

**Einführung in die  
theoretische Elektrotechnik**

Von

**K. Kupfmüller**

# Einführung in die theoretische Elektrotechnik

von

**K. Küpfmüller**

ord. Professor an der Technischen Hochschule Danzig

Mit 320 Textabbildungen



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1932

**Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung  
in fremde Sprachen, vorbehalten.**

**Copyright 1932 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg**

**Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1932.**

**Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1932**

**ISBN 978-3-662-35949-5      ISBN 978-3-662-36779-7 (eBook)**

**DOI 10.1007/978-3-662-36779-7**

## Vorwort.

Die Elektrotechnik bildet heute ein so großes und vielfach verzweigtes Gebiet der Ingenieurwissenschaften, daß es für den einzelnen nicht möglich ist, dieses Gebiet auch nur einigermaßen kennenzulernen; in noch stärkerem Maße muß sich der am Fortschritt der Technik arbeitende Ingenieur auf die Betätigung in einem verhältnismäßig engen Teilgebiet beschränken. Für das Studium an den Hochschulen, das nicht angenähert so weit spezialisiert werden kann, wie es die spätere Tätigkeit des Studierenden erfordern würde, ergibt sich daraus die Notwendigkeit einer Beschränkung auf diejenigen Grundlagen, die möglichst vielen Gebieten gemeinsam sind. Das sind insbesondere die den elektrotechnischen Anwendungen zugrunde liegenden physikalischen Gesetze.

Es gibt heute eine Reihe von vorzüglichen Einführungen in die einfacheren Grundgesetze der Elektrotechnik. Es gibt ferner eine ausgezeichnete Spezialliteratur, die sich mit den Anwendungen der Grundgesetze beschäftigt. Hinsichtlich der theoretischen Vorbildung sind nun die Anforderungen an die allgemeinen Kenntnisse des wissenschaftlich tätigen Ingenieurs in den letzten Jahren bedeutend gewachsen, und wenn hier auch sehr gute physikalische Lehrbücher zur Verfügung stehen, so folgen doch Schwierigkeiten daraus, daß sich die Sprache der Elektrotechnik zum Teil nicht unerheblich von der der Physik entfernt hat und daß der Studierende nicht in der Lage ist, das für ihn Notwendige aus der großen Stoffmenge herauszufinden.

In dem vorliegenden Buch habe ich versucht, eine Einführung in die Vorstellungen und die Methoden zu geben, deren Kenntnis nach meinen Erfahrungen heute zur Allgemeinbildung des an der Weiterentwicklung der Elektrotechnik interessierten Ingenieurs gehören muß. Damit ergab sich eine Abgrenzung des Stoffes gegen die mehr physikalischen Lehrbücher. Eine weitere Einschränkung wurde noch im Hinblick auf die vorhandene einführende Literatur der Elektrotechnik vorgenommen, die gewisse Gebiete sehr ausführlich behandelt. Diese Gebiete konnten daher hier etwas zurückgestellt werden. Ebenso wurde kein Versuch gemacht, die Theorie der elektrischen Maschinen aufzunehmen; sie stellt ein hochentwickeltes Spezialgebiet dar, das ein besonderes Studium erfordert.

Die Stoffeinteilung ist keine systematische, sondern so gewählt, wie es für das Verständnis am zweckmäßigsten erschien. Daraus folgte eine Einteilung in einzelne Abschnitte, die nur verhältnismäßig lose zusammenhängen und z. T. ineinander greifen, die aber ungefähr von Leichterem zu Schwierigerem fortschreiten. Der Stoff ist so weit fortgeführt, wie es zum Verständnis und zum Studium der Spezialliteratur notwendig ist; insbesondere ist bei der Darstellung auch den Bedürfnissen von Studierenden der Physik, die auf dem Gebiet der Elektrotechnik tätig sein wollen, Rechnung getragen.

Sämtliche Formeln sind als Größengleichungen geschrieben. Wer in der Praxis einmal weniger geläufige Formeln zahlenmäßig auszuwerten hatte, kennt den für den Ingenieur besonders unzulässigen Zweifel über die richtige Wahl der Einheiten der verschiedenen Größen; meist ist ein zeitraubendes Nachrechnen der

Formeln oder Nachsuchen in der Literatur erforderlich, wenn bei irgendeiner Größe die Angabe der Einheit fehlte. Diese Schwierigkeiten verschwinden restlos, wenn man sich der Größengleichungen bedient. Die den Größengleichungen zugrunde liegende Auffassung wurde bereits von J. C. Maxwell vertreten; wir verdanken den erneuten und tatkräftigen Hinweis auf die Zweckmäßigkeit dieser Gleichungen J. Wallot. Es ist zu hoffen, daß sich auch die anderen Gebiete der Technik und insbesondere die Physik von den veralteten Zahlenwertgleichungen, die nur für bestimmte Einheiten richtig sind, im Einklang mit den kürzlich vom A. E. F. herausgegebenen Empfehlungen möglichst bald abkehren werden. Eine erhebliche Erleichterung und ein bedeutender Zeitgewinn für die späteren Generationen wäre der Lohn dafür.

Für eine Reihe von Anregungen bei der Auswahl des Stoffes bin ich Herrn Dir. Dr. phil. h. c. Dr.-Ing. E. h. F. Lüschen zu Dank verpflichtet. Ferner danke ich den Herren Dr.-Ing. H. Jenss und Dipl.-Ing. H. Werrmann für ihre freundliche Mühewaltung bei der Durchsicht des Manuskriptes und der Korrekturen. Der Verlagsbuchhandlung danke ich für das bereitwillige Eingehen auf meine Wünsche.

Danzig, im Februar 1932.

**K. Küpfmüller.**

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung . . . . .	1
Erstes Kapitel: Der stationäre elektrische Strom . . . . .	4
I. Die Einheiten der elektrischen Größen. . . . .	4
1. Definitionen . . . . .	4
2. Zusammenhang zwischen den elektrischen und mechanischen Einheiten . . . . .	5
II. Der elektrische Strom in linearen Netzen . . . . .	6
3. Grundgesetze der Strömung in linearen Netzen . . . . .	6
4. Hilfsregeln für die Berechnung von Stromverzweigungen . . . . .	14
III. Der elektrische Strom in räumlich ausgedehnten Leitern . . . . .	22
5. Grundbegriffe des räumlichen Strömungsfeldes . . . . .	22
6. Die Grundgesetze des stationären elektrischen Stromes . . . . .	27
7. Beispiele von Strömungsfeldern . . . . .	31
8. Grenzbedingungen im Strömungsfeld . . . . .	38
9. Der elektrische Strom in metallischen Leitern, Elektronentheorie . . . . .	40
Zweites Kapitel: Das elektrische Feld . . . . .	45
I. Das ruhende elektrische Feld . . . . .	45
10. Grundbegriffe des elektrischen Feldes. . . . .	45
11. Kondensatoren . . . . .	53
12. Beispiele elektrostatischer Felder. . . . .	58
13. Mehrleitersysteme . . . . .	74
14. Die mechanischen Kräfte im elektrischen Feld, Energie des Feldes . . . . .	82
15. Die Potentialgleichung . . . . .	94
16. Raumladungsfelder . . . . .	106
17. Graphische Methoden zur Ermittlung der Potentialverteilung in elektrischen Feldern . . . . .	111
II. Das langsam veränderliche elektrische Feld . . . . .	113
18. Verschiebungsstrom und Leitungsstrom . . . . .	113
19. Das elektrische Wechselfeld . . . . .	115
20. Der Durchschlag von Isolierstoffen . . . . .	124
Drittes Kapitel: Das magnetische Feld . . . . .	133
I. Das ruhende magnetische Feld . . . . .	133
21. Grundbegriffe des magnetischen Feldes, Induktionsgesetz. . . . .	133
22. Das Durchflutungsgesetz, magnetische Stoffe . . . . .	143
23. Der magnetische Kreis, Elektromagnete, Dauermagnete . . . . .	150
24. Berechnung magnetischer Felder, Vektorpotential, Ampèresche Formel . . . . .	155
25. Beispiele magnetischer Felder . . . . .	163
II. Das langsam veränderliche magnetische Feld . . . . .	169
26. Die Selbstinduktion . . . . .	169
27. Gegeninduktion, Transformator . . . . .	175
28. Die mechanischen Kräfte im magnetischen Feld . . . . .	181
29. Das magnetische Wechselfeld . . . . .	187
30. Die Wirbelströme . . . . .	189
31. Die Ummagnetisierungsverluste . . . . .	201
Viertes Kapitel: Netzwerke und Kettenleiter. . . . .	206
32. Theorie der Stromverzweigungen bei Wechselstrom . . . . .	206
33. Vierpole und Kettenleiter. . . . .	215
34. Die Elektronenröhre als Verstärker . . . . .	224

	Seite
Fünftes Kapitel: Leitungen . . . . .	229
35. Die Leitungsgleichungen . . . . .	229
36. Näherungsformeln der Leitungstheorie . . . . .	237
Sechstes Kapitel: Rasch veränderliche Felder . . . . .	243
37. Die Maxwellschen Feldgleichungen . . . . .	243
38. Die elektromagnetische Welle . . . . .	249
Siebentes Kapitel: Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge . . . . .	260
39. Allgemeine Gesetze der Ausgleichsvorgänge in linearen Systemen . . . . .	260
40. Der Zusammenhang zwischen den Frequenzcharakteristiken und den Ausgleichsvorgängen . . . . .	268
41. Nichtlineare Systeme . . . . .	272
42. Ausgleichsvorgänge in Leitungen. . . . .	275
Anhang: Maßsysteme. Literatur . . . . .	284

## Einleitung.

Die Technik hat Aufgaben zu lösen, die teils aus wirtschaftlichen Bedürfnissen, teils aus allgemeinen menschlichen Wünschen entspringen. Diese Aufgaben beziehen sich immer auf die Herstellung von Einrichtungen, mit denen ein ganz bestimmter Zweck erreicht werden soll. Der Begriff des Zwecks kennzeichnet die technische Aufgabe. Die Herstellung eines Elektromotors oder eines Rundfunkapparates, der Bau einer Hochspannungsleitung oder einer Fernsprechverbindung sind technische Aufgaben. Die Aufgaben, die Stromstärke in einem Stromkreis zu berechnen, oder die elektrische Feldstärke zwischen Kugelelektroden zu ermitteln, oder eine Differentialgleichung zu integrieren, sind für sich keine technischen Aufgaben; sie können jedoch Teile einer technischen Aufgabe bilden. Im allgemeinen zerfällt jede technische Aufgabe in eine große Zahl von Teilfragen, die den Entwurf, die Konstruktion und die Ausführung der Einrichtung betreffen. Soll z. B. zwischen zwei Orten elektrische Energie übertragen werden, so sind Fragen des Entwurfs: die Frage nach der Stromart (Drehstrom, Einphasenstrom, Gleichstrom), nach der Höhe der Spannung und dem notwendigen Leiterquerschnitt; Fragen der Konstruktion: die Frage, ob die Leitung als Kabel oder Freileitung ausgeführt werden soll, ob die Leiter als Seil- oder Volldrähte hergestellt werden sollen, wie die Kabelleiter isoliert werden sollen, welche Isolatorenform zu wählen ist, wie die Maste beschaffen sein sollen, welche Abstände sie voneinander haben sollen usw.; Fragen der Ausführung: auf welche Weise und mit welchen Maschinen die Leitungen herzustellen sind, die Isolatoren, wie die Kabel in die Erde zu verlegen sind, wie die Maste aufzustellen sind, wie die Leitungsdrähte miteinander zu verbinden sind usw.

Bei jeder Teilfrage ist die Auswirkung irgendwelcher Festsetzungen oder Maßnahmen zu berücksichtigen, z. B. die Größe des Spannungsabfalls in der Leitung bei der Festsetzung des Leiterquerschnitts. Die Lösung der Aufgaben setzt nun nicht unbedingt voraus, daß alle diese Faktoren von vornherein bekannt sind. Es ist grundsätzlich möglich, sämtliche Fragen empirisch zu beantworten, indem man hinreichend viele Versuche vornimmt. Man könnte in dem betrachteten Beispiel eine beliebige Leitung zwischen den beiden Orten herstellen und beobachten, ob sie brauchbar ist. Es wird sich dann z. B. herausstellen, daß die Energieverluste zu groß sind, oder daß die Leiter ins Glühen kommen, oder daß die Leitungsdrähte zerreißen oder die Maste einstürzen. Man würde dann eine zweite Leitung bauen, die entsprechend stärker bemessen wird, und es ist wahrscheinlich, daß man bei Verwertung der Erfahrungen nach einer gewissen Anzahl von Versuchen schließlich eine brauchbare Anlage bekommen würde. Dieses empirische Verfahren führt immer zum Ziel, und es ist in der Tat das Verfahren, das in der Technik besonders in der Anfangszeit häufig angewendet wurde. Ohne weiteres ist aber ersichtlich, daß dieses Verfahren immer große wirtschaftliche Aufwendungen erfordern muß, und daß man diese Aufwendungen um so mehr verringern kann, je genauer man die Vorgänge kennt, die sich in der betreffenden Einrichtung abspielen. Dieses Kenntnis kann zwar grundsätzlich nur durch die Erfahrung vermittelt werden; es ist jedoch möglich, auch ohne daß Erfahrungen mit der besonderen Einrichtung,

vorliegen, um deren Herstellung es sich handelt, Voraussagen über ihre Eigenschaften zu machen. Dazu dient die Theorie. Der Zweck der Theorie besteht darin, die jeweils vorliegenden Gesamterfahrungen, die durch Beobachtung und Messung gewonnen wurden, in handlicher Form und für möglichst viele Fälle anwendbar zur Verfügung zu stellen.

Entsprechend den beiden Hilfsmitteln der Theorie und des Versuchs sind daher zur Lösung einer technischen Aufgabe im allgemeinen zweierlei Arten von Aufwendungen erforderlich:

1. Aufwendung von Gedankenarbeit durch Verwertung der theoretischen Erkenntnisse,

2. Aufwendung von Geldmitteln zur Ausführung von Versuchen (Material- und Herstellungskosten der Versuchseinrichtungen, Betriebskosten).

Die vorhin gemachten Ausführungen zeigen nun, daß sich diese beiden Arten von Aufwendungen gegenseitig ersetzen können. Zur Lösung ein und derselben Aufgabe ist mehr Material und Zeit erforderlich, wenn von den theoretischen Erkenntnissen kein Gebrauch gemacht wird; andererseits kann an Geldmitteln gespart werden, wenn mehr geistige Arbeit bei der Lösung des Problems aufgewendet wird. Die theoretischen Erkenntnisse sind gegenwärtig noch weit von dem idealen Zustand entfernt, daß man jede technische Aufgabe rein durch Gedankenarbeit lösen könnte, daß also die zweite Art von Aufwendungen vollständig durch die erste ersetzt werden könnte; um so wichtiger ist es daher, mit der Auswertung des Vorhandenen so weit zu gehen wie irgend möglich. Hierin besteht das wissenschaftliche Verfahren der Bearbeitung technischer Aufgaben, das den Gegensatz zum empirischen Verfahren bildet, und dessen Einführung die raschen Fortschritte der Technik in den letzten Jahrzehnten ermöglicht hat. Jede technische Aufgabe ist lösbar. Häufig erfordert die Lösung große Aufwendungen an Mitteln und an Zeit; sie können in dem Maße vermindert werden, in dem es möglich ist, theoretische Erkenntnisse anzuwenden.

Ein primitives Verfahren des Studiums, das vom pädagogischen Standpunkt aus wahrscheinlich nicht das schlechteste wäre, bestünde darin, daß jeder Einzelne alle Erfahrungen, die im Laufe der Zeit gemacht worden sind, in der gleichen Reihenfolge und Vollständigkeit sammeln würde. Dieses Verfahren ist aus einer Reihe von Gründen nicht durchführbar, besonders wegen der Fülle des Erfahrungsmaterials, die ungeheuer groß ist im Vergleich zu dem, was ein Mensch während seines Lebens auf diese Weise aufnehmen könnte. Es ist daher nötig, die Erfahrungen in eine möglichst konzentrierte Form zu bringen und in dieser Form zu verbreiten. Das Hilfsmittel dazu stellt die Mathematik dar, die einerseits eine Art Kurzschrift zur Zusammenfassung der Erkenntnisse bildet und andererseits Anweisungen für die Auswertung dieser Erkenntnisse gibt. Aus diesem Grunde bildet der Besitz mathematischer Kenntnisse eine der unentbehrlichen Voraussetzungen zum Verständnis der Ingenieurwissenschaften.

Zuweilen wird die Bedeutung schwieriger mathematischer Methoden für die Lösung technischer Aufgaben überschätzt. Selten sind jedoch Fortschritte der Technik aus komplizierten mathematischen Rechnungen hervorgegangen. Viel wichtiger als die Kenntnis schwieriger Gebiete der Mathematik ist es für den wissenschaftlich arbeitenden Ingenieur, daß er sich eine klare Vorstellung von dem Wesen der Naturvorgänge erwirbt, mit denen er es zu tun hat. Darunter ist zu verstehen, daß mit dem Ablauf dieser Vorgänge bestimmte Ideen verbunden werden, die die Erscheinungen auf wenige allgemeine Gesetzmäßigkeiten zurückführen. Zu jeder Technik gehört eine ganz bestimmte Vorstellungswelt, die durch die Theorie vermittelt wird. Die Fortschritte der Technik gehen jeweils von dieser Vorstellungswelt aus. Jede Erweiterung der theoretischen Vorstellungen gibt daher die Möglichkeit weiterer Fortschritte. Diese Vorstellungen aber können in vollem Umfang nur mit Hilfe der Mathematik erworben werden.

Benötigt nun der Ingenieur aus dem großen Wissensgebiet der Mathematik als Hilfsmittel bei seiner Tätigkeit im allgemeinen nur einen verhältnismäßig kleinen Teil, so ist es für den Erwerb der theoretischen Vorstellungen und für ihre Auswertung außerordentlich wichtig, daß er dieses Hilfsmittel mit der größten Sicherheit beherrscht. Es ist für die Aneignung der zu einer wissenschaftlichen Tätigkeit auf dem Gebiete der Elektrotechnik notwendigen theoretischen Vorstellungen nicht ausreichend, die Elemente der Differential- und Integralrechnung, die Lehre von den Potenzreihen und den Fourierschen Reihen, ferner die komplexe Rechnung und die Elemente der Vektorrechnung zu kennen, sondern es gehört dazu die Fähigkeit, die in diesen Gebieten gelehrtten Regeln anzuwenden. Diese Fähigkeit kann man durch ein noch so ausgedehntes Studium der Formeln nicht erwerben, sondern nur dadurch, daß man spezielle Aufgaben in hinreichend großer Zahl löst. Im folgenden ist daneben noch die Kenntnis der Grundzüge der Elektrotechnik vorausgesetzt, wie sie durch die elementaren Einführungen gegeben wird.

Die in den Text des Buches eingestreuten Zahlenbeispiele sollen eine Vorstellung von den Größenverhältnissen der besprochenen Zusammenhänge geben. Es ist zweckmäßig, beim Studium möglichst viele von diesen und ähnlichen Zahlenbeispielen selbst durchzurechnen, da man auf diese Weise das Gefühl für die Bedeutung der Größen erheblich vertieft.

## Erstes Kapitel.

# Der stationäre elektrische Strom.

## I. Die Einheiten der elektrischen Größen.

### 1. Definitionen.

Die praktisch verwendeten elektrischen Maßeinheiten wurden ursprünglich von den sogenannten absoluten elektromagnetischen Einheiten der Physik abgeleitet, indem man diese mit Potenzen von 10 multiplizierte, um eine praktisch brauchbare Größenordnung der Zahlenangaben zu bekommen. Zur Vereinfachung der Meßvorschriften hat man dann die abgeleiteten Einheiten besonders definiert, so daß heute der Zusammenhang zwischen den auf diese Weise entstandenen „internationalen praktischen Einheiten“ mit den „absoluten Einheiten“ für die Elektrotechnik keine Bedeutung mehr hat; es erklären sich so lediglich die unrunder Zahlen der einzelnen Einheitendefinitionen. Zwischen den alten Einheiten und den praktischen Einheiten bestehen einfache Zahlenverhältnisse, die in Anhang 2 am Schluß des Buches zusammengestellt sind.

Im folgenden werden die Festsetzungen über die praktisch wichtigen Einheiten aufgeführt, damit sich mit der Entwicklung der Theorie ein vollständiger Überblick über den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Einheiten ergibt.

**a) Stromstärke.** Die durch Elektrolyse an einer Elektrode ausgeschiedene Stoffmenge ist proportional der Elektrizitätsmenge, da jedes Ion eine bestimmte Elektrizitätsmenge transportiert (Faraday). Die Stromstärke als die in der Zeiteinheit transportierte Elektrizitätsmenge ist daher proportional der in der Zeiteinheit ausgeschiedenen Stoffmenge. Hierauf beruht die Definition der Stromstärkeeinheit:

Ein konstanter Strom hat die Stärke von 1 Ampere (A), wenn er aus einer wässrigen Lösung von Silbernitrat in einer Sekunde 0,00111800 g Silber ausscheidet (Gesetz, betr. die elektr. Maßeinheiten, vom 1. Juni 1898).

Die Einheit der Elektrizitätsmenge ist dementsprechend die Amperesekunde:

$$1 \text{ A} \cdot 1 \text{ s} = 1 \text{ As}. \quad (1)$$

**b) Widerstand.** Für die Widerstandseinheit hat man ein Grundmaß festgelegt durch die Bestimmung, daß eine Quecksilbersäule von der Temperatur des schmelzenden Eises, deren Länge bei gleichmäßigem Querschnitt 106,300 cm und deren Masse 14,4521 g beträgt, einen Widerstand von 1 Ohm ( $\Omega$ ) besitzt (Gesetz, betr. die elektr. Maßeinheiten).

Das Reziproke der Widerstandseinheit stellt die Einheit des Leitwertes, 1 Siemens (S), dar; es ist

$$1 \text{ S} = 1 \Omega^{-1}. \quad (2)$$

Die beiden Einheiten für Stromstärke und Widerstand sind damit willkürlich definiert; es sind unabhängige Einheiten. Man hätte für die genannten Zahlen ebensogut irgendwelche andern Werte wählen können. Die übrigen Einheiten der Elektrotechnik lassen sich nun sämtlich von diesen beiden Einheiten und den Einheiten für Länge, Masse (oder Kraft) und Zeit ableiten.

c) **Spannung.** Die Spannung zwischen den beiden Enden eines Leiters von  $1 \Omega$  Widerstand, der von einem Strom von  $1 \text{ A}$  durchflossen wird, ist gleich der Spannungseinheit  $1 \text{ Volt (V)}$ . Für die Einheiten gilt daher auf Grund des Ohmschen Gesetzes:

$$1 \text{ V} = 1 \Omega \cdot 1 \text{ A} \quad \text{oder} \quad 1 \text{ V} = 1 \Omega \text{ A}. \quad (3)$$

Neben dieser Definition der Spannungseinheit kann man noch eine zweite davon abgeleitete benutzen, die von der Spannung des „Normalelementes“ ausgeht. Das Normalelement (Weston-Element) hat Kadmiumamalgam und Quecksilber als Elektroden und gesättigte Kadmiumsulfatlösung als Elektrolyten. Seine elektromotorische Kraft ist bei geeigneter Bauart nur noch etwas von der Temperatur abhängig; für die vorkommenden Temperaturen ist sie auf Grund der Definition der Spannungseinheit durch Messung sehr genau bestimmt worden, sie fällt z. B. zwischen  $10^0$  und  $20^0$  von

$$E = 1,01861 \text{ V} \quad \text{auf} \quad E = 1,01830 \text{ V}$$

ab. Man kann daher umgekehrt mit Hilfe dieser bekannten Zahlen die Spannungseinheit aus der Spannung des Normalelementes definieren.

d) **Leistung und Arbeit.** Die Leistung, die ein konstanter elektrischer Strom von  $1 \text{ A}$  bei einer Spannung von  $1 \text{ V}$  liefert, stellt die Leistungseinheit  $1 \text{ Watt (W)}$  dar.

Bei beliebigen Spannungen und Stromstärken ist die Leistung proportional diesen beiden Größen; es gilt daher

$$1 \text{ W} = 1 \text{ VA} = 1 \frac{\text{V}^2}{\Omega} = 1 \text{ A}^2 \Omega. \quad (4)$$

An Stelle von  $W$  wird bei Wechselstrom das Zeichen  $VA$  benützt, wenn es sich um das Produkt von Spannung und Stromstärke handelt (Scheinleistung). Diese besondere Bezeichnung hat nichts mit den Gl. (4) zu tun, die in allen Fällen gelten.

Für die Einheit der elektrischen Arbeit gilt entsprechend die Definition: Fließt ein Strom von der Stärke  $1 \text{ A}$  bei einer Spannung von  $1 \text{ V}$   $1 \text{ s}$  lang, so ist die geleistete Arbeit:

$$1 \text{ Ws} = 1 \text{ V} \cdot 1 \text{ A} \cdot 1 \text{ s}. \quad (5)$$

Die Definitionen der übrigen abgeleiteten Einheiten der elektrischen und magnetischen Größen werden in den betreffenden Abschnitten besprochen.

## 2. Zusammenhang zwischen den elektrischen und mechanischen Einheiten.

Die elektrische Arbeit ist einer mechanischen Arbeit äquivalent. Fließt in einem Widerstand  $R$  ein konstanter Strom von der Stärke  $I$ , so ist die von dem Widerstand in der Zeit  $t$  aufgenommene elektrische Arbeit

$$A = I^2 R t. \quad (6)$$

Diese Arbeit wird vollständig in Wärme umgewandelt. Durch Messung der elektrischen Arbeit und der erzeugten Wärme im Kalorimeter findet man daher den Zusammenhang zwischen der elektrischen Arbeitseinheit und der Einheit der Wärmemenge. Es ergibt sich:

$$1 \text{ Ws} = 0,2390 \text{ cal}. \quad (7)$$

Andererseits findet man experimentell die Beziehung zwischen der Wärmeeinheit und der Einheit der mechanischen Arbeit; es ist<sup>1</sup>

$$1 \text{ cal} = 0,4269 \text{ mkGr}. \quad (8)$$

<sup>1</sup> Zur Unterscheidung zwischen der Kraft- und Masseneinheit wird in diesem Buch  $1 \text{ g}$  Masse mit  $1 \text{ g}$ ,  $1 \text{ g}$  Gewicht mit  $1 \text{ Gr}$  bezeichnet; es ist also  $1 \text{ Gr} = 980,665 \text{ dyn}$  und  $1 \text{ g} = \frac{1}{980,665} \frac{\text{Gr s}^2}{\text{cm}}$ .

Damit ist auch die Beziehung hergestellt zwischen den Einheiten der elektrischen und der mechanischen Arbeit. Aus den Gl. (7) und (8) folgt

$$1 \text{ Ws} = 10,20 \text{ cmkGr.} \quad (9)$$

Dies läßt sich auch schreiben:

$$1 \frac{\text{Ws}}{\text{cm}} = 10,20 \text{ kGr.} \quad (10)$$

Der Ausdruck Wattsekunde/cm ist also als Krafteinheit aufzufassen. Alle Berechnungen von mechanischen Kräften, die durch elektrische Ströme oder Spannungen hervorgerufen werden, liefern das Resultat in Ws/cm; die Beziehung (10) stellt daher eine wichtige Umrechnungsformel dar. Sie zeigt ferner, daß nur eine der beiden willkürlich festgelegten elektrischen Einheiten unabhängig von den mechanischen Einheiten ist. Z. B. folgt aus Gl. (9) für die Spannungseinheit

$$1 \text{ V} = 10200 \frac{\text{cmGr}}{\text{As}}, \quad (11)$$

oder für die Widerstandseinheit

$$1 \Omega = 10200 \frac{\text{cmGr}}{\text{A}^2 \text{ s}} \quad (12)$$

Der Satz von der Erhaltung der Energie würde also die Definition der Widerstandseinheit überflüssig machen, sobald die Stromstärkeeinheit festliegt. Es ist trotzdem zweckmäßig, die besonderen Definitionen beizubehalten, da der unmittelbare Vergleich einer Spannung oder eines Widerstandes mit den Einheiten cmGr/As und cmGr/A<sup>2</sup>s schwierig ist.

## II. Der elektrische Strom in linearen Netzen.

### 3. Grundgesetze der Strömung in linearen Netzen.

Eine grundlegende Aufgabe der Elektrotechnik beschäftigt sich mit der Berechnung von Stromstärken und Spannungen in linearen Netzen. Man versteht unter einem linearen Netz einen einfachen oder zusammengesetzten Stromkreis, der Energieerzeuger, -verbraucher und Leitungen enthält. Beispiele von solchen Netzen sind: die Übertragung der elektrischen Energie von einem Generator auf einen Motor mit Hilfe einer Leitung, die Speisung eines Glühlampennetzes von mehreren Zentralen, die Wheatstonesche Meßbrücke oder die Thomsonsche Doppelbrücke.

Das Gemeinsame dieser Fälle ist die räumliche Ausbreitung des elektrischen Stromes in langgestreckten elektrischen Leitern, die die einzelnen Abschnitte des Netzes (Zweige) bilden, und für die praktische Aufgabe die Frage, wie groß die Stromstärken in diesen Drähten oder die Spannungen an den einzelnen Zweigen sind. Es wird dabei vorausgesetzt, daß die Querschnittsabmessungen der Drähte sehr klein sind gegen die Drahtlänge; dann füllt der elektrische Strom den Querschnitt der Leiter gleichmäßig aus, und es gilt für den Widerstand eines Drahtes von der Länge  $l$  und dem Querschnitt  $q$  das durch die folgenden Formeln ausgedrückte Gesetz:

$$R = \rho \frac{l}{q} \quad \text{oder} \quad R = \frac{l}{z q}. \quad (13)$$

Die Größen  $\rho$  und  $z$  werden spezifischer Widerstand und Leitfähigkeit genannt. Aus den Gl. (13) geht hervor, daß als Einheit für den spezifischen Widerstand  $1 \Omega \text{ cm}$ , als Einheit für die Leitfähigkeit  $1 \text{ S/cm}$  gewählt werden kann. Eine praktisch häufig verwendete Einheit für den spezifischen Widerstand ist auch  $1 \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$ . In der folgenden Tabelle 1 sind für einige Stoffe die Werte des spezifischen Widerstandes und der Leitfähigkeit bei 20° angegeben, ferner der Temperaturkoeffizient  $\alpha$  bei dieser Temperatur, der definiert ist durch die Gleichung:

$$R = R_{20^\circ} (1 + \alpha \vartheta).$$

Tabelle 1.

Material	Spezifischer Widerstand $\rho$ $\frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}$	Leitfähigkeit $\kappa$ $\frac{\text{S}}{\text{cm}}$	Temperatur- koeffizient bei $20^\circ 1000\alpha$ $(^\circ\text{C})^{-1}$
Silber . . . . .	0,0159	$6,3 \times 10^5$	3,8
Kupfer . . . . .	0,0175	$5,7 \times 10^5$	3,9
Bronze . . . . .	0,018 . . . 0,025	$4 \dots 5,6 \times 10^5$	—
Aluminium . . . . .	0,028 . . . 0,03	$3,3 \dots 3,6 \times 10^5$	3,7
Zink . . . . .	0,063	$1,6 \times 10^5$	3,7
Messing . . . . .	0,07 . . . 0,09	$1,1 \dots 1,4 \times 10^5$	1,5
Eisen . . . . .	0,1 . . . 0,15	$0,67 \dots 1 \times 10^5$	4,5
Nickelin . . . . .	0,43	$2,33 \times 10^4$	0,13
Manganin . . . . .	0,43	$2,33 \times 10^4$	0,01
Konstantan . . . . .	0,49	$2,04 \times 10^4$	— 0,005
Bogenlampenkohle . . . . .	60 . . . 80	170	— 0,2 . . . — 0,8
Seewasser . . . . .	$3 \times 10^5$	0,03	—
Flußwasser . . . . .	$10^7 \dots 10^8$	$10^{-4} \dots 10^{-3}$	—
Erde . . . . .	$10^8 \dots 10^{10}$	$10^{-6} \dots 10^{-4}$	—
Destilliertes Wasser . . . . .	$1 \dots 4 \times 10^{10}$	$0,2 \dots 1 \times 10^{-6}$	—

Die Gl. (13) sind Größengleichungen. Man setzt bei solchen Gleichungen für jede Größe das Produkt aus Zahlenwert und Einheitszeichen ein und behandelt die Einheitszeichen wie algebraische Größen. Um das Rechnen mit Größengleichungen zu erläutern, werde an dieser Stelle ein ganz einfaches Beispiel ausführlich betrachtet: Ein Kupferdraht habe eine Länge  $l=2\text{km}$ , einen Querschnitt  $q=20\text{mm}^2$ . Sein Widerstand ist dann nach Gl. (13)

$$R=0,0175 \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}} \frac{2\text{km}}{20\text{mm}^2}.$$

Man wendet nun auf die Einheitszeichen die gewöhnlichen Rechenregeln der Algebra an. Beachtet man, daß das Zeichen k vor m für die Zahl 1000 steht, so kann mit m und  $\text{mm}^2$  gekürzt werden; es folgt

$$R=0,0175 \cdot \frac{2 \cdot 1000}{20} \Omega = 1,75 \Omega.$$

Man kann den spezifischen Widerstand auch in  $\Omega \text{ cm}$  einsetzen und etwa die Länge in m. Dann wird

$$R=1,75 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ cm} \frac{2000\text{m}}{20\text{mm}^2} = 1,75 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ cm} \frac{2000 \cdot 100\text{cm}}{20 \cdot \frac{1}{100}\text{cm}^2} = 1,75 \Omega.$$

Es ergibt sich also in jedem Fall zwangsläufig die richtige Einheit von  $R$ . Hierin liegt der große Vorteil des Rechnens mit Größengleichungen. In so einfachen Fällen wie dem eben betrachteten ist es natürlich meist nicht nötig, die Rechnung mit den Einheiten in aller Ausführlichkeit anzuschreiben; es ist jedoch bei komplizierteren Rechnungen außerordentlich zweckmäßig, beim Einsetzen eines jeden Zahlenwertes in eine Gleichung stets das Einheitszeichen hinzuzufügen, wobei allerdings beachtet werden muß, daß dies nur bei Größengleichungen möglich ist, nicht aber bei den „Zahlenwertgleichungen“, die nur für bestimmte Einheiten gelten, bei denen also jedesmal angegeben werden muß, welche Einheiten benutzt werden müssen. In diesem Buch werden nur Größengleichungen verwendet; es empfiehlt sich, die umständlichen und unzuverlässigen Zahlenwertgleichungen überhaupt aufzugeben.

Zur Lösung der Aufgabe, die stationäre Strom- und Spannungsverteilung in linearen Netzen zu berechnen, dienen die Gesetze von Ohm und Kirchhoff. Mit Hilfe dieser empirischen Gesetze kann grundsätzlich jede Stromverteilungsaufgabe gelöst werden. Zur Vereinfachung der Berechnungen sind im Laufe der Zeit mehrere Sätze und Methoden entwickelt worden, die sich aus jenen Gesetzen herleiten. Sie sind im allgemeinen nur von Nutzen, wenn es sich um die Durchführung

einer großen Menge von Rechnungen ein und derselben Art handelt. Es werden daher im folgenden nur einige dieser Methoden behandelt, die eine besondere Allgemeinheit haben und einen vertieften Einblick in die Gesetzmäßigkeiten der Stromverteilung in linearen Netzen geben.

Die Untersuchungen dieses Abschnittes beziehen sich ausschließlich auf stationäre elektrische Ströme. Die Gesetze von Ohm und Kirchhoff haben zunächst nur für Gleichstrom Gültigkeit. Mit Hilfe der komplexen Rechnung kann man sie auch auf stationäre Wechselströme übertragen; das vierte Kapitel dieses Buches beschäftigt sich mit dieser Erweiterung.

### Das Ohmsche Gesetz.

Die chemischen Wirkungen des elektrischen Stromes zeigen, daß dem Strom eine Richtung zugesprochen werden kann (Metallniederschlag am negativen Pol). Als positiven Pol einer Stromquelle hat man willkürlich den Pol bezeichnet, der in bezug auf elektrisch geladene Körper gleichartige Wirkungen zeigt wie ein geriebener Glasstab. Nach einer weiteren willkürlichen

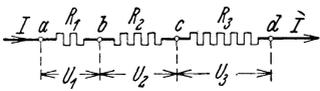


Abb. 1. Reihenwiderstände.

Festlegung geht die positive Stromrichtung vom positiven Pol der Stromquelle durch den äußeren Stromkreis zum negativen Pol und durch die Stromquelle vom negativen Pol zum positiven zurück. Eine andere Ausdrucksweise für diese Festsetzungen ergibt sich, wenn man an Stelle der Spannungen  $U$  das Potential  $\varphi$  einführt. Man versteht unter dem Potential  $\varphi$  eines beliebigen Punktes in einem Stromkreis die Spannung zwischen diesem Punkt und einem willkürlichen Bezugspunkt. In Abb. 1 ist z. B.  $U_3$  das Potential des Punktes  $c$  gegen den Punkt  $d$ ; das Potential des Punktes  $d$  gegen den Punkt  $c$  ist dagegen  $-U_3$ . Ferner ist das Potential des Punktes  $a$

$$\varphi_a = U_1 + U_2 + U_3$$

in bezug auf den Punkt  $d$ ; das Potential des Punktes  $b$  ist

$$\varphi_b = U_2 + U_3$$

in bezug auf den Punkt  $d$ . Daher gilt allgemein

$$\varphi_a - \varphi_b = U_{ab} \quad (14)$$

Die Spannung zwischen zwei beliebigen Punkten ist gleich der Differenz der Potentiale dieser Punkte. Das Potential ist als eine Hilfsgröße zu betrachten, die in manchen Fällen die Ausdrucksweise vereinfacht. In der Technik hat man es nur mit Potentialdifferenzen, also Spannungen zu tun. Infolge der getroffenen Festsetzung geht die positive Stromrichtung längs des Stromkreises von Punkten höheren Potentials zu Punkten niedrigeren Potentials. Man spricht daher von einem Spannungsverbrauch oder Spannungsabfall längs des Stromkreises.

Der Spannungsverbrauch eines Widerstandes  $R$ , der vom Strom  $I$  durchflossen wird, ist allgemein

$$U = IR. \quad (15)$$

So ist z. B. in Abb. 1

$$U_1 = IR_1; \quad U_2 = IR_2; \quad U_3 = IR_3.$$

Eine Veranschaulichung der Spannungsverteilung längs des Stromkreises erhält man, wenn man die Spannungen gegen den einen Endpunkt eines jeden Leiters, also die Potentiale, in Abhängigkeit vom Widerstand aufträgt, Abb. 2. Die Neigungswinkel  $\alpha$  der geraden Linien sind auf Grund der Gl. (15) durch die Stromstärke  $I$  bestimmt. Da diese in allen drei Widerständen die gleiche ist, so kann man die Potentialverteilung durch eine einzige gerade Linie darstellen, Abb. 3, indem man den Punkt  $d$  als Bezugspunkt für das Potential wählt.

Die Gl. (15) stellt das Ohmsche Gesetz in seiner allgemeinsten Form dar. Eine spezielle Form ergibt sich für einen einfachen geschlossenen Stromkreis Abb. 4, der aus einer Stromquelle und einer Anzahl hintereinander geschalteter Widerstände besteht. Der gesamte Spannungsverbrauch eines solchen Stromkreises ist

$$U = IR_1 + IR_2 + IR_3 + IR_4,$$

wenn der innere Widerstand der Stromquelle mit  $R_4$  bezeichnet wird. Nennt man die Summe der einzelnen Widerstände über den ganzen geschlossenen Kreis  $R$ , so ergibt sich für den Spannungsverbrauch wieder die Gl. (15). Man stellt sich nun vor, daß im Innern der Stromquelle eine Kraft tätig ist, die den gesamten Spannungsverbrauch des Kreises deckt, und die als Ursache des elektrischen Stromes angesehen werden kann. Diese Kraft

$$E = U \tag{16}$$

heißt die elektromotorische Kraft (abgekürzt EMK). Der Vorteil ihrer Einführung für die Theorie liegt darin, daß man in den meisten Fällen die EMK als unabhängig oder nahezu unabhängig von der Stärke des aus der Stromquelle entnommenen Stromes  $I$  ansehen kann. Die EMK ist dann gleich der Spannung zwischen den beiden Klemmen der Stromquelle im Leerlauf, und bei einer beliebigen Belastung gilt für die Stromstärke auf Grund der Gl. (15) und (16)

$$I = \frac{E}{R}, \tag{17}$$

wobei  $R$  wieder den gesamten Widerstand des geschlossenen Stromkreises bedeutet (G. S. Ohm, 1827). Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$E = IR_1 + IR_2 + IR_3 + IR_4,$$

und multipliziert man auf beiden Seiten mit  $I$ , so ersieht man, daß sie das Energieprinzip ausdrückt:  $E I$  ist die gesamte von der Stromquelle gelieferte Leistung; die Ausdrücke auf der rechten Seite stellen dagegen die in Wärme umgewandelten Leistungen dar.

**Zahlenbeispiel:** Die Stromquelle in Abb. 4 bestehe aus 30 Bleisammlerzellen mit einer Klemmenspannung bei Leerlauf von 62 V, der innere Widerstand dieser Batterie sei  $0,2 \Omega$ . Ferner sei  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 3 \Omega$  und  $R_3 = 1 \Omega$ . Dann ist  $R = 6,2 \Omega$ . Nach Gl. (17) wird die Stromstärke

$$I = \frac{62 \text{ V}}{6,2 \Omega} = 10 \text{ A};$$

die Klemmenspannung der Batterie (Spannung zwischen den Punkten  $a$  und  $b$ ) ist

$$U = I(R_1 + R_2 + R_3) = 10 \text{ A} \cdot 6 \Omega = 60 \text{ V}.$$

Die Spannung ist ebenso wie die Stromstärke eine physikalisch definierte Größe, und zwar ist die Spannung zwischen zwei Punkten gleich der Arbeit, die zur Überwindung der elektrischen Feldkräfte aufgewendet werden muß, wenn eine punktförmige Einheitsladung von dem einen Punkt zum anderen gebracht wird (s. Abschnitt 10). Man definiert dann allgemein den Widerstand durch das Verhältnis von Spannung zu Strom:

$$R = \frac{U}{I}.$$

Im allgemeinen ändert sich das Verhältnis, wenn die Spannung oder der Strom geändert werden, vor allem wegen der im Leiter auftretenden Wärmeentwicklung. Bei einigen Stoffen, insbesondere bei den Metallen, erweist sich dagegen der Widerstand als praktisch unabhängig von Spannung und Stromstärke, wenn man dafür sorgt, daß die Temperatur des Leiters konstant bleibt. Nur in diesem Spezialfall, der zwar physikalisch als eine Ausnahme zu betrachten ist, praktisch aber große Bedeutung hat, ergibt die Einführung des Widerstandsbegriffs eine Vereinfachung der Überlegungen.

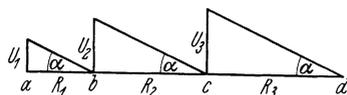


Abb. 2. Spannungsverteilung bei Reihenschaltung von Widerständen.

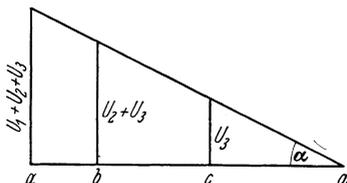


Abb. 3. Potentialverteilung bei Reihenschaltung von Widerständen.

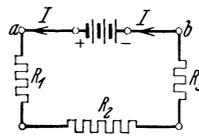


Abb. 4. Einfacher Stromkreis.

## Der erste Kirchhoffsche Satz.

Jedes lineare Netz besteht aus einzelnen Zweigen, die an den Knotenpunkten oder Verzweigungspunkten miteinander zusammenhängen. Geht man von irgend einem Knotenpunkte aus und bewegt man sich längs der elektrischen Leiter, so kann man immer auf mindestens einem Wege zu dem Ausgangspunkt zurückkehren, ohne daß ein Zweig mehrmals durchlaufen wird. Einen solchen geschlossenen Weg nennt man eine Masche des linearen Netzes.

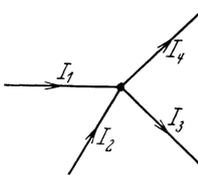


Abb. 5. Knoten eines Netzes.

Der erste Kirchhoffsche Satz bezieht sich auf die Knotenpunkte des Netzes. Er bringt die Erfahrungstatsache zum Ausdruck, daß sich der elektrische Strom an der Verzweigungsstelle wie eine nichtzusammendrückbare Flüssigkeit verhält, daß also von der Verzweigungsstelle in jeder Zeiteinheit die gleiche Elektrizitätsmenge wegfließt, die dem Verzweigungspunkt zugeführt wird. Man kann daher den ersten Kirchhoffschen Satz auch als eine Formulierung des Gesetzes von der Erhaltung der Elektrizität bezeichnen. Im Fall der Abb. 5 muß

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4$$

sein. Eine Vereinfachung der Ausdrucksweise ergibt sich, wenn man die dem Knotenpunkt zufließenden Ströme als positiv rechnet, die vom Knotenpunkt wegfließenden Ströme als negativ. Es gilt dann der erste Kirchhoffsche Satz in der Form (Kirchhoff, 1847):

$$\sum I_v = 0. \quad (18)$$

„Die Summe der einem Knotenpunkt zufließenden Ströme ist Null.“ Für Abb. 5 gilt also

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0.$$

Sind zwei Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  parallel geschaltet, so muß hiernach die Summe der Teilströme gleich dem Gesamtstrom sein. Andererseits ist die Spannung beider Widerstände gemeinsam. Daraus folgt, daß sich die Teilströme umgekehrt wie die Widerstände verhalten und daß die Parallelschaltung ersetzt werden kann durch einen Widerstand von der Größe

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (19)$$

Die beiden Teilströme sind

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (20)$$

und

$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (21)$$

Für einen einfachen Stromkreis wie in Abb. 4 sagt der erste Kirchhoffsche Satz aus, daß die Stromstärke in jedem Abschnitt des Stromkreises die gleiche ist.

## Der zweite Kirchhoffsche Satz.

Der zweite Kirchhoffsche Satz bezieht sich auf die Maschen des Netzes. Er stellt eine Erweiterung des Ohmschen Gesetzes dar und besagt, daß, wie in einem einfachen Stromkreis, so auch in jeder beliebigen Masche eines Netzes die Summe aller elektromotorischen Kräfte gleich der Summe aller Spannungsabfälle ist. Dieser Satz ergibt sich auf folgende Weise:

Es seien  $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c$  und  $\varphi_d$  die Potentiale der vier Knotenpunkte in Abb. 6; dann berechnen sich die Spannungen an den vier Zweigen zu

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b,$$

$$U_{bc} = \varphi_b - \varphi_c,$$

$$U_{cd} = \varphi_c - \varphi_d,$$

$$U_{da} = \varphi_d - \varphi_a;$$

und es folgt daraus, daß

$$U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} + U_{da} = 0. \quad (22)$$

Auf der linken Seite steht die Summe der Spannungen für einen vollständigen Umlauf um die Masche. Man bezeichnet eine solche Spannungssumme als die Umlaufspannung, und es gilt also, daß unabhängig von der Umlaufrichtung die Umlaufspannung in einer Masche Null ist. Die Gültigkeit dieses Satzes setzt jedoch stationäre Ströme und Spannungen voraus (siehe 3. Kapitel).

Im allgemeinsten Fall kann jeder Zweig einen Widerstand und eine EMK enthalten. Dann setzt sich die Spannung zwischen den Enden eines jeden Zweiges zusammen aus der EMK und dem Spannungsverbrauch des Widerstandes. Zwei Fälle sind dabei möglich: Die Spannung am Widerstand kann sich zur EMK addieren oder davon subtrahieren, je nach der Stromrichtung im Widerstand. Da man die Stromrichtung im allgemeinen Fall von vornherein nicht kennt, so legt man in den einzelnen Zweigen willkürlich Pfeilrichtungen für die Ströme fest, Abb. 6. Der Strom wird als positiv bezeichnet, wenn er diese Pfeilrichtung hat, als negativ, wenn er in entgegengesetzter Richtung fließt. Damit ist auch die positive Richtung für das Potentialgefälle bestimmt infolge der Festlegung, daß die positive Stromrichtung von Punkten höheren zu Punkten niedrigeren Potentials weist.

Im Zweig  $E_1, R_1$ , Abb. 6 hat z. B. die Potentialdifferenz am Widerstand  $R_1$  die gleiche Richtung wie die Potentialdifferenz zwischen den Klemmen der Spannungsquelle  $E_1$ ; es ist daher

$$U_{ab} = E_1 + I_1 R_1.$$

Dagegen gilt im Zweig 2

$$U_{bc} = -E_2 + I_2 R_2,$$

ferner, wenn die durch den Pfeil angedeutete Umlaufrichtung weiter verfolgt wird,

$$U_{ca} = -I_3 R_3,$$

$$U_{da} = I_4 R_4.$$

Daher folgt aus Gl. (22)

$$E_2 - E_1 = I_1 R_1 + I_2 R_2 - I_3 R_3 + I_4 R_4. \tag{23}$$

Links steht die Summe der elektromotorischen Kräfte, die man bei einem Umlauf von  $a$  über  $bcd$  nach  $a$  zurück erhält, wenn man dabei die elektromotorischen Kräfte als positiv rechnet, deren Stromquellen vom Minus- zum Pluspol durchlaufen werden (wie von einem „positiven Strom“). Rechts steht die Summe der Spannungsabfälle auf dem gleichen geschlossenen Weg, wenn man die Pfeilrichtung der Ströme als positive Richtung nimmt. Hätten wir den entgegengesetzten Umlaufsinn von  $a$  über  $dcb$  nach  $a$  zurück gewählt, so hätte sich genau dieselbe Gleichung ergeben. Diese Ableitung des zweiten Kirchhoffschen Satzes läßt sich ohne weiteres auf Maschen beliebiger Art übertragen.

Für die Anwendung des zweiten Kirchhoffschen Satzes ergeben sich also die folgenden Vorschriften:

1. Man versehe jeden Zweig der Masche mit einem Pfeil, der willkürlich angenommen werden kann, und der die Pfeilrichtung des Stromes anzeigt.

2. Man gehe von einem Knotenpunkt aus und umlaufe in einem beliebigen Sinn die ganze Masche. Auf diesem Wege bilde man die Summe aller elektromotorischen Kräfte,  $\sum E_v$ . Elektromotorische Kräfte, die vom Minuspol zum Pluspol durchlaufen werden, erhalten ein positives Vorzeichen, die andern ein negatives.

3. Auf dem gleichen Wege bilde man mit dem gleichen Umlaufsinn die Summe aller Spannungsabfälle  $\sum I_v R_v$ . Wird ein Widerstand in der Pfeilrichtung des Stromes durchlaufen, so gilt der Spannungsabfall als positiv, bei entgegengesetzter Richtung als negativ.

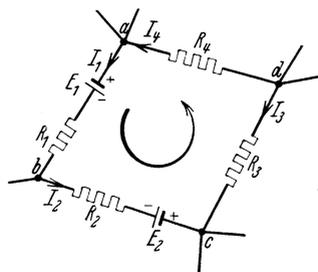


Abb. 6. Masche eines Netzes.

4. Für die so gebildeten Summen der elektromotorischen Kräfte und der Spannungsabfälle gilt dann

$$\sum_{\nu} E_{\nu} = \sum_{\nu} I_{\nu} R_{\nu} \quad (24)$$

(Kirchhoff, 1847). Die Vorzeichenregeln sind für die Anwendung der Kirchhoffschen Sätze von grundlegender Wichtigkeit; werden sie nicht beachtet, so verlieren die beiden Sätze ihren Sinn.

Die beiden Kirchhoffschen Sätze liefern in jedem Fall hinreichend viele Gleichungen zur Berechnung der Stromverteilung in linearen Netzen, wenn die elektromotorischen Kräfte und die Widerstände gegeben sind.

#### Anwendungsbeispiele.

1. Laden einer Akkumulatorenbatterie, Abb. 7. Der Netzanschluß habe eine Spannung von  $E_0 = 110$  V, die bei beliebiger Stromentnahme von der Zentrale konstant gehalten wird, so daß sie als elektromotorische Kraft aufgefaßt werden kann. Die EMK der Akkumulatorenbatterie sei  $E_1 = 60$  V. Wie groß muß der Widerstand  $R$  gemacht werden, wenn die Ladestromstärke 10 A betragen soll?

Die Anwendung des zweiten Kirchhoffschen Satzes in dem gezeichneten Umlaufsinn ergibt

$$E_0 - E_1 = IR, \text{ oder } R = \frac{E_0 - E_1}{I} = \frac{110 - 60}{10} \frac{\text{V}}{\text{A}} = 5 \Omega.$$

2. Parallelbetrieb von Stromerzeugern, Abb. 8. Die beiden Generatoren  $G_1$  und  $G_2$  mit den inneren Widerständen  $R_1$  und  $R_2$  und den elektromotorischen Kräften  $E_1$  und  $E_2$  arbeiten parallel auf ein Netz, das einen Strom  $I$  entnimmt. Wie groß sind die Teilströme  $I_1$  und  $I_2$ , die die beiden Generatoren liefern?

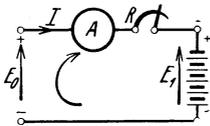


Abb. 7. Laden einer Akkumulatorenbatterie.

Nach dem ersten Kirchhoffschen Satz ist für den Knotenpunkt  $c$

$$I_1 + I_2 = I.$$

Der zweite Kirchhoffsche Satz liefert, auf die Masche  $abcd$  angewandt,

$$-E_1 + E_2 = -I_1 R_1 + I_2 R_2.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}, \quad \text{und} \quad I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}.$$

Die Generatorströme setzen sich also zusammen aus den Verzweigungsströmen des Gesamtstromes  $I$ , wie Gl. (20) und (21), und einem Ausgleichsstrom, der auch fließt, wenn vom Netz kein Strom entnommen wird. Dieser Ausgleichsstrom kann wegen der im allgemeinen kleinen inneren Widerstände der Generatoren schon bei geringen Spannungsunterschieden große Werte erreichen; durch geringe Änderungen der elektromotorischen Kräfte von parallel geschalteten Generatoren kann man daher die Last beliebig verteilen. Die Klemmenspannung der Generatoren ist

$$U_{ab} = U_{ca} = E_1 - I_1 R_1, \\ U_{ab} = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2} - I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Hieraus geht hervor, daß man die Parallelschaltung der beiden Generatoren ersetzen kann durch einen einzigen Generator mit dem inneren Widerstand

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (25)$$

und der EMK

$$E_i = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2}. \quad (26)$$

Zahlenbeispiel:

$$E_1 = 120 \text{ V}, \quad E_2 = 122 \text{ V}, \quad I = 100 \text{ A}, \quad R_1 = R_2 = 0,05 \Omega.$$

Der Ausgleichsstrom wird

$$\frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = \frac{2 \text{ V}}{0,1 \Omega} = -20 \text{ A},$$

und die Verzweigungsströme sind

$$I \frac{R_1}{R_1 + R_2} = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 50 \text{ A}.$$

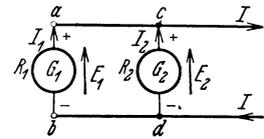


Abb. 8. Parallelbetrieb von Stromerzeugern.

Die Generatoren liefern also die Ströme  $I_1=30\text{ A}$  und  $I_2=70\text{ A}$ . Die beiden Generatoren wirken für das Netz so wie ein einziger Generator mit der EMK

$$E_i = \frac{E_1 + E_2}{2} = 121\text{ V},$$

und dem inneren Widerstand

$$R_i = 0,025\ \Omega.$$

3. Dreileitersystem, Abb. 9. Wenn in dem Dreileiternetz die Stromentnahmen der beiden Netzhälften  $I_1=100\text{ A}$ ,  $I_2=10\text{ A}$  sind, und wenn die elektromotorischen Kräfte der beiden Generatoren je  $120\text{ V}$  betragen, so gilt für die beiden in Abb. 9 eingezeichneten Umläufe nach dem zweiten Kirchhoffschen Satz

$$\begin{aligned} 120\text{ V} &= 0,03\ \Omega \cdot 100\text{ A} + 0,06\ \Omega \cdot 90\text{ A} + U_1, \\ 120\text{ V} &= -0,06\ \Omega \cdot 90\text{ A} + 0,03\ \Omega \cdot 10\text{ A} + U_2. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Spannungen am Leitungsende

$$U_1 = 111,6\text{ V}; \quad U_2 = 125,1\text{ V}.$$

In der schwächer belasteten Netzhälfte tritt also eine Spannungserhöhung auf.

4. Die Wheatstonesche Brücke, Abb. 10. Es sollen die Ströme in den einzelnen Zweigen berechnet werden, wenn die elektromotorische Kraft  $E$  und die fünf Brückenwiderstände gegeben sind.

Der erste Kirchhoffsche Satz liefert für die Knotenpunkte  $a$ ,  $c$  und  $d$  die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= I, \\ I_3 + I_5 &= I_1, \\ I_2 + I_5 &= I_4. \end{aligned}$$

Der zweite Kirchhoffsche Satz ergibt, angewandt auf die Maschen  $acd$ ,  $cbd$  und  $acbE$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= I_1 R_1 + I_5 R_5 - I_2 R_2, \\ 0 &= I_3 R_3 - I_4 R_4 - I_5 R_5, \\ E &= I_1 R_1 + I_3 R_3. \end{aligned}$$

Es sind dies sechs voneinander unabhängige Gleichungen für die sechs unbekanntnen Ströme. Würde man noch andere Knotenpunkte und Maschen hinzunehmen, so würden sich Gleichungen ergeben, die sich aus diesen sechs ableiten lassen. Durch Auflösen der sechs Gleichungen erhält man zur Berechnung von  $I_1$

$$I_1 \left[ R_1 + R_3 \frac{R_2 R_4 + R_5 (R_2 + R_4) + R_1 R_4}{R_2 R_4 + R_5 (R_2 + R_4) + R_2 R_3} \right] = E. \tag{27}$$

Die Ströme  $I_2$ ,  $I_3$  und  $I_4$  ergeben sich daraus durch sinngemäßes Vertauschen der Indizes. Z. B. gilt für  $I_3$

$$I_3 \left[ R_3 + R_1 \frac{R_2 R_4 + R_5 (R_2 + R_4) + R_2 R_3}{R_2 R_4 + R_5 (R_2 + R_4) + R_1 R_4} \right] = E. \tag{28}$$

Es wird also  $I_1 = I_3$  für  $R_1 R_4 = R_2 R_3$ , wie es nach der bekannten Gleichgewichtsbedingung der Brücke sein muß. Der Strom im Galvanometerzweig der Brücke,  $I_5$ , ergibt sich als Differenz von  $I_1$  und  $I_3$ . Er wird daher

$$I_5 = E \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_3)[R_2 R_4 + R_5 (R_2 + R_4)] + R_1 R_3 (R_2 + R_4)}. \tag{29}$$

Diese Formel kann zur Berechnung der Einstellempfindlichkeit einer Meßbrücke benutzt werden. Im Gleichgewicht ist

$$R_1 = \frac{R_2 R_3}{R_4}.$$

Bei kleinen Abweichungen kann man daher setzen

$$R_1 = \frac{R_2 R_3}{R_4} (1 - \delta). \tag{30}$$

Führt man dies in Gl. (29) ein, so folgt

$$I_5 = E \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} \frac{\delta}{R_2 (R_3 + R_4 + R_5) + R_4 R_5}, \tag{31}$$

wenn man im Nenner  $\delta$  als eine gegen 1 kleine Größe vernachlässigt. Zeigt das Instrument im Nullzweig nur Stromstärken oberhalb einer gewissen Grenze  $I_g$  an, so ergibt sich für die Einstellung der Brückenwiderstände eine gewisse Unsicherheit (Unempfindlichkeit der

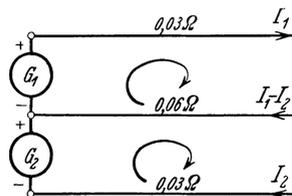


Abb. 9. Dreileitersystem.

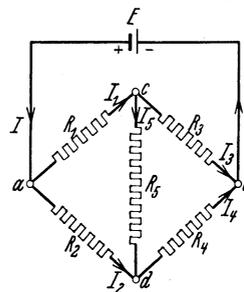


Abb. 10. Wheatstonesche Brücke.

Brücke), deren relatives Maß nach Gl. (31)

$$\delta = \frac{I_g}{E} (R_2 + R_4) \left( 1 + \frac{R_3}{R_4} + \frac{R_5}{R_4} + \frac{R_5}{R_2} \right) \quad (32)$$

ist. Haben die vier Brückenwiderstände unter sich und mit dem Galvanometerwiderstand  $R_5$  den gleichen Wert  $R$ , dann ist

$$\delta = 8R \frac{I_g}{E}. \quad (33)$$

Es sei z. B.  $R = 1000 \Omega$ ,  $I_g = 10^{-9}$  A und  $E = 8$  V. Dann wird

$$\delta = 10^{-6}.$$

Eine andere Anwendung kann die Formel (31) noch finden für die Temperaturfernmessung, bei der einer der vier Brückenwiderstände, z. B.  $R_1$ , den Temperaturindikator bildet (Widerstandsthermometer). Die Änderung des Brückengleichgewichts entsteht in diesem Fall durch die Temperaturabhängigkeit dieses Widerstandes, und man hat zu setzen

$$\delta = -\alpha \vartheta,$$

wenn  $\alpha$  den Temperaturkoeffizienten des Widerstandes  $R_1$ ,  $\vartheta$  die Übertemperatur gegen den Ausgangszustand bezeichnen. Solange  $\delta$  klein gegen 1 ist, wächst der Strom im Anzeigeinstrument daher proportional der Übertemperatur, so daß die Skala dieses Instruments leicht in Temperaturgraden geeicht werden kann.

Die Kirchhoffschen Sätze enthalten noch eine interessante Aussage über die im Netz umgesetzte Leistung. Wir betrachten eine Masche, die keine elektromotorischen Kräfte besitzt, und versehen die Zweige mit Pfeilen so, daß sie überall mit der willkürlich gewählten Umlaufrichtung übereinstimmen. Dann ist nach dem zweiten Kirchhoffschen Satz

$$\sum_{\nu} I_{\nu} R_{\nu} = 0, \quad (34)$$

wobei die einzelnen Glieder des Ausdruckes links alle positiv sind. Die in Wärme umgesetzte Leistung ist

$$N = \sum_{\nu} I_{\nu}^2 R_{\nu}. \quad (35)$$

Wir denken uns nun alle Ströme um den gleichen Betrag  $i$  vergrößert oder verkleinert. Eine solche Vergrößerung verstößt nicht gegen das erste Kirchhoffsche Gesetz, da infolge unserer Festsetzung über die Pfeile an jedem Knoten  $i$  hinzugefügt und wieder abgenommen wird. Bei dieser neuen Stromverteilung würde die Leistung

$$N' = \sum (I_{\nu} + i)^2 R_{\nu} = \sum I_{\nu}^2 R_{\nu} + 2i \sum I_{\nu} R_{\nu} + i^2 \sum R_{\nu}$$

betragen, oder mit Rücksicht auf Gl. (34) und (35)

$$N' = N + i^2 \sum R_{\nu}.$$

$N'$  ist also immer größer als  $N$ ; d. h. es stellt sich in Wirklichkeit eine solche Stromverteilung ein, daß die in Wärme umgewandelte Energie ein Minimum wird.

#### 4. Hilfsregeln für die Berechnung von Stromverzweigungen.

##### Das Superpositionsgesetz.

Der Widerstand metallischer Leiter kann in vielen Fällen als unabhängig von der Stromstärke angesehen werden. Dann sind die aus der Anwendung der Kirchhoffschen Sätze auf die Knoten und Maschen des Netzes hervorgehenden Gleichungen in den elektromotorischen Kräften und in den Strömen linear. Sind nun in einem solchen Netz mehrere elektromotorische Kräfte wirksam und berechnet man die zu jeder einzelnen gehörende Stromverteilung, so ergibt sich die wirkliche Stromverteilung durch Übereinanderlagern der Teilbilder. Mathematisch läßt sich dies so beweisen, daß man die Kirchhoffschen Gleichungen für die Teilströme anschreibt und die Ausdrücke addiert. Es zeigt sich dann, daß auch die Summenströme die Kirchhoffschen Sätze befriedigen. Daher gilt das Superpositionsgesetz (Helmholtz, 1853):

Die Ströme in den Zweigen eines linearen Netzes mit beliebig vielen elektromotorischen Kräften sind gleich der Summe der Teilströme, die durch die einzelnen elektromotorischen Kräfte hervorgerufen werden.

Bei der Anwendung dieses Gesetzes hat man also jeweils sämtliche elektromotorischen Kräfte bis auf eine gleich Null zu setzen. Am Netz darf dabei natürlich nichts geändert werden; insbesondere darf bei Stromquellen mit endlichem inneren Widerstand das Nullsetzen der EMK nicht so herbeigeführt werden, daß man die Stromquelle kurzschließt.

Der praktische Vorteil des Superpositionsgesetzes, das gegenüber den Kirchhoffschen Sätzen natürlich physikalisch nichts Neues aussagt, liegt darin, daß man auf diese Weise häufig das Anschreiben der Kirchhoffschen Gleichungen ersparen kann und das Resultat durch eine einfache Addition erhält.

**Beispiel:** Als Anwendung werde der Fall der parallel arbeitenden Generatoren, Abb. 8, betrachtet; die äußere Belastung sei durch einen Widerstand  $R$  dargestellt.

Setzt man zunächst  $E_2 = 0$ , so kann man sofort aus der Abbildung ablesen:

$$I_1' = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 R}{R_2 + R}} = E_1 \frac{R_2 + R}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)}.$$

Ebenso ergibt sich für  $E_1 = 0$ :

$$I_1'' = -E_2 \frac{R}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)}.$$

Damit erhält man

$$I_1 = I_1' + I_1'' = \frac{E_1(R_2 + R) - E_2 R}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)}.$$

Der Strom im andern Generator ergibt sich durch Vertauschen der Indizes 1 und 2:

$$I_2 = \frac{E_2(R_1 + R) - E_1 R}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)},$$

und es wird der Gesamtstrom

$$I = I_1 + I_2 = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)},$$

der wieder dargestellt werden kann als Strom aus einer Spannungsquelle mit dem inneren Widerstand

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

und der EMK

$$E_i = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2}.$$

### Der Satz von der Ersatzstromquelle.

Dieser für die Theorie der linearen Netze sehr nützliche Satz (Helmholtz, 1853) ergibt sich auf folgende Weise. Es werde ein beliebiger Widerstandszweig eines linearen Netzes betrachtet, das irgendwelche elektromotorischen Kräfte enthält. Der Widerstand des Zweiges sei  $R_n$ , die Stromstärke in diesem Zweig  $I_n$ . Denkt man sich nun die Kirchhoffschen Gleichungen für das Netz angeschrieben, so erkennt man, daß die Größe  $R_n$  nur in der Verbindung  $I_n R_n$  vorkommt. Die Stromstärke  $I_n$  kann dagegen wegen des ersten Kirchhoffschen Satzes noch in Verbindung mit anderen Widerständen des Netzes auftreten. Da aber ferner die Beziehungen zwischen den Stromstärken und elektromotorischen Kräften auf Grund der Kirchhoffschen Sätze lineare Beziehungen sein müssen, so ergibt sich nach Auflösen der Gleichungen für  $I_n$  eine Beziehung von der Form

$$c_1 I_n R_n + c_2 I_n = f(E_v, R_v), \quad (36)$$

wobei  $c_1$  und  $c_2$  Konstante sind, die sich in bestimmter Weise aus den Widerständen des Netzes zusammensetzen, aber  $R_n$  nicht enthalten, und  $f$  eine Funktion der

Widerstände  $R_v$  (ohne  $R_n$ ) und elektromotorischen Kräfte  $E_v$  des Netzes darstellt. Dividiert man auf beiden Seiten mit  $c_1$ , so ersieht man, daß  $c_2/c_1$  die Dimension eines Widerstandes haben muß, der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung dagegen die Dimension einer Spannung. Dieser Ausdruck wird Null, wenn sämtliche elektromotorischen Kräfte  $E_v$  Null werden, da dann auch  $I_n = 0$  sein muß; man kann ihn daher als eine elektromotorische Kraft  $E_i$  auffassen, die die Wirkung sämtlicher elektromotorischen Kräfte in bezug auf das Zustandekommen des Stromes  $I_n$  enthält. Setzt man ferner

$$\frac{c_2}{c_1} = R_i,$$

so lautet die Gl. (36)

$$I_n(R_n + R_i) = E_i. \quad (37)$$

Die Spannung an dem Widerstand  $R_n$  ist

$$U_n = I_n R_n = E_i \frac{R_n}{R_n + R_i}. \quad (38)$$

Auf Grund dieser Beziehungen kann man den Strom in einem beliebigen Widerstandszweig eines Netzes folgendermaßen berechnen:

1. Man denke sich den betreffenden Widerstand aus dem Netz herausgeschnitten. Zwischen den beiden Schnittpunkten tritt dann eine Spannung auf, die nach Gl. (38) gleich der EMK  $E_i$  ist.

2. Man denke sich den betreffenden Widerstandszweig durch einen widerstandslosen Leiter kurzgeschlossen. Dann ergibt sich in dem Leiter ein Strom von der Größe  $E_i/R_i$ . Aus der Kurzschlußstromstärke läßt sich daher  $R_i$  ermitteln.

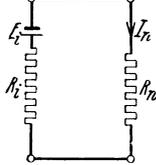


Abb. 11. Ersatzstromquelle mit Verbraucher.

Die Gl. (37) sagt aus, daß der wirkliche Strom  $I_n$  so berechnet werden kann, wie wenn der Widerstand  $R_n$  aus einem Generator mit der EMK  $E_i$  und dem inneren Widerstand  $R_i$  gespeist wird. Man kann also das übrige Netz durch einen einzigen Generator mit bestimmtem inneren Widerstand und bestimmter EMK ersetzen; die EMK ergibt sich aus der Leerlaufspannung, der innere Widerstand aus dem Kurzschlußstrom. Da über das Netz selbst bei der Ableitung keine weiteren Voraussetzungen gemacht wurden, so gilt das Ergebnis auch für zwei beliebige Punkte eines Netzes:

Schließt man an zwei beliebige Punkte  $a$  und  $b$  eines linearen Netzes, das eine beliebige Anzahl von elektromotorischen Kräften enthält, einen Widerstand an, so läßt sich zur Berechnung des Stromes in diesem Widerstand das ganze Netz ersetzen durch einen Generator mit einer EMK  $E_i$  und einem inneren Widerstand  $R_i$  (Abb. 11).

Man findet die EMK  $E_i$  durch Berechnung der Spannung  $U_{ab}$  zwischen den beiden Punkten  $a$  und  $b$  für den Fall, daß kein äußerer Widerstand an diese Punkte angeschlossen ist. Den Widerstand  $R_i$  kann man aus dem Kurzschlußstrom  $I_k$  zwischen den beiden Punkten  $a$  und  $b$  berechnen:

$$R_i = \frac{E_i}{I_k}. \quad (39)$$

Eine andere Methode zur Bestimmung von  $R_i$  besteht darin, daß man alle elektromotorischen Kräfte des Netzes Null setzt und den Ersatzwiderstand zwischen den Punkten  $a$  und  $b$  berechnet, ein Verfahren, dessen Richtigkeit ohne weiteres aus der Betrachtung der Abb. 11 hervorgeht.

Um auszudrücken, daß es sich hier nicht um einen wirklichen Generator handelt, bezeichnet man den Ersatzgenerator mit der EMK  $E_i$  und dem inneren Widerstand  $R_i$  auch als Zweipolquelle. Unter einem Zweipol versteht man allgemein ein beliebiges Netz mit zwei Klemmen.

**Anwendungen:** 1. Das oben gefundene Ergebnis für die parallel arbeitenden Generatoren läßt sich mit Hilfe des Satzes von der Ersatzstromquelle sofort angeben. Der innere Widerstand

der Ersatzstromquelle entsteht durch die Parallelschaltung der beiden Generatorwiderstände; die EMK  $E_i$  ist gleich der Spannung zwischen den beiden Punkten  $a$  und  $b$  (Abb. 8) für den Fall des Leerlaufes, also

$$E_i = E_1 - \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} R_1.$$

2. Um den Strom im Nullzweig einer Wheatstoneschen Brücke (Abb. 10) zu berechnen, verfährt man auf Grund des Satzes von der Ersatzstromquelle folgendermaßen. Man nimmt zunächst den Nullzweig  $R_5$  weg. Dann lassen sich sogleich die Ströme in den beiden parallelen Zweigen angeben. Die Spannung zwischen  $c$  und  $d$  ist gleich der Differenz der Spannungsabfälle an den Widerständen  $R_3$  und  $R_4$ , also

$$E_i = \frac{E}{R_1 + R_3} R_3 - \frac{E}{R_2 + R_4} R_4 = E \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}.$$

Der innere Widerstand der Ersatzstromquelle  $cd$  ergibt sich für  $E = 0$ . Es fallen dann die Punkte  $a$  und  $b$  zusammen; der Widerstand  $R_3$  liegt parallel zu  $R_1$ ,  $R_4$  liegt parallel zu  $R_2$ , wie es Abb. 12 zeigt. Daher ist der Widerstand zwischen  $c$  und  $d$

$$R_i = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}.$$

Auf diese Weise erhält man sofort das Ergebnis

$$I_5 = \frac{E_i}{R_5 + R_i} = \frac{E(R_2 R_3 - R_1 R_4)}{R_5(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + R_1 R_3(R_2 + R_4) + R_2 R_4(R_1 + R_3)},$$

das identisch mit Gl. (29) ist.

Auf Grund des Satzes von der Zweipolquelle läßt sich auch die Frage beantworten, welche maximale Leistung einem beliebigen Netz entnommen werden kann. Legt man an zwei beliebige Punkte eines Netzes einen Widerstand  $R_n$ , so nimmt er eine Leistung auf von der Größe

$$N_n = I_n^2 R_n = \frac{E_i^2 R_n}{(R_i + R_n)^2}.$$

Diese Leistung hat ihren Maximalwert

$$N_n = \frac{E_i^2}{4R_i},$$

wenn  $R_n = R_i$  ist.

**Beispiel:** Als Anwendung werde wieder die Wheatstonesche Brücke (Abb. 10) betrachtet. Hat die Stromquelle mit der EMK  $E$  einen inneren Widerstand von der Größe  $R$ , so ergibt sich die folgende Bedingung für die maximale Leistungsaufnahme der Brücke, wenn man noch berücksichtigt, daß für das Gleichgewicht der Diagonalzweig stromlos ist:

$$R = \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

Führt man hier die Gleichgewichtsbedingung

$$R_1 = \frac{R_2 R_3}{R_4}$$

ein, so folgt

$$R = R_3 \frac{R_2 + R_4}{R_3 + R_4}. \tag{40}$$

Soll auch das Anzeiginstrument so bemessen werden, daß es bei einer Verstimmung der Brücke die maximale Leistung aufnimmt, so muß sein Widerstand  $R_5$  gleich dem inneren Widerstand der Brücke zwischen den Punkten  $c$  und  $d$  gemacht werden. Denkt man sich zur Bestimmung dieses inneren Brückenwiderstandes an die Punkte  $c$  und  $d$  eine Stromquelle gelegt und macht man  $E = 0$ , so erkennt man, daß in dem Widerstand  $R$  der ursprünglichen Stromquelle kein Strom fließen kann, wenn die Brücke abgeglichen ist. Es liegen also die Widerstände  $R_1 + R_2$  und  $R_3 + R_4$  einander parallel, d. h. die Bedingung für die maximale Leistungsaufnahme des Anzeiginstrumentes lautet

$$R_5 = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4},$$

oder unter Einführung der Gleichgewichtsbedingung

$$R_5 = R_2 \frac{R_3 + R_4}{R_2 + R_4}. \tag{41}$$

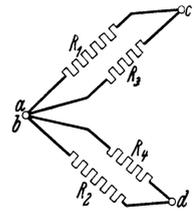


Abb. 12. Innerer Widerstand der Meßbrücke.

Die beiden Gl. (40) und (41) geben die allgemeinen Regeln für die günstigste Bemessung einer Meßbrücke.

Wenn der Widerstand  $R_n$  des Verbraucherzweiges gleich dem inneren Widerstand der Ersatzstromquelle ist, so spricht man von Anpassung. Ist ein Verbraucher seiner Ersatzstromquelle angepaßt, so nimmt er die maximale Leistung auf. Freilich wird dabei eine gleich große Leistung im Inneren der Ersatzstromquelle in Wärme umgesetzt; der elektrische Wirkungsgrad einer solchen Anordnung ist nur 50%. Dies ist der Hauptgrund, weswegen die Anpassung in der Starkstromtechnik keine Verwendung findet; ein anderer damit zusammenhängender Grund ist der, daß bei Anpassung auch der innere Spannungsabfall 50% beträgt, so daß bei Änderungen der Belastung starke Spannungsschwankungen auftreten würden. In der Schwachstromtechnik und Meßtechnik dagegen wird von dem Prinzip der Anpassung häufig Gebrauch gemacht.

### Die Netzumwandlung.

Die Methode der Netzumwandlung beruht darauf, daß man gewisse Bestandteile von linearen Netzen ersetzen kann durch andere Anordnungen von Widerständen,

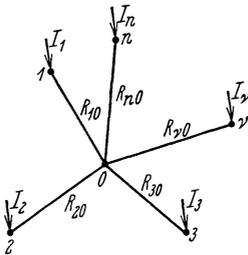


Abb. 13.  $n$ -strahliger Widerstandsstern.

die zu einer Vereinfachung des Netzes führen, ohne daß sich an der Strom- und Spannungsverteilung in den übrigen Abschnitten des Netzes etwas ändert. Das einfachste Beispiel einer Netzumwandlung bildet der Ersatz von zwei parallel geschalteten Widerständen durch einen einzigen Widerstand. Eine allgemeine Ummwandlungsmöglichkeit besteht nun für sternförmige Anordnungen von Widerständen. Jeder Knoten eines Netzes hängt über eine Anzahl von Strahlen mit dem übrigen Netz zusammen. Einen derartigen Widerstandsstern mit  $n$  Strahlen, Abb. 13, kann man immer durch ein vollständiges  $n$ -Eck, Abb. 14, ersetzen, ohne das übrige Netz dadurch zu beeinflussen.

Das vollständige  $n$ -Eck besteht aus sämtlichen Zweigen, die man von jedem Eckpunkt zu den andern ziehen kann; es hat  $\frac{1}{2}n(n-1)$  Seiten. Diese Seitenwiderstände können eindeutig aus den  $n$  Sternwiderständen bestimmt werden. Wir bezeichnen die Sternwiderstände wie in Abb. 13 mit

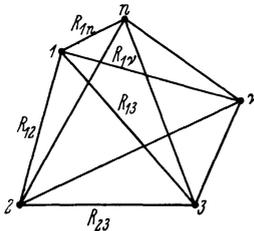


Abb. 14. Vollständiges  $n$ -Eck.

$$R_{10}, R_{20}, \dots, R_{v0}, \dots, R_{n0}.$$

Sind die Potentiale der  $n$ -Eckpunkte gegeben durch

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_v, \dots, \varphi_n,$$

so ist damit der Strömungszustand innerhalb des Sternes vollständig bestimmt; insbesondere ergeben sich dann die Ströme

$$I_1, I_2, \dots, I_v, \dots, I_n,$$

die in die Sternschenkel eintreten, nach dem Ohmschen Gesetz zu

$$I_v = \frac{\varphi_v - \varphi_0}{R_{v0}}, \tag{42}$$

wenn mit  $\varphi_0$  das Potential des Knotenpunktes 0 bezeichnet wird. Dieses läßt sich mit Hilfe des ersten Kirchhoffschen Satzes berechnen. Es muß

$$\sum_{v=1}^{v=n} I_v = 0$$

sein, oder mit Benutzung der Beziehung (42)

$$\sum_1^n \frac{\varphi_v}{R_{v0}} = \varphi_0 \sum_1^n \frac{1}{R_{v0}}. \tag{43}$$

Hier werde eine Abkürzung eingeführt. Die rechts stehende Summe stellt nämlich den Leitwert zwischen den zusammengefaßten Knoten 1 bis  $n$  und dem Knotenpunkt 0 dar. Dieser Leitwert werde Sternleitwert genannt. Das Reziproke davon bildet der Sternwiderstand  $R_0$ , und es ist

$$\frac{1}{R_0} = \sum_1^n \frac{1}{R_{\nu 0}}. \quad (44)$$

Dann wird aus Gl. (43)

$$\varphi_0 = R_0 \sum_1^n \frac{\varphi_\nu}{R_{\nu 0}}. \quad (45)$$

Wird dieser Ausdruck in Gl. (42) eingesetzt, so ergibt sich für einen beliebigen Sternschenkelstrom, wenn in der Summe der Übersichtlichkeit wegen für  $\nu$  das Zeichen  $\mu$  gesetzt wird:

$$I_\nu = \frac{\varphi_\nu}{R_{\nu 0}} - \frac{R_0}{R_{\nu 0}} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{\varphi_\mu}{R_{\mu 0}}.$$

Unter der Summe ist auch der Wert  $\varphi_\nu$  enthalten; man kann daher schreiben

$$I_\nu = \varphi_\nu \left( \frac{1}{R_{\nu 0}} - \frac{R_0}{R_{\nu 0}^2} \right) - \frac{R_0}{R_{\nu 0}} \sum_1^{n'} \frac{\varphi_\mu}{R_{\mu 0}}. \quad (46)$$

Der Strich am Summenzeichen soll anmerken, daß die Summierung sich nur auf diejenigen  $\mu$  bezieht, die von  $\nu$  verschieden sind.

Wenn nun das allgemeine  $n$ -Eck gleichwertig dem Stern sein soll, dann müssen die von den Eckpunkten aus in das  $n$ -Eck eintretenden Ströme bei gleichen Eckpunktpotentialen gleich den Sternschenkelströmen sein. Hieraus ergibt sich die gesuchte Umwandlungsbedingung zur Berechnung der Widerstände

$$R_{12}, R_{13} \dots R_{23} \dots R_{\nu\mu} \dots \text{ usw.}$$

des  $n$ -Ecks.

Die dem  $n$ -Eck in irgendeinem Eckpunkt zufließenden Ströme setzen sich aus den Teilströmen in den einzelnen Seitenwiderständen des  $n$ -Ecks zusammen. Es ist z. B.

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_{12}} + \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R_{13}} + \dots + \frac{\varphi_1 - \varphi_n}{R_{1n}},$$

oder allgemein

$$I_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=n'} \frac{\varphi_\nu - \varphi_\mu}{R_{\nu\mu}}, \quad (47)$$

wobei der Strich am Summenzeichen wieder die gleiche Bedeutung haben soll, wie oben. Die letzte Gleichung läßt sich auch schreiben

$$I_\nu = \varphi_\nu \sum_1^{n'} \frac{1}{R_{\nu\mu}} - \sum_1^{n'} \frac{\varphi_\mu}{R_{\nu\mu}}. \quad (48)$$

Der Vergleich der beiden Beziehungen (46) und (48) zeigt, daß die Ströme  $I_\nu$  identisch werden, wenn

$$\sum_1^{n'} \frac{1}{R_{\nu\mu}} = \frac{1}{R_{\nu 0}} - \frac{R_0}{R_{\nu 0}^2}, \quad (49)$$

und

$$\frac{1}{R_{\nu\mu}} = \frac{R_0}{R_{\nu 0} R_{\mu 0}}. \quad (50)$$

Aus der letzten dieser beiden Bedingungen folgt

$$R_{\nu\mu} = \frac{R_{\nu 0} R_{\mu 0}}{R_0}. \quad (51)$$

Setzt man diese Beziehung in die Gl. (49) ein, so wird diese zur Identität. Die Gl. (51)

stellt also die einzige Umwandlungsbedingung dar; sie liefert die folgende Regel zur Berechnung der Widerstände des  $n$ -Ecks:

Ein  $n$ -strahliger Stern läßt sich durch ein vollständiges  $n$ -Eck ersetzen, dessen Seitenwiderstände  $R_{\nu,\mu}$  sich sämtlich als Produkt der beiden anliegenden Sternschenkelwiderstände  $R_{\nu,0}$  und  $R_{\mu,0}$  mit dem Sternleitwert  $1/R_0$  ergeben.

Von Interesse ist die Frage, ob das Verfahren auch umgekehrt werden kann, ob sich also ein beliebiges  $n$ -Eck durch einen Stern ersetzen läßt. Dies ist im allgemeinen nicht möglich, da die Umwandlungsformel im ganzen  $\frac{1}{2}n(n-1)$  Gleichungen für die  $n$  unbekanntes  $R_{\nu,0}$  liefert, die Unbekannten also überbestimmt sind. Nur für den Fall, daß die Zahl der Unbekannten mit derjenigen der Bedingungsgleichungen übereinstimmt, daß also

$$n = \frac{1}{2}n(n-1)$$

ist, wird die Umwandlung in beiden Richtungen möglich. Diese Gleichung liefert, abgesehen von der Lösung  $n=0$ , den Wert  $n=3$ . Das Dreieck kann also grundsätzlich in den Stern umgewandelt werden (Kennelly, 1899). Das Umwandlungsgesetz erhält man aus den drei Gleichungen, die aus (51) hervorgehen:

$$R_{12} = \frac{R_{10}R_{20}}{R_0}; \quad R_{13} = \frac{R_{10}R_{30}}{R_0}; \quad R_{23} = \frac{R_{20}R_{30}}{R_0}.$$

Durch Addition ergibt sich der „Umfangswiderstand“ des Dreiecks:

$$R_{12} + R_{13} + R_{23} = \frac{R_{10}R_{20} + R_{10}R_{30} + R_{20}R_{30}}{R_0},$$

und durch Multiplikation

$$R_{12}R_{23} = \frac{R_{10}R_{20}^2R_{30}}{R_0^3}.$$

Dividiert man die Ausdrücke auf beiden Seiten der zwei letzten Gleichungen, so erhält man

$$\frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} = R_{20}. \tag{52}$$

Ebenso ergibt sich

$$\frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} = R_{10} \tag{53}$$

und

$$\frac{R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} = R_{30}. \tag{54}$$

Es gilt also der Satz:

Ein Widerstandsdreieck läßt sich durch einen dreistrahligen Stern ersetzen, dessen Schenkelwiderstände sämtlich gleich dem Produkt der benachbarten Seitenwiderstände sind, dividiert durch den Umfangswiderstand des Dreiecks.

**Anwendungsbeispiele:** 1. Mit Hilfe des allgemeinen Umwandlungssatzes kann man grundsätzlich den Widerstand zwischen zwei beliebigen Punkten eines Netzes, das keine elektromotorischen Kräfte enthält, berechnen, z. B. zwischen

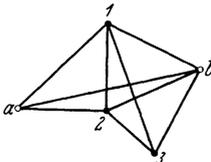


Abb. 15. Allgemeines Netz.

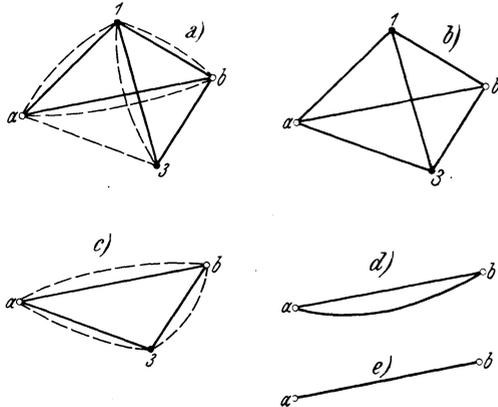


Abb. 16. Umwandlung des Netzes Abb. 15.

den beiden Punkten  $a$  und  $b$  der Abb. 15. Man ersetzt zu diesem Zweck der Reihe nach die Sterne durch Vielecke und faßt die entstehenden Parallelschaltungen zusammen. Der Gang die-

ses Verfahrens ist durch Abb. 16 veranschaulicht. Durch Ersatz des Knotens 2 entsteht das Bild *a*, das gleichwertig Bild *b* ist. Ersetzt man in Bild *b* den Knoten 1, so erhält man Bild *c*, das durch Bild *d* und schließlich durch Bild *e* ersetzt werden kann.

2. Kommen in dem Netz einfache Dreiecke vor, dann ist es zuweilen zweckmäßig, diese Dreiecke durch Sterne zu ersetzen. Ein Beispiel bildet die Wheatstonesche Brücke. Es sei in Aufgabe 4, S. 13 (Abb. 10) der Strom  $I_1$  zu berechnen. Zur Lösung verwandeln wir das Dreieck *cdb* in den gleichwertigen Stern. Es ergibt sich Abb. 17; für die Ersatzwiderstände gilt

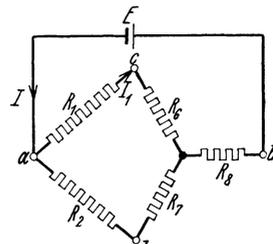


Abb. 17. Umwandlung der Wheatstoneschen Brücke.

$$R_6 = \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_4 + R_5};$$

$$R_7 = \frac{R_4 R_5}{R_3 + R_4 + R_5};$$

$$R_8 = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4 + R_5}.$$

Damit folgt sofort

$$I_1 = I \frac{R_2 + R_7}{R_1 + R_2 + R_6 + R_7} \quad \text{oder} \quad I_1 = I \frac{R_2(R_3 + R_4 + R_5) + R_4 R_5}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4 + R_5) + (R_3 + R_4)R_5}. \quad (55)$$

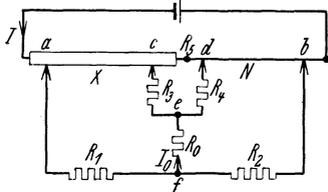


Abb. 18. Thomson-Brücke.

Durch die gleiche Umwandlung gelangt man auch sehr rasch zur Berechnung des Ersatzwiderstandes zwischen den Punkten *a* und *b* der Brücke.

3. Als weiteres Beispiel werde die Thomson-Doppelbrücke zum Messen kleiner Widerstände betrachtet. Das Schema der Widerstände ist durch Abb. 18 dargestellt. Mit *X* ist der zu messende Widerstand bezeichnet, mit *N* der Widerstand des Vergleichs-

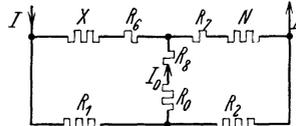


Abb. 19. Umwandlung der Thomson-Brücke.

drahtes.  $R_1$  und  $R_2$  sowie  $R_3$  und  $R_4$  sind feste Normalwiderstände;  $R_0$  stellt den Galvanometerwiderstand dar. Schließlich werde noch der Widerstand zwischen den beiden Anschlußpunkten *c* und *d* mit  $R_5$  bezeichnet. Gesucht sei der Strom  $I_0$  im Galvanometer.

Man verwandele das Dreieck *cde* in den gleichwertigen Stern; dann ergibt sich Abb. 19, und es gilt

$$\left. \begin{aligned} R_6 &= \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_4 + R_5}; \\ R_7 &= \frac{R_4 R_5}{R_3 + R_4 + R_5}; \\ R_8 &= \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4 + R_5}. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Die Doppelbrücke ist dadurch auf die Wheatstonesche Brücke zurückgeführt, und es können die dort abgeleiteten Formeln ohne weiteres angewendet werden. Die Gleichgewichtsbedingung lautet

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{X + R_6}{N + R_7}. \quad (57)$$

Gewöhnlich macht man

$$\frac{R_3}{R_4} = \frac{R_1}{R_2}. \quad (58)$$

Dann wird nach den Gl. (56) auch

$$\frac{R_6}{R_7} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Setzt man dies in Gl. (57) ein, so folgt

$$X = N \frac{R_1}{R_2}. \quad (59)$$

Für den Fall, daß das Brückengleichgewicht noch nicht hergestellt ist, kann man den Strom  $I_0$  z. B. auf folgende Weise berechnen. Für die Ströme  $I_1$  und  $I_2$  gilt nach dem vorigen Beispiel

$$I_1 = I \frac{R_1(R_0 + R_2 + R_7 + R_8 + N) + R_2(R_0 + R_6)}{(R_1 + R_6 + X)(R_0 + R_2 + R_7 + R_8 + N) + (R_2 + R_7 + N)(R_0 + R_8)}; \quad (60)$$

$$I_2 = I \frac{(R_6 + X)(R_0 + R_2 + R_7 + R_8 + N) + (R_7 + N)(R_0 + R_8)}{(R_1 + R_6 + X)(R_0 + R_2 + R_7 + R_8 + N) + (R_2 + R_7 + N)(R_0 + R_8)}. \quad (61)$$

Damit wird die Spannung am Nullzweig

$$U_0 = I \frac{R_2(R_0 + R_8)(R_6 + X) - R_1(R_7 + N)(R_0 + R_8)}{(R_1 + R_6 + X)(R_0 + R_2 + R_7 + R_8 + N) + (R_2 + R_7 + N)(R_0 + R_8)}, \quad (62)$$

und es ergibt sich

$$I_0 = \frac{U_0}{R_0 + R_8} = I \frac{R_2(R_6 + X) - R_1(R_7 + N)}{(R_1 + R_6 + X)(R_0 + R_2 + R_7 + R_8 + N) + (R_2 + R_7 + N)(R_0 + R_8)}. \quad (63)$$

Praktisch sind meist die Widerstände  $X$ ,  $N$  und  $R_5$  sehr klein gegen die übrigen. Dann vereinfacht sich die eben gefundene Gleichung zu der Näherungsformel

$$I_0 = I \frac{R_2 X - R_1 N}{R_1(R_0 + R_2 + R_8) + R_2(R_0 + R_8)}, \quad (64)$$

in der noch die Gl. (56) und (58) berücksichtigt sind. Für kleine Abweichungen von der Gleichgewichtsbedingung,

$$N = \frac{R_2}{R_1} X (1 - \delta), \quad (65)$$

wird

$$I_0 = I \frac{X \delta}{R_1 + (R_0 + R_8) \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)}. \quad (66)$$

### III. Der elektrische Strom in räumlich ausgedehnten Leitern.

#### 5. Grundbegriffe des räumlichen Strömungsfeldes.

In einem langgestreckten zylindrischen Leiter aus gleichförmigem Material breitet sich ein konstanter Strom um so genauer gleichmäßig über den ganzen Querschnitt aus, je größer die Leiterlänge im Vergleich zu den Abmessungen des Querschnittes ist. Denkt man sich den Querschnitt in kleine, unter sich gleiche Flächenelemente zerlegt, so fließt durch jedes dieser Flächenelemente in der Zeiteinheit die gleiche Elektrizitätsmenge. Die Stromstärke je Flächeneinheit ist überall im Querschnitt konstant; sie ist für beliebige Flächenelemente des Querschnitts gleich dem Gesamtstrom dividiert durch die Fläche des Leiterquerschnittes. Eine solche gleichmäßige Stromverteilung bildete die Voraussetzung der Betrachtungen des Abschnittes II.

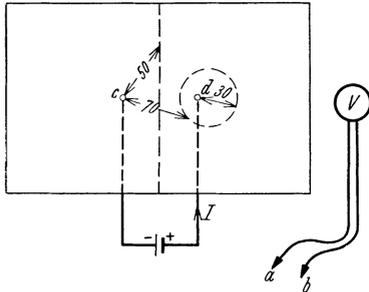


Abb. 20. Experimentelle Bestimmung der Potentialverteilung.

In der Elektrotechnik kommen nun auch Fälle einer komplizierteren räumlichen Verteilung des elektrischen Stromes vor. Beispiele dafür bilden die Erdungen, bei denen sich der Strom nach allen Richtungen hin im Erdboden ausbreitet, oder Übergangswiderstände an Kontakten. Derartige Fälle räumlicher elektrischer Strömungen sind der Gegenstand dieses Abschnittes. Auch die räumliche Strömung wird durch die Gesetze von Ohm und Kirchhoff beherrscht. Während aber diese Gesetze in linearen Netzen ohne weiteres auf die Ströme und Spannungen angewendet werden können, bedarf es im räumlichen Strömungsfeld

der Einführung von einigen neuen Größen, die aus Strom und Spannung abgeleitet sind und eine Kennzeichnung und Veranschaulichung des Strömungsfeldes vermitteln. Um zu diesen Größen zu gelangen, gehen wir von dem folgenden Versuch aus.

Auf einer großen Tafel aus Eisenblech, die isoliert aufgestellt ist, sind zwei Klemmen  $c$  und  $d$  angebracht, Abb. 20; sie werden mit einer Gleichstromquelle verbunden. Es fließt dann Strom durch die Blechtafel von der einen Klemme zur andern; in der Tafel ergibt sich ein räumliches Strömungsfeld, das genauer untersucht werden soll. Zu diesem Zweck werden die Klemmen eines empfindlichen Spannungsmessers  $V$  mit zwei Metallspitzen (Sonden)  $a$  und  $b$  verbunden. Setzt man diese Spitzen auf zwei beliebige Punkte der Blechtafel, so zeigt der Spannungsmesser die Spannung

zwischen diesen Punkten an. Die größte Spannung ergibt sich beim Aufsetzen auf die Elektroden  $c$  und  $d$ ; beispielsweise zeige das Instrument dabei einen Ausschlag von 100 Teilstrichen, den wir der Einfachheit halber mit 100 V bezeichnen. Indem wir nun die Sonde  $a$  auf  $c$  setzen, suchen wir mit der Sonde  $b$  alle Punkte der Blechtafel auf, deren Spannung 50 V gegen die Elektrode  $c$  beträgt, die also die Spannung zwischen den Elektroden gerade halbieren. Der Versuch ergibt, daß diese Punkte, wie es aus Symmetriegründen zu erwarten war, auf der Mittelsenkrechten zur Strecke  $cd$  liegen. Setzt man die Sonde  $a$  irgendwo auf diese Mittellinie und die Sonde  $b$  auf  $d$ , so ergibt sich der gleiche Ausschlag von 50 V. Wir können ferner in gleicher Weise die Punkte aufsuchen, deren Spannung gegen  $c$  einen beliebigen anderen Wert hat. Für eine Spannung von 70 V erhält man z. B. die in Abb. 20 angedeutete Kurve, die die Elektrode  $d$  umgibt; andererseits zeigt sich, daß beliebige Punkte dieser Kurve gegen die Elektrode  $d$  eine Spannung von 30 V haben. Man kann so systematisch die Spannungsverteilung in der ganzen Tafel untersuchen, indem man die Linien gleicher Spannung gegen die eine Elektrode aufzeichnet. Es ergibt sich eine Anordnung von Kurven, wie sie durch Abb. 21 veranschaulicht ist. Wir nennen diese Kurven die Linien gleichen Potentials oder die Niveaulinien. Setzt man die beiden Sonden auf ein und dieselbe Niveaulinie, so ergibt sich kein Ausschlag des Spannungsmessers  $V$ . Entsprechende Punkte gleichen Potentials kann man sich auch im Innern des Eisenbleches aufgesucht denken. Sie bilden etwa zylindrische Flächen, deren Spuren an der Blechoberfläche die gezeichneten Niveaulinien sind. Diese Flächen nennen wir die Niveaulflächen. Niveaulflächen sind Flächen gleichen Potentials. Zwischen zwei beliebigen Punkten ein und derselben Niveaulfläche besteht daher keine Spannung.

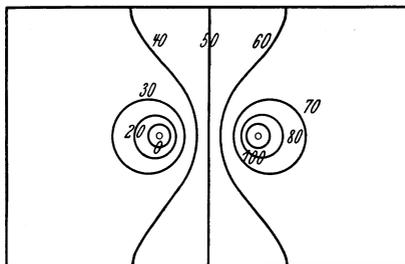


Abb. 21. Niveaulinien des Strömungsfeldes.

Jede Niveaulfläche kennzeichnen wir durch den Wert des ihr entsprechenden Potentials, also durch die Spannung gegen einen willkürlichen Bezugspunkt. Das Vorzeichen wird gemäß der Festsetzung über die Stromrichtung so gewählt, daß der Strom vom höheren Potential zum niedrigeren fließt. In Abb. 21 befindet sich also rechts der positive, links der negative Pol der Stromquelle, der Strom fließt von  $d$  nach  $c$ . Würde man die Anschlüsse der Stromquelle vertauschen, die Stromrichtung also umkehren, so würde sich zwar die gleiche Verteilung des Potentials ergeben; die angeschriebenen Zahlen müßten dann jedoch mit negativen Vorzeichen versehen werden.

Der Bezugspunkt des Potentials ist ganz willkürlich, da es für die Wirkungen nur auf die Potentialunterschiede, also die Spannungen, ankommt. Bei Wahl eines andern Bezugspunktes erhöhen oder erniedrigen sich sämtliche Potentiale um einen bestimmten aber im ganzen Feld konstanten Betrag. Wählt man z. B. einen Punkt der Mittellinie als Bezugspunkt, so wird das Potential dieser Mittellinie Null. Alle Potentialwerte der Abb. 21 erniedrigen sich um den gleichen Betrag von 50 V, so daß die Elektrode  $c$  das Potential  $-50$  V erhält, die Elektrode  $d$  das Potential  $+50$  V. Für die Spannungen zwischen beliebigen Punkten ist eine solche Änderung belanglos. Es gelten also die beiden Sätze:

Das Potential eines Punktes ist gleich der Spannung zwischen diesem Punkt und einem Bezugspunkt. Die Spannung zwischen zwei beliebigen Punkten ist gleich der Differenz der Potentiale dieser Punkte.

Ein Feld, in dem diese Eigenschaften vorliegen, nennt man ein Potentialfeld. Ist  $\varphi_a$  das Potential eines Punktes  $a$ ,  $\varphi_b$  das Potential eines Punktes  $b$ , dann ist die

Spannung zwischen den beiden Punkten

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b. \quad (67)$$

Aus der Festsetzung über die Stromrichtung folgt, daß der Strom von  $a$  nach  $b$  fließt, wenn  $U_{ab}$  positiv ist und umgekehrt.

Sind die Niveaulächen eines Strömungsfeldes im Raum gegeben, so ist damit zugleich auch die Stromrichtung an jeder Stelle des Raumes bestimmt. Da längs der Niveaulächen kein Potentialgefälle vorhanden ist, so muß die Stromrichtung überall senkrecht auf den Niveaulächen stehen. Wir veranschaulichen die Stromrichtung durch die Stromlinien, die den Weg der Elektrizität angeben sollen. Diese Stromlinien müssen die Niveaulächen überall senkrecht durchstoßen. In dem betrachteten Beispiel eines Strömungsfeldes haben daher die Stromlinien etwa die in Abb. 22

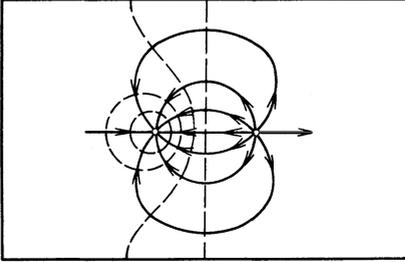


Abb. 22. Stromlinien des Strömungsfeldes.

dargestellte Form.

Grenzt man auf einer Niveauläche ein kleines Flächenelement  $dF$  ab, so findet man, daß durch dieses Flächenelement ein bestimmter Teil  $dI$  des Gesamtstromes hindurchtritt. Wir nennen das Verhältnis

$$G = \frac{dI}{dF} \quad (68)$$

im Grenzfalle eines unendlich kleinen Flächenelementes die Stromdichte. Die Stromdichte gibt daher an, wie groß die Stromstärke bezogen auf die Flächeneinheit an irgendeiner Stelle des Raumes ist. Man kann die Stromdichte durch die Dichte der Stromlinien veranschaulichen, indem man willkürlich festsetzt, daß die Zahl der Stromlinien, die durch ein Flächenelement  $dF$  einer Niveauläche hindurchgehen, proportional der Stromstärke in diesem Flächenelement sein soll. Man könnte z. B.  $1 \text{ A} = 10^6$  Stromlinien setzen. Dann wäre die Einheit der Stromdichte

$$1 \frac{\text{A}}{\text{cm}^2} = 10^6 \frac{\text{Stromlinien}}{\text{cm}^2}.$$

Entfernen sich die Linien voneinander, so wird in gleichem Maße die Stromdichte kleiner. Von dieser Möglichkeit der Darstellung einer Flußdichte durch eine Liniendichte wird besonders beim magnetischen Feld Gebrauch gemacht.

In einem langgestreckten zylindrischen Leiter breitet sich der Strom gleichmäßig über den ganzen Querschnitt  $q$  des Leiters aus. Jeder Querschnitt des Leiters stellt eine Niveauläche dar; die Stromrichtung steht senkrecht auf dem Leiterquerschnitt. Ist daher  $I$  die Stromstärke, so beträgt die Stromdichte an jeder beliebigen Stelle innerhalb des Leiters

$$G = \frac{I}{q}.$$

Ein derartiges Strömungsfeld wird als ein homogenes Feld bezeichnet. Im allgemeinen Fall einer räumlichen Strömung hat dagegen die Stromdichte an verschiedenen Punkten des Raumes verschiedene Werte.

Die Stromdichte kann als ein Vektor aufgefaßt werden, dessen Richtung die Stromrichtung in dem betreffenden Punkt des Raumes angibt; diese Darstellung der Stromdichte durch einen Vektor ist aus folgendem Grund vorteilhaft. Es werde das Bündel der Stromlinien betrachtet, die ein kleines Flächenelement  $dF$  einer Niveauläche durchstoßen, Abb. 23. Da die Fläche  $dF$  sehr klein sein soll, so kann der Strom innerhalb dieses Bündels als homogen angesehen werden. Die Stromlinien stehen senkrecht auf  $dF$ . Dreht man daher die Fläche  $dF$  um einen beliebigen Winkel  $\alpha$  aus ihrer Lage heraus, so wird der durch das Flächenelement fließende Strom kleiner, und zwar entsprechend der Projektion  $dF \cos \alpha$  der Fläche  $dF$  auf ihre Ausgangslage. Es wird also nun

$$dI = G \cos \alpha dF. \quad (69)$$

Wenn man andererseits die Stromdichte als einen Vektor auffaßt, dessen Richtung mit der Stromrichtung zusammenfällt, so stellt  $G \cos \alpha$  den Betrag der zur neuen Lage von  $dF$  senkrechten Komponente dieses Vektors dar. Damit ergibt sich das folgende allgemeine Verfahren zur Berechnung des Stromes, der durch eine beliebige Fläche im Strömungsfeld fließt.

Man teile die Fläche in Flächenelemente  $dF$  ein. Innerhalb eines jeden dieser Flächenelemente hat die Stromdichte eine bestimmte Größe; wir schreiben ihr ferner die Richtung des Stromes an der betreffenden Stelle zu, stellen sie also durch einen Vektor  $\mathcal{G}$  im Raum dar, Abb. 24. Zerlegt man nun den Vektor  $\mathcal{G}$  in eine zu dem betrachteten Flächenelement  $dF$  senkrechte Komponente  $\mathcal{G}_n$  (Normalkomponente) und eine Komponente  $\mathcal{G}_t$  parallel zum Flächenelement (Tangentialekomponente), so ist der durch  $dF$  hindurchfließende Strom nach dem vorhin Gesagten gleich dem Betrag von  $\mathcal{G}_n$  mal der Größe des Flächenelementes  $dF$ :

$$dI = G \cos \alpha dF = |\mathcal{G}_n| dF. \tag{70}$$

Der Gesamtstrom ergibt sich als Summe dieser einzelnen Beiträge; es ist

$$I = \int |\mathcal{G}_n| dF, \tag{71}$$

wobei das Integral über die betreffende Fläche zu erstrecken ist. Bei der Bildung der Summe muß man das Vorzeichen für die Stromdichte willkürlich festlegen (+ Pfeil in Abb. 24). Dann ist  $|\mathcal{G}_n|$  als positiv einzusetzen, wenn diese Komponente die positive Richtung zur Fläche hat (wie in Abb. 24), als negativ bei entgegengesetzter Richtung.

Soll gekennzeichnet werden, daß eine Größe ein Vektor ist, also einen Betrag und eine Richtung besitzt, so benützen wir den entsprechenden gotischen Buchstaben. Der Betrag wird durch den gleichen Buchstaben mit zwei senkrechten Strichen oder durch den lateinischen Buchstaben dargestellt. In der Vektorrechnung betrachtet man auch Flächenelemente als Vektoren; der Betrag ist gleich der Fläche, die Richtung wird durch eine Senkrechte zur Fläche gekennzeichnet, also z. B. durch den + Pfeil in Abb. 24. Das Flächenelement  $dF$  wird als Vektor durch das Symbol  $d\mathfrak{F}$  dargestellt. Das Produkt aus dem Betrag eines Vektors mit der in die Richtung dieses Vektors fallenden Komponente eines anderen Vektors bezeichnet man als inneres Produkt der beiden Vektoren oder als skalares Produkt; dieses Produkt ist eine skalare Größe, also eine Größe, die durch das Produkt eines Zahlenwertes mit einer Einheit vollständig bestimmt ist, wie z. B. das Potential. Der Strom durch die Fläche  $dF$  ist daher das innere Produkt von Stromdichte und Flächenelement. Man kennzeichnet das innere Produkt, indem man die beiden Vektorsymbole nebeneinander schreibt. In der Vektorschreibweise lautet also die Gl. (70)

$$dI = \mathcal{G} d\mathfrak{F}. \tag{72}$$

Das innere Produkt wird positiv, wenn die beiden Vektoren einen spitzen Winkel bilden, negativ bei stumpfem Winkel. Die Gl. (71) lautet in dieser Schreibweise

$$I = \int \mathcal{G} d\mathfrak{F}. \tag{73}$$

Die Stromstärke ist gleich dem Flächenintegral der Stromdichte.

Die Stromlinien geben überall die Richtung der Stromdichte an; die Stromdichte steht also senkrecht auf den Niveaulächen. Sie zeigt von einer Fläche höheren Potentials zu einer Fläche mit niedrigerem Potential. Wir führen nun noch eine zweite Größe ein, die die gleiche Richtung hat, nämlich das Potentialgefälle oder die elektrische Feldstärke. Darunter verstehen wir die Abnahme des Potentials längs

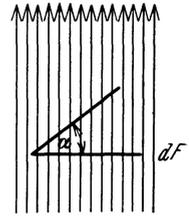


Abb. 23. Strömung durch ein Flächenelement.

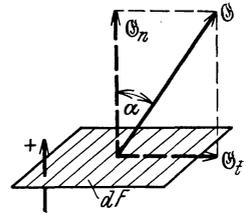


Abb. 24. Vektordarstellung der Strömung.

eines kurzen Stückes einer Stromlinie, bezogen auf die Längeneinheit. Die elektrische Feldstärke ist also ein Vektor, der senkrecht auf einer Niveaulfläche steht und in die Richtung abnehmenden Potentials zeigt; dieser Vektor der elektrischen Feldstärke werde mit  $\mathfrak{E}$  bezeichnet. Um für einen beliebigen Punkt eines Potentialfeldes die elektrische Feldstärke zu bestimmen, denke man sich durch den betrachteten Punkt die Niveaulfläche gelegt, Abb. 25, und errichte die Senkrechte auf dieser Niveaulfläche. Man schreite dann längs dieser Senkrechten um ein kleines Stück  $dn$  fort und bestimme die Änderung  $d\varphi$  des Potentials auf diesem Weg. Dann ist der Betrag der elektrischen Feldstärke

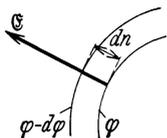


Abb. 25. Berechnung der elektrischen Feldstärke.

Die Richtung von  $\mathfrak{E}$  ist die der größten Abnahme des Potentials  $\varphi$  im Raum.

$$|\mathfrak{E}| = \frac{d\varphi}{dn}. \quad (74)$$

In der Vektorrechnung benützt man für die eben ausgeführte Operation der Ableitung des Vektors  $\mathfrak{E}$  aus der skalaren Größe  $\varphi$  ein besonderes Symbol. Man bezeichnet als Gradient einer skalaren Funktion  $\varphi$  des Raumes einen Vektor, der genau so gebildet wird wie die elektrische Feldstärke, nur mit dem entgegengesetzten Vorzeichen. Diesen Vektor schreibt man grad  $\varphi$ . Es gilt daher

$$\mathfrak{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (75)$$

Zeichnet man das Niveaulinienbild so, daß benachbarten Niveaulinien immer die gleiche Potentialdifferenz entspricht, so liegen die Niveaulinien um so dichter nebeneinander, je größer die elektrische Feldstärke ist. In dem Fall der Abb. 21 ist daher die elektrische Feldstärke am größten auf der Strecke  $cd$  zwischen den beiden Elektroden; sie wächst auf dieser Strecke von der Mitte aus nach den beiden Elektroden hin an. Auch die elektrische Feldstärke ist wie die Stromdichte im allgemeinen Fall eine Funktion des Raumes; die Gesamtheit ihrer Werte bildet ein Vektorfeld.

Die Spannung zwischen zwei beliebigen Punkten  $a$  und  $b$  im Potentialfeld ergibt sich als Differenz der Potentiale dieser Punkte. Auf Grund der Definition der

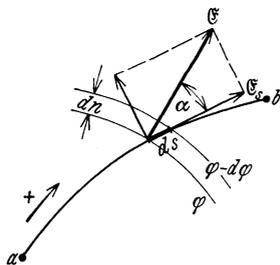


Abb. 26. Zur Berechnung der Spannung aus der Feldstärke.

elektrischen Feldstärke lassen sich die Potentialdifferenzen allgemein auch durch die Feldstärke ausdrücken. In Abb. 26 seien  $a$  und  $b$  die beiden Punkte, für die die Potentialdifferenz aufgesucht werden soll. Man zeichne einen beliebigen Weg, der die beiden Punkte verbindet, und betrachte einen kleinen Abschnitt  $ds$  dieses Weges. Die Potentiale der Endpunkte des Wegelementes  $ds$  seien  $\varphi$  und  $\varphi - d\varphi$ . Die elektrische Feldstärke steht senkrecht zu den Niveaulflächen; sie bilde einen Winkel  $\alpha$  mit dem Wegelement  $ds$ . Der Abstand  $dn$  der beiden Niveaulflächen ist daher

$$dn = \cos \alpha ds,$$

und nach Gl. (74) gilt

$$d\varphi = |\mathfrak{E}| dn = |\mathfrak{E}| \cos \alpha ds. \quad (76)$$

Zerlegt man andererseits den Vektor der elektrischen Feldstärke in die Komponenten in Richtung des Wegelementes  $ds$  und senkrecht dazu, so ist der Betrag der erstgenannten Komponente

$$|\mathfrak{E}_s| = |\mathfrak{E}| \cos \alpha. \quad (77)$$

Es gilt daher für den Potentialunterschied der Endpunkte des Wegelementes auch

$$d\varphi = |\mathfrak{E}_s| ds. \quad (78)$$

Die ganze Potentialdifferenz zwischen den Punkten  $a$  und  $b$  ergibt sich durch Summieren dieser einzelnen Beiträge über den ganzen Weg:

$$U_{ab} = \int_a^b |\mathfrak{E}_s| ds = \varphi_a - \varphi_b. \quad (79)$$

$|\mathfrak{E}_s|$  ist positiv einzusetzen, wenn  $\mathfrak{E}_s$  in die Integrationsrichtung fällt, negativ bei entgegengesetzter Richtung. Es gilt daher

$$\int_a^b |\mathfrak{E}_s| ds = - \int_b^a |\mathfrak{E}_s| ds. \tag{80}$$

Man nennt das nach Gl. (79) gebildete Integral das **Linienintegral** der elektrischen Feldstärke. In einem Potentialfeld der betrachteten Art ist das Linienintegral der elektrischen Feldstärke unabhängig vom Weg gleich der Differenz der Potentiale zwischen Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges. Das Voltmeter  $V$  der Abb. 20 mißt das Linienintegral der elektrischen Feldstärke auf Wegen, die die beiden Sonden etwa auf der Blechtafel miteinander verbinden.

Mit den Symbolen der Vektorrechnung kann man auch das Wegelement  $ds$  als einen Vektor  $d\mathfrak{s}$  auffassen, dessen Richtung durch eine willkürlich als positiv angegebene Wegrichtung, z. B. die Richtung des  $+$  Pfeiles in Abb. 26, bestimmt ist. Die Spannung zwischen Anfangs- und Endpunkt des Wegelementes ist dann das innere Produkt der beiden Vektoren  $\mathfrak{E}$  und  $d\mathfrak{s}$

$$d\varphi = \mathfrak{E} d\mathfrak{s}. \tag{81}$$

Für die Spannung zwischen einem Ausgangspunkt und einem auf der positiven Wegrichtung zu erreichenden Endpunkt eines beliebigen Weges gilt daher

$$U_{ab} = \int_a^b \mathfrak{E} d\mathfrak{s} = \varphi_a - \varphi_b. \tag{82}$$

Führt man hier die Darstellung der Feldstärke durch den Gradienten ein, Gl. (75), so folgt noch

$$\int_a^b d\mathfrak{s} \text{grad } \varphi = \varphi_b - \varphi_a. \tag{83}$$

## 6. Die Grundgesetze des stationären elektrischen Stromes.

Die Stromverteilung wird bei räumlicher Ausbreitung durch die gleichen Gesetze beherrscht wie in linearen Netzen. Während dort jedoch die Bahnen des Stromes durch die Form der Leiter vorgeschrieben sind, stellen sich hier ganz bestimmte Strombahnen ein, die zunächst unbekannt sind. Man kann sich aber jeden räumlich ausgedehnten Leiter durch ein räumliches Gitterwerk aus sehr dünnen und kurzen leitenden Stäbchen ersetzt denken mit im Grenzfall unendlich feiner Unterteilung des Gitters; dadurch entsteht aus dem räumlichen Strömungsfeld ein lineares Netz. Da die Stromverteilung in einem solchen Netz durch die Gesetze von Ohm und Kirchhoff bestimmt ist, so sind diese Gesetze auch für die Berechnung räumlicher Strömungen maßgebend; sie werden zunächst in eine für diesen Zweck brauchbare Form gebracht.

Das Ohmsche Gesetz in der Elementarform.

Man denke sich in einer beliebigen Strömung ein kleines Prisma so abgegrenzt, daß die Grundflächen auf sehr nahe benachbarten Niveauflächen liegen, während die Seitenflächen durch Stromlinien gebildet werden, also senkrecht auf den Grundflächen stehen, Abb. 27. Der Abstand der betrachteten Niveauflächen sei an der betreffenden Stelle des Raumes  $dn$ , der Potentialunterschied sei  $d\varphi$ . Aus den Seitenflächen tritt infolge der gemachten Voraussetzung kein Strom aus. Wenn die Grundflächen des Prismas  $dF$  klein genug gewählt werden, dann ist ferner der elektrische Strom gleichmäßig über die Grundflächen verteilt. Innerhalb des Prismas verläuft daher der elektrische Strom so wie

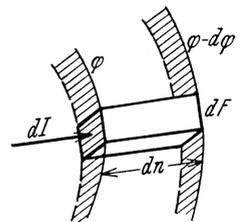


Abb. 27. Anwendung des Ohmschen Gesetzes im Strömungsfeld.

in einem langgestreckten zylindrischen Leiter; es gilt für den Widerstand zwischen den beiden Grundflächen

$$R = \frac{dn}{\kappa dF}, \quad (84)$$

wenn  $\kappa$  die Leitfähigkeit des Stoffes bezeichnet, in dem das Prisma abgegrenzt wurde. Ist  $dI$  der durch die Grundfläche hindurchtretende Strom, so lautet das Ohmsche Gesetz für das Prisma

$$d\varphi = R dI = \frac{dn}{\kappa dF} dI;$$

hieraus folgt

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{1}{\kappa} \frac{dI}{dF},$$

oder, unter Einführung der elektrischen Feldstärke  $\mathfrak{E}$  und der Stromdichte  $\mathfrak{G}$  nach Gl. (74) und (68),

$$\mathfrak{G} = \kappa \mathfrak{E}. \quad (85)$$

Diese Gleichung enthält zugleich die Aussage, daß die Vektoren  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{G}$  gleiche Richtung haben. Benützt man den spezifischen Widerstand  $\rho$  an Stelle der Leitfähigkeit, so lautet das Ohmsche Gesetz in der Elementarform

$$\mathfrak{E} = \rho \mathfrak{G}. \quad (86)$$

Hat z. B. die elektrische Feldstärke an irgendeiner Stelle zwischen zwei Elektroden im Erdboden den Betrag  $|\mathfrak{E}| = 1 \text{ V/cm}$  und ist die Leitfähigkeit des Erdbodens  $\kappa = 10^{-4} \text{ S/cm}$ , so beträgt die Stromdichte an dieser Stelle

$$|\mathfrak{G}| = 10^{-4} \frac{\text{S}}{\text{cm}} \frac{\text{V}}{\text{cm}} = 10^{-4} \frac{\text{A}}{\text{cm}^2}.$$

Die Feldstärke ist in metallischen Leitern meist sehr klein. Wird eine Kupferschiene mit einer Stromdichte von  $2 \text{ A/mm}^2$  belastet, so ergibt sich im Innern der Schiene bei einer Leitfähigkeit des Kupfers von  $\kappa = 5,7 \cdot 10^5 \text{ S/cm}$  eine Feldstärke von

$$|\mathfrak{E}| = \frac{2}{5,7 \cdot 10^5} \frac{\text{A}}{\text{mm}^2} \frac{\text{cm}}{\text{S}} = 3,5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{V}}{\text{cm}}.$$

In einem langgestreckten Leiter ist die Feldstärke gleich dem Spannungsabfall für die Längeneinheit des Leiters.

Die Richtungen von  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{E}$  stimmen nur in isotropen Leitern überein, also solchen, bei denen die Leitfähigkeit für alle Stromrichtungen den gleichen Wert hat. Bei gewissen Kristallen ist diese Bedingung nicht erfüllt,  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{E}$  können dann verschiedene Richtungen haben.

Nach Gl. (85) ist die Stromdichte proportional der Feldstärke. Da die Feldstärke um so größer ist, je dichter die Niveaulinien gleichen Potentialunterschiedes liegen, so kann man die Stromdichte dadurch veranschaulichen, daß man auch die Stromlinien um so dichter anordnet, je kleiner der Abstand zwischen den Niveaulinien ist. Man kann in der zeichnerischen Darstellung des Feldes in Abb. 22 z. B. den Abstand der Stromlinien überall gleich dem Abstand der Niveaulinien machen. Auf diese Weise läßt sich zu dem experimentell bestimmten Bild der Niveaulinien leicht das Bild der Stromlinien hinzufügen.

### Der erste Kirchhoffsche Satz im Strömungsfeld.

Der erste Kirchhoffsche Satz sagt aus, daß sich der stationäre elektrische Strom bei Verzweigungen wie eine nicht zusammendrückbare Flüssigkeit verhält, so daß der gesamte von einem Knoten wegfließende Strom Null sein muß. Diesen Satz kann man auch folgendermaßen ausdrücken. Man lege um den Knotenpunkt eine in sich geschlossene Fläche, die den Knotenpunkt umgibt (Hüllfläche), z. B. eine Kugeloberfläche mit dem Mittelpunkt im Knoten, Abb. 28. Die von dem Knotenpunkt ausgehenden Leiter durchstoßen dann diese Fläche, und nach dem ersten Kirchhoffschen Satz muß die Summe aller aus der Fläche austretenden Ströme Null sein. Man kann eine solche Hüllfläche auch an beliebigen andern Stellen des Netzes anbringen; auch wenn sie keinen Knoten enthält, z. B. in Abb. 29, hat der ausgesprochene Satz,

wie ohne weiteres einzusehen, Gültigkeit. Da man nun eine räumliche Strömung als Grenzfall der Strömung in einem linearen Netz auffassen kann, so gilt der Satz in der gleichen Form auch für das beliebige Strömungsfeld. Er lautet also:

Grenzt man in einem Strömungsfeld eine beliebige in sich geschlossene Fläche (Hüllfläche) ab, so ist der aus der Fläche austretende Gesamtstrom Null.

Dieser Satz läßt sich mathematisch folgendermaßen formulieren. Man zerlege die betrachtete Hüllfläche in hinreichend kleine Flächenelemente  $dF$ , Abb. 30. In

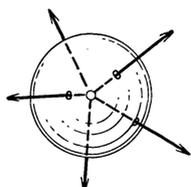


Abb. 28. Hüllfläche eines Knotenpunktes.

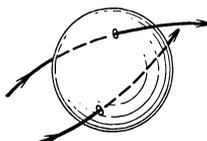


Abb. 29. Hüllfläche ohne Knotenpunkt.

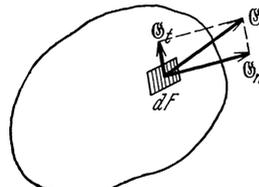


Abb. 30. Berechnung des durch eine Fläche fließenden Stromes.

jedem dieser Flächenelemente kann der Vektor der Stromdichte  $\mathcal{G}$  als konstant angesehen werden. Der aus dem Flächenelement austretende Strom ist daher nach Gl. (70)

$$dI = |\mathcal{G}_n| dF.$$

Um den Gesamtstrom zu erhalten, der aus der Fläche austritt, hat man die Summe dieser Produkte über die ganze Hüllfläche zu bilden:

$$I = \oint |\mathcal{G}_n| dF,$$

wobei der Kreis am Integralzeichen andeuten soll, daß es sich um eine Hüllfläche handelt. Der erste Kirchhoffsche Satz fordert, daß

$$\oint |\mathcal{G}_n| dF = 0. \tag{87}$$

Die Größen  $|\mathcal{G}_n|$  zählen als positiv, wenn der Vektor  $\mathcal{G}_n$  nach außen zeigt, als negativ bei umgekehrter Richtung.

Mit den Symbolen der Vektorrechnung lautet die Gl. (87)

$$\oint \mathcal{G} d\mathfrak{S} = 0, \tag{88}$$

wobei der Vektor  $d\mathfrak{S}$  überall senkrecht nach außen zeigt. Man nennt ein Vektorfeld, in dem diese Gleichung gilt, quellenfrei, da sie anzeigt, daß die Strömung nirgends entspringt oder endigt.

### Der zweite Kirchhoffsche Satz im Strömungsfeld.

Sieht man von im Strömungsfeld verteilten elektromotorischen Kräften ab, so ist der zweite Kirchhoffsche Satz bei der Definition der Grundbegriffe des Strömungsfeldes bereits dadurch berücksichtigt worden, daß die Spannungen als Differenzen von Potentialen definiert wurden. Die Summe der Spannungen auf einem beliebigen in sich geschlossenen Weg ist unter dieser Voraussetzung Null.

Bildet man das Linienintegral der elektrischen Feldstärke zwischen zwei beliebigen Punkten  $a$  und  $b$  des Strömungsfeldes auf dem Wege 1, Abb. 31, so ergibt sich die Differenz der Potentiale zwischen den beiden Punkten  $a$  und  $b$ . Das Linienintegral von Punkt  $b$  nach  $a$  über einen andern Weg 2 hat die gleiche Größe, aber das entgegengesetzte Vorzeichen. Addiert man die beiden Integrale, so erhält man das

Linienintegral der elektrischen Feldstärke auf dem geschlossenen Weg  $a1b2a$ ; es ist im stationären Strömungsfeld gleich Null:

Das Linienintegral der elektrischen Feldstärke ist auf beliebigen geschlossenen Wegen eines stationären Strömungsfeldes Null.

Dieser Satz lautet in der Schreibweise der Vektorrechnung

$$\oint \mathfrak{E} d\mathfrak{s} = 0. \quad (89)$$

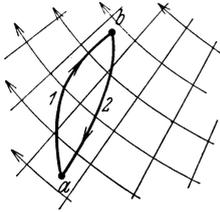


Abb. 31. Linienintegral der elektrischen Feldstärke auf einem geschlossenen Weg.

Hier zeigte der Kreis am Integralzeichen an, daß die Integration auf einem geschlossenen Weg erfolgt.

Man nennt ein Vektorfeld, in dem diese Bedingung erfüllt ist, wirbelfrei. In Gebieten, in denen sich keine elektromotorischen Kräfte befinden, stellt also die stationäre elektrische Strömung ein wirbel- und quellenfreies Feld dar. In diesen Gebieten treten keine in sich geschlossenen Stromlinien auf, diese müssen vielmehr die „Stromquellen“ durchlaufen. Auf einem Integrationsweg, der Stromquellen enthält, ist das Linienintegral der elektrischen Feldstärke gleich der Summe der elektromotorischen Kräfte, wie es der zweite Kirchhoffsche Satz verlangt.

Es ist auch der Fall möglich, daß elektromotorische Kräfte stetig im Raum verteilt sind, z. B. wenn in dem Leiter elektrochemische oder elektrothermische Wirkungen (Thermoeffekt) auftreten. Man kann die elektromotorischen Kräfte dann durch eine „eingeprägte Feldstärke“ (elektromotorische Kraft für die Längeneinheit) darstellen, indem man die elektromotorischen Kräfte durch das Linienintegral der eingepprägten Feldstärke definiert. Der zweite Kirchhoffsche Satz lautet dann

$$\oint (\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e) d\mathfrak{s} = 0, \quad (90)$$

wenn die eingeprägte Feldstärke, die an jeder Stelle des Raumes eine bestimmte Größe und Richtung hat, mit  $\mathfrak{E}_e$  bezeichnet wird.

### Das Joulesche Gesetz im Strömungsfeld.

In einem linearen Leiter vom Widerstand  $R$ , der vom Strom  $I$  durchflossen wird, ist die in der Zeiteinheit entwickelte Wärme gegeben durch

$$N = I^2 R. \quad (91)$$

Dieses Gesetz kann ohne weiteres auf das bei der Umformung des Ohmschen Gesetzes betrachtete Prisma, Abb. 27, angewendet werden. Es ist

$$dI = |\mathfrak{G}| dF, \quad \text{und} \quad R = \frac{dn}{\varkappa dF},$$

also die in dem Volumenelement umgesetzte Leistung

$$dN = \frac{1}{\varkappa} |\mathfrak{G}|^2 dF dn.$$

Da  $dF dn$  das Volumen des Prismas darstellt, definieren wir die in der Volumeneinheit in Wärme umgesetzte Leistung durch

$$N_1 = \frac{dN}{dF dn}.$$

Es ergibt sich

$$N_1 = \frac{1}{\varkappa} |\mathfrak{G}|^2 = |\mathfrak{G}| \cdot |\mathfrak{E}| = \varkappa |\mathfrak{E}|^2. \quad (92)$$

Beträgt z. B. die Stromdichte an der Oberfläche einer in den Erdboden eingegrabenen Erdungsplatte  $|\mathfrak{G}| = 10 \frac{\text{mA}}{\text{cm}^2}$ , und ist die Leitfähigkeit des Erdbodens  $\varkappa = 10^{-4} \text{ S/cm}$ , so wird

$$N_1 = 10^4 \frac{\text{cm}}{\text{S}} \cdot 10^{-4} \frac{\text{A}^2}{\text{cm}^4} = 1 \frac{\text{W}}{\text{cm}^3}.$$

Nun ist  $1 \text{ Ws} = 0,239 \text{ cal}$  oder  $1 \text{ W} = 0,239 \text{ cal/s}$ . Also wird die in der Zeit- und Volumeneinheit entwickelte Wärme

$$N_1 = 0,239 \frac{\text{cal}}{\text{cm}^3 \text{ s}}.$$

Hat der Erdboden etwa die Wärmekapazität des Wassers, so wird er sich in jeder Sekunde um  $0,239^\circ$  erwärmen, wenn keine Wärme abgeführt wird.

### 7. Beispiele von Strömungsfeldern.

Als einfachstes Beispiel für die Berechnung eines Strömungsfeldes werde zunächst der folgende Fall betrachtet. Eine Kugel vom Radius  $r_0$  aus einem sehr gut leitenden Material, z. B. Kupfer, sei in einen Stoff mit mäßiger Leitfähigkeit  $\kappa$  eingebettet, z. B. Erde. Der Kugel werde durch einen isolierten Draht Strom zugeführt, der in sehr großer Entfernung durch eine zweite Elektrode wieder abgenommen und zur Stromquelle zurückgeführt wird. In der näheren Umgebung der Kugelelektrode werden die Stromlinien aus Symmetriegründen radial von der Kugeloberfläche ausgehen, Abb. 32. Der gesamte der Kugel zugeführte Strom  $I$  verteilt sich gleichmäßig auf konzentrische Kugelflächen. Im Abstand  $r$  vom Kugelmittelpunkt hat daher die Stromdichte den Betrag

$$|\mathcal{G}| = \frac{I}{4\pi r^2}. \tag{93}$$

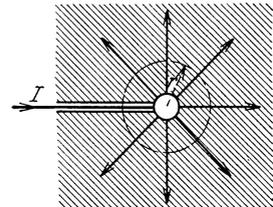


Abb. 32. Strömungsfeld in der Umgebung einer Kugelelektrode.

Diese Beziehung kann auch als der Ausdruck des ersten Kirchhoffschen Satzes betrachtet werden. Eine Kugelfläche mit dem Radius  $r$  wird von dem Leiter durchstoßen, der den Strom  $I$  in das Innere dieser Kugel einführt. Damit die Summe aller aus der Kugelfläche austretenden Ströme Null ist, muß die Stromdichte den durch Gl. (93) gegebenen Wert besitzen.

Der Vektor der Stromdichte  $\mathcal{G}$  zeigt vom Mittelpunkt der Kugel weg, wenn der Kugelelektrode durch die Leitung Strom zugeführt wird, bei umgekehrter Stromrichtung zeigt er nach dem Kugelmittelpunkt. Die Niveaulächen sind konzentrische Kugelflächen. Auch die Oberfläche der Metallkugel ist eine Niveauläche, da infolge der vorausgesetzten großen Leitfähigkeit innerhalb der Kugel kein merklicher Spannungsabfall entsteht. Alle Punkte der Kugel und insbesondere ihrer Oberfläche haben daher gleiches Potential.

Nach dem Ohmschen Gesetz ist durch die Stromdichte auch die Feldstärke bestimmt. Es gilt

$$|\mathcal{E}| = \frac{1}{\kappa} |\mathcal{G}| = \frac{I}{4\pi\kappa r^2}. \tag{94}$$

Die Richtung ist die gleiche wie die der Stromdichte. Aus der elektrischen Feldstärke ergibt sich auf Grund der Gl. (82) die Spannung zwischen der Kugeloberfläche und irgendeinem Punkt  $P$  des Raumes mit dem Abstand  $r$  vom Mittelpunkt der Kugel:

$$U_{0P} = \int_{r_0}^r |\mathcal{E}| dr = \frac{I}{4\pi\kappa} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{4\pi\kappa} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right). \tag{95}$$

Die Spannung zwischen der Metallkugel und dem beliebigen Punkt  $P$  nähert sich also mit wachsendem Abstand dieses Punktes einem Grenzwert, wie es Abb. 33 veranschaulicht. Der Grenzwert

$$U_0 = \frac{I}{4\pi\kappa r_0} \tag{96}$$

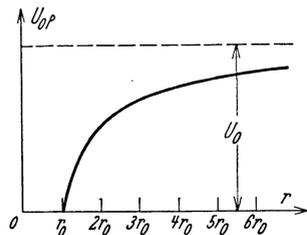


Abb. 33. Spannung in der Umgebung einer Kugelelektrode.

wird mit einem Fehler von 1% erreicht, wenn der Abstand  $r$  des Punktes  $P$  100 mal so groß wie der Kugelradius ist; man bezeichnet ihn als den Spannungsabfall am Übergangswiderstand zwischen der Metallkugel

und dem leitenden Stoff. Der Übergangswiderstand ist daher

$$R = \frac{1}{4\pi\kappa r_0}; \quad (97)$$

er liegt praktisch innerhalb einer Kugel vom Radius  $100 r_0$ . Die Formel (97) kann benützt werden zur Berechnung des Übergangswiderstandes zwischen einem kugelförmigen Erder und dem Erdboden. Es ist bemerkenswert, daß der Übergangswiderstand nicht umgekehrt proportional mit der Oberfläche der Metallkugel, sondern langsamer abnimmt.

**Zahlenbeispiel:** Für verschiedene Radien  $r_0$  eines Kugelerders ergeben sich nach Gl. (97) die folgenden Übergangswiderstände im Erdboden mit der Leitfähigkeit  $10^{-4}$  S/cm

$r_0 =$	5	10	50	100 cm
$R =$	160	80	16	8 $\Omega$ .

Teilt man den Raum in der Umgebung der Kugelelektrode durch eine dünne, isolierende, ebene Schicht, die durch den Mittelpunkt geht, Abb. 34, so kann man jedem der beiden so entstehenden Halbräume den Strom  $\frac{1}{2}I$  entnehmen, ohne daß sich an dem Strömungsbild etwas ändert. Man kann auch noch die Metallkugel durch den gleichen Schnitt teilen und jeder Hälfte den Strom  $\frac{1}{2}I$  zuführen. Es ergibt sich dann der Fall, daß an der Erdoberfläche eine Halbkugel vom Radius  $r_0$  eingegraben ist, der der Strom  $\frac{1}{2}I$  zugeführt wird. Das Potential ist überall das gleiche wie früher; auch der Spannungsabfall am Übergangswiderstand ist der gleiche geblieben. Der Übergangswiderstand ist also doppelt so groß:

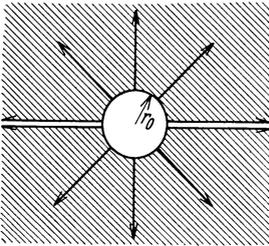


Abb. 34. Halbkugelelektrode.

$$R = \frac{1}{2\pi\kappa r_0}. \quad (98)$$

Diese Formel kann in manchen Fällen zur Abschätzung des Übergangswiderstandes eines Erders verwendet werden, wenn man diesen angenähert durch eine solche Halbkugel ersetzen kann. Zwischen dem Erder und irgendwelchen Punkten der Erdoberfläche im Abstand  $r$  vom Mittelpunkt ergibt sich eine Spannung, die durch Gl. (95) dargestellt ist. Führt man dort den gesamten Spannungsabfall  $U_0$  des Erders ein, so folgt

$$U_{0P} = U_0 \left(1 - \frac{r_0}{r}\right). \quad (99)$$

Diese Funktion hat den in Abb. 33 gezeigten Verlauf. Man bezeichnet die dadurch gegebene Spannungsverteilung auch als den Spannungstrichter des Erders. Seine Kenntnis ist von Bedeutung im Hinblick auf die Gefährdung von Lebewesen, die in die Nähe des Erders gelangen.

**Zahlenbeispiel:** Läßt sich die Erdung eines Leitungsmastes durch eine Halbkugel vom Radius 1 m ersetzen, so ist der Übergangswiderstand nach Gl. (98) 16  $\Omega$  für eine Bodenleitfähigkeit von  $10^{-4}$  S/cm. Bei Berührung eines Leiters der Freileitung mit dem Mast ergebe sich ein Erdstrom von 100 A. Dann ist die Übergangsspannung 1600 V. Die Spannung zwischen zwei beliebigen Punkten, die um den Abstand der Schrittweite des Menschen voneinander entfernt sind, nennt man die Schrittspannung. Für eine Schrittweite von 80 cm beträgt sie im ungünstigsten Falle nach Gl. (99)

$$\Delta U = U_0 \left(1 - \frac{100}{180}\right) = 700 \text{ V.}$$

Die Spannung zwischen der Vollkugel und irgendeinem Punkt des Raumes, Gl. (95), läßt sich als Differenz der Potentiale der Kugeloberfläche,  $\varphi_0$ , und des betrachteten Punktes,  $\varphi$ , darstellen; es gilt

$$U_{0P} = \varphi_0 - \varphi.$$

Hieraus folgt für das Potential des beliebigen Punktes im Abstand  $r$  vom Mittelpunkt der Kugel

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\kappa r} + c,$$

wobei  $c$  eine willkürliche Konstante bezeichnet; deren Bedeutung geht daraus hervor, daß für sehr große Werte von  $r$  das Potential gleich  $c$  wird. Die Konstante  $c$  bezeichnet also das Potential weit entfernter Punkte. Bezieht man alle Potentiale auf einen solchen weit entfernten Punkt, so wird

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\kappa r}. \tag{100}$$

Ein weiteres Beispiel dieser Potentialverteilung bildet das durch Abb. 35 dargestellte Leitersystem, bei dem der Hohlraum zwischen zwei konzentrischen Kugelelektroden mit einem Stoff geringer Leitfähigkeit  $\kappa$  ausgefüllt ist. Bezeichnet man willkürlich das Potential der äußeren Elektrode mit  $\varphi_1$ , so ist das der inneren  $\varphi_1 + U_0$ , wenn der Strom  $I$  von der inneren nach der äußeren Elektrode fließt und die Spannung zwischen den beiden Elektroden  $U_0$  betragen soll. Daher gelten die beiden Gleichungen

$$\varphi_1 = \frac{I}{4\pi\kappa r_2} \quad \text{und} \quad U_0 + \varphi_1 = \frac{I}{4\pi\kappa r_1},$$

aus denen hervorgeht, daß

$$U_0 = I \frac{r_2 - r_1}{4\pi\kappa r_1 r_2}. \tag{101}$$

Der Übergangswiderstand zwischen den beiden Elektroden ist hiernach gleich dem Widerstand eines zylindrischen Leiters aus dem gleichen Material mit der Leitfähigkeit  $\kappa$ , der Länge  $\delta = r_2 - r_1$  und dem Querschnitt  $F = 4\pi r_1 r_2$ , der gleich der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius  $r_0 = \sqrt{r_1 r_2}$  ist.

Die Spannungsverteilung in der Umgebung einer Kugel ist bei gegebenem Gesamtstrom unabhängig von der Größe der Kugelelektrode. Man würde das gleiche Potential auch bei einer Kugel von unendlich kleinem Radius erhalten. In bezug auf den außerhalb der Elektrode liegenden Raum läßt sich also die Elektrode ersetzen durch eine Kugel von unendlich kleinem Radius, durch die der Strom  $I$  austritt. Eine solche unendlich kleine Elektrode nennt man Punktquelle. Das Potential in der Umgebung einer Punktquelle ist durch Gl. (100) gegeben. Fließt der Strom in umgekehrter Richtung, wird er also durch die Elektrode dem Raum entnommen, so gilt entsprechend

$$\varphi = - \frac{I}{4\pi\kappa r}. \tag{102}$$

Bei Anwesenheit mehrerer Punktquellen überlagern sich die Einzelpotentiale (Superpositionsgesetz), da nach den Grundgesetzen des Strömungsfeldes zwischen den Strömen und Spannungen lineare Beziehungen bestehen. Sind z. B. in den leitenden Raum zwei Punktquellen  $Q_1$  und  $Q_2$ , Abb. 36, im Abstand  $l$  eingebettet, von denen die eine den Strom  $I$  zuführt, die andere den Strom  $I$  entnimmt, so gilt für das Potential in einem beliebigen Punkt  $P$

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\kappa} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \tag{103}$$

Die Niveaulflächen sind durch die Bedingung

$$\varphi = \text{konst}$$

bestimmt. In Abb. 37 sind einige Niveaulinien dargestellt. Man kann sie auf folgende Weise aufzeichnen. Es werde gesetzt

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{k}{l}. \tag{104}$$

Dann folgt

$$r_1 = \frac{r_2}{1 + k \frac{r_2}{l}}. \tag{105}$$

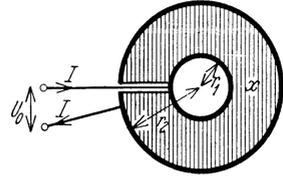


Abb. 35. Strömung zwischen konzentrischen Kugelelektroden.

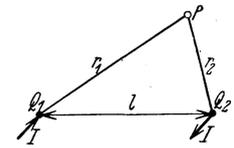


Abb. 36. Zur Berechnung des Potentials zweier Punktquellen.

Erteilt man nun  $k$  Werte einer arithmetischen Reihe, z. B.  $k=0, 1, 2, 3$  usw., so ergeben sich auf Grund dieser Gleichung die zu Niveaulinien gleicher Potentialunterschiede gehörigen Radien.

Man kann den Zusammenhang zwischen  $r_1$  und  $r_2$  graphisch darstellen, wie in Abb. 38. Da  $r_1 + r_2$  immer größer als  $l$ , die Differenz der Radien immer kleiner als  $l$  sein muß, so können nur die stark gezeichneten Abschnitte der Kurven verwendet werden, für die

$$r_1 > l - r_2 \quad \text{und} \quad r_1 > r_2 - l$$

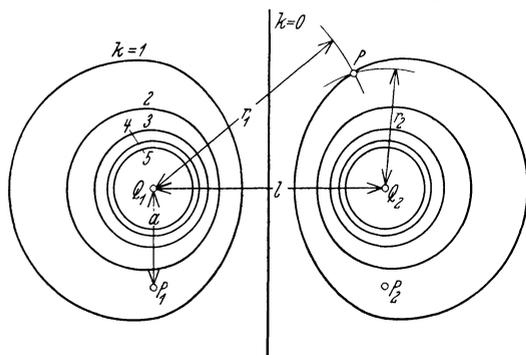


Abb. 37. Niveaulinienbild zweier Punktquellen entgegengesetzten Vorzeichens.

ist. Man schlägt nun um die beiden Quellpunkte mit einem beliebigen Radius  $r_2$  Kreise, entnimmt aus Abb. 38 die Strecke  $r_1$  und stellt die Schnittpunkte  $P$  fest. Diese Schnittpunkte sind Punkte der zu dem betreffenden Wert von  $k$  gehörigen Niveaulinie.

Die Strömungslinien schneiden die Niveaulinien überall senkrecht, sie gehen von  $Q_1$  nach  $Q_2$  über. Halbiert man wieder den ganzen Raum durch eine isolierende Ebene, die durch die Verbindungslinie der beiden Punkt-

quellen geht, so ergibt sich das Strömungsfeld für zwei Erder an der Erdoberfläche, das etwa die Rückleitung eines Stromkreises bilden kann, dessen Hinleitung aus einem isolierten Draht besteht (Einfachleitung der Telegraphie). Auf der Ver-

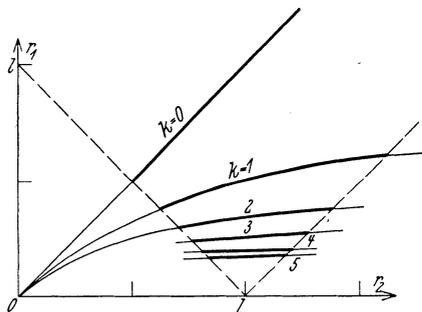


Abb. 38. Zur Berechnung der Niveaulinien.

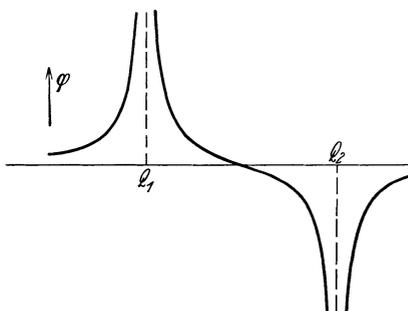


Abb. 39. Potentialverlauf auf der Verbindungslinie der beiden Quellen.

bindungslinie der beiden Quellen hat das Potential den in Abb. 39 dargestellten Verlauf.

**Anwendungsbeispiel:** Es seien  $Q_1$  und  $Q_2$  die beiden Erder einer Einfachleitung. In irgendeinem Abstand  $a$  sei eine zweite Einfachleitung gleicher Länge mit den Erdungspunkten  $P_1$  und  $P_2$  (Abb. 37) vorhanden. Fließt in der ersten Leitung ein Strom, dann ergibt sich ein Stromübergang in die zweite Leitung; es liegt eine galvanische Kopplung vor. Die in der zweiten Leitung auftretende Spannung, die nach dem Satz von der Zweipolquelle als eine zusätzliche EMK  $E_i$  aufgefaßt werden kann, ergibt sich als Differenz der Potentiale der beiden Punkte  $P_1$  und  $P_2$ . Ist z. B.

$$\text{für Punkt } P_1: r_1 = a, \quad r_2 = \sqrt{a^2 + l^2},$$

$$\text{für Punkt } P_2: r_1 = \sqrt{a^2 + l^2}, \quad r_2 = a,$$

so wird

$$E_i = \frac{I}{2\pi\kappa} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + l^2}} \right). \tag{106}$$

Bei sehr großer Leitungslänge im Vergleich zum Abstand der Leitungen ist angenähert

$$E_i = \frac{I}{2\pi\kappa a}. \tag{107}$$

**Zahlenbeispiel:** Elektrische Bahn mit  $I=500$  A; im Abstand  $a=100$  m befinde sich eine Schwachstromleitung;  $\kappa=10^{-4}$  S/cm. Es wird nach Gl. (107)

$$E_i = \frac{500 \text{ A cm}}{2\pi \cdot 10^{-4} \cdot 10^4 \text{ S cm}} = 80 \text{ V}.$$

Die Abstände zwischen Starkstrom- und Schwachstromerdungen müssen daher hinreichend groß gemacht werden.

Führt man mehreren nebeneinander liegenden Punktquellen Strom in gleicher Stärke zu, so ergeben sich die Niveaulinien ebenfalls durch Übereinanderlagern

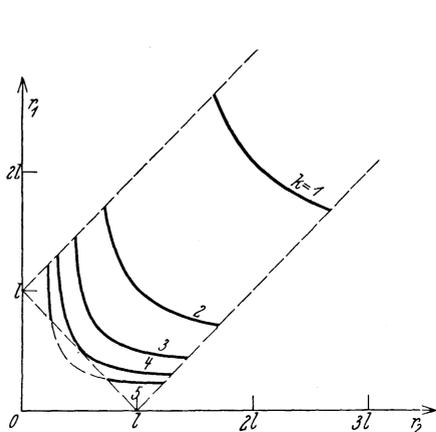


Abb. 40. Zur Berechnung der Niveaulinien zweier Quellen gleichen Vorzeichens.

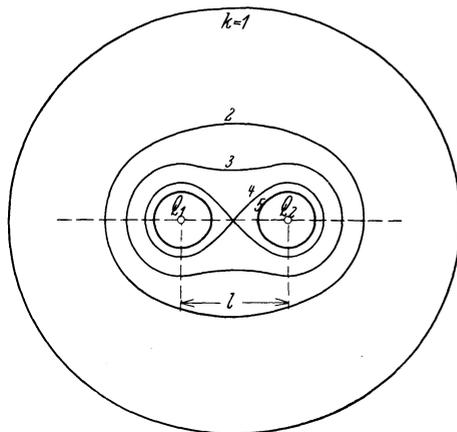


Abb. 41. Niveaulinienbild der beiden Quellen gleichen Vorzeichens.

der Einzelbilder. Das Potential in der Umgebung zweier derartiger Punktquellen im Abstand  $l$  ist

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\kappa} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (108)$$

Man findet in ähnlicher Weise wie oben die Niveaulinien, wenn man zunächst die Kurvenscharen

$$r_1 = \frac{r_2}{k} = \frac{r_2}{k} - l \quad (109)$$

aufzeichnet für Werte von  $k$ , die nach einer arithmetischen Reihe fortschreiten, wie es Abb. 40 zeigt. Auch hier sind nur die stark ausgezogenen Teile der Kurven brauchbar, da sich für die andern keine Schnittpunkte der Radien ergeben würden. Die Niveaulinien sind in Abb. 41 dargestellt; in großem Abstand von den Punktquellen geht das Niveaulinienbild in das einer einzigen Punktquelle mit doppelter Stromstärke über.

Bringt man eine sehr große Anzahl von Punktquellen auf einer geraden Linie an, so ergibt sich bei unendlich feiner Verteilung eine Linienquelle. Eine solche Linienquelle, Abb. 42, kann man sich in kurze Längenelemente  $d\zeta$  zerlegt denken, die alle als Punktquellen aufgefaßt werden können; sie führen dem Feld einen Strom zu, der gleich  $I \frac{d\zeta}{2l}$  ist, wenn mit  $2l$  die Länge der Linie, mit  $I$  der gesamte von der Linie ausgehende Strom bezeichnet wird. In irgendeinem Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $x$  und  $y$  ergibt die Punktquelle  $d\zeta$  einen Beitrag zum Potential von der Größe

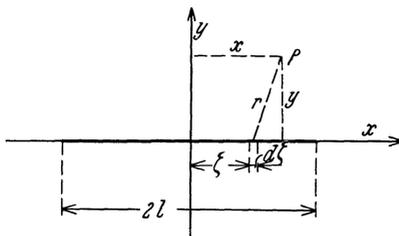


Abb. 42. Linienquelle.

$$d\varphi = I \frac{d\zeta}{2l} \frac{1}{4\pi\kappa r} = I \frac{d\zeta}{8\pi\kappa l \sqrt{y^2 + (x-\zeta)^2}},$$

wobei  $\zeta$  den Abstand des Längenelementes vom Mittelpunkt der Linie bezeichnet. Das gesamte Potential der Linienquelle ist daher

$$\varphi = \frac{I}{8\pi\kappa l} \int_{-l}^{+l} \frac{d\zeta}{\sqrt{y^2 + (x-\zeta)^2}} = \frac{I}{8\pi\kappa l} \ln \frac{x+l + \sqrt{y^2 + (x+l)^2}}{x-l + \sqrt{y^2 + (x-l)^2}}. \quad (110)$$

Die Niveaulinien sind hier Rotationsellipsoide, die Niveaulinien in der  $x, y$ -Ebene sind konfokale Ellipsen, deren Brennpunkte durch die Endpunkte der Strecke  $2l$  gebildet werden, Abb. 43. Bezeichnet man nämlich die große Achse einer solchen Ellipse mit  $2a$ , so gilt auf Grund bekannter Eigenschaften der Kegelschnitte

$$r_1 = a + x \frac{l}{a} = \sqrt{y^2 + (x+l)^2};$$

$$r_2 = a - x \frac{l}{a} = \sqrt{y^2 + (x-l)^2}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in Gl. (110) ein, so folgt

$$\varphi = \frac{I}{8\pi\kappa l} \ln \frac{a+l}{a-l}. \quad (111)$$

Für jeden beliebigen Wert von  $a$  ist also das Potential eine Konstante. Die Strömungslinien sind Hyperbeln mit den gleichen Brennpunkten, wie in Abb. 43 angedeutet.

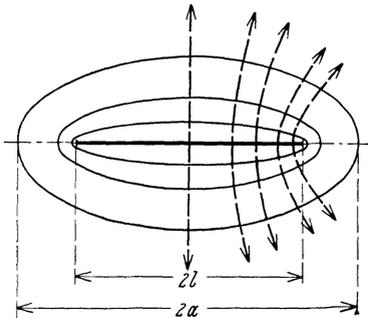


Abb. 43. Feld- und Niveaulinienbild der Linienquelle.

Wenn die kleine Halbachse der Ellipsen sehr klein gegen die Länge ist, wenn also  $a$  angenähert gleich  $l$  ist, dann ergeben sich nahezu zylindrische Niveaulinien, deren Enden abgerundet sind. Die von einer stabförmigen Elektrode mit dieser Form ausgehende Strömung hat daher die gleichen Niveaulinien wie die Linienquelle. Bezeichnet man den Durchmesser des Stabes in der Mitte ( $x=0$ ) mit  $d$ , so wird die Spannung gegen weit entfernte Punkte,  $U_0$ , gleich dem Potential der betreffenden Niveaulinie. Für  $x=0$ ,  $y = \frac{1}{2}d$  ist nach Gl. (110)

$$\varphi = U_0 = \frac{I}{8\pi\kappa l} \ln \frac{l + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + l^2}}{-l + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + l^2}}. \quad (112)$$

Berücksichtigt man, daß der Durchmesser  $d$  des Stabes sehr klein gegen seine Länge  $2l$  sein soll, so wird angenähert

$$U_0 = \frac{I}{4\pi\kappa l} \ln \frac{4l}{d}. \quad (113)$$

Die Potentialverteilung in der Umgebung eines senkrecht in die Erdoberfläche eingegrabenen Stabes ergibt sich, wenn man das soeben betrachtete Feld durch die Mittelebene  $x=0$  teilt. Der Übergangswiderstand ist in diesem Fall

$$R = \frac{1}{2\pi\kappa l} \ln \frac{4l}{d}, \quad (114)$$

wobei  $l$  die Länge des Stabes oder Rohres innerhalb der Erde bezeichnet.

**Zahlenbeispiele:** Ein Rohrerder von der Länge 2 m und einem Durchmesser von  $d=5$  cm hat bei einer Bodenleitfähigkeit von  $10^{-4}$  S/cm einen Übergangswiderstand

$$R = \frac{10^4 \Omega}{2\pi \cdot 200} \ln \frac{800}{5} \approx 40 \Omega.$$

Der Übergangswiderstand eines zylindrischen Rohres vom Durchmesser  $d$  ist in Wirklichkeit etwas kleiner als der berechnete Wert, da der mittlere Durchmesser des Ellipsoides kleiner ist als  $d$  (nämlich  $0,785 d$ ).

Das Potential an der Erdoberfläche ergibt sich aus Gl. (110) für  $x=0$ :

$$\varphi = \frac{I}{8\pi\kappa l} \ln \frac{l + \sqrt{y^2 + l^2}}{-l + \sqrt{y^2 + l^2}}. \quad (115)$$

Bezeichnet wieder  $U_0$  die Spannung des Erders gegen einen weit entfernten Punkt, so ist wegen Gl. (113)

$$I = 4\pi\kappa l \frac{U_0}{\ln \frac{4l}{d}},$$

also

$$\varphi = \frac{U_0}{2 \ln \frac{4l}{d}} \ln \frac{\sqrt{y^2 + l^2} + l}{\sqrt{y^2 + l^2} - l}. \quad (116)$$

Der Spannungstrichter kann danach berechnet werden. Es ergeben sich Kurven, wie sie in Abb. 44 dargestellt sind. Die Breite des Spannungstrichters hängt hier von dem Verhältnis  $d/l$  ab. Wenn  $y$  groß gegen  $l$  ist, so ergibt sich aus Gl. (115) die Näherungsformel

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\kappa y}, \quad (117)$$

die zeigt, daß in großer Entfernung vom Erder sich die Potentialverteilung der eines Kugelerders nähert.

Die folgende Tabelle gibt einige Werte des Übergangswiderstandes eines Rohres von 1 m Länge, das senkrecht in den Erdboden eingegraben ist, bei verschiedenen Werten des Verhältnisses  $l/d$  und einer Bodenleitfähigkeit von  $10^{-4}$  S/cm.

$l/d = 10$	20	50	100
$R = 60$	70	85	95 $\Omega$

Die Widerstandswerte von anderen Längen werden durch Division mit der Zahl der Meter erhalten. Es ist zur Erzielung eines kleinen Übergangswiderstandes vorteilhaft, mehrere kürzere Röhre parallel zu verwenden statt eines einzigen entsprechend längeren Rohres, wenn nicht das längere Rohr in Boden mit größerer Leitfähigkeit führt (Grundwasser).

Wenn die Linienquelle, Abb. 42, sehr lang ist im Vergleich zu den Koordinaten  $x$  und  $y$  des Punktes  $P$ , dann können die Niveaulächen als konzentrische Kreiszylinder angesehen werden, und zwar um so genauer, je größer die Länge der Linie ist. Der Strom tritt dann auf der ganzen Länge gleichmäßig in radialer Richtung aus. Begrenzt man die Niveaulächen durch zwei auf der Linie senkrecht stehende Ebenen, die voneinander einen Abstand  $l$  haben, so tritt ein und derselbe Strom  $I$  durch jede beliebige Niveauläche mit dem Radius  $r$ . Er verteilt sich aus Symmetriegründen gleichmäßig auf jeder Niveauläche, so daß die Stromdichte

$$|\mathcal{G}| = \frac{I}{2\pi r l} \quad (118)$$

beträgt. Die Stromdichte zeigt nach außen, wenn der Strom aus der Linienquelle austritt. Die elektrische Feldstärke hat die gleiche Richtung und den Betrag

$$|\mathcal{E}| = \frac{1}{\kappa} |\mathcal{G}| = \frac{I}{2\pi\kappa l r}. \quad (119)$$

Das Potential im Abstand  $r$  von der Achse ist gleich der Spannung zwischen diesem Punkt und dem Bezugspunkt mit dem Abstand  $b$  von der Achse; also

$$\varphi = \int_r^b |\mathcal{E}| dr = -\frac{I}{2\pi\kappa l} \ln r + k, \quad (120)$$

wobei  $k$  eine von  $b$  abhängige Konstante bedeutet.

Eine derartige Strömung liegt in einem konzentrischen Einleiterkabel vor, Abb. 45. Der Isolationsstrom geht radial zwischen Innenleiter und Außenleiter (Bleimantel) über. Bezeichnet  $\kappa$  die Leitfähigkeit des Isoliermaterials (Papier, Öl) und  $I$  den gesamten Isolationsstrom, so gilt für das Poten-

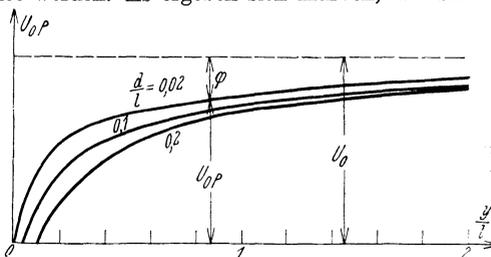


Abb. 44. Spannungstrichter von Rohrerden.

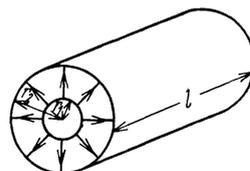


Abb. 45. Koaxiale Zylinderelektroden.

tial im Inneren der Isolierung die Gl. (120). Die Spannung zwischen Innen- und Außenleiter ist

$$U_0 = \int_{r_1}^{r_2} |\mathcal{E}| dr = \frac{I}{2\pi\kappa l} \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{121}$$

Der Isolationswiderstand hat daher die Größe

$$R = \frac{1}{2\pi\kappa l} \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{122}$$

**Zahlenbeispiel:** Für verschiedene Werte von  $r_2/r_1$  und eine Leitfähigkeit von  $\kappa = 10^{-15}$  S/cm (Ölpapier) ist in der folgenden Tabelle der Isolationswiderstand einer Leitung von 1000 m Länge angegeben.

$r_2/r_1 = 2$	5	10	20	50	100
$R = 1100$	2600	3700	4800	6200	7300 M $\Omega$

Der Isolationswiderstand hängt also nur verhältnismäßig wenig von den Abmessungen der Leiter ab; dagegen ist die Leitfähigkeit des Isolierstoffes, die praktisch in weiten Grenzen variieren kann, von großem Einfluß.

### 8. Grenzbedingungen im Strömungsfeld.

Durchfließt der Strom Stoffe mit verschiedener Leitfähigkeit, so ergibt sich an den Grenzflächen eine Brechung der Stromlinien, die ebenfalls den in Abschnitt 6 betrachteten Grundgesetzen unterworfen ist. Tritt der Strom in eine Grenzfläche

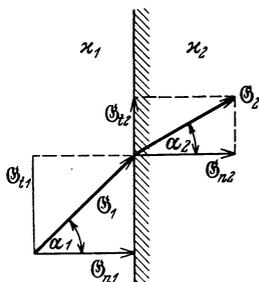


Abb. 46. Grenzfläche zwischen Stoffen verschiedener Leitfähigkeit.

zwischen zwei Stoffen mit der Leitfähigkeit  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  unter einem beliebigen Winkel  $\alpha_1$  zur Senkrechten auf der Grenzfläche ein, Abb. 46, so tritt er unter einem Winkel  $\alpha_2$  aus, der im allgemeinen nicht gleich  $\alpha_1$  ist. Die Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  geben die Richtung der Vektoren  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  zu beiden Seiten der Grenzfläche an. Zerlegt man jeden dieser beiden Vektoren in die Normalkomponente  $\mathcal{G}_n$  und die Tangentialkomponente  $\mathcal{G}_t$ , so geben die Normalkomponenten an, wie groß der Strom ist, der durch irgendein kleines Flächenelement  $dF$  der Grenzfläche hindurchtritt. Da wegen der Quellenfreiheit des elektrischen Stromes in die Grenzfläche von der einen Seite her genau so viel Strom eintreten muß, wie auf der andern Seite herauskommt, so muß

$$\mathcal{G}_{n1} = \mathcal{G}_{n2} \tag{123}$$

sein. Die Normalkomponente der Stromdichte ist an Grenzflächen stetig.

Eine Aussage über die Tangentialkomponenten ergibt sich, wenn man die elektrische Feldstärke einführt, deren Richtung zu beiden Seiten der Grenzfläche mit der Richtung der Stromdichte zusammenfällt. Die Tangentialkomponenten  $\mathcal{E}_t$  der elektrischen Feldstärke sind maßgebend für das Potentialgefälle längs der Grenzfläche. Schreitet man in Richtung der Tangentialkomponenten längs der Grenzfläche um ein kleines Stück  $ds$  vorwärts, so ergeben sich die Potentialunterschiede

$$d\varphi_1 = |\mathcal{E}_{t1}| ds \quad \text{und} \quad d\varphi_2 = |\mathcal{E}_{t2}| ds$$

auf beiden Seiten der Grenzfläche. Auf Grund des zweiten Kirchhoffschen Satzes müssen die Potentialunterschiede auf beiden Seiten der Grenzfläche einander gleich sein.

Dies gilt selbst dann, wenn zwischen den beiden Stoffen eine eingepreßte EMK (Kontaktspannung) besteht. Auf einem geschlossenen Weg, der an der einen Seite der Grenzfläche beginnt, den Abschnitt  $ds$  durchläuft, durch die Grenzfläche hindurchtritt, auf der anderen Seite längs der Grenzfläche um das Stück  $ds$  zurückgeht und die Grenzfläche zum zweiten Male durchstößt, um zum Ausgangspunkt zurückzukehren, ist nämlich die Summe der Kontaktspannungen Null, so daß auch hier

$$d\varphi_1 = d\varphi_2$$

sein muß.

Hieraus geht hervor, daß

$$\mathfrak{G}_{t1} = \mathfrak{G}_{t2}, \quad (124) \quad \text{oder} \quad \frac{\mathfrak{G}_{t1}}{\mathfrak{G}_{t2}} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \quad (125)$$

sein muß. Die Tangentialkomponenten der Stromdichte verhalten sich an Grenzflächen wie die Leitfähigkeiten der aneinander grenzenden Stoffe.

Beim Übergang des Stromes von einem Stoff mit größerer Leitfähigkeit zu einem Stoff geringerer Leitfähigkeit wird also der Winkel mit der Normalen zur Grenzfläche kleiner; in dem Beispiel Abb. 46 ist  $\kappa_1$  größer als  $\kappa_2$ . Wenn das Verhältnis der Leitfähigkeiten extrem groß ist, so gelten hiernach die folgenden Sätze:

Aus einem Stoff mit sehr großer Leitfähigkeit treten die Stromlinien nahezu senkrecht aus. An der Grenzfläche zwischen einem Leiter und einem Nichtleiter ist die Normalkomponente der Stromdichte 0.

Im letztgenannten Fall verläuft der Strom im Leiter an der Grenzfläche tangential. Die Niveaulinien stehen daher auf der Grenzfläche senkrecht. Von dieser Tatsache haben wir bereits bei der Berechnung des Stromverlaufes in der Umgebung von Erdern an der Erdoberfläche Gebrauch gemacht. Als weiteres Beispiel soll das Strömungsfeld in der Umgebung einer kleinen Kugelelektrode betrachtet werden, die sich in einer gewissen Tiefe  $h$  unter der ebenen Oberfläche des im übrigen unendlich ausgedehnten leitenden Raumes befindet, Abb. 47. Der Kugel werde durch eine isolierte Leitung der Strom  $I$  zugeführt, der in sehr großer Entfernung wieder aus dem leitenden Halbraum entnommen werden soll. Um hier die Grenzbedingung an der Erdoberfläche zu erfüllen, wendet man das Prinzip der Spiegelung an. Es besteht darin, daß man sich den ganzen Halbraum mit seiner Elektrode an der Grenzfläche gespiegelt denkt, Abb. 48.

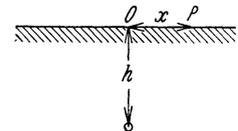


Abb. 47. Tiefenerde.

Dann sind in einem gleichmäßig leitenden Raum zwei Punktquellen im Abstand  $2h$  vorhanden, die beide den gleichen Strom  $I$  zuführen. Das Potential in irgendeinem Punkt ergibt sich durch Übereinanderlagern der Teilpotentiale; es gilt die Gl. (108). Die Niveaulinien und Stromlinien sind durch Abb. 41 dargestellt, wobei  $l=2h$  zu setzen ist. Man erkennt, daß für die Mittelebene in der Tat die geforderte Grenzbedingung erfüllt ist. Die Richtung der Stromlinien ergibt sich graphisch für jeden Punkt  $P$ , wenn man die Vektoren  $\mathfrak{G}_1$  und  $\mathfrak{G}_2$  der elektrischen Feldstärke jeder der beiden Quellen geometrisch addiert, Abb. 48. Für die Punkte der Mittelebene fällt die Richtung der Stromdichte in diese Ebene. Die Spannung  $U_0$  zwischen der Elektrode und weit entfernten Punkten ist gleich dem Potential der Kugeloberfläche. Ist der Radius  $r_0$  der Elektrode klein gegen die Tiefe  $h$ , so gilt für Punkte der Kugeloberfläche  $r_1 = r_0$  und angenähert  $r_2 = 2h$ ; daher wird

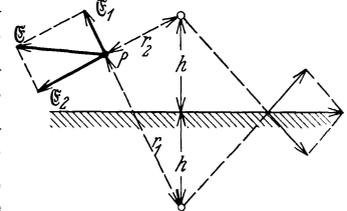


Abb. 48. Berechnung des Feldes eines Tiefenerders.

$$U_0 = \frac{I}{4\pi\kappa} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{2h} \right). \quad (126)$$

Der Übergangswiderstand ist

$$R = \frac{1}{4\pi\kappa r_0} \left( 1 + \frac{r_0}{2h} \right); \quad (127)$$

er ist größer als bei unbegrenztem Leiter, da die Stromlinien im oberen Halbraum fehlen; der Unterschied ist jedoch praktisch gering. Schreibt man

$$R = p \frac{1}{4\pi\kappa r_0}, \quad (128)$$

so ist nach Gl. (127)

$$p = 1 + \frac{r_0}{2h}, \quad (129)$$

eine Beziehung, die unter der Voraussetzung gilt, daß  $r_0$  klein gegen  $2h$  ist. Andererseits wird für  $h=0$  nach Gl. (98)  $p=2$ . Für beliebige Eingrabbtiefen liegt also  $p$  zwischen 1 und 2.

Das Potential an der Erdoberfläche wird nach Gl. (108)

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\kappa} \frac{2}{\sqrt{h^2+x^2}}, \quad (130)$$

wenn mit  $x$  der Abstand des betrachteten Punktes  $P$  von der Eingrabbtelle 0 des Erders bezeichnet wird. Der Spannungstrichter ist durch Abb. 49 dargestellt. Das größte Potentialgefälle tritt in einem Abstand

$$x = 0,707h$$

vom Punkt 0 auf; dort ergibt sich die größte Schrittspannung. Die elektrische Feldstärke hat an dieser Stelle den Wert

$$|\mathcal{E}| = 0,061 \frac{I}{\kappa h^2}. \quad (131)$$

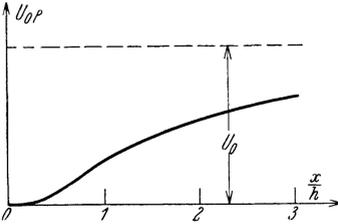


Abb. 49. Spannungstrichter des Tiefenerders.

Sie nimmt also mit wachsender Tiefe des Erders sehr rasch ab.

Die Ausbreitung des elektrischen Stromes in einem räumlich ausgedehnten Leiter wird zwar durch sehr einfache Gesetze geregelt; es ist jedoch nur bei verhältnismäßig einfachen geometrischen Formen der Elektroden und Leiteranordnungen, von denen hier einige Beispiele betrachtet wurden, möglich, die Stromverteilung auf mathematischem Wege zahlenmäßig zu bestimmen. Allgemeine Methoden zur graphischen Ermittlung von Potentialfeldern werden im Kapitel über das elektrische Feld besprochen (Abschnitt 17).

## 9. Der elektrische Strom in metallischen Leitern, Elektronentheorie.

Bei den bisherigen Betrachtungen war es ausreichend, den konstanten elektrischen Strom als ein gleichmäßiges Fließen von Elektrizitätsmengen in den elektrischen Leitern zu definieren. In dieser Vorstellung wird die Elektrizität als eine fein verteilte nicht zusammendrückbare Flüssigkeit aufgefaßt, die die elektrischen Leiter ausfüllt wie Wasser den Hohlraum eines Leitungsrohres. Sobald diese Flüssigkeit in Bewegung kommt, ergeben sich Wärmewirkungen und magnetische Wirkungen, die den elektrischen Strom kennzeichnen. Diese primitive Vorstellung, die in den verschiedensten Abarten etwa bis zum Jahre 1880 entwickelt und angewendet wurde, und mit deren Hilfe eine große Gruppe von Problemen vollständig gelöst werden kann, ist durch die Elektronentheorie ersetzt worden, die einen vertieften Einblick in das Zustandekommen der elektrischen Erscheinungen vermittelt.

Messungen über die Ablenkbarkeit von Kathodenstrahlen im magnetischen und elektrischen Feld sowie Beobachtungen über die Fallgeschwindigkeit von geladenen Nebelwolken im elektrischen Feld und die Erscheinungen der Elektrolyse zeigen folgendes:

1. Elektrizitätsmengen treten nur als ganzzahlige Vielfache einer kleinsten Menge

auf.  

$$e = 1,59 \cdot 10^{-19} \text{ As}$$

2. Es werden negative Elektrizitätsmengen beobachtet, die eine im Vergleich zu den vorkommenden positiv elektrischen Teilchen äußerst geringe träge Masse besitzen.

3. Die träge Masse dieser negativen Elektrizitätsmengen ist proportional der Elektrizitätsmenge; sie tritt also ebenfalls nur in ganzzahligen Vielfachen einer kleinsten Masse auf.

4. Die kleinste vorkommende Masse negativer Elektrizitätsmengen hängt von der Bewegungsgeschwindigkeit der Elektrizitätsmengen ab. Für im Vergleich zur

Lichtgeschwindigkeit niedrige Geschwindigkeiten hat sie den Wert

$$m = 9,0 \cdot 10^{-28} g.$$

Die kinetische Energie  $\frac{1}{2} m v^2$  der mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegten negativen Elektrizitätsmengen stimmt überein mit der Energie, die das infolge der Bewegung entstehende magnetische Feld enthält. Die Masse  $m$  ist daher als eine scheinbare (elektromagnetische) Masse aufzufassen. Die beobachteten kleinsten Elektrizitätsmengen haben keine materiellen Bestandteile, sofern man nicht die Elektrizität selbst als einen Stoff ansieht.

Aus diesen Beobachtungen geht hervor, daß der Elektrizität selbst genau so wie der Materie eine atomistische Struktur zugeschrieben werden kann. Die kleinsten Teilchen negativer Elektrizität werden nach Stoney und Helmholtz (1891) Elektronen genannt; sie bilden das Elementarquantum  $e$  der Elektrizität und einen der Bausteine der Materie. Die anderen Bausteine bestehen aus den positiv elektrischen Atomkernen, die die Hauptmasse des betreffenden Stoffes enthalten, und die selbst wieder zusammengesetzt sind aus Elementarteilen positiver Elektrizität, „Protonen“, und Elektronen. Alle Materie wird dadurch auf zwei „Urstoffe“, nämlich positive und negative Elektrizität zurückgeführt. Das Wesen des elektrischen Stromes in einem metallischen Leiter kann man sich nun folgendermaßen vorstellen.

Die Moleküle und die Atome des Leiters bestehen aus Protonen und Elektronen, die in ganz bestimmter, nur für wenige Stoffe näher bekannter Weise räumlich gruppiert sind, derart, daß zwischen den Atomkernen und den Elektronen Abstände bestehen, die gegen den Durchmesser der Elektronen und Kerne sehr groß sind. Der Radius der Elektronen liegt in der Größenordnung von  $10^{-13}$  cm. Im allgemeinen befinden sich in jedem Molekül gerade so viele Elektronen, daß die positiv elektrische Ladung der Atomkerne dadurch ausgeglichen wird; dieser Ausgleich betrifft jedoch nur relativ weit von dem Molekül entfernte Punkte. In kleinerem Abstand von den Atomen sind infolge der Ladungen der Atomkerne und der Elektronen elektrische Feldkräfte vorhanden, und diese Feldkräfte sind es, die für den Zusammenhalt und die elastischen Eigenschaften der Metalle und der festen Stoffe überhaupt verantwortlich sind. In Metallen sind nun wahrscheinlich nicht sämtliche Elektronen ganz bestimmten Molekülen zugeordnet; es ist vielmehr ein kleiner Bruchteil aller Elektronen frei beweglich. Diese Elektronen werden Leitungselektronen genannt, da sie den elektrischen Strom in den metallischen Leitern bilden. Sie können sich in den Zwischenräumen zwischen den einzelnen Molekülen frei bewegen, und man hat sich auf Grund der Beobachtungen über die Ausstrahlung von Elektronen aus glühenden Körpern (siehe Abschnitt 16) vorzustellen, daß diese Leitungselektronen ungeordnete Bewegungen in allen Richtungen und auf den verschiedensten Wegen ausführen, ähnlich wie die Moleküle eines Gases; deshalb nennt man die Gesamtheit der Leitungselektronen auch das Elektronengas. Die Geschwindigkeit der unregelmäßigen Bewegung, die als eine Teilnahme der Elektronen an der Wärmebewegung der Moleküle zu deuten ist, hängt von der Temperatur ab. Sie hat Werte, die sich um einen wahrscheinlichsten Wert häufen und liegt bei normalen Temperaturen in der Größenordnung von 100 km/s. Der elektrische Strom besteht nun darin, daß sich dieser ungeordneten Bewegung der Elektronen eine Bewegung in der Stromrichtung überlagert, eine Bewegung, deren Geschwindigkeit allerdings sehr gering ist gegen die mittlere Geschwindigkeit der Elektronenbewegung.

Die Stromstärke ist bestimmt durch die Elektrizitätsmenge, die in der Zeiteinheit durch den Leiterquerschnitt fließt. Bei einer Stromdichte von  $1 \text{ A/cm}^2$  muß in einer Sekunde eine Elektrizitätsmenge von  $1 \text{ As}$  durch einen Querschnitt von  $1 \text{ cm}^2$  transportiert werden; da ein Elektron eine Elektrizitätsmenge von  $1,59 \times 10^{-19} \text{ As}$  mit sich führt, so müssen  $6,3 \times 10^{18}$  Elektronen in jeder Sekunde durch den Leiterquerschnitt von  $1 \text{ cm}^2$  wandern. Trotz dieser großen Zahl ist jedoch die Bewegungs-

geschwindigkeit gering, da in der Volumeinheit der Leiter sehr viele freie Elektronen vorhanden sind; die genaue Anzahl der Leitungselektronen ist noch nicht bekannt; es sind bei Metallen wahrscheinlich zwischen  $10^{19}$  und  $10^{23}$  freie Elektronen im Kubikzentimeter vorhanden. Die mittlere Geschwindigkeit der Elektronenwolke liegt daher bei einer Stromdichte von  $1 \text{ A/cm}^2$  etwa zwischen  $10^{-4} \text{ cm/s}$  und  $1 \text{ cm/s}$ .

In der Atomvorstellung wird der Leiter ersetzt durch die in großen Abständen verteilten Atome und Elektronen; dazwischen befindet sich leerer Raum. Man nennt den besonderen Zustand, in den der von Leitern freie Raum durch das Vorhandensein von Elektrizitätsmengen kommt, das elektrische Feld. Im Innern des Leiters besteht also in der Atomvorstellung ein elektrisches Feld. Dieses Feld ist teils durch die Atome und Elektronen selbst bedingt, teils kann es durch äußere elektromotorische Kräfte hervorgerufen werden. Der durch äußere Einflüsse bestimmte Anteil des elektrischen Feldes hat den elektrischen Strom, also die Wanderung der Elektronenwolke zur Folge, und zwar ist nach den vorigen Abschnitten maßgebend dafür das Potentialgefälle, das im Leiter durch die elektromotorischen Kräfte erzeugt wird. Die Stromrichtung stimmt überein mit der Richtung größten Potentialgefälles. Die Elektronen erfahren also mechanische Kräfte, sobald sie sich in einem elektrischen Potentialgefälle befinden. Diese Folgerung deckt sich mit den Ergebnissen der bekannten Experimente, nach denen auf geladene Körper, die in ein elektrisches Feld, also in den Raum zwischen zwei Elektroden verschiedenen Potentials gebracht werden, mechanische Kräfte ausgeübt werden. Die Kräfte zeigen bekanntlich bei positiver Ladung nach der Elektrode niedrigeren Potentials (negative Elektrode), bei negativer Ladung in die umgekehrte Richtung. Die Elektronen bewegen sich als negative Elektrizitätsteilchen zu Punkten höheren Potentials; die Kräfte, die im elektrischen Feld auf die Elektronen ausgeübt werden, haben die Richtung größter Zunahme des Potentials, also die entgegengesetzte Richtung der elektrischen Feldstärke (es liegt dies an der willkürlichen Festsetzung des positiven Vorzeichens der beim Reiben eines Glasstabes auf diesem entstehenden Ladungen).

Bei dem Durchgang der Elektronenwolke durch das Gitter der Metallmoleküle ergeben sich Zusammenstöße der Leitungselektronen mit den Molekülbestandteilen; diese Zusammenstöße haben zur Folge, daß die Bewegungsgeschwindigkeit der Elektronenwolke bei gegebener Feldstärke, also gegebener Größe der Triebkräfte, die auf die Elektronenwolke einwirken, nicht unbegrenzt wachsen kann. Wenn ein Elektron auf ein Molekül stößt, so gibt es einerseits einen Teil seiner Bewegungsenergie an das Molekül ab und veranlaßt dieses zu größeren Wärmebewegungen, andererseits erfährt es eine Richtungsänderung seiner Bewegung. Für die Elektronenwolke wirken diese Zusammenstöße mit den Molekülen daher so wie eine Hemmung der Bewegung, ähnlich wie Reibungskräfte. Gleichzeitig ergibt sich eine Vergrößerung der Wärmeenergie des Leiters. Es ist die Joulesche Wärme, die an allen stromdurchflossenen Leitern beobachtet wird. Die den Elektronen vom elektrischen Feld zugeführte mechanische Arbeit wird in Wärme umgewandelt. Mit Hilfe dieser Vorstellung kann man die Größe der im elektrischen Feld auf die Elektronen ausgeübten mechanischen Kräfte nach dem Jouleschen Gesetz berechnen.

Es werde ein gerader zylindrischer Leiter mit dem Querschnitt  $q$  betrachtet, durch den ein konstanter Strom  $I$  fließt. Die Elektronenwolke führt daher während einer beliebigen Zeit  $t$  eine negative Elektrizitätsmenge

$$Q = It$$

durch den Leiterquerschnitt. Hat die Wolke dabei die Geschwindigkeit  $v$ , so bewegt sie sich während der Zeit  $t$  um ein Stück  $l = vt$  weiter. Ein Abschnitt der Wolke von der Länge  $l$  enthält daher die Elektrizitätsmenge

$$Q = I \frac{l}{v}. \quad (132)$$

Die Stromdichte ist 
$$|\mathcal{G}| = \frac{I}{q} = \frac{Qv}{lq}, \quad (133)$$

und nach dem Jouleschen Gesetz wird in dem Abschnitt von der Länge  $l$  des Leiters eine Leistung von der Größe

$$N = |\mathcal{G}| \cdot |\mathcal{E}| l q = Qv |\mathcal{E}| \quad (134)$$

in Wärme umgesetzt, wobei  $\mathcal{E}$  die elektrische Feldstärke im Leiter bezeichnet. Andererseits wird auf den betrachteten Ausschnitt der Elektronenwolke vom elektrischen Feld eine Kraft  $P$  ausgeübt. Die zur Fortbewegung dieses Abschnittes nötige Leistung ist daher

$$N = Pv. \quad (135)$$

Aus der Gleichheit der beiden Leistungen folgt

$$P = Q |\mathcal{E}|. \quad (136)$$

Die Kraft hat die entgegengesetzte Richtung wie die elektrische Feldstärke, wenn die Elektrizitätsmenge  $Q$  negativ ist; sie hat die gleiche Richtung wie  $\mathcal{E}$  bei positivem  $Q$ . Stellt man die Kraft durch einen Vektor  $\mathfrak{P}$  dar, so gilt also

$$\mathfrak{P} = Q\mathcal{E}. \quad (137)$$

Im elektrischen Feld wird auf eine Elektrizitätsmenge (Ladung) eine Kraft ausgeübt, die gleich ist dem Produkt von Elektrizitätsmenge und Feldstärke.

Da die Ladung eines Elektrons

$$Q = -e$$

ist, so erfährt jedes Elektron im elektrischen Feld eine Kraft von der Größe

$$\mathfrak{P}_1 = -e\mathcal{E}.$$

**Zahlenbeispiel:** Es sei  $Q = 1$  As;  $|\mathcal{E}| = 1$  V/cm. Dann wird die Kraft

$$P = 1 \frac{\text{Ws}}{\text{cm}} = 10,2 \text{ kGr.}$$

Die auf die Leitungselektronen ausgeübten Kräfte sind außerordentlich klein. Die Feldstärke liegt bei Leitern nach früherem in der Größenordnung von  $10^{-4} \dots 10^{-3}$  V/cm. Die auf ein Leitungselektron wirkende Kraft beträgt daher

$$P_1 = 10^{-19} \dots 10^{-18} \text{ Gr} \approx 10^{-16} \dots 10^{-15} \text{ dyn.}$$

Für die Leitfähigkeit eines Metalls gilt auf Grund der Elektronenvorstellung der elektrischen Leitung folgende Näherungsbetrachtung. Es werde angenommen, daß die Elektronen bei ihrer unregelmäßigen Bewegung im Metall einen Weg von der Länge  $l_T$  durchlaufen, bis sie mit einem Molekül zusammenstoßen; die mittlere Geschwindigkeit dieser Wärmebewegung sei  $v_T$ . Auf jedes Elektron wirkt eine zusätzliche Kraft von der Größe  $e|\mathcal{E}|$ ; es ergibt sich daher eine Beschleunigung in der Strömungsrichtung von der Größe  $e|\mathcal{E}|/m$ , wenn mit  $m$  die Masse des Elektrons bezeichnet wird. Die mittlere Geschwindigkeit, die durch diese Beschleunigung in der Strömungsrichtung hervorgerufen wird, ist

$$v = \frac{1}{2} \frac{e|\mathcal{E}|}{m} t, \quad (138)$$

wobei  $t$  die Zeit bedeutet, die das Elektron benötigt, um die Strecke  $l_T$  zu durchlaufen. Diese zusätzliche Geschwindigkeit ist sehr klein gegen die Geschwindigkeit der Wärmebewegung  $v_T$ , so daß man setzen kann

$$t = \frac{l_T}{v_T},$$

und

$$v = \frac{1}{2} \frac{e|\mathcal{E}|}{m} \frac{l_T}{v_T}. \quad (139)$$

Befinden sich in der Volumeinheit des Metalls  $N$  freie Elektronen, so hat die Stromdichte danach den Betrag

$$|\mathcal{G}| = N e v = \frac{1}{2} N \frac{e^2 l_T}{m v_T} |\mathcal{E}|. \quad (140)$$

Hieraus geht hervor, daß die Leitfähigkeit

$$\kappa = \frac{1}{2} N \frac{e^2 l_T}{m v_T} \quad (141)$$

ist. Sie hängt in einem Maße von der Temperatur ab, das durch die Änderung der Größen  $l_T$  und  $v_T$  mit der Temperatur bestimmt ist.

Man betrachtet die Leitungselektronen auch als maßgebend für den Wärmetransport. Die Wärmeleitfähigkeit ist daher ebenfalls durch die in der eben angestellten Überlegung vorkommenden Größen bestimmt. Daraus ergibt sich (Wiedemann-Franz, 1853; Lorenz, 1872), daß das Verhältnis von Wärmeleitfähigkeit  $k$  zu elektrischer Leitfähigkeit  $\kappa$  für alle reinen Metalle den gleichen Wert hat und proportional der absoluten Temperatur ist. Das Verhältnis der beiden Größen beträgt bei 20° ungefähr

$$\frac{k}{\kappa} = 7 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Ws/cm}^2}{\text{S/cm}}.$$

Bei Metallegierungen nimmt das Verhältnis im allgemeinen mit abnehmender elektrischer Leitfähigkeit zu.

Die Leitfähigkeit ist unabhängig von der elektrischen Feldstärke und daher auch von der Stromdichte, solange die mittlere freie Weglänge der Elektronen unabhängig von der Feldstärke ist. Dies ist bei Metallen mit großer Genauigkeit der Fall, wenn die Temperatur konstant gehalten wird, weil hier die Geschwindigkeit der Wärmebewegung der Leitungselektronen sehr groß ist gegen die zusätzliche Geschwindigkeit der Elektronenwolke, so daß die Zusammenstöße der Leitungselektronen mit den Molekülen bei den praktisch vorkommenden Feldstärken nur durch die Wärmebewegung bestimmt sind. Auch bei Elektrolyten, bei denen die elektrische Leitung zurückgeführt wird auf die Wanderung von materiellen Trägern der Elektrizität, also Atombestandteilen mit positiver oder negativer Ladung (Ionen), gilt bis zu sehr hohen Feldstärken, daß die Leitfähigkeit bei konstanter Temperatur unabhängig von der Feldstärke ist. Bei Gasen dagegen läßt sich keine bestimmte Leitfähigkeit angeben; es ist hier die Zahl der Elektrizitätsträger, der „Ionisationszustand“, von der elektrischen Feldstärke und von ionisierenden Einflüssen, wie Einwirkung von Lichtstrahlen, abhängig (siehe Abschnitt 20).

Das Zustandekommen eines elektrischen Stromes hat zur Voraussetzung, daß in dem Stromkreis Kräfte tätig sind, die den Elektronenstrom, also die elektrische Feldstärke und das Potential aufrechterhalten. Im Innern der Stromquelle müssen die Elektronen den Potentialunterschied zwischen den Klemmen entgegen den elektrischen Feldkräften durchlaufen, und das Wesen der Stromquellen besteht daher allgemein darin, daß durch Kräfte nichtelektrischer Art Elektrizitätsmengen entgegen den Kräften des Potentialunterschiedes in Bewegung gesetzt werden. Es ist dazu ein Arbeitsaufwand erforderlich, z. B. die Aufwendung einer chemischen Energie in den galvanischen Elementen oder die Aufwendung mechanischer Arbeit in den elektrischen Maschinen. Umgekehrt wird von den Elektronen bei der Bewegung im äußeren Stromkreis, also in der Richtung der Feldkräfte, elektrische Energie in nichtelektrische Arbeit umgewandelt, z. B. in Wärme. Die elektrischen Feldkräfte vermitteln also den Energietransport zwischen Stromquelle und Stromkreis.

Um eine gewisse Elektrizitätsmenge  $Q$  durch einen Stromkreis zu treiben, ist ein bestimmter Arbeitsaufwand  $A$  nötig. Die Wirksamkeit der Stromquelle kann durch das Verhältnis  $A/Q$  gekennzeichnet werden. Dieses Verhältnis definiert die elektromotorische Kraft der Stromquelle:

$$E = \frac{A}{Q}.$$

Wird kein Strom aus der Stromquelle entnommen, so ergibt sich eine Ansammlung von Elektronen am negativen Pol, ein Mangel am positiven. Die elektromotorische Kraft besteht in einem Elektronenüberdruck zwischen den beiden Klemmen der Stromquelle.

## Zweites Kapitel.

## Das elektrische Feld.

## I. Das ruhende elektrische Feld.

## 10. Grundbegriffe des elektrischen Feldes.

Ein ruhendes elektrisches Feld ist dadurch gekennzeichnet, daß auf elektrische Ladungen zeitlich konstante mechanische Kräfte ausgeübt werden. Solche Kräfte treten immer auf, wenn zwischen beliebigen Punkten eines isolierenden Raumes konstante Spannungen aufrechterhalten werden. Insbesondere ergibt sich ein elektrostatisches Feld, wenn sich in dem isolierenden Raum zwei oder mehrere elektrische Leiter (Elektroden) befinden, zwischen denen Potentialunterschiede bestehen, ohne daß elektrische Ströme fließen.

Im ruhenden elektrischen Feld kann jedem Punkt des Raumes ein bestimmtes konstantes Potential eindeutig zugeschrieben werden. Damit ist auch überall die elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}$  gegeben, und es gelten die im vorigen Kapitel aufgestellten Definitionsgleichungen

$$\oint \mathfrak{E} d\mathfrak{s} = 0, \quad (142)$$

$$\mathfrak{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (143)$$

Das Potential wird veranschaulicht durch die Niveauflächen, die Richtung der elektrischen Feldstärke durch Feldlinien, die überall die Richtung der Kräfte angeben, die im elektrischen Feld auf positive Elektrizitätsmengen ausgeübt werden. Bringt man an irgendeine Stelle des elektrischen Feldes mit der Feldstärke  $\mathfrak{E}$  eine Elektrizitätsmenge  $Q$ , so ergibt sich dort eine Kraft, Gl. (137), von der Größe

$$\mathfrak{F} = Q \mathfrak{E}. \quad (144)$$

Die Feldlinien gehen von dem Leiter mit höherem Potential zum Leiter mit niedrigerem Potential.

Beim elektrostatischen Feld muß im Innern der Elektroden die Feldstärke Null sein, da sich sonst eine dauernde Verschiebung der Elektronenwolke, also ein elektrischer Strom ergeben würde. Das bedeutet aber, daß innerhalb der Elektroden das Potential den gleichen Wert haben muß wie auf der Oberfläche der Elektroden. Die Oberflächen der Elektroden sind im elektrostatischen Feld Niveauflächen. Die Feldlinien münden daher senkrecht auf den Leiteroberflächen; sie entspringen oder endigen dort.

Im Innern der Elektroden liegen die gleichen Verhältnisse vor, wie in einem stromlosen elektrischen Leiter. Dagegen wirken an der Oberfläche äußere elektrische Feldkräfte auf die Elektronen ein; sie suchen dort, wo Feldlinien in die Elektrode einmünden, die Elektronen aus dem Leiter herauszuziehen, umgekehrt dort, wo die Feldlinien entspringen, Elektronen in das Leiterinnere hinein zu drücken. Es stellt sich ein Gleichgewichtszustand ein zwischen den atomaren Kräften, die die Elektronen im Innern des Metalls zu halten suchen und den Kräften des äußeren elektrischen Feldes. Bei der Herstellung dieses Gleichgewichtszustandes muß die Elektrode niedrigeren Potentials daher Elektronen aufnehmen, die Elektrode höheren Potentials muß Elektronen abgeben. Man sagt, die Elektrode höheren Potentials nehme eine positive Ladung auf, die Elektrode niedrigeren Potentials eine negative Ladung. Wird das elektrische Feld so hergestellt, daß an zwei Elektroden die beiden Pole einer Stromquelle angelegt werden, so müssen die beiden Ladungen gleich groß sein, da dem einen Pol der Stromquelle nicht mehr Elektronen entnommen werden können, als man dem andern Pol zuführt. Entfernt man die Stromquelle von den Elektroden, so bleibt der hergestellte Zustand erhalten; die Elektrizitäts-

mengen können sich in dem isolierenden Raum nicht ausgleichen. Die Elektroden behalten ihre Ladung bei.

Da im Innern der Elektroden kein Potentialgefälle besteht und die äußeren Feldkräfte nur an der Oberfläche der Elektroden angreifen, so ist die Oberfläche der Leiter als Sitz der Ladungen aufzufassen. Die Ladung  $Q$  einer Elektrode verteilt sich in bestimmter Weise über die Oberfläche. Man kann daher die Ladungsdichte definieren als die in der Flächeneinheit der Leiteroberfläche vorhandene Ladung. Befindet sich in einem kleinen Flächenelement  $dF$  der Leiteroberfläche eine Ladung  $dQ$ , so ist  $dQ/dF$  die Ladungsdichte (z. B. 0,1 As/cm<sup>2</sup>).

Veranschaulicht man die Richtung der elektrischen Feldstärke an jeder Stelle des Raumes durch die Feldlinien, die von der positiv geladenen Elektrode zur negativ geladenen übergehen, so kann man die Größe der Ladungen dadurch darstellen, daß man die Feldlinien an den Leiteroberflächen um so dichter zeichnet, je größer die Ladungsdichte an der betreffenden Stelle ist (M. Faraday, 1831). Die Anzahl der Linien, die von einer Elektrode ausgehen, gibt dann ein Maß für die gesamte Ladung der Elektrode an. Wir nennen diese Gesamtheit der Linien den Verschiebungsfluß oder den elektrischen Induktionsfluß. Der von einer Elektrode ausgehende Verschiebungsfluß ist gleich der Ladung der Elektrode. Die gezeichneten Linien werden Verschiebungslinien oder elektrische Kraftlinien genannt. Im elektrostatischen Feld stehen die Verschiebungslinien auf den Oberflächen der Leiter senkrecht.

Der Verschiebungsfluß hat eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Strom im Strömungsfeld, nur handelt es sich dort um ein wirkliches Fließen, während hier ein Zustand veranschaulicht wird. Die der Stromdichte entsprechende Größe des elektrischen Feldes ist die Dichte der Verschiebungslinien, die als Verschiebungsdichte bezeichnet wird. Diese Größe wird durch einen Vektor  $\mathfrak{D}$  dargestellt, dessen Betrag gleich dem Verschiebungsfluß je Flächeneinheit ist und dessen Richtung durch die Richtung der Verschiebungslinien an der betreffenden Stelle gegeben ist. Bezeichnet  $dF$  das Flächenelement einer Niveauläche,  $dQ$  die Zahl der Verschiebungslinien, die durch das Flächenelement hindurchtreten, so gilt also für den Betrag der Verschiebungsdichte an der betrachteten Stelle

$$|\mathfrak{D}| = \frac{dQ}{dF}. \quad (145)$$

Der Verschiebungsfluß, der durch eine beliebige Fläche hindurchgeht, ergibt sich, wenn man den Vektor  $\mathfrak{D}$  in jedem Flächenelement zerlegt in die senkrechte und tangentielle Komponente. Die letztere trägt zum Fluß nichts bei, es ist vielmehr

$$Q = \int \mathfrak{D} d\mathfrak{F}. \quad (146)$$

Ganz entsprechend den Verhältnissen im Strömungsfeld ist der Verschiebungsfluß gleich dem Flächenintegral der Verschiebungsdichte. Legt man in das elektrostatische Feld eine beliebige Hüllfläche, die eine Elektrode umgibt, so ist der durch diese Fläche tretende Verschiebungsfluß gleich der Ladung der Elektrode:

$$\oint \mathfrak{D} d\mathfrak{F} = Q. \quad (147)$$

Auf der Oberfläche der Elektrode wird die Verschiebungsdichte identisch mit der Ladungsdichte. Legt man die Hüllfläche so, daß sie keine Ladungen umschließt, so gilt

$$\oint \mathfrak{D} d\mathfrak{F} = 0. \quad (148)$$

Die beiden Gl. (147) und (148) drücken den folgenden allgemeinen Satz aus:

Im elektrostatischen Feld ist das Flächenintegral der Verschiebungsdichte über eine beliebige Hüllfläche gleich der von der Hüllfläche eingeschlossenen Elektrizitätsmenge.

Im Strömungsfeld ist das Flächenintegral der Stromdichte über die Hüllfläche einer Elektrode gleich dem Gesamtstrom, der der Elektrode zugeführt wird; das

Flächenintegral über eine beliebige Hüllfläche dagegen, die keine „Quelle“ enthält, ist Null.

Die Einführung des Verschiebungsflusses hat zunächst den Vorteil, daß für die Berechnung elektrischer Felder die gleichen anschaulichen Vorstellungen verwendet werden können wie im Strömungsfeld. Auf dem Begriff des Verschiebungsflusses beruht die „Nahewirkungs-“ oder „Feldtheorie“, die jeder Stelle des isolierenden Raumes einen besonderen mechanischen Spannungszustand zuschreibt. In Gegensatz dazu steht die ältere „Fernwirkungstheorie“, bei der die Annahme gemacht wird, daß die Elektroden über den leeren Raum hinweg aufeinander einwirken.

Während bei den elektrischen Leitern die Elektronen eine gewisse Bewegungsfreiheit haben, hat man sich vorzustellen, daß in den Nichtleitern die Elektronen durch die Atomkräfte im Atomverband festgehalten werden. Befindet sich daher in dem Raum zwischen den Elektroden ein nichtleitender Stoff, so entsteht unter der Einwirkung der elektrischen Feldkräfte auf die positiv und negativ elektrischen Bestandteile der Moleküle eine mechanische Spannung innerhalb derselben, die zu einer kleinen elastischen Verschiebung der geladenen Anteile führt; im Gleichgewichtszustand halten die äußeren Feldkräfte den inneren Atomkräften die Wage. Man nennt diese Erscheinung die Polarisierung des Nichtleiters. Die Herstellung des Gleichgewichtszustandes geht mit einer Verschiebung von Elektrizitätsmengen längs der Feldlinien einher, d. h. mit dem Auftreten eines elektrischen Stromes in dieser Richtung. Dieser Strom wird bei der Herstellung des elektrischen Feldes als Ladestrom beobachtet, der von einer Elektrode zufließt und von der andern abgenommen wird. Die Ladung einer Elektrode ist gleich der gesamten Elektrizitätsmenge, die durch den Ladestrom transportiert wird; sie ist also mitbestimmt durch die Art des Nichtleiters. Die an jeder Stelle des Nichtleiters auftretenden Verschiebungen tragen zum Verschiebungsfluß bei. Ein Maß dafür bildet die Verschiebungsdichte, die daher einerseits von der Art des Nichtleiters (von der Verschiebbarkeit der Elektrizitätsmengen in den Molekülen), andererseits von der Größe der elektrischen Feldstärke an der betreffenden Stelle des Feldes abhängen muß. Auch bei Anwesenheit von materiellen Nichtleitern müssen die Gl. (147) und (148) gelten, solange die Abmessungen der Hüllfläche groß gegen die der Moleküle sind. Diese Voraussetzung wird bei allen folgenden Überlegungen gemacht; sie ist bei den technischen Anwendungen immer zulässig, da die Moleküldurchmesser in der Größenordnung von  $10^{-8}$  cm liegen.

Der Verschiebungsfluß besteht also aus zwei Anteilen, einem Anteil, der durch Verschiebungen von Elektrizitätsmengen im Innern der Moleküle des Nichtleiters, durch die Polarisierung, entsteht, und einem zweiten, der bereits im leeren Raum auftritt. Wir haben diesen zweiten Teil nach der Elektronentheorie als eine Folge der an der Oberfläche der Elektrode wirkenden Feldkräfte angesehen; er kann jedoch formal in gleicher Weise gedeutet werden wie der erste, wenn man die Existenz eines ruhenden „Äthers“ annimmt, der alle Materie durchsetzt und der ähnliche Eigenschaften besitzt wie die Materie, nur mit dem Unterschied, daß er viel feiner unterteilt ist. Man kann dann den Verschiebungsfluß im leeren Raum als die Polarisierung des Äthers auffassen. Die Folgerungen, die man auf Grund dieser von Maxwell herrührenden Vorstellung ziehen kann, decken sich auf das Beste mit der Erfahrung, solange es sich um Vorgänge handelt, bei denen sich die materiellen Körper mit Geschwindigkeiten gegeneinander bewegen, die klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sind. Die Vorstellung des ruhenden Äthers kann nicht aufrechterhalten werden, wenn man zu einer einheitlichen Darstellung auch bei sehr rasch ablaufenden Bewegungsvorgängen gelangen will; man müßte auf Grund der Erfahrungstatsachen dem Äther komplizierte Eigenschaften zuschreiben, z. B. die, daß der Äther bei Messungen von jedem gleichförmig gegen das Fixsternsystem bewegten Körper aus in Ruhe zu sein, d. h. sich mit dem betreffenden Körper zu bewegen scheint,

auch bei beliebigen Bewegungen verschiedener Körper gegeneinander. Obwohl daher die Annahme eines ruhenden Äthers im leeren Raum verlassen werden muß, ist doch die Zusammenfassung der beiden Anteile des Verschiebungsflusses zu einem einzigen außerordentlich zweckmäßig, solange eben die vorkommenden Relativgeschwindigkeiten der materiellen Körper genügend klein sind gegen die Lichtgeschwindigkeit, wie es in den praktischen Anwendungen der Elektrotechnik immer der Fall ist. Unter dieser Voraussetzung kann man rein formal von einem Äther sprechen und den Verschiebungsfluß im leeren Raum auf das Vorhandensein dieses Äthers zurückführen. Die Dichte des gesamten Verschiebungsflusses ist in dieser Nahwirkungsvorstellung an jeder Stelle des Raumes durch die dort herrschenden Feldkräfte bestimmt. Bei der Herstellung des elektrischen Feldes fließt an jeder Stelle des Nichtleiters längs der Verschiebungslinien ein Strom (Verschiebungsstrom), dessen Gesamtstärke gleich dem in den Leitungen zu den Elektroden fließenden Strom ist; dieser Verschiebungsstrom verschwindet allmählich im Nichtleiter und daher auch in den Zuleitungen, wenn der Vorgang der Aufladung beendet ist. Dadurch kann auch für zeitlich veränderliche Vorgänge die Vorstellung des in sich geschlossenen Stromkreises beibehalten werden; der Strom in den Zuleitungen setzt sich im Nichtleiter als Verschiebungsstrom fort. Das Resultat des Verschiebungsstromes ist der Verschiebungsfluß zwischen den Elektroden im Nichtleiter.

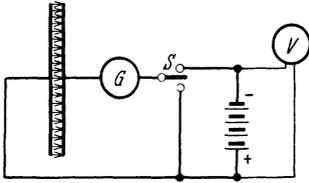


Abb. 50. Experimentelle Untersuchung des Zusammenhanges zwischen Verschiebungsdichte und Feldstärke.

Da der Verschiebungsfluß gleich der Ladung der Elektroden ist, so kann das Verhältnis der Verschiebungsdichte zur Feldstärke experimentell untersucht werden. Hierzu kann z. B. eine Anordnung nach Abb. 50 dienen. Zwei ebene Metallplatten von der Fläche  $F$  stehen sich in einem kleinen Abstand  $d$  parallel gegenüber. Im Zwischenraum befindet sich der zu untersuchende Nichtleiter. An die beiden Elektroden kann mit Hilfe eines Schalters  $S$  eine Stromquelle gelegt werden; sie lädt die Anordnung zu einer Spannung  $U$  auf, die durch das Voltmeter  $V$  angezeigt wird. Durch Umlegen des Schalters  $S$  kann die Anordnung entladen werden. Der Strom fließt dabei durch ein ballistisches Galvanometer  $G$ , das anzeigt, wie groß die Elektrizitätsmenge  $Q$  ist, die die Platten aufgenommen hatten. Diese Elektrizitätsmenge ist gleich dem Verschiebungsfluß zwischen den beiden Platten.

Wenn der Abstand  $d$  der beiden Platten sehr klein gegen die Flächenabmessungen ist, so geht der Verschiebungsfluß praktisch vollständig in dem Zwischenraum von einer Platte zur andern über. Alle Niveaulächen sind parallele Ebenen. Die elektrische Feldstärke steht senkrecht auf diesen Ebenen; sie hat überall den Betrag

$$|\mathfrak{E}| = \frac{U}{d}. \quad (149)$$

Der Verschiebungsfluß  $Q$  verteilt sich gleichmäßig auf den ganzen Querschnitt von der Größe  $F$ . Die Verschiebungsdichte hat daher überall den Betrag

$$|\mathfrak{D}| = \frac{Q}{F}. \quad (150)$$

Das Feld zwischen den beiden Platten ist homogen.

Die Spannungsmessung liefert also die elektrische Feldstärke, während man aus der Ablesung am ballistischen Galvanometer die Verschiebungsdichte berechnen kann. Führt man derartige Messungen bei verschiedenen Spannungen aus, so findet man, daß die Verschiebungsdichte sehr genau proportional der elektrischen Feldstärke ist, so daß man unter Berücksichtigung der Richtungen dieser Größen schreiben kann

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}. \quad (151)$$

Die Größe  $\varepsilon$  ist eine Materialkonstante; sie wird absolute Dielektrizitäts-

konstante des betreffenden Stoffes genannt. Es ist

$$\epsilon = \frac{|\mathfrak{D}|}{|\mathfrak{E}|} = \frac{Qd}{UF}. \tag{152}$$

Setzt man  $Q$  in As,  $U$  in V,  $d$  in cm und die Fläche in  $\text{cm}^2$  ein, so erhält man als Einheit für  $\epsilon$

$$1 \frac{\text{As}}{\text{V cm}} = 1 \frac{\text{Ss}}{\text{cm}} = 1 \frac{\text{F}}{\text{cm}},$$

wobei

$$1 \frac{\text{As}}{\text{V}} = 1 \text{ Farad} = 1 \text{ F} \tag{153}$$

gesetzt ist. Da ein Farad eine sehr große Einheit ist, so werden praktisch die Bruchteile

$$1 \mu\text{F} = 10^{-6}\text{F} \quad \text{und} \quad 1 \mu\mu\text{F} = 10^{-12}\text{F}$$

verwendet.

Die Dielektrizitätskonstante gibt an, wie groß der Verschiebungsfluß für die Flächeneinheit und die Einheit des Potentialgefälles ist. Für das Vakuum ergibt sich nach den genauesten bis jetzt ausgeführten Messungen der Wert

$$\epsilon_0 = 0,08859 \frac{\mu\mu\text{F}}{\text{cm}}. \tag{154}$$

Die absolute Dielektrizitätskonstante aller andern Nichtleiter ist größer als dieser Wert. Man schreibt

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0, \tag{155}$$

und nennt  $\epsilon_r$  die relative Dielektrizitätskonstante (kurz auch die Dielektrizitätskonstante) oder die Elektrisierungszahl des betreffenden Stoffes. Die Elektrisierungszahl der Luft und der gasförmigen Stoffe ist fast genau gleich 1. Für einige Isolierstoffe der Elektrotechnik sind in der folgenden Tabelle 2 die Werte der Elektrisierungszahl aufgeführt.

Tabelle 2.

Stoff	$\epsilon_r$	Stoff	$\epsilon_r$
Asphalt. . . . .	2,5	Luft bei 760 mm und 0° . .	1,0006
Bakelit. . . . .	4,5	Mikanit . . . . .	4,5 . . . 5,5
Bernstein. . . . .	2,2 . . . 2,9	Papier. . . . .	1,8 . . . 2,6
Cellon . . . . .	3,5	Paraffin . . . . .	2,1 . . . 2,2
Eis. . . . .	2 . . . 3	Pertinax. . . . .	4,8
Fernsprechkabelisolation		Porzellan . . . . .	4,5 . . . 5
(Papier, Luft). . . . .	1,7	Quarz . . . . .	4,3 . . . 4,6
Glas, Glimmer . . . . .	5 . . . 10	Schellack . . . . .	3
Guttapercha . . . . .	3 . . . 3,2	Starkstromkabelisolation	
Hartgummi . . . . .	2,5 . . . 3,5	(Papier und Öl) . . . . .	3 . . . 4,5
Holz . . . . .	3 . . . 3,5	Transformatoröl . . . . .	2,2 . . . 2,5
		Wasser . . . . .	80

In der theoretischen Physik bringt man die Unterteilung des Verschiebungsflusses in den im Vakuum entstehenden Teil und den durch den Isolierstoff bedingten dadurch zum Ausdruck, daß man setzt

$$\mathfrak{D} = \epsilon_0 \mathfrak{E} + \mathfrak{M} = \epsilon_0 \mathfrak{E} + s \epsilon_0 \mathfrak{E}. \tag{156}$$

Man bezeichnet dann  $\mathfrak{M}$  als „Polarisation“ des Dielektrikums,  $s$  als dielektrische Suszeptibilität; es gilt

$$s = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0}. \tag{157}$$

Die Elektrisierungszahlen von elektrisch leitenden Stoffen kann man nicht in der angegebenen Weise bestimmen; man findet sie durch Wechselstrommessungen (siehe Abschnitt 19). Da in den metallischen Leitern nur ein kleiner Teil der Elektronen frei ist, so muß auch in den Metallen dem Leitungsstrom ein Verschiebungsstrom bzw. ein Verschiebungsfluß überlagert sein. Die bisherigen Beobachtungen lassen genauere Schlüsse darüber nicht zu; es ist jedoch wahrscheinlich die Elektrisierungszahl der Metalle kleiner als 10.

Bringt man einen kleinen geladenen Körper, z. B. eine kleine Metallkugel, die mit der Elektrizitätsmenge  $Q$  versehen ist, in ein elektrisches Feld, so wird auf diesen geladenen Körper eine mechanische Kraft in der Richtung der Feldlinien ausgeübt. Die Kraft ist bestimmt durch die elektrische Feldstärke, die vor dem Einbringen des geladenen Körpers in das elektrische Feld an der betreffenden Stelle vorhanden war; sie hat die durch Gl. (144) gegebene Größe. Voraussetzung für die Gültigkeit

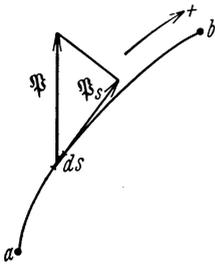


Abb. 51. Zur Berechnung der Arbeit beim Bewegen von Elektrizitätsmengen.

dieser Beziehung ist, daß die Abmessungen des geladenen Körpers so klein sind, daß das ursprüngliche elektrische Feld in seiner Umgebung als homogen angesehen werden kann. Bewegt man den geladenen Körper, so ist die Kraft durch das gleiche Gesetz bestimmt, wenn das Feld ein elektrostatisches Feld ist. Man erhält dann eine mechanische Arbeit, die positiv oder negativ sein kann, je nach der Richtung der Bewegung gegenüber der Richtung der Feldlinien. Man findet die Arbeit, die beim Durchlaufen eines kleinen Längenelementes  $ds$  des Weges erhalten wird, Abb. 51, wenn man die in die Wegrichtung fallende Komponente  $F_s$  der Kraft  $F$  mit der Länge des Wegelementes multipliziert. Unter Wegrichtung ist dabei die Richtung der Bewegung des geladenen Körpers zu verstehen. Die gesamte Arbeit,

die auf einem beliebigen Weg von  $a$  nach  $b$  erhalten wird, ist

$$A = \int_a^b F_s ds, \quad (158)$$

oder mit Gl. (144)

$$A = Q \int_a^b \mathcal{E} ds. \quad (159)$$

Führt man schließlich noch Gl. (82) ein, so ergibt sich

$$A = Q(\varphi_a - \varphi_b) = QU_{ab}. \quad (160)$$

Die Arbeit, die die elektrischen Feldkräfte beim Transport eines geladenen Körpers von einem Punkt  $a$  nach einem Punkt  $b$  des Feldes leisten, hängt nur von der Potentialdifferenz zwischen den beiden Punkten und von der Ladung des Körpers ab; sie ist unabhängig von dem Weg und wird positiv, wenn eine positive Ladung von höherem zu niedrigerem Potential, oder eine negative Ladung von niedrigerem zu höherem Potential gebracht wird, während bei umgekehrter Bewegungsrichtung eine mechanische Arbeit aufgewendet werden muß. Auf Grund dieser Zusammenhänge können die Größen des elektrostatischen Feldes folgendermaßen definiert werden:

1. Die elektrische Feldstärke in irgendeinem Punkt ist gleich der Kraft, die in diesem Punkt auf die Einheit der positiven Elektrizitätsmenge (positive Einheitsladung) ausgeübt wird:

$$\mathcal{E} = \frac{F}{Q}. \quad (161)$$

2. Das elektrische Potential in irgendeinem Punkt ist gleich der Arbeit, die von den Feldkräften geleistet wird, wenn eine positive Einheitsladung von dem betreffenden Punkt zum Bezugspunkt gebracht wird, oder gleich der Arbeit, die aufgewendet werden muß, um eine positive Einheitsladung von dem Bezugspunkt zu dem betreffenden Punkte des Feldes zu bringen:

$$\varphi = \frac{A}{Q}. \quad (162)$$

3. Die Arbeit, die die elektrischen Feldkräfte beim Herumführen einer Einheitsladung auf einem beliebigen geschlossenen Weg leisten, ist Null. Das elektrostatische Feld ist „wirbelfrei“:

$$\oint F ds = 0. \quad (163)$$

Ein ruhendes elektrisches Feld braucht im allgemeinen kein elektrostatisches Feld zu sein. Ein Beispiel dafür bildet das Feld in der Umgebung einer von Gleichstrom durchflossenen Leitung, Abb. 52. Da die elektrischen Feldgrößen hier überall zeitlich konstant sind, so liegt ein ruhendes elektrisches Feld vor. Infolge des Spannungsabfalles längs der Leitungsdrähte tritt jedoch zu der Feldstärke  $\mathcal{E}_1$  des bei Unterbrechung der Leitung entstehenden elektrostatischen Feldes, die senkrecht auf der Leiteroberfläche stehen würde, noch eine Feldstärke  $\mathcal{E}_2$  in Richtung der Leiterachse, die gleich dem Spannungsabfall für die Längeneinheit ist. Die elektrischen Feldlinien treten daher nicht senkrecht aus dem Leiter aus; auch ist im Innern der Leitung die Feldstärke nicht Null, sondern gleich  $\mathcal{E}_2$ . Der Grund für diese Abweichungen vom elektrostatischen Feld liegt darin, daß hier dauernd eine Energieumsetzung (Wärmeentwicklung) stattfindet. Beim Bewegen einer elektrischen Ladung in der Umgebung der Leitung treten infolge des gleichzeitig vorhandenen magnetischen Feldes zusätzliche Kräfte auf. Diese Kräfte tragen allerdings zur Arbeit, die beim Bewegen geleistet wird, nichts bei, da sie senkrecht auf der Bewegungsrichtung stehen (siehe Abschnitt 22). Es gelten daher auch in einem beliebigen ruhenden elektrischen Feld die drei Gesetze, Gl. (161), (162), (163).

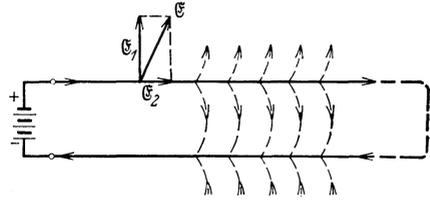


Abb. 52. Beispiel eines ruhenden elektrischen Feldes.

Da nach Gl. (148) in einen beliebigen Raumteil eines ruhenden elektrischen Feldes, der keine Ladungen enthält, genau so viele Verschiebungslinien eintreten, wie aus ihm herauskommen, so sind die Verschiebungslinien in solchen Räumen stetig; sie endigen oder entspringen nur auf elektrischen Ladungen. Daraus folgt für die Grenzfläche zwischen zwei Nichtleitern verschiedener Elektrisierungszahlen, daß die Normalkomponenten der Verschiebungsdichte zu beiden Seiten der Grenzfläche, Abb. 53, einander gleich sein müssen:

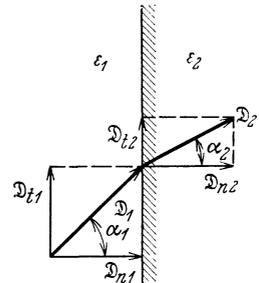


Abb. 53. Grenzfläche zwischen zwei Nichtleitern.

einander gleich sein müssen: 
$$\mathcal{D}_{n1} = \mathcal{D}_{n2}, \tag{164}$$
 eine zu Gl. (123) analoge Beziehung. Aus dem gleichen Grunde wie im Strömungsfeld müssen ferner auch hier die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke auf beiden Seiten der Grenzfläche einander gleich sein, Gl. (124). Für die Tangentialkomponenten der Verschiebungsdichte gilt daher

$$\frac{\mathcal{D}_{t1}}{\mathcal{D}_{t2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \tag{165}$$

Die Verschiebungslinien werden an der Grenzfläche gebrochen, und zwar wird der Winkel mit der Normalen zur Grenzfläche beim Übergang der Verschiebungslinien von einem Stoff höherer zu einem Stoff niedrigerer Elektrisierungszahl kleiner; in Abb. 53 ist  $\epsilon_1$  größer als  $\epsilon_2$ .

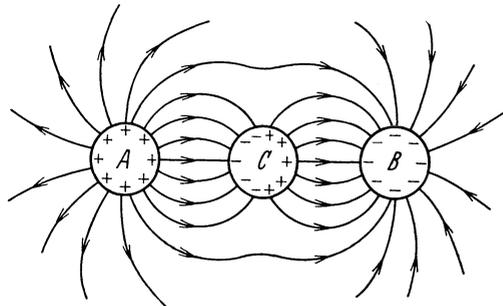


Abb. 54. Influenzwirkung.

Bringt man in ein elektrisches Feld z. B. das Feld zwischen den beiden Elektroden A und B, Abb. 54, einen isolierten Leiter C, so entsteht in diesem Leiter unter der Einwirkung der elektrischen Feldkräfte eine Wanderung der Elektronenwolke so lange, bis im Innern

$$\mathcal{E} = 0$$

ist. Als Resultat dieser Wanderung von Elektronen finden sich auf der Oberfläche des Leiters Elektrizitätsmengen. Die Summe dieser Elektrizitätsmengen ist Null, wenn der Leiter ungeladen war; es münden ebenso viele Verschiebungslinien auf dem Leiter, wie davon ausgehen. Diese Einwirkung des elektrischen Feldes auf den Leiter bezeichnet man als *Influenz*. Sie hat zur Folge, daß die Leiter die Verschiebungslinien scheinbar zu sich hinziehen; man benutzt diese Erscheinung zur Abschirmung elektrischer Felder (Faraday, 1837). Stellt z. B. *C*, Abb. 54, eine Hohlkugel dar, so ergibt sich außerhalb der Kugel die gleiche Feldverteilung wie bei einer Vollkugel, im Innern der Hohlkugel ist jedoch die elektrische Feldstärke Null. Als weiteres Beispiel ist in Abb. 55 schematisch die Abschirmung des Bedienungsraumes *A* eines Hochspannungslaboratoriums durch ein geerdetes Metallgitter *G* veranschaulicht. *T* stellt einen Transformator dar, *K* die Hochspannungselektrode. Durch das Gitter werden die Verschiebungslinien zwischen der Hochspannungselektrode und den Wänden des Raumes aufgefangen; infolgedessen wird der Raum hinter dem Gitter praktisch feldfrei.

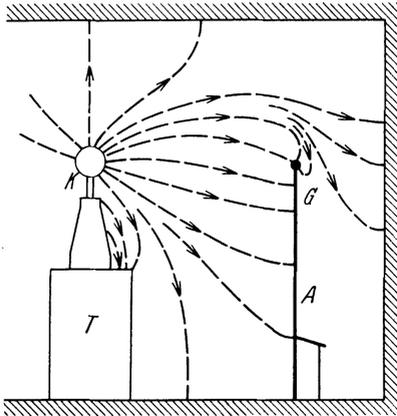


Abb. 55. Schirmwirkung.

Auf der Oberfläche eines influenzierten Leiters entsteht teils ein Überschuß, teils ein Mangel an Elektronen; bestimmte Teile der Oberfläche nehmen eine positive Ladung an, andere Teile eine negative. Wenn man dafür sorgt, daß die eine dieser beiden Ladungen abfließen kann, so ergibt sich eine Aufladung des betref-

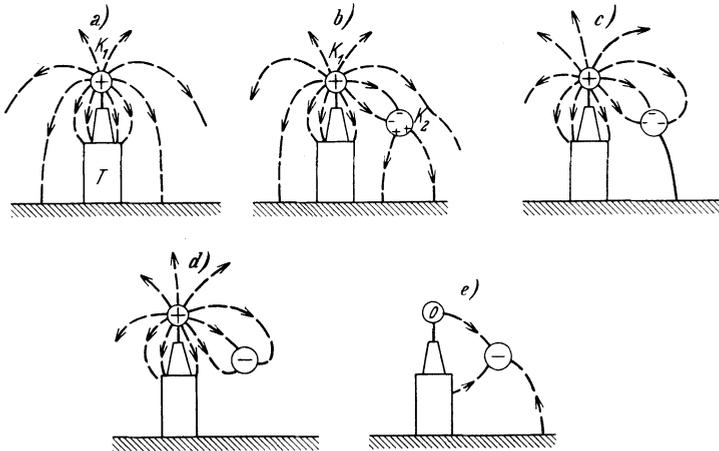


Abb. 56. Aufladung eines Leiters durch Influenz.

fenden Leiters durch Influenz. Ein Beispiel dafür ist durch Abb. 56 veranschaulicht. Es ist hier zunächst, Abb. 56a, das Feld in der Umgebung eines Hochspannungstransformators *T* schematisch dargestellt, der einpolig geerdet und am andern Pol mit einer Kugel *K*<sub>1</sub> versehen ist. Abb. 56b zeigt die Veränderung, die das Feld erfährt, wenn in die Nähe des Transformators eine Metallkugel *K*<sub>2</sub> gebracht wird. Hat die Kugel *K*<sub>1</sub> in dem betrachteten Zeitpunkt eine positive Ladung, so ergeben sich auf der dieser Kugel zugewendeten Seite von *K*<sub>2</sub> negative Ladungen, auf der andern positive Ladungen. Durch einen Draht, Abb. 56c, werde die Kugel *K*<sub>2</sub>

mit der Erde verbunden; dadurch nimmt  $K_2$  das Potential der Erde an, die Verschiebungslinien zwischen  $K_2$  und Erde verschwinden. Entfernt man nun den Draht, so ergibt sich das Bild 56d. Die Kugel  $K_2$  hat eine negative Gesamtladung, die bei hinreichend guter Isolation dieser Kugel erhalten bleibt, auch wenn  $K_1$  auf Erdpotential gebracht wird, Abb. 56e. Die zunächst ungeladene Kugel  $K_2$  hat damit eine Spannung gegen Erde aufgenommen, ohne daß sie mit dem Transformator in Verbindung gebracht wurde, eine Erscheinung, die in Hochspannungsanlagen beachtet werden muß. Sie spielt im besonderen eine Rolle bei Blitzentladungen in der Nähe von Freileitungen. Befindet sich eine Leitung im elektrischen Feld einer geladenen Gewitterwolke, so fließt eine bestimmte Ladung über die Isolationswiderstände der Leitung ab, dielektrische Verschiebungslinien spannen sich zwischen Wolke und Leitung. Entlädt sich die Wolke durch einen Blitz nach der Erde, so bleibt zunächst die Ladung der Leitung erhalten ( $K_2$  der Abb. 56); ihr entspricht eine bestimmte Spannung zwischen der Leitung und Erde, die zum Auftreten einer von der betreffenden Stelle längs der Leitung nach beiden Richtungen hin fortlaufenden Wanderwelle führt (siehe Abschnitt 42).

Die für die Grenzfläche zwischen zwei Nichtleitern angestellten Überlegungen führen noch zu folgendem Schluß. Bringt man in einem materiellen Nichtleiter einen engen, langgestreckten zylindrischen Schlitz an, dessen Richtung übereinstimmt mit der Richtung der Feldlinien, Abb. 57, und der von Materie frei ist, so muß im Innern des Schlitzes die elektrische Feldstärke den gleichen Wert haben wie außerhalb, da an der zylindrischen Grenzfläche die Feldstärke stetig übergehen muß. Es gilt daher für die Feldstärke und die Verschiebungsdichte im Innern des Schlitzes

$$\mathfrak{E}_i = \mathfrak{E}_a; \quad \mathfrak{D}_i = \frac{1}{\epsilon_r} \mathfrak{D}_a, \quad (166)$$

wenn mit  $\mathfrak{E}_a$  und  $\mathfrak{D}_a$  die ursprünglich an der betreffenden Stelle vorhandenen Feldgrößen, mit  $\epsilon_r$  die Elektrizitätszahl des Nichtleiters bezeichnet werden. Wird dagegen ein kleiner dosenförmiger Hohlraum von sehr geringer Höhe, dessen Grundflächen senkrecht zu den Feldlinien stehen, im Innern des Nichtleiters angebracht, Abb. 58, so müssen die Verschiebungslinien stetig durch den Hohlraum hindurchgehen, d. h. es wird

$$\mathfrak{E}_i = \epsilon_r \mathfrak{E}_a; \quad \mathfrak{D}_i = \mathfrak{D}_a. \quad (167)$$

Man kann also in einem Längsschlitz die elektrische Feldstärke, in einem Querschlitz die Verschiebungsdichte messen, die innerhalb des Nichtleiters vorhanden sind.

## 11. Kondensatoren.

Unter einem Kondensator versteht man eine Anordnung, die aus zwei voneinander isolierten Metallelektroden besteht. Legt man an die Elektroden eine Spannung, so nehmen sie eine Ladung auf, es wird eine bestimmte Elektrizitätsmenge als Verschiebungsfluß in dem Kondensator aufgespeichert. Auf dieser Fähigkeit, Elektrizitätsmengen aufzuspeichern, beruhen die Anwendungen der Kondensatoren. Beim Anlegen der Spannung an die Elektroden entsteht im Nichtleiter ein elektrisches Feld; die elektrische Feldstärke wird an jeder Stelle um so größer, je größer die Spannung zwischen den Elektroden ist. Die Verschiebungsdichte ist proportional der Feldstärke und daher ebenfalls proportional der Spannung. Daher muß auch der gesamte Verschiebungsfluß  $Q$ , der von der einen zur andern Elektrode übergeht, proportional der Spannung  $U$  zwischen den Elektroden sein:

$$Q = CU. \quad (168)$$

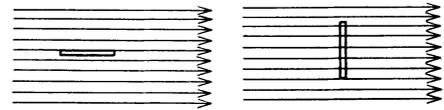


Abb. 57. Längsschlitz zur Messung der Feldstärke.

Abb. 58. Querschlitz zur Messung der Verschiebungsdichte.

Der Proportionalitätsfaktor  $C$  wird die Kapazität des Kondensators genannt; er ist unabhängig von der angelegten Spannung, also nur bestimmt durch die geometrischen Formen des Kondensators und die Materialeigenschaften (Elektrisierungszahl) des Nichtleiters. Es gilt also

$$\text{Kapazität} = \frac{\text{Verschiebungsfluß zwischen zwei Elektroden}}{\text{Spannung zwischen den Elektroden}}.$$

Die einfachste Ausführungsform bildet der Plattenkondensator, bei dem zwei ebene Elektroden durch einen Nichtleiter von sehr geringer Dicke  $d$  voneinander getrennt sind. Die Niveaulächen sind dann Ebenen parallel zu den Plattenoberflächen. Der Verschiebungsfluß geht senkrecht von der einen Elektrodenfläche zur andern über, um so genauer je größer die Abmessungen der Platten im Vergleich zur Dicke  $d$  des Nichtleiters sind. Das Bündel der Verschiebungslinien hat einen Querschnitt, der gleich der Plattenfläche  $F$  ist. Der Verschiebungsfluß  $Q$  verteilt sich gleichmäßig auf dieser Fläche, so daß die Verschiebungsdichte im Innern des Nichtleiters wie im Fall der Abb. 50

$$|\mathfrak{D}| = \frac{Q}{F}$$

ist. Das Potential geht im Innern des Nichtleiters linear von dem Potential der einen Elektrode zu dem der andern über; bezeichnet man die Spannung zwischen den Elektroden mit  $U$ , so ist daher die elektrische Feldstärke im Innern des Nichtleiters

$$|\mathfrak{E}| = \frac{U}{d}.$$

Mit Benutzung der Gl. (151) ergibt sich daraus

$$Q = \frac{\epsilon F}{d} U,$$

und es folgt für die Kapazität

$$C = \frac{\epsilon F}{d}. \quad (169)$$

Diese Beziehung gilt angenähert auch bei gekrümmten Elektroden, wenn nur der Abstand zwischen den Elektroden klein ist gegen den Krümmungsradius, so daß man das elektrische Feld zwischen den Elektroden als homogen ansehen kann. Da die Einheit der Dielektrizitätskonstante Farad/cm ist, so dient als Einheit der Kapazität nach Gl. (169) das Farad; die Einheit der Kapazität liegt vor, wenn die Elektroden bei 1 V Potentialunterschied eine Ladung von 1 As aufnehmen.

Weitere Ausführungsformen von Kondensatoren, bei denen die Formel (169) angewendet werden kann, sind die folgenden:

**a) Luftkondensatoren.** Die Luftkondensatoren werden in der Meßtechnik und in der Fernmeldetechnik verwendet, wenn es sich um kleine Kapazitätswerte handelt.

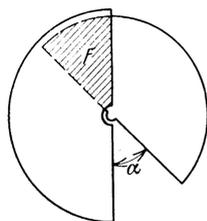


Abb. 59. Zur Berechnung der Kapazität eines Drehkondensators.

Bei den Drehkondensatoren greifen zwei voneinander isolierte Systeme paralleler Platten kammartig ineinander, so daß sich der Verschiebungsfluß von den Platten des einen Systems aus nach beiden Seiten hin verzweigt. Der Querschnitt der Verschiebungslinienbündel,  $F$ , Abb. 59, kann durch Herausdrehen eines der beiden Systeme aus dem andern beliebig eingestellt werden. Sind im ganzen  $n$  Zwischenräume vom Abstand  $d$  zwischen je zwei Platten vorhanden, so verzweigt sich der Verschiebungsfluß in  $n$  gleiche Teile; die Kapazität ist daher

$$C = n \frac{\epsilon F}{d}. \quad (170)$$

Für Hochspannungsmessungen werden Kondensatoren hergestellt aus konzentrischen Metallzylindern mit geringem Abstand, die isoliert voneinander in einem druckfesten Gefäß eingeschlossen sind. Das Gefäß wird mit Luft oder Kohlensäure

von hohem Druck (20 at) gefüllt, wodurch sich eine hohe Durchschlagsfestigkeit ergibt (Preßgaskondensatoren).

**b) Papierkondensatoren.** Die Papierkondensatoren werden bis zur Spannung von einigen 1000 V verwendet. Sie werden durch Aufwickeln von Streifen dünner Metallfolie (Stanniol oder Kupfer) mit Zwischenlagen von paraffiniertem Papier auf einen Dorn hergestellt (Wickelkondensatoren). Auf diese Weise läßt sich eine große Elektrodenoberfläche auf kleinem Raum unterbringen. Für die Berechnung der Kapazität gilt die Formel (169); es ist zu beachten, daß sich der Verschiebungsfluß von jeder Folie nach beiden Seiten hin verzweigt.

**c) Glimmerkondensatoren.** Glimmer wird verwendet, wenn es sich um die Herstellung größerer Kapazitätswerte bei hohen Spannungen handelt, oder für Meßzwecke, wenn die Kapazität zeitlich möglichst konstant sein soll. Es werden abwechselnd dünne Scheiben von Glimmer und Metallfolie aufeinander geschichtet, so daß ebenfalls die Elektroden nach beiden Seiten hin ausgenützt werden.

**d) Glaskondensatoren.** Sie werden bei hohen Spannungen angewendet und sind den alten Kleistschen Flaschen nachgebildet. Es wird Glas mit hoher Durchschlagsfestigkeit und hoher Elektrisierungszahl verwendet („Minoglas“  $\epsilon_r = 8$ ) in so dünner Schicht, daß das elektrische Feld im Innern als homogen angesehen werden kann. Auch Plattenkondensatoren werden z. T. aus Glas hergestellt („Minosplattenverdichter“).

#### Berechnungsbeispiele:

1. Plattenkondensator. In der folgenden Tabelle ist für verschiedene Verhältnisse von  $F/d$  und für eine Elektrisierungszahl von  $\epsilon_r = 1$  die nach Formel (169) berechnete Kapazität angegeben.

$F/d = 100$	200	500	1000	2000	5000	10000 cm
$C = 8,86$	17,7	44,3	88,6	177	443	886 $\mu\mu\text{F}$

2. Drehkondensator. Es soll ein Drehkondensator mit einer Kapazität von 1000  $\mu\mu\text{F}$  mit Platten von  $r_0 = 5$  cm Radius bei einem Plattenabstand von  $d = 1$  mm hergestellt werden. Der größte Querschnitt des Verschiebungsflusses beträgt  $\frac{1}{2} r_0^2 \pi = 39,3$  cm<sup>2</sup>. Daher gilt nach Gl. (170)

$$1000 \mu\mu\text{F} = n \frac{0,0886 \cdot 39,3 \text{ cm}^2}{0,1 \text{ cm}} \frac{\mu\mu\text{F}}{\text{cm}};$$

$$n = 29.$$

Es müssen also 29 Zwischenräume zwischen den Platten vorhanden sein, d. h. 15 feste und 15 drehbare Platten verwendet werden.

Bei kreisförmigen Platten, wie in Abb. 59, wächst die Kapazität von einem Anfangswert („Anfangskapazität“ bei ganz herausgedrehten Platten) ungefähr linear mit dem Drehwinkel  $\alpha$  auf den Endwert an. Für manche Zwecke (z. B. Rundfunkapparate) ist ein anderer Zusammenhang zwischen Kapazität und Drehwinkel erwünscht; man ändert dann die Form der drehbaren Platten entsprechend ab, so daß ihr Radius  $r$  eine bestimmte Funktion des Winkels  $\alpha$  wird. Die Fläche  $F$  zwischen den Elektroden wird dann

$$F = \frac{1}{2} \int_0^\alpha r^2 d\alpha, \quad (171)$$

wenn das bewegliche Plattensystem mit dem Winkel  $\alpha$  in das feststehende eintaucht. Soll die Kapazität  $C$  eine bestimmte Funktion  $f(\alpha)$  des Winkels  $\alpha$  sein, so gilt

$$f(\alpha) = \frac{n \epsilon_0}{2d} \int_0^\alpha r^2 d\alpha.$$

Hieraus erhält man durch Differenzieren

$$r = \sqrt{\frac{2d}{n \epsilon_0}} \sqrt{\frac{df(\alpha)}{d\alpha}}. \quad (172)$$

Bei manchen Anwendungen ist es zweckmäßig, für  $1/C$  eine bestimmte Abhängigkeit  $F(\alpha)$  vorzuschreiben. Dann gilt

$$r = \sqrt{\frac{2d}{n \epsilon_0}} \frac{1}{F(\alpha)} \sqrt{-\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}}. \quad (173)$$

Wenn z. B. der Kondensator eines Schwingungskreises eine Teilung erhalten soll, die linear von der Eigenfrequenz  $1/2\pi\sqrt{LC}$  abhängt, so muß mit den beiden Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  gelten

$$\frac{1}{\sqrt{C}} = c_1 \left( 1 - c_2 \frac{\alpha}{\pi} \right),$$

oder

$$F(\alpha) = c_1^2 \left( 1 - c_2 \frac{\alpha}{\pi} \right)^2. \quad (174)$$

Damit ergibt sich, wenn alle Konstanten zusammengefaßt werden, aus Gl. (173)

$$r = \frac{c}{\left( 1 - c_2 \frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (175)$$

Der Radius  $r$  hat seinen größten Wert für  $\alpha = \pi$ , nämlich

$$r_m = \frac{c}{(1 - c_2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Führt man diesen Wert an Stelle von  $c$  ein, so folgt

$$r = r_m \left( \frac{1 - c_2}{1 - c_2 \frac{\alpha}{\pi}} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (176)$$

In Abb. 60 sind hieraus hervorgehende Formen der Platten für verschiedene Werte von  $c_2$  aufgezeichnet.

Zwischen dem Verschiebungsfluß des elektrischen Feldes und dem Strom im Strömungsfelde besteht nach Abschnitt 10 eine formale Analogie. Die zur Kapazität analoge Größe des Strömungsfeldes ist der Leitwert zwischen den Elektroden, wenn deren Leitfähigkeit sehr groß gegen die des leitenden Mediums zwischen ihnen ist. Man kann diese Analogie zur Berechnung der Kapazität benutzen, wenn das entsprechende Strömungsfeld bekannt ist, oder zur Berechnung des Isolationswiderstandes von Kondensatoren, deren Kapazität man kennt.

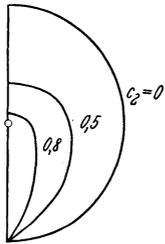


Abb. 60. Plattenformen eines Drehkondensators mit linearer Frequenzteilung.

Allgemein gilt für den Widerstand zwischen den Elektroden eines Strömungsfeldes

$$R = \frac{U_{ab}}{I}, \quad (177)$$

wobei  $U_{ab}$  die Spannung zwischen den Elektroden,  $I$  den von der einen zur andern Elektrode übergehenden Strom bezeichnet. Nun ist für irgendeine Hüllfläche, die eine Elektrode enthält, wenn die Stromzuleitung von der Integration ausgeschlossen wird,

$$I = \oint \mathcal{G} d\mathcal{F}.$$

Für den Fall, daß die Leitfähigkeit im ganzen Raum konstant ist, wird hieraus

$$I = \kappa \oint \mathcal{G} d\mathcal{F}, \quad (178)$$

also

$$R = \frac{1}{\kappa} \frac{U_{ab}}{\oint \mathcal{G} d\mathcal{F}}. \quad (179)$$

Ist dagegen der Raum zwischen den Elektroden von einem homogenen Nichtleiter erfüllt, so wird der Verschiebungsfluß

$$Q = \oint \mathcal{D} d\mathcal{F} = \varepsilon \oint \mathcal{G} d\mathcal{F}, \quad (180)$$

so daß für die Kapazität zwischen den beiden Elektroden gilt

$$C = \frac{Q}{U_{ab}} = \varepsilon \frac{\oint \mathcal{G} d\mathcal{F}}{U_{ab}}. \quad (181)$$

Der Vergleich der beiden Beziehungen (179) und (181) zeigt, daß

$$RC = \frac{\varepsilon}{\kappa}. \quad (182)$$

Daraus folgt auch, daß der Isolationswiderstand eines Kondensators beliebiger Form bei homogenem Dielektrikum umgekehrt proportional der Kapazität ist.

Im Abschnitt 7 hatte sich für den Isolationswiderstand eines einadrigen Kabels von der Länge  $l$  und den Radien  $r_1$  und  $r_2$  von Innenleiter und Bleimantel die Formel ergeben

$$R = \frac{1}{2\pi\kappa l} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Dabei wurde die Voraussetzung gemacht, daß der Zwischenraum zwischen Leiter und Kabelmantel von einem homogenen Medium mit der Leitfähigkeit  $\kappa$  erfüllt sei. Hat dieses Medium eine Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$ , so gilt daher auf Grund des eben gefundenen Zusammenhanges für die Kapazität des Einleiterkabels

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \tag{183}$$

Da praktisch meist die Elektrizierungszahl gegeben ist, so ist es zweckmäßig, diese Beziehung in der Form zu schreiben

$$\frac{C}{l} = 2\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_r}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{0,0556 \epsilon_r \mu\text{F}}{\ln \frac{r_2}{r_1} \text{ km}} = \frac{0,0241 \epsilon_r \mu\text{F}}{\log \frac{r_2}{r_1} \text{ km}}. \tag{184}$$

**Zahlenbeispiel:** Für verschiedene Werte von  $r_2/r_1$  und  $\epsilon_r=1$  gibt die folgende Tabelle die Kapazität für die Längeneinheit des Kabels an:

$r_2/r_1=1,6$	1,8	2	2,5	3,0	3,5	4	5,0
$C/l=0,118$	0,0946	0,0802	0,0607	0,0506	0,0444	0,0401	0,0346 $\mu\text{F}/\text{km}$

Bei Starkstromkabeln mit ölgetränkter Papierisolation ist  $\epsilon_r$  ungefähr gleich 4, die Kapazitätswerte sind also etwa 4 mal so groß.

Die Formel (183) gilt nur, wenn die Zylinderelektroden so lang sind, daß die Verschiebungslinien radial von der einen Elektrode zur andern übergehen. Für Meßzwecke werden in der Hochspannungstechnik zuweilen Zylinderkondensatoren verwendet, bei denen die Elektroden aus kurzen konzentrischen Zylindern bestehen. Hier erreicht man den radialen Verlauf der Verschiebungslinien durch Verlängerung der Elektroden über den ausgenützten Teil hinaus, wie es in Abb. 61 dargestellt ist. Werden die Verlängerungen  $a$  und  $c$  („Schutzringe“) auf das gleiche Potential gebracht, wie die mittlere Elektrode  $b$ , so ergibt sich zwischen dieser Elektrode und der inneren der gewünschte Verlauf der Verschiebungslinien, so daß die Kapazität zwischen diesen beiden Elektroden nach der Formel (183) berechnet werden kann.

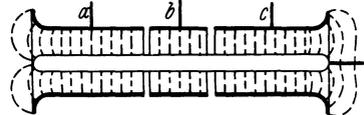


Abb. 61. Luftkondensator mit Schutzringen.

Werden mehrere Kondensatoren mit den Kapazitätswerten  $C_1, C_2, C_3$  usw. parallel an eine Stromquelle gelegt, so verzweigt sich bei der Aufladung der Verschiebungsstrom in die einzelnen Kondensatoren. Der gesamte Verschiebungsfluß  $Q$  setzt sich aus der Summe der Verschiebungsflüsse in den einzelnen Kondensatoren,  $Q_1, Q_2, Q_3$  usw. zusammen. Ersetzt man die ganze Anordnung durch einen einzigen Kondensator mit einer solchen Kapazität  $C_0$ , daß bei der gleichen Spannung  $U_0$  der gleiche Verschiebungsfluß  $Q$  aufgenommen wird, so gilt daher

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots, \\ U_0 C_0 &= U_0 C_1 + U_0 C_2 + U_0 C_3 + \dots, \end{aligned} \tag{185}$$

oder

$$C_0 = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$$

Bei Reihenschaltung der Kondensatoren hat der Verschiebungsstrom in jedem Kondensator den gleichen Wert. Die Ladungen  $Q$  der einzelnen Kondensatoren sind daher einander gleich. Die Spannungen an den einzelnen Kondensatoren sind bestimmt durch diese Ladung und den Kapazitätswert; ihre Summe muß gleich der

Gesamtspannung  $U_0$  sein. Ersetzt man auch hier die Anordnung durch einen einzigen Kondensator mit einer Kapazität  $C_0$ , so daß sich bei der gleichen Spannung  $U_0$  die gleiche Ladung  $Q$  ergibt, so muß gelten

$$U_0 = U_1 + U_2 + U_3 + \dots,$$

$$\frac{Q}{C_0} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \dots,$$

oder

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \quad (186)$$

Die Teilspannungen sind

$$U_n = U_0 \frac{C_0}{C_n}. \quad (187)$$

Sie verhalten sich umgekehrt wie die Kapazitätswerte; an der kleineren Kapazität liegt die höhere Spannung. Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Überlegung ist, daß der Isolationswiderstand unendlich groß ist. Bei Gleichstrom stellt sich in Wirklichkeit eine Spannungsverteilung ein, die ausschließlich durch die Isolationswiderstände der einzelnen Kondensatoren bestimmt ist. Nur wenn  $\epsilon/\kappa$  für alle in Reihe geschalteten Kondensatoren den gleichen Wert hätte, würde diese Spannungsverteilung übereinstimmen mit der hier berechneten. Praktisch schwankt die Leitfähigkeit der Nichtleiter in ziemlich weiten Grenzen, so daß sich bei Gleichstrom große Unterschiede zwischen der idealen und der wirklichen Verteilung der Spannung ergeben können. Dagegen gelten die abgeleiteten Beziehungen mit großer Annäherung, wenn es sich um Wechselspannungen handelt, da hier der Verschiebungsstrom im Leiter meist erheblich überwiegt (siehe Abschnitt 18).

Wenn man eine Anzahl  $n$  Kondensatoren parallel geschaltet mit einer Spannung  $U$  auflädt und dann hintereinander schaltet, so ergibt sich eine Addition der Einzelspannungen; die Gesamtspannung wird  $nU$ . Die ganze Anordnung wirkt dann wie ein Kondensator mit dem  $n$ -ten Teil der Kapazität eines Einzelkondensators, der auf die  $n$ -fache Spannung aufgeladen ist. Man benutzt diese Möglichkeit zur Herstellung von hohen Spannungen für Versuchszwecke.

## 12. Beispiele elektrostatischer Felder.

In diesem Abschnitt werden einige Beispiele von elektrostatischen Feldern betrachtet, die sich mit Hilfe der im Abschnitt 10 entwickelten Vorstellungen über den Verschiebungsfluß behandeln lassen. Die elektrostatischen Felder können auf Grund dieser Vorstellungen auf die Wirkung von Quellen des Verschiebungsflusses zurückgeführt werden.

### Die Punktladung.

Aus dem in Abschnitt 7 behandelten Fall einer in einen leitenden Stoff eingebetteten Kugelelektrode geht bei verschwindender Leitfähigkeit das elektrostatische Feld in der Umgebung einer geladenen Kugel hervor. Die Verschiebungslinien gehen von der Kugeloberfläche nach allen Seiten hin strahlenförmig aus, wenn auf der Kugel eine positive Ladung angenommen wird; sie münden auf der Gegenelektrode, deren Entfernung von der Kugel als sehr groß (unendlich groß) vorausgesetzt werden soll. Der Verschiebungsfluß verteilt sich daher gleichmäßig auf konzentrischen Kugelflächen, so daß die Verschiebungsdichte im Abstand  $r$  vom Kugelmittelpunkt

$$|\mathfrak{D}| = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad (188)$$

beträgt; der Verschiebungsfluß  $Q$  ist gleich der Ladung der Kugel. Die elektrische Feldstärke an irgendeiner Stelle des nichtleitenden Raumes wird infolge Gl. (151)

$$|\mathfrak{E}| = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2}. \quad (189)$$

Der Vektor der elektrischen Feldstärke zeigt radial von der Kugel weg, wenn  $Q$  positiv ist. In bezug auf den Raum außerhalb der Kugelelektrode kann man diese ersetzen durch eine Punktquelle oder Punktladung  $Q$  im Mittelpunkt der Kugel. Das elektrische Feld in der Umgebung einer Punktladung ist durch konzentrische Kugelflächen als Niveaulinien und durch Radialen als Verschiebungslinien gekennzeichnet. Das Potential im Abstand  $r$  von der Punktladung wird

$$\varphi = \int_r^{\infty} \mathcal{E} dr = \int_r^{\infty} |\mathcal{E}| dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}, \quad (190)$$

wenn als Bezugspunkt ein sehr ferner Punkt gewählt wird.

An der Oberfläche der Kugel vom Radius  $r_0$  ist das Potential gleich der Spannung zwischen der Kugel und einem sehr weit entfernten Punkt, also

$$U_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon r_0}.$$

Die Kapazität der Kugel wird daher

$$C = 4\pi\epsilon r_0. \quad (191)$$

Eine Kugel von 1 cm Radius, die sich in Luft befindet mit einem gegen ihren Radius sehr großen Abstand von andern Leitern oder Nichtleitern, hat danach eine Kapazität von der Größe

$$C = 4\pi\epsilon_0 r_0 = 4\pi \cdot 0,0886 \cdot 1 \frac{\mu\mu\text{F}}{\text{cm}} \text{ cm} = 1,11 \mu\mu\text{F}.$$

Dieser Kapazitätswert wird zuweilen als Einheit der Kapazität benützt und mit 1 cm bezeichnet, da er sich auch aus den Einheiten des elektrostatischen Maßsystems ableitet. Man sagt, die Kapazität betrage so viele Zentimeter, als der Wert  $1,11 \mu\mu\text{F}$  in der betreffenden Kapazität enthalten ist. Diese Bezeichnung sollte in der Elektrotechnik nicht mehr verwendet werden, da es irreführend und unnatürlich ist, der Kapazität die Dimension einer Länge zuzuschreiben.

Die elektrische Feldstärke hat in der Umgebung einer Kugelelektrode vom Radius  $r_0$  den Wert

$$|\mathcal{E}| = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} = U_0 \frac{r_0}{r^2}. \quad (192)$$

Sie nimmt wie im entsprechenden Strömungsfeld umgekehrt proportional mit dem Quadrat des Abstandes vom Mittelpunkt der Kugel ab und beträgt an der Oberfläche der Kugelelektrode

$$|\mathcal{E}_0| = \frac{U_0}{r_0}. \quad (193)$$

Der gleiche Wert ergibt sich in einem Plattenkondensator mit dem Plattenabstand  $r_0$  bei einer Spannung  $U_0$  zwischen den beiden Platten. Die Feldstärke wird um so größer, je kleiner der Radius der Kugel ist. Hohe Feldstärken entstehen daher immer dort, wo die Krümmungsradien klein sind.

Der gleiche radiale Verlauf der Verschiebungslinien liegt in einem Kugelkondensator vor, das ist eine Anordnung aus zwei konzentrischen Kugelelektroden. Aus dem Widerstand einer solchen Anordnung im Strömungsfeld, Gl. (101), ergibt sich die Kapazität des Kugelkondensators zu

$$C = 4\pi\epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}. \quad (194)$$

Die Feldstärke zwischen den beiden Elektroden wird

$$|\mathcal{E}| = \frac{U_0 C}{4\pi\epsilon r^2} = U_0 \frac{r_1 r_2}{(r_2 - r_1) r^2}, \quad (195)$$

wenn  $U_0$  die Spannung zwischen den beiden Elektroden bezeichnet.

Allgemeine elektrostatische Felder entstehen, wenn mehrere Punktladungen vorhanden sind. Die von den einzelnen Punktladungen herrührenden Potentiale überlagern sich dann wegen der linearen Abhängigkeit zwischen Ladung und Potential, so daß das Gesamtpotential in einem beliebigen Raumpunkt

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_v \frac{Q_v}{r_v} \quad (196)$$

wird, wobei  $Q_p$  die Ladungen der Punktquellen,  $r_p$  die Abstände des betrachteten Raumpunktes von den Punktquellen bezeichnet. Wenn die Verteilung der Elektrizitätsmengen im Raum bekannt ist, so ist damit also eindeutig das Potential bestimmt.

In Abb. 62 ist das elektrische Feld in der Umgebung zweier Punktquellen, deren Ladungen sich wie  $-1:2$  verhalten, dargestellt. Die Niveaulinien lassen sich hier in ähnlicher Weise ermitteln, wie es in Abschnitt 7 beschrieben wurde.

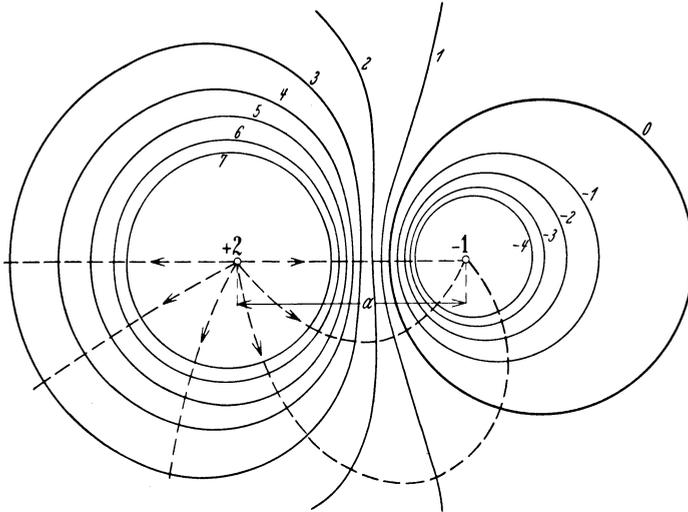


Abb. 62. Niveaulinien des Feldes von zwei Punktquellen verschiedener Ladung.

Von besonderem Interesse ist, daß bei einer solchen Anordnung von zwei Punktquellen entgegengesetzter Ladung immer eine Niveaufläche zu finden ist, die eine Kugelfläche bildet; sie ist in Abb. 62 stärker gezeichnet. Dies läßt sich folgendermaßen nachweisen. Bezeichnet  $a$  den Abstand der beiden Punktladungen, so ist das Potential im Punkte  $P$ , Abb. 36,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} \right). \quad (197)$$

Wir suchen nun die Niveaufläche mit dem Potential Null auf. Für alle Punkte dieser Niveaufläche muß gelten

$$\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} = 0,$$

oder

$$\frac{r_1}{r_2} = -\frac{Q_1}{Q_2}. \quad (198)$$

Bei gleichen Vorzeichen von  $Q_1$  und  $Q_2$  hat diese Beziehung keine geometrische Bedeutung; Punkte der gesuchten Art sind nicht vorhanden, wenn man von den unendlich fernen Punkten absieht. Bei entgegengesetzten Vorzeichen wird jedoch das Radienverhältnis positiv; die Niveaufläche mit dem Potential Null ist bestimmt durch

$$\frac{r_1}{r_2} = k, \quad (199)$$

wobei  $k$  das Verhältnis der Beträge der beiden Ladungen bezeichnet. Der geometrische Ort der Punkte einer Ebene mit konstantem Abstandsverhältnis von zwei festen Punkten dieser Ebene ist nach einem Satz der Geometrie (Apollonius) ein Kreis, der die Verbindungsgerade zwischen den beiden

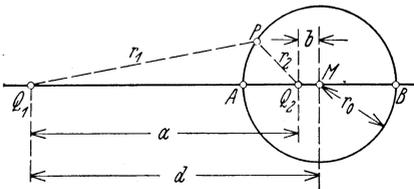


Abb. 63. Kugelförmige Niveaufläche.

Punkten harmonisch teilt, Abb. 63. Es ist

$$\frac{Q_1 A}{Q_2 A} = \frac{Q_1 B}{Q_2 B}. \quad (200)$$

Da diese Folgerung für alle Ebenen gilt, die die Verbindungsgerade der beiden Punkte enthalten, so geht hieraus hervor, daß die gesuchte Niveauläche eine Kugelfläche ist, die durch Drehung des gezeichneten Kreises um die Verbindungsgerade  $Q_1 Q_2$  entsteht. Die Kugelfläche umschließt die schwächere Punktladung. Nennt man ihren Radius  $r_0$  und kennzeichnet man die Lage ihres Mittelpunktes  $M$  durch den Abstand  $b$  von  $Q_2$ , so findet man durch Anwendung der Gl. (199) auf die Punkte  $A$  und  $B$  [Gl. (200)]:

$$\frac{a+b-r_0}{r_0-b} = \frac{a+b+r_0}{r_0+b} = k. \quad (201)$$

Hieraus folgt

$$r_0^2 = b(a+b). \quad (202)$$

Setzt man dies in Gl. (201) ein, so ergibt sich

$$\frac{r_0}{b} = k. \quad (203)$$

Ferner findet man aus den beiden Gl. (202) und (203)

$$r_0 = a \frac{k}{k^2-1}, \quad (204)$$

$$b = a \frac{1}{k^2-1}. \quad (205)$$

Damit können die Bestimmungsstücke des Kreises berechnet werden. Für  $k=1$  artet der Kreis zur Mittelsenkrechten der Verbindungslinie  $Q_1 Q_2$  aus, die Mittelebene wird Niveauläche.

Bringt man in Punkt  $M$  noch eine dritte Punktladung  $Q_3$  an, so bleibt die betrachtete Kugel eine Niveauläche; es wird lediglich zu allen Punkten der Kugel das Potential

$$\varphi_3 = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon r_0} \quad (206)$$

hinzugefügt. Ein elektrostatisches Feld ändert sich nicht, wenn man eine beliebige Niveauläche durch eine dünne leitende Metallschicht ersetzt, der das gleiche Potential erteilt wird. Diese Metallschicht verbindet nur Punkte ohne Potentialunterschied; da die Feldlinien auf den Niveaulächen senkrecht stehen, so stehen sie auch senkrecht auf der so gebildeten Metallelektrode. Außerhalb der betrachteten Niveauläche bleibt daher das Feldbild erhalten, wenn man den von ihr eingeschlossenen Raum mit einem leitenden Stoff ausfüllt, dem das betreffende Potential erteilt wird. Wendet man diese Überlegung auf die eben betrachtete Kugelfläche an, so ergibt sich das Feldbild zwischen einer Punktladung  $Q_1$  und einer leitenden Kugel vom Radius  $r_0$  und der Ladung  $Q_2 + Q_3$ , deren Mittelpunktsabstand von der Punktladung  $a + b = d$  beträgt. Ist dieser Abstand  $d$  gegeben, so berechnen sich die Größen  $Q_2$  und  $b$  nach Gl. (198), (199) u. (203) aus:

$$Q_2 = -\frac{Q_1}{k} = -Q_1 \frac{b}{r_0} = -Q_1 \frac{r_0}{d} \quad (207)$$

und es wird nach Gl. (202)

$$b = \frac{r_0^2}{d}. \quad (208)$$

Diese Punktladung  $Q_2$  wird wegen der Analogie zu dem Spiegelungsverfahren bei ebenen Oberflächen als elektrisches Bild (W. Thomson, 1845) der Punktladung  $Q_1$  in bezug auf die Kugeloberfläche bezeichnet. Sind im Außenraum der Kugel mehrere Punktladungen vorhanden, so kann man zu jeder dieser Ladungen ein Bild im Innern der Kugel angeben; der ganze Außenraum läßt sich mit Hilfe der Beziehungen (207) und (208) auf das Innere der Kugel abbilden. Diese Beziehungen stellen das „Gesetz der reziproken Radien“ dar; je weiter ein Punkt des Außen-

raumes vom Kugelmittelpunkt entfernt ist, um so dichter rückt sein Bild an den Kugelmittelpunkt heran.

Da sich das Feld im Außenraum der Kugel durch das der drei Punktladungen  $Q_1$ ,  $Q_2$  und  $Q_3$  ersetzen läßt, so ist die Gesamtladung der Kugel  $Q_2 + Q_3$ .

Soll die Kugel keine Ladung haben, so muß

$$Q_3 = -Q_2 = \frac{r_0}{d} Q_1 \quad (209)$$

gemacht werden. Das Potential ist dann für beliebige Punkte des Außenraumes

$$\varphi = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{r_0}{d} \frac{1}{r_2} + \frac{r_0}{d} \frac{1}{r_3} \right). \quad (210)$$

Diese Beziehung stellt die Lösung der folgenden Aufgabe dar. Es befinde sich im isolierenden Raum eine Punktladung  $Q_1$ . Ihr elektrisches Feld ist durch das Potential

$$\varphi = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon r_1}$$

gegeben; die Feldstärke ist

$$|\mathfrak{E}| = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon r_1^2}.$$

Es werde nun eine ungeladene Metallkugel in dieses elektrische Feld gebracht, derart, daß der Abstand zwischen dem Kugelmittelpunkt und der Punktladung  $d$  wird. Die Feldstärke war dort ursprünglich

$$|\mathfrak{E}_0| = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon d^2}. \quad (211)$$

Gefragt ist, in welcher Weise das primäre Feld durch das Vorhandensein der Kugel verändert wird. Die Antwort ergibt sich durch Gl. (210); es ist z. B. das Potential das die Kugel annimmt,

$$\varphi_3 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon d}.$$

Ein interessanter Grenzfall entsteht, wenn man den Abstand  $d$  immer größer und größer werden läßt, den Punkt  $Q_1$  also immer weiter hinausrücken läßt und gleichzeitig die Ladung  $Q_1$  so vergrößert, daß  $\mathfrak{E}_0$  konstant bleibt. Dann ergibt sich schließlich die Potentialverteilung in der Umgebung einer ungeladenen Metallkugel, die in ein ursprünglich homogenes Feld gebracht wird. Die Punktladung  $Q_1$  muß dabei die Größe erhalten:

$$Q_1 = 4\pi\epsilon d^2 |\mathfrak{E}_0|. \quad (212)$$

Ihr elektrisches Bild  $Q_2$  wandert mit wachsendem  $d$  immer näher an den Kugelmittelpunkt heran. Da wir dort eine Ladung  $-Q_2$  anbringen müssen, so rücken also im Kugelmittelpunkt zwei entgegengesetzt gleiche Punktladungen näher und näher zusammen; es entsteht eine sogenannte Doppelquelle oder ein Dipol, Abb. 64. Bezeichnet man den Abstand des Aufpunktes  $P$  von dem Kugelmittelpunkt mit  $r$ , den Winkel von  $r$  mit der Verbindungslinie der beiden Ladungen mit  $\alpha$ , so gilt im Fall verschwindend kleinen Abstandes  $b$  der beiden Ladungen für das durch den Dipol hervorgerufene Potential

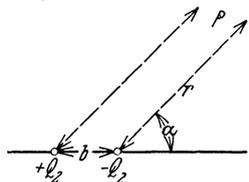


Abb. 64. Feldberechnung bei einem Dipol.

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( -\frac{Q_2}{r} + \frac{Q_2}{r+b\cos\alpha} \right) = \frac{-bQ_2\cos\alpha}{4\pi\epsilon r^2}. \quad (213)$$

Man bezeichnet das Produkt  $-bQ_2$  als das Moment  $M$  des Dipols; damit wird

$$\varphi = \frac{M\cos\alpha}{4\pi\epsilon r^2}. \quad (214)$$

Obwohl also ein Dipol im ganzen die Ladung 0 aufweist, so ergeben sich doch in seiner Umgebung Feldkräfte, die allerdings rascher abnehmen als in der Umgebung einer Punktladung.

Die durch das Vorhandensein einer ungeladenen Kugel in einem ursprünglich homogenen Feld entstehende Potentialverteilung läßt sich nach dem vorhin Ausgeführten darstellen durch die gleichzeitige Wirkung einer sehr weit entfernten Punktquelle und eines Dipols:

$$\varphi = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon(d+r\cos\alpha)} - \frac{bQ_2\cos\alpha}{4\pi\epsilon r^2}.$$

Führt man hier die Beziehungen (207), (208) und (212) ein und berücksichtigt, daß  $d$  über alle Grenzen wachsen soll, so folgt

$$\varphi = d^2 |\mathfrak{E}_0| \left( \frac{1}{d} - \frac{r\cos\alpha}{d^2} + \frac{r_0^3 \cos\alpha}{d^2 r^2} \right).$$

Wenn schließlich als willkürliche Konstante  $-d|\mathfrak{E}_0|$  hinzugefügt wird, so ergibt sich

$$\varphi = |\mathfrak{E}_0| \left( -r + \frac{r_0^3}{r^2} \right) \cos\alpha. \quad (215)$$

Die Abb. 65 zeigt das nach Gl. (215) berechnete Feldbild, das man sich rotationssymmetrisch zur wagrechten Achse zu denken hat. Die Feldstärke an der Oberfläche der Kugel ist

$$|\mathfrak{E}| = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} \Big|_{r_0} = |\mathfrak{E}_0| \left( 1 + \frac{2r_0^3}{r_0^3} \right) \cos\alpha = 3|\mathfrak{E}_0| \cos\alpha. \quad (216)$$

Sie wird für  $\alpha=0$  und  $\alpha=180^\circ$  dreimal so groß wie die ursprüngliche Feldstärke des homogenen Feldes, die Verschiebungslinien drängen sich dort zusammen. Kleine metallische Einschlüsse in Isolierstoffen ergeben also eine örtliche Erhöhung der Feldstärke. Die Dichte der influenzierten Ladungen auf der Kugeloberfläche ist gleich der Verschiebungsdichte:

$$\mathfrak{D} = 3\epsilon |\mathfrak{E}_0| \cos\alpha; \quad (217)$$

sie ist ebenfalls in der Achse des Feldes am größten; es befinden sich auf der einen Halbkugel positive, auf der andern Halbkugel negative Ladungen, deren Summe Null ist.

Ersetzt man die zur Achse senkrecht stehende Hauptebene der Kugel, die gleichzeitig Niveaufläche ist, durch eine Metallschicht, so ergibt sich der Fall eines halbkugelförmigen Buckels auf einer leitenden Ebene, z. B. auf der Elektrode eines Plattenkondensators. An einem solchen Buckel ist demnach die Feldstärke im Maximum dreimal so groß wie auf der Ebene.

Ist die Ladung der Kugel nicht Null, so hat man zu dem gefundenen Potential noch das der betreffenden Punktladung  $Q$  im Mittelpunkt der Kugel hinzuzufügen. Es wird dann

$$\varphi = |\mathfrak{E}_0| \left( -r + \frac{r_0^3}{r^2} \right) \cos\alpha + \frac{Q}{4\pi\epsilon r}. \quad (218)$$

Das Feldbild ändert sich in der durch Abb. 66 dargestellten Weise. Entsprechend der Ladung gehen von der Kugel mehr Verschiebungslinien aus, als auf ihr einmünden; bei negativer Ladung der Kugel gilt das Umgekehrte.

Als weiteres Anwendungsbeispiel der Methode der elektrischen Bilder werde die Berechnung des elektrischen Feldes zwischen zwei geladenen Kugeln kurz besprochen, das für die Theorie der in der Hochspannungstechnik verwendeten Kugelfunkstrecken von Interesse ist. Die beiden Kugeln, Abb. 67, sollen den Mittelpunktsabstand  $c$  und die Radien  $r_0$  haben. Ihre Potentiale seien  $\frac{1}{2}U_0$  und  $-\frac{1}{2}U_0$ . Wäre nur die erste Kugel vorhanden, so könnte das Feld außerhalb der Kugel dargestellt werden durch eine Punktladung  $Q_1$  im Mittelpunkt  $A$ ; die Größe dieser Ladung kann

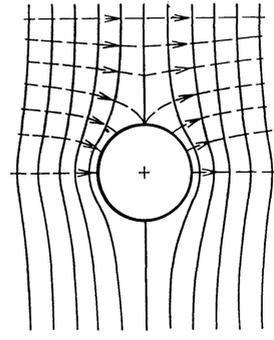


Abb. 65. Ungeladene Metallkugel in einem homogenen Feld.

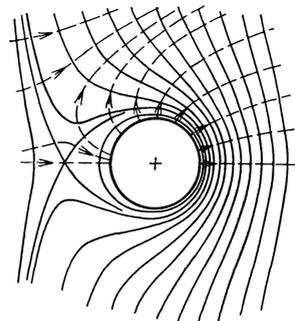
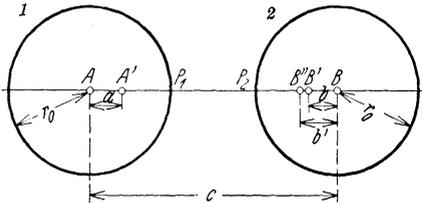


Abb. 66. Geladene Metallkugel in einem homogenen Feld.

aus Gl. (190) berechnet werden:  $\frac{1}{2} U_0 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon r_0}$ . (219)

Diese Punktladung würde auf der zweiten Kugelfläche ein zusätzliches Potential ergeben; um dieses aufzuheben, muß auf der Verbindungslinie  $AB$  das elektrische Bild  $B'$  von  $A$  in bezug auf die Kugel 2 angebracht werden. Die Ladung in  $B'$  muß die Größe haben



$$Q'_1 = -\frac{r_0}{c} Q_1. \quad (220)$$

Ihr Abstand  $b$  vom Kugelmittelpunkt  $B$  beträgt

$$b = \frac{r_0^2}{c}. \quad (221)$$

Abb. 67. Zur Berechnung des elektrischen Feldes zwischen zwei Kugeln.

Diese Punktladung würde nun wieder ein Zusatzpotential auf der Kugelfläche 1 ergeben; zum Ausgleich muß ein Bild in  $A'$  angebracht werden mit der Ladung

$$Q''_1 = -\frac{r_0}{c-b} Q'_1 \quad (222)$$

und dem Abstand

$$a = \frac{r_0^2}{c-b} \quad (223)$$

vom Mittelpunkt  $A$ . Um die Wirkung dieser Ladung auf der Kugel 2 aufzuheben, muß das Bild  $B''$  angebracht werden mit der Ladung

$$Q'''_1 = -\frac{r_0}{c-a} Q''_1 \quad (224)$$

und dem Abstand

$$b' = \frac{r_0^2}{c-a}. \quad (225)$$

Wenn dieses Verfahren fortgesetzt angewendet wird, so ergibt sich eine unendliche Reihe von Bildpunkten, die alle innerhalb der beiden Kugeln liegen, wobei die Abstände von den Kugelmittelpunkten sich festen Grenzwerten nähern und die Ladungen mehr und mehr abnehmen (Murphy, 1833). Diese Punktladungen liefern das elektrostatische Feld für den Fall, daß die Kugel 1 das Potential  $\frac{1}{2} U_0$  und die Kugel 2 das Potential Null hat. Man muß nun eine zweite gleichartige Reihe von Punktladungen anbringen, indem man von der Kugel 2 mit dem Potential  $-\frac{1}{2} U_0$  ausgeht. Das Gesamtfeld ergibt sich durch Übereinanderlagern der von den einzelnen

Kugel 1, Potential $+\frac{1}{2}U_0$		Kugel 2, Potential $-\frac{1}{2}U_0$	
Ladung	Abstand vom Kugelmittelpunkt	Ladung	Abstand vom Kugelmittelpunkt
$Q_1 = 2\pi\epsilon r_0 U_0$	0	$-Q_1$	0
$+0,2 Q_1$	$0,2 r_0$	$-0,2 Q_1$	$0,2 r_0$
$+0,0417 Q_1$	$0,2083 r_0$	$-0,0417 Q_1$	$0,2083 r_0$
$+0,00870 Q_1$	$0,2087 r_0$	$-0,00870 Q_1$	$0,2087 r_0$

Punktladungen herrührenden Felder.

Für den speziellen Fall, daß  $r_0 = 0,2 c$  ist, sind in der nebenstehenden Tabelle die Ladungen und ihre Abstände von den Kugelmittelpunkten angegeben.

Die Gesamtladung einer jeden Kugel ergibt sich durch Summieren der Einzeladungen; sie ist mit einem kleineren Fehler als 1%

$$Q = 1,25 Q_1.$$

Die Kapazität zwischen den beiden Kugeln wird daher

$$C = \frac{Q}{U_0} = 2,50 \pi \epsilon r_0.$$

Wären die beiden Kugeln in sehr großer Entfernung voneinander angebracht, so

wäre die Kapazität zwischen den beiden Kugeln nach Gl. (219)

$$C = 2\pi\epsilon r_0.$$

Die Feldstärke hat ihren größten Wert in den beiden Punkten  $P_1$  und  $P_2$  der Kugeloberfläche. Sie kann für diese Punkte berechnet werden durch Summieren der Feldstärken, die von den einzelnen Punktladungen in diesen Punkten herrühren. Es ist daher im Punkt  $P_1$

$$|\mathcal{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{Q_1}{r_0^2} + \frac{0,2Q_1}{(0,8r_0)^2} + \frac{0,0417Q_1}{(0,7917r_0)^2} + \frac{0,00870Q_1}{(0,7913r_0)^2} + \dots \right. \\ \left. + \frac{Q_1}{(0,8c)^2} + \frac{0,2Q_1}{(0,76c)^2} + \frac{0,0417Q_1}{(0,758c)^2} + \frac{0,00870Q_1}{(0,758c)^2} + \dots \right) = 3,68 \frac{U_0}{c} = 0,736 \frac{U_0}{r_0}.$$

Als Vergleich dazu werde bemerkt, daß die Feldstärke an der Kugeloberfläche bei gleichem Potential und unendlich großer Entfernung der beiden Kugeln

$$|\mathcal{E}| = 0,5 \frac{U_0}{r_0}$$

sein würde; zwischen zwei Platten mit dem gleichen Abstand wie die beiden Punkte  $P_1$  und  $P_2$ , nämlich  $0,6c$ , würde ferner die Spannung  $U_0$  eine Feldstärke

$$|\mathcal{E}| = 1,67 \frac{U_0}{c}$$

hervorrufen.

In der Mitte zwischen den beiden Kugeln ergibt sich auf dem gleichen Weg wie oben die Feldstärke

$$|\mathcal{E}| = \frac{2}{4\pi\epsilon} \left( \frac{Q_1}{(0,5c)^2} + \frac{0,2Q_1}{(0,46c)^2} + \frac{0,0417Q_1}{(0,458c)^2} + \frac{0,00870Q_1}{(0,458c)^2} + \dots \right) = 1,038 \frac{U_0}{c}.$$

### Die Linienladung.

Denkt man sich eine Reihe von einander gleichen Punktladungen längs einer geraden Linie mit gleichmäßigen Abständen aufgereiht und verringert man die Abstände mehr und mehr, so entsteht eine Linienquelle. Auf Grund einer Überlegung, die analog der in Abschnitt 7 für das Strömungsfeld ausgeführten ist, ergibt sich für das Potential in der Umgebung einer solchen Linienquelle von der Länge  $l$  und der Ladung  $Q$ , Abb. 43<sup>1</sup>,

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon l} \ln \frac{x + \frac{1}{2}l + \sqrt{y^2 + (x + \frac{1}{2}l)^2}}{x - \frac{1}{2}l + \sqrt{y^2 + (x - \frac{1}{2}l)^2}}. \quad (226)$$

Die Niveauflächen sind wie im Fall des Strömungsfeldes Rotationsellipsoide, die Verschiebungslinien Hyperbeln mit den gleichen Brennpunkten. Füllt man den von einer Niveaufläche eingeschlossenen Raum mit einem leitenden Stoff aus, dem das

betreffende Potential erteilt wird, so ändert sich an dem Feld außerhalb nichts. Die Gl. (226) gibt daher zugleich das Potential in der Umgebung einer mit der Ladung  $Q$  versehenen Elektrode von der Form eines langgestreckten Rotationsellipsoids an. Ähnlich wie im Falle des Rohrerders, Abschnitt 7, kann ein solches Ellipsoid als Ersatz einer zylindrischen Elektrode benutzt werden. Es lassen sich auf diese Weise die in den Abb. 68 und 69 dargestellten Fälle untersuchen. In Abb. 68 befindet sich ein Draht von der Länge  $l$  und dem Durchmesser  $d$  senkrecht über dem Erdboden; in Abb. 69 ist der Draht parallel zum Erdboden im

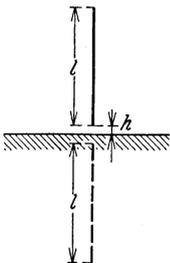


Abb. 68. Linienquelle senkrecht zur Leiteroberfläche.

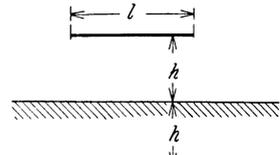


Abb. 69. Linienquelle parallel zur Leiteroberfläche.

Abstand  $h$  angebracht. Die in beiden Fällen geltende Bedingung, daß das Potential an der Erdoberfläche konstant (gleich Null) sein soll, kann dadurch erfüllt werden,

<sup>1</sup> Dort war die Länge  $2l$  genannt.

daß unter der Erdoberfläche ein Spiegelbild des Leiters mit der entgegengesetzt gleichen Ladung angebracht wird. Dann setzt sich das Potential in einem beliebigen Punkt  $P$  zusammen aus den Beiträgen, die von dem geladenen Leiter und seinem Spiegelbild herrühren. Längs der Erdoberfläche sind diese Beiträge einander entgegengesetzt gleich, so daß dort, wie es sein soll, das Potential Null wird. Die Niveauflächen sind dann keine Rotationsellipsoide mehr; sie werden um so mehr deformiert, je mehr sie sich der Erdoberfläche nähern. In unmittelbarer Nähe der Linienquelle ist die Deformation gering. Für einen Punkt, der um den kleinen Abstand  $\frac{1}{2}d$  horizontal vom Mittelpunkt der Linienquelle entfernt ist, gilt bei Abb. 68 :

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon l} \ln \frac{l + \sqrt{d^2 + l^2}}{-l + \sqrt{d^2 + l^2}} - \frac{Q}{4\pi\epsilon l} \ln \frac{4h + 3l + \sqrt{d^2 + (4h + 3l)^2}}{4h + l + \sqrt{d^2 + (4h + l)^2}},$$

oder angenähert, weil  $d^2$  sehr klein gegen  $l^2$  ist,

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{2l}{d} \sqrt{\frac{4h+l}{4h+3l}}. \quad (227)$$

Die Kapazität zwischen Draht und Erde ist also

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{2l}{d} \sqrt{\frac{4h+l}{4h+3l}}}. \quad (228)$$

Im Fall der Abb. 69 gilt mit der gleichen Näherung

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{2l}{d} \sqrt{\frac{\sqrt{l^2 + (4h)^2} - l}{l^2 + (4h)^2 + l}}. \quad (229)$$

Wenn  $(4h)^2$  klein ist gegen  $l^2$ , so ergibt sich hieraus die Näherungsformel für die Kapazität einer solchen Leitung gegen Erde:

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{4h}{d}}. \quad (230)$$

**Zahlenbeispiel:** Die Kapazität einer Vertikalantenne ist nach Gl. (228), wenn der Abstand  $h$  des einen Endes über dem Erdboden sehr gering ist,

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{l}{d}} = \frac{2,42 \cdot 10^{-5} l}{\log 1,154 \frac{l}{d}} \frac{\mu\text{F}}{\text{m}}. \quad (231)$$

Für eine Länge der Antenne von  $l = 10$  m und verschiedene Verhältnisse von Länge  $l$  zu Durchmesser  $d$  des Drahtes sind in der folgenden Tabelle die nach Gl. (231) berechneten Kapazitätswerte angegeben:

$l/d=100$	200	500	1000	2000	5000	10000
$C=117$	102	87	79	72	64	$59 \mu\text{F}$

Die Kapazität eines zur Erdoberfläche parallelen Drahtes ist bei im Vergleich zur Länge kleiner Höhe  $h$  nach Gl. (230) proportional der Leitungslänge. Die Kapazität für die Längeneinheit  $C/l$  ist daher unabhängig von der Drahtlänge. Kann jedoch die Länge des Drahtes nicht als groß gegen die Höhe angesehen werden, so hängt die Kapazität für die Längeneinheit sowohl von dem Verhältnis  $\alpha = h/d$  als auch von dem Verhältnis  $\beta = h/l$  ab; es gilt nach Gl. (229):

$$\frac{C}{l} = \frac{0,0242}{\log 4\alpha - \frac{1}{2} \log \frac{4\beta^2(\sqrt{1+16\beta^2}+1)}{\sqrt{1+16\beta^2}-1}} \frac{\mu\text{F}}{\text{km}}. \quad (232)$$

In der folgenden Tabelle sind die beiden Summanden im Nenner

$$k_1 = \log 4\alpha, \quad (233)$$

$$k_2 = \frac{1}{2} \log \frac{4\beta^2(\sqrt{1+16\beta^2}+1)}{\sqrt{1+16\beta^2}-1} = \log \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1+16\beta^2}) \quad (234)$$

für praktisch vorkommende Verhältnisse  $\alpha$  und  $\beta$  angegeben. Es ist dann

$$\frac{C}{l} = \frac{0,0242}{k_1 - k_2} \frac{\mu\text{F}}{\text{km}}. \quad (235)$$

$\alpha=100$	200	500	1000	2000	5000	10000	
$k_1=2,60$	2,90	3,30	3,60	3,90	4,30	4,60	
$\beta=0$	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0	10
$k_2=0$	0,017	0,057	0,21	0,41	0,66	1,02	1,31

Solange also die Länge der Leitung größer ist als die Höhe, spielt die Größe  $k_2$  nur die Rolle einer Korrektur. Bei einer Leitung mit dem Durchmesser  $d = 5$  mm und der Länge  $l = 1$  km, die sich in einer Höhe von  $h = 10$  m über dem Erdboden befindet, ist  $\alpha = 2000$ ,  $\beta = 0,01$ . Die Kapazität wird daher

$$C = \frac{0,0242}{3,9} \mu\text{F} = 0,0062 \mu\text{F}.$$

Bei einer horizontalen Rundfunkantenne von der Länge  $l = 30$  m, der Höhe  $h = 15$  m und dem Drahtdurchmesser  $d = 3$  mm ist  $\alpha = 5000$ ,  $\beta = 0,5$ , also  $k_1 = 4,3$ ,  $k_2 = 0,21$ . Die Kapazität wird  $C = 177 \mu\text{F}$ .

Wenn die Linienquelle sehr lang ist (unendlich lang), so bilden die Verschiebungslinien radiale Strahlen; der von einem Abschnitt mit der Länge  $l$  ausgehende Verschiebungsfluß verteilt sich auf konzentrische Zylinder mit der Länge  $l$ . Es ist daher die Verschiebungsdichte im Abstand  $r$  von der Linienquelle

$$|\mathfrak{D}| = \frac{Q}{2\pi r l}, \tag{236}$$

wenn mit  $Q$  die Ladung des Abschnittes von der Länge  $l$  bezeichnet wird. Der Vektor der Feldstärke ist radial gerichtet und zeigt von der Linie weg, wenn die Ladung positiv ist; sein Betrag folgt aus Gl. (236):

$$|\mathfrak{E}| = \frac{Q}{2\pi \epsilon r l}. \tag{237}$$

Die Feldstärke nimmt also hier umgekehrt proportional mit dem Abstand ab. Das Potential ergibt sich aus der Feldstärke durch Integration:

$$\varphi = \int_r^b \mathfrak{E} dx = -\frac{Q}{2\pi \epsilon l} \ln r + k. \tag{238}$$

Als Bezugspunkt für das Potential kann hier nicht ein unendlich ferner Punkt genommen werden, da  $\varphi$  im Unendlichen selbst unendlich wird. Die unbestimmte Konstante  $k$  muß hier vielmehr beibehalten werden [siehe Gl. (120)]; sie fällt weg, wenn aus dem Potential Spannungen berechnet werden. Man bezeichnet auf Grund der Gl. (238) das Potential in der Umgebung einer Linienladung auch als logarithmisches Potential.

Dieses Potential kann benutzt werden zur Berechnung des Feldes zwischen zwei konzentrischen Zylinderelektroden (konzentrisches Einleiterkabel, Zylinderkondensator), da die Niveaulinien konzentrische Zylinder sind. Sind  $r_1$  und  $r_2$  die Radien der inneren und äußeren Elektrode, und bezeichnet  $Q$  die Ladung der inneren, so ist ihr Potentialunterschied nach Gl. (238)

$$U_0 = \varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{Q}{2\pi \epsilon l} (\ln r_1 - \ln r_2). \tag{239}$$

Hieraus ergibt sich die Formel (183) für die Kapazität.

Das Feldbild in einem Achsenschnitt des Zylinderkondensators zeigt konzentrische Kreise als Niveaulinien und Radien als Verschiebungslinien. Die Feldstärke im Innern berechnet sich nach Gl. (237); drückt man die Ladung durch die Spannung  $U_0$  zwischen den Elektroden aus, Gl. (239), so ergibt sich

$$|\mathfrak{E}| = \frac{U_0}{r \ln \frac{r_2}{r_1}}. \tag{240}$$

Die Feldstärke nimmt, wie durch Abb. 70 veranschaulicht, von einem Maximalwert  $\mathfrak{E}_m$  an der inneren Zylinderoberfläche nach außen hin umgekehrt proportional mit

dem Radius ab. Der Maximalwert beträgt

$$|\mathfrak{E}_m| = \frac{U_0}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (241)$$

Er ist maßgebend für die elektrische Beanspruchung des Isolierstoffes zwischen den beiden Elektroden (siehe Abschnitt 20). Bei gegebenem Außendurchmesser und konstanter Spannung  $U_0$  hängt die maximale Feldstärke  $\mathfrak{E}_m$  in der durch Abb. 71 dargestellten Weise von dem Innenradius  $r_1$  ab.

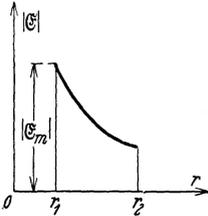


Abb. 70. Feldstärke im Inneren eines Zylinderkondensators.

Wenn  $r_1$  sehr klein ist, so ergibt sich eine große Feldstärke wegen der großen Krümmung; nähert sich andererseits  $r_1$  dem Wert  $r_2$ , so wird der Abstand zwischen den beiden Elektroden sehr klein, womit sich ebenfalls eine wachsende Feldstärke ergibt wie bei einem Plattenkondensator. Bei einem bestimmten Radius des Innenleiters  $r_{10}$  wird die Beanspruchung des Isolierstoffes am kleinsten.

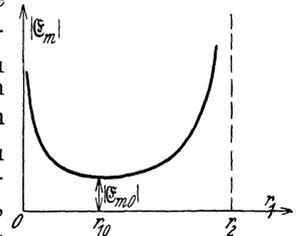


Abb. 71. Abhängigkeit der Maximalfeldstärke von dem inneren Radius.

Durch Differenzieren findet man aus Gl. (241) für dieses Minimum die Bedingung

$$2,718 r_{10} = r_2. \quad (242)$$

Die Feldstärke am Innenleiter wird dabei

$$|\mathfrak{E}_m| = 2,718 \frac{U_0}{r_2}. \quad (243)$$

Würde sich das Potential zwischen den beiden Zylindern gleichmäßig verteilen, so wäre

$$|\mathfrak{E}| = \frac{U_0}{r_2 - r_{10}} = \frac{2,718 U_0}{1,718 r_2}. \quad (244)$$

Die Feldstärke ist also in Wirklichkeit noch fast doppelt so groß wie im Fall gleichmäßiger Verteilung der Spannung.

Das Minimum der maximalen Feldstärke in einem Zylinderkondensator hat noch folgende Bedeutung. Entsteht infolge Überschreitens der Durchbruchfeldstärke der Luft am inneren Zylinder eine Glimmentladung (siehe Abschnitt 20), so wird der Radius dadurch scheinbar vergrößert, da der Entladungsraum als elektrisch leitend anzusehen ist. Ist nun  $r_1$  größer als  $r_{10}$ , so wächst damit die Beanspruchung des Isolierstoffes entsprechend Abb. 71; die Glimmentladung pflanzt sich weiter fort, bis der Isolierstoff durchbrochen ist. Wenn dagegen  $r_1$  kleiner als  $r_{10}$  ist, so verkleinert die Glimmentladung die maximale Feldstärke, es ergibt sich eine stabile Glimmerscheinung (Korona), solange  $|\mathfrak{E}_{m0}|$  kleiner als die Durchbruchfeldstärke des Isolierstoffes ist.

**Zahlenbeispiel:** Schreibt man die Gl. (241) in der Form

$$|\mathfrak{E}_m| = \frac{U_0}{r_2 - r_1} \frac{r_2 - r_1}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}}, \quad (245)$$

so stellt der erste Faktor die Feldstärke dar, die sich bei gleichmäßiger Verteilung der Spannung im Isolierstoff ergeben würde. Diese Feldstärke muß wegen der Krümmung der Elektroden mit einem Faktor

$$f = \left( \frac{r_2}{r_1} - 1 \right) \frac{1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (246)$$

multipliziert werden. In der folgenden Tabelle ist dieser Faktor für verschiedene Verhältnisse von  $r_2/r_1$  angegeben:

$r_2/r_1 = 1,6$	1,8	2	2,5	3	3,5	4	5
$f = 1,28$	1,36	1,44	1,64	1,82	1,96	2,17	2,49.

Ist z. B.  $U_0=3$  kV,  $r_1=5$  mm,  $r_2=10$  mm, so wird

$$\frac{r_2}{r_1}=2, \quad f=1,44 \quad \text{und} \quad |\mathfrak{E}_m|=1,44 \frac{3 \text{ kV}}{0,5 \text{ cm}}=8,6 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}.$$

Es darf daraus, daß die Beanspruchung des Isolierstoffes ein Minimum für ein bestimmtes Radienverhältnis hat, nicht gefolgert werden, daß dieses Radienverhältnis das „günstigste“ ist. Bei der Festlegung der Abmessungen eines Apparates oder einer Maschine sind außer der inneren physikalischen Wirkungsweise immer äußere Gesichtspunkte zu berücksichtigen, insbesondere Herstellungskosten, Materialkosten, Betriebskosten, Betriebssicherheit, Bedienungsmöglichkeiten usw. Die Gesamtheit dieser Faktoren bestimmt die „günstigsten“ Abmessungen. Meist kann man diese äußeren Einflüsse nicht mathematisch formulieren; dann erhält man die günstigsten Abmessungen durch Probieren. Man nimmt bestimmte wahrscheinliche Abmessungen an, prüft, wie weit die Anforderungen erfüllt sind, und ändert danach die Abmessungen. Die Theorie liefert dabei Anhaltspunkte für die Richtung der Entwicklung. Als Beispiel dafür, daß sich bei Berücksichtigung anderer Forderungen andere „günstigste“ Verhältnisse ergeben, werde der folgende Fall betrachtet.

Es seien die Abmessungen eines Einleiterkabels zu berechnen für eine gegebene Spannung, wenn die maximale Feldstärke einen bestimmten Wert nicht überschreiten soll; das Kabel sei so zu bemessen, daß das Gewicht des Isolierstoffes möglichst klein wird.

Für das Gewicht des Isolierstoffes gilt

$$G=(r_2^2-r_1^2)\pi l s, \quad (247)$$

wenn mit  $s$  das spezifische Gewicht bezeichnet wird. Führt man als Abkürzung für das Verhältnis der beiden Radien

$$\frac{r_2}{r_1}=x$$

ein, so wird

$$G=r_1^2 \left(1-\frac{1}{x^2}\right) \pi l s. \quad (248)$$

Andererseits ist die maximale Feldstärke

$$|\mathfrak{E}_m|=\frac{U_0}{r_2} \frac{x}{\ln x}.$$

Berechnet man hieraus  $r_2$ , und setzt diese Größe in den Ausdruck (248) für das Gewicht ein, so folgt

$$G=\frac{U_0^2}{|\mathfrak{E}_m|^2} \frac{x^2-1}{\ln^2 x} \pi l s. \quad (249)$$

Diese Funktion wird unendlich für  $x=1$  und  $x=\infty$ . Sie hat ein Minimum bei

$$\frac{r_2}{r_1}=2,22.$$

Wenn der Zwischenraum zwischen den beiden konzentrischen Zylinderelektroden durch konzentrische Schichten von Stoffen mit verschiedener Elektrisierungszahl ausgefüllt ist, so gilt für die Feldstärke in jeder Schicht die Gl. (237). Die Spannung zwischen den beiden Elektroden wird durch Addition der Spannungen an den einzelnen Schichten erhalten:

$$U_0=\int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{2\pi \varepsilon_1 l r} dr + \int_{r_2}^{r_3} \frac{Q}{2\pi \varepsilon_2 l r} dr + \int_{r_3}^{r_4} \frac{Q}{2\pi \varepsilon_3 l r} dr + \dots$$

$$U_0=\frac{Q}{2\pi l} \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{\varepsilon_3} \ln \frac{r_4}{r_3} + \dots \right]. \quad (250)$$

Daraus kann die Kapazität berechnet werden oder bei gegebener Spannung der Verschiebungsfluß. Aus diesem ergibt sich die Feldstärke in irgend einem Abschnitt:

$$|\mathfrak{E}|=\frac{Q}{2\pi \varepsilon_r l r}.$$

Stuft man die Elektrisierungszahl so ab, daß die Schichten mit kleinerem Radius eine entsprechend höhere Elektrisierungszahl haben, so kann eine gleichmäßige Verteilung des Potentials zwischen den beiden Elektroden erzielt werden. Ein anderes Verfahren zur Herstellung der gleichmäßigen Potentialverteilung besteht darin, daß man bei gleicher Elektrisierungszahl die Länge  $l$  mit Hilfe von Metalleinlagen umgekehrt proportional mit  $r$  abstuft (Kondensatordurchführung).

Einen praktisch wichtigen Fall stellt das elektrische Feld in der Umgebung von zwei parallelen Linienquellen mit entgegengesetzt gleicher Ladung dar. Die beiden Quellen sollen den Abstand  $a$ , Abb. 72, und auf einem Abschnitt von der Länge  $l$  die Ladungen  $+Q$  und  $-Q$  haben. Das Potential in irgend einem Punkt  $P$  mit den Abständen  $c_1$  und  $c_2$  von den Linienquellen ergibt sich als Summe der beiden Einzelpotentiale; es ist

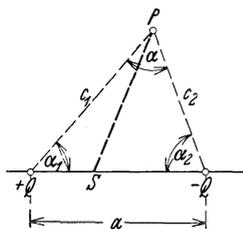


Abb. 72. Zur Berechnung des elektrischen Feldes zweier paralleler Linienquellen.

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{c_2}{c_1} + k_1. \quad (251)$$

Für weit entfernte Punkte nähert sich  $c_2/c_1$  dem Wert 1. Daher stellt  $k_1$  das Potential unendlich weit entfernter Punkte dar. Wählt man einen solchen Punkt als Bezugspunkt für das Potential, so wird

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{c_2}{c_1}. \quad (252)$$

Die Niveaulinien sind durch die Bedingung  $\varphi = \text{konst}$  bestimmt. Daraus folgt für die Niveaulinien in der Zeichenebene die Bedingung

$$\frac{c_1}{c_2} = \text{konst} = k, \quad (253)$$

die aussagt, daß die Niveaulinien Kreise sind, für deren Bestimmungsstücke die Gl. (204) und (205) gelten, Abb. 63. Bezeichnet man die Spuren der beiden Linienquellen mit  $C$  und  $D$ , so ergibt sich die Abb. 73, in die außerdem noch der Halbierungspunkt  $O$  der Strecke  $CD = a$  eingetragen ist. Für den Abstand des Kreismittelpunktes  $M$  von  $O$  gilt nach Gl. (205)

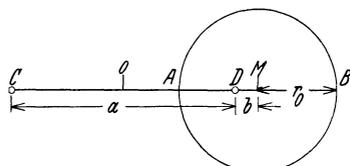


Abb. 73. Niveaulinie des Feldes.

$$x_0 = \frac{a}{2} + b = \frac{a}{2} + \frac{a}{k^2 - 1} = \frac{a}{2} \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}. \quad (254)$$

Daraus folgt mit Hilfe von Gl. (204)

$$x_0^2 - r_0^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2. \quad (255)$$

Auf Grund dieser Beziehung können die Niveaulinien durch die in Abb. 74 dargestellte Konstruktion gefunden werden. Man schlage um  $O$  mit dem Radius  $\frac{1}{2}a$  einen Kreis. Um dann zu einem beliebigen Punkt  $P$  dieses Kreises die Niveaulinie zu erhalten, lege man in  $P$  die Tangente an den Kreis. Sie schneidet auf der Verlängerung von  $CD$  den Mittelpunkt des gesuchten Niveaureises aus.

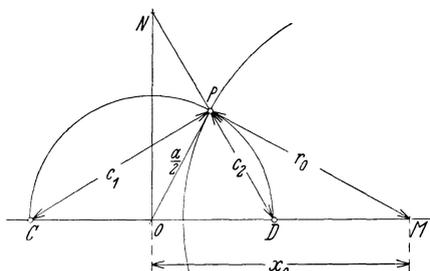


Abb. 74. Konstruktion der Niveaulinien.

Beweis: In Dreieck  $OPM$  ist

$$\overline{OM}^2 - \overline{MP}^2 = \overline{PO}^2,$$

wie es nach Gl. (255) sein muß.

Je kleiner der Radius des Niveaureises ist, um so enger rückt  $M$  an  $D$  heran. Um den Niveaureis für einen vorgegebenen Wert von  $k$  zu zeichnen, also für ein bestimmtes Potential, errichte man in  $O$  die Senkrechte auf  $CD$ . Zieht man dann von  $P$  aus die beiden Strahlen  $c_1$  und  $c_2$  und verlängert  $DP$  bis zum Schnitt  $N$  mit der Senkrechten, so entstehen die beiden einander ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke:

$$\triangle CDP \sim \triangle ODN.$$

Daher gilt

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{ON}{OD},$$

oder

$$ON = k \frac{a}{2}. \quad (256)$$

Die Senkrechte  $ON$  kann also als Skala für  $k$  eingeteilt werden. Für  $k=1$  rückt  $M$  ins Unendliche, der Kreis wird zur Mittelsenkrechten  $ON$ . Für Werte von  $k$ , die kleiner als 1 sind, liegt der Mittelpunkt des Kreises links von  $C$ . Das Niveaulinienbild wird symmetrisch zu der Mittelsenkrechten, Abb. 75.

Die Verschiebungslinien ergeben sich aus der folgenden Überlegung. Ebenso wie sich die Potentiale der beiden Linienquellen ungestört zum Gesamtpotential überlagern, so setzen sich auch die von den Quellen ausgehenden Verschiebungsflüsse einfach zusammen. Wir denken uns über  $a$ ,  $c_1$  und  $c_2$ , Abb. 72, drei auf der Zeichenebene senkrechte Ebenen errichtet. Zwischen den beiden Ebenen über  $a$  und  $c_1$ , die den Winkel  $\alpha_1$  einschließen, geht von der Linienquelle ein Verschiebungsfluß aus von der Größe

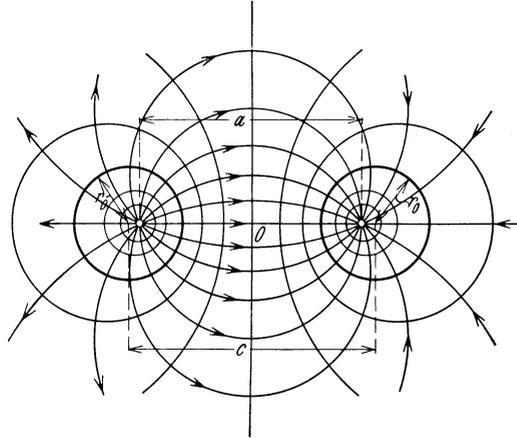


Abb. 75. Niveaulinien und Verschiebungslinien der parallelen Linienquellen entgegengesetzt gleicher Ladung.

$$Q_1 = \frac{\alpha_1}{2\pi} Q. \quad (257)$$

Dieser Fluß geht durch eine über der beliebigen Linie  $PS$  errichtete Fläche von links nach rechts hindurch. Zwischen den beiden Ebenen über  $a$  und  $c_2$  ist ferner der Teil

$$Q_2 = \frac{\alpha_2}{2\pi} Q \quad (258)$$

des auf der rechten Linienquelle mündenden Verschiebungsflusses eingeschlossen. Er tritt durch die Fläche  $PS$  ebenfalls von links nach rechts hindurch. Insgesamt hat also der Verschiebungsfluß, der durch die über  $PS$  errichtete Fläche hindurchgeht, die Größe

$$\frac{Q}{2\pi} (\alpha_1 + \alpha_2) = Q \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\pi} \right).$$

Bewegt sich der Punkt  $P$  auf einer Verschiebungslinie, dann bleibt dieser Fluß konstant. Die Gleichung der Verschiebungslinie ist also durch

$$\alpha = \text{konst}$$

gegeben. Die Verschiebungslinien sind danach Kreise mit dem Peripheriewinkel  $\alpha$ , deren Mittelpunkte auf der Mittelsenkrechten über  $CD$  liegen, Abb. 75. Verschiebungslinienbündel gleichen Verschiebungsflusses erhält man, wenn man Werte einer arithmetischen Reihe für  $\alpha$  wählt (in Abb. 75 ist  $\alpha = 0^\circ, 22,5^\circ, 45^\circ, 67,5^\circ$  usw.; der ganze Verschiebungsfluß  $Q$  ist dann in 16 gleiche Teile geteilt; die Verschiebungslinien bilden in der Nähe der Linienquellen Winkel von  $22,5^\circ$  miteinander).

Da die Niveaulinien Zylinder sind, so gilt das Feldbild auch für zwei parallele zylindrische Elektroden. Die Verschiebungslinien endigen dann auf diesen Zylindern. Haben die Zylinder die Radien  $r_0$  und den Achsenabstand  $c$ , Abb. 75, so findet man die Lage der Linienquellen, durch die das elektrische Feld außerhalb der beiden Zylinder dargestellt werden kann, aus Gl. (255) mit  $x_0 = c/2$

$$\frac{a}{2} = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - r_0^2}. \quad (259)$$

Das Potential auf der Verbindungslinie  $CD$  ist im Abstand  $x$  von dem Punkt  $O$  nach Gl. (252)

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{\frac{a}{2} - x}{\frac{a}{2} + x}. \quad (260)$$

Die Feldstärke auf dieser Verbindungslinie hat daher den Betrag

$$|\mathcal{E}| = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \left( \frac{1}{\frac{a}{2} - x} + \frac{1}{\frac{a}{2} + x} \right) \quad (261)$$

und die Richtung der Verbindungslinie. Potential und Feldstärke sind in Abb. 76 aufgezeichnet. Die Spannung zwischen den beiden Elektroden ist

$$U_0 = \frac{Q}{\pi\epsilon l} \ln \frac{\frac{a}{2} + \frac{c}{2} - r_0}{\frac{a}{2} - \frac{c}{2} + r_0}; \quad (262)$$

hieraus folgt für die Kapazität unter Benutzung von Gl. (259)

$$C = \frac{\pi\epsilon l}{\ln \left[ \frac{c}{2r_0} + \sqrt{\left(\frac{c}{2r_0}\right)^2 - 1} \right]}. \quad (263)$$

Die elektrische Feldstärke hat ihren größten Wert an der Zylinderoberfläche, nämlich

$$|\mathcal{E}_m| = U_0 \frac{\sqrt{\left(\frac{c}{2r_0}\right)^2 - 1}}{(c - 2r_0) \ln \left[ \frac{c}{2r_0} + \sqrt{\left(\frac{c}{2r_0}\right)^2 - 1} \right]}. \quad (264)$$

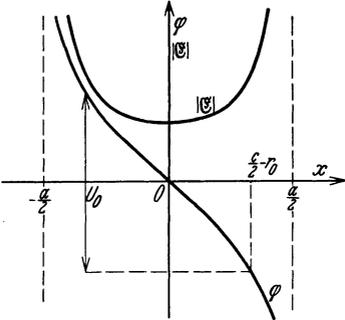


Abb. 76. Potential und Feldstärke zwischen den Linienquellen.

Wenn der Radius der beiden Zylinder nahezu gleich dem halben Achsenabstand ist, so ergibt sich eine hohe Feldstärke, die mit zunehmender Annäherung der beiden Zylinderoberflächen dauernd wächst. Ebenso wird die Feldstärke groß, wenn die Zylinder radien sehr klein gemacht werden. Für ein bestimmtes Verhältnis von Achsenabstand zu Radius ergibt sich ein Minimum der Feldstärke, nämlich für

$$\frac{c}{r_0} = 5,85.$$

Ist das Verhältnis von Achsenabstand zu Radius größer als dieser Wert, dann kann bei entsprechender Spannung eine stabile Glimmentladung der Luft (Korona) auftreten; das ist der Fall bei den Hochspannungsleitungen, bei denen  $c/r_0$  gewöhnlich größer als 20 ist.

**Zahlenbeispiele:** Gl. (264) läßt sich schreiben

$$|\mathcal{E}_m| = \frac{U_0}{c - 2r_0} f. \quad (265)$$

Hier stellt der erste Faktor die Feldstärke dar, die sich bei gleichmäßiger Verteilung des Potentials zwischen den beiden Zylindern ergeben würde. Der Faktor  $f$  hat die Größe

$$f = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\ln [x + \sqrt{x^2 - 1}]}; \quad x = \frac{c}{2r_0}. \quad (266)$$

Für verschiedene Verhältnisse von  $c/r_0$  ergeben sich für diesen Faktor die in der folgenden Tabelle angegebenen Werte:

$c/r_0=2,0$	2,4	3	4	6	10	20
$f=1,0$	1,065	1,161	1,315	1,604	2,138	3,325

Bei relativ großen Abständen der beiden Zylinder, wie sie bei Freileitungen vorkommen, kann man die Zahl 1 unter der Wurzel vernachlässigen und erhält

$$f = \frac{c}{2r_0 \ln \frac{c}{r_0}}. \quad (267)$$

Für  $c/r_0 = 20$  ergibt dies den Wert  $f$  bereits auf 0,4% genau. Wie der Vergleich mit Gl. (241) zeigt, ist die Feldstärke dann ungefähr halb so groß wie zwischen 2 konzentrischen Zylindern mit den Radien  $r_0$  und  $c$ .

Für die Kapazität zwischen den beiden parallelen Zylindern ergibt sich, wenn  $\epsilon_0$  eingesetzt wird,

$$\frac{C}{l} = \frac{0,0278}{\ln[x + \sqrt{x^2 - 1}]} \frac{\mu\text{F}}{\text{km}}; \quad x = \frac{c}{2r_0}.$$

Der Nenner  $N$  hat für die verschiedenen Verhältnisse von  $c/r_0$  die in der folgenden Tabelle angegebenen Werte:

$c/r_0=2,4$	3,0	4	6	10	20
$N=0,622$	0,963	1,317	1,763	2,292	2,993

Bei größeren Werten von  $c/r_0$  kann wieder die gleiche Vernachlässigung eingeführt werden wie oben; dann gilt

$$\frac{C}{l} = \frac{0,0278}{\ln \frac{c}{r_0}} \frac{\mu\text{F}}{\text{km}}. \tag{268}$$

Die folgende Tabelle gibt einige hiernach berechnete Werte der Kapazität für die Längeneinheit:

$c/r_0=20$	50	100	200	500	1000
$C/l=0,00929$	0,00711	0,00604	0,00525	0,00447	0,00403 $\mu\text{F}/\text{km}$ .

In dem Feldbild, Abb. 75, ist die Mittelebene eine Niveaufläche. Wird sie durch eine leitende Elektrode ersetzt, so ergibt sich das Feld zwischen dieser ebenen Platte und einem parallelen Zylinder. Bei gleicher Ladung des Zylinders ist die Spannung zwischen Platte und Zylinder halb so groß wie die zwischen den beiden Zylindern. Bezeichnet man daher den Achsenabstand des Zylinders von der Platte mit  $h$ , so gilt für die Kapazität

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln\left[\frac{h}{r_0} + \sqrt{\left(\frac{h}{r_0}\right)^2 - 1}\right]}, \tag{269}$$

eine Formel, die für den Fall einer Einfachleitung mit der Höhe  $h$  über dem Erdboden angewendet werden kann. Wenn man, wie es meist der Fall ist,  $h/r_0$  als groß gegen 1 ansehen kann, so geht diese Formel über in die Gl. (230), deren Gültigkeit, wie früher gezeigt wurde, noch davon abhängt, ob  $h/l$  genügend klein ist. Die Feldstärke an der Oberfläche einer solchen Leitung ist angenähert

$$|\mathcal{E}_m| = \frac{U_0}{h-r_0} \frac{h}{r_0 \ln \frac{2h}{r_0}} \approx \frac{U_0}{r_0 \ln \frac{2h}{r_0}}, \tag{270}$$

wenn mit  $U_0$  die Spannung zwischen Leitung und Erde bezeichnet wird.

Wenn man die beiden Linienquellen einander mehr und mehr nähert, so ergibt sich ein Gebilde, das in Analogie zu dem bereits betrachteten Dipol der beiden Punktquellen steht. Das Potential ist

$$\varphi = + \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln r - \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln(r + b \cos \alpha),$$

bei gleichen Bezeichnungen wie in Abb. 64. Es folgt hieraus für verschwindend kleinen Abstand  $b$

$$\varphi = - \frac{Qb \cos \alpha}{2\pi\epsilon l r}. \tag{271}$$

Das Dipolmoment ist für die Längeneinheit

$$M = - \frac{Qb}{l}, \tag{272}$$

und es gilt

$$\varphi = \frac{M \cos \alpha}{2\pi\epsilon r}. \tag{273}$$

Die Niveauflächen sind Zylinder, deren Achsen in der Dipolebene liegen, und die die Mittelebene des Dipols tangieren. Man kann, ähnlich wie bei der Kugel, diese Potentialfunktion benutzen zur Berechnung des Feldes in der Umgebung eines leitenden Zylinders, der sich in einem ursprünglich homogenen Feld senkrecht zu dessen

Kraftlinien befindet. Man muß dann zu dem Potential des Dipols das Potential des homogenen Feldes

$$\varphi = -|\mathfrak{E}_0| r \cos \alpha$$

addieren. Das Moment  $M$  des Dipols wird durch die gleiche Grenzbetrachtung bestimmt wie bei der Kugel. Es ergibt sich für das Gesamtpotential

$$\varphi = |\mathfrak{E}_0| \left( -r + \frac{r_0^2}{r} \right) \cos \alpha. \quad (274)$$

Die Feldstärke an der Zylinderoberfläche wird

$$|\mathfrak{E}| = -\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r_0} = 2|\mathfrak{E}_0| \cos \alpha.$$

Sie ist also hier maximal nur doppelt so groß wie die ursprüngliche Feldstärke. Ganz entsprechend wie im Fall der Kugel läßt sich auch der Fall behandeln, daß der Zylinder geladen ist; dann muß in seiner Achse noch eine Linienquelle mit entsprechender Ladungsbelegung angebracht werden.

Der Verlauf der Verschiebungslinien ergibt sich durch eine ähnliche Betrachtung wie bei den parallelen Zylindern. Bezeichnet man den Abstand eines beliebigen Punktes  $P$  von der Ebene des Dipols mit  $y$ , Abb. 77, die Abszisse mit  $x$ , so gilt

$$y = r \sin \alpha; \quad x = r \cos \alpha. \quad (275)$$

Durch die Ebene mit der Spur  $PS$  geht, vom homogenen Feld herrührend, ein Verschiebungsfluß von der Größe

$$Q_1 = |\mathfrak{E}_0| \varepsilon l y \quad (276)$$

von links nach rechts hindurch, wenn diese Richtung der Verschiebungslinien des homogenen Feldes vorausgesetzt wird. In  $C$  befindet sich dann eine negative, in  $D$  eine positive Ladung  $Q$ . Die durch  $PS$  hindurchgehenden Verschiebungsflüsse dieser Ladungen haben die Größe

$$Q_2 = -Q \frac{\alpha_1}{2\pi}, \quad (277)$$

$$\text{und} \quad Q_3 = Q \frac{\alpha}{2\pi}. \quad (278)$$

Der gesamte Verschiebungsfluß in der Fläche  $PS$  ist also

$$Q_P = |\mathfrak{E}_0| \varepsilon l y + Q \frac{\alpha - \alpha_1}{2\pi}. \quad (279)$$

Nun gilt bei verschwindender Größe von  $b$

$$\alpha - \alpha_1 = \sphericalangle CPD = \frac{b \sin \alpha}{r}. \quad (280)$$

Das Dipolmoment hat den Wert

$$M = 2\pi \varepsilon |\mathfrak{E}_0| r_0^2. \quad (281)$$

Daher ergibt sich

$$Q_P = |\mathfrak{E}_0| \varepsilon l \left[ r \sin \alpha + \frac{r_0^2}{r} \sin \alpha \right]. \quad (282)$$

Die Gleichungen der Verschiebungslinien lauten  $Q_P = \text{konst.}$ , die der Niveaulinien  $\varphi = \text{konst.}$  Niveaulinien und Verschiebungslinien sind in Abb. 78 dargestellt.

### 13. Mehrleitersysteme.

Sind mehrere Leiter vorhanden, die sich auf verschiedenen Potentialen befinden, so ergeben sich im allgemeinen Verschiebungslinien zwischen je zwei beliebigen dieser Leiter. Von der Oberfläche einer jeden Elektrode gehen dann Verschiebungsflüsse nach sämtlichen andern Elektroden über; eine der Elektroden kann

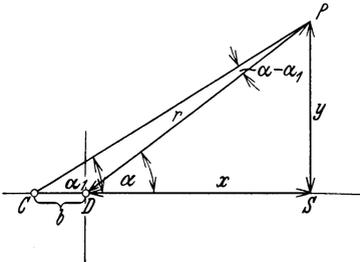


Abb. 77. Zur Berechnung der Verschiebungslinien eines Liniendipols.

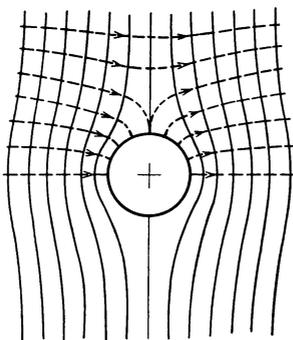


Abb. 78. Ungeladener Metallzylinder im homogenen Feld.

dabei auch die Erde sein. Die Gesamtheit dieser Verschiebungsflüsse ist die Ladung der betreffenden Elektrode.

Die Ladungen sind auf den Oberflächen der Elektroden in irgendeiner Weise verteilt; bezeichnen wir die Ladungsdichte an irgendeiner Stelle einer Elektrode mit  $q$ , so ist  $q dF$  die Ladung eines Flächenelementes  $dF$ . In einem Punkt  $P$  des Raumes, der von diesem Flächenelement den Abstand  $c$  hat, ruft diese Ladung einen Beitrag zum Potential hervor von der Größe [Gl. (190)]

$$d\varphi = \frac{q dF}{4\pi \epsilon c}.$$

Das Gesamtpotential im Punkt  $P$  ergibt sich, wenn man diese Beiträge über alle Leiteroberflächen 1, 2, 3 usw. summiert, also

$$\varphi = \frac{1}{4\pi \epsilon} \oint_1 \frac{q dF}{c} + \frac{1}{4\pi \epsilon} \oint_2 \frac{q dF}{c} + \dots \quad (283)$$

Es stellt sich eine solche Ladungsverteilung ein, daß das Potential  $\varphi$  auf jeder Leiteroberfläche einen konstanten Wert hat. Die Ladungen der einzelnen Leiter werden durch Integration der Ladungsdichte über die Oberflächen erhalten:

$$Q_1 = \oint_1 q dF; \quad Q_2 = \oint_2 q dF; \quad \text{usw.} \quad (284)$$

Wenn man nun eine zweite Ladungsverteilung  $q'$  annimmt, so gilt entsprechend für das Potential

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi \epsilon} \oint_1 \frac{q' dF}{c} + \frac{1}{4\pi \epsilon} \oint_2 \frac{q' dF}{c} + \dots \quad (285)$$

Zu einer Verteilung

$$q'' = q + q'$$

gehört daher das Potential

$$\varphi'' = \varphi + \varphi'. \quad (286)$$

Die Potentiale, die zu verschiedenen Ladungsverteilungen gehören, überlagern sich also ungestört. Macht man alle Ladungen  $k$  mal so groß, so wächst auch das Potential in einem beliebigen Raumpunkt auf das  $k$ -fache.

Es seien nun sämtliche Ladungen Null mit Ausnahme der Ladung  $Q_1$  auf Leiter 1. Dann ergeben sich nach dem eben Gesagten auf den Elektroden Potentiale, die proportional  $Q_1$  sind, die sich also in der Form

$$a_1 Q_1, a_2 Q_1, a_3 Q_1, \dots$$

schreiben lassen, wobei die Konstanten  $a$  unabhängig von der Ladung  $Q_1$  sind. Genau so ergeben sich für den Fall, daß alle Ladungen mit Ausnahme der Ladung  $Q_2$  des Leiters 2 Null sind, die Potentiale der Elektroden zu

$$a'_1 Q_2, a'_2 Q_2, a'_3 Q_2, \dots$$

und ebenso für die anderen Leiter. Auf Grund des Satzes von der ungestörten Überlagerung der Einzelpotentiale gilt daher für die wirklichen Potentiale der Elektroden bei Vorhandensein aller Ladungen

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= a_1 Q_1 + a'_1 Q_2 + a''_1 Q_3 + \dots, \\ \varphi_2 &= a_2 Q_1 + a'_2 Q_2 + a''_2 Q_3 + \dots, \\ \varphi_3 &= a_3 Q_1 + a'_3 Q_2 + a''_3 Q_3 + \dots, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (287)$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= b_1 Q_1 + b'_1 Q_2 + b''_1 Q_3 + \dots, \\ \varphi_1 - \varphi_3 &= b_2 Q_1 + b'_2 Q_2 + b''_2 Q_3 + \dots, \\ \varphi_1 - \varphi_4 &= b_3 Q_1 + b'_3 Q_2 + b''_3 Q_3 + \dots, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (288)$$

wobei die Koeffizienten  $b$  in leicht ersichtlicher Weise aus den Koeffizienten  $a$  zu bilden sind. Auf der linken Seite dieser Gleichungen steht nun jeweils die Spannung zwischen dem Leiter  $1$  und einem der anderen Leiter. Sind  $n$  Leiter vorhanden, so ergeben sich  $n - 1$  derartige Gleichungen. Wird dazu noch die Gleichung

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots = 0 \quad (289)$$

genommen, die aussagt, daß jede Verschiebungslinie auf irgendeinem der Leiter endet, so entstehen gerade hinreichend viele Gleichungen zur Berechnung der Ladungen aus den Spannungen. Da es sich um lineare Gleichungen handelt, so hängen die Ladungen linear von den Spannungen ab. Die Ladung des Leiters  $1$  läßt sich daher in der Form schreiben

$$Q_1 = K_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + K_{13}(\varphi_1 - \varphi_3) + K_{14}(\varphi_1 - \varphi_4) + \dots, \quad (290)$$

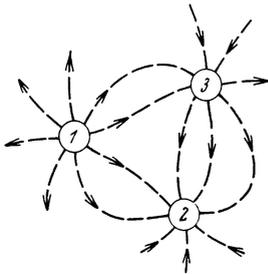


Abb. 79. Verschiebungslinien zwischen drei Elektroden.

in der die Größen  $K$  Konstante von der Dimension einer Kapazität sind, die sich aus den Koeffizienten  $a$  zusammensetzen. Diese Darstellung der Ladungen kann man nun in folgender Weise deuten.

$Q_1$  stellt den gesamten Verschiebungsfluß dar, der von dem Leiter  $1$  ausgeht. Er kann nach Gl. (290) in eine Summe von einzelnen Verschiebungsflüssen zerlegt werden. Jeder dieser Verschiebungsflüsse ist proportional der Spannung zwischen dem Leiter und einer der andern Elektroden. Man kann daher die Summanden als Verschiebungsflüsse deuten, die von dem Leiter  $1$  zu den andern Elektroden übergehen.

In Abb. 79 sind z. B. die Verschiebungsflüsse zwischen drei Elektroden veranschaulicht; die Ladung des Leiters  $1$  entspricht der Summe der beiden Verschiebungsflüsse nach den beiden andern Leitern hin. Das gleiche gilt für die Ladungen der andern Leiter. Allgemein läßt sich z. B. die Ladung des Leiters  $2$  darstellen durch

$$Q_2 = K_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + K_{23}(\varphi_2 - \varphi_3) + K_{24}(\varphi_2 - \varphi_4) + \dots \quad (291)$$

Da nun der von dem Leiter  $2$  nach dem Leiter  $1$  übergehende Verschiebungsfluß entgegengesetzt gleich sein muß dem Verschiebungsfluß, der von  $1$  nach  $2$  übergeht,

$$K_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) = -K_{21}(\varphi_2 - \varphi_1),$$

so folgt

$$K_{12} = K_{21},$$

und allgemein

$$K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}. \quad (292)$$

Man nennt die Größen  $K$  die Teilkapazitäten des Mehrleitersystems (Maxwell). Die Teilkapazität zwischen zwei beliebigen Elektroden  $\mu$  und  $\nu$  kann grundsätzlich so gemessen werden wie die Kapazität eines Kondensators, indem man die bei einer bestimmten Spannung zwischen den Elektroden von diesen aufgenommene Ladung bestimmt. Um z. B. in dem System von fünf Leitern, Abb. 80, die Teilkapazität zwischen  $1$  und  $2$  zu messen, läßt man die Leiter  $2, 3, 4$  und  $5$  gegenüber  $1$  zum gleichen Potential auf und mißt mit dem ballistischen Galvanometer  $G$  die Elektrizitätsmenge  $Q_{12}$ , die beim Anlegen einer Stromquelle mit der EMK  $E$  zwischen  $1$  und  $2$  durch den Leiter  $2$  hindurchgeht. Es ist dann

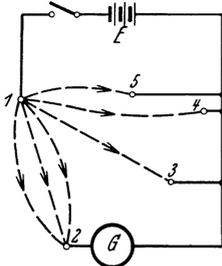


Abb. 80. Messung der Teilkapazität zwischen  $1$  und  $2$ .

$$K_{12} = \frac{Q_{12}}{E}. \quad (293)$$

Für praktische Zwecke besser geeignete Methoden zur Messung der Teilkapazitäten sind in Abschnitt 19 beschrieben.

In einem System von  $n$  Leitern finden sich  $\frac{1}{2}n(n-1)$  Teilkapazitäten. Man kann diese Teilkapazitäten durch Kondensatoren veranschaulichen, die zwischen die be-

treffenden Leiter eingeschaltet sind. Das Ersatzschema für die drei Leiter der Abb. 79 besteht also aus drei im Dreieck angeordneten Kondensatoren. Der Vorteil der Einführung der Teilkapazitäten liegt darin, daß sie unabhängig von den Spannungen zwischen den Elektroden sind.

Aus diesen Überlegungen darf nicht geschlossen werden, daß die den Teilkapazitäten entsprechenden Verschiebungsflüsse in Form von Verschiebungslinien in dem Feldbild vorhanden sein müßten. Die durch Gl. (290) ausgedrückte Zerlegung ist eine rein mathematische. Als Beispiel zeigt Abb. 81 den grundsätzlichen Verlauf der Verschiebungslinien zwischen zwei parallelen Doppelleitungen 12 und 34; es ist dabei angenommen, daß die beiden Leiter 1 und 3 ein und dasselbe positive Potential haben, die Leiter 2 und 4 das gleiche negative Potential. Obwohl z. B. zwischen den Leitern 2 und 3 die volle Potentialdifferenz besteht und daher die Teilkapazität  $K_{23}$  zwischen diesen beiden Leitern einen Beitrag zur Ladung der Leiter liefert, gehen doch keine Verschiebungslinien zwischen diesen Leitern über.

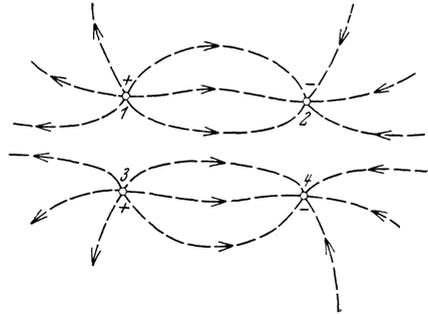


Abb. 81. Verschiebungslinien bei vier parallelen Drähten.

Das Bild der Verschiebungslinien hängt stark von dem Verhältnis der Spannungen zueinander ab. Als Beispiel werde das elektrische Feld in der Umgebung einer Drehstrom-Freileitung betrachtet. Zwischen den drei Leitungen und Erde finden sich sechs Teilkapazitäten, deren Größe unabhängig von den Betriebsspannungen ist. In Abb. 82 ist der Verlauf der Verschie-

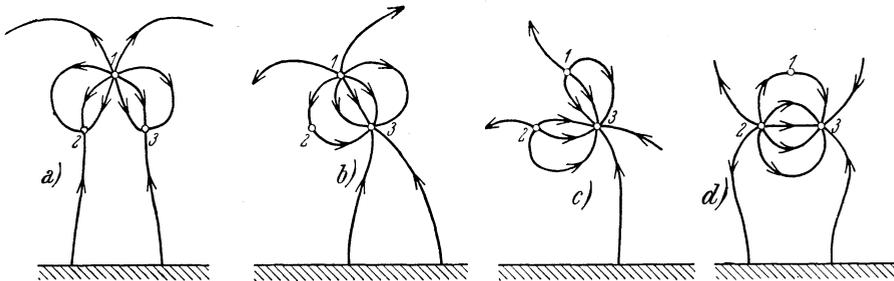


Abb. 82. Verschiebungslinien einer Drehstromleitung.

bungslinien gezeigt, der wegen der zeitlich veränderlichen Spannungen sich zeitlich fortgesetzt ändert. Es sind folgende Zeitpunkte herausgegriffen:

a) Die Spannung zwischen Leiter 1 und Erde (Phasenspannung) hat ihren Maximalwert. Wegen der zeitlichen Verschiebung von je  $\frac{1}{3}$  Periode der drei Phasenspannungen haben dann die Spannungen der beiden anderen Leiter einen negativen Wert von halber Größe; also

$$\begin{aligned} \text{Phasenspannung } 1 &= 1 \\ \text{„ } 2 &= -0,5 \\ \text{„ } 3 &= -0,5. \end{aligned}$$

b) Eine zwölftel Periode später:

$$\begin{aligned} \text{Phasenspannung } 1 &= 0,866 \\ \text{„ } 2 &= 0 \\ \text{„ } 3 &= -0,866. \end{aligned}$$

c) Eine weitere zwölftel Periode später:

$$\begin{aligned} \text{Phasenspannung } 1 &= 0,5 \\ \text{„ } 2 &= 0,5 \\ \text{„ } 3 &= -1. \end{aligned}$$

d) Eine weitere zwölftel Periode später:

$$\begin{aligned} \text{Phasenspannung } 1 &= 0 \\ \text{,, } 2 &= 0,866 \\ \text{,, } 3 &= -0,866. \end{aligned}$$

Wie die Abb. 82 zeigt, ergeben sich schon in diesem einfachen Fall elektrische Felder von sehr komplizierter Form. Das betrachtete Feld stellt ein elektrisches Drehfeld dar; das Maximum der Kraftliniendichte wandert im Sinne der Phasenfolge 1, 2, 3 sooftmal in der Sekunde herum, wie es die Frequenz des Drehstromes angibt.

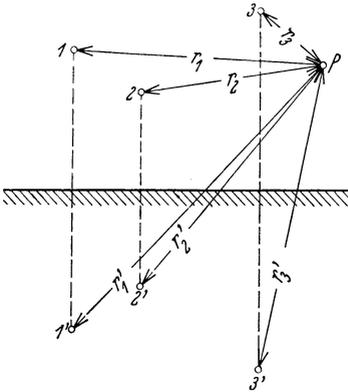


Abb. 83. Zur Berechnung der Teilkapazitäten von Leitungen.

Trotz des komplizierten Verlaufs der Verschiebungslinien ist gerade in dem praktisch wichtigen Fall der Leitungen die Berechnung der Teilkapazitäten sehr einfach. Man benützt dabei den Satz von der ungestörten Überlagerung der Einzelpotentiale. In Abb. 83 seien drei parallel zur Erdoberfläche aufgehängte Leitungen 1, 2, 3 dargestellt. Die Wirkung der Erdoberfläche kann dadurch berücksichtigt werden, daß Spiegelbilder  $1'$ ,  $2'$  und  $3'$  mit entgegengesetzt gleichen Ladungen angebracht werden. Nach Abschnitt 12 kann man ferner die Leitungsdrahte durch Linienquellen in den Drahtachsen ersetzen. Dann gilt für das Potential in einem beliebigen Punkt  $P$ , wenn die Abstände dieses Punktes von den Drahtachsen in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise bezeichnet werden, und  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  die Ladungen der Drahte bedeuten,

$$\varphi = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \left[ Q_1 \ln \frac{r'_1}{r_1} + Q_2 \ln \frac{r'_2}{r_2} + Q_3 \ln \frac{r'_3}{r_3} \right]. \quad (294)$$

Der Nullpunkt des Potentials ist dabei in die Erdoberfläche verlegt. Die Niveaulinien sind Zylinder, deren Spuren aber nur in der unmittelbaren Nähe der Drahtachsen Kreisform annehmen. Unter der Voraussetzung, daß die Drahte hinreichend dünn sind, erhält man daher das Potential eines Drahtes, wenn man den Punkt  $P$  bis auf einen Abstand an die Drahtachse heranrücken läßt, der gleich dem Radius des betreffenden Drahtes ist. Es ergeben sich so ebenso viele Gleichungen für die Drahtspannungen, als Drahte vorhanden sind. Zur Berechnung der Teilkapazitäten hat man diese Gleichungen nach den Ladungen aufzulösen und in die Form der Gl. (290) zu bringen.

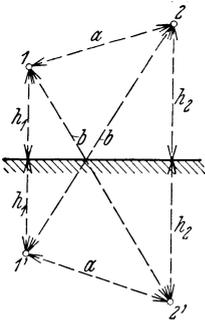


Abb. 84. Doppelleitung.

Als Beispiel werde die Berechnung der Teilkapazitäten einer Doppelleitung betrachtet, Abb. 84. Die beiden Drahte sollen die Abstände  $h_1$  und  $h_2$  vom Erdboden haben, der gegenseitige Abstand sei mit  $a$ , der Abstand eines Drahtes von dem Spiegelbild des andern sei mit  $b$  bezeichnet. Die Drahtdurchmesser seien  $d_1$  und  $d_2$ . Dann gilt nach Gl. (294)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \left[ Q_1 \ln \frac{4h_1}{d_1} + Q_2 \ln \frac{b}{a} \right]; \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l} \left[ Q_1 \ln \frac{b}{a} + Q_2 \ln \frac{4h_2}{d_2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (295)$$

Die Auflösung nach  $Q_1$  und  $Q_2$  ergibt

$$\left. \begin{aligned} Q_1 \left[ \ln \frac{4h_1}{d_1} \ln \frac{4h_2}{d_2} - \ln^2 \frac{b}{a} \right] &= 2\pi\epsilon_0 l \left[ \varphi_1 \ln \frac{4h_2}{d_2} - \varphi_2 \ln \frac{b}{a} \right]; \\ Q_2 \left[ \ln \frac{4h_1}{d_1} \ln \frac{4h_2}{d_2} - \ln^2 \frac{b}{a} \right] &= 2\pi\epsilon_0 l \left[ \varphi_2 \ln \frac{4h_1}{d_1} - \varphi_1 \ln \frac{b}{a} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (296)$$

Wir bringen diese Gleichungen in die Form der Gl. (290):

$$\left. \begin{aligned} Q_1 \left[ \ln \frac{4h_1}{d_1} \ln \frac{4h_2}{d_2} - \ln^2 \frac{b}{a} \right] &= 2\pi \varepsilon_0 l \left[ \varphi_1 \left( \ln \frac{4h_2}{d_2} - \ln \frac{b}{a} \right) + (\varphi_1 - \varphi_2) \ln \frac{b}{a} \right]; \\ Q_2 \left[ \ln \frac{4h_1}{d_1} \ln \frac{4h_2}{d_2} - \ln^2 \frac{b}{a} \right] &= 2\pi \varepsilon_0 l \left[ \varphi_2 \left( \ln \frac{4h_1}{d_1} - \ln \frac{b}{a} \right) + (\varphi_2 - \varphi_1) \ln \frac{b}{a} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (297)$$

Damit folgt für die Teilkapazitäten, die durch die Kondensatoren in Abb. 85 dargestellt sind,

$$K_{10} = 2\pi \varepsilon_0 l \frac{\ln \frac{4h_2}{d_2} - \ln \frac{b}{a}}{\ln \frac{4h_1}{d_1} \ln \frac{4h_2}{d_2} - \ln^2 \frac{b}{a}}; \quad (298)$$

$$K_{20} = 2\pi \varepsilon_0 l \frac{\ln \frac{4h_1}{d_1} - \ln \frac{b}{a}}{\ln \frac{4h_1}{d_1} \ln \frac{4h_2}{d_2} - \ln^2 \frac{b}{a}}; \quad (299)$$

$$K_{12} = 2\pi \varepsilon_0 l \frac{\ln \frac{b}{a}}{\ln \frac{4h_1}{d_1} \ln \frac{4h_2}{d_2} - \ln^2 \frac{b}{a}}. \quad (300)$$

Wenn die beiden Drähte in einer Horizontalebene liegen und gleiche Drahtdurchmesser haben, dann ist

$$h_1 = h_2 = h, \quad d_1 = d_2 = d, \quad b = \sqrt{4h^2 + a^2},$$

und es wird

$$K_{10} = K_{20} = \frac{2\pi \varepsilon_0 l}{\ln \frac{4h}{d} \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{a}\right)^2}}; \quad (301)$$

$$K_{12} = 2\pi \varepsilon_0 l \frac{\ln \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{a}\right)^2}}{\ln \frac{4h}{d} \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{a}\right)^2} \ln \frac{4h}{d} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{2h}{a}\right)^2}\right)^{-1}}. \quad (302)$$

Liegen die beiden Drähte in einer Vertikalebene, so ist in Gl. (298) ... (300) zu setzen

$$a = h_2 - h_1, \quad b = h_2 + h_1.$$

Die Teilkapazität liefert eine schärfere Formulierung des Begriffes der Kapazität. Bei den meisten Anwendungen sind mehr als zwei Leiter vorhanden; dann kann nicht ohne weiteres ein einziger Kapazitätswert für die betreffende Anordnung angegeben werden; definiert sind dann nur die Teilkapazitäten. In vielen Fällen kann man jedoch die Darstellung vereinfachen durch die Einführung der sogenannten Betriebskapazität des Mehrleitersystems. Man versteht darunter die Ersatzkapazität für eine bestimmte Betriebsart. Z. B. ist die normale Betriebsart einer Doppelleitung die, bei der ein Draht als Hinleitung, der andere als Rückleitung des Stromes verwendet wird. In dem Schema der Teilkapazitäten, Abb. 85, liegen dann die beiden Kondensatoren  $K_{10}$  und  $K_{20}$  in Reihe miteinander zwischen den Klemmen der Stromquelle, parallel zu  $K_{12}$ . Die Leitung wirkt daher für die Stromquelle so wie ein Kondensator mit der Kapazität

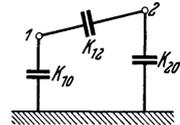


Abb. 85. Teilkapazitäten einer Doppelleitung.

$$C_{12} = K_{12} + \frac{K_{10} K_{20}}{K_{10} + K_{20}}. \quad (303)$$

Das ist die Betriebskapazität der Doppelleitung für diese Betriebsart. Im Fall der beiden, in gleicher Höhe liegenden Drähte ergibt sich daraus mit Hilfe der Formeln (301) und (302):

$$C_{12} = \frac{\pi \varepsilon_0 l}{\ln \frac{4h}{d} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{2h}{a}\right)^2}\right)^{-1}} = \frac{\pi \varepsilon_0 l}{\ln \frac{2a}{d} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{a}{2h}\right)^2}\right)^{-1}}. \quad (304)$$

Diese Beziehung unterscheidet sich von der früher für die beiden frei im Raum befindlichen Drähte abgeleiteten durch die Wurzel im Nenner. Diese Wurzel berücksichtigt also die auf der Erdoberfläche influenzierten Ladungen. Bei sehr großer Höhe über dem Erdboden wird sie 1. Wenn andererseits die Höhe  $h$  über dem Erdboden klein gegen den Drahtabstand  $a$  ist, dann wird die Betriebskapazität halb so groß wie die Kapazität einer Einfachleitung. Bei den in der Starkstrom- und Schwachstromtechnik praktisch vorkommenden Freileitungen unterscheidet sich die Wurzel um weniger als ein Tausendstel von 1. Die Betriebskapazität kann daher fast immer nach der Formel (268) berechnet werden, um so eher als in Wirklichkeit immer andere Einflüsse vorhanden sind, die die Kapazität in gleicher Größenordnung verändern, z. B. Unebenheiten des Erdbodens, Bäume und dgl., ferner die Isolatoren und Maste.

Eine andere Betriebsart der Doppelleitung stellt der sogenannte Einfachbetrieb der Telegraphie dar, bei dem jeweils ein Draht als Hinleitung und die Erde als Rückleitung des Stromes benutzt wird. Die Betriebskapazität ist dann die Ersatzkapazität zwischen einem Draht und Erde. Ihre Größe hängt davon ab, ob der andere Leiter isoliert oder geerdet ist. Im ersten Fall ergibt sich keine Beeinflussung des Potentialfeldes durch den andern Leiter; die Betriebskapazität ist gleich der Kapazität der Einfachleitung gegen Erde. Im zweiten Fall dagegen liegen die Teilkondensatoren  $K_{10}$  und  $K_{12}$  einander parallel; es ist die Betriebskapazität

$$C_{10} = K_{10} + K_{12}, \quad (305)$$

also

$$C_{10} = 2\pi\epsilon_0 l \frac{\ln \frac{4h_2}{d_2}}{\ln \frac{4h_1}{d_1} \ln \frac{4h_2}{d_2} - \ln^2 \frac{b}{a}}. \quad (306)$$

Sie wird um so genauer gleich der Kapazität einer Einfachleitung, je mehr sich das Verhältnis  $b/a$  dem Wert 1 nähert, je weiter also der zweite Leiter entfernt ist. Im übrigen vergrößert die Anwesenheit des zweiten Leiters die Kapazität.

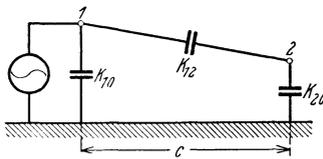


Abb. 86. Kapazitive Beeinflussung einer Schwachstromleitung durch eine Starkstromleitung.

Eine Anwendung finden die Teilkapazitäten bei der Berechnung der Beeinflussung von Schwachstromleitungen durch parallellaufende Starkstromleitungen. Das elektrische Feld der Starkstromleitung erzeugt Potentialdifferenzen zwischen den Drähten der Schwachstromleitung, die zwar klein sind gegen die Spannungen in der Starkstromleitung, aber doch merkliche Störungen in den Schwachstromleitungen wegen der dort verwendeten niedrigen Betriebsspannungen hervorrufen können. Das Schema der Teilkapazitäten für die Beeinflussung zwischen einer einzelnen Starkstromleitung (Fahrdraht einer elektrischen Bahn) und einer einadrigen Schwachstromleitung ist in Abb. 86 dargestellt. Bezeichnet man den horizontalen Abstand zwischen den beiden Leitungen mit  $c$ , so ist nach Abb. 84

$$a = \sqrt{c^2 + (h_1 - h_2)^2};$$

$$b = \sqrt{c^2 + (h_1 + h_2)^2},$$

und es ist die Kopplungskapazität  $K_{12}$  aus Gl. (300) zu berechnen. Wenn der Abstand  $c$  der Leitungen groß gegen die Höhen ist, dann ergibt sich so die Näherungsformel

$$K_{12} = 2\pi\epsilon_0 l \frac{2h_1 h_2}{c^2 \ln \frac{4h_1}{d_1} \ln \frac{4h_2}{d_2}}. \quad (307)$$

Die Kopplungskapazität nimmt also umgekehrt mit dem Quadrat der Entfernung zwischen den beiden Leitungen ab, so daß die Vergrößerung des Abstandes zwischen den Leitungen ein wirksames Mittel zur Verminderung der Kopplung ist.

**Zahlenbeispiel:** Nennt man das Verhältnis des Leitungsabstandes zur mittleren Höhe der Leitungen  $\alpha$ ,

$$\alpha = \frac{c}{\sqrt{h_1 h_2}},$$

so ergeben sich für ein Verhältnis von

$$\frac{h_1}{d_1} = \frac{h_2}{d_2} = 100$$

die in der folgenden Tabelle aufgeführten Werte der Kopplungskapazität für die Längeneinheit

$\alpha=5$	10	20	50	100
$K_{12}/l=128$	31	7,8	1,24	0,31 $\mu\mu\text{F}/\text{km}$ ;

für

$$\frac{h_1}{d_1} = \frac{h_2}{d_2} = 500$$

wird bei

$\alpha=5$	10	20	50	100
$K_{12}/l=78$	19,5	4,9	0,78	0,195 $\mu\mu\text{F}/\text{km}$ .

Mit Hilfe der Teilkapazitäten werden die Berechnungen über die gegenseitige Beeinflussung von Leitungen zurückgeführt auf die Berechnung von Stromverzweigungen (siehe Abschnitt 32). Die Abb. 87 veranschaulicht die Teilkapazitäten zwischen einer Drehstromleitung und einer Schwachstromleitung, die grundsätzlich auf dem gleichen Weg wie in dem eben betrachteten Beispiel berechnet werden können.

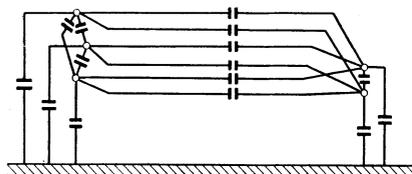


Abb. 87. Teilkapazitäten zwischen Drehstromleitung und Einphasenleitung.

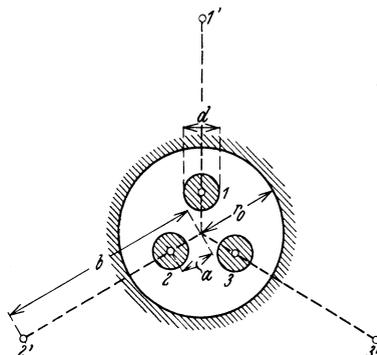


Abb. 88. Zur Berechnung der Teilkapazitäten eines Drehstromkabels.

Als weiteres Beispiel werde ein symmetrisches Dreileiterkabel betrachtet, Abb. 88. Die drei zylindrischen Leiter 1, 2, 3 befinden sich im Innern eines zylindrischen Bleimantels. Für die angenäherte Berechnung der Potentialverteilung bildet man zunächst die drei Leiter durch Linienquellen in ihren Achsen ab. Bezeichnet man deren Ladungen mit  $Q_1, Q_2, Q_3$ , so kann die Wirkung des Bleimantels auf die Potentialverteilung durch drei Linienquellen  $1', 2', 3'$  mit den Ladungen  $-Q_1, -Q_2, -Q_3$  berücksichtigt werden. Für die Abstände  $b$  der Spiegelbilder gilt nach dem Gesetz der reziproken Radien

$$b = \frac{r_0^2}{a}. \tag{308}$$

Dadurch wird die Innenfläche des Bleimantels mit dem Radius  $r_0$  eine Niveaufläche. Die die Linienquellen umgebenden Niveauflächen sind ebenfalls Zylinder, deren Grundflächen aber um so mehr von der Kreisform abweichen, je mehr sie sich dem Bleimantel nähern. Bei nicht zu großem Leiterdurchmesser ergibt sich angenähert Kreisform. Dann gilt für die Potentiale der drei Leiter unter Berücksichtigung, daß die mittleren Abstände der Leiteroberflächen von den Linienquellen  $d/2, b-a, a\sqrt{3}$  und  $\sqrt{a^2+b^2+ab}$  sind,

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \left[ Q_1 \ln 2 \frac{b-a}{d} + Q_2 \ln \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}} + Q_3 \ln \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}} \right]; \tag{309}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \left[ Q_1 \ln \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}} + Q_2 \ln 2 \frac{b-a}{d} + Q_3 \ln \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}} \right]; \tag{310}$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2\pi\epsilon l} \left[ Q_1 \ln \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}} + Q_2 \ln \frac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{a\sqrt{3}} + Q_3 \ln 2 \frac{b-a}{d} \right]. \tag{311}$$

Aus Symmetriegründen sind die drei Teilkapazitäten zwischen den drei Leitern einander gleich, ebenso die drei Teilkapazitäten zwischen den Leitern und dem Bleimantel (Erdkapazitäten). Bezeichnet man diese mit  $K_0$ , jene mit  $K$ , Abb. 89, so gilt

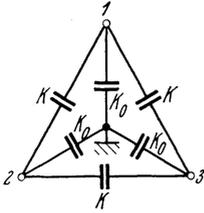


Abb. 89. Teilkapazitäten eines Drehstromkabels.

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \varphi_1 K_0 + (\varphi_1 - \varphi_2) K + (\varphi_1 - \varphi_3) K; \\ Q_2 &= \varphi_2 K_0 + (\varphi_2 - \varphi_1) K + (\varphi_2 - \varphi_3) K; \\ Q_3 &= \varphi_3 K_0 + (\varphi_3 - \varphi_1) K + (\varphi_3 - \varphi_2) K. \end{aligned} \right\} \quad (312)$$

Durch Auflösen dieser Gleichungen nach  $\varphi_1$  erhält man

$$\varphi_1 = \frac{K}{K_0(K_0 + 3K)} \left[ Q_1 \left( 1 + \frac{K_0}{K} \right) + Q_2 + Q_3 \right]. \quad (313)$$

Der Vergleich mit Gl. (309) ergibt

$$K_0 = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln 2} \frac{b - a}{d} \frac{a^2 + b^2 + ab}{3a^2}, \quad (314) \quad K = \frac{2\pi\epsilon l \ln \sqrt{a^2 + b^2 + ab}}{a\sqrt{3}} \frac{1}{\ln 2} \frac{b - a}{d} \frac{a^2 + b^2 + ab}{3a^2} \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + b^2 + ab}}. \quad (315)$$

Für den Grenzfall, daß sich die drei Leitungen frei im Raum befinden, ergibt sich hieraus ( $r_0 = \infty$ )

$$K_0 = 0; \quad K = \frac{2\pi\epsilon l}{3 \ln \frac{2a\sqrt{3}}{d}}. \quad (316)$$

Auf die Betriebskapazität des Drehstrom-Dreileiterkabels kommen wir im Abschnitt 35 zurück.

In den Kabeln der Fernsprechtechnik ist gewöhnlich eine große Zahl von Leitungen untergebracht. Die Teilkapazitäten zwischen den einzelnen Leitungen haben hier eine elektrische Kopplung zwischen den mit den Leitungen gebildeten Stromkreisen („Nebensprechen“) zur Folge, die natürlich unerwünscht ist. Eine Bedingung dafür, daß die Kopplung zwischen zwei Leitungen verschwindet, läßt sich allgemein folgendermaßen formulieren. Es seien in Abb. 90 1 und 2 die beiden Adern der einen Leitung, 3 und 4 die beiden Adern einer beliebigen anderen Leitung. Wenn dann

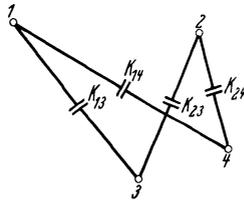


Abb. 90. Bedingung für die kapazitive Entkopplung zweier Leitungen.

$$K_{13} = K_{23} \quad \text{und} \quad K_{14} = K_{24},$$

dann halbieren die Leiter 3 und 4 das Potentialgefälle zwischen 1 und 2; d. h. sie haben gegeneinander keine Spannung. Man vermeidet also die Kopplung, wenn die Teilkapazitäten von jeder Ader zu den beiden Adern einer jeden anderen Leitung einander gleichgemacht werden. Dies wird mit einer gewissen Annäherung durch das sogenannte Verdrillen der Leitungen erreicht, wobei die beiden Adern einer jeden Leitung schraubenlinienförmig umeinander herumgeführt werden.

### 14. Die mechanischen Kräfte im elektrischen Feld; Energie des elektrischen Feldes.

Die auf eine Punktladung im elektrischen Feld ausgeübte Kraft ist nach früherem

$$\mathfrak{F} = Q\mathfrak{E}.$$

Dabei bedeutet  $\mathfrak{E}$  die ursprüngliche elektrische Feldstärke am Orte der Punktladung. Die Kraft, die zwischen zwei Punktladungen  $Q_1$  und  $Q_2$  im Abstand  $a$  auftritt, läßt sich danach in folgender Weise berechnen. Wäre nur die Punktladung  $Q_1$  vorhanden,

so würde sich am Ort der anderen eine Feldstärke von der Größe

$$|\mathfrak{E}| = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon a^2}$$

einstellen. Für die Kraft gilt daher (Coulomb, 1785)

$$|\mathfrak{F}| = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon a^2}; \tag{317}$$

sie sucht Ladungen gleichen Vorzeichens voneinander zu entfernen, Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens einander zu nähern. Von diesem durch Coulomb experimentell entdeckten Gesetz hat die Elektrizitätslehre ihren Ausgang genommen. Ihre Entwicklung ging gegenüber dem hier eingeschlagenen den umgekehrten Weg. Das Coulombsche Gesetz gibt die Möglichkeit, die Elektrizitätsmengen zu messen; damit konnte man auf Grund der Gl. (144) die elektrische Feldstärke und die Spannung definieren.

Das Coulombsche Gesetz gibt eine Begründung für die bisher gemachte Annahme, daß die Ladungen ihren Sitz an der Oberfläche der elektrischen Leiter haben. Es werde eine geladene Kugel betrachtet, Abb. 91, und wie früher angenommen, daß die Ladung auf der Oberfläche gleichmäßig verteilt sei.  $P$  sei ein Punkt im Inneren der Kugel. Durch diesen Punkt denken wir uns gerade Linien so gelegt, daß die ganze Kugel in einzelne sehr schmale Doppelkegel geteilt wird. In der Abbildung ist ein solcher Doppelkegel gezeichnet;  $F_1$  und  $F_2$  sind die beiden Grundflächen,  $a_1$  und  $a_2$  die Höhen. Denken wir uns ferner in  $P$  eine Punktladung angebracht, so ist die von  $F_1$  ausgeübte Kraft nach dem Coulombschen Gesetz proportional  $F_1/a_1^2$ , die von  $F_2$  ausgeübte Kraft proportional  $F_2/a_2^2$ . Nun ist aber aus geometrischen Gründen

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2};$$

die beiden Kräfte heben sich daher auf. Das gleiche gilt für alle anderen Doppelkegel. Auf Ladungen, die sich im Inneren einer geladenen Kugel befinden, werden also von Ladungen auf der Oberfläche bei der angenommenen Verteilung keine Kräfte ausgeübt; die Feldstärke ist dort Null, wie es im Gleichgewichtszustand sein muß. Würde die Abstoßungskraft zwischen den Ladungen mit einer höheren als der zweiten Potenz abnehmen, so würden auf Ladungen innerhalb der Kugel Kräfte einwirken, die nach dem Kugelinneren gerichtet sind; umgekehrt würden bei geringerer Abnahme die Kräfte nach außen wirken, im Inneren der Kugel würden dann Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens übrigbleiben.

Die Formel (317) gilt streng nur für Punktladungen; bei räumlich ausgedehnten Elektroden ist sie näherungsweise gültig, wenn die Elektrodenabmessungen klein gegen den Abstand sind. Die zwischen Elektroden beliebiger Größe und beliebigen Abstandes wirkenden Feldkräfte können berechnet werden, wenn man sich die Ladungen so fein unterteilt denkt, daß sie als Punktladungen aufgefaßt werden können. Die auf die Elektroden wirkenden Kräfte sind die Resultierenden aller an den Punktladungen angreifenden Kräfte. Als Beispiel sollen die Kräfte zwischen zwei parallelen Platten sehr großer Ausdehnung mit dem Abstand  $a$  berechnet werden. Bezeichnet man die überall zwischen den beiden Platten konstante Verschiebungsdichte mit  $\mathfrak{D}$ , so hat ein Flächenelement  $dF$  der einen Platte die Ladung  $|\mathfrak{D}| dF$ .

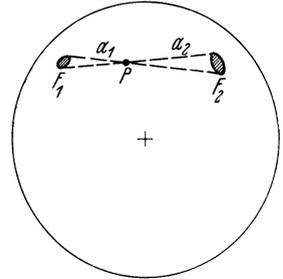


Abb. 91. Berechnung der Kräfte im Inneren einer geladenen Kugel.

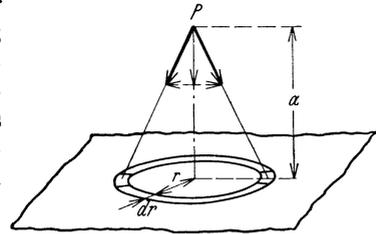


Abb. 92. Berechnung der Kräfte in einem Plattenkondensator.

Um die auf das Flächenelement ausgeübte Kraft zu berechnen, fällen wir von diesem Flächenelement ein Lot auf die andere Platte, Abb. 92, und zerlegen deren Oberfläche in schmale Kreisringe, die den Fußpunkt dieses Lotes konzentrisch umgeben. Die auf die Ladung  $|\mathfrak{D}|dF$  im Punkt  $P$  von einem Flächenelement eines solchen Kreisringes mit der Ladung  $dQ$  ausgeübte Anziehungskraft hat nach dem Coulomb'schen Gesetz die Größe

$$\frac{|\mathfrak{D}|dF dQ}{4\pi\epsilon(r^2+a^2)}.$$

Die horizontalen Komponenten der von je zwei einander gegenüberliegenden Flächenelementen des Kreisringes herrührenden Kräfte heben sich auf, während sich die vertikalen Komponenten addieren. Die vertikale Komponente ist  $a/\sqrt{r^2+a^2}$  mal so groß wie die Kraft selbst; die gesamte Ladung eines Kreisringes mit der Fläche  $2r\pi dr$  ruft daher im Punkt  $P$  eine Kraft hervor von der Größe

$$\frac{|\mathfrak{D}|dF|\mathfrak{D}|2r\pi dr a}{4\pi\epsilon(r^2+a^2)\sqrt{r^2+a^2}}.$$

Die von der Gesamtladung der unteren Platte auf das Flächenelement  $dF$  der anderen Platte ausgeübte Kraft wird durch Integration über alle Kreisringe erhalten zu

$$\frac{a|\mathfrak{D}|^2 dF}{2\epsilon} \int_0^{r_0} \frac{r dr}{(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a|\mathfrak{D}|^2 dF}{2\epsilon} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{r_0^2+a^2}} \right].$$

Wenn der Radius  $r_0$  groß gegen den Abstand  $a$  gewählt wird, dann gilt für den auf die Flächeneinheit der Platte ausgeübten Zug

$$p = \frac{1}{2} \frac{|\mathfrak{D}|^2}{\epsilon} = \frac{1}{2} |\mathfrak{C}| \cdot |\mathfrak{D}| = \frac{1}{2} \epsilon |\mathfrak{C}|^2. \quad (318)$$

**Zahlenbeispiel:** Die Isolierstoffe können nur mit einer bestimmten höchsten elektrischen Feldstärke beansprucht werden, ohne daß ein Durchbruch eintritt (s. Abschn. 20). Am größten sind die zulässigen Feldstärken bei Glas und Glimmer. Die praktische Grenze liegt hier etwa bei 500 kV/cm. Setzt man für die Elektrisierungszahl  $\epsilon_r=8$ , so ergibt sich für die größte elektrische Zugkraft, die mit den bekannten Isolierstoffen hergestellt werden kann,

$$p = \frac{1}{2} 8 \cdot 0,886 \cdot 10^{-13} \cdot 25 \cdot 10^{10} \frac{\text{As}}{\text{Vcm}} \frac{\text{V}^2}{\text{cm}^2} = 0,0886 \frac{\text{Ws}}{\text{cm}^3} \approx 0,9 \frac{\text{kGr}}{\text{cm}^2}.$$

Eine Glas- oder Glimmerplatte, die sich zwischen zwei Plattenelektroden befindet, kann also mit einem Flächendruck von rund 1 at durch die elektrischen Feldkräfte zusammengepreßt werden. In der Elektrotechnik arbeitet man durchweg mit erheblich geringeren Feldstärken; die mechanischen Beanspruchungen der Isolierstoffe durch die Feldkräfte sind daher immer sehr viel kleiner.

Obwohl die Gl. (318) nur für ebene Elektroden abgeleitet wurde, läßt sich leicht einsehen, daß auch bei beliebigen Elektrodenformen Kräfte gleicher Größe auftreten müssen. Es werde eine Punktladung  $Q$  in sehr geringer Entfernung von der Oberfläche einer geladenen Elektrode beliebiger Form betrachtet. Fällt man von der Punktladung ein Lot auf die Oberfläche und grenzt auf der Oberfläche einen kleinen Kreis vom Radius  $r_0$  ab, so hat die auf die Punktladung  $Q$  durch die Ladung  $r_0^2\pi|\mathfrak{D}|$  der Kreisfläche ausgeübte Kraft auf Grund der obigen Überlegungen die Größe

$$\frac{a}{2} \mathfrak{C} Q \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{r_0^2+a^2}} \right].$$

Läßt man die Punktladung  $Q$  genügend nahe an die Oberfläche der Elektrode hinstellen, so reduziert sich diese Kraft auf  $\frac{1}{2}\mathfrak{C}Q$ . Nun ist aber nach Gl. (144) die gesamte Kraft, die auf eine solche Punktladung in einem Feld mit der Feldstärke  $\mathfrak{C}$  ausgeübt wird,  $Q\mathfrak{C}$ . Die Differenz, nämlich  $\frac{1}{2}Q\mathfrak{C}$  ist daher dem übrigen Teil der Elektrodenoberfläche außerhalb des Kreises mit dem Radius  $r_0$  zuzuschreiben, oder anders ausgedrückt: Schneidet man aus der Oberfläche einer Elektrode ein kleines Scheibchen heraus und bringt an diese Stelle eine Ladung  $Q$ , so wird auf diese Ladung eine Kraft ausgeübt von der Größe  $\frac{1}{2}Q\mathfrak{C}$ . Da nun das herausgeschnittene Scheibchen,

bei genügender Kleinheit, selbst als Punktladung vom Betrage

$$Q = r_0^2 \pi |\mathfrak{D}|$$

aufgefaßt werden kann, so ist die Kraft, mit der dieses Scheibchen von der übrigen Ladung der Elektrode abgestoßen wird,  $\frac{1}{2} r_0^2 \pi |\mathfrak{D}| \cdot |\mathfrak{E}|$ ; sie ist nach außen gerichtet. Die an der Elektrodenoberfläche angreifenden Zugkräfte haben also für die Flächeneinheit die Größe

$$p = \frac{1}{2} |\mathfrak{E}| \cdot |\mathfrak{D}| = \frac{1}{2} \varepsilon |\mathfrak{E}|^2$$

auch bei beliebiger Krümmung der Elektrodenoberfläche. Die Kräfte sind senkrecht zur Elektrodenoberfläche gerichtet. Man kann diese Kräfte dadurch veranschaulichen, daß man sagt, es bestehe längs der Verschiebungslinien eine Zugspannung von der durch Gl. (318) gegebenen Größe (Faraday, Maxwell).

Daraus geht nicht hervor, daß tatsächlich derartige Spannungen im Nichtleiter vorhanden sind. Mit den bis heute vorliegenden Erfahrungstatsachen ist die Annahme ebensogut vereinbar, daß die Elektroden infolge irgendeines unbekanntes Prozesses über den leeren Raum hinweg aufeinander einwirken. Die Vorstellung der Nahewirkungstheorie, die insbesondere durch die mechanischen Spannungen im Nichtleiter gekennzeichnet ist, erlaubt jedoch eine anschauliche Darstellung der Vorgänge des elektrischen Feldes, die bei den für die Elektrotechnik in Betracht kommenden Erscheinungen nicht im Widerspruch mit der Erfahrung steht. Die neueren Anschauungen vom Bau der Materie nehmen derartige Spannungen nur in den materiellen Nichtleitern an, wo sie durch die Wechselwirkung zwischen den elektrischen Ladungen der Atome und dem äußeren elektrischen Feld bedingt sind, nicht aber im leeren Raum. Eine anschauliche Vorstellung vom elektrischen Feld im leeren Raum kann so jedoch nicht erhalten werden.

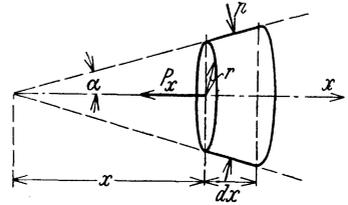


Abb. 93. Berechnung des Querdruckes der Verschiebungslinien.

Die längs der Verschiebungslinien wirkenden Zugspannungen haben einen Querdruck zur Folge, mit dem sich die Verschiebungslinien scheinbar abzustoßen suchen. Seine Größe kann auf folgende Weise berechnet werden. Durch zwei benachbarte Niveaulinien und durch Verschiebungslinien läßt sich an jeder Stelle des Feldes ein kleiner Kegelstumpf nach Abb. 93 abgrenzen. Wir denken uns diesen Kegelstumpf zu einem Kegel vervollständigt. Die elektrische Feldstärke innerhalb des Kegelstumpfes ist eine Funktion des Abstandes  $x$  von der Spitze des Kegels; für den Radius  $r$  gilt

$$r = x \operatorname{tg} \alpha.$$

Bezeichnet man die Feldstärke auf der linken Seitenfläche mit  $\mathfrak{E}$ , so hat sie auf der rechten entsprechend der Zunahme der Fläche den Wert  $\mathfrak{E} \left(1 - 2 \frac{dx}{x}\right)$ , wobei  $dx$  die unendlich kleine Höhe des Kegelstumpfes bedeuten soll. Die auf die linke Seitenfläche wirkende Zugkraft ist

$$\pi \frac{1}{2} \varepsilon |\mathfrak{E}|^2 x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Die auf die rechte Seitenfläche wirkende Kraft

$$\pi \frac{1}{2} \varepsilon |\mathfrak{E}|^2 \left(1 - 4 \frac{dx}{x}\right) (x + dx)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Der Kegelstumpf wird daher mit einer Kraft

$$P_x = \pi \frac{1}{2} \varepsilon |\mathfrak{E}|^2 2 \frac{dx}{x} x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

nach links gezogen. Soll ein Gleichgewichtszustand bestehen, so muß diese Kraft durch einen auf den Kegelmantel wirkenden Flächendruck  $p$  aufgehoben werden. Es ist also zu setzen

$$P_x = 2 r \pi \frac{dx}{\cos \alpha} p \sin \alpha = p 2 \pi x dx \operatorname{tg}^2 \alpha;$$

daraus folgt

$$p = \frac{1}{2} |\mathfrak{E}| \cdot |\mathfrak{D}| = \frac{1}{2} \varepsilon |\mathfrak{E}|^2.$$

Dieser hypothetische Querdruck ist also ebenso groß wie der Längszug. Im leeren Raum ist Querdruck und Längszug  $p_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\mathfrak{E}|^2$ . Befindet sich im elektrischen Feld ein materieller Nichtleiter, so treten Kräfte an den Grenzflächen auf:

Fall a. Kraftlinien parallel zur Grenzfläche. Die Feldstärke hat zu beiden Seiten der Grenzfläche den gleichen Wert  $\mathfrak{E}$ . Auf die Grenzfläche wird von außen der Druck

$$p_a = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\mathfrak{E}|^2$$

ausgeübt; von der Seite des nichtleitenden Stoffes her mit der Elektrizierungszahl  $\varepsilon_r$  ist dagegen der Druck

$$p_i = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r |\mathfrak{E}|^2.$$

Es ergibt sich also ein resultierender Flächenzug an der Grenzfläche von der Größe

$$p = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) |\mathfrak{E}|^2, \quad (319)$$

der den Nichtleiter in das Feld hineinzuziehen sucht.

Fall b. Kraftlinien senkrecht zur Grenzfläche. Bezeichnet man hier die Feldstärke im nichtleitenden Stoff mit  $|\mathfrak{E}|$ , so ist die Feldstärke außerhalb  $\varepsilon_r |\mathfrak{E}|$ , da die Verschiebungsdichte stetig sein muß. Daher wirkt von außen her ein Zug auf die Grenzfläche von der Größe

$$p_a = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r^2 |\mathfrak{E}|^2,$$

von innen her

$$p_i = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r |\mathfrak{E}|^2;$$

der resultierende Zug ist nach außen gerichtet und beträgt

$$p = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r (\varepsilon_r - 1) |\mathfrak{E}|^2. \quad (320)$$

Wird z. B. eine Glasplatte parallel zu den Platten in einen Plattenkondensator gebracht, so heben sich die Zugkräfte auf beiden Seitenflächen der Glasplatte auf; dagegen wird die Platte in den Kondensator hineingezogen, wenn sie nur zum Teil in den Kondensator hineintaucht. Bei flüssigen Isolierstoffen wirken die elektrischen Feldkräfte so wie ein hydrostatischer Druck; sie suchen das Volumen des Isolierstoffes zu vergrößern.

Die praktisch vorkommenden elektrischen Feldkräfte sind durchweg sehr klein. Sie haben eine grundlegende Bedeutung nur bei den elektrostatischen Meßinstrumenten, bei denen sie die Triebkräfte bilden. Zur Berechnung der Feldkräfte in diesen Fällen und bei allgemeinen Elektrodenformen kann man eine andere Methode anwenden, die von der im elektrischen Feld aufgespeicherten Energie ausgeht.

Wenn ein Kondensator mit der Kapazität  $C$  auf die Spannung  $U$  aufgeladen wird, so nimmt er eine Elektrizitätsmenge

$$Q = CU$$

auf. Die Stromquelle muß also während der Aufladung eine bestimmte elektrische Arbeit liefern, die auf den Kondensator übergeht, wenn sonst keine Energieverluste vorhanden sind. Da nun ein endlicher Betrag von Energie bei endlichen Kräften nur in endlichen Zeiten übertragen werden kann, so erfordert der Vorgang der Aufladung, also der Vorgang der Herstellung eines elektrischen Feldes Zeit. Bezeichnet man die Spannung in irgendeinem Zeitpunkt während des Aufladungsvorganges mit  $u$ , so ist die entsprechende Ladung in diesem Zeitpunkt

$$q = Cu. \quad (321)$$

Von der positiven Elektrode fließen während der Aufladung negative Ladungen ab; der negativen Elektrode fließen negative Ladungen zu. Es besteht also in dem betrachteten Zeitpunkt eine bestimmte Stromstärke  $i$ . Der Strom vermehrt oder vermindert die Ladung einer Elektrode in einem Zeitelement  $dt$  um den Betrag

$$dq = i dt.$$

Dadurch wächst die Spannung um einen Betrag  $du$ , und es gilt

$$dq = C du.$$

Daraus folgt

$$i dt = C du. \quad (322)$$

Die elektrische Arbeit, die der Kondensator während des Zeitelements  $dt$  aufnimmt, ist

$$dW = u i dt = C u du.$$

War der Kondensator zunächst ungeladen, und wächst seine Spannung auf irgendeinen Wert  $u$ , so ist die gesamte vom Kondensator aufgenommene elektrische Energie

$$W = \int_0^u C u du = \frac{1}{2} C u^2. \quad (323)$$

Diese Energie ist im Kondensator aufgespeichert wie die potentielle Energie in einer gespannten Feder. Man kann sie bei der Entladung des Kondensators wieder gewinnen. Die Energiebeträge, die auf diese Weise aufgespeichert werden können, sind freilich verhältnismäßig gering. Wird z. B. ein Kondensator mit der Kapazität  $C = 2 \mu\text{F}$  auf eine Spannung von 1000 Volt aufgeladen, so enthält er die Energie

$$W = \frac{1}{2} 2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6 \text{FV}^2 = 1 \text{Ws}.$$

Als Sitz der Energie kann das elektrische Feld selbst angesehen werden. Wir denken uns durch zwei benachbarte Niveauflächen mit dem Abstand  $dn$  und durch Verschiebungslinien ein Prisma mit den Grundflächen  $dF$  im elektrischen Feld abgegrenzt, Abb. 27. An dem Feldbild ändert sich nichts, wenn man die Grundflächen durch dünne Metallfolien mit den entsprechenden Potentialen ersetzt. Dann entsteht ein kleiner Plattenkondensator mit der Kapazität

$$C = \varepsilon \frac{dF}{dn},$$

der auf die Spannung  $d\varphi$  aufgeladen ist. Die in ihm aufgespeicherte Energie hat den Betrag

$$dW = \frac{1}{2} C (d\varphi)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon |\mathfrak{E}|^2 dV,$$

wobei das Volumen des Prismas  $dn dF = dV$  gesetzt ist. Daraus geht hervor, daß in der Volumeneinheit des Feldes die Energie

$$W_1 = \frac{1}{2} \varepsilon |\mathfrak{E}|^2 = \frac{1}{2} |\mathfrak{E}| \cdot |\mathfrak{D}| \quad (324)$$

aufgespeichert ist. Sie ist gleich dem Flächendruck  $p$  und ist im allgemeinen ungleichmäßig über das Feld verteilt. Die größte Energie sitzt dort, wo die Feldstärke am größten ist. Man erhält die insgesamt in einem elektrischen Feld aufgespeicherte Energie durch Integration über den ganzen Raum:

$$W = \frac{1}{2} \int |\mathfrak{E}| \cdot |\mathfrak{D}| dV. \quad (325)$$

Nun kann man die im elektrischen Feld wirkenden mechanischen Kräfte mit Hilfe des folgenden Gedankenexperimentes berechnen. Wir denken uns die Spannungsquelle, die den Kondensator auf eine Spannung  $U$  aufgeladen habe, entfernt, und beschränken unsere Betrachtung auf so kleine Zeitabschnitte, daß die Ladung  $Q$  als zeitlich konstant angesehen werden kann. Dann ist die aufgespeicherte Energie

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{Q^2}{2C}. \quad (326)$$

Es werde nun verfolgt, wie sich die elektrische Energie bei einer gedachten Verschiebung in Richtung der Feldkräfte ändert. Wirkt auf eine Elektrode die Feldkraft  $P_x$  in einer Richtung  $x$  und bewegt sich die Elektrode unter der Einwirkung dieser Kraft um ein kleines Stück  $dx$ , so wird die Arbeit geleistet

$$dA = P_x dx.$$

Dieser Arbeitsbetrag kann nur der Energie des elektrischen Feldes entzogen werden

sein. Die Kapazität nimmt zu um  $\frac{\partial C}{\partial x} dx$ , also die Energie um den Betrag

$$dW = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{\partial C}{\partial x} dx = -\frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial x} dx;$$

daher gilt

$$P_x = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (327)$$

Die Richtung der Kraft läßt sich immer durch die Regel bestimmen, daß die Feldkräfte infolge des Längszuges und Querdruckes der Kraftlinien die Kapazität zu vergrößern suchen.

Bei einem Plattenkondensator mit der Fläche  $F$  und dem Abstand  $a$  der Platten ist

$$C = \epsilon \frac{F}{a}.$$

Die auf die Elektroden ausgeübte Zugkraft hat die Richtung des Plattenabstandes, also ist

$$P = -\frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial a} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon F}{a^2} U^2. \quad (328)$$

Als Anwendungsbeispiel werde das Nadelelektrometer betrachtet. Es taucht hier eine Blechnadel in einen Plattenkondensator derart, daß sich mit zunehmendem Ausschlag der Nadel die Kapazität zwischen Nadel und Platte vergrößert, Abb. 94. Die Kapazität zwischen der Nadel und den festen Platten ist angenähert proportional der eintauchenden Länge  $l$  der Nadel:  $C = cl$ . Legt man eine Spannung zwischen die Nadel und die miteinander verbundenen festen Platten, so sucht sich die Kapazität zu vergrößern, die Nadel erfährt ein Triebmoment im Sinne des Uhrzeigers, dem durch das Richtmoment einer Feder die Wage gehalten wird. Bezeichnet man das Triebmoment mit  $M$ , so gilt auf Grund der gleichen Überlegung wie oben für eine kleine Winkeländerung  $d\alpha$

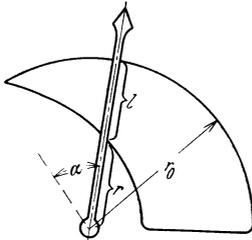


Abb. 94. Prinzip des Nadelelektrometers.

$$M d\alpha = \frac{1}{2} U^2 dC, \quad \text{oder} \quad M = \frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{d\alpha}. \quad (329)$$

Nun ist bei kreisförmiger äußerer Begrenzung der festen Platten

$$l = r_0 - r;$$

also wird

$$M = -\frac{c}{2} U^2 \frac{dr}{d\alpha}. \quad (330)$$

Die Abhängigkeit des Triebmomentes von dem Drehwinkel  $\alpha$  des Zeigers läßt sich danach durch die Berandungskurve der festen Platten beeinflussen.

Für das Gleichgewicht zwischen dem Triebmoment  $M$  und dem Richtmoment der Feder,  $s\alpha$ , gilt

$$s\alpha = -\frac{c}{2} U^2 \frac{dr}{d\alpha}.$$

Verlangt man, daß die Skala einen proportionalen Verlauf haben soll, so muß sein

$$U = c_1 \alpha,$$

oder

$$dr = -\frac{2s}{c c_1^2} \frac{d\alpha}{\alpha},$$

$$r = \frac{2s}{c c_1^2} \ln \frac{\alpha_0}{\alpha}.$$

Diese Bedingung läßt sich praktisch in einem gewissen Winkelbereich erfüllen.

Die Umwandlung von elektrischer Energie in mechanische Arbeit bei der Bewegung einer Elektrode ist ein umkehrbarer Vorgang. Dies läßt sich durch den folgenden Versuch zeigen. Ein Drehkondensator werde mit einer Spannung von 220 Volt bei voller Kapazität aufgeladen. Seine beiden Klemmen sind mit einer

kleinen Funkenstrecke versehen, die bei der niedrigen Ladespannung nicht anspricht. Entfernt man aber die Verbindung mit der Spannungsquelle und dreht den beweglichen Teil des Kondensators rasch in die Nullstellung, so springt ein Funke über. Der Vorgang ist dabei der folgende. Der Kondensator hat bei der vollen Kapazität eine bestimmte Ladung  $Q = CU$  aufgenommen. Schaltet man ihn von der Spannungsquelle ab und verringert die Kapazität auf den Wert der Anfangskapazität, der  $\frac{1}{n}C$  betrage, so sorgt die Isolierung der Elektrode dafür, daß während dieser Änderung die Ladung nahezu konstant bleibt. Es muß also die Spannung auf den  $n$ -fachen Wert wachsen. Die Ladung drängt sich auf eine kleinere Fläche der Platten zusammen, die Verschiebungsdichte wächst und damit wachsen Feldstärke und Spannung. Die aufgespeicherte elektrische Energie war zu Anfang

$$W_a = \frac{1}{2} C U^2,$$

am Ende des Vorganges dagegen beträgt sie

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{1}{n} C (nU)^2 = n \frac{1}{2} C U^2.$$

Sie ist also  $n$  mal so groß geworden. Der Differenzbetrag ist dem Kondensator bei der Drehung der Platte als mechanische Arbeit zugeführt worden. Die Anordnung stellt also einen Generator dar, der mechanische in elektrische Energie umwandelt (Influenz-Elektriermaschine). Da die im elektrischen Feld aufgespeicherten Energien sehr klein sind, so lassen sich jedoch auf diese Weise keine großen elektrischen Leistungen herstellen.

Aus Gl. (322) folgt für die Stromstärke bei einer Spannungsänderung am Kondensator

$$i = C \frac{du}{dt}. \quad (331)$$

Dieser Strom tritt an der einen Elektrode in den Kondensator ein und verläßt ihn an der anderen wieder; er fließt scheinbar durch den Nichtleiter hindurch. Man kann sich den in den Zuleitungen fließenden Strom als Verschiebungsstrom, der längs der Verschiebungslinien verläuft, im Nichtleiter fortgesetzt denken. In einem Stromkreis, Abb. 95, der aus einem Kondensator  $C$ , einem Widerstand  $R$  und einer Stromquelle mit der EMK  $E$  besteht, fließt der Strom dann bei der Aufladung des Kondensators auf einem geschlossenen Weg wie in einem metallischen Stromkreis. Die EMK der Stromquelle deckt die Spannung  $u$  am Kondensator und den Spannungsabfall  $iR$  an dem Widerstand  $R$ . Es ist

$$E = u + iR = u + CR \frac{du}{dt}. \quad (332)$$

In jedem Zeitpunkt ist die für den Spannungsverbrauch im Widerstand  $R$  zur Verfügung stehende Spannung  $E - u$ . Daher kann die Ladung des Kondensators nur so rasch zunehmen, als es diese Spannung erlaubt. Die größte Ladungszunahme tritt unmittelbar nach dem Einlegen des Schalters auf. War der Kondensator zunächst ungeladen ( $u = 0$ ), so gilt hier

$$CR \frac{du}{dt} = E \quad \text{oder} \quad u = \frac{Et}{RC}.$$

Die Spannung nimmt also anfangs proportional mit der Zeit zu, und zwar um so rascher, je kleiner das Produkt aus Widerstand und Kapazität ist. Man bezeichnet dieses Produkt als die Zeitkonstante

$$RC = \tau. \quad (333)$$

Für die Ladung des Kondensators gilt unmittelbar nach dem Einschalten

$$q = \frac{ECt}{\tau}.$$

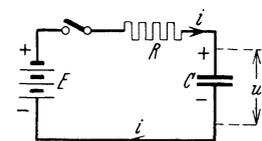


Abb. 95. Stromkreis mit Kondensator.

In dem Maße, in dem infolge der Ladung die Spannung  $u$  wächst, wird die für den Spannungsabfall am Widerstand zur Verfügung stehende Spannung kleiner, die Ladung nimmt langsamer zu. Die Gl. (332) läßt sich schreiben

$$\frac{du}{E-u} = \frac{dt}{\tau}.$$

Durch Integration ergibt sich hieraus

$$-\ln(E-u) = \frac{t}{\tau} + k_1,$$

oder

$$u = E - ke^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Soll  $u=0$  für  $t=0$  sein, so gilt  $k=E$ , und es wird

$$u = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \tag{334}$$

Für die Stromstärke folgt

$$i = C \frac{du}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{335}$$

Sie hat im ersten Augenblick nach dem Einschalten den gleichen Wert  $I = E/R$ , wie wenn der Kondensator überbrückt wäre; man sagt daher, der Kondensator verhalte sich im ersten Augenblick nach dem Einschalten so wie ein Kurzschluß. Für die Ladung ergibt sich

$$q = EC \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = Q \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \tag{336}$$

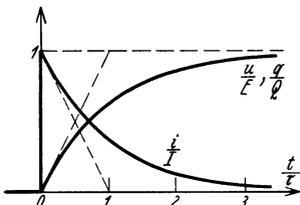


Abb. 96. Aufladung eines Kondensators.

Der zeitliche Verlauf dieser Größen ist in Abb. 96 dargestellt. Die Spannung nähert sich allmählich ihrem Endwert  $E$ , der Strom nimmt im gleichen Maße allmählich ab. Der Vorgang der Aufladung dauert streng genommen unendlich lang; praktisch ist aber schon nach einer bestimmten

endlichen Zeit kein Unterschied mehr gegenüber dem Endzustand wahrzunehmen. Die folgende Tabelle gibt einige Zahlenwerte der beiden Zeitfunktionen.

$t/\tau=0$	1	2	3	4	5	6	7	8
$e^{-\frac{t}{\tau}} = 1$	0,368	0,135	0,0498	0,0183	0,00674	0,00248	0,000912	0,000335
$1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$	0,632	0,865	0,9502	0,9817	0,9933	0,9975	0,9991	0,9997

Je nach der Genauigkeit, mit der die Spannungen und Ströme gemessen werden können, wird man im allgemeinen als Dauer des Aufladungsvorganges eine Zeit zwischen  $4\tau$  und  $8\tau$  anzusehen haben.

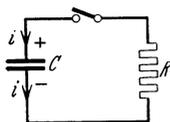


Abb. 97. Entladung eines Kondensators.

Ganz ähnliche Überlegungen gelten auch für die Entladung des Kondensators. Ein Kondensator wird entladen, indem man seine Elektroden über einen Widerstand miteinander verbindet, Abb. 97; bei offenen Klemmen stellt der Isolationswiderstand des Kondensators bereits eine solche Verbindung her.

Die Spannung  $u$  am Kondensator muß hier in jedem Augenblick gleich dem Spannungsabfall  $iR$  am Schließungswiderstand sein; es gilt

$$u = \tau \frac{du}{dt}.$$

Durch Integration ergibt sich

$$u = U e^{-\frac{t}{\tau}}, \tag{337}$$

wobei der Anfangswert für  $t=0$  mit  $U$  bezeichnet ist. Der Strom wird nach Gl. (331)

$$i = -\frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{338}$$

Er hat die entgegengesetzte Richtung und den gleichen Verlauf wie bei der Aufladung. Die bei der Entladung durch den Widerstand  $R$  fließende Elektrizitätsmenge ist  $Q = \int_0^{\infty} i dt$ ; sie hat den Wert  $UC$ .

Nach den Formeln (335) und (338) würde die Stromstärke im ersten Augenblick nach dem Einschalten unendlich groß werden, wenn der Widerstand Null wäre. Abgesehen davon, daß dieser Fall nicht realisierbar ist, ergibt sich in Wirklichkeit immer ein endlicher Wert der Stromstärke wegen der Wirkung der gleichzeitig mit dem Strom auftretenden magnetischen Felder, die hier nicht berücksichtigt sind (siehe 7. Kapitel).

**Zahlenbeispiel:** Wird ein Kondensator mit der Kapazität  $C=1 \mu\text{F}$  über einen Widerstand von  $R = 1000 \Omega$  durch eine Spannung von 220 V aufgeladen, so hat die Stromstärke im ersten Augenblick nach dem Einlegen des Schalters den Wert  $I = \frac{E}{R} = \frac{220 \text{ V}}{1000 \Omega} = 0,22 \text{ A}$ . Die Zeitkonstante beträgt  $\tau = CR = 10^{-6} \cdot 1000 \text{ F}\Omega = 10^{-3} \text{ s} = 1 \text{ ms}$ . Nach einer Zeit von 3 ms hat daher die Ladung 95 %, nach 4 ms 98 % ihres Endwertes  $Q = EC = 220 \cdot 10^{-6} \text{ VF} = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ As}$  erreicht. Der Strom ist nach 4 ms auf  $i = 0,22 \cdot 0,0183 \text{ A} = 4 \text{ mA}$  abgeklungen.

Hat der Kondensator einen Isolationswiderstand von  $100 \text{ M}\Omega$ , so entlädt er sich nach Unterbrechen des Stromkreises mit einer Zeitkonstante von  $\tau = 10^{-6} \cdot 10^8 \text{ F}\Omega = 100 \text{ s}$ . Die Spannung ist nach einer Zeit von 400 s = 6,7 min auf 1,83 % ihres Anfangswertes, also auf 4 V gesunken. Nach der doppelten Zeit beträgt die Spannung noch  $0,000335 \cdot 220 \text{ V} = 0,074 \text{ V}$ .

Zwischen dem Isolationswiderstand  $R_i$  und der Kapazität  $C$  eines Kondensators besteht nach Abschnitt 11 die Beziehung

$$R_i C = \frac{\varepsilon}{\kappa},$$

wenn mit  $\kappa$  die Leitfähigkeit des Isolierstoffes bezeichnet wird. Die Zeitkonstante für die Selbstentladung eines Kondensators ist daher

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\kappa}. \quad (339)$$

Die Schnelligkeit, mit der die Selbstentladung vor sich geht, ist also unabhängig von Form und Größe des Kondensators und nur durch die Eigenschaften des Isolierstoffes bestimmt. Ist z. B.  $\varepsilon_r = 4$ ,  $\kappa = 10^{-15} \text{ S/cm}$ , so wird

$$\tau = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{\kappa} = \frac{4 \cdot 0,886 \cdot 10^{-13} \text{ As cm}}{10^{-15} \text{ Vcm S}} = 354 \text{ s} \approx 6 \text{ min}.$$

Messungen über den Verlauf des Lade- und Entladevorganges bei wirklichen Isolierstoffen zeigen charakteristische Abweichungen gegenüber der Rechnung. Spannung und Stromstärke nähern sich langsamer ihrem Endwert, als es nach der Berechnung der Fall sein müßte. Man bezeichnet diese Erscheinung bei der Aufladung als die Nachladung, bei der Entladung als die Rückstandsbildung. Sie wird in der Hauptsache zurückgeführt auf Inhomogenitäten im Isolierstoff, insbesondere örtliche Unterschiede in der Leitfähigkeit. Wenn das Verhältnis  $\varepsilon/\kappa$  an den verschiedenen Punkten des Nichtleiters verschiedene Werte hat, so stimmt die Potentialverteilung im stationären Zustand, der durch das Strömungsfeld dargestellt wird, nicht überein mit der Potentialverteilung während des Lade- oder Entladevorganges. Während die Potentialverteilung im stationären Zustand ausschließlich durch die Leitfähigkeit bestimmt ist, stellt sich beim Beginn des Vorganges eine Potentialverteilung ein, wie sie dem elektrostatischen Feld entspricht; für diese ist die Elektrisierungszahl maßgebend, weil hier der Verschiebungsstrom den Leitungsstrom im Nichtleiter bei weitem überwiegt (siehe auch Abschnitt 18). Mit der Annäherung an den Endzustand müssen daher im Inneren des Nichtleiters Umladungen stattfinden, die wegen des großen Isolationswiderstandes relativ langsam vor sich gehen. Eine genauere Vorstellung dieses Vorganges erhält man aus der Betrachtung eines besonders einfachen Falles der Inhomogenität. Es werde angenommen, daß der Isolierstoff eines Plattenkondensators aus zwei Schichten

zusammengesetzt sei, von denen die eine verschwindend kleine Leitfähigkeit besitzt (z. B. eine dünne Luftschicht), die andere eine endliche Leitfähigkeit  $\kappa$  hat (z. B. Papier). Da die Grenzfläche zwischen den beiden Isolierstoffen eine Niveaufläche ist, so kann man sich dort eine dünne Metallfolie angebracht denken. Sie teilt den Kondensator in eine Reihenschaltung von zwei Kondensatoren auf, von denen der eine einen unendlich großen, der andere einen endlichen Isolationswiderstand  $R_i$  besitzt. Für das Einschalten des geschichteten Kondensators gilt daher das Schema der Abb. 98. Mit  $C_1$  und  $C_2$  sind die Kapazitätswerte der beiden Teilkondensatoren bezeichnet, mit  $u$  die Spannung zwischen den Klemmen des Kondensators;  $u_1$  und  $u_2$  sind die Teilspannungen an den beiden Schichten, und es ist

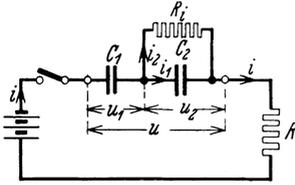


Abb. 98. Ersatzbild des Zweischichten-Kondensators.

$$u_1 + u_2 = u.$$

Der Isolationswiderstand der Schicht 2 kann ersetzt werden durch einen Widerstand  $R_i$ , der parallel zu dem Kondensator liegt. Es verzweigt sich daher der durch den Kondensator fließende Strom  $i$  in die beiden Teilströme  $i_1$  und  $i_2$ , wobei nach dem Kirchhoffschen Satz

$$i_1 + i_2 = i$$

sein muß. Man hat  $i_1$  als den Verschiebungsstrom,  $i_2$  als den Leitungsstrom in der Isolierschicht 2 aufzufassen, während in der Schicht 1 nur ein Verschiebungsstrom  $i$  fließt. Auf Grund ähnlicher Überlegungen wie oben ergeben sich die folgenden Gleichungen

$$i = C_1 \frac{du_1}{dt}; \quad i_1 = C_2 \frac{du_2}{dt}; \quad i_2 = \frac{u_2}{R_i};$$

daher wird

$$C_1 \frac{du_1}{dt} = C_2 \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{R_i}.$$

Ferner muß die EMK  $E$  der Spannungsquelle in jedem Augenblick den gesamten Spannungsverbrauch decken:

$$E = u_1 + u_2 + R C_1 \frac{du_1}{dt}. \tag{340}$$

Aus dieser Gleichung kann man  $u_2$  in die vorhergehende einsetzen. Das ergibt

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{R C_1 + R_i C_1 + R_i C_2}{R R_i C_1 C_2} \frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{R R_i C_1 C_2} = \frac{E}{R R_i C_1 C_2}.$$

Man findet das Integral dieser Gleichung durch den Ansatz

$$u_1 = E + k e^{p t},$$

der zur Berechnung von  $p$  die Gleichung liefert

$$p^2 + \left( \frac{1}{R C_1} + \frac{1}{R C_2} + \frac{1}{R_i C_2} \right) p + \frac{1}{R R_i C_1 C_2} = 0.$$

Die beiden Lösungen sind

$$p_1 = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R C_1} + \frac{1}{R C_2} + \frac{1}{R_i C_2} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{1}{R C_1} + \frac{1}{R C_2} + \frac{1}{R_i C_2} \right)^2 - \frac{1}{R R_i C_1 C_2}};$$

$$p_2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R C_1} + \frac{1}{R C_2} + \frac{1}{R_i C_2} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{1}{R C_1} + \frac{1}{R C_2} + \frac{1}{R_i C_2} \right)^2 - \frac{1}{R R_i C_1 C_2}}.$$

Wenn der Isolationswiderstand  $R_i$  sehr groß ist gegen den Vorwiderstand  $R$ , so ergeben sich hieraus die Näherungsformeln

$$p_1 = -\frac{1}{R_i (C_1 + C_2)};$$

$$p_2 = -\frac{1}{R} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right);$$

wir setzen demgemäß

$$\tau_1 = R \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}; \quad \tau_2 = R_i (C_1 + C_2). \tag{341}$$

Man erkennt, daß  $\tau_1$  die Zeitkonstante darstellt, die sich ergeben würde, wenn die Isolierung vollkommen wäre, und daß  $\tau_2$  die Zeitkonstante darstellt, die sich für die Entladung ergibt, wenn man die beiden Klemmen des Kondensators kurzschließt. Die zweite Zeitkonstante ist erheblich größer als die erste.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet nun

$$u_1 = E + k_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + k_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}},$$

und es folgt aus Gl. (340)

$$u_2 = k_1 \left( \frac{RC_1}{\tau_1} - 1 \right) e^{-\frac{t}{\tau_1}} + k_2 \left( \frac{RC_1}{\tau_2} - 1 \right) e^{-\frac{t}{\tau_2}},$$

und

$$u = u_1 + u_2 = E + k_1 \frac{RC_1}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + k_2 \frac{RC_1}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}.$$

Die Konstanten  $k_1$  und  $k_2$  folgen daraus, daß der Kondensator zunächst ungeladen war, daß also  $u_1 = 0$  und  $u_2 = 0$  für  $t = 0$ . Das ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= E + k_1 + k_2; \\ 0 &= k_1 \left( \frac{RC_1}{\tau_1} - 1 \right) + k_2 \left( \frac{RC_1}{\tau_2} - 1 \right), \end{aligned}$$

oder

$$k_1 = -E \frac{\frac{\tau_1 \tau_2}{RC_1} - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}, \quad k_2 = -E \frac{\tau_2 - \frac{\tau_1 \tau_2}{RC_1}}{\tau_2 - \tau_1}.$$

Berücksichtigt man wieder, daß  $\tau_2 \gg \tau_1$ , so folgt angenähert

$$k_1 = -\frac{C_2}{C_1 + C_2} E; \quad k_2 = -\frac{C_1}{C_1 + C_2} E,$$

und es wird schließlich

$$u_1 = E \left[ 1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{C_1}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right]; \tag{342}$$

$$u_2 = E \frac{C_1}{C_1 + C_2} \left( e^{-\frac{t}{\tau_2}} - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right). \tag{343}$$

Für den Ladestrom ergibt sich, gleichfalls angenähert,

$$i = C_1 \frac{du_1}{dt} = \frac{E}{R} \left[ e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{C_1 \tau_1}{C_2 \tau_2} \left( e^{-\frac{t}{\tau_2}} - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \right]. \tag{344}$$

Der durch diese Formeln gegebene zeitliche Verlauf der Spannungen und des Ladestromes ist in Abb. 99 für das Beispiel  $C_1 = C_2$  und  $\tau_2 = 10\tau_1$  dargestellt. Die gestrichelte Kurve  $u'_1$  zeigt den Verlauf von  $u_1$  für den Fall  $R_i = \infty$ ; es wäre dann  $u_1$  halb so groß wie die gesamte Spannung, also

$$u'_1 = \frac{1}{2} E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right).$$

Die Kurven zeigen, daß unmittelbar nach dem Einschalten die beiden Teilspannungen in der Tat nahezu so verlaufen, wie wenn der Widerstand  $R_i$  nicht vorhanden wäre; der Verschiebungsstrom im Teilkondensator 2 überwiegt den Strom im Isolationswiderstand. Mit abnehmender Schnelligkeit der Ladungsänderungen kommt der Isolationsstrom mehr und mehr zur Wirkung; er hat den gleichen zeitlichen Verlauf wie  $u_2$  und entlädt langsam den Teilkondensator 2, während sich dabei der Kondensator 1 auf die volle Spannung  $E$  auflädt. Unmittelbar nach dem Einschalten befinden sich die Ladungen in der Hauptsache an den beiden Elektroden des geschichteten Kondensators; im Verlauf des Ladevorganges wandert die Ladung der rechten Elektrode, Abb. 98, allmählich durch die Schicht 2 hindurch und sammelt sich an der Grenzfläche zwischen den beiden

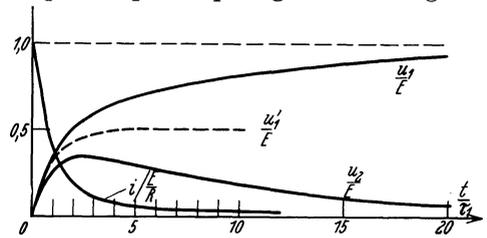


Abb. 99. Aufladung des Zweischichten-Kondensators.

Schichten an. Nach Beendigung des Vorganges findet sich eine Ladung von der Größe  $EC_1$  an dieser Grenzfläche, eine entgegengesetzt gleiche Ladung an der linken Elektrode; der Verschiebungsfluß ist auf die Isolierschicht 1 zusammengedrängt, während in der Isolierschicht 2 die Feldstärke Null ist. Die Umlagerung der Ladungen äußert sich im Verlauf des Stromes  $i$  so, daß der Ladestrom zunächst mit dem des vollkommenen Kondensators fast übereinstimmt; er würde eine Ladung von der Größe  $E \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$  liefern. Da aber die endgültige Ladung  $EC_1$  sein muß, so ergibt sich noch ein Zusatzstrom, der die Differenz

$$EC_1 - \frac{EC_1 C_2}{C_1 + C_2} = EC_1 \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

transportiert und verhältnismäßig langsam abnimmt.

### 15. Die Potentialgleichung.

Die Methode der Feldberechnung im Abschnitt 12 beruht auf der Anwendung der beiden folgenden Sätze:

„Das Oberflächenintegral der Verschiebungsdichte über eine geschlossene Fläche ist gleich der eingeschlossenen Ladung“ und

„Die Verschiebungsdichte ist proportional der Feldstärke“.

Die in diesen beiden Sätzen enthaltenen Aussagen kann man zu einer Bedingungs-gleichung für das Potential zusammenfassen. Zur Ableitung dieser Gleichung benutzen wir ein Symbol der Vektorrechnung, die sogenannte Divergenz. Darunter versteht man einen Grenzwert, der auf folgende Weise gebildet wird. Es werde ein beliebiges elektrisches Feld betrachtet mit einer Anzahl von Elektroden, deren Zwischenraum durch nichtleitende Stoffe ausgefüllt ist. In einem nichtleitenden Stoff können im allgemeinen freie Elektrizitätsmengen, Elektronen oder Ionen vorhanden sein; man spricht in diesem Fall von einer Raumladung des Nichtleiters. Grenzen wir irgendeinen kleinen Raumteil beliebiger Form, z. B. einen Würfel, in dem Nichtleiter ab, so kann daher in diesem Raumteil im allgemeinen Fall eine bestimmte Ladung  $Q$  enthalten sein. Durch Division mit dem Volumen  $V$  des Raumteiles erhält man die in der Volumeneinheit enthaltene Ladung. Dieser Quotient nähert sich einem Grenzwert, wenn man den Raumausschnitt kleiner und kleiner werden läßt, vorausgesetzt, daß seine Abmessungen noch groß sind gegen die Abstände der Elektroden oder Ionen. Den auf diese Weise erhaltenen Grenzwert nennen wir die Raumladungsdichte:

$$\rho = \lim \frac{Q}{V}. \quad (345)$$

Es ist eine positive oder negative Größe, die man in  $\text{As/cm}^3$  messen kann. Bei gegebener Raumladungsdichte folgt für die Ladung des sehr kleinen Raumteiles

$$Q = \rho V.$$

Nach dem oben erwähnten Satz kann man nun diese Ladung auch darstellen durch das Flächenintegral der Verschiebungsdichte über die Oberfläche des Raumausschnittes:

$$Q = \oint \mathfrak{D} d\mathfrak{F},$$

oder

$$\frac{1}{V} \oint \mathfrak{D} d\mathfrak{F} = \rho. \quad (346)$$

Diese Beziehung kann nun folgendermaßen gedeutet werden. Ist an jeder Stelle des Feldes die Verschiebungsdichte  $\mathfrak{D}$  gegeben und bildet man das Flächenintegral der Verschiebungsdichte über die Oberfläche eines kleinen Raumteiles, so nähert sich der Quotient des Integrals zum Volumen des Raumteiles bei abnehmendem Volumen einer festen Grenze, nämlich der Raumladungsdichte. Man bezeichnet die Operation, mit der man aus dem Vektor der Verschiebungsdichte diesen Grenzwert erhält,

als die Bildung der Divergenz der Verschiebungsdichte und schreibt:

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \lim \frac{1}{V} \oint \mathfrak{D} d\mathfrak{F}. \quad (347)$$

Diese Definition gilt nicht nur für die Verschiebungsdichte, sondern auch für beliebige Vektoren von ähnlichen Eigenschaften (Fluß- oder Feldvektoren), z. B. die Stromdichte oder die magnetische Induktion oder die Geschwindigkeit einer Flüssigkeitsströmung. Die Divergenz ist der in der Volumeneinheit entspringende Fluß.

Die Gl. (346) lautet mit dieser Bezeichnung

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \rho. \quad (348)$$

Die Divergenz der Verschiebungsdichte ist gleich der Raumladungsdichte. Wenn, wie in den bisher betrachteten Feldern, keine Raumladungen vorhanden sind, dann gilt

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0. \quad (349)$$

Der aus einem beliebigen Raum entspringende Verschiebungsfluß ist

$$Q = \int \rho dV = \int \operatorname{div} \mathfrak{D} dV,$$

wobei das Raumintegral über den ganzen Raum zu erstrecken ist. Andererseits gilt

$$Q = \oint \mathfrak{D} d\mathfrak{F},$$

wobei das Flächenintegral über die den Raumteil begrenzende Fläche zu bilden ist. Durch Vergleich dieser beiden Beziehungen ergibt sich der für beliebige Vektorfelder gültige Satz von Gauß

$$\int \operatorname{div} \mathfrak{A} dV = \oint \mathfrak{A} d\mathfrak{F}. \quad (350)$$

Der Begriff der Divergenz ist unabhängig von einem Koordinatensystem definiert. Es läßt sich jedoch die Divergenz durch räumliche Differentialquotienten ausdrücken, sobald man ein bestimmtes Koordinatensystem zugrundelegt. In kartesischen Koordinaten ist z. B., wenn unter  $\mathfrak{A}$  irgendein Flußvektor verstanden wird, unter  $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$  die Komponenten in der  $x, y$  und  $z$ -Richtung:

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}. \quad (351)$$

In Zylinderkoordinaten, Abb. 100, wird die Lage eines Punktes bestimmt durch den Abstand  $r$  von einer Achse, durch die Länge  $z$  dieser Achse von einem festen Punkt  $O$  bis zum Fußpunkt der Strecke  $r$  und durch den Winkel  $\alpha$ , den die Ebene  $zr$  mit einer festen Ausgangsebene bildet. Es gilt hier

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \mathfrak{A}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial \alpha}. \quad (352)$$

Diese Beziehungen werden abgeleitet, indem man die Definitionsgleichung (347) auf ein kleines Raumelement anwendet. Bei kartesischen Koordinaten ist das Raumelement ein Quader mit den Kanten  $dx, dy, dz$ . Auf den Seitenflächen des Quaders kann der Vektor  $\mathfrak{A}$  jeweils als konstant angesehen werden. Auf der Fläche  $dy, dz$  hat dieser Vektor daher eine Normalkomponente, die überall gleich groß ist und mit  $\mathfrak{A}_x$  bezeichnet werde. Je nachdem, ob  $\mathfrak{A}_x$  positiv oder negativ ist, tritt der Fluß durch das Flächenelement ein oder aus. Auf der gegenüberliegenden Fläche gleicher Größe hat die Normalkomponente den etwas verschiedenen Wert  $\mathfrak{A}_x + \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} dx$ . Der insgesamt durch beide einander gegenüberliegende Flächen austretende Fluß ist daher

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} dx dy dz.$$

Die gleiche Überlegung gilt auch für die anderen Seitenflächen. Das Produkt  $dx dy dz$  ist gleich dem Volumen des Quaders, so daß sich mit der Definitionsgleichung (347) die Formel (351) ergibt.

Bei Zylinderkoordinaten ist das Raumelement, Abb. 101, ebenfalls rechtwinklig; die Kanten sind  $dz, dr$  und  $r d\alpha$ . Der Beitrag des oberen und unteren Flächenelementes zum Ober-

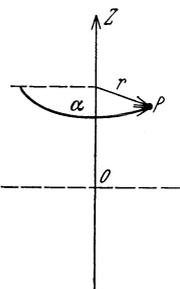


Abb. 100. Zylinderkoordinaten.

flächenintegral ist auf Grund der gleichen Überlegung wie vorhin

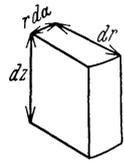
$$\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z} dz dr r d\alpha.$$

Der durch das innere der beiden zu  $r$  senkrechten Flächenelemente eintretende Fluß ist

$$\mathfrak{A}_r r d\alpha dz.$$

Durch das gegenüberliegende Flächenelement tritt der Fluß aus:

$$\mathfrak{A}_r r d\alpha dz + \frac{\partial(\mathfrak{A}_r r d\alpha dz)}{\partial r} dr.$$



Der aus beiden Flächenelementen insgesamt austretende Fluß ist also

$$\frac{\partial(r\mathfrak{A}_r)}{\partial r} d\alpha dz dr,$$

Abb. 101. Raumelement bei Zylinderkoordinaten.

und schließlich ergibt sich noch für den Beitrag der senkrecht zu  $r d\alpha$  liegenden Flächen

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial(r d\alpha)} r d\alpha dz dr.$$

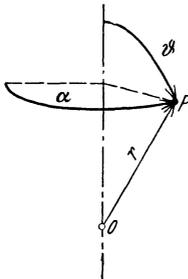
Die Summe der drei Flüsse, dividiert durch das Volumen des Quaders  $dz dr r d\alpha$  gibt die Divergenz.

Ähnlich findet man für Kugelkoordinaten, Abb. 102,

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \mathfrak{A}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left( \frac{\partial(\sin \vartheta \mathfrak{A}_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \mathfrak{A}_\alpha}{\partial \alpha} \right). \quad (353)$$

Drückt man im raumladungsfreien Feld  $\mathfrak{D}$  durch  $\mathfrak{E}$  aus, so folgt unter der Voraussetzung, daß die Elektrizierungszahl in dem betrachteten Raum eine Konstante ist,

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0.$$



Da die Feldstärke durch den Gradienten des Potentials bestimmt ist, erhält man hieraus

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0.$$

Für die aufeinander folgende Anwendung der beiden Operationen  $\operatorname{div}$  und  $\operatorname{grad}$  führt man als Abkürzung das Zeichen  $\Delta$  (Delta) ein; es ist also

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi \equiv \Delta \varphi = 0 \quad (354)$$

die Potentialgleichung für das raumladungsfreie Feld (Laplace, 1782); sie läßt sich in Form einer Differentialgleichung schreiben, wenn bestimmte Koordinaten zugrunde gelegt werden. In kartesischen Koordinaten ist z. B.

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \quad (355)$$

in Zylinder-Koordinaten

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \quad (356)$$

in Kugel-Koordinaten

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \right). \quad (357)$$

Zu diesen Ausdrücken gelangt man, wenn man zunächst das Symbol  $\operatorname{grad}$  in den betreffenden Koordinaten darstellt.  $\operatorname{grad} \varphi$  ist ein Vektor, dessen Betrag gleich der Zunahme von  $\varphi$  je Längeneinheit in der Richtung größter Zunahme ist. Zerlegt man diesen Vektor in die drei Komponenten in Richtung der Achsen, also bei kartesischen Koordinaten in die Komponenten  $\operatorname{grad}_x \varphi$ ,  $\operatorname{grad}_y \varphi$ ,  $\operatorname{grad}_z \varphi$ , Abb. 103, so gibt jede dieser Komponenten die Zunahme von  $\varphi$  für die Längeneinheit der betreffenden Achse an. Daher ist

$$|\operatorname{grad}_x \varphi| = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad |\operatorname{grad}_y \varphi| = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad |\operatorname{grad}_z \varphi| = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (358)$$

Aus der Definition von  $\Delta$  und mit Hilfe von Gl. (351) ergibt sich damit die Formel (355).

Bei Zylinderkoordinaten gilt ganz entsprechend:

$$|\operatorname{grad}_r \varphi| = \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad |\operatorname{grad}_z \varphi| = \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad |\operatorname{grad}_\alpha \varphi| = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}; \quad (359)$$

bei Kugelkoordinaten:

$$|\text{grad}_r \varphi| = \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad |\text{grad}_\vartheta \varphi| = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}; \quad |\text{grad}_\alpha \varphi| = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}. \quad (360)$$

grad und  $\Delta$  sind Operatoren, die auf skalare Größen angewendet werden, während sich die Divergenz auf Vektorfelder bezieht.

Mit der Potentialgleichung beschäftigen sich die mathematischen Methoden der Feldberechnung. Es ist eine außerordentlich allgemeine Differentialgleichung, die unendlich viele Lösungen besitzt. Um sie für irgendeinen bestimmten Fall zu integrieren, hat man eine solche Lösung zu suchen, die die Grenzbedingungen der betreffenden Aufgabe befriedigt. Im folgenden werden einige Beispiele betrachtet.

Das Feld von einfachster Form ist das eindimensionale Feld, bei dem die Feldgrößen sich nur nach einer Richtung hin im Raum ändern. Legt man die  $x$ -Achse in diese Richtung, so sind die Differentialquotienten nach der  $y$ - und  $z$ -Richtung Null und die Potentialgleichung lautet:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0. \quad (361)$$

Das allgemeine Integral ist

$$\varphi = k_1 + k_2 x$$

mit den zunächst unbestimmten Konstanten  $k_1$  und  $k_2$ . Die Feldstärke hat die  $x$ -Richtung, ihr Betrag ist

$$|\mathcal{E}| = k_2.$$

Die Niveaulächen  $\varphi = \text{konst}$  sind Ebenen senkrecht zur  $x$ -Achse. Es handelt sich also um das homogene Feld, wie wir es im Idealfall in einem ebenen Plattenkondensator finden.

Das zweidimensionale Feld, bei dem die Feldgrößen nach zwei Richtungen hin veränderlich sind, tritt in sehr großer Mannigfaltigkeit auf. Ein solches Feld liegt immer vor, wenn es sich um langgestreckte parallele Elektroden handelt, z. B. bei Leitungen. Die Potentialgleichung lautet hier:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (362)$$

Von den Lösungen dieser Gleichung läßt sich eine große Gruppe allgemein angeben. Es befriedigt nämlich jede beliebige Funktion der komplexen Größe  $\zeta = x + jy$  die Potentialgleichung;  $j = \sqrt{-1}$  bedeutet die Einheit der imaginären Zahlen. Ist  $f(x + jy)$  eine solche Funktion und bezeichnet man den zweiten Differentialquotienten nach  $x$  mit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(x + jy),$$

so ergibt sich durch zweimalige Differentiation nach  $y$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -f''(x + jy),$$

so daß die Summe der beiden Differentialquotienten 0 wird. Da nun eine Funktion einer komplexen Größe im allgemeinen selbst wieder eine komplexe Größe ist, so kann man schreiben:

$$f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y), \quad (363)$$

wobei  $u$  und  $v$  reelle Funktionen von  $x$  und  $y$  sind. Geht man nun mit diesem Ansatz in die Potentialgleichung ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + j \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Reeller und imaginärer Teil der linken Seite müssen für sich Null sein, so daß sowohl  $u$  als auch  $v$  mögliche Potentialfunktionen darstellen. Man erhält also mit jeder beliebigen Funktion  $f$  sogleich zwei Lösungen der Potentialgleichung.

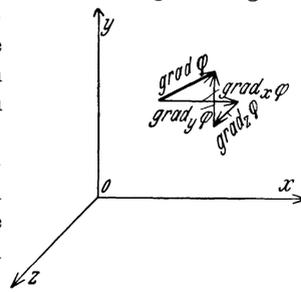


Abb. 103. Komponenten des Gradienten.

Es werde z. B. gesetzt; dann wird

$$f(x+jy)=(x+jy)^2$$

$$u=x^2-y^2; \quad v=2xy.$$

$u$  und  $v$  sind mögliche Potentialfunktionen. Die Kurven  $u=\text{konst}$  bilden gleichseitige Hyperbeln mit den Halbierungsgeraden der Quadranten als Asymptoten. Die Kurven  $v=\text{konst}$  sind gleichseitige Hyperbeln mit den Achsen als Asymptoten.

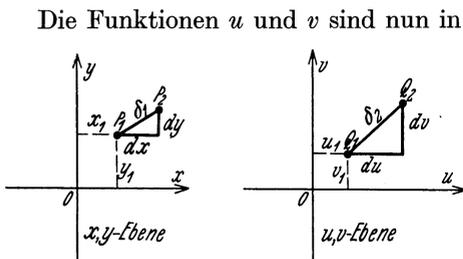


Abb. 104. Darstellung der komplexen Funktionen in der Zahlenebene.

Die Funktionen  $u$  und  $v$  sind nun in einer eigentümlichen Weise einander zugeordnet. Man erkennt diese Zuordnung, wenn man von der Darstellung der komplexen Größen in der Gaußschen Zahlenebene ausgeht. Zu jedem Wertepaar  $x, y$ , also zu jedem Punkt der  $x, y$ -Ebene, Abb. 104, liefert die Funktion  $f$  einen Punkt in der  $u, v$ -Ebene, wenn wir unsere Betrachtungen auf eindeutige Funktionen beschränken. Man kann also mit Hilfe der Funktion  $f$  die  $x, y$ -Ebene auf die  $u, v$ -Ebene

abbilden. Es läßt sich nun zeigen, daß diese Abbildung eine winkeltreue, d. h. in kleinsten Teilen ähnliche ist.

Wir gehen von einem Punkt  $P_1$  der  $x, y$ -Ebene aus nach einer beliebigen Richtung um ein sehr kleines Stück  $\delta_1 = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$  weiter zum Punkt  $P_2$ . Dem Punkt  $P_1$  mit den Koordinaten  $x_1, y_1$  entspricht in der  $u, v$ -Ebene der Punkt  $Q_1$  mit den Koordinaten  $u_1, v_1$ . Ebenso entspricht dem Punkt  $P_2$  der Punkt  $Q_2$ , und es gilt für den Abstand zwischen  $Q_1$  und  $Q_2$ :  $\delta_2 = \sqrt{(du)^2 + (dv)^2}$ .

Nun ist für Punkt  $Q_1$  (364)

$$u_1 + jv_1 = f(x_1 + jy_1),$$

für Punkt  $Q_2$

$$u_1 + jv_1 + du + jd v = f(x_1 + jy_1 + dx + jdy).$$

Durch Potenzreihenentwicklung der rechten Seite folgt hieraus:

$$u_1 + jv_1 + du + jd v = f(x_1 + jy_1) + (dx + jdy)f'(x_1 + jy_1),$$

und durch Zusammenfassung mit Gl. (364)

$$du + jd v = (dx + jdy)f'(x_1 + jy_1). \tag{365}$$

Bildet man auf beiden Seiten die absoluten Beträge und setzt zur Abkürzung

$$|f'(x_1 + jy_1)| = k_1,$$

so folgt

$$\delta_2 = k_1 \delta_1. \tag{366}$$

$k_1$  ist für den Punkt  $P_1$  eine Konstante, gleichgültig nach welcher Richtung man von  $P_1$  aus fortschreitet. Geht man nach zwei verschiedenen Richtungen um kleine Strecken weiter, so verhalten sich diese Strecken daher wie ihre Abbildungen in der  $u, v$ -Ebene. Wir zeichnen nun in der  $x, y$ -Ebene ein kleines Dreieck  $P_1 P_2 P_3$ , Abb. 105; dann stellt die Abbildung in der  $u, v$ -Ebene wieder ein Dreieck  $Q_1 Q_2 Q_3$  dar. Nun stimmen nach dem eben Gesagten die folgenden Streckenverhältnisse überein:

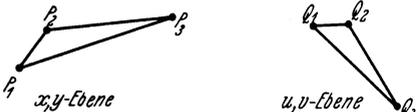


Abb. 105. Konforme Abbildung.

$$\frac{P_1 P_2}{P_1 P_3} = \frac{Q_1 Q_2}{Q_1 Q_3} \quad \text{und} \quad \frac{P_2 P_3}{P_2 P_1} = \frac{Q_2 Q_3}{Q_2 Q_1}.$$

Daraus geht hervor, daß die beiden Dreiecke einander ähnlich sind. Das gleiche gilt auch für beliebige andere, unendlich kleine Figuren. Die durch die Funktion  $f$  vermittelte Abbildung ist also eine in kleinsten Flächenteilen ähnliche Abbildung. Schneiden sich zwei Linien in der  $x, y$ -Ebene unter irgendeinem Winkel, so schneiden sich auch ihre Abbildungen in der  $u, v$ -Ebene unter dem gleichen Winkel. Wir denken

uns nun in der  $u, v$ -Ebene die zu den Achsen parallelen geraden Linien

$$u = \text{konst} \quad \text{und} \quad v = \text{konst}$$

gezogen. Diese geraden Linien stehen aufeinander senkrecht. Ihre Abbildungen in der  $x, y$ -Ebene sind irgendwelche Kurven, die aber nach dem oben Gesagten überall senkrecht aufeinander stehen. Wenn wir daher  $u$  als Potential betrachten, die Kurven  $u = \text{konst}$  in der  $x, y$ -Ebene entsprechend als Niveaulinien, so stehen die Kurvenscharen  $v = \text{konst}$  überall senkrecht auf den Niveaulinien, d. h. diese Kurvenscharen sind die Verschiebungslinien. Ebenso gilt das Umgekehrte. Stellt  $u$  bzw.  $v$  die Potentialfunktion dar, so ergeben sich die Gleichungen der Verschiebungslinien  $v = \text{konst}$  bzw.  $u = \text{konst}$ . Diese beiden Kurvenscharen sind orthogonal.

Fassen wir die Funktion  $u$  als Potentialfunktion auf, so gehört zu einer Vergrößerung von  $u$  um  $du$  eine bestimmte Strecke  $dn = dx + jdy$  in der  $x, y$ -Ebene, die die Richtung einer Verschiebungslinie hat, und es gilt nach Gl. (365)

$$\frac{du}{dn} = f'(x_1 + jy_1).$$

Bewegen wir uns andererseits vom gleichen Ausgangspunkt längs einer Niveaulinie um eine Strecke  $ds$ , so bleibt  $u$  konstant und es ändert sich  $v$  um einen Betrag  $dv$ . Die Strecke  $ds$  sei gegen  $dn$  um  $90^\circ$  links herum gedreht; wir setzen daher

$$ds = j(dx + jdy),$$

und es gilt nach Gl. (365)

$$dv = -ds f'(x_1 + jy_1), \quad \frac{dv}{ds} = -f'(x_1 + jy_1);$$

hieraus folgt

$$\frac{du}{dn} = -\frac{dv}{ds}.$$

Diese Beziehung gilt auch für irgendeinen Punkt  $P_1$  einer Leiteroberfläche, Abb. 106. Dort ist

$$\frac{du}{dn} = \frac{d\varphi}{dn} = |\mathcal{E}|.$$

Die Verschiebungsdichte hat daher auf der Leiteroberfläche den Betrag

$$|\mathcal{D}| = \varepsilon |\mathcal{E}| = \varepsilon \frac{d\varphi}{dn} = -\varepsilon \frac{dv}{ds}. \quad (367)$$

Daraus kann man den Verschiebungsfluß  $Q_{12}$  berechnen, der zwischen zwei Mantellinien des Leiters mit den Spuren  $P_1$  und  $P_2$  von der Leiteroberfläche ausgeht. Es ist für einen Abschnitt von der Länge  $l$

$$Q_{12} = l \int_{P_1}^{P_2} |\mathcal{D}| ds = -\varepsilon l \int_1^2 dv = \varepsilon l (v_1 - v_2). \quad (368)$$

Aus den Funktionswerten  $v_1$  und  $v_2$  in den beiden Punkten  $P_1$  und  $P_2$  läßt sich also sofort der Verschiebungsfluß finden.

Nur für wenige Fälle von Elektrodenanordnungen gibt es mathematische Verfahren, durch die zu der gegebenen Anordnung die Funktion  $f$  ermittelt werden kann. Der einfachere Weg zur Berechnung von Potentialfeldern ist der umgekehrte, nämlich irgendwelche Funktionen  $f$  anzunehmen und zu untersuchen, bei welchen Elektrodenformen diese Funktionen die Grenzbedingungen erfüllen. Im folgenden werden einige Beispiele dafür betrachtet.

### 1. Die Funktion $f(\zeta) = c\zeta^2$ .

Es wird

$$u = c(x^2 - y^2), \quad v = 2cxy.$$

Wählt man  $v$  als Potentialfunktion, so ergeben sich die Niveaulinien

$$xy = \text{konst}$$

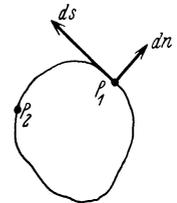


Abb. 106. Zur Berechnung des Verschiebungsflusses bei zylindrischen Elektroden.

als gleichseitige Hyperbeln, Abb. 107. Die Kurven  $u = \text{konst}$  stellen die Verschiebungslinien dar, es sind ebenfalls Hyperbeln, die auf der Schar der Niveaulinien überall senkrecht stehen. Das Feld in einem einspringenden rechten Winkel hat diese Form.

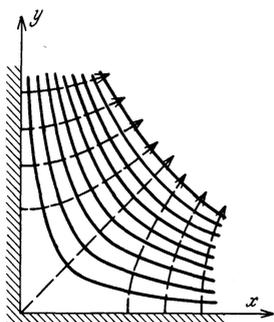


Abb. 107. Feld in einer einspringenden Ecke.

2. Die Funktion  $f(\zeta) = \frac{c}{\zeta}$ .

Es wird

$$f(\zeta) = \frac{c}{x+iy} = \frac{c(x-iy)}{x^2+y^2},$$

also

$$u = \frac{cx}{x^2+y^2}; \quad v = -\frac{cy}{x^2+y^2}.$$

Die Kurven  $u = \text{konst}$  und  $v = \text{konst}$  stellen Scharen von Kreisen dar, und zwar ergibt sich das Feldbild eines Linienipols (siehe Abschnitt 12).

Setzt man

3. Die Funktion  $f(\zeta) = c \ln \zeta$ .

$$\sqrt{x^2+y^2} = r \quad \text{und} \quad \alpha = \text{arctg} \frac{y}{x},$$

$$\zeta = r e^{j\alpha};$$

$$u = c \ln r; \quad v = c\alpha.$$

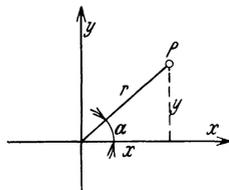


Abb. 108. Polarkoordinaten.

Abb. 108, so wird daraus folgt

Mit  $u = \varphi$  ergibt sich das Feld in der Umgebung einer Linienquelle; die Niveaulinien sind konzentrische Kreise, die Verschiebungslinien  $\alpha = \text{konst}$  sind Strahlen durch den Nullpunkt.

Das Feld zwischen zwei parallelen Linienquellen mit dem Abstand  $a$  und entgegengesetzt gleicher Ladung ergibt sich durch den Ansatz

$$f(\zeta) = c \ln \left( \zeta - \frac{a}{2} \right) - c \ln \left( \zeta + \frac{a}{2} \right). \tag{369}$$

Es ist in Abb. 75 dargestellt.

Setzt man umgekehrt  $v = \varphi$ , so erhält man das Feld in der Umgebung einer ebenen Metallplatte, die durch einen geradlinigen, unendlich dünnen Schnitt geteilt ist und deren beide Teile auf verschiedenen Potentialen stehen.

4. Die Funktion  $f(\zeta) = c_1 \Re \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \frac{\zeta}{c_2}$ .

Wir schreiben die Gleichung in der Form

$$\zeta = c_2 \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \frac{f}{c_1},$$

und benutzen die Formel

$$\mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} (a + jb) = \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} a \cos b + j \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} a \sin b;$$

dann ergibt sich

$$x = c_2 \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \frac{u}{c_1} \cos \frac{v}{c_1}; \quad y = c_2 \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \frac{u}{c_1} \sin \frac{v}{c_1}. \tag{370}$$

Eliminiert man hieraus  $v$  bzw.  $u$ , so erhält man die beiden Gleichungen

$$\frac{x^2}{c_2^2 \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f}^2 \frac{u}{c_1}} + \frac{y^2}{c_2^2 \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n}^2 \frac{u}{c_1}} = 1; \quad \frac{x^2}{c_2^2 \cos^2 \frac{v}{c_1}} - \frac{y^2}{c_2^2 \sin^2 \frac{v}{c_1}} = 1. \tag{371}$$

Die erste Gleichung stellt für  $u = \text{konst}$  Ellipsen dar, deren Mittelpunkte im Koordinatenanfangspunkt liegen und deren Halbachsen

$$a = c_2 \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{f} \frac{u}{c_1}, \quad b = c_2 \mathfrak{S} \mathfrak{I} \mathfrak{n} \frac{u}{c_1} \tag{372}$$

betragen. Der halbe Brennpuntsabstand einer jeden dieser Ellipsen ist daher

$$\sqrt{a^2 - b^2} = c_2. \quad (373)$$

Die Ellipsen haben gemeinsame Brennpunkte (konfokale Ellipsen).

Die zweite Gleichung liefert für  $v = \text{konst}$  eine Hyperbelschar mit den Halbachsen

$$a = c_2 \cos \frac{v}{c_1}; \quad b = c_2 \sin \frac{v}{c_1}. \quad (374)$$

Der halbe Brennpuntsabstand ist

$$\sqrt{a^2 + b^2} = c_2. \quad (375)$$

Die Hyperbeln haben die gleichen Brennpunkte wie die Ellipsen, Abb. 43.

Setzt man  $u = \varphi$ , so ergibt sich das Potentialfeld in der Umgebung eines elliptischen Zylinders; für  $v = \varphi$  erhält man das Feld zwischen zwei Zylindern mit hyperbolischer Spur.

Die Kapazität eines elliptischen Zylinderkondensators kann damit auf folgende Weise berechnet werden. Es seien die Halbachsen der beiden Zylinder  $a_1, b_1, a_2, b_2$ . Dann gilt nach Gl. (372) und (373) für das Potential auf dem ersten Zylinder

$$\varphi_1 = c_1 \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}},$$

auf dem zweiten Zylinder

$$\varphi_2 = c_1 \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 - b_2^2}}.$$

Es ist also die Spannung zwischen den beiden Zylindern

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = c_1 \left[ \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}} - \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 - b_2^2}} \right]. \quad (376)$$

Unter Benützung der Formel

$$\operatorname{Ar} \operatorname{Sin} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$$

ergibt sich hieraus

$$U = c_1 \ln \frac{a_1 + b_1}{a_2 + b_2}. \quad (377)$$

Zur Berechnung der Ladung des inneren Zylinders dient die Gl. (368). Es ist nach Gl. (370) auf der  $x$ -Achse  $v = v_1 = 0$ , auf der  $y$ -Achse  $v = v_2 = \frac{\pi}{2} c_1$ , also der in einem Quadranten vom inneren Zylinder ausgehende Verschiebungsfluß

$$Q_{12} = -\varepsilon l \frac{\pi}{2} c_1.$$

Der ganze Verschiebungsfluß ist daher

$$Q = -2\pi c_1 \varepsilon l,$$

und es ergibt sich die Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi \varepsilon l}{\ln \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1}}. \quad (378)$$

Der Kreiszyylinderkondensator stellt einen Grenzfall dar, in dem  $a_1 = b_1 = r_1$  und  $a_2 = b_2 = r_2$  wird.

Ein anderer Grenzfall ergibt sich, wenn die kurze Halbachse  $b$  der Ellipse unendlich klein wird; er liefert das Feld eines geladenen Blechstreifens von der Breite  $2c_2 = 2a$ .

Die elektrische Feldstärke des elliptischen Zylinders kann allgemein nach Gl. (367) berechnet werden. Für irgendeine elliptische Niveaulinie mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  ist nach Gl. (370) und (372)

$$x = a \cos \frac{v}{c_1}; \quad y = b \sin \frac{v}{c_1}.$$

Daraus folgt

$$dx = -\frac{a}{c_1} \sin \frac{v}{c_1} dv; \quad dy = \frac{b}{c_1} \cos \frac{v}{c_1} dv,$$

und es wird das Längenelement der Ellipse

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \frac{dv}{c_1} \sqrt{a^2 \sin^2 \frac{v}{c_1} + b^2 \cos^2 \frac{v}{c_1}};$$

also ist die elektrische Feldstärke nach Gl. (367)

$$|\mathcal{E}| = \frac{dv}{ds} = c_1 \left( a^2 \sin^2 \frac{v}{c_1} + b^2 \cos^2 \frac{v}{c_1} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (379)$$

Sie ist auf der Oberfläche des Zylinders ungleichmäßig verteilt und hat ihren größten Wert für  $v=0$ , also in der  $x$ -Achse, nämlich

$$|\mathcal{E}| = \frac{c_1}{b},$$

den kleinsten Wert für  $v = \frac{\pi c_1}{2}$ , also in der  $y$ -Achse:

$$|\mathcal{E}| = \frac{c_1}{a}.$$

Die Konstante  $c_1$  läßt sich bestimmen, sobald die Spannung zwischen den Elektroden gegeben ist, z. B. durch Gl. (377).

**Zahlenbeispiel:** In der Achse eines Hohlzylinders vom Radius  $r_0=5$  cm befinde sich ein dünner Blechstreifen von der Breite 2 cm. Wie groß ist die Kapazität zwischen Blechstreifen und Zylinder für 1 cm Länge?

Der Blechstreifen wird als elliptischer Zylinder mit den Halbachsen  $a_1=1$  cm und  $b_1=0$  aufgefaßt, der Brennpunktabstand ist dann  $2c_2=2$  cm. Eine Ellipse mit der großen Achse  $a_2=5$  cm und den gleichen Brennpunkten hat eine kleine Achse von  $b_2=\sqrt{5^2-1^2}$  cm = 4,9 cm; sie weicht also nur noch wenig von der Kreisform ab, und es ergibt sich eine gute Annäherung, wenn man den Kreiszyylinder durch einen elliptischen Zylinder mit  $a_2+b_2=2r_0=10$  cm ersetzt. Die Kapazität wird dann nach Gl. (378)

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln 10}, \quad \text{und es folgt} \quad \frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon_0}{2,30} = 0,242 \frac{\mu\mu\text{F}}{\text{cm}}.$$

Würde man den Blechstreifen durch einen Kreiszyylinder von gleicher Oberfläche ersetzen, also mit dem Radius 4 cm/2  $\pi$ , so würde man erhalten

$$\frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln 2,5\pi} = 0,270 \frac{\mu\mu\text{F}}{\text{cm}}.$$

### 5. Die Funktion $f(\zeta) = c_1 \ln(2 \sin c_2 \zeta)$ .

Mit Benützung der Beziehung

$$\sin c_2 \zeta = \sin c_2 (x + jy) = \sin c_2 x \mathfrak{C}o\{c_2 y\} + j \cos c_2 x \mathfrak{S}in c_2 y$$

ergibt sich

$$u = c_1 \ln 2 \sqrt{|\mathfrak{C}o\{c_2 y\}|^2 - \cos^2 c_2 x}; \quad v = c_1 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\mathfrak{I}g c_2 y}{\operatorname{tg} c_2 x}. \quad (380)$$

Für große Werte von  $y$  ist

$$\mathfrak{C}o\{c_2 y\} \approx \frac{1}{2} e^{c_2 y},$$

und es ist  $\cos^2 c_2 x$  gegen  $|\mathfrak{C}o\{c_2 y\}|^2$  zu vernachlässigen. Dann wird  $u = c_1 c_2 y$ . Fassen wir  $u$  als Potentialfunktion auf,  $u = \varphi$ , so geht demnach das durch  $f$  dargestellte Feld in großer Entfernung von der  $x$ -Achse in ein homogenes Feld über, dessen Feldlinien parallel zur  $y$ -Achse und dessen Niveaulinien parallel zur  $x$ -Achse verlaufen.

Andererseits lassen sich für sehr kleine  $x$  und  $y$  die Näherungsformeln

$$\mathfrak{C}o\{c_2 y\} = 1 + \frac{1}{2} (c_2 y)^2 \quad \text{und} \quad \cos c_2 x = 1 - \frac{1}{2} (c_2 x)^2$$

anwenden. Damit folgt

$$\varphi = c_1 \ln 2 c_2 \sqrt{x^2 + y^2} = c_1 \ln 2 c_2 r,$$

wenn mit  $r$  der Abstand des Aufpunktes vom Koordinatenanfangspunkt bezeichnet wird. Diese Beziehung zeigt, daß in der Nähe des Anfangspunktes das Potential in das einer Linienquelle übergeht.

Schließlich können wir noch eine dritte Feststellung machen, wenn wir

$$x = x' + k \frac{\pi}{c_2}$$

setzen, wobei  $k$  eine ganze Zahl bedeuten soll. Mit diesem Ansatz geht die Formel für das Potential in sich selbst über, d. h. das Feld ist in der  $x$ -Achse periodisch mit der Periode  $\pi/c_2$ ; es ist das Feld eines Gitters paralleler Linienquellen. Die

Linienquellen haben den Abstand  $a = \frac{\pi}{c_2}$ ; sie

befinden sich in der  $x$ -Achse und haben alle die gleiche Ladung, die sich durch die Konstante  $c_1$  ausdrücken läßt. Wir benützen nun die dadurch bestimmte Potentialfunktion zur Berechnung der Schirmwirkung eines Gitters aus parallelen Drähten, Abb. 109, das mit dem Abstand  $h$  parallel zu einer leitenden Ebene liegt. Legen wir die  $x$ -Achse in diese Ebene, so lautet die Potentialfunktion für das Gitter

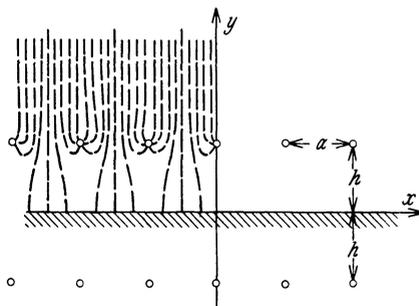


Abb. 109. Schirmgitter.

$$\varphi = c_1 \ln 2 \sqrt{\mathfrak{E}_0^2 c_2 (y-h) - \cos^2 c_2 x}. \quad (381)$$

Damit das Potential auf der leitenden Ebene Null wird, muß im Abstand  $y = -h$  ein Spiegelbild des ersten Gitters mit entgegengesetzt gleicher Ladung angebracht werden. Das Potential beider Gitter wird daher

$$\varphi_g = c_1 \ln 2 \sqrt{\mathfrak{E}_0^2 c_2 (y-h) - \cos^2 c_2 x} - c_1 \ln 2 \sqrt{\mathfrak{E}_0^2 c_2 (y+h) - \cos^2 c_2 x}.$$

Unter Einführung von  $a = \frac{\pi}{c_2}$  kann man schließlich hierfür schreiben

$$\varphi_g = \frac{c_1}{2} \ln \frac{\mathfrak{E}_0^2 \frac{\pi}{a} (y-h) - \cos^2 \frac{\pi}{a} x}{\mathfrak{E}_0^2 \frac{\pi}{a} (y+h) - \cos^2 \frac{\pi}{a} x}. \quad (382)$$

In großem Abstand von der  $x$ -Achse wird dieser Ausdruck Null. Wenn daher die Feldstärke des homogenen Feldes dort einen bestimmten Wert  $\mathfrak{E}_0$  haben soll, so muß man noch das Potential des entsprechenden homogenen Feldes hinzufügen. Legen wir den Nullpunkt in die leitende Ebene, so hat das Zusatzpotential die Größe

$$\varphi_0 = |\mathfrak{E}_0| y. \quad (383)$$

Damit wird schließlich das gesuchte Potential

$$\varphi = \varphi_g + \varphi_0. \quad (384)$$

Die Konstante  $c_1$  hängt von der Vorschrift ab, die wir bezüglich des Potentials des Gitters machen. Es kann z. B. der folgende Fall auf diese Weise untersucht werden. Die leitende Ebene stelle eine geerdete Wand in einem Hochspannungsraum dar. Das Drahtgitter sei ebenfalls geerdet und zu dem Zweck angebracht, den Raum zwischen Gitter und Wand vor dem elektrischen Feld abzuschirmen. Auf der Oberfläche der Drähte des Gitters muß dann ebenfalls  $\varphi = 0$  sein. Dies liefert, unter der Voraussetzung, daß es sich um im Vergleich zu  $a$  und  $h$  sehr dünne Drähte mit dem Radius  $r_0$  handelt,

$$0 = |\mathfrak{E}_0| h + \frac{c_1}{2} \ln \frac{\frac{\pi^2}{a^2} r_0^2}{\mathfrak{E}_0^2 2 \frac{\pi}{a} h - 1},$$

oder

$$c_1 = |\mathfrak{E}_0| \frac{h}{\ln \mathfrak{E}_0 \ln 2 \pi \frac{h}{a} - \ln \pi \frac{r_0}{a}}. \quad (385)$$

Der Verlauf der Feldlinien ist in Abb. 109 links dargestellt. Das abzuschirmende

Feld greift zum Teil durch die Stäbe des Gitters hindurch. Die größte Dichte der hindurchgreifenden Verschiebungslinien ergibt sich jeweils in der Mitte zwischen zwei Stäben des Gitters. Dort ist zu setzen

$$x = \frac{a}{2} + ka, \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

so daß das Potential längs dieser Verschiebungslinien

$$\varphi = |\mathfrak{E}_0|y + |\mathfrak{E}_0|h \frac{\ln \mathfrak{C}o\left|\frac{\pi}{a}(y-h)\right| - \ln \mathfrak{C}o\left|\frac{\pi}{a}(y+h)\right|}{\ln \mathfrak{S}in\frac{2\pi}{a}h - \ln \pi \frac{r_0}{a}}$$

wird. Für die Feldstärke ergibt sich hieraus

$$|\mathfrak{E}| = |\mathfrak{E}_0| + |\mathfrak{E}_0|\pi \frac{h}{a} \frac{\mathfrak{I}g\frac{\pi}{a}(y-h) - \mathfrak{I}g\frac{\pi}{a}(y+h)}{\ln \mathfrak{S}in\frac{2\pi}{a}h - \ln \pi \frac{r_0}{a}}. \quad (386)$$

Sie wird am größten in der Höhe des Gitters,  $y=h$ , und am kleinsten an der leitenden Wand,  $y=0$ . Die beiden Werte der Feldstärke seien dort  $|\mathfrak{E}_1|$  und  $|\mathfrak{E}_2|$ . Wäre das Gitter nicht vorhanden, so wäre

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_0.$$

Man kann daher das Verhältnis der Feldstärken  $\mathfrak{E}_1$  und  $\mathfrak{E}_2$  zur Feldstärke  $\mathfrak{E}_0$  im homogenen Feld als ein Maß für die Schutzwirkung des Gitters ansehen. Dieses Verhältnis ist

$$\eta_1 = \frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{E}_0} = 1 - \pi \frac{h}{a} \frac{\mathfrak{I}g\frac{2\pi}{a}h}{\ln \mathfrak{S}in\frac{2\pi}{a}h + \ln \frac{a}{\pi r_0}}; \quad (387)$$

bzw.

$$\eta_2 = \frac{\mathfrak{E}_2}{\mathfrak{E}_0} = 1 - \pi \frac{h}{a} \frac{2\mathfrak{I}g\pi \frac{h}{a}}{\ln \mathfrak{S}in\frac{2\pi}{a}h + \ln \frac{a}{\pi r_0}}. \quad (388)$$

Die hier vorkommenden hyperbolischen Funktionen kann man entweder aus Tabellen entnehmen oder nach den Definitionsformeln

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}in x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}); \\ \mathfrak{C}o|x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}); \\ \mathfrak{I}g x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{aligned}$$

berechnen; sie sind in Abb. 110 graphisch dargestellt.

Gewöhnlich wird der Abstand des Gitters von der Wand groß gegen die Gitteröffnung  $a$  sein. Dann kann man näherungsweise schreiben

$$\mathfrak{I}g x = 1; \quad \mathfrak{S}in x = \frac{1}{2}e^x;$$

und es ergibt sich

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{a}{2\pi h} \ln \frac{a}{2\pi r_0} \right); \quad (389)$$

$$\eta_2 = \frac{a}{2\pi h} \ln \frac{a}{2\pi r_0}, \quad (a > 2\pi r_0). \quad (390)$$

Die Feldstärke an der Wand wird also um so kleiner, je kleiner man den Drahtabstand gegenüber dem Abstand zwischen Gitter und Wand macht. Dagegen nähert sich die Feldstärke in der Gitterebene bei Verkleinerung des Drahtabstandes dem Werte  $\frac{1}{2}|\mathfrak{E}_0|$ . Außerdem kann die Feldstärke größere Werte in unmittelbarer Nähe der Drähte selbst annehmen. Die Schutzwirkung ist also auf einen Raum beschränkt, der nicht ganz an das Gitter selbst heranreicht.

Im Falle des dreidimensionalen Feldes läßt sich eine derartig allgemeine Lösung der Potentialgleichung, wie es die komplexen Funktionen im zweidimensio-

nenen Falle sind, nicht angeben. Die Berechnung von dreidimensionalen Feldern ist im allgemeinen mathematisch schwierig. Wir betrachten hier nur ein besonders einfaches Beispiel eines Feldes, das symmetrisch zu einer Achse ist (rotations-symmetrisches Feld).

Die Potentialgleichung ist eine lineare Differentialgleichung. Wenn daher  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  Lösungen dieser Gleichung sind, so ist auch  $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$  eine Lösung. Mit Hilfe dieses Satzes kann man aus bekannten Lösungen Potentialfunktionen für neue Felder zusammensetzen. Aus der Formel (218), Abschnitt 12, geht z. B. hervor, daß

$$\varphi_1 = r \cos \alpha \quad \text{und} \quad \varphi_2 = \frac{\cos \alpha}{r^2}$$

Lösungen der Potentialgleichungen sein müssen, wenn  $r$  den Abstand des Aufpunktes von einem festen Punkt und  $\alpha$  den Winkel des Strahles  $r$  gegen eine feste Achse durch diesen Punkt bezeichnen (Kugelkoordinaten). Daher ist auch

$$\varphi = \left( c_1 r - \frac{c_2}{r^2} \right) \cos \alpha \tag{391}$$

eine Lösung der Potentialgleichung. Für sehr große Abstände  $r$  überwiegt der erste Summand, der ein homogenes Feld mit Niveauflächen senkrecht zur Achse darstellt. Wir benutzen nun diese Lösung der Potentialgleichung zur Berechnung des Feldes im Inneren und in der Umgebung einer isolierenden Kugel, Abb. 111, die in ein ursprünglich homogenes elektrisches Feld gebracht wird; die Elektrizierungszahl der Kugel sei  $\epsilon_1$ , die des übrigen Raumes  $\epsilon_2$ . Wir machen dann für die beiden Räume folgende Ansätze:

im Inneren der Kugel  $\varphi_1 = \left( c_{11} r - \frac{c_{21}}{r^2} \right) \cos \alpha, \tag{392}$

im Außenraum  $\varphi_2 = \left( c_{12} r - \frac{c_{22}}{r^2} \right) \cos \alpha, \tag{393}$

und untersuchen, ob mit diesen Ansätzen die Grenzbedingungen erfüllt werden können. Nach diesen sollen die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke und die Normalkomponenten der Verschiebungsdichte an den Grenzflächen stetig sein. Es soll also für  $r = r_1$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha} \quad \text{und} \quad \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}$$

sein. Außerdem soll für große Abstände  $r$  die Feldstärke den vorgegebenen Wert  $\mathfrak{E}_0$  des ursprünglichen homogenen Feldes haben. Für  $r = \infty, \alpha = 0$  ist

$$|\mathfrak{E}| = \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = c_{12} \quad \text{also} \quad c_{12} = |\mathfrak{E}_0|.$$

Ferner muß im Inneren der Kugel das Potential endlich bleiben, also  $c_{21} = 0$  sein. Durch diese vier Bedingungen sind die vier Konstanten bestimmt und es ergibt sich

$$\varphi_1 = |\mathfrak{E}_0| \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} r \cos \alpha; \tag{394}$$

$$\varphi_2 = |\mathfrak{E}_0| \left( r - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} \frac{r_1^3}{r^2} \right) \cos \alpha. \tag{395}$$

Die beiden Ansätze genügen der Potentialgleichung, sie erfüllen ferner die Grenzbedingungen, stellen also das gesuchte Potential dar. Im Inneren der Kugel ist das Feld homogen, die Feldstärke hat dort den Wert

$$|\mathfrak{E}_1| = |\mathfrak{E}_0| \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}; \tag{396}$$

sie ist größer als die Feldstärke des ursprünglichen Feldes, wenn  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ , kann jedoch

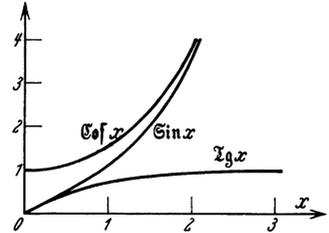


Abb. 110. Die Hyperbelfunktionen.

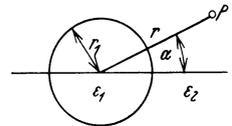


Abb. 111. Zur Berechnung der Störung eines homogenen Feldes durch eine isolierende Kugel.

höchstens 1,5 mal so groß werden. Hat dagegen die Kugel die höhere Elektrizierungs-  
zahl, so ist das Feld im Inneren der Kugel schwächer als außen. Die Feldstärke hat  
im Außenraum ihre größten Werte in der Achse an der Kugeloberfläche. Es ist  
dort

$$|\mathfrak{E}_2| = \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right|_{r_1} = |\mathfrak{E}_0| \frac{3 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2 \varepsilon_2}. \quad (397)$$

Diese Feldstärke kann dreimal so groß werden wie die des homogenen Feldes, wenn  
 $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$ . Auch nichtleitende Einschlüsse in Isolierstoffen können also zu einer ört-  
lichen Vergrößerung der Feldstärke und damit zu einer höheren elektrischen  
Beanspruchung des Isolierstoffes führen.

Mit den gleichen Ansätzen kann man auch die Störung eines homogenen Feldes  
untersuchen, die sich ergibt, wenn eine isolierende Hohlkugel, z. B. eine dünnwandige  
Glaskugel, in das Feld gebracht wird.

In diesem Abschnitt sind nur die einfachsten Methoden der Berechnung von  
elektrostatischen Feldern beschrieben worden; allgemeine Methoden zur Lösung der  
Potentialgleichung finden sich in der mathematisch-physikalischen Literatur.

## 16. Raumladungsfelder.

Bei der Ableitung der Potentialgleichung wurde vorausgesetzt, daß im Nicht-  
leiter selbst keine Ladungen verteilt sind, daß also die Raumladungsdichte Null  
ist. Wenn nicht fortgesetzt Ionen gebildet werden, so ist dies in gasförmigen Stoffen  
immer der Fall; denn die Kräfte, die auf freie Ladungen im elektrischen Feld ein-  
wirken, sorgen dafür, daß ein Ausgleich der Ladungen eintritt. Würden sich aus  
irgendeinem Grund z. B. positive Ionen vorfinden, so würden diese Ionen durch die  
Feldkräfte entlang dem Potentialgefälle zu einer Elektrode getrieben werden. Nach  
hinreichend langer Zeit werden sämtliche Ionen aus dem Nichtleiter beseitigt sein.  
Raumladungen können in gasförmigen Stoffen nur bestehen, wenn dauernd ein  
Nachschub neuer Ionen erfolgt, wenn „Ionenquellen“ vorhanden sind. Dann ergibt  
sich bei konstanten Spannungen ein stationäres Strömungsfeld. Da es sich im all-  
gemeinen Falle um den Transport von positiven und negativen Ionen handelt, so  
kann auch die Raumladung positiv oder negativ sein, je nachdem, welche Ionenart  
überwiegt. Die Raumladungsdichte ist um so größer, je größer die Stromdichte und je  
kleiner die Geschwindigkeit der Ionen ist. Ruhende Raumladungen können in  
festen Nichtleitern auftreten, wenn Beimengungen in feiner Verteilung vorhanden  
sind, in denen Ionenbildung entsteht (z. B. Feuchtigkeit). Wenn dann nur die  
Ionen mit kleinerer räumlicher Ausdehnung (z. B. Elektronen) abfließen können,  
so bleiben an den Grenzflächen der Beimengungen Ionen eines Vorzeichens im Über-  
schuß zurück und bilden eine Raumladung.

Raumladungen spielen insbesondere bei der Elektrizitätsleitung in Gasen eine  
Rolle (siehe Abschnitt 20). Der elektrische Strom wird bei Gasentladungen durch  
Ionen beider Vorzeichen und Elektronen gebildet. Die positiven und negativen  
Ladungen wandern in entgegengesetzter Richtung durch das Gas hindurch, haben  
jedoch im allgemeinen verschiedene Geschwindigkeit und verschiedene Dichte, so  
daß in der Volumeneinheit ein Überschuß von Ionen eines Vorzeichens vorhanden  
sein kann.

Um den Einfluß von Raumladungen auf das elektrische Feld zu untersuchen, denkt  
man sich die Elektrizitätsmengen unendlich fein verteilt. Das ist zulässig, da die  
Ionen oder Elektronen, wenn sie überhaupt merklich in Erscheinung treten, immer  
in so großer Zahl vorhanden sind, daß auch verhältnismäßig sehr kleine Ausschnitte  
des Feldes noch eine große Anzahl davon enthalten.

Nach Abschnitt 15 ist dann

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \rho.$$

Dies liefert mit  $\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{E} = -\text{grad } \varphi$   
die Raumladungsgleichung (Poissonsche Gleichung)

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad (398)$$

Da auf den Ladungen Verschiebungslinien entspringen oder endigen, so spannen sich zwischen den im Dielektrikum verteilten Ladungen und den entgegengesetzt geladenen Elektroden zusätzliche Verschiebungslinien aus. Die Raumladung bewirkt daher, daß das elektrische Feld an den Elektroden entgegengesetzter Ladung verdichtet, an den anderen geschwächt wird; die Raumladung schirmt die Elektroden gleichen Vorzeichens ab.

Als Beispiel eines Raumladungsfeldes werde das elektrische Feld im Innern einer Elektronenröhre betrachtet. In den Elektronenröhren wird die Elektronenemission glühender Leiter ausgenützt. Im Innern der Leiter bewegen sich die freien Elektronen ungeordnet mit allen möglichen Geschwindigkeiten. Am häufigsten sind die kleinsten Geschwindigkeiten; es gilt wie für die Moleküle eines idealen Gases die Maxwell'sche Verteilung der Geschwindigkeiten, die dem Gauß'schen Fehlergesetz gehorcht, also einer „zufälligen Verteilung“ entspricht. Danach ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Elektron eine Geschwindigkeit  $v$  besitzt

$$w = ce^{-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2}, \quad (399)$$

wobei  $v_0$  eine mittlere Geschwindigkeit der Elektronen darstellt. Obwohl danach jede beliebige Geschwindigkeit eine gewisse Wahrscheinlichkeit hat, liegen die wirklich vorkommenden Geschwindigkeiten wegen der raschen Abnahme der Wahrscheinlichkeit mit wachsender Geschwindigkeit in einem verhältnismäßig engen Bereich. Die Wahrscheinlichkeit, daß Elektronen Geschwindigkeiten haben, die mehr als viermal so groß sind wie die mittlere Geschwindigkeit  $v_0$ , beträgt z. B. nach Gl. (399) nur noch ein Zehnmillionstel der Wahrscheinlichkeit kleiner Geschwindigkeiten, so daß sich nahezu alle Elektronen mit Geschwindigkeiten zwischen 0 und  $4 v_0$  bewegen.

Die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen  $v_0$  hängt nur von der Temperatur ab, und zwar wird sie doppelt so groß, wenn die absolute Temperatur des betreffenden Leiters auf das Vierfache erhöht wird; die kinetische Energie  $\frac{1}{2} m v^2$  der Leitungselektronen ist proportional der absoluten Temperatur. Infolge ihrer kinetischen Energie fliegen die Elektronen an den Außenflächen des Leiters etwas aus dem Leiter hinaus, wenn sich der Leiter im leeren Raum befindet. Dabei treten jedoch elektrische Feldkräfte auf, die die Elektronen wieder zurückholen. Denkt man sich die Oberfläche des Leiters als glatte Wand, so läßt sich das elektrische Feld zwischen der Wand und einem aus dem Leiter herausgeflogenen Elektron finden, wenn das Spiegelbild des Elektrons hinzugenommen wird, Abb. 112. Ist  $e$  die negative Ladung des Elektrons, so muß die positive Ladung des Spiegelbildes ebenfalls gleich  $e$  gesetzt werden. Die von dem Körper auf das Elektron ausgeübte Kraft kann man so deuten als Anziehungskraft zwischen den beiden Ladungen  $+e$  und  $-e$ , die den Abstand  $2x$  voneinander haben; man nennt daher diese Kraft die Bildkraft. Sie hat nach dem Coulombschen Gesetz die Größe

$$|\mathfrak{P}| = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 x^2}. \quad (400)$$

Man kann sie zurückführen auf ein gedachtes elektrisches Feld außerhalb des Leiters; für die Feldstärke dieses Feldes muß die Beziehung gelten:

$$|\mathfrak{E}| = \frac{|\mathfrak{P}|}{e} = \frac{e}{16\pi\epsilon_0 x^2}.$$

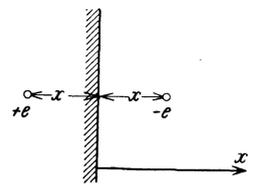


Abb. 112. Entstehung der Bildkraft.

Daraus folgt:

$$\varphi_x = \int_x^\infty |\mathcal{E}| dx = \frac{e}{16\pi\epsilon_0 x}. \tag{401}$$

Das Potential nimmt also umgekehrt proportional mit dem Abstand von der Leiteroberfläche ab, und zwar gilt dies bei Abständen, die man als groß gegen den Abstand der Atome ansehen kann; das sind etwa Abstände über  $10^{-7}$  cm. Bei noch kleineren Abständen nähert sich das Potential  $\varphi$  entgegen Formel (401) einem konstanten Wert  $\varphi_0$ , Abb. 113, da die Elektronen durch Zwischenräume zwischen den Atomen hindurchfliegen. Ein Elektron kann also den Leiter nur verlassen, wenn es ein ganz bestimmtes Potentialgefälle  $\varphi_0$  überwindet. Dazu gehört nach Abschnitt 14 die Arbeit

$$A = e\varphi_0.$$

Abb. 113. Austrittspotential.

Man bezeichnet diese Arbeit als Austrittsarbeit und verwendet als Maß für diese Arbeit das Potential  $\varphi_0$ . Im folgenden sind die Austrittspotentiale für einige Stoffe angegeben:

Platin . . . . .	$\varphi_0 = 4,4 \dots 6,9$ V,	Eisen . . . . .	$\varphi_0 = 3,2$ V,
Wolfram . . . . .	$\varphi_0 = 4,6$ V,	Kalzium . . . . .	$\varphi_0 = 3,2$ V,
Tantal . . . . .	$\varphi_0 = 4,2$ V,	Natrium . . . . .	$\varphi_0 = 2,7$ V,
Kohlenstoff . . . . .	$\varphi_0 = 4,2$ V,	Calciumoxyd . . . . .	$\varphi_0 = 0,6 \dots 1,7$ V.
Thorium . . . . .	$\varphi_0 = 3,3$ V,		

Ist die kinetische Energie des Elektrons größer als die Austrittsarbeit, dann fliegt es vollständig aus dem Leiter heraus. Die Bedingung dafür ist also

$$\frac{1}{2} m v^2 > e\varphi_0.$$

Steigert man daher die Temperatur des Leiters, so wird ein immer größerer Teil der Leitungselektronen befähigt, die Austrittsarbeit zu überwinden. Die Elektronentheorie benutzt die Analogie der hier auftretenden Erscheinungen mit dem Verdampfen einer Flüssigkeit oder eines festen Stoffes; sie liefert auf Grund thermodynamischer Betrachtungen für die in der Zeiteinheit aus der Einheit der Oberfläche eines Körpers von der absoluten Temperatur  $T$  austretende Elektrizitätsmenge (Stromdichte) die Beziehung

$$|\mathcal{G}_s| = AT^2 e^{-\frac{b}{T}}. \tag{402}$$

$A$  ist eine universelle Konstante, die bei Metallen den Wert hat

$$A = 60,2 \frac{\text{A}}{\text{cm}^2 \text{Grad}^2}. \tag{403}$$

Die Konstante  $b$  hängt von der Austrittsarbeit ab und hat die Größe

$$b = \frac{e\varphi_0}{R}, \tag{404}$$

wobei  $R$  die absolute Gaskonstante bezeichnet:

$$R = 1,37 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Ws}}{\text{Grad}}. \tag{405}$$

Bei Wolfram ergibt sich experimentell  $b = 52600^{\circ}$ , bei Thorium  $b = 38000^{\circ}$ .

In Abb. 114 ist die Stromdichte  $|\mathcal{G}_s|$  in Abhängigkeit von der absoluten Temperatur für einige Stoffe dargestellt. Sie steigt mit der Temperatur sehr rasch an, so daß man, um große Ausbeute zu bekommen, möglichst hohe Temperaturen wählt, soweit es die Anforderungen an die Lebensdauer zulassen.

Befindet sich der glühende, Elektronen aussendende Leiter in einem luftleer gemachten Gefäß und hält man zwischen ihm und einer anderen kalten Elektrode

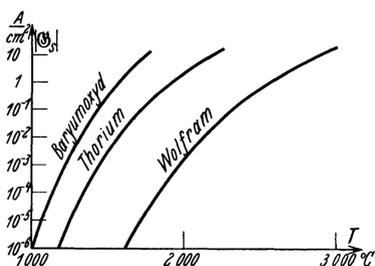


Abb. 114. Elektronenemission verschiedener Stoffe in Abhängigkeit von der absoluten Temperatur.

ein Potentialgefälle aufrecht, das die aus dem Leiter austretenden Elektronen von dem Leiter wegführt, so ergibt sich ein Elektronenstrom zwischen der glühenden und der kalten Elektrode. Würden alle Elektronen weggeführt werden, die die Austrittsarbeit überwinden, so würde die Dichte dieses Elektronenstromes an der emittierenden Elektrode gerade gleich  $|\mathcal{G}_s|$  sein. Es zeigt sich nun, daß dies erst bei ziemlich hohen Potentialunterschieden zwischen der glühenden und der kalten Elektrode eintritt. Bei niedrigeren Spannungen ergibt sich nur ein Bruchteil des „Sättigungsstromes“. Die Ursache dafür liegt in der Raumladung, die die von der glühenden Elektrode ausgehenden Elektronen in deren Umgebung bilden; diese Raumladung schirmt die glühende Elektrode ab.

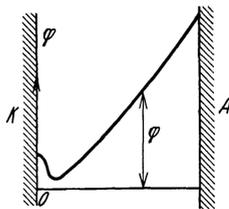


Abb. 115. Potential zwischen einer glühenden Kathode und einer kalten Anode.

Die Potentialverteilung zwischen den beiden Elektroden ist durch Abb. 115 veranschaulicht. Die kalte Elektrode oder Anode A hat gegen die Glühelektrode oder Kathode K ein positives Potential. Dem dadurch entstehenden elektrischen Feld überlagert sich das dem Elektronenaustritt entgegenstehende innere Feld. In einem bestimmten sehr kleinen Abstand von der Kathode ergibt sich daher ein Potentialminimum. Die Elektronen müssen mit ihrer kinetischen Energie das Potentialgefälle innerhalb des dadurch gegebenen Raumes vor der Kathode überwinden. Außerhalb dieses Raumes bewirken die Kräfte des äußeren Feldes, daß die Elektronen zur Anode wandern. Da das innere Potentialgefälle sich im wesentlichen auf einen so kleinen Abstand von der Kathode beschränkt, daß die Austrittsarbeit durch das äußere Feld nur wenig beeinflußt wird, so ist für den im Gleichgewichtszustand entstehenden Elektronenstrom in der Hauptsache das äußere Feld maßgebend. Wir beschränken daher die folgenden Betrachtungen auf dieses äußere Feld, das nach dem Ausgeführten ein Raumladungsfeld ist.

Es werde die in Abb. 116 skizzierte, häufig angewendete zylindrische Anordnung zugrunde gelegt. Der Glühfaden befindet sich in der Achse des Anodenzylinders. Er wird durch den Strom aus einer Batterie B geheizt. Die Batterie A hält zwischen Anode und Kathode eine bestimmte Spannung  $U_0$  aufrecht. Der Elektronenstrom setzt sich im äußeren Stromkreis mit der Stärke  $I$  fort. Die Länge  $l$  des Zylinders sei groß gegen den Durchmesser, so daß die Randwirkungen vernachlässigt werden können. Das elektrische Feld zwischen Kathode und Anode ist rotationssymmetrisch; die Feldgrößen hängen nur von dem Abstand  $r$  des Aufpunktes von der Achse ab. Die Raumladungsgleichung lautet daher gemäß Gl. (356)

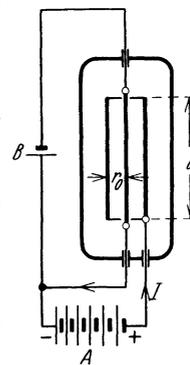


Abb. 116. Elektronenröhre.

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = -\frac{\rho}{\epsilon}. \tag{406}$$

Wir nehmen dazu noch die Gleichung

$$\rho = -\frac{|\mathcal{G}|}{v} = -\frac{I}{2\pi l r v}, \tag{407}$$

in der  $v$  die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen an irgendeiner Stelle des Feldes bezeichnet, sowie die Bewegungsgleichung für die Elektronen

$$\frac{1}{2} m v^2 = e\varphi, \tag{408}$$

die aussagt, daß die kinetische Energie, die die Elektronen beim Durchlaufen des Potentialunterschiedes  $\varphi$  annehmen, gleich der vom elektrischen Feld geleisteten Arbeit ist. Das Potential am Glühdraht setzen wir Null.

Aus Gl. (408) folgt

$$v = \sqrt{\frac{2e\varphi}{m}}. \tag{409}$$

Auf Grund dieses Zusammenhanges gibt man die Geschwindigkeit der Elektronen häufig in Volt an. Eine Elektronengeschwindigkeit von 1000 V bedeutet also, daß das Elektron gegen eine Potentialdifferenz von 1000 V anlaufen kann, bis es zum Stillstand kommt; die entsprechende Geschwindigkeit ist

$$v = \sqrt{\frac{2e\varphi}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,59 \cdot 10^{-19} \cdot 1000 \text{ AsV}}{9 \cdot 10^{-28} \text{ g}}} = \sqrt{3,54 \cdot 10^{11} \cdot 981 \frac{\text{Ws cm}}{\text{Gr s}^2}}$$

$$= \sqrt{3,48 \cdot 10^{14} \cdot 10200 \frac{\text{Gr cm}^2}{\text{Gr s}^2}} = 18800 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Mit Gl. (409) ergibt sich aus Gl. (407)

$$\varrho = \frac{-I\sqrt{m}}{2\pi l r \sqrt{2e\varphi}}. \quad (410)$$

In Gl. (406) eingesetzt, ergibt dies

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = \frac{c_1}{r\sqrt{\varphi}}, \quad (411)$$

wobei

$$c_1 = \frac{I\sqrt{m}}{2\pi l \varepsilon_0 \sqrt{2e}}. \quad (412)$$

Zur Lösung der Differentialgleichung werde der Ansatz gemacht

$$\varphi = c_2 r^n. \quad (413)$$

Damit wird

$$n(n-1)c_2 r^{n-2} + c_2 n r^{n-2} = \frac{c_1}{\sqrt{c_2}} r^{-1-\frac{n}{2}},$$

und es folgt aus dieser Bestimmungsgleichung für  $n$  und  $c_2$ :

$$n = \frac{2}{3}, \quad c_2^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = c_1. \quad (414)$$

An der Anode soll  $\varphi = U_0$  sein, also nach Gl. (413)

$$c_2 = U_0 r_0^{-\frac{2}{3}}. \quad (415)$$

Dies ergibt mit Gl. (414)

$$c_1 = \frac{4}{9} U_0^{\frac{3}{2}} r_0^{-1}, \quad (416)$$

und mit Gl. (412)

$$I = \frac{8\pi\sqrt{2}}{9} \sqrt{\frac{e}{m}} \varepsilon_0 \frac{l}{r_0} U_0^{\frac{3}{2}}. \quad (417)$$

Man kann dies in der Form schreiben

$$I = k U_0^{\frac{3}{2}}, \quad (418)$$

wobei sich für die Konstante  $k$

$$k = 1,47 \cdot 10^{-5} \frac{l}{r_0} \frac{\text{A}}{\text{V}^{\frac{3}{2}}} \quad (419)$$

ergibt.

Der Elektronenstrom befolgt also nicht das Ohmsche Gesetz. Seine Abhängigkeit von der Spannung ist durch Abb. 117 veranschaulicht. Von dieser sogenannten Raumladecharakteristik wird bei den Anwendungen der Elektronenröhre Gebrauch gemacht. Wesentlich ist dabei, daß wegen der geringen Trägheit der Elektronen der gleiche Zusammenhang zwischen Strom  $I$  und Spannung  $U_0$  auch bei sehr rasch veränderlichen Spannungen bis zu Frequenzen von etwa  $10^8$  Hz gilt, daß also die dynamische mit der statischen Charakteristik praktisch zusammenfällt.

Der Elektronenstrom  $I$  kann den Sättigungswert nicht überschreiten, der durch die Stromdichte  $|\mathcal{G}_s|$  bestimmt ist. Die Kurve, Abb. 117, biegt daher nach Erreichen dieser Grenze ab. Unterhalb der Sättigungsgrenze ist der Elektronenstrom nach

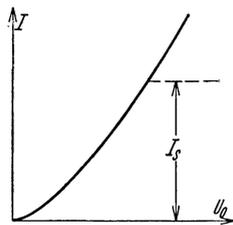


Abb. 117. Raumladecharakteristik.

Gl. (417) unabhängig von den Materialeigenschaften der Glühelektrode und nur durch die Abmessungen der Anode und durch die Spannung bestimmt.

Für  $l=5$  cm,  $r_0=0,8$  cm,  $U=200$  V wird z. B.:  $I=1,47 \cdot 10^{-5} \frac{5}{0,8} \cdot 200^{\frac{3}{2}} \text{ A}=0,26$  A, wenn der Sättigungsstrom genügend groß ist.

## 17. Graphische Methoden zur Ermittlung der Potentialverteilung in elektrostatischen Feldern.

In vielen Fällen gelangt man durch die Anwendung von graphischen Methoden rasch zur Auffindung der Potentialverteilung, aus der man dann die interessierenden Größen berechnen kann. Die graphische Feldberechnung ist am einfachsten beim zweidimensionalen Feld. Sie beruht darauf, daß man gefühlsmäßig Niveaulinien und Verschiebungslinien aufzeichnet und das Feldbild mit Hilfe der Grundgesetze des elektrostatischen Feldes korrigiert. Der Satz vom Flächenintegral der Verschiebungsdichte ist erfüllt, wenn die Verschiebungslinien stetig von einer zur anderen Leiteroberfläche übergehen. Die Proportionalität zwischen Verschiebungsdichte und Feldstärke läßt sich auf folgende Weise einhalten. Es werden die Niveaulinien so gezeichnet, daß sie gleichen Potentialunterschieden entsprechen. Dann ist die Feldstärke überall umgekehrt proportional dem Abstand  $a$  zweier benachbarter Niveaulinien. Man denke sich ferner den von einem Leiter ausgehenden Verschiebungsfluß in eine Anzahl gleicher Teile geteilt und zeichne die diese Teile abgrenzenden Verschiebungslinien. Dort, wo der Abstand  $b$  von zwei nebeneinanderliegenden Verschiebungslinien groß ist, verteilt sich der Verschiebungsfluß auf eine entsprechend große Fläche; die Verschiebungsdichte ist also überall umgekehrt proportional dem Abstand  $b$  der beiden benachbarten Verschiebungslinien. Die Forderung, daß Verschiebungsdichte und Feldstärke einander proportional sein sollen, läßt sich daher so erfüllen, daß man den Abstand  $b$  zwischen je zwei benachbarten Verschiebungslinien überall proportional, oder am einfachsten gleich dem Abstand  $a$  zwischen zwei benachbarten Niveaulinien macht; das ganze Feld ist dann in kleine Quadrate eingeteilt, Abb. 118.

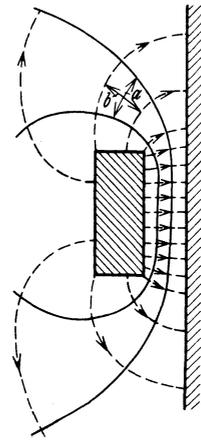


Abb. 118. Graphische Berechnung eines zweidimensionalen Feldes.

Insgesamt hat man folgende Regeln beim Aufzeichnen ebener Felder zu beachten:

1. Die Randlinien der Leiter sind Niveaulinien.
2. Die Verschiebungslinien stehen senkrecht auf den Randlinien der Leiter.
3. Die Niveaulinien müssen überall die Verschiebungslinien senkrecht schneiden.
4. Der Abstand zwischen zwei benachbarten Niveaulinien muß an jeder Stelle des Feldes gleich dem Abstand zwischen zwei benachbarten Verschiebungslinien sein.
5. Wenn Stoffe verschiedener Elektrisierungszahl vorhanden sind, so muß an den Grenzflächen das Brechungsgesetz der Verschiebungslinien gelten. An die Stelle von 4. tritt dann die allgemeinere Bedingung

$$\varepsilon_r \frac{b}{a} = k, \quad (420)$$

wobei die Konstante  $k$  willkürlich gewählt werden kann.

Man geht so vor, daß man erst nach Gefühl einige Niveaulinien einzeichnet. Dann bringt man Verschiebungslinien an, die möglichst gut die Regel 4 erfüllen, und korrigiert danach das Niveaulinienbild usw. Ist so durch abwechselndes Zeichnen von Niveau- und Verschiebungslinien bei immer feinerer Unterteilung das Feldbild gefunden und bezeichnet  $U_1$  die Potentialdifferenz zwischen je zwei benach-

barten Niveaulinien,  $a$  ihren Abstand an irgendeiner Stelle, so gilt für die Feldstärke an dieser Stelle angenähert

$$|\mathcal{E}| = \frac{U_1}{a}. \quad (421)$$

Damit kann auch die Verschiebungsdichte berechnet werden. Der Verschiebungsfluß, der von zwei benachbarten Verschiebungslinien begrenzt wird, hat bei einer Länge  $l$  der Elektroden die Größe  $b|\mathcal{D}|l$ . Gehen in dem Feldbild von einem Leiter  $n$  Verschiebungslinien zu einem anderen über, so ist daher der gesamte Verschiebungsfluß zwischen diesen beiden Leitern

$$Q = \varepsilon n l \frac{b}{a} U_1 = \varepsilon_0 n l k U_1. \quad (422)$$

Um die Kapazität zwischen zwei Elektroden zu berechnen, hat man den Verschiebungsfluß durch die Spannung zwischen den beiden Elektroden zu dividieren. Sind  $m$  Niveaulinien zwischen den beiden Leitern gezeichnet, so ist die Spannung  $(m+1)U_1$ , und es gilt für die Kapazität

$$C = \varepsilon_0 \frac{n}{m+1} l k, \quad (423)$$

wobei  $k$  die oben eingeführte willkürliche Konstante bezeichnet. In Abb. 118 sind z. B.  $n=17$  Verschiebungslinien und  $m=2$  Niveaulinien zwischen den beiden Elektroden vorhanden. Es ist ferner  $k=1$ . Daher wird die Kapazität für die Längeneinheit, wenn der Nichtleiter aus Luft besteht:  $\frac{C}{l} = \varepsilon_0 \frac{n}{m+1} = 0,502 \frac{\mu\mu\text{F}}{\text{cm}}$ .

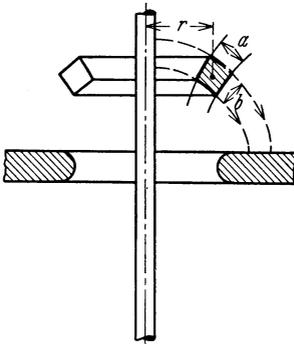


Abb. 119. Zur graphischen Berechnung eines rotationssymmetrischen Feldes.

Etwas schwieriger ist die Ermittlung von rotationssymmetrischen Feldern. Man denke sich hier den gesamten von einem Leiter ausgehenden Verschiebungsfluß durch Rotationsflächen, die durch Verschiebungslinien gebildet werden, in gleiche Teile zerlegt, Abb. 119. Bezeichnet man mit  $b$  den Abstand zwischen zwei benachbarten Rotationsflächen an irgendeiner Stelle mit dem Abstand  $r$  von der Achse, so ist der Querschnitt des durch diese Flächen begrenzten Verschiebungslinienbündels  $2\pi r b$ . Die Verschiebungsdichte ist umgekehrt proportional diesem Querschnitt. Damit die Verschiebungsdichte proportional der Feldstärke wird, muß daher hier  $r b$  proportional dem Abstand  $a$  der benachbarten Niveaulinien sein, oder

$$r \frac{b}{a} = \text{konst.} \quad (424)$$

Diese Bedingung tritt also hier an die Stelle von 4. beim ebenen Feld. Sind Stoffe verschiedener Elektrisierungszahl vorhanden, so hat die Konstante in ihnen verschiedene Werte, da in diesem Fall

$$\varepsilon_r r \frac{b}{a} = \text{konst} = k \quad (425)$$

sein muß. Um das Feldbild aufzuzeichnen, wählt man für  $k$  irgendeinen Wert und geht genau so vor wie oben beschrieben. Die Feldstärke wird aus dem gefundenen Feldbild wieder nach der Gl. (421) berechnet. Für die Kapazität ergibt sich eine ähnliche Formel wie oben, und zwar ist mit den gleichen Bezeichnungen

$$C = 2\pi \varepsilon_0 \frac{n}{m+1} k. \quad (426)$$

Diese Methode der Feldermittlung kann insbesondere bei den Isolatoren der Hochspannungstechnik angewendet werden, bei denen wegen der komplizierten geometrischen Formen die mathematischen Methoden versagen.

Da die Grundgesetze des elektrostatischen Feldes formal mit denen des stationären Strömungsfeldes übereinstimmen, so können die gleichen Methoden auch

zur Berechnung von Strömungsfeldern verwendet werden. Es ist in den obigen Regeln lediglich  $\varkappa$  für  $\varepsilon$  zu setzen. An Stelle der Kapazität wird der Übergangswiderstand zwischen zwei Elektroden berechnet. Er hat die Größe

$$R = \frac{m+1}{n} \frac{1}{\varkappa_0 k l} \quad (427)$$

im ebenen Feld, und

$$R = \frac{m+1}{n} \frac{1}{2\pi\varkappa_0 k} \quad (428)$$

im rotationssymmetrischen Feld, wobei mit  $\varkappa_0$  eine willkürliche Bezugsleitfähigkeit bezeichnet ist, und  $\varkappa = \varkappa_r \varkappa_0$  zu setzen ist.

## II. Das langsam veränderliche elektrische Feld.

### 18. Verschiebungsstrom und Leitungsstrom.

Elektrostatische Felder mit den in den vorigen Abschnitten besprochenen Eigenschaften gibt es in Wirklichkeit nicht. Auch wenn alle Potentiale zeitlich konstant sind, stellt sich wegen der endlichen Leitfähigkeit der Isolierstoffe eine elektrische Strömung ein. Die Potentialverteilung gehorcht den Gesetzen des Strömungsfeldes. Werden z. B. mehrere Kondensatoren hintereinander geschaltet an eine Gleichspannung gelegt, so verteilt sich die Spannung auf die einzelnen Kondensatoren im allgemeinen durchaus nicht umgekehrt wie die Kapazitätswerte, wie es unter der Voraussetzung elektrostatischer Felder sein müßte, sondern immer entsprechend den Isolationswiderständen, die ganz andere Verhältnisse haben können. Das zeitlich konstante elektrische Feld ist immer ein Strömungsfeld.

Strömungsfeld und elektrostatisches Feld unterscheiden sich im allgemeinen, und zwar wegen der Verschiedenheit der Grenzbedingungen. Während beim elektrostatischen Feld die Elektrodenoberflächen Niveauflächen sind, trifft dies beim Strömungsfeld angenähert nur dann zu, wenn die Leitfähigkeit der Elektroden sehr groß ist gegen die des leitenden Zwischenmediums. Die Brechungsgesetze der Strömungslinien und der Verschiebungslinien zeigen ferner, daß die Grenzbedingungen an beliebigen Grenzflächen nur dann für beide Arten von Feldern die gleichen sind, wenn überall das Verhältnis  $\varepsilon/\varkappa$  den gleichen konstanten Wert hat. Nur in diesem Falle stimmt das elektrostatische Feld mit dem Strömungsfeld überein. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, dann ist die Potentialverteilung im stationären Zustand durch die Gesetze des Strömungsfeldes bestimmt. Die Grenzbedingungen des elektrostatischen Feldes haben im Strömungsfeld keine Gültigkeit; insbesondere gilt nicht mehr, daß die Normalkomponente der Verschiebungsdichte an den Grenzflächen stetig ist. Vielmehr gilt im Strömungsfeld nach Formel (123)

$$\varkappa_1 \mathfrak{E}_{n1} = \varkappa_2 \mathfrak{E}_{n2}. \quad (429)$$

Hieraus ergibt sich für das Verhältnis der Normalkomponenten der Verschiebungsdichte an beliebigen Grenzflächen

$$\frac{\mathfrak{D}_{n1}}{\mathfrak{D}_{n2}} = \frac{\varepsilon_1 \varkappa_2}{\varepsilon_2 \varkappa_1}. \quad (430)$$

Es münden also von der einen Seite der Grenzfläche her mehr Verschiebungslinien ein, als von der anderen Seite ausgehen; an der Grenzfläche sind Ladungen vorhanden. Die Dichte dieser Ladungen ist

$$\mathfrak{D}_{n1} - \mathfrak{D}_{n2} = \mathfrak{D}_{n2} \left( \frac{\varepsilon_1 \varkappa_2}{\varepsilon_2 \varkappa_1} - 1 \right); \quad (431)$$

sie wird nur Null, wenn die oben angeführte Bedingung erfüllt ist.

Daß nun trotzdem der Elektrostatik ein so breiter Raum gewidmet wurde, hat seinen Grund darin, daß die Gesetze des elektrostatischen Feldes angenähert gelten, wenn es sich um langsam veränderliche Felder handelt. Sobald sich die Potentiale zeitlich ändern, werden Ladungen transportiert, denen in den Zuleitungen zu den

Elektroden des Feldes elektrische Ströme entsprechen. Dieser Vorgang überdeckt meist schon bei verhältnismäßig langsamen zeitlichen Änderungen den des Strömungsfeldes. Die wirkliche Strömung setzt sich dann zusammen aus der des Strömungsfeldes und der Verschiebung der Ladungen des elektrostatischen Feldes.

Die Leitfähigkeit der Isolierstoffe ist zum Teil auf freie Elektronen zurückzuführen, wie in den Metallen, teils ist sie bedingt durch Moleküle, die in ihre Ionen zerfallen sind. Das Wandern der Ionen und Elektronen durch den Isolierstoff ist gleichbedeutend mit dem Fließen eines elektrischen Stromes. Da die Dichte der Ionen und Elektronen in den Isolierstoffen sehr gering ist, so ist auch die Leitfähigkeit entsprechend klein. Sie hängt bei festen Isolierstoffen in hohem Maße von Beimengungen, insbesondere Wasser, ab. In der folgenden Tabelle ist die Größenordnung der Leitfähigkeit einiger Isolierstoffe angeführt; es ist ferner der sogenannte spezifische Oberflächenwiderstand angegeben; das ist der an der Oberfläche des Isolierstoffes zwischen zwei parallelen Schneiden mit dem Abstand 1 cm gemessene Widerstand je cm Länge der Schneiden. Die Oberflächenleitung ist in den meisten Fällen fast allein maßgebend für den Isolationsstrom, sie nimmt mit wachsender Luftfeuchtigkeit stark zu.

Material	Leitfähigkeit S/cm	spez. Oberflächenwiderstand $\Omega$
Glas . . . . .	$10^{-16} \dots 10^{-13}$	$10^6 \dots 10^{13}$
Porzellan . . . . .	$10^{-15} \dots 10^{-14}$	$10^9 \dots 10^{12}$
Hartgummi . . . . .	$10^{-18} \dots 10^{-15}$	$10^9 \dots 10^{15}$
Glimmer . . . . .	$10^{-15} \dots 10^{-13}$	$10^9 \dots 10^{12}$
Quarz . . . . .	$10^{-19} \dots \text{—}$	$10^8 \dots 10^{12}$
Transformatoröl . . . . .	$10^{-13} \dots 10^{-12}$	—

sene Widerstand je cm Länge der Schneiden. Die Oberflächenleitung ist in den meisten Fällen fast allein maßgebend für den Isolationsstrom, sie nimmt mit wachsender Luftfeuchtigkeit stark zu.

Durchgangswiderstand und Oberflächenwiderstand hängen bei den Isolierstoffen noch von der Temperatur ab, und zwar nimmt die Leitfähigkeit mit der Temperatur zu. Bei feuchtigkeitshaltigen Isolierstoffen mit Faserstruktur, z. B. Papier und Baumwolle, zeigt sich ferner eine Zunahme der Leitfähigkeit mit der Feldstärke; sie wird darauf zurückgeführt, daß infolge der Kraftwirkung des elektrischen Feldes die Flüssigkeitsteilchen in die Länge gezogen werden.

Wenn sich die Spannung an einem Kondensator ändert, so ergibt sich infolge der damit verbundenen Ladungsänderung ein Strom, der um so stärker ist, je rascher sich die Spannung ändert, Gl. (331),

$$i = C \frac{du}{dt}. \tag{432}$$

Mit der Ladung ändert sich der Verschiebungsfluß im Nichtleiter. Man kann daher die Ladungsänderung und damit den Ladungsstrom auch zurückführen auf Änderungen des Verschiebungsflusses im Nichtleiter, indem man annimmt, daß die Gl. (432) auch für beliebig kleine Ausschnitte des Feldes gilt. Betrachten wir als einen solchen Ausschnitt ein Prisma von der in Abb. 27 dargestellten Art und belegen wir die beiden Grundflächen mit außerordentlich dünnen Metallfolien, so ist die Kapazität zwischen diesen Metallbelegungen

$$C = \epsilon \frac{dF}{dn}. \tag{433}$$

Die von diesem kleinen Kondensator aufgenommenen Ströme haben daher die Größe

$$di = \epsilon \frac{dF}{dn} \frac{d(d\varphi)}{dt}; \tag{434}$$

dafür kann man schreiben

$$\frac{di}{dF} = \epsilon \frac{d}{dt} \left( \frac{d\varphi}{dn} \right), \tag{435}$$

oder unter Einführung von Stromdichte und elektrischer Feldstärke

$$\mathcal{G} = \epsilon \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d\mathcal{D}}{dt}. \tag{436}$$

Man kann daher den von einem beliebigen Feld aufgenommenen Ladestrom so be-

rechnen, wie wenn an jeder Stelle des Nichtleiters bei zeitlichen Änderungen der elektrischen Feldstärke ein Strom fließen würde, dessen Dichte durch die Änderungsgeschwindigkeit der Verschiebungsdichte gegeben ist. Diesen Strom bezeichnet man als Verschiebungsstrom. Er setzt sich zusammen mit dem infolge der Leitfähigkeit des Isolierstoffes fließenden Leitungsstrom, so daß insgesamt an jeder Stelle des Feldes für die Stromdichte zu setzen ist

$$\mathfrak{G} = \kappa \mathfrak{E} + \varepsilon \frac{d\mathfrak{E}}{dt}. \quad (437)$$

Man bezeichnet diese Größe als die Dichte des wahren Stromes. Die Einführung des Verschiebungsstromes ist zunächst willkürlich; sie wird plausibel, wenn man nach Maxwell die dielektrische Verschiebung durch eine Verschiebung von Elektrizitätsmengen im Nichtleiter und im Äther erklärt. Da jedoch die Vorstellung des Äthers zu Schwierigkeiten führt, so muß der Verschiebungsstrom als eine Rechengröße betrachtet werden, die zur Vereinfachung der Darstellung dient.

Die Vorteile der Einführung des Verschiebungsstromes zeigen sich erst voll, wenn es sich um rasch veränderliche Felder handelt, weil sich nämlich die magnetischen Wirkungen von Stromkreisen, die elektrische Felder enthalten, so berechnen lassen, wie wenn der Verschiebungsstrom im Nichtleiter gleichwertig wäre mit dem Leitungsstrom, so daß es nur auf die Dichte des wahren Stromes ankommt (s. 6. Kapitel).

Da der Verschiebungsstrom als eine Fortsetzung des Ladestromes aufgefaßt werden kann, so gilt auch für den wahren Strom das Gesetz von der Erhaltung der Elektrizität, das ausgedrückt werden kann durch die Beziehungen

$$\oint \mathfrak{G} d\mathfrak{F} = 0 \quad \text{oder} \quad \text{div } \mathfrak{G} = 0. \quad (438)$$

Wenn nun der Verschiebungsstrom den Leitungsstrom erheblich überwiegt, so daß man diesen vernachlässigen kann, so bedeutet dies, daß an den Grenzflächen die Normalkomponente des Verschiebungsstromes stetig sein muß, daß also

$$\varepsilon_1 \frac{d\mathfrak{E}_{n1}}{dt} = \varepsilon_2 \frac{d\mathfrak{E}_{n2}}{dt}, \quad (439)$$

oder

$$\varepsilon_1 \mathfrak{E}_{n1} = \varepsilon_2 \mathfrak{E}_{n2}. \quad (440)$$

Das ist aber die im elektrischen Feld gültige Bedingung. Die Stromlinien des veränderlichen elektrischen Feldes sind in diesem Falle identisch mit den Verschiebungslinien des elektrostatischen Feldes. Hierin liegt die Bedeutung der Kenntnisse vom elektrostatischen Feld. Bei den meisten praktischen Anwendungen handelt es sich um veränderliche elektrische Felder, in denen der Verschiebungsstrom den Leitungsstrom erheblich überwiegt.

Wird die Schnelligkeit der Feldänderungen mehr und mehr gesteigert, dann zeigt sich, daß schließlich diese Folgerungen nicht mehr gelten. Die Stromlinien können bei sehr hohen Frequenzen vollständig abweichende Formen annehmen. Der Grund dafür liegt in der elektrodynamischen Wirkung des Verschiebungsstromes, mit der sich das 6. Kapitel näher befaßt. Derartig rasche Änderungen müssen wir daher hier von unseren Betrachtungen ausschließen.

Es gilt also unter dieser Voraussetzung: „Im langsam veränderlichen Feld ist die Potentialverteilung angenähert die gleiche wie im elektrostatischen Feld.“

## 19. Das elektrische Wechselfeld.

Praktisch besonders wichtig ist das Verhalten der Nichtleiter in elektrischen Feldern, wenn sich die Feldgrößen zeitlich sinusförmig ändern. Der Verschiebungsstrom im Nichtleiter wird dann ein sinusförmiger Wechselstrom, die Spannungen sind sinusförmige Wechselspannungen. Um solche Wechselspannungen und -ströme mathematisch darzustellen, ist es erforderlich, positive Richtungen willkürlich festzulegen. Wir kennzeichnen die positive Richtung des Stromes in einem Leiter durch

einen Pfeil und setzen fest, daß die Spannung zwischen zwei Punkten des Leiters als positiv bezeichnet werden soll, wenn der Pfeil vom höheren zum niedrigeren Potential weist, Abb. 120. Unter dieser Voraussetzung gilt die in Abschnitt 14 abgeleitete Beziehung (331)

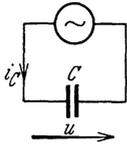


Abb. 120. Wechselstromkreis mit Kapazität.

$$i_C = C \frac{du}{dt} \tag{441}$$

für den Ladestrom  $i_C$  in einem Kondensator mit der Kapazität  $C$ . Eine zeitlich sinusförmige Spannung stellen wir dar durch

$$u = U\sqrt{2} \sin \omega t, \tag{442}$$

wobei  $U$  den Effektivwert der Spannung,  $\omega$  die Kreisfrequenz,

$$\omega = 2\pi f, \tag{443}$$

und  $f$  die Frequenz der Wechselspannung bezeichnet. Die Periode der Wechselspannung ist

$$T = \frac{1}{f}. \tag{444}$$

Ändert sich die Spannung zwischen den beiden Elektroden eines Kondensators gemäß (442), so wird der Ladestrom

$$i_C = U\omega C \sqrt{2} \cos \omega t. \tag{445}$$

Das elektrische Feld im Kondensator ist ein Wechselfeld, für das nach dem vorigen Abschnitt die gleichen Gesetze gelten wie für ein elektrostatisches Feld. Der Ladestrom des Kondensators erreicht entsprechende Werte um  $\frac{1}{4}$  Periode früher als die Spannung, Abb. 121; er eilt also der Spannung um  $\frac{1}{4}$  Periode voraus. Sein Effektivwert ist

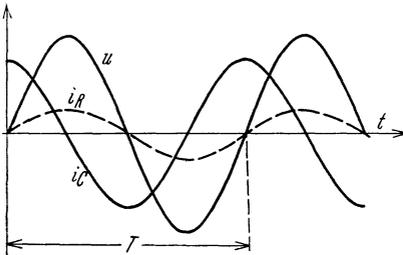


Abb. 121. Zeitlicher Verlauf von Spannung und Strom bei einem Kondensator.

$$I_C = U\omega C. \tag{446}$$

Indem man die Periode  $T$  in 360 „elektrische Grade“ einteilt, sagt man auch: „Der Strom  $i_C$  eilt der Spannung  $u$  um  $90^\circ$  voraus.“ Diese Aussage hat nur dann einen Sinn, wenn die positiven Richtungen so wie oben definiert werden.

Hat der Nichtleiter eine endliche Leitfähigkeit, so entsteht an jeder Stelle unter der Einwirkung der elektrischen Feldstärke ein Strom von der Dichte  $\kappa \mathcal{E}$ . Da die elektrische Feldstärke in jedem Augenblick proportional der Spannung zwischen den Elektroden ist, also mit ihr „in Phase“ schwingt, so ist auch der Leitungsstrom in Phase mit der Spannung. Bezeichnen wir diesen Strom mit  $i_R$ , so gilt daher

$$i_R = \frac{u}{R} = \frac{U}{R} \sqrt{2} \sin \omega t, \tag{447}$$

wobei  $R$  den Isolationswiderstand für Wechselstrom darstellt. Der gesamte Strom ist in jedem Augenblick

$$i = i_C + i_R. \tag{448}$$

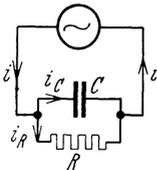


Abb. 122. Ersatzbild eines unvollkommenen Kondensators.

Seine Voreilung gegen die Spannung liegt zwischen Null und  $90^\circ$ , und man kann auf Grund dieses Zusammenhanges für den Kondensator das in Abb. 122 dargestellte Ersatzschema aufstellen, in dem man sich den Kondensator zerlegt denkt in einen Kondensator mit vollkommener Isolierung und einen Widerstand, der den Isolationsstrom führt.

Die elektrische Arbeit, die der Kondensator während einer Periode aufnimmt, ist

$$A_1 = \int_0^T u i dt.$$

Durch Einsetzen von  $u$  und  $i$  und Ausführen der Integration erhält man

$$A_1 = \frac{U^2}{R} T. \tag{449}$$

Diese Arbeit ist unabhängig von der Größe der Kapazität, nur bestimmt durch den Widerstand  $R$ . Der Verschiebungsstrom zeigt lediglich ein Hin- und Herpendeln von Ladungen an, wobei die während eines Teils der Periode, in dem  $u$  und  $i$  gleiche Vorzeichen haben, aufgenommene Arbeit während der anderen Zeitabschnitte vom Kondensator wieder abgegeben wird. Die elektrische Arbeit wird während der ersten Zeitabschnitte im elektrischen Feld als elektrische Energie aufgespeichert. Es ist in jedem Zeitpunkt, Gl. (323),

$$W = \frac{1}{2} C u^2.$$

Die aufgespeicherte Energie erreicht den Maximalwert

$$W = C U^2,$$

wenn die Spannung ihren Maximalwert hat. Nimmt dann die Spannung ab, so verringert sich die aufgespeicherte Energie entsprechend und es wird Energie aus dem elektrischen Feld zur Stromquelle zurückgeliefert. Nur infolge des Leitungsstromes entstehen elektrische Verluste. Nach dem Abschnitt 6 zeigt die endliche Leitfähigkeit des Isolierstoffes eine Umsetzung elektrischer Energie in Wärme an. Die während einer Periode des Wechselstromes entwickelte Wärmemenge ist  $A_1$ . In der Zeiteinheit wird daher die Arbeit

$$N = \frac{U^2}{R}$$

in Wärme umgesetzt. Dies ist die Leistung, die dem Kondensator im Mittel zufließt. Durch Messen dieser Leistung kann man die Größe  $R$  bestimmen. Derartige Messungen zeigen nun, daß bei wirklichen Isolierstoffen der so ermittelte Wert von  $R$  im allgemeinen nicht dem Isolationswiderstand entspricht, den man mit Gleichstrom feststellen kann; er ist vielmehr meist erheblich kleiner. Man bezeichnet diese Erscheinung als die der dielektrischen Verluste. Um auszudrücken, daß es sich hier nicht um den Gleichstromisolationswiderstand handelt, führt man den reziproken Wert von  $R$ , den Leitwert ein, den man mit  $G$  bezeichnet, und man definiert also diese Größe durch die vom Kondensator aufgenommene Leistung

$$N = U^2 G. \quad (450)$$

$G$  wird als die Ableitung des Kondensators bezeichnet. Für den Effektivwert des Leitungsstromes gilt

$$I_R = U G. \quad (451)$$

Eine Veranschaulichung von sinusförmigen Strömen und Spannungen liefert das „Zeigerdiagramm“. Es ist für den hier betrachteten Fall eines Kondensators in Abb. 123 aufgezeichnet. Die Wechselstromgrößen werden durch Zeiger dargestellt, deren Länge in einem willkürlich gewählten Maßstab gleich dem Effektivwert gemacht wird; sie bilden Winkel miteinander, die gleich den in Graden ausgedrückten zeitlichen Verschiebungen sind, wobei eine Voreilung einer Drehung links herum entsprechen soll. Die Projektionen dieser Zeiger auf eine im Uhrzeigersinn mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotierende „Zeitlinie“  $Z$  geben, mit  $\sqrt{2}$  multipliziert, die Augenblickswerte der Spannungen und Ströme an. Die Zeitlinie wird ebenfalls mit einem Pfeil versehen und dadurch in eine positive und negative Hälfte geteilt. Die Augenblickswerte gelten als positiv, wenn die Projektionen auf der positiven Hälfte der Zeitlinie liegen, im anderen Falle als negativ. Der Ladestrom  $I_C$  eilt der Spannung  $U$  um  $90^\circ$  vor, während der Leitungsstrom  $I_R$  in Phase mit  $U$  liegt.

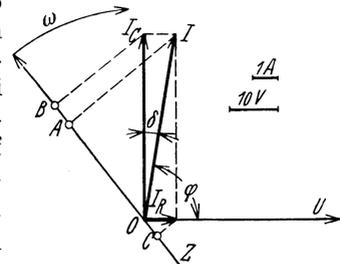


Abb. 123. Zeigerdiagramm für den Kondensator.

Für die Wechselstromzeiger gelten die geometrischen Additionsgesetze der Vektoren; man bezeichnet sie daher meist als Vektoren, eine Bezeichnung, die man jedoch für die Raumvektoren vorbehalten sollte. Wie aus Abb. 123 ersichtlich ist,

ergibt sich bei geometrischer Addition von  $I_R$  und  $I_C$  für die Projektionen auf die Zeitlinie

$$OA = OB + OC,$$

oder

$$i = i_C + i_R,$$

wie es nach Gl. (448) sein soll. Der Zeiger des Gesamtstromes ergibt sich also durch geometrische Addition der die Teilströme darstellenden Zeiger.

Als Maß für die dielektrischen Verluste kann man den Winkel  $\delta$  benützen, um den der Gesamtstrom dem Ladestrom nacheilt. Man bezeichnet diesen Winkel als den Verlustwinkel des Kondensators, da sich durch ihn die Verlustleistung ausdrücken läßt. Es ist

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{I_R}{I_C} = \frac{G}{\omega C}. \quad (452)$$

Der Verlustwinkel stellt eine Materialkonstante dar, da das Verhältnis  $G/C$  nach Abschnitt II unabhängig von den Abmessungen ist. Die in Wärme umgesetzte Leistung wird

$$N = U^2 G = U I_R = U I \sin \delta = U I \cos \varphi. \quad (453)$$

Für den Gesamtstrom läßt sich aus Abb. 123 die Beziehung ablesen

$$I = U \sqrt{G^2 + (\omega C)^2}. \quad (454)$$

Eine Weiterentwicklung des Zeigerdiagramms bildet die komplexe Rechnung der Wechselstromtechnik. Man denkt sich in die Ebene des Zeigerdiagramms die Ebene der komplexen Zahlen so gelegt, daß die Anfangspunkte zusammenfallen. Dann kann man jeden Zeiger durch eine komplexe Zahl darstellen, also in der Form schreiben

$$\zeta = x + jy, \quad \text{wobei } j = \sqrt{-1}.$$

Sind zwei Zeiger vorhanden, Abb. 124, so ist also

$$\zeta_1 = x_1 + jy_1; \quad \zeta_2 = x_2 + jy_2.$$

Die Summe der beiden komplexen Zahlen

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 = x_1 + x_2 + j(y_1 + y_2)$$

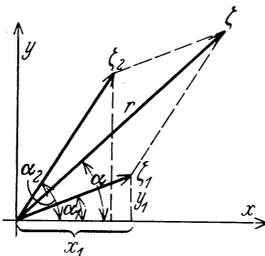


Abb. 124. Darstellung der Zeiger durch komplexe Größen.

ergibt, wie man erkennt, die Darstellung der geometrischen

Summe der beiden Zeiger. Um also zwei Wechselstromzeiger zusammenzusetzen, hat man lediglich die entsprechenden komplexen Größen zu addieren. Das Entsprechende gilt für die Subtraktion.

Schreibt man die komplexen Größen in der Form

$$\zeta = r e^{j\alpha}, \quad (455)$$

wobei

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |\zeta| \quad (456)$$

den Betrag oder die Länge des Zeigers und  $\alpha$  den Winkel mit der reellen Achse bezeichnet,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad (457)$$

so erkennt man, daß die Multiplikation zweier Zeiger

$$\zeta = \zeta_1 \zeta_2 = r_1 r_2 e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

einen Zeiger ergibt, dessen Betrag gleich dem Produkt der beiden Beträge und dessen Winkel mit der Achse gleich der Summe der beiden Winkel ist. Die Multiplikation einer komplexen Größe  $\zeta_1$  mit einer anderen,  $\zeta_2$ , bedeutet eine Streckung mit dem Betrag von  $\zeta_2$  und eine Drehung links herum um den Winkel von  $\zeta_2$ . Eine Multiplikation mit

$$j = 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

bedeutet eine Drehung um  $90^\circ$  entgegen dem Uhrzeigersinn.

Wir bezeichnen die komplexen Wechselstromgrößen mit dem überstrichenen Buchstaben, oder wenn keine Verwechslung mit Raumvektoren vorkommen kann, mit deutschen Buchstaben. Eine komplexe Größe, die den Zeiger einer Wechsel-

spannung darstellt, wird also  $\bar{U}$  oder  $\mathfrak{U}$  geschrieben, ebenso der komplexe Wechselstrom  $\bar{I}$  oder  $\mathfrak{I}$ . Es gilt dann für den Ladestrom des Kondensators

$$\bar{I}_C = j\omega C \bar{U}, \quad (458)$$

oder 
$$\mathfrak{I}_C = j\omega C \mathfrak{U}. \quad (459)$$

Eine solche Gleichung sagt zweierlei aus:

1. Die Größe von  $I_C$  geht aus der von  $U$  dadurch hervor, daß man diese mit  $\omega C$  multipliziert.

2. Die Richtung von  $I_C$  eilt der Richtung von  $U$  um  $90^\circ$  voraus.

Die Gleichung in komplexen Größen enthält also alle Aussagen des Zeigerdiagramms. Ist der Strom gegeben und die Spannung gesucht, so gilt

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{j\omega C} \mathfrak{I}. \quad (460)$$

Diese Beziehung legt es nahe, die Größe  $1/j\omega C$  als ein Symbol für den Widerstand des Kondensators anzusehen. Wir setzen

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{j\omega C}, \quad (461)$$

und nennen  $\mathfrak{R}$  den komplexen Widerstand oder den Widerstandsoperator des Kondensators mit der Kapazität  $C$ . Seine Einführung hat den Vorteil, daß man nun mit den Wechselstromgrößen genau so rechnen kann wie bei Gleichstrom. So wie dort gilt das Ohmsche Gesetz in der Form

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{I} \mathfrak{R}. \quad (462)$$

Für den Ableitungsstrom ist in der komplexen Darstellung zu schreiben

$$\mathfrak{I}_R = \mathfrak{U} G; \quad (463)$$

der der Ableitung  $G$  entsprechende Widerstandsoperator ist reell und  $\mathfrak{R} = G^{-1}$ . Der Gesamtstrom ergibt sich durch Addition der beiden komplexen Ströme  $\mathfrak{I}_C$  und  $\mathfrak{I}_R$ , also

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_C + \mathfrak{I}_R. \quad (464)$$

Bei Parallelschaltung addieren sich die reziproken Werte der komplexen Widerstände.

Die Länge eines Zeigers, also der Effektivwert, ergibt sich in der komplexen Darstellung, wenn man den absoluten Betrag der komplexen Zahl bildet. Es ist also

$$I = |\mathfrak{I}|; \quad U = |\mathfrak{U}|. \quad (465)$$

Aus Gl. (464) folgt daher für den Effektivwert

$$I = U |(G + j\omega C)| = U \sqrt{G^2 + (\omega C)^2},$$

das gleiche Ergebnis, wie es aus dem Zeigerdiagramm abgeleitet wurde. Legt man den Zeiger der Spannung in die reelle Achse, so wird  $\mathfrak{U}$  reell. Der Winkel, um den der Zeiger  $\mathfrak{I}$  dem Zeiger  $\mathfrak{U}$  voreilt, ist daher gleich dem Winkel von  $G + j\omega C$  gegen die reelle Achse, d. h. es ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega C}{G}, \quad (466)$$

ein Ergebnis, das ebenfalls aus dem Zeigerdiagramm abzulesen ist.

Die komplexe Rechnung der Wechselstromtechnik wird im Abschnitt 32 nochmals zusammenhängend behandelt. Die hier gewonnenen Rechenregeln sollen im folgenden auf ein Beispiel angewendet werden.

Die Erscheinung der dielektrischen Verluste wird im wesentlichen durch die Inhomogenität der Isolierstoffe erklärt; ihre Ursache ist also die gleiche wie die der Nachwirkung. Wenn das Verhältnis  $\epsilon/\kappa$  an den verschiedenen Punkten des Isolierstoffes verschiedene Werte hat, so stimmt das elektrostatische Feld nicht mehr überein mit dem Strömungsfeld. Im stationären Zustand ergibt sich dann eine andere Potentialverteilung als bei Feldänderungen. Im Wechselfeld kommen nun Zeitpunkte vor, in denen sich die Feldgrößen rasch ändern und andere Zeitpunkte, in

denen sie nahezu konstant bleiben. Im ersten Fall hat die Verschiebungsdichte auf beiden Seiten der Grenzflächen die gleiche Normalkomponente, im anderen Fall die Stromdichte. Während also im ersten Fall die Grenzflächen ladungsfrei sind, befinden sich im zweiten Fall an den Grenzflächen Ladungen. In einem Wechselfeld müssen daher fortwährend Elektrizitätsmengen zu den Grenzflächen hin und wieder fortgeschafft werden. Ihr Transport ist mit einer Wärmeentwicklung verbunden, die sich im Auftreten der dielektrischen Verluste äußert.

Eine genauere Vorstellung von diesen Verhältnissen liefert wieder die Betrachtung des in Abb. 98 dargestellten einfachen Falles der Inhomogenität. In komplexer Schreibweise gelten hier die folgenden Gleichungen:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{U}_2 \left( \frac{1}{R_i} + j\omega C_2 \right); \quad (467)$$

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{U}_1 j\omega C_1; \quad (468)$$

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2. \quad (469)$$

Daraus folgt durch Auflösen nach  $\mathfrak{S}$ :

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{U} \left( \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{R_i}{1 + j\omega C_2 R_i} \right)^{-1}. \quad (470)$$

Wir bringen den Faktor von  $\mathfrak{U}$  auf die Form  $x + jy$ . Die Ausrechnung ergibt

$$x = \frac{\omega^2 C_1^2 R_i}{1 + \omega^2 (C_1 + C_2)^2 R_i^2}; \quad (471)$$

$$y = \frac{\omega C_1 (1 + \omega^2 C_2 (C_1 + C_2) R_i^2)}{1 + \omega^2 (C_1 + C_2)^2 R_i^2}. \quad (472)$$

Diesen Faktor kann man als den komplexen Leitwert eines Ersatzkondensators auffassen, bei dem die gleiche Wechselspannung den gleichen Wechselstrom erzeugt:

$$G_0 + j\omega C_0 = x + jy. \quad (473)$$

Die scheinbare Ableitung des Kondensators ist also

$$G_0 = \frac{\omega^2 C_1^2 R_i}{1 + \omega^2 (C_1 + C_2)^2 R_i^2}, \quad (474)$$

die scheinbare Kapazität

$$C_0 = C_1 \frac{1 + \omega^2 C_2 (C_1 + C_2) R_i^2}{1 + \omega^2 (C_1 + C_2)^2 R_i^2}. \quad (475)$$

Die Ableitung  $G_0$  ist hier für Gleichstrom ( $\omega = 0$ ) verschwindend klein, der Gleichstromisolationswiderstand unendlich groß. Bei Wechselstrom ergibt sich jedoch ein endlicher Isolationswiderstand. Von Interesse ist die Abhängigkeit der Ableitung und der scheinbaren Kapazität von der Frequenz der Wechselströme; sie ist in Abb. 125 dargestellt.  $G_0$  nähert sich mit wachsender Frequenz einem Grenzwert, der gleich ist

$$G_{0\max} = \frac{1}{R_i} \left( \frac{C_1}{C_1 + C_2} \right)^2. \quad (476)$$

Die scheinbare Kapazität hat für sehr niedrige Frequenzen den Anfangswert  $C_0 = C_1$ . Der Widerstand  $R_i$  bringt hier die Ladungen bis an die Grenzfläche zwischen beiden Schichten. Bei hohen Frequenzen dagegen überwiegen die Verschiebungsströme, die scheinbare Kapazität nähert sich dem Grenzwert

$$C_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (477)$$

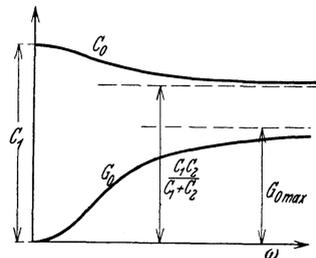


Abb. 125. Kapazität und Ableitung eines Zwischichtenkondensators.

wiegen die Verschiebungsströme, die scheinbare Kapazität nähert sich dem Grenzwert

Man drückt dieses Ergebnis häufig auch so aus, daß man sagt, die Kapazität eines Kondensators werde durch die dielektrischen Verluste verkleinert; in Wirklichkeit ist die umgekehrte Vorstellung die richtigere.

Der dielektrische Verlustwinkel ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{G_0}{\omega C_0} = \frac{\omega C_1 R_i}{1 + \omega^2 C_2 (C_1 + C_2) R_i^2}. \quad (478)$$

Seine Abhängigkeit von der Frequenz ist in Abb. 126 dargestellt. Bei einer bestimmten Frequenz hat der Verlustwinkel einen Maximalwert, der berechnet werden kann aus

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{C_1}{2 \sqrt{C_2 (C_1 + C_2)}},$$

also unabhängig von  $R_i$  ist. Bei wirklichen Isolierstoffen beobachtet man, daß der Verlustwinkel in einem großen Frequenzbereich nahezu konstant ist, daß also die wirkliche Kurve viel flacher verläuft als in Abb. 126. Man erklärt dies dadurch, daß nicht nur zwei Schichten, sondern Ungleichmäßigkeiten der verschiedensten Arten vorhanden sind, z. B. Einschlüsse verschiedener Größe und Beschaffenheit, deren Wirkungen sich überlagern, so daß das Maximum der Verlustwinkelkurve verbreitert wird.

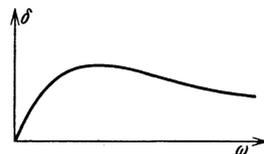


Abb. 126. Verlustwinkel eines Zweischichtenkondensators.

Die Erscheinung der dielektrischen Nachwirkung ist zuweilen als dielektrische Hysterese bezeichnet worden. Diese Bezeichnung ist falsch. Unter Hysterese versteht man allgemein die durch Abb. 127 veranschaulichte Abhängigkeit zwischen zwei Größen  $A$  und  $B$ . Vergrößert man von irgendeinem Wert  $A_1$  beginnend die Größe  $A$  bis zu dem Wert  $A_2$ , so erhält man einen bestimmten Wert  $B_1$ . Verkleinert man dagegen  $A$  von einem höheren Wert  $A_3$  bis auf  $A_2$ , so erhält man einen Wert  $B_2$ , wobei  $B_2 > B_1$ . Dieser Fall spielt bei den magnetischen Erscheinungen eine wichtige Rolle. Im elektrischen Feld stellt sich dagegen bei einer bestimmten Feldstärke immer ein und derselbe Verschiebungsfluß ein, wenn hinreichend lange gewartet wird.

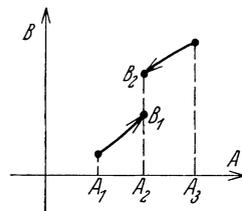


Abb. 127. Hysterese.

Die Spannungsverteilung im Zweischichtenkondensator werde noch kurz an Hand des Zeigerdiagramms erläutert. Um dieses Diagramm aufzustellen, geht man zweckmäßig von der Spannung  $U_2$  aus, für die man irgendeinen Wert annimmt, Abb. 128. Damit ergeben sich aus Gl. (446) und (451) Verschiebungs- und Leitungsstrom  $I_1$  und  $I_2$ . Sie liefern als Summe den Gesamtstrom  $I$ . Dieser erzeugt an der Schicht mit der Kapazität  $C_1$  eine Spannung  $U_1$  von der Größe  $I/\omega C_1$ , die dem Strom  $I$  um genau  $90^\circ$  nacheilt, da die Leitfähigkeit in dieser Schicht Null sein soll. Damit wird die Gesamtspannung  $U$  durch Addition der beiden Teilspannungen erhalten. Der Winkel  $\varphi$  ist immer kleiner als  $90^\circ$ , also  $\cos \varphi$  von Null verschieden. Die Verlustleistung hat die Größe  $U I \cos \varphi = U_2 I_2$ . Immer wenn der Verschiebungsstrom  $i_1$  durch Null geht, hat der Leitungsstrom  $i_2$  gerade seinen Maximalwert; er transportiert dann die Elektrizitätsmenge zur Grenzfläche, die für das Gleichgewicht der Verschiebungsströme in der darauffolgenden Zeit erforderlich ist. Die dielektrischen Verluste entsprechen der während dieses Transportes in Wärme umgesetzten elektrischen Arbeit. Die Zeigerdiagramme haben vor der komplexen Rechnung den Vorzug größerer Anschaulichkeit; dagegen erfordert die komplexe Rechnung besonders bei komplizierteren Anordnungen erheblich weniger Gedankenarbeit als die Aufstellung des Zeigerdiagramms.

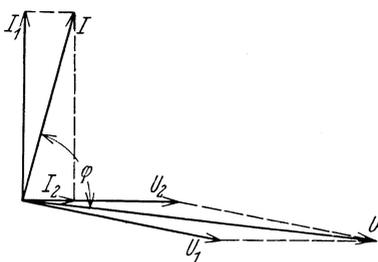


Abb. 128. Zeigerdiagramm des Zweischichtenkondensators.

Da der Ableitungsstrom bei wirklichen Kondensatoren immer klein gegen den Ladestrom ist, so gelten für die Hintereinander- und Parallelschaltung von

Kondensatoren bei Wechselstrom sehr genau die Formeln (185) und (186). Die Verlustwinkel setzen sich dagegen in komplizierterer Weise zusammen. Unter der praktisch immer zutreffenden Voraussetzung, daß wegen der Kleinheit der Verlustwinkel  $\operatorname{tg} \delta \approx \delta$  gesetzt werden kann, ist der komplexe Widerstand eines Kondensators

$$\Re = \frac{1}{j\omega C(1-j\delta)} \approx \frac{\delta}{\omega C} + \frac{1}{j\omega C}. \quad (479)$$

Bei Hintereinanderschaltung wird daher der resultierende Verlustwinkel

$$\delta = C_0 \left( \frac{\delta_1}{C_1} + \frac{\delta_2}{C_2} + \frac{\delta_3}{C_3} + \dots \right). \quad (480)$$

Bei Parallelschaltung ergibt sich dagegen

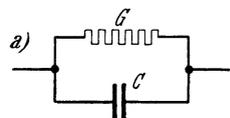
$$\delta = \frac{1}{C_0} (\delta_1 C_1 + \delta_2 C_2 + \delta_3 C_3 + \dots). \quad (481)$$

Sind die Kapazitätswerte der Teilkondensatoren einander gleich, so wird in beiden Fällen

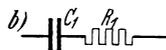
$$\delta = \frac{1}{n} (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots), \quad (482)$$

wenn  $n$  Kondensatoren vorhanden sind.

Jeder Kondensator mit dielektrischen Verlusten läßt sich durch die beiden in Abb. 129 gezeichneten Ersatzbilder darstellen, die einander vollkommen gleichwertig sind. Man definiert jedoch die Kapazität grundsätzlich aus dem Bild  $a$ . Die beiden Bilder  $a$  und  $b$  stimmen elektrisch überein, wenn



$$\Re = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1}{G + j\omega C}. \quad (483)$$



Durch Gleichsetzen der reellen und imaginären Teile folgt hieraus

$$C_1 = C \left( 1 + \left( \frac{G}{\omega C} \right)^2 \right); \quad (484)$$

$$R_1 = \frac{G}{G^2 + (\omega C)^2}. \quad (485)$$

Die Ersatzkapazität  $C_1$  ist also immer größer als  $C$ . Praktisch kann man jedoch meist setzen

$$C_1 = C; \quad R_1 = \frac{G}{\omega^2 C^2}. \quad (486)$$

Die Gleichwertigkeit der beiden Ersatzbilder wird z. B. bei der Messung der dielektrischen Verluste mit Hilfe der Wechselstrommeßbrücke benutzt. Abb. 130

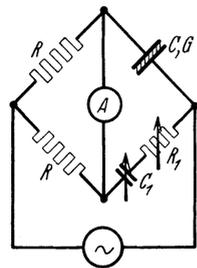


Abb. 130. Kapazitätsmeßbrücke.

zeigt die einfachste Form einer solchen Brücke (M. Wien, 1891). Mit  $\sim$  ist der Wechselstromgenerator bezeichnet;  $R$  und  $R_1$  sind Normalwiderstände, also Widerstände, die auch bei Wechselstrom die gleichen Widerstandswerte haben wie bei Gleichstrom.  $C_1$  ist ein möglichst verlustfreier, geeichter und einstellbarer Kondensator. Der zu untersuchende Kondensator ist mit  $G, C$  bezeichnet. Das Brückengleichgewicht wird mit Hilfe des Wechselstromgalvanometers  $A$  (Vibrationsgalvanometer, Fernhörer, Röhrenvoltmeter) eingestellt. Es gilt dann die bekannte Bedingung für das Verhältnis der Brückenwiderstände, die hier durch die entsprechenden komplexen Widerstände auszudrücken ist. Da die beiden linken Widerstandsarme einander gleich sind, müssen auch die komplexen Widerstände der beiden Kondensatorarme einander gleich sein; bei nicht zu großen Verlustwinkeln erhält man also Kapazität und Ableitung aus

$$C = C_1, \quad G = R_1 (\omega C_1)^2. \quad (487)$$

**Zahlenbeispiel:** Es ergebe sich bei einer Messung mit Wechselstrom von 500 Hz:  $C_1 = 0,1 \mu\text{F}$ ,  $R_1 = 100 \Omega$ . Dann wird

$$G = R_1 (\omega C_1)^2 = 100 (3140 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6} \text{Fs}^{-1})^2 \Omega = 9,87 \mu\text{S}.$$

Die Kapazität wird  $C=C_1=0,1\ \mu\text{F}$  und der Verlustwinkel

$$\delta = \frac{G}{\omega C} = \frac{9,87\ \mu\text{Ss}}{3140 \cdot 0,1\ \mu\text{F}} = 0,0314 = 3,14\% .$$

Nach den Gl. (484) und (485) haben die Näherungsformeln einen Fehler von der Größe  $\delta^2$ ; er beträgt also hier 0,1%.

Mit Hilfe der von K. W. Wagner angegebenen Meßbrücke, Abb. 131, kann man Teilkapazitäten und ihre Verlustwinkel unmittelbar messen. Die zu untersuchende Anordnung ist durch *abc* dargestellt. Sie kann beliebig viele Elektroden enthalten, wie z. B. bei einem Kabel mit einer größeren Anzahl von Leitungen. Um die Teilkapazität  $K_1$  zwischen zwei beliebigen Leitern *a* und *b* zu messen, verbindet man alle übrigen Leiter miteinander zu der gemeinsamen Elektrode *c*. Diese gemeinsame Elektrode *c* wird geerdet, während die Leiter *a* und *b* in der gezeichneten Weise an die Meßbrücke angeschlossen werden. Diese besteht aus einer „Hauptbrücke“ ähnlich wie Abb. 130 und einer „Hilfsbrücke“, die aus den Widerständen  $R_2$  und  $R_3$  und dem Kondensator  $C_2$  gebildet wird. Ferner sind zwei Nullinstrumente  $A_1$  und  $A_2$  vorhanden, von denen  $A_1$  zur Einstellung der Hauptbrücke ( $R_1, C_1$ ) und  $A_2$  zur Einstellung

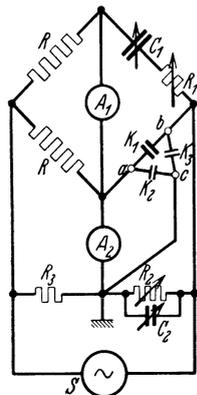


Abb. 131. Hilfsbrücke nach Wagner.

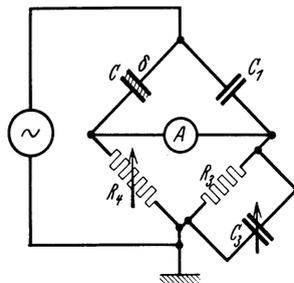


Abb. 132. Messung von Kapazität und Verlustwinkel bei hohen Spannungen.

der Hilfsbrücke ( $R_2, C_2$ ) dient. Sind beide Instrumente stromlos, so haben die Punkte *a* und *c* gleiches Potential. Die Teilkapazität  $K_2$  ist daher stromlos, sie liegt parallel zum Instrument  $A_2$ . Ferner liegt die Teilkapazität  $K_3$  parallel zu dem Zweig  $R_2 C_2$  der Hilfsbrücke; sie addiert sich zu  $C_2$ . In der Hauptbrücke ist dann nur noch die Teilkapazität  $K_1$  wirksam, so daß  $K_1 = C_1$  wird. Die zu  $K_1$  gehörige Ableitung, die man entsprechend als Teilableitung zwischen den Leitern *a* und *b* bezeichnen kann, ergibt sich aus

$$G_1 = (\omega C_1)^2 R_1 .$$

Zur Messung der Kapazität und Ableitung bei hohen Spannungen dient die von Schering angegebene Brücke, deren

Prinzip in Abb. 132 dargestellt ist. Mit  $C_1$  ist ein verlustfreier Normalkondensator (Luftkondensator) bezeichnet, mit  $C, \delta$  der zu untersuchende Kondensator.  $R_3$  und  $R_4$  sind Normalwiderstände, von denen  $R_4$  regelbar ist. Parallel zu  $R_3$  liegt der verlustfreie und regelbare Meßkondensator  $C_3$ . Die Widerstände  $R_3$  und  $R_4$  sind klein gegen die Wechselstromwiderstände von  $C$  und  $C_1$ , so daß praktisch die ganze Spannung der Stromquelle an dem Meßobjekt liegt. Die komplexen Wider-

Tabelle 3.

Material	Temperatur °C	Frequenz Hz	$\delta$
Balata . . . . .	20	1000	0,004
Cellon . . . . .	20	1000	0,033
Hartgummi . . . . .	20	1000	0,0025 . . . 0,025
Flintglas . . . . .	20	50	0,004
	20	1000	0,003
	20	5000	0,0015
Glimmer . . . . .	20	50	0,0003 . . . 0,0015
	20	1000	0,0002 . . . 0,001
Guttapercha . . . . .	15	1000	0,024
Gummi (weich) . . . . .	20	1000	0,015
Lackisolation . . . . .	20	1000	0,02
Seideisolation . . . . .	20	1000	0,04
Baumwollisolation . . . . .	20	1000	0,3
Papier (trocken) . . . . .	20	1000	0,004
Papier (ölgetränkt) . . . . .	20	50	0,004 . . . 0,04
Porzellan . . . . .	20	50	0,05
Transformatoröl . . . . .	17	50	0,005

stände der vier Brückenarme sind

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{1}{j\omega C_1}; \quad \mathfrak{R}_2 = \frac{1}{\delta\omega C + j\omega C}; \quad \mathfrak{R}_3 = \frac{R_3}{1 + j\omega C_3 R_3}; \quad \mathfrak{R}_4 = R_4. \quad (488)$$

Wenn  $A$  stromlos ist, so gilt

$$\frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}_3} = \frac{\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_4}. \quad (489)$$

Daraus folgt durch Einsetzen und Trennen der reellen und imaginären Teile

$$\delta = \omega C_3 R_3; \quad (490)$$

$$C = C_1 \frac{R_3}{R_4} \frac{1}{1 + \delta^2} \approx C_1 \frac{R_3}{R_4}. \quad (491)$$

In der Tabelle 3 (S. 123) sind die Verlustwinkel einiger Isolierstoffe angegeben; der Verlustwinkel hängt von der Temperatur ab und hat im allgemeinen bei einer bestimmten Temperatur ein Minimum.

**Zahlenbeispiel:** An einem Einleiterkabel von 1 km Länge sei durch Messung mit Wechselstrom von 50 Hz eine Kapazität von  $0,2 \mu\text{F}$  und ein Verlustwinkel von  $\delta = 0,004$  gefunden worden. Das Kabel werde mit einer Spannung von  $U = 30 \text{ kV}$  betrieben. Für den Effektivwert des Ladestromes ergibt sich

$$I_G = U \omega C = 30000 \cdot 314 \cdot 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ Vs}^{-1} \frac{\text{As}}{\text{V}} = 1,884 \text{ A}.$$

Die Ableitung beträgt

$$G = \delta \omega C = 0,004 \cdot 314 \cdot 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1} \frac{\text{As}}{\text{V}} = 0,251 \mu\text{S}.$$

Der Ableitungsstrom ist

$$I_R = UG = 30000 \cdot 0,251 \text{ V} \mu\text{S} = 0,00753 \text{ A}.$$

Die dielektrischen Verluste betragen

$$N = U I_R = 30000 \cdot 0,0075 \text{ VA} = 0,225 \text{ kW}.$$

## 20. Der Durchschlag von Isolierstoffen.

Überschreitet die Spannung zwischen zwei Elektroden, die sich in einem isolierenden Stoff befinden, einen bestimmten Betrag, so verliert der Stoff seine isolierenden Eigenschaften; es tritt der Durchschlag oder Durchbruch ein. Ein Funke oder Lichtbogen überbrückt den Zwischenraum zwischen den Elektroden und stellt eine leitende Verbindung her. Wenn es sich um den Durchschlag der Luft längs der Oberfläche eines festen oder flüssigen Isolierstoffes handelt, so spricht man von einem Überschlag. Der Mechanismus des Durchschlages und des Überschlages ist verwickelt und nur zum Teil geklärt.

Am einfachsten liegen die Verhältnisse bei den Gasen. Die Gase sind unter normalen Bedingungen so schlechte Leiter, daß sich auch mit den empfindlichsten Galvanometern kein Strom bei niedrigen Spannungen nachweisen läßt. Meßbare,

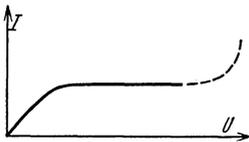


Abb. 133. Charakteristik einer unselbständigen Gasentladung.

wenn auch außerordentlich kleine Ströme ergeben sich, wenn das Gas einem sogenannten Ionisator ausgesetzt wird, z. B. Röntgenstrahlen. Es zeigt sich, daß in diesem Fall die Stromstärke in der durch Abb. 133 veranschaulichten Weise von der Spannung zwischen den Elektroden abhängt. Bei Spannungen unterhalb einer gewissen Grenze wächst der Strom mit der Spannung. Er nähert sich dann einem Grenzwert, dem sogenannten Sättigungsstrom. Wird die Spannung immer weiter gesteigert, so ergibt sich ein zweiter Anstieg des Stromes, der schließlich zu einer sichtbaren Entladung zwischen den Elektroden, also zum Durchbruch führt.

Dieser Verlauf der Stromspannungscharakteristik erklärt sich folgendermaßen. Durch den Ionisator wird ein Teil der Luftmoleküle in die positiven und negativen Ionen aufgespalten. Diese Ionen bewegen sich im elektrischen Feld entsprechend ihrer

Ladung zur negativen oder positiven Elektrode; es entsteht ein elektrischer Strom. An den Elektroden geben die Ionen ihre elektrische Ladung ab. Außerdem ergibt sich ständig ein Verlust an Ionen dadurch, daß sich positive und negative Ionen wieder vereinigen. Die Stromstärke ist dadurch bestimmt, daß sich ein Gleichgewichtszustand einstellt zwischen der Zahl der in der Zeiteinheit vom Ionisator erzeugten Ionen und der durch Wiedervereinigung und Abwanderung verschwindenden. Man bezeichnet eine derartige Strömung durch ein Gas als unselbständige Gasentladung. Steigert man die Spannung, so wächst die Stromstärke; sie läßt sich aber nur bis zu einer gewissen Grenze erhöhen, bei der die Ionen im gleichen Maß weggeführt wie erzeugt werden. Dann ergibt sich der Sättigungsstrom, der durch den horizontalen Teil der Kurve, Abb. 133, gekennzeichnet ist.

Neue Erscheinungen treten ein, wenn die Spannung weiter erhöht wird. Die Ionen werden mit immer größerer Geschwindigkeit durch die Gasmoleküle hindurchgezogen, bis sie schließlich durch ihre kinetische Energie befähigt sind, neutrale Gasmoleküle zu zerstören. Bei diesem Vorgang, den man als Stoßionisation bezeichnet, bilden die Ionen selbst wieder neue Ionen, so daß die Stromstärke rasch ansteigt (gestrichelter Teil der Kurve in Abb. 133). Der Strom kann sich schließlich selbst unterhalten; es entsteht die selbständige Gasentladung.

Eine gewisse Fremdionisierung der Gase ist praktisch immer vorhanden. Sie wird hervorgerufen durch Lichtstrahlen, kurzwellige Höhenstrahlen, radioaktive Stoffe, so daß immer eine Stromspannungscharakteristik nach Abb. 133 vorliegt, wenn sie auch nicht in einfacher Weise der Messung zugänglich ist. Diese Erscheinungen sind für die Elektrotechnik von Bedeutung, da sie die Vorstufe zum Durchschlag bilden, bei dem die Entladung als selbständige Entladung zwischen den Elektroden vor sich geht. Von Interesse sind hier besonders die Vorgänge in dem gestrichelten Teil der Kurve. Eine genauere Vorstellung von dem Zustandekommen des Stromes in diesem Gebiet erhält man durch die folgende Überlegung (J. Townsend, 1905).

Es seien zwei plattenförmige Elektroden mit dem Abstand  $a$  vorhanden, zwischen denen die Entladung hervorgerufen wird. Den senkrechten Abstand eines Punktes im Zwischenraum von der negativen Platte bezeichnen wir mit  $x$ . Ferner bezeichne:

$n_1$  die Zahl der in der Volumeneinheit des Gases vorhandenen negativen Ladungsträger (Ionen oder Elektronen),

$v_1$  ihre Geschwindigkeit,

$n_2$  die Zahl der in der Volumeneinheit des Gases vorhandenen positiven Ionen,

$v_2$  ihre Geschwindigkeit.

Die ionisierende Wirkung der Ladungsträger kennzeichnet man durch die Ionisierungszahlen  $\alpha$  und  $\beta$ . Man versteht darunter die Zahl der Ionenpaare, die von einem negativen bzw. positiven Träger je Längeneinheit des Weges erzeugt werden. Diese Zahlen hängen von der Geschwindigkeit ab, mit der die Ionen durch das Gas wandern, da die Stoßwirkung der Ionen mit ihrer kinetischen Energie, also mit der Geschwindigkeit wächst. Die Geschwindigkeit ist wieder um so größer, je größer die Feldstärke ist;  $\alpha$  und  $\beta$  wachsen daher mit der Feldstärke.

Betrachten wir nun ein Volumenelement des Gases von der Länge  $dx$  und dem Querschnitt  $F$ . Da in dem Volumenelement Ladungsträger durch Stoßionisation erzeugt werden, so treten weniger Träger an der einen Grundfläche ein, wie an der anderen herauskommen. Die negativen Ladungsträger wandern in der Richtung der  $x$ -Achse; während eines Zeitabschnittes  $dt$  treten

$$F n_1 v_1 dt$$

Träger in das Volumenelement ein; an der anderen Grundfläche treten während des gleichen Zeitabschnittes

$$F n_1 v_1 dt + F \frac{\partial(n_1 v_1)}{\partial x} dx dt$$

Träger aus. Die Zunahme beträgt also in der Zeiteinheit  $F dx \frac{\partial(n_1 v_1)}{\partial x}$  und  $\frac{\partial(n_1 v_1)}{\partial x}$

in der Volumeneinheit und Zeiteinheit; sie entsteht infolge der Stoßwirkung der negativen und positiven Träger. Ein negativer Träger erzeugt  $\alpha dx$  negative Träger längs der Strecke  $dx$ . Er braucht zum Durchlaufen dieser Strecke die Zeit  $dx/v_1$ . In der Zeiteinheit erzeugt also ein negativer Träger  $\alpha v_1$  neue negative Träger. Da in der Volumeneinheit  $n_1$  Träger vorhanden sind, so ergibt sich in der Volumeneinheit und Zeiteinheit eine Zunahme der negativen Träger um  $\alpha n_1 v_1$ . Genau so findet man, daß die positiven Ionen eine Zunahme der negativen Ionen um  $\beta n_2 v_2$  zur Folge haben. Im Gleichgewichtszustand muß daher sein

$$\frac{\partial(n_1 v_1)}{\partial x} = \alpha n_1 v_1 + \beta n_2 v_2. \quad (492)$$

Durch eine entsprechende Überlegung ergibt sich für die Zunahme der positiven Ionen

$$\frac{\partial(n_2 v_2)}{\partial x} = -\alpha n_1 v_1 - \beta n_2 v_2, \quad (493)$$

Die Stromdichte ist die in der Zeiteinheit durch die Querschnittseinheit fließende Elektrizitätsmenge, also

$$|\mathcal{G}| = (n_1 v_1 + n_2 v_2) q, \quad (494)$$

wobei  $q$  die Ladung eines Trägers bezeichnet. Damit ergibt sich aus Gl. (492)

$$\frac{d(n_1 v_1)}{dx} = (\alpha - \beta) n_1 v_1 + \frac{\beta}{q} |\mathcal{G}|. \quad (495)$$

Um diese Differentialgleichung zu integrieren, betrachten wir  $n_1 v_1$  als unbekannte Veränderliche; da die Stromdichte  $|\mathcal{G}|$  bei stationärer Strömung unabhängig von  $x$  sein muß, so findet man

$$n_1 v_1 = -\frac{\beta}{\alpha - \beta} \frac{1}{q} |\mathcal{G}| + k_2 e^{(\alpha - \beta)x}. \quad (496)$$

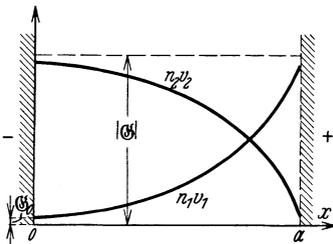


Abb. 134. Stromdichte bei einer unselbständigen Gasentladung.

Die Beobachtungen ergeben, daß  $\alpha$  erheblich größer als  $\beta$  ist; die Dichte des negativen Stromes steigt also nach der positiven Elektrode hin stark an. Entsprechend nimmt die des positiven Stromes  $n_2 v_2$  ab, so daß sich die durch Abb. 134 veranschaulichte unsymmetrische Verteilung der Ströme ergibt; in der Nähe der negativen Elektrode ändert sich das Verhältnis der beiden Stromdichten langsamer als an der positiven Elektrode. Die Stromstärke selbst ist davon abhängig, wie stark die Fremdionisation ist. Wäre keine Fremdionisation vorhanden, so wäre für  $x=0$  auch  $n_1 v_1 = 0$  zu setzen. Damit folgt aber  $|\mathcal{G}| = 0$ ; es würde kein Strom entstehen; die Strömung ist nicht selbständig. Hat dagegen der negative Strom einen bestimmten Anfangswert für  $x=0$ :

$$q n_1 v_1 = |\mathcal{G}_0|, \quad (497)$$

werden also an der Kathode auf irgendeine Weise Ionen erzeugt, so ergibt sich für die Konstante  $k_2$  der Wert

$$k_2 = \frac{1}{q} \left( |\mathcal{G}_0| + \frac{\beta}{\alpha - \beta} |\mathcal{G}| \right); \quad (498)$$

damit wird Gl. (496):

$$q n_1 v_1 = -\frac{\beta}{\alpha - \beta} |\mathcal{G}| + \mathcal{G}_0 e^{(\alpha - \beta)x} + \frac{\beta}{\alpha - \beta} |\mathcal{G}| e^{(\alpha - \beta)x}. \quad (499)$$

Für  $x=a$  ist die gesamte Stromdichte praktisch gleich  $q n_1 v_1$ . Setzt man dies ein, so erhält man bei Auflösung nach  $|\mathcal{G}|$ :

$$|\mathcal{G}| = |\mathcal{G}_0| \frac{(\alpha - \beta) e^{(\alpha - \beta)a}}{\alpha - \beta e^{(\alpha - \beta)a}}. \quad (500)$$

Da nun die beiden Ionisierungszahlen  $\alpha$  und  $\beta$  mit der Feldstärke wachsen, so wird bei steigender Feldstärke der zweite Ausdruck im Nenner immer größer gegen den ersten, bis schließlich beide Ausdrücke einander gleich sind. Dann genügt schon eine beliebig kleine Anfangsionisierung, um beliebig große Ströme zu erzeugen; ein

stabiler Strom ist nicht mehr möglich, die Stromstärke wächst fortgesetzt, soweit es die Stromquelle zuläßt. Das Nullwerden des Nenners liefert also die Bedingung für das Einsetzen des Durchschlags

$$\alpha = \beta e^{(\alpha - \beta)a}. \tag{501}$$

Da  $\alpha$  groß gegen  $\beta$  ist, so kann man mit einer gewissen Annäherung auch schreiben

$$\frac{\alpha}{\beta} = e^{\alpha a}. \tag{502}$$

Die Beobachtungen zeigen nun, daß das Verhältnis der negativen zur positiven Ionisierungszahl nahezu unabhängig von der Feldstärke ist, so daß man setzen kann

$$k = \frac{\alpha}{\beta} = e^{\alpha a}; \tag{503}$$

daraus ergibt sich die Durchschlagsbedingung

$$\alpha a = \ln k. \tag{504}$$

Aus Messungen wurde für die Abhängigkeit zwischen  $\alpha$  und der Feldstärke  $\mathcal{E}$  von verschiedenen Autoren die folgende empirische Beziehung abgeleitet:

$$\alpha = \gamma (|\mathcal{E}| - |\mathcal{E}_0|)^2. \tag{505}$$

Dabei ist  $|\mathcal{E}_0| = 23 \text{ kV/cm}$ ,  $\gamma = 0,14 \text{ cm/kV}^2$  für Luft von Atmosphärendruck. Bei  $23 \text{ kV/cm}$  beginnt also in Luft die Stoßionisation. Setzt man Gl. (505) in die Durchschlagsbedingungen ein, so folgt für die Feldstärke, bei der der Durchschlag zwischen parallelen Platten einsetzt,

$$|\mathcal{E}| = 23 \frac{\text{kV}}{\text{cm}} + \sqrt{\frac{\ln k \text{ cm}}{0,14} \frac{\text{kV}}{\text{cm}}}. \tag{506}$$

Man bezeichnet diese Größe als die Durchschlagfestigkeit oder Durchschlagfeldstärke der Luft. Durch Vergleich der beobachteten mit den berechneten Werten ergibt sich  $\ln k = 7$ , also  $k = 1100$ . Die Durchschlagfeldstärke hängt danach in der durch Abb. 135 dargestellten Weise von dem Abstand  $a$  zwischen den Elektroden ab; sie ist also bei dünnen Schichten größer als in dicken Schichten.

Die bisherigen Überlegungen beziehen sich auf ein homogenes elektrisches Feld. Ist das Feld nicht homogen, wie etwa zwischen Zylinderelektroden, so kann man eine ähnliche Betrachtung anstellen, die aber zu komplizierten Durchschlagsbedingungen führt. Zu einer angenäherten Formulierung kommt man auf folgende Weise:

Die Gl. (504) sagt aus, daß der Durchschlag des Gases dann eintritt, wenn auf dem Wege von der negativen zur positiven Elektrode von einem negativen Ladungsträger eine ganz bestimmte Zahl von Ionenpaaren, nämlich  $\ln k$ , gebildet wird. Bei Luft müssen mindestens sieben Ionenpaare von jedem negativen Ion erzeugt werden, wenn der Durchschlag eintreten soll. In einem nicht homogenen Feld ändert sich die Feldstärke längs der Ionenwege, es ändert sich infolgedessen auch  $\alpha$ . Auf der Strecke  $dx$  werden  $\alpha dx$  Ionenpaare gebildet, auf dem ganzen Weg von der Länge  $a$  daher

$\int_0^a \alpha dx$ . Wenn dieses Integral auf irgendeiner Verschiebungslinie mindestens den Wert  $\ln k$  erreicht, dann setzt der Durchschlag ein. Damit ergibt sich die erweiterte Durchschlagsbedingung (Schumann, 1922)

$$\int_0^a \alpha dx = \ln k. \tag{507}$$

Als Beispiel werde eine Doppelleitung aus zwei parallelen Drähten vom Abstand  $a$  mit dem Drahradius  $r_0$  betrachtet. Ist der Abstand beider Drähte groß gegen  $r_0$ ,

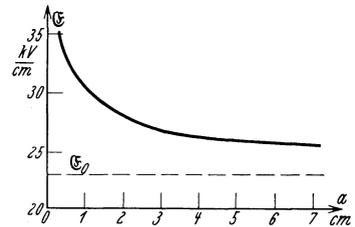


Abb. 135. Durchschlagfeldstärke bei parallelen Plattenelektroden.

so hat die Feldstärke in der Umgebung eines Drahtes im Abstand  $r$  von der Drahtachse nach Abschnitt 12, Gl. (237), den Wert

$$|\mathfrak{E}| = |\mathfrak{E}_a| \frac{r_0}{r}, \tag{508}$$

wobei  $\mathfrak{E}_a$  die elektrische Feldstärke an der Drahtoberfläche bezeichnet. Damit wird nach Gl. (505)

$$\alpha = \gamma \left( \frac{r_0}{r} |\mathfrak{E}_a| - |\mathfrak{E}_0| \right)^2 \quad \text{für } |\mathfrak{E}| > \mathfrak{E}_0,$$

$$\alpha = 0 \quad \text{für } |\mathfrak{E}| < \mathfrak{E}_0.$$

Bei Anwendung der Durchschlagsbedingung (507) hat man daher von  $r = r_0$  ( $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_a$ ) bis zu einem Radius  $r_1$  zu integrieren, für den  $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0$  ist. Dieser Radius beträgt nach Gl. (508)

$$r_1 = r_0 \frac{|\mathfrak{E}_a|}{|\mathfrak{E}_0|}. \tag{509}$$

Nur innerhalb eines Zylinders von diesem Radius findet die Stoßionisation statt. Der Leiter überzieht sich mit einer glimmenden Haut von der Stärke  $b = r_1 - r_0$  (Korona). Die Durchschlagsbedingung lautet nun

$$\gamma \int_{r_0}^{r_1} \left( \frac{r_0}{r} |\mathfrak{E}_a| - |\mathfrak{E}_0| \right)^2 dr = \ln k, \tag{510}$$

und man erhält durch Ausführen der Integration

$$r_0 = \frac{\ln k}{\gamma |\mathfrak{E}_0|^2} \left( \frac{|\mathfrak{E}_a|^2}{|\mathfrak{E}_0|^2} - 1 - 2 \frac{|\mathfrak{E}_a|}{|\mathfrak{E}_0|} \ln \frac{|\mathfrak{E}_a|}{|\mathfrak{E}_0|} \right)^{-1}. \tag{511}$$

Man kann damit für verschiedene willkürlich angenommene Werte von  $|\mathfrak{E}_a|$  den zugehörigen Radius  $r_0$ , bei dem der Durchschlag gerade einsetzt, berechnen und erhält so die in Abb. 136 dargestellte Abhängigkeit der Durchbruchfeldstärke vom Leiterradius. Mit Hilfe von Gl. (509) kann man ferner die Dicke  $b$  der Glimmhaut beim Einsetzen des Durchschlags berechnen; sie ist in Abb. 137 dargestellt. Man kann dieses Ergebnis auch so ausdrücken, daß man sagt: Der Durchschlag setzt erst ein, wenn die kritische Feldstärke  $\mathfrak{E}_0$  in einem gewissen Abstand  $b$  von dem Draht erreicht ist.

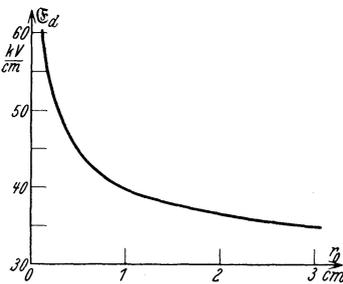


Abb. 136. Durchschlagfeldstärke an Drähten.

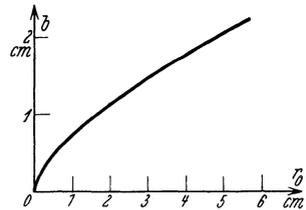


Abb. 137. Dicke der Glimmhaut.

Gegenüber diesen theoretischen Werten ergeben sich praktisch Unterschiede, die dadurch bedingt sind, daß bei den Feldstärkeberechnungen ideal glatte Oberflächen vorausgesetzt sind. Unebenheiten ergeben eine örtliche Erhöhung der Feldstärke und erniedrigen damit die Spannung, die notwendig ist, um den Durchbruch der Luft einzuleiten. Ferner wurde die durch die Raumladung entstehende Feldänderung nicht berücksichtigt.

Hinsichtlich der Abhängigkeit vom Gasdruck liefert die Theorie folgendes. Die kinetische Energie eines Elektrons ist nach dem Durchlaufen einer Spannung  $U$

$$\frac{1}{2} m v^2 = e U.$$

Das Elektron erwirbt diese Energie zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zusammenstößen mit Molekülen. Ist  $l$  die dabei durchlaufene Weglänge, so ergibt sich

$$e U = e |\mathfrak{E}| l.$$

Das Elektron ist zur Zertrümmerung eines neutralen Moleküls befähigt, wenn diese

kinetische Energie einen bestimmten Mindestwert erreicht hat. Nun ist die freie Weglänge  $l$  umgekehrt proportional der Gasdichte, also nach der Zustandsgleichung der Gase proportional der absoluten Temperatur  $T$  und umgekehrt proportional dem Gasdruck  $p$ . Die kinetische Energie ist daher proportional  $|\mathcal{E}|T/p$ . Von diesem Ausdruck hängt die Ionisierungsfähigkeit der Elektronen ab. Andererseits wird die Wahrscheinlichkeit, daß beim Durchlaufen eines bestimmten längeren Weges eine gewisse Anzahl von Molekülen zertrümmert wird, um so größer sein, je dichter die Moleküle nebeneinander liegen. Die Ionisierungszahl  $\alpha$  muß daher bei ein und derselben Ionisierungsfähigkeit der Elektronen proportional  $p/T$  sein. Es läßt sich also der Ansatz machen

$$\alpha = \frac{p}{T} f_1\left(\frac{|\mathcal{E}|T}{p}\right), \quad T \frac{\alpha}{p} = f_1\left(\frac{|\mathcal{E}|T}{p}\right),$$

wobei  $f_1$  eine Funktion von  $|\mathcal{E}|T/p$  allein ist. Genau so gilt auch

$$T \frac{\beta}{p} = f_2\left(\frac{|\mathcal{E}|T}{p}\right).$$

Die Durchschlagsbedingung (502) für parallele Plattenelektroden lautet daher

$$\frac{f_1\left(\frac{|\mathcal{E}|T}{p}\right)}{f_2\left(\frac{|\mathcal{E}|T}{p}\right)} = e^{\frac{ap}{T} f_1\left(\frac{|\mathcal{E}|T}{p}\right)}.$$

Führt man die Durchschlagsspannung  $U_a = a|\mathcal{E}|$  ein, so folgt hieraus, daß bei konstanter Temperatur die Durchschlagsspannung eine Funktion von  $ap$  allein ist (Paschen, 1889):

$$U_a = f(ap). \quad (512)$$

Wird der Gasdruck verdoppelt, so kann also der Abstand bei gleicher Durchschlagsspannung auf die Hälfte herabgesetzt werden. Es folgt daraus jedoch nicht, daß bei einer Vergrößerung des Druckes die Durchschlagfestigkeit immer zunehmen muß; die Funktion  $f$  hat nämlich für einen bestimmten Wert von  $ap$  ein Minimum. Das Minimum liegt für Luft von 20°C bei etwa  $ap = 0,0075$  mm at und hat den Wert  $U_a = 327$  Volt. Bei Abständen von über 0,0075 mm und einem Druck von über 1 at ergibt also eine Drucksteigerung immer eine Zunahme der Durchschlagfestigkeit. Das Paschensche Gesetz gilt jedoch nur, solange die durch die freien Ionen verursachte Raumladung die Potentialverteilung nicht wesentlich beeinflusst; das ist bis zu einem Druck von etwa 20 at der Fall.

Bei Berücksichtigung der Temperatur ergibt sich das Ähnlichkeitsgesetz:

$$U_a = f\left(\frac{ap}{T}\right). \quad (513)$$

Mit wachsender Temperatur erniedrigt sich bei normalem Luftdruck die Durchschlagfestigkeit.

Die Erscheinungen beim Durchschlag flüssiger und fester Isolierstoffe sind noch verhältnismäßig wenig geklärt, obwohl bereits ein sehr umfangreiches Beobachtungsmaterial vorliegt. Die Moleküle sind hier viel dichter gepackt, die freie Weglänge der Ionen ist daher erheblich kleiner als in den Gasen. Dementsprechend ist auch das Ionisierungsvermögen der Ionen gering.

Der Durchschlag fester Isolierstoffe ist aufzufassen als eine Zerstörung des molekularen Gefüges oder der Moleküle selbst. Zwei Ursachen einer solchen Zerstörung können grundsätzlich in Betracht kommen:

1. die mechanischen Kräfte des elektrischen Feldes,
2. die Ionenbewegung.

Auf die positiv und negativ elektrischen Bestandteile der Atome werden im elektrischen Feld Kräfte von der in Abschnitt 14 besprochenen Art ausgeübt, die eine Trennung der Atombestandteile anstreben. Es zeigt sich aber, daß die mecha-

nischen Kräfte, die erforderlich sind um die Moleküle in ihre Bestandteile zu zerlegen, außerordentlich groß sind. Man kann berechnen, daß die elektrische Feldstärke in der Größenordnung von 100 000 kV/cm liegen müßte, um eine solche Spaltung herbeizuführen. Die Durchschlagfeldstärken der praktisch verwendeten Isolierstoffe sind erfahrungsgemäß einige Zehnerpotenzen niedriger. Andererseits zeigt sich bei manchen Stoffen, daß die zum Durchschlag notwendige Feldstärke mit zunehmender Reinheit des Stoffes immer weiter wächst. Es ist daher wahrscheinlich, daß diese Form des „mechanisch-elektrischen Durchschlages“ nur bei vollkommen reinen Stoffen mit idealer Gruppierung der Moleküle (Kristalle) und bei Dicken unter  $10^{-5}$  cm (siehe S. 131) eine Rolle spielt, und daß der Durchschlag bei wirklichen Isolierstoffen größerer Dicke wesentlich durch Verunreinigungen und Beimengungen beeinflusst wird. Praktisch dürfte daher die zweite Ursache des Durchschlages maßgebend sein. Auch hier sind wiederum zwei verschiedene Formen der Zerstörung des Stoffes möglich, nämlich durch Wärmeschwingungen der Ionen (Schmelzen, Verbrennen des Stoffes) und durch Stoßionisation ähnlich wie in Gasen. Die erste Form bezeichnet man als den Wärmedurchschlag, die zweite als den Ionisierungsdurchschlag. Bei der komplizierten Struktur der in der Technik verwendeten Isolierstoffe werden sich im allgemeinen beide Formen des Durchschlages überlagern, wobei der eine Vorgang vorherrschen kann.

Der Wärmedurchschlag kann aus der Abhängigkeit der Leitfähigkeit der Isolierstoffe von der Temperatur erklärt werden. Die infolge der Leitfähigkeit entstehende Joulesche Wärme erhöht die Temperatur und vergrößert damit die Leitfähigkeit. Daher wächst bei konstanter Spannung zwischen den Elektroden die in der Zeiteinheit erzeugte Wärmemenge, und es steigern sich Temperatur und Leitfähigkeit gegenseitig bis zur Zerstörung des Stoffes. Dieser Vorgang setzt an einer Stelle des Nichtleiters ein, wo infolge irgendwelcher Ungleichmäßigkeiten oder Verunreinigungen die Leitfähigkeit besonders groß ist; es bildet sich an dieser Stelle ein Kanal, in dem die Stromstärke mehr und mehr wächst.

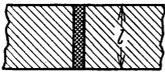


Abb. 138. Kanal höherer Leitfähigkeit.

Einen näheren Einblick in die Bedingungen bei einem derartigen Durchschlagsvorgang erhält man, wenn man das Schicksal eines bereits gebildeten Kanals höherer Leitfähigkeit verfolgt. Der Kanal,

Abb. 138, hat zwar in Wirklichkeit keine scharfen Grenzen; wir schreiben ihm aber zur Vereinfachung einen bestimmten Querschnitt  $F$  zu; er habe ferner die Länge  $l$ , die der Dicke des Isolierstoffes entspricht. Dann ist der Widerstand

$$R = \frac{l}{\kappa F}.$$

Bezeichnet  $U$  die Spannung zwischen den Enden des Kanals, so ist die in der Zeiteinheit erzeugte Wärmemenge  $\frac{U^2}{R} = \frac{U^2 \kappa F}{l}$ .

Diese Wärmemenge deckt im Gleichgewichtszustand die von dem Kanal abfließende Wärmemenge. Nimmt man an, daß die Wärme hauptsächlich quer vom Kanal wegströmt, so ist die in der Zeiteinheit abgeleitete Wärmemenge näherungsweise

$$kl \sqrt{F} \vartheta,$$

wobei  $\vartheta$  die Übertemperatur des Kanals bezeichnet,  $k$  eine Wärmeleitungs-konstante. Wenn also ein Gleichgewichtszustand bestehen soll, so muß sein

$$\frac{U^2 \kappa F}{l} = kl \sqrt{F} \vartheta. \quad (514)$$

Die Leitfähigkeit  $\kappa$  ist eine mit der Temperatur zunehmende Funktion; ein einfacher Ansatz, der sich bei manchen Stoffen gut mit den wirklichen Befunden deckt und der einen Überblick über die Durchschlagsbedingungen ermöglicht, ist

$$\kappa = \kappa_0 e^{\alpha \vartheta}; \quad (515)$$

es wird damit Gl. (514)

$$\frac{U^2 \kappa_0 \sqrt{F}}{k l^2} e^{\alpha \vartheta} = \vartheta. \quad (516)$$

Solange der links stehende Ausdruck größer ist als der rechte, überwiegt die erzeugte Wärmemenge die abgeleitete, die Temperatur muß daher steigen. In Abb. 139 sind die beiden Ausdrücke graphisch dargestellt; die Temperatur wächst bis zu dem Schnittpunkt  $\vartheta_m$ . Steigert man die Spannung, dann verschiebt sich die Exponentialkurve nach oben, die Übertemperatur des Kanals wird größer, bis sich schließlich die beiden Kurven gerade tangieren. Dann ist ständig die erzeugte Wärmemenge größer als die abgeleitete. Die Temperatur steigt unbegrenzt. Die Stromleitung ist labil geworden; die Temperatursteigerung führt zur Zerstörung des Isolierstoffes. Dieser Grenzfall ist dadurch bestimmt, daß die Differentialquotienten der Ausdrücke auf beiden Seiten von Gl. (516) einander gleich sind:

$$\alpha \frac{U^2 \kappa_0 \sqrt{F}}{k l^2} e^{\alpha \vartheta} = 1. \quad (517)$$

Aus den Gl. (516) und (517) folgt  $\alpha \vartheta = 1$ ; (518)

dies ergibt mit Gl. (516) als Bedingung für die Spannung, bei der gerade der Durchschlag einsetzt,

$$U_a = l \sqrt{\frac{k}{\alpha \kappa_0 e \sqrt{F}}}. \quad (519)$$

Die Durchschlagspannung wird hiernach kleiner, wenn die Temperatur des Isolierstoffes von außen her erhöht wird, da dann die Anfangsleitfähigkeit  $\kappa_0$  größer wird. Sie ist ferner proportional  $l$ , also der Dicke des Isolierstoffes. Für diese Abhängigkeit ist jedoch die bei der Ableitung gemachte Voraussetzung wesentlich, daß die Wärme senkrecht zur Kanalachse abfließt. In Wirklichkeit wird immer eine gewisse Wärmeströmung zu den Elektroden hin stattfinden, besonders wenn es sich um dünne Isolierstoffschichten handelt. Dann ergibt sich eine nicht proportionale Zunahme der Spannung mit der Schichtdicke, wie sie tatsächlich beobachtet wird. Besonders bei ganz dünnen Schichten ist diese longitudinale Wärmeableitung wahrscheinlich erheblich; damit stimmt die Beobachtung überein, daß die Durchschlagfeldstärke bei Verkleinerung der Dicke des Isolierstoffes stark zunimmt, so daß man bei Dicken von der Größenordnung  $10^{-5}$  cm in das Gebiet des mechanisch-elektrischen Durchschlages gelangen kann. Bei Wechselstrom haben noch die dielektrischen Verluste einen Einfluß auf die Durchschlagfeldstärke, da sie eine zusätzliche Erwärmung und damit eine Vergrößerung der Leitfähigkeit des Isolierstoffes ergeben. Die Durchschlagfeldstärke wird daher bei höheren Frequenzen kleiner.

Messungen der Leitfähigkeit von Isolierstoffen mit hohen Feldstärken zeigen, daß bei den meisten Stoffen von einer gewissen Feldstärke ab eine starke Zunahme der Leitfähigkeit einsetzt. Man führt diese Zunahme auf Ionisierungserscheinungen innerhalb des Isolierstoffes zurück. Ein praktisch häufiger und wichtiger Fall ist der, daß Lufteinschlüsse im Isolierstoff vorhanden sind, entweder zufälliger Art, z. B. Hohlräume in Ölpapierkabeln, oder infolge von Porosität, wie z. B. bei Porzellan und trockenem Papier. In solchen Lufteinschlüssen spielen sich die gleichen Vorgänge der Stoßionisierung ab wie beim Durchschlag von Gasen. Die dadurch entwickelte Wärme beschleunigt den vollständigen Durchbruch der festen Bestandteile des Isolierstoffes. Von Bedeutung ist dabei noch, daß die elektrische Feldstärke in den Lufträumen erheblich höhere Werte haben kann als im festen Stoff, da der Verschiebungsfluß an den Grenzflächen stetig übergeht. Auch wenn keine Lufteinschlüsse vorhanden sind, können ähnliche Vorgänge in irgendwelchen festen Verunreinigungen auftreten, deren Ionen bei genügend hoher Feldstärke neutrale Moleküle

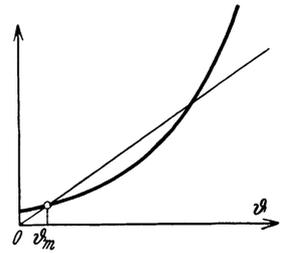


Abb. 139. Graphische Bestimmung der Übertemperatur des Kanals.

zertrümmern, so daß ein Zuwachs an Ionen und damit ein Zuwachs der Leitfähigkeit entsteht. Ein reiner Ionisierungsdurchschlag liegt vor, wenn die Stoßionisation zur Zerstörung des Stoffes ausreicht. Das ist z. B. bei trockenem Papier der Fall. Im allgemeinen unterstützt die Stoßionisation den Wärmedurchschlag. Man kann ihren Einfluß dadurch berücksichtigen, daß man für die Leitfähigkeit noch eine Abhängigkeit von der Feldstärke annimmt, z. B.

$$\kappa = \frac{\kappa_0 e^{\alpha \phi}}{(1 - \beta |\mathcal{E}|)^2}. \quad (520)$$

Für parallele Plattenelektroden folgt mit diesem Ansatz aus Gl. (519)

$$U'_d = \frac{U_a}{1 + \frac{\beta}{l} U_a}. \quad (521)$$

Die Ionenbildung setzt die Durchschlagspannung herab. Man bezeichnet diese Form des Durchschlags als wärme-elektrischen Durchschlag.

Die folgende Tabelle gibt die Größenordnung der Durchschlagfestigkeit von einigen Isolierstoffen an.

Hartpapier . . . . .	10...100 kV/cm
Pertinax . . . . .	100...150 „
Porzellan . . . . .	150...250 „
Mikanit . . . . .	250...350 „
Glas, Glimmer . . . . .	400...600 „

Die Durchschlagfeldstärke ist keine Materialkonstante wie etwa  $\epsilon$  oder  $\kappa$ , sondern immer von der ganzen Anordnung abhängig. Sie ist etwa zu vergleichen mit der Stromdichte, bei der ein Leiter durchschmilzt; auch diese ist keine Eigenschaft des Stoffes allein, sondern noch von anderen Bedingungen abhängig, wie Leiterform, Wärmeableitung, Stromart. Auch von der Zeitdauer der Einwirkung ist die Durchschlagfeldstärke abhängig, und zwar ist bei kürzerer Beanspruchung eine höhere Feldstärke für den Durchschlag erforderlich, eine Erscheinung, die sich aus der Wärmetheorie erklärt.

Eine genauere Theorie des Durchschlags von flüssigen Isolierstoffen existiert noch nicht. Von sehr großem Einfluß sind hier Verunreinigungen, insbesondere Beimengungen von Wasser, Faserstoffen und Gasen; sie setzen die Durchschlagfeldstärke herab. Es ist daher wahrscheinlich, daß der Durchschlag von diesen Beimengungen ausgeht, entweder dadurch, daß sich unter dem Einfluß der Feldkräfte leitende Brücken aus den Beimengungen bilden, oder dadurch, daß in den Beimengungen Stoßionisation auftritt. Bei leitenden flüssigen Beimengungen kann auch infolge starker örtlicher Erwärmung eine Dampfbildung entstehen, so daß der Durchschlag im Dampf nach Art eines Gasdurchschlages eingeleitet wird. Je sorgfältiger die Beimengungen der Öle beseitigt werden, um so höher ist die Durchschlagfeldstärke. Bei sehr großer Reinheit und hohen Feldstärken ist dann noch der Fall denkbar, daß die Ionen (z. B. des Wassers) eine solche Geschwindigkeit erlangen, daß sie zur Zerstörung neutraler Ölmoleküle führen. Die Durchschlagfeldstärken der Transformatoröle liegen je nach Reinheit zwischen 50 und 300 kV/cm.

Die Erscheinungen des Überschlages längs der Oberfläche fester oder flüssiger Isolierstoffe sind ebenfalls ziemlich verwickelt. Es zeigt sich, daß der Übersschlag schon bei erheblich niedrigerer Spannung eintritt, als es dem Durchschlag auf dem Luftwege entsprechen würde, eine Erscheinung, die man folgendermaßen erklären kann. Längs der Oberfläche bilden sich bei Steigerung der Spannung Büschelentladungen, die von den Elektroden ausgehen; sie ionisieren die Luft und haben Raumladungen zur Folge, so daß das Potentialgefälle auf einen kleineren Raum zusammengeschoben wird. Sind die beiden Elektroden durch einen isolierenden Steg getrennt, der über die Elektroden hinausragt, so können die Ionen gleichen Vorzeichens am Ende der Büschel nicht abwandern, da sie durch die Feldkräfte gegen den Steg ge-

preßt werden; es sind daher am Ende der Büschel vorwiegend Ionen mit dem Vorzeichen der betreffenden Elektrode vorhanden. Dadurch ergibt sich dort eine örtliche Vergrößerung der Feldstärke, die wieder zu einer weiteren Ausdehnung des Büschels und schließlich zur Bildung von verhältnismäßig langsam wandernden Funken führt (Gleitfunken); die Gasentladung schiebt längs der Oberfläche des Isolierstoffes eine Raumladung und damit ein starkes Potentialgefälle vor sich her. Die mittlere tangentielle Feldstärke, bei der ein Überschlag in Luft stattfindet, liegt zwischen 7 und 10 kV/cm; sie nimmt bei höherer Luftfeuchtigkeit bis auf Werte von etwa 4 bis 5 kV/cm ab. Der Einfluß der Luftfeuchtigkeit erklärt sich dadurch, daß auf der Oberfläche des Isolierstoffes eine feuchte Haut entsteht, die die Funkenbildung unterstützt.

### Drittes Kapitel.

## Das magnetische Feld.

### I. Das ruhende magnetische Feld.

#### 21. Grundbegriffe des magnetischen Feldes, Induktionsgesetz.

Wie mit dem Vorhandensein elektrischer Spannungen immer ein elektrisches Feld verbunden ist, so tritt immer ein magnetisches Feld auf, wenn elektrische Ströme fließen, wenn sich also elektrische Ladungen bewegen. Ein ruhendes magnetisches Feld entsteht, wenn es sich um Gleichstrom handelt. Das magnetische Feld kann wie das elektrische durch Kraftlinien veranschaulicht werden. Von dem Verlauf dieser Linien geben die bekannten Versuche mit Eisenspänen eine Vorstellung. Auf langgestreckte weiche Eisenspäne oder auf Magnete werden im magnetischen Feld mechanische Kräfte ausgeübt, die die Eisenspäne in eine bestimmte Richtung zu drehen suchen. Dadurch wird die Kraftlinienrichtung an jeder Stelle des Feldes definiert. Die Gesamtheit der Kraftlinien, die man hier als magnetische Induktionslinien oder magnetische Kraftlinien bezeichnet, nennt man den magnetischen Induktionsfluß; er steht in Analogie zu dem Verschiebungsfluß im elektrischen Feld.

Den Verlauf der Kraftlinien kann man untersuchen, wenn man eine kleine Magnetnadel, die sich nach allen Richtungen hin frei drehen kann, in das magnetische Feld bringt. Sie stellt sich in die Kraftlinienrichtung ein, und man setzt willkürlich einen Richtungssinn der Kraftlinien fest, indem man sagt, der Nordpol der Magnetnadel zeige in die Richtung der Kraftlinien. Denkt man sich die Magnetnadel in dieser Richtung ein kleines Stück weiter bewegt, so wird sie ihre Richtung ganz wenig ändern. Bewegt man sie fortgesetzt in der neuen Richtung um ein kleines Stückchen weiter, so erhält man den räumlichen Verlauf einer Kraftlinie. Es ergibt sich, daß alle Kraftlinien in sich geschlossene Kurven bilden, die mit dem elektrischen Stromkreis, der sie erzeugt, verkettet sind wie die Glieder einer Kette. Bei einer von Strom durchflossenen Drahtspule nach Abb. 140 findet man z. B. Kraftlinien der gestrichelt eingezeichneten Formen. Ihre Richtung steht zur Stromrichtung im Leiter in der gleichen Beziehung wie die Drehrichtung einer Rechtsschraube zur axialen Bewegungsrichtung.

Der besondere Zustand des Raumes, der von einem magnetischen Feld ausgefüllt wird, ist gekennzeichnet durch mechanische Kraftwirkungen und elektrische Induktionswirkungen. Wie im elektrischen Feld die mechanischen

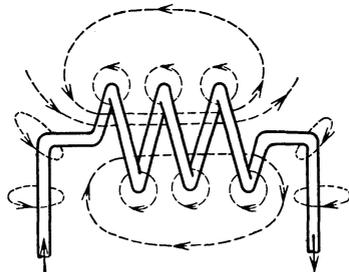


Abb. 140. Magnetische Kraftlinien einer Drahtspule.

Kraftwirkungen zur Definition der Feldstärke dienen, so können hier beide Wirkungen zur Ableitung eines Maßes für die Stärke des magnetischen Feldes benutzt werden.

a) **Die mechanische Kraftwirkung.** Bringt man in das magnetische Feld eines räumlich festliegenden Leiters einen zweiten von Strom durchflossenen Leiter, so wird auf diesen eine mechanische Kraft ausgeübt. Zur Messung dieser Kraft kann

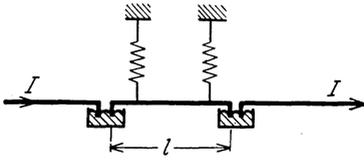


Abb. 141. Meßstab zur Bestimmung der magnetischen Induktion.

im Prinzip eine Einrichtung nach Abb. 141 dienen. Ein kurzer Kupferstab („Meßstab“) taucht in zwei Quecksilbernäpfe ein, die den Strom  $I$  zuführen. Die auf den Meßstab von der Länge  $l$  ausgeübte Kraft kann mit einer Federwaage oder mit Gegengewichten bestimmt werden. Derartige Messungen zeigen nun:

1. Die Kraft  $P$  hängt an jeder Stelle des Magnetfeldes von der Richtung des Meßstabes gegenüber der Richtung der Kraftlinien ab. Wenn der Stab mit einer Kraftlinie zusammenfällt, so wird keine Kraft auf ihn ausgeübt. Die größte Kraft ergibt sich, wenn der Stab von den Kraftlinien senkrecht geschnitten wird. Ändert man den Winkel  $\alpha$ , den die Stromrichtung mit der Kraftlinienrichtung bildet, so ändert sich die Größe der Kraft wie  $\sin \alpha$ .

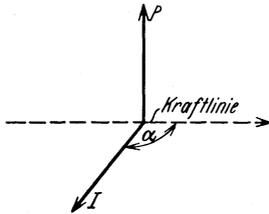


Abb. 142. Richtungen von Kraft, Strom und Magnetfeld.

2. Die Kraft ist proportional der Stromstärke  $I$ . Ändert man die Stromrichtung, so kehrt sich auch die Kraftrichtung um.

3. Die Kraft wirkt immer senkrecht zur Richtung des Stabes und zur Richtung der magnetischen Kraftlinien, und zwar so, daß Stromrichtung, Kraftlinienrichtung und Krafrichtung ein Rechtssystem bilden, Abb. 142 (dreht man die Richtung des Stromes auf dem kürzesten Wege in die Richtung der Kraftlinien, so erhält man die Drehrichtung einer Rechtsschraube, die sich in der Kraftrichtung bewegt).

4. Die Kraft ist proportional der Länge  $l$  des Meßstabes.

Aus diesen Beobachtungen kann man die folgende Formel ableiten

$$P = B I l \sin \alpha, \quad (522)$$

in der  $B$  einen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Dieser Faktor  $B$  kann als ein Maß für die Stärke des magnetischen Feldes an der betreffenden Stelle angesehen werden. Man bezeichnet ihn als die magnetische Induktion. Bestimmt man mit Hilfe des Meßstabes an irgendeiner Stelle des magnetischen Feldes die auf das Stäbchen ausgeübte maximale Kraft  $P_m$  ( $\alpha = 90^\circ$ ), so findet man die magnetische Induktion aus

$$B = \frac{P_m}{I l}. \quad (523)$$

Dadurch ist die Größe  $B$  definiert; ihre Einheit kann willkürlich festgesetzt werden. Würde man die Kraft in Gr, den Strom in A und die Länge in cm messen, so würde man 1 Gr/A cm als Einheit für  $B$  erhalten. Man hat jedoch nicht diese Einheit, sondern die Einheit  $\frac{1 \text{ dyn}}{10 \text{ A cm}}$  gewählt, indem man festlegte: Die Einheit der magnetischen Induktion liegt vor, wenn auf einen Meßstab von der Länge 1 cm, der von einem Strom mit der Stärke 10 A durchflossen wird, eine Kraft von 1 dyn ausgeübt wird. Diese Einheit bezeichnet man als

$$1 \text{ Gauß} = 1 \text{ G} = \frac{1 \text{ dyn}}{10 \text{ A cm}} = 1,020 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Gr}}{\text{A cm}}. \quad (524)$$

Infolge der Äquivalenz der mechanischen und elektrischen Arbeit kann man aus dieser Definitionsgleichung die mechanische Krafteinheit eliminieren. Es ist nach

früherem  $1 \frac{\text{Ws}}{\text{cm}} = 10,2 \text{ kGr}$  oder  $1 \text{ Gr} = \frac{1}{1,020} 10^{-4} \frac{\text{Ws}}{\text{cm}}$ .

Führt man dies in die Definitionsgleichung für 1 Gauß ein, so folgt

$$1 \text{ G} = 10^{-8} \frac{\text{Ws}}{\text{A cm}^2} = 10^{-8} \frac{\text{Vs}}{\text{cm}^2}. \quad (525)$$

Man kann die Größe  $B$  als einen Vektor  $\mathfrak{B}$  auffassen, dessen Richtung durch die Kraftlinienrichtung gegeben ist. Das hat ganz ähnliche Vorteile wie die Auffassung der Verschiebungsdichte im elektrischen Feld als Vektor. Wenn man nämlich willkürlich festlegt, daß der Betrag von  $B$  die Zahl der Kraftlinien pro Flächeneinheit angeben soll, dann erhält man die gesamte Zahl der Kraftlinien, die durch irgendeine Fläche hindurchgehen, als Oberflächenintegral des Vektors  $\mathfrak{B}$  über diese Fläche. Es ist also der magnetische Induktionsfluß

$$\Phi = \int \mathfrak{B} d\mathfrak{F}, \quad (526)$$

ganz analog wie beim Verschiebungsfluß im elektrischen Feld. Die Aussage, daß alle magnetischen Kraftlinien in sich geschlossen sind, läßt sich damit in der Form schreiben

$$\oint \mathfrak{B} d\mathfrak{F} = 0. \quad (527)$$

Das Oberflächenintegral der magnetischen Induktion über eine beliebige Hüllfläche ist Null, da aus der Fläche genau so viele Kraftlinien herauskommen, wie durch sie eintreten.

Die Einheit des magnetischen Induktionsflusses ergibt sich durch Multiplikation der Einheit der magnetischen Induktion mit der Flächeneinheit. Man definiert die Einheit des magnetischen Induktionsflusses durch

$$1 \text{ Maxwell} = 1 \text{ M} = 1 \text{ G cm}^2 = 10^{-8} \text{ Vs}. \quad (528)$$

Auf Grund dieser Beziehung wird zuweilen als Einheit des Induktionsflusses die Voltsekunde benützt:  $1 \text{ Vs} = 10^8 \text{ M}$ .

Zur Veranschaulichung des magnetischen Induktionsflusses setzt man willkürlich fest, daß die Anzahl der Maxwell gleich der Kraftlinienzahl sein soll:

$$1 \text{ M} = 1 \text{ Kraftlinie}; \quad 1 \text{ G} = \frac{1 \text{ Kraftlinie}}{\text{cm}^2}.$$

Die Anzahl der Gauß gibt an, wie groß die Zahl der Kraftlinien ist, die durch den Quadratzentimeter einer Fläche hindurchgehen, die senkrecht von den Kraftlinien geschnitten wird. Man bezeichnet daher die magnetische Induktion auch als die Kraftliniendichte. In einem homogenen Feld ist die Kraftliniendichte überall die gleiche, die Kraftlinien bilden parallele gerade Linien. Ein solches Feld ist bei Gl. (522) vorausgesetzt; die Länge des Meßstäbchens  $l$  muß also bei einem beliebigen Feld so klein sein, daß das Feld in der Umgebung des Meßstäbchens als homogen angesehen werden kann.

Die Kraftwirkung des magnetischen Feldes auf stromdurchflossene Leiter besteht in einer Wirkung auf die im Leiter bewegten Elektrizitätsmengen. Fließt in dem Leiter ein Strom  $I$ , so ist dies gleichbedeutend mit der Bewegung einer Elektrizitätsmenge  $Q$  mit einer bestimmten Geschwindigkeit  $v$ , und es gilt, Gl. (132),

$$Il = Qv. \quad (529)$$

Daher kann man allgemein für die Kraft, die im magnetischen Feld auf eine bewegte Elektrizitätsmenge ausgeübt wird, schreiben

$$P = BQv \sin \alpha. \quad (530)$$

Diese Beziehung gilt zunächst nur im homogenen magnetischen Feld, man kann sie aber auch bei beliebigen Feldern anwenden, wenn die räumliche Ausdehnung der Ladung  $Q$  so klein ist, daß das magnetische Feld in der Umgebung der Ladung als homogen angesehen werden kann.

Die Richtung der Kraft ist durch die oben mit 3. bezeichnete Regel bestimmt. Man kann diese Regel in die Gleichung für die Größe der Kraft aufnehmen, wenn

man sich der Symbole der Vektorrechnung bedient. Die Geschwindigkeit kann durch einen Vektor  $v$  dargestellt werden, der mit  $\mathfrak{B}$  den Winkel  $\alpha$  bildet. Der Vektor der Kraft steht senkrecht auf der Ebene dieser beiden Vektoren. Seine Richtung ist gegeben durch die Verschiebungsrichtung einer Rechtsschraube, die so gedreht wird, wie man den Vektor  $v$  zu drehen hat, um ihn auf dem kürzesten Wege in die Richtung des Vektors  $\mathfrak{B}$  zu bringen. Man bezeichnet in der Vektorrechnung als äußeres Produkt oder Vektorprodukt zweier Vektoren  $v$  und  $\mathfrak{B}$  einen Vektor, dessen Richtung durch die eben genannte Regel bestimmt ist, und dessen Betrag gleich ist

$$|v| \cdot |\mathfrak{B}| \cdot \sin \alpha.$$

Das Vektorprodukt wird  $[v \mathfrak{B}]$  geschrieben. Es gilt daher

$$\mathfrak{F} = Q [v \mathfrak{B}]. \tag{531}$$

Beim Vektorprodukt ist wegen der Richtungsregel die Reihenfolge der beiden Vektoren zu beachten, während das skalare Produkt unabhängig von der Reihenfolge der beiden Vektoren ist.

Die Kraftwirkungen des magnetischen Feldes auf elektrische Ladungen können der Beobachtung zugänglich gemacht werden, wenn in einem evakuierten Gefäß ein magnetisches Feld erzeugt wird und in dieses Feld elektrisch geladene Teilchen geschleudert werden, z. B. Elektronen in Form eines Kathodenstrahles. Die Teilchen beschreiben dann infolge der magnetischen Feldkräfte im magnetischen Feld eigentümliche Bahnen. An jeder Stelle der Bahn erfährt ein geladenes Teilchen eine Beschleunigung, die senkrecht zur Bewegungsrichtung und zur Richtung der magnetischen Kraftlinien steht. Handelt es sich um ein homogenes Feld, so sind folgende Fälle möglich. Stimmt die Bewegungsrichtung des Teilchens überein mit der Kraftlinienrichtung, dann ergibt sich eine geradlinige Bahn, da in diesem Falle nach Gl. (531) keine Kräfte auftreten. Steht dagegen die Richtung der Bewegung senkrecht auf der Kraftlinienrichtung, so ergibt sich eine Beschleunigung von konstanter Größe und Richtung. Die Bahn wird ein Kreis, dessen Ebene senkrecht zur Kraftlinienrichtung liegt. Bezeichnet man die Masse des geladenen Teilchens mit  $m$ , so ist die infolge der Kraft  $\mathfrak{F}$  entstehende radiale Beschleunigung

$$a = \frac{|\mathfrak{F}|}{m} = \frac{Q B v}{m}.$$

Die zentrifugale Beschleunigung einer Kreisbewegung mit dem Radius  $r$  ist andererseits

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

Es stellt sich daher eine solche Bahn ein, daß

$$\frac{Q B v}{m} = \frac{v^2}{r} \quad \text{oder} \quad r = \frac{m v}{Q B}. \tag{532}$$

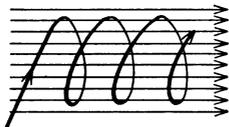


Abb. 143. Bahn eines elektrisch geladenen Teilchens im homogenen Magnetfeld.

Bildet die Bewegungsrichtung irgendeinen anderen Winkel mit der Kraftlinienrichtung, so kann die Geschwindigkeit in zwei Komponenten zerlegt werden, von denen die eine mit der Kraftlinienrichtung übereinstimmt, während die andere senkrecht dazu steht. Die erste bleibt ungeändert, die zweite liefert eine Kreisbewegung. Im ganzen ergibt sich daher eine Schraubenlinienbahn des geladenen Teilchens, Abb. 143.

Erscheinungen dieser Art spielen sich ab, wenn die von der Sonne ausgeschleuderten Elektronen und Ionen in das magnetische Feld der Erde gelangen. Sie beschreiben ähnliche Bahnen wie in Abb. 143, wobei jedoch der Krümmungsradius wegen der nach den Magnetpolen hin zunehmenden Kraftliniendichte immer kleiner wird [Gl. (532)]. Die geladenen Teilchen werden daher in der Nähe der magnetischen Pole der Erde konzentriert und rufen dort das Polarlicht hervor.

Eine Anwendung der Ablenkung von Elektronen im magnetischen Feld bildet das sogenannte Magnetron. Es ist eine Vakuumröhre mit Glühkathode und kalter Anode, die sich im magnetischen Feld einer stromdurchflossenen Spule befindet, Abb. 144. In dem axial gerichteten Magnetfeld der

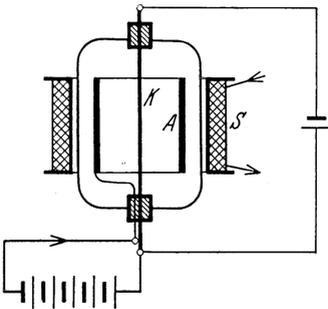


Abb. 144. Prinzip des Magnetrons.

Spule bewegen sich die von der Kathode  $K$  ausgehenden Elektronen auf gekrümmten Bahnen zur Anode  $A$ . Überschreitet der Strom in der Spule  $S$  eine bestimmte Stärke, dann wird die Bahnkrümmung so groß, daß die Elektronen nicht mehr zur Anode gelangen, sondern zur Kathode zurückkehren, so daß der Elektronenstrom unterbunden ist. Mit dem in der Spule  $S$  fließenden Strom kann man daher den zur Anode gehenden Elektronenstrom steuern und

ähnlich wie mit der Gittersteuerung bei der 3-Elektrodenröhre eine Verstärkerwirkung erzielen.

Die auf stromdurchflossene metallische Leiter im magnetischen Feld ausgeübten Kräfte werden in der Elektronentheorie erklärt durch die elektrischen Kräfte, die die Elektronenwolke auf das feststehende Gerüst der Moleküle ausübt, wenn sie im magnetischen Feld senkrecht zur Stromrichtung abgelenkt wird. Die auf den Leiter ausgeübte Kraft ist als Resultierende der elektrischen Bildkräfte über die ganze Leiteroberfläche aufzufassen. Die Resultierende der Bildkräfte ist Null oder unmeßbar klein, wenn kein magnetisches Feld vorhanden ist. Wirken dagegen die magnetischen Feldkräfte auf die Elektronen ein, so erfahren diese infolge ihrer Strombewegung oder genauer infolge ihrer in die Richtung der Leiterachse fallenden Geschwindigkeitskomponenten eine Beschleunigung, die im Mittel eine zur Leiterachse senkrechte Richtung hat; auf dieser Seite des Leiters überwiegen daher die elektrischen Bildkräfte.

Bei der Berechnung der magnetischen Feldkräfte ergibt sich das Resultat in elektrischen Kräfteinheiten  $Ws/cm$ , wenn die magnetische Induktion in  $Vs/cm^2$  oder  $G$  eingesetzt wird. Es sei z. B.  $B=10000 G=10^{-4} Vs/cm^2$ ,  $l=10 cm$ ,  $I=100 A$ ,  $\alpha=90^\circ$ . Dann wird

$$P = BIl = 10000 \cdot 100 \cdot 10 GA cm = 10^7 GA cm = 10^{-1} \frac{Ws}{cm} = 1,02 kGr.$$

**b) Die elektrische Induktionswirkung.** Wird ein elektrischer Leiter durch ein magnetisches Feld bewegt, so bewegt sich damit auch das Elektronengas im Innern des Leiters durch das magnetische Feld. Die Elektronen erfahren daher Kräfte senkrecht zur Bewegungsrichtung des Leiters und zur Kraftlinienrichtung. Wird z. B. ein Kupferstab, Abb. 145, mit der Geschwindigkeit  $v$  durch ein magnetisches Feld senkrecht zur Kraftliniendichte  $B$  bewegt, so wirken die magnetischen Feldkräfte auf die Elektronen nach obigem in der durch den Pfeil gekennzeichneten Richtung. Dadurch tritt an dem einen Stabende ein Überschuß, am anderen ein Mangel an Elektronen auf. Längs des Stabes stellt sich ein Potentialgefälle ein, das die Elektronen in entgegengesetzter Richtung zu bewegen sucht. Im Gleichgewichtszustand halten die mit dem Potentialgefälle verbundenen elektrischen Feldkräfte den magnetischen Feldkräften die Wage. Das elektrische Potentialgefälle längs des Stabes kann durch eine elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}$  gekennzeichnet werden. Auf irgendeine Ladung  $Q$  wird durch das elektrische Feld, nach Gl. (144), eine Kraft

$$\mathfrak{F}_1 = Q\mathfrak{E}$$

ausgeübt. Auf die gleiche Ladung wirken andererseits die magnetischen Feldkräfte, Gl. (531), ein:  $\mathfrak{F}_2 = Q[v\mathfrak{B}]$ . Im Gleichgewicht gilt daher

$$\mathfrak{E} = [v\mathfrak{B}]. \tag{533}$$

Dies ist das Induktionsgesetz. Es besagt, daß bei der Bewegung von Leitern durch ein magnetisches Feld im Leiter ein elektrisches Feld entsteht mit einer Feldstärke, die gleich dem Vektorprodukt von Bewegungsgeschwindigkeit und magnetischer Induktion ist. Die elektrische Feldstärke ist senkrecht zur magnetischen Induktion und zur Bewegung gerichtet. Bei einem Stab ergibt sich die größte Potentialdifferenz zwischen den Stabenden, wenn der Stab senkrecht zur Kraftlinienrichtung und zu sich selbst bewegt wird. Allgemein erhält man nach Gl. (533), wenn es sich um ein homogenes Magnetfeld handelt und alle Punkte des Stabes die gleiche Geschwindigkeit haben, die Potentialdifferenz durch Multiplikation der Länge des Stabes mit der in die Stabrichtung fallenden Komponente der elektrischen Feldstärke. Man bezeichnet diese Potentialdifferenz als die induzierte elektromotorische Kraft. Bei einer Länge  $s$  des Stabes hat sie die Größe

$$E = [v\mathfrak{B}]s. \tag{534}$$

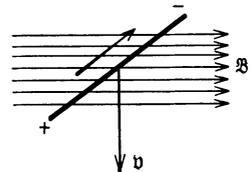


Abb. 145. Induktionswirkung in einem bewegten Stab.

Wegen der außerordentlich geringen Trägheit der Elektronen stellt sich der durch Gl. (533) ausgedrückte Gleichgewichtszustand in unmeßbar kurzer Zeit ein. Das gleiche Gesetz gilt daher auch, wenn sich die Geschwindigkeit  $v$  zeitlich ändert; es ändert sich dann auch die induzierte EMK, und in jedem Zeitpunkt gilt für den Augenblickswert der induzierten EMK

$$e = [v \mathfrak{B}] \mathfrak{s}. \quad (535)$$

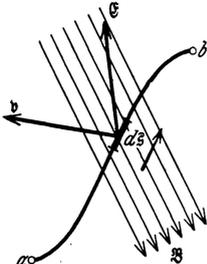


Abb. 146. Induktion in einem Draht beliebiger Form.

Schneidet der Stab die Kraftlinien senkrecht und wird er senkrecht zu sich selbst bewegt wie in Abb. 145, so ergibt sich hieraus im besonderen ( $s=l$ )  $e = Blv$ . (536)

Ist das magnetische Feld nicht homogen oder die Geschwindigkeit der einzelnen Punkte des Stabes nicht die gleiche, so gilt die Beziehung (535) für jeden kleinen Abschnitt von der Länge  $ds$  des Stabes, Abb. 146:

$$de = [v \mathfrak{B}] d\mathfrak{s} = \mathfrak{E} d\mathfrak{s}. \quad (537)$$

Die in einem drahtförmigen Leiter induzierte elektromotorische Kraft ist daher

$$e = \int_a^b [v \mathfrak{B}] d\mathfrak{s}. \quad (538)$$

Die gleichen Gesetze gelten auch für Leiter beliebiger Form. Wird z. B. eine Blechscheibe zwischen den beiden Polen eines Magneten gedreht, Abb. 147, so erfahren die Elektronen eine Ablenkung in radialer Richtung. Es tritt eine Spannung zwischen der Achse und dem Rand der Blechscheibe auf. Da die Bewegungsrichtung senkrecht auf der Kraftlinienrichtung steht, so gilt hier für die in einem Abschnitt  $dr$  des Radius induzierte elektromotorische Kraft

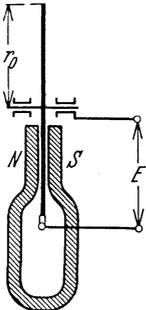


Abb. 147. Induktion in einer Bremscheibe.

$$de = B v dr = 2\pi n B r dr,$$

wenn  $n$  die Drehgeschwindigkeit bezeichnet. Kann das magnetische Feld als homogen angesehen werden, so hat die zwischen Rand und Achse auftretende elektromotorische Kraft bei konstanter Drehgeschwindigkeit die Größe

$$E = 2\pi n B \int_0^{r_0} r dr = \pi n r_0^2 B. \quad (539)$$

**Zahlenbeispiel:**  $B=10000 \text{ G}$ ;  $r_0=1 \text{ m}$ ,  $n=2000/\text{min}$ . Es wird

$$E = \pi \cdot 2000 \cdot 1 \cdot 10000 \frac{\text{G m}^2}{\text{min}} = 6,28 \cdot 10^3 \frac{\text{Vs cm}^2}{\text{cm}^2 60\text{s}} = 105 \text{ V}.$$

Bei der in Abb. 147 gezeichneten Anordnung ruft diese EMK Ströme hervor, die sich innerhalb der Blechscheibe in der durch gestrichelte Linien in Abb. 148 dargestellten Weise schließen.

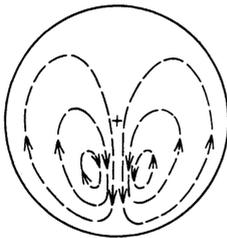


Abb. 148. Wirbelströme in der Bremscheibe.

Um die Blechscheibe zu drehen, muß man eine mechanische Arbeit aufwenden, die der durch diese „Wirbelströme“ entwickelten Wärme gleichwertig ist. Es ergibt sich also eine Bremswirkung.

Auf dem gleichen Prinzip beruhen die Unipolarmaschinen; hier wird das Auftreten der Wirbelströme dadurch vermieden, daß die Scheibe in ihrer ganzen Ausdehnung in ein Magnetfeld gebracht wird, das zur Achse symmetrisch ist, so daß die induzierte EMK auf jedem Radius die gleiche Größe hat.

Die Gl. (537) für die in einem Längenelement des Leiters induzierte elektromagnetische Kraft läßt sich durch die folgende Überlegung in eine andere Form bringen. Das Produkt  $[v \mathfrak{B}]$  kann geometrisch aufgefaßt werden als die Fläche eines Parallelogrammes, dessen Seiten aus den beiden Vektoren  $v$  und  $\mathfrak{B}$  gebildet werden, Abb. 149, denn ein solches Parallelogramm hat den Flächeninhalt

$$v \mathfrak{B} \sin \alpha.$$

Um das skalare Produkt des Vektors  $[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]$  mit dem Vektor  $d\mathfrak{s}$  zu bilden, hat man die in die Richtung von  $[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]$  fallende Komponente von  $d\mathfrak{s}$  mit der Fläche zu multiplizieren. Wie Abb. 149 zeigt, ergibt dies das Volumen eines Prismas, das aus den drei Vektoren  $\mathfrak{v}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $d\mathfrak{s}$  gebildet wird. Man kann daher das gleiche Produkt auf die folgenden Arten darstellen:

$$[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]d\mathfrak{s} = [\mathfrak{B}d\mathfrak{s}]\mathfrak{v} = [d\mathfrak{s}\mathfrak{v}]\mathfrak{B}. \quad (540)$$

Diese Rechenregel benutzen wir zur Umformung des Induktionsgesetzes Gl. (537):

$$\mathfrak{E}d\mathfrak{s} = [\mathfrak{v}\mathfrak{B}]d\mathfrak{s} = \mathfrak{B}[d\mathfrak{s}\mathfrak{v}]. \quad (541)$$

Hier stellt  $[d\mathfrak{s}\mathfrak{v}]$  die Fläche eines Parallelogramms dar, das aus den beiden Vektoren  $d\mathfrak{s}$  und  $\mathfrak{v}$  gebildet wird. Dieses Produkt ist also gleich der Fläche  $dF$ , die bei der Bewegung des Leiterelementes  $d\mathfrak{s}$  in der Zeiteinheit überstrichen wird. Das skalare Produkt dieser Fläche mit dem Vektor der magnetischen Induktion ergibt nach Gl. (526) den magnetischen Induktionsfluß, der durch diese Fläche hindurchgeht oder die Kraftlinienzahl, die von dem Leiterelement  $d\mathfrak{s}$  in der Zeiteinheit überstrichen wird. Daraus folgt der Satz:

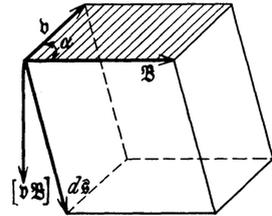


Abb. 149. Darstellung der induzierten elektromotorischen Kraft durch das Volumen eines Prismas.

Die in einem Leiterelement induzierte elektromotorische Kraft ist gleichder in der Zeiteinheit von dem Leiterelement geschnittenen Kraftlinienzahl.

Bezeichnet man den in der Zeit  $dt$  von  $d\mathfrak{s}$  überstrichenen Fluß mit

$$d\Phi_s = \mathfrak{B}d\mathfrak{F}, \quad (542) \quad \text{so gilt daher} \quad \mathfrak{E}d\mathfrak{s} = \frac{d\Phi_s}{dt}. \quad (543)$$

Die zwischen den beiden Enden des Drahtes auftretende elektromotorische Kraft ergibt sich durch Integration von  $\mathfrak{E}d\mathfrak{s}$  über die Leiterlänge.

Bei den Anwendungen hat man es immer mit geschlossenen Stromkreisen zu tun. Für die Berechnung der in einem geschlossenen Kreis induzierten elektromotorischen Kraft gilt nun auf Grund des eben aufgestellten Satzes folgendes. Der Leiterkreis, Abb. 150, werde durch ein beliebiges magnetisches Feld hindurchbewegt. In jedem Längenabschnitt wird eine elektromotorische Kraft von der durch Gl. (543) gegebenen Größe induziert. Um ihre Richtung angeben zu können, legen wir eine positive Richtung willkürlich fest und kennzeichnen sie durch einen Pfeil, der den magnetischen Induktionsfluß rechtsläufig umkreist. Die in dem Längenelement  $d\mathfrak{s}$ , Abb. 150, bei der angenommenen Bewegungsrichtung entstehende elektrische Feldstärke hat nach dem oben Ausgeführten die in der Abb. 150 eingezeichnete Richtung. Der Beitrag dieses Längenelementes zur gesamten elektromotorischen Kraft ist also negativ. Andererseits vermehren die von dem Längenelement  $d\mathfrak{s}$  bei der Bewegung geschnittenen Kraftlinien den Induktionsfluß, der durch die Schleife hindurchgeht. Andere Längenelemente, durch deren Bewegung der Induktionsfluß in der Leiterschleife verkleinert wird, ergeben umgekehrt einen positiven Beitrag zur elektromotorischen Kraft. Nach Gl. (543) ist die in der Schleife induzierte EMK bestimmt durch die gesamte infolge der Bewegung der Schleife in der Zeiteinheit entstehende Änderung des die Schleife durchsetzenden Induktionsflusses  $\Phi$ . Verbindet man dies mit der eben für das Vorzeichen gefundenen Regel, so erhält man

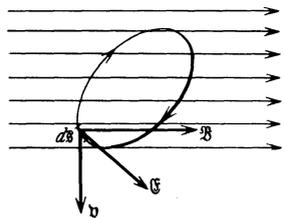


Abb. 150. Induktion in einem geschlossenen Drahtkreis.

Nach Gl. (543) ist die in der Schleife induzierte EMK bestimmt durch die gesamte infolge der Bewegung der Schleife in der Zeiteinheit entstehende Änderung des die Schleife durchsetzenden Induktionsflusses  $\Phi$ . Verbindet man dies mit der eben für das Vorzeichen gefundenen Regel, so erhält man

$$\oint \mathfrak{E}d\mathfrak{s} = e = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (544)$$

Das Induktionsgesetz besagt in dieser Form, daß die in einer Schleife indu-

zierte EMK durch den Induktionsfluß bestimmt ist, der mit der Schleife verkettet ist. Er kann berechnet werden als Oberflächenintegral der magnetischen Induktion über eine Fläche, die von dem Leiter berandet wird Gl. (526). Da die Kraftlinien in sich geschlossen sind, so ist die Form dieser Fläche ohne Einfluß auf die Größe des Oberflächenintegrals. Es tragen nur solche Induktionslinien zum Induktionsfluß bei, die mit dem Rand der Fläche verkettet sind. Wenn der Stromleiter ein Kraftlinienbündel mehrmals umschlingt wie z. B. bei einer Spule, dann ist es meist einfacher, den mit dem Stromleiter verketteten Gesamtfluß durch Multiplikation des von einer Windung umschlungenen Induktionsflusses mit der Zahl der Windungen zu berechnen. Wir unterscheiden daher im folgenden zwischen Gesamtfluß oder Flußverkettung  $\Psi$  und Bündelfluß  $\Phi$ . Der Gesamtfluß ist nach dem Induktionsgesetz maßgebend für die induzierte elektromotorische Kraft:

$$\oint \mathfrak{C} d\mathfrak{s} = e = - \frac{d\Psi}{dt}. \quad (545)$$

Er kann in manchen Fällen durch einen Bündelfluß ausgedrückt werden, wenn sämtliche  $w$  Windungen einer Spule diesen gleichen Fluß umschlingen. Dann gilt

$$\Psi = w \Phi, \quad (546)$$

und

$$e = -w \frac{d\Phi}{dt}. \quad (547)$$

In den meisten praktischen Fällen ist diese Beziehung jedoch nur als eine Näherungsformel zu betrachten.

Der Betrag der in einem geschlossenen Stromkreis induzierten elektromotorischen Kraft ist nach dem Induktionsgesetz gleich der Abnahmegeschwindigkeit des Gesamtflusses. Man bezeichnet die in der Schleife induzierte elektromotorische Kraft auch als die Umlaufspannung, die Abnahmegeschwindigkeit des Gesamtflusses wird der magnetische Schwund genannt. Das Induktionsgesetz kann daher in der folgenden Form ausgesprochen werden:

Die Umlaufspannung in einer geschlossenen Schleife ist gleich dem magnetischen Schwund.

Diese Fassung des Induktionsgesetzes gilt nicht nur für die Bewegung von Leiterschleifen in räumlich feststehenden Magnetfeldern oder für die Bewegung von Magnetfeldern gegen räumlich festliegende Leiter, sondern auch dann, wenn sich



Abb. 151. Spule zur Ausmessung magnetischer Felder.

das magnetische Feld zeitlich ändert. Man kann sich das Verschwinden eines Magnetfeldes in der Kraftlinienvorstellung so veranschaulichen, daß sich die geschlossenen Kraftlinien mehr und mehr zusammenschnüren, bis sie in einen Punkt zusammenschrumpfen. Dabei werden die Leiter so geschnitten wie bei einer Bewegung der Schleife. Das Induktionsgesetz gilt ferner auch dann in der gleichen Form, wenn es sich um Bewegungen von Magnetfeldern gegen feststehende Stromkreise handelt.

Das Induktionsgesetz liefert eine einfache Methode zur Ausmessung magnetischer Felder. Dazu dient eine Probespule  $S$ , Abb. 151, von so kleinen Abmessungen, daß das magnetische Feld in ihrer Umgebung als homogen angesehen werden kann. Diese Spule wird mit einem ballistischen Galvanometer  $G$  verbunden. Bringt man die Spule rasch in das magnetische Feld oder nimmt man sie aus dem magnetischen Feld rasch heraus, so ändert sich der Induktionsfluß, der mit der Spule verkettet ist; damit ergibt sich kurzzeitig eine elektromotorische Kraft und ein Stromstoß im Galvanometer. Aus dem ballistischen Ausschlag des Galvanometers kann die magnetische Induktion am Orte der Spule berechnet werden.

Bezeichnet  $F$  die Fläche der Spulenöffnung und  $B$  die magnetische Induktion in dieser Öffnung, so ist der von einer Windung der Spule umfaßte Bündelfluß

$$\Phi = \mathfrak{B} \mathfrak{F} = BF \sin \alpha,$$

und der Gesamtfluß wird  $\Psi = w\Phi = wBF \sin \alpha,$  (548)

wobei  $\alpha$  den Winkel zwischen Spulenachse und Kraftlinienrichtung bedeutet. Der Gesamtfluß hat seinen größten Wert, wenn die Achse der Spule in die Richtung der Kraftlinien fällt. Dann wird  $\Phi = BF.$  (549)

Beim Herausnehmen der Spule aus dem Magnetfeld ändert sich der Fluß, und es entsteht eine EMK von der durch Gl. (545) gegebenen Größe. Der dadurch hervorgerufene Strom ist nach dem Ohmschen Gesetz

$$i = \frac{e}{R},$$

wobei  $R$  den Gesamtwiderstand des Stromkreises bezeichnet. Damit wird

$$i = -\frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{w}{R} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (550)$$

Wird die Spule rasch aus dem Feld herausgenommen, so ergibt sich ein ballistischer Ausschlag des Galvanometers, der die Elektrizitätsmenge anzeigt, die während der Bewegung der Spule durch den Stromkreis fließt, also

$$Q = \int_0^{\infty} i dt = -\frac{w}{R} \int d\Phi = \frac{w}{R} (\Phi_1 - \Phi_2), \quad (551)$$

wobei  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  die Flüsse zu Beginn und Ende der Bewegung bedeuten. Wächst also der die Spule durchsetzende Bündelfluß von Null auf den Wert  $\Phi$  beim Hineinbringen der Spule in das Feld, oder nimmt er von diesem Wert  $\Phi$  auf Null ab beim Herausnehmen der Spule aus dem Feld, so ergibt sich der gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Ausschlag des ballistischen Galvanometers; die Größe dieses Ausschlages liefert die Elektrizitätsmenge  $Q$ . Damit berechnet sich

$$\Phi = \frac{R}{w} Q. \quad (552)$$

Die Richtung der Kraftlinien kann dadurch bestimmt werden, daß man den größten Ausschlag durch Beobachtung bei verschiedenen Stellungen der Spule zu erreichen sucht; dann ist die Kraftlinendichte

$$B = \frac{RQ}{wF}. \quad (553)$$

Da der Wicklungsquerschnitt der Spule eine räumliche Ausdehnung besitzt, so ergibt sich die Frage, was man unter der Öffnung  $F$  der Spule zu verstehen hat. Wir bezeichnen die Abmessungen der Spule nach Abb. 152 und denken uns die Wicklung unendlich fein unterteilt. Eine Schicht der Wicklung vom Radius  $r$  und der Dicke  $dr$  umschließt den Induktionsfluß

$$\Phi = |\mathfrak{B}| r^2 \pi,$$

da das Feld wegen der Kleinheit der Spule als homogen angesehen werden kann. In dieser Schicht sind

$$\frac{b dr}{b(r_2 - r_1)} w$$

Windungen vorhanden. Daher ist der Gesamtfluß dieser Schicht

$$d\Psi = w \frac{dr}{r_2 - r_1} |\mathfrak{B}| r^2 \pi$$

und der Gesamtfluß der Spule

$$\Psi = \frac{w\pi |\mathfrak{B}|}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} r^2 dr = \frac{w\pi |\mathfrak{B}|}{r_2 - r_1} \frac{r_2^3 - r_1^3}{3}.$$

Setzt man diesen Gesamtfluß  $\Psi = w |\mathfrak{B}| F,$

so folgt für die mittlere Windungsfläche

$$F = \frac{\pi}{3} \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2 - r_1} = \frac{\pi}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2). \quad (554)$$

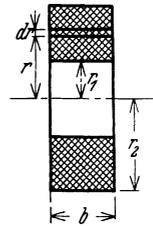


Abb. 152. Zur Berechnung der wirksamen Fläche.

Ist z. B.  $r_1=0,4$  cm,  $r_2=1$  cm,  $b = 0,6$  cm, so wird

$$F = \frac{\pi}{3} (0,16 + 0,4 + 1) \text{ cm}^2 = 1,633 \text{ cm}^2.$$

Die Spule enthalte  $w = 10000$  Windungen; der Gesamtwiderstand des aus Spule und Galvanometer gebildeten Kreises sei  $R = 1000$  Ohm. Zeigt das Galvanometer eine Elektrizitätsmenge  $Q = 0,001$  As, so wird

$$\Phi = \frac{R}{w} Q = \frac{1000}{10000} 0,001 \Omega \text{ As} = 10^{-4} \text{ Vs} = 10^4 \text{ M},$$

daraus folgt

$$B = \frac{\Phi}{F} = \frac{10000 \text{ M}}{1,633 \text{ cm}^2} = 6130 \text{ G}.$$

In den elektrischen Maschinen, die auf dem Induktionsgesetz beruhen, ist die Anordnung immer so getroffen, daß sich bei der Drehung des Ankers der gesamte Fluß ändert, der mit den Ankerspulen verkettet ist. Verfolgt man z. B. die Drehung eines Gleichstromankers während eines sehr kleinen Zeitabschnittes  $\Delta t$ , der so kurz ist, daß die Bürsten auf den gleichen Stromwenderstegen bleiben, so findet man, daß dabei die Gesamtzahl der magnetischen Induktionslinien, die die Ankerwicklung auf dem Wege von der Minus- zur Plusbürste umschlingt, um einen ganz bestimmten Betrag  $\Delta \Psi$  ab- oder zunimmt. Dann hat die zwischen den Bürsten auftretende EMK einen Betrag, der durch den Grenzwert gegeben ist, dem sich das Verhältnis  $\Delta \Psi / \Delta t$  bei unendlich kleinem  $\Delta t$  nähert:  $e = \left| \frac{d\Psi}{dt} \right|$ . Da bei den elektrischen Maschinen die Ankerleiter senkrecht von den magnetischen Kraftlinien geschnitten werden, so wird hier das Induktionsgesetz meist in der durch Gl. (536) gegebenen Form angewendet, die zu dem gleichen Ergebnis führt.

Wird dem Anker Strom entnommen, so rufen die auf die Ankerleiter im magnetischen Feld ausgeübten Kräfte ein Bremsmoment hervor, so daß die entnommene elektrische Leistung gleich der zur Überwindung dieses Bremsmoments dienenden mechanischen Leistung ist. Bezeichnet man den in dem betrachteten Wicklungsabschnitt während des Zeitelements  $dt$  fließenden Strom mit  $I$ , so hat die elektrisch erzeugte Leistung die Größe  $-I \frac{d\Psi}{dt}$ ; also ist die Arbeit

$$dA = -I d\Psi; \quad (555)$$

sie muß in Form von mechanischer Arbeit aufgewendet werden, d. h. es muß bei der Drehung des Ankers um den Winkel  $d\alpha$  ein Bremsmoment  $M$  überwunden werden, so daß

$$dA = -I d\Psi = M d\alpha;$$

daraus ergibt sich für die Größe dieses Bremsmoments

$$M = -I \frac{d\Psi}{d\alpha}. \quad (556)$$

Die gleiche Beziehung gilt auch für den Fall des Motors, bei dem der Strom  $I$  von äußeren elektromotorischen Kräften erzeugt wird; das Moment  $M$  ist dann als Triebmoment aufzufassen.

Ein und derselbe physikalische Vorgang, nämlich die Ablenkung bewegter Elektronen im magnetischen Feld ist also die Ursache von Motor- und Generatorwirkung. Beim Motor werden die Leitungselektronen mit Hilfe einer äußeren elektrischen Energiequelle durch die Stromleiter hindurchgeführt. Die Stromleiter befinden sich in einem magnetischen Feld, dessen Kraftlinien senkrecht zu dieser Bewegungsrichtung stehen. Dadurch erfahren die Elektronen Ablenkungskräfte quer zur Richtung der Leiter. Da sie im Inneren der Leiter durch die Bildkräfte festgehalten sind, so übertragen sich die Ablenkungskräfte auf die Drähte. Beim Generator werden umgekehrt die Stromleiter mechanisch durch das magnetische Feld hindurch bewegt; dadurch ergibt sich eine Ablenkung der Elektronen in der Längsrichtung der Leiter bis zum Gleichgewichtszustand, in dem längs der Leiter ein elektrisches Potentialgefälle der entgegengesetzten Richtung entsteht. Zur Auf-

rechterhaltung dieses Potentialgefälles ist ein Arbeitsaufwand nicht erforderlich, so lange der Stromkreis unterbrochen ist. Fließt beim Schließen des Stromkreises Strom, so ergibt sich eine Längsbewegung der Elektronen in den Stromleitern und damit eine mechanische Bremskraft quer zur Stromrichtung, zu deren Überwindung eine mechanische Arbeit aufgewendet werden muß.

## 22. Das Durchflutungsgesetz, magnetische Stoffe.

Das Durchflutungsgesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen der Stärke magnetischer Felder und dem erzeugenden Strom. Es kann experimentell mit Hilfe des magnetischen Spannungsmessers nachgewiesen werden. Dieser besteht aus einer langgestreckten biegsamen Spule von geringem Querschnitt, deren Drahtenden mit einem ballistischen Galvanometer verbunden sind. Die Spule ist gleichmäßig mit dünnem isoliertem Draht in dicht nebeneinanderliegenden Windungen bewickelt. Die beiden Drahtenden liegen nebeneinander, so daß durch die Zuleitungen zum Galvanometer keine Schleife gebildet wird, in der störende Induktionswirkungen auftreten könnten.

Bezeichnet man die auf die Längeneinheit der Spule, Abb. 153, entfallende Windungszahl mit  $w_1$ , so enthält ein kurzer Abschnitt von der Länge  $ds$

$$w_1 ds$$

Windungen. In einem magnetischen Feld von beliebiger Beschaffenheit wird die magnetische Induktion an jeder Stelle der Spule im allgemeinen einen anderen Wert und eine andere Richtung haben. Es soll aber der Querschnitt  $q$  der Spule so klein sein, daß man an jeder Stelle der Spule innerhalb dieses Querschnitts die magnetische Induktion als konstant ansehen kann. Dann beträgt der Induktionsfluß, der mit den  $w_1 ds$  Windungen des Abschnittes  $ds$  verkettet ist,

$$d\mathcal{P} = w_1 q \mathcal{B} ds, \tag{557}$$

und der Gesamtfluß der Spule ergibt sich durch Integration über die ganze Länge:

$$\mathcal{P} = w_1 q \int_a^b \mathcal{B} ds. \tag{558}$$

Dieser Gesamtfluß kann mit Hilfe des ballistischen Galvanometers  $G$  wie im vorigen Abschnitt gemessen werden, wenn man die Spule rasch aus dem Feld entfernt. Führt man den Versuch aus, so ergibt sich, daß der Wert von  $\mathcal{P}$  nur von der Lage der beiden Endpunkte  $a$  und  $b$  des Spannungsmessers abhängt. Für alle möglichen Wege zwischen  $a$  und  $b$ , Abb. 154, hat daher das Linienintegral der magnetischen Induktion den gleichen Wert. Biegt man den Spannungsmesser zu einer einfach oder mehrfach geschlossenen Figur zusammen, so daß die beiden Punkte  $a$  und  $b$  zusammenfallen, so ergibt sich experimentell, daß  $\mathcal{P} = 0$  wird, daß also auch das Linienintegral der magnetischen Induktion verschwindet, gleichgültig in welche Form man die Spule biegt, allerdings unter einer wichtigen Voraussetzung. Es darf mit der durch den Spannungsmesser gebildeten geschlossenen Figur kein stromführender Leiter verkettet sein.

Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, umschließt man also mit dem Spannungsmesser den Stromleiter, so ergibt sich ein ganz bestimmter Wert für  $\mathcal{P}$  und damit für das Linienintegral der magnetischen Induktion. Für diesen Wert gilt nun ein außerordentlich einfaches Gesetz. Es zeigt sich, daß das Linienintegral der magne-

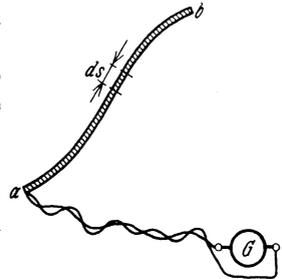


Abb. 153. Magnetischer Spannungsmesser.

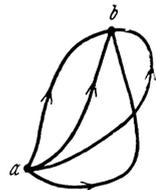


Abb. 154. Wege gleicher magnetischer Spannung.

tischen Induktion proportional ist mit dem verketteten Strom. Den Strom, der mit irgendeinem in sich geschlossenen Weg verkettet ist, bezeichnet man als die Durchflutung  $\Theta$  dieses Weges. Es gilt daher auf Grund der experimentellen Beobachtungen die Beziehung

$$\oint \mathfrak{B} d\mathfrak{s} = \mu \Theta, \quad (559)$$

in der  $\mu$  eine Konstante bezeichnet. Die Gl. (559) berücksichtigt auch die Vorzeichen, wenn der Umlaufsinn des Linienintegrals mit der Richtung der Durchflutung eine Rechtsschraube bildet, wie es Abb. 155 zeigt. In dieser Abbildung ist für den gezeichneten geschlossenen Weg

$$\Theta = I_1 + I_2 + I_3.$$

Wird die magnetische Induktion in G gemessen und setzt man die Länge in cm, die Stromstärke in A ein, so ergibt sich für die Größe  $\mu$  als Einheit

$$1 \frac{\text{G cm}}{\text{A}} = 10^{-8} \frac{\text{Vs}}{\text{Acm}} = 10^{-8} \frac{\Omega \text{s}}{\text{cm}}.$$

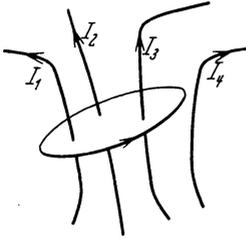


Abb. 155. Durchflutung eines geschlossenen Weges.

Die Einheit  $1 \Omega \text{s}$  nennt man 1 Henry:

$$1 \text{ Henry} = 1 \text{ H} = 1 \Omega \text{s}; \quad (560)$$

als Einheit für die Größe  $\mu$  kann also 1 H/cm dienen.

Die Versuche zeigen, daß die Größe  $\mu$  von dem Stoff abhängt, in dem die Messungen ausgeführt werden. Man schreibt daher

$$\mu = \mu_r \mu_0, \quad (561)$$

wobei  $\mu_0$  den Wert von  $\mu$  im leeren Raum bezeichnet. Im leeren Raum ist also  $\mu_r = 1$ . Die Größe  $\mu_0$  nennen wir den Induktionsfaktor. Sein Wert ergibt sich experimentell, und zwar ist er nach den genauesten bis jetzt vorliegenden Messungen

$$\mu_0 = 1,2560 \cdot 10^{-8} \frac{\text{H}}{\text{cm}} = 1,2560 \frac{\text{G cm}}{\text{A}}. \quad (562)$$

Die Zahl  $\mu_r$  gibt an, wieviel mal so groß die magnetische Induktion in dem betreffenden Stoff ist im Vergleich zum Vakuum. Sie wird als die magnetische Permeabilität bezeichnet, genauer als relative magnetische Permeabilität, während  $\mu$  die absolute Permeabilität darstellt.

Die Gl. (559) kann unter der Voraussetzung, daß  $\mu$  eine Konstante ist, auch geschrieben werden:

$$\oint \frac{\mathfrak{B}}{\mu} d\mathfrak{s} = \Theta. \quad (563)$$

Die Größe  $\mathfrak{B}/\mu$  ist ein neuer Vektor, der die Richtung von  $\mathfrak{B}$  hat. Wir setzen  $\frac{\mathfrak{B}}{\mu} = \mathfrak{H}$ , also

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} \quad (564)$$

und nennen  $\mathfrak{H}$  die magnetische Feldstärke oder magnetische Erregung. Es ist also das Linienintegral der magnetischen Feldstärke auf irgendeinem geschlossenen Weg gleich der Durchflutung des Weges:

$$\oint \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = \Theta. \quad (565)$$

Dies ist das Durchflutungsgesetz; es gilt erfahrungsgemäß auch dann, wenn die Permeabilität  $\mu$  im Raum verschiedene Werte hat. Die magnetische Feldstärke ist eine Größe, deren Betrag, wie man aus Gl. (565) erkennt, in A/cm gemessen werden kann.

Das Durchflutungsgesetz ermöglicht die Berechnung der Durchflutung, die zur Herstellung eines bestimmten magnetischen Feldes erforderlich ist, wenn der Verlauf der magnetischen Kraftlinien bekannt ist. Das magnetische Feld in der Umgebung eines geraden stromdurchflossenen Leiters wird z. B. durch Kraftlinien dargestellt, die aus Symmetriegründen Kreise bilden. Längs eines jeden solchen Kreises ist die Kraftliniendichte konstant, daher sind die Vektoren  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{H}$  konstant. Ist daher

$r$  der Radius des Kreises,  $I$  die Stromstärke im Leiter, so gilt

$$\oint \vec{d\vec{s}} = |\mathfrak{H}| 2\pi r = I, \\ |\mathfrak{H}| = \frac{I}{2\pi r}. \quad (566)$$

Bezüglich der Richtung der magnetischen Kraftlinien sagt das Durchflutungsgesetz aus, daß sie mit der Stromrichtung im Sinne einer Rechtsschraube zusammenhängt. Das magnetische Feld außerhalb des Leiters ist nach Gl. (566) unabhängig von dem Drahtdurchmesser; es hat die gleiche Beschaffenheit, wie wenn der ganze Strom  $I$  in einem „Stromfaden“ in der Achse des Leiters konzentriert wäre.

**Zahlenbeispiel:** Im Abstand  $r=10$  cm von der Achse eines Leiters, der den Strom  $I = 100$  A führt, beträgt die magnetische Feldstärke

$$|\mathfrak{H}| = \frac{100 \text{ A}}{2\pi 10 \text{ cm}} = 1,59 \frac{\text{A}}{\text{cm}}.$$

Alle materiellen Stoffe beeinflussen die Dichte der magnetischen Induktionslinien. Es kann dies damit erklärt werden, daß die Elektronen innerhalb der Moleküle ganz bestimmte Bewegungen ausführen, z. B. geschlossene Bahnen durchlaufen oder um eine Achse rotieren. Jede derartige Elektronenbewegung kann als ein elektrischer Strom aufgefaßt werden. Die magnetischen Wirkungen dieser Ströme können innerhalb der Atome oder Moleküle entweder durch andere, gleichartige Ströme entgegengesetzter Richtung aufgehoben werden, oder es kann ein Überschuß von Strom einer Richtung vorhanden sein. Im ersten Falle ist das Atom oder Molekül unmagnetisch, während es im zweiten Falle wie ein außerordentlich kleiner Magnet wirkt.

Auf Grund dieser Vorstellung kann man die Erscheinungen erklären, die sich ergeben, wenn ein Stoff in das magnetische Feld von stromdurchflossenen Leitern gebracht wird. Betrachten wir zunächst Stoffe der ersten Art, bei denen die magnetischen Wirkungen der Strombahnen im Inneren der Moleküle kompensiert sind. Auf die rotierenden Elektronen werden im magnetischen Feld Kräfte ausgeübt, und zwar werden nach dem Induktionsgesetz bei der Herstellung des äußeren magnetischen Feldes diejenigen Elektronen beschleunigt, die um die Kraftlinienrichtung im Sinn einer Rechtsschraube rotieren, während die anderen verzögert werden. Es ergibt sich eine Überschußwirkung der Strombahnen mit rechtsläufig rotierenden Elektronen. Diese Elektronen wirken aber wie ein Strom, der die Kraftlinien linksläufig umkreist, der also für sich allein ein magnetisches Feld in entgegengesetzter Richtung hervorrufen würde. Daher ergibt sich in dem betrachteten Fall eine Schwächung des magnetischen Feldes; die magnetische Induktion ist bei Vorhandensein des betreffenden Stoffes kleiner als im leeren Raum; es ist

$$\mathfrak{B} < \mu_0 \mathfrak{H} \quad \text{oder} \quad \mu_r < 1.$$

Man bezeichnet solche Stoffe als diamagnetisch; ein Beispiel dafür bildet Wismut.

Im anderen Falle, wenn die Moleküle nicht kompensierte Bahnen enthalten, also wie Magnete wirken, sind die molekularen Strombahnen im gewöhnlichen Zustand des Stoffes ungerichtet; ihre Ebenen bilden bei den verschiedenen Molekülen alle möglichen Winkel miteinander, so daß größere Teile des betreffenden Stoffes unmagnetisch erscheinen. Wenn die Ebenen der Strombahnen im Inneren der Moleküle festliegen, dann ergibt sich bei Anwesenheit eines äußeren magnetischen Feldes die gleiche Wirkung wie im vorigen Fall. Anders dagegen, wenn die Ebenen der molekularen Ströme innerhalb der Moleküle drehbar sind. Dann suchen sie sich im magnetischen Feld so einzustellen, daß ihre Bahnen senkrecht zur Richtung der Kraftlinien stehen, und daß die Elektronen die Kraftlinien linksläufig umkreisen. Die molekularen Strombahnen unterstützen also hier das äußere magnetische Feld, so daß die magnetische Induktion größer als im leeren Raum wird:

$$\mathfrak{B} > \mu_0 \mathfrak{H} \quad \text{oder} \quad \mu_r > 1.$$

Derartige Stoffe nennt man paramagnetisch oder, wenn  $\mu_r$  erheblich größer als 1 ist, ferromagnetisch, weil das wichtigste Beispiel eines stark paramagnetischen Stoffes das Eisen ist. Genau genommen, tritt auch in paramagnetischen Stoffen wegen der Beschleunigung der Elektronenbewegung immer bis zu einem gewissen Grade eine diamagnetische Wirkung auf. Paramagnetische Stoffe sind daher eigentlich solche, bei denen der zweite Effekt den diamagnetischen übertrifft.

Die absolute Permeabilität  $\mu$  kann gemessen werden, wenn man einerseits die Durchflutung  $\mathcal{O}$  bestimmt, aus der die magnetische Feldstärke  $\mathfrak{H}$  berechnet werden kann, andererseits die magnetische Induktion  $\mathfrak{B}$  mißt. Dann gilt

$$\mu = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}}. \quad (567)$$

Die einfachste Methode besteht darin, daß man aus dem zu untersuchenden Stoff einen Kreisring herstellt und diesen Ring mit zwei Wicklungen aus isoliertem Draht versieht. Die eine Wicklung wird an ein

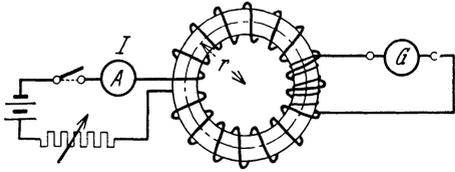


Abb. 156. Aufnahme der Magnetisierungskurve.

ballistisches Galvanometer  $G$  angeschlossen, Abb. 156; sie dient zur Messung von  $\mathfrak{B}$ . Durch die andere, möglichst gleichmäßig über den Ring verteilte Wicklung kann ein Gleichstrom geschickt werden, der mit einem Amperemeter gemessen wird und die magnetische Feldstärke  $\mathfrak{H}$  zu berechnen gestattet.

Die magnetischen Kraftlinien sind hier aus Symmetriegründen konzentrische Kreise; sie verlaufen im Inneren des Ringes, da sie mit den Windungen verkettet sein müssen. Die Kraftliniendichte ist daher längs einer Kraftlinie konstant. Für irgendeine Kraftlinie mit dem Radius  $r$  gilt nach dem Durchflutungsgesetz

$$\oint \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = \mathfrak{H} \oint d\mathfrak{s} = |\mathfrak{H}| 2\pi r = I w_1,$$

wobei  $w_1$  die Windungszahl der Erregerwicklung bezeichnet. Daraus folgt

$$H = |\mathfrak{H}| = \frac{I w_1}{2\pi r}. \quad (568)$$

Ist der Querschnitt des Ringes genügend klein, so kann man mit einer mittleren Feldstärke in dem Ring für einen mittleren Radius  $r_0$  rechnen. Die mittlere Kraftliniendichte ergibt sich aus der Beziehung

$$|\mathfrak{B}| = B = \frac{\Phi}{q}, \quad (569)$$

in der  $\Phi$  den Bündelfluß im Ring und  $q$  den Ringquerschnitt bezeichnen. Wird der Strom  $I$  im Erregerkreis plötzlich geändert, so ergibt sich nach dem Induktionsgesetz ein Stromstoß im Galvanometerkreis. Die vom Galvanometer angezeigte Elektrizitätsmenge  $Q$  dient zur Berechnung der zu der Stromänderung gehörenden Änderung des Induktionsflusses. Es ist nach Gl. (552)

$$\Phi = \frac{R}{w_2} Q, \quad (570)$$

wobei  $w_2$  die Windungszahl der zweiten Wicklung und  $R$  den Gesamtwiderstand im Sekundärkreis bezeichnen. Daraus folgt

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{2\pi r_0 R Q}{w_1 w_2 q I}. \quad (571)$$

Im leeren Raum ergibt sich hieraus der Induktionsfaktor  $\mu_0$ . Bei materiellen Stoffen, insbesondere den ferromagnetischen Stoffen ist die Permeabilität im allgemeinen keine Konstante, sondern hängt von der Erregung ab. Trägt man zusammengehörige Werte von  $B$  und  $H$  in ein rechtwinkliges Achsensystem ein, so erhält man die Magnetisierungskurve des betreffenden Stoffes.

Die Annahme einer gleichmäßigen Verteilung der Kraftlinien über den Ringquerschnitt enthält einen Fehler, dessen Größe man auf folgende Weise abschätzen kann. Der Ring habe

rechteckigen Querschnitt mit der Breite  $b$ ; der Innenradius sei  $r_1$ , der Außenradius  $r_2$ . Allgemein gilt dann nach Gl. (526)

$$\Phi = b \int_{r_1}^{r_2} B dr. \tag{572}$$

Führt man den mittleren Radius  $r_0 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$  ein, so kann man für die magnetische Induktion den Ansatz machen

$$B = B_0 + (r - r_0) \frac{dB}{dr} \Big|_{r_0} + \frac{1}{2} (r - r_0)^2 \frac{d^2B}{dr^2} \Big|_{r_0}, \tag{574}$$

der den Anfang einer Potenzreihe darstellt. Daraus folgt nach Gl. (572)

$$\Phi = b (r_2 - r_1) B_0 + \frac{1}{24} b (r_2 - r_1)^3 \frac{d^2B}{dr^2} \Big|_{r_0}. \tag{575}$$

Nun gilt, da die magnetische Induktion eine Funktion der magnetischen Feldstärke und diese nach Gl. (568) eine Funktion des Radius ist,

$$\frac{dB}{dr} = \frac{dB}{dH} \frac{dH}{dr} \quad \text{und} \quad \frac{d^2B}{dr^2} = \frac{dB}{dH} \frac{d^2H}{dr^2} + \frac{d^2B}{dH^2} \left( \frac{dH}{dr} \right)^2.$$

Mit Gl. (568) folgt

$$\Phi = b (r_2 - r_1) B_0 + \frac{b}{12} \frac{(r_2 - r_1)^3}{r_0^3} H \frac{dB}{dH} + \frac{b}{24} \frac{(r_2 - r_1)^3}{r_0^3} H^2 \frac{d^2B}{dH^2}.$$

Daraus kann man die zu der magnetischen Feldstärke für den mittleren Radius  $r_0$  gehörige magnetische Induktion  $B_0$  berechnen, wobei Gl. (569) einzuführen ist:

$$B_0 = B - \frac{1}{12} \left( \frac{r_2 - r_1}{r_0} \right)^2 H \frac{dB}{dH} - \frac{1}{24} \left( \frac{r_2 - r_1}{r_0} \right)^2 H^2 \frac{d^2B}{dH^2}. \tag{576}$$

Man hat also von dem nach der Näherungsmethode bestimmten Wert  $B$  der magnetischen Induktion einen Abzug zu machen, der auf graphischem Wege aus der mit den ersten Näherungswerten aufgezeichneten Magnetisierungskurve leicht ermittelt werden kann.

In der folgenden Tabelle sind die Werte der Permeabilität für einige diamagnetische und paramagnetische Stoffe angeführt:

Wismut . . . . .	$\mu_r = 1 - 170 \cdot 10^{-6}$	Luft . . . . .	$\mu_r = 1 + 0,4 \cdot 10^{-6}$
Kupfer . . . . .	$\mu_r = 1 - 10 \cdot 10^{-6}$	Aluminium . . . . .	$\mu_r = 1 + 22 \cdot 10^{-6}$
Silber . . . . .	$\mu_r = 1 - 19 \cdot 10^{-6}$	Platin . . . . .	$\mu_r = 1 + 360 \cdot 10^{-6}$
Wasser . . . . .	$\mu_r = 1 - 9 \cdot 10^{-6}$		

Die Permeabilität der nicht ferromagnetischen Stoffe kann man bei praktischen Anwendungen fast immer zu 1 annehmen.

Bei den ferromagnetischen Stoffen zeigen die Messungen, daß die magnetische Induktion nicht in eindeutiger Beziehung zur magnetischen Feldstärke steht, sondern noch davon abhängt, auf welche Weise der betreffende Wert der magnetischen Feldstärke hergestellt wurde. Man veranschaulicht diesen Zusammenhang durch die Magnetisierungskurven, die die magnetische Induktion in Abhängigkeit von der Feldstärke darstellen. Vergrößert man die magnetische Feldstärke stufenweise, indem man jeweils die Stromstärke in der Erregerwicklung um einen bestimmten Betrag vergrößert, so findet man die magnetische Induktion durch Summieren der einzelnen Beiträge, die zu den einzelnen Sprüngen des Stroms gehören und aus den ballistischen Ausschlägen des Galvanometers berechnet werden können. War der Eisenring noch nicht magnetisiert, so erhält man auf diese Weise die sogenannte Neukurve  $OA$ , Abb. 157. Verkleinert man nun die magnetische Feldstärke von dem erreichten Wert  $H_m$  aus wieder stufenweise, so nimmt auch die magnetische Induktion ab. Das Galvanometer gibt ballistische Ausschläge nach der entgegengesetzten Richtung. Aus diesen Ausschlägen kann wieder jeweils die zu der Verkleinerung von  $H$  gehörige Verminderung von  $B$  berechnet werden. Die Durchführung der Messung ergibt Werte für die magnetische Induktion,  $AD$  Abb. 157, die größer sind als die der Neukurve. Selbst wenn der Erregerstrom ganz unter-

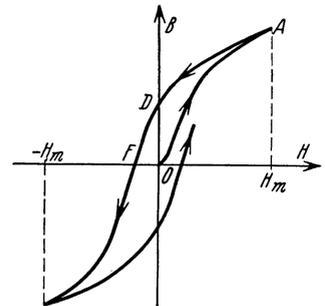


Abb. 157. Magnetisierungskurven.

10\*

brochen wird, also  $H = 0$  ist, enthält der Ring noch einen magnetischen Induktionsfluß. Man bezeichnet das „Nachhinken“ der Induktion hinter der Feldstärke als Hysterese, die Erscheinung eines Rückstandes an Magnetismus als Remanenz. Der Abschnitt  $OD$  auf der Achse der magnetischen Induktion stellt die Remanenzinduktion dar.

Um den Induktionsfluß zum Verschwinden zu bringen, muß eine Erregung  $OF$  in entgegengesetzter Richtung aufgewendet werden. Diese Erregung bezeichnet man als Koerzitivkraft  $\xi_k$ . Geht man bis zum Wert  $-H_m$  und läßt dann die Feldstärke wieder zunehmen, so ergibt sich wieder ein Zurückbleiben der Induktion hinter der Erregung. Wiederholt man diesen Prozeß mehrmals, so wird schließlich eine ganz bestimmte Schleife durchlaufen, die man als Hystereseschleife bezeichnet.

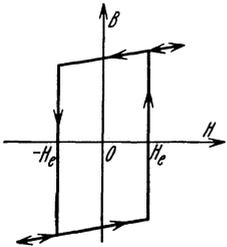


Abb. 158. Hystereseschleife eines Kristalls.

Die Erscheinungen der Hysterese und Remanenz werden dadurch erklärt, daß bei den ferromagnetischen Stoffen die molekularen Strombahnen vollständig „umklappen“ können, wenn die magnetische Erregung einen bestimmten Wert überschreitet. Man stellt sich die ferromagnetischen Stoffe als aus einzelnen Kristallen zusammengesetzt vor, die regellos in allen möglichen Richtungen nebeneinander liegen. Ein solcher Kristall stellt wegen der unkompensierten Elektronenbahnen einen Magneten dar; er hat eine magnetische Achse, die die Richtung der Kraftlinien angibt, die der Kristall für sich allein erzeugen würde. Bringt man den Kristall in ein magnetisches Feld, das ihn in der Richtung seiner Achse zu entmagnetisieren sucht, so zeigt sich, daß beim Überschreiten einer gewissen Erregung der Magnetismus des Kristalls sich plötzlich umkehrt. Die Hystereseschleife eines solchen Kristalls wird daher durch ein Parallelogramm dargestellt, Abb. 158; es addiert sich zu der äußeren Erregung beim Überschreiten der Feldstärke  $H_e$  die innere magnetische Erregung des Kristalls.

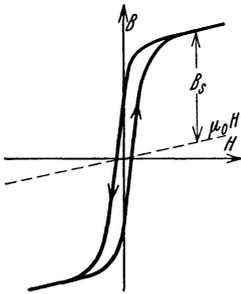


Abb. 159. Grenzkurven.

Bildet nun der Vektor der magnetischen Feldstärke  $\xi$  irgendeinen Winkel mit der magnetischen Achse, so kommt für die Wirkung auf den Kristall die Komponente von  $\xi$  in Betracht, die in die Richtung der magnetischen Achse fällt. Es ist also eine entsprechend größere Erregung zum Herbeiführen des Umklappens erforderlich. Da die Achsen der einzelnen Kristalle alle möglichen Richtungen haben, so kehrt sich der Magnetismus der Kristalle bei verschiedenen Werten der Feldstärke um. Dadurch erklärt sich die Abrundung der Hystereseschleife, wie sie die Messungen an wirklichen Stoffen zeigen.

Aus dieser Erklärung geht noch hervor, daß die Magnetisierungskurven ferromagnetischer Stoffe streng genommen keine glatten Kurven sind, sondern sich aus einer außerordentlich großen Zahl von kleinen Sprüngen zusammensetzen. Diese Folgerung wird durch die Beobachtung bestätigt; ändert man den magnetischen Zustand eines Eisenstückes, das sich im Innern einer Spule befindet, z. B. durch Nähern eines Stahlmagneten, so wird in der Spule eine Spannung induziert. Die Spannung enthält kleine rasch aufeinanderfolgende Sprünge, die mit Hilfe von Verstärkern in einem Fernhörer als Rattern oder Rauschen hörbar gemacht werden können („Barkhausen-Effekt“).

Wenn alle beweglichen Molekularströme gerichtet sind, so liegt der Zustand der Sättigung vor. Die magnetische Induktion unterscheidet sich dann wegen der durch die Molekularströme gegebenen zusätzlichen Durchflutung von der im leeren Raum, also von der Größe  $\mu_0 \xi$  um einen bestimmten konstanten Betrag. Die Magnetisierungskurven gehen in gerade Linien über, Abb. 159. Die auf diese Weise bestimmte Hystereseschleife bezeichnet man als die Grenzkurve. Nur Punkte auf

der von dieser Kurve eingeschlossenen Fläche können durch entsprechendes Variieren von  $H$  erreicht werden. Der Unterschied zwischen  $B$  und  $\mu_0 H$  im Gebiet der Sättigung wird Sättigungsinduktion  $B_s$  genannt; es ist bei hohen Erregungen

$$B = \mu_0 H + B_s. \tag{577}$$

Für die Wechselstromtechnik ist das Verhalten der Stoffe bei wechselnder Magnetisierung von Interesse. Man erhält die sogenannte Kommutierungskurve, wenn man bei einer bestimmten Erregung die Stromrichtung mehrmals umkehrt und dann den zu einer Umkehrung gehörigen ballistischen Ausschlag des Galvanometers abliest; er liefert den doppelten Wert der zu der betreffenden Feldstärke gehörenden Induktion. Die Kommutierungskurve, Abb. 160, verbindet die Umkehrpunkte der Hystereseschleifen.

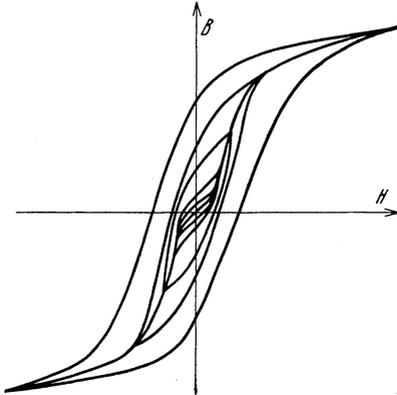


Abb. 160. Definition der Kommutierungskurve.

In der Schwachstromtechnik handelt es sich häufig um sehr kleine Feldstärkenänderungen; dabei kann gleichzeitig eine Vormagnetisierung vorhanden sein, wenn nämlich durch die Erregerwicklung neben dem Wechselstrom noch Gleichstrom fließt. Für solche kleinen Feldstärkenänderungen an irgendeiner Stelle innerhalb der Grenzkurven gilt folgendes. Verkleinert man im Punkte  $A$  einer Magnetisierungskurve, Abb. 161, die Feldstärke um den kleinen Betrag  $\Delta H$ , so wird auch die Induktion  $B$  um einen Betrag  $\Delta B$  kleiner. Wenn die Änderung der Feldstärke sehr klein ist, so gelangt man von dem erreichten Punkt  $D$  aus bei einer Vergrößerung der Feldstärke um den gleichen Betrag wieder zum Punkt  $A$  zurück, der Vorgang ist umkehrbar. Man bezeichnet das Verhältnis

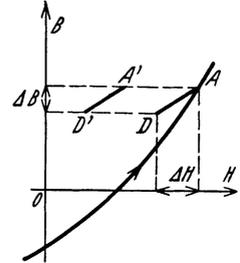


Abb. 161. Reversible Permeabilität.

als reversible Permeabilität. Die reversible Permeabilität ist verschieden von der Permeabilität

$$\mu_u = \frac{1}{\mu_0} \frac{\Delta B}{\Delta H} \tag{578}$$

als reversible Permeabilität. Die reversible Permeabilität ist verschieden von der Permeabilität

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H}$$

und kann verschieden von dem Differentialquotienten  $\frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH}$  an der betreffenden Stelle der Magnetisierungskurve sein. Die reversible Permeabilität hängt nach den experimentellen Befunden nur von der magnetischen Induktion ab, nicht aber von der magnetischen Erregung; sie hat also bei  $A'$  den gleichen Wert wie bei  $A$ , Abb. 161. Den größten Betrag hat die reversible Permeabilität bei  $B=0$ ; man bezeichnet diesen Wert als Anfangspermeabilität  $\mu_a$ . Bei wachsender Induktion nimmt die reversible Permeabilität ab. Die Permeabilität  $\mu_r$  hat dagegen ihren größten Wert dort, wo eine gerade Linie vom Nullpunkt die  $B, H$ -Kurve tangiert.

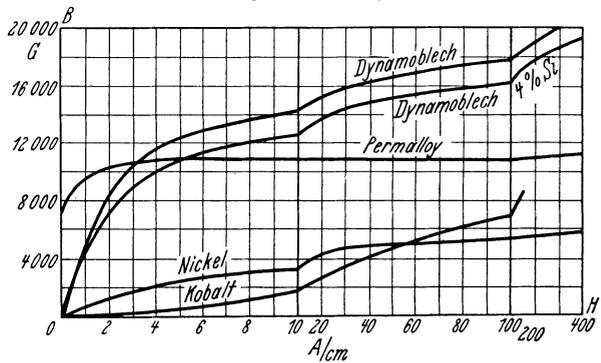


Abb. 162. Gemessene Kommutierungskurven.

In Abb. 162 sind Kommutierungskurven für einige ferromagnetische Stoffe dargestellt. Die ferromagnetischen Eigenschaften hängen im allgemeinen davon ab, wie die betreffenden Stoffe vorbehandelt werden. Durch Erwärmen und Abkühlen werden die magnetischen Eigenschaften infolge von Gefügeänderungen stark beeinflußt. Besonders ferromagnetische Legierungen zeigen in dieser Beziehung ein kompliziertes Verhalten, das auch sonst von dem des gewöhnlichen Eisens stark abweichen kann; als Beispiel ist in Abb. 163 die Hystereseschleife einer Nickel-Eisen-Kobaltlegierung dargestellt (65% Ni, 5% Fe, 30% Co, „Perminvar“). In der folgenden Tabelle sind einige Zahlenwerte verschiedener Eisensorten angegeben.

Tabelle 4.

Material	Anfangspermeabilität $\mu_a$	Koerzitivkraft nach Sättigung $H_k$ A/cm	Remanenzinduktion nach Sättigung $B_r$ G	Sättigungsinduktion $B_s$ G	Größte Permeabilität $\mu_r$
Dynamostahl	70	1,2	10600	21400	4200
Dynamostahl, geglüht	200	0,4	11000	21400	14800
Holzkohleneisen, geglüht	200 . . . 300	0,6	10000	21200	6400
Gußeisen	70	4 . . . 8	5000	16500	600
4% Si, Fe-Legierung	500	0,4	8000	19700	7500
78% Ni, Fe-Legierung („Permalloy“)	12000	0,04	6000	11000	50000
Stahl, hart, 1% C	40	50	7000	18400	200
Chromstahl	—	50	12600	—	—
Kobaltstahl	—	190	9000	—	—

Die Permeabilität kann in den verschiedenen Richtungen ein und desselben Körpers verschiedene Werte haben. Wenn z. B. Eisen quer zur Richtung eines Hauptfeldes vormagnetisiert wird, so ergibt sich ein anderer Wert der Induktion als bei Vormagnetisierung in Richtung des Hauptfeldes. In solchen Fällen hat der Vektor der magnetischen Induktion nicht die gleiche Richtung wie der Vektor der magnetischen Feldstärke. Zwischen den beiden Größen bestehen Beziehungen von der folgenden Form

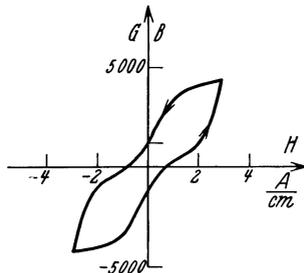


Abb. 163. Hystereseschleife von Perminvar.

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}_x &= \mu_{11} \mathfrak{H}_x + \mu_{12} \mathfrak{H}_y + \mu_{13} \mathfrak{H}_z, \\ \mathfrak{B}_y &= \mu_{21} \mathfrak{H}_x + \mu_{22} \mathfrak{H}_y + \mu_{23} \mathfrak{H}_z, \\ \mathfrak{B}_z &= \mu_{31} \mathfrak{H}_x + \mu_{32} \mathfrak{H}_y + \mu_{33} \mathfrak{H}_z, \end{aligned} \right\} \quad (579)$$

wobei die Indizes  $x, y, z$  an den Vektoren die Komponenten in der betreffenden Richtung eines kartesischen Koordinatensystems anzeigen. Man bezeichnet in der Vektorenrechnung eine derartige Beziehung zwischen zwei Vektoren  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{H}$  als eine lineare Vektorfunktion. Die Gesamtheit der Zahlenwerte  $\mu$  bezeichnet man als einen Tensor.

### 23. Der magnetische Kreis, Elektromagnete, Dauermagnete.

Für den Übergang eines magnetischen Induktionsflusses von einem Stoff zu einem anderen gelten ähnliche Gesetze wie für den Übergang des dielektrischen Verschiebungsflusses zwischen zwei Isolierstoffen. Erfahrungsgemäß gibt es keine Quellen des magnetischen Induktionsflusses; die magnetischen Induktionslinien sind immer in sich geschlossen. Daraus folgt die Gleichung:

$$\oint \mathfrak{B} d\mathfrak{F} = 0 \quad \text{oder} \quad \text{div } \mathfrak{B} = 0. \quad (580)$$

An der Grenzfläche zweier Stoffe muß daher die Normalkomponente der magnetischen Induktion,  $\mathfrak{B}_n$ , stetig sein. Es müssen ferner die Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärke,  $\mathfrak{H}_t$ , auf beiden Seiten der Grenzfläche den gleichen Wert

haben. Man erkennt dies, wenn man das Durchflutungsgesetz auf einen Rechteckweg anwendet, dessen Längsseiten auf beiden Seiten der Grenzfläche liegen und dessen unendlich kurze Schmalseiten die Grenzfläche durchstoßen. Es gilt also

$$\mathfrak{B}_{n_1} = \mathfrak{B}_{n_2}; \quad \mathfrak{H}_{t_1} = \mathfrak{H}_{t_2}. \quad (581)$$

Durch eine ähnliche Überlegung wie in Abschnitt 10 findet man hieraus, daß die magnetische Induktion in einem Querschlitz, die magnetische Feldstärke in einem Längsschlitz den gleichen Wert haben wie im Inneren des Stoffes. Unter Einführung der Permeabilität folgt ferner für die Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ , die die magnetischen Induktionslinien mit der Normalen einer Grenzfläche bilden

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (582)$$

Aus ferromagnetischen Stoffen treten daher die Induktionslinien nahezu senkrecht aus.

Für die Tangentialkomponente der magnetischen Induktion gilt

$$\frac{\mathfrak{B}_{t_1}}{\mathfrak{B}_{t_2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (583)$$

In Stoffen hoher Permeabilität ist die Tangentialkomponente der magnetischen Induktion groß im Vergleich zu der im Außenraum. Die magnetischen Induktionslinien werden also durch den Stoff hoher Permeabilität geführt ähnlich wie der elektrische Strom durch die metallischen Leiter. Da ferner die magnetischen Induktionslinien in sich geschlossen sind, so bezeichnet man eine Anordnung, bei der die magnetischen Induktionslinien in der Hauptsache in ferromagnetischen Stoffen verlaufen, als magnetischen Kreis.

Bei einem Elektromagneten nach Abb. 164 besteht der magnetische Kreis aus dem Luftspalt 1, den beiden eisernen Polen 2 und 6, den Schenkeln 3 und 5, die die Wicklungen tragen, und dem Verbindungsstück 4. Durch gestrichelte Linien  $a, b, c, d$  und  $e$  ist der grundsätzliche Verlauf der Induktionslinien angedeutet. Da der Elektromagnet zur Herstellung eines bestimmten Induktionsflusses im Luftspalt 1 dient, so bezeichnet man den Teil des gesamten Induktionsflusses, der aus Kraftlinien nach der Art von  $a$  besteht, als Hauptfluß, während die anderen Kraftlinien den Streufluß darstellen. Wegen der hohen Permeabilität des Eisens ist die Kraftliniendichte im Eisen sehr viel höher als außerhalb, so daß der Hauptfluß den weitaus größten Teil der gesamten Kraftlinien enthält. Darauf beruht das folgende Näherungsverfahren zur Berechnung magnetischer Kreise.

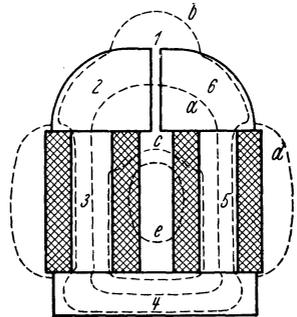


Abb. 164. Kraftlinien bei einem Elektromagneten.

Man geht vom Induktionsfluß  $\Phi$  aus, der durch das Bündel der Kraftlinien des Hauptflusses dargestellt wird, und berechnet hieraus die Kraftliniendichte in den einzelnen Abschnitten des magnetischen Kreises, indem man die Streulinien vernachlässigt. Bezeichnet  $F_v$  den Querschnitt des Flusses in den einzelnen Abschnitten  $v$ , so gilt

$$B_v = \frac{\Phi}{F_v}. \quad (584)$$

Aus der Induktion  $B_v$  erhält man die magnetische Feldstärke  $H_v$ , mit Hilfe der Magnetisierungskurve des betreffenden Stoffes. Für Luftspalte gilt

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0}. \quad (585)$$

Dann wird das Linienintegral der magnetischen Feldstärke angenähert dargestellt durch

$$\oint \mathfrak{H} ds \approx \sum_v H_v l_v, \quad (586)$$

wobei  $l_v$  die mittlere Länge der Kraftlinien in den einzelnen Abschnitten bezeichnet. Die Summe ist über den ganzen Kreis zu bilden. Andererseits ist die Durchflutung gegeben durch die Windungszahl der Wicklung und die Stromstärke. Trägt in dem Beispiel der Abb. 164 jeder Schenkel eine Wicklung aus je  $w$  Windungen und werden diese Windungen von einem Strom  $I$  derart durchflossen, daß sich die Wirkungen der beiden Wicklungen unterstützen, so gilt

$$\sum H_v l_v = 2wI. \quad (587)$$

Die umgekehrte Aufgabe, zu einer gegebenen Durchflutung den Induktionsfluß zu finden, kann nicht unmittelbar gelöst werden, da die Permeabilität der Eisenabschnitte selbst wieder von der Induktion abhängt, die zunächst unbekannt ist. Man geht daher hier so vor, daß man für eine Reihe von willkürlich angenommenen

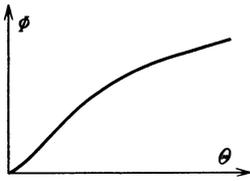


Abb. 165. Magnetische Charakteristik.

Werten des Induktionsflusses die Durchflutung berechnet und damit die magnetische Charakteristik des Kreises aufzeichnet, die die Abhängigkeit der beiden Größen  $\Phi$  und  $\Theta$  voneinander darstellt, Abb. 165. Aus der magnetischen Charakteristik kann dann zu dem gegebenen Wert von  $\Theta$  der Fluß entnommen werden.

Zur Herstellung eines bestimmten Induktionsflusses ist eine bestimmte Durchflutung  $\Theta$  nötig; es ist jedoch gleichgültig, ob diese Durchflutung mit kleiner Stromstärke und großer Windungszahl oder großer Stromstärke und entsprechend kleiner Windungszahl erzeugt wird.

Die Unbestimmtheit der Windungszahl verschwindet, wenn die Spannung an der Wicklung gegeben ist. Bezeichnet man den Wicklungsquerschnitt mit  $q$  und den Füllfaktor der Wicklung mit  $k < 1$ , ferner die mittlere Länge einer Windung mit  $l_m$ , so wird der Widerstand einer Wicklung von  $w$  Windungen

$$R = \rho \frac{w^2 l_m}{kq}. \quad (588)$$

Andererseits gilt

$$R = \frac{U}{I},$$

oder unter Einführung der durch die Wicklung erzeugten Durchflutung

$$R = \frac{Uw}{\Theta}. \quad (589)$$

Daher ergibt sich die Windungszahl aus

$$\rho \frac{w^2 l_m}{kq} = \frac{Uw}{\Theta}, \quad \text{oder} \quad w = U \frac{kq}{\rho \Theta l_m}. \quad (590)$$

Die Windungszahl muß also um so größer gemacht werden, je höher die zur Verfügung stehende Spannung ist. Für den Drahtquerschnitt ergibt sich damit

$$q_0 = \frac{kq}{w} = \frac{\rho \Theta l_m}{U}. \quad (591)$$

Er ist also unabhängig von der Größe des Wicklungsquerschnittes und vom Füllfaktor.

Zur Aufrechterhaltung des Induktionsflusses ist theoretisch keine Leistung erforderlich. Wegen des endlichen Wicklungswiderstandes ist jedoch bei wirklichen Elektromagneten immer eine bestimmte elektrische Leistung zur Herstellung der Durchflutung notwendig. Diese Leistung, die also vollständig innerhalb der Wicklung in Wärme umgewandelt wird, hat den Betrag

$$N_v = I^2 R = \rho \frac{l_m}{kq} \Theta^2; \quad (592)$$

sie wird um so kleiner, je größer der Wicklungsquerschnitt ist und je besser er ausgenutzt wird, dagegen ist sie bei vorgeschriebener Durchflutung unabhängig von der

Windungszahl, also von der Spannung. Durch die Stromwärme wird die Durchflutung begrenzt, die man in einem Elektromagneten herstellen kann.

**Zahlenbeispiel:** In dem aus Dynamoblechen zusammengesetzten Eisenkern, Abb. 166, soll mit Hilfe der im Schnitt gezeichneten Wicklung ein Bündelfluß von  $\Phi = 50000 \text{ M}$  erzeugt werden. Die Höhe des Blechpakets beträgt  $2 \text{ cm}$ ; infolge der Isolierung der einzelnen Bleche sei mit einem Eisenfüllfaktor von  $90\%$  zu rechnen.

Nimmt man näherungsweise an, daß der ganze Fluß im Querschnitt des Luftspalts konzentriert bleibt, so wird die Induktion im Luftspalt

$$B_1 = \frac{50000 \text{ M}}{5 \text{ cm}^2} = 10000 \text{ G.}$$

Die zugehörige magnetische Feldstärke ist

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0} = \frac{10000 \text{ GA}}{1,256 \text{ G cm}} = 7960 \frac{\text{A}}{\text{cm}}.$$

Da die Kraftlinienlänge im Luftspalt  $0,2 \text{ cm}$  beträgt, so wird also der auf den Luftspalt entfallende Anteil der Durchflutung

$$\Theta_1 = H_1 l_1 = 7960 \cdot 0,2 \frac{\text{A}}{\text{cm}} \text{ cm} = 1592 \text{ A.}$$

Die Induktion in dem die Wicklung tragenden Schenkel wird

$$B_2 = \frac{50000 \text{ M}}{0,9 \cdot 3 \text{ cm}^2} = 18500 \text{ G.}$$

Dazu ergebe sich aus der Magnetisierungskurve des Bleches eine magnetische Feldstärke von

$$H_2 = 200 \frac{\text{A}}{\text{cm}}.$$

Der Anteil dieses Schenkels an der Durchflutung wird, da die Länge  $l_2 = 9,7 \text{ cm}$  beträgt,  $\Theta_2 = H_2 l_2 = 200 \cdot 9,7 \text{ A} = 1940 \text{ A}$ . Schließlich erhält man für die Induktion in den übrigen Abschnitten

$$B_3 = \frac{50000 \text{ M}}{0,9 \cdot 5 \text{ cm}^2} = 11100 \text{ G.} \quad \text{Dazu gehöre die Feldstärke } H_3 = 4 \frac{\text{A}}{\text{cm}}.$$

Die gesamte Länge dieser Abschnitte ist  $2 l_3 = 22 \text{ cm}$  und der Anteil der Durchflutung

$$\Theta_3 = H_3 l_3 = 4 \cdot 22 \text{ A} = 88 \text{ A.}$$

Die gesamte Durchflutung muß also  $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 = 3620 \text{ A}$  betragen.

Das Beispiel zeigt, wie groß der Einfluß der Eisensättigung auf den Bedarf an Durchflutung ist. Infolge der Verkleinerung der Breite des Wicklungsschenkels auf  $1,5 \text{ cm}$  gegenüber  $2,5 \text{ cm}$  in den anderen Abschnitten wird die für diesen Abschnitt notwendige Durchflutung größer als der auf den Luftspalt treffende Anteil, während die viel längeren übrigen Abschnitte des Eisenkerns nur einen kleinen Bruchteil der Durchflutung beanspruchen.

Wird mit einem Kupferfüllfaktor von  $k = 60\%$  gerechnet, so ist zur Herstellung der Durchflutung eine Leistung aufzuwenden von

$$N_v = \rho \frac{l_m}{kq} \Theta^2 = 0,0175 \frac{14 \cdot 3620^2}{0,6 \cdot 9} \frac{\Omega \text{ mm}^2 \text{ cm A}^2}{\text{m cm}^2} = 59,5 \text{ W.}$$

Dabei ist die mittlere Windungslänge  $l_m = 14 \text{ cm}$  gesetzt. Um die infolge dieser Verlustleistung entstehende Temperaturerhöhung berechnen zu können, muß man die Wärmeübergangszahl kennen; diese liegt bei derartigen Anordnungen in der Größenordnung von

$$h = 0,0015 \frac{\text{W}}{\text{cm}^2 \text{ } ^\circ\text{C}}.$$

Die Oberfläche der Wicklung ist rund  $170 \text{ cm}^2$ ; dazu kommt für die Abkühlung noch ein Teil der Eisenkernoberfläche im Betrage von etwa  $200 \text{ cm}^2$ , so daß die gesamte wärmeableitende Oberfläche etwa  $O = 370 \text{ cm}^2$  ausmacht. Es ergibt sich daher eine Temperaturerhöhung von

$$\vartheta = \frac{N_v}{O h} = \frac{59,5}{370 \cdot 0,0015} \frac{\text{W cm}^2 \text{ } ^\circ\text{C}}{\text{cm}^2 \text{ W}} = 107 \text{ } ^\circ\text{C.}$$

Soll die Erregung mit einer Spannung von  $U = 110 \text{ V}$  hergestellt werden, so ergibt sich der Drahtquerschnitt nach Gl. (591):

$$q_0 = \frac{\rho l_m \Theta}{U} = \frac{0,0175 \cdot 14 \cdot 3620}{110} \frac{\Omega \text{ mm}^2 \text{ cm A}}{\text{m}} = 0,0806 \text{ mm}^2.$$

Die Windungszahl wird  $w = \frac{kq}{q_0} = \frac{0,6 \cdot 9}{0,0806} \frac{\text{cm}^2}{\text{mm}^2} = 6700$ ,

die gesamte Drahtlänge  $l \approx w l_m = 6700 \cdot 14 \text{ cm} = 0,938 \text{ km}$ ,

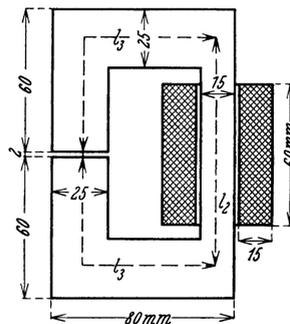


Abb. 166. Berechnung einer Drosselspule.

der gesamte Widerstand  $R = \rho \frac{l}{q_0} = 0,0175 \frac{0,938 \Omega \text{ mm}^2 \text{ km}}{0,0806 \text{ m mm}^2} = 204 \Omega,$   
 und die Stromstärke  $I = \frac{U}{R} = \frac{110 \text{ V}}{204 \Omega} = 0,54 \text{ A}.$

Bei der Berechnung von Dauermagneten kann grundsätzlich das gleiche Verfahren angewendet werden. Es sei z. B. zu berechnen, wie groß die Induktion im Luftspalt  $l$  des in Abb. 167 dargestellten permanenten Magneten ist. Der eigentliche Stahlmagnet ist mit 3 bezeichnet, 2 und 4 sind zwei auf den Magneten aufgesetzte Polschuhe aus Schmiedeeisen. Wird der ganze magnetische Kreis einmal mit Hilfe einer vorübergehend aufgebrauchten stromdurchflossenen Wicklung bis in das Gebiet der Sättigung magnetisiert, so geht die Induktion nach dem Ausschalten des Magnetisierungsstromes im  $B, H$ -Diagramm auf einer Kurve zurück, die dem absteigenden Ast der Grenzkurve entspricht, Abb. 168. Es stellt sich ein bestimmter Gleichgewichtszustand ein, z. B. Punkt  $P$ , in dem die innere Durchflutung des Magneten gerade den Durchflutungsbedarf des Kreises deckt. Die Wirkung der gerichteten Molekularstrombahnen ist durch die Koerzitivkraft  $H_k$  gekennzeichnet. Man denke sich nun auf den Stahlmagneten zwei gleichartige Wicklungen aufgebracht, die von konstanten Strömen gleicher Stärke aber entgegengesetzter Richtung durchflossen werden derart, daß die durch eine der beiden Wicklungen gelieferte Durchflutung gerade gleich ist der Durchflutung

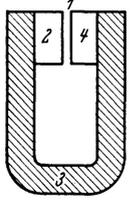


Abb. 167. Zur Berechnung eines Dauermagneten.

$$\Theta_k = H_k l_0 \tag{593}$$

der Molekularströme, wobei  $l_0$  die Länge des Stahlmagneten bezeichnet. Da sich die beiden Zusatzdurchflutungen gegenseitig aufheben, so ändert sich dadurch nichts an dem Gleichgewichtszustand im magnetischen Kreis. Die eine der beiden Zusatzdurchflutungen kompensiert jedoch gerade die innere Durchflutung des Magneten, sie verschiebt die Magnetisierungskurve um den Betrag  $H_k$  nach rechts, wie es in Abb. 168 gestrichelt angedeutet ist. Die Magnetisierungskurve hat dann einen Verlauf wie bei einem Stoff ohne Remanenz. Man kann sich daher den Stahlabschnitt des magnetischen Kreises ersetzt denken durch einen Abschnitt aus weichem Eisen, dessen Magnetisierungskurve aus dem absteigenden Ast der Grenzkurve des Stahls durch Parallelverschiebung hervorgeht, und durch eine Wicklung, die eine Durchflutung von der Größe  $\Theta_k$  liefert. Damit ist die Berechnung des Stahlmagneten auf die Berechnung eines Elektromagneten zurück-

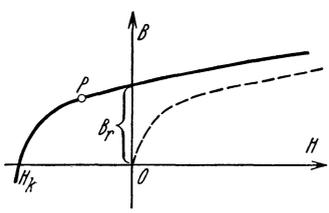


Abb. 168. Magnetisierungskurve eines Dauermagneten.

geführt. Da hier die Durchflutung gegeben ist, so muß die magnetische Charakteristik des Kreises berechnet werden, aus der man dann den Induktionsfluß zu dem Wert  $\Theta_k$  entnehmen kann. Für überschlägige Rechnungen ergibt sich eine Vereinfachung, wenn man den in Betracht kommenden Teil der Magnetisierungskurve des Stahls, nämlich den Teil im zweiten Quadranten, durch eine gerade Linie annähert. Man ersetzt auf diese Weise den Dauermagneten durch einen Stoff ohne Koerzitivkraft mit der Permeabilität

$$\mu_d = \frac{B_r}{\mu_0 H_k}, \tag{594}$$

die nach der Tabelle 4 etwa zwischen 40 und 200 liegt, und eine Wicklung mit der Durchflutung  $\Theta_k$ .

Für manche Betrachtungen ist der Begriff des magnetischen Widerstandes von Vorteil. Das Durchflutungsgesetz läßt sich bei einem magnetischen Kreis mit einer Anzahl einzelner Abschnitte, in denen das Feld als homogen angesehen werden

kann, in der Form schreiben:  $\sum H_v l_v = \Theta$ .

Da nun  $H_v = \frac{B_v}{\mu_v}$  und  $B_v = \frac{\Phi}{F_v}$ ,

so ergibt sich  $\Phi \sum \frac{l_v}{\mu_v F_v} = \Theta$ . (595)

Diese Gleichung hat eine ähnliche Form wie das Ohmsche Gesetz für einen elektrischen Stromkreis, wenn man den Induktionsfluß zum elektrischen Strom und die Durchflutung zur elektromotorischen Kraft in Analogie setzt („magnetomotorische Kraft“). Es entspricht dann die Größe

$$R_m = \frac{l_v}{\mu_v F_v} \quad (596)$$

dem elektrischen Widerstand, wobei an die Stelle der elektrischen Leitfähigkeit die absolute Permeabilität im magnetischen Kreis tritt. Man nennt  $R_m$  den magnetischen Widerstand des betreffenden Abschnitts; das Reziproke davon ist der magnetische Leitwert:

$$G_m = \frac{\mu_v F_v}{l_v}.$$

Der magnetische Leitwert kann, wie sich beim Einsetzen der einzelnen Größen zeigt, in Henry gemessen werden. Zuweilen wird auch die Größe  $\mu_v F_v / l_v$  als magnetischer Leitwert bezeichnet, die Einheit ist dann 1 cm.

Im vorigen Zahlenbeispiel ist der magnetische Leitwert

$$G_m = \frac{\Phi}{\Theta} = \frac{50000 \cdot 10^{-8} \text{ Vs}}{3620 \text{ A}} = 1,38 \cdot 10^{-7} \text{ H}.$$

Er nimmt mit wachsender Stromstärke ab, da die Permeabilität des Eisens abnimmt. Der magnetische Widerstand des Luftspalts ist

$$R_m = \frac{0,2 \text{ cm cm}}{1,256 \cdot 10^{-8} \cdot 5 \text{ H cm}^2} = 3,19 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1}.$$

## 24. Berechnung magnetischer Felder, Vektorpotential, Ampèresche Formel.

Bei dem im vorigen Abschnitt betrachteten Verfahren der Berechnung magnetischer Kreise wird die Annahme gemacht, daß der Induktionsfluß durch den Eisenweg geführt wird, so daß sein räumlicher Verlauf im wesentlichen als bekannt vorausgesetzt werden kann. Die Berechnung des genauen Verlaufes des Induktionsflusses stellt ein ähnliches Problem dar wie die Berechnung elektrischer Felder, und es gelten sogar außerhalb der stromdurchflossenen Leiter ganz ähnliche Gesetze wie dort.

Auf Grund des Durchflutungsgesetzes hat das Linienintegral der magnetischen Feldstärke den Wert Null, wenn der Integrationsweg nicht mit Strömen verkettet ist. Daraus geht hervor, daß das Linienintegral der magnetischen Feldstärke für beliebige Wege zwischen zwei Punkten  $a$  und  $b$  denselben Wert hat, wenn die Wege ineinander übergeführt werden können, ohne daß stromdurchflossene Leiter geschnitten werden. Das Linienintegral hängt in diesem Fall nur von der Lage der Endpunkte  $a$  und  $b$  im magnetischen Feld ab; man kann dies, wie im Falle des elektrischen Feldes, dadurch ausdrücken, daß man ein Potential einführt. Wir definieren daher entsprechend Gl. (82) das magnetische Potential  $\psi$  durch

$$\int_a^b \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = \psi_a - \psi_b, \quad (597)$$

oder mit Benutzung von Gl. (83) durch

$$\mathfrak{H} = -\text{grad } \psi. \quad (598)$$

Wir drücken also die magnetische Feldstärke außerhalb der Stromleiter durch den Gradienten eines skalaren Potentials aus.

Das Linienintegral der magnetischen Feldstärke zwischen zwei Punkten bezeichnet man daher auch als magnetische Spannung. Es kann mit dem magnetischen Spannungsmesser gemessen werden (siehe Abschnitt 22). Das Linienintegral über einen in sich geschlossenen Weg ist die magnetische Umlaufspannung, und das Durchflutungsgesetz kann daher auch in der Form ausgesprochen werden: „Die magnetische Umlaufspannung eines beliebigen Weges ist gleich der Durchflutung des Weges.“

Führt man die magnetische Induktion mit Hilfe von Gl. (564) ein, und berücksichtigt man Gl. (580), so ergibt sich

$$\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} \psi) = 0. \tag{599}$$

Wenn die Permeabilität eine Konstante ist, wie insbesondere in Luft, so folgt daraus

$$\Delta \psi = 0. \tag{600}$$

Für das magnetische Potential außerhalb der Stromleiter gilt also die Potentialgleichung. Zur Berechnung der magnetischen Felder können daher die gleichen Methoden angewendet werden wie beim elektrischen Feld. Das magnetische Potential ist jedoch keine eindeutige Größe, da das Linienintegral der Erregung, also die Spannung bei einem mit Strömen verketteten Weg nicht Null ist, sondern  $\Theta$ . Geht man  $n$ -mal um den Stromleiter herum, so vergrößert sich das Potential um den Wert  $n\Theta$ . Da jedoch nur Potentialdifferenzen gemessen werden können, bzw. die Wirkungen nur von der Feldstärke abhängen, so spielt diese Vieldeutigkeit praktisch keine andere Rolle als die Unbestimmtheit des Potentials überhaupt.

An die Stelle der Grenzbedingungen des elektrischen Feldes treten hier die im vorigen Abschnitt abgeleiteten analogen Bedingungen und das Durchflutungsgesetz. Genau wie beim elektrischen Feld kann auch hier die Methode der konformen Abbildung zur Feldberechnung benutzt werden. Es liefert z. B. die Funktion

$$f(\zeta) = c \ln \zeta$$

das magnetische Feld in der Umgebung eines geraden, gestreckten Leiters, das konzentrische, kreisförmige Induktionslinien aufweist, und ebene Niveaulächen, die die Leiterachse enthalten. Das Potential ist

$$\psi = c \alpha; \tag{601}$$

die Niveaulächen sind durch  $\alpha = \text{konst}$  gegeben. Für die magnetische Feldstärke folgt daraus

$$H = - \frac{d\psi}{d(r\alpha)} = - \frac{c}{r},$$

und die Konstante  $c$  ergibt sich aus dem Durchflutungsgesetz, wie bereits in Abschnitt 22 gezeigt; es ist

$$c = - \frac{I}{2\pi},$$

wenn die positive Richtung von  $\alpha$  und  $\xi$  rechtsläufig mit der positiven Richtung des Stromes  $I$  verknüpft ist.

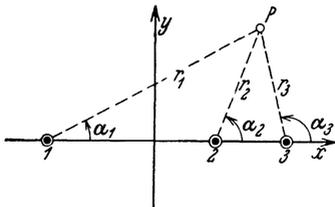


Abb. 169. Berechnung des magnetischen Feldes von parallelen Leitern.

Da die Potentialgleichung eine lineare Differentialgleichung ist, so folgt, daß bei Vorhandensein mehrerer Leiter sich die Einzelfelder ungestört überlagern. Voraussetzung dafür ist lediglich, daß überall

$$\mu = \text{konst}$$

ist. Mit Hilfe dieses Satzes kann man die magnetischen Felder in der Umgebung von Mehrleitersystemen berechnen. Bezeichnen 1, 2 und 3 in Abb. 169 drei parallele Leiter, die von den Strömen  $I_1, I_2, I_3$  durchflossen werden (positive Richtung von hinten nach vorn), so gilt für das magnetische Potential in irgendeinem Punkt  $P$

$$\psi = - \frac{1}{2\pi} (I_1 \alpha_1 + I_2 \alpha_2 + I_3 \alpha_3). \tag{602}$$

Daraus leiten sich die Komponenten der magnetischen Feldstärke in der  $x$ - und  $y$ -Richtung ab. Es ist z. B.

$$\mathfrak{H}_x = -\text{grad}_x \psi = \frac{1}{2\pi} \left( I_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + I_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + I_3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} \right). \quad (603)$$

Die partiellen Differentiale der Winkel  $\alpha$  bei einer Änderung von  $x$  findet man aus der Beziehung

$$x = y \cot \alpha + k.$$

Hieraus ergibt sich durch partielles Differenzieren:

$$1 = -\frac{y}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x},$$

oder

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{\sin^2 \alpha}{y} = -\frac{\sin \alpha}{r}.$$

Daher wird

$$\mathfrak{H}_x = -\frac{1}{2\pi} \left( I_1 \frac{\sin \alpha_1}{r_1} + I_2 \frac{\sin \alpha_2}{r_2} + I_3 \frac{\sin \alpha_3}{r_3} \right). \quad (604)$$

Genau so folgt für die Komponente von  $\mathfrak{H}$  in der  $y$ -Richtung

$$\mathfrak{H}_y = \frac{1}{2\pi} \left( I_1 \frac{\cos \alpha_1}{r_1} + I_2 \frac{\cos \alpha_2}{r_2} + I_3 \frac{\cos \alpha_3}{r_3} \right). \quad (605)$$

In großer Entfernung von den drei Leitern werden die Abstände und die Winkel einander gleich. Dann folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_x &= -\frac{1}{2\pi r} (I_1 + I_2 + I_3) \sin \alpha; \\ \mathfrak{H}_y &= \frac{1}{2\pi r} (I_1 + I_2 + I_3) \cos \alpha. \end{aligned}$$

Der Betrag der magnetischen Feldstärke ist in großer Entfernung

$$|\mathfrak{H}| = \sqrt{\mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2} = \frac{1}{2\pi r} (I_1 + I_2 + I_3). \quad (606)$$

Das magnetische Feld ist also in großer Entfernung von einem System paralleler Leiter so beschaffen, wie wenn nur ein Leiter vorhanden wäre, der die Summe der Ströme führt.

Handelt es sich um Hin- und Rückleitung eines einzigen Stromkreises, dann ist zu setzen

$$I_1 = -I_2 = I,$$

und es wird

$$\psi = -\frac{1}{2\pi} I (\alpha_1 - \alpha_2). \quad (607)$$

Die Niveaulinien sind daher Kreise, die durch die Spuren der Leiterachsen hindurchgehen, und deren Mittelpunkte auf der Mittelsenkrechten zur Verbindungslinie dieser Spuren liegen; sie entsprechen den Verschiebungslinien des elektrischen Feldes. Da die magnetischen Induktionslinien die Niveaulinien senkrecht schneiden müssen, so sind sie durch die Apollonischen Kreise dargestellt, also durch die Niveaulinien des elektrischen Feldes (Abb. 75). Die magnetische Feldstärke ist auf der Verbindungslinie 1, 2

$$H = \mathfrak{H}_y = \frac{1}{2\pi} I \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad (608)$$

da  $\cos \alpha_1 = 0$  und  $\cos \alpha_2 = -1$ . Sie setzt sich zusammen aus den von den beiden Leitern herrührenden Beiträgen, Gl. (566). Bezeichnet  $a$  den Abstand zwischen den beiden Drähten, und setzt man  $r_1 = x$ , so wird  $r_2 = a - x$  und

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2\pi} I \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{a-x} \right). \quad (609)$$

Der Induktionsfluß, der durch einen Streifen von der Breite  $dx$  und der Länge  $l$  zwischen den beiden Leitern hindurchgeht, ist

$$d\Phi = Bl dx = \frac{\mu}{2\pi} Il \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{a-x} \right) dx.$$

Der gesamte Induktionsfluß im Luftraum zwischen den beiden Leitungen ergibt sich

hieraus durch Integration von  $x=r_0$  bis  $x=a-r_0$ , wenn  $r_0$  den Leiterradius bezeichnet. Es wird

$$\Phi = \frac{\mu}{2\pi} Il \int_{r_0}^{a-r_0} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{a-x} \right) dx = \frac{\mu}{\pi} Il \ln \frac{a-r_0}{r_0}. \quad (610)$$

Von dem Prinzip der ungestörten Überlagerung der Einzelfelder kann man ferner Gebrauch machen zur Berechnung des magnetischen Feldes bei stabförmigen Leitern beliebigen Querschnitts. Man zerlegt den Querschnitt in Flächenelemente  $dF$ ; dann wird bei einer Stromdichte  $\mathcal{G}$  die Stromstärke in einem solchen Querschnitt  $|\mathcal{G}|dF$ . Die Komponenten der magnetischen Feldstärke in einem Punkt  $P$  sind dann nach den Gl. (604) und (605)

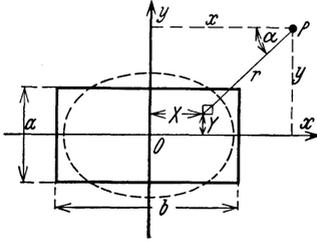


Abb. 170. Berechnung des magnetischen Feldes eines Rechteckstabes.

wobei die Integrale über den ganzen Leiterquerschnitt zu bilden sind.

**Beispiel:** Für die in Abb. 170 gezeichnete Schiene mit rechteckigem Querschnitt stellt man das Flächenelement durch ein kleines Rechteck dar. Die Koordinaten des Rechtecks seien

$$x=X, \quad y=Y,$$

die Seiten

$$dX \quad \text{und} \quad dY.$$

Dann wird

$$r = \sqrt{(y-Y)^2 + (x-X)^2}; \quad \sin \alpha = \frac{y-Y}{r}; \quad \cos \alpha = \frac{x-X}{r},$$

und es ergibt sich

$$\mathfrak{H}_x = -\frac{1}{2\pi} \frac{I}{ab} \int_{-b/2}^{+b/2} dX \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{y-Y}{(y-Y)^2 + (x-X)^2} dY.$$

Die Ausführung der Integration liefert

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_x = \frac{I}{2\pi ab} & \left[ \frac{1}{2} \left( x + \frac{b}{2} \right) \ln \frac{\left( y + \frac{a}{2} \right)^2 + \left( x + \frac{b}{2} \right)^2}{\left( y - \frac{a}{2} \right)^2 + \left( x + \frac{b}{2} \right)^2} - \frac{1}{2} \left( x - \frac{b}{2} \right) \ln \frac{\left( y + \frac{a}{2} \right)^2 + \left( x - \frac{b}{2} \right)^2}{\left( y - \frac{a}{2} \right)^2 + \left( x - \frac{b}{2} \right)^2} \right. \\ & \left. + \left( y + \frac{a}{2} \right) \left( \arctg \frac{x + \frac{b}{2}}{y + \frac{a}{2}} - \arctg \frac{x - \frac{b}{2}}{y + \frac{a}{2}} \right) - \left( y - \frac{a}{2} \right) \left( \arctg \frac{x + \frac{b}{2}}{y - \frac{a}{2}} - \arctg \frac{x - \frac{b}{2}}{y - \frac{a}{2}} \right) \right] \quad (613) \end{aligned}$$

Der Ausdruck für  $\mathfrak{H}_y$  ergibt sich hieraus, wenn überall  $x$  und  $y$  sowie  $a$  und  $b$  miteinander vertauscht werden. Die Kraftlinien bilden ellipsenähnliche Kurven, wie in Abb. 170 gestrichelt angedeutet.

Die Beziehungen (611) und (612) gelten auch für das Feld innerhalb des Leiters, wenn der Leiter die gleiche Permeabilität besitzt wie die Umgebung. Genau so wie außerhalb des Leiters addieren sich auch im Innern in jedem Punkt des Leiterquerschnitts die Wirkungen der Ströme in den übrigen Querschnittsteilen. Dagegen gilt im Innern der Leiter nicht die Potentialgleichung (600), bei deren Ableitung vorausgesetzt wurde, daß der betrachtete Raumteil stromlos ist.

Beim geraden Leiter mit Kreisquerschnitt muß wegen der Symmetrie die magnetische Feldstärke im Innern des Leiters ebenso wie außerhalb für Punkte gleichen Abstandes von der Achse konstante Werte haben; die Kraftlinien sind konzentrische Kreise. Man kann daher das Durchflutungsgesetz unmittelbar anwenden. Bei gleichmäßiger Verteilung des Stromes über den Leiterquerschnitt ist die durch eine Kraftlinie mit dem Radius  $r$  hindurchgeführte Stromstärke

$$I_r = \frac{r^2}{r_0^2} I, \quad (614)$$

wenn  $r_0$  wieder den Leiterradius und  $I$  den Gesamtstrom bezeichnen. Daher wird nach dem Durchflutungsgesetz

$$\oint \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = |\mathfrak{H}| \oint d\mathfrak{s} = |\mathfrak{H}| 2r\pi = \frac{r^2}{r_0^2} I,$$

$$H = \frac{r}{2\pi r_0^2} I. \tag{615}$$

Auf der Verbindungsebene der beiden Drahtachsen ergibt sich damit ein Verlauf der magnetischen Feldstärke wie ihn Abb. 171 zeigt.

Das Feld im Leiterinnern genügt nicht der Potentialgleichung. Diese lautet im vorliegenden Fall der Rotationssymmetrie gemäß Gl. (356)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \tag{616}$$

Aus der Gl. (615) ergibt sich das Potential

$$\psi = -\int H r d\alpha = -\frac{1}{2\pi} \frac{r^2}{r_0^2} \alpha I + k.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{\pi} \frac{r}{r_0^2} \alpha I; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = -\frac{1}{\pi} \frac{\alpha I}{r_0^2}.$$

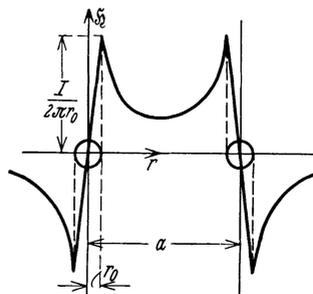


Abb. 171. Magnetische Feldstärke bei einer Doppelleitung.

Der Ausdruck auf der linken Seite von Gl. (616) wird daher  $-\frac{2}{\pi} \frac{\alpha I}{r_0^2}$ , ist also von Null verschieden.

Innerhalb der Stromleiter tritt an die Stelle des skalaren Potentials  $\psi$  das sogenannte Vektorpotential  $\mathfrak{A}$ . Wir denken uns im Innern eines stromdurchflossenen Leiters eine kleine Fläche  $d\mathfrak{F}$  senkrecht zur Richtung der Stromdichte  $\mathfrak{G}$  abgegrenzt. Die Stärke des durch diese Fläche fließenden Stromes ist  $\mathfrak{G} d\mathfrak{F}$ . Bildet man längs des Randes der Fläche  $d\mathfrak{F}$  das Linienintegral der magnetischen Feldstärke, so muß nach dem Durchflutungsgesetz

$$\oint \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = \mathfrak{G} d\mathfrak{F} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{d\mathfrak{F}} \oint \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = \mathfrak{G} \tag{617}$$

sein. Der Ausdruck auf der linken Seite hat bei verschwindendem  $d\mathfrak{F}$  also einen ganz bestimmten Grenzwert, der gleich dem Vektor der Stromdichte ist. Man bezeichnet in der Vektorrechnung den Grenzwert, dem das Verhältnis des Linienintegrals eines Vektors längs eines geschlossenen Weges zu der von dem Weg berandeten Fläche bei unendlich kleiner Fläche zustrebt, als die Rotation oder den Wirbel des Vektors und schreibt

$$\text{rot } \mathfrak{H} = \lim \frac{1}{d\mathfrak{F}} \oint \mathfrak{H} d\mathfrak{s}. \tag{618}$$

Die Rotation ist wieder ein Vektor, der senkrecht auf  $\mathfrak{H}$  steht. Seine Komponenten können durch räumliche Differentialquotienten ausgedrückt werden. Um z. B. in kartesischen Koordinaten die z-Komponente der Rotation zu berechnen, hat man in der xy-Ebene an der betreffenden Stelle des Raumes ein kleines Rechteck  $dx dy$  abzugrenzen, Abb. 172. Bezeichnet man die x-Komponente von  $\mathfrak{H}$  an der unteren Rechteckseite mit  $\mathfrak{H}_x$ , so beträgt sie an der oberen  $\mathfrak{H}_x + \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} dy$ . Bezeichnet man ferner die y-Komponente von  $\mathfrak{H}$  an der linken vertikalen Rechteckseite mit  $\mathfrak{H}_y$ , so beträgt sie an der rechten Rechteckseite  $\mathfrak{H}_y + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} dx$ . Bei der Bildung des Linienintegrals ist das Rechteck links herum zu durchlaufen, da der Umlaufsinn mit der

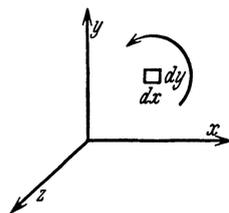


Abb. 172. Berechnung der Rotation.

$z$ -Richtung eine Rechtschraube bilden muß. Daher wird für das Rechteck  $dx dy$

$$\oint \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = \mathfrak{H}_z dx + \left( \mathfrak{H}_y + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} dx \right) dy - \left( \mathfrak{H}_x + \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} dy \right) dx - \mathfrak{H}_y dy = \left( \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} \right) dx dy,$$

und es ergibt sich für die  $z$ -Komponente der Rotation

$$\text{rot}_z \mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y}. \quad (619)$$

Durch zyklische Vertauschung der Indizes folgt

$$\text{rot}_x \mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}, \quad (620)$$

$$\text{rot}_y \mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}. \quad (621)$$

In ähnlicher Weise findet man bei Zylinderkoordinaten  $r, \alpha, z$

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_r \mathfrak{H} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial \mathfrak{H}_\alpha}{\partial z}, \\ \text{rot}_\alpha \mathfrak{H} &= \frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial r}, \\ \text{rot}_z \mathfrak{H} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \mathfrak{H}_\alpha) - \frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial \alpha} \right), \end{aligned} \right\} \quad (622)$$

und bei Kugelkoordinaten  $r, \vartheta, \alpha$

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_r \mathfrak{H} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \cdot \mathfrak{H}_\alpha) - \frac{\partial \mathfrak{H}_\alpha}{\partial \alpha} \right], \\ \text{rot}_\vartheta \mathfrak{H} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \vartheta \cdot \mathfrak{H}_\alpha) \right], \\ \text{rot}_\alpha \mathfrak{H} &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \mathfrak{H}_\vartheta) - \frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial \vartheta} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (623)$$

Orientiert man das Koordinatensystem so, daß die  $x$ -Achse in die Richtung von  $\mathfrak{H}$  fällt, so ist  $\mathfrak{H}_y = 0$  und  $\mathfrak{H}_z = 0$ , und es hat nach (619) ... (621) die Rotation nur eine  $y$ - und eine  $z$ -Komponente, d. h. der Wirbel eines Vektors steht immer senkrecht auf dem Vektor selbst.

Mit Hilfe der Darstellung durch Differentialquotienten kann man noch folgende Rechenregeln für die Rotation ableiten

$$\text{rot grad } \psi = 0; \quad (624)$$

$$\text{div rot } \mathfrak{A} = 0; \quad (625)$$

$$\text{rot rot } \mathfrak{A} = \text{grad div } \mathfrak{A} - \Delta \mathfrak{A}; \quad (626)$$

$$\text{div } [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] = \mathfrak{B} \text{ rot } \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \text{ rot } \mathfrak{B}. \quad (627)$$

In einem wirbelfreien Vektorfeld kann man den Vektor durch den Gradienten eines skalaren Potentials darstellen wie beim ruhenden elektrischen Feld. Im magnetischen Feld ist nach Gl. (617) allgemein der Wirbel der magnetischen Feldstärke gleich der Stromdichte:

$$\text{rot } \mathfrak{H} = \mathfrak{G}. \quad (628)$$

Dies ist eine andere Form des Durchflutungsgesetzes. Nur für die Stellen des Feldes, bei denen die Stromdichte Null ist, läßt sich gemäß Gl. (598) und (624) ein skalares magnetisches Potential angeben.

Drückt man bei einer Fläche beliebiger Ausdehnung die Durchflutung durch die Stromdichte aus,

$$\Theta = \int \mathfrak{G} d\mathfrak{S}$$

und ersetzt man die Stromdichte nach Gl. (628) durch den Wirbel der magnetischen Feldstärke, so ergibt sich die für beliebige Feldvektoren gültige Rechenregel (Stokesscher Satz)

$$\oint \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = \int \text{rot } \mathfrak{H} d\mathfrak{S}. \quad (629)$$

Da das magnetische Feld quellenfrei ist, so gilt unter der Voraussetzung, daß  $\mu = \text{konst}$

$$\text{div } \mathfrak{H} = 0.$$

Auf Grund der Gl. (625) kann man daher den Ansatz machen

$$\mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A}, \quad (630)$$

wobei  $\mathfrak{A}$  einen Vektor darstellt, der durch diese Beziehung definiert ist. Führt man dies in Gl. (628) ein, so folgt

$$\text{rot rot } \mathfrak{A} = \mathfrak{G},$$

oder mit der Rechenregel (626)

$$\text{grad div } \mathfrak{A} - \Delta \mathfrak{A} = \mathfrak{G}. \quad (631)$$

Wir setzen nun willkürlich fest, daß

$$\text{div } \mathfrak{A} = 0 \quad (632)$$

sein soll. Dann gilt

$$\Delta \mathfrak{A} = -\mathfrak{G}, \quad (633)$$

eine Gleichung, die der Raumladungsgleichung (398) analog ist. Ein Unterschied gegenüber dieser Gleichung besteht lediglich darin, daß  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{G}$  hier Vektoren sind. Da aber zwei Vektoren nur dann einander gleich sind, wenn ihre drei Komponenten übereinstimmen, so zerfällt die Gl. (633) in drei Gleichungen für die Komponenten der Vektoren, die als skalare Größen betrachtet werden können:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathfrak{A}_x &= -\mathfrak{G}_x, \\ \Delta \mathfrak{A}_y &= -\mathfrak{G}_y, \\ \Delta \mathfrak{A}_z &= -\mathfrak{G}_z. \end{aligned} \right\} \quad (634)$$

Auf Grund der Analogie zu den Verhältnissen im elektrischen Feld können wir für die Komponenten von  $\mathfrak{A}$  sofort die Lösungen anschreiben. Es tritt an die Stelle von  $\rho/\varepsilon$  bei der Raumladungsgleichung hier die Größe  $\mathfrak{G}$ . Ist im elektrischen Feld die Ladung an jeder Stelle des Raumes bekannt, so gilt für das Potential [Gl. (196)]

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \rho \frac{dV}{r},$$

wobei  $dV$  das Volumelement,  $r$  den Abstand des Aufpunktes von diesem Volumelement bezeichnet und das Integral über den ganzen geladenen Raum zu erstrecken ist. Entsprechend gilt daher hier

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A}_x &= \frac{1}{4\pi} \int \mathfrak{G}_x \frac{dV}{r}, \\ \mathfrak{A}_y &= \frac{1}{4\pi} \int \mathfrak{G}_y \frac{dV}{r}, \\ \mathfrak{A}_z &= \frac{1}{4\pi} \int \mathfrak{G}_z \frac{dV}{r}, \end{aligned} \right\} \quad (635)$$

wobei sich die Integration auf alle vom elektrischen Strom erfüllten Leiter bezieht. Diese drei Gleichungen kann man wieder zu einer einzigen Vektorgleichung zusammenfassen:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi} \int \mathfrak{G} \frac{dV}{r}. \quad (636)$$

Mit Hilfe der Rechenregeln der Vektorrechnung läßt sich zeigen, daß dieser Ansatz auch die Bedingung (632) erfüllt. Wenn die elektrische Strömung in jedem Punkt des Raumes gegeben ist, kann also mit der Formel (636) der Vektor  $\mathfrak{A}$  berechnet werden. Man nennt diesen Vektor das magnetische Vektorpotential.

Aus dem Vektorpotential ergibt sich mit Gl. (630) die magnetische Feldstärke. Meist braucht man jedoch das Vektorpotential selbst nicht zu berechnen. Wir leiten im folgenden aus dem Vektorpotential zwei Formeln zur Berechnung der magnetischen Feldstärke und des magnetischen Induktionsflusses bei drahtförmigen Leitern ab.

Die magnetische Feldstärke ist nach Gl. (630) und (636)

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int \mathfrak{G} \frac{dV}{r}. \tag{637}$$

Diese Gleichung wenden wir nun auf einen „Stromfaden“ an, also auf einen stromdurchflossenen Leiter von sehr geringem Querschnitt, oder auf einen durch Strömungslinien begrenzten Ausschnitt aus einem Leiter endlichen Querschnittes. Ist  $\mathfrak{F}$  der Querschnitt des Stromfadens,  $d\mathfrak{s}$  ein Längenelement, so ist das Volumenelement

$$dV = \mathfrak{F} d\mathfrak{s}. \tag{638}$$

Führt man dies in Gl. (637) ein, so tritt das Produkt  $\mathfrak{G} \mathfrak{F}$  auf. Dieses Produkt ist gleich dem von dem Stromfaden geführten Strom

$$I = \mathfrak{G} \mathfrak{F}, \tag{639}$$

der überall in dem Stromfaden einen konstanten Wert hat. Das Raumintegral geht daher über in das Linienintegral längs des durch den Stromfaden gebildeten Stromkreises. Es ist

$$\mathfrak{H} = \frac{I}{4\pi} \operatorname{rot} \oint \frac{d\mathfrak{s}}{r} = \frac{I}{4\pi} \oint \operatorname{rot} \left( \frac{d\mathfrak{s}}{r} \right). \tag{640}$$

Dieser Ausdruck läßt sich noch weiter vereinfachen. Wir legen zur Berechnung von  $\operatorname{rot} \left( \frac{d\mathfrak{s}}{r} \right)$  in den Raum ein kartesisches Koordinatensystem so, daß die  $x$ -Achse mit dem Linienelement  $d\mathfrak{s}$  zusammenfällt, der Nullpunkt in dem Linienelement und der Punkt  $P$  in der  $x$ - $y$ -Ebene liegt, Abb. 173. Der Vektor  $\frac{d\mathfrak{s}}{r}$  hat dann ebenfalls die  $x$ -Richtung; sein Betrag ist

$$\frac{d\mathfrak{s}}{r} = \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Daher wird nach Gl. (619) bis (621)

$$\operatorname{rot}_x \left( \frac{d\mathfrak{s}}{r} \right) = 0;$$

$$\operatorname{rot}_y \left( \frac{d\mathfrak{s}}{r} \right) = 0;$$

$$\operatorname{rot}_z \left( \frac{d\mathfrak{s}}{r} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{y ds}{r^3} = \frac{\sin \alpha ds}{r^2}.$$

Es gilt also

$$\operatorname{rot} \left( \frac{d\mathfrak{s}}{r} \right) = \frac{[d\mathfrak{s} \mathfrak{r}]}{r^3}, \tag{641}$$

wenn unter  $\mathfrak{r}$  ein Vektor verstanden wird, der durch den Abstand zwischen dem Nullpunkt und dem Punkt  $P$  gegeben ist und nach dem Punkt  $P$  hinzeigt. Für die magnetische Feldstärke ergibt sich damit schließlich

$$\mathfrak{H} = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{[d\mathfrak{s} \mathfrak{r}]}{r^3}. \tag{642}$$

Man kann diese Formel zur Berechnung magnetischer Felder von stromdurchflossenen fadenförmigen Leitern (Biot u. Savart 1820, Ampère 1823) folgendermaßen deuten. Die magnetische Feldstärke setzt sich aus Anteilen zusammen, die von den einzelnen Längenelementen  $d\mathfrak{s}$  des Leiters herrühren, und die sich einfach summieren. Jeder Anteil ist gegeben durch

$$d\mathfrak{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{[d\mathfrak{s} \mathfrak{r}]}{r^3};$$

er hat also den Betrag

$$|d\mathfrak{H}| = \frac{I}{4\pi} \frac{ds \sin \alpha}{r^2} \tag{643}$$

und eine Richtung, die senkrecht auf der durch  $ds$  und  $r$  gebildeten Ebene steht. Der Vektor der magnetischen Feldstärke selbst ergibt sich, wenn man alle Teil-

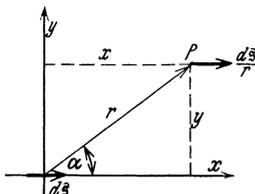


Abb. 173. Zur Ableitung der Ampèreschen Formel.

vektoren, die von den einzelnen Längenelementen des elektrischen Stromkreises herrühren, geometrisch addiert. Da der räumliche Verlauf des Stromes in den meisten Fällen durch die Stromleiter vorgeschrieben ist, so kann man mit Hilfe der Ampèreschen Formel grundsätzlich die Aufgabe der Berechnung magnetischer Felder von elektrischen Stromkreisen lösen, wenn auch die zu diesem Zweck auszuführende Integration in vielen Fällen nicht zu einfachen Ausdrücken führt.

Eine andere Anwendung des Vektorpotentials ergibt sich bei der Berechnung des magnetischen Induktionsflusses. Nach Abschnitt 21 ist der durch eine beliebige Fläche gehende Induktionsfluß gleich dem Flächenintegral der magnetischen Induktion über diese Fläche

$$\Psi = \int \mathfrak{B} d\mathfrak{F}.$$

Da nun

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}; \quad \mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A},$$

so folgt

$$\Psi = \mu \int \text{rot } \mathfrak{A} d\mathfrak{F}.$$

Mit Hilfe des auf den Vektor  $\mathfrak{A}$  angewendeten Stokeschen Satzes Gl. (629) ergibt sich daraus

$$\Psi = \mu \oint \mathfrak{A} ds. \tag{644}$$

Man erhält den Induktionsfluß, der durch eine beliebig berandete Fläche hindurchgeht, indem man das Linienintegral des Vektorpotentials längs der Randlinie der Fläche bildet. Wir werden von diesem Satz in Abschnitt 25 Gebrauch machen.

### 25. Beispiele magnetischer Felder.

Mit Hilfe der Ampèreschen Formel werde zunächst die magnetische Induktion auf der im Mittelpunkt eines stromführenden Drahtringes, Abb. 174, senkrecht zur Ringebene stehenden Achse berechnet. In irgendeinem Punkt  $P$  dieser Achse ruft ein Leiterelement des Stromkreises eine magnetische Feldstärke hervor vom Betrage

$$|d\mathfrak{H}| = \frac{1}{4\pi} I \frac{ds}{r^2} = \frac{I}{4\pi} \frac{ds}{a^2 + \frac{1}{4}d^2}. \tag{645}$$

Der entsprechende Vektor liegt in der durch die Achse und das Leiterelement gelegten Ebene und steht senkrecht auf der Verbindungslinie des Leiterelementes mit dem betrachteten Punkt. Je zwei einander gegenüberliegende Linienelemente ergeben daher einen Beitrag zur magnetischen Feldstärke, der in die Richtung der Achse fällt, Abb. 174; er hat die Größe

$$2 |d\mathfrak{H}| \sin \beta = |d\mathfrak{H}| \frac{d}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}d^2}}.$$

Man erhält die gesamte Feldstärke in dem betrachteten Punkt, wenn man alle diese Beiträge summiert. Da hier

$$\int ds = \frac{\pi d}{2}$$

ist, so ergibt sich

$$H = |\mathfrak{H}| = \frac{I}{8} \frac{d^2}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}d^2}^3} = \frac{I}{d} \sin^3 \beta. \tag{646}$$

Bei großen Abständen nimmt die Feldstärke und damit die magnetische Induktion also umgekehrt proportional zur dritten Potenz des Abstandes ab. Im Mittelpunkt des Ringes  $a = 0$ ,  $\beta = 90^\circ$ , wird

$$H = \frac{I}{d}. \tag{647}$$

Die Formel (646) kann zur Berechnung der Induktion in der Achse einer Zylinder-spule benützt werden; man hat hier die von den einzelnen Windungen herrührenden Beiträge zur Feldstärke zu summieren.

Ein magnetisches Feld von der hier betrachteten Art entsteht auch im Außenraum einer Ringspule (Toroid), wenn der Ring fortlaufend bewickelt ist. Bei gegen-

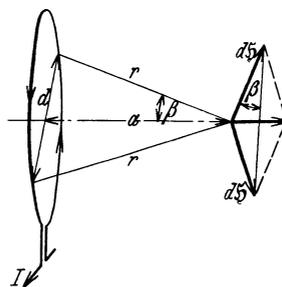


Abb. 174. Magnetisches Feld eines Drahtringes.

läufig gewickelten Lagen heben sich je zwei aufeinander folgende Lagen in ihrer Wirkung nach außen auf; ist die Anzahl der Lagen ungerade, so ergibt die übrigbleibende Lage ein magnetisches Feld außerhalb der Spule wie ein Draht ring vom Durchmesser des Toroids.

Der Induktionsfluß, der insgesamt von der kreisförmigen Drahtschleife erzeugt wird, läßt sich mit Hilfe des Vektorpotentials berechnen. Um die Gl. (644) anwenden zu können, muß man zunächst das Vektorpotential auf einer Mantellinie des Leiters bestimmen. Es hat dort praktisch den gleichen Wert, wenn man sich den ganzen Strom in einem durch die Achse des Drahtes gebildeten Stromfaden konzentriert denkt, vorausgesetzt, daß der Leiterradius  $r_0$  sehr klein ist gegen den Ringdurchmesser  $d$ . Dann gilt

$$\mathcal{G} dV = I d\vec{s}, \quad (648)$$

und es wird das Vektorpotential nach Gl. (636)

$$\mathfrak{A} = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s}}{r}. \quad (649)$$

Um danach in irgendeinem Punkt des Raumes das Vektorpotential zu berechnen, hat man sich den Stromfaden in die Längenelemente  $d\vec{s}$  zerlegt zu denken. Jedes Längenelement liefert einen Beitrag zum Vektorpotential in dem betrachteten Punkt, dessen Richtung übereinstimmt mit der des Längenelementes und dessen Betrag proportional der Länge des Elementes, dividiert durch den Abstand  $r$  des betrachteten Punktes von dem Längenelement ist. Für einen Punkt einer der kreisförmigen Mantellinien des Leiters, z. B. der inneren, deren Radius  $\frac{d}{2} - r_0$  beträgt,

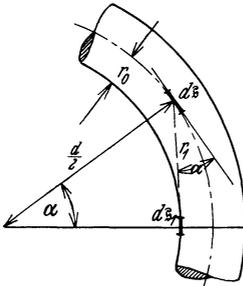


Abb. 175. Zur Berechnung des Induktionsflusses.

ergibt sich also das Vektorpotential, wenn man den Abstand  $r_1$  zwischen diesem Punkt der Mantellinie und dem Längenelement  $d\vec{s}$  der Leiterachse in Gl. (649) einführt. Nach Gl. (644) erhält man den Induktionsfluß, der mit dieser Mantellinie verkettet ist, indem man das skalare Produkt des Vektorpotentials mit einem Längenelement  $d\vec{s}_1$  der Mantellinie bildet und die einzelnen Beiträge über die ganze Mantellinie summiert. Es ergibt sich also

$$\Psi = \frac{\mu I}{4\pi} \oint d\vec{s}_1 \oint \frac{d\vec{s}}{r_1}. \quad (650)$$

Nun gilt gemäß der Definition des skalaren Produktes die Beziehung

$$d\vec{s}_1 d\vec{s} = ds ds_1 \cos \alpha,$$

wobei  $\alpha$  der Winkel ist, den die beiden Längenelemente miteinander bilden, Abb. 175. Führt man dies in Gl. (650) ein, so folgt

$$\Psi = \frac{\mu I}{4\pi} \oint \oint \frac{ds ds_1 \cos \alpha}{r_1}. \quad (651)$$

Den Abstand zwischen den beiden Längenelementen und die beiden Längenelemente selbst kann man gemäß Abb. 175 auf folgende Weise ausdrücken

$$r_1 = \sqrt{\frac{1}{4}d^2 + (\frac{1}{2}d - r_0)^2 - d(\frac{1}{2}d - r_0)\cos \alpha}; \quad ds = \frac{1}{2}d d\alpha; \quad ds_1 = (\frac{1}{2}d - r_0) d\alpha.$$

Setzt man dies in die Gl. (651) ein, so hat man zweimal über  $\alpha$  von 0 bis  $2\pi$  zu integrieren. Die eine dieser beiden Integrationen liefert den Wert  $2\pi$ , und es ergibt sich

$$\Psi = \frac{\mu I}{4\pi} 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2}d(\frac{1}{2}d - r_0)\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{\frac{1}{4}d^2 + (\frac{1}{2}d - r_0)^2 - d(\frac{1}{2}d - r_0)\cos \alpha}}. \quad (652)$$

Das Integral läßt sich durch die sogenannten elliptischen Integrale darstellen<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Siehe E. Jahnke u. F. Emde: Funktionentafeln. Berlin 1928.

Unter der Voraussetzung, daß der Drahtradius sehr klein ist gegen den Radius des Kreises kann man einen einfachen Näherungsausdruck ableiten. Dann wird nämlich aus Gl. (652) angenähert

$$\Psi = \frac{\mu I}{4\sqrt{2}} d \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{1 - \cos \alpha + 2\frac{r_0^2}{d^2}}} \tag{653}$$

Da nun  $2\frac{r_0^2}{d^2}$  eine gegen 1 sehr kleine Größe sein soll, so ergeben sich erhebliche Werte des Integranden nur in der Umgebung von  $\cos \alpha = 1$ , also für  $\alpha = 0$  und  $\alpha = 2\pi$ ; der Verlauf des Integranden in Abhängigkeit von  $\alpha$  ist in Abb. 176 aufgezeichnet. Man erhält daher einen Näherungswert des Integrals, wenn man die Näherungsformel

$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

benützt und von 0 bis  $\pi/4$  integriert, also in einem Bereich, in dem diese Näherungsformel noch brauchbar ist; das ganze Integral ist dann doppelt so groß. Es gilt also

$$\Psi \approx \frac{\mu I}{2} d \int_0^{\pi/4} \frac{(1 - \frac{1}{2}\alpha^2) d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 4\frac{r_0^2}{d^2}}}$$

und daraus folgt angenähert

$$\Psi \approx \frac{\mu I d}{2} \ln \frac{d}{2r_0} \tag{654}$$

**Zahlenbeispiel:** Es sei  $d=20$  cm,  $r_0=1$  mm,  $I=2$  A. Befindet sich die Drahtschleife in Luft, so wird nach Gl. (654)

$$\Psi = \frac{1,256}{2} 2 \cdot 20 \ln 100 \frac{\text{G cm}}{\text{A}} \text{A cm} = 116 \text{M.}$$

Verdoppelt man den Durchmesser  $d$ , so wird  $\Psi=266\text{M}$ . Der Induktionsfluß wächst also nicht proportional mit der Fläche, wie man dies zunächst vermuten könnte, sondern eher proportional mit dem Durchmesser. Es ist das magnetische Feld in der unmittelbaren Umgebung des Drahtes so stark konzentriert, daß im wesentlichen die Drahtlänge maßgebend für den Fluß ist.

Die Ampèresche Formel gilt nicht, wenn ferromagnetische Stoffe im Raum vorhanden sind; denn sie bezieht sich auf sämtliche Ströme im Raum, also auch auf die Molekularströme in den magnetischen Stoffen, die aber von vornherein nicht bekannt sind. Man muß daher in solchen Fällen die Methoden der Potentialtheorie zu Hilfe nehmen. Als Beispiel werde ein gerader Stromleiter betrachtet, der in einen Eisenkörper mit ebener Begrenzung eingebettet ist. Der Leiter soll in einem Kanal liegen, der im Eisenkörper ausgespart ist und parallel zur Begrenzungsebene verläuft, Abb. 177 (z. B. Stromleiter im Anker einer elektrischen Maschine). Der Abstand der Leiterachse von der Begrenzungsebene sei  $h$ . Wir nehmen ferner an, daß die Permeabilität des Eisens konstant sei. Dies gilt nur angenähert für kleine Feldstärken. Die Veränderlichkeit der Permeabilität mit der Feldstärke führt zu Komplikationen, die theoretisch nicht berücksichtigt werden können.

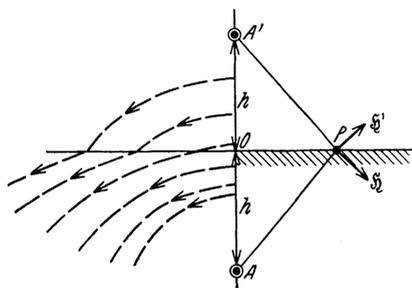


Abb. 177. Stromleiter in einem Eisenkörper.

In Analogie zu dem Verfahren der Spiegelung versuchen wir, die Grenzbedingungen an der Oberfläche des Eisenkörpers dadurch zu erfüllen, daß wir für die Berechnung des Feldes im Innern des Eisenkörpers einen zweiten Leiter  $A'$

mit dem Abstand  $h$  auf der anderen Seite der Grenzfläche anbringen und uns dann auch den Außenraum durch einen Stoff mit der gleichen Permeabilität ausgefüllt denken. Bezeichnet  $I$  die Stromstärke im Leiter  $A$ ,  $I'$  die Stromstärke im Leiter  $A'$ , so hat die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke in irgendeinem Punkt  $P$  der Grenzfläche gemäß Gl. (566) den Betrag

$$\mathfrak{H}_t = \frac{1}{2\pi} \left[ I \frac{OA}{(AP)^2} - I' \frac{OA'}{(A'P)^2} \right] = \frac{1}{2\pi} \frac{OA}{(AP)^2} (I - I'). \quad (655)$$

Für die Normalkomponente der magnetischen Induktion ergibt sich dort der Wert

$$\mathfrak{B}_n = \frac{\mu}{2\pi} \frac{OP}{(AP)^2} (I + I'). \quad (656)$$

Das Feld im Außenraum denken wir uns versuchsweise dargestellt durch einen Strom  $I''$  im Leiter  $A$ , während das Eisen durch Luft ersetzt wird. Ein solcher Strom ruft in der Grenzfläche die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke

$$\mathfrak{H}_t = \frac{1}{2\pi} \frac{OA}{(AP)^2} I'' \quad (657)$$

und die Normalkomponente der magnetischen Induktion

$$\mathfrak{B}_n = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{OP}{(AP)^2} I'' \quad (658)$$

hervor.

Da beide Komponenten an der Grenzfläche stetig sein müssen, so folgt

$$I'' = I - I'; \quad I'' = \mu_r (I + I').$$

Die Grenzbedingungen sind also erfüllt, wenn

$$I' = -\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} I; \quad (659) \quad \left| \quad I'' = \frac{2\mu_r}{\mu_r + 1} I. \quad (660) \right.$$

In Abb. 177 sind einige Kraftlinien des Feldes gestrichelt gezeichnet.

Das gleiche Verfahren kann man auch anwenden, wenn der Leiter außerhalb des Eisenkörpers liegt. In vielen Fällen ist die Permeabilität  $\mu_r$  so groß, daß die Induktionslinien praktisch senkrecht aus dem Eisen austreten.

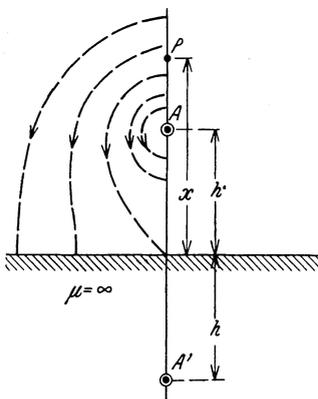


Abb. 178. Stromleiter außerhalb des Eisenkörpers.

Dann wird die Eisenoberfläche eine Niveaulfläche. Um unter dieser Voraussetzung das Feld im Außenraum, Abb. 178, zu berechnen, hat man jenseits der Grenzfläche das Spiegelbild  $A'$  des Leiters  $A$  anzubringen, das den gleichen Strom  $I$  führt wie der Leiter  $A$ . Das magnetische Potential kann dann nach Gl. (602) berechnet werden; in der Abbildung sind einige Kraftlinien eingezeichnet. Auf der durch den Leiter gelegten Normalebene hat die magnetische Feldstärke

den Wert

$$|\mathfrak{H}| = \frac{I}{2\pi} \left( \frac{1}{x-h} + \frac{1}{x+h} \right); \quad (661)$$

sie erscheint gegenüber dem im freien Raum befindlichen Leiter bei großen Abständen  $x$  verdoppelt infolge der Wirkung des Eisenkörpers.

Das Verfahren der Spiegelung führt auch bei zylindrischen Eisenkörpern zum Ziel. Befindet sich der Leiter, Abb. 179, bei  $A$  in einem Eisenzylinder mit dem Radius  $r_0$ , so bringt man das Spiegelbild  $A'$  zur Berechnung des Feldes im Innern des Eisenkörpers so an, daß

$$bd = r_0^2. \quad (662)$$

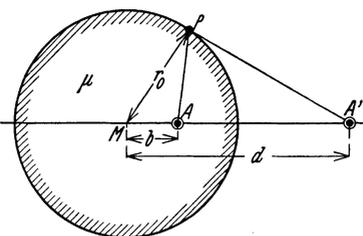


Abb. 179. Stromleiter im Inneren eines Eisenzylinders.

Dann sind die Grenzbedingungen an der Eisenoberfläche erfüllt, wenn der Strom in  $A'$  die Größe hat

$$I' = -\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} I. \tag{663}$$

Ferner kann das Feld im Außenraum so berechnet werden, wie wenn in den Punkten  $M$  und  $A$  Ströme  $I''$  und  $I'''$  vorhanden wären, wobei

$$I'' = -\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} I; \quad I''' = \frac{2\mu_r}{\mu_r + 1} I. \tag{664}$$

Wird  $\mu_r = \infty$  gesetzt, so folgt

$$I' = I'' = -I; \quad I''' = 2I.$$

In den meisten Fällen komplizierterer Formen der Eisenkörper, wie in elektrischen Maschinen und Apparaten, kann der Feldverlauf auf graphischem Wege bestimmt werden. Es gelten hier außerhalb der Stromleiter sinngemäß die gleichen Regeln, wie sie im Abschnitt 17 für das elektrische Feld abgeleitet wurden; an die Stelle der Elektrisierungszahl tritt die Permeabilität. Meist kann man dabei zur Berechnung des Luftfeldes die Permeabilität des Eisens als unendlich groß annehmen, so daß die Begrenzungsflächen Niveauflächen werden.

Für den Feldverlauf innerhalb der Wicklungen erhält man eine brauchbare Annäherung, wenn man sich den Strom gleichmäßig über den Wicklungsquerschnitt verteilt denkt; die Kraftliniendichte muß dabei mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes kontrolliert werden.

Die Abb. 180 veranschaulicht als Beispiel das Luftfeld der im Abschnitt 23 berechneten Eisenkernspule. Alle Kraftlinien, die auf den Eisenkörper einmünden, schließen sich innerhalb des Eisenkörpers, und zwar so, daß sie mit der Wicklung oder mit einem Teil davon verkettet sind. Häufig kann man die magnetischen Streufelder mit einer genügenden Genauigkeit berechnen, wenn man den magnetischen Widerstand des Eisens vernachlässigt. Für die Kraftliniendichte an der Stelle  $I$ , Abb. 180,

gilt z. B.  $B \cdot 7,2 \text{ cm} = \mu_0 I w,$

oder  $B = \frac{1,256 \cdot 3620 \text{ G cm A}}{7,2 \text{ A cm}} = 632 \text{ G}.$

In der Mitte des Wicklungsquerschnittes, etwa bei 2, hat die Kraftliniendichte nur noch den halben Wert, weil die Durchflutung der Kraftlinie 2 nur noch halb so groß ist.

Eine für manche Zwecke zulässige Vereinfachung ergibt sich, wenn man die Wicklung durch eine unendlich dünne, stromführende Schicht ersetzt. Man versteht unter Strombelag  $A$  den Strom, der in dieser Schicht je Längeneinheit des Querschnittes geführt wird. In einer solchen Schicht erfahren die magnetischen Kraftlinien eine Brechung, da die Normalkomponente der Induktion stetig hindurchgeht, während für die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke nach dem Durchflutungsgesetz gilt

$$\mathfrak{H}_{t1} - \mathfrak{H}_{t2} = A. \tag{665}$$

Die Abb. 181 zeigt als Beispiel das auf diese Weise ermittelte Feldbild einer Gleichstrommaschine bei Leerlauf<sup>1</sup>.

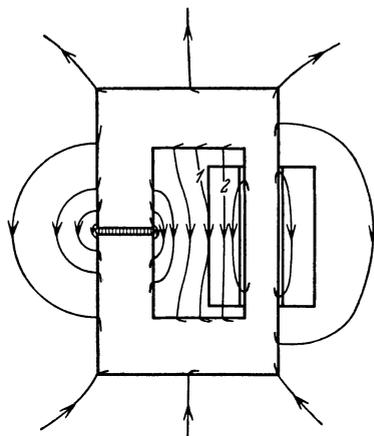


Abb. 180. Streufeld einer Drosselspule.

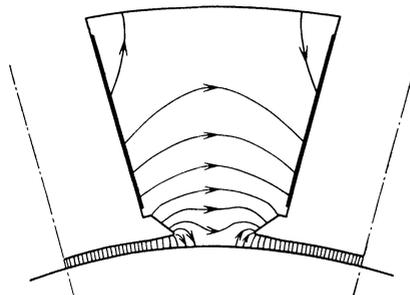


Abb. 181. Feldbild einer Gleichstrommaschine.

<sup>1</sup> Richter, R.: Arch. Elektrot. 11, 93 (1922).

Zwischen den Gesetzen des stationären Strömungsfeldes, des ruhenden elektrischen Feldes und des ruhenden magnetischen Feldes besteht eine weitgehende formale Übereinstimmung, die durch die folgende Tabelle verdeutlicht wird; die Tabelle zeigt zugleich die wesentlichen Unterschiede zwischen den drei Feldern.

Strömungsfeld		Elektrisches Feld		Magnetisches Feld	
Größe	Einheit	Größe	Einheit	Größe	Einheit
elektr. Potential $\varphi$ $\Delta\varphi=0$	V	elektr. Potential $\varphi$ , außerhalb d. elektr. Ladungen $\Delta\varphi=0$	V	magnet. Potential $\psi$ , außerhalb d. elektr. Ströme $\Delta\psi=0$	A
		innerhalb geladener Räume $\Delta\varphi=-\frac{\rho}{\epsilon}$	V/cm <sup>2</sup>	innerhalb der Leiter Vektorpotential $\mathfrak{A}$ $\Delta\mathfrak{A}=-\mathfrak{G}$	A/cm <sup>2</sup>
elektr. Spannung $U=\varphi_a-\varphi_b$	V	elektr. Spannung $U=\varphi_a-\varphi_b$	V	magn. Spannung $\psi_a-\psi_b$	A
elektr. Feldstärke $\mathfrak{E}=-\text{grad}\varphi$	V/cm	elektr. Feldstärke $\mathfrak{E}=-\text{grad}\varphi$	V/cm	magn. Feldstärke $\mathfrak{H}$ $\mathfrak{H}=-\text{grad}\psi$	A/cm
				$\mathfrak{H}=\text{rot}\mathfrak{A}$	A/cm
Stromdichte $\mathfrak{G}=\kappa\mathfrak{E}$	A/cm <sup>2</sup>	Verschiebungsdichte $\mathfrak{D}=\epsilon\mathfrak{E}$	As/cm <sup>2</sup>	magn. Induktion $\mathfrak{B}=\mu\mathfrak{H}$	Vs/cm <sup>2</sup>
Stromstärke $I=\int\mathfrak{G}d\mathfrak{S}$	A	Verschiebungsfluß $Q=\int\mathfrak{D}d\mathfrak{S}$	As	Induktionsfluß $\Psi=\int\mathfrak{B}d\mathfrak{S}$	Vs
$\text{div}\mathfrak{G}=0$		$\text{div}\mathfrak{D}=0$		$\text{div}\mathfrak{B}=0$	
		innerhalb geladener Räume $\text{div}\mathfrak{D}=\rho$	As/cm <sup>3</sup>		
in isotropen Stoffen $\text{div}\mathfrak{E}=0$		in isotropen Stoffen $\text{div}\mathfrak{E}=0$		in isotropen, nicht ferromagnetischen Stoffen $\text{div}\mathfrak{H}=0$	
				in ferromagnetischen Stoffen $\text{div}\mathfrak{H}\neq 0$	
an Grenzflächen ver- schiedener Leitfähigkeit $\mathfrak{G}_{n1}=\mathfrak{G}_{n2}$ $\mathfrak{E}_{t1}=\mathfrak{E}_{t2}$		an Grenzflächen ver- schiedener Elektrisierungszahl $\mathfrak{D}_{n1}=\mathfrak{D}_{n2}$ $\mathfrak{E}_{t1}=\mathfrak{E}_{t2}$		an Grenzflächen ver- schiedener Permeabilität $\mathfrak{B}_{n1}=\mathfrak{B}_{n2}$ $\mathfrak{H}_{t1}=\mathfrak{H}_{t2}$	
Leitwert $\frac{1}{R}=\frac{I}{U}$	$\frac{1}{\Omega}=\text{S}$	Kapazität $C=\frac{Q}{U}$	$\frac{\text{s}}{\Omega}=\text{F}$	Induktivität $L=\frac{\Psi}{I}$	$\Omega\text{s}=\text{H}$
Leistung je Volumeneinheit $N_1=\mathfrak{E}\mathfrak{G}$	W/cm <sup>3</sup>	elektr. Energie je Volumeneinheit $W_1=\frac{1}{2}\mathfrak{D}\mathfrak{E}$	Ws/cm <sup>3</sup>	magn. Energie je Volumeneinheit $W_1=\frac{1}{2}\mathfrak{B}\mathfrak{H}$	Ws/cm <sup>3</sup>
				in ferromagn. Stoffen $W_1=\int_0^{\mathfrak{H}}\mathfrak{B}d\mathfrak{B}$	Ws/cm <sup>3</sup>

## II. Das langsam veränderliche magnetische Feld.

### 26. Die Selbstinduktion.

Nach dem Induktionsgesetz entsteht in einem Stromkreis eine elektromotorische Kraft, wenn sich der Induktionsfluß, der mit dem Stromkreis verkettet ist, zeitlich ändert. Die Größe dieser induzierten elektromotorischen Kraft ist durch Gl. (545) gegeben. Dabei ist es gleichgültig, wie die Flußänderung in der Schleife erzeugt wird, ob durch Bewegen des Stromkreises in einem ruhenden Magnetfeld oder durch Bewegung des Magnetfeldes gegen den Stromkreis, oder durch Formänderungen des Stromkreises, oder schließlich dadurch, daß sich das magnetische Feld selbst zeitlich verändert. Da nun jeder Strom in seiner Umgebung ein magnetisches Feld hervorruft, dessen Kraftlinien mit den Stromlinien verkettet sind, so tritt die induzierte elektromotorische Kraft auch auf, wenn sich die Stromstärke in einem Leiter ändert, eine Erscheinung, die man als Selbstinduktion bezeichnet. Auf Grund der Richtungsregeln für das Feld und die elektromotorische Kraft findet man, daß bei einer Zunahme des Stromes die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion dem Strom entgegenwirkt.

Die Erfahrung zeigt, daß das Durchflutungsgesetz auch gilt, wenn sich der Strom zeitlich ändert.

Streng genommen gilt dies nur, wenn die Abmessungen der Räume, in denen das Durchflutungsgesetz angewendet wird, klein sind gegen die Wellenlänge der Feldänderungen im Raum (siehe 6. Kapitel). Da sich die Feldänderungen nahezu mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, so ist diese Bedingung bei den in der Elektrotechnik vorkommenden Abmessungen der Apparate und Maschinen bis zu sehr hohen Frequenzen erfüllt.

Wenn ausschließlich nichtmagnetische Stoffe in der Umgebung des Stromkreises vorhanden sind, oder Stoffe mit konstanter Permeabilität, dann ist nach dem Durchflutungsgesetz die Kraftliniendichte an jeder Stelle des Raumes proportional der Stromstärke im Leiter. Es ist daher auch der von dem Stromkreis insgesamt erzeugte Induktionsfluß  $\Psi$  jederzeit proportional dem Augenblickswert der Stromstärke  $i$ , so daß man schreiben kann

$$\Psi = Li. \quad (666)$$

Den Proportionalitätsfaktor  $L$ , der durch die Abmessungen und die Form des Stromkreises bestimmt ist, bezeichnet man als die Induktivität des Stromkreises. Als Einheit dient  $1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 1 \text{ H}$ . Die Induktivität ist nach dem Induktionsgesetz maßgebend für die bei Stromänderungen in dem Stromkreis entstehende elektromotorische Kraft der Selbstinduktion  $e_s$ ; es gilt

$$e_s = -L \frac{di}{dt}. \quad (667)$$

Zur Berechnung der elektromotorischen Kraft der Selbstinduktion ist also die Kenntnis der Induktivität erforderlich; diese kann auf Grund der Definitionsgl. (666) mit Hilfe der für die Berechnung magnetischer Felder abgeleiteten Regeln bestimmt werden. Bei einer Ringspule, Abb. 156, mit einem mittleren Radius  $r_0$  und der Windungszahl  $w$  ist z. B. nach Gl. (568)

$$|\mathfrak{H}| = \frac{iw}{2\pi r_0},$$

und daher

$$|\mathfrak{B}| = \mu \frac{iw}{2\pi r_0}. \quad (668)$$

Bezeichnet man den Querschnitt des Ringkerns mit  $q$ , so wird der mit der Wicklung verkettete Bündelfluß

$$\Phi = \mu q \frac{iw}{2\pi r_0}. \quad (669)$$

Der Gesamtfluß hat daher die Größe

$$\Psi = w^2 \frac{\mu q}{2\pi r_0} i.$$

Daraus folgt auf Grund der Gl. (666) für die Induktivität der Ringspule

$$L = w^2 \frac{\mu q}{2\pi r_0}. \quad (670)$$

Genau genommen muß die Abhängigkeit der Feldstärke  $\mathfrak{H}$  von dem Radius  $r$  berücksichtigt werden. Bei rechteckigem Kernquerschnitt mit der Breite  $b$  gilt

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} b |\mathfrak{H}| dr = b \mu \frac{i w}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r};$$

hieraus folgt

$$L = w^2 \frac{\mu b}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (671)$$

Die Induktivität einer Doppelleitung von der Länge  $l$  mit dem Drahtabstand  $a$  und dem Leiterradius  $r_0$  ergibt sich aus Gl. (610):

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} l \ln \frac{a}{r_0}, \quad (672)$$

wobei vorausgesetzt ist, daß  $r_0$  klein ist gegen  $a$ . Diese Beziehung berücksichtigt nur das magnetische Feld im Luftraum, während das Feld innerhalb der Leitungsdrähte vernachlässigt ist. Man bezeichnet die so berechnete Induktivität daher als die äußere Induktivität. Dazu kommt noch die innere Induktivität, die von dem inneren Feld herrührt, und deren Berechnung weiter unten besprochen wird.

Die äußere Induktivität eines Drahtkreises vom Durchmesser  $d$  und dem Drahtradius  $r_0$  ist nach Gl. (654)

$$L = \mu_0 \frac{d}{2} \ln \frac{d}{2r_0}. \quad (673)$$

Die Induktivität von Stromkreisen beliebiger Form, die aus verhältnismäßig dünnen Drähten gebildet sind, läßt sich mit Gl. (651) berechnen. Diese Gleichung gilt unter der Voraussetzung, daß man die Stromleiter durch einen Stromfaden ersetzen kann. Dann ist die Induktivität eines derartigen Stromkreises, der in einen Stoff mit der Permeabilität  $\mu$  eingebettet ist,

$$L = \frac{\mu}{4\pi} \oint ds_1 \oint \frac{ds \cos \alpha}{r_1}. \quad (674)$$

$ds$  bedeutet ein Längenelement der Leiterachse,  $ds_1$  ein Längenelement einer Mantellinie,  $r_1$  den Abstand zwischen den beiden Längenelementen  $ds$  und  $ds_1$ ,  $\alpha$  den Winkel, den die beiden Längenelemente miteinander bilden. Auch diese Formel liefert nur die äußere Induktivität des Stromkreises.

Wenn der magnetische Kreis Eisen enthält, so ist die Induktivität von der Stromstärke abhängig. Nur bei sehr kleinen Stromänderungen, bei denen praktisch die reversible Permeabilität in Betracht kommt, kann mit einer konstanten Induktivität gerechnet werden. Im allgemeinen Fall kann die Induktivität für jede Stromstärke aus der magnetischen Charakteristik des Kreises entnommen werden:

$$L = \frac{w \Phi}{i}. \quad (675)$$

Bei der Anwendung des Induktionsgesetzes ist dann aber zu beachten, daß  $L$  eine Funktion von  $i$  ist, so daß hier gilt

$$e = - \frac{d(Li)}{dt} = - L \frac{di}{dt} - i \frac{dL}{di} \frac{di}{dt} = - \left( L + i \frac{dL}{di} \right) \frac{di}{dt}. \quad (676)$$

Die Abhängigkeit der Induktivität von der Stromstärke läßt sich bei Eisenkreisen vermindern, wenn in dem Eisenkern ein Luftspalt angebracht wird, der den Hauptteil des magnetischen Widerstandes enthält. Aus Gl. (595) und (596) geht hervor, daß die Induktivität einer Wicklung mit  $w$  Windungen

$$L = \frac{w^2}{R_m} \quad (677)$$

wird, wenn  $R_m$  der magnetische Widerstand des von der Wicklung umschlungenen magnetischen Kreises ist.

Die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion sucht nach dem oben Gesagten den Stromänderungen entgegenzuwirken. Wird an eine Spule eine Gleichspannung gelegt, so bildet sich daher mit dem Anwachsen des Stromes eine der treibenden Spannung entgegenwirkende elektromotorische Kraft. Der Strom kann nur so rasch ansteigen wie es die zur Verfügung stehende Spannung zuläßt. In dem Stromkreis Abb. 182 gilt nach dem Einlegen des Schalters

$$E_0 + e = iR,$$

oder

$$E_0 = iR + L \frac{di}{dt};$$

(678)

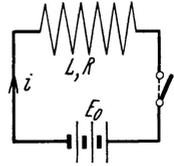


Abb. 182. Einschalten einer Drosselspule.

hieraus folgt

$$dt = \frac{L di}{E_0 - iR},$$

und man findet durch Integration

$$i = \frac{E_0}{R} + k e^{-\frac{R}{L}t}. \tag{679}$$

War die Spule vor dem Einschalten stromlos, so muß  $i = 0$  für  $t = 0$  sein, also  $k = -\frac{E_0}{R}$ .

Führt man noch die Zeitkonstante  $\tau = \frac{L}{R}$  ein, so wird

$$i = \frac{E_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \tag{681}$$

Ähnlich wie die Spannung bei der Aufladung eines Kondensators nähert sich der Strom in der Spule allmählich seinem durch das Ohmsche Gesetz bestimmten Endwert, Abb. 183. Die Zeit, die verstreicht, bis der stationäre Gleichstrom erreicht ist, beträgt etwa  $4 \dots 8 \tau$ . Als Ursache für die Verzögerung des Stromanstieges kann wie im elektrischen Feld die Aufspeicherung von Feldenergie angesehen werden. Multipliziert man auf beiden Seiten der Gl. (678) mit  $i dt$ , so wird

$$E_0 i dt = i^2 R dt + L i di. \tag{682}$$

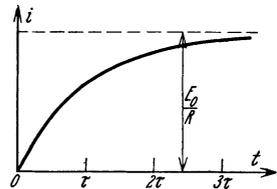


Abb. 183. Stromanstieg in der Drosselspule.

Links steht die in irgendeinem Zeitpunkt während des Zeitabschnittes  $dt$  von der Stromquelle gelieferte Arbeit. Das erste Glied rechts gibt die während dieses Zeitabschnittes entwickelte Wärmemenge an. Der Rest der gelieferten Arbeit wird in der Spule aufgespeichert, und zwar kann man, ähnlich wie beim elektrischen Feld, das ganze magnetische Feld selbst als Sitz der aufgespeicherten Energie ansehen. Die während des Zeitabschnittes  $dt$  aufgenommene Energie ist also

$$dW = L i di. \tag{683}$$

Die bis zu irgendeinem Zeitpunkt vom Feld aufgenommene Energie, die man als die magnetische Energie des Feldes bezeichnet, ergibt sich durch Integration:

$$W = \frac{1}{2} L i^2. \tag{684}$$

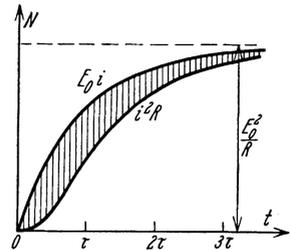


Abb. 184. Energieaufnahme der Spule.

In Abb. 184 ist der zeitliche Verlauf der von der Stromquelle gelieferten Leistung  $E_0 i$  aufgetragen, sowie die in Wärme umgewandelte Leistung  $i^2 R$ . Die schraffierte Fläche zwischen den beiden Kurven gibt die aufgespeicherte Energie an. Diese kann beim Abbau des Feldes wiedergewonnen werden. Verbindet man die beiden Enden der Spule miteinander, so gilt

$$0 = iR + L \frac{di}{dt}; \tag{685}$$

daraus folgt 
$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (686)$$

wenn mit  $I_0$  der Strom im Moment des Kurzschlusses bezeichnet wird. Während der Strom gemäß dieser Funktion allmählich auf Null abfällt, wird die im Feld aufgespeicherte Energie an den Stromkreis abgegeben und in Wärme umgewandelt. Bei einer plötzlichen Unterbrechung eines Stromkreises, der eine Spule mit hoher Induktivität enthält, muß sich die in der Spule aufgespeicherte Energie in sehr kurzer Zeit umsetzen; es ergibt sich daher eine sehr hohe Selbstinduktionsspannung, die einen Funken oder Lichtbogen an der Unterbrechungsstelle zur Folge hat, wobei die magnetische Energie in Wärme umgewandelt wird. Um derartig hohe Spannungen, die für die Isolation der Wicklung gefährlich werden könnten, zu vermeiden, verbindet man bei großen Spulen vor dem Abschalten der Stromquelle die beiden Wicklungsenden durch einen Widerstand  $R_1$ . Die Spannung an der Spule wird dann nach dem Abschalten der Stromquelle

$$u = iR_1 = I_0 R_1 e^{-\frac{t}{\tau}};$$

sie springt also beim Abschalten auf den Wert

$$U_0 = I_0 R_1 = E_0 \frac{R_1}{R},$$

wobei 
$$\tau = \frac{L}{R + R_1}.$$

**Zahlenbeispiel:** Es sei  $L=0,2H$ ,  $R=10\text{ Ohm}$ ,  $E_0=100\text{ V}$ . Dann wird die Zeitkonstante

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0,2H}{10\Omega} = 0,02\text{ s}.$$

Der Aufbau des magnetischen Feldes ist in etwa 0,08 bis 0,16 Sekunden beendet. Dann ist die Stromstärke

$$I_0 = \frac{100\text{ V}}{10\Omega} = 10\text{ A},$$

die in der Spule aufgespeicherte Energie

$$W = \frac{1}{2} L I_0^2 = \frac{1}{2} 0,2 \cdot 100 \text{ HA}^2 = 10 \text{ Ws}.$$

Die im magnetischen Feld aufgespeicherte Energie läßt sich wie die elektrische Energie durch die Feldgrößen ausdrücken. Wir betrachten eine Ringspule mit einem Kern aus beliebigem Material. Der Querschnitt des Ringkernes  $q$  soll jedoch so klein sein, daß das magnetische Feld im Inneren des Kernes als homogen angesehen werden kann. Dann läßt sich der Bündelfluß in dem Kern in der Form schreiben

$$\Phi = q |\mathfrak{B}|,$$

und es wird die in der Wicklung mit  $w$  Windungen induzierte EMK der Selbstinduktion bei irgendwelchen Stromänderungen

$$e_s = -wq \frac{d|\mathfrak{B}|}{dt}. \quad (687)$$

Ist in dem Stromkreis der Spule eine äußere EMK  $E_0$  tätig, so gilt daher

$$E_0 = iR + wq \frac{d|\mathfrak{B}|}{dt}. \quad (688)$$

Mit der gleichen Überlegung wie oben ergibt sich hieraus für die während eines Zeitelements  $dt$  aufgespeicherte magnetische Energie

$$dW = iwq |d\mathfrak{B}|. \quad (689)$$

Andererseits ist nach dem Durchflutungsgesetz

$$iw = l |\mathfrak{H}|,$$

wenn  $l$  die Kraftlinienlänge bezeichnet. Daher gilt

$$dW = ql |\mathfrak{H}| |d\mathfrak{B}| = ql \mathfrak{H} d\mathfrak{B}. \quad (690)$$

Wird hier das Volumen des Kernes  $ql = \mathcal{V}$  eingeführt, so ergibt sich

$$dW = \mathcal{V} \mathfrak{H} d\mathfrak{B}. \quad (691)$$

Die bei irgendeiner magnetischen Feldstärke insgesamt aufgespeicherte Energie ist daher

$$W = V \int_0^{\mathfrak{H}} \mathfrak{H} d\mathfrak{B}.$$

Da nun das Feld im Inneren des Kerns nach Voraussetzung homogen ist, so wird die in der Volumeneinheit aufgespeicherte magnetische Energie

$$W_1 = \int_0^{\mathfrak{H}} \mathfrak{H} d\mathfrak{B}. \quad (692)$$

Diese Beziehung gilt nun auch für ein Feld von ganz beliebiger Form, da jedes Feld in genügend kleinen Ausschnitten als homogen angesehen werden kann. Die in einem beliebigen Feld aufgespeicherte magnetische Energie wird daher durch Integration der Beiträge der einzelnen Volumenelemente erhalten:

$$W = \int W_1 dV. \quad (693)$$

Bei der Ableitung der Gl. (693) wurden keine Voraussetzungen über den Zusammenhang zwischen  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{H}$  gemacht. Diese Gleichung gilt daher auch für ferromagnetische Stoffe. Bei Stoffen mit konstanter Permeabilität kann dagegen gesetzt werden

$$d\mathfrak{B} = \mu d\mathfrak{H}.$$

Dann läßt sich die Integration ausführen, und es ergibt sich

$$W_1 = \frac{1}{2} \mathfrak{B} \mathfrak{H} = \frac{1}{2} \mu \mathfrak{H}^2. \quad (694)$$

Die im ganzen Feld aufgespeicherte Energie wird

$$W = \frac{1}{2} \int \mathfrak{B} \mathfrak{H} dV. \quad (695)$$

Man kann also die magnetische Energie berechnen, wenn die magnetische Feldstärke gegeben ist. Dieser Zusammenhang kann zur Bestimmung der Induktivität von räumlich ausgedehnten elektrischen Strömen dienen; es ist nach Gl. (684)

$$L = \frac{2W}{i^2}. \quad (696)$$

Als Anwendungsbeispiel werde die Berechnung der inneren Induktivität von Drähten mit Kreisquerschnitt betrachtet. Die magnetische Feldstärke im Leiterinneren ist nach Gl. (615)

$$|\mathfrak{H}| = \frac{r}{2\pi r_0^2} i.$$

Bei Voraussetzung konstanter Permeabilität enthält daher ein Hohlzylinder vom Radius  $r$ , der Dicke  $dr$  und der Länge  $l$  innerhalb des Leiters die Energie

$$dW = \frac{1}{2} \mu \mathfrak{H}^2 2\pi r l dr,$$

oder

$$dW = i^2 \frac{\mu l}{4\pi r_0^4} r^3 dr.$$

Die in dem Draht aufgespeicherte Energie ist

$$W = i^2 \frac{\mu l}{4\pi r_0^4} \int_0^{r_0} r^3 dr = i^2 \frac{\mu l}{16\pi}, \quad (697)$$

und es ergibt sich für die innere Induktivität gemäß Gl. (696)

$$L_i = \frac{\mu l}{8\pi}. \quad (698)$$

Bei einer Doppelleitung von der Länge  $l$  hat man diesen Wert zu verdoppeln, entsprechend der in Hin- und Rückleitung aufgespeicherten Energie. Bei der Ableitung der Gl. (698) wurde die Voraussetzung gemacht, daß der Strom den Drahtquerschnitt gleichmäßig ausfüllt. Das gilt in langgestreckten Leitern bei Gleichstrom und niederfrequentem Wechselstrom. Bei höheren Frequenzen wird der Strom nach der Drahtoberfläche hin abgedrängt, so daß die innere Induktivität kleiner wird (siehe Abschnitt 30).

Die innere Induktivität  $L_i$  ist unabhängig von der Drahtstärke. Auf die Längeneinheit bezogen hat sie für alle nichtmagnetischen Leiter ( $\mu = \mu_0$ ) den Wert

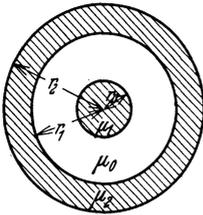


Abb. 185. Konzentrisches Kabel.

$$\frac{L_i}{l} = \frac{\mu_0}{8\pi} = 0,05 \frac{\text{mH}}{\text{km}}. \tag{699}$$

Ein anderes Beispiel bildet die Berechnung der Induktivität eines Einleiterkabels mit konzentrischen Leitungen, Abb. 185. Das magnetische Feld kann hier in drei Teile zerlegt werden:

a) **Innenleiter.** Für die Induktivität des Innenleiters gilt wie oben

$$L_1 = \frac{\mu_1 l}{8\pi}. \tag{700}$$

b) **Isolierstoff.** Die magnetische Feldstärke ist wegen der Symmetrie des Feldes

$$|\mathfrak{H}| = \frac{i}{2\pi r}.$$

Der zwischen Innen- und Außenleiter enthaltene Fluß wird daher

$$\Phi = \mu_0 l \int_{r_0}^{r_1} |\mathfrak{H}| dr = i \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_0},$$

entsprechend einer Induktivität

$$L_2 = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_0}. \tag{701}$$

c) **Außenleiter.** Für die Feldstärke im Außenleiter folgt mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes

$$2\pi r |\mathfrak{H}| = i - i \frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = i \frac{r_2^2 - r^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

In einem Volumenelement, das durch zwei konzentrische Zylinder mit den Radien  $r$  und  $r + dr$  begrenzt ist und die Länge  $l$  hat, ist eine Energie aufgespeichert vom Betrag

$$dW = i^2 \frac{\mu_2 l}{4\pi(r_2^2 - r_1^2)^2} (r_2^2 - r^2)^2 \frac{dr}{r}.$$

Daraus folgt die gesamte Energie in dem Außenleiter

$$W = i^2 \frac{\mu_2 l}{4\pi(r_2^2 - r_1^2)} \left( \frac{r_2^4}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} - \frac{3r_2^2 - r_1^2}{4} \right).$$

Die entsprechende Induktivität wird daher

$$L_3 = \frac{\mu_2 l}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)} \left( \frac{r_2^4}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} - \frac{3r_2^2 - r_1^2}{4} \right). \tag{702}$$

Die Gesamtinduktivität ergibt sich durch Addieren der drei Teile.

Ein in der Schwachstromtechnik verwendetes Verfahren zur künstlichen Erhöhung der Induktivität von Drähten besteht darin, daß die Drähte mit einer Schicht von Eisendraht oder -band bewickelt werden (Krarup, 1902, siehe Abschnitt 36).

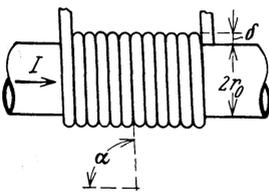


Abb. 186. Krarupleitung.

Durch diese Eisenbewicklung wird der mit dem Leiter verkettete Fluß vergrößert. Da die Induktionslinien im Eisen geführt werden, so umgeben sie den Leiter in Form von Schraubenlinien. Die nähere Untersuchung zeigt, daß die Steigung der Induktionslinien nahezu gleich der des Bewicklungsdrahtes ist. Die Induktionslinien schließen sich zwischen den Enden des Leiters entweder durch den Luftraum oder durch andere Eisenleiter, die sich in der Nähe befinden.

Bildet man hier das Linienintegral der magnetischen Feldstärke längs einer mittleren Kraftlinie, so ergibt sich

$$|\mathfrak{H}| \frac{2r_0 + \delta}{\cos \alpha} \pi = i. \tag{703}$$

wenn unter  $\delta$  die Höhe der Eisenschicht verstanden wird, Abb. 186. Der von den Eisendrähten gelieferte Beitrag zu dem mit dem Leiter verketteten Induktionsfluß

ist gleich dem gesamten, in den Bewicklungsdrähten vorhandenen Fluß. Bezeichnet man daher den Querschnitt des Bewicklungsdrahtes oder -bandes mit  $q$  und sind  $w$  Windungen je Längeneinheit des Leiters aufgebracht, so ist dieser Fluß in einem Abschnitt von der Länge  $l$

$$\Psi = w l q \mu |\xi|.$$

Daher ergibt sich für den Beitrag des Eisens zur Induktivität des Leiters:

$$L_e = \frac{\mu}{\pi} \frac{w l q}{2 r_0 + \delta} \cos \alpha. \tag{704}$$

### 27. Gegeninduktion, Transformator.

Befindet sich in der Nachbarschaft eines Stromkreises 1 ein zweiter 2, so werden bei Änderungen des durch den Kreis 1 erzeugten magnetischen Feldes nach dem Induktionsgesetz im Kreis 2 elektromotorische Kräfte induziert. Umgekehrt entsteht eine elektromotorische Kraft im Kreis 1 bei Stromänderungen in 2. Man nennt diese Erscheinung die Gegeninduktion und kennzeichnet die gegenseitige magnetische Einwirkung zweier Stromkreise, die auch als magnetische Kopplung bezeichnet wird, durch die Gegeninduktivität. Im allgemeinen Fall wird nur ein Teil des in Kreis 1 durch den Strom  $i_1$  erzeugten Flusses mit dem Kreis 2 verkettet sein. Man definiert nun die Gegeninduktivität  $M_{12}$  zwischen Kreis 1 und 2 durch die Beziehung

$$\Psi_{12} = M_{12} i_1, \tag{705}$$

in der  $\Psi_{12}$  den Fluß bedeutet, der mit dem Kreis 2 dann verkettet ist, wenn der Strom in Kreis 2 Null ist, wenn also dieser Kreis z. B. geöffnet ist. Dieser Fluß ist nach dem Induktionsgesetz maßgebend für die in Kreis 2 induzierte elektromotorische Kraft; sie hat die Größe

$$e_2 = -M_{12} \frac{di_1}{dt}; \tag{706}$$

ihre positive Richtung umkreist den gemeinsamen Induktionsfluß im gleichen Sinne wie die positive Richtung von  $i_1$ . Die Einheit der Gegeninduktivität ist wie die der Induktivität 1 H.

Die gleiche Definition der Gegeninduktivität gilt auch bei Spulen mit beliebig ausgedehntem Wicklungsquerschnitt. Der Fluß  $\Psi_{12}$  setzt sich dann zusammen aus den Teilflüssen, die mit den einzelnen Windungen der Spule verkettet sind. Den mit einer Spule verketteten Gesamtfluß kann man immer berechnen als Summe der Teilflüsse in den einzelnen Windungen, indem man sich die Windungen in der durch Abb. 187 veranschaulichten Weise zu geschlossenen Kreisen ergänzt denkt; die in den Ergänzungsstücken induzierten elektromotorischen Kräfte heben sich gegenseitig auf. In Abb. 187 setzt sich der Gesamtfluß  $\Psi_{12}$  aus den Beträgen zusammen, die die Flächen  $a, b, c, d, f$  liefern. Häufig kann man auch hier den Gesamtfluß als Produkt der Windungszahl mit einem Bündelfluß berechnen.

Es ist zu beachten, daß die Gegeninduktivität aus dem Kraftlinienbild definiert ist, das entsteht, wenn der Kreis 2 stromlos ist. In Abb. 188 ist dies für zwei parallele Kreisringe veranschaulicht. Der gemeinsame Fluß  $\Psi_{12}$  wird durch das zwischen den beiden stark ausgezogenen Kraftlinien liegende Bündel dargestellt. Die anderen Kraftlinien bilden den Streufluß. Fließt auch im Kreis 2 Strom, dann kann sich das Kraftlinienbild wesentlich ändern.

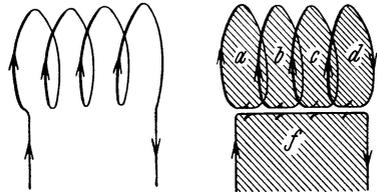


Abb. 187. Zur Bestimmung des mit einer Spule verketteten Induktionsflusses.

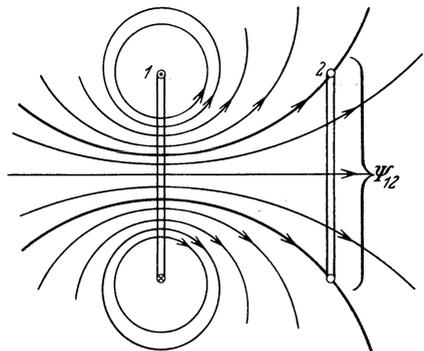


Abb. 188. Gegeninduktion zwischen zwei parallelen Drahringen.

Ganz entsprechend läßt sich die Einwirkung von Kreis 2 auf Kreis 1 durch die Gleichung

$$e_1 = -M_{21} \frac{di_2}{dt} \quad (707)$$

ausdrücken. Die folgende Überlegung zeigt, daß die Werte  $M_{21}$  und  $M_{12}$  einander gleich sind, daß also zwei beliebige Kreise 1 und 2 nur eine einzige Gegeninduktivität haben. Nach Gl. (644) ist der Fluß, der von einem Leiter 1 erzeugt wird und mit einer Linie 2 verkettet ist,

$$\Psi_{12} = \mu \oint_2 \mathfrak{A} d\tilde{s}_2, \quad (708)$$

wobei das Integral über diese Linie 2 zu bilden ist. Das Vektorpotential  $\mathfrak{A}$  ist durch den Strom im Kreis 1 bestimmt, und es gilt, wenn der Kreis 1 durch einen Stromfaden ersetzt wird, nach Gl. (636)

$$\mathfrak{A} = \frac{i_1}{4\pi} \oint_1 \frac{d\tilde{s}_1}{r_{12}} \quad (709)$$

für jeden Punkt der Linie 2, wobei  $d\tilde{s}_1$  das Linienelement des Kreises 1,  $r_{12}$  den Abstand zwischen  $d\tilde{s}_1$  und  $d\tilde{s}_2$  bedeutet. Daher gilt

$$M_{12} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_1 \oint_2 \frac{d\tilde{s}_1 d\tilde{s}_2}{r_{12}}, \quad (710)$$

ein Ausdruck, der unabhängig davon ist, welcher Kreis mit 1 und welcher mit 2 bezeichnet wird. Daraus folgt  $M_{12} = M_{21} = M$ .

Fließen in beiden Kreisen Ströme, so entsteht ein magnetisches Feld, das durch beide Ströme bestimmt ist. Die Energie dieses Feldes läßt sich genau so wie im Falle eines einzigen Stromkreises durch die Werte von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{H}$  an den einzelnen Stellen des Feldes berechnen, Gl. (695). Sie läßt sich andererseits ausdrücken durch die Induktivität und die Gegeninduktivität, wie die folgende Betrachtung zeigt.

Die in Kreis 2 induzierte elektromotorische Kraft setzt sich im allgemeinen Fall zusammen mit den übrigen im Kreis 2 vorhandenen elektromotorischen Kräften; durch diese Summe ist der Strom  $i_2$  im Kreis 2 bestimmt. Die induzierte elektromotorische Kraft  $-M \frac{di_1}{dt}$  liefert dabei während des Zeitelementes  $dt$  in den Kreis 2 eine elektrische Arbeit vom Betrage

$$-i_2 M di_1.$$

Der Zuwachs der Feldenergie ist daher

$$i_2 M di_1.$$

Bei irgendwelchen Änderungen des Stromes  $i_2$  entsteht ferner eine elektromotorische Kraft der Selbstinduktion, die zu ihrer Überwindung während des Zeitelementes  $dt$  die Arbeit

$$i_2 L_2 di_2$$

erfordert, wobei  $L_2$  die Induktivität des Kreises 2 bedeutet. Ganz entsprechend hat der Strom  $i_1$  im Kreise 1 eine Arbeit

$$i_1 L_1 di_1$$

zur Überwindung der elektromotorischen Kraft der Selbstinduktion und eine Arbeit

$$i_1 M di_2$$

zur Überwindung der aus dem Kreis 2 induzierten elektromotorischen Kraft zu leisten. Die im ganzen Feld aufgespeicherte magnetische Energie nimmt also während des Zeitabschnittes  $dt$  um den Betrag

$$dW = L_1 i_1 di_1 + M (i_1 di_2 + i_2 di_1) + L_2 i_2 di_2$$

zu. Läßt man den Strom  $i_1$  von Null auf den Wert  $I_1$  wachsen, ferner den Strom im Kreis 2 von Null auf  $I_2$ , so ergibt sich die Gesamtenergie des magnetischen Feldes durch Integration zu

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2. \quad (712)$$

Die Gegeninduktivität kann entweder durch Vergleich dieses Ausdruckes mit dem der Gl. (695) oder mit Hilfe von Gl. (710) oder schließlich mit Hilfe der Definitionsgleichung (705) berechnet werden. Bei dem praktisch besonders wichtigen Fall paralleler gerader Leitungen ist die letzte Methode die einfachste.

In Abb. 189 sollen 1 und 2 die Spuren der beiden Drähte einer Doppelleitung, 3 und 4 die Spuren einer dazu parallelen Doppelleitung bezeichnen; es soll die Gegeninduktivität zwischen den beiden Leitungen berechnet werden. Wir denken uns die Leitung 3, 4 stromlos und schicken durch die Leitung 1, 2 den Strom  $I_1$ . Das durch diesen Strom hervorgerufene Magnetfeld setzt sich zusammen aus den beiden Teilfeldern, die von den Drähten 1 und 2 herrühren. Bei der in der Abbildung angedeuteten Stromrichtung würde der Strom im Leiter 1 für sich allein einen Fluß mit kreisförmigen Kraftlinien hervorrufen, von dem der Teil

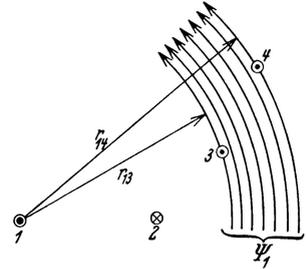


Abb. 189. Gegeninduktion zwischen zwei Doppelleitungen.

$$\Psi_1 = \int_{r_{13}}^{r_{14}} \frac{\mu_0 l}{2\pi} \frac{I_1}{r} dr = \frac{\mu_0 l}{2\pi} I_1 \ln \frac{r_{14}}{r_{13}} \quad (713)$$

mit der Leitung 3, 4 in der angegebenen Richtung verkettet ist. Von Leiter 2 herrührend, würde der Fluß

$$\Psi_2 = - \int_{r_{23}}^{r_{24}} \frac{\mu_0 l}{2\pi} \frac{I_1}{r} dr = - \frac{\mu_0 l}{2\pi} I_1 \ln \frac{r_{23}}{r_{24}} \quad (714)$$

mit der Leitung 3, 4 verkettet sein. Der Gesamtfluß ist daher

$$\Psi_1 + \Psi_2 = \frac{\mu_0 l}{2\pi} I_1 \ln \frac{r_{14} r_{23}}{r_{13} r_{24}}.$$

Die Gegeninduktivität wird

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r_{14} r_{23}}{r_{13} r_{24}}; \quad (715)$$

unter  $r_{13}$ ,  $r_{23}$  usw. sind die Abstände der Leiterachsen zu verstehen.

Das Feld im Innern der Leiter trägt praktisch nichts zur Gegeninduktivität bei, da sich die Beiträge in den beiden Hälften eines jeden Leiters aufheben. Anders ist es dagegen, wenn zwei der vier Leiter, z. B. 1 und 3, zusammenfallen, dann ist das innere Feld dieses Leiters beiden Stromkreisen gemeinsam. Für  $r_{13}$  ist in diesem Falle der Drahtradius  $r_1$  des gemeinsamen Leiters zu setzen, und es ist zu dem so berechneten Wert der Gegeninduktivität, der nur die äußeren Felder berücksichtigt, noch ein Wert zu addieren, der von dem Innenfeld herrührt. Um diesen Wert aufzufinden, berechnen wir die in dem Leiter 1 aufgespeicherte magnetische Energie. Die Stromstärke ist hier allgemein  $I_1 + I_2$ , also wird die magnetische Feldstärke im Innern dieses Leiters nach Gl. (615)

$$|\mathfrak{H}| = \frac{r}{2\pi r_0^2} (I_1 + I_2),$$

und es folgt aus Gl. (695)

$$W = \frac{\mu l}{16\pi} (I_1^2 + 2I_1 I_2 + I_2^2).$$

Der Vergleich mit Gl. (712) ergibt für den Beitrag des inneren Feldes zur Gegeninduktivität

$$M_i = \frac{\mu l}{8\pi}.$$

Damit folgt für die Gegeninduktivität zwischen den beiden Schleifen

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{r_{14} r_{23}}{r_1 r_{24}} + \frac{\mu_r}{4} \right). \quad (716)$$

Auf der magnetischen Kopplung zweier Stromkreise beruht die Wirkungsweise des Transformators. Man sorgt hier durch einen eisengeschlossenen magnetischen

Kreis dafür, daß möglichst der ganze in der einen Wicklung erzeugte Fluß auch durch die andere Wicklung hindurchgeht, daß also die Streuung gering ist. Wir legen die Pfeilrichtungen der Ströme in den beiden Wicklungen eines Transformators grundsätzlich so fest, daß sie den Pfad der magnetischen Kraftlinien gleichsinnig umkreisen.

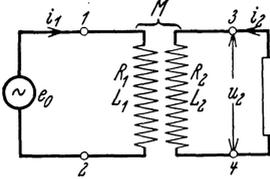


Abb. 190. Schema eines Transformators.

Auf der Primärseite, Abb. 190, wirken die elektromotorische Kraft  $e_0$  der Stromquelle, ferner die elektromotorischen Kräfte der Selbstinduktion und der Gegeninduktion. Es stellt sich ein solcher Strom ein, daß der Spannungsverbrauch  $i_1 R_1$  im Primärkreis gerade durch die Summe der drei elektromotorischen Kräfte gedeckt wird:

$$e_0 = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}. \quad (717)$$

Auf der Sekundärseite haben die elektromotorischen Kräfte der Selbstinduktion und der Gegeninduktion den Spannungsverbrauch in der Wicklung und die Spannung  $u_2$  an dem sekundärseitig angeschlossenen Verbraucher zu decken:

$$-L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = i_2 R_2 + u_2,$$

oder

$$u_2 = -i_2 R_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}. \quad (718)$$

Wäre keine Streuung vorhanden, so wäre der magnetische Widerstand  $R_m$  für den Kreis 1 der gleiche wie für den Kreis 2, es würde nach Gl. (677) gelten

$$L_1 = \frac{w_1^2}{R_m}; \quad L_2 = \frac{w_2^2}{R_m}. \quad (719)$$

Bei offener Sekundärwicklung würde dann der ganze in der Primärwicklung erzeugte Fluß

$$\Phi_1 = \frac{i_1 w_1}{R_m}$$

auch mit der Sekundärwicklung verkettet sein, es wäre

$$M = \frac{w_1 w_2}{R_m}. \quad (720)$$

Zwischen der Gegeninduktivität und den beiden Induktivitäten würde also die Beziehung gelten

$$M = \sqrt{L_1 L_2}. \quad (721)$$

In Wirklichkeit ist wegen der Streuung die Gegeninduktivität immer kleiner als dieser Wert. Man kann dies durch den sogenannten Streufaktor ausdrücken, indem man setzt

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}. \quad (722)$$

Der Streufaktor ist Null, wenn die Streuung Null ist und hat den Wert 1, wenn nur Streukraftlinien vorhanden sind.

Eine andere Darstellung der Streuung ergibt sich auf folgende Weise: Der bei offener Sekundärwicklung durch den Primärstrom erzeugte mit dem Primärkreis verkettete Induktionsfluß sei  $\Psi_1$ . Mit der Wicklung 2 ist dabei ein bestimmter Fluß  $\Psi_{12}$  verkettet. Man denkt sich nun die beiden Flüsse  $\Psi_1$  und  $\Psi_{12}$  durch Bündelflüsse  $\Phi_1$  und  $\Phi_{12}$  von solcher Größe ersetzt, daß sie in den beiden Wicklungen die gleichen Gesamtflüsse ergeben würden:

$$\Phi_1 = \frac{\Psi_1}{w_1}, \quad \Phi_{12} = \frac{\Psi_{12}}{w_2}. \quad (723)$$

Wenn keine Kraftlinien in Luft verlaufen würden, dann würden diese beiden Bündelflüsse einander gleich sein und identisch mit dem in Wirklichkeit in dem Eisenkern des Transformators vorhandenen Induktionsfluß. Infolge der in der Luft verlaufenden Streukraftlinien sind die beiden Bündelflüsse verschieden von dem Induktionsfluß im Eisenkern; sie sind als reine Rechengrößen zu betrachten. Ihre Differenz

bezeichnet man als den primären Streufluß:

$$\Phi_{\sigma 1} = \Phi_1 - \Phi_{12}. \quad (724)$$

Dieser Bündelfluß ist bei räumlich ausgedehnten Wicklungen ebenfalls kein wirklich vorhandener Fluß, sondern eine Rechengröße; es kann sogar vorkommen, daß er negative Werte annimmt. Mit Hilfe der so eingeführten Flüsse definiert man nun die folgenden Induktivitätswerte: Es ist

die primäre Gesamtinduktivität

$$L_1 = \frac{w_1 \Phi_1}{i_1}, \quad (725)$$

die primäre Streuinduktivität

$$L_{\sigma 1} = \frac{w_1 \Phi_{\sigma 1}}{i_1}, \quad (726)$$

die primäre Hauptinduktivität

$$L_{h 1} = L_1 - L_{\sigma 1} = \frac{w_1 \Phi_{12}}{i_1}, \quad (727)$$

die Gegeninduktivität

$$M = \frac{w_2 \Phi_{12}}{i_1}. \quad (728)$$

Aus diesen Beziehungen geht hervor, daß

$$L_{h 1} = \frac{w_1}{w_2} M \quad (729)$$

und

$$L_{\sigma 1} = L_1 - \frac{w_1}{w_2} M. \quad (730)$$

Durch eine entsprechende Überlegung ergibt sich für die Sekundärseite die sekundäre Gesamtinduktivität

$$L_2 = \frac{w_2 \Phi_2}{i_2}, \quad (731)$$

die sekundäre Streuinduktivität

$$L_{\sigma 2} = \frac{w_2 \Phi_{\sigma 2}}{i_2}, \quad (732)$$

die sekundäre Hauptinduktivität

$$L_{h 2} = L_2 - L_{\sigma 2} = \frac{w_2 \Phi_{12}}{i_2}. \quad (733)$$

Es gilt auf Grund dieser Beziehungen ferner

$$L_{h 2} = \frac{w_2}{w_1} M; \quad L_{\sigma 2} = L_2 - \frac{w_2}{w_1} M; \quad M = \sqrt{L_{h 1} L_{h 2}}, \quad (734)$$

und es verhalten sich die Hauptinduktivitäten wie die Quadrate der Windungszahlen:

$$\frac{L_{h 1}}{L_{h 2}} = \frac{w_1^2}{w_2^2}. \quad (735)$$

Die Streuinduktivitäten sind immer nur klein gegen die Hauptinduktivitäten; daher ergibt sich aus Gl. (722) die Näherungsformel

$$\sigma = \frac{L_{\sigma 1}}{L_1} + \frac{L_{\sigma 2}}{L_2}. \quad (736)$$

Fließen in der Primär- und in der Sekundärwicklung Ströme, dann kann die Induktionswirkung im Kreis 1 auf den Gesamtfluß

$$\Psi' = L_1 i_1 + M i_2 \quad (737)$$

zurückgeführt werden; ebenso im Kreis 2

$$\Psi'' = L_2 i_2 + M i_1. \quad (738)$$

Unter Einführung der Streuinduktivitäten kann man hierfür auch schreiben

$$\Psi' = L_{\sigma 1} i_1 + \frac{M}{w_2} (w_2 i_2 + w_1 i_1); \quad (739)$$

$$\Psi'' = L_{\sigma 2} i_2 + \frac{M}{w_1} (w_2 i_2 + w_1 i_1). \quad (740)$$

Diese Gleichungen kann man so deuten, als ob mit jedem Kreis jeweils ein „Streufluß“, der nur von dem Strom in diesem Kreis herrührt, und ein „gemeinsamer Fluß“, der von der Summe der Durchflutungen herrührt, verkettet wäre. Diese rein mathematische Zerlegung darf nicht zu der Annahme verleiten, daß diese Flüsse in Wirklichkeit Kraftlinienbündeln entsprechen müssen, die nur mit einem Kreis bzw. mit beiden Kreisen verkettet sind. Das resultierende Magnetfeld der beiden Ströme kann zwar Kraftlinien enthalten, die mit je einem der beiden Kreise verkettet sind, und solche, die beide Kreise gemeinsam umschlingen; aber die durch diese Kraftlinien gebildeten Bündel sind nicht gleich den Flüssen  $\Psi'$  und  $\Psi''$ . Es kann sogar der Fall vorkommen, daß sich überhaupt keine Kraftlinien, die beiden Stromkreisen gemeinsam sind, finden, während doch die Summe der Durchflutungen beider Kreise einen endlichen Wert hat. Ein Beispiel stellt das in Abb. 191 aufgezeichnete Feld zweier paralleler Drahtkreise dar, die in entgegengesetzter Richtung von Strömen im Verhältnis 1:2 durchflossen sind<sup>1</sup>.

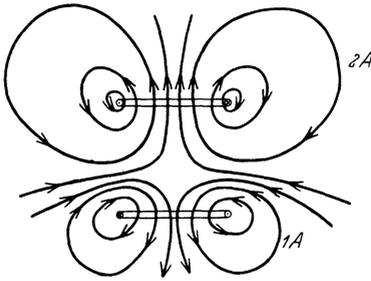


Abb. 191. Kraftlinienbild zweier paralleler Drahtkreise.

Auf Grund der Gl. (717) und (718) lassen sich Ersatzbilder für den Transformator angeben, die nur Induktivitäten und Widerstände enthalten. Von diesen Ersatzbildern sind besonders zwei sehr nützlich. Wir schreiben die beiden Transformatorgleichungen unter Einführung der komplexen Zeiger in der Form

$$U_1 = \mathfrak{I}_1(R_1 + j\omega L_1) + \mathfrak{I}_2 j\omega M, \quad (741)$$

$$U_2 = -\mathfrak{I}_2(R_2 + j\omega L_2) - \mathfrak{I}_1 j\omega M, \quad (742)$$

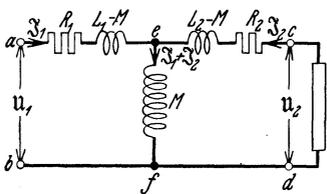


Abb. 192. Ersatzbild erster Art des Transformators.

wobei für die elektromotorische Kraft der Stromquelle die primäre Klemmenspannung  $U_1$  gesetzt ist. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß für die in Abb. 192 aufgezeichnete Anordnung die gleichen Beziehungen gelten. Hier sind drei Spulen mit den Induktivitätswerten  $L_1 - M$ ,  $L_2 - M$  und  $M$  im Stern miteinander verbunden. Die beiden erstgenannten Spulen enthalten die beiden Wicklungswiderstände  $R_1$  und  $R_2$ . Im Querzweig fließt ein Strom von der Stärke  $\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2$ . Berechnet man die Spannung zwischen  $a$  und  $b$  auf dem Wege über  $e$  und  $f$ , so ergibt sich sofort die Gl. (741). Die Gl. (742) entsteht durch Anwendung des zweiten Kirchhoffschen Satzes auf den Kreis  $d, c, e, f$ , wobei die Spannung am Verbraucher in der Richtung von  $d$  nach  $c$  positiv gerechnet wird. Man kann mit diesem Ersatzbild die Gegeninduktivität auf eine Induktivität zurückführen. Für

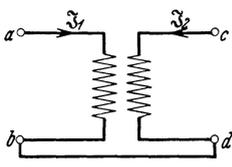


Abb. 193. Äquivalenter Transformator zum Ersatzbild 192.

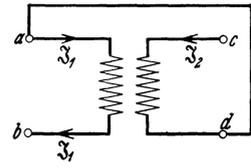


Abb. 194. Hintereinanderschaltung der beiden Wicklungen.

die Gültigkeit des Ersatzbildes ist es belanglos, daß bei von 1 verschiedenem Windungszahlverhältnis des Transformators einer der beiden Werte  $L_1 - M$  und  $L_2 - M$  negativ werden kann. Das Ersatzbild gilt ferner für ganz beliebige Potentiale der vier Klemmen  $a, b, c, d$ , wenn Primär- und Sekundärseite des Transformators so miteinander verbunden sind, wie es in Abb. 193 dargestellt ist. Bei der umgekehrten Verbindung der beiden Wicklungen, wie in Abb. 194, geht das Ersatzbild über in das der Abb. 195. Im ersten Fall, Abb. 193, ist der komplexe Widerstand zwischen den beiden Klemmen  $a$  und  $c$ , wenn die anderen Klemmen isoliert sind,

<sup>1</sup> Weber, E.: El. u. Maschinenb. 48, 943 (1930).

nach dem Ersatzbild  $\Re_{ac} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)$ ; (743)

er geht in den Wirkwiderstand der beiden hintereinander geschalteten Wicklungen über, wenn die Streuung Null ist. Die beiden Wicklungen sind „gegeneinander geschaltet“. Im anderen Fall dagegen, Abb. 194, wird der Widerstand zwischen  $b$  und  $c$  nach Abb. 195  $\Re_{bc} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)$ . (744)

Die Induktivität hat hier im Idealfall den doppelten Wert der Summe beider Wicklungsinduktivitäten; die beiden Wicklungen sind „wirksam hintereinander geschaltet“. Durch Messung der beiden eben betrachteten Widerstände kann allgemein die Gegeninduktivität bestimmt werden. Es ist

$$j\omega M = \frac{1}{2}(\Re_{bc} - \Re_{ac}). \quad (745)$$

Wenn der Transformator zur Übertragung der Energie von der einen Wicklung auf die andere dient, dann benutzt man zweckmäßig ein anderes Ersatzschema, das

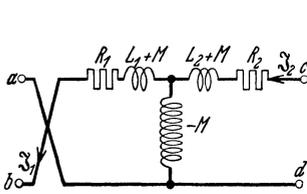


Abb. 195. Ersatzbild für den Transformator 194.

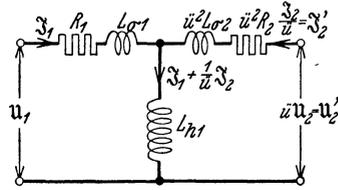


Abb. 196. Ersatzbild zweiter Art des Transformators.

von dem Begriff des Streuflusses und des gemeinsamen Flusses ausgeht. Es ist in Abb. 196 dargestellt, in der

$$i = \frac{w_1}{w_2} \quad (746)$$

die Übersetzung bedeutet. Strom und Spannung der Sekundärseite sind hier auf die Primärseite bezogen mit

$$u_2' = i u_2 = \frac{w_1}{w_2} u_2 \quad (747)$$

und

$$i_2' = \frac{i_2}{i} = \frac{w_2}{w_1} i_2. \quad (748)$$

Man überzeugt sich leicht, daß mit diesen Bezeichnungen ebenfalls die Gl. (741) und (742) erfüllt sind. Die in diesem Ersatzbild vorkommenden Größen können durch Messung bei kurzgeschlossener und offener Sekundärwicklung in einfacher Weise bestimmt werden.

## 28. Die mechanischen Kräfte im magnetischen Feld.

Analog zu den Verhältnissen im elektrischen Feld sind mit der Aufspeicherung von Energie im magnetischen Feld mechanische Kraftwirkungen verknüpft, und zwar finden wir hier dreierlei mechanische Kräfte, nämlich solche zwischen den Stromleitern, dann Kräfte an den Grenzflächen von Stoffen verschiedener Permeabilität und Kräfte zwischen Stromleitern und magnetischen Stoffen, die aber physikalisch sämtlich auf Kräfte zwischen bewegten Ladungen zurückgeführt werden können.

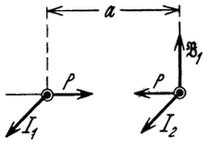
Die einfachste Methode zur Berechnung der zwischen stromdurchflossenen Drähten auftretenden Kräfte gibt das durch Gl. (522) beschriebene Gesetz, wenn man dieses Gesetz auf die Längenelemente der Leiter anwendet. Man hat danach die magnetische Induktion zu berechnen, die von dem ersten Leiter am Orte des zweiten Leiters erzeugt wird für den Fall, daß dieser stromlos ist. Bezeichnet  $\mathfrak{B}_1$  diese Induktion am Orte des Längenelementes  $d\mathfrak{s}_2$  des Leiters 2, so ist die Kraft, die vom magnetischen Feld auf dieses Längenelement ausgeübt wird, wenn dieses

einen Strom  $I_2$  führt,

$$d\mathfrak{B} = I_2 [ds_2 \mathfrak{B}_1]. \tag{749}$$

Die Gesamtkraft ergibt sich durch Integration über die ganze Länge des Leiters 2.

Als Beispiel werde die Kraft zwischen zwei sehr langen, parallelen Stromleitern mit dem Abstand  $a$  betrachtet, Abb. 197. Die vom Leiter 1 in der Umgebung des Leiters 2 erzeugte Induktion hat auf der ganzen Länge den Wert



$$|\mathfrak{B}_1| = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a};$$

sie ist senkrecht zum Leiter 2 gerichtet. Auf jedes Längenelement  $ds_2$  wird daher eine Kraft vom Betrage

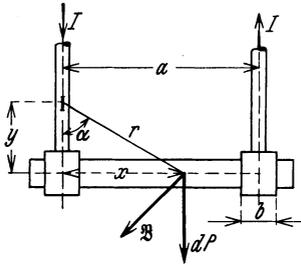
$$dP = I_2 |\mathfrak{B}_1| ds_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{ds_2}{a} I_1 I_2$$

Abb. 197. Berechnung der Kraft zwischen parallelen Drähten.

ausgeübt, die die beiden Leiter einander zu nähern sucht, wenn die Stromrichtungen die gleichen sind. Die in einem Abschnitt von der Länge  $l$  entstehende Anziehungskraft ergibt sich durch Integration:

$$P = \frac{\mu_0}{2\pi a} I_1 I_2 \int ds_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{l}{a} I_1 I_2. \tag{750}$$

Als weiteres Beispiel soll die Kraft berechnet werden, die auf die Traverse eines Schalters, Abb. 198, vom Strom ausgeübt wird. Die Stromkräfte sind hier immer so gerichtet, daß sie den Schalter zu öffnen suchen. In irgendeinem Längenelement  $dx$  der Traverse liefert der in dem Längenelement  $dy$  der Zuführung fließende Strom nach der Ampèreschen Formel den Beitrag



$$d\mathfrak{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dy}{r^2} \sin \alpha$$

zur magnetischen Induktion, oder mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

Abb. 198. Berechnung der Kräfte in einem Schalter.

$$d\mathfrak{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{x dy}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}.$$

Die von dem linken Stab herrührende Induktion hat daher die Größe

$$\frac{\mu_0}{4\pi} I x \int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{x}.$$

Der Beitrag des anderen Stabes ist entsprechend

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a-x},$$

so daß die Gesamtinduktion

$$|\mathfrak{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{a-x} \right) \tag{751}$$

wird. Sie ist senkrecht zur Zeichenebene gerichtet. Die Kraft, die auf das Längenelement  $dx$  des Messers ausgeübt wird, hat daher die Größe

$$dP = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 \left( \frac{dx}{x} + \frac{dx}{a-x} \right),$$

und es wird die Gesamtkraft

$$P = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{a-b}{2}} \left( \frac{dx}{x} + \frac{dx}{a-x} \right) = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 \ln \frac{2a-b}{b}, \tag{752}$$

wobei  $b$  die Breite der beiden Klemmstücke bezeichnet.

**Zahlenbeispiel:** Durch einen Schalter mit  $a=15$  cm,  $b=2$  cm fließe ein Kurzschlußstrom von  $I=10000$  A. Dann ergibt sich eine Kraft von

$$P = \frac{1,256 \cdot 10^{-8}}{2\pi} 10^8 \ln 14 \frac{\text{H A}^2}{\text{cm}} = 0,53 \frac{\text{Ws}}{\text{cm}} = 5,4 \text{ kGr.}$$

Die Kräfte zwischen Stromleitern und magnetischen Stoffen lassen sich in gleicher Weise berechnen, wenn man die Wirkung der magnetischen Stoffe durch stromführende Leiter ersetzen kann. Ein Beispiel bildet der in Abb. 177 dargestellte Fall eines Leiters im Innern eines Eisenkörpers. Wir konnten dort die Begrenzung des Eisens ersetzen durch das Spiegelbild  $A'$  mit dem Strom

$$I' = -\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} I.$$

Die Ströme  $I$  und  $I'$  haben entgegengesetzte Richtung, sie stoßen sich daher ab, d. h. es treten Kräfte auf, die den Leiter  $A$  von der Grenzfläche zu entfernen suchen. Diese haben nach Gl. (750) für eine Länge  $l$  des Leiters den Betrag

$$P = \frac{\mu_0 \mu_r - 1}{2\pi \mu_r + 1} \frac{l}{2h} I^2. \quad (753)$$

Es sind Kräfte zwischen dem Strom  $I$  und den Molekularströmen im Eisen. Gleich große Kräfte wirken im Eisenkörper in entgegengesetzter Richtung.

In dem durch Abb. 178 dargestellten Fall ergibt sich eine Anziehungskraft zwischen Leiter und Eisenplatte. Sie beträgt bei unendlich großer Permeabilität des Eisens

$$P = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{l}{2h} I^2. \quad (754)$$

Nach dieser Beziehung wird die Anziehungskraft um so größer, je kleiner der Abstand des Leiters von dem Eisen ist. Derartige Kräfte spielen eine Rolle bei den Wicklungsköpfen der elektrischen Maschinen, wo sie besonders im Kurzschlußfall hohe Beträge erreichen können.

Eine andere Methode zur Berechnung der magnetischen Feldkräfte besteht darin, daß man die Änderung der magnetischen Energie feststellt, die infolge einer gedachten Formänderung des Stromkreises entsteht. Ändert man irgendeine Abmessung  $x$  eines stromdurchflossenen Kreises um ein kleines Stück  $dx$ , so sind dabei (neben den elastischen Spannungen) magnetische Feldkräfte zu überwinden. Bezeichnen wir die magnetische Feldkraft in der Richtung von  $x$  mit  $P_x$ , so ist bei der Verschiebung um  $dx$  eine Arbeit vom Betrage

$$dA_1 = -P_x dx$$

aufzuwenden. Denken wir uns den Strom  $I$  bei dieser Änderung konstant gehalten, z. B. indem ein genügend hoher Widerstand im Stromkreis vorgesehen wird, so ändert sich bei einer solchen Formänderung der Gesamtfluß des Stromkreises,

$$\Psi = LI,$$

um einen Betrag

$$d\Psi = I dL = I \frac{\partial L}{\partial x} dx.$$

Erfolgt die Änderung in der Zeit  $dt$ , so ergibt sich eine elektromotorische Kraft der Selbstinduktion von der Größe

$$e_s = -\frac{d\Psi}{dt} = -I \frac{\partial L}{\partial x} \frac{dx}{dt}.$$

Diese elektromotorische Kraft liefert mit dem Strom  $I$  während der Zeit  $dt$  eine Arbeit vom Betrage

$$dA_2 = e_s I dt = -I^2 \frac{\partial L}{\partial x} dx.$$

Schließlich nimmt bei der Änderung noch die im magnetischen Feld aufgespeicherte Energie

$$W = \frac{1}{2} LI^2$$

um den Betrag

$$dW = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial x} dx$$

zu. Da die mechanisch aufgewendete Arbeit gleich der elektrisch gewonnenen Arbeit sein muß, so folgt

$$dA_1 = dA_2 + dW,$$

oder nach Einsetzen der eben gefundenen Ausdrücke

$$P_x = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial x}. \quad (755)$$

Die Kraft ist also immer so gerichtet, daß sie die Induktivität zu vergrößern sucht. Sie kann berechnet werden, wenn die Abhängigkeit der Induktivität des Stromkreises von  $x$  bekannt ist. Aus der Gl. (672) für die Induktivität einer Doppelleitung ergibt sich z. B. sofort die Beziehung (750) für die zwischen den beiden Drähten wirkende Kraft.

Handelt es sich um zwei verschiedene Stromkreise 1 und 2, so lassen sich die zwischen den Stromkreisen auftretenden Kräfte durch eine ähnliche Überlegung finden. Bei der Verschiebung  $dx$  der beiden Stromkreise gegeneinander ergibt sich eine Änderung der Gegeninduktivität, durch die einerseits die in den beiden Stromkreisen entstehenden elektromotorischen Kräfte, andererseits die Änderung der Feldenergie, Gl. (712), bestimmt sind. Damit folgt für die in der Richtung der Verschiebung wirkende Kraft

$$P_x = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial x}. \quad (756)$$

Diese sucht also die Stromkreise in eine solche Lage zu bringen, daß die Gegeninduktivität möglichst groß wird.

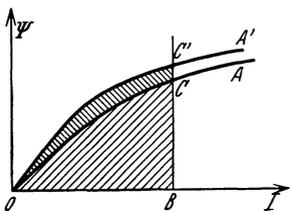


Abb. 199. Zur Berechnung der Hubkraft eines Elektromagneten.

Das gleiche Verfahren kann ferner zur Berechnung der Hubkraft eines Elektromagneten angewendet werden. Die bei irgendeinem Abstand des Ankers im Magneten aufgespeicherte magnetische Energie kann aus der magnetischen Charakteristik  $OA$ , Abb. 199, ermittelt werden, die den Zusammenhang zwischen Gesamtfluß und Strom für diese Lage des Ankers darstellt. Bei einer Änderung des Stromes ergibt sich nach Gl. (683) eine Zunahme der magnetischen Energie vom Betrage

$$dW = L i di = \Psi di.$$

Die Gesamtenergie hat daher bei irgendeiner Stromstärke  $I$  den Wert

$$W = \int_0^I \Psi di. \quad (757)$$

Das ist die mit  $OBC$  bezeichnete schraffierte Fläche in Abb. 199. Nähert sich nun der Anker den Magnetpolen um ein kleines Stück  $\Delta x$ , so wird vom Magneten eine mechanische Arbeit  $A_1 = P \Delta x$  geleistet. Gleichzeitig wird  $\Psi$  wegen des kleineren Luftspaltes größer, Kurve  $OA'$ . Es wächst die magnetische Energie um einen Betrag  $\Delta W$ , der durch die Fläche  $OCC'$  dargestellt ist, wenn der Strom  $I$  bei der Änderung konstant gehalten wird. Die zur Überwindung der elektromotorischen Kraft der Selbstinduktion vom Strom  $I$  zu leistende Arbeit ist, Gl. (555):

$$A_2 = I \Delta \Psi,$$

und es gilt

$$A_2 = A_1 + \Delta W.$$

Hieraus folgt

$$P \Delta x = I (CC') - \text{Fläche } OCC' \quad (758)$$

eine Beziehung, aus der die Kraft  $P$  ermittelt werden kann.

Die an Grenzflächen ausgeübten Kräfte können wie im elektrischen Feld zurückgeführt werden auf Kräfte, mit denen sich die Kraftlinien zu verkürzen und zu verbreitern suchen. Analog den Kräften im elektrischen Feld haben Längszug und Querdruck die gleiche Größe wie die in der Volumeneinheit aufgespeicherte Energie unter der Voraussetzung, daß die Permeabilität eine Konstante ist. Es gilt

$$p = \frac{1}{2} \mathfrak{B} \mathfrak{H} = \frac{1}{2} \mu \mathfrak{H}^2. \quad (759)$$

Man kann diese Beziehung durch die Betrachtung einer Ringspule ableiten, die einen Ringkern mit sehr kleinem Querschnitt  $q$  und der Kraftlinienlänge  $l$  enthält. Der Beitrag, den dieser Kern zur Induktivität der Spule liefert, ist nach Gl. (670)

$$L = w^2 \frac{\mu q}{l}.$$

Daraus folgt für die Kraft, die die Länge  $l$  zu vergrößern sucht, nach Gl. (755)

$$P = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial l} = -\frac{1}{2} w^2 \frac{\mu q}{l^2} I^2.$$

Die Kraft wirkt also in entgegengesetzter Richtung, sie sucht die Kraftlinien zu verkürzen. Für die eben gefundene Gleichung kann man schreiben

$$P = -\frac{1}{2} \mathfrak{B} \mathfrak{H} q.$$

Auf die Flächeneinheit trifft also eine Zugspannung von dem oben angeführten Betrag. Daß der Querdruck der Kraftlinien die gleiche Größe hat, ergibt sich durch eine ähnliche Betrachtung, wie im elektrischen Feld, Abb. 93.

Infolge des Längszuges und des Querdruckes stellen sich die Kraftlinien so ein, daß der magnetische Widerstand möglichst klein wird.

Eine Anwendung der Formel (759) bildet die angenäherte Berechnung der Tragkraft eines Elektromagneten. Wenn der Luftspalt des Magneten so eng ist (also z. B. bei anliegendem Anker), daß der Induktionsfluß senkrecht durch die Polfläche  $F$  hindurchtritt, dann ist die Tragkraft

$$P = pF = \frac{1}{2} \frac{B^2 F}{\mu} = \frac{1}{2} \Phi H, \tag{760}$$

wobei  $B$  die Induktion im Luftspalt bezeichnet („Maxwellsche Formel“).

Die größten Werte der Kraftliniendichte in Luft, die in der Elektrotechnik vorkommen, liegen bei etwa  $B=20000$  G. Daher sind die größten magnetischen Zugspannungen

$$p = \frac{1}{2} \frac{4 \cdot 10^8 \cdot 10^{-16} \text{ Vs}^2 \text{ cm}}{1,256 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^4 \text{ H}} = 1,59 \frac{\text{Ws}}{\text{cm}^3} = 16,2 \frac{\text{kGr}}{\text{cm}^2}.$$

Die an den Grenzflächen von Eisen und Luft am Eisen angreifenden Kräfte sind es im wesentlichen, die in den elektrischen Maschinen maßgebend für das Drehmoment sind. Die stromführenden Leiter liegen in einem Nutzen des Eisenkörpers, so daß sie sich in einem verhältnismäßig schwachen magnetischen Feld befinden. Daher sind auch die mechanischen Kräfte, die die Stromleiter im Innern der Nuten erfahren, gering, während die Hauptkräfte zwar durch den Strom in den Stromleitern hervorgerufen werden, aber am Eisen angreifen.

Man kann die an den Grenzflächen wirkenden Kräfte folgendermaßen berechnen. Es sei  $dF$  ein Flächenelement der Grenzfläche, Abb. 200. Der Winkel, unter dem die Kraftlinien im Luftraum gegen die Normale zur Grenzfläche einmünden, sei  $\alpha$ . Auf das Flächenelement wirken zwei Kräfte ein. Eine Kraft  $dP_1$ , die durch die Zugspannung in den Kraftlinien bedingt ist und die Größe hat

$$dP_1 = p dF \cos \alpha, \tag{761}$$

und eine zweite  $dP_2$ , die senkrecht zu den Kraftlinien steht und durch den Querdruck der Kraftlinien hervorgerufen wird; diese hat die Größe

$$dP_2 = p dF \sin \alpha. \tag{762}$$

Beide Kräfte setzen sich zu einer Resultierenden zusammen. Die Tangentialkomponente dieser Resultierenden hat von links nach rechts gerichtet die Größe

$$dP_t = 2 p dF \cos \alpha \sin \alpha = p dF \sin 2\alpha. \tag{763}$$

Die nach außen zeigende Normalkomponente beträgt

$$dP_n = p dF (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = p dF \cos 2\alpha. \tag{764}$$

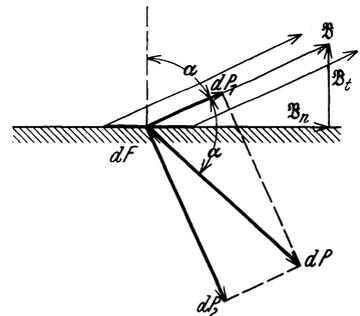


Abb. 200. Kräfte an einer Grenzfläche.

Hieraus geht hervor, daß die Resultierende  $dP$  den Winkel  $2\alpha$  mit der Normalen zur Grenzfläche bildet. Ihre Größe ist  $\rho dF$ . Man kann sich also die an der Grenzfläche vom Luftraum her angreifenden Kräfte hervorgerufen denken durch eine Flächenkraft (Maxwellsche Spannung)

$$\mathfrak{Z} = \frac{1}{2} \mathfrak{B} \mathfrak{H}, \tag{765}$$

deren Winkel mit der Normalen durch die Richtung von  $\mathfrak{B}$  halbiert wird.

Führt man Normal- und Tangentialkomponente von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{H}$  im Luftraum ein, so folgt aus den Gl. (763) und (764)

$$dP_t = \mathfrak{B}_n \mathfrak{H}_t dF = \frac{1}{\mu_0} \mathfrak{B}_n \mathfrak{B}_t dF; \tag{766}$$

$$dP_n = \frac{1}{2\mu_0} (\mathfrak{B}_n^2 - \mathfrak{B}_t^2) dF. \tag{767}$$

Ganz entsprechende Kräfte ergeben sich nun auch auf der anderen Seite der Grenzfläche. Im Eisen mit der relativen Permeabilität  $\mu_r$  hat die magnetische Induktion folgende Werte  $\mathfrak{B}'_n = \mathfrak{B}_n$ ;  $\mathfrak{B}'_t = \mu_r \mathfrak{B}_t$ .

Es greift daher eine Tangentialkraft  $dP'_t$  von rechts nach links gerichtet an dem Flächenelement  $dF$  an mit dem Betrag

$$dP'_t = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \mathfrak{B}_n \mu_r \mathfrak{B}_t dF = \frac{1}{\mu_0} \mathfrak{B}_n \mathfrak{B}_t dF. \tag{768}$$

Die beiden Tangentialkräfte, die an beiden Seiten der Grenzfläche angreifen, heben sich auf, d. h. bei beliebigem Einfallswinkel der Kraftlinien wirken die Feldkräfte an der Oberfläche von Eisen immer senkrecht zur Grenzfläche.

Die von dem Fluß im Eisen herrührende, nach innen wirkende Normalkomponente der Kraft hat die Größe

$$dP'_n = \frac{1}{2\mu_r \mu_0} (\mathfrak{B}_n^2 - \mu_r^2 \mathfrak{B}_t^2) dF. \tag{769}$$

Es greift also an der Grenzfläche eines Eisenkörpers im magnetischen Feld eine Zugspannung an vom Gesamtbetrage

$$k_z = \frac{\mu_r - 1}{2\mu_r \mu_0} (\mathfrak{B}_n^2 + \mu_r \mathfrak{B}_t^2), \tag{770}$$

die immer senkrecht zur Grenzfläche gerichtet ist.  $\mathfrak{B}_n$  und  $\mathfrak{B}_t$  bedeuten die Normal- und Tangentialkomponenten der magnetischen Induktion an der Grenzfläche im Luftraum. Mit dieser Formel kann z. B. die Tragkraft eines Elektromagneten genauer berechnet werden, wenn der Feldverlauf bekannt ist.

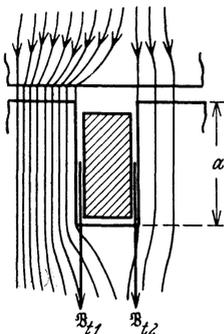


Abb. 201. Kräfte im Anker eines Elektromotors.

In den Nuten der elektrischen Maschinen, Abb. 201, verlaufen die magnetischen Kraftlinien nahezu tangential zu den Zahnflanken. Die für das Drehmoment maßgebenden Triebkräfte greifen hier im wesentlichen an den Zahnflanken an. Denken wir uns zunächst den in der Nut liegenden Leiter stromlos, und bezeichnen wir die Kraftliniendichte des Erregerfeldes in den Zähnen mit  $B_0$ , so gilt für die Kraftliniendichte in der Nut

$$B = \frac{B_0}{\mu_r},$$

da die Tangentialkomponente der magnetischen Erregung an den Zahnflanken stetig sein muß. Die auf den Leiter von der Länge  $l$  ausgeübte Kraft hat daher die Größe

$$P_1 = \frac{1}{\mu_r} B_0 I l, \tag{771}$$

wenn der Leiter von dem Strom  $I$  durchflossen wird. Sie ist um so kleiner, je größer die Permeabilität des Eisens ist. Um die Grenzflächenspannungen zu berechnen,

müssen wir das wirkliche Feld betrachten, an dem auch der Ankerstrom beteiligt ist. Infolge der Durchflutung  $I$  der Nut ist die Kraftliniendichte an den beiden Zahnflanken verschieden. Es gilt längs der Nutgrenzen

$$\oint \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = (\mathfrak{H}_{t1} - \mathfrak{H}_{t2}) a = I, \tag{772}$$

wenn die Tiefe  $a$  der Nut groß ist gegen ihre Breite. Daher hat die Tangentialkomponente der magnetischen Induktion an den beiden Zahnflanken die Größe

$$B_{t1} = \frac{B_0}{\mu_r} + \frac{\mu_0 I}{2a},$$

$$B_{t2} = \frac{B_0}{\mu_r} - \frac{\mu_0 I}{2a}.$$

Die an den Zahnflanken angreifenden Flächenkräfte wirken einander entgegen; ihre Differenz ist nach Gl. (770)

$$P_2 = \frac{\mu_r - 1}{2\mu_r \mu_0} \mu_r 2 \frac{B_0 \mu_0 I}{\mu_r a} a l = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} B_0 I l. \tag{773}$$

Die am Ankereisen selbst angreifende Kraft ist also  $\mu_r - 1$  mal so groß wie die auf den Leiter wirkende Kraft. Die Summe der beiden Kräfte ist

$$P = P_1 + P_2 = B_0 I l. \tag{774}$$

Sie hat denselben Wert, wie wenn sich der Leiter in dem Feld mit der Induktion  $B_0$  befinden würde. Dieses Ergebnis kann allgemeiner auch aus Gl. (556) abgeleitet werden.

### 29. Das magnetische Wechselfeld.

Magnetische Wechselfelder werden durch Wechselstrom erzeugt. Fließt in einer Spule mit der Induktivität  $L$  ein Strom

$$i = I \sqrt{2} \sin \omega t, \tag{775}$$

so entsteht eine elektromotorische Kraft der Selbstinduktion, die nach Gl. (667) die Größe hat

$$e_s = -L \frac{di}{dt} = -I \omega L \sqrt{2} \cos \omega t. \tag{776}$$

Wir bezeichnen die in einem Leiter wirkende elektromotorische Kraft als positiv, wenn sie für sich allein einen Strom in der willkürlichen Pfeilrichtung, also einen positiven Strom, hervorrufen würde. Der Strom fließt vom niedrigen Potential zum höheren Potential, wenn zwischen zwei Punkten eine elektromotorische Kraft tätig ist, Abb. 202; im anderen Fall vom höheren zum niedrigeren Potential. Dadurch sind die Vorzeichen von Spannung und elektromotorischer Kraft definiert.

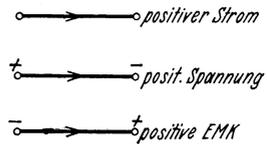


Abb. 202. Vorzeichendefinition.

Die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion eilt bei dieser Festsetzung dem Strom um  $90^\circ$  nach, genau so, wie die Spannung an einem Kondensator. Der Effektivwert der elektromotorischen Kraft der Selbstinduktion ist

$$E_s = I \omega L. \tag{777}$$

Infolge des endlichen Widerstandes  $R$  der Spule entsteht ferner nach dem Ohmschen Gesetz ein Spannungsverbrauch vom Betrag

$$u_R = i R = I R \sqrt{2} \sin \omega t, \tag{778}$$

der in Phase mit dem Strom liegt. Man bezeichnet diesen Spannungsverbrauch auch als den Ohmschen Spannungsabfall. Um zu berechnen, wie groß die gesamte Spannung an der Spule wird, denken wir uns die Spule an einen Wechselstromerzeuger angeschlossen, der die elektromotorische Kraft  $e_0$  liefert und den inneren Widerstand Null hat. Dann ist die Klemmenspannung dieses Generators gleich

der elektromotorischen Kraft  $e_0$  und gleich der Spannung  $u$  zwischen den Klemmen der Spule. Nach dem zweiten Kirchhoffschen Satz gilt

$$e_0 + e_s = iR.$$

Es ist zweckmäßig, für die Aufstellung des Zeigerdiagramms diese Gleichung zu schreiben

$$e_0 + e_s + (-iR) = 0.$$

Sie sagt in dieser Form aus, daß die Summe aller elektromotorischen Kräfte in einem geschlossenen Stromkreis Null ist, wenn man die Spannungen umkehrt und so behandelt wie elektromotorische Kräfte. Die aneinander gereihten Zeiger der elektromotorischen Kräfte bilden also im Zeigerdiagramm ein geschlossenes Vieleck, im vorliegenden Fall ein Dreieck, Abb. 203. Die Spannung  $U$  an der Spule hat den Effektivwert

$$U = I\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}. \tag{779}$$

Dieser Zeiger eilt dem des Stromes um einen Winkel  $\varphi$  vor, der zwischen 0 und  $90^\circ$  liegt und berechnet werden kann aus

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}. \tag{780}$$

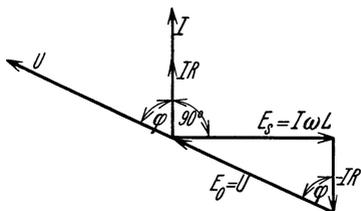


Abb. 203. Zeigerdiagramm der Spule.

Die in der Spule entstehenden Verluste durch Joulesche Wärme betragen, auf die Zeiteinheit umgerechnet,

$$N = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = I^2 R. \tag{781}$$

Es zeigt sich, daß der aus der Verlustleistung hiernach berechnete Wert von  $R$  im allgemeinen größer ist als der mit Gleichstrom gemessene Widerstand. Man bezeichnet daher den aus Gl. (781) definierten Widerstand als den Wirkwiderstand der Spule; der Unterschied gegenüber dem Gleichstromwiderstand ist bedingt durch die im magnetischen Wechselfeld auftretenden Verluste, die sich aus verschiedenen Anteilen zusammensetzen (siehe Abschnitt 30 und 31).

Wenn der magnetische Kreis im wesentlichen aus Eisen besteht und höhere Kraftliniendichten vorkommen, so vermeidet man zweckmäßig die Einführung der Induktivität. Es wird dann die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion unmittelbar aus dem durch die Wicklung mit  $w$  Windungen hindurchgehenden Bündelfluß  $\Phi$  berechnet. Ist der Maximalwert dieses Flusses  $\Phi_m$ , so hat die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion den Effektivwert

$$E_s = \frac{1}{\sqrt{2}} w \omega \Phi_m = 4,44 w f \Phi_m. \tag{782}$$

In vielen Fällen ist die hierin enthaltene Voraussetzung, daß der Bündelfluß  $\Phi$  in voller Größe mit allen Windungen verkettet ist, nicht zulässig. Der Gesamtfluß  $\Psi_m$  ist verschieden von  $w \Phi_m$ . Man drückt dies durch die Beziehung aus

$$\Psi_m = \xi w \Phi_m, \tag{783}$$

und nennt  $\xi$  den Wicklungsfaktor. Dann gilt also allgemein

$$E_s = 4,44 \xi w f \Phi_m. \tag{784}$$

Der zu dem Fluß  $\Phi_m$  nach dem Durchflutungsgesetz gehörende Strom, der sogenannte Magnetisierungsstrom, ergibt sich aus der magnetischen Charakteristik des Kreises. Kann man nicht die in der Starkstromtechnik häufig zutreffende vereinfachende Annahme machen, daß der Ohmsche Spannungsabfall sehr klein ist gegen  $E_s$ , so läßt sich nicht ohne weiteres angeben, welche Stromstärke sich nach dem Anschließen der Spule an einen Generator mit bestimmter elektromotorischer Kraft einstellt. Zur Lösung dieser Aufgabe kann die folgende graphische Methode dienen. Man entnimmt aus der magnetischen Charakteristik zu verschiedenen Werten von  $I$

den Fluß  $\Phi_m$  und berechnet  $E_s$ . Für diese Werte von  $I$  läßt sich dann das Zeigerdiagramm zeichnen, Abb. 204. So ergibt sich für jeden Strom  $I$  die zugehörige Klemmenspannung  $OA$ , und die Punkte  $A$  können durch eine Kurve  $AB$  miteinander verbunden werden. Man bezeichnet eine solche Kurve als die Ortskurve des Zeigers  $OA$ . Um nun den Strom  $I$  für irgendeine Spannung  $U$  zu finden, hat man um  $O$  einen Kreis mit dem Radius  $U$  zu schlagen und den Schnittpunkt mit der Ortskurve zu bestimmen. Das Diagramm erfordert wegen der Ummagnetisierungsverluste noch eine Korrektur, die in Abschnitt 31 besprochen wird.

Die komplexe Rechnung läßt sich mit Vorteil anwenden, wenn die Induktivität als konstant angesehen werden kann. Dann gilt für die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion

$$\mathcal{E}_s = -\mathfrak{J}j\omega L.$$

Die Spannung an der Spule wird bei verschwindendem Wirkwiderstand

$$\mathfrak{u}_s = \mathfrak{J}j\omega L. \tag{785}$$

Man kann daher den Ausdruck  $\mathfrak{R} = j\omega L$

als das Symbol des der Induktivität  $L$  entsprechenden komplexen Widerstandes auffassen. Der Ohmsche Spannungsabfall ist

$$\mathfrak{u}_R = \mathfrak{J}R,$$

und es gilt

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_R + \mathfrak{u}_s = \mathfrak{J}(R + j\omega L). \tag{786}$$

Die Größe  $R + j\omega L$  stellt den komplexen Widerstand der Spule dar,  $R$  bildet den Wirkwiderstand,  $\omega L$  den „Blindwiderstand“. Näheres über die komplexe Rechnung siehe Abschnitt 32.

### 30. Die Wirbelströme.

Befinden sich in einem magnetischen Wechselfeld elektrisch leitende Stoffe, so entstehen in diesen Stoffen nach dem Induktionsgesetz Ströme auf Bahnen, die mit den magnetischen Induktionslinien verkettet sind; man bezeichnet diese Ströme als Wirbelströme. In stromführenden Leitern überlagern sich die Wirbelströme dem Leiterstrom. Auch durch das magnetische Feld des Leiterstromes selbst werden Wirbelströme im Leiter hervorgerufen. Dadurch ergibt sich eine ungleichmäßige Verteilung des Stromes über den Leiterquerschnitt, die man als Stromverdrängung bezeichnet. Die Wirbelströme erzeugen selbst ein Magnetfeld und wirken daher auch auf das ursprüngliche Feld zurück, es entsteht die Erscheinung der Feldverdrängung. Infolge der im Leiter entstehenden Jouleschen Wärme wird dem magnetischen Feld dabei Energie entzogen. Man bezeichnet als Wirbelstromverluste die Leistung, die infolge der Wirbelströme in Form von Wärme verlorengeht.

In einem Wirbelstromfeld sind elektrische und magnetische Feldstärke durch das Durchflutungsgesetz und das Induktionsgesetz miteinander verknüpft. Das Linienintegral der magnetischen Feldstärke ist auf jedem Weg durch die Durchflutung des Weges bestimmt. Auch das Induktionsgesetz gilt in einem räumlich ausgedehnten Feld auf beliebigen Bahnen; es ist also das Linienintegral der elektrischen Feldstärke auf irgendeinem Weg gleich dem magnetischen Schwund dieses Weges.

Ein besonders einfacher Fall der Stromverdrängung liegt bei geraden zylindrischen Leitern vor. Wenn man sich auf die Betrachtung eines kurzen Längenabschnittes eines solchen Leiters beschränkt, so darf man annehmen, daß die elektrische und die magnetische Feldstärke nur von dem Abstand  $r$  von der Achse abhängen,

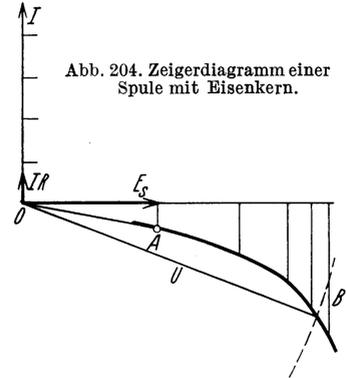


Abb. 204. Zeigerdiagramm einer Spule mit Eisenkern.

Abb. 205, und in jedem Leiterquerschnitt die gleichen Werte besitzen. Die magnetische Feldstärke hat überall die tangentielle Richtung, während die elektrische Feldstärke wie die Stromdichte axial gerichtet ist. Stromdichte und elektrische Feldstärke sind nach früherem verknüpft durch die Beziehung

$$\mathfrak{G} = \kappa \mathfrak{E}. \tag{787}$$

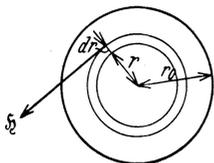


Abb. 205. Magnetische Feldstärke in einem zylindrischen Leiter.

Wendet man daher das Durchflutungsgesetz auf einen Kreis vom Radius  $r$  an, so folgt

$$2\pi r |\mathfrak{H}| = \int_0^r |\mathfrak{G}| 2\pi r dr = 2\pi \kappa \int_0^r |\mathfrak{E}| r dr,$$

oder durch Differenzieren:

$$\frac{\partial |\mathfrak{H}|}{\partial r} + \frac{1}{r} |\mathfrak{H}| = \kappa |\mathfrak{E}|. \tag{788}$$

Um das Induktionsgesetz anzuwenden, betrachte man ein in einer Achsenebene des Leiters liegendes Rechteck, Abb. 206, dessen eine lange Seite in die Achse fällt und dessen andere davon den Abstand  $r$  hat; die Länge des Rechtecks sei  $l$ .

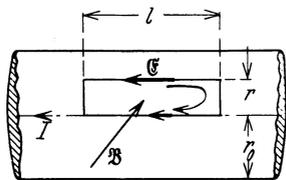


Abb. 206. Anwendung des Induktionsgesetzes.

Ein solches Rechteck wird von den magnetischen Kraftlinien senkrecht durchsetzt, so daß der Gesamtfluß in dem Rechteck

$$\Psi = \Phi = \int_0^r \mathfrak{B} l dr = \mu l \int_0^r |\mathfrak{H}| dr$$

beträgt, wenn unter  $\mu$  die als konstant angesehene Permeabilität des Leitermaterials verstanden wird. Bei der Bestimmung des Linienintegrals der elektrischen Feldstärke hat man die angenommene positive Richtung des Induktionsflusses im Sinne einer Rechtsschraube zu umkreisen. Dies ergibt

$$\oint \mathfrak{E} d\mathfrak{s} = \mathfrak{E}|_{r=0} l - \mathfrak{E}|_r l = - \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \mu l \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r |\mathfrak{H}| dr;$$

die aus den Radien gebildeten Rechteckseiten tragen zu dem Linienintegral nichts bei, da die elektrische Feldstärke senkrecht auf diesen Seiten steht. Durch Differenzieren nach  $r$  ergibt sich

$$\frac{\partial |\mathfrak{E}|}{\partial r} = \mu \frac{\partial |\mathfrak{H}|}{\partial t}. \tag{789}$$

Differenziert man die Gl. (788) nach  $t$  und führt die eben gefundene Gleichung ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 |\mathfrak{E}|}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial |\mathfrak{E}|}{\partial r} = \kappa \mu \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}. \tag{790}$$

Wenn sich die Feldgrößen zeitlich sinusförmig ändern, so kann man die komplexe Darstellung benutzen, indem man setzt

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \bar{\mathfrak{E}} \sqrt{2} e^{j\omega t}; \\ \mathfrak{H} &= \bar{\mathfrak{H}} \sqrt{2} e^{j\omega t}; \\ \mathfrak{G} &= \bar{\mathfrak{G}} \sqrt{2} e^{j\omega t}. \end{aligned} \right\} \tag{791}$$

Die Größen  $\bar{\mathfrak{E}}$ ,  $\bar{\mathfrak{H}}$  und  $\bar{\mathfrak{G}}$  stellen für jeden Punkt des Raumes einen Zeiger in der komplexen Ebene dar. Die absoluten Beträge dieser Zeiger geben die Effektivwerte der Größen in dem betreffenden Raumpunkt an. Diese Größen haben im Raum eine Richtung, die durch die Abb. 205 und 206 gegeben ist. Nur auf diese Raumrichtungen beziehen sich die entsprechenden Zeiger. Führt man die Ansätze (791) in die Gl. (790) ein, so folgt

$$\frac{d^2 \bar{\mathfrak{E}}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \bar{\mathfrak{E}}}{dr} + k^2 \bar{\mathfrak{E}} = 0. \tag{792}$$

Dabei ist gesetzt  $k^2 = -j\omega\kappa\mu$ ;  $k = (1-j)\sqrt{\frac{1}{2}\omega\kappa\mu}$ . (793)

Aus der elektrischen Feldstärke folgt die magnetische Feldstärke mit der Beziehung (789)

$$\bar{\mathfrak{H}} = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{d\bar{\mathfrak{E}}}{dr}, \quad (794)$$

und es gilt für den komplexen Vektor der Stromdichte

$$\bar{\mathfrak{G}} = \kappa \bar{\mathfrak{E}}. \quad (795)$$

Die Gl. (792) ist die Differentialgleichung für die Besselschen Funktionen der Ordnung Null<sup>1</sup>. Von den verschiedenen Arten dieser Funktionen kommt hier nur diejenige in Betracht, welche für  $r=0$  endlich ist, da die elektrische Feldstärke überall im Leiterquerschnitt endliche Werte haben muß. Es ist dies die Besselsche Funktion erster Art, die durch die Potenzreihe

$$J_0(kr) = 1 - \frac{1}{1!^2} \left(\frac{kr}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!^2} \left(\frac{kr}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!^2} \left(\frac{kr}{2}\right)^6 + \dots \quad (796)$$

definiert ist. Durch Einsetzen in Gl. (792) überzeugt man sich leicht, daß diese Funktion die Differentialgleichung befriedigt. Als Lösung der Differentialgleichung ergibt sich daher

$$\bar{\mathfrak{E}} = c J_0(kr), \quad (797)$$

wobei  $c$  eine willkürliche Konstante bedeutet. Um mit Hilfe von Gl. (794) die magnetische Feldstärke zu berechnen, benutzt man die Formel

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x),$$

wobei  $J_1(x)$  die Besselsche Funktion erster Ordnung bezeichnet. Damit wird

$$\bar{\mathfrak{H}} = -c \frac{k}{j\omega\mu} J_1(kr). \quad (798)$$

Die Integrationskonstante  $c$  kann aus dem Effektivwert  $I$  des Stromes im Leiter bestimmt werden. Das Durchflutungsgesetz liefert bei Anwendung auf die Randlinie des Leiterquerschnitts

$$\bar{\mathfrak{H}} \Big|_{r_0} 2\pi r_0 = I,$$

oder mit Gl. (798)

$$c = -\frac{j\omega\mu}{2\pi r_0 k} \frac{I}{J_1(kr_0)}.$$

Für die elektrische Feldstärke und die Stromdichte ergibt sich damit

$$\bar{\mathfrak{E}} = -\frac{j\omega\mu}{2\pi r_0 k} I \frac{J_0(kr)}{J_1(kr_0)} = \frac{Ik}{2\pi r_0 \kappa} \frac{J_0(kr)}{J_1(kr_0)}; \quad (799)$$

$$\bar{\mathfrak{G}} = \frac{kI}{2\pi r_0} \frac{J_0(kr)}{J_1(kr_0)}. \quad (800)$$

Wenn  $kr$  sehr klein ist, also bei sehr niedrigen Frequenzen, gilt für  $J_0(kr)$  nach Gl. (796) die Näherungsformel

$$J_0(kr) \approx 1,$$

ebenso

$$J_1(kr_0) \approx \frac{1}{2}kr_0.$$

Daher wird die Stromdichte

$$\bar{\mathfrak{G}} = \frac{I}{r_0^2 \pi}.$$

Bei niedrigen Frequenzen ist also der Strom gleichmäßig über den Querschnitt des Leiters verteilt.

Die elektrische Feldstärke zeigt an, wie groß der Spannungsabfall längs des Leiters ist. Der Spannungsabfall längs einer Mantellinie ( $r=r_0$ ) kann dargestellt werden durch die Wirkung eines Widerstandes  $R$  und einer Induktivität  $L_i$ . Es gilt also für einen Abschnitt des Leiters von der Länge  $l$

$$I(R + j\omega L_i) = \bar{\mathfrak{E}}l = \frac{Ik l}{2\pi r_0 \kappa} \frac{J_0(kr_0)}{J_1(kr_0)}, \quad (801)$$

<sup>1</sup> Jahnke u. Emde: Funktionentafeln.

eine Beziehung, aus der die Größen  $R$  und  $L_i$  durch Gleichsetzen von reellen und imaginären Teilen berechnet werden können. Die Größe  $R$  ist maßgebend für die Verluste, die in dem Leiter durch Joulesche Wärme auftreten; sie stellt den Wechselstromwiderstand des Leiters dar. Die Größe  $L_i$  gibt den Beitrag des Magnetfeldes im Leiterinneren zur Induktivität des Stromkreises an, ist also die innere Induktivität bei Wechselstrom. Einfache Formeln ergeben sich für große und kleine Werte von  $kr_0$ , also hohe und niedrige Frequenzen. Setzt man

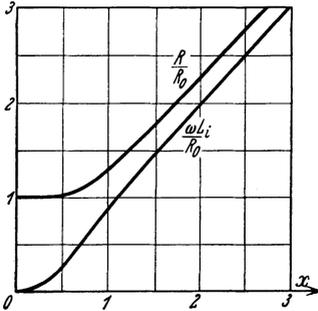


Abb. 207. Wechselstromwiderstand und -induktivität eines Drahtes.

$$x = \frac{r_0}{2} \sqrt{\pi f \kappa \mu}, \tag{802}$$

und führt man den Gleichstromwiderstand

$$R_0 = \frac{l}{r_0^2 \pi \kappa} \tag{803}$$

ein, so erhält man mit Hilfe der Potenzreihe (796) für kleine Werte von  $x$  ( $< 1$ ) die Näherungsformeln

$$\frac{R}{R_0} = 1 + \frac{1}{3} x^4, \tag{804}$$

$$\frac{\omega L_i}{R_0} = x^2 \left( 1 - \frac{x^4}{6} \right), \tag{805}$$

und für große Werte von  $x$  ( $> 1$ ) mit Hilfe der für große Werte des Argumentes geltenden Entwicklungen der Besselschen Funktionen

$$\frac{R}{R_0} = x + \frac{1}{4} + \frac{3}{64x}, \tag{806}$$

$$\frac{\omega L_i}{R_0} = x - \frac{3}{64x} + \frac{3}{128x^2}. \tag{807}$$

Die Größen  $\frac{R}{R_0}$  und  $\frac{\omega L_i}{R_0}$  sind in Abb. 207 graphisch dargestellt.

**Zahlenbeispiel:** Es sei der Widerstand einer Kupferleitung von 4 mm  $\varnothing$  und 1 km Länge für eine Frequenz von  $f=40000$  Hz zu berechnen,  $\kappa=57 \frac{\text{Sm}}{\text{mm}^2}$ .

Es wird  $x = \frac{1}{2} \cdot 0,2 \text{ cm} \sqrt{\pi \cdot 40000 \cdot 57 \cdot 10^4 \cdot 1,256 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1} \cdot \frac{\text{S H}}{\text{cm cm}}} = 3,$

also  $\frac{R}{R_0} = 3,27; \quad \frac{\omega L_i}{R_0} = 2,98.$

Nun ist  $R_0 = \frac{1000}{57 \cdot 12,57} \Omega = 1,4 \Omega.$

Daher ergibt sich  $R = 4,57 \Omega; \quad L_i = \frac{2,98 \cdot 1,4 \Omega \text{ s}}{40000 \cdot 6,28} = 1,66 \cdot 10^{-5} \text{ H}.$

Bei Gleichstrom wäre nach Gl. (699) die innere Induktivität  $L_i = 5 \cdot 10^{-5} \text{ H}.$

Die Zunahme des Widerstandes mit der Frequenz ist so zu erklären, daß bei hohen Frequenzen der Strom im wesentlichen in einer Schicht an der Oberfläche des Leiters fließt. Man erkennt dies, wenn man die Näherungsformeln der Besselschen Funktionen für großes Argument benutzt; sie lauten

$$|J_0(x\sqrt{2}\sqrt{-j})| = |J_1(x\sqrt{2}\sqrt{-j})| = \frac{1}{\sqrt{4\pi x\sqrt{2}}} e^{2x}.$$

Damit ergibt sich aus Gl. (800)

$$|\mathcal{G}| = \frac{I}{2\pi r_0} \sqrt{\omega \kappa \mu} \sqrt{\frac{r_0}{r}} e^{-\sqrt{\pi f \kappa \mu} (r_0 - r)}. \tag{808}$$

Bezeichnet man den Abstand des betrachteten Punktes von der Leiteroberfläche mit  $y$ ,

$$r_0 - r = y, \tag{809}$$

so nimmt also die Stromdichte mit wachsender Tiefe  $y$  nach einer Exponential-

funktion ab. Große Werte der Stromdichte finden sich bei hohen Frequenzen nur unmittelbar unter der Oberfläche des Leiters.

Wenn man von vornherein die Voraussetzung macht, daß die stromführende Schicht sehr dünn ist, dann kann man die Krümmung der Leiteroberfläche vernachlässigen und die in Abb. 208 dargestellten Verhältnisse zugrunde legen, die sich bei ebener Begrenzung des Leiters ergeben. Die Feldgrößen hängen dann nur von dem Abstand  $y$  von der Leiteroberfläche ab. Die Vektoren  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{G}$  haben die Richtung der Leiterachse, die in die  $z$ -Richtung fällt. Nach der Rechtsschraubenregel muß dann die Richtung der magnetischen Feldstärke die  $x$ -Richtung sein. Wendet man das Durchflutungsgesetz auf das Rechteck  $a$ ,  $dy$  in der  $xy$ -Ebene an, so ergibt sich

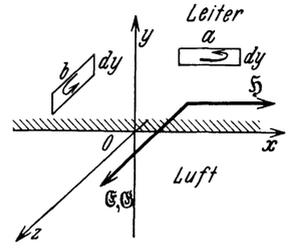


Abb. 208. Ebene Wirbelströmung.

$$\mathfrak{H} a - \left( \mathfrak{H} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial y} dy \right) a = \kappa \mathfrak{E} a dy, \quad \text{oder} \quad -\frac{d\mathfrak{H}}{dy} = \kappa \mathfrak{E}. \quad (810)$$

Die Anwendung des Induktionsgesetzes auf ein Rechteck  $b$ ,  $dy$  in der  $yz$ -Ebene ergibt

$$-\mathfrak{E} b + \left( \mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial y} dy \right) b = -\mu b \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} dy, \quad \text{oder} \quad \frac{d\mathfrak{E}}{dy} = -j\omega\mu\mathfrak{H}. \quad (811)$$

Aus den Gl. (810) und (811) folgt

$$\frac{d^2\mathfrak{E}}{dy^2} = j\omega\kappa\mu\mathfrak{E}$$

mit der Lösung

$$\mathfrak{E} = c_1 e^{-\beta y - j\beta y} + c_2 e^{\beta y + j\beta y}, \quad (812)$$

in der

$$\beta = \sqrt{\pi f \kappa \mu} \quad (813)$$

bedeutet. Da die Feldstärke mit zunehmender Tiefe nicht unbegrenzt zunehmen kann, so muß  $c_2 = 0$  sein, also  $\mathfrak{E} = c_1 e^{-\beta y - j\beta y}$ .

$$(814)$$

Man erhält den Wert des Vektors  $\mathfrak{E}$  in irgendeinem Zeitpunkt, wenn man den Zeiger  $\mathfrak{E}$  mit  $\sqrt{2}e^{j\omega t}$  multipliziert, also mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotieren läßt. Die Projektion auf eine feste Achse, z. B. auf die imaginäre Achse, liefert dann die augenblicklichen Werte; man findet

$$\mathfrak{E} = \sqrt{2}c_1 e^{-\beta y} \sin(\omega t - \beta y). \quad (815)$$

Diese Formel stellt eine Welle dar, die von der Oberfläche des Leiters nach innen fortschreitet, und zwar mit der Geschwindigkeit

$$\frac{y}{t} = \frac{\omega}{\beta}.$$

Dabei nehmen die Amplituden beim Fortschreiten gemäß einem Exponentialgesetz ab. In Abb. 209 sind die augenblicklichen Werte der elektrischen Feldstärke in Abhängigkeit von der Tiefe unter der Oberfläche und für verschiedene Zeitpunkte dargestellt.

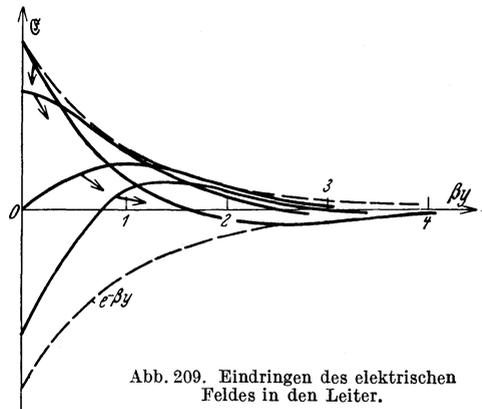


Abb. 209. Eindringen des elektrischen Feldes in den Leiter.

dargestellt. Um die Tiefe  $\delta$  zu berechnen, bei der die elektrische Feldstärke auf 1% ihres Oberflächenwertes abgenommen hat, hat man zu setzen

$$e^{-\beta \delta} = 0,01, \quad \text{oder} \quad \beta \delta = 4,6; \quad \delta = \frac{4,6}{\beta}. \quad (816)$$

Diese Tiefe kann man als die Eindringtiefe des Feldes bezeichnen. Für die magnetische Feldstärke ergibt sich aus Gl. (811)

$$\vec{H} = \frac{1+j}{j} \frac{\beta}{\omega\mu} \vec{E}. \tag{817}$$

Der Faktor

$$\frac{1+j}{j} = -\frac{1}{j} + 1$$

stellt in der Zahlenebene, Abb. 210, einen Zeiger vom Betrage  $\sqrt{2}$  dar, der einen Winkel von  $-\pi/4$  mit der reellen Achse bildet. Daraus geht hervor, daß der Zeiger der magnetischen Feldstärke dem Zeiger der elektrischen Feldstärke um  $45^\circ$  nacheilt. Die magnetische Feldstärke dringt im übrigen in der gleichen Weise in das Leiterinnere ein, wie die elektrische Feldstärke.

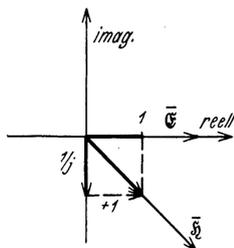


Abb. 210. Phasenverschiebung zwischen elektrischer und magnetischer Feldstärke.

Die Konstante  $c_1$  kann wieder aus dem Durchflutungsgesetz berechnet werden. Hat die Randlinie des Leiterquerschnittes bei ganz beliebiger Form, die nur dadurch eingeschränkt sein soll, daß der Krümmungsradius als groß gegen die Eindringtiefe vorausgesetzt wird, die Länge  $s$ , so gilt

$$\oint \vec{H} ds = \frac{1+j}{j} \frac{\beta}{\omega\mu} c_1 s = I,$$

wenn wieder der Stromzeiger willkürlich in die reelle Achse der komplexen Ebene gelegt wird. Daraus folgt

$$c_1 = \frac{j}{1+j} \frac{\omega\mu}{\beta s} I. \tag{818}$$

Der Spannungsabfall an der Leiteroberfläche liefert den Wechselstromwiderstand und die innere Induktivität des Leiters:

$$R + j\omega L_i = \frac{j}{1+j} \frac{\omega\mu}{\beta s} l = \frac{1+j}{2} \frac{\omega\mu}{\beta s} l.$$

Für hohe Frequenzen gilt also

$$R = \omega L_i = \frac{l}{s} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}}. \tag{819}$$

Der Wechselstromwiderstand wächst mit der Wurzel aus der Frequenz, während die innere Induktivität umgekehrt proportional mit der Wurzel aus der Frequenz abnimmt.

**Zahlenbeispiel:** Für das vorige Beispiel ergibt sich mit

$$\beta = 30 \text{ cm}^{-1}$$

die Eindringtiefe

$$\delta = \frac{4,6}{30} \text{ cm} = 1,53 \text{ mm}.$$

Sie ist nahezu so groß wie der Leiterradius. Trotzdem ergeben die Formeln (819) noch eine einigermaßen gute Annäherung. Sie liefern für den Widerstand mit  $s = 2\pi r_0$

$$R = \omega L_i = \frac{1000 \text{ m}}{2 \cdot 0,2 \pi \text{ cm}} \sqrt{\frac{40000 \cdot 6,28 \cdot 1,256 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1} \text{ H cm}}{2 \cdot 57 \cdot 10^4 \text{ cm S}}} = 4,2 \Omega$$

und für die innere Induktivität

$$L_i = \frac{4,2 \Omega \text{ s}}{40000 \cdot 6,28} = 1,67 \cdot 10^{-5} \text{ H}.$$

Die folgende Tabelle gibt die Eindringtiefe in Kupfer für einige Frequenzen an:

$f = 16\%$	50	100	500	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$	$10^7 \text{ Hz}$
$\beta = 0,612$	1,06	1,50	3,35	4,74	15	47,4	150	474 $\text{cm}^{-1}$
$\delta = 75$	43,4	30,7	13,7	9,7	3,07	0,97	0,307	0,097 mm

Bei Eisen sind die Eindringtiefen im Verhältnis  $\frac{1}{\sqrt{\mu_r}}$  kleiner; die Stromverdrängungserscheinung ist schon bei niedrigen Frequenzen merklich. Jedoch kann man hier wegen der Abhängigkeit der Permeabilität von der Feldstärke die Widerstandserhöhung nur abschätzen.

Die hier betrachtete Form der Stromverdrängung bezeichnet man als allseitige Stromverdrängung oder Hautwirkung. Dazu gehört auch die Stromverteilung

in einem leitenden Stoff, der als Rückleitung eines in diesen Stoff isoliert eingebetteten Leiters dient, wie z. B. im Seewasser als Rückleitung eines einadrigen Telegraphenkabels. Hier werden die Stromlinien im Wasser zum Kabel hingedrängt. Sie schnüren sich mit wachsender Frequenz immer enger in der Umgebung des Kabels zusammen. Ähnlich liegen die Verhältnisse bei der Rückleitung des Stromes einer oberirdischen Leitung durch die Erde; auch hier drängen sich die Stromlinien des Rückstromes in der Erde bei höheren Frequenzen immer dichter unterhalb der Leitung zusammen, so daß der Rückstrom im wesentlichen in einem Kanal unterhalb der Leitung fließt, dessen Querschnitt bei höheren Frequenzen immer kleiner wird.

Die einseitige Stromverdrängung spielt eine Rolle bei den in die Nuten eines Eisenkörpers eingebetteten Kupferleitern der elektrischen Maschinen, Abb. 211. Das durch die Leiter erzeugte magnetische Feld hat Kraftlinien, die angenähert senkrecht aus den Zahnflanken austreten und nahezu geradlinig von der einen Zahnflanke zur anderen übergehen. Die Kraftlinien schließen sich im Eisen, wie in Abb. 211 angedeutet. Wird der magnetische Widerstand des Eisenweges gegen den des Luftweges vernachlässigt, so ist nach dem Durchflutungsgesetz die magnetische Feldstärke an jeder Stelle des Luftspaltes proportional dem darunter fließenden Strom. Wäre der Strom gleichmäßig über die Leiter verteilt, so würde die Feldverteilung die neben der Nut aufgezeichnete sein.

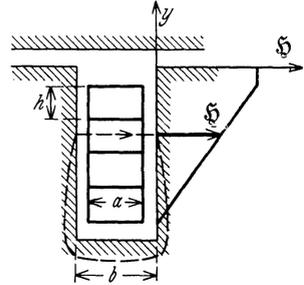


Abb. 211. Zur Untersuchung der einseitigen Stromverdrängung.

Bei Wechselstrom gilt innerhalb der Leiter die Gl. (811), wenn als positive Richtung für  $\mathfrak{C}$  die aus der Zeichenebene herauszeigende Richtung gewählt wird. Das Durchflutungsgesetz liefert, auf ein schmales, horizontales Rechteck in der Nut von der Höhe  $dy$  und der Breite  $b$  angewendet,

$$-\frac{d\mathfrak{S}}{dy} = \kappa \frac{a}{b} \mathfrak{C}. \tag{820}$$

In ähnlicher Weise wie oben lassen sich die beiden Gleichungen zu einer einzigen vereinigen mit der Lösung (812), wobei jedoch

$$\beta = \sqrt{\frac{a}{b} \pi j \kappa \mu}. \tag{821}$$

Daraus folgt für die magnetische Feldstärke

$$\mathfrak{S} = \frac{(1+j)\beta}{j\omega\mu} (c_1 e^{-\beta y - j\beta y} - c_2 e^{+\beta y + j\beta y}). \tag{822}$$

Die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  ergeben sich aus den Grenzbedingungen. Betrachten wir den  $p$ -ten Leiter der Nut von unten gezählt und legen wir den Nullpunkt der  $y$ -Achse in die untere Kante dieses Leiters, bezeichnen wir ferner mit  $I_1$  den Strom in einem einzelnen Leiter, so ist die Durchflutung der durch  $y=0$  definierten Kraftlinie  $(p-1)I_1$ , die Durchflutung der durch  $y=h$  gehenden Kraftlinie  $pI_1$ . Das Durchflutungsgesetz liefert daher für diese beiden Kraftlinien:

$$\begin{aligned} (p-1)I_1 &= -b \frac{(1+j)\beta}{j\omega\mu} (c_1 - c_2), \\ pI_1 &= -b \frac{(1+j)\beta}{j\omega\mu} [c_1 e^{-\beta h - j\beta h} - c_2 e^{+\beta h + j\beta h}], \end{aligned}$$

und es folgt durch Auflösen

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{j\omega\mu}{(1+j)b\beta} \frac{pI_1 - (p-1)I_1 e^{\beta h + j\beta h}}{2\mathfrak{C} \sin \beta(1+j)h}; \\ c_2 &= \frac{j\omega\mu}{(1+j)b\beta} \frac{pI_1 - (p-1)I_1 e^{-\beta h - j\beta h}}{2\mathfrak{C} \sin \beta(1+j)h}. \end{aligned} \right\} \tag{823}$$

Führt man diese Werte in Gl. (812) ein und berechnet die Stromdichte, so folgt

$$\overline{\mathcal{G}} = \frac{j\omega\kappa\mu}{(1+j)b\beta} \frac{pI_1\mathcal{C}\text{of}\beta(1+j)y - (p-1)I_1\mathcal{C}\text{of}\beta(1+j)(h-y)}{\mathcal{S}\text{in}\beta(1+j)h}. \quad (824)$$

Um den Effektivwert der Stromdichte hieraus berechnen zu können, muß man die Hyperbelfunktionen in die reellen und imaginären Teile zerlegen. Dazu dienen die beiden folgenden Formeln

$$\mathcal{S}\text{in}(x+jy) = \mathcal{S}\text{in}x\cos y + j\mathcal{C}\text{of}x\sin y, \quad (825)$$

$$\mathcal{C}\text{of}(x+jy) = \mathcal{C}\text{of}x\cos y + j\mathcal{S}\text{in}x\sin y. \quad (826)$$

Mit Hilfe dieser Formeln kann der Betrag von  $\overline{\mathcal{G}}$ , der den Effektivwert der Stromdichte angibt, gebildet werden.

Aus dem Effektivwert der Stromstärke ergeben sich die Verluste in einem Abschnitt von der Höhe  $dy$  des Stabes mit Hilfe von Gl. (92). Die Gesamtverluste in dem Stab erhält man durch Summieren der einzelnen Beiträge über die Höhe des Stabes:

$$N = al \int_0^h |\overline{\mathcal{G}}|^2 \frac{1}{\kappa} dy.$$

Der Wirkwiderstand  $R_1$  des Stabes ist definiert durch

$$N = I_1^2 R_1.$$

Durch Ausrechnung ergibt sich damit die folgende Beziehung

$$\frac{R_1}{R_0} = \varphi(x) + p(p-1)\psi(x), \quad (827)$$

in der  $R_0$  den Gleichstromwiderstand des Stabes bezeichnet,

$$R_0 = \frac{l}{\kappa ah}, \quad (828)$$

und

$$x = \beta h = h \sqrt{\frac{a}{b} \pi j \kappa \mu}. \quad (829)$$

Es bedeuten ferner

$$\varphi(x) = x \frac{\mathcal{S}\text{in}2x + \sin 2x}{\mathcal{C}\text{of}2x - \cos 2x}, \quad (830)$$

$$\psi(x) = 2x \frac{\mathcal{S}\text{in}x - \sin x}{\mathcal{C}\text{of}x + \cos x}. \quad (831)$$

Das erste Glied in Gl. (827) rührt her von dem Feld in dem Leiter allein. Das zweite Glied ist dadurch bedingt, daß das magnetische Feld der unterhalb des betreffenden

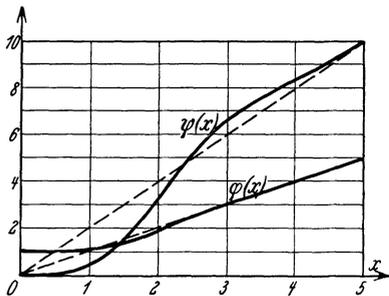


Abb. 212. Zur Berechnung der Widerstandserhöhung eines Leiters in der Nut.

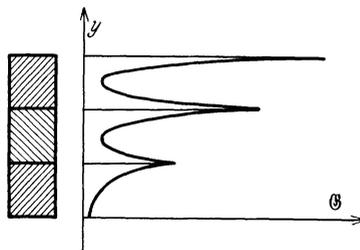


Abb. 213. Stromverteilung in den drei Leitern einer Nut.

Leiters liegenden Stäbe in dem betrachteten Leiter zusätzliche Wirbelströme hervorruft. Die Funktionen  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  sind in Abb. 212 dargestellt. Die Abb. 213 veranschaulicht die Stromverteilung in den drei Stäben einer Nut bei  $x=3$ .

Um die Widerstandserhöhung zu vermindern, stellt man die Leiter als Litze her, indem man sie unterteilt. Die einzelnen Drähte der Litze müssen dabei so durch

das Gesamtfeld des Leiters hindurchgeführt werden, daß der von je zwei Litzen-drähten umschlungene Fluß möglichst klein wird. Als Beispiel zeigt Abb. 214 die beiden Hälften eines „Schränkstabes“; die beiden Hälften werden ineinander gelegt, so daß alle Leiter einmal umeinander herumgeführt sind. Wie in

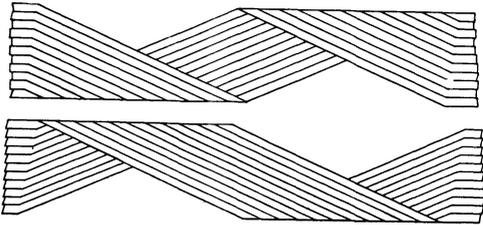


Abb. 214. Schränkstab.

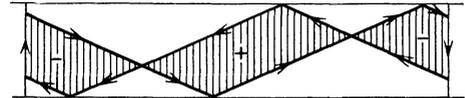


Abb. 215. Flußverketzung des Schränkstabes.

Abb. 215 veranschaulicht, heben sich die von zwei beliebigen Leitern und einer Stabhälfte umschlungenen Flüsse gerade auf; die beiden von den Pfeilen rechts umlaufenden und mit  $-$  bezeichneten Flächen ergeben zusammengesetzt eine Fläche, die gleichwertig der links umlaufenden  $+$ -Fläche ist.

Ein Beispiel für die Feldverdrängung geben die in Eisenblechpaketen entstehenden Wirbelströme. Die Wirbelströme umkreisen den Induktionsfluß innerhalb eines jeden Bleches, wie es Abb. 216 zeigt. Unter der Voraussetzung konstanter Permeabilität des Bleches und so kleiner Dicke  $d$  im Vergleich zur Breite  $b$ , daß die Wirbelströmung im wesentlichen geradlinig verläuft, gelten die Gl. (810) und (811) mit den Lösungen (812), (813) und (822). Legen wir den Nullpunkt der  $y$ -Achse in die Blechmitte und bezeichnen wir den Effektivwert der magnetischen Feldstärke an den Begrenzungsflächen des Bleches mit  $\mathfrak{H}_0$ , so ergeben sich die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  aus den Bedingungen

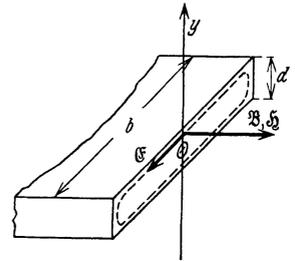


Abb. 216. Wirbelströme in einem Eisenblech.

$$\text{für } y = +\frac{d}{2}: \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 = \frac{(1+j)\beta}{j\omega\mu} \left( c_1 e^{-\beta(1+j)\frac{d}{2}} - c_2 e^{+\beta(1+j)\frac{d}{2}} \right);$$

$$\text{für } y = -\frac{d}{2}: \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 = \frac{(1+j)\beta}{j\omega\mu} \left( c_1 e^{+\beta(1+j)\frac{d}{2}} - c_2 e^{-\beta(1+j)\frac{d}{2}} \right).$$

Daraus folgt

$$c_1 = -c_2 = \frac{j\omega\mu\mathfrak{H}_0}{(1+j)\beta 2\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}\beta(1+j)\frac{d}{2}},$$

und es wird

$$\bar{\mathfrak{B}} = \mu\mathfrak{H}_0 \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}\beta(1+j)\frac{y}{d}}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}\beta(1+j)\frac{d}{2}}. \tag{832}$$

$$\bar{\mathfrak{G}} = -\frac{j\omega\mu\kappa}{(1+j)\beta} \mathfrak{H}_0 \frac{\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\beta(1+j)\frac{y}{d}}{\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}\beta(1+j)\frac{d}{2}}. \tag{833}$$

Für den Effektivwert der Stromdichte ergibt sich daraus

$$|\bar{\mathfrak{G}}| = \frac{\omega\mu}{2\beta} |\mathfrak{H}_0| \frac{|\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}2\beta y - \cos 2\beta y|}{|\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}\beta d + \cos \beta d|}. \tag{834}$$

In Abb. 217 ist die Verteilung der Induktion und der Stromdichte über den Querschnitt des Bleches veranschaulicht. Die magnetischen Kraftlinien werden nach außen hin zusammengedrängt.

Der ganze durch den Blechstreifen geführte Induktionsfluß ist

$$\bar{\Phi} = \int_{-d/2}^{+d/2} b \bar{\mathfrak{B}} dy = \frac{2\mu b \mathfrak{H}_0}{(1+j)\beta} \mathfrak{T}\mathfrak{g}\beta(1+j)\frac{d}{2}. \tag{835}$$

Er hat den Maximalwert

$$\sqrt{2} |\bar{\Phi}| = \frac{\sqrt{2} \mu b \xi_0}{\beta} \frac{|\zeta_0 \sqrt{\beta d - \cos \beta d}|}{|\zeta_0 \sqrt{\beta d + \cos \beta d}|}. \quad (836)$$

Daraus erhält man die mittlere Kraftliniendichte durch Division mit dem Querschnitt  $bd$  des Bleches; ihr zeitlicher Maximalwert ist:

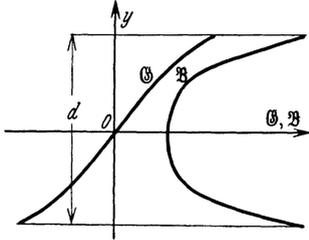


Abb. 217. Strom- und Feldverteilung in dem Eisenblech.

$$B_m = \sqrt{2} \mu \xi_0 \frac{1}{x} \sqrt{\frac{\zeta_0 |x - \cos x|}{\zeta_0 |x + \cos x|}}, \quad (837)$$

wobei  $x = \beta d$  (838)

gesetzt ist. Für die Verluste in der Volumeneinheit des Bleches ergibt sich, wenn an Stelle von  $\xi_0$  mit Hilfe von Gl. (837) die mittlere Induktion  $B_m$  eingeführt wird,

$$\frac{1}{\kappa d} \int_{-d/2}^{+d/2} |\bar{G}|^2 dy = \frac{1}{24} \kappa \omega^2 d^2 B_m^2 \frac{3}{x} \frac{\zeta_0 \sin x - \sin x}{\zeta_0 |x - \cos x|}. \quad (839)$$

Die hier vorkommende Funktion

$$F(x) = \frac{3}{x} \frac{\zeta_0 \sin x - \sin x}{\zeta_0 |x - \cos x|} \quad (840)$$

ist in Abb. 218 dargestellt. Die in einem aus derartigen Blechen zusammengesetzten Eisenkern mit dem Volumen  $V$  entstehenden Wirbelstromverluste betragen also

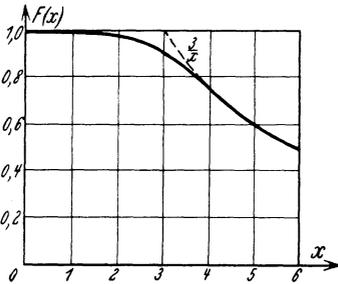


Abb. 218. Zur Berechnung der Wirbelstromverluste.

$$N_w = \frac{1}{24} \kappa \omega^2 d^2 B_m^2 V F(x). \quad (841)$$

Für kleine Werte von  $x$  ist  $F(x) \approx 1$ . Damit ergibt sich die Näherungsformel

$$N_w \approx \frac{1}{24} \kappa \omega^2 d^2 B_m^2. \quad (842)$$

Die Wirbelstromverluste wachsen also im Gebiet niedriger Frequenzen proportional mit dem Quadrat der Frequenz und dem der Blechdicke, so daß man durch Verkleinern der Blechdicke die Wirbelstromverluste reduzieren kann. Für große Werte von  $x$  ist

$$F(x) \approx \frac{3}{x}.$$

Im Gebiet hoher Frequenzen wachsen also die Verluste bei konstantem Induktionsfluß wie  $d\omega^{\frac{3}{2}}$ .

Befindet sich auf dem geschlossenen Eisenkern eine Wicklung mit  $w$  Windungen, und beträgt die mittlere Kraftlinienlänge  $l$ , so gilt nach dem Durchflutungsgesetz

$$\xi_0 = \frac{Iw}{l}.$$

Die in der Wicklung vom Induktionsfluß  $\Phi_g$  induzierte Spannung ist

$$u_s = w \frac{d\Phi_g}{dt},$$

oder unter Einführung der komplexen Größen

$$\underline{u}_s = j\omega w \bar{\Phi}_g.$$

Der Fluß  $\Phi_g$  ist durch die Summe der in den einzelnen Blechen geführten Flüsse gegeben. Bezeichnet man daher die Höhe des Eisenblechpaketes mit  $a$ , so gilt nach Gl. (835) für den Fluß

$$\bar{\Phi}_g = \frac{2\mu ab \xi_0}{(1+j)\beta d} \mathfrak{I}g\beta (1+j) \frac{d}{2}.$$

Damit kann man berechnen, wie groß der Beitrag des Eisenkernes zu dem komplexen Wechselstromwiderstand der Spule ist. Es ergibt sich

$$\Re = \frac{u_s}{I} = \frac{2\mu abj\omega w^2}{(1+j)\beta l d} \Im g\beta(1+j) \frac{d}{2}. \tag{843}$$

Für sehr niedrige Frequenzen folgt daraus

$$\Re = \frac{\mu ab w^2}{l} j\omega = j\omega L_0,$$

wenn mit

$$L_0 = \frac{\mu ab w^2}{l} \tag{844}$$

die Gleichstrominduktivität der Spule bezeichnet wird.

Allgemein wird damit nach Gl. (843)

$$\Re = L_0 \frac{2j\omega}{(1+j)\beta d} \Im g\beta(1+j) \frac{d}{2}.$$

Durch Zerlegen in den reellen und imaginären Teil findet man für die Wechselstrominduktivität der Spule

$$L = L_0 \frac{1}{x} \frac{\Im \sin x + \sin x}{\mathfrak{O}|\cos x|}, \tag{845}$$

und für den Wirbelstromwiderstand der Spule

$$R = \omega L_0 \frac{1}{x} \frac{\Im \sin x - \sin x}{\mathfrak{O}|\cos x|}. \tag{846}$$

Die Abb. 219 zeigt den Verlauf der beiden Funktionen

$$F_1(x) = \frac{1}{x} \frac{\Im \sin x + \sin x}{\mathfrak{O}|\cos x|}, \tag{847}$$

$$F_2(x) = \frac{1}{x} \frac{\Im \sin x - \sin x}{\mathfrak{O}|\cos x|}. \tag{848}$$

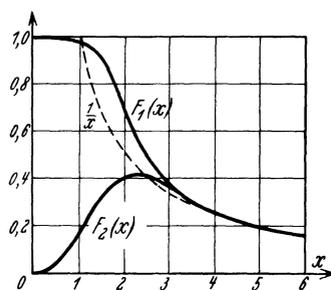


Abb. 219. Zur Berechnung von Induktivität und Wirkwiderstand.

Für niedrige Frequenzen ( $x < 0,5$ ) ergeben sich die Näherungsformeln

$$R \approx \omega L_0 \frac{x^2}{6} = \frac{1}{12} \kappa \mu \omega^2 d^2 L_0; \quad L \approx L_0. \tag{849}$$

Für hohe Frequenzen ( $x > 4$ ) wird angenähert

$$R = \omega L = \frac{\omega L_0}{x} = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{4\pi f}{\kappa \mu}} L_0. \tag{850}$$

**Zahlenbeispiel:** Eine Drosselspule habe eine Gleichstrominduktivität  $L_0=0,2\text{H}$ ; der Kern sei aus besonders starken Eisenblechen mit  $d=0,2\text{cm}$  zusammengesetzt. Die Leitfähigkeit des Eisens ist  $\kappa=7 \cdot 10^4\text{S/cm}$ ; die Permeabilität sei  $\mu_r=200$ . Dann ergibt sich

$$x = 0,2\text{cm} \sqrt{\pi f \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 200 \cdot 1,256 \cdot 10^{-8} \frac{\text{S}}{\text{cm cm}} \frac{\text{H}}{\text{cm}}} = 0,149 \sqrt{\frac{f}{\text{Hz}}}.$$

Die Näherungsformeln für hohe Frequenzen gelten also etwa oberhalb  $f=1000\text{Hz}$ . Hier nimmt die Induktivität umgekehrt proportional mit der Wurzel aus der Frequenz ab, während der Wirbelstromwiderstand im gleichen Maße zunimmt. In Abb. 220 sind die Größen  $R$  und  $L$  in Abhängigkeit von der Frequenz  $f$  dargestellt.

Wird in ein magnetisches Wechselfeld ein Metallblech gebracht, so entstehen in dem Blech Wirbelströme, die einen Teil der Energie des Feldes aufzehren. Man kann daher mit Hilfe von Metallblechen magnetische Wechselfelder abschirmen, z. B. die Streufelder einer Drosselspule dadurch, daß man die Spule in ein Blechgehäuse einschließt. Für solche elektromagnetische Schirme gelten die gleichen Gesetze wie sie hier betrachtet wurden. Die Wirbelstromverluste werden von dem Stromkreis gedeckt, der das magnetische Feld erzeugt. Besonders einfach liegt der Fall, wenn die Eindringtiefe

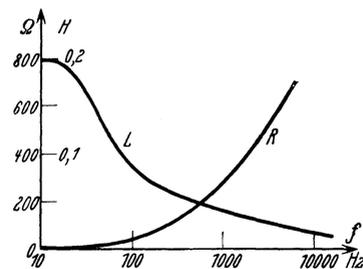


Abb. 220. Induktivität und Wirbelstromwiderstand in einer Drosselspule mit Eisenblechkern.

so klein ist, daß nur ein kleiner Bruchteil des Feldes durch die Blechplatte hindurchgelangt. Dann kann für die Stromdichte angesetzt werden

$$\bar{\mathcal{G}} = -\frac{j\omega\kappa\mu}{(1+j)\beta} \mathfrak{H}_0 e^{-\beta(1+j)y}, \quad (851)$$

wobei  $y$  der Abstand des betrachteten Punktes im Blech von der Blechoberfläche,  $\mathfrak{H}_0$  der Effektivwert der magnetischen Feldstärke an der Blechoberfläche und  $\beta = \sqrt{\pi f \kappa \mu}$  ist. Für die in der Flächeneinheit des Bleches in Wärme umgesetzte Verlustleistung ergibt sich

$$N_w = \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty |\bar{\mathcal{G}}|^2 dy = \mathfrak{H}_0^2 \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\kappa}}. \quad (852)$$

Die Schirmwirkung ist um so besser, je größer  $\beta$  ist. Große Leitfähigkeit ergibt daher eine gute Schirmwirkung und ist hinsichtlich der Verluste günstig, während hohe Permeabilität zwar für die Schirmwirkung vorteilhaft ist, aber zu größeren Verlusten führt. Um eine möglichst gute Schirmwirkung zu bekommen, verwendet man Doppelgehäuse, die innen aus Kupfer, außen aus Eisenblech bestehen. Das Kupferblech setzt die Feldstärke so weit herab, daß im Eisen keine erheblichen Verluste mehr entstehen können, während das Eisenblech für die Beseitigung des Restes der Felder dient.

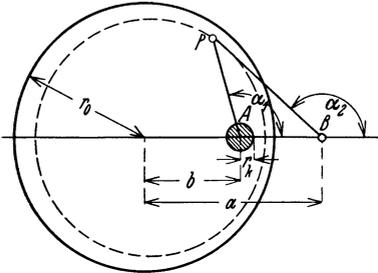


Abb. 221. Triebströme eines Induktionszählers.

In manchen Fällen kann man die Wirbelströmung angenähert berechnen, wenn man die Rückwirkung der Wirbelströme auf das erzeugte Feld vernachlässigt; das ist allgemein bei sehr niedrigen Frequenzen zulässig. Als Beispiel werde die Strömung in der Triebscheibe eines Wechselstromzählers betrachtet. Wir machen dabei die vereinfachende Annahme, daß der magnetische

Induktionsfluß in Form eines kreisförmigen Bündels mit dem gegen den Radius  $r_0$  der Triebscheibe kleinen Radius  $r_k$  durch die Triebscheibe hindurch geht, Abb. 221. In den außerhalb des Kraftlinienbündels liegenden Teilen der Blechscheibe gilt für jeden geschlossenen Weg, der mit dem Kraftlinienbündel nicht verkettet ist,

$$\oint \mathcal{E} d\mathfrak{s} = 0,$$

d. h. das elektrische Feld und damit das Strömungsfeld sind wirbelfrei. Es kann daher die elektrische Feldstärke aus einem skalaren Potential  $\varphi$  abgeleitet werden, für das die Potentialgleichung (354) gilt wie in einem stationären Strömungsfeld. Da die Strömung am Rand der Blechscheibe tangential verlaufen muß, so ist der Rand der Scheibe eine Stromlinie. Ferner müssen die das Kraftlinienbündel unmittelbar umgebenden Stromlinien aus Symmetriegründen konzentrische Kreise sein. Es ergibt sich also ein Stromlinienbild, das dem Bild der Niveaulinien des elektrischen Feldes zwischen zwei geraden parallelen Leitern entspricht, Abb. 75. Der Abstand des zweiten Leiters,  $B$  in Abb. 221, vom Mittelpunkt der Scheibe ist

$$a = \frac{r_0^2}{b}.$$

Die Niveaulinien des Wirbelstromfeldes sind Kreise, die die Strecke  $AB$  als Sehne haben. Das Potential ist in irgendeinem Punkt  $P$

$$\varphi = c(\alpha_2 - \alpha_1). \quad (853)$$

Die Konstante  $c$  wird aus dem Induktionsgesetz bestimmt, nach dem die Umlaufspannung um den Punkt  $A$  gleich der Abnahmegeschwindigkeit des Flusses ist. Geht man einmal um den Punkt  $A$  herum, so wächst  $\alpha_1$  von Null auf  $2\pi$ , während  $\alpha_2$  auf seinen Anfangswert zurückkommt. Es gilt daher, wenn mit  $\omega$  die Kreisfrequenz

des Wechselflusses in  $A$  bezeichnet wird, mit  $\bar{\Phi}$  der Zeiger des Maximalwertes,

$$-c2\pi = -j\omega\bar{\Phi},$$

also

$$\bar{\varphi} = \frac{j\omega\bar{\Phi}}{2\pi}(\alpha_2 - \alpha_1). \tag{854}$$

Für Punkte innerhalb des von Kraftlinien durchsetzten Teiles der Scheibe gilt für die elektrische Feldstärke nach dem Induktionsgesetz

$$\oint \mathcal{E} d\mathfrak{s} = |\mathcal{C}| 2\pi r = -j\omega\bar{\Phi} \frac{r^2}{r_k^2}. \tag{855}$$

Damit ist das Feld in jedem Punkt der Scheibe bekannt. Es ist jedoch zu beachten, daß dieses Resultat nur gilt, wenn das durch die Wirbelströme erzeugte magnetische Feld vernachlässigbar klein ist gegen das durch den Fluß  $\Phi$  gegebene ursprüngliche Feld.

### 31. Die Ummagnetisierungsverluste.

In einem Eisenkern, der einem magnetischen Wechselfeld ausgesetzt ist, entstehen neben den Wirbelstromverlusten noch Verluste infolge der Hystereseerscheinung. Beim Umklappen der Molekularmagnete wird der Wärmeinhalt der Moleküle vergrößert. Die Hystereseverluste können aus der Hystereseschleife berechnet werden. Es wird nach Abschnitt 26 bei der Magnetisierung eines Stoffes in der Volumeneinheit die Energie aufgenommen

$$W_1 = \int_0^{\mathfrak{H}} \mathfrak{H} d\mathfrak{B}. \tag{856}$$

Im magnetischen Wechselfeld pendelt die magnetische Erregung zwischen zwei Grenzen  $\pm \mathfrak{H}_m$ , Abb. 222. Das Integral (856) stellt in irgendeinem Zeitpunkt die in Abb. 222 schraffierte Fläche  $abcd$  dar, wenn mit der Berechnung im Punkt  $a$  begonnen wird. Während einer Periode durchläuft der Punkt  $b$  die ganze Hystereseschleife. Würden die beiden Äste der Hystereseschleife zusammenfallen, dann wäre die in der einen halben Periode vom Eisen aufgenommene Energie genau so groß wie die während der zweiten Halbperiode abgegebene. Da dies nicht der Fall ist, so bleibt bei einem vollen Umlauf eine Differenz zwischen aufgenommener und abgegebener Energie, die durch die von der Hystereseschleife berandete Fläche dargestellt wird. Diese Differenz ist die Arbeit, die während einer Periode im Eisen in Wärme umgewandelt wird. Bezeichnet man diese aus der Hystereseschleife zu berechnende Arbeit mit  $A_h$  und die Frequenz des Wechselstroms mit  $f$ , so ist also die Hystereseverlustleistung je Volumeneinheit  $fA_h$ . Hat der Eisenkern das Gesamtvolumen  $V$ , so wird die Hystereseverlustleistung

$$N_h = VfA_h. \tag{857}$$

Man bezieht diese Leistung meist auf die Gewichtseinheit, da sie proportional dem Volumen ist. Für jedes Material ist  $A_h$  eine bestimmte Funktion der Maximalinduktion  $B_m$ . Daher sind auch die auf die Gewichtseinheit bezogenen Hystereseverluste eine Funktion von  $B_m$ ; sie sind ferner proportional der Frequenz.

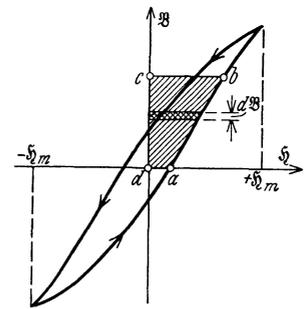


Abb. 222. Berechnung der Hystereseverluste.

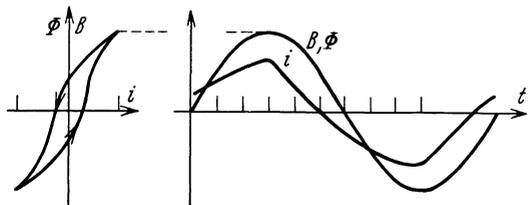


Abb. 223. Verzerrung der Stromkurve.

Infolge der Krümmung der Magnetisierungskurve entsteht bei sinusförmigem zeitlichen Verlauf des magnetischen Induktionsflusses und damit der induzierten elektromotorischen Kraft ein nicht sinusförmiger Strom, wie dies durch Abb. 223 für Verhältnisse, wie sie in der Starkstromtechnik vorkommen, veranschaulicht ist. Man kann eine nicht sinusförmige periodische Stromkurve nach Fourier in eine Reihe von Sinusströmen zerlegen:

$$i = I_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_1) + I_2 \sqrt{2} \sin(2\omega t + \varphi_2) + I_3 \sqrt{2} \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots, \quad (858)$$

wobei  $I_1, I_2, \dots, I_n$  usw. die Effektivwerte der Teilströme bezeichnen,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  usw. Phasenwinkel. Diese Größen können aus dem vorgegebenen Verlauf von  $i$  berechnet werden mit Hilfe der Formeln

$$I_n \sqrt{2} \cos \varphi_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} i \sin n\omega t dt; \quad (859)$$

$$I_n \sqrt{2} \sin \varphi_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} i \cos n\omega t dt. \quad (860)$$

Für den Effektivwert des zusammengesetzten Wechselstroms gilt ferner (siehe Abschnitt 32)

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}. \quad (861)$$

Zerlegt man nun im vorliegenden Fall den Strom  $i$  in die Grundwelle  $i_1$  und den Rest  $i_a$ , Abb. 224, so findet man, daß die Grundwelle eine Phasenverschiebung  $\psi$  gegen den Fluß aufweist, und zwar eilt die Grundwelle des Stromes dem Fluß um diesen Winkel  $\psi$  voraus. Um zu einer einfachen Darstellung dieser Verhältnisse zu kommen, denkt man sich den wirklichen Strom  $i$  ersetzt durch einen Sinusstrom, der

1. den gleichen Effektivwert hat,
2. die gleiche Frequenz wie die Grundschwingung des wirklichen Stromes und der
3. die gleichen Verluste bei gleicher Spannung ergeben würde wie der wirkliche Strom.

Um die letzte Forderung zu erfüllen, denkt man sich den Ohmschen Widerstand der Spule nach außerhalb verlegt. Dann ist die Spannung an der Spule gleich der Selbstinduktionsspannung  $-E_s$ , Abb. 204. Die Verluste sind nun

bestimmt durch die in Phase mit dieser Spannung liegende Komponente  $I_h$  des Ersatzstromes. Diese Komponente ist daher

$$I_h = \frac{N_h}{E_s}. \quad (862)$$

Der Winkel  $\delta$ , um den der Ersatzstrom dem Fluß  $\Phi$  voreilt, ist etwas verschieden von dem Winkel  $\psi$ , eine Ungenauigkeit, die man in Kauf nehmen muß, damit man das Zeigerdiagramm aufstellen kann. Den Ohmschen Spannungsabfall  $IR$  in der Spule, der in Phase mit dem Strom liegt, kann man nun berücksichtigen, wie es Abb. 225 zeigt. Auch die Wirbelstromverluste im Eisenkern haben eine Vergrößerung des Winkels  $\delta$  zwischen Strom und Fluß zur Folge, wie aus den Ergebnissen des vorigen Abschnittes hervorgeht. Man kann sich dies am einfachsten erklären, wenn man davon ausgeht, daß die Wirbelströme durch elektromotorische Kräfte im Eisenkern hervorgerufen werden, die in Phase mit  $E_s$  liegen, da sie die gleiche Ursache haben. Die Induktivität der Wirbelstrombahnen ist verhältnismäßig

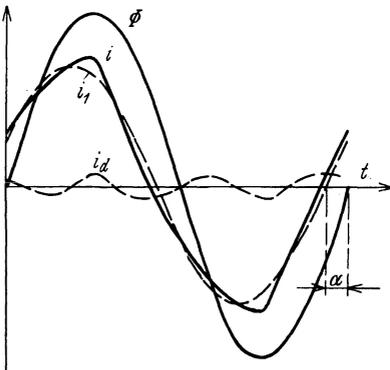


Abb. 224. Zerlegung der Stromkurve bei Hysterese.

klein, so daß die Wirbelströme praktisch die gleiche Phase wie  $E_s$  haben. Sie rufen eine zusätzliche Durchflutung hervor, die ebenfalls die gleiche Phase hat und den Fluß  $\Phi$  ändern würde. Da das Diagramm für den willkürlich angenommenen Fluß gelten soll, so muß zu  $I$  eine in Gegenphase zu  $E_s$  liegende Komponente hinzugefügt werden, die die Durchflutung der Wirbelströme aufhebt; das ist aber eine Komponente, die in Phase mit  $I_h$  liegt. Man bestimmt daher aus der Summe der Wirbelstrom- und Hystereseverluste  $N_v$  einen Wirkstrom

$$I_v = \frac{N_v}{E_s}, \tag{863}$$

der als maßgebend für die Phasenvoreilung des Stromes  $I$  gegen  $E_s$  angesehen wird, und an die Stelle von  $I_h$  in Abb. 225 tritt. Da die Wirbelstromverluste bei den in Betracht kommenden Frequenzen nach dem vorigen Abschnitt ungefähr proportional mit dem Quadrat der Frequenz wachsen, die Hystereseverluste dagegen nur proportional, so lassen sich die Gesamtverluste  $N_v$  leicht in diese beiden Werte zerlegen.

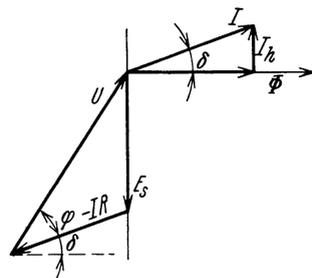


Abb. 225. Zeigerdiagramm einer Drosselspule mit Eisenkern.

Die folgende Tabelle gibt für einige Blechsarten gemessene Hysterese- und Wirbelstromverluste bei 50 Hz in W/kg an (Blechstärke 0,35 mm)<sup>1</sup>.

Maximale Induktion $B_m$ G	Unlegiertes Blech		Schwachlegiert 1% Si		Mittellegiert 2,5% Si		Hochlegiert 4% Si	
	$N_h$	$N_w$	$N_h$	$N_w$	$N_h$	$N_w$	$N_h$	$N_w$
2500	0,2	0,11	0,19	0,06	0,18	0,03	0,11	0,01
5000	0,64	0,33	0,59	0,20	0,52	0,11	0,32	0,04
7500	1,26	0,69	1,13	0,47	1,00	0,23	0,63	0,10
10000	2,20	1,15	1,90	0,78	1,68	0,38	1,06	0,16
12500	3,75	1,73	2,98	1,17	2,55	0,60	1,65	0,28
15000	6,31	2,28	5,13	1,65	3,76	0,86	2,52	0,37

In der Schwachstromtechnik teilt man die Ummagnetisierungsverluste in drei Teile:

**1. Hystereseverluste.** Sie sind, wie oben festgestellt, proportional der Frequenz  $f$  und dem Eisenvolumen  $V$ , ferner der von der Hystereseschleife eingeschlossenen Fläche. Es zeigt sich, daß bei kleinen Kraftliniendichten diese Fläche proportional der dritten Potenz der magnetischen Feldstärke  $H_m$  ist. Dies rührt daher, daß hier die Hystereseschleife durch zwei Parabeläste dargestellt werden kann, Abb. 226. Für den aufsteigenden Ast kann man setzen

$$B' = \mu_a H' + \nu H'^2, \tag{864}$$

wobei  $\mu_a$  die Anfangspermeabilität,  $\nu$  eine andere Materialkonstante bezeichnet. Diese Beziehung bildet den Anfang einer Potenzreihe; sie gilt auch für den absteigenden Ast, wenn man sie auf den anderen Eckpunkt der Schleife anwendet. Die in Abb. 226 schraffierte Fläche wird

$$\int_0^{2B_m} B'dH' = 2\mu_a H_m^2 + \frac{8}{3}\nu H_m^3.$$

Die ganze Rechteckfläche ist  $2B_m \cdot 2H_m$ .

Nun gilt aber nach Gl. (864)  $2B_m = 2\mu_a H_m + 4\nu H_m^2$ , (865)

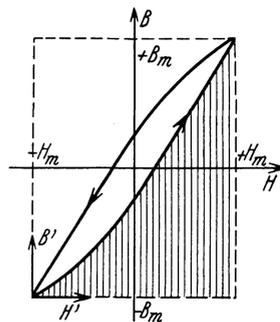


Abb. 226. Hystereseverluste bei kleinen Feldstärken.

<sup>1</sup> Handbuch der Physik 15, 182 u. 188. Berlin: Julius Springer 1927.

also ist die Rechteckfläche  $4\mu_a H_m^2 + 8\nu H_m^3$ .

Für die Fläche der Hystereseschleife ergibt sich damit

$$A_h = \frac{8}{3} \nu H_m^3,$$

und es folgt für die Hystereseverluste

$$N_h = \frac{8}{3} \nu f V H_m^3. \tag{866}$$

Man definiert den Hysteresewiderstand einer Spule durch die Beziehung

$$N_h = I^2 R_h. \tag{867}$$

Für diesen Widerstand gilt dann der Ansatz

$$R_h = k_1 I f, \tag{868}$$

in dem  $k_1$  für die betreffende Spule eine Konstante bezeichnet.

**2. Die Wirbelstromverluste.** Die Wirbelstromverluste sind im allgemeinen wie in der Starkstromtechnik bei den in Betracht kommenden Frequenzen proportional  $B_m^2$  und  $f^2$ . Kann man die Permeabilität bei den vorkommenden Stromstärken als nahezu konstant ansehen, so kann man unter Einführung des Wirbelstromwiderstandes setzen

$$N_w = I^2 R_w = k_2 I^2 f^2,$$

wobei also

$$R_w = k_2 f^2. \tag{869}$$

**3. Die Nachwirkungsverluste.** Es zeigt sich, daß die gesamten Verluste noch einen Rest enthalten, der proportional der Frequenz ist wie der Hystereseverlust, aber proportional dem Quadrat der Stromstärke wie der Wirbelstromverlust. Man führt diesen Rest auf molekulare Vorgänge zurück, die noch nicht näher bekannt sind, und die man als eine Art von Nachwirkungserscheinungen deuten kann. Für den entsprechenden Widerstand, den man als Nachwirkungswiderstand bezeichnet, gilt der Ansatz

$$R_n = k_3 f. \tag{870}$$

Die Summe der drei damit eingeführten Widerstände stellt den Verlustwiderstand dar; er hat die Größe

$$R_v = k_1 I f + k_2 f^2 + k_3 f,$$

und bildet die Differenz aus dem Wirkwiderstand der Spule  $R$  und dem Gleichstromwiderstand  $R_0$ :

$$R_v = R - R_0. \tag{871}$$

Zur Bestimmung der Verluste bei kleinen Feldstärken wird eine Ringspule mit einem Kern aus dem betreffenden Metall hergestellt und der Verlustwiderstand  $R_v$  in einer Wechselstrommeßbrücke gemessen. Die Abb. 227 zeigt die einfachste Form einer solchen Meßbrücke. Der Wechselstromgenerator  $S$  liefert den Wechselstrom mit der Frequenz  $f$ . Durch Verändern des Normalwiderstandes  $R_2$  und der Normalinduktivität (Induktionsvariometer)  $L$  kann der Ton im Fernhörer  $F$  zum Verschwinden gebracht werden. Dann gilt, da die Potentialdifferenz zwischen  $a$  und  $b$  durch die beiden Anschlußpunkte des Fernhörers halbiert wird,

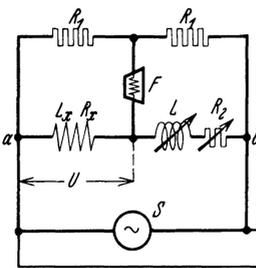
$$L_x = L, \quad R_x = R_2.$$

Abb. 227. Messung der Verluste bei kleinen Feldstärken.

Die Kraftliniendichte im Eisenkern der Spule kann aus der Spannung  $U$  berechnet werden, die halb so groß ist wie die vom Voltmeter angezeigte Spannung. Nach dem Induktionsgesetz ist der Maximalwert der magnetischen Induktion bei sinusförmigem Verlauf der Spannung

$$B_m = 4,44 q w f, \tag{872}$$

wobei mit  $q$  der Kernquerschnitt, mit  $w$  die Windungszahl der Spule bezeichnet ist.



Die Stromstärke in der Spule kann berechnet werden aus Gl. (779)

$$I = \frac{U}{\sqrt{R_x^2 + (2\pi f L_x)^2}},$$

oder wenn dafür gesorgt wird, daß der Wirkwiderstand hinreichend klein gegen den Blindwiderstand ist, aus

$$I = \frac{U}{2\pi f L_x}. \quad (873)$$

Damit kann die magnetische Feldstärke berechnet werden; ihr Maximalwert ist

$$H_m = \frac{I\sqrt{2}w}{l}, \quad (874)$$

wenn  $l$  die mittlere Kraftlinienlänge bezeichnet, und es ergibt sich die absolute Permeabilität des Kernes

$$\mu = \frac{B_m}{H_m} = \frac{l}{qw^2} L_x. \quad (875)$$

Die gesamten Eisenverluste haben die Größe

$$N_v = I^2 (R_x - R_0) = I^2 R_v.$$

Man zerlegt den Verlustwiderstand  $R_v$  in seine drei Bestandteile, indem man Messungen bei verschiedenen Stromstärken und verschiedenen Frequenzen ausführt. Es wird die Größe  $R_v/f$  für bestimmte Stromstärken in Abhängigkeit von der Frequenz

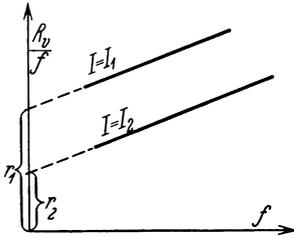


Abb. 228. Trennung der Verlustanteile.

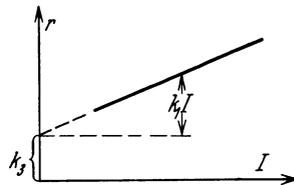


Abb. 229. Zur Berechnung der Verlustanteile.

aufgetragen, Abb. 228. Mit den durch die Meßpunkte gelegten geraden Linien ergeben sich die Abschnitte  $r_1$  und  $r_2$  auf der Ordinatenachse. Diese liefern, in Abhängigkeit von  $I$  aufgetragen, eine gerade Linie, Abb. 229, deren Schnitt mit der  $r$ -Achse den Wert  $k_3$  ergibt. Dann kann ferner

$$k_1 = \frac{r - k_3}{I} \quad (876)$$

berechnet werden und

$$k_2 = \frac{R_v - k_1 I f - k_3 f}{f^2}. \quad (877)$$

Eine nur vom Material abhängige Angabe für die Verluste erhält man, wenn man sie für jede Frequenz und jede Feldstärke auf die Gewichtseinheit bezieht.

Die Induktivität einer Spule wächst bei kleinen Stromstärken etwas mit dem Strom an. Nach Gl. (865) gilt für die Permeabilität

$$\mu = \frac{B_m}{H_m} = \mu_a + 2\nu H_m. \quad (878)$$

Man kann also bei kleinen Stromstärken eine Spule mit Eisenkern darstellen durch die Reihenschaltung aus einer Induktivität, die mit der Stromstärke linear anwächst, und einem Widerstand, der einen konstanten Anteil  $R_0$  enthält und einen Anteil  $R_v$ , der mit Frequenz und Stromstärke zunimmt.

In der komplexen Rechnung können die Ummagnetisierungsverluste einer Spule entweder durch einen Widerstand in Reihe mit der Spule oder durch einen Parallelwiderstand dargestellt werden. Eine andere Darstellung geht davon aus, daß infolge der Verluste der Strom dem Feld um einen Winkel  $\delta$  voreilt. Es ist also

$$\Im L = \bar{\Psi} e^{j\delta}$$

oder

$$\Im L e^{-j\delta} = \bar{\Psi}. \quad (879)$$

Die Eisenverluste können daher durch die Einführung einer komplexen Induktivität  

$$\mathfrak{L} = L e^{-j\delta} \tag{880}$$
 berücksichtigt werden.

Viertes Kapitel.

**Netzwerke und Kettenleiter.**

**32. Theorie der Stromverzweigungen bei Wechselstrom.**

Wenn es sich um verhältnismäßig langsam veränderliche Vorgänge handelt, dann kann man nach den vorhergehenden Abschnitten die Wirkung des elektrischen Feldes zwischen zwei Elektroden durch Kapazität und Ableitung eines Kondensators darstellen, der die beiden Elektroden miteinander verbindet, die Wirkung des magnetischen Feldes in einem Stromkreis durch Induktivität und Wirkwiderstand einer Spule, die von dem Strom durchflossen wird. Ein allgemeiner Stromkreis enthält daher die drei Elemente: Widerstand, Kapazität und Induktivität in irgendeiner Zusammensetzung. Die

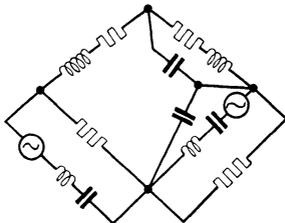


Abb. 230. Allgemeines Netzwerk.

Abb. 230 veranschaulicht ein derartiges „Netzwerk“. Die Ströme werden hervorgerufen durch eine oder mehrere Stromquellen, die durch ihre elektromotorischen Kräfte dargestellt sind. Um die Stromverteilung in derartigen allgemeinen Netzwerken zu berechnen, benutzt man zweckmäßig die komplexe Darstellung der Wechselstromzeiger. Die

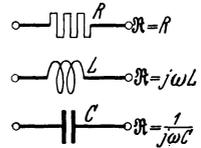


Abb. 231. Komplexe Operatoren der drei Grundelemente eines Netzwerkes.

drei Grundelemente des allgemeinen Netzes sind in Abb. 231 mit ihren komplexen Widerstandssymbolen dargestellt. Führt man diese Symbole ein, dann gilt das Ohmsche Gesetz

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{Z} \mathfrak{I}, \tag{881}$$

und es gelten, wie bei Gleichstrom, die Kirchhoffschen Gesetze und die aus ihnen abgeleiteten Regeln; es treten lediglich an die Stelle der reellen Größen beim Gleichstrom hier die komplexen. Mit diesen komplexen Größen kann daher genau so gerechnet werden, wie mit den Gleichstromgrößen. Werden z. B. zwei Widerstände  $\mathfrak{R}_1$  und  $\mathfrak{R}_2$  hintereinander geschaltet, so gilt für den Gesamtwiderstand

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2. \tag{882}$$

Bei Parallelschaltung der beiden Widerstände wird der Ersatzwiderstand

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2}. \tag{883}$$

Berechnet man den Widerstand zwischen zwei beliebigen Punkten einer Stromverzweigung, so ergibt sich im allgemeinen wieder eine komplexe Größe; der Widerstandsoperator läßt sich also in die Form bringen

$$\mathfrak{R} = x + jy, \tag{884}$$

wobei  $x$  und  $y$  reelle Widerstandswerte sind. Man bezeichnet  $x$  als den Wirkwiderstand,  $y$  als den Blindwiderstand zwischen den betreffenden Punkten. Der Wirkwiderstand ist maßgebend für die in dem Netzwerk umgesetzte Leistung, wenn eine Stromquelle an die beiden Punkte angelegt wird. Fließt dann ein Strom vom Effektivwert  $I$ , so ist die Leistung

$$N = I^2 x. \tag{885}$$

Das folgt ohne weiteres daraus, daß man sich  $\mathfrak{R}$  formal veranschaulicht denken kann durch eine Spule mit dem Widerstand

$$R = x$$

und der Induktivität

$$L = \frac{y}{\omega}.$$

Der Blindwiderstand bildet ein Maß für die in den magnetischen und elektrischen Feldern aufgespeicherte Energie. Sie schwankt zwischen Null und dem maximalen Betrag

$$W_m = \frac{1}{2} L (I \sqrt{2})^2 = I^2 \frac{y}{\omega}. \quad (886)$$

Um irgendeine Stromverzweigungsaufgabe mit Hilfe der komplexen Rechnung zu lösen, geht man grundsätzlich folgendermaßen vor. Man führt für alle Zweige des Netzwerkes die komplexen Symbole ein; die allgemeinste Form für den komplexen Widerstand eines Zweiges ist

$$\mathfrak{R}_v = R_v + j\omega L_v + \frac{1}{j\omega C_v}. \quad (887)$$

Dann bezeichnet man die Ströme in den einzelnen Zweigen mit  $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \dots, \mathfrak{I}_v$  usw. und legt in den einzelnen Zweigen willkürlich positive Pfeilrichtungen fest. Es werden ferner die elektromotorischen Kräfte durch komplexe Größen  $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \dots, \mathfrak{E}_v$  usw. dargestellt. Haben die elektromotorischen Kräfte verschiedene Frequenzen, so führt man die Rechnung für jede elektromotorische Kraft getrennt durch und superponiert die Teilergebnisse. Bei gleicher Frequenz der einzelnen elektromotorischen Kräfte müssen die Phasenverhältnisse berücksichtigt werden. Man kann z. B. den Zeiger einer der elektromotorischen Kräfte willkürlich in die reelle Achse legen:

$$\mathfrak{E}_1 = E_1;$$

dann gilt für die anderen

$$\mathfrak{E}_2 = E_2 e^{j\psi_1}, \quad \mathfrak{E}_3 = E_3 e^{j\psi_2}, \text{ usw.},$$

wobei  $E_1, E_2$  usw. die Effektivwerte bedeuten,  $\psi_1, \psi_2, \dots$  die Winkel, mit denen die einzelnen elektromotorischen Kräfte gegenüber  $\mathfrak{E}_1$  voreilen.

Nunmehr lassen sich die beiden Kirchhoffschen Sätze für sämtliche Knoten und Maschen des Netzes anschreiben:

$$\sum_v \mathfrak{I}_v = 0;$$

$$\sum_v \mathfrak{E}_v = \sum_v \mathfrak{I}_v \mathfrak{R}_v.$$

Damit erhält man, wie bei Gleichstrom, hinreichend viel Beziehungen zur Berechnung der unbekanntten Ströme. Auch die anderen in Abschnitt 4 aufgestellten Regeln zur Berechnung der Strom- und Spannungsverteilung können ohne weiteres angewendet werden.

Das Ergebnis der Rechnung hat ebenfalls komplexe Form, und es bedarf daher einiger Regeln zur Auswertung des Ergebnisses. War irgendein Strom oder eine Spannung,  $\mathfrak{A}_1$ , gegeben, und der Strom oder die Spannung,  $\mathfrak{A}_2$ , in einem anderen Zweig zu berechnen, so läßt sich das Resultat der Rechnung schreiben

$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{R}. \quad (888)$$

Hier ist  $\mathfrak{R}$  ein komplexer Faktor, der in die Form gebracht werden kann

$$\mathfrak{R} = x + jy, \quad (889)$$

wobei also  $x$  und  $y$  aus der Rechnung hervorgehen. Zur Auswertung dieses Ergebnisses dienen nun folgende Regeln:

1. Um die Effektivwerte von Strom oder Spannung zu finden, bildet man auf beiden Seiten der Gl. (888) die absoluten Beträge der komplexen Größen, also

$$A_2 = A_1 |\mathfrak{R}|,$$

oder

$$A_2 = A_1 \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (890)$$

Ist z. B.  $\mathfrak{U}_1$  ein Strom  $I$ ,  $\mathfrak{U}_2$  eine Spannung  $U$ , so wird  $\mathfrak{R}$  ein Widerstand  $\mathfrak{R}$  und es gilt

$$U = I \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Man nennt den Betrag von  $\mathfrak{R}$  den Scheinwiderstand

$$R_s = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (891)$$

da sich aus ihm die Effektivwerte von Spannung und Strom genau so berechnen lassen wie bei Gleichstrom.

2. Um den Phasenwinkel zwischen  $\mathfrak{U}_1$  und  $\mathfrak{U}_2$  zu finden, berücksichtigt man, daß die Multiplikation einer komplexen Zahl  $\mathfrak{U}_1$  mit einer anderen komplexen Zahl  $\mathfrak{R}$  eine Multiplikation des Betrages mit dem Betrag von  $\mathfrak{R}$  bedeutet und eine Drehung um den Winkel, den  $\mathfrak{R}$  mit der reellen Achse bildet. Dieser Winkel ist nach Abb. 232 bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad (892)$$

und es eilt also  $\mathfrak{U}_2$  der Größe  $\mathfrak{U}_1$  um diesen Winkel  $\varphi$  vor.

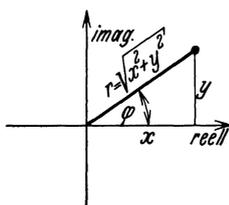


Abb. 232. Berechnung des Phasenwinkels.

3. Da die komplexen Ströme und Spannungen als Symbole für die Zeiger aufzufassen sind, so ergeben sich die Augenblickswerte, wenn man die Zeiger mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotieren läßt und ihre Projektion auf eine feste Zeitlinie ermittelt. Die Multiplikation einer komplexen Größe mit dem Faktor  $e^{j\varphi}$  ergibt eine Drehung um den Winkel  $\varphi$ ; die Multiplikation mit  $e^{j\omega t}$  liefert also die Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Als Zeitlinie wählt man am einfachsten die reelle oder imaginäre Achse; man hat dann lediglich den reellen oder imaginären Teil zu bilden. Stellen die

Zeiger Effektivwerte dar, so hat man noch mit  $\sqrt{2}$  zu multiplizieren, um die Maximalwerte zu erhalten.

Bei Wahl der reellen Achse als Zeitlinie ist z. B. der zeitliche Verlauf von  $\mathfrak{U}_1$  durch

$$a_1 = \text{Reeller Teil von } \{\mathfrak{U}_1 \sqrt{2} e^{j\omega t}\} \quad (893)$$

gegeben. Die dazugehörigen Augenblickswerte von  $\mathfrak{U}_2$  folgen dann aus

$$a_2 = \text{Reeller Teil von } \{\mathfrak{U}_1 \mathfrak{R} \sqrt{2} e^{j\omega t}\}. \quad (894)$$

Bei jeder Aufgabe kann man die Richtung eines beliebigen Zeigers willkürlich wählen; die anderen Richtungen sind dann eindeutig bestimmt. Legt man z. B.  $\mathfrak{U}_1$  in die reelle Achse, so wird aus Gl. (893)

$$a_1 = A_1 \sqrt{2} \cos \omega t$$

und

$$a_2 = \text{Reeller Teil von } \{A_1 \sqrt{2} (x + jy) (\cos \omega t + j \sin \omega t)\},$$

oder

$$a_2 = A_1 \sqrt{2} (x \cos \omega t - y \sin \omega t), \quad (895)$$

$$a_2 = A_1 \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi). \quad (896)$$

### Beispiele:

1. Zwei Spulen  $R_1, L_1$  und  $R_2, L_2$  seien parallel geschaltet. Mit Hilfe eines Amperemeters wird der Gesamtstrom  $I$  gemessen. Zu berechnen sei der Spannungsabfall an den beiden Spulen und die Phasenverschiebung zwischen den Teilströmen und dem Gesamtstrom.

Die komplexen Widerstände der beiden Spulen sind

$$\mathfrak{R}_1 = R_1 + j\omega L_1; \quad \mathfrak{R}_2 = R_2 + j\omega L_2.$$

Daher ist der Ersatzwiderstand der Parallelschaltung

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2} = \frac{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2)}{R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2)}.$$

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{I} \mathfrak{R},$$

Die Spannung wird also der Effektivwert

$$U = I |\mathfrak{R}| = I \frac{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2} \sqrt{R_2^2 + (\omega L_2)^2}}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 (L_1 + L_2)^2}}.$$

Für den Teilstrom im Widerstand  $\Re_1$  gilt ferner

$$\begin{aligned} \Im_1 &= \Im \frac{\Re_2}{\Re_1 + \Re_2} = \Im \frac{R_2 + j\omega L_2}{R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2)} \\ &= \Im \frac{(R_2 + j\omega L_2)(R_1 + R_2 - j\omega(L_1 + L_2))}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2(L_1 + L_2)^2} = \Im \frac{R_2(R_1 + R_2) + \omega^2 L_2(L_1 + L_2) + j\omega(L_2 R_1 - L_1 R_2)}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2(L_1 + L_2)^2}. \end{aligned}$$

Der Winkel, unter dem  $\Im_1$  dem Gesamtstrom  $\Im$  voreilt, ist also bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega(L_2 R_1 - L_1 R_2)}{R_2(R_1 + R_2) + \omega^2 L_2(L_1 + L_2)}.$$

Genau so gilt für den anderen Zweig

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\omega(L_1 R_2 - L_2 R_1)}{R_1(R_1 + R_2) + \omega^2 L_1(L_1 + L_2)}.$$

Wenn also z. B.

$$i = I\sqrt{2} \cos \omega t,$$

so wird

$$i_1 = I\sqrt{2} \sqrt{\frac{R_2^2 + (\omega L_2)^2}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2(L_1 + L_2)^2}} \cos(\omega t + \varphi_1).$$

Liegt das Resultat in Form eines Bruches vor, dann läßt sich der Winkel gegen die reelle Achse einfacher so bestimmen, daß man ihn als Differenz der Winkel von Zähler und Nenner berechnet; denn es gilt für zwei komplexe Zahlen  $\mathfrak{A}_1$  und  $\mathfrak{A}_2$ :

$$\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}_2} = \frac{|\mathfrak{A}_1| e^{j\varphi_1}}{|\mathfrak{A}_2| e^{j\varphi_2}} = \frac{|\mathfrak{A}_1|}{|\mathfrak{A}_2|} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Es war z. B.

$$\Im_1 = \Im \frac{R_2 + j\omega L_2}{R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2)}.$$

Der Winkel des Zählers ist

$$\varphi'_1 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega L_2}{R_2},$$

der Winkel des Nenners

$$\varphi'_2 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega(L_1 + L_2)}{R_1 + R_2},$$

daher der gesuchte Winkel

$$\varphi_1 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega L_2}{R_2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega(L_1 + L_2)}{R_1 + R_2}.$$

2. Es sei die Empfindlichkeit der Schering-Brücke, Abb. 132, zu untersuchen. Für den Strom im Nullzweig kann sofort die Gl. (29) übernommen werden, wenn alle Widerstände, Ströme und Spannungen durch die entsprechenden komplexen Größen ersetzt werden. Mit den Bezeichnungen der Abb. 10 wird

$$\begin{aligned} \Re_1 &= \frac{1}{j\omega C_1}; & \Re_2 &= \frac{1}{(\delta + j)\omega C}; \\ \Re_3 &= \frac{R_3}{1 + j\omega C_3 R_3}; & \Re_4 &= R_4. \end{aligned}$$

Die Brücke sei nahezu abgeglichen, so daß

$$\begin{aligned} C &= C_0(1 + \Delta C), \\ \delta &= \delta_0 + \Delta\delta, \end{aligned}$$

wenn mit  $C_0$  und  $\delta_0$  die exakten Werte der Kapazität und der Ableitung bezeichnet werden. Die Größen  $\Delta C$  und  $\Delta\delta$  geben ein Maß für die Abweichung der wirklichen Werte von den genauen Werten. Berücksichtigt man, daß die Größen  $C_0$  und  $\delta_0$  den Gl. (490) und (491) genügen, und daß  $\delta_0$  klein gegen 1 ist, so ergibt sich die Näherungsformel

$$\Re_2 \Re_3 - \Re_1 \Re_4 = -\frac{R_3}{j\omega C} (\Delta C - j\Delta\delta).$$

Der Strom im Nullzweig wird unter den gleichen Vernachlässigungen

$$\begin{aligned} \Im_5 &= E \frac{-\frac{R_3}{j\omega C} (\Delta C - j\Delta\delta)}{\left[ \frac{R_4}{j\omega C} + \Re_5 \left( \frac{1}{j\omega C} + R_4 \right) \right] \left( \frac{1}{j\omega C_1} + R_3 \right) + \frac{R_3}{j\omega C_1} \left( \frac{1}{j\omega C} + R_4 \right)}. \end{aligned}$$

Führt man hier ein

$$C = \frac{R_3 C_1}{R_4},$$

so folgt

$$\Im_5 = E j\omega C_1 R_3 \frac{\Delta C - j\Delta\delta}{(1 + j\omega C_1 R_3) [R_3 + R_4 + \Re_5 (1 + j\omega C_1 R_3)]}.$$

Praktisch ist  $\omega C_1 R_3$  klein gegen 1 und  $\Re_5$  nahezu reell,  $\Re_5 = R_5$ ; dann folgt

$$I_5 = \omega C_1 R_3 E \frac{\sqrt{\Delta_C^2 + \Delta_j^2}}{R_3 + R_4 + R_5} \tag{897}$$

Hieraus kann man nun umgekehrt die Unempfindlichkeit der Brücke berechnen, wenn die kleinste Stromstärke  $I_5$  bekannt ist, die vom Nullinstrument noch angezeigt wird. Es ist

$$\Delta = \sqrt{\Delta_C^2 + \Delta_j^2} = \frac{R_3 + R_4 + R_5 I_5}{\omega C_1 R_3 E} \tag{898}$$

Wenn z. B. die einem gerade noch wahrnehmbaren Ausschlag entsprechende Stromstärke beträgt und

$$E = 100 \text{ kV}, \quad f = 50 \text{ Hz}, \quad R_3 = 120 \Omega, \quad R_4 = 318 \Omega, \quad R_5 = 200 \Omega, \quad C_1 = 100 \mu\mu\text{F},$$

so wird

$$\Delta = \frac{638 \Omega}{314 \cdot 100 \cdot 10^{-12} \cdot 318 \text{ s}^{-1} \text{ F} \Omega} \frac{5 \cdot 10^{-8} \text{ A}}{10^5 \text{ V}} = 3,2 \cdot 10^{-5}.$$

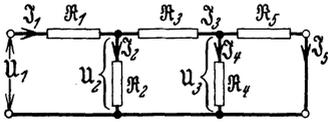


Abb. 233. Berechnung eines allgemeinen Kettenleiters.

Es können also Kapazitätsunterschiede von 0,03‰ und Verlustwinkelunterschiede von 0,00003 gerade noch wahrgenommen werden.

3. Es sei der Strom  $I_5$  im letzten Glied des Kettenleiters, Abb. 233, zu berechnen, wenn die Anfangsspannung  $U_1$  gegeben ist.

Man drückt bei derartigen Aufgaben Spannungen und Ströme in den einzelnen Abschnitten des Kettenleiters durch den gesuchten Strom aus, indem man beim Ende des Kettenleiters beginnt. Es ist

$$\begin{aligned} U_3 &= I_5 \Re_5; \\ I_4 &= \frac{U_3}{\Re_4} = I_5 \frac{\Re_5}{\Re_4}; \\ I_3 &= I_5 + \frac{U_3}{\Re_4} = I_5 \left( 1 + \frac{\Re_5}{\Re_4} \right); \\ U_2 &= U_3 + I_3 \Re_3 = I_5 \left( \Re_5 + \Re_3 + \frac{\Re_3 \Re_5}{\Re_4} \right); \\ I_2 &= \frac{U_2}{\Re_2}; \quad I_1 = I_3 + I_2; \\ U_1 &= U_2 + I_1 \Re_1 = I_5 \left( \Re_5 + \Re_3 + \frac{\Re_3 \Re_5}{\Re_4} + \Re_1 + \frac{\Re_1 \Re_5}{\Re_4} + \frac{\Re_1 (\Re_3 + \Re_5)}{\Re_2} + \frac{\Re_1 \Re_3 \Re_5}{\Re_2 \Re_4} \right). \end{aligned}$$

4. Die Gegeninduktion zwischen einzelnen Zweigen kann meist am einfachsten durch Einführung der Ersatzbilder berücksichtigt werden. Als Beispiel werde die Genauigkeit eines Stromwandlers untersucht. Der Stromwandler, Abb. 234, dient zur Messung starker Ströme

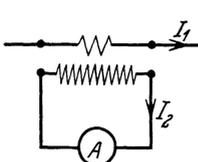


Abb. 234. Untersuchung eines Stromwandlers.

und hat daher eine Primärwicklung mit wenigen Windungen, durch die der zu messende Strom fließt, und eine Sekundärwicklung mit vielen Windungen, an die der Strommesser angeschlossen wird. Das Verhältnis von Primärstrom zu Sekundärstrom wäre im Idealfall durch das Verhältnis von Sekundärwindungszahl  $w_2$  zu Primärwindungszahl  $w_1$  gegeben. Wegen der Streuung

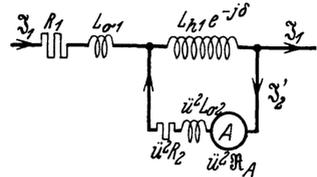


Abb. 235. Ersatzbild des Stromwandlers.

und der Verluste weicht der wirkliche Sekundärstrom etwas von dem Idealwert ab. Man bezeichnet als Stromfehler die Größe

$$\Delta = \frac{I_2 - I_{2s}}{I_{2s}} 100\%, \tag{899}$$

wobei  $I_{2s}$  den aus der Übersetzung berechneten Sollwert darstellt. Außerdem ist der Phasenwinkel zwischen den beiden Strömen nicht genau  $180^\circ$  wie im Idealfall, sondern etwas kleiner. Den Unterschied bezeichnet man als den Fehlwinkel  $\varepsilon$  des Wandlers.

Mit Hilfe des Ersatzschemas des Transformators, Abb. 196, lassen sich die Fehler aus den Bestimmungsgrößen des Wandlers berechnen. Bezeichnet man den komplexen Widerstand des Amperemeters  $A$  mit  $\Re_A$ , so ergibt sich das in Abb. 235 dargestellte Schema, in dem die Eisenverluste durch den Verlustwinkel  $\delta$  berücksichtigt sind (siehe Abschn. 31).

$$\text{Setzt man zur Abkürzung } R_2 + j\omega L_{02} + \mathfrak{R}_A = R_s e^{j\varphi}, \quad (900)$$

so folgt aus der Stromverzweigung sofort

$$\mathfrak{I}'_2 = \frac{\mathfrak{I}'_2}{\ddot{u}} = -\mathfrak{I}'_1 \frac{j\omega L_{h1} e^{-j\delta}}{j\omega L_{h1} e^{-j\delta} + \ddot{u}^2 R_s e^{j\varphi}} = -\mathfrak{I}'_1 \frac{1}{1 + \frac{\ddot{u}^2 R_s}{j\omega L_{h1}} e^{j(\varphi+\delta)}},$$

$$\text{oder } \mathfrak{I}'_2 = -\ddot{u} \mathfrak{I}'_1 \frac{1}{1 + \frac{R_s}{\omega L_{h2}} [\sin(\varphi+\delta) - j\cos(\varphi+\delta)]}.$$

Da die Fehler nur klein sind, ergeben sich damit die Näherungsformeln

$$\Delta = -\frac{R_s}{\omega L_{h2}} \sin(\varphi+\delta); \quad (901)$$

$$\varepsilon = \frac{R_s}{\omega L_{h2}} \cos(\varphi+\delta). \quad (902)$$

Die Fehler wachsen also proportional mit dem Gesamtwiderstand  $R_s$  auf der Sekundärseite.

Nichtsinusförmige Wechselströme und -spannungen lassen sich allgemein durch Fouriersche Reihen darstellen. Für eine beliebige periodische Funktion  $F(t)$  mit der Periode  $T$  gilt danach

$$F(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t + A_3 \sin 3\omega t + \dots \\ + B_0 + B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 2\omega t + B_3 \cos 3\omega t + \dots \quad (903)$$

Dabei ist

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (904)$$

die Kreisfrequenz der Grundschwingung;  $B_0$  ist der Mittelwert der Funktion  $F(t)$ :

$$B_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt, \quad (905)$$

und es ergeben sich die Koeffizienten der Sinus- und Kosinusglieder in Übereinstimmung mit Gl. (859) und (860) aus

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin n\omega t dt, \\ B_n &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos n\omega t dt. \end{aligned} \right\} \quad (906)$$

Der Vorteil der Fourierschen Darstellung periodischer Funktionen für die Theorie der Wechselströme liegt darin, daß man in vielen Fällen die Wirkung jeder einzelnen Teilschwingung für sich untersuchen darf, so wie wenn die anderen nicht da wären. Dann gelten für die Teilschwingungen die Regeln der komplexen Rechnung, wie bei einfachen Sinusströmen und -spannungen. Diese Überlagerung ist theoretisch immer zulässig, wenn zwischen den Spannungen und Strömen lineare Beziehungen bestehen. Genau genommen trifft dies jedoch nie zu. Alle Widerstandswerte z.B. hängen wegen der Erwärmung durch den Strom etwas von der Stromstärke ab. Die Induktivität ist stromabhängig, wenn im magnetischen Feld ferromagnetische Stoffe vorhanden sind. Dem idealen linearen Gebilde am nächsten kommen die Kondensatoren, wenn die Elektroden mechanisch genügend starr sind; Elektrodenschwingungen, die infolge der Einwirkung der Feldkräfte entstehen können, bewirken auch hier nichtlineare Erscheinungen.

Die Wirkung einer Nichtlinearität werde an einem einfachen Beispiel betrachtet. Der Widerstand eines Drahtes läßt sich bei kleinen Temperaturänderungen darstellen durch

$$R = R_0(1 + \alpha \vartheta). \quad (907)$$

Die Temperaturerhöhung  $\vartheta$  ist ziemlich genau proportional der in der Zeiteinheit entwickelten Wärme, also dem Quadrat der Stromstärke, wenn es sich um geringe Temperaturerhöhungen handelt:

$$R = R_0(1 + \beta i^2). \quad (608)$$

Der Einfachheit halber werde angenommen, daß die Wärmeträgheit des Drahtes vernachlässigbar,  $\beta$  also unabhängig von der Stromänderung sei. Fließt durch den Draht ein Strom von der Form

$$i = I_1 \sqrt{2} \sin \omega_1 t + I_2 \sqrt{2} \sin \omega_2 t, \quad (909)$$

so folgt für den Widerstand

$$R = R_0 [1 + \beta (I_1^2 + I_2^2) - \beta I_1^2 \cos 2\omega_1 t - \beta I_2^2 \cos 2\omega_2 t + 2\beta I_1 I_2 (\cos(\omega_1 - \omega_2)t - \cos(\omega_1 + \omega_2)t)]. \quad (910)$$

Für die Spannung an dem Draht ergibt sich mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes nach einigen einfachen Umformungen

$$\begin{aligned} u = & I_1 R_0 \sqrt{2} [1 + \frac{3}{2} \beta I_1^2 + 3\beta I_2^2] \sin \omega_1 t + I_2 R_0 \sqrt{2} [1 + 3\beta I_1^2 + \frac{3}{2} \beta I_2^2] \sin \omega_2 t - \\ & - I_1^3 \frac{\beta R_0}{\sqrt{2}} \sin 3\omega_1 t - I_2^3 \frac{\beta R_0}{\sqrt{2}} \sin 3\omega_2 t - \\ & - I_1^2 I_2 \frac{3}{\sqrt{2}} \beta R_0 [\sin(2\omega_1 + \omega_2)t - \sin(2\omega_1 - \omega_2)t] - \\ & - I_2^2 I_1 \frac{3}{\sqrt{2}} \beta R_0 [\sin(2\omega_2 + \omega_1)t - \sin(2\omega_2 - \omega_1)t]. \end{aligned} \quad (911)$$

Die Wirkung der Nichtlinearität ist also eine zweifache. Zunächst wird die Amplitude jeder Grundschwingung beeinflußt durch die andere und ferner ergeben sich „Oberschwingungen“ ( $3\omega_1$ ,  $3\omega_2$ ) und „Kombinationsschwingungen“ ( $2\omega_1 + \omega_2$ ,  $2\omega_1 - \omega_2$ ,  $2\omega_2 + \omega_1$ ,  $2\omega_2 - \omega_1$ ). Dies gilt auch, wenn mehr als zwei Teilschwingungen vorhanden sind und andere nichtlineare Beziehungen zwischen Strom und Spannung bestehen. Die Zahl der Kombinationsschwingungen kann außerordentlich groß werden; ihre Frequenzen haben allgemein die Form  $p\omega_1 \pm q\omega_2 \pm r\omega_3$  usw., wobei  $p$ ,  $q$ ,  $r$  ganze Zahlen sind.

Die Einrichtungen und Apparate der Elektrotechnik sucht man im allgemeinen so herzustellen, daß die nichtlinearen Wirkungen möglichst gering sind. In der Starkstromtechnik sind Oberschwingungen und Kombinationsschwingungen unerwünscht wegen der durch sie verursachten zusätzlichen Verluste und wegen der Beeinflussung von Schwachstromanlagen. In der Fernsprechtechnik müssen Oberschwingungen und Kombinationsschwingungen der Fernsprechströme vermieden werden, weil sie die Verständlichkeit der Sprache beeinträchtigen. Meist gilt daher das Gesetz der ungestörten Überlagerung der Teilschwingungen mit einer brauchbaren Annäherung.

In Sonderfällen arbeitet man absichtlich mit nichtlinearen Gebilden, z. B. bei der Gleichrichtung von Wechselströmen oder bei der Frequenzverdopplung. Ein Beispiel aus der elektrischen Nachrichtentechnik bildet die sogenannte Amplitudenmodulation. Man versteht darunter die Veränderung der Amplitude eines einfachen Wechselstromes („Trägerstrom“) derart, daß der zeitliche Verlauf der Amplitude der gleiche ist wie der der ursprünglichen Nachrichtenströme (Signalströme). Ist also der zeitliche Verlauf der Nachrichtenströme durch irgendeine Funktion  $F(t)$  der Zeit gegeben, so kann der modulierte Trägerstrom dargestellt werden durch

$$i = I \sqrt{2} [1 + kF(t)] \sin \Omega t. \quad (912)$$

Man nennt  $\Omega$  die Trägerfrequenz und bezeichnet  $k$  als den Modulationsgrad, wenn die Funktion  $F$  so gewählt ist, daß sie zwischen  $+1$  und  $-1$  schwankt. Die Abb. 236 veranschaulicht den zeitlichen Verlauf eines modulierten Stromes. Durch

Gleichrichtung dieses Stromes kann wieder der Nachrichtenstrom  $F(t)$  gewonnen werden.

Der modulierte Wechselstrom wird gewöhnlich in Einrichtungen zu dem Empfangsort geleitet, die als linear angesehen werden können. Dann kann man den Vorgang der Übertragung untersuchen, indem man den modulierten Strom wieder in einzelne Sinusschwingungen zerlegt; die Übertragung einer jeden Teilschwingung kann dann getrennt untersucht werden. Stellt man zunächst die Funktion  $F$  nach Fourier durch eine Reihe von einfachen Sinusschwingungen dar, so gilt für jede Teilschwingung mit der Frequenz  $\omega$  und der Amplitude  $a$

$$i = I \sqrt{2} [1 + k a \sin(\omega t + \varphi)] \sin \Omega t. \quad (913)$$

Durch eine einfache Umformung erhält man

$$i = I \sqrt{2} \sin \Omega t - \frac{k a}{\sqrt{2}} I \cos((\Omega + \omega)t + \varphi) + \frac{k a}{\sqrt{2}} I \cos((\Omega - \omega)t - \varphi). \quad (914)$$

Der modulierte Trägerstrom besteht also aus drei Teilschwingungen mit den Kreisfrequenzen

$$\Omega, \quad \Omega + \omega \quad \text{und} \quad \Omega - \omega.$$

Die Teilschwingungen der Funktion  $F(t)$  füllen im allgemeinen ein ganzes Frequenzband aus, z. B. bei der gewöhnlichen Telephonie das Band zwischen 300 und 2500 Hz. Dann ergeben sich im modulierten Strom zwei „Seitenbänder“, die durch Abb. 237 veranschaulicht sind. Damit im Empfangsapparat wieder

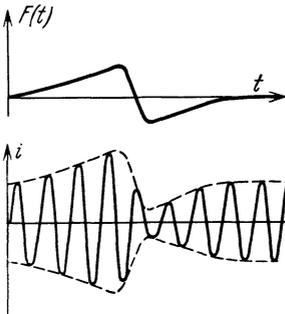


Abb. 236. Beispiel einer Amplitudenmodulation.

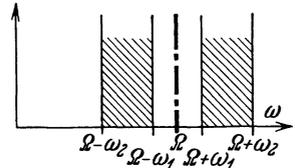


Abb. 237. Frequenzbänder bei Amplitudenmodulation.

der durch  $F(t)$  gegebene zeitliche Verlauf der Signalströme hergestellt werden kann, ist es also notwendig, daß alle Teilschwingungen, die in diese beiden Bänder fallen, zum Empfänger übertragen werden. In manchen Fällen geringerer Ansprüche an die Genauigkeit der Übertragung ist es zulässig, eines der beiden Seitenbänder zu unterdrücken („Einseitenband-Übertragung“). Sei z. B.

$$F(t) = \sin \omega_1 t + a \sin \omega_2 t, \quad (915)$$

so wird bei Unterdrückung des unteren Seitenbandes

$$i = I \sqrt{2} \left[ \sin \Omega t - \frac{k}{2} \cos(\Omega + \omega_1)t - a \frac{k}{2} \cos(\Omega + \omega_2)t \right],$$

oder 
$$i = I \sqrt{2} \left[ 1 + \frac{k}{2} \sin \omega_1 t + a \frac{k}{2} \sin \omega_2 t \right] \sin \Omega t -$$

$$- I \sqrt{2} \frac{k}{2} [\cos \omega_1 t + a \cos \omega_2 t] \cos \Omega t. \quad (916)$$

Die Amplitudenkurve dieses Stromes ist gegeben durch

$$\varphi(t) = \sqrt{\left(1 + \frac{k}{2} \sin \omega_1 t + a \frac{k}{2} \sin \omega_2 t\right)^2 + \frac{k^2}{4} (\cos \omega_1 t + a \cos \omega_2 t)^2},$$

oder 
$$\varphi(t) = \sqrt{1 + \frac{k^2(1+a^2)}{4} + kF(t) + \frac{ak^2}{2} \cos(\omega_2 - \omega_1)t}. \quad (917)$$

Läßt man den Strom  $i$  auf eine nichtlineare Einrichtung wirken (Gleichrichter, Demodulator) mit einer quadratischen Charakteristik, bei der also ein Stromverlauf hergestellt wird, der proportional dem Quadrat von  $i$  ist, so ergibt sich der gleichgerichtete Strom durch Bildung von  $\varphi^2(t)$ . Er enthält, wie Gl. (917) zeigt, wieder die ursprüngliche Funktion  $F$ . Daneben tritt aber noch eine Schwingung mit der Differenz der beiden Teilschwingungen auf, die im Signalstrom nicht enthalten war.

Man ersieht jedoch, daß diese „Differenzschwingung“ relativ um so kleiner wird, je kleiner der Modulationsgrad ist, so daß man damit ein Mittel hat, die Ungenauigkeiten der Einseitenband-Übertragung praktisch genügend klein zu halten.

Die Effektivwerte nichtsinusförmiger Wechselströme und Spannungen werden wie die rein sinusförmiger definiert durch die Gleichstromwerte, die die gleiche Wärmewirkung ergeben. Es ist

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt; \quad U = \frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt. \quad (918)$$

Stellt man Strom und Spannung in der allgemeinen Form dar

$$i = I_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_1) + I_2 \sqrt{2} \sin(2\omega t + \varphi_2) + I_3 \sqrt{2} \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots, \quad (919)$$

$$u = U_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_1) + U_2 \sqrt{2} \sin(2\omega t + \varphi_2) + U_3 \sqrt{2} \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots, \quad (920)$$

so folgt mit Hilfe der Beziehungen (918) für die Effektivwerte

$$\left. \begin{aligned} I &= \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}, \\ U &= \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots}. \end{aligned} \right\} \quad (921)$$

Die im Mittel in einen Verbraucher bei der Spannung  $u$  und dem Strom  $i$  fließende Leistung, die sogenannte Wirkleistung, ist

$$N = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt. \quad (922)$$

Durch Ausführung der Integration erhält man

$$N = U_1 I_1 \cos(\varphi_1 - \psi_1) + U_2 I_2 \cos(\varphi_2 - \psi_2) + U_3 I_3 \cos(\varphi_3 - \psi_3) + \dots \quad (923)$$

Neben diesen Größen verwendet man häufig noch die Blindleistung

$$N_b = U_1 I_1 \sin(\varphi_1 - \psi_1) + U_2 I_2 \sin(\varphi_2 - \psi_2) + U_3 I_3 \sin(\varphi_3 - \psi_3) + \dots \quad (924)$$

Das ist die Größe, die ein nach dem Prinzip des Elektrodynamometers arbeitender Leistungsmesser anzeigt, wenn in den Strompfad oder in den Spannungspfad eine Phasenverschiebung von  $90^\circ$  eingeführt wird. Eine physikalische Bedeutung hat diese Größe nicht.

Man definiert ferner die Scheinleistung durch

$$N_s = UI. \quad (925)$$

Während jedoch bei sinusförmigem Wechselstrom die Beziehung besteht

$$N_s = \sqrt{N^2 + N_b^2}, \quad (926)$$

gilt, wie sich mit den Gl. (923), (924) und (925) ergibt, bei nichtsinusförmigem Strom etwas Ähnliches nicht.

Den Leistungsfaktor kann man bei sinusförmigem Wechselstrom auf folgende drei Arten definieren, die einander gleichwertig sind:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad \cos \varphi &= \cos(\varphi_1 - \psi_1); \\ 2. \quad \cos \varphi &= \frac{N}{N_s}; \\ 3. \quad \cos \varphi &= \frac{N}{\sqrt{N^2 + N_b^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (927)$$

Wie man aus den Gl. (923), (924) und (925) erkennt, ergeben jedoch diese drei Definitionen bei nichtsinusförmigem Strom verschiedene Werte, und es ist keine dieser drei Definitionen richtiger als die andere, weil bei nichtsinusförmigem Strom alle drei willkürlich sind. Da jedoch bei den Stromkurven der modernen Wechselstromnetze die Unterschiede zwischen den drei Definitionen sehr gering sind (sie

betragen bei einer Oberschwingung von 10% erst 0,1%), so benützt man in der Starkstromtechnik den Begriff des Leistungsfaktors zur Kennzeichnung der Stromaufnahme bei gegebener Wirkleistung und Spannung, auch wenn es sich um wirkliche Wechselströme handelt.

### 33. Vierpole und Kettenleiter.

Unter einem Vierpol versteht man ein Netzwerk, das zwei Eingangs- und zwei Ausgangsklemmen besitzt und der Übertragung elektrischer Energie dient. Will man besonders kennzeichnen, daß in dem Vierpol keine Energiequellen vorhanden sind, so spricht man von einem passiven Vierpol. In Abb. 238 ist ein allgemeiner passiver Vierpol mit den Eingangsklemmen 1, 2 und den Ausgangsklemmen 3, 4 dargestellt. Die Rechtecke bedeuten irgendwelche Anordnungen aus Widerständen, Kondensatoren und Spulen. Man kann nun zeigen, daß ein solcher Vierpol immer auf eine einfache Stern- oder Dreieckschaltung von drei komplexen Widerständen zurückgeführt werden kann. Dazu benutzt man den in Abschnitt 4 abgeleiteten Umwandlungssatz, der wie alle Stromverzweigungsgesetze auch für die komplexen Wechselstromwiderstände gilt. In Abb. 239 ist veranschaulicht, wie sich durch Umwandlung der jeweils mit einem unterstrichenen Buchstaben bezeichneten Sterne in das vollständige Vieleck und Zusammenfassen der parallel liegenden Widerstände die Anordnung schrittweise umformen läßt. Es ergibt sich schließlich im allgemeinen Fall ein Netz von der Form C, also ein vollständiges Viereck. Dieses

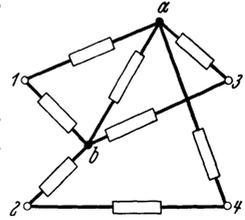


Abb. 238. Allgemeiner Vierpol.

Netz läßt sich nicht weiter vereinfachen, wenn gefordert wird, daß es bei beliebigen Potentialen der vier Klemmen die gleichen Ströme aufnehmen soll wie das ursprüngliche Netz. Dagegen ist eine weitere Vereinfachung möglich, wenn die Anordnung als Vierpol verwendet werden soll, wenn also die Klemmen 1 und 2 Eingangsklemmen, die Klemmen 3 und 4 Ausgangsklemmen sind. Dann ist der bei 2 austretende Strom gleich dem bei 1 eintretenden und der bei 3 austretende Strom gleich dem bei 4 eintretenden. Bezieht man die Potentiale der vier Klemmen alle auf die Klemme 2 und bezeichnet man das Potential der Klemme 4 mit  $\varphi$ , so sind die vier Potentiale

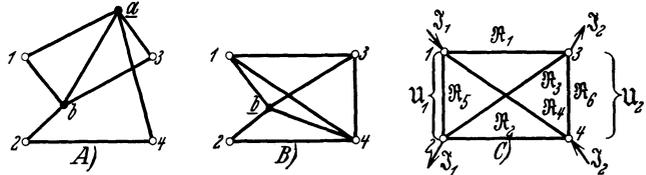


Abb. 239. Umwandlung des allgemeinen Vierpols.

$$\begin{aligned} & u_1 \text{ an Klemme 1,} \\ & 0 \text{ an Klemme 2,} \\ & \varphi + u_2 \text{ an Klemme 3,} \\ & \varphi \text{ an Klemme 4.} \end{aligned}$$

Auf Grund des ersten Kirchhoffschen Satzes gilt dann für die in die Klemmen eintretenden oder die austretenden Ströme

$$\begin{aligned} \text{Klemme 1 } \mathfrak{I}_1 &= \frac{u_1}{\mathfrak{R}_5} + \frac{u_1 - \varphi - u_2}{\mathfrak{R}_1} + \frac{u_1 - \varphi}{\mathfrak{R}_4}; \\ \text{Klemme 2 } \mathfrak{I}_1 &= \frac{u_1}{\mathfrak{R}_5} + \frac{\varphi}{\mathfrak{R}_2} + \frac{\varphi + u_2}{\mathfrak{R}_3}; \\ \text{Klemme 3 } \mathfrak{I}_2 &= -\frac{u_2}{\mathfrak{R}_6} + \frac{u_1 - \varphi - u_2}{\mathfrak{R}_1} - \frac{\varphi + u_2}{\mathfrak{R}_3}; \\ \text{Klemme 4 } \mathfrak{I}_2 &= -\frac{u_2}{\mathfrak{R}_6} + \frac{\varphi - u_1}{\mathfrak{R}_4} + \frac{\varphi}{\mathfrak{R}_2}. \end{aligned}$$

Aus den beiden ersten und den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\varphi = \mathfrak{U}_1 \mathfrak{R}_0 \left( \frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{\mathfrak{R}_4} \right) - \mathfrak{U}_2 \mathfrak{R}_0 \left( \frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{\mathfrak{R}_3} \right),$$

wobei

$$\frac{1}{\mathfrak{R}_0} = \frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{\mathfrak{R}_2} + \frac{1}{\mathfrak{R}_3} + \frac{1}{\mathfrak{R}_4}$$

gesetzt ist. Führt man dies in die zweite und vierte Gleichung ein, so ergibt sich

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{U}_1 \left[ \frac{1}{\mathfrak{R}_5} + \mathfrak{R}_0 \left( \frac{1}{\mathfrak{R}_2} + \frac{1}{\mathfrak{R}_3} \right) \left( \frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{\mathfrak{R}_4} \right) \right] + \mathfrak{U}_2 \mathfrak{R}_0 \left( \frac{1}{\mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_4} - \frac{1}{\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2} \right). \quad (928)$$

$$-\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{U}_1 \mathfrak{R}_0 \left( \frac{1}{\mathfrak{R}_3 \mathfrak{R}_4} - \frac{1}{\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2} \right) + \mathfrak{U}_2 \left[ \frac{1}{\mathfrak{R}_6} + \mathfrak{R}_0 \left( \frac{1}{\mathfrak{R}_2} + \frac{1}{\mathfrak{R}_4} \right) \left( \frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{\mathfrak{R}_3} \right) \right]. \quad (929)$$

Hieraus folgt der Umkehrungssatz

$$\left( \frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{U}_2} \right)_{\mathfrak{U}_1=0} = - \left( \frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{U}_1} \right)_{\mathfrak{U}_2=0}, \quad (930)$$

der aussagt, daß eine am Anfang eines beliebigen Vierpols wirkende Spannung  $\mathfrak{U}$  in dem kurzgeschlossenen Ende den gleichen Strom  $\mathfrak{S}$  hervorruft wie ihn die gleiche Spannung in dem kurzgeschlossenen Anfang verursachen würde, wenn sie zwischen den beiden Ausgangsklemmen tätig wäre, Abb. 240.

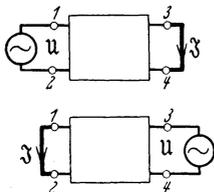


Abb. 240. Umkehrungssatz.

Die Gl. (928) und (929) kann man durch Auflösen nach  $\mathfrak{U}_1$  und  $\mathfrak{S}_1$  in die Form bringen

$$\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{U}_2 + \mathfrak{B} \mathfrak{S}_2, \quad (931)$$

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{A}_2 \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{C} \mathfrak{U}_2, \quad (932)$$

worin  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  Koeffizienten sind, die sich durch die komplexen Widerstände ausdrücken lassen. Es ergibt sich aus Gl. (931) und (932)

$$\left( \frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{U}_2} \right)_{\mathfrak{U}_1=0} = - \frac{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2}{\mathfrak{B}} + \mathfrak{C},$$

$$\left( \frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{U}_1} \right)_{\mathfrak{U}_2=0} = \frac{1}{\mathfrak{B}}.$$

Der Umkehrungssatz zeigt also, daß zwischen den vier Koeffizienten die Beziehung besteht

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B} \mathfrak{C} = 1. \quad (933)$$

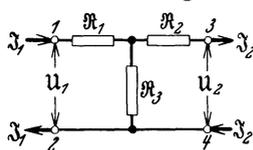


Abb. 241. Darstellung des Vierpols durch eine Sternschaltung.

Für den in Abb. 241 dargestellten Vierpol, bei dem  $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$  und  $\mathfrak{R}_3$  beliebige komplexe Widerstände bezeichnen, kann man leicht die folgenden Gleichungen ableiten

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 + \frac{1}{\mathfrak{R}_3} (\mathfrak{U}_2 + \mathfrak{S}_2 \mathfrak{R}_2) = \mathfrak{S}_2 \left( 1 + \frac{\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_3} \right) + \frac{\mathfrak{U}_2}{\mathfrak{R}_3};$$

$$\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}_2 + \mathfrak{S}_2 \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{S}_1 \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{U}_2 \left( 1 + \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}_3} \right) + \mathfrak{S}_2 \left( \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \frac{\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_3} \right).$$

Es ist hier also

$$\mathfrak{A}_1 = 1 + \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}_3}; \quad (934)$$

$$\mathfrak{A}_2 = 1 + \frac{\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_3}; \quad (935)$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \frac{\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_3}; \quad (936)$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{\mathfrak{R}_3}. \quad (937)$$

Umgekehrt kann man daher jeden beliebigen Vierpol durch die Sternschaltung, Abb. 241, darstellen. Für die Dreieckform des Vierpols, Abb. 242, ergibt sich

in ähnlicher Weise

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{R}_1 &= 1 + \frac{\mathfrak{R}_3}{\mathfrak{R}_2}; \\ \mathfrak{R}_2 &= 1 + \frac{\mathfrak{R}_3}{\mathfrak{R}_1}; \end{aligned} \right\} \quad (938)$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{R}_3; \quad (939)$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{\mathfrak{R}_2} + \frac{\mathfrak{R}_3}{\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2}. \quad (940)$$

Auch durch die Dreieckform kann daher beliebige Vierpol dargestellt werden; dies folgt ferner daraus, daß der Stern in ein Dreieck umgewandelt werden kann.

Bei einem symmetrischen Vierpol, der dadurch gekennzeichnet ist, daß die Übertragungseigenschaften für beide Richtungen die gleichen sind, muß  $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2$  sein. Daher folgt aus den obigen Gleichungen

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2. \quad (941)$$

Die Ersatzschaltungen beliebiger Vierpole können durch Messung der Leerlauf- und Kurzschlußwiderstände auf beiden Seiten des Vierpols ermittelt werden. Aus dem Ersatzbild, Abb. 241, folgt z. B. für den Widerstand zwischen den Eingangsklemmen bei offenen Ausgangsklemmen der primäre Leerlaufwiderstand

$$\mathfrak{R}_{01} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_3. \quad (942)$$

Der sekundäre Leerlaufwiderstand ist

$$\mathfrak{R}_{02} = \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3. \quad (943)$$

Für den Widerstand zwischen den Eingangsklemmen bei kurzgeschlossenen Ausgangsklemmen, den primären Kurzschlußwiderstand, ergibt sich

$$\mathfrak{R}_{k1} = \mathfrak{R}_1 + \frac{\mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_3}{\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3}, \quad (944)$$

und für den sekundären Kurzschlußwiderstand

$$\mathfrak{R}_{k2} = \mathfrak{R}_2 + \frac{\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_3}{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_3}. \quad (945)$$

Da nur drei Bestimmungsstücke vorhanden sind, so sind diese vier Widerstände nicht unabhängig voneinander; es gilt vielmehr allgemein für jeden passiven Vierpol wie mit den Gl. (942) . . . (945) leicht nachzuweisen ist,

$$\frac{\mathfrak{R}_{k1}}{\mathfrak{R}_{k2}} = \frac{\mathfrak{R}_{01}}{\mathfrak{R}_{02}}. \quad (946)$$

Diese Beziehung kann benützt werden, wenn einer der vier Widerstände der Messung nicht zugänglich ist.

Aus den gemessenen Kurzschluß- und Leerlaufwiderständen können die Ersatzwiderstände  $\mathfrak{R}_1$ ,  $\mathfrak{R}_2$  und  $\mathfrak{R}_3$  berechnet werden. Für die Sternschaltung ergibt sich z. B. durch Auflösen der Gl. (942) . . . (945)

$$\mathfrak{R}_3 = \sqrt{\mathfrak{R}_{02}(\mathfrak{R}_{01} - \mathfrak{R}_{k1})}; \quad (947)$$

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_{01} - \mathfrak{R}_3; \quad (948)$$

$$\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_{02} - \mathfrak{R}_3. \quad (949)$$

**Zahlenbeispiel:** Durch Messung seien die folgenden Widerstandswerte bestimmt worden: Leerlaufwiderstand der Primärseite:

Wirkwiderstand = 1200 Ω, Blindwiderstand = 2000 Ω induktiv.

Leerlaufwiderstand der Sekundärseite:

Wirkwiderstand = 200 Ω, Blindwiderstand = 2000 Ω kapazitiv.

Kurzschlußwiderstand der Primärseite:

Wirkwiderstand = 1792 Ω, Blindwiderstand = 3920 Ω induktiv.

Es ist also

$$\mathfrak{R}_{01} = (1200 + j2000) \Omega,$$

$$\mathfrak{R}_{02} = (200 - j2000) \Omega,$$

$$\mathfrak{R}_{k1} = (1792 + j3920) \Omega.$$

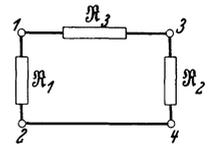


Abb. 242. Darstellung des Vierpols durch eine Dreieckschaltung.

Damit wird

$$\Re_{02}(\Re_{01} - \Re_{k1}) = (200 - j2000)(-592 - j1920)\Omega^2 = (-3,96 + j0,800) \cdot 10^6 \Omega^2 = -4,04 \cdot 10^6 e^{-j11^\circ 25'} \Omega^2,$$

und

$$\overline{\Re_{02}(\Re_{01} - \Re_{k1})} = j\sqrt{4,04 \cdot 10^6} e^{-j\frac{11^\circ 25'}{2}} \Omega = 2010(0,0995 + j0,995)\Omega = (200 + j2000)\Omega.$$

Es folgt für die Ersatzwiderstände

$$\begin{aligned} \Re_1 &= 1000\Omega, \\ \Re_2 &= -j4000\Omega, \\ \Re_3 &= 200\Omega + j2000\Omega. \end{aligned}$$

Für die betreffende Frequenz kann also  $\Re_1$  durch einen Ohmschen Widerstand,  $\Re_2$  durch einen Kondensator ohne Ableitung und  $\Re_3$  durch eine Spule dargestellt werden.

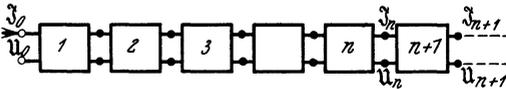


Abb. 243. Homogener Kettenleiter.

Kettenleiter entstehen, wenn mehrere Vierpole hintereinander geschaltet werden. Insbesondere ergibt sich ein homogener Kettenleiter, wenn die einzelnen Vierpole unter sich gleich

sind. Sind die Vierpole außerdem symmetrisch, so entsteht ein symmetrischer homogener Kettenleiter. Besonders die letztgenannte Form hat vielfache Anwendungen gefunden. Bezeichnet man die Spannungen und Ströme hinter dem  $n$ -ten Vierpol eines solchen Kettenleiters so wie in Abb. 243, so gelten die Vierpolgleichungen (931), (932) mit Gl. (941):

$$\mathbf{U}_n = \mathfrak{A} \mathbf{U}_{n+1} + \mathfrak{B} \mathfrak{I}_{n+1}; \tag{950}$$

$$\mathfrak{I}_n = \mathfrak{C} \mathfrak{I}_{n+1} + \mathfrak{U} \mathbf{U}_{n+1}. \tag{951}$$

Man kann hier die Abhängigkeit der Spannungen und Ströme von  $n$  durch die Ansätze

$$\mathbf{U}_n = a e^{ng}; \quad \mathfrak{I}_n = b e^{ng}$$

berücksichtigen, wobei  $a$ ,  $b$  und  $g$  zunächst unbestimmte Konstanten sind. Führt man diese Ansätze in die Gl. (950) und (951) ein, so folgt

$$a = a \mathfrak{A} e^g + b \mathfrak{B} e^g; \tag{952}$$

$$b = b \mathfrak{C} e^g + a \mathfrak{U} e^g; \tag{953}$$

es fällt also  $n$  heraus. Durch Auflösen nach  $\mathfrak{A}$  ergibt sich unter Berücksichtigung der Gl. (933) in der Form  $\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}\mathfrak{C} = 1$ :

$$\frac{1}{2}(e^g + e^{-g}) = \mathfrak{C} \mathfrak{U} e^g = \mathfrak{A}, \tag{954}$$

und ferner

$$\frac{a}{b} = -\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C} \sin g}. \tag{955}$$

Da der Hyperbelkosinus eine gerade Funktion ist, so stellen  $+g$  und  $-g$  mögliche Lösungen dar. Zu den beiden Werten von  $g$  gehören also zwei Werte von  $a/b$ :

$$\frac{a}{b} = \mp \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C} \sin g} = \mp \frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{\mathfrak{C}^2 \mathfrak{U}^2 - 1}} = \mp \sqrt{\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}}; \tag{956}$$

man setzt

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}} \tag{957}$$

und bezeichnet diese Größe als den Wellenwiderstand des Kettenleiters, da sie einen Widerstand darstellt, der in einer Analogie zu der entsprechenden Größe der Leitungstheorie steht (siehe Abschnitt 35). Für die Spannung hinter dem  $n$ -ten Glied gilt nunmehr der vollständige Ansatz

$$\mathbf{U}_n = \alpha_1 e^{ng} + \alpha_2 e^{-ng}, \tag{958}$$

und für den Strom

$$\mathfrak{I}_n = -\frac{\alpha_1}{\mathfrak{Z}} e^{ng} + \frac{\alpha_2}{\mathfrak{Z}} e^{-ng}. \tag{959}$$

Die beiden Konstanten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  können durch die Spannung  $\mathbf{U}_0$  und den Strom  $\mathfrak{I}_0$

am Eingang des Kettenleiters ausgedrückt werden. Für  $n = 0$  gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 &= \alpha_1 + \alpha_2, \\ \mathfrak{Z}_0 &= -\frac{\alpha_1}{\mathfrak{Z}} + \frac{\alpha_2}{\mathfrak{Z}}; \end{aligned}$$

daraus folgt

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2}(\mathbf{u}_0 - \mathfrak{Z}_0 \mathfrak{Z}); \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2}(\mathbf{u}_0 + \mathfrak{Z}_0 \mathfrak{Z}). \end{aligned}$$

Führt man dies in die Gl. (958), (959) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n &= \mathbf{u}_0 \operatorname{Cof} n g - \mathfrak{Z}_0 \mathfrak{Z} \operatorname{Sin} n g; \\ \mathfrak{Z}_n &= \mathfrak{Z}_0 \operatorname{Cof} n g - \frac{\mathbf{u}_0}{\mathfrak{Z}} \operatorname{Sin} n g. \end{aligned}$$

Man kann umgekehrt aus diesen Gleichungen  $\mathbf{u}_0$  und  $\mathfrak{Z}_0$  ausrechnen, wenn  $\mathbf{u}_n$  und  $\mathfrak{Z}_n$  gegeben sind. Bei der Umformung hat man zu berücksichtigen, daß

$$\operatorname{Cof}^2 n g - \operatorname{Sin}^2 n g = 1,$$

und es ergibt sich

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_n \operatorname{Cof} n g + \mathfrak{Z}_n \mathfrak{Z} \operatorname{Sin} n g; \tag{960}$$

$$\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{Z}_n \operatorname{Cof} n g + \frac{\mathbf{u}_n}{\mathfrak{Z}} \operatorname{Sin} n g. \tag{961}$$

Diese sogenannten Kettenleitergleichungen setzen also Anfangsspannung und -strom in Beziehung zu Spannung und Strom hinter dem  $n$ -ten Kettenleiterglied; sie gelten auch für das Ende des Kettenleiters, wenn dieser  $n$  Glieder hat. Zwischen Spannung und Strom am Ende des Kettenleiters gilt ferner

$$\mathbf{u}_n = \mathfrak{Z}_n \mathfrak{R}_n, \tag{962}$$

wenn der Kettenleiter mit einem Widerstand  $\mathfrak{R}_n$  abgeschlossen ist. Ist eine der vier Größen  $\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{u}_n$  und  $\mathfrak{Z}_0$ ,  $\mathfrak{Z}_n$  gegeben, so können mit Hilfe der drei Gl. (960), (961) und (962) die drei anderen berechnet werden. Auch der ganze Kettenleiter kann als ein Vierpol aufgefaßt werden, für den die Gl. (931), (932) und (933) gelten.

Besonders einfach werden die Verhältnisse, wenn der Kettenleiter an seinem Ende mit einem Widerstand von der Größe

$$\mathfrak{R}_n = \mathfrak{Z}$$

abgeschlossen ist. Man bezeichnet diesen Fall als den der Anpassung. Führt man diesen Ansatz in die drei letzten Gleichungen ein, so folgt

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_n e^{n g}; \quad \mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{Z}_n e^{n g}; \tag{963}$$

$$\mathbf{u}_0 = \mathfrak{Z}_0 \mathfrak{Z}. \tag{964}$$

Der Widerstand zwischen den Eingangsklemmen wird ebenfalls gleich dem Wellenwiderstand. Da  $g$  im allgemeinen eine komplexe Größe ist, so setzt man

$$g = \beta + j\alpha, \tag{965}$$

wobei  $\beta$  und  $\alpha$  reelle Zahlen bedeuten. Dann folgt aus den Gl. (963) und (964) für die Effektivwerte

$$U_n = U_0 e^{-n\beta}; \quad I_n = \frac{U_0}{|\mathfrak{Z}|} e^{-n\beta}. \tag{966}$$

Die Effektivwerte von Spannung und Strom nehmen längs des Kettenleiters nach einer Exponentialfunktion ab. Maßgebend für die Schnelligkeit der Abnahme ist der reelle Anteil  $\beta$  der Größe  $g$ , den man daher als Dämpfungsmaß bezeichnet.  $\alpha$  ist das Winkelmaß, da diese Größe angibt, um welchen Winkel die Spannungen oder Ströme am Anfang und Ende eines Gliedes gegeneinander phasenverschoben sind.  $g$  bezeichnet man als das komplexe Übertragungsmaß. Die Größe

$$b = n\beta$$

stellt die Dämpfung des Kettenleiters dar, die Größe

$$a = n\alpha$$

den Übertragungswinkel.

Die wichtigste Anwendung der Kettenleiter bilden die Siebketten (K. W. Wagner, 1915, A. G. Campbell, 1915). Siebketten entstehen, wenn die einzelnen Glieder des Kettenleiters aus möglichst verlustfreien Spulen und Kondensatoren hergestellt werden. Man übersieht die Verhältnisse am einfachsten, wenn man den Idealfall vollkommen verlustfreier Spulen und Kondensatoren betrachtet; ihre komplexen Widerstände sind dann rein imaginär. Auch beliebige Zusammenschaltungen von derartigen Spulen und Kondensatoren müssen einen rein imaginären Widerstand haben, denn ein reeller Bestandteil der Widerstände würde nach Abschnitt 32 anzeigen, daß Verluste vorhanden sind. Da man nun jeden beliebigen Vierpol auf die Sternschaltung, Abb. 241, zurückführen kann, so muß für Siebketten ganz beliebiger Art eine Beziehung von der Form

$$\operatorname{Cof} g = 1 + \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}_3} \tag{967}$$

gelten, in der im Idealfall  $\mathfrak{R}_1$  und  $\mathfrak{R}_3$  rein imaginär sind. Das bedeutet aber, daß sich für  $\operatorname{Cof} g$  eine reelle (positive oder negative) Zahl  $A$  ergibt:

$$\operatorname{Cof} g = A. \tag{968}$$

Diese Zahl wird in irgendeiner Weise von der Frequenz  $f$  abhängen. Wichtig für die Berechnung von  $g$  ist es nun, ob diese Zahl außerhalb oder innerhalb des Bereiches zwischen  $-1$  und  $+1$  liegt. Denn es gilt bei Einführung des reellen und imaginären Teiles von  $g$

$$\operatorname{Cof} g = \operatorname{Cof} \beta \cos \alpha + j \sin \beta \sin \alpha;$$

daraus folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{Cof} \beta \cos \alpha &= A, \\ \sin \beta \sin \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können entweder so erfüllt werden, daß

$$\beta = 0; \quad \cos \alpha = A, \tag{969}$$

oder daß

$$\alpha = 0, \pi; \quad \pm \operatorname{Cof} \beta = A. \tag{970}$$

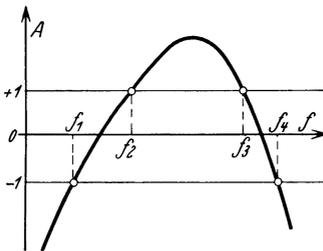


Abb. 244. Bestimmung der Durchlässigkeitsbereiche einer Siebkette.

Da nun der trigonometrische Kosinus niemals einen größeren Betrag als 1, der Hyperbelkosinus niemals einen kleineren Betrag als 1 haben kann, Abb. 110, so folgt daraus, daß die erste Lösung gilt, wenn  $A$  innerhalb, die zweite, wenn  $A$  außerhalb des Bereiches zwischen  $-1$  und  $+1$  liegt. Im ersten Falle ist die Dämpfung Null; Wechselströme der betreffenden Frequenzen gelangen ungeschwächt zum Ende des Kettenleiters. Im zweiten Falle dagegen ergeben sich endliche Werte der Dämpfung. Um die Grenzen der Bereiche zu finden, in denen die beiden Lösungen gelten, berechnet man  $A$  für verschiedene Frequenzen und zeichnet die entsprechende Kurve auf, Abb. 244. Dann geben die Schnittpunkte dieser Kurve mit den beiden im Abstand  $\pm 1$  gezogenen Parallelen zur Frequenzachse die Grenzen der Frequenzgebiete an, in denen die eine oder die andere Lösung gilt. Die Gebiete, in denen die Dämpfung Null wird, bezeichnet man als die Durchlässigkeitsbereiche, die anderen als die Sperrbereiche der Siebketten. Die Grenzen zwischen den Gebieten werden Grenzfrequenzen genannt. In Abb. 244 liegen die Durchlässigkeitsbereiche zwischen  $f_1$  und  $f_2$  sowie zwischen  $f_3$  und  $f_4$ , die Sperrbereiche zwischen Null und  $f_1$ , zwischen  $f_2$  und  $f_3$  und zwischen  $f_4$  und unendlich.

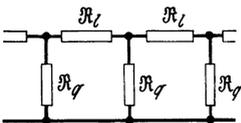


Abb. 245. Definition von Längs- und Querwiderstand.

Besonders einfache Formen von Siebketten ergeben sich aus Vierpolen nach Abb. 241 oder 242. Da der Koeffizient  $\mathfrak{H}$  nach den Gl. (934) und (938) für beide Arten von Vierpolen die gleiche Größe hat, wenn die Vierpole symmetrisch sind, so

Besonders einfache Formen von Siebketten ergeben sich aus Vierpolen nach Abb. 241 oder 242. Da der Koeffizient  $\mathfrak{H}$  nach den Gl. (934) und (938) für beide Arten von Vierpolen die gleiche Größe hat, wenn die Vierpole symmetrisch sind, so

hat auch das Übertragungsmaß für beide Arten den gleichen Wert. Es gilt

$$\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f}g = 1 + \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{R}_l}{\mathfrak{R}_q}, \tag{971}$$

wenn  $\mathfrak{R}_l$  den gesamten Längswiderstand,  $\mathfrak{R}_q$  den Querwiderstand bezeichnet, Abb. 245. Dagegen unterscheiden sich die Wellenwiderstände, und zwar gilt für die Dreiecksglieder nach den Gl. (934)..., (941) und (957)

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\mathfrak{R}_l \mathfrak{R}_q} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{\mathfrak{R}_l}{\mathfrak{R}_q}}}; \tag{972}$$

für die Sternglieder

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\mathfrak{R}_l \mathfrak{R}_q} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{\mathfrak{R}_l}{\mathfrak{R}_q}}. \tag{973}$$

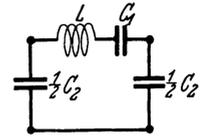


Abb. 246. Beispiel einer Siebkette.

Als Beispiel werde eine Siebkette mit Gliedern nach Abb. 246 betrachtet. Es ist

$$\mathfrak{R}_l = j\omega L + \frac{1}{j\omega C_1};$$

$$\mathfrak{R}_q = \frac{1}{j\omega C_2}.$$

Damit wird

$$A = \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f}g = 1 + \frac{1}{2} \frac{C_2}{C_1} - \frac{1}{2} \omega^2 L C_2. \tag{974}$$

Diese Funktion ist in Abb. 247 dargestellt. Die beiden Grenzfrequenzen ergeben sich aus

$$+1 = 1 + \frac{1}{2} \frac{C_2}{C_1} - \frac{1}{2} \omega_1^2 L C_2;$$

$$-1 = 1 + \frac{1}{2} \frac{C_2}{C_1} - \frac{1}{2} \omega_2^2 L C_2;$$

sie haben die Größe

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L C_1}}; \tag{975}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{L C_1} + \frac{4}{L C_2}}. \tag{976}$$

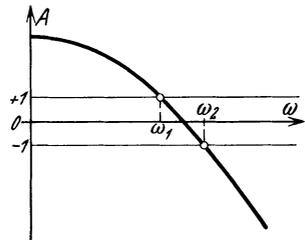


Abb. 247. Zur Berechnung des Durchlässigkeitsbereichs.

Wie man leicht erkennt, entsprechen die Grenzfrequenzen den Resonanzfrequenzen des Längszweiges und des Dreiecks. Außerhalb des Durchlässigkeitsbereiches kann die Dämpfung nach der Formel (970)

$$\pm \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f}\beta = 1 + \frac{1}{2} \frac{C_2}{C_1} - \frac{1}{2} \omega^2 L C_2 = 1 - 2 \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 - 1} \tag{977}$$

berechnet werden. Sie ist in ihrer Abhängigkeit von der Frequenz durch Abb. 248 veranschaulicht, und zwar für ein Verhältnis der beiden Grenzfrequenzen von  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1, 2$ .

Es ist in Gl. (970) jeweils das Vorzeichen zu nehmen, für das  $\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f}\beta$  positiv wird.

Infolge der Verluste in den Spulen und Kondensatoren ergibt sich auch im Durchlässigkeitsbereich eine bestimmte Dämpfung, die mit Hilfe der genauen Formel für das Übertragungsmaß berechnet werden kann. Bei Berücksichtigung der Verluste ist  $\mathfrak{A}$  komplex:

$$\mathfrak{A} = A + jB. \tag{978}$$

Damit folgt

$$\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f}\beta \cos \alpha = A;$$

$$\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\beta \sin \alpha = B.$$

Durch Auflösen ergibt sich

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - A^2 - B^2) + \sqrt{\frac{1}{4} (1 - A^2 - B^2)^2 + B^2}, \tag{979}$$

$$\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\beta = \frac{B}{\sin \alpha}. \tag{980}$$

In Abb. 248 ist gestrichelt angedeutet, wie sich die Dämpfungskurve infolge der Verluste verändert. Die Abb. 249 zeigt verschiedene Siebkettenglieder und in schematischer Form ihre Dämpfungskurven.

Wenn es sich um kompliziertere Kettenleiterglieder handelt, kann man die Größen  $g$  und  $\beta$  am einfachsten auf folgende Weise berechnen. Man wendet die Kettenleitergleichungen auf ein einzelnes Glied an; ist das Glied am Ende offen,  $\mathfrak{S}_1 = 0$ , so wird

$$u_0 = u_1 \mathfrak{C} \operatorname{of} g.$$

Berechnet man daher die Spannung am offenen Ende  $u_1$  mit Hilfe der Stromverzweigungsgesetze aus der Spannung am Anfang  $u_0$ , so ergibt sich das Übertragungsmaß aus

$$\mathfrak{C} \operatorname{of} g = \frac{u_0}{u_1}. \tag{981}$$

Es ist ferner bei offenem Ende

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{u_1}{\mathfrak{Z}} \operatorname{Sin} g.$$

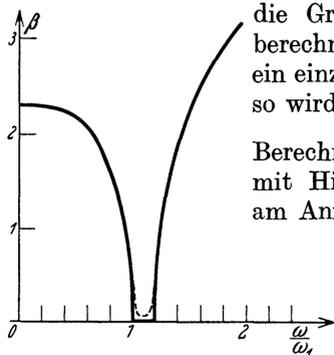


Abb. 248. Frequenzabhängigkeit der Dämpfung einer Siebkette.

Daher wird der Leerlaufwiderstand am Eingang

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{u_0}{\mathfrak{S}_0} \Big|_{\mathfrak{S}_1=0} = \mathfrak{Z} \operatorname{Cot} g. \tag{982}$$

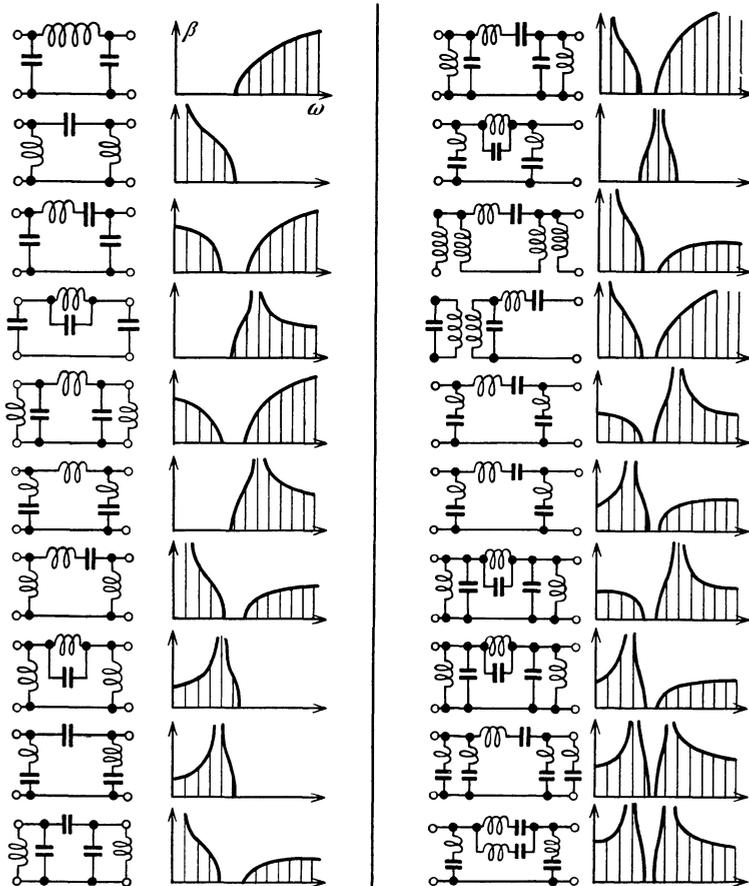


Abb. 249. Beispiele verschiedener Siebketten.

Entsprechend ergibt sich bei Kurzschluß am Ende ( $u_1=0$ ) der Kurzschlußwiderstand

$$\mathfrak{R}_k = \frac{u_0}{i_0} \Big|_{u_1=0} = \mathfrak{Z} \operatorname{tg} \alpha. \tag{983}$$

Hieraus folgt der Wellenwiderstand

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\mathfrak{R}_0 \mathfrak{R}_k}. \tag{984}$$

Als Beispiel werde das Element eines Kreuzgliederkettenleiters, Abb. 250, betrachtet. Hier ist

$$u_1 = u_0 \frac{\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2} - u_0 \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2} = u_0 \frac{\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_1},$$

also

$$\operatorname{Cos} \alpha = \frac{\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_1}{\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_1}. \tag{985}$$

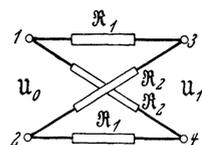


Abb. 250. Kreuzglied.

Der Leerlaufwiderstand entspricht der Parallelschaltung zweier Widerstände von der Größe  $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$ , also

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{1}{2}(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2).$$

Der Kurzschlußwiderstand ist durch die Reihenschaltung von zwei Widerständen  $\frac{\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2}$  gegeben, also

$$\mathfrak{R}_k = 2 \frac{\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2}.$$

Daraus folgt für den Wellenwiderstand

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2}. \tag{986}$$

Infolge der letzten Beziehung ergeben sich hier besonders einfache Verhältnisse, wenn man die beiden Widerstände  $\mathfrak{R}_1$  und  $\mathfrak{R}_2$  so wählt, daß ihr Produkt eine reelle Größe ergibt:

$$\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 = Z^2. \tag{987}$$

Man bezeichnet Gebilde, die diese Forderung erfüllen, als „widerstandsreziprok“. Die einfachsten widerstandsreziproken Gebilde sind Spule und Kondensator. Setzt man

$$\mathfrak{R}_1 = j\omega L, \quad \mathfrak{R}_2 = \frac{1}{j\omega C},$$

so wird

$$\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 = \frac{L}{C};$$

$$\mathfrak{Z} = Z = \sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{988}$$

Kreuzgliederkettenleiter mit widerstandsreziproken Zweigen haben die Eigenschaft, daß der Durchlässigkeitsbereich unendlich groß wird. Es ist z. B. in dem eben betrachteten Fall

$$\operatorname{Cos} \alpha = \cos \alpha = \frac{1 - \omega^2 LC}{1 + \omega^2 LC} \tag{989}$$

eine Größe, die für alle Frequenzen zwischen + 1 und - 1 liegt. Man verwendet daher

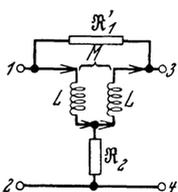


Abb. 251. Überbrücktes T-Glied.

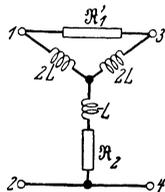


Abb. 252. 1. Umwandlung des überbrückten T-Gliedes.

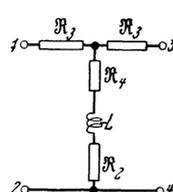


Abb. 253. 2. Umwandlung des überbrückten T-Gliedes.

diese Kettenleiter in der elektrischen Nachrichtentechnik zur Herstellung bestimmter Phasendrehungen. Kreuzgliederkettenleiter, bei denen Gl. (987) nicht erfüllt ist, werden als Siebketten verwendet.

In anderen Fällen komplizierterer Kettenleiterglieder führen die Umwandlungssätze zu einer Vereinfachung. Als Beispiel werde das in Abb. 251 dargestellte „über-

brückte T-Glied“ betrachtet. Die beiden Spulen mit der Induktivität  $L$  sind auf einen gemeinsamen Kern gewickelt, so daß die Streuung möglichst gering ist und praktisch

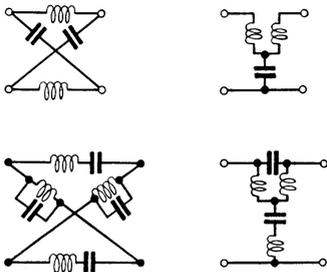


Abb. 254. Äquivalente Kettenleiterglieder.

$$M = L$$

wird. Die Wicklungen sind so miteinander verbunden, daß Ströme in der Pfeilrichtung den Kern gleichsinnig umkreisen. Wendet man auf diesen Transformator das Ersatzschema, Abb. 195, an, so ergibt sich die Abb. 252. Das aus  $\mathfrak{R}'_1$  und den beiden Induktivitäten  $2L$  gebildete Dreieck verwandelt man mit Hilfe des Netzwandlungssatzes, Gl. (52) . . . (54), in einen Stern; damit erhält man Abb. 253, und es ist

$$\mathfrak{R}_3 = \frac{j\omega 2L\mathfrak{R}'_1}{\mathfrak{R}'_1 + 4j\omega L}; \quad \mathfrak{R}_4 = \frac{4(j\omega L)^2}{\mathfrak{R}'_1 + 4j\omega L}.$$

Aus Gl. (971) folgt für das Übertragungsmaß

$$\text{Cos } g = 1 + \frac{j\omega 2L\mathfrak{R}'_1}{\mathfrak{R}'_1 + 4j\omega L} \frac{1}{\mathfrak{R}_2 + \frac{j\omega L\mathfrak{R}'_1}{\mathfrak{R}'_1 + 4j\omega L} - j\omega L} = \frac{\mathfrak{R}_2 + \frac{j\omega L\mathfrak{R}'_1}{\mathfrak{R}'_1 + 4j\omega L}}{\mathfrak{R}_2 - \frac{j\omega L\mathfrak{R}'_1}{\mathfrak{R}'_1 + 4j\omega L}}. \quad (990)$$

Es ergibt sich also der gleiche Ausdruck wie für Kreuzglieder, wenn man setzt

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{j\omega L\mathfrak{R}'_1}{\mathfrak{R}'_1 + 4j\omega L}. \quad (991)$$

Die überbrückten T-Glieder sind den Kreuzgliedern elektrisch äquivalent. Wenn die Bedingung (991) benützt wird, ergibt sich auch für den Wellenwiderstand die gleiche Formel (986). Die Abb. 254 zeigt die beiden einfachsten einander äquivalenten Gliederformen der beiden Kettenleiterarten.

### 34. Die Elektronenröhre als Verstärker.

Das Verhalten von Verstärkerröhren in irgendwelchen Schaltungsanordnungen läßt sich theoretisch am einfachsten so untersuchen, daß die Verstärkerröhre als ein Vierpol aufgefaßt wird. Im Gegensatz zu den im Abschnitt 33 behandelten Vierpolen stellt jedoch die Verstärkerröhre einen aktiven Vierpol dar; sie liefert am Ausgang Energie ab, die nur zum Teil dem Eingang zugeführt wird. Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung einer Dreielektrodenröhre, die zwischen der glühenden Kathode und der Anode noch eine durchbrochene Elektrode, das Gitter, enthält.

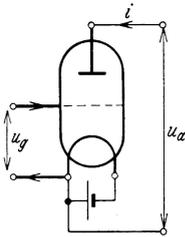


Abb. 255. Schema der Dreielektrodenröhre.

Hat das Gitter irgendein Potential  $u_g$  gegen die Kathode, die Anode ein Potential  $u_a$  (bei direkt geheizten Kathoden kann z. B. das negative Ende der Kathode als Bezugspunkt gewählt werden), Abb. 255, so entsteht in der Umgebung der Kathode ein elektrisches Feld, das durch die beiden Potentiale bestimmt ist. Die Summe der beiden von Gitter und Anode zur Kathode übergehenden Verschiebungsflüsse läßt sich durch die Teilkapazitäten  $K_g$  zwischen Gitter und Kathode und  $K_a$  zwischen Anode und Kathode ausdrücken:

$$Q = K_g u_g + K_a u_a. \quad (992)$$

Die Verschiebungsdichte und damit die elektrische Feldstärke in der Umgebung der Kathode sind dieser Größe proportional; sie ist daher nach Abschnitt 16 auch maßgebend für den Elektronenstrom. Man setzt

$$u = u_g + u_a \frac{K_a}{K_g}, \quad (993)$$

und nennt das Verhältnis der Teilkapazitäten

$$\frac{K_a}{K_g} = D \tag{994}$$

den Durchgriff der Röhre. Der von der Kathode ausgehende Elektronenstrom ist nur abhängig vom Gesamtfeld, also von

$$u = u_g + D u_a. \tag{995}$$

Er ist identisch mit dem Strom  $i$  im Anodenkreis, wenn  $u_g$  negativ ist, das Gitter also keine Elektronen aufnimmt; dann ist

$$i = F(u) = F(u_g + D u_a). \tag{996}$$

Diese Funktion ist im wesentlichen durch die Raumladungscharakteristik gegeben.

Mißt man den Anodenstrom für verschiedene konstante Werte von  $u_a$  und trägt die Stromwerte in Abhängigkeit von  $u_g$  auf, so ergeben sich die Anodenkennlinien der Röhre für die verschiedenen Anodenspannungen, Abb. 256. Aus dieser Kennlinienschar kann die Größe des Durchgriffes  $D$  entnommen werden, indem man die Horizontalverschiebung der Kurven dividiert durch den Unterschied der Anodenspannungen. Der Anodenstrom wird nahezu Null, wenn  $u = 0$ , also

$$u_g = -D u_a$$

ist.

In dem Bereich negativer Gitterspannungen wird der Gitterstrom verschwindend klein. Wenn dagegen das Gitter positiv gegen die Kathode ist, so nimmt auch das Gitter einen Teil des Elektronenstromes auf; der Anodenstrom  $i$  ist dann durch die Differenz des Emissionsstromes der Kathode und des Gitterstromes gegeben. Auch in diesem Gebiet positiver Gitterspannungen kann die Röhre noch als Verstärker arbeiten, wenn auch die Verstärkung hier geringer ist, weil zur Steuerung des Gitters eine Leistung aufgewendet werden muß. Von Ausnahmefällen abgesehen, wird daher das Gebiet negativer Gitterspannungen benutzt.

Das allgemeine Schema des Verstärkers ist in Abb. 257 dargestellt. Das Gitter erhält durch eine Batterie eine negative „Vorspannung“  $E_g$ . Im Gitterkreis befindet sich ferner irgendeine Anordnung mit dem Widerstand  $R_g$ , in der eine elektromotorische Kraft  $\mathcal{E}_1$  mit einer bestimmten Frequenz  $f$  wirkt. Im Ruhezustand des Verstärkers ist  $\mathcal{E}_1 = 0$ , und es wird die Gitterspannung  $u_g = E_g$ , da das Gitter keinen Strom aufnimmt. Dabei stellt sich ein ganz bestimmter Wert  $I_a$  des Anodenstromes  $i$  ein, der durch die Anodenstromquelle  $E_a$  erzeugt wird. Sobald die elektromotorische Kraft  $\mathcal{E}_1$  im Gitterkreis tätig ist, ergeben sich Schwankungen des Anodenstromes um diesen Ruhewert. Diese Anodenstromschwankungen liefern eine Wechselstromleistung in den komplexen Widerstand  $R_a$ .

Bei sinusförmigem Verlauf von  $\mathcal{E}_1$  läßt sich die Gitterspannung in der Form schreiben

$$u_g = E_g + \mathfrak{U}_1 \sqrt{2} e^{j\omega t}, \tag{997}$$

wobei  $\mathfrak{U}_1$  den Zeiger der Gitterwechselspannung darstellt, der gleich  $\mathcal{E}_1$  ist, wenn kein Gitterstrom fließt.  $\mathfrak{U}_1$  ist etwas von  $\mathcal{E}_1$  verschieden wegen der zwischen Gitter und Kathode übergelassenen Verschiebungsströme. Die Augenblickswerte ergeben sich durch Bildung des reellen Teiles von Gl. (997).

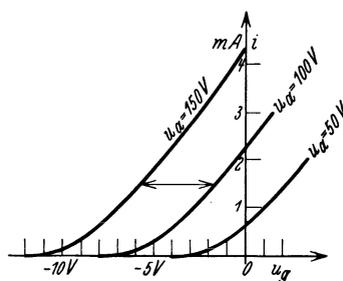


Abb. 256. Kennlinien der Dreielektrodenröhre.

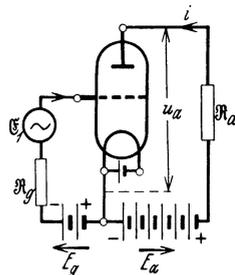


Abb. 257. Schema eines Verstärkers.

Anodenstrom  $i$  und Anodenspannung  $u_a$  werden ebenfalls Anteile enthalten, die mit der Kreisfrequenz  $\omega$  veränderlich sind, so daß man setzen kann

$$i = I_a + \mathfrak{S}_2 \sqrt{2} e^{j\omega t}; \quad (998)$$

$$u_a = E_a - I_a R_{a0} - \mathfrak{S}_2 \sqrt{2} \Re_a e^{j\omega t}. \quad (999)$$

Dabei bedeutet  $R_{a0}$  den Wert von  $\Re_a$  für  $\omega = 0$ , also für Gleichstrom.

Geht man mit diesen Ansätzen in die allgemeine Formel (996) für die Kennlinien ein, so folgt

$$I_a + \mathfrak{S}_2 \sqrt{2} e^{j\omega t} = F(E_g + D E_a - D I_a R_{a0} + \mathfrak{U}_1 \sqrt{2} e^{j\omega t} - \mathfrak{S}_2 \sqrt{2} \Re_a D e^{j\omega t}). \quad (1000)$$

Die beabsichtigte Wirkung des Verstärkers ergibt sich nun, wenn die Schwankungen der Ströme und Spannungen um die Ruhewerte so klein sind, daß die Kennlinie als eine Gerade betrachtet werden kann. Das bedeutet aber, daß die Wechselstromgrößen in der obigen Gleichung klein gegen die Gleichstromgrößen sein müssen. Unter dieser Voraussetzung kann man die Funktion  $F$  in eine Potenzreihe nach den Wechselstromgrößen entwickeln und nach dem zweiten Glied abbrechen. Da die Gl. (1000) sowohl für die zeitlich konstanten Größen als auch für die Wechselstromgrößen erfüllt sein muß, so zerfällt sie in die beiden folgenden Bedingungen

$$I_a = F(E_g + D E_a - D I_a R_{a0}); \quad (1001)$$

$$\mathfrak{S}_2 = (\mathfrak{U}_1 - \mathfrak{S}_2 \Re_a D) F'(E_g + D E_a - D I_a R_{a0}). \quad (1002)$$

Die erste dieser Gleichungen gibt eine Bedingung für den Anodenruhestrom  $I_a$ . Man löst sie am einfachsten graphisch. Die Anodenkennlinie wird so aufgenommen, daß die Anode unmittelbar an die Anodenbatterie angeschlossen wird, daß also  $u_a = E_a$  wird, Abb. 258. Setzen wir gemäß Gl. (995)

$$u = E_g + D E_a - D I_a R_{a0} = u_g + D E_a,$$

so wird

$$I_a = \frac{E_g - u_g}{D R_{a0}}. \quad (1003)$$

Das ist die Gleichung einer geraden Linie im Kennliniendiagramm, die durch den Punkt  $u_g = E_g$  geht und die Steigung  $-1/D R_{a0}$  hat. Da andererseits  $I_a$  durch die Kennlinie gegeben sein soll, Gl. (1001), so liefert der Schnittpunkt der Geraden mit der Kennlinie den Anodenruhestrom. Man zeichnet die Gerade, indem man in dem Punkt  $u_g = E_g$  um irgendeinen beliebig angenommenen Stromwert  $i_1$  senkrecht nach oben geht, vom Endpunkt dieser Strecke nach links eine Strecke  $i_1 D R_{a0}$  abträgt und mit dem Ausgangspunkt verbindet.

Aus diesem Diagramm kann nun eine weitere wichtige Größe entnommen werden, wenn man im Punkt  $P$  die Tangente an die Kennlinie legt. Die Steigung dieser Tangente gibt die Größe

$$S = F'(E_g + D E_a - D I_a R_{a0}) = \frac{O A}{O B}, \quad (1004)$$

die man als die Steilheit der Kennlinie bezeichnet. Nach Gl. (1002) ist diese Steilheit maßgebend für die Wechselstromgrößen. Es gilt

$$\mathfrak{S}_2 = (\mathfrak{U}_1 - D \Re_a \mathfrak{S}_2) S,$$

oder

$$\mathfrak{S}_2 = \frac{\mathfrak{U}_1}{\Re_a + \frac{1}{S D}}. \quad (1005)$$

Diese Beziehung lehrt, daß man den Anodenwechselstrom so berechnen kann,

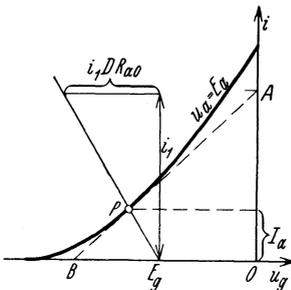


Abb. 258. Zur Bestimmung des Ruhestromes.

wie wenn im Anodenkreis eine elektromotorische Kraft von der Größe

$$\mathfrak{E}_i = \frac{u_1}{D} \tag{1006}$$

wirksam wäre, die über den äußeren Widerstand  $R_a$  und den inneren Widerstand der Röhre arbeitet. Dieser innere Röhrenwiderstand hat die Größe

$$R_i = \frac{1}{SD}. \tag{1007}$$

**Zahlenbeispiel:** Bei einer Röhre mit einem Durchgriff  $D = 5\%$  ergebe sich aus der „statischen“ Anodenkennlinie für die gewählte Gittervorspannung und den Anodenwiderstand  $R_{a0}$  mit der in Abb. 258 dargestellten Konstruktion eine Steilheit von  $S = 4 \frac{\text{mA}}{\text{V}}$ . Dann kann der Ausgangskreis der Röhre ersetzt werden durch eine Zweipolquelle mit dem inneren Widerstand

$$R_i = \frac{1}{0,004 \cdot 0,05} \Omega = 5000 \Omega$$

und der elektromotorischen Kraft

$$\mathfrak{E}_i = 20 u_1.$$

Man kann nun auf Grund dieser Vorstellung ein vollständiges Ersatzbild der Verstärkerröhre aufstellen, durch das die Röhre auf einen einfachen Vierpol zurückgeführt wird, Abb. 259. Zwischen Gitter und Kathode wirkt die Wechselspannung  $u_1$ . Dort ist ferner eine Teilkapazität  $K_g$  vorhanden. Zwischen Anode und Kathode wirkt die elektromotorische Kraft  $\mathfrak{E}_i$  über den inneren Röhrenwiderstand  $R_i$ . Ferner liegt zwischen Anode und Kathode die Teilkapazität  $K_a$ . Schließlich ist noch eine Teilkapazität  $K_{ga}$  zwischen Gitter und Anode vorhanden. Dieses Ersatzbild berücksichtigt alle für den Betrieb als Verstärker maßgebenden Eigenschaften der Elektronenröhre. In vielen Fällen können die Teilkapazitäten vernachlässigt werden; bei den Frequenzen der Fernsprech- und Hochfrequenztechnik sind jedoch die Teilkapazitäten meist von ausschlaggebendem Einfluß.

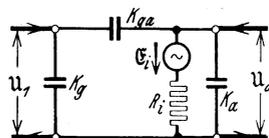


Abb. 259. Ersatzbild der Verstärkerröhre.

Zu beachten sind die Pfeilrichtungen der Ströme, die sich auf Grund der Ableitung des Ersatzbildes ergeben; kehrt man sie im Ausgangskreis um, wie dies dem normalen Bild eines Vierpoles entsprechen würde, dann muß die elektromotorische Kraft  $\mathfrak{E}_i = -\frac{u_1}{D}$  gesetzt werden. Man erkennt aus dem Ersatzbild, daß infolge der Gitteranodenkapazität der Eingangswiderstand eines Verstärkers davon abhängt, was im Anodenkreis angeschlossen ist; diese Teilkapazität hat ferner eine „innere Rückkopplung“ zur Folge, indem ein Teil der Energie des Anodenkreises über sie hinweg in den Gitterkreis zurückgeliefert wird.

Als Anwendungsbeispiel werde ein Widerstandsverstärker betrachtet, bei dem im Anodenkreis ein Ohmscher Widerstand  $R_a$  liegt. Im Gitterkreis wirke die elektromotorische Kraft  $\mathfrak{E}_1$  ebenfalls über einen Ohmschen Widerstand  $R_g$ . Das vollständige Ersatzbild ist dann das in Abb. 260 dargestellte. Man kann die Spannungen und Ströme nach dem Superpositionsgesetz berechnen, indem man die Teilströme und -spannungen summiert, die durch die beiden elektromotorischen Kräfte  $\mathfrak{E}_1$  und  $\mathfrak{E}_i$  für sich allein hervorgerufen werden.

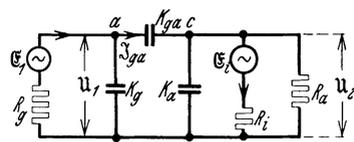


Abb. 260. Ersatzbild eines Widerstandsverstärkers.

Bei niedrigen Frequenzen ist der Scheinwiderstand der Kondensatoren so groß, daß genügend genau gilt

$$u_2 = \frac{\mathfrak{E}_i R_a}{R_i + R_a} = \frac{u_1 R_a}{D R_i + R_a} = \frac{\mathfrak{E}_1 R_a}{D R_i + R_a}. \tag{1008}$$

Die „Spannungsverstärkung“ ist daher

$$h_0 = \left| \frac{u_2}{\mathfrak{E}_1} \right| = \frac{1}{D} \frac{R_a}{R_i + R_a}. \quad (1009)$$

Man kann hieraus ermitteln, wie groß der Anodenwiderstand gemacht werden muß, damit die Spannungsverstärkung möglichst groß wird. Das ist nicht etwa der Fall, wenn  $R_a$  möglichst groß gemacht wird, sondern es ergibt sich ein ganz bestimmter günstigster Wert von  $R_a$ , da  $R_i$  selbst wieder von  $R_a$  abhängt. Um diesen günstigsten Wert zu finden, bestimmt man für verschiedene Widerstände  $R_a$  auf Grund der oben beschriebenen Konstruktion die Steilheit  $S$  für die betreffenden Gitter- und Anodenvorspannungen  $E_g$  und  $E_a$ ; es ergeben sich Werte, die in der durch Abb. 261 dargestellten Weise von  $R_a$  abhängen. Nun ist mit Gl. (1007)

$$h_0 = \frac{1}{D} \frac{1}{1 + \frac{1}{DSR_a}}. \quad (1010)$$

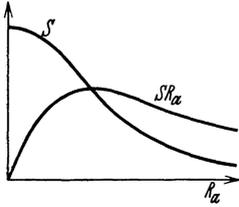


Abb. 261. Zur Berechnung der maximalen Spannungsverstärkung.

Dieser Ausdruck wird zu einem Maximum, wenn  $SR_a$  einen Maximalwert hat. Man berechnet daher die Werte  $SR_a$  und findet damit den günstigsten Anodenwiderstand  $R_a$ , Abb. 261.

Bei höheren Frequenzen treten die Teilkapazitäten in Erscheinung. Dadurch wird einerseits  $u_1$  kleiner als  $\mathfrak{E}_1$ , andererseits wird der Widerstand  $R_a$  kleiner infolge der parallel liegenden kapazitiven Widerstände. Für die erste Wirkung gilt folgende Näherungsbetrachtung, bei der die Abhängigkeit der ersten Wirkung von der zweiten vernachlässigt wird. Da zwischen den Punkten  $c$  und  $d$  die Spannung

$$u_2 = \frac{u_1}{D} \frac{R_a}{R_i + R_a}$$

von unten nach oben gerichtet, tätig ist, zwischen den Punkten  $a$  und  $b$  die Spannung  $u_1$  von oben nach unten, so ist der Strom in der Teilkapazität  $K_{ga}$

$$\mathfrak{S}_{ga} = (u_1 + u_2)j\omega K_{ga} = u_1 j\omega K_{ga} \left(1 + \frac{1}{D} \frac{R_a}{R_i + R_a}\right).$$

Dieser Strom hat die gleiche Größe, wie wenn statt des Verstärkers parallel zu  $ab$  ein Kondensator mit der Kapazität

$$K'_{ga} = K_{ga} (1 + h_0) \quad (1011)$$

liegen würde. Die Gesamtkapazität zwischen den beiden Punkten  $a$  und  $b$  ist also

$$K'_g = K_g + K_{ga} (1 + h_0). \quad (1012)$$

Man bezeichnet diese Kapazität als die dynamische Gitterkapazität. Bei Berücksichtigung dieser Kapazität wird

$$u_1 = \frac{\mathfrak{E}_1}{1 + j\omega R_g K'_g}. \quad (1013)$$

Für die Berücksichtigung der zweiten Wirkung der Teilkapazitäten nehmen wir an, daß der Widerstand  $R_g$  klein sei gegen den Scheinwiderstand des Kondensators  $K_{ga}$ . Dann liegt ein Kondensator von der Kapazität

$$K'_a = K_{ga} + K_a \quad (1014)$$

parallel zu  $R_a$ , so daß der komplexe Widerstand

$$\mathfrak{R}_a = \frac{R_a}{1 + j\omega R_a K'_a} \quad (1015)$$

wird. Damit ergibt sich schließlich

$$u_2 = \mathfrak{E}_1 \frac{\mathfrak{R}_a}{R_i + \mathfrak{R}_a} = \frac{\mathfrak{E}_1}{D} \frac{\mathfrak{R}_a}{R_i + \mathfrak{R}_a} \frac{1}{1 + j\omega R_g K'_g}, \quad (1016)$$

und es folgt für die Spannungsverstärkung die Näherungsformel

$$\left| \frac{U_2}{\mathcal{E}_1} \right| = h = h_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R_a^2 K_g'^2} \sqrt{1 + \omega^2 R^2 K_a'^2}}, \quad (1017)$$

wobei zur Abkürzung

$$R = \frac{R_a R_i}{R_a + R_i} \quad (1018)$$

gesetzt ist. Die Spannungsverstärkung fällt also mit wachsender Frequenz ab, wie es Abb. 262 veranschaulicht, so daß der Verstärker nur unterhalb einer gewissen Frequenz gleichmäßig verstärkt.

Würde man den Widerstand  $R_a$  ohne Zwischenschaltung des Verstärkers an die Zweipolquelle  $\mathcal{E}_1$ ,  $R_g$  anschließen, so würde man bei günstigster Bemessung, nämlich für  $R_a = R_g$ , die Leistung

$$N_1 = \frac{|\mathcal{E}_1|^2}{4 R_g}$$

aus der Energiequelle herausholen können. Da andererseits der Verstärker die Leistung

$$N_2 = \frac{|U_2|^2}{R_a}$$

liefert, so bezeichnet man das Verhältnis

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{|U_2|^2}{|\mathcal{E}_1|^2} 4 \frac{R_g}{R_a} = 4 \frac{R_g}{R_a} h^2 \quad (1019)$$

als die Leistungsverstärkung. Auch die Leistungsverstärkung hat bei einem ganz bestimmten Wert von  $R_a$  ein Maximum, den man ebenfalls graphisch auf Grund der Gl. (1010) und (1019) bestimmen kann.

Man drückt Verhältnisse von Spannungen, Strömen und Leistungen in der Fernmeldetechnik durch den natürlichen Logarithmus aus, und zwar nimmt man bei Leistungsverhältnissen den halben Logarithmus, bei Spannungs- und Stromverhältnissen den ganzen Logarithmus; die Einheit dieser Werte bezeichnet man als 1 Neper. Es ist also die Leistungsverstärkung

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{N_2}{N_1} = \ln 2h \sqrt{\frac{R_g}{R_a}} \text{ Neper.}$$

### Fünftes Kapitel.

## Leitungen.

### 35. Die Leitungsgleichungen.

Wenn am Anfang einer Leitung, Abb. 263, eine Wechselspannung wirkt, so fließen in den Leitungsdrähten an jeder Stelle der Leitung Wechselströme gleicher Frequenz, und es ergeben sich zwischen den beiden Leitungsdrähten an jeder Stelle der Leitung Wechselspannungen gleicher Frequenz. Wenn wir irgendeinen Abschnitt  $s$  der Leitung herausgreifen und diesen Abschnitt kurz genug machen, dann haben die Ströme in den beiden Leitungsdrähten innerhalb dieses Abschnittes in irgendeinem Zeitpunkt ein und denselben Wert; ebenso hat die Spannung zwischen den beiden Drähten überall in diesem Abschnitt in irgendeinem Zeitpunkt einen bestimmten Wert. Mit dem Strom ist ein magnetisches Feld verbunden, mit der Spannung ein elektrisches Feld. Wenn die Leitungslänge groß ist gegen den Abstand der beiden Drähte, dann sind diese beiden Felder ebene Felder von der Art der in Abschn. 12 und 24 be-

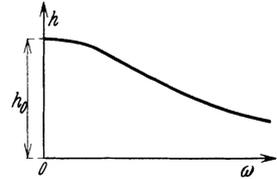


Abb. 262. Abhängigkeit der Spannungsverstärkung von der Frequenz.

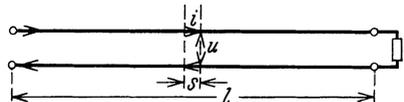


Abb. 263. Homogene Leitung.

trachteten. Einem solchen kurzen Abschnitt der Leitung kann man daher eine bestimmte Induktivität  $L_s$  und eine bestimmte Kapazität  $C_s$  zuschreiben, und wir nennen die Leitung homogen, wenn die Werte  $L_s$  und  $C_s$  an jeder Stelle der Leitung den gleichen Wert haben, gleichgültig, wo wir den Abschnitt von der Länge  $s$  abgrenzen. Wir definieren daher den Induktionsbelag der Leitung durch die Beziehung

$$L' = \frac{L_s}{s},$$

den Kapazitätsbelag durch

$$C' = \frac{C_s}{s}.$$

Für eine Freileitung mit dem Drahtradius  $r_0$  und dem Drahtabstand  $a$  (Einphasenleitung) wird nach früherem

$$L' = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \ln \frac{a}{r_0} + \frac{1}{4} \right) = 4 \cdot 10^{-4} \left( \ln \frac{a}{r_0} + \frac{1}{4} \right) \frac{\text{H}}{\text{km}}, \quad (1020)$$

$$C' = \frac{\varepsilon_0 \pi}{\ln \frac{a}{r_0}} = \frac{0,0278 \mu\text{F}}{\ln \frac{a}{r_0} \text{ km}}. \quad (1021)$$

In gleicher Weise kann man auch den Widerstand des Leitungsabschnittes,  $R_s$ , auf die Längeneinheit beziehen; es ergibt sich so der Widerstandsbelag

$$R' = \frac{R_s}{s}.$$

Er ist gleich dem Gleichstromwiderstandsbelag  $R' = \frac{2\rho}{q}$ , wenn die Hautwirkung genügend gering ist. Schließlich können im allgemeinen Fall noch dielektrische Verluste vorhanden sein, die man durch die Ableitung  $G_s$  zwischen den beiden Drähten im Abschnitt  $s$  kennzeichnen kann. Der Ableitungsbelag hat die Größe

$$G' = \frac{G_s}{s}.$$

Die vier Leitungsbeläge bestimmen vollständig das elektrische Verhalten der Leitung. Bezeichnet man die Stromstärke in einem Leitungsabschnitt von der Länge  $s$  mit  $\mathfrak{I}$ , so ist der Ohmsche Spannungsabfall in dem Leitungsabschnitt

$$\mathfrak{I} R' s,$$

der induktive Spannungsabfall  $\mathfrak{I} j \omega L' s$ .

Der gesamte Spannungsabfall hat also die gleiche Größe wie in einer Spule mit dem Wirkwiderstand  $R' s$  und der Induktivität  $L' s$ .

Wird ferner mit  $\mathfrak{U}$  die Spannung zwischen den beiden Drähten bezeichnet, so ist der Ladestrom

$$\mathfrak{U} j \omega C' s$$

und der Ableitungsstrom

$$\mathfrak{U} G' s.$$

Insgesamt ergibt sich zwischen den beiden Drähten ein Strom wie in einem Kondensator mit der Kapazität  $C' s$  und der Ableitung  $G' s$ . Die Beläge können auf Grund dieser Beziehungen an kurzen Abschnitten der Leitung gemessen werden. Widerstands- und Induktionsbelag ergeben sich aus dem Kurzschlußwiderstand  $\mathfrak{R}_k$  eines kurzen Abschnittes:

$$R' + j \omega L' = \frac{\mathfrak{R}_k}{s}; \quad (1022)$$

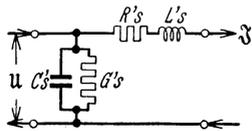


Abb. 264. Ersatzbild eines Leitungsabschnittes.

Kapazitätsbelag und Ableitungsbelag ergeben sich aus dem Leerlaufwiderstand  $\mathfrak{R}_0$ :

$$G' + j \omega C' = \frac{1}{\mathfrak{R}_0 s}. \quad (1023)$$

Man kann also den Leitungsabschnitt von der Länge  $s$  elektrisch durch eine Anordnung nach Abb. 264 ersetzen, und dieser Ersatz gilt um so genauer, je kleiner die Länge  $s$  gemacht wird; er gilt streng im Grenzfall  $s = 0$ . Teilt man aber die ganze

Leitung von der Länge  $l$  in dieser Weise in unter sich gleiche Abschnitte ein, so entsteht ein Kettenleiter mit

$$n = \frac{l}{s}$$

Gliedern, und es ist für den Längswiderstand zu setzen

$$\mathfrak{R}_l = (R' + j\omega L')s,$$

für den Querwiderstand

$$\mathfrak{R}_q = \frac{1}{(G' + j\omega C')s}.$$

Daraus berechnet sich nach Gl. (971) das Übertragungsmaß

$$\mathfrak{Cof}g = 1 + \frac{1}{2}(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')s^2,$$

und es wird das Übertragungsmaß  $g$  unendlich klein, wenn sich  $s$  dem Werte Null nähert. Daher kann man im Grenzfall  $s = 0$  setzen:

$$\mathfrak{Cof}g = 1 + \frac{1}{2}g^2;$$

hiermit folgt

$$g = s \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}.$$

In den Kettenleitergleichungen kommt das Produkt  $ng$  vor. Dieses Produkt wird

$$ng = \frac{l}{s} s \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')},$$

also unabhängig von  $s$ .

Man setzt

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \quad (1024)$$

und nennt diese Größe die Fortpflanzungskonstante der Leitung oder den Leitungsbelag. Ähnlich wie beim Kettenleiter setzt man ferner

$$\gamma = \beta + j\alpha, \quad (1025)$$

wobei  $\beta$  den Dämpfungsbelag oder die Dämpfungskonstante und  $\alpha$  den Phasenbelag oder die Phasenkonstante darstellt. Für den Wellenwiderstand ergibt sich nach Gl. (972) bei verschwindend kleinem  $s$

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}, \quad (1026)$$

und es lauten schließlich die Leitungsgleichungen, wenn mit  $\mathfrak{U}_1$  und  $\mathfrak{I}_1$  Spannung und Strom am Anfang, mit  $\mathfrak{U}_2$  und  $\mathfrak{I}_2$  Spannung und Strom am Ende der Leitung bezeichnet werden,

$$\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}_2 \mathfrak{Cof} \gamma l + \mathfrak{I}_2 \mathfrak{Z} \mathfrak{Sin} \gamma l, \quad (1027)$$

$$\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}_2 \mathfrak{Cof} \gamma l + \frac{\mathfrak{U}_2}{\mathfrak{Z}} \mathfrak{Sin} \gamma l. \quad (1028)$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen, die wieder den Vierpolgleichungen (931) . . . (933) entsprechen, kann grundsätzlich jede Leitungsaufgabe gelöst werden. Man hat dazu die Werte  $\beta$  und  $\alpha$  zu berechnen aus

$$\beta + j\alpha = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}. \quad (1029)$$

Durch Quadrieren erhält man die Gleichung

$$\beta^2 + 2j\alpha\beta - \alpha^2 = R'G' - \omega^2 L'C' + j\omega(R'C' + L'G'),$$

die in die beiden Beziehungen zerfällt

$$\beta^2 - \alpha^2 = R'G' - \omega^2 L'C', \quad (1030)$$

$$2\alpha\beta = \omega(R'C' + L'G'). \quad (1031)$$

Bildet man andererseits auf beiden Seiten der Gl. (1029) die Beträge, so folgt

$$\beta^2 + \alpha^2 = \sqrt{(R'^2 + \omega^2 L'^2)(G'^2 + \omega^2 C'^2)}. \quad (1032)$$

Durch Subtraktion erhält man aus den Gl. (1030) und (1032)

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(-R'G' + \omega^2 L'C') + \frac{1}{2}\sqrt{(R'^2 + \omega^2 L'^2)(G'^2 + \omega^2 C'^2)}}; \quad (1033)$$

ferner mit Gl. (1031)

$$\beta = \frac{\omega(R'C' + L'G')}{2\alpha}. \quad (1034)$$

Um den Wellenwiderstand zu berechnen, macht man den Ansatz

$$\mathfrak{Z} = Z e^{j\psi}; \tag{1035}$$

damit folgt

$$Z = \sqrt[4]{\frac{R'^2 + \omega^2 L'^2}{G'^2 + \omega^2 C'^2}}, \tag{1036}$$

$$\psi = \frac{1}{2} \arctg \frac{\omega L'}{R'} - \frac{1}{2} \arctg \frac{\omega C'}{G'}. \tag{1037}$$

Zur Berechnung der Hyperbelfunktionen der komplexen Größe  $\gamma l$  dienen die Formeln (825) und (826), in denen nur noch reelle Funktionen vorkommen, die aus Tabellen entnommen werden können.

Für Drehstromleitungen gelten die gleichen Beziehungen, wenn man die Beläge entsprechend definiert. Zwischen den drei Leitungen und Erde liegen sechs Teilkapazitäten, Abb. 265, die durch Messung oder Rechnung bestimmt werden können. Bei symmetrischer Anordnung sind je drei davon einander gleich. Der von jeder Leitung ausgehende Verschiebungsstrom setzt sich aus drei Teilströmen zu den beiden anderen Leitern und nach der Erde zusammen. Bezeichnet man daher die Phasenspannungen (Spannungen zwischen Außenleiter und Nullpunkt) mit  $u_{p1}$ ,  $u_{p2}$  und  $u_{p3}$ , so wird z. B. der von Leiter 1 aufzunehmende Ladestrom

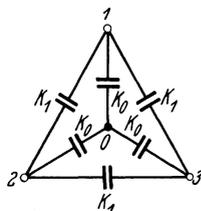


Abb. 265. Teilkapazitäten einer symmetrischen Drehstromleitung.

$$\mathfrak{I}_C = u_{p1} j \omega K_0 + (u_{p1} - u_{p2}) j \omega K_1 + (u_{p1} - u_{p3}) j \omega K_1.$$

Beachtet man, daß bei symmetrischem Dreiphasenstrom wegen der  $120^\circ$  Verschiebung der drei Spannungen

$$u_{p1} + u_{p2} + u_{p3} = 0,$$

so folgt

$$\mathfrak{I}_C = u_{p1} j \omega (K_0 + 3 K_1).$$

Die gleiche Beziehung ergibt sich auch für die drei anderen Leiter. Daraus geht hervor, daß man genau so rechnen kann wie bei einer Einphasenleitung, wenn man den Belag der Betriebskapazität definiert durch

$$C' = K'_0 + 3 K'_1, \tag{1038}$$

und an Stelle der Spannung die Phasenspannung, an Stelle des Stromes den Leitungsstrom einführt. Für den Ableitungsbelag gilt entsprechend

$$G' = G'_0 + 3 G'_1. \tag{1039}$$

Zur Berechnung der Induktivität denke man sich bei symmetrischer Lage der drei Leiter in der Mitte des durch die Leiter gebildeten gleichseitigen Dreiecks, Abb. 266, einen vierten Leiter  $0$  angebracht, der den Rückstrom führt. Da der Rückstrom Null ist, so beeinflusst dieser Leiter das magnetische Feld nicht. Bezeichnet man die drei Ströme mit  $\mathfrak{I}_1$ ,  $\mathfrak{I}_2$  und  $\mathfrak{I}_3$ , so ist die in der durch Außenleiter  $1$  und Nulleiter gebildeten Schleife induzierte elektromotorische Kraft

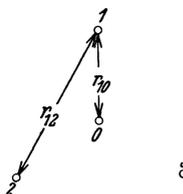


Abb. 266. Zur Berechnung der Betriebsinduktivität einer symmetrischen Drehstromleitung.

$$\mathfrak{E} = -\mathfrak{I}_1 j \omega L_1 - \mathfrak{I}_2 j \omega M_{12} - \mathfrak{I}_3 j \omega M_{13},$$

wobei  $L_1$  die Induktivität der Schleife  $10$ ,  $M_{12}$  die Gegeninduktivität zwischen Schleife  $20$  und Schleife  $10$ ,  $M_{13}$  die Gegeninduktivität zwischen Schleife  $30$  und Schleife  $10$  bezeichnen. Beachtet man die Symmetrieverhältnisse:

$$M_{12} = M_{13}, \quad \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{I}_3 = 0,$$

so ergibt sich

$$\mathfrak{E} = -\mathfrak{I}_1 j \omega (L_1 - M_{12}).$$

Der Belag der Betriebsinduktivität ist also

$$L' = L'_1 - M'_{12}. \tag{1040}$$

Nach den in den Abschn. 26 und 27 abgeleiteten Beziehungen gilt für die in Abb. 266

aufgezeichnete Anordnung

$$L'_1 = 0,4 \left( \ln \frac{r_{10}}{r_1} + 0,25 \right) \text{mH/km};$$

$$M'_{12} = 0,2 \left( \ln \frac{r_{10}^2}{r_0 r_{12}} + 0,25 \right) \text{mH/km};$$

also wird 
$$L' = 0,2 \left( \ln \frac{r_{12}}{r_0} + 0,25 \right) \text{mH/km}. \quad (1041)$$

Für den Widerstandsbelag der Dreiphasenleitung ist der Widerstandsbelag eines einzelnen Außenleiters einzusetzen, also  $R' = \frac{\rho}{q}$ .

**Zahlenbeispiel:** Es sei eine Freileitung von 500 km Länge mit folgenden Eigenschaften gegeben (Drehstromleitung)

$$R' = 0,1 \Omega/\text{km}, \quad L' = 1,0 \text{mH/km}, \quad C' = 0,011 \mu\text{F/km}, \quad G' = 0,1 \mu\text{S/km}.$$

Die Phasenspannung am Ende der Leitung soll 100 kV betragen bei einer dort entnommenen Wirkleistung  $N_2 = 10000 \text{ kW}$  je Phase und einem induktiven Leistungsfaktor der Verbraucher von  $\cos \varphi_2 = 0,8$ ; die Frequenz sei 50 Hz. Wie groß muß die Spannung am Anfang der Leitung sein, und wie groß ist die Leistungsaufnahme der Leitung?

Wir setzen 
$$U_2 = U_2 = 10^5 \text{ V},$$

indem wir den entsprechenden Zeiger in die reelle Achse legen. Dann ist

$$I_2 = \frac{N_2}{U_2 \cos \varphi_2} = \frac{10000 \text{ kW}}{100 \cdot 0,8 \text{ kV}} = 125 \text{ A},$$

$$\varphi_2 = 36^\circ 52',$$

also

$$\mathfrak{I}_2 = 125 e^{-j 36^\circ 52'} \text{ A}.$$

Es ist ferner  $R'G' = 10^{-8} \text{ km}^{-2}$ ,  $\omega L' = 0,314 \Omega/\text{km}$ ,  $\omega C' = 3,46 \mu\text{S}/\text{km}$ ,

$$\omega^2 L' C' = 1,085 \cdot 10^{-6} \text{ km}^{-2}, \quad R'^2 + \omega^2 L'^2 = 0,1087 \Omega^2 \text{ km}^{-2},$$

$$G'^2 + \omega^2 C'^2 = 11,94 \cdot 10^{-12} \text{ S}^2 \text{ km}^{-2}, \quad \sqrt{(R'^2 + \omega^2 L'^2)(G'^2 + \omega^2 C'^2)} = 1,14 \cdot 10^{-6} \text{ km}^{-2};$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} 1,075 \cdot 10^{-6} + \frac{1}{2} 1,14 \cdot 10^{-6} \text{ km}^{-1}} = 1,052 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1},$$

$$\alpha l = 0,526 = 0,526 \frac{180^\circ}{\pi} = 30,1^\circ;$$

$$R' \omega C' = 0,346 \cdot 10^{-6} \text{ km}^{-2}, \quad G' \omega L' = 0,0314 \cdot 10^{-6} \text{ km}^{-2},$$

$$\beta = \frac{0,377 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1,052 \cdot 10^{-3}} \text{ km}^{-1} = 0,1792 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}, \quad \beta l = 0,0896;$$

$$Z = \sqrt[4]{\frac{0,1087}{11,94}} 10^{12} \Omega = 309 \Omega;$$

$$\psi = \frac{1}{2} \arctg 3,14 - \frac{1}{2} \arctg 34,6 = \frac{1}{2} \cdot 72^\circ 21' - \frac{1}{2} \cdot 88^\circ 21' = -8^\circ;$$

$$\sin \alpha l = \sin 30,1^\circ = 0,502, \quad \cos \alpha l = \cos 30,1^\circ = 0,865;$$

$$\mathfrak{C} \sin \beta l = \mathfrak{C} \sin 0,0896 = 0,0897, \quad \mathfrak{C} \cos \beta l \approx 1 + \frac{1}{2} (0,0897)^2 = 1,004,$$

$$\mathfrak{C} \sin \gamma l = 0,0897 \cdot 0,865 + j 1,004 \cdot 0,502 = 0,0776 + j 0,504.$$

$$\mathfrak{C} \cos \gamma l = 1,004 \cdot 0,865 + j 0,0897 \cdot 0,502 = 0,869 + j 0,045.$$

Damit wird nach Gl. (1027)

$$\begin{aligned} U_1 &= [10^5 (0,869 + j 0,045) + 125 e^{-j 36^\circ 52'} \cdot 309 \cdot e^{-j 8^\circ} (0,0776 + j 0,504)] \text{ V} = \\ &= [10^5 (0,869 + j 0,045) + 0,386 \cdot 10^5 (0,7088 - j 0,7054) (0,0776 + j 0,504)] \text{ V} = \\ &= (0,869 + j 0,045 + 0,0212 + 0,1372 + j 0,1379 - j 0,0211) \cdot 10^5 \text{ V} = \\ &= [1,027 + j 0,162] 10^5 \text{ V}. \end{aligned}$$

Der Effektivwert der Anfangsspannung ist also

$$U_1 = \sqrt{1,027^2 + 0,162^2} \cdot 10^5 \text{ V} = 1,04 \cdot 10^5 \text{ V} = 104 \text{ kV}.$$

Die Anfangsspannung eilt der Spannung am Ende um einen Winkel vor von der Größe

$$\arctg \frac{0,162}{1,027} = 8^\circ 58'.$$

Um mit Hilfe von Gl. (1028) den Anfangsstrom zu ermitteln, berechnen wir zunächst

$$\frac{1}{\mathfrak{Z}} = \frac{1}{309 \Omega} e^{8^\circ} = \frac{1}{309} (0,9903 + j 0,1392) \text{ S} = (3,205 + 0,451 j) 10^{-3} \text{ S},$$

und dann wird

$$\mathfrak{I}_2 = 125(0,8 - j0,6) \text{ A} = (100 - j75) \text{ A};$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_1 &= [(100 - j75)(0,869 + j0,045) + 10^5(3,205 + j0,451) \cdot 10^{-3}(0,0776 + j0,504)] \text{ A} = \\ &= [86,9 + 3,38 + j4,5 - j65,2 + 24,9 - 22,72 + j161,5 + j3,50] \text{ A} = \\ &= [92,2 + j104,8] \text{ A}. \end{aligned}$$

Der Effektivwert ist  $I_1 = \sqrt{92,5^2 + 104,3^2} \text{ A} = 139,5 \text{ A}$ .

Es eilt der Anfangsstrom der Endspannung  $U_2$  um einen Winkel vor von

$$\arctg \frac{104,3}{92,5} = \arctg 1,126 = 48^\circ 24'.$$

Diese starke Voreilung ist durch den Ladestrom der Leitung bedingt. Die Phasenvoreilung des Anfangsstromes gegen die Spannung am Anfang beträgt

$$\varphi_1 = 48^\circ 24' - 8^\circ 58' = 39^\circ 26'.$$

Der Leistungsfaktor am Anfang der Leitung ist

$$\cos \varphi_1 = 0,773.$$

Daher nimmt die Leitung eine Leistung auf von der Größe

$$N_1 = 104 \cdot 139,5 \cdot 0,773 \text{ kW} = 11220 \text{ kW}.$$

1220 kW gehen also je Phase infolge der Wärmewirkung in der Leitung bei der Übertragung verloren.

Das Beispiel zeigt, daß man derartige Aufgaben ohne weitere Hilfsmittel als die trigonometrischen Tabellen und den Rechenschieber in verhältnismäßig einfacher Weise lösen kann. In der Spezialliteratur sind besondere Rechenbehelfe und Verfahren beschrieben, durch die man die Auswertung erleichtern kann<sup>1</sup>.

Eine anschauliche Vorstellung von der Ausbreitung der Ströme auf der Leitung erhält man durch die folgende Betrachtung. Aus den Gl. (1027) und (1028)

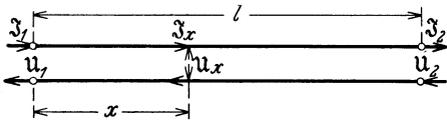


Abb. 267. Komplexe Ströme und Spannungen bei der homogenen Leitung.

können Spannung und Strom am Anfang der Leitung berechnet werden, wenn Spannung und Strom am Ende gegeben sind. Zur Berechnung von Spannung  $U_x$  und Strom  $\mathfrak{I}_x$  an irgendeiner Stelle der Leitung im Abstand  $x$  vom Leitungsanfang, Abb. 267, kann man diese Stelle der Leitung als den

Anfang einer Leitung von der Länge  $l - x$  ansehen. Daher gilt

$$U_x = U_2 \operatorname{Co}|\gamma(l-x) + \mathfrak{I}_2 \mathfrak{Z} \operatorname{Si}|\gamma(l-x); \tag{1042}$$

$$\mathfrak{I}_x = \mathfrak{I}_2 \operatorname{Co}|\gamma(l-x) + \frac{U_2}{\mathfrak{Z}} \operatorname{Si}|\gamma(l-x). \tag{1043}$$

Diese Gleichungen kann man in der Form schreiben

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{1}{2}(U_2 + \mathfrak{I}_2 \mathfrak{Z}) e^{\gamma(l-x)} + \frac{1}{2}(U_2 - \mathfrak{I}_2 \mathfrak{Z}) e^{-\gamma(l-x)}; \\ \mathfrak{I}_x &= \frac{1}{2}\left(\mathfrak{I}_2 + \frac{U_2}{\mathfrak{Z}}\right) e^{\gamma(l-x)} + \frac{1}{2}\left(\mathfrak{I}_2 - \frac{U_2}{\mathfrak{Z}}\right) e^{-\gamma(l-x)}. \end{aligned}$$

Wir berechnen die Augenblickswerte von Spannung und Strom, indem wir die Zeiger mit  $e^{j\omega t}$  multiplizieren und auf die reelle Achse projizieren. Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{1}{2}(U_2 + \mathfrak{I}_2 \mathfrak{Z}) = U_p e^{j\delta}, \tag{1044}$$

$$\frac{1}{2}(U_2 - \mathfrak{I}_2 \mathfrak{Z}) = U_q e^{j\varepsilon}, \tag{1045}$$

so ergibt sich auf diese Weise

$$u_x = U_p \sqrt{2} e^{\beta(l-x)} \cos[\omega t + \alpha(l-x) + \delta] + U_q \sqrt{2} e^{-\beta(l-x)} \cos[\omega t - \alpha(l-x) + \varepsilon]; \tag{1046}$$

$$i_x = \frac{U_p \sqrt{2}}{Z} e^{\beta(l-x)} \cos[\omega t + \alpha(l-x) + \delta - \psi] - \frac{U_q \sqrt{2}}{Z} e^{-\beta(l-x)} \cos[\omega t - \alpha(l-x) + \varepsilon - \psi]. \tag{1}$$

Die ersten Ausdrücke rechts stellen bei beiden Gleichungen Wellen dar, die in Richtung zunehmender  $x$  über die Leitung laufen. Man erhält ihre Geschwindig-

<sup>1</sup> Siehe insbesondere F. Emdé: Sinusrelief und Tangensrelief in der Elektrotechnik, Braunschweig 1924, und Vierstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen, Braunschweig 1931.

keit  $v$ , wenn man  $\omega t + \alpha(l - x) = \text{konst}$

setzt. Daraus ergibt sich  $v = \frac{\omega}{\alpha}$ . (1048)

Beim Fortschreiten über die Leitung nehmen die Amplituden gemäß dem Exponenten  $\beta x$  mehr und mehr ab. Die zweiten Ausdrücke dagegen stellen Wellen dar, die in entgegengesetzter Richtung, also vom Ende der Leitung zum Anfang laufen. Die Geschwindigkeit ist die gleiche, ebenso wie die Abnahme der Amplituden beim Fortschreiten längs der Leitung.

Man bezeichnet die Geschwindigkeit  $v$  als die Phasengeschwindigkeit. Im vorigen Zahlenbeispiel war

$$\alpha = 1,052 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}, \quad \omega = 314 \text{ s}^{-1};$$

daher wird  $v = 299\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ .

Die Größe  $\beta$  gibt an, wie groß die relative Abnahme der Effektivwerte je Längeneinheit der Leitung ist. Wenn z. B.  $\beta = 0,01 \text{ km}^{-1}$  beträgt, so bedeutet dies, daß Spannung und Strom in einer fortschreitenden Welle je Kilometer um 1% abnehmen. Die Dämpfung wird verursacht durch die Energieverluste in der Leitung, die zum Teil in den Leitungsdrähten, zum Teil in der Isolation entstehen. Man kann die Dämpfung in die entsprechenden Teile zerlegen; den ersten Teil nennt man die Widerstandsdämpfung, den zweiten die Ableitungsdämpfung. Diese Zerlegung ist durch Gl. (1034) unmittelbar ausgedrückt.

Für jeden der beiden Wellenzüge ist das Verhältnis von Spannung zu Strom gleich dem Wellenwiderstand  $Z$ . Die relative Stärke der beiden gegenläufigen Wellen ist durch die Belastung am Leitungsende bestimmt. Ist im besonderen die Leitung mit einem Verbraucher belastet, dessen Widerstand  $\Re_2$  gleich dem Wellenwiderstand ist,

$$\Re_2 = Z,$$

so gilt

$$U_2 = Z I_2,$$

und es wird

$$U_p = U_2, \quad U_q = 0.$$

In diesem Fall sind also nur Wellen vorhanden, die vom Anfang zum Ende fortschreiten; die Leitung ist reflexionsfrei abgeschlossen. Je mehr dagegen der Verbraucherwiderstand von dem Wellenwiderstand abweicht, um so stärker sind die rückläufigen Wellen. Es ist

$$U_p = \frac{1}{2} U_2 \left| 1 + \frac{Z}{\Re_2} \right|;$$

$$U_q = \frac{1}{2} U_2 \left| 1 - \frac{Z}{\Re_2} \right|.$$

Bei kurzen Leitungen überlagern sich die beiden Wellen zu einem Gesamtbild, das von dem der einzelnen Wellen sehr verschieden sein kann, wenn diese vergleichbare Werte haben. Sind dagegen die Leitungen so lang, daß die Amplituden der beiden gegenläufigen Wellen auf einen kleinen Bruchteil abnehmen, wie das z. B. bei den Leitungen der Fernmeldetechnik häufig der Fall ist, dann überwiegt in dem Gesamtbild die vom Anfang zum Ende laufende Welle, Abb. 268.

Ist das Leitungsende offen, so wird  $\Im_2 = 0$  und

$$U_p = U_q = \frac{1}{2} U_2.$$

Die beiden gegenläufigen Wellen sind dann in der Nähe des Leitungsendes gleich

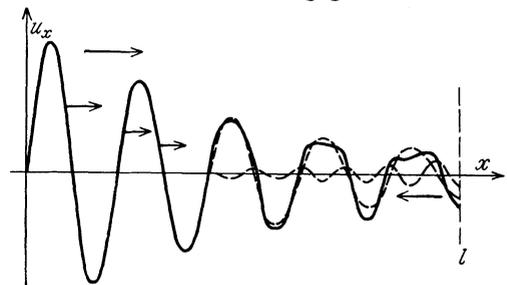


Abb. 268. Ausbreitung einer Wechselspannung auf einer langen homogenen Leitung.

stark. Man sagt, es entstehe dort eine vollkommene Reflexion. Sind die Verluste auf der Leitung verhältnismäßig klein, so bilden sich stehende Wellen aus.

Setzt man  $\beta=0, \quad \psi=0,$

so folgt aus den Gl. (1046) und (1047)

$$\left. \begin{aligned} u_x &= U_2 \sqrt{2} \cos \alpha(l-x) \cos \omega t, \\ i_x &= -\frac{U_2 \sqrt{2}}{Z} \sin \alpha(l-x) \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (1049)$$

Spannung und Strom haben Knotenpunkte, die durch die Nullstellen von  $\cos \alpha(l-x)$  und  $\sin \alpha(l-x)$  bestimmt sind, und die miteinander abwechseln. Dort, wo die Spannung ständig Null ist, hat der Strom seine größten Amplituden und umgekehrt. Am Leitungsende befindet sich ein Stromknoten und ein Spannungsbauch. Der Abstand  $\lambda$  aufeinanderfolgender Punkte der Leitung mit gleichen Amplituden stellt die Wellenlänge dar; er berechnet sich aus

$$\alpha(l-x) - \alpha(l-x-\lambda) = 2\pi$$

zu  $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{v}{f}. \quad (1050)$

Da bei Vernachlässigung der Verluste

$$\alpha = \omega \sqrt{L'C'}$$

wird, so gilt auch

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{L'C'}} = \frac{1}{f \sqrt{L'C'}} = \frac{v}{f}. \quad (1051)$$

Die Wellenlänge ist gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit multipliziert mit der Dauer einer Periode. In dem vorigen Zahlenbeispiel der Hochspannungsleitung ist

$$\lambda = \frac{299\,000 \text{ km}}{50 \text{ Hzs}} = 5980 \text{ km}.$$

Die Leitungen der Starkstromtechnik sind immer kurz gegen die Wellen-

länge, so daß man hier von stehenden Wellen nicht sprechen kann. Schon bei den Frequenzen der Fernsprechtechnik ist jedoch häufig umgekehrt die Wellenlänge klein gegen die Leitungslänge.

Spannung und Strom sind bei der leerlaufenden Leitung an jeder Stelle der Leitung um  $90^\circ$  gegeneinander phasenverschoben. Hat der Strom gerade seine größten Werte, so ist die Spannung auf der ganzen Leitung Null und umgekehrt. Das Nullwerden der Spannung erfolgt gleichzeitig an allen Stellen der Leitung. Physikalisch hat man sich dies so zu erklären, daß in den einzelnen Abschnitten der Leitung die Energie zwischen dem magnetischen und dem elektrischen Feld hin und her schwingt. In Abb. 269 ist oben die Verteilung der Spannung auf einer Leitung von der Länge  $l=1,4 \lambda$  aufgezeichnet für einen Zeitpunkt, in dem der Strom gerade Null ist. Dieser Zeitpunkt ist in der darunterliegenden Abbildung mit  $t=0$  bezeichnet, und es ist angedeutet, wie man sich diese Verteilung der Spannung über die Leitung in diesem Zeitpunkt vorzustellen hat. Je zwei aufeinanderfolgende Knotenpunkte der Spannung schließen Abschnitte der Leitung ein, in denen elektrische Kraftlinien von dem einen Draht in gleicher Richtung zum anderen übergehen. Entsprechende elektrische Ladungen sind über die Drähte verteilt. Eine solche Verteilung der Ladungen kann

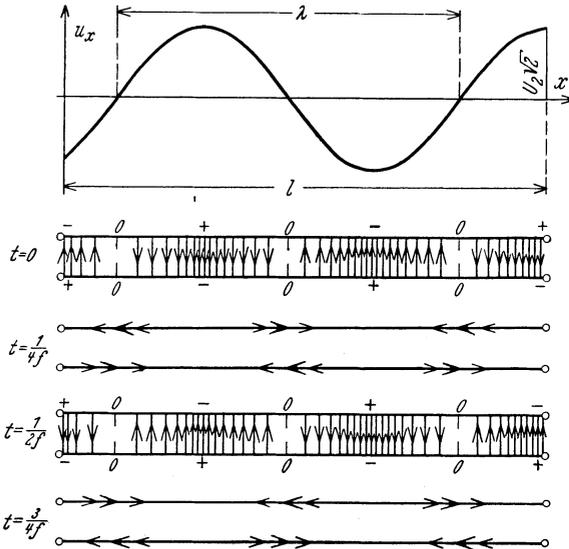


Abb. 269. Stehende Welle auf einer am Ende offenen Leitung.

jedoch nicht stabil sein; längs der Drähte besteht ein Potentialgefälle, in dem sich die Ladungen auszugleichen suchen. Daher entsteht ein Strom, und wir finden  $\frac{1}{4}$  Periode später ( $t = \frac{1}{4j}$ ) überall dort, wo vorher die Spannungsknoten waren, Ströme. Die Ladungen sind vollständig verschwunden. Nunmehr haben aber die Ströme ein magnetisches Feld aufgebaut, das nicht plötzlich verschwinden kann. Die Ströme fließen weiter in gleicher Richtung und führen zu einer Anhäufung von Ladungen, die im Zeitpunkt  $t = \frac{1}{2j}$  ihren Höhepunkt erreicht und derjenigen im Zeitpunkt  $t = 0$  gerade entgegengesetzt ist. Das Spiel wiederholt sich nun in umgekehrter Richtung, bis nach einer vollen Periode dieser Ausgangszustand erreicht ist.

In dem gezeichneten Beispiel eilt der Strom am Anfang der Leitung der Spannung um  $90^\circ$  nach; d. h. die Leitung wirkt am Anfang so wie eine Induktivität. Je nach der Länge der Leitung verhält sich die leerlaufende Leitung am Anfang wie eine Induktivität oder eine Kapazität mit dem Blindwiderstand  $Z$ .

Ganz ähnliche Verhältnisse ergeben sich bei kurzgeschlossenem Leitungsende. Hier ist  $u_2 = 0$  und es wird

$$\left. \begin{aligned} u_x &= -I_2 \sqrt{2} Z \sin \alpha(l-x) \sin \omega t; \\ i_x &= I_2 \sqrt{2} \cos \alpha(l-x) \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (1052)$$

Am Leitungsende befindet sich jetzt ein Spannungsknoten, während im übrigen das gleiche gilt wie im vorigen Fall.

### 36. Näherungsformeln der Leitungstheorie.

Die genauen Leitungsgleichungen sind, wie im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, ohne weiteres zur praktischen Anwendung geeignet, und es ist daher nicht gerechtfertigt, grundsätzlich bei jeder Leitungsberechnung Näherungsmethoden und -formeln zu benutzen. Dagegen sind Vernachlässigungen, die die praktischen Verhältnisse berücksichtigen, häufig sehr nützlich, wenn es sich darum handelt, Überlegungen über die Wirkung irgendwelcher Maßnahmen beim ersten Entwurf von Anlagen und Einrichtungen anzustellen; sie ermöglichen meist erst einen derartigen Einblick in die Abhängigkeit der einzelnen Größen voneinander, daß die Theorie konstruktiv ausgewertet werden kann. In dieser Beziehung kann man kaum zu weit gehen; es muß nur nachträglich geprüft werden, ob die Ergebnisse mit der genaueren Rechnung genügend übereinstimmen, oder welche Fehler die gemachten Vernachlässigungen ungünstigstenfalls verursachen können.

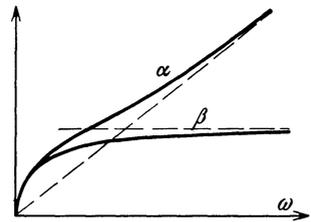


Abb. 270. Frequenzabhängigkeit von Dämpfungs- und Phasenbelag.

Berechnet man nach den Gl. (1033) und (1034) Dämpfungs- und Phasenbelag für verschiedene Frequenzen, so ergeben sich Kurven von der in Abb. 270 gezeichneten Art. Bei hinreichend niedrigen Frequenzen kann  $\omega L'$  gegen  $R'$  vernachlässigt werden; wird ferner  $G'$  gegen  $\omega C'$  weggelassen, so folgt

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{j \omega C' R'} = (1+j) \sqrt{\frac{1}{2} C' R' \omega}. \\ \alpha &= \beta = \sqrt{\frac{1}{2} \omega C' R'}. \end{aligned} \quad (1053)$$

Diese Formeln gelten mit einer gewissen Annäherung für Kabelleitungen auch bei höheren Frequenzen, weil hier wegen der kleinen Leiterabstände die Induktivität sehr klein und die Kapazität groß ist. Bei Freileitungen dagegen ist schon für ver-

hältnismäßig niedrige Frequenzen  $\omega L'$  als groß gegen  $R'$  zu betrachten. Vernachlässigt man daher hier  $R'$  gegen  $\omega L'$  und ebenso  $G'$  gegen  $\omega C'$ , so ergibt sich

$$\alpha = \omega \sqrt{L'C'}. \tag{1054}$$

Das ist die Gleichung der geraden Linie, der sich der Phasenbelag bei höheren Frequenzen nähert. Aus Gl. (1034) folgt damit für den Dämpfungsbelag

$$\beta = \frac{R'}{2} \sqrt{\frac{C'}{L'}} + \frac{G'}{2} \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \frac{R'}{2Z} + \frac{G'}{2}Z. \tag{1055}$$

Diese Beziehung kann man unmittelbar auch durch die folgende Näherungsbetrachtung finden. Es werde eine fortschreitende Welle genügend hoher Frequenzen betrachtet, so daß überall

$$\frac{u_x}{i_x} = Z.$$

In einem Leitungsabschnitt von der Längeneinheit entstehen Stromwärmeverluste von der Größe  $i_x^2 R'$  und dielektrische Verluste  $u_x^2 G'$ ; die Gesamtverluste in diesem Abschnitt betragen also

$$N_v = i_x^2 R' + u_x^2 G'.$$

Die an der Stelle  $x$  übertragene Leistung ist

$$N = u_x i_x,$$

so daß die von der Welle mitgeführte Leistung je Längeneinheit um den relativen Betrag

$$\frac{N_v}{N} = R' \frac{i_x}{u_x} + G' \frac{u_x}{i_x} = \frac{R'}{Z} + G'Z$$

abnimmt. Andererseits läßt sich diese Abnahme ausdrücken durch

$$1 - e^{-2\beta}.$$

Dies ergibt für genügend kleine Werte von  $\beta$  angenähert  $2\beta$ , so daß für  $\beta$  die oben abgeleitete Formel folgt.

Bei wirklichen Leitungen sind die Beläge  $R', G', L', C'$  nicht vollständig unabhängig von der Frequenz der Wechselströme; insbesondere wächst der Ableitungsbelag aus den in Abschn. 19 beschriebenen Gründen nahezu proportional mit der Frequenz. Der Dämpfungsbelag wächst daher auch in dem Gebiet, in dem die Näherungsformel (1055) gilt, mit der Frequenz an, um so mehr, je größer die Ableitungsdämpfung gegen die Widerstandsdämpfung ist. Bei den natürlichen Leitungen ist die Ableitungsdämpfung meist klein gegen die Widerstandsdämpfung. Hierauf beruht die Möglichkeit, durch künstliches Erhöhen des Induktionsbelages die Dämpfung zu verkleinern (Heaviside 1893, Pupin 1900, Krarup 1902). Eine Vergrößerung der Induktivität setzt nach Gl. (1055) die Widerstandsdämpfung herab und vergrößert die Ableitungsdämpfung, ergibt also eine Verminderung der

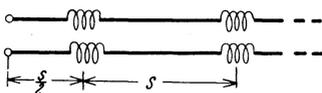


Abb. 271. Schema einer Pupin-Leitung.

Gesamtdämpfung, solange die Widerstandsdämpfung kleiner ist als die Ableitungsdämpfung. Bei den Pupin-Leitungen wird der Induktionsbelag durch Spulen vergrößert, die in bestimmten, einander gleichen Abständen  $s$  (etwa 2 km) in Reihe mit der Leitung eingeschaltet werden, Abb. 271. Die Abstände der Spulen

müssen klein gegen die Wellenlänge der Fernsprechströme sein, damit die konzentrierte Induktivität ungefähr so wirkt wie eine verteilte. Die genauere Wirkung der Spulen ergibt sich aus der Theorie der Kettenleiter. Man kann die zwischen je zwei Spulen liegenden Leitungsabschnitte mit einer gewissen Annäherung als punktförmige Kondensatoren auffassen, so daß ein Kettenleiter vorliegt mit Spulen in den Längszweigen und Kondensatoren in den Quersweigen. Ein solcher Kettenleiter hat oberhalb einer bestimmten Grenzfrequenz einen Sperrbereich; die Grenzfrequenz muß daher genügend hoch über dem für die Sprachübertragung notwendigen Frequenzbereich liegen.

Bei der genauen Berechnung der Dämpfung einer Pupin-Leitung muß die Wellenausbreitung auf den zwischen je zwei Spulen liegenden Leitungsabschnitten berücksichtigt werden. Denkt man sich die Leitung in einzelne Vierpole nach Abb. 272 unterteilt, indem die Spulen halbiert werden, so kann man das Übertragungsmaß aus dem Verhältnis der Spannung  $u_0$  am Anfang dieses Vierpols und der Spannung  $u_1$  am offenen Ende berechnen, Gl. (981). Dieses Verhältnis der beiden Spannungen ergibt sich auf folgende Weise. Es setzt sich die Spannung am Anfang des Vierpols zusammen aus der Spannung am Anfang des Leitungsabschnittes  $u_a$  und dem Spannungsabfall in der am Anfang liegenden Spule. Bezeichnen  $R_p$  und  $L_p$  Wirkwiderstand und Induktivität einer Pupin-Spule, so gilt

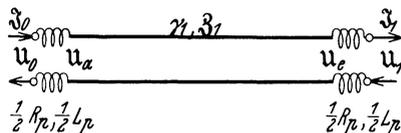


Abb. 272. Element einer Pupin-Leitung.

$$u_0 = u_a + \mathfrak{S}_0 \frac{1}{2} (R_p + j\omega L_p). \tag{1056}$$

Ferner ist, da das Ende des Vierpols offen sein soll,

$$\mathfrak{S}_1 = 0, \quad u_e = u_1,$$

und die Leitungsgleichungen ergeben für den homogenen Leitungsabschnitt

$$\begin{aligned} u_a &= u_1 \mathfrak{C}o\{\gamma_1 s\}; \\ \mathfrak{S}_0 &= \frac{u_1}{\mathfrak{S}_1} \mathfrak{S}in\{\gamma_1 s\}. \end{aligned}$$

Dabei bedeuten  $\gamma_1$  und  $\mathfrak{Z}_1$  die Fortpflanzungskonstante und den Wellenwiderstand des homogenen Leitungsabschnittes von der Länge  $s$ . Aus diesen Gleichungen folgt

$$\mathfrak{C}o\{g\} = \mathfrak{C}o\{\gamma_1 s\} + \frac{R_p + j\omega L_p}{2\mathfrak{Z}_1} \mathfrak{S}in\{\gamma_1 s\}. \tag{1057}$$

Hieraus können die genauen Werte der Dämpfung und des Winkelmaßes der Pupin-Leitung berechnet werden. Praktisch benützt man meist Näherungsformeln, die sich durch Reihenentwicklungen der Hyperbelfunktionen ergeben. Im übrigen gelten für die Pupin-Leitung die Leitungsgleichungen, wenn

$$\gamma = \frac{g}{s} \tag{1058}$$

gesetzt wird.

Der Wellenwiderstand einer homogenen Leitung hat grundsätzlich die in Abb. 273 dargestellte Frequenzabhängigkeit, wobei gesetzt ist

$$\mathfrak{Z} = Z_1 + jZ_2, \tag{1059}$$

$Z_1$  und  $Z_2$  also den reellen und imaginären Teil darstellen. Im Bereich niedriger Frequenzen ergibt sich die Näherungsformel

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z} &= \sqrt{\frac{R'}{j\omega C'}} = \sqrt{\frac{R'}{\omega C'}} e^{-j\frac{\pi}{4}}; \\ Z_1 &= -Z_2 = \sqrt{\frac{R'}{2\omega C'}}, \end{aligned} \tag{1060}$$

die bei Kabelleitungen brauchbar ist. Bei hohen Frequenzen gilt dagegen

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z} &= \sqrt{\frac{L'}{C'} \left(1 + \frac{R'}{j\omega L'}\right)} \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}} \left(1 - j\frac{1}{2} \frac{R'}{\omega L'}\right); \\ Z_1 &= \sqrt{\frac{L'}{C'}}; \quad Z_2 = -\frac{1}{2} \frac{R'}{\omega \sqrt{L' C'}}. \end{aligned} \tag{1061}$$

Bei hohen Frequenzen nähert sich der Wellenwiderstand einem konstanten Wert,

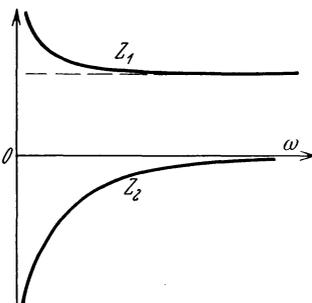


Abb. 273. Frequenzabhängigkeit des Wellenwiderstandes einer homogenen Leitung.

der bei Freileitungen zwischen 500 und 800  $\Omega$ , bei Kabelleitungen zwischen 100 und 200  $\Omega$  liegt.

Die Leitungsgleichungen lassen sich vereinfachen, wenn die Leitungen entweder sehr kurz gegen die Wellenlänge sind, wie bei Starkstromleitungen, oder sehr lang, wie es bei Fernsprechleitungen häufig der Fall ist.

Bei kurzen Leitungen kann man die für kleine Werte von  $\gamma l$  gültigen Näherungsformeln anwenden

$$\mathfrak{C}o\{\gamma l = 1 + \frac{1}{2}(\gamma l)^2, \quad \mathfrak{S}i\gamma l = \gamma l.$$

Dann wird aus den Leitungsgleichungen

$$\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}_2 (1 + \frac{1}{2}\gamma^2 l^2) + \mathfrak{S}_2 (R' + j\omega L') l;$$

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 (1 + \frac{1}{2}\gamma^2 l^2) + \mathfrak{U}_2 (G' + j\omega C') l.$$

Da in den ersten Ausdrücken rechts  $\frac{1}{2}\gamma^2 l^2$  klein gegen 1 ist, so kann man auch für  $\gamma$  Näherungsformeln benützen. Bei Kabelleitungen gilt

$$\gamma^2 \approx jR'\omega C',$$

bei Freileitungen

$$\gamma^2 \approx -\omega^2 L' C'.$$

Im ersten Fall ist die durch diesen Faktor gegebene Korrektur meist vernachlässigbar. Im zweiten wird

$$\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}_2 (1 - \frac{1}{2}\omega^2 L' C' l^2) + \mathfrak{S}_2 (R' + j\omega L') l; \quad (1062)$$

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 (1 - \frac{1}{2}\omega^2 L' C' l^2) + \mathfrak{U}_2 (G' + j\omega C') l. \quad (1063)$$

Diese Gleichungen sagen folgendes aus. Wenn die Leitung leer läuft, so ist die Spannung am Anfang kleiner als die Spannung am Ende; es tritt eine Spannungserhöhung am Ende der Leitung ein vom relativen Betrag

$$\sigma = \frac{1}{2}\omega^2 L' C' l^2. \quad (1064)$$

Die Leitung nimmt ferner einen Ladestrom auf, der so berechnet werden kann wie der Strom in einem Kondensator mit der Gesamtkapazität und der Gesamtableitung der Leitung. Wird die Leitung belastet, so hat man zu der um die Spannungserhöhung verminderten Endspannung den Spannungsabfall zu addieren, der so groß ist wie die Spannung an einer Spule mit dem Gesamtwiderstand und der Gesamtinduktivität der Leitung. Zum Ladestrom kommt bei Belastung der Belastungsstrom, der aber um einen gleichen Betrag wie die Spannungserhöhung zu vermindern ist. Man kann auf Grund der Reihenentwicklungen der Hyperbelfunktionen leicht feststellen, daß die Gl. (1062) und (1063) mit einem Fehler von weniger als einigen zehntel Prozent gelten, solange  $\sigma < 8\%$  ist.

In dem Zahlenbeispiel des vorigen Abschnittes ist

$$\sigma = \frac{1}{2} 1,085 \cdot 10^{-6} 25 \cdot 10^4 = 13,56\%.$$

Nach der Formel (1062) wird also

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_1 &= [10^5 \cdot 0,8644 + (100 - j75)(50 + j157)] V = \\ &= [0,8644 + 0,05 + 0,1177 + j0,157 - j0,0375] 10^5 V = \\ &= [1,032 + j0,12] 10^5 V. \end{aligned}$$

$$\mathfrak{U}_1 = \sqrt{1,032^2 + 0,12^2} 10^5 V = 103,8 \text{ kV.}$$

Der Fehler der Näherungsformel beträgt hier etwa 0,2%. Ferner ist nach Gl. (1063)

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1 &= [(100 - j75)0,8644 + 10^5(50 + j1730) \cdot 10^{-6}] A = \\ &= [86,44 - j64,9 + 5,0 + j173] A = \\ &= [91,4 + j108,1] A. \end{aligned}$$

$$\mathfrak{I}_1 = \sqrt{91,4^2 + 108,1^2} A = 141,5 A.$$

Der Unterschied gegen die genaue Rechnung beträgt 1,4%.

Bei Freileitungen ist das Produkt  $L' C'$  nach den Gl. (1020) und (1021), wenn man von der geringen inneren Induktivität absieht, eine Konstante, unabhängig von Drahtabstand und -durchmesser, nämlich

$$L' C' = \epsilon_0 \mu_0 = 1,112 \cdot 10^{-11} \frac{\text{s}^2}{\text{km}^2}. \quad (1065)$$

Daher wird die Spannungserhöhung für eine Frequenz von 50 Hz

$$\sigma = 5,5 \cdot 10^{-7} \left( \frac{l}{\text{km}} \right)^2, \quad (1066)$$

und die Näherungsformeln (1062/63) sind bis zu einer Leitungslänge von etwa 350 km brauchbar.

Eine am Ende offene kurze Kabelleitung kann man als einen Kondensator mit einer bestimmten Kapazität und einer bestimmten Ableitung auffassen. Ist die Leitung hinreichend kurz, so sind die Werte der Kapazität und der Ableitung einfach zu berechnen aus  $C = C'l$ ,  $G = G'l$ .

Man kann daher Kapazitäts- und Ableitungsbelag mit Hilfe der in Abschn. 19 beschriebenen Anordnungen messen. Meist ist jedoch bei der Ableitung infolge der endlichen Leitungslänge eine Korrektur des gefundenen Wertes erforderlich, die sich aus der folgenden Überlegung ergibt. Es gilt bei offenem Leitungsende

$$u_1 = u_2 \mathfrak{C} \operatorname{os} \gamma l; \quad \mathfrak{I}_1 = \frac{u_2}{\mathfrak{Z}} \mathfrak{S} \operatorname{in} \gamma l.$$

Daher ist der Eingangswiderstand

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{u_1}{\mathfrak{I}_1} = \mathfrak{Z} \frac{\mathfrak{C} \operatorname{os} \gamma l}{\mathfrak{S} \operatorname{in} \gamma l},$$

oder wenn man die Reihenentwicklungen der Hyperbelfunktionen einführt, näherungsweise

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\mathfrak{Z} \left( 1 + \frac{1}{2} \gamma^2 l^2 \right)}{\gamma l \left( 1 + \frac{1}{6} \gamma^2 l^2 \right)} = \frac{\mathfrak{Z}}{\gamma l} \frac{1}{1 - \frac{1}{3} \gamma^2 l^2}.$$

Setzt man die Werte für  $\gamma = \sqrt{R'(G' + j\omega C')} \approx \sqrt{R' j\omega C'}$  und  $\mathfrak{Z} \approx \sqrt{\frac{R'}{G' + j\omega C'}}$  ein, so ergibt sich

$$\frac{1}{\mathfrak{R}_0} = (G' + j\omega C') l \left( 1 - \frac{1}{3} R' j\omega C' l^2 \right) \approx G' l + \frac{1}{3} R' \omega^2 C'^2 l^3 + j\omega C' l.$$

Von dem gemessenen Ableitungswert ist also zur Berechnung des Ableitungsbelages die Größe

$$\frac{1}{3} \omega^2 R' C'^2 l^3$$

zu subtrahieren.

Als weiteres Beispiel einer elektrisch kurzen Leitung werde der Widerstand von bifilaren Drahtschleifen, wie sie für Meßzwecke als Vergleichswiderstände verwendet werden, berechnet. Eine solche Schleife kann aufgefaßt werden als eine am Ende kurzgeschlossene Leitung von der Länge  $l$ . Es gilt daher

$$u_1 = \mathfrak{I}_2 \mathfrak{Z} \mathfrak{S} \operatorname{in} \gamma l; \quad \mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}_2 \mathfrak{C} \operatorname{os} \gamma l.$$

Der Eingangswiderstand wird  $\mathfrak{R} = \frac{u_1}{\mathfrak{I}_1} = \mathfrak{Z} \mathfrak{T} g \gamma l$ .

Damit nun der Widerstand der Schleife bei Wechselstrom möglichst gleich dem Gleichstromwiderstand ist, muß  $\gamma l$  klein sein gegen 1. Um den Einfluß endlicher Werte von  $\gamma l$  zu erkennen, darf man daher die Entwicklungen ansetzen

$$\mathfrak{S} \operatorname{in} \gamma l \approx \gamma l \left( 1 + \frac{1}{6} \gamma^2 l^2 \right); \quad \mathfrak{C} \operatorname{os} \gamma l \approx 1 + \frac{1}{2} \gamma^2 l^2; \quad \mathfrak{T} g \gamma l \approx \gamma l \left( 1 - \frac{1}{3} \gamma^2 l^2 \right).$$

Damit wird  $\mathfrak{R} = (R' + j\omega L') l \left( 1 - \frac{1}{3} (R' + j\omega L') j\omega C' l^2 \right)$ , (1067)

wenn die Ableitung, die sich durch gute Isolierung genügend klein halten läßt, vernachlässigt wird. Durch Ausmultiplizieren und Weglassen der Glieder mit höheren Potenzen von  $\omega$  als der ersten folgt

$$\mathfrak{R} = R' l + j\omega (L' - \frac{1}{3} R'^2 C' l^2) l. \quad (1068)$$

Diese Beziehung zeigt, daß der Fehler des Widerstandes für ein ganz bestimmtes Verhältnis von Drahtabstand zu Drahradius zu einem Minimum gemacht werden kann, wenn nämlich

$$L' = \frac{1}{3} R' ^2 C' l^2. \tag{1069}$$

Hiervon wird Gebrauch gemacht bei der Herstellung von Präzisionswiderständen, bei denen bifilare Drahtschleifen zu zylindrischen Spulen aufgewickelt werden, wenn sich auch dabei die Verhältnisse nicht in so einfacher Form theoretisch darstellen lassen.

Die elektrisch lange Leitung ist dadurch definiert, daß die Dämpfung  $\beta l$  so groß ist, daß

$$\sin \gamma l \approx \cos \gamma l \approx \frac{1}{2} e^{\gamma l}$$

wird. Das ist der Fall, wenn  $\beta l$  größer als 2 bis 3 ist. Die Leitungsgleichungen gehen unter dieser Voraussetzung in die folgenden Beziehungen über

$$U_1 = (U_2 + \Im_2 \Im) \frac{1}{2} e^{\gamma l}; \tag{1070}$$

$$\Im_1 = \frac{1}{3} (U_2 + \Im_2 \Im) \frac{1}{2} e^{\gamma l}. \tag{1071}$$

Der Eingangswiderstand der Leitung wird gleich dem Wellenwiderstand:

$$\Re_1 = \frac{U_1}{\Im_1} = \Im.$$

Aus der Gl. (1070) folgt

$$U_2 = 2U_1 e^{-\gamma l} - \Im_2 \Im. \tag{1072}$$

Daraus geht hervor, daß die Spannung am Ende der Leitung so berechnet werden kann, wie wenn der Verbraucher an einen Generator angeschlossen wäre mit der elektromotorischen Kraft

$$\mathfrak{E}_2 = 2U_1 e^{-\gamma l} \tag{1073}$$

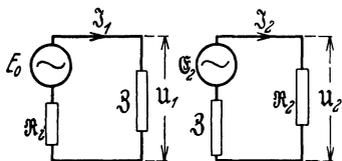


Abb. 274. Ersatzschema einer langen Leitung.

und dem inneren Widerstand  $\Im$ . Man kann daher für eine lange Leitung das in Abb. 274 angegebene Ersatzschema aufstellen, das für überschlägige Betrachtungen wertvoll ist. Die Anfangsspannung berechnet sich aus der elektromotorischen Kraft  $E_0$

der am Anfang der Leitung liegenden Ersatzstromquelle als Spannungsabfall an dem Eingangswiderstand  $\Im$  der Leitung:

$$U_1 = E_0 \frac{\Im}{\Re_1 + \Im}. \tag{1074}$$

Damit kann man die elektromotorische Kraft  $\mathfrak{E}_2$  am Leitungsende berechnen:

$$\mathfrak{E}_2 = \frac{2 E_0 \Im e^{-\gamma l}}{\Re_1 + \Im}, \tag{1075}$$

und es ergeben sich Spannung und Strom am Ende der Leitung, wenn der am Ende angeschlossene Widerstand  $\Re_2$  bekannt ist.

**Zahlenbeispiel:** Der Dämpfungsbelag einer Pupin-Leitung sei  $\beta = 0,02$  Neper/km bei 1000 Hz\*; der Wellenwiderstand sei  $Z = 1600 \Omega$ ; die Leitung von 140 km Länge sei auf beiden Seiten mit Widerständen von  $\Re_1 = \Re_2 = 2000 \Omega$  abgeschlossen. Gesucht ist das Verhältnis der Spannung am Abschlußwiderstand zur elektromotorischen Kraft am Anfang.

Es ist

$$\beta l = 140 \cdot 0,02 \text{ Neper} = 2,8;$$

daher wird

$$U_1 = \frac{E_0 1600}{1600 + 2000} = 0,444 E_0.$$

$$E_2 = 2 \cdot 0,444 E_0 e^{-2,8} = 0,0541 E_0.$$

$$U_2 = \frac{E_2 2000}{1600 + 2000} = 0,556 E_2 = 0,030 E_0. \quad \frac{U_2}{E_0} = 0,030.$$

Einfache und allgemeine Beziehungen ergeben sich schließlich bei beliebiger Leitungslänge, wenn der Abschlußwiderstand angenähert gleich dem Wellen-

\* Die Zahl  $\beta l$  gibt die Zahl der Neper an (vgl. S. 229). In Amerika werden zur Darstellung der Spannungs- und Stromverhältnisse die Potenzen von  $10^{0,5}$  benützt und die Einheit als 1 Bel bezeichnet; es ist daher: 1 Bel = 1,1513 Neper.

widerstand der Leitung ist. Setzt man

$$\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{Z}(1 + \varrho), \quad (1076)$$

wobei  $\varrho$  klein gegen 1 sein soll, so gilt

$$u_1 = u_2 \mathfrak{C}o\{\gamma l\} + \frac{u_2}{1 + \varrho} \mathfrak{S}i\gamma l;$$

$$\mathfrak{I}_1 = \frac{u_2}{\mathfrak{Z}(1 + \varrho)} \mathfrak{C}o\{\gamma l\} + \frac{u_2}{\mathfrak{Z}} \mathfrak{S}i\gamma l;$$

oder 
$$u_1 = \frac{u_2}{1 + \varrho} (1 + \varrho e^{-\gamma l} \mathfrak{C}o\{\gamma l\}) e^{\gamma l}; \quad (1077)$$

$$\mathfrak{I}_1 = \frac{u_2}{\mathfrak{Z}(1 + \varrho)} (1 + \varrho e^{-\gamma l} \mathfrak{S}i\gamma l) e^{\gamma l}. \quad (1078)$$

Hieraus folgt für den Eingangswiderstand

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{u_1}{\mathfrak{I}_1} = \mathfrak{Z} \frac{1 + \varrho e^{-\gamma l} \mathfrak{C}o\{\gamma l\}}{1 + \varrho e^{-\gamma l} \mathfrak{S}i\gamma l} \approx \mathfrak{Z}(1 + \varrho e^{-2\gamma l}). \quad (1079)$$

Der Eingangswiderstand einer Leitung ist also um so genauer gleich dem Wellenwiderstand, je größer die Dämpfung und je kleiner der Widerstandsunterschied  $\varrho$  ist. Die größten Abweichungen des Eingangswiderstandes von dem Wellenwiderstand haben den relativen Betrag  $|\varrho| e^{-2\beta l}$ .

Schon bei einer Dämpfung  $\beta l = 1,5$  sind die Abweichungen des Eingangswiderstandes vom Wellenwiderstand nach Gl. (1079) auch bei beliebig großen Widerstandsunterschieden  $\varrho$  kleiner als 10%.

Aus Gl. (1077) ergibt sich ferner für das Verhältnis der Effektivwerte von Anfangs- und Endspannung die Näherungsformel

$$\frac{U_1}{U_2} = e^{\beta l},$$

deren Fehler kleiner ist als  $\frac{1}{2} \left| \frac{\varrho}{1 + \varrho} \right|$ .

## Sechstes Kapitel.

### Rasch veränderliche Felder.

#### 37. Die Maxwell'schen Feldgleichungen.

In einem langsam veränderlichen elektrischen Feld ist der Verschiebungsstrom nach Abschnitt 18 definiert durch die Zunahme des Verschiebungsflusses in der Zeiteinheit. Da sich der Verschiebungsfluß im ganzen Nichtleiter ausbreitet, so kann man die Dichte des Verschiebungsstromes einführen; sie beträgt

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \varepsilon \frac{d\mathfrak{E}}{dt}$$

und setzt sich mit der Dichte des Leitungsstromes im Nichtleiter zur Dichte des wahren Stromes zusammen, Gl. (437). Der durch irgendeine Fläche im Nichtleiter hindurchfließende Gesamtstrom ist gleich dem Oberflächenintegral der wahren Stromdichte:

$$i = \int \mathfrak{G} d\mathfrak{S}. \quad (1080)$$

Dies ist zunächst nichts weiter als eine willkürliche Definition. Sie erhält aber ihren Sinn dadurch, daß nach der Erfahrung der Verschiebungsstrom in gleicher Weise magnetische Wirkungen hervorruft wie der Leitungsstrom (Hypothese von J. C. Maxwell, 1861).

Wird an die beiden Platten  $a$  und  $b$  eines Kondensators, Abb. 275, eine Wechselstromquelle angeschlossen, so fließt ein Wechselstrom in dem so gebildeten Strom-

kreis, der sich in dem isolierenden Raum zwischen den beiden Platten als Verschiebungsstrom fortsetzt, so daß an jeder Stelle des Stromkreises der Gesamtstrom den gleichen Wert hat. Schiebt man einen Eisenring *A* über den Stromleiter, so entsteht in dem Eisenring ein magnetisches Feld mit konzentrischen Kraftlinien. Das Linienintegral der magnetischen Feldstärke ist in jedem Zeitpunkt gleich der Stromstärke *i*. Man kann den Induktionsfluß in dem Eisenring messen, indem man den Eisenring mit Draht bewickelt, der an ein Voltmeter angeschlossen wird. Wenn man nun den Eisenkern in die Lage *B* bringt, so ergibt sich infolge der magnetischen Wirkungen des Verschiebungsstromes der gleiche Induktionsfluß in dem Ring wie bei *A* (wobei davon abgesehen werde, daß ein Teil der Verschiebungslinien sich außen um den Ring herum schließt). Diese Gleichwertigkeit von Verschiebungsstrom und Leitungsstrom hinsichtlich der magnetischen Wirkung ist von grundlegender Bedeutung, wenn es sich um rasch veränderliche Vorgänge handelt, da der Verschiebungsstrom mit zunehmender Schnelligkeit der Feldstärkeänderungen wächst.

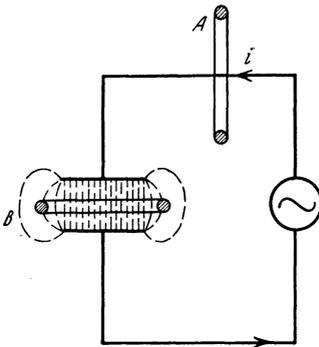


Abb. 275. Magnetische Wirkung des Verschiebungsstromes.

Nimmt man den Verschiebungsstrom in das Durchflutungsgesetz auf, so ergibt sich die erste Feldgleichung

$$\text{rot } \mathfrak{H} = \kappa \mathfrak{C} + \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial t}, \quad (1081)$$

die besagt, daß der Wirbel der magnetischen Feldstärke an jeder Stelle des Raumes gleich der wahren Stromdichte an dieser Stelle ist; sie lautet in der Integralform

$$\oint \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = \int (\kappa \mathfrak{C} + \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial t}) d\mathfrak{S}, \quad (1082)$$

wobei das Oberflächenintegral über eine Fläche zu nehmen ist, die von dem Weg berandet wird, auf dem das Linienintegral gebildet wird.

Die zweite Feldgleichung stellt eine Verallgemeinerung des Induktionsgesetzes dar. Die in einem beliebigen geschlossenen Weg innerhalb eines Leiters bei Flußänderungen induzierte elektromotorische Kraft hat die Größe

$$e = \oint \mathfrak{C} d\mathfrak{s} = - \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}.$$

Sie ist unabhängig von dem Leitermaterial, und man hat daher anzunehmen, daß das Linienintegral der elektrischen Feldstärke den gleichen Wert hat, auch wenn überhaupt kein Leiter vorhanden ist. Diese Folgerung wird in der Tat durch die Erfahrung bestätigt. Ändert sich der magnetische Induktionsfluß in einem Nichtleiter, so ergibt sich also ebenfalls ein elektrisches Feld. Über die Struktur dieses Feldes kann man eine Aussage machen mit Hilfe einer ähnlichen Überlegung, wie sie bei der Berechnung des Wirbels der magnetischen Feldstärke ausgeführt wurde. Wir denken uns in dem Magnetfeld ein Flächenelement  $d\mathfrak{S}$  senkrecht zur Richtung der magnetischen Kraftlinien abgegrenzt. Wendet man auf dieses Flächenelement das Induktionsgesetz in der eben ausgesprochenen Form an, so findet man

$$\frac{1}{d\mathfrak{S}} \oint \mathfrak{C} d\mathfrak{s} = - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t},$$

oder

$$\text{rot } \mathfrak{C} = - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}. \quad (1083)$$

Dies ist die zweite Feldgleichung in der Differentialform. Der Wirbel der elektrischen Feldstärke ist danach an jeder Stelle des Raumes gleich der Abnahmegeschwindigkeit der Kraftliniendichte. Die Richtung des

Wirbels der elektrischen Feldstärke ist die der magnetischen Kraftlinien; die Richtung der elektrischen Feldstärke steht also überall senkrecht auf der Richtung der magnetischen Kraftlinien.

Zwischen der elektrischen Feldstärke und dem magnetischen Induktionsfluß besteht demnach ein ähnlicher Zusammenhang wie zwischen der magnetischen Feldstärke und dem wahren Strom. So wie jeder elektrische Strom mit dem Auftreten eines magnetischen Feldes verknüpft ist, das geschlossene, mit den Stromlinien verkettete Kraftlinien hat, so entsteht bei jeder Änderung des magnetischen Induktionsflusses ein elektrisches Feld mit in sich geschlossenen Kraftlinien, die mit den magnetischen Kraftlinien verkettet sind. In der Integralform lautet die zweite Feldgleichung

$$\oint \mathcal{E} d\mathfrak{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \int \mathfrak{B} d\mathfrak{F}, \quad (1084)$$

wobei wieder das Oberflächenintegral über eine Fläche zu nehmen ist, die von dem Integrationsweg des Linienintegrals berandet wird. Die Integrationsrichtung des Linienintegrals bildet mit der positiven Richtung von  $d\mathfrak{F}$  eine Rechtsschraube.

In Abb. 276a ist der Verlauf der elektrischen Feldlinien in der Umgebung eines von Windungen freien Teiles eines Transformatorcores dargestellt. Längs einer jeden Feldlinie hat die Umlaufspannung den gleichen Wert; sie ist gleich der Abnahmegeschwindigkeit des Flusses im Eisenkern, wenn man von den magnetischen Streulinien absieht. Bringt man eine Windung aus Kupferdraht in das Feld, wie in Abb. 276b, so setzen sich die Leitungselektronen unter der Einwirkung der elektrischen Feldstärke in Bewegung, bis an dem einen Drahtende eine bestimmte positive Ladung, am anderen eine negative Ladung vorhanden ist, die für sich allein ein Potentialgefälle in entgegengesetzter Richtung erzeugen würden. Es stellt sich ein Gleichgewichtszustand ein, in dem die elektrische Feldstärke innerhalb des Drahtes Null ist. Die ganze Umlaufspannung findet sich dann zwischen den beiden Drahtenden. Der Leiter schiebt also das elektrische Feld auf den Raum zwischen seinen Enden zusammen.

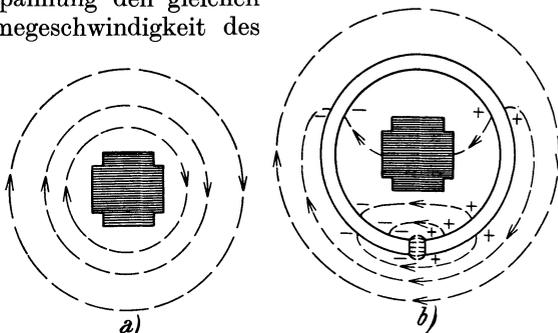


Abb. 276a und b. Elektrisches Feld in der Umgebung eines Transformatorcores.

Nach den beiden Feldgleichungen sind das elektrische und das magnetische Feld auf das engste miteinander verknüpft. Ändert sich der Induktionsfluß, so entstehen geschlossene elektrische Kraftlinien, die mit dem Fluß verkettet sind. Mit dem Entstehen der elektrischen Kraftlinien ist das Auftreten eines Leitungstromes und eines Verschiebungstromes verbunden. Beide Ströme erzeugen wieder ein magnetisches Feld. Eine Änderung eines der beiden Felder für sich allein ist also nicht möglich, ohne daß gleichzeitig sich das andere Feld verändert. Man kann in vielen Fällen, nämlich wenn die Änderungen genügend langsam vor sich gehen, diese gegenseitige Abhängigkeit vernachlässigen. Bei der Beschreibung des Ladevorgangs eines Kondensators in Abschnitt 14 war z. B. stillschweigend die Voraussetzung gemacht, daß die entstehenden magnetischen Felder und ihre Rückwirkungen vernachlässigt werden können. Ganz ähnlich wurde bei der Berechnung des Stromverlaufes nach dem Einschalten einer Spule, Abschnitt 26, zwar die in dem Leiter durch die Flußänderung entstehende elektromotorische Kraft berücksichtigt, nicht aber das elektrische Feld, das nach der zweiten Feldgleichung auch

außerhalb der Leitungsdrähte vorhanden ist, und das durch seine Verschiebungsströme wieder auf das magnetische Feld zurückwirkt. Der genaue Feldverlauf ist außerordentlich kompliziert und nur in wenigen besonders einfachen Fällen der Berechnung zugänglich.

Man kann jedoch meist den in Folge der Vernachlässigung der magnetischen Wirkungen des Verschiebungsstromes entstehenden Fehler auf Grund der Feldgleichungen leicht abschätzen. Als Beispiel werde die in Abb. 166 dargestellte Drosselspule betrachtet. Fließt durch die Wicklung ein Wechselstrom von 50 Hz mit dem Maximalwert 0,54 A, so entsteht ein magnetischer Induktionsfluß mit dem Maximalwert  $\Phi_m = 50000$  M. Die infolge der Flußänderungen auftretenden elektrischen Kraftlinien bilden ungefähr Kreise, die den Fluß umschlingen; sie haben daher eine mittlere Länge von etwa 15 cm. Nach dem Induktionsgesetz ist die Umlaufspannung längs einer solchen Kraftlinie im Maximum

$$\omega \Phi_m = 314 \cdot 50000 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1} \text{ Vs} = 0,16 \text{ V}.$$

Die Feldstärke längs der Kraftlinie ist daher ungefähr

$$|\mathcal{E}| = \frac{0,16 \text{ V}}{15 \text{ cm}} \approx 0,01 \frac{\text{V}}{\text{cm}},$$

und es beträgt die Dichte des Verschiebungsstromes im Maximum

$$\epsilon_0 \omega |\mathcal{E}| = 0,886 \cdot 10^{-13} \cdot 314 \cdot 0,01 \frac{\text{F}}{\text{cm}} \text{ s}^{-1} \frac{\text{V}}{\text{cm}} \approx 3 \cdot 10^{-13} \frac{\text{A}}{\text{cm}^2}.$$

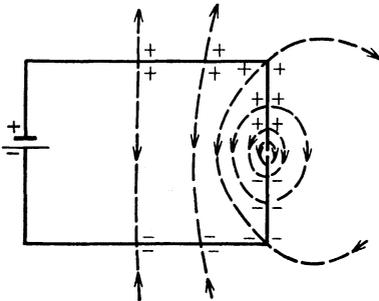


Abb. 277. Elektrostatistisches Feld bei einem unterbrochenen Stromkreis.

Denkt man sich das ganze Fenster des Eisenkerns mit einem Verschiebungsstrom von dieser Dichte ausgefüllt, so ist sein Querschnitt ungefähr  $28 \text{ cm}^2$  und die durch die Verschiebungsströme verursachte zusätzliche Durchflutung beträgt

$$\mathcal{O}' = 3 \cdot 10^{-13} \cdot 28 \text{ A} \approx 10^{-11} \text{ A}.$$

Das ist ein verschwindend kleiner Betrag gegen die Durchflutung des Wechselstroms in der Wicklung von 3600 A.

Die enge Verknüpfung der magnetischen und elektrischen Felder, wie sie in den Feldgleichungen zum Ausdruck kommt, hat zur Folge, daß sich jede Feldänderung im Raum nur mit einer endlichen Geschwindigkeit ausbreiten kann. Es ist interessant, das Entstehen eines magnetischen Feldes an Hand der beiden Grundgesetze etwas genauer zu verfolgen. In Abb. 277 ist ein einfacher Stromkreis mit einer Gleichstromquelle aufgezeichnet, der an einer Stelle eine Unterbrechung mit ganz kleinem Abstand der beiden Drahtenden haben soll. Infolge der von der Stromquelle erzeugten Potentialdifferenz spannen sich elektrische Kraftlinien von dem positiven Drahtende zum negativen. Auf der Oberfläche des oberen Drahtes befinden sich positive, auf der Oberfläche des unteren Drahtes negative Ladungen. Wir wollen nun verfolgen, wie sich das Feldbild verändert, wenn die beiden Drahtenden miteinander in Berührung gebracht werden. In Abb. 278a ist gezeigt, wie unmittelbar nach der Berührung der beiden Drähte die einander benachbarten Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens infolge der Kräfte des elektrischen Feldes sich auszugleichen suchen. Dieser Ausgleich wirkt so, wie wenn in einem kurzen Abschnitt des Drahtes in der Umgebung der Berührungsstelle ein Strom von oben nach unten fließen würde. Dieser Strom baut das elektrische Feld ab, und es ergibt sich daher ein Verschiebungsstrom, der von unten nach oben fließt und den Leitungsstrom schließt; er ist in der Abbildung gestrichelt eingezeichnet. Dieses Bild ist aber nicht vollständig. Infolge des Stromes ergibt sich nach der ersten Feldgleichung in der Umgebung der Berührungsstelle ein magnetisches Feld, dessen Kraftlinien den Strom im Leiter ungefähr in Kreisform umschließen, und zwar innerhalb des von den Verschiebungsströmen begrenzten etwa kugelförmigen Raumes. Außerhalb dieses Raumes können keine derartigen Kraftlinien auftreten, da ihre Durchflutung Null wäre. Das Entstehen des magnetischen Feldes hat nach der zweiten Feldgleichung ein elektrisches Feld zur Folge, mit Kraftlinien, die wieder mit dem

magnetischen Fluß verkettet sind. Längs der Strombahn, die durch den Leitungsstrom und den Verschiebungsstrom gebildet wird, wirkt die Umlaufspannung dieses elektrischen Feldes, und man findet aus den Richtungsregeln, daß die induzierte elektromotorische Kraft dem Strom auf diesem Weg entgegenwirkt. Das Magnetfeld sucht also das Anwachsen des Stromes und damit den Abbau des ursprünglichen elektrischen Feldes zu verhindern. Je rascher der Strom anwächst, um so schneller wächst das magnetische Feld, um so größer wird aber die den Strom hemmende elektromotorische Kraft. Es stellt sich daher ein Gleichgewicht ein zwischen der Feldstärke des ursprünglichen Feldes und der durch das Anwachsen des Magnetfeldes nach dem Induktionsgesetz entstehenden elektrischen Feldstärke, so daß der Abbau des elektrischen Feldes mit einer ganz bestimmten endlichen Geschwindigkeit vor sich geht. Einige Zeit später finden wir die in Abb. 278 b dargestellte Feldverteilung. Die Ladungen sind nun bereits auf einer größeren Länge des Drahtes ausgeglichen, ein größerer Raum ist frei vom elektrischen Feld; er ist bereits mit dem magnetischen Feld ausgefüllt. In dem Raum außerhalb dieser Zone hat das elektrische Feld noch die gleiche Beschaffenheit wie vor dem Schließen des Stromkreises. Der Vorgang setzt sich in gleicher Weise fort, wobei die durch die Verschiebungsströme gebildete Grenzfläche zwischen dem ursprünglichen elektrischen Feld und dem entstehenden magnetischen Feld immer weiter in den Raum hinausleitet, bis schließlich der ganze Raum vom magnetischen Feld ausgefüllt ist (vom Spannungsabfall längs des Leiters, der ein schwaches elektrisches Feld bedingt, sehen wir hier ab). Diesen Vorgang der Ausbreitung des Feldes bezeichnet man als elektromagnetische Welle.

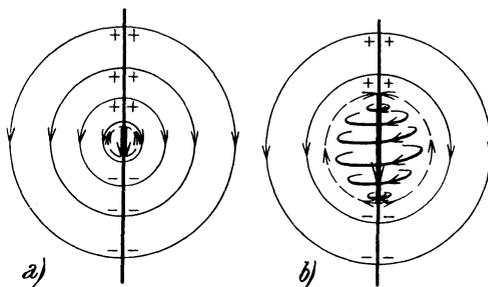


Abb. 278. Abbau des elektrischen und Aufbau des magnetischen Feldes.

Eine elektromagnetische Welle entsteht immer, wenn sich die Ströme oder Spannungen in einem Stromkreis irgendwie ändern; einige spezielle Formen und Eigenschaften der elektromagnetischen Welle werden im nächsten Abschnitt betrachtet.

Bildet man auf beiden Seiten der ersten Feldgleichung die Divergenz, so ergibt sich mit Hilfe von Gl. (625)

$$\operatorname{div} \mathcal{G} = 0, \quad (1085)$$

eine Beziehung, die aussagt, daß die Linien des wahren Stromes immer in sich geschlossen sind. Endigt ein Leitungsstrom an einer Grenzfläche zwischen einem Leiter und einem Nichtleiter, so fließt ein Verschiebungsstrom gleicher Stärke im Nichtleiter von dieser Stelle weg.

Auf dem gleichen Weg ergibt sich aus der zweiten Feldgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \quad \text{oder} \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = \text{konst.} \quad \text{Die Konstante ist}$$

erfahrungsgemäß Null, also

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0. \quad (1086)$$

Die magnetischen Kraftlinien sind immer in sich geschlossen. In den vier Gl. (1081), (1083), (1085) und (1086) sind alle Gesetze enthalten, die für den Verlauf beliebiger elektrischer Felder gelten. An den Grenzflächen von Stoffen verschiedener Eigenschaften ergeben sich aus diesen Gleichungen gewisse Grenzbedingungen, die eine Verallgemeinerung der früher aufgestellten Grenzbedingungen darstellen, und zwar sind es im ganzen vier Bedingungen, die an Grenzflächen erfüllt sein müssen.

1. Die Normalkomponente der wahren Stromdichte muß stetig sein:

$$\mathcal{G}_{n1} = \mathcal{G}_{n2}. \quad (1087)$$

Dies folgt aus Gl. (1085), wenn man ein Flächenelement der Grenzfläche betrachtet. Der von der einen Seite eintretende Strom muß gleich dem auf der anderen Seite austretenden Strom sein. An der Grenzfläche zwischen einem metallischen Leiter und einem Isolator gilt folgendes. Innerhalb der Metalle ist der Verschiebungsstrom wegen der hohen Leitfähigkeit gegenüber dem Leitungsstrom nicht nachweisbar. In Metallen gibt es praktisch nur den Leitungsstrom. In einem guten Isolator, z. B. Luft, überwiegt andererseits der Verschiebungsstrom. Es muß daher hier

$$\kappa \mathfrak{E}_{n1} = \varepsilon \frac{d\mathfrak{E}_{n2}}{dt}$$

sein. Die Normalkomponente des Leitungsstromes geht stetig über in die Normalkomponente des Verschiebungsstromes; die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke hat auf beiden Seiten von Grenzflächen im allgemeinen verschiedene Werte.

2. Die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke muß stetig sein:

$$\mathfrak{E}_{t1} = \mathfrak{E}_{t2}. \quad (1088)$$

Diese Beziehung folgt aus der Integralform der zweiten Feldgleichung, wenn man sie auf ein unendlich schmales Rechteck anwendet, dessen Längsseiten auf beiden Seiten der Grenzfläche liegen, und dessen Schmalseiten die Grenzfläche durchstoßen. Die beiden Bedingungen 1. und 2. zeigen, daß im allgemeinen Fall die Linien des wahren Stromes an den Grenzflächen gebrochen werden, und zwar in ziemlich komplizierter Weise, wenn es sich um zeitlich veränderliche Größen handelt. In Wechselfeldern durchläuft der Winkel, den die Stromlinien mit der Grenzfläche bilden, während jeder Periode  $360^\circ$  (vgl. Abschnitt 38).

3. Die Normalkomponente der magnetischen Induktion muß stetig sein:

$$\mathfrak{B}_{n1} = \mathfrak{B}_{n2}. \quad (1089)$$

Dies folgt aus Gl. (1086) in gleicher Weise wie früher, ebenso

4. Die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke muß stetig sein:

$$\mathfrak{H}_{t1} = \mathfrak{H}_{t2}. \quad (1090)$$

Die magnetischen Kraftlinien werden also gebrochen, wenn die Permeabilität in den beiden aneinander grenzenden Stoffen verschiedene Werte hat.

Die Feldgleichungen gelten in der hier aufgestellten Form zunächst nur für ruhende Körper. Bei Bewegungen von leitender oder nichtleitender Materie im Raum treten Effekte auf, die durch diese Gleichungen nicht beschrieben werden. Wichtig für die technischen Anwendungen ist jedoch der Einfluß der Bewegung nur bei den elektrischen Induktionswirkungen magnetischer Felder. Für diese gilt erfahrungsgemäß die zweite Feldgleichung in der Integralform (1084), wenn die Randlinie  $s$  fest mit den Körperelementen verbunden gedacht wird. Bei Bewegungen materieller Körper gegen ein zeitlich konstantes magnetisches Feld ergibt sich in den bewegten Körpern eine elektrische Feldstärke von der durch Gl. (533) bestimmten Größe. Wenn sich das Magnetfeld zeitlich ändert, so tritt zu dieser Feldstärke noch ein Betrag  $\mathfrak{E}'$ , der genau so wie bei ruhenden Körpern durch die Änderungsgeschwindigkeit der magnetischen Induktion an der betreffenden Stelle des Raumes bestimmt ist, gemäß der Gleichung:

$$\text{rot } \mathfrak{E}' = - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}.$$

Die wirkliche Feldstärke ist daher

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}' + [v \mathfrak{B}],$$

und es ergibt sich die zweite Feldgleichung für bewegte Körper in der Differentialform

$$\text{rot } \mathfrak{E} = - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \text{rot} [v \mathfrak{B}]. \quad (1091)$$

Die übrigen elektromagnetischen Effekte, die bei Bewegungen von materiellen Körpern auftreten, haben für die Technik wegen ihrer Kleinheit keine Bedeutung. Es sind im wesentlichen die folgenden:

1. Bewegte Raumladungen wirken wie elektrische Ströme von der Dichte

$$\mathcal{G} = \rho v \quad (1092)$$

und erzeugen daher ebenso wie diese magnetische Felder.

2. Bei der Bewegung von geladenen Leitern, und daher auch von elektrischen Feldern im Raum werden elektrische Ladungen transportiert und damit magnetische Felder erzeugt. Die magnetischen Felder rufen wieder in beiden Fällen nach dem Induktionsgesetz zusätzliche elektrische Felder hervor.

3. Auch bei der Bewegung ungeladener Leiter entstehen elektrische und magnetische Felder, wenn sich die Bewegungsgeschwindigkeit zeitlich ändert, da dann die Leitungselektronenwolke infolge ihrer Trägheit etwas voreilt oder zurückbleibt, so daß unkompensierte Ladungen auftreten.

### 38. Die elektromagnetische Welle.

Nach dem vorigen Abschnitt entsteht eine elektromagnetische Welle, sobald sich Ströme oder Spannungen zeitlich ändern. Zeitlich konstante Spannungen und Strömungen liegen vor, wenn sich Elektrizitätsmengen in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung befinden; Strom- und Spannungsänderungen werden durch ungleichmäßig bewegte Elektrizitätsmengen verursacht. Die einfachste elektromagnetische Welle wird sich daher ergeben, wenn eine punktförmige Elektrizitätsmenge in einem sonst von Ladungen und materiellen Körpern freien Raum ungleichförmig bewegt wird. Die bei allgemeinen Bewegungen von räumlich ausgedehnten Ladungen entstehenden Wellen lassen sich durch Überlagerung der von den einzelnen Ladungsteilchen ausgehenden Wellen darstellen.

Da sich jede Bewegung in eine unendliche Fouriersche Reihe von zeitlich sinusförmigen Bewegungen zerlegen läßt, so erhält man einen Einblick in diese Vorgänge, wenn man eine sinusförmige Bewegung von Ladungen betrachtet. Solche Bewegungen treten auf, wenn sich die Ströme und Spannungen in einem Stromkreis zeitlich sinusförmig verändern. Dann besteht der Elementarvorgang darin, daß eine punktförmige Ladung (Elektron) gegen eine gleichgroße Punktladung entgegengesetzten Vorzeichens (Atomrest) nach einem Sinusgesetz Schwingungen sehr kleiner Schwingungsamplitude ausführt. In jedem kleinen Ausschnitt eines von Wechselstrom durchflossenen Leiters schwingt die durch die Elektronenwolke repräsentierte negative elektrische Ladung gegenüber der feststehenden positiven Ladung der Atomreste in der Stromrichtung hin und her. Von der schwingenden Elektronenwolke gehen elektromagnetische Wellen aus.

Die spezielle Form der elektromagnetischen Welle, die von einem unendlich kleinen Ausschnitt aus einem wechselstromdurchflossenen Leiter im freien Raum ihren Ausgang nimmt, ist zuerst von H. Hertz berechnet worden (1888). Man kann sich die von einer Sendeantenne der drahtlosen Telegraphie und Telephonie ausgehenden Wellen aus solchen Elementarwellen zusammengesetzt denken. Im folgenden wird diese Elementarwelle näher betrachtet.

Die Lage eines beliebigen Punktes  $P$  im Raum gegenüber der schwingenden Ladung (Dipol) werde durch Zylinderkoordinaten, Abb. 279, gekennzeichnet. Die  $z$ -Achse werde in die Bewegungsrichtung der Ladung gelegt. Aus Symmetriegründen hängen dann die Feldgrößen nur von den beiden Koordinaten  $a$  und  $z$  ab. In dem Raum außerhalb des Dipols gelten die Feldgleichungen in der Form

$$\text{rot } \bar{\mathfrak{H}} = j\omega \varepsilon_0 \bar{\mathfrak{E}}; \quad (1091)$$

$$\text{rot } \bar{\mathfrak{E}} = -j\omega \mu_0 \bar{\mathfrak{H}}, \quad (1092)$$

wenn der Voraussetzung gemäß eine sinusförmige Zeitabhängigkeit mit der Kreisfrequenz  $\omega$  eingeführt wird. Da formal die Beziehung (1091) der im ruhenden magnetischen Feld geltenden Beziehung entspricht, wenn  $\mathfrak{G}$  an Stelle von  $j\omega\epsilon_0\mathfrak{E}$  eingeführt wird, so kann man auch hier die magnetische Feldstärke aus einem Vektorpotential ableiten, indem man setzt

$$\vec{\mathfrak{H}} = \text{rot } \vec{\mathfrak{A}}. \tag{1093}$$

Führt man dies in die zweite Gleichung ein, so folgt

$$\text{rot}(\vec{\mathfrak{E}} + j\omega\mu_0\vec{\mathfrak{A}}) = 0. \tag{1094}$$

Diese Gleichung sagt aus, daß das Feld des in der Klammer stehenden Vektors wirbelfrei ist; daher kann dieser Vektor aus einem zunächst noch unbekanntem skalaren Potential  $\vec{\varphi}$  abgeleitet werden; wir setzen

$$\vec{\mathfrak{E}} + j\omega\mu_0\vec{\mathfrak{A}} = -\text{grad } \vec{\varphi},$$

oder

$$\vec{\mathfrak{E}} = -\text{grad } \vec{\varphi} - j\omega\mu_0\vec{\mathfrak{A}}. \tag{1095}$$

Führt man andererseits den Ansatz (1093) in Gl. (1091) ein, so folgt mit Hilfe der Rechenregel (626)

$$\text{grad } \text{div } \vec{\mathfrak{A}} - \Delta \vec{\mathfrak{A}} = j\omega\epsilon_0\vec{\mathfrak{E}},$$

oder

$$\vec{\mathfrak{E}} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \text{grad } \text{div } \vec{\mathfrak{A}} - \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \Delta \vec{\mathfrak{A}}. \tag{1096}$$

Durch Vergleich dieser Beziehung mit Gl. (1095) findet man

$$\vec{\varphi} = -\frac{1}{j\omega\epsilon_0} \text{div } \vec{\mathfrak{A}}, \tag{1097}$$

$$\Delta \vec{\mathfrak{A}} = -\omega^2\epsilon_0\mu_0\vec{\mathfrak{A}}. \tag{1098}$$

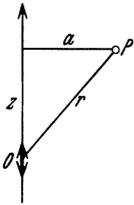


Abb. 279.  
Koordinaten des schwingenden Dipols.

Wir setzen zur Abkürzung

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 299800 \frac{\text{km}}{\text{s}}; \tag{1099}$$

dann wird aus Gl. (1098)

$$\Delta \vec{\mathfrak{A}} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{\mathfrak{A}}. \tag{1100}$$

Für die Augenblickswerte des Vektorpotentials gilt also die sogenannte Wellengleichung:

$$\Delta \mathfrak{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2}. \tag{1101}$$

Die magnetischen Kraftlinien sind aus Symmetriegründen Kreise, deren Mittelpunkte auf der z-Achse liegen. Es muß daher der Vektor  $\mathfrak{A}$  parallel zur z-Achse gerichtet sein. Wir nehmen ferner an, daß genau so wie im Fall des stationären Feldes, Gl. (636), der Vektor  $\mathfrak{A}$  nur von dem Abstand des Punktes P von der Erregungsstelle abhängt. Es zeigt sich, daß man mit dieser Annahme alle Bedingungen des Problems erfüllen kann. In Kugelkoordinaten lautet nun die Gl. (1100), da alle Komponenten von  $\mathfrak{A}$  mit Ausnahme der in der z-Richtung Null sind,

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(r\mathfrak{A}_z)}{dr^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} \mathfrak{A}_z;$$

hieraus folgt

$$r\mathfrak{A}_z = Ae^{\pm kr},$$

wobei

$$k = j\frac{\omega}{c} \tag{1102}$$

und A eine zunächst noch unbestimmte Konstante darstellt. Da wir uns auf die Betrachtung von Feldern beschränken, die von dem Dipol ausgehen, so ist nur das negative Vorzeichen von k brauchbar, und es wird schließlich

$$\mathfrak{A}_z = \frac{A}{r} e^{-j\frac{\omega r}{c}}. \tag{1103}$$

Die Augenblickswerte bestimmen wir durch Multiplikation mit  $e^{j\omega t}$  und Projektion auf die imaginäre Achse:

$$\mathfrak{A}_z = \frac{A}{r} \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right). \quad (1104)$$

Das Vektorpotential ist also hier durch eine nach allen Richtungen hin fortschreitende Welle dargestellt, deren Geschwindigkeit  $c$  ist, und deren Amplituden umgekehrt proportional mit dem Abstand  $r$  abnehmen.

Es lassen sich nunmehr die Feldgrößen mit Hilfe der Gl. (1093), (1096) berechnen. Die magnetische Feldstärke hat überall die auf  $a$  und  $z$  senkrechte Richtung. Mit Gl. (1093) ergibt sich

$$\mathfrak{H} = \text{rot}_a \mathfrak{A}_z = - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial a} = - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial r} \frac{dr}{da}.$$

Da

$$r = \sqrt{z^2 + a^2},$$

so ist

$$\frac{dr}{da} = \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{a}{r},$$

also

$$\mathfrak{H} = A \frac{a}{r^3} \left[ \frac{\omega r}{c} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) + \sin \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right]. \quad (1105)$$

Je mehr man sich dem Erregungszentrum nähert, um so mehr überwiegt das zweite Glied in der Klammer. In der unmittelbaren Nähe der schwingenden Ladung wird daher

$$\mathfrak{H} = A \frac{a}{r^3} \sin \omega t. \quad (1106)$$

Andererseits ist nach der Ampèreschen Formel die magnetische Feldstärke in der Umgebung eines geraden Stromleiters von der kleinen Länge  $l$ , der von einem Wechselstrom

$$i = I \sqrt{2} \sin \omega t$$

durchflossen wird, Gl. (642),

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{4\pi} I \sqrt{2} \frac{a}{r^3} l \sin \omega t. \quad (1107)$$

Der Vergleich mit Gl. (1106) zeigt, daß das berechnete Feld, wie es sein muß, übergeht in das Feld des geraden Stromleiters, wenn man setzt

$$A = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} I l. \quad (1108)$$

Zur Berechnung der elektrischen Feldstärke benützen wir Gl. (1095) in der Form

$$\bar{\mathfrak{E}} = \frac{1}{j\omega \epsilon_0} \text{grad div } \bar{\mathfrak{A}} - j\omega \mu_0 \bar{\mathfrak{A}}. \quad (1109)$$

Es ist nach Gl. (352)

$$\text{div } \bar{\mathfrak{A}}_z = \frac{\partial \bar{\mathfrak{A}}_z}{\partial z} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{A}}_z}{\partial r} \frac{dr}{dz} = \frac{z}{r} \frac{\partial \bar{\mathfrak{A}}_z}{\partial r}.$$

Hieraus folgt mit den Gl. (359)

$$\text{grad}_z (\text{div } \bar{\mathfrak{A}}_z) = \frac{\partial^2 \bar{\mathfrak{A}}_z}{\partial z^2} = \left( \frac{z}{r} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{\mathfrak{A}}_z}{\partial r^2} + \frac{r^2 - z^2}{r^3} \frac{\partial \bar{\mathfrak{A}}_z}{\partial r},$$

$$\text{grad}_a (\text{div } \bar{\mathfrak{A}}_z) = \frac{\partial^2 \bar{\mathfrak{A}}_z}{\partial a \partial z} = \frac{az}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathfrak{A}}_z}{\partial r^2} - \frac{az}{r^3} \frac{\partial \bar{\mathfrak{A}}_z}{\partial r},$$

$$\text{grad}_\alpha (\text{div } \bar{\mathfrak{A}}_z) = 0.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial \bar{\mathfrak{A}}_z}{\partial r} = - \frac{A}{r^2} \left( 1 + j \frac{\omega r}{c} \right) e^{-j \frac{\omega r}{c}};$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\mathfrak{A}}_z}{\partial r^2} = \frac{A}{r^3} \left( 2 + 2j \frac{\omega r}{c} - \left( \frac{\omega r}{c} \right)^2 \right) e^{-j \frac{\omega r}{c}}.$$

Damit ergibt sich

$$\bar{\mathfrak{E}}_z = \frac{A}{r^5} e^{-j \frac{\omega r}{c}} \left[ \frac{1}{j\omega \epsilon_0} (3z^2 - r^2) \left( 1 + j \frac{\omega r}{c} \right) + j\omega \mu_0 r^2 (z^2 - r^2) \right]; \quad (1110)$$

$$\bar{\mathfrak{E}}_a = \frac{A}{r^5} \frac{az}{j\omega\epsilon_0} e^{-j\frac{\omega r}{c}} \left[ 3 + 3j\frac{\omega r}{c} - \left(\frac{\omega r}{c}\right)^2 \right]; \quad (1111)$$

$$\bar{\mathfrak{E}}_a = 0. \quad (1112)$$

Der Vektor der elektrischen Feldstärke liegt also in der durch den Punkt  $P$  gehenden Meridianebene; er steht daher überall senkrecht auf  $\mathfrak{H}$ , Abb. 280.

In der drahtlosen Technik interessieren die Feldvektoren besonders in großer Entfernung von der Erregungsstelle. Hier kommen im wesentlichen nur die Glieder mit den höchsten Potenzen von  $r$  und  $z$  in Betracht, so daß angenähert gilt

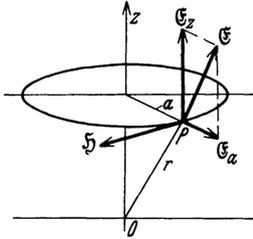


Abb. 280. Elektrische und magnetische Feldstärke in der Umgebung des schwingenden Dipols.

$$\bar{\mathfrak{E}}_z = A j \omega \mu_0 \frac{z^2 - r^2}{r^3} e^{-j\frac{\omega r}{c}}; \quad (1113)$$

$$\bar{\mathfrak{E}}_a = A j \omega \mu_0 \frac{az}{r^3} e^{-j\frac{\omega r}{c}}. \quad (1114)$$

Die Augenblickswerte sind bei Wahl der imaginären Achse als Zeitachse

$$\mathfrak{E}_z = A \omega \mu_0 \frac{z^2 - r^2}{r^3} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right); \quad (1115)$$

$$\mathfrak{E}_a = A \omega \mu_0 \frac{az}{r^3} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right). \quad (1116)$$

Um diese beiden Komponenten der elektrischen Feldstärke zusammzusetzen, berechnen wir mit Hilfe von Abb. 281 die in die Richtung von  $r$  fallende Komponente der elektrischen Feldstärke. Auf Grund der Ähnlichkeit der dort schraffierten Dreiecke ist

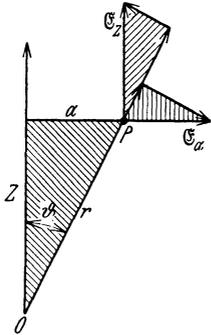


Abb. 281. Berechnung des Vektors der elektrischen Feldstärke.

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_z \frac{z}{r} + \mathfrak{E}_a \frac{a}{r}.$$

Setzt man hier die obigen Werte ein, so ergibt sich  $\mathfrak{E}_r = 0$ , d. h. die Feldstärke steht senkrecht auf dem Radius  $r$ . Ihre Größe ist nach Abb. 281

$$\mathfrak{E} = -\frac{a}{r} \mathfrak{E}_z + \frac{z}{r} \mathfrak{E}_a,$$

oder mit den Gl. (1115) und (1116)

$$\mathfrak{E} = \omega \mu_0 \frac{a}{r^2} A \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right). \quad (1117)$$

Für die magnetische Feldstärke ergibt sich unter der gleichen Voraussetzung großer Entfernung von der Erregungsstelle

$$\mathfrak{H} = \frac{\omega}{c} \frac{a}{r^2} A \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right). \quad (1118)$$

Magnetische und elektrische Feldstärke liegen also zeitlich in Phase und stehen räumlich senkrecht aufeinander. Beide Felder breiten sich mit der Geschwindigkeit  $c$  in radialer Richtung aus. Der radiale Abstand zweier Punkte gleicher Schwingungsphase stellt die Wellenlänge dar; es ist

$$\lambda = c \frac{2\pi}{\omega} = \frac{c}{f}. \quad (1119)$$

In jedem Zeitpunkt und an jedem Ort ist das Verhältnis der elektrischen zur magnetischen Feldstärke

$$\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{H}} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = Z_0 = 377 \Omega. \quad (1120)$$

Man kann diese Größe als den Wellenwiderstand des leeren Raumes bezeichnen, da sie für die elektromagnetische Welle eine ähnliche Bedeutung hat wie der Wellenwiderstand einer Leitung für die Leitungswellen. Für den Effektivwert der elektrischen Feldstärke ergibt sich aus den Gl. (1117) und (1108), wenn noch der Winkel  $\vartheta$  zwischen  $r$  und  $z$  eingeführt wird,

$$\mathfrak{E}_{eff} = \frac{\mu_0}{2} f \frac{\sin \vartheta}{r} I l. \quad (1121)$$

Es ist ferner 
$$\mathfrak{H}_{eff} = \frac{\mathfrak{E}_{eff}}{Z_0}. \tag{1122}$$

Die Ausstrahlung ist also am stärksten in der Richtung senkrecht zum Dipol ( $\vartheta = 90^\circ$ ), sie ist Null in der Richtung des Dipols ( $\vartheta = 0$ ).

Da im elektrischen und magnetischen Feld Energie aufgespeichert ist, so wird durch die elektromagnetische Welle Energie transportiert. Nach den Gl. (324) und (694) ist die in der Volumeneinheit aufgespeicherte Energie

$$W_1 = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathfrak{E}|^2 + \frac{1}{2} \mu_0 |\mathfrak{H}|^2. \tag{1123}$$

Da die beiden Vektoren  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  nur von  $r$  und  $\vartheta$  abhängen, so kann man die Energie berechnen in einem Volumenelement, das nach Abb. 282 durch Breitenkreise gebildet wird. Das Volumenelement hat den Inhalt

$$dV = 2\pi r^2 \sin \vartheta dr. \tag{1124}$$

Die Energie, die in diesem Volumenelement im Mittel aufgespeichert ist, beträgt

$$\begin{aligned} d^2 W &= \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathfrak{E}_{eff}^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \mathfrak{H}_{eff}^2 \right) dV, \\ d^2 W &= \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathfrak{E}_{eff}^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \mathfrak{E}_{eff}^2 \right) dV = \epsilon_0 \mathfrak{E}_{eff}^2 dV. \end{aligned} \tag{1125}$$

Magnetische und elektrische Energie sind gleichgroß. Die zwischen zwei konzentrischen Kugelflächen mit dem Abstand  $dr$  im Mittel vorhandene Energie ergibt sich durch Integration von (1125):

$$dW = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} d^2 W = \epsilon_0 \frac{\mu_0^2}{4} f^2 \frac{I^2 l^2}{r^2} 2\pi r^2 dr \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{2\pi}{3} \epsilon_0 \mu_0^2 I^2 l^2 f^2 dr. \tag{1126}$$

Die Welle durchläuft die Strecke  $dr$  in einer Zeit

$$dt = \frac{dr}{c}.$$

Die in der Zeiteinheit durch eine Kugel vom Radius  $r$  nach außen fließende Energie ist daher

$$N_s = \frac{dW}{dt} = \frac{2\pi}{3} \frac{Z_0}{c^2} I^2 l^2 f^2 = \frac{2\pi}{3} I^2 Z_0 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2. \tag{1127}$$

Sie ist unabhängig vom Radius  $r$  der Kugel, da wir den Raum als vollkommen isolierend vorausgesetzt haben, und infolgedessen keine Verluste an Energie durch Umwandlung in Wärme entstehen.

Die hier gefundenen Ergebnisse kann man in folgender Weise auf die Berechnung der Strahlung einer Antenne der drahtlosen Telegraphie anwenden. Wenn die Länge einer solchen Antenne klein gegen die Wellenlänge  $\lambda$  ist, so hat die Stromstärke in jedem Zeitpunkt längs der ganzen Antenne angenähert den gleichen Betrag. Man kann sie dann als einen Dipol auffassen. Den Einfluß der Erde kann man durch das Verfahren der Spiegelung berücksichtigen. Da die Leitfähigkeit der Erde sehr groß ist gegen die dielektrische Leitfähigkeit der Luft, so stehen die elektrischen Feldlinien auf der Erdoberfläche nahezu senkrecht. Diese Bedingung ist nach Abb. 280 und Gl. (1111) auf der Mittelebene eines Dipols ( $z=0$ ) erfüllt. Um also die von einer Vertikalantenne von der Höhe  $h$  ausgestrahlte Leistung zu berechnen, hat man die Antenne durch ihr Spiegelbild zu einem Dipol von der Länge  $l=2h$  zu ergänzen. Die von dem Dipol ausgestrahlte Leistung ist nach Gl. (1127) in dem oberen Halbraum

$$N_s = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{3} I^2 Z_0 4 \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2. \tag{1128}$$

Diese Leistung muß von dem die Antenne speisenden Wechselstromgenerator geliefert werden. Sie ergibt also einen Beitrag zum Wirkwiderstand der Antenne, den man als den Strahlungswiderstand  $R_s$  der Antenne bezeichnet; er berechnet sich aus

$$N_s = I^2 R_s. \tag{1129}$$

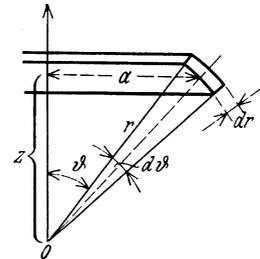


Abb. 282. Berechnung des Energieflusses.

Danach ist der Strahlungswiderstand einer Vertikalantenne von der Höhe  $h$

$$R_s = \frac{4\pi}{3} Z_0 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 = 1580 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \Omega. \tag{1130}$$

Er wächst mit dem Quadrat der Höhe der Antenne, wobei aber zu berücksichtigen ist, daß die Formel (1130) nur gilt, solange  $h$  klein ist gegen  $\lambda$ .

In Abb. 283 ist der Verlauf der elektrischen Feldlinien in der Umgebung der Antenne veranschaulicht (H. Hertz, 1888). Die Abb. 284 zeigt, wie man sich den Vorgang der Ablösung der elektrischen Feldlinien von der Antenne vorzustellen hat.

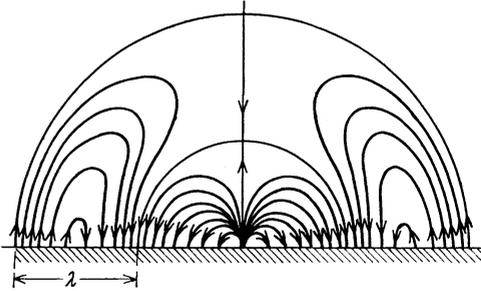


Abb. 283. Elektrisches Feldbild des schwingenden Dipols.

Vorgang der Ablösung der elektrischen Feldlinien von der Antenne vorzustellen hat.

Die in einem allgemeinen elektromagnetischen Feld strömende Energie läßt sich wie die in einem ruhenden Feld aufgespeicherte Energie durch die Feldgrößen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  ausdrücken. An jeder Stelle eines elektromagnetischen Feldes ist in der Volumeneinheit die Energie

$$W_1 = \frac{1}{2} \varepsilon \mathfrak{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \mathfrak{H}^2$$

aufgespeichert. Ändern sich die Feldgrößen zeitlich, so ändert sich die aufgespeicherte Energie, es wird also Energie im Raum transportiert. Während des Zeitelementes  $dt$  nimmt die Volumeneinheit den Energiebetrag

$$dW_1 = \varepsilon \mathfrak{E} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} dt + \mu \mathfrak{H} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} dt$$

auf. Führt man hier die beiden Feldgleichungen ein in der Form

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} &= \text{rot } \mathfrak{H} - \kappa \mathfrak{E}, \\ \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} &= -\text{rot } \mathfrak{E}, \end{aligned}$$

so folgt

$$dW_1 = \mathfrak{E} \text{rot } \mathfrak{H} dt - \mathfrak{H} \text{rot } \mathfrak{E} dt - \kappa \mathfrak{E}^2 dt. \tag{1131}$$

Der letzte Ausdruck rechts gibt an, wie groß die während der Zeit  $dt$  in Wärme umgewandelte Feldenergie ist; die beiden ersten Glieder stellen daher den Zu-

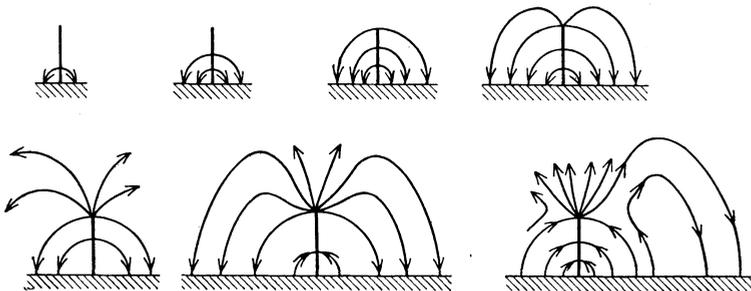


Abb. 284. Schematische Darstellung des Entstehens der elektromagnetischen Welle bei einer vertikalen Antenne.

wachs der Feldenergie in der Zeit  $dt$ , bezogen auf die Volumeneinheit, dar. Die Energie, die in der Zeiteinheit aus einem beliebigen Volumenelement  $dV$  herausfließt, ist daher

$$dN = (\mathfrak{H} \text{rot } \mathfrak{E} - \mathfrak{E} \text{rot } \mathfrak{H}) dV$$

oder bei Anwendung der Gl. (627)

$$dN = dV \text{div} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]. \tag{1132}$$

Nach Poynting (1884) setzt man

$$[\mathfrak{E} \mathfrak{H}] = \mathfrak{S}, \tag{1133}$$

$$\text{soda\ss} \quad dN = dV \operatorname{div} \mathfrak{S}. \quad (1134)$$

Mit Hilfe des Satzes von Gau\ss, Gl. (350), folgt damit f\u00fcr die Energie, die aus einem beliebigen Raum in der Zeiteinheit herausflie\ss,

$$N = \oint \mathfrak{S} d\mathfrak{F}, \quad (1135)$$

wobei das Integral \u00fcber die Oberfl\u00e4che des Raumes zu bilden ist.  $N$  stellt also die Leistung dar, die aus dem Raum in jedem Zeitpunkt herausgeliefert wird, und der Vektor  $\mathfrak{S}$  gibt an, welche Richtung an jeder Stelle des Raumes die Energiestr\u00f6mung hat und wie gro\ss die Leistung ist, die durch die Querschnittseinheit einer Fl\u00e4che hindurchgeht, die senkrecht zur Richtung der Energiestr\u00f6mung steht. Man nennt daher diesen Vektor die Dichte der Energiestr\u00f6mung oder die Strahlungsdichte. Wie die Abb. 285 zeigt, bilden die drei Vektoren  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{H}$  und  $\mathfrak{S}$  ein Rechtssystem. Der Betrag der Strahlungsdichte ist

$$|\mathfrak{S}| = |\mathfrak{E}| \cdot |\mathfrak{H}| \cdot \sin \alpha. \quad (1135)$$

Die Energiestr\u00f6mung kann also in einfacher Weise berechnet werden, wenn die elektrische und die magnetische Feldst\u00e4rke bekannt sind.

Nach den obigen Ausf\u00fchrungen stehen die elektrischen und magnetischen Kraftlinien in einer elektromagnetischen Welle bei gen\u00fcgend gro\ssm Abstand von der Erregungsstelle senkrecht aufeinander und senkrecht zum Radius, der von der Erregungsstelle zu dem betrachteten Punkt gezogen wird. Der Vektor  $\mathfrak{S}$  hat die Richtung des Radius, er weist von der Erregungsstelle weg. Sein Betrag ist gleich dem Produkt aus elektrischer Feldst\u00e4rke und magnetischer Erregung.

Man kann in gro\ssm Abstand von der Erregungsstelle die Wellenfront mit einer gewissen Ann\u00e4herung als eben ansehen und bezeichnet daher diesen besonders einfachen Fall der Welle als ebene elektromagnetische Welle. In einer solchen Welle h\u00e4ngen die Feldgr\u00f6\ss nur von einer einzigen Koordinate  $x$  in der Fortpflanzungsrichtung ab. Die Feldgleichungen lauten, wenn  $\mathfrak{E}$  in die  $y$ -Richtung,  $\mathfrak{H}$  in die  $z$ -Richtung gelegt wird

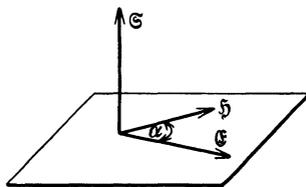


Abb. 285. Strahlungsdichte.

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H}_y = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \quad (1136)$$

$$\operatorname{rot}_z \mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}. \quad (1137)$$

Differenziert man die erste dieser beiden Gleichungen nach  $t$ , die zweite nach  $x$ , so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial x \partial t} = -\epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial x^2}.$$

Hieraus folgt 
$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2}. \quad (1138)$$

Ähnlich ergibt sich 
$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2}. \quad (1139)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen ist

$$\mathfrak{E} = F(x \pm ct), \quad (1140)$$

wobei  $F$  eine beliebige Funktion darstellt und

$$\mathfrak{H} = \mp \frac{1}{Z_0} \mathfrak{E}. \quad (1141)$$

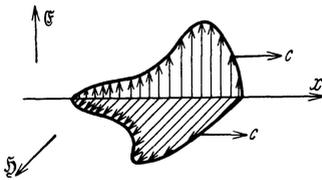
Durch Einsetzen in die Differentialgleichungen kann man sich leicht von der Richtigkeit dieser Lösung \u00fcberzeugen. In einer ebenen Welle bleibt also eine beliebige

Verteilung der Felder in der  $x$ -Richtung erhalten, sie wandert jedoch mit der Geschwindigkeit  $c$  fort. Im allgemeinen Fall sind Wellen nach beiden Richtungen hin möglich; das obere Vorzeichen gilt für Wellen, die in Richtung negativer  $x$  fortschreiten, das untere Vorzeichen für Wellen umgekehrter Richtung. Für die letzteren ist also

$$\mathfrak{E} = F(x-ct); \quad \mathfrak{H} = \frac{1}{Z_0} F(x-ct). \tag{1142}$$

Elektrische und magnetische Feldstärke bilden mit der Laufrichtung der Welle ein Rechtssystem, Abb. 286; die Dichte der Energieströmung ist

$$|\mathfrak{S}| = |\mathfrak{E}| \cdot |\mathfrak{H}| = \frac{1}{Z_0} |\mathfrak{E}|^2. \tag{1143}$$



In der drahtlosen Technik kommen beim Empfänger Feldstärken bis herab zu etwa  $10\mu\text{V/m}$  vor. Die Dichte der Energieströmung ist dabei

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{377} \cdot 10^{-14} \frac{\text{V}^2}{\Omega \text{cm}^2} = 2,65 \cdot 10^{-17} \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}.$$

Abb. 286. Ebene elektromagnetische Welle.

In der Umgebung von Hochspannungsleitungen können an den Leiteroberflächen Feldstärken bis zu etwa  $10\text{kV/cm}$  auftreten. Es stehen hier ebenfalls elektrische und magnetische Feldstärken nahezu aufeinander senkrecht: Die elektrischen Feldlinien treten nahezu senkrecht aus der Leiteroberfläche aus, während die magnetischen Feldlinien die tangentielle Richtung haben. Der Strahlungsvektor hat nahezu die Richtung der Energieübertragung längs der Leitung; er ist etwas zur Leiterachse hin geneigt wegen des Spannungsabfalles längs des Leiters. Die Strahlungsdichte in der Nähe der Drähte wird

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{377} 10^8 \frac{\text{V}^2}{\text{cm}^2 \Omega} = 265 \text{ kW/cm}^2.$$

Die Luft ist also befähigt, elektrische Energie in erheblicher Dichte zu übertragen.

Die betrachteten einfachen Verhältnisse der Kugelwelle und der ebenen Welle liegen nur vor, wenn der Raum von einem homogenen Nichtleiter vollständig erfüllt ist. An jeder Grenzfläche ergibt sich eine Reflexion und eine Brechung der Wellen.

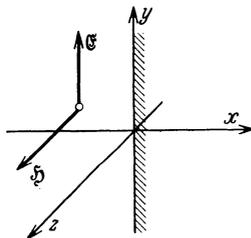


Abb. 287. Reflexion der ebenen Welle.

Trifft z. B. eine ebene Welle senkrecht auf die ebene Oberfläche eines Leiters, Abb. 287, so wird ein Teil der Energie reflektiert. Die Feldgrößen in dem Raum vor der Wand setzen sich demgemäß aus den Feldgrößen der beiden Teilwellen zusammen. Die Gl. (1137) und (1138) lauten in komplexer Form, also unter Voraussetzung sinusförmiger Feldänderungen:

$$\bar{\mathfrak{H}} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{d\bar{\mathfrak{E}}}{dx}; \tag{1144} \quad \frac{d^2\bar{\mathfrak{E}}}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} \bar{\mathfrak{E}}. \tag{1145}$$

Daher gilt

$$\bar{\mathfrak{E}} = A_1 e^{-j\frac{\omega}{c}x} + A_2 e^{+j\frac{\omega}{c}x}, \tag{1146}$$

$$\bar{\mathfrak{H}} = \frac{A_1}{Z_0} e^{-j\frac{\omega}{c}x} - \frac{A_2}{Z_0} e^{+j\frac{\omega}{c}x}. \tag{1147}$$

Die ersten Glieder rechts stellen die Teilwelle dar, die in der  $x$ -Richtung fortschreitet, also die ursprüngliche Welle, die zweiten Glieder die Welle mit entgegengesetzter Laufrichtung, also die reflektierte Welle. An der Oberfläche des Leiters,  $x=0$ , ergeben sich die Werte

$$\bar{\mathfrak{E}} = A_1 + A_2, \tag{1148} \quad \bar{\mathfrak{H}} = \frac{1}{Z_0} (A_1 - A_2). \tag{1149}$$

In den Leiter dringt eine Welle ein, die als die gebrochene Welle aufzufassen ist; ihre Bestimmungsgrößen  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  müssen an der Leiteroberfläche in die durch die Gl. (1148) und (1149) gegebenen Werte übergehen, da beide Größen die tangentielle Richtung zur Oberfläche des Leiters haben.

Für das Leiterinnere lauten nun die beiden Feldgleichungen, wenn gleich die komplexe Schreibweise benützt wird,

$$-\frac{\partial \bar{\mathfrak{H}}}{\partial x} = \varkappa \bar{\mathfrak{E}}, \quad (1150) \quad \frac{\partial \bar{\mathfrak{E}}}{\partial x} = -\mu j \omega \bar{\mathfrak{H}}. \quad (1151)$$

Hieraus folgt 
$$\frac{d^2 \bar{\mathfrak{E}}}{dx^2} = j \omega \varkappa \mu \bar{\mathfrak{E}}.$$

Setzt man  $k = \sqrt{j \omega \varkappa \mu}$ ,  
so ergibt sich für die in der  $x$ -Richtung fortschreitende Welle:

$$\bar{\mathfrak{E}} = A_3 e^{-kx}; \quad (1152) \quad \bar{\mathfrak{H}} = A_3 \sqrt{\frac{\varkappa}{j \omega \mu}} e^{-kx}. \quad (1153)$$

An der Leiteroberfläche wird also

$$A_3 = A_1 + A_2, \\ A_3 \sqrt{\frac{\varkappa}{j \omega \mu}} = \frac{1}{Z_0} (A_1 - A_2).$$

Damit ergibt sich

$$A_2 = A_1 \frac{1 - Z_0 \sqrt{\frac{\varkappa}{j \omega \mu}}}{1 + Z_0 \sqrt{\frac{\varkappa}{j \omega \mu}}}.$$

Das Verhältnis der Feldstärke der reflektierten Welle zu derjenigen der ursprünglichen Welle ist also

$$\eta = \frac{|A_2|}{|A_1|} = \left| \frac{1 - Z_0 \sqrt{\frac{\varkappa}{j \omega \mu}}}{1 + Z_0 \sqrt{\frac{\varkappa}{j \omega \mu}}} \right|. \quad (1154)$$

Es ist nahezu 1 in den beiden Grenzfällen, in denen  $Z_0 \sqrt{\frac{\varkappa}{j \omega \mu}}$  sehr klein oder sehr groß gegen 1 ist. Der erste Fall liegt bei sehr hohen, der zweite bei sehr niedrigen Frequenzen vor. Führt man die Abkürzung

$$\vartheta = \frac{1}{Z_0} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \varkappa}} \quad (1155)$$

ein, so ergibt sich für den Reflexionsfaktor der leitenden Wand

$$\eta = \sqrt{\frac{1 - 2\vartheta + 2\vartheta^2}{1 + 2\vartheta + 2\vartheta^2}}. \quad (1156)$$

In Abb. 288 ist diese Größe dargestellt. Die an der leitenden Wand reflektierte Leistung ist  $\eta^2$  mal so groß wie die einfallende Leistung. Es wird also das  $(1 - \eta^2)$  fache der einfallenden Leistung im Leiter absorbiert.  $\eta$  hat ein Minimum bei  $\vartheta = 0,707$ ; hier ist  $\eta = 0,414$ . Von der auf eine leitende Wand treffenden Leistung können also höchstens

$$1 - 0,414^2 = 82,8 \%$$

absorbiert werden. Die innerhalb des Leiters fortschreitende gebrochene Welle hat die Amplitude

$$A_3 = A_1 + A_2 = \frac{2}{1 + Z_0 \sqrt{\frac{\varkappa}{j \omega \mu}}} A_1; \quad (1157)$$

sie wird bei ihrem Eindringen in den Leiter gedämpft, die relative Abnahme der Amplitude je Längeneinheit ist durch den reellen Teil von  $k$  gegeben. Es liegt also der bereits in Abschnitt 30 betrachtete Fall des Eindringens der Felder in den Leiter vor. Auch für die „Eindringtiefe“ gilt der gleiche Ausdruck wie dort, Gl. (816).

Die gleichen Verhältnisse finden sich auch, wenn der unendlich ausgedehnte Leiter durch eine Platte oder ein Blech endlicher Dicke ersetzt wird, wenn nur die

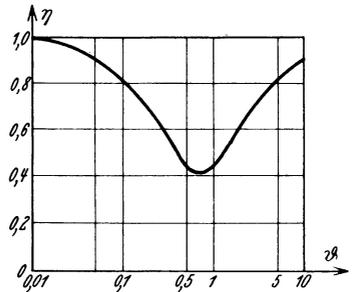


Abb. 288. Reflexionsfaktor einer leitenden Wand.

Blechdicke größer als die Eindringtiefe ist. Ist die Blechdicke kleiner, so ergibt sich innerhalb des Leiters infolge der Reflexion an der zweiten Begrenzungsebene eine gegenläufige Welle. Diese verschwindet praktisch bei genügender Dicke der Platte. Bleche, die dicker sind als die Eindringtiefe, wirken gegen auftreffende Wechselfelder wie ein Spiegel, der das  $\eta^2$ -fache der auftreffenden Leistung reflektiert und den Rest absorbiert (s. auch Gl. (852)).

Auch der andere Grenzfall, in dem die ebene Welle eine ebene Leiteroberfläche gerade tangiert, ist von praktischem Interesse. Die über die Erde laufenden Wellen

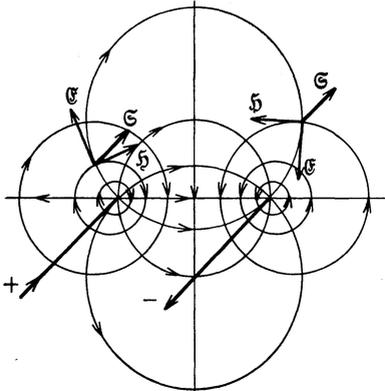


Abb. 289. Elektromagnetisches Feld einer Leitung.

der drahtlosen Übertragungen werden mit einer gewissen Annäherung durch diesen Fall erfaßt. Ebenso haben die Felder in der Umgebung einer Drahtleitung, Abb. 289, wie schon auf S. 256 gesagt ist, die Eigenschaft, daß die Vektoren der elektrischen und der magnetischen Feldstärke aufeinander senkrecht stehen; in genügend kleinen Ausschnitten können sie daher als ebene Felder betrachtet werden, die an den Drähten entlanggleiten.

Legen wir wieder die Laufrichtung der Welle in die  $x$ -Achse, die magnetische Feldstärke in die  $z$ -Achse, so fällt die elektrische Feldstärke in die  $y$ -Richtung. Die Oberfläche des Leiters sei durch die  $xz$ -Ebene gebildet. Da die magnetische Feldstärke tangential zur Leiteroberfläche gerichtet ist, so muß sie an der Oberfläche stetig übergehen, d. h., es muß auch im Leiterinnern eine magnetische Feldstärke der gleichen Richtung vorhanden sein. Infolge des magnetischen Feldes im Leiterinnern entsteht im Leiter eine elektrische Umlaufspannung in Ebenen, die parallel zur  $xy$ -Ebene liegen. Wegen der endlichen Leitfähigkeit des Leiters ergeben sich daher Ströme parallel zur  $x$ -Achse. Diese Ströme verursachen ein Potentialgefälle in der  $x$ -Richtung innerhalb des Leiters, d. h. die elektrische Feldstärke hat im Leiterinnern eine  $x$ -Komponente. Da nun aber die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke an der Grenzfläche stetig sein muß, so folgt daraus, daß auch außerhalb des Leiters eine  $x$ -Komponente der elektrischen Feldstärke vorhanden sein muß. Die elektrischen Kraftlinien treten also hier nicht senkrecht aus der Leiteroberfläche aus, Abb. 290. Es muß ferner die Dichte des wahren

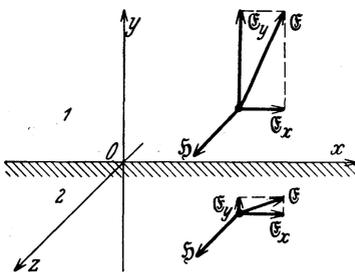


Abb. 290. Fortpflanzung einer elektromagnetischen Welle längs eines eben begrenzten Leiters.

Stromes an der Grenzfläche stetig sein; für zeitlich sinusförmige Vorgänge gilt also

$$\epsilon j \omega \bar{\mathcal{E}}_{y1} = \kappa \bar{\mathcal{E}}_{y2}, \tag{1158}$$

wenn die beiden Räume durch die Indizes 1 und 2 unterschieden werden, und  $\kappa$  die Leitfähigkeit des Leiters bedeutet. Also ist

$$\left| \frac{\bar{\mathcal{E}}_{y2}}{\bar{\mathcal{E}}_{y1}} \right| = \frac{\epsilon \omega}{\kappa}. \tag{1159}$$

Setzt man hier für Kupfer  $\kappa = 57 \cdot 10^4$  S/cm, so wird für eine Frequenz von  $10^7$  Hz

$$\frac{\epsilon_0 \omega}{\kappa} = \frac{0,886 \cdot 10^{-13} 2\pi \cdot 10^7 \text{ Fs}^{-1} \text{ cm}}{57 \cdot 10^4 \text{ cm S}} \approx 10^{-11},$$

also ein verschwindend kleiner Bruchteil. Selbst für Erde mit der Leitfähigkeit  $\kappa = 10^{-4}$  S/cm wird  $\frac{\epsilon_0 \omega}{\kappa}$  erst rund 0,06. Man kann daher praktisch meist die

Vertikalkomponente der elektrischen Feldstärke im Leiterinnern vernachlässigen. Dann zeigt der Vektor der Energieströmung im Leiter praktisch senkrecht nach unten. Andererseits ist die durch die Welle in der  $x$ -Richtung fortgeführte Energie durch die Strahlungsdichte  $|\mathfrak{E}_x| = |\mathfrak{E}_{y1}| \cdot |\mathfrak{H}|$  bestimmt. Von dieser Energie fließt ständig der Teil  $|\mathfrak{E}_x| \cdot |\mathfrak{H}|$  in den Leiter. Im Außenraum ist daher der Strahlungsvektor etwas nach unten geneigt, Abb. 291. Infolge des dauernden Energieentzuges durch die Absorption im Leiter nehmen die Amplituden der Welle beim Fortschreiten längs des Leiters ab.

Es ergibt sich also wieder der oben betrachtete Fall des Eindringens einer Welle in den Leiter. Die Fortleitung der Energie längs der Leiteroberfläche hat man sich so vorzustellen, daß die Energie in dem die Leiter umgebenden nichtleitenden Raum fließt, im wesentlichen parallel zu den Leiteroberflächen. Ein Teil der Energie dringt in den Leiter ein und wird dort durch die Joulesche Wärme aufgezehrt. Die Tiefe, bei der die Feldgrößen auf 1% ihres Oberflächenwertes abgenommen haben, ist gemäß Gl. (813) und (816)

$$\delta = \frac{4,6}{\sqrt{\pi f \kappa \mu}} \quad (1160)$$

Eine drahtlose Welle mit der Frequenz  $10^6$  Hz, entsprechend einer Wellenlänge

$$\lambda = \frac{c}{f} = 300 \text{ m,}$$

dringt in den Erdboden mit der Leitfähigkeit  $\kappa = 10^{-4}$  S/cm bis zu einer Tiefe von etwa

$$\delta = \frac{4,6}{\sqrt{\pi \cdot 10^6 \cdot 10^{-4} \cdot 1,256 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1} \text{ S cm}^{-1} \text{ H cm}^{-1}}} = 23 \text{ m}$$

ein.

Da die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke an der Oberfläche des Leiters stetig übergehen muß, so ist an der Oberfläche nach Gl. (1152) u. (1153)

$$\bar{\mathfrak{E}}_{x1} = A_3; \quad \bar{\mathfrak{H}} = A_3 \sqrt{\frac{\kappa}{j \omega \mu}}$$

Andererseits ist

$$\bar{\mathfrak{E}}_{y1} = Z_0 \bar{\mathfrak{H}} = A_3 Z_0 \sqrt{\frac{\kappa}{j \omega \mu}} = \bar{\mathfrak{E}}_{x1} Z_0 \sqrt{\frac{\kappa}{j \omega \mu}} \quad (1161)$$

Das Verhältnis der beiden Komponenten an der Leiteroberfläche wird also

$$\left| \frac{\bar{\mathfrak{E}}_{x1}}{\bar{\mathfrak{E}}_{y1}} \right| = \frac{1}{Z_0} \sqrt{\frac{\omega \mu}{\kappa}} \quad (1162)$$

Für das eben angeführte Zahlenbeispiel ergibt sich

$$\frac{1}{Z_0} \sqrt{\frac{\omega \mu}{\kappa}} = \frac{1}{377 \Omega} \sqrt{\frac{2\pi \cdot 10^6 \cdot 1,256 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1} \text{ H cm}}{10^{-4} \text{ cm S}}} = 0,0746.$$

Die beiden Komponenten  $\mathfrak{E}_{x1}$  und  $\mathfrak{E}_{y1}$  haben nun, wie die Gl. (1161) zeigt, eine zeitliche Phasenverschiebung von  $45^\circ$  entsprechend dem Winkel von  $\sqrt{j}$ . Der räumliche Winkel, unter dem die elektrischen Feldlinien von außen her an der Leiteroberfläche einmünden, dreht sich daher während jeder Periode um  $360^\circ$ , wie dies aus der folgenden Überlegung hervorgeht. Setzt man

$$\mathfrak{E}_{y1} = A \sin \omega t, \quad (1163)$$

so wird  $\mathfrak{E}_{x1} = A \frac{1}{Z_0} \sqrt{\frac{\omega \mu}{\kappa}} \sin(\omega t + 45^\circ) = \frac{A}{Z_0} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\kappa}} (\sin \omega t + \cos \omega t)$ .

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen folgt

$$\sin \omega t = \frac{\mathfrak{E}_{y1}}{A}.$$

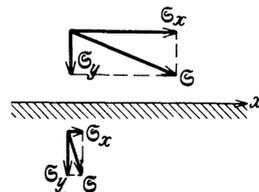


Abb. 291. Richtung der Energieströmung bei der Fortpflanzung der Welle längs des Leiters.

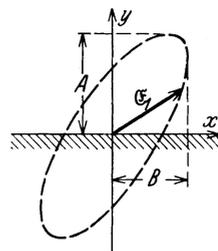


Abb. 292. Elliptisches Drehfeld an der Grenzfläche.

Führt man dies in die zweite ein, so ergibt sich

$$\mathfrak{E}_{x1} = \frac{B}{\sqrt{2}} \left[ \frac{\mathfrak{E}_{y1}}{A} + \sqrt{1 - \left(\frac{\mathfrak{E}_{y1}}{A}\right)^2} \right],$$

wobei 
$$B = \frac{A}{Z_0} \sqrt{\frac{\omega \mu}{\kappa}}$$

gesetzt ist; daraus folgt 
$$\left(\frac{\mathfrak{E}_{x1} \sqrt{2}}{B} - \frac{\mathfrak{E}_{y1}}{A}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{E}_{y1}}{A}\right)^2 = 1. \tag{1164}$$

Das ist die Gleichung einer schrägliegenden Ellipse in der  $xy$ -Ebene, Abb. 292. Der Endpunkt des Vektors der elektrischen Feldstärke durchläuft also eine Ellipse; das elektrische Feld stellt ein elliptisches Drehfeld dar. Ähnliche Verhältnisse ergeben sich auch an allen Grenzflächen verschiedener Stoffe.

Siebentes Kapitel.

## Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge.

### 39. Allgemeine Gesetze der Ausgleichsvorgänge in linearen Systemen.

Die mit dem magnetischen Feld der Ströme und dem elektrischen Feld der Spannungen verbundene Aufspeicherung von Energie hat zur Folge, daß in jedem Stromkreis der Übergang von einem Zustand zu einem anderen nicht plötzlich vor sich gehen kann. Der elektrische Zustand eines Stromkreises kann sich ändern,

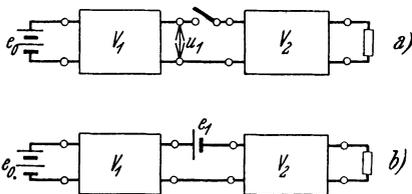


Abb. 293 a und b. Ersatz eines Schalters durch eine zeitlich veränderliche elektromotorische Kraft.

entweder wenn irgendwelche Schaltungen ausgeführt werden, z. B. Öffnen oder Schließen von Kontakten, oder wenn die elektromotorischen Kräfte irgendwelche Zeitfunktionen sind. Der letztgenannte Fall ist der allgemeinere, der erste kann auf ihn zurückgeführt werden. Wird z. B. der Schalter zwischen den beiden Vierpolen  $V_1$  und  $V_2$ , Abb. 293 a, geschlossen, so entsteht in dem Abschlußwiderstand von  $V_2$  ein Strom. Dieser Strom läßt sich folgendermaßen berechnen. Wir denken

uns an Stelle des Schalters eine Stromquelle mit der elektromotorischen Kraft  $e_1$ , Abb. 293 b, von solcher Größe angeschlossen, daß sie die zwischen den Ausgangsklemmen des Vierpols  $V_1$  auftretende Leerlaufspannung  $u_1$  gerade kompensiert, daß also

$$e_1 = u_1$$

ist. Dann kann kein Strom aus dem Vierpol  $V_1$  in den Vierpol  $V_2$  fließen, genau so, wie wenn ein Schalter zwischen den beiden Vierpolen geöffnet wäre. Das Schließen des Schalters ist nunmehr gleichwertig dem Verschwinden der elektromotorischen Kraft  $e_1$ . Man kann also das Schließen und Öffnen eines Schalters immer zurückführen auf das Verschwinden und Entstehen elektromotorischer Kräfte.

#### Schaltvorgänge.

Sind die elektromotorischen Kräfte periodische Zeitfunktionen, so stellt sich nach hinreichend langer Zeit ein „eingeschwungener Zustand“ ein, in dem die Energien der Felder periodisch zwischen Null und einem Höchstwert schwanken. Den eingeschwungenen Zustand, bei dem sich alle Verhältnisse während jeder Periode wiederholen, kann man als den allgemeinsten Fall des stationären Zustandes ansehen, da auch der Gleichstromfall von ihm als Grenzfall umfaßt wird. Man be-

zeichnet nun als Ausgleichsvorgang den Übergang von einem stationären Zustand zu einem anderen. Die einfachste Form eines Ausgleichsvorganges entsteht, wenn sich eine elektromotorische Kraft plötzlich ändert. Diesen Vorgang bezeichnet man als *Schaltvorgang*; die elektromotorische Kraft als *Schalt-EMK*.

Da die Maxwell'schen Feldgleichungen für beliebige zeitliche Änderungen der Feldgrößen gelten, so sind sie auch maßgebend für die Ausgleichsvorgänge. Wenn es sich um Stromverzweigungen aus Spulen, Kondensatoren und Widerständen handelt, dann führt die Anwendung der Feldgleichungen zu den Kirchhoffschen Sätzen. Der erste Kirchhoffsche Satz drückt aus, daß die Divergenz des Stromes Null ist, während der zweite Kirchhoffsche Satz gleichbedeutend ist mit der Aussage der zweiten Feldgleichung, daß das Linienintegral der elektrischen Feldstärke längs einer beliebigen Masche gleich dem magnetischen Schwund der Masche ist, wobei diese Größe noch zu vermehren ist um die eingepprägten elektromotorischen Kräfte, falls solche vorhanden sind. Indem man die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion einführt, wird auch der Wortlaut dieses Satzes bei zeitlich veränderlichen Vorgängen der gleiche wie bei Gleichstrom. Die erste Feldgleichung stellt die Beziehung zwischen der elektromotorischen Kraft der Selbstinduktion und der Stromstärke dar; wir berücksichtigen sie durch die Einführung der Induktivität. Die Induktivität ist unabhängig von der Stromstärke, wenn die magnetischen Felder keine ferromagnetischen Stoffe enthalten. Dann sind die Feldgleichungen lineare Differentialgleichungen, d. h. zwischen den Feldgrößen und damit zwischen den Spannungen und Strömen bestehen lineare Beziehungen. Man spricht in diesem Falle von einem linearen System.

Wendet man die beiden Kirchhoffschen Sätze auf die Knoten und Maschen der Stromverzweigung an und löst nach der gesuchten Größe, z. B. einer Stromstärke, auf, so ergibt sich eine lineare Differentialgleichung  $n$ -ten Grades zwischen der gesuchten Größe und der zeitlich veränderlichen elektromotorischen Kraft. Man integriert diese Gleichung, indem man für die gesuchte Größe den Ansatz

$$ke^{pt}$$

einführt. Da dann  $p$  an die Stelle von  $d/dt$  tritt, so wird aus der Differentialgleichung  $n$ -ten Grades eine algebraische Gleichung  $n$ -ten Grades. Diese Gleichung bezeichnet man als die *Stammgleichung*. Man kann sie ohne Aufstellen der Differentialgleichung auf folgende Weise unmittelbar gewinnen. Mit dem angeführten Zeitansatz wird die Spannung an einer Spule  $iLp$ , der Strom in einem Kondensator  $uCp$ , genau so wie die Spannung an einem Widerstand  $iR$  und der Strom in dem Widerstand  $u/R$  wird. Man kann daher mit den Größen  $Lp$  und  $1/Cp$  so rechnen wie mit Widerständen bei Gleichstrom. Indem man jeder Induktivität den Widerstand  $Lp$  und jeder Kapazität den Widerstand  $1/Cp$  zuschreibt, lassen sich die Kirchhoffschen Regeln und überhaupt alle Stromverzweigungsregeln anwenden wie bei Gleichstrom. Dieses Verfahren entspricht der komplexen Rechnung für den eingeschwungenen Zustand, bei der  $j\omega$  an Stelle von  $p$  gesetzt ist. Bezeichnet man die Größe, deren zeitlicher Verlauf gesucht ist (z. B. ein Strom) mit  $S_2$ , und die Größe, die die zeitliche Änderung von  $S_2$  verursacht, also die veränderliche EMK, die „eingepprägte Kraft“, mit  $S_1$ , so läßt sich auf Grund der Stromverzweigungsregeln eine Beziehung von der Form

$$S_2 = \frac{S_1}{F(p)} \quad (1165)$$

aufstellen. Schreibt man diese Beziehung

$$F(p)S_2 = S_1,$$

so erkennt man, daß die Stammgleichung lautet

$$F(p) = 0. \quad (1166)$$

Als Beispiel werde der in Abb. 294 dargestellte Fall des Einschaltens eines Schwingungskreises betrachtet. Gesucht sei der zeitliche Verlauf der Spannung  $u$  am Kondensator nach dem Schließen des Schalters. Das Schließen des Schalters ist gleichbedeutend mit dem Entstehen der elektromotorischen Kraft  $e$  in dem geschlossenen Stromkreis. Diese elektromotorische Kraft stellt hier die eingeprägte Kraft  $S_1$  dar. Die gesuchte Spannung entspricht der Größe  $S_2$ . Unter Einführung der symbolischen Widerstände läßt sich der Stromkreis durch das Ersatzschema, Abb. 295, darstellen. Aus diesem Schema kann sofort abgelesen werden

$$i = \frac{e}{R + Lp + \frac{1}{Cp}},$$

oder

$$S_2 = \frac{i}{Cp} = \frac{S_1}{1 + CLp^2 + RCp}.$$

Die Stammgleichung lautet also

$$1 + RCp + LCp^2 = 0.$$

Sie hat die beiden Wurzeln

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}, \\ p_2 &= -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \end{aligned} \right\} \quad (1167)$$

Es ergeben sich also zwei Lösungen der Differentialgleichung für die Spannung am Kondensator, nämlich  $k_1 e^{p_1 t}$  und  $k_2 e^{p_2 t}$ , wobei  $k_1$  und  $k_2$  zwei zunächst noch unbestimmte Konstanten sind. Eine weitere Lösung wird durch den zeitlichen Verlauf der Spannung im eingeschwungenen Zustand dargestellt, der mit Hilfe der komplexen Rechnung leicht ermittelt werden kann. Bezeichnet man ihn mit  $u_e$ , so lautet also die vollständige Lösung

$$u = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + u_e. \quad (1168)$$

Der wirkliche Verlauf der Spannung wird danach gebildet durch die Summe des Verlaufs im eingeschwungenen Zustand mit einem Vorgang, den man als den flüchtigen Vorgang bezeichnet, und der im Laufe der Zeit abklingt:

$$u = u_f + u_e. \quad (1169)$$

Die flüchtige Komponente  $u_f$  enthält noch die beiden Integrationskonstanten  $k_1$  und  $k_2$ . Diese sind dadurch bedingt, daß der Verlauf des Vorganges davon abhängt, wie groß die in Spule und Kondensator aufgespeicherte Energie vor Änderung der eingepprägten Kraft war. Es könnte z. B. der Kondensator bereits irgendeine Ladung haben. Da sich die Feldenergie nicht sprunghaft ändern kann, so muß auch noch unmittelbar nach dem Einsetzen der eingepprägten Kraft die gleiche Feldenergie vorhanden sein. Zur Berechnung dieser Konstanten muß daher der Anfangszustand berücksichtigt werden, und zwar ergeben sich die Konstanten grundsätzlich daraus, daß

1. die magnetische Energie in jeder Spule,
2. die elektrische Energie in jedem Kondensator stetig sind. Anders ausgedrückt: Der Strom in jeder Spule und die Spannung an jedem Kondensator müssen unmittelbar nach dem Einsetzen der Kraft noch die gleichen Werte haben wie unmittelbar vorher. Aus diesem Grund ergeben sich immer so viele Konstanten als Energiespeicher vorhanden sind.

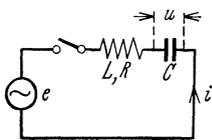


Abb. 294. Einschalten eines Schwingungskreises.

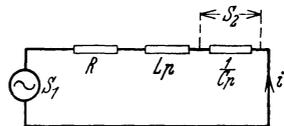


Abb. 295. Aufstellung der Stammgleichung.

Es werde zur Erläuterung das Beispiel des Anlegens einer Batterie mit konstanter EMK  $E_0$  betrachtet. Hier ist

$$u_e = E_0,$$

und der Strom in der Spule, der gleich dem Ladestrom des Kondensators ist,

$$i = C \frac{du}{dt} = k_1 p_1 e^{p_1 t} + k_2 p_2 e^{p_2 t}. \quad (1170)$$

Waren vor dem Schalten Spule und Kondensator ungeladen, so muß  $i = 0$  und  $u = 0$  für  $t = 0$  sein, also

$$0 = k_1 + k_2 + E_0,$$

$$0 = k_1 p_1 + k_2 p_2.$$

Dies liefert  $k_1 = E_0 \frac{p_2}{p_1 - p_2}, \quad k_2 = -E_0 \frac{p_1}{p_1 - p_2},$

und  $u = E_0 \left( 1 + \frac{p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}}{p_1 - p_2} \right).$  (1171)

Der Verlauf von  $u$  hängt davon ab, ob  $p_1$  und  $p_2$  reelle oder komplexe Größen sind. Wenn

$$\left( \frac{R}{2L} \right)^2 > \frac{1}{LC},$$

dann sind beide Größen negativ und reell. Der zeitliche Verlauf von  $u$  ist durch die Kurve 1, Abb. 296, dargestellt (aperiodischer Fall). Ist dagegen

$$\left( \frac{R}{2L} \right)^2 < \frac{1}{LC},$$

so kann gesetzt werden

$$p_1 = -\frac{1}{\tau} + j\omega_0, \quad p_2 = -\frac{1}{\tau} - j\omega_0, \quad (1172)$$

wobei

$$\tau = \frac{2L}{R}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left( \frac{R}{2L} \right)^2}. \quad (1173)$$

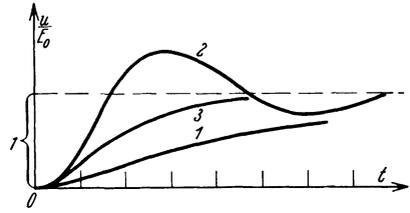


Abb. 296. Einschaltvorgang beim Schwingungskreis.

Führt man dies in die Gl. (1171) ein, so folgt

$$u = E_0 \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \left( \cos \omega_0 t + \frac{1}{\tau \omega_0} \sin \omega_0 t \right) \right]. \quad (1174)$$

Es ergibt sich ein Verlauf nach Kurve 2, Abb. 629. Wenn der Widerstand  $R$  sehr klein ist, so gilt angenähert

$$\left. \begin{aligned} u &= E_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \cos \omega_0 t \right); \\ i &= E_0 \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin \omega_0 t. \end{aligned} \right\} \quad (1175)$$

Die Spannung am Kondensator erreicht dann nahezu den doppelten Wert von  $E_0$ ; der Strom hat den Maximalwert  $E_0 \sqrt{\frac{C}{L}}$ .

Der sogenannte aperiodische Grenzfall liegt vor, wenn

$$\left( \frac{R}{2L} \right)^2 = \frac{1}{LC},$$

oder  $\omega_0 = 0$  ist. Die Gl. (1174) liefert hiermit

$$u = E_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (1176)$$

Dieser Fall ist in Abb. 296 mit 3 bezeichnet.

Das hier angewendete Verfahren führt grundsätzlich bei beliebig komplizierten Systemen zum Ziel, wenn auch im allgemeinen die Rechnungen langwierig werden, sobald mehrere unabhängige Energiespeicher vorhanden sind. Zur Vereinfachung der Rechnung dienen Hilfssätze, insbesondere die von Heaviside herrührenden Methoden, die in der Spezialliteratur behandelt sind.

## Zeitlich veränderliche Kraft.

Unter der Voraussetzung der Linearität des Systems läßt sich der Verlauf einer Systemgröße  $S_2$  (Spannung oder Strom) bei beliebiger zeitlicher Änderung einer eingepprägten Kraft  $S_1$  (EMK) aus dem Verlauf des Schaltvorganges berechnen. Man denke sich zunächst an die Stelle der zeitlich veränderlichen Kraft  $S_1$  eine zur Zeit  $t=0$  plötzlich einsetzende und dann konstante Schaltkraft  $S_{10}$  gebracht. Die Größe  $S_2$  ändert sich dann von Null auf einen Endwert (der selbst wieder Null sein kann):

$$S_2 = S_2(t).$$

Es werde nun das Verhältnis

$$\varphi(t) = \frac{S_2(t)}{S_{10}} \quad (1177)$$

gebildet, das proportional  $S_2(t)$  ist, da  $S_{10}$  eine Konstante darstellt. Diese so definierte Funktion bezeichnen wir als die Übergangsfunktion. Sie kann nach den vorhin behandelten Regeln berechnet werden und ist wegen der Linearität des Systems unabhängig von der Größe  $S_{10}$ . Die in Abb. 296 aufgezeichneten Kurven stellen Übergangsfunktionen dar.

Setzt die Kraft  $S_{10}$  nicht im Zeitpunkt  $t=0$ , sondern in irgendeinem anderen Zeitpunkt  $t=z$  ein, so gilt

$$S_2(t) = S_{10} \varphi(t-z). \quad (1178)$$

Verschwindet die Kraft  $S_{10}$  nach einem kurzen Zeitabschnitt  $dz$  wieder, so gilt

$$S_2(t) = -S_{10} \varphi(t-z-dz).$$

Im ganzen ergibt sich daher nach einem solchen Impuls von der Dauer  $dz$  ein Verlauf der Größe  $S_2$ , der dargestellt ist durch

$$dS_2(t) = S_{10}[\varphi(t-z) - \varphi(t-z-dz)].$$

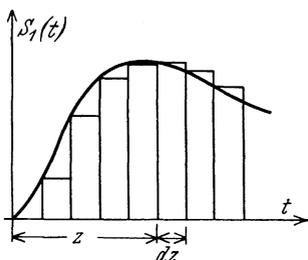


Abb. 297. Zerlegung einer zeitlich veränderlichen Kraft in Impulse.

Entwickelt man hier unter der Voraussetzung, daß die Übergangsfunktion und ihre Differentialquotienten stetige Funktionen sind, das zweite Glied rechts nach Potenzen von  $dz$ , so folgt unter Vernachlässigung höherer Potenzen des unendlich kleinen Zeitabschnittes  $dz$  als der ersten

$$dS_2(t) = S_{10} \dot{\varphi}(t-z) dz, \quad (1179)$$

wobei

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{d\varphi}{dt}$$

gesetzt ist.

Aus derartigen Impulsen kann man nun jeden beliebigen zeitlichen Verlauf der Funktion  $S_1$  zusammensetzen, wie dies in Abb. 297 veranschaulicht ist. Jeder Impuls setzt in einem Zeitpunkt  $t=z$  ein und hat den Betrag

$$S_{10} = S_1(z).$$

Zu jedem Impuls gehört daher ein Verlauf der Größe  $S_2$  von

$$dS_2 = S_1(z) \dot{\varphi}(t-z) dz.$$

Wegen der Linearität des Systems überlagern sich die von den einzelnen Impulsen herrührenden Anteile von  $S_2$ , so daß man den wirklichen Wert von  $S_2$  in irgendeinem Zeitpunkt  $t$  erhält, wenn man die Wirkung aller Impulse von  $z = -\infty$  bis  $z = t$  summiert:

$$S_2 = \int_{-\infty}^t S_1(z) \dot{\varphi}(t-z) dz. \quad (1180)$$

Setzt die Kraft  $S_1$  erst im Zeitpunkt  $t=0$  ein, so ist  $S_1$  für negative  $t$  gleich 0 zu setzen, und es wird

$$S_2 = \int_0^t S_1(z) \dot{\varphi}(t-z) dz. \quad (1181)$$

Die Formel (1180) wurde unter der Voraussetzung abgeleitet, daß die Übergangsfunktion  $\varphi(t)$  stetig ist. Häufig liegt der Fall vor (z. B. bei Leitungen), daß die Übergangsfunktion in einem bestimmten Zeitpunkt  $t=t_0$  sprunghaft von Null auf einen bestimmten Betrag  $\varphi(t_0)$  wächst, wie z. B. in Abb. 298. Dann kann man  $\varphi(t)$  zerlegen in eine stetige Funktion

$$\varphi(t) - \varphi(t_0)$$

und in einen Sprung vom Betrage  $\varphi(t_0)$ . Dieser liefert einen Beitrag zu  $S_2$  von der Größe

$$S_2' = \varphi(t_0) S_1(t-t_0),$$

während die stetige Funktion einen Beitrag nach Gl. (1180) ergibt, so daß der vollständige Verlauf von  $S_2$  für  $t > t_0$  gegeben ist durch

$$S_2 = \int_0^{t-t_0} S_1(z) \dot{\varphi}(t-z) dz + \varphi(t_0) S_1(t-t_0). \tag{1182}$$

Dabei ist noch berücksichtigt, daß  $\dot{\varphi}(t-z)$  für  $t-z < t_0$ , also für  $z > t-t_0$  Null ist. Für  $t < t_0$  ist infolge der Voraussetzungen auch  $S_2 = 0$ .

Als Anwendungsbeispiel werde der Schaltvorgang betrachtet, der sich ergibt,

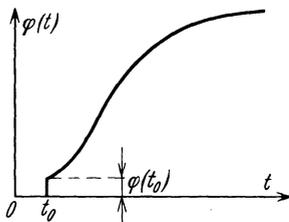


Abb. 298. Beispiel einer allgemeinen Übergangsfunktion.

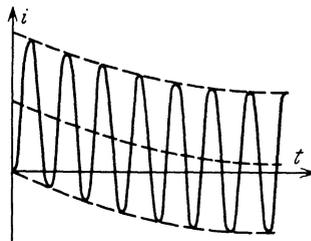


Abb. 299. Einschaltvorgang bei einer Spule ohne Eisenkern.

wenn eine Spule mit der Induktivität  $L$  und dem Widerstand  $R$  an eine Wechselstromquelle mit

$$e = E \sqrt{2} \sin \omega t$$

gelegt wird. Ersetzt man die Wechselspannung durch eine plötzlich entstehende und dann konstante elektromotorische Kraft  $E_0$ , so wird der Strom nach Gl. (681)

$$i = \frac{E_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right); \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

Setzen wir  $i = S_2$ ;  $E_0 = S_{10}$ , so ergibt sich die Übergangsfunktion

$$\varphi(t) = \frac{1}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \tag{1183}$$

und es wird

$$\dot{\varphi}(t-z) = \frac{1}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{\frac{z}{\tau}}. \tag{1184}$$

Damit folgt sofort für den Wechselstromvorgang

$$i = S_2 = E \sqrt{2} \frac{1}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^z e^{\frac{z}{\tau}} \sin \omega z dz.$$

Durch Ausführung der Integration ergibt sich

$$i = E \sqrt{2} \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \left( e^{-\frac{t}{\tau}} - \cos \omega t \right) + E \sqrt{2} \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t. \tag{1185}$$

Die flüchtige Komponente des Stromes,  $i_f$ , ist also hier durch die Exponentialfunktion dargestellt; sie überlagert sich dem stationären Strom; es ist

$$\left. \begin{aligned} i_f &= E \sqrt{2} \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{t}{\tau}}, \\ i_e &= E \sqrt{2} \frac{R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t}{R^2 + \omega^2 L^2}. \end{aligned} \right\} \tag{1186}$$

Der dadurch gegebene Stromverlauf ist in Abb. 299 veranschaulicht. Kurze Zeit nach dem Einschalten kann der Strom nahezu auf den doppelten Endwert ansteigen.

Bei komplizierten Übergangsfunktionen kann das Integral (1182) meist nicht in geschlossener Form ausgewertet werden. Man wendet dann mit Vorteil Reihenentwicklungen an, die sich durch partielle Integration aus Gl. (1182) ergeben. Es sei die eingeprägte Kraft durch

$$\begin{aligned} S_1(t) &= 0 && \text{für } t < 0; \\ S_1(t) &= k_1 \sin \omega t + k_2 \cos \omega t && \text{für } t > 0 \end{aligned}$$

gegeben. Dann wird nach Gl. (1182) für  $t > t_0$ :

$$S_2 = k_1 \int_0^{t-t_0} \sin \omega z \dot{\varphi}(t-z) dz + k_2 \int_0^{t-t_0} \cos \omega z \dot{\varphi}(t-z) dz + \varphi(t_0) S_1(t-t_0). \quad (1187)$$

Die beiden Integrale 
$$I_1 = \int_0^{t-t_0} \sin \omega z \dot{\varphi}(t-z) dz$$

und 
$$I_2 = \int_0^{t-t_0} \cos \omega z \dot{\varphi}(t-z) dz$$

kann man in das komplexe Integral

$$\mathfrak{S} = I_2 + j I_1 = \int_0^{t-t_0} e^{j\omega z} \dot{\varphi}(t-z) dz \quad (1188)$$

zusammenfassen. Nunmehr liefert die partielle Integration

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \frac{1}{\omega^2} \ddot{\varphi}(t) - \frac{1}{\omega^4} \overset{\dots}{\varphi}(t) + \dots \\ &+ j \left[ \frac{1}{\omega} \dot{\varphi}(t) - \frac{1}{\omega^3} \overset{\dots}{\varphi}(t) + \dots \right] \\ &+ \left[ \frac{1}{j\omega} \dot{\varphi}(t_0) + \frac{1}{(j\omega)^2} \ddot{\varphi}(t_0) + \frac{1}{(j\omega)^3} \overset{\dots}{\varphi}(t_0) + \dots \right] e^{j\omega(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (1189)$$

Der letzte Ausdruck ergibt zusammen mit dem letzten Glied in Gl. (1187) den eingeschwungenen Verlauf. Dieser kann unmittelbar aus der Wechselstromtheorie berechnet werden, so daß wir ihn hier nicht weiter zu berücksichtigen brauchen. Die beiden ersten Ausdrücke in Gl. (1189) liefern die flüchtigen Komponenten von  $S_2$ . Durch Vergleichen des Reellen und Imaginären in Gl. (1188) und (1189) folgt

$$I_1 = \frac{1}{\omega} \dot{\varphi}(t) - \frac{1}{\omega^3} \overset{\dots}{\varphi}(t) + \dots;$$

$$I_2 = \frac{1}{\omega^2} \ddot{\varphi}(t) - \frac{1}{\omega^4} \overset{\dots}{\varphi}(t) + \dots$$

Schreiben wir daher 
$$S_2 = S_f + S_e, \quad (1190)$$

so wird die flüchtige Komponente von  $S_2$

$$S_f(t) = k_1 \left[ \frac{1}{\omega} \dot{\varphi}(t) - \frac{1}{\omega^3} \overset{\dots}{\varphi}(t) + \dots \right] + k_2 \left[ \frac{1}{\omega^2} \ddot{\varphi}(t) - \frac{1}{\omega^4} \overset{\dots}{\varphi}(t) + \dots \right]. \quad (1191)$$

Die auf diese Weise erhaltenen Reihen sind im allgemeinen brauchbar für große Werte von  $t$ . In manchen Fällen ergeben sie eine sogenannte asymptotische Darstellung von  $S_f$ , d. h. die Glieder nehmen zunächst immer mehr ab und wachsen dann wieder unbegrenzt an. Man geht in diesem Falle bei der Berechnung nur so weit wie die Glieder abnehmen; der Fehler kann dann höchstens so groß sein wie das folgende Glied. Zur Berechnung von  $S_2$  bei kleinen Werten von  $t$  ist die folgende Darstellung zweckmäßig, die man ebenfalls durch partielle Integration von  $\mathfrak{S}$  erhält.

Es ist 
$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= -\varphi(t_0) \cos \omega(t-t_0) + \varphi(t) - \omega^2 \varphi_{-2}(t) + \omega^4 \varphi_{-4}(t) - \dots \\ &- j [\varphi(t_0) \sin \omega(t-t_0) - \omega \varphi_{-1}(t) + \omega^3 \varphi_{-3}(t) - \dots], \end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$\varphi_{-1}(t) = \int_{t_0}^t \varphi(z) dz,$$

$$\varphi_{-2}(t) = \int_{t_0}^t \varphi_{-1}(z) dz, \quad \text{usw.}$$

daher gilt

$$S_2(t) = k_1[\omega \varphi_{-1}(t) - \omega^3 \varphi_{-3}(t) + \dots] + k_2[\varphi(t) - \omega^2 \varphi_{-2}(t) + \dots]. \quad (1192)$$

In dem Beispiel der an einen Wechselstromgenerator angeschalteten Spule ist

$$\varphi(t) = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{R}{L^2} e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{R^2}{L^3} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \text{usw.}$$

Es wird daher, wenn man gemäß dem Ansatz für die EMK

$$k_1 = E\sqrt{2}, \quad k_2 = 0$$

setzt, nach Gl. (1191)

$$i_f = S_f = E\sqrt{2} \frac{1}{\omega L} \left[1 - \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^4 - \dots\right] e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (1193)$$

Wenn  $\frac{R}{\omega L}$  kleiner als 1 ist, so folgt hieraus unter Benutzung der Reihenentwicklung

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots,$$

$$i_f = E\sqrt{2} \frac{1}{\omega L} \frac{1}{1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2} e^{-\frac{t}{\tau}} = E\sqrt{2} \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Für  $R > \omega L$  ist die Reihe Gl. (1193) divergent. Da jedoch die eben gefundene Formel beim Übergang von dem einen in das andere Gebiet stetig ist, so gilt die gleiche Darstellung auch in diesem Bereich.

Berechnung des Ausgleichsvorganges durch Reihenentwicklungen.

Ein anderes Verfahren der Berechnung des Ausgleichvorgangs für eine beliebig veränderliche Kraft besteht darin, daß man die symbolische Methode der Lösung von linearen Differentialgleichungen anwendet. Setzt man  $p$  an Stelle von  $d/dt$ , so kann nach früherem die Systemgröße  $S_2$  in der Form

$$S_2 = \frac{S_1}{F(p)}$$

dargestellt werden, wobei sich die Funktion  $F(p)$  aus der Theorie der Stromverzweigungen ergibt. Es werde nun  $\frac{1}{F(p)}$  in die Reihen nach steigenden und fallenden Potenzen von  $p$  entwickelt:

$$\frac{1}{F(p)} = \alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \alpha_3 p^3 + \dots; \quad (1194)$$

$$\frac{1}{F(p)} = \beta_0 + \frac{\beta_1}{p} + \frac{\beta_2}{p^2} + \frac{\beta_3}{p^3} + \dots. \quad (1195)$$

Da eine Multiplikation mit  $p$  die Differentiation nach  $t$  bedeutet, so entspricht eine Division mit  $p$  der Integration nach der Zeit, denn es ist

$$\int e^{pt} dt = \frac{1}{p} e^{pt}.$$

Für den zeitlichen Verlauf der Systemgröße  $S_2$  erhält man daher die beiden folgenden Beziehungen, die sich in ähnlicher Weise ergänzen wie die Gl. (1191) und (1192):

$$S_2 = \alpha_0 S_1(t) + \alpha_1 \dot{S}_1(t) + \alpha_2 \ddot{S}_1(t) + \alpha_3 \overset{\cdot\cdot}{S}_1(t) + \dots; \tag{1196}$$

$$S_2 = \beta_0 S_1(t) + \beta_1 \int_0^t S_1(z) dz + \beta_2 \int_0^t dz \int_0^z S_1(z) dz + \dots \tag{1197}$$

Bei der Anwendung dieser Reihen ist zu beachten, daß hier  $S_1(t)$  den vollständigen Verlauf der eingepprägten Kraft darstellt. Die Reihe (1196) ist daher nur gültig, wenn dieser Verlauf und seine sämtlichen Differentialquotienten stetige Funktionen bilden.

Als Anwendungsbeispiel werde folgender Fall betrachtet. An eine Spule mit der Induktivität  $L$  und dem Widerstand  $R$  werde im Zeitpunkt  $t=0$  eine Stromquelle gelegt, deren elektromotorische Kraft von Null beginnend proportional mit der Zeit wächst, also

$$e = S_1(t) = kt.$$

Für den Strom gilt symbolisch

$$S_2 = \frac{S_1}{R + Lp},$$

also wird hier  $F(p) = R + Lp$ .

Die beiden Reihenentwicklungen lauten

$$\frac{1}{R + Lp} = \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{L}{R} p + \left(\frac{L}{R}\right)^2 p^2 - \left(\frac{L}{R}\right)^3 p^3 + \dots \right),$$

$$\frac{1}{R + Lp} = \frac{1}{Lp} \left( 1 - \frac{R}{Lp} + \left(\frac{R}{Lp}\right)^2 - \left(\frac{R}{Lp}\right)^3 + \dots \right),$$

und es ist daher

$$\alpha_0 = \frac{1}{R}, \quad \alpha_1 = -\frac{L}{R^2}, \quad \alpha_2 = \frac{L^2}{R^3}, \quad \text{usw.},$$

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_1 = \frac{1}{L}, \quad \beta_2 = -\frac{R}{L^2}, \quad \text{usw.}$$

Die Reihe (1196) ist hier nicht brauchbar, da die Differentialquotienten von  $S_1$  vom zweiten ab bei  $t=0$  alle unendlich werden. Die zweite Reihe ergibt dagegen

$$i = \frac{k}{L} \frac{t^2}{2!} - \frac{kR}{L^2} \frac{t^3}{3!} + \frac{kR^2}{L^3} \frac{t^4}{4!} - \dots,$$

oder

$$i = k \frac{L}{R^2} \left[ \frac{1}{2!} \left(\frac{Rt}{L}\right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{Rt}{L}\right)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{Rt}{L}\right)^4 - \dots \right].$$

Unter Einführung der Exponentialfunktion kann man hierfür schreiben

$$i = k \frac{L}{R^2} \left( e^{-\frac{R}{L}t} - 1 + \frac{R}{L}t \right). \tag{1198}$$

In Abb. 300 ist der damit gegebene Verlauf von  $i$  dargestellt.

### 40. Der Zusammenhang zwischen den Frequenzcharakteristiken und den Ausgleichsvorgängen.

Nach den Ausführungen im vorigen Abschnitt kann der Verlauf des Ausgleichsvorgangs berechnet werden, wenn die Funktion  $F(p)$  bekannt ist. Dieser Zusammenhang soll im folgenden etwas näher betrachtet werden. Man kann alle Ausgleichsvorgänge zurückführen auf die Wirkung von plötzlich einsetzenden Kräften. Ein solcher Sprung der eingepprägten Kraft, Abb. 301, kann positiv oder negativ sein;

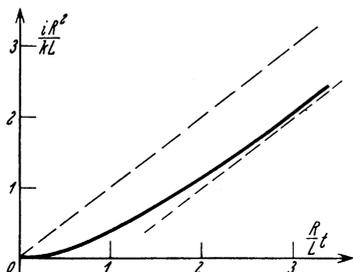


Abb. 300. Anwachsen des Stromes in einer Spule bei ständig zunehmender elektromotorischer Kraft.

er zieht einen zeitlichen Verlauf einer beliebigen Systemgröße  $S_2$  nach sich, der durch die Übergangsfunktion  $\varphi(t)$  dargestellt wird. Die durch den Sprung gebildete Zeitfunktion, Abb. 301, kann nun aufgefaßt werden als eine Summe von unendlich vielen stationären Sinusschwingungen. Um zu dieser Darstellung zu kommen, gehen wir von der Fourierschen Reihe für die periodische Rechteckkurve, Abb. 302, aus. Sie lautet

$$y(t) = \frac{4}{\pi} (\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega_1 t + \dots),$$

wobei die Kreisfrequenz der Grundschwingung mit der Periode  $T$  der Rechteckkurve in der Beziehung steht

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{2\pi}{T},$$

und der Maximalwert zu 1 angenommen ist. Die Abb. 303 veranschaulicht, wie die Oberschwingungen mehr und mehr eine Annäherung an den Rechteckverlauf geben. Halbieren wir die Werte von  $y$  und addieren  $1/2$ , so ergibt sich

$$w(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} (\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega_1 t + \dots),$$

eine Funktion, die durch Abb. 304 veranschaulicht wird; sie springt zwischen Null und 1 in Abständen von einer halben Periode hin und her. Es ist nun leicht ersichtlich, daß man zu der gesuchten Darstellung der Sprungfunktion, Abb. 301, kommt, wenn man die Periode  $T$  ins Unendliche wachsen läßt. Es ist

$$w(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin(2\nu+1)\omega_1 t}{2\nu+1}.$$

Setzt man hier  $(2\nu+1)\omega_1 = \omega$ ,

so folgt  $w(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\omega=\omega_1}^{\omega=\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} \omega_1$ , für  $\omega = \omega_1, 3\omega_1, 5\omega_1, \dots$ .

Die Summe läßt sich graphisch darstellen, wenn man die Funktion  $\frac{\sin \omega t}{\omega}$  in Abhängigkeit von  $\omega$  aufzeichnet, Abb. 305; diese beginnt mit dem Wert  $t$  und nimmt mit Schwankungen auf Null ab. Zeichnet man mit den zu  $\omega_1, 3\omega_1, 5\omega_1$ , usw. gehörigen Ordinaten die Rechtecke von der Breite  $2\omega_1$  ein, so ist die durch diese Rechtecke dargestellte Fläche

$$2 \sum_{\omega_1}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} \omega_1.$$

Lassen wir die Periode  $T$  unendlich groß werden, so wird  $\omega_1$  unendlich klein, und die Rechteckfläche, Abb. 305, geht über in die Fläche zwischen der Kurve und der Abszissenachse, also in das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega.$$

Daraus folgt für den Verlauf eines Sprunges vom Betrage 1, der im Zeitpunkt  $t=0$  stattfindet,

$$w(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega, \tag{1199}$$

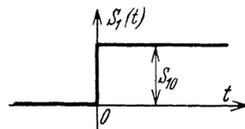


Abb. 301. Sprungfunktion.

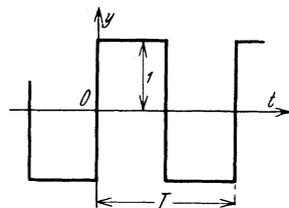


Abb. 302. Periodische Rechteckkurve.

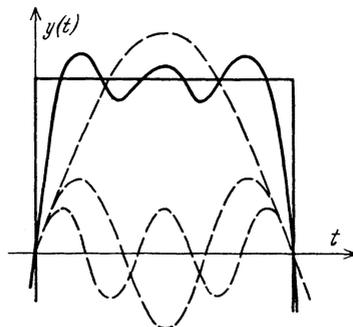


Abb. 303. Synthese der periodischen Rechteckkurve aus den Teilschwingungen.

und für den Verlauf eines Sprunges der eingepprägten Kraft

$$S_1(t) = S_{10} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega \right). \tag{1200}$$

Man kann also den Sprung auffassen als eine Summe von einfachen andauernden Sinusschwingungen mit allen zwischen Null und Unendlich möglichen Frequenzen und den Amplituden

$$\frac{S_{10}}{\pi \omega} d\omega,$$

die um so kleiner sind, je höher die Frequenz der Teilschwingung ist; außerdem enthält der Sprung noch eine konstante Kraft von der Größe  $\frac{1}{2}S_{10}$ . Das Wesentliche dieser Darstellung besteht darin, daß auf diese Weise der unstetige Vorgang des Einsetzens der Kraft zurückgeführt wird auf nebeneinander bestehende sinusförmige Kräfte, für die die einfachen Wechselstromgesetze gelten. Jede Teilschwingung der Kraft von der Form

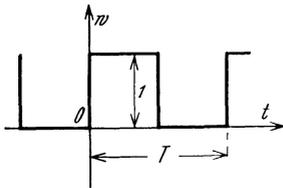


Abb. 304. Zur Ableitung der Sprungfunktion.

$$\frac{S_{10}}{\pi} \frac{d\omega}{\omega} \sin \omega t$$

hat eine Schwingung der anderen Systemgrößen zur Folge, die sich angeben läßt, wenn der Zusammenhang zwischen den Systemgrößen im eingeschwungenen Zustand bekannt ist. Durch Summieren aller Beiträge der Teilschwingungen über alle Frequenzen von Null bis Unendlich erhält man den wirklichen Verlauf der Größe  $S_2$ ,

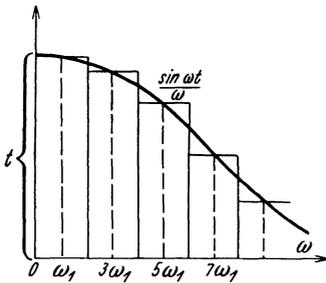


Abb. 305. Zur Berechnung der Sprungfunktion.

der zu dem Sprung  $S_{10}$  gehört. Man hat also den Zusammenhang zwischen den Systemgrößen für Wechselstrom beliebiger Frequenz aufzusuchen. Die komplexe Rechnung liefert hierfür allgemein eine Beziehung von der Form

$$\bar{S}_2 = A e^{-j a} \bar{S}_1, \tag{1201}$$

wobei  $A$  das Verhältnis der Effektivwerte von  $S_2$  und  $S_1$  angibt,  $a$  den Phasenwinkel, um den der Zeiger  $\bar{S}_2$  dem Zeiger  $\bar{S}_1$  nacheilt. Wir nennen  $A$  den Übertragungsfaktor,  $a$  den Übertragungswinkel des Systems. Eine andere Schreibweise ergibt sich, wenn man

$$A = e^{-b} \tag{1202}$$

setzt.  $b$  wird bei Größen gleicher Dimension als die Dämpfung des Systems bezeichnet. Die Größen  $a$  und  $b$  hängen im allgemeinen von der Frequenz ab; man nennt sie daher die Frequenzcharakteristiken des Systems. Nach dem oben Ausgeführten sind die Frequenzcharakteristiken maßgebend für den Ablauf der Ausgleichsvorgänge. Zu der Teilschwingung

$$\frac{S_{10}}{\pi} \frac{d\omega}{\omega} \sin \omega t$$

der Kraft gehört die Teilschwingung

$$\frac{S_{10}}{\pi} \frac{d\omega}{\omega} e^{-b} \sin(\omega t - a)$$

der Systemgröße  $S_2$ . Der zeitliche Verlauf von  $S_2$  folgt daher aus

$$S_2(t) = S_{10} \left( \frac{1}{2} e^{-b_0} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-b} \frac{\sin(\omega t - a)}{\omega} d\omega \right); \tag{1203}$$

$b_0$  bedeutet dabei den Wert von  $b$  für  $\omega = 0$ . Die Übergangsfunktion wird

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} e^{-b_0 t} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-b \omega t} \frac{\sin(\omega t - a)}{\omega} d\omega. \tag{1204}$$

Die Kenntnis der Frequenzcharakteristiken reicht also zur Beurteilung der Ausgleichsvorgänge vollständig aus. Die Vorteile dieser Betrachtungsweise liegen darin, daß die Frequenzcharakteristiken entweder durch Rechnung oder durch Messung leicht ermittelt werden können.

Einen wichtigen Sonderfall erhält man mit

$$\left. \begin{aligned} b &= b_0, \\ a &= \omega t_0, \end{aligned} \right\} \tag{1205}$$

wobei  $b_0$  und  $t_0$  Konstante bedeuten. Führt man diese Beziehungen in Gl. (1203) ein, so ergibt sich

$$S_2(t) = e^{-b_0 t} S_1(t - t_0) = A S_1(t - t_0). \tag{1206}$$

Jeder Sprung der Kraft  $S_1$  hat also einen Sprung der Größe  $S_2$  zur Folge, dessen Betrag  $A$  mal so groß ist, und der gegenüber  $S_1$  verspätet erscheint um einen Zeitabschnitt von der Größe  $t_0$ . Da man jeden beliebigen zeitlichen Verlauf von  $S_1$  durch unendlich kleine, unendlich viele Sprünge darstellen kann, so bedeutet dies, daß auch bei beliebigem zeitlichen Verlauf von  $S_1$  die Funktion  $S_2$  ein genaues Abbild von  $S_1$  darstellt, das lediglich mit der Verspätung  $t_0$  erscheint. Man bezeichnet diesen Fall als den Fall der verzerrungsfreien Übertragung. Die Laufzeit der Übertragung ist

$$t_0 = \frac{a}{\omega}. \tag{1207}$$

Ein Beispiel eines derartigen verzerrungsfreien Systems bildet die homogene, verlustfreie und mit ihrem Wellenwiderstand abgeschlossene Leitung, bei der nach Gl. (1054)  $t_0 = l \sqrt{L' C'}$  ist.

Abweichungen von den beiden Bedingungen (1205) bezeichnet man als Dämpfungsverzerrung bzw. als Phasenverzerrung. Als einfaches Beispiel einer Dämpfungsverzerrung werde der Fall betrachtet, daß  $b$  unterhalb einer bestimmten Frequenz  $\omega_0$  den konstanten Wert  $b_0$  hat und oberhalb unendlich groß ist, daß also Schwingungen mit Frequenzen oberhalb  $\omega_0$  in dem System nicht übertragen werden. Dann wird die Übergangsfunktion

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0} \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\omega} d\omega, \tag{1208}$$

wenn man von dem konstanten Faktor  $A$  absieht. Das Integral kann durch den sogenannten Integralsinus ausgedrückt werden, der definiert ist durch

$$Si x = \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx. \tag{1209}$$

Damit folgt

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si(\omega_0(t - t_0)). \tag{1210}$$

Der Verlauf dieser Funktion kann mit Hilfe von Tabellen<sup>1</sup> der Funktion  $Si$  leicht berechnet werden. Er ist in Abb. 306 dargestellt. Eine solche Begrenzung des Frequenzbereiches, wie sie z. B. durch Siebketten herbeigeführt werden kann, bewirkt also eine Abflachung des zeitlichen Verlaufes der Systemgröße  $S_2$ . Man kann diese Abflachung kennzeichnen durch die „Einschwingzeit“, die man etwa durch die Tangente im Punkte größter Steilheit der Übergangsfunktion definieren kann, wie

<sup>1</sup> Jahnke u. Emde: Funktionentafeln.

dies in Abb. 306 angedeutet ist. Nun ist die Steilheit der Übergangsfunktion nach Gl. (1208)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_0 \sin \omega_0(t-t_0)}{\pi \omega_0(t-t_0)}.$$

Sie hat ihren größten Wert für  $t=t_0$ , nämlich den Wert

$$\left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{t_0} = \frac{\omega_0}{\pi} = 2f_0.$$

Die Einschwingzeit  $\tau$  wird daher

$$\tau = \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{1}{2f_0}. \quad (1211)$$

Eine Siebkette, die alle Frequenzen zwischen Null und 100Hz hindurchläßt, bei höheren Frequenzen dagegen sperrt, ergibt nach Gl. (1211) eine Einschwingzeit

$$\tau = \frac{1}{200} \text{s} = 5 \text{ms}.$$

Den Verlauf einer plötzlich einsetzenden Wechselkraft erhält man, wenn man den Sprung multipliziert mit einer Dauerschwingung; er kann also als eine mit der Sprungfunktion modulierte Trägerschwingung aufgefaßt werden. Da nun nach Abschnitt 32 in der modulierten Schwingung

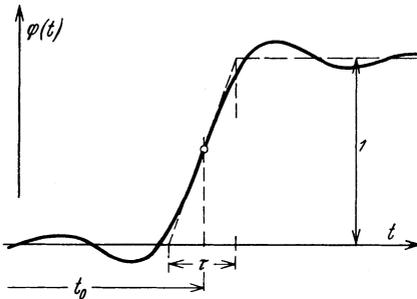


Abb. 306. Schaltvorgang bei einer idealen Siebkette.

jeder Modulationsfrequenz  $\omega$  zwei Frequenzen  $\Omega + \omega$  und  $\Omega - \omega$  entsprechen, so entspricht dem Frequenzbereich zwischen Null und  $\omega_0$  der modulierenden Schwingung ein Frequenzbereich zwischen  $\Omega - \omega_0$  und  $\Omega + \omega_0$  der modulierten Schwingung. Werden daher alle Teilschwingungen einer plötzlich einsetzenden Wechselkraft, die außerhalb des Frequenzbereiches zwischen

$$\omega_1 = \Omega - \omega_0 \quad \text{und} \quad \omega_2 = \Omega + \omega_0$$

liegen, unterdrückt, so ergibt sich nach Gl. (1211) eine Einschwingzeit

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{1}{\Delta f}, \quad (1212)$$

da  $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$  ist.

Eine Siebkette mit einem Durchlässigkeitsbereich von der Breite  $\Delta f = 100\text{Hz}$  ergibt eine Einschwingzeit von

$$\tau = \frac{1}{100} \text{s} = 10 \text{ms}.$$

Die Einschwingzeit ist bei Wechselstrom also doppelt so groß wie bei Gleichstrom, wenn der Durchlässigkeitsbereich der gleiche ist.

#### 41. Nichtlineare Systeme.

Wenn der Zusammenhang zwischen den Spannungen und Strömen durch gekrümmte Kurven dargestellt ist, so wird die Theorie der Ausgleichsvorgänge schon in den einfachsten Fällen außerordentlich kompliziert. Man ist dann meist auf Näherungsbetrachtungen oder graphische Methoden angewiesen. Im folgenden soll als Beispiel das Einschalten einer Drosselspule mit Eisenkern, z. B. der Primärwicklung eines sekundär leerlaufenden Transformators bei Wechselstrom näher betrachtet werden. Es sei

$$e = E\sqrt{2} \sin \omega t.$$

Dann gilt nach dem Schließen des Schalters im Zeitpunkt  $t=0$

$$E\sqrt{2} \sin \omega t = iR + \frac{d\Psi}{dt}, \quad (1213)$$

wobei  $\Psi$  den mit der Wicklung verketteten Gesamtfluß bezeichnet. Der Zusammen-

hang zwischen  $\Psi$  und  $i$  ist durch die magnetische Charakteristik der Spule gegeben, Abb. 307.

Man findet hier den zeitlichen Verlauf des Stromes  $i$  durch die folgende Näherungsbetrachtung, die brauchbar ist, wenn der Ohmsche Widerstand klein gegen den induktiven Widerstand ist.

Nach Gl. (1213) gilt 
$$d\Psi = (E\sqrt{2}\sin\omega t - iR)dt.$$

War der Fluß vor dem Einschalten Null, so wird in irgendeinem Zeitpunkt  $t$  nach dem Schließen des Schalters

$$\Psi = \int_0^t d\Psi = \frac{E\sqrt{2}}{\omega}(1 - \cos\omega t) - R \int_0^t i dt. \quad (1214)$$

Wegen der Kleinheit des Widerstandes  $R$  bedeutet nun hier das letzte Glied rechts nur eine Korrektur. Man erhält daher den Gesamtfluß  $\Psi$  in erster Näherung aus dem anderen Glied:

$$\Psi_1 = \frac{E\sqrt{2}}{\omega}(1 - \cos\omega t).$$

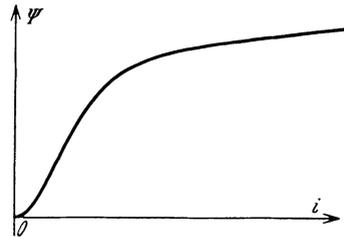


Abb. 307. Magnetische Charakteristik einer Spule mit Eisenkern.

Dieser Fluß wächst während der ersten halben Periode von Null auf den Wert  $2 \frac{E\sqrt{2}}{\omega}$  an und fällt nach einer ganzen Periode auf Null ab, Abb. 308. Zu jedem Wert des Flusses  $\Psi_1$  kann man aus der magnetischen Charakteristik den zugehörigen Strom entnehmen und den Ausdruck

$$\Psi_2 = R \int_0^t i dt$$

berechnen, Abb. 308, der nach Gl. (1214) eine Korrektur des ersten Näherungswertes von  $\Psi$  darstellt. Man findet auf diese Weise den Fluß für die erste Periode in zweiter Näherung:  $\Psi'_1 = \Psi_1 - \Psi_2$ .

Entnimmt man hierzu wieder aus der magnetischen Charakteristik den Strom  $i$ , so ergibt sich die Korrektur  $\Psi_2$  in zweiter Näherung, und man kann damit den Fluß  $\Psi$  in dritter Näherung bestimmen. Das Verfahren konvergiert um so rascher, je kleiner  $R$  ist. In gleicher Weise findet man dann den Verlauf von  $\Psi$  und  $i$  für die folgenden Perioden.

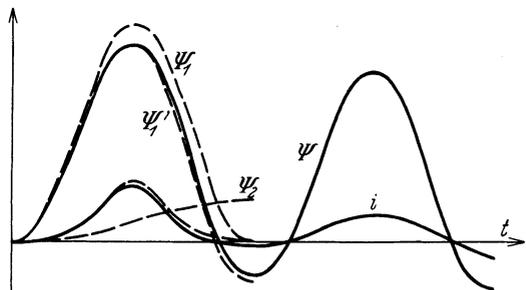


Abb. 308. Einschaltvorgang bei der Spule mit Eisenkern.

Der Mittelwert des Flusses nimmt mehr und mehr ab; nach genügend langer Zeit pendelt schließlich  $\Psi$  um den Wert Null herum mit einem Scheitelwert, der ungefähr gleich  $\frac{E\sqrt{2}}{\omega}$  ist. Kurze Zeit nach dem Einschalten erreicht der Fluß nahezu den doppelten Wert; daher ergeben sich hier, wie aus der magnetischen Charakteristik ersichtlich, infolge der Sättigung des Eisens Stromamplituden, die ein Vielfaches des normalen Betriebsstromes betragen können. Mit dem Einschwingen des Flusses  $\Psi$  nehmen diese Amplituden dann mehr und mehr ab. Der Verlauf des Einschwingvorganges hängt im übrigen stark davon ab, in welcher Phase die elektromotorische Kraft eingeschaltet wird; beim Schalten im Spannungsmaximum,  $e = E\sqrt{2} \cos \omega t$ , setzt sogleich der stationäre Wechselstrom ein.

Wenn es sich nur um kleine Abweichungen von der Linearität handelt, dann kann man das folgende Näherungsverfahren zur Berechnung der Ausgleichsvorgänge

anwenden. Es sei die magnetische Charakteristik einer Drosselspule von einer Geraden wenig verschieden, so daß man setzen kann

$$\Psi = L_0 i + f(i), \quad (1215)$$

worin  $L_0$  eine Konstante ist, und das zweite Glied klein gegen das erste. Dann wird die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion

$$e_s = -\frac{d\Psi}{dt} = -L_0 \frac{di}{dt} - \frac{df}{di} \frac{di}{dt}. \quad (1216)$$

Wenn nun

$$\frac{df}{di} \ll L_0,$$

so kann man in erster Näherung so rechnen, wie wenn

$$e_s = -L_0 \frac{di}{dt}$$

wäre. Der Strom  $i$  ergibt sich dann aus den für lineare Systeme gültigen Gesetzen. Die Nichtlinearität wirkt nach Gl. (1216) so, wie wenn in der Spule eine zusätzliche elektromotorische Kraft von der Größe

$$e_z = -\frac{df}{di} \frac{di}{dt} \quad (1217)$$

wirksam wäre. Diese elektromotorische Kraft kann in erster Näherung berechnet werden aus dem ersten Näherungswert des Stromes  $i$ ; sie hat wieder zusätzliche Ströme zur Folge, für die die Induktivität gleich  $L_0$  gesetzt werden kann. Addiert man die Zusatzströme zu den zuerst gefundenen, so ergibt sich die zweite Näherung für den wirklichen Strom. Das Verfahren kann man beliebig fortsetzen, indem man jeweils den letzten Näherungsausdruck für den Strom in (1217) einführt. Ein einfaches Beispiel soll dieses Verfahren noch erläutern.

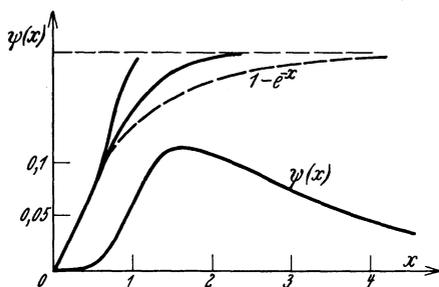


Abb. 309. Näherungsverfahren zur Berechnung des Einschaltvorganges.

Es sei die magnetische Charakteristik einer Drosselspule durch

$$\Psi = L_0 i - l i^3 \quad (1218)$$

gegeben; dann ist

$$f(i) = -l i^3,$$

und es wird

$$e_z = 3i^2 l \frac{di}{dt}.$$

Die Spule werde im Zeitpunkt  $t=0$  an eine Gleichstromquelle mit der elektromotorischen Kraft  $E_0$  angelegt; dann wird

$$i = \frac{E_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L_0} t} \right),$$

und es ergibt sich

$$e_z = 3 \frac{l}{L_0} \frac{E_0^3}{R^2} \left( e^{-\frac{R}{L_0} t} - 2e^{-2\frac{R}{L_0} t} + e^{-3\frac{R}{L_0} t} \right).$$

Wie man mit Hilfe der Gl. (1181) leicht findet, gehört zu einer plötzlich einsetzenden elektromotorischen Kraft

$$E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

ein Verlauf des Stromes von der Form

$$i_1 = E_1 \tau_1 \frac{e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{R}{L_0} t}}{R \tau_1 - L_0}. \quad (1219)$$

Ist im besonderen

$$\frac{R}{L_0} = \frac{1}{\tau_1},$$

so ergibt sich der Grenzwert

$$i_1 = \frac{E_1}{L_0} t e^{-\frac{t}{\tau_1}}. \tag{1220}$$

Daher wird der zu  $e_z$  gehörige Strom

$$i_z = 3 \frac{l}{L_0} \left( \frac{E_0}{R} \right)^3 \left( \frac{R}{L_0} t e^{-\frac{R}{L_0} t} - \frac{3}{2} e^{-\frac{R}{L_0} t} + 2 e^{-2 \frac{R}{L_0} t} - \frac{1}{2} e^{-3 \frac{R}{L_0} t} \right), \tag{1221}$$

und es ist der gesamte Strom angenähert durch  $i + i_z$  gegeben. Die hier auftretende Funktion

$$\psi = x e^{-x} - \frac{3}{2} e^{-x} + 2 e^{-2x} - \frac{1}{2} e^{-3x} \tag{1222}$$

ist in Abb. 309 dargestellt. Der Gesamtstrom steigt zunächst so an, wie wenn die Induktivität den Wert  $L_0$  hätte, nähert sich aber dann rascher als bei konstanter Induktivität seinem Endwert, da die Induktivität nach Gl. (1218) mit wachsender Stromstärke abnimmt.

### 42. Ausgleichsvorgänge in Leitungen.

Nach dem Anlegen einer Spannung an eine Leitung ergibt sich, genau genommen, ein sehr komplizierter Vorgang. Es entsteht beim Schließen des Schalters eine elektromagnetische Welle, die von dem Schalter ihren Ausgang nimmt und durch die Leitungsdrähte geführt wird, ähnlich wie es in Abschnitt 37 durch Abb. 278 dargestellt ist. Die Übergangsstellen zwischen Verschiebungsstrom und Leitungsstrom laufen mit einer Geschwindigkeit an den Drähten entlang, die ungefähr gleich der Lichtgeschwindigkeit ist. Einige Zeit nach dem Schalten ergibt sich daher

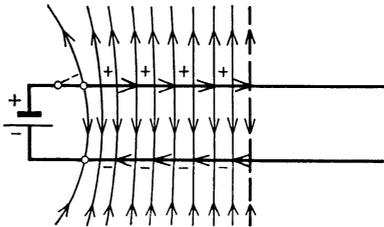


Abb. 310. Elektrische Feldlinien und Ströme nach dem Schalten einer homogenen Leitung.

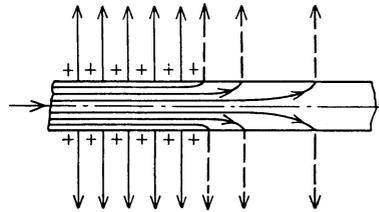


Abb. 311. Übergang des Leitungsstromes in den Verschiebungsstrom an der Front der Welle.

ein Bild, wie es durch Abb. 310 veranschaulicht wird. Der Strom in den Leitungsdrähten liefert positive und negative Ladungen zum Wellenkopf und baut so zwischen den beiden Leitungsdrähten ein elektrisches Feld auf, Abb. 311; gleichzeitig ist mit dem Fließen des Stromes ein magnetisches Feld verknüpft.

Der Hauptteil der Energie beider Felder befindet sich nun in der unmittelbaren Umgebung der Leitungsdrähte. Man kann daher das Feld in der Umgebung der Leitung mit einer gewissen Annäherung als ein ebenes Feld auffassen, und zwar um so genauer, je weiter sich der Wellenkopf vom Leitungsanfang entfernt hat, weil dann die Krümmung der Front immer weniger ausmacht. Wenn man von der Umgebung des Leitungsanfangs absieht, so haben die Feldlinien ungefähr den gleichen Verlauf wie im stationären Feld. Die Wirkung der Felder kann also durch den Kapazitäts- und Induktionsbelag berücksichtigt werden wie im Falle langsam veränderlicher Felder.

Damit begeht man zwei Vernachlässigungen, nämlich:

1. Es wird die in die Leitungsrichtung fallende Komponente der elektrischen Feldstärke nicht berücksichtigt, also angenommen, daß die elektrischen Kraftlinien senkrecht aus der Leiteroberfläche austreten.

2. Es wird die magnetische Wirkung des dem Längsfeld zugeordneten Verschiebungsstromes nicht berücksichtigt.

Man kann leicht feststellen, wann diese Vernachlässigungen erlaubt sind, wenn man sich die Vorgänge nach Fourier in einfache Wechsellvorgänge zerlegt denkt. Die in die Richtung der Leitungsdrähte zeigende Komponente der elektrischen Feldstärke hat für einen solchen Wechselstromvorgang mit der Kreisfrequenz  $\omega$  an der Leiteroberfläche die Größe  $\mathfrak{E}_i = \mathfrak{J}(R' + j\omega L')$ ,

wenn  $\mathfrak{J}$  die Stromstärke im Leiter darstellt. Nach den Gl. (265) und (267) beträgt dort die Radialkomponente der elektrischen Feldstärke

$$\mathfrak{E}_r = \frac{\mathfrak{U}}{2r_0 \ln \frac{a}{r_0}},$$

wenn  $a$  den Drahtabstand,  $r_0$  den Drahtradius und  $\mathfrak{U}$  die Spannung zwischen den beiden Drähten bezeichnet. Das Verhältnis von Längskomponente zu Querkomponente der elektrischen Feldstärke ist also an der Leiteroberfläche

$$\frac{\mathfrak{E}_i}{\mathfrak{E}_r} = \left| \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{U}} (R' + j\omega L') \right| 2r_0 \ln \frac{a}{r_0}.$$

Beschränken wir uns der Einfachheit halber auf Wellen, die nur in einer Richtung fortschreiten, so gilt  $\mathfrak{U} = \mathfrak{J}\lambda$  und

$$\frac{\mathfrak{E}_i}{\mathfrak{E}_r} = 2|\gamma| r_0 \ln \frac{a}{r_0}.$$

Da  $|\gamma|$  mit der Frequenz unbegrenzt wächst, so kann auch dieses Verhältnis beliebig groß werden, und die Voraussetzung ebener Felder ist daher nur unterhalb einer bestimmten Frequenz zulässig. Für hohe Frequenzen kann man setzen  $|\gamma| = \alpha$  oder, unter Einführung der Wellenlänge  $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$ ,

$$\frac{\mathfrak{E}_i}{\mathfrak{E}_r} = 4\pi \frac{r_0}{\lambda} \ln \frac{a}{r_0}. \quad (1223)$$

Das Verhältnis  $a/r_0$  ist bei den praktisch vorkommenden Leitungen im allgemeinen kleiner als 500. Daher ist das Verhältnis der beiden Feldstärken kleiner als  $78 r_0/\lambda$ . Bei einer Frequenz von  $10^7$  Hz ist  $\lambda = 30$  m. Selbst wenn der Leiterradius 2 cm beträgt, wird also das Verhältnis der Feldstärken kleiner als 0,039, so daß die erste Voraussetzung zulässig ist, wenn die Geschwindigkeit der Feldänderungen kleiner ist, als es einer Schwingung von  $10^7$  Hz entspricht.

Zur Abschätzung der zweiten Vernachlässigung hat man die zusätzliche Durchflutung der magnetischen Kraftlinien zu betrachten, die infolge der Längskomponente des Verschiebungsstromes entsteht. Die Längskomponente der elektrischen Feldstärke nimmt mit der Entfernung von der Leiterachse wie das Potential logarithmisch ab. In der Mitte zwischen den beiden Leitern ist die Längskomponente der elektrischen Feldstärke Null. Man kann daher für eine überschlägige Rechnung den Ansatz machen

$$\mathfrak{E}_i = \mathfrak{J}(R' + j\omega L') \frac{\ln \frac{a}{2r}}{\ln \frac{a}{2r_0}}.$$

Die durch dieses Längsfeld hervorgerufene Durchflutung eines Kreises mit dem Radius  $r = a/2$  wird

$$\mathfrak{J}_z = \int_{r_0}^{a/2} 2\pi r j\omega \varepsilon \mathfrak{E}_i dr.$$

Hieraus ergibt sich unter der Voraussetzung, daß der Drahtabstand groß gegen den Drahtradius ist,

$$\frac{\mathfrak{J}_z}{\mathfrak{J}} = \frac{a^2}{8} \frac{\varepsilon \pi}{\ln \frac{a}{2r_0}} j\omega (R' + j\omega L'),$$

oder unter Einführung des Kapazitätsbelages

$$C' = \frac{\varepsilon\pi}{\ln \frac{a}{2r_0}},$$

für hohe Frequenzen

$$\frac{\mathfrak{S}_z}{\mathfrak{S}} = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2. \quad (1224)$$

Die zweite Voraussetzung ist zulässig, wenn dieses Verhältnis der zusätzlichen Durchflutung  $\mathfrak{S}_z$  zur Hauptdurchflutung  $\mathfrak{S}$  klein gegen 1 ist.

In dem vorigen Beispiel wird bei einem Drahtabstand von  $a=2\text{ m}$

$$\frac{\mathfrak{S}_z}{\mathfrak{S}} = 0,022.$$

Auch für die zweite Voraussetzung liegt also die Grenze in der gleichen Größenordnung von  $10^7\text{ Hz}$ .

Raschere Änderungen der Felder als es einer Frequenz von  $10^7\text{ Hz}$  entspricht, kommen nun praktisch kaum vor. Infolge der beim Schalten entstehenden Lichtbogen und infolge anderer Einflüsse (Hauteffekt, Koronaverluste) ergibt sich immer ein allmählicher Anstieg der Spannung, dessen Steilheit meist erheblich geringer ist, als es einer Schwingung mit der genannten Frequenz entsprechen würde. Die Voraussetzung, daß man die Felder in der Umgebung der Leitung als eben betrachten kann, ist daher praktisch immer erfüllt.

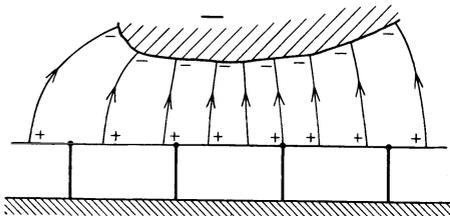


Abb. 312. Elektrisches Feld zwischen einer Wolke und einer isolierten Leitung.

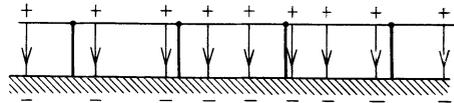


Abb. 313. Elektrisches Feld nach der Entladung der Wolke.

Man muß jedoch im Auge behalten, daß diese Annahme nur näherungsweise gilt und in gewissen Fällen zu Fehlschlüssen führen kann. In großem Abstand von einer frei im Raum befindlichen Leitung sind z. B. die Felder durchaus nicht mehr eben, sondern eher kugelförmig. Die Annahme ebener Felder ist höchstens einigermaßen zulässig innerhalb eines Kegels, dessen Achse in der Leitung liegt, dessen Spitze sich beim Leitungsanfang befindet und dessen Öffnung etwa  $90^\circ$  beträgt.

Eine für die Hochspannungstechnik wichtige Form von Ausgleichsvorgängen auf Leitungen wird durch die Änderungen der atmosphärischen elektrischen Felder bei Blitzentladungen hervorgerufen. Die zwischen den Gewitterwolken und der Erde bestehenden Potentialunterschiede ergeben Influenzladungen auf den Freileitungen. Da die Leitungsisolatoren endliche Übergangswiderstände haben, so fließen die entgegengesetzten Ladungen über die Isolatoren nach der Erde ab, wie dies für eine negativ elektrische Wolke durch Abb. 312 veranschaulicht wird. Die Leitung hat das gleiche Potential wie die Erde, wenn wir von der Betriebsspannung, die man sich überlagert denken kann, absehen. Es sind jedoch positive Influenzladungen auf ihr vorhanden, denen durch die negativen Ladungen der Wolke das Gleichgewicht gehalten wird.

Entlädt sich die Wolke durch einen Blitz nach der Erde, so werden die positiven Ladungen der Leitung frei. Unmittelbar nach der Blitzentladung findet sich die durch Abb. 313 veranschaulichte Verteilung der Ladungen. Die Verschiebungslinien spannen sich nun zwischen Leitung und Erde. Entsprechend der Leitungskapazität ergibt sich zwischen jedem Punkt der Leitung und Erde eine ganz bestimmte Spannung, die proportional der Ladung an jeder Stelle ist. Infolge des damit verbundenen Potentialgefälles längs der Leitung kann eine derartige Verteilung der Ladungen

nicht bestehen bleiben; die Ladungen fließen nach beiden Seiten ab. Mit dem Abfließen der Ladungen ergeben sich magnetische Felder, die sich der Ladungsbewegung hemmend entgegenstellen, so daß der Ausgleich der Ladungen nur mit einer bestimmten endlichen Geschwindigkeit erfolgen kann; die Felder breiten sich nach beiden Richtungen hin mit dieser Geschwindigkeit über die Leitung aus, es ergeben sich Wanderwellen längs der Leitung.

Nach den vorhin angestellten Überlegungen können die Felder in kleinen Längenabschnitten der Leitung als ebene Felder betrachtet werden, die in jedem Zeitpunkt die gleiche Struktur haben wie das statische Feld. In jedem kleinen Längenabschnitt der Leitung kann man daher die Induktionswirkung des magnetischen Feldes mit Hilfe des Induktionsbelages  $L'$  der Leitung darstellen, den Zusammenhang zwischen Ladung und Spannung durch den Kapazitätsbelag  $C'$ . (Der Induktionsbelag ist hier wegen der großen Schnelligkeit der Feldänderungen nach Abschnitt 30 fast nur durch die äußere Induktivität der Leitung bestimmt.)

Bezeichnet man den Strom in der Leitung an irgendeinem Ort, der durch den Abstand  $x$  vom Leitungsanfang bestimmt sei, und in irgendeinem Zeitpunkt mit  $i$ , die Spannung zwischen Hin- und Rückleitung mit  $u$ , so ist die Zunahme der Spannung längs eines kleinen Leitungsabschnitts  $dx$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ , gleich der in diesem Abschnitt entstehenden elektromotorischen Kraft der Selbstinduktion  $-L' dx \frac{\partial i}{\partial t}$ , wenn wir von den Verlusten absehen. Es gilt also

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L' \frac{\partial i}{\partial t}. \quad (1225)$$

Ferner nimmt beim Fortschreiten um  $dx$  der Strom  $i$  um einen Betrag  $-\frac{\partial i}{\partial x} dx$  ab, der gleich ist dem in dem Abschnitt  $dx$  zwischen Hin- und Rückleitung übergehenden Verschiebungsstrom  $C' dx \frac{\partial u}{\partial t}$ , wenn auch hier die Verluste (Ableitungsstrom) vernachlässigt werden. Also gilt

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C' \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (1226)$$

Differenziert man in Gl. (1225) nach  $x$ , in Gl. (1226) nach  $t$  und kombiniert die beiden Gleichungen, so folgt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L' C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (1227)$$

Die allgemeine Lösung dieser Wellengleichung lautet

$$u = f_1(x - vt) + f_2(x + vt). \quad (1228)$$

Die Spannung enthält hier zwei Anteile, die eine wellenförmige Ausbreitung mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{1}{\sqrt{L' C'}} \quad (1229)$$

darstellen. Der erste Anteil wandert mit dieser Geschwindigkeit in Richtung zunehmender  $x$  über die Leitung, während sich der zweite mit gleicher Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung bewegt. Es ist ferner

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \dot{f}_1(x - vt) + v \dot{f}_2(x + vt)$$

und mit Gl. (1226)

$$i = \frac{1}{Z} f_1(x - vt) - \frac{1}{Z} f_2(x + vt), \quad (1230)$$

wobei

$$Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (1231)$$

den Wellenwiderstand bedeutet.

Die Gl. (1228) und (1230) geben Auskunft über die Ausbreitung der Wanderwellen über die Leitung. Die Funktionen  $f_1$  und  $f_2$  sind durch die Anfangsbedingungen bestimmt. Die Wanderwellen nehmen ihren Ausgang von einer bestimmten Ladungs-

und damit Spannungsverteilung auf der Leitung, wie sie z. B. in Abb. 314 dargestellt ist. Ist im Zeitpunkt  $t=0$  eine bestimmte Verteilung der Ladung  $Q'(x)$  („Ladungsbelag“) vorhanden, so ist die Spannung gegeben durch

$$u = \frac{Q'(x)}{C'} = f(x). \tag{1232}$$

Für  $t=0$ , also zu Beginn des Vorgangs soll ferner  $i=0$  sein. Daraus ergeben sich die beiden Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + f_2(x); \\ 0 &= f_1(x) - f_2(x), \end{aligned}$$

aus denen folgt:

$$f_1(x) = f_2(x) = \frac{1}{2}f(x).$$

Damit wird

$$u = \frac{1}{2}f(x-vt) + \frac{1}{2}f(x+vt); \tag{1233}$$

$$i = \frac{1}{2Z}f(x-vt) - \frac{1}{2Z}f(x+vt). \tag{1234}$$

Die ursprünglich vorhandene Spannungsverteilung halbiert sich also, und die beiden Teile laufen in unveränderter Form mit der Geschwindigkeit  $v$  nach beiden Seiten hin über die Leitung. Dabei entsteht ein Strom, der in jeder Welle proportional der Spannung ist und dessen Richtung relativ zur Fortbewegungsrichtung in jeder Welle die gleiche ist. Die Abb. 314 veranschaulicht diesen Vorgang für eine Leitung aus zwei Drähten. Der Leitungsstrom schließt sich zwischen den Drähten als Verschiebungsstrom. Dieser Verschiebungsstrom (gestrichelt angedeutet) baut am Kopf jeder Welle das elektrische Feld auf, er hat also dort die gleiche Richtung wie die Verschiebungslinien (dünne Linien); er baut dagegen am Ende eines jeden Wellenzuges das elektrische Feld ab, hat dort die entgegengesetzte Richtung wie die Feldstärke.

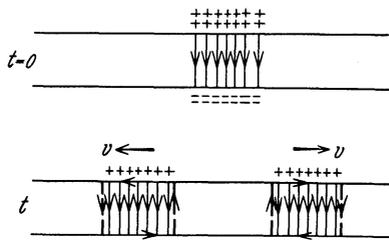


Abb. 314. Abfließen der Ladungen.

Dieser Ausbreitungsvorgang setzt sich fort, solange die Leitung homogen ist. Jede Ungleichmäßigkeit der Leitung spaltet die Welle auf in weitergehende oder gebrochene Wellen und rückläufige oder reflektierte Wellen. Auch die an die Leitungen angeschlossenen Apparate oder Maschinen unterbrechen die Gleichmäßigkeit der Leitung, ergeben also eine Zerlegung der auftreffenden Wellen. Die Gesetze dieser Aufspaltung sind dadurch gegeben, daß wegen der Stetigkeit der Feldenergie Spannung und Strom an der Stoßstelle stetig sein müssen.

Als Beispiel werde der Fall betrachtet, daß eine Leitung mit dem Wellenwiderstand  $Z_1$  und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v_1$  an eine Leitung angeschlossen ist mit einem anderen Wellenwiderstand  $Z_2$  und einer anderen Geschwindigkeit  $v_2$ . Kennzeichnet man die in Richtung zunehmender  $x$  auf die Stoßstelle treffende ursprüngliche Welle mit

$$\left. \begin{aligned} u &= f_1(x-v_1t); \\ i &= \frac{1}{Z_1}f_1(x-v_1t), \end{aligned} \right\} \tag{1235}$$

so ergeben sich Spannung  $u_1$  und Strom  $i_1$  vor der Stoßstelle durch Hinzufügen einer reflektierten Welle  $f_r$ ; es ist also

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= f_1(x-v_1t) + f_r(x+v_1t); \\ i_1 &= \frac{1}{Z_1}f_1(x-v_1t) - \frac{1}{Z_1}f_r(x+v_1t). \end{aligned} \right\} \tag{1236}$$

Hinter der Stoßstelle ist eine gebrochene Welle vorhanden, die verschieden sein kann von der auftreffenden Welle und von der reflektierten, für die aber die Beziehungen gelten müssen

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= f_2(x-v_2t); \\ i_2 &= \frac{1}{Z_2}f_2(x-v_2t). \end{aligned} \right\} \tag{1237}$$

Die Stetigkeitsbedingung fordert, daß an der Stoßstelle, also für einen bestimmten Wert  $x=l_1$ , gelten muß  $u_1 = u_2$  und  $i_1 = i_2$ ;

dies ergibt  $f_1(l_1 - v_1 t) + f_r(l_1 + v_1 t) = f_g(l_1 - v_2 t);$   
 $f_1(l_1 - v_1 t) - f_r(l_1 + v_1 t) = \frac{Z_1}{Z_2} f_g(l_1 - v_2 t).$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Auflösen

$$f_r(l_1 + v_1 t) = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} f_1(l_1 - v_1 t); \tag{1238}$$

$$f_g(l_1 - v_2 t) = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} f_1(l_1 - v_1 t). \tag{1239}$$

Die reflektierte Welle hat also die gleiche Form wie die einfallende Welle; ihre

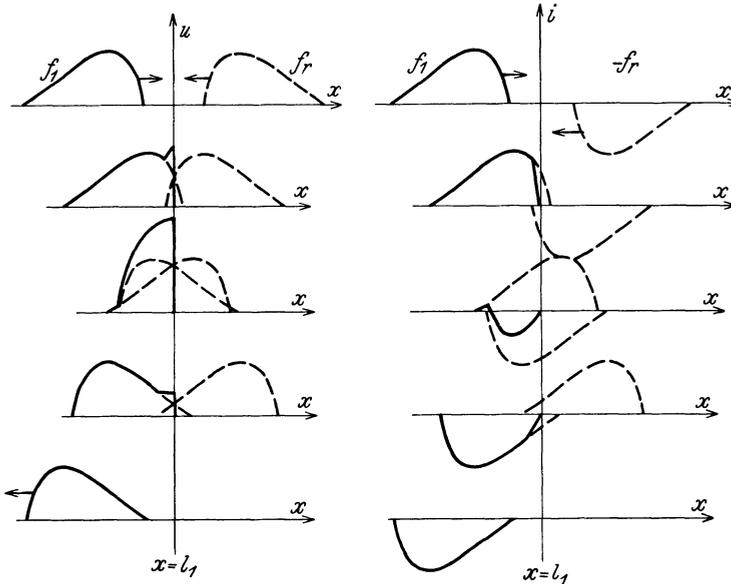


Abb. 315. Reflexion einer Wanderwelle am offenen Leitungsende.

Amplitude unterscheidet sich von der der einfallenden gemäß dem „Reflektionsfaktor“

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \tag{1240}$$

der zwischen  $-1$  und  $+1$  liegt. Die beiden Grenzfälle ergeben sich, wenn  $Z_2 = 0$  oder  $Z_2 = \infty$  ist. Der erste Fall entspricht dem kurzgeschlossenen, der zweite dem offenen Leitungsende.

Setzt man in Gl. (1238)  $l_1 + v_1 t = w,$  (1241)

so ergibt sich  $f_r(w) = r f_1(2l_1 - w).$

Also wird  $f_r(x + v_1 t) = r f_1(2l_1 - x - v_1 t),$

und 
$$\left. \begin{aligned} u_1 &= f_1(x - v_1 t) + r f_1(2l_1 - x - v_1 t), \\ i_1 &= \frac{1}{Z_1} f_1(x - v_1 t) - \frac{r}{Z_1} f_1(2l_1 - x - v_1 t). \end{aligned} \right\} \tag{1242}$$

In Abb. 315 ist hiernach für den Fall des offenen Leitungsendes ( $r = 1$ ) das Zustandekommen von Spannung und Strom veranschaulicht. Bei sehr steiler Front der Welle kann sich, wie die Abbildung zeigt, nahezu eine Verdoppelung des Maximalwertes der Spannung ergeben. Umgekehrt liegen die Verhältnisse bei kurzgeschlossenem Leitungsende ( $r = -1$ ). Hier muß die Spannung für  $x = l_1$

ständig Null sein, während der Strom nahezu auf den doppelten Maximalwert ansteigen kann.

Für die gebrochene Welle ergibt sich bei Einführung des „Brechungs-faktors“

$$b = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} = 1 + r \tag{1243}$$

und mit der Substitution

$$l_1 - v_2 t = w, \tag{1244}$$

$$f_g(w) = b f_1 \left( l_1 - \frac{v_1}{v_2} l_1 + \frac{v_1}{v_2} w \right),$$

oder

$$u_2 = f_g(x - v_2 t) = b f_1 \left( l_1 - \frac{v_1}{v_2} l_1 + \frac{v_1}{v_2} (x - v_2 t) \right).$$

Setzt man

$$x = l_1 + x_1, \tag{1245}$$

indem man für die gebrochene Welle die Abstände von der Stoßstelle aus mißt, so wird

$$u_2 = b f_1 \left( l_1 + \frac{v_1}{v_2} x_1 - v_1 t \right). \tag{1246}$$

Im Gegensatz zur reflektierten Welle ergibt sich hier im allgemeinen auch eine Umbildung der Wellenform; alle Längenabmessungen der Welle werden im Verhältnis  $v_2/v_1$  vergrößert. In Abb. 316 ist dies für den Fall  $v_2 = 2v_1$  und  $r = 1/2$ ,  $b = 3/2$  dargestellt. Um die Werte der gebrochenen Spannung zu finden, hat man alle von  $x = l_1$  aus gemessenen Längenabschnitte von  $f_1$  mit 2 und alle Ordinaten mit  $3/2$  zu multiplizieren. Beim Übergang von einer Leitung mit niedrigem Wellenwiderstand zu einer Leitung mit hohem Wellenwiderstand, z. B. beim Übergang von einer Kabelleitung zu einer Freileitung, können die Spannungen der Wanderwellen nahezu verdoppelt werden.

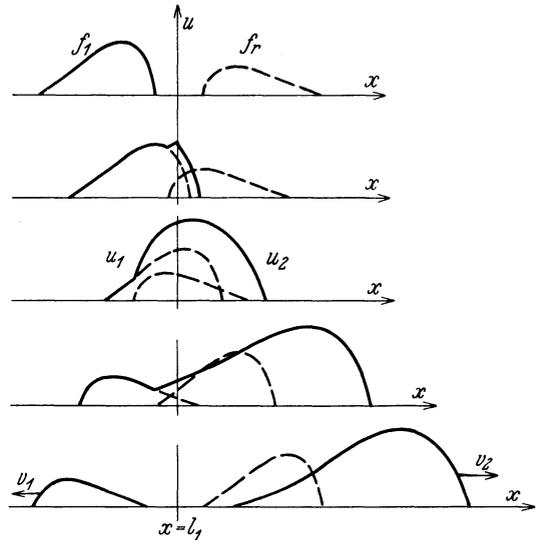


Abb. 316. Übergang einer Wanderwelle an der Verbindungsstelle zweier Leitungen.

Im allgemeinen Fall des Abschlusses der Leitung durch irgendwelche Einrichtungen wird das Verhältnis von Spannung zu Strom am Leitungsende durch die Art des Abschlusses bestimmt. Es ergibt sich hier für  $u_2$  eine bestimmte Funktion der Zeit

$$u_2 = \psi(t), \tag{1247}$$

ebenso für den Strom

$$i_2 = \varphi(t). \tag{1248}$$

Beide Funktionen stehen miteinander in einer Beziehung, die man durch eine Differentialgleichung oder durch die in Abschnitt 39 gegebenen Regeln ausdrücken kann. Dazu kommen noch die beiden Stetigkeitsbedingungen

$$f_1(l_1 - v_1 t) + f_r(l_1 + v_1 t) = \psi(t);$$

$$f_1(l_1 - v_1 t) - f_r(l_1 + v_1 t) = Z_1 \varphi(t),$$

aus denen folgt

$$\psi(t) + Z_1 \varphi(t) = 2 f_1(l_1 - v_1 t); \tag{1249}$$

$$f_r(l_1 + v_1 t) = \frac{1}{2} \psi(t) - \frac{1}{2} Z_1 \varphi(t). \tag{1250}$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen kann der Verlauf von Spannung und Strom am Ende der Leitung berechnet werden.

Es sei z. B. die Leitung am Ende mit einem Kondensator von der Kapazität  $C$  abgeschlossen. Dann gilt dort

$$i_2 = C \frac{du_2}{dt},$$

oder

$$\varphi(t) = C \frac{d\psi}{dt}. \quad (1251)$$

Setzt man dies in Gl. (1249) ein, so folgt

$$\psi + CZ_1 \frac{d\psi}{dt} = 2f_1(l_1 - v_1 t). \quad (1252)$$

Man löst diese Gleichung durch den Ansatz

$$\psi = F_1(t)F_2(t), \quad (1253)$$

in dem  $F_1$  und  $F_2$  zunächst unbekannte Funktionen bedeuten. Es ergibt sich

$$F_1 F_2 + CZ_1 \frac{dF_1}{dt} F_2 + CZ_1 \frac{dF_2}{dt} F_1 = 2f_1(l_1 - v_1 t).$$

Setzt man hier

$$F_1 = A_1 e^{-\frac{t}{CZ_1}},$$

so folgt

$$Z_1 C A_1 e^{-\frac{t}{CZ_1}} \frac{dF_2}{dt} = 2f_1(l_1 - v_1 t),$$

oder durch Integration

$$F_2 = \frac{2}{A_1 C Z_1} \int_0^t e^{\frac{t}{CZ_1}} f_1(l_1 - v_1 t) dt + A_2.$$

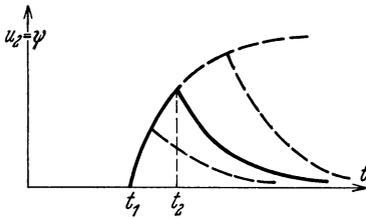


Abb. 317. Einwirkung einer Wanderwelle auf einen Kondensator.

War der Kondensator im Zeitpunkt  $t=0$  ungeladen, so muß  $A_2=0$  sein, und es wird

$$\psi = \frac{2}{CZ_1} e^{-\frac{t}{CZ_1}} \int_0^t e^{\frac{t}{CZ_1}} f_1(l_1 - v_1 t) dt. \quad (1254)$$

Hieraus kann man  $\psi$  und damit nach Gl. (1251)  $\varphi$  und nach Gl. (1250)  $f_r$  ermitteln, wenn der Verlauf der ankommenden Welle  $f_1$  bekannt ist. Besteht z. B. die ankommende Welle aus einem kurzen Impuls, der im Zeitpunkt  $t=t_1$  eintrifft, bis zum Zeitpunkt  $t=t_2$  den konstanten Wert  $U$  hat und dann wieder auf Null abfällt, so gilt

$$\psi = 0 \quad \text{für } t < t_1,$$

und für

$$t_1 < t < t_2$$

$$\psi = \frac{2U}{CZ_1} e^{-\frac{t}{CZ_1}} \int_{t_1}^t e^{\frac{t}{CZ_1}} dt = 2U \left( 1 - e^{-\frac{t-t_1}{CZ_1}} \right);$$

für  $t > t_2$  gilt

$$\psi = 2U e^{-\frac{t}{CZ_1}} \left( e^{\frac{t_2}{CZ_1}} - e^{\frac{t_1}{CZ_1}} \right).$$

Der Verlauf von  $\psi$  ist in Abb. 317 für verschiedene Werte von  $t_2$  dargestellt. Die Spannung am Leitungsende wird im Vergleich zur Höhe der Wanderwelle um so größer, je breiter die Wanderwelle ist.

Nach Gl. (1249) ergibt die Summe von Spannung am Leitungsende mit dem Produkt aus Strom und Wellenwiderstand eine Spannung vom Betrage  $2f_1$ . Man kann daher diese Spannung als elektromotorische Kraft auffassen, die in einem Kreis wirkt, der aus der Reihenschaltung des Wellenwiderstandes mit dem Abschlußwiderstand gebildet wird, Abb. 318. Damit kann die Aufgabe, Spannung und Stromverlauf am Ende der Leitung bei beliebigem Abschluß zu berechnen, auf die in Abschnitt 39 behandelten Fälle zurückgeführt werden. Es sei z. B. die Leitung mit

einer Spule von der Induktivität  $L$  und dem Widerstand  $R$  abgeschlossen. Die Wanderwelle treffe mit schräger Front ein, und es gelte dafür der Ansatz

$$f_1(l_1 - v_1 t) = U \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right), \quad (1255)$$

indem als Zeitnullpunkt der Augenblick des Eintreffens der Welle am Leitungsende gewählt wird, Abb. 319;  $\tau_1$  ist ein Maß für die Steilheit der Wellenfront. Die elektromotorische Kraft  $2f_1$  enthält also zwei Teile: der eine Teil stellt eine konstante Kraft vom Betrag  $2U$  dar, die im Zeitpunkt  $t=0$  einsetzt, der zweite Teil hat für  $t > 0$  die Form  $-2Ue^{-\frac{t}{\tau_1}}$ . Zu dem ersten gehört der Strom

$$i_2' = \frac{2U}{R+Z_1} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right), \quad (1256)$$

wobei

$$\tau_0 = \frac{L}{R+Z_1}. \quad (1257)$$

Zu dem zweiten gehört

$$i_2'' = -\frac{2U}{L} \frac{e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_0}}}{\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau_1}}. \quad (1258)$$

Daher gilt für den am Leitungsende nach dem Eintreffen der Wanderwelle ent-

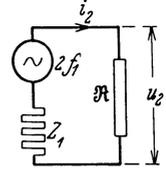


Abb. 318. Ersatzbild für das Leitungsende.

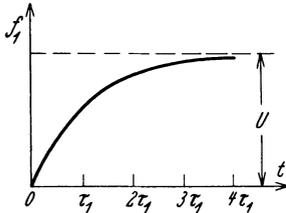


Abb. 319. Zeitfunktion einer Wanderwelle mit schräger Stirn.

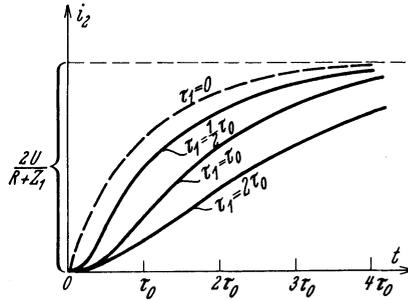


Abb. 320. Anwachsen des Stromes am Ende der Leitung bei Berücksichtigung der Induktivität des Abschlusswiderstandes.

stehenden Strom

$$i_2 = \frac{2U}{R+Z_1} \left( 1 + \frac{\tau_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}} - \tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{\tau_1 - \tau_0} \right). \quad (1259)$$

Der damit berechnete Stromverlauf ist für  $\tau_1 = \frac{1}{2}\tau_0$ ,  $\tau_0$  und  $2\tau_0$  in Abb. 320 dargestellt.

Die gleichen Betrachtungen, wie sie hier für Wanderwellen allgemeiner Form angestellt wurden, gelten auch für die bei Schaltungsvorgängen entstehenden Wellen. Wird eine Leitung an eine Spannungsquelle angeschlossen, so wächst die Spannung am Anfang von Null auf einen gewissen Betrag. Die der Leitung vom Strom zugeführten Ladungen breiten sich auf der Leitung in Form einer Wanderwelle aus. Handelt es sich z. B. um eine Gleichspannung, dann wächst nach einer Zeit, die durch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v$  bestimmt ist, die Spannung an jeder Stelle der Leitung von Null auf einen konstanten Wert. Am Leitungsende findet Reflexion und Brechung statt, genau so wie es für den allgemeinen Fall beschrieben wurde.

Die an den Stoßstellen und den Leitungsenden reflektierten Wellen durchlaufen die Leitung bis sie wiederum auf Stoßstellen oder auf das andere Leitungsende treffen. Dort werden wieder reflektierte und gebrochene Wellen abgespalten, so daß

die Wellen in immer komplizierterer Unterteilung auf der Leitung hin und her laufen. Dieses Spiel würde sich unbegrenzt lange fortsetzen, wenn nicht in den Leitungen Energieverluste auftreten würden. Die Wellen erfahren beim Durchwandern der Leitung eine Dämpfung. In erster Näherung gilt hier die in Abschnitt 36 für die Abnahme der Leistung angestellte Überlegung. Spannung und Strom sind mit einem Faktor zu multiplizieren, der je Längeneinheit um den gleichen relativen Betrag

$$\beta = \frac{R'}{2Z} + \frac{G'}{2} Z \quad (1260)$$

abnimmt. Die in der Wanderwelle enthaltene Energie wird daher allmählich aufgezehrt.

Die Dämpfung hängt genau genommen von der Schnelligkeit der Spannungsänderungen ab; sie wächst mit der Frequenz der Änderungen; Gl. (1260) stellt nur eine Näherungsformel dar. Es ergibt sich daher eine allmähliche Umwandlung der Wellenform, indem Teile der Welle mit großer Steilheit stärker gedämpft werden als flachverlaufende Teile. Da aber die Leitungen der Starkstromtechnik immer elektrisch kurz sind, so geben hier die Näherungsbetrachtungen einen für die meisten Zwecke ausreichenden Überblick. In der Schwachstromtechnik dagegen handelt es sich häufig gerade um lange Leitungen mit großer Dämpfung. Meist sind diese Leitungen noch mit Einrichtungen komplizierter Wechselstromwiderstände abgeschlossen, so daß die Betrachtung der Vorgänge auf der Leitung für sich allein wenig Nutzen hat, um so mehr, als für die Zwecke der Schwachstromtechnik die genauere Form der Ausgleichsvorgänge interessiert, für die die Frequenzabhängigkeit von Dämpfung und Wellenwiderstand wesentlich maßgebend ist. Hier besteht daher die zweckmäßigste Methode zur Untersuchung der Ausgleichsvorgänge darin, daß man die Frequenzcharakteristiken  $a$  und  $b$  betrachtet. Nach Abschnitt 40 geben diese Frequenzcharakteristiken Auskunft über das Verhalten des Systems bei Spannungsänderungen, also auch über die Ausbreitungsvorgänge. Um einen Überblick über die Ausgleichsvorgänge zu erhalten, kann man die wirklichen Frequenzcharakteristiken durch einfache Funktionen der Frequenz darstellen, mit denen sich die den Ausgleichsvorgang beschreibenden Integrale auswerten lassen.

## Anhang.

### Maßsysteme.

In der Literatur werden z. T. noch die alten absoluten elektromagnetischen und elektrostatischen Maßeinheiten benützt. Zur Umrechnung der Zahlenangaben dient die folgende Tabelle.

Größe	praktische Einheit	eine elektrostatische Einheit ist gleich	eine elektromagnetische Einheit ist gleich
Spannung	V	300 V	$0,999 \cdot 10^{-8}$ V
Stromstärke	A	$0,334 \cdot 10^{-9}$ A	10 A
Widerstand	$\Omega = \frac{V}{A} = \frac{1}{S}$	$0,898 \cdot 10^{12} \Omega$	$0,999 \cdot 10^{-9} \Omega$
Induktivität	H = $\Omega$ s	$0,898 \cdot 10^{12}$ H	1 [cm] = $0,999 \cdot 10^{-9}$ H
Kapazität	F = S s	1 [cm] = $1,113 \cdot 10^{-12}$ F	$1,001 \cdot 10^9$ F

## Literatur.

### 1. Einführende Literatur.

- Eichenwald, A.: Vorlesungen über Elektrizität. Berlin 1928.  
 Hoerner, K.: Grundzüge der Starkstromtechnik. Berlin 1923.  
 Linker, A.: Grundlagen der Wechselstromtheorie. Berlin 1928.  
 Michalke, C.: Allgemeine Grundlagen der Elektrotechnik. Berlin 1925.  
 Pohl, R. W.: Einführung in die Elektrizitätslehre. Berlin 1927.  
 Vidmar, M.: Vorlesungen über die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik. Berlin 1928.

### 2. Ergänzungs- und Spezialliteratur.

- Abraham-Föppl-Becker: Theorie der Elektrizität. Berlin 1930.  
 Arnold, E.: Theorie der Wechselströme. Berlin 1910.  
 Barkhausen, H.: Elektronenröhren. Leipzig 1929, 1931.  
 Biermanns, J.: Überströme in Hochspannungsanlagen. Berlin 1926.  
 Breisig, F.: Theoretische Telegraphie. Braunschweig 1924.  
 Buttler, K.: Aufgaben aus der Fernmeldetechnik. Berlin 1929.  
 Carson, J. R.: Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung. Berlin 1929.  
 Casper, L.: Einführung in die komplexe Behandlung von Wechselstromaufgaben. Berlin 1929.  
 Cauer, W.: Siebschaltungen. Berlin 1931.  
 Cohn, E.: Das elektromagnetische Feld. Berlin 1927.  
 Fraenkel, A.: Theorie der Wechselströme. Berlin 1930.  
 Gans, R.: Vektoranalysis. Berlin 1929.  
 Gemant, A.: Elektrophysik der Isolierstoffe. Berlin 1930.  
 Hague, W.: Electromagnetic Problems in Electrical Engineering. London 1929.  
 Handbuch der Experimentalphysik von W. Wien und F. Harms:  
 Bd. 10: Elektrostatik, Hochspannungstechnik. Leipzig 1927.  
 Handbuch der Physik von H. Geiger u. K. Scheel:  
 Bd. 12: Theorie der Elektrizität, Elektrostatik. Berlin 1927.  
 Bd. 13: Elektrizitätsbewegung in festen und flüssigen Körpern. Berlin 1928.  
 Bd. 14: Elektrizitätsbewegung in Gasen. Berlin 1927.  
 Bd. 15: Magnetismus, Elektromagnetisches Feld. Berlin 1927.  
 Bd. 22: Elektronen, Atome, Moleküle. Berlin 1926.  
 Herzog, J., u. C. Feldmann: Elektrische Leitungsnetze. Berlin 1921.  
 Möller, G.: Die Elektronenröhren und ihre technischen Anwendungen. Braunschweig 1929.  
 Ollendorff, F.: Erdströme. Berlin 1928.  
 Ollendorff, F.: Potentialfelder. Berlin 1932.  
 Riemann-Weber: Differentialgleichungen der Physik. Braunschweig 1927.  
 Rothe, Ollendorff-Pohlhausen: Funktionentheorie und ihre Anwendungen in der Technik. Berlin 1931.  
 Rüdenberg, R.: Elektrische Schaltvorgänge. Berlin 1926.  
 Schering, H.: Die Isolierstoffe der Elektrotechnik. Berlin 1924.  
 Schumann, W. O.: Elektrische Durchbruchfeldstärke von Gasen. Berlin 1923.  
 Schumann, W. O.: Elektromagnetische Grundbegriffe. München 1931.  
 Schwaiger, A.: Hochspannungsleitungen. München 1931.  
 Seeliger, R.: Einführung in die Physik der Gasentladungen. Leipzig 1927.  
 Semenoff, N., u. A. Walter: Die physikalischen Grundlagen der elektrischen Festigkeitslehre. Berlin 1928.  
 Shea, E.: Transmission Networks and Wave Filters. New York 1929.  
 Thomälen, A.: Kurzes Lehrbuch der Elektrotechnik. Berlin 1929.  
 Vieweger, H.: Aufgaben und Lösungen aus der Gleich- und Wechselstromtechnik. Berlin 1926.  
 Wagner, K. W.: Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln. Berlin 1908.  
 Wallot, J.: Theorie der Schwachstromtechnik. Berlin 1932.  
 Wallot, J.: AEF-Verhandlungen 1907... 1927. Berlin 1928.

\* **Vorlesungen über die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik.** Von Professor Dr. techn. Milan Vidmar, Ljubljana. Mit 352 Abbildungen im Text. X, 451 Seiten. 1928. RM 15.—; gebunden RM 16.50

---

\* **Die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik.** Von Professor Dr. Gustav Benischke, Berlin. Sechste, vermehrte Auflage. Mit 633 Textabbildungen. XVI, 682 Seiten. 1922. Gebunden RM 18.—

---

\* **Elektrotechnik.** Bearbeitet von H. Behnken, F. Breisig, A. Fraenckel, A. Güntherschulze, F. Kiebitz, W. O. Schumann, R. Vieweg, V. Vieweg. Redigiert von W. Westphal. („Handbuch der Physik“, Band XVII.) Mit 360 Abbildungen. VII, 392 Seiten. 1926. RM 31.50; gebunden RM 33.60

---

\* **Kurzes Lehrbuch der Elektrotechnik.** Von Professor Dr. Adolf Thomälen. Zehnte, stark umgearbeitete Auflage. Mit 581 Textbildern. VIII, 359 Seiten. 1929. Gebunden RM 14.50

---

\* **Kurzer Leitfaden der Elektrotechnik** in allgemeinverständlicher Darstellung für Unterricht und Praxis. Von Rudolf Krause. Fünfte, erweiterte Auflage, neu bearbeitet von W. Vieweger, Ingenieur. Mit 413 Abbildungen. VIII, 275 Seiten. 1929. RM 10.—; gebunden RM 11.50

---

\* **Grundzüge der Starkstromtechnik** für Unterricht und Praxis. Von Dr.-Ing. K. Hoerner. Zweite, durchgesehene und erweiterte Auflage. Mit 347 Textabbildungen und zahlreichen Beispielen. V, 209 Seiten. 1928. RM 7.—; gebunden RM 8.20

---

**Einführung in die Theorie der Schwachstromtechnik.** Von Professor Dr. phil. J. Wallot, Wissenschaftlicher Mitarbeiter der Siemens & Halske A.-G. Mit 347 Textabbildungen. IX, 331 Seiten. 1932. RM 21.50; gebunden RM 23.—

---

**Hilfsbuch für die Elektrotechnik.** Unter Mitwirkung namhafter Fachgenossen bearbeitet und herausgegeben von Dr. Karl Strecker. Zehnte, umgearbeitete Auflage.

\***Starkstromausgabe.** Mit 560 Abbildungen. XII, 739 Seiten. 1925. Gebunden RM 20.—

\***Schwachstromausgabe** (Fernmeldetechnik). Mit 1057 Abbildungen. XXII, 1137 Seiten. 1928. Gebunden RM 42.—

---

*\*Auf alle vor dem 1. Juli 1931 erschienenen Bücher wird ein Notnachlaß von 10% gewährt.*

\* **Einführung in die Elektrizitätslehre.** Von Professor Dr.-Ing. e. h. R. W. Pohl, Göttingen. Dritte, verbesserte Auflage. („Einführung in die Physik“, Band II.) Mit 393 Abbildungen, darunter 20 entlehnte. VIII, 264 Seiten. 1931.  
Gebunden RM 13.80

---

\* **Vorlesungen über Elektrizität.** Von Professor A. Eichenwald, Dipl.-Ing. (Petersburg), Dr. phil. nat. (Straßburg), Dr. phys. (Moskau). Mit 640 Abbildungen. VIII, 664 Seiten. 1928.  
RM 36.—; gebunden RM 37.50

---

\* **Theorien der Elektrizität. Elektrostatik.** Bearbeitet von A. Güntherschulze, F. Kottler, H. Thirring, F. Zerner. Redigiert von W. Westphal. („Handbuch der Physik“, Band XII.) Mit 112 Abbildungen. VII, 564 Seiten. 1927.  
RM 46.50; gebunden RM 49.—

---

\* **Elektrizitätsbewegung in Gasen.** Bearbeitet von G. Angenheister, R. Bär, A. Hagenbach, K. Przibram, H. Stücklen, E. Warburg. Redigiert von W. Westphal. („Handbuch der Physik“, Band XIV.) Mit 189 Abbildungen. VII, 444 Seiten. 1927.  
RM 36.—; gebunden RM 38.10

---

\* **Elektrizitätsbewegung in festen und flüssigen Körpern.** Bearbeitet von E. Baars, A. Coehn, G. Ettisch, H. Falkenhagen, W. Gerlach, A. Güntherschulze, E. Grüneisen, B. Gudden, G. v. Hevesy, G. Laski, F. Noether, H. v. Steinwehr. Redigiert von W. Westphal. („Handbuch der Physik“, Band XIII.) Mit 222 Abbildungen. VII, 672 Seiten. 1928.  
RM 55.50; gebunden RM 58.—

---

## **Funktionentheorie und ihre Anwendung in der Technik.**

Vorträge von R. Rothe, Berlin, W. Schottky, Berlin, K. Pohlhausen, Berlin, E. Weber, Brooklyn, F. Ollendorff, Berlin, und F. Noether, Breslau. Veranstaltet durch das Außeninstitut der Technischen Hochschule zu Berlin in Gemeinschaft mit dem Elektrotechnischen Verein, E. V. zu Berlin. Herausgegeben von Professor Dr. R. Rothe, Berlin, Dr.-Ing. F. Ollendorff, Berlin, und Dr. K. Pohlhausen, Berlin. Mit 108 Textabbildungen. VII, 173 Seiten. 1931.  
Gebunden RM 16.—

---

\* **Magnetismus. Elektromagnetisches Feld.** Bearbeitet von E. Alberti, G. Angenheister, E. Gumlich, P. Hertz, W. Romanoff, R. Schmidt, W. Steinhaus, S. Valentiner. Redigiert von W. Westphal. („Handbuch der Physik“, Band XV.) Mit 291 Abbildungen. VII, 532 Seiten. 1927.  
RM 43.50; gebunden RM 45.60

---

\* **Das elektromagnetische Feld.** Ein Lehrbuch von Professor Emil Cohn. Zweite, völlig neubearbeitete Auflage. Mit 41 Textabbildungen. VI, 366 Seiten. 1927.  
Gebunden RM 24.—

---

\* *Auf alle vor dem 1. Juli 1931 erschienenen Bücher wird ein Notnachlaß von 10% gewährt.*

\* **Überströme in Hochspannungsanlagen.** Von J. Biermanns, Chefelektriker der AEG-Fabriken für Transformatoren und Hochspannungsmaterial. Mit 322 Textabbildungen. VIII, 452 Seiten. 1926. Gebunden RM 30.—

---

\* **Theorie der Wechselströme.** Von Dr.-Ing. Alfred Fraenckel. Dritte, erweiterte und verbesserte Auflage. Mit 292 Textabbildungen. VI, 260 Seiten. 1930. RM 20.—; gebunden RM 21.50

---

\* **Theorie der Wechselstromübertragung** (Fernleitung und Umspannung). Von Dr.-Ing. Hans Grünholz. Mit 130 Abbildungen im Text und auf 12 Tafeln. VI, 222 Seiten. 1928. Gebunden RM 36.75

---

\* **Hochspannungstechnik.** Von Dr.-Ing. Arnold Roth. Mit 437 Abbildungen im Text und auf 3 Tafeln sowie 75 Tabellen. VIII, 534 Seiten. 1927. Gebunden RM 31.50

---

\* **Hochspannungsforschung und Hochspannungspraxis.** Georg Stern, Direktor der AEG-Transformatorenfabrik, zum 31. März 1931 gewidmet von seinen Mitarbeitern. Herausgegeben von J. Biermanns und O. Mayr. Mit dem Bildnis Georg Sterns und 264 Abbildungen im Text. VIII, 384 Seiten. 1931. Gebunden RM 28.—

---

\* **Erdströme.** Grundlagen der Erdschluß- und Erdungsfragen. Von Dr.-Ing. Franz Ollendorff, Berlin. Mit 164 Abbildungen im Text. VIII, 260 Seiten. 1928. Gebunden RM 20.—

---

**Der Erdschluß und seine Bekämpfung.** Von Dr.-Ing. G. Oberdorfer, Privatdozent an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 115 Abbildungen im Text und 2 Tafeln. VI, 165 Seiten. 1930. RM 12.50

---

\* **Herzog-Feldmann, Die Berechnung elektrischer Leitungsnetze in Theorie und Praxis.** Vierte, völlig umgearbeitete Auflage. Von Professor Clarence Feldmann, Delft. Mit 485 Textabbildungen. X, 554 Seiten. 1927. Gebunden RM 38.—

---

\* *Auf alle vor dem 1. Juli 1931 erschienenen Bücher des Verlages Julius Springer-Berlin wird ein Notnachlaß von 10% gewährt.*

\* **Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung.**

Von John R. Carson, American Telephone and Telegraph Company. Erweiterte deutsche Bearbeitung von F. Ollendorff und K. Pohlhausen. Mit 39 Abbildungen im Text und einer Tafel. IX, 186 Seiten. 1929. RM 16.50; gebunden RM 18.—

---

\* **Elektrische Festigkeitslehre.** Von Professor Dr.-Ing. A. Schwaiger, München.

Zweite, vollständig umgearbeitete und erweiterte Auflage des „Lehrbuchs der elektrischen Festigkeit der Isoliermaterialien“. Mit 448 Textabbildungen, 9 Tafeln und 10 Tabellen. VIII, 474 Seiten. 1925. Gebunden RM 27.—

---

\* **Die physikalischen Grundlagen der elektrischen Festigkeitslehre.** Von Assistent-Direktor N. Semenov, Leningrad, und Ingenieur Alexander Walther, Leningrad. Mit 116 Textabbildungen. VII, 168 Seiten. 1928.

Gebunden RM 16.50

---

\* **Elektrische Durchbruchfeldstärke von Gasen.** Theoretische Grundlagen und Anwendung. Von Professor W. O. Schumann, Jena. Mit 80 Textabbildungen. VII, 246 Seiten. 1923.

RM 7.20; gebunden RM 8.40

---

\* **Die Eigenschaften elektrotechnischer Isoliermaterialien in graphischen Darstellungen.** Eine Sammlung von Versuchsergebnissen aus Technik und Wissenschaft. Von Dr. U. Retzow, Abteilungsleiter der AEG-Fabrik für elektrische Meßinstrumente, Berlin. Mit 330 Abbildungen. VI, 250 Seiten. 1927.

Gebunden RM 24.—

---

\* **Dielektrisches Material.** Beeinflussung durch das elektrische Feld. Eigenschaften. Prüfung. Herstellung. Von Dr.-Ing. A. Bültemann, Dresden. Mit 17 Textabbildungen. VI, 160 Seiten. 1926.

RM 10.50; gebunden RM 12.—

---

\* **Die Isolierstoffe der Elektrotechnik.** Vortragsreihe, veranstaltet von dem

Elektrotechnischen Verein E. V. und der Technischen Hochschule Berlin. Herausgegeben im Auftrage des Elektrotechnischen Vereins E. V. von Professor Dr. H. Schering. Mit 197 Abbildungen im Text. IV, 392 Seiten. 1924. Gebunden RM 16.—

---

\* **Elektrophysik der Isolierstoffe.** Von Dr. Andreas Gemant, Privatdozent an der Technischen Hochschule Berlin, Mitglied der Forschungsabteilung des Siemens-Schuckert-Kabelwerks. Mit 76 Textabbildungen. VI, 222 Seiten. 1930.

RM 20.—; gebunden RM 21.50

---

\* Auf alle vor dem 1. Juli 1931 erschienenen Bücher wird ein Notnachlaß von 10% gewährt.