# ОБЪ УСЛОВІЯХЪ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ НѢКОТОРЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

**Ал. Лѣтникова**

Преподавателя Математики въ Константиновскомъ Межевомъ Институтѣ.

Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій перваго порядка съ двумя перемѣнными составляетъ одинъ изъ элементарныхъ отдѣловъ интегральнаго исчисленія и однако нельзя не согласиться, что именно въ этой части науки недостатокъ способовъ и пріемовъ, сколько-нибудь общихъ, наиболѣе ощутителенъ. Способъ интегральнаго фактора, указанный знаменитымъ Эйлеромъ, до сихъ поръ остается единственнымъ, имѣющимъ за собою общность идеи и потому несомнѣнное научное достоинство; поэтому, я думаю, будетъ справедливо сказать что только отъ усовершенствованія теоріи интегральнаго множителя и можно ожидать, въ настоящее время, какихъ либо новыхъ путей для интегрированія или для розысканія дифференціальныхъ уравненій, которыя могутъ быть объинтегрированы. Самыи способъ интегральнаго множителя, какъ извѣстно, съ гораздо большимъ удобствомъ примѣняется именно къ розысканію дифференціальныхъ уравненій, которыя интегрируются факторомъ извѣстнаго вида, чѣмъ къ интегрированію произвольнаго даннаго уравненія. Превосходные образцы подобныхъ изслѣдованій были указаны самимъ Эйлеромъ, котораго «Institutiones calculi integralis» останется всегда незамѣнимымъ сочиненіемъ по богатству содержащихся въ немъ матеріаловъ для изученія.

Теорія интегральнаго фактора, въ приложеніи къ уравненіямъ перваго порядка, со времени Эйлера получила очень мало развитія. Въ послѣднее время однако былъ сдѣланъ замѣчательный шагъ въ этомъ родѣ Дерптскимъ профессоромъ г. Миндингомъ въ его обширномъ мемуарѣ: «Объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій перваго порядка съ двумя перемѣнными», который, какъ мнѣ кажется, заслуживаетъ полнаго вниманія геометровъ; въ особенности потому, что онъ указываетъ на цѣлый классъ дифференціальныхъ уравненій, остававшійся до сихъ поръ почти нетронутымъ, къ которому методъ автора прилагается съ большимъ успѣхомъ, чѣмъ способъ Эйлера въ первоначальномъ своемъ видѣ. Я не буду, конечно, излагать здѣсь способа г. Миндинга, но постараюсь обратить вниманіе читателей на нѣкоторыя новыя стороны того же предмета, оставшіяся, кажется, незамѣченными авторомъ и къ которымъ я былъ приведенъ, отчасти, изученіемъ его мемуара. Я полагаю, что наука не мало бы выиграла, если бы вниманіе геометровъ было обращено на нѣкоторыя изъ замѣчательныхъ указаній, сообщаемыхъ г. Миндингомъ въ названномъ выше мемуарѣ.

## I.

1. Классъ уравненій, разсматриваемый г. Миндингомъ и къ которому, преимущественно, относятся также и мои замѣчанія, заключается въ слѣдующемъ общемъ видѣ

$$(\alpha_0 y^n+\alpha_1 y^{n-1}+\ldots+\alpha_n)dy+(\beta_0 y^m+\ldots+\beta_m)dx=0, \quad \ldots \quad (1)$$

гдѣ коеффиціенты $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \ldots \beta_m$ суть произвольныя функціи $x$. (Въ мемуарѣ г. Миндинга они предполагаются цѣлыми). Дифференціальныя уравненія такого вида могутъ быть получены изъ конечнаго первоначальнаго уравненія имѣющаго видъ

$$U = e^{W}.\ V = \text{пост.} \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

гдѣ для краткости, положено

$$W = \frac{A_0 y^p + A_1 y^{p-1} + \ldots + A_p}{B_0 y^q + B_1 y^{q-1} + \ldots + B_q} \text{ и}$$

$$V = (y - y_1)^{n_1} (y - y_2)^{n_2} \ldots (y - y_i)^{n_i}.$$

Коефиціенты $A_0$, $A_1 \ldots A_p$, $B_0$, $B_1, \ldots B_q$, а также $y_1$, $y_2, \ldots y_i$ суть нѣкоторыя функціи $x$, а показатели $n_1$, $n_2, \ldots n_i$ суть постоянныя числа. Вь самомъ дѣлѣ, если одифференцируемъ послѣднее уравненіе, постоянное исключится самымъ дифференцированіемъ, а затѣмъ, опустивъ общихъ множителей, мы придемъ къ уравненію, въ которомъ коефиціенты при дифференціалахъ $dy$ и $dx$ будутъ цѣлыми функціями относительно $y$, какъ въ вышеприведенномъ дифференціальномъ уравненіи. Повѣрка этаго, конечно, не представляетъ ни какихъ затрудненій. Изъ этаго замѣчанія слѣдуетъ, что дифференціальныя уравненія разсматриваемаго вида *могутъ* имѣть интегралъ вида $U =$ пост. Общій вопросъ, къ которому относятся нижеизложенныя замѣчанія, состоитъ въ розысканіи условій, при которыхъ дифференціальное уравненіе, заключающееся въ видѣ (1), имѣетъ интегралъ даннаго вида, содержащагося въ общемъ видѣ (2), и въ опредѣленіи всѣхъ функцій и постоянныхъ входящихъ въ этотъ видъ, то есть въ отысканіи самаго интеграла, когда найденныя условія будутъ выполнены. Не касаясь общаго вопроса такимъ образомъ поставленнаго, я ограничусь въ настоящей статьѣ, разсмотрѣніемъ нѣкоторыхъ простѣйшихъ примѣровъ подобныхъ изслѣдованій, отлагая до другаго времени сообщеніе изслѣдованій, относящихся къ другимъ болѣе сложнымъ случаямъ. Прежде чѣмъ обратимся къ главному предмету, необходимо доказать нѣкоторыя предварительныя предложенія.

2. Извѣстно, что факторъ $\mu$, дѣлающій полнымъ дифференціальнымъ уравненіе

$$Mdx + Ndy = 0,$$

долженъ удовлетворять условному уравненію

$$\frac{d.\,M\mu}{dy} = \frac{d.\,N\mu}{dx},$$

которое обыкновенно служитъ для отысканія фактора и для розысканія условій интегрируемости даннаго уравненія.

Кромѣ этаго вида условнаго уравненія можно привести еще другой, указанный Мальмстеномъ (Liouville 1862, p. 315), который съ неменьшею пользою можетъ быть употребленъ для той же цѣли. Теорему Мальмстена можно доказать такимъ образомъ. Положимъ, что дифференціальное уравненіе

$$dy + f(x, y)\,dx = 0$$

имѣемъ интегралъ $u =$ пост., тогда будемъ имѣть тождественно

$$f(x, y) = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}.$$

Вопросъ объ интегрированіи даннаго дифференціальнаго уравненія можетъ считаться рѣшеннымъ, если найдемъ $\frac{du}{dy}$ или $\frac{du}{dx}$. Замѣтимъ здѣсь кстати, что

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{f} \cdot \frac{du}{dx}$$

есть очевидно интегрирующій множитель нашего дифференціальнаго уравненія. Дифференцируя предыдущее тожество по $y$ и по $x$, найдемъ

$$\frac{df}{dy}=\frac{\dfrac{d^2u}{dxdy}}{\dfrac{du}{dy}}-f\,.\frac{\dfrac{d^2u}{dy^2}}{\dfrac{du}{dy}}$$

$$\frac{df}{dx}=f.\frac{\dfrac{d^2u}{dx^2}}{\dfrac{du}{dx}}-f^2.\frac{\dfrac{d^2u}{dxdy}}{\dfrac{du}{dx}}$$

или замѣчая, что $-f(x,y)=\frac{dy}{dx}$, не трудно видѣть, что оба эти уравненія можно представить въ такомъ видѣ

$$\frac{\partial.\ l\ \dfrac{du}{dy}}{\partial x}=\frac{df}{dy}$$

$$\frac{\partial.\ l\ \dfrac{du}{dx}}{\partial x}=\frac{1}{f}\ \frac{df}{dx},$$

гдѣ знакомъ $\partial$ мы означаемъ полное дифференцированіе при которомъ $y$ долженъ разсматриваться какъ функція независимаго перемѣннаго $x$. Оба послѣднія равенства, очевидно, суть тожества, если только, по дифференцированіи по знаку $\partial$, вставимъ вмѣсто $\frac{dy}{dx}$ его выраженіе изъ дифференціальнаго уравненія; кромѣ того легко видѣть, что каждое изъ этихъ равенствъ есть необходимое слѣдствіе другаго. Выведенныя тожества могутъ во многихъ случаяхъ служить для отысканія частныхъ производныхъ $\frac{du}{dy}$ и $\frac{du}{dx}$. Не трудно убѣдиться напримѣръ, что всѣ обыкновенные случаи интегрируемости уравненій однородныхъ, линейныхъ и проч. могутъ быть также легко получены изъ послѣднихъ условій, какъ и изъ обыкновеннаго; кромѣ того эти условія могутъ привести еще къ новымъ случаямъ. Но мы не будемъ останавливаться теперь на этомъ предметѣ, а приведемъ только приложеніе этой теоремы къ доказательству предложенія, которое представляетъ обобщеніе подобнаго же предложенія, доказаннаго г. Миндингомъ въ вышеупомянутомъ мемуарѣ, стр. 29—32.

3. Предложеніе, о которомъ говоримъ, состоитъ въ слѣдующемъ. Если дифференціальное уравненіе

$$dy + f(x, y)\,dx = 0$$

обращается въ полное дифференціальное факторомъ вида

$$\mu = (y-y_1)^{\varepsilon}.\ e^{\frac{\mathrm{D}}{(y-y_1)^n}}.\ \varphi(x, y),$$

гдѣ показатели $\varepsilon$ и $n$ суть постоянныя числа, $y_1$ есть функція $x$, а D и $\varphi$ суть функціи $x$ и $y$, которыя, равно какъ и ихъ производныя, не обращаются ни въ нуль ни въ безконечность при $y = y_1$, то функція $y_1$ будетъ частнымъ рѣшеніемъ разсматриваемаго дифференціальнаго уравненія.

Для доказательства примѣнимъ къ этому случаю первое изъ уравненій, выведенныхъ въ предыдущемъ параграфѣ. Замѣчая, что здѣсь

$$l\mu = l.\frac{du}{dy} = \varepsilon.\ l(y-y_1) + \frac{\mathrm{D}}{(y-y_1)^n} + l.\ \varphi(x, y),$$

чрезъ дифференцированіе получимъ равенство

$$\varepsilon\frac{\frac{dy}{dx}-\frac{dy_1}{dx}}{y-y_1} + \frac{\frac{d\mathrm{D}}{dx}+\frac{d\mathrm{D}}{dy}\frac{dy}{dx}}{(y-y_1)^n} - \mathrm{D}n.\frac{\frac{dy}{dx}-\frac{dy_1}{dx}}{(y-y_1)^{n+1}} +$$

$$+\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dy},$$

которое, когда вставимъ $\frac{dy}{dx} = -f$, по преобразованіи, обратится въ слѣдующее:

$$Dn\left(\frac{dy_1}{dx}+f\right)+(y\quad y_1)\left(\frac{dD}{dx}-f\frac{dD}{dy}\right)-\varepsilon(y-y_1)^n\left(\frac{dy_1}{dx}+f\right)+$$

$$+(y-y_1)^{n+1}\cdot\left\{\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dx}-\frac{f}{\varphi}\frac{d\varphi}{dy}-\frac{df}{dy}\right\}=0.$$

Это равенство должно удовлетворяться тождественно, независимо отъ соотношенія между $y$ и $x$. Полагая $n$ положительнымъ и всѣ вышеупомянутыя условія выполненными, сдѣлаемъ $y=y_1$; будемъ имѣть

$$\frac{dy_1}{dx}+f(x,y_1)=0;$$

что и доказываетъ наше предложеніе Если бы $n$ было отрицательно, то положивъ $n=-m$, могли бы написать тожество въ такомъ видѣ

$$Dn(y-y_1)^m\left(\frac{dy_1}{dx}+f\right)+(y-y_1)^{m+1}\cdot\left(\frac{dD}{dx}-f\frac{dD}{dy}\right)+$$

$$+(y-y_1)\left\{\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dx}-\frac{f}{\varphi}\frac{d\varphi}{dy}-\frac{df}{dy}\right\}=\varepsilon.\left(\frac{dy_1}{dx}+f\right),$$

откуда, сдѣлавъ $y=y_1$, вывели бы тоже самое слѣдствіе. Прибавимъ, что предположеніе $n=0$ не измѣняетъ выведеннаго заключенія, но показатель $\varepsilon$ не можетъ быть равенъ нулю.

4. Приведемъ здѣсь еще предложеніе, данное г. Миндингомъ, которое опредѣляетъ видъ интеграла, когда уравненіе интегрируется факторомъ извѣстнаго вида. Для насъ важенъ только частный случай этаго предложенія, который состоитъ въ слѣдующемъ. Если дифференціальное уравненіе вида

$$\varphi(y)\,dy+\psi(y)\,dx=0,$$

гдѣ $\varphi$ и $\psi$ означаютъ цѣлыя функціи относительно $y$, въ которыхъ коефиціенты суть произвольныя функціи $x$, интегрируется множителемъ вида

$$\mu = \frac{1}{X(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_n)}$$

въ которомъ X, $y_1$, $y_2$.... $y_n$ суть функціи однаго только $x$; то, полагая всѣ $y_i$ различными, интегралъ разсматриваемаго дифференціальнаго уравненія будетъ имѣть видъ

$$e^{V}(y-y_1)^{p_1}(y-y_2)^{p_2}\ldots(y-y_n)^{p_n} = \text{пост.},$$

гдѣ V есть цѣлая функція относительно $y$, въ которой коефиціенты суть нѣкоторыя функціи $x$, а показатели $p_1$, $p_2$... $p_n$ суть постоянныя числа. — Это предложеніе можетъ быть доказано такимъ образомъ. Полагая для краткости

$$X(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_n) = f(y),$$

будемъ имѣть по предположенію

$$\frac{\varphi(y)}{f(y)}dy + \frac{\psi(y)}{f(y)}dx = dU,$$

гдѣ U есть нѣкоторая функція $x$ и $y$. Слѣдовательно, разлагая раціональную дробь на дроби частныя, получимъ

$$\frac{dU}{dy} = \frac{\varphi(y)}{f(y)} = E(y) + \sum \frac{p_i}{y-y_i},$$

гдѣ $E(y)$ есть цѣлая часть разлагаемой дроби относительно $y$, а $p_i = \frac{\varphi(y_i)}{f'(y_i)}$. Отсюда чрезъ интегрированіе выведемъ

$$U = \int E(y)\,dy + \Sigma\, p_i \cdot l(y-y_i) + F(x),$$

гдѣ $F(x)$, при интегрированіи по $y$, замѣняетъ произвольное постоянное. Но съ другой стороны имѣемъ

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\psi(y)}{f(y)} = E_1(y) + \sum \frac{q_i}{y-y_i},$$

гдѣ $E_1(y)$ означаетъ цѣлую часть дроби $\frac{\psi(y)}{f(y)}$ относительно $y$, а $q_i = \frac{\psi(y_i)}{f'(y_i)}$. Слѣдовательно, должно существовать равенство

$$E_1(y) + \sum \frac{q_i}{y - y_i} = \int \frac{dE(y)}{dx}\, dy + \sum \frac{dp_i}{dx} l\,(y - y_i) -$$

$$- \sum \frac{p_i \dfrac{dy_i}{dx}}{y - y_i} + F'(x).$$

Знакъ $\Sigma$ во всѣхъ предшествующихъ уравненіяхъ относится къ указателю $i$, которому приписываются всѣ цѣлыя значенія отъ 1 до $n$. Далѣе замѣчая, что по доказанному въ предыдущемъ параграфѣ, $y = y_i$ есть частное рѣшеніе, разсматриваемаго дифференціальнаго уравненія, а потому

$$\varphi(y_i) \frac{dy_i}{dx} + \psi(y_i) = 0,$$

будемъ имѣть также

$$\sum \frac{q_i + p_i \dfrac{dy_i}{dx}}{y - y_i} = 0;$$

почему предыдущее тожество можетъ быть представлено въ такомъ видѣ

$$E_1(y) - \int \frac{dE(y)}{dx}\, dy - F'(x) = \sum \frac{dp_i}{dx} l\,(y - y_i).$$

Такъ какъ здѣсь въ первой части стоитъ цѣлая функція относительно $y$, а во второй логарифмическая, то равенство это, очевидно, возможно только тогда, когда каждая часть отдѣльно равна нулю, что даетъ

$$\frac{dp_i}{dx} = 0, \text{ и слѣдовательно } p_i = \text{пост.}$$

Самый интегралъ будетъ

$$U = \int E(y)\, dy + \Sigma\, l(y - y_i)^{p_i} + F(x) = \text{пост.};$$

а если напишемъ его въ видѣ $e^U = \text{пост.}$, то будемъ имѣть видъ, указанный выше. Замѣтимъ въ заключеніе, что нашъ выводъ доказываетъ также, что если разсматриваемое дифференціальное уравненіе интегрируется факторомъ, приведеннаго выше вида, и если $y = y_i$ есть одно изъ частныхъ рѣшеній, входящихъ въ составъ интегральнаго фактора, то будемъ имѣть, сохраняя предыдущія знакоположенія

$$\frac{\varphi(y_i)}{f'(y_i)} = \text{пост.}$$

Это замѣчательное свойство можетъ имѣть приложеніе при розысканіи условій интегрируемости.

Наконецъ, не оставимъ безъ замѣчанія того, что всѣ частныя рѣшенія $y = y_i$, которыя въ выводахъ, изложенныхъ въ предыдущихъ параграфахъ, входили въ составъ интегральнаго фактора и въ составъ интеграла, суть тѣ рѣшенія, которыя, обращая въ нуль или безконечность интегральный факторъ, могутъ быть получены изъ общаго интеграла, приравнивая нулю или безконечности, входящее въ него произвольное постоянное.

## II.

5. Переходимъ теперь къ розысканію условій интегрируемости нѣкоторыхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка. Первое изъ уравненій, которыя мы будемъ разсматривать, есть уравненіе вида

$$\frac{dy}{dx} + \frac{P_1 y + P_2}{y + Q} = 0,$$

гдѣ $P_1$, $P_2$ и $Q$ означаютъ произвольныя функціи $x$. Общій интегралъ этаго уравненія неизвѣстенъ; мы предлагаемъ себѣ расмотрѣть, какимъ условіямъ должны удовлетворять функціи $P_1$, $P_2$ и $Q$ для того, чтобы это уравненіе имѣло бы интегралъ даннаго опредѣленнаго вида.

Не трудно замѣтить, что разсматриваемое дифференціальное уравненіе можетъ имѣть интегралъ вида

$$(y-y_1)^{n_1}(y-y_2)^{n_2} = \text{пост.}$$

Въ самомъ дѣлѣ, непосредственное дифференцированіе этаго уравненія исключаетъ произвольное постоянное и приводитъ къ полному дифференціальному уравненію

$$\mu \left\{ [y-(a_1 y_2 + a_2 y_1)]\, dy - \left[ \left( a_1 \frac{dy_1}{dx} + a_2 \frac{dy_2}{dx} \right) y - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left( a_1 y_2 \frac{dy_1}{dx} + a_2 y_1 \frac{dy_2}{dx} \right) \right] dx \right\} = 0,$$

гдѣ, для краткости, положено

$$\frac{1}{n_1+n_2}(y-y_1)^{n_1-1}(y-y_2)^{n_2-1} = \mu$$

и постоянныя $a_1 = \frac{n_1}{n_1+n_2}$ и $a_2 = \frac{n_2}{n_1+n_2}$, такъ что $a_1 + a_2 = 1$.

Изъ этаго замѣчанія слѣдуетъ, что приведенное выше первоначальное уравненіе, по одифференцированіи и опущеніи множителей, можетъ приводить только къ дифференціальнымъ уравненіямъ вида

$$(y+Q)\, dy + (P_1 y + P_2)\, dx = 0,$$

то есть къ уравненію, условія интегрируемости котораго мы хотимъ разсмотрѣть. Предложимъ себѣ теперь обратный вопросъ: когда послѣднее дифференціальное уравненіе будетъ имѣть интегралъ вышеприведеннаго вида? — Очевидно, что такъ какъ въ этомъ случаѣ, должны имѣть тождественно

$$\frac{P_1 y + P_2}{y+Q} = -\frac{\left( a_1 \frac{dy_1}{dx} + a_2 \frac{dy_2}{dx} \right) y - \left( a_1 y_2 \frac{dy_1}{dx} + a_2 y_1 \frac{dy_2}{dx} \right)}{y-(a_1 y_2 + a_2 y_1)},$$

то *постоянныя* $a_1$ и $a_2$ или, что все равно $n_1$ и $n_2$, а также функціи $y_1$ и $y_2$ должны удовлетворять слѣдующимъ тремъ условнымъ уравненіямъ:

$$a_1 \frac{dy_1}{dx} + a_2 \frac{dy_2}{dx} = -P_1$$

$$a_1 y_2 \frac{dy_1}{dx} + a_2 y_1 \frac{dy_2}{dx} = P_2$$

$$a_1 y_2 + a_2 y_1 = -Q$$

и если наше уравненіе имѣетъ интегралъ предполагаемаго вида, то функціи $y_1$ и $y_2$, а также постоянныя $a_1$ и $a_2$ могутъ быть найдены изъ этихъ трехъ уравненій, къ которымъ еще присоединяется соотношеніе $a_1 + a_2 = 1$. Замѣтимъ заранѣе, что удовлетворить этимъ уравненіямъ можно только условно; въ самомъ дѣлѣ, $y_1$ и $y_2$ суть произвольныя функціи $x$, но $a_1$ и $a_2$ суть постоянныя числа; выразивъ это, мы найдемъ одно условное уравненіе которому должны удовлетворять функціи $P_1$, $P_2$ и $Q$ для того, чтобы наше дифференціальное уравеніе имѣло интегралъ вышеприведеннаго вида. Интегрируя первое изъ предыдущихъ уравненій и соединяя его съ послѣднимъ, будемъ имѣть систему

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 = -\int P_1 dx$$
$$a_1 y_2 + a_2 y_1 = -Q;$$

откуда чрезъ сложеніе и вычитаніе выведемъ:

$$y_1 + y_2 = -S \text{ и } y_1 - y_2 = \frac{1}{q} D,$$

гдѣ, для краткости, положено

$$S = Q + \int P_1 dx$$
$$S = Q + \int P_1 dx$$

и $q = a_1 - a_2$; далѣе найдемъ

$$y_1 = -\frac{1}{2} S + \frac{1}{2q} D \text{ и } y_2 = -\frac{1}{2} S - \frac{1}{2q} D \text{ или}$$

$$y_1 = \frac{1-q}{2q} Q - \frac{1+q}{2q} \int P_1 dx$$

$$y_2 = \frac{1-q}{2q}\int P_1 dx - \frac{1+q}{2q}\,Q$$

Здѣсь $q = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$, гдѣ $\lambda = \frac{n_1}{n_2}$. Очевидно, что достаточно знать $\lambda$, ибо величины $n_1$ и $n_2$ могутъ измѣняться чрезъ возвышеніе въ степень обѣихъ частей первоначальнаго уравненія, отношеніе же ихъ $\lambda$ сохраняетъ величину постоянную. Для опредѣленія $\lambda$ или $q$ вставимъ найденныя величины во второе изъ условныхъ уравненій, замѣчая при этомъ что $a_1 = \frac{1}{2}(1+q)$ и $a_2 = \frac{1}{2}(1-q)$, получимъ:

$$a_1 y_2 \frac{dy_1}{dx} + a_2 y_1 \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{4q^2}\,D\frac{dD}{dx} + \frac{1}{4}\,D\,\frac{dS}{dx} +$$

$$+\frac{1}{4}\,S\,\frac{dS}{dx} - \frac{1}{4}\,S\,\frac{dD}{dx} = P_2;$$

откуда выведемъ

$$q^2 = \frac{D\,\frac{dD}{dx}}{D\frac{dS}{dx} - S\frac{dD}{dx} + S\frac{dS}{dx} - 4\,P_2}.$$

Вставивъ вмѣсто D и S ихъ выраженія, замѣтимъ, что $q^2$ можно представить въ такомъ видѣ

$$q^2 = \frac{\left(\frac{dQ}{dx} - P_1\right)(Q - \int P_1 dx)}{\left(\frac{dQ}{dx} - P_1\right)(Q - \int P_1 dx) + 4\,(P_1 Q - P_2)}$$

или, положивъ для краткости

$$\frac{\left(\frac{dQ}{dx} - P_1\right)(Q - \int P_1 dx)}{P_1 Q - P_2} = m,$$

будемъ имѣть $q^2 = \frac{m}{m+4}$. Но $q^2$ должно быть постояннымъ, откуда слѣдуетъ, что $m =$ пост. и будемъ имѣть одно условіе

$$\frac{\left(\frac{dQ}{dx} - P_1\right)(Q - \int P_1 dx)}{P_1 Q - P_2} = \text{пост.}$$

Если въ данномъ дифференціальномъ уравненіи функціи $P_1$, $P_2$ и $Q$ таковы, что послѣднее условіе выполняется, то разсматриваемое уравненіе будетъ имѣть интегралъ предполагаемаго вида; замѣтимъ притомъ, что вставляя функціи $P_1$, $P_2$ и $Q$ въ условное уравненіе мы можемъ очевидно располагать величиною произвольнаго постояннаго заключающагося въ неопредѣленномъ интегралѣ $\int P_1 dx$. Повѣрка условія даетъ вмѣстѣ съ тѣмъ величину $m$; далѣе найдемъ $q = \sqrt{\frac{m}{m+4}}$, а зная $q$ получимъ $\lambda = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1+q}{1-q}$; наконецъ по выведеннымъ выше формуламъ вычислимъ выраженіе $y_1$ и $y_2$, причемъ въ интегралѣ $\int P_1 dx$ должно принять ту величину произвольнаго постояннаго, которая удовлетворяетъ условному уравненію. Затѣмъ интегралъ нашего уравненія будетъ

$$(y - y_1)^{\lambda}(y - y_2) = c, \text{ или}$$

$$(y - y_1)^{1+q}(y - y_2)^{1-q} = \text{пост.}$$

6. Если $q^2$ отрицательно, то $q$ мнимо и интегралъ будетъ представляться въ мнимой формѣ, которая впрочемъ легко можетъ быть обращена въ дѣйствительную. Положимъ $q^2 = -\alpha^2$, гдѣ $\alpha^2$ положительно, тогда найденный нами интегралъ можно написать въ такомъ видѣ

$$\left(\frac{y - y_1}{y - y_2}\right)\left(\frac{y - y_1}{y - y_2}\right)^{\alpha\sqrt{-1}} = \text{пост.}$$

или, вставляя вмѣсто $y_1$ и $y_2$ ихъ выраженія, найдемъ

$$\left[\left(y+\frac{S}{2}\right)^2+\frac{D^2}{4\alpha^2}\right]\left\{\frac{y+\frac{S}{2}+\frac{D}{2\alpha}\sqrt{-1}}{y+\frac{S}{2}-\frac{D}{2\alpha}\sqrt{-1}}\right\}^{\alpha\sqrt{-1}}=\text{пост.}$$

Мнимая форма интеграла можетъ быть обращена въ дѣйствительную, положивъ

$$\frac{y+\frac{S}{2}+\frac{D}{2\alpha}\sqrt{-1}}{y+\frac{S}{2}-\frac{D}{2\alpha}\sqrt{-1}}=re.^{\varphi\sqrt{-1}}$$

Вычисляя величину $\varphi$, получимъ

$$\varphi=arctg\,\frac{\frac{D}{\alpha}\left(y+\frac{S}{2}\right)}{\left(y+\frac{S}{2}\right)^2-\frac{D^2}{4\alpha^2}};$$

модуль $r=1$. Затѣмъ интегралъ будетъ

$$\left[\left(y+\frac{S}{2}\right)^2+\frac{D^2}{4\alpha^2}\right].\,e^{-\alpha\varphi}=\text{пост}$$

Или еще, положивъ для краткости $\frac{D}{2\alpha}=A$ и $y+\frac{S}{2}=B$, будемъ имѣть

$$\varphi=arctg\,\frac{2AB}{B^2-A^2}=2\,arctg\,\frac{A}{B}=2\,arctg\,\frac{D}{2\alpha\left(y+\frac{S}{2}\right)},$$

и тогда интегралъ представится въ видѣ

$$\left[\left(y+\frac{S}{2}\right)^2+\frac{D}{4\alpha^2}\right].\,e^{-2\alpha\,acrtg\,\frac{D}{2\alpha\left(y+\frac{S}{2}\right)}}=\text{пост.}$$

или его можно написать еще такимъ образомъ

$$l.\left[\left(y+\frac{S}{2}\right)^2+\frac{D^2}{4\alpha^2}\right]-2\alpha.\,arctg\,\frac{D}{2\alpha\left(y+\frac{S}{2}\right)}=C,$$

гдѣ вмѣсто D и S можно вставить ихъ выраженія, приведенныя выше.

7. Замѣтимъ нѣкоторые частные случаи. Если $P_1Q-P_2=0$, то $m=\infty$; въ этомъ случаѣ наше уравненіе обращается въ

$$\frac{dy}{dx}+P_1=0,$$

которое интегрируется непосредственно. Если $Q-\int P_1dx=0$, то $m=0$; въ этомъ случаѣ $q=a_1-a_2=0$ и предыдущія формулы неприложимы. Такъ какъ здѣсь $n_1=n_2$, то интегралъ будетъ

$$(y-y_1)(y-y_2)=\text{пост.}$$

и будемъ имѣть два условныхъ уравненія

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}\right)=-P_1=-\frac{dQ}{dx}$$

$$\frac{1}{2}\left(y_1\frac{dy_2}{dx}+y_2\frac{dy_1}{dx}\right)=P_2$$

изъ которыхъ легко заключить, что интегралъ будетъ

$$y^2+2\,Qy+2\int P_2dx=\text{пост.}$$

Данное дифференціальное уравненіе можно представить въ этомъ случаѣ въ видѣ полнаго дифференціальнаго

$$(y+Q)\,dy+\left(\frac{dQ}{dx}y+P_2\right)dx=0.$$

Есть еще одинъ болѣе замѣчательный частный случай въ которомъ, хотя предыдущее условіе интегрируемости и выполнено, однако-же интегралъ не можетъ быть полученъ по вышеуказанному способу и имѣетъ другой видъ. Случай этотъ соотвѣтствуетъ величинѣ $m=-4$, при этомъ $q=\infty$ и предыдущіе выводы не приложимы. Можно показать, что при этомъ обстоятельствѣ видъ интеграла будетъ другой, именно: данное дифференціальное уравненіе происходитъ въ этомъ случаѣ изъ полнаго первоначальнаго уравненія вида

$$(y-y_1)\,e^{\frac{X}{y-y_1}}=\text{пост.}$$

Дѣйствительно, одифференцировавъ это уравненіе, мы придемъ къ полному дифференціальному уравненію:

$$\mu.\left\{\left[y-(X+y_1)\right]dy+\left[\left(\frac{dX}{dx}-\frac{dy_1}{dx}\right)y+\right.\right.$$
$$\left.\left.+X\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dX}{dx}+y_1\frac{dy_1}{dx}\right]dx\right\}=0,$$

гдѣ факторъ

$$\mu=\frac{1}{y-y_1}\,e^{\frac{X}{y-y_1}};$$

отсюда видно, что двѣ функціи $y_1$ и X, входящія въ интегралъ, должны условно удовлетворять слѣдующимъ тремъ уравненіямъ, если наше уравненіе имѣетъ интегралъ разсматриваемаго вида,

$$\frac{dX}{dx}-\frac{dy_1}{dx}=P_1$$

$$X+y_1=-Q$$

$$(X+y_1)\,\frac{dy_1}{dx}-y_1\frac{dX}{dx}=P_2.$$

Изъ двухъ первыхъ уравненій выводимъ:

$$X=-\frac{1}{2}(Q-\int P_1dx)$$

$$y_1=-\frac{1}{2}(Q-\int P_1dx).$$

Вставивъ эти выраженія въ третье изъ предыдущихъ уравненій, найдемъ условіе которому должны удовлетворять функціи $P_1$, $P_2$ и $Q$

$$\frac{\left(Q-\int P_1 dx\right)\left(\frac{dQ}{dx}-P_1\right)}{P_1 Q - P_2} = -4.$$

Мы видимъ, такимъ образомъ, что условіе интегрируемости для этого случая соотвѣтствуетъ именно тому исключенію когда $q = \infty$.

8. Разсматриваемое дифференціальное уравненіе очевидно можетъ также имѣть интегралъ вида:

$$e^{y+X}(y-y_1)^n = \text{пост.},$$

гдѣ $X$ и $y_1$ суть функціи $x$, а $n$ количество постоянное. Сравнивая выраженія для $\frac{dy}{dx}$, выводимыя изъ этого послѣдняго уравненія и изъ нашего дифференціальнаго, должны имѣть тождественно

$$\frac{P_1 y + P_2}{y+Q} = \frac{\frac{dX}{dx}y - \left(n\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{dX}{dx}\right)}{y+n-y_1}.$$

Слѣдовательно, если данное дифференціальное уравненіе имѣетъ интегралъ вышеприведеннаго вида, то функціи $X$ и $y_1$ и постоянное $n$ должны опредѣляться изъ слѣдующихъ трехъ уравненій:

$$\frac{dX}{dx} = P_1$$

$$n\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{dX}{dx} = -P_2$$

$$n - y_1 = Q;$$

откуда выведемъ

$$X = \int P_1 dx \text{ и } y_1 = n - Q$$

и далѣе получимъ условное уравненіе

$$\frac{P_1 Q - P_2}{\frac{dQ}{dx} - P_1} = n = \text{пост.}$$

Это условіе имѣетъ исключенія о которыхъ уже было замѣчено выше.

Можно было-бы еще разсмотрѣть другіе, болѣе сложные, виды интеграловъ того же дифференціальнаго уравненія или другихъ уравненій, которыя чрезъ преобразованіе могутъ быть приведены къ разсматриваемому, но имѣя въ виду болѣе обстоятельную обработку этого предмета, мы откладываемъ это до другаго сообщенія; цѣль вышеизложеннаго есть выясненіе употребленнаго метода изслѣдованія, который можетъ имѣть приложеніе и въ другихъ случаяхъ.

9. Примѣнимъ предыдущія разсмотрѣнія къ нѣкоторымъ примѣрамъ. Разсмотримъ, вопервыхъ, извѣстное уравненіе

$$(a_1 y + b_1 x + c_1)\, dy + (ay + bx + c)\, dx = 0.$$

Положимъ $a_1 = 1$; тогда будемъ имѣть $P_1 = a$, $P_2 = bx + c$ и $Q = b_1 x + c_1$. Условіе интегрируемости будетъ въ этомъ случаѣ

$$m = \frac{\left(\frac{dQ}{dx} - P_1\right)(Q - \int P_1 dx)}{P_1 Q - P_2} =$$

$$= \frac{(b_1 - a)^2 x + (b_1 - a)(c_1 - k)}{(ab_1 - b)\, x + ac_1 - c} = \text{пост.},$$

гдѣ $k$ есть неопредѣленное постоянное. Полагая что $b_1 - a$ и $ab_1 - b$ неравны нулю, послѣднее уравненіе даетъ

$$\frac{b_1 - b}{ab_1 - b} = \frac{c_1 - k}{ac_1 - c}.$$

Располагая величиною постояннаго $k$, мы можемъ удовлетворить этому условію; отсюда опредѣлимъ $k$

$$k = c_1 - \frac{ac_1 - c}{ab_1 - b}(b_1 - a)$$

и тогда будемъ имѣть $m = \frac{(b_1 - a)^2}{ab_1 - b}$; далѣе вычислимъ

$$q = \frac{b_1 - a}{\sqrt{(b_1 - a)^2 - 4b}}.$$

и потомъ легко найти, что

$$y_1 = \alpha_1 x + \beta_1 \text{ и } y_2 = \alpha_2 x + \beta_2,$$

гдѣ $\alpha_1$ и $\alpha_2$ могутъ быть вычислены какъ корни квадратнаго уравненія

$$\alpha^2 + (b_1 + a)\alpha + b = 0$$

Величины $\beta_1$, $\beta_2$, соотвѣтствующія $\alpha_1$ и $\alpha_1$, могутъ быть вычислены по формулѣ

$$\beta = \frac{(bc_1 - b_1 c) + (ac_1 - c)\alpha}{ab_1 - b}.$$

Интегралъ, разсматриваемаго дифференціальнаго уравненія, будетъ

$$(y - \alpha_1 x - \beta_1)^{1+q}(y - \alpha_2 x - \beta_2)^{1-q} = \text{пост.}$$

Въ случаѣ $(b_1 - a)^2 - 4b = 0$ легко этотъ видъ интеграла преобразовать въ дѣйствительный какъ выше показано.

Если $b_1 = a$, то данное уравненіе будетъ полнымъ дифференціальнымъ. Если $ab_1 = b$, то интегралъ нашего уравненія будетъ имѣть другой видъ, ибо тогда $m$ не можетъ быть постояннымъ, если притомъ $a$ не равно $b_1$. Въ этомъ случаѣ будетъ выполнено условіе

$$n = \frac{P_1 Q - P_2}{\frac{dQ}{dx} - P_1} = \frac{ac_1 - c}{b_1 - c} = \text{пост.}$$

и не трудно, какъ было изложено въ $n^0$ 8, вычислить самый интегралъ, который будетъ

$$e^{y+ax}\left(y+b_1x+c_1-\frac{ac_1-c}{b_1-a}\right)^n=\text{пост.}$$

Наконецъ, если $(b_1+a)^2-4b=0$, то будемъ имѣть $m=-4$ и уравненіе имѣетъ интегралъ вида

$$\frac{\mathrm{X}}{e^{y-y_1}(y-y_1)}=\text{пост.}$$

въ которомъ нетрудно опредѣлить функціи X и $y_1$, какъ было показано выше.

Возмемъ изъ мемуара г. Миндинга слѣдующее уравненіе

$$\frac{dy}{dx}+\frac{-(2+6x)y+2x^3+3x^2+x+a}{y+3x^2+x+a_1}=0.$$

Очевидно, что это уравненіе имѣетъ видъ, который мы разсматривали выше; здѣсь $\mathrm{P}_1=-2-6x$, $\mathrm{P}_2=2x^3+3x^2+x+a$ и $\mathrm{Q}=3x^2+x+a_1$. Вычисляя величину $m$, наидемъ условіе

$$m=-3.\frac{24x^3+18x^2+(4a_1-4c+3)x+a_1-c}{20x^3+15x^2+(6a_1+3)x+2a_1+a}=\text{пост.},$$

гдѣ $c$ есть неопредѣленное постоянное. Это условіе должно быть выполнено, если разсматриваемое уравненіе имѣетъ интегралъ перваго изъ разсмотрѣнныхъ выше видовъ; оно приводится къ двумъ уравненіямъ

$$\frac{18}{5}(2a_1+1)=4a_1-4c+3$$

$$\frac{6}{5}(2a_1+a)=a_1-c,$$

изъ которыхъ послѣднее даетъ $c=-\frac{1}{5}(7a_1+6a)$, а первое обращается въ

$$4a_1+8a=1.$$

Предполагая выполненнымъ послѣднее условіе, найдемъ что $m = -\frac{18}{5}$ и $q = 3\sqrt{-1}$; затѣмъ вычислимъ

$$S = Q + \int P_1 dx = -x - 2\lambda$$

$$D = Q - \int P_1 dx = 6\left[x^2 + \frac{x}{2} + \mu\right],$$

гдѣ для краткости положено, какъ у г. Миндинга $\lambda = \frac{3-4a}{40}$ и $\mu = \frac{12a_1 + 1}{40}$; далѣе по общему вышеизложенному преобразованію, соотвѣтствующему мнимому значенію $q$, найдемъ интегралъ

$$\left[\left(y - \frac{x}{2} - \lambda\right)^2 + \left(x^2 + \frac{x}{2} + \mu\right)^2\right] e^{-6 \operatorname{arctg} \frac{x^2 + \frac{x}{2} + \mu}{y - \frac{x}{2} - \lambda}} = \text{пост.}$$

Возмемъ еще дифференціальное уравненіе

$$\frac{dy}{dx} + \frac{(lx + k - 1)\, y.}{y + kx - xlx} = 0,$$

съ которымъ г. Миндингъ встрѣчается, рѣшая одну изъ задачъ Эйлера. (см. вышеупом. мемуаръ стр. 28.). Въ этомъ примѣрѣ, вычисляя выраженіе означенное буквою $m$, найдемъ

$$m = -4 . \frac{(k - lx)\, x + x - \frac{c}{2}}{(k - lx)\, x + x}.$$

Чтобы выполнялось условіе $m =$ пост., достаточно положить неопредѣленное постоянное $c = 0$, тогда $m = -4$ и нетрудно вычислить, что интегралъ въ этомъ случаѣ будетъ

$$(y - x)\, e^{-\frac{k + 1 - lx}{y - x} x} = \text{пост.}.$$

Не увеличивая числа примѣровъ, замѣтимъ въ заключеніе, что выведенныя нами условія интегрируемости могутъ быть примѣнены для розысканія уравненій, которыхъ интегралы представляются въ одномъ изъ разсмотрѣнныхъ выше видовъ. Взявъ напримѣръ уравненіе

$$\frac{dy}{dx}+\frac{(ax+b)y+cx^3+fx^2+gx+h}{y+a_1x^2+b_1x+c_1}=0,$$

можно искать какимъ условіямъ должны удовлетворять коефиціеты $a$, $b$, $c$,... для того, чтобы это уравненіе имѣло интегралъ извѣстнаго вида; такія розысканія не представятъ никакихъ затрудненій (сравн. мемуаръ Миндинга стр. 64).

10. Полагая, что дифференціальное уравненіе

$$(y+Q)\,dy+(P_1y+P_2)\,dx=0$$

имѣетъ интегралъ вида

$$(y-y_1)^{n_1}(y-y_2)^{n_2}=u=\text{пост.},$$

гдѣ $y_1$ и $y_2$ суть очевидно частныя рѣшенія, соотвѣтствующія нулевымъ или безконечнымъ значеніямъ произвольнаго постояннаго, мы видѣли ($n^0$ 5) изъ непосредственнаго дифференцированія послѣдняго уравненія, что уравненіе дифференціальное интегрируется множителемъ вида

$$\mu=(y-y_1)^{n_1-1}(y-y_2)^{n_2-1}$$

Отсюда заключаемъ, что наше уравненіе принимаетъ также интегральный факторъ

$$z=\frac{\mu}{u}=\frac{1}{(y-y_1)(y-y_2)}.$$

По одной изъ доказанныхъ выше теоремъ (см. $n^0$ 4) можемъ вывести обратное заключеніе, что при интегральномъ факторѣ такого вида интегралъ уравненія будетъ необходимо имѣть видъ вышеприведенный. Покажемъ на самомъ дѣлѣ, что условіе существованія для даннаго дифференціальнаго уравненія фактора вида $z$ одинаково съ условіемъ существованія интеграла $u =$ пост. Для полученія этого условія примѣнимъ одно изъ тожествъ выведенныхъ въ $n^0$ 2, именно

$$\frac{\partial . l \dfrac{dv}{dy}}{\partial x} = \frac{df}{dy} .$$

Замѣчая, что въ настоящемъ случаѣ имѣемъ

$$f = \frac{P_1 y + P_2}{y + Q} \text{ и потому } \frac{df}{dy} = \frac{P_1 Q - P_2}{(y + Q)^2},$$

а также

$$\frac{dv}{dy} = \frac{(y - y_1)(y - y_2)}{y + Q};$$

найдемъ слѣдующее равенство

$$\frac{\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dQ}{dx}}{y + Q} - \frac{\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{dy_1}{dx}}{y - y_1} - \frac{\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{dy_2}{dx}}{y - y_2} = \frac{P_1 Q - P_2}{(y + Q)^2} ,$$

которое, когда вмѣсто $\dfrac{dy}{dx}$ вставимъ его выраженіе изъ дифференціальнаго уравненія, обратится въ тождество

$$\frac{dQ}{dx} - P_1 + \frac{\left(\dfrac{dy_1}{dx} + P_1\right)y + Q\dfrac{dy_1}{dx} + P_2}{y - y_1} +$$

$$+ \frac{\left(\dfrac{dy_2}{dx} + P_1\right)y + Q\dfrac{dy_2}{dx} + P_2}{y - y_2} = 0.$$

Это тожество разлагается на три уравненія изъ которыхъ два послужатъ для опредѣленія $y_1$ и $y_2$, а третье будетъ выражать условіе существованія разсматриваемаго фактора $z$. Изъ двухъ уравненій выведемъ

$$y_1 + y_2 = -Q - \int P_1 dx$$

$$y_1 y_2 = Q \int P_1 dx - 2\int (P_1 Q - P_2)\, dx,$$

а третье уравненіе будетъ

$$\left(\frac{dQ}{dx}-P_1\right)y_1y_2 - Q\frac{d.\,y_1y_2}{dx}+P_2(y_1+y_2)=0.$$

Замѣняя въ немъ $y_1+y_2$ и $y_1y_2$ ихъ выраженіями, получимъ условіе

$$2\left(\frac{dQ}{dx}-P_1\right)\int(P_1Q-P_2)\,dx-\left(Q-\int P_1dx\right)(P_1Q-P_2)=0,$$

которое, положивъ для краткости $P_1Q-P_2=r$, можно написать въ такомъ видѣ

$$\frac{r}{\int rdx}=2.\,\frac{\frac{dQ}{dx}-P_1}{Q-\int P_1dx};$$

откуда чрезъ интегрированіе получимъ

$$\int rdx = C\left(Q-\int P_1dx\right)^2,$$

а дифференцируя снова, представимъ условіе интегрируемости помощію фактора $z$ въ видѣ

$$\frac{\left(\frac{dQ}{dx}-P_1\right)\left(Q-\int P_1dx\right)}{P_1Q-P_2}=\frac{1}{2C}=\text{пост.}$$

Такимъ образомъ мы получили то самое условіе, которое служитъ признакомъ существованія интеграла перваго изъ разсмотрѣнныхъ выше видовъ. Этотъ выводъ служитъ такимъ образомъ повѣркою заключенія, которое, какъ выше замѣчено, можно было сдѣлать и à priori по одной изъ вышедоказанныхъ теоремъ.

11. Представивъ интегралъ разсматриваемаго дифференціальнаго уравненія въ видѣ

$$u=(y-y_1)(y-y_2)^{\omega}=\text{пост.},$$

мы усматриваемъ, что наше уравненіе интегрируется также факторомъ вида $(y-y_2)^{\varepsilon}$, гдѣ $\varepsilon=\omega-1$. Можно подобно предыдущему доказать обратно, что если наше уравненіе принимаетъ интегральный факторъ такого вида, то его интегралъ будетъ имѣть вышеприведенный видъ. Для этого очевидно достаточно показать, что если уравненіе

$$(y+\mathrm{Q})\,dy+(\mathrm{P}_1 y+\mathrm{P}_2)\,dx=0$$

интегрируется факторомъ вида $(y-y_2)^{\varepsilon}$, то функціи $\mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_2$ и $\mathrm{Q}$ будутъ удовлетворять уравненію, обусловливающему видъ интеграла $u=$ пост. Для доказательства употребимъ тожество, которое служило для подобной-же цѣли въ предыдущемъ $n^0$. Въ настоящемъ случаѣ будемъ имѣть

$$\frac{du}{dy}=(y+\mathrm{Q})\,(y-y_2)^{\varepsilon},$$

а потому вышеупомянутое тожество, когда въ него вставимъ выраженія $\frac{du}{dy}$ и $f$, произведемъ дифференцированія и замѣнимъ производную $\frac{dy}{dx}$ изъ дифференціальнаго уравненія, обратится по упрощеніи въ слѣдующее

$$\frac{d\mathrm{Q}}{dx}-\mathrm{P}_1=\varepsilon.\frac{\left(\frac{dy_2}{dx}-\mathrm{P}_1\right)y+\mathrm{Q}\,\frac{dy_2}{dx}+\mathrm{P}_2}{y-y_2},$$

которое разлагается на два уравненія

$$\frac{d\mathrm{Q}}{dx}-\mathrm{P}_1-\varepsilon\,\left(\frac{dy_2}{dx}+\mathrm{P}_1\right)=0$$

$$\left(\frac{d\mathrm{Q}}{dx}-\mathrm{P}_1\right)y_2+\varepsilon\left(\mathrm{Q}\,\frac{dy_2}{dx}+\mathrm{P}_2\right)=0.$$

Исключивъ изъ этихъ уравненій $y_2$, придемъ къ квадратному уравненію изъ котораго должно опредѣлится $\varepsilon$

$$(\mathrm{P}_2-\mathrm{P}_1\mathrm{Q})\,\varepsilon^2+\left(\frac{d\mathrm{Q}}{dx}-\mathrm{P}_1\right)\,(\mathrm{Q}-\int\mathrm{P}_1 dx)\,\varepsilon\,+$$

$$+\left(\frac{d\mathrm{Q}}{dx}-\mathrm{P}_1\right)(\mathrm{Q}-\int\mathrm{P}dx_1)=0$$

или, означая буквою $m$ то выраженіе, которое и въ предыдущихъ выводахъ означали этою буквою, можно написать

$$\varepsilon^2 - m\varepsilon - m = 0.$$

Условіе $\varepsilon =$ пост. даетъ очевидно $m =$ пост., то есть то самое условіе, которое опредѣляетъ первый изъ разсмотрѣнныхъ выше видовъ интеграла. Уравненіе въ $\omega = \varepsilon + 1$ будетъ

$$\omega^2 - (m + 2)\,\omega + 1 = 0.$$

Два корня этого уравненія суть взаимно обратныя величины, какъ можно было видѣть и à priori, такъ какъ корни этого уравненія должны быть равны $\frac{1-q}{1+q}$ и $\frac{1+q}{1-q}$, что нетрудно повѣрить и на самомъ дѣлѣ.

## III.

12. Занимаясь изученіемъ дифференціальныхъ уравненій которыхъ общій интегралъ можетъ быть представленъ въ видѣ

$$\varepsilon^{\lambda}(y-y_1)^{n_1}(y-y_2)^{n_2} = \text{пост.},$$

гдѣ $\lambda$, $y_1$ и $y_2$ суть произвольныя функціи $x$, а $n_1$ и $n_2$ суть количества постоянныя, я остановился на одномъ особенно интересномъ частномъ случаѣ, именно когда $n_1 + n_2 = 0$ и когда, слѣдовательно, интегралъ дифференціальнаго уравненія можетъ быть приведенъ къ виду

$$\mathrm{U} = e^{\lambda}\left(\frac{y-y_1}{y-y_2}\right) = \text{пост.} \quad . \; . \; . \quad (\mathrm{A})$$

Дифференціальное уравненіе

$$\frac{d\mathrm{U}}{dx}\,dx + \frac{d\mathrm{U}}{dx}\,dy = 0,$$

которое получается при непосредственномъ дифференцированіи уравненія (A) будетъ имѣть видъ

$$\mu . \left[ dy + (X_1 y^2 + X_2 y + X_3) dx \right] = 0,$$

въ которомъ интегральный факторъ

$$\mu = \frac{e^{\nu}}{(y - y_2)^2} \text{ и } \nu = \lambda + l(y_1 - y_2),$$

а коеффиціенты $X_1$, $X_2$ и $X_3$ суть функціи $x$, удовлетворяющія слѣдующимъ тремъ уравненіямъ,

$$\frac{d\lambda}{dx} = (y_1 - y_2) X_1$$

$$\frac{d(y_2 - y_1)}{dx} - (y_1 + y_2) \frac{d\lambda}{dx} = (y_1 - y_2) X_2 \dots. \quad (B)$$

$$y_1 y_2 \frac{d\lambda}{dx} + y_2 \frac{dy_1}{dx} - y_1 \frac{dy_2}{dx} = (y_1 - y_2) X_3,$$

что легко повѣряется, производя дифференцированіе уравненія (A) на самомъ дѣлѣ. Отсюда выводимъ обратное заключеніе именно, что дифференціальное уравненіе вида

$$\frac{dy}{dx} + X_1 y^2 + X_2 y + X_3 = 0 \dots.. \quad (1)$$

имѣетъ интегралъ, который всегда можетъ быть представленъ въ видѣ (A), если только функціи въ него входящія $y_1$, $y_2$ и $\lambda$ будутъ опредѣлены изъ уравненій (B) по даннымъ коефиціентамъ $X_1$, $X_2$ и $X_3$ и что, кромѣ того, уравненіе (1) всегда интегрируется факторомъ вида

$$\mu = \frac{e^{\nu}}{(y - y_2)^2},$$

гдѣ $\nu$ и $y_2$ суть функціи одного только $x$ и, слѣдовательно, также факторомъ вида

$$\frac{\mu}{U} = \frac{1}{r(y - y_1)(y - y_2)},$$

гдѣ $r$ есть также функція $x$. Замѣтимъ мимоходомъ, что одного частнаго рѣшенія достаточно для интегрированія уравненія (1) (Эйлеръ) и если положимъ, напримѣръ, что рѣшеніе $y = y_2$ извѣстно, то второе изъ уравненій (B) даетъ

$$l(y_1 - y_2) = -\int X_1 (y_1 + y_2)\, dx - \int X_2 dx,$$

а вычисляя затѣмъ $\nu$, получимъ интегральный факторъ

$$\mu = \frac{e^{-\int (2X_1 y_2 + X_2)\, dx}}{(y - y_2)^2},$$

который такимъ образомъ опредѣляется въ зависимости отъ одного извѣстнаго частнаго рѣшенія $y = y_2$. Чтобъ получить общій интегралъ въ зависимости отъ одного частнаго рѣшенія, положимъ въ уравненіи (1) $y = y_2 + z$, тогда для опреленія $z$ будемъ имѣть уравненіе

$$\frac{dz}{dx} + X_1 z^2 + (2X_1 y_2 + X_2)\, z = 0,$$

котораго интегралъ извѣстенъ; онъ будетъ

$$z = \frac{e^{-M}}{c + \int X_1 e^{-M} dx},$$

гдѣ C есть произвольное постоянное, а $M = \int (2X_1 y_2 + X_2)\, dx$. Зная $z$, уже легко получить общій интегралъ уревненія (1), который можно представить въ такомъ видѣ

$$\int X_1 e^{-M}\, dx. \left\{ \frac{y - y_1 - \dfrac{e^{-M}}{\int X_1 e^{-M}\, dx}}{y - y_1} \right\} = \text{пост.}$$

Отсюда видимъ, что между двумя частными рѣшенія $y_1$ и $y_2$ существуетъ опредѣленная зависимость

$$y_1 = y_2 + \frac{e^{-M}}{\int X_1 e^{-M} dx}.$$

Легко повѣрить, что множитель $\int Xe^{-M}dx$, найденный въ нашемъ интегралѣ, одинаковъ съ множителемъ $e^{\lambda}$, который представлялся въ видѣ (А).

13. Можно думать, что интегрированіе уравненія (1) невозможно въ общемъ видѣ помощію функцій алгебраическихъ и обыкновенныхъ трансцендентныхъ и даже помощію неопредѣленныхъ квадратуръ въ конечномъ числѣ, такъ какъ это уравненіе заключаетъ въ себѣ какъ весьма частный случай извѣстное уравненіе Рикатти

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = ax^n,$$

невозможность интегрированія котораго въ общемъ видѣ помощію неопредѣленныхъ квадратуръ была доказана Ліувиллемъ (Journal de Mathématiques. Tome VI p. 1). Знаменитое уравненіе Рикатти (Acta Eruditorum. 1775 г.) было, какъ извѣстно, предметомъ особеннаго вниманія геометровъ; здѣсь, конечно, не мѣсто перичислять мемуаровъ, которые были написаны по этому предмету, пока не было доказано Ліувиллемъ, что случаи интегрируемости

$$n = \frac{-4i}{2i \pm 1},$$

гдѣ $i$ есть число цѣлое, суть единственные въ которыхъ возможно интегрированіе въ конечномъ видѣ неопредѣленными квадратурами. Послѣ мемуара Ліувилля было обращено вниманіе на возможность обобщенія уравненія Рикатти и приведенія къ нему уравненій другихъ болѣе сложныхъ видовъ; тутъ извѣстны труды Мальмстена, Куммера, Шпитцера, Hargreave, Cockle и другихъ. Изслѣдованія, которыя мы представимъ ниже, привели насъ къ новому обобщенію уравненію Рикатти, которое заключаетъ въ себѣ какъ частный случай почти всѣ до сихъ поръ извѣстныя обобщенія и еще много другихъ уравненій для интегрированія которыхъ употреблялись особые пріемы.

Мы предлагаемъ себѣ изысканіе условій при которыхъ интегрированіе уравненія (1) можетъ быть совершено неопредѣленными квадратурами въ конечномъ видѣ *). Въ этихъ изслѣдованіяхъ, съ большою пользою, могутъ служить уравненія (B) и мы приведемъ здѣсь одинъ примѣръ подобныхъ розысканій, который намъ кажется не лишеннымъ интереса, въ особенности потому, что, какъ мы говорили выше, онъ примыкаетъ къ изслѣдованіямъ многихъ геометровъ нашего времени.

Интегрированіе уравненій (B) въ общемъ видѣ конечно столь-же затруднительно, какъ и уравненія (1); однако могутъ быть частные случаи въ которыхъ оно упрощается. Предположимъ, напримѣръ, что частныя рѣшенія таковы, что

$$y_1 + y_2 = 0 \text{ или, что } y_2 = -y_1;$$

тогда второе изъ уравненій (B) даетъ

$$\frac{d\,(y_1 - y_2)}{y_1 - y_2} = -X_2 dx, \text{ откуда } y_1 - y_2 = e^{-\int X_2 dx}$$

и, слѣдовательно, будемъ имѣть

$$y_1 = \frac{1}{2} e^{-\int X_2 dx} \text{ и } y_2 = -\frac{1}{2} e^{-\int X_2 dx}.$$

Внося эти выраженія въ третье изъ уравненій (B), получимъ условіе

$$X_1 e^{-2\int X_2 dx} + 4X_3 = 0.$$

Измѣняя величину произвольнаго постояннаго въ интегралѣ $\int X_2 dx$, мы можемъ вмѣсто этого интеграла взять $\int X_2 dx - l2$; тогда условное уравненіе выразится нѣсколько проще, — оно будетъ

$$X_3 + X_1 e^{-2\int X_2 dx} = 0, \ldots \text{ (C)}$$

*) Подобнаго рода изслѣдованіями занимается также кн. С. С. Урусовъ въ его сочиненіи: «Дифференціальныя и разностныя уравненія» 1864 г.

а потому и частныя рѣшенія будутъ

$$y_1 = e^{-\int X_2 dx} \text{ и } y_2 = -e^{-\int X_2 dx};$$

тогда первое изъ уравненій (B) даетъ

$$\lambda = 2\int X_1 e^{-\int X_2 dx} dx.$$

Такимъ образомъ, если коеффиціенты уравненія (1) удовлетворяютъ условію (C), то интегралъ этого уравненія будетъ

$$e^{2\int X_1 e^{-\int X_2 dx} dx} \cdot \left\{ \frac{y - e^{-\int X_2 dx}}{y + e^{-\int X_2 dx}} \right\} = \text{пост.} \dots \text{ (D).}$$

Напримѣръ, возьмемъ уравненіе

$$\frac{dy}{dx} + ax^n y^2 - bx^p y = cx^m.$$

Здѣсь $X_1 = ax^n$, $X_2 = -bx^p$ и $X_3 = -cx^m$, а потому условіе (C) интегрируемости для этого случая будетъ

$$\frac{c}{a} x^{m-n} = k . e^{2b\int x^p dx}.$$

Условію этому можно очевидно удовлетворить, положивъ $p = -1$, $m - n = 2b$; постоянное $k = \frac{c}{a}$ и по формулѣ (D) можно прямо написать интегралъ уравненія

$$\frac{dy}{dx} + ax^n y^2 - \frac{b}{x} y = cx^{n+2b}.$$

Если въ уравненіи (1) положимъ

$$X_1 = 1 \text{ и } X_2 = \frac{ax^{m-1}}{x^m - b},$$

то изъ условія (C) интегрируемости найдемъ

$$X_3 = -e^{-2\int X_2 dx} = -\beta^2 (x^m - b)^{-\frac{2a}{m}}$$

и, слѣдовательно, опять по формулѣ (D), можно написать интегралъ уравненія (Cockle)

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + \frac{ax^{m-1}}{x^m - b} y = \frac{\beta^2}{(x^m - b)^{\frac{2a}{m}}},$$

которое, замѣтимъ кстати, полагая $y = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$, обращается въ линейное уравненіе втораго порядка

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{ax^{m-1}}{x^m - b}\frac{du}{dx} - \frac{\beta^2}{(x^m - b)^{\frac{2a}{m}}} u = 0.$$

Это послѣднее уравненіе, при частныхъ предположеніяхъ $a = 1$, $m = 2$ и $b = 1$, обращается въ извѣстное уравненіе

$$(x^2 - 1)\frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} - \beta^2 u = 0.$$

14. Обращаемся теперь снова къ уравненію (1) съ цѣлію розыскать дальнѣйшія условія его интегрируемости.

Замѣтимъ вопервыхъ, что, не уменьшая общности, мы можемъ положить $X_1 = 1$, потому что уравненіе (1) можно преобразовать въ другое того же вида въ которомъ будетъ $X_1 = 1$. Съ этою цѣлію достаточно положить $y = \alpha z$, тогда уравненіе (1) обращается въ

$$\frac{dz}{dx} + X_1 \alpha z^2 + \left(X_2 + \frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dx}\right) z + \frac{X_3}{\alpha} = 0,$$

которое, если положимъ $X_1 \alpha = 1$ или $\alpha = \frac{X_1}{\alpha}$, будетъ

$$\frac{dz}{dx} + z^2 + \left(X_2 - \frac{1}{X_1}\frac{dX_1}{dx}\right) z + X_1 X_3 = 0.$$

Поэтому мы будемъ разсматривать дифференціальное уравненіе

$$\frac{dz}{dx}+z^2+X_2z+X_3=0, \ldots\ldots (2)$$

отъ условій интегрируемости котораго легко будетъ перейти къ условіямъ интегрируемости уравненія (1) перемѣняя $X_2$ на $X_2-\frac{1}{X_1}\frac{dX_1}{dx}$ и $X_3$ на $X_1X_3$. Условіе интегрируемости (C) для уравненія (2) обратится въ

$$X_3+e^{-2\int X_2 dx}=0 \ldots\ldots (D)'$$

Замѣтимъ, что отъ интегрированія уравненія (2) зависитъ интегрированіе линейнаго уравненія втораго порядка

$$\frac{d^2u}{dx^2}+X_2\frac{du}{dx}+X_3u=0, \ldots\ldots (3)$$

потому что это послѣднее приводится чрезъ преобразованіе $u=e^{\int y dx}$ къ уравненію вида (2) и, слѣдовательно, условія интегрируемости уравненія (2) будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ и условіями интегрируемости уравненія (3) къ интегрированію котораго, какъ извѣстно, приводится линейное уравненіе втораго порядка со вторымъ членомъ.

Приложимъ къ уравненію (2) рядъ преобразованій совокупность которыхъ будетъ представлять нѣкоторую непрерывную дробь, именно положимъ, вопервыхъ, $z=\alpha_1+\frac{1}{z_1}$; найдемъ уравненіе

$$\frac{d\alpha_1}{dx}-\frac{1}{z_1^2}\frac{dz_1}{dx}+\alpha_1^2+\frac{2\alpha}{z_1}+\frac{1}{z_1^2}+X_2\alpha+\frac{X_2}{z}+X_3=0.$$

Для опредѣленія функціи $\alpha_1$ полагаемъ

$$\frac{d\alpha_1}{dx}+\alpha_1^2+X_2\alpha_1=0.$$

Это уравненіе можно интегрировать; изъ него получимъ

$$\alpha_1 = \frac{e^{-\int X_2 dx}}{c + \int e^{-\int X_2 dx} dx} = \frac{d}{dx} l. \int e^{-\int X_2 dx} dx.$$

Кромѣ того замѣтимъ частное рѣшеніе $\alpha_1 = 0$. Если примемъ первое значеніе $\alpha_1$, то будемъ имѣть уравненіе

$$\frac{dz_1}{dx} - X_3 z_1^2 - (X_2 + 2\alpha_1) z_1 - 1 = 0,$$

а если примемъ $\alpha_1 = 0$, то преобразованное уравненіе будетъ

$$\frac{dz_1}{dx} - X_3 z_1^2 - X_2 z_1 - 1 = 0.$$

Если къ первому изъ послѣднихъ двухъ уравненій приложимъ условіе интегрируемости (C), найдемъ новое условіе

$$X_3 = -e^{-2\int (X_2 + 2\alpha_1) dx}, \quad . \; . \; . \quad (D)''$$

гдѣ $\alpha_1$ имѣетъ значеніе выше опредѣленное. Условіе интегрируемости для другаго уравненія будетъ

$$X_3 = -e^{-2\int X_2 dx} \quad . \; . \; . \; . \quad (C)'.$$

Послѣднее условіе не отличается отъ (C). Понятно, что если условіе (D)'' будетъ выполнено, то можно объинтегрировать уравненіе (2). Къ уравненіямъ въ $z_1$ снова прилагаемъ тоже преобразованіе, то есть положимъ $z_1 = \alpha_2 + \frac{1}{z_2}$, тогда найдемъ уравненіе

$$\frac{d\alpha_2}{dx} - \frac{1}{z_2^2}\frac{dz_2}{dx} - X_3 \alpha_2^2 - \frac{2\alpha_2 X_3}{z_2} - \frac{X_3}{z_2} - (X_2 + 2\alpha_1)\alpha_2 -$$
$$- (X_2 + 2\alpha_1)\frac{1}{z_2} - 1 = 0.$$

Для опредѣленія $\alpha_2$ полагаемъ уравненіе

$$\frac{d\alpha_2}{dx} - X_3\alpha_2{}^2 - (X_2 + 2\alpha_1)\alpha_2 = 0;$$

откуда, интегрируя, выведемъ

$$X_3\alpha_2 = -\frac{d}{dx}\, l. \int X_3 e^{\int (X_2 + 2\alpha_1)dx} dx$$

и преобразованное уравненіе будетъ

$$\frac{dz_2}{dx} + z_2{}^2 + (X_2 + 2\alpha_1 + 2X_3\alpha_2)z_2 + X_3 = 0.$$

Другое уравненіе въ $z_1$ тѣмъ же преобразованіемъ обратится въ

$$\frac{dz_2}{dx} + z_2{}^2 + (X_2 + 2X_3\alpha_2)z_2 + X_3 = 0.$$

Прилагая условіе (C) интегрируемости къ двумъ послѣднимъ уравненіямъ, находимъ два новыя условія

$$X_3 = -e^{-2\int (X_2 + 2\alpha_1 + 2X_3\alpha_2)dx} \quad \ldots\ldots \quad (D)'''$$

$$X_3 = -e^{-2\int (X_2 + 2X_3\alpha_2)dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C)''.$$

Преобразованіе $z_2 = \alpha_3 + \frac{1}{z_3}$, подобно предыдущему, приведетъ къ двумъ новымъ дифференціальнымъ уравненіямъ

$$\frac{dz_3}{dx} - X_3 z_2{}^2 - (X_2 + 2\alpha_1 + 2X_3\alpha_2 + 2\alpha_3)z_3 - 1 = 0$$

$$\frac{dz_3}{dx} - X_3 z_3{}^2 - (X_2 + 2X_3\alpha_2 + 2\alpha_3)z_3 - 1 = 0,$$

въ которыхъ $\alpha_3$ есть функція $x$, удовлетворяющая дифференціальному уравненію

$$\frac{d\alpha_3}{dx} + \alpha_3{}^2 + (X_2 + 2\alpha_1 + 2X_3\alpha_2)\alpha_3 = 0;$$

откуда имѣемъ

$$\alpha_3 = \frac{d}{dx} l \int e^{-\int (X_2 + 2\alpha_1 + 2X_3\alpha_2)dx} dx.$$

Начальное условіе интегрируемости, приложенное къ уравненіямъ съ $z_3$, дастъ два новыхъ условія

$$X_3 = -e^{-2\int (X_2 + 2\alpha_1 + 2X_3\alpha_2 + 2\alpha_3)dx} \quad \ldots \quad (D)^{IV}$$

$$X_3 = -e^{-2\int (X_2 + 2X_3\alpha_2 + 2\alpha_3)dx} \quad \ldots\ldots \quad (C)'''$$

Полагая $z_3 = \alpha_4 + \frac{1}{z_4}$, выведемъ слѣдующія два условія интегрируемости для уравненія (2), которыя будутъ

$$X_3 = -e^{-2\int (X_2 + 2\alpha_1 + 2X_3\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2X_3\alpha_4)dx} \ldots (D)^{V}$$

$$X_3 = -e^{-2\int (X_2 + 2X_3\alpha_1 + 2\alpha_3 + 2X_3\alpha_4)dx}, \quad \ldots \quad (C)^{IV}$$

гдѣ $\alpha_4$ опредѣляется изъ формулы

$$X_3\, \alpha_4 = -\frac{d}{dx} l. \int X_3 e^{\int (X_2 + 2\alpha_1 + 2X_3\alpha_2 + 2\alpha_3)dx} dx$$

и т. д Такимъ образомъ рядомъ преобразованій, образующихъ непрерывную дробь, получаются два неопредѣленные ряда условій интегрируемости для уравненія (2): съ одной стороны рядъ условій (D)′, (D)″, (D)‴,...., а съ другой рядъ (C)′, (C)″, (C)‴,....; входящія въ эти уравненія функціи $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ удовлетворяютъ извѣстнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ, которыя могутъ быть объинтегрированы; для этихъ функцій мы нашли выше рядъ выраженій, составляющихся по опредѣленному закону. Найденныя условія интегрируемости для уравненія (2) также составляются одно изъ другаго по очевидному закону, однако приложеніе ихъ въ этомъ видѣ къ даннымъ дифференціальнымъ уравненіямъ было бы затруднительно. Мы покажемъ теперь, какъ оба полученные ряда условій могутъ быть преобразованы въ другіе ряды, приложеніе которыхъ будетъ весьма удобно и которые откроютъ намъ весьма обширный классъ уравненій вида (I), интегрующійся помощію квадратуръ; при этомъ самый интегралъ будетъ очевидно представляться въ видѣ нѣкоторой непрерывной дроби.

15. Разсмотримъ сначала рядъ условій $(D)'$, $(D)''$,... Условіе $(D)'$ показываетъ что можно объинтегрировать уравненіе

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + X_2 y - e^{-2\int X_2 dx} = 0.$$

Преобразуемъ $(D)''$. Вставивъ вмѣсто $\alpha_1$ его выраженіе, легко найдемъ, что условіе $(D)''$ обращается въ слѣдующее:

$$X_3 = -\frac{e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c + \int e^{-\int X_2 dx} dx\right)^4}$$

и что, слѣдовательно, можно объинтегрировать уравненіе вида

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + X_2 y - \frac{e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c + \int e^{-\int X_2 dx} dx\right)^4} = 0.$$

Преобразуемъ условіе $(D)'''$. Полагая для краткости $e^{-\int (X_2 + 2\alpha_1) dx} = R$, разсматриваемое условіе можно написать въ видѣ

$$\frac{X_3}{R} = -R . e^{-4\int X_3 \alpha_2 dx};$$

но изъ формулы опредѣляющей $\alpha_2$ найдемъ, что

$$\int X_3 \alpha_2 dx = -l \cdot \int X_3 e^{\int (X_2 + 2\alpha_1) dx} dx = -l \cdot \int \frac{X_3}{R} dx.$$

Вставивъ это выраженіе въ предыдущее уравненіе, если положимъ $\int \frac{X_3}{R} dx = w$, будемъ имѣть

$$-\frac{dw}{w^4}=\mathrm{R}dx\,;$$

откуда по интегрированіи выведемъ

$$w=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int \mathrm{R}dx\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

Далѣе чрезъ дифференцированіе получимъ

$$\mathrm{X}_3=-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{3}}\mathrm{R}^2\left(\int \mathrm{R}dx\right)^{-\frac{4}{3}}.$$

Вставляя вмѣсто R его выраженіе, уже нетрудно будетъ получить

$$\mathrm{X}_3=-\frac{e^{-2\int \mathrm{X}_2dx}}{\left(c+\int e^{-\int \mathrm{X}_2dx}dx\right)^{\frac{8}{3}}},$$

гдѣ постоянный множитель $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{3}}$ присоединенъ къ произвольному постоянному въ интегралѣ $-2\int \mathrm{X}_2dx$, стоящемъ показателемъ. Этотъ послѣдній видъ условія показываетъ возможность интегрированія въ квадратурахъ уравненія

$$\frac{dy}{dx}+y^2+\mathrm{X}_2y-\frac{e^{-2\int \mathrm{X}_2dx}}{\left(c+\int e^{-\int \mathrm{X}_2dx}dx\right)^{\frac{8}{3}}}=0.$$

Совершенно подобнымъ-же образомъ можетъ быть преобразовано условіе интегрируемости $(\mathrm{D})^{\mathrm{IV}}$. Чрезъ послѣдовательныя интегрированія и дифференцированія найдемъ въ этомъ случаѣ преобразованное условіе

$$\mathrm{X}_3=-\frac{e^{-2\int \mathrm{X}_2dx}}{\left(c+\int e^{-\int \mathrm{X}_2dx}dx\right)^{\frac{12}{5}}};$$

откуда заключимъ о возможности интегрированія въ квадратурахъ дифференціальнаго уравненія

$$\frac{dy}{dx}+y^2+X_2y-\frac{e^{-2\int X_2dx}}{\left(c+\int e^{-\int X_2dx}dx\right)^{\frac{12}{5}}}=0$$

и т. д. Такимъ образомъ мы видимъ возможность интегрированія неопредѣленными квадратурами для класса дифференціальныхъ уравненій, заключающагося въ общемъ видѣ

$$\frac{dy}{dx}+y^2+X_2y-\frac{e^{-2\int X_2dx}}{\left(c+\int e^{-\int X_2dx}dx\right)^{m}}=0,$$

гдѣ показатель $m$ можетъ получать неопредѣленной рядъ числовыхъ значеній

$$m=0,\ 4,\ \frac{8}{3},\ \frac{15}{5},\ \ldots\ .$$

Этотъ рядъ чиселъ выражается общею числовою формою

$$m=\frac{4i}{2i-1},$$

гдѣ $i$ есть число цѣлое положительное. Полагая $i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ получимъ предыдущій рядъ значеній. По аналогіи можно догадываться, что вообще можно будетъ интегрировать квадратурами дифференціальныя уравненія, заключающіяся въ слѣдующемъ общемъ видѣ

$$\frac{dy}{dx}+y^2+X_2y-\frac{e^{-2\int X_2dx}}{\left(c+\int e^{-\int X_2dx}dx\right)^{\frac{4i}{2i-1}}}=0.$$

Далѣе мы докажемъ это совершенно строго, считая заключеніе по аналогіи недостаточнымъ.

Обратимся теперь къ ряду условій интегрируемости (C)′, (C)″, (C)‴,.... Всѣ эти условія могутъ быть преобразованы совершенно подобно предыдущему, выражая въ каждомъ изъ нихъ $X_3$ чрезъ $X_2$. Такимъ образомъ, принимая для краткости $e^{-\int X_2 dx} = S$, найдемъ что (C)″ можно написать въ видѣ

$$\frac{X_3}{S} = -S \,.\, e^{-4\int X_3 \alpha_2 dx},$$

гдѣ вмѣсто $\alpha_2$ нужно вставить его прежнее выраженіе, не забывая только, что въ настоящемъ случаѣ $\alpha_1 = 0$ и потому будемъ имѣть

$$\frac{X_3}{S} = S\left(\int \frac{X_3}{S} dx\right)^4, \text{ откуда } \frac{1}{3v^3} = \int S dx,$$

гдѣ $v = \int \frac{X_3}{S} dx$; изъ послѣдняго уравненія выведемъ сначала $v$, а потомъ одифференцируемъ, получимъ

$$X_3 = -k\left(\int S dx\right)^{-\frac{4}{3}} S^2$$

или, вставляя вмѣсто S его выраженіе и присоединяя постоянный множитель $k$ къ показателю, найдемъ

$$X_3 = -\frac{e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c + \int e^{-\int X_2 dx} dx\right)^{\frac{4}{3}}}$$

и, слѣдовательно, можно будетъ объинтегрировать уравненіе

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + X_2 y - \frac{e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c + \int e^{-\int X_2 dx} dx\right)^{\frac{4}{3}}} = 0.$$

Подобнымъ же образомъ можно преобразовать условіе $(C)'''$, которое будетъ

$$\frac{X_3}{S} = - S\left(\int \frac{X_3}{S}dx\right)^4 e^{-4\int \alpha_3 dx}$$

Взявъ выраженіе для $\alpha_3$, положимъ въ немъ $\alpha_1 = 0$, тогда

$$\int \alpha_3 dx = l\,.\int v^2 S dx,$$

гдѣ $v$ имѣетъ прежнее значеніе. Вставивъ это выраженіе въ предыдущее равенство, можно будетъ произвести интегрированіе и вывести $X_3$; найдемъ

$$X_3 = - \frac{e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c + \int e^{-\int X_2 dx} dx\right)^{\frac{8}{5}}},$$

что доказываетъ возможность интегрированія дифференціальнаго уравненія

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + X_2 y - \frac{e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c + \int e^{-\int X_2 dx} dx\right)^{\frac{8}{5}}} = 0.$$

Точно также можно было бы преобразовать слѣдующее условіе интегрируемости разсматриваемаго ряда. Изъ всего этого слѣдуетъ, что дифференціальныя уравненія, заключающіяся въ общемъ видѣ

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + X_2 y - \frac{e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c + \int e^{-\int X_2 dx} dx\right)^{m}} = 0,$$

можно интегрировать неопредѣленными квадратурами, если показатель $m$ имѣетъ одно изъ значеній ряда

$$m = 0, \frac{4}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$$

Всѣ эти числа заключаются въ общей числовой формѣ $m = \frac{4i}{2i+1}$, гдѣ $i$ есть число цѣлое положительное. Соединяя этотъ результатъ съ вышеполученнымъ, можно догадываться, что всѣ уравненія, заключающіяся въ общемъ видѣ

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + X_2 y - \frac{e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c + \int e^{-\int X_2 dx} dx\right)^{\frac{4i}{2i \pm 1}}} = 0,$$

могутъ быть объинтегрированы помощію неопредѣленныхъ квадратуръ.

16. Перейдемъ теперь къ доказательству того, что законъ показателей въ ряду интегрирующихся уравненій дѣйствительно выражается числовою формулой $m = \frac{4i}{2i \pm 1}$. Положимъ теперь снова, что намъ дано интегрировать уравненіе

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + X_2 y + X_3 = 0, \text{ гдѣ } X_3 = -\frac{e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c + \int e^{-\int X_2 dx} dx\right)^m}.$$

Мы видѣли выше, что, приложивъ къ этому уравненію преобразованіе $y = \alpha + \frac{1}{z}$, оно обращается въ слѣдующее

$$\frac{dz}{dx} - X_3 z^2 - (X_2 + 2\alpha) z - 1 = 0,$$

гдѣ $\alpha$ удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$\frac{d\alpha}{dx} + \alpha^2 + X_2 \alpha = 0, \text{ откуда } \alpha = \frac{d}{dx} l . \int e^{-\int X_2 dx} dx,$$

или также можно положить $\alpha = 0$. Введемъ въ предыдущее уравненіе новое перемѣнное независимое, полагая

$$-\int X_3 dx = x', \quad \frac{dx'}{dx} = -X_3 \text{ и слѣдов. } \frac{dz}{dx} = -X_3 \frac{dz}{dx'};$$

тогда преобразованное уравненіе съ перемѣннымъ независимымъ $x'$ будетъ

$$\frac{dz}{dx'} + z^2 + X'_2 z + X'_3 = 0,$$

гдѣ для краткости положено

$$X'_2 = \frac{X_2 + 2\alpha}{X_3} \text{ и } X'_3 = \frac{1}{X_3}.$$

Очевидно, что изъ послѣднихъ двухъ уравненій можно исключить $X_2$ и тогда должны получить $X'_3 = f(X'_2)$; опредѣлимъ видъ этой функціи. Первое изъ двухъ послѣднихъ равенствъ даетъ

$$\int X_2 dx + 2l.\int e^{-\int X_2 dx} dx = -\int X'_2 dx'$$

или, положивъ для краткости $\int e^{-\int X_2 dx} dx = v$ и переходя отъ логарифмовъ къ числамъ, будемъ имѣть

$$\frac{dv}{v^2} = -X'_3 e^{\int X'_2 dx'} dx', \text{ откуда } v = \left[\int X'_3 e^{\int X'_2 dx'} dx'\right]^{-1};$$

одифференцировавъ $v$, найдемъ

$$\frac{dv}{dx} = \left[\int X'_3 e^{\int X'_2 dx'} dx'\right]^{-2} . e^{\int X'_2 dx'}.$$

Но $X'_3 = X_3^{-1} = v^m \left(\frac{dv}{dx}\right)^{-2}$; вставляя сюда вышенайденныя выраженія для $v$ и $\frac{dv}{dx}$ и полагая для краткости

$$\int X'_3 e^{\int X'_2 dx'} dx' = w,$$

найдемъ уравненіе

$$w^{m-4} dw = e^{-\int X'_2 dx'} dx' \text{ и } w = (m-3)^{\frac{1}{m-3}} \left( \int e^{-\int X'_2 dx'} dx' \right)^{\frac{1}{m-3}};$$

откуда чрезъ дифференцированіе выведемъ

$$X'_3 = -\frac{e^{-2\int X'_2 dx'}}{\left(c + \int e^{-\int X'_2 dx'} dx'\right)^{\frac{m-4}{m-3}}};$$

такъ что преобразованное уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ

$$\frac{dz}{dx'} + z^2 + X'_2 z - \frac{e^{-2\int X'_2 dx'}}{\left(c + \int e^{-\int X'_2 dx'} dx'\right)^{\frac{m-4}{m-3}}} = 0.$$

Это уравненіе имѣетъ совершенно тотъ же видъ какъ и первоначальное уравненіе: оно отличается только формою показателя. Слѣдовательно, если въ первоначальномъ уравненіи имѣли $m = \frac{4i}{2i-1}$, гдѣ $i$ есть нѣкоторое цѣлое положительное число, то сдѣлавъ приведенное выше преобразованіе, мы придемъ къ уравненію того же вида въ которомъ только показатель $m' = \frac{4-m}{3-m}$ будетъ имѣть величину $m' = \frac{4(i-1)}{2(i-1)-1}$, а потому, прилагая къ вновь полученному уравненію снова тоже преобразованіе, мы придемъ къ показателю $m'' = \frac{4(i-2)}{2(i-2)-1}$ и т. д. пока дойдемъ наконецъ до показателя $m^{(i)} = 0$, тогда уже уравненіе можно будетъ интегрировать непосредственно, какъ мы видѣли это выше. Изъ всего этого слѣдуетъ, что всегда можно будетъ объинтегрировать уравненіе, приведенное въ началѣ этого параграфа, если только показатель $m = \frac{4i}{2i-1}$.

Положимъ теперь, что въ началѣ преобразованія мы приняли $\alpha = 0$ и $y = \frac{1}{z}$, тогда будемъ имѣть уравненіе

$$\frac{dz}{dx} - X_3 z^2 - X_2 z - 1 = 0,$$

которое, если примемъ за независимое перемѣнное $x' = -\int X_3 dx$, обратится въ

$$\frac{dz}{dx'} + z^2 + X'_2 z + X'_3 = 0,$$

гдѣ $X'_2 = \frac{X_2}{X_3}$ и $X'_3 = \frac{1}{X_3}$. Исключая $X_2$ изъ двухъ послѣднихъ равенствъ, найдемъ подобно предыдущему

$$X'_3 e^{\int X'_2 dx'} \left( \int X'_3 e^{-\int X'_2 dx'} dx' \right)^{-m} = e^{-\int X'_2 dx'},$$

Откуда, пріемомъ совершенно сходнымъ съ вышеприведеннымъ, получимъ

$$X'_3 = -\frac{e^{-2\int X'_2 dx}}{\left( c + \int e^{-\int X'_2 dx'} dx' \right)^{\frac{m}{m-1}}}$$

и заключаемъ, что если возможно объинтегрировать дифференціальное уравненіе

$$\frac{dz}{dx'} + z^2 + X'_2 z - \frac{e^{-2\int X'_2 dx'}}{\left( c + \int e^{-\int X'_2 dx'} dx' \right)^{\frac{m}{m-1}}} = 0,$$

то и первоначальное уравненіе того же вида съ показателемъ $m$ также будетъ объинтегрировано. Если въ первоначальномъ уравненіи имѣли $m = \frac{4i}{2i+1}$, то приложивъ къ нему разсмотрѣнное нами преобразованіе, будемъ имѣть показателемъ $m_1 = \frac{m}{m-1}$ и слѣдовательно $m_1 = \frac{4i}{2i-1}$, а при такомъ показателѣ, какъ выше доказано, уравненіе разсматриваемаго вида можно объинтегрировать; такимъ образомъ можно считать доказаннымъ, что законъ показателей, найденный нами по аналогіи, существуетъ дѣйствительно.

17. Изъ вышесказаннаго заключаемъ, что всѣ уравненія, заключающіяся въ видѣ

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + X_2 y - \frac{e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c + \int e^{-\int X_2 dx} dx\right)^{\frac{4i}{2i \pm 1}}} = 0 \ldots \ (\alpha)$$

интегрируются помощію квадратуръ. Перемѣнивъ въ этомъ уравненіи, согласно замѣчанію сдѣланному въ началѣ изслѣдованія, $X_2$ на $X_2 - \frac{1}{X_1}\frac{dX_1}{dx}$ и $X_3$ на $X_1 X_3$, заключаемъ о возможности интегрированія въ конечномъ видѣ неопредѣленности квадратурами дифференціальныхъ уравненій болѣе общаго вида

$$\frac{dy}{dx} + X_1 y^2 + X_2 y - \frac{X_1 e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c + \int X_1 e^{-\int X_2 dx} dx\right)^{\frac{4i}{2i \pm 1}}} = 0, \ldots \ (\beta)$$

который содержитъ двѣ произвольныя функціи $X_1$ и $X_2$.

Что касается до опредѣленія интеграла уравненій $(\alpha)$ и $(\beta)$, то замѣтимъ, что рядъ преобразованій

$$y = \alpha_1 + \frac{1}{z_1},\ z_1 = \alpha_2 + \frac{1}{z_2},\ z_2 = \alpha_3 + \frac{1}{z_3},\ \ldots$$

приложенныхъ къ уравненію ($\alpha$) приведетъ насъ къ уравненію, которое можетъ быть объинтегрировано непосредственно и вмѣстѣ съ тѣмъ доставитъ намъ интегралъ уравненія ($\alpha$) въ видѣ непрерывной дроби законъ образованія которой легко обнаружится въ общемъ видѣ. Однако мы предпочтемъ преобразовать уравненіе ($\alpha$) сначала въ линейное уравненіе втораго порядка, ибо тогда интегралъ, какъ увидимъ, выразится проще и симметричнѣе. Но прежде покажемъ какъ изъ найденныхъ нами уравненій получаются наиболѣе извѣстные частные случаи.

Для полученія обыкновеннаго вида уравненія Рикатти достаточно въ уравненіи ($\beta$) положить $X_1 = 1$ и $X_2 = 0$, тогда будемъ имѣть уравненіе

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{a}{(c+x)^{\frac{4i}{2i \pm 1}}}$$

гдѣ $a$ произвольное постоянное. Сдѣлавъ $c = 0$, будемъ имѣть уравненіе, заключающее всѣ случаи интегрируемости Рикатти.

Возмемъ еще дифференціальное уравненіе

$$x\frac{dy}{dx} + ax^n y^2 - by = cx^m,$$

которое заключаетъ въ себѣ какъ частный случай не только уравненіе Рикатти, но и обобщенное уравненіе разсмотрѣнное Мальмстеномъ (Crelle. 39). Здѣсь $X_1 = ax^{n-1}$, $X_2 = -\frac{b}{x}$ и $X_3 = -cx^{m-1}$. Вычисляя $X_3$ по данной выше формулѣ, находимъ

$$X_3 = -\frac{e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c' + \int X_1 e^{-\int X_2 dx} dx\right)^{\varsigma}} = \frac{\beta^2 a x^{n-2b-1}}{\left(c' + \frac{a\beta}{b+n} x^{b+n}\right)^{\varsigma}}$$

гдѣ $\varsigma = \frac{4i}{2i \pm 1}$, а $c'$ и $\beta$ произвольныя постоянныя. Сдѣлавъ $c'=0$ и опредѣляя $\beta$ такъ чтобы имѣть $X_3=-cx^{m-1}$, сравнивая показателей и замѣнивъ $\varsigma$ его выраженіемъ, найдемъ такое условіе интегрируемости

$$m(2i\pm 1)+n(2i\mp 1)\mp 2b=0$$

для разсматриваемаго дифференціальнаго уравненія; причемъ замѣтимъ, что въ этомъ условіи могутъ быть сочетаемы или верхніе или нижніе знаки. Сдѣлавъ $n=1$, найдемъ условіе интегрируемости уравненія Мальмстена, а положивъ притомъ еще $b=0$ и перемѣнивъ $m$ на $m+1$, найдемъ условіе интегрируемости для уравненія Рикатти собственно.

18. Обратимся теперь снова къ уравненію ($\alpha$) и, желая преобразовать его въ линейное уравненіе втораго порядка, сдѣлаемъ $y=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$, тогда будемъ имѣть уравненіе

$$\frac{d^2u}{dx^2}+X_2\frac{du}{dx}-\frac{e^{-2\int X_2dx}}{\left(c+\int e^{-\int X_2dx}dx\right)^{\frac{4i}{2i\pm1}}}u=0\,,\ldots(\gamma)$$

которое слѣдовательно также можетъ быть интегрируемо въ квадратурахъ Для полученія интеграла этого уравненія полагаемъ для краткости

$$c+\int e^{-\int X_2dx}dx=\lambda \text{ и еще } \frac{4i}{2i\pm1}=m$$

и будемъ разсматривать уравненіе

$$\frac{d^2u}{dx^2}+X_2\frac{du}{dx}+X_3u=0,\text{ гдѣ } X_3=-\lambda^{-m}e^{-2\int X_2dx}.$$

Это послѣднее уравненіе, чрезъ введеніе новаго перемѣннаго независимаго, можетъ быть преобразовано въ весьма простое линейное уравненіе втораго порядка, которое уже не будетъ содержать произвольной функціи $X_2$; именно полагаемъ

$$\lambda^{1-\frac{m}{2}} = t \text{ и слѣдов. } \frac{dt}{dx} = \left(1 - \frac{m}{2}\right)\lambda^{-\frac{m}{2}} \cdot \frac{d\lambda}{dx}.$$

Внося эти выраженія въ данное дифференціальное уравненіе, получимъ

$$\left(1 - \frac{m}{2}\right)^2 \lambda^{-m} \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 \cdot \frac{d^2u}{dt^2} +$$

$$+\left(1 - \frac{m}{2}\right)\left\{\lambda^{-\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^2\lambda}{dt^2} - \frac{m}{2}\lambda^{-\frac{m}{2}-1}\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \lambda^{-\frac{m}{2}} X_2 \frac{d\lambda}{dx}\right\}\frac{du}{dt} -$$

$$-\lambda^{-m} e^{-2\int X_2 dx} \cdot u = 0.$$

Сокращая на $\lambda^{-\frac{m}{2}}$ и замѣчая, что

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} + X_2 \frac{d\lambda}{dx} = 0 \text{ и } e^{-2\int X_2 dx} = \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2$$

и затѣмъ отбрасывая во всѣхъ членахъ общаго множителя $\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2$, будемъ имѣть уравненіе

$$\left(1 - \frac{m}{2}\right)^2 \lambda^{1-\frac{m}{2}} \frac{d^2u}{dt^2} - \frac{m}{2}\left(1 - \frac{m}{2}\right)\frac{du}{dt} - \lambda^{1-\frac{m}{2}} \cdot u = 0;$$

но $\lambda^{1-\frac{m}{2}} = t$, а потому можно написать это уравненіе такъ

$$t\frac{d^2u}{dt^2} + p\frac{du}{dt} - q^2\, tu = 0,$$

гдѣ для краткости положено $\frac{m}{m-2} = p$ и $\frac{4}{(m-2)^2} = q^2$. Полагая въ этомъ уравненіи $u = e^{\alpha t} \cdot v$, найдемъ

$$t\frac{d^2v}{dt^2} + (p + 2qt)\frac{dv}{dt} + pqv = 0,$$

если только положимъ, что $\alpha^2 = q^2$ и $\alpha = \pm q = \pm \frac{2}{m-2}$, такъ что передъ $q$ можно принимать знакъ $+$ или знакъ $-$. Это послѣднее уравненіе есть одно изъ тѣхъ къ которымъ удобно прилагается способъ интегрированія Ліувилля чрезъ дифференцированіе съ произвольнымъ указателемъ, но такъ какъ формулы получаемыя при этомъ содержатъ часто знакъ $d$ съ несоизмѣримымъ или мнимымъ указателемъ, то кажется лучше прилагать способъ Ліувилля только при дифференцированіи съ цѣлымъ показателемъ положительнымъ или отрицательнымъ, а въ случаяхъ, которые требуютъ дифференцированія съ дробнымъ показателемъ и которые соотвѣтствуютъ тѣмъ обстоятельствамъ при которыхъ интегрированіе въ квадратурахъ неопредѣленныхъ повидимому невозможно, лучше обращаться къ способу Лапласа, выражая искомый интегралъ уравненія чрезъ опредѣленныя квадратуры. Измѣняя нѣсколько пріемъ Ліувилля, умножимъ предыдущее уравненіе на $dt^n$ и объинтегрируемъ каждый членъ $n$ разъ; интегрируя по частямъ, найдемъ

$$\int^{n} t\,\frac{d^2v}{dt^2}\,dt^n = t\int^{n-2} v\,dt^{n-2} - n\int^{n-1} v\,dt^{n-1}$$

$$\int^{n} (p+2qt)\,\frac{dv}{dt}\,dt^n = (p+2qt)\int^{n-1} v\,dt^{n-1} - 2qn\int^{n} v\,dt^n;$$

вставляя, будемъ имѣть уравненіе

$$t\int^{n-2} v\,dt^{n-2} + (p-n+2qt)\int^{n-1} v\,dt^{n-1} + q\,(p-2n)\int^{n} v\,dt^n = \varphi(t)$$

гдѣ $\varphi(t)$ есть цѣлая функція $n$—1-й степени. Полагая что $p=2n$, то есть что $m=\dfrac{4n}{2n-1}$, гдѣ $n$ произвольное цѣлое положительное число, получимъ уравненіе

$$t\int^{n-2} v\,dt^{n-2} + (n+2qt)\int^{n-1} v\,dt^{n-1} = \varphi(t)$$

или, полагая для краткости $\int^{n-1} v dt^{n-1} = Z$, будемъ имѣть линейное уравненіе перваго порядка

$$t\frac{dZ}{dx} + (n + 2qt)\,Z = \varphi\,(t);$$

откуда, по извѣстной формулѣ, получимъ

$$Z = C_1 e^{-2qt} t^{-n} + C_1 e^{-2qt} t^{-n}.\int t^{n-1} e^{2qt} \varphi\,(t)\,dt.$$

Послѣдній интегралъ можно взять, сдѣлавъ слѣдующее замѣчаніе. Функцію $\varphi\,(t)$ можно представить въ другомъ видѣ; именно положимъ, что

$$\int^{n-1} v dt^{n-1} = v_{n-1} + f(t) = v_{n-1} + c_0 t^{n-2} + c_1 t^{n-3} + \ldots + c_{n-2},$$

гдѣ $v_{n-1}$ означаетъ интегралъ $n - 1$-го порядка отъ $vdt$, взятый не прибавляя произвольныхъ постоянныхъ при интегрированіяхъ, а коефиціенты $c_0\, c_1 \ldots c_{n-2}$ суть $n-1$ произвольныхъ постоянныхъ; тогда очевидно, что

$$\varphi\,(t) = t f'(t) + (n + 2qt)\, f(t),$$

а поэтому будемъ имѣть

$$\int t^{n-1} e^{2qt} \varphi\,(t)\,dt = e^{2qt} t^n.\, f(t);$$

что легко повѣрить самымъ дифференцированіемъ. Вставивъ, получимъ

$$Z = C_1 e^{-2qt} t^{-n} + C_1 f(t).$$

Отсюда чрезъ дифференцированіе выведемъ

$$\frac{d^{n-1}Z}{dt^{n-1}} = v_1 = C_1\,\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left[t^{-n} e^{-2qt}\right].$$

Если бы въ началѣ вычисленія приняли $\alpha = -q$, то имѣли бы уравненіе

$$t\frac{d^2v}{dt^2} + (p - 2qt)\frac{dv}{dt} - pqv = 0$$

и отсюда, чрезъ интегрированіе повторенное $n$ разъ, въ случаѣ $m = \frac{4n}{2n-1}$ вывели бы подобно предыдущему

$$t\frac{dZ}{dt} + (n - 2qt)\,Z = \varphi(t),$$

сохраняя тѣже обозначенія какъ и выше. Отсюда

$$Z = C_2 e^{2qt} t^{-n} + C_2 f(t),$$

гдѣ $f(t)$ есть цѣлая функція $n-2$-й степени, а потому найдемъ

$$\frac{d^{n-1}Z}{dt^{n-1}} = v_2 = C_2 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left[t^{-n}e^{2qt}\right].$$

Такимъ образомъ получили два частныхъ интеграла уравненія въ $v$, изъ которыхъ каждый содержитъ одно произвольное постоянное. Полный интегралъ уравненія въ $u$ будетъ

$$u = C_1 e^{qt}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left[t^{-n}e^{-2qt}\right] + C_2 e^{-qt}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left[t^{-n}e^{2qt}\right]$$

Здѣсь $n = \frac{m}{2m-4}$ есть число цѣлое положительное, такъ что показатель $m$ предполагается имѣющимъ видъ, $m = \frac{4n}{2n-1}$, что, какъ мы видѣли прежде, даетъ одинъ рядъ случаевъ въ которыхъ возможно интегрированіе нашего уравненія помощію неопредѣленныхъ квадратуръ. Для полученія интеграла въ случаѣ $m = \frac{4n}{2n+1}$ нужно будетъ сначала нѣсколько измѣнить пріемъ преобразованія уравненія; именно, если въ уравненіи

$$t\frac{d^2u}{dt^2} + p\frac{du}{dt} - q^2tu = 0$$

положимъ $u=t^\beta . z$, то опредѣливъ $\beta$ такъ чтобы $\beta-1+p=0$, то есть положивъ $\beta=1-p$, придемъ къ уравненію

$$t\frac{dz^2}{dt^2}+p_1\frac{dz}{dt}-q^2tz=0,$$

гдѣ $p_1=2-p=\frac{m-4}{m-2}$. Далѣе съ этимъ уравненіемъ поступимъ точно также какъ поступали выше съ предыдущимъ уравненіемъ, тогда, полагая $p_1=2n$, что соотвѣтствуетъ случаямъ когда $m=\frac{4n-4}{2n-1}$ и все равно случаямъ когда $m=\frac{4n}{2n+1}$, придемъ, повторяя предыдущій выводъ, къ интегралу

$$u=t^{1-p}.\left\{C_1e^{qt}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left[t^{-n}e^{-2qt}\right]+C_2e^{-qt}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left[t^{-n}e^{2qt}\right]\right\},$$

гдѣ $n=\frac{m-4}{4m-4}$ есть число цѣлое положительное.

Такимъ образомъ разсмотрѣніе линейнаго уравненія втораго порядка

$$\frac{d^2u}{dx^2}+X_2\frac{du}{dx}+\frac{e^{-2\int X_2dx}}{\left(c+\int e^{-\int X_2dx}dx\right)^m}u=0$$

привело насъ снова къ найденнымъ уже случаямъ интегрируемости, именно когда $m=\frac{4n}{2n\pm1}$; въ тѣхъ случаяхъ когда показатель $m$ не имѣетъ этого вида можно получить интегралъ этого уравненія выраженнымъ чрезъ опредѣленные интегралы; составленіе этихъ формулъ не затруднительно, ибо введя по прежнему перемѣнное независимое $t$, мы будемъ имѣть уравненіе, интегрированіе котораго чрезъ опредѣленные интегралы извѣстно.