned}\alpha_a &= 0,000013 \text{ cm,} \\ M_a &= 3333,33 \text{ cm kg,} \\ y_{\text{Mitte}} &= 0,04669 \text{ cm,} \\ M_{\text{Mitte}} &= 1666,67 \text{ cm kg.}\end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf § 4 sieht man, daß diese Größen ohne Ausnahme eine beträchtliche Verminderung erfahren; der Träger ist also bei gleichmäßig verteilter Last weniger beansprucht, als wenn sich die Last in der Trägermitte konzentriert.

Die folgende Tafel erlaubt einen Vergleich der Rechnungsergebnisse beider Belastungsarten:

| |  | |  | |
|--------------------------|---|------------------------|---|------------------------|
| | Für $\alpha = 0$ $\beta = 0$ | $X = 0$ $\beta = 0$ | $\alpha = 0$ $\beta = 0$ | $X = 0$ $\beta = 0$ |
| $ \alpha $ cm | 0 | 0,000013 | 0 | 0,000052 |
| y_{Mitte} cm | 0,04662 | 0,04669 | 0,093368 | 0,093371 |
| M_{Mitte} cm kg | 1666,64 | 1666,67 | 4999,86 | 5000,00 |
| X kg | 0,74 | 0 | 2,9 | 0 |
| M_a cm kg | 3333,13 | 3333,33 | 4999,86 | 5000,00 |

| | | |
|---|-------------------------|-------------------------------|
|  | $J = 170 \text{ cm}^4$ | $E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$ |
| | $F = 10,6 \text{ cm}^2$ | $P = 100 \text{ kg}$ |
| | $8,3 \text{ kg/m}$ | $l = 4,0 \text{ m.}$ |

Sämtliche Formeln, zu denen wir in den vorhergehenden Paragraphen gelangten, enthalten transzendente Größen und gestatten leider keinen leicht erfassbaren Schluß zu ziehen. Wir begnügen uns daher mit einer übersichtlichen Zusammenstellung

der graphischen Darstellungen, die wir im Verlauf der Ab-
handlung für einen bestimmten Träger aufgestellt haben (Abb. 28).

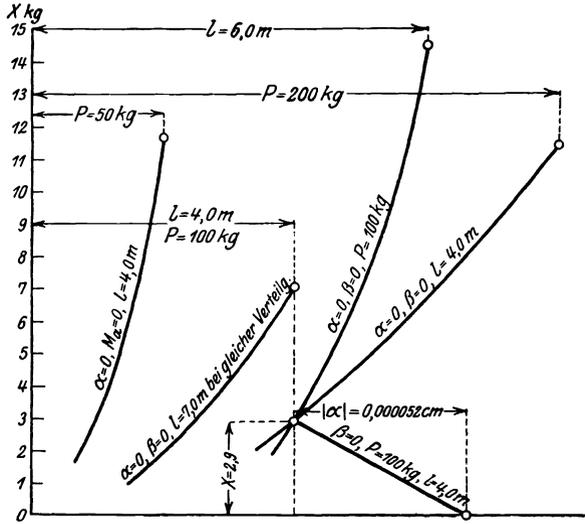


Abb. 28.

Tabelle 3.

| ω | $\frac{\sin \omega - \omega}{\omega^3 \cos^2 \frac{\omega}{2}}$ | $\frac{\sin 2\omega - 2\omega}{\omega^3 \sin^2 \omega}$ | ω | $\frac{\sin \omega - \omega}{\omega^3 \cos^2 \frac{\omega}{2}}$ | $\frac{\sin 2\omega - 2\omega}{\omega^3 \sin^2 \omega}$ |
|----------|---|---|----------|---|---|
| 0 | ∞ | ∞ | | | |
| 0,001 | 166 666,6333 | 1333 333,6000 | 0,016 | 651,0083 | 5 208,1545 |
| 2 | 41 666,6333 | 333 333,6000 | 17 | 576,6679 | 4 613,4330 |
| 3 | 18 518,4851 | 148 148,4148 | 18 | 514,3700 | 4 115,0485 |
| 4 | 10 416,6333 | 83 333,6000 | 19 | 461,6472 | 3 693,2668 |
| 5 | 6 666,6333 | 53 333,1733 | 0,020 | 416,6333 | 3 333,1559 |
| 6 | 4 629,5963 | 37 036,8922 | 21 | 377,8956 | 3 023,2540 |
| 7 | 3 401,3272 | 27 210,7068 | 22 | 344,3193 | 2 754,6431 |
| 8 | 2 604,6333 | 20 833,1443 | 23 | 315,0265 | 2 520,3011 |
| 9 | 2 057,5798 | 16 460,7249 | 24 | 289,3185 | 2 314,6371 |
| 0,010 | 1 666,6333 | 13 333,1600 | 25 | 266,6333 | 2 133,1556 |
| 11 | 1 377,3771 | 11 019,1042 | 26 | 246,5150 | 1 972,2089 |
| 12 | 1 157,3741 | 9 259,0823 | 27 | 228,5903 | 1 828,8116 |
| 13 | 986,1600 | 7 889,3695 | 28 | 212,5517 | 1 700,5045 |
| 14 | 850,3068 | 6 802,5435 | 29 | 198,1434 | 1 585,2364 |
| 15 | 740,7074 | 5 925,7475 | 0,030 | 185,1518 | 1 481,3038 |

Tabelle 3 (Fortsetzung).

| ω | $\frac{\sin \omega - \omega}{\omega^3 \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$ | $\frac{\sin 2\omega - 2\omega}{\omega^3 \sin^2 \omega}$ | ω | $\frac{\sin \omega - \omega}{\omega^3 \left(\frac{\omega}{2}\right)^2}$ | $\frac{\sin 2\omega - 2\omega}{\omega^3 \sin^2 \omega}$ |
|----------|---|---|----------|---|---|
| 0,031 | 173,3971 | 1387,2659 | 0,066 | 38,2281 | 305,9135 |
| 32 | 162,7271 | 1301,9055 | 67 | 37,0945 | 296,8447 |
| 33 | 153,0123 | 1224,1871 | 68 | 36,0105 | 288,1730 |
| 34 | 144,1420 | 1153,2280 | 69 | 34,9733 | 279,8756 |
| 35 | 136,0211 | 1088,2576 | 0,070 | 33,9803 | 271,9310 |
| 36 | 128,5675 | 1028,6288 | 71 | 33,0289 | 264,3201 |
| 37 | 121,7100 | 973,7692 | 72 | 32,1169 | 257,0240 |
| 38 | 115,3868 | 923,1832 | 73 | 31,2421 | 250,0256 |
| 39 | 109,5437 | 876,4385 | 74 | 30,4025 | 243,3091 |
| 0,040 | 104,1333 | 833,1556 | 75 | 29,5963 | 236,8594 |
| 41 | 99,1140 | 793,0009 | 76 | 28,8217 | 230,6626 |
| 42 | 94,4489 | 755,6801 | 77 | 28,0771 | 224,7057 |
| 43 | 90,1055 | 720,9328 | 78 | 27,3609 | 218,9764 |
| 44 | 86,0548 | 688,5275 | 79 | 26,6718 | 213,4634 |
| 45 | 82,2712 | 658,2585 | 0,080 | 26,0084 | 208,1557 |
| 46 | 78,7316 | 629,9412 | 81 | 25,3693 | 203,0434 |
| 47 | 75,4156 | 603,4137 | 82 | 24,7535 | 198,1106 |
| 48 | 72,3046 | 578,5264 | 83 | 24,1598 | 193,3677 |
| 49 | 69,3822 | 555,1465 | 84 | 23,5873 | 188,7869 |
| 0,050 | 66,6333 | 533,1556 | 85 | 23,0347 | 184,3668 |
| 51 | 64,0446 | 512,4456 | 86 | 22,5014 | 180,1000 |
| 52 | 61,6038 | 492,4456 | 87 | 21,9863 | 175,9795 |
| 53 | 59,2998 | 474,4871 | 88 | 21,4887 | 171,9987 |
| 54 | 57,1226 | 457,0697 | 89 | 21,0078 | 168,1513 |
| 55 | 55,0631 | 440,5937 | 0,090 | 20,5428 | 164,4315 |
| 56 | 53,1129 | 424,9924 | 91 | 20,0931 | 160,8336 |
| 57 | 51,2645 | 410,1742 | 92 | 19,6579 | 157,3524 |
| 58 | 49,5109 | 396,1758 | 93 | 19,2368 | 153,9828 |
| 59 | 47,8457 | 382,8540 | 94 | 18,8289 | 150,7211 |
| 0,060 | 46,2630 | 370,1972 | 95 | 18,4339 | 147,5602 |
| 61 | 44,7575 | 358,1489 | 96 | 18,0512 | 144,4984 |
| 62 | 43,3243 | 346,6832 | 97 | 17,6802 | 141,5308 |
| 63 | 41,9588 | 335,7592 | 98 | 17,3206 | 138,6535 |
| 64 | 40,6568 | 325,3432 | 99 | 16,9718 | 135,8630 |
| 65 | 39,4144 | 315,4042 | 0,100 | 16,6334 | 133,1558 |
| | | | ∞ | 0 | 0 |

Tabelle 4.

| ω | $4 \sin^2 \omega + \frac{24 \sin^2 \omega}{\omega^2} - \frac{9 \sin 2\omega}{\omega} - 6$ | ω | $4 \sin^2 \omega + \frac{24 \sin^2 \omega}{\omega^2} - \frac{9 \sin 2\omega}{\omega} - 6$ |
|----------|---|----------|---|
| | $\omega^6 \sin^2 \omega$ | | $\omega^6 \sin^2 \omega$ |
| 0 | ∞ | | |
| 0,001 | 25396,8 | 0,041 | 15,1 |
| 2 | 6349,2 | 42 | 14,4 |
| 3 | 2821,9 | 43 | 13,8 |
| 4 | 1587,3 | 44 | 13,1 |
| 5 | 1015,9 | 45 | 12,5 |
| 6 | 705,5 | 46 | 12,0 |
| 7 | 518,3 | 47 | 11,5 |
| 8 | 396,8 | 48 | 11,0 |
| 9 | 313,5 | 49 | 10,6 |
| 0,010 | 254,0 | 0,050 | 10,2 |
| 11 | 209,9 | 51 | 9,76 |
| 12 | 176,4 | 52 | 9,39 |
| 13 | 150,3 | 53 | 9,04 |
| 14 | 129,6 | 54 | 8,70 |
| 15 | 112,9 | 55 | 8,39 |
| 16 | 99,2 | 56 | 8,09 |
| 17 | 87,9 | 57 | 7,81 |
| 18 | 78,4 | 58 | 7,54 |
| 19 | 70,3 | 59 | 7,29 |
| 0,020 | 63,5 | 0,060 | 7,05 |
| 21 | 57,6 | 61 | 6,82 |
| 22 | 52,5 | 62 | 6,60 |
| 23 | 48,0 | 63 | 6,39 |
| 24 | 44,1 | 64 | 6,20 |
| 25 | 40,6 | 65 | 6,01 |
| 26 | 37,6 | 66 | 5,83 |
| 27 | 34,8 | 67 | 5,65 |
| 28 | 32,4 | 68 | 5,49 |
| 29 | 30,2 | 69 | 5,33 |
| 0,030 | 28,2 | 0,070 | 5,18 |
| 31 | 26,4 | 71 | 5,03 |
| 32 | 24,8 | 72 | 4,89 |
| 33 | 23,3 | 73 | 4,76 |
| 34 | 22,0 | 74 | 4,63 |
| 35 | 20,7 | 75 | 4,51 |
| 36 | 19,6 | 76 | 4,39 |
| 37 | 18,5 | 77 | 4,28 |
| 38 | 17,6 | 78 | 4,12 |
| 39 | 16,7 | 79 | 4,06 |
| 0,040 | 15,9 | 0,080 | 3,96 |

Tabelle 4 (Fortsetzung).

| ω | $4 \sin^2 \omega + \frac{24 \sin^2 \omega}{\omega^2} - \frac{9 \sin 2 \omega}{\omega} - 6$ | ω | $4 \sin^2 \omega + \frac{24 \sin^2 \omega}{\omega^2} - \frac{9 \sin 2 \omega}{\omega} - 6$ |
|----------|--|----------|--|
| | $\omega^6 \sin^2 \omega$ | | $\omega^6 \sin^2 \omega$ |
| 0,081 | 3,87 | 0,091 | 3,06 |
| 82 | 3,77 | 92 | 3,00 |
| 83 | 3,68 | 93 | 2,93 |
| 84 | 3,59 | 94 | 2,87 |
| 85 | 3,51 | 95 | 2,81 |
| 86 | 3,43 | 96 | 2,75 |
| 87 | 3,35 | 97 | 2,69 |
| 88 | 3,27 | 98 | 2,64 |
| 89 | 3,20 | 99 | 2,59 |
| 0,090 | 3,12 | 0,100 | 2,53 |
| | | ∞ | 0 |

Additional information of this book

*(Zum Berechnung des beiderseits eingemauerten Trägers
unter besonderer Berücksichtigung der Längskraft;
978-3-662-27948-9) is provided:*



<http://Extras.Springer.com>

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9

Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage und ihre Anwendung auf den Tiefbau

nebst einer Tafel

der Kreis- und Hyperbelfunktionen

Von

Keiichi Hayashi

Professor an der Kaiserlichen Kyushu-Universität
Fukuoka-Hakosaki, Japan

Mit 150 Textfiguren. 1921

7.50 Goldmark; gebunden 9.40 Goldmark / 1.80 Dollar; gebunden 2.25 Dollar

Die Knickfestigkeit. Von Dr.-Ing. **Rudolf Mayer**, Privatdozent an der Technischen Hochschule in Karlsruhe. Mit 280 Textabbildungen und 87 Tabellen. 1921. 16 Goldmark / 4.30 Dollar

Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach der Methode des Viermomentensatzes. Von Ing. **Fr. Bleich**, Wien. Mit 108 Textfiguren. 1918. 10 Goldmark / 2.40 Dollar

Theorie und Berechnung der statisch unbestimmten Tragwerke. Elementares Lehrbuch. Von **H. Buchholz**. Mit 303 Textabbildungen. 1921. 8 Goldmark / 2 Dollar

Berechnung von Rahmenkonstruktionen und statisch unbestimmten Systemen des Eisen- und Eisenbetonbaues. Von Ingenieur **P. Ernst Glaser**. Mit 112 Textabbildungen. 1919. 3.60 Goldmark / 0.90 Dollar

Mehrteilige Rahmen. Verfahren zur einfachen Berechnung von mehrstieligen, mehrstöckigen und mehrteiligen geschlossenen Rahmen (Rahmenbalkenträgern). Von Ingenieur **Gustav Spiegel**. Mit 107 Textabbildungen. 1920. 5 Goldmark / 1.25 Dollar

Die Berechnung des symmetrischen Stockwerkrahmens mit geneigten und lotrechten Ständern mit Hilfe von Differenzgleichungen. Von Dr. techn. **Josef Fritsche**, Ingenieur, Prag. 1923. 3 Goldmark / 0.75 Dollar

Die linearen Differenzgleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen. Von Dr. **Paul Funk**, Privatdozent an der Deutschen Universität und an der Technischen Hochschule in Prag. Mit 24 Textabbildungen. 1920. 2.50 Goldmark / 0.75 Dollar

Die Methode der Festpunkte zur Berechnung der statisch unbestimmten Konstruktionen mit zahlreichen Beispielen aus der Praxis insbesondere ausgeführten Eisenbetontragwerken. Von Dr.-Ing. Ernst Suter. Mit 591 Figuren im Text und auf 15 Tafeln. 1923. 19 Goldmark; gebunden 21 Goldmark / 4.55 Dollar; gebunden 5.05 Dollar

Statik der Vierendeelträger. Von Dr.-Ing. Karl Kriso. Mit 185 Textfiguren und 11 Tabellen. 1922. 11 Goldmark; gebunden 13 Goldmark / 2.55 Dollar; gebunden 3.10 Dollar

Kompendium der Statik der Baukonstruktionen. Von Privatdozent Dr.-Ing. J. Pirlet, Aachen. In zwei Bänden.

Erster Band: **Die statisch bestimmten Systeme.** Vollwandige Systeme und Fachwerke. In Vorbereitung.

Zweiter Band: **Die statisch unbestimmten Systeme.** In vier Teilen.

Zweiter Band, 1. Teil: **Die allgemeinen Grundlagen zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme.** Die Untersuchung elastischer Formänderungen. Die Elastizitätsgleichungen und deren Auflösung. Mit 136 Textfiguren. 1921.

6.50 Goldmark; gebunden 8.50 Goldmark / 1.55 Dollar; geb. 2 Dollar

Zweiter Band, 2. Teil: **Berechnung der einfacheren statisch unbestimmten Systeme: Grade Balken mit Endeinspannungen und mehr als zwei Stützen. — Einfache Rahmengebilde. Zweigelenkbogen. — Gewölbe. — Armierte Balken.** Mit 298 Textfiguren. 1923.

7.50 Goldmark; gebunden 9 Goldmark / 1.80 Dollar; geb. 2.15 Dollar

Zweiter Band, 3. Teil: **Die hochgradig statisch unbestimmten Systeme. Durchlaufende Träger auf starren und elastischen Stützen. Fachwerke mit starren Knotenpunktverbindungen. — Stockwerkrahmen. — Vierendeelträger und verwandte Rahmengebilde.** In Vorbereitung.

Zweiter Band, 4. Teil: **Das statisch unbestimmte Fachwerk. Aufgaben des Brücken- und Eisenhochbaues.** In Vorbereitung.

Festigkeitseigenschaften und Gefügebilder der Konstruktionsmaterialien. Von Dr.-Ing. C. Bach und E. Baumann, Professoren an der Technischen Hochschule Stuttgart. Zweite, stark vermehrte Auflage. Mit 936 Figuren. 1921. Geb. 15 Goldmark / Geb. 3.60 Dollar

Die Eisenkonstruktionen. Ein Lehrbuch für Schule und Zeichentisch nebst einem Anhang mit Zahlentafeln zum Gebrauch beim Berechnen und Entwerfen eiserner Bauwerke. Von Dipl.-Ing. Prof. L. Geusen, Studienrat in Dortmund. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 522 Figuren im Text und auf 2 farbigen Tafeln. 1921. Geb. 12 Goldmark / Geb. 2.90 Dollar

Taschenbuch für Bauingenieure. Unter Mitwirkung von Fachleuten herausgegeben von Geh. Hofrat Prof. Dr.-Ing. E. h. M. Foerster, Dresden. Vierte, verbesserte und erweiterte Auflage. Mit 3193 Textfiguren. In zwei Teilen. 1921. Geb. 24 Goldmark / Geb. 5.75 Dollar