

DIE WISSENSCHAFT

Sammlung von Einzeldarstellungen aus den Gebieten der
Naturwissenschaft und der Technik

Herausgegeben von Prof. Dr. EILHARD WIEDEMANN

BAND 74

Theorien des Magnetismus

Aus dem Amerikanischen übersetzt

von

Joseph Würschmidt



Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

1925

Theorien des Magnetismus

Bericht des Komitees über Theorien des Magnetismus des National Research Council in Washington von S. J. Barnett, L. R. Ingersoll, J. Kunz, S. L. Quimby, E. M. Terry, S. R. Williams, A. P. Wills. Nach der im Bulletin of the National Research Council erschienenen Veröffentlichung

übersetzt von

Joseph Würschmidt

Mit 67 Abbildungen



Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

ISBN 978-3-663-03326-4 ISBN 978-3-663-04515-1 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-663-04515-1

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1925

Alle Rechte vorbehalten

Vorwort zur amerikanischen Ausgabe.

Die vorliegende Arbeit versucht in großen Umrissen die Entstehung und Entwicklung der magnetischen Theorien von der Zeit Poissons und Ampères bis jetzt zu skizzieren, mit Einschluß einiger experimenteller Ergebnisse, besonders in dem Gebiet der Magnetostriktion, wo Theorie und Experiment sich in verhältnismäßig bester Übereinstimmung befinden.

Es ist zu bemerken, daß in dem vorliegenden Werke der Hall-Effekt oder verwandte Erscheinungen nicht berücksichtigt werden, der Grund hierfür liegt darin, daß dieses Gebiet von dem National Research Council einem anderen Komitee übergeben wurde. Wenn einige Gebiete, die sonst eigentlich hier einschlägig wären, fortgelassen sind, so liegt der Grund in der uns auferlegten räumlichen Beschränkung. Gewisse Abschnitte sind vielleicht mehr hervorgetreten, als ihrer Bedeutung entspricht, während andere wider Gebühr zu kurz gekommen sind.

Da der vorliegende zusammenfassende Bericht durch die Mitarbeit vieler geographisch weit getrennter Verfasser, denen enge Zusammenarbeit nicht immer möglich war, entstanden ist, mag stellenweise die Einheitlichkeit etwas zurücktreten. Aber trotz solcher Mängel hoffen wir, daß das Werk einen Überblick über das Thema liefern möge, der in seinen Hauptumrissen widerspruchsfrei ist, und daß der Leser durch seine Lektüre ein treues Bild des gegenwärtigen Standes der magnetischen Theorien erhalte.

Das Komitee ist Herrn Professor L. R. Ingersoll von der Universität für seinen Beitrag über Magneto-Optik zu Dank verpflichtet.

Vorwort des Übersetzers.

Als der Unterzeichnete vor einiger Zeit durch die Liebenswürdigkeit des Herrn S. R. Williams, Oberlin College, das „Theories of Magnetism“ betitelte Bulletin of the National Research Council, Vol. 3, Part 3, Nr. 18 zugeschickt erhalten und auf seinen Inhalt durchgesehen hatte, kam ihm der Mangel eines derartigen Werkes in deutscher Sprache zum Bewußtsein, da in keinem der deutschen Werke über Magnetismus die theoretische Seite in ihrer historischen Entwicklung bis auf die neueste Zeit in gleicher Weise wie hier Berücksichtigung findet, und man deshalb bisher auf das Durchsehen der meist in Zeitschriften verstreut erschienenen Originalarbeiten angewiesen war.

Der Herausgeber der Sammlung „Die Wissenschaft“, Herr Geheimer Rat Prof. Dr. E. Wiedemann in Erlangen, hat nun in liebenswürdigster Weise die Aufnahme einer Übersetzung der „Theorien des Magnetismus“ in diese Sammlung ermöglicht. Es sei ihm auch an dieser Stelle herzlichst gedankt.

Bei der Anfertigung der Übersetzung hat mich meine Frau Lore wesentlich unterstützt; Herrn Dr. F. Stäblein in Essen bin ich für eine genaue Durchsicht und das Lesen einer Korrektur zu Dank verpflichtet.

Die Autoren der einzelnen Aufsätze hatten die Freundlichkeit, das der Übersetzung zugrunde gelegte Exemplar noch einmal zu überarbeiten bzw. durchzusehen und eine Reihe von Verbesserungen und Ergänzungen anzubringen.

Tucumán, im August 1925.

Joseph Würschmidt.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
S. L. Quimby. Magnetische Theorien vor der Entdeckung des Elektrons	1
Die Anfänge der Lehre vom Magnetismus, Gilberts De magnete	1
Poissons Theorie des Magnetismus	3
Ampères Theorie des Magnetismus	6
Die magnetischen Untersuchungen von Faraday	7
Webers Theorie des Magnetismus	9
Maxwells Modifikation der Theorie Webers	13
Ewings Theorie des permanenten Magnetismus und der Hysteresis	15
A. P. Wills. Der Fortschritt in der Entwicklung der Theorien des Para- und Diamagnetismus von 1900 bis 1920 . . .	18
I. Das durch ein bewegtes Elektron hervorgerufene elektrische und magnetische Feld	21
Mechanische Wirkung auf ein bewegtes Elektron in einem äußeren elektromagnetischen Felde	26
II. Das Magneton	26
Grundannahmen über die Struktureigenschaften des Magnetons	26
Das elektrische und das magnetische Potential für ein rotierendes Magneton	27
Der Mittelwert des Vektorpotentials für ein rotierendes starres Magneton	28
Der Mittelwert der durch ein rotierendes starres Magneton hervorgerufenen magnetischen Kraft	29
Das magnetische Moment eines rotierenden starren Magnetons	30
Das durch ein äußeres elektromagnetisches Feld auf ein Magneton hervorgerufene Drehmoment	30
Gleichungen für ein rotierendes starres Magneton, bezogen auf seine Hauptladungsachsen	33
Gleichungen für rotierende sphärische und axiale Magnetonen, bezogen auf Hauptachsen	34
Die Rotationsbewegung eines einem äußeren elektromagnetischen Felde unterworfenen starren Magnetons	36
Spezialfall des sphärischen Magnetons	36
Spezialfall des axialen Magnetons	39
Energie eines axialen rotierenden Magnetons in einem konstanten äußeren magnetischen Felde	41

	Seite
III. Die Verteilungsfunktion in den Theorien des Paramagnetismus	43
Fall eines Systems axialer Magnetonen in einem konstanten äußeren magnetischen Felde	45
Die Verteilungsformeln von Langevin	49
Modifikation von Langevins Verteilungsformel durch Ein- führung des magnetischen molekularen Feldes	50
Die Verteilungsfunktion in den Quantentheorien des Para- magnetismus	56
IV. Frühere Versuche zu Elektronentheorien des Magnetismus	56
Voigts Versuch einer Elektronentheorie des Magnetismus	57
V. Die Theorie von Langevin	66
Diamagnetismus	67
Paramagnetismus	74
Theorie eines paramagnetischen Gases	76
VI. Von Quantenhypothesen unabhängige Modifikationen der Langevinschen Theorie	81
Theorie von Honda	81
Theorien von R. Gans	83
Diamagnetismus	86
Trägheitsmomente der diamagnetischen Magnetonen	88
Paramagnetismus und Metamagnetismus	90
Theorie von Honda und Okubo	98
Theorie von Oxley	99
Theorie von Frivold	100
VII. Auf Quantenhypothesen beruhende Theorien des Para- magnetismus	100
Theorie von Oosterhuis	102
Theorie von Keesom	102
Theorie von Gans	103
Theorie von v. Weysenhoff	107
Auf die Plancksche Quantelungsmethode gegründete Theorien	115
Theorie von Reiche	117
Andere Theorien	118
Vergleich der Theorien mit dem Experiment	119
VIII. Der durch die Bewegung freier Elektronen in Metallen hervorgerufene Diamagnetismus	122
Theorie von Schroedinger	122
Der Diamagnetismus freier Elektronen	123
Diskussion der Ergebnisse	130
Die Abhängigkeit der Suszeptibilität k_f von der Feldstärke	132
E. M. Terry. Theorien des Ferromagnetismus. — Innere Felder	134
Historische Übersicht	134
Theorie von Ewing	135
Die Weissische Hypothese des molekularen Feldes	136
Übersicht über die Theorie von Langevin	136

	Seite
Das molekulare Feld	138
Spontane Magnetisierung	139
Die Größe des molekularen Feldes	140
Experimenteller Nachweis der Existenz des molekularen Feldes	141
1. Das Gesetz der korrespondierenden Zustände und die Änderung der Sättigungsintensität mit der Temperatur	141
2. Die Abhängigkeit der spezifischen Wärme von dem molekularen Felde	143
3. Die magnetischen Eigenschaften der Kristalle und die Hysteresekurve	145
Die Elementarmagnete der ferromagnetischen Körper . . .	149
Die Natur des Molekularfeldes	151
Theorie von Frivold	155
Theorie von Gans	162
Theorie von Honda und Okubo	167
Das mittlere molekulare Feld der diamagnetischen Körper	177
Das örtliche molekulare Feld	183
Spannungen und Energie des molekularen Feldes	186
Molekulares Feld und Zugfestigkeit	187
Die Dichteänderung bei der Kristallisation als Magneto- striktionseffekt des molekularen Feldes	188
J. Kunz. Theorien der magnetischen Kristalle und das Magneton	190
Pyrrhotit	192
Messungen bei gewöhnlichen Temperaturen	193
Hypothese von Weiss. Das innere molekulare Feld H_i	194
Hysteresis	197
Einfluß der Temperatur	199
Die anormalen Pyrrhotitkristalle	200
Kristallgruppen	201
Magnetit	203
Symmetrie	203
Eisenkristalle	205
Hämatit	209
Gruppe 1. Anormale Kristalle	210
Gruppe 2. Einfache Kristalle	211
Über die Theorie der ferromagnetischen Kristalle . . .	212
Magnetonen	220
Lösungen	223
Paramagnetische Körper in festem Zustand	227
Ferromagnetische Metalle bei tiefen Temperaturen . . .	229
Magnetische Eigenschaften beim Curieschen Punkte . .	230
Momente der Elementarmagnete nach J. Kunz	233
Das Magneton von Bohr	234
Das Magneton von Parson	239

	Seite
S. R. Williams. Magnetostriktion und ihre Bedeutung für die magnetischen Theorien	244
S. L. Quimby. Theorien der Magnetostriktion	258
Maxwells Theorie der Spannung in einem magnetisierten Medium	259
Die Theorie der Magnetostriktion von v. Helmholtz und Kirchhoff.	261
Larmors Anwendung des Energieprinzips	263
Die Untersuchungen von J. J. Thomson	265
Die Maxwellschen Spannungen in der Elektronentheorie	267
S. J. Barnett. Das Impulsmoment des Elementarmagnets . .	270
L. R. Ingersoll. Magneto-Optik.	293
Der Faraday-Effekt	294
Der Zeeman-Effekt	298
Der Kerr-Effekt	304

Magnetische Theorien vor der Entdeckung des Elektrons.

Von S. L. Quimby,

Professor der Physik an der Columbia-Universität.

Die Anfänge der Lehre vom Magnetismus. Gilberts „De Magnete“.

Die Lehre vom Magnetismus begann, ebenso wie die von der Elektrizität, mit den Untersuchungen von William Gilbert (* 1540, † 1603). Den Alten war die Tatsache bekannt, daß geriebener Bernstein leichte Körper anzieht, daß der Magnetstein die Fähigkeit hat, Eisen anzuziehen, und daß die gleiche Fähigkeit auch dem Eisen mitgeteilt werden kann, dadurch, daß man es in die Nähe eines Magnetsteins bringt oder es mit ihm streicht. So behandeltes Eisen war mindestens seit der Zeit der Kreuzzüge von den Seeleuten als Kompaß benutzt worden. Jedoch hatte man nicht versucht, den geringen sicheren Wissensbestand über diese Erscheinungen zu ordnen oder zu erweitern. Vielmehr war er in einer Menge falscher Lehren untergegangen, die der Stand der Ärzte um ihn herumgebaut hatte; denn dieser hatte hauptsächlich Interesse daran, die geheimnisvolle Eigenschaft des Magnetsteins zur Heilung von Krankheiten nutzbar zu machen. Gilbert, selbst Arzt, zerstreute diese irrigen Ansichten, indem er die medizinischen Eigenschaften des Magnetsteins klar von seinen magnetischen trennte und dann zu einer erschöpfenden Untersuchung der letzteren fortschritt.

Er unterschied scharf zwischen der elektrischen und der magnetischen Anziehung, indem er den Unterschied des Verhaltens von elektrisiertem Bernstein und magnetisiertem Eisen hervorhob. Er

betonte die zwiefache Natur des magnetischen Elements und prüfte den Einfluß der Form eines Magnets auf seine Stärke.

Nachdem er dargelegt hatte, daß die Erde selbst ein ungeheurer Magnet ist, untersuchte er die Inklination und Deklination der Magnetnadel an verschiedenen Punkten ihrer Oberfläche und brachte eine große Menge von Daten, die er durch die Beobachtungen von Seeleuten sicherstellte, miteinander in Beziehung.

Abgesehen jedoch von dem eigentlichen Wert von Gilberts Untersuchungen kann sein Werk als der Vorläufer der modernen wissenschaftlichen Methode betrachtet werden. Sein Werk „De Magnete“ [1600]¹⁾ enthält die erste Fassung eines Naturgesetzes, die vollständig auf den Ergebnissen des Experiments begründet ist. In ihm wandte Gilbert die Methode an, die später mit logischer Schärfe durch Francis Bacon fortgesetzt wurde.

Beinahe zwei Jahrhunderte lang wurde kein wesentlicher Fortschritt in der Lehre von den magnetischen Erscheinungen, wie sie in Gilberts Buche behandelt waren, erzielt. Während dieser Zeit fanden jedoch Entwicklungen in verschiedenen Richtungen statt, die schließlich den großen Fortschritt in der Theorie des Magnetismus möglich machten, der das 19. Jahrhundert kennzeichnet. Eine von ihnen war die Verbesserung der experimentellen Methoden. Nachdem die grundlegende Wichtigkeit der experimentellen Methode einmal endgültig festgelegt war, konnte die Entwicklung in dieser Richtung so weit fortschreiten, daß es Coulomb 1785 möglich war, den hinreichenden Beweis für das umgekehrte Quadratgesetz der magnetischen Anziehung und Abstoßung zu führen.

Ein anderer wichtiger Faktor im wissenschaftlichen Fortschritt dieser Zeit war das rasche Anwachsen der mathematischen Analysis, das der Entdeckung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibniz folgte. Unter dem Einfluß von Laplace, Lagrange und Legendre begannen Mathematiker, besonders Poisson und Fourier, zu Anfang des 19. Jahrhunderts die mathematische Analysis auf physikalische Probleme anzuwenden. 1812 veröffentlichte Poisson eine Arbeit über Elektrostatik und 1820 eine

¹⁾ Englische Übersetzung von P. Fleury Motteley. New York, John Willey and Sons, 1893. — Vgl. Feldhaus, Die Begründung der Lehre von Magnetismus und Elektrizität durch Dr. W. Gilbert. Heidelberg 1904. (A. d. Ü.)

andere über die Theorie des Magnetismus, die bis auf den heutigen Tag eine streng mathematische Fassung der Erscheinungen der magnetischen Induktion geblieben ist¹⁾.

Poissons Theorie des Magnetismus.

Der Ausgangspunkt von Poissons mathematischer Theorie ist Coulombs Gesetz, daß zwei magnetische Pole einander mit einer Kraft anziehen oder abstoßen, die umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer Entfernung voneinander ist. Als Mechanismus zur Nutzbarmachung dieses Grundsatzes übernahm er die „Zwei-Fluida-Theorie“ des Magnetismus, die zuvor von Coulomb und anderen aufgestellt worden war. In Übereinstimmung mit dieser Theorie nahm Poisson an, daß alle magnetischen Körper aus einer großen Anzahl kleiner Teilchen oder magnetischer Elemente bestehen, die gleiche Mengen des positiven und negativen magnetischen Fluidums enthalten. Diese Elemente sind selber vollkommene Leiter für die Fluida, aber die Zwischenräume sind für dieselben undurchdringlich, indem es diesen nicht möglich ist, von einem Element zum anderen zu gelangen. In dem unmagnetischen Zustand des Körpers sind die beiden Fluida zu einem einzigen neutralen Fluidum vereinigt.

Der Vorgang des Magnetisierens besteht in der Trennung der beiden Fluida in jedem magnetischen Element, indem das eine unter der Einwirkung der magnetischen Kraft in der einen Richtung, das andere in der entgegengesetzten verlagert wird.

Indem er Coulombs Gesetz dazu anwandte, die Wirkungen zwischen diesen magnetischen Elementen zu berechnen, nahm Poisson an, daß die von einer Menge q_1 des magnetischen Fluidums auf eine Menge q_2 des Fluidums derselben Art, die sich in einer Entfernung r von jener befindet, ausgeübte Abstoßungskraft proportional zu

$$\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

und unabhängig von der Substanz ist, aus der der magnetisierte Körper zusammengesetzt ist.

In der Anwendung dieser Auffassung des Phänomens der Magnetisierung löste Poisson das Problem, Größe und Richtung

¹⁾ Poisson, „Sur la Théorie du Magnétisme“. Mémoires de l'Institut 5, 247 und 488, 1820.

der Kraft zu berechnen, die von einem magnetisierten Körper irgendwelcher Form auf einen einzelnen, an irgend einem Punkte außerhalb des Körpers gelegenen Pol ausgeübt wird. Er stellte diese Kraft der als den negativen Gradienten einer Funktion V , die folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$V = \int_S \frac{1}{r} (\mathfrak{J} \cdot n) dS - \int_{\tau} \frac{1}{r} (\operatorname{div} \mathfrak{J}) d\tau,$$

wobei n ein Einheitsvektor senkrecht zu einem Element dS der Oberfläche S ist, die einen magnetisierten Körper vom Volumen τ begrenzt. \mathfrak{J} ist ein Vektor, derart, daß, wenn $d\tau$ ein Volumenelement in dem Körper ist, $\mathfrak{J} d\tau$ das magnetische Moment dieses Volumenelements darstellt. Er bedeutet deshalb die „Magnetisierungsintensität“ des Körpers an einem Punkte innerhalb $d\tau$. Die Form der Funktion V zeigt, daß die magnetische Wirkung irgend eines magnetisierten Körpers die gleiche ist, wie diejenige, die von einer Schicht des magnetischen Fluidums von der Dichte $\mathfrak{J} \cdot n$ auf seiner Oberfläche hervorgerufen würde, zusammen mit einer Verteilung der Dichte $-\operatorname{div} \mathfrak{J}$ im Innern des Körpers. Man bezeichnet diese beiden Größen als „Poissons äquivalente Oberflächen- und Raumverteilung des Magnetismus“.

Es ist augenscheinlich, daß für Punkte im Innern des magnetisierten Körpers r^{-1} für ein Element des zweiten Integrals in Poissons Ausdruck unendlich wird. Diese Schwierigkeit kann dadurch behoben werden, daß wir uns den Punkt innerhalb eines Hohlraums in dem Medium liegend denken, der klein in seinen Dimensionen, aber immer noch sehr groß im Vergleich zu den Dimensionen der Elementarmagnete selbst ist²⁾. Ein Teil der Oberflächendichte $\mathfrak{J} \cdot n$ wird sich auf der Wand des Hohlraums befinden und dieser Teil wird eine endliche Kraft auf den in dem Hohlraum liegenden Punkt hervorrufen, deren Wert von der Form des Hohlraums und der magnetischen Polarisation an dieser Stelle abhängig sein wird. Wenn wir diesen rein örtlichen Teil der magnetischen Kraft in dem Hohlraum vernachlässigen, so wird der übrigbleibende Teil, der von der polarisierten Masse im ganzen be-

1) Wir bezeichnen, abweichend von dem Gebrauch im englischen Text, Vektoren im allgemeinen mit deutschen Buchstaben. (A. d. Ü.)

2) Vgl. Larmor, „Ether and Matter“, S. 257.

stimmt ist, aus der allgemeinen Volumendichte $\text{div } \mathfrak{J}$ und aus der Oberflächendichte $\mathfrak{J} \cdot n$, genau wie in einem außerhalb gelegenen Punkte, abzuleiten sein. Dieser letztere Teil, der also durch das System als Ganzes unter Vernachlässigung des örtlichen, von der Molekularstruktur an dem betrachteten Punkte abhängigen Ausdrucks entsteht, ist auf diese Weise wohl definiert und wird die „magnetische Kraft \mathfrak{H} “ genannt. Auf diesem Wege gelangen wir zu einer Definition der magnetischen Kraft innerhalb eines magnetisierten Körpers, die sich im Einklang mit der Definition für außerhalb des Körpers gelegene Punkte befindet.

Obwohl die von Poisson über die Natur des magnetischen Elements übernommenen Hypothesen sich nicht als korrekt bestätigt haben, bleiben dennoch die von ihm entwickelten magnetostatischen Formeln gültig und nützlich, da sie auf der experimentellen Tatsache der induzierten Magnetisierung und nicht auf der Natur des Mechanismus, durch den diese hervorgebracht wird, beruhen.

Die Aufgabe, eine vollständige mathematische Theorie der magnetischen Induktion einzig auf experimentellen Grundlagen zu entwickeln, würde später von Lord Kelvin in Angriff genommen. In der Absicht, die Theorie Poissons von der Hypothese der beiden magnetischen Fluida frei zu machen, bereicherte sie Kelvin und vereinfachte die zugrunde liegenden Vorstellungen durch die Einführung der heute üblichen Terminologie¹⁾. Eine solche Weiterführung möge im besonderen hier angeführt werden.

Poisson hatte betont, daß die Magnetisierungsintensität in einem homogenen Körper im allgemeinen eine lineare Vektorfunktion der Feldstärke ist, so daß im allgemeinen die Darstellung von \mathfrak{J} durch \mathfrak{H} neun Konstante, die von der Natur des Körpers abhängig sind, erfordern würde. In einem isotropen Medium reduzieren sich diese neun Konstanten auf eine einzige, so daß in diesem Falle gilt:

$$\mathfrak{J} = k \mathfrak{H}.$$

Nachdem die folgenden Untersuchungen von Faraday, Plücker und Tyndall die Tatsache enthüllt hatten, daß Kristalle in verschiedenen Richtungen verschiedene magnetische Eigenschaften besitzen, erweiterte Kelvin die Theorie zu einer Abhandlung über das Problem der magnetischen Induktion in nichtisotropen Medien.

¹⁾ Kelvin, Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism, 24.

Er zeigte¹⁾, daß sich für solche Medien die neun von Poisson eingeführten Konstanten auf drei reduzieren, so daß:

$$\mathfrak{J} = \Phi . \mathfrak{S};$$

in diesem Ausdruck ist die lineare Vektorfunktion zu sich selbst konjugiert.

Wie sie uns durch Poisson, Green und Kelvin übermittelt wurde, kann die mathematische Theorie der magnetischen Induktion als vollständig angesehen werden, solange man nicht die Forderungen der modernen Betrachtungsweise erhebt, die wesentlich eine statistische Theorie darstellt. Die alte Theorie beschäftigt sich mit den durch die Materie im groben hervorgerufenen Erscheinungen, ohne zu versuchen, sich von den letzten Ursachen dieser Erscheinungen Rechenschaft zu geben. Ebenso wie die Thermodynamik der kinetischen Theorie vorausging, so war die Theorie der Magnetostatik die Vorläuferin des Studiums der Dynamik des kleinsten magnetischen Teilchens.

Ampère's Theorie des Magnetismus.

Im Juli 1820 zeigte Ørsted²⁾ die Entdeckung an, daß eine Magnethadel, die sich in der Nähe eines stromdurchflossenen elektrischen Leiters befindet, eine zu dem Leiter rechtwinklige Stellung anzunehmen strebt. Diese Entdeckung regte Ampère zu einer Reihe von Untersuchungen über die Beziehung zwischen elektrischem Strom und Magnetismus an, die er über einen Zeitraum von drei Jahren ausdehnte, und die 1825 zu der Veröffentlichung einer Arbeit über die mathematische Theorie der elektrodynamischen Erscheinungen führte, einer Arbeit, die von Maxwell als „eines der glänzendsten Meisterwerke der Wissenschaft“³⁾ bezeichnet wurde.

Ampère gründete seine magnetische Theorie auf die von ihm aufgestellte Identität zwischen den Eigenschaften von Poissons magnetischem „Zweifluida-Element“ und einem Solenoid molekularer Dimensionen, in dem ein elektrischer Strom beständig fließt. Nach Ampère sind die Moleküle einer magnetischen Substanz voll-

¹⁾ Kelvin, Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism, 30.

²⁾ Vgl. Ostwalds Klassiker d. exakten Wissenschaften Nr. 63. H. Ch. Ørsted und Th. J. Seebeck, Zur Entdeckung des Elektromagnetismus. Herausgegeben von A. v. Oettingen. (A. d. Ü.)

³⁾ Ampère, Mémoires de l'Institut 6, 175, 1823.

kommene Leiter, um die oder in denen beständig kleine elektrische Ströme fließen.

Der Vorgang der Magnetisierung besteht in einer Veränderung der Orientierung dieser Molekularströme, entweder durch eine Veränderung der Ebene des Stromes relativ zum Molekül oder durch Drehung des Moleküls im ganzen, derart, daß ihre anfänglich aufs geradewohl nach allen Richtungen stehenden Achsen sich parallel zu dem magnetisierenden Felde zu stellen suchen. Ampère zeigte, daß diese Beschaffenheit des magnetischen Elements genügen würde, nicht nur die magnetostatischen Erscheinungen in Übereinstimmung mit den durch Poisson abgeleiteten Formeln, sondern auch die Gesetze zu erklären, die die gegenseitigen Einwirkungen der Magnete und stromdurchflossenen Leiter, nach den Entdeckungen von Biot, Arago und ihm selbst darstellen.

Zu der Zeit, als Ampère schrieb, war die elektromagnetische Induktion noch nicht entdeckt, deshalb konnte er für den Ursprung und die Stärke der Molekularströme keine Hypothese aufstellen. Der große Beitrag von Ampère zu der Lehre vom Magnetismus bestand in dem Nachweis, daß alle damals bekannten Wirkungen zwischen Magneten unter sich und zwischen ihnen und elektrischen Leitern, auf einen einzigen Fall zurückgeführt werden können.

Die magnetischen Untersuchungen von Faraday.

Die Tatsache, daß ein elektrischer Strom unveränderlich von einem magnetischen Felde begleitet wird, veranlaßte Faraday, nach einem inversen Effekt zu suchen ¹⁾.

In einer der Royal Society 1831 vorgelegten Arbeit beschrieb er eine Reihe von Versuchen, mit welchen die Erscheinung der elektromagnetischen Induktion entdeckt war. Die Feststellung dieser reziproken, zwischen Magnetismus und strömender Elektrizität bestehenden Beziehung, stützte die Hypothese der Molekularströme von Ampère gegen die Theorie der zwei Fluida von

¹⁾ Faraday, Experimental Researches 1, 2. Vgl. Ostwalds Klassiker d. exakten Wissenschaften Nr. 81: M. Faraday, Experimental-Untersuchungen über Elektrizität 1. und 2. Reihe. Herausgegeben von A. v. Oettingen (A. d. Ü.). Das diamagnetische Verhalten von Wismut war vorher durch Brugmans beobachtet worden; er hatte bereits 1778 die Abstoßung des Wismuts behauptet. (A. d. Ü.)

Poisson. Eine andere Entdeckung Faradays indes genügte, den Beweis zugunsten von Ampères Theorie unwiderleglich zu erbringen und diejenige von Poisson als unhaltbar nachzuweisen.

Bei einer Untersuchung über die Drehung der Polarisations-ebene eines Lichtstrahls, der durch ein Stück Glas in einem starken magnetischen Felde hindurchging, beobachtete Faraday 1845, daß das Glas selbst magnetische Eigenschaften besaß, die diejenigen des Eisens und anderer „magnetischer“ Metalle entgegengesetzt waren ¹⁾. Während ein Stück Eisen sich mit seiner größten Länge parallel zum Felde zu stellen suchte, richtete sich das Glas, wenn es sich frei drehen konnte, senkrecht zum Felde. Faraday nannte diese neue Erscheinung „Diamagnetismus“ und stellte in der Folge eine gründliche Untersuchung über die magnetischen Eigenschaften einer großen Anzahl von festen, flüssigen und gasförmigen Körpern an. Er stellte dann endgültig die Tatsache fest, daß alle Körper entweder diamagnetisches oder magnetisches Verhalten aufweisen. Er kam sogar zu dem Schluß: „Wenn ein Mensch mit genügender Empfindlichkeit aufgehängt und in ein magnetisches Feld gebracht werden könnte, so würde er sich äquatorial einstellen, da alle Substanzen, aus denen er gebildet ist, das Blut eingeschlossen, diese Eigenschaft besitzen“.

Im Einklang mit der Zweifluida-Theorie des Magnetismus würden die Elementarmagnete aller Substanzen, wenn man sie in ein magnetisches Feld bringt, in derselben Richtung polarisiert werden. Faraday aber zeigte, daß die Polarisationsrichtung der diamagnetischen Körper in einem magnetischen Felde derjenigen der magnetischen Körper in dem gleichen Felde entgegengesetzt ist. Die Zweifluida-Theorie stimmt deshalb in dieser Beziehung nicht mit den Tatsachen überein.

Nach Ampères Theorie müßte eine Substanz, deren Moleküle durch sie umfließende permanente elektrische Ströme zu Elementarmagneten geworden sind, magnetisch sein. Andererseits, wenn anfangs keine solchen Ströme beständen, so würde ein angelegtes magnetisches Feld dahin wirken, solche Molekularströme zu induzieren, und diese würden nach Faradays Induktionsgesetz die

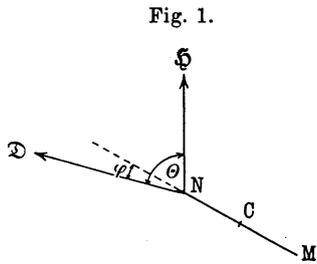
¹⁾ Faraday, a. a. O. 3, 27. Vgl. Ostwalds Klassiker d. exakten Wissenschaften Nr. 86: M. Faraday, Experimental-Untersuchungen über Elektrizität, 3. bis 5. Reihe. Herausgegeben von A. v. Oettingen. (A. d. Ü.)

Moleküle magnetisch entgegengesetzt zu dem äußeren Felde polarisieren, d. h. der Körper wäre diamagnetisch.

1852 entwickelte Wilhelm Weber auf Grund der Ampère'schen Hypothese und der Faradayschen Untersuchungen eine mathematische Theorie, die hier zweckmäßig eingehender dargestellt werden soll, da sie die Grundlage für gewisse modernen Theorien des Magnetismus bildet.

Webers Theorie des Magnetismus.

Weber ging von der Annahme aus, daß die Moleküle einer magnetischen Substanz kleine permanente Magnete sind, deren Achsen anfänglich aufs Geratewohl nach allen möglichen Richtungen zeigen¹⁾. Es sei NM (Fig. 1) ein derartiger Magnet, der sich um seinen Mittelpunkt C unter der Einwirkung eines äußeren Feldes \mathfrak{H} drehen kann. Wenn die Moleküle sich vollkommen frei drehen könnten, würde der Körper durch jedes noch so kleine angelegte Feld bis zur Sättigung magnetisiert werden. Daß das nicht der Fall war, wußte Weber, deshalb nahm er einen Widerstand gegenüber der Drehung der Elementarmagnete in der Form eines molekularen magnetischen Feldes \mathfrak{D} an, dessen Richtung für jedes Molekül mit der anfänglichen Gleichgewichtslage seiner Achse übereinstimmt und dessen Größe überall im Körper konstant ist.



Der Magnet wird unter der Einwirkung der beiden Felder im Gleichgewicht sein, wenn

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{H \sin \Theta}{D + H \cos \Theta}. \tag{1}$$

Bezeichnet μ das magnetische Moment des Moleküls, so ist seine zu \mathfrak{H} parallele Komponente vor dem Anlegen des Feldes

$$\mu \cos \Theta;$$

¹⁾ W. Weber, Über den Zusammenhang der Lehre vom Diamagnetismus mit der Lehre von dem Magnetismus und der Elektrizität. Pogg. Ann. 87, 145, 1854.

nach dem Anlegen des Feldes wird sie zu

$$\mu \cos (\Theta - \varphi).$$

Deshalb ist der durch die Anwesenheit des äußeren Feldes verursachte Zuwachs des zu H parallelen magnetischen Momentes, den wir μ_H nennen wollen, gegeben durch

$$\mu_H = \mu \{ \cos (\Theta - \varphi) - \cos \Theta \}. \quad (2)$$

Eliminiert man φ aus (1) und (2), so gilt für ein einzelnes Molekül:

$$\mu_H = \mu \left\{ \frac{H + D \cos \Theta}{\sqrt{H^2 + D^2 + 2 H D \cos \Theta}} - \cos \Theta \right\}.$$

Dieser Ausdruck muß nun über alle betrachteten Moleküle summiert werden. Es seien n Moleküle in der Volumeneinheit. Nimmt man anfänglich eine zufällige Verteilung der Achsen im Raum an, so ist augenscheinlich der Bruchteil der Moleküle, deren Achsen einen Winkel gleich oder kleiner als Θ mit \mathfrak{S} bilden, gegeben durch das Verhältnis der Zonenfläche, die ein Kegel vom Halbwinkel Θ aus einer Kugel ausschneidet, zu der Kugeloberfläche selbst, nämlich $\frac{1}{2}(1 - \cos \Theta)$. Die Zahl der Moleküle, deren Achsen mit \mathfrak{S} Winkel zwischen Θ und $\Theta + d\Theta$ bilden, ist deshalb

$$\frac{n}{2} \sin \Theta d\Theta.$$

Somit ist der Gesamtzuwachs des magnetischen Moments der Volumeneinheit, der durch die Drehung aller Elementarmagnete entstanden ist, gegeben durch

$$J = \frac{n}{2} \int_0^{\pi} \mu_H \sin \Theta d\Theta.$$

Ist $H < D$, so hat dieses Integral den Wert $J = \frac{2}{3} \mu n \frac{H}{D}$.

Ist $H = D$, so hat dieses Integral den Wert $J = \frac{2}{3} \mu n$.

Ist $H > D$, so hat dieses Integral den Wert $J = \mu n \left(1 - \frac{1}{3} \frac{D^2}{H^2} \right)$.

Ist $H = \infty$, so hat dieses Integral den Wert $J = \mu n$.

Eine Prüfung dieser Formeln zeigt, daß die Magnetisierungsstärke proportional dem angelegten Feld anwachsen müßte, bis sie

$\frac{2}{3}$ ihres Höchstwertes erreicht hat, danach müßte sie sich diesem letzteren asymptotisch nähern. Webers experimentelle Ergebnisse für Eisen waren in guter Übereinstimmung mit dieser Folgerung, jedoch ist seine Theorie nicht imstande, den remanenten Magnetismus zu erklären, und genauere Experimente haben gezeigt, daß die anfängliche Veränderung der Magnetisierungsstärke mit der Feldstärke nicht linear verläuft.

Bevor wir an die Besprechung der verschiedenen Modifikationen gehen, die zur Erklärung dieser Unstimmigkeiten vorgeschlagen wurden, wollen wir kurz die Webersche Theorie des Diamagnetismus wiedergeben.

Nach Webers Theorie gibt es in den Molekülen der diamagnetischen Körper geschlossene Kanäle, in denen die Elektrizität widerstandslos fließen kann. Kommt einer dieser Kanäle unter den Einfluß eines magnetischen Feldes, so wird in ihm ein elektrischer Strom in Bewegung gesetzt, und das magnetische Feld dieses induzierten Stromes wird dem äußeren Feld entgegengesetzt sein. In der mathematischen Entwicklung dieser Theorie benutzte Weber elektrodynamische Formeln, die aus Annahmen über die Natur der strömenden Elektrizität abgeleitet waren, jedoch seitdem wieder aufgegeben wurden. Es wird deshalb zweckmäßig sein, die Theorie in der Form darzustellen, die ihr später durch Maxwell gegeben wurde¹⁾.

Wenn L der Selbstinduktionskoeffizient eines molekularen Stromkreises, M der Koeffizient gegenseitiger Induktion zwischen diesem Stromkreis und einem anderen und außerdem i die Stromstärke in dem ersteren, i' diejenige in dem letzteren Stromkreis ist, dann ist

$$\frac{d}{dt}(Li + Mi') = -R \cdot i.$$

Da nach Voraussetzung $R = 0$, so erhalten wir durch Integration

$$Li + Mi' = Li_0,$$

worin i_0 der anfängliche Wert des Molekularstromes ist.

¹⁾ Maxwell, Treatise II, § 838. — Auszüge aus Maxwells Elektrizität und Magnetismus. Herausgegeben von F. Emde. Braunschweig 1915. (Enthält jedoch den § 838 nicht.) (A. d. Ü.)

Ruft der Strom i' ein magnetisches Feld von der Stärke \mathfrak{H} hervor, das mit der Senkrechten zur Ebene des Molekularstromes einen Winkel ϑ bildet, dann ist:

$$Mi' = H \cdot A \cdot \cos \vartheta,$$

worin A die Fläche des molekularen Stromkreises ist. Folglich ist

$$Li + H \cdot A \cdot \cos \vartheta = Li_0.$$

Diamagnetische Körper unterscheiden sich von den magnetischen dadurch, daß in ihnen keine permanenten Molekularströme vorhanden sind. Deshalb ist für diamagnetische Körper $i_0 = 0$, und wir erhalten als Wert für den induzierten Strom

$$i = -\frac{HA}{L} \cos \vartheta.$$

Das magnetische Moment μ dieses Stromes wird dargestellt durch

$$\mu = iA = -\frac{HA^2}{L} \cos \vartheta,$$

und seine zu \mathfrak{H} parallele Komponente durch

$$\mu \cos \vartheta = -\frac{HA^2}{L} \cos^2 \vartheta.$$

Gibt es in der Volumeneinheit n solche mit ihren Achsen aufs Geratewohl verteilte Molekularströme, so ist die Anzahl der zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ liegenden Achsen wie oben, $\frac{n}{2} \sin \vartheta d\vartheta$.

Folglich wird die resultierende Magnetisierung in der Volumeneinheit gegeben durch

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\pi -\frac{nHA^2}{2L} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta, \\ &= -\frac{1}{3} \frac{nHA^2}{L}. \end{aligned}$$

Und die diamagnetische Suszeptibilität in der Volumeneinheit wird

$$k = -\frac{1}{3} \frac{nA^2}{L}.$$

Es ist augenscheinlich, daß Webers Theorie des Diamagnetismus eine genügend grundlegende Erklärung der Erscheinung gibt,

vorausgesetzt, daß seine Annahme von der Existenz vollkommen leitender Kanäle in den Molekülen zutrifft. Jedoch fand diese Annahme bei seinen Zeitgenossen keinen großen Anklang, wie aus einer Bemerkung Tyndalls in der Baker-Vorlesung 1855 klar hervorgeht: „Diese Theorie ist ungeachtet ihrer großen Schönheit so außerordentlich künstlich, daß meiner Ansicht nach die allgemeine Überzeugung ihrer Richtigkeit nicht sehr stark sein kann“.

Die Entdeckung des Elektrons lieferte einen passenden Mechanismus für die Verifikation von Webers Hypothese, und verschiedene der neueren Versuche zur Erklärung des Diamagnetismus sind nichts anderes als Bemühungen, diesen Mechanismus der grundlegenden, von Weber aufgestellten Theorie anzupassen.

Maxwells Modifikation der Theorie Webers.

Wie erwähnt, versagt Webers Theorie für die Erklärung des remanenten Magnetismus. Maxwell führte eine neue zur Beseitigung dieses Mangels geeignete Annahme dadurch ein, daß er eine dauernde Veränderung in der Gleichgewichtslage eines Molekularmagnets vorsah¹⁾. Er setzte voraus, wenn diese Ablenkung der magnetischen Achse eines Moleküls unter der Einwirkung eines magnetisierenden Feldes kleiner ist als ein gewisser fester Wert β_0 , so kehre sie bei der Entfernung der ablenkenden Kraft in ihre ursprüngliche Lage zurück. Ist aber die Ablenkung β größer als β_0 , so wird, wenn das äußere Feld entfernt ist, die magnetische Achse des Moleküls nicht in ihre anfängliche Lage zurückkehren, sondern um einen Winkel $\beta - \beta_0$ dauernd abgelenkt bleiben. Indem er diese Hypothese in Webers Theorie einführte und dabei diese im übrigen unverändert ließ, konnte Maxwell theoretische Magnetisierungskurven erreichen, die die Erscheinung der Remanenz aufweisen. Aber während die Hysteresisschleife eines ferromagnetischen Körpers auf diese Weise in groben Umrissen erklärt werden kann, so versagt doch die modifizierte Theorie bei der Erklärung der kleineren Schleifen, die dieser dadurch überlagert werden können, daß man das magnetische Feld nur teilweise entfernt und dann wieder anlegt. Außerdem scheint eine physikalische Rechtfertigung für die

¹⁾ Maxwell, a. a. O., § 444. — § 444 ist in dem Buche von Emde nicht übersetzt. (A. d. Ü.)

Annahme des kritischen Winkels β_0 ebensowohl wie für das Zwangsfeld \mathfrak{D} in Webers Theorie zu fehlen.

Maxwell gab der Weberschen Theorie eine weitere Ausdehnung durch die Erforschung des diamagnetischen Effekts, der bei der Annahme von Molekularströmen sicherlich in allen magnetischen Körpern vorhanden ist.

In den Molekülen solcher Körper wird der anfängliche Strom i_0 durch die Einwirkung des angelegten Feldes vermindert werden, so daß wir in Übereinstimmung mit der Rechnung des vorigen Abschnittes erhalten:

$$i = i_0 - \frac{HA}{L} \cos \vartheta.$$

Das magnetische Moment des Moleküls ist gegeben durch

$$\mu = iA = i_0A - \frac{HA^2}{L} \cos \vartheta$$

und seine zu \mathfrak{H} parallele Komponente

$$\begin{aligned} \mu \cos \vartheta &= i_0A \cos \vartheta - \frac{HA^2}{L} \cos^2 \vartheta, \\ &= i_0A \cos \vartheta \left(1 - \frac{HA}{Li_0} \cdot \cos \vartheta \right). \end{aligned}$$

Ist $\frac{HA}{Li_0}$ klein gegen Eins, so ist $\mu = i_0A$, und wir kehren zu Webers Theorie des Magnetismus zurück. Ist $\frac{HA}{Li_0}$ groß gegen

Eins, dann ist $\mu = -\frac{HA^2}{L} \cos \vartheta$, und wir haben Webers Theorie des Diamagnetismus. Es ist klar, daß, je größer der Wert von i_0 , d. h. der ursprüngliche Wert des Molekularstromes ist, umso kleiner der diamagnetische Effekt sein wird. Außerdem wird ein großer Wert von L zu demselben Resultat führen. In jedem Falle folgt, daß die Intensität der Magnetisierung abnehme, wenn das angelegte Feld genügend stark gemacht würde. Ein derartiger Effekt ist nicht beobachtet worden, aber es ist klar, daß er sehr klein sein wird, und daß die experimentellen Schwierigkeiten, die zu seiner Darstellung überwunden werden müssen, entsprechend groß sind.

Ewings Theorie des permanenten Magnetismus und der Hysterisis.

Die sorgfältigen und ausführlichen Untersuchungen von H. A. Rowland¹⁾ u. a. zeigten endgültig, daß die bestehenden Theorien zur Erklärung der hysteretischen Erscheinungen des Eisens und anderer ferromagnetischer Körper nicht genügten. Als Ewing das Problem in Angriff nahm, gab er die willkürlichen Annahmen betreffs des Zwangsfeldes und des Winkels der konstanten Lage auf und versuchte das magnetische Verhalten dieser Körper dadurch zu erklären, daß er die von den Molekülen gegenseitig ausgeübte Zwangswirkung auf Grund der Tatsache, daß sie Magnete sind, untersuchte²⁾.

Betrachten wir der Einfachheit halber eine aus zwei gleichwertigen Molekularmagneten, die sich frei um feste Mittelpunkte drehen können, bestehende Gruppe (Fig. 2). Solange

keine störende Kraft vorhanden ist, werden sie sich beide mit ihren magnetischen Achsen in die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte einstellen. Wird ein äußeres Feld \mathcal{H} , das mit dieser Linie einen Winkel ϑ bildet, angelegt, so wird jeder der beiden Magnete um einen Winkel φ abgelenkt, indem er eine neue Gleichgewichtslage aufsucht, für die offenbar

$$2 m H r \sin (\vartheta - \varphi) = m^2 \frac{\overline{CN}}{P Q^3},$$

wobei m die Polstärke und $2 r$ die Länge jedes der beiden Magnete ist.

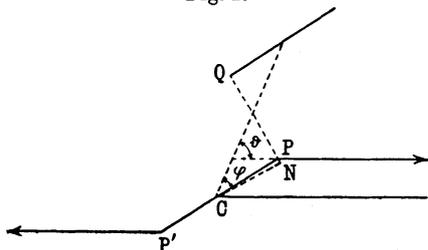
Die Lage der Moleküle entspricht dem Anfangszustand der Magnetisierung, bei dem mit wachsendem äußeren Feld ein kleiner Zuwachs des induzierten Magnetismus vorhanden ist. Ist

$$\frac{d}{d\vartheta} \{ 2 H m r \sin (\vartheta - \varphi) \} = \frac{d}{d\vartheta} \left\{ \frac{m^2 \overline{CN}}{P Q^3} \right\},$$

¹⁾ Phil. Mag. 46, 140, 1873; 48, 321, 1874.

²⁾ Ewing, Magnetic Induction in Iron and other Metals, S. 287. Deutsche Ausgabe von L. Holborn und S. Lindeck, 1892. Springer, Berlin. (A. d. Ü.)

Fig. 2.



so wird das Gleichgewicht unbestimmt, und ein weiterer Zuwachs von \mathcal{H} wird zu einer unstablen Lage führen. Die Magnete werden dann heftig nach einer neuen Gleichgewichtslage zu schwingen, in der ihre Achsen nahezu parallel zu \mathcal{H} stehen. Diese plötzliche Änderung entspricht dem zweiten Stadium der Magnetisierung, bei dem ein geringer Zuwachs des magnetischen Feldes von einem starken Zuwachs des magnetischen Momentes begleitet ist.

Jeder weitere Zuwachs von \mathcal{H} wird die Lage der Moleküle nicht mehr wesentlich ändern, und wir haben nun den Zustand angenäherter Sättigung.

Es bleibt nur noch zu bemerken, daß nunmehr bei einer Abnahme von \mathcal{H} die Magnete bei der Rückkehr in ihre Anfangslage nicht denselben Weg beschreiben werden. Die eine kleine Abnahme von \mathcal{H} begleitende Ablenkung wird so lange klein sein, bis ein zweites Stadium der instabilen Lage erreicht ist; dann schwingen sie annähernd in ihre Anfangslagen zurück.

Ein einzelnes Magnetpaar dieser Art würde eine diskontinuierliche Hysteresisschleife ergeben. Denken wir uns aber eine große Zahl solcher Elemente, deren Achsen anfänglich aufs Geratewohl liegen, so werden offenbar einige von ihnen die instabile Lage eher als andere erreichen, und die „Magnetisierungskurve“ des Aggregates wird einen stetigen Verlauf haben. Es wurden experimentell „Hysteresisschleifen“ mit einer Gruppe von nur 24 Magneten aufgenommen, die mit denen für Eisen beobachteten qualitativ vollkommen übereinstimmten.

Man kann die theoretische Remanenz eines Körpers erhalten, wenn man annimmt, daß er aus einer großen Anzahl von Gruppen zusammengesetzt ist, wobei die Moleküle jeder Gruppe nach einer gewissen Symmetrie geordnet sind. Das stimmt mit der Tatsache überein, daß Eisen und andere magnetische Metalle bekanntlich aus kleinen Kristallkörnern des kubischen Systems zusammengesetzt sind, die in der ganzen Masse unregelmäßig orientiert sind.

Für ein solches kubisches System ist es charakteristisch, daß die dauernde Ablenkung der Moleküle notwendigerweise entweder 0, oder 90 oder 180° betragen muß. Bezugnehmend auf Fig. 2 ist es klar, daß wir, wenn φ der Winkel der dauernden Ablenkung ist, drei Fälle zu beachten haben:

1. Moleküle, für die $\vartheta < 45^\circ$. Diese werden keine dauernde Ablenkung erfahren. Der Grund dafür liegt darin, daß die ur-

sprünglichen Linien günstiger gerichtet sind als rechtwinklig zu ihnen stehende. Für diese Moleküle ist $\varphi = \vartheta$.

2. Moleküle, für die $\vartheta > 45^\circ$ und $< 135^\circ$. Diese werden dauernd um einen rechten Winkel abgelenkt. In diesem Falle ist $\varphi = \vartheta - 90^\circ$.

3. Moleküle, für die $\vartheta > 135^\circ$. Für sie ist $\varphi = \vartheta - 180^\circ$.

Sind die Achsen der Moleküle anfänglich aufs Geratewohl verteilt, so erhalten wir, wie oben, für die Zahl der Moleküle, deren Achsen zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ liegen:

$$\frac{n}{2} \sin \vartheta d\vartheta,$$

und wenn das magnetische Moment jedes Moleküls μ ist, so wird der Beitrag dieser Moleküle zu der Gesamtintensität der Magnetisierung

$$\frac{\mu n}{2} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta$$

sein. Folglich wird der gesamte remanente Magnetismus gegeben durch

$$J = \frac{\mu n}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta + \frac{\mu n}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^2 \vartheta d\vartheta + \frac{\mu n}{2} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \sin \vartheta \cos (\vartheta - 180^\circ) d\vartheta = 0,8927 \mu n.$$

Neuere Untersuchungen scheinen darauf hinzuweisen, daß das Verhalten der magnetischen Elemente in den Kristallen nicht so einfach ist, als man nach Ewings Theorie glauben möchte. Immerhin bedeutet die Theorie einen Schritt im richtigen Sinne, denn sie packt das für die Erklärung des Ferromagnetismus grundlegende Problem an, nämlich die Abschätzung der gegenseitigen Wirkungen der magnetischen Elementareinheiten.

In der vorliegenden Übersicht haben wir die verschiedenen, dem betrachteten Zeitabschnitt angehörigen Theorien der Magnetostriktion nicht berücksichtigt. Eine Besprechung dieser Theorien ist in einem späteren Abschnitt des vorliegenden Werkes zu finden.

Der Fortschritt in der Entwicklung der Theorien des Para- und Diamagnetismus von 1900 bis 1920.

Von **A. P. Wills,**

Professor der math. Physik an der Columbia-Universität.

Inhalt:

	Seite
Einführung	18
I. Das durch ein bewegtes Elektron hervorgerufene elektrische und magnetische Feld	21
II. Das Magneton	26
III. Die Verteilungsfunktion in den Theorien des Paramagnetismus	43
IV. Frühere Versuche zu Elektronentheorien des Magnetismus . .	56
V. Die Theorie von Langevin	66
VI. Von den Quantenhypothesen unabhängige Modifikationen der Theorie von Langevin	81
VII. Auf den Quantenhypothesen beruhende Theorien des Para- magnetismus	100
VIII. Der durch die Bewegung freier Elektronen verursachte Dia- magnetismus in Metallen	122

Einführung.

Die Entwicklung der Theorien des Magnetismus in dem Zeitabschnitt, den der vorliegende Überblick zu behandeln versucht, ist dadurch gekennzeichnet, daß die Theoretiker nacheinander versuchten, die magnetischen Erscheinungen zu den Eigenschaften bewegter Elektronen in Beziehung zu setzen.

Am Anfang des genannten Zeitraumes wurde gefunden, daß die Annahme der Bewegung von Elektronen in unabhängigen geschlossenen Bahnen in einem materiellen Körper nicht genügte, um eine befriedigende Erklärung der Magnetisierung des Körpers zu geben. Man fand, es sei eine Art submolekularen Baues der Elektronen notwendig. Der Bequemlichkeit halber wollen wir eine solche Struktur als ein „Magneton“ bezeichnen. Die zu betrachtenden

Elektronentheorien des Magnetismus unterscheiden sich natürlicherweise durch die mehr oder weniger willkürlichen Struktureigenschaften, die man für das Magneton annahm.

Jede Molekulartheorie des Magnetismus hat selbstverständlich wesentlich statistischen Charakter und trägt deshalb die wohlbekannteren Schwierigkeiten der statistischen Mechanik an sich. Diese Schwierigkeiten nehmen einen besonders gefährlichen Umfang in einer Theorie an, die für sich in Anspruch nimmt, genügend allgemein zu sein, um die bei niedrigen Temperaturen beobachteten Suszeptibilitäten zu erklären. Denn offenbar muß dann die Theorie das Gesetz der Gleichteilung der Energie in der klassischen Mechanik aufgeben und an ihrer Stelle ein Gesetz der Verteilung der Energie unter den Magnetonen eines Körpers einführen, das von mehr oder weniger einleuchtenden Quantenhypothesen abhängt.

Die erste Aufgabe aller magnetischen Untersuchungen an materiellen Körpern ist natürlich diejenige, so viel als möglich über die Natur des Magnetons zu erforschen. Soweit unser Wissen reicht, kann das Magneton nicht für sich allein untersucht werden; und unser empirisches Wissen von seinen magnetischen Eigenschaften leitet sich notwendigerweise von dem experimentellen Studium seines magnetischen Verhaltens in der ganzen Masse ab. Die Massensuszeptibilität ist es, die man experimentell bestimmt. Sie ist eine statistische Größe, denn sie stellt die Beiträge der statistischen Einheiten, der Magnetonen, zu der Magnetisierung des Körpers in seiner ganzen Masse dar. Es ist deshalb bei der Betrachtung einer jeden Molekulartheorie des Magnetismus notwendig, zu beachten, daß sie zwar mit dem Ergebnis des Experiments im Einklang stehen kann, daß aber doch das Modell des Magnetons, das sie annimmt, weit von der Wirklichkeit entfernt sein kann, da ja verschiedene Typen von Magnetonen die gleichen statistischen Eigenschaften haben könnten.

Soweit die grundlegenden physikalischen Ideen in Betracht kommen, wird der Leser des folgenden Berichtes wahrscheinlich den Schluß ziehen, daß im allgemeinen die Entwicklung der Molekulartheorien des Para- und Diamagnetismus während der Jahre 1900 bis 1920 mehr durch Wiedergabe und Erweiterung alter Gedankengänge, nämlich derjenigen von Ampère und Weber, als durch die Einführung neuer Ideen charakterisiert ist, ausgenommen die sich auf die Quantentheorie beziehenden.

Die Entwicklung der Elektronentheorien des Magnetismus, die am Anfang des zu behandelnden Zeitraumes begann, wurde in größerem Maßstab durch die theoretischen Schriften von Professor H. A. Lorentz und von Sir Joseph Larmor angeregt. Ihre Ergebnisse bilden einen großen Teil der heute sogenannten klassischen Elektronentheorie, die wohl bei dem Leser als einigermaßen bekannt vorausgesetzt werden darf.

Die kinetischen Theorien des Magnetismus tragen notwendigerweise einen einigermaßen mathematischen Charakter, und die Seiten des sich mit ihnen befassenden Schrifttums sind oft mit vielen ziemlich ungeheuerlich erscheinenden Formeln überladen, die, obwohl oft notwendig, wie ein Abschreckungsmittel auf den Durchschnittsleser wirken, der sich mehr für den physikalischen Inhalt einer Theorie interessiert, als für das mathematische Gewand, in das sie gekleidet ist.

In der Absicht, für die verschiedenen im folgenden besprochenen Theorien soweit als möglich die vielen ihnen gemeinsamen mathematischen Züge herauszuschälen, wurden die drei ersten Abschnitte geschrieben. Diese Abschnitte sind mehr zum Nachschlagen beim Lesen des folgenden Teiles als für fortlaufende Durchsicht bestimmt. Wenn es der Leser wünscht, kann er deshalb mit Abschnitt IV beginnen, der von den anfänglichen Versuchen zu einer Elektronentheorie des Magnetismus handelt.

Für die vorliegende Übersicht erschien es zweckmäßig, die Vektorschreibweise anzuwenden.

Vektorgrößen werden im allgemeinen in deutschen Buchstaben¹⁾ \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{a} , \mathfrak{b} , die entsprechenden Skalarwerte in lateinischen Buchstaben A , B , a , b dargestellt²⁾. In einzelnen Fällen, nämlich bei Verwendung von griechischen Buchstaben für gewisse Größen, wird der geradstehende Buchstabe für die Vektorgröße, der Kursiv-Buchstabe für die skalare Größe verwandt.

Der Leser, der mit der Vektorenrechnung nicht vertraut ist, und der denjenigen Zeilen des Textinhaltes, in denen Vektormethoden benutzt sind, folgen will, findet in „Vektoranalysis“ von J. G. Coffin ein sehr passendes Nachschlagebuch³⁾.

¹⁾ Wir verwenden, abweichend von dem Original, das nach Gibbs für die Vektoren fettgedruckte lateinische Buchstaben verwendet, die in Deutschland übliche Schreibweise. (A. d. Ü.)

²⁾ Vgl. z. B. auch Abraham und Föppl, Theorie der Elektrizität oder R. Gans, Einführung in die Vektoranalysis. (A. d. Ü.)

Was die Einheiten anbetrifft, so ist für elektrische und magnetische Größen durchweg das Gaußsche System angewandt. Für andere Größen wird immer das absolute CGS-System gebraucht. Zur Bezeichnung der Lichtgeschwindigkeit wird der Buchstabe c genommen.

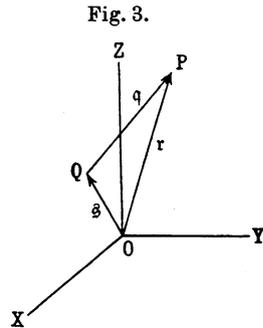
I. Das durch ein bewegtes Elektron hervorgerufene elektrische und magnetische Feld.

Die Erklärungen der Magnetisierung in den später zu besprechenden Theorien des Magnetismus lassen sich auf die elektrischen und magnetischen Eigenschaften freibewegter Elektronen oder auf die entsprechenden Eigenschaften einer Art rotierender Magnetonen zurückführen.

In dem vorliegenden Abschnitt werden wir deshalb das elektrische und das magnetische Feld eines bewegten Elektrons betrachten; im zweiten Abschnitt die elektrischen und magnetischen Eigenschaften rotierender Magnetonen sowie die mechanischen Momente, denen sie bei Verbringung in ein äußeres elektrisches oder magnetisches Feld unterworfen sind. Das als Punktladung betrachtete Elektron möge zunächst als in irgend einer willkürlichen Bewegung befindlich angenommen werden. Die durch das bewegte Elektron hervorgerufene elektrische und magnetische Kraft kann für jeden Punkt des Feldes direkt aus seinem retardierten Skalar- und Vektorpotential berechnet werden. — In Fig. 3 stellt O den Anfangspunkt eines kartesischen, im Raume festen Achsensystems dar, Q die Lage des Elektrons im betrachteten Moment, \mathfrak{s} den Vektor der Lage von Q in bezug zu O , P den Punkt des Feldes, \mathfrak{r} den Vektor der Lage von P in Beziehung zu O und q einen von Q nach P gezogenen Vektor.

Die kartesischen Koordinaten von Q und P sind durch ξ, η, ζ bzw. x, y, z dargestellt. Aus der Figur ergibt sich

$$q = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}. \quad (1)$$



Ist e die Ladung des Elektrons und \mathbf{v} seine Geschwindigkeit, dann werden nach der klassischen Elektronentheorie das Skalar- und das Vektorpotential in dem Feldpunkt P ausgedrückt durch

$$\Phi = \left[\frac{e}{q \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}}{cq} \right)} \right]_{t - \frac{q}{c}}, \quad \mathfrak{A} = \left[\frac{e \mathbf{v}}{cq \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}}{cq} \right)} \right]_{t - \frac{q}{c}}, \quad (2)$$

wobei die Größen in eckigen Klammern nicht für die Zeit ausgewertet werden dürfen, für die die elektrischen und magnetischen Kräfte gesucht werden, sondern für den um das Zeitintervall früher gelegenen Zeitpunkt, das erforderlich ist, damit die Strahlung von dem Punkte Q zu dem Punkte P gelangen kann, d. h. für den Zeitpunkt $t - \frac{q}{c}$ 1).

Sind die Potentiale ausgewertet, so ist die elektrische und die magnetische Kraft in dem Feldpunkt gegeben durch

$$\mathfrak{E} = - \mathcal{A} \Phi - \frac{1}{c} \frac{d\mathfrak{A}}{dt}, \quad \mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A}. \quad (3)$$

Durch Ausführung der hier angegebenen Operationen findet man folgende Ausdrücke für die elektrische und die magnetische Kraft im Feldpunkt P 2):

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{c^2} \left[- \frac{\dot{\mathbf{v}}}{q} \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}}{cq} \right)^{-2} + \frac{\left(\frac{q}{q} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) (c^2 - \mathbf{v}^2 + \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{q})}{q^2} \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}}{cq} \right)^{-3} \right], \quad (4)$$

$$\mathfrak{H} = \frac{e}{c^2} \left[\frac{\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{q}}{q^2} \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}}{cq} \right)^{-2} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{q} (c^2 - \mathbf{v}^2 + \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{q})}{cq^3} \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}}{cq} \right)^{-3} \right]. \quad (5)$$

Die Einzelheiten der Rechnung sind nicht angegeben; man kann sie in den grundlegenden, die Elektronentheorie behandelnden Arbeiten, z. B. in der „Theorie der Elektrizität“ von G. H. Liveness, S. 506 finden.

1) Das Malzeichen \cdot bedeutet skalare Multiplikation. (A. d. Ü.)

2) Das Malzeichen \times bedeutet vektorielle Multiplikation. (A. d. Ü.)

Für die Fälle, die wir zu betrachten haben, kann die Geschwindigkeit des Elektrons klein gegenüber derjenigen des Lichtes angenommen werden, und der Feldpunkt kann so gewählt werden, daß seine Entfernung vom Elektron klein ist gegenüber der Wellenlänge der von dem Elektron ausgesandten Strahlung. Die durch (2) gegebenen allgemeinen Ausdrücke für das skalare und das Vektorpotential reduzieren sich dann auf die einfachen Näherungswerte:

$$\Phi = \frac{e}{q}, \quad \mathfrak{A} = \frac{e\mathbf{v}}{cq}. \quad (6)$$

Es mag bemerkt werden, daß jetzt die Potentiale nicht retardiert sind.

Die entsprechenden Ausdrücke für die durch ein bewegtes Elektron hervorgerufene elektrische und magnetische Kraft erhält man direkt aus (6), indem man den negativen Gradienten von Φ und die Rotation von \mathfrak{A} bildet. Man erhält so

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{q^3}\mathbf{q}, \quad (7)$$

$$\mathfrak{H} = \frac{e}{cq^3}(\mathbf{v} \times \mathbf{q}). \quad (8)$$

Diese genäherten Gleichungen hätte man natürlich auch aus den allgemeinen Ausdrücken (4) und (5) durch Einführung der oben gemachten Einschränkungen erhalten können.

Ist der Anfangspunkt 0 so gewählt, daß \mathfrak{s} klein ist im Vergleich zu \mathfrak{r} , so kann die Größe $\frac{1}{q}$ in den Ausdrücken für die Potentiale in eine Reihe entwickelt werden, in der es genügt, die drei ersten Glieder zu berücksichtigen:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{s}}{r^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{s}}{r^2} \right)^2 \right\}.$$

Führt man diesen Ausdruck für $\frac{1}{q}$ in (6) ein, so findet man

$$\Phi = \frac{e}{r} \left\{ 1 + \frac{\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{s}}{r^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{s}}{r^2} \right)^2 \right\}, \quad (9)$$

$$\mathfrak{A} = \frac{e}{cr} \mathbf{v} \left\{ 1 + \frac{\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{s}}{r^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{s}}{r^2} \right)^2 \right\}.$$

Bildet man den negativen Gradienten von Φ und die Rotation von \mathfrak{A} , so erhält man die folgenden Ausdrücke für die elektrische und die magnetische Kraft in dem Feldpunkt:

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{r^3} \left\{ \left(1 + \frac{3 \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{s}}{r^2} \right) (\mathfrak{r} - \mathfrak{s}) \right\}, \quad (10)$$

$$\mathfrak{H} = \frac{e}{c r^3} \mathfrak{v} \times \left\{ \left(1 + \frac{3 \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{s}}{r^2} \right) (\mathfrak{r} - \mathfrak{s}) \right\}. \quad (11)$$

Der Mittelwert von \mathfrak{H} für ein Elektron, das eine Kreisbahn mit konstanter Geschwindigkeit beschreibt, wird später benötigt werden. Ist $\bar{\mathfrak{H}}$ der Mittelwert von \mathfrak{H} für diesen Fall, so findet man aus (11) leicht, wenn man beachtet, daß $\mathfrak{v} = \dot{\mathfrak{s}}$ ist:

$$\bar{\mathfrak{H}} = \frac{e}{2 c r^3} \left(3 \mathfrak{s} \times \dot{\mathfrak{s}} \cdot \frac{\mathfrak{r}}{r^2} \mathfrak{r} - \mathfrak{s} \times \dot{\mathfrak{s}} \right). \quad (12)$$

Also ist ein Elektron, das eine Kreisbahn mit konstanter Geschwindigkeit beschreibt, insofern sein mittleres magnetisches Feld in Betracht kommt, einem kleinen Magnet gleichwertig, dessen Moment μ ¹⁾ gegeben ist durch

$$\mu = \frac{e}{2c} \mathfrak{s} \times \dot{\mathfrak{s}}. \quad (13)$$

Dieser Ausdruck kann folgendermaßen in eine etwas einfachere Form gebracht werden. Es sei ω ²⁾ die Winkelgeschwindigkeit des Elektrons um seinen Bahnmittelpunkt, dann ist $\dot{\mathfrak{s}} = \omega \times \mathfrak{s} = \omega \mathfrak{n} \times \mathfrak{s}$, wobei \mathfrak{n} ein Einheitsvektor ist, der senkrecht zur Ebene der Bahn in der Richtung ω steht. Wir erhalten also:

$$\mathfrak{s} \times \dot{\mathfrak{s}} = \omega \mathfrak{s} \times (\mathfrak{n} \times \mathfrak{s}) = \omega \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{s} \mathfrak{n} = \frac{2}{\tau} S \mathfrak{n},$$

worin τ die Bahnperiode und S die Bahnfläche ist. Dann folgt aus (13):

$$\mu = \frac{e S}{c \tau} \mathfrak{n}. \quad (14)$$

Das Moment der Bahn wird einer Veränderung unterworfen sein, wenn ein magnetisches Feld durch dasselbe hervorgerufen ist.

¹⁾ Wir bezeichnen den Vektor, dessen absoluter Betrag μ ist, mit μ (A. d. Ü.).

²⁾ ω ist der der Winkelgeschwindigkeit ω entsprechende, auf der Bahnebene senkrechte Vektor.

Es sei \mathfrak{H} die Stärke des magnetischen Feldes in jedem Augenblick und \mathfrak{E} die entsprechende elektrische Kraft. Nimmt man an, daß die Fläche der Bahn S sehr klein und ihre Ebene unveränderlich ist, so erhält man durch Anwendung des Stokesschen Satzes und der

Maxwellschen Feldgleichung $\text{rot } \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\mathfrak{H}}{dt}$

$$\int_0^{2\pi s} \mathfrak{E} \cdot ds = \int_S \mathfrak{n} \cdot \text{rot } \mathfrak{E} dS = -\frac{d}{cdt} \int_S \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{H} dS = -\frac{d}{cdt} (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{H} S).$$

Durch Integration ergibt das linke Integral $2\pi s E$, also ist

$$2\pi s E = -\frac{d}{cdt} (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{H} S),$$

wobei der Ausdruck rechts die Abnahme des magnetischen Kraftflusses durch die Bahn in der Zeiteinheit darstellt. Bezeichnet $\Delta (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{H} S)$ das Wachstum dieses Flusses in der Umlaufzeit τ , so ist:

$$2\pi s E = -\frac{\Delta (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{H} S)}{c\tau}. \quad (15)$$

Ferner erhalten wir, da das Moment der Kraft $e\mathfrak{E}$ gleich sein muß der Zunahme des Impulsmomentes¹⁾ des Elektrons in seiner Bahn in der Zeiteinheit:

$$seE = \frac{d}{dt} (ms^2 \omega) = \frac{2mc}{e} \frac{d\mu}{dt}.$$

Folglich ist, wenn $\Delta\mu$ die Zunahme von μ in der Umlaufzeit τ bezeichnet:

$$seE = \frac{2mc}{e} \frac{\Delta\mu}{\tau}. \quad (16)$$

Aus (15) und (16) folgt, daß

$$\Delta\mu = -\frac{e^2}{4\pi mc^2} \Delta (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{H} S) = -\frac{e^2}{4\pi mc^2} \Delta (HS \cos \vartheta), \quad (17)$$

wobei ϑ der Winkel zwischen den Richtungen \mathfrak{n} und \mathfrak{H} ist.

¹⁾ Auch „Drall“, Produkt aus Trägheitsmoment und Winkelgeschwindigkeit. (A. d. Ü.)

Mechanische Wirkung auf ein bewegtes Elektron in einem äußeren elektromagnetischen Felde.

Bezeichnen \mathfrak{E} und \mathfrak{H} die Stärke des äußeren elektrischen und magnetischen Feldes, so erhalten wir aus der Elektronentheorie für die mechanische Kraft \mathfrak{F} auf jedes Elektron:

$$\mathfrak{F} = e\mathfrak{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathfrak{H}, \quad (18)$$

und für das mechanische Moment \mathfrak{N} dieser Kraft, bezogen auf den Anfangspunkt 0,

$$\mathfrak{N} = e\mathbf{s} \times \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathfrak{H} \right). \quad (19)$$

II. Das Magneton.

Da, wie erwähnt, die Annahme der Bewegung freier Elektronen in unabhängigen Bahnen nicht imstande ist, eine befriedigende Erklärung der Magnetisierung zu geben, wurde der Begriff des Magnetons frühzeitig in die modernen Theorien des Magnetismus eingeführt.

Man nimmt an, daß das Magneton ein sehr kleines Aggregat positiver¹⁾ und negativer Elektronen ist und gewisse willkürlich anzunehmende konstitutionelle oder strukturelle Eigenschaften besitzt. Wir betrachten zuerst diese Eigenschaften.

Grundannahmen über die Struktureigenschaften des Magnetons.

Die algebraische Summe der Ladungen der Elektronen in einem Magneton wird zu Null angenommen. Ist die Ladung eines Elektrons gleich e , so ist die in diese Annahme eingeschlossene Strukturbedingung dadurch ausgedrückt, daß man setzt:

$$\Sigma e = 0. \quad (1)$$

Die Verteilung der Elektronen in dem Magneton wird so angenommen, daß das elektrische Moment des Magnetons Null ist. Wir setzen jetzt voraus, daß das Elektron des Magnetons dasjenige

¹⁾ Entgegen unserem Sprachgebrauch werden auch die positiven elektrischen Elementarladungen als Elektronen bezeichnet. (A. d. Ü.)

von Abschnitt I ist, und daß der Anfangspunkt 0 mit dem Mittelpunkt des Magnetons zusammenfällt. Dann ist (vgl. Fig. 3) die Bedingung, daß das elektrische Moment des Magnetons Null ist, ausgedrückt durch:

$$\Sigma e s = i \Sigma e \xi + j \Sigma e \eta + k \Sigma e \zeta = 0, \quad (2)$$

wobei i, j, k die Einheitsvektoren in den Richtungen der X -, Y - und Z -Achse sind.

Es wird sich jetzt zeigen, daß die elektrischen und magnetischen Eigenschaften des Magnetons in hervorragender Weise von den folgenden Größen zweiten Grades in ξ, η, ζ abhängen:

$$P_1 = \Sigma e \xi^2 \quad P_2 = \Sigma e \eta^2 \quad P_3 = \Sigma e \zeta^2 \quad (3)$$

$$D_1 = \Sigma e \eta \zeta \quad D_2 = \Sigma e \xi \zeta \quad D_3 = \Sigma e \xi \eta \quad (4)$$

$$Q_1 = P_2 + P_3 \quad Q_2 = P_3 + P_1 \quad Q_3 = P_1 + P_2 \quad (5)$$

In Analogie dieser Größen zu den entsprechenden Größen in der Mechanik ist es angebracht, die Q und D als Trägheitsmomente bzw. Trägheitsprodukte der Ladung zu bezeichnen.

Das elektrische und das magnetische Potential für ein rotierendes Magon.

In den Anwendungen der vorliegenden Theorie, mit denen wir uns in unserer Übersicht über die Theorien des Magnetismus zu befassen haben, ist die Geschwindigkeit irgend eines Elektrons klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit, und die Entfernung des Feldpunktes vom Magon klein gegenüber der Wellenlänge der von ihm ausgesandten Strahlung, aber groß gegenüber den Dimensionen des Magnetons.

Die genäherten Gleichungen für die Potentiale werden somit aus den Gleichungen (9) des Abschnittes I (für die Potentiale eines einzelnen Elektrons) durch Summierung über alle Elektronen im Magon gewonnen, wobei der Anfangspunkt 0 im Mittelpunkt des Magnetons angenommen wird. So erhalten wir für das elektrische bzw. magnetische Potential des Magnetons

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \Sigma \frac{e}{r} \left\{ 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{r^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{r^2} \right)^2 \right\}, \\ \mathfrak{A} &= \frac{1}{c} \Sigma \frac{e}{r} \mathbf{v} \left\{ 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{r^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}}{r^2} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Hierbei ist v die Geschwindigkeit eines Elektrons, s und r sind die Lagevektoren des betreffenden Elektrons bzw. des Feldpunktes.

Unter Berücksichtigung der durch (1) und (2) gegebenen Strukturbedingungen reduzieren sich diese Ausdrücke auf:

$$\Phi = \Sigma e \frac{3}{2} \left(\frac{r \cdot s}{r^2} \right)^2, \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{c} \Sigma e v \left\{ \frac{r \cdot s}{r^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{r \cdot s}{r^2} \right)^2 \right\}. \quad (7)$$

Im allgemeinen] wird die Annäherung genügen, wenn man in dem Ausdruck für \mathfrak{A} nur das erste Glied nimmt; dann ist

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c} \Sigma e v \frac{r \cdot s}{r^3}. \quad (8)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung kann folgendermaßen umgeformt werden. Beachtet man, daß $v = \dot{s}$, so erhält man identisch

$$vr \cdot s = \frac{1}{2} \left\{ vr \cdot s - sr \cdot v + \frac{d}{dt} (s s \cdot r) \right\} = \frac{1}{2} r \times (v \times s) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (s s \cdot r)$$

also:

$$\mathfrak{A} = \frac{\mu \times r}{r^3} + \frac{1}{2cr^3} \frac{d}{dt} \Sigma e s s \cdot r, \quad (9)$$

wobei

$$\mu = \frac{1}{2c} \Sigma e s \times v. \quad (10)$$

Der Mittelwert des Vektorpotentials für ein rotierendes starres Magneton.

Für ein starres rotierendes Magneton wird der Mittelwert während einer Umdrehung für das zweite Glied der rechten Seite von (9) verschwinden, und wenn wir den Mittelwert von \mathfrak{A} durch $\bar{\mathfrak{A}}$ und den von μ durch $\bar{\mu}$ bezeichnen, so ist

$$\bar{\mathfrak{A}} = \frac{\bar{\mu} \times r}{r^3}. \quad (11)$$

Aus der Form dieses Ausdrucks für das mittlere Vektorpotential geht hervor, daß das mittlere Feld eines rotierenden Magnetons dasselbe ist, wie das Feld eines kleinen Magnets mit dem Moment $\bar{\mu}$; und man kann leicht sehen, daß die Richtung des Vektors $\bar{\mu}$ mit der Rotationsachse des Magnetons zusammenfallen wird

Sind α, β, γ die Richtungskosinusse der Rotationsachse und somit von $\bar{\mu}$, so werden die skalaren Komponenten des mittleren Vektorpotentials des Magnetons gegeben durch:

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_1 &= \frac{\bar{\mu}}{r^3} (\beta z - \gamma y), \\ \bar{A}_2 &= \frac{\bar{\mu}}{r^3} (\gamma x - \alpha z), \\ \bar{A}_3 &= \frac{\bar{\mu}}{r^3} (\alpha y - \beta x). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Der Mittelwert der durch ein rotierendes starres Magneton hervorgerufenen magnetischen Kraft.

Indem man die Rotation von $\bar{\mathfrak{A}}$ bildet, findet man für den Mittelwert $\bar{\mathfrak{H}}$ der magnetischen Kraft:

$$\bar{\mathfrak{H}} = \frac{3}{r^5} \bar{\mu} \cdot r r - \frac{1}{r^3} \bar{\mu} \quad (13)$$

und man sieht leicht, daß die skalaren Komponenten dieser Kraft gegeben sind durch

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}_1 &= \frac{3\bar{\mu}}{r^5} (\alpha x + \beta y + \gamma z)x - \frac{\bar{\mu}\alpha}{r^3}, \\ \bar{H}_2 &= \frac{3\bar{\mu}}{r^5} (\alpha x + \beta y + \gamma z)y - \frac{\bar{\mu}\beta}{r^3}, \\ \bar{H}_3 &= \frac{3\bar{\mu}}{r^5} (\alpha x + \beta y + \gamma z)z - \frac{\bar{\mu}\gamma}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, daß das mittlere magnetische Feld zur Rotationsachse des Magnetons symmetrisch ist, daß die Kraftlinien in Ebenen liegen, die durch die Rotationsachse gehen, und daß das mittlere Feld dem Felde eines magnetischen Polpaares äquivalent ist, dessen Achse der Rotationsachse parallel und dessen Moment gleich $\bar{\mu}$ ist.

Diese Äquivalenz gilt natürlich nur für den Mittelwert des magnetischen Feldes des Magnetons und nicht für den augenblicklichen Wert. Für den letzteren kommt das zweite Glied der rechten Seite von (9) in Betracht; und damit übereinstimmend wird der

augenblickliche Wert des Feldes sich mit der Zeit ändern und dabei Anlaß zu einer Strahlung geben, mit der wir uns jedoch hier nicht näher zu befassen haben.

Das magnetische Moment eines rotierenden starren Magnetons.

Wie man oben sah, stellt der Mittelwert der Größe μ den zeitlichen Mittelwert des magnetischen Momentes eines starren, rotierenden Magnetons dar; es wird deshalb angebracht sein, die Größe μ selbst als das Moment des Magnetons anzusprechen. — Ist das Magoneton starr, so ist $\mathfrak{v} = \omega \times \mathfrak{s}$ und wir erhalten aus (10):

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2c} \Sigma e \mathfrak{s} \times (\omega \times \mathfrak{s}), \\ &= \frac{1}{2c} \Sigma e (s^2 \omega - \omega \cdot \mathfrak{s} \mathfrak{s}), \\ &= \frac{1}{2c} \Sigma e \{ (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \omega - (\omega_1 \xi + \omega_2 \eta + \omega_3 \zeta) \mathfrak{s} \}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Hierbei sind, wie gewöhnlich, ξ, η, ζ die skalaren Komponenten von \mathfrak{s} und $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die skalaren Komponenten von ω , der Winkelgeschwindigkeit des Magnetons.

Aus der letzten dieser Gleichungen folgt, mittels (3), (4) und (5), daß

$$\mu = \frac{1}{2c} \left\{ \begin{aligned} (Q_1 \omega_1 & & - D_3 \omega_2 - D_2 \omega_3) i \\ & + (-D_3 \omega_1 & + Q_2 \omega_2 - D_1 \omega_3) j \\ & + (-D_2 \omega_1 & - D_1 \omega_2 + Q_3 \omega_3) k. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, daß μ eine selbstkonjugierte lineare Vektorfunktion von ω ist. In der Tat ist die Beziehung zwischen μ und ω genau analog derjenigen des Impulsmomentes eines starren Körpers zu seiner Winkelgeschwindigkeit, indem in dem vorliegenden Falle die Q den Trägheitsmomenten um die Achsen und die D den sogenannten Trägheitsprodukten entsprechen.

Das durch ein äußeres elektromagnetisches Feld auf ein rotierendes Magoneton hervorgerufene Drehmoment.

Wir nehmen nun an, das Magoneton befinde sich in einem räumlich und zeitlich veränderlichen elektromagnetischen Felde. Die

elektrische und die magnetische Kraft dieses Feldes werden durch \mathfrak{E} bzw. \mathfrak{H} bezeichnet. Das durch die Einwirkung dieses Feldes entstehende und auf das Magneton wirkende Drehmoment \mathfrak{N} ist nun aufzusuchen.

Bezogen auf den Anfangspunkt 0 wird dieses Drehmoment nach (19), Abschnitt I, gegeben durch

$$\mathfrak{N} = \sum e s \times \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c} v \times \mathfrak{H} \right), \quad (17)$$

wobei die Summierung über alle Elektronen in dem Magneton auszuführen ist.

Da \mathfrak{E} und \mathfrak{H} als kontinuierlich angenommen werden dürfen, können sie folgendermaßen in Reihen entwickelt werden:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + (s \cdot \nabla \mathfrak{E})_0 + \dots \quad (18)$$

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + (s \cdot \nabla \mathfrak{H})_0 + \dots, \quad (19)$$

wobei die Indizes bedeuten, daß die Größen, auf die sie sich beziehen, für den Punkt 0 genommen werden sollen.

Bezeichnen \mathfrak{N}^e und \mathfrak{N}^m die von der äußeren elektrischen und magnetischen Kraft hervorgerufenen Drehmomente auf das Magneton, so ist:

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^e + \mathfrak{N}^m. \quad (20)$$

In der Auswertung von \mathfrak{N}^e ist Gleichung (2) zu beachten, die ausdrückt, daß die totale elektrische Polarisierung des Magnetons verschwindet. Aus diesem Grunde trägt das erste Glied der rechten Seite von (18) nichts zum Werte von \mathfrak{N}^e bei. Beschränken wir uns ferner auf Glieder zweiter Ordnung in der kleinen Größe s , so genügt es, nur das zweite Glied in der Entwicklung von \mathfrak{E} zu beachten, und die Auswertung von \mathfrak{N}^e ergibt dann:

$$\mathfrak{N}^e = \sum e s \times s \cdot \nabla \mathfrak{E}, \quad (21)$$

wobei zu berücksichtigen ist, daß die Ableitungen in dem Faktor $s \cdot \nabla \mathfrak{E}$ für den Punkt Null ausgeführt werden müssen, wenn auch der Index Null nicht ausdrücklich weiter geschrieben ist.

In ähnlicher Weise ergibt die Auswertung von \mathfrak{N}^m in der gleichen Art der Annäherung:

$$\mathfrak{N}^m = \frac{1}{c} \sum e \cdot s \times (v \times \mathfrak{H}), \quad (22)$$

wobei \mathfrak{H} als die äußere magnetische Kraft in 0 zu nehmen ist.

Wird das dreifache Vektorprodukt in der Summe auf der rechten Seite ausgeführt und berücksichtigt, falls das Magneton als starr angenommen wird, daß \mathfrak{s} auf \mathfrak{v} senkrecht steht, so sieht man, daß sich (22) umformt in:

$$\mathfrak{N}^m = \frac{1}{c} \Sigma e \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{H} \mathfrak{v}$$

oder

$$\mathfrak{N}^m = \frac{1}{c} \omega \times c, \quad (23)$$

wobei ω die Winkelgeschwindigkeit des Magnetons um eine Achse durch 0 und

$$c = \Sigma e \mathfrak{s} \cdot \mathfrak{H} \mathfrak{s} \quad (24)$$

ist.

Die skalaren Komponenten des Vektors c können mittels (3) und (4) folgendermaßen ausgedrückt werden, wenn man sich daran erinnert, daß ξ , η , ζ die skalaren Komponenten von \mathfrak{s} sind:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= P_1 H_1 + D_3 H_2 + D_2 H_3, \\ c_2 &= D_3 H_1 + P_2 H_2 + D_1 H_3, \\ c_3 &= D_2 H_1 + D_1 H_2 + P_3 H_3. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Diese Gleichungen zeigen, daß c eine selbstkonjugierte lineare Vektorfunktion von \mathfrak{H} ist.

Benutzt man (3) und (4), so können die durch (21) gegebenen skalaren Komponenten von \mathfrak{N}^e ausgedrückt werden durch:

$$\left. \begin{aligned} N_1^e &= D_3 \frac{\partial E_3}{\partial x} \\ &+ P_2 \frac{\partial E_3}{\partial y} + D_1 \frac{\partial E_3}{\partial z} - D_2 \frac{\partial E_2}{\partial x} - D_1 \frac{\partial E_2}{\partial y} - P_3 \frac{\partial E_2}{\partial z}, \\ N_2^e &= D_2 \frac{\partial E_1}{\partial x} \\ &+ D_1 \frac{\partial E_1}{\partial y} + P_3 \frac{\partial E_1}{\partial z} - P_1 \frac{\partial E_3}{\partial x} - D_3 \frac{\partial E_3}{\partial y} - D_2 \frac{\partial E_3}{\partial z}, \\ N_3^e &= P_1 \frac{\partial E_2}{\partial x} \\ &+ D_3 \frac{\partial E_2}{\partial y} + D_2 \frac{\partial E_2}{\partial z} - D_3 \frac{\partial E_1}{\partial x} - P_2 \frac{\partial E_1}{\partial y} - D_1 \frac{\partial E_1}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Aus (23) werden ersichtlich mit Hilfe von (25) die entsprechenden Ausdrücke für die skalaren Komponenten des durch das äußere magnetische Feld hervorgerufenen Drehmomentes auf das Magneton gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} N_1^m &= \frac{1}{c} \{ \omega_2 (D_2 H_1 + D_1 H_2 + P_3 H_3) \\ &\quad - \omega_3 (D_3 H_1 + P_2 H_2 + D_1 H_3) \}, \\ N_2^m &= \frac{1}{c} \{ \omega_3 (P_1 H_1 + D_3 H_2 + D_2 H_3) \\ &\quad - \omega_1 (D_2 H_1 + D_1 H_2 + P_3 H_3) \}, \\ N_3^m &= \frac{1}{c} \{ \omega_1 (D_3 H_1 + P_2 H_2 + D_1 H_3) \\ &\quad - \omega_2 (P_1 H_1 + D_3 H_2 + D_2 H_3) \}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

**Gleichungen für ein rotierendes starres Magneton,
bezogen auf seine Hauptladungsachsen.**

Es ist immer möglich, drei gegenseitig aufeinander senkrecht stehende und durch das Zentrum eines Magnetons gehende Achsen so zu wählen, daß für sie die Trägheitsprodukte der Ladung verschwinden:

$$D_1 = D_2 = D_3 = 0.$$

Diese Achsen werden Hauptladungsachsen genannt.

Die Gleichungen, die wir oben für das magnetische Moment eines starren Magnetons und für die skalaren Komponenten der auf dasselbe durch die Wirkung eines äußeren elektrischen und eines äußeren magnetischen Feldes hervorgerufenen Drehmomente gefunden haben, nehmen viel einfachere Formen an, wenn die Bezugsachsen Hauptladungsachsen sind.

So erhalten wir aus (16) für das magnetische Moment eines Magnetons:

$$\mu = \frac{1}{2c} (Q_1 \omega_1 i + Q_2 \omega_2 j + Q_3 \omega_3 k) \quad (28)$$

und aus (26) und (27) für die skalaren Komponenten des durch ein äußeres elektrisches Feld \mathfrak{E} hervorgerufenen Drehmomentes:

$$\left. \begin{aligned} N_1^e &= P_2 \frac{\partial E_3}{\partial y} - P_3 \frac{\partial E_2}{\partial z}, \\ N_2^e &= P_3 \frac{\partial E_1}{\partial z} - P_1 \frac{\partial E_3}{\partial x}, \\ N_3^e &= P_1 \frac{\partial E_2}{\partial x} - P_2 \frac{\partial E_1}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

und für diejenigen des durch ein äußeres magnetisches Feld hervorgerufenen Drehmomentes:

$$\left. \begin{aligned} N_1^m &= \frac{1}{c} (P_3 H_3 \omega_2 - P_2 H_2 \omega_3), \\ N_2^m &= \frac{1}{c} (P_1 H_1 \omega_3 - P_3 H_3 \omega_1), \\ N_3^m &= \frac{1}{c} (P_2 H_2 \omega_1 - P_1 H_1 \omega_2). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Gleichungen für rotierende sphärische und axiale Magnetonen, bezogen auf Hauptachsen.

Für die Zwecke der vorliegenden Übersicht ist es nur nötig, zwei besondere Typen des Magnetons zu betrachten, die als das sphärische und als das axiale Magneton bekannt sind.

Das sphärische Magneton ist definiert als starr und derart, daß für dasselbe die Hauptladungs- und Trägheitsachsen zusammenfallen und die Hauptladungsträgheitsmomente Q_1, Q_2, Q_3 und die Hauptträgheitsmomente A, B, C bzw. gleich sind:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= Q_2 = Q_3 = Q \quad \therefore P_1 = P_2 = P_3, \\ A &= B = C = J. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Das axiale Magneton ist definiert als starr und derart, daß für dasselbe die Hauptladungs- und Trägheitsachsen zusammenfallen und die Hauptladungsträgheitsmomente und die Hauptträgheitsmomente für zwei seiner Hauptachsen, z. B. 1 und 2, gleich sind:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= Q_2 = Q \quad \therefore P_1 = P_2, \\ A &= B = J; \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

für das magnetische Moment erhalten wir aus (28)

$$\mu = \frac{Q}{2c} \omega \quad (33)$$

für das sphärische Magneton und

$$\mu = \frac{1}{2c} (Q\omega_1 i + Q\omega_2 j + Q\omega_3 k) \quad (34)$$

für das axiale Magneton.

Für ein sphärisches Magneton erhalten wir aus (29) für das durch ein äußeres elektrisches Feld \mathfrak{E} hervorgerufene Drehmoment:

$$\left. \begin{aligned} N_1^e &= \frac{Q}{2} \left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z} \right) \\ N_2^e &= \frac{Q}{2} \left(\frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} \right) \\ N_3^e &= \frac{Q}{2} \left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \text{ oder } \mathfrak{N}^e = \frac{Q}{2} \text{ rot } \mathfrak{E} \quad (35)$$

und aus (30) für das durch ein äußeres magnetisches Feld hervorgerufene Drehmoment:

$$\left. \begin{aligned} N_1^m &= \frac{Q}{2c} (\omega_2 H_3 - \omega_3 H_2) \\ N_2^m &= \frac{Q}{2c} (\omega_3 H_1 - \omega_1 H_3) \\ N_3^m &= \frac{Q}{2c} (\omega_1 H_2 - \omega_2 H_1) \end{aligned} \right\} \text{ oder } \mathfrak{N}^m = \frac{Q}{2c} \omega \times \mathfrak{H}. \quad (36)$$

Aus (29) und (30) ergeben sich die entsprechenden Ausdrücke für ein axiales Magneton; und zwar für das durch ein äußeres elektrisches Feld \mathfrak{E} hervorgerufene Drehmoment:

$$\left. \begin{aligned} N_1^e &= \frac{Q_3}{2} \frac{\partial E_3}{\partial y} - P_3 \frac{\partial E_2}{\partial z}, \\ N_2^e &= P_3 \frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{Q_3}{2} \frac{\partial E_3}{\partial x}, \\ N_3^e &= \frac{Q_3}{2} \left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} \right) = \frac{Q_3}{2} (\text{rot } \mathfrak{E})_3 \end{aligned} \right\} \quad (37).$$

und für das durch ein äußeres magnetisches Feld \mathfrak{H} hervorgerufene Drehmoment:

$$\left. \begin{aligned} N_1^m &= \frac{1}{c} \left(P_3 H_3 \omega_2 - \frac{Q_3}{2} H_2 \omega_3 \right), \\ N_2^m &= \frac{1}{c} \left(\frac{Q_3}{2} H_1 \omega_3 - P_3 H_3 \omega_1 \right), \\ N_3^m &= \frac{Q_3}{2c} (H_2 \omega_1 - H_1 \omega_2) = \frac{Q_3}{2c} (\boldsymbol{\omega} \times \mathfrak{H})_3. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Die Rotationsbewegung eines einem äußeren elektromagnetischen Felde unterworfenen starren Magnetons.

Wir nehmen an, daß die Bezugsachsen in dem betrachteten Augenblick mit den Hauptträgheitsachsen des Magnetons zusammenfallen, seine Trägheitsmomente seien A , B und C . Ferner mögen die Hauptladungsachsen mit denen der Trägheit zusammenfallen.

Nach Eulers dynamischen Bewegungsgleichungen ist:

$$\left. \begin{aligned} A \dot{\omega}_1 - (B - C) \omega_2 \omega_3 &= N_1^e + N_1^m, \\ B \dot{\omega}_2 - (C - A) \omega_3 \omega_1 &= N_2^e + N_2^m, \\ C \dot{\omega}_3 - (A - B) \omega_1 \omega_2 &= N_3^e + N_3^m, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

wobei die Drehungskomponenten N^e und N^m im allgemeinen Falle durch (29) und (30) gegeben sind.

Aus diesen Gleichungen läßt sich die rotierende Bewegung des Magnetons theoretisch bestimmen, wenn keine zerstreuenen Kräfte angenommen werden.

Spezialfall des sphärischen Magnetons.

In diesem Falle haben wir $A = B = C = J$; führt man die durch (35) und (36) gegebenen Ausdrücke für die Drehungskomponenten in die Bewegungsgleichungen (39) ein, so ist sofort ersichtlich, daß sie folgender einzigen Vektorgleichung äquivalent sind:

$$J \dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{Q}{2} \left(\text{rot } \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \boldsymbol{\omega} \times \mathfrak{H} \right). \quad (40)$$

Da, nach der einen von Maxwells Feldgleichungen,

$$\text{rot } \mathfrak{E} = - \frac{d\mathfrak{H}}{cdt},$$

so kann diese Gleichung geschrieben werden:

$$J \frac{d\omega}{dt} = -\frac{Q}{2c} \left(\frac{d\mathfrak{H}}{dt} - \omega \times \mathfrak{H} \right). \quad (41)$$

Diese Gleichung nimmt eine einfachere Form an, wenn die Ableitungen nach der Zeit unter Berücksichtigung des bewegten Raumes des Magnetons statt des festen Raumes gewonnen werden.

Ist $\frac{d'}{dt}$ die Ableitung nach der Zeit unter Berücksichtigung des ersteren, so ist

$$\frac{d'\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt}, \quad \frac{d'\mathfrak{H}}{dt} = \frac{d\mathfrak{H}}{dt} - \omega \times \mathfrak{H} \quad (42)$$

und Gl. (41) kann deshalb folgendermaßen geschrieben werden:

$$J \frac{d'\omega}{dt} = -\frac{Q}{2c} \frac{d'\mathfrak{H}}{dt}. \quad (43)$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt

$$\omega = \omega_0 - \frac{Q}{2cJ} \mathfrak{H}, \quad (44)$$

wobei ω_0 den Wert von ω bezeichnet, bevor das äußere Feld angelegt wird.

Aus der letzten Gleichung geht hervor, daß die Entstehung eines äußeren elektromagnetischen Feldes eine Rotation des Magnetons um eine Achse parallel zu den Kraftlinien des äußeren Feldes hervorruft, und zwar vom Betrage $-\frac{Q}{2cJ} \mathfrak{H}$; da J eine positive Größe ist, so wird die Richtung dieser Rotation davon abhängen, ob Q negativ oder positiv ist.

Das magnetische Moment eines sphärischen Magnetons ist durch (33) gegeben; hieraus ergibt sich mittels (44)

$$\mu = \mu_0 - \frac{Q^2}{4c^2J} \mathfrak{H}. \quad (45)$$

Demnach besteht die Wirkung der Entstehung eines äußeren Feldes auf das Moment des Magnetons darin, eine Komponente $-\frac{Q^2}{4c^2J} \mathfrak{H}$, die parallel zu den Kraftlinien des äußeren magnetischen Feldes ist, hervorzurufen; da J eine positive Größe ist, muß der Koeffizient von \mathfrak{H} in (45) negativ sein.

In dem besonderen Falle, daß das äußere magnetische Feld zeitlich konstant ist, reduziert sich die Bewegungsgleichung (41) auf

$$J \dot{\omega} = \frac{Q}{2c} \omega \times \mathfrak{H}. \quad (46)$$

In Übereinstimmung mit dieser Gleichung muß, da $\omega \times \mathfrak{H}$ ein zu ω senkrechter Vektor ist, die Größe von ω unveränderlich bleiben. Aber außer in dem speziellen Falle, daß ω parallel zu \mathfrak{H} ist, wird sich die Richtung der Rotationsachse sowohl in dem festen Raum als auch in dem Magneton ständig ändern. Die Komponente von ω in der Richtung von \mathfrak{H} wird sich nicht ändern, aber die zu \mathfrak{H} senkrechte Komponente wird um die Richtung von \mathfrak{H} mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_1 = -\frac{Q}{2cJ} \mathfrak{H} \quad (47)$$

rotieren. Der Vektor ω selbst wird um eine zu \mathfrak{H} parallele Achse mit dieser selben Winkelgeschwindigkeit rotieren, und das Magneton wird eine regelmäßige Präzession um die Achse ausführen. Aus (44) und (47) folgt

$$\omega = \omega_0 + \omega_1. \quad (48)$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω des Magnetons kann demnach als die Summe zweier Komponenten angesehen werden; ω_0 , das seine Winkelgeschwindigkeit vor der Anlegung des äußeren Feldes darstellt, und ω_1 , das eine induzierte Winkelgeschwindigkeit um die Richtung der Kraftlinien darstellt, die durch die Schaffung des äußeren Feldes hervorgerufen wird.

Die Präzessionsbewegung des Magnetons findet auf ähnliche Weise statt wie die eines symmetrischen Kreisels in einem Schwerfeld, aber mit dem Unterschied, daß das auftretende Drehmoment in dem vorliegenden Falle, $\frac{Q}{2c} \omega \times \mathfrak{H}$, proportional der Winkelgeschwindigkeit ist, während es im Falle des Kreisels unabhängig von der Geschwindigkeit ist; so kommt es, daß im Falle des Magnetons die Präzessionsgeschwindigkeit unabhängig von seiner Winkelgeschwindigkeit ist, während sie im Falle des Kreisels umgekehrt proportional zu ihr ist.

Da nach der einen von Maxwells Feldgleichungen für ein magnetisches Feld konstanter Stärke $\text{rot } \mathfrak{E} = 0$ ist, so folgt aus

(35), (36) und (33), daß das Drehmoment für ein sphärisches Magneton in einem konstanten äußeren magnetischen Feld $\boldsymbol{\mu} \times \mathfrak{H}$, oder nach (45)

$$\boldsymbol{\mu}_0 \times \mathfrak{H} \tag{49}$$

ist. Das Magneton ist also einem Kräftepaar unterworfen, das dem gleich ist, das auf eine in das gleiche magnetische Feld \mathfrak{H} gebrachte Magnetnadel von dem Moment $\boldsymbol{\mu}_0$ ausgeübt wird. Aber die Bewegung der Nadel unterscheidet sich darin völlig von derjenigen des Magnetons, daß die Nadel sich in einer Ebene bewegen würde, die ihre Achse enthält und parallel zu den Kraftlinien liegt, während das Magneton, veranlaßt durch seine gyroskopischen Eigenschaften, eine Präzessionsbewegung um die Richtung der Kraftlinien ausführt. Soll entweder die Nadel oder das Magneton eine Lage annehmen, bei der die Achse mit der Richtung der Kraftlinien zusammenfällt, so muß im allgemeinen eine zerstreue Kraft im Spiel sein.

Spezialfall des axialen Magnetons.

Für das axiale Magneton ist $A = B = J$, und die allgemeinen Gleichungen der Rotationsbewegung (39) reduzieren sich mit Hilfe von (32), (37) und (38) auf:

$$\left. \begin{aligned} J \dot{\omega}_1 - (J - C) \omega_2 \omega_3 &= \frac{Q_3}{2} \frac{\partial E_3}{\partial y} - P_3 \frac{\partial E_2}{\partial z} \\ &+ \frac{1}{c} \left(P_3 \omega_2 H_3 - \frac{Q_3}{2} \omega_3 H_2 \right), \\ J \dot{\omega}_2 - (C - J) \omega_3 \omega_1 &= P_3 \frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{Q_3}{2} \frac{\partial E_3}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{c} \left(\frac{Q_3}{2} \omega_3 H_1 - P_3 \omega_1 H_3 \right), \\ C \dot{\omega}_3 &= \frac{Q_3}{2} \left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} \right) + \frac{Q_3}{2c} (\omega_1 H_2 - \omega_2 H_1). \end{aligned} \right\} \tag{50}$$

Die dritte Gleichung bezieht sich auf die Rotation um die Achse des Magnetons und kann in folgender Form dargestellt werden:

$$C \dot{\omega}_3 = \frac{Q_3}{2} \left\{ (\text{rot } \mathfrak{E})_3 + \frac{1}{c} (\boldsymbol{\omega} \times \mathfrak{H})_3 \right\}. \tag{51}$$

Nach der einen der Maxwell'schen Gleichungen ist

$$(\text{rot } \mathfrak{E})_3 = -\frac{1}{c} \frac{dH_3}{dt},$$

so daß (51) geschrieben werden kann

$$\frac{d\omega_3}{dt} = -\frac{Q_3}{2cC} \left(\frac{d\mathfrak{H}}{dt} - \omega \times \mathfrak{H} \right)_3$$

oder, wenn die Ableitungen in bezug auf den bewegten Raum des Magnetons gewonnen werden,

$$\frac{d'\omega_3}{dt} = -\frac{Q_3}{2Cc} \cdot \frac{d'H_3}{dt}.$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt:

$$\omega_3 = \omega_{03} - \frac{Q_3}{2cC} H_3, \quad (52)$$

wobei ω_{03} die Winkelgeschwindigkeit des Magnetons um seine Achse vorstellt, bevor das äußere Feld angelegt wird.

Dies äußere Feld erzeugt so eine Veränderung in der Winkelgeschwindigkeit um seine Achse im Betrag von $-\frac{Q_3}{2cC} H_3$. Es wird auch Veränderungen in den Rotationsgeschwindigkeiten um die beiden senkrechten, äquatorialen Achsen hervorrufen, deren Gleichungen die beiden ersten von (50) sind, falls man dabei keine zerstreuen Kräfte annimmt. Infolge der durch die Struktur-dissymmetrie des Magnetons bezüglich dieser Achsen hervorgerufenen Strahlung würden die Bewegungen um diese im Laufe der Zeit gedämpfte werden, und es würde nur die Bewegung um die Achse des Magnetons übrig bleiben.

Der letzteren entspricht ein magnetisches Moment, das nach (34) und (52) den skalaren Wert

$$\mu = \mu_{03} - \frac{Q_3^2}{4c^2 C} H_3 \quad (53)$$

hat, wobei

$$\mu_{03} = \frac{Q_3}{2c} \omega_{03} \quad (54)$$

ist. μ_{03} ist der skalare Wert der axialen Komponente des Magnetomomentes, bevor das äußere Feld angelegt ist.

Energie eines axialen rotierenden Magnetons in einem konstanten äußeren magnetischen Felde.

Im folgenden nehmen wir an, das axiale Magneton bestehe aus einem starren System negativer Elektronen, die symmetrisch um den Mittelpunkt angeordnet sind und um ihn rotieren, während die entsprechende positive Ladung die Form eines im Mittelpunkt befindlichen Kernes oder einer konzentrischen Kugel besitzt.

In diesem Falle können wir in Gleichung (34) für das magnetische Moment des Magnetons schreiben:

$$Q = \frac{eJ}{m} \quad \text{und} \quad Q_3 = \frac{eC}{m}.$$

Für die totale Energie U können wir schreiben:

$$U = U_1 + U_2 + U_3,$$

wobei U_1 die durch die translatorische Bewegung des Magnetons hervorgerufene Energie, U_2 seine Rotationsenergie und U_3 die gegenseitige Energie des Magnetons und des äußeren Feldes darstellt, die je nach dem Gesichtspunkt entweder als kinetisch oder als potentiell angesehen werden kann.

Bezeichnen wir die Masse des Magnetons mit M und seine Mittelpunktskoordinaten mit x, y, z , so erhalten wir für seine translatorische Energie:

$$U_1 = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (55)$$

Für die Berechnung der Rotationsenergie des Magnetons nehmen wir an, ξ, η, ζ seien mit den Hauptachsen zusammenfallende und deshalb im Magneton feste Achsen, A, B, C seien Trägheitsmomente um diese Achsen. Da wir nun das Magneton als axial annehmen, setzen wir $A = B = J$.

Um die Lage des Magnetons in bezug auf das äußere Feld und den festen Raum anzugeben, benutzen wir die Eulerschen Winkel ϑ, φ, ψ .

In Fig. 4 ist ϑ der Winkel zwischen der positiven Richtung des äußeren Feldes \mathfrak{H} und der ξ -Achse, ψ ist die „Länge“ der Knotenlinie ON , die als eine Linie definiert ist, welche zu der durch die Richtung des Feldes \mathfrak{H} und die ξ -Achse bestimmten Ebene senkrecht steht, und φ ist der Winkel zwischen der Knotenlinie und der ξ -Achse.

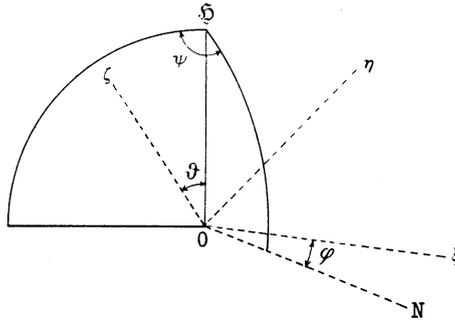
Sind $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die skalaren Komponenten der Winkelgeschwindigkeit des Magnetons, bezogen auf die Achsen ξ, η, ζ , so ist

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi, \\ \omega_2 &= \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi, \\ \omega_3 &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Wir erhalten also für die Rotationsenergie des Magnetons

$$U_2 = \frac{J}{2} (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{C}{2} (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta)^2. \quad (57)$$

Fig. 4.



Betrachten wir die gegenseitige Energie des Magnetons und des äußeren Feldes U_3 als kinetisch, so können wir schreiben¹⁾:

$$U_3 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mathcal{H}}, \quad (58)$$

wobei $\boldsymbol{\mu}$ das magnetische Moment des Magnetons ist. Unter Berücksichtigung, daß $Q = \frac{eJ}{m}$ und $Q_3 = \frac{eC}{m}$, wobei m die Masse eines Elektrons des Magnetons ist, folgt aus (34):

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2mc} (J\omega_1 i + J\omega_2 j + C\omega_3 k). \quad (59)$$

Bildet man das skalare Produkt von $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ mit diesem Ausdruck für $\boldsymbol{\mu}$, indem man dabei die in (56) gegebenen Ausdrücke für ω_1, ω_2 und ω_3 einführt und den erhaltenen Ausdruck in (58) einsetzt, so erhält man

$$U_3 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{e}{4mc} H \{ J\dot{\psi} \sin^2 \vartheta + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) \cos \vartheta \}. \quad (60)$$

¹⁾ Vgl. R. Gans, Ann. d. Phys. **49**, 154, 1916.

Endlich erhalten wir durch Addition der in (55), (57) und (60) gegebenen Ausdrücke für U_1 , U_2 und U_3 für die Gesamtenergie des axialen Magnetons in einem konstanten magnetischen Felde:

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{M}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \\ &+ \frac{J}{2} (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{C}{2} (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta)^2, \\ &+ \frac{e}{4mc} H \{ J \dot{\psi} \sin^2 \vartheta + C (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) \cos \vartheta \}. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Beim Schreiben des vorliegenden Abschnittes ist die Behandlung des Kapitels Magneton, wie sie Abraham in seiner „Theorie der Elektrizität“ gibt, von großem Nutzen gewesen.

III. Die Verteilungsfunktion in den Theorien des Paramagnetismus¹⁾.

In den kinetischen Theorien des Magnetismus taucht das Problem auf, die Verteilung der Achsen der konstitutiven Magnetonen eines in einem äußeren magnetischen Felde befindlichen Körpers zu bestimmen. Eine Kenntnis dieser Verteilung ist notwendig, ehe der durch die Einwirkung des äußeren magnetischen Feldes auf die Magnetonen hervorgerufene Beitrag zu dem resultierenden magnetischen Moment berechnet werden kann. Um das spätere Nachschlagen zu erleichtern, sollen in dem vorliegenden Abschnitt einige Ergebnisse der statistischen Theorie betrachtet werden.

Betrachten wir ein System, das keinem äußeren Kraftfeld unterworfen ist und aus einer großen Anzahl gleicher statistischer Einheiten besteht; jede von diesen sei bezüglich ihrer Konfiguration durch die generalisierten Koordinaten q_1, q_2, \dots, q_n spezifiziert. Ferner sei das System der Bedingung unterworfen, daß seine Gesamtenergie konstant ist. Die Impulskordinaten des Systems seien mit p_1, p_2, \dots, p_n bezeichnet.

Wir nehmen an, daß die generalisierten Koordinaten und die Kräfte einer statistischen Veränderung, z. B. durch thermische Bewegung, unterworfen sind. Es sei ferner N die Zahl der Einheiten

¹⁾ Vgl. R. Gans, Gött. Nachr. S. 197, 1910; S. 118, 1911; und für eine Diskussion der Grundlagen siehe J. H. van Leeuwen, Diss. Leiden 1919; Journ. d. Phys. (6) 2, 361, 1921.

in der Masseneinheit, dann wird nach der statistischen Theorie, falls das System in einem Gleichgewichtszustand ist, die wahrscheinliche Zahl der Einheiten in der Masseneinheit, die mit Koordinaten- und Kräftewerten, die zwischen den Grenzen

$$\begin{array}{ll} q_1 \text{ und } q_1 + dq_1 \dots & q_n \text{ und } q_n + dq_n, \\ p_1 \text{ und } p_1 + dp_1 \dots & p_n \text{ und } p_n + dp_n \end{array}$$

liegen — wir wollen sie mit dN bezeichnen —, durch das Verteilungsgesetz

$$dN = \alpha e^{-2h\varepsilon} d\Omega' \quad (1)$$

ausgedrückt, wobei

$$d\Omega' = dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$$

ist, ferner ε die Gesamtenergie einer Einheit ist, die einer durch die q und p ausgedrückten statistischen Veränderung unterworfen ist, endlich α und h Konstante sind.

Für die Bestimmung der Konstante α haben wir die Bedingung:

$$\int \alpha e^{-2h\varepsilon} d\Omega' = N, \quad (2)$$

wobei die Integration über alle möglichen Werte der Variablen zu erstrecken ist, deren Differentiale in dem Ausdruck für $d\Omega'$ erscheinen.

Die Funktion $\alpha e^{-2h\varepsilon}$ wird die Verteilungsfunktion des Systems der Einheiten genannt.

In einigen Fällen mag es sich empfehlen, neue Variable einzuführen. Nehmen wir an, m Impulskordinaten, nämlich $p_1, p_2 \dots p_m$, seien durch m neue Variable $r_1, r_2 \dots r_m$ durch die Gleichungen:

$$\begin{array}{l} p_1 = f_1(r_1, r_2 \dots r_m), \\ p_2 = f_2(r_1, r_2 \dots r_m), \\ \vdots \\ p_m = f_m(r_1, r_2 \dots r_m) \end{array}$$

dargestellt. Durch Differenzieren ergibt sich:

$$\begin{array}{l} dp_1 = \frac{\partial p_1}{\partial r_1} dr_1 + \frac{\partial p_1}{\partial r_2} dr_2 + \dots + \frac{\partial p_1}{\partial r_m} dr_m, \\ dp_2 = \frac{\partial p_2}{\partial r_1} dr_1 + \frac{\partial p_2}{\partial r_2} dr_2 + \dots + \frac{\partial p_2}{\partial r_m} dr_m, \\ \vdots \\ dp_m = \frac{\partial p_m}{\partial r_1} dr_1 + \frac{\partial p_m}{\partial r_2} dr_2 + \dots + \frac{\partial p_m}{\partial r_m} dr_m. \end{array}$$

Nach einem Lehrsatz von Jacobi ist

$$dp_1 dp_2 \dots dp_m = \Delta dr_1 dr_2 \dots dr_m,$$

wobei der Substitutionsmodul Δ ¹⁾ durch den Determinantenausdruck

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial r_1} & \frac{\partial p_1}{\partial r_2} & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial r_m} \\ \frac{\partial p_2}{\partial r_1} & \frac{\partial p_2}{\partial r_2} & \dots & \frac{\partial p_2}{\partial r_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_m}{\partial r_1} & \frac{\partial p_m}{\partial r_2} & \dots & \frac{\partial p_m}{\partial r_m} \end{vmatrix} \quad (3)$$

gegeben ist.

Wenn wir setzen:

$$d\Omega = dq_1 dq_2 \dots dq_n dr_1 dr_2 \dots dr_m dp_{m+1} \dots dp_n,$$

dann ist

$$d\Omega' = \Delta d\Omega. \quad (4)$$

Das Verteilungsgesetz (1) ist deshalb äquivalent der Gleichung

$$dN = \alpha e^{-2h\varepsilon} \Delta d\Omega, \quad (5)$$

wobei nach Annahme jetzt die Energie ε in $q_1, \dots, q_n, r_1, \dots, r_m$ und $p_{m+1} \dots p_n$ dargestellt ist.

Fall eines Systems axialer Magnetonen in einem konstanten äußeren magnetischen Felde²⁾.

Wir nehmen jetzt an, die Verteilungsdichte der Magnetonen sei so klein, daß das von den anderen Magnetonen auf irgend ein Magneton hervorgerufene molekulare Feld zu vernachlässigen sei. Wir nehmen ferner an, die Beschleunigungen der Magnetonen seien so klein, daß ihr Energieverlust durch Strahlung vernachlässigt werden kann. Außerdem sollen die Einschränkungen gelten, die wir im letzten Teil des vorhergehenden Abschnittes für das axiale Magneton einführt, nämlich, daß $Q = \frac{eJ}{m}$ und $Q_s = \frac{eC}{m}$ ist.

Die totale Energie des Systems kann dann als konstant angenommen werden, wenn wir nach Gans (a. a. O.) annehmen, daß das äußere Feld durch eine massive geladene Kugel erzeugt wird, die selbst als Teil des statistischen Systems betrachtet wird.

¹⁾ In der Regel mit „Funktionaldeterminante“ bezeichnet. (A. d. Ü.)

²⁾ Vgl. R. Gans, Gött. Nachr. S. 197, 1910; S. 118, 1911.

Wir nehmen nun für die Gesamtenergie eines Magnetons des Systems den Ausdruck (61) aus Abschnitt II:

$$U = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{J}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{C}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta)^2 \left. \vphantom{U} \right\} (6)$$

$$+ \frac{eH}{4mc} \{ J \dot{\psi} \sin^2 \vartheta + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) \cos \vartheta \},$$

wobei x, y, z die (kartesischen) Koordinaten des Mittelpunktes und ϑ, ψ, φ seine Eulerschen Koordinaten sind.

Aus diesem Ausdruck erhalten wir, da die Gesamtenergie kinetisch ist, durch partielles Differenzieren für die entsprechenden Impulskoordinaten u, v, w, p, q, r folgende Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} u &= M\dot{x}, & v &= M\dot{y}, & w &= M\dot{z} & p &= J\dot{\vartheta}, \\ q &= J\dot{\psi} \sin^2 \vartheta + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) \cos \vartheta \\ &\quad + \frac{eH}{4mc} (J \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta), \\ r &= C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) + \frac{eH}{4mc} C \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} (7)$$

Die statistischen Variablen des Systems sind nun: $x, y, z, u, v, w, \vartheta, \psi, \varphi, p, q$ und r^1 . Doch wird es sich empfehlen, p, q, r durch neue Variable P, Q, R zu ersetzen, indem man folgende Substitutionsgleichungen gebraucht:

$$\left. \begin{aligned} p &= P \cos \varphi - Q \sin \varphi, \\ q &= (P \sin \varphi + Q \cos \varphi) \sin \vartheta + R \cos \vartheta \\ &\quad + \frac{eH}{4mc} (J \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta), \\ r &= R + \frac{eH}{4mc} C \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} (8)$$

Hieraus finden wir durch (3) für den Transformationsmodul

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \vartheta \sin \varphi & \sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \sin \vartheta. \quad (9)$$

¹⁾ Hier und im folgenden wird H als ein konstanter statistischer Parameter betrachtet.

Aus (6) folgt mittels (7) und (8):

$$U = \frac{1}{2M}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{P^2 + Q^2}{2J} + \frac{R^2}{2C} + \frac{eH}{4mc}(P \sin \varphi \sin \vartheta + Q \cos \varphi \sin \vartheta + R \cos \vartheta). \quad (10)$$

Wir haben nun mit einem System statistischer Einheiten, der Magnetonen, zu tun, die einem äußeren Kraftfeld unterworfen sind, und es erhebt sich die Frage, wie die Form der Funktion ε für diesen Fall zu bestimmen ist.

Aus der oben erwähnten Arbeit von Gans ergibt sich, daß sie gleich dem Ausdruck für U ist, wenn man in ihm das letzte Glied mit 2 multipliziert; also ist:

$$\varepsilon = \frac{1}{2M}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{P^2 + Q^2}{2J} + \frac{R^2}{2C} + \frac{eH}{2mc}(P \sin \varphi \sin \vartheta + Q \cos \varphi \sin \vartheta + R \cos \vartheta). \quad (11)$$

In diesem Ausdruck¹⁾ treten die Koordinaten x, y, z, ψ nicht explizite auf. Deshalb wird das Verteilungsgesetz für die übrigen statistischen Variablen unabhängig von diesen Koordinaten sein. Außerdem kommen in dem Ausdruck die statistischen Variablen u, v, w nur als Quadratsummen vor, deshalb muß, wie aus der statistischen Theorie bekannt ist, das Verteilungsgesetz für die übrigen Variablen unabhängig von u, v und w sein. Überdies wird die Konstante h im Verteilungsgesetz den durch $h = 1/2 kT$ gegebenen Wert annehmen, wobei T die absolute Temperatur und k die als Boltzmannsche Konstante bezeichnete Gaskonstante für ein einzelnes Molekül ist.

Jetzt, vom Standpunkt der magnetischen Theorie, haben wir uns nur mit dem Verteilungsgesetz der statistischen Variablen $\vartheta, \varphi, P, Q, R$ zu befassen, und man erhält für diesen Fall den gesuchten Wert für ε aus (11), indem man einfach das u, v und w enthaltende Glied fortläßt.

¹⁾ Die statistischen Methoden, die den Gleichungen (11) und (13), ferner (17) und (20) unten zugrunde liegen, begegnen schweren Bedenken; siehe J. H. van Leeuwen, l. c.

Ist dann dN die Zahl der Magnetonen in der Masseneinheit, deren statistische Variable $\vartheta, \varphi, P, Q, R$ Werte haben, die in dem durch

$$d\Omega = d\vartheta d\varphi dP dQ dR$$

gegebenen Phasenelement liegen, so wird das Gleichgewichtsgesetz der Verteilung in diesen Variablen ausgedrückt durch

$$dN = \alpha e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sin \vartheta d\Omega, \quad (12)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon = \frac{R^2 + Q^2}{2J} + \frac{R^2}{2C} \\ + \frac{e}{2mc} H(P \sin \varphi \sin \vartheta + Q \cos \varphi \sin \vartheta + R \cos \vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Wir ergreifen die Gelegenheit, noch einen anderen Fall zu betrachten, bei dem die Zahl der vorkommenden statistischen Variablen noch mehr reduziert ist. In diesem Falle wird die Winkelgeschwindigkeit ω_3 eines Magnetons um seine Symmetrieachse für alle Magnetonen als gleich und konstant angenommen. Dies erfordert, daß die Größe R konstant sei, denn es ist:

$$R = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) = C\omega_3. \quad (14)$$

Folglich braucht R nicht mehr als eine statistische Variable angesehen zu werden, und die statistischen Variablen sind daher in diesem Falle ϑ, φ, P, Q . Der Ausdruck für die Energiefunktion in diesem Falle ist nun zu suchen.

Aus (52), 2. Abschnitt, folgt unter Berücksichtigung, daß

$$\frac{Q_3}{C} = \frac{e}{m} \quad \text{und daß } H_3 = H \cos \vartheta \text{ ist:}$$

$$\omega_3 = \omega_{03} - \frac{e}{2mc} H \cos \vartheta.$$

Da $R = C\omega_3$, so erhalten wir mittels dieses Ausdruckes für die R enthaltenden Glieder von (10)

$$\frac{R^2}{2C} + R \frac{e}{4mc} H \cos \vartheta = \frac{1}{2} C \omega_{03}^2 - \frac{\mu}{2} H \cos \vartheta, \quad (15)$$

wobei

$$\mu = \frac{e}{2mc} C \omega_{03}. \quad (16)$$

μ bezeichnet den konstanten skalaren Wert jenes Teiles des magnetischen Momentes des Magnetons, der durch seine Rotation um die Symmetrieachse hervorgerufen wird.

Aus (10) und (15) folgt:

$$U = \left. \begin{aligned} & \frac{1}{2M}(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{P^2 + Q^2}{2J} + \frac{C\omega_{03}^2}{2} \\ & + \frac{eH}{4mc}(P \sin \varphi \sin \vartheta + Q \cos \varphi \sin \vartheta) - \frac{\mu}{2} H \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Man sieht leicht, daß der Transformationsmodul, wie oben, $\sin \vartheta$ ist. Bezeichnet nun dN die Zahl der Magnetonen in der Masseneinheit, deren statistische Variablen ϑ, φ, P, Q Werte haben, die in dem durch

$$d\Omega = d\vartheta d\varphi dP dQ \quad (18)$$

gegebenen Phasenelement liegen, so ist das Gleichgewichtsgesetz der Verteilung für diese Variablen gegeben durch:

$$\text{wobei} \quad dN = \alpha e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sin \vartheta d\Omega, \quad (19)$$

$$\varepsilon = \frac{P^2 + Q^2}{2J} + \frac{e}{2mc} H(P \sin \varphi \sin \vartheta + Q \cos \varphi \sin \vartheta) - \mu H \cos \vartheta \quad (20)$$

ist und wobei das konstante Glied $\frac{C\omega_{03}^2}{2}$ in (17) und die Glieder u, v, w wie oben vernachlässigt werden. Wird die Konstante α in den Formeln (12) und (19) gesucht, so kann sie in jedem Falle durch die Bedingung

$$\int \alpha e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sin \vartheta d\Omega = N \quad (21)$$

bestimmt werden, wobei die Integration jedesmal über alle Werte der Variablen zu erstrecken ist, deren Differentiale in dem entsprechenden Ausdruck für $d\Omega$ auftreten.

Die Verteilungsformeln von Langevin.

In der Theorie von Langevin wird die Größe des magnetischen Moments eines Moleküls (Magnetons) als konstant und längs einer polaren Achse gerichtet angenommen, wobei man die durch seine Rotationen um seine äquatorialen Achsen hervorgerufenen Beiträge zu seinem magnetischen Moment vernachlässigt. So kann deshalb das Langevinsche Magneton als ein axiales Magneton angesehen werden, dessen Rotation um seine Achse nicht der statistischen Veränderung unterliegt, und für das die durch die Rotationen um seine äquatorialen Achsen hervorgerufenen dynamischen und magnetischen Wirkungen als verschwindend klein angenommen werden können. Die letztere Bedingung erfordert, daß $P = Q = 0$ ist.

So findet man das Verteilungsgesetz in Langevins Theorie eines paramagnetischen Gases einfach aus (19), indem man im Ausdruck (20) $P = Q = 0$ setzt: hieraus ergibt sich, daß die Koordinate φ verschwindet und $d\varphi$, dP und dQ im Ausdruck (18) für $d\Omega$ wegfallen.

Das Langevinsche Verteilungsgesetz heißt also:

$$dN = \alpha e^{a \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta, \quad (22)$$

wobei $a = \frac{\mu H}{kT}$.

In Übereinstimmung mit dieser Formel hängt der Paramagnetismus eines aus Langevinschen Molekülen gebauten Körpers einfach von der Achsenverteilung der Magnetonen in bezug auf das äußere Feld ab. Natürlich gilt die Einschränkung der allgemeinen Theorie, nach der die Wirkungen der molekularen Felder aufeinander vernachlässigt werden können. Diese Einschränkung ist aber für den Fall eines paramagnetischen Gases belanglos.

Für die Berechnung der Magnetisierung in Langevins Theorie eines paramagnetischen Gases muß man den räumlichen Mittelwert von $\cos \vartheta$, wir bezeichnen ihn mit $\overline{\cos \vartheta}$, aufsuchen. Aus (22) findet man leicht, daß

$$\overline{\cos \vartheta} = \coth a - \frac{1}{a}. \quad (23)$$

Modifikation von Langevins Verteilungsformel durch Einführung des magnetischen molekularen Feldes ¹⁾.

Nun betrachten wir eine Modifikation von Langevins Verteilungsformel für ein paramagnetisches Gas, die auf der Betrachtung desjenigen molekularen Feldes beruht, das durch die den Körper nach Annahme zusammensetzenden Magnetonen hervorgerufen wird.

Indem wir das magnetische Feld im Mittelpunkt eines Magnetons in einem isotropen Körper einführen, können wir folgendermaßen vorgehen:

Wir denken uns um den Mittelpunkt eine kleine Kugel mit dem Radius s gezogen, wobei s die kürzeste Entfernung zwischen dem Mittelpunkt des betreffenden Magnetons und demjenigen seines nächsten Nachbarn ist. Konzentrisch zu dieser Kugel denken wir

¹⁾ Vgl. R. Gans, Ann. d. Phys. 50, 163, 1916.

uns eine zweite Kugel mit dem Radius s' gezogen, wobei s' groß im Vergleich zu s , aber klein im Vergleich zu den Massenabmessungen des Körpers ist.

Die magnetische Kraft im Mittelpunkt des Magnetons ist dann die Vektorsumme der äußeren Kraft \mathfrak{H} , der durch den außerhalb der Kugel s' gelegenen Teil des Körpers hervorgerufenen Kraft, die bekanntlich $\frac{4\pi\mathfrak{J}}{3}$ ist, wobei \mathfrak{J} die Magnetisierungsintensität ist, und einer Kraft \mathfrak{U} , die durch die in der Zone zwischen den Kugeln mit den Radien s und s' enthaltenen Magnetonen erzeugt wird.

Nun haben wir uns mit der Bestimmung des Feldes \mathfrak{U} , des sogenannten molekularen Feldes, zu befassen.

Bezeichnet \mathfrak{F} das resultierende Feld, so ist

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{F} &= \mathfrak{H} + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{J} + \mathfrak{U}, \\ &= \mathfrak{K} + \mathfrak{U}, \quad \left(\mathfrak{K} = \mathfrak{H} + \frac{4\pi}{3}\mathfrak{J} \right). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Gehen wir nun in der Umgebung des betrachteten Magnetons von einem Magneton zum anderen, so wird sich offenbar \mathfrak{U} nach Richtung und Größe ändern.

Es sei N die Zahl der Magnetonen in der Masseneinheit in einem Punkte O eines paramagnetischen Körpers, der nach Annahme aus axialen Magnetonen aufgebaut ist, und für den P und Q nach Annahme zu vernachlässigen sind.

Wir machen die Grundannahme, die durch genauere Prüfung berechtigt erscheint, daß alle Richtungen des molekularen Feldes \mathfrak{U} gleich wahrscheinlich sind. Wir bezeichnen ferner den Teil der gesamten N -Magnetonen in der Masseneinheit, die sich in einem molekularen Felde \mathfrak{U} befinden, dessen Richtung durch einen kleinen Kegel mit dem Scheitel in O und dem Öffnungswinkel $d\omega$ bestimmt ist, und für die die Größe von \mathfrak{U} zwischen den Grenzen A und $A + dA$ liegt, mit dN_a . Dann ist in Übereinstimmung mit obiger Grundannahme:

$$dN_a = N \frac{d\omega}{4\pi} w(A) dA,$$

wobei $w(A)$ eine später näher anzugebende Wahrscheinlichkeitsfunktion ist. Wir bezeichnen diese Magnetonen als Gruppe A .

In Fig. 5 können wir $d\omega$ durch

$$d\omega = \sin\gamma \, d\gamma \, d\varphi$$

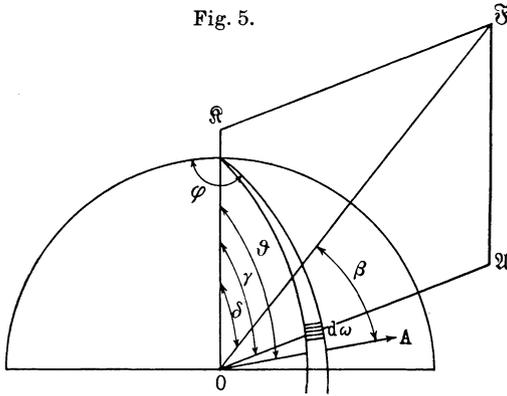
ausdrücken, wobei γ das Komplement der Breite und φ die Länge von $d\omega$ bezogen auf eine polare Achse in der Richtung \mathfrak{R} sind. Also ist nach der Figur:

$$A^2 = F^2 + K^2 - 2FK \cos \delta, \quad (25)$$

$$F^2 = A^2 + K^2 + 2AK \cos \gamma, \quad (26)$$

wobei δ der Winkel zwischen \mathfrak{R} und \mathfrak{F} ist.

Fig. 5.



Durch Differenzieren von (26) finden wir für alle Magnetonen der Gruppe A (für die A konstant ist):

$$\sin \gamma d\gamma = -\frac{F dF}{AK}.$$

Wir können deshalb schreiben:

$$dN_a = -\frac{N}{4\pi K} \frac{w(A)}{A} F dA dF d\varphi. \quad (27)$$

Es sei nun ϑ der Winkel, den die Achse eines Magnetons der Gruppe A mit der Feldrichtung \mathfrak{R} bildet. Dann wollen wir die Anzahl Magnetonen der Gruppe A, die mit der Richtung von \mathfrak{R} Winkel zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ bilden, mit dN_b bezeichnen. Diese Magnetonen nennen wir die Gruppe B. Die Zahl dN_b muß augenscheinlich von dem Verteilungsgesetz der Achsen der Magnetonen in Gruppe A abhängen und wir können sicherlich schreiben:

$$dN_b = dN_a f(\vartheta) d\vartheta,$$

wobei $f(\vartheta)$ eine zu bestimmende Funktion ist.

Offenbar ist die Zahl der Magnetonen von Gruppe A, die mit der Richtung \mathfrak{R} Winkel zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ bildet, gleich

der Zahl derselben Gruppe, die mit der Richtung des resultierenden Feldes \mathfrak{F} Winkel zwischen β und $\beta + d\beta$ bilden, wenn β den Winkel zwischen \mathfrak{F} und der Achse eines Magnetons der Gruppe A bezeichnet. Letztere Zahl ist durch das Langevinsche Verteilungsgesetz gegeben. Also ist:

$$f(\vartheta) d\vartheta = \alpha e^{a \cos \beta} \sin \beta d\beta, \quad \text{wobei } a = \frac{\mu F}{kT} \text{ ist.}$$

Und deshalb:

$$dN_b = dN_a \alpha e^{a \cos \beta} \sin \beta d\beta,$$

oder, indem man den oben gegebenen Ausdruck für dN_a einsetzt:

$$dN_b = -\frac{N}{4\pi K} \frac{w(A)}{A} F \alpha e^{a \cos \beta} \sin \beta dA dF d\beta d\varphi. \quad (28)$$

Aus der Bedingung:

$$\int_0^\pi \alpha e^{a \cos \beta} \sin \beta d\beta = 1$$

findet man leicht den Wert von α zu:

$$\alpha = \frac{1}{2} a (\sinh a)^{-1}. \quad (29)$$

Später brauchen wir den räumlichen Mittelwert von $\cos \beta$, nämlich $\overline{\cos \beta}$, für die Magnetonen der Gruppe A. Aus (28) ergibt sich

$$\overline{\cos \beta} = \coth a - \frac{1}{a}. \quad (30)$$

Ebenso brauchen wir später den räumlichen Mittelwert von $\cos \vartheta$, nämlich $\overline{\cos \vartheta}$, für alle N -Magnetonen.

Um $\overline{\cos \vartheta}$ zu finden, suchen wir zuerst einen Ausdruck für $\cos \vartheta$ in den Verteilungsvariablen A , F und β .

Da $\vartheta = \delta + \beta$, erhalten wir:

$$\cos \vartheta = \cos \delta \cos \beta - \sin \delta \sin \beta$$

und aus (25)

$$\cos \delta = \frac{F^2 + K^2 - A^2}{2FK}, \quad \sin \delta = \frac{\sqrt{(2FK)^2 - (F^2 + K^2 - A^2)^2}}{2FK}$$

Also ist:

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \frac{1}{2FK} \{(F^2 + K^2 - A^2) \cos \beta \\ &- \sqrt{(2FK)^2 - (F^2 + K^2 - A^2)^2} \sin \beta\}. \end{aligned}$$

Den Wert für $\overline{\cos \vartheta}$ erhält man, indem man die rechte Seite von (28) mit diesem Ausdruck für $\cos \vartheta$ multipliziert, über alle Werte der Verteilungsvariablen integriert und durch N dividiert. So findet man, daß:

$$\left. \begin{aligned} \overline{\cos \vartheta} = & -\frac{1}{8\pi} \int_0^{\infty} \frac{w(A)}{A} dA \int_{\pm(A-K)}^{A+K} \frac{\alpha (F^2 + K^2 - A^2)}{K^2} \\ & dF \int_0^{\pi} e^{a \cos \beta} \sin \beta \cos \beta d\beta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi, \\ & -\frac{1}{8\pi} \int_0^{\infty} \frac{w(A)}{A} dA \int_{\pm(A-K)}^{A+K} \frac{\alpha \sqrt{(2FK)^2 - (F^2 + K^2 - A^2)^2}}{K^2} \\ & dF \int_0^{\pi} e^{a \cos \beta} \sin \beta \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) d\beta \int_0^{2\pi} d\varphi. \end{aligned} \right\} (31)$$

Hierbei ist das $+$ -Zeichen bei der unteren Grenze der Integrale, die sich auf die Variable F beziehen, dann zu nehmen, wenn $A > K$, das $-$ -Zeichen, wenn $A < K$.

Nun ist das Integral

$$\int_0^{\pi} e^{a \cos \beta} \sin \beta \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) d\beta$$

proportional der Magnetisierung der Magnetonen von Gruppe A in einer zum resultierenden Felde F senkrechten Richtung, und diese Magnetisierung muß aus Symmetriegründen verschwinden.

Folglich erhalten wir zum Schluß aus (31), nachdem wir über φ und β integriert und aus (29) den Wert von α eingeführt haben:

$$\overline{\cos \vartheta} = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{w(A)}{A} dA \int_{\pm(A-K)}^{A+K} \left(\coth a - \frac{1}{a} \right) \left(\frac{F^2 + K^2 - A^2}{K^2} \right) dF, \quad (32)$$

wobei

$$a = \frac{\mu F}{k T}.$$

Die Auswertung von $\overline{\cos \vartheta}$ kann nun nicht weitergeführt werden, bis die Wahrscheinlichkeitsfunktion $w(A)$ bestimmt worden ist.

Das hier vorliegende statistische Problem wurde durch Gans¹⁾ gelöst. Für die etwas langatmige Durchrechnung verweisen wir den Leser auf die Originalarbeit und geben hier nur das Resultat:

Man fand, daß

$$w(A) = \frac{4\pi A^2}{\sqrt{\pi^3 A_0^3}} e^{-\frac{A^2}{A_0^2}} \quad (33)$$

ist, wobei A_0 eine den wahrscheinlichsten Wert des molekularen Feldes A darstellende Konstante ist.

Unter der Annahme, daß wir im Molekül ein Magneton haben, erhalten wir

$$A_0 = \frac{4}{3} \mu \sqrt{\frac{\pi N_0 \rho}{Ms^3}}, \quad (34)$$

wobei μ das magnetische Moment eines Magnetons, M das Molekulargewicht, N_0 die Loschmidtsche Zahl, ρ die Dichte und s die kleinste Entfernung zweier Magnetonen ist.

Setzen wir in (32) den durch (33) gegebenen Ausdruck für $w(A)$ ein, so erhalten wir für den Mittelwert von $\cos \vartheta$ folgenden Ausdruck:

$$\overline{\cos \vartheta} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^3 A_0^3}} \int_0^\infty e^{-\frac{A^2}{A_0^2}} A dA \int_{\pm(A-K)}^{A+K} \left(\coth a - \frac{1}{a} \right) \frac{F^2 + K^2 - A^2}{K^2} dF, \quad (35)$$

wobei $a = \frac{\mu F}{kT}$ und das $+$ -Zeichen in der unteren Grenze des Integrals mit F für $A > K$, das $-$ -Zeichen für $A < K$ zu nehmen ist.

Die Verteilungsfunktion in den Quantentheorien des Paramagnetismus.

Das allgemeine Verteilungsgesetz für die statistischen Variablen eines Systems gleicher Einheiten, das durch Gleichung (1) des vorliegenden Abschnittes ausgedrückt wird, ist ein Ergebnis der klassischen statistischen Theorie, die voraussetzt, daß die mit jedem Freiheitsgrad einer Einheit verbundene Energie kontinuierlicher Änderung fähig ist.

Aus Abschnitt VII dieser Übersicht wird jedoch hervorgehen, daß man für eine befriedigende und den experimentellen Ergebnissen bei tiefen Temperaturen Rechnung tragende Theorie des Paramagnetismus notwendigerweise die Annahme, die mit den verschiedenen Freiheitsgraden der rotierenden Magnetonen verbundene

¹⁾ Gans, Ann. d. Phys. 50, 163, 1916.

Energie sei kontinuierlicher Änderungen fähig, durch eine andere Annahme ersetzen muß, nach der sich die Energie in Übereinstimmung mit der Planckschen Quantenbeziehung $\varepsilon = h\nu$ ändert.

Deshalb muß man das von der klassischen statistischen Mechanik gelieferte Verteilungsgesetz geeigneterweise so modifizieren, daß man den Planckschen Quantenspezifikationen Rechnung trägt, die sich auf die mit jedem Freiheitsgrad der rotierenden Magnetonen verbundene Energie beziehen.

Das hier vorliegende Problem der Quantelung ist ganz ähnlich dem von Planck bei der Ableitung seines Strahlungsgesetzes für den schwarzen Körper behandelten, aber es ist beträchtlich verwickelter, wie aus der im Abschnitt VII gegebenen Besprechung ersichtlich ist.

Wir stellen bis dahin die weitere Betrachtung dieses Gegenstandes zurück.

Die im vorliegenden Abschnitt erhaltenen Ergebnisse werden in Verbindung mit der Besprechung gewisser Theorien des Dia- und Paramagnetismus, die wir später betrachten wollen, von Nutzen sein.

Anmerkung. In dem vorliegenden Abschnitt haben wir als Beispiel den Versuch von Gans skizziert, die Verteilungsfunktion in größerer Allgemeinheit als Langevin abzuleiten. Sein Vorgehen in dem Falle, bei dem das molekulare Feld vernachlässigt wird und bei dem das nicht der Fall ist, begegnet gewissen Bedenken, und die Ergebnisse sind nur mit großer Vorsicht anzunehmen. Auch andere Physiker haben sich mit diesem schwierigen Problem befaßt; die erhaltenen Ergebnisse sind aber durchaus nicht übereinstimmend. Eine kritische Analyse¹⁾ der benutzten statistischen Methoden zeigt, daß sie in einigen wesentlichen Einzelheiten fehlerhaft sind. Eine genügende statistische Theorie des Paramagnetismus ist, ausgenommen für ein paramagnetisches Gas, noch nicht aufgestellt worden.

IV. Frühere Versuche zu Elektronentheorien des Magnetismus.

Gleich zu Beginn des in vorliegendem Überblick betrachteten Zeitabschnittes wurden die Grundzüge der modernen Elektronentheorie der Materie in rascher Entwicklung festgelegt. Die

¹⁾ Vgl. Mlle. H. J. van Leeuwen, Journ. de Phys. 1921, sér. VI, t. II, 361.

Forschungen der letzten Jahre des vorigen Jahrhunderts hatten begründete Anhaltspunkte für die Ansicht gebracht, daß die letzte Struktur der Materie wesentlich elektronischer Natur ist.

Im besonderen hatte sich die Annahme eines Aufbaues der Materie aus Elektronen als fähig erwiesen, gewisse, der Maxwell'schen elektromagnetischen Theorie noch anhaftende Schwierigkeiten zu beseitigen, die sich bei der Erklärung der optischen Phänomene der Dispersion erhoben hatten.

Unter dem Eindruck des Erfolges der Elektronentheorie in dieser Richtung stellte Prof. W. Voigt¹⁾ im Jahre 1902 eine Untersuchung an, die das Ziel hatte, festzustellen, inwieweit der für die materiellen Körper in der optischen Theorie der Dispersion angenommene Aufbau aus Elektronen zur Erklärung der Magnetisierungserscheinungen herangezogen werden könne.

Um die gleiche Zeit unternahm Sir J. J. Thomson²⁾ eine Untersuchung, die den gleichen Gegenstand zum Ziele hatte. Seine Ergebnisse waren mit den zeitlich etwas früheren von Voigt im Einklang.

Wegen der Wichtigkeit der von diesen beiden Forschern gefundenen Ergebnisse erscheint es der Mühe wert, die Beweisführung des einen derselben zu skizzieren.

Voigts Versuch einer Elektronentheorie des Magnetismus.

In der elementaren Dispersionstheorie nimmt man an, daß die Moleküle eines materiellen Körpers eine Anzahl Elektronen enthalten, die beim Fehlen eines äußeren elektrischen oder magnetischen Feldes sich in stabilem Gleichgewicht befinden oder in kreisender Bewegung um ihre Gleichgewichtslagen, wobei sie unter dem Einfluß von konservativen Kräften quasielastischer Natur stehen, die den Verrückungen der Elektronen aus ihren Gleichgewichtslagen proportional sind. Zur Erklärung der Absorption nimmt man an, daß auf jedes Elektron eine seiner Verrückungsgeschwindigkeit proportionale zerstreuernde Kraft wirkt. Falls der Körper einem äußeren elektrischen Feld \mathcal{E} und einem äußeren magnetischen Feld \mathcal{H} unterworfen ist, wirken auf das Elektron noch zwei Zusatzkräfte: die eine ist der elektrischen Feldstärke proportional, die andere

¹⁾ W. Voigt, Ann. d. Phys. **9**, 115, 1902.

²⁾ J. J. Thomson, Phil. Mag. **6**, Ser. 6, 673, 1903.

dem Vektorprodukt aus seiner Geschwindigkeit und der magnetischen Feldstärke.

Sind ξ , η , ζ die rechtwinkligen Koordinaten eines Elektrons bezüglich seiner Gleichgewichtslage als Anfangspunkt, so sind seine Bewegungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{\xi} &= -h\dot{\xi} - k\xi + eE_1 + \frac{e}{c}(\dot{\eta}H_3 - \dot{\zeta}H_2), \\ m\ddot{\eta} &= -h\dot{\eta} - k\eta + eE_2 + \frac{e}{c}(\dot{\zeta}H_1 - \dot{\xi}H_3), \\ m\ddot{\zeta} &= -h\dot{\zeta} - k\zeta + eE_3 + \frac{e}{c}(\dot{\xi}H_2 - \dot{\eta}H_1). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Hierbei sind h und k Konstante, m ist die Masse des Elektrons und e seine Ladung. Dies sind die Grundgleichungen der elementaren Elektronentheorie der Dispersion, in der jedoch den gegenseitigen Wirkungen der Verrückungen der Elektronen nicht Rechnung getragen ist.

Prof. Voigt führt an diesem Punkte folgende Annahmen ein:

- I. Das äußere elektrische Feld sei Null.
- II. Das äußere magnetische Feld sei konstant und parallel zur Z -Achse gewählt.
- III. Die Zerstreuungskonstante h sei Null, um mit der Annahme Ampères übereinzustimmen, daß widerstandslose Molekularströme existieren.

Unter diesen Annahmen sind die Lösungen der Gleichungen (1):

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a_1 \cos(p_1 t + \alpha_1) + a_2 \cos(p_2 t + \alpha_2), \\ \eta &= a_1 \sin(p_1 t + \alpha_1) - a_2 \sin(p_2 t + \alpha_2), \\ \zeta &= b \sin(pt + \beta), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

wobei a_1 , a_2 , α_1 , α_2 , b , β , p_1 , p_2 und p Konstante sind und

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad p_1 = p - \frac{eH}{2mc}; \quad p_2 = p + \frac{eH}{2mc}. \quad (3)$$

Die Werte für p_1 und p_2 sind angenähert, in Übereinstimmung mit der Annahme, daß das Quadrat der natürlichen Periodizität p des Elektrons groß ist im Vergleich zur Größe $\left(\frac{eH}{2mc}\right)^2$.

Was die Anfangsbedingungen betrifft, so wird angenommen, daß das für die Anlegung des äußeren magnetischen Feldes erforder-

liche Zeitintervall außerordentlich klein ist, und daß die Anlegung so geschehe, daß die Wirkungen des während der Anlegung des magnetischen notwendigerweise auftretenden elektrischen Feldes vernachlässigt werden können¹⁾. Um die in dem vorhergehenden Paragraphen durchgeführte Annäherung einzuführen, mag ferner angenommen werden, daß die Lage und Geschwindigkeit während der Dauer der Anlegung des äußeren magnetischen Feldes unverändert bleibe.

Deshalb erhalten wir aus (2) für die Komponenten der Anfangsverrückung des Elektrons:

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2, \\ \eta_0 &= a_1 \sin \alpha_1 - a_2 \sin \alpha_2, \\ \zeta_0 &= b \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

und für die Komponenten der Anfangsgeschwindigkeiten:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_0 &= -p_1 a_1 \sin \alpha_1 - p_2 a_2 \sin \alpha_2, \\ \dot{\eta}_0 &= +p_1 a_1 \cos \alpha_1 - p_2 a_2 \cos \alpha_2, \\ \dot{\zeta}_0 &= p b \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Wir nehmen nun an, das betrachtete Elektron sei in einem kleinen Raumelement $d\tau$ eines materiellen Körpers enthalten und der Anfangspunkt O unseres Koordinatensystems sei ebenfalls in diesem Raumelement enthalten.

Um die Magnetisierung des Körpers zu finden, hat man die durch dieses Element auf einen Punkt P der Z -Achse in der Umgebung des Elementes hervorgerufene magnetische Kraft aufzusuchen. Zuerst müssen wir einen Ausdruck für die durch ein einziges Elektron in P hervorgerufene magnetische Kraft finden. Es wird tatsächlich genügen, uns auf die Betrachtung der Z -Komponente dieser Kraft zu beschränken.

Nennen wir die Entfernung OP D und nehmen wir an, D sei groß gegenüber OQ , so kann diese Kraftkomponente in zweiter Annäherung in der kleinen Größe $\frac{\xi}{D}$ nach (11), Abschnitt I ausgedrückt werden durch:

$$\frac{e}{cD^3} (\dot{\eta} \xi - \dot{\xi} \eta) \left(1 + \frac{3\xi}{D} \right). \quad (6)$$

¹⁾ Es wird sich später zeigen, daß die so vernachlässigten Wirkungen in Langevins Theorie des Diamagnetismus von fundamentaler Bedeutung sind.

Bezeichnet Z den zeitlichen Mittelwert dieses Ausdruckes, so finden wir mittels (2):

$$Z = \frac{e}{cD^3} (p_1 a_1^2 - p_2 a_2^2)$$

oder, indem man die in (4) und (5) gewonnenen Werte von a_1^2 und a_2^2 einsetzt:

$$Z = \frac{e}{cD^3} \left\{ (p_1 - p_2) (\dot{\xi}_0^2 - \dot{\eta}_0^2) - p_1 p_2 (\xi_0^2 + \eta_0^2) + 4 p_1 p_2 (\dot{\eta}_0^2 \xi_0 - \dot{\xi}_0 \eta_0) \right\} \frac{1}{p_1^2 + p_2^2}. \quad (7)$$

Berücksichtigt man die in (3) gegebenen Werte von p_1 , p_2 und p , so reduziert sich die Gleichung ersichtlich zu:

$$Z = \frac{e}{cD^3} \left[\dot{\xi}_0 \dot{\eta}_0 - \eta_0 \dot{\xi}_0 - \frac{eH}{2cm^2 p^2} \left\{ \frac{m}{2} (\xi_0^2 + \eta_0^2) - \frac{k}{2} (\xi_0^2 + \eta_0^2) \right\} \right]. \quad (8)$$

Der Kürze halber setzen wir:

$$\left. \begin{aligned} Z_0 &= \frac{e}{cD^3} (\xi_0 \dot{\eta}_0 - \eta_0 \dot{\xi}_0), \\ \Phi_{Z_0} &= \frac{k}{2} (\xi_0^2 + \eta_0^2), \\ \Psi_{Z_0} &= \frac{m}{2} (\xi_0^2 + \eta_0^2). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Offenbar ist Z_0 der Wert von Z , ehe das magnetische Feld \mathfrak{H} angelegt wird; Φ_{Z_0} ist die potentielle Energie des Elektrons, die durch seine Verschiebung senkrecht zur Z -Achse im Augenblick der Anlegung des Feldes ($t = 0$) entsteht; Ψ_{Z_0} ist seine kinetische Energie in demselben Augenblick, die durch seine Bewegung senkrecht zur Z -Achse hervorgerufen ist. Für irgend eine spätere Zeit wollen wir die entsprechende potentielle und kinetische Energie mit Φ_Z und Ψ_Z bezeichnen.

Unter Benutzung der durch (9) gegebenen Abkürzungen kann (8) folgendermaßen geschrieben werden:

$$Z - Z_0 = - \frac{e^2 H}{2c^2 m^2 p^2 D^3} (\Psi_{Z_0} - \Phi_{Z_0}). \quad (10)$$

Die Gleichung stellt die Differenz der Z -Komponenten des zeitlichen Mittelwerts der magnetischen Kraft im Punkte P dar, die durch die Bewegung des in Q befindlichen Elektrons vor und nach

Anlegung des magnetischen Feldes hervorgerufen wird. Für unsere gegenwärtigen Zwecke müssen wir den Mittelwert von $Z - Z_0$ aufsuchen, der durch die räumliche Verteilung der Elektronen in einem Raumelement $d\tau$ im Punkte 0 hervorgerufen wird; dabei zeigen diese Elektronen das gleiche Verhalten wie das oben betrachtete. Und um obigen Wert zu finden, suchen wir den räumlichen Mittelwert von $\Psi_{Z_0} - \Phi_{Z_0}$ für die Elektronen im Element $d\tau$. Wir nehmen an, diese Elektronen seien ursprünglich nach Lage und Bewegung gänzlich ungeordnet.

Solange kein magnetisches Feld besteht, wird die Bahn eines Elektrons elliptisch sein, und die Bahngleichungen seiner auf die XY -Ebene projizierten Bewegung sind:

$$\text{Demnach ist} \quad \xi = \alpha \cos pt, \quad \eta = \beta \sin pt. \quad (11)$$

$$\text{also} \quad \dot{\xi} = -p\alpha \sin pt, \quad \dot{\eta} = p\beta \cos pt,$$

$$\frac{m}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) - \frac{k}{2}(\xi^2 + \eta^2) = \frac{k}{2}(\beta^2 - \alpha^2) \cos 2pt,$$

für den Augenblick der Anlegung des magnetischen Feldes ergibt sich demnach:

$$\Psi_{Z_0} - \Phi_{Z_0} = \frac{k}{2}(\beta^2 - \alpha^2) \cos 2pt. \quad (12)$$

Gleichung (11) gilt für jedes der N im Raumelement $d\tau$ enthaltenen Elektronen. Es sei dt die Zeit, in der ein Elektron ein Bahnelement durchläuft, dessen Projektion auf die XY -Ebene ds ist. In jedem Augenblick ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Elektron sich gerade in diesem Bahnelement befindet, gegeben durch $\frac{dt}{T}$, wobei T die Umlaufzeit des Elektrons ist. Folglich ist die mutmaßliche Anzahl für den Bruchteil der N Elektronen, welche sich in dem gleichen Phasenelement in ihren respektiven Bahnen befinden, das nach Lage und Größe durch das Element ds im Falle des typischen Elektrons gegeben ist, $N \frac{dt}{T}$. Infolgedessen wird der räumliche Mittelwert \bar{q} für irgend eine allgemeine, mit jedem der N Elektronen verbundene Größe q ausgedrückt durch

$$\bar{q} = \frac{1}{N} \int_0^T q \frac{Ndt}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T q dt.$$

Also erhalten wir, wenn wir für q die linke Seite von (12) nehmen:

$$\overline{\Psi}_{z_0} - \overline{\Phi}_{z_0} = \frac{1}{T} \int_0^T (\Psi_{z_0} - \Phi_{z_0}) dt.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung verschwindet nach (12); also ist auch der Ausdruck auf der linken Seite gleich Null. Nunmehr folgt aus (10)

$$\overline{Z} = \overline{Z}_0. \quad (13)$$

Folglich würde nach der vorliegenden Theorie ein anfänglich unmagnetisierter Körper auch nach Anlegung eines magnetischen Feldes so bleiben. Demnach kann ein Medium mit einem Elektronenaufbau, wie man ihn in der elementaren Dispersionstheorie annimmt, weder den Para- noch den Diamagnetismus erklären, wenn man voraussetzt, daß sich die Elektronen in ihren Bahnen ohne Zerstreuung und ohne Zusammenstöße bewegen. Nimmt man Zerstreuung an, so ist für die Existenz eines stabilen Zustandes notwendig, daß die Elektronen durch Zusammenstöße Energiezuwüchse erhalten. Dann erhebt sich die Frage, ob unter diesen Bedingungen die durch die Bewegung der Elektronen hervorgerufene Magnetisierung bei Anwesenheit eines magnetischen Feldes eine andere sein wird, als ohne dasselbe.

Soweit eine Antwort auf diese Frage gegeben werden kann, darf man die Zerstreuung in gewissem Sinne vernachlässigen. Denn die Wirkung der Zerstreuung auf die Bewegung des Elektrons wird durch die ständig erfolgenden Zusammenstöße ausgeglichen werden, die wir der Einfachheit halber als instantan annehmen. Nun ist in der Dispersionstheorie die Zeit, die ein Elektron braucht, um seine Bahn zu beschreiben, sehr klein, und deshalb kann man annehmen, daß ein Elektron zwischen aufeinanderfolgenden Zusammenstößen seine Bahn oftmals beschreibt. Aus obigem ging hervor, daß die Differenz $Z - Z_0$ der Z -Komponenten des zeitlichen Mittelwertes der magnetischen Kraft im Punkte P , die durch die Bewegung des Elektrons mit und ohne magnetisches Feld \mathfrak{H} hervorgerufen ist, einfach von der Differenz $\Psi_{z_0} - \Phi_{z_0}$ seiner potentiellen und kinetischen Energie abhängt, die durch seine Verrückung und Bewegung senkrecht zu \mathfrak{H} im Augenblick der Anlegung des magnetischen Feldes erzeugt ist. In dem jetzt betrachteten Falle, in dem

Zusammenstöße in Rechnung gesetzt werden, besteht, wie leicht ersichtlich, die Wirkung eines Zusammenstoßes des in einem konstanten Felde der Stärke \mathfrak{H} sich bewegenden Elektrons darin, den durch (10) gegebenen Wert von $Z - Z_0$ in einen neuen, durch

$$Z - Z_0 = - \frac{e^2 H}{2 c^2 m^2 p^3 D^3} (\Psi_{Z_1} - \Phi_{Z_1}) \quad (14)$$

gegebenen Wert abzuändern, wobei Φ_{Z_1} und Ψ_{Z_1} die durch die Verschiebung und Bewegung des Elektrons senkrecht zu \mathfrak{H} erzeugte potentielle und kinetische Energie in dem Augenblick unmittelbar nach dem Zusammenstoß darstellen.

Sind die Zusammenstöße ganz zufällig, so muß unter allen Umständen bei isotropen Körpern der durch die Elektronenbewegungen in einem Raumelement $d\tau$ in O hervorgerufene Mittelwert von Z_0 verschwinden, da eine Magnetisierung die Anwesenheit eines magnetischen Feldes erfordern würde. Deshalb brauchen wir, um den Mittelwert von Z zu erhalten, nur Z_0 in (14) zu vernachlässigen und den räumlichen Mittelwert der rechten Seite dieser Gleichung zu suchen. Also ist, wenn n die Anzahl der Elektronen in der Volumeneinheit des betrachteten Typs bezeichnet:

$$\bar{Z} = - \frac{e^2 H n d\tau}{2 c^2 m^2 p^3 D^3} (\bar{\Psi}_{Z_1} - \bar{\Phi}_{Z_1}). \quad (15)$$

Unter der Annahme völlig ungeordneter Lagen und Bewegungen der Elektronen, beträgt $\bar{\Phi}_{Z_1}$ zwei Drittel der mittleren potentiellen und $\bar{\Psi}_{Z_1}$ zwei Drittel der mittleren kinetischen Energie der Elektronen, berechnet für die Lagen und Bewegungen unmittelbar nach den Zusammenstößen. Bezeichnen Φ_1 und Ψ_1 die mittlere potentielle und kinetische Energie in der Volumeneinheit für diese Lagen und Bewegungen, so ist:

$$\bar{Z} = - \frac{e^2 H d\tau}{3 c^2 m^2 p^3 D^3} (\Psi_1 - \Phi_1).$$

Diese Größe ist aber gleich der magnetischen Kraft, die ein in O befindlicher kleiner Magnet in P hervorrufen würde, dessen Achse in die Richtung OP fällt, und dessen Moment

$$\frac{e^2 H d\tau}{6 c^2 m^2 p^3} (\Phi_1 - \Psi_1)$$

ist. Deshalb ist, wenn M das magnetische Moment pro Volumeneinheit ist:

$$M = \frac{e^3 H}{6 c^3 m^2 p^2} (\Phi_1 - \Psi_1) \quad (16)$$

und, wenn κ die magnetische Volumenssuszeptibilität ist:

$$\kappa = \frac{e^3}{6 c^3 m^2 p^2} (\Phi_1 - \Psi_1). \quad (17)$$

Aus dem durch Gleichung (17) ausgedrückten Ergebnis geht hervor, daß die vorliegenden Annahmen es ermöglichen, sowohl Paramagnetismus als auch Diamagnetismus in einem Medium zu erklären, das den gleichen Elektronenaufbau besitzt, wie das mit solchem Erfolg in der Dispersionstheorie der Optik verwandte. Überdies, die vorliegende Theorie erfordert zur Erklärung des Para- und des Diamagnetismus nicht zwei wesentlich verschiedene Grundannahmen, wie es in den älteren Theorien von Ampère und von Weber der Fall ist.

Die Theorie von Voigt läßt den Weg offen zur Erklärung der experimentell wohlbekannten Änderungen der magnetischen Suszeptibilität mit den Änderungen im physikalischen Zustand des Mediums, und zwar durch die Änderungen in der Art des Zusammenstoßes, der solche Zustandsänderungen verursacht. Jedoch ist unser Wissen von allem, was die Elektronenbewegung erregt und aufrecht erhält, viel zu beschränkt, als daß es die Theorie ermöglichen könnte, vorauszusagen, wie sich irgend ein bestimmtes Medium unter der Einwirkung eines magnetischen Feldes verhalten würde.

Sir J. J. Thomson legte seinen theoretischen Forschungen über das magnetische Verhalten eines Körpers mit molekularer Struktur zugrunde, in welchem nach seiner Annahme die Elektronen ringförmig angeordnet sind, gleiche Abstände voneinander besitzen und mit gleicher Winkelgeschwindigkeit in einer Ebene um eine Achse durch den Mittelpunkt des Ringes rotieren. Hierbei kam er zu dem Resultat, daß, soweit die Elektronen keinen Energieverlust durch Zerstreuung unterworfen sind, das Material weder diamagnetisches noch paramagnetisches Verhalten aufweisen wird. Dies stimmt mit dem negativen Resultat überein, das Voigt mit der oben skizzierten Methode gefunden hat. Unter der Annahme, daß Zerstreuung auftritt, fand man, daß sich Paramagnetismus ergeben würde.

Der Unterschied zwischen den magnetischen Eigenschaften von Elektronen, die nach Thomsons Theorie ohne Zerstreuung

freie Bahnen beschreiben, und den konstanten Molekularströmen nach Ampère, erscheint nach der Rechnung Thomsons durch die Tatsache hervorgerufen, daß im Falle der freien Bahnen ohne Zerstreuung beschreibenden Elektronen die dia- und die paramagnetischen Wirkungen einander gerade aufheben.

Nachdem Thomson zu dem oben erwähnten negativen Ergebnis gekommen war, sprach er in der nämlichen Arbeit (1903) die Vermutung aus, die magnetischen Eigenschaften eines Körpers müßten von den Eigenschaften von Aggregaten großer Moleküzahl abhängen. Mit Rücksicht auf die Richtung, die die Ideen in der folgenden Entwicklung der Theorien des Magnetismus einnehmen, mag folgendes Zitat am Platze sein:

„Im Falle solcher Aggregate ist immerhin leicht einzusehen, daß die Bahnen, in denen sich geladene Körper bewegen, nicht frei sein können, sondern daß infolge der durch die Moleküle des Aggregates ausgeübten Kräfte, die Bahn gezwungen sein kann, in bezug auf das Aggregat eine unveränderliche Lage beizubehalten — wie wenn, um einen rohen Vergleich zu geben, die Bahn eine durch das Aggregat gebohrte Röhre wäre, so daß sich die Bahn und das Aggregat wie ein starrer Körper bewegen müßten, und man, um die Bahn abzulenken, notwendigerweise auch das Aggregat ablenken müßte. Unter diesen Bedingungen sieht man leicht, daß die Bahnen unter dem Einfluß von Kräften stehen würden, die im Durchschnitt denjenigen äquivalent wären, die auf einen ständigen um die Bahn fließenden Strom wirken; das Aggregat und seine Bahn würden sich unter der Einwirkung dieser Kräfte wie ein System kleiner Magnete verhalten, und der Körper würde magnetische Eigenschaften aufweisen, die denen, die ein System von Ampereströmen besitzt, völlig gleich wären.“

Hier liegt ein Ansatz vor für eine mögliche Modifikation der in der Dispersionstheorie der Optik angenommenen Molekularstruktur, der imstande sein könnte, die magnetischen Eigenschaften materieller Körper zu erklären. Hiermit ist die Richtung für eine mögliche natürliche Weiterentwicklung der Elektronentheorie des Magnetismus angedeutet, indem man dabei die Auffassung Ampères beibehält, daß in einem magnetischen Molekül Ströme widerstandslos in Bahnen zirkulieren, die in starrer Verbindung mit dem Molekül selbst sind.

Ein bedeutender Fortschritt in dieser Richtung wurde durch Langevin 1905 gemacht.

V. Die Theorie von Langevin.

Die von Langevin¹⁾ im Jahre 1905 vorgeschlagene Theorie des Magnetismus zeigt, daß es mit einem entsprechend angenommenen magnetischen Molekül oder Magneton nützlich ist, sowohl den Diamagnetismus als auch den Paramagnetismus befriedigend zu erklären.

Die Grundgedanken, auf denen Langevins Theorie ruht, wurden von fast allen seit 1905 entwickelten Theorien des Magnetismus übernommen. Deshalb muß diese Theorie im folgenden etwas eingehender besprochen werden.

Ein magnetisches Molekül nach der Auffassung Langevins enthält eine Anzahl von teils negativen, teils positiven Elektronen, wobei die algebraische Summe der Ladungen aller Elektronen in einem Molekül Null ist. Einige Elektronen befinden sich nach Annahme in kreisender Bewegung innerhalb des Moleküls in geschlossenen Bahnen, und die Bahnebenen behalten unter dem Einfluß innerer Kräfte feste Orientierungen in bezug auf das Molekül als Ganzes bei. Die Anordnung der Bahnen sollen einen solchen Grad von Symmetrie besitzen, daß das entstehende magnetische Moment des Moleküls Null ist. Entbehrt andererseits die Anordnung eine solche Symmetrie, so soll das magnetische Moment des Moleküls einen bestimmten Wert haben.

Offenbar beruht die Wirkung der Anlegung eines äußeren magnetischen Feldes auf einen aus solchen magnetischen Molekülen aufgebauten Körper darin, die Bewegungen der Elektronen in ihren Bahnen so zu beschleunigen, daß Diamagnetismus entsteht. Sind die magnetischen Momente des Moleküls von Null verschieden, so wird sich dieser Wirkung eine andere überlagern, d. h. eine Orientierung der Moleküle, die dahin zielt, ihre magnetischen Achsen in die Richtung des äußeren Feldes einzustellen.

In der folgenden kurzen Übersicht über Langevins berühmte Arbeit von 1905 wurden Änderungen in den Bezeichnungen vorgenommen, um sie besser den oben benutzten anzupassen, und an Stelle der kartesischen Koordinaten die Vektorschreibweise eingeführt.

¹⁾ Ann. de chim. et phys. (8) 5, 70, 1905.

Diamagnetismus.

Eine Prüfung der Eigenschaften der molekularen Struktur für diamagnetische isotrope Körper nach der Annahme von Langevin wird zeigen, daß sie imstande ist, den Diamagnetismus in solchen Körpern zu erklären.

Wir betrachten ein kleines Raumelement eines solchen Körpers, den wir uns im allgemeinen Falle als bewegt denken. Das Element enthalte nach Annahme eine große Zahl von Elektronen, von denen einige jedenfalls in lebhafter kreisender Bewegung um die Mittelpunkte der Moleküle, zu denen sie gehören, sich befinden. Es sei in Fig. 6 O der mit der Geschwindigkeit v sich bewegende Mittelpunkt dieser Elektronen, ferner sei x, y, z ein rechtwinkliges Achsen-system, dessen Richtungen im Raume festliegen, und dessen Anfangspunkt in dem betrachteten Augenblick mit O zusammenfällt. Weiterhin sei $Q(x, y, z)$ die Lage irgend eines Elektrons, $C(a, b, c)$ der Mittelpunkt des Moleküls, zu dem dieses Elektron gehört, r der Lagevektor von Q , bezogen auf O und q derjenige von C , während s der Lagevektor von Q , bezogen auf C ist.

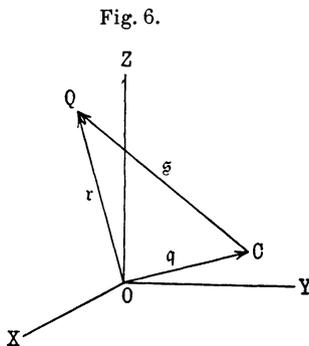


Fig. 6.

Unter der Annahme, daß das Element elektrisch neutral und unpolarisiert sei, ist:

$$\sum e = 0, \quad \sum es = 0. \tag{1}$$

Da O der Mittelpunkt des Elements ist, ist $\sum x = \sum y = \sum z = 0$ und da der Körper isotrop ist, ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \sum xy &= \sum yz = \sum zx = 0, \\ \sum a &= \sum b = \sum c = 0, \\ \sum ab &= \sum bc = \sum ca = 0. \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

Sind ξ, η, ζ die Koordinaten von Q , bezogen auf C , so folgt dann:

$$\sum \xi = \sum \eta = \sum \zeta = \sum \xi \eta = \sum \eta \zeta = \sum \zeta \xi = 0, \tag{3}$$

wobei die Summen über alle Elektronen im Element zu nehmen sind.

Was das mittlere magnetische Feld betrifft, das durch die Bewegung des in Q befindlichen Elektrons mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{s}}$ um den Mittelpunkt C hervorgerufen wird, ist es nach (13) Abschnitt I äquivalent einem kleinen Magnet von dem Moment

$$\frac{e}{2c} [\mathbf{s} \times \dot{\mathbf{s}}], \quad (4)$$

und es ergibt sich, wenn \mathfrak{M} das magnetische Moment des Volumenelements ist, das durch alle Elektronen eines gegebenen Typus, z. B. der klassischen negativen Elektronen, hervorgerufen wird:

$$\mathfrak{M} = \frac{e}{2c} \Sigma [\mathbf{s} \times \dot{\mathbf{s}}], \quad (5)$$

wobei die Summierung über alle Elektronen des betrachteten Typs zu erstrecken ist.

Durch Differenzieren nach der Zeit finden wir für die zeitliche Änderung dieser Größe:

$$\dot{\mathfrak{M}} = \frac{e}{2c} \Sigma [\mathbf{s} \times \ddot{\mathbf{s}}]. \quad (6)$$

Ist \mathfrak{F} die auf das Elektron wirkende und durch die Wirkung der übrigen Elektronen des Moleküls, in dem es liegt, hervorgerufene Kraft, \mathfrak{E} und \mathfrak{H} die elektrische und magnetische Kraft äußeren Ursprungs, so erhalten wir aus der Bewegungsgleichung des Elektrons:

$$m \dot{\mathbf{s}} = \mathfrak{F} + e \mathfrak{E} + \frac{e}{c} [(\mathbf{v} + \dot{\mathbf{s}}) \times \mathfrak{H}] - m \ddot{\mathbf{q}} - m \dot{\mathbf{v}}, \quad (7)$$

wobei e die Ladung und m die Masse des Elektrons ist.

Hier beziehen sich die Größen \mathfrak{F} , \mathfrak{E} und \mathfrak{H} alle auf den Punkt, in dem das Elektron liegt, aber da das Raumelement klein ist, können sie folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{F} &= \mathfrak{F}_0 + (\mathbf{s} \cdot \nabla \mathfrak{F})_0 + \dots \\ \mathfrak{E} &= \mathfrak{E}_0 + (\mathbf{s} \cdot \nabla \mathfrak{E})_0 + \dots \\ \mathfrak{H} &= \mathfrak{H}_0 + (\mathbf{s} \cdot \nabla \mathfrak{H})_0 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

wobei der Index 0 bedeutet, daß die entsprechende Größe für 0, das Zentrum des Elements, genommen werden muß.

Aus (6), (7), (8), (1), (2) und (3) erhalten wir, wenn wir Glieder von höherer Ordnung als das erste in der kleinen Größe \mathfrak{s} vernachlässigen und

$$\Sigma \xi^2 = \Sigma \eta^2 = \Sigma \zeta^2 = \frac{J}{2} \quad (9)$$

setzen, endlich die Indizes Null weglassen:

$$\mathfrak{M} = \frac{e}{2mc} \Sigma [\mathfrak{s} \times \mathfrak{F}] + \frac{e^2}{4mc} \left\{ J (\text{rot } \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \mathfrak{v} \text{ div } \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \mathfrak{v} \cdot \nabla \mathfrak{H}) - \frac{1}{c} \frac{dJ}{dt} \mathfrak{H} \right\}, \quad (10)$$

wobei sich die Vektoren und ihre räumlichen Ableitungen auf den Punkt 0 beziehen.

Nun erhalten wir aus den Maxwell'schen Feldgleichungen:

$$\text{div } \mathfrak{H} = 0 \quad \text{rot } \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \frac{1}{c} (\mathfrak{v} \cdot \nabla \mathfrak{H} - \frac{d\mathfrak{H}}{dt}).$$

Folglich vereinfacht sich die obige Gleichung zu:

$$\mathfrak{M} = \frac{e}{2mc} \Sigma [\mathfrak{s} \times \mathfrak{F}] - \frac{e^2}{4mc^2} \frac{d}{dt} (J \mathfrak{H}). \quad (11)$$

Das erste Glied auf der rechten Seite stellt eine zeitliche, durch die Einwirkung der inneren Kräfte der Moleküle entstandene Änderung von \mathfrak{M} dar; diese verschwindet, wenn, wie in Langevins Theorie des Diamagnetismus, kein Molekül ein anfängliches magnetisches Moment hat.

Bezeichnet $\mathcal{A}\mathfrak{M}$ die durch die Anlagerung des äußeren Feldes in dem Element hervorgerufene Änderung des magnetischen Moments, dann erhält man durch Integration der letzten Gleichung:

$$\mathcal{A}\mathfrak{M} = -\frac{e^2}{4mc^2} J \mathfrak{H}. \quad (12)$$

Die Schaffung des äußeren Feldes bewirkt also, daß das Element ein diamagnetisches Moment erhält.

Es ist zu beachten, daß in dem Ausdruck für $\mathcal{A}\mathfrak{M}$ die Ladung des Elektrons quadratisch auftritt. Folglich werden sowohl positive als auch negative Elektronen, die sich in kreisender Bewegung innerhalb der Moleküle befinden, nach (12) Diamagnetismus hervorrufen. Jedoch würde in Anbetracht der großen Masse des positiven Elektrons der Beitrag der positiven Elektronen zum Diamagnetismus wahrscheinlich im Vergleich zu dem der negativen sehr klein sein.

Für die Größe J können wir nk^2 schreiben, wobei n die Zahl der Elektronen im Raumelement ist und k^2 das Quadrat des Drehungsradius der mittleren Lage der Elektronen in einem Molekül, bezogen auf eine Achse durch ihren Mittelpunkt. Aus (12) erhalten wir dann:

$$\Delta \mathfrak{M} = - \frac{ne^2}{4mc^2} k^2 \mathfrak{H}. \quad (13)$$

Nach (14) Abschnitt I ist der absolute Mittelwert der Komponenten der magnetischen Momente der n Bahnen in der Richtung von \mathfrak{H} , nämlich $\bar{\mu}_{\mathfrak{H}}$ gegeben durch:

$$\bar{\mu}_{\mathfrak{H}} = \frac{eS}{c\tau} \overline{\cos \vartheta}, \quad (14)$$

wobei $\overline{\cos \vartheta}$ den mittleren Wert von $\cos \vartheta$, ϑ den Winkel zwischen n und \mathfrak{H} bezeichnet.

Nach (13) ist die durch die Schaffung des magnetischen Feldes \mathfrak{H} verursachte Änderung von $\bar{\mu}_{\mathfrak{H}}$, nämlich $\Delta \bar{\mu}_{\mathfrak{H}}$, gegeben durch:

$$\Delta \bar{\mu}_{\mathfrak{H}} = - \frac{e^2}{4mc^2} k^2 H. \quad (15)$$

Aus (14) und (15) folgt, daß das Verhältnis von $\Delta \bar{\mu}_{\mathfrak{H}}$ zu $\bar{\mu}_{\mathfrak{H}}$ für alle erreichbaren Feldstärken sehr klein sein muß, tatsächlich kleiner als 10^{-4} , wenn man für τ die Größen der Periode der Lichtschwingungen, etwa 10^{-15} Sekunden annimmt.

Ist κ die magnetische Suszeptibilität in der Volumeneinheit und N die Zahl der Elektronen in der Volumeneinheit, dann ergibt sich aus (13):

$$\kappa = - \frac{Ne^2}{4mc^2} k^2 = - \frac{\rho}{4} \left(\frac{e}{mc} \right)^2 k^2, \quad (16)$$

wobei ρ die Massendichte der Elektronen in der Volumeneinheit ist.

Nach der hier entwickelten Theorie werden alle Körper diamagnetische Eigenschaften besitzen. Haben die magnetischen Moleküle irgend einer Substanz ein eigenes anfängliches magnetisches Moment, so werden sie sowohl paramagnetisches als auch diamagnetisches Verhalten zeigen. Ist das anfängliche Moment Null, so kann auch durch eine äußere Einwirkung auf das Molekül kein solches hervorgerufen werden.

In der Theorie war der Einfluß der Zusammenstöße zwischen den Molekülen auf das diamagnetische Verhalten des Körpers nicht

ausdrücklich berücksichtigt worden. Es mag jedoch daran erinnert werden, daß sich in der Theorie keine Annahme findet, die eine Bewegung allgemeinsten Art des die Gesamtheit der Elektronen enthaltenden Raumelements ausschließt; deshalb ist der diamagnetische Zustand, wie auch immer die Bewegung der Gesamtheit sei, in jedem Augenblick einfach durch seine momentane Lage zum äußeren magnetischen Felde bestimmt und infolgedessen von den Zusammenstößen zwischen den Molekülen unabhängig.

Außerdem trägt die Theorie den inneren, aus der diamagnetischen Wirkung selbst hervorgehenden Kräften eines Moleküls keine Rechnung. Aber es wird sofort gezeigt werden, daß eine diamagnetische Veränderung im Mittel nur eine Änderung der Bahngeschwindigkeit eines Elektrons, nicht aber eine Deformation der Bahn selbst einschließt, und daß das Fehlen einer mittleren, durch eine diamagnetische Veränderung hervorgerufenen Deformation des Moleküls bedingt, daß man die dadurch entstehenden entsprechenden inneren Gegenwirkungen vernachlässigen kann.

Die feste Lage der Spektrallinien verleiht der Ansicht, daß die intramolekularen Bewegungen nur ganz wenig von der Temperatur abhängen, eine kräftige Stütze; die vergleichsweise geringen thermischen Bewegungen können daher die intramolekularen, in der vorliegenden Theorie den Diamagnetismus verursachenden Bewegungen nur ganz wenig beeinflussen. Das diamagnetische Verhalten ist deshalb, in Übereinstimmung mit dem experimentellen Curieschen Gesetz, praktisch von der Temperatur unabhängig. Es gibt jedoch viele Ausnahmen von diesem Gesetz.

Eine wichtige Frage bezieht sich auf eine mögliche, durch die Wirkung eines äußeren magnetischen Feldes hervorgerufene Veränderung der Bahnfläche eines Elektrons. Es sei $f(r)$ die Zentralkraft, die ein Elektron in seiner kreisförmigen Bahn hält.

Solange ein äußeres Feld fehlt, ist:

$$m\omega^2 r = f(r), \quad (17)$$

wobei ω die Winkelgeschwindigkeit eines Elektrons in seiner Bahn ist.

Bezeichnet H_n die zur Bahnebene senkrechte Komponente des äußeren Feldes, dann ist nach Anlegung des Feldes:

$$m(\omega + \Delta\omega)^2(r + \Delta r) + \frac{1}{c}H_n e \omega r = f(r + \Delta r).$$

wobei $\Delta\omega$ und Δr die durch Einwirkung des Feldes hervorgerufenen Änderungen von ω und r sind. Berücksichtigen wir nur Glieder der ersten Ordnung bei den kleinen Größen $\Delta\omega$ und Δr , so erhalten wir:

$$f'(r)\Delta r = 2m r \omega \Delta\omega + m \omega^2 \Delta r + \frac{1}{c} H_n e \omega r.$$

Folglich:

$$\{f'(r) - m \omega^2\} \Delta r = 2m \omega r \Delta\omega + \frac{1}{c} H_n e \omega r. \quad (18)$$

Nun ist, wenn τ die Umlaufzeit und S die Bahnfläche ist, und man (14) und (17) Abschnitt I einführt:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(\omega r^2)}{2} &= \frac{c}{e} \Delta \frac{eS}{c\tau} = \frac{c}{e} \Delta \mu = -\frac{e}{4\pi m c} \Delta(HS \cos \vartheta) \\ &= -\frac{e r^2}{4 m c} H_n. \end{aligned}$$

Folglich:

$$\left. \begin{aligned} r^2 \Delta\omega + 2\omega r \Delta r &= -\frac{H_n e}{2 m c} r^2 \\ -4m \omega^2 \Delta r &= 2m \omega r \Delta\omega + \frac{1}{c} H_n e \omega r. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Aus (18) und (19) ergibt sich

$$\{f'(r) + 3m \omega^2\} \Delta r = 0.$$

Also ist entweder:

$$\Delta r = 0 \quad \Delta\omega = -\frac{H_n e}{2 m c} \quad (a)$$

oder:

$$f'(r) = -3m \omega^2 = -\frac{3f}{r}. \quad (b)$$

Ist die Bedingung (b) erfüllt, so ist:

$$\frac{f'}{f} = -\frac{3}{r}.$$

Also:

$$f = \frac{K}{r^3}, \quad (20)$$

wobei K eine Konstante ist.

Den Spezialfall, daß die das Elektron in seiner Bahn haltende Zentralkraft sich umgekehrt proportional mit dem Kubus des Bahn-

radius ändert, ausgenommen, wird die Bedingung (a) erfüllt, indem die Wirkung des magnetischen Feldes lediglich zu einer Änderung der Winkelgeschwindigkeit des Elektrons vom Betrage $-\frac{H_n e}{2 m c}$ Veranlassung gibt.

Offenbar wird die in der Bahnebene liegende Komponente der magnetischen Kraft zu keiner Veränderung der Bahnfläche führen, da die Verrückungen, zu denen sie Anlaß gibt, senkrecht zu der Bahnebene stehen.

Die Änderung der Umlaufszeit, die den Diamagnetismus hervorruft bei den kreisenden Bewegungen der Elektronen innerhalb der Atome, entspricht dem einfachen Zeemaneffekt in der Magnetooptik.

Es ist von einigem Interesse, die für den Diamagnetismus von Langevin gefundenen Formeln (16) mit denjenigen zu vergleichen, die für einen aus sphärischen Magnetonen aufgebauten Körper, wie in Abschnitt II, gelten.

Man hatte dort gezeigt, daß die Wirkung eines angelegten äußeren magnetischen Feldes \mathfrak{H} innerhalb eines solchen Magnetons darin bestand, sein magnetisches Moment um einen Betrag:

$$\mu - \mu_0 = -\frac{Q^2}{4 m c^2 J} \mathfrak{H} \quad (21)$$

zu ändern, wobei Q das Ladungsträgheitsmoment des Magnetons und J sein gewöhnliches Trägheitsmoment, bezogen auf eine Achse durch seinen Mittelpunkt ist. Ist das Magneton aus Elektronen der gleichen Art aufgebaut, die die Ladung e und die Masse m besitzen und symmetrisch um einen positiven Kern angeordnet sind, dann ist $Q = e k^2$ und $J = m k^2$, wobei k der Drehungsradius der Elektronen in dem Magneton ist.

Ist dann κ die magnetische Volumenssuszeptibilität des aus solchen Magnetonen aufgebauten Körpers, so folgt aus (21):

$$\kappa = -\frac{N e^2}{4 m c^2} k^2 = -\frac{Q}{4} \left(\frac{e}{m c}\right)^2 \cdot k^2 \text{ } ^1),$$

wobei N die Zahl der Elektronen in der Volumeneinheit und Q die Massendichte der Elektronen ist. Dieses Ergebnis stimmt mit dem von (16) überein.

¹⁾ A. d. Ü.

Paramagnetismus.

Bei Anwesenheit eines magnetischen Feldes wird ein Körper außer dem oben betrachteten Diamagnetismus paramagnetisches Verhalten zeigen, wenn seine magnetischen Moleküle einzeln von Null verschiedene magnetische Momente haben. Die auf ein paramagnetisches Gas angewandte Theorie wurde von Langevin in seiner Arbeit von 1905 entwickelt. Sie wurde später die Grundlage für eine Theorie des Ferromagnetismus von Weiss.

In Langevins Theorie eines paramagnetischen Gases nimmt man an, daß die Größe des magnetischen Moments eines Moleküls unter allen Umständen unveränderlich sei, wobei man die geringen diamagnetischen Veränderungen in seinem Moment vernachlässigt.

Es ist von Interesse, zuerst betreffs seiner allgemeinen Natur den Vorgang zu prüfen, während dessen der paramagnetische Zustand sich einstellt, wenn ein Gas einem äußeren magnetischen Felde unterworfen wird. Im Augenblick der Anlegung des Feldes wird sich der oben besprochene diamagnetische Zustand unmittelbar einstellen. Andererseits wird der paramagnetische Zustand eine beträchtliche Zeit zu seiner Einstellung erfordern.

In dem Augenblick, in dem das Feld \mathfrak{H} angelegt wird, gewinnt ein magnetisches Molekül in bezug auf das Feld potentielle Energie im Betrage

$$- \mathfrak{H} \cdot d\mu,$$

wobei μ sein magnetisches Moment ist. Dieser Zuwachs an potentieller Energie eines Moleküls leitet sich anfänglich von seiner kinetischen Rotationsenergie ab, gerade wie die potentielle Energie eines einem Schwerefeld unterworfenen Gasmoleküls sich aus seiner kinetischen Energie, während es sich in dem Felde nach oben bewegt, herleitet. Nun ist das Ergebnis dieser Verteilung der kinetischen Energie auf die verschiedenen Freiheitsgrade (Translation und Rotation) der Moleküle mit dem thermischen Gleichgewicht unvereinbar. Es ist der durch Zusammenstöße entstandene thermische Gleichgewichtszustand, der den Paramagnetismus zur Erscheinung bringt. In diesem Vorgang ist die magnetische Energie abgeleitet aus der Energie der thermischen Bewegung vom Betrage

$$- \mathfrak{H} \cdot \mu d.$$

Besitzen die Moleküle keine andere potentielle Energie bezüglich ihrer Lage, wie es für ein Gas und wahrscheinlich auch für eine Flüssigkeit der Fall ist, so wäre es, um das Medium auf konstanter Temperatur zu halten, notwendig, ihnen in jedem Moment einen Betrag von Wärmeenergie pro Volumeneinheit zuzuführen, der gleich $-\mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{J}$ ist, wenn \mathfrak{J} die Magnetisierungsstärke bezeichnet. Für einen festen Körper, in dem die Moleküle potentielle Lageenergie besitzen, kann nur für den Fall eines geschlossenen Zyklus eine ähnliche Schlußfolgerung gezogen werden.

Mit Hilfe der Gesetze der Thermodynamik ist leicht zu zeigen, daß im Falle eines Gases oder einer Flüssigkeit das magnetische Moment M einer gegebenen Masse paramagnetischer Substanz in einem äußeren Felde der Stärke \mathfrak{H} eine Funktion von $\frac{H}{T}$

$$M = f\left(\frac{H}{T}\right)$$

sein muß, wobei T die absolute Temperatur ist.

Für eine kleine umkehrbare Änderung, bei der sich H um dH , T um dT ändert, wird die entwickelte, von H abhängige Wärmemenge dQ gegeben durch

$$dQ = H\left(\frac{\partial M}{\partial H} dH + \frac{\partial M}{\partial T} dT\right).$$

Da die Änderung umkehrbar ist, muß $\frac{dQ}{T}$ ein vollständiges Differential sein, also ist:

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{H}{T} \frac{\partial M}{\partial H}\right) - \frac{\partial}{\partial H}\left(\frac{H}{T} \frac{\partial M}{\partial T}\right) = 0.$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$T \frac{\partial M}{\partial T} + H \frac{\partial M}{\partial H} = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung ist gegeben durch:

$$M = f\left(\frac{H}{T}\right). \quad (22)$$

Das ist aber das Ergebnis, das zu beweisen war. Die Beweisführung läßt sich leicht dahin erweitern, zu zeigen, daß dieses Resultat auch für einen festen Körper gilt, vorausgesetzt, daß seine innere Energie nicht in beträchtlichem Maße von \mathfrak{H} abhängt.

Zur Bestimmung der Funktion f kann die Thermodynamik allein nicht genügen. Für viele Körper zeigt der Versuch, daß \mathfrak{M} direkt proportional zu \mathfrak{H} ist, und das führt mit dem durch (22) gegebenen Resultat unter den festgesetzten Bedingungen zu dem Ergebnis

$$M = \frac{A}{T} H, \quad (23)$$

wobei A eine von T unabhängige Konstante ist.

In dem besonderen Falle eines paramagnetischen Gases wie Sauerstoff, ist die Form der Funktion f leicht zu bestimmen.

Theorie eines paramagnetischen Gases.

In seiner Theorie eines paramagnetischen Gases nimmt Langevin an, daß jedes der magnetischen Moleküle ein magnetisches Moment μ besitzt, dessen Größe für alle Moleküle die gleiche ist. Die Richtung der magnetischen Achse des Moleküls ist dann diejenige des Vektors μ . Die Wirkungen, die durch Rotationen des Moleküls um senkrecht zu seiner magnetischen Achse stehende Achsen hervorgerufen sind, werden vernachlässigt. Das molekulare magnetische Feld wird gleichfalls vernachlässigt, da es sicherlich für Gase unter gewöhnlichen Bedingungen sehr klein ist.

Die bestimmte Verteilungsfunktion ist für diesen Fall, wie Langevin zeigte, durch (22) Abschnitt III gegeben, und nach (23) desselben Abschnittes wird der Mittelwert $\overline{\cos \vartheta}$ für die \cos der von den magnetischen Achsen der Moleküle mit dem äußeren magnetischen Felde \mathfrak{H} gebildeten Winkel ausgedrückt durch:

$$\overline{\cos \vartheta} = \coth a - \frac{1}{a}, \quad \left(a = \frac{\mu H}{k T} \right), \quad (24)$$

wobei k die Boltzmannsche Konstante und T die absolute Temperatur ist.

Aus Symmetriegründen muß die Magnetisierungsintensität \mathfrak{J} in die Richtung des äußeren Feldes \mathfrak{H} fallen und sie muß nach ihrer Größe gleich der Summe der Projektionen der auf die Volumeneinheit bezogenen Momente der einzelnen Moleküle auf diese Richtung sein. Also wird \mathfrak{J} gegeben durch:

$$J = \mu n \overline{\cos \vartheta} = \mu n \left(\coth a - \frac{1}{a} \right), \quad (25)$$

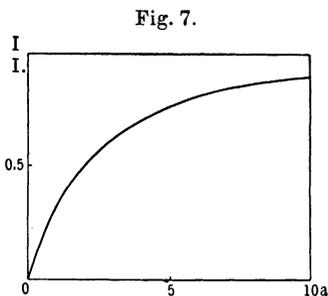
wobei n die Zahl der magnetischen Moleküle in der Volumeneinheit bezeichnet.

Aus diesem Ergebnis ist ersichtlich, daß J eine Funktion von $\frac{H}{T}$ ist, wie es die Thermodynamik erfordert, und überdies, wegen des Faktors n , direkt proportional zum Druck des Gases ist.

Wenn der Klammerausdruck auf der rechten Seite des Ausdrucks für J den Wert Eins annimmt, dann wird J seinen maximalen Wert μn erreichen. Bezeichnet man den Höchstwert von J durch J_0 , so ergibt sich nach (25)

$$J = J_0 \left(\coth a - \frac{1}{a} \right). \quad (26)$$

Die Kurve (Fig. 7) zeigt, wie sich J/J_0 mit a ändert. Wir werden gleich zeigen, daß unter gewöhnlichen experimentellen Bedingungen a für Sauerstoff sehr klein, tatsächlich von der Größenordnung 10^{-2} ist.



Ist a klein, so wird sich J/J_0 linear mit H ändern. Jedoch bei tiefen Temperaturen und für sehr starke Felder wird a so groß, daß die Beziehung zwischen J/J_0 und a nicht linear wird.

Aus (26) folgt, wenn man \coth in eine Potenzreihe für a entwickelt und die höheren Potenzen vernachlässigt:

$$J = J_0 \frac{a}{3}, \quad (27)$$

mit genügender Annäherung unter gewöhnlichen experimentellen Bedingungen.

Ist ferner κ der Koeffizient der magnetischen Volumenssuszeptibilität, so ist:

$$\kappa = J_0 \frac{\mu}{3 k T}. \quad (28)$$

Man sieht, daß κ sich in Übereinstimmung mit dem Curie'schen Gesetz des Paramagnetismus umgekehrt proportional zur Temperatur ändert.

Vorliegende Theorie gilt auch im Einklang mit der thermodynamischen Theorie für ein Medium anderer Beschaffenheit, ein

mehratomiges Gas wie Sauerstoff, wenn die Rotationsenergie der Moleküle eine bekannte Funktion der Temperatur ist. In all diesen Fällen ist für die Anwendbarkeit der Theorie einzig und allein notwendig, daß die Rotationsenergie proportional der absoluten Temperatur ist; nur die Größe k ist anders zu wählen.

Alle magnetischen Substanzen, für die die gegenseitigen Wirkungen der Moleküle untereinander zu vernachlässigen sind, z. B. Lösungen paramagnetischer Salze, müßten genau ähnliche Magnetisierungskurven aufweisen.

Den in (28) für κ gegebenen Ausdruck können wir schreiben:

$$\kappa = \frac{J_0^2}{3p},$$

da $J_0 = n\mu$ und $p = nkT$, wenn p der Druck des Gases ist. Bei normalem Druck und der Temperatur 0° fand Curie für Sauerstoff:

$$\kappa = 1,43 \cdot 10^{-7}.$$

Hieraus folgt, daß die maximale Magnetisierungsintensität für Sauerstoff durch

$$J_0 = (3 \cdot 10^6 \cdot 1,43 \cdot 10^{-7})^{1/2} = 0,65^1)$$

gegeben ist.

Demnach kann für flüssigen Sauerstoff, der eine 500 mal größere Dichte hat, ein Wert von J größer als 325 erwartet werden.

Wir wollen nun die Größenordnung von a für Sauerstoff unter gewöhnlichen experimentellen Bedingungen aufsuchen. Wir haben

$$a = \frac{J_0 H}{n k T} = \frac{J_0 H}{p}.$$

Der oben für Sauerstoff unter normalen Bedingungen gefundene Wert von J_0 war 0,65. Also ist:

$$a = 0,65 \cdot 10^{-6} H;$$

für ein ziemlich starkes Feld H , etwa $H = 10\,000$, ist dann

$$a = 0,65 \cdot 10^{-2}.$$

Wenn wir annehmen, daß das magnetische Moment μ für ein Sauerstoffmolekül durch ein einzelnes Elektron hervorgerufen ist, dessen Ladung gleich der eines Wasserstoffatoms bei der Elektrolyse ist und das in einer Kreisbahn vom Radius $r = 1,5 \cdot 10^{-8}$ cm

¹⁾ 1 Atmosphäre = etwa 10^6 dyn/cm². (A. d. Ü.)

rotiert, so kann die Geschwindigkeit des Elektrons folgendermaßen berechnet werden:

Da nach (14) Abschnitt I

$$\mu = \frac{eS}{c\tau} = \frac{evr}{2c},$$

wobei S die Bahnfläche, τ die Umlaufzeit und v die Geschwindigkeit des Elektrons ist, erhalten wir:

$$J_0 = n\mu = \frac{1}{2c}nev r.$$

Nun ist, wenn man e in elektrostatischen Einheiten ausdrückt,

$$\frac{ne}{c} = 0,40,$$

und da unter normalen Bedingungen, wie oben gefunden,

$$J_0 = 0,65,$$

so folgt:

$$0,65 = 0,40 \cdot \frac{1,5 \cdot 10^{-8}}{2} v.$$

Hieraus ergibt sich:

$$v = 2 \cdot 10^8 \text{ cm/sec.}$$

Diese Geschwindigkeit ist von derselben Größenordnung wie diejenige, die ein Elektron haben würde, das sich in stabiler Kreisbewegung um eine im Kreismittelpunkt liegende positive Ladung gleicher Größe befindet. Denn in diesem Falle ist:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}, \quad v^2 = \frac{e^2}{mr}.$$

Hieraus folgt:

$$v = 10^8 \text{ cm/sec.}$$

Es ist beachtenswert, daß das resultierende magnetische Moment eines Sauerstoffmoleküls aus der Kreisbewegung eines einzelnen Elektrons abgeleitet werden kann; dies müßte auch für ein Eisenmolekül gelten, für das die Höchstmagnetisierung pro Molekül von der gleichen Größenordnung wie bei Sauerstoff ist.

Im Falle der Magnetisierung eines paramagnetischen Gases wie Sauerstoff, liefert, wie wir sahen, die kinetische Energie der Moleküle in der Volumeneinheit während der Neuordnungszeit (die

sich in der Erscheinung des Paramagnetismus geltend macht) einen Energiebetrag

$$- \int \mathfrak{H} \cdot d\mathfrak{J}.$$

Also wird die Energie pro Volumeneinheit des Mediums um den Betrag

$$\frac{1}{2} \kappa H^2$$

vermehrt. Das Gas muß sich deshalb um einen Betrag erwärmen, der folgendermaßen berechnet werden kann.

Es sei das Volumen konstant, und der durch die Magnetisierung hervorgerufene Temperaturanstieg ΔT , so ist:

$$C \Delta T = \frac{1}{2} \kappa H^2.$$

C ist die spezifische Wärme bei konstantem Volumen. Nun ist annähernd im CGS-System:

$$C = 10^4, \quad \kappa = 1,43 \cdot 10^{-7}.$$

Also:

$$\Delta T = 0,8 \cdot 10^{-11} H^2.$$

Hieraus folgt für $H = 10\,000$, $\Delta T = 10^{-3}$ und für $H = 40\,000$, $\Delta T = 10^{-2}$. Diese Temperaturerhöhung müßte sich direkt mit der Suszeptibilität κ und also umgekehrt mit der absoluten Temperatur ändern.

Zum Schluß dieser etwas gekürzten Übersicht über die Theorie von Langevin seien noch einige sich vielleicht später nützlich erweisende Bemerkungen angefügt.

Seine Theorie des Paramagnetismus kann man eine Äquipartitions- (Gleichteilungs-)theorie nennen, denn sie beruht auf der klassischen statistischen Theorie, die zu einer Gleichteilung der Energie unter die statistischen Koordinaten eines Systems führt. Hierbei treten diese nur als Summe von Quadraten in der Energiefunktion einer statistischen Einheit auf.

Die magnetischen Momente der Moleküle tragen die Eigentümlichkeit der Permanenz; beispielsweise sind diese Momente keinen Veränderungen durch die Temperatur unterworfen.

Die Wirkungen intramolekularer Kräfte wurden vernachlässigt und deshalb ist die Anwendungsmöglichkeit der Theorie auf paramagnetische Gase beschränkt.

Da man die durch Rotationen der Moleküle nun senkrecht zu ihren magnetischen Achsen stehende Achsen hervorgerufenen Wirkungen vernachlässigt, fehlen ihnen die gyroskopischen Eigenschaften, die, wie wir sehen werden, eine wichtige Rolle bei der Magnetisierung spielen können.

VI. Von Quantenhypothesen unabhängige Modifikationen der Langevinschen Theorie.

Die Theorie von Langevin führt, wie wir gesehen haben, in dem Falle des Diamagnetismus zu dem Ergebnis, daß die diamagnetische Suszeptibilität aller Körper unabhängig von der Temperatur und von der Feldstärke sein sollte, und im Falle des Paramagnetismus zu dem Gesetze von Curie, nach welchem sich die Suszeptibilität umgekehrt mit der absoluten Temperatur ändern muß.

Nun sind viele experimentelle seit der Zeit der Veröffentlichung von Langevins Theorie (1905) gefundenen Tatsachen nicht im Einklang mit diesen Ergebnissen. Infolgedessen machte man verschiedene Versuche, die Theorie abzuändern. In dem vorliegenden Abschnitt wollen wir die Modifikationen der Langevinschen Theorie betrachten, die die Hilfe der Quantenhypothesen nicht in Anspruch nehmen.

Theorie von Honda.

Kotaro Honda¹⁾ schlug 1914 eine auf die folgenden beiden Annahmen gegründete Abänderung vor:

a) Die magnetischen Momente der Moleküle sind nicht konstant, sondern hängen von der Temperatur ab.

b) Die Moleküle üben aufeinander Kräfte aus, deren Bestreben es ist, ihre Einstellung in die Richtung des äußeren Feldes zu verhindern.

Nach Hondas Annahme besteht ein magnetisches Molekül im Falle eines festen Körpers im allgemeinen aus einem Aggregat einer Anzahl wirklicher Moleküle; diese Aggregate sind jedoch den gewöhnlichen Gesetzen der thermischen Molekularbewegung unterworfen. Nach Annahme a) soll die Form eines Moleküls von

¹⁾ K. Honda, Tokio Sc. Rep. **3**, 171, 1914.

der Temperatur abhängen, indem eine Änderung in der Form gleichzeitig eine Änderung in dem Werte des magnetischen Momentes des Moleküls bedingt. So wird die Form eines Körpermoleküls im ferromagnetischen Zustand als kugelförmig angenommen, so daß es einer Orientierung durch thermische Stöße nicht unterworfen sein wird. In dem ferromagnetischen Temperaturbereich werden die kleinen gegenseitigen Kräfte nur der Tendenz der magnetischen Moleküle, sich mit ihren Achsen in die Richtung des äußeren magnetischen Feldes einzustellen, entgegenwirken. Infolgedessen entsteht in diesem Falle eine starke Magnetisierung. Beim Übergang vom ferromagnetischen zum paramagnetischen Zustand soll das magnetische Molekül aus der kugelförmigen in eine längliche Form übergehen; der Erfolg ist, daß eine starke thermische Aktion zur Wirkung kommt, die sich dem Einstellen der Moleküle entgegensetzt; infolgedessen geht der Körper aus dem ferromagnetischen in den paramagnetischen Zustand über. Die Deformationsenergie der Moleküle bei diesem Vorgang soll zusammen mit der von den neuen Freiheitsgraden erforderten die in dem Übergangsprozeß absorbierte Wärme erklären.

Die von Honda vorgeschlagene, die Annahmen a) und b) einschließende Verteilungsfunktion ist:

$$\alpha e^{\frac{\mu_0 f(T) H}{kT + \varphi} \cos \vartheta},$$

wobei $\mu_0 f(T)$ das magnetische Moment eines Moleküls vorstellt, in dem μ_0 der Wert dieser Größe beim absoluten Nullpunkt ist; φ ist eine Konstante oder eine Funktion der Temperatur, die die gegenseitige Einwirkung der Moleküle aufeinander zum Ausdruck bringt. Diese Verteilungsfunktion von Honda reduziert sich auf diejenige von Langevin, wenn $f(T) = \text{const.}$ und $\varphi = 0$.

Die übrigen Zeichen haben dieselbe Bedeutung, wie in der Theorie von Langevin.

Die die gegenseitige Einwirkung der Moleküle ausdrückende Funktion φ stellt eine Wirkung dar, die gleich der thermischen die Einstellung der Moleküle mit ihren Achsen in die Richtung der äußeren magnetischen Kraft zu hindern sucht und daher sich zu dem Temperaturfaktor kT addiert. In paramagnetischen Körpern ist φ in der Regel klein gegenüber kT und gewinnt nur bei tiefen Temperaturen an Bedeutung.

Die modifizierte Verteilungsfunktion führt zu einem Ausdruck für die magnetische Suszeptibilität, der in vielen Fällen mit den experimentellen Ergebnissen von K. Onnes und A. Perrier bei tiefen Temperaturen gut übereinstimmt, ebenso mit anderen experimentellen Ergebnissen bei höheren Temperaturen, wenn man die Temperaturfunktionen f und φ in passender Weise wählt.

Die Theorie läßt sich auch mit einigem Erfolg auf die Erklärung des paramagnetischen Verhaltens ferromagnetischer Körper bei Temperaturen oberhalb ihrer kritischen Temperatur anwenden.

Die Funktionen f und φ können nicht aus theoretischen Betrachtungen abgeleitet werden; die Theorie leidet vornehmlich an diesem Mangel.

Theorien von R. Gans.

In einer 1910 beginnenden Reihe von Arbeiten machte R. Gans ¹⁾ ²⁾ ³⁾ ⁴⁾ verschiedene einander folgende Versuche, die Theorien des Dia- und Paramagnetismus über den von Langevin in seiner Arbeit von 1905 erreichten Punkt hinaus zu verbessern.

Der von Gans in diesem Zusammenhang erzielte Fortschritt kann vielleicht aus einer kurzen Übersicht über zwei im Jahre 1916 erschienene Arbeiten von ihm zur Genüge eingeschätzt werden. Die Arbeiten sind betitelt: „Theorie des Dia-, Para- und Paramagnetismus“ ³⁾ und „Über Paramagnetismus“ ⁴⁾.

In der ersten dieser beiden Arbeiten betrachtet er einen materiellen Körper, den er sich aus axialen Magnetonen aufgebaut denkt. Das Magneton selbst soll aus einem starren System klassischer negativer Elektronen innerhalb einer gleichmäßig geladenen positiven Kugel bestehen, deren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Systems der negativen Elektronen zusammenfällt. Die äquatorialen Trägheitsmomente des Magnetons A und B sollen gleich sein, und die polare Achse, für die C das Trägheitsmoment ist, wird einfach Magnetonenachse genannt.

Die Winkelgeschwindigkeiten der Drehung des Magnetons werden als so klein angenommen, daß die durch diese Drehungen

¹⁾ R. Gans, Gött. Nachr. **197**, 1910.

²⁾ Derselbe, ebenda **118**, 1911.

³⁾ Derselbe, Ann. d. Phys. **49**, 149, 1916.

⁴⁾ Derselbe, ebenda **50**, 163, 1916.

entstehenden magnetischen Felder als lineare Funktionen der entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten betrachtet werden können, und die Strahlung verursachenden Beschleunigungen als so klein, daß die ausgestrahlte Energie vernachlässigt werden kann. Das Magnetonensystem kann dann als quasistationär angesehen werden. Außerdem soll die Trägheitsmasse eines Magnetons gänzlich elektromagnetischen Ursprungs sein. Endlich wird in der vorliegenden Theorie das molekulare magnetische Feld vernachlässigt.

Für einen aus Magnetonen der hier betrachteten Art aufgebauten Körper ist entweder das eine oder das andere der durch (12) oder (19) im Abschnitt III gegebenen Verteilungsgesetze anwendbar, je nachdem die Drehungen der Magnetonen um ihre zugehörigen Symmetrieachsen von der thermischen Bewegung abhängig oder unabhängig sind. Im ersteren Falle führt das Verteilungsgesetz zu einer Theorie des Diamagnetismus und im letzteren zu einer Theorie des Paramagnetismus. Wir betrachten zunächst den ersten Fall.

Nach (12) Abschnitt III ist das berechnete Verteilungsgesetz für diesen Fall:

$$dN = \alpha e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sin \vartheta d\Omega, \quad (1)$$

wobei:

$$\varepsilon = \frac{P^2 + Q^2}{2J} + \frac{R^2}{2C} + \frac{eH}{2mc} (P \sin \varphi \sin \vartheta + Q \cos \varphi \sin \vartheta + R \cos \vartheta) \quad (2)$$

und

$$d\Omega = d\vartheta d\psi d\varphi dP dQ dR. \quad (3)$$

Die Bedeutung aller hier vorkommenden Größen ist in Abschnitt III angegeben.

Der Ausdruck (1) gibt die Zahl der Magnetonen in der Masseneinheit, deren statistische Variablen durch das elementare Phasengebiet $d\Omega$ begrenzt sind. Jedes dieser Magnetonen wird zur Magnetisierung der Masseneinheit einen Betrag $\mu \cdot \mathcal{H}/H$ liefern, wobei μ das magnetische Moment irgend eines Magnetons dieser Gruppe ist.

Ist M der skalare Wert der Magnetisierung der Masseneinheit, so ergibt sich:

$$M = N \int \frac{\mu \cdot \mathcal{H}}{H} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sin \vartheta d\Omega \bigg/ \int e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sin \vartheta d\Omega, \quad (4)$$

wobei die Integration über alle Werte der Variablen, deren Differentiale in $d\Omega$ vorkommen, zu erstrecken und dann auszuführen ist, wenn man $\frac{\mu \cdot \mathfrak{S}}{H}$ in diesen Variablen dargestellt hat.

Aus (60) Abschnitt II folgt mittels (7) und (8) Abschnitt III:

$$\frac{\mu \cdot \mathfrak{S}}{H} = b (P \sin \varphi \sin \vartheta + Q \cos \varphi \sin \vartheta + R \cos \vartheta); \quad b = \frac{e}{2mc}.$$

Setzen wir nun:

$$Z = \int e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sin \vartheta \, d\Omega, \quad (5)$$

so können wir den Ausdruck für M in die einfachere Form

$$M = - \frac{NkT \, d \lg Z}{H \, d \lg b} \quad (6)$$

bringen. Dividieren wir diesen Ausdruck durch H , so erhalten wir für die Suszeptibilität der Masseneinheit χ folgenden Ausdruck:

$$\chi = - \frac{NkT \, d \lg Z}{H^2 \, d \lg b}. \quad (7)$$

Für den Fall, daß die Rotationen der Magnetonen um ihre Symmetrieachsen als unabhängig von der thermischen Bewegung angenommen werden, ist das entsprechende Verteilungsgesetz gegeben durch (19) Abschnitt III:

$$dN = \alpha e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sin \vartheta \, d\Omega, \quad (8)$$

wobei

$$\varepsilon = \frac{P^2 + Q^2}{2J} + \frac{e}{2mc} H (P \sin \varphi \sin \vartheta + Q \cos \varphi \sin \vartheta) - \mu H \cos \vartheta, \quad (9)$$

$$d\Omega = d\vartheta \, d\psi \, d\varphi \, dP \, dQ. \quad (10)$$

Gehen wir in ähnlicher Weise wie in dem eben betrachteten Falle vor, so finden wir für die Suszeptibilität der Masseneinheit folgenden Ausdruck:

$$\chi = \frac{NkT}{H^2} \left(\frac{d \lg Z'}{d \lg \mu} - \frac{d \lg Z'}{d \lg b} \right), \quad (11)$$

wobei

$$Z' = \int e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sin \vartheta \, d\Omega, \quad (12)$$

und ε sowie $d\Omega$ durch (9) und (10) gegeben sind.

Diamagnetismus.

Aus Gleichung (5) finden wir, wenn wir die Integration bezüglich ψ , φ , P , Q und R ausführen:

$$Z = 4\pi^2 \sqrt{(2\pi k T)^3 J^2 C} \int_0^\pi e^{-\frac{H^2 b^2}{2kT} (J \sin^2 \vartheta + C \cos^2 \vartheta)} \sin \vartheta d\vartheta. \quad (13)$$

Hier müssen wir nun drei Fälle betrachten: $J > C$, $J = C$ und $J < C$.

Fall 1. $J > C$.

Der Kürze halber setzen wir:

$$\gamma^2 = \frac{H^2 b^2 (J - C)}{2kT}. \quad (14)$$

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-\lambda^2} d\lambda.$$

Dann ist nach (13)

$$Z = 4\pi^2 \sqrt{\pi} \sqrt{(2\pi k T)^3 J^2 C} \frac{e^{\frac{\gamma^2}{J-C}}}{\gamma} \Phi(\gamma). \quad (15)$$

Benutzt man diesen Wert für Z , so liefert die Formel (7) für die magnetische Suszeptibilität der Masseneinheit:

$$\chi = -Nb^2 J \left\{ 1 + \frac{J-C}{2J} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\gamma^2}}{\gamma \Phi(\gamma)} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \right\}.$$

Dieser Ausdruck nimmt eine einfachere Form an, wenn wir setzen:

$$\Omega(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \gamma e^{\gamma^2} \Phi(\gamma)} - \frac{1}{\gamma^2} + \frac{2}{3}; \quad (16)$$

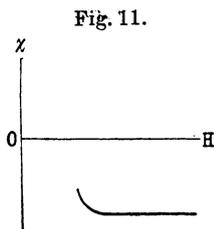
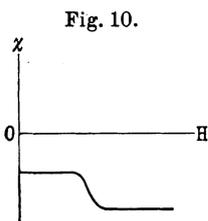
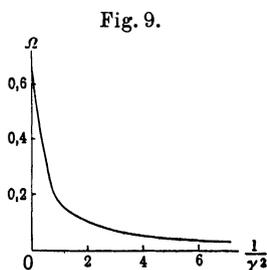
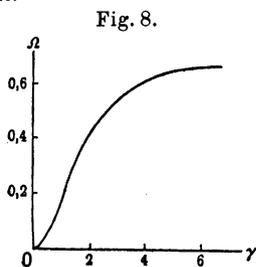
$$h = \frac{3}{2} \frac{1 - \frac{C}{J}}{2 + \frac{C}{J}}.$$

Dann erhalten wir:

$$\chi = -Nb^2 \frac{2J+C}{3} \{1 + h\Omega(\gamma)\}. \quad (17)$$

Die oben definierte Größe γ ist bei konstanter Temperatur proportional der Feldstärke H , während $\frac{1}{\gamma^2}$ bei konstanter Feldstärke proportional der absoluten Temperatur T ist.

Die Suszeptibilität χ hängt, wie aus dem eben gefundenem Ausdruck ersichtlich ist, von der Funktion $\Omega(\gamma)$ ab, die man mit Hilfe einer Tabelle für das Wahrscheinlichkeitsintegral für angenommene Werte von γ und $\frac{1}{\gamma^2}$ berechnen kann. Die Änderung von $\Omega(\gamma)$ mit γ (proportional zu H) und von $\Omega(\gamma)$ mit $\frac{1}{\gamma^2}$ (proportional der absoluten Temperatur) werden in Fig. 8 und 9 dargestellt.



Nach Formel (17) ist die Suszeptibilität χ_0 für sehr schwache Felder gegeben durch:

$$\chi_0 = -Nb^2 \frac{2J + C}{3}$$

und daher

$$\frac{\chi - \chi_0}{\chi_0 h} = \Omega(\gamma).$$

Im allgemeinen hängt dann χ von der Feldstärke ab, und die Untersuchung ergibt die Tatsache, daß die die Beziehung zwischen Suszeptibilität und Feldstärke darstellende Kurve von dem Typus Fig. 10 ist.

In Fig 11 ist der Typus der von Honda für viele diamagnetische Substanzen experimentell gefundenen Kurve dargestellt.

Die Experimente von Honda hatten sich nicht genügend in der Richtung der kleinen Feldstärken ausgedehnt, um zu entscheiden, ob seine Kurven in der Fortsetzung den von der vorliegenden Theorie verlangten Typ besitzen oder nicht.

Wenn diese Theorie in ihren Hauptzügen richtig ist, so müßten passende quantitative Messungen der Suszeptibilität es ermöglichen, wertvolle Aufschlüsse über den Aufbau des Magnetons nach Größe, Form und Trägheitsmomenten zu gewinnen.

Fall 2. $J = C$.

In diesem Falle sind alle Hauptträgheitsmomente des Magnetons gleich; daher ist $h = 0$ und $\gamma = 0$; also:

$$\chi = \chi_0 = -Nb^2J.$$

Die Suszeptibilität ist also sowohl von der Feldstärke als auch von der Temperatur unabhängig. Das Experiment zeigt, daß dies für viele Körper der Fall ist.

Im Zusammenhang mit diesem Falle ist es von Wichtigkeit, sich zu erinnern, daß obwohl die Hauptträgheitsmomente des Magnetons als gleich angenommen werden, daraus nicht notwendigerweise folgt, daß das Magoneton als geometrische Kugel zu betrachten sei. Wäre dies der Fall, so wäre die statistische Methode nicht weiter anwendbar, und das Problem wäre einfach ein elektromagnetisches.

Fall 3. $J < C$.

Die für diesen Fall sich ergebenden Resultate sind denen von Fall 1 ganz ähnlich; wir brauchen sie daher nicht im einzelnen zu betrachten.

Trägheitsmomente der diamagnetischen Magnetonen.

Als Ergebnis einer ausgedehnten Versuchsreihe kam H. Isnardi¹⁾ zu dem Schlusse, die diamagnetische Suszeptibilität sei im allgemeinen ganz unabhängig von der Feldstärke. Ist das richtig, so sind die Annahmen des 2. Falles bestätigt. Die Hauptträgheitsmomente des Magnetons müssen dann als gleich betrachtet werden, und man hat die für diesen Fall gefundene Formel für die Suszeptibilität anzuwenden.

¹⁾ H. Isnardi, Contribución al estudio de las ciencias, Univ. Nach. de La Plata. — Ann. d. Phys. **61**, 585, 1920.

Setzt man in dieser Formel für b seinen Wert $\frac{e}{2mc}$ ein, so erhält man:

$$\chi = -N \frac{e^2}{4m^2c^2} J,$$

wobei N die Zahl der Magnetonen pro Gramm, $\frac{e}{mc} = 1,77 \times 10^7$ elektromagnetische Einheiten und J das Trägheitsmoment des Magnetons ist.

Nimmt man an, in jedem Atom sein ein Magneton vorhanden, so ist, wenn N_0 die Avogadro'sche Zahl und A das Atomgewicht ist:

$$N_0 = NA = 6,175 \cdot 10^{23}$$

und wir erhalten aus der Formel für χ :

$$J = -2,067 \cdot 10^{-38} \cdot A \chi. \tag{18}$$

Gans¹⁾ hat aus den von Owen²⁾ gefundenen experimentellen Ergebnissen mit dieser Formel die Werte von J für verschiedene Elemente berechnet. Diese Werte sind zusammen mit den entsprechenden Werten von A und χ in Tabelle 1 gegeben:

Tabelle 1.

Element	A	$-\chi \cdot 10^6$	$J \cdot 10^{43}$	Element	A	$-\chi \cdot 10^6$	$J \cdot 10^{43}$
Be	9,1	1,00	1,88	Zr	90,6	0,45	8,43
B	11,0	0,7	1,59	Ag	107,9	0,20	4,46
C (Diamant)	12,0	0,49	1,22	Cd	112,4	0,18	4,18
S	28,3	0,13	0,761	In	114,8	0,11	2,61
P	31,0	0,90	5,77	Sn (grau) .	119,0	0,35	8,61
Sa	32,07	0,49	3,25			angen.	angen.
Cu	63,57	0,085	1,12	Sb	120,2	0,82	20,4
Zn	65,37	0,155	2,09	Te	127,5	0,32	8,43
Ga	69,9	0,24	3,46	J	126,9	0,36	9,45
Ge	72,5	0,12	1,80	Cs	132,8	0,10	2,75
As	75,0	0,31	4,81	Au	197,2	0,15	6,12
Se	79,2	0,32	5,24	Hg	200,0	0,19	7,86
Br	79,92	0,40	6,61	Tl	204,0	0,24	10,1
Sr	87,62	0,2?	3,62?	Pb	207,1	0,12	5,14
				Bi	208,0	0,40	60,2

Wie ersichtlich, sind die Werte der Trägheitsmomente für die verschiedenen Körper alle von der gleichen Größenordnung. Sie

1) R. Gans, Ann. d. Phys. **61**, 163, 1920.

2) M. Owen, ebenda **37**, 664, 1912.

sind beträchtlich kleiner, als die für die paramagnetischen Körper gefundenen, wie sich später zeigen wird.

In diesem Zusammenhang muß noch darauf hingewiesen werden, daß Isnardis Schlußfolgerung, die diamagnetischen Suszeptibilitäten seien im allgemeinen von der Feldstärke unabhängig, durch die Versuche von Frivold¹⁾ nicht in jeder Beziehung gestützt wird.

Paramagnetismus und Metamagnetismus.

Die Formeln (11) und (12) sind diejenigen, welche für die Erklärung des Para- und Metamagnetismus in Betracht kommen.

Aus (12) erhält man, wenn man bezüglich P , Q , ψ , φ integriert und $\cos \vartheta$ durch x ersetzt:

$$Z' = 8\pi^3 k T J \int_{-1}^{+1} e^{\alpha^2(1-x^2)} e^{ax} dx, \quad (19)$$

wobei

$$\alpha^2 = \frac{H^2 b^2 J}{2 k T}; \quad a = \frac{\mu H}{k T}. \quad (20)$$

Nach Integration bezüglich x kann der Ausdruck (19) geschrieben werden:

$$Z' = 4\pi^3 \sqrt{\pi} k T J \frac{e^{\alpha^2 + \tau^2}}{\alpha} [\Phi(\tau + \alpha) - \Phi(\tau - \alpha)], \quad (21)$$

wobei:

$$\tau^2 = \frac{\alpha^2}{4\alpha^2} = \frac{\mu^2}{2b^2 k T J} \quad (22)$$

$$\Phi(\tau \pm \alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau \pm \alpha} e^{-\lambda^2} d\lambda.$$

Beachten wir, daß $d \lg \tau = d \lg \mu - d \lg b$ und daß $d \lg \alpha = d \lg b$, so erhalten wir aus (11) und (21) für die Suszeptibilität der Masseneinheit folgenden Ausdruck

$$\chi = \frac{N b^2 J}{2 \alpha^2} \left\{ 4 \tau^2 - 2 \alpha^2 + 1 - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{-(\tau^2 + \alpha^2)}}{\Phi(\tau + \alpha) - \Phi(\tau - \alpha)} \cdot (2 \tau \sinh 2 \alpha \tau + \alpha \cosh 2 \alpha \tau) \right\} \quad (23)$$

¹⁾ O. E. Frivold, Ann. d. Phys. 57, 471, 1918.

Die durch die Konstante Nb^3J dividierten Werte von χ sind für verschiedene Werte von α und τ in Tabelle 2 dargestellt und waren von Gans aus Formel (23) berechnet worden. Für einen gegebenen Wert der Temperatur T ist, wie aus (22) ersichtlich, die Größe τ konstant; aus (20) ergibt sich, daß α direkt proportional zur Feldstärke ist.

Tabelle 2.

α	$\frac{\chi}{Nb^3J}$			
	$\tau = 0$	$\tau = 1/2$	$\tau = 1$	$\tau = 2$
0,0	— 0,667	— 0,500	— 0,000	+ 2,00
0,2	— 0,670	— 0,505	— 0,010	+ 1,92
0,4	— 0,681	— 0,514	— 0,040	+ 1,69
0,6	— 0,698	— 0,535	— 0,082	+ 1,348
0,8	— 0,719	— 0,560	— 0,135	+ 1,093
1,0	— 0,746	— 0,591	— 0,192	+ 0,900
1,5	— 0,8189	— 0,682	— 0,339	+ 0,536
2,0	— 0,8802	— 0,773	— 0,488	+ 0,278
3,0	— 0,9444	— 0,889	— 0,723	— 0,143
4,0	— 0,9687	— 0,937	— 0,844	— 0,471
5,0	— 0,9800	— 0,960	— 0,900	— 0,660
10,0	— 0,9950	— 0,990	— 0,975	— 0,915
∞	— 1,0000	— 1,000	— 1,000	— 1,000

Die Tabelle zeigt, daß für alle Werte von τ gleich oder kleiner als Eins χ für alle Werte von α negativ ist, während es für $\tau = 1$ und $\alpha = 0$ verschwindet; ferner, daß für $\tau = 2$ χ für genügend niedrige Werte von α positiv und für höhere Werte von α negativ ist. Derart hängt die Suszeptibilität von der Feldstärke ab.

Eine Substanz, deren Suszeptibilität, was das Vorzeichen betrifft, von der Feldstärke abhängt, wird metamagnetisch genannt. Weber und Overbeck¹⁾ beobachteten die Erscheinung des Metamagnetismus bei Kupfer-Zink-Legierungen, Honda²⁾ bei dem Element Indium. Es ist jedoch möglich, daß die beobachteten Erscheinungen durch die Anwesenheit von Eisenspuren in den Proben hervorgerufen sind.

Eine andere interessante Schlußfolgerung, die aus der vorliegenden Theorie zu ziehen ist, ist die, daß bei angemessener Zunahme der Temperatur und Feldstärke alle sogenannten paramagnetischen Körper diamagnetisch werden müssen.

¹⁾ H. Overbeck, Ann. d. Phys. **46**, 677, 1915.

²⁾ K. Honda, ebenda **38**, 1043, 1910.

Die Erklärung für die merkwürdigen Ergebnisse der vorliegenden Theorie des Paramagnetismus findet sich in der Tatsache, daß stillschweigend zwei getrennte Ursachen zur Erzeugung der Magnetisierung hypothetisch eingeführt wurden; die eine wirkt dahin, Diamagnetismus, die andere Paramagnetismus hervorzurufen.

Wie man unschwer einsieht, liegt die Ursache zur Erzeugung des Diamagnetismus in den der thermischen Veränderung unterworfenen Rotationen der Magnetonen um ihre äquatorialen Trägheitsachsen; die Ursache für den Paramagnetismus in den nicht der thermischen Veränderung unterworfenen Rotationen der Magnetonen um ihre Symmetrieachsen.

Die relativen Stärken dieser beiden Ursachen hängen nach der Theorie von der Temperatur und von der Feldstärke ab; deshalb kann ja nach den Werten dieser beiden Größen, die eine oder andere Ursache überwiegen.

In der zweiten¹⁾ seiner 1916 veröffentlichten Arbeiten „Über Paramagnetismus“ entwickelt Gans eine Theorie des Paramagnetismus, bei der das molekulare magnetische Feld in Rechnung gesetzt wird, das er in seiner eben besprochenen Arbeit über Dia-, Para- und Metamagnetismus nicht berücksichtigt hatte.

Es muß betont werden, daß nach der letzteren Theorie der Paramagnetismus nicht allein bestehen kann, sondern immer vom Diamagnetismus begleitet vorkommt; der durch die Rotationen der Magnetonen um ihre äquatorialen Trägheitsachsen hervorgerufen wird; und daß bei genügend hohen Temperaturen und äußeren Feldern, der durch diese Ursache erzeugte Diamagnetismus über den Paramagnetismus überwiegen kann, der durch die Rotationen der Magnetonen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um ihre Symmetrieachsen entsteht.

Für erreichbare Temperaturen jedoch überwiegt bei fast allen paramagnetischen Substanzen die paramagnetische Wirkung bei weitem über die diamagnetische, die man infolgedessen vernachlässigen kann. Jedes Magneton hat dabei nach Annahme ein konstantes magnetisches Moment μ , das durch seine Rotation um seine Symmetrieachse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit hervorgerufen ist; ferner soll dieses Moment für alle Magnetonen

¹⁾ A. a. O. 69, Anm. 4.

gleich sein. Ein derartiges Magneton ist dem magnetischen Molekül von Langevin gleichwertig.

Unter den hier für das Magneton gemachten Annahmen läßt sich Formel (35), Abschnitt III, für die Berechnung des magnetischen Momentes der Masseneinheit anwenden. Diese Form gibt den Mittelwert $\overline{\cos \vartheta}$ für $\cos \vartheta$, wobei ϑ der Winkel zwischen der Achsenrichtung eines Magnetons und dem Felde \mathfrak{R} ist, dessen Beziehung zu dem äußeren Felde \mathfrak{H} und der Magnetisierungsstärke \mathfrak{J} durch die Gleichung:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{H} + \frac{4\pi}{3} \mathfrak{J} \quad (24)$$

ausgedrückt ist.

Man erhält das magnetische Moment der Masseneinheit, wenn man $\overline{\cos \vartheta}$ mit dem Produkt aus der Zahl der Magnetonen in der Masseneinheit N und dem konstanten magnetischen Moment eines Magnetons μ multipliziert. So erhalten wir aus der in Frage kommenden Formel für $\overline{\cos \vartheta}$ folgenden Ausdruck für das magnetische Moment der Masseneinheit:

$$M = N \mu \overline{\cos \vartheta} \\ = \frac{\pi \mu N}{\sqrt{\pi^3 A_0^3}} \int_0^\infty e^{-\frac{A^2}{A_0^2}} A dA \int_{\pm(A-K)}^{A+K} \left(\coth a - \frac{1}{a} \right) \left(\frac{F^2 + K^2 - A^2}{K^2} \right) dF, \quad (25)$$

wobei

$$a = \frac{\mu F}{kT}.$$

Was die Bedeutung der Bezeichnungen anbelangt, so sei daran erinnert, daß A der skalare Wert des molekularen Feldes, A_0 der wahrscheinlichste Wert von A , F der skalare Wert des resultierenden magnetischen Feldes, k die Boltzmannsche Konstante und T die absolute Temperatur ist.

Aus dem Ausdruck (25) für die Magnetisierung der Masseneinheit leiten wir nur einen Ausdruck für χ , die Suszeptibilität der Masseneinheit, ab.

Nach Definition ist:

$$\chi = \lim_{H=0} \left(\frac{dM}{dH} \right) = \lim_{K=0} \left(\frac{dM}{dK} \frac{dK}{dH} \right).$$

Für isotrope Körper, auf die sich die Theorie bezieht, sind \mathfrak{R} und \mathfrak{S} parallel, und wir finden aus (24)

$$\frac{dK}{dH} = 1 + \frac{4\pi}{3} \frac{dJ}{dH}$$

und, da für paramagnetische Körper das zweite Glied rechts sehr klein gegen Eins sein wird, so kann es vernachlässigt werden. Wir können deshalb schreiben:

$$\chi = \lim_{K=0} \frac{dM}{dK}.$$

Bei der Auswertung dieses Ausdrucks ist das Pluszeichen bei der unteren Grenze des Integrals bezüglich F in Gleichung (25) für M dann zu setzen, wenn der Grenzwert am K kleiner als A geworden ist. Nach leichter Rechnung findet man:

$$\chi = \frac{2}{3} N \mu \frac{4\pi}{\sqrt{\pi^3 A_0^3}} \int_0^\infty \left\{ L(a) + \frac{1}{2} a L'(a) \right\} e^{-\frac{A^2}{A_0^2} A} A dA, \quad (26)$$

wobei

$$L(a) = \coth a - \frac{1}{a}; \quad a = \frac{\mu A}{kT};$$

endlich $L'(a)$ der Differentialquotient von $L(a)$ nach (a) ist.

Der Kürze halber schreiben wir:

$$z = \frac{A^2}{A_0^2} \quad \tau = \frac{kT}{\mu A_0} \quad \chi_0 = \frac{4 N \mu}{3 \sqrt{\pi} A_0}. \quad (27)$$

Nach (34) Abschnitt III ist:

$$A_0 = \frac{4}{3} \mu \sqrt{\frac{\pi N_0 \varrho}{M s^3}}, \quad (28)$$

wobei N_0 die Loschmidtsche Zahl, M das Molekulargewicht, ϱ die Dichte und s die kleinste Entfernung zwischen zwei Magnetonen ist.

Nach Einführung der Abkürzungen in (26) erhalten wir endlich:

$$\chi = \chi_0 \int_0^\infty \left\{ L\left(\frac{\sqrt{z}}{\tau}\right) + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{z}}{\tau} L'\left(\frac{\sqrt{z}}{\tau}\right) \right\} e^{-z} dz. \quad (29)$$

Diese Formel stellt eine Abhängigkeit der Suszeptibilität von der Temperatur dar, da τ proportional zu T ist; ebenso von der Dichte, da beide, τ und χ_0 , umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Dichte sind.

Für Flüssigkeiten und feste Körper jedoch können wir die Änderung an der Dichte mit der Temperatur vernachlässigen.

Der Kürze halber setzen wir

$$\frac{\mu A_0}{k} = \Theta. \tag{30}$$

Dann ist (nach 27)

$$\tau = \frac{T}{\Theta}. \tag{31}$$

Nach Einführung der Temperaturfunktion

$$\psi(\tau) = \int_0^\infty \left\{ L\left(\frac{\sqrt{z}}{\tau}\right) + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{z}}{\tau} L'\left(\frac{\sqrt{z}}{\tau}\right) \right\} e^{-z} dz \tag{32}$$

erhalten wir aus (29)

$$\frac{\chi}{\chi_0} = \psi\left(\frac{T}{\Theta}\right) = \psi(\tau). \tag{33}$$

Diese Formel enthält zwei verfügbare Konstanten, χ_0 und Θ ; sie drückt aus, daß mit Ausnahme der Gase alle paramagnetischen Körper einem Gesetz korrespondierender Zustände gehorchen.

Wir suchen nun den Wert der Temperaturfunktion $\psi(\tau)$. Man kann die Ausdrücke für $\psi(\tau)$ passenderweise für zwei Fälle ableiten, nämlich, wenn τ klein und wenn τ groß ist. Im ersten Falle darf aber natürlich τ nicht so klein sein, daß die Theorie der Gleichteilung (der Energie) nicht mehr gilt.

1. Fall: τ klein.

Die Einzelheiten der Rechnung möge der Leser im Original nachlesen. Das Ergebnis der Rechnung ist der Nachweis, daß

$$\Psi(\tau) = 1 - \frac{\tau\sqrt{\pi}}{2} + \frac{B_2}{2!}(\pi\tau)^4 - \frac{2B_3}{3!}(\pi\tau)^6 + \frac{3B_4}{4!}(\pi\tau)^8 + \dots \tag{34}$$

Die B stellen die Bernoullischen Zahlen dar; es ist:

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}.$$

2. Fall: τ groß.

Auch in diesem Falle lassen wir die Einzelheiten der Rechnung weg. Wir finden:

$$\Psi(\tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left\{ \frac{3B_1}{1! \tau} - \frac{5B_2}{2! \tau^3} + \frac{7B_3}{3! \tau^5} - \dots \right\}. \tag{35}$$

Für sehr hohe Temperaturen kann man die Glieder nach dem ersten Gliede in (35) vernachlässigen; dann findet man aus (33) und (31)

$$\chi = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \chi_0 \frac{\Theta}{T} = \frac{N\mu^2}{3kT}, \quad (36)$$

d. h. das Gesetz von Curie-Langevin für den Paramagnetismus.

Dieses Ergebnis war zu erwarten, da bei hohen Temperaturen der Einfluß des molekularen Feldes auf die Magnetonen im Vergleich zu den die Ordnung zerstörenden Wirkungen der thermischen Bewegung klein ist.

Experimentelle Prüfung der Theorie.

Gans hat die Theorie mit den experimentellen Bestimmungen der Suszeptibilität von K. Onnes, Oosterhuis, Perrier und Honda verglichen.

Man fand, daß für kristallines Gadoliniumsulfat $Gd_2(SO_4)_3 + 8H_2O$ und für Ammoniumferrosulfat $Fe_2(SO_4)_3(NH_4)_2SO_4 + 24H_2O$ das Curie-Langevinsche Gesetz bis hinab zu den Temperaturen $20,1^{\circ}$ abs. bzw. $14,7^{\circ}$ abs. gut erfüllt ist. Nach der vorliegenden Theorie ist für diese beiden Substanzen und tatsächlich für alle mit konstanten χT das molekulare Feld A_0 so klein, daß auch Θ klein und somit $\frac{T}{\Theta}$ immer noch eine große Zahl sein wird.

Daraus folgt, daß man hier die Wirkung der Magnetonen aufeinander vernachlässigen kann.

Die in Tabelle 3 angeführten Substanzen zeigen mit den für die verfügbaren Konstanten χ_0 und Θ angegebenen Werten für ihre Suszeptibilität Übereinstimmung mit der vorliegenden Theorie, die für so tiefe Temperaturen wie $14,7^{\circ}$ wenig zu wünschen übrig läßt.

Tabelle 3.

Substanz	Formel	χ_0	Θ
Kristallines Ferrosulfat . .	$Fe_2SO_4 \cdot 7H_2O$	$2212 \cdot 10^{-6}$	12,64
Kristallines Mangansulfat .	$MnSO_4 \cdot 4H_2O$	$4387 \cdot 10^{-6}$	9,90
Wasserfreies Ferrisulfat . .	$Fe_2(SO_4)_3$	$302 \cdot 10^{-6}$	120,00

Molekularkonstanten. Die Theorie liefert mit Hilfe der experimentellen Ergebnisse für die oben betrachteten Substanzen Werte für folgende Konstanten:

die Zahl der Weisschen Magnetonen pro Molekül,
den wahrscheinlichsten Wert für das molekulare Feld A ,
die kleinste Entfernung s zwischen zwei Magnetonen.

Für sehr hohe Werte von T erhalten wir aus (36):

$$\frac{N \mu^2}{3k} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \chi_0 \Theta. \quad (37)$$

Da wir nun annehmen, daß jedes Molekül nach unserer Theorie nur ein Magneton enthält, so ist $N_0 \mu$ gleich dem magnetischen Moment pro Grammmolekül, wenn N_0 die Loschmidtsche Zahl gleich $6,175 \cdot 10^{23}$ ist. Ferner ist $N_0 = MN$, wenn M das Molekulargewicht ist. Multipliziert man obigen Ausdruck (36) mit MN , führt man für $MN N_0$ ein und löst man die entstehende Gleichung nach μN_0 auf, so findet man:

$$\mu N_0 = \sqrt{\frac{3}{4} \sqrt{\pi} k N_0 M \chi_0 \Theta} \quad (38)$$

für das magnetische Moment pro Grammmolekül.

Enthält das Molekül q magnetische Atome, so ist nach Weiss $\frac{\mu N_0}{q}$ ein ganzes Vielfaches p von 1123,5. So erhalten wir:

$$1123,5 \cdot p = \left(\sqrt{\frac{3}{4} \sqrt{\pi} k N_0 M \chi_0 \Theta} \right) : q, \quad k N_0 = 8,315 \cdot 10^7. \quad (39)$$

Wir bezeichnen mit p' die dem für p aus dieser Gleichung berechneten Wert nächste ganze Zahl.

Weiss nimmt für gewöhnlich für Salze, z. B. $\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3$, die mehr als ein Metallatom enthalten, $q = 1$ an.

Das wahrscheinlichste molekulare Feld berechnet sich aus der zweiten Gleichung (27), wie folgt:

$$A_0 = \frac{kT}{\mu \tau} = \frac{k N_0 \Theta}{\mu N_0} = \frac{k N_0 \Theta}{1123,5 p \cdot q}. \quad (40)$$

Die kleinstmögliche Entfernung s zweier Magnetonen erhalten wir aus (28):

$$s^3 = \frac{16 \pi \mu^3 N_0 \Theta}{9 M A_0^2} = \frac{16 \pi}{9} \frac{1123,5^3}{N_0} \cdot \frac{p^3 \cdot q^2 \Theta}{M A_0^3}. \quad (41)$$

Benutzt man die in Tabelle 3 gegebenen Werte der Konstanten χ_0 und Θ , so erhält man die in Tabelle 4 gegebenen Zahlen für kristallines Ferrosulfat, kristallines Mangansulfat und wasserfreies Ferrisulfat.

Tabelle 4.

Substanz	M	ϱ	$\chi_0 \cdot 10^6$	Θ	p	p'	$A_0 \cdot 10^{-5}$ in Gauß	$s \cdot 10^9$ in cm
$\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O} \dots$	278,0	1,90	2212	12,64	26,09	26	0,3587	3,46
$\text{MnSO}_4 \cdot 4\text{H}_2\text{O} \dots$	223,1	2,11	4387	9,90	29,13	29	0,2516	5,25
$\text{Fe}(\text{SO}_4)_3 (q = 1)$	399,9	3,10	302,0	120,00	35,63	36	2,494	1,22

Anmerkungen: Es ist beachtenswert, daß die Werte für p den ganzen Zahlen nicht sehr nahe kommen; die Weiss'sche Magnetonentheorie entbehrt hier jeder tatsächlichen Stütze. Dieser Umstand ist jedoch ohne Einfluß auf die anderen in Betracht kommenden Molekularkonstanten.

Die molekularen Felder erwiesen sich als ziemlich groß. Kristallwasser scheint die Wirkung zu haben, das molekulare Feld zu verkleinern, da es wahrscheinlich die kleinstmögliche Entfernung benachbarter Magnetonen vergrößert.

Die kleinste Entfernung s ist von der Größe eines Zehntels Moleküldurchmesser. Durch die Annahme einer exzentrischen Lage des Magnetons in dem Molekül kann dies erklärt werden.

Obleich die vorliegende Theorie bis zu sehr tiefen Temperaturen für die oben betrachteten Substanzen in guter Übereinstimmung mit dem Experiment ist, so versagt sie doch bei sehr tiefen Temperaturen für viele andere Substanzen. Gans hat deshalb eine auf der Quantenhypothese beruhende Abänderung vorgeschlagen. Wir werden diese Abänderung in Abschnitt VII, der sich mit den Quantentheorien des Magnetismus befaßt, betrachten.

Theorie von Honda und Okubo.

In einer Arbeit: „Über eine kinetische Theorie des Magnetismus im allgemeinen“ haben Honda und Okubo¹⁾ eine Abänderung der Langevinschen Theorie für paramagnetische Gase versucht, in welcher die durch die Rotationen eines magnetischen Moleküls um Achsen senkrecht zu der magnetischen Achse hervorgerufenen Wirkungen berücksichtigt werden.

¹⁾ Honda und Okubo, Phys. Rev. **13**, 6, 1919.

Das vektorielle magnetische Moment eines Moleküls wird als aus zwei Teilen bestehend angenommen, einer axialen Komponente in der Richtung seiner Rotationsachse und einer transversalen Komponente senkrecht zu dieser Achse.

Nach der Theorie der angeführten Arbeit würden die axialen Komponenten der magnetischen Momente der Moleküle eines einem äußeren magnetischen Felde unterworfenen Körpers, die durch die durch das Feld induzierten Bewegungen der Moleküle hervorgerufen sind, den Paramagnetismus erzeugen, die transversalen Komponenten den Diamagnetismus.

Die Theorie hat, was ihre Grundannahmen betrifft, vieles gemeinsam mit der Gansschen Theorie des Dia-, Para- und Metamagnetismus, die wir oben eingehender betrachteten.

Die Behauptungen Hondas und Okubos wurden durch Weaver¹⁾ einer ziemlich scharfen Kritik unterzogen.

Theorie von Oxley.

In einer ausgedehnten Reihe sehr interessanter Arbeiten „Über den Einfluß des molekularen Baues und der Temperatur auf die magnetische Suszeptibilität“ hat A. E. Oxley²⁾ eine Änderung der Langevinschen Theorie eingeführt, in der die molekularen Felder sowohl in diamagnetischen als auch in para- und ferromagnetischen Substanzen eine Hauptrolle spielen.

Die Theorie von Oxley, die die molekularen Felder in den Vordergrund stellt, ist in vieler Beziehung analog der Theorie des Ferromagnetismus, die Weiss auf Grund der Langevinschen Theorie eines paramagnetischen Gases entwickelte; sie ist aber ergänzt durch die Annahme der Existenz sehr starker innerer Felder innerhalb der ferromagnetischen Substanzen.

Es schien deshalb angezeigt, die Arbeiten von Oxley und Weiss zusammen in einem eigenen Beitrag zu behandeln. Dies wurde von Prof. E. M. Terry in dem sich mit dem Ferromagnetismus befassenden Teil unseres Buches unternommen.

¹⁾ W. Weaver, Phys. Rev. **16**, 438, 1920.

²⁾ A. F. Oxley, Roy. Soc. Phil. Trans. **214**, A, 109, 1913—1914; **215**, A, 79, 1914—1915; **220**, A, 247, 1919—1920.

Theorie von Frivold.

In einer Arbeit: „Zur Theorie des Ferro- und Paramagnetismus“ hat O. E. Frivold¹⁾ eine Theorie des Ferro- und Paramagnetismus entwickelt, die in einer Änderung der Langevinschen Theorie für ein paramagnetisches Gas besteht, indem das molekulare magnetische Feld berücksichtigt wird.

In dieser Theorie werden die Elementarmagnete oder Magnetonen mit den Atomen identifiziert, deren Mittelpunkte fest in den Ecken eines kubischen Raumgitters und fähig einer Rotation um ihre Mittelpunkte angenommen werden.

Die statistische Theorie wird auf dieses Magnetonensystem angewendet, und es ergeben sich Resultate, aus denen man die Magnetisierungskurve erhält. Ein Vergleich dieser Kurve mit einer entsprechenden in der Langevinschen Theorie liefert ein Maß für die Größe der gegenseitigen Wirkung der Magnetonen aufeinander und gestattet die Berechnung des molekularen magnetischen Feldes.

Eine mehr ins einzelne gehende Darstellung dieser Theorie gibt Prof. Terry in dem oben erwähnten Teile dieses Buches.

Es wurden zwar noch andere Versuche zur Verbesserung der Langevinschen Gleichteilungstheorie des Magnetismus angestellt, wir hoffen aber, daß die Betrachtung der hier mehr oder weniger eingehend behandelten dem Leser zu einer klaren Vorstellung über die Richtung der Verbesserungsversuche dieser mit Recht berühmten Theorie verholfen hat.

VII. Auf Quantenhypothesen beruhende Theorien des Paramagnetismus.

Im Jahre 1911 zeigte Nernst²⁾, daß im Gegensatz zu den Gesetzen der klassischen statistischen Mechanik die spezifischen Wärmen mehratomiger Gase mit abnehmender Temperatur abzunehmen scheinen. Dies wurde später durch die Untersuchungen

¹⁾ O. E. Frivold, Ann. d. Phys. **65**, 1, 1921, vgl. S. 155 ff.

²⁾ W. Nernst, Zeitschr. f. Elektrochem. **17**, 615, 1911.

von Scheel und Heuse¹⁾ bestätigt, und ihre Ergebnisse wurden dem Verhalten jenes Teiles der spezifischen Wärme zugeschrieben, der von der Rotation der Moleküle abhängt.

Darauf erschien eine Reihe von Untersuchungen, die sich mit der Rotationsenergie des Moleküls befaßten. Von diesen waren einige theoretischer Natur, in denen man versuchte, die Rotationsenergie zu quanteln.

Unterdessen hatten die experimentellen Forschungen von Onnes, Oosterhuis, Perrier, du Bois, Honda und Owen über die Änderung der Suszeptibilität paramagnetischer Substanzen mit der Temperatur Ergebnisse gezeitigt, die mit den Gleichteilungstheorien des Paramagnetismus im Widerspruch standen. Es befand sich also die Theorie des Magnetismus in einem ähnlichen Dilemma wie die Theorie der spezifischen Wärme selbst.

So waren natürlich Modifikationen der bestehenden Theorien des Magnetismus durch die Einführung von Quantenhypothesen angebracht. Die ersten Theoretiker auf diesem Gebiet sahen sich einer grundsätzlichen Schwierigkeit gegenüber, und diese bestand auch für die, welche an der Verbesserung der Theorie der spezifischen Wärme arbeiteten; diese Theorie aber hatte ihren Ursprung in der versuchten Quantelung der Rotationsenergie der Moleküle.

Poincaré wies auf diese Schwierigkeit auf dem Solvaykongreß 1911 folgendermaßen hin:

„Man denke sich einen Oszillator mit drei Freiheitsgraden, der isotrop ist und derart schwingen kann, daß die Schwingungsdauern bezüglich der drei Achsen die gleichen sind. So seien für Bewegungen parallel zu der X, Y und Z-Achse die entsprechenden Energien $\alpha h\nu$, $\beta h\nu$ und $\gamma h\nu$, wobei α , β , γ ganze Zahlen seien, h die Plancksche Konstante und ν die gewöhnliche Schwingungszahl sei. Nun mögen die Achsen geändert werden; bezüglich der neuen Achsen werden die Energien $\alpha' h\nu$, $\beta' h\nu$ und $\gamma' h\nu$ sein, wobei α' , β' , γ' ganze Zahlen sind. Dies ist unmöglich.“

In der Erwiderung sagte Planck:

„Eine Quantenhypothese für mehrere Freiheitsgrade ist bis jetzt noch nicht aufgestellt worden; aber ich halte das Gelingen einer solchen durchaus nicht für unmöglich.“

¹⁾ K. Scheel und W. Heuse, Berl. Ber. **44**, 1913; Ann. d. Phys. **40**, 473, 1913.

Im Jahre 1916 bewies Planck¹⁾ durch die Veröffentlichung seiner Arbeit: „Die physikalische Struktur des Phasenraumes“ die Richtigkeit seiner hier ausgesprochenen Ansicht.

Vor der Veröffentlichung von Plancks Arbeit waren die Autoren, die die magnetischen Theorien durch Einführung von Quantenhypothesen zu verbessern suchten, gezwungen, Annahmen zu machen, die zwar einleuchtend schienen, aber nicht fest begründet waren.

Wir wollen daher die früheren Versuche der Quantentheorien des Paramagnetismus nur kurz streifen.

Theorie von Oosterhuis.

Unter den ersten auf diesem Gebiet befand sich Oosterhuis²⁾, der folgende Abänderung von Langevins Gleichteilungsformel für die Suszeptibilität der Masseneinheit vorschlug. Es war:

$$\chi = \frac{N\mu^2}{3kT},$$

wo N die Avogadro'sche Zahl, μ das magnetische Moment eines Moleküls und k die Boltzmannsche Konstante ist. $kT/2$ stellt hier die mittlere Rotationsenergie pro Freiheitsgrad eines Moleküls dar, und Oosterhuis ersetzt $kT/2$ einfach durch den Ausdruck:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{h\nu}{e^{kT} - 1} + \frac{h\nu}{2} \right).$$

Dieser Ausdruck stellt die mittlere Rotationsenergie der Moleküle für einen Freiheitsgrad nach der Quantenhypothese von Einstein und Stern dar, die annimmt, daß alle Moleküle bei einer gegebenen Temperatur mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit rotieren, wobei ν die gemeinsame Schwingungszahl und h die Plancksche Konstante ist.

Theorie von Keesom.

Keesom³⁾ nimmt nicht wie Oosterhuis an, daß alle Moleküle einer Substanz bei einer gegebenen Temperatur mit gleicher Winkelgeschwindigkeit rotieren, sondern er betrachtet die Be-

1) M. Planck, Ann. d. Phys. **50**, 385, 1916.

2) E. Oosterhuis, Phys. Zeitschr. **14**, 682, 1913.

3) W. H. Keesom, ebenda **15**, 8, 1914.

wegung der molekularen Rotation als aufgelöst in ein System stehender elastischer Wellen, nach der Art von Debye in dessen Theorie der spezifischen Wärme. Wegen des diskreten Aufbaues der Materie können Wellen, deren Wellenlänge unter einem gewissen, durch den Aufbau bedingten Minimum liegt, nicht existieren, infolgedessen werden die möglichen Schwingungszahlen für die stehenden Wellen alle endlich und unter einem bestimmten Maximum, etwa ν_m sein. Das magnetische Molekül soll, wie nach der Annahme von Oosterhuis, um seine magnetische Achse ein zu vernachlässigendes Trägheitsmoment haben, während seine anderen Hauptträgheitsmomente als gleich angenommen werden.

Die mittlere, einem einzelnen Freiheitsgrad entsprechende Rotationsenergie wird dann zu

$$\frac{3}{2\nu_m^3} \int_0^{\nu_m} \left(\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} + \frac{h\nu}{2} \right) \nu^2 d\nu$$

gefunden; dieser Ausdruck steht nach Keesoms Theorie an Stelle des $kT/2$ in der Langevinschen Formel für die Suszeptibilität der paramagnetischen Substanzen.

Die Theorie von Oosterhuis zeigt ziemlich gute Übereinstimmung mit dem Experiment, tatsächlich fast so gute als die von Keesom; da sie auf viel einfacheren Annahmen beruht, ist sie vorzuziehen.

Theorie von Gans.

In seiner 1916 erschienenen Arbeit „Über Paramagnetismus“¹⁾, die wir im Abschnitt V, soweit sie die Gleichteilungstheorie behandelt, besprochen, schlägt Gans eine Abänderung auf Grund der Quantenhypothese vor, um zu einer Theorie zu kommen, die sich auf alle paramagnetischen Substanzen bei sehr tiefen Temperaturen anwenden läßt.

Wie in Abschnitt V festgestellt wurde, ist seine Gleichteilungstheorie für einige Körper bis zu sehr tiefen Temperaturen in guter Übereinstimmung mit dem Experiment. Aber die Suszeptibilitätskurven (χ, T), die für Uran, Magnesium, Aluminium, Molybdän, Niobium, Tantal und Wolfram beobachtet wurden, zeigen alle die

¹⁾ A. a. O.

Neigung, bei einem bestimmten Punkte parallel zu der T -Achse zu werden; tatsächlich ist diese Neigung für einige dieser Körper bei Zimmertemperatur augenscheinlich und für Molybdän und Wolfram bei Temperaturen von 1200 bzw. 1100°.

Die experimentellen Ergebnisse können durch seine Gleichenteilungstheorie nicht erklärt werden; so kam Gans zu einer Abänderung derselben durch die Einführung einer Quantenhypothese, die sich auf die Verteilung der Rotationsenergie der Magnetonen bezieht. Wie bei seiner Gleichenteilungstheorie, zieht Gans bei seiner Abänderung das molekulare Feld in Berücksichtigung.

Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, daß die Ganssche Quantentheorie nur für sehr tiefe Temperaturen anwendbar ist, wobei man unter tiefen Temperaturen solche versteht, bei und unter denen die Gleichenteilungstheorie nicht mehr gültig ist; so werden bei Molybdän und Wolfram Temperaturen unter 1100° als tiefe Temperaturen angesehen.

Bei sehr tiefen Temperaturen kann man sicherlich annehmen, daß die Wärmebewegung so gering ist, daß die Magnetonen nur kleine Schwingungen um ihre Gleichgewichtslagen ausführen. Diese sind für jedes Magneton beim Fehlen eines äußeren magnetischen Feldes durch das molekulare Feld \mathfrak{A} des Magnetons bestimmt. Tatsächlich wird die Schwingungszahl ν für das Magneton und der wahrscheinlichste Wert von ν , nämlich ν_0 , gegeben durch:

$$\nu^2 = \frac{\mu A}{4 \pi^2 J}, \quad \nu_0^2 = \frac{\mu A_0}{4 \pi^2 J}, \quad (1)$$

wobei J das Trägheitsmoment des Magnetons um irgend eine Achse senkrecht zu seiner magnetischen Achse durch seinen Mittelpunkt darstellt. Wir machen nun die Quantenannahme, die Energieverteilung für die zwei Freiheitsgrade des Magnetons um zwei senkrechte Achsen in seiner äquatorialen Ebene sei die gleiche, wie wenn jeder Freiheitsgrad so betrachtet würde, als ob er der eines einfachen Oszillators mit einem Freiheitsgrade wäre.

Um die nun eingeführten Grundannahmen zu präzisieren, soll sich das Magneton mit dem Moment μ in einem magnetischen Felde \mathfrak{F} befinden, und die Temperatur soll so tief sein, daß das Magneton nur unendlich kleine Schwingungen um seine durch die Richtung dieses Feldes bestimmte Gleichgewichtslage ausführen kann.

Es seien φ_1 und φ_2 die Winkelverschiebungen des Magnetons um zwei senkrechte Achsen, dann ist die Gesamtenergie des Magnetons ε gegeben durch:

$$\varepsilon = \frac{J}{2}(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + \frac{\mu F}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) = \frac{\mu F}{2}(C_1^2 + C_2^2), \quad (2)$$

wobei C_1 und C_2 die maximalen Amplituden von φ_1 und φ_2 sind.

Bezeichnet β den Winkel zwischen der magnetischen Achse des Magnetons und dem resultierenden Felde \mathfrak{F} , in dem es sich befindet, so ist:

$$\cos \beta = 1 - \frac{\beta^2}{2} = 1 - \frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}{2},$$

und der zeitliche Mittelwert von $\cos \beta$ ist gegeben durch:

$$\overline{\cos \beta} = 1 - \frac{\overline{\beta^2}}{2} = 1 - \frac{C_1^2 + C_2^2}{4}.$$

Folglich mittels (2):

$$\overline{\cos \beta} = 1 - \frac{\varepsilon}{2 \mu F}.$$

Der räumliche Mittelwert dieses Ausdrucks über alle N Magnetonen in der Masseneinheit ist gegeben durch:

$$\overline{\overline{\cos \beta}} = 1 - \frac{\overline{\varepsilon}}{2 \mu F},$$

wobei $\overline{\varepsilon}$ die mittlere Energie eines Magnetons ist.

Nach der Gansschen Quantenhypothese ist:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{2 h \nu}{e^{kT} - 1}. \quad (3)$$

Dieser Ausdruck stellt die doppelte mittlere Energie, die jedem Freiheitsgrad des Magnetons zukommt, dar, in Übereinstimmung mit der ursprünglichen Planckschen Strahlungstheorie, die keine Nullpunktsenergie annimmt.

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt:

$$\overline{\overline{\cos \beta}} = 1 - \frac{h \nu}{\mu F} \frac{1}{e^{kT} - 1}. \quad (4)$$

Dieser Ausdruck entspricht in der Gleichenteilungstheorie der Formel (30), Abschnitt III:

$$\overline{\cos \beta} = \left(\coth \frac{\mu F}{k T} - 1 \right) : \frac{\mu F}{k T}.$$

Die Gleichenteilungstheorie wird daher nach der Gansschen Quantenhypothese dadurch abgeändert, daß man in (25), Abschnitt III

$$\left(\coth \frac{\mu F}{k T} - 1 \right) : \frac{\mu F}{k T}$$

durch

$$1 - \frac{h \nu}{\mu F} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h \nu}{k T}} - 1}$$

ersetzt.

Die folgende Entwicklung, die das molekulare Feld in Rechnung zieht, ist bis ins einzelne der in der Gleichenteilungstheorie eingehaltenen analog. Die Einzelheiten möge der Leser in der Originalarbeit nachlesen.

Die Theorie liefert für die Suszeptibilität einen Ausdruck mit drei willkürlichen Konstanten: χ_0 , die Suszeptibilität beim absoluten Nullpunkt, \mathfrak{F} ($= \frac{h \nu_0}{k}$) und \mathfrak{O} ($= \frac{\mu A_0}{k}$).

Im Falle von Platin und wasserfreiem Mangansulfat fand sich die Theorie mit den unten gegebenen Werten für die verfügbaren Konstanten in guter Übereinstimmung mit dem Experiment:

	χ_0	\mathfrak{O}	\mathfrak{F}
Platin	1,089 · 10 ⁻⁶	2097 ⁰	50,0 ⁰
Wasserfreies Mangansulfat .	670 · 10 ⁻⁶	84,94 ⁰	23,5 ⁰

Molekularkonstanten. Aus diesen experimentellen Ergebnissen kann man interessante Aufschlüsse über folgende Molekularkonstanten erhalten:

a) Die wahrscheinlichste Schwingungszahl ν_0 der Magnetonen in dem molekularen Felde.

b) Das äquatoriale Trägheitsmoment J eines Magnetons.

Die wahrscheinlichste Schwingungszahl ν_0 für ein Magneton in dem molekularen Felde ist gegeben durch:

$$\nu_0 = \frac{k}{h} \mathfrak{F}. \tag{5}$$

Aus der zweiten Gleichungszahl (1) erhalten wir für das äquatoriale Trägheitsmoment eines Magnetons

$$J = \frac{\mu A_0}{4 \pi^2 \nu_0^2}, \tag{6}$$

wobei A_0 wie in (40), Abschnitt VI berechnet werden kann. Man fand für Platin: $A_0 = 1243 \cdot 10^6$ und für wasserfreies Mangansulfat $A_0 = 2,292 \cdot 10^6$.

So erhält man folgende Werte:

	$\nu_0 \cdot 10^{-12}$	$J \cdot 10^{40}$
Für Platin	1,03	67,7
„ wasserfreies Mangansulfat .	0,483	12,4

Theorie von v. Weyssenhoff.

Jan v. Weyssenhoff¹⁾ scheint der erste gewesen zu sein, der in einer 1916 erschienenen Arbeit eine Quantentheorie des Paramagnetismus entwickelte, die von Anfang an ausdrücklich Quantenmethoden benutzt. Dieser Autor vermeidet die von Poincaré betonte Schwierigkeit durch Einführung eines vereinfachten Modells zur Veranschaulichung der Struktur der paramagnetischen Körper.

In diesem vereinfachten Modell sollen die magnetischen Moleküle (Magnetonen) nur einer Rotation um Achsen parallel einer gegebenen Ebene (x, y -Ebene) und gleichzeitig senkrecht zu ihren eigenen magnetischen Achsen fähig sein. Den Winkel zwischen der Achse und der magnetischen Achse eines Magnetons bezeichnen wir mit ϑ . Die Lage eines Magnetons ist dann einzig und allein durch einen Wert von ϑ zwischen $-\pi$ und π bestimmt. Man kann vernünftigerweise erwarten, daß ein solches Modell, was seine magnetischen Eigenschaften betrifft, sich ähnlich wie ein allgemeineres verhält, bei dem das Magneton sich frei um einen festen Punkt drehen kann.

Ein äußeres Feld der Stärke H möge in der Richtung der Z -Achse wirken.

Die potentielle Energie U eines Magnetons mit dem magnetischen Moment μ wird ausgedrückt durch

$$U = \mu H(1 - \cos \vartheta) = A^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \tag{7}$$

¹⁾ J. v. Weyssenhoff, Ann. d. Phys. 51, 285, 1916.

wobei $A^2 = 2\mu H$ und die kinetische Energie E durch

$$E = \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2 = \frac{\psi^2}{2J}, \quad (8)$$

wobei $\psi = J\dot{\vartheta}$ und J das Trägheitsmoment um die feste Achse des Magnetons ist.

In der vorliegenden Theorie ist die gegenseitige magnetische Einwirkung der Moleküle aufeinander nicht in Rechnung gezogen. Daher kann, wenn $A = 0$ ist, ein Magneton sich frei um seine feste Achse drehen. Für sehr große Werte von A werden alle Achsen der Magnetonen nur wenig von der Richtung des äußeren Feldes \mathcal{H} abweichen, und sie werden sich dann ganz ähnlich verhalten wie ein System Planckscher linearer Oszillatoren. Denn die Gesamtenergie eines Magnetons ε , die im allgemeinen durch

$$\varepsilon = \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2 + A^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{\psi^2}{2J} + A^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \quad (9)$$

gegeben ist, wird in diesem Falle ausgedrückt durch:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2 + \frac{A^2 \vartheta^2}{4} = \frac{\psi^2}{2J} + \frac{A^2 \vartheta^2}{4}. \quad (10)$$

Dieser Ausdruck ist von der gleichen Form wie der für die Energie eines Planckschen linearen Oszillators.

Auf dieses Modell soll nun die zweite Plancksche Quantentheorie angewandt werden, oder vielmehr jener Teil desselben, den er Thermodynamik nennt.

Zu diesem Zwecke muß man zuerst den zu diesem Modell gehörigen Phasenraum betrachten. Er besteht aus einem Streifen der ϑ - ψ -Ebene von der Breite 2π , parallel zu der ψ -Achse. Wir wollen hier die bereits oben eingeführten Größen ϑ und ψ als die generalisierte Koordinate ϑ und das generalisierte Moment ψ bezeichnen:

$$\psi = \frac{\partial E}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\vartheta}} \left(\frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2 \right) = J \dot{\vartheta}. \quad (11)$$

Die Plancksche Methode erfordert nur die Berechnung der Größe und Form der Elementargebiete in der ϑ - ψ -Ebene, die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen.

Nach den Planckschen Gedankengängen müssen diese Elementargebiete gleicher Wahrscheinlichkeit durch Kurven $\varepsilon = \text{const}$ be-

grenzt sein. Für große Werte von A müssen diese Kurven, wie aus Gleichung (10) hervorgeht, Ellipsen sein.

Die Größe jedes Elementargebietes muß dieselbe und gleich der Planckschen Konstante h sein, da für große Werte von A die Moleküle des Modells einem System linearer Oszillatoren gleichwertig sind, für das, wie Planck zeigte, die Größe h eines Elementargebietes unabhängig von ν und deshalb auch von A ist.

Die Schar der Grenzkurven $\varepsilon = \text{const}$ für die Elementargebiete ist durch Gleichungen folgender Form gegeben:

$$\frac{\psi^2}{2J} + A^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = C^2, \quad (12)$$

wobei C eine Konstante für irgend eine gegebene Kurve ist.

Die von irgend einer solchen Kurve eingeschlossene Fläche ist gegeben durch

$$\int_0^g \psi d\vartheta = 4 \int_0^g \sqrt{2J(C^2 - A^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2})} d\vartheta, \quad (13)$$

wobei die Integrationsgrenze g von dem Werte von C abhängt.

Nur muß man eine Reihe von Werten für C

$$0, C_1, C_2 \dots C_n$$

derart finden, daß die Fläche des Elementargebietes zwischen der $(n-1)$ -ten und der n -ten Kurve für alle Werte von n gleich h ist, oder was das gleiche ist, daß die durch die n -te Kurve eingeschlossene Fläche gleich nh ist.

Mittels (13) erhalten wir:

$$4 \int_0^g \sqrt{2J} \cdot \sqrt{C_n^2 - A^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta = nh \quad (14)$$

$$g = \begin{cases} 2 \sin^{-1} \frac{C_n}{A} & \text{für } C_n < A \\ \pi & \text{für } C_n > A. \end{cases} \quad (15)$$

Die durch Gleichung (12) dargestellten Kurven in der ϑ, ψ -Ebene zerfallen für verschiedene Werte von C in zwei getrennte Klassen; die eine liegt innerhalb der Kurve G (vgl. Fig. 12), für die das äußere Feld H so beschaffen ist, daß $C = A$; die andere Klasse liegt außerhalb dieser Kurve. Die Werte von C_n für die

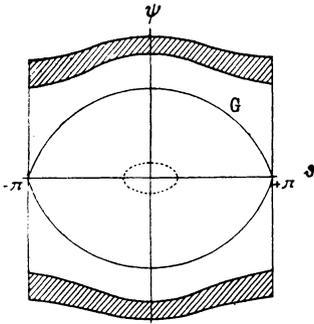
erste Klasse sind alle kleiner als A , die der zweiten Klasse alle größer als A . Daß man für die Erfordernisse einer Theorie des Paramagnetismus nur die zweite Klasse zu betrachten hat, wird sogleich klar werden.

Der Fall, daß das äußere H so beschaffen ist, daß $C_n = A$, ist von besonderem Interesse, da er den Fall darstellt, für den die Pendelbewegung eines magnetischen Moleküls im Begriff ist, in rotierende Bewegung überzugehen. Die Fläche der Kurve G wird, wie man leicht aus (13) ersieht, für diesen Fall ausgedrückt durch:

$$4 A \sqrt{2J} \int_0^\pi \cos \frac{\vartheta}{2} d\vartheta = 8 A \sqrt{2J}. \quad (16)$$

Wenn es möglich wäre, C_n mittels (14) ganz allgemein als Funktion von n darzustellen, so könnte sofort eine Formel für die mittlere Energie der magnetischen Moleküle abgeleitet werden; auch wäre es möglich, einen Ausdruck für die Orientierung der Achsen der magnetischen Moleküle als Funktion der Temperatur für eine gegebene Feldstärke abzuleiten. Leider ist dieses allgemeine Verfahren unmöglich und die Durchführung hat sich auf Spezialfälle zu beschränken. Es scheint jedoch, daß einer dieser Spezialfälle umfassend genug ist, um eine Grundlage für eine Erklärung des Paramagnetismus abzugeben. —

Fig. 12.



Für den Fall, daß das äußere Feld H so groß ist, daß die durch (13) gegebene Fläche der Kurve für $C_n = A$, nämlich $8 A \sqrt{2J}$, viel größer ist als h , werden alle in Betracht kommenden Elementargebiete innerhalb der Kurve G und ganz nahe am Anfangspunkt liegen, und da wir an Stelle von $\sin \frac{\vartheta}{2}$ setzen dürfen, werden die Grenzkurven der Elementargebiete Ellipsen sein, deren eine in Fig. 12 als gestrichelte Kurve gezeichnet ist.

Dies entspricht genau dem Falle von Plancks linearen Oszillatoren. Das Erreichen dieses Falles würde jedoch viel größere äußere Felder erfordern, als sie in praxi hergestellt werden können.

Wir betrachten jetzt den Spezialfall, in dem das äußere Feld H so beschaffen ist, daß die Fläche der Kurve G , nämlich $8A\sqrt{2J}$, viel kleiner als das Quantum h ist.

In diesem Falle ist:

$$H < \frac{h^2}{256 \mu J}. \quad (17)$$

Was die Größenordnung anbelangt, so ist $\mu = 10^{-20}$, $J = 10^{-40}$ und $h = 6,55 \cdot 10^{-27}$. Also ist die Größenordnung der rechten Seite der Ungleichung (17) 10^5 . Diese Zahl stellt ein Feld vor, das beträchtlich größer ist als jedes in der Praxis zu erreichende, und wir können schließen, daß eine Theorie des Paramagnetismus auf diesen Spezialfall aufgebaut werden kann.

Nehmen wir nun für den Augenblick das äußere Feld so an, daß $C_1 = A$, so ist die Fläche der Kurve G derart, daß $8A\sqrt{2J} = h$; folglich liegen alle im vorliegenden Falle in Betracht kommenden Elementargebiete, für die nämlich $8A\sqrt{2J}$ klein gegen h ist, außerhalb der Kurve G . Eines dieser Gebiete ist durch die schraffierte Fläche in Fig. 12 angedeutet. Die obere Grenze des Integrals in (14) ist deshalb π , und das Integral selbst ein vollständiges Legendresches elliptisches Integral.

Für den Fall des Paramagnetismus erhalten wir daher:

$$nh = 4\sqrt{2J} \int_0^\pi \sqrt{C_n^2 - A^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} d\vartheta. \quad (18)$$

Setzen wir

$$k_n = \frac{A}{C_n},$$

so kann das Integral in folgender Reihe entwickelt werden:

$$nh = 4\pi\sqrt{2J}C_n \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k_n^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k_n^4}{3} - \dots \right\} \quad (19)$$

Wir müssen nun aus (19) C_n als Funktion von n und A darstellen. Wir übergangen die Einzelheiten der Rechnung, die sich auf S. 301 der besprochenen Arbeit finden. Die Berechnung vereinfacht sich, wenn man A als kleine Größe annimmt. Das Resultat ist:

$$C_n = \frac{nh}{4\pi\sqrt{2J}} \left(1 + \frac{1}{4} \gamma_n^2 - \frac{1}{64} \gamma_n^4 + \dots \right), \quad (20)$$

wobei

$$\gamma_n = \frac{4\pi\sqrt{2J}}{nh}. \quad (21)$$

Nun sei:

N die Gesamtzahl der magnetischen Moleküle in der Masseneinheit,

$N\omega_n$ die Zahl der magnetischen Moleküle in der Masseneinheit mit Energien zwischen den durch die Begrenzungen des n -ten Elementargebietes bestimmten Grenzen.

ε_n der Mittelwert der Gesamtenergie für die $N\omega_n$ magnetischen Moleküle.

Ferner sei

$$\psi_n = C_n \sqrt{2J} \sqrt{1 - k_n^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}, \quad \text{wobei } k_n = \frac{A}{C_n}, \quad (22)$$

der Wert von ψ für irgend einen Punkt auf der aus (12) erhaltenen n -ten Begrenzungskurve.

Dann ist:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{h} \iint \left(\frac{\psi_n}{2J} + A^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) d\vartheta d\psi, \quad (23)$$

wobei die Integration über das n -te Elementargebiet sich erstreckt. Das Ergebnis der Auswertung des Integrals zeigt:

$$\varepsilon_n = k\Theta(n^2 - n) + \frac{k\Theta}{3} + \frac{A^2}{2} + \frac{\pi^2 J}{h^2} A^4 \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right), \quad (24)$$

wobei:

$$k\Theta = \frac{h^2}{32\pi^2 J}. \quad (25)$$

Die Konstante Θ hat die Dimension einer Temperatur.

Von hier an folgt die Rechnung den von Planck in der Entwicklung seiner zweiten Strahlungsformel angegebenen Linien, wobei angenommen wird, daß die Oszillatoren die Energie kontinuierlich absorbieren und quantenweise emittieren.

Die Gesamtenergie W der betrachteten N Magnetonen ist gegeben durch:

$$W = N \sum_1^{\infty} \omega_n \varepsilon_n. \quad (26)$$

Durch die Anwendung führt die bekannte thermodynamische Methode von Planck¹⁾ zu dem annähernden Energieverteilungsgesetz:

$$N \omega_n = \alpha e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} = \alpha_1 e^{-\frac{\theta}{T}(n^2 - n)} \quad (27)$$

wobei α_1 eine von A und T , aber nicht von n abhängige Konstante ist, und wobei zweite und höhere Potenzen von A vernachlässigt sind.

Gleichung (21) gibt das Verteilungsgesetz der magnetischen Moleküle bezüglich ihrer Energie, d. h. die Zahl der Moleküle in der Masseneinheit mit Energien zwischen den durch die Begrenzungen des n -ten Elementargebietes bestimmten Grenzen.

Die bisher gefundenen Ergebnisse lassen sich unmittelbar in der Theorie der rotatorischen spezifischen Wärme und des Paramagnetismus anwenden. Wir übergehen den Teil der Arbeit, der sich mit der Theorie der spezifischen Wärme befaßt, und betrachten nun die Anwendung der gefundenen Ergebnisse auf eine Theorie des Paramagnetismus.

Die potentielle Energie eines Magnetons ist nach (7) gegeben durch:

$$U = \frac{A^2}{2} (1 - \cos \vartheta) = A^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}. \quad (28)$$

Ist χ die magnetische Suszeptibilität der Masseneinheit, so erhalten wir wie nach der Theorie von Langevin:

$$\chi = \frac{N \mu}{H} \overline{\cos \vartheta}, \quad (29)$$

wobei $\overline{\cos \vartheta}$ der räumliche Mittelwert von $\cos \vartheta$ ist, der nach der vorliegenden Quantentheorie natürlich im allgemeinen von dem nach der Gleichteilungstheorie von Langevin gefundenen verschieden ist.

Bezeichnet \bar{U} den räumlichen Mittelwert von U , so ist:

$$\overline{\cos \vartheta} = 1 - \frac{2}{A^2} \bar{U}. \quad (30)$$

Wir bezeichnen ferner mit U_n die mittlere potentielle Energie eines Magnetons, dessen gesamte mittlere Energie ϵ_n zwischen den Begrenzungen des n -ten Elementarbereiches als Grenzen liegen

¹⁾ M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung. 3. Abschnitt.

soll (dabei ist die Fläche des Elementarbereiches in der ψ -, ϑ -Ebene gelegen und gleich h). Dann ist:

$$U_n = \frac{4}{h} \int_0^\pi A^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} (\psi_n - \psi_{n-1}) d\vartheta.$$

Wertet man das Integral mittels (22) und unter Benutzung von (20) und (21) aus, so ergibt sich:

$$U_1 = \frac{A^2}{2} - \frac{2\pi^2 J A^4}{h^2} \quad (n = 1),$$

$$U_n = \frac{A^2}{2} - \frac{2\pi^2 J}{h^2} A^4 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \right) \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Demnach ergeben sich die Mittelwerte für $\cos \vartheta$ in den n Gebieten zu:

$$(\overline{\cos \vartheta})_1 = \frac{4\pi^2 J}{h^2} A^2 = \frac{1}{4k\Theta} \mu H \quad (n = 1). \quad (31)$$

$$\begin{aligned} (\overline{\cos \vartheta})_n &= \frac{4\pi^2 J}{h^2} A^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \right) = -\frac{1}{8k\Theta} \cdot \frac{A^2}{n(n-1)} \\ &= -\frac{1}{4k\Theta} \frac{\mu H}{n(n-1)} \quad (n = 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen setzen uns mit Hilfe der durch (27) gegebenen Verteilungsfunktion instand, unmittelbar den folgenden Ausdruck für $\cos \vartheta$ abzuleiten:

$$\overline{\cos \vartheta} = \frac{\mu H}{4k\Theta} \frac{1 - \sum_2^\infty \frac{1}{n(n-1)} e^{-\frac{\Theta}{T}(n^2-n)}}{\sum_1^\infty e^{-\frac{\Theta}{T}(n^2-n)}} \quad (32)$$

Aus (29) und (32) erhalten wir für die magnetische Suszeptibilität der Masseneinheit folgenden Ausdruck:

$$\chi = \frac{8N\mu^2}{h^2} \pi^2 J \frac{1 - \sum_2^\infty \frac{1}{n(n-1)} e^{-\sigma(n^2-n)}}{\sum_1^\infty e^{-\sigma(n^2-n)}}, \quad (33)$$

wobei

$$\sigma = \frac{\Theta}{T} = \frac{h^2}{32\pi^2 J k T}. \quad (34)$$

Aus (33) folgt, daß bei genügend hohen Temperaturen:

$$\chi = \frac{N\mu^2}{2kT}.$$

Dies stimmt mit der Langevinschen Formel überein; nur steht hier im Nenner der Faktor 2 an Stelle von 3 in der Langevinschen Formel. Das hier angenommene Modell für die Molekularstruktur gestattet für das magnetische Molekül jedoch nur einen Rotationsfreiheitsgrad; und wenn die Langevinsche Berechnung unter der Annahme von nur einem Freiheitsgrad für das magnetische Molekül ausgeführt wird, so zeigt sich, daß der numerische Faktor im Nenner 2 an Stelle von 3 wird. Deshalb führt der Verfasser in der Formel (33) den Faktor $\frac{2}{3}$ ein. So wird die Endformel für die magnetische Suszeptibilität:

$$\chi = \frac{16 N \mu^2}{3 \cdot h^2} \pi^2 J \frac{1 - \sum_2^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} e^{-\sigma(n^2-n)}}{\sum_1^{\infty} e^{-\sigma(n^2-n)}}. \quad (35)$$

Diese Formel gibt für die Massensuszeptibilität beim absoluten Nullpunkt:

$$\chi_0 = \frac{16 N \mu^2}{3 \cdot h^2} \pi^2 J. \quad (36)$$

Eine Prüfung der Theorie erfolgt durch den Vergleich der (mit den entsprechenden Werten der verfügbaren Konstanten χ_0 und Θ) berechneten Werte von χ mit der von Onnes und Oosterhuis für kristallinisches und wasserfreies Mangansulfat experimentell bestimmten Werten [vgl. hierzu die Tabellen (5) und (6)].

Auf die Plancksche Quantelungsmethode gegründete Theorien.

Nachdem im Jahre 1916 Plancks Arbeit¹⁾ über „die physikalische Struktur des Phasenraums“ erschienen war, die die Theorie in der Richtung fortsetzte, die Energie eines Oszillators mit mehreren Freiheitsgraden zu quanteln, war die Zeit für weitere Verbesserungen

1) A. a. O. S. 85.

der rotatorischen spezifischen Wärmen und des Paramagnetismus gekommen.

Wie oben erwähnt, hatte man schon vorher in der Entwicklung der Theorien dieser beiden Probleme den Punkt erreicht, daß eine Methode der Quantelung der rotatorischen Energie eines Moleküls oder Magnetons mit mehreren Rotationsfreiheitsgraden ausfindig zu machen war.

In den Theorien des Magnetismus hatte man für das gewöhnlich betrachtete Magneton angenommen, daß es ein konstantes, durch seine Rotation um eine Symmetrieachse hervorgerufenes, magnetisches Moment habe und dynamische Symmetrie um Achsen durch seinen Mittelpunkt senkrecht zu der Symmetrieachse besitze. Da ferner die Forderung der Konstanz für das magnetische Moment des Magnetons um diese Achse verlangt, daß seine Bewegung um dieselbe unabhängig von der Wärmebewegung sei, wurden ihm nur zwei Freiheitsgrade zugeschrieben.

Bevor also ein befriedigender Fortschritt erzielt werden konnte, galt es, das Problem zu lösen:

Die rotatorische Energie eines Magnetons mit zwei Rotationsfreiheitsgraden richtig zu quanteln.

In Plancks Quantentheorie der Strahlung tritt die oben erwähnte, von Poincaré festgestellte Quantenschwierigkeit nicht auf, da der von Planck zum Zwecke des Energieaustauschs der verschiedenen Schwingungszahlen bei der Strahlung des schwarzen Körpers eingeführte lineare Oszillator nur einen einzigen Freiheitsgrad besitzt. Planck hatte gezeigt, daß der wahrscheinliche elementare Phasenraum eines linearen Oszillators aus den Flächen bestand, die zwischen ähnlichen und ähnlich in der φ , ψ -Ebene gelegenen aufeinanderfolgenden Ellipsen eingeschlossen waren; dabei war jede Fläche nach seiner Quantenhypothese gleich der universalen Konstante h . φ war die generalisierte Koordinate des Oszillators und stellte sein elektrisches Moment dar, ψ das entsprechende generalisierte Moment, nämlich die partielle Ableitung der kinetischen Energie des Oszillators nach der generalisierten Geschwindigkeit $\dot{\varphi}$.

Nun kann vom Standpunkt Plancks aus die Quantenschwierigkeit Poincarés so gefaßt werden, es sei das elementare Wahrscheinlichkeitsgebiet in dem betrachteten speziellen Problem

genau zu begrenzen. Ist diese Begrenzung erfolgt, so sind die übrigbleibenden Schwierigkeiten nur solche der formalen Analysis.

In den Fällen, in welchen das statistische Element oder Molekül nur einen einzigen Freiheitsgrad hat, ist die genaue Begrenzung der elementaren Wahrscheinlichkeitsgebiete im allgemeinen eine ziemlich einfache Sache, wie z. B. im Falle von Plancks linearen Oszillatoren, oder auch im Falle der erzwungenen Bewegung der Magnetonen in dem von v. Weyssenhoff in seiner Theorie des Paramagnetismus angenommenen Modell für die molekulare Struktur.

Wir wollen nun kurz einige auf Plancks Methode der Quantelung gegründete Quantentheorien des Paramagnetismus anführen.

Theorie von Reiche.

Fritz Reiche¹⁾ veröffentlichte 1917 eine sehr interessante Arbeit „Zur Quantentheorie des Paramagnetismus“, in der er die Annahmen von v. Weyssenhoff bezüglich der Molekularstruktur dadurch verallgemeinert, daß er jedes magnetische Molekül (Magneton mit festem magnetischen Moment) einer freien Rotation um einen festen Punkt fähig sein läßt. Die Rotation des Magnetons um seine magnetische Achse (Symmetrieachse) soll unabhängig von der Wärmebewegung sein, und sein Trägheitsmoment um irgend eine äquatoriale Achse durch seinen Mittelpunkt, J , soll für alle solchen Achsen das gleiche sein.

Aus dem oben Gesagten ist klar, daß das Problem von Reiche sich nur in dem Teile von demjenigen von Weyssenhoff wesentlich unterscheidet, der sich auf die Begrenzung der geeigneten elementaren Phasengebiete bezieht. Sich auf die Einzelheiten der Rechnung, durch die dies im Anschluß an die Methode von Planck ausgeführt wird, einzulassen, würde uns über das Ziel der vorliegenden Übersicht hinausführen; der Leser, der sich dafür interessiert, sei auf die Originalarbeit, ferner auch auf eine Arbeit von Adams²⁾ hingewiesen.

Der Verfasser findet einen Ausdruck für den Mittelwert von $\cos \vartheta$, wobei ϑ der Winkel zwischen der magnetischen Achse eines solchen Moleküls und der Richtung des äußeren Feldes H ist.

¹⁾ F. Reiche, Ann. d. Phys. 54, 401, 1917.

²⁾ E. P. Adams, Bull. Nat. Res. Coun. I, 5, 301.

Dann setzt er diesen Wert in den folgenden, die magnetische Suszeptibilität der Masseneinheit darstellenden Ausdruck ein:

$$\chi = \frac{N\mu}{H} \overline{\cos \vartheta},$$

wobei N die Zahl der magnetischen Moleküle in der Masseneinheit, μ das magnetische Moment eines Moleküls und $\overline{\cos \vartheta}$ der Mittelwert von $\cos \vartheta$ ist.

So findet man:

$$\chi = \frac{N\mu^2}{h^2} \pi^2 J \frac{\frac{5}{4} e^{-\sigma} + \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-\sigma n^2}}{n(n^2-1)}}{\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\sigma n^2}}, \quad (37)$$

wobei

$$\frac{h^2}{8 \pi^2 J k T} \quad (38)$$

der entsprechende, von v. Weyssenhoff gefundene Ausdruck für χ ist in (35) gegeben; es ist zu beachten, daß σ bei v. Weyssenhoff einen Wert hat gleich einem Viertel des in (38) gegebenen.

Für $T = 0$ ergibt Formel (37)

$$\chi_0 = \frac{5}{4} \frac{N\mu^2}{h^2} \pi^2 J, \quad (39)$$

während sich (35) zu

$$\chi_0 = \frac{16}{3} \cdot \frac{N\mu^2}{h^2} \pi^2 J \quad (40)$$

vereinfacht.

Für hohe Temperaturen (σ klein) ergeben sowohl (35) als auch (37)

$$\chi = \frac{N\mu^2}{3 k T},$$

d. h. den Gleichteilungsausdruck von Curie-Langevin.

Andere Theorien.

Sophie Rotszajn¹⁾ behandelte das gleiche Problem wie Reiche, wandte jedoch dabei eine ganz andere Methode der Analyse an. Die für die Suszeptibilität gefundene Endformel ist, wie zu erwarten war, genau die gleiche wie die, zu der Reiche gelangte.

¹⁾ S. Rotszajn, Ann. d. Phys. 57, 81, 1918.

Das von beiden, Reiche und Rotszajn, eingeschlagene Verfahren setzt, was die Quantenhypothesen betrifft, die Gültigkeit der sogenannten zweiten Planckschen Strahlungstheorie voraus, die die Absorption der Energie durch seine linearen Oszillatoren als kontinuierlich, die Emission aber als quantenweise annimmt und die Existenz einer Nullpunktsenergie verlangt. Es mag daran erinnert werden, daß nach dieser Theorie die Energieverteilung für den stationären Zustand bezüglich der Schwingungszahl gegeben ist durch

$$\bar{\varepsilon} = h\nu \left(\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} + \frac{1}{2} \right).$$

Hierbei ist $\bar{\varepsilon}$ die mittlere Energie eines Oszillators der Schwingungszahl ν , h die Plancksche und k die Boltzmannsche Konstante.

In der ersten, von Planck schließlich wieder verlassenen Form seiner Theorie ist

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Diese Form verlangt nicht die Existenz einer Nullpunktsenergie.

Obwohl die zweite Form der Planckschen Theorie nun allgemein der ersten vorgezogen wird, hielt es A. Smekal¹⁾ doch für der Mühe wert, eine auf den Annahmen der ersten Form der Theorie aufgebaute Quantentheorie des Paramagnetismus zu entwickeln, wobei er dasselbe Magnetonenmodell wie Reiche und Rotszajn benutzte. Er kam zu einer Formel für die Suszeptibilität, die keineswegs eine so gute Übereinstimmung mit den experimentellen Tatsachen aufweist, wie die auf Grund der zweiten Planckschen Theorie gefundene. So liefert sein Ergebnis einen neuen Beweis zugunsten der zweiten Form der Theorie und damit auch für die Existenz einer Nullpunktsenergie.

Vergleich der Theorien mit dem Experiment.

Von den verschiedenen betrachteten Quantentheorien ist wahrscheinlich die von Reiche die befriedigendste; die, was die Grundannahmen und Endergebnisse betrifft, die gleiche wie die von Rotszajn ist.

¹⁾ A. Smekal, Ann. d. Phys. 57, 376, 1918.

Die von v. Weyssenhoff vorgeschlagene Theorie ist vom Standpunkt ihrer Entwicklung aus ihren Grundannahmen ebenfalls befriedigend; aber diese sind künstlicher als die von Reiche und Rotszajn, da sie eine Beschränkung der Bewegung des Magnetons (außer seiner Rotation um seine Symmetrieachse) auf eine Bewegung in zwei Dimensionen einschließen.

Die Theorie von Gans ist zwar auf eine ungenaue Quantenhypothese aufgebaut, trägt aber den Folgen der Anwesenheit des molekularen Feldes Rechnung, das die anderen Theorien vernachlässigen. Wir haben diese Theorie bereits mit dem Experiment verglichen (s. S. 106).

Die Theorie von Oosterhuis kann als Muster der Theorie gelten, die, anders als die Ganssche, auf Quantenhypothesen aufgebaut sind, die entwickelt wurden, bevor Planck 1916 seine allgemeine Methode veröffentlichte, bei der die Quantelung für ein statistisches System mit mehreren Freiheitsgraden der Elemente ausgeführt wird.

Es muß daran erinnert werden, daß keine der hier erwähnten Theorien außer der von Gans die gegenseitige Einwirkung der Moleküle berücksichtigt, weshalb sie alle in dieser Beziehung ungenügend sind.

Tabelle 5 bis 8 lassen uns beurteilen, inwieweit die Theorien mit dem Experiment übereinstimmen. In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, daß jede Theorie zwei verfügbare Konstanten enthält.

Tabelle 5.

Wasserfreies Mangansulfat, MnSO_4 .

Reiche . . $J = 1,99 \times 10^{-40}$; $\mu = 4,35 \times 10^{-21}$; $\chi_0 = 657,7 \times 10^{-6}$
 v. Wey . . $J = 4,44 \times 10^{-41}$; $\mu = 1,8 \times 10^{-20}$; $\chi_0 = 689 \times 10^{-6}$
 Oost . . . $J = 8,7 \times 10^{-41}$.

T°	$\chi \cdot 10^6$ ber. Reiche	$\chi \cdot 10^6$ ber. v. Wey	$\chi \cdot 10^6$ beobachtet	$\chi \cdot 10^6$ ber. Oost
14,4	637,9	646	636	628
17,8	614,9	617	627	619
20,1	597,8	594,3	603	603
64,9	315,1	313,4	314,5	325,7
77,4	277,5	276,1	274,8	284,0
169,6	142,7	142,2	144,2	145,4
293,9	86,8	88,9	87,8	86,3

Tabelle 6.

Kristallinisches Mangansulfat, $\text{MnSO}_4 + 4\text{H}_2\text{O}$.

Reiche . . . $J = 3,14 \times 10^{-39}$; $\mu = 3,65 \times 10^{-21}$; $\chi_0 = 7294 \times 10^{-6}$
 v. Wey . . . $J = 3,1 \times 10^{-39}$; $\mu = 1,69 \times 10^{-30}$; $\chi_0 = 3,1 \times 10^{-3}$
 Oost . . . $J = 1,1 \times 10^{-39}$.

T°	$\chi \cdot 10^6$ ber. Reiche	$\chi \cdot 10^6$ ber. v. Wey	$\chi \cdot 10^6$ beobachtet	$\chi \cdot 10^6$ ber. Oost
14,4	1233	1249	1233	1231
17,8	1014	1019	1021	1015
20,1	905	905,8	914	904
64,9	293,2	290,3	292	291
70,5	270,6	267,7	270	268
77,4	247,3	244,1	247	245
169,6	114,5	112,7	111,5	112,6
288,7	67,6	66,5	66,3	66,3

Tabelle 7.

Wasserfreies Ferrisulfat, $\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3$.

Reiche . . . $J = 1,40 \times 10^{-40}$; $\mu = 3,42 \cdot 10^{-21}$; $\chi_0 = 2,864 \cdot 10^{-6}$

T°	$\chi \cdot 10^6$ ber.	$\chi \cdot 10^6$ beobachtet
64,0	177,6	177,1
70,5	167,6	167,3
77,6	156,7	157,2
169,6	85,1	85,6
289,8	53,3	53,3

Tabelle 8.

Kristallinisches Ferrosulfat, $\text{FeSO}_4 + 7\text{H}_2\text{O}$.

Reiche . . . $J = 2,23 \times 10^{-39}$; $\mu = 2,94 \cdot 10^{-21}$; $\chi_0 = 3365 \cdot 10^{-6}$

T°	$\chi \cdot 10^6$ ber.	$\chi \cdot 10^6$ beobachtet
14,7	760,5	756
20,3	568,7	571
64,6	189,8	191
77,3	159,5	160
292,3	42,4	42,4

VIII. Der durch die Bewegungen freier Elektronen in Metallen hervorgerufene Diamagnetismus.

Nach den von Lorentz, Drude und anderen entwickelten Ansichten über die Natur der elektrischen Leitung in Metallen ist in den Metallen eine große Anzahl freier Elektronen enthalten, die sich zwischen den Atomen ähnlich wie die Moleküle eines Gases bewegen; außerdem unterstützen die thermischen Eigenschaften der Metalle die Annahme, daß in ihnen freie Elektronen in großer Zahl vorhanden sind. Obwohl bei dem Versuch, viele beobachtete elektrische und thermische Eigenschaften der Metalle auf die freien Elektronen zurückzuführen, noch viele Schwierigkeiten ungelöst sind, so spricht doch Vieles zugunsten dieser Annahme.

Wenn in den Metallen freie Elektronen vorhanden sind und sich wie die Moleküle eines Gases bewegen, so ist es klar, daß bei Anwesenheit eines magnetischen Feldes die freien Bahnen der Elektronen gekrümmt werden und eine Krümmung in dem Sinne aufweisen, daß das Metall diamagnetische Eigenschaften erhält. Über den durch die Bewegung der freien Elektronen hervorgerufenen Diamagnetismus, wird sich natürlich der Dia- und vielleicht der Paramagnetismus von Langevin lagern.

Erwin Schroedinger¹⁾ und H. A. Wilson²⁾ gaben in den Jahren 1912 bzw. 1920 Theorien des durch die Bewegungen freier Elektronen hervorgerufenen Diamagnetismus in Metallen, wobei sie durch sehr verschiedene Methoden zu ganz ähnlichen Schlußfolgerungen kamen. Für die Zwecke der vorliegenden Übersicht wird es genügen, die Schroedingersche Theorie zu skizzieren.

Theorie von Schroedinger.

Strukturannahmen. Die bezüglich der Struktur eines Metalles gemachten Grundannahmen sind genau die gleichen wie die von Lorentz in seiner Theorie der Bewegungen der Elektronen in Metallen.

In dem Metall sollen zwei verschiedene Arten von Teilchen anwesend sein:

¹⁾ E. Schroedinger, Wien. Ber. **66**, 1305, 1912.

²⁾ H. A. Wilson, Roy. Soc. Proc. Lond. **97**, 321, 1920.

a) Elektronen mit der Masse m und der Ladung e , die sich frei zwischen den Atomen bewegen.

b) Die Metallatome, die teils geladen, teils ungeladen sind.

Elektronen und Atome sollen an der thermischen Bewegung des Metalls teilhaben, indem die Teilchen jeder Art im Falle des thermischen Gleichgewichts eine mittlere kinetische Energie aufweisen gleich derjenigen der Translationsbewegungen eines Gasmoleküls bei der gleichen Temperatur wie im Metall.

Da die Masse eines Elektrons im Vergleich zu der eines Atoms klein ist, kann man die Geschwindigkeiten der Atome gegenüber denen der Elektronen vernachlässigen.

Die gegenseitige Wirkung der Teilchen aufeinander soll, was die Elektronen anbelangt, nur durch Zusammenstöße hervorgerufen sein, und zwar werden die zusammenstoßenden Teilchen als vollkommen glatte elastische Kugeln gedacht.

Mit Rücksicht auf ihre geringe Größe werden die Zusammenstöße der Elektronen untereinander vernachlässigt und nur solche zwischen Elektronen und Atomen betrachtet. Dementsprechend werden die mittleren freien Weglängen der Elektronen nicht durch deren eigene Zahl und Größe, sondern durch die Zahl und Größe der Atome bestimmt.

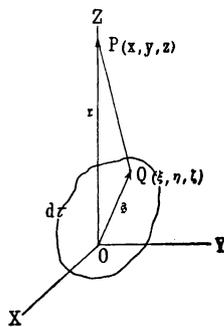
Der Diamagnetismus freier Elektronen.

Wird ein solches Medium der Einwirkung eines magnetischen Feldes unterworfen, so werden hierdurch die freien Bahnen der freien Elektronen zwischen den Zusammenstößen nicht mehr gerade, sondern wegen der Feldwirkung gekrümmt sein. Die Bewegung der Elektronen in diesen gekrümmten freien Bahnen muß so wirken, daß in dem Medium Diamagnetismus entsteht.

Nun müssen wir das aus der Krümmung der freien Bahnen unter der Einwirkung eines äußeren magnetischen Feldes entstehende magnetische Moment berechnen.

In Fig. 13 ist $d\tau$ ein kleines Volumenelement des Mediums, ξ, η, ζ sind die Koordinaten eines Elektrons, das sich in einem Punkte Q innerhalb $d\tau$ befindet; diese Koordinaten beziehen sich auf einen

Fig. 13.



gleichfalls innerhalb $d\tau$ befindlichen Anfangspunkt O . P ist ein Punkt auf der Z -Achse in der Entfernung r von O , die groß gegenüber den Dimensionen von $d\tau$ ist. Das äußere magnetische Feld \mathfrak{H} wirke in der Richtung der Z -Achse.

Die magnetische Kraft \mathfrak{h} im Punkte P (O, O, r), die durch das in Q (ξ, η, ζ) befindliche und sich mit der Geschwindigkeit \mathfrak{v} ($\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$) bewegende Elektron hervorgerufen wird, ist nach (11), Abschnitt I mit genügender Annäherung ausgedrückt durch

$$\mathfrak{h} = \frac{e}{c r^3} \mathfrak{v} \times (\mathfrak{r} - \mathfrak{s}).$$

ist der Lagevektor von P und \mathfrak{s} der von Q . Die skalare Z -Komponente dieser Kraft ist ausgedrückt durch

$$h_3 = \frac{e}{c r^3} (\dot{\eta} \xi - \dot{\xi} \eta).$$

Der Klammerausdruck ist die Z -Komponente der doppelten Flächengeschwindigkeit der Elektronen bezüglich O ; $\frac{e}{r^3}$ ist für alle Elektronen in dem Volumelement konstant.

Den Mittelwert \bar{h}_3 von h_3 findet man durch Summierung dieses Ausdruckes für h_3 über alle Elektronen in $d\tau$, und durch darauf folgende Integration über eine hinreichend lange Zeit T und Division durch T . Die Reihenfolge der Summierung und Integration ist natürlich gleichgültig, und da das Zeitintegral der Flächengeschwindigkeit des betreffenden Elektrons gleich der von seinem Radiusvektor bestrichenen Fläche ist, so ist das gesuchte Zeitintegral gleich der Summe aller Flächen, die in der Zeit T auf der x - y -Ebene von den Projektionen der Radienvektoren für alle Elektronen im Element $d\tau$ bestrichen werden.

Bezeichnet F die Summe dieser Flächen, so ist

$$\bar{h}_3 = \frac{2e}{c r^3} \frac{F}{T}. \quad (1)$$

Berechnung von F . Damit ist das Problem auf die Berechnung von F zurückgeführt. Dies erfordert die Kenntnis des Verteilungsgesetzes der Elektronengeschwindigkeiten.

Vor der Anlegung des äußeren Feldes kann einleuchtenderweise das Maxwell'sche Gesetz als geltend angenommen werden; ob diese Annahme aber nach der Anlegung des Feldes noch zu-

lässig ist, ist die Frage. Die folgenden Betrachtungen zeigen, daß dies der Fall ist.

Wir betrachten im Anschluß an Boltzmann ¹⁾ den Fall einer Mischung zweier Gase. Es seien

- ξ, η, ζ die Koordinaten eines Moleküls des ersten Gases;
- $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ die Komponenten der Geschwindigkeit eines Moleküls des ersten Gases;
- X, Y, Z die Komponenten der Beschleunigung eines Moleküls des ersten Gases; dabei ist diese Beschleunigung durch die Einwirkung äußerer Kräfte hervorgerufen, die nur von den Koordinaten ξ, η, ζ abhängig sein sollen;
- m die Masse eines Moleküls des ersten Gases.

$f(\xi, \eta, \zeta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta})$ sei die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion für das erste Gas.

Boltzmann zeigte, daß im Falle des Gleichgewichts ($\frac{\partial f}{\partial t} = 0$)

$$f = f_0 e^{-hm(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2)}, \quad (2)$$

wobei f_0 und h solche Funktionen der Koordinaten ξ, η, ζ sind, daß für alle Werte von ξ, η, ζ :

$$\dot{\xi} \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial f}{\partial y} + \dot{\zeta} \frac{\partial f}{\partial z} + X \frac{\partial f}{\partial \xi} + Y \frac{\partial f}{\partial \eta} + Z \frac{\partial f}{\partial \zeta} = 0. \quad (3)$$

Nun soll dieses Ergebnis auf den vorliegenden Fall angewandt werden, wobei die Elektronen die Rolle des ersten Gases und die Metallatome die des zweiten übernehmen.

Die Komponenten X, Y, Z der durch das äußere Feld \mathfrak{H} hervorgerufenen und auf das Elektron wirkenden Kraft sind gegeben durch:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{e}{mc} (\dot{\eta} H_3 - \dot{\zeta} H_2), \\ Y &= \frac{e}{mc} (\dot{\zeta} H_1 - \dot{\xi} H_3), \\ Z &= \frac{e}{mc} (\dot{\xi} H_2 - \dot{\eta} H_1). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Nun ist zu bemerken, daß hier eine Verletzung der Boltzmannschen Annahmen vorliegt, da X, Y, Z von den Geschwindig-

¹⁾ Boltzmann, Gastheorie I, S. 98—134.

keiten abhängen. Die genaue Betrachtung des Boltzmannschen Beweises zeigt jedoch, daß er seine Gültigkeit behält, wenn man einfach annimmt, daß X nicht von $\dot{\xi}$, Y nicht von $\dot{\eta}$ und Z nicht von $\dot{\zeta}$ abhängt. Die obigen Gleichungen zeigen, daß X, Y, Z des vorliegenden Problems derart sind, daß diese Bedingungen erfüllt werden.

Setzt man nun den Wert von f aus (2) in (3) ein, so findet man mittels (4), daß die Glieder mit X, Y, Z alle verschwinden und daß infolgedessen die Gleichung

$$-m(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) \left(\dot{\xi} \frac{\partial h}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial h}{\partial y} + \dot{\zeta} \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \left(\dot{\xi} \frac{\partial f_0}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial f_0}{\partial y} + \dot{\zeta} \frac{\partial f_0}{\partial z} \right) = 0$$

identisch durch $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ erfüllt werden muß. Dies erfordert aber, daß f_0 und h von den Koordinaten unabhängig und daher konstant sein müssen. In diesem Falle ist die durch (2) gegebene Verteilungsfunktion diejenige von Maxwell, und wir kommen zu dem Schlusse, daß die Anwesenheit eines magnetischen Feldes die Geschwindigkeitsverteilung der freien Elektronen in einem Metall nicht ändert.

Um die Berechnung von F weiterzuführen, sei λ_v die (Tait'sche) mittlere freie Weglänge eines mit der Geschwindigkeit v sich bewegenden Elektrons. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein mit der Geschwindigkeit v sich bewegendes Elektron ohne Zusammenstoß eine Weglänge zwischen a und $a + da$ zurücklegen wird, ist¹⁾

$$\frac{1}{\lambda_v} e^{-\frac{a}{\lambda_v}} da. \quad (5)$$

Hierbei nimmt man an, daß λ_v unabhängig von der Geschwindigkeit v ist.

Die Zahl der Elektronen in der Volumeneinheit in $d\tau$ mit Geschwindigkeiten zwischen v und $v + dv$, sei gleich $\nu_v dv$ gesetzt. Dann ist die Zahl der Zusammenstöße solcher Elektronen in der Volumeneinheit in der Zeit T

$$\frac{vT}{\lambda} \nu_v dv.$$

¹⁾ Vgl. Jeans, Kin. Theory of Gases, 3. ed. p. 256.

Der Bruchteil dieser Zusammenstöße, für die die Geschwindigkeiten danach in dem festen Winkel $d\omega$ eingeschlossene Richtungen haben, und welche wegen (5) so beschaffen sind, daß die zusammenstoßenden Elektronen nach dem Zusammenstoß freie Weglängen zwischen a und $a + da$ haben, ist

$$\frac{d\omega}{4\pi} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{a}{\lambda}} da.$$

Also ist

$$\frac{vT}{4\pi\lambda^2} e^{-\frac{a}{\lambda}} v_v dv d\omega da, \quad (6)$$

gleich der Zahl der Zusammenstöße in der Volumeneinheit in der Zeit T von Elektronen mit Geschwindigkeiten zwischen v und $v + dv$, wobei ferner:

1. die Geschwindigkeiten nach dem Zusammenstoß in ihrer Richtung innerhalb des festen Winkels $d\omega$ liegen,
2. die freien Weglängen nach dem Zusammenstoß zwischen a und $a + da$ liegen.

Derartige Zusammenstöße bezeichnen wir als solche der Klasse A.

Nun möge das Volumelement $d\tau$ in prismatische Säulen $d\Pi$ unterteilt werden, die der Z -Achse parallel liegen und deren Abmessungen klein gegenüber denen von $d\tau$ und auch klein im Vergleich zu allen gewöhnlichen freien Weglängen sind. Die Zahl der Zusammenstöße der Klasse A innerhalb eines Prismas vom Volumen $d\Pi$ wird mittels (6) ausgedrückt durch:

$$\frac{vT}{4\pi\lambda^2} e^{-\frac{a}{\lambda}} v_v dv d\omega da d\Pi. \quad (7)$$

Die Flächen, welche die Projektionen der Radienvektoren der für diese Zusammenstöße in Betracht kommenden Elektronen in der X - Y -Ebene beschreiben, werden, da die Elektronen nach den Zusammenstößen ihre freien Bahnen beschreiben, alle schätzungsweise die gleichen sein.

Die Weiterführung der Berechnung von F erfordert nun das Auffinden der Summe dieser Flächen für Elektronen aller Klassen, für die Klasse A typisch ist, dann die Integration über alle Prismen, für die $d\Pi$, und endlich die Integration über alle Geschwindigkeiten, für die v typisch ist.

Die in der X - Y -Ebene von der Projektion des Radiusvektors eines typischen Elektrons der Klasse A beschriebene Fläche berechnet sich folgendermaßen:

In Fig. 14 sei A die Lage des Elektrons bezüglich der X - Y -Ebene zurzeit eines Zusammenstoßes, und B seine Lage zurzeit des nächsten Zusammenstoßes. Die durch $O A$, $O B$ und den Bogen \widehat{AB} begrenzte schraffierte Fläche ist die gesuchte, wobei der Bogen AB die freie Bahn des Elektrons vorstellt.

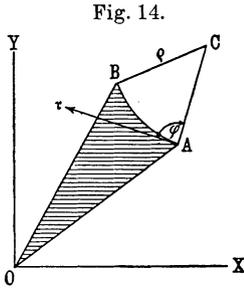


Fig. 14.

Aus den Bewegungsgleichungen eines Elektrons in einem magnetischen Felde ist leicht ersichtlich, daß die Bahn \widehat{AB} ein Kreisbogen ist, dessen Länge b durch

$$b = a \sin \vartheta \tag{8}$$

und dessen Radius ϱ durch

$$\varrho = \frac{mcv \sin \vartheta}{eH} \tag{9}$$

gegeben ist, wenn ϑ der Winkel zwischen der positiven Z -Achse (Richtung von \mathfrak{H}) und der Achse des dem festen Winkel $d\omega$ entsprechenden Kegels ist.

Wir haben

$$\text{Fläche } O\widehat{AB} = \text{Fläche } O\overline{AB} + \text{Fläche } C\overline{BA} - \text{Fläche } C\widehat{BA}. \tag{10}$$

Um nun F zu erhalten, muß man die in (10) gegebene Fläche mit der in (7) gegebenen Zahl der Zusammenstöße multiplizieren und die entsprechenden Integrationen ausführen. Es sei φ der Winkel zwischen der Tangente der Bahn in A und dem Radiusvektor $O A$. Schreiben wir nun $d\omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$, so erhalten wir folgenden Ausdruck für F :

$$F = \frac{T}{4\pi\lambda^2} \int_0^\infty dv \int_0^{(d\tau)} d\Pi \int_0^\infty da \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} v v_\nu e^{-\frac{a}{\lambda}}$$

$$\left\{ O A \varrho \sin \left(\pi - \varphi + \frac{b}{2\varrho} \right) + \frac{1}{2} \varrho^2 \sin \frac{b}{\varrho} + \frac{1}{2} \varrho b \right\} d\varphi.$$

Hierbei sind b und ϱ durch (8) und (9) als Funktion von v und ϑ gegeben und $O A$ hängt nur von der Lage des Prismas $d\Pi$ ab.

Alle angeführten Integrationen bis auf die auf v bezügliche sind leicht auszuführen, und der Ausdruck für F vereinfacht sich zu

$$F = \frac{mcT\bar{d}\tau}{3e} \int_0^\infty \nu_v \left\{ \frac{v^4}{v^2 + \left(\frac{\lambda e H}{mc}\right)^2} - v^2 \right\} dv.$$

Nun ist ν_v , die Zahl der Elektronen in der Volumeneinheit mit Geschwindigkeiten zwischen v und $v + dv$, durch das Maxwellsche Gesetz

$$\nu_v = a v^2 e^{-hm v^2} dv$$

gegeben, wobei a und h Konstante sind, die durch die Gesamtzahl n der Elektronen in der Volumeneinheit und das mittlere Geschwindigkeitsquadrat \bar{v}^2 folgendermaßen dargestellt werden:

$$a = \frac{4}{\sqrt{\pi}} n (hm)^{3/2},$$

$$hm = \frac{3}{2\bar{v}^2}.$$

Der zuletzt für F erhaltene Ausdruck kann nun geschrieben werden:

$$F = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{mc n T d\tau (hm)^{3/2}}{eH} (J_1 - J_2), \quad (11)$$

wobei

$$J_1 = \int_0^\infty e^{-hm v^2} \frac{v^6}{v^2 + \left(\frac{\lambda e H}{mc}\right)^2} dv,$$

$$J_2 = \int_0^\infty e^{-hm v^2} v^4 dv = \frac{3\sqrt{\pi}}{8} (hm)^{5/2}.$$

Es läßt sich zeigen, daß mit genügender Annäherung¹⁾

$$J_1 = (hm)^{-5/2} \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{8} - \frac{\sqrt{\pi}}{4} \alpha^2 \right),$$

wobei

$$\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\lambda e H}{mc \sqrt{v^2}}. \quad (12)$$

¹⁾ Vgl. Schroedinger, a. a. O., S. 1315, 1328.

Setzt man die für J_1 und J_2 gefundenen Ausdrücke in (11) ein, so erhält man den endgültigen Ausdruck für F :

$$F = -\frac{1}{3} \frac{e}{mc} \lambda^2 n TH (1 - 2\alpha^2) d\tau. \quad (13)$$

Die durch die Elektronenbewegungen in $d\tau$ hervorgerufene mittlere Feldstärke in A, \bar{h}_3 findet man dann mittels (1) und (13) zu

$$\bar{h}_3 = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^2} \lambda^2 n \frac{H d\tau}{r^3} (1 - 2\alpha^2).$$

Die Form dieses Ausdrucks zeigt, daß das Volumenelement $d\tau$ magnetisch einem Dublett vom magnetischen Moment

$$-\frac{1}{3} \frac{e^2}{mc^2} \lambda^2 n H (1 - 2\alpha^2) d\tau$$

äquivalent ist.

Ist k_f die magnetische Suszeptibilität der Volumeneinheit, so folgt

$$k_f = -\frac{1}{3} \frac{e^2}{mc^2} \lambda^2 n (1 - 2\alpha^2). \quad (14)$$

Diskussion der Ergebnisse.

Die Formel (14) zeigt, daß wegen der Anwesenheit des Gliedes mit $\alpha^2 k_f$ im allgemeinen von der Feldstärke abhängt, aber man sieht sofort, daß bei gewöhnlichen Temperaturen α^2 vernachlässigenswert klein gegen die Einheit ist, so daß wir mit genügender Annäherung setzen können:

$$k_f = -\frac{1}{3} \frac{e^2}{mc^2} \lambda^2 n. \quad (15)$$

Nun sind die Werte von e und $\frac{e}{mc}$ wohl bekannt, und $n\lambda$ und λ kann man aus den Messungen der elektrischen Leitfähigkeit und aus einleuchtenden Annahmen über das wahre Atomvolumen abschätzen. So ist es möglich, die Werte für k_f für verschiedene Metalle annähernd zu berechnen. Dies wurde für Bi, Pb, Cu und Ag ausgeführt, wobei gerade diese Metalle mit Rücksicht auf die großen Unterschiede in ihrer elektrischen Leitfähigkeit gewählt wurden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 9 zusammen mit den für

diese Metalle beobachteten Suszeptibilitäten zusammengestellt. Die elektrischen Leitfähigkeiten σ sind im CGS-System gegeben. Alle angegebenen Werte beziehen sich auf die Temperatur 18° C.

Tabelle 9.

Metall	$\sigma \times 10^5$	$n\lambda \cdot 10^{-16}$	$n \cdot 10^{-22}$	$\lambda \cdot 10^8$	$-k_f \cdot 10^6$ berechnet	$-k_f \cdot 10^6$ beobachtet
Bi . . .	0,84	0,046	0,8	5,54	2,37	13,7
Pb . . .	4,84	0,267	4,8	5,56	13,8	1,36
Cu . . .	57,2	3,174	52,5	6,04	178	0,076
Ag . . .	61,4	3,405	53,4	6,38	202	2,10

Der Vergleich der berechneten Werte für k_f , die durch die freien Elektronen hervorgerufene diamagnetische Suszeptibilität mit den experimentellen Werten, zeigt das Auftreten großer Verschiedenheiten. Es zeigt sich also, daß andere Quellen der Magnetisierung außer den freien Elektronen in hervorragender Weise zu der wirklichen magnetischen Suszeptibilität beitragen. Diese ist wahrscheinlich hervorgerufen durch die kombinierte Wirkung von:

a) Dem Diamagnetismus von Langevin; er ist hervorgerufen durch die Induktionswirkung während der Anlegung des äußeren Feldes auf die innerhalb des Atoms sich drehenden gebundenen Elektronen. Diese Wirkung ist unabhängig von der Temperatur.

b) Dem Paramagnetismus von Langevin; er ist hervorgerufen durch die richtende Wirkung des äußeren Feldes auf die magnetisch polarisierten Atome oder Moleküle. Diese Wirkung ändert sich umgekehrt proportional mit der absoluten Temperatur.

c) Dem Diamagnetismus von Schroedinger; er ist hervorgerufen durch die Krümmung der Bahnen der freien Elektronen unter der Einwirkung des äußeren Feldes; diese Wirkung hängt in ziemlich verwickelter Weise von der Temperatur ab.

Im Falle guter Leiter ist möglicherweise die Größenordnung der Wirkung c) in stark paramagnetischen Körpern die gleiche wie die der Wirkung b). Die Abhängigkeit der Wirkung c) von der Temperatur, die aus dem Faktor $n\lambda^2$ ersichtlich ist, ist jedoch keineswegs so einfach, wie die durch das Curiesche Gesetz für den Paramagnetismus aufgestellte, die die Suszeptibilität paramagnetischer Körper sich umgekehrt proportional zur absoluten Temperatur ändern läßt. Deshalb darf man in allen Fällen, wo die Wirkungen b) und c) sich im Gegensatz zueinander befinden

und von der gleichen Größenordnung sind, keinerlei einfaches Gesetz für die Veränderlichkeit von k mit der Temperatur erwarten. Damit erklärt sich die Tatsache, daß sich aus den von Honda und Owen für die Abhängigkeit der Suszeptibilität von der Temperatur für Metalle gewonnenen experimentellen Kurven keinerlei einfaches Gesetz für die Veränderlichkeit der Suszeptibilität mit der Temperatur ableiten läßt, und ganz besonders, warum die Suszeptibilität der Metalle so stark vom Curieschen Gesetz abweichen.

Den Zusammenhang zwischen der magnetischen Suszeptibilität k_f und der elektrischen Leitfähigkeit σ , erhält man durch Vergleich der Formel (15) für k_f mit der folgenden, von Lorentz unter den gleichen Annahmen für den Aufbau wie bei Schroedinger gefundenen Formel für die elektrische Leitfähigkeit:

$$\sigma = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{e^2}{\pi m c^2} \lambda \cdot n \frac{1}{\sqrt{v^2}}. \quad (16)$$

Durch Division von (16) durch (15) finden wir

$$\frac{\sigma}{k_f} = -2 \sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{1}{\lambda \sqrt{v^2}}. \quad (17)$$

Unter den gleichen Bedingungen wird λ sich von Metall zu Metall nicht sehr ändern, so daß bei der gleichen Temperatur sich k_f annähernd direkt proportional mit σ ändern wird.

Die Abhängigkeit der Suszeptibilität k_f von der Feldstärke.

Die oben gefundene Formel (14)

$$k_f = -\frac{1}{3} \cdot \frac{e^2}{m c^2} \lambda^2 n (1 - 2\alpha^2)$$

ist eine bessere Annäherung für k_f als (15). Die Annäherung ist in jedem Falle nur dann gut genug, wenn α^2 klein gegen die Einheit ist. Nun ist α direkt proportional zur Feldstärke, daher ergibt sich aus (12)

$$\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\lambda e H}{m c \sqrt{v^2}},$$

und die Größe

$$\frac{m c \sqrt{v^2}}{e H}$$

stellt den Radius der freien Bahn eines sich mit der Geschwindigkeit $\sqrt{v^2}$ senkrecht zum Felde bewegenden Elektrons dar. Ist dann α^2 klein gegen Eins, so muß die mittlere freie Weglänge λ klein gegen diesen Radius sein.

Die Berechnung zeigt, daß bei dem praktisch größtmöglichen äußeren magnetischen Felde von $5 \cdot 10^4$ Gauß die Größenordnung von $2\alpha^2$ bis $18^\circ \text{ C } 10^{-4}$ ist. Deshalb könnte eine durch die Veränderung des äußeren Feldes hervorgerufene Wirkung nur schwer entdeckt werden.

Aber die Berechnung zeigt auch, daß bei sehr tiefen Temperaturen mit zunehmender Feldstärke eine deutliche Abnahme der Suszeptibilität entdeckt werden müßte.

Anmerkung: Professor Langevin machte den Verfasser kürzlich auf ein von N. Bohr in seiner Dissertation gefundenes interessantes Ergebnis aufmerksam. Nach der von ihm aufgestellten Theorie zeigt sich, daß die dem Maxwell'schen Verteilungsgesetz für ein einfaches Gas unterworfenen freien Elektronen in einem Metall im allgemeinen nichts zu seinen diamagnetischen Eigenschaften beitragen, und zwar wegen des Verhaltens der Elektronen an den Oberflächen, wo sie eine gleiche und entgegengesetzte Wirkung wie die im Innern hervorbringen. Leider erreichte diese Mitteilung den Verfasser zu spät, um die Aufnahme einer kurzen Darstellung der Bohrschen Theorie in diesem Bericht zu ermöglichen.

Seit dem Erscheinen der letzten Arbeiten, die in der vorliegenden Übersicht über die Theorien des Para- und Diamagnetismus berücksichtigt sind, sind manche Beiträge zu dem Thema neu veröffentlicht worden. Der Leser sei auf den Bericht von P. Debye: Theorie der elektrischen und magnetischen Molekulareigenschaften, Handbuch der Radiologie, 6. Bd., 1924 verwiesen.

Theorien des Ferromagnetismus. — Innere Felder.

Von **Earle M. Terry,**

a. o. Professor der Physik an der Universität Wisconsin.

Historische Übersicht.

Bei den früheren Versuchen, die Erscheinungen des Ferromagnetismus zu erklären, wurden zwei miteinander wetteifernde Theorien vorgeschlagen, die eine von Poisson und die andere von Weber. Beide betrachteten den Magnetismus als eine molekulare Eigenschaft, aber sie unterschieden sich darin wesentlich, daß nach Poissons Annahme die Moleküle nur dann magnetische Eigenschaften besitzen, wenn der Körper magnetisiert ist, während sie nach Weber konstante magnetische Momente haben und der Magnetismus im ganzen auf Ausrichtung (der Moleküle) beruht. Die Tatsache, daß alle ferromagnetischen Körper Sättigung zeigen, galt als ausschlaggebend für die Webersche Theorie, denn es ist schwer einzusehen, warum nach der Poissonschen Theorie der Magnetismus nicht beliebig vermehrt werden könnte. Auch die Vibrationswirkungen bei zunehmender Suszeptibilität konnten mit ihr leicht erklärt werden, da so den Molekülen eine größere Freiheit, sich in die Richtung der magnetisierenden Kraft einzustellen, gegeben war. Der Versuch von Beetz ¹⁾, nach dem elektrolytisch in einem magnetischen Felde niedergeschlagenes Eisen starke magnetische Eigenschaften aufweist, liefert einen weiteren Beweis zugunsten der Weberschen Theorie.

¹⁾ Pogg. Ann. 140, 107, 1860.

Die Tatsache, daß ferromagnetische Körper bei sehr schwachen Feldern keine Sättigung zeigen, und die Erscheinung der Hysterese beweisen klar, daß eine Art von Zwang auf die Molekularmagnete vorhanden sein muß. Weber¹⁾ nahm eine zurücktreibende Kraft an, die der eines konstanten magnetischen und auf jeden Molekularmagnet in der Richtung seiner Achse im unmagnetisierten Zustand wirkenden Feldes äquivalent ist. Jedoch liefert diese Annahme keine Erklärung für den remanenten Magnetismus und die anderen Hystereseerscheinungen. In der Absicht, diesen Mangel der Weberschen Theorie zu verbessern, schlug Maxwell eine weitere auf der Analogie der Magnetisierung mit der elastischen Ermüdung beruhende Annahme vor. Nach ihm soll ein durch eine magnetisierende Kraft aus seiner ursprünglichen Lage abgelenktes Molekül nur teilweise zurückkehren, wenn die Ablenkung einen gewissen Betrag überschreitet. Während diese Theorie die Remanenz und einige andere Hystereseerscheinungen erklärt, versagt sie für verschiedene bei wiederholter Magnetisierung beobachtete Tatsachen. Wiedemann und andere legten nahe, daß der Ablenkung der Weberschen Magnete ein Reibungswiderstand entgegentreten könnte, der nicht nur der Ausrichtung entgegenwirkt, sondern auch die Moleküle nach der Magnetisierung in ihren abgelenkten Lagen festhält. Werden jedoch die Moleküle durch die Reibung festgehalten, bis die angelegte Kraft groß genug ist, sie in Bewegung zu setzen, so müßte die Suszeptibilität bei sehr schwachen Feldern Null sein, während sie anfangs einen kleinen konstanten Wert besitzt.

Theorie von Ewing.

Im Gegensatz zu den willkürlichen oben erwähnten Zwangskräften, schlug Ewing eine Theorie vor, nach der die Molekularmagnete sich vollkommen frei um ihre Mittelpunkte drehen können, und die einzigen wirkenden Zwangskräfte von den durch die benachbarten Magnete hervorgerufenen Feldern erzeugt sind. Diesen Gedanken entwickelte er bis ins einzelne und legte so tatsächlich den Grund für viele seitdem ausgeführte Arbeiten. Aus der mathematischen Betrachtung des einfachen Falles einer durch ein äußeres Feld beeinflussten Gruppe von zwei Magneten erhielt er

¹⁾ Pogg. Ann. 88, 167, 1852; vgl. S. 9 ff.

eine Kurve, in der sich die drei Stadien der Magnetisierung deutlich hervorheben, und durch das experimentelle Studium eines Modells von 130 kleinen Stabmagneten konnte er Magnetisierungs- und Hysteresekurven erzielen, die den für ferromagnetische Körper beobachteten Kurven mit erstaunlicher Genauigkeit nahekamen. Er gab eine theoretische Abhandlung des Falles eines ferromagnetischen Körpers, der aus rhombischen Kristallen aufgebaut ist und an den Ecken der Raungitter Molekularmagnete enthält; dabei sollen die Kristalle in allen möglichen Richtungen gelagert sein. Durch eine statistische Methode, die für die folgenden Arbeiten von Langevin, Weiss, Honda u. a. die Grundlage wurde, zeigte er, daß die prozentuale Remanenz 0,8927 sein muß, und leitete noch eine Anzahl anderer wichtiger Ergebnisse ab.

Die Weissische Hypothese des molekularen Feldes.

Übersicht über die Theorie von Langevin.

Im vorhergehenden Teile dieses Buches wurde hervorgehoben, daß Langevin¹⁾ durch die Anwendung der Methoden der statistischen Dynamik zu einem elektronentheoretischen Ausdruck für die Magnetisierungsstärke eines paramagnetischen Gases gelangt war. Zu diesem Zwecke nahm er an, daß der Magnetisierungszustand nur von zwei Faktoren abhängt: erstens von dem äußeren Felde, das die Ausrichtung nach einer bestimmten Richtung hervorzubringen sucht, und zweitens von der thermischen Bewegung, die auf Unordnung hinwirkt. Durch Anwendung des Maxwell-Boltzmannschen Verteilungsgesetzes, nach dem die Zahl der in eine bestimmte Richtung weisenden magnetischen Molekularachsen der Dichte eines Gases und der Winkel mit dem äußeren Felde der Höhe entspricht, kam er zu dem folgenden Ausdruck für die Magnetisierungsstärke eines paramagnetischen Gases bei der Temperatur T unter dem Einfluß eines Feldes \mathcal{H}

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_{m_0}} = \operatorname{ctgh} a - \frac{1}{a}, \quad (1)$$

wobei

$$a = \frac{\sigma_m H}{R \cdot T}. \quad (2)$$

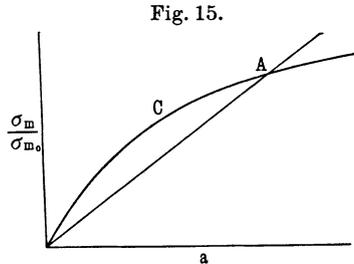
¹⁾ Langevin, Ann. d. chim. et d. phys. (8) 5. 70, 1905.

In diesen Gleichungen ist:

- σ_m = das magnetische Moment pro Grammolekül,
 σ_{m_0} = das magnetische Moment pro Grammolekül bei der Sättigung,
 H = das äußere Feld,
 T = die absolute Temperatur,
 RT = die doppelte kinetische Energie für 1 Freiheitsgrad eines Moleküls,
 R = die Gaskonstante für ein vollkommenes Gas, bezogen auf ein Grammolekül ($R = 83,15 \cdot 10^6$ Erg pro Grad).

Die in Fig. 15 durch C dargestellte Gleichung von Langevin gibt den Prozentsatz der Sättigung für ein paramagnetisches Gas für irgend eine Temperatur als Funktion des angelegten Feldes.

In schwachen Feldern ist die Intensität σ_m dem Felde proportional, aber der Anstieg nimmt mit zunehmendem Felde ab, und die Kurve nähert sich zuletzt asymptotisch dem Sättigungswert σ_{m_0} . Durch eine einfache Rechnung zeigte er, daß für den Fall des Sauerstoffs bei gewöhnlichen Temperaturen ein Feld von 100 000 Gauß erforderlich wäre, um eine meßbare Abweichung von dem linearen Gesetz hervorzubringen.



Langevin zeigte auch, daß das wohlbekannte experimentelle Gesetz von Curie, nämlich die umgekehrte Proportionalität der Suszeptibilität zu der absoluten Temperatur für paramagnetische Substanzen unmittelbar aus seiner Formel folgt. Entwickelt man die rechte Seite der Gleichung (1) in eine Reihe, so ergibt sich

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_{m_0}} = \frac{a}{3} - \frac{2}{90} a^3 + \frac{4}{45 \cdot 42} a^5 + \dots \quad (3)$$

Nimmt man als die experimentell erreichbaren Feldern entsprechende Annäherung nur das erste Glied dieser Reihe, so erhält man:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_{m_0}} = \frac{a}{3} = \frac{\sigma_{m_0} H}{3 R T}. \quad (4)$$

Bezeichnet man $\chi_m = \frac{\sigma_m}{H}$ als „molekulare Suszeptibilität“, so ergibt sich:

$$\chi_m \cdot T = \frac{\sigma_{m_0}^2}{3R} = C_m. \quad (5)$$

C_m nennt man die „Curiesche Molekularkonstante“, d. h. den Proportionalitätsfaktor, wenn die Suszeptibilität auf das Grammmolekül bezogen wird. Das durch Gleichung (5) dargestellte Curiesche Gesetz gilt für eine große Anzahl paramagnetischer Körper in weiten Temperaturbereichen. Unter der Annahme, es gelte beim absoluten Nullpunkt, kann σ_{m_0} , der Sättigungswert der Intensität, für einen Körper durch die Messung seiner Suszeptibilität bei einer bekannten Temperatur T bestimmt werden. Das ist die von Weiss in seiner später zu besprechenden Magnetonentheorie aufgestellte Hypothese.

Das molekulare Feld.

Durch die Annahme eines „molekularen Feldes“ dehnte Weiss¹⁾ die Gedankengänge Langevins auf die Erscheinung des Ferromagnetismus aus. Dabei ließ er sich von der Methode leiten, die van der Waals zur Entwicklung einer kinetischen Theorie der Flüssigkeiten benutzte, indem er die von Bernoulli auf ein vollkommenes Gas angewandten Ideen erweiterte. Gerade wie man im Falle eines Gases, um dem Übergang in den flüssigen Zustand Rechnung zu tragen, zu dem äußeren Druck einen inneren, durch die gegenseitige Anziehung der Moleküle hervorgerufenen Druck hinzuzählen muß, so muß im Falle eines ferromagnetischen Körpers, der in einem magnetischen Felde aus dem paramagnetischen Gebiet abgekühlt ist, der Übergang in den ferromagnetischen Zustand durch die folgende Annahme erklärt werden: Durch Überlagerung der Felder der einzelnen Moleküle entsteht ein inneres oder molekulares Feld, welches sich zu dem äußeren Felde addiert und so die sehr starke für diesen Zustand kennzeichnende Intensität hervorruft.

Weiss nimmt an, die Überlagerung der molekularen Felder in einem bestimmten Gebiet sei einem gleichförmigen Felde äqui-

¹⁾ Journ. de phys. (4) 6, 661, 1907; Arch. Sc. phys. et nat. (4) 31, 401, 1911.

valent, das proportional der Magnetisierungsintensität und ihr parallel gerichtet ist. So ist:

$$H_m = NJ, \quad (6)$$

wobei H_m das molekulare Feld, J die Magnetisierungsintensität und N eine für den Körper charakteristische Konstante ist. Die zu diesem inneren Felde beitragenden Moleküle sind innerhalb eines bestimmten Aktionsradius enthalten. Außerdem nimmt er an, die durch das magnetische Feld hervorgerufenen Kräfte seien die einzigen, die auf die Moleküle eines ferromagnetischen Körpers einwirken, und die Moleküle könnten ohne sie ebenso frei wie im Falle eines vollkommenen Gases rotieren.

Spontane Magnetisierung.

Weiss nimmt ferner an, daß zur Magnetisierung der einzelnen Teile eines Körpers nicht notwendigerweise ein magnetisches Feld vorhanden sein muß. Im Gegenteil, er nimmt an, daß überall in dem Körper das molekulare Feld allein die Magnetisierungsintensität der elementaren Volumeneinheiten auf einen dem Sättigungswert für die jeweilige Körpertemperatur sehr nahestehenden Größe erhält; ebenso wie eine Flüssigkeit dank ihrer inneren anziehenden Kräfte ihren flüssigen Zustand ohne äußeren Druck aufrecht erhält. Die Volumina, innerhalb welcher diese spontane Magnetisierung ununterbrochen besteht, sind sehr klein, vielleicht auf die einzelnen Kristalle beschränkt. In einem begrenzten Körper, dessen resultierende Intensität Null ist, sind die Magnetisierungsrichtungen der einzelnen Elemente ganz nach dem Zufall verteilt, und die Aufgabe des äußeren Feldes ist es, dem Körper eine resultierende Intensität zu verleihen, indem es eine Ausrichtung der einzelnen Gruppenintensitäten ohne eine Veränderung ihrer Größen hervorruft. Mit anderen Worten, wenn man mit genügender Genauigkeit beobachten könnte, so würde man finden, daß ein unmagnetisierter Körper dieselbe Intensität besitzt, wie ein durch die höchsterreichbaren Felder magnetisierter Körper.

Die Größe der spontanen Magnetisierungsintensität kann man auf folgende Weise erhalten. Gleichung (1) gibt den Wert der Magnetisierungsintensität bei einer beliebigen Temperatur T in Bruchteilen des Sättigungswertes mittels der Hilfsvariablen a . Man braucht dann nur H in Gleichung (2) durch $H_m = NJ$ zu ersetzen

und in Gleichung (1) einzuführen. Dies kann am bequemsten durch graphische Elimination von a aus den beiden Gleichungen geschehen. In Gleichung (6) ist J als das magnetische Moment der Volumeneinheit definiert, während σ_m das magnetische Moment pro Grammolekül ist. Man muß also J durch seinen Wert $\frac{D \sigma_m}{m}$ ersetzen, wobei D die Dichte des Körpers ist. Also ist

$$a = \frac{\sigma_{m_0} N D}{m R T} \times \sigma_m \quad (7)$$

und

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_{m_0}} = \frac{m R T}{\sigma_{m_0}^2 N D} \cdot a. \quad (8)$$

Die letzte Gleichung gibt die Gerade von Fig. 15, die die frühere Kurve in zwei Punkten schneidet. Man kann leicht zeigen, daß der Schnittpunkt bei 0 einem Zustand unstabilen Gleichgewichts entspricht, und daß es nur auf den Schnittpunkt bei A ankommt. Da das Parameter a T enthält, kann man die spontane Magnetisierung leicht als Funktion der absoluten Temperatur ableiten.

Die Größe des molekularen Feldes.

Indem wir das, was jetzt gezeigt werden soll, vorwegnehmen, stellen wir fest, daß das molekulare Feld im Vergleich zu den im Laboratorium erreichbaren Feldern sehr groß ist. Immerhin gibt es in dem Temperaturintervall zwischen den ferro- und paramagnetischen Zuständen ein kleines Gebiet, in dem das molekulare Feld von derselben Größenordnung wie die realisierbaren Felder ist; und durch Messungen in diesem Übergangsbereich kann man die Konstante N der Gleichung (6) bestimmen. Aus ihr berechnet man dann den Wert H_m des molekularen Feldes.

Für dieses Gebiet kann Gleichung (2) geschrieben werden:

$$a = \frac{\sigma_{m_0} (H_e + N J)}{R T} = \frac{\sigma_{m_0} \left(H_e + \frac{N D}{m} \sigma_m \right)}{R T}, \quad (9)$$

wobei H_e das äußere Feld ist. Bei der Umwandlungstemperatur ϑ ist

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_{m_0}} = \frac{a}{\vartheta} \quad \text{und} \quad a = \frac{\sigma_{m_0} D N \sigma_m}{R \vartheta m}. \quad (10)$$

Eliminiert man a aus diesen beiden Gleichungen, so ist

$$\vartheta = \frac{\sigma_{m_0} D N}{3 R m}. \quad (11)$$

Aus (11) und (9) folgt nach Vereinfachung:

$$\frac{T - \vartheta}{\vartheta} = \frac{H_e m}{\sigma_m N D}. \quad (12)$$

Setzt man $\chi_m = \frac{\sigma_m}{H_e}$, wobei χ_m die molekulare Suszeptibilität ist, so ergibt sich:

$$(T - \vartheta) \cdot \chi_m = \frac{\vartheta_m}{N D}. \quad (13)$$

Dies ist eine modifizierte Form des Curieschen Gesetzes und drückt aus, daß die Suszeptibilität umgekehrt proportional dem Überschuß der Temperatur über den Umwandlungspunkt ist. Man fand dieses Gesetz für dieses Gebiet mit sehr großer Genauigkeit bestätigt, und aus ihm wurde der Wert N abgeleitet. So erhielt man folgende Werte:

Tabelle 1.

Körper	N	H_m
Eisen	3 850	6 560 000
Nickel	12 700	6 350 000
Magnetit	33 200	14 300 000
Kobalt	6 180	8 870 000

Experimenteller

Nachweis der Existenz des molekularen Feldes.

1. Das Gesetz der korrespondierenden Zustände und die Änderung der Sättigungsintensität mit der Temperatur.

Wie oben erwähnt, besteht ein unmagnetisierter Körper aus winzigen Kristallen, die alle bis zum Sättigungswert für die betreffende Temperatur magnetisiert sind, deren magnetische Achsen aber nach dem Zufall verteilt sind. Der Vorgang der Magnetisierung besteht in der Ausrichtung dieser Achsen, und wenn wir ein äußeres Feld anlegen könnten, das genügend zur Sättigung des Körpers im ganzen wäre, so könnten wir die Molekularintensität messen, da sie dann gleich der Sättigung des Körpers im ganzen wäre. Ferner

würde eine Betrachtung der Änderung der Sättigungsintensität mit der Temperatur einen direkten Nachweis der durch die Gleichungen (1) und (6) dargestellten Auffassung des molekularen Feldes liefern. Dieser Nachweis würde durch eine allgemeine Gleichung erleichtert werden, die auf alle Körper entsprechend derjenigen für korrespondierende Zustände in der kinetischen Gastheorie anwendbar wäre. Eine solche Gleichung kann man in folgender Weise aufstellen:

Der Anstieg der geraden Linie von Fig. 15 ist proportional der Temperatur T . Daher kann man durch Angabe sukzessiver Werte von T und Bestimmung der Schnittpunkte mit der Kurve C das Gesetz der Änderung der Intensität mit der Temperatur ableiten. Der Grenzfall ist der, bei dem die Gerade mit der Tangente der Kurve im Anfangspunkt zusammenfällt, und entspricht der Temperatur ϑ , bei der der spontane Ferromagnetismus verschwindet. Diese Umwandlungstemperatur kann durch die Konstanten des Mediums ausgedrückt werden, wenn man bedenkt, daß für ϑ die Gleichung (1) mit genügender Genauigkeit allein mit Benutzung des ersten Gliedes der Gleichung (3) angeschrieben werden kann, d. h.

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_{m_0}} = \frac{a}{3}. \quad (14)$$

Ebenso wird aus Gleichung (8)

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_{m_0}} = \frac{a m R \vartheta}{\sigma_{m_0}^2 D N}. \quad (15)$$

Teilt man (15) durch (14), so ergibt sich

$$\vartheta = \frac{\sigma_{m_0}^2 N D}{3 m R}. \quad (16)$$

Teilt man (16) durch (8) und vereinfacht man, so erhält man:

$$\frac{T}{\vartheta} = \frac{3}{a} \frac{\sigma_m}{\sigma_{m_0}}. \quad (17)$$

Diese Gleichung gibt zusammen mit der Gleichung (1) das vollständige Gesetz der thermischen Veränderung des spontanen Ferromagnetismus und ist, wenn man es in den Variablen $\frac{T}{\vartheta}$ und $\frac{\sigma_m}{\sigma_{m_0}}$ darstellt, für alle Körper dasselbe.

Die ausgezogene Linie in Fig. 16, die aus der Originalarbeit von Weiss entnommen ist, zeigt die berechnete Kurve, und die

Kreise die für Magnetit erhaltenen Werte. Der Versuch wurde in einem Felde von 8300 Gauß ausgeführt, obgleich vorhergehende Versuche gezeigt hatten, daß dieses Material in einem Felde von 550 Gauß praktisch gesättigt ist. Die Übereinstimmung ist zufriedenstellend bis auf das Gebiet der tiefen Temperaturen, wo bemerkenswerte Abweichungen vorkommen. Für Pyrrhotit und für die Legierung Fe_3Ni ist die Übereinstimmung befriedigender als für Magnetit; jedoch für Eisen, Nickel und Kobalt ist sie weniger zufriedenstellend, indem größere systematische Abweichungen gefunden wurden.

2. Die Abhängigkeit der spezifischen Wärme von dem molekularen Felde.

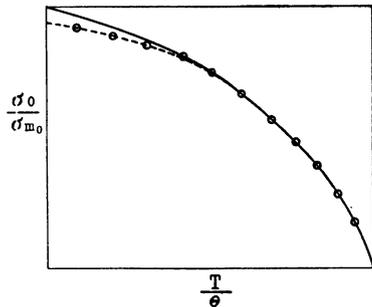
Wenn die ferromagnetischen Körper die Träger von molekularen Feldern der oben erwähnten Größenordnung sind, so muß eine beträchtliche Energiemenge aufgewandt werden, um bei dem Anstieg der Temperatur vom absoluten Nullpunkt bis zum Umwandlungspunkt die Ausrichtung der Molekularmagnete innerhalb der Kristalle aufzuheben. Wir müßten dann erwarten, daß in diesem Gebiet die spezifische Wärme größer ist, als sie sein müßte, wenn der Körper auf irgend eine Weise seiner magnetischen Eigenschaften beraubt werden könnte. Dieser Effekt müßte sich als ein Zusatzglied zu der wahren spezifischen Wärme eines keine magnetischen Eigenschaften besitzenden fiktiven Körpers darstellen. Der Betrag dieser Zusatzwärme kann aus der Theorie des molekularen Feldes folgendermaßen berechnet werden.

Die gegenseitige potentielle Energie E einer Gruppe von Magneten mit dem Moment μ ist

$$E = -\frac{1}{2} \sum \mu H \cos \alpha, \quad (18)$$

wobei H das resultierende, durch die Gruppe an einem Punkte, wo ein einzelner Magnet seinen Platz hat, hervorgerufene Feld ist, und α der Winkel zwischen H und diesem Magnet.

Fig. 16.



Dehnt man die Summierung auf alle in 1 ccm enthaltenen Magnete aus, so ergibt sich

$$E = -\frac{1}{2} \mathfrak{J} H_m = -\frac{1}{2} N \mathfrak{J}^2, \quad (19)$$

wobei \mathfrak{J} das magnetische Moment der Volumeneinheit, H_m das molekulare Feld und N die Konstante der Gleichung (6) ist. Das negative Zeichen deutet an, daß man zur Entmagnetisierung des Körpers Wärme aufwenden muß. Die Intensität nimmt kontinuierlich vom absoluten Nullpunkt bis zu der Temperatur ab, bei der der Ferromagnetismus verschwindet. Also ist der Betrag der Zusatzwärme, die man braucht, um einen ferromagnetischen Körper von der Temperatur, bei der die Intensität \mathfrak{J} ist, bis zum Curie'schen Punkte ϑ zu bringen,

$$q = \frac{1}{2} \frac{N}{JD} \mathfrak{J}^2 = \frac{1}{2J} \frac{H_m \mathfrak{J}}{D}, \quad (20)$$

wobei J das mechanische Wärmeäquivalent und D die Dichte ist. Also ist die mittlere spezifische Wärme

$$C_m = \frac{dq}{dT} = \frac{1}{2J} \frac{N}{D} \frac{d\mathfrak{J}^2}{dT} = \frac{1}{2J} ND \frac{d\sigma^2}{dT}, \quad (21)$$

wobei σ das magnetische Moment der Masseneinheit ist. Diese Größe ist klein bei tiefen Temperaturen, nimmt aber bei erhöhter Temperatur zu und verschwindet plötzlich bei ϑ . Sie hat bei diesem Punkte nicht den Charakter einer latenten Wärme einer allotropen Umwandlung, sondern einer Diskontinuität in der wahren spezifischen Wärme.

Die Größe dieser Diskontinuität ist von H. A. Lorentz ¹⁾ berechnet worden. Indem er das theoretische Gesetz der Variation der Sättigungsmagnetisierung als Funktion der Temperatur entwickelte, fand er für ϑ :

$$\frac{d\sigma^2}{dT} = \frac{5}{3} \frac{\sigma_0^2}{\vartheta}, \quad (22)$$

wobei σ_0 der Sättigungswert von σ ist.

Indem er die Beziehungen berücksichtigte

$$\vartheta = C \cdot N \cdot D \quad (23)$$

und

$$\sigma_0 = \frac{3RC}{m}, \quad (24)$$

¹⁾ H. A. Lorentz, *Revue Scientifique* **50**, 1, 1912.

wobei C die Curiesche Konstante bezogen auf die Masseneinheit, R die Gaskonstante für ein einzelnes Molekül, und m die Masse eines Moleküls ist, erhielt er:

$$\Delta C_m = \frac{1}{2J} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{3R}{m}. \quad (25)$$

Durch Einsetzen der Zahlenwerte für R und J ergibt sich:

$$\Delta C_m = \frac{4,97}{m}. \quad (26)$$

Weiss¹⁾ und seine Mitarbeiter haben diese Theorie in einer Reihe von Versuchen nachgeprüft, die sich auf den Zeitraum von mehreren Jahren erstreckten. In der ersten Arbeit wurde Gleichung (21) dazu verwandt, die Prüfung vorzunehmen, und die Ergebnisse schienen die Theorie innerhalb der Grenzen der Versuchsgenauigkeit zu bestätigen. In der späteren, sorgfältiger durchgeführten Arbeit jedoch ist die Bestätigung weniger befriedigend. Die Ergebnisse, bei denen die Lorentzsche Gleichung (26) benutzt wurde, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Tabelle 2.

Körper	ΔC_m beob.	ΔC_m berechn.	Entsprechendes magnetisches Molekül
Nickel	0,0285	0,0282	Ni ₃
Magnetit (künstlich) . . .	0,0790	0,0044	1/3 (Fe ₃ O ₄)
Magnetit (natürlich) . . .	0,0735	—	—
Eisen (rein)	0,120	0,089	Fe
Eisen (schwedisch)	0,124	—	—

3. Die magnetischen Eigenschaften der Kristalle und die Hystereseurve.

Weiss²⁾ und seine Schüler haben eine Anzahl von Eisenmineralien untersucht und gefunden, daß einige von ihnen ausgeprägte magneto-kristallinische Eigenschaften haben. Eines der

¹⁾ Weiss und Beck, Journ. de phys. (4) 7, 249, 1908; A. Dumas, Zürich, Diss. 1909; Weiss, Piccard und Carrard, Arch. des Sc. phys. et Nat. 42, 379, 1916; 43, 113, 1917; 43, 199, 1917.

²⁾ Weiss, Journ. de phys. (3) 8, 542, 1899.

besten Beispiele ist Pyrrhotit, ein Eisensulfid. Diese Kristalle sind gewöhnlich von der Form hexagonaler Platten, die am Rande von hexagonalen Prismenflächen begrenzt und parallel zu ihrer Basis tief eingefurcht sind. Untersucht man ihre magnetischen Eigenschaften in Ebenen parallel zu ihrer Basis, so findet man eine Richtung, in der sie sich sehr leicht magnetisieren lassen, während es senkrecht zu dieser Richtung schwer ist, die Sättigung hervorzurufen. Ferner ist in der Richtung senkrecht zu der Basis die Sättigung noch schwerer zu erreichen. Weiss fand, daß die für Sättigung in diesen drei Richtungen erforderlichen Felder 15, 7300 und 150 000 Gauß sind. Nach einer ausgedehnten Untersuchung schloß er, daß die zusammengesetzte kristallinische Struktur in einer Nebeneinanderstellung von Elementarkristallen besteht, deren magnetische Ebenen einander parallel sind, daß jeder Kristall eine Richtung leichter und senkrecht dazu eine Richtung schwerer Magnetisierbarkeit besitzt, und daß die Kristalle so in der magnetischen Ebene angeordnet sind, daß ihre Achsen Winkel von 60° miteinander bilden.

Die Richtung der leichten Magnetisierbarkeit ist ferner durch die Tatsache gekennzeichnet, daß die Magnetisierungsintensität zwar in der Richtung, aber nicht in der Größe sich ändern kann. Läßt man beispielsweise auf einen Kristall in dieser Richtung ein starkes Feld wirken, verringert es allmählich und läßt es durch Null hindurch nach der negativen Seite hin abnehmen, so findet man, daß die Intensität bis herab zu einem Felde von -15 Gauß konstant bleibt, dann sich plötzlich umkehrt und einen negativen Wert gleicher Größe annimmt. Mit anderen Worten: die Hysteresekurve ist ein Rechteck mit zwei Linien zur H -Achse, die von der oberen rechten und der unteren linken Ecke ausgehen. Die magnetischen Eigenschaften von Hämatit wurden von Kunz ¹⁾ untersucht, welcher fand, daß sie dem Pyrrhotit in dem Punkte ähnlich sind, daß er Richtungen leichter und schwerer Magnetisierbarkeit besitzt; jedoch ist der Effekt weniger ausgeprägt, und die Koerzitivkraft ist etwas größer. Er ist in einigen Richtungen ferromagnetisch, in anderen paramagnetisch.

Weiss hat versucht, die hysteretischen Erscheinungen in reinen Metallen durch die Annahme zu erklären, daß ihre einzelnen Kri-

¹⁾ Kunz, Arch. de Sc. 23, 1907.

stalle ähnliche Eigenschaften wie der Pyrrhotit aufweisen, d. h. Richtungen leichter und schwerer Magnetisierbarkeit, und daß jeder Kristall durch sein eigenes inneres molekulares Feld bis zu dem seiner Temperatur entsprechenden Sättigungswert magnetisiert wird. Im ganzen Körper sind im unmagnetischen Zustand die Richtungen der leichten Magnetisierbarkeit vollständig nach dem Zufall verteilt. Der Magnetisierungsvorgang in einer gegebenen Richtung besteht dann einfach in der Umkehr der Magnetisierungsrichtung jener Elementarkristalle, deren Intensitäten Komponenten entgegen der Richtung des äußeren Feldes aufweisen. Für einen gegebenen Kristall tritt diese Umkehr ein, wenn die Komponente des äußeren Feldes in Richtung seiner Achse gleich der Koerzitivkraft H_c ist.

Die nach dieser Annahme zu verwertende Form der Hysteresekurve kann man auf folgende Weise ableiten. Es sei M das magnetische Moment eines Kristalls, und N die Zahl der Kristalle in der Volumeneinheit. Da die Verteilung der Richtung eine ganz zufällige ist, so werden die Endpunkte der Vektoren M gleichmäßig über die Oberfläche einer Einheitskugel verteilt sein. Das äußere Feld H möge in der Richtung $O X$ (Fig. 17) wirken; H_c sei die Größe der Koerzitivkraft. Die Elementarmagnete mit Achsen innerhalb eines Kegels mit dem Öffnungswinkel φ , der entgegengesetzt zu dem in der Figur gezeichneten ist, werden in diesen Kegel hineingedreht. Der Winkel φ ist durch den Ausdruck $H \cdot \cos \varphi = H_c$ bestimmt.

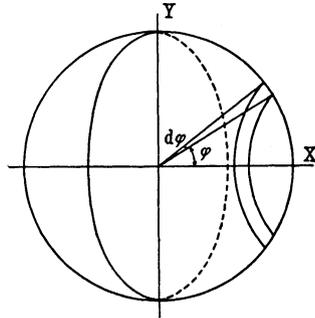
Die Zahl der in der durch $\alpha \varphi$ bestimmten Zone liegenden Vektoren ist gegeben durch

$$\frac{2 \pi r^2 \sin \varphi d\varphi}{4 \pi r^2} N = \frac{N}{2} \sin \varphi d\varphi. \quad (27)$$

Das magnetische Moment dieser Magnete in der Richtung $O X$ ist

$$M_x = M \cos \varphi \frac{N}{2} \sin \varphi d\varphi. \quad (28)$$

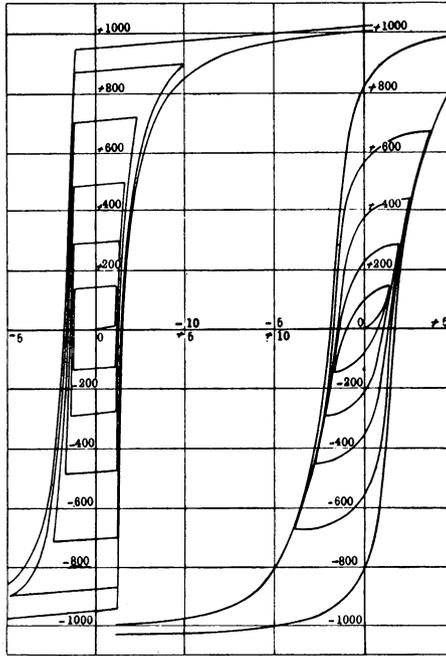
Fig. 17.



Das durch alle in den Kegel umgedrehten Magnete hervorgerufene Moment ist

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_0^\varphi \frac{MN}{2} \cdot \sin \varphi \cos \varphi d\varphi, \\ &= \frac{MN}{4} \sin^2 \varphi = \frac{J_m}{4} \sin^2 \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Fig. 18.



Das gesamte durch die in dem Kegel befindlichen Magnete hervorgerufene Moment ist dann

$$M = \frac{J_m}{2} \sin^2 \varphi = \frac{J_m}{2} \left[1 - \left(\frac{H_c}{H} \right)^2 \right]. \quad (30)$$

Bei dieser Ableitung ist angenommen, daß die Elementarkristalle nur in der Richtung der leichten Magnetisierung magnetisiert werden können, während sie, wenn sie dem Pyrrhotit ähnlich

sind, senkrecht zu dieser Richtung sich paramagnetisch verhalten. Weiss hat die entsprechende Korrektur berechnet und eine Reihe von Hysteresekurven aufgestellt, die den Ergebnissen von Ewing, wie Fig. 18 zeigt, entnommen sind.

Die Elementarmagnete der ferromagnetischen Körper.

In seiner ersten Arbeit über ein paramagnetisches Gas drückte Langevin die Magnetisierungsintensität als das magnetische Moment der Volumeneinheit aus, anstatt als das des Grammoleküls wie Weiss in seiner späteren Arbeit. Für diese Größe benutzte er J , und seine Gleichung war

$$\frac{J}{J_m} = \cosh a - \frac{1}{a}, \quad (31)$$

wobei

$$a = \frac{\mu H}{RT}. \quad (32)$$

μ ist das magnetische Moment eines Moleküls, und die anderen Größen haben die gleiche Bedeutung wie oben. In der Nähe der Umwandlungstemperatur ϑ werden diese Gleichungen

$$\frac{J}{J_m} = \frac{a}{3} \quad \text{und} \quad a = \frac{\mu H}{RT}. \quad (33)$$

Setzt man $H = NJ$ und eliminiert man a , so ergibt sich

$$\mu = \frac{3R}{NJ_m}, \quad (34)$$

ein Ausdruck, mittels dessen man μ für jene Körper bestimmen kann, für die die Größen ϑ , N und J_m bekannt sind. Diese Berechnung wurde durch Kunz¹⁾ ausgeführt. R ist die Gaskonstante für ein Molekül und kann der Gleichung (35) entnommen werden:

$$p = N_1 R T, \quad (35)$$

wobei N_1 die Zahl der Moleküle im Kubikzentimeter ist. Setzt man die Werte für 1 Atmosphäre und 0° C ein, d. h.

$$p = 1,01 \cdot 10^6 \text{ Dynen pro Quadratcentimeter,}$$

$$T = 273$$

$$\text{und } N_1 = 2,7 \cdot 10^{19},$$

so ergibt sich

$$R = 1,36 \cdot 10^{-16}.$$

¹⁾ Kunz, Phys. Rev. 30, Nr. 3, März 1910.

Nimmt man für Eisen den durch Extrapolation aus den Ergebnissen von Curie gewonnenen Wert $J_m = 1950$, für N den von Weiss und Beck¹⁾ gefundenen Wert $N = 3850$, und setzt man diese Werte in Gleichung (34) ein, so ergibt sich

$$\mu = 4,445 \cdot 10^{-20} \text{ abs. elektrom. Einheiten.} \quad (36)$$

Zur Probe auf die Annehmbarkeit dieses Ergebnisses wurde eine Berechnung der Masse des Wasserstoffatoms eingestellt, wobei man dieses Ergebnis und die bekannte Dichte und das Molekulargewicht des Wasserstoffs benutzte. Es sei N_0 die Zahl der Molekularmagnete in 1 cm^3 Eisen beim absoluten Nullpunkt. Dann ist

$$N_0 \mu = 1950, \quad (37)$$

also

$$N_0 = \frac{1950}{\mu} = \frac{1950}{4,445 \cdot 10^{-20}} = 4,386 \cdot 10^{22}.$$

Nimmt man nun an, daß jedes Molekül einen Elementarmagnet vom Moment μ besitzt, so ist dies auch die Zahl der Moleküle im Kubikzentimeter. Ist m die Masse eines Eisenmoleküls und D seine Dichte, so ist

$$N_0 \cdot m = D = 7,86,$$

also ist

$$m = \frac{7,86}{4,386 \cdot 10^{22}} = 1,792 \cdot 10^{-22} [g]. \quad (38)$$

Ist M_H die Masse des Wasserstoffmoleküls und nimmt man an, daß das Eisenmolekül 2 Atome hat, so ist

$$M_H = \frac{1,792 \cdot 10^{-22}}{111,8} = 1,603 \cdot 10^{-24} [g]. \quad (39)$$

Ein von Rutherford aus den radioaktiven Erscheinungen neuerdings abgelenkter Wert ist

$$M_H = 1,61 \cdot 10^{-24} [g].$$

Führt man die entsprechenden Rechnungen für Nickel und Kobalt aus und benutzt dabei die besten vorliegenden Ergebnisse, so erhält man die in der folgenden Tabelle angegebenen Resultate. Beachtenswert ist, daß man annehmen muß, das Nickelmolekül bestehe aus 6 und das Kobaltmolekül aus 4 Atomen, wenn man die bekannte Masse für das Wasserstoffatom aus den gegebenen Werten erhalten will.

¹⁾ Weiss und Beck, Journ. de phys. 7, 249, 1908.

Körper	J_m	C	N	$NJ := HM$	$\mu \cdot 10^{20}$	$M_H \cdot 10^{-24}$	N
Fe . . .	1950	756	3,850	6 540 000	4,445	1,603	2
Ni . . .	570	376	12,700	6 350 000	3,65	1,603	6
Co . . .	1435	1075	6,180	8 870 000	6,21	1,61	4

Die Natur des Molekularfeldes.

Die von Weiss aufgestellte Hypothese des molekularen Feldes ist eine in der Theorie des Ferromagnetismus nutzbringende Annahme und hat einer großen Zahl wertvoller Zwecke gedient. Beispielsweise kann man dadurch, daß man das äußere Feld zu dem molekularen Felde addiert, viele der komplizierten Erscheinungen des Ferromagnetismus durch die Gesetze des Paramagnetismus erklären. Sie gibt ein theoretisches Gesetz für die Änderung des Sättigungswertes der Intensität mit der Temperatur im Bereich des ferromagnetischen Zustandes und führt zu einem Gesetz für die Änderung der Intensität mit der Temperatur oberhalb des magnetischen Umwandlungspunktes. Nimmt man für das molekulare Feld verschiedene Werte in den verschiedenen Richtungen an, so kann man viele der komplizierten Erscheinungen an den Kristallen erklären, und berücksichtigt man die mit dem molekularen Felde verbundene Energie, so erhält man die Diskontinuität der spezifischen Wärme beim Umwandlungspunkt.

Die Erscheinungen des molekularen Feldes sind überdies nicht auf ferromagnetische Körper beschränkt, denn es gibt viele Beweismomente für sein Auftreten bei den paramagnetischen sowohl als auch den diamagnetischen Körpern. Es sei z. B. auf die Arbeiten von Kamerlingh Onnes und Perrier¹⁾ über die magnetischen Eigenschaften der Gemische von flüssigem Sauerstoff und Stickstoff hingewiesen, ferner auf diejenigen von Kamerlingh Onnes und Oosterhuis²⁾ über paramagnetische Körper bei tiefen Temperaturen, von Weiss und Foëx über Paramagnetismus in kristallinen Körpern, von Foëx über konzentrierte Salzlösungen und von Oxley über diamagnetische Körper; sie sollen später besprochen werden. Richtig ist, daß in vielen Fällen der Beweis

¹⁾ Kamerlingh Onnes und Perrier, Arch. d. chim. (4) **26**, September 1913.

²⁾ Kamerlingh Onnes und Oosterhuis, Comm. Leyden **129**, 132.

nur ein qualitativer ist und zeigt, daß die Theorie in ihrer einfachen Form ungenügend ist, und daß das molekulare Feld nicht der Magnetisierungsintensität proportional ist, sondern durch eine verwickeltere Funktion, wie

$$H_m = N_1 J + N_3 J^3 + \dots \quad (40)$$

dargestellt werden müßte.

Während also die Hypothese dazu dienen kann, viele Beobachtungen zu erklären und der Forschung neue Wege zu zeigen, muß man sich doch über die enorme Größe des molekularen Feldes wundern und sieht man sich veranlaßt, danach zu fragen, mit welchen Mitteln Felder von derartigen Intensitäten hervorgerufen werden können. Zu diesem Zwecke kann man nach der Methode von H. A. Lorentz für Dielektrika vorgehen und eine Kugel beschreiben, innerhalb der sich ein einzelnes Molekül befindet, während außer ihr alle anderen Moleküle in ihrer mittleren Wirkung die Rolle eines homogenen Körpers spielen. Man fände dann für den Koeffizienten N der Gleichung (6) den Wert $\frac{4}{3}\pi$, der stark von dem auf Grund der Theorie experimentell bestimmten abweicht.

Dagegen könnte man, von den bekannten Tatsachen ausgehend, auf Grund des Gesetzes vom umgekehrten Quadrat der Entfernung den Abstand von einem Molekularmagneten berechnen, der notwendig ist, um das molekulare Feld hervorzurufen, und sehen, ob es zu Werten führt, die mit der bekannten Dichte der Molekularpackung verträglich sind. Betrachten wir z. B. das Eisenmolekül, das 11 Magnetonen enthält, und setzen wir seine Länge gleich $0,2 \cdot 10^{-7}$ cm, d. h. dem Durchmesser des Atoms, und nehmen wir ferner an, m sei die magnetische Polstärke. Da nun das magnetische Moment des Magnetons $16,4 \cdot 10^{-22}$ ist, so ergibt sich

$$m \times 0,2 \cdot 10^{-7} = 11 \cdot 16,4 \cdot 10^{-22}$$

oder

$$m = 0,9 \cdot 10^{-12}$$

Die Entfernung von einem solchen Pol, in der ein Feld von der Größe des molekularen Feldes $7 \cdot 10^6$ vorhanden wäre, ergäbe sich aus

$$\frac{m}{r^2} = \frac{0,9 \cdot 10^{-12}}{r^2} = 7 \cdot 10^6$$

zu

$$r = 3,6 \cdot 10^{-10}$$

Dieser Wert ist aber viel geringer als die gemessenen Entfernungen zwischen den Molekülen. Demnach ist es klar, daß man Felder von der erforderlichen Größe weder durch Überlagerung der Wirkungen benachbarter Molekularmagnete unter Benutzung der bekannten Durchschnittswerte der Magnetisierungsintensität erhalten kann, noch durch die Annahme genügender Geschlossenheit der Packung der einzelnen Moleküle.

Andererseits könnte man fragen, ob man solche Felder dadurch erhalten kann, daß man Elektronen mit sehr großer Geschwindigkeit in geschlossenen Bahnen um den positiven Kern rotieren läßt. Zum Beispiel rotiere ein Elektron mit der Ladung $1,6 \cdot 10^{-20}$ in einer Kreisbahn mit dem Durchmesser $0,2 \cdot 10^{-7}$ mit einer Frequenz von 10^{15} gleich der des ultravioletten Lichtes. Das magnetische Moment eines solchen Kreislaufes wäre:

$$\begin{aligned} \text{Moment} &= 1,6 \cdot 10^{-20} \times 10^{15} \times \pi \times 10^{-16}, \\ &= 5 \cdot 10^{-21}, \end{aligned}$$

eine Größe, die annähernd drei Magnetonen gleichkommt. Die Feldstärke im Mittelpunkt der Bahn ist

$$H = \frac{2\pi \cdot 1,6 \cdot 10^{-20} \cdot 10^{15}}{0,1 \cdot 10^{-7}} = 10^4.$$

Dieser Wert ist aber um den Faktor 100 zu klein.

So zeigt sich, daß das molekulare Feld weder magnetischen noch elektromagnetischen Ursprung haben kann und also ganz verschieden von den uns vertrauten gewöhnlichen magnetischen Feldern sein muß. Weiss¹⁾ hat angenommen, das molekulare Feld sei von der gleichen Natur wie die „magnetische Kontaktwirkung“, die Maurain²⁾ u. a. bei ihrem Studium der magnetischen Eigenschaften am Elektrolyteisen, das man in einem magnetischen Felde sich abscheiden läßt, beobachtet hatten. Wir wollen diese Arbeit kurz betrachten. Maurain zeigte, daß Eisen, das man in einem Felde von wenigen Gauß sich niederschlagen läßt, viel stärker magnetisiert ist, als wenn man es außerhalb des Feldes sich niederschlagen läßt und nachträglich magnetisiert; ferner, daß das Eisen gesättigt wird, wenn das Feld, in dem die Abscheidung stattfindet, 10 bis 12 Gauß übersteigt. Dieses Eisen behält seinen Sättigungswert praktisch

¹⁾ Weiss, Ann. d. Phys. 1, 148, 1914.

²⁾ Maurain, Journ. d. phys. (4), 1, 90, 151, 1902.

unabhängig von dem Felde, die Magnetisierung ändert aber plötzlich bei einer Koerzitivkraft von 20 Gauß ihr Vorzeichen, und die Hystereseurve ist praktisch ein Rechteck wie beim Pyrrhotit in seiner Richtung leichter Magnetisierbarkeit. Die Sättigungswerte waren jedoch ziemlich gering; sie betragen nur etwa 840.

Kaufmann und Meyer¹⁾, die die Versuche von Maurain wiederholten, bestätigten seine Ergebnisse betreffs der Form der Hystereseurve und des Intensitätswertes für schwache Felder, aber sie erhielten durch Anwendung stärkerer Felder Intensitäten bis zur Größe von 1100. Schild²⁾ hat ebenfalls derartig niedergeschlagenes Eisen untersucht und eine Intensität von 980 gefunden. All diese Intensitäten sind beträchtlich geringer als die für gewöhnliches Eisen mit 1700, und man sieht sich zu der Annahme gedrängt, daß ihre Eigentümlichkeiten der Anwesenheit eines Eisenhydrids zuzuschreiben sind. Dies alles erscheint auf Grund der Tatsache um so wahrscheinlicher, daß viele dieser Besonderheiten mit der Zeit verschwinden, aber zum Teil wieder hergestellt werden können, wenn man die Probe zur Kathode einer elektrischen Zelle macht. Nichtsdestoweniger besitzen die erhaltenen Resultate eine große Tragweite für die Theorie des molekularen Feldes.

Maurain fand auch, daß die ersten Schichten des Niederschlags sich von den späteren dadurch unterscheiden, daß sie nur schwach magnetisch sind. Tatsächlich nahm erst, nachdem der Niederschlag eine Dicke von 80 $\mu\mu$ erreicht hatte, sein magnetisches Moment proportional seiner Dicke zu. Somit wirken offenbar zwei Felder im Augenblick des Niederschlags auf die Moleküle ein: erstens das äußere Feld und zweitens das durch die Polarität des bereits niedergeschlagenen Eisens hervorgerufene. Letzteres nannte er das „magnetische Kontaktfeld.“ Er versuchte sie beide gegeneinander wirken zu lassen, indem er das äußere Feld umkehrte, nachdem der Niederschlag eine passende Dicke erreicht hatte. Man fand, daß, solange das äußere Feld die Koerzitivkraft, gewöhnlich etwa 20 Gauß, nicht überschritt, das magnetische Moment in Richtung des ursprünglichen Feldes eine Zeitlang proportional zur Dicke zunahm, und daß erst, als die Dicke des neuen Niederschlags der des ursprünglichen vergleichbar war, das magnetische Moment

¹⁾ Kaufmann und Meyer, Phys. Zeitschr. **12**, 513, 1911.

²⁾ Schild, Ann. d. Phys. (4) **25**, 612, 1908.

Null wurde und dann sein Vorzeichen änderte. Die Umkehr der Polarität des ursprünglichen Niederschlags vollzog sich langsam und konnte mit dem Magnetometer beobachtet werden.

Dann studierte er die Abhängigkeit des Kontaktfeldes von der Entfernung, indem er auf die magnetisierte Kathode zuerst entsprechende Schichten neutraler Metalle, wie Gold, Silber und Kupfer, von verschiedener Dicke, und dann wieder Eisen sich niederschlagen ließ. Bei Umkehrung des äußeren Feldes fand er, daß bei einer Dicke des neutralen Metalls von $38 \mu\mu$ die neuen Eisenschichten sich genau so verhielten wie die auf einer unmagnetisierten Kathode niedergeschlagenen. Mit anderen Worten, bei dieser Entfernung neutralisiert das Kontaktfeld gerade das äußere Feld. Andererseits ist für sehr dünne Schichten des neutralen Metalls das Kontaktfeld im Vergleich zum äußeren Felde sehr groß. Der Charakter dieses Kontaktfeldes ist bis jetzt noch unerklärt, aber wahrscheinlich ist es von derselben Art wie das „molekulare Feld“, und mit Rücksicht auf die Arbeit Oxleys über diamagnetische Körper verdiente es weitere Untersuchung.

Theorie von Frivold.

Wie oben erwähnt, kam Weiss zu dem Schlusse, daß die nach seiner Theorie des Ferromagnetismus erforderlichen großen molekularen Felder nicht rein magnetischen Ursprungs sein können, sondern aus andersartigen magnetischen Kräften herrühren müssen. Um zu bestimmen, bis zu welchem Grade man die Felder der einzelnen Atommagnete für das molekulare Feld von Weiss in Rechnung setzen kann, hat Frivold¹⁾ eine ausgedehnte Berechnung angestellt. Zu diesem Zwecke nimmt er an, daß das Gleichgewicht der Elementarmagnete nicht nur durch das äußere Feld und die Wärmebewegung, wie bei der Langevinschen Theorie bestimmt wird, sondern außerdem durch die Überlagerung der Felder der Elementarmagnete, und er behandelt das Problem vom Standpunkt der statistischen Mechanik aus. Die Rechnung ist für zwei Fälle, die eindimensionale und die räumliche Verteilung, durchgeführt.

1. Das eindimensionale Problem. N Elementarmagnete mögen eine lange Kette bilden und frei um ihre Mittelpunkte be-

¹⁾ Frivold, Ann. d. Phys. **65** 1, 1921.

weglich sein. Dann gibt es ein statistisches Gleichgewicht unter dem Einfluß ihrer ungerichteten Temperaturbewegungen, der äußeren Felder und ihres eigenen gegenseitigen Feldes. Der Anfangspunkt der Koordinaten liege in der Mitte der Kette, ϑ und φ seien die gewöhnlichen Polarkoordinaten, und die Koordinatenachse sowie das äußere Feld fallen mit der Richtung der Kette zusammen. Ist das magnetische Moment eines einzelnen Magnetes μ , und sind ihre momentanen Lagen durch $\vartheta_1 \varphi_1, \vartheta_2 \varphi_2 \dots \vartheta_n \varphi_n$ gegeben, so liefert die statistische Mechanik für das mittlere magnetische Moment der Kette bei der Temperatur T , in der Richtung der Kette, den folgenden Ausdruck:

$$M_T = A \int \dots \int \mu \sum_1^N \cos \vartheta_N e^{-\frac{U}{kT}} d\Omega_1 d\Omega_2 \dots d\Omega_n. \quad (1)$$

Hierin bedeutet U die potentielle Energie der Kette, k die Boltzmannsche Konstante ($k = 1,35 \cdot 10^{-16}$ Erg) und $d\Omega$ den durch das Oberflächenelement $\sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ auf der Einheitskugel gebildeten Raumwinkel. Die Integration ist über die $2N$ -Variablen $\vartheta_1 \varphi_1 \vartheta_2 \varphi_2 \dots \vartheta_n \varphi_n$ zu erstrecken.

Die Konstante A bestimmt sich aus folgender Betrachtung: die Wahrscheinlichkeit für eine gegebene Lage, die durch die Tatsache charakterisiert ist, daß die Richtung der Achsen der Elementarmagnete innerhalb der Raumwinkel $d\Omega_1, d\Omega_2 \dots d\Omega_n$ liegen, ist

$$A e^{-\frac{U}{kT}} d\Omega_1 d\Omega_2 \dots d\Omega_n.$$

Integriert man diesen Ausdruck, wobei die Indizes von ϑ und φ alle Werte zwischen 1 und N annehmen, so erhält man für die Wahrscheinlichkeit den Wert Eins. Also ist

$$A \int \dots \int e^{-\frac{U}{kT}} d\Omega_1 d\Omega_2 \dots d\Omega_n = 1 \quad (2)$$

und

$$M_T = \frac{\int \dots \int \mu \sum_1^N \cos \vartheta_N e^{-\frac{U}{kT}} d\Omega_1 d\Omega_2 \dots d\Omega_n}{\int \dots \int e^{-\frac{U}{kT}} d\Omega_1 d\Omega_2 \dots d\Omega_n}. \quad (3)$$

Um die Integrationen in Gleichung (3) auszuführen, muß man zuerst die potentielle Energie U bestimmen. Sie besteht aus zwei

Teilen: dem durch die gegenseitige potentielle Energie der Elementarmagnete und dem durch deren Lagen im äußeren Felde hervorgerufenen Betrag. Nennt man sie U_1 und U_2 , so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} U &= U_1 + U_2, \\ &= \frac{1}{a^3} \sum_1^{N-1} \left[(m_k \cdot m_{k+1}) - 3 \left(m_k \cdot \frac{a}{a} \right) \left(m_{k+1}, \frac{a}{a} \right) \right], \\ &\quad - \sum_1^N (m_k, \mathfrak{H}). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Der Klammerausdruck ist eine innerhalb 6 Proz. genaue Annäherung.

Dann kann man das mittlere Moment eines Elementarmagnets, der aus einer derartigen Kette besteht, auswerten. Führt man folgende Abkürzungen ein:

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^{N-1} f_k &= \Phi, \quad \text{wobei } f_k = (m_k, m_{k+1}) \\ &\quad - 3 \left(m_k, \frac{a}{a} \right) \left(m_{k+1}, \frac{a}{a} \right), \\ \sum_1^N g_k &= \Psi, \quad \text{wobei } g_k = \left(\frac{m_k}{\mu}, \frac{\mathfrak{H}}{H} \right), \\ -\frac{1}{a^3 k T} &= p \quad \text{und} \quad \frac{\mu H}{k T} = q; \\ dS &= \frac{d\Omega_1}{4\pi} \frac{d\Omega_2}{4\pi} \dots \frac{d\Omega_n}{4\pi}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

so' wird Gleichung (3)

$$M_T = \frac{\mu \int \dots \int \Psi e^{p\Phi + q\Psi} dS}{\int \dots \int e^{p\Phi + q\Psi} dS}. \quad (6)$$

Bezeichnet man nun das Integral im Nenner mit J , so entsteht

$$\frac{M_T}{\mu} = \frac{d}{dq} \log J. \quad (7)$$

J kann in eine Potenzreihe in $p\Phi$, d. h. in Potenzen von

$$\frac{\mu^2}{a^3 k T}$$

entwickelt und gliedweise integriert werden. So ist

$$J = \int \dots \int e^{q\Psi} \left(1 + p\Phi + \frac{1}{2} p^2 \Phi^2 + \dots \right) dS. \quad (8)$$

Die durch die Reihenentwicklung gegebene Annäherung ist um so besser, je höher die Temperatur T ist. Um A auszuwerten, muß man folgende Mittelwerte bestimmen:

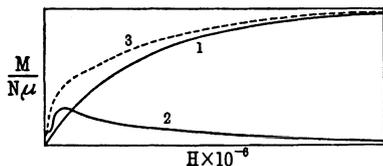
$$\left. \begin{aligned} D &= \int \dots \int e^{q\psi} dS, \\ D_1 &= \int \dots \int e^{q\psi} p \Phi dS, \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Führt man diese Integrationen aus und vernachlässigt man die quadratischen und höheren Potenzen in 8, so erhält man für das mittlere magnetische Moment eines Elementarmagnets im Verhältnis zur absoluten Größe desselben:

$$\frac{M_T}{N\mu} = \left(\coth q - \frac{1}{q} \right) \left[1 + 4 \frac{\mu^2}{a^3 k T} \frac{d}{dq} \left(\coth q - \frac{1}{q} \right) + \dots \right]. \quad (10)$$

Zieht man die gegenseitige Wirkung eines Magnets auf einen anderen nicht in Rechnung, so ist das zweite Glied in der eckigen

Fig. 19.



Klammer bei (10) gleich Null, und es ergibt sich die wohlbekannte Langevinsche Formel: Die Größe der Abweichungen von der Langevinschen Formel, die durch die Einführung der gegenseitigen Wirkungen hervor-

gebracht werden, sieht man, wenn man in (10) die Zahlenwerte einsetzt. Nehmen wir an, die Kette bestehe aus Eisenatomen, die nach Weiss 11 Magnetonen besitzen, jedes habe ein Moment $16 \cdot 10^{-22}$ CGS, für a nehmen wir den Wert $2 \cdot 10^{-8}$ an, so ergibt sich für eine Temperatur von 300° abs., da $k = 1,35 \cdot 10^{-16}$ ist:

$$\frac{4\mu^2}{a^3 k T} = 3,7 \cdot 10^{-3}.$$

In Fig. 19 stellt Kurve 1 die ursprüngliche Langevinsche Funktion dar, während Kurve 2 dem Ausdruck

$$\frac{d}{dq} \left(\cotgh q - \frac{1}{q} \right)$$

entspricht. Dieser letztere Ausdruck hat für die oben erwähnten Werte ein Maximum von $\frac{1}{3}$ bei einer Feldstärke von 10^6 Gauß.

Das mittlere magnetische Moment unter Berücksichtigung der gegenseitigen Einwirkungen ist durch Kurve 3 dargestellt. Da der Maximalwert der Abweichung von der Langevinschen Kurve von der Größenordnung 10^{-3} ist, so ist der Effekt hier stark übertrieben, und man kommt zu dem Schlusse, daß bei dieser Temperatur der Effekt der gegenseitigen Wirkungen völlig vernachlässigt werden kann, und daß ein magnetischer Körper, der aus einer Kette von Magneten mit den oben angenommenen Werten nur paramagnetische Eigenschaften zeigt.

Es ist zu beachten, daß in der obigen Entwicklung die Integration der Gleichung (8) für die zwei ersten Glieder ausgeführt wurde. Wenn man das quadratische Glied einschließt, so ist die Berechnung viel umständlicher, aber das Ergebnis zeigt, daß für äußere Felder von 50 000 Gauß das magnetische Moment der Kette eine lineare Funktion von H ist.

Andererseits sind für niedrigere Temperaturen die Schlussfolgerungen ganz andere. Für kleine Werte von T kann man eine Reihe von Vereinfachungen in Gleichung (8) einführen und man findet die (10) entsprechende Gleichung wie folgt:

$$\frac{M_T}{N\mu} = \frac{d}{dq} \log J = 1 - \frac{1}{2m} \left[1 + 2 \frac{n^2}{m^2} + \dots \right], \quad (11)$$

wobei

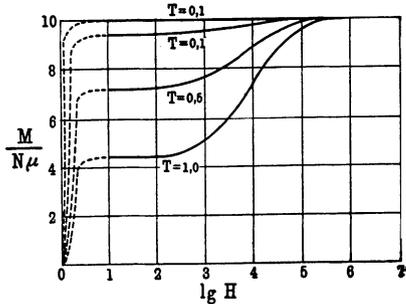
$$n = \frac{p\mu^2}{2},$$

$$m = 2 \frac{\mu^2}{a^3 kT} + \frac{\mu H}{2 kT}.$$

Die Ergebnisse für vier Werte von T sind in Fig. 20 zu sehen.

Da die Annäherungen für sehr schwache Felder nicht stimmen, sind die Kurven in diesem Gebiet punktiert. Die Kette zeigt somit bei niederen Temperaturen die charakteristischen Eigenschaften der ferromagnetischen Körper, sie geht aber bei Temperaturen von wenigen Graden absolut in den paramagnetischen Zustand über.

Fig. 20.



2. Das dreidimensionale Problem. Für den Fall des Raumgitters ist die Rechnung ähnlich wie bei dem eindimensionalen Problem auszuführen: Man nimmt an, daß die Elementarmagnete an den Ecken eines kubischen Raumgitters sitzen und sich um ihre Mittelpunkte drehen können. Der Ausdruck für J in Gleichung (8) ist wie oben zu berechnen, aber die Rechnung ist umständlicher, weil doppelt summiert werden muß. Berechnet man als erste Annäherung den Ausdruck, der D und D_1 von Gleichung (9) entspricht, so erhält man die bekannte Langevinsche Gleichung:

$$\frac{M_T}{N_\mu} = \coth q - \frac{1}{q}. \quad (12)$$

Führt man aber das quadratische Glied der Gleichung (8) ein, so erhält man einen Ausdruck, in dem die gegenseitigen Einwirkungen auftreten. Man hat zwei Fälle untersucht, das gewöhnliche kubische Raumgitter und das raumzentrierte kubische Gitter. Für den ersten Fall erhält Frivold:

$$\frac{M_T}{N_\mu} = \frac{1}{3} \frac{\mu H}{k T} \left[\left\{ 1 - \frac{6,27}{4} \left(\frac{\mu^2}{a^3 k T} \right)^2 + \dots \right\} + \left(\frac{\mu H}{k T} \right)^2 \left\{ \frac{2,56}{4} \left(\frac{\mu^2}{a^3 k T} \right)^2 - \frac{1}{15} \right\} + \dots \right], \quad (13)$$

für den zweiten:

$$\frac{M_T}{N_\mu} = \frac{1}{3} \frac{\mu H}{k T} \left[\left\{ 1 - \frac{8,88}{4} \left(\frac{\mu^2}{a^3 k T} \right)^2 + \dots \right\} + \left(\frac{\mu H}{k T} \right)^2 \left\{ \frac{3,22}{4} \left(\frac{\mu^2}{a^3 k T} \right)^2 - \frac{1}{15} \right\} + \dots \right]. \quad (14)$$

Ein Vergleich dieser beiden Ausdrücke zeigt, daß die numerischen Faktoren in beiden Fällen von gleicher Größenordnung sind, und daß infolgedessen der Unterschied in der Anordnung der Atome keine wichtige Rolle spielt. Wir wollen deshalb im folgenden nur den ersten Fall betrachten. Läßt man die gegenseitige Einwirkung unberücksichtigt, so ergibt Gleichung (13) für den Fall eines relativ kleinen äußeren Feldes, die bekannte Langevinsche Gleichung für kleine Felder:

$$\frac{M_T}{N_\mu} = \frac{1}{3} \frac{\mu H}{k T} \quad (15)$$

und für die Anfangspermeabilität

$$\frac{M_T}{H} = \frac{1}{3} \frac{\mu^2}{kT} \cdot N. \quad (16)$$

Berücksichtigt man jedoch die gegenseitige Wirkung, so wird Gleichung (16) zu:

$$\frac{M_T}{H} = \frac{1}{3} \frac{\mu^2}{kT} N \left[1 - \frac{6,27}{4} \left(\frac{\mu^2}{a^3 kT} \right)^2 + \dots \right], \quad (17)$$

was bedeutet, daß der Effekt der gegenseitigen Einwirkung darin besteht, die Anfangspermeabilität herabzumindern.

Eine Betrachtung der Gleichung (13) zeigt, daß für äußere Felder von solcher Größe, daß q^2 in Betracht kommt, eine Umkehrtemperatur vorhanden sein muß. Beispielsweise liegt die Magnetisierungskurve (13) über der Kurve der Gleichung (17), fällt mit ihr zusammen oder liegt unter ihr, je nachdem das Vorzeichen des Koeffizienten

$$\left(\frac{\mu H}{kT} \right)^2$$

positiv, Null oder negativ ist oder, mit anderen Worten, je nachdem T größer, gleich oder kleiner ist als

$$\frac{\mu^2}{a^3 k} \sqrt{\frac{4}{2,56 \cdot 15}}.$$

Immerhin ist die Größe dieser Abweichungen sehr gering, wie man durch Einsetzen der allgemein angenommenen numerischen Werte für Eisen sieht. Setzt man z. B. $\mu = 1,76 \cdot 10^{-20}$ CGS, $a = 2,86 \cdot 10^{-8}$ cm und $T = 390^{\circ}$ abs., so ist:

$$\left(\frac{\mu^2}{a^3 kT} \right)^2 \sim 10^{-7}.$$

Hieraus können wir schließen, daß bei gewöhnlicher Temperatur der Einfluß der gegenseitigen Wirkungen auf die Magnetisierungskurve für den hier betrachteten Fall des hypothetischen magnetischen Körpers zu vernachlässigen ist. Der Grund hierfür liegt in dem kleinen Werte für das Moment des Elementarmagnets. Es ist von Interesse, den Fall zu betrachten, in dem die Atome außer den Elementarmagneten elektrische Dipole enthalten, deren elektrische Momente beispielsweise von der Größenordnung der für SO_2 gefundenen, nämlich 10^{-18} , sind, d. h. 100 mal so groß als die

magnetischen Momente der Eisenatome. Das äußere magnetische Feld beginnt dann den Ausrichtungsvorgang, wobei die inneren elektrischen und magnetischen Felder ins Spiel gezogen werden. Frivold hat auch für diesen Fall die Rechnung durchgeführt und den folgenden Ausdruck erhalten:

$$\frac{M_T}{N_{\mu}} = \frac{1}{3} \frac{\mu_m H}{kT} \left[\left\{ 1 - \frac{6,27}{4} \left(\frac{\mu_e^2}{a^3 kT} \right)^2 + \dots \right\} + \left(\frac{\mu_m H}{kT} \right)^2 \left\{ \frac{2,56}{4} \left(\frac{\mu_e^2}{a^3 kT} \right)^2 - \frac{1}{15} \right\} + \dots \right] \quad (18)$$

wobei sich die Indizes m und e auf das magnetische und elektrische Moment beziehen. Man erhält so viel größere Abweichungen von dem Falle, bei dem die gegenseitigen Wirkungen vernachlässigt sind, denn hier ist:

$$\frac{\mu_e^2}{a^3 kT} \sim 1.$$

Leider wird das Integral der Gleichung (8), worauf die ganze Ausführung beruht, nach Potenzen von $p\Phi$ entwickelt, d. h. von

$$\frac{\mu_e^2}{a^3 kT}$$

und die Reihe konvergiert nur, wenn dieser Ausdruck kleiner als die Einheit ist. Die Frage, ob der Ferromagnetismus durch die Annahme elektrischer Dipole erklärt werden kann, steht also noch offen, aber es sind interessante Möglichkeiten hier angedeutet.

Theorie von Gans.

Eine Theorie des Ferromagnetismus wurde von Gans entwickelt, indem er versuchte, den Effekt der molekularen Struktur auf die magnetischen Eigenschaften in Rechnung zu setzen und die die Natur des molekularen Feldes betreffenden Gedankengänge genauer zu geben, als dies Weiss getan hat. Er nahm an, ein Elementarmagnet oder „Magneton“ sei ein elektrisierter, sich rasch um seine Figurenachs drehender Rotationskörper. Ein elementarer Komplex besteht aus einer Gruppe solcher Magnetonen, die nach den Wahrscheinlichkeitsgesetzen in einem Raume verteilt sind, der die Form eines Ellipsoides mit drei ungleichen Achsen hat. Die

Magnetonen können sich in dem Komplex genau so frei bewegen wie die Moleküle eines Gases. Ein ferromagnetischer Kristall baut sich aus solchen Komplexen auf, die in den Schnittpunkten eines Raumgitters mit ihren entsprechenden Achsen einander parallel liegen.

Wendet man die Gesetze der statistischen Mechanik auf ein System solcher Komplexe an, so erhält man Beziehungen zwischen den magnetischen und thermischen Größen, die in der Form denen von Weiss ähnlich, aber umfassender sind. Aus Stabilitätsbetrachtungen kann er die Hysteresiskurve ableiten, eine Beziehung zwischen Koerzitivkraft und Temperatur aufstellen und die Zahl der Magnetonen in der Volumeneinheit und das magnetische Moment eines Magnetons bestimmen.

Der hauptsächlichliche Unterschied zwischen der Theorie von Weiss und der von Gans ist kurz gesagt folgender: In der ersteren wird angenommen, daß das erregende Feld, das auf einen bestimmten Punkt in einem ferromagnetischen Körper wirkt, aus zwei Teilen besteht, dem äußeren Felde \mathfrak{H} und dem molekularen Felde $N\mathfrak{M}$, wobei \mathfrak{M} die Magnetisierungsintensität und N eine für den Körper charakteristische Konstante ist. In der Gansschen Theorie besteht das erregende Feld aus drei Teilen, dem äußeren Felde \mathfrak{H} , dem durch die Magnetisierung des Körpers im ganzen hervorgerufenen „Strukturfeld“, daß durch eine Überlegung ähnlich der von Lorentz für Dielektrika angewandten zu

$$\frac{4}{3} \pi \mathfrak{M}$$

gefunden wird, und dem molekularen Felde \mathfrak{U} , das einzig durch die Einwirkung der Magnetonen des speziellen Komplexes hervorgerufen wird, in dem das betrachtete Magneton gelegen ist. Man nimmt an, jede Richtung sei für das Molekularfeld \mathfrak{U} gleich wahrscheinlich, und seine Größe sei von der Richtung unabhängig. Das molekulare Feld hat zufolge der verschiedenen Richtungen, die es annimmt, eine Tendenz zur Unordnung und wirkt deshalb in demselben Sinne wie die Wärmebewegung. Bei hohen Temperaturen kann man die Wirkung des molekularen Feldes gegenüber der Wärmebewegung vernachlässigen, während man sie bei tiefen Temperaturen gegenüber dem molekularen Felde vernachlässigen kann.

Die Gleichung der Magnetisierungskurve eines ferromagnetischen Körpers kann man auf folgende Weise ableiten. Das

magnetische Moment der Magnetonen einer bestimmten Gruppe hat aus Symmetriegründen die Richtung des resultierenden Feldes \mathfrak{F} , das durch vektorielle Addition von \mathfrak{R} und \mathfrak{A} entsteht, wobei \mathfrak{R} die Summe des äußeren und des Strukturfeldes und gleich

$$\mathfrak{H} + \frac{4}{3} \pi \mathfrak{M}$$

ist, und \mathfrak{A} das molekulare Feld bedeutet. Vgl. den 3. Abschnitt des Aufsatzes über die kinetischen Theorien des Dia- und Paramagnetismus von Dr. Wills.

Nimmt man die Komponente dieses magnetischen Moments in der Richtung des äußeren Feldes, und dehnt man die Summierung auf alle Gruppen innerhalb der Volumeneinheit des Körpers aus, so erhält man seine Magnetisierungsintensität. Gleichung (32) des vorhergehenden Abschnitts zeigt, daß der Mittelwert von $\cos \vartheta$, wobei ϑ der Winkel zwischen der Achse eines Magnetonen und dem äußeren Felde ist, durch

$$\overline{\cos \vartheta} = \frac{1}{4K^2} \int_0^{\infty} \frac{W(A) dA}{A} \int_{\pm(A-K)}^{A+K} \left(\coth a - \frac{1}{a} \right) (F^2 + K^2 - A^2) dF \quad (1)$$

gegeben ist; hierbei bedeutet $W(A) dA$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das molekulare Feld \mathfrak{A} zwischen den Grenzen A und $A + dA$ liegt, und es ist

$$a = \frac{\mu F}{kT} = \gamma F.$$

Bei Ausführung dieser Integration ist das positive Vorzeichen bei der unteren Grenze für $k < A$ und das negative für $K > A$ zu nehmen.

Unter der Annahme, daß das molekulare Feld in seiner Größe konstant ist, und daß alle Richtungen gleich wahrscheinlich sind, reduziert sich Gleichung (1) zu

$$\overline{\cos \vartheta} = \frac{1}{4K^2} \int_{\pm(A-K)}^{A+K} \left(\coth a - \frac{1}{a} \right) (F^2 + K^2 - A^2) dF. \quad (2)$$

Daher ist dann das magnetische Moment der Volumeneinheit gegeben durch

$$M = N\mu \overline{\cos \mathfrak{F}} = \frac{M_0}{4AK^2} \int_{\pm(A-K)}^{A+K} \left(\coth a - \frac{1}{a} \right) (F^2 + K^2 - A^2) dF, \quad (3)$$

wobei $M_0 = N\mu$ ist. Da

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{H} + \frac{4}{3} \pi \mathfrak{M},$$

so ergibt diese Beziehung zusammen mit Gleichung (3) \mathfrak{M} als Funktion von \mathfrak{H} , und die Magnetisierungskurve kann entsprechend abgeleitet werden. Man kann zeigen, daß für $A = 0$ sich Gleichung (3) auf diejenige von Langevin reduziert.

Um diese Formel auf einen ferromagnetischen Körper anzuwenden und zu sehen, wie die Erscheinung der Hysterese daraus folgt, denken wir uns einen ferromagnetischen Kristall mit rhombischem Raumgitter wie den Pyrrhotit und mit ellipsoidischen Elementarkomplexen, die in den Gitterschnittpunkten mit parallelen Achsen gelegen sind.

Es sei für Punkte innerhalb der Komplexe die Magnetisierung mit \mathfrak{M}' und die Feldstärke mit \mathfrak{H}' bezeichnet, während sich \mathfrak{M} und \mathfrak{H} auf die entsprechenden Größen an Punkten innerhalb des Kristalls, aber außerhalb der Komplexe beziehen. Dann können wir schreiben:

$$H'_x = H_x + N'_1 M_x,$$

$$H'_y = H_y + N'_2 M_y,$$

$$H'_z = H_z + N'_3 M_z.$$

Hierbei sind N'_1 , N'_2 und N'_3 von der Struktur abhängige Konstante. Ferner ist

$$\mathfrak{M} = n V \mathfrak{M}',$$

wobei n die Zahl der Elementarkomplexe in der Volumeneinheit und V das Volumen eines einzelnen Komplexes ist.

Die Größe K von Gleichung (3) ist gegeben durch

$$K = H' + \frac{4}{3} \pi M';$$

sie kann in H und M durch folgende Beziehungen dargestellt werden:

$$K_x = H_x + N_1 M_x,$$

$$K_y = H_y + N_2 M_y,$$

$$K_z = H_z + N_3 M_z,$$

wobei

$$N_1 = N'_1 + \frac{4\pi}{3nV'}$$

$$N_2 = N'_2 + \frac{4\pi}{3nV'}$$

$$N_3 = N'_3 + \frac{4\pi}{3nV'}$$

\mathfrak{R} kann man als den richtenden Teil der Gesamtkraft betrachten, der auf die Magnetonen eines Komplexes wirkt; es ist hervorgerufen durch das äußere Feld \mathfrak{S} innerhalb des Kristalls und ein zweites Feld mit den Komponenten $N_1 M_x$, $N_2 M_y$, $N_3 M_z$, das

Fig. 21.

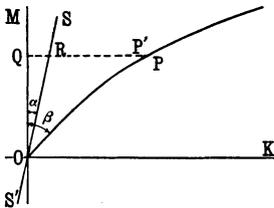
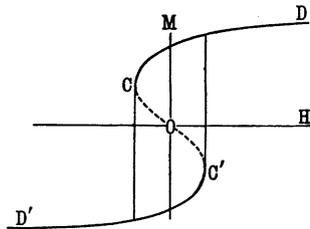


Fig. 22.



wesentlich von der Form und der Anordnung der Elementar-komplexe abhängig ist und passenderweise als „Strukturfeld“ bezeichnet werden kann.

Die Magnetisierungskurve, d. h. die M - H -Kurve für einen Kristall in der Richtung einer dieser Symmetrieachsen, z. B. der X -Achse, erhält man aus der M - K -Kurve durch einen Scherungsprozeß wie folgt:

Es sei in Fig. 21 die punktierte Kurve, die durch Gleichung (3) gegebene, und SS' die Scherungslinie, die gegen die O - M -Achse um einen Winkel α derart geneigt ist, daß $\operatorname{tg} \alpha = N_1$. Ist P ein Punkt auf der M - K -Kurve, dann ist P' der entsprechende Punkt auf der M - H -Kurve, wobei $PP' = QR$: der Scherungswinkel α hängt von der Strukturkonstante N ab. Es sind zwei Fälle zu betrachten, nämlich $\alpha < \beta$ und $\alpha > \beta$, wobei β der Winkel zwischen der Tangente an die M - K -Kurve im Anfangspunkt und der O - M -Achse ist. Im ersten Falle liegt die M - H -Kurve vollständig im ersten Quadranten, im zweiten Falle aber verläuft sie entsprechend OCD in Fig. 22. Durch Stabilitätsbetrachtungen kann

man zeigen, daß für $\alpha < \beta$ die Magnetonen der Elementarkomplexe für alle möglichen Feldstärken in stabilem Gleichgewicht sind, und daß der Körper paramagnetisch ist. Andererseits ist für $\alpha > \beta$ zwischen den durch die vertikalen Tangenten an die Punkte C und C' bezeichneten Feldstärken das Gleichgewicht labil. Der Körper ist dann ferromagnetisch und zeigt, wie in der Kurve angedeutet, die Eigenschaft der Hysterese.

Durch Entwicklung des Integranden der Gleichung (3) in eine Potenzreihe und unter gewissen Annäherungen zur Vereinfachung der Integrationen hat Gans eine Anzahl wichtiger Beziehungen zwischen den magnetischen Eigenschaften und der Temperatur abgeleitet. So hat er z. B. Gleichungen entwickelt, die Remanenz und Temperatur, Koerzitivkraft und Temperatur in Beziehung setzen, und eine Beziehung zwischen Suszeptibilität und Temperatur für einen ferromagnetischen Körper oberhalb des Curieschen Punktes gefunden. Die erstgenannte Beziehung ist wesentlich die gleiche wie die von Weiss erhaltene und stimmt gut mit den Beobachtungen von Weiss und Foëx¹⁾ für Magnetit, aber nicht für Eisen und Nickel überein. Die zweite und die dritte Beziehung sind mit den Ergebnissen von Terry²⁾ für Eisen, Nickel und Kobalt bei hohen Temperaturen in guter Übereinstimmung.

Theorie von Honda und Okûbo.

Im Gegensatz zur Theorie von Weiss, in der man molekulare Felder von der Größe von mehreren Millionen Gauß als wirksam annehmen muß, versuchten Honda und Okûbo³⁾ auf den Spuren der Gedankengänge von Ewing die Magnetisierungs- und Hysteresekurven dadurch abzuleiten und die Eigenschaften der Kristalle dadurch zu erklären, daß sie die gegenseitigen Einwirkungen der magnetischen Moleküle aufeinander in Rechnung setzen, deren Pole nach dem umgekehrten Quadratgesetz aufeinander wirken. Zu diesem Zwecke betrachten sie ein Ewingsches Modell von neun komplanaren Magneten, die an den Ecken eines kubischen Raumgitters (vgl. Fig. 23) sich befinden. Obwohl das Problem drei-

¹⁾ Weiss und Foëx, Arch. des Sc. Phys. et Nat. **31**, 4, 1911.

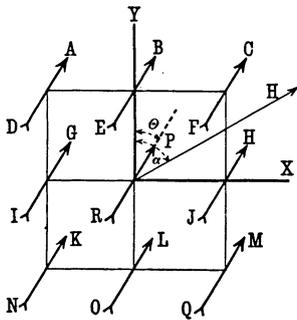
²⁾ Terry, Phys. Rev. **33**, Nr. 2, 1910; **60**, N. S., Nr. 5, 394, 1917.

³⁾ Honda und Okûbo, Science Reports Tohoku Univ. **5**, Nr. 3, 153, 1916.

dimensional ist, genügt es, den zweidimensionalen Fall zu betrachten, um zu sehen, wieweit eine derartige Theorie Erfolg haben kann. Wenn kein äußeres Feld wirkt, so nehmen die Elementarmagnete stabile Gleichgewichtslagen parallel zu einer der Seiten des Raumgitters ein. Unter der Wirkung des Feldes aber dreht sich die Gruppe als Ganzes nach der Richtung des Feldes und nimmt eine durch dasselbe und durch die gegenseitigen Wirkungen der Gruppe bestimmte Gleichgewichtslage an.

Um das Problem bestimmt zu fassen, sei der Koordinatenanfangspunkt im Mittelpunkt des Magnets PR , das äußere Feld H wirke in einer Richtung α in bezug auf die Y -Achse, und die

Fig. 23.



Elementarmagnete seien infolgedessen um einen Winkel ϑ gedreht. Es sei $2a$ die Seite des Raumgitters, $2r$ die Länge des Elementarmagnets und m die Polstärke, und ferner sei $\frac{a}{r} = k$ gesetzt.

Die Gleichgewichtslage eines der Magnete, z. B. von PR , kann man bestimmen, indem man das Drehmoment, das durch das äußere Feld hervorgerufen wird, demjenigen gleichsetzt, das durch die 16 übrigen Pole der Gruppe entsteht. Das letztere ist augenscheinlich eine Funktion von 4ϑ , da die Magnete eines kubischen Raumgitters im Gleichgewicht sind, wenn sie Pol gegen Pol stehen; dabei ist das Gleichgewicht stabil, wenn sie einer der Koordinatenachsen, und labil, wenn sie den Diagonalen parallel sind. Die Rechnung zeigt, daß man die Gleichgewichtsbedingung schreiben kann:

$$H \sin(\alpha - \vartheta) = A \sin 4\vartheta, \quad (1)$$

wobei $A = \frac{m}{r^2} \varphi(k)$ eine von der Stärke der Elementarmagnete und ihrer besonderen Anordnung in der Gruppe abhängige Größe ist.

Die Magnetisierungsintensität J in der Richtung des angelegten Feldes ist

$$J = 2mrn \cos(\alpha - \vartheta) = J_0 \cos(\alpha - \vartheta), \quad (2)$$

wobei n die Zahl der Elementarmagnete und J_0 der Sättigungswert der Magnetisierungsintensität ist.

Führt man

$$\frac{J}{J_0} = i \quad \text{und} \quad \frac{H}{A} = h \quad (3)$$

als „reduzierte“ Werte für die Intensität und das Feld ein, so haben wir die Beziehungen

$$i = \cos(\alpha - \vartheta) \quad (4)$$

und

$$h \sin(\alpha - \vartheta) = \sin 4\vartheta \quad (5)$$

als die beiden Gleichungen, die die Magnetisierung eines einfachen Komplexes darstellen. Ist h und α gegeben, so liefert Gleichung (5) den Wert von ϑ , der, in Gleichung (4) eingesetzt, den Wert von i ergibt. Gleichung (5) ist aber vom achten Grade in $\sin \vartheta$ oder $\cos \vartheta$ und muß deshalb durch ein indirektes Vorgehen gelöst werden. Man muß nun zuerst ausfindig machen, wie sich ein Elementar-komplex verhält, wenn er durch äußere Felder von verschiedenen Richtungen beeinflußt wird. Wie Gleichung (1) andeutet, ist das rückwirkende Drehmoment auf jeden Magneten, das durch die Wechselwirkungen in der Gruppe hervorgerufen wird, eine Funktion von der Periode $\frac{\pi}{4}$. Es ist ein Maximum für den Winkel $\frac{\pi}{8}$ mit

den Seiten und kehrt sein Vorzeichen um bei dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ und seinen ganzen Vielfachen. Nehmen wir an, die Magnete seien ursprünglich parallel zu Y , und ein Feld h wirke unter einem Winkel α und drehe die Magnete um den Winkel ϑ . Es ergeben sich dann vier Fälle.

1. Fall. $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$. Die Magnetisierungskomponente in der Richtung h beginnt mit dem Werte $i = \cos \vartheta$, wächst stetig mit h und wird Eins für $h = \infty$.

2. Fall. $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Die Magnetisierung wächst stetig mit h , bis das ablenkende Drehmoment größer wird als das rückwirkende; dann springen die Magnete in eine neue Gleichgewichtslage zwischen h und X . Diese neue Lage ist dieselbe, als wenn die Magnete in ihrer ursprünglichen Lage geblieben wären und α in $\alpha - \frac{\pi}{2}$

verändert wäre. So ergibt sich ein diskontinuierliches Anwachsen von i . Für Winkel α in diesem Oktanten vollzieht sich der Sprung für Werte von ϑ größer als $\frac{\pi}{8}$. Mit weiterem Wachsen von h nimmt i stetig bis zur Einheit für $h = \infty$ zu.

3. Fall. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3}{4}\pi$. Die Magnetisierung wächst stetig mit h , bis das ablenkende Drehmoment größer ist als das rückwirkende; dann tritt eine Diskontinuität auf, und die Magnetisierung nimmt denselben Verlauf, wie wenn α durch $\alpha - \frac{\pi}{2}$ ersetzt wäre. Dieser Fall ist ähnlich dem Falle 2, nur ist in der neuen Gleichgewichtslage ϑ größer als $\frac{\pi}{2}$.

4. Fall. $\frac{3}{4}\pi < \alpha < \pi$. Der Magnetisierungsverlauf ist bis zur Diskontinuität der gleiche wie in den vorhergehenden Fällen. Die Diskontinuität aber kann von zweierlei Art sein. Für Richtungen von h etwas größer als $\frac{3}{4}\pi$, ist das Drehmoment größer für das Maximum in der Nähe von $\frac{\pi}{8}$ als für das bei $\frac{5\pi}{8}$; die Magnete springen in eine Lage, die einem Winkel etwas kleiner als $\frac{5}{8}\pi$ entspricht, und die nachfolgende Magnetisierung tritt ein, wie wenn α durch $\alpha - \frac{\pi}{2}$, wie im Falle 3, ersetzt wäre. Ist andererseits α nahezu gleich π , so ist das Drehmoment nahe bei $\frac{5}{8}\pi$ größer als nahe bei $\frac{\pi}{8}$, und die Magnete springen in eine Lage zwischen h und der negativen Y -Achse; die nachfolgende Magnetisierung verläuft, wie wenn α durch $\alpha - \pi$ ersetzt wäre.

Das Feld h_m , bei dem die Diskontinuität auftritt, erhält man folgendermaßen. Da

$$h = \frac{\sin 4\vartheta}{\sin(\alpha - \vartheta)}, \quad (6)$$

ist der Wert von ϑ , für den h ein Maximum ist, gegeben durch

$$\frac{dh}{d\vartheta} = \frac{5 \sin(\alpha + 3\vartheta) + 3 \sin(\alpha - 5\vartheta)}{2 \sin^2(\alpha - \vartheta)}. \quad (7)$$

Nennt man diesen Winkel ϑ_0 , so ergibt sich

$$5 \sin(\alpha - 3\vartheta_0) + 3 \sin(\alpha - 5\vartheta_0) = 0. \quad (8)$$

Man erhält dann das Feld h_m dadurch, daß man diese Gleichung nach ϑ_0 auflöst und den Wert in (6) einsetzt.

Nun sind wir in der Lage, die Magnetisierung einer ferromagnetischen Masse zu betrachten, die aus einer großen Zahl von Elementarkomplexen besteht, deren Raumgitterachsen gleichmäßig nach allen Richtungen in einer Ebene verteilt sind. Es sei N die Zahl der Komplexe und dN die Zahl derjenigen, deren Achsen mit einer bestimmten Richtung einen Winkel zwischen α und $\alpha + d\alpha$ bilden, wenn kein äußeres Feld vorhanden ist. Dann ist

$$dN = \frac{N}{2\pi} d\alpha. \quad (9)$$

Es sei M das Moment eines Komplexes, α der Winkel zwischen seiner anfänglichen Richtung und der des äußeren Feldes h , ferner drehe er sich um einen Winkel ϑ unter der Wirkung dieses Feldes. Seine Komponente in der Richtung des Feldes ist $M \cos(\alpha - \vartheta)$. Die durch alle Komplexe hervorgerufene Magnetisierung ist

$$J = 2 \int_0^\pi \frac{MN}{2\pi} \cos(\alpha - \vartheta) d\alpha = \frac{J_0}{\pi} \int_0^\pi \cos(\alpha - \vartheta) d\alpha, \quad (10)$$

wobei $J_0 = MN$ der Sättigungswert der Magnetisierung ist. Die reduzierte Magnetisierung i ist gegeben durch

$$i = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\alpha - \vartheta) d\alpha. \quad (11)$$

Diese Gleichung liefert zusammen mit Gleichung (6) die Lösung des Problems, die Gleichung der Magnetisierungskurve zu finden. Das heißt, für einen gegebenen Wert von h kann man ϑ aus Gleichung (6) in α darstellen, und dieser Wert liefert, in Gleichung (11)

eingesetzt, i . Mit Rücksicht auf die oben besprochenen Diskontinuitäten in ϑ muß man jedoch das Problem für große und kleine Werte von h getrennt betrachten.

Ist h klein, so ist auch ϑ klein, und wir können $\sin 4\vartheta = 4\vartheta$ setzen. Gleichung (6) wird dann

$$h(\sin \alpha - \vartheta \cos \alpha) = 4\vartheta. \quad (12)$$

Hieraus

$$\vartheta = \frac{h \sin \alpha}{4 + h \cos \alpha}.$$

Setzt man diesen Wert in Gleichung (11) ein, so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos \alpha + \vartheta \sin \alpha) d\alpha, \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\cos \alpha + \frac{h \sin^2 \alpha}{4 + h \cos \alpha} \right) d\alpha, \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \alpha d\alpha + \frac{h}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \alpha \left(1 + \frac{h}{4} \cos \alpha \right)^{-1} d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Das erste Integral verschwindet, das zweite ergibt nach Entwicklung in eine Potenzreihe und Integration:

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{h}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{h^2}{8 \cdot 4^2} + \frac{\pi}{16} \frac{h^4}{4^4} + \dots \right), \\ &= 0,125 h + 0,00195 h^3 + 0,00007 h^5 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Die Intensität i ist hier als ungerade Funktion von h ausgedrückt und ist in der Nähe des Anfangspunktes nahezu linear; mit wachsendem h ist die Kurve konvex gegen die h -Achse. Sie stimmt gut mit den experimentell gefundenen Kurven überein.

Die Lösung für große Werte von h ist kompliziert durch die plötzlichen Veränderungen in dem Werte von ϑ . Zudem hängt der Winkel, bei dem diese Diskontinuitäten auftreten, sowohl von dem äußeren Felde als auch von der Orientierung des Komplexes ab. Man muß daher bei der Auswertung von (11) das Integrationsintervall in verschiedene Teile zerlegen. Für ein gegebenes h können die kritischen Winkel aus den Gleichungen (8) und (6) bestimmt werden, deren Betrachtung zeigt, daß es für reduzierte

Felder, die nur wenig größer als Eins sind, drei solche Winkel gibt, die somit vier Integrationsintervalle liefern. Nennt man diese Winkel α_1 , α_2 und α_3 , so hat man

$$\int_0^\pi = \int_0^{\alpha_1} + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} + \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} + \int_{\alpha_3}^\pi. \quad (15)$$

Für die Komplexe, die innerhalb der Intervalle des ersten und vierten Integrals liegen, bleiben die Magnete stabil, da das durch das äußere Feld hervorgerufene Drehmoment das rückwirkende nicht überschreitet. Für die Komplexe des zweiten Integrals machen die Magnete Sprünge von $\frac{\pi}{2}$, wie oben bei den Fällen (2) und (3) erklärt ist, und die Integrationsgrenzen müssen von α_1 und α_2 in $\alpha_1 - \frac{\pi}{2}$ und $\alpha_2 - \frac{\pi}{2}$ abgeändert werden. Für das dritte Integral liegen die Magnete jenseits der ersten und zweiten Lage des stabilen Gleichgewichts und springen um den Winkel π . Die Grenzen müssen entsprechend in $\alpha_2 - \pi$ und $\alpha_3 - \pi$ abgeändert werden.

Der Integrand der Gleichung (11) enthält ϑ , und die Auswertung kann leichter ausgeführt werden, wenn diese Variable als α vorkommt. Die Elimination von α kann man folgendermaßen ausführen. Differenziert man (6) nach ϑ , so ergibt sich

$$h \cos(\alpha - \vartheta) \left(\frac{d\alpha}{d\vartheta} - 1 \right) = 4 \cos 4\vartheta.$$

Hieraus

$$\frac{d\alpha}{d\vartheta} = \frac{4 \cos 4\vartheta}{h \cos(\alpha - \vartheta)} + 1.$$

Da

$$\cos(\alpha - \vartheta) = + \frac{1}{h} \sqrt{h^2 - \sin^2 4\vartheta}, \quad (16)$$

so ist

$$i = \frac{1}{\pi} \int \left\{ \frac{4 \cos 4\vartheta}{h} + \frac{1}{h} \sqrt{h^2 - \sin^2 4\vartheta} \right\} d\vartheta.$$

Die neuen Integrationsgrenzen, die α_1 , α_2 , α_3 für gegebene Werte von h entsprechen, erhält man, wenn man diese Werte nacheinander in Gleichung (6) einsetzt und sie nach ϑ auflöst. So erhält man

$$\int_0^\pi = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_1'} + \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_2'} + \int_{\vartheta_3}^{\vartheta_3'} + \int_{\vartheta_4}^{\vartheta_4'} \quad (17)$$

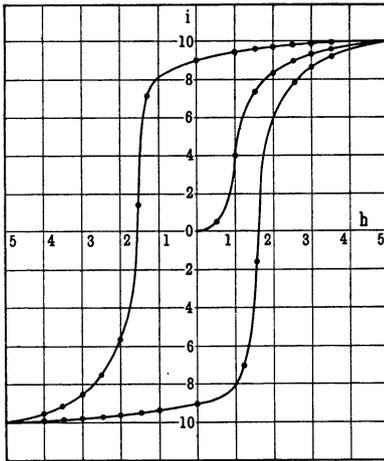
Aus Gleichung (16) folgt

$$i = \frac{1}{\pi h} \left\{ \left[\sin 4\vartheta \right]_{\vartheta}^{\vartheta'} \pm \frac{1}{\pi} \int_{\vartheta}^{\vartheta'} \sqrt{1 - \frac{1}{h^2} \sin 4\vartheta} d\vartheta \right\}. \quad (18)$$

Das Integral in dieser Gleichung kann man schreiben:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\vartheta'} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 4\vartheta} d\vartheta - \int_0^{\vartheta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 4\vartheta} d\vartheta, \quad (19)$$

Fig. 24.



wobei $k^2 = \frac{1}{h^2}$. Dies sind elliptische Integrale zweiter Art mit dem Modul k , die man schreiben kann:

$$\frac{1}{4\pi} \{ E(k, 4\vartheta') - E(k, 4\vartheta) \}.$$

Indem Honda und Okûbo E in Potenzreihen nach k entwickelten und die geeigneten Grenzen von ϑ in Gleichung (17) aus den Gleichungen (8) und (6) bestimmten, berechneten sie die vier verschiedenen Werten von h entsprechenden Intensitäten. Die Ergebnisse sind

in Tabelle 1 mitgeteilt und in Fig. 24 wiedergegeben, die in bemerkenswertem Grade die Eigentümlichkeit der experimentell bestimmten Magnetisierungskurve eines ferromagnetischen Körpers besitzt.

Tabelle 1.

h					i
1,0	—	—	—	—	0,183
1,5	0,301	0,436	0,035	— 0,096	0,677
2,0	0,286	0,448	0,127	— 0,045	0,816
2,5	0,289	0,475	0,172	— 0,031	0,875
3,0	0,241	0,483	0,196	— 0,011	0,909

Der zu erwartende remanente Magnetismus kann auf Grund der vorliegenden Theorie folgendermaßen erhalten werden. Ist h unendlich groß geworden, so nehmen die Magnete aller Komplexe mit Orientierungen zwischen $\pm \frac{\pi}{4}$ und $\pm \frac{3\pi}{4}$ neue Gleichgewichtslagen ein, die diskontinuierlichen Drehungen von $\frac{\pi}{2}$ in bezug auf ihre Anfangslagen entsprechen, während die zwischen $\pm \frac{3\pi}{4}$ und π liegenden Magnete um π springen. Geht das Feld auf Null zurück, so verhalten sich alle Magnete wie die zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ liegenden, die reversibel zu ihren ursprünglichen Lagen zurückkehren. Der remanente Magnetismus R ist dann gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} R &= 2 \int_0^{\pi/4} M \cos \vartheta dN, \quad \text{wobei} \quad dN = \frac{2N}{\pi} d\vartheta, \\ &= \frac{4J_0}{\pi} \int_0^{\pi/4} \cos \vartheta d\vartheta = \frac{4J_0}{\pi\sqrt{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Also ist der reduzierte remanente Magnetismus r

$$r = \frac{R}{J_0} = 0,8927.$$

Den Teil der Hysteresiskurve, der zwischen dem Remanenzpunkt und der Maximalinduktion liegt, findet man durch die Betrachtung der Tatsache, daß der Magnetisierungsvorgang in diesem Intervall reversibel verläuft, und daß alle Komplexe anfängliche Orientierungen zwischen $\pm \frac{\pi}{4}$ in bezug auf die Feldrichtung besitzen. Das Magnetisierungsgesetz ist dann durch folgende Gleichungen gegeben:

$$i = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \cos(\alpha - \vartheta) d\alpha, \quad \text{und} \quad h = \frac{\sin 4\vartheta}{\sin(\alpha - \vartheta)}. \quad (21)$$

Für kleines h erhalten wir:

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/4} (h + 4 \cos \alpha) \left(1 + \frac{h}{4} \cos \alpha\right)^{-1} d\alpha, \\ &= 0,8927 + 0,047 h - 0,083 h^3 \dots \end{aligned}$$

Für einen größeren Wert von h muß man Gleichung (19) anwenden, wobei man die richtigen Integrationsgrenzen aus den Gleichungen (8) und (6) erhält. Den Teil der Hysteresekurve für negative Werte von h erhält man durch die Annahme, daß dieser Fall äquivalent der Magnetisierung einer Gruppe von Komplexen mit gleichmäßig zwischen den Winkeln $\frac{3\pi}{4}$ und $\frac{5\pi}{4}$ verteilten Anfangsrichtungen durch ein positives Feld ist.

Die Ergebnisse der Berechnung sind in Tabelle 2 mitgeteilt und in Fig. 25 (S. 193) wiedergegeben.

Tabelle 2.

h	i	h	i
+ 0,0	1,000	— 1,0	0,815
3,5	0,973	— 1,5	0,015
3,0	0,962	— 2,0	— 0,584
2,5	0,956	— 2,5	— 0,786
2,0	0,944	— 3,0	— 0,847
1,5	0,932	— 5,0	— 0,981
1,0	0,922	— ∞	— 1,000
0,0	0,893		

Die Ähnlichkeit zwischen diesen und den experimentell gefundenen Kurven ist auffallend. Die wichtigste Abweichung ist wohl der hohe Wert der Remanenz. Für die hier abgeleiteten Kurven ist die Remanenz 89 Proz., während man in der Praxis selten einen größeren Wert als 60 Proz. findet. Diese Verschiedenheit kommt wahrscheinlich daher, daß in der vorliegenden Theorie die thermische Agitation nicht berücksichtigt ist. Man nimmt an, daß die hysteretischen Erscheinungen nur dann auftreten, wenn die Molekularmagnete sich plötzlich um Winkel von $\frac{\pi}{2}$ oder π drehen, während sonst die Vorgänge reversibel sind. Die Energieverluste durch die Hysterese muß man durch die kinetische Energie erklären, die die Magnete bei diesen Sprüngen erwerben und die dann durch Reibung, Strahlung oder irgend einen anderen Vorgang zerstreut wird.

Honda und Okûbo haben ihre Forschungen auch auf den Fall magnetischer Kristalle ausgedehnt. Zu diesem Zwecke braucht

die Theorie für die Kristalle des rechtwinkligen Systems, wie Magnetit und Hämatit, nur dahin abgeändert zu werden, daß alle Elementargruppen in derselben Richtung, und nicht zufällig, wie in dem oben besprochenen Falle, angeordnet sind. Für Pyrrhotit muß man ein hexagonales Raumgitter anwenden, für das $F(\theta)$ eine Periode von $\frac{\pi}{6}$ hat. Auf diese Weise leiteten sie die Ergebnisse von Weiss, Quittner und Kunz für diese Kristalle mit demselben Genauigkeitsgrad ab, wie er für den Fall gewöhnlicher ferromagnetischer Körper erreicht worden war.

Das mittlere molekulare Feld der diamagnetischen Körper.

In dem Überblick über die Theorie von Weiss war hervorgehoben worden, daß viele der Erscheinungen des Ferromagnetismus durch die Gesetze des Paramagnetismus dargestellt werden können, wenn man ein inneres oder molekulares Feld einführt, das durch die Anwesenheit der Nachbarmoleküle hervorgerufen ist. Langevin hat darauf hingewiesen, daß der Ursprung der magnetischen Eigenschaften sowohl der para- als auch der diamagnetischen Körper in der dämpfungsfreien Rotation der Elektronen in geschlossenen Bahnen um die positiven Kerne zu suchen ist. Besitzt die Anordnung der Bahnen vollständige Symmetrie, so ist das entstandene magnetische Moment und daher auch das Feld für im Vergleich zu molekularen Größen große Entfernungen Null, und der Körper ist diamagnetisch. Ist andererseits in der Anordnung der Bahnen eine Störung der Symmetrie, so ist das Feld in einigem Abstand nicht Null, und der Körper ist paramagnetisch. Die ponderomotorische Kraft der Abstoßung, die diamagnetische Körper in einem magnetischen Felde zeigen, läßt sich durch die Annahme von Veränderungen in den Elektronenbahnen in Übereinstimmung mit den gewöhnlichen Gesetzen induzierter Ströme, analog der Deutung des Zeemaneffekts durch Lorentz, erklären.

In seiner Theorie des Diamagnetismus hat Langevin nur die Wirkung des äußeren Feldes betrachtet und die Wirkung der Nachbarmoleküle, wenn der Körper polarisiert ist, nicht berücksichtigt. Die Tatsache, daß der Zeemaneffekt und die Drehung der Polarisationssebene, die beide zum Diamagnetismus in Be-

ziehungen stehen, im Falle ferromagnetischer Körper proportional der Magnetisierungsintensität und nicht dem angelegten äußeren Felde sind, dürfte darauf hinweisen, daß auch beim Diamagnetismus die Suszeptibilität eine Funktion des Polarisationszustandes sein muß. Insofern die Kräfte der diamagnetischen Abstoßung klein sind, und die Suszeptibilität im allgemeinen unabhängig von der Temperatur ist, wäre die Anwesenheit eines inneren oder molekularen Feldes schwer nachzuweisen. Nichtsdestoweniger könnte man bei einem Wechsel des Aggregatzustandes, wie beim Übergang vom flüssigen zum kristallinen Zustand, für den Fall, daß ein solches Feld existiert, eine meßbare Veränderung in der Suszeptibilität erwarten, verursacht durch Störungen der Elektronenbahnen, die durch die aus dem neuen Polarisationszustand sich ergebenden Wirkungen der magnetischen Felder hervorgerufen sind.

Oxley¹⁾ hat eine große Zahl diamagnetischer Körper untersucht und gefunden, daß mit wenigen Ausnahmen eine Abnahme von ungefähr 5 Proz. in der diamagnetischen Suszeptibilität auftritt, wenn der Körper vom flüssigen in den kristallinen Zustand übergeht. Nach der theoretischen Seite hat er die Methode von Langevin dadurch erweitert, daß er ein von der Polarisation abhängiges inneres Feld einführte, um die Diskontinuität beim Übergang zu erklären. Diese Erweiterung der Theorie ist folgende:

Statt, wie Langevin anzunehmen, daß die auf ein Elektron einer Drehgruppe wirkende Kraft einfach $e\mathfrak{E}$ sei, wobei \mathfrak{E} die elektrische Feldstärke und e die Ladung des Elektrons ist, nimmt er mit Lorenz an, daß sie durch

$$e[\mathfrak{E} + f(\mathfrak{P})]$$

gegeben ist, wobei \mathfrak{P} die elektrische Polarisation des Mediums und $f(\mathfrak{P})$ eine die Gruppierung der Moleküle für einen bestimmten Körper charakterisierende Funktion ist. Der kristallinische Zustand kann in erster Annäherung als isotrop betrachtet werden, da die Kristalle alle möglichen Orientierungen haben. Die durch die Veränderung der inneren Bewegungen eines Atoms oder Moleküls

¹⁾ Oxley, Phil. Trans. Roy. Soc. **214**, 109, 1914; **215**, 79, 1914; **220**, 247, 1920. Proc. Roy. Soc. A. **95**, 58, 1918.

durch den Kristallisationsprozeß hervorgerufene Wirkung wird durch eine Änderung im Werte von $f(\mathfrak{P})$ berücksichtigt. Nach der Theorie von Langevin seien a, b, c die Koordinaten des Schwerpunktes eines Moleküls, x, y, z die eines bestimmten Elektrons, ferner $\xi, \eta, \zeta = x - a, y - b, z - c$ die Koordinaten des Elektrons in bezug auf den Schwerpunkt des Moleküls, in dem es liegt. Da das Medium homogen und isotrop ist, so ist

$$\Sigma \xi = \Sigma \eta = \Sigma \zeta = \Sigma \xi \eta = \Sigma \eta \zeta = \Sigma \zeta \xi = 0. \quad (1)$$

Die Flächengeschwindigkeit des Elektrons mit Bezug auf den Schwerpunkt des Moleküls hat eine Komponente nach z :

$$\Omega_z = \frac{1}{2} (\xi \dot{\eta} - \eta \dot{\xi}), \quad (2)$$

und die Komponente des magnetischen Moments des Moleküls nach dieser Achse ist dann

$$M_z = \Sigma e \Omega_z. \quad (3)$$

Aus (2) und (3) ergibt sich

$$M_z = \frac{e}{2} \Sigma (\xi \dot{\eta} - \eta \dot{\xi}). \quad (4)$$

Es seien nun X, Y, Z die Komponenten der inneren Kräfte, die durch die Anordnung der auf das Elektron der Masse m wirkenden Moleküle bestimmt sind, ferner E und H das totale elektrische und magnetische Feld. Bewegt sich der Anfangspunkt mit einer Geschwindigkeit von den Komponenten u, v, w , dann sind die Bewegungsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{\xi} &= X + e [E_x + f(P_x)] + e H_z (v + \dot{y}) \\ &\quad - e H_y (w + \dot{z}) - m \ddot{a} - m \dot{u}, \\ m \ddot{\eta} &= Y + e (E_y + f(P_y)) + e H_x (w + \dot{z}) \\ &\quad - e H_z (u + \dot{x}) - m \ddot{b} - m \dot{v}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den Langevinschen nur durch Hinzufügung des Gliedes $f(\mathfrak{P})$. Da wegen der kleinen Abmessungen des betrachteten Elementarsystems die elektrische Kraft und die Polarisation in seiner ganzen Ausdehnung annähernd konstant sind, so können wir, wenn wir ihre Werte im Mittelpunkt

des Systems mit \mathfrak{E}_0 und $f(\mathfrak{P}_0)$ bezeichnen, nach Reihen entwickeln und die Potenzen höher als Eins vernachlässigen, schreiben:

$$E_x = E_{0x} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)_0 z; \quad (6)$$

$$f(P_x) = f(P_{0x}) + \left[\frac{\partial f(P_x)}{\partial x}\right]_0 x + \left[\frac{\partial f(P_x)}{\partial y}\right]_0 y + \left[\frac{\partial f(P_x)}{\partial z}\right]_0 z, \quad (7)$$

Berechnet man nun M aus obigen Gleichungen, so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} M_z = & \frac{e^2}{4m} \left[A \left\{ \left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)_0 \right\} + w A \left\{ \left(\frac{\partial H_x}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial H_y}{\partial y}\right)_0 \right\} \right. \\ & \left. - A \left\{ u \left(\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)_0 + v \left(\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)_0 \right\} - H_{0z} \frac{dA}{dt} \right], \\ & + \frac{e^2}{4m} A \left\{ \left(\frac{\partial f(P_y)}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial f(P_x)}{\partial y}\right)_0 \right\} + \frac{e^2}{2m} \Sigma (\xi Y - \eta X), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

wobei $\frac{A}{2} = \Sigma \xi^2 = \Sigma \eta^2 = \Sigma \xi^2$. Das letzte Glied von (8) ist

Null, vorausgesetzt, daß kein Molekül ein Anfangsmoment hat, wie die Langevinsche Theorie erfordert. Läßt man den Index Null weg und führt die elektromagnetischen Feldgleichungen

$$\text{rot } \mathfrak{E} = \dot{\mathfrak{H}} \quad \text{und} \quad \text{div. } \mathfrak{H} = 0 \quad (9)$$

ein, so ergibt sich

$$\dot{M}_z = - \frac{e^2}{4m} \frac{d}{dt} (H_z A) + \frac{e^2}{4m} A \left[\frac{\partial f(P_y)}{\partial x} - \frac{\partial f(P_x)}{\partial y} \right]. \quad (10)$$

Integriert man von der Zeit 0 ($H = 0$) bis zur Zeit τ ($H = H_z$), so erhält man:

$$\Delta M_z = - \frac{e^2}{4m} H_z A + \frac{e^2 A}{4m} \int_0^\tau \left[\frac{\partial}{\partial x} f(P_y) - \frac{\partial}{\partial y} f(P_x) \right] dt; \quad (11)$$

hierbei ist ΔM_z das magnetische Moment, welches in dem Molekül durch die im Intervall vorsichgegangene Veränderung des Feldes hervorgerufen wurde. Das zweite Glied hängt von der molekularen Anordnung in dem Körper ab und bewirkt eine Änderung der Elektronenbahnen, die ihre Selbstinduktionen ändern werden. Jede derartige Änderung in der Selbstinduktion kann durch eine kleine Änderung in der Intensität des angelegten magnetischen Feldes dargestellt werden, und man kann schreiben:

$$f(\mathfrak{P}) = a\mathfrak{P}, \quad (12)$$

wobei a die Anordnung der Moleküle kennzeichnet. Infolgedessen:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(P_y) - \frac{\partial}{\partial y} f(P_x) = a \left(\frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y} \right) = -a \frac{\partial}{\partial t} (\delta H_z), \quad (13)$$

wobei $a(\delta H_z)$ die unendlich kleine Änderung in dem äußeren Felde während des kleinen Zeitintervalls τ darstellt. Also:

$$\left. \begin{aligned} \Delta M_z &= -\frac{e^2}{4m} H_z A - \frac{e^2 A a}{4m} \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t} (\delta H_z) dt, \\ &= -\frac{e^2 H_z A}{4m} \left[1 + \frac{a \Delta H_z}{H_z} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ΔH_z ist die totale Variation von H_z , die durch die Störung der Elektronenbahnen verursacht ist. Wenn N die Zahl der Moleküle im Gramm ist, so kann man die spezifische Suszeptibilität schreiben:

$$\chi = \frac{N \Delta M_z}{H_z} = -\frac{N e^2 A}{4m} \left[1 + a \frac{\Delta H_z}{H_z} \right]. \quad (15)$$

So hat man einen Ausdruck erhalten, aus dem hervorgeht, daß die Suszeptibilität mittels der Größe a von dem Polarisationszustand des Körpers abhängt, und der Ausdruck $a \Delta H_z$ stellt das hierdurch hervorgerufene molekulare Feld dar. Ist $a = 0$, so reduziert sich (15) zu dem ursprünglich von Langevin erhaltenen Ausdruck. Nennt man a_l und a_c ¹⁾ die Polarisationskonstanten für den flüssigen und den kristallinen Zustand, so kann man die Variation von χ bei der Kristallisation schreiben:

$$\frac{\delta \chi}{\chi} = (a_c - a_l) \frac{\Delta H_z}{H_z}. \quad (16)$$

Wie Larmor²⁾ gezeigt hat, ist a_e für die meisten Flüssigkeiten von der Größenordnung $\frac{1}{3}$. Der Wert von a_c ist groß. Doch ist seine genaue Bestimmung im einzelnen Falle schwierig, da er von der tatsächlichen Verteilung der Moleküle abhängt, über die wir verhältnismäßig wenig wissen. Man kann jedoch einen Näherungswert für seine Größe aus der Arbeit von Chaudier³⁾ über die Änderung der magnetischen Drehkraft mit der Änderung

1) Entspr. dem englischen: liquid und crystalline. (A. d. Ü.)

2) Larmor, Phil. Trans. Roy. Soc. A, 213, 1897.

3) Chaudier, Compt. Rend. 156, 1008, 1913.

des Zustandes gewinnen. Er zeigte, daß a_c mindestens von der Größenordnung 10^3 und wahrscheinlicher noch größer sein muß.

$\frac{\Delta H_z}{H_z}$ ist infolgedessen von der Größe $5 \cdot 10^{-4}$.

Man kann das molekulare Feld bei den diamagnetischen Körpern mit dem bei ferromagnetischen Körpern nach der Weiss'schen Theorie folgendermaßen vergleichen:

Für eine unterkühlte Flüssigkeit können wir schreiben:

$$\chi_l = - \frac{N e^2 A}{4 m}, \quad (17)$$

während für Kristalle bei der gleichen Temperatur χ_c durch Gleichung (15) gegeben ist. Also ist

$$\chi_c = \chi_l \left(1 + a_c \frac{\Delta H_z}{H_z} \right), \quad (18)$$

woraus

$$\chi_c H_z = \chi_l (H_z + a_c \Delta H_z). \quad (19)$$

$a_c \Delta H_z$ ist das mittlere molekulare Feld für diamagnetische Kristalle. Da in Gleichung (6) der Weiss'schen Theorie die Konstante des molekularen Feldes, die wir hier mit N^* bezeichnen wollen, als Proportionalitätsfaktor zwischen molekularem Felde und Intensität genommen ist, während in Gleichung (19) $a_c \Delta H_z$ selbst das molekulare Feld ist, so müssen wir N^* gleich a'_c setzen, wobei letzteres durch die Gleichung

$$a_c \Delta H_z = a'_c N \Delta M_z \varrho \quad (20)$$

definiert ist. Hierbei ist ϱ , die Dichte des Körpers für die von Oxley untersuchten Kristalle, annähernd Eins. Benutzt man die erste Form von Gleichung (15) und setzt $\frac{\Delta H_z}{H_z} = 5 \cdot 10^{-4}$, so ergibt sich

$$a'_c = \frac{5 \cdot 10^{-4} a_c}{\chi}. \quad (21)$$

Nimmt man $\chi = 5 \cdot 10^{-7}$ und $a_c = 10^3$ an, so findet man a'_c von der Größenordnung 10^5 , d. h. dieselbe, wie bei den Werten von N^* , die Weiss und Beck gefunden haben.

Das örtliche molekulare Feld.

In der obigen Besprechung des mittleren molekularen Feldes war hervorgehoben worden, daß die Änderung der Suszeptibilität, die den Übergang vom flüssigen zum kristallinen Zustand begleitet, zufriedenstellend durch ein mittleres molekulares Feld dargestellt werden kann, das nur im kristallinen Zustand abschätzbar ist und das magnetisch durch den Ausdruck $\alpha_c \Delta H_z$ bezeichnet werden kann. Die Natur dieses Feldes war nicht weiter spezifiziert worden, als daß man sagte, es sei von solcher Größe, daß es innerhalb des Kristalls eine Störung oder Polarisation hervorruft, die der tatsächlich durch die molekularen Kräfte im Kristall entstandenen Störung äquivalent ist.

Nach der durch Langevin entwickelten Theorie des Magnetismus enthält ein diamagnetisches Molekül entgegengesetzt kreisende Elektronensysteme, die einander in Entfernungen, die gegenüber molekularen Dimensionen groß sind, die Wage halten, die aber nichtsdestoweniger dicht bei den Molekülen Felder hervorbringen, die sehr groß sein können. Jedes Molekül eines Kristalls ist infolgedessen den starken magnetischen Feldern seiner Nachbarn unterworfen und die entstehende Störung der Elektronenbahnen kann Veranlassung geben für die Verschiebung einer Absorptionsbande, wenn eine Flüssigkeit kristallisiert, und für die natürliche Doppelbrechung der Kristalle. Die Richtung dieses örtlichen Feldes ändert sich, wenn man von Molekül zu Molekül durch das Raumgitter geht, und unterscheidet sich von dem mittleren molekularen Felde dadurch, daß es unabhängig von der Existenz eines äußeren Feldes vorhanden ist. Die durch diese gegenseitigen magnetischen Wirkungen hervorgerufenen Kräfte sind verantwortlich für die Härte der Kristalle und die Existenz von Spaltungsflächen.

Um einen Begriff von der Intensität des örtlichen molekularen Feldes zu bekommen, nehmen wir an, es sei von solcher Größe, daß es eine Änderung in der Suszeptibilität hervorruft, von derselben Größe, wie sie tatsächlich bei den Kristallisationsversuchen beobachtet wurde.

Nach der Langevinschen Theorie haben wir:

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{H \tau e}{4 \pi m}, \quad (22)$$

wobei ΔM die Änderung des magnetischen Moments einer Elektronenbahn vom Moment M durch die Anlegung des Feldes H ist, τ die Periode des Elektrons und $\frac{e}{m}$ das Verhältnis der Ladung zur Masse derselben. Aus Gleichung (22) erhalten wir:

$$\text{und } \left. \begin{aligned} \frac{\Delta M_l}{M_l} &= \frac{H \tau_l e}{4 \pi m} \\ \frac{\Delta M_c}{M_c} &= \frac{H \tau_c e}{4 \pi m} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

wobei der Index l sich auf den flüssigen, c auf den kristallinen Zustand bezieht. Bei dem Übergang vom flüssigen zum kristallinen Zustand ist die durch das örtliche molekulare Feld H_c hervorgerufene Änderung von M_l : $\Delta M'_l$, wofür:

$$\frac{\Delta M'_l}{M_c} = - \frac{e \tau_l H_c}{4 \pi m} \quad (24)$$

und

$$M_c = M_l \pm \Delta M_l \quad (25)$$

Ogleich H_c sich von einem Molekül zum anderen ändert, bleibt das Vorzeichen von $\Delta M'_l$ dasselbe; denn wenn H'_c das Vorzeichen ändert, kehrt sich auch M_l um, so daß jedes Molekül die gleiche, durch das örtliche molekulare Feld hervorgerufene Störung erleidet. Das doppelte Vorzeichen deutet an, daß die durch ihre besondere Art der Packung verursachte Anordnung der Moleküle derart ist, daß in einigen Fällen δ_χ positiv, in anderen negativ ist. Aus Gleichung (24) und (25) erhalten wir

$$M_c = M_l \left(1 \pm \frac{e \tau_l H_c}{4 \cdot \pi m} \right), \quad (26)$$

ferner

$$\frac{\Delta M_c - \Delta M_l}{\Delta M_l} = \frac{\tau_c}{\tau_l} \left(1 \pm \frac{e \tau_l H_c}{4 \pi m} \right) - 1. \quad (27)$$

Die Elektronen, die den Diamagnetismus erregen, bringen auch den Zeemaneffekt hervor, indem eine schwache Änderung in der Frequenz für beide Erscheinungen verantwortlich ist. Wir schreiben daher

$$\tau_c = \tau_l \pm \delta \tau,$$

wobei $\delta\tau$ die durch das örtliche molekulare Feld H_c hervorgerufene Änderung der Periode ist, wenn die Kristallisation einsetzt. Aus Gleichung (15) folgt:

$$\left. \begin{aligned} \chi_c &= \frac{Nn}{H} \Delta M_c, & \chi_l &= \frac{Nn}{H} \Delta M_l \\ \text{und} & & \delta\chi &= \chi_c - \chi_l = \frac{Nn}{H} (\Delta M_c - \Delta M_l), \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

wobei n die Zahl der Elektronen im Molekül und N die Zahl der Moleküle im Gramm ist. Die Änderung der Periode $\delta\tau$ ist gegeben durch

$$\frac{\delta\tau}{\tau} = \frac{e\tau_l H_c}{4\pi m}. \quad (29)$$

Aus Gleichung (27), (28) und (29) folgt

$$\frac{\delta\chi}{\chi} = \left(1 \pm \frac{e\tau_l H_c}{4\pi m}\right) \left(1 \mp \frac{e\tau_l H_c}{4\pi m}\right) - 1. \quad (30)$$

Diese Gleichung liefert die Größenordnung des örtlichen Feldes H_c , dargestellt durch die prozentuelle Änderung von χ bei der Kristallisation. In allen untersuchten Körpern beläuft sich diese Änderung auf wenige Prozente. Also:

$$\frac{1}{100} = \frac{e^2 \tau_l^2 H_c^2}{16 \pi^2 m^2}.$$

Setzt man $\tau_l = 10^{-15}$ Sekunden und $\frac{e}{m} = 2 \cdot 10^7$, so erhält man

$$H_c = 6 \cdot 10^7 \text{ Gauss.}$$

Wir haben gegenwärtig noch keine Unterlagen dafür, um wieviel sich eine Absorptionslinie verschiebt, wenn ein Körper vom flüssigen in den kristallinen Zustand übergeht; diese Erkenntnis würde uns direkt die Größe von H nachprüfen lassen. Andererseits wissen wir, daß die induzierte magnetische Doppelbrechung in einer Flüssigkeit proportional dem Quadrat des äußeren Feldes ist. Unter der Annahme, daß dieses Gesetz noch für Felder von der Größe 10^7 gilt, müßten wir nach unserer Auffassung von dem örtlichen Felde in einem Kristall, eine Doppelbrechung erwarten, die ungefähr 40 000 mal so groß ist als die größten in einer Flüssigkeit induzierten Werte. Das ist ungefähr das Verhältnis der Doppelbrechung von Nitrobenzin unter einem Felde von 3×10^4 Gauß zur natürlichen Doppelbrechung von Quarz. Die Tatsache, daß die

meisten einachsigen Kristalle eine derjenigen von Quarz vergleichbare Doppelbrechung haben, die viel größer ist, als die in Flüssigkeiten durch im Laboratorium erreichbare Felder induzierte, würde den Gedanken unterstützen, daß das innere molekulare Feld, magnetisch gedeutet, von einer Größenordnung sein müßte, die groß ist gegenüber $3 \cdot 10^4$. Diese Felder wären also sogar größer als die für ferromagnetische Körper beobachteten, wenn man sie nach der Theorie von Weiss deutet.

Spannungen und Energie des molekularen Feldes.

Existiert ein molekulares Feld von der in den obigen Abschnitten abgeleiteten Größenordnung, so müssen die mit der diamagnetischen kristallinen Struktur verbundenen Kräfte sehr groß sein und die potentielle Energie des kristallinen Zustandes muß beträchtlich sein. Es müßte daher möglich sein, aus einer Betrachtung über die latente Wärme beim Schmelzen von Kristallen eine rohe Abschätzung der Größe des örtlichen molekularen Feldes zu geben. Ist $|i|$ das örtliche magnetische Moment, das im Verein mit dem örtlichen Felde H_c in der kristallinen Struktur ein Molekül an das andere bindet, und sind alle elementaren Systeme unabhängig voneinander, so kann man die Energie eines Gramms des Körpers kraft der besonderen kristallinen Anordnung schreiben:

$$E = \frac{H_c}{2} n |i|; \quad H_c = \frac{1}{2} a'_c J. \quad (31)$$

Hierbei ist n die Zahl der Moleküle im Kubikzentimeter, ρ die Dichte und $J = n |i|$ die Summe der örtlichen Magnetisierungsintensität im Kubikzentimeter. a'_c ist, ebenso wie oben, die Konstante des örtlichen molekularen Feldes. Wie oben gezeigt, ist das örtliche molekulare Feld $H_c \sim a'_c J$ von der Größenordnung 10^7 , und da a'_c von der Ordnung 10^5 ist, so folgt, daß J von der Ordnung 10^2 ist. Also ist die durch Gleichung (31) gegebene Energie pro Gramm von der Größenordnung 10^9 , und ihr thermisches Äquivalent ist annähernd 25 Kalorien. Dies stellt die zur Zerstörung der kristallinen Struktur nötige Energie dar, d. h. die latente Schmelzwärme. Sie ist von der richtigen Größenordnung, denn eine große Anzahl diamagnetischer kristallinischer Körper hat eine latente Schmelzwärme zwischen 21 für Anilin und 44 für Essigsäure. Es ist dies auch die Größenordnung der latenten Umwandlungswärme

des Eisens aus dem ferro- in den paramagnetischen Zustand, wie Weiss und Beck gefunden haben. Offenbar ist der Wert von α'_c nur eine Annäherung, solange wir nicht die Anordnung innerhalb der kristallinischen Struktur kennen; aber die Tatsache, daß er der Größenordnung nach richtig herauskommt, ist ein augenscheinlicher Beweis für die Existenz solcher molekularer Felder und Intensitäten, wie sie angenommen wurden.

Molekulares Feld und Zugfestigkeit.

Welcher Art auch die Natur der Kräfte sein mag, die die Moleküle einer Flüssigkeit zusammenhalten, so müssen wir ihnen bei der Kristallisation immer die des inneren örtlichen Feldes zählen. Wenn man annimmt, daß die einzigen Zusatzkräfte, die die Moleküle bei der Kristallisation aneinanderbinden, die durch die magnetischen Felder hervorgerufen sind, dann müßte es möglich sein, die Zugfestigkeit aus der Betrachtung der örtlichen Felder und der Magnetisierungsintensität zu berechnen. Die potentielle Energie einer Volumeneinheit eines kristallinischen Körpers, die zu derjenigen im flüssigen Zustand noch dazukommt, ist

$$\frac{1}{2} H_c J.$$

Sie ist dann ein Maß für die mechanische Spannung, die die Moleküle aneinanderbindet, und sie bestimmt die Festigkeit des Körpers. In einem vorhergehenden Abschnitt war gezeigt worden, daß J für diamagnetische Körper von der Größenordnung 10^2 ist, und da H_c von der Größenordnung 10^7 ist, so folgt, daß die Zugfestigkeit von der Größenordnung $0,5 \cdot 10^9$ Dynen pro Quadratcentimeter sein muß. Daß dies gerade diejenige ist, die auch experimentell gefunden wird, sieht man, wenn man sie mit den Werten für Glas $1,1 \div 1,5 \cdot 10^9$, für Quarz $10 \cdot 10^9$, für Blei $0,16 \cdot 10^9$ usw. vergleicht. Überdies, benutzt man die entsprechenden Werte für Intensität und molekulares Feld für ferromagnetische Körper, wie sie Weiss bestimmte, so erhält man für die Zugfestigkeit folgende Werte: Eisen $5,5 \cdot 10^9$, Nickel $1,4 \cdot 10^9$, Kobalt $4,4 \cdot 10^9$, die sehr gut zu den beobachteten Werten passen.

Man kann also schließen, daß die durch das örtliche molekulare Feld hervorgerufenen Spannungen eine befriedigende Deutung der äußersten Zugfestigkeiten der kristallinischen Medien für diamagnetische und für ferromagnetische Körper geben

**Die Dichteänderung bei der
Kristallisation als Magnetostriktionseffekt des molekularen Feldes.**

Larmor¹⁾ zeigte, daß die potentielle Energie eines Grammes einer diamagnetischen Flüssigkeit, deren Moleküle nur wenig aufeinander einwirken,

$$\frac{1}{2\varrho} (K_1 H^2 + \lambda K_1^2 H^2) \quad (32)$$

ist, wobei K_1 die Suszeptibilität der Volumeneinheit und λ eine Konstante annähernd gleich $\frac{1}{5}$ ist. Wird nun die Flüssigkeit einem magnetischen Felde unterworfen, so findet eine Volumenänderung statt, derart, daß der innere Versuch um einen Betrag sinkt, der gleich der partiellen Energie der Volumeneinheit des magnetischen Feldes ist. Da K_1 von der Größenordnung $-7 \cdot 10^{-7}$ ist, so ist das zweite Glied von (32) gegenüber dem ersten zu vernachlässigen, und wenn C die Kompressibilität der Flüssigkeit ist, so kann man die durch das Feld hervorgerufene Volumenänderung schreiben:

$$\delta V = \frac{1}{2\varrho} C K_1 H^2, \quad (33)$$

eine Beziehung, die durch Quincke für Felder bis zu 50 000 Gauß bestätigt wurde. Nimmt man an, daß dieses Gesetz auch noch für Felder von der Größenordnung der örtlichen molekularen Felder, nämlich 10^7 Gauß, gilt, so kann die Volumenänderung bei der Kristallisation berechnet werden, wenn man das erste Glied der Gleichung (32) durch den zweiten Ausdruck der Gleichung (31) ersetzt. Dann ergibt sich

$$\delta V = \frac{1}{2} C a_c' J^2. \quad (34)$$

Aus Betrachtungen über die Bestimmung der Größen a_c' und J aus inneren Spannungen, die die Veränderung des Gefrierpunktes mit dem Druck begleiten, hat Oxley für die unten angeführten Körper folgende Werte gefunden:

$$a_c' = 2,5 \cdot 10^4 \quad \text{und} \quad J = 400.$$

¹⁾ Larmor, Proc. Roy. Soc. A. **52**, 63, 1892.

Da C für diese Körper von der Größenordnung $0,8 \cdot 10^{-10}$ ist, so ergibt sich

$$\delta V = \frac{1}{3} \cdot 0,8 \cdot 10^{-10} \cdot 2,5 \cdot 10^4 \cdot 16 \cdot 10^{10} = 0,16 \text{ cm}^3.$$

Für einige Körper sind folgende Werte von δV beobachtet worden:

Körper	δV
Benzin	0,10
Naphthalin	0,14
Benzophenon	0,19
Ameisensäure	0,10
Diphenylamin	0,10

Die berechneten Werte stimmen so gut es zu erwarten war mit den beobachteten überein, da wir für a'_c und J nur die Größenordnungen kennen; denn sie sind unbekannte Funktionen der molekularen Struktur und des Raumgitters, die für jeden Körper verschieden sind.

Theorien der magnetischen Kristalle und das Magneton.

Von **J. Kunz**,

a. o. Professor der mathematischen Physik an der Universität Illinois.

Die bis jetzt untersuchten ferromagnetischen Kristalle sind Pyrrhotit, Fe_7S_8 , der anscheinend hexagonal ist, Magnetit, Fe_3O_4 , vom kubischen System, die Eisenkristalle, vom kubischen System und Hämatit, Fe_2O_3 , der rhomboedrisch und hemiedrisch ist. Die Mehrzahl der Forschungen verdanken wir P. Weiss und seinen Mitarbeitern.

Die einfachsten Erscheinungen bot der Pyrrhotit, der zuerst von Weiss¹⁾ untersucht wurde und dessen Erforschung von J. Kunz²⁾ und M. Ziegler³⁾ fortgesetzt wurde.

Die Untersuchungsmethoden sind bei allen Messungen die gleichen; sie wurden zum Teil eingeführt und weitgehend vervollkommenet durch P. Weiss und seine Schüler; es sind dies entweder Ablenkungs- oder ballistische Methoden. Das dreidimensionale Problem wird auf ein zweidimensionales zurückgeführt, indem man dünne Platten parallel einer Kristallfläche abschneidet. Diese Platten bringt man in horizontaler oder vertikaler Lage um eine vertikale Achse drehbar in ein magnetisches Feld von bestimmter Richtung und Größe. Ist die Platte horizontal angebracht, so ergibt das Drehmoment D_1 die Komponente J_n der Magnetisierung, die senkrecht zur Richtung des horizontalen magnetischen Feldes H steht, entsprechend der Formel

$$D_1 = V \cdot H \cdot J_n,$$

1) P. Weiss, Les propriétés magnétiques de la pyrrhotine. Journ. d. phys. 1905, p. 469.

2) P. Weiss und J. Kunz, Journ. d. phys. 1905, p. 847.

3) Max Ziegler, Kristallmagnetische Eigenschaften des Pyrrhotins. Diss. Zürich 1915.

wobei V das Volumen der Platte ist. Wird das magnetische Feld um die Kristallplatte herumgedreht, so finden wir leicht die Normalkomponente der Magnetisierung für die verschiedenen Richtungen der Kristallplatte.

Um die Komponente J_p parallel zu dem Felde zu bestimmen, hängen wir dieselbe Platte in vertikaler Lage auf, so daß das Feld in die Plattenebene fällt, die sich zunächst in der Ruhelage befindet. Drehen wir nun das Feld um einen kleinen Winkel α nach rechts oder links, so wird die Platte unter einem Drehmoment

$$D_3 = J_p V H \sin(\alpha - \beta)$$

stehen. Die Platte selbst dreht sich um einen kleinen Winkel β . Hat die Platte außerdem eine Magnetisierungskomponente J_s senkrecht zu ihrer Oberfläche, so liefert sie einen Beitrag $J_s H V \cos(\alpha - \beta)$ zu diesem Moment. Um diesen Anteil möglichst klein zu machen, wählen wir die Platten so dünn wie möglich. Im Falle des normalen Pyrrhotits erleichtert die magnetische Ebene wesentlich die Messungen. Überdies kann die entmagnetisierende Wirkung der Platten in vielen Fällen vernachlässigt werden, so daß das äußere Feld unmittelbar als magnetisierendes Feld gelten kann. Wegen der Korrekturen β und J_s ist diese Methode mühsam und wird oft durch die ballistische Methode ersetzt. Eine Primärspule erzeugt ein gleichförmiges magnetisches Feld, in welchem man eine mit einem ballistischen Galvanometer verbundene Sekundärspule S anbringt. Bringt man die Kristallplatte in die Sekundärspule hinein oder zieht man sie aus ihr heraus, so entsteht ein ballistischer Ausschlag, der gegeben ist durch

$$edt = G J_p V,$$

wobei G eine Konstante und e die induzierte EMK ist. Gleichzeitig mit der Normalkomponente können wir die Rotationshysterese bestimmen, indem wir das Feld erst in die eine, dann in die entgegengesetzte Richtung um die in der Horizontalebene aufgehängte Platte drehen. Der erforderliche Apparat wurde von Weiss und seinen Schülern vervollkommenet und beschrieben (z. B. in der Arbeit von V. Quittner und Karl Beck).

Wir wenden uns nun zu den an den verschiedenen Kristallen gefundenen Ergebnissen; hierbei zeichnet sich der normale Pyrrhotit durch das Vorhandensein einer magnetischen Ebene und ziemlich einfache magnetische Eigenschaften aus.

Pyrrhotit.

Die chemische Zusammensetzung entspricht annähernd Fe_7S_8 ; er kristallisiert augenscheinlich im hexagonalen System, und seine magnetischen Eigenschaften entsprechen am meisten dem rhombischen System.

1882 machte A. Streng¹⁾ die wichtige Entdeckung der magnetischen Ebene des Pyrrhotits, wenigstens für den permanenten Magnetismus. Diese Messungen wurden vervollständigt durch Abt²⁾ und später durch die ins einzelne gehenden Messungen von Weiss sowie von Weiss und Kunz. Wir müssen zwischen zwei Typen von Pyrrhotit unterscheiden: die Kristalle von Morro-Velho in Brasilien ohne Spaltflächen und mit unebenem Bruche. Die magnetischen Eigenschaften sind sehr einfach. Weiss nennt diese Kristalle den normalen Pyrrhotit. Die anormalen Pyrrhotite sind weit ausgebreitet, blattartig, mit schlecht definierten magnetischen Eigenschaften und mit großen thermomagnetischen Unregelmäßigkeiten, besonders bezüglich der Hysterisis.

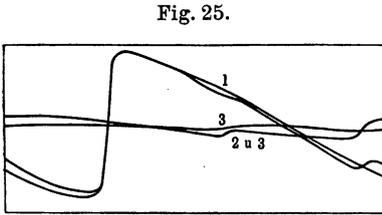
Die Basisebene des normalen Pyrrhotits ist die magnetische Ebene, in der der Kristall viel leichter magnetisierbar ist als in der Richtung senkrecht dazu. Die magnetischen Eigenschaften wiederholen sich dreimal in Winkelentfernungen von 60° in der magnetischen Ebene, haben aber verschiedene Größen. Es hat den Anschein, als ob die Kristalle aus drei Elementarkristallen (Kristallkomponenten) bestünden, die Seite an Seite so gelagert sind, daß die magnetischen Ebenen einander parallel liegen und daß die Richtungen der leichten Magnetisierbarkeit gegeneinander um 60° geneigt sind. Um die Eigenschaften des einfachen oder Elementarkristalls zu erhalten, müssen wir die Messungen durch eine graphische Methode der sukzessiven Annäherung korrigieren. Wir wählen solche Proben, bei denen eine der Komponenten stark überwiegt. Für den reinen Kristall ergibt sich eine Kurve von rhombischer Symmetrie, wobei jede Elementarkristallplatte eine bestimmte Richtung zeigt, in der die Sättigung durch sehr schwache Felder erreicht wird; dagegen sind in der Richtung senkrecht dazu bis zu 13400 Gauß nötig, um die Sättigung zu erhalten.

¹⁾ A. Streng, Neues Jahrb. d. Min. 1, 185, 1882.

²⁾ Abt, Wied. Ann. 1896, S. 135.

Messungen bei gewöhnlichen Temperaturen.

Fig. 25 gibt die Kurve der Komponenten in der magnetischen Ebene für 5550 Gauß. I stellt die Magnetisierungskomponente J_n senkrecht zum Felde dar. Fig. 26 gibt J_n für die verschiedenen



1) Erste Komponente (100 Proz.). 2) Zweite Komponente (14,1 Proz.). 3) Dritte Komponente (2,5 Proz.).

Fig. 26.

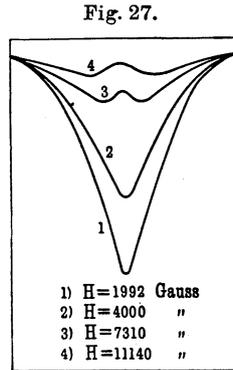
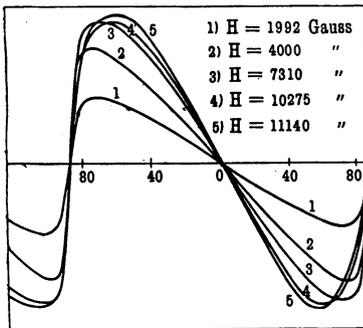
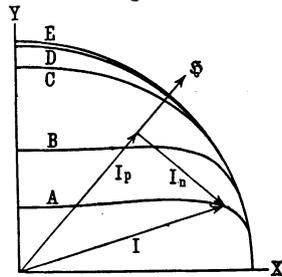


Fig. 27.

Fig. 28.



A) $H = 1192$ Gauß. B) $H = 4000$ Gauß. C) $H = 7310$ Gauß. D) $H = 10\ 275$ Gauß. E) $H = 11\ 140$ Gauß.

Richtungen und verschiedenen Felder, Fig. 27 gibt die entsprechenden Komponenten J_p parallel zu dem Felde. J_n geht zweimal durch Null in dem Intervall von 0 bis 180° , während J_p in demselben Intervall nur Maxima und Minima zeigt; dies ist eine gemeinsame Eigenschaft der beiden Komponenten aller Platten von allen Kristallen. Man kann mittels der zwei Komponenten leicht die Resultante \mathfrak{J} konstruieren. Das Ergebnis zeigt Fig. 28. Wenn der Endpunkt des Vektors \mathfrak{S} die magnetische Ebene bestreicht, so bleibt der Endpunkt von \mathfrak{J} , der resultierenden Magnetisierung innerhalb eines

gewissen Kreises, den Weiss den Magnetisierungskreis nannte. Läßt man sich den Vektor \mathfrak{H} des Feldes mit konstanter Geschwindigkeit um den Punkt 0 drehen, dann folgt, von der Richtung der leichten Magnetisierung OX ausgehend, der Magnetisierungsvektor \mathfrak{J} zuerst dem Felde sehr langsam. Sein Endpunkt bleibt auf dem Magnetisierungskreis, bis \mathfrak{H} nahezu die Richtung der schwierigen Magnetisierung OY erreicht hat. Dann verläßt \mathfrak{J} den Magnetisierungskreis und eilt schnell in flacher Kurve hinter dem Felde her, um es in der Richtung OY zu erreichen. Je größer das magnetische Feld ist, desto näher wird die Magnetisierungskurve an dem Sättigungskreis liegen. Für genügend hohe Felder (13 400 Gauß) fällt \mathfrak{J} mit dem Sättigungskreis ziemlich genau zusammen (zwischen 30 und 60° kommen Abweichungen von etwa 1 Proz. vor). P. Weiss nimmt an, daß für einen unendlich großen, vollständig homogenen Kristall die Sättigung in der Richtung der leichten Magnetisierung OX selbst bei noch so schwachen magnetischen Feldern erreicht wird; in den beiden anderen Hauptrichtungen würde das gleiche stattfinden, wenn nicht ein inneres entmagnetisierendes Feld von der Größe $N\mathfrak{J}$ vorhanden wäre, wobei N ein konstanter Koeffizient ist.

Hypothese von Weiss.

Das innere molekulare Feld H_i .

Um die bisher beschriebenen Eigenschaften des normalen Pyrrhotits in erster Annäherung darzustellen, macht P. Weiss folgende Annahme: in den Richtungen der drei Hauptachsen des Kristalls ist ein inneres molekulares Feld vorhanden, das proportional der Größe J in dieser Richtung und proportional einem gewissen Koeffizienten ist, der einen bestimmten Wert für jede Achse hat. Bezogen auf die Summe des äußeren und des molekularen magnetischen Feldes \mathfrak{H} verhält sich der Kristall wie ein isotropes Medium. Es seien X, Y, Z die drei zueinander senkrechten Hauptachsen des Kristalls, \mathfrak{H} das äußere Feld mit den Komponenten H_x, H_y, H_z , \mathfrak{J} die Magnetisierungsintensität mit den Komponenten J_x, J_y und J_z , N_1, N_2, N_3 die konstanten Koeffizienten des molekularen Feldes; dann sind die Komponenten des molekularen Feldes:

$$\begin{aligned} H_{mx} &= N_1 J_x, \\ H_{my} &= N_2 J_y, \\ H_{mz} &= N_3 J_z. \end{aligned}$$

Im allgemeinen hat das molekulare Feld nicht die Richtung von \mathfrak{J} , außer in den drei Achsenrichtungen. Die resultierenden Komponenten der magnetischen Kraft sind:

$$\begin{aligned} H_x + N_1 J_x, \\ H_y + N_2 J_y, \\ H_z + N_3 J_z. \end{aligned}$$

Fällt in einer bestimmten Richtung die resultierende magnetische Kraft mit der resultierenden Magnetisierungsintensität \mathfrak{J} zusammen, so gelten die folgenden Gleichungen:

$$\frac{H_x + N_1 J_x}{J_x} = \frac{H_y + N_2 J_y}{J_y} = \frac{H_z + N_3 J_z}{J_z} = n, \quad (1)$$

wobei n der reziproke Wert der Suszeptibilität des Kristalls ist, der in bezug auf das totale Feld isotrop ist. Es folgt unmittelbar:

$$J_x = \frac{H_x}{n - N_1}, \quad J_y = \frac{H_y}{n - N_2}, \quad J_z = \frac{H_z}{n - N_3}, \quad (2)$$

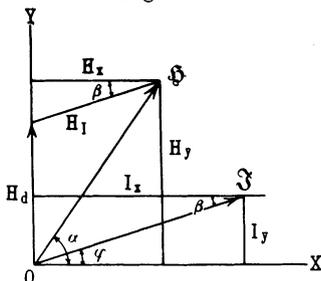
$\frac{1}{n - N_1}, \frac{1}{n - N_2}, \frac{1}{n - N_3}$ sind die Suszeptibilitäten in den drei Achsenrichtungen, bezogen auf das äußere Feld allein. N_1, N_2, N_3 sind als Konstanten zu betrachten, während n als Funktion der Summe des äußeren und des inneren Feldes angesehen werden muß; für genügend schwache Felder ist n konstant, daher sind, im Einklang mit (2) die Magnetisierungskurven in den drei Achsenrichtungen für kleine Felder gerade Linien durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems. Die Sättigungskurve

$$J = J_m$$

ist eine Linie parallel zur Achse H , und die eine Gerade geht durch eine bestimmte Kurve in die andere über. Ist die Magnetisierung auf die X-Y-Ebene beschränkt, so erhalten wir

$$\frac{H_x + N_1 J_x}{J_x} = \frac{H_y + N_2 J_y}{J_y} \quad (3)$$

Fig. 29.



oder (vgl. Fig. 29):

$$\frac{H \cos \alpha + J N_1 \cos \varphi}{J \cos \varphi} = \frac{H \sin \alpha + J N_2 \sin \varphi}{J \sin \varphi}$$

oder

$$J H \sin(\alpha - \varphi) = (N_1 - N_2) J^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

oder

$$H \sin(\alpha - \varphi) = N J \sin \varphi \cos \varphi,$$

wenn wir $N_1 - N_2 = N$ setzen. Die Unabhängigkeit des Koeffizienten $N_1 - N_2$ vom magnetischen Felde kann nach Weiss folgendermaßen gezeigt werden:

$$H_d = H_y - H_x \operatorname{tg} \beta = H_y - H_x \frac{J_y}{J_x} = J_y \left(\frac{H_y}{J_y} - \frac{H_x}{J_x} \right)$$

oder, mittels (3):

$$H_d = (N_1 - N_2) J_y.$$

Also ist J_y als Funktion von H_d eine Gerade durch den Anfangspunkt. Für die Sättigung erhalten wir

$$J_m(N_1 - N_2) = 7200.$$

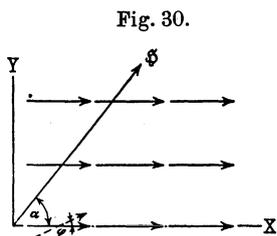
Bei großen Feldern ist die Übereinstimmung gut; bei schwachen Feldern kommen Abweichungen von den Geraden vor, die noch nicht erklärt sind. Unter Vernachlässigung dieser kleinen Abweichungen können wir feststellen: der Kristall zerstört eine zu J_y proportionale Feldkomponente H_d ; die übrigbleibende Komponente H_1 ist proportional der Magnetisierung und parallel zu J .

Soll in der Richtung OX der leichten Magnetisierung für kleinste Felder Sättigung erreicht werden, so muß $\frac{1}{n - N_1}$ gleich ∞

oder $n - N_1 = 0$ sein. Für die beiden anderen Hauptrichtungen wird das gleiche gelten, wenn nicht das entmagnetisierende Feld NJ vorhanden wäre. Die Magnetisierungskurve in der Richtung OX müßte eine der Achse H parallele Gerade sein; in der Richtung OY eine gegen H_1 geneigte Gerade, und die Abweichungen könnte man durch einen Mangel in der Homogenität des Kristalls erklären. Dies weist für diese magnetischen Messungen auf die Notwendigkeit hin, zuerst die Kristalle durch die gewöhnlichen kristallographischen Methoden auf Reinheit und Homogenität zu untersuchen. Bei diesen Arbeiten müßten der Physiker und der Kristallograph zusammenwirken. Die angenäherte Richtigkeit der Theorie kann an dem Drehmoment D geprüft werden. Auch hier

kommen kleine Abweichungen zwischen der Theorie und dem Experiment, bis zu ungefähr 3 Proz., vor.

Von dem Gesetz $H \sin(\alpha - \varphi) = (N_1 - N_2) J \sin \varphi \cos \varphi$ gab Weiss folgende Auslegung. Im Gleichgewichtszustand sollen die Molekularmagnete innerhalb der magnetischen Ebene in parallelen Geraden angeordnet sein, so daß der Kristall auch ohne äußeres Feld in der Richtung OX Sättigung zeigt. Wirkt nun unter einem Winkel α das Feld H , so werden sich die Magnete aus der Richtung OX drehen und eine neue, durch den Winkel φ gegebene Gleichgewichtslage einnehmen. Wir nehmen an, daß die benachbarten Magnete derart aufeinanderwirken, daß auf einen Pol in horizontaler Richtung eine magnetische Kraft $A\mu \cos \varphi$, in vertikaler Richtung eine Kraft $B\mu \sin \varphi$ resultiert. Dann ist die resultierende x -Komponente der magnetisierenden Kraft:



$$H_x = H \cos \alpha + A\mu \cos \varphi$$

und

$$H_y = H \sin \alpha - B\mu \sin \varphi.$$

Das Gleichgewicht erfordert aber

$$H_x \sin \varphi = H_y \cos \varphi,$$

oder

$$(H \cos \alpha + A\mu \cos \varphi) \sin \varphi = \cos \varphi (H \sin \alpha - B\mu \sin \varphi)$$

oder

$$H \sin(\alpha - \varphi) = NJ \sin \varphi \cos \varphi,$$

wenn wir setzen

$$(A + B)\mu = NJ$$

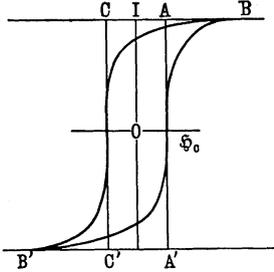
(Fig. 30).

Hysteresis.

Wir betrachten zunächst die gewöhnliche alternierende Hysteresis in der Richtung OX der leichten Magnetisierung. Im Einklang mit unserer Auffassung von dem molekularen Aufbau ist auch ohne Feld in der Richtung OX Sättigung vorhanden; beginnt dann das äußere Feld in dieser Richtung mit wachsender Größe zu wirken, so bleibt die Magnetisierung J konstant und wird durch die Gerade AB der Fig. 31 dargestellt. Wenn nun das Feld abnimmt, bleibt J unverändert, bis H einen negativen Wert $-H_c$ annimmt;

dann schwingen die Molekularmagnete plötzlich in die entgegengesetzte Richtung um, und der Endpunkt des Vektors J geht von C nach C' und bewegt sich dann auf der Geraden $C'B'$. Kehren wir die Feldrichtung um, so geht die Magnetisierung durch die Punkte $B'C'A'AB$. Die Hysteresis-schleife ist also die rechtwinklige Fläche $ACC'A'$. In der Volumeneinheit und pro Zyklus ist die zerstreute Energie gleich

Fig. 31.



Die Hysteresis-schleife ist also die rechtwinklige Fläche $ACC'A'$. In der Volumeneinheit und pro Zyklus ist die zerstreute Energie gleich

$$4 H_c J_m = 4 \cdot 15,4 \cdot 47 = 2900 \text{ erg,}$$

$$H_c = 15,4,$$

während in demselben Kristall das entmagnetisierende Feld in der Richtung OY 730 Gauß beträgt. Die Beziehung zwischen diesen beiden Größen wurde

theoretisch noch nicht gefunden. Die experimentelle Kurve kommt der theoretischen bis zu einem gewissen Grade nahe. Sie ist den Hysteresisschleifen des gewöhnlichen Eisens ähnlich. Der Abstand zweier Punkte in derselben Höhe bleibt nahezu konstant und ist gleich $2 H_c$.

Wir gehen nun zur Rotationshysterese über. Lassen wir das magnetische Feld sich um die Kristallplatte in der einen und dann

Fig. 32.

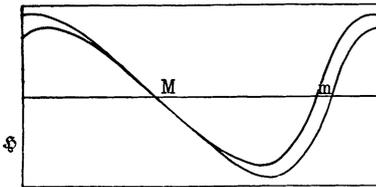
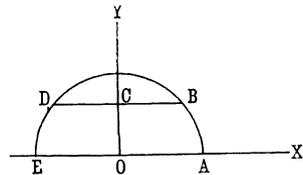


Fig. 33.



in der entgegengesetzten Richtung drehen, so ergibt sich eine Kurve mit einer Schleife, wie in Fig. 32. In der Nähe von M , das der Richtung der leichten Magnetisierung (OX in Fig. 33) entspricht, gibt es in einem weiten Winkelbereich, der ungefähr dem Bogen AB von Fig. 33 entspricht, keine Hysterese. Mit P. Weiss wollen wir annehmen, daß für den Bogen AB des Sättigungskreises keine Hysterese vorhanden ist, daß sie aber auftritt, wenn die Magnetisierung in einem irreversiblen Prozeß von B über C nach D fort-

schreitet. Die Rotationshysterese müßte in sehr starken Feldern verschwinden, wenn die Magnetisierung den Sättigungskreis beschreibt. Für die Richtung OX ist die Koerzitivkraft gleich H_c ; für die parallele Richtung BD nehmen wir $H'_c = H_c \frac{J_m - J_y}{J_m}$, ebenfalls als konstante Koerzitivkraft an. Ist $J_y = J_m$, so ist $H'_c = 0$, und H'_c müßte mit J_y abnehmen. Tatsächlich verschwindet die Hysterese für $J_y + J_m$ nicht linear. Überdies hängt das Gesetz wegen der Viskosität von der Art und Weise ab, wie man die Kraftmomente mißt. Die pro Zyklus und Volumeneinheit zerstreute Energie müßte gleich $4x H'_c x$ mal der Länge der Sehne $CB = \sqrt{J_m^2 - J_y^2}$ sein, also

$$E = 4 H'_c \sqrt{J_m^2 - J_y^2}.$$

Aber hier stimmt die Erfahrung mit der Weiss'schen Theorie noch schlechter als oben überein, und im Falle der abnormen Pyrrhotitkristalle sind die Erscheinungen noch viel komplizierter.

Einfluß der Temperatur.

Zuerst ist der Einfluß der Temperatur auf J_m , $n - N_1$, $n - N_2$, $n - N_3$ der normalen Elementarkristalle des Pyrrhotits zu untersuchen. Dies hat Ziegler nach der Ablenkungsmethode und durch folgende Betrachtungen ausgeführt:

$$D = V H J_n = V H J \sin(\alpha - \varphi) = V J^2 (N_1 - N_2) \sin \varphi \cos \varphi.$$

Wir betrachten zwei benachbarte Lagen von H und J . In der ersten Lage sollen die beiden Vektoren mit der X -Achse zusammenfallen, in der zweiten seien sie um einen infinitesimalen Betrag geändert. Setzt man dann die zwei letzten Ausdrücke einander gleich, so erhält man

$$H_x \Delta(\alpha - \varphi) = J_x \Delta \varphi (N_1 - N_2) = H_x (\Delta \alpha - \Delta \varphi)$$

oder

$$\left(\frac{\Delta \varphi}{\Delta \alpha} \right)_x = \frac{H_x}{(N_1 - N_2) J_x + H_x};$$

ferner für $V = 1$

$$\Delta D_x = J_x^2 (N_1 - N_2) \Delta \varphi,$$

also

$$\lim \left(\frac{\Delta D}{\Delta \alpha} \right)_x = \left(\frac{dD}{d\alpha} \right)_x = \frac{(N_1 - N_2) J_x^2 H_x}{(N_1 - N_2) J_x + H_x}$$

Da in der X -Richtung die Sättigung bei einem Felde von 2000 Gauß erreicht wird, so können wir bei den ausgeführten Versuchen statt $J_x J_m$ schreiben und erhalten

$$\left(\frac{dD}{d\alpha}\right)_x = \frac{(N_1 - N_2)J_m^2 H_x}{(N_1 - N_2)J_m + H_x}$$

und in der Y -Richtung

$$\left(\frac{dD}{d\alpha}\right)_y = \frac{H_y^3}{n - N_1}.$$

Zudem, für das maximale Drehmoment

$$D_m = \frac{VJ_m^3}{2}(N_1 - N_2).$$

Die Versuche, die große Geschicklichkeit erforderten, zeigten, daß $N_1 - N_2$ von der Temperatur unabhängig ist, und daß $n - N_1$ bis nahe an den Curieschen Punkt konstant bleibt und dann wahrscheinlich stark zunimmt; $n - N_2$ nimmt in der Nähe des Curieschen Punktes zu, J_z nimmt ab, oder die magnetische Ebene wird bei höheren Temperaturen ausgeprägter. J_m hat ein deutliches Maximum bei etwa 160° abs. In der Nähe von etwa 320° verschwindet J_m ziemlich plötzlich. Dieses Verhalten entspricht nicht der Theorie, die P. Weiss von der J_m, T -Kurve gegeben hat. Werden normale Kristalle unter dem gleichzeitigen Einfluß eines magnetischen Feldes auf 330° erhitzt, so bleibt die magnetische Ebene unverändert, und auch das Verhältnis der drei Komponenten bleibt das gleiche.

Die anormalen Pyrrhotitkristalle.

Während die magnetischen Eigenschaften des normalen Pyrrhotits verhältnismäßig einfach sind, sind die des anormalen Pyrrhotits sehr mannigfaltig und sind theoretisch noch nicht gedeutet worden. Schon bei schwachen Feldern ist die Magnetisierung nicht auf die magnetische Ebene beschränkt, sondern erreicht in der zu ihr senkrechten Richtung beträchtliche Werte, ebensowenig gilt das Gesetz des Entmagnetisierungsfeldes $H_D = (N_1 - N_2)J_y$. Die Hysteresiserscheinungen sind bei den abnormen Kristallen viel mehr entwickelt als bei den normalen. Die Hysteresis tritt nicht nur in der Richtung der schweren Magnetisierbarkeit, sondern auch in der der leichten auf, und sie wächst sogar mit zunehmendem Felde,

manchmal auch mit der Zahl der beschriebenen Zyklen. Bestimmen wir das Drehmoment als Funktion der steigenden und fallenden Temperatur unter dem Einfluß eines konstanten Feldes, so zeigen die entstehenden Kurven auch eine thermische Hysterese. Nach dem Erhitzen und Abkühlen eines Kristalls im magnetischen Felde geht das Drehmoment nicht auf seinen Ausgangswert zurück. Nach dem ersten Erhitzen scheint das Drehmoment oft im Verhältnis 1:3 oder 1:4 zuzunehmen. Es kann aber auch abnehmen.

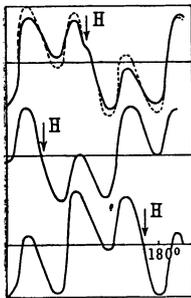
Kristallgruppen.

Die Kurven der Drehmomente, die sich ergeben, wenn das magnetische Feld um die horizontale Platte gedreht wird, zeigen, wie im Falle des normalen Pyrrhotits, im allgemeinen drei Gruppen oder Kristallkomponenten in verschiedenen Verhältnissen. In einem bestimmten Falle war die ursprüngliche Zusammensetzung gegeben durch die Verhältnisse 66,3:25,6:8,1. Nach dem Erhitzen und Abkühlen unter der gleichzeitigen Einwirkung eines Feldes von 2000 Gauß, das in verschiedenen Richtungen wirkte, fand man die Verhältnisse 46,9:29,4:23,7. Es sieht aus, als ob sich die Elementarmagnete unter der Einwirkung der hohen Temperatur und des magnetischen Feldes in verschiedenen Gruppen unter die drei Komponenten verteilen würden. Wird der Kristall ohne magnetisches Feld erhitzt, so sind die drei Komponenten ungefähr gleich stark; dies trifft auch zu, wenn ein Feld angelegt und während des Abkühlungsprozesses gedreht wird. Die neue Gruppierung erfordert einen kleinen Zeitraum, nämlich mehr als 2 Sekunden und weniger als 4 Minuten. Die Hysterese in der magnetischen Ebene liefert eine zweite Methode zur Bestimmung des Verhältnisses der drei Komponenten.

Während beim normalen Pyrrhotit alle Erscheinungen, auch die Hysterese, in thermischer Hinsicht, reversibel sind, d. h. keine Erscheinung ähnlich dem Härten und Anlassen des Stahles auftritt, so beeinflußt beim anormalen Pyrrhotit das langsame oder rasche Abkühlen sowohl die Kurven der Drehmomente als auch die der Hysterese. Wie beim Stahl vergrößert rasches Abkühlen die Hysterese. Gehen wir von einem Zustand gleicher Verteilung der drei Komponenten des Kristalls aus, erhitzen ihn bis zu 350° und kühlen ihn dann ab, während gleichzeitig ein Feld von 500 Gauß

in der Richtung eines der drei Magnetisierungsmaxima wirkt, so gewinnt dieses Maximum einen überwiegenden Einfluß, und die beiden anderen Maxima bleiben einander gleich, sind aber geringer als das erste. Mit wachsendem Felde wird die ungleichartige Verteilung der drei Komponenten deutlicher. Man weiß noch nicht, ob der richtende Einfluß des Feldes sich einer Grenze nähert oder nicht. Wenn ein Feld von ungefähr 5000 Gauß mit dem einen oder anderen der drei Maxima zusammenfällt, wird diese Komponente auf Kosten der beiden anderen Komponenten zunehmen, die zusammen nach Fig. 34 etwa 50 Proz. der Hauptkomponente ausmachen. Die drei Maxima haben nicht nur bezüglich der Kräftepaare, sondern auch bezüglich der Hysterese die gleiche Rolle. Das

Fig. 34.



wechselnde Verhältnis der drei Komponenten könnte man auch durch die Annahme erklären, daß der magnetische Zustand der drei Kristallgruppen eine unabhängige Variable ist. Die experimentelle Antwort auf diese Frage war nicht entscheidend.

Wir haben hier eine etwas ins einzelne gehende Beschreibung der magnetischen Eigenschaften des normalen und anormalen Pyrrhotits gegeben; von dem ersteren, weil er der einzige Kristall ist, dessen Eigenschaften wir dank der Theorie von Weiss annähernd verstehen; von

dem zweiten, weil er eine große Mannigfaltigkeit von Erscheinungen aufweist, die noch unerklärte Probleme sind. Weiss hat in seiner Theorie die gegenseitige Einwirkung der Elementarmagnete summarisch betrachtet, indem er das molekulare magnetische Feld als proportional der Magnetisierungsintensität einführte. Die Dynamik der Kristallstruktur ist auf die magnetischen Erscheinungen anzuwenden.

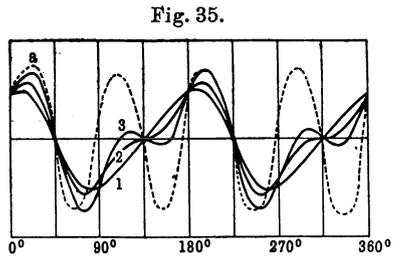
Bei allen anderen magnetischen Kristallen haben wir noch keine befriedigende Theorie. Wir werden nur einige wenige der mannigfaltigen Erscheinungen hervorheben, da es nutzlos wäre, eine vollständige Beschreibung von allen verschiedenartigen, bei diesen Körpern bekannten magnetischen Eigenschaften zu geben. Zur vollständigeren Einsicht in die experimentellen Tatsachen verweisen wir den Leser auf die Originalarbeiten.

Magnetit.

In einer Untersuchung des Jahres 1896 zeigte P. Weiss, daß Magnetit, obgleich er ein Kristall des kubischen Systems ist, doch gewisse Richtungen hat, in denen die Magnetisierung für das kubische System entweder zu schwach oder zu stark ist. Die Theorie des magnetischen Ellipsoids von W. Thomson beruht auf der Annahme, daß die Magnetisierungsintensität proportional dem magnetischen Felde ist. Da aber Magnetit ferromagnetisch ist, wofür diese Proportionalität nicht besteht, so ist die Theorie von Thomson nicht haltbar. Die Untersuchung von Weiss wurde durch seinen Schüler Quittner¹⁾ fortgesetzt.

Symmetrie.

Die magnetischen Eigenschaften vieler, wenn nicht aller Proben von Magnetitkristallen, weichen mehr oder weniger von denen der kubischen Symmetrie ab. Schneidet man eine dünne Platte parallel zur Kubusfläche aus dem Kristall aus, so müßten sich wegen der kubischen Symmetrie und der quarternären Achsen die magnetischen Eigenschaften innerhalb 360° viermal wiederholen. Man könnte eine Kurve vom Typus *a* der Fig. 35 erwarten. An Stelle dieser erhält man jedoch verschiedene



1) $H = 57,3$, 2) $H = 78,4$, 3) $H = 94,5$ Gauß.

Kurven mit geringerer Symmetrie je nach der Intensität des Feldes. Die Achsen liegen bei $0, 90, 190, 270^\circ$. Die Diagonalen der Würfel-
fläche gehen durch $45, 135, 225, 315^\circ$. An Stelle von vier Wellen zeigt die erste mit einem Felde von $57,3$ Gauß erhaltene Kurve nur zwei identische Wellen. Mit einer kleinen Abweichung wiederholt sich diese Erscheinung von 180 zu 180° . Bei der zweiten Kurve beobachten wir eine Inflexion bei der Diagonale bei 135° ; diese nimmt mit zunehmendem Felde zu, so daß sich eine neue Welle ausbildet, die bei 300 bis 400 Gauß eine ebenso große Amplitude wie die erste

¹⁾ V. Quittner, Die magnetischen Eigenschaften des Magnetits. Thesis, Zürich 1908; Ann. d. Phys., N. F. **30**, 1909.

Welle erreicht. Je größer die magnetische Kraft ist, destomehr nähert sich der Magnetit der kubischen Symmetrie. Die zwei Hauptachsen der Würfelflächen sind niemals ganz äquivalent, und es erhebt sich die Frage, welches magnetische Verhalten die dritte Achse aufweist. Um diese Frage zu beantworten, mußte eine dem Oktaeder parallele Platte aus dem Kristall ausgeschnitten und magnetisch untersucht werden. Diese Fläche enthält keine Hauptachse, sondern bildet mit allen drei Achsen gleiche Winkel. Ist die Symmetrie kubisch, so müssen innerhalb 180° drei gleiche Wellen auftreten, ist sie quadratisch, so sind zwei Wellen gleich und die dritte verschieden, und ist sie rhombisch, so sind die drei Wellen verschieden; eine oder zwei derselben können sogar verschwinden. In Fig. 36 (63,0 Gauß) erscheinen nur zwei verschiedene Wellen; für ein stärkeres Feld (78,7 Gauß) erscheinen drei Wellen mit verschiedenen Amplituden und diese drei Wellen werden einander nur für viele stärkere Felder ähnlich; bei sehr schwachen Feldern erscheint nur eine Welle. Wegen dieser magnetischen Eigenschaften hat das Magnetit etwa die Eigenschaften des rhombischen Systems. Die Kurven *a* und *b* in

Fig. 36.

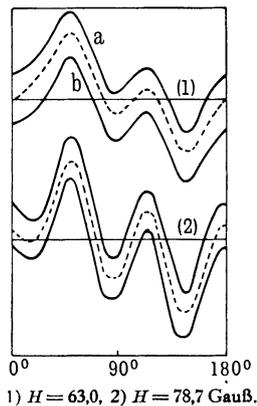


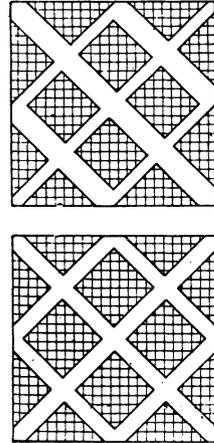
Fig. 36 entsprechen dem Fortschreiten des magnetischen Feldes in positivem und negativem Sinne; ihre Entfernung ist ein Maß für die Rotationshysterese von J_n . Die mittlere Kurve ist die Magnetisierungskurve. Der Grad der Abweichung von der kubischen Symmetrie ist für die verschiedenen Kristalle sehr verschieden; man fand sogar Platten, die beinahe keine Abweichung zeigten, dabei aber eine sehr ausgesprochene Viskosität hatten. Schneidet man Platten parallel zueinander aus demselben Kristall, so zeigen sie in der Regel die gleichen Eigenschaften, jedoch in Ausnahmefällen sind ihre magnetischen Eigenschaften verschieden. Diese zwei Erscheinungen zeigen, wie nötig es ist, die Kristalle vor ihrer Benutzung zu magnetischen Messungen durch Ätzmethoden zu untersuchen.

Man hat eine große Zahl von Messungen der normalen und parallelen Magnetisierungskomponenten an dünnen Platten angestellt.

die parallel zu den Würfel- und Oktaederflächen ausgeschnitten waren. Für sehr schwache Felder ist das Material praktisch isotrop, bei sehr starken Feldern scheint es dem Isotropismus nahezukommen; die normale Komponente J_n nähert sich bei sehr starkem Felde dem Werte Null. Es treten sonderbare Umkehrungen in den Maxima der Kurven auf; für manche Felder erscheinen sie bei den Achsenprojektionen, für andere an den Dreiecksseiten. Im ganzen sind die Erscheinungen sehr kompliziert.

V. Quittner hat verschiedene Theorien der molekularen Struktur des Magnetits diskutiert und ist zu folgendem Schluß gekommen: Magnetit besteht aus gleichen Teilen dreier Elemente, deren magnetische Ebene ähnlich wie beim Pyrrhotit sind; die magnetischen Ebenen dieser drei Elemente stehen zueinander senkrecht. Die Moleküle sind so angeordnet, daß sie drei gleichweit voneinander entfernte Ebenensysteme bilden. Dieser ideale Magnetit wird durch vier Systeme von dazwischenliegenden unmagnetischen Ebenen geschnitten, die den Oktaederflächen parallel sind. Sind diese vier Spaltenebenen einander gleich, so weist der Kristall kubische Symmetrie auf, sind sie verschieden, so hat die Symmetrie einen geringen Grad. Fig. 37 zeigt die Struktur des Magnetits nach der Annahme von Quittner.

Fig. 37.



Eisenkristalle.

De Freudenreich hatte Eisenkristalle auf folgende Weise vorbereitet: Güsse nach dem Goldschmidt-Prozeß wurden in einem Sandhaufen in einen eingebetteten Gußtiegel gemacht und langsam abgekühlt. Die sich ergebenden Eisenstücke von der Größe einer Faust wurden zerbrochen und zeigten sehr schöne Kristallflächen bis zu 2 cm Länge, die man als Würfelflächen nachwies. Die chemischen Verunreinigungen betragen bis etwa 2 Proz., wobei Silicium der überwiegende Teil war. Die magnetische Untersuchung wurde im

Laboratorium von P. Weiss¹⁾ nach den Methoden der Kräftepaare (J_n) und der Induktion (J_p) ausgeführt. In den Ergebnissen gibt Beck die Magnetisierungskomponenten pro Masseneinheit $\sigma = \frac{J}{d}$, wobei d die Dichte ist. Der magnetischen Messung wurden eine Reihe von Platten unterworfen. Sie waren geschnitten parallel den Würfelflächen, den Oktaeder- und den Rhombendodekaederflächen.

Die Fig. 38 bis 40 geben die Magnetisierungskomponenten σ_p parallel zum magnetischen Felde von drei parallel zu diesen drei Flächen abgeschnittenen Platten für verschiedene Feldstärken. Fig. 41 gibt die Magnetisierungskomponenten σ_n senkrecht zu dem Felde für eine Würfelplatte und Fig. 42 die resultierende Magnetisierung in verschiedenen Richtungen für drei verschiedene Felder. Wir betrachten zuerst die Kurven von Fig. 38. In schwachen Feldern ist σ_p nahe konstant in den verschiedenen Richtungen, doch ist in H die entmagnetisierende Wirkung der Platte nicht berücksichtigt. Wächst das Feld, so treten in den verschiedenen Richtungen charakteristische Unterschiede auf; in den Diagonalen erscheinen Minima, in den quaternären Achsen Maxima, und die Unterschiede sind bei mittleren Feldern von ungefähr 392 Gauß am ausgeprägtesten, wo sie bis zu etwa 12 Proz. des Mittelwertes ansteigen. Diese Unterschiede verschwinden wieder mit zunehmendem Felde. Das Maximum von σ_p betrug 208,3 für ein Feld von 4090 Gauß. Vergleichen wir diese Kurven mit den entsprechenden Kurven von Magnetit, so finden wir, daß die Achsen in den beiden Fällen entgegengesetzte Rollen haben; beim Magnetit findet man die Maxima in den Diagonalenrichtungen.

Zwischen 1500 und 2000 Gauß treten auch beim Eisen in der Richtung der Diagonalen kleine sekundäre Maxima auf.

Die von dem kubischen System erforderte Symmetrie wird durch die magnetischen Eigenschaften der Eisenkristalle nicht streng erfüllt, aber die Abweichungen sind sehr gering, jedenfalls viel kleiner als beim Magnetit. Die Magnetisierungskomponente σ_n senkrecht zu dem Felde wird für mittlere und große Felder als Funktion des Azimuts φ von H von 0 bis 180° durch eine

¹⁾ Karl Beck, Das magnetische Verhalten von Eisenkristallen bei gewöhnlicher Temperatur. Diss. Zürich 1918.

Kurve mit vier Nullwerten und je zwei positiven und negativen, nahezu ebenso großen Maxima dargestellt. Die Nullwerte entsprechen den Diagonalenrichtungen. Während σ_p immer positiv

Fig. 38.

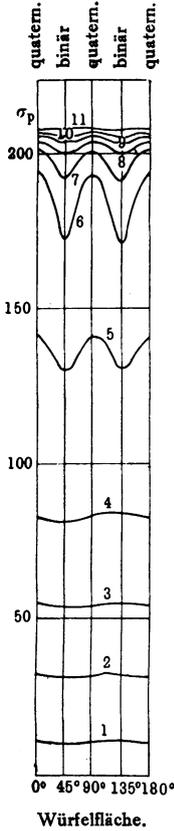


Fig. 39.

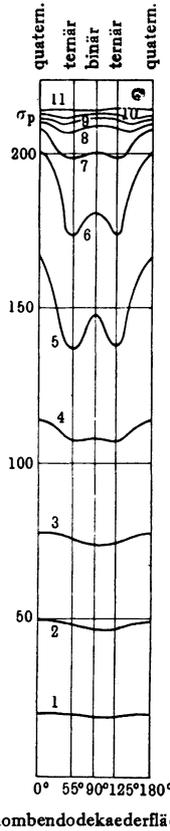
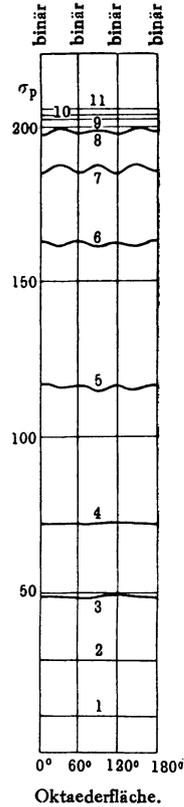


Fig. 40.

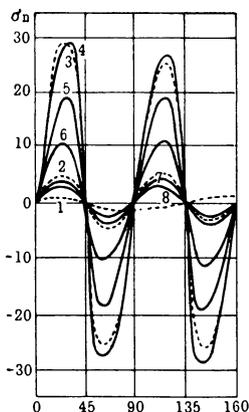


bleibt, ist σ_n in jedem Quadranten erst positiv und dann negativ. Dies kommt daher, weil in der Nähe der Diagonalen sich σ schneller dreht als H . Die Amplituden der σ_n -Kurven sind bei kleinen Feldern sehr klein, wachsen bei mittleren Feldern schnell auf ein Maximum und nehmen mit zunehmenden Feldern wieder ab. Das Maximum von σ_n beträgt etwa 20 Proz. des Maximums von σ_p . Fig. 42 enthält das aus σ_p von Fig. 38 und σ_n von Fig. 41

resultierende σ . Zwischen diesen und den entsprechenden Kurven des Pyrrhotits treten charakteristische Unterschiede auf. Erstens gibt es keine besondere Richtung leichter Magnetisierbarkeit; der Sättigungskreis wird hier in allen Richtungen nur für ein unendlich starkes Feld erreicht. Überdies tritt das plötzliche Herumschwingen der Elementarmagnete über die Richtung der schweren Magnetisierbarkeit hinweg bei Eisen nicht auf; auf alle Fälle kommt diese Erscheinung in den Diagonalenrichtungen nur in geringem Umfang vor. Mittels der gegebenen Kurven kann man die Magnetisierungskurven in jeder beliebigen Richtung ziehen.

Wir gehen jetzt zu den parallel der Rhombendodekaederfläche geschnittenen Platten über. Die parallele Magnetisierungskomponente σ_p einer geeigneten Platte ist in Fig. 39 gegeben. Die Platte

Fig. 41.



- 1) $H=71$, 2) $H=189$ Gauß.
 3) $H=392$, 4) $H=596$ "
 5) $H=1110$, 6) $H=2050$ "
 7) $H=6000$, 8) $H=9420$ "

hat bei 0 und 180° je eine quaternäre, bei 90° eine binäre und bei 55 und 125° je eine ternäre Achse. Bei mittleren Feldern sehen wir wieder wie bei der Würfel­fläche den Unterschied zwischen den Haupt- oder quaternären und den binären Achsen oder Diagonalen. Zudem sind die ternären Achsenrichtungen schwächer magnetisch als die der beiden anderen Achsen, so daß σ_p in den binären Achsen zwischen den beiden ternären Achsen ein Maximum aufweist. Wie in Fig. 38 verschwinden auch in Fig. 39 die Unterschiede von σ_p in den verschiedenen Richtungen sowohl für sehr schwache als auch für sehr starke Felder. Die Normal­komponenten σ_n zeigen wieder vier Null­werte innerhalb 180° in den Achsen­richtungen 0, 55, 90, 125, 180°. Die zwei rechts und links von der binären Achse (90°) gelegenen Maxima sind kleiner als die beiden anderen. Die Amplituden der Kurven erreichen bei mittleren Feldern ein Maximum und nehmen mit zunehmenden Feldern ab.

Wir betrachten endlich die Oktaederfläche. Die entsprechenden Kurven zeigen teils die gleichen Züge wie die vorhergehenden Flächen, teils einfachere Eigenschaften. Hier finden wir nur drei binäre Achsen bei je 60°. Die Schwankungen der Magnetisierung

müssen sich deshalb innerhalb 180° dreimal wiederholen. Dies sieht man deutlich an den Kurven von Fig. 40. Bei schwachen und starken Feldern verschwinden die Schwankungen wieder. Für $H = 189$ und 392 Gauß hat σ_p ein Maximum in den binären Achsenrichtungen, aber schon für $H = 595$ tritt eine Umkehr der Schwankungen auf, indem die Maxima für die binären Achsen erscheinen; aber die Veränderungen sind sehr gering und augenscheinlich nur von zweiter Größenordnung. σ_n nimmt in allen Feldern nur sehr kleine Werte an, es beschreibt drei sinusförmige Kurven innerhalb 180° .

Die Amplitude der σ_n -Wellen erreicht schon bei kleinen Feldern ein kleines Maximum und verschwindet bei stärkeren Feldern fast ganz. Das resultierende σ wird in einem

Polarkoordinatensystem durch eine sehr wenig von einem Kreise abweichende Kurve dargestellt. Die Hystereseerscheinungen erinnern an die der Magnetisierungskurven. Die durch die Hysteresee zerstreute Energie wächst zuerst mit zunehmendem Felde, erreicht ein Maximum und nimmt wieder ab.

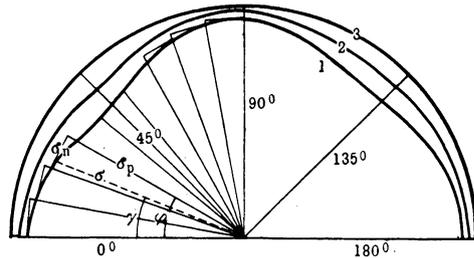
Die magnetischen Eigenschaften der Eisenkristalle sind im großen und ganzen von denen des Pyrrhotits ganz verschieden. Es gibt keine magnetische Ebene, und das Bestehen eines inneren molekularen Feldes ist nicht festgestellt.

Hämatit.

Die magnetischen Eigenschaften dieses Kristalls wurden von Westmann, Bavink, Abt, Kunz und Smith¹⁾ untersucht. Man benutzte Kristalle verschiedenen Ursprungs, die magnetisch sehr

¹⁾ J. Westmann, Upsala, Math. och Naturw. II, 1897. B. Bavink, Diss. Göttingen, N. Jahrb. f. Min. **19**, 377, 1904. A. Abt, Über die magn. Eigensch. des Hämatits, Ann. d. Phys., N. F. **68**, 658, 1899. J. Kunz, Über die magn. Eigensch. des Hämatits. N. Jahrb. d. Min. **1**, 62, 1907. T. P. Smith, The magnetic properties of hematite. Phys. Rev. **8**, 721, 1916.

Fig. 42.

1) $H = 392$ Gauß, 2) $H = 595$ Gauß, 3) $H = \infty$.

verschieden sein können. Man findet sie auf dem Vesuv, in Dagnaska in Ungarn, in Ouropreto in Brasilien, in Schabri im Uralgebirge, in Caveradi in Graubünden (Schweiz); schöne Kristalle kommen aus Elba und aus Siebenbürgen. Kunz fand, daß die Kristalle, wie die des Pyrrhotits, in zwei Gruppen, nämlich normale und anormale Hämatite, eingeteilt werden können. Beiden gemeinsam ist eine magnetische Ebene, wie beim Pyrrhotit, die mit der Basisebene zusammenfällt. Senkrecht zu dieser Ebene ist der Hämatit paramagnetisch ohne Hysterese.

Die Kristallplatten vom Vesuv, oft in tafelartigen Gruppen angeordnet, zeigen parallel zur Basisebene ein regelmäßiges magnetisches Verhalten. Sie scheinen nur eine Magnetisierungskomponente zu besitzen und haben sowohl für Wechsel- als auch für Drehfelder eine kleine Hysterese. Bei einer Temperatur von 650° erleiden sie unter der gleichzeitigen Einwirkung eines magnetischen Feldes keine Veränderung.

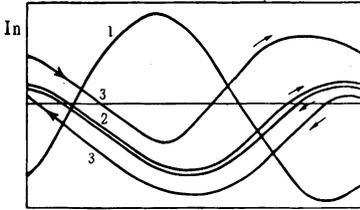
Die Kristalle der anderen Gruppe, aus Caveradi in Graubünden, aus Elba und aus Siebenbürgen, scheinen aus mehreren Elementarmagneten zusammengesetzt zu sein, die um 60° zueinander geneigt sind und in verschiedenen Verhältnissen auftreten. Sie haben eine so große Hysterese, daß diese oft die Magnetisierungsintensität überwiegt. Unter dem gleichzeitigen Einfluß hoher Temperatur und eines magnetischen Feldes ändert sich die magnetische Struktur des Kristalls wie bei den anormalen Pyrrhotitkristallen.

Gruppe I. Anormale Kristalle.

Zuerst wurde die Magnetisierungskomponente J_n senkrecht zu dem magnetischen Felde mittels der Kräftepaare gemessen und eine große Verschiedenheit der Erscheinungen gefunden. In den schwächsten Feldern von 138 Gauß zeigten die Kristalle aus Siebenbürgen und Graubünden für J_n eine reine Sinuskurve (Fig. 43). Die Magnetisierung ist wie die eines permanenten Magnets. Für $H = 339$ Gauß tritt in der zweiten Kurve von Fig. 43 eine Abweichung von der Sinuskurve mit einer Drehungshysterese auf, die für $H = 700$ Gauß eine beträchtliche Größe annimmt; dabei zeigt die Magnetisierungskurve 3 noch den gleichen Charakter wie bei schwächeren Feldern. Bei $H = 1400$ Gauß jedoch erscheinen in dem Intervall von 180° drei gleiche Maxima und Minima, und die Hysterese nimmt so große Werte an, daß sie die von den Ver-

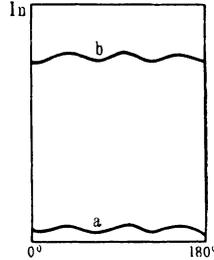
änderungen der Magnetisierung wenig beeinflusste Haupterscheinung ist. In Fig. 44 entspricht der Streifen zwischen den Kurven *a* und *b* der Rotationshysterese. Bei zunehmenden Feldern nehmen die Schwankungen der Magnetisierungskurven zu (Fig. 45 für $H = 11\,300$ Gauß); gleichzeitig sind die Magnetisierungsmaxima entsprechend dem Vor- und Rückwärtsschreiten des magnetischen

Fig. 43.



1) $H = 138$, 2) $H = 339$, 3) $H = 700$ Gauß.

Fig. 44.



Feldes verschoben. In anderen Kristallen werden die Erscheinungen noch komplizierter; so können z. B. die drei gleichen Wellen der letzten Figur ganz verschieden sein.

Gruppe II. Einfache Kristalle.

Diese Kristalle findet man auf dem Vesuv. Sie bilden dünne schwarze Blättchen mit hohem Glanz, die oft in Kristallaggregaten

Fig. 45.

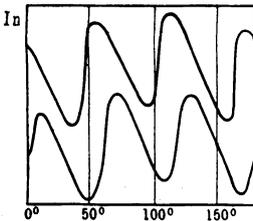
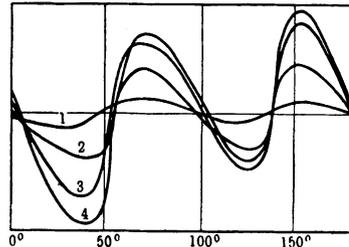


Fig. 46.

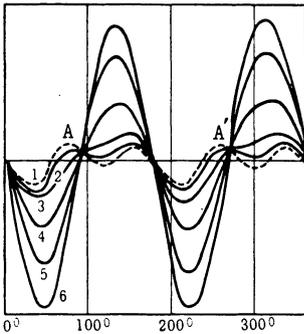


1) $H = 48,5$, 2) $H = 161,6$, 3) $H = 421$,
4) $H = 862$ Gauß.

höherer Ordnung angeordnet sind. Die normalen Magnetisierungskomponenten J_n für verschiedene Felder werden durch die Kurven von Fig. 45 und 46 gegeben. Für Felder, die sich von 48,5 bis 3500 Gauß erstrecken, wiederholt sich die Erscheinung von 180

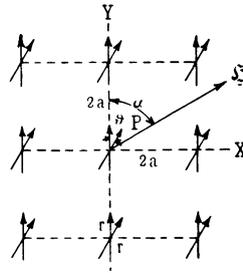
zu 180° ; es erscheinen zwei Maxima und zwei Minima, die für $H = 862$ Gauß am ausgeprägtesten sind. Oberhalb 6000 Gauß verschwindet ein Maximum und ein Minimum, und es machen sich Unsymmetrien bemerkbar. Überraschend ist auch, daß die Schnittpunkte der Kurven A und A' oberhalb der Abszissenachse liegen. Die Kurven von Fig. 47 sind von denen des Pyrrhotits wesentlich verschieden. Die Amplituden der entsprechenden Pyrrhotitkurven erreichen mit zunehmendem Felde ein Maximum, und diese Kurven zeigen sehr deutlich die Richtungen der leichten und der schweren Magnetisierung. Diese Züge treten bei den Hämatitkurven nicht

Fig. 47.



- 1) $H = 862$, 2) $H = 1\ 775$ Gauß,
 3) $H = 3\ 850$, 4) $H = 7\ 172$ „
 5) $H = 10\ 750$, 6) $H = 13\ 340$ „

Fig. 48.



auf. Die resultierende Magnetisierungsintensität nimmt mit zunehmendem Felde zu, erreicht ein Maximum und nimmt bei höheren Feldern wieder ab. Der Maximalwert von J beträgt nur etwa 3,6 absolute Einheiten. — Der Einfluß der Temperatur auf die normalen und anormalen Hämatitkristalle ist der gleiche wie auf die entsprechenden Pyrrhotitkristalle.

Über die Theorie der ferromagnetischen Kristalle.

Neben der Theorie von P. Weiss¹⁾ für Pyrrhotit und K. Beck für Eisen verdanken wir theoretische Arbeiten K. Honda und J. Okûbo²⁾ sowie O. E. Frivold³⁾.

¹⁾ P. Weiss, Le travail d'aimantation des cristaux. Journ. d. Phys. **3**, 194, 1904.

²⁾ K. Honda, Sc. Rep. **5**, 153, 1916.

³⁾ O. E. Frivold, Ann. d. Phys. **65**, 1, 1921.

K. Honda berechnet zunächst die Kräfte X und Y , die auf einen magnetischen Pol P durch acht benachbarte, in einer Ebene entsprechend dem kubischen System angeordnete Magnete ausgeübt werden, er vernachlässigt die Wirkung der übrigen Magnete als unbedeutend.

In Fig. 48 sei $2a$ die Seite des Raumgitters, $2r$ und m die Länge bzw. die Polstärke der Elementarmagnete. Eine Seite des Raumgitters nehmen wir als X -Achse, die andere Seite als Y -Achse. Wenn X und Y die Summe der Komponenten der magnetischen Kräfte bedeuten, die durch die Nachbarn auf den Zentralmagnet in den Richtungen X und Y ausgeübt werden, so finden wir als Gleichgewichtsbedingung

$$mH \sin(\alpha - \vartheta) = -Y \sin \vartheta + X \cos \vartheta.$$

Ohne das magnetische Feld zeigen alle Magnete nach der positiven Y -Richtung; legt man ein magnetisches Feld unter einem Winkel α zu der Y -Achse an, so werden sich die Magnete um einen Winkel ϑ drehen und eine durch obige Gleichung gegebene Gleichgewichtslage einnehmen.

Setzt man

$$k = \frac{a}{r}, \quad p = \frac{2k}{1 + k^2}$$

und

$$q = \frac{2k}{1 + 2k^2},$$

so gilt

$$\begin{aligned} a &= kr, \\ 0 &< p < 1, \\ 0 &< q < \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Berechnet man trigonometrisch X und Y , und entwickelt nach Potenzen von p und q , so erhält man

$$\begin{aligned} H \sin(\alpha - \vartheta) &= \frac{mk}{r^2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \frac{7}{2} \sin 4\vartheta \left\{ \frac{p^3}{4(1+k^2)^{3/2}} \left(\frac{1}{3!} + \frac{9}{2} \frac{p^2}{5!} + \dots \right) \right. \\ &\quad - \frac{q^3}{(1+2k^2)^{3/2}} \cdot \left(\frac{1}{3!} + \frac{9}{2} \frac{q^2}{5!} + \frac{9}{2} \cdot \frac{11}{2} \frac{q^4}{7!} + \dots \right) \\ &\quad - \frac{9}{2} \cdot \frac{11}{2} \left[\frac{p^7}{4(1+k^2)^{3/2}} \cdot \left(\frac{1}{7!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{2} \frac{p^2}{9!} + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{q^7}{(1+k^2)^{3/2}} \left(\frac{1}{7!} + \frac{13}{2} \frac{q^2}{9!} + \dots \right) \right] \sin^2 2\vartheta \right\} \end{aligned}$$

oder

$$H \sin(\alpha - \vartheta) = F(\vartheta) = \frac{m}{r^2} f(\vartheta),$$

wobei $f(\vartheta)$ nur k als Parameter enthält. $F(\vartheta)$ ist eine periodische Funktion von ϑ mit $\frac{\pi}{2}$ als Periode. $F(\vartheta)$ kann man allgemein in der Form schreiben:

$$F(\vartheta) = A \sin 4\vartheta,$$

wobei

$$A = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{8} \frac{m}{r^2} \left\{ \frac{8}{357} \cdot \varphi(k) - \varphi'(k) \sin^2 \vartheta + \dots \right\}$$

und φ und φ' Funktionen von k allein sind. Für kleine Werte von k wird $\varphi'(k)$ sehr klein gegen $\varphi(k)$, und die Form von $f(\vartheta)$ nähert sich einer Sinuskurve.

Unter einem Elementarkomplex versteht Honda einen sehr kleinen Kristall, in dem alle Elementarmagnete in einem bestimmten Raumgitter angeordnet sind. Ein Stück Eisen besteht dann aus einer großen Zahl solcher Elementarkomplexe, deren Achsen nach allen Richtungen zeigen. Wir wollen zuerst die Magnetisierung eines solchen Elementarkomplexes im kubischen System untersuchen. Die Magnetisierungskomponente J in der Richtung des angelegten Feldes ist offenbar

$$J = 2mrn \cos(\alpha - \vartheta) = J_0 \cos(\alpha - \vartheta),$$

wobei n die Zahl der Elementarmagnete und J_0 der Sättigungswert der Magnetisierungsintensität ist. Bezeichnet man $\frac{J}{J_0}$ mit i , so erhält man

$$i = \cos(\alpha - \vartheta); \quad (1)$$

außerdem ist

$$H \sin(\alpha - \vartheta) = A \sin 4\vartheta$$

oder, wenn man $\frac{H}{A} = h$ setzt, erhält man

$$h \sin(\alpha - \vartheta) = \sin 4\vartheta. \quad (2)$$

A hängt von den besonderen Körpereigenschaften ab, ebenso J_0 . Wenn man aber statt der wahren Magnetisierungsintensität und dem Felde die reduzierten Werte i und h benutzt, so gelten die Beziehungen (1) und (2) für alle zu dem regulären System gehörigen ferromagnetischen Körper. Sind h und α gegeben, so gibt

Gleichung (2) ϑ und Gleichung (1) den Wert von i . Honda betrachtet daher die Gleichungen (1) und (2) als die Magnetisierungsgesetze. Diese beiden Gleichungen können durch eine graphische Methode gelöst werden. In Fig. 49 sind vier Kurven gegeben, die die Beziehung zwischen i und h darstellen, wenn man für den Winkel α 30, 70, 120 oder 170° nimmt. Diese Kurven geben die Magnetisierungsintensität in der entsprechenden Feldrichtung, wenn man die Größe desselben so verändert, daß es stets mit der inneren Widerstandskraft $\sin 4\vartheta$ im Gleichgewicht ist. Bei der Kurve für $\alpha = 30^\circ$ entspricht der Punkt a dem Werte von $\cos 30^\circ$; wächst h , so wird ϑ größer, ist aber immer kleiner als α , und daher nimmt $i = \cos(30^\circ - \vartheta)$ stetig zu, indem es asymptotisch dem Werte $i = 1$ für $h = \infty$ zustrebt. In der Kurve für $\alpha = 70^\circ$ entspricht der Punkt b dem Werte von $\cos 70^\circ$; wenn h von Null anwächst, so nimmt ϑ und deshalb auch $\sin 4\vartheta$ zu. Da jedoch letztere Größe für $\vartheta = \frac{\pi}{8}$ ein Maximum erreicht, so muß h von einem bestimmten Werte für ϑ an aufwärts abnehmen, wenn die Magnetisierung umkehrbar gemacht werden soll. Für $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ verschwindet die Widerstandskraft $\sin 4\vartheta$, deshalb muß h bis auf Null abnehmen; mit weiterem Zunehmen von ϑ ändert $\sin 4\vartheta$ sein Vorzeichen, also muß man h in entgegengesetzter Richtung anlegen, wenn die Magnetisierung umkehrbar gemacht werden soll. Nähert sich ϑ dem Werte 70°, so wird h in der Grenze ∞ , und die Magnetisierung strebt asymptotisch dem Werte Eins zu.

Die Kurve für $\alpha = 120^\circ$, die bei dem Punkte c auf der negativen Seite von i beginnt, geht durch ein Maximum und ein Minimum von h und fällt mit weiter zunehmendem i -Werte mit der Kurve für $\alpha = 30^\circ$ zusammen.

Die Kurve für $\alpha = 170^\circ$, die bei dem Punkte d der negativen Seite von i beginnt, geht durch zwei Maxima und ein Minimum von h mit wachsendem i und nähert sich asymptotisch der Linie $i = 1$. Aus dieser Figur ziehen wir folgende Schlüsse:

Fall 1. $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$. Mit wachsendem Felde werden die Magnete gegen die Richtung des Feldes gedreht und fallen mit der Feldrichtung für $h = \infty$ zusammen. Wird das Feld allmählich vermindert, so kehren die Magnete in ihre Ausgangsstellung zurück.

Fall 2. $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Bei allmählichem Zunehmen des Feldes

drehen sich die Magnete gegen die Feldrichtung, bis die innere Widerstandskraft ein Maximum erreicht. Aus dieser Lage kann man eine reversibel bleibende Drehung der Magnete nur dadurch erreichen, daß man das Feld nach Null und darüber hinaus abnehmen läßt. Bei dem negativ unendlichen Werte des Feldes werden die Magnete in die Feldrichtung gebracht. Läßt man das Feld abnehmen, bevor die Widerstandskraft ihr Maximum erreicht, so kehren die Magnete in ihre Ausgangsstellung zurück; wenn es aber den kritischen Wert überschreitet, so kehren die Magnete bei abnehmendem Felde nicht in ihre Ausgangsstellung zurück, sondern nehmen eine andere stabile Gleichgewichtslage ein, die sich von der ursprünglichen um $\frac{\pi}{2}$ unterscheidet. Also ist in diesem

Falle die Magnetisierung irreversibel. Ähnliche Schlüsse kann man aus den Kurven *c* und *d* von Fig. 49 ziehen.

Bisher haben wir nur die Magnetisierung eines einzelnen Komplexes betrachtet, aber wir können nun die Magnetisierung eines ferromagnetischen Körpers im ganzen untersuchen, wie z. B. von Eisen, das aus einer großen Zahl

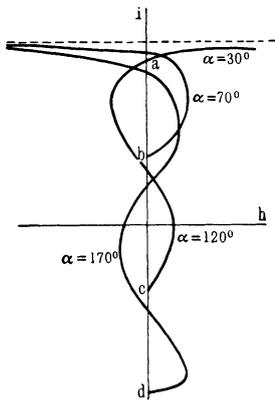
solcher Elementarkomplexe besteht, deren Achsen gleichförmig nach allen Richtungen verteilt sind. Honda betrachtet einen Komplex in Form einer Kugel und setzt die Wirkung der benachbarten Elementarkristalle gleich $\frac{4}{3} \pi J$, wobei er *J* als gleichförmig annimmt.

Gleichung (2) ist also durch Gleichung (3) zu ersetzen:

$$\left(H + \frac{4}{3} \pi J\right) \sin(\alpha - \vartheta) = A \sin 4\vartheta. \quad (3)$$

Unter diesen Annahmen erhält Honda eine Magnetisierungskurve und eine Hystereseschleife, die den experimentellen Kurven sehr ähnlich sehen. Er geht dann zur Magnetisierungstheorie des Magnetits über.

Fig. 49.



W. Voigt [Götting. Nachrichten (1900), S. 331] und Wallerant (C. R. 1901, S. 630) haben gezeigt, daß ein Kristall des kubischen Systems bezüglich der magnetischen Eigenschaften nicht isotrop ist, wenn die Permeabilität eine Funktion der magnetischen Kraft ist.

Wir wollen einen Magnetitkristall betrachten, der unter dem Einfluß eines Feldes parallel zu einer der Würfelflächen steht. Im Falle des Magnetits sind die stabilen Orientierungen der Molekularmagnete die drei positiven und drei negativen Richtungen parallel zu den Würfelseiten, jedoch die Richtungen der Diagonalen der Würfelflächen sind Orientierungen unstabiler Gleichgewichte. Also werden, wenn das Raumgitter vollständig regulär, und die Wärmebewegung gleich Null ist, die Magnete jeder Gruppe beim Fehlen eines magnetisierenden Feldes eine der sechs Richtungen des stabilen Gleichgewichtes einnehmen.

Für die Berechnung der Magnetisierung nehmen wir die beiden Seiten der Gitterebene als X - und Y -Achse an und betrachten je zwei Magnetpaare in der Richtung der positiven und negativen X - und Y -Achse und ein Paar in der zur X - Y -Ebene senkrechten Richtung, wobei die Gesamtwirkung Null ist. Legt man das magnetische Feld in einer Richtung an, die mit der X -Achse den Winkel α bildet, so ist die Magnetisierungsintensität gegeben durch:

$$i = \frac{1}{6} \left\{ \cos(\alpha - \vartheta_1) + \cos(\pi - \alpha - \vartheta_2) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \vartheta_3\right) \right. \\ \left. + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \vartheta_4\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_5\right) \right\}$$

oder

$$i = \frac{1}{6} \left\{ \cos(\alpha - \vartheta_1) - \cos(\alpha + \vartheta_2) + \sin(\alpha + \vartheta_3) \right. \\ \left. + \sin(\vartheta_4 - \alpha) + 2 \sin \vartheta_5 \right\}.$$

Dabei bestehen zwischen α und ϑ die Gleichungen

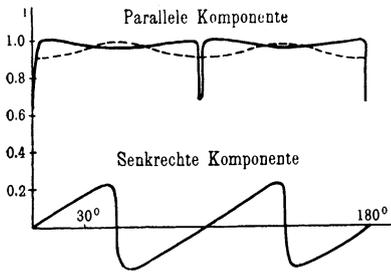
$$h = \frac{\sin 4 \vartheta_1}{\sin(\alpha - \vartheta_1)} = \frac{\sin 4 \vartheta_2}{\sin(\alpha + \vartheta_2)} = \frac{\sin 4 \vartheta_3}{\sin(\alpha - \vartheta_3)} \\ = \frac{\sin 4 \vartheta_4}{\sin(\vartheta_4 - \alpha)} = \frac{\sin 4 \vartheta_5}{\cos \vartheta_5}.$$

Bei der Berechnung müssen wir den plötzlichen Drehungswechsel der Magnete beim Überschreiten der kritischen Werte von ϑ berücksichtigen. Ist h sehr groß oder sehr klein, so sieht man

leicht, daß i unabhängig von α ist, d. h. der Kristall verhält sich wie ein isotroper Körper. Honda geht dazu über, die Magnetisierung in der Richtung der X-Achse und der Diagonale der Gitterfläche zu berechnen und findet eine qualitative Übereinstimmung zwischen den experimentellen Magnetisierungskurven von Quittner und seinen eigenen theoretischen. Für mäßige Felder von $H = 100$ bis zu $H = 500$ Gauß ist die Magnetisierung längs der Diagonale viel stärker als längs der Richtung der kristallographischen Achse.

Nun halten wir das Feld konstant und ändern, von der Richtung der X-Achse ausgehend, seine Richtung von 0 bis π , für $\alpha = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi, \pi$ fällt die Magnetisierungsrichtung mit der des Feldes zusammen, so daß keine Komponente senkrecht zum Felde vorhanden ist. Die Ergebnisse sind in Fig. 50 graphisch

Fig. 50.



wiedergegeben; die punktierten Linien stellen die Änderung der Kurven dar, die durch mangelnde Regelmäßigkeit im Raumgitter und durch Wärmebewegung entsteht. Vergleichen wir diese Kurven, mit den empirischen Kurven von Quittner, so finden wir lediglich eine qualitative Übereinstimmung, während verschiedene

Erscheinungen, z. B. die Umkehrungen in den experimentellen Kurven, keine Erklärung finden. Honda berechnet auch die beiden Magnetisierungskomponenten parallel und senkrecht zum Felde in Platten parallel zur Dodekaeder- und Oktaederoberfläche. Die senkrechten Komponenten stimmen mit den experimentellen Kurven besser als die parallelen Komponenten überein, es gibt jedoch auffallende Unterschiede zwischen den empirischen und den theoretischen Kurven.

Honda gibt auch eine Theorie der magnetischen Eigenschaften des Pyrrhotits unter Annahme des hexagonalen Systems. Seine magnetischen Eigenschaften entsprechen jedoch am meisten dem rhombischen System, trotz seines hexagonalen Aussehens. Honda betrachtet auch den von Weiss behandelten Fall, in dem jeder der Magnete nur durch seine in der gleichen Reihe liegenden

Nachbarn beeinflusst wird. Die Gleichgewichtsbedingung wird gegeben durch die Gleichung

$$H \sin(\alpha - \vartheta) = F(\vartheta),$$

wobei $F(\vartheta) = A \sin 2\vartheta [\varphi(k) - \varphi_1(k) \sin^2 \vartheta]$,

während Weiss die Beziehung erhielt

$$H \sin(\alpha - \vartheta) = A \sin 2\vartheta.$$

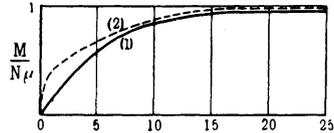
Honda hebt hervor, die Annahme von Weiss, daß der Winkel der inneren Kraft mit der Richtung des stabilen Gleichgewichts gleich dem Ablenkungswinkel der Magnete sei, könnte nicht allgemein gelten. Die theoretischen Kurven jedoch, die Honda erhielt, gleichen nicht ganz den empirischen Kurven. Die Richtungen der leichten und schwierigen Magnetisierung stehen in der magnetischen Ebene senkrecht zueinander, eine Tatsache, die mit dem hexagonalen System nicht übereinstimmt.

Es muß erwähnt werden, daß W. H. Bragg und M. Nishikawa die Diffraktion der Röntgenstrahlen durch Magnetit untersucht haben (Phil. Mag. **30**, 305, 1915), und daß A. W. Hull (Phys. Rev. **9**, 84; **10**, 661, 1917) den Eisenkristall untersuchte, der durch ein zentriertes kubisches Gitter gekennzeichnet ist, dessen Einheit ein Würfel mit einem Atom in jeder Ecke und einem im Würfelmittelpunkt ist.

O. E. Frivold betrachtet zunächst längs einer geraden Linie angeordnete Elementarmagnete, die unter dem Einfluß der Wärmebewegung, ihrer gegenseitigen Wirkung und des äußeren Feldes in statistischem Gleichgewicht sind. Diese Theorie ist daher eine direkte Weiterführung der Langevinschen Theorie. Das Ergebnis ist in Fig. 51 angezeigt. Kurve (1) ist die von Langevin, Kurve (2) enthält die auf die gegenseitige Einwirkung der Magnete zurückgehende Korrektur von (1) in starker Vergrößerung, indem die Ordinaten der Langevinschen Kurve nur um den 1000. Teil vergrößert werden müßten. Die gegenseitige Einwirkung ist natürlich bei den tiefsten Temperaturen am stärksten ausgeprägt, wo selbst bei schwachen Feldern Sättigung erreicht werden kann.

Das dreidimensionale Problem ist analog dem eindimensionalen durchgeführt. Man nimmt die Elementarmagnete entweder in den

Fig. 51.



Ecken eines einfachen kubischen Gitters an, oder man nimmt ein zentriertes kubisches Gitter. Das Ergebnis der Berechnung ist für die beiden Raumgitter durch die beiden folgenden Gleichungen gegeben:

$$\frac{M_T}{N\mu} = \frac{1}{3} \frac{\mu}{k} \frac{H}{T} \left[\left\{ 1 - \frac{6,27}{4} \left(\frac{\mu^2}{a^3 k T} \right)^2 + \dots \right\} + \left(\frac{\mu H}{k T} \right)^2 \left\{ \frac{2,56}{4} \left(\frac{\mu^2}{a^3 k T} \right)^2 - \frac{1}{15} \right\} \right]$$

und

$$\frac{M_T}{N\mu} = \frac{1}{3} \frac{\mu}{k} \frac{H}{T} \left[\left\{ 1 - \frac{8,88}{4} \left(\frac{\mu^2}{a^3 k T} \right)^2 + \dots \right\} + \left(\frac{\mu H}{k T} \right)^2 \left\{ \frac{3,22}{4} \left(\frac{\mu^2}{a^3 k T} \right)^2 - \frac{1}{15} \right\} \right].$$

Langevins Formel ist einfach

$$\frac{M_T}{N\mu} = \frac{1}{3} \frac{\mu H}{k T}.$$

a ist der Abstand zweier benachbarter Magnete. Auch hier spielt, besonders bei höheren Temperaturen, die gegenseitige Wirkung eine sehr unbedeutende Rolle. Der gegenseitige Einfluß erscheint größer, wenn man die elektrischen Kräfte der Dipole berücksichtigt. Das Gebiet der ferromagnetischen Kristalle ist voll experimenteller und theoretischer Probleme.

Magnetonen.

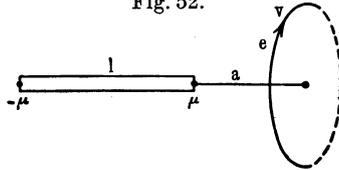
Den Begriff der Magnetonen verdanken wir Ampère und Wilhelm Weber, als spezielle physikalische Realitäten aber wurden sie in die Optik von Walter Ritz zur Erklärung der Balmer-serien des Wasserstoffspektrums eingeführt. Beschreibt ein Elektron eine Kreisbahn senkrecht zu einem magnetischen Felde H mit der Geschwindigkeit v , so wirkt auf dasselbe eine Kraft $F = evH$; dieser Kraft hält die Zentrifugalkraft $\frac{mv^2}{r}$ das Gleichgewicht, wobei r der Kreisradius ist. $v = \omega r = 2\pi nr$, wobei n die Frequenz ist. Wir erhalten also $evH = m \frac{v^2}{r}$ oder $\frac{eH}{m} = \frac{v}{r} = 2\pi n$.

Die Frequenz ist dem Felde proportional. Ritz nahm an, daß in allen Sauerstoffatomen Elementarmagnete wie dünne kurze

Eisenstäbchen existieren, deren Länge l und deren Polstärke μ ist. In der Entfernung a von μ ist die magnetische Kraft $H_1 = \frac{\mu}{a^2}$, während $H_2 = \frac{\mu}{(a+l)^2}$, oder die resultierende magnetische Kraft ist $H = H_1 - H_2 = \mu \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+l)^2} \right)$ und die Frequenz des Elektrons ist

$$n_1 = \frac{eH}{m2\pi} = \frac{e\mu}{m2\pi} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+l)^2} \right).$$

Fig. 52.



Unter der Annahme, daß zwei Magnetonen in derselben Linie miteinander verbunden sind, ist die resultierende magnetische Kraft

$$H = \frac{\mu}{a^2} - \frac{\mu}{(a+2l)^2}$$

und die Frequenz n_2

$$n_2 = \frac{e\mu}{2\pi m} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+2l)^2} \right);$$

für drei Magnetonen würden wir erhalten:

$$n_3 = \frac{e\mu}{2\pi m} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+3l)^2} \right) \text{ usw.}$$

Jeder Linie des Spektrums entspricht ein Magnetonensystem. Diese Erklärung der Balmerreihe wurde dann durch die Theorie von Bohr ersetzt.

Mehr Bedeutung als dieses Ritzsche Magneton, das nur historisches Interesse hat, besitzt das Magneton von P. Weiss, das auf eine große Zahl von physikalischen Messungen an paramagnetischen Körpern gegründet ist. Wir verweisen auf: P. Weiss, Phys. Zeitschr. **12**, 935, 1911; P. Weiss, L'état actuel de la question du magneton, Bibl. univ. **35**, 406, 1913. Eine zusammenfassende Übersicht gab kürzlich B. Cabrera: Magneto-Chimie im Journ. de chim. phys. **16**, 442, 1918 mit einem vollständigen Literaturverzeichnis.

Definitionen.

Es sei:

 M das magnetische Moment pro Grammatom, bei der Temperatur T , M_0 das gleiche beim absoluten Nullpunkt, k die Suszeptibilität pro Volumeneinheit, d die Dichte und m das Molekulargewicht des Körpers.

Dann gilt für die molekulare Suszeptibilität

$$\chi_m = \frac{k}{d} m = \frac{M}{H},$$

wobei H das magnetische Feld ist. Für paramagnetische Gase erhalten wir nach Langevin

$$\frac{M}{M_0} = \coth a - \frac{1}{a}, \quad \text{wobei} \quad a = \frac{M_0 H}{RT}.$$

Für Gase können wir mit genügender Annäherung schreiben:

$$\coth a - \frac{1}{a} = \frac{a}{3},$$

also

$$M = M_0 \frac{a}{3} = \frac{M_0^2 H}{3 RT} \quad \text{oder} \quad \frac{MT}{H} = \frac{M_0^2}{3 R}; \quad R = 8,315 \cdot 10^7,$$

$$\chi_m T = \frac{M_0^2}{3 R}.$$

Curie fand

$$\chi_m T = C_m = \text{const} \quad (\text{Curiesche Konstante}),$$

$$C_m = \frac{M_0^2}{3 R} \quad \text{oder} \quad M_0 = \sqrt{3 R C_m}.$$

Die einzigen paramagnetischen Gase sind O_2 und NO , für die Weiss sowie Weiss und Picard die folgenden Werte gaben:

	$\chi_m \cdot 10^6$	C_m	M_0	n
O_2	3381,8	0,9937	15 745	14,014
NO	1400,3	0,4132	10 156	9,039
O_2	3449,6	0,0107	15 920	14,12
NO	1461	0,4281	10 330	9,20

Nach Weiss ist das magnetische Moment pro Grammatom oder das Magneton 1123,5, abgeleitet aus magnetischen Messungen an Fe, Ni, Co und Fe_3O_4 bei tiefen Temperaturen. Teilen wir 15745 durch 1123,5, so erhalten wir die Magnetonenzahl $n = 14,014$ im Sauerstoffmolekül. Nach Weiss sind alle paramagnetischen Momente ganze Vielfache des Magnetons 1123,5. Leider fanden Weiss, Bauer und Picard (Compt. rend. **167**, 484, 1918) als Magnetonenzahl im Sauerstoff 14,12 und in NO 9,20, Zahlen, die beträchtlich von den ganzen Zahlen abweichen.

Lösungen.

Für verdünnte Lösungen wurde dasselbe paramagnetische Gesetz wie für Gase angenommen. Aber das Lösungsmittel ist im allgemeinen nicht ohne Einfluß. Es gibt Fälle, für die die Wiedemannsche Regel gilt, und andere, für die sie versagt. Die Wiedemannsche Regel besagt, daß die Suszeptibilität in χ in Lösungen der Mischungsregel gehorcht. Es sei die Konzentration eines Salzes C_a , seine Suszeptibilität χ_a , die Suszeptibilität des Lösungsmittels χ_s , seine Konzentration $1 - C_a$. Dann drückt sich die Wiedemannsche Regel durch folgende Gleichung aus:

$$\chi = C_a \chi_a + (1 - C_a) \chi_s.$$

Außerdem wird in einer Verbindung wie FeSO_4 die negative Gruppe SO_4 einen Einfluß auf das magnetische Moment des Salzes haben. Bei den unorganischen Verbindungen wissen wir sehr wenig von diesem Einfluß, jedoch bei organischen Verbindungen verwandter Konstitution fand Pascal, daß in vielen Fällen der molekulare Diamagnetismus einer Verbindung gleich der Summe des Diamagnetismus der Atome ist, plus einer additiven Konstanten λ , oder in einer Formel:

$$\chi_m = \Sigma n_a \cdot \chi_a + \lambda;$$

λ ist für die molekulare Konstitution charakteristisch. λ ist nur für die gesättigten Kohlenwasserstoffverbindungen $\text{C}_n\text{H}_{2n+2}$ gleich Null, so daß die molekulare Suszeptibilität rein additiv ist. Für alle anderen Verbindungen der aliphatischen Reihe ist λ positiv, für die aromatischen ist λ negativ. Viel komplizierter sind die Beziehungen bei den Sauerstoffverbindungen; so sind z. B. O_3 und NO paramagnetisch, während CO und H_2O diamagnetisch sind.

Noch verwickelter sind die Eigenschaften der unorganischen Verbindungen, für sie kennen wir bis jetzt noch kein additives, oder analoges Gesetz. Nichtsdestoweniger nimmt Weiss an, daß die diamagnetischen Atome in den Verbindungen mit paramagnetischen Atomen ihren Diamagnetismus beibehalten. Um den reinen Paramagnetismus in den paramagnetischen Salzen zu erhalten, benutzt er folgende atomare und molekulare Koeffizienten:

	$-\chi_a \cdot 10^6$		$-\chi_a \cdot 10^6$		$-\chi_m \cdot 10^6$
H	3,05	Fl	12	SO ₄	33,5
C	6,25	Cl	21	NO ₃	19,0
O	4,8	Br	32	NH ₃	15,0
S	15,6	J	46,5	CN	11,25
Se	24	Na	4	H ₂ O	13,5
Te	39	K	11		
P	27,4	Hg	35		

Mit Hilfe dieser Größen leitete Weiss aus den Messungen Pascals folgende molekulare Momente und Magnetonzahlen ab. Vernachlässigen wir das vierte und das siebente Beispiel, so erhalten wir fast ebensogut ganze Zahlen wie Weiss, wenn wir das Komma eine Ziffer nach links rücken. Leider benutzte Weiss für die Suszeptibilität des Wassers $-7,5 \cdot 10^{-7}$ statt $-7,2 \cdot 10^{-7}$.

Körper	M_0	$n = \frac{M_0}{1123,5}$	n' - ganzzahlig
K- und NH ₄ -Ferricyanid . .	11 700	10,41	10
Fe- „ NH ₄ -Pyrophosphat . .	24 600	21,69	22
Fe- „ NH ₄ -Citrat	24 680	21,96	22
Na-Ferripyrophosphat	27 100	24,04	24
Na-Ferrimetaphosphat	31 500	28,03	28
Ferrichlorid	31 390	27,93	28
Ferrisulfat	33 800	30,09	30
K-Ferrometaphosphat	29 200	25,99	26
Na-Ferrooxalat	30 480	27,11	27
Na-Ferropyrophosphat	31 370	27,91	28
Ferrosulfat	31 120	27,69	28

Dies bedingt einen beträchtlichen Fehler, so daß diese ersten Zahlen von Weiss nur historisches Interesse haben. Aber sie geben Veranlassung zu einem sorgfältigen Studium der Lösungen paramagnetischer Körper, das eine Anzahl interessanter Erscheinungen offenbarte und in speziellen Fällen zu ganzen Magnetonen-

zahlen führte. Nicht alle Lösungen gehorchen der Wiedemannschen Regel, die Suszeptibilität des gelösten Körpers ist oft eine Funktion der Konzentration. Die Nickelsalze gehorchen dem Wiedemannschen Gesetz und liefern ganzzahlige Werte von n . Weiss und Bruins sowie Cabrera, Moles und Guzman geben folgende Resultate:

	C_m	n
NiCl ₂	1,300	16,03
Ni(NO ₃) ₂	1,299	16,02
Ni(SO ₄)	1,306	16,07

Neuerdings findet Theodorides (Arch. de Genève 3, 1921) für NiCl₂ in dem Temperaturbereich 0 ÷ 125° $n = 16,03$ und zwischen 150 und 300° $n = 16,92$.

Ähnlich sind die Ergebnisse bei den Chromsalzen Cr(NO₃)₃: $n = 18,99$ und Cr₂(SO₄)₃: $n = 18,99$. Im Gegensatz hierzu scheinen die Eisensalze (Valenz 2) keine ganze Magnetonzahl zu liefern; es besteht jedoch ein Mangel an Übereinstimmung zwischen den verschiedenen Messungen, wie man aus der folgenden Tabelle ersieht:

	C_m	n
FeSO ₄ + 7H ₂ O	{ 3,400	25,9
	{ 3,589	26,6
FeSO ₄	{ 3,385	25,9
	{ 3,551	26,51
FeCl ₂ + 4H ₂ O	3,478	26,2
FeCl ₂	3,349	25,7

Die Messungen an festen Salzen und ihren Lösungen stimmen nicht immer überein. Die Zahl der Magnetonen in Ferrosalzen ist angenähert 26. Bei den dreiwertigen Eisensalzen in Lösung gilt die Wiedemannsche Regel nicht. Hier zeigt sich der Einfluß der Hydrolyse. Cabrera und Moles geben für die Änderung von C_m als Funktion der Konzentration folgende Kurven (Fig. 53).

Diese Messungen scheinen horizontale Asymptoten entsprechend 29 Magnetonen für FeCl₃ und 27 Magnetonen Fe₂(SO₄)₃ anzudeuten. Wenn diese Kurven von der Hydrolyse abhängen, so müssen sie

sich bei Addition des Kations H_+ verändern, das die Hydrolyse verhindert und die magnetische Suszeptibilität vermehrt.

Die Kurven (Fig. 54) zeigen den Einfluß wachsender Mengen von HCl und HNO_3 in einer Lösung $FeCl_3$, deren Konzentration

Fig. 53.

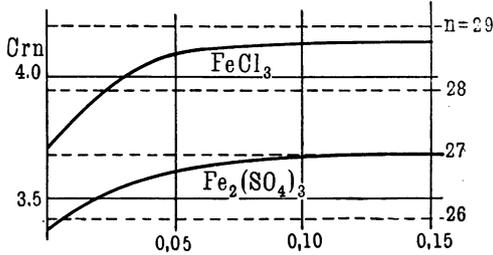
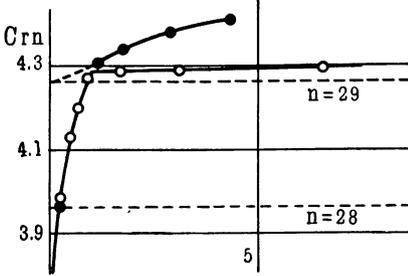
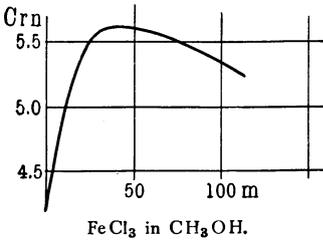


Fig. 54.



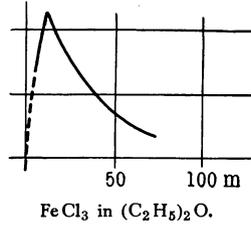
○ $FeCl_3 + HCl$. ● $FeCl_3 + HNO_3$.

Fig. 55.



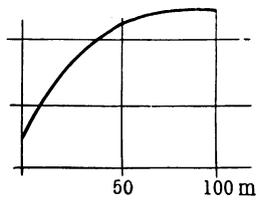
$FeCl_3$ in CH_3OH .

Fig. 56.



$FeCl_3$ in $(C_2H_5)_2O$.

Fig. 57.



$FeCl_3$ in $HCOOH$.

0,00838 g pro Kubikzentimeter betrug. Die Kurven bestehen aus zwei Ästen. Im ersten Teile wächst C_m sehr schnell bei Hinzufügung von kleinen Mengen der Säure. In dem folgenden Aste wächst die Kurve viel langsamer. Der erste Ast der Kurve entspricht der

abnehmenden Hydrolyse. Setzen wir den zweiten Ast fort, bis er die Ordinatenachse schneidet, so erhalten wir den Wert von C_m für die Hydrolyse Null. Dieser Wert entspricht 29 Magnetonen, jedoch sind leider die Grenzwerte von C_m für FeCl_3 nicht genau die gleichen, wenn die Hydrolyse durch HCl und durch HNO_3 reduziert wird. Überdies erhalten wir für eine unendlich verdünnte Lösung von FeCl_3 und $\text{Fe}(\text{NO}_3)_3$ 27 Magnetonen; für $\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3$ 26 Magnetonen. Bilden in komplexen Salzen die paramagnetischen Atome einen Teil der Anionen, so verlieren sie zuweilen ihren paramagnetischen Charakter, z. B. ist K_4FeCy_4 diamagnetisch.

Interessante Erscheinungen treten auf, wenn man paramagnetische Eisensalze in organischen Lösungsmitteln löst, die sorgfältig getrocknet worden sind.

Sie werden durch die drei aus Cabreräs Arbeit entnommenen Kurven (Fig. 55, 56, 57) dargestellt. Scharfe Maxima treten besonders bei der Lösung von FeCl_3 in $(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O}$ und in $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ auf. Setzen wir die Kurven fort, bis sie die Ordinatenachse schneiden, so treten zuweilen Werte von C_m auf, die ganzen Zahlen n entsprechen.

Die Salze von Mangan, Kobalt und Kupfer haben im allgemeinen keine ganzzahligen Werte von n geliefert, obwohl in einigen Grenzfällen, wo die Hydrolyse vollständig oder Null ist, annähernd ganze Magnetonzahlen auftreten. Daß Salze des diamagnetischen Kupfers paramagnetisch sind, ist an sich interessant.

Paramagnetische Körper in festem Zustand.

P. Weiss erweiterte die Theorie der paramagnetischen Gase auf feste Körper und fand aus den molekularen Suszeptibilitäten einer Reihe von Verbindungen die folgenden annähernd ganzen Magnetonzahlen (s. Tabelle a. f. S.).

Setzen wir wieder das Komma um eine Ziffer nach links, so erhalten wir sogar bessere ganze Zahlen n_1 als Weiss (n). In diesen Salzen wäre das Magneton 10mal so groß als das Weiss'sche Magneton. Die vorliegende Tabelle enthält ältere Messungen; neuere Messungen von K. Onnes haben gezeigt, daß oft paramagnetische Salze mit Kristallwasser in einem weiten Temperaturbereich dem Curieschen Gesetz gehorchen; in den meisten anderen Fällen jedoch muß dieses Gesetz durch folgende Formel ersetzt werden:

$$\chi (T + T_1) = \text{const},$$

	n	n_1
Fe Cl ₃	28,83	2,88
Fe Cl ₃ 2 NH ₄ Cl H ₂ O	26,99	2,70
Fe F ₃ 3 NH ₄ F	28,94	2,89
Fe F ₃ 2 NH ₄ F H ₂ O	29,19	2,919
Ferriacetylacetonat	21,23	2,12
$\frac{1}{3}$ Mn ₃ O ₄	17,97	1,797
Cr Cl ₃	20,04	2,004
Kobaltacetylacetonat	21,12	2,11
$\frac{1}{2}$ Cr (NH ₃) ₆ Cr (C ₂ O ₄) ₂ 3 H ₂ O	20,16	2,016
$\frac{1}{2}$ Cr (NH ₃) ₄ C ₂ O ₄ (Cr NH ₃) ₂ (C ₂ O ₄) ₂	20,16	2,016

wobei T_1 eine (positive oder negative) Konstante ist. Mischt man flüssigen Sauerstoff und Stickstoff miteinander, so hängt T_1 von der Sauerstoffkonzentration ab, sie nähert sich dem Nullwert; wenn die Verdünnung unendlich wird, d. h. wenn die Moleküle des flüssigen Sauerstoffs genügend weit voneinander entfernt sind, gilt das Curiesche Gesetz für unendlich verdünnte Lösungen. Gans, Keesom und Lenz haben Deutungen des modifizierten Curieschen Gesetzes gegeben. Sogar für diese Fälle hat Cabrera eine ganze Magnetonenzahl abgeleitet, z. B. aus den Messungen von E. H. Williams an den Oxyden der seltenen Erden. Für Didym fand er 52 Magnetonen.

In einer neuen Arbeit „Le paramagnétisme et la structure de l'atome“ ¹⁾ gibt B. Cabrera eine kritische Übersicht über diese Messungen der magnetischen Momente der Salze der Eisengruppe. Seine Resultate sind in der folgenden Tabelle gegeben:

Ion	n	Ion	n	Ion	n
Cr ⁺⁺⁺	19	Fe ⁺⁺⁺	29 (28,9)	Ni ⁺⁺⁺	?
Cr ⁺⁺	24	Fe ⁺⁺	26	Ni ⁺⁺	16
Mn ⁺⁺⁺	?	Co ⁺⁺⁺	?	Cu ⁺⁺	9,1 ?
Mn ⁺⁺	29	Co ⁺⁺	25	Cu ⁺	0

Es ist von Interesse, zu sehen, daß das magnetische Moment des Eisenatoms, das drei Elektronen verloren hat, mit dem Moment des Manganatoms, das zwei Elektronen verloren hat, identisch ist (Kossels Verschiebungsgesetz).

¹⁾ Journ. de phys. **3**, 443, 1922.

Ferromagnetische Metalle bei tiefen Temperaturen.

Der Magnetismus ferromagnetischer Körper nimmt mit abnehmender Temperatur sogar unterhalb der Temperatur der flüssigen Luft zu und erreicht die absolute Sättigung beim absoluten Nullpunkt:

$$J_s = MN.$$

P. Weiss und K. Onnes haben bei 14° abs. die in der folgenden Tabelle gegebenen magnetischen Momente pro Grammatom gemessen:

	M_0	n
Nickel	3 370	3,00
Kobalt	10 042	8,94
Eisen	12 360	11,002
Magnetit	7 417	—

Das Magneton 1123,5 pro Grammatom von Weiss ist der gemeinsame Teiler für Eisen und Nickel.

Magnetit stimmt nicht, ebenso wenig Kobalt wegen der außerordentlichen Härte dieses Elements, was die Messung der Magnetisierungsintensität J bei diesen tiefen Temperaturen unmöglich macht. O. Bloch hat jedoch die Nickel-Kobaltlegierungen einem systematischen Studium unterworfen und hat das J von Legierungen bis zu 70 Proz. Kobalt bis zur Temperatur der flüssigen Luft hinunter gemessen. Die absolute Sättigung ist dem Kobaltgehalt proportional. Durch Extrapolation fand Bloch für M_0 10 042 entsprechend 8,94 oder 9 Magnetonen. Die Legierungen von Ni-Fe und von Co-Fe zeigen ein verschiedenes Verhalten. Stellen wir J als Funktion der Konzentration dar, so erhalten wir zwei gerade Linien, die sich in einem den Verbindungen Fe_2Ni und Fe_2Co entsprechenden Punkte schneiden. Verlängert man diese Geraden, bis sie die Achsen schneiden, so finden wir folgende Werte von M_0 und n :

	M_0	n		M_0	n
Ni	3 450	3,07	Fe	{ 12 355	10,997
Fe	12 450	11,09			
Fe_2Ni	34 390	30,6	Fe_2Co	40 544	36,087
Co	10 080	8,973			

Bei den Eisen-Kobaltlegierungen ändert sich die Magnetonen-
zahl von 11 auf 10. An sich interessant ist die Tatsache, daß die
Eisen-Kobaltverbindung Fe_2Co die stärkste bis jetzt bekannte
magnetische Substanz ist; stärker als reines Eisen und reines
Kobalt. Wie sich die 36 Magnetonen auf das Eisen und das
Kobalt verteilen, ist unbekannt. In der Nähe des absoluten Null-
punktes enthält Ni 3, Fe 11 oder 10 und Co 9 Magnetonen.

Magnetische Eigenschaften beim Curieschen Punkte.

Endlich bieten die magnetischen Eigenschaften beim Curie-
schen Punkte eine Möglichkeit, das magnetische Moment pro Grammatom
und die Magnetonenzahl zu bestimmen. Bei dieser Temperatur verschwindet
der Ferromagnetismus, aber es bleibt danach ein kleiner Temperaturbereich
übrig, in dem durch gleichzeitige Einwirkung eines äußeren und eines inneren
Feldes ein beträchtlicher Magnetismus auftreten kann. Nun ist für den
Ferromagnetismus ein inneres Feld charakteristisch,

$$H_m = NJ \quad \text{oder} \quad H_m = N_1 M,$$

und Weiss nahm an, daß sich ein ferromagnetischer Körper wie
ein Gas verhält, dessen Moleküle durch ein inneres und ein äußeres
Feld beeinflußt werden. Dann erhalten wir:

$$M = \frac{M_0^2}{3RT} (H + N_1 M),$$

$$\frac{M}{H} = \frac{M_0^2}{3RT} \left(1 + \frac{N_1 M}{H} \right),$$

oder

$$\frac{M}{H} \left(1 - \frac{M_0^2 N_1}{3RT} \right) = \frac{M_0^2}{3RT}. \quad (1)$$

Wir hatten

$$M = M_0 \frac{a}{3}; \quad a = \frac{M_0 H}{RT}.$$

Beim Curieschen Punkte haben wir $T = \Theta$ und $H = N_1 M$,
also ist

$$M = \frac{M_0^2 N_1 M}{3R\Theta} \quad \text{oder} \quad \Theta = \frac{M_0^2 N_1}{3R}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in (1) ein, so erhält man:

$$\chi_m \left(1 - \frac{\Theta}{T} \right) = \frac{M_0^2}{3RT} \quad \text{oder} \quad \chi_m \cdot (T - \Theta) = \frac{M_0^2}{3R} = C_m.$$

Diese letzte Gleichung wurde durch P. Weiss und seine Mitarbeiter für viele ferromagnetische Körper bestätigt gefunden. Jedoch ist die Temperaturkurve der Magnetisierung oberhalb Θ nicht gleichförmig, sondern zeigt verschiedene Diskontinuitäten, die wahrscheinlich die verschiedenen Modifikationen des Eisens trennen. Beim Eisen sind die β - und γ -Modifikation bekannt; nach den magnetischen Messungen muß β bei 828° in die zwei Teile β_1 und β_2 zerlegt werden. Dasselbe gilt für Nickel. Einige der erhaltenen Resultate sind in der folgenden Tabelle von Cabrera wiedergegeben:

		C_m	n	n
Eisen β_1	Fe ₃	{ 6,639	{ 36,24	36,03
		{ 6,536		
		{ 6,526		
		{ 4,587		
" β_2	Fe ₃	{ 4,560	{ 30,12	30,15
		{ 4,599		
		{ 4,646		
		{ 18,306		
" β_3	Fe ₃	{ 18,580	{ 60,15	60,37
		{ 6,605		
" γ	6,605	36,13	
Nickel β_1	Ni	{ 0,3258	{ 8,03	8,03
		{ 0,3234		
		{ 0,3261		
		{ 0,3264		
		{ 0,4033		
" β_2	Ni	{ 0,4032	{ 8,96	8,97
		{ 0,4109		
		{ 0,4033		
		{ 8,96		

Die Messungen von Honda und Takagi sowie die von Terry stimmen mit denen von Weiss nicht überein, und die genannten Verfasser finden das Magneton nicht. Oberhalb des Curie'schen Punktes Θ verhält sich der Magnetit eigentümlich; seine $1/\chi, T$ -Kurve besteht aus fünf geraden Linien, deren Magnetonzahlen im Verhältnis 4:5:6:8:10 entsprechen. Es hat den Anschein, als ob sich bei gewissen Temperaturen das magnetische Moment der Moleküle um endliche Beträge ändere, so daß die Magnetonzahl mit zunehmender Temperatur wächst. Indem wir den Bericht über das Weiss'sche Magneton schließen, fassen wir in einer Tabelle die Magnetonzahlen pro Atom zusammen, die man durch die verschiedenen angegebenen Methoden gefunden hat.

· Methode	Fe n	Ni n	Wertigkeit
Ferromagnetismus	11	3	—
Bei tiefer Temperatur	10 ¹⁾	—	—
Curiescher Punkt: Fe	{ 12,0	8,03	—
	{ 10	8,97	—
	{ 20	—	—
Fe	18	—	—
Paramagnetische Lösungen . . .	{ 26	16,03	2
	{ 27	—	3
	{ 29	—	—
Feste paramagnetische Körper . .	{ 27	—	—
	{ 29	—	—
	{ 21	—	—

Im allgemeinen gilt die Feststellung, daß die Magnetonzahl im Atom in paramagnetischen Verbindungen eines Elements größer ist als in den metallischen ferromagnetischen Verbindungen. Zwischen dem Weiss'schen Magneton und anderen Atomeigenschaften sind keine Beziehungen bekannt. Alle Zahlen der letzten Tabelle geben zu neuen Fragen Anlaß. Während ein gut Teil experimenteller Wahrscheinlichkeit zugunsten des Magnetons spricht, kann doch seine Existenz noch nicht als feststehend angesehen werden; Abweichungen von ganzen Zahlen sind nicht selten: z. B. untersuchte Ph. Theodorides folgende Salze im festen Zustand: MnSO_4 , CoSO_4 , $\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3$, CoCl_2 , NiCl_2 , MnCl_2 , MnO von 25 zu 25° in einem Bereich von 600°. Die Sulfate haben ein negatives molekulares Feld (T_1 positiv), die Chloride ein positives (T_1 negativ). Die Sulfate und Chloride von Co und Ni geben ganze Magnetonzahlen, während MnCl_2 und MnO Bruchzahlen für n , d. h. keine Magnetonen ergeben.

Die magnetischen Suszeptibilitäten von Nickel- und Kobaltchloridlösungen wurden kürzlich durch Miss Lane Brant²⁾ gemessen. Die Suszeptibilitäten der Salze wurden nach dem Wiedemannschen Gesetz aus den Suszeptibilitäten der Lösungen berechnet, und diejenigen der Metalle durch Ausdehnung der Wiedemannschen Beziehung auf die Salze erhalten. Die molekulare Suszeptibilität des Nickels war 0,004423, die des Kobalts 0,01036. Diese Werte geben 16 Magnetonen für die Nickelatome und 24,5 Magnetonen für die Kobaltatome.

¹⁾ Bei Kobaltlegierungen.

²⁾ Phys. Rev. 17, 678, 1921.

Momente der Elementarmagnete nach J. Kunz.

Bevor ich das Weiss'sche Magneton kannte, wandte ich im Jahre 1910 die Gleichung $\Theta = \frac{M_0^3 N_1}{3R}$ oder die gleichwertige Beziehung $m = \frac{3R\Theta}{NJ_s}$ auf die ferromagnetischen Körper Fe, Ni, Co, Fe₃O₄ und die Heuslerschen Legierungen an. $r = 1,36 \cdot 10^{-16}$, Θ der Curie'sche Punkt, N ist die Konstante des inneren magnetischen Feldes in der Gleichung $H_m = N \cdot J$, J_s ist die absolute Sättigungsintensität; m das magnetische Moment des Molekularmagnets oder Magnetons. Ist z. B. das magnetische Moment des Eisens m und sind bei 0° in der Volumeneinheit Z Magnetonen, so ist

$$Zm = J_s.$$

Diese Gleichung liefert Z . Ist die mit einem Magneton verbundene Masse gleich μ_{Fe} , δ die Dichte beim absoluten Nullpunkt, so ist $Z\mu_{Fe} = \delta$. Nehmen wir an, μ_{Fe} sei das Eisenmolekül und μ_H die Masse eines Wasserstoffatoms, so ist

$$\frac{\mu_{Fe}}{112} = \mu_H.$$

(Die absoluten Werte der Elementarmagnet-Momente von Eisen, Nickel und Magnetit, Phys. Rev. 30, 359, 1910.) Ich nahm an, daß das Temperatugesetz korrespondierender Zustände bis zum absoluten Nullpunkt gelte, eine Annahme, die sich als nicht richtig erwies. Aus μ_H finden wir die Elementarladung e des Elektrons durch die Beziehung $\frac{e}{\mu_H} = 9654$. Die erhaltenen magnetischen Momente und die Werte von e gibt folgende Tabelle:

	$m \cdot 10^{20}$	$e \cdot 10^{20}$
Fe	5,15	1,60
Fe ₃ O ₄	2,02	0,90
Ni	3,65	1,54
Co	66,21	1,56
Heuslersche Legierung Nr. 1	3,55	1,54
" " " 2	4,23	2,04

Der Mittelwert von e ist $1,53 \cdot 10^{-20}$ anstatt $1,59 \cdot 10^{-20}$. Man muß aber annehmen, daß der Elementarmagnet des Eisens 2, der des Kobalts 4 und der des Nickels 6 Atome enthält. Wir haben zu beachten, daß das Verhältnis der Dichten von Nickel und Eisen nahezu das gleiche ist, wie dasjenige ihrer Atomgewichte, daher ist für beide Metalle die Zahl der Atome pro Volumeneinheit beinahe die gleiche, aber das magnetische Moment des Nickels ist nur ungefähr 20 Proz. kleiner als das des Eisens. Wir mußten daher erwarten, daß die Magnetisierungsintensität des Nickels nur ungefähr 20 Proz. kleiner sei als die des Eisens, während in Wirklichkeit die Magnetisierung des Eisens etwa 3,5 mal so groß ist als die des Nickels. Die angegebenen Zahlen umschließen weite Extrapolationen und können keine große Genauigkeit beanspruchen. Übrigens stimmt die moderne Theorie des Kristallgitters nicht mit diesen älteren Annahmen überein.

Das Magneton von Bohr.

Das Bohrsche Atommodell war bei der Erklärung des Linienspektrums des Wasserstoffs so erfolgreich, daß man annehmen konnte, es würde auch zu einer Erklärung der magnetischen Eigenschaften führen. In der ursprünglichen Planckschen Quantentheorie konnte ein Oszillator nur ganze Vielfache des Energiequantums $E = h\nu$ absorbieren und emittieren, während nach Bohr die Quantenbeziehung in dem Atom auf zwei verschiedene Arten auftritt. Erstens fällt das Elektron, während es Licht emittiert, von einer äußeren in eine innere stationäre Bahn, wofür die Gleichung gilt: $E_a - E_e = h\nu$. Zweitens gilt für die stationären Bahnen das Impulsmoment $p = \frac{nh}{2\pi}$ (hier ist n eine ganze Zahl). Bewegt sich das Elektron auf einem Kreise mit dem Radius a , dann ist

$$p = m a v,$$

wobei m die Elektronenmasse und die Geschwindigkeit $v = a \cdot 2\pi\nu$, oder:

$$p = m a^2 2\pi\nu.$$

Andererseits ist das magnetische Moment M_1 eines solchen rotierenden Elektrons gleich

$$i A = e v \pi a^2 = \frac{p e}{2m} = \frac{nh e}{4\pi m};$$

ist $n = 1$, so ist $M_1 = \frac{he}{4\pi m}$. Das ist das Bohrsche Magneton.

Multiplizieren wir M_1 mit der Loschmidtschen Zahl $L = 6,06 \cdot 10^{23}$, so erhalten wir das magnetische Moment M pro Grammatom:

$$M = M_1 L = \frac{heL}{4\pi m} = 5584, \quad M_1 = 9,21 \cdot 10^{-21}.$$

5.1123,5 = 5617,5, d. h. das Bohrsche Magneton ist etwa fünfmal so groß als das Weiss'sche. Die magnetischen Momente pro Grammatom müßten ganze Vielfache von 5584 sein. Wir können diese Formel noch nicht prüfen, da Messungen einatomiger paramagnetischer Gase noch nicht zur Verfügung stehen. Vielleicht sind die Dämpfe der Alkalimetalle paramagnetisch. Messungen an diesen Dämpfen würden sehr wertvoll sein. Nur für Nickel bei tiefsten Temperaturen ist das Bohrsche Magneton zu groß; in allen anderen bis jetzt bekannten Fällen enthalten die paramagnetischen Elemente und ihre Verbindungen mehr als fünf Weiss'sche Magnetonen. Gehen wir zu den zweiatomigen Gasen über, so gibt uns Bohrs ältere Theorie keinen befriedigenden Begriff von der Struktur der Moleküle. Nach dem Bohrschen Modell müßte das Wasserstoffmolekül paramagnetisch sein, während dieses Gas diamagnetisch ist. Wir können daher die oben angegebenen Resultate nicht direkt auf die Moleküle ausdehnen. Wenden wir es trotzdem auf die einzigen bekannten paramagnetischen Gase, Sauerstoff und NO, an, so erhalten wir nach Weiss, Bauer und Picard¹⁾ die folgenden Zahlen für die Suszeptibilitäten bei 20° C:

$$\begin{aligned} \text{O}_2 : \chi_{20} &= 1,077 \cdot 10^{-4}, \\ \text{NO} : \chi_{20} &= 0,487 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Die magnetischen Momente pro Molekül sind:

$$M_{\text{O}_2} = 1,587 \cdot 10^4$$

und

$$M_{\text{NO}} = 1,033 \cdot 10^4.$$

Also müßte nach Weiss der Sauerstoff 14,12 Magnetonen und NO 9,2 Magnetonen, also keine ganzen Zahlen, haben. Nach Bohr erhalten wir durch Division mit 5584 für Sauerstoff 2,86 und für NO 1,86 Magnetonen; Zahlen, die nicht befriedigend sind. Nun

¹⁾ C. R. 167, 484, 1918.

hat W. Pauli jr.¹⁾ angenommen, daß die Langevinsche Formel einer Verbesserung bedürfe, wenn die Bahnen gequantelt werden sollen, d. h. wenn der Winkel ϑ zwischen der Achse des magnetischen Momentes und der Richtung des magnetischen Feldes nicht kontinuierlich alle Werte annehmen kann, sondern so beschränkt werden muß, daß $\cos \vartheta$ nur die rationalen Werte

$$\cos \vartheta = \pm \frac{k}{n}, \quad k = 1, 2, 3 \dots n$$

annehmen kann, wobei n die Quantenzahl des Impulsmomentes oder die Magnetonezahl ist. Dann erhält er statt $M_0 = \sqrt{3 R \cdot C_m}$ die verbesserte Formel:

$$M_0 = \sqrt{\frac{3 R C_m}{\frac{1}{3} \cdot (n+1)(2n+1)}}$$

Für $n = 1$ ist

$$M_0 = \sqrt{3 R C_m} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Für NO erhalten wir mittels dieser Formel:

$$M_0 = 10\,330 : 1,732 = 5960$$

und

$$\frac{5960}{5584} = 1,067;$$

für $n = 2$ erhalten wir

$$M_0 = \sqrt{3 R C_m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{15}{2}}}$$

Dies gibt für Sauerstoff

$$M_0 = 15\,870 : 2,739 = 5800$$

und

$$\frac{5800}{5584} = 1,04,$$

oder 4 Proz. Abweichung von der Annahme, daß der Sauerstoff zwei Bohrsche Magnetonen enthalte. Für NO beträgt die Abweichung bis zu 7 Proz. unter der Annahme, daß dieses Gas ein Bohrsches Magneton enthalte. Pauli nahm an, daß die Achse des magnetischen Momentes senkrecht zur Figurenachse ist, und daß

¹⁾ Phys. Zeitschr. **21**, 615—617, 1920.

für die räumliche Quantelung nur das Impulsmoment der Elektronen und nicht das gesamte Impulsmoment benutzt werden muß. Das so bestimmte Magneton ist trotz der Abweichungen sehr wahrscheinlich, da die Zahl der Magnetonen auf eins und zwei beschränkt ist.

Das Prinzip von Pauli wurde gleichzeitig von P. Epstein¹⁾ und W. Gerlach²⁾ auf ausgewählte Zahlen von Cabrera angewandt. Ihre Ergebnisse sind in folgender Tabelle enthalten:

Ion	n	j	j'	$\chi_{\text{ber.}}$	$\chi_{\text{beob.}}$
Cr ⁺⁺⁺	19,0	3	3,04	4,8	5,0
Cr ⁺⁺	24,0	4	4,04	7,7	7,9
Mn ⁺⁺	29	5	5,04	11,3	11,6
Fe ⁺⁺⁺	28,9	5	5,02	11,3	11,5
Fe ⁺⁺	26,0 ÷ 29,0	$\left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 5 \end{array} \right.$	4,4—4,9	7,7	9,3 ÷
			4,5—5,4	11,3	11,6
CO ⁺⁺	24	4	4,04	7,7	7,9
Ni ⁺⁺ gesättigt . . .	16	3	2,6	4,8	3,5
Ni ⁺⁺ ungesättigt . .	13	2	1,9	2,5	2,3
Cu ⁺⁺	9,1	1	1,05	1,0	1,1
Cu ⁺	0	0	0	0	0

Die zweite Reihe enthält unter n die Zahl der Weisssschen Magnetonen in den Körpern der ersten Reihe, j' ist die nach Paulis Formel berechnete Magnetonenzahl, j die entsprechende ganze Zahl, $\chi_{\text{ber.}}$ und $\chi_{\text{beob.}}$ sind die berechneten und beobachteten Suszeptibilitäten. j' und j sollten identisch sein. Ihre Abweichung ist wahrscheinlich größer als der Beobachtungsfehler. Andererseits ist es überraschend, daß sich die Paulische Formel auf eine Flüssigkeit oder eine Elektrolytlösung, ebenso wie auf ein einatomiges Gas, besonders das H-Atom, anwenden läßt. Die Abweichungen zwischen j und j' sind im Falle des zweiwertigen Fe- und des zweiwertigen Ni-Ions ungefähr so groß, als sie sein können ($\frac{1}{3}$ Einheit), trotz der Tatsache, daß die Weissssche Magnetonenzahl 16 für Ni⁺⁺ ungefähr ebensogut oder besser bestimmt ist, als die entsprechende Zahl irgend eines anderen Atoms. Für Kupfer finde ich in Epsteins Tabelle $n = 9,1$, in Cabreras Tabelle und Figur $n = 10$.

¹⁾ Science 57, Nr. 1479, 1923.

²⁾ Phys. Zeitschr. 24, 275, 1923.

Diese Berechnungen von Epstein und Gerlach erhielten größeres Gewicht durch die neueren Forschungen von A. Sommerfeld, die in den folgenden Arbeiten enthalten sind:

1. Spektroskopische Magnetonzahlen (Phys. Zeitschr. **24**, 360—364, 1923).
2. Zur Theorie des Magnetons (Zeitschr. f. Phys. **19**, 221, 1923).
3. Zur Theorie der Multipletts und ihrer Zeemaneffekte (Ann. d. Phys. **73**, 209, 1924).

Sommerfeld zeigt zunächst, daß die Paulische Berechnung einer Korrektur bedarf, wenn man sie auf Atome mit anormalem Zeemaneffekt anwendet. Er nimmt halbe innere j - und magnetische m -Quantenzahlen für Dublett-, Quartett-... Systeme, ganze Quantenzahlen für die ungeraden Systeme (Tripletts, Quintetts...) an. Nach Pauli hatten wir:

$$M_0 = \sqrt{\frac{3 R C_m}{\frac{1}{2}(n+1)(2n+1)}}.$$

Nach Sommerfeld haben wir:

$$M_0 = \sqrt{\frac{3 R C_m}{n(n+2)}}.$$

Mittels dieser Formel erhält Sommerfeld folgende Weissische Magnetonzahlen p , die den Bohrschen Magnetonzahlen M entsprechen:

$M \dots$	1	2	3	4	5
$p \dots$	8,6	14,1	19,2	24,4	29,4

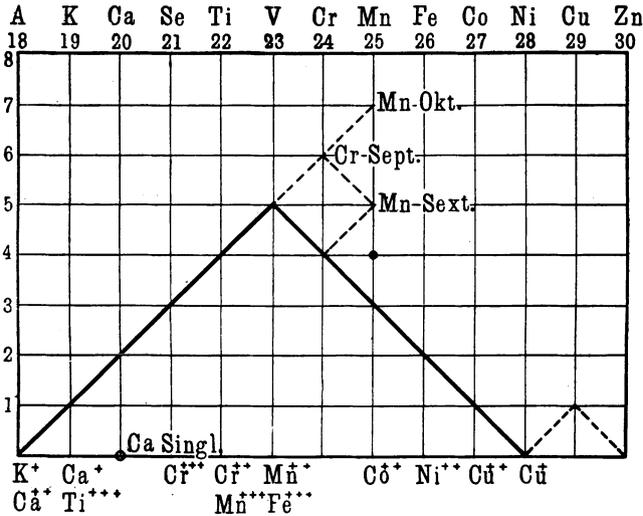
Die Zahlen p sind zu vergleichen mit den Zahlen n der ersten Tabelle.

Sommerfeld stellt die sämtlichen Bohrschen Magnetonzahlen in folgender Kurve (Fig. 58) dar.

Der Punkt Co^{++} fällt nicht auf die Kurve. In dem periodischen System alternieren regelmäßig gerade und ungerade Glieder (Dubletts, Tripletts usw.); ebenso verhalten sich die geraden und ungeraden Magnetonzahlen. Eisen hat z. B. Tripletts und Quintetts, seine Magnetonzahlen müssen daher gerade sein; verliert es zwei Elektronen, so verliert es gleichzeitig zwei Bohrsche Magnetonen, verliert es drei Elektronen, so verliert es ebenso drei Magnetonen, und die übrigbleibende Magnetonzahl von Fe^{+++}

müßte ungerade sein; sie ist tatsächlich 5. Die Bohrsche Magnetonzahl für neutrale Atome kann mit großer Sicherheit aus den inneren Quantenzahlen der entsprechenden Fundamentalglieder abgeleitet werden, z. B. gehört das Fundamentalglied des neutralen

Fig. 58.



Cr (Septett, *s*-Term) zu $M = 6$. Verliert Cr drei Elektronen, so muß das übrigbleibende Cr^{+++} drei Bohrsche Magnetonen haben usw. ($j = 3$ in der obigen Tabelle).

Das Magneton von Parson.

Bisher erklärt keine Theorie, warum das in einer Kreis- oder elliptischen Bahn sich um einen Kern bewegende Elektron nicht die Energie durch Strahlung verliert, oder warum die Bahn stationär oder strahlungsfrei bleibt. Um diese Frage auszuschalten, nahm Parson an, daß das Elektron gleichzeitig ein Magneton ist, d. h. daß es aus einem linearen Kreisring besteht, in dem sich die Elektrizität mit Lichtgeschwindigkeit bewegt. Es ist ein geschlossener Kreisstrom ohne Widerstand und ohne Strahlung. Das ist beinahe die Ampèresche Auffassung von stationären Strömen in den Atomen, die den Anlaß zu den magnetischen Eigenschaften geben. Solch ein in Ruhe befindlicher oder sich mit konstanter Ge-

schwindigkeit bewegender Kreisstrom verliert keine Energie durch Strahlung. Parson nimmt für den Radius $r = 1,5 \cdot 10^{-9}$ cm an. Das Moment dieses Magnetons ist gleich:

$$Ai = M = \pi r^2 \frac{e}{T},$$

$$T = \frac{2\pi r}{c},$$

$$M = \frac{\pi r^2 c e}{2\pi r} = \frac{r e c}{2} = 3,5 \cdot 10^{-19} \text{ elektrom. Einheiten,}$$

während das Bohrsche gleich $9,21 \cdot 10^{-21}$ und das Weissische gleich $1,85 \cdot 10^{-21}$ ist. Da das Parsonsche Magneton 38 mal größer als das Bohrsche ist, das beinahe dem magnetischen Moment von NO entspricht, erscheint das Parsonsche Magneton aus magnetischen Gründen fast unmöglich. Um diese Schwierigkeit zu vermeiden, nimmt Parson an, daß dies das größte magnetische Moment ist, das ein Atom annehmen kann, und daß das Moment der meisten Atome kleiner ist, weil die verschiedenen Magnetonen eines Atoms einander neutralisieren. Überdies werden in den Molekülen mit mehreren Atomen im festen und flüssigen Zustand die Magnetonen der verschiedenen Atome sich einander entgegenstellen.

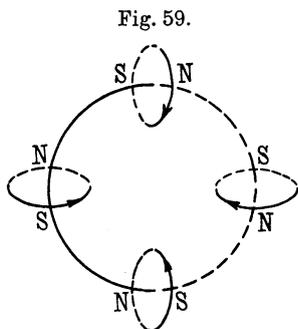
Das Magneton von Parson kann nicht durch die Abweichung der Kathodenstrahlen durch sein magnetisches Moment gefunden werden. Man könnte erwarten, daß die Elektronenkonzentration in einem mit der Erde verbundenen Leiter durch die Anlegung eines magnetischen Feldes zunehme. Die für das Magneton nötige magnetische Arbeit müßte gleich HM sein, die gewonnene elektrische Arbeit gleich

$$\frac{Ve}{2} = HM,$$

$$V = \frac{2HM}{e} = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ Volt,}$$

für $H = 1000$ Gauß. Eine Theorie der Spektrallinien, der Röntgenspektren, der Feinstruktur und des Starkeffektes läßt sich auf dieser Auffassung des Elektrons nicht aufbauen. Parson bespricht speziell chemische Fragen. Die chemischen Kräfte sind mit den magnetischen und elektrostatischen Wirkungen des Magnetons

eng verbunden. Nach Parson sind die Magnetonen oder Elektronen in eine Kugel positiver Elektrizität eingebettet, die gleichförmig verteilt ist, und in der gewisse elastische Kräfte mit den Gegenkräften der positiven Teilchen im Gleichgewicht sind. Die positive Elektrizität ist kompressibel und kann sich rund um die Magnetonen verdichten und ihre elektrostatischen Wirkungen schwächen. Mit diesen Annahmen versucht Parson eine qualitative Theorie der chemischen Verbindungen und des natürlichen Systems der Elemente aufzubauen. Ein Gedanke, der später in den Betrachtungen von Kossel, Lewis und Langmuir besonders betont wurde, erscheint hier zum erstenmal, nämlich der Gedanke, daß die vollkommenste Symmetriestellung die Verteilung von acht Magnetonen auf die Ecken eines Würfels ist; dies gibt einen hohen Stabilitätsgrad mit einem Minimum magnetischer Energie. Parson hat auch ein Modell von acht Spulen gebaut, in dem die gegenseitigen Lagen von acht Magnetonen zueinander sichtbar sind. Fig. 59 zeigt die vier oberen Spulen, die den vier unteren gerade gleich sind, so daß das Modell diamagnetisch ist. Diese Modelle entsprechen den inerten Gasen, die tatsächlich diamagnetisch sind.

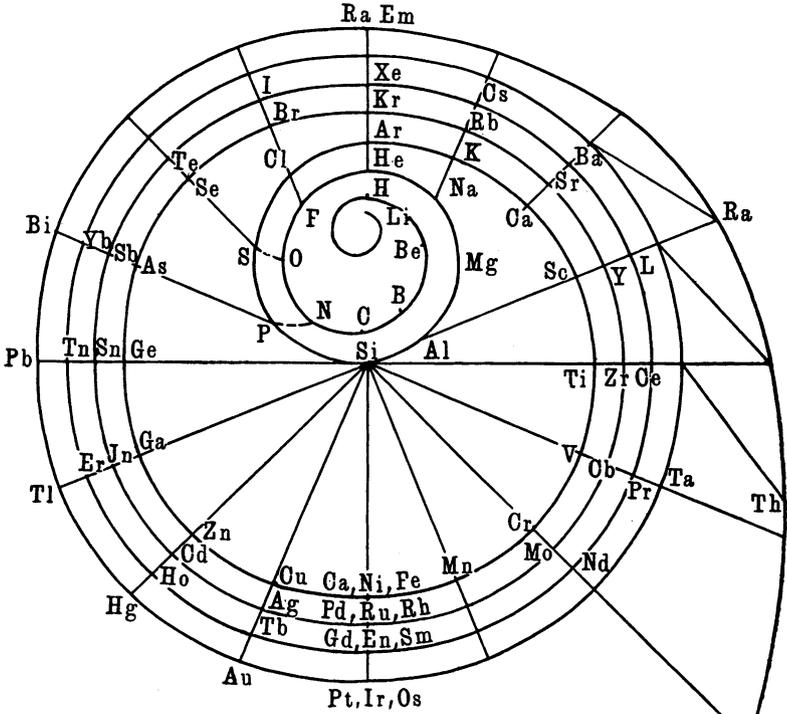


Parson nahm — im Gegensatz zur modernen Auffassung — bereits im Helium acht Magnetonen an, dann nimmt die Magnetonenzahl beinahe regelmäßig um eine Einheit zu. Li hat daher neun Magnetonen, von denen nur eines ein freies magnetisches Moment hat, das Element ist daher paramagnetisch. Das Wasserstoffatom enthält ein Magneton und ist daher im freien Zustand paramagnetisch, während das Molekül diamagnetisch ist, indem die beiden Magnetonen einander neutralisieren. Für Eisen, Nickel und Kobalt nimmt Parson 32 Magnetonen an, während die Atomzahlen 26, 27 und 28 sind.

Parson erklärt nicht, warum diese Elemente, die mit den inerten Gasen zu Gruppe 8 gehören, so stark magnetisch sind, auch gibt er keine genügende Erklärung für den periodischen Wechsel der dia- und paramagnetischen Eigenschaften der chemischen Elemente. Im Zusammenhang mit der Würfeltheorie

macht Parson die interessante Beobachtung, daß die Verbindungen HF , H_2O , H_3N , H_4C vollkommene Würfel und diamagnetisch sind, ebenso wie die Salze von Li , Na , K , Rb , Cs mit F , Cl , Br , J und die analogen Verbindungen CaO , SrO , BaO , NaNO_3 , Na_2SO_4 , KNO_3 , K_2SO_4 .

Fig. 60.



Im Zusammenhang mit Parsons Magneton seien einige Bemerkungen über die Beziehung zwischen Magnetismus und Chemie gemacht. Die experimentellen Tatsachen sind Legion, die Theorie ist kaum begonnen. Man weiß, daß eine gewisse Periodizität zwischen den Atomgewichten oder Atomzahlen und den magnetischen Suszeptibilitäten der Elemente besteht. Die diese Beziehung wiedergebende Kurve hat unregelmäßigen Charakter; sie hat sieben ausgesprochene Maxima, unter denen das der Eisen-

gruppe bei weitem überwiegt. Zieht man nun das Vorzeichen der magnetischen Eigenschaften in Betracht, so erhält man vielleicht die beste Darstellung durch die auf B. K. Emerson zurückgehende Spiralenmethode, die in Fig. 60 dargestellt ist.

Die stark magnetischen Gruppen erscheinen auf demselben Durchmesser: z. B. finden wir auf dem gleichen Durchmesser Fe, Ni, Co, dann Pd, Ru, Rh, dann Gd, Eu, Sm, dann Pt, Ir, Os. Rechts von dem Durchmesser D sind alle Elemente para- und ferromagnetisch, links von D sind alle Elemente diamagnetisch, außer Zinn und Sauerstoff. Zinn ist in einem bestimmten Temperaturintervall paramagnetisch, in einem anderen diamagnetisch. Sauerstoff ist erstaunlicherweise paramagnetisch, seine regelmäßigen diamagnetischen Eigenschaften treten nur in einigen seiner organischen und unorganischen Verbindungen auf.

Gehen wir auf der Spirale vom Eisen nach rechts, so treffen wir Mn und Cr, die paramagnetisch sind; ihre starken magnetischen Eigenschaften erscheinen jedoch nur in einigen ihrer Legierungen, wie die Heuslerschen Legierungen, Manganantimon, Manganzinn, Cr_3O_8 . Rechts von den ferromagnetischen Elementen sind die paramagnetischen, links die diamagnetischen.

Das Schrifttum über die magnetischen Eigenschaften der chemischen Verbindungen ist sehr reich an Tatsachen, die jedoch noch nicht von einer Theorie begleitet werden. Es ist sehr überraschend, daß einige Eisenverbindungen diamagnetisch sind. Die von Pascal entdeckten Regeln für organische Verbindungen haben wir schon erwähnt.

Magnetostriktion und ihre Bedeutung für die magnetischen Theorien.

Von **S. R. Williams,**

Professor der Physik am Amherst College.

Unter Magnetostriktion verstehen wir die gegenseitigen Beziehungen zwischen magnetischen und mechanischen Beanspruchungen ferromagnetischer Körper. Im allgemeinen verursacht ein magnetisches Feld eine Dimensionsänderung solcher Körper, während umgekehrt mechanische Deformationen Änderungen in den magnetischen Eigenschaften hervorrufen. Unter diese Erscheinungen rechnen wir:

1. Den Joule-Effekt (Längenänderung durch das magnetische Feld).
2. Den Wiedemann-Effekt (Verdrillung durch die Überlagerung eines longitudinalen und eines zirkularen magnetischen Feldes).
3. Längsströme, die durch eine einem longitudinalen Felde überlagerte Verdrillung hervorgerufen sind.
4. Eine Längsmagnetisierung durch eine einem zirkularen Felde überlagerte Verdrillung.
5. Die Volumenänderung durch das magnetische Feld.
6. Den Villari-Effekt (Änderung der magnetischen Eigenschaften durch mechanische Beanspruchung).
7. Schallerzeugung durch das magnetische Feld.
8. Widerstandsänderung durch das magnetische Feld.
9. Wirkung des magnetischen Feldes auf thermoelektrische Erscheinungen.

Es sei hervorgehoben, daß alle diese Erscheinungen eine bestimmte Beziehung zwischen mechanischen und magnetischen Eigenschaften darstellen. Diese Beziehungen zu erforschen, ist eine

der wichtigsten Aufgaben beim Studium der magnetischen Erscheinungen; denn in diesem Studium ist nicht nur die Möglichkeit enthalten, mechanische Eigenschaften der Körper aus ihrem magnetischen Verhalten zu beurteilen, was sehr wichtig für die Industrie ist, sondern die Magnetostriktion kann auch, was für unseren hier vorliegenden Zweck in Betracht kommt, einen sehr bedeutenden Beitrag zu einer umfassenden magnetischen Theorie liefern. Bisher haben es die magnetischen Theorien vermieden, einen Erklärungsversuch der Magnetostriktionsercheinungen zu geben, und infolgedessen müssen die neueren Forschungen auf diesem Gebiet einen ganz bestimmten Ausblick auf die magnetischen Theorien im allgemeinen gewähren. Eine umfassende Theorie des Magnetismus muß die ganze Reihe der magnetischen Erscheinungen erklären. Ein Blick auf die Liste der eben erwähnten Effekte zeigt, was eine wirkliche Theorie des Magnetismus zu erklären hat. Im Interesse der Klarheit werden wir eine kurze Beschreibung einer jeder der oben genannten experimentellen Tatsachen geben. Die neuesten Forschungen werden wir in hohem Maße heranziehen; in diesen Arbeiten kann man meist ausführliche Literaturangaben über frühere Arbeiten finden.

1. Unterwirft man einen Eisen- oder Stahlstab einem magnetischen Felde, das von Null aufwärts kontinuierlich verändert werden kann, so findet man, daß der Stab zuerst an Länge zunimmt, nachdem eine gewisse Feldstärke erreicht ist, sich zu verkürzen beginnt und kürzer wird als in seinem jungfräulichen Zustand. Bei großen Feldstärken scheint es keine Längenänderung zu geben und die die Längenänderung darstellende Kurve verläuft asymptotisch zur Feldachse. Dies nennt man den Joule¹⁾-Effekt. Er ist in verschiedenen ferromagnetischen Körpern verschieden in Fig. 61 sind die charakteristischen Längenänderungen für verschiedene Stoffe dargestellt: Temperatur, Spannung, äußere magnetische Felder²⁾, sie alle haben einen Einfluß auf die Längenänderungen, die durch ein magnetisches Feld hervorgerufen werden.

2. Wiedemann³⁾ fand folgendes: Wird ein Stab aus ferromagnetischem Stoffe in der Längsrichtung magnetisiert und dann

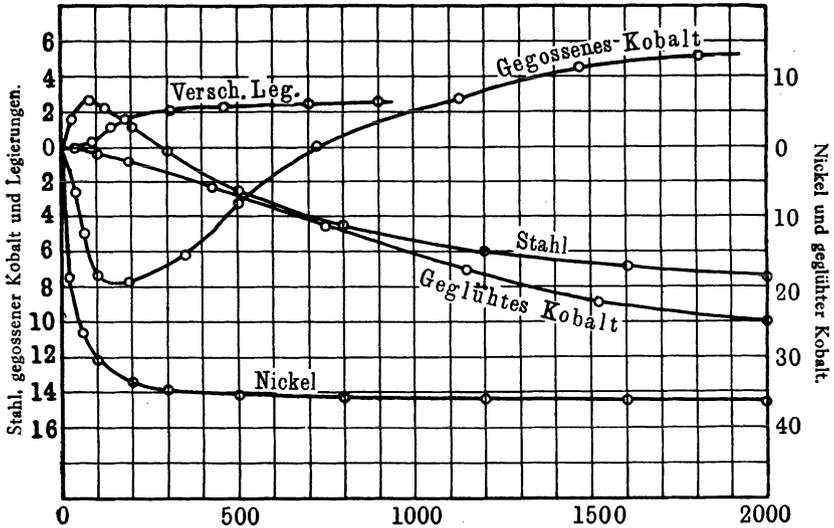
¹⁾ Joule, Phil. Mag. **30**, 76 und 225, 1847. Bidwell, Proc. Roy. Soc. **55**, 228, 1894; **56**, 94, 1894. Williams, Phys. Rev. **34**, 258, 1912.

²⁾ Williams, Phys. Rev. **10**, 133, 1917.

³⁾ Wiedemann, Elektrizität III, S. 689.

gleichzeitig durch den Stab ein Strom geschickt, der ein zirkulares Magnetfeld erzeugt, so bewirkt die Überlagerung dieser beiden magnetischen Felder, daß die beiden Stabenden sich in entgegengesetzten Richtungen drehen. Man hat diese Erscheinung oft als einen Spezialfall des Joule-Effekts angesprochen, indem die längs der Spiralenrichtung des resultierenden magnetischen Feldes auftretenden Längenänderungen eine Verdrillung hervorrufen. Bei

Fig. 61.



diesem Experiment hält man, so wie man es gewöhnlich ausführt, entweder das magnetische Längs- oder das Kreisfeld konstant, während das eine oder das andere kontinuierlich von Null aufwärts geändert wird. Insoweit dieser Vorgang bewirkt, daß sich die Richtung des resultierenden Feldes kontinuierlich ändert, besteht ein großer Unterschied von dem wirklichen Joule-Effekt, bei dem die Feldrichtung immer konstant ist. Einen Vergleich mit dem Joule-Effekt sollte man nur dann anstellen, wenn sowohl das Längs- als das Kreisfeld so miteinander geändert werden, daß sie die resultierende Feldrichtung konstant halten.

3. Wenn ein ferromagnetischer Stab in der Längsrichtung in einem Solenoid magnetisiert wird, so verursacht eine dem Stab erteilte Verdrillung ein zirkulares magnetisches Feld in ihm, das man

durch den elektrischen Strom nachweisen kann, der vorübergehend in der Längsrichtung auftritt, während der Stab gedrillt wird.

4. Magnetisiert man einen Stab durch einen in der Längsrichtung verlaufenden Strom zirkular, und verdrillt man den Stab in diesem Zustand, so wird in ihm eine Längsmagnetisierung entstehen, die durch den in dem umgebenden Solenoid induzierten Strom nachgewiesen wird. Beide in 3. und 4. aufgeführten besonderen Erscheinungen sind umgekehrte Beziehungen, die den Wiedemann-Effekt ¹⁾ begleiten. In 2., 3. und 4. gibt es drei Faktoren, die bei den Effekten auftreten: eine Längsmagnetisierung, eine Zirkularmagnetisierung und eine Verdrillung. Stellt man zwei von ihnen her, so wird der dritte erzeugt werden.

5. Joule ²⁾, der als erster die magnetischen Längenänderungen gefunden hatte, beobachtete auch, daß bei auftretenden Längenänderungen auch an den Querabmessungen Veränderungen vor sich gehen; d. h. nimmt der Stab an Länge zu, so nehmen die Abmessungen rechtwinklig zu seiner Länge ab. Dies führte zu der Frage, ob die Quer- und Längsänderungen einander gerade kompensieren und so keine Volumenänderung ergeben. Joule konnte wegen der Kleinheit des Effektes nicht nachweisen, daß die Magnetisierung von einer Volumenänderung begleitet sei, aber später wurde für Nickel ein Effekt durch Cantone ³⁾ nachgewiesen. Nagaoka und Honda ⁴⁾ sind die einzigen, die tatsächlich die Anwesenheit dieses Effektes an allen ferromagnetischen Körpern als zweifellos bestehend nachgewiesen haben. In allen magnetostriktiven Erscheinungen hat jeder Körper seinen eigenen besonderen Effekt. So verhält sich z. B. Kobalt gerade entgegengesetzt zum Eisen: bei Eisen wächst das Volumen durch die Magnetisierung, während es bei Kobalt abnimmt. Es gibt auch eine wohldefinierte Beziehung zwischen der Wirkung der Magnetisierung auf die Volumenänderung und der durch einen hydrostatischen Druck hervorgerufenen Änderung in der Magnetisierungsintensität. Dies sind anscheinend reziproke Beziehungen.

6. Thomson ⁵⁾ hat hervorgehoben, daß gewisse reziproke Beziehungen beim Magnetismus bestehen, indem man bei bekannten

¹⁾ Wiedemann, Elektrizität III, S. 692.

²⁾ Joule, a. a. O.

³⁾ Cantone, Rend. d. R. Accad. dei Linc. 6, 252, 1890.

⁴⁾ Nagaoka u. Honda, Phil. Mag. 46, 261, 1898; 4, 45, 1902.

⁵⁾ Thomson, Applicat. of Dynamics to Phys. and Chem., S. 47 ff., 1888.

Längenänderungen mit Gewißheit die Wirkungen vorhersagen könnte, die ein Längszug oder -druck in derselben Probe in Form einer Änderung der magnetischen Eigenschaften hervorbringen würde. Dieses letztere Phänomen ist als Villari-Effekt¹⁾ bekannt. Zeigt ein ferromagnetischer Stab eine durch ein magnetisches Feld hervorgerufene Längenzunahme, so wird derselbe Stab bei Streckung eine Zunahme der Magnetisierung oder bei Druck in der Längsrichtung eine Abnahme der Magnetisierung aufweisen. Verkürzt sich der Stab in dem magnetischen Felde, so tritt der entsprechende Villari-Effekt auf. Für Körper, die für schwache Felder eine Zunahme und für starke eine Abnahme der Magnetisierung zeigen, gibt es eine gewisse kritische Feldstärke, bei der die Intensität die gleiche bleibt, ob der Stab gereckt wird oder nicht. Dies ist als der Villarische Umkehrungspunkt bekannt. Körper mit einer Villari-Umkehr zeigen auch, wie Bidwell an Eisen nachwies, eine Joule-Umkehr. Die Frage, ob bei Nickel²⁾ eine Villari-Umkehr vorliegt, scheint nunmehr in negativem Sinne entschieden zu sein.

7. Die magnetostriktiven Effekte stehen auch in Beziehung zu den Tönen, die ein Stab erzeugt, wenn er in ein alternierendes magnetisches Feld gebracht wird. Es ist dies eine verwickelte Erscheinung; denn wenn ein Stab in ein periodisch wechselndes magnetisches Feld gebracht wird, werden die alternierenden Längenänderungen nicht nur Vibrationen in ihm hervorbringen, sondern es besteht auch die Gefahr, daß der Stab nicht symmetrisch in dem Felde liegt, und das wird abwechselnde Züge und Stöße in ihm geben und so Vibrationen verursachen. Bachmetjew³⁾ Arbeit über stark gereckte Stäbe, die keine Töne von sich geben, würde darauf hinweisen, daß die Ursache vieler der entstehenden Töne die Magnetostriktion ist. Honda und Shimizu⁴⁾ haben einige interessante Experimente über diesen Gegenstand ausgeführt, die sehr bestimmt anzeigen, daß die durch einen Stab in einem magnetischen Wechselfeld erzeugten Töne weitgehend durch die

¹⁾ Villari, Pogg. Ann. **126**, 87, 1868.

²⁾ Ewing und Cowan, Phil. Trans. **179**, A, 325, 1888. Heydweiller, Wied. Ann. **52**, 462, 1894; **15**, 415, 1904. Honda u. Shimizu, Ann. d. Phys. **14**, 791, 1904; **15**, 855, 1904. Williams, Phys. Rev. **10**, 129, 1917.

³⁾ Bachmetjew, Rep. d. Phys. **26**, 137, 1890.

⁴⁾ Honda und Shimizu, Phil. Mag. **4**, 645, 1902.

Längenänderung hervorgebracht werden. Maurain¹⁾ beobachtete die Frequenz von Stimmgabeln in einem magnetischen Felde in verschiedenen Azimuten und fand eine Änderung in der Periode. Dieses Gebiet erfordert weitere Untersuchungen, müssen doch die Dimensionsänderungen der Gabel Periodenänderungen bewirken. Warburg²⁾ und St. Meyer³⁾ haben gleichfalls gezeigt, daß mechanische Vibrationen die magnetischen Eigenschaften ferromagnetischer Körper beeinflussen. Dies ist tatsächlich ein Spezialfall des Villari-Effektes.

8. Eine Widerstandsänderung durch ein magnetisches Feld ist eine verwickelte Erscheinung. Es darf als ziemlich sicher angenommen werden, daß sie in enger Beziehung zum Hall-Effekt steht. Indes bei auftretender Dimensionsänderung muß eine Widerstandsänderung eintreten, und wenn bei dem Magnetisierungsprozeß eine Orientierung sphäroidischer Teilchen eintritt, so ist eine Widerstandsänderung ähnlich der zu erwarten, die man bei der Rotation sphäroidischer Teilchen in einem Elektrolyt⁴⁾ gefunden hat, und die Widerstandsänderung müßte noch größer werden als die durch die reine Dimensionsänderung bewirkte. Meistenteils wurden die Messungen der in magnetischen Feldern vorkommenden Widerstandsänderungen mit kräftigen Elektromagneten ausgeführt. Es scheint kaum möglich, solche Experimente auszuführen, ohne in den Proben einige wirkliche Verzerrungen zu erhalten.

9. Man kann Thermoelemente aus Körpern herstellen, die chemisch, aber nicht physikalisch die gleichen sind⁵⁾. Benutzt man als Elemente magnetisiertes und unmagnetisiertes Eisen, so tritt eine Potentialdifferenz von maximal $\frac{1}{29}$ Millivolt auf. Indem Bachmetjew⁶⁾ einen so magnetisierten Eisendraht einem Zug unterwarf, fand er, daß die Richtung der Potentialdifferenz umgekehrt werden kann, und so brachte er diese Erscheinung teilweise mit der Magnetostriktion in ursächlichen Zusammenhang. Die Ergebnisse derer, die das Verhalten von Thermoelementen in einem

1) Maurain, C. R. **121**, 248, 1895.

2) Warburg, Pogg. Ann. **189**, 499, 1870.

3) Meyer, Boltzmann-Festschrift, S. 68, 1904.

4) Williams, Phys. Rev. **2**, 241, 1913.

5) Williams, Science **40**, 606, 1914.

6) Bachmetjew, Wied. Ann. **43**, 723, 1891

magnetischen Felde studiert haben, zeigen eine bemerkenswerte Ähnlichkeit zwischen dem Charakter der Kurven, die die Änderung der elektromotorischen Kraft mit dem magnetischen Felde und denen, die den Joule-Effekt darstellen.

Die oben erwähnten Erscheinungen müssen durch eine umfassende magnetische Theorie erklärt werden. Welches muß der Charakter dieser Theorie sein? An erster Stelle muß sie eine mechanische Theorie sein. Einerseits gibt es ganz einfache durch ein magnetisches Feld hervorgerufene mechanische Effekte, während man andererseits eine ganz bestimmte Änderung in den magnetischen Eigenschaften erhält, wenn man auf denselben Körper eine irgendwie beschaffene mechanische Beanspruchung wirken läßt. Burrows ¹⁾ drückt dies so aus: „Der experimentelle Augenschein weist anscheinend auf die Folgerung hin, daß es eine und nur eine Reihe mechanischer Kennzeichen gibt, die einer gegebenen Reihe magnetischer Kennzeichen entsprechen; umgekehrt gibt es eine und nur eine Reihe magnetischer Eigenschaften, die einer gegebenen Reihe mechanischer Kennzeichen entsprechen.“

Poynting und Thomson ²⁾ haben auf die Tatsache hingewiesen, daß die Magnetostriktionseffekte sich doch durch die Molekularhypothese erklären lassen. Sie stellen fest: „Man muß offenbar einige weitere Annahmen suchen, entweder über die molekulare Anordnung oder über die molekularen Dimensionen in verschiedenen Richtungen.“ Dieser Punkt wird später noch ausführlicher besprochen werden.

Macht man eine Zusammenstellung der magnetischen Erscheinungen, so zeigt sich, welche wichtige Rolle die Magnetostriktion beim Studium der magnetischen Theorien spielt, denn die Magnetostriktion nimmt einen großen Abschnitt in der Liste der magnetischen Effekte ein. Folgende Tabelle soll nicht nur zeigen, welcher großen Raum die magnetostriktiven Erscheinungen unter den anderen magnetischen Erscheinungen einnehmen, sondern sie wird auch zur Orientierung auf dem Gebiet des Magnetismus von Nutzen sein.

¹⁾ Burrows, Bull. Bur. Stand. **173**, 13, 1916.

²⁾ Poynting u. Thomson, Elektr. u. Magn., S.201, 1914.

I. Induktionseffekte.

1. Beziehung zwischen Feldstärke und magnetischer Induktion, Permeabilität, Suszeptibilität, Koerzitivkraft, Remanenz, Hysterese usf.
2. Dia-, Para- und Ferromagnetismus.
3. Erdmagnetismus.
4. Wechselströme.
5. Induktionswirkungen unter dem Einfluß von Temperatur, mechanischer Beanspruchung, Altern, äußeren Feldern usw.
6. Beziehung zwischen Suszeptibilität und chemischen Eigenschaften.

II. Mechanische Effekte.

- a) Reaktionen zwischen magnetischen Feldern.
 1. Anziehung und Abstoßung magnetischer Pole.
 2. Bewegung elektrischer stromdurchflossener Leiter (fester, flüssiger und gasförmiger) in einem magnetischen Felde.
 3. Hall-Effekt und seine Umkehrungen.
- b) Magnetostriktionseffekte.
 1. Joule-Effekt. Seine Umkehrungen.
 2. Villari-Effekt.
 3. Wiedemann-Effekt. Seine Umkehrungen.
 4. Volumenänderung. Ihre Umkehrungen.
 5. Widerstandsänderung im magnetischen Felde.
 6. Schallerzeugung.
 7. Piezo- und Pyromagnetismus.
 8. Magnetokristallinische Wirkung.
 9. Wirkung des magnetischen Feldes auf thermoelektrische Erscheinungen.

III. Magnetooptische Effekte.

1. Faraday-Effekt.
2. Kerr-Effekt.
3. Zeeman-Effekt.
4. Magnetische Doppelbrechung.

Natürlich könnte man diese Einteilung in einigen Punkten auch anders vornehmen. Sicherlich würde man das tun, wenn

mehr über den Gegenstand bekannt wäre. Wie immer die Anordnung der Gegenstände auch sei, so muß eine vollständige magnetische Theorie alle oben erwähnten Erscheinungen erklären. Dies ist die wahre Aufgabe.

Folgen wir den Auffassungen von Ewing in seinen Theorien, so scheint es sicherlich erlaubt, die Induktionserscheinungen durch die Orientierung eines Etwas innerhalb des ferromagnetischen Körpers, das wir Elementarmagnet nennen wollen, zu erklären. Wenn die durch ein äußeres Feld hervorgerufene Drehung der Elementarmagnete den Ferromagnetismus erklärt, so kann man sich mit Recht fragen, ob die Drehung der Elementarmagnete nicht auch die magnetostriktiven Effekte erklären könnte, da diese ja in ferromagnetischen Körpern auftreten. Das Modell und die Theorie von Ewing waren für den Magnetismus im allgemeinen ganz erfolgreich; warum sollten sie es nicht auch für die Magnetostriktion sein? Dies führt zur Betonung folgender Annahme¹⁾: Schreibt man den Elementarmagneten Dimensionen in den verschiedenen Richtungen zu, so könnte die Orientierung einer solchen Magnetgruppe Anlaß geben für Dimensionsänderungen, wie man sie bei der Magnetostriktion findet. Es würde sich zeigen, daß man sich ein derartiges Bild von den Vorgängen in einem ferromagnetischen Körper bei seiner Magnetisierung machen muß, oder aber, daß man einem Gedankengang folgen muß, wie ihn Borelius²⁾ u. a. vorgeschlagen haben, nämlich daß zwei Effekte vorhanden sind und daß ihr Zusammenwirken die Effekte hervorbringt, die wir bei den Magnetostriktionserscheinungen erhalten. Ewings und seiner Nachfolger Arbeit war auf ein spezielles Modell gegründet, das im Laboratorium hergestellt und geprüft werden konnte.

Eine andere Klasse von Theoretikern sind die, welche mathematische Formeln für die durch magnetische Felder hervorgerufenen mechanischen Beanspruchungen aufgestellt haben. Maxwell³⁾ stellte die erste auf und ihr folgte eine mehr allgemein gehaltene von Helmholtz⁴⁾. Dieser betonte besonders die durch die Dichteänderungen des Mediums entstehenden Glieder, wobei

¹⁾ Williams, Phys. Rev. Abstr., Februar 1911. Phys. Rev. **34**, 40, 1912; **35**, 282, 1912. Poynting u. Thomson, Elektr. u. Magn., S. 201, 1914.

²⁾ Borelius, Ann. d. Phys. **58**, 489, 1919.

³⁾ Maxwell, Elektr. u. Magn., S. 257, 2. Aufl.

⁴⁾ Helmholtz, Wied. Ann **13**, 385, 1881.

dies von ihm betrachtete Medium eine Flüssigkeit war. 1884 gab Kirchhoff¹⁾ eine noch allgemeinere Formel als die vorhergehenden; sie enthielt sowohl Glieder, die von den Verlängerungen als auch solche, die von den Dichteänderungen abhingen. Kirchhoffs Theorie bestätigt in der Tat vom mathematischen Standpunkt aus die Vorstellung, daß, wenn ein Körper, wenigstens ein ferromagnetischer Körper, einem magnetischen Felde unterworfen wird, in ihm Spannungen auftreten und anisotrope Suszeptibilität hervorrufen.

Die von Kirchhoff aufgestellten Gleichungen stellen die Beziehungen dar, die zwischen der Magnetisierungsintensität und der Feldstärke bestehen, wenn diese Beziehungen durch die in dem magnetisierten Medium auftretenden Spannungseffekte modifiziert werden. Die diese Koeffizienten definierenden Gleichungen sind die folgenden:

$$\begin{aligned} J_x &= \{k - k'(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) - k''\lambda_x\} H_x, \\ J_y &= \{k - k'(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) - k''\lambda_y\} H_y, \\ J_z &= \{k - k'(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) - k''\lambda_z\} H_z. \end{aligned}$$

Die gewöhnliche Beziehung zwischen J und H ist $J = kH$.

Bei den obigen Gleichungen ist zu beachten, daß die Ausdrücke in den Klammern dem k in der einfachen Gleichung entsprechen. Würden keine Spannungen auftreten, so wären k' und k'' gleich Null, und die Kirchhoffschen Gleichungen wären die gewöhnlichen Beziehungen zwischen J und H . k' ist der Magnetisierungskoeffizient, den man wegen der Volumenänderungen einführt, die die Magnetisierung der Probe ändern. Dies ist das Glied, das Helmholtz in seinen Gleichungen einführt und das er eigentlich mehr auf flüssige Medien angewandt dachte. k'' ist der Koeffizient, der die Magnetisierungsintensität wegen der Längenänderung ändert, die in dem Material parallel zur Richtung des magnetischen Feldes auftritt. Kirchhoff nahm an, daß man es bei Anwendung seiner Formeln mit festen elastischen Medien zu tun hat, die frei von Hysterese und zeitlicher Nachwirkung und anfänglich isotrop sind. Sano²⁾ hat die Kirchhoffsche Theorie etwas erweitert, indem er alle Koeffizienten, k , k' und k'' als Funktionen des angelegten Feldes betrachtete.

Als Kirchhoff seine mathematische Theorie der Magnetostriktion entwickelte, gab es wenige oder gar keine Daten über die

¹⁾ Kirchhoff, Sitzungsber. d. K. Akad. d. Wiss. Berlin, S. 47, 1884.

²⁾ Sano, Phys. Rev. 14, 158, 1902.

Werte von k' und k'' , da diese aus den Volumen- und Längenänderungen zu bestimmen waren, die in ferromagnetischen Körpern unter dem Einfluß eines magnetischen Feldes auftreten. Besonders war die durch ein magnetisches Feld hervorgerufene Volumenänderung noch nicht genau bestimmt worden. Wir verdanken Nagaoka und Honda¹⁾ sowie ihren Schülern eine sorgfältige und mühevollte Arbeit, die die Kirchhoffsche Theorie einer so strengen Prüfung unterworfen hat. Auch darf man die fleißigen Untersuchungen von Cantone²⁾ nicht vergessen, in denen er aus den experimentellen Werten für die Volumen- und Längenänderung durch die Magnetisierung bei Nickel die Kirchhoffschen Koeffizienten k' und k'' berechnete. Nagaoka und Honda dehnten die Arbeit von Cantone auf verschiedene andere ferromagnetische Körper aus. Man kann die verschiedenen Arbeiten dieser beiden unermüdlichen Forscher nicht lesen, ohne zu empfinden, wie tief-schürfend ihre Arbeit ist. Aus der Kirchhoffschen Theorie berechnete und fand Cantone für die Längen- und Volumenänderung in Ovoiden folgende Werte:

$$\text{a) } \frac{\delta l}{l} = \frac{H^2}{E(1+2\vartheta)} \left\{ \frac{4\pi k^2}{3}(1+\vartheta) + \frac{k-k'}{2} - \frac{k''}{2}(1+2\vartheta) \right\},$$

$$\text{b) } \frac{\delta v}{v} = \frac{H^2}{K(1+3\vartheta)} \left\{ \pi k^2 + 3 \left(\frac{k-k'}{4} \right) - \frac{k''}{4} \right\},$$

hierbei ist E der Elastizitätsmodul, K der Torsionsmodul und ϑ eine Konstante, die durch die Beziehung

$$\frac{E}{2} \left\{ \frac{1+2\vartheta}{1+3\vartheta} \right\} = K$$

bestimmt wird.

In ähnlicher Weise berechneten Nagaoka und Honda die gleichen Änderungen für lange Drähte oder Stäbe, die man in ein gleichförmiges Magnetfeld bringt, und fanden:

$$\text{c) } \frac{\delta l}{l} = \frac{H^2}{E} \left\{ 2\pi k^2 - \frac{k''}{2} + \frac{k-k'}{2(1+2\vartheta)} \right\},$$

$$\text{d) } \frac{\delta v}{v} = \frac{H^2}{2K(1+3\vartheta)} \left\{ 2\pi k^2 + \frac{3}{2}(k-k') - \frac{k''}{2} \right\}.$$

¹⁾ Nagaoka und Honda, Phil. Mag. **46**, 261, 1898; **49**, 329, 1900
4, 45, 1902.

²⁾ Cantone, Mem. d. R. Accad. dei Linc. **6**, 487, 1890.

Die Ergebnisse von Cantone, Nagaoka und Honda zeigen, daß die Volumenänderung für das Ovoid und den gestreckten Stab die gleiche ist, während die Längenänderung für das Ovoid kleiner ist als für den Stab oder Draht. Insofern magnetische Felder mechanische Spannungen erzeugen und umgekehrt mechanische Spannungen Änderungen in den magnetischen Eigenschaften der ferromagnetischen Körper hervorrufen und diese Effekte reziprok sind, berechneten Nagaoka und Honda beide Konstanten k' und k'' aus den Magnetisierungsänderungen, die durch die Volumenzunahme durch hydrostatischen Druck σ hervorgerufen werden, nämlich:

$$e) \quad \delta J = -H(k' + \frac{1}{3}k'')\sigma,$$

ferner aus der Änderung der Suszeptibilität, die durch eine Längsstreckung λ eines langen Stabes entsteht:

$$f) \quad \delta k = \left\{ k' \frac{E}{K} - 3(k' + \frac{1}{3}k'') \right\} \lambda.$$

Für das Ovoid erhielten Nagaoka und Honda:

$$A) \quad \begin{cases} k' = \frac{p(1 + 2\vartheta) - q}{2(1 + 3\vartheta)}, \\ k'' = \frac{3q - p}{2(1 + 3\vartheta)}; \end{cases}$$

für einen langen Stab:

$$B) \quad \begin{cases} k' = k + \frac{E^2}{2KH^2}[\lambda - (1 + 2\vartheta)\sigma], \\ k'' = 4\pi k^2 - \frac{E^2}{2KH^2}(3\lambda - \sigma), \end{cases}$$

wobei p und q durch bekannte Größen darstellbar sind und hier zur Abkürzung benutzt werden. Aus den Änderungen in der Magnetisierung und der Suszeptibilität erhalten wir:

$$C) \quad \begin{cases} k' = \left(\delta k - \frac{3\lambda \delta J}{\sigma H} \right) \frac{K}{\lambda E}, \\ k'' = -3 \left(\frac{\delta J}{\sigma H} + k' \right). \end{cases}$$

Der Elastizitäts- und der Torsionsmodul wurden auf die gewöhnliche Weise bestimmt. Nagaoka und Honda fanden „weite

quantitative Abweichungen zwischen den Ergebnissen des Experiments und den Berechnungen, obgleich in fast allen Fällen qualitative Übereinstimmung herrschte“. Die durch magnetische Felder hervorgerufenen Deformationen können somit nur „unvollkommen“ durch eine magnetische Spannungstheorie erklärt werden und umgekehrt. Man braucht nur auf die sorgfältige Arbeit von Nagaoka und Honda¹⁾ zurückzublicken, um zu sehen, wie weit die Kirchhoffsche Theorie von der Erklärung der Tatsachen entfernt ist. Sie betonen, daß die Kirchhoffsche Theorie „eine rohe Annäherung ist und vielleicht nur gilt, wenn die Spannung unendlich klein ist. Wir können daher nicht erwarten, daß eine solche Theorie die Beziehungen zwischen den durch die Magnetisierung verursachten Spannungen und den Wirkungen einer Beanspruchung auf die Magnetisierung in all ihren qualitativen und quantitativen Einzelheiten erklären könnte.“ Nach Kirchhoffs Annahme wird die Änderung in der Magnetisierung der Spannung proportional gesetzt; die experimentellen Ergebnisse zeigen, daß k , k' und k'' Funktionen der Spannung sind.

Im Falle der durch die Verlängerung λ des Drahtes verursachten Magnetisierungsänderung berechneten Nagaoka und Honda die verschiedenen Werte von δJ und erhielten Resultate, die qualitativ mit den bei Nickel und Eisen experimentell erhaltenen übereinstimmen; trotzdem wichen für Nickel bei niedrigen Feldern die Werte des für die Rechnung benutzten Gliedes ($3k' + k''$) um 50 Proz. von den beobachteten Werten ab.

Berechnet man die durch eine Volumenabnahme $-\sigma$ erzeugte Magnetisierungsänderung δJ , so war für Nickel die Übereinstimmung mit dem Experiment ziemlich gut, dagegen ergaben sich für Eisen und Stahl große Abweichungen.

Sie wandten ferner die Kirchhoffsche Theorie auf den Wiedemann-Effekt an und fanden hier für Nickel eine bessere Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment als für Eisen. Die Kurven, die die für Eisen berechneten und beobachteten Werte des Wiedemann-Effekts darstellen, zeigen für bestimmte Feldstärken Unterschiede von mehr als 50 Proz. Während die Übereinstimmung zwischen berechneten und beobachteten Werten qualitativ nicht

¹⁾ Nagaoka und Honda, Phil. Mag. **46**, 277, 1898; **49**, 336, 1900; **4**, 66, 1902.

unterschätzt werden darf, so muß doch zugegeben werden, daß eine Theorie, die Abweichungen von mehr als 50 Proz. zwischen berechneten und beobachteten Werten zuläßt, in der Art, wie sie die Erscheinungen miteinander verknüpft, noch viel zu wünschen übrig läßt. Nagaoka und Honda sagen: „Der gegenwärtige Stand der Theorie der Magnetostriktion kann vielleicht mit jener Zeit in der Geschichte der Theorie des Magnetismus verglichen werden, da man die Magnetisierungsintensität einfach proportional der magnetisierenden Kraft annahm. Tatsächlich steckt die Theorie noch in ihren Kinderschuhen; es gibt also noch weite Gebiete für weitere Entwicklungen und Forschungen.“

Den Beziehungen zwischen der Magnetostriktion und anderen magnetischen und physikalischen Eigenschaften ist noch weiter nachzugehen, und sie sollten in allen Fällen soweit wie möglich an den gleichen Proben untersucht werden, da niemals zwei Proben einander sowohl magnetisch als auch mechanisch genau gleich sind. Es hat nur wenig Wert, wenn man die Ergebnisse von Forschern miteinander vergleicht, die verschiedene Proben benutzt haben.

Theorien der Magnetostriktion.

Von **S. L. Quimby,**

Professor der Physik a. d. Columbia-Universität.

Bringt man einen Körper in ein magnetisches Feld, so unterliegt die Materie in jedem Volumenelement gewissen, durch die Wirkung des Feldes auf die magnetischen Teilchen des Körpers hervorgerufenen Kräften. Addiert man die Kräfte zwischen den benachbarten Molekülen dazu, so kann eine beträchtliche Änderung als Ergebnis der molekularen Rückorientierung, die die Magnetisierung begleitet, auftreten. Beide Wirkungen tragen dazu bei, eine Deformation des Körpers hervorzurufen, die als „Magnetostriktion“ bekannt ist.

Die Aufgabe, eine theoretische Beziehung zwischen der Stärke des magnetisierenden Feldes und der erzeugten Spannung des magnetischen Mediums abzuleiten, ist offenbar damit gelöst, daß man diese Kräfte bestimmt. Hat man dies getan, so kann man die Spannungen nach der gewöhnlichen Methode der Elastizitätstheorie berechnen.

Wir betrachten zunächst die Theorien der Magnetostriktion von Maxwell und v. Helmholtz. Diese Forscher beschränkten sich auf die Aufgabe, die durch das äußere magnetische Feld hervorgerufene und auf das Medium im ganzen wirkende Kraft pro Volumeneinheit auszuwerten. Daher werden ihre Ergebnisse die inneren, aus den gegenseitigen Einwirkungen benachbarter Moleküle entstehenden Spannungen nicht mit einschließen.

Beide, Maxwell und v. Helmholtz, suchten letzten Endes Ausdrücke für die Potentiale der gewünschten Feldkräfte. Der Ausgangspunkt für beide Theorien stellt sich dann sofort in den ganz verschiedenen Werten für diese Größe dar.

**Maxwells Theorie
der Spannung in einem magnetisierten Medium¹⁾.**

Nimmt man an, ein Volumenelement $d\tau$ eines magnetischen Mediums enthalte eine große Zahl von elementaren magnetischen Doppelpolen, und berechnet man die Arbeit, die man zu leisten hat, um diese Doppelpole aus einer Lage, für die das Feld Null ist, in ein Feld von der Stärke \mathfrak{H} zu bringen, so ist, wie man leicht zeigen kann, die magnetische potentielle Energie des Mediums in $d\tau$ ²⁾

$$dW = -\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{J} \cdot d\tau. \quad (1)$$

Wir suchen nun einen Ausdruck für die Potentialfunktion der mechanischen Kraft auf $d\tau$. Die Materie in $d\tau$ sei von einem Platz, wo das Feld \mathfrak{H} ist, nach einem, wo es $\mathfrak{H} + d\mathfrak{H}$ ist, gebracht. Die entsprechende Änderung der potentiellen Energie ist:

$$\delta W = -\mathfrak{H} \delta \mathfrak{J} d\tau - \mathfrak{J} \delta \mathfrak{H} d\tau. \quad (2)$$

Das erste Glied auf der rechten Seite der Gleichung (2) stellt offenbar eine Abnahme der potentiellen Energie dar, die aus einer Änderung in der inneren Anordnung der Elementarmagnete in $d\tau$ entsteht. Es ist ein Maß für die gegen intermolekulare Kräfte nicht magnetischen Charakters geleistete Arbeit. Diese Kräfte setzen sich der Polarisationsänderung entgegen; die Energie ist als innere Energie des Mediums von rein elastischem oder thermischem Charakter aufgespeichert. Dieser Teil der potentiellen Energie hat offenbar mit den auf das Medium als Ganzes wirkenden mechanischen Kräften nichts zu tun³⁾.

Der zweite Ausdruck der rechten Seite der Gleichung (2) ist die Änderung der potentiellen Energie, die aufgetreten wäre, wenn die Magnetisierung des Elements unverändert geblieben wäre, so

¹⁾ Maxwell, Abhandl. II, § 639 ff.

²⁾ A. a. O., § 389.

³⁾ Über den Energiebetrag in einem magnetisierten Medium vgl. Livens, „The Theory of Electricity“, Kap. 6 u. 9; Larmor, „The Electrodynamical and Thermal Relations of Energy of Magnetization“, Proc. Roy. Soc. 71, 229, 1903; Langevin, „Magnétisme et Théorie des Electrons“, Ann. de Chim. et de Phys. 5/6, 105, 1905.

daß keine innere Arbeit geleistet werden konnte. Es stellt daher die Arbeit der mechanischen Kräfte im Körper in $d\tau$ dar, und

$$W' = - \int_{\tau}^H d\tau \int \mathfrak{J} \cdot d\mathfrak{H} \quad (3)$$

ist die gesuchte Potentialfunktion dieser Kräfte.

Nach Gleichung (3) können wir für die äußere Kraft pro Volumeneinheit in dem magnetisierten Medium schreiben:

$$\mathfrak{F} = \nabla_H (\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{H}), \quad (4)$$

wobei ∇_H andeutet, daß die Operation ∇ nur für H ausgeführt wird.

Fließt in dem Medium ein elektrischer Strom von der Dichte $\overline{\mathfrak{J}}$, so verursacht dieser Strom eine zusätzliche elektromagnetische Kraft $J \times \mathfrak{B}$; also ist die Gesamtkraft pro Volumeneinheit gegeben durch:

$$\mathfrak{F} = \nabla_H (\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{H}) + \overline{\mathfrak{J}} \times \mathfrak{B}. \quad (5)$$

Benutzt man die Beziehungen

$$\begin{aligned} 4\pi\overline{\mathfrak{J}} &= \nabla \times \mathfrak{H}, \\ \nabla \cdot \mathfrak{B} &= 0, \end{aligned}$$

so erhält man die x -Komponenten von \mathfrak{F} in der Form

$$\mathfrak{F}_x = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{d}{dx} (\mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_x - \frac{1}{2} \mathfrak{H}^2) + \frac{d}{dy} (\mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_y) + \frac{d}{dz} (\mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_z) \right\} \quad (6)$$

und entsprechende Ausdrücke für \mathfrak{F}_y und \mathfrak{F}_z .

Diese Kraft setzt Maxwell gleich einer Spannung, die zusammengesetzt ist aus

1. einem hydrostatischen Druck gleich $\frac{1}{8\pi} H^2$,
2. einer Spannung $\frac{1}{4\pi} B H \cos^2 \varepsilon$ längs der Halbierenden des Winkels ε zwischen der Richtung der magnetischen Kraft und der magnetischen Induktion,
3. einem Druck $\frac{1}{4\pi} B H \sin^2 \varepsilon$ längs der Halbierenden des äußeren Winkels zwischen diesen beiden Richtungen,
4. einem Drehmoment $\frac{1}{4\pi} B H \sin^2 \varepsilon$, das jedes Element des Körpers in der Ebene dieser beiden Richtungen aus der Richtung der magnetischen Induktion in die Richtung der magnetischen Kraft zu drehen sucht.

So können wir uns vorstellen, daß jedes Körperelement unter der Wirkung der magnetischen Kraft sich in einem Spannungszustand befindet, wie wenn es unter dem Einfluß von Spannungen nach Maxwells Annahmen stünde. Zu diesen Spannungen kommen noch die anderen, die von den oben erwähnten inneren magnetischen Spannungen herrühren.

Die Theorie der Magnetostriktion von v. Helmholtz und Kirchhoff.

v. Helmholtz nahm als erster das Problem in Angriff, die Spannungen aufzusuchen, die in einem Dielektrikum auftreten, das sich in einem elektrischen Felde im elektrischen Gleichgewicht befindet. Abweichend von Maxwell gründete er seine Entwicklung auf die Annahme, der Ausdruck für die totale potentielle Energie pro Volumeneinheit in einem elektrostatischen Felde stelle die Potentialfunktion für die mechanische Kraft pro Volumeneinheit in dem Dielektrikum dar¹⁾.

Das elektrische Feld möge entstehen durch eine kontinuierliche räumliche Verteilung einer Ladung der Dichte ρ . Die Arbeit, die man zu leisten hat, wenn man diese Ladung allmählich in das Dielektrikum bringt, ist durch eine der beiden folgenden Gleichungen gegeben:

$$W = \int \frac{k}{8\pi} \mathfrak{E}^2 d\tau$$

oder

$$W = \int \frac{1}{2} \rho \varphi d\tau,$$

wobei $\mathfrak{E} = -\nabla\varphi$ und k die Dielektrizitätskonstante des Mediums ist.

Keiner dieser beiden Ausdrücke genügt der obigen Bedingung des elektrischen Gleichgewichts, d. h. es ist $\frac{\partial W}{\partial \varphi} \neq 0$. Kombiniert man beide Formen, so erhält man

$$W = \int \left(\frac{1}{2} \rho \varphi - \frac{k}{8\pi} \mathfrak{E}^2 \right) d\tau; \quad (7)$$

die Variation dieses Ausdrucks nach φ ist Null.

¹⁾ v. Helmholtz, Pogg. Ann. **18**, 385, 1881; Wiss. Abh. **1**, 798.

Diesen Ausdruck benutzt v. Helmholtz als Potentialfunktion der auf den Körper im ganzen wirkenden mechanischen Kräfte.

Durch Variation von W [Gleichung (7)] erhält v. Helmholtz eine Kraft, die er mit Maxwells elektrischer Spannung¹⁾ identifiziert. Seine Methode, diese Variation auszuführen, wurde indes von Larmor²⁾ und Livens³⁾ beanstandet, welche zeigten, daß die Helmholtzsche Theorie in analytisch korrekter Form zur Existenz einer Kraft auf die Elemente des freien Äthers führt, und daß somit dieser nicht im Gleichgewicht sein könnte.

Auf die Quelle dieser Verschiedenheit ist bereits hingewiesen worden. In der Helmholtzschen Theorie wird kein Unterschied gemacht zwischen den beiden fundamentalen Bestandteilen des Feldes, Äther und polarisierbarer Materie; vielmehr betrachtet man das Feld als bestehend aus einem einzigen gleichförmigen Medium, das fähig ist, die elektrischen und magnetischen Wirkungen ebenso zu übertragen, wie gewöhnlich ein elastischer fester Körper mechanische Kräfte überträgt. Seine Theorie wäre gültig, wenn nur ein einziges zu betrachtendes Medium vorhanden wäre, für das W die Energiefunktion ist. Tatsächlich aber müssen wir unterscheiden zwischen dem Äther mit freien Spannungen und der polarisierten Materie mit ihren mechanischen Reaktionskräften, und es ist nicht möglich, mittels einer einzigen Energiefunktion, wie bei Helmholtz, die mit den verschiedenen Effekten verknüpften Energieanteile voneinander abzusondern.

Helmholtz und Kirchhoff⁴⁾ wandten dann die von ersterem entwickelten Formeln, die Maxwells elektrischer Spannung äquivalent und von seiner magnetischen Spannung ganz verschieden sind, darauf an, die mechanische Kraft in einem magnetisierten Medium zu berechnen. Hertz⁵⁾ kam bei Verwendung einer ähnlichen Methode zu identischen Ausdrücken. Diese Autoren führen in ihren Formeln Hilfsglieder ein, die die von den Spannungen in dem Medium herrührenden Veränderungen von k und μ berücksichtigen.

1) Maxwell, a. a. O., V, S. 159.

2) Larmor, „A dynamical Theory of the Electric and luminiferous Medium“, Phil. Trans. (A) **190**, 280, 1897.

3) Livens, Phil. Mag. **32**, 162, 1916.

4) Kirchhoff, Wied. Ann. **24**, 52, 1885; **25**, 601, 1885.

5) Hertz, Wied. Ann. **41**, 1890, „Elektrische Wellen“, S. 259—268.

Kürzlich hat Sano¹⁾ die Methode dahin erweitert, daß auch die Veränderung von μ mit der Magnetisierungsintensität berücksichtigt wird, und Formeln angegeben²⁾, die sich auf kristallinische Medien anwenden lassen. Eine allgemeine, auf die Energiebetrachtung gegründete Form der Theorie der magnetischen Spannungen wurde von Cohn³⁾ entwickelt und von Gans⁴⁾ und Kolacek⁵⁾ weiter ausgearbeitet. Für diese Theorie gelten jedoch dieselben Bedenken, wie die von Larmor gegen das Helmholtzsche Verfahren erhobenen. Die Mehrzahl der Autoren der Magnetostraktion scheint diese Bedenken gänzlich übersehen zu haben; so kommt es, daß ein großer Teil der theoretischen Arbeit über diesen Gegenstand in den Grundlagen fehlerhaft ist.

Larmors Anwendung des Energieprinzips.

Larmor⁶⁾ hat den Weg angedeutet, wie man die von Kirchhoff gesuchten vollständigen Resultate durch eine abweichende Anwendung des Energieprinzips erhalten kann. Die Kraft in Helmholtzs und Kirchhoffs Theorie wird als solche aufgefaßt, die resultieren würde, wenn die durch die Feldwirkung auf den Körper hervorgerufenen magnetostriktiven Deformationen durch eine Zwangskraft verhindert würden.

Das Verfahren mag durch die Untersuchung der inneren Längenänderung eines Stabes aus magnetischem Material erläutert werden, die durch seine Einführung in ein magnetisches Feld verursacht wird. Man „klemme“ den Stab auf seine natürliche Länge, wenn er in großem Abstand sich befindet; dann bringe man ihn in das magnetische Feld, derart, daß er den Kraftlinien parallel liegt; hierauf klemme man ihn los, derart, daß er eine möglichst große Arbeit beim Überwinden der Widerstände gegen seine magnetische Verlängerung leisten kann; endlich bringe man den losgeklemmten Stab wieder in sehr große Entfernung. Wird dieser Kreisprozeß bei gleichförmiger Temperatur ausgeführt, so folgt aus dem Carnotschen Prinzip, daß hierbei keine Arbeit geleistet wird. Nun ist die

1) Sano, Phys. Rev. **13**, 158, 1902.

2) Phys. Zeitschr. **3**, 401, 1902.

3) Cohn, Das elektromagnetische Feld, S. 510.

4) Gans, Ann. d. Phys. **13**, 634, 1904; Enzykl. d. math. Wiss., S. 15.

5) Kolacek, Ann. d. Phys. **13**, 1, 1904.

6) Larmor, a. a. O., S. 283.

von den magnetischen Kräften geleistete Arbeit, wenn man den Stab in das Feld bringt:

$$\int J dH,$$

d. h.

$$\int \left(\kappa + Q \frac{\partial \kappa}{\partial Q} + J \frac{\partial \kappa}{\partial J} \right) H dH$$

pro Volumeneinheit, wobei κ die magnetische Suszeptibilität ist und diese mutmaßlich eine Funktion des inneren Längsdruckes Q in dem Stabe und seiner Magnetisierungsintensität J ist. Die beim Losklemmen geleistete Arbeit ist $\frac{1}{2} Q_1 l_1$ pro Volumeneinheit, wobei l_1 die innere magnetische Verlängerung und Q_1 der Druck ist, der der Stärke H des Teiles des Feldes entspricht, in dem man losgeklemmt hat. Dies gilt unter der Annahme, daß der Stab sei so lang, daß nahe aneinander keine freien magnetischen Pole auftreten, die durch ihre gegenseitige Anziehung Q vermindern würden. Die von den magnetischen Kräften während der Entfernung des Stabes geleistete Arbeit pro Volumeneinheit ist

$$- \int \left(\kappa + J \frac{\partial \kappa}{\partial J} \right) H dH.$$

Da die resultierende Arbeit in dem Kreisprozeß Null ist, erhalten wir:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial Q} \int Q H dH = - \frac{1}{2} Q_1 l_1 = - \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{M},$$

wobei M der Elastizitätsmodul ist. Diese Gleichung kann nur erfüllt sein, wenn Q von der Form λH^2 ist, wobei λ eine Konstante ist; dies ergibt dann:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial Q} = - \frac{2 \lambda}{M},$$

die Verlängerung ist:

$$l = - \frac{1}{2} \frac{\partial \kappa}{\partial Q} H^2,$$

während die entsprechende Spannung ist:

$$Q = - \frac{1}{2} \frac{\partial \kappa}{\partial l} H^2.$$

Die Wirkung der Änderung der elastischen Koeffizienten mit der Magnetisierung kann man durch eine analoge Berechnungsweise berücksichtigen¹⁾.

¹⁾ Larmor, a. a. O., S. 299.

Diese Methode wurde von Heydweiller¹⁾ und Houstoun²⁾ nutzbar gemacht, die zwischen den elastischen und magnetischen Konstanten eines gereckten Drahtes ähnliche Beziehungen wie Larmor erhielten. Ihre Formeln wurden von Rensing³⁾ sowie Nagaoka und Honda⁴⁾ auf gesicherte experimentelle Ergebnisse angewandt, aber die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ist noch durchaus unbefriedigend.

Die Untersuchungen von J. J. Thomson.

J. J. Thomson⁵⁾ benutzte das Hamiltonsche Prinzip, um zu Ausdrücken für die gegenseitigen Beziehungen zu gelangen, die zwischen Spannung und Magnetisierung existieren müssen. Der erste Schritt in seiner Ableitung besteht darin, die Lagrangesche Funktion für ein magnetisiertes Medium in passenden magnetischen und Spannungskoordinaten anzusetzen. Als erstere wollen wir das magnetische Feld \mathfrak{H} und die Magnetisierungsintensität \mathfrak{J} wählen. Sind die Komponenten parallel x , y und z der Verschiebung eines Volumenelements des Mediums α , β , γ , so sind die resultierenden Spannungen:

$$\begin{aligned} e &= \frac{\partial \alpha}{\partial x}, & f &= \frac{\partial \beta}{\partial y}, & g &= \frac{\partial \gamma}{\partial z}, \\ a &= \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial z}, & b &= \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial \gamma}{\partial x}, & c &= \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}. \end{aligned}$$

Betrachtet man den Fall eines zylindrischen Stabes aus einem homogenen isotropen Material, dessen Achse mit der x -Achse zusammenfällt, so kann man die Lagrangesche Funktion für die Volumeneinheit nunmehr schreiben:

$$l = \frac{1}{2} A J^2 + H J - \frac{1}{2} m (e^2 + f^2 + g^2) - \frac{1}{2} n (e^2 + f^2 + g^2) - 2ef - 2eg - 2fg, \quad (8)$$

¹⁾ Ann. d. Phys. **12**, 602, 1903.

²⁾ Phil. Mag. **21**, 78, 1911.

³⁾ Ann. d. Phys. **14**, 363, 1904.

⁴⁾ Phil. Mag. **46**, 260, 1898.

⁵⁾ J. J. Thomson, Applications of Dynamics to Physics and Chemistry, S. 47.

wobei n der Torsionsmodul und $m - \frac{n}{3}$ der Volumenelastizitätsmodul ist; A ist eine Funktion, die durch die Gleichung

$$\frac{1}{\kappa} = - \frac{\partial}{\partial J^2} (AJ^2)$$

definiert ist.

Dies ergibt:

$$\frac{1}{2} AJ^2 = - \int H dJ,$$

d. h. der Ausdruck der Gleichung (8) für die magnetische Energie ist offenbar im Einklang mit dem von Maxwell benutzten.

Nun ist nach dem Hamiltonschen Prinzip:

$$\delta \int L dt = 0,$$

wobei

$$L = \int_{\tau} l d\tau.$$

Setzt man die durch eine kleine Verschiebung in dem Material verursachte Variation gleich Null, so erhält man für jede Koordinate eine Gleichung von der Form

$$\frac{dL}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dL}{de} \right) = 0 \quad (9)$$

innerhalb des Körpers, und

$$\frac{dL}{de} = 0$$

an der Oberfläche. Das erste Glied von (9) stellt die mechanische Kraft auf das Medium dar, die Maxwells magnetischer Spannung äquivalent ist. Wir wollen annehmen, die von diesem Gliede herrührenden Spannungen seien bekannt. Setzen wir nun e, f, g gleich den Spannungen, die allein von dem zweiten Gliede herrühren, so können wir Ausdrücke ableiten, die die Magnetisierungsintensität zu dem Spannungszustand in dem Medium in Beziehung setzen. Sie erscheinen in der Form:

$$\left. \begin{aligned} n \frac{\partial e}{\partial J^2} &= \left(1 - H \frac{\partial \kappa}{\partial J} \right) \left(\frac{m}{3m-n} \frac{1}{\kappa J} \frac{\partial J}{\partial e} - \frac{m-n}{3m-n} \frac{1}{\kappa J} \frac{\partial J}{\partial f} \right), \\ n \frac{\partial f}{\partial J^2} &= \left(1 - H \frac{\partial \kappa}{\partial J} \right) \left(- \frac{m-n}{3m-n} \frac{1}{\kappa J} \frac{\partial J}{\partial e} + \frac{m+n}{3m-n} \frac{1}{\kappa J} \frac{\partial J}{\partial f} \right). \end{aligned} \right\} (10)$$

Das Vorzeichen der hier betrachteten Effekte hängt offenbar für eine gegebene Probe von den Koeffizienten $\frac{\partial J}{\partial e}$ und $\frac{\partial J}{\partial f}$ ab.

Ferner kann, da diese Effekte sich noch über die von den Maxwell'schen Spannungen herrührenden lagern und in vielen Fällen viel größer als diese sind, die resultierende Deformation ebensogut eine Ausdehnung wie eine Kontraktion sein.

Eine Untersuchung der experimentellen, sich auf Magnetostriktion beziehenden Angaben ist einer späteren Arbeit vorbehalten, doch sei darauf hingewiesen, daß Thomsons Gleichungen genügen, um qualitativ alle beobachteten magnetostriktiven Effekte zu erklären, indem sie auch die Beziehung zwischen Torsion und Magnetisierung einschließen. Soweit der Verfasser weiß, wurde noch kein befriedigender Versuch gemacht, sie quantitativ anzuwenden.

Damit ist unsere Übersicht über die Anwendungen des Energieprinzips auf die Probleme der Magnetostriktion vervollständigt. Es kann uns, richtig angewandt, gewisse richtige Beziehungen zwischen den statistischen elastischen und magnetischen Koordinaten des molekularen Systems liefern. Es kann uns aber keinen Aufschluß über die Natur des Mechanismus geben, der die Erscheinung hervorbringt. Eine vollständige Theorie der Magnetostriktion muß ausgehen von den magnetischen Kräften, die auf die bewegten Elektronen im Molekül ausgeübt werden, und aus diesen, in Verbindung mit bekannten intermolekularen Kräften anderer Natur, die resultierenden Veränderungen in der molekularen Konfiguration berechnen. Die sich in der Kristallstruktur darbietende regelmäßige Anordnung bietet wahrscheinlich das meistversprechende Betätigungsfeld in dieser Richtung.

In der folgenden Untersuchung, die wir Larmor verdanken, wird gezeigt, daß die Gesamtkräfte auf die bewegten Elektronen in einem Körper, die von der Gegenwart eines äußeren magnetischen Feldes herrühren, durch die Maxwell'schen Spannungen dargestellt werden können.

Die Maxwell'schen Spannungen in der Elektronentheorie¹⁾.

Die Maxwell'schen Spannungen in der Elektronentheorie¹⁾. — Betrachten wir zunächst die Elektronen, die sich in den Molekülen

¹⁾ Vgl. Larmor, Phil. Trans. (A) 186, 735 1895.

in Kreisbahnen bewegen, so ist, wie an anderem Orte in diesem Buche gezeigt ist, die Kraft magnetischen Ursprungs, die auf ein Elektron wirkt:

$$\mathfrak{F} = e(\mathbf{v} \times \mathfrak{B}),$$

wobei \mathbf{v} die Geschwindigkeit und e die Ladung des Elektrons ist.

Der Mittelwert von \mathfrak{F} über die Bahn eines Elektrons ist gegeben durch

$$\bar{\mathfrak{F}} = \frac{e}{T} \int (\mathbf{v} \times \mathfrak{B}) dt = i \int d\mathbf{r} \times \mathfrak{B}.$$

Ersetzen wir das Linienintegral durch ein Oberflächenintegral über eine von der Bahn begrenzte Fläche, so erhalten wir:

$$\bar{\mathfrak{F}} = i \int_S [\nabla_B (\mathfrak{B} \cdot \mathbf{n}) - (\nabla \cdot \mathfrak{B}) \mathbf{n}] dS = i \int_S \nabla_B (\mathfrak{B} \cdot \mathbf{n}) dS,$$

da stets $\nabla \mathfrak{B} = 0$. Summieren wir die Ausdrücke dieser Form für alle Elektronen eines Volumenelements unter der Annahme, daß $\nabla (\mathfrak{B} \cdot \mathbf{n})$ über die Bahn eines Elektrons konstant ist, so finden wir für die Kraft pro Volumeneinheit auf die Elektronenbahnen

$$\mathfrak{F} = \nabla_B (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{J}).$$

Ist außerdem ein Leitungsstrom von der Dichte \mathfrak{J}' vorhanden, der durch das Volumenelement fließt, so gibt es eine Zusatzkraft $\mathfrak{J}' \times \mathfrak{B}$, und die Gesamtkraft pro Volumeneinheit des Mediums wird:

$$\mathfrak{F} = \nabla_B (\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{J}) + \mathfrak{J}' \times \mathfrak{B}. \quad (11)$$

Es ist zu beachten, daß diese Kraft für das betrachtete Volumenelement nicht gänzlich äußere Kraft ist. Ein Teil von ihr gleich $\mathfrak{J}' \times 4\pi \mathfrak{J}$ stellt die Wirkungen der Elektronen dar, die den Magnetismus für die freien Elektronen in dem Element liefern. Ähnlich stellt der Teil $\nabla_B (4\pi \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{J})$ die lokalen Reaktionen zwischen den verschiedenen Elektronenbahnen dar. In einer Berechnung der mechanischen Kraft auf das Medium als Ganzes müßte man diese lokal kompensierten Kräfte fortlassen. Dieses Verfahren wurde mit Bezug auf den letzteren der zwei Kräfteanteile allgemein eingeschlagen. Den Anteil $\mathfrak{J}' \times 4\pi \mathfrak{J}$ dagegen ließ man mit sonderbarer Inkonsequenz stehen ¹⁾.

¹⁾ Vgl. Livens, The Theory of Electricity, S. 589. Larmor, Phil. Trans. (A) 190, 251, 1897.

Die x -Komponente der durch Gleichung (11) gegebenen Kraft kann in folgender Form dargestellt werden:

$$\mathfrak{F}_x = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{d}{dx} \left[\mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_x - \left(\frac{1}{2} \mathfrak{H}^2 + 8\pi^2 \mathfrak{J}^2 \right) \right] + \frac{d}{dy} (\mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_y) \right. \\ \left. + \frac{d}{dz} (\mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_z) + \frac{1}{4\pi} \mathfrak{B} \times \dot{\mathfrak{C}} \right\}. \quad (12)$$

Vernachlässigt man den Verschiebungsstrom im Äther¹⁾, so ist das dieser Kraft äquivalente Spannungssystem offenbar identisch mit dem Maxwell'schen; nur kommt zu dem Ausdruck für den hydrostatischen Druck noch das Glied $2\pi \mathfrak{J}^2$ hinzu. Dieses Glied stellt die Spannung dar, die durch die gegenseitigen Wirkungen der polarisierten Moleküle entsteht. Die innere Spannung, die durch die Wirkung zwischen den molekularen und endlichen Strömen entsteht, läßt sich nicht so leicht herauschälen, obwohl sie in der obigen implizite ebenso wie in dem Maxwell'schen Spannungssystem enthalten ist. Aus diesem Grunde gibt keine der beiden Darstellungen die wirkliche mechanische Kraft äußeren Ursprungs auf ein Volumenelement eines magnetisierten Körpers, der von endlichen elektrischen Strömen durchflossen ist, genau wieder.

¹⁾ Die Beibehaltung dieses Gliedes führt nur zu Effekten zweiten Grades. Vgl. Livens, a. a. O., S. 593.

Das Impulsmoment des Elementarmagnets.

Von **S. J. Barnett**,

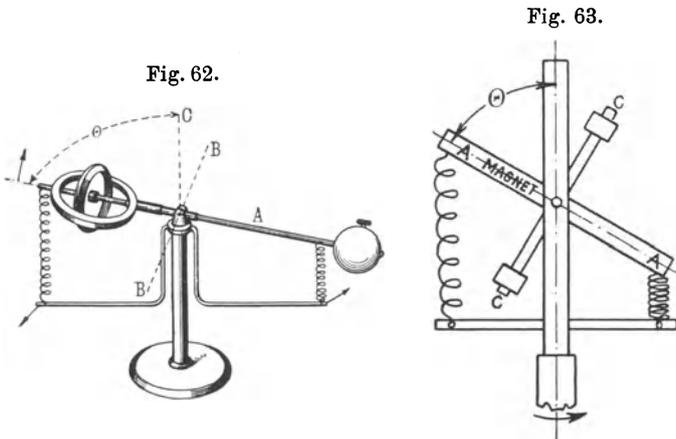
Research Associate der Carnegie Institution Washington.

1. Sowohl Ampères Annahme, daß der Elementarmagnet oder das Magneton ein permanenter Wirbel von Elektrizität ist, als auch Webers Annahme, daß Elektrizität im allgemeinen und diejenige Ampères im besonderen Trägheit besitzt, führen zu der Konsequenz, daß der Elementarmagnet ein Impulsmoment besitzen müßte, es sei denn, daß er sowohl aus positiver als auch aus negativer Elektrizität aufgebaut ist, die in entgegengesetztem Sinne rotieren. In diesem Falle brauchte ein endliches magnetisches Moment nicht von einem Impulsmoment begleitet sein. Hat das Magneton ein Impulsmoment, so muß es die dynamischen Eigenschaften eines Kreisels aufweisen. Außerdem, haben alle Magnetonen in einem magnetisierten Körper oder Magnet ein Impulsmoment in derselben Richtung, oder ist es in einer Richtung überwiegend, so müßte sich der ganze Magnet wie ein Kresel verhalten. Ähnlich müßte eine Drahtspule, die von einem elektrischen, nur aus einer Art von Elektronen bestehenden Strome durchflossen wird, oder für die das lineare Moment der einen Art überwiegt, ein Impulsmoment haben.

2. Fig. 62 zeigt eine Abänderung der gewöhnlichen Form des Gyroskops, dessen Scheibe in einem Ringe in Zapfen gelagert ist und sich schnell um die Achse A drehen kann. Abgesehen von der Wirkung zweier Federn kann sich der Ring mit der Achse A frei nach der Höhe um eine horizontale Achse B bewegen, indem die Achse A einen Winkel θ mit der Vertikalen C bildet, während die Achse B zusammen mit der Scheibe, dem sie tragenden Gestell und den Federn sich um die Vertikalachse C drehen kann. Dreht sich die Scheibe um die Achse A und läßt man dann das ganze Instrument langsam sich um die Vertikalachse C drehen, so daß man das Zentrifugalmoment vernachlässigen kann, so bewegt sich

die Scheibe nach oben oder unten, derart, als ob sie ihre eigene Drehungsrichtung mehr in die Richtung der aufgezwungenen Rotation um C bringen möchte. Je größer die Rotationsgeschwindigkeit um C ist, um so größer ist die Bewegung der Scheibe; sie würde sich so lange bewegen, bis die Achsen A und C zusammenfielen, wenn dies die Federn zuließen (dabei soll die Zentrifugalwirkung immer noch zu vernachlässigen sein).

3. Ersetzen wir in dem eben beschriebenen Apparat die Scheibe oder die Scheibe und ihr ganzes Traggestell durch einen Magnet,

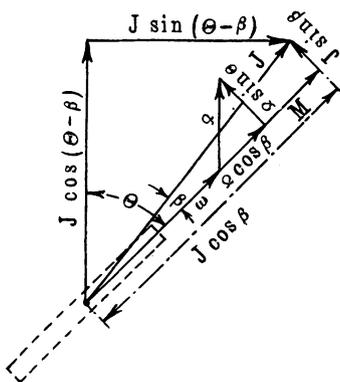


eine von einem elektrischen Strome durchflossene Drahtspule oder einen Elektromagnet, dessen Achse mit der Achse $A A$ zusammenfällt und dessen Massenmittelpunkt in der Achse B liegt, so würde sich der Körper, falls er ein Impulsmoment besitzt, ebenso wie das Gyroskop von Absatz 2 verhalten. Indes wird die Zentrifugalwirkung im allgemeinen nicht zu vernachlässigen sein, im besonderen werden große Geschwindigkeiten um die Vertikalachse notwendigerweise die gyroskopischen Wirkungen deutlich auftreten lassen, wenn das von den Magnetonen oder dem elektrischen Strome erzeugte Impulsmoment klein ist. (Mechanische, durch die beiden Federn hervorgerufene Störungen kann man vernachlässigbar klein machen.) Die Zentrifugalwirkung kann man nach Belieben verändern oder verschwinden lassen, indem man passende Gewichte an einer zu A und B senkrechten Achse CC anbringt (vgl. Fig. 63).

4. Der erste Versuch, durch das direkte Experiment das Impulsmoment der Elektrizität, die in einer Drahtspule fließt, oder das Impulsmoment, das mit den Ampereströmen in magnetischer Materie verbunden ist, nachzuweisen, wurde von Maxwell 1861¹⁾ mit einem Apparat, ähnlich dem von Fig. 63, aber ohne die Federn, angestellt. Maxwell benutzte keinen permanenten Magnet, sondern eine symmetrische stromdurchflossene Drahtspule, in die man nach Belieben einen Eisenkern stecken konnte.

Es seien A , B , C die Trägheitsmomente des Magnets (oder der Spule), bezogen auf seine eigene Achse, die horizontale Achse B und die senkrecht zu diesen beiden stehende Zentralachse.

Fig. 64.



Es sei ferner ϑ der Winkel zwischen der Magnetachse A und der Vertikalen C , Ω die aufgezogene Winkelgeschwindigkeit um die Vertikalachse, J das gesuchte Gesamtimpulsmoment und β der Winkel zwischen J und der Achse A (vgl. Fig. 64).

Weiterhin nehmen wir an, unter der Wirkung der Federn, die ein Drehmoment in der Richtung der Zunahme des Winkels ϑ hervorbringen, möge die Winkelgeschwindigkeit Ω und der Winkel ϑ konstant bleiben. J kann man in zwei zueinander senkrechte Komponenten zerlegen; die eine parallel der Achse der aufgezungenen Rotation: $J \cos(\vartheta - \beta)$, die konstant ist, die andere senkrecht zu dieser Achse, $J \sin(\vartheta - \beta)$, welche die konstante Änderungsgröße $\Omega J \sin(\vartheta - \beta)$ besitzt. Nach dem zweiten Bewegungsgesetz ist diese Größe gleich dem Drehmoment T ; also ist

$$T = \Omega J \sin(\vartheta - \beta). \quad (1)$$

Nun ist

$$J \cos \beta = A \omega \cos \vartheta + M^2) \quad (2)$$

und

$$J \sin \beta = C \Omega \sin \vartheta. \quad (3)$$

¹⁾ Maxwells Electricity and Magnetism, § 575.

²⁾ M ist das von den Kreisströmen herrührende Impulsmoment. (A. d. Ü.)

Also ist

$$T = (A - C) \Omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + M \Omega \sin \vartheta. \quad (4)$$

Ist C etwas größer als A , so wird das angelegte Drehmoment, das notwendig ist, um die Bewegung konstant zu halten, verschwinden, und das Gleichgewicht wird (unter der Wirkung des zentrifugalen Drehmoments) auch nach Entfernung der Federn stabil sein, wenn

$$\cos \vartheta = \frac{M}{(C - A) \Omega}. \quad (5)$$

Mittels zweier auf Schrauben aufgesetzter Schraubenmuttern wurde die Achse CC als eine Hauptachse eingestellt, derart, daß C eben etwas größer als A war; so war das Instrument sehr empfindlich eingestellt. In Anbetracht der durch das erdmagnetische Feld verursachten Störungen waren die Ergebnisse sehr roh, doch konnte man keine Änderung von ϑ nachweisen, wenn man M oder Ω umkehrte, auch wenn man einen Eisenkern in die Spule brachte.

Maxwell schließt hieraus, wenn ein Magnet in Bewegung befindliche Materie enthalte, müsse das Impulsmoment der Rotation sehr klein gegenüber jeder meßbaren Größe sein.

Indem sie M als Produkt der weiter unten definierten Konstante R und des magnetischen Moments des Magnets berechneten und die Tatsache berücksichtigen, daß Gleichung (5) nur dann gilt, wenn die horizontale Achse, um die die Rotation möglich ist, genau durch den Schwerpunkt des Magnets geht, zeigten W. J. de Haas und G. L. de Haas-Lorentz¹⁾, daß eine Veränderung von ϑ auch unter sehr günstigen Bedingungen kaum nachweisbar wäre.

Macht man $A - C$ sehr klein, ϑ nahezu $= 90^\circ$ und mißt man T und Ω , so könnte man M aus Gleichung (4) bestimmen.

5. Es bezeichne jetzt M das Impulsmoment eines Magnetonen, μ sein magnetisches Moment und

$$R = \frac{M}{\mu} \quad (6)$$

das Verhältnis dieser beiden Größen.

¹⁾ W. J. de Haas und G. L. de Haas-Lorentz, Proc. K. Akad. Amsterdam 19, 248, 1915.

Wir nehmen an, wir haben bei den Versuchen des Absatzes 4 einen permanenten, symmetrisch zu seiner geometrischen Achse magnetisierten Magnet, und die Magnetonen seien alle gleich. Bezeichnet ϑ den Winkel zwischen der Achse eines Magnetons und der Magnetisierungsintensität J in seiner Nähe, so ist

$$J = \Sigma \mu \cos \vartheta, \quad (7)$$

wobei die Summierung über die Volumeneinheit zu erstrecken ist. Das innere Impulsmoment j pro Volumeneinheit ist dann

$$j = \Sigma M \cos \vartheta = R \Sigma M \cos \vartheta = RJ. \quad (8)$$

Bezeichnet also J die mittlere Magnetisierungsintensität längs der Magnetachse, V sein Volumen und JV sein magnetisches Moment, so ist sein gesamtes inneres Impulsmoment RJV . Also kann man R aus (4) und (5) bestimmen.

6. Der Versuch Maxwells war ein Versuch über das Impulsmoment eines Magnets im ganzen, und er dachte anscheinend nicht daran, einen Versuch zu machen, bei dem jedes der zahllosen Magnetonen in einem magnetischen Körper gleichzeitig seinen Magnet verschieben könnte, und die Gesamtänderung in der Orientierung aller Magnetonen durch eine magnetische Methode zu messen.

Den ersten Versuch auf Grund dieses Gedankens scheint vor mehr als 30 Jahren John Perry¹⁾ gemacht zu haben, der, jedoch erfolglos, versuchte, eine Veränderung in der Magnetisierung eines Eisenstabes zu entdecken, die durch eine Rotation um seine Achse verursacht sein sollte. 1912 bzw. 1915 hatten Schuster²⁾ sowie Einstein und de Haas³⁾ den gleichen Gedanken. In der Zwischenzeit (1909) hatte auch der Verfasser⁴⁾ diesen Gedanken, und er begann mit der Unterstützung von L. J. H. Barnett Versuche, die zum erstenmal 1914 zu einem Erfolge führten. Es

1) John Perry, *Spinning Tops*, Oktober 1890, S. 112, Fußnote. Ich hatte Perrys Buch 1896 oder 1897 gelesen, jedoch diese Fußnote lange vergessen (d. h. es ist sehr wahrscheinlich, daß ich sie gelesen habe), als ich sie 1918, lange nach Ausführung der neuen Versuche wiederentdeckte.

2) A. Schuster, *Proc. Phys. Soc. Lond.* **24**, 121, 1911—1912. Deutsche Ausgabe unter dem Titel „Drehkreisel“.

3) A. Einstein u. W. J. de Haas, *Verh. d. D. Phys. Ges.* **17**, 152, 1915.

4) S. J. Barnett, *Science* **30**, 413, 238, 1909, Fußnote 2.

waren dies die ersten erfolgsgekrönten Versuche in diesem ganzen Gebiet¹⁾.

Die qualitative klassische Theorie dieser Versuche ist die folgende. Wenn der Körper in Rotation um irgend eine Achse befindlich ist, und jedes Magneton, welches einen Drehimpuls besitzt, sich wie die Scheibe in Absatz 2 verhält und somit seine Orientierung so ändern will, daß seine Drehrichtung mehr und mehr mit der Richtung der aufgezwungenen Rotation übereinstimmt, so müssen zuletzt beide Richtungen genau zusammenfallen, wenn nicht die Wirkung des übrigen Teiles des Körpers es verhindert.

In einem gewöhnlichen ferromagnetischen Körper im gewöhnlichen Zustand, mit dem wir vertraut sind, kann nur eine geringe Orientierungsänderung auftreten, und zwar wegen der von den Nachbarmolekülen hervorgerufenen Kräfte, die die Rolle der Federn in dem Falle unseres Gyroskops spielen. Die Rotation bewirkt, daß jedes Molekül ein sehr kleines Impulsmoment und daher auch ein kleines magnetisches Moment liefert, das parallel zur Achse der aufgezwungenen Rotation steht; also wird der Körper, dessen Magnetonen ursprünglich gleichmäßig nach allen Richtungen orientiert sind, längs der Achse der aufgezwungenen Rotation magnetisiert.

Sind die kreisenden Elektronen oder rotierenden Magnetonen alle positiv, so wird der Körper in dem Sinne magnetisiert, wie er es durch einen elektrischen Strom würde, der um ihn in der Richtung der ihm mitgeteilten Winkelgeschwindigkeit fließt. Sind sie alle negativ, oder ist die Wirkung der negativen Magnetonen überwiegend, so würde er in der entgegengesetzten Richtung magnetisiert. Letzteres tritt tatsächlich ein.

7. Um eine quantitative Theorie auf Grund der klassischen Ideen²⁾ zu entwickeln, nehmen wir an, das Magneton bestehe aus einem symmetrischen elektrischen System, das sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht, das magnetische Moment sei μ und das Impulsmoment, gleichfalls bezogen auf die Symmetrieachse, sei $M = R\mu$, ferner mögen alle rotierenden elektrischen Ladungen das gleiche Vorzeichen haben. Fig. 65 stellt einen Sonderfall dar.

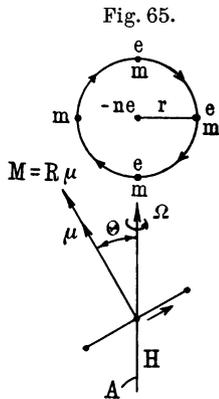
¹⁾ S. J. Barnett, Phys. Rev. **6**, 239, 1915.

²⁾ Vgl. S. J. Barnett, a. a. O. und Einstein und de Haas, a. a. O.

Die Vektoren M und μ haben dieselbe oder entgegengesetzte Richtung, je nachdem die sich bewegende Ladung positiv oder negativ ist.

Nun sei A das Trägheitsmoment des Magnetons, bezogen auf seine Rotationsachse, ferner sei $B = C$ das (mittlere) Trägheitsmoment, bezogen auf irgend eine zur Symmetrieachse senkrechte Zentralachse.

Wird nun der Körper, dem das Magneton angehört, in Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um eine Achse C versetzt,



so wird das Magneton, das sich wie die Scheibe bei dem Gyroskop verhält, sich bestreben, wenn möglich eine solche Lage aufzusuchen, für die seine Umdrehungsachse mit der der aufgezwungenen Rotation zusammenfällt; es wird aber durch ein Drehmoment T daran gehindert werden, sich so weit zu drehen, und dieses Drehmoment entsteht durch die Wirkung des übrigen Teiles des Körpers und tritt durch die Verschiebung auf. In kürzester Zeit ist kinetisches Gleichgewicht erreicht, und die Achse des Magnetons wird dann kontinuierlich einen Kegel beschreiben mit einem konstanten Winkel ϑ gegen eine durch

seinen Mittelpunkt parallel zur Achse C der aufgezwungenen Rotation gehende Gerade. Ist dieser Zustand erreicht, so ist T durch Gleichung (4) oben gegeben, die wir auch schreiben können:

$$T = \{M\Omega + (A - C)\Omega^2 \cos \vartheta\} \sin \vartheta. \tag{9}$$

Nun denken wir uns den Körper, anstatt ihn rotieren zu lassen, in ein gleichförmiges magnetisches Feld gebracht, dessen Intensität H mit der Richtung der früheren Rotationsachse zusammenfällt, und betrachten ein Magneton, dessen magnetische Achse nach der Verlagerung durch das Feld mit H den Winkel ϑ bildet. Das Magneton würde versuchen, sich unter der Wirkung des Feldes so lange zu drehen, bis seine Achse mit H zusammenfällt, es wird jedoch durch das Drehmoment T' daran verhindert, das durch die Wirkung des übrigen Teiles des Körpers entsteht und durch die Verschiebung auftritt. Dieses Drehmoment ist bekanntlich

$$T' = \mu H \sin \vartheta. \tag{10}$$

Wollen wir daher die magnetische Intensität finden, die die gleiche Wirkung auf die Orientierung des Magnetons hervorbringt, wie sie durch Rotation des Körpers mit der Winkelgeschwindigkeit Ω entstehen würde, so haben wir nur die beiden Drehmomente T und T' einander gleichzusetzen. Dies ergibt

$$\mu H \sin \vartheta = \{M\Omega + (A - C)\Omega^2 \cos \vartheta\} \sin \vartheta \quad (11)$$

oder

$$H = \frac{M\Omega}{\mu} \left(1 + \frac{(A - C)\Omega}{A\omega} \cos \vartheta \right). \quad (12)$$

Die experimentell erreichbaren Werte von Ω sind so klein gegenüber den irgend möglichen Werten von ω im Falle irgend eines Magnetons eines wahrscheinlichen Typus, daß wir das zweite Glied vernachlässigen dürfen. Also erhalten wir für jedes Magneton in dem Körper, wie auch immer seine Orientierung ist, mit jeder hinreichenden Genauigkeit

$$H = \frac{M\Omega}{\mu} = R\Omega = 2\pi RN, \quad (13)$$

wobei N die aufgezwungene Winkelgeschwindigkeit in Umdrehungen pro Sekunde ist.

Aus dem obigen folgt: sind alle Magnetonen in dem Körper gleicher Art, so wird eine Rotation mit einer Winkelgeschwindigkeit von N Umdrehungen pro Sekunde die gleiche Magnetisierungsintensität erzeugen, wie wenn man ihn in ein Feld von der Stärke $2\pi RN$ Gauß bringt.

Sind die Magnetonen in dem Körper von zweierlei Art, positive und negative, mit den Konstanten R_1 und R_2 , so wird eine Rotation des Körpers die gleiche Wirkung haben, wie wenn eine magnetische Intensität $H_1 = R_1\Omega$ an die positiven und eine magnetische Intensität $H_2 = R_2\Omega$ an die negativen Magnetonen angelegt würde. Wenn die Wirkung auf die negativen Magnetonen überwiegt, so würde die Rotation eine Magnetisierungsintensität in der Richtung von H_2 hervorbringen, ihre Größe wäre aber kleiner, als sie durch die Intensität $R_2\Omega$ entstünde, wenn alle Magnetonen negativ wären.

8. Das Verhältnis R soll nun für drei Typen von Magnetonen bestimmt werden. a) Nehmen wir an, das Magneton bestehe aus n ähnlichen Elektronen, die alle positiv oder alle negativ sind, ihre Gesamtladung sei ne , und sie rotierten in einer Kreisbahn vom

Radius r mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω und Flächen-
geschwindigkeit $\alpha = \frac{1}{2} \omega r^2$ um einen massiveren festen Kern mit
der Ladung $-ne$. Ist der Bahnradius groß gegenüber dem eines
Elektrons, so macht man bei der Berechnung des Drehimpulses
keinen in Betracht kommenden Fehler, wenn man annimmt, die
(elektromagnetische) Masse und die Ladung eines Elektrons seien
in einen Punkt konzentriert.

In diesem Falle erhalten wir, wenn m die Masse eines Elek-
trons bezeichnet:

$$\mu = ne\alpha; \quad A = nm r^2, \quad (14)$$

$$M = A\omega = nm r^2 \omega = 2nm\alpha \quad (15)$$

und

$$R = \frac{M}{\mu} = 2 \frac{m}{e}. \quad (16)$$

Ist der Abstand aufeinanderfolgender Elektronen in der Bahn
groß gegen den Durchmesser eines Elektrons, so ist m praktisch
identisch mit der Masse des freien Elektrons, sonst ist es größer.
Verkleinert man den Bahndurchmesser, indem man das elektro-
magnetische Feld mehr auf den Zwischenraum zwischen jedem
Elektron und dem Kern beschränkt, so wird das Impulsmoment
kleiner werden, worauf mich Dr. Tolman aufmerksam machte.

b) Voigt¹⁾ hat das Verhalten von magnetischen Elementen
oder Magnetonen in einem magnetischen Felde untersucht, die aus
homogen und gleichförmig geladenen rotierenden festen Körpern
bestehen. Der elektromagnetische Ursprung der Masse ist nicht
berücksichtigt, sondern die Massendichte ist als an jeder Stelle
proportional zur elektrischen Dichte angenommen.

Für diesen Magnetontypus kann man leicht zeigen, daß
ebenso wie im Falle des Elektronenringes

$$R = 2 \frac{m}{e}. \quad (17)$$

c) Abraham²⁾ hat das Verhalten eines sphärischen Elektrons
in einem magnetischen Felde betrachtet, das rotiert und entweder
über seine Oberfläche oder durch sein ganzes Volumen gleichförmig

¹⁾ W. Voigt, Ann. d. Phys. 9, 130, 1902.

²⁾ M. Abraham, Ann. d. Phys. 10, 151, 169, 171, 1903.

geladen ist, und hat das Impulsmoment unter der Annahme berechnet, Masse und Moment seien rein elektromagnetisch.

Die Massen des Elektrons oder Magnetons sind für Oberflächen- (m_s) oder Volumenladung (m_v)

$$m_s = \frac{2}{3} \frac{e^2}{a} \quad \text{und} \quad m_v = \frac{4}{5} \frac{e^2}{a}, \quad (18)$$

wenn e die Ladung des Elektrons und a seinen Radius bedeutet.

Für die Winkelgeschwindigkeit ω sind die entsprechenden Impulsmomente

$$M_s = \frac{1}{3} m_s a^2 \omega \quad \text{und} \quad M_v = \frac{1}{5} m_v a^2 \omega; \quad (19)$$

die entsprechenden magnetischen Momente sind

$$\mu_s = \frac{1}{3} e a^2 \omega \quad \text{und} \quad \mu_v = \frac{1}{5} e a^2 \omega. \quad (20)$$

Also sind die entsprechenden Werte des Verhältnisses $R = \frac{M}{\mu}$:

$$R_s = \frac{m_s}{e} \quad \text{und} \quad R_v = \frac{5}{7} \frac{m_v}{e}. \quad (21)$$

Der erste dieser Werte ist gerade halb so groß wie bei einer Elektronenbahn, der zweite noch etwas kleiner.

9. Es verdient, darauf hingewiesen zu werden, daß die Formeln (15) und (16) mutatis mutandis den Formeln für den normalen Zeeman-Effekt in der klassischen Theorie äquivalent sind. Bezeichnet also $\Delta h = -H$ die Änderung in der magnetischen Intensität, die auf das Magneton unter dem Einfluß der Änderung einwirkt und durch die Rotation des Körpers hervorgerufen wird, dann sehen wir, daß unter der Wirkung der Intensität Δh das Magneton eine reguläre Präzessionsbewegung mit der Frequenz

$$N = \frac{H}{2 \pi R} = - \frac{\Delta h e}{4 \pi m}$$

ausführt; und dies ist die klassische Formel für die Zeeman-Änderung von der Frequenz N , die durch das Anlegen der magnetischen Intensität Δh bewirkt wird. Das Magneton führt einfach eine Larmorpräzession mit der Frequenz N des Körpers aus.

10. In sehr schwachen Feldern bekommen alle ferromagnetischen Körper magnetische Momente, die proportional den angelegten Feldstärken sind. In ähnlicher Weise werden, da $R \propto \omega$ auch für die praktisch größtmöglichen Geschwindigkeiten einem sehr

kleinen Wert von H äquivalent ist, diese Körper durch die Rotation proportional der Geschwindigkeit magnetisiert.

Beginnen wir aber bei einer ferromagnetischen Substanz nicht in oder in der Nähe des neutralen Zustandes, sondern an der Stelle der Magnetisierungskurve, wo sie steiler wird, dann ist ein kleiner Zuwachs der magnetischen Intensität oder eine geringe Geschwindigkeit hinreichend, eine beträchtliche und irreversible Änderung der Magnetisierung hervorzurufen. Proportionalität existiert nur für elastische Verschiebungen.

11. Ein interessanter Fall der Theorie der Magnetisierung durch Rotation ist ihre Anwendung auf ein einzelnes Magneton oder einen Magnetonenschwarm, dessen Verhalten in einem gewöhnlichen magnetischen Felde Voigt¹⁾ und Abraham²⁾ auf Grund der klassischen Theorie betrachtet haben.

Wir betrachten zuerst den Fall des Voigtschen Magnetons, einen sich drehenden festen Körper, für den die elektrische Dichte proportional der Massendichte ist. Er werde in ein gleichförmiges magnetisches Feld der Stärke H gebracht und erhalte eine konstante Winkelgeschwindigkeit ω um seine einzige Achse, die größer als $\frac{H}{R}$ ist $\left(= \frac{R}{2 \frac{m}{e}} \text{ nach Voigts Annahme} \right)$.

In diesem Falle vollzieht sich nach der klassischen elektromagnetischen Theorie die Rotation um die eine Achse ungedämpft, während sie um die anderen (einander gleichen) Achsen gedämpft ist; und die Wirkung des Feldes auf das Magneton ist folgende: Legt man das Feld an, so beginnt eine Präzession der Magnetonenachse um die Feldrichtung mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{H}{R}$, begleitet von einer Nutation. Die Nutation ist wegen Zerstreuung oder Strahlung gedämpft, und die Präzession aus dem gleichen Grunde retardiert. Von jetzt an nähert sich die Achsenrichtung des Magnetons allmählich der Koinzidenz mit der Feldrichtung, dem Gleichgewichtszustand. Während dieses Prozesses nimmt die Rotationsgeschwindigkeit langsam ab, indem die Bewegung wie im

¹⁾ W. Voigt, a. a. O.

²⁾ M. Abraham, a. a. O.

Falle der Elektrizität bei Webers molekularen Rinnen beeinflusst wird.

Gibt es N solcher Magnetonen in der Volumeneinheit, und darf man die entmagnetisierenden und molekularen Felder und die störende Wirkung von Zusammenstößen vernachlässigen, so werden zuletzt alle Magnetonen mit ihren Achsen in die Richtung des magnetischen Feldes orientiert. In diesem Falle ist das Moment der Volumeneinheit

$$J = \frac{NA}{R} \left(\omega - \frac{H}{R} \right) \quad (22)$$

oder

$$J = \frac{NAe}{2m} \left(\omega - \frac{eH}{2m} \right), \quad (23)$$

wobei A das Trägheitsmoment des Magnetons um die einzige Achse der permanenten Rotation ist.

Das erste und Hauptglied ist vollständig unabhängig von H . Der Wechsel der Orientierung ist hervorgerufen durch das magnetische Feld, aber nur die Zeit, die erforderlich ist, um zu dem Ruhezustand zu kommen, wird von seiner Größe beeinflusst. Das zweite Glied ist ein diamagnetisches Glied und kommt daher, daß infolge der Veränderung des äußeren Flusses im Magneton während des Prozesses seiner Orientierung seine Geschwindigkeit wie im Falle der Weber-Langevinschen Theorie vermindert wird.

In diesem Falle erhalten wir, abgesehen von dem kleinen diamagnetischen Gliede, das mit der Intensität verschwindet, Sättigung gerade für die schwächsten Felder, und weniger vollständige Sättigung für stärkere Felder.

Kommen Zusammenstöße vor, dann wird die Magnetonenachse bei ihrer Annäherung an die Koinzidenz mit der Feldrichtung wiederholt abgelenkt, und die Magnetisierungsintensität wird die Sättigung nicht erreichen, aber sie wird mit der Feldstärke zunehmen; für eine gegebene Feldstärke ist sie um so größer, je größer die mittlere Zeit zwischen den Zusammenstößen ist, und je schwächer die molekularen und entmagnetisierenden Felder sind. Ein Wachsen der Temperatur wird daher, da es die Zeit zwischen den Zusammenstößen verkürzt und ihre Heftigkeit vermehrt, wenn die Magnetonen unverändert bleiben, die Magnetisierung für eine gegebene Feldstärke vermindern.

Der oben beschriebene Präzessionsvorgang ist zweifellos im allgemeinen ähnlich dem Vorgang, durch den in jedem Falle in paramagnetischen und ferromagnetischen Körpern die Magnetonen nach der klassischen Theorie mehr oder weniger vollständig nach dem magnetischen Felde ausgerichtet werden.

Das Verhalten des sphärischen Magnetons von Abraham ist ganz ähnlich dem des Magnetons von Voigt. Obwohl die Trägheitsmomente um die drei rechtwinkligen Achsen identisch sind, verändert eine Bewegung um irgend eine zu der einen Achse permanenter Rotation senkrechte Achse das Feld und verursacht so Strahlung und Zerstreung der Energie, während eine Rotation um die eine Achse das Feld fest und ungestört erhält.

Die Präzessionswinkelgeschwindigkeit der Magnetonenachse um die Feldrichtung ist für beide Magnetonen durch $\Omega = \frac{H}{R}$ gegeben; im Falle des Abrahamschen Magnetons wird sie

$$\Omega_s = \frac{H}{\frac{m_s}{e}} \quad (24)$$

für die Oberflächenladung, und

$$\Omega_v = \frac{H}{\frac{5}{7} \frac{m_v}{e}} \quad (25)$$

für die Raumladung. Abraham wies darauf hin, daß dieser Unterschied möglicherweise ein Mittel an die Hand gibt, zugunsten der einen oder der anderen Hypothese zu entscheiden, oder die Ladungsverteilung zu bestimmen.

Sind die Magnetonen nicht einem magnetischen Felde von der Intensität H , sondern einer Winkelgeschwindigkeit Ω unterworfen, so erhalten wir, wenn wir die Wirkungen der Zusammenstöße und der molekularen und entmagnetisierenden Felder vernachlässigen,

$$J = \frac{NA}{R} (\omega + \Omega). \quad (26)$$

Das erste und allein wichtige Glied ist unabhängig von Ω . Hier ist die Orientierung durch die aufgezwungene Geschwindigkeit

hervorgebracht, aber nur die Zeit, die erforderlich ist, den Ruhezustand zu erreichen, wird durch ihre Größe beeinflusst.

Der zweite Ausdruck, der hier zum ersten kommt, entspricht dem diamagnetischen Gliede Voigts. Wir erhalten, abgesehen von dem kleinen zweiten Glied, sogar für sehr kleine Werte von Ω Sättigung.

Wenn Zusammenstöße vorkommen, oder wenn die magnetischen Felder der benachbarten Moleküle und das entmagnetisierende Feld berücksichtigt werden müssen, so erreicht die Magnetisierungsintensität den Sättigungswert nicht. Aber sie wächst mit Ω , und ist für einen gegebenen Wert von Ω um so größer, je größer das mittlere Intervall zwischen den Zusammenstößen, je geringer ihre Heftigkeit und je schwächer das Feld ist¹⁾.

12. Nach der modernen Quantentheorie unterscheidet sich für Teilchen, für die die räumliche Quantelung der Elektronenbahnen und anderer Einheiten mit Drehimpulsen eine Rolle spielt, der Magnetisierungsprozeß sehr von dem aus der klassischen Theorie abgeleiteten.

Die Quantentheorie wurde auf den Paramagnetismus von Pauli²⁾, Sommerfeld³⁾, Epstein⁴⁾ und Gerlach⁵⁾ angewandt; Betrachtungen, die den von ihnen ausgeführten ähnlich sind, lassen sich vielleicht auch auf den Ferromagnetismus anwenden. Nach dieser Theorie sind die Magnetonenachsen in einem sehr schwachen Feld nicht nach Zufall verteilt, sondern sie bilden mit der Feldrichtung gewisse Winkel, die durch das Magnetonenmoment bestimmt und von der Feldstärke unabhängig sind. In einem Feld infinitesimaler Stärke sind die Magnetonenachsen auf die verschiedenen möglichen Winkel so verteilt, daß das Moment der Volumeneinheit unendlich klein ist. Wenn die Feldstärke wächst, so springen mehr und mehr Magnetonen in Lagen, in denen sie größere Komponenten des magnetischen Moments nach der Richtung des angelegten Feldes liefern. Sättigung würde dann erreicht sein, wenn die Achsen aller Magnetonen den

1) Vgl. S. J. Barnett, Nature 107, 8, 1921.

2) W. Pauli jr., Phys. Zeitschr. 1919.

3) A. Sommerfeld, Zeitschr. f. Phys. 21, 19, 1923; Phys. Zeitschr. 24, 360, 1923.

4) P. S. Epstein, Science 57, Mai 1923.

5) W. Gerlach, Phys. Zeitschr. 24, 275, 1923.

kleinsten Winkel (der nicht Null zu sein braucht) mit der angelegten Feldstärke bilden.

Nach dieser Theorie kann man vielleicht die Magnetisierung von Nickel erklären, dessen Grammatom bei der Sättigung ein Moment von nur $\frac{3}{5}$ eines Bohrschen Magnetons besitzt! Das kleinste Moment wäre, wenn die Magnetonenachsen bei der Sättigung parallel dem angelegten Feld wären, ein Bohrsches Magneton.

Bei der Anwendung der räumlichen Quantelung auf die Theorie der Magnetisierung durch Rotation kann man ähnliche Betrachtungen durchführen, indem die Rotationsachse die Stelle der Richtung der angelegten magnetischen Feldstärke einnimmt. Wenn die Rotationsgeschwindigkeit zunimmt, so würde der Winkel ϑ zwischen der Achse jedes Magnetons und der Rotationsachse nicht kontinuierlich abnehmen, sondern mehr und mehr Magnetonen würden in die festen Lagen springen, in denen ihre Impulsmomente mehr die gleiche Richtung wie die aufgezwungene Rotation besitzen. Die Rotations-sättigung würde erreicht werden, wenn die Achsen aller Magnetonen den kleinsten (oder die kleinsten) Winkel mit der Achse der aufgezwungenen Rotation bilden.

13. Wenn man die Magnetisierung durch Rotation experimentell untersucht und dabei das Verhältnis R nach Vorzeichen und Größe bestimmt, kann man zwei allgemeine Methoden benutzen, die der elektromagnetischen Induktion und die Magnetometermethode.

In allen Methoden hat die zu untersuchende Probe die Form eines annähernd zylindrischen Stabes, der mit seiner Achse horizontal und in der Ost-West-Richtung an einem Ort sich befindet, an dem das erdmagnetische Feld neutralisiert ist.

Bei den Methoden der elektromagnetischen Induktion bestimmt man die innere magnetische Intensität der Rotation dadurch, daß man die Änderung des Flusses durch die Probe, die durch Rotation mit gemessener Geschwindigkeit um ihre Achse entsteht, mit der Änderung des Flusses durch dieselbe Probe vergleicht, die entsteht, wenn man parallel zur Rotationsachse ein gleichförmiges magnetisches Feld bekannter Intensität anlegt. Die Flußänderungen, sind, wenn klein, proportional den Intensitäten.

Bei der einzigen bis jetzt angewandten Methode dieser Art wurden die Flußänderungen ballistisch gemessen, und zwar mit einem Galvanometer des Typus, der als Fluxmeter bekannt ge-

worden ist, indem eine Drahtspule den in dem Fluxmeterkreis befindlichen Stab umgibt.

Bei der Magnetometermethode wird ein astatisches Magnetometer mit dem Mittelpunkt seines unteren Magnetsystems in der Polarachse oder noch besser in der Äquatorialebene des zu untersuchenden Stabes oder Rotors montiert. Man vergleicht die Magnetometerablenkung, die durch Umkehrung der Rotationsrichtung des mit gemessener Geschwindigkeit betriebenen Rotors entsteht, mit derjenigen, die durch Umkehrung einer bekannten magnetischen Intensität in seiner Achsenrichtung hervorgebracht wird. Die Ablenkungen sind proportional den Änderungen der magnetischen Momente in beiden Fällen, und diese sind proportional zu der inneren Rotationsintensität und der Intensität des Eichfeldes.

14. In Absatz 5 wurde gezeigt, daß, wenn nur eine Sorte von Magnetonen vorliegt, das Impulsmoment der Magnetonen pro Volumeneinheit in einem magnetisierten Körper

$$j = RJ \quad (8')$$

ist; diese Gleichung war zuerst von O. W. Richardson¹⁾ für den Spezialfall der Elektronenbahn-Magnetonen, für die $R = 2 \frac{m}{e}$, entwickelt worden.

Dreht man den Rahmen, der das Gyroskop von Fig. 62 festhält, mit Gewalt um die Achse B , so ändert dies die Komponente des Drehimpulses der Scheibe nach der Vertikalen, und so entsteht eine Gegenwirkung in dem Rahmen, die eine ebenso große Änderung des Moments in entgegengesetzter Richtung hervorbringt.

Ebenso wird eine Änderung des Impulsmoments der Magnetonen, das durch eine Änderung in der Magnetisierung erzeugt wird, von einer gleichen und entgegengesetzten Änderung des Moments begleitet sein. Wahrscheinlich wirkt die Reaktion, die durch den Betrag des Wachstums dieses Moments gemessen wird, auf den übrigen Teil der Moleküle, zu denen die Magnetonen gehören, d. h. die Gesamtreaktion wird auf den Stab ausgeübt. Aber das ist nicht sicher; ein Teil der Reaktion mag auf die Magnetisierungsspule wirken. Indes ist die Wahrscheinlichkeit hierfür klein; denn

¹⁾ O. W. Richardson, Phys. Rev. **26**, 248, 1908.

die Rotation einer symmetrischen Spule um ihre Achse beeinflusst nicht ihr magnetisches Feld¹⁾. Wird der Stab von einem neutralen Zustand an magnetisiert, so ist das gesamte, von dem Stab und der Spule zusammen gewonnene Impulsmoment

$$-jV = -RJV,$$

wobei V das Volumen des Stabes ist.

Sind alle Magnetonen positiv, so hat der das Impulsmoment der Reaktion darstellende Vektor die entgegengesetzte Richtung, wie der die Magnetisierungsintensität darstellende; sind sie alle negativ, so haben beide Vektoren die gleiche Richtung.

Sind zwei Sorten von Magnetonen vorhanden, so haben wir

$$j = j_1 + j_2 = R_1 \sum \mu_1 \cos \vartheta_1 + R_2 \sum \mu_2 \cos \vartheta_2 = R_1 J_1 + R_2 J_2. \quad (27)$$

Für die weitere Betrachtung des Falles, bei dem mehr als eine Sorte von Magnetonen oder komplexe Magnetonen anwesend sein sollen, vgl. O. W. Richardson, a. a. O., ferner Proc. Roy. Soc. (A) **102**, 538, 1922 bis 1923; J. Q. Stewart, Phys. Rev. **11**, 100, 1918; W. J. de Haas und andere, Proc. Solvay Congress 1921 (1923), S. 206; A. P. Chattock und L. F. Bates, Phil. Trans. (A) **223**, 257, 1922. Ferner zur neuesten Anwendung der Quantenbeziehungen vgl. A. Landé, Phys. Zeitschr. **24**, 441, 1923 und A. Sommerfeld, a. a. O.

Die von Richardson in Proc. Roy. Soc. **102** gegebene und auf verhältnismäßig einfache Annahmen gegründete Diskussion kann nicht in allen Punkten richtig sein, da die Annahmen, die er in bezug auf die Sättigungsmagnetisierungsintensität von Eisen macht, einen viel (5 Proz.) größeren Fehler bedingen, als der bei der Bestimmung dieser Größe auftretende Fehler faktisch ist. Zudem müßte eine ähnliche Theorie wie auf Eisen auch auf Nickel anwendbar sein, während die Theorie Richardsons für Nickel vollständig versagt.

15. Um diesen Effekt experimentell zu untersuchen, sind zwei allgemeine Methoden versucht worden. Bei der ballistischen Methode, die O. W. Richardson²⁾ vorschlug und probierte, dem

¹⁾ Ein Effekt zweiter Ordnung auf das Feld, das im allgemeinen auftritt, ist hier vernachlässigt.

²⁾ O. W. Richardson, a. a. O.

man den Gedanken der Rotation durch Magnetisierung verdankt, wird ein zylindrischer Stab des zu untersuchenden Körpers mit seiner Achse vertikal an einem elastischen Faden aufgehängt, und das dem Stabe erteilte gesamte Impulsmoment wird aus dem Ausschlag bestimmt, der auftritt, wenn eine bekannte Magnetisierungsänderung in dem Stab durch die Veränderung eines vertikalen magnetischen Feldes erzeugt wird.

Bei der auf dieses Problem zuerst von Einstein und de Haas¹⁾ angewandten Resonanzmethode wird ein dem eben erwähnten ähnliches System mit bestimmter Vibrationsfrequenz n_0 um seine Vertikalachse durch ein Wechselfeld magnetisiert, dessen Frequenz n über einen gewissen, die Frequenz des vibrierenden Systems einschließenden Bereich variabel ist. Der Winkel α , um den der Zylinder schwankt, wird als Funktion der Frequenz des angelegten Feldes bestimmt. Aus dem Maximalwert α_m des Winkels bei der Resonanz, dem maximalen magnetischen Moment A des Stabes, der fast die ganze Zeit eines jeden Halbzyklus gesättigt wird, oder aus α_m , α , A , $n - n_0$ und dem Trägheitsmoment des Stabes um seine Achse kann man die Größe von R bestimmen. Und aus der Phasenbeziehung zwischen der Ablenkung des Stabes und dem magnetisierenden Strom kann man das Vorzeichen von R bestimmen.

Eine Abänderung dieser Methode, bei der das magnetisierende Solenoid direkt um den Stab gewickelt wird und bei welcher Stromumkehrungen die Bewegungen des so gebildeten Elektromagnets hervorbringen, wurde von de Haas²⁾ benutzt. Sie hat den Vorzug, zwei der experimentellen Schwierigkeiten zu umgehen, doch bringt sie andere mit sich; sie hat auch den großen theoretischen Vorzug, daß das Gesamtdrehmoment auf Stab und Solenoid gemessen wird. Nach dieser Methode wurden bis jetzt nur wenige rohe Versuche ausgeführt³⁾.

Eine andere Abänderung wurde von Einstein⁴⁾ für einen Vorlesungsversuch angebracht, aber nur rohe Versuche wurden an-

1) A. Einstein und W. J. de Haas, a. a. O.

2) W. J. de Haas, Proc. K. Akad. Amsterdam 18, 1280, 1916; Verh. d. D. Phys. Ges. 18, 423, 1916.

3) Neue Versuche auf Grund einer Abänderung der gleichen allgemeinen Methode wurden kürzlich von de Haas, a. a. O., Solv. Congr., ausgeführt, doch sind die Ergebnisse quantitativ in schlechter Übereinstimmung.

4) A. Einstein, Verh. d. D. Phys. Ges. 18, 173, 1916.

gestellt. Bei dieser Methode wird ein geistreicher Kunstgriff benutzt, um das magnetisierende Feld nur für einen kurzen Bruchteil der Periode anzulegen und so gewisse äußere Störungen zum größten Teil fernzuhalten.

16. Wie in Absatz 6 bemerkt, wurden die ersten erfolgreichen Versuche auf dem gesamten Gebiet des Impulsmoments bei dem Magnetismus, mit dem sich die vorliegende Übersicht beschäftigt, von L. J. H. Barnett und mir im Jahre 1914¹⁾ ausgeführt; im November und Dezember desselben Jahres wurden sie vor der Akademie der Wissenschaften in Ohio und der Amerikanischen Physikalischen Gesellschaft beschrieben. Es waren dies Versuche über die Magnetisierung von kaltgewalztem Stahl durch Rotation, und sie wurden nach der Fluxmetermethode der elektromagnetischen Induktion angestellt. Sie bestätigten Gleichung (14) hinsichtlich der Proportionalität der inneren Rotationsintensität mit der Geschwindigkeit, zeigten, daß die Rolle der negativen Elektrizität beim Magnetismus zum mindesten überwiegend war, und ergaben für $2\pi R$ unter der Annahme von nur einem Magnetontypus den Wert $-3,6 \cdot 10^{-7}$, oder für R den Wert von ungefähr der Hälfte von $\frac{2m}{e}$ für das negative Elektron in langsamer Bewegung, d. h.

$$-1,13 \cdot 10^{-7} = \frac{-7,1 \cdot 10^{-7}}{2\pi}.$$

Im Anfang des Jahres 1915 vollendeten wir eine zweite und gründlichere Untersuchung von Stahl nach derselben Methode mit beträchtlichen Verbesserungen. Sie ergab für $2\pi R$ den Wert $-3,15 \cdot 10^{-7}$ mit einem Fehler von 12 Proz. Die Beobachtungen bei höchster Geschwindigkeit, die noch zuverlässiger waren als die mit geringer Geschwindigkeit, ergaben $-3,4 \cdot 10^{-7}$.

Im Jahre 1917²⁾ führten wir eine Untersuchung von Stahl, Kobalt und Nickel nach einer magnetometrischen Methode zu Ende, bei der es viel schwieriger als bei der oben erwähnten Methode der elektromagnetischen Induktion war, systematische Fehler zu eliminieren, und erhielten Werte von R , die, wie oben, alle negativ waren, und deren Mittel in der Mitte zwischen den oben für Stahl gewonnenen und ihrem doppelten Betrage lagen.

¹⁾ S. J. Barnett, a. a. O.

²⁾ S. J. Barnett, Phys. Rev. **10**, 7, 1917.

In den Jahren 1920 bis 1922¹⁾ machten wir mit verbesserten Magnetometermethoden ausführliche und endgültige Versuche an Stahl, Weicheisen, Kobalt, Nickel und Heuslerscher Legierung und erhielten für alle diese Körper Werte von R ähnlich denen von 1914 und 1915 für Stahl, d. h. nahezu den Wert von $\frac{m}{e}$ für das negative Elektron in langsamer Bewegung. Im Verlauf dieser Arbeit entdeckten wir einen systematischen Fehler in der Arbeit von 1917, der die Werte von R zu hoch werden ließ.

Seit August 1922²⁾ haben wir nach Magnetometermethoden eine noch weiterhin verbesserte Untersuchung an verschiedenen Rotoren aus Weicheisen, kaltgewalztem und gehärtetem Stahl, Nickel, Kobalt, Eisen—Kobalt, Eisen—Nickel, Kobalt—Nickel und Heuslerscher Legierung ausgeführt. Die Ergebnisse unterscheiden sich im Mittel nicht wesentlich von den früher veröffentlichten, aber die neuen Ergebnisse sind sicherer, genauer und ausführlicher. Der Mittelwert von R wird für alle Rotoren zu etwa $1,06 \frac{m}{e}$ gefunden. Der durchschnittliche Fehler für die einzelnen Rotoren und die durchschnittliche Abweichung von R für die einzelnen Rotoren vom Mittelwert wurden beide kleiner als $1\frac{1}{2}$ Proz. gefunden. Die vollständige Untersuchung wird demnächst veröffentlicht werden³⁾.

Die vorliegenden Versuche beweisen direkt und entscheidend: 1. Daß in den ferromagnetischen Körpern Ampèresche Ströme oder molekulare oder Elektronenströme der Elektrizität in kreisförmiger Bahn oder in Rotation existieren; 2. daß beim Ferromagnetismus die Rolle der negativen Elektrizität zum mindesten überwiegend ist; 3. daß die Magnetonen ein Trägheits- und ein Impulsmoment besitzen, derart, daß sich jedes wie ein kleines Gyroskop verhält. Des weiteren, wenn wir die klassische Strahlungstheorie annehmen könnten — indes ist diese Annahme vielleicht nicht mehr möglich —, würden diese Experimente zusammen mit der Existenz des permanenten Magnetismus beweisen: 4. daß die An-

1) Kurze Beschreibungen der jüngsten Arbeiten vgl. S. J. Barnett, Proc. Phil. Soc. Washington 9. Okt. 1920 (Journ. Wash. Ac. Sci. 11, 162, 1921) und S. J. Barnett und L. J. H. Barnett, Proc. Am. Phys. Soc. Dez. 1920 (Phys. Rev. 17, 404, 1921), Proc. Am. Phys. Soc. April 1922.

2) Proc. Am. Phys. Soc. April 1924.

3) Proc. Amer. Acad. of Arts and Sciences 1925.

ordnung der Elektrizität in den Magnetonen eher eine kontinuierliche oder saturnähnliche als eine planetarische ist.

Was die Größe von R betrifft, so ist es schwierig, es für irgend eine noch nicht fertige Theorie zu berechnen. Es ist von Interesse, daß der Wert von R für das Elektron mit Oberflächenladung von Lorentz und Abraham [Abs. 8(3)], wenn es als Magneton rotiert, nahezu gleich dem experimentell gefundenen ist, unter der Annahme, daß alle Magnetonen in einem Körper gleich sind. Jedoch besteht ein deutlicher Unterschied zwischen den beiden Werten (etwa 6 Proz.), und auch wenn er nicht bestünde, so wäre es aus anderen Gründen sehr schwierig, das Elektron als Magneton anzunehmen oder auch nur zuzulassen, daß es eine wichtige Rolle spielt, indem es als Magneton neben dem Bohrschen Magneton existiert und den Durchschnittswert von R genügend reduziert, so daß er zu den experimentellen Ergebnissen paßt.

Lehnen wir einen neuen Typ des negativen Magnetons ab, so zeigt der Versuch sehr deutlich, daß der positive Teil des Atoms in gewisser Weise an den ferromagnetischen Erscheinungen teilnimmt, oder daß man mit Notwendigkeit zu einer neuen Beziehung geführt wird, oder beides. Zu neuen Spekulationen auf diesem Gebiete vgl. A. Landé, a. a. O. und neuere Arbeiten von A. Landé und Heisenberg in der Zeitschrift für Physik 1921 bis 1923. Wie Landé zeigte, bestehen wahrscheinlich noch nicht bekannte Beziehungen zwischen den offensichtlichen Anomalien bei diesem Effekt und dem Zeeman-Effekt.

17. Die ersten Versuche zum Nachweis der Rotation durch Magnetisierung, also des inversen Effekts zu dem 1914 entdeckten und beschriebenen, wurden Anfang 1915 von A. Einstein und W. J. de Haas¹⁾ nach der ersten in Absatz 13 beschriebenen Resonanzmethode ausgeführt. Unter der Annahme nur einer Magnetonenart und der weiteren Annahme, daß die ganze Reaktion auf das Magnetonenmoment auf den Stab übergeht, erhielten sie aus einigen Versuchen an Weicheisen die Größe $2 \frac{m}{e}$ oder $\frac{7,1 \cdot 10^{-7}}{2 \pi}$ für R , aber das Vorzeichen des Effekts war, worauf bald Lorentz²⁾ hinwies, nicht mit Sicherheit bestimmt.

¹⁾ A. Einstein u. W. J. de Haas, a. a. O.

²⁾ Vgl. A. Einstein, Verh. d. D. Phys. Ges. **17**, 203, 1915, auch W. J. de Haas, a. a. O.

Im September 1915 erhielt de Haas¹⁾ durch eine andere oben in Absatz 13 besprochene Resonanzmethode aus einigen Versuchen dieselbe Größe von R , nämlich $2 \frac{m}{e}$, und bestimmte das Vorzeichen des Effekts, indem R , wie Einstein und de Haas ursprünglich verlangt hatten, negativ war. Dies waren zusammen mit den neueren bereits besprochenen Versuchen von de Haas die einzigen über Rotation durch Magnetisierung bisher angestellten, bei welcher die Magnetisierungsspule um den Stab gewunden war.

Im Jahre 1916 führte Einsteins²⁾ Resonanzmethode ungefähr zu derselben Größe für R .

Die erste gründliche Untersuchung auf dem Gebiet der Rotation durch Magnetisierung wurde von J. Q. Stewart³⁾ 1917 zu Ende geführt; er benutzte eine geistreiche Abänderung der zuerst von Richardson versuchten ballistischen Methode und untersuchte das Impulsmoment, das in kleinen Stäben bei der Vernichtung ihres remanenten Magnetismus entsteht. Stewart untersuchte viele kleine Proben aus Eisen und Nickel, und fand unter den bereits berichteten Annahmen R negativ und etwa halb so groß wie $2 \frac{m}{e}$ sowohl für Eisen wie für Nickel.

Im Jahre 1919 beschrieb Emil Beck eine gründliche Untersuchung, in der er die Arbeit von Einstein und de Haas mit wesentlichen Verbesserungen wiederholte und auf Nickel ausdehnte.

Für R fand er 53 Proz. von $2 \frac{m}{e}$ im Falle des Eisens und 57 Proz. bei Nickel. 1919 stellte G. Arvidson⁴⁾ eine ähnliche Untersuchung an Eisen an, und erhielt für zwei Proben einen Wert von R , der etwa der Hälfte von $2 \frac{m}{e}$ gleich war.

Kürzlich haben Chattock und Bates (a. a. O.) eine gründliche Untersuchung nach einer ballistischen, der von Stewart und Richardson eng verwandten Methode an einigen Eisen- und Nickelproben angestellt und erhielten Werte von R , die nahe an

1) W. J. de Haas, a. a. O., K. Akad. Amsterdam 18, 1916.

2) A. Einstein, a. a. O., Verh. d. D. Phys. Ges. 18, 173, 1916.

3) J. Q. Stewart, Phys. Rev. 11, 100, 1918.

4) G. Arvidson, Phys. Zeitschr. 21, 88, 1919.

$\frac{m}{e}$ liegen. Ihr schließlicher Mittelwert ist weniger als 1 Proz. größer als $\frac{m}{e}$, und ihre schließlichen Resultate stimmen miteinander innerhalb 1,5 Proz. überein; jedoch kommen bei den Einzelbeobachtungen Differenzen von 25 bis 30 Proz. vor, so daß man nur schwer glauben kann, der Fehler sei nur so klein als die Übereinstimmung andeutet.

Es ist von Interesse darauf hinzuweisen, daß der Mittelwert von R , den man aus den zwei besten Bestimmungen nach der Methode der Rotation durch Magnetisierung [Beck, Chattock und Bates]¹⁾ erhält, recht genau mit den von L. J. H. Barnett und mir aus unseren Versuchen über Rotation durch Magnetisierung erhaltenen übereinstimmt.

Nach der einfachst möglichen Theorie müßten die beiden Ergebnisse in vollkommener Übereinstimmung stehen, doch sie müßten Werte von ganz anderer Größe liefern. Vgl. indessen Anmerk. 1)!

Bei dem gegenwärtigen Stande der Theorie ist es durchaus unsicher, eine exakte Übereinstimmung zu erwarten.

¹⁾ Während der Durchsicht dieses Artikels für die Übersetzung kam dem Verfasser eine Arbeit zur Hand von W. Sucksmith und L. J. Bates, bei der sie mittels einer Wechselstrom-Nullmethode für Eisen, Nickel und Heuslersche Legierung Werte von R erhalten, die mit einem Fehler von nur rund 1 Proz. gleich m/e sind.

Magneto-Optik.

Von **L. R. Ingersoll,**

a. o. Professor der Physik an der Universität Wisconsin.

Einführung. Die Verbindung zwischen der magneto-optischen Theorie¹⁾, wie wir sie heute haben, und den Stromtheorien des Magnetismus ist nicht so eng, wie man erwarten könnte. Die Erklärung dafür liegt vielleicht in der Tatsache — wenn wir im allgemeinen sprechen —, daß die annehmbarste magneto-optische Theorie sich hauptsächlich auf die Veränderungen bezieht, die durch das magnetische Feld in der Periode der schwingenden Elektronen (die Licht entweder emittieren oder absorbieren) hervorgebracht werden, wobei die Frage der Orientierung der Bahnen von sekundärer Bedeutung ist, während bei den Theorien des Magnetismus — wenigstens des Ferromagnetismus — das Umgekehrte der Fall ist. Indes werfen trotz dieses offensichtlichen Unterschiedes die magneto-optischen Erscheinungen ein sehr interessantes Streiflicht auf das allgemeine Gebiet des Magnetismus, und so darf man ihre Bedeutung nicht übersehen.

Die Entdeckung Faradays im Jahre 1845²⁾ der Drehung der Polarisationssebene des Lichtes, wenn es in einem magnetischen

¹⁾ Allgemein: W. Voigt, Artikel „Magneto-Optik“ in Graetz, Handb. d. El. u. d. Magnetismus 4, 393—710, 1915. Das vollständigste Werk über dieses Thema. Ausführliche Literaturangaben bis 1913. Es bietet weit mehr als des Verfassers früheres Werk: Magneto- und Elektro-Optik, Leipzig 1908; H. A. Lorentz, „Theorie der magneto-optischen Phänomene“. Enzyklop. d. math. Wiss. 5, 3, Heft 2, Leipzig 1909; P. Zeeman, Researches in Magneto-optics, London 1913. Enthält eine vollkommene Bibliographie des Zeemaneffektes bis 1913. Auch (S. XI) eine hervorragende Liste allgemeiner Arbeiten über Magneto-Optik.

²⁾ M. Faraday, Exper. Researches 19, Nr. 2146 ff.

Felde durch einen Block aus schwerem Glas hindurchgeht, war das erste verbindende Glied zwischen den Gebieten des Magnetismus und des Lichtes. Ihr folgte einige 30 Jahre später die Kerrsche¹⁾ Entdeckung der Erscheinungen, die die Reflexion an der polierten Polfläche eines Magnets begleiten. Eine noch überraschendere Entdeckung indes war die der magnetischen Auflösung von Spektrallinien, die Zeeman²⁾ im Jahre 1896 entdeckte.

Diese drei Erscheinungen, die als Faraday-, Kerr- und Zeeman-Effekt bekannt sind, bilden zusammen mit gewissen Effekten der magnetischen Doppelbrechung die magnetooptischen Erscheinungen. Obwohl sie theoretisch in mehr oder weniger engem Zusammenhang stehen, wollen wir sie doch aus Gründen der Übersichtlichkeit getrennt betrachten.

Der Faraday-Effekt.

Hauptsächliche Kennzeichen. Die magnetische Drehung ist eine Eigenschaft, die (wahrscheinlich) allen isotropen Medien gemeinsam ist. Obwohl sie analog zur natürlichen Drehung ist, unterscheidet sie sich von ihr darin, daß die absolute Richtung, in die die Ebene gedreht wird, unabhängig davon ist, ob das Licht vom Nord- zum Südpol geht oder umgekehrt; infolgedessen verursacht eine Reflexion des Lichtes an der Rückseite einen doppelten Effekt, anstatt daß die Drehung aufgehoben wird, wie dies bei der natürlichen Aktivität der Fall wäre. Die Drehung kann auch durch Umkehrung des magnetischen Feldes verdoppelt werden — eine Tatsache, von der man allgemein bei der Messung mit Vorteil Gebrauch macht. Die Mehrzahl der Körper verursacht eine positive Drehung, d. h. in Richtung des felderzeugenden Stromes, und diese Drehung ist proportional (Verdetsche Konstante) der Feldstärke, ausgenommen den Fall sehr stark magnetischer Körper, bei denen sie sich mit der Magnetisierungsintensität ändert (Kundtsche Konstante). Die Zeit, die zum Auftreten des Effekts erforderlich ist, ist, wenn überhaupt endlich, außerordentlich klein³⁾. Die Messungen der magnetischen Drehung führt man mit polarimetrischen Apparaten verschiedener Art je nach dem zu unter-

¹⁾ J. Kerr, Phil. Mag. (5) **3**, 321, 1871.

²⁾ P. Zeeman, Phil. Mag. (5) **43**, 236, 1897.

³⁾ O. Lodge, Chem. News **59**, 191; Eng. **47**, 250, 1889.

suchenden Spektralgebiet aus. Im sichtbaren Gebiet ist wahrscheinlich das Lippichsche¹⁾ Polarimeter mit dem Dreifeldersystem das beste. Im Ultraviolett benutzte man im allgemeinen photographische Methoden wie Macaluso und Corbino²⁾ oder Landau³⁾, obwohl einige Arbeiten auch mit Fluoreszenzokularen ausgeführt worden sind. Im Infraroten verwendet man Radiometermethoden mit Selenspiegeln als Polarisatoren wie Meyer⁴⁾ oder ein System mit Doppelbildprismen, wie Ingersoll ausführt⁵⁾.

Magnetische Rotationsdispersion. Ausgenommen Eisen, Nickel und Kobalt, bei denen die Drehung eine Zunahme für längere Wellenlängen zeigt, ist der Effekt ungefähr proportional dem umgekehrten Quadrat der Wellenlänge, wenigstens für ein Spektralgebiet, das keine Absorptionsbande enthält, und in dem Absorption und Drehung von derselben Elektronenart abhängig sind. In der Nähe solcher Banden müssen wir zwei Sonderfälle unterscheiden: im ersten wächst die Drehung auf jeder Seite der Absorptionsbande (und hat das gleiche Vorzeichen); im zweiten zeigt sie eine Abnahme auf der einen Seite (kurze Wellenlänge) und eine Zunahme auf der anderen, wie bei der gewöhnlichen „anormalen Dispersion“. Natriumdampf, den Macaluso und Corbino und im besonderen Wood⁶⁾ untersuchten, ist ein gutes Beispiel für den ersten Fall, während die Ergebnisse von Elias⁷⁾ an Lösungen eines Praseodymsalzes wahrscheinlich als deutlicher Beweis für die Existenz des zweiten Falles gelten können.

Von den vielen Formeln, die man zur Darstellung der magnetischen Rotationsdispersion angab, ist vielleicht die entsprechendste von der Form:

$$R = \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{A}{\lambda^2} + \frac{B\lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)^2} + \dots \right\}$$

¹⁾ F. Lippich, Zeitschr. f. Instrkde. **14**, 326, 1894.

²⁾ D. Macaluso und O. M. Corbino, C. R. **127**, 548, 1898.

³⁾ S. Landau, Phys. Zeitschr. **9**, 417, 1908.

⁴⁾ U. Meyer, Ann. d. Phys. **30**, 607, 1909.

⁵⁾ L. R. Ingersoll, Phys. Rev. **23**, 489, 1906. Phil. Mag. (6) **11**, 41, 1906; **18**, 74, 1909.

⁶⁾ R. W. Wood, Phil. Mag. (6) **10**, 408, 1905; **12**, 329, 499, 1906; **14**, 145, 1907; R. W. Wood und H. W. Springsteen, Phys. Rev. **21**, 41, 1905; R. W. Wood und F. Hackett, Astroph. Journ. **10**, 339, 1909.

⁷⁾ G. J. Elias, Ann. d. Phys. **35**, 298, 1911.

für eine Absorptionsbande bei der Wellenlänge λ_1 . Diese oder ähnliche Formeln eignen sich, wie man fand, zur Darstellung der Rotationsdispersion am Kohlenstoffbisulfit und gewisser optisch isotroper Kristalle in beträchtlichen Spektralbereichen. Es ist beachtenswert, daß diese Formel in der Nähe einer Absorptionsbande eine Dispersion von dem ersten oben erwähnten Typus gibt.

Das Wiedemannsche Gesetz. Die Proportionalität zwischen der magnetischen und der natürlichen Drehung für verschiedene Wellenlängen war als Gesetz von G. Wiedemann¹⁾ ausgesprochen worden, und zwar als Ergebnis der Versuche an Terpentin. Es ist indes eine Regel, von der es viele Ausnahmen gibt.

Theorien der magnetischen Drehung. Daß jede Theorie der magnetischen Drehung von dem Fresnelschen Gesichtspunkt ausgehen muß, d. h. von der Zerlegung einer ebenen Schwingung in zwei zirkulare, die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten in dem Medium ausbreiten, war weitgehend durch die Versuche von Righi²⁾, Becquerel³⁾ und Brace⁴⁾ festgestellt worden.

Dies führt jedoch nicht sehr weit vorwärts zu der letzten Erklärung einer Erscheinung, die wesentlich elektronischen Charakters ist. Drude⁵⁾ hat bis zu einem gewissen Grade zwei Theorien ausgearbeitet, die auf der Hypothese der Molekularströme bzw. auf dem Hall-Effekt aufgebaut waren. In der ersten nimmt er an, die rotierenden Elektronen, deren Bewegung durch das magnetische Feld entweder induziert oder modifiziert ist, wurden durch die Lichtwellen so beeinflusst, daß ihre Rotationsmittelpunkte in Schwingungen versetzt wurden. Indem er sie nun als mehr oder weniger starre Körper behandelt, kommt er zu einem Ausdruck für die magnetische Drehung. Obwohl diese Annahme der molekularen Ströme für die Erklärung des Magnetismus und Diamagnetismus brauchbar und deshalb eine natürliche Hypothese ist, auf der man wohl eine Theorie der magnetischen Drehung aufbauen kann, führt sie doch zu Gleichungen, die für die Drehungen zu beiden Seiten einer Absorptionsbande das entgegengesetzte Vor-

¹⁾ G. Wiedemann, Pogg. Ann. **82**, 215, 1851.

²⁾ A. Righi, N. Cim. (3) **3**, 212, 1878.

³⁾ H. Becquerel, C. R. **88**, 334, 1879.

⁴⁾ D. B. Brace, Wied. Ann. **26**, 576, 1885; Phil. Mag. (6) **1**. 464, 1901.

⁵⁾ Optik, S. 407 ff. Leipzig 1912.

zeichen fordern, und dies hat die experimentelle Bestätigung eingeschränkt. Voigt¹⁾ kritisiert den Ausgangspunkt sowohl dieser Theorie als auch der verwandten des Langevinschen Moleküls in dem Punkte, daß sie bezüglich des Zeeman-Effektes einige Unstimmigkeiten mit sich bringen.

In der zweiten Hypothese werden die durch die Lichtwellen in Bewegung gesetzten Elektronen durch das magnetische Feld so beeinflusst, daß Kräfte proportional zu ihren Geschwindigkeiten auf sie wirken. Hieraus ergibt sich, wie er zeigt, ein Ausdruck für die magnetische Drehung, der eine Drehung gleichen Vorzeichens auf jeder Seite einer Absorptionsbande wie im Falle des Natriumdampfes ergibt.

Unter gewissen vereinfachenden Annahmen ist dieser Ausdruck, wie man zeigen kann, in Übereinstimmung mit einer Formel, die sich auf den Brechungsindex μ bezieht, von der Form

$$R = K \frac{e}{m} \lambda \frac{\partial \mu}{\partial \lambda},$$

die ähnlich der von H. Becquerel²⁾ ist. Siertsema³⁾ wandte diese Formel auf eine Reihe durchsichtiger Körper an, und die berechneten Werte von $\frac{e}{m}$ sind in ziemlicher Übereinstimmung mit den erhaltenen. Voigt⁴⁾ leitet eine ähnliche Formel ab; er kommt auch durch eine geistreiche Anwendung auf den inversen Zeemann-Effekt (s. weiter unten) zu einer Erklärung der Drehungserscheinungen, die teilweise zufriedenstellend für die unmittelbare Nachbarschaft einer Absorptionsbande ist. Magnetische Drehungstheorien (für Gase) auf Grund des Bohrschen Moleküls sind von A. Sommerfeld⁵⁾ und E. Pauer⁶⁾ ausgearbeitet worden, während gewisse Elektronenbetrachtungen in einer Theorie von S. S. Richardson⁷⁾ erschöpfend behandelt sind.

¹⁾ A. a. O. S. 661.

²⁾ H. Becquerel, C. R. **125**, 697, 1897.

³⁾ L. H. Siertsema, Amst. Proc. **5**, 413; Leiden Com. Nr. 82, 1902.

⁴⁾ A. a. O. S. 561.

⁵⁾ A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **53**, 497, 1917.

⁶⁾ E. Pauer, Ann. d. Phys. **56**, 261, 1918.

⁷⁾ S. S. Richardson, Phil. Mag. (6) **31**, 232, 457, 1916.

Der Zeeman-Effekt.

Hauptsächliche Kennzeichen. Gebraucht man das Wort in seinem weitesten Sinne, so kann man unter Zeeman-Effekt alle Veränderungen in der Licht-Absorption und -Emission begreifen, die entstehen, wenn man den absorbierenden oder emittierenden Körper in ein magnetisches Feld bringt. In engerem Sinne jedoch verstehen wir darunter die magnetische Auflösung einer scharfen Emissions- oder Absorptionslinie des Spektrums in zwei, drei oder mehr Komponenten. Bringt man eine Lichtquelle, eine Flamme, einen Bogen oder eine Vakuumröhre in ein starkes magnetisches Feld, so werden die Linien in Komponenten aufgespalten, die man, wenn sie nur wenig getrennt sind, mit den modernen spektroskopischen Apparaten hoher Auflösungskraft wie dem Michelsonschen Stufengitter, der Lummer-Gehrckeschen Platte, einem Interferometer oder guten Spiegelgitter leicht beobachten und untersuchen kann.

Diese Auflösung ist von charakteristischen Polarisationserscheinungen begleitet. Im einfachsten Falle wird eine einzelne Linie, wenn die Blickrichtung senkrecht zu den Kraftlinien steht (transversaler Effekt), durch das magnetische Feld in drei Linien zerlegt, von denen die mittlere ihre ursprüngliche Frequenz behält und mit dem elektrischen Vektor parallel zum Felde linear polarisiert ist, während die Komponenten zu beiden Seiten senkrecht dazu polarisiert sind. Blickt man indes parallel zum Felde (longitudinaler Effekt), so fällt die zentrale Komponente aus, während die beiden zu beiden Seiten rechts- bzw. linkshändig zirkular polarisiert sind.

Aus dem Kirchhoffschen Gesetz ergibt sich, wie wir jetzt schon sagen wollen, daß ein genau entsprechender Effekt im Falle absorbierender Gase oder Dämpfe auftritt. Eine derartige dunkle Linie, wie wir sie in dem kontinuierlichen Spektrum beobachten, wenn weißes Licht durch einen absorbierenden Dampf hindurchgeht (z. B. eine Flamme, die ein Metallsalz enthält), wird zwischen den Polen eines Elektromagnets bei Erregung des Feldes in drei oder mehr Linien aufgelöst. Bei der Prüfung fand man, daß die Absorption vollständig auf die oben beschriebenen Polarisationszustände beschränkt ist. Diese, als inverser Zeeman-Effekt bekannte Erscheinung, hat eine besondere Bedeutung für die Theorie des

Faraday-Effektes und die magnetische Doppelbrechung. Sie ist auch die Grundlage für die grundlegenden Forschungen von Hale ¹⁾ und seinen Mitarbeitern auf dem Gebiet der solaren Magneto-Optik.

Während das einfache Triplett, wie beschrieben, der gewöhnlichste Auflösungsstyp ist, ist er auf keinen Fall der einzige. Was die Häufigkeit des Auftretens betrifft, so kommt an zweiter Stelle das Sextett, und es gibt andere Fälle der Trennung in 4 bis 15 oder mehr Komponenten, während sehr wenig Linien durch das Feld unbeeinflusst bleiben. Preston hat als Regel aufgestellt, daß für jedes gegebene Element alle zu derselben Spektralserie gehörigen Linien Auflösungen desselben Typus und, bezogen auf die Skala der Frequenzen, von derselben Größe aufweisen. Auch verhalten sich entsprechende Linien verschiedener Elemente in gleicher Weise. Runge und Ritz haben auch Regeln entwickelt, die sich im einzelnen auf die komplizierteren Auflösungsstypen beziehen.

Theorie. Die Lorentzsche Theorie des Zeeman-Effektes ist in ihren Grundzügen folgende. Jede Elektronenschwingung kann man in drei axiale Komponenten zerlegen, von denen die zu den Kraftlinien parallele *Z*-Schwingung durch das Feld nicht beeinflusst wird. Die beiden anderen sind je in eine rechts- und linkszirkuläre Bahnbewegung in der *X-Y*-Ebene auflösbar, die man zu einer rechts- und einer linkszirkulären kombinieren kann. Der Effekt wird genau der gleiche sein, wie wenn das von der Lichtquelle emittierte Licht von drei Gruppen von Elektronen herkäme, die nach diesen drei einfachen Weisen schwingen.

Sehen wir nun in Richtung des Feldes, so wird ein negatives Elektron, das sich in rechtshändiger Kreisbahn bewegt, einen elektromagnetischen Einfluß gegen das Zentrum seiner Bahn erfahren, der seine Umlaufzeit verkürzen will, während für die andere Rotation der inverse Effekt eintreten wird. Sieht man in der *Z*-Richtung, so wird sich der (longitudinale) Effekt auf diese beiden entgegengesetzten Kreispolarisierungen beschränken. Sieht man aber senkrecht, so erscheinen die Kreisbewegungen „hochkant“ als lineare zum Felde senkrechte Schwingungen, während die mittlere und unverschobene Komponente rechtwinklig zu diesen polarisiert ist.

¹⁾ G. E. Hale, Mount Wilson Sol. Obs. Contr. Nr. 30 ff.

Kleiden wir nun den Gegenstand in mathematisches Gewand, so können wir die Bewegungsgleichungen eines Elektrons der Masse m , dessen Koordinaten bezüglich seiner mittleren Lage ξ , η , ζ sind, folgendermaßen hinschreiben:

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -k \xi, \quad m \frac{d^2 \eta}{dt^2} = -k \eta, \quad m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -k \zeta,$$

wobei k der Koeffizient der „quasielastischen“ Kräfte ist. Daß die zurücktreibende Kraft proportional der Verrückung sein muß, folgt aus der Tatsache, daß die Schwingungsfrequenz unabhängig von der Amplitude ist. Nach den gewöhnlichen Integrationsmethoden geben diese Gleichungen als Frequenz (ausgedrückt durch die Winkelgeschwindigkeit)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

In Gegenwart eines Feldes H muß man nun diese Gleichungen abändern in:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= -k \xi + \frac{e H}{c} \frac{d \eta}{dt}, \\ m \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= -k \eta - \frac{e H}{c} \frac{d \xi}{dt}, \\ m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= -k \zeta, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung durch das Feld nicht geändert wird.

Kombiniert man die beiden ersten, so erhält man als mögliche Lösungen:

$$\begin{aligned} \omega_+^2 &= \omega_0^2 - \frac{e \omega_+ H}{c m}, \\ \omega_-^2 &= \omega_0^2 + \frac{e \omega_- H}{c m}, \end{aligned}$$

oder in sehr enger Annäherung

$$\omega_{\pm} = \omega_0 \pm q,$$

wobei

$$q = -\frac{e H}{2 c m}.$$

Da nun

$$\omega = \frac{2 \pi c}{\lambda}$$

und

$$\delta \omega = q = - 2 \pi c \frac{\delta \lambda}{\lambda^2},$$

so erhalten wir

$$\frac{\delta \lambda}{\lambda^2} = \frac{e H}{m 4 \pi c^2},$$

oder, wenn man e in elektromagnetischen Einheiten ausdrückt:

$$\frac{\delta \lambda}{\lambda^2} = \frac{e H}{m 4 \pi c}.$$

Die Trennung $\delta \lambda$ ist also proportional dem Quadrat der Wellenlänge, und ihre Messung gestattet eine Berechnung des Verhältnisses $\frac{e}{m}$, was zuerst von Zeeman auf diesem Wege bestimmt wurde.

Die vorliegende Theorie ist nur imstande, den einfachsten Fall der Zeeman-Phänomene, nämlich das normale Triplett oder die Trennung zu erklären, die einen Wert für $\frac{e}{m}$ in Übereinstimmung mit dem nach anderen Methoden gefundenen ergibt. Erweiterungen der Theorie erfordern im allgemeinen besondere Annahmen bezüglich der Natur der Atome und Moleküle. Unter der Annahme von Molekularmagneten ganz von der Art der Weisschen Magnetonen konnte Ritz viele der komplizierteren Zerlegungen hinreichend genau darstellen, doch wurde seine Theorie von Voigt¹⁾ scharf kritisiert. Von J. J. Thomsons Atommodell dachte man beim ersten Zusehen, es besitze die Möglichkeiten für die Erklärung von Quartetten, Quintetten usw., aber es ist jetzt offenbar, daß es nur das einfache Dublett und Triplett der elementaren Theorie liefert.

Das Bohrsche Atom scheint beim ersten Zusehen für die Erklärung des Zeeman-Effektes nicht besonders geeignet zu sein.

¹⁾ W. Voigt, Ann. d. Phys. (4) **36**, 873, 1911.

Indes haben Debye¹⁾, Bohr²⁾, Lorentz und Sommerfeld³⁾ eine Quantenerklärung dieses Phänomens durchgeführt, die, wenn auch notwendigerweise komplizierter als die einfache Lorentzsche Theorie, den Vorteil hat, daß sie nicht nur für den einfachen Fall, sondern auch für einige der komplizierteren Effekte ebensogut gilt. Es ist von Interesse hervorzuheben, daß die Anwendung des Bohrschen Modells auf die Erklärung des elektrooptischen Stark-Effektes resultierende Gleichungen ergibt, in denen die Quantenkonstante h explizite vorkommt, während sie bei den Schlußgleichungen für den entsprechenden magnetooptischen (Zeeman)-Effekt herausfällt; die Ergebnisse sind also in Übereinstimmung mit denen der einfachen Lorentzschens Theorie.

Endlich hat Lorentz⁴⁾ ein allgemeines Gleichungssystem aufgebaut, das auf die Annahme magnetischer isotroper Atome gegründet ist; Voigt⁵⁾ hat es modifiziert, indem er diese Annahme aufgab und von Elektronenpaaren Gebrauch machte. Voigts Gleichungen sind zwar notwendigerweise kompliziert und von mangelnder Übersichtlichkeit, sie sind aber bei passender Wahl der Konstanten imstande, alle beobachteten Zerlegungen zu erklären.

Voigts Theorie der magnetischen Drehung.

Nach dem inversen Zeeman-Effekt — longitudinaler Fall — wird eine einzelne Absorptionsbande in zwei nur wenig in der Wellenlänge verschiedene, rechts und links polarisierte aufgelöst. Nun hat die Resonanzabsorption, wie sie in einer Flamme mit Metaldampf auftritt, eine charakteristische Wirkung auf den Brechungsindex, der in der Nachbarschaft der Absorptionsbande „anormale Dispersion“ zeigt. Solche Kurven sind, als Funktion der Frequenz, in Fig. 66 dargestellt. erinnert man sich, daß nach Fresnel die magnetische Drehung durch einen Geschwindigkeitsunterschied der rechts- und links-kreispolarierten Komponenten

1) P. Debye, Phys. ZS. **17**, 507, 1916.

2) N. Bohr, Phil. Mag. **27**, 506, 1914.

3) A. Sommerfeld, Atombau u. Spektrallinien, S. 416 ff. Braunschweig 1921.

4) H. A. Lorentz, Wied. Ann. **63**, 278, 1897.

5) A. a. O. S. 592.

des linear polarisierten Strahles [Drehung $R = \pi n \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right)$ pro Längeneinheit] beruht, so können wir schließen, daß eine solche Drehung für jede einzelne Wellenlänge (oder Frequenz n) proportional der Differenz der Ordinaten der beiden Kurven in obiger Figur sein wird. Die Drehung müßte dasselbe Vorzeichen auf jeder Seite der Absorptionsbande und das entgegengesetzte Vorzeichen in ihrem Innern haben. Ferner müßte, wie man sieht, wenn man die Figur

Fig. 66.

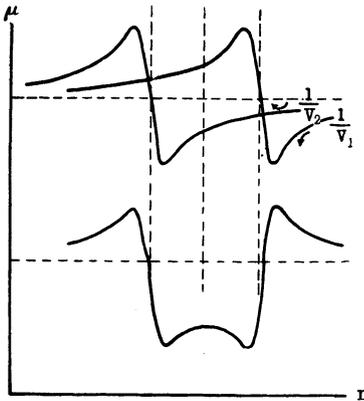
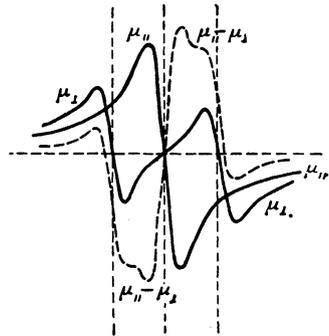


Fig. 67.



für eine stärkere magnetische Auflösung zeichnet, die Drehung innerhalb der Bande, nachdem eine bestimmte Feldstärke erreicht ist, mit weiterem Wachsen des Feldes abnehmen. Diese Voraussagen wurden alle weitgehend durch die Versuche mit Natriumflammen von Zeeman¹⁾, Hansen²⁾ und anderen bestätigt.

Magnetische Doppelbrechung. Wendet man die obige Überlegung auf den transversalen Fall an, so müßte man die in Fig. 67 dargestellte Sachlage erwarten. Hier ist die Absorptionsbande durch das Feld in ein Triplett mit linear polarisierten Komponenten aufgelöst. Für jede Einzelfrequenz würden wir dann Wellen in den beiden Polarisationssebenen finden, die verschiedene Brechungsindizes haben, und das verursacht Doppelbrechung. Die

¹⁾ P. Zeeman, Amst. Proc. **5**, 41, 1902.

²⁾ H. M. Hansen, Ann. d. Phys. **48**, 169, 1914.

Größe des Effekts ist durch die punktierte Linie angedeutet. Die Versuche von Zeeman und Geest¹⁾ an Natriumdampf, und im besonderen die von Voigt und Hansen²⁾ an Lithiumdampf, bestätigen in durchschlagender Weise die Existenz dieses neuen magnetooptischen Phänomens.

Es gibt aber einige Fälle der magnetischen Doppelbrechung, wie die von Cotton und Mouton³⁾ in reinen Flüssigkeiten entdeckten, die durch die Voigtsche Theorie nicht erklärt werden können. Nach dieser Theorie stehen magnetische Doppelbrechung und Drehung in direkter Beziehung, und die eine müßte aus der anderen berechenbar sein, während bei den Flüssigkeiten die beobachtete Doppelbrechung mehr als tausendmal so groß als die berechnete ist. Indem Langevin⁴⁾ die statistische Mechanik auf seine Hypothese der molekularen Anordnung anwendet, leitet er Formeln ab, die zu dem letzteren Falle passen.

Nach seiner Theorie muß man die magnetische Drehung und die Doppelbrechung wesentlich verschiedenen Ursachen zuschreiben. Die erste ist verbunden mit der magnetischen Zerlegung und dem Diamagnetismus und ist zu erklären durch die Modifikation der Elektronenbahnen durch das magnetische Feld, die andere durch die Rückorientierung der Molekularachsen. Während diese Theorie sich auf Flüssigkeiten anwenden läßt, ist die Voigtsche die weitaus befriedigendste für Metaldämpfe. Es ist in der Tat ganz gut möglich, daß im allgemeinen Falle beide Faktoren wirksam sind.

Der Kerr-Effekt.

Allgemeine Beschreibung. Hier muß man drei verschiedene Arten der Phänomene unterscheiden, die man zusammenfassend als „Kerr-Effekt“ bezeichnet, obgleich Kerr selbst nur in der Lage war, die ersten beiden zu beobachten. Sie treten auf, wenn eine Fläche aus Eisen, Nickel oder Kobalt, auf die linear polarisiertes Licht auftrifft, einem starken magnetischen Felde unterworfen wird. Die drei Typen entsprechen den drei möglichen Fällen der Magnetisierung, d. h. entweder verlaufen die Kraftlinien senkrecht

1) P. Zeeman und J. Geest, *Amst. Proc.* 7, 435, 1904.

2) W. Voigt und H. M. Hansen, *Phys. ZS.* 13, 217, 1912.

3) A. Cotton und H. Mouton, *Ann. Chim. Phys.* (8) 11, 145, 289, 1907.

4) P. Langevin, *C. R.* 151, 475, 1910.

zu der reflektierenden Oberfläche (polarer Fall) oder sie liegen in der Oberfläche und verlaufen parallel (meridionaler Fall) oder senkrecht (äquatorialer Fall) zu der Einfallsebene des Lichtes.

Die Erscheinungen sind im allgemeinen etwas kompliziert, insofern sie sich den optischen Effekten überlagern, die die Reflexion des Lichtes an der unmagnetisierten metallischen Oberfläche begleiten. Im einfachsten und bestbekanntesten Falle — polare Magnetisierung und senkrechte Inzidenz — besteht der Effekt praktisch nur in einer kleinen Drehung der Polarisationssebene. Für große Einfallswinkel dagegen und für die anderen Arten der Magnetisierung überwiegt eine begleitende Elliptizität, die in dem normalen polaren Falle sehr unbedeutend ist. Die experimentelle Seite ist von Kerr, Righi¹⁾, Dubois²⁾ und anderen erforscht worden (vgl. hierzu auch Voigt, a. a. O. S. 671).

Ein beachtenswerter Punkt in dieser Beziehung ist die Tatsache, daß die Heuslerschen magnetischen Legierungen keinen meßbaren Kerr-Effekt zeigen.

Theorie. Insofern die Reflexion des Lichtes ein Eindringen um einen gewissen Betrag in das Innere des Materials bedingt, muß jede Theorie der Kerr-Phänomene den vom Eindringen herrührenden Faraday-Effekt in sich schließen, ebensowohl als die allgemeinen Grenzbedingungen für den Übergang einer Schwingung von einem Körper zum anderen. Daß die erste Betrachtung allein ungenügend ist, erkennt man aus der Tatsache, daß in dem polaren Falle — senkrechte Inzidenz — der Kerr-Effekt gerade das umgekehrte Vorzeichen hat als die durch das Eindringen verursachte Faradaydrehung.

Voigt hat in Fortsetzung der gleichen Überlegung, die er zur Erklärung der magnetischen Drehung auf Grund des inversen Zeeman-Effektes anstellte, eine Theorie der Kerr-Phänomene vom Gesichtspunkt der modernen Elektronentheorie ausgearbeitet. Er wendet die allgemeinen Grenzbedingungen des Elektromagnetismus an, das die Kontinuität der elektrischen und magnetischen Feldkomponenten parallel zur Oberfläche ausdrückt; so kommt er unter Berücksichtigung des Energieprinzips zu einem gewissen komplexen Parameter des Metalls Q , von dem der Effekt allein abhängt. Diese

¹⁾ A. Righi, Ann. Chim. Phys. (6) 4, 435, 1885; 9, 65, 117, 1886.

²⁾ H. E. J. G. Dubois, Wied. Ann. 39, 25, 1890.

Konstante, die die Schwingungsperioden der freien und gebundenen Elektronen einschließt, und proportional zu dem inneren Felde oder der Magnetisierung ist, wurde auf Grund der Ergebnisse von Ingersoll¹⁾ für den äquatorialen Fall, von Snow²⁾ und von Voigt³⁾ berechnet. Letzterer schließt, daß für Stahl und Kobalt das magnetooptische Verhalten in dem Wellenlängengebiet um 2μ hauptsächlich durch die Leitungselektronen bedingt ist. Die Berechnung des inneren Feldes führt zu einem Werte von der Größenordnung 10^7 , und dies scheint den Schluß zu rechtfertigen, daß in den ferromagnetischen Metallen Moleküle oder Molekularkomplexe mit sehr starker magnetischer Polarität existieren, die durch dies äußere Feld eine Tendenz zum Parallelismus erhalten. Das auf dieser Basis von Weiss berechnete geschlossene innere Feld stimmt in der Größenordnung mit dem oben aus den magnetooptischen Betrachtungen abgeleiteten Wert überein.

¹⁾ L. R. Ingersoll, Phys. Rev. **35**, 312, 1912.

²⁾ C. Snow, Phys. Rev. (2) **2**, 29, 1913.

³⁾ W. Voigt, Phys. ZS. **16**, 299, 1915.

Namenverzeichnis.

- | | | |
|---|--|--|
| <p>Abraham 20, 43, 278,
280, 282, 290.
Abt 192, 209.
Adams 117.
Ampère 6—9, 19, 58,
65, 220, 239, 270, 289.
Arago 7.
Arvidson 291.
Avogadro 89, 102.</p> <p>Bachmetjew 248, 249.
Bacon 2.
Barnett, L. J. H. 274,
288, 289, 292.
Barnett, S. J. 270, 274,
288, 289.
Bates 286, 291, 292.
Bauer 223, 235.
Bavink 209.
Beck 145, 150, 182, 186,
191, 206—209, 212,
291, 292.
Becquerel 296, 297.
Beetz 134.
Bernoulli 95.
Bidwell 245, 248.
Biot 7.
Bloch 229.
Bohr 133, 221, 234—239,
240, 290, 297, 301,
302.
Boltzmann 47, 76, 93,
102, 125, 126, 136.</p> | <p>Borelius 252.
Brace 296.
Bragg 219.
Brant 232.
Brugman 7.
Bruins 225.
Burrows 250.</p> <p>Cabrera 221, 225, 227,
228, 230, 237.
Cantone 247, 254, 255.
Carnot 263.
Carrard 145.
Chattock 286, 291, 292.
Chaudier 181.
Cohn 263.
Corbino 295.
Cotton 304.
Coulomb 2, 3.
Curie 77, 78, 94, 118,
131, 132, 137, 150,
167, 199, 222, 228,
230—233.</p> <p>Debye 103, 302.
Drude, 122, 296.
Dubois 101, 305.
Dumas 145.</p> <p>Einstein 102, 274, 275,
287, 290, 291.
Elias 295.
Emerson 243.</p> | <p>Epstein 237, 238, 283.
Euler 41, 46.
Ewing 15—17, 135—136,
252.</p> <p>Faraday 5, 7—9, 251, 293,
294—297, 299, 305.
Feldhaus 2.
Föppl 20.
Foëx 151, 167.
Fourier 2.
Fresnel 295, 302.
Freudenreich 205.
Frivold 90, 99—100,
155—162, 212, 219.</p> <p>Gans 20, 42, 47, 55,
83—99, 103—107, 120,
162—167, 228, 263.
Gauß 21.
Geest 304.
Gehrcke 298.
Gerlach 237, 238, 283.
Gibbs 20.
Gilbert 1—2.
Green 6.
Guzman 225.</p> <p>Haas, W. J. de 273—275,
286, 287, 290, 291.
Haas-Lorentz, G. L. de
273.
Hackett 295.</p> |
|---|--|--|

- Hale 299.
Hall 249, 251, 295.
Hamilton 265, 266.
Hansen 303, 304.
Heisenberg 291.
Helmholtz 252, 253, 258,
261—263.
Hertz 262.
Heuse 101.
Heusler 233, 243, 289,
305.
Heydweiller 265.
Honda **81—83**, 87, 88,
91, 93, 98, 99, 101,
132, 136, **167—177**,
212—220, 230, 247,
248, **254—257**, 265.
Houstoun 265.
Hull 219.
Ingersoll 293, 295, 306.
Isnardi 88, 90.
Jacobi 45.
Jeans 126.
Joule **244—248**, 250, 251.
Kamerlingh Onnes 83,
95, 101, 119, 151,
228, 229.
Kaufmann 154.
Keesom **102—103**, 228.
Kelvin 5, 6, 203.
Kerr 251, 294, **304—306**.
Kirchhoff **253—256**, **261**
—**263**, 298.
Kolacek 263.
Kossel 228, 241.
Kundt 295.
Kunz 146, 149, 177, 190,
192, 209, 210, **233**
—**234**.
Lagrange 2, 265.
Landau 295.
Landé 286, 290.
Langevin 18, **49—55**, 58,
66—83, 95, 99, 102,
103, 113, 115, 118,
131, 133, **136—138**,
149, 155, 158—160,
165, 177, 180, 184,
219, 220, 222, 259,
281, 297, 304.
Langmuir 241.
Laplace 2.
Larmor 4, 5, 20, 181,
188, 259, 262—264,
267—269.
Legendre 2.
Leibniz 2.
Lenz 228.
Lewis 241.
Lippich 295.
Livens 22, 259, 262, 268,
269.
Lodge 295.
Lorentz 20, 122, 123,
132, 141, 151, 152,
163, 177, 178, 290,
293, 299, 302.
Loschmidt 55, 94, 97,
235.
Lummer 298.
Macaluso 295.
Maurain **153—154**, 248.
Maxwell 6, 11, **13—14**,
25, 36, 38, 57, 69,
124, 129, 133, 135,
136, 252, **258—262**,
266—269, 272—274.
Meyer, St. 154.
Meyer, U. 295.
Meyer, W. 154.
Michelson 298.
Moles 225.
Motteley 2.
Mouton 304.
Nagaoka 247, **254—257**,
265.
Nernst 100.
Newton 2.
Nishikawa 219.
Okubo 98—99, **167—177**,
212.
Oosterhuis 95, **101—103**,
115, 120, 151.
Overbeck 91.
Owen 89, 101, 132.
Oxley **99**, 151, 155, **177**
—**182**, 188.
Ørsted 6.
Parson 239—243.
Pascal 223, 224, 243.
Pauer 297.
Pauli **236—238**, 283.
Perrier 83, 95, 101, 151.
Perry 274.
Picard 145, 222, 235.
Planck 56, 102, 105,
108, 109, 112, 113,
115, 116, 234.
Plücker 5.
Poincaré 101, 116, 117,
120.
Poisson 2, 8, 134.
Poynting 250, 251.
Preston 299.
Quimby 1, 258.
Quincke 188.
Quittner 177, 191, **203**
—**205**, 218.
Reiche **117—118**, 120.
Resning 265.
Richardson 285, 286,
291, 297.
Righi 296, 305.
Ritz 220, 299, 301.
Rotszajn 119, 120.
Rowland 15.
Runge 299.
Rutherford 150.
Sano 253, 263.
Scheel 101.
Schrödinger **122—132**.
Schuster 274.

Seebeck 6.	Thomson, W. s. n. Kelvin.	219, 221—225 , 227
Shimizu 248.	Tolman 278, 284.	—233, 235, 237, 238,
Siertsema 297.	Tyndall 5, 13.	240, 301, 306.
Smith 209.		Westmahn 209.
Snow 306.	Verdet 295.	Weyssenhoff 107—115 ,
Sommerfeld 238 , 283, 286,	Villari 244, 247, 281.	117, 120.
297, 302.	Voigt 57—64 , 217, 278,	Wiedemann 135, 223,
Springsteen 295.	280, 282, 293, 297,	225, 232, 244, 245 ,
Stark 302.	301, 304—306 .	247, 251, 256, 296.
Stern 102.		Williams, E. H. 228.
Stewart 286, 291.	Wallerant 217.	Williams, S. R. 244, 245,
Streng 192.	Warburg 249.	249, 251.
	Weber 9—14 , 19, 134,	Wills 18, 164.
	135, 220, 270, 280,	Wilson 122.
	281.	Wood 295.
Tait 126.	Weiss 74, 97—99, 136	
Takagi 230.	— 149 , 150—152, 155,	Zeeman 251, 279, 293,
Terry 99, 134, 167, 230.	162, 163, 167, 177,	295, 298—302 .
Theodorides 225, 232.	182, 186, 187, 190	Ziegler 190—199.
Thomson, J. J. 57, 64	— 203 , 206, 212, 218,	
— 65 , 247, 250, 251,		
265—267 , 301.		

Berichtigungen während des Druckes.

- S. 199, 7. Zeile von oben: statt $J_y + J_m$ soll es heißen $J_y = J_m$.
- S. 203, Fig. 35, Unterschrift: statt 3) $H = 94,4$ Gauß soll es heißen 3) $H = 94,5$ Gauß.
- S. 203, 8. Zeile von oben: statt 190 soll es heißen 180.
- S. 204, 18. Zeile von unten: statt „das“ Magnetit soll es heißen „der“ Magnetit.