

INTEGRALGLEICHUNGEN

EINFÜHRUNG IN LEHRE UND GEBRAUCH

VON

DR. PHIL. GEORG HAMEL

O. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE BERLIN

MIT 19 ABBILDUNGEN IM TEXT



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1937

ISBN-13: 978-3-642-89794-8
DOI: 10.1007/978-3-642-91651-9

e-ISBN-13: 978-3-642-91651-9

ALLE RECHTE, INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG
IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.

COPYRIGHT 1937 BY JULIUS SPRINGER IN BERLIN.

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1937

MEINER TOCHTER INGEBURG
ZUR HOCHZEIT GEWIDMET

Vorwort.

Das Buch über Integralgleichungen, das ich hier vorlege, ist aus sechs doppelstündigen Vorlesungen entstanden, die ich im Außeninstitut der Technischen Hochschule Berlin im Frühjahr 1937 gehalten habe. Solche Vorlesungen haben den Zweck, Herren, die mitten in der Praxis stehen, in einen ihnen weniger bekannten Gegenstand einzuführen und zu zeigen, wie man ihn verwenden kann. Der Besuch zeigte, daß für Integralgleichungen bei Ingenieuren und Physikern Interesse besteht, und so folgte ich dem Angebot der Verlagsbuchhandlung Julius Springer, die Vorlesungen herauszugeben.

Das Buch soll durchaus den Charakter der Vorlesungen behalten. Daraus folgt, daß es im üblichen Sinn kein Lehrbuch ist und noch weniger ein Handbuch, auch nicht ein solches der Angewandten Mathematik. Es soll in den Gegenstand einführen, und zwar vor allem Männer der Praxis, denen eine schöne Anwendung wichtiger ist als ein langer Existenzbeweis. Darum stehen am Beginn stets einzelne bestimmte Aufgaben, auch sind die Methoden der Rechnung betont, die Gedanken rein mathematischer Art sind herausgearbeitet, die Beweise fehlen nicht, soweit sie zum Verständnis wichtig sind, aber sie kommen oft später, auch sind bewußt Lücken gelassen, doch nur solche, die der Mathematiker empfindet; ich hoffe außerdem, sie überall angegeben zu haben. Daher kann auch der Student der Mathematik das Buch benutzen, namentlich den ersten Teil; er möge nur die Originalarbeit von ERHARDT SCHMIDT daneben legen.

Dieser erste Teil ist fast wörtlich meine Vorlesung. Der zweite bringt weitere Ausführungen, die am Schreibtisch unter Benutzung von regelmäßigen Vorlesungen über Integralgleichungen entstanden sind. Auch der zweite Teil soll den Charakter des Buches wahren. Er enthält viele einzelne Probleme, die ganz durchgeführt sind; die Theorie von FREDHOLM ist soweit dargestellt wie im ersten die von SCHMIDT, dagegen kann man die großen Gedanken von HILBERT auf wenigen Seiten wohl klarzumachen versuchen, aber nicht durchführen. Hier kann es sich also nur um eine Art Referat handeln.

Der Charakter des Buches erstreckt sich auch auf die Angaben über das Schrifttum. Vollständige Literaturangaben sind dem Gelehrten willkommen, der Anfänger kann mit ihnen nichts anfangen. Man muß für ihn auswählen. Daher zu Anfang die wichtigsten Lehrbücher mit einer kurzen Bemerkung über ihre Art und dann weiter wenige,

ausgesuchte Literatur, die das tiefere Studium ermöglicht. Von da aus wird der Leser selber weiter finden.

Etwas wesentlich Neues steht in dem Buche nicht drin. Sollten ein paar Kleinigkeiten im zweiten Teil, so in den Nummern 5, 6, 7, 14b, 15 dem Kenner gefallen, so würde mich das freuen.

Mein Kamerad, Herr Dozent Dr. O. H. KELLER, hat mit Korrektur gelesen und mir manchen wertvollen Verbesserungsvorschlag gemacht. Herr Dipl.-Ing. GERHARD PAETZ hat den ersten Teil ausgearbeitet, zu dem Ganzen die Abbildungen gezeichnet, Sach- und Personenverzeichnis angefertigt und auch Korrektur gelesen. Das hat auch meine Tochter INGEBURG getan, die darin Sachkenntnis besitzt. Ihnen allen meinen besten Dank. Dieser gebührt aber besonders dem Verlag für die schnelle und gute Arbeit und die Ausstattung, die wie immer bei Springer mustergültig ist.

Berlin, im Oktober 1937.

HAMEL.

Inhaltsübersicht.

Erster Teil.

Was ist eine Integralgleichung? Ergebnisse der mathematischen Theorie, insbesondere bei den linearen Integralgleichungen zweiter Art mit symmetrischem Kern.

	Seite
1. Einleitende Bemerkungen	1
2. Einfachste Schwingungsaufgaben führen auf eine lineare Integralgleichung mit symmetrischem Kern	2
a) Eine Integralgleichung erster Art	2
b) Eine Integralgleichung zweiter Art	5
c) Differentialgleichung der schwingenden Saite. Der Fundamentalsatz für symmetrische Integralgleichungen zweiter Art	7
d) Die inhomogene Integralgleichung. Ankündigung des Alternativsatzes	9
3. Zusammenhang mit den gewöhnlichen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung	10
a) Die allgemeine Differentialgleichung erster Ordnung und eine VOLTERRASche Integralgleichung	10
b) Die Differentialgleichung zweiter Ordnung	16
c) Die verallgemeinerte Schwingungsgleichung $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + p(x) \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + q(x) \cdot U = r(x) \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$	20
4. Der elementare Teil der Theorie	25
a) Die NEUMANNsche Reihe	25
b) Der lösende Kern	28
c) Ein negatives Ergebnis; die „umgestellte“ Gleichung. Orthogonalität von Funktionen	30
d) Die VOLTERRASche Integralgleichung. Vererbungserscheinungen	32
e) Zusammenstellung der Hauptsätze	34
5. Die Beziehungen der Integralgleichungen zu den partiellen Differentialgleichungen der Physik und andere physikalische Anwendungen	36
a) Die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie in der Ebene	36
b) $\Delta u = f$. GREENSche Funktion	40
c) Membran und Platte	43
d) Der Skineffekt	44
e) HILBERTS Begründung der elementaren Strahlungstheorie	46
6. Durchführung der Theorie für die symmetrischen Kerne	51
a) Der Fundamentalsatz. Berechnung des niedrigsten Eigenwertes. Die SCHWARZSche Ungleichheit.	51
b) Realität der Eigenwerte, Orthogonalität der Eigenfunktionen	58
c) Das Orthogonalisierungsverfahren	59
d) Frage der Entwickelbarkeit einer „willkürlichen“ Funktion nach den Eigenfunktionen eines Kerns	62

	Seite
e) BESSELSche Ungleichheit. PARSEVALSche Gleichung. Vollständigkeit	64
f) Konvergenzsätze über die Entwicklung der Kerne bei bestimmten Voraussetzungen	68
g) Beweise	71
h) Die Antwort auf 6d). Nachtrag zu 6a)	76
i) Die Auflösung der inhomogenen Gleichung. Partialbruchzerlegung des lösenden Kerns. Der Alternativsatz FREDHOLMS für symmetrische Kerne	80
k) Positiv-definite Kerne. Abgeschlossenheit. Variationsprinzip von GAUSS-HILBERT und DIRICHLET-RAYLEIGH. Der MERCERSche Satz.	83

Zweiter Teil.

Weitergehende Ausführungen.

1. Die lineare Integralgleichung erster Art	92
Anhang zu 1: Wie erkennt man lineare Abhängigkeit? Die GRAMSche Determinante	97
2. Ausgeartete unsymmetrische Integralgleichungen zweiter Art	99
3. Die FREDHOLMSche Theorie	102
4. Das Verfahren von ENSKOG	109
5. E. SCHMIDTS Theorie der unsymmetrischen Kerne	111
6. Quellenmäßige Darstellbarkeit und Entwickelbarkeit	117
7. Die polare Integralgleichung	121
8. HILBERTS erster Weg über ein algebraisches Problem zur Lösung linearer Integralgleichungen	122
9. Die Methode der unendlich vielen Variablen. Der HILBERTSche Raum	124
10. Unendlich viele lineare Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten	130
11. Die MATHIEUSche Gleichung	134
12. ABELS Integralgleichung	136
13. Singuläre Kerne. Beispiele.	139
14 a. Eine Integralgleichung aus der Theorie der Tragflügel	145
14 b. Die Integralgleichung von L. FÖPPL. (Härteproblem von HERTZ)	148
15. Einige weitere Orthogonalsysteme und ihre Kerne	151
16. Das Schwingungsproblem von DUFFING	158
17. Nichtlineare Integralgleichungen	160
Namenverzeichnis	164
Sachverzeichnis	165

Was ist eine Integralgleichung?

Ergebnisse der mathematischen Theorie, insbesondere bei den linearen Integralgleichungen zweiter Art mit symmetrischem Kern.

1. Einleitende Bemerkungen.

Wir wollen uns in diesem Buche mit Integralgleichungen und deren Anwendungen an Hand von Beispielen befassen. Es wird sich im Verlauf dieser Untersuchungen zeigen, daß uns die Theorie dieser Gleichungen erlauben wird, viele Einzelprobleme zusammenzufassen und gemeinsam zu behandeln. Diese allgemeine Theorie ist sehr umfassend, sie enthält weitgehend die Theorie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, greift aber weit über diese hinaus. So gehört alles, was die Lehre der sog. *Eigenwerte* und *Eigenfunktionen* anbetrifft, hierher, vor allem auch die Frage der Entwickelbarkeit einer Funktion nach solchen *Eigenfunktionen*: z. B. nach \sin und \cos . Daher enthält die Theorie der Integralgleichungen auch die Theorie der *FOURIERSchen* Reihen. Schließlich mündet unsere Theorie ein in eine Analysis von Funktionen unendlich vieler Variabler und in eine Geometrie des unendlich-dimensionalen *HILBERTSchen* Raumes. Auf solche Betrachtungen wird man gerade von den Anwendungen her geführt: unendlich viele Gleichungen mit unendlich vielen Variablen tauchen in vielen Aufgaben der Mechanik, der Himmelsmechanik sowie der technischen Mechanik auf.

Die mathematischen Voraussetzungen für die folgenden Untersuchungen sind gering: Differenzieren, Integrieren, ein wenig aus der Reihenlehre und aus der Funktionentheorie und gegen Ende das Auflösen linearer Gleichungen durch Determinanten sind das einzige, was zum Verständnis gefordert wird.

Bevor nun das Auftreten der Integralgleichungen an Hand von Beispielen gezeigt wird, sei noch einiges aus der Geschichte und der Literatur dieser Theorie vorausgeschickt. Der norwegische Mathematiker *N. H. ABEL* scheint als erster 1826 (*Oeuvres* Bd. I, Abh. IX) eine Integralgleichung gelöst zu haben. Den Namen und den Hinweis auf die Bedeutung dieser Gleichungen haben wir *DU BOIS-REYMOND* (1888) zu verdanken; einige Sonderfälle sind von *C. NEUMANN* (1887) und *H. POINCARÉ* (1894, 1896—1897) behandelt worden.

Die systematische Theorie allerdings wurde erst später, in den Jahren 1899, 1903, 1904, 1905 usw., von dem Schweden FREDHOLM¹ und den Deutschen D. HILBERT und ERHARD SCHMIDT entwickelt. Deren Schriften, zumal die „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen“ von HILBERT (Teubner 1912) und E. SCHMIDT'S² Dissertation „Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener“ sind auch heute noch für unser Gebiet grundlegend.

An Literatur können hier nur die zur Einführung geeignetsten Werke aufgeführt werden. Das Büchlein von WIARDA (Teubner 1930) erfüllt vielleicht am besten diesen Zweck, auch das Bändchen von HOHEISEL (Sammlung Götschen 1099, 1936) kann der Anfänger in die Hand nehmen. Das Buch von KNESER (Vieweg 1922) ist zwar sehr gut, aber etwas schwer geschrieben; auch das Buch von VIVANTI (deutsch von SCHWANK, Hannover 1929) stellt höhere Ansprüche; hervorzuheben ist bei letzterem ein ausführliches Literaturverzeichnis.

Nicht zu vergessen sind ferner die Abschnitte über Integralgleichungen in dem Sammelwerk von FRANK-MISES³ und in COURANT-HILBERT⁴. Auch KOWALEWSKI'S „Determinanten“ (1909) enthält eine ausführliche Darstellung der FREDHOLM'Schen Theorie.

Zum Nachschlagen dient der Bericht von HELLINGER und TOEPLITZ in der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften (Bd. II, 3).

Von fremdsprachiger Literatur sei nur genannt: BÔCHER⁵, GOURSAT⁶, HEYWOOD-FRÉCHET⁷, LALESCO⁸, VOLTERRA-PÉRÈS⁹.

2. Einfache Schwingungsaufgaben führen auf eine lineare Integralgleichung mit symmetrischem Kern.

a) **Eine Integralgleichung erster Art.** Es scheint zur Einführung in ein neues Gebiet der Mathematik das beste zu sein, daß man alte, schon mit bekannten Methoden gelöste Probleme in neuer Form behandelt. Daher soll hier auch die Einführung der linearen Integralgleichungen im Anschluß an bekannte Probleme der gespannten Saite vorgenommen werden.

¹ FREDHOLM: Acta math. Bd. 27 (1903).

² SCHMIDT, E.: Diss. Göttingen 1905; Math. Ann. Bd. 63.

³ FRANK-MISES: Die Differential- und Integralgleichungen der Physik. Braunschweig 1930—35.

⁴ COURANT-HILBERT: Methoden der mathematischen Physik. Berlin: Julius Springer 1931.

⁵ BÔCHER: An introduction to the study of integral equations (Cambridge 1909, Bd. 10).

⁶ GOURSAT: Cours d'Analyse, Bd. 3 (Paris 1923).

⁷ HEYWOOD-FRÉCHET: L'équation de FREDHOLM et ses applications à la physique mathématique (Paris 1923, 3^{me} éd.).

⁸ LALESCO: Introduction à la théorie des équations intégrales (Paris 1922).

⁹ VOLTERRA-PÉRÈS: Théorie générale des fonctionelles, t. I (Paris 1936).

Es liege eine gespannte Saite mit der Spannung S und der Länge l vor; an der Stelle z soll eine Last P senkrecht zur Ruhelage angreifen (Abb. 1):

Das Gewicht der Saite soll vernachlässigt werden können, und ferner soll P klein gegen S sein:

$$(1) \quad P \ll S.$$

Dann sind die Winkel α, β zwischen der ursprünglichen Lage der Saite und deren Lage bei Einwirken von P klein, man darf daher auch die Saitenspannung S als durch P nahezu unverändert betrachten (die Saite soll also „scharf“ gespannt sein). Wir suchen $y(z)$, die Größe der Ausbiegung an der Stelle z .

Da Gleichgewicht herrschen soll, folgt aus der Abbildung:

$$P = S(\sin \alpha + \sin \beta),$$

und da α, β klein sind, folgt weiter:

$$\begin{aligned} P &\approx S(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = S \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{l-z} \right) \\ &= S \cdot \frac{l \cdot y}{z \cdot (l-z)}, \end{aligned}$$

und hieraus

$$(2) \quad y(z) = \frac{P z \cdot (l-z)}{S l}.$$

Wir suchen jetzt $y(x)$, d. h. wir suchen die Gleichung der Dreieckskurve von Abb. 1. Diese Dreieckskurve werden wir noch oft wiedertreffen.

Hier sind nun die beiden Fälle $x < z$ und $x > z$ zu unterscheiden. Der Abbildung entnimmt man, daß im ersten Fall

$$(3) \quad \frac{y(x)}{y(z)} = \frac{x}{z},$$

und im zweiten Fall

$$(4) \quad \frac{y(x)}{y(z)} = \frac{l-x}{l-z}$$

gilt. Also folgt durch Einsetzen von (2) für $x < z$:

$$(5) \quad y(x) = y(z) \cdot \frac{x}{z} = \frac{P}{S} \cdot \frac{x \cdot (l-z)}{l},$$

und für $x > z$:

$$(6) \quad y(x) = y(z) \cdot \frac{l-x}{l-z} = \frac{P}{S} \cdot \frac{z \cdot (l-x)}{l}.$$

Für $x = z$ ist die Dreieckskurve noch stetig, wenn sie dort auch einen Knick hat. Wir führen nun eine neue Funktion $K(x, z)$ ein:

$$(7) \quad K(x, z) = \begin{cases} \frac{x \cdot (l-z)}{l} & x \leq z \\ \frac{z \cdot (l-x)}{l} & x \geq z, \end{cases}$$

und damit können wir die Formeln (5) und (6) für die Dreieckskurve in eine zusammenfassen:

$$(8) \quad y(x) = \frac{P}{S} \cdot K(x, z).$$

$K(x, z)$ heißt aus bald ersichtlichen Gründen der „*Dreieckskern*“; er wird in Zukunft auch oft als „*Musterkern*“ zitiert werden. Aus (8) folgt, daß K selbst eine Dreiecksfunktion ist.

Wichtig ist die Symmetrie von K :

$$(9) \quad K(x, z) \equiv K(z, x),$$

die man aus (7) erkennt. Daher heißt K auch ein „*symmetrischer Kern*“.

Jetzt verallgemeinern wir unser Problem: An Stelle der Einzellast P möge eine stetige Belastung $p(z) \cdot dz$ treten (Abb. 2). Auf diese differentiell kleine Last wenden wir (8) an ($P = p(z) \cdot dz$):

$$(10) \quad dy = \frac{p(z) \cdot dz}{S} \cdot K(x, z).$$

Nun benutzen wir das Superpositionsprinzip: man kann die Gesamtausbiegung durch Überlagerung der Einzellasten $p(z) \cdot dz$ finden (diese Überlegung ist nur bei kleinen Durchbiegungen zulässig). Wir finden so aus (10):

$$(11) \quad y(x) = \frac{1}{S} \cdot \int_0^l p(z) \cdot K(x, z) \cdot dz.$$

Diese Formel erlaubt, zu gegebener Belastung $p \cdot dz$ die Durchbiegungskurve $y(x)$ zu finden.

Sofort entsteht hier das *Umkehrproblem*: gegeben ist $y(x)$ — wie finden wir die zugehörige Last $p(x)$? Derartige Umkehrprobleme lieferten oft für die Mathematik neue Anregungen (man denke an die Integralrechnung als Umkehrung der Differentialrechnung!). Das gilt auch hier. Man sagt dann von (11), daß für $p(x)$ eine *Integralgleichung* vorliegt, das soll heißen, daß die gesuchte Funktion $p(x)$ unter einem Integralzeichen vorkommt.

Allgemein werden wir daher eine Gleichung eine „*Integralgleichung*“ nennen, wenn die unbekannte Funktion darin unter einem Integralzeichen vorkommt.

Es ist nützlich, noch einige weitere Bezeichnungen einzuführen. So heißt eine Integralgleichung, in der die unbekannte Funktion $p(x)$ nur unter dem Integralzeichen vorkommt, von *erster Art*; sie heißt *linear*, wenn die Unbekannte $p(x)$ nur linear auftritt. Die Funktion $K(x, z)$ in (11) ist gegeben zu denken und heißt der *Kern* der linearen Integralgleichung.

Schon jetzt ist zu bemerken, daß die Integralgleichung erster Art mathematisch viel schwieriger zu behandeln ist als diejenige zweiter Art.

Diese zweite Art soll nun ebenfalls an einem Beispiel erläutert werden; sie wird im Mittelpunkt aller unserer Betrachtungen stehen.

b) Eine Integralgleichung zweiter Art. Wir betrachten wieder die scharf gespannte Saite; die Schwere soll nach wie vor außer Betracht bleiben. Wenn $\varrho(z)$ die Massendichte an der Stelle z ist, hat das Linienelement des Drahtes (der Saite) an der Stelle z die Masse

$$dm = \varrho(z) \cdot dz.$$

Nun möge der Draht mit der Winkelgeschwindigkeit ω um seine Achse rotieren. Hierbei kann die geradlinige Ruhelage erhalten bleiben; es kann unter Umständen aber auch unter dem Einfluß der Zentrifugalkraft eine Ausbiegung des Drahtes stattfinden. Diese Kraft $dm \cdot \omega^2 \cdot y$ wirkt jetzt wie vorher die Belastung $p(z) \cdot dz$:

$$(12) \quad p(z) = \varrho(z) \cdot y(z) \cdot \omega^2.$$

Daher finden wir als Bedingung für die Biegekurve $y(x)$ durch Einsetzen in (11):

$$(13) \quad y(x) = \frac{\omega^2}{S} \cdot \int_0^l \varrho(z) \cdot y(z) \cdot K(x, z) \cdot dz.$$

Hier steht das gesuchte $y(x)$ sowohl außerhalb wie innerhalb des Integralzeichens: *das ist das Charakteristikum der Integralgleichung zweiter Art.*

Die Gleichung (13) ist wieder linear; der Kern ist jetzt:

$$(14) \quad K'(x, z) = \varrho(z) \cdot K(x, z)$$

(der Akzent bedeutet keine Ableitung!). Mit der Abkürzung

$$(15) \quad \lambda = \frac{\omega^2}{S}$$

erscheint dann schließlich (13) in der Form:

$$(16) \quad y(x) = \lambda \cdot \int_0^l K'(x, z) \cdot y(z) \cdot dz.$$

Jetzt nehmen wir eine Verallgemeinerung vor und verstehen unter K' irgendeinen Kern: dann stellt (16) die allgemeine Form der homogenen linearen Integralgleichung zweiter Art dar. [Auf die Voraussetzungen, die K' erfüllen muß, damit das Integral in (16) einen Sinn hat, sei hier nicht eingegangen. Wir nehmen zunächst alle Funktionen als stetig an.]

Die Gleichung (16) ist *homogen*, denn in der Mathematik heißt eine Gleichung in y *homogen*, wenn sie ungeändert bleibt, falls man y durch $\text{Const} \cdot y$ ersetzt. Eine solche Gleichung hat als Lösung stets die sog. „triviale“ Lösung

$$(17) \quad y(x) \equiv 0.$$

Physikalisch ist in unserem Beispiel diese Lösung durchaus möglich; wenn der Draht straff gespannt und genau zentriert ist, tritt auch bei Rotation im allgemeinen keine Durchbiegung auf: $y \equiv 0$.

Aber es entsteht natürlich sofort die Frage: gibt es auch nichttriviale Lösungen y von (16)?

Vor Beantwortung dieser Frage sei noch auf etwas anderes eingegangen.

In (16) ist der Kern K' unsymmetrisch. Wenn die Dichte $\varrho(z) \neq 0$ konstant ist, kann man ϱ zu λ nehmen; wenn dagegen ϱ nicht konstant ist, kann man den Kern symmetrisch machen, falls nur stets $\varrho > 0$ ist. Denn dann ist $\sqrt{\varrho(x)}$ reell (es sollen grundsätzlich alle vorkommenden Größen reell sein, falls nichts anderes gesagt wird), und aus (16) folgt durch Multiplikation mit $\sqrt{\varrho(x)}$:

$$(18) \quad y(x) \cdot \sqrt{\varrho(x)} = \lambda \cdot \int_0^l \sqrt{\varrho(x)} \cdot (\sqrt{\varrho(z)} \cdot \sqrt{\varrho(z)}) \cdot K(x, z) \cdot y(z) \cdot dz.$$

Wir führen jetzt eine neue Funktion und einen neuen Kern ein:

$$(19) \quad \begin{cases} \eta(x) = y(x) \cdot \sqrt{\varrho(x)}, \\ K''(x, z) = K(x, z) \sqrt{\varrho(x)} \cdot \varrho(z). \end{cases}$$

Hier ist K'' symmetrisch, und (18) schreibt sich:

$$(20) \quad \eta(x) = \lambda \cdot \int_0^l K''(x, z) \cdot \eta(z) \cdot dz.$$

Das ist wieder eine Integralgleichung zweiter Art, aber mit symmetrischem Kern. (Man spricht wohl auch von „symmetrischen Integralgleichungen“.)

Um nun eine Antwort auf die oben angeschnittene Frage nach den nichttrivialen Lösungen von (16) zu finden, betrachten wir wieder ein Sonderproblem. Wir nehmen jetzt statt der rotierenden die in einer Ebene *schwingende Saite*, auf die keine äußere Kraft einwirken soll. Jedes Element der Saite soll senkrecht schwingen; die Ausbiegung y an der Stelle z soll eine Funktion nur von z und der Zeit t sein.

Nun kann man nach NEWTONs Mechanik die negative Massenbeschleunigung als Kraft auf die Kraftseite der Grundgleichung der Mechanik bringen und dann die Aufgabe statisch behandeln. So kann man in unserem Fall die Belastung $p(z)$ durch

$$-\varrho(z) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

ersetzen. Mit Hilfe von (11) finden wir dann als Bedingung für die Ausbiegung y :

$$(21) \quad y(x, t) = -\frac{1}{S} \int_0^l \varrho(z) \cdot \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \cdot K(x, z) \cdot dz.$$

Hier kommt unter dem Integralzeichen $\partial^2 y / \partial t^2$ vor; daher nennt man (21) eine *Integro-Differentialgleichung*.

Man hilft sich nun folgendermaßen: man sucht zunächst Partikularlösungen y von (21) zu finden, die harmonisch in der Zeit sind. D. h. man sucht (21) mit dem Ansatz

$$(22) \quad y(x, t) = Y(x) \cdot \sin \omega t \quad \text{oder} \quad y(x, t) = Y(x) \cdot \cos \omega t$$

zu erfüllen. Dann ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 \cdot Y(x) \cdot \sin \omega t \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 \cdot Y(x) \cdot \cos \omega t,$$

und (21) wird zu einer Bedingung für $Y(x)$:

$$(23) \quad Y(x) = \frac{\omega^2}{S} \cdot \int_0^l \varrho(z) \cdot K(x, z) \cdot Y(z) \cdot dz.$$

Das ist genau dieselbe Integralgleichung wie (13).

Physikalisch liegen ganz verschiedene Probleme vor, während die zugehörigen mathematischen Probleme identisch sind.

Hier erheben wir wieder die Frage: Hat (23) auch nichttriviale Lösungen?

c) Die Differentialgleichung der schwingenden Saite. Der Fundamentalsatz für symmetrische Integralgleichungen zweiter Art. Die

Integralgleichung (23) können wir zunächst noch nicht lösen, wohl aber kennen wir schon mit Hilfe der Differentialgleichungen die Lösung des physikalischen Problems der schwingenden Saite.

Wir betrachten eine Momentanlage der Saite (Abb. 3): Wieder machen wir dabei die Voraussetzung, daß die Ausschläge y und die Richtungswinkel α klein sind. Auf das Bogenelement wirkt dann die Kraft als Resultierende der beiden Zugkräfte in senkrechter Richtung zur Ruhelage:

$$d(S \sin \alpha) \approx d(S \cdot \operatorname{tg} \alpha) = \frac{\partial}{\partial x} \left(S \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \right) dx.$$

Diese Kraft muß gleich der Massenbeschleunigung $dm \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ sein. Damit erhalten wir die bekannte Differentialgleichung der schwingenden Saite:

$$(24) \quad \varrho(x) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = S \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

(S war ja konstant). Mit dem obigen Ansatz (22) wird daraus:

$$(25) \quad -\varrho \cdot \omega^2 \cdot Y(x) = S \frac{d^2 Y(x)}{dx^2}.$$

Weiter machen wir noch die Voraussetzung, daß die Dichte ϱ konstant ist und schreiben noch

$$(26) \quad \lambda = \frac{\varrho \cdot \omega^2}{S}.$$

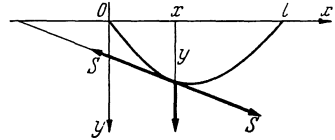


Abb. 3.

Dann erhält (25) die endgültige Form:

$$(27) \quad \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} + \lambda \cdot Y(x) = 0.$$

Die Lösungen Y dieser Gleichung müssen identisch mit den Lösungen Y der Integralgleichung (23) sein:

$$(28) \quad Y(x) = \lambda \cdot \int_0^l K(x, z) \cdot Y(z) \cdot dz,$$

denn beiden Gleichungen liegt dasselbe Problem der schwingenden Saite mit denselben Vernachlässigungen und demselben Ansatz zugrunde. [$K(x, z)$ in (28) ist der Musterkern.]

Die Differentialgleichung (27) kann man nun allgemein lösen:

$$(29) \quad Y(x) = A \cdot \sin(\sqrt{\lambda} \cdot x) + B \cdot \cos(\sqrt{\lambda} \cdot x),$$

was man durch Einsetzen bestätigen kann. Dieses $Y(x)$ muß noch den Randbedingungen der beiderseits eingespannten Saite genügen; d. h. es muß gelten:

$$(30) \quad Y(0) = 0, \quad Y(l) = 0.$$

Die erste Bedingung liefert uns $B = 0$, also

$$(31) \quad Y(x) = A \cdot \sin(\sqrt{\lambda} \cdot x),$$

die zweite verlangt, daß

$$(32) \quad A \cdot \sin(\sqrt{\lambda} \cdot l) = 0$$

gilt. Hier tritt wieder die doppelte Möglichkeit auf. Ist $A = 0$, so ist $Y(x)$ die triviale Lösung: $Y \equiv 0$. Nichttriviale Lösungen (also $A \neq 0$) gibt es nach (32) nur dann, wenn ($\lambda \neq 0!$)

$$\sqrt{\lambda} \cdot l = n \cdot \pi \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

oder

$$(33) \quad \lambda = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}.$$

Es gibt also nicht für alle λ nichttriviale Lösungen $Y \neq 0$, sondern nur für diese λ :

$$(34) \quad \lambda_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot 1, \quad \lambda_2 = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot 2^2, \quad \lambda_3 = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot 3^2, \dots,$$

die wir uns der Größe nach geordnet denken können. Diese λ_n heißen die *Eigenwerte* des Problems.

Zu jedem λ_n gehört also ein Y_n :

$$(35) \quad Y_n(x) = A_n \cdot \sin(\sqrt{\lambda_n} \cdot x) = A_n \cdot \sin \frac{n \pi x}{l}.$$

Das sind die nichttrivialen Lösungen der Integralgleichung, sie heißen die *Eigenfunktionen* des Problems. Daher gilt allgemein:

Satz 1: Die Integralgleichung

$$Y(x) = \lambda \cdot \int_0^l K(x, z) \cdot Y(z) \cdot dz,$$

wo K der Musterkern ist, hat nichttriviale Lösungen (Eigenfunktionen) nur für gewisse λ_n (Eigenwerte). Und zwar sind die Eigenwerte des Musterkerns

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2};$$

alle diese unendlich vielen λ_n sind reell und liegen diskret. Die Eigenfunktionen sind

$$Y_n = A_n \cdot \sin \frac{n \pi x}{l}.$$

Gilt der erste Teil dieses Satzes nun allgemein für (28), wenn K nicht der Musterkern ist? Diese Frage ist das Hauptproblem der Theorie der linearen Integralgleichungen: sie ist in dieser Allgemeinheit zu verneinen. Ausschlaggebend ist hierbei die Symmetrie des Kerns, und der Fundamentalsatz von HILBERT und ERHARD SCHMIDT sagt unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen über den Kern K aus:

Fundamentalsatz: Wenn K symmetrisch ist, gibt es stets wenigstens einen reellen Eigenwert und wenigstens eine reelle Eigenfunktion, d. h. wenigstens ein reelles λ und ein reelles y , so daß

$$y(x) = \lambda \int_0^l K(x, z) y(z) dz$$

ist. Alle vorkommenden Eigenwerte sind bei „regulären“ Kernen reell und liegen diskret; sie häufen sich auch dann nicht, wenn es von ihnen unendlich viele gibt. Hier heißt „regulär“ zunächst stetig; später in I. 6f werden wir den Begriff erweitern.

Ist aber der Kern K unsymmetrisch, und kann man ihn nicht symmetrisieren, dann kann es vorkommen, daß die Integralgleichung überhaupt keine Eigenwerte hat. Wenn sie dagegen welche hat, können unter diesen auch komplexe Eigenwerte vorkommen. Diskret liegen sie aber auch jetzt noch, falls nur der Kern „regulär“ bleibt.

d) Die inhomogene Integralgleichung. Ankündigung des Alternativsatzes. Bisher hatten wir nur von der homogenen Integralgleichung gesprochen. Die inhomogene lineare Integralgleichung zweiter Art hat die Gestalt

$$(36) \quad y(x) = \lambda \cdot \int_0^l K(x, z) \cdot y(z) \cdot dz + f(x).$$

Hierin ist $f(x) \neq 0$ die gegebene „Störungsfunktion“.

Hier gibt es natürlich keine triviale Lösung $y \equiv 0$. Ferner hat die inhomogene Gleichung (36) stets genau eine Lösung, wenn die homogene Gleichung

$$(37) \quad y(x) = \lambda \cdot \int_0^l K(x, z) \cdot y(z) \cdot dz$$

ebenfalls nur eine Lösung (d. h. die triviale) hat. Hat dagegen die homogene Gleichung nichttriviale Lösungen, ist also λ ein Eigenwert, so hat die inhomogene Gleichung nur dann Lösungen (unendlich viele!), wenn $f(x)$ gewisse Bedingungen erfüllt. Dieser Satz heißt der „Alternativsatz“ von FREDHOLM; ihn zu beweisen, wird ein Hauptziel der folgenden Betrachtungen sein.

3. Zusammenhang mit den gewöhnlichen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung.

a) Die allgemeine Differentialgleichung erster Ordnung und eine VOLTERRAsche Integralgleichung. Einer allgemeinen Differentialgleichung erster Ordnung kann man die Gestalt geben

$$(1) \quad y' = f(x, y), \quad y' = \frac{dy}{dx}.$$

Hierbei muß man etwa folgende Bedingungen stellen — die für die Praxis nahezu selbstverständlich sind —: $f(x, y)$ sei in einem gewissen Bereich der x - y -Ebene eindeutig und stetig, und $\partial f / \partial y$ existiere in diesem Bereich und sei dort integrel und beschränkt:

$$(2) \quad |f_y| < N.$$

Aber das ist auch alles, was wir brauchen. Bei folgendem Beispiel sind alle diese Bedingungen erfüllt:

$$(3) \quad y' = x^2 + y^2,$$

und zwar in jedem beliebigen, im Endlichen gelegenen Stück der x - y -Ebene.

Die Differentialgleichung (1) lösen, heißt eine Funktion $y = y(x)$ finden, für die (1) identisch gilt:

$$(4) \quad y'(x) \equiv f(x, y(x)).$$

Hierzu kann man noch das gesuchte $y(x)$ einer *Anfangsbedingung*

$$(5) \quad x = a, \quad y = b$$

unterwerfen. Geometrisch gesprochen heißt dies: wir suchen eine „Integralkurve“ $y = y(x)$ von (1), die durch den Punkt (a, b) geht.

An (1) kann man nun eine Schein-Integration vornehmen:

$$(6) \quad y(x) = \int_a^{z=x} f(z, y(z)) dz + b.$$

Hierin ist schon die Anfangsbedingung enthalten: für $x = a$ wird in (6) tatsächlich $y = b$. (6) liefert noch nicht die Lösung von (1) (daher sprachen wir von einer „Scheinintegration“), vielmehr kommt das unbekannte $y(x)$ noch unter dem Integralzeichen vor. Es liegt also

in (6) eine Integralgleichung für $y(x)$ vor, die im allgemeinen nicht linear ist.

Wir wollen uns den Sachverhalt an dem obigen Beispiel klarmachen. Dieses geht durch die Integration über in

$$y(x) = \int_a^x [z^2 + y^2(z)] dz + b.$$

Der Einfachheit halber sei $(a, b) = (0, 0)$ gewählt, so daß wird

$$(7) \quad y(x) = \int_0^x [z^2 + y^2(z)] dz = \frac{1}{3} x^3 + \int_0^x y^2(z) dz.$$

Das ist eine nichtlineare Integralgleichung zweiter Art; zu beachten ist, daß in dem Integral von (7) — im Gegensatz zu den bisher aufgetretenen Integralgleichungen — die obere Grenze variabel ist. Derartige Integralgleichungen heißen nach dem Mathematiker VOLTERRA von „VOLTERRAschem Typ“ (VOLTERRA 1897).

An die genannte Scheinintegration, deren Nutzen man nicht ohne weiteres einsieht, knüpft ein sehr wichtiges Verfahren zur Lösung der Differentialgleichung (1) an, das wir mit Recht H. A. SCHWARZ zuschreiben; es heißt das *Verfahren der „schrittweisen Verbesserung“* (oder „Verfahren der sukzessiven Approximationen“).

Wir wollen einmal annehmen, wir hätten schon eine rohe Annäherung $y_0(x)$ der gesuchten Kurve $y(x)$ irgendwie gefunden. Man kann dann unter dem Integralzeichen in (6) $y(x)$ durch $y_0(x)$ ersetzen und ein $y_1(x)$ ausrechnen:

$$(8) \quad y_1(x) = \int_a^x f(z, y_0(z)) dz + b.$$

Dieses $y_1(x)$ ist noch nicht das gesuchte $y(x)$. Da aber im allgemeinen Differenzieren die Fehler vergrößert, Integrieren die Fehler ausgleicht, darf man hoffen, daß $y_1(x)$ eine bessere Annäherung an y darstellt als y_0 . Daher wiederholen wir die Operation mit y_1 :

$$(9) \quad y_2(x) = \int_a^x f(z, y_1(z)) \cdot dz + b.$$

Wieder hoffen wir, daß y_2 eine bessere Näherung darstellt als y_1 .

So fahren wir fort. Allgemein erhalten wir also aus y_n durch Einsetzen y_{n+1}

$$(10) \quad y_{n+1}(x) = \int_a^x f(z, y_n(z)) dz + b.$$

Wir wiederholen das Verfahren so lange, bis praktisch

$$y_n(x) \approx y_{n+1}(x) \approx y(x)$$

geworden ist. Mathematisch gesprochen heißt dies: wir hoffen, daß das Verfahren konvergiert, daß also

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x).$$

Hierbei bedeutet das Limes-Zeichen, daß man praktisch $y_n(x)$ so nahe an $y(x)$ heranbringen kann, wie man nur will — man muß nur n groß genug nehmen, d. h. man muß nur das Verfahren genügend oft wiederholen.

In der Tat beweist die Mathematik, daß (11) gilt, falls nur $|x| < |x|_{\max}$; das Verfahren konvergiert mit der Güte einer Exponentialreihe. Das soll weiter unten gezeigt werden.

Zunächst werde das Verfahren an dem schon benutzten Beispiel (7)

$$y(x) = \frac{1}{3} x^3 + \int_0^x y^2(z) dz$$

vorgeführt. Man kann als erste, rohe Näherung

$$(12) \quad y_0(x) = b$$

nehmen; in unserem Beispiel setzen wir also $y_0(x) = b = 0$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{1}{3} x^3, \\ y_2(x) &= \frac{1}{3} x^3 + \int_0^x \frac{1}{9} z^6 dz \\ &= \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{63} x^7, \\ y_3(x) &= \frac{1}{3} x^3 + \int_0^x \left(\frac{1}{9} z^6 + \frac{2}{189} z^{10} + \frac{1}{63^2} z^{14} \right) dz \\ &= \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{63} x^7 + \frac{2}{11 \cdot 189} x^{11} + \frac{1}{15 \cdot 63^2} x^{15}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Allerdings bleiben bei diesem Verfahren die Anfangsglieder von z. B. der dritten Näherung nicht fest, sondern sie werden durch die folgenden Näherungen y_4, y_5, \dots noch beeinflusst.

Es war gesagt worden, daß die Mathematik die Konvergenz des Verfahrens beweist; welche Bedingungen dabei erfüllt sein müssen, soll jetzt näher erörtert werden. Hier wird verlangt, daß es um den Anfangspunkt P einen Bereich gibt, in welchem für jeden willkürlichen Punkt (x, y) gilt

$$(13) \quad |f(x, y)| \leq M.$$

In unserem Beispiel heißt das:

$$(14) \quad f \equiv x^2 + y^2 \leq M,$$

d. h. unser Bereich ist ein Kreis um den Ursprung O mit dem Radius \sqrt{M} . Es ist also in diesem Kreis, da $y' = f(x, y)$ sein soll:

$$(15) \quad |y'| \leq M.$$

Unsere Kurve $y(x)$ ist dort also niemals steiler als $M/1$. Wir ziehen daher durch O (bzw. P im allgemeinen Fall) die beiden Geraden mit dem Anstieg M :

$$|\operatorname{tg} \alpha| = M,$$

so daß wir folgende Abbildung erhalten im allgemeinen Fall (Abb. 4):

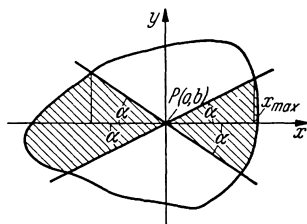


Abb. 4.

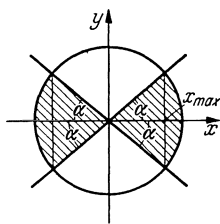


Abb. 5.

und im Beispiel (Abb. 5). Wir sind dann sicher, daß die gesuchte Kurve $y(x)$ innerhalb des Kreises ganz in dem schraffierten Zwickel liegen muß.

Wie weit darf man daher mit x gehen? Antwort: So weit, daß man weder aus dem Kreis noch aus dem Zwickel herauskommt. Dieses x_{\max} lesen wir aus der Abbildung ab; beim Kreis ist es

$$(16) \quad x_{\max} = \sqrt{M} \cdot \cos \alpha = \sqrt{M} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{1 + M^2}}.$$

Für alle $|x| < |x|_{\max}$ konvergiert das Verfahren sicher. Es konvergiert, wie unten bewiesen werden soll, wie die Reihe für $e^{N(x-a)}$, wo

$$(17) \quad N = \operatorname{Max} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$$

in dem schraffierten Gebiet ist. In unserem Beispiel wird also:

$$N = \operatorname{Max} 2|y| = 2\sqrt{M} \cdot \sin \alpha = 2 \frac{M\sqrt{M}}{\sqrt{1 + M^2}}.$$

Je größer wir das — zunächst willkürliche — M wählen, desto größer wird der Kreis, aber desto mehr wächst auch α ($\operatorname{tg} \alpha = M$): die schraffierten Konvergenzzwickel werden durch den ersten Umstand vergrößert, durch den zweiten verkleinert. Man wählt daher M so, daß

x_{\max} möglichst groß wird: das ist eine Aufgabe der elementaren Differentialrechnung. In unserem Beispiel errechnet sich so

$$x_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dieses Beispiel zeigt deutlich die Überlegenheit der Integralgleichungen gegenüber den Differentialgleichungen, denn erst die Umwandlung in eine Integralgleichung gestattete, die Differentialgleichung (mit Anfangsbedingung) unter so allgemeinen Voraussetzungen zu lösen.

Diesem wichtigen Verfahren der schrittweisen Verbesserung werden wir noch oft begegnen; es erscheint daher geboten, noch den *Beweis für seine Konvergenz* nachzuholen.

Die Voraussetzungen sind dieselben wie die von S. 10, N sei wieder das Maximum von $|\partial f/\partial y|$ in dem Konvergenzzwickel der Abb. 4. Zu beweisen ist jetzt die Limes-Beziehung (11). Hierzu haben wir erstens zu zeigen, daß der $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ überhaupt existiert; ist dies geschehen und nennen wir diesen Limes y :

$$(18) \quad y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x),$$

so haben wir nachzuweisen, daß dieses y eine Lösung der Differentialgleichung ist:

$$(19) \quad y'(x) \equiv f(x, y(x)).$$

Schließlich haben wir noch drittens zu zeigen, daß dieses y auch die einzige Lösung der Differentialgleichung einschließlich der Randbedingung ist.

Der erste Teil des Beweises schließt an (10) an. Aus

$$\text{folgt} \quad y_{n+1} = \int_a^x f(x, y_n) dx + b, \quad y_n = \int_a^x f(x, y_{n-1}) dx + b$$

$$(20) \quad y_{n+1} - y_n = \int_a^x [f(x, y_n) - f(x, y_{n-1})] \cdot dx.$$

Nun gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$(21) \quad \frac{f(x, y_n) - f(x, y_{n-1})}{y_n - y_{n-1}} = \frac{\partial f(x, \eta)}{\partial y},$$

wo η zwischen y_{n-1} und y_n liegt, also auch in dem schraffierten Bereich. Nach (17) folgt hieraus

$$(22) \quad |f(x, y_n) - f(x, y_{n-1})| \leq N \cdot |y_n - y_{n-1}|,$$

und wir bekommen aus (20) die Abschätzung

$$(23) \quad |y_{n+1} - y_n| \leq N \cdot \int_a^x |y_n - y_{n-1}| \cdot dx.$$

Für $n = 1$ schreibt sich diese Formel:

$$(24) \quad |y_2 - y_1| \leq N \cdot \int_a^x |y_1 - y_0| \cdot dx.$$

Da $y_0 = b$, folgt aus (10) für $n = 0$

$$(25) \quad |y_1 - y_0| = \left| \int_a^x f(x, b) dx \right| \leq M(x - a),$$

wenn wir noch (13) berücksichtigen. Außerdem sei etwa $x > a$; aber der Fall $x < a$ geht natürlich genau so. Setzen wir (25) in (24) ein, so erhalten wir

$$(26) \quad |y_2 - y_1| \leq M \cdot N \cdot \int_a^x (x - a) dx = M \cdot N \cdot \frac{1}{2} (x - a)^2,$$

und aus (23) folgt ebenso für $n = 2$ unter Benutzung der letzten Formeln

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} |y_3 - y_2| &\leq N \cdot \int_a^x |y_2 - y_1| dx \leq M N^2 \cdot \frac{1}{2} \int_a^x (x - a)^2 dx \\ &= M \cdot N^2 \frac{(x - a)^3}{3!}. \end{aligned} \right.$$

So findet man allgemein

$$(28) \quad |y_n - y_{n-1}| \leq M \cdot N^{n-1} \frac{(x - a)^n}{n!}.$$

Mithin konvergiert die Reihe

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} y &= \lim y_n = \lim [y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_n - y_{n-1})] \\ &= y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_n - y_{n-1}) + \dots \end{aligned} \right.$$

besser als die Reihe

$$(30) \quad b + M(x - a) + \frac{MN}{2!} (x - a)^2 + \dots + \frac{MN^{n-1}}{n!} (x - a)^n + \dots,$$

da nach (25), (26), (28) jedes Glied von (29) absolut kleiner ist als das entsprechende Glied von (30). (30) ist aber die Reihe von $\frac{M}{N}(e^{N(x-a)} - 1) + b$, die Exponentialreihe, die für alle x konvergiert. Daher konvergiert die Reihe (29) absolut und gleichmäßig; sie hat einen Limes, den wir oben y nannten.

Wegen der Stetigkeit von $f(x, y)$ und der Gleichmäßigkeit der Konvergenz können wir den Grenzprozeß (18) in

$$y_{n+1} = b + \int_a^x f(x, y_n) dx$$

unter dem Integralzeichen ausführen. Damit finden wir

$$(31) \quad y = b + \int_a^x f(x, y) dx.$$

y muß also differenzierbar sein (stetig ist es sicher — nämlich als Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen y_n). Durch Differentiation finden wir daher aus (31)

$$y' = f(x, y).$$

y genügt also der Differentialgleichung.

Der dritte Teil des Beweises, die Frage nach der *Eindeutigkeit*, erledigt sich so:

Wir nehmen an, wir hätten zwei Lösungen y und Y , $y \neq Y$, unseres Anfangswertproblems. Dann gälte also nach (31)

$$y = b + \int_a^x f(x, y) \cdot dx$$

und

$$Y = b + \int_a^x f(x, Y) dx.$$

Die Subtraktion beider Gleichungen ergäbe

$$(32) \quad |Y - y| = \left| \int_a^x [f(x, Y) - f(x, y)] dx \right| \leq N \cdot \int_a^x |Y - y| \cdot dx,$$

wenn wir wieder den Mittelwertsatz der Differentialrechnung [vgl. (22)] benutzen. Aus (32) würde die Abschätzung folgen

$$\text{Max } |Y - y| \leq \text{Max } |Y - y| \cdot N \cdot (x - a).$$

Da $\text{Max } |Y - y| \neq 0$, würde dies heißen

$$1 \leq N \cdot (x - a).$$

Hieraus erhalten wir sofort einen Widerspruch, wenn wir nur nehmen $N(x - a) < 1$, also in genügender Nähe von a bleiben. Also führt die Annahme $y \neq Y$ auf einen Widerspruch: das Problem hat daher eine eindeutig bestimmte Lösung $y \equiv Y$; wenigstens in der Nähe von $x = a$. Durch Wiederholung der Überlegung kann man die Eindeutigkeit allgemein beweisen. Damit ist der Beweis in allen Teilen erbracht.

b) Die Differentialgleichung zweiter Ordnung. Noch wichtiger als der geschilderte Zusammenhang der Integralgleichungen mit den Differentialgleichungen erster Ordnung ist der mit den Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung des auch praktisch wichtigsten Sonderfalles

$$(33) \quad y'' = f(x, y).$$

Ein Beispiel dieser Art ist uns schon in (I. 2. 27) begegnet

$$y'' + \lambda \cdot y = 0.$$

Bei der Integration der Differentialgleichung erster Ordnung trat eine Integrationskonstante auf, hier haben wir deren zwei. Man kann daher die gesuchte Integralkurve zwei Bedingungen unterwerfen.

Einfache derartige Bedingungen finden wir beim *Anfangswertproblem*: wir geben für $x = a$

$$(34) \quad y(a) = b, \quad y'(a) = c$$

vor. Dieses Problem hat, wie man zeigen kann, stets eine Lösung (falls nur $f(x, y)$ eindeutig und stetig und nach y so differenzierbar ist, daß $\partial f / \partial y$ integrabel und beschränkt ist).

Es kommt hierbei darauf an, (33) auf eine Integralgleichung umzuformen. — Hierzu integrieren wir zweimal hintereinander:

$$(35) \quad y'(x) = \int_a^x f(z, y(z)) \cdot dz + c,$$

$$(36) \quad y(x) = \int_a^x \left[\int_a^z f(z, y(z)) dz \right] dx + c(x-a) + b.$$

Hier sind die Anfangsbedingungen gleich zur Bestimmung der Integrationskonstanten benutzt worden.

Eine bekannte Umformung des Integrals überführt dann (36) in

$$(37) \quad y(x) = \int_a^x (x-z) \cdot f(z, y(z)) \cdot dz + c(x-a) + b.$$

Denn durch Differenzieren dieser letzten Gleichung erhält man (Differentiation eines Integrals nach der oberen Grenze und nach dem Parameter x):

$$y'(x) = (x-x) \cdot f(x, y(x)) + \int_a^x f(z, y(z)) \cdot dz + c.$$

Das ist aber (35), womit die Richtigkeit der Umformung erwiesen ist.

Nach (37) können wir daher sagen:

Satz 2. *Jede Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Anfangsbedingungen*

$$y'' = f(x, y); \quad y(a) = b, \quad y'(a) = c$$

kann man auf eine VOLTERRASche Integralgleichung

$$y(x) = \int_a^x (x-z) \cdot f(z, y(z)) dz + c(x-a) + b$$

zurückführen.

Schwieriger als dieses Anfangswertproblem ist das *Randwertproblem* zu behandeln. Bei diesem Problem bestehen die Bedingungen für die gesuchte Kurve $y(x)$ darin, daß zwei Punkte (Anfangs- und Endpunkt) vorgeschrieben sind, durch die y gehen soll:

$$(38) \quad y(0) = b, \quad y(l) = c.$$

(Wir wählen für den Anfangspunkt der Einfachheit halber $x = 0$; $x = a$ ginge natürlich genau so gut.)

Die beiden Integrale fassen wir wieder zu einem Integral zusammen, indem wir definieren

$$(43) \quad K(x, z) = \begin{cases} \frac{z(l-x)}{l} & z \leq x \\ \frac{x(l-z)}{l} & x \leq z. \end{cases}$$

$K(x, z)$ ist der Musterkern von (I. 2. 7). Also wird (42) endgültig

$$(44) \quad y(x) = F(x) - \int_0^l K(x, z) \cdot f(z, y(z)) \cdot dz.$$

Satz 3: *Das Randwertproblem*

$$y'' = f(x, y); \quad y(0) = b, \quad y(l) = c$$

führt auf die Integralgleichung

$$y(x) = F(x) - \int_0^l K(x, z) \cdot f(z, y(z)) \cdot dz, \quad F(x) = \frac{c-b}{l} x + b,$$

die aber nicht vom VOLTERRASchen Typus und auch im allgemeinen nicht linear ist. Man kann die Rechnung und damit auch den Satz umkehren.

Wir spezialisieren jetzt den allgemeinen Fall auf die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(45) \quad y'' = f(x, y) \equiv -p(x) \cdot y + g(x).$$

Sie heißt nach S. 5 homogen, wenn $g(x) \equiv 0$. Setzen wir $f(x, y)$ hieraus in (44) ein:

$$(46) \quad y(x) = F(x) + \int_0^l K(x, z) \cdot p(z) \cdot y(z) \cdot dz - \int_0^l K(x, z) \cdot g(z) \cdot dz.$$

Hier ist auch

$$(47) \quad G(x) = F(x) - \int_0^l K(x, z) \cdot g(z) \cdot dz$$

als bekannt zu betrachten. Daher schreiben wir

$$(48) \quad y(x) = G(x) + \int_0^l K(x, z) \cdot p(z) \cdot y(z) \cdot dz.$$

Ist $g(x) \equiv 0$, und sind die Randbedingungen homogen ($c = 0, b = 0$), dann ist nach (41) und (47) auch $G(x) \equiv 0$: dann ist also auch die Integralgleichung homogen.

Der Gleichungstyp (48) war uns schon einmal in (I. 2. 13) begegnet: dort war $p(x) = \rho(x)$, d. h. gleich der Dichte. Wie dort kann man den Kern $K \cdot p$ unter der Voraussetzung

$$p(x) > 0$$

symmetrisieren, indem man setzt

$$Y = y \cdot \sqrt{p(x)}, \quad K' = K \cdot \sqrt{p(x) \cdot p(z)},$$

womit (48) im homogenen Fall übergeht in

$$(49) \quad Y(x) = \int_0^l K'(x, z) \cdot Y(z) \cdot dz$$

mit symmetrischem Kern. Diese Integralgleichung ist also identisch mit dem Randwertproblem

$$(50) \quad y'' + p(x) \cdot y = 0, \quad y(0) = y(l) = 0.$$

Diese Identität haben wir hier mathematisch bewiesen; wir hatten sie schon früher aus physikalischen Gründen bei dem Problem

$$\text{erkannt.} \quad y'' + \lambda \cdot y = 0, \quad y(0) = y(l) = 0$$

c) Die verallgemeinerte Schwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + p(x) \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + q(x) \cdot U = r(x) \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad r(x) > 0.$$

Durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor $k(x) > 0$ kann man diese Gleichung auf die sog. „selbstadjungierte“ Form bringen:

$$(51) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x) \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \right] + q(x) \cdot [k(x) \cdot U] = r(x) \cdot k(x) \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2};$$

man braucht nur $k(x)$ so zu wählen, daß die Ableitung

$$k'(x) = k(x) \cdot p(x)$$

gilt, d. h. daß

$$(52) \quad k(x) = \text{const} \cdot e^{\int p(x) \cdot dx}$$

ist. Denn rechnet man (51) aus, so erhält man, wie verlangt, mit Hilfe von (52) die Gleichung der Abschnittsüberschrift.

Wir ersetzen jetzt wieder qk durch q und rk durch r und betrachten von jetzt ab nur noch die Gleichung

$$(53) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \right) + q(x) \cdot U = r(x) \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$

Die Voraussetzungen sind hier, daß $k > 0$, k' vorhanden ist, $r > 0$ und k, k', q, r stetig sind. Wie in (I. 2. 22) setzen wir wieder an

$$(54) \quad U(x, t) = y(x) \cdot \begin{cases} \sin \omega t \\ \cos \omega t, \end{cases}$$

und erhalten damit aus (53) die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für $y(x)$:

$$(55) \quad \frac{d}{dx} [k(x) \cdot y'] + q(x) \cdot y + r(x) \cdot \omega^2 \cdot y = 0,$$

die für $k \equiv 1$, $q \equiv 0$ in die früher betrachtete Differentialgleichung (50) übergeht.

Die Randwerte, die das gesuchte y erfüllen soll, seien wieder

$$(56) \quad y(0) = y(l) = 0.$$

Wir suchen zunächst die Hilfsaufgabe

$$(57) \quad \frac{d}{dx} [k \cdot y'] + q \cdot y = f(x)$$

mit den gegebenen Randwerten (56) zu lösen. Wir nehmen hierzu noch an, daß die homogene Gleichung

$$(58) \quad \frac{d}{dx} [k \cdot y'] + q \cdot y = 0$$

mit den Randwerten (56) nur die triviale Lösung hat. Wie nun auf S. 17 bemerkt wurde, ist das Anfangswertproblem stets lösbar; wir sind daher sicher, daß es zwei Lösungen y_1 und y_2 von (58) mit den Anfangswerten

$$(59) \quad y_1(0) = y_2(l) = 0, \quad y_1'(0) = -y_2'(l) = 1$$

gibt, die in $0 \leq x \leq l$ überall stetig und differenzierbar sind. Beide Lösungen sind auch nicht identisch oder proportional: $y_1 = \text{const} \cdot y_2$, denn sonst würde y_1 die Randbedingungen (56) erfüllen, also eine nichttriviale Lösung von (58) darstellen, was ausgeschlossen sein sollte.

Wir konstruieren uns nun eine Lösung von (58), die folgende Bedingungen erfüllt:

1. sie sei null für $x = 0$ und $x = l$,
2. sie selbst sei überall stetig, aber ihre erste Ableitung falle bei $x = z$ ($0 \leq z \leq l$) um 1, sonst sei sie auch stetig.

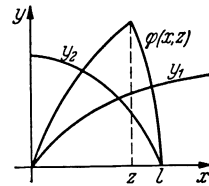


Abb. 6.

[Eine Bedingung wie 2 ist natürlich notwendig: die gesuchte Funktion kann nicht durchweg regulär, d. h. differenzierbar sein, da sie sonst eine nichttriviale Lösung von (58) darstellen würde! (Abb. 6).]

Diese Lösung, die eindeutig bestimmt ist, heiße $\varphi(x, z)$. Wir können sie angeben; sie muß nämlich für $0 \leq x \leq z$ proportional zu y_1 sein

$$(60) \quad \varphi(x, z) = A \cdot y_1(x) \quad 0 \leq x \leq z.$$

Entsprechend gilt im zweiten Intervall

$$(61) \quad \varphi(x, z) = B \cdot y_2(x) \quad z \leq x \leq l.$$

In $x = z$ soll Stetigkeit herrschen

$$(62) \quad A \cdot y_1(z) = B \cdot y_2(z),$$

dagegen gibt die Unstetigkeit der Ableitung in $x = z$

$$(63) \quad \varphi' \Big|_{z-0}^{z+0} \equiv B \cdot y_2'(z) - A \cdot y_1'(z) = -1^*.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen (62), (63) bestimmen sich A und B eindeutig zu

$$(64) \quad A = -\frac{y_2(z)}{y_2'(z) \cdot y_1(z) - y_1'(z) \cdot y_2(z)}, \quad B = -\frac{y_1(z)}{y_2'(z) \cdot y_1(z) - y_1'(z) \cdot y_2(z)}.$$

Daß der hier auftretende Nenner nie verschwinden kann, sieht man folgendermaßen ein:

y_1 und y_2 genügen beide der Differentialgleichung (58):

$$\frac{d}{dx} k y_1' + q \cdot y_1 = 0$$

$$\frac{d}{dx} k y_2' + q \cdot y_2 = 0.$$

Hieraus folgt durch Multiplikation mit y_2 , bzw. y_1 , und Subtraktion beider Gleichungen

$$y_2 \cdot \frac{d}{dx} k y_1' - y_1 \cdot \frac{d}{dx} k y_2' = 0,$$

oder

$$(65) \quad k \cdot (y_2 y_1'' - y_1 y_2'') + k' \cdot (y_2 y_1' - y_2' y_1) = 0.$$

Setzt man für einen Augenblick für den negativen Nenner von (64)

$$(66) \quad y_2 y_1' - y_1 y_2' \equiv D(x),$$

so ist

$$y_2 y_1'' - y_1 y_2'' = D',$$

und (65) schreibt sich

$$k \cdot D' + k' \cdot D = 0,$$

d. h.

$$(67) \quad k \cdot D = C = \text{const.}$$

Entweder ist also $C = 0$, also $D(x) \equiv 0$, d. h.

$$y_2 y_1' - y_1 y_2' = 0,$$

also $y_1 = \lambda \cdot y_2$. Oder aber es ist $C \neq 0$, also $D(x)$ nie null. Der erste Fall kann aber nicht eintreten, da Proportionalität von y_1 und y_2 ausgeschlossen wurde. Also ist der Nenner D stets von null verschieden, was wir zeigen wollten.

Aus (67) folgt noch

$$y_2'(z) y_1(z) - y_1'(z) y_2(z) = -D(z) = -\frac{C}{k(x)},$$

* $\varphi' \Big|_{z-0}^{z+0}$ heißt $\varphi'(z+0) - \varphi'(z-0)$ und $z+0$ heißt wieder, daß man mit x an z von oben herangehen soll. Ebenso bei $z-0$ von unten.

und damit schreibt sich $\varphi(x, z)$ nach (60) und (61):

$$(68) \quad \begin{cases} \varphi(x, z) = \frac{k(z)}{C} \cdot y_1(x) \cdot y_2(z) & \text{für } 0 \leq x \leq z, \\ \varphi(x, z) = \frac{k(z)}{C} \cdot y_2(x) \cdot y_1(z) & \text{für } z \leq x \leq l. \end{cases}$$

Setzen wir noch

$$\varphi(x, z) \equiv G(x, z) \cdot k(z),$$

so ist ersichtlich G symmetrisch in Argument x und Parameter z :

$$(69) \quad G(x, z) = \begin{cases} \frac{1}{C} \cdot y_1(x) \cdot y_2(z) & 0 \leq x \leq z \\ \frac{1}{C} \cdot y_2(x) \cdot y_1(z) & z \leq x \leq l. \end{cases}$$

Man erkennt ferner, daß G eine Lösung der Differentialgleichung (58) ist (da y_1 und y_2 dieser genügen), daß G an den Intervallenden verschwindet, im Intervallinnern überall stetig ist, auch für $x = z$, wie man durch Einsetzen aus (69) erkennt, während die Ableitung an dieser Stelle springt:

$$(70) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{z-0}^{z+0} \equiv k(z) \cdot \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{z-0}^{z+0} = -1.$$

Für den Fall, daß $k \equiv 1$ und $q \equiv 0$ ist, ist G der Musterkern; denn dieser hat ganz die entsprechenden Eigenschaften, insbesondere fällt auch seine Ableitung an der Stelle $x = z$ um 1 (vgl. I. 2. 27).

$G(x, z)$ heißt die GREENSche Funktion des Problems, es ist die Verallgemeinerung des Musterkerns und leistet auch dieselben Dienste wie dieser.

Das letzte werden wir sofort einsehen.

Die Konstante C in (69) ist wohlbestimmt, da y_1 und y_2 bestimmt sind. Es wird nach (68)

$$(71) \quad \begin{cases} C = k(0) \cdot [y_2(0) \cdot y_1'(0) - y_1(0) \cdot y_2'(0)] = k(0) \cdot y_2(0) \\ \quad = k(l) \cdot [y_2(l) \cdot y_1'(l) - y_1(l) \cdot y_2'(l)] = k(l) \cdot y_1(l), \end{cases}$$

wenn man die Definitionen von y_1 und y_2 berücksichtigt.

Nun leiten wir den GREENSchen Satz, eine Hilfsformel über G , ab.

Es sei zur Abkürzung für die in y lineare Form

$$(72) \quad (k \cdot y')' + q \cdot y$$

$L(y)$ gesetzt. y und eine zweite Funktion $u(x)$ seien im Intervall $a \leq x \leq b$ mit ihrer ersten und zweiten Ableitung stetig. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_a^b [L(y) \cdot u - L(u) \cdot y] dx &= \int_a^b [(k \cdot y')' \cdot u - (k \cdot u')' \cdot y] dx \\ &= k \cdot (y' \cdot u - u' \cdot y) \Big|_a^b - \int_a^b (k y' \cdot u' - k u' \cdot y') dx, \end{aligned}$$

und schließlich

$$(73) \quad \int_a^b [L(y) \cdot u - L(u) \cdot y] \cdot dx = k(y' \cdot u - u' \cdot y) \Big|_a^b.$$

Das ist der GREENSche Satz. Wir wenden ihn auf $y(x)$ und $G(x, z)$ im Intervall $0 \leq x \leq z$ an, beachten, daß $L(G) = 0$ ist, da G der Gleichung (58) genügt, und erhalten

$$(74) \quad \int_0^z L(y) \cdot G(x, z) \cdot dx = k(y' \cdot G - G' \cdot y) \Big|_0^{z-0} = k(z) \cdot (y' \cdot G - G' \cdot y)_{x=z-0}.$$

Analog bekommen wir für das Intervall $z \leq x \leq l$

$$(75) \quad \int_z^l L(y) \cdot G(x, z) \cdot dx = k(y' \cdot G - G' \cdot y) \Big|_{z+0}^l = k(z) \cdot (y' \cdot G - G' \cdot y)_{x=z+0}.$$

Addieren wir (74) zu (75), so erhalten wir wegen der Eigenschaften von G (Sprung von G'):

$$\int_0^l L(y) \cdot G(x, z) \cdot dx = -y(z).$$

Wir wenden dies auf (57) an, $L(y)$ ist nach (72) gleich $f(x)$, und wir können sagen:

Satz 4. Die Funktion

$$y(x) = -\int_0^l f(z) \cdot G(x, z) \cdot dz$$

löst die Randwertaufgabe

$$\frac{d}{dx}(k \cdot y') + q \cdot y = f(x), \quad y(0) = y(l) = 0.$$

Hierin ist G die durch (69) definierte GREENSche Funktion des Randwertproblems.

Damit ist die Hilfsaufgabe erledigt. Soll nun

$$(76) \quad \frac{d}{dx}(k y') + q(x) \cdot y + \omega^2 \cdot r(x) \cdot y(x) = f(x)$$

gelöst werden, so können wir Satz 4 anwenden, wenn wir $f(x)$ durch $f(x) - \omega^2 \cdot r(x) \cdot y(x)$ ersetzen. Wir erhalten damit für $y(x)$ die lineare Integralgleichung zweiter Art

$$(77) \quad y(x) = \omega^2 \cdot \int_0^l r(z) \cdot G(x, z) \cdot y(z) \cdot dz - \int_0^l f(z) \cdot G(x, z) \cdot dz,$$

die wir in bekannter Weise symmetrisieren können, da wir $r(x) > 0$ voraussetzen. Wir führen

$$Y(x) \equiv \sqrt{r(x)} \cdot y(x), \quad K(x, z) \equiv \sqrt{r(x) \cdot r(z)} \cdot G(x, z)$$

ein und setzen außerdem

$$(78) \quad g(x) \equiv -\sqrt{r(x)} \cdot \int_0^l f(z) \cdot G(x, z) \cdot dz, \quad \omega^2 = \lambda.$$

Damit erhalten wir eine lineare Integralgleichung mit symmetrischem Kern

$$(79) \quad Y(x) = \lambda \cdot \int_0^l K(x, z) \cdot Y(z) \cdot dz + g(x).$$

$g(x) \equiv 0$ entspricht nach (78) $f(x) \equiv 0$, also dem homogenen Problem. Können wir also (79) lösen, so haben wir das Randwertproblem gelöst, das wir uns zu Beginn dieses Abschnittes stellten.

4. Der elementare Teil der Theorie.

a) Die NEUMANNsche Reihe. Wir haben bisher eine Reihe von Differentialgleichungen mit Randbedingungen auf Integralgleichungen zurückgeführt; wir müssen jetzt versuchen, diese direkt, ohne Rückgreifen auf die Differentialgleichung, zu lösen. Wir beginnen mit der Theorie der linearen Integralgleichung zweiter Art

$$(1) \quad y(x) = \lambda \cdot \int_0^l K(x, z) \cdot y(z) \cdot dz + f(x);$$

K , der „Kern“, eine gegebene Funktion von x und z , $f(x)$ ebenfalls gegeben; $y(x)$ gesucht, λ ein Parameter; wir sehen, wie weit wir mit einem bestimmten Lösungsverfahren kommen. Es ist das uns schon bekannte Verfahren der schrittweisen Verbesserung.

In (1) braucht $K(x, z)$ nicht symmetrisch zu sein. K und f werden im Intervall

$$(2) \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq z \leq l$$

zunächst als stetig, also auch als beschränkt vorausgesetzt, λ wird später passend beschränkt.

[Daß wir in (1) als untere Grenze $x = 0$ nehmen, ist belanglos; der Fall $x = a$ als untere Grenze des Integrals kann durch die Substitution $\zeta = x - a$, $d\zeta = dx$ sofort auf den vorliegenden zurückgeführt werden.]

Auch hier beginnen wir damit, daß wir für y unter dem Integralzeichen eine Näherung einsetzen. Verfahren wir wie früher geschildert, so bekommen wir schrittweise folgende Näherungen für y :

$$(3) \quad \begin{cases} y_0 = 0, \\ y_1 = f(x), \\ y_2 = \lambda \cdot \int_0^l K(x, z) f(z) dz + f(x). \end{cases}$$

(Da K, f stetig sind, existieren die Integrale),

$$(4) \quad \begin{cases} y_3 = \lambda \cdot \int_0^l K(x, z) y_2(z) dz + f(x) \\ = f(x) + \lambda \cdot \int_0^l K(x, z) \left[\lambda \int_0^l K(z, u) f(u) du \right] dz + \lambda \int_0^l K(x, z) f(z) dz \\ = f(x) + \lambda \int_0^l K(x, z) f(z) dz + \lambda^2 \cdot \int_0^l f(u) \left[\int_0^l K(x, z) K(z, u) dz \right] du. \end{cases}$$

Denn man darf bei stetigen Funktionen die Reihenfolge der Integrationen vertauschen (diese Operation werden wir noch oft auszuführen haben, es wird daher in Zukunft nicht mehr besonders darauf hingewiesen werden). Unter dem zweiten Integralzeichen in (4) kommen die Kerne $K(x, z)$, $K(z, u)$ durch die Integrationsvariable z gekoppelt vor. Man nennt das Integral

$$(5) \quad \int_0^l K(x, z) K(z, u) dz = K_2(x, u)$$

den *einmal „iterierten“* (d. h. wiederholten) *Kern*. K_2 ist bei gegebenem K als bekannt anzusehen, wenn vielleicht auch die Integration praktische Schwierigkeiten bereitet.

Man kann also jetzt y_3 so schreiben

$$(6) \quad \begin{cases} y_3 = f(x) + \lambda \cdot \int_0^l K(x, z) f(z) dz + \lambda^2 \cdot \int_0^l K_2(x, u) f(u) du \\ = f(x) + \int_0^l f(z) [\lambda \cdot K_1(x, z) + \lambda^2 \cdot K_2(x, z)] dz \quad K_1 \equiv K \end{cases}$$

(an das Vertauschen der Integrationsvariablen, das wir hier benutzt haben, müssen wir uns ebenfalls gewöhnen!). Der nächste Schritt vollzieht sich genau so:

$$(7) \quad \begin{cases} y_4(x) = f(x) + \lambda \cdot \int_0^l K(x, z) \cdot y_3(z) dz \\ = f(x) + \lambda \cdot \int_0^l K(x, z) f(z) dz + \\ + \lambda^2 \cdot \iint K(x, z) \cdot K(z, u) f(u) du dz + \\ + \lambda^3 \iint K(x, z) \cdot K_2(z, u) f(u) du dz. \end{cases}$$

Da fast immer Integrale von 0 bis l vorkommen, werden wir oft die Grenzen fortlassen. Unsere Integrale sind also, wenn nicht anders angegeben, stets bestimmte von 0 bis l .

Die Iteration von K_2 liefert den dritten iterierten Kern K_3

$$(8) \quad \begin{cases} K_3(x, z) = \int K(x, u) K_2(u, z) du \\ = \iint K(x, u) K(u, v) K(v, z) du dv. \end{cases}$$

Damit wird

$$(9) \quad y_4(x) = f(x) + \int_0^l f(z) [\lambda \cdot K + \lambda^2 \cdot K_2 + \lambda^3 \cdot K_3] dz.$$

Die Bildung der einmal, zweimal, dreimal, ... iterierten Kerne ist eine Art Kettenbildung. Wie man aus (8) erkennt: über die koppelnden Veränderlichen wird integriert.

Allgemein treten also bei K_{n+1} $n+1$ gekoppelte Kerne auf, die in n Variablen gekoppelt sind

$$(10) \quad \begin{cases} K_{n+1}(x, z) = \int_0^l K(x, u) \cdot K_n(u, z) du = \\ = \int_0^l \dots \int_0^l K(x, u) K(u, u_2) K(u_2, u_3) \dots K(u_n, z) du du_2 du_3 \dots du_n. \end{cases}$$

Durch andere Zusammenfassung der $n + 1$ -Kerne erhält man ebensogut

$$(11) \quad K_{n+1}(x, z) = \int_0^l K_n(x, u) K(u, z) du.$$

Das Bildungsgesetz der Näherungen y_1, y_2, y_3, \dots erkennen wir nun leicht. Wir erwarten, daß diese Näherungen gegen die gesuchte Funktion $y(x)$ konvergieren, d. h., daß sich für hinreichend großes n $y_n(x)$ beliebig wenig von $y(x)$ unterscheidet. Wir erwarten also, daß sich $y(x)$ darstellen läßt als

$$(12) \quad y(x) = f(x) + \int_0^l f(z) [\lambda \cdot K_1 + \lambda^2 \cdot K_2 + \lambda^3 \cdot K_3 + \dots] dz.$$

Diese Reihe mit dem allgemeinen Glied $\lambda^n \cdot \int_0^l K_n(x, z) f(z) dz$ heißt die NEUMANNSCHE REIHE nach CARL NEUMANN, einem Vorläufer von HILBERT, SCHMIDT und FREDHOLM in der Theorie der Integralgleichungen (1887, vgl. I. 5a).

Entscheidend für die Anwendung der Methode der schrittweisen Verbesserung ist die Frage: *Wann konvergiert die NEUMANNSCHE REIHE?*

Zur Beantwortung betrachten wir den elementaren Fall: der Kern K soll stetig sein. Dann hat K in $0 \leq x \leq l, 0 \leq z \leq l$ ein Maximum k

$$(13) \quad |K(x, z)| \leq k.$$

Jetzt können wir die iterierten Kerne K_n abschätzen. K_n hat unter dem Integralzeichen n einfache Kerne und $n - 1$ koppelnde Variable stehen; es ergibt sich also

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} |K_n(x, z)| \leq k^n \cdot \underbrace{\int_0^l \dots \int_0^l}_{n-1 \text{ mal}} du_1 \cdot du_2 \cdot \dots \cdot du_{n-1} \\ = k^n \cdot l^{n-1}. \end{array} \right.$$

Daher ist in (12)

$$(15) \quad |[\lambda K + \lambda^2 K_2 + \dots]| \leq |\lambda| k + |\lambda|^2 k^2 l + |\lambda|^3 k^3 l^2 + \dots$$

Rechts steht im wesentlichen die geometrische Reihe

$$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

(mit $x = |\lambda| \cdot k \cdot l$), die für $|x| < 1$ konvergiert. Unsere Reihe (15) konvergiert also wenigstens dann, wenn ihre Oberreihe, die geometrische Reihe, konvergiert, d. h. wenn

$$|\lambda| \cdot k \cdot l < 1,$$

oder wenn

$$(16) \quad |\lambda| < \frac{1}{k \cdot l}$$

ist. Die Abschätzung (13) war ziemlich roh; oft wird also (15) besser als die geometrische Reihe konvergieren. Für $|\lambda| < 1/kl$ konvergiert jedenfalls die NEUMANNsche Reihe sicher.

Gilt (16), so hat die Reihe in (12) unter dem Integralzeichen eine endliche Summe und das Integral existiert. Man muß noch den Nachweis erbringen, daß das durch die NEUMANNsche Reihe (12) gewonnene $y(x)$ tatsächlich die Integralgleichung löst: das folgt einfach durch Einsetzen der Reihe in die Integralgleichung.

b) Der lösende Kern. Für das folgende ist es gut, einige Kenntnisse der elementaren Funktionentheorie zu besitzen, denn wir müssen uns mit der Funktion von λ

$$(17) \quad \Gamma(\lambda; x, z) = \lambda \cdot K_1(x, z) + \lambda^2 \cdot K_2(x, z) + \lambda^3 \cdot K_3(x, z) + \dots$$

beschäftigen. Wie stets seien x, z, K, f reell, für λ müssen wir allerdings auch komplexe Werte zulassen [bei komplexem λ würde auch $y(x)$ komplex werden; K und f bleiben nach wie vor reell].

Γ ist in der λ -Ebene zunächst nur erklärt im Konvergenzkreis mit dem Radius r der rechtsstehenden Potenzreihe, d. h. für alle λ , für die

$$|\lambda| < r$$

gilt. Da wir schon oben die Konvergenz der Reihe

$$\lambda \cdot K + \lambda^2 \cdot K_2 + \lambda^3 \cdot K_3 + \dots$$

(die man öfters ebenfalls als NEUMANNsche Reihe bezeichnet) untersucht hatten, wissen wir schon, daß sicher

$$(18) \quad r \geq \frac{1}{k \cdot l}$$

ist (und zwar für alle x und z zwischen 0 und l).

Die Funktionentheorie, wie sie von WEIERSTRASS aufgebaut wurde, lehrt nun, daß eine Potenzreihe in λ wie (17) eine in λ analytische Funktion definiert. Das sei am Beispiel der geometrischen Reihe erläutert. Innerhalb ihres Konvergenzkreises $|\lambda| < 1$ stellt die Potenzreihe

$$(19) \quad 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots$$

die Funktion

$$(20) \quad \frac{1}{1 - \lambda}$$

dar. Man muß durchaus die Reihe, als Darstellung der Funktion, von der Funktion selbst unterscheiden. Die Reihe (19) hat nur in ihrem Konvergenzgebiet $|\lambda| < 1$ Sinn; wohl aber existiert die Funktion $1/1 - \lambda$ auch außerhalb dieses Gebietes, sie ist, mit Ausnahme des Punktes $\lambda = 1$, in der ganzen komplexen λ -Ebene definiert und regulär (d. h. differenzierbar).

Es sei noch bemerkt, daß diese Zuordnung von Potenzreihe und Funktion durchaus eindeutig und umkehrbar eindeutig ist: jede gegebene Darstellung einer Funktion durch eine Potenzreihe erlaubt, den Funktionsverlauf in der ganzen Ebene als bestimmt anzusehen.

Im allgemeinen wird also auch unsere Funktion $\Gamma(\lambda; x, z)$ außerhalb des Kreises $|\lambda| < r$ existieren, z. B. in dem gezeichneten Gebiet G (Abb. 7): Hierbei ist zu beachten, daß nach WEIERSTRASS der Konvergenzkreis \mathfrak{R} einer Potenzreihendarstellung und die Grenze des Existenzgebietes G wenigstens einen Punkt S gemeinsam haben müssen. S heißt dann eine singuläre Stelle der Funktion. Es kann auch vorkommen, daß Existenzgebiet G und Kreis \mathfrak{R} zusammenfallen: dann ist jeder Punkt der Kreisperipherie singulär.

Kennen wir $\Gamma(\lambda; x, z)$, so kennen wir auch $y(x)$. Denn es ist nach (12) und (17)

$$(21) \quad y(x) = f(x) + \int_0^l \Gamma(\lambda; x, z) f(z) dz = y(\lambda; x).$$

Daher heißt Γ auch der „lösende Kern“ der Integralgleichung.

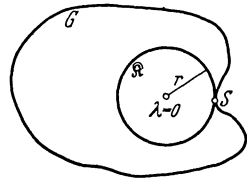


Abb. 7.

Nun gilt allerdings (21) zunächst nur für das Innere des Kreises $|\lambda| < r$, denn nur dort ist zunächst Γ bekannt. Man beweist aber in der Funktionentheorie: gilt eine solche Gleichung (21) in irgendeinem Teilbereich des Existenzbereiches G von Γ , so gilt sie auch überall in G . Denn (21) gibt da, wo Γ für alle x und z zwischen 0 und l regulär-analytisch in λ ist, auch y regulär-analytisch in λ ; die Integralgleichung wird von diesem y überall erfüllt, weil in ihr λ regulär-analytisch (sogar linear) explizit vorkommt.

Erinnern wir uns nun noch, daß man $\Gamma(\lambda; x, z)$ in λ regulär nennt, wenn λ im Existenzgebiet G von Γ liegt, und daß die Integralgleichung im Falle $f(x) \equiv 0$ homogen heißt, so können wir (21) als Satz aussprechen:

Satz 5: *Wo in der λ -Ebene $\Gamma(\lambda; x, z)$ regulär ist, hat die Integralgleichung (1) mindestens eine Lösung (21), die für die homogene Gleichung in die triviale Lösung übergeht.*

Es sei an dieser Stelle darauf aufmerksam gemacht, daß bei unserer Behandlung der Integralgleichungen immer wieder dieselben Fragen auftauchen:

1. Gibt es Lösungen $y(x)$ der vorgelegten Integralgleichung?
2. Falls 1. bejaht ist: gibt es mehrere Lösungen?

In Satz 5 ist die erste Frage beantwortet; es bleibt noch die zweite zu behandeln.

Hierzu nehmen wir an, wir hätten zwei Lösungen y_1 und y_2 :

$$(22) \quad \begin{cases} y_1 = f(x) + \lambda \int K \cdot y_1(z) dz, \\ y_2 = f(x) + \lambda \int K \cdot y_2(z) dz. \end{cases}$$

Durch Subtraktion finden wir

$$(22a) \quad y_1 - y_2 = \lambda \int K(x, z) [y_1(z) - y_2(z)] dz.$$

Setzen wir noch

$$Y \equiv y_1 - y_2,$$

so wird

$$Y(x) = \lambda \int K(x, z) Y(z) dz.$$

$Y(x)$ ist also die Lösung der homogenen Gleichung, und wir können den Satz aussprechen:

Satz 6. *Wenn die homogene Integralgleichung keine nichttrivialen Lösungen hat (d. h. $Y \equiv 0$), hat die inhomogene Gleichung höchstens eine Lösung (d. h. dann ist $y_1 \equiv y_2$).*

Die Umkehrung dieses Satzes, daß die inhomogene Gleichung auch mindestens eine (d. h. zusammen mit dem Satz 6 genau eine) Lösung hat, falls die homogene Gleichung nur die triviale Lösung hat, gilt auch, wird indessen erst später bewiesen (das ist der Alternativsatz von I. 2d).

c) Ein negatives Ergebnis. Die „umgestellte“ Gleichung. Orthogonalität von Funktionen. Wir nehmen an

$$(23) \quad y(x) = f(x) + \lambda \int_0^l K(x, z) y(z) dz$$

habe eine Lösung y ; wir werden sehen, daß diese Annahme unter Umständen zum Widerspruch führen kann.

Wir multiplizieren zunächst beide Seiten der Gleichung mit irgend-einer stetigen Funktion $\varphi(x)$ und integrieren nach x

$$\int \varphi \cdot y dx = \int \varphi \cdot f dx + \lambda \iint K(x, z) \varphi(x) y(z) dx dz.$$

Durch Vertauschung der Integrationen (wegen der Stetigkeit aller vorkommenden Funktionen erlaubt) erhalten wir

$$(24) \quad \int y(x) [\varphi(x) - \lambda \int K(z, x) \varphi(z) dz] dx = \int \varphi(x) f(x) dx.$$

Jetzt sehen wir: wenn $\varphi(x) \neq 0$ und für alle x die Gleichung gilt

$$(25) \quad \varphi(x) = \lambda \int_0^l K(z, x) \varphi(z) dz,$$

kann es bei beliebigem $f(x)$ keine Funktion $y(x)$ geben, die unsere Integralgleichung (23) löst. Denn gäbe es doch ein y , so folgte aus (24)

$$(26) \quad \int y \cdot 0 \cdot dx = 0 = \int \varphi \cdot f \cdot dx,$$

rechts steht aber im allgemeinen eine von null verschiedene Größe; es läge also ein Widerspruch vor.

Die Gleichung (25), die sich hier von Wichtigkeit erweist, ist eine homogene Integralgleichung für $\varphi(x)$. Sie unterscheidet sich von der homogenen Form der Ausgangsgleichung (23)

$$(27) \quad y(x) = \lambda \int_0^l K(x, z) y(z) dz$$

nur darin, daß im Kern $K(x, z)$ die Veränderlichen vertauscht sind; daher heißt auch (25) die in bezug auf (27) „umgestellte“ (auch „transponierte“ oder „adjungierte“) *Integralgleichung*. Ist der Kern symmetrisch

$$K(x, z) \equiv K(z, x),$$

so fällt (25) mit ihrer umgestellten Gleichung (27) zusammen. Schon hierin liegt ein Grund für die Bedeutung symmetrischer Kerne.

Jetzt kann man das oben gefundene Ergebnis so aussprechen:

Satz 7. *Hat die umgestellte homogene Gleichung nichttriviale Lösungen $\varphi(x)$, so hat im allgemeinen die inhomogene Gleichung keine Lösungen $y(x)$, es sei denn, daß*

$$(28) \quad \int_0^l \varphi(x) f(x) dx = 0$$

gilt für jede Lösung $\varphi(x)$ der umgestellten homogenen Gleichung.

Denn in letzterem Falle stellt (24) einfach die Selbstverständlichkeit $0 = 0$ dar; die Annahme, daß eine Lösung y von (23) existiert, wird also dann nicht mehr durch (24) als falsch erwiesen. In diesem Falle *kann* es also eine solche Lösung geben.

Gilt (28), so heißen $\varphi(x)$ und $f(x)$ „*orthogonal*“ zueinander (über die Herkunft dieses Ausdruckes vgl. II. 9). Mit Hilfe dieses neuen Begriffes kann man nun Satz 7 etwas anders formulieren. Wir nehmen dazu (25) als Ausgangsgleichung; dann ist also (23) in bezug auf (25) als umgestellt und inhomogen zu bezeichnen. Daher können wir sagen

Satz 7a. *Hat die homogene Gleichung (25) nichttriviale Lösungen $\varphi(x)$, so hat die umgestellte inhomogene Gleichung (23) höchstens bedingungsweise Lösungen $y(x)$, d. h. höchstens dann, wenn das Störungsmitglied $f(x)$ von (23) zu allen $\varphi(x)$ orthogonal ist.*

Wir kehren noch einmal zu dem lösenden Kern $\Gamma(\lambda; x, z)$ zurück. Wir werden später allgemein zeigen, daß Γ als Singularitäten nur Pole haben kann. Bekanntlich heißt λ_0 ein Pol der analytischen Funktion $F(\lambda)$, wenn F für $\lambda \rightarrow \lambda_0$ selbst gegen ∞ geht, jedoch in einer Umgebung von λ_0 , außer in λ_0 selbst, nur endliche eindeutige Werte annehmen kann. Z. B. hat $F(\lambda) = 1/1 - \lambda$, die zur geometrischen Reihe gehörige analytische Funktion, in $\lambda_0 = 1$ einen Pol; $F(\lambda) = 1/\sin \lambda$ hat in den Punkten $\lambda_0 = 0, \pm \pi, \pm 2 \cdot \pi, \pm 3 \cdot \pi, \dots$ Pole, dasselbe gilt von $\text{ctg } \lambda$. Die Behauptung geht nun dahin, daß Γ von derselben Art ist. Der Beweis hierfür folgt in I. 6i für symmetrische Kerne, für andere Kerne in II. 3.

d) Die VOLTERRASche Integralgleichung. Vererbungserscheinungen.

Hier werde nunmehr gezeigt, daß im VOLTERRASchen Falle der lösende Kern Γ keine Pole hat, ja, daß für ihn die NEUMANNsche Reihe sogar beständig, d. h. in der ganzen λ -Ebene konvergiert.

Es liege also die Integralgleichung vor

$$(29) \quad y(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, z) y(z) dz.$$

Wir setzen fest, daß für $z \geq x$

$$(30) \quad K(x, z) = 0$$

sein soll, was (29) nicht berührt. $K(x, z)$ verschwindet also in dem oberen der beiden gezeichneten Dreiecke identisch (Abb. 8):

Damit wird (29)

$$(31) \quad y(x) = f(x) + \lambda \int_0^l K(x, z) y(z) dz.$$

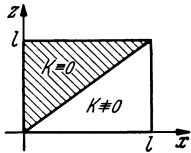


Abb. 8.

So ordnet sich also der Fall der VOLTERRASchen Integralgleichung dem Fall der schon betrachteten Integralgleichung (23) unter. Wir können daher die geschilderte formale Theorie der schrittweisen Verbesserung anwenden, die auf die NEUMANNsche Reihe (12) führt. Aber jetzt kann man die iterierten Kerne besser abschätzen als damals im allgemeinen Fall.

Es sei K wieder beschränkt

$$|K(x, z)| \leq k,$$

und die Abschätzung von K_2 gibt, wenn man beachtet, daß $K(x, z) = 0$ ist, falls die zweite Variable (z) größer ist als die erste (x):

$$\begin{aligned} \left| \int_0^l K(x, u) K(u, z) du \right| &= \left| \int_{u=z}^x K(x, u) \cdot K(u, z) du \right| \\ &\leq k^2 \cdot \left| \int_z^x du \right|, \\ |K_2(x, z)| &\leq \begin{cases} k^2(x-z) & x \geq z \\ 0 & x \leq z. \end{cases} \end{aligned}$$

Dieselbe Überlegung ergibt für K_3

$$\begin{aligned} |K_3(x, z)| &= \left| \int_0^l K_2(x, u) K(u, z) du \right| \leq k^3 \cdot \int_z^x (x-u) du \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} k^3 (x-z)^2 & x \geq z \\ 0 & x \leq z, \end{cases} \end{aligned}$$

und wir sehen so die allgemeine Formel ein

$$(32) \quad |K_n(x, z)| \leq \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!} k^n (x-z)^{n-1} & x \geq z \\ 0 & x \leq z; \end{cases}$$

daher wird

$$|\lambda^n K_n| \leq \frac{|\lambda|^n}{(n-1)!} k^n (x-z)^{n-1},$$

und wir können die Reihe $\lambda K + \lambda^2 K_2 + \dots$ in (12) majorisieren

$$(33) \quad \left\{ \left| \sum_1^{\infty} \lambda^n K_n \right| \leq \sum_1^{\infty} |\lambda^n K_n| \leq |\lambda| \cdot k \cdot \sum_1^{\infty} \frac{[|\lambda| \cdot k (x-z)]^{n-1}}{(n-1)!} \right. \\ \left. = |\lambda| \cdot k \cdot e^{|\lambda| k (x-z)}. \right.$$

Also folgt

Satz 8. Die Potenzreihe für $\Gamma(\lambda; x, z)$ hat im VOLTERRASchen Falle die Exponentialreihe in $|\lambda|$ als Oberreihe, und da letztere beständig konvergiert, ist Γ in der ganzen λ -Ebene regulär.

Nehmen wir die Erkenntnis voraus, daß Γ nur Pole als Singularitäten haben kann, so können wir den Satz auch so aussprechen, daß Γ im VOLTERRASchen Fall keine Pole hat.

Der eben bewiesene Satz gibt uns in der NEUMANNschen Reihe ein stets brauchbares Mittel zur Lösung VOLTERRAScher Integralgleichungen an die Hand.

Wo kommen derartige Gleichungen praktisch vor? Wir wissen schon nach Satz 2, daß das Anfangswertproblem linearer Differentialgleichungen auf den hier betrachteten VOLTERRASchen Fall führt. Mit Satz 8 ist also erwiesen, daß das Anfangswertproblem dieser Gleichungen stets lösbar ist (was früher ohne Beweis angeführt wurde).

VOLTERRASche Gleichungen treten aber auch überall dort auf, wo Nachwirkungs- (Vererbungs-) Vorgänge im Spiele sind; es sei hierzu als Beispiel ein Dehnungsversuch besprochen.

Bei hinreichend kleinen Größen gilt das HOOKESche Gesetz, daß die Dehnung ε der Spannung s proportional ist

$$(34) \quad \varepsilon = c \cdot s.$$

Bei Wechselsversuchen werden ε, s Funktionen der Zeit, aber jetzt gilt

$$(35) \quad \varepsilon(t) = c \cdot s(t)$$

nicht mehr so gut. Vielmehr muß man annehmen, daß die Spannung zur Zeit $\tau < t$ nachwirkt. Zu $c \cdot s(t)$ hat man daher für jedes τ ein Korrekturglied

$$(36) \quad K(t-\tau) \cdot s(\tau) \cdot d\tau$$

hinzuzufügen. K hängt nur von $t-\tau$ ab, da die Nachwirkung um so stärker ist, je kleiner $t-\tau$ ist. Alle diese Glieder (36) sind zu summieren, und wir erhalten daher statt (35):

$$(37) \quad \varepsilon(t) = c \cdot s(t) + \frac{1}{c} \int_0^t K(t-\tau) \cdot c \cdot s(\tau) \cdot d\tau.$$

Bei gegebener Spannung kann also ε berechnet werden. Hat man dagegen $\varepsilon(t)$ beobachtet, und will man wissen, was der Körper durchgemacht hat [d. h. sucht man $s(t)$], so liegt in (37) eine VOLTERRASche Integralgleichung zweiter Art vor.

Derartige Gleichungen kommen oft z. B. auch in der Astrophysik vor. Physikalisch stellt auch (37) noch eine Idealisierung vor, da lediglich eine lineare Abhängigkeit der Vererbung angenommen wurde.

(37) kann mit der NEUMANNschen Reihe gelöst werden:

$$(38) \quad c \cdot s(t) = \varepsilon(t) + \int_0^t \Gamma(\lambda; t-\tau) \cdot c \cdot \varepsilon(\tau) d\tau, \\ \lambda = \frac{1}{c}.$$

Hierin hängt jeder iterierte Kern, also auch $\Gamma = \sum \lambda^n \cdot K_n$, nur von $t-\tau$ ab, denn es ist z. B.

$$(39) \quad K_2 = \int_{\tau}^t K(t-u) \cdot K(u-\tau) du$$

nach (32). Setzen wir

$$v = u - \tau, \quad dv = du, \quad t - u = t - \tau - v,$$

so schreibt sich (39)

$$K_2 = \int_0^{t-\tau} K(t-\tau-v) \cdot K(v) dv = f(t-\tau),$$

und ähnliches gilt für $K_3, K_4 \dots$

Grundsätzlich wird also (37) durch (38) gelöst; praktisch können allerdings Schwierigkeiten bei der Bestimmung von Γ und der Integration in (38) auftreten.

e) Zusammenstellung der Hauptsätze. Am Schlusse des Abschnittes I. 4, und vor der Behandlung einer größeren Anzahl von Beispielen, erscheint es geboten, die gesamte Theorie der linearen Integralgleichungen (soweit sie hier überhaupt dargestellt werden soll) in einer Reihe von Sätzen zusammenzufassen. Eine derartige Übersicht erlaubt dann auch, den logischen Zusammenhang der Sätze besser als bisher zu erkennen. (Über die genauen Voraussetzungen über K vgl. I. 6f; bisher galten alle Funktionen als stetig.)

Hauptsatz I. *Wenn die homogene Integralgleichung keine nicht-trivialen Lösungen hat, hat die inhomogene Gleichung höchstens eine Lösung.*

Dieser Satz ist als Satz 6 schon bewiesen worden.

Hauptsatz II. *Wenn die homogene Gleichung keine nichttrivialen Lösungen hat, hat die inhomogene Gleichung mindestens (also nach Hauptsatz I genau) eine Lösung.*

Der Beweis fehlt noch.

Hauptsatz III. *Wenn die homogene Gleichung nichttriviale Lösungen hat, hat die umgestellte inhomogene Gleichung höchstens bedingungsweise Lösungen.*

Das ist als Satz 7a bewiesen worden.

Hauptsatz IV. *Wenn die homogene Gleichung nichttriviale Lösungen hat, hat die umgestellte inhomogene Gleichung wirklich welche, falls die Bedingungen von Hauptsatz III erfüllt sind.*

Der Beweis fehlt noch.

Hauptsatz V. *Wenn die homogene Gleichung nichttriviale Lösungen hat, hat die umgestellte homogene Gleichung auch nichttriviale Lösungen.*

Der Beweis fehlt noch.

Hauptsatz VI. *Wo in der λ -Ebene der lösende Kern Γ regulär ist, hat die inhomogene Gleichung genau eine, die homogene keine nichttrivialen Lösungen.*

Wir haben in Satz 5 bewiesen, daß an regulären Stellen von Γ die inhomogene Gleichung *mindestens* eine Lösung hat. Nach (I. 4. 24) hat dann die umgestellte homogene Gleichung nur die triviale Lösung. Gilt also Hauptsatz V, dann wissen wir, daß die homogene Gleichung auch nur die triviale Lösung hat, und dann folgt nach (22a), daß die inhomogene Gleichung *genau* eine Lösung hat. Hauptsatz VI wird daher zugleich mit Hauptsatz V bewiesen.

Hauptsatz VII. *Γ ist eindeutig und regulär bis auf Pole (in der λ -Ebene).*

Der Beweis fehlt noch. Der erste Teil kann mit Hauptsatz VI zugleich für bewiesen gelten: denn wäre Γ in einer regulären Stelle mehrdeutig, so wäre dort auch die Lösung der inhomogenen Gleichung mehrdeutig nach (21) im Widerspruch zu Hauptsatz VI.

Hauptsatz VIII. *In einem Pol von Γ hat die homogene Gleichung mindestens eine nichttriviale Lösung, mithin hat die nichthomogene Gleichung nur bedingungsweise welche.*

Der Beweis fehlt noch.

Hauptsatz IX. *Im symmetrischen Falle hat Γ mindestens einen Pol.*

Das ist der Fundamentalsatz über symmetrische Kerne von HILBERT und ERHARD SCHMIDT. Der Beweis fehlt noch.

Hauptsatz X. *Im VOLTERRASchen Falle hat Γ keinen Pol.*

Das wurde als Satz 8 bewiesen.

Die noch fehlenden Beweise werden, wenigstens für den Fall des symmetrischen Kerns, in I. 6. erbracht werden; für den allgemeinen Fall des unsymmetrischen Kerns wird man in einem Abriß der FREDHOLMSchen Theorie in II. 3. die fehlenden Beweise skizziert finden.

5. Die Beziehungen der Integralgleichungen zu den partiellen Differentialgleichungen der Physik und andere physikalische Anwendungen.

a) Die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie in der Ebene.

Bis zum Ende des 19. Jahrhunderts stand bei den mathematischen Physikern unter ähnlichen Fragestellungen das erste Randwertproblem der Potentialtheorie im Mittelpunkt des Interesses. Das Problem verlangt, eine Funktion $u(x, y, z)$ zu finden, für die die Potentialgleichung

$$(1) \quad \Delta u = 0$$

$$\left(\text{wo der LAPLACESche Operator } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

innerhalb eines gegebenen Bereiches \mathfrak{B} gilt, und die am Rande C des Bereiches vorgeschriebene Werte u_0 annimmt. Wir beschränken uns auf das ebene innere Problem, d. h. wir bleiben in der x - y -Ebene und verzichten auf Fragen über Existenz und Verhalten von $u(x, y)$ außerhalb des Bereiches (Abb. 9). Eine solche Funktion u heißt eine *Potentialfunktion*.

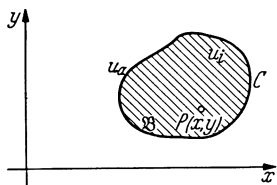


Abb. 9.

Wieder sind zwei Fragen wichtig: Gibt es Potentialfunktionen, und wenn ja, wie kann man diese praktisch finden? Wenn es überhaupt eine gibt, so gibt es auch nur eine, wie als bekannt vorausgesetzt werden soll.

Zur Beantwortung dieser Fragen, zumal der ersten, kann die Funktionentheorie herangezogen werden. Wir können dieser den Satz entnehmen, daß es zu jedem $u(x, y)$ eindeutig (bis auf eine additive Konstante) ein $v(x, y)$ gibt, das ebenfalls in diesem Bereich eine Potentialfunktion ist (das zu u „konjugierte“ Potential), so daß

$$f(z) = u + i v$$

im Bereich analytisch in $z = x + i y$ ist. Mit diesem Ansatz kann man heute ziemlich leicht die Existenz von u beweisen.

In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts haben H. A. SCHWARZ und CARL NEUMANN das Problem für viele Bereiche gelöst. C. NEUMANN und H. POINCARÉ arbeiteten hierbei mit Methoden, welche die Theorie der Integralgleichungen, wie schon in I. 1. erwähnt wurde, eingeleitet haben. Da außerdem ihre Methoden auch heute noch praktische Bedeutung haben, gehen wir auf sie etwas näher ein.

Man weiß, daß $\ln r$ stets Lösung von $\Delta u = 0$ ist. Hierin bedeutet

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

die Entfernung des variablen Punktes $P(x, y)$ von dem Aufpunkte $A(\xi, \eta)$. In r hat in $r = 0$ eine Singularität, die man sich physikalisch als Wirbel, Quelle oder Senke oder als Punktladung vorstellen kann.

Wegen der Symmetrie kann man ebenso ξ, η wie x, y als Variable ansehen. Auf der Randkurve C des Bereiches führen wir die Bogenlänge s als Parameter ein (eine solche soll natürlich existieren). Nun denken wir uns C mit derartigen Ladungen belegt, so daß das Bogenelement ds an der Stelle s die Ladung $y(s) \cdot ds$ trägt, wo $y(s)$ noch unbekannt ist. Dann ist $\ln r \cdot y(s) \cdot ds$ eine Lösung von $\Delta u = 0$ außerhalb von C , und wegen der Linearität der Differentialgleichung gilt dies auch von

$$(2) \quad u(\xi, \eta) = \oint_C \ln r \cdot y(s) \cdot ds$$

in den Variablen ξ, η . r ist der Abstand des Aufpunktes A von dem Kurvenpunkte $P(s)$; A soll im Innern von \mathfrak{B} liegen.

Wenn man A auf dem Rande annimmt: $A = P(\sigma)$ (Abb. 10), weiß man, daß (2) ebenfalls noch gilt

$$(3) \quad u(\sigma) = \oint \ln r_0 \cdot y(s) \cdot ds;$$

$u(\sigma)$ sind die gegebenen Randwerte u_0 von u . Hieraus ist $y(s)$ zu bestimmen; es liegt also eine lineare, inhomogene Integralgleichung erster Art für y vor. r ist die Entfernung der Punkte $P(\sigma)$ und $P(s)$, der Kern

$$K(x, y; \xi, \eta) = \ln r_0$$

ist symmetrisch. Aber dieser Kern ist nicht mehr, wie bisher, überall endlich und stetig, sondern er geht gegen unendlich für $P(s) \rightarrow P(\sigma)$. Eine solche Singularität ist, wie später gezeigt werden soll, unwesentlich. Unangenehmer an (3) ist dagegen, daß es eine Gleichung erster Art ist; von diesen schwieriger zu behandelnden Gleichungen wurde bisher überhaupt noch nicht gesprochen. Neuerdings ist (3) wieder als Ausgangspunkt zur praktischen Lösung vorgeschlagen worden (s. II. 1.).

Wir gehen hier anders vor, und zwar beweisen wir

Satz 9. *Das erste Randwertproblem der Potentialtheorie kann auf eine lineare Integralgleichung zweiter Art zurückgeführt werden.*

Um den Satz einzusehen, denken wir uns den Rand C mit einer Doppelbelegung (Dipolen, Quellsenken) belegt. Anders ausgedrückt: Wir setzen die Lösung von $\Delta u = 0$ zusammen aus

$$(4) \quad \frac{\partial \ln r}{\partial n},$$

denn dies ist auch eine Lösung der Potentialgleichung in A (Abb. 11). (4) gibt die Änderung von $\ln r$ in der Grenze bei Fortschreiten in Richtung der äußeren Normalen n von C an.

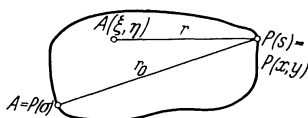


Abb. 10.

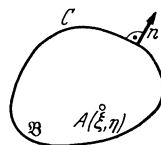


Abb. 11.

Wieder kann man alle Doppelquellen des Randes superponieren, und man erhält für einen inneren Aufpunkt A , daß

$$(5) \quad \oint_C \frac{\partial \ln r}{\partial n} \cdot y(s) ds = u_i(\xi, \eta)$$

eine Potentialfunktion darstellt.

Wie oben werden wir uns dafür interessieren, was geschieht, wenn A sich dem Rande nähert. Nun gilt nach der Potentialtheorie

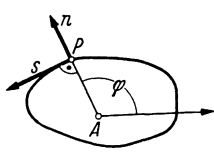


Abb. 12.

$$(6) \quad \frac{\partial \ln r}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}.$$

Hier ist φ der Winkel von \overline{PA} mit einer festen Richtung (Abb. 12). Denn zu $\ln r$ gibt es ein konjugiertes Potential φ , so daß

$$\ln r + i\varphi = \log z$$

die zu $\ln r$ gehörige analytische Funktion wird. Ferner gelten für irgendein rechtwinkliges Koordinatensystem (n, s) (mit positivem Drehsinn $n \rightarrow s$) stets die CAUCHY-RIEMANNSCHE Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial s}, \quad \frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{\partial v}{\partial n}$$

für jede analytische Funktion $f(z) = u + iv$. Hieraus folgt aber sofort (6).

(6) erlaubt nun, (5) umzuformen in

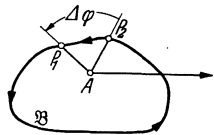


Abb. 13.

$$(7) \quad u_i = \oint_C \frac{\partial \varphi}{\partial s} \cdot ds \cdot y(s) \equiv \oint_C y(s) \cdot d\varphi,$$

da längs C φ eine Funktion von s ist.

Um nun den Wert von u zu erhalten, wenn A auf dem Rande liegt, machen wir einen Grenzübergang. A liege zunächst in der Nähe des Randes (Abb. 13).

Wir zerlegen $\oint_C y \cdot d\varphi$ in $\int_{P_1}^{P_2}$ und in $\int_{P_2}^{P_1}$ (beide in positivem Sinne); es sei noch vorausgesetzt, daß der Rand in jedem Punkte eine Tangente besitzt („glatt“ ist). Ausschlaggebend für den Grenzübergang ist nun $\int_{P_2}^{P_1} y \cdot d\varphi$, denn bei dieser Integration dreht sich φ fast um π , sagen wir um $\Delta\varphi$. Wir wenden auf dieses Integral den Mittelwertsatz an und erhalten

$$\int_{P_2}^{P_1} y \cdot d\varphi = \Delta\varphi \cdot y(\bar{s}),$$

wo $P(\bar{s})$ einen Punkt zwischen $P_1(s_1)$ und $P_2(s_2)$ darstellt.

Das erste Integral bietet keine Schwierigkeiten:

$$\int_{P_1}^{P_2} y \cdot d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} y \cdot d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 - \Delta\varphi} y \cdot d\varphi.$$

Nun vollziehen wir den Grenzübergang: A fällt in den Randpunkt $P(\sigma)$, gegen den auch P_1 und P_2 konvergieren. Das machen wir so, daß dabei $\Delta\varphi$ gegen π geht, so daß wir schließlich erhalten (u_0 ist der gegebene Wert der Potentialfunktion am Rande):

$$(8) \quad u_0 = \oint y \cdot d\varphi = \lim_{P_1 \rightarrow P_2} \left(\int_{P_1}^{P_2} + \int_{P_2}^{P_1} \right) = \pi \cdot y(\sigma) + \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \pi} y(s) \cdot d\varphi.$$

Das Integral hierin ist in φ periodisch; man kann daher mit einem beliebigen Winkel φ_0 beginnen, wenn man nur über alle Winkel von φ_0 bis $\varphi_0 + \pi$ integriert.

(8) ist eine Integralgleichung zweiter Art für die gesuchte Belegungsdichte $y(s)$. Ihr Kern $\partial\varphi/\partial s$ ist allerdings nicht symmetrisch, dagegen ist er sogar überall dort endlich, wo die Krümmung der Randkurve endlich bleibt (durch Ausrechnen zu beweisen). Haben wir $y(s)$ aus (8) berechnet, so löst (7) unser Randwertproblem: Satz 9 ist also bewiesen.

Dieses erste Randwertproblem war historisch der Ausgangspunkt für die Theorie der Integralgleichungen: C. NEUMANN zeigte 1887, daß die nach ihm benannte Reihe in unserem Problem konvergiert, wenn die Kurve konvex gekrümmt ist. Auch H. POINCARÉ nahm 1894 bis 1897 an diesem Spezialproblem die Sätze der allgemeinen Theorie voraus, die dann erst 1899 und 1903 von FREDHOLM ausgesprochen wurden.

Wir setzen nun den noch unbewiesenen Hauptsatz II voraus, daß (8) genau *eine* Lösung hat, wenn die homogene Gleichung

$$(9) \quad 0 = \pi \cdot y(\sigma) + \oint y(s) \cdot d\varphi$$

nur die triviale Lösung $y \equiv 0$ hat. Physikalisch gesprochen heißt dies: wir suchen eine derartige Belegung $y(s)$ des Randes mit Doppelquellen, daß die Randwerte der zugehörigen Potentialfunktion $u_i = \oint y \cdot d\varphi$ verschwinden, und wir behaupten, daß dies nur bei der Belegung 0 möglich ist.

Daß nun (9) nur die triviale Lösung hat, kann mit Hilfe einiger Sätze der Potentialtheorie bewiesen werden. Zunächst: wenn u am Rande verschwindet, muß es auch im Innern null sein. Dann gilt aber auch

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial n} \right)_0 = 0.$$

Da nach einem alten Satz der Potentialtheorie

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial n} \right)_0 = \left(\frac{\partial u_a}{\partial n} \right)_0$$

(u_a : Werte von u außerhalb des Bereiches, u_0 : auf dem Rande, u_i : im Innern) ist, muß auch

$$\left(\frac{\partial u_a}{\partial n} \right)_0 = 0$$

gelten, und hieraus folgert man weiter

$$u_a = \text{Const.}$$

Dabei ist

$$u_a = \oint \frac{\partial \ln r}{\partial n} \cdot y \cdot ds,$$

wenn wir (5) für einen äußeren Punkt hinschreiben. Durch Abschätzung dieses Integrales sehen wir dann, daß $u_a \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$ ¹. Also ist überall

$$u_a = 0.$$

Benutzen wir weiter den ebenfalls schon längst bekannten Satz, daß sich u_i und u_a am Rande um

$$\left(\frac{u_i - u_a}{2\pi} \right)_0 = y(s)$$

unterscheiden, so folgern wir sofort

$$y(s) \equiv 0.$$

Also hat die homogene Gleichung (9) tatsächlich nur eine Lösung; nach dem obenstehenden hat daher die inhomogene Gleichung (8) für gegebene Randwerte $u_0 \neq 0$ genau eine Lösung: das erste Randwertproblem ist also eindeutig gelöst.

Über die angeführten Sätze der Potentialtheorie kann man sich z. B. an Hand des Buches von KELLOGG² orientieren, das wohl das modernste Werk aus diesem Gebiete darstellt. Für die weitaus meisten Anwendungen der Potentialtheorie genügen auch schon die Bändchen von STERNBERG (Sammlung Göschen 901 u. 944), die auch einen Abriß der FREDHOLMSchen Theorie der Integralgleichungen enthalten.

b) $\Delta u = f$. GREENSche Funktion. Wir hatten bisher die Differentialgleichung $\Delta u = 0$ zugrunde gelegt; wir erweitern nun die Problemstellung dadurch, daß wir zu der Betrachtung von

$$(10) \quad \Delta u(x, y) = f(x, y)$$

übergehen. $f(x, y)$ sei eine gegebene Funktion.

Wir bilden mit Hilfe einer zunächst noch nicht weiter festgelegten Funktion $v(x, y)$ den Ausdruck

$$v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v.$$

Die Integration dieses Ausdruckes über einen gegebenen Bereich liefert uns dann den GREENSchen Satz, der nach dem Physiker GREEN, einem Zeitgenossen von GAUSS, benannt wurde:

$$(11) \quad \int_{\mathfrak{B}} \int (v \Delta u - u \Delta v) dx dy = \oint_C \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds.$$

¹ Für einen weit entfernten Punkt A schrumpft nämlich der gesamte Winkel $\int |d\varphi|$ auf null zusammen.

² KELLOGG: Foundations of Potential Theory. Berlin: Julius Springer 1929.

Wie in Abb. 11 sei C die Randkurve von \mathfrak{B} ; n sei die äußere Normale von C . Der Beweis des Satzes findet sich in jedem Lehrbuch der Potentialtheorie oder der theoretischen Physik; man benutzt hierzu den *GAUSSschen Satz*

$$(12) \quad \iint_{\mathfrak{B}} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = \oint u \cdot \cos(n, x) ds,$$

aus dem (11) sofort folgt (vgl. auch I. 3 c).

Die Hilfsfunktion v legen wir jetzt dadurch fest, daß wir im Innern von \mathfrak{B}

$$(13) \quad \Delta v = 0$$

und auf dem Rande C

$$(14) \quad v_0 = v(s) = 0$$

verlangen. Wäre v im Innern überall regulär (zweimal stetig differenzierbar), so wäre nach dem oben Mitgeteilten $v \equiv 0$ in \mathfrak{B} . Um das auszuschließen, muß v in \mathfrak{B} mindestens eine Singularität haben. Man kann z. B. wählen

$$(15) \quad \begin{aligned} v &= \ln r + V, \\ r^2 &= (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2; \end{aligned}$$

$A = (\xi, \eta)$ sei ein fester Punkt innerhalb \mathfrak{B} . $\ln r$ hat bei $r = 0$ eine Singularität; $V(x, y)$ soll in \mathfrak{B} überall regulär sein, und außerdem soll dort

$$(16) \quad \Delta V = 0$$

gelten.

Die Bestimmung von v läuft also darauf hinaus, eine Potentialfunktion V mit gegebenen Randwerten zu bestimmen

$$(17) \quad \Delta V = 0, \quad V_0 = -\ln r_0.$$

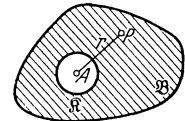


Abb. 14.

Wie man diese erste Randwertaufgabe mit Hilfe einer Belegung $y(s)$ lösen kann, wurde schon gezeigt. Gilt (17), so ist auch nach (15)

$$\Delta v = 0, \quad v_0 = 0.$$

Es läßt sich also stets eine solche Funktion v bestimmen; die Funktionentheorie lehrt uns außerdem dieses v kennen für alle Bereiche \mathfrak{B} , die man konform auf das Kreisinnere abbilden kann.

Um die Integration in (11) auszuführen, schließen wir den Aufpunkt $A = (\xi, \eta)$ durch einen kleinen Kreis \mathfrak{R} aus dem Integrationsbereich aus (Abb. 14).

In dem Restbereich $\mathfrak{B} - \mathfrak{R}$ sind dann u und v beide regulär, und man kann den GREENSchen Satz (11) anwenden

$$(18) \quad \iint_{\mathfrak{B} - \mathfrak{R}} v \cdot \Delta u \cdot dx dy = - \oint_C u \frac{\partial v}{\partial n} ds + \oint_{\mathfrak{R}} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds.$$

Wir gehen jetzt zur Grenze $\mathfrak{R} \rightarrow 0$ über. Im Doppelintegral stört die Singularität des $\ln r$ in A nicht; denn man kann in Polarkoordinaten

$$\ln r \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi$$

statt

$$\ln r \cdot dx \cdot dy$$

schreiben, und für $r \rightarrow 0$ geht $\ln r \cdot r$ ebenfalls gegen 0. Auf dem Rande des kleinen Kreises \mathfrak{R} ist

$$ds = r \cdot d\varphi,$$

und da dort u und $\partial u / \partial n$ stetig sein sollen, folgt nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$(19) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\mathfrak{R}} v \frac{\partial u}{\partial n} ds = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{\text{mitt}} \cdot \int_{\mathfrak{R}} \ln r \cdot r \cdot d\varphi + \lim_{r \rightarrow 0} \left(V \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{\text{mitt}} 2r \cdot \pi = 0,$$

und ebenfalls wegen der Stetigkeit von u wird

$$(20) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int u \frac{\partial v}{\partial n} ds = u(A) \cdot 2\pi = 2\pi \cdot u(\xi, \eta),$$

da

$$-\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r} + \frac{\partial V}{\partial r}, \quad ds = r \cdot d\varphi$$

ist. Berücksichtigen wir noch, daß nach (10) $\Delta u = f$ sein soll, so schreibt sich schließlich (18)

$$(21) \quad u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \iint_{\mathfrak{B}} v \cdot f \cdot dx dy + \frac{1}{2\pi} \oint_C u_0 \cdot \frac{\partial v}{\partial n} ds.$$

Da wir v, f, u_0 als bekannt betrachten, haben wir damit $\Delta u = f$ bei gegebenen Randwerten u_0 gelöst.

Die benutzte Hilfsfunktion v heißt die GREENSche Funktion $G(x, y; \xi, \eta)$ des Bereiches \mathfrak{B} ; sie ist in den Variablenpaaren (x, y) und (ξ, η) symmetrisch (vgl. I. 3 c). Diese Symmetrie beweist man, indem man die vorhergehenden Überlegungen auf zwei GREENSche Funktionen: $G(x, y; \xi, \eta)$ und $G(x, y; \xi_1, \eta_1)$ anwendet, statt u, v , wobei kleine Kreise um ξ, η und ξ_1, η_1 auszuschließen sind. Man erhält sofort

$$G(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) = G(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1).$$

Zusammenfassend können wir also sagen:

Satz 10. *Es stellt sich im Innern des Bereiches \mathfrak{B} die gesuchte Lösung von $\Delta u = f$ so dar:*

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathfrak{B}} G \cdot f \cdot dx dy + \frac{1}{2\pi} \oint_C u_0(s) \cdot \frac{\partial G(s)}{\partial n} ds.$$

Hierin sind $u_0(s)$ die vorgeschriebenen Randwerte von u .

Auch diese Sätze findet man in der erwähnten Literatur überall bewiesen; sie können also dort nachgelesen werden. Hierzu besonders das Buch von HEYWOOD-FRÉCHET (s. Einleitung!).

c) **Membran und Platte.** Wir machen nun sofort eine Anwendung der soeben bewiesenen Sätze auf das Problem der *schwingenden Membran*. Deren Schwingungen $U(x, y, t)$ werden gegeben durch die allgemeine Schwingungsgleichung

$$(22) \quad \Delta U = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$

c hat die Dimension einer Geschwindigkeit. Da wir Schwingungen in t (in der Zeit) suchen, machen wir mit reellem ω die schon wiederholt benutzten Ansätze

$$(23) \quad U = u(x, y) \cdot \cos \omega t, \quad U = u(x, y) \cdot \sin \omega t.$$

In (22) eingesetzt, führen beide auf

$$(24) \quad \Delta u = -\frac{\omega^2}{c^2} u.$$

Die Membran soll nun am Rande eingeklemmt sein: das liefert die Randbedingung

$$(25) \quad u_0 = 0.$$

Um Satz 10 anzuwenden, haben wir nur

$$f \equiv -\frac{\omega^2}{c^2} u$$

einzusetzen. Wir erhalten so

$$(26) \quad u(\xi, \eta) + \frac{\omega^2}{2\pi \cdot c^2} \cdot \iint_{\mathfrak{B}} G(x, y; \xi, \eta) \cdot u(x, y) dx dy = 0.$$

Das ist eine homogene lineare Integralgleichung für u .

Auf (26) kann man jetzt die ganze, uns schon bekannte Theorie der Integralgleichungen anwenden, denn daß in (26) die gesuchte Funktion von zwei Variablen abhängt statt wie früher nur von einer, ist belanglos. In dieser leichten Übertragbarkeit von einer auf beliebig viele Dimensionen liegt ebenfalls ein großer Vorzug der Theorie der Integralgleichungen. Nur eines ist noch in (26) zu beachten: G wird in $x = \xi, y = \eta$ singulär. Aber diese Singularität stört nicht bei der Integration, wie wir schon oben sahen: die Singularität steckt in $\ln r$ für $r = 0$; in Polarkoordinaten ist jedoch

$$\ln r \cdot dx \cdot dy$$

durch

$$\ln r \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi$$

zu ersetzen, und das verschwindet für $r \rightarrow 0$.

(Gehen wir zu drei Variablen x, y, z über, so haben wir als Grundlösung von

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

statt $\ln r$ wie bisher,

$$u = \frac{1}{r}$$

zu nehmen. Hier ist die Singularität für $r = 0$ schwerer, läßt sich aber ebenfalls ungefährlich machen, da bei Übergang zu Polarkoordinaten hier

$$\frac{1}{r} \cdot r^2 \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\vartheta = r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\vartheta$$

an die Stelle von

$$\frac{1}{r} \cdot dx dy dz$$

tritt.)

(26) hat einen symmetrischen Kern G ; wir wissen in Vorwegnahme des Fundamentalsatzes, daß bei einem solchen sicher Eigenwerte

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$$

vorhanden sind. Unser Kern G hat sogar unendlich viele λ_i , und alle sind positiv, was ohne Beweis mitgeteilt sei. (Über Kerne mit lauter positiven Eigenwerten s. I. 6k.) Da zu jedem dieser λ mindestens eine Eigenfunktion u gehört, heißt das, daß bei unserer Membran Schwingungen $U(x, y, t) = u(x, y) \cdot \cos \omega t$ mit $u \not\equiv 0$ möglich sind.

Ähnlich liegt der Fall bei der *schwingenden Platte*, deren Durchbiegungen $U(x, y, t)$ der Differentialgleichung

$$(27) \quad \Delta \Delta U = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

genügen. Hier müssen am Rande vorgegeben werden etwa

$$(28) \quad U_0, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_0.$$

Man braucht hier nur den GREENSchen Satz auf $\Delta \Delta u$ auszudehnen, um dann wieder die gesamte Theorie der Integralgleichungen anwenden zu können.

d) Der Skineffekt. Als Beispiel, das ebenfalls hierher gehört, kann der *Skineffekt der Elektrotechnik* betrachtet werden. Wir beschränken uns hierbei auf das bequemere ebene Problem: senkrecht zur x - y -Ebene möge ein magnetisches Feld schwingen

$$(29) \quad H(x, y, t) = h(x, y) \cdot e^{i\omega t}.$$

Ursprünglich sei h konstant; bringt man aber einen Draht in das Feld, so wird dieses hierdurch gestört, und es treten nach der MAXWELLSchen Theorie im Draht Schwingungen auf nach der Gleichung

$$(30) \quad \Delta H = \sigma \cdot \Pi \cdot \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial t^2};$$

σ ist die Leitfähigkeit des Drahtes, c die Lichtgeschwindigkeit, und Π eine Maßkonstante

$$\Pi = 4\pi \cdot 10^{-9} \text{ Henry.}$$

Im Außenraum soll aber gelten

$$(31) \quad \Delta H = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}.$$

(30), (31) sind zu integrieren mit den Randbedingungen

$$(32) \quad (H_a)_0 = (H_i)_0, \quad \left(\frac{\partial H_a}{\partial n} \right)_0 = \left(\frac{\partial H_i}{\partial n} \right)_0;$$

ferner soll H im Unendlichen konstant sein, und dort soll $\partial H / \partial r$ von zweiter Ordnung verschwinden.

Führen wir h ein, so erhalten wir aus (30)

$$\Delta h = \sigma \cdot \Pi \cdot i \cdot \omega \cdot h - \frac{1}{c^2} \omega^2 h$$

innerhalb des Drahtes. Aus physikalischen Gründen ($\omega \ll c$) vernachlässigt man meist $\omega^2 h / c^2$, so daß zu integrieren sind

$$(33) \quad \begin{aligned} \Delta h_i &= \sigma \cdot \Pi \cdot i \cdot \omega \cdot h, \\ \Delta h_a &= 0. \end{aligned}$$

(Wir benutzen hier stark einen Vortrag von Herrn Doz. Dr.-Ing. BUCHHOLZ in der Berliner Ortsgruppe der Gamm.)

Wir nehmen wieder die GREENSche Formel (18) mit

$$v = \ln r$$

und als Gebiet einen großen Kreis. Berücksichtigen wir die Randbedingungen in der GREENSchen Formel, so erhalten wir schließlich

$$(34) \quad h(\xi, \eta) = C + \lambda \cdot \iint_{(i)} \ln r \cdot h_i(x, y) dx dy,$$

wobei

$$(35) \quad \lambda = \frac{i}{2\pi} \sigma \cdot \Pi \cdot \omega$$

imaginär ist; C ist der Wert von h im Unendlichen.

Unbekannt ist h_i ; kennen wir diese Funktion, kennen wir nach (34) auch h_a . Nehmen wir zunächst (ξ, η) genau wie (x, y) im Innern des Drahtes an, so liegt in (34) eine Integralgleichung zweiter Art für h vor. Da der Kern $\ln r$ in den Variablenpaaren (ξ, η) und (x, y) symmetrisch ist, hat die zu (34) gehörige homogene Integralgleichung nach dem Fundamentalsatz wenigstens eine Eigenfunktion, und die zugehörigen Eigenwerte λ sind reell. In (34) ist λ imaginär, ist also kein Eigenwert, und die homogene Gleichung hat folglich nur die triviale Lösung $h \equiv 0$. Nach dem Alternativsatz hat daher die inhomogene Gleichung (34) ($C \neq 0$) genau eine Lösung. Es existiert also im Drahtinnern ein wohlbestimmtes Feld H .

Diese und ähnliche Probleme der Elektrodynamik findet man behandelt in folgenden Arbeiten:

MANNEBACK: J. Math. Physics Bd. 1 (1922) S. 124f.

NOETHER, F.: Z. angew. Math. Mech. Bd. 7 (1927) S. 453. — Ann. Physik Bd. 84 (1927) S. 225.

ROTHE, E.: J. reine angew. Math. Bd. 120 (1934) S. 218.

STERNBERG: Composit. mathematica Bd. 3 (1936) S. 254.

STRUTT: Ann. Physik Bd. 85 (1927) S. 281, 866; Bd. 88 (1931) S. 722.

Andere Probleme der Elektrotechnik unter Benutzung von Integralgleichungen findet man bei:

NOETHER, F.: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. Bd. 1 (1921) Heft 3.

OLLENDORFF, F.: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. Bd. 5 (1927) Heft 3, letzterer auch in dem Buche Erdströme. Berlin: Julius Springer 1928.

Zahlreiche Anwendungen über *mechanische Schwingungen* stehen bei:

VAN DEN DUNGEN: Cours de Technique des Vibrations. Brüssel 1926.

Ferner sind viele weitere Anwendungen der Integralgleichungen zu finden in dem in I.1. genannten Werke von FRANK-MISES, sowie im Handbuch der Physik von GEIGER-SCHEEL (insbesondere in Bd. 6).

Die Durchrechnung der Integralgleichungen gelingt BUCHHOLZ und anderen Autoren in einigen Fällen; darauf wollen wir hier aber nicht weiter eingehen.

e) **HILBERTs Begründung der elementaren Strahlungstheorie.** Wir hatten bisher immer die zu lösenden gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen mit mehr oder weniger Rechnung erst in die Form von Integralgleichungen gebracht, um Aussagen über ihre Lösbarkeit machen zu können. Man wird versucht sein, dieses Verfahren als einen Umweg zu bezeichnen, und man wird danach trachten, die Differentialgleichungen direkt zu lösen. Aber man wird feststellen: wenn ein direktes Verfahren hier und da möglich ist, erhält man doch auf diese Weise niemals jene ganz allgemeinen Sätze, die wir bisher benutzten. Will man, von Differentialgleichungen ausgehend, zu allgemeinen Ergebnissen emporsteigen, wird man notwendig auf die Methoden der Integralgleichungen geführt; daher nahm schon POINCARÉ bei seinen potentialtheoretischen Untersuchungen einen großen Teil unserer Theorie vorweg.

Aber die Bedeutung der Integralgleichungen geht noch weiter: Es gibt physikalische Probleme, deren exakte mathematische Formulierung nur mit Hilfe einer Integralgleichung möglich ist. Daß also oft die Integralgleichung das Primäre ist, soll hier an dem Beispiel der HILBERTschen Begründung der elementaren Strahlungstheorie dargelegt werden. (HILBERTs Arbeit erschien in den Göttinger Nachr. 1912; hierher gehören auch die „Bemerkungen zur Begründung der elementaren Strahlungstheorie“¹). Wir nehmen mit HILBERT einen abgeschlossenen Raum (Hohlraum), in dem überall die gleiche Temperatur herrscht. Energieaustausch zwischen den einzelnen Punkten soll nur durch Strahlung erfolgen; jeder Punkt emittiert und absorbiert Energie. Ferner machen

¹ HILBERT: Physik. Z. Jahrg. 14 (1913).

wir noch die Voraussetzung, daß jede Frequenz für sich betrachtet werden darf. Außerdem sei der Raum konvex.

Es sei $\eta(x, y, z)$ der Emissionskoeffizient an der Stelle (x, y, z) . Das Volumenelement dV_1 strahlt also in der Zeit dt die Energie

$$(36) \quad \eta(x_1, y_1, z_1) \cdot dV_1 \cdot dt$$

aus.

Zur Vereinfachung gegenüber HILBERT sei noch die Lichtgeschwindigkeit im ganzen Hohlraum konstant angenommen:

$$(37) \quad q \equiv 1;$$

es seien also keine lichtbrechenden Medien vorhanden. Wir können dann annehmen, daß der Energietransport auf geradlinigen Bahnen vor sich geht.

Wir schlagen um den Punkt (x_1, y_1, z_1) eine Kugel vom Radius r , so daß

$$(38) \quad dF = r^2 \cdot dO$$

ihr Flächenelement ist, wenn dO das Element der Einheitskugel um $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ (der „räumliche Winkel“) ist. Da die Gesamtemission in der Zeit dt nach (36) $\eta_1 \cdot dV_1 \cdot dt$ ist, ist der auf dO entfallende Betrag

$$(39) \quad \eta_1 \cdot dV_1 \cdot dt \cdot \frac{dO}{4\pi},$$

da der Flächeninhalt der Einheitskugel

$$(40) \quad \oint dO = 4\pi$$

ist.

Auf dem Wege des Energietransports von P_1 nach $P = (x, y, z)$ wird Energie absorbiert. Ist E die in jene Richtung ausgestrahlte Energie, $\alpha(x, y, z)$ der Absorptionskoeffizient, so wird längs des Bahnelements ds die Energie

$$(41) \quad -dE = \alpha \cdot E \cdot ds$$

absorbiert. Nach Durchlaufen der Strecke $\overline{P_1P}$ trifft daher nur die Energie $e^{-|A|} \cdot E$ in P ein, und aus (41) folgt für den Abschwächungsfaktor

$$(42) \quad e^{-|A|} = e^{-\left| \int_{P_1}^P \alpha \cdot ds \right|}.$$

Daher kommt von P_1 nach (39) in P in der Zeit dt die Energie

$$(43) \quad E \cdot e^{-|A|} = \eta_1 \cdot dV_1 \cdot dt \cdot \frac{dO}{4\pi} \cdot e^{-|A|}$$

an. Nun ist das Volumenelement in P

$$(44) \quad dV = dF ds = dF \cdot q \cdot dt = dF \cdot dt = r^2 \cdot dO \cdot dt,$$

daher wird dem Punkte P von P_1 die Energiedichte zugestrahlt:

$$(45) \quad \frac{E \cdot e^{-|A|}}{dV} = \frac{\eta_1 \cdot dV_1}{4\pi \cdot r^2} \cdot e^{-|A|}.$$

Diese Dichte wird dem Punkte P von jedem anderen Punkte P_1 des Hohlraums zugestrahlt; daher ist die gesamte durch Strahlung entstandene Energiedichte in P

$$(46) \quad u(x, y, z) = \int_{V_1} \frac{\eta_1 \cdot dV_1}{4\pi \cdot r^2} \cdot e^{-|A|},$$

wobei die Integration über den gesamten Hohlraum V_1 zu erstrecken ist.

Wir verlangen nun, daß im Hohlraum Energiegleichgewicht herrscht. Es muß daher die von P je Volumen- und Zeitelement emittierte Energie $\eta(x, y, z)$ gleich der je Zeiteinheit in P absorbierten Energiedichte $u \cdot \alpha \cdot q$ sein:

$$(47) \quad \eta = u \cdot \alpha \cdot q = u \cdot \alpha,$$

und das liefert nach (46) in

$$(48) \quad \eta(x, y, z) = \frac{\alpha}{4\pi} \cdot \int_{V_1} \frac{e^{-|A|}}{r^2} \cdot \eta_1 \cdot dV_1$$

eine lineare homogene Integralgleichung zweiter Art für η .

HILBERT setzt nun

$$(49) \quad \eta = \alpha \cdot \varphi$$

und erhält so aus (48)

$$(50) \quad \varphi = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{V_1} \alpha_1 \cdot K \cdot \varphi_1 \cdot ds_1 \cdot dO_1.$$

Hierin ist

$$(51) \quad ds_1 \cdot dF_1 = r^2 \cdot ds_1 \cdot dO_1 = dV_1$$

das Volumenelement in P_1 , und

$$(52) \quad K = \frac{e^{-|A|}}{r^2}$$

ist der symmetrische Kern der Integralgleichung.

Man kann nun zeigen, daß (50) die Lösung

$$(53) \quad \varphi = \text{const}$$

hat. Wir beschränken uns hierzu auf den Fall der vollkommen schwarzen Wand, d. h. es soll sein

$$(54) \quad \int_0^{s_1} \alpha_1 \cdot ds_1 \rightarrow \infty$$

wenn sich P_1 der Wand nähert. Die Wand absorbiert also jegliche Energie.

Nun ist aber

$$\alpha_1 \cdot e^{-\int_0^{s_1} \alpha_1 ds_1} = -\frac{d}{ds_1} \left(e^{-\int_0^{s_1} \alpha_1 ds_1} \right),$$

und daher strebt

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{s_1} \alpha_1 \cdot e^{-|A|} ds_1 &= \int_0^{s_1} \alpha_1 \cdot e^{-\int_0^{s_1} \alpha_1 ds_1} = -\int_0^{s_1} \frac{d}{ds_1} \left(e^{-\int_0^{s_1} \alpha_1 ds_1} \right) ds_1 = \\ &= -\left. e^{-\int_0^{s_1} \alpha_1 ds_1} \right|_0^{s_1} = 1 - e^{-\int_0^{s_1} \alpha_1 ds_1} \end{aligned} \right.$$

gegen 1, wenn sich P_1 der Wand nähert. Nun ist nach (50)

$$(56) \quad \varphi = \frac{1}{4\pi} \iint \alpha_1 \cdot e^{-|A|} \varphi_1 \cdot ds_1 \cdot dO_1,$$

hierin erstreckt sich die Integration über den gesamten Hohlraum. Um einzusehen, daß (53) eine Lösung ist, setzen wir $\varphi_1 = \text{const}$ und führen nach (55) die Integration über s_1 aus. Beachten wir noch (40), so erhalten wir

$$\varphi = \frac{\varphi_1}{4\pi} \cdot \int dO_1 = \varphi_1.$$

(53) ist also tatsächlich eine Lösung der Integralgleichung (50). Also ist nach (49)

$$(57) \quad \eta = \text{const} \cdot \alpha$$

möglich; der Emissionskoeffizient ist aber wirklich proportional dem Absorptionskoeffizienten.

Denn es zeigt sich weiter, daß $\varphi = \text{const}$ die einzige Lösung von (50) ist. Wie wir nachher beweisen wollen, gilt *der allgemeine Satz*:

Ist in der Integralgleichung

$$\varphi = \lambda \cdot \int_{V_1} K \cdot \varphi_1 \cdot dV_1$$

$\lambda > 0$, K symmetrisch und positiv ($K \geq 0$), und gibt es eine Lösung $\varphi > 0$, dann ist dies auch die einzige Lösung (d. h. alle anderen Lösungen haben die Form $\text{const} \cdot \varphi$).

Diesen Satz können wir auf unsere Integralgleichung (48) für η anwenden, denn (50) hat die Eigenfunktion $\varphi = 1$, also hat nach (49)

$$\eta = \frac{\alpha}{4\pi} \cdot \int \frac{1}{r^2} \cdot e^{-|A|} \cdot \eta_1 \cdot dV_1$$

die Eigenfunktion $\eta = \alpha$, und daher hat die hieraus abgeleitete Gleichung

$$(58) \quad \frac{\eta}{+\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{4\pi} \cdot \int \frac{+\sqrt{\alpha} \alpha_1}{r^2} \cdot e^{-|A|} \cdot \frac{\eta_1}{+\sqrt{\alpha_1}} \cdot dV_1$$

die stets positive Eigenfunktion $+\sqrt{\alpha}$. (58) hat aber außerdem den stets positiven, symmetrischen Kern

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\sqrt{\alpha} \alpha_1}{r^2} \cdot e^{-|A|},$$

und ferner ist $\lambda = 1$. Die Singularität des Kerns an der Stelle $r = 0$ ist wegen $dV_1 = r^2 \cdot dO_1$ ungefährlich. Es treffen also für (58) alle Voraussetzungen des Satzes zu; $\eta = \sqrt{\alpha}$ ist daher die einzige Lösung.

Wir schreiten nun zum Beweis des Hilfssatzes. Es sei also

$$(59) \quad \varphi = \lambda \cdot \int K \cdot \varphi_1 \cdot dV_1$$

und $\varphi > 0$, $K \geq 0$, $\varphi_1 > 0$, $\lambda > 0$. Also ist auch

$$(60) \quad 1 = \lambda \cdot \int K \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi} dV_1.$$

Sei nun ψ eine weitere Lösung, also

$$\psi = \lambda \cdot \int K \cdot \psi_1 \cdot dV_1,$$

so kann man wegen (60) dafür schreiben

$$\lambda \cdot \int \frac{\varphi_1}{\varphi} \cdot K dV_1 = 1 = \lambda \cdot \int K \cdot \frac{\psi_1}{\psi} \cdot dV_1,$$

oder nach Multiplikation mit ψ^2

$$(61) \quad \int \frac{K}{\varphi \varphi_1} (\varphi_1 \psi - \psi_1 \varphi) \varphi_1 \psi dV_1 = 0.$$

Diesen Ausdruck integrieren wir über V und erhalten

$$(62) \quad \int \int \frac{K}{\varphi \varphi_1} (\varphi_1 \psi - \psi_1 \varphi) \varphi_1 \psi \cdot dV \cdot dV_1 = 0.$$

Wir vertauschen jetzt (x, y, z) mit (x_1, y_1, z_1) . Beachten wir noch die Symmetrie von K in diesen Variablen Tripeln, so folgt

$$(63) \quad \int \int \frac{K}{\varphi \varphi_1} (\varphi \psi_1 - \psi \varphi_1) \varphi \psi_1 \cdot dV \cdot dV_1 = 0.$$

Die Addition der Gleichungen (62) und (63) ergibt

$$\int \int \frac{K}{\varphi \varphi_1} (\varphi \psi_1 - \psi \varphi_1)^2 \cdot dV \cdot dV_1 = 0,$$

und da K, φ, φ_1 positiv sind, folgt zwangsläufig

$$\varphi \psi_1 - \psi \varphi_1 = 0,$$

also

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{\psi_1}{\varphi_1},$$

oder $\psi = \text{const} \cdot \varphi$, womit der Beweis erbracht ist. (Diese Schlußweise stammt von HECKE.)

6. Durchführung der Theorie für die symmetrischen Kerne.

a) **Der Fundamentalsatz. Berechnung des niedrigsten Eigenwertes. Die SCHWARZsche Ungleichheit.** Wir wenden uns wieder der Theorie zu, und zwar der Theorie von ERHARD SCHMIDT, wie sie in seiner Dissertation niedergelegt ist¹. Auf die Theorie seiner zweiten Arbeit² können wir leider nicht eingehen.

Vorgelegt sei also eine lineare Integralgleichung zweiter Art, deren Kern symmetrisch ist

$$(1) \quad K(x, z) = K(z, x).$$

Der Fundamentalsatz besagt, daß ein solcher Kern stets mindestens einen Eigenwert λ besitzt, d. h. es gibt mindestens ein λ , so daß die homogene Gleichung

$$(2) \quad y(x) = \lambda \cdot \int_0^l K(x, z) \cdot y(z) \cdot dz$$

eine nichttriviale Lösung hat.

Der Beweis dieses Satzes ist etwas mühsam und soll daher hier nur in der Hauptsache gebracht werden. Der Leitgedanke des Beweises soll vor allem dazu dienen, ein Verfahren zu finden, mit dessen Hilfe man wenigstens den kleinsten Eigenwert wirklich berechnen kann.

Wir gehen dazu von (2) aus und benutzen zur Bestimmung von y das Iterationsverfahren von SCHWARZ, das uns früher auf die NEUMANNsche Reihe führte. Aber jetzt ist das Problem schwieriger als früher: wir kennen jetzt weder λ noch y ; vielmehr sollen λ und y gleichzeitig so bestimmt werden, daß y (2) löst und nicht identisch verschwindet. Nimmt man λ zu klein, streben die Näherungen y_1, y_2, \dots des Iterationsverfahrens gegen 0; nimmt man λ zu groß, wachsen die y_n gegen ∞ . Man muß durch eine geeignete Normierung von y beide Klippen zu vermeiden suchen.

Wir haben also als erste Näherung $y_1(x)$ so zu wählen, daß

$$(3) \quad \int_0^l K(x, z) \cdot y_1(z) dz \neq 0.$$

Wir nehmen vorläufig einmal an, daß die Grenzfunktion $y(x)$, gegen die unsere y_n konvergieren, an einer von vornherein bekannten Stelle nicht verschwindet

$$(4) \quad y(b) \neq 0, \quad 0 \leq b \leq l$$

[eine derartige Stelle b kann aus z. B. physikalischen Gründen des Problems schon bekannt sein, bevor wir die Eigenfunktion $y(x)$ berechnet haben].

¹ SCHMIDT, ERHARD: Math. Ann. Bd. 63 (1905).

² SCHMIDT, ERHARD: Math. Ann. Bd. 64 (1907).

Wenn wir ein solches b kennen, wählen wir die erste Näherung so, daß

$$(5) \quad y_1(b) = 1$$

gilt. Die zweite Näherung ist dann

$$(6) \quad y_2(x) = \lambda \cdot \int_0^l K(x, z) \cdot y_1(z) dz.$$

Da $y(b) \neq 0$ sein soll, muß nach (2) auch

$$K(b, z) \neq 0$$

sein; y_2 sei ebenfalls in b von null verschieden:

$$(7) \quad y_2(b) \neq 0.$$

λ war bisher noch frei; wir wählen ein $\lambda = \lambda'$ so, daß

$$(8) \quad y_2(b) = 1,$$

also

$$(9) \quad 1 = \lambda' \cdot \int_0^l K(b, z) y_1(z) dz$$

gilt. So fahren wir fort. y_2 eingesetzt liefert die dritte Näherung

$$(10) \quad y_3 = \lambda \cdot \int_0^l K(x, z) y_2(z) dz.$$

Wieder sei $y_3(b) \neq 0$. λ wird wieder so zu einem λ'' bestimmt, daß

$$(11) \quad y_3(b) = \lambda'' \cdot \int_0^l K(b, z) y_2(z) dz = 1.$$

Wir setzen jetzt (6) in (10) ein:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_3 = \lambda' \lambda'' \cdot \int_0^l K_2(x, z) \cdot y_1(z) \cdot dz \\ \text{und fahren so fort:} \\ y_n = \lambda' \lambda'' \dots \lambda^{(n-1)} \cdot \int_0^l K_{n-1}(x, z) y_1(z) dz. \end{array} \right.$$

Das ganze Verfahren wird davon abhängen, ob die $\lambda^{(v)}$ konvergieren oder nicht:

$$(13) \quad \lambda^{(v)} \rightarrow \lambda.$$

Ist das der Fall, dann bleibt noch zu zeigen, daß dieser Grenzwert λ tatsächlich ein Eigenwert ist, und daß die y_n gegen eine zugehörige Eigenfunktion konvergieren.

Das werde nicht weiter ausgeführt, wir wollen vielmehr dieses Verfahren nur am Musterkern versuchen. Wir setzen dabei $l = \pi$ und $b = \pi/2$, so daß nach der Definition (I. 2. 7)

$$(14) \quad K(x, z) = \begin{cases} z \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) & z \leq x \\ x \left(1 - \frac{z}{\pi}\right) & z \geq x \end{cases}$$

wird. Nach Satz 1 hat K den Eigenwert

$$(15) \quad \lambda = 1$$

und die dazugehörige Eigenfunktion

$$(16) \quad y = \sin x.$$

Als y_1 nehmen wir 1; dann ist natürlich

$$(17) \quad y_1(b) \equiv y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

wie es (5) verlangt. Nach (6) wird

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} y_2 &= \lambda' \cdot \int_0^{\pi} K(x, z) y_1(z) dz \\ &= \lambda' \cdot \int_0^x z \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) dz + \lambda' \cdot \int_x^{\pi} x \left(1 - \frac{z}{\pi}\right) dz \\ &= \frac{\lambda'}{2} x(\pi - x). \end{aligned} \right.$$

Soll $y_2(\pi/2) = 1$ werden, muß λ' aus der Gleichung

$$1 = \frac{\lambda'}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

zu

$$(19) \quad \lambda' = \frac{8}{\pi^2} = 0,81$$

bestimmt werden. Das ist die erste Näherung für $\lambda = 1$. Nach (18) wird dann die Parabel

$$(20) \quad y_2 = \frac{4}{\pi^2} (\pi - x) \cdot x$$

die angenäherte Eigenfunktion, die mit der wirklichen Eigenfunktion $y = \sin x$ die Werte an den Stellen $x = 0, \pi/2, \pi$ gemeinsam hat.

Jetzt gibt der zweite Schritt nach (10)

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} y_3 &= \lambda'' \cdot \int_0^{\pi} K(x, z) \cdot y_2(z) dz \\ &= \lambda'' \cdot \frac{4}{\pi^2} \cdot \int_0^x z \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) z(\pi - z) dz + \lambda'' \cdot \frac{4}{\pi^2} \cdot \int_x^{\pi} x \left(1 - \frac{z}{\pi}\right) z(\pi - z) dz \\ &= \lambda'' \cdot \frac{1}{3\pi^2} \cdot x(\pi - x) (\pi^2 + \pi \cdot x - x^2). \end{aligned} \right.$$

Soll $y_3(\pi/2) = 1$ sein, so muß sein

$$(22) \quad \lambda'' = \frac{48}{5\pi^2} = 0,97.$$

Das ist eine bessere Näherung von $\lambda = 1$ als $\lambda' = 0,81$ (nur noch 3% zu wenig).

Wie gesagt, kann man dieses Verfahren nur dann durchführen, wenn man eine Stelle b mit

$$y(b) \neq 0$$

kennt. Will man jedoch den Fundamentalsatz so allgemein beweisen, wie wir ihn oben ausgesprochen haben, so muß man diese Voraussetzung fallenlassen. Man wird dafür alle Näherungen y_n etwa der *Normierungsbedingung*

$$(23) \quad \int_0^l y_n^2(x) \cdot dx = 1$$

unterwerfen. Auch dies ermöglicht die Bestimmung eines Eigenwertes λ , wobei allerdings die praktische Rechnung wegen der Integrationen sich komplizierter gestalten dürfte als bei der früheren Normierung.

Wieder gehen wir von einer ersten Näherung $y_1(x)$ aus und erhalten wie früher y_2, y_3, \dots . Zu jeder Näherung y_n wird dann wieder ein $\lambda^{(n)}$ bestimmt, aber nicht mehr aus der Bedingung $y_n(b) = 1$, sondern aus

$$\int_0^l y_n^2 \cdot dx = 1.$$

(Dieses $\lambda^{(n)}$ ist natürlich im allgemeinen von dem $\lambda^{(n)}$ der früheren Methode verschieden.)

Es ist also beim $(n+1)$ -Schritt:

$$(24) \quad y_{n+1}(x) = \lambda^{(n)} \cdot \int_0^l K(x, z) \cdot y_n(z) \cdot dz.$$

Um jetzt der Bedingung (23) zu genügen, bestimmen wir $\lambda^{(n)}$ so, daß mit

$$(25) \quad \begin{cases} y_{n+1}^2 = (\lambda^{(n)})^2 \cdot \left[\int K(x, z) y_n(z) dz \right] \left[\int K(x, u) y_n(u) du \right] \\ \quad = (\lambda^{(n)})^2 \cdot \iint K(x, z) K(x, u) y_n(z) y_n(u) dz du, \\ 1 = \int y_{n+1}^2 dx = (\lambda^{(n)})^2 \cdot \iiint K(x, z) K(x, u) y_n(z) y_n(u) \cdot dx \cdot dz \cdot du \\ \quad = (\lambda^{(n)})^2 \cdot \iint K_2(z, u) \cdot y_n(z) \cdot y_n(u) \cdot dz \cdot du, \end{cases}$$

gilt, da nach I. 4a

$$K_2(z, u) = \int K(z, x) \cdot K(x, u) dx$$

und wegen der Symmetrie $K(x, z) = K(z, x)$ ist. Wir setzen jetzt in (25) für $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_1$ nacheinander (24) ein und erhalten:

$$(26) \quad \begin{cases} 1 = (\lambda^{(n)} \lambda^{(n-1)} \dots \lambda')^2 \cdot \iiint K_2(z, u) \cdot K_{n-1}(z, w) \cdot y_1(w) \cdot \\ \quad \cdot K_{n-1}(u, t) \cdot y_1(t) \cdot dz \cdot du \cdot dw \cdot dt. \end{cases}$$

(26) gibt umgeformt mit Hilfe der iterierten Kerne

$$(27) \quad 1 = (\lambda' \lambda'' \dots \lambda^{(n)})^2 \cdot \iint K_{2n}(w, t) \cdot y_1(w) \cdot y_1(t) \cdot dw \cdot dt.$$

Da wir die iterierten Kerne als bekannt betrachten, können wir das Integral in (27) berechnen.

Beim n . Schritt erhielten wir analog [n wird in (27) durch $n-1$ ersetzt]:

$$(28) \quad 1 = (\lambda' \lambda'' \dots \lambda^{(n-1)})^2 \cdot \iint K_{2n-2}(w, t) \cdot y_1(w) \cdot y_1(t) \cdot dw \cdot dt.$$

Die Division von (27) durch (28) liefert das gesuchte $\lambda^{(n)}$:

$$(29) \quad (\lambda^{(n)})^2 = \frac{\iint K_{2n-2}(u, t) \cdot y_1(u) \cdot y_1(t) \cdot du \cdot dt}{\iint K_{2n}(u, t) \cdot y_1(u) \cdot y_1(t) \cdot du \cdot dt}.$$

Die wichtigste Behauptung des Fundamentalsatzes ist nun die: diese so berechneten $\lambda^{(n)}$ konvergieren gegen einen Eigenwert λ .

Um sicher zu sein, daß nicht eines der y_n null wird, wählt man als erste Näherung

$$(30) \quad y_1(x) = K(x, w).$$

Hierbei läuft w als Parameter mit. Da nun wegen der Symmetrie der Kerne

$$\iint K_{2n}(u, t) \cdot K(u, w) \cdot K(t, w) \cdot du \cdot dt = K_{2n+2}(w, w)$$

ist, wird

$$(31) \quad (\lambda^{(n)})^2 = \frac{K_{2n}(w, w)}{K_{2n+2}(w, w)};$$

w kann durch irgendeine Zahl ersetzt werden und man zeigt leicht, daß $K_{2n}(w, w)$ nicht für alle w verschwinden kann.

Diese letzte Formel gestattet uns nun, mit Hilfe des Grenzübergangs

$$(32) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)} = \lambda$$

zu jedem symmetrischen Kern einen Eigenwert zu konstruieren, und zwar, wie sich später (S. 79) zeigen wird, den kleinsten:

Satz 11. *Der kleinste Eigenwert des symmetrischen Kernes K folgt aus*

$$\lambda^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{2n}(w, w)}{K_{2n+2}(w, w)},$$

wo w noch ein beliebiger Parameter ist.

Der Beweis der Konvergenz folgt am Ende der Nummer.

Wie hier nur erwähnt werde, streben die Näherungen y_n gleichzeitig mit den $\lambda^{(n)}$ gegen eine zu λ gehörige Eigenfunktion. Darüber, ob es mehr als einen Eigenwert gibt, sagt der Beweis nichts aus.

In der Aufzählung der Hauptsätze von I. 4e erscheint der Fundamentalsatz, wie dort schon erwähnt, unter der Nummer IX. Die Identität dieser beiden Formulierungen werden wir später einsehen.

Wir wollen wieder den Musterkern (14) als Beispiel für die geschilderte allgemeine Methode zur Gewinnung des kleinsten Eigenwertes heranziehen. Damit (23) erfüllt ist, gehen wir aus von

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

und erhalten y_2 aus

$$y_2 = \lambda' \cdot \int_0^{\pi} K(x, z) \cdot y_1 \cdot dz = \lambda' \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} x(\pi - x)$$

[man vergleiche das mit der zweiten Näherung (18) der früheren Methode!]

Jetzt soll aber $\int_0^{\pi} y_2^2 dx = 1$ sein. Das gibt

$$1 = \lambda'^2 \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^{\pi} x^2(\pi - x)^2 dx = \lambda'^2 \cdot \frac{1}{\pi} \frac{\pi^5}{120},$$

also

$$(33) \quad \lambda' = \frac{\sqrt{120}}{\pi^2} = 1,11,$$

statt des wahren Wertes $\lambda = 1$. Damit wird

$$y_2 = \sqrt{\frac{120}{\pi}} \cdot \frac{x}{2\pi^2} (\pi - x).$$

Der nächste Schritt gibt

$$y_3 = \lambda'' \cdot \int_0^{\pi} K(x, z) \cdot y_2 \cdot dz = \sqrt{\frac{120}{\pi}} \cdot \frac{\lambda''}{24 \cdot \pi^2} x(\pi - x)(\pi^2 + \pi x - x^2).$$

Hier gibt die Normierung

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda''^2 \cdot \int_0^{\pi} \frac{120}{\pi} \frac{1}{24^2 \cdot \pi^4} \cdot x^2(\pi - x)^2 (\pi^2 + \pi x - x^2)^2 dx \\ &= \lambda''^2 \cdot \frac{5}{24} \cdot \frac{1}{\pi^5} \cdot \int_0^{\pi} (\pi^6 x^2 - 4\pi^4 x^4 + 2\pi^3 x^5 + 4\pi^2 x^6 - 4\pi x^7 + x^8) dx \\ &= \lambda''^2 \cdot \frac{5}{24} \cdot \frac{1}{\pi^5} \frac{\pi^9 \cdot 31}{630}, \end{aligned}$$

woraus λ'' sich bestimmt zu

$$(34) \quad \lambda'' = \frac{1}{\pi^2} \cdot \sqrt{\frac{3024}{31}} = 1,0007;$$

die Annäherung an $\lambda = 1$ ist also schon sehr genau. Wir werden später sehen, daß die Annäherung an λ bei dieser Methode stets von oben erfolgt.

Wir kehren zur Theorie zurück. Wenn wir auch nicht alle Beweise vollständig bringen wollen — ihretwegen sei auf die Arbeit von E. SCHMIDT und auf die Lehrbücher verwiesen —, wollen wir doch vor allem das Haupthilfsmittel für viele Beweise mitteilen. Es ist die *SCHWARZSCHE Ungleichheit*

$$(35) \quad \left(\int_0^l f \cdot g \cdot dx \right)^2 \leq \left(\int_0^l f^2 \cdot dx \right) \cdot \left(\int_0^l g^2 \cdot dx \right),$$

die auch für Summen gilt:

$$(36) \quad \left(\sum_1^m a_n \cdot b_n \right)^2 \leq \left(\sum_1^m a_n^2 \right) \cdot \left(\sum_1^m b_n^2 \right).$$

Es braucht in (35) nur die Existenz der Integrale vorausgesetzt zu werden.

Um (35) zu beweisen, betrachtet man den mit zwei Hilfsgrößen u und v gebildeten Ausdruck

$$(37) \quad \begin{cases} \int (uf + vg)^2 dx = u^2 \cdot \int f^2 dx + 2uv \cdot \int fg dx + v^2 \cdot \int g^2 dx \\ = Au^2 + 2Buv + Cv^2. \end{cases}$$

Das ist eine quadratische Form in u und v , die im allgemeinen wegen

$$\int (uf + vg)^2 dx \geq 0$$

nur positive Werte annehmen kann. Sie kann nur dann verschwinden, wenn

$$(38) \quad u : v = -g(x) : f(x) = \text{const}$$

möglich ist. Die Funktion

$$F\left(\frac{u}{v}\right) = A \cdot \left(\frac{u}{v}\right)^2 + 2B \cdot \left(\frac{u}{v}\right) + C$$

hat daher höchstens *eine* reelle Nullstelle $(u/v)_0$; rechnet man diese in bekannter Weise aus, erhält man die „Diskriminantenbedingung“

$$(39) \quad A \cdot C - B^2 \geq 0$$

als Bedingung für das Auftreten von höchstens einer reellen Wurzel. Setzt man in (39) die Werte für A, B, C ein, so steht die *SCHWARZSCHE Ungleichheit* (35) da.

Quadratische Formen (37), bei denen stets

$$A \cdot C - B^2 > 0 \quad \text{und} \quad A > 0,$$

heißen übrigens *positiv definit*, weil sie nur positive Werte annehmen können; kommt daneben auch null vor, d. h. ist

$$A \cdot C - B^2 = 0,$$

so heißt die Form *semi-definit*.

Mit der SCHWARZschen Ungleichheit können wir nun schnell und einfach die *Existenz des Grenzwertes von*

$$(40) \quad (\lambda^{(n)})^2 = \frac{K_{2n}(w, w)}{K_{2n+2}(w, w)}$$

nachweisen. Es ist doch

$$K_{2n} = \int K_{2n-m}(x, u) \cdot K_m(u, z) du,$$

also nach SCHWARZ

$$\begin{aligned} K_{2n}^2(x, z) &\leq \int K_{2n-m}^2(x, u) du \cdot \int K_m^2(u, z) du \\ &= K_{4n-2m}(x, x) \cdot K_{2m}(z, z), \end{aligned}$$

wenn wir die Definition der iterierten Kerne beachten. Setzen wir $x = z = w$, so wird

$$K_{2n}^2(w, w) \leq K_{4n-2m}(w, w) \cdot K_{2m}(w, w),$$

wobei m ein beliebiger Index. Setzen wir weiter $m = n - 1$, so folgt

$$K_{2n}^2(w, w) \leq K_{2n+2}(w, w) \cdot K_{2n-2}(w, w),$$

oder

$$\frac{K_{2n-2}(w, w)}{K_{2n}(w, w)} \geq \frac{K_{2n}(w, w)}{K_{2n+2}(w, w)},$$

d. h. nach (40)

$$(\lambda^{(n)})^2 \leq (\lambda^{(n-1)})^2.$$

Die Folge der positiven $(\lambda^{(n)})^2$ ist also absteigend und hat daher einen Grenzwert. Daß die $K_{2n}(w, w)$ nie null sind, der Grenzwert von (40) nicht verschwindet, und daß auch die Folge der y_n konvergiert, soll hier nicht mehr bewiesen werden.

b) Realität der Eigenwerte. Orthogonalität der Eigenfunktionen.

Angenommen, wir haben zu $K(x, z)$ mehrere Eigenwerte und zugehörige Eigenfunktionen $\varphi_\nu(x)$ gefunden. Dann behaupten wir:

Satz 12. Die Eigenfunktionen eines symmetrischen Kerns, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, sind orthogonal:

$$\int_0^1 \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \cdot dx = 0.$$

Zum Beweis schreiben wir die Definitionsgleichungen für φ_1 und φ_2 auf:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \lambda_1 \cdot \int K(x, z) \cdot \varphi_1(z) dz \\ \varphi_2 &= \lambda_2 \cdot \int K(x, z) \cdot \varphi_2(z) dz \end{aligned} \right\} \lambda_1 \neq \lambda_2,$$

multiplizieren die erste mit $\varphi_2(x)$, die zweite mit $\varphi_1(x)$ und integrieren jedesmal über x :

$$(41) \quad \int \varphi_1 \varphi_2 dx = \lambda_1 \iint K(x, z) \varphi_1(z) \varphi_2(x) dx dz,$$

$$(42) \quad \int \varphi_1 \varphi_2 dx = \lambda_2 \iint K(x, z) \varphi_1(x) \varphi_2(z) dx dz.$$

In (42) vertauschen wir im rechten Integral x mit z und erhalten, wenn wir noch die Symmetrie von K beachten,

$$(43) \quad \int \varphi_1 \varphi_2 dx = \lambda_2 \iint K(x, z) \varphi_1(z) \varphi_2(x) dx dz.$$

Subtraktion von (41) und (43) gibt

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \iint K(x, z) \varphi_1(z) \varphi_2(x) dx dz = 0.$$

Da $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ist das Integral null, also nach (41) auch

$$\int \varphi_1 \varphi_2 dx = 0.$$

φ_1 und φ_2 sind also orthogonal.

Wir behaupten weiter

Satz 13. *Die Eigenwerte eines symmetrischen Kerns sind reell.*

Wir nehmen einmal an, wir hätten einen komplexen Eigenwert λ :

$$\varphi(x) = \lambda \cdot \int K(x, z) \varphi(z) dz.$$

Diese Gleichung bleibt richtig, wenn man alle Größen durch ihre konjugiert-komplexen ersetzt. Da K reell ist, gilt also auch

$$\bar{\varphi} = \bar{\lambda} \cdot \int K(x, z) \bar{\varphi}(z) \cdot dz.$$

Also ist $\bar{\varphi}$ Eigenfunktion zu $\bar{\lambda} \neq \lambda$, und daher muß nach dem soeben bewiesenen Satze sein

$$\int \varphi \bar{\varphi} dx = 0.$$

Da aber $\varphi \bar{\varphi} = |\varphi|^2$, heißt dies

$$\int |\varphi|^2 dx = 0,$$

und da wir alles stetig vorausgesetzt haben, folgt hieraus

$$|\varphi| \equiv 0, \quad \text{also} \quad \varphi \equiv 0$$

(wir werden später sehen, daß auch bei allgemeineren Voraussetzungen über K die Eigenfunktionen stets stetig sind). Dann wäre φ keine Eigenfunktion im Widerspruch zur Voraussetzung; die Annahme, daß es komplexe λ gibt, führt also zu Widersprüchen.

c) Das Orthogonalisierungsverfahren. Zu einem Eigenwert λ können mehrere Eigenfunktionen $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ gehören. Da nach Satz 13 λ reell ist, können wir auch die h_v reell annehmen; denn ist das komplexe $h_1 + i h_2$ Eigenfunktion, so sind es h_1, h_2 einzeln auch: komplexe Eigenfunktionen können also stets in reelle zerspalten werden.

Wegen der Linearität der Integralgleichung ist auch jede lineare Kombination mit konstanten Koeffizienten

$$c_1 h_1 + c_2 h_2 + \dots + c_n h_n$$

eine Eigenfunktion. Wir wollen nun aus den h_v ein System von Eigenfunktionen φ_v so herausheben, daß je zwei verschiedene φ_v orthogonal sind

$$\int \varphi_v \varphi_\mu dx = 0, \quad v \neq \mu.$$

Um das zu erreichen, benutzen wir das ERHARD SCHMIDTSche Verfahren der Orthogonalisierung: wir bilden passende Linearkombinationen der h_v , setzen also an

$$(44) \quad \varphi_1 = h_1$$

$$(45) \quad \varphi_2 = \alpha \varphi_1 + \beta h_2.$$

$\alpha : \beta$ wird so bestimmt, daß

$$\int \varphi_1 \varphi_2 dx \equiv \alpha \int \varphi_1^2 dx + \beta \cdot \int \varphi_1 h_2 dx = 0.$$

Hierin ist $\int \varphi_1^2 dx \neq 0$; war schon $\int \varphi_1 h_2 dx = 0$, setzen wir $\alpha = 0$, $\beta = 1$; ist $\int \varphi_1 \cdot h_2 \cdot dx \neq 0$, so erhalten wir

$$(46) \quad \frac{\alpha}{\beta} = - \frac{\int h_1 h_2 dx}{\int h_1^2 dx}.$$

φ_2 ist nur dann identisch null, wenn mit diesem Verhältnis α/β

$$\alpha \varphi_1 + \beta h_2 = \alpha h_1 + \beta h_2 \equiv 0$$

ist, was nur möglich ist, falls

$$h_2 \equiv - \frac{\alpha}{\beta} h_1,$$

d. h. falls h_2 von h_1 abhängig ist. Wenn einige der h_n voneinander abhängig sind, muß das Orthogonalisierungsverfahren notwendig versagen. Es sei z. B.

$$h_2 \equiv c \cdot h_1.$$

Auf jeden Fall ist dann

$$\varphi_2 = (\alpha + \beta c) \cdot h_1.$$

Entweder ist hier $\alpha + \beta c = 0$: dann ist $\varphi_2 \equiv 0$, keine Eigenfunktion, oder es ist $\alpha + \beta c \neq 0$, also auch $\int \varphi_1 \varphi_2 dx = (\alpha + \beta c) \cdot \int h_1^2 dx$ sicher nicht null; die Orthogonalisierung ist also nicht durchführbar.

Damit also diese Orthogonalisierung stets durchführbar ist, werden wir die Funktionen von irgendwelchen Funktionensystemen, die im Verlauf der Untersuchung auftreten werden, als *unabhängig* voraussetzen, indem wir uns die abhängigen Funktionen gestrichen denken. n Funktionen h_1, h_2, \dots, h_n heißen dabei voneinander unabhängig, wenn aus der Gleichung

$$k_1 h_1 + k_2 h_2 + \dots + k_n h_n \equiv 0$$

mit den Konstanten k_1, k_2, \dots, k_n stets folgt, daß alle diese Konstanten k_v null sein müssen.

Wir nehmen unsere Orthogonalisierung wieder auf. Da $\beta \neq 0$ gewählt wird, kann man auch umgekehrt

$$h_2 = \frac{1}{\beta} \varphi_2 - \frac{\alpha}{\beta} \varphi_1$$

schreiben, d. h. h_1 und h_2 durch φ_1 und φ_2 ausdrücken.

So fahren wir fort; wir setzen

$$h_3 = \gamma \varphi_1 + \delta \varphi_2 + \varepsilon \varphi_3,$$

oder, da ε keinesfalls null sein soll,

$$(47) \quad \varphi_3 = \gamma' \varphi_1 + \delta' \varphi_2 + \varepsilon' h_3,$$

was die Ausdrückbarkeit durch h_1, h_2, h_3 verbürgt; $\varepsilon' = 1/\varepsilon$ ist dann auch nicht null. Nun werden γ', δ' so bestimmt, daß

$$\int \varphi_1 \varphi_3 dx = 0, \quad \int \varphi_2 \varphi_3 dx = 0$$

gilt, d. h. daß

$$\gamma' \cdot \int \varphi_1^2 dx + \varepsilon' \cdot \int \varphi_1 h_3 dx = 0, \quad \delta' \cdot \int \varphi_2^2 dx + \varepsilon' \cdot \int \varphi_2 h_3 dx = 0$$

ist. Da φ_1 und φ_2 schon bestimmt sind, berechnen wir hieraus γ' und δ' proportional zu ε' ; $\varepsilon' \neq 0$ bleibt noch frei. φ_3 kann nur dann identisch null ausfallen, wenn

$$\gamma' \varphi_1 + \delta' \varphi_2 + \varepsilon' h_3 \equiv 0,$$

d. h. wenn h_3 durch φ_1 und φ_2 , also nach (45) durch h_1 und h_2 linear und homogen ausdrückbar wäre. Da wir nach der oben gemachten Bemerkung eventuell vorkommende, linear von h_1, h_2, \dots, h_n abhängige Funktionen h_v uns gestrichen denken, kann dieser Fall nicht eintreten.

Ersichtlich kann man so fortfahren: von φ_3 kommt man zu $\varphi_4, \varphi_5, \dots$; die Orthogonalisierung ist also bei jedem geordneten System von unabhängigen Funktionen ausführbar.

Daß die zu einem bestimmten Eigenwert λ gehörigen, voneinander unabhängigen Eigenfunktionen sich ordnen lassen, werden wir bald sehen. Es wird sich dann sogar herausstellen, daß es zu jedem λ nur endlich viele derartige Funktionen gibt. Nehmen wir diese Kenntnis voraus, so können wir diese Eigenfunktionen alle orthogonalisieren. Da die zu verschiedenen λ gehörenden Eigenfunktionen sowieso orthogonal sind, gilt der Satz:

Satz 14. *Alle Eigenfunktionen eines Kerns, d. h. eine geeignete unabhängige Auswahl aus ihnen, bilden ein Orthogonalsystem. Für je zwei Funktionen von ihnen gilt also*

$$\int_0^1 \varphi_\nu(x) \cdot \varphi_\mu(x) dx = 0 \quad \nu \neq \mu.$$

Dieses Verfahren der Orthogonalisierung wird auch außerhalb der Theorie der Integralgleichungen benutzt. Man erzeugt sich so z. B. aus dem System der unabhängigen Funktionen

$$h_1 = 1, \quad h_2 = x, \quad h_3 = x^2, \quad h_4 = x^3, \dots$$

die LEGENDRESCHEN Kugelfunktionen im Intervall $(-1, \dots, +1)$

$$(48) \quad \begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \\ P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \\ \vdots \end{cases}$$

Hierbei ist also für $\nu \neq \mu$

$$\int_{-1}^{+1} P_\nu(x) \cdot P_\mu(x) \cdot dx = 0.$$

Hat man sich so sein System der zu λ gehörigen Eigenfunktionen φ_ν orthogonalisiert, so normiert man noch jedes dieser φ_ν : man multipliziert φ_ν mit einem passenden Faktor

$$\psi_\nu = C \cdot \varphi_\nu,$$

so daß

$$\int \psi_\nu^2 dx = C^2 \cdot \int \varphi_\nu^2 dx = 1$$

gilt. Natürlich sind auch die ψ_ν orthogonal.

$$\int \psi_\nu \psi_\mu dx = C_\nu C_\mu \cdot \int \varphi_\nu \varphi_\mu dx = 0 \quad \nu \neq \mu.$$

Die soeben erwähnten LEGENDRESCHEN Polynome sind übrigens aus praktischen Gründen so normiert, daß

$$(49) \quad \int_{-1}^{+1} P_\nu^2(x) \cdot dx = \frac{2}{2\nu + 1}$$

ist. Weiteres siehe II. 15.

Wir setzen hinfort auch die nach Satz 14 orthogonalisierten Eigenfunktionen eines Kerns als normiert voraus, so daß also für irgend zwei Eigenfunktionen gilt

$$(50) \quad \int_0^l \varphi_\nu(x) \cdot \varphi_\mu(x) \cdot dx = \delta_{\nu\mu} = \begin{cases} 0 & \nu \neq \mu \\ 1 & \nu = \mu. \end{cases}$$

Hierbei haben wir das KRONECKERSCHE Symbol $\delta_{\nu\mu}$ benutzt, das durch (50) definiert ist.

d) Frage der Entwickelbarkeit einer „willkürlichen“ Funktion nach den Eigenfunktionen eines Kerns. Wir werfen folgende, praktisch sehr wichtige Frage auf:

Welche Funktionen $f(x)$ kann man als Reihe

$$(51) \quad f(x) = \sum_{\nu}^{1 \dots \infty} c_\nu \cdot \varphi_\nu(x)$$

der Eigenfunktionen φ_ν eines symmetrischen Kerns darstellen?

Hierbei braucht der Kern nur endlich viele unabhängige φ_ν zu besitzen, alle folgenden Überlegungen bleiben dann ohne weiteres bestehen. Bei unendlich vielen φ_ν nehmen wir die Kenntnis voraus, daß diese φ_ν sich abzählen lassen.

Beim Musterkern (I. 2. 7)

$$(52) \quad K(x, z) = \begin{cases} \frac{x(l-z)}{l} & x \leq z \\ \frac{z(l-x)}{l} & x \geq z \end{cases}$$

führt die Frage der Entwickelbarkeit auf die *bekannt*en FOURIERSchen Reihen. Denn wir hatten nach Satz 1 als Eigenfunktionen von K

$$\sin \frac{\nu \pi x}{l}$$

erkannt. Diese sind als Eigenfunktionen eines symmetrischen Kerns orthogonal

$$\int_0^l \sin \frac{\nu \pi x}{l} \cdot \sin \frac{\mu \pi x}{l} dx = 0 \quad \nu \neq \mu,$$

und wir erhalten daher als normierte Eigenfunktionen

$$(53) \quad \varphi_\nu = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\nu \pi x}{l},$$

da

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\nu \pi x}{l} dx = \frac{1}{2} l$$

ist. Beim Musterkern ist also das aufgeworfene Problem altbekannt: jede nur im Intervall $(0 \dots l)$ definierte „vernünftige“ Funktion läßt sich in eine FOURIER-Reihe entwickeln, die nur aus Gliedern $c_\nu \cdot \sin \frac{\nu \pi x}{l}$ besteht, falls die Funktion an den Intervallenden verschwindet. Hierbei soll der Ausdruck „jede vernünftige Funktion“ genauer besagen: jede Funktion beschränkter Schwankung, z. B. jede Funktion, die in $(0 \dots l)$ nur endlich viele Extremwerte aufweist.

Dieses Entwicklungsproblem soll also jetzt allgemein bei irgendeinem System von Eigenfunktionen aufgeworfen werden. Wir verfahren dazu nach BESSEL folgendermaßen:

Wir bilden

$$(54) \quad c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_n \varphi_n,$$

und wir wollen die darzustellende Funktion $f(x)$ möglichst gut durch diese Summe annähern. *Im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate* heißt dies: wir wollen c_ν so bestimmen, daß

$$(55) \quad J \equiv \int_0^l \left[f(x) - \sum_{\nu}^{1 \dots n} c_\nu \varphi_\nu(x) \right]^2 dx$$

ein Minimum wird unter allen Darstellungen

$$\int_0^l \left[f(x) - \sum_v^{1\dots n} C_v \varphi_v(x) \right]^2 dx$$

mit irgendwelchen Koeffizienten C_v . Dazu ist notwendig

$$(56) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial c_\mu} \equiv \int_0^l \left[f - \sum_v^{1\dots n} c_v \varphi_v \right] \varphi_\mu \cdot dx = 0$$

für alle μ . Beachten wir jetzt, daß die φ_v orthogonal und normiert sind, so folgt daraus

$$(57) \quad c_\mu = \int_0^l f(x) \cdot \varphi_\mu(x) \cdot dx.$$

c_μ ist frei von n ; es ist also gleichgültig, aus wieviel Gliedern die Summe (54) bestand; stets erhalten wir eindeutig c_1, c_2, \dots . (57) entspricht dem FOURIER-Koeffizienten

$$a_\mu = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{\nu \pi x}{l} dx,$$

daher heißen auch die c_μ allgemein „FOURIER-Koeffizienten“ der Funktion $f(x)$ in bezug auf das Funktionensystem der $\varphi_v(x)$.

Da also in (57) c_v unabhängig von n ist, ist jeder Koeffizient der formal hingeschriebenen Reihe

$$(58) \quad \sum_v^{1\dots\infty} c_v \cdot \varphi_v(x)$$

nach (57) allein durch $f(x)$ bestimmt. [Wir nehmen damit noch nicht an, daß unser Kern unendlich viele verschiedene Eigenfunktionen $\varphi_v(x)$ besitzt, die Reihe (58) könnte auch endlich sein.] Daher heißt $f(x)$ „äquivalent“ mit (58):

$$(59) \quad f(x) \sim \sum_v^{1\dots\infty} c_v \cdot \varphi_v(x).$$

Das ist lediglich eine andere Schreibweise für (57), es soll weder bedeuten, daß die Reihe konvergiert, noch, falls dies der Fall ist, daß die Reihe dann auch $f(x)$ darstellt.

e) **BESSELSche Ungleichheit. PARSEVALSche Gleichung. Vollständigkeit.** Wir rechnen jetzt Gleichung (55) aus:

$$0 \leq J \equiv \int_0^l f^2 dx - 2 \cdot \sum_v^{1\dots n} c_v \cdot \int_0^l f \varphi_v dx + \sum_{\mu}^{1\dots n} \sum_{\nu}^{1\dots n} c_\nu c_\mu \cdot \int_0^l \varphi_\nu \varphi_\mu dx.$$

Wegen der Orthogonalität und Normierung der φ_v gibt dies

$$\int f^2 dx - 2 \sum_v c_v \cdot c_v + \sum_v c_v^2 \geq 0,$$

oder

$$(60) \quad \sum_{\nu}^{1 \dots n} c_{\nu}^2 \leq \int_0^l f^2 dx.$$

Dies gilt für jedes n ; gehen wir mit $n \rightarrow \infty$ (falls dies Sinn hat, d. h. falls unendlich viele φ_{ν} vorhanden sind), so sehen wir, daß die unendliche Reihe konvergiert und daß

$$(61) \quad \sum_{\nu}^{1 \dots \infty} c_{\nu}^2 \leq \int_0^l f^2 dx$$

ist. Das ist die „BESSELSche Ungleichheit“.

Gilt für jede Funktion $f(x)$ (für die nur $\int f^2 dx$ existieren muß) die „PARSEVALSche Gleichung“

$$(62) \quad \sum_{\nu}^{1 \dots \infty} c_{\nu}^2 = \int_0^l f^2 dx,$$

so heißt das Funktionensystem der φ_{ν} *vollständig*. Die PARSEVALSche Gleichung ist offenbar mit

$$(63) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^l \left[f - \sum_{\nu}^{1 \dots n} c_{\nu} \varphi_{\nu} \right]^2 dx = 0$$

identisch; gilt (63), so sagt man auch, daß $\sum_{\nu}^{1 \dots n} c_{\nu} \varphi_{\nu}$ „im Mittel“ gegen $f(x)$ konvergiert. Nach (62) und (63) gilt also der

Satz 15. Bei vollständigen Funktionensystemen φ_{ν} konvergiert $\sum_{\nu}^{1 \dots n} c_{\nu} \varphi_{\nu}$ im Mittel gegen $f(x)$ für jedes quadratisch integrierbare $f(x)$ (die c_{ν} sind die FOURIER-Koeffizienten in bezug auf die φ_{ν}).

Wir wenden diese Begriffe jetzt auf die Kerne selber an. Aus

$$(64) \quad \int_0^l K(x, z) \varphi_{\nu}(z) dz = \frac{1}{\lambda_{\nu}} \varphi_{\nu}(x)$$

sehen wir, daß $\frac{1}{\lambda_{\nu}} \varphi_{\nu}(x)$ der FOURIER-Koeffizient von $K(x, z)$ ist. Es folgt also

$$(65) \quad K(x, z) \sim \sum_{\nu}^{1 \dots \infty} \frac{1}{\lambda_{\nu}} \varphi_{\nu}(x) \cdot \varphi_{\nu}(z).$$

Nach (64) wird jetzt die BESSELSche Ungleichheit

$$(66) \quad \sum \frac{1}{\lambda_{\nu}^2} \cdot \varphi_{\nu}^2(x) \leq \int K^2(x, z) \cdot dz = K_2(x, x).$$

Wir setzen, auch wenn K nicht stetig und nicht beschränkt sein sollte, $\int K^2(x, z) dz = K_2(x, x)$ als stetig und somit beschränkt voraus. Diese Voraussetzung über K wird in I. 6f genauer erörtert werden.

Unter dieser Annahme konvergiert die linke Seite von (66) absolut für alle x .

Ob die Gleichung

$$(67) \quad K(x, z) = \sum_{\nu}^{1 \dots \infty} \frac{1}{\lambda_{\nu}} \varphi_{\nu}(x) \varphi_{\nu}(z)$$

gilt, wissen wir nicht, da nicht einmal die Reihe zu konvergieren braucht.

Aus (66) folgt durch Integration

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\lambda_{\nu}^2} \leq \int K_2(x, x) dx$$

für jedes n , die Summe ist also beschränkt; daher konvergiert $\sum_{\nu}^{1 \dots \infty} 1/\lambda_{\nu}^2$, und es gilt

Satz 16. $\sum_1^{\infty} 1/\lambda_{\nu}^2$ konvergiert, und es ist

$$(68) \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{\lambda_{\nu}^2} \leq \int K_2(x, x) dx.$$

Gäbe es nun zu einem λ_{ν} unendlich viele unabhängige Eigenfunktionen φ_{ν} , so käme in (68) unendlich oft dies $\lambda_{\nu}^2 > 0$ vor: dann könnte die Reihe aber nicht konvergieren. Damit ist eine Tatsache bewiesen, die wir schon mitteilten und auch benutzten:

Satz 17a. *Zu jedem Eigenwert eines symmetrischen Kerns gibt es nur endlich viele verschiedene unabhängige Eigenfunktionen.*

Aus (68) folgt außerdem

Satz 17b. *Die Eigenwerte λ_{ν} häufen sich nicht im Endlichen.*

Denn da die λ_{ν} bisher eine abzählbare Auswahl aus der Gesamtheit aller Eigenwerte des Kerns darstellten, könnten wir, falls diese sich doch häuften, die λ_{ν} in (68) so auswählen, daß von einer Nummer ν_0 ab alle λ_{ν} sich beliebig wenig voneinander unterschieden. Dann tritt dasselbe ein wie vorhin: $\sum_1^{\infty} 1/\lambda_{\nu}^2$ kann nicht konvergieren, im Gegensatz zu (68).

Also war die Annahme falsch und es gilt Satz 17b.

Man kann daher alle Eigenwerte des Kerns numerieren

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots,$$

indem man sie nach wachsenden Beträgen $|\lambda_{\nu}|$ ordnet. Jedes λ_{ν} soll so oft gezählt werden, als es unabhängige Eigenfunktionen φ_{ν} besitzt: das ist möglich, da jedes λ_{ν} nach Satz 17a nur endlich viele unabhängige φ_{ν} hat. Damit sind auch die φ_{ν} geordnet:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$$

Diese Anordnung der λ_{ν} und φ_{ν} wird im folgenden stets zugrunde gelegt.

Die höheren iterierten Kerne K_n haben, wie hier noch erwähnt sei, λ_n^2 zu Eigenwerten und φ_n zu Eigenfunktionen, d. h. wenn

$$(69) \quad \varphi(x) = \lambda \cdot \int K(x, z) \varphi(z) dz$$

gilt, gilt auch

$$(70) \quad \varphi(x) = \lambda^n \cdot \int K_n(x, z) \varphi(z) dz.$$

Denn aus (69) folgt durch Einsetzen von φ in das Integral

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda^2 \cdot \iint K(x, z) \cdot K(z, u) \varphi(u) du dz \\ &= \lambda^2 \cdot \int K_2(x, u) \varphi(u) du. \end{aligned}$$

Also ist φ Eigenfunktion von K_2 zum Eigenwert λ^2 . Die Umkehrung dieses Satzes gilt in folgendem Sinne. Ist

$$(71) \quad \varphi(x) = \lambda^2 \cdot \int K_2(x, z) \varphi(z) dz = \lambda^2 \cdot \iint K(x, u) K(u, z) \varphi(u) du dz,$$

so setze man, falls nicht schon φ Eigenfunktion von K ist,

$$(72) \quad \varphi_1 = \lambda \int K(x, u) \varphi(u) du.$$

Dann folgt aus (71) sofort

$$(73) \quad \varphi(x) = \lambda \int K(x, u) \varphi_1(u) du.$$

Addition von (72) und (73) gibt

$$\varphi + \varphi_1 = \lambda \int K(x, z) [\varphi + \varphi_1] dz,$$

es ist also $\varphi + \varphi_1$ Eigenfunktion von K zum Eigenwert λ . Subtraktion von (72) und (73) gibt ebenso

$$\varphi - \varphi_1 = -\lambda \int K(x, z) [\varphi - \varphi_1] dz,$$

also ist $\varphi - \varphi_1$ Eigenfunktion von K zum Eigenwert $-\lambda$. Mindestens eine der Funktionen $\varphi_1 \pm \varphi_2$ ist nicht null. λ ist also reell. Durch Einsetzen von (73) in das Integral von (72) ergibt sich, daß auch φ_1 Eigenfunktion von K_2 zu λ^2 ist; es sind dann also auch $\varphi + \varphi_1$, $\varphi - \varphi_1$ Eigenfunktionen von K_2 zu λ^2 . Wenn man also die Eigenfunktionen von K durch $C(\varphi \pm \varphi_1)$ ersetzt, d. h. durch geeignete lineare Kombinationen, hat man auch die Umkehrung, daß die Eigenfunktionen von K_2 zu λ^2 auch Eigenfunktionen von K zu $+\lambda$ oder $-\lambda$ sind. Diese Umkehrung gilt aber nur, wie gezeigt, bei bestimmter Auswahl der Eigenfunktionen von K_2 . Entsprechendes gilt auch bei den höheren Kernen K_n .

Da man also jetzt die Eigenfunktionen von K_n kennt, sieht man sofort die Äquivalenz ein

$$(74) \quad K_n(x, z) \sim \sum_{\nu}^{1 \dots \infty} \frac{1}{\lambda_\nu^n} \varphi_\nu(x) \varphi_\nu(z). \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

f) **Konvergenzsätze über die Entwicklung der Kerne bei bestimmten Voraussetzungen.** Wir wollen nun zeigen, daß bei den höheren iterierten Kernen nicht nur diese Äquivalenz (74) gilt, sondern daß sogar die Gleichung

$$(75) \quad K_n(x, z) = \sum_v^{1 \dots \infty} \frac{\varphi_v(x) \varphi_v(z)}{\lambda_v^n} \quad n = 2, 3, 4, \dots,$$

behauptet werden kann. Voraussetzung hierfür ist nicht einmal die volle Stetigkeit von $K(x, z)$ in $0 \dots l$ (Stetigkeit ist hinreichend, aber nicht notwendig); es genügt vielmehr schon, wenn *erstens* $K(x, z)$ in $0 \dots l$ *quadratisch integrabel* ist (d. h. es sollen die Integrale

$$(76) \quad \begin{cases} \int K(x, z) dx, & \iint K(x, z) dx dz, \\ \int K^2(x, z) dz, & \iint K^2(x, z) dx dz, \end{cases}$$

existieren und beschränkt sein), und wenn *zweitens* $K(x, z)$ eine *mittlere Stetigkeit* besitzt, d. h. wenn der Ausdruck

$$(77) \quad \Delta(x_1, x) \equiv \int_0^l [K(x, z) - K(x_1, z)]^2 dz$$

gegen null strebt für $x_1 \rightarrow x$. (Ist K stetig, so sind beide Voraussetzungen erfüllt.)

Aus diesen beiden Voraussetzungen folgt schon, wie weiter unten noch näher ausgeführt werden soll, daß $K_2(x, z)$ und erst recht die höheren Kerne in beiden Variablen zusammen stetig sind: der Iterationsprozeß „glättet“ also die Kerne.

Diese Glättung zeigt sich auch an der Gleichung (75): für $n = 1$ gilt sie im allgemeinen nicht, aber von $n = 2$ ab gilt sie stets (unter den genannten Voraussetzungen), und die Reihe

$$\sum_v^{1 \dots \infty} \frac{\varphi_v(x) \varphi_v(z)}{\lambda_v^n}$$

konvergiert für $n = 2, 3, \dots$ absolut und gleichmäßig. Das ist die Behauptung.

Insbesondere gilt also

$$(78) \quad K_2(x, x) = \sum \frac{\varphi_v^2(x)}{\lambda_v^2},$$

und hieraus erhält man durch Integration über x

$$(79) \quad \sum \frac{1}{\lambda_v^2} = \int_0^l K_2(x, x) dx,$$

da man wegen der gleichmäßigen Konvergenz Summation und Integration vertauschen kann, und da nach (50)

$$\int_0^l \varphi_v^2 dx = 1$$

ist. Da nach der Voraussetzung das Integral in (79) existiert, ist die Reihe $\sum 1/\lambda_v^2$ konvergent.

Nach (74) hat K die FOURIER-Koeffizienten $\varphi_v(x)/\lambda_v$. Schreiben wir nun (78) in der Form

$$(80) \quad \sum \frac{\varphi_v^2(x)}{\lambda_v^2} = \int_0^l K^2(x, z) dz,$$

so sehen wir nach (62), daß für $K(x, z)$ die PARSEVALSche Gleichung (statt der stets gültigen BESSELSchen Ungleichheit) gilt. Daraus folgt allerdings noch keineswegs, daß das System der $\varphi_v(x)$ vollständig sein muß, denn dann müßte die PARSEVALSche Gleichung nach I. 6e für jede quadratisch integrierbare Funktion $f(x)$ gelten.

Wir sagten oben, daß im allgemeinen (74) für $K(x, z)$ nicht erfüllt ist. Wohl gibt es Kerne (wie z. B. den Musterkern), die sich nach ihren Eigenfunktionen entwickeln lassen; allgemein jedoch muß man sich begnügen mit

Satz 18. Wenn die (endliche oder unendliche) Reihe

$$\sum \frac{\varphi_v(x) \varphi_v(z)}{\lambda_v}$$

absolut und (wenigstens in einer Variablen) gleichmäßig konvergiert, ist ihre Summe gleich $K(x, z)$:

$$K(x, z) = \sum \frac{\varphi_v(x) \varphi_v(z)}{\lambda_v}.$$

Bei unserem Musterkern war z. B. nach (53) und Satz 1

$$\varphi_v(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin \frac{v\pi x}{l}, \quad \lambda_v = \frac{v^2 \pi^2}{l^2}.$$

Es gilt also die Äquivalenz

$$(81) \quad K(x, z) \sim \frac{2}{l} \sum \frac{l^2}{v^2 \pi^2} \cdot \sin \frac{v\pi x}{l} \cdot \sin \frac{v\pi z}{l}.$$

Nun konvergiert $\sum 1/v^2$, und daher sieht man sofort, daß die rechte Seite von (81) absolut und sogar in beiden Variablen gleichmäßig konvergiert. Daher muß nach dem letzten Satze die Gleichung

$$(82) \quad K(x, z) = \frac{2}{l} \sum \frac{l^2}{v^2 \pi^2} \sin \frac{v\pi x}{l} \sin \frac{v\pi z}{l}$$

gelten. Dieses Resultat kann auch aus der Theorie der FOURIERSchen Reihen direkt gewonnen werden, denn es handelt sich bei der Entwicklung von K einfach um die Entwicklung der Dreieckskurve (Abb. 15) nach $\sin \frac{v\pi x}{l}$.

Über den Beweis dieses grundlegenden Satzes soll im folgenden Abschnitt noch einiges gesagt werden.

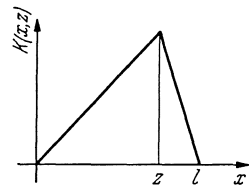


Abb. 15.

Die Voraussetzungen, die wir oben an den Kern K stellten, nämlich 1. quadratische Integrabilität und 2. mittlere Stetigkeit, werden wir von nun an stets zugrunde legen.

Man kann sich nicht mit durchweg stetigen Kernen begnügen, auch dann nicht, wenn man sich auf die Anwendungen der Theorie beschränkt; man muß vielmehr gewisse Singularitäten zulassen. So mußten wir z. B. in I. 5a $\lg r$ als Kern nehmen, haben also dann die genannten umfassenderen Voraussetzungen 1., 2. der SCHMIDTSchen Theorie an die Stelle der alten Stetigkeitsbedingung zu setzen. Denn da $\lg r$, trotz der Singularität für $r=0$, noch quadratisch integrabel ist und von mittlerer Stetigkeit, ist diese Singularität in der neuen Theorie belanglos. Dasselbe gilt sogar noch von

$$(83) \quad \frac{1}{|x-z|^\alpha}$$

für $\alpha < 1/2$ und $0 \leq x, z \leq l$. Dagegen bleibt die Singularität von (83) zunächst auch in der SCHMIDTSchen Theorie bestehen, wenn $\alpha \geq 1/2$ ist: denn dann ist das Quadrat

$$\frac{1}{(x-z)^{2\alpha}}$$

nicht mehr über das Intervall $-1 \dots +1$ integrabel.

Auch die Theorie der NEUMANNschen Reihe, die wir ursprünglich nur für stetige Kerne entwickelten, läßt sich ohne Schwierigkeit auf derartige Kerne, die lediglich den Voraussetzungen 1. und 2. genügen, übertragen. Selbstverständlich setzen wir noch, wie überall in diesem Abschnitt, K als symmetrisch voraus.

Wir können leicht beweisen, daß für den Kern

$$K = \frac{1}{|x-z|^\alpha}$$

mit $\alpha < 1/2$ der iterierte Kern stetig ist. Es ist

$$K_2(x, z) = \int_0^l \frac{du}{|x-u|^\alpha \cdot |z-u|^\alpha};$$

wir können hierbei $0 \leq x \leq z \leq l$ annehmen. Dann wird weiter

$$K_2(x, z) = \int_0^x \frac{du}{(x-u)^\alpha (z-u)^\alpha} + \int_x^z \frac{du}{(u-x)^\alpha (z-u)^\alpha} + \int_z^l \frac{du}{(u-x)^\alpha (u-z)^\alpha}.$$

Diese drei Integrale nennen wir J_1, J_2, J_3 ; wir wollen sie einzeln ausrechnen.

Im ersten Integral setzen wir

$$u = x - (z-x) \cdot w^{1-\alpha}, \quad du = -(z-x) \cdot \frac{1}{1-\alpha} \cdot w^{1-\alpha} dw,$$

also

$$x-u = (z-x) \cdot w^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad z-u = (z-x) \cdot \left(1 + w^{\frac{1}{1-\alpha}}\right).$$

Damit erhalten wir

$$J_1 = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^{w_1} \frac{(z-x)^{1-2\alpha} \cdot dw}{\left(1 + w^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^\alpha},$$

wobei $w = w_1$ der unteren Grenze $u = 0$ entspricht. D. h. es ist

$$w_1 = x^{1-\alpha} (z-x)^{-(1-\alpha)}.$$

Also gilt

$$J_1 = \frac{1}{1-\alpha} \cdot (z-x)^{1-2\alpha} \cdot \varphi(w_1),$$

wobei wir die Abkürzung

$$\varphi(w_1) = \int_0^{w_1} \frac{dw}{\left(1 + w^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^\alpha}$$

verwenden. $\varphi(w_1)$ ist ersichtlich eine stetige Funktion von w_1 , so lange w_1 endlich, d. h. $x < z$ bleibt; für $x \rightarrow z$, d. h. $w_1 \rightarrow \infty$ wird der Integrand von φ von der Ordnung $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ null, daher φ von der Ordnung $1 - \frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}$ unendlich in w_1 , also in $z-x$ von der Ordnung $1-2\alpha$ unendlich. Dies wird durch den Faktor $(z-x)^{1-2\alpha}$ in J_1 gerade aufgehoben, so daß dieses auch für $x \rightarrow z$ endlich, ja stetig bleibt.

Ebenso wird J_3 behandelt. In J_2 machen wir zweckmäßig die Substitution

$$u = x + (z-x) \cdot \sin^2 \varphi, \quad du = 2(z-x) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi;$$

wegen

$$u-x = (z-x) \cdot \sin^2 \varphi, \quad z-u = (z-x) \cdot \cos^2 \varphi$$

erhalten wir so

$$\begin{aligned} J_2 &= 2(z-x)^{1-2\alpha} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^{2\alpha-1} \varphi \cdot \cos^{2\alpha-1} \varphi} \\ &= 2(z-x)^{1-2\alpha} \cdot B(\alpha). \end{aligned}$$

$B(\alpha)$ ist wegen $0 < 1-2\alpha < 1$ eine endliche Zahl; der zweite Faktor $(z-x)^{1-2\alpha}$ ist mit Einschluß der Grenzen stetig, also gilt dies auch von J_2 . Damit ist der Satz bewiesen: K_2 ist stetig.

Wir werden in I. 6g sehen, daß die Stetigkeit von K_2 die mittlere Stetigkeit von K nach sich zieht.

g) Beweise. Die Beweise für die genannten Konvergenzsätze des vorigen Abschnitts sollen jetzt nachgeholt werden.

Aus der durchschnittlichen Stetigkeit von K folgt zunächst
Satz 19a. *Jedes mit quadratisch integriertem $f(x)$ darstellbare $g(x)$*

$$g(x) = \int_0^l K(x, z) f(z) dz$$

ist stetig. (Eine derartig darstellbare Funktion $g(x)$ heißt nach KNESER „quellenmäßig“ darstellbar.)

Denn mit Hilfe der SCHWARZSchen Ungleichheit folgt

$$\begin{aligned} |g(x_1) - g(x)|^2 &= \left| \int_0^l [K(x_1, z) - K(x, z)] f(z) \cdot dz \right|^2 \\ &\leq \int_0^l [K(x_1, z) - K(x, z)]^2 dz \cdot \int_0^l f^2 dz. \end{aligned}$$

Nach (77) können wir dafür auch schreiben

$$(84) \quad |g(x_1) - g(x)|^2 \leq \Delta(x_1, x) \cdot f_0^2,$$

wenn wir für die Konstante $\int f^2 dz$ f_0^2 setzen. Da wir K von mittlerer Stetigkeit voraussetzen, folgt nach (77) aus (84), daß mit $\Delta(x_1, x) \rightarrow 0$ auch

$$|g(x_1) - g(x)|$$

nach null strebt für $x_1 \rightarrow x$: das drückt aber gerade die Stetigkeit von $g(x)$ aus.

Das können wir sofort auf die Eigenfunktionen anwenden; denn da diese durch sich selbst quellenmäßig dargestellt werden:

$$\varphi(x) = \lambda \cdot \int K(x, z) \varphi(z) dz,$$

folgt, wenn wir noch die φ als quadratisch integrierbar verlangen,

Satz 19b. *Die Eigenfunktionen eines symmetrischen Kernes sind stetig, falls wir sie (was wir stets tun wollen) als quadratisch integrierbar voraussetzen.*

Da K selber quadratisch integrierbar ist, erkennen wir aus der quellenmäßigen Darstellung durch K

$$K_2(x, z) = \int_0^l K(x, u) \cdot K(u, z) du,$$

daß $K_2(x, z)$ in jeder der beiden Variablen für sich stetig ist.

Daraus folgt noch nicht ohne weiteres, daß $K_2(x, z)$ in beiden Variablen x und z zusammen stetig ist [bzw. $K_2(x, x)$ in x]. Es werde also noch gezeigt, daß

$$(85) \quad K_2(x, x) = \int K(x, u)^2 du$$

in x stetig ist.

Wir bilden hierzu den Ausdruck

$$\begin{aligned} [K_2(x_1, x_1) - K_2(x, x)]^2 &= \left\{ \int [K^2(x_1, u) - K^2(x, u)] du \right\}^2 \\ &= \left\{ \int [K(x_1, u) - K(x, u)] \cdot [K(x_1, u) + K(x, u)] du \right\}^2 \\ &\leq \int [K(x_1, u) - K(x, u)]^2 du \cdot \int [K(x_1, u) + K(x, u)]^2 du \end{aligned}$$

wenn wir noch die SCHWARZsche Ungleichheit benutzen. Mit Hilfe der Abkürzung (77) können wir schreiben

$$(86) \quad \left\{ \begin{aligned} [K_2(x_1, x_1) - K_2(x, x)]^2 &\leq \Delta(x_1, x) \cdot \left[\int K^2(x_1, u) du + \right. \\ &\quad \left. + 2 \int K(x_1, u) K(x, u) du + \int K^2(x, u) du \right] \\ &= \Delta(x_1, x) \cdot [K_2(x_1, x_1) + 2K_2(x_1, x) + K_2(x, x)], \end{aligned} \right.$$

wobei die Definition der iterierten Kerne zu beachten ist.

Wir können in der letzten Ungleichheit (86) noch nicht den Grenzübergang $x_1 \rightarrow x$ ausführen; wohl strebt dann $\Delta(x_1, x)$ gegen null, aber wir wissen noch nicht, wie sich $K_2(x_1, x)$ dabei verhält. Daher schätzen wir mit abermaliger Anwendung der SCHWARZschen Ungleichheit weiter ab:

$$\begin{aligned} [K_2(x_1, x)]^2 &= \left[\int K(x_1, u) \cdot K(x, u) du \right]^2 \\ &\leq \int K^2(x_1, u) du \cdot \int K^2(x, u) du \\ &= K_2(x_1, x_1) \cdot K_2(x, x). \end{aligned}$$

Also wird

$$|K_2(x_1, x)| \leq \sqrt{K_2(x_1, x_1) \cdot K_2(x, x)},$$

und folglich

$$\begin{aligned} |K_2(x_1, x_1) + 2K_2(x_1, x) + K_2(x, x)| &\leq |K_2(x_1, x_1)| + \\ &\quad + 2 \cdot \sqrt{K_2(x_1, x_1) \cdot K_2(x, x)} + |K_2(x, x)| \\ &\leq \left[\sqrt{K_2(x_1, x_1)} + \sqrt{K_2(x, x)} \right]^2. \end{aligned}$$

Aus (86) erhalten wir damit

$$\begin{aligned} |K_2(x_1, x_1) - K_2(x, x)| &\equiv \left| \sqrt{K_2(x_1, x_1)} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{K_2(x, x)} \right| \cdot \left| \sqrt{K_2(x_1, x_1)} + \sqrt{K_2(x, x)} \right| \\ &\leq \sqrt{\Delta(x_1, x)} \cdot \left| \sqrt{K_2(x_1, x_1)} + \sqrt{K_2(x, x)} \right|. \end{aligned}$$

Da $K_2(x, x)$ nach (85) positiv ist, können wir beiderseits $\left| \sqrt{K_2(x_1, x_1)} + \sqrt{K_2(x, x)} \right|$ fortheben:

$$\left| \sqrt{K_2(x_1, x_1)} - \sqrt{K_2(x, x)} \right| \leq \sqrt{\Delta(x_1, x)}.$$

Mit $x_1 \rightarrow x$ erkennen wir hieraus schließlich die Stetigkeit von $\sqrt{K_2(x, x)}$ und damit die von $K_2(x, x)$.

Analog beweist man den schon in I. 6f angekündigten

Satz 20. $K_2(x, z)$ ist in beiden Variablen x, z stetig und daher beschränkt.

Satz 20 läßt sich umkehren zu

Satz 20a. Ist K quadratisch integabel und $K_2(x, z)$ in beiden Variablen stetig, so ist K von mittlerer Stetigkeit.

Es ist nämlich nach (77)

$$\begin{aligned} \Delta(x, x_1) &= \int_0^1 (K(x, z) - K(x_1, z))^2 \cdot dz \\ &= \int K(x, z) \cdot K(x, z) \cdot dz - 2 \int K(x, z) \cdot K(x_1, z) \cdot dz + \\ &\quad + \int K(x_1, z) \cdot K(x_1, z) \cdot dz \\ &= K_2(x, x) - 2 \cdot K_2(x, x_1) + K_2(x_1, x_1) \\ &= [K_2(x, x) - K_2(x, x_1)] - [K_2(x, x_1) - K_2(x_1, x_1)], \end{aligned}$$

woraus für $x_1 \rightarrow x$ sofort die Behauptung $\Delta \rightarrow 0$ folgt.

Wir skizzieren nun kurz den *Beweis* zu dem ebenfalls schon im vorigen Abschnitt erwähnten *Satz 18*.

Es sei also die Reihe

$$(87) \quad K(x, z) \sim \sum_v^{1 \dots \infty} \frac{\varphi_v(x) \varphi_v(z)}{\lambda_v}$$

absolut und in x und mithin auch in z gleichmäßig konvergent. Dann ist auch

$$(88) \quad H(x, z) \equiv K(x, z) - \sum_v^{1 \dots \infty} \frac{\varphi_v(x) \varphi_v(z)}{\lambda_v}$$

ein symmetrischer Kern; er erfüllt alle Voraussetzungen: quadratische Integrabilität und mittlere Stetigkeit, wie man zeigen kann. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} &\int [H(x_1, z) - H(x, z)]^2 dz \\ &= \int \left[K(x_1, z) - K(x, z) - \sum_v \frac{\varphi_v(z)}{\lambda_v} \cdot (\varphi_v(x_1) - \varphi_v(x)) \right]^2 dz \\ &= \Delta(x_1, x) - 2 \sum_v \int \frac{\varphi_v(z)}{\lambda_v} [K(x_1, z) - K(x, z)] [\varphi_v(x_1) - \varphi_v(x)] dz \\ &\quad + \sum_v \frac{1}{\lambda_v^2} [\varphi_v(x_1) - \varphi_v(x)]^2 \\ &= \Delta(x_1, x) - 2 \sum_v \frac{1}{\lambda_v^2} (\varphi_v(x_1) - \varphi_v(x))^2 + \sum_v \frac{1}{\lambda_v^2} [\varphi_v(x_1) - \varphi_v(x)]^2 \\ &= \Delta(x_1, x) - \sum_v \frac{1}{\lambda_v^2} [\varphi_v(x_1) - \varphi_v(x)]^2 \\ &\leq \Delta(x_1, x). \end{aligned}$$

Daher hat $H(x, z)$ nach dem Fundamentalsatz mindestens eine Eigenfunktion $\psi(x) \equiv 0$, falls $H(x, z)$ nicht identisch verschwindet.

Man kann aber sofort zeigen, daß ψ auch Eigenfunktion von $K(x, z)$ sein muß, woraus dann ein Widerspruch zu der Voraussetzung folgt, daß die φ_v schon alle Eigenfunktionen von K darstellen sollten. Daher muß $H(x, z) \equiv 0$ sein, und die Äquivalenz (87) verwandelt sich in eine Gleichung.

Wir wissen nach (66), daß

$$(89) \quad \sum \frac{\varphi_\nu^2(x)}{\lambda_\nu^2}$$

konvergiert (die absolute Konvergenz ist selbstverständlich). Daraus folgt aber auch, daß

$$(90) \quad \sum \frac{\varphi_\nu(x) \cdot \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu^2}$$

in jeder Variablen absolut und gleichmäßig konvergiert. Denn nach der SCHWARZSchen Ungleichheit gilt

$$(91) \quad \left\{ \begin{aligned} \left| \sum_n^m \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu^2} \right|^2 &\leq \sum_n^m \frac{\varphi_\nu^2(x)}{\lambda_\nu^2} \cdot \sum_n^m \frac{\varphi_\nu^2(z)}{\lambda_\nu^2} \\ &\leq K_2(x, x) \cdot \sum_n^m \frac{\varphi_\nu^2(z)}{\lambda_\nu^2} \end{aligned} \right.$$

nach (61). $K_2(x, x)$ ist nach Satz 20 stetig und beschränkt, $\sum_n^m \frac{\varphi_\nu^2(z)}{\lambda_\nu^2}$ hängt nicht von x ab und kann wegen der Konvergenz von (89) beliebig klein gemacht werden; daher kann auch der Rest (91) der Reihe (90) unabhängig von x beliebig klein gemacht werden: (90) konvergiert also in x gleichmäßig. Ebenso zeigt man die gleichmäßige Konvergenz von (90) in z .

Da nach (74)

$$K_2(x, z) \sim \sum \frac{\varphi_\nu(x) \cdot \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu^2}$$

ist, gilt nach Satz 18 das Gleichheitszeichen

$$(92) \quad K_2(x, z) = \sum \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu^2}.$$

Daraus folgt, daß für K die PARSEVALSche Gleichung (62) gilt

$$(93) \quad K_2(x, x) = \sum \frac{\varphi_\nu^2(x)}{\lambda_\nu^2} = \int K^2(x, z) dz$$

(statt der stets gültigen BESSELSchen Ungleichheit. Man vergleiche auch die Bemerkung in I. 6f).

Es nähern sich also die beständig wachsenden stetigen Funktionen

$$\sum_0^n \frac{\varphi_\nu^2(x)}{\lambda_\nu^2}$$

für $n \rightarrow \infty$ monoton der stetigen Funktion $K_2(x, x)$. Daraus folgt aber nach einem Satze von DINI, daß die Reihe in (93) gleichmäßig konvergiert. (Der Satz von DINI besagt: Eine konvergente Reihe von positiven

stetigen Funktionen, die zur Summe eine stetige Funktion hat, konvergiert gleichmäßig.) Daraus kann man durch nochmalige Anwendung der SCHWARZSchen Ungleichheit das wichtige Resultat ableiten:

Satz 21. *Es gilt stets*

$$K_2(x, z) = \sum_1^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu^2},$$

und die Reihe ist in **beiden Variablen gleichzeitig absolut und gleichmäßig konvergent**.

Ein ähnlicher Satz gilt auch von den höher iterierten Kernen:

Satz 21a: *Es gilt stets*

$$K_n(x, z) = \sum_1^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu^n} \quad n = 3, 4, \dots,$$

wo die Reihe erst recht absolut und gleichmäßig konvergiert.

h) Die Antwort auf 6d. Nachtrag zu 6a. Nachdem wir uns in den vorhergehenden Abschnitten die nötigen Hilfsmittel verschafft haben, sind wir jetzt in der Lage, mit dem Beweis des HILBERTSchen Entwicklungssatzes die Frage nach der Entwickelbarkeit einer „willkürlichen“ Funktion $f(x)$ zu beantworten:

Satz 22 (Entwicklungssatz). *Es sei $g(x)$ quellenmäßig darstellbar:*

$$(93a) \quad g(x) = \int_0^l K(x, z) f(z) dz,$$

wo $f(x)$ quadratisch integrierbar ist. Dann läßt sich $g(x)$ nach den Eigenfunktionen des symmetrischen Kerns K entwickeln

$$g(x) = \sum_1^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x),$$

und die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.

Wir setzen für die FOURIER-Koeffizienten von g und f c_ν und b_ν :

$$c_\nu = \int g \varphi_\nu dx, \quad b_\nu = \int f \varphi_\nu dx.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} c_\nu &= \iint K(x, z) f(z) \varphi_\nu(x) dx dz \\ &= \int \left[\int K(x, z) \varphi_\nu(x) dx \right] f(z) dz \\ &= \frac{1}{\lambda_\nu} \int \varphi_\nu(z) \cdot f(z) dz \\ &= \frac{b_\nu}{\lambda_\nu}. \end{aligned}$$

Also gilt die Äquivalenz

$$(94) \quad g(x) \sim \sum \frac{b_\nu}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(x).$$

Aber die Reihe in (94) konvergiert absolut und gleichmäßig; denn nach der SCHWARZSchen Ungleichheit folgt für einen Abschnitt dieser Reihe

$$\left(\sum_n^m \frac{\varphi_\nu b_\nu}{\lambda_\nu} \right)^2 \leq \left(\sum_n^m \frac{\varphi_\nu^2}{\lambda_\nu^2} \right) \cdot \left(\sum_n^m b_\nu^2 \right) \leq \sum_1^\infty \frac{\varphi_\nu^2}{\lambda_\nu^2} \cdot \sum_n^m b_\nu^2.$$

Nach (93) können wir weiter schreiben

$$\left(\sum_n^m \frac{\varphi_\nu b_\nu}{\lambda_\nu} \right)^2 \leq K_2(x, x) \cdot \sum_n^m b_\nu^2.$$

K_2 ist beschränkt; $\sum_1^\infty b_\nu^2$ konvergiert nach der BESSELSchen Ungleichheit, daher wird $\sum_n^m b_\nu^2$ und damit $\sum_n^m \varphi_\nu b_\nu / \lambda_\nu$ für genügend großes n beliebig klein, womit die gleichmäßige Konvergenz erwiesen ist. Die absolute Konvergenz folgt ähnlich aus

$$\left(\sum_n^m |b_\nu| \left| \frac{\varphi_\nu}{\lambda_\nu} \right| \right)^2 \leq \sum_1^m b_\nu^2 \cdot \sum_1^m \frac{\varphi_\nu^2}{\lambda_\nu^2}.$$

Schwieriger ist nun zu beweisen, daß in (94) das Gleichheitszeichen gilt. Um das einzusehen, setzen wir

$$(95) \quad h(x) \equiv \sum_1^\infty c_\nu \varphi_\nu(x).$$

h ist also die Summe der soeben als konvergent erwiesenen Reihe; wegen der gleichmäßigen Konvergenz hat h dieselben FOURIER-Koeffizienten wie g :

$$\int h \varphi_\nu dx = \sum_\mu c_\mu \int \varphi_\nu \varphi_\mu dx = c_\nu = \int g \varphi_\nu dx.$$

Wir betrachten ferner die Funktion

$$(96) \quad \phi(x) \equiv g(x) - h(x).$$

$\phi(x)$ hat natürlich die FOURIER-Koeffizienten 0:

$$(97) \quad \int \phi \varphi_\nu dx = 0.$$

Ist das System der $\varphi_\nu(x)$ abgeschlossen, so würde nach I. 6k (siehe dort!) hieraus folgen, daß ϕ identisch verschwindet, d. h. daß g und h identisch sind, womit unser Satz bewiesen wäre.

Ist aber das System der $\varphi_\nu(x)$ nicht abgeschlossen, müssen wir so schließen: Aus (97) folgt

$$\frac{1}{\lambda_\nu^2} \int \phi(x) \cdot \varphi_\nu(x) \cdot \varphi_\nu(z) dx = 0,$$

und also erst recht

$$\begin{aligned} 0 &= \sum \int \dot{p}(x) \cdot \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu^2} dx = \int \dot{p}(x) \cdot \left(\sum \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu^2} \right) dx \\ &= \int \dot{p}(x) \cdot K_2(x, z) dx \end{aligned}$$

nach Satz 21. Also ist erst recht

$$\begin{aligned} 0 &= \iint K_2(x, z) \dot{p}(x) \dot{p}(z) dx dz \\ &= \iiint K(x, u) K(u, z) \dot{p}(x) \dot{p}(z) dx du dz \\ &= \int \left(\int K(x, u) \dot{p}(x) dx \right) \left(\int K(u, z) \dot{p}(z) dz \right) du \\ &= \int \left(\int K(x, z) \dot{p}(z) dz \right)^2 dx \end{aligned}$$

wegen der Symmetrie des Kerns. Nun ist

$$\int K(x, z) \dot{p}(z) dz$$

eine durch \dot{p} quellenmäßig dargestellte Funktion in x , also nach Satz 19a stetig. Das Integral über das Quadrat einer stetigen Funktion kann aber nur dann verschwinden, wenn die Funktion identisch verschwindet, also ist

$$(98) \quad \int K(x, z) \dot{p}(z) dz = 0.$$

Da aber $\dot{p} = g - h$ ist, wird

$$\begin{aligned} \int \dot{p}^2 dx &= \int \dot{p}(g - h) dx \\ &= \int \dot{p} g dx - \int \dot{p} \left(\sum c_\nu \varphi_\nu \right) dx \\ &= \int \dot{p} g dx - \sum c_\nu \int \dot{p} \varphi_\nu dx. \end{aligned}$$

Nach (97) und (93a) ist dies

$$\begin{aligned} \int \dot{p}^2 dx &= \iint \dot{p}(x) K(x, z) f(z) dx dz - 0 \\ &= \int \left[\int K(x, z) \dot{p}(x) dx \right] f(z) dz, \end{aligned}$$

und nach (98) folgt hieraus

$$(99) \quad \int \dot{p}^2 dx = 0.$$

g ist quellenmäßig dargestellt, also gewiß stetig; ebenfalls ist dies h als Summe einer gleichmäßig konvergenten Reihe stetiger Funktionen. Daher ist auch $\dot{p} = g - h$ stetig, und aus demselben Grunde wie oben folgt aus (99), daß $\dot{p}(x)$ identisch verschwindet, womit der Beweis erbracht ist:

$$g(x) \equiv \sum c_\nu \varphi_\nu(x).$$

Es ist nützlich, darauf hinzuweisen, daß man von $f(x)$ und $K(x, z)$ nur die FOURIER-Koeffizienten zu kennen braucht; diese Funktionen brauchen durchaus nicht entwickelbar zu sein. Es gilt also die merkwürdige Tatsache, daß die Äquivalenz

$$K(x, z) \sim \sum \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu}$$

in eine Gleichung übergeht, wenn man beide Seiten mit irgendeiner quadratisch integrierbaren Funktion $f(x)$ multipliziert und dann integriert:

$$\begin{aligned} g(x) &\equiv \int K(x, z) f(z) dz = \int \left[\sum \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu} \right] f(z) dz \\ &= \sum \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} \int \varphi_\nu(z) f(z) dz \\ &= \sum \frac{b_\nu}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(x). \end{aligned}$$

Der Entwicklungssatz gilt auch noch, wenn K nur endlich viele Eigenfunktionen hat. Die Menge der quellenmäßig darstellbaren Funktionen ist dann natürlich entsprechend klein.

An dieser Stelle erscheint es angebracht, noch einen Blick auf den Abschnitt I. 6a zurückzuwerfen. Wir beschäftigten uns dort mit der Gewinnung eines Eigenwertes aus einem Grenzprozeß, und wir erhielten laut Satz 11:

$$(100) \quad \lambda^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{2n}(w, w)}{K_{2n+2}(w, w)},$$

w war ein Parameter. Wir hatten dort auch schon nachgewiesen, daß der Grenzwert (100) existiert; daß wir aber auf diese Art wirklich einen Eigenwert erhielten, nahmen wir damals ohne Beweis hin. Diese Bestimmungsweise von λ wird aber jetzt klar, wo wir nach Satz 21 und 21b die Entwicklung der höher iterierten Kerne kennen

$$K_n = \sum \frac{1}{\lambda_\nu^n} \varphi_\nu(x) \varphi_\nu(z), \quad n = 2, 3, \dots$$

Denn jetzt wird

$$(101) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim \frac{K_{2n}(w, w)}{K_{2n+2}(w, w)} &= \lim \frac{\sum \frac{1}{\lambda_\nu^{2n}} \varphi_\nu^2(w)}{\sum \frac{1}{\lambda_\nu^{2n+2}} \varphi_\nu^2(w)} = \\ &= \lambda_1^2 \cdot \lim \frac{\sum \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_\nu}\right)^{2n} \varphi_\nu^2}{\sum \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_\nu}\right)^{2n+2} \varphi_\nu^2} = \lambda_1^2 \cdot \frac{\sum_\nu \varphi_\nu^2 \cdot \lim \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_\nu}\right)^{2n}}{\sum_\nu \varphi_\nu^2 \cdot \lim \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_\nu}\right)^{2n+2}}. \end{aligned} \right.$$

Wenn $\lambda_\nu \neq \lambda_1$, strebt

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_\nu}\right)^{2n}$$

gegen null für $n \rightarrow \infty$, da λ_1 der absolut kleinste Eigenwert ist ($|\lambda_1| < |\lambda_\nu|$). Es bleiben also in (101) in der Summe nur diejenigen ν stehen, für die $\lambda_\nu = \lambda_1$ ist: das seien etwa $\nu = 1, 2, \dots, m$. Also wird

$$(102) \quad \lim \frac{K_{2n}}{K_{2n+2}} = \lambda_1^2 \cdot \frac{\sum_1^m \varphi_\nu^2}{\sum_1^m \varphi_\nu^2} = \lambda_1^2.$$

Wir erhalten daher durch unseren Grenzprozeß tatsächlich den kleinsten Eigenwert $\lambda = \lambda_1$, wie es Satz 11 verlangt. Diese Überlegung ist aber kein Ersatz für den fehlenden Beweis, denn der Satz von der Existenz eines Eigenwertes liegt unserer ganzen Theorie zugrunde.

i) Die Auflösung der inhomogenen Gleichung. Partialbruchzerlegung des lösenden Kerns. Der Alternativsatz FREDHOLMS für symmetrische Kerne. Wir können nun an die Auflösung der inhomogenen Gleichung

$$(103) \quad y(x) = \lambda \cdot \int_0^l K(x, z) y(z) dz + f(x)$$

gehen. Der symmetrische Kern K sei, wie üblich, quadratisch integrabel und von mittlerer Stetigkeit, $f(x)$ und das gesuchte $y(x)$ sollen ebenfalls quadratisch integrabel sein.

Wir denken uns zunächst alle (höchstens abzählbar viele) Eigenwerte λ_ν von K bestimmt, ebenfalls sollen die zugehörigen Eigenfunktionen φ_ν schon bekannt sein.

Schreiben wir nun (103) in der Form

$$(104) \quad y - f = \lambda \cdot \int K(x, z) y(z) dz,$$

so sehen wir, daß $y - f$ quellenmäßig dargestellt ist. Nach dem Entwicklungssatz ist daher

$$(105) \quad y - f = \sum_1^\infty c_\nu \varphi_\nu, \quad c_\nu = \int_0^l (y - f) \varphi_\nu dx,$$

wobei die absolut und gleichmäßig konvergierende Reihe sich über alle Eigenfunktionen erstreckt. (105) setzen wir in (104) ein, wobei wir wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz Summation und Integration vertauschen können:

$$(106) \quad \sum_1^\infty c_\nu \varphi_\nu(x) = \lambda \int K(x, z) f(z) dz + \sum_1^\infty \lambda c_\nu \cdot \int K(x, z) \varphi_\nu(z) dz.$$

$f(x)$ habe die FOURIER-Koeffizienten b_ν :

$$(106a) \quad b_\nu = \int_0^l f(x) \varphi_\nu(x) dx.$$

Dann ist nach dem Entwicklungssatz

$$\int K(x, z) f(z) dz = \sum \frac{b_\nu}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(x),$$

da

$$(107) \quad K(x, z) \sim \sum \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu}, \quad f(x) \sim \sum b_\nu \varphi_\nu(x).$$

Also schreibt sich (106)

$$(108) \quad \sum c_\nu \varphi_\nu(x) = \lambda \sum \frac{1}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(x) \cdot b_\nu + \sum \lambda \cdot c_\nu \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}.$$

Die Gleichmäßigkeit der Konvergenz erlaubt, die Koeffizienten der Reihen in (108) zu vergleichen:

$$(109) \quad \begin{aligned} c_\nu &= \frac{b_\nu}{\lambda_\nu} \cdot \lambda + \frac{\lambda}{\lambda_\nu} c_\nu, \\ \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right) c_\nu &= \frac{\lambda}{\lambda_\nu} b_\nu, \end{aligned}$$

oder, falls $\lambda \neq \lambda_\nu$:

$$(110) \quad c_\nu = b_\nu \frac{\lambda}{\lambda_\nu - \lambda}.$$

In diesem Falle kann man also die c_ν berechnen, *daher ist mit (106a) die inhomogene Gleichung gelöst*

$$(111) \quad y(x) = f(x) + \sum b_\nu \frac{\lambda}{\lambda_\nu - \lambda} \varphi_\nu(x).$$

Von $f(x)$ brauchen wir nur die b_ν zu kennen, f braucht selber gar nicht entwickelbar zu sein.

Wir finden noch, wenn wir (106a) in (111) einsetzen

$$(112) \quad y(x) = f(x) + \sum_1^\infty \frac{\lambda}{\lambda_\nu - \lambda} \varphi_\nu(x) \cdot \int_0^l f(z) \varphi_\nu(z) dz.$$

Falls λ kein Eigenwert ($\lambda \neq \lambda_\nu$), sehen wir, daß die inhomogene Gleichung stets genau eine Lösung (112) hat.

Die homogene Gleichung

$$(113) \quad y(x) = \lambda \int K(x, z) y(z) dz$$

hat dann wegen $f(x) \equiv 0$ nur die triviale Lösung $y \equiv 0$. *Damit ist Hauptsatz II für symmetrische Kerne bewiesen.*

Wir können nun leicht den Zusammenhang mit der früher betrachteten Theorie des lösenden Kerns Γ herstellen. Wir fanden in (I. 4. 21) für hinreichend kleine λ als Lösung der inhomogenen Gleichung

$$(114) \quad y(x) = f(x) + \int f(z) \cdot \Gamma(\lambda; x, z) dz.$$

Vergleichen wir das mit (112), so erwarten wir wenigstens die Äquivalenz

$$(115) \quad \Gamma(\lambda; x, z) \sim \lambda \sum \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu - \lambda}.$$

Die Reihe wird im allgemeinen nicht konvergieren, da sie sich in bezug auf Konvergenz ebenso verhält wie

$$\sum \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu} \sim K(x, z).$$

Man erhält aber eine konvergente Reihe, wenn man betrachtet (Äquivalenzen dürfen addiert werden!)

$$(116) \quad \left\{ \begin{aligned} \Gamma(\lambda; x, z) - \lambda \cdot K(x, z) &\sim \lambda \sum \varphi_\nu(x) \varphi_\nu(z) \left(\frac{1}{\lambda_\nu - \lambda} - \frac{1}{\lambda_\nu} \right) \\ &= \lambda^2 \sum \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu (\lambda_\nu - \lambda)}. \end{aligned} \right.$$

Diese Reihe verhält sich in der Frage der Konvergenz wie

$$\sum \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu^2} = K_2(x, z),$$

konvergiert also. Daher kann man zeigen, daß in (116) sogar das Gleichheitszeichen gilt

$$\Gamma - \lambda K = \lambda^2 \cdot \sum \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu(\lambda_\nu - \lambda)},$$

oder

$$(117) \quad \Gamma(\lambda; x, z) = \lambda \cdot K(x, z) + \lambda^2 \sum_1^\infty \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu(\lambda_\nu - \lambda)}, \quad \lambda \neq \lambda_\nu.$$

Diese Darstellung gilt für alle $\lambda \neq \lambda_\nu$; sie liefert uns die *Partialbruchzerlegung von $\Gamma(\lambda; x, z)$* . (Man denke etwa an die Zerlegung einer rationalen Funktion

$$\frac{1}{1-\lambda^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\lambda} + \frac{1}{1+\lambda} \right),$$

hier sind $\lambda = +1$, $\lambda = -1$ deren Pole.) Γ hat also in λ den Charakter einer rationalen Funktion mit höchstens abzählbar unendlich vielen Polen $\lambda = \lambda_\nu$ (meromorphe Funktion in λ): Γ ist eindeutig und regulär in der λ -Ebene bis auf Pole. (*Damit ist Hauptsatz VII für symmetrische Kerne bewiesen.*) Die Pole des lösenden Kerns sind also die Eigenwerte der Integralgleichung.

Wo daher in der λ -Ebene Γ regulär ist ($\lambda \neq \lambda_\nu$), hat die inhomogene Gleichung nach dem obigen genau eine, die homogene Gleichung keine nichttrivialen Lösungen: *das ist Hauptsatz VI für symmetrische Kerne.*

Der Fundamentalsatz von E. SCHMIDT sagt bekanntlich aus, daß jeder symmetrische Kern wenigstens einen Eigenwert hat. Für Γ bedeutet dies, daß Γ in diesem Falle wenigstens einen Pol hat, *womit auch Hauptsatz IX bewiesen ist.*

Die Reihe (117) folgt auch aus der NEUMANNschen Reihe I. 4 b unter Benutzung der Entwicklungen für K_n ($n \geq 2$) (siehe S. 76).

Nun verbleibt uns noch der Ausnahmefall

$$(118) \quad \lambda = \lambda_\nu.$$

Jetzt wird

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right) c_\nu = 0,$$

und damit

$$(119) \quad \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right) c_\nu = \frac{\lambda}{\lambda_\nu} b_\nu$$

auf keinen Widerspruch führt, muß sein

$$(120) \quad b_\nu = 0.$$

Das gegebene $f(x)$ muß daher zu allen Eigenfunktionen $\varphi_\nu(x)$, die zu λ_ν gehören, orthogonal sein:

$$(121) \quad b_\nu = \int f \varphi_\nu dx = 0.$$

Diese Bedingung fanden wir in Satz 7a als notwendig; wir erkennen sie jetzt für symmetrische Kerne auch als hinreichend.

Erfüllt das $f(x)$ diese Bedingung, so bleibt nach (119) c_ν frei für alle φ_ν , die zu $\lambda = \lambda_\nu$ gehören. Man kann dann diese c_ν willkürlich wählen und erhält so unendlich viele Lösungen der inhomogenen Gleichung.

Im symmetrischen Fall ($K(x, z) = K(z, x)$), den wir hier allein betrachten, ist die homogene Integralgleichung mit ihrer umgestellten Gleichung identisch

$$(122) \quad y(x) = \lambda \int K(x, z) y(z) dz,$$

daher gilt zunächst *Hauptsatz V für symmetrische Kerne*.

Im Ausnahmefall ($\lambda = \lambda_\nu$) ist λ ein Eigenwert, es hat die homogene Gleichung also nichttriviale Lösungen; die inhomogene (oder, was dasselbe ist, die umgestellte inhomogene) Gleichung hat dann, wie wir soeben fanden, stets Lösungen, wenn $f(x)$ gewisse Bedingungen erfüllt (zu den φ_ν von λ_ν orthogonal ist). *Damit ist auch Hauptsatz IV für symmetrische Kerne bewiesen.*

Es ist also die Gültigkeit aller in I. 4e aufgezählten Hauptsätze wenigstens für den symmetrischen Fall nachgewiesen worden. Wir können schließlich alle Ergebnisse zu dem *Alternativsatz über symmetrische Kerne* (von FREDHOLM) zusammenfassen:

Satz 23. *Ist λ kein Eigenwert (d. h. hat die homogene Gleichung keine nichttrivialen Lösungen), so hat die inhomogene Gleichung genau eine Lösung. Ist aber λ ein Eigenwert λ_ν (d. h. hat die homogene Gleichung nichttriviale Lösungen), so hat die inhomogene Gleichung im allgemeinen keine Lösung, es sei denn, daß $f(x)$ zu den φ_ν , die zu λ_ν gehören, orthogonal ist: dann gibt es unendlich viele Lösungen der inhomogenen Gleichung.*

k) Positiv definite Kerne. Abgeschlossenheit. Variationsprinzip von GAUSS-HILBERT und DIRICHLET-RAYLEIGH. Der MERCERSche Satz. Wir schreiben wieder die uns schon vertraute Äquivalenz

$$K(x, z) \sim \sum \frac{\varphi_\nu(x) \cdot \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu}$$

auf. Dann gilt, wenn noch

$$f(x) \sim \sum b_\nu \varphi_\nu(x)$$

ist, nach den Ausführungen zum Beweise des Entwicklungssatzes in I. 6h:

$$\int K(x, z) f(z) dz = \sum \frac{b_\nu}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(x).$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz können wir nochmals integrieren

$$(123) \quad \int \int K(x, z) f(x) f(z) dx dz = \sum_1^\infty \frac{b_\nu^2}{\lambda_\nu}.$$

An dieser Gleichung erkennt man die Wichtigkeit des Falles, daß alle λ_ν positiv sind; denn dann ist

$$\sum \frac{1}{\lambda_\nu} \cdot b_\nu^2 \geq 0.$$

Man nennt nun einen Kern *positiv definit*, wenn für alle quadratisch integrierbaren Funktionen $f(x) \neq 0$

$$(124) \quad \iint K(x, z) f(x) f(z) dx dz > 0,$$

semidefinit, wenn

$$(125) \quad \iint K(x, z) f(x) f(z) dx dz \geq 0$$

ist.

Bei positiv definitem oder semidefinitem Kern sind alle $\lambda_\nu > 0$. Denn wäre $\lambda_\mu < 0$, so wähle man $f(x) = \varphi_\mu(x)$ und erhält so

$$\sum \frac{1}{\lambda_\nu} b_\nu^2 = \frac{1}{\lambda_\mu} < 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Wenn umgekehrt alle $\lambda_\nu > 0$ sind, ist natürlich auch der Kern positiv definit oder semidefinit. (Dies Positivsein heißt nicht dasselbe wie $K > 0$ in I. 5 e.)

Bei positiv definitem Kern kann man also aus

$$(126) \quad b_\nu = \int \varphi_\nu(x) f(x) dx = 0,$$

falls dies für alle ν gilt, schließen, daß $f(x) \equiv 0$ sein muß. Diesen Schluß kann man nicht bei jedem Funktionensystem $\varphi_\nu(x)$ ziehen (das sieht man sofort, wenn man z. B. ein φ_ν fortläßt). (126) charakterisiert also eine besondere Eigenschaft des Systems aller φ_ν , die wir auch besonders benennen wollen: *wir nennen ein Funktionensystem $\varphi_\nu(x)$ abgeschlossen, wenn aus*

$$(127a) \quad \int_0^l f(x) \varphi_\nu(x) dx = 0 \quad \text{für alle } \nu$$

stets für jedes quadratisch integrierbare $f(x)$

$$(127b) \quad f(x) \equiv 0$$

folgt.

Es sind also nicht alle Systeme $\varphi_\nu(x)$ abgeschlossen. (Es kommt auch auf das Intervall an. So ist, wie wir noch beweisen werden, die Gesamtheit aller $\sin \frac{\nu \pi x}{l}$ für $0 \leq x \leq l$ abgeschlossen — s. u. —, aber nicht für $-l \leq x \leq +l$. Denn es ist z. B.

$$\int_{-l}^{+l} \cos \frac{n \pi x}{l} \sin \frac{\nu \pi x}{l} dx = 0$$

für alle n und ν .)

Man nennt auch einen Kern $K(x, z)$ abgeschlossen, wenn aus

$$(128a) \quad \int_0^l K(x, z) f(z) dz = 0$$

folgt

$$(128b) \quad f(z) \equiv 0.$$

Abgeschlossenheit des Kernes K und Abgeschlossenheit des Systems der zugehörigen Eigenfunktionen besagen dasselbe. Um das einzusehen, verwandeln wir die Gleichung

$$(129) \quad \int K(x, z) f(z) dz = 0.$$

Die linke Seite von (129) stellt eine quellenmäßig dargestellte Funktion dar, für die nach I. 6h der Entwicklungssatz gilt

$$(130) \quad \int K(x, z) f(z) dz = \sum_{\nu} \frac{\varphi_{\nu}(x)}{\lambda_{\nu}} \int \varphi_{\nu}(z) f(z) dz = 0.$$

Da die Reihe gleichmäßig konvergiert, kann man mit $\varphi_{\nu}(x)$ multiplizieren, integrieren und dann noch Summe und Integral vertauschen. So erhält man

$$(131) \quad \int \varphi_{\nu} f \cdot dx = 0 \text{ für alle } \nu$$

als gleichwertig mit (129). Damit ist die Behauptung bewiesen.

Unser Musterkern ist für das Intervall $0 \dots l$ abgeschlossen. Denn wir hatten in Satz 3 die Identität des Randwertproblems

$$(132) \quad g'' = -f; \quad g(0) = g(l) = 0$$

mit der Gleichung

$$(133) \quad g(x) = \int_0^l K(x, z) f(z) dz$$

erkannt. (K ist der Musterkern.) Ist nun $g(x) \equiv 0$, so folgt aus (132), daß erst recht $f(x) \equiv 0$ ist. In Verbindung mit (128) besagt dies aber, daß der Musterkern abgeschlossen ist. Nach dem oben Bewiesenen wissen wir also auch, daß das System seiner Eigenfunktionen

$$\sin \frac{\nu \pi x}{l}$$

im Intervall $0 \leq x \leq l$ abgeschlossen ist, womit sich obige Bemerkung rechtfertigt.

Sind die b_{ν} die FOURIER-Koeffizienten von $f(x) \equiv 0$, so kann, wie man sofort sieht, bei abgeschlossenen Systemen und positiven λ_{ν} nie

$$\sum_1^{\infty} \frac{b_{\nu}^2}{\lambda_{\nu}} = 0$$

sein.

Vollständige Systeme, d. h. nach I. 6e Systeme, in denen für jedes quadratisch integrable $f(x)$ die PARSEVALSche Gleichung

$$(134) \quad \int f^2 dx = \sum b_v^2$$

gilt, sind auch abgeschlossen. Denn wären sie dies nicht, so müßte es ein $f(x) \neq 0$ geben mit allen $b_v = 0$, so daß

$$\sum b_v^2 = 0, \quad \int f^2 dx \neq 0$$

wäre im Gegensatz zu (134). Schwieriger zu zeigen ist, daß auch die Umkehrung gilt; die Begriffe „vollständig“ und „abgeschlossen“ fallen also zusammen¹. Auf den Beweis gehen wir nicht ein.

Wir hatten schon früher (in I. 6a) ein Verfahren kennengelernt, um den niedrigsten Eigenwert λ_1 des symmetrischen Kerns zu berechnen. HILBERT wies nun bei positiv definitem oder semidefinitem Kern eine andere Methode zum Auffinden des niedrigsten Eigenwertes nach. Diese läuft darauf hinaus, eine Funktion $f(x)$ so zu bestimmen, daß das Integral

$$(135) \quad \iint K(x, z) f(x) f(z) dx dz$$

ein Maximum wird mit der Nebenbedingung

$$(136) \quad \int f^2 dx = 1.$$

Wir machen noch die nicht unbedingt erforderliche Annahme, daß das System der Eigenfunktionen von K abgeschlossen sei.

Nach (123) suchen wir also die FOURIER-Koeffizienten b_v von $f(x)$ so zu bestimmen, daß gleichzeitig gilt

$$(137) \quad \begin{cases} \sum b_v^2 = 1 \\ \sum \frac{b_v^2}{\lambda_v} = \text{Max.} \end{cases}$$

Es sei der Einfachheit halber $\lambda_1 \neq \lambda_2$ angenommen, d. h. zu λ_1 gehöre nur eine Eigenfunktion. Da die positiven λ_v der Größe nach geordnet sind, ist

$$\frac{1}{\lambda_1} > \frac{1}{\lambda_2} \geq \frac{1}{\lambda_3} \geq \dots,$$

daher

$$\sum \frac{b_v^2}{\lambda_v} \leq \frac{1}{\lambda_1} \sum b_v^2 = \frac{1}{\lambda_1}.$$

Wir erhalten daher das Maximum $1/\lambda_1$ von $\sum b_v^2/\lambda_v$, wenn wir setzen

$$b_1 = 1, \quad b_2 = b_3 = \dots = 0,$$

Nach (137) wird dann das Maximum des Doppelintegrals

$$(138) \quad \text{Max} \iint K(x, z) f(x) f(z) dx dz = \frac{1}{\lambda_1}.$$

¹ Das ist ein Satz von F. RIESS und E. FISCHER: C. R. Acad. Sci., Bd. 144, S. 615, 734, 1022, 1148, Paris 1907; auch Göttinger Nachrichten 1907, S. 116.

Das genannte Variationsproblem kann man mit Hilfe des *RITZschen Verfahrens* lösen, ohne daß man schon die Eigenwerte von K zu kennen braucht. Hat man ein $f(x)$ gefunden, das (135) zum Maximum macht, so ist nach (138) dieses Maximum gerade $1/\lambda_1$.

Das RITZsche Verfahren besteht in folgendem. Man setzt mit irgendwelchen orthogonalen und normierten ψ_ν , das gesuchte $f(x)$ angenähert an:

$$f(x) \approx \sum_{\nu=1}^n C_\nu \psi_\nu(x)$$

mit unbekanntem C_ν . $\int_0^1 f^2 dx = 1$ gibt dann die Bedingungsgleichung

$$\sum_1^n C_\nu^2 = 1.$$

Das Integral

$$\iint K(x, z) f(x) f(z) dx dz$$

wird mit

$$\iint K(x, z) \psi_\nu(x) \psi_\mu(z) dx dz = a_{\nu\mu}$$

angenähert die quadratische Form

$$\sum_{\nu, \mu=1}^n a_{\nu\mu} C_\nu C_\mu,$$

wie man durch Einsetzen von f und Ausrechnen findet. Diese Form macht man nun zum Maximum unter der Nebenbedingung $\sum_1^n C_\nu^2 = 1$. Man erhält bekanntlich die Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^n a_{\nu\mu} C_\nu = \sigma C_\mu$$

mit dem Parameter σ . Für diesen ergibt sich aus dem notwendigen Verschwinden der Determinante die Gleichung

$$||a_{\nu\mu} - \delta_{\nu\mu} \sigma|| = 0,$$

wobei $\delta_{\nu\mu}$ das KRONECKERSCHE Symbol ist. Vergleiche hierzu weiter II. 2 u. 8.

Man kann zu dem obigen Variationsproblem, das HILBERT nach GAUSS benennt, ein ähnliches nach DIRICHLET und RAYLEIGH so formulieren:

Wir setzen

$$(139) \quad g(x) \equiv \int K(x, z) f(z) dz;$$

dann suchten wir soeben eine Funktion $f(x)$, so daß

$$(140) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int f \cdot g dx = \text{Max.} \\ \int f^2 dx = 1 \end{array} \right.$$

gilt. Dieses Problem ist aber identisch mit dem anderen (nach DIRICHLET-RAYLEIGH), $g(x)$ so zu bestimmen, daß

$$(141) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int f \cdot g dx = \text{Min.} \\ \int g^2 dx = 1, \end{array} \right.$$

oder, was dasselbe ist, daß

$$(142) \quad \sum \frac{b_\nu^2}{\lambda_\nu^2} = 1, \quad \sum \frac{b_\nu^2}{\lambda_\nu} = \text{Min.}$$

gilt. Denn mit

$$f(x) \sim \sum b_\nu \varphi_\nu(x), \quad K(x, z) \sim \sum \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu}$$

ist nach (139)

$$g(x) = \sum \frac{b_\nu}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(x),$$

wenn wir den Entwicklungssatz berücksichtigen. Das Minimum in (142) tritt ein, wenn wir setzen

$$b_1 = \lambda_1, \quad b_2 = b_3 = \dots = 0,$$

und dann wird

$$\sum \frac{b_\nu^2}{\lambda_\nu^2} = 1, \quad \sum \frac{b_\nu^2}{\lambda_\nu} = \lambda_1.$$

Wir können daher alle Ergebnisse zusammenfassen im

Satz 24. *Nach GAUSS-HILBERT erhalten wir den niedrigsten Eigenwert λ_1 eines positiv definiten oder semidefiniten Kerns K durch das Variationsproblem*

$$\frac{1}{\lambda_1} = \text{Max} \iint K(x, z) f(x) f(z) dx dz$$

für alle quadratisch integrierbaren $f(x)$ mit

$$\int f^2 dx = 1.$$

Nach DIRICHLET-RAYLEIGH gilt unter derselben Voraussetzung

$$\lambda_1 = \text{Min} \iint K(x, z) f(x) f(z) dx dz$$

für alle $f(x)$, für die

$$\int \left[\int K(x, z) f(z) dz \right]^2 dx = 1$$

wird.

Was bedeuten nun die beiden Variationsprobleme physikalisch?

Um hierauf eine Antwort zu finden, betrachten wir unseren Musterkern K , der wegen $\lambda_\nu = \nu^2 \pi^2 / l^2 > 0$ positiv definit ist. Nach I. 2c [Satz 1 und (27), (28)] sind seine Eigenfunktionen $\sin \frac{\nu \pi x}{l} = y_\nu$ und seine Eigenwerte $\lambda_\nu = \nu^2 \pi^2 / l^2$ die Lösungen des Randwertproblems

$$(143) \quad y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(l) = 0.$$

Denkt man sich die Variable x als die Zeit, so liegt ein Schwingungsproblem vor: die Eigenfunktionen y_ν sind harmonische Schwingungen.

Weiter ist

$$(144) \quad g(x) \equiv \int_0^l K(x, z) f(z) dz$$

nach Satz 3 identisch mit dem Randwertproblem

$$(145) \quad g'' = -f; \quad g(0) = g(l) = 0.$$

Daher ist

$$(146) \quad \left\{ \begin{aligned} \iint K(x, z) f(x) f(z) dx dz &= \int f g dx \\ &= - \int g g'' dx \\ &= - [g g']_0^l + \int_0^l g'^2 dx \\ &= \int g'^2 dx, \end{aligned} \right.$$

wie man durch partielle Integration bei Berücksichtigung von (145) findet. Der niedrigste Eigenwert λ_1 ist also nach GAUSS-HILBERT gegeben durch

$$(147) \quad \frac{1}{\lambda_1} = \text{Max} \int_0^l g'^2 dx$$

mit $\int f^2 dx = 1$, bzw. nach (145) mit

$$(148) \quad \int_0^l g'^2 dx = 1.$$

Dagegen ist nach DIRICHLET-RAYLEIGH

$$(149) \quad \lambda_1 = \text{Min} \int_0^l g'^2 dx$$

mit

$$(150) \quad \int_0^l g^2 dx = 1.$$

($g(0) = g(l) = 0$).

Dieses $g(x)$, das das Minimum von (149) liefert, ist die zu λ_1 gehörende Eigenfunktion y_1 , denn für diese muß gelten

$$y_1'' + \lambda_1 y_1 = 0; \quad y_1(0) = y_1(l) = 0; \quad \int y_1^2 dx = 1.$$

Durch Multiplikation mit y_1 und Integration folgt

$$\lambda_1 = - \int y_1 y_1'' dx = \int y_1'^2 dx,$$

wenn man noch partiell integriert. Da aber

$$\lambda_1 = \int g'^2 dx$$

sein soll, folgt wegen der Randbedingung

$$y_1 \equiv g.$$

Man kann daher das *Prinzip von RAYLEIGH* so aussprechen:

Die kinetische Energie ($\int g'^2 dx$) der harmonischen Schwingung wird ein Minimum bei gegebener Energie der Lage ($\int g^2 dx$). In dieser Form läßt sich das Prinzip auch auf allgemeinere Schwingungsprobleme übertragen.

Es liege z. B.

$$(151) \quad K''(x, z) = \sqrt{\varrho(x)\varrho(z)} \cdot K(x, z)$$

vor, wo K der Musterkern [vgl. (I. 2. 19)] ist. Das allgemeinere Schwingungsproblem

$$(152) \quad y'' + \lambda \varrho(x) \cdot y = 0; \quad \varrho(x) > 0; \quad y(0) = y(l) = 0$$

ist dann nach (I. 3. 49), (I. 3. 50) identisch mit

$$\eta(x) = \lambda \int_0^l K''(x, z) \eta(z) dz,$$

oder

$$y(x) = \lambda \int K(x, z) \varrho(z) y(z) dz,$$

wenn wir

$$\eta(x) = \sqrt{\varrho(x)} \cdot y(x)$$

eingeführen. Wir setzen wieder

$$(153) \quad g(x) = \int K''(x, z) f(z) dz$$

und führen noch die Funktionen ein

$$(154) \quad g(x) = \sqrt{\varrho(x)} \cdot G(x), \quad f(x) = \sqrt{\varrho(x)} \cdot F(x).$$

Dann ist nach (153)

$$G(x) = \int \varrho(z) K(x, z) F(z) dz.$$

Nach Satz 3 (I. 3 b) entspricht dies dem Randwertproblem

$$G'' + \varrho(x) \cdot F(x) = 0; \quad G(0) = G(l) = 0.$$

Da ferner

$$\int f g dx = \int \varrho F \cdot G \cdot dx = - \int G G'' dx = \int G'^2 dx$$

ist, wie man mit Hilfe partieller Integration findet, bekommt man den niedrigsten Eigenwert λ_1 von K'' nach GAUSS-HILBERT aus

$$(155) \quad \frac{1}{\lambda_1} = \text{Max} \int G'^2 dx$$

mit der Nebenbedingung

$$(156) \quad \begin{cases} 1 = \int f^2 dx = \int \varrho \cdot F^2 dx \\ = \int \frac{1}{\varrho} G''^2 dx; \quad G(0) = G(l) = 0. \end{cases}$$

Nach DIRICHLET-RAYLEIGH ist entsprechend

$$(157) \quad \lambda_1 = \text{Min} \int f g dx = \text{Min} \int G'^2 dx$$

mit der Nebenbedingung

$$(158) \quad 1 = \int g^2 dx = \int \varrho \cdot G^2 dx.$$

Hierin ist das $G(x)$, das uns das Minimum liefert, die zu λ_1 gehörige Eigenfunktion, wie man genau wie oben einsieht. Das RAYLEIGHSCHE Prinzip, in der Fassung vom Minimum der kinetischen Energie $\int G'^2 dx$ bei gegebener potentieller Energie $\int \rho G^2 dx$ gilt also auch hier, w.z.b.w.

Bemerkenswert für positiv definite Kerne ist noch der Satz von MERCER, der hier ohne Beweis zitiert sei:

Satz 25. Ist $K(x, z)$ stetig, und sind alle λ_ν positiv, so gilt statt der Äquivalenz die Gleichung

$$K(x, z) = \sum_1^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu}.$$

Es gilt dann weiter

$$\int_0^l K(x, x) \cdot dx = \sum_1^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu},$$

weshalb auch diese Reihe konvergent ist.

Zweiter Teil.

Weitergehende Ausführungen.

1. Die lineare Integralgleichung erster Art.

Wir betrachten zunächst die lineare Integralgleichung erster Art mit symmetrischem Kern. Sie hat nach I. 2a die Form

$$(1) \quad \int_0^l K(x, z) \cdot f(z) \cdot dz = g(x).$$

Sie verlangt also die Umkehr der Definition der quellenmäßigen Darstellbarkeit: $g(x)$ ist gegeben, $f(x)$ ist gesucht.

Wollen wir ein quadratisch integrabiles $f(x)$ haben und machen wir über K die alten Voraussetzungen von I. 6f (quadratische Integrabilität und mittlere Stetigkeit), so ist $g(x)$ durch $f(x)$ quellenmäßig dargestellt. Es gilt also für g der HILBERTSche Entwicklungssatz, und wir müssen daher über g die notwendige Voraussetzung machen, daß es nach den Eigenfunktionen $\varphi_\nu(x)$ des Kernes K in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe entwickelbar ist:

$$(2) \quad g(x) = \sum b_\nu \cdot \varphi_\nu(x).$$

Wenn nun

$$f(x) \sim \sum c_\nu \cdot \varphi_\nu(x)$$

gesetzt wird, gilt nach I. 6h

$$\int K(x, z) \cdot f(z) \cdot dz = \sum \frac{1}{\lambda_\nu} \cdot c_\nu \varphi_\nu(x),$$

und da dies gleich $g(x)$ sein soll, bestimmen wir formal die gesuchten c_ν aus

$$\frac{1}{\lambda_\nu} c_\nu = b_\nu$$

zu

$$(3) \quad c_\nu = \lambda_\nu \cdot b_\nu.$$

Wenn also $g(x)$ nach den φ_ν entwickelbar ist — was namentlich bei nicht abgeschlossenen Kernen schon eine starke Einschränkung bedeutet — kann man diese c_ν berechnen, sofern man die $\varphi_\nu(x)$ kennt.

Soll nun $f(x)$ wenigstens quadratisch integrel sein, muß auf Grund der BESSELSchen Ungleichheit (I. 6. 61) die Reihe

$$(4) \quad \sum c_\nu^2 = \sum \lambda_\nu^2 \cdot b_\nu^2$$

konvergieren.

Genügt das schon, um die Existenz einer Funktion $f(x)$ sicherzustellen? Das ist nach einem berühmten *Satze von FISCHER und RIESS* (siehe Literaturangabe S. 86) zu bejahen: wenn wir die c_ν kennen, so daß $\sum c_\nu^2$ konvergiert, gibt es stets eine quadratisch integrierbare Funktion $f(x)$, deren FOURIER-Koeffizienten die c_ν sind. Allerdings müssen wir diese Integrierbarkeit im modernen Sinne auffassen; bloße Integrierbarkeit nach RIEMANN genügt nicht, die Funktion $f(x)$ kann sehr unstetig sein. Soll der Satz richtig sein, müssen LEBESGUESCHE Integrale genommen werden: $f(x)$ wird als quadratisch integrierbar nur im LEBESGUESCHEN Sinne vorausgesetzt.

Ist das System der φ_ν (oder, was nach I. 6k dasselbe ist, der Kern K) abgeschlossen, so ist $f(x)$ durch die FOURIER-Koeffizienten sogar im wesentlichen eindeutig bestimmt, d. h. zwei verschiedene Funktionen mit denselben c_ν können im Intervall $0 \dots l$ nur auf einer Menge vom LEBESGUESCHEN Maße 0 verschiedene Werte annehmen.

Wir können hier auf den Beweis des FISCHER-RIESSSCHEN Satzes nicht eingehen. Man wird sich in der Praxis damit begnügen müssen, die Konvergenz der Reihe (4) festzustellen, und dann $f(x)$ durch diese c_ν als definiert ansehen; vielleicht konvergiert auch die Reihe $f(x) = \sum c_\nu \cdot \varphi_\nu(x)$.

Was macht man aber, wenn man die Eigenwerte λ_ν nicht kennt und auch nicht die Eigenfunktionen φ_ν ?

Hier kann man so vorgehen: Man nimmt zunächst irgendein abgeschlossenes System von Funktionen $\psi_\nu(x)$. Die ψ_ν brauchen durchaus kein Orthogonalsystem zu bilden. [Wir können z. B. $\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin \frac{\nu \pi x}{l}$, aber auch die Potenzen von x oder von $(l-x)$, als ψ_ν verwenden.]

Nun bilden wir aus der Integralgleichung (1) durch Multiplikation mit ψ_ν und Integration die unendlich vielen Gleichungen

$$(5) \quad \iint K(x, z) \cdot f(z) \cdot \psi_\nu(x) \cdot dx dz = \int g(x) \cdot \psi_\nu(x) \cdot dx \equiv a_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Diese Gleichungen ersetzen (1) durchaus; denn da die ψ_ν ein abgeschlossenes System bilden sollen, folgt aus (5) oder

$$\iint [K(x, z) \cdot f(z) dz - g(x)] \psi_\nu(x) \cdot dx = 0 \quad \nu = 1, 2, \dots$$

nach I. 6k wieder (1).

Setzen wir noch

$$(6) \quad u_\nu(z) = \int K(x, z) \cdot \psi_\nu(x) \cdot dx,$$

so schreibt sich (5)

$$(7) \quad \int_0^l f(z) \cdot u_\nu(z) \cdot dz = a_\nu.$$

Hierin sind die $u_\nu(z)$ und die a_ν grundsätzlich als bekannt zu betrachten.

Nimmt man für die $\psi_\nu(x)$, wie oben vorgeschlagen, die Potenzen $(l-x)^{\nu-1}$, so kommt die Berechnung der a_ν darauf hinaus, die gegebene Integralgleichung fortgesetzt nach x zu integrieren. Denn es ist, wie man leicht einsieht,

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} a_\nu &= \int_0^l g(z) \cdot \psi_\nu(z) \cdot dz = \int_0^l g(z) \cdot (l-z)^{\nu-1} \cdot dz \\ &= (\nu-1)! \underbrace{\int_0^l \int_0^x \dots \int_0^x}_{\nu \text{ mal}} g(z) \cdot dz \cdot dx \dots dx. \end{aligned} \right.$$

Vergleiche (36) und (37) in I. 3 b.

Wenn wir dieses zweite Verfahren zur Bestimmung von $f(x)$, das unabhängig von der Kenntnis der Eigenfunktionen von K ist, noch einmal durchdenken, werden wir finden, daß die Voraussetzung über die Symmetrie des Kerns K nirgends benutzt worden ist. (Im ersten Verfahren wurde diese Voraussetzung bei der Anwendung des HILBERTSchen Entwicklungssatzes benutzt.) Wir haben also mehr erhalten als wir erwarteten: das zweite Verfahren ist auch auf nichtsymmetrische Kerne anwendbar.

Wir wollen die Sache an dem Beispiel

$$\int_{-1}^{+1} f(z) \ln|x-z| dz = g(x) \quad -1 \leq x \leq 1$$

erproben. Wir setzen zuerst

$$\begin{aligned} x &= -\cos \alpha \\ z &= -\cos \beta, \end{aligned}$$

so daß α und β beide von 0 bis π laufen und erhalten mit

$$\begin{aligned} f(-\cos \beta) \sin \beta &= F(\beta) \\ g(-\cos \alpha) &= G(\alpha) \end{aligned}$$

die neue Integralgleichung

$$\int_0^\pi F(\beta) \ln|\cos \alpha - \cos \beta| d\beta = G(\alpha).$$

Nun können wir von dem neuen symmetrischen Kern

$$K(\alpha, \beta) = \ln|\cos \alpha - \cos \beta|$$

die Entwicklung nach Eigenfunktionen angeben. Es ist

$$|\cos \alpha - \cos \beta| = 2 \sin \left| \frac{\alpha - \beta}{2} \right| \sin \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

(Da $0 \leq \frac{\alpha + \beta}{2} \leq \pi$, ist $\sin \frac{\alpha + \beta}{2}$ von selbst nicht negativ). Also gilt

$$K(\alpha, \beta) = \ln 2 \sin \left| \frac{\alpha - \beta}{2} \right| + \ln 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} - \ln 2.$$

Es ist aber nach der Theorie der FOURIERSchen Reihen¹

$$-\ln 2 \sin \frac{|x|}{2} = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\cos 3x}{3} + \dots \quad 0 < |x| \leq \pi$$

Also ist

$$\begin{aligned} K(\alpha, \beta) &= -\ln 2 - \cos \alpha - \beta - \frac{1}{2} \cos 2(\alpha - \beta) - \frac{1}{3} \cos 3(\alpha - \beta) \dots \\ &\quad - \cos(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \cos 2(\alpha + \beta) - \frac{1}{3} \cos 3(\alpha + \beta) \dots \end{aligned}$$

Oder

$$\begin{aligned} K(\alpha, \beta) &= -\ln 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta - \\ &\quad - 2 \cdot \frac{1}{2} \cos 2\alpha \cos 2\beta - 2 \cdot \frac{1}{3} \cos 3\alpha \cos 3\beta \dots \end{aligned}$$

Nun bilden aber wegen

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos n\alpha \cos m\alpha d\alpha &= 0 && n \neq m, \\ \int_0^\pi \cos^2 n\alpha d\alpha &= \frac{\pi}{2}, \\ \int_0^\pi 1 d\alpha &= \pi, \\ \int_0^\pi 1 \cdot \cos n\alpha d\alpha &= 0 \end{aligned}$$

die Funktionen

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_\nu = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \nu\alpha, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

ein normiertes Orthogonalsystem in $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Folglich ist mit diesen φ

$$K(\alpha, \beta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(\alpha) \varphi_\nu(\beta)}{\lambda_\nu}$$

mit

$$\lambda_0 = -\frac{1}{\pi \ln 2}, \quad \lambda_\nu = \frac{-2\nu}{\pi \cdot 2} = \frac{-\nu}{\pi}.$$

Wir haben hier das Beispiel eines Kerns, der alle Bedingungen der SCHMIDTSchen Theorie erfüllt, aber nicht stetig ist und für den zwar die vorstehende Darstellung im allgemeinen gilt (nicht für $\alpha = \beta$), die Reihe aber nicht gleichmäßig konvergiert.

Um nun unsere Aufgabe zu lösen, haben wir von dem gegebenen $G(\alpha)$ die FOURIER-Koeffizienten

$$b_\nu = \int_0^\pi G(\alpha) \varphi_\nu(\alpha) d\alpha \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

¹ Siehe KNOPP: Theorie und Anwendungen unendlicher Reihen, 2. Aufl., S. 328, Formel 214. Berlin: Julius Springer 1924.

zu berechnen, d. h.

$$b_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} G(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{+1} g(x) \frac{dx}{+\sqrt{1-x^2}}$$

(es ist $d\alpha = \frac{dx}{\sin \alpha}$, $\sin \alpha \geq 0$),

$$b_\nu = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} G(\alpha) \cos \nu \alpha d\alpha \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Diese Integrale müssen also existieren, sie müssen sogar für große ν so klein werden, daß

$$\sum \lambda_\nu^2 b_\nu^2 = \frac{1}{\pi^2 (\ln 2)^2} b_0^2 + \frac{1}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \nu^2 b_\nu^2$$

konvergiert.

Dann gilt

$$F(\beta) = \sin \beta f(z) \sim \sum \lambda_\nu b_\nu \varphi_\nu(z)$$

oder

$$\sin \beta f(z) \sim -\frac{1}{\pi \ln 2} \frac{b_0}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \nu b_\nu \cos \nu \beta.$$

Da $\sin \beta = \sqrt{1-z^2}$, kann $f(z)$ an den Grenzen unendlich ausfallen.

Ebenso wie die Gesamtheit der $\sin \nu x$ bilden auch 1 und die $\cos \nu x$ für das Intervall $0 \leq x \leq \pi$ ein abgeschlossenes System. Wären nämlich für ein integrables $f(x)$

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{\pi} f(x) \cos \nu x dx = 0,$$

so setze man $\int_0^x f(x) dx = g(x)$, so daß $g(0) = 0$, $g(\pi) = 0$. Partielle Integration ergibt aber

$$\int_0^{\pi} f(x) \cos \nu x dx = -\nu \int_0^{\pi} g(x) \sin \nu x dx = 0.$$

Da die $\sin \nu x$ ein abgeschlossenes System bilden, ist $g(x) \equiv 0$, also auch $f(x) \equiv 0$.

Anhang zu 1:

Wie erkennt man lineare Abhängigkeit? Die GRAMSche Determinante.

Für die Theorie der Funktionensysteme und damit auch der Integralgleichungen ist es wichtig, die lineare Abhängigkeit einer Anzahl von Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ festzustellen. Diese φ_ν brauchen nicht orthogonal zu sein (sie sind es auch gar nicht, falls sie abhängig sind).

Es handelt sich also um die Frage, ob es Konstanten k_ν gibt, die nicht sämtlich null sind, so daß für alle x die Beziehung

$$(13) \quad \sum_1^n k_\nu \cdot \varphi_\nu(x) = 0$$

gilt. Sind die Funktionen φ_ν beliebig oft differenzierbar, so folgt durch Differenzieren

$$\sum k_\nu \cdot \varphi_\nu^{(\mu)}(x) = 0.$$

Schreibt man diese Gleichungen für $\mu = 0$ [das ist (13)], ferner für $\mu = 1, 2, \dots, n-1$ auf, so hat man n homogene und lineare Gleichungen für die k_ν , die nur die triviale Lösung $k_\nu = 0$ hätten, wenn nicht die sogenannte *WRONSKISCHE DETERMINANTE*

$$(14) \quad \|\varphi_\nu^{(\mu)}(x)\| = 0 \quad \begin{array}{l} \nu = 1, \dots, n \\ \mu = 0, 1, \dots, n-1 \end{array}$$

wäre.

(14) ist also eine notwendige Bedingung für die Abhängigkeit der φ_ν ; man beweist in der Lehre von den Differentialgleichungen, daß sie auch hinreichend ist.

Für unsere Zwecke ist ein anderes Kriterium besser und handlicher, schon weil es nicht die Differenzierbarkeit der φ_ν voraussetzt. Sicher hat doch

$$(15) \quad \int_0^l \left(\sum_1^n \varphi_\nu \cdot k_\nu \right)^2 \cdot dx \equiv \sum_{\nu, \mu=1}^n a_{\nu\mu} k_\nu k_\mu \equiv f(k_1, \dots, k_n)$$

mit

$$a_{\nu\mu} = \int_0^l \varphi_\nu \cdot \varphi_\mu \cdot dx$$

als Funktion der k_ν aufgefaßt das Minimum null. Sind die Funktionen φ_ν unabhängig, so erreicht $f(\dots k_\nu \dots)$ dieses Minimum nur für $k_\nu = 0$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$); andernfalls gilt $f = 0$ auch für andere Werte k_ν , nämlich für diejenigen, für die

$$\sum k_\nu \cdot \varphi_\nu = 0$$

ist.

Die notwendige Bedingung für die k_ν , die das Minimum von $\sum_{\nu, \mu} a_{\nu\mu} k_\nu k_\mu$ liefern, ist aber

$$(16) \quad \frac{\partial}{\partial k_\nu} \sum_{\nu, \mu} a_{\nu\mu} k_\nu k_\mu \equiv 2 \cdot \sum_{\mu=1}^n a_{\nu\mu} \cdot k_\mu = 0.$$

Wenn nun die *Determinante von Gram*

$$(17) \quad \|a_{\nu\mu}\|$$

nicht verschwindet, hat dieses Gleichungssystem (16) nur die triviale Lösung $k_\mu = 0$ ($\mu = 1, \dots, n$). Ist die Determinante aber null, so hat (16) auch andere Lösungen k_μ . Für solche k_μ ist die Form $\sum_{\nu, \mu} a_{\nu\mu} k_\nu k_\mu$ stationär.

Sie kann aber dann nur null sein. Denn hätte sie einen Wert $f \neq 0$, so wäre bei Abänderung aller k_ν um $k_\nu \cdot \delta\tau$ ($k'_\nu = k_\nu \cdot (1 + \delta\tau)$)

$$f(k'_1, \dots, k'_n) = f \cdot (1 + \delta\tau)^2 = f + 2f \cdot \delta\tau + f \cdot \delta\tau^2,$$

die Form $\sum a_{\nu\mu} k_\nu k_\mu$ wäre also für dieses System k_ν nicht stationär entgegen der Voraussetzung.

Daraus sieht man, daß das Verschwinden der GRAMSchen Determinante

$$(18) \quad \| a_{\nu\mu} \| = 0$$

mit

$$a_{\nu\mu} = \int_0^l \varphi_\nu(x) \cdot \varphi_\mu(x) \cdot dx$$

hinreichende und notwendige Bedingung für die lineare Abhängigkeit der $\varphi_\nu(x)$ ist. Denn verschwindet (18) nicht, so erreicht die in Rede stehende quadratische Form $\sum a_{\nu\mu} k_\nu k_\mu$ ihr Minimum null, wie wir oben sahen, nur für $k_\nu = 0$: es besteht also nach (15) keine Abhängigkeit der φ_ν . Verschwindet aber (18), so hat die Form auch für gewisse andere Werte k_ν einen stationären Wert: dieser kann aber nach dem obigen nur null sein. Dann sind also nach (15) die φ_ν abhängig.

2. Ausgeartete unsymmetrische Integralgleichungen zweiter Art.

Wir nehmen an, daß der im allgemeinen unsymmetrische Kern eine Darstellung durch eine endliche Summe gestattet („ausgearteter Kern“):

$$(1) \quad K(x, z) = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu(x) \cdot \beta_\nu(z);$$

$\alpha_\nu(x)$, $\beta_\nu(z)$ seien stetig. Man kann die α_ν als unabhängig voraussetzen.

In der Praxis wird man damit schon in vielen Fällen auskommen, da man nach WEIERSTRASS jede stetige Funktion durch Summen

$$\sum_1^n C_\nu \cdot \alpha_\nu(x)$$

von hinreichend vielen ebenfalls stetigen Funktionen $\alpha_\nu(x)$ mit beliebiger Genauigkeit annähern kann [in unserem Falle wäre $C_\nu = \beta_\nu(z)$]. Man kann z. B. als $\alpha_\nu(x)$ die Funktionen $\sin \frac{\nu\pi x}{l}$ unter Hinzufügung der 1 und von x im Intervall $0 \leq x \leq l$ nehmen. (Man zieht von der gegebenen Funktion erst ein $\alpha x + \beta$ so ab, daß sie an den Enden null wird.)

Die Integralgleichung hat also die Form

$$(2) \quad \begin{cases} y(x) = f(x) + \lambda \cdot \sum_1^n \int_0^l \alpha_\nu(x) \cdot \beta_\nu(z) \cdot y(z) \cdot dz \\ \quad = f(x) + \lambda \cdot \sum C_\nu \cdot \alpha_\nu(x) \end{cases}$$

mit

$$(3) \quad C_\mu = \int_0^l \beta_\mu(z) \cdot y(z) \cdot dz.$$

Setzt man y aus (2) in (3) ein, erhält man

$$(4) \quad C_\mu = \int_0^l \beta_\mu(z) f(z) dz + \lambda \sum_0^l C_\nu \cdot \int_0^l \alpha_\nu(z) \cdot \beta_\mu(z) \cdot dz.$$

Mit den Abkürzungen

$$(5) \quad \begin{cases} b_\mu = \int_0^l \beta_\mu(z) \cdot f(z) \cdot dz, \\ a_{\nu\mu} = \int_0^l \alpha_\nu(z) \cdot \beta_\mu(z) \cdot dz \end{cases}$$

wird weiter

$$(6) \quad C_\mu = b_\mu + \lambda \sum_{\nu=1}^n C_\nu \cdot a_{\nu\mu}, \quad \mu = 1, 2, \dots, n.$$

Da die b_ν und $a_{\nu\mu}$ als bekannt gelten dürfen, sind dies n lineare Gleichungen für die C_ν . Mit Hilfe des KRONECKERSCHEN Symbols

$$(7) \quad \delta_{\nu\mu} = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq \mu \\ 1 & \text{für } \nu = \mu \end{cases}$$

kann man das Gleichungssystem auch schreiben

$$(8) \quad \sum_{\nu=1}^n C_\nu (\delta_{\nu\mu} - \lambda \cdot a_{\nu\mu}) = b_\mu \quad \mu = 1, 2, \dots, n.$$

Hat man hieraus die C_ν bestimmt, so löst

$$(9) \quad y(x) = f(x) + \lambda \cdot \sum_1^n C_\nu \cdot \alpha_\nu(x)$$

die Integralgleichung, denn multipliziert man mit $\beta_\mu(x)$ und integriert, so erhält man wieder (6).

Es kommt also auf die Auflösung des Gleichungssystems (8) an. Man weiß aus der Algebra, daß hierbei die Determinante

$$(10) \quad \left\{ \Delta(\lambda) = \|\delta_{\nu\mu} - \lambda \cdot a_{\nu\mu}\| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{21} & \dots & -\lambda a_{n1} \\ -\lambda a_{12} & 1 - \lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda a_{1n} & -\lambda a_{2n} & \dots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} \right.$$

ausschlaggebend ist.

Wir beschäftigen uns zuerst mit dem Regelfall $\Delta(\lambda) \neq 0$. Nach den Sätzen der Algebra kann man dann die Gleichungen (8) nach den C_ν auflösen, und zwar erhält man diese in der Form

$$(11) \quad C_\nu = \frac{1}{\Delta} \sum_{\mu=1}^{1\dots n} b_\mu \cdot \Delta_{\nu\mu}.$$

Hierin bedeutet $\Delta_{\nu\mu}$ diejenige Unterdeterminante von Δ , die entsteht, wenn man in Δ die ν -te Spalte und die μ -te Zeile streicht und das Zeichen $(-1)^{\nu+\mu}$ zusetzt.

Folglich ist nach (9)

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} y(x) &= f(x) + \frac{\lambda}{\Delta} \sum_{\nu,\mu}^{1\dots n} \alpha_\nu(x) \cdot b_\mu \cdot \Delta_{\nu\mu} \\ &= f(x) + \frac{\lambda}{\Delta} \int_0^l \sum_{\nu,\mu} \alpha_\nu(x) \cdot \beta_\mu(z) \cdot \Delta_{\nu\mu} \cdot f(z) \cdot dz, \end{aligned} \right.$$

wenn wir noch b_μ aus (5) einsetzen. In (12) tritt $y(x)$ in der Form auf, in der wir es mit Hilfe des lösenden Kerns Γ in (I. 4. 24) geschrieben hatten:

$$y(x) = f(x) + \int_0^l \Gamma(\lambda; x, z) \cdot f(z) \cdot dz.$$

Man hat also

$$(13) \quad \Gamma(\lambda; x, z) = \frac{\lambda}{\Delta} \sum_{\nu,\mu}^{1\dots n} \alpha_\nu(x) \cdot \beta_\mu(z) \cdot \Delta_{\nu\mu}$$

zu setzen. Γ erscheint so als gebrochene Funktion von λ ; der Nenner Δ ist in λ höchstens vom Grade n , wie man aus (10) sieht, der Zähler $\sum \alpha_\nu \cdot \beta_\mu \cdot \Delta_{\nu\mu}$ ist (wegen $\Delta_{\nu\mu}$) höchstens vom Grade $n-1$ in λ .

Im Ausnahmefall $\Delta(\lambda) = 0$ ist das Gleichungssystem (8) im allgemeinen widerspruchsvoll. Es hat nur dann eine Lösung, wenn $f(x)$ so beschaffen ist, daß in (12)

$$\int \sum \alpha_\nu(x) \cdot \beta_\mu(z) \cdot \Delta_{\nu\mu} \cdot f(z) \cdot dz$$

für alle x so stark null wird, daß der Rang des Gleichungssystems (8) den Rang von Δ nicht übersteigt. Insbesondere hat dann die homogene Gleichung ($f(x) \equiv 0$, d. h. $b_\mu = 0$) stets nichttriviale Lösungen, und zwar so viel unabhängige, wie sich der Rang der Matrix von Δ erniedrigt. Obige Bedingung ist für unabhängige α_ν mit $\sum_\mu b_\mu \Delta_{\nu\mu} = 0$ identisch.

Im Ausnahmefall ist also λ ein Eigenwert: *Eigenwerte sind die Nullstellen von Δ , also die Pole von Γ .* Wir treffen hier also wieder den Hauptsatz VIII von I. 4e an.

Vertauscht man

$$K(x, z) = \sum \alpha_\nu(x) \cdot \beta_\mu(z)$$

mit

$$K(z, x) = \sum \beta_\mu(x) \cdot \alpha_\nu(z),$$

d. h. setzt man

$$K'(x, z) \equiv \sum \alpha_\nu(z) \cdot \beta_\mu(x),$$

so geht (2) nach I. 4c in die „umgestellte“ Integralgleichung

$$y(x) = \lambda \int_0^l K(z, x) y(z) \cdot dz = \lambda \int_0^l K'(x, z) \cdot y(z) \cdot dz$$

über. Es vertauschen sich dabei die α_ν mit den β_μ , und $a_{\nu\mu}$ geht in $a_{\mu\nu}$ über. In Δ vertauschen sich also die Zeilen mit den Spalten, wodurch aber Δ ungeändert bleibt. Da aber die Nullstellen von Δ die Eigenwerte der Integralgleichung sind, heißt dies, daß die umgestellte Integralgleichung dieselben Eigenwerte hat wie die ursprüngliche.

Im symmetrischen Fall

$$K(x, z) \equiv K(z, x)$$

fällt die Integralgleichung mit der umgestellten zusammen; es muß also

$$a_{\nu\mu} = a_{\mu\nu}$$

sein: die Matrix $((a_{\nu\mu}))$ ist symmetrisch. Dann sind aber die Wurzeln λ der Gleichung

$$\Delta(\lambda) = 0$$

reell, denn diese ist für λ die sogenannte „Säkulargleichung“, die aus der Theorie der Schwingungen bekannt ist (man findet den Beweis hierfür in jedem Lehrbuch der Algebra, auch in vielen Lehrbüchern der Mechanik). Daß der symmetrische Kern stets reelle Eigenwerte hat, wissen wir natürlich nach Satz 13 (I. 6b) auch aus der allgemeinen Theorie der symmetrischen Kerne.

Es kann aber auch vorkommen, daß $\Delta(\lambda)$ konstant ist:

$$\Delta(\lambda) = 1$$

(für $\lambda = 0$ ist Δ stets gleich 1). In diesem Fall hat also $\Delta(\lambda) = 0$ gar keine Wurzeln. Man kann sich einen derartigen Fall leicht konstruieren: man braucht nur alle $\alpha_\nu(x)$ zu allen $\beta_\mu(z)$ orthogonal zu nehmen, was z. B. bei dem Kern

$$K(x, z) = \sin \frac{\pi x}{l} \cdot \sin \frac{2\pi z}{l}$$

im Intervall $0 \dots l$ der Fall ist. Denn dann sind alle $a_{\nu\mu}$ gleich null nach (5), und $\Delta(\lambda)$ wird konstant.

Es kann also bei unsymmetrischem Kern durchaus eintreten, daß es gar keine Eigenwerte gibt; wir haben damit eine Bestätigung für diese schon in I. 2d mitgeteilte Tatsache gefunden.

3. Die FREDHOLMSche Theorie.

Wir sahen im vorigen Abschnitt bei dem ausgearteten Kern, daß der lösende Kern Γ die Form hatte

$$(1) \quad \Gamma(\lambda; x, z) = \frac{\lambda}{\Delta} \sum_{\nu, \mu} \alpha_\nu(x) \cdot \beta_\mu(z) \cdot \Delta_{\nu\mu} \equiv \lambda \frac{D(\lambda; x, z)}{\Delta}.$$

Es gilt also, wo es sich um endliche Summen handelt, nach (II. 2. 5)

$$(2) \quad \begin{cases} \int_0^l D(\lambda; x, x) dx = \sum_{\nu, \mu} \Delta_{\nu\mu} \cdot \int \alpha_\nu(x) \cdot \beta_\mu(x) \cdot dx \\ = \sum \Delta_{\nu\mu} \cdot a_{\nu\mu}. \end{cases}$$

Hieraus sieht man aber, daß

$$(3) \quad \int_0^l D(\lambda; x, x) \cdot dx = -\frac{d\Delta}{d\lambda}$$

ist. Denn bildet man $d\Delta/d\lambda$, so hat man dies so zu tun, daß man nach jedem Vorkommen von λ besonders differenziert und die Ergebnisse addiert. Die Ableitung einer Determinante nach dem Element der ν -ten Zeile und μ -ten Spalte ist die Unterdeterminante $\Delta_{\nu\mu}$; dann hat man noch dies Element nach der Kettenregel nach λ zu differenzieren: das gibt $-a_{\nu\mu}$, da λ in dem Element der ν -ten Zeile und μ -ten Spalte mit $-a_{\nu\mu}$ multipliziert ist. Summiert man die Ergebnisse der einzelnen Differentiationen, so erhält man

$$-\sum \Delta_{\nu\mu} \cdot a_{\nu\mu},$$

worin über alle ν und μ summiert wird: das ist aber gerade (2).

Diese für ausgeartete Kerne gewonnene Beziehung (3) zwischen dem Zähler $D(\lambda; x, z)$ und dem Nenner Δ des lösenden Kerns ist aber von n und der Gestaltung des Kernes ganz unabhängig. Wir vermuten daher, daß für alle Kerne der lösende Kern Γ die Form

$$(4) \quad \Gamma(\lambda; x, z) = \lambda \cdot \frac{D(\lambda; x, z)}{D(\lambda)}$$

hat, und daß weiter stets

$$(5) \quad \int_0^l D(\lambda; x, x) \cdot dx = -\frac{dD(\lambda)}{d\lambda}$$

gilt. Wir werden zwar nicht (wie beim ausgearteten Kern) $D(\lambda; x, z)$ und $D(\lambda)$ als ganze rationale Funktionen von λ annehmen dürfen, aber wir vermuten, daß $D(\lambda; x, z)$ und $D(\lambda)$ ganze Funktionen sind. Wir vermuten also, daß $D(\lambda; x, z)$ und $D(\lambda)$ eine Darstellung durch beständig (d. h. in der ganzen λ -Ebene) konvergente Potenzreihen zulassen:

$$(6a) \quad D(\lambda; x, z) = \sum_0^{\infty} A_n(x, z) \cdot \lambda^n,$$

$$(6b) \quad D(\lambda) = \sum_0^{\infty} a_n \cdot \lambda^n.$$

Bei dem ausgearteten Kern war $\Delta(0) = 1$; man kann also sicherlich, wenn die anderen Vermutungen zutreffen, auch

$$(7) \quad D(0) = 1,$$

d. h.

$$(8) \quad a_0 = 1$$

annehmen, denn eine multiplikative Konstante in D ist belanglos und $\lambda = 0$ sicher kein Eigenwert, also $D(0) \neq 0$. (5) wird daher nach (6a) und (6b):

$$-\sum_1^{\infty} n \cdot a_n \cdot \lambda^{n-1} = \sum_1^{\infty} \lambda^{n-1} \cdot \int_0^l A_{n-1}(x, x) \cdot dx.$$

Koeffizientenvergleich liefert hieraus

$$(9) \quad n \cdot a_n = -\int_0^l A_{n-1}(x, x) \cdot dx \quad n > 0,$$

wozu noch (8) tritt.

Für kleine λ ist die NEUMANNSCHE Reihe nach I. 4a konvergent; es gilt also nach (I. 4. 17) für kleine λ

$$(10) \quad \Gamma(\lambda; x, z) = \lambda \sum_0^{\infty} \lambda^m \cdot K_{m+1}(x, z).$$

Wir gehen jetzt mit unserem Ansatz (4), (5), (6) in diese Reihe für Γ hinein, so daß wir nach Multiplikation mit $D(\lambda)$ erhalten

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} \lambda^n \cdot A_n(x, z) &= \left(\sum_0^{\infty} \lambda^m \cdot K_{m+1} \right) \cdot \left(\sum_0^{\infty} \lambda^s \cdot a_s \right) \\ &= \sum_{m+s=0}^{\infty} \lambda^{m+s} \cdot \left(\sum K_{m+1} \cdot a_s \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \cdot \left(\sum_{s=0}^n a_s \cdot K_{n+1-s} \right). \end{aligned}$$

Hier ergibt der Koeffizientenvergleich

$$(11) \quad A_n(x, z) = \sum_{s=0}^n a_s \cdot K_{n+1-s} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

also nach (8)

$$(12) \quad A_0(x, z) = a_0 \cdot K_1 = K(x, z)$$

$$(13) \quad \begin{cases} A_1(x, z) = a_0 \cdot K_2 + a_1 \cdot K_1 \\ \quad \quad \quad = K_2(x, z) + a_1 \cdot K(x, z). \end{cases}$$

Es ist aber nach (9)

$$(14) \quad a_1 = -\int_0^l A_0(x, x) dx = -\int_0^l K(x, x) \cdot dx,$$

wenn wir das soeben gefundene Resultat (12) benutzen. Daher wird weiter nach (13) und (14)

$$(15) \quad \begin{cases} A_1(x, z) = K_2(x, z) - K(x, z) \cdot \int_0^l K(u, u) \cdot du \\ \quad \quad \quad = \int_0^l [K(x, u) \cdot K(u, z) - K(x, z) \cdot K(u, u)] \cdot du \\ \quad \quad \quad = -\int_0^l \begin{vmatrix} K(x, z) & K(x, u) \\ K(u, z) & K(u, u) \end{vmatrix} \cdot du, \end{cases}$$

wobei wir die Definition des iterierten Kernes beachten müssen.

Indem man ähnlich A_2, A_3, \dots und a_2, a_3, \dots der Reihe nach berechnet (s. die genannten Lehrbücher über Integralgleichungen), erhält man schließlich durch Schluß von n auf $n+1$ die FREDHOLMSchen Formeln

$$(16) \quad A_n(x, z) = \frac{(-1)^n}{n!} \underbrace{\int_0^l \int_0^l \dots \int_0^l}_{n \text{ mal}} \begin{vmatrix} K(x, z) & K(x, u_1) & \dots & K(x, u_n) \\ K(u_1, z) & K(u_1, u_1) & \dots & K(u_1, u_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(u_n, z) & K(u_n, u_1) & \dots & K(u_n, u_n) \end{vmatrix} du_1 \dots du_n.$$

(Die hier vorkommende Determinante heißt FREDHOLMSche Determinante.) Es treten also im Integral n Integrationsvariable auf.

Unser Ansatz (4), (5), (6) führte also zunächst zur eindeutigen Berechnung der Koeffizienten A_n von $D(\lambda; x, z)$ und damit nach (9) auch zur Berechnung der a_n von $D(\lambda)$.

Es muß nun noch nachgewiesen werden, daß die Reihen (6a) und (6b), die auf diese Art bestimmt worden sind, auch wirklich beständig konvergieren. Hierzu schätzt man zuerst mit Hilfe des Determinantensatzes von HADAMARD (s. u.!) die A_n ab:

$$(17) \quad |A_n(x, z)| \leq \frac{1}{n!} k^{n+1} (\sqrt{n+1})^{n+1} \cdot l^n.$$

Um diese Abschätzung zu erhalten, muß man die Kerne K nicht nur als integrabel, sondern auch als beschränkt annehmen

$$(18) \quad |K(x, z)| \leq k.$$

(Die Voraussetzungen für derartige „FREDHOLMSchen“ Kerne sind also, von der Symmetrie abgesehen, enger als in der E. SCHMIDTSchen Theorie, wo nur quadratische Integrabilität und mittlere Stetigkeit gefordert wurde. Doch siehe über „Glätten“ der Kerne II. 13!)

Der HADAMARDSche Determinantensatz besagt nichts anderes, als daß ein Spat mit den Kantenlängen l_1, l_2, \dots, l_n höchstens den Inhalt $l_1 \cdot l_2 \cdot \dots \cdot l_n$ haben kann. Sieht man diesen für ein, zwei, drei Dimensionen selbstverständlichen Satz auch für n Dimensionen als richtig an, und nimmt man weiter als bekannt an, daß der Inhalt eines Spates aus den n Vektoren

$$\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{matrix}$$

(in den Zeilen stehen die n Koordinaten des 1., 2., ..., n -ten Vektors) durch die Determinante

$$\Delta = \|\| b_{\nu\mu} \|\|$$

gegeben ist, so ist nach dem erwähnten Satz

$$|\Delta| \leq \prod_{\nu=1}^n l_\nu = \prod_{\nu=1}^n \sqrt{\sum_{\mu=1}^n b_{\nu\mu}^2}.$$

In unserem Falle sind nach (16) alle $|b_{\nu\mu}| = |K|$ kleiner als k , also ist

$$l_\nu \leq \sqrt{(n+1) \cdot k^2} = \sqrt{n+1} \cdot k,$$

und somit gilt für die Determinante in (16)

$$|\Delta| \leq \sqrt{n+1}^{n+1} \cdot k^{n+1}.$$

Die n Integrationen in (16) geben dann noch den Faktor l^n . Damit ist die Gültigkeit von (17) bewiesen.

Mit der Abschätzung (17) kann man jetzt die Konvergenz der Reihe $\sum A_n \cdot \lambda^n$ für alle λ nachweisen, denn unter Anwendung des bekannten Konvergenzkriteriums sieht man, daß für die majorante Reihe

$$\left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right|^2 = \left(\frac{k \cdot l}{n+1} \frac{\sqrt{n+2^{n+2}}}{\sqrt{n+1^{n+1}}} \right)^2 = \frac{k^2 l^2}{(n+1)^2} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} (n+2)$$

gegen null strebt für $n \rightarrow \infty$, also schließlich bestimmt kleiner als ein echter Bruch wird. Der Konvergenzradius ist also ∞ . Die Reihe für $D(\lambda; x, z)$ konvergiert mithin in der ganzen λ -Ebene, und nach (5) gilt dies auch für die Reihe von $D(\lambda)$.

Unser Ansatz (4), (5), (6) hat also durchaus zum Ziele geführt. Die Funktionen $D(\lambda; x, z)$ und $D(\lambda)$ erscheinen als eindeutig bestimmte ganze Funktionen; Γ ist daher, als Quotient zweier ganzer Funktionen, meromorph, d. h. im Endlichen überall vom Charakter einer rationalen Funktion: Γ hat als Singularitäten nur Pole (vgl. I. 6i), die sich im Endlichen nicht häufen. Denn die Pole von Γ sind die Nullstellen von $D(\lambda)$; nach einem elementaren Satze der Funktionentheorie kann aber eine ganze Funktion nur diskret liegende Nullstellen λ_ν haben und jede nur von endlicher Ordnung.

Damit ist der *Hauptsatz VII in I. 4e* bewiesen worden, wobei wir gleichzeitig eine Präzisierung der notwendigen Voraussetzungen über K erlangt haben.

Nun läßt sich leicht nachweisen, daß die homogene Gleichung

$$(19) \quad y(x) = \lambda \cdot \int_0^1 K(x, z) \cdot y(z) \cdot dz$$

in einem Pol λ_ν von Γ wenigstens eine nichttriviale Lösung (Eigenfunktion) besitzt: *das ist Hauptsatz VIII in I. 4e*. Beweis:

Ist λ_1 eine n -fache Nullstelle von $D(\lambda)$, also ein höchstens n -facher Pol von $\Gamma = \lambda \frac{D(\lambda; x, z)}{D(\lambda)}$, so besteht nach den Sätzen der Funktionentheorie in der Umgebung von λ_1 die LAURENT-Entwicklung

$$\frac{1}{\lambda} \Gamma = \frac{\chi_n(x, z)}{(\lambda - \lambda_1)^n} + \frac{\chi_{n-1}(x, z)}{(\lambda - \lambda_1)^{n-1}} + \dots + \frac{\chi_1(x, z)}{\lambda - \lambda_1} + R(\lambda; x, z),$$

wo R für $\lambda \rightarrow \lambda_1$ regulär bleibt. Wegen

$$\int_0^l D(\lambda; x, x) dx = -\frac{dD}{d\lambda}$$

gilt

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^l \Gamma(\lambda; x, x) dx = -\frac{d \log D}{d\lambda},$$

also

$$(20) \quad \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{(\lambda - \lambda_1)^\nu} \int_0^l \chi_\nu(x, x) dx + \int_0^l R(\lambda; x, x) dx = -\frac{d \log D}{d\lambda}.$$

Andererseits ist $D = (\lambda - \lambda_1)^n (b_0 + b_1(\lambda - \lambda_1) + \dots)$ mit $b_0 \neq 0$, also

$$(21) \quad \frac{d \log D}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda - \lambda_1} + \frac{b_1 + 2b_2(\lambda - \lambda_1) + \dots}{b_0 + b_1(\lambda - \lambda_1) + \dots} = \frac{n}{\lambda - \lambda_1} + \mathfrak{P}(\lambda - \lambda_1),$$

wo \mathfrak{P} das Zeichen für eine reguläre Potenzreihe ist.

Vergleich beider Darstellungen gibt

$$(22) \quad \int_0^l \chi_\nu(x, x) dx = 0 \quad \text{für } \nu = 2, 3, \dots, n,$$

aber

$$(23) \quad \int_0^l \chi_1(x, x) dx = -n \neq 0.$$

Daraus folgt, daß χ_1 sicher nicht identisch null ist.

Aus dem für $\lambda \neq \lambda_1$, aber hinreichend kleine $\lambda - \lambda_1$ gültigen

$$y(x) = f(x) + \int_0^l \Gamma(\lambda; x, z) f(z) dz$$

folgt

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x) + \sum_1^n \frac{\lambda}{(\lambda - \lambda_1)^\nu} \int_0^l \chi_\nu(x, z) f(z) dz + \lambda \int_0^l R(\lambda; x, z) f(z) dz \\ &= f(x) + \sum_1^n \frac{\lambda}{(\lambda - \lambda_1)^\nu} p_\nu(x) + \lambda S(\lambda; x). \end{aligned}$$

Dabei ist

$$p_\nu(x) = \int_0^l \chi_\nu(x, z) f(z) dz; \quad S(\lambda; x) = \int_0^l R(\lambda; x, z) f(z) dz.$$

Setzt man in die Integralgleichung ein, so erhält man nach Fortheben von $f(x)$ und Weglassen eines Faktors λ

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{(\lambda - \lambda_1)^\nu} p_\nu(x) + S(\lambda; x) &= \sum \frac{\lambda}{(\lambda - \lambda_1)^\nu} \int_0^l K(x, z) p_\nu(z) dz + \\ &+ \lambda \int_0^l K(x, z) S(\lambda; x) dz + \int_0^l K(x, z) f(z) dz. \end{aligned}$$

Wenn man noch rechts in der ersten Summe überall $\lambda = \lambda_1 + (\lambda - \lambda_1)$ setzt, steht beiderseits eine LAURENT-Reihe. Der Vergleich ergibt

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \lambda_1 \int_0^l K(x, z) p_n(z) dz \\ p_{n-1}(x) &= \int_0^l K(x, z) p_n(z) dz + \lambda_1 \int_0^l K(x, z) p_{n-1}(z) dz \\ p_{n-2}(x) &= \int_0^l K(x, z) p_{n-1}(z) dz + \lambda_1 \int_0^l K(x, z) p_{n-2}(z) dz \\ \text{usw.} \end{aligned}$$

Daraus sieht man: Wenn $p_n(x) \equiv 0$, ist es eine Eigenfunktion zu λ_1 ; ist es wohl identisch null, so ist p_{n-1} eine Eigenfunktion, falls dies nicht identisch null ist, usw. *Ein* $p_\nu(x)$ kann nicht identisch null sein, denn sonst müßte, da $f(x)$ beliebig ist, auch $\chi_\nu(x, z) \equiv 0$ für alle ν sein, aber wir sahen oben (23), daß χ_1 nicht identisch null ist. Damit ist der Beweis erbracht.

Es gilt auch der in II. 2 zunächst für ausgeartete Kerne ausgesprochene Satz allgemein: $D(\lambda)$ ist symmetrisch, d. h. D ändert sich nicht, wenn man in $K(x, z)$ x mit z vertauscht, wenn man also zu der umgestellten Integralgleichung übergeht. Man erkennt es an der Symmetrie der FREDHOLMSchen Determinanten. Da die Nullstellen von $D(\lambda)$ die Pole von Γ , also nach dem soeben Gesagten die Eigenwerte der Integralgleichung sind, folgt, daß die Integralgleichung dieselben Eigenwerte hat wie ihre umgestellte Gleichung. Hat also die homogene Gleichung (19) nichttriviale Lösungen, hat auch die umgestellte homogene Gleichung

$$y(x) = \lambda \int_0^l K(z, x) \cdot y(z) \cdot dz$$

nichttriviale Lösungen: *das ist der Hauptsatz V von I. 4e.*

In $\lambda \neq \lambda_\nu$ ist $\Gamma(\lambda; x, z)$ nach (4) vollkommen regulär. Nach (I. 4. 21) gibt dann

$$y(x) = f(x) + \int_0^l \Gamma(\lambda; x, z) \cdot f(z) \cdot dz$$

die Lösung der inhomogenen Integralgleichung. Damit ist der Hauptsatz II bewiesen.

Die FREDHOLMSche Theorie erlaubt also, wie hier gezeigt wurde, alle in I. 4e aufgezählten Sätze zu beweisen, die bisher lediglich für den Spezialfall des symmetrischen Kerns in I. 6i als gültig nachgewiesen wurden. Die FREDHOLMSche Theorie gilt, wie noch einmal betont sei, allgemein für nichtsymmetrische und symmetrische Kerne; zum praktischen Rechnen allerdings ist das elegante Resultat von FREDHOLM bisher noch kaum benutzt worden.

4. Das Verfahren von ENSKOG.

Das Verfahren von ENSKOG¹ dient ebenfalls zur Auflösung linearer Integralgleichungen zweiter Art mit nichtsymmetrischem Kern.

Es werde

$$(1) \quad J(y) \equiv y(x) - \lambda \int_0^l K(x, z) \cdot y(z) \cdot dz$$

und

$$(2) \quad T(y) \equiv y(x) - \lambda \int_0^l K(z, x) \cdot y(z) \cdot dz$$

gesetzt; hierbei ist in der zweiten Gleichung der Kern umgestellt worden.

Man sieht nun leicht die Richtigkeit folgender Formel ein:

$$(3) \quad \int_0^l u(x) \cdot J(v) \cdot dx = \int_0^l v(x) \cdot T(u) \cdot dx;$$

sie hat Ähnlichkeit mit der GREENSchen Formel (I. 3. 73). Man braucht sie nur ausführlich hinzuschreiben, um ihre Richtigkeit einzusehen, auch war sie in (I. 4. 24) schon einmal vorgekommen [y statt u , φ statt v gesetzt]

$$\begin{aligned} \int y(x) [\varphi(x) - \lambda \int K(z, x) \cdot \varphi(z) \cdot dz] dx &= \\ &= \int \varphi(x) [y(x) - \lambda \int K(x, z) \cdot y(z) \cdot dz] dx. \end{aligned}$$

Soll nun

$$(4) \quad J(y) = f(x)$$

sein (das ist unsere zu lösende inhomogene Integralgleichung), so bekommt man für die gesuchte Funktion $y(x)$ aus (3) die Beziehung

$$(5) \quad \int_0^l y(x) \cdot T(u) \cdot dx = \int_0^l u(x) \cdot f(x) \cdot dx,$$

wenn man $v \equiv y$ setzt. Diese Gleichung muß für alle u gelten.

Wir nehmen nun für u alle Funktionen eines vollständigen Systems

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$$

Dann erhalten wir aus (5)

$$(6) \quad \int_0^l y(x) \cdot T(\psi_v) \cdot dx = \int_0^l \psi_v(x) \cdot f(x) \cdot dx \equiv a_v.$$

Jetzt orthogonalisieren und normieren wir die $T(\psi_v)$:

$$(7) \quad \begin{cases} v_1 = \alpha \cdot T(\psi_1) \\ v_2 = \beta \cdot T(\psi_1) + \gamma \cdot T(\psi_2) \\ v_3 = \delta \cdot T(\psi_1) + \varepsilon \cdot T(\psi_2) + \eta \cdot T(\psi_3) \\ \vdots \end{cases}$$

¹ ENSKOG: Math. Z. Bd. 24, 25, 31.

Diese Orthogonalisierung gelingt dann und nur dann, wenn die $T(\psi_\nu)$ voneinander linear unabhängig sind. Sind sie es nicht, gilt vielmehr mit konstanten k_ν eine Beziehung der Form

$$(8) \quad \sum_1^n k_\nu \cdot T(\psi_\nu) = 0,$$

so gilt auch die Beziehung, die wir erhalten, wenn wir (8) mit $y(x)$ multiplizieren und integrieren:

$$(9) \quad 0 = \int y(x) \sum k_\nu \cdot T(\psi_\nu) \cdot dx = \sum k_\nu \cdot a_\nu.$$

Somit muß bei abhängigen $T(\psi_\nu)$ notwendig

$$(10) \quad \sum_1^n k_\nu \cdot a_\nu = 0$$

gelten (vgl. das ähnliche Kriterium in II. 1). Gilt (8), aber nicht (10), so liegt in (6) ein Widerspruch vor: es gibt dann keine Lösung y von (4). Gilt dagegen (10) zugleich mit (8), so kann man die abhängigen $T(\psi_\nu)$ streichen; die zurückbleibenden T sind dann unabhängig und lassen sich also orthogonalisieren. Allerdings ist das System von Funktionen, das man so erhält, nicht mehr vollständig.

(8) stellt eine uns schon bekannte Bedingung dar. Um das zu erkennen, setzen wir

$$(11) \quad \chi(x) = \sum_1^n k_\nu \cdot \psi_\nu(x).$$

(8) besagt dann wegen der Linearität von $T(y)$

$$0 = \sum k_\nu \cdot T(\psi_\nu) = T\left(\sum k_\nu \psi_\nu\right) = T(\chi),$$

d. h. es gibt nach (2) eine Eigenfunktion $\chi(x)$ der umgestellten homogenen Gleichung. Wir wissen aber schon nach Satz 7 (I. 4c), daß dann im allgemeinen (4) keine Lösung hat.

Die notwendige Bedingung (10) schreibt sich jetzt

$$0 = \sum k_\nu \cdot a_\nu = \int f(x) \left(\sum k_\nu \cdot \psi_\nu\right) dx = \int f(x) \cdot \chi(x) \cdot dx.$$

Soll also kein Widerspruch auftreten, muß $f(x)$ zu diesen $\chi(x)$ orthogonal sein: nur in diesem Fall kann es noch Lösungen der inhomogenen Gleichung geben. Auch das ist uns schon aus Satz 7a bekannt.

Wir nehmen für das folgende an, daß diese Widersprüche behoben seien oder überhaupt nicht vorhanden sind. Wir bekommen dann für $y(x)$ aus (7) die Gleichungen

$$(12) \quad \begin{cases} \int y \cdot v_1 \cdot dx = \alpha \cdot a_1 = C_1 \\ \int y \cdot v_2 \cdot dx = \beta \cdot a_1 + \gamma \cdot a_2 = C_2 \\ \vdots \end{cases}$$

hierin sind die C_ν als bekannt zu betrachten: sie stellen die FOURIER-Koeffizienten von $y(x)$ nach dem Orthogonalsystem der v_ν dar. Wenn dann noch

$$\sum C_\nu^2$$

konvergiert, ist die Existenz von $y(x)$ als quadratisch integrierbarer Funktion nach dem FISCHER-RIESS'Schen Satze gesichert.

Waren keine Eigenfunktionen χ der umgestellten Gleichung vorhanden, so wird das System der v_ν zugleich mit dem System der ψ_ν vollständig: $y(x)$ ist dann sogar wesentlich eindeutig bestimmt (vgl. II. 4). Gibt es aber ein derartiges χ , und ist $f(x)$ zu diesem χ orthogonal, dann ist das System der v_ν nicht mehr vollständig, aber man kann es zu einem solchen ergänzen. Man kann dann die fehlenden FOURIER-Koeffizienten C_ν willkürlich wählen. Wenn es also bei Vorhandensein von Lösungen χ überhaupt ein $y(x)$ gibt, gibt es sogar unendlich viele $y(x)$ (man vergleiche Satz 23 in I. 6i).

Es sei noch erwähnt, daß es ENSKOG von hier aus gelang, die ganze Theorie der Integralgleichungen neu aufzubauen.

5. E. SCHMIDT'S Theorie der unsymmetrischen Kerne¹.

Mit einem K , das wieder als quadratisch integrierbar in beiden Variablen und von mittlerer Stetigkeit, aber nicht als symmetrisch vorausgesetzt sei, bilden wir

$$(1) \quad H(x, z) \equiv \int_0^l K(x, u) \cdot K(z, u) \cdot du.$$

Dieses H ist symmetrisch und positiv definit oder semidefinit, denn für irgendeine quadratisch integrierbare Funktion $f(x)$ gilt

$$\begin{aligned} \iint H(x, z) \cdot f(x) \cdot f(z) \cdot dx \cdot dz &= \iiint K(x, u) \cdot K(z, u) \cdot f(x) \cdot f(z) \cdot dx \cdot du \cdot dz \\ &= \int \left[\int K(x, u) \cdot f(x) \cdot dx \right]^2 du \geq 0, \end{aligned}$$

womit K nach I. 6k als positiv definit oder semidefinit erwiesen ist.

H besitzt also Eigenwerte: diese sind reell und sogar positiv (nach I. 6k), sie sollen daher mit λ_ν^2 bezeichnet werden. H ist auch stetig, da es durch K quellenmäßig dargestellt wird. Wir können also den MERCER'Schen Satz (Satz 25 in I. 6k) benutzen:

$$(2) \quad H(x, z) = \sum \frac{1}{\lambda_\nu^2} \varphi_\nu(x) \cdot \varphi_\nu(z),$$

wo die φ_ν das normierte Orthogonalsystem der Eigenfunktionen von H darstellen. Die Reihe ist absolut und gleichmäßig konvergent.

Analog zu H können wir bilden

$$(3) \quad V(x, z) = \int_0^l K(u, x) \cdot K(u, z) \cdot du,$$

¹ Math. Ann. Bd. 63, Kap. III.

und alle soeben bewiesenen Sätze über H übertragen sich sofort auf V :

$$(4) \quad V(x, z) = \sum \frac{1}{\lambda_v^2} \psi_v(x) \cdot \psi_v(z).$$

Die ψ_v stellen das normierte Orthogonalsystem der Eigenfunktionen von V dar; die zugehörigen Eigenwerte seien mit λ_v^2 bezeichnet.

Wir behaupten nun, daß

$$(5) \quad \lambda_v = \lambda'_v$$

gilt, und daß

$$(6) \quad K(x, z) \sim \sum \frac{1}{\lambda_v} \varphi_v(x) \cdot \psi_v(z)$$

ist (bei geeigneter Auswahl der φ_v und ψ_v).

Um das zu zeigen, setzen wir

$$(7) \quad \begin{cases} \int_0^l \varphi_v(x) \cdot K(x, v) \cdot dx = \frac{1}{\lambda_v} \cdot \alpha_v(v) \\ \int_0^l \psi_v(z) \cdot K(u, z) \cdot dz = \frac{1}{\lambda'_v} \cdot \beta_v(u). \end{cases}$$

Dann bilden die α_v und die β_v für sich je ein normiertes Orthogonalsystem, denn es ist

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\lambda_v \cdot \lambda'_\mu} \int_0^l \alpha_v(v) \cdot \alpha_\mu(v) \cdot dv &= \int \int \int \varphi_v(x) \cdot \varphi_\mu(z) \cdot K(x, v) \cdot K(z, v) \cdot dx \cdot dz \cdot dv \\ &= \int \int \varphi_v(x) \cdot \varphi_\mu(z) \cdot \left(\sum_\sigma \frac{1}{\lambda_\sigma^2} \varphi_\sigma(x) \cdot \varphi_\sigma(z) \right) dx \cdot dz \\ &= \frac{1}{\lambda_v^2} \cdot \delta_{v\mu}. \end{aligned} \right.$$

Hieraus folgt die Behauptung; dabei ist (1) benutzt worden unter Beachtung der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe in (2). Ebenso verläuft natürlich der Beweis für die β_v :

$$(9) \quad \int_0^l \beta_v(u) \cdot \beta_\mu(u) \cdot du = \delta_{v\mu}.$$

Man kann nun die Definitionsformeln für die α_v und β_μ umkehren, d. h. (7) nach φ_v und ψ_v auflösen. Denn aus (7) folgt durch Multiplikation mit $K(z, v)$ und Integration über v :

$$\begin{aligned} \int \int \varphi_v(x) \cdot K(x, v) \cdot K(z, v) \cdot dx \cdot dv &\equiv \int \varphi_v(x) \cdot H(x, z) \cdot dx \\ &= \frac{1}{\lambda'_v} \int \alpha_v(v) \cdot K(z, v) \cdot dv, \end{aligned}$$

oder nach (2)

$$\int \varphi_v(x) \left(\sum_\mu \frac{1}{\lambda_\mu^2} \varphi_\mu(x) \cdot \varphi_\mu(z) \right) \cdot dx = \frac{1}{\lambda'_v} \int \alpha_v(v) \cdot K(z, v) \cdot dv,$$

also wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe

$$\frac{1}{\lambda_v^2} \varphi_v(z) = \frac{1}{\lambda_v} \int \alpha_v(v) \cdot K(z, v) \cdot dv,$$

und schließlich

$$(10a) \quad \frac{1}{\lambda_v} \varphi_v(z) = \int_0^l \alpha_v(v) \cdot K(z, v) \cdot dv.$$

Ebenso folgt natürlich

$$(10b) \quad \frac{1}{\lambda_v} \psi_v(z) = \int \beta_v(u) \cdot K(u, z) \cdot du.$$

Bevor wir nun im Beweis von (5) weiter gehen, sei folgender *Hilfssatz* eingeschaltet:

Es gibt ebenso viele unabhängige α_v wie φ_v zu einem λ_v (und entsprechend ebenso viele unabhängige β_μ wie ψ_μ zu einem λ'_μ).

Zum Beweis erinnern wir daran, daß nach (7), (10) zu jedem α_v (bzw. β_μ) ein φ_v (bzw. ψ_μ) gehört und umgekehrt. Wären nun gewisse α_v linear voneinander abhängig, so bestünde eine Relation

$$\sum_1^n C_v \cdot \alpha_v \equiv 0$$

mit konstanten Koeffizienten C_v , die nicht alle verschwinden. Dann folgte aber auch aus (10)

$$\sum_1^n \frac{C_v}{\lambda_v} \cdot \varphi_v = 0,$$

die zugeordneten φ_v wären also ebenfalls abhängig. Der gleiche Schluß gilt wegen (7) auch umgekehrt, und da alles für β_μ und ψ_μ analog gilt, ist der Hilfssatz bewiesen.

Nun behaupten wir weiter, daß die α_v im wesentlichen die ψ_v und die β_v im wesentlichen die φ_v sind.

Denn setzt man (10) in (7) ein, so bekommt man

$$\begin{aligned} \alpha_v(v) &= \lambda_v \iint K(x, v) \cdot \lambda_v \cdot \alpha_v(u) \cdot K(x, u) \cdot dx \cdot du \\ &= \lambda_v^2 \cdot \int \alpha_v(u) \cdot V(v, u) \cdot du \end{aligned}$$

nach (3). Beachten wir (4), so wird

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_v(v) &= \lambda_v^2 \cdot \int \alpha_v(u) \cdot \left(\sum \frac{1}{\lambda'_\mu} \cdot \psi_\mu(v) \cdot \psi_\mu(u) \right) du \\ &= \sum \frac{\lambda_v^2}{\lambda'_\mu} \cdot \psi_\mu(v) \cdot \int \alpha_v(u) \cdot \psi_\mu(u) \cdot du. \end{aligned} \right.$$

$\alpha_v(v)$ ist also nach den $\psi_\mu(v)$ in eine absolut und gleichmäßig konvergierende Reihe entwickelbar. Es gilt natürlich auch die allgemeine Formel für eine derartige Entwicklung

$$(12) \quad \alpha_v(v) = \sum \psi_\mu(v) \cdot \int \alpha_v(u) \cdot \psi_\mu(u) \cdot du,$$

wo die $\int \alpha_\nu \cdot \psi_\mu \cdot du$ die FOURIER-Koeffizienten von α_ν sind. Da eine solche Entwicklung notwendig eindeutig ist, folgt durch Koeffizientenvergleich von (11) und (12)

$$\left(1 - \frac{\lambda_\nu^2}{\lambda_\mu'^2}\right) \cdot \int_0^l \alpha_\nu(u) \cdot \psi_\mu(u) \cdot du = 0,$$

es ist also entweder

$$(13) \quad \lambda_\nu^2 = \lambda_\mu'^2,$$

oder

$$(14) \quad \int_0^l \alpha_\nu(u) \cdot \psi_\mu(u) \cdot du = 0.$$

Entsprechend liefert uns die Betrachtung der β_μ auch wieder

$$(15) \quad \lambda_\nu^2 = \lambda_\mu'^2,$$

oder

$$(16) \quad \int_0^l \beta_\mu(u) \cdot \varphi_\nu(u) \cdot du = 0.$$

Geht man mit diesen Resultaten (13), ..., (16) in (11) hinein, so erhält man

$$(17) \quad \alpha_\nu(v) = \sum'_\mu \psi_\mu(v) \cdot \int \alpha_\nu(u) \cdot \psi_\mu(u) \cdot du; \quad \beta_\mu(v) = \sum'_\nu \varphi_\nu(v) \cdot \int \beta_\mu(u) \cdot \varphi_\nu(u) \cdot du.$$

Hier ist die Summation (\sum') nur über diejenigen μ zu erstrecken, für die $\lambda_\mu'^2 = \lambda_\nu^2$ gilt, da für die anderen (14) [bzw. (16)] gilt. Die Summe ist daher endlich, denn da ν ein fester Index ist, kann es nur endlich viele λ_μ' geben, für die (13) gilt (sonst würde die Reihe $\sum 1/\lambda_\mu'^2$ im Widerspruch zu I. 6f nicht konvergieren).

Nun ist aber $\alpha_\nu(v) \not\equiv 0$ [denn sonst wäre nach (10a) auch ein $\varphi_\nu \equiv 0$, also keine Eigenfunktion, was ausgeschlossen ist], daher ist auch die Summe in (17) nicht identisch null: es muß also zu jedem λ_ν^2 mindestens ein gleiches $\lambda_\mu'^2$ geben. Die Betrachtung der β_μ liefert die Umkehrung: jedes $\lambda_\mu'^2$ kommt auch unter den λ_ν^2 vor. Das heißt aber, daß die λ_ν^2 mit den $\lambda_\mu'^2$ (von der Numerierung abgesehen) identisch sind; H und V haben also tatsächlich dieselben Eigenwerte.

Nach (17) sind die α_ν lineare Kombinationen derjenigen ψ_μ , die zu demselben $\lambda_\nu^2 = \lambda_\mu'^2$ gehören; die Zahl der α_ν ist also kleiner oder höchstens gleich der Zahl der ψ_μ . Nach dem Hilfssatz gibt es aber ebenso viele α_ν wie φ_ν zu einem λ_ν^2 : daher muß es weniger oder höchstens ebenso viele φ_ν als ψ_ν geben.

Geht man von β_μ aus, so kehrt sich die Betrachtung um, und man findet ähnlich, daß es weniger oder höchstens ebenso viele ψ_μ als φ_ν gibt.

Aus beiden Ergebnissen folgern wir dann, daß es genau so viele φ_ν wie ψ_μ gibt und daher auch (nach dem Hilfssatz) genau so viele α_ν und β_μ .

Sind die φ_ν [die Eigenfunktionen von $H(x, z)$ zu den Eigenwerten λ_ν^2] einmal ausgewählt, so sind nach (7) die α_ν bis auf das Vorzeichen von λ_ν eindeutig bestimmt. Man kann dieses Vorzeichen etwa als positiv festsetzen.

Wie wir sahen, sind die α_ν stets Linearkombinationen der ψ_μ [der Eigenfunktionen von $V(x, z)$]. Wir werden daher die ψ_μ zweckmäßig so wählen, daß

$$(18) \quad \alpha_\nu = \psi_\nu$$

ist; nach (8) werden dann diese ψ_ν von selbst ein normiertes Orthogonalsystem. Wir haben dann wegen (17) $\lambda'_\mu = \pm \lambda_\mu$ zu setzen, wobei wir noch über das Vorzeichen verfügen können. Wählen wir dieses positiv

$$\lambda'_\mu = \lambda_\mu,$$

so sind nach (7) auch die β_μ eindeutig festgelegt. Nach (7) und (10) ist also dann $\varphi_\nu = \beta_\nu$. Die Beziehungen (7) schreiben sich jetzt mit diesen Vereinbarungen

$$(19) \quad \begin{cases} \psi_\nu(v) = \lambda_\nu \cdot \int \varphi_\nu(x) \cdot K(x, v) \cdot dx \\ \varphi_\nu(u) = \lambda_\nu \cdot \int \psi_\nu(z) \cdot K(u, z) \cdot dz. \end{cases}$$

Wir haben also gesehen, daß dieses gekoppelte Paar von Integralgleichungen wirklich Lösungen φ_ν und ψ_ν besitzt, die wir als Eigenfunktionen von $H(x, z)$ und $V(x, z)$ erkannt haben. ERHARD SCHMIDT ist von dem Gleichungspaar (19) ausgegangen; er hat in seiner Arbeit im wesentlichen unseren Weg umgekehrt beschritten.

Es sei bemerkt, daß dieses Paar zugeordneter Eigenfunktionen φ_ν und ψ_ν nichts mit der Eigenfunktion χ (zu dem Eigenwert λ'') zu tun hat, die in der FREDHOLMSchen Theorie der unsymmetrischen Kerne auftritt:

$$\chi(x) = \lambda'' \cdot \int K(x, u) \cdot \chi(u) \cdot du.$$

Das Gleichungspaar (19) hat vielmehr stets derartige Lösungen φ_ν, ψ_ν ; wogegen es solche χ gar nicht zu geben braucht (es gibt Kerne ohne Eigenfunktionen, siehe II, 2!). Auch kann λ'' komplex sein.

Für $K(x, z)$ findet man (und zwar auf zwei Arten) nach (19) sofort die Äquivalenz

$$(20) \quad K(x, z) \sim \sum \frac{1}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(x) \cdot \psi_\nu(z),$$

denn es ist z. B. $\int \varphi_\nu(x) \cdot K(x, z) \cdot dx$ der FOURIER-Koeffizient von $K(x, z)$ in bezug auf das System der $\varphi_\nu(x)$. E. SCHMIDT bewies nun noch, daß diese Äquivalenz nach Multiplikation mit einer quadratisch integrierbaren Funktion $f(x)$ und darauf folgender Integration in eine Gleichung übergeht; d. h. es ist

$$(21) \quad g(x) \equiv \int K(x, z) \cdot f(z) \cdot dz = \sum \frac{1}{\lambda_\nu} \cdot b_\nu \cdot \varphi_\nu(x),$$

wobei

$$(22) \quad b_v = \int \psi_v(z) \cdot f(z) \cdot dz = \lambda_v \cdot \int g(x) \cdot \varphi_v(x) \cdot dx$$

gilt.

Damit also eine Funktion $g(x)$ nach den $\varphi_v(x)$ entwickelbar ist (absolut und gleichmäßig), genügt schon die quellenmäßige Darstellbarkeit durch einen Kern $K(x, z)$, der auch unsymmetrisch sein kann, wenn für diesen nur die Äquivalenz (20) gilt und er quadratisch integrabel sowie im Mittel stetig ist. Der Beweis ist wesentlich der gleiche wie in I. 6h und kann daher hier fortfallen.

Diese Bemerkung ist praktisch wichtig wegen der Umkehrbarkeit der Gedanken „quellenmäßige Darstellbarkeit“ und „Entwickelbarkeit“, die wir im nächsten Abschnitt betrachten wollen.

Vorher noch das **Beispiel des antisymmetrischen Kerns**. Es sei

$$K(x, z) = -K(z, x),$$

sonst mögen die Voraussetzungen der Theorie gelten. Dann gibt es nach (19) φ_v , ψ_v , λ_v , so daß

$$\psi_v(u) = \lambda_v \int \varphi_v(x) K(x, u) dx$$

$$\varphi_v(u) = \lambda_v \int \psi_v(x) K(u, x) dx = -\lambda_v \int K(x, u) \psi_v(x) dx$$

ist. Setzen wir

$$\varphi_v + i \psi_v = \chi_v,$$

so bekommen wir durch Zusammenfassen mit i

$$\chi_v(u) = i \lambda_v \int_0^l K(x, u) \chi_v(x) dx = -i \lambda_v \int_0^l K(u, x) \chi_v(x) dx.$$

Also ist $-i \lambda_v$ ein rein imaginärer Eigenwert von K , $i \lambda_v$ natürlich auch. K kann auch nur rein imaginäre Eigenwerte haben. Denn aus

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^l K(x, z) \varphi(z) dz$$

folgt durch Iterieren

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda^2 \int_0^l \int_0^l K(x, z) K(z, u) \varphi(u) dz du = -\lambda^2 \int_0^l K(x, z) K(u, z) \varphi(u) dz du \\ &= -\lambda^2 \int_0^l H(x, u) \varphi(u) du. \end{aligned}$$

$H \equiv \int_0^l K(x, z) K(u, z) dz$ ist symmetrisch und positiv (siehe I. 6k!), weil

$$\begin{aligned} \int_0^l \int_0^l H(x, u) f(x) f(u) dx du &= \int_0^l \int_0^l \int_0^l K(x, z) K(u, z) f(x) f(u) dx du dz \\ &= \int_0^l \left(\int_0^l K(x, z) f(x) dx \right)^2 dz \geq 0. \end{aligned}$$

Also hat H nur positive Eigenwerte, also ist $\lambda^2 < 0$, w. z. b. w.

6. Quellenmäßige Darstellbarkeit und Entwickelbarkeit.

Es sei $H(x, z)$ ein positiv definiten Kern und stetig; es gilt dann nach dem MERCERSchen Satz (I. 6k)

$$(1) \quad H(x, z) = \sum \frac{1}{\lambda_\nu^2} \varphi_\nu(x) \cdot \varphi_\nu(z),$$

wo die Reihe absolut und gleichmäßig konvergiert. Die φ_ν sind die Eigenfunktionen, die λ_ν^2 die Eigenwerte von H .

Von dieser Art ist unser Musterkern (I. 2. 7), da wir für ihn nach (I. 6. 82) die Darstellung

$$(2) \quad H(x, z) = \frac{2}{l} \sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2 \pi^2} \sin \frac{\nu \pi x}{l} \cdot \sin \frac{\nu \pi z}{l}$$

kennen. Hier ist

$$(3) \quad \lambda_\nu^2 = \frac{\nu^2 \pi^2}{l^2}, \quad \varphi_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin \frac{\nu \pi x}{l}.$$

Man kann sich nun, wenn man an den vorigen Abschnitt zurückdenkt, dieses H in (1) aus einem unsymmetrischen Kern $K(x, z)$ entstanden denken, für den die Äquivalenz

$$(4) \quad K(x, z) \sim \sum \frac{1}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(x) \cdot \psi_\nu(z)$$

gilt. Hierbei stellen die $\psi_\nu(x)$ ein beliebig gewähltes Orthogonalsystem vor; vorgeschrieben sind uns nur die φ_ν als Eigenfunktionen von H .

Da nach (1) die Reihe der Quadrate der FOURIER-Koeffizienten von K in bezug auf die ψ_ν

$$\sum \frac{1}{\lambda_\nu^2} \varphi_\nu^2(x) = H(x, x)$$

konvergiert, existiert nach dem FISCHER-RIESSSchen Satze (II. 1) eine solche Funktion $K(x, z)$, von der wir noch wissen, daß sie in z quadratisch integabel ist. Soll K auch nach x quadratisch integabel sein, so muß notwendig die BESSELSche Ungleichheit (I. 6e) gelten, also auch

$$(5) \quad \sum \frac{1}{\lambda_\nu^2} \psi_\nu^2(z)$$

konvergieren. Diese Bedingung kann eine Einschränkung für die gewählten ψ_ν bedeuten; sind jedoch alle ψ_ν beschränkt, so konvergiert (5) sicherlich, da

$$\sum \left| \frac{1}{\lambda_\nu^2} \psi_\nu^2 \right| < \text{const} \cdot \sum \frac{1}{\lambda_\nu^2}$$

gilt (vgl. I. 6f). Wenn wir also an das Ende des vorigen Abschnitts zurückdenken, können wir sagen, daß zur Entwicklung einer Funktion $g(x)$ nach den $\varphi_\nu(x)$

$$g(x) = \sum c_\nu \cdot \varphi_\nu(x)$$

schon die quellenmäßige Darstellbarkeit durch irgendeinen derartigen unsymmetrischen Kern K genügt:

$$g(x) = \int K(x, z) \cdot f(z) \cdot dz.$$

Das sei am Musterkern (den wir hier mit H bezeichnen wollen) näher ausgeführt. Wir können hier wählen

$$\psi_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \cos \frac{\nu \pi z}{l}.$$

Diese ψ_ν sind beschränkt; sie bilden in $0 \leq x \leq l$ ein normiertes Orthogonalsystem.

Differenzieren wir (2) rein formal nach z , ohne Rücksicht auf die Konvergenz der entstehenden Reihe, so erhalten wir

$$(6) \quad \sum_\nu \frac{\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin \frac{\nu \pi x}{l} \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \cos \frac{\nu \pi z}{l}}{\frac{\nu \pi}{l}} = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(x) \cdot \psi_\nu(z)}{\lambda_\nu}.$$

Das ist also ein Beispiel für einen Kern K , wie er in (4) vorkommt.

Nach der Definition (I. 2. 7) von H ist andererseits

$$(7) \quad \frac{\partial H}{\partial z} = \begin{cases} -\frac{x}{l} & x < z \\ \frac{l-x}{l} & x > z. \end{cases}$$

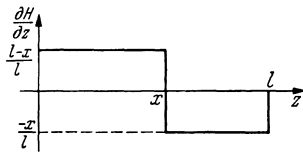


Abb. 16.

Als Funktion von z ist also $\partial H/\partial z$ abteilungsweise konstant und springt bei $z = x$ um

$$-\frac{x}{l} - \frac{l-x}{l} = -1:$$

(Abb. 16).

Diese Treppenfunktion kann man mit Hilfe der Theorie der FOURIERschen Reihen nach $\cos \frac{\nu \pi z}{l}$ entwickeln: man erhält dann tatsächlich (6). Also gilt, was wir oben nur vermuteten,

$$K(x, z) \equiv \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{2}{l} \sum \frac{1}{\nu \pi} \cdot \sin \frac{\nu \pi x}{l} \cdot \cos \frac{\nu \pi z}{l}.$$

Was bedeutet es nun, wenn eine Funktion $g(x)$ durch den Musterkern $H(x, z)$ quellenmäßig dargestellt wird? Laut Definition besagt dies zunächst, daß es ein quadratisch integrierbares $f(x)$ gibt, so daß

$$g(x) = \int_0^l H(x, z) \cdot f(z) \cdot dz$$

gilt. Wir wissen aber nach Satz 3 (I. 3 b), daß dies identisch ist mit dem Randwertproblem

$$g'' = -f(x), \quad g(0) = g(l) = 0.$$

Also heißt „quellenmäßig darstellbar“ im Falle des Musterkerns:

Jede Funktion, die zweimal differenzierbar ist, deren zweite Ableitung quadratisch integrabel ist, und die selber an den Endpunkten des Intervalls verschwindet, ist durch den Musterkern quellenmäßig darstellbar. Sie läßt sich also nach den $\sin \frac{\nu \pi x}{l}$ (den Eigenfunktionen von H) absolut und gleichmäßig entwickeln.

Was heißt es aber, wenn $g(x)$ durch $K(x, z) = \partial H / \partial z$ quellenmäßig darstellbar ist? Es ist dann zunächst

$$(8) \quad g(x) = \int_0^l K(x, z) \cdot f(z) \cdot dz,$$

d. h. bei Beachtung von (7)

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x \frac{l-x}{l} \cdot f(z) \cdot dz + \int_x^l \left(-\frac{x}{l}\right) \cdot f(z) \cdot dz \\ &= -\frac{x}{l} \int_0^l f(z) \cdot dz + \int_0^x f(z) \cdot dz. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} g(0) &= g(l) = 0 \\ g'(x) &= -\frac{1}{l} \cdot \int_0^l f(z) \cdot dz + f(x). \end{aligned}$$

(8) ist also identisch mit dem Gleichungssystem

$$(9) \quad g'(x) = f(x) + c, \quad g(0) = g(l) = 0;$$

c bestimmt sich aus den beiden letzten Bedingungen. Da f^2 noch integrabel sein soll, muß offenbar auch g'^2 integrabel sein. (9) beantwortet also die oben gestellte Frage, und nach Ende von II. 5 können wir daher sagen:

Jede Funktion $g(x)$, für die g' quadratisch integrabel ist, und die an den Intervallenden verschwindet, läßt sich nach den $\sin \frac{\nu \pi x}{l}$ absolut und gleichmäßig entwickeln.

Das ist eine Verschärfung des ersten Satzes.

Ähnliche Überlegungen wie die soeben angestellten lassen sich auf die Differentialgleichung

$$y'' + [q(x) + \lambda \cdot \varrho(x)] y = 0$$

[mit $\varrho(x) > 0$] übertragen (vgl. I. 3 c), wenn noch die Randbedingungen

$$y(0) = y(l) = 0,$$

oder

$$y(0) = y(l), \quad y'(0) = y'(l),$$

oder

$$y'(0) = \lambda \cdot y(0), \quad y'(l) = \mu \cdot y(l)$$

mit gegebenem λ, μ (z. B. $\lambda = 0, \mu = 0$) gelten. Alle diese Bedingungen sind zusammen mit der Differentialgleichung als „linear“ und „homogen“ zu bezeichnen, weil mit y auch $\text{const} \cdot y$ eine Lösung des Problems ist.

Von hier aus führt der Weg weiter zu den STURM-LIOUVILLESchen *Oszillationstheoremen*, die etwas über die Anzahl der Nullstellen der Eigenfunktionen im Zusammenhang mit dem Index ν des Eigenwertes λ_ν aussagen. Beispielsweise hat $\varphi_\nu = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\nu \pi x}{l}$ außer in $x = 0$ und $x = l$ noch $\nu - 1$ Nullstellen im Intervall $0 \leq x \leq l$. Hierauf wollen wir aber nicht weiter eingehen; man findet Näheres in den Lehrbüchern über Differentialgleichungen, von denen hier nur BIEBERBACH¹ und HOHEISEL² erwähnt seien.

E. SCHMIDT hat in § 15 seiner ersten Arbeit einen Satz bewiesen, der ungefähr folgendes besagt: bei einem abgeschlossenen System wird aus einer Äquivalenz durch Integrieren eine Gleichung. Mit diesem Satz, der an sich nichts mit Integralgleichungen zu tun hat, erhält man sofort das Resultat dieser Nummer.

Noch eine Bemerkung. Man kann den Musterkern auch als Iterierten des symmetrischen Kerns

$$K(x, z) \sim \sum \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu} = \frac{2}{l} \cdot \sum \frac{\sin \frac{\nu \pi x}{l} \sin \frac{\nu \pi z}{l}}{\frac{\nu \pi}{l}}$$

auffassen. Dieser Kern läßt sich angeben. Für $l = \pi$ handelt es sich um die Reihe

$$\frac{2}{\pi} \sum \frac{\sin \nu x \sin \nu z}{\nu}$$

Nach der schon S. 96 in II. 1 benutzten Reihe

$$\cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \dots = -\ln \left(2 \sin \frac{|x|}{2} \right)$$

ist aber

$$\begin{aligned} \sum \frac{\sin \nu x \sin \nu z}{\nu} &= \frac{1}{2} \sum \frac{\cos \nu(x-z)}{\nu} - \frac{1}{2} \sum \frac{\cos \nu(x+z)}{\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\ln \left(2 \sin \frac{|x-z|}{2} \right) + \ln \left(2 \sin \frac{x+z}{2} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \ln \frac{\sin \frac{|x-z|}{2}}{\sin \frac{x+z}{2}}. \end{aligned}$$

Mithin ist das obige

$$K = -\frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{\sin \frac{x-z}{2}}{\sin \frac{x+z}{2}} \right| \quad (\text{für } l = \pi).$$

¹ BIEBERBACH: Theorie der Differentialgleichungen. Berlin: Julius Springer 1930.

² HOHEISEL: Gewöhnliche Differentialgleichungen (Sammlung Göschen).

7. Die polare Integralgleichung.

HILBERT nennt so die Integralgleichung

$$(1) \quad y(x) = \lambda \int_0^l K(x, z) \rho(x) y(z) dz + f(x),$$

wo K symmetrisch und positiv sei, $\rho(x)$ stetig sei, aber kein festes Zeichen habe, vielmehr eine endliche Anzahl von Zeichenwechseln besitze, so daß das Verfahren von I. 2b, S. 6 nicht geht.

Zerlegen wir nun K nach der vorigen Nummer in

$$(2) \quad K(x, z) = \int_0^l H(x, u) H(z, u) du,$$

multiplizieren die obige Integralgleichung mit $H(x, v)$ und integrieren über x , so bekommen wir

$$\int_0^l y(x) H(x, v) dx = \lambda \int_0^l \int_0^l \int_0^l H(x, u) H(z, u) H(x, v) \rho(x) y(z) dz dx du + \int_0^l H(x, v) f(x) dx$$

oder mit

$$\int_0^l y(x) H(x, v) dx = Y(v), \quad \int_0^l f(x) H(x, v) dx = F(v)$$

und

$$L(u, v) = \int_0^l H(x, u) H(x, v) \rho(x) dx \equiv L(v, u):$$

$$(3) \quad Y(v) = \lambda \int_0^l L(u, v) Y(u) du + F(v).$$

Damit ist die Symmetrisierung erreicht, es gibt nur reelle λ und zugehörige Y bei $F \equiv 0$. Falls K abgeschlossen ist und H auch, was wir annehmen wollen, kann Y nicht null sein, wenn nicht auch $y \equiv 0$ ist.

L ist sicher nicht positiv definit, denn

$$\iint L(u, v) f(u) f(v) du dv = \iiint H(x, u) H(x, v) \rho(x) f(u) f(v) du dv dx = \int (\int H(x, u) f(u) du)^2 \rho(x) dx.$$

Nun kann man $g(x)$ so wählen, daß es beliebig klein ist, wo $\rho > 0$, ≈ 1 ist, wo $\rho < 0$ ist (oder umgekehrt), dann $f(u)$ so, daß

$$\int_0^l H(x, u) f(u) du = g(x)$$

wird (s. II. 4). Dann wird das vorstehende Doppelintegral negativ (bzw. positiv).

Eine polare Integralgleichung hat reelle, und zwar stets negative und positive Eigenwerte; wenn K abgeschlossen ist (also positiv definit), sogar unendlich viele. Letzteres sei ohne Beweis mitgeteilt.

Ist nun

$$\Phi(u) = \lambda \int_0^l L(u, v) \Phi(v) dv$$

eine Eigenfunktion von L , so setze man

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_0^l \rho(x) H(x, u) \Phi(u) du \\ &= \lambda \int_0^l \rho(x) H(x, u) \int_0^l \int_0^l H(z, u) H(z, v) \rho(z) \Phi(v) du dv dz \\ &= \lambda \int_0^l \rho(x) K(x, z) \varphi(z) dz \end{aligned}$$

und hat somit auch die Eigenfunktion von K .

Vertauscht man in (1) $\rho(x)$ mit $\rho(z)$, so bekommt man die umgestellte Integralgleichung. Diese hat, wie immer, dieselben Eigenwerte. Nach Multiplizieren mit $\rho(x)$ und Einführen von

$$\rho(x) y(x) = \eta(x)$$

geht aber

$$(4) \quad y(x) = \int_0^l K(x, z) \rho(z) y(z) dz + f(x)$$

in (1) über.

Damit kann auch die Differentialgleichung in I, 3 c für $r < 0$ oder r mit Zeichenwechsel als gelöst angesehen werden.

8. HILBERTs erster Weg über ein algebraisches Problem zur Lösung linearer Integralgleichungen.

Es sei $K(x, z)$ nach RIEMANN integrabel und daher beschränkt. Bekanntlich ist nach der Definition des RIEMANNschen Integrals

$$(1) \quad \int_0^l f(z) \cdot dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n \frac{l}{n} \cdot f(z_\nu).$$

Hierbei sind die z_ν Werte in den Intervallen

$$\left(0 \dots \frac{l}{n}\right), \quad \left(\frac{l}{n} \dots \frac{2l}{n}\right), \quad \left(\frac{2l}{n} \dots \frac{3l}{n}\right), \quad \dots, \quad \left(\frac{(n-1)l}{n} \dots l\right).$$

Man kann also näherungsweise setzen

$$(2) \quad \int_0^l K(x, z) \cdot y(z) \cdot dz \approx \frac{l}{n} \cdot \sum_{\nu} K(x, z_\nu) \cdot y(z_\nu).$$

Wir schreiben nun konsequenterweise auch die Integralgleichung

$$(3) \quad y(x) = \lambda \cdot \int_0^l K(x, z) \cdot y(z) \cdot dz + f(x)$$

nur für die entsprechenden Werte x_μ hin; damit bekommen wir die Gleichungen

$$(4) \quad y(x_\mu) = \lambda \cdot \frac{l}{n} \cdot \sum_{\nu=1}^n K(x_\mu, x_\nu) \cdot y(x_\nu) + f(x_\mu) \quad \mu = 1, 2, \dots, n$$

als Näherung für (3). (Wir können den Buchstaben z ruhig durch x ersetzen.)

Setzen wir noch

$$(5) \quad y(x_\mu) = y_\mu, \quad f(x_\mu) = f_\mu, \quad \frac{l}{n} K(x_\mu, x_\nu) = k_{\mu\nu},$$

so steht in (4) da

$$y_\mu - \lambda \sum_{\nu=1}^n k_{\mu\nu} \cdot y_\nu = f_\mu,$$

oder

$$(6) \quad \sum_{\nu=1}^n (\delta_{\mu\nu} - \lambda k_{\mu\nu}) y_\nu = f_\mu \quad \mu = 1, 2, \dots, n,$$

wobei wir das KRONECKERSCHE Symbol (II. 2. 7) benutzen. Die Gleichung (6) stellt n Gleichungen für die n Unbekannten y_ν dar, mit denen wir die gesuchte Funktion $y(x)$ angenähert bestimmen wollen.

Ist die Determinante des Gleichungssystems (6)

$$(7) \quad \Delta_n(\lambda) = \|\delta_{\mu\nu} - \lambda \cdot k_{\mu\nu}\|$$

von null verschieden, so ist die Auflösung nach den y_ν möglich, ähnlich, wie wir schon in II. 2 sahen. Ist aber λ ein (angenäherter) Eigenwert, d. h. ist

$$\Delta_n(\lambda) = 0,$$

so ist im allgemeinen die Auflösung nach den y_ν unmöglich, es sei denn, daß zwischen den f_ν gewisse Beziehungen bestehen. In diesem Falle aber haben die homogenen Gleichungen von (6) (d. h. die Näherungsgleichungen der homogenen Integralgleichung)

$$\sum_{\nu=1}^n (\delta_{\mu\nu} - \lambda \cdot k_{\mu\nu}) \cdot y_\nu = 0 \quad \mu = 1, 2, \dots, n$$

mindestens eine nichttriviale Lösung y_ν , denn hierfür ist das Verschwinden der Determinante charakteristisch. Wir treffen also wieder die Ergebnisse des FREDHOLMSCHEN Alternativsatzes an und sehen hier seine eigentliche Quelle.

Ist der Kern symmetrisch, so ist

$$k_{\mu\nu} = k_{\nu\mu},$$

die Matrix der $k_{\mu\nu}$ ist dann also auch *symmetrisch*. Dann hat aber auch die Gleichung

$$(8) \quad \Delta_n(\lambda) = 0$$

n reelle Lösungen λ , wie schon seit langem aus der Algebra bekannt ist (vgl. II. 2). (8) hat dort übrigens den Namen „Säkulargleichung“. Dieser Name entstammt der Astronomie; aber dieselbe Gleichung und dieselbe Frage nach den Wurzeln von (8) treten in ungezählten Schwingungsaufgaben der Mechanik und der Elektrotechnik auf.

HILBERT gelang nun von hier aus der strenge Grenzübergang von (4) oder (6) zu dem ursprünglichen analytischen Problem (3); wir haben uns hier lediglich auf die Mitteilung des Ergebnisses beschränkt.

Daß aber HILBERTS Gedanke auch praktisch brauchbar ist, hat NYSTRÖM gezeigt¹. Bekanntlich bekommt man nach GAUSS bei gleicher Punktezahl n eine doppelt so große Genauigkeit bei der Berechnung des Integrals, wenn man das Intervall nicht gleichmäßig in Teile $l/n = \Delta z$ teilt, sondern nach den Nullstellen der LEGENDRESCHEN Kugelfunktionen. NYSTRÖM benutzt dies sowie verwandte Integrationsmethoden von TSCHEBYCHEFF und bespricht weiter die praktische Auflösung des Gleichungssystems, endlich vergleicht er die verschiedenen Methoden untereinander.

9. Die Methode der unendlich vielen Variablen. Der HILBERTSche Raum.

Auch diese Methode wurde, wie die soeben besprochene, von HILBERT geschaffen.

Man nimmt irgendein abgeschlossenes normiertes Orthogonalsystem von Funktionen $\psi_\nu(x)$. Dann kann man unsere Integralgleichung

$$(1) \quad y(x) - \lambda \cdot \int_0^l K(x, z) \cdot y(z) \cdot dz = f(x)$$

ersetzen durch

$$(2) \quad \int_0^l y(x) \cdot \psi_\mu(x) \cdot dx - \lambda \cdot \int_0^l \int_0^l K(x, z) \cdot y(z) \cdot \psi_\mu(x) \cdot dx \cdot dz = \int_0^l f(x) \cdot \psi_\mu(x) \cdot dx.$$

Denn durch Multiplikation von (1) mit ψ_μ und Integration folgt (2); gilt aber (2), so gilt für alle ψ_μ

$$\int_0^l [y(x) - \lambda \cdot \int_0^l K(x, z) \cdot y(z) \cdot dz - f(x)] \cdot \psi_\mu(x) \cdot dx = 0,$$

und daraus folgt wegen der Abgeschlossenheit der ψ_μ nach I. 6k wieder (1) (vgl. II. 1).

Wir führen noch folgende Bezeichnungen für die FOURIER-Koeffizienten von y und f ein:

$$(3) \quad c_\mu = \int_0^l y(x) \cdot \psi_\mu(x) \cdot dx, \quad a_\mu = \int_0^l f(x) \cdot \psi_\mu(x) \cdot dx.$$

¹ NYSTRÖM: Über die praktische Auflösung von linearen Integralgleichungen mit Anwendungen auf Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Soc. Sci. Fenn. Comm. Physic., Math. IV. 15, V. 5. Siehe auch Acta math. Bd. 56 (1931).

Die Aufgabe besteht also darin, die unbekanntenen c_μ zu bestimmen. Verlangen wir noch, daß y quadratisch integrabel sein soll, so muß nach der BESSELSchen Ungleichheit (I. 6e)

$$\sum c_\nu^2$$

konvergieren, und ist dies der Fall, so ist $y(x)$ nach dem FISCHER-RIESSchen Satze (II. 1) durch die c_ν wesentlich eindeutig bestimmt. Da auch $f(x)$ quadratisch integrabel sein soll, muß ebenso

$$\sum a_\mu^2$$

konvergieren.

Wir nehmen nun weiter an, daß $K(x, z)$ nach den $\psi_\nu(z)$ entwickelbar ist

$$(4) \quad K(x, z) = \sum_\nu \chi_\nu(x) \cdot \psi_\nu(z).$$

Führen wir noch als Abkürzung

$$(5) \quad a_{\nu\mu} = \int \chi_\nu(x) \cdot \psi_\mu(x) \cdot dx$$

ein, so nimmt schließlich (2) die Gestalt an

$$(6) \quad c_\mu - \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu\mu} \cdot c_\nu = a_\mu \quad \mu = 1, 2, \dots, \infty.$$

Das ist ein System von unendlich vielen linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten c_ν , das als Verallgemeinerung ($n = \infty$) des Systems aus II. 2 betrachtet werden kann.

Es sei bemerkt, daß das System (6) auch dann aufgestellt werden kann, wenn (4) nur eine Äquivalenz ist. Nun ist nach I. 6k ein abgeschlossenes System auch vollständig; es gilt also statt der BESSELSchen Ungleichheit die PARSEVALSche Gleichung (I. 6e)

$$(7) \quad \sum_1^{\infty} \chi_\nu^2(x) = \int_0^1 K^2(x, z) \cdot dz.$$

χ_ν hat nach (5) die FOURIER-Koeffizienten $a_{\nu\mu}$; daher konvergiert auch

$$\sum_\mu a_{\nu\mu}^2 = \int_0^1 \chi_\nu^2(x) \cdot dx.$$

Daher liefert die Integration von (7)

$$\sum_\nu \int \chi_\nu^2 \cdot dx = \sum_{\nu, \mu} a_{\nu\mu}^2 = \iint K^2(x, z) \cdot dx \cdot dz.$$

Da das Integral rechts existiert, sind alle Summen beschränkt; daher ist auch

$$(7a) \quad \sum_{\nu, \mu} a_{\nu\mu}^2 \quad \text{und erst recht} \quad \sum_\nu a_{\nu\mu}^2$$

konvergent. Unter den gemachten Voraussetzungen über K, f, y ist also die Summe über die Zeilenquadrate $\sum_\nu a_{\nu\mu}^2$ des Gleichungssystems (6) konvergent.

Nun legt die Analogie der analytischen Geometrie des dreidimensionalen Raumes eine geometrische Redeweise nahe. So, wie man die drei Koordinaten (x_1, x_2, x_3) eines Punktes auch als die drei Koordinaten (Komponenten) eines Vektors ξ auffaßt, kann man auch hier unendlich viele Variable (x_1, x_2, x_3, \dots) als die Koordinaten eines Vektors ξ im sogenannten HILBERTSchen (*unendlichdimensionalen*) Raum betrachten.

Man führt die Analogie noch weiter. Im Dreidimensionalen ist

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = |\xi|^2$$

das Quadrat der Länge von ξ ; ebenso nennt man daher im HILBERTSchen Raum

$$(9) \quad (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots)^{\frac{1}{2}} = |\xi|$$

die Länge des Vektors ξ , falls die Summe existiert.

Das Kennzeichen des HILBERTSchen Raumes besteht gerade darin, daß die Länge von allen in Frage stehenden Vektoren ξ als existent angenommen wird. Der HILBERTSche Raum hat also eine Maßbestimmung.

Aus der SCHWARZSchen Ungleichheit [für Summen: (I. 6. 36)] folgt

$$(9) \quad \left(\sum_{\nu=n}^m x_\nu \cdot y_\nu \right)^2 \leq \sum x_\nu^2 \cdot \sum y_\nu^2.$$

Daher existiert für unsere Vektoren das „*innere Produkt*“

$$(10) \quad \xi \eta = \sum_1^\infty x_\nu y_\nu.$$

Nach (9) ist weiter

$$\frac{(\xi \eta)^2}{|\xi|^2 \cdot |\eta|^2} = \frac{(\sum x_\nu y_\nu)^2}{(\sum x_\nu^2)(\sum y_\nu^2)} \leq 1,$$

und dies berechtigt zur Einführung eines reellen Winkels α , den wir (in Analogie zum inneren Produkt dreidimensionaler Vektoren) den *Winkel zwischen ξ und η* nennen:

$$(11) \quad \xi \eta \equiv \sum_1^\infty x_\nu y_\nu = |\xi| \cdot |\eta| \cdot \cos \alpha.$$

Wir wissen, daß in der SCHWARZSchen Ungleichheit (9) nach I. 6a nur dann das Gleichheitszeichen gilt, wenn

$$x_\nu = \lambda \cdot y_\nu,$$

oder anders geschrieben

$$\xi = \lambda \cdot \eta,$$

wo λ eine reine Zahl ist. In diesem Falle ist also

$$\cos \alpha = 1,$$

d. h. $\alpha = 0$ oder $= \pi$, die Vektoren ξ und η sind also „*gleichgerichtet*“ oder „*entgegengesetzt gerichtet*“. Im Falle $\alpha = 90^\circ$ dagegen ist

$$\cos \alpha = 0,$$

also nach (11)

$$(12) \quad \xi \eta \equiv \sum x_\nu y_\nu = 0.$$

ξ und η heißen dann „senkrecht“ (*orthogonal*) zueinander. Jetzt können wir auch den Grund für die schon in I. 4c benutzte Redeweise einsehen, zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ orthogonal zu nennen, wenn

$$(13) \quad \int f \cdot g \cdot dx = 0$$

ist. Denn lassen sich f und g nach einem vollständigen Orthogonalsystem von Funktionen ψ_ν entwickeln

$$(14) \quad f = \sum a_\nu \cdot \psi_\nu, \quad g = \sum b_\nu \cdot \psi_\nu,$$

so kann man, da $\sum a_\nu^2$ und $\sum b_\nu^2$ nach der PARSEVALSchen Gleichung (I. 6. 62) konvergieren, f und g im HILBERTSchen Raum durch die Vektoren

$$a = \{a_1, a_2, \dots\}, \quad b = \{b_1, b_2, \dots\}$$

darstellen. Gilt dann (13), so sind wegen

$$(15) \quad 0 = \int f \cdot g \cdot dx = \sum a_\nu \cdot b_\nu = a \cdot b$$

auch die zugeordneten Vektoren orthogonal. Übrigens gilt (15) nach einem von HURWITZ zuerst bewiesenen Satze auch dann, wenn (14) nur Äquivalenzen sind (vgl. die Bemerkung am Schluß von II. 6 zur Arbeit von SCHMIDT).

Man kann nun im HILBERTSchen Raum auch *quadratische Formen*

$$(16) \quad \sum_{\nu, \mu}^{1 \dots \infty} a_{\nu \mu} x_\nu x_\mu \quad a_{\nu \mu} = a_{\mu \nu}$$

studieren: das sind dann, gleich einer Konstanten gesetzt, Verallgemeinerungen von Ellipsoiden, bzw. allgemeinen Flächen zweiten Grades mit Mittelpunkt.

Für $n = 3$ aber sind die Lösungen von

$$(17) \quad c_\mu - \lambda \sum_{\nu=1}^3 a_{\nu \mu} \cdot c_\nu = 0 \quad \mu = 1, 2, 3 \quad (a_{\nu \mu} = a_{\mu \nu})$$

dieselben wie die des Hauptachsenproblems der Fläche zweiten Grades

$$(18) \quad \sum_{\nu, \mu}^{1 \dots 3} a_{\nu \mu} c_\nu c_\mu = 1 \quad a_{\nu \mu} = a_{\mu \nu};$$

die Lösungen von (17) (c_1, c_2, c_3) $\neq 0$ geben die Richtungen der Hauptachsen von (18) an. Die Ausdehnung auf n Dimensionen ist ohne weiteres möglich.

In weiterer Verallgemeinerung stellen die Gleichungen

$$(19) \quad c_\mu - \lambda \cdot \sum_{\nu}^{1 \dots \infty} a_{\nu \mu} \cdot c_\nu = 0 \quad \mu = 1, 2, \dots$$

das *Hauptachsenproblem im HILBERTSchen Raum* dar (falls man sich auf den symmetrischen Fall $a_{\nu \mu} = a_{\mu \nu}$ beschränkt).

Zur Behandlung des Hauptachsenproblems studiert man im gewöhnlichen Raum *Drehungen*. Das sind bekanntlich lineare Transformationen, die den Vektor (c_1, c_2, c_3) in den Vektor (c'_1, c'_2, c'_3) überführen:

$$c'_\nu = \sum_{\mu}^{1 \dots 3} b_{\nu\mu} \cdot c_\mu$$

mit

$$\sum_{\mu} b_{\nu\mu} \cdot b_{\sigma\mu} = \delta_{\nu\sigma}, \quad \|b_{\nu\mu}\| > 0.$$

Das läßt sich ebenfalls auf den HILBERTSchen Raum übertragen.

Man kann nun im dreidimensionalen Raum durch eine geeignete Drehung gleichzeitig die quadratische Form

$$\sum_{\nu, \mu} a_{\nu\mu} c_\nu c_\mu$$

in die Form

$$(20) \quad \frac{c_1'^2}{\lambda_1} + \frac{c_2'^2}{\lambda_2} + \frac{c_3'^2}{\lambda_3}$$

überführen (Transformation auf Hauptachsen), während $\sum c_\nu^2$ fest bleibt, also gleich $\sum c_\nu'^2$ wird:

$$\sum c_\nu^2 = \sum c_\nu'^2.$$

(Die Länge bleibt bei der Drehung erhalten.)

Damit aber geht das Gleichungssystem (17)

$$c_\mu - \lambda \sum_{\nu} a_{\nu\mu} \cdot c_\nu = 0$$

in das System

$$(21) \quad c'_\mu - \lambda \cdot \frac{c'_\mu}{\lambda_\mu} = 0 \quad \mu = 1, 2, 3$$

über, da nach (20) durch die Drehung $a_{\nu\mu}$ zu $\delta_{\nu\mu}/\lambda_\mu$ wird (die λ sind invariant). (21) liefert entweder $\lambda = \lambda_\mu$ oder $c'_\mu = 0$. Also sind die drei λ_μ die Eigenwerte, und die neuen Koordinatenachsen $c'_\mu = 0$ ($\mu = 1, 2$ oder $2, 3$ oder $3, 1$) sind die Hauptachsen der Fläche zweiten Grades, wie oben behauptet wurde.

All dieses geht genau so im HILBERTSchen Raum. Das liegt an folgender Eigenschaft der Form

$$\sum_{\nu, \mu}^{1 \dots \infty} a_{\nu\mu} x_\nu x_\mu:$$

wenn die Form im oben geschilderten Sinne von einem quadratisch integriblen Kern herkommt, d. h. wenn

$$\sum_{\nu, \mu} a_{\nu\mu}^2$$

konvergiert, ist die Form „vollständig“, d. h. es ist

$$(22) \quad \sum_{\nu, \mu} a_{\nu\mu} x_\nu x_\mu - \sum_{\nu, \mu} a_{\nu\mu} x'_\nu x'_\mu$$

beliebig klein (kleiner als $\varepsilon > 0$), falls

$$(23) \quad |x'_\nu - x_\nu| < \delta(\varepsilon)$$

für jedes ν ist, und falls $\sum x_\nu^2 = 1$ gilt. Denn es gilt folgende Abschätzung

$$\left(\sum_{\nu+\mu=n}^{\infty} a_{\nu\mu} x_\nu x_\mu \right)^2 \leq |\xi|^2 \cdot \left(\sum_{\nu+\mu=n}^{\infty} |a_{\nu\mu} \cdot x_\nu| \right)^2,$$

da $|x_\mu| \leq |\xi|$. Nach SCHWARZ ist weiter

$$(24) \quad \left(\sum_{\nu+\mu=n}^{\infty} |a_{\nu\mu} x_\nu| \right)^2 \leq \sum_1^{\infty} x_\nu^2 \cdot \sum_{\nu+\mu=n}^{\infty} a_{\nu\mu}^2 = \sum_{\nu+\mu=n}^{\infty} a_{\nu\mu}^2 < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2,$$

falls nur n groß genug gewählt wird, da die Reihe (7a) konvergiert. Also ist auch

$$\begin{aligned} \left| \sum_1^{\infty} a_{\nu\mu} x_\nu x_\mu - \sum_1^{\infty} a_{\nu\mu} x'_\nu x'_\mu \right| &< \left| \sum_{\nu+\mu=1}^{\nu+\mu=n-1} a_{\nu\mu} x_\nu x_\mu - \sum_{\nu+\mu=1}^{\nu+\mu=n-1} a_{\nu\mu} x'_\nu x'_\mu \right| + \\ &+ \left| \sum_{\nu+\mu=n}^{\infty} a_{\nu\mu} x_\nu x_\mu - \sum_{\nu+\mu=n}^{\infty} a_{\nu\mu} x'_\nu x'_\mu \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Denn das erste Glied rechts ist als endliche Summe stetiger Funktionen von endlich vielen Variablen selber stetig, wird also mit (23) beliebig klein, während bei den anderen Gliedern die Abschätzung (24) benutzt worden ist. Damit ist also die Vollstetigkeit der quadratischen Form nachgewiesen. [Vollstetigkeit ist bei $n = \infty$ mehr als Stetigkeit. Diese verlangt die Kleinheit von (22) bei der stärkeren Einschränkung $\sum_1^{\infty} (x'_\nu - x_\nu)^2 < \delta^2$.]

Diese Formeln gelten im HILBERTSchen Raum zunächst nur für $a_{\nu\mu} = a_{\mu\nu}$; aber auch für den unsymmetrischen Fall

$$a_{\nu\mu} \neq a_{\mu\nu}$$

gewann HILBERT die Ergebnisse FREDHOLMS.

Eine ganz große Leistung HILBERTS bestand aber darin, die Theorie auf quadratische Formen

$$\sum a_{\nu\mu} x_\nu x_\mu,$$

bzw. auf Bilinearformen

$$\sum a_{\nu\mu} x_\nu y_\mu$$

auszudehnen, die nicht mehr vollstetig, sondern nur noch beschränkt sind, d. h. für die bei endlich langen Vektoren

$$\sum_1^n a_{\nu\mu} x_\nu x_\mu$$

gleichmäßig beschränkt ist. Diese Theorie führt zur Theorie der Integralgleichungen mit *singulärem Kern*, bei denen das *Spektrum* (d. h. die Gesamtheit der Eigenwerte) nicht mehr diskret zu liegen braucht, sondern auch *Kontinuen* enthalten kann. Derartige Spektren spielen in der Quantentheorie eine ausschlaggebende Rolle (vgl. II. 13!).

Über quadratische Formen mit endlich vielen Variablen unterrichten die Lehrbücher der Algebra, der Determinanten, der analytischen Geometrie und der quadratischen Formen.

10. Unendlich viele lineare Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten.

Auf solche Gleichungen, die wir z. B. in (II. 9. 6) erhielten und die wir immer

$$(1) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu\mu} \cdot x_{\nu} = c_{\mu} \quad \mu = 1, 2, \dots$$

schreiben wollen, führen noch viele andere Aufgaben, wie etwa die Integration der Gleichung von HILL

$$(2) \quad y'' + p(x) \cdot y = 0,$$

wo

$$p(x) = b_0 + b_1 \cdot \cos x + b_2 \cdot \cos 2x + \dots$$

eine periodische Funktion von x ist. Gefragt wird nach den periodischen Lösungen von (2) (vgl. II. 11).

Der Praktiker wird ein solches Problem [die x_{μ} aus (1) zu bestimmen] so anfassen, daß er nur n Gleichungen hinschreibt und auch nur n Unbekannte nimmt. Er geht also aus von

$$(3) \quad \sum_{\nu=1}^n a_{\nu\mu} x_{\nu} = c_{\mu} \quad \mu = 1, 2, \dots, n.$$

Er weiß, daß es bei der Auflösung dieses Systems nach den unbekanntem x_{ν} auf die Determinante

$$(4) \quad \Delta_n = \|a_{\nu\mu}\|$$

ankommt, darauf, ob sie gleich oder ungleich null ist. Der Praktiker wird daher versuchen, ob eine Theorie der „*unendlichen Determinanten*“

$$(5) \quad \Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n$$

möglich ist, d. h. er wird versuchen, die gesuchte Lösung von (1) aus der von (3) durch Grenzübergang ($n \rightarrow \infty$) zu finden.

HELGE VON KOCH hat nun eine solche Theorie geschaffen. (Die Literatur findet man bei F. RIESS¹ angegeben, wo man auch über alle

¹ RIESS, F.: Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Collection Borel. Paris 1913.

älteren Versuche Literaturangaben findet.) v. KOCH zeigt: der Praktiker ist mit seinem Versuch auf dem rechten Wege, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

$$(6) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{\nu\nu} - 1|$$

und

$$(7) \quad \sum_{\nu,\mu} |a_{\nu\mu} - \delta_{\nu\mu}|^2$$

konvergieren ($\delta_{\nu\mu}$ ist das KRONECKERSche Symbol), und ebenfalls konvergiert

$$(8) \quad \sum c_{\nu}^2.$$

Man verlangt von den Unbekannten x_{ν} , daß

$$(9) \quad \sum x_{\nu}^2$$

konvergiert. Da man jede der Gleichungen (1) durch einen Faktor dividieren kann, kann man stets erreichen, daß $\sum c_{\nu}^2$ konvergiert: (8) kann also stets als erfüllt angesehen werden.

Man ist mit diesen v. KOCHSchen Voraussetzungen schon nahezu im HILBERTSchen Raum, den nun ERHARD SCHMIDT, unter Verallgemeinerung HILBERTScher Ergebnisse, konsequent betritt¹.

Man kann das Gleichungssystem (1) in der geometrischen Sprache des HILBERTSchen Raums (nach II. 9) schreiben

$$(10) \quad \mathfrak{A}_{\mu} \cdot \mathfrak{x} = c_{\mu} \quad \mu = 1, 2, \dots$$

mit

$$\mathfrak{A}_{\mu} = \{a_{1\mu}, a_{2\mu}, \dots\}.$$

Wie HELGE VON KOCH verlangt E. SCHMIDT, daß $|\mathfrak{x}|$ existiert (d. h. endlich ist), im übrigen trifft SCHMIDT nur die Voraussetzung, daß $|\mathfrak{A}_{\mu}|$ endlich ist. Es soll also

$$(11) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu\mu}^2$$

für jedes μ konvergieren. [Im Schema der Gleichungen (1) soll also die Summe der Zeilenquadrate konvergieren.] Das ist erheblich weniger als das, was v. KOCH in (6) und (7) verlangt.

Man kann weiter mit Hilfe eines Einheitsvektors $\mathfrak{A}_{\mu}^{(0)}$ schreiben

$$\mathfrak{A}_{\mu} = |\mathfrak{A}_{\mu}| \cdot \mathfrak{A}_{\mu}^{(0)}.$$

Damit hat man statt (10)

$$(12) \quad \mathfrak{A}_{\mu}^{(0)} \cdot \mathfrak{x} = \frac{c_{\mu}}{|\mathfrak{A}_{\mu}|} \equiv b_{\mu}.$$

¹ SCHMIDT, ERHARD: Über die Auflösung von linearen Gleichungen mit abzählbar unendlich vielen Unbekannten. Rend. Circ. Mat. Palermo, Bd. 25 (1908).

Hierin sind die b_μ als bekannt zu betrachten. Die unendlich vielen Gleichungen (1) haben in der Form (12) den Sinn erlangt, daß man im HILBERTSchen Raum einen Vektor \mathfrak{x} sucht, dessen Projektionen b_μ auf die unendlich vielen Einheitsvektoren $\mathfrak{U}_\mu^{(0)}$ gegeben sind.

ERHARD SCHMIDT orthogonalisiert nun die $\mathfrak{U}_\mu^{(0)}$ analog zu dem in I. 6c geschilderten Verfahren. Er wählt also neue Einheitsvektoren $\mathfrak{B}_\mu^{(0)}$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_1^{(0)} &= \mathfrak{U}_1^{(0)} \\ \mathfrak{B}_2^{(0)} &= \alpha \cdot \mathfrak{U}_1^{(0)} + \beta \mathfrak{U}_2^{(0)},\end{aligned}$$

so daß

$$\mathfrak{B}_1^{(0)} \mathfrak{B}_2^{(0)} = \alpha \mathfrak{U}_1^{(0)2} + \beta \mathfrak{U}_1^{(0)} \mathfrak{U}_2^{(0)} = 0,$$

und

$$\mathfrak{B}_2^{(0)2} = \alpha^2 \mathfrak{U}_1^{(0)2} + 2\alpha\beta \mathfrak{U}_1^{(0)} \mathfrak{U}_2^{(0)} + \beta^2 \mathfrak{U}_2^{(0)2} = 1$$

ist. Hieraus werden α, β bestimmt, falls $\mathfrak{U}_1^{(0)}$ und $\mathfrak{U}_2^{(0)}$ voneinander unabhängig sind:

$$\mathfrak{U}_2^{(0)} \equiv \lambda \cdot \mathfrak{U}_1^{(0)}.$$

So fahren wir fort. Wir erhalten so aus (12) das Gleichungssystem

$$(13) \quad \begin{cases} \mathfrak{B}_1^{(0)} \mathfrak{x} = b_1 \equiv a_1 \\ \mathfrak{B}_2^{(0)} \mathfrak{x} = \alpha b_1 + \beta b_2 \equiv a_2. \\ \vdots \end{cases}$$

Es kann sein, daß die Orthogonalisierung bei dem n . Schritt versagt: das tritt dann und nur dann ein, wenn $\mathfrak{U}_n^{(0)}$ von $\mathfrak{U}_1^{(0)}, \mathfrak{U}_2^{(0)}, \dots, \mathfrak{U}_{n-1}^{(0)}$ linear abhängig ist, wenn also

$$(14) \quad \sum_1^n k_\nu \cdot \mathfrak{U}_\nu^{(0)} = 0$$

gilt mit nicht sämtlich verschwindenden Konstanten k_ν . Dann muß nach (12) die entsprechende Beziehung zwischen den b_ν bestehen:

$$(15) \quad \sum_1^n k_\nu \cdot b_\nu = 0.$$

Gilt dies nicht, so sind die unendlich vielen Gleichungen (1) [oder (12)] widerspruchsvoll: sie haben dann überhaupt keine Lösung \mathfrak{x} . Gilt aber (15) zugleich mit (14), dann läßt man im Verlauf der Orthogonalisierung einfach die abhängigen $\mathfrak{U}_n^{(0)}$ fort und streicht die zugehörigen abhängigen, also überflüssigen Gleichungen

$$\mathfrak{U}_n^{(0)} \mathfrak{x} = b_n.$$

Liegt also kein Widerspruch vor, so erhalten wir aus (12) nach (13) das Gleichungssystem

$$(16) \quad \mathfrak{B}_\nu^{(0)} \mathfrak{x} = a_\nu \quad \nu = 1, 2, \dots$$

mit orthogonalen Einheitsvektoren $\mathfrak{B}_\nu^{(0)}$.

Wir sehen also, daß die a_ν , die als bekannt gelten dürfen, die Koordinaten des gesuchten Vektors ξ in dem Orthogonalsystem der $\mathfrak{B}_\nu^{(0)}$ sind; es ist also

$$(17) \quad \xi = \sum_{\nu}^{1 \dots \infty} a_\nu \mathfrak{B}_\nu^{(0)}$$

eine Lösung des Systems (16). Diese Gleichung schreibt sich auch

$$x_\mu = \sum_{\nu}^{1 \dots \infty} a_\nu \cdot b_{\mu\nu} \quad \mathfrak{B}_\nu^{(0)} = \{b_{1\nu}, b_{2\nu}, \dots\}.$$

Soll ξ ein HILBERTScher Vektor sein, so muß er nach II. 9 eine endliche Länge haben, also muß

$$\sum_{\nu} a_\nu^2$$

konvergieren. Diese Bedingung ist notwendig und hinreichend für die Existenz von ξ .

Die gefundene Lösung ξ ist eindeutig, wenn das System der $\mathfrak{B}_\nu^{(0)}$ „vollständig“ ist: d. h. wenn ein Vektor, dessen sämtliche Koordinaten in bezug auf die $\mathfrak{B}_\nu^{(0)}$ verschwinden, identisch null sein muß (vgl. die Vollständigkeit von Funktionensystemen in I. 6k).

Diese Vollständigkeit der $\mathfrak{B}_\nu^{(0)}$ sowie die Abhängigkeit der $\mathfrak{A}_\nu^{(0)}$ voneinander kann von vornherein durch die Betrachtung gewisser Determinanten aus den $a_{\nu\mu}$ festgestellt werden. Diese Determinanten haben als Elemente die inneren Produkte

$$\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{A}_\sigma = \sum_{\nu}^{1 \dots \infty} a_{\nu\mu} a_{\nu\sigma} = |\mathfrak{A}_\mu| \cdot |\mathfrak{A}_\sigma| \cdot \cos \alpha_{\mu\sigma}.$$

Nach der geschilderten Umformung der \mathfrak{A}_μ zu den $\mathfrak{B}_\nu^{(0)}$ haben diese inneren Produkte den Wert $\delta_{\mu\sigma}$, so daß also die Determinante (GRAMSche Determinante geheißen)

$$(18) \quad \Delta_n = \left\| |\mathfrak{A}_\mu \mathfrak{A}_\sigma| \right\|_{\substack{\mu \\ \sigma} = 1, 2, \dots, n}$$

den Wert 1 hat. Notwendig und hinreichend dafür, daß die n ersten \mathfrak{A}_μ voneinander unabhängig sind, ist nun, daß die Δ_n auch vor der Umformung nicht null sind (vgl. II. 1, Anhang).

Damit die $\mathfrak{B}_\nu^{(0)}$ vollständig sind (d. h. daß man sicher ist, die eindeutige Lösung des Systems gefunden zu haben, wenn man eine Lösung ξ kennt), müssen die $a_{\nu\mu}$ noch eine weitere Bedingung erfüllen. Es dürfen in unserem System (1) gewissermaßen keine Gleichungen fehlen. Aber woran erkennt man das bei unendlich vielen Gleichungen?

Wenn wir n Gleichungen mit n Unbekannten haben, und wir haben sie orthogonalisiert und normiert

$$(19) \quad \mathfrak{B}_\nu^{(0)} \xi = \sum_{\mu=1}^n b_{\mu\nu} x_\mu = a_\nu \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

so bedeuten die Koeffizienten $b_{\mu\nu}$ einer Zeile ($\mu = 1, \dots, n$) die Koordinaten des Einheitsvektors $\mathfrak{B}_\nu^{(0)}$ im n -dimensionalen Raum. Aber auch die Koeffizienten $b_{\mu\nu}$ ($\nu = 1, \dots, n$) einer Spalte bedeuten die Koordinaten eines Vektors: nämlich des ν . Achseneinheitsvektors, ausgedrückt im System der $\mathfrak{B}_\nu^{(0)}$. Diese Achseneinheitsvektoren bilden auch ein n -Bein (d. h. sie sind orthogonalisiert und normiert). Wie also aus der analytischen Geometrie wohlbekannt ist, muß auch die Summe der Koeffizientenquadrate einer Spalte

$$(20) \quad \sum_{\nu=1}^n b_{\mu\nu}^2 = 1$$

sein (denn das ist das Quadrat der Länge des ν . Achseneinheitsvektors).

Würde (20) kleiner als 1 sein, so fehlte im Gleichungssystem (19) eine Zeile: wir haben mehr Unbekannte x_ν als Gleichungen. Das läßt sich nun auf den HILBERTSchen Raum übertragen: nach vorgenommener Orthogonalisierung und Normierung ($\mathfrak{B}_\mu^{(0)2} = 1$) muß auch hier

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\mu\nu}^2 = 1 \quad \text{für alle } \mu$$

sein, wenn in dem unendlichen System (1) keine Gleichung fehlen soll. Auch diese Bedingung läßt sich als eine Bedingung der $a_{\nu\mu}$ (also vor der Orthogonalisierung der \mathfrak{A}_ν) ausdrücken. Gilt diese Bedingung, so sind unsere unendlich vielen Gleichungen eindeutig auflösbar.

11. Die MATHIEUSche Gleichung.

Als Beispiel für die Methode der unendlich vielen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten nehmen wir einen Sonderfall der HILLSchen Gleichung (II. 10. 2)

$$(1) \quad y'' + (\lambda + 2h \cdot \cos x) \cdot y = 0,$$

die sogenannte MATHIEUSche Gleichung. Von dieser suchen wir insbesondere die MATHIEUSchen Funktionen erster Art als Lösung, d. h. Lösungen der Form

$$(2) \quad y = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \cdot \cos \nu x^*.$$

(Also gerade und von der Periode 2π .)

Durch Einsetzen dieses Ansatzes nebst

$$y'' = - \sum \nu^2 \cdot c_\nu \cdot \cos \nu x$$

erhält man

* Vgl. den Aufsatz von STRUTT: Erg. Math. Bd. 1 (1932) Heft 3, wo man weiteres findet.

$$\sum_1^{\infty} (\lambda - \nu^2) \cdot c_\nu \cdot \cos \nu x + \frac{1}{2} \lambda c_0 + h c_0 \cdot \cos x + \\ + 2h \cdot \sum_1^{\infty} c_\nu \cdot \cos \nu x \cdot \cos x = 0,$$

oder

$$\sum_1^{\infty} (\lambda - \nu^2) \cdot c_\nu \cdot \cos \nu x + \frac{1}{2} \lambda c_0 + h c_0 \cdot \cos x + \\ + h \cdot \sum_1^{\infty} c_\nu [\cos(\nu + 1)x + \cos(\nu - 1)x] = 0,$$

oder

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{2} \lambda c_0 + h c_1 \right) + \cos x [(\lambda - 1) c_1 + h c_0 + h c_2] + \\ + \sum_2^{\infty} \cos \nu x [(\lambda - \nu^2) \cdot c_\nu + h c_{\nu-1} + h c_{\nu+1}] = 0. \end{array} \right.$$

Hieraus folgt sofort das System der unendlich vielen homogenen Gleichungen für die unendlich vielen Unbekannten c_ν :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \lambda c_0 + h c_1 = 0 \\ h \cdot c_0 + (\lambda - 1) c_1 + h c_2 = 0 \\ h \cdot c_1 + (\lambda - 2^2) c_2 + h c_3 = 0 \\ \vdots \\ h c_{\nu-1} + (\lambda - \nu^2) c_\nu + h c_{\nu+1} = 0. \end{array} \right.$$

Hier ist die SCHMIDTSche Theorie direkt anwendbar, da in jeder Zeile nur drei Glieder stehen, die Summe der Zeilenquadrate [nach (II. 10. 11): $\sum_\nu a_{\nu\mu}^2$] also existiert. Ebenfalls stellt man unschwer fest, daß alle Zeilen unabhängig voneinander sind (bei beliebigem h und λ). Es muß dann weiter die Theorie SCHMIDTS für die homogenen Gleichungen angewendet werden, die wir nicht einmal angedeutet haben (§ 9, 10, 11 der SCHMIDTSchen Arbeit).

Wollen wir die v. KOCHSche Theorie (II. 10) anwenden, so dividieren wir erst die Zeilen durch $\lambda, \lambda - 1, \lambda - 2^2, \dots, \lambda - \nu^2, \dots$, wobei wir noch annehmen wollen, daß keine dieser Größen null sei. Dann bekommen wir ein Gleichungssystem mit lauter Einsen in der Hauptdiagonale (bis auf die linke obere Ecke). Wir schreiben uns das Koeffizientensystem von (4) auf:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} \frac{1}{2} & \frac{h}{\lambda} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{h}{\lambda-1} & 1 & \frac{h}{\lambda-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{h}{\lambda-2^2} & 1 & \frac{h}{\lambda-2^2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right.$$

Man sieht sofort, daß alle v. KOCHSchen Voraussetzungen erfüllt sind: bis auf $\nu = 0$ ist stets

$$a_{\nu\nu} - 1 = 0,$$

also konvergiert $\sum_{\nu} |a_{\nu\nu} - 1|$ bestimmt. Ferner entnimmt man dem Schema, daß

$$\sum_{\nu, \mu} (a_{\nu\mu} - \delta_{\nu\mu})^2 = \frac{1}{4} + \frac{h^2}{\lambda^2} + 2 \frac{h^2}{(\lambda-1)^2} + 2 \frac{h^2}{(\lambda-2)^2} + \dots$$

ist. Diese Reihe konvergiert wie $\sum 1/\nu^4$. Schließlich konvergiert auch $\sum c_{\nu}^2$, da alle $c_{\nu} = 0$ sind.

Wir können also nach II. 10 die Folge der Determinanten Δ_n bilden, und wir sind dann sicher, daß die Gleichungen

$$\Delta_n = 0$$

bei hinreichend großem n die gesuchte Beziehung zwischen h und λ mit beliebiger Genauigkeit finden lassen.

So gibt z. B. die dritte Näherung

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{h}{\lambda} & 0 \\ \frac{h}{\lambda-1} & 1 & \frac{h}{\lambda-1} \\ 0 & \frac{h}{\lambda-2^2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{h^2}{(\lambda-1)(\lambda-4)} - \frac{h^2}{\lambda(\lambda-1)} = 0,$$

oder

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-4) = h^2(3\lambda-8).$$

Natürlich ist diese Näherung nur für hinreichend kleine λ und h brauchbar.

12. ABELS Integralgleichung.

Diese Integralgleichung, die wir jetzt betrachten wollen, ist vielleicht die älteste (siehe Einleitung!). Sie entstammt folgendem Problem der Mechanik:

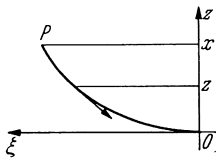


Abb. 17.

Auf einer glatten Bahn in vertikaler Ebene gleitet ein Körper widerstandslos unter alleiniger Einwirkung der Schwerkraft herab. Wie groß ist seine Fallzeit (Abb. 17)?

Um diese Frage beantworten zu können, führen wir folgende Bezeichnungen ein:

x sei die Höhe der Anfangslage P des Körpers, den wir punktförmig annehmen, z sei die Höhe irgendeiner Zwischenlage, und 0 sei die Höhe der Endlage. s sei die Bogenlänge des in der Zeit t vom Körper zurückgelegten Weges.

Nach dem Energiegesetz gilt nun für die Bahngeschwindigkeit des Körpers

$$v \equiv \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(x-z)}$$

($g = 9,81 \text{ m/sec}^2$), daher ist die Fallzeit, die der Körper braucht, um von P nach O zu kommen,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} T(x) &= \int_0^x dt = \int \frac{ds}{\sqrt{2g(x-z)}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{z=x}^0 \frac{s'(z) \cdot dz}{\sqrt{x-z}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_0^x \frac{s'(z) \cdot dz}{\sqrt{x-z}}. \end{aligned} \right.$$

Bei gegebener Bahn $s = s(z)$ gibt uns diese Formel die gesuchte Fallzeit T . Wir fragen nun umgekehrt: $T(x)$ sei als Funktion von x gegeben

$$(2) \quad T(x) = f(x).$$

Welche Kurve $s(z)$ ist dann so beschaffen, daß die Fallzeit für einen Körper, der auf ihr von P nach O fällt, $f(x)$ ist? [Ist $f(x)$ konstant, so liegt das *Problem der Isochronen* vor: man sucht Kurven, bei denen die Fallzeit von der Fallhöhe unabhängig ist.]

Wir suchen also

$$(3) \quad y(z) \equiv -\frac{s'(z)}{\sqrt{2g}} > 0$$

(s' ist negativ, da die Kurve fallen muß). Aus (1) folgt dann für $y(z)$ eine VOLTERRASche Integralgleichung

$$(4) \quad f(x) = \int_0^x \frac{y(z) \cdot dz}{\sqrt{x-z}}$$

mit dem Kern $K = \frac{1}{\sqrt{x-z}}$. Dieser Kern wird von der Ordnung $\frac{1}{2}$ an der Stelle $x = z$ unendlich: er ist daher *nicht quadratisch integrabel*, da zwar

$$\int_0^x \frac{dz}{\sqrt{x-z}},$$

aber nicht mehr

$$\int_0^x \frac{dz}{x-z}$$

existiert (vgl. I. 6f). Die SCHMIDTSche Theorie ist also nicht mehr anwendbar.

Hier hilft uns der Prozeß des „Glättens“ weiter, den wir im nächsten Abschnitt allgemeiner besprechen werden.

Wir multiplizieren (4) mit dem Kern

$$\frac{1}{\sqrt{u-x}}$$

und integrieren nach x von 0 bis u . Wir bekommen so:

$$(5) \quad \int_{x=0}^u \frac{f(x) \cdot dx}{\sqrt{u-x}} = \int_{x=0}^u \frac{dx}{\sqrt{u-x}} \int_{z=0}^x \frac{y(z) \cdot dz}{\sqrt{x-z}}.$$

Das zweifache Integral rechts kann man als Doppelintegral in der x - z -Ebene über das schraffierte Dreieck auffassen (Abb. 18): statt erst wie oben über z von 0 bis x und dann über x von 0 bis u zu integrieren, überstreicht man das Integrationsgebiet, nämlich das schraffierte Dreieck, auch gerade einmal, wenn man erst über x von z bis u und dann über z von 0 bis u integriert. Daher kann man die rechte Seite von (5) auch so schreiben

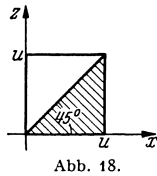


Abb. 18.

$$(6) \quad \int_{z=0}^u \left[\int_{x=z}^u \frac{y(z)}{\sqrt{(u-x)(x-z)}} dx \right] dz = \int_{z=0}^u y(z) \left[\int_{x=z}^u \frac{dx}{\sqrt{(x-z)(u-x)}} \right] dz.$$

Das innere Integral ist der iterierte Kern $K_2(u, z)$; er kann elementar berechnet werden und ergibt den konstanten Wert π . Also bleibt nach (5) und (6)

$$(7) \quad \int_0^u y(z) \cdot dz = \frac{1}{\pi} \int_0^u \frac{f(x) \cdot dx}{\sqrt{u-x}}.$$

l sei die gesamte Bogenlänge, die der Körper auf der Kurve durchläuft; da nach (3)

$$y = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot s'(z)$$

ist, wird also (7):

$$(8) \quad l - s(u) = \frac{1}{\pi} \sqrt{2g} \cdot \int_0^u \frac{f(x) \cdot dx}{\sqrt{u-x}},$$

oder

$$(9) \quad s'(u) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{2g} \frac{d}{du} \int_0^u \frac{f(x) \cdot dx}{\sqrt{u-x}}.$$

Damit die Kurve eine nach der Vertikalkoordinate u differenzierbare Bogenlänge besitzt, muß daher

$$\int_0^u \frac{f(x) \cdot dx}{\sqrt{u-x}}$$

eine differenzierbare Funktion von u sein, was wegen des Nenners $\sqrt{u-x}$ im Integral auch bei stetigem $f(x)$ keineswegs selbstverständlich ist.

Das Problem der Isochrone ($f(x) = T = \text{const}$) löst sich jetzt so: es ist doch

$$T \cdot \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{u-x}} = 2T \cdot \sqrt{u},$$

also nach (9)

$$s' = \frac{ds}{dz} = -\sqrt{2g} \frac{T}{\pi} \frac{1}{\sqrt{z}}.$$

ξ sei die horizontale Koordinate der gesuchten Kurve (s. Abb. 17), so daß

$$ds^2 = d\xi^2 + dz^2 = 2g \frac{T^2}{\pi^2} \frac{1}{z} \cdot dz^2,$$

also

$$(10) \quad d\xi = dz \cdot \sqrt{2g \frac{T^2}{\pi^2} \frac{1}{z} - 1} = dz \cdot \frac{\sqrt{a-z}}{\sqrt{z}},$$

worin

$$a = 2g \cdot \frac{T^2}{\pi^2} > 0$$

ist. Setzt man weiter (da $0 < z < a$ sein muß)

$$(11) \quad z = a \cdot \sin^2 \varphi = \frac{a}{2} (1 - \cos 2\varphi),$$

so folgt aus (10)

$$(12) \quad \xi = \int_0^\varphi 2a \cdot \cos^2 \varphi \cdot d\varphi = \frac{a}{2} (2\varphi + \sin 2\varphi).$$

($\varphi = 0$ ist in den Anfangspunkt 0 gelegt worden, wo z und ξ ebenfalls null werden.) Die Kurve bestimmt sich also nach (11) und (12) als eine *spitze Zykloide*.

Wir haben bisher nur bewiesen, daß, falls überhaupt eine Lösung unseres Problems existiert, es die in (7) gefundene ist. Durch Einsetzen dieser Lösung in die Integralgleichung (4) ist nun noch, besonders im allgemeinen Fall, nachzuweisen, daß sie wirklich dieser Gleichung genügt. Man erkennt so in der Tat die Richtigkeit unserer Lösung (vgl. das Buch von BÔCHER).

13. Singuläre Kerne. Beispiele.

In der Praxis sind die Kerne meist regulär im Sinne von I. 6f, sogar analytisch, bis auf die Stelle $x = z$ oder $x = 0$ oder $x = l$. Der Kern ist jedenfalls dann quadratisch integrabel, wenn die Ordnung des eventuellen Unendlichwerdens kleiner als $1/2$ ist (vgl. II. 12). Daher stört eine logarithmische Unstetigkeit nicht, da $\lg|x-z|$ von niederer Ordnung unendlich wird für $x = z$ als jede Potenz $|x-z|^\alpha$; sie zerstört auch nicht die mittlere Stetigkeit des Kerns (vgl. I. 6f).

Ist die Ordnung des Unendlichwerdens aber $1/2$ oder größer als $1/2$, jedoch kleiner als 1 (sonst ist der Kern überhaupt nicht mehr integrabel),

so ist der Kern nicht mehr quadratisch integabel. Man kann dann aber die Integralgleichung

$$(1) \quad y(x) = \lambda \cdot \int_0^l K(x, z) \cdot y(z) \cdot dz + f(x)$$

„glätten“, indem man sie mit $K(u, x)$ multipliziert und nach x integriert, womit man

$$\int_0^l y(x) \cdot K(u, x) \cdot dx = \lambda \int_0^l K_2(u, z) \cdot y(z) \cdot dz + \int_0^l K(u, x) \cdot f(x) \cdot dx$$

erhält (K sei im folgenden als symmetrisch vorausgesetzt). Die linke Seite dieser Gleichung ist nach (1) aber gleich $\frac{1}{\lambda} (y(u) - f(u))$, so daß man schließlich

$$(2) \quad y(u) = \lambda^2 \int_0^l K_2(u, z) \cdot y(z) \cdot dz + f(u) + \lambda \int_0^l K(u, x) \cdot f(x) \cdot dx$$

bekommt.

K_2 ist in der Regel „glatter“ als K . Ist z. B. K von der Form ($x = z$ sei die einzige singuläre Stelle)

$$\frac{H(x, z)}{|x - z|^\alpha} \quad \alpha < 1,$$

wo $H(x, z)$ stetig ist, so zeigt man leicht, daß

$$K_2(x, z) = \int_0^l \frac{H(x, u) \cdot H(u, z)}{|x - u|^\alpha \cdot |z - u|^\alpha} \cdot du$$

die Form

$$\frac{H_2(x, z)}{|x - z|^{2\alpha - 1}}$$

hat, wo H_2 regulär ist. (Beweis ähnlich wie am Schlusse von I. 6f.) Es ist aber

$$2\alpha - 1 = \alpha - (1 - \alpha) < \alpha,$$

da $\alpha < 1$. Eine nochmalige Glättung von (2), d. h. Übergang von K_2 zu K_4 , ergibt als Ordnung des Unendlichwerdens von K_4

$$2(2\alpha - 1) - 1 = 4\alpha - 3,$$

eine abermalige Glättung ergibt die Ordnung

$$2(4\alpha - 3) - 1 = 8\alpha - 7,$$

und ein n . Schritt ergibt schließlich die Ordnung

$$2^n \alpha - (2^n - 1) = 1 - 2^n(1 - \alpha).$$

Wenn $\alpha < 1$, wird $1 - 2^n(1 - \alpha)$ sicher einmal null oder negativ, also auch einmal kleiner als $1/2$. Der zugehörige Kern K_n ist dann quadratisch integabel; auf ihn wird also nach I. 6f die SCHMIDTSche Theorie und schließlich auch die FREDHOLMSche anwendbar.

Mit anderen Worten: die Konvergenz, bzw. Gleichheit von

$$K_n(x, z) = \sum \frac{1}{\lambda^n} \varphi_n(x) \cdot \varphi_n(z)$$

tritt erst bei den höheren Kernen ein (vgl. Satz 21 a in I. 6g). Das ändert wenig an den Ergebnissen der SCHMIDTSchen Theorie.

Dagegen ändert sich das Ergebnis ganz wesentlich, wenn die Ordnung des Unendlichwerdens des Kernes (etwa für $x = z$ oder an den Enden des Integrationsintervalles) die erste wird (d. h. K wird unendlich wie z. B. $1/x - z$). Es braucht dann weder der Satz von der Existenz eines Eigenwertes noch der von ihrer diskreten Lage richtig zu bleiben. Wir werden im allgemeinen kontinuierliche Spektren zu erwarten haben, so, wie wenn in der HILBERTSchen Theorie nach Schluß von II. 9 die bilineare Form

$$\sum a_{\nu\mu} x_\nu y_\mu$$

zwar noch beschränkt, aber nicht mehr vollstetig ist.

Derartige Verhältnisse liegen auch bei Integralgleichungen mit unbegrenztem Integrationsintervall vor

$$(3) \quad y(x) = \int_0^\infty K(x, z) \cdot y(z) \cdot dz + f(x).$$

Setzt man

$$z = \lg \frac{1}{t} = -\lg t, \quad x = \lg \frac{1}{\tau}, \quad dz = -\frac{dt}{t},$$

so folgt

$$(4) \quad Y(\tau) = \lambda \int_0^1 K(-\lg \tau, -\lg t) \cdot Y(t) \frac{dt}{t} + F(\tau),$$

wenn man noch

$$y(x) = y(-\lg \tau) = Y(\tau), \quad f(x) = f(-\lg \tau) = F(\tau)$$

setzt. Der Kern der neuen Integralgleichung (4)

$$\frac{1}{t} K(-\lg \tau, -\lg t)$$

wird aber für $t = 0$ in der Regel unendlich von der ersten Ordnung, wenn $K(x, z)$ für $z \rightarrow \infty$ beschränkt bleibt.

Hat der Kern die Form

$$\frac{H(x, z)}{x - z}$$

(H sei stetig), so muß man dem Integral der Integralgleichung (1), damit es überhaupt einen Sinn hat, den sogenannten CAUCHYSchen Hauptwert geben, d. h. den Wert

$$(4a) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{z-\varepsilon} + \int_{z+\varepsilon}^1 \right),$$

oder man muß einen anderen Wert vereinbaren.

Wir betrachten nun mehrere *Beispiele* für derartige singuläre Kerne.

1. Wir machen folgende Voraussetzungen: die Funktion $f(x + iy) = f(z)$ sei in einem Gebiet G der komplexen Zahlenebene regulär analytisch, und eine geschlossene Kurve C liege so in diesem Gebiet, daß auch das Innere von C ganz zu G gehört. Dann gilt bekanntlich die CAUCHYSche Formel

$$(5) \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) \cdot dz}{z - \zeta} = \begin{cases} f(\zeta) & \text{für } \zeta \text{ innerhalb von } C \\ 0 & \text{für } \zeta \text{ außerhalb von } C. \end{cases}$$

(Abb. 19). Wenn aber ζ auf C liegt, und wenn diese Kurve in ζ eine Tangente hat, gilt

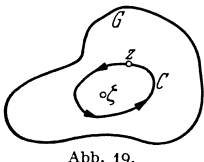


Abb. 19.

$$(6) \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) \cdot dz}{z - \zeta} = \frac{1}{2} f(\zeta);$$

hierbei ist für das Integral der oben erklärte CAUCHYSche Hauptwert zu nehmen. (6) ist eine singuläre Integralgleichung für $f(\zeta)$ mit dem Kern $1/z - \zeta$ und dem Eigenwert $1/\pi i$; alle im geschilderten Sinne in dem Gebiet G regulären Funktionen $f(\zeta)$ sind Eigenfunktionen (daß alle Funktionen komplex sind, ist unwesentlich). Hier sehen wir schon eine Abweichung von den Verhältnissen bei regulären Kernen: zu einem Eigenwert ($\lambda = 1/\pi i$) gehören unendlich viele unabhängige Eigenfunktionen $f(\zeta)$. Der Kern ist auch noch antisymmetrisch; vgl. II. 5!

2. Das *FOURIERSche Integraltheorem* kann im einfachsten Fall so formuliert werden:

Ist $f(x)$ stetig, von beschränkter Schwankung, und ist es absolut integrel von 0 bis ∞ , so existiert

$$(7) \quad g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} f(z) \cdot \cos(xz) \cdot dz, \quad x \geq 0,$$

und diese Gleichung läßt sich umkehren zu

$$(8) \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} g(z) \cdot \cos(xz) \cdot dz.$$

[$f(x)$ ist z. B. von beschränkter Schwankung in $0 \dots \infty$, wenn es in jedem endlichen Intervall $0 \dots l$ nur endlich viele Maxima und Minima hat; es ist in $0 \dots \infty$ absolut integrel, wenn $\int_0^{\infty} |f(x)| \cdot dx$ existiert.]

Die Addition von (7) und (8) gibt mit $h(x) = f(x) + g(x)$:

$$(9) \quad h(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} h(z) \cdot \cos(xz) \cdot dz.$$

Der symmetrische beschränkte Kern $\cos(xz)$ hat also im Intervall $0 \dots \infty$ beim Eigenwert $\sqrt{2/\pi}$ (dies ist übrigens sein einziger) die unendlich vielen Eigenfunktionen $h = f + g$.

3. HILBERT gab ein ähnliches Beispiel an. Es läßt sich

$$(10) \quad f(x) = \int_0^1 \operatorname{ctg} \pi(x-z) \cdot g(z) \cdot dz$$

bei

$$\int_0^1 g(z) \cdot dz = 0$$

umkehren zu

$$(11) \quad g(x) = - \int_0^1 \operatorname{ctg} \pi(x-z) \cdot f(z) \cdot dz$$

mit

$$\int_0^1 f(z) \cdot dz = 0.$$

[Da $\operatorname{ctg} x$ an der Stelle 0 einen Pol besitzt, sind diese Integrale als CAUCHYSche Hauptwerte (4a) aufzufassen.]

Setzen wir hier

$$h(x) = f(x) + i \cdot g(x),$$

so erhalten wir aus (10) und (11)

$$(12) \quad h(x) = -i \int_0^1 \operatorname{ctg} \pi(x-z) \cdot h(z) \cdot dz.$$

Also hat der singuläre antisymmetrische Kern $\operatorname{ctg} \pi(x-z)$ ($= -\operatorname{ctg} \pi(z-x)$) zu dem Eigenwert $-i$ unendlich viele komplexe Eigenfunktionen, natürlich ebenso zu $+i$.

4. Von PICARD rührt folgendes einfache Beispiel für einen singulären Kern her. Man zeigt leicht, daß die Integralgleichung

$$(13) \quad y(x) = \lambda \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-z|} \cdot y(z) \cdot dz + f(x)$$

bei zweimal differenzierbarem $f(x)$ mit der Differentialgleichung

$$(14) \quad y'' + (2\lambda - 1) \cdot y = g(x) \equiv f'' - f$$

wesentlich identisch ist. Man führe nur die rechtsstehende Operation aus. Die Lösung der zu (14) homogenen Gleichung

$$y'' + (2\lambda - 1) \cdot y = 0$$

ist

$$(15) \quad y = A \cdot e^{\mu x} + B \cdot e^{-\mu x}$$

mit

$$(16) \quad \mu^2 = 1 - 2\lambda.$$

A und B sind konstant.

Die selbstverständliche Forderung, daß das Integral in (13) existieren soll, liefert uns noch als Bedingung für den reellen Teil von μ :

$$(17) \quad -1 < \Re(\mu) < +1.$$

Alle μ , die (17) erfüllen, liefern in (15) Lösungen der homogenen Integralgleichung ($f(x) \equiv 0$): die dazugehörigen λ sind also Eigenwerte von (13). Diese λ erfüllen aber das Innere einer Parabel der komplexen λ -Ebene; die Eigenwerte liegen also nicht mehr diskret, wir haben vielmehr ein kontinuierliches Spektrum. Da A und B frei bleiben, gibt es zu jedem dieser λ noch zwei unabhängige Eigenfunktionen. Dabei ist der Kern $e^{-|x-z|}$ symmetrisch und beschränkt; er konvergiert sogar für $x \rightarrow \pm\infty$ stärker als jede Potenz $|x-z|^\alpha$ gegen null. Die Abweichung von den Ergebnissen der SCHMIDTSchen Theorie wird hier also allein durch das Intervall $-\infty \dots \infty$ hervorgerufen.

Zur Literatur ist noch zu bemerken, daß die Integralgleichung

$$y(x) = \lambda \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} K(z-x) \cdot y(z) \cdot dz$$

von BOCHNER¹ untersucht wurde, während N. WIENER und E. HOPF² die schwierigere Gleichung

$$y(x) = \lambda \cdot \int_0^{\infty} K(z-x) \cdot y(z) \cdot dz$$

betrachteten.

An diesen Teil der Theorie der singulären Kerne grenzt auch das ganze Kapitel der *Integraltransformationen* an, wie z. B. die Theorie der LAPLACESchen *Transformation*³

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xz} \cdot g(z) \cdot dz,$$

über die eine umfangreiche Spezialliteratur besteht. Wir dienen unseren Lesern vielleicht am besten, wenn wir auf die zahlreichen Arbeiten von DOETSCH mit ihren vielen Anwendungen hinweisen, besonders auf die zusammenfassenden und orientierenden Aufsätze in dem Jahresbericht d. Dtsch. Math. Ver. und in CRELLES *Journal*. DOETSCH hat in diesen Arbeiten auch eine strenge Grundlage für die HEAVISIDESche Operatorenmethode geschaffen.

Die ältere Literatur über singuläre Integralgleichungen findet man in dem Enzyklopädieartikel von HELLINGER und TOEPLITZ verzeichnet.

¹ BOCHNER: Berl. Akad. Ber. 1930.

² WIENER, N. u. E. HOPF: Berl. Akad. Ber. 1931.

³ DOETSCH, G.: Theorie und Anwendung der LAPLACE-Transformation. Berlin: Julius Springer 1937.

14 a. Eine Integralgleichung aus der Theorie der Tragflügel.

Nach FUCHS-HOPF-SEEWALD¹ spielt in der Theorie der Tragflügel die Integralgleichung

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{y(z) \cdot dz}{z-x} = f(x) \quad -a < x < +a$$

eine Rolle; $f(x)$ ist gegeben, $y(z)$ gesucht. Das Integral ist als CAUCHY-scher Hauptwert zu verstehen; die Integralgleichung ist (wegen der Stelle $x = z$) singular.

(Vergleiche zum folgenden das Beispiel in II. 1!)
Wir setzen zunächst

$$(2) \quad z = -a \cdot \cos \psi, \quad x = -a \cdot \cos \varphi, \quad dz = a \cdot \sin \psi \cdot d\psi$$

und erhalten damit

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{y(-a \cos \psi) \cdot \sin \psi \cdot d\psi}{\cos \varphi - \cos \psi} = f(-a \cdot \cos \varphi).$$

Es sei weiter

$$(4) \quad \begin{cases} y(-a \cdot \cos \psi) \cdot \sin \psi = Y(\psi) \\ f(-a \cdot \cos \varphi) = F(\varphi) \end{cases}$$

gesetzt. Dann nimmt die Integralgleichung (3) die Form an

$$(5) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{Y(\psi) \cdot d\psi}{\cos \varphi - \cos \psi} = F(\varphi).$$

Alle hier vorkommenden Funktionen sind im Intervall $0 \dots \pi$ erklärt oder gesucht. Für dieses Intervall spielen nun die Funktionen $\cos n\varphi$ ($n=0, 1, 2, \dots$) die Rolle eines abgeschlossenen Systems (s. II. 1 u. II. 15!). Setzen wir insbesondere $Y(\psi) = \cos n\psi$, so erhalten wir den *Hilfssatz*:

Es ist

$$(6) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\psi}{\cos \varphi - \cos \psi} d\psi = -\frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi} \quad \begin{matrix} n = 0, 1, 2, \dots \\ 0 < \varphi < \pi. \end{matrix}$$

Zum Beweis schreiben wir, was wir bei geraden Funktionen stets tun dürfen, für die linke Seite von (6)

$$(7) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos n\psi}{\cos \varphi - \cos \psi} d\psi$$

und setzen jetzt

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \frac{1}{2} (e^{i\psi} + e^{-i\psi}), & \cos n\psi &= \frac{1}{2} (e^{in\psi} + e^{-in\psi}), \\ d\psi &= d(e^{i\psi}) \cdot e^{-i\psi} \cdot \frac{1}{i}. \end{aligned}$$

¹ FUCHS-HOPF-SEEWALD: Aerodynamik Bd. 2, 2. Aufl. S. 82f.

Wir erhalten so aus (7)

$$(8) \quad -\frac{1}{2i\pi} \int_{\psi=-\pi}^{\psi=\pi} \frac{e^{in\psi} + e^{-in\psi}}{e^{2i\psi} + 1 - 2\cos\varphi e^{i\psi}} d(e^{i\psi}).$$

Wir setzen noch

$$e^{i\psi} = z$$

und führen demnach die Integration in (8) über den Einheitskreis der komplexen z -Ebene aus:

$$(9) \quad -\frac{1}{2i\pi} \oint \frac{z^n + z^{-n}}{z^2 + 1 - 2\cos\varphi \cdot z} dz.$$

Nun hat die in (9) zu integrierende Funktion singuläre Stellen: erstens auf dem Rande des Einheitskreises, nämlich dort, wo

$$z^2 + 1 - 2\cos\varphi \cdot z = 0$$

ist, d. h. wo

$$z = \cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi - 1} = \cos\varphi \pm i \cdot \sin\varphi = e^{\pm i\varphi}$$

ist, und zweitens für $z = 0$.

Nach dem Residuensatz der Funktionentheorie können die Residuen des Integranden in (9) für diese drei singulären Stellen gesondert berechnet und dann addiert werden: die Summe dieser Residuen gibt dann den Wert des Integrales (9).

Nach (II. 13. 6) ergeben die beiden ersten singulären Stellen gemäß der Darstellung von (9) — es handelt sich wieder um Hauptwerte —

$$-\frac{1}{2i\pi} \oint \frac{z^n + z^{-n}}{(z - e^{i\varphi})(z - e^{-i\varphi})} dz$$

den Anteil

$$-\frac{1}{2} \left\{ \frac{e^{ni\varphi} + e^{-ni\varphi}}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}} + \frac{e^{-in\varphi} + e^{in\varphi}}{e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}} \right\},$$

der im ganzen null ergibt. Es bleibt daher nur noch das Residuum für $z = 0$ zu bestimmen. Hierbei gibt das Glied mit z^n überhaupt nichts, es bedarf nur

$$(10) \quad -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z^{-n}}{(z - e^{i\varphi})(z - e^{-i\varphi})} dz$$

einer Untersuchung.

Das Integral in (10) können wir jetzt, da die Wirkung der Randstellen $e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}$ untersucht worden ist, auf einen kleinen Kreis um $z = 0$ erstrecken. Dort gilt die Entwicklung

$$\begin{aligned} \frac{z^{-n}}{(z - e^{i\varphi})(z - e^{-i\varphi})} &= \frac{z^{-n}}{(1 - ze^{-i\varphi})(1 - ze^{i\varphi})} \\ &= z^{-n} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \cdot e^{-i\nu\varphi} \right) \cdot \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} z^{\mu} \cdot e^{i\mu\varphi} \right) \\ &= \sum_{\nu, \mu=0}^{\infty} z^{\nu + \mu - n} \cdot e^{i(\mu - \nu)\varphi}. \end{aligned}$$

Von dieser Reihe gibt nach dem Residuensatz aber nur das Glied mit $1/z$, also mit $\nu + \mu = n - 1$, etwas von null Verschiedenes, nämlich

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{\nu + \mu = n - 1} e^{i(\mu - \nu)\varphi} &= \sum_{\nu = 0}^{n - 1} e^{i(n - 1 - 2\nu)\varphi} = e^{i(n - 1)\varphi} \cdot \frac{1 - e^{-2n \cdot i \cdot \varphi}}{1 - e^{-2i\varphi}} \\ &= \frac{e^{i(n - 1)\varphi} - e^{(-n - 1) \cdot i \cdot \varphi}}{1 - e^{-2i\varphi}} = \frac{e^{in\varphi} - e^{-in\varphi}}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}} = \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}. \end{aligned} \right.$$

Das ist bis auf das Vorzeichen der Wert des Integrales (9), d. h. des Integrales (7), womit der Hilfssatz (6) bewiesen ist.

In diesem Hilfssatz ist für $n = 0$ der Sonderfall

$$(12) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\psi}{\cos \varphi - \cos \psi} = 0$$

enthalten, so daß sicher im $Y(\psi)$ eine additive Konstante frei bleibt.

Nun können wir daran gehen, die Integralgleichung (5) unter geringen Voraussetzungen zu lösen.

Auch die $\sin n\varphi$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) bilden im Intervall $0 \leq \varphi \leq \pi$ ein abgeschlossenes System. Wir setzen nun voraus, daß

$$F(\varphi) \cdot \sin \varphi \equiv f(-a \cdot \cos \varphi) \cdot \sin \varphi$$

die FOURIERSche Entwicklung

$$-\frac{1}{2} \sum b_n \cdot \sin n\varphi$$

gestattet, so daß

$$(13) \quad F(\varphi) = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}$$

ist. Dann ist nach dem Hilfssatz (6) und nach (12) offenbar

$$(14) \quad Y(\psi) = \frac{1}{2} b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \cos n\psi$$

eine Lösung für $Y(\psi)$, wo b_0 noch frei bleibt; es muß nur angenommen werden, daß die Reihe

$$\sum b_n \cdot \cos n\psi$$

auch konvergiert. Das gesuchte $y(z)$ bestimmt sich dann nach (4) zu

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} y(z) = y(-a \cdot \cos \psi) &= \frac{Y(\psi)}{\sin \psi} = \frac{1}{\sin \psi} \left(\frac{1}{2} b_0 + \sum b_n \cdot \cos n\psi \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2}}} \cdot \left(\frac{1}{2} b_0 + \sum b_n \cdot \cos n\psi \right), \end{aligned} \right.$$

wo dann nach (2) für $\cos n\psi$ die bekannten Polynome in

$$\cos \psi = -\frac{z}{a}$$

eingesetzt werden können.

Suchen wir nur Lösungen, die zu der Klasse der so darstellbaren Funktionen gehören, so sind unsere Lösungen (15) offenbar die einzigen.

Auch flugtechnisch bemerkenswert ist, daß $y(z)$ an den Enden des Intervalls $0 \dots \pi$ unendlich werden kann wie

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2}}}.$$

14b. Die Integralgleichung von L. FÖPPL (Härteproblem von HERTZ).

L. FÖPPL¹ hat die Ableitung der HERTZschen Härteformel auf die Integralgleichung

$$(1) \quad \int_{-a}^{+a} \frac{p(\xi) \cdot d\xi}{x^2 - \xi^2} = f(x)$$

zurückgeführt; insbesondere soll die gegebene Funktion $f(x)$ konstant sein. $p(x)$ wird gesucht. Das durch HERTZ bekannte Resultat wird von FÖPPL nur verifiziert; daher wollen wir es hier ableiten, indem wir die vorstehende Integralgleichung mit nur wenig einschränkenden Voraussetzungen über $f(x)$ lösen; die Methode ist dieselbe wie in 14a.

Die Integralgleichung (1) ist von erster Art, sie hat einen bei $x = \pm \xi$ singulären Kern; daher ist das Integral als CAUCHYScher Hauptwert zu verstehen.

Wir nehmen wie FÖPPL an, daß $f(x)$ und $p(x)$ gerade Funktionen sind. Wir setzen

$$(2) \quad \xi = a \cdot \sin \varphi$$

($-a \leq \xi \leq +a$) und erhalten aus (1)

$$(3) \quad a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{p(a \cdot \sin \varphi) \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi}{x^2 - a^2 \cdot \sin^2 \varphi} = f(x).$$

Ferner setzen wir

$$(4) \quad 2\varphi = \psi$$

und verlangen überdies von der gesuchten Funktion $p(x)$, daß $p(a \cdot \sin \varphi) \cdot \cos \varphi$ die gleichmäßig konvergente Entwicklung gestattet

$$(5) \quad p(a \sin \varphi) \cdot \cos \varphi = \frac{1}{2} c_0 + \sum_1^{\infty} c_n \cdot \cos n\psi = \frac{1}{2} c_n \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{in\psi},$$

¹ FÖPPL, L.: Z. angew. Math. Mech. Bd. 16, Heft 3, S. 169, Formel 19.

wobei wir noch

$$(6) \quad c_{-n} = c_{+n}$$

setzen $\left(\cos n\psi = \frac{1}{2} (e^{in\psi} + e^{-in\psi}) \right)$; c_{+n} ist reell).

Diese Voraussetzungen über $p(x)$ drücken neben gewissen Regularitätseigenschaften dieser Funktion aus, daß erstens $p(x)$ eine gerade Funktion ist, und daß zweitens $p(a \cdot \sin \varphi) \cdot \cos \varphi$ die Periode π besitzt, da in der Entwicklungsformel (5) nur die geraden Vielfachen von φ auftreten. $p(a \cdot \sin \varphi)$ ist zunächst nur im Intervall $-\pi/2 \cdots +\pi/2$ definiert, daher muß, um die FOURIER-Entwicklung (5) zu ermöglichen, über die Grenzen $\pm \pi/2$ hinaus periodisch fortgesetzt werden; das bedeutet aber keine Beschränkung für $p(x)$.

Wir führen nun ein

$$(7) \quad z = e^{i\psi}, \quad \frac{dz}{z} = i d\psi \quad |z| = 1.$$

Damit wird

$$(8) \quad p(a \sin \varphi) \cdot \cos \varphi = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n \equiv F(z).$$

Damit gehen wir in die Integralgleichung (3) hinein

$$(9) \quad f(x) = \frac{a}{2i} \oint \frac{F(z) \cdot dz}{\frac{1}{4} a^2 \left[z^2 + 1 + \frac{4}{a^2} z \left(x^2 - \frac{1}{2} a^2 \right) \right]},$$

denn es ist nach (7)

$$\begin{aligned} x^2 - a^2 \cdot \sin^2 \varphi &= x^2 - \frac{a^2}{2} (1 - \cos \psi) \\ &= x^2 - \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} a^2 \cdot \frac{1}{z} \left[z^2 + 1 + \frac{4}{a^2} z \left(x^2 - \frac{1}{2} a^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

φ läuft in (3) von $-\pi/2$ bis $+\pi/2$, also läuft ψ nach (4) von $-\pi$ bis $+\pi$, und z nach (7) von -1 bis -1 : die Integration muß also in (9) über den ganzen Einheitskreis erstreckt werden.

Im Nenner des Integranden von (9) steht eine Funktion zweiten Grades in z ; sie möge die Nullstellen z_1 und z_2 haben:

$$(10) \quad z^2 + 1 + \frac{4}{a^2} z \left(x^2 - \frac{1}{2} a^2 \right) = (z - z_1) (z - z_2).$$

(9) wird demnach

$$(11) \quad f(x) = \frac{2}{i a} \cdot \oint \frac{F(z) \cdot dz}{(z - z_1) \cdot (z - z_2)}.$$

z_1 und z_2 liegen natürlich auf dem Integrationsweg (dem Einheitskreis), und da der Nenner eine reelle Funktion ist, müssen sie konjugiert komplex sein

$$(12) \quad z_1 = e^{i\chi}, \quad z_2 = e^{-i\chi}.$$

Dann ist nach (10)

$$(13) \quad z_1 + z_2 = 2 \cos \chi = 2 - \frac{4}{a^2} x^2.$$

Nach (8) wird weiter

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{i a} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \oint \frac{z^n \cdot dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = \\ &= \frac{1}{i a} \left(c_0 \cdot \oint \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)} + \sum_1^{\infty} c_n \cdot \oint \frac{z^n + z^{-n}}{(z-z_1)(z-z_2)} dz \right). \end{aligned} \right.$$

Man hat also nur noch die Integrale

$$(15) \quad \oint \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}, \quad \oint \frac{z^n + z^{-n}}{(z-z_1)(z-z_2)} dz$$

auszurechnen. Diese Aufgabe ist bereits in II. 14a erledigt worden.

Danach bekommen wir (vgl. II. 14a. 11)

$$(16) \quad f(x) = \frac{2\pi}{a} \sum_1^{\infty} c_n \cdot \frac{\sin n \chi}{\sin \chi}.$$

Dabei ist nach (13)

$$\cos \chi = 1 - \frac{2x^2}{a^2},$$

oder

$$1 - \cos \chi = \frac{2x^2}{a^2},$$

$$(17) \quad x = a \cdot \sin \frac{\chi}{2}.$$

Wir haben also das Ergebnis gewonnen:

Wenn die FÖPPLSche Integralgleichung

$$\int_{-a}^{+a} \frac{p(\xi) \cdot d\xi}{x^2 - \xi^2} = f(x)$$

eine Lösung $p(\xi)$ der Form

$$p(\xi) \cdot \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2}} = p(a \cdot \sin \varphi) \cdot \cos \varphi = \frac{1}{2} c_0 + \sum_1^{\infty} c_n \cos 2n \varphi$$

haben soll, muß $f(x)$ die Form haben

$$f(x) \equiv f\left(a \cdot \sin \frac{\chi}{2}\right) = \frac{2\pi}{a} \cdot \sum_1^{\infty} c_n \frac{\sin n \chi}{\sin \chi}$$

und umgekehrt.

Um also $p(\xi)$ zu finden, setze man für $-a \leq x \leq +a$

$$x = a \cdot \sin \frac{\chi}{2}$$

und entwickle die ungerade Funktion

$$f(x) \cdot \sin \chi = f\left(a \cdot \sin \frac{\chi}{2}\right) \cdot \sin \chi$$

in die Reihe

$$\frac{2\pi}{a} \cdot \sum_1^{\infty} c_n \sin n \chi.$$

Dann wird mit

$$\xi = a \cdot \sin \varphi$$

unser gesuchtes $p(\xi)$ nach (5)

$$(18) \quad p(\xi) = \frac{1}{\cos \varphi} \left(\frac{1}{2} c_0 + \sum_1^{\infty} c_n \cos 2n \varphi \right).$$

Hierin bleibt c_0 frei, es muß aus der Bedingung bestimmt werden, daß $p(\xi)$ für $\varphi = \pm \pi/2$ endlich bleiben soll.

Bei FÖPPL ist

$$f(x) = \text{const} = \frac{2\pi}{a} \cdot c_1,$$

alle anderen c_n sind also null; $p(\xi)$ wird

$$p(\xi) = \frac{1}{\cos \varphi} \left(\frac{1}{2} c_0 + c_1 \cos 2\varphi \right).$$

Damit dies für $\varphi = \pm \pi/2$ endlich bleibt, muß

$$\frac{1}{2} c_0 = c_1$$

sein, also ist

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = \frac{1}{\cos \varphi} c_1 (1 + \cos 2\varphi) = 2 c_1 \cdot \cos \varphi \\ = 2 c_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{a^2}}. \end{array} \right.$$

Das ist die HERTZSCHE Lösung.

15. Einige weitere Orthogonalsysteme und ihre Kerne.

Das System der $\sin \frac{\nu \pi x}{l}$ ist ein vollständiges Orthogonalsystem für das Intervall $0 \dots l$. Ebenso ist 1 zusammen mit den $\cos \frac{\nu \pi x}{l}$ ein solches (vgl. II. 1!). Beide zusammen bilden das bekannte Orthogonalsystem für das Intervall der doppelten Länge $-l \dots +l$.

Für das Intervall von -1 bis $+1$ bilden auch die LEGENDRESCHEN Kugelfunktionen (s. I. 6e, S. 62) ein Orthogonalsystem. Es sind Polynome. Man kann sie bis auf einen Normierungsfaktor durch

$$\frac{d^n (1-x^2)^n}{d x^n}$$

darstellen. Denn erstens sind das ersichtlich Polynome n -ten Grades, zweitens sind diese Polynome orthogonal. Es ist nämlich für $m > n$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^n \cdot \frac{d^m}{dx^m} (1-x^2)^m dx$$

nach partieller Integration gleich

$$\begin{aligned} & \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^n \cdot \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (1-x^2)^m \Big|_{-1}^{+1} - \\ & - \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (1-x^2)^n \cdot \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (1-x^2)^m dx. \end{aligned}$$

Der Ausdruck vor dem Integral ist null, weil bei weniger als m -maliger Differentiation mindestens einmal der Faktor $1-x^2$ übrigbleibt, der an beiden Grenzen verschwindet. Mit dem zweiten Glied setzt man das Verfahren fort, bis der erste Faktor

$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} (1-x^2)^n \equiv 0$$

geworden ist, während als zweiter Faktor

$$\frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}} (1-x^2)^m$$

übrigbleibt, was immer noch eine Differentiation bedeutet (wegen $m > n$), eventuell die nullte. Also kommt identisch null heraus, w. z. b. w.

Man kann nun in ähnlicher Weise auch Polynome finden, die zwar nicht selbst, aber nach Multiplikation mit einem geeigneten positiven Faktor für unendlich große Intervalle orthogonal werden.

So sind die LAGUERRESCHEN Polynome durch

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n (x^n e^{-x})}{dx^n}$$

erklärt. Es sind ersichtlich Polynome. Es ist

$$L_0(x) \equiv 1,$$

$$L_1(x) = e^x \frac{d}{dx} (x e^{-x}) = 1 - x,$$

$$L_2(x) = e^x \frac{d^2}{dx^2} (x^2 e^{-x}) = 2 - 2 \cdot 2x + x^2 \quad \text{usw.}$$

Für sie gilt

$$\int_0^\infty L_n(x) L_m(x) e^{-x} dx = 0 \quad n \neq m,$$

während

$$\int_0^\infty L_n^2(x) e^{-x} dx = (n!)^2 \quad \text{ist.}$$

Es bilden also die

$$L_n(x) e^{-\frac{1}{2}x}$$

ein Orthogonalsystem für das Intervall $0 \dots \infty$. Man beweist dies ähnlich wie vorhin, indem man den Satz schreibt:

$$\int_0^{\infty} e^x \frac{d^n (x^n e^{-x})}{dx^n} \cdot \frac{d^m (x^m e^{-x})}{dx^m} dx = 0 \quad \text{für } m > n.$$

Partielle Integration gibt

$$e^x \frac{d^n (x^n e^{-x})}{dx^n} \cdot \frac{d^{m-1} (x^m e^{-x})}{dx^{m-1}} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{d}{dx} e^x \frac{d^n (x^n e^{-x})}{dx^n} \cdot \frac{d^{m-1} (x^m e^{-x})}{dx^{m-1}} dx.$$

Der Ausdruck vor dem Integral ist wieder an beiden Enden null: für $x=0$ bleibt ein Faktor x übrig, für $x \rightarrow \infty$ sorgt der Faktor e^{-x} für die Konvergenz gegen null. Das zweite Glied formt man abermals durch partielle Integration um und fährt so fort, bis durch fortgesetztes Differenzieren das erste Polynom aufgebraucht ist. Für die Glieder vor dem Integral lassen sich stets dieselben Schlüsse ziehen.

Für das Intervall $-\infty \dots +\infty$ leisten die *HERMITESchen Polynome*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$$

dieselben Dienste. Es sind Polynome n -ten Grades und es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 0 \quad n \neq m,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m^2(x) e^{-x^2} dx = 2^m m! \sqrt{\pi}.$$

Beweis für die erste Tatsache wie vorhin.

Zu einem Orthogonalsystem kann man nun in der mannigfaltigsten Weise symmetrische *Kerne* bilden. Zum Beispiel kann man zu den $\sin \frac{\nu \pi x}{l}$ für $0 \leq x \leq l$ irgendwie

$$K(x, z) \sim \frac{2}{l} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\nu \pi x}{l} \sin \frac{\nu \pi z}{l}}{\lambda_{\nu}}$$

ansetzen, es muß nur, soll K quadratisch integrierbar sein und K_2 stetig,

$$K_2(x, x) = \frac{2}{l} \sum \frac{\sin^2 \frac{\nu \pi x}{l}}{\lambda_{\nu}^2}$$

gleichmäßig konvergieren. Alle diese Kerne lassen sich in folgender Weise charakterisieren:

Es ist — etwa für $l = \pi$ —

$$K(x, z) \sim \frac{2}{\pi} \sum \frac{\sin \nu x \sin \nu z}{\lambda_\nu} \\ = \frac{2}{\pi} \sum \frac{\cos \nu (x-z)}{2 \lambda_\nu} - \frac{2}{\pi} \sum \frac{\cos \nu (x+z)}{2 \lambda_\nu}.$$

(Dies gedacht als Äquivalenz in $\cos \nu x$ und $\sin \nu x$.)

Also ist ersichtlich

$$K(x, z) = H(|x-z|) - H(x+z).$$

Somit sind diese Kerne, soweit sie abteilungsweise zweimal differenzierbar angenommen werden dürfen, die in den Variablen x, z symmetrischen und in den Variablen $x+z$ und $|x-z|$ antisymmetrischen, an den Grenzen verschwindenden Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} = 0.$$

So kann man den Musterkern

$$K(x, z) = \begin{cases} \frac{x(\pi-z)}{\pi} & x \leq z \\ \frac{z(\pi-x)}{\pi} & x \geq z \end{cases}$$

auch schreiben

$$\frac{[(x+z) - |x-z|] [2\pi - |x-z| - (z+x)]}{4\pi} = \\ = \left[\frac{1}{2} (x+z) - \frac{1}{4\pi} (x+z)^2 \right] - \left[\frac{1}{2} |x-z| - \frac{1}{4\pi} (x-z)^2 \right].$$

So gibt es auch zu den Kugelfunktionen, zu den LAGUERRESchen und HERMITESchen Polynomen unzählige Kerne.

Man kann leicht den Satz beweisen:

Genügen die $\varphi_\nu(x)$ einer Differentialgleichung $2 \cdot 0$

$$a(x) \varphi_\nu'' + b(x) \varphi_\nu' + (C_0(x) + C_\nu) \varphi_\nu = 0,$$

wo a, b, C_0 von ν , C_ν von x unabhängig ist, so genügt jeder zugehörige symmetrische Kern

$$K \sim \sum_1^\infty \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu}$$

da, wo er zweimal differenzierbar ist, der partiellen Differentialgleichung

$$a(x) \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial K}{\partial x} + C_0(x) K = a(z) \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} + b(z) \frac{\partial K}{\partial z} + C_0(z) K.$$

Wir beschränken uns zum Beweis auf den Fall, daß die Äquivalenz eine Gleichung ist und zweimalige Differentiation gestattet.

Wenn dann eine Gleichung gilt

$$a_\nu(x) \varphi_\nu'' + b_\nu(x) \varphi_\nu' + C_\nu(x) \varphi_\nu = 0$$

und es soll

$$\begin{aligned} & A(x, z) \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + B(x, z) \frac{\partial K}{\partial x} + C(x, z) K \\ &= A(z, x) \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} + B(z, x) \frac{\partial K}{\partial z} + C(z, x) K \end{aligned}$$

gelten (so angesetzt wegen der vorausgesetzten Symmetrie), so folgt durch Einsetzen

$$\begin{aligned} & \sum \frac{\varphi_\nu(x) \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu} \left\{ -A(x, z) \frac{C_\nu(x)}{a_\nu(x)} + C(x, z) + A(z, x) \frac{C_\nu(z)}{a_\nu(z)} - C(z, x) \right\} \\ &+ \sum \frac{\varphi'_\nu(x) \varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu} \left\{ -A(x, z) \frac{b_\nu(x)}{a_\nu(x)} + B(x, z) \right\} \\ &- \sum \frac{\varphi'_\nu(z) \varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} \left\{ -A(z, x) \frac{b_\nu(z)}{a_\nu(z)} + B(z, x) \right\} \equiv 0. \end{aligned}$$

Das soll für *alle* λ_ν gelten, so daß man das \sum -Zeichen und λ_ν fortlassen kann. Setzt man jetzt für z irgendeinen festen Wert ein, so entsteht eine Differentialgleichung für φ_ν von der ersten Ordnung. Soll eine solche *nicht* bestehen, was wir annehmen wollen¹, so müssen die drei Klammern für sich verschwinden und das gibt zunächst

$$\frac{b_\nu(x)}{a_\nu(x)} = \frac{B(x, z)}{A(x, z)},$$

also dieses Verhältnis sowohl von ν als von z unabhängig, was wegen eines willkürlichen Faktors in den Differentialgleichungen durch

$$a_\nu(x) = a(x); \quad b_\nu(x) = b(x); \quad A(x, z) = a(x); \quad B(x, z) = b(x)$$

wiedergegeben werden kann.

Die erste Klammer gleich null gesetzt ergibt dann

$$C_\nu(z) - C_\nu(x) + C(x, z) - C(z, x) = 0,$$

also $C_\nu(z) - C_\nu(x)$ von ν unabhängig

$$= C_0(z) - C_0(x)$$

oder

$$C_\nu(z) - C_0(z) = C_\nu(x) - C_0(x) = C_\nu$$

von x und z unabhängig, oder

$$C_\nu(x) = C_0(x) + C_\nu.$$

Weiter $C(x, z) - C(z, x) = C_0(x) - C_0(z)$.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Hierher gehören nun die LEGENDRESCHEN Kugelfunktionen, die LAGUERRESCHEN und die HERMITESCHEN Polynome. Denn diese genügen den Differentialgleichungen:

¹ Diese Annahme brauchen wir nur zum Beweise der Notwendigkeit der Voraussetzungen.

LEGENDRE: $(1 - x^2) \varphi_v'' - 2x \varphi_v' + v(v+1) \varphi_v = 0.$

LAGUERRE: $x L_v'' + (1-x) L_v' + v L_v = 0.$

HERMITE: $H_v'' - 2x H_v' + 2v H_v = 0.$

Ihre Kerne genügen also alle den entsprechenden partiellen Differentialgleichungen (s. Bem. am Schluß!).

Ebenso gehören die BESSELSchen Funktionen $I_\nu(kx)$ hierher mit

$$x^2 I_\nu'' + x I_\nu' + (k^2 x^2 - \nu^2) I_\nu = 0.$$

Sollen die φ_ν , die

$$a(x) \varphi_\nu'' + b(x) \varphi_\nu' + (C_0(x) + C_\nu) \varphi_\nu = 0$$

genügen, zueinander für $\alpha \leq x \leq \beta$ orthogonal sein, evtl. nach Multiplikation mit einem $p(x)$, so folgt nach Multiplikation mit $\varphi_\mu(x) p(x)$ ($\mu \neq \nu$) und Integration

$$\int_\alpha^\beta [a(x) \varphi_\mu \varphi_\nu'' + b(x) \varphi_\mu \varphi_\nu' + (C_0(x) + C_\nu) \varphi_\mu \varphi_\nu] p(x) dx = 0$$

und nach Vertauschung von ν und μ und Subtraktion

$$\int_\alpha^\beta [a(x) (\varphi_\mu \varphi_\nu'' - \varphi_\nu \varphi_\mu'') + b(x) (\varphi_\mu \varphi_\nu' - \varphi_\nu \varphi_\mu')] p(x) dx = 0,$$

wobei $\int p(x) \varphi_\nu(x) \varphi_\mu(x) dx = 0$ gebraucht ist.

Mit

$$\varphi_\mu \varphi_\nu' - \varphi_\nu \varphi_\mu' = D$$

$$\varphi_\mu \varphi_\nu'' - \varphi_\nu \varphi_\mu'' = D'$$

heißt das, nach partieller Integration

$$a(x) p(x) D \Big|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta D [b p - (a p)'] dx = 0.$$

Die Orthogonalität zu $p(x)$ besteht also, wenn

1. $b p - (a p)' \equiv 0$ und

2. $a(x) p(x) (\varphi_\mu \varphi_\nu' - \varphi_\nu \varphi_\mu') \Big|_\alpha^\beta = 0$

ist. Bei den Kugelfunktionen sind diese Bedingungen für $p \equiv 1$ erfüllt für $\alpha = -1, \beta = +1$ wegen $a = 1 - x^2$, für die LAGUERRESchen für $p = e^{-x}$ und $a = x$ für $\alpha = 0, \beta = \infty$, für die HERMITESchen für $p = e^{-x^2}$ bei $\alpha = -\infty, \beta = +\infty$, für die Zylinderfunktionen 1. Art (d. h. BESSELSchen Funktionen) für $p = 1/x, \alpha = 0, \beta = \infty$ ($\nu, \mu = 0, 1, 2 \dots$), da diese Funktionen im Unendlichen hinreichend stark verschwinden.

Die BESSELSchen Funktionen gehören in einer zweiten Weise hierher, wie man sieht, wenn man ihre Gleichung so schreibt:

$$I_n'' + \frac{1}{x} I_n' + \left(k_\nu^2 - \frac{n^2}{x^2} \right) I_n = 0$$

und nun eine Auswahl von k :

$$k_1, k_2, k_3 \dots$$

als Parameter ansieht. Es ist dann $a \equiv 1$, $b \equiv 1/x$, $p \equiv x$; $\alpha = 0$; dagegen ist β bestimmt durch

$$I_n(k_\nu \beta) I'_n(k_\mu \beta) - I'_n(k_\nu \beta) I_n(k_\mu \beta) = 0,$$

also etwa die k_ν bei gegebenem β durch

$$I_n(k_\nu \beta) = 0,$$

d. h. die Nullstellen der BESSELSchen Funktion I_n . Doch könnte man sie auch durch

$$\frac{I'_n(k_\nu \beta)}{I_n(k_\nu \beta)} = c$$

festlegen. Immer wäre jetzt

$$\int_0^\beta I_n(k_\nu x) I_n(k_\mu x) x dx = 0 \quad \text{für } \nu \neq \mu.$$

Zu dem Satz auf S. 156 bemerken wir noch, daß die Differentialgleichungen erst noch auf die entsprechenden Orthogonalfunktionen umzuschreiben sind, d. h. auf

$$\varphi_\nu = L_\nu e^{-\frac{1}{2}x} \quad \text{bei LAGUERRE,}$$

$$\varphi_\nu = H_\nu \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \text{bei HERMITE,}$$

$$\varphi_\nu = \frac{1}{\sqrt{x}} I_\nu(kx) \quad \text{bei der ersten,}$$

$$= \sqrt{x} I_n(k_\nu, x) \quad \text{bei der zweiten Betrachtungsweise}$$

der BESSELSchen Funktionen. Man erhält

$$\text{bei LAGUERRE: } x \varphi_\nu'' + \varphi_\nu' + \varphi_\nu \left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + \nu \right) = 0,$$

$$\text{bei HERMITE: } \varphi_\nu'' + \varphi_\nu (1 + 2\nu - x^2) = 0,$$

$$\text{bei BESSEL: } 1. \quad x^2 \varphi_\nu'' + 2x \varphi_\nu' + \left(k^2 x^2 + \frac{1}{4} - \nu^2 \right) \varphi_\nu = 0,$$

$$2. \quad \varphi_\nu'' + \left(k_\nu^2 + \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{4} - n^2 \right) \right) \varphi_\nu = 0.$$

Am Typus hat sich nichts geändert.

Hierüber, über die zugehörigen Differentialgleichungen und die Entwicklungssätze gibt es eine umfangreiche Literatur. Dazu siehe

PASCALS Repertorium, zweite Auflage von SALKOWSKI besorgt, Bd. I, 3, Kap. XXVI. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner 1929.

Als Lehrbuch: WHITTAKER and WATSON, A Course of Modern Analysis. Cambridge 1927.

16. Das Schwingungsproblem von DUFFING.

DUFFING entdeckte, daß ein gewöhnliches Pendel, welches von außen durch eine schwingende Kraft angeregt wird, bei endlichen Schwingungen ein eigentümliches Verhalten zeigen kann: bei hinreichend großen Ausschlägen gibt es mehrere periodische Lösungen, von denen eine stabil ist, während die anderen instabil sind, so daß ein Überspringen aus einer Bewegung in eine andere erfolgen kann. DUFFING hat diesem Gegenstande eine Monographie gewidmet¹.

Die genaue Pendelgleichung heißt bekanntlich bei Weglassen aller äußeren Widerstände

$$(1) \quad \ddot{\varphi} + \alpha^2 \cdot \sin \varphi = 0,$$

hierbei ist beim mathematischen Pendel $\alpha^2 = g/l$, während beim physikalischen Pendel $\alpha^2 = m \cdot g \cdot s/J$ ist (φ ist der Ausschlag, m die Masse, J das Trägheitsmoment, l die Länge des Pendels, s der Abstand des Schwerpunkts vom Aufhängepunkt und g die Erdbeschleunigung).

Findet nun von außen eine Erregung der Pendelbewegung durch ein antreibendes Moment statt, so tritt auf der rechten Seite von (1) eine störende Funktion $f(t)$ auf. $f(t)$ sei periodisch mit der Periode 2π :

$$f(t + 2\pi) = f(t),$$

es sei z. B.

$$(2) \quad f(t) = \beta \sin t.$$

Wir haben dann die Pendelausschläge φ zu bestimmen aus der nicht-linearen Differentialgleichung

$$(3) \quad \ddot{\varphi} + \alpha^2 \cdot \sin \varphi = f(t).$$

Hierbei machen wir noch die Voraussetzung, daß φ nicht klein ist, $\sin \varphi$ also nicht durch φ ersetzt werden kann. (3) soll also tatsächlich nichtlinear sein.

Wir suchen nun ebenfalls periodische Lösungen dieser Differentialgleichung

$$\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t).$$

Schwingt das Pendel ungestört, gilt also (1):

$$\ddot{\varphi} + \alpha^2 \cdot \sin \varphi = 0,$$

so kann die Gleichung mit Hilfe elliptischer Funktionen integriert werden. Wir wollen hier nur zur Kenntnis nehmen, daß diese elliptischen Funktionen periodisch sind (sogar doppeltperiodisch, aber nur eine Periode ist reell), daß die reelle Periode für sehr kleine Amplituden nahezu gleich der bekannten Periode $2\pi/\alpha$ für sogenannte unendlich kleine Schwingungen ($\sin \varphi \approx \varphi$) ist, und daß diese Periode mit der Amplitude gegen unendlich wächst. Je stärker also die freie Schwingung ist, desto langsamer ist sie.

¹ DUFFING: Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz. Monographie 41/42. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn 1918.

Wenn daher die Periode der Störungsfunktion

$$(4) \quad 2\pi < \frac{2\pi}{\alpha}$$

ist, sind wir außerhalb jeder Resonanzmöglichkeit, und es ist daher nur eine periodische Lösung der gestörten Gleichung (3) zu erwarten. Wenn aber

$$\alpha > 1$$

ist, sind wir nach (4) im Bereich möglicher Resonanz (bei entsprechend großer Amplitude), und wir müssen auf ungewöhnliche Bewegungsvorgänge gefaßt sein.

Wir vereinfachen uns die Aufgabe, indem wir erstens wie im Beispiel (2) $f(t)$ als ungerade Funktion von t voraussetzen, und indem wir zweitens nur ungerade Lösungen $\varphi \equiv y(t)$ von (3) suchen. Ob (3) noch andere Lösungen hat, bleibe dahingestellt. Mit y ist dann auch y'' periodisch zur selben Periode und ungerade, es liegt also in der Differentialgleichung (3) wenigstens von vornherein kein Widerspruch vor. (Gerade Lösungen kann es, wie man sofort sieht, nicht geben.) Dann genügt es, $y(t)$ die Grenzwerte

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

aufzulegen. Die Differentialgleichung

$$(5) \quad \ddot{y} = F(t)$$

wird aber bei diesen beiden Grenzbedingungen nach Satz 3 (I. 3 b) durch

$$(6) \quad y(t) = - \int_0^{\pi} K(t, \tau) \cdot F(\tau) \cdot d\tau$$

gelöst. K ist unser Musterkern für das Intervall $0 \dots \pi$, also ist nach (I. 6. 82)

$$(7) \quad K(t, \tau) = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu t \cdot \sin \nu \tau}{\nu^2}.$$

Um (3) zu lösen, haben wir

$$F(t) = f(t) - \alpha^2 \cdot \sin y$$

zu setzen. Damit kommen wir nach (6) auf die Integralgleichung

$$(8) \quad y(t) = \alpha^2 \cdot \int_0^{\pi} K(t, \tau) \cdot \sin y(\tau) \cdot d\tau + g(t).$$

Hierin ist $g(t)$ als bekannt zu betrachten:

$$(9) \quad g(t) = - \int_0^{\pi} K(t, \tau) \cdot f(\tau) \cdot d\tau.$$

Nach Satz 3 (I. 3 b) ist $g(t)$ also die periodisch ungerade Lösung ($g(0) = g(\pi) = 0$) von

$$g''(t) = f(t).$$

Im Falle des Beispiels (2) ist also

$$g(t) = -\beta \sin t.$$

Wir haben es in (8) mit einer *nichtlinearen Integralgleichung zweiter Art* mit symmetrischem Kern zu tun.

17. Nichtlineare Integralgleichungen.

Wir wollen die soeben gefundene Gleichung

$$(1) \quad y(t) = \alpha^2 \cdot \int_0^\pi K(t, \tau) \cdot \sin y(\tau) \cdot d\tau + g(t)$$

weiter behandeln. Falls $\alpha^2 < 1$ ist, kann man mit Hilfe des in I. 4a besprochenen Verfahrens der schrittweisen Verbesserung beweisen, daß eine Lösung von (1) existiert und eindeutig bestimmt ist.

Wir nehmen hierbei als erste Näherung

$$(2) \quad y_1(t) = g(t),$$

dann wird die zweite Näherung

$$y_2(t) = \alpha^2 \cdot \int_0^\pi K(t, \tau) \cdot \sin y_1(\tau) \cdot d\tau + g(t),$$

und allgemein gilt

$$(3) \quad y_{n+1}(t) = \alpha^2 \cdot \int_0^\pi K(t, \tau) \cdot \sin y_n(\tau) \cdot d\tau + g(t).$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} y_{n+1}(t) - y_n(t) &= \alpha^2 \cdot \int_0^\pi K(t, \tau) \cdot [\sin y_n(\tau) - \sin y_{n-1}(\tau)] \cdot d\tau \\ &= 2\alpha^2 \cdot \int_0^\pi K(t, \tau) \cdot \sin \frac{y_n - y_{n-1}}{2} \cdot \cos \frac{y_n + y_{n-1}}{2} \cdot d\tau; \end{aligned}$$

und da

$$|\sin \varphi| \leq |\varphi|, \quad |\cos \varphi| \leq 1, \quad K \geq 0$$

ist, folgt weiter

$$|y_{n+1} - y_n| \leq \alpha^2 \cdot \int_0^\pi K(t, \tau) \cdot |y_n - y_{n-1}| \cdot d\tau.$$

Also ist für $n = 2, 3, \dots$

$$|y_3 - y_2| \leq \alpha^2 \cdot \int_0^\pi K(t, \tau) \cdot |y_2 - y_1| \cdot d\tau,$$

$$|y_4 - y_3| \leq \alpha^2 \cdot \int_0^\pi K(t, \tau) \cdot |y_3 - y_2| \cdot d\tau$$

$$\leq \alpha^4 \cdot \int_0^\pi K_2(t, \tau) \cdot |y_2 - y_1| \cdot d\tau,$$

ganz so wie bei der NEUMANNschen Reihe (I. 4a). Indem wir so fortfahren, erhalten wir schließlich

$$(4) \quad |y_{n+1} - y_n| \leq \alpha^{2(n-1)} \cdot \int_0^\pi K_{n-1}(t, \tau) \cdot |y_2 - y_1| \cdot d\tau.$$

Nun ist nach (II. 16. 7) und Satz 21 b (I. 6h)

$$K_{n-1}(t, \tau) = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu t \cdot \sin \nu \tau}{\nu^{2(n-1)}} = \frac{2}{\pi} \sin t \cdot \sin \tau + \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\sin \nu t \cdot \sin \nu \tau}{\nu^{2(n-1)}},$$

also ist auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_{n-1}(t, \tau) = \frac{2}{\pi} \sin t \cdot \sin \tau,$$

so daß nach (4) $|y_{n+1} - y_n|$ mit $n \rightarrow \infty$ klein wird wie

$$\frac{2}{\pi} \alpha^{2(n-1)} \cdot |y_2 - y_1|_{\max}.$$

Daher konvergiert die NEUMANNsche Reihe

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (y_{n+1} - y_n)$$

besser als die geometrische Reihe

$$\sum_1^{\infty} (\alpha^2)^n,$$

und da diese wegen $\alpha^2 < 1$ konvergiert, tut dies auch (5). Durch Einsetzen in (4) erkennt man dann, daß

$$y = \sum_1^{\infty} (y_{n+1} - y_n)$$

die Integralgleichung löst. Die Eindeutigkeit dieser Lösung kann mit denselben Mitteln, mit denen soeben die Existenz bewiesen wurde, gezeigt werden.

Man kann aber auch die Existenz von y bei beliebigem α^2 nachweisen: einen derartigen Beweis hat HAMMERSTEIN auf einem Minimalprinzip aufgebaut.

Aus

$$y(t) = \alpha^2 \cdot \int_0^\pi K(t, \tau) \cdot \sin y(\tau) \cdot d\tau + g(t)$$

kann geschlossen werden, daß $y(t) - g(t)$ quellenmäßig darstellbar ist. Es gilt daher nach I. 6h der Entwicklungssatz (da alle Voraussetzungen der SCHMIDT'schen Theorie erfüllt sind)

$$(6) \quad y - g = \sum_{\nu} c_{\nu} \varphi_{\nu}(t),$$

wo die φ_ν die Eigenfunktionen des Musterkerns K sind:

$$(7) \quad K(t, \tau) = \sum_\nu \frac{1}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(t) \cdot \varphi_\nu(\tau), \quad \varphi_\nu(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sin \nu t, \quad \lambda_\nu = \nu^2$$

[vgl. (I. 6. 82)]. Setzen wir (6) in (1) ein, so bekommen wir

$$(8) \quad \sum_1^\infty c_\nu \varphi_\nu(t) = \alpha^2 \cdot \int_0^\pi \sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(t) \cdot \varphi_\nu(\tau) \cdot \sin \left(g(\tau) + \sum_1^\infty c_\mu \varphi_\mu(\tau) \right) \cdot d\tau.$$

Wir erhalten also unendlich viele Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten c_ν

$$(9) \quad c_\nu = \frac{\alpha^2}{\lambda_\nu} \int_0^\pi \varphi_\nu(\tau) \cdot \sin \left(g(\tau) + \sum_1^\infty c_\mu \varphi_\mu(\tau) \right) \cdot d\tau \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Man wird dieses System nach II. 8 u. 9 angenähert zu lösen suchen, indem man es nur für $\nu = 1, 2, \dots, n$ hinschreibt und unter das Integral nur eine endliche Summe setzt

$$(10) \quad c_\nu = \frac{\alpha^2}{\lambda_\nu} \int_0^\pi \varphi_\nu(\tau) \cdot \sin \left(g(\tau) + \sum_1^n c_\mu \varphi_\mu(\tau) \right) \cdot d\tau \quad \nu = 1, 2, \dots, n.$$

Dieses Gleichungssystem ist aber die notwendige Bedingung für die Aufgabe, den Ausdruck

$$(11) \quad F(c_1, c_2, \dots, c_n) \equiv \frac{1}{2} \sum_1^n \lambda_\nu \cdot c_\nu^2 + \alpha^2 \cdot \int_0^\pi \cos \left(g(\tau) + \sum_1^n c_\mu \varphi_\mu(\tau) \right) \cdot d\tau$$

durch geeignete Wahl der c_ν zu einem Minimum zu machen. Denn bildet man $\partial F / \partial c_\nu = 0$, so erhält man gerade die vorstehende Gleichung (10).

Wegen $\lambda_\nu = \nu^2 > 0$ ist das erste Glied in (11) sicher positiv, und das zweite ist sicher größer als $-\alpha^2 \cdot \pi$. Also ist der ganze Ausdruck (11) nach unten beschränkt, er hat also eine untere Grenze. Nun ist $F(c_1, \dots, c_n)$ als Funktion der c_ν sicher stetig, F hat also nach bekannten Sätzen der allgemeinen Analysis ein wirkliches Minimum. D. h. es gibt ein Wertesystem (c_1, c_2, \dots, c_n) , das F zu einem Minimum macht, und dieses Wertesystem löst dann natürlich auch das Gleichungssystem (10), das wir als Ersatz für das unendliche System (9) nahmen. HAMMERSTEIN konnte nun den Nachweis führen, daß wir tatsächlich eine Lösung des unendlichen Systems (9) mit beliebiger Genauigkeit durch eine Lösung von (10) annähern können, wenn wir nur n groß genug wählen¹.

¹ HAMMERSTEIN: Acta math. Bd. 54, und ein Vorbericht auf der Jahresversammlung der Dtsch. Math. Ver. in Hamburg 1928: Jahresber. Dtsch. Math. Ver. Bd. 38, S. 21 (kursiv!).

Es sei noch erwähnt, daß unsere Integralgleichung (1) eine sogenannte *Integralpotenzreihe* enthält, d. h. sie ist von der Form

$$y(x) = \lambda \cdot \int_0^l K(x, z) \cdot \mathfrak{P}(y(z)) \cdot dz + f(x),$$

wo $\mathfrak{P}(y)$ eine Potenzreihe in y darstellt.

Wir führen noch die wichtigste deutsche Literatur über nichtlineare Integralgleichungen an.

E. SCHMIDT hat in der dritten Arbeit¹ hauptsächlich die Frage der Verzweigung geklärt, also die Weiterbildung dessen, was bei der Gleichung zweiten Grades

$$x^2 + 2b \cdot x + c = 0$$

der Fall $c = b^2$ und seine Umgebung ist.

HAMMERSTEIN hat in mehreren Arbeiten in den Jahresber. d. Dtsch. Math. Ver. und der Berl. math. Ges., besonders aber in der großen Arbeit in den Acta math. Bd. 54 (1930), die Frage der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen bei bestimmten, genau formulierten Bedingungen gefördert. Von ihm stammen besonders die Schlußweisen zu ähnlichen Extremumsaufgaben wie oben.

IGLISCH hat eine große Anzahl von Arbeiten über nichtlineare Integralgleichungen veröffentlicht. Besonders seien drei Noten zur Theorie der Schwingungen² genannt. Wiederholt hat er das DUFFINGsche Schwingungsproblem behandelt³. IGLISCH hat nicht nur die grundlegenden Ergebnisse von SCHMIDT vertieft und weiter ausgebaut, er hat auch das DUFFINGSche Problem gefördert. So weiß man nach ihm, daß bei festem β die Gleichung

$$(12) \quad \ddot{\varphi} + \alpha^2 \cdot \sin \varphi = \beta \cdot \sin t$$

bei hinreichend großem α größenordnungsmäßig 2α periodische Lösungen hat, bei festem α und hinreichend großem β aber genau eine Lösung.

Dagegen ist die Frage der Stabilität der Lösungen von (12) noch ganz ungeklärt.

Von einem astronomischen Problem (dem der Gleichgewichtsfiguren) her ist LICHTENSTEIN zu den nichtlinearen Integralgleichungen gekommen; er bevorzugt die Methode der unendlich vielen Variablen. Sein Buch: Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen (Berlin: Julius Springer 1931), faßt seine Methoden zusammen und gibt zahlreiche Anwendungen. Von solchen seien genannt: Oberflächenwellen, Wärmestrahlung, Randwertaufgaben der elliptischen Differentialgleichung.

¹ SCHMIDT, E.: Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichungen und die Verzweigung ihrer Lösungen. Math. Ann. Bd. 65.

² IGLISCH: Mh. Math. Physik, Wien 1930, 1932, 1935.

³ So auch in den Math. Ann. Bd. 111 (1935); Bd. 112 (1936).

Namenverzeichnis.

- Abel, N. H. 1, 136f.
- Bessel** 63, 65.
Bieberbach 120.
Bôcher 2, 139.
Bochner 144.
Buchholz 45, 46.
- Courant** 2.
- Dini** 75.
Dirichlet 87.
Doetsch 144.
Du Bois-Reymond 1.
Duffing 158.
- Enskog** 109.
- Fischer, E.** 86, 93.
Föppl, L. 148.
Frank 2, 46.
Fréchet 2, 42.
Fredholm 2, 10, 27, 83, 102f.
Fuchs, R. 145.
- Gauß** 40, 87, 124.
Geiger 46.
Gram 98, 133.
Green 40.
Goursat 2.
- Hadamard** 105.
Hammerstein 161, 163.
Hecke 50.
Hellinger 2, 144.
Hertz 148.
Heywood 2, 42.
Hilbert 2, 9, 27, 46f., 76, 86, 121f., 143.
Hill 130.
Hoheisel 2, 120.
Hopf, E. 144.
— L. 145.
Hurwitz 127.
- Iglisch** 163.
- Kellog** 40.
Kneser 2, 72.
- v. Koch, Helge 130.
Kowalewski, G. 2.
- Lalesco** 2.
Lebesgue 93.
Lichtenstein 163.
- Manneback** 46.
Mathieu 134.
Mercer 91.
v. Mises 2, 46.
- Neumann, C.** 1, 27, 36.
Noether, F. 46.
Nyström 124.
- Ollendorff, F.** 46.
- Parseval** 65.
Pérès 2.
Picard 143.
Poincaré, H. 1, 36.
- Rayleigh** 87.
Rieß, F. 86, 93, 130.
Riemann 93.
Rothe, E. 46.
- Seewald** 145.
Scheel 46.
Schmidt, Erhard 2, 9, 27, 54f., 57, 60,
111f., 120, 127, 131, 163.
Schwank 2.
Schwarz, H. A. 11, 36, 57.
Sternberg 40, 46.
Strutt 46.
- Toeplitz** 2, 144.
Tschebycheff 124.
- Van den Dungen** 46.
Vivanti 2.
Volterra 2, 11.
- Weierstraß** 28, 99.
Wiarda 2.
Wiener, N. 144.

Sachverzeichnis.

- ABELS** Integralgleichung 136f.
Abgeschlossenheit 84, 85.
Äquivalenz 64.
Alternativsatz 10, 30, 83, 123.
Analytische Funktion 28.
Anfangswertproblem 17.
Antisymmetrischer Kern 116.
Ausgeartete Kerne 99.
- BESSELSche** Funktionen 156f.
— Ungleichheit 65.
- CAUCHY-RIEMANNSche** Gleichungen 38.
CAUCHYScher Hauptwert 141.
- Dehnungsversuch** 33.
Differentialgleichung erster Ordnung 10f.
— zweiter Ordnung 16f.
Doppelbelegung 37.
Dreieckskern s. Musterkern.
Dreieckskurve 3, 69.
- Eigenfunktion** 8.
Eigenwert 8.
Entwickelbarkeit 62, 116, 117.
Entwicklungssatz 76.
- FOURIER-Koeffizienten** 64.
FOURIERSche Reihen 63.
FOURIERSches Integraltheorem 142.
FREDHOLMSche Determinanten 105.
— Formeln 105.
— Kerne 105.
Fundamentalsatz 9, 35, 51f., 82.
Funktionen beschränkter Schwankung 63.
- GAUSSScher** Satz 41.
Glätten der Kerne 68, 137, 140f.
GRAMSche Determinante 98, 133.
GREENSche Funktion 23, 42.
GREENScher Satz 23, 40.
- HADAMARDScher** Determinantensatz 105.
Hauptachsenproblem im **HILBERTSchen** Raum 127.
- Hauptsatz I und II 34.
— III bis IX 35.
HEAVISIDESche Operatorenmethode 144.
HERMITESche Polynome 153f.
HERTZSche Härteformel 148f.
HILBERTScher Raum 126, 131.
HILLSche Gleichung 130.
Hohlraumstrahlung 46f.
Homogene Gleichungen 5.
HOOKESSche Gesetz 33.
- Integrabilität nach **LEBESGUE** 93.
— nach **RIEMANN** 93, 122.
Integralgleichung, Definition 4.
—, gekoppelte Paare 115.
—, inhomogene 9, 81.
—, nichtlineare 160f.
—, polare 121.
—, von erster Art 4, 92.
—, von zweiter Art 5.
—, von **VOLTERRASchem** Typ 11, 32f.
Integralpotenzreihe 163.
Integraltransformationen 144.
Integrodifferentialgleichungen 6.
Isochrone 137.
Iterierte Kerne 26, 27.
- Kern einer Integralgleichung** 4.
Konvergenz im Mittel 65.
KRONECKERSches Symbol 62, 100.
Kugelfunktionen 62, 124.
- LAGUERRESche** Polynome 152f.
LAPLACESche Integraltransformationen 144.
LAURENT-Entwicklung des lösenden Kerns 82, 101, 102f.
LEGENDRESche Polynome 62, 124, 151f.
Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung 19, 33.
— Unabhängigkeit von Funktionen 60, 97f.
Lösender Kern 29.
- MATHEUSche** Gleichung 134.
— Funktionen erster Art 134.

- Methode der kleinsten Quadrate** 63.
Mittlere Stetigkeit 68.
Musterkern 4, 53, 56, 63, 69, 85, 117, 159.
- Nachwirkungsvorgänge** 33.
NEUMANNsche Reihe 27, 28, 32, 104, 161.
Normierung der Eigenfunktionen 54, 62.
Numerierung der Eigenwerte 66.
- Orthogonalisierungsverfahren** 60, 132.
Orthogonalität 32, 127.
Orthogonalsysteme und ihre Kerne 153f.
- PARSEVALsche Gleichung** 65.
Partialbruchzerlegung des lösenden Kerns 82, 101, 102f.
Positiv definite Kerne 84.
 — — quadratische Formen 57.
Pol einer analytischen Funktion 31.
Potentialfunktion 36.
- Quadratisch integrierbar** 68.
Quellenmäßig darstellbar 72, 117.
- Randwertproblem** 17.
 —, erstes, der Potentialtheorie 36.
Regulär-analytisch 28.
RIRZSches Verfahren 87.
- Säkulargleichung** 102, 124.
Saite, gespannt 2.
 —, rotierend 5.
 —, schwingend 6.
Satz 1 9.
 — 2 17.
 — 3 19.
 — 4 24.
 — 5 29.
 — 6 30.
 — 7 31.
 — 7a 31.
 — 8 33.
 — 9 37.
 — 10 42.
 — 11 55.
 — 12 58.
 — 13 59.
 — 14 61.
 — 15 65.
 — 16 66.
 — 17a 66.
 — 17b 66.
- Satz 18** 69.
 — 19a 72.
 — 19b 72.
 — 20 73.
 — 20a 73.
 — 21 76.
 — 21a 76.
 — 22 76.
 — 23 83.
 — 24 88.
 — 25 91.
 — von DINI 73.
 — von FISCHER und RIESS 86, 93.
 — von MERCER 91.
Schrittweise Verbesserung 11, 51.
SCHWARZsche Ungleichheit 57.
Schwingende Membran 43.
 — Platte 44.
Selbstadjungierte Differentialgleichung 20.
Semi-definite Kerne 84.
 — quadratische Formen 57.
Singuläre Kerne 70, 130, 139f.
 — Stellen einer analytischen Funktion 29.
Skineffekt 44.
Spektrum 130.
Störungsfunktion 9.
Strahlungsgesetz der Hohlraumstrahlung 49.
STURM-LIOUVILLESche Oszillationstheoreme 120.
Symmetrisierung 6.
- Transponierte Integralgleichung** s. umgestellte I.
Triviale Lösung 5.
- Umgestellte Integralgleichung** 31, 102, 108.
Unendlich viele Gleichungen 125, 130.
Unendliche Determinanten 130.
Unendliches Integrationsintervall 141.
- Variationsprinzip von GAUSS-HILBERT und DIRICHLET-RAYLEIGH** 86f.
Vererbungs Vorgänge 33.
Vollständigkeit 65, 86, 133.
Vollstetigkeit 128.
Voraussetzungen über die Kerne 68, 70.
- WRONSKISChe Determinante** 98.