

PHYSIK DER STERNATMOSPHEREN

MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER SONNE

VON

DR. A. UNSÖLD

PROFESSOR FÜR THEORETISCHE PHYSIK
AN DER UNIVERSITÄT KIEL

MIT 145 FIGUREN IM TEXT



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1938

ISBN 978-3-642-50445-7 ISBN 978-3-642-50754-0 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-50754-0

ALLE RECHTE, INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG
IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.
COPYRIGHT 1938 BY JULIUS SPRINGER IN BERLIN.
SOFTCOVER REPRINT OF THE HARDCOVER 1ST EDITION 1938

Vorwort.

Die Astrophysik ist in den letzten zwei Jahrzehnten zu einer quantitativen Wissenschaft geworden. Dieses Buch möchte eine Einführung in die neue Forschungsrichtung geben.

Im Laufe der letzten Jahre ist es dem angehenden Astrophysiker immer schwerer geworden, zwischen der Unmenge alter und neuer Arbeiten durchzufinden, die einander vielfach widersprechen und nur zu oft kaum ein Ziel erkennen lassen. Es scheint mir daher ein Bedürfnis zu bestehen nach einer Darstellung, die weniger die vorhandene Literatur referiert, als vielmehr das Brauchbare in vereinfachter Form und unter einheitlichen Gesichtspunkten darstellt und Unbrauchbares rigoros beiseite läßt. (Dabei soll nicht verkannt werden, daß auch unrichtige Arbeiten der Forschung oft wertvolle Anregung geben).

Weiterhin ist es gerade in der Astrophysik besonders nötig, den Zusammenhang von Beobachtung und Theorie enger zu gestalten, als dies gewöhnlich der Fall ist. Astrophysikalische Theorien, welche die Verbindung mit der Wirklichkeit verloren haben, sind nichts als ungeeignete Übungsaufgaben zur theoretischen Physik, mit denen man die Zeitschriften besser nicht belasten sollte. Wir werden sämtliche theoretischen Ansätze soweit durchführen, daß sie der Praktiker anwenden und prüfen kann. Daneben wollen wir das vorliegende Beobachtungsmaterial, soweit es für uns von Bedeutung ist, in gesichteter Form zusammenstellen, ohne jedoch mehr als nötig auf technische Einzelheiten einzugehen.

Die größte Schwierigkeit einer Einführung in die neuere Astrophysik liegt in der Abgrenzung gegen die „terrestrische“ Physik. Im Rahmen eines Astrophysikbuches eine vollständige Darlegung der nötigen Grundlagen zu geben, ist gar nicht möglich — wir wollen ja nicht erst ein weiteres Handbuch der Physik schreiben —. Dagegen sollen einige für den Astrophysiker besonders wichtige Zweige der Theorie, die an Hand der physikalischen Literatur nur mit einigen Schwierigkeiten zu erlernen sind, gleich in geeignet vorbereiteter Form und ohne irgendwelchen Anspruch auf Vollständigkeit dargestellt werden, um den Zugang zu unserem Forschungsgebiet zu erleichtern.

Die entscheidenden Fortschritte in der Astrophysik — daran soll auch hier nochmals erinnert werden — sind fast immer entstanden durch Anwendung neuer physikalischer Ideen auf kosmische Probleme. Ich erinnere an FRAUNHOFER und KIRCHHOFF, die selbst ihre neuen physikalischen Erkenntnisse auf Sonne und Sterne anwandten, an SAHA, der ausgehend vom NERNSTschen Wärmesatz und BOHRs Atommodell die Theorie der thermischen Ionisation und Anregung auf die Sternatmosphären anwandte, und nicht zuletzt an SCHWARZSCHILD und EDDINGTON, die in engstem Anschluß an den enormen

Aufschwung der theoretischen Physik jener Jahre für die Astrophysik dasselbe leisteten, wie MAXWELL für die Elektrodynamik: Aus einem Gewirr einzelner Ansätze und Hypothesen entstanden die Grundmauern eines wohlgeordneten mathematischen Gebäudes, dessen Ausbau freilich die zielbewußte Mitarbeit der Beobachter und Theoretiker noch auf Jahre in Anspruch nehmen wird.

Mein Dank gebührt vor allem Herrn Dr. W. LOCHTE-HOLTGREVEN, der das ganze Manuskript einer kritischen Durchsicht unterzogen und mich in sachlichen wie in Darstellungsfragen ständig beraten hat. Meiner *lb. Frau* danke ich für ihre unermüdliche Mithilfe an der Schreibmaschine, durch die sie wesentlich zur zeitigen Fertigstellung des Buches beitrug. Schließlich möchte ich Herrn Dr. G. BURKHARDT für seine frdl. Hilfe beim Lesen der Korrekturen herzlichst danken.

Kiel, im Dezember 1937.

A. UNSÖLD.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil.

Die Sternatmosphäre im thermischen Gleichgewicht.

	Seite
I. Kapitel: Strahlungstheorie	1
1. Das Strahlungsfeld; Grundbegriffe und Definitionen	1
2. Emission und Absorption der Strahlung	3
3. Strahlung im thermischen Gleichgewicht. Hohlraumstrahlung. KIRCHHOFFScher Satz	4
4. Das STEFAN-BOLTZMANNsche Gesetz	7
5. Spektrale Energieverteilung der Hohlraumstrahlung. WIENSches Verschiebungsgesetz. Entropie eines nahezu monochromatischen Strahlenbündels	9
6. Energieverteilung im Spektrum der Hohlraumstrahlung. Klassische Theorie; RAYLEIGH-JEANSsche Strahlungsformel	11
7. Quantentheorie. PLANCKsches Strahlungsgesetz (1900)	14
8. Herstellung der Hohlraumstrahlung. Messung der Strahlungskonstanten σ und c_2	19
II. Kapitel: Anwendung des PLANCKschen Gesetzes auf die Strahlung der Sonne. Strahlungsmessungen	21
9. Grundprinzipien. Absorption in der Erdatmosphäre	21
10. Messung der Gesamtstrahlung der Sonne	24
11. Messung der Energieverteilung im Spektrum der gesamten Sonnenscheibe und der Mitte der Sonnenscheibe	27
12. Reduktion der Messungen von ABBOT und WILSING. Solarkonstante und effektive Sonnentemperatur. Energieverteilung im Spektrum des Strahlungsstromes πF_λ in absolutem Maß	30
13. Mitte-Rand-Kontrast $I_\lambda(\vartheta)/I_\lambda(0)$. Strahlungsintensität und -Strom $I_\lambda(0)/F_\lambda$	33
14. Verzerrung des „wahren“ kontinuierlichen Sonnenspektrums durch die FRAUNHOFER-Linien. Intensitätsverteilung im „wahren“ kontinuierlichen Spektrum; F_λ und $I_\lambda(0)$ in $\text{erg/cm}^2 \cdot \text{sek}$. Vergleich mit dem schwarzen Körper von $T_e = 5713^\circ \text{K}$	37
15. Kritische Bemerkungen über die Methodik der Sonnenstrahlungsmessungen	39
III. Kapitel: Die Strahlung der Sterne	40
16. Einführung in die Klassifikation der Sternspektren	40
17. Messung der Energieverteilung in den kontinuierlichen Spektren der Sterne. Farbtemperaturen. Abweichungen vom PLANCKschen Strahlungsgesetz	46
18. Visuelle, photographische und bolometrische Helligkeit der Sterne. Farbenindizes. Absolute Helligkeit	52
19. Sterndurchmesser. RUSSELL-HERTZSPRUNG-Diagramm. Riesen- und Zwergsterne. Vorläufiges über spektroskopische Parallaxen	55
20. Die Massen der Sterne. EDDINGTONs Masse-Leuchtkraft-Beziehung. Schwerebeschleunigung an den Sternoberflächen	59
IV. Kapitel: Thermische Ionisation und Anregung	62
21. Anregung und Ionisation der Atome bei thermischem Gleichgewicht. BOLTZMANNsche und SAHASche Formel	62
22. Zahlenmäßige Auswertung der SAHASchen Formel. Ionisations- und Anregungsspannungen. Statistische Gewichte	66
23. Experimentelle Prüfung der SAHASchen Formel. Anwendung auf Sternatmosphären nach SAHA, FOWLER und MILNE	74
24. Ionisation von Gemischen mehrerer Elemente. Verhältnis von Elektronendruck P_e zu Gasdruck P_g . Effektives Molekulargewicht	81
25. Kinetische Deutung der SAHASchen Formel. Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht	84

Zweiter Teil.

Kontinuierliches Spektrum und Aufbau einer Sternatmosphäre.

V. Kapitel: Strahlungsgleichgewicht und kontinuierliches Spektrum der Sternatmosphären	88
26. Strömungs- und Kontinuitätsgleichung der Strahlung	88
27. Anwendung der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes auf die Gesamtstrahlung. Randverdunkelung der Sonne. Einführung des Temperaturbegriffes	90
28. Zusammenhang von Strahlungsintensität $I(\tau, \theta)$, Strahlungsstrom $\pi F(\tau)$ und Ergiebigkeit $J(\tau)$	93
29. Weitere Näherungsmethoden zur Lösung der Differentialgleichung des Strahlungsgleichgewichtes	96
30. Die SCHWARZSCHILD-MILNESCHE Integralgleichung des Strahlungsgleichgewichtes. Untersuchungen von E. HOPF über deren strenge Lösung. Zweite Näherung	98
31. Mitte-Rand-Kontrast in Abhängigkeit von λ . Energieverteilung im kontinuierlichen Sonnenspektrum. Wellenlängenabhängigkeit des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten in der Sonnenatmosphäre	104
32. Einfluß der Absorptionslinien auf das kontinuierliche Sonnenspektrum	109
VI. Kapitel: Kontinuierlicher Absorptionskoeffizient und Energieverteilung in den kontinuierlichen Spektren der Sterne	113
33. Der ROSSELANDSche Mittelwert κ (Opazitätskoeffizient) des Absorptionskoeffizienten κ_ν	113
34. Theorie des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten. Streuung an freien Elektronen	116
35. Genauere Berechnungen des Absorptionskoeffizienten für einzelne Kanten. Experimentelle Prüfungen der Theorie	128
36. Energieverteilung in den kontinuierlichen Sternspektren. Intensitätssprung an der Grenze der Balmerreihe λ 3647. Abweichungen vom schwarzen Körper. Farbtemperatur und effektive Temperatur der Sterne	131
37. Historische und kritische Bemerkungen zur Theorie des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten und der kontinuierlichen Sternspektren. Literatur	138
VII. Kapitel: Der Aufbau der Sternatmosphären	141
38. Gasdruck und Strahlungsdruck	141
39. Genaue Berechnung der Druck- und Temperaturschichtung einiger Sternatmosphären	144

Dritter Teil.

Physikalische Grundlagen der Theorie der FRAUNHOFER-Linien.

VIII. Kapitel: Physikalische Grundlagen der Theorie der FRAUNHOFER-Linien. 1. Teil: Klassische Theorie	148
40. Elektronentheorie (H. A. LORENTZ). Absorption, Emission und Dispersion des harmonischen Oszillators. Gesamtabsorption	148
41. Strahlungsdämpfung und Stoßdämpfung	151
42. Lichtstreuung an freien und gebundenen Elektronen. THOMSON-Streuung bzw. RAYLEIGH- und Resonanzstreuung	154
43. Dopplereffekt	157
44. Dopplereffekt und Dämpfung	159
IX. Kapitel: Physikalische Grundlagen der Theorie der FRAUNHOFER-Linien. 2. Teil: Quantentheorie	169
45. Die Übergangswahrscheinlichkeiten A_{nm} , B_{mn} und B_{nm} (EINSTEIN). Mittlere Lebensdauer angeregter Zustände. Oszillatorenstärken	169
46. Quantentheorie der Strahlungsdämpfung	174
47. Quantentheorie der Stoßdämpfung und Druckverbreiterung	179
48. Quantenmechanische Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten und Oszillatorenstärken	184
49. Der f -Summensatz von KUHN, THOMAS und REICHE; seine Verallgemeinerungen und seine Gültigkeitsgrenzen	190
50. Übergangswahrscheinlichkeiten von Multiplett Komponenten. BURGER-DORGELOSche Summenregel	193

	Seite
X. Kapitel: Physikalische Grundlagen der Theorie der FRAUNHOFER-Linien. 3. Teil: Experimentelle Prüfung der Theorie und Messung von Übergangswahrscheinlichkeiten usw.	196
51. Messung von Oszillatorenstärken mit Hilfe der Dispersion in der Nähe der Linien	196
52. Bestimmung der Oszillatorenstärke f aus der Absorption optisch dünner Schichten	197
53. Messung von $f \cdot \gamma$ mit Hilfe der Absorption „dicker“ Schichten. Berechnung von f und γ . Prüfung der Quantentheorie der Strahlungsdämpfung. Messung der Gesamtabsorption	197
54. Intensitätsmessungen an Emissionslinien. Selbstumkehr.	200
55. Direkte Messung der Lebensdauer angeregter Zustände. Abklingleuchten. Resonanzfluoreszenz	202
56. Ergebnisse einiger experimenteller Untersuchungen über Stoßdämpfung und Druckverbreiterung	203
57. Zusammenstellung astrophysikalisch wichtiger Bestimmungen von Oszillatorenstärken usw. Möglichkeiten zur Messung von Übergangswahrscheinlichkeiten für Quantensprünge zwischen angeregten Atomzuständen	204
Vierter Teil.	
Messung und Deutung der Intensitätsverteilung in den FRAUNHOFER-Linien.	
XI. Kapitel: Messung der Konturen und Gesamtabsorptionen von FRAUNHOFER-Linien	208
58. Der Spektrograph: Trennungsvermögen; Entzerrungsfragen; Gittergeister; Streulicht	208
59. Die photographische Platte	217
60. Standardisierung der Platten. Schwärzungskurve.	218
61. Mikrophotometer. Reduktion der Photometerkurven	221
62. Messung der Gesamtabsorption. Abgekürzte Methoden zur Messung schwacher Linien. Schätzungsskalen	223
XII. Kapitel: Strahlungsgleichgewicht und FRAUNHOFER-Linien	226
63. Die SCHWARZSCHILDsche Differentialgleichung des Strahlungsgleichgewichtes. Strahlungsintensität und Strahlungsstrom	226
64. Das SCHUSTER-SCHWARZSCHILD-Modell einer Sternatmosphäre für reine Streuung und reine Absorption.	230
65. Das MILNE-EDDINGTON-Modell einer Sternatmosphäre. (Kombination von Streuung und Absorption.)	238
66. Vergleich von SCHUSTER-SCHWARZSCHILD- und MILNE-EDDINGTON-Modell. Allgemeinere Ansätze von EDDINGTON, TEN BRUGGENCATE und PANNEKOEK	246
67. Die SCHWARZSCHILDsche Integralgleichung des Strahlungsgleichgewichtes. Berechnung der Intensität der Linienflügel für eine beliebig geschichtete Atmosphäre	250
68. Berechnung von Linienstärken. „Anzahl der Atome über 1 cm^2 der Photosphäre“. Wirksame Tiefe τ_0 der Atmosphäre	259
XIII. Kapitel: Die Deutung der FRAUNHOFER-Linien. Beobachtung und Theorie	264
69. Die „Wachstumskurve“. Berechnung der Gesamtabsorption von FRAUNHOFER-Linien mit Dopplereffekt und Dämpfung	264
70. Dopplereffekt und „Turbulenz“ (O. STRUVE)	269
71. Strahlungs- und Stoßdämpfung	273
72. Druckverbreiterung der Wasserstofflinien. Zwischenmolekularer Stark-effekt	286
73. Druckeffekte und verbotene Linien im Heliumspektrum	298
74. Die Intensität in der Mitte der FRAUNHOFER-Linien. (Restintensität)	301
75. Verkettung mehrerer Linien (Interlocking)	310
76. Gegenseitige Störung zweier Linien („Blends“)	312
XIV. Kapitel: Beeinflussung der Linienkonturen durch Rotation und Expansion der Sterne	316
77. Berechnung der Linienkonturen rotierender Sterne	316
78. Spektroskopische Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeit $v \cdot \sin i$ von Sternen	320

	Seite
79. Beobachtung von Rotationseffekten bei spektroskopischen Doppelsternen und Bedeckungsveränderlichen	322
80. Beobachtung der Rotation einzelner Sterne	324
81. Radiale Bewegung von Atmosphären, deren Höhe klein ist im Vergleich zum Radius des Sternes	326
82. Rotation und Expansion ausgedehnter durchsichtiger Nebelhüllen	327

Fünfter Teil.

**Probleme und Anwendungen der quantitativen Theorie
der Sternspektren.**

XV. Kapitel: Anwendung der Theorie der FRAUNHOFER-Linien	331
83. Überblick über die Probleme der Spektralklassifikation und der spektroskopischen Parallaxenbestimmung	331
84. Ansätze zur Verbesserung und Erweiterung des zweidimensionalen Klassifikationsschemas	332
85. Übergang vom Sp, M -System zum T_e, g -System. Die Skala der Stern-temperaturen	336
86. Beobachtung und Theorie: Diskussion spezieller Linien	339
87. Empirische Bestimmung von T, P_e und \overline{NH} als Funktion von Spektraltyp und absoluter Helligkeit	343
88. Quantitative Analyse der Sonnenatmosphäre	344
XVI. Kapitel: Die Struktur der äußeren Schichten der Sonne	350
89. Übersicht über die beobachteten Erscheinungen. Der Zyklus der Sonnenaktivität	350
90. Die Sonnenflecke	360
91. Die Sonnenfackeln	374
92. Die Granulation	376
93. Theorie der Konvektion in Sternatmosphären. 1. Teil: Die Wasserstoffzone als Ursache der Granulation	379
94. Konvektion in Sternatmosphären. 2. Teil: Die Sonnenflecke und der $2 \times 11,5$ jährige Zyklus	386
XVII. Kapitel: Der Sonnenrand. Protuberanzen, Chromosphäre und Korona. Spektroheliogramme.	390
95. Finsternisbeobachtungen	390
96. Der Helligkeitsabfall am äußersten Sonnenrand	394
97. Protuberanzen	396
98. Chromosphäre	426
99. Die Sonnenkorona.	439
100. Interpretation von Spektroheliogrammen	454
Anhang A. Klassifikation der Linienspektren.	465
Anhang B. Über die Integraleponentialfunktionen	467
Literaturverzeichnis	469
Namen- und Sachverzeichnis.	490

Die Sternatmosphäre im thermischen Gleichgewicht.

Strahlungstheorie¹.

1. Das Strahlungsfeld; Grundbegriffe und Definitionen.

Wir legen in das betrachtete Strahlungsfeld (z. B. einer Sternatmosphäre oder eines Hohlraumes) ein Flächenelement $d\sigma$ mit der Normale n und fassen (Fig. 1) die pro Zeiteinheit durch $d\sigma$ unter dem Winkel ϑ zu n in einem Raumwinkelbereich $d\omega$ (charakterisiert durch die Richtungswinkel ϑ und φ) verlaufende Strahlung ins Auge. Aus dieser greifen wir den Frequenzbereich ν bis $\nu + d\nu$ durch spektrale Zerlegung heraus und schreiben

$$dE_\nu(\vartheta, \varphi) = I_\nu(\vartheta, \varphi) d\nu \cdot \cos\vartheta d\sigma \cdot d\omega \quad (1,1)$$

($d\sigma \cdot \cos\vartheta$ ist der Querschnitt unseres Strahlungsbündels). Als *Strahlungsintensität* $I_\nu(\vartheta, \varphi)$ bezeichnen wir dementsprechend diejenige Energiemenge, welche pro Raumwinkel 1 und Frequenzbereich 1 in der Sekunde durch eine senkrecht zur Richtung ϑ, φ des Strahlenbündels stehende Einheitsfläche strömt. Hat man es mit *polarisierter Strahlung* zu tun, so wird man zwei aufeinander senkrecht stehende Schwingungsrichtungen herausgreifen und die entsprechenden Intensitäten mit $I'_\nu(\vartheta, \varphi)$ und $I''_\nu(\vartheta, \varphi)$ bezeichnen. Es ist dann $I_\nu = I'_\nu + I''_\nu$. Für unpolarisiertes, sog. „natürliches“ Licht ist $I'_\nu = I''_\nu = \frac{1}{2} I_\nu$.

Die *Intensität der Gesamtstrahlung* I erhält man durch Integration über alle Frequenzen

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu. \quad (1,2)$$

Um die Anwendung dieser Begriffe zu erläutern, berechnen wir die *von einem Flächenelement $d\sigma$ einem zweiten $d\sigma'$ pro sek zugestrahle Energie dE* (die Normalen von $d\sigma$ bzw. $d\sigma'$ schließen mit ihrer Verbindungslinie r die Winkel ϑ bzw. ϑ' ein; vgl. Fig. 2): $d\sigma'$ bildet von $d\sigma$ aus gesehen den Raumwinkel

$$d\omega = \frac{\cos\vartheta' \cdot d\sigma'}{r^2}. \quad (1,3)$$

¹ Literaturangaben sind am Ende des Buches zusammengestellt. Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf dieses Literaturverzeichnis. Die 1. Ziffer entspricht der Nummer des Kapitels. [108] heißt z. B. M. PLANCK: Wärmestrahlung. Die Formeln sind in jedem Abschnitt durchnummeriert. (4,3) heißt Formel 3 in Abschnitt 4.

² Die Argumente ϑ und φ werden wir im folgenden nur noch anschreiben, wenn dies besondere Gründe hat.

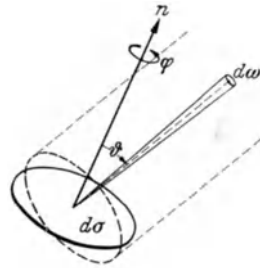


Fig. 1. Definition der Strahlungsintensität $I_\nu(\vartheta, \varphi)$.

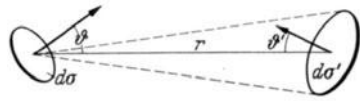


Fig. 2. Zustrahlung zweier Flächenelemente.

Nach (1,1) ist also

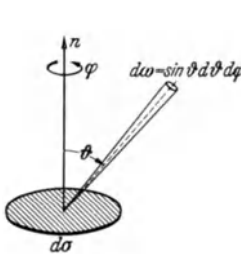
$$dE = I \frac{\cos \vartheta d\sigma \cdot \cos \vartheta' d\sigma'}{r^2}. \quad (1,4)$$

(Man beachte die Symmetrie dieses Ausdruckes!)

Die gesamte, pro sek durch ein Flächenelement $d\sigma$ hindurchtretende ν -Strahlung ist ($d\omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$, vgl. Fig. 3)

$$\pi F_\nu \cdot d\sigma = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} I_\nu \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \cdot d\sigma. \quad (1,5)$$

Dabei gibt also (in Fig. 3) die nach oben strömende Strahlung einen positiven, die nach unten strömende einen negativen Beitrag. Im *isotropen* Strahlungsfeld (Hohlraumstrahlung!) verschwindet der ganze Ausdruck. πF_ν bezeichnen wir als den *Strahlungsstrom* in der Richtung n . Gelegentlich ist es zweckmäßig, ihn in Aus- und Einstrahlung zu zerlegen:



$$\left. \begin{aligned} \pi F_\nu^+ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I_\nu \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ \pi F_\nu^- &= - \int_{\pi/2}^\pi \int_0^{2\pi} I_\nu \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \end{aligned} \right\} F_\nu = F_\nu^+ - F_\nu^-. \quad (1,6)$$

Man erkennt sofort auch die anschauliche Bedeutung von F_ν^+ . Man kann nämlich schreiben

$$F_\nu^+ = \frac{\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I_\nu \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}. \quad (1,7)$$

F_ν^+ ist der Mittelwert der Intensität \bar{I}_ν für die nach „oben“ gehende Strahlung. Wir formulieren diesen Satz noch in einer für unsere späteren Anwendungen auf Sterne geeigneten Form: Die Intensität der aus einer Sternatmosphäre austretenden ν -Strahlung hängt — sofern der Stern nicht rasch rotiert oder dgl. — nur vom Austrittswinkel ϑ ab (gerechnet von der Normale der betreffenden Stelle aus), d. h.

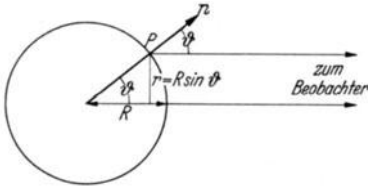


Fig. 4. Strahlungsstrom eines Sternes.

$$I_\nu = I_\nu(\vartheta).$$

Derselbe Winkel ϑ tritt nach Fig. 4 nochmals auf zwischen der Verbindungslinie Beobachter — Sternmittelpunkt M einerseits und Mittelpunkt M — beobachteter Punkt P andererseits. Die Entfernung des Punktes P von M in

der Projektion auf eine Ebene senkrecht zur Beobachtungsrichtung ist gleich $\sin \vartheta$ in Einheiten des Sternradius. Die mittlere Intensität \bar{I}_ν der von der scheinbaren Stern- (bzw. Sonnen-) Scheibe auf den Beobachter zu emittierten Strahlung ist nun nach (1,1) gegeben durch:

$$\pi R^2 \cdot \bar{I}_\nu = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} I_\nu(\vartheta) \cdot \cos \vartheta \cdot R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (1,8)$$

($R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ ist das Flächenelement auf der Kugel). Der Vergleich mit (1,6) zeigt, daß

$$I_\nu = F_\nu^+. \quad (1,9)$$

d. h. wenn wir die scheinbare Sternscheibe als ganzes betrachten (einzelne Teile können wir ja nur bei der Sonne unterscheiden), so ist die mittlere Strahlungsintensität gleich $1/\pi$ mal dem Strahlungsstrom πF_ν^+ . Die Theorie der Stern-

spektralen z. B. muß also auf die Berechnung des *Strahlungsstromes* abzielen. Die große Bedeutung der Sonnenbeobachtung liegt andererseits, — wie SCHWARZSCHILD zuerst klargestellt hat — darin, daß wir dort I_ν als Funktion von ϑ direkt messen können.

Durch Integration über alle Frequenzen erhalten wir analog zu (1,2) den *Strom der Gesamtstrahlung*:

$$\pi F = \int_0^\infty \pi F_\nu \, d\nu. \quad (1,10)$$

Anstatt die unter bestimmten Bedingungen durch ein Flächenelement strömende Energie ins Auge zu fassen, können wir ein Strahlungsfeld auch beschreiben durch Angabe der in 1 cm^3 *enthaltenen* Strahlungsenergie. Wir definieren (wieder bezogen auf Frequenzbereich 1):

Strahlungsdichte $u_\nu =$ Strahlungsenergie/ cm^3 . Der Zusammenhang von u_ν mit $I_\nu(\vartheta, \varphi)$ ergibt sich durch Betrachtung (Fig. 5) der in ein kleines Volumen V (das vorerst leer sein soll) von seiner Begrenzung her emittierten Strahlung: $d\sigma$ emittiert unter dem Austrittswinkel ϑ in das Raumwinkelement $d\omega$ pro sek die Energiemenge $I_\nu(\vartheta, \varphi) d\sigma \cdot \cos \vartheta \cdot d\omega$. Die emittierte Strahlung hält sich in V jeweils während der Zeit s/c ($s =$ durchlaufener Weg, s. Fig. 5; $c =$ Lichtgeschwindigkeit) auf. Die in V befindliche Energiemenge ist also

$$V \cdot u_\nu = \int_{\omega} \int_{\sigma} I_\nu(\vartheta, \varphi) \cdot d\sigma \cdot \cos \vartheta \cdot d\omega \cdot s/c. \quad (1,11)$$

Nun ist aber $d\sigma \cdot \cos \vartheta \cdot s = dV$ und somit

$$u_\nu = \frac{1}{c} \int_{\omega} I_\nu \, d\omega. \quad (1,12)$$

Im Spezialfall des isotropen Strahlungsfeldes gilt

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} \cdot I_\nu. \quad (1,13)$$

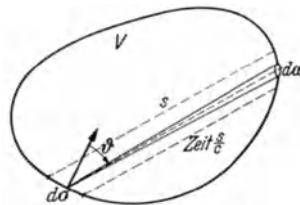


Fig. 5. Berechnung der Strahlungsdichte u_ν .

Die *Dichte der Gesamtstrahlung* definieren wir entsprechend (1,2) durch

$$u = \int_0^\infty u_\nu \, d\nu. \quad (1,14)$$

Die Verallgemeinerung für den materieerfüllten Raum (Brechungsindex) werden wir später angeben.

Als Abschluß dieser Zusammenstellung der Grundlagen der Strahlungstheorie wollen wir noch fragen, wie die Intensität, Strahlungsdichte usw. sich ändern, wenn wir sie auf die Wellenlängen-, statt wie bisher auf die Frequenzskala, beziehen. Offenbar muß gelten:

$$\text{und wegen } \nu \cdot \lambda = c \quad I_\nu \, d\nu = -I_\lambda \, d\lambda \quad (1,15)$$

$$I_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} I_\nu \quad \text{und entsprechend} \quad u_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} u_\nu. \quad (1,16)$$

Gelegentlich kann es zweckmäßig sein, statt einer ν oder λ -Skala direkt die Längenskala in der Brennebene des Spektrographen zu benutzen. Die Art der Umrechnung dürfte nach dem Vorhergehenden klar sein.

2. Emission und Absorption der Strahlung.

Ein Volumenelement dV emittiert pro sek in das Raumwinkelement $d\omega$ innerhalb des Frequenzbereiches $d\nu$ die Energiemenge

$$\varepsilon_\nu \cdot d\nu \cdot dV \cdot d\omega. \quad (2,1)$$

Der *Emissionskoeffizient* ε_ν hängt im allgemeinen von der Frequenz ν , von Art und Zustand der Materie, eventuell auch von der Richtung ab.

Die gesamte Ausstrahlung des Volumelementes dV pro sek ist:

$$dV \cdot \int_0^\infty \int_\omega \varepsilon_\nu d\nu d\omega, \quad (2,2)$$

im Falle isotroper Ausstrahlung

$$dV \cdot 4\pi \int_0^\infty \varepsilon_\nu d\nu. \quad (2,3)$$

Als Gegenstück zur Emission betrachten wir nunmehr den Intensitätsverlust durch *Absorption*, welchen ein enges Strahlenbündel der Intensität I_ν erfährt, wenn es eine materielle Schicht der Dicke ds durchsetzt. Es ist

$$dI_\nu/ds = -\kappa_\nu \cdot I_\nu. \quad (2,4)$$

κ_ν (abhängig von ν , eventuell auch von s und der Richtung von ds) bezeichnen wir als den *Absorptionskoeffizienten*. Rechnen wir ihn statt pro cm pro g, so erhalten wir den *Massenabsorptionskoeffizienten* $\kappa_{\nu, M}$ und schreiben (2,4) in der Form (ρ = Dichte)

$$dI_\nu/ds = -\kappa_{\nu, M} \cdot \rho \cdot I_\nu. \quad (2,5)$$

Durchsetzt das Strahlenbündel eine selbst nicht emittierende Schicht endlicher Dicke, so ist nach (2,4) die Intensität I_ν nach dem Durchgang mit der Intensität $I_{\nu, 0}$ der einfallenden Strahlung verknüpft durch

$$I_\nu = I_{\nu, 0} e^{-\int \kappa_\nu ds}. \quad (2,6)$$

Die dimensionslose Größe $\tau_\nu = \int \kappa_\nu ds$ nennt man die *optische Dicke* der Schicht. Eine Schicht der optischen Dicke $\tau_\nu = 1$ schwächt z. B. einen Strahl auf $1/e = 36,8\%$ seiner ursprünglichen Intensität. Weiterhin sieht man, daß wir nur von *den* Schichten einer Sternatmosphäre direkte Kunde erhalten können, deren τ_ν nicht ≥ 1 ist. An Hand der vorhergehenden Formeln erkennt man ferner, daß für die Gesamtstrahlungsintensität $I = \int I_\nu d\nu$ im allgemeinen (d. h. wenn κ_ν von ν abhängt) kein einfaches Absorptionsgesetz gilt; der mittlere Absorptionskoeffizient hängt vielmehr von der spektralen Intensitätsverteilung der Strahlung ab. Selbst wenn κ_ν von s unabhängig ist, wird also bei endlicher Schichtdicke der *mittlere* Absorptionskoeffizient wegen der fortschreitenden „Farbänderung“ der Strahlung mit s variieren.

3. Strahlung im thermischen Gleichgewicht. Hohlraumstrahlung. KIRCHHOFFScher Satz.

Wir können hoffen, auf besonders einfache Verhältnisse zu treffen, wenn wir zunächst ein Strahlungsfeld betrachten, das mit seiner Umgebung im *Temperaturgleichgewicht* steht. Alle Körper haben dann dieselbe Temperatur T , die Entropie des Systems ist ein Maximum. Dieser Zustand kann realisiert werden, indem man das System in eine wärmeundurchlässige Hülle einschließt und hinreichend lange Zeit sich selbst überläßt. Man spricht dementsprechend von der *Hohlraumstrahlung der Temperatur T* (die Temperatur der Strahlung wird dabei nach demselben Grundsatz festgelegt, wie die irgendwelcher materieller Körper: bei Temperaturgleichheit soll kein Energietransport stattfinden.)

Da der Energieaustausch durch Strahlung von dem durch andere Agentien (Leitung, Strömung usw.) sicher unabhängig ist, so müssen wir fordern, daß im Zustand thermischen Gleichgewichtes die Ein- und Ausstrahlung einander stets kompensieren.

Wir zeigen nun zunächst, daß die Intensität I_ν der Hohlraumstrahlung unabhängig ist von der Beschaffenheit des Hohlraumes (vorerst nehmen wir jedoch an, daß der Brechungsindex überall = 1 ist): Wäre z. B. in dem Hohlraum H_2 (Fig. 6) die Intensität der ν -Strahlung größer als in H_1 , so könnten wir die beiden Hohlräume durch eine kleine Öffnung mit einem Farbfilter verbinden, das nur diese Frequenz durchläßt, und könnten den Energiestrom von H_2 nach H_1 zum Antrieb eines Perpetuum mobile II. Art verwenden. In ähnlicher Weise erkennt man leicht, daß die Hohlraumstrahlung homogen (Einbringen weiterer Körper), isotrop (Verbindungskanäle verschiedener Richtungen zwischen H_1 und H_2) und unpolarisiert (Nikol statt Farbfilter in Fig. 6) ist. Es gilt also der wichtige Satz, daß die Intensität und Dichte der Hohlraumstrahlung nur von ν und T abhängen.

$$I_\nu = I_\nu(\nu, T) \quad \text{und} \quad u_\nu = u_\nu(\nu, T). \quad (3,1)$$

Die Dichte u und Intensität I der Gesamtstrahlung hängen nur von T allein ab.

Wir betrachten nun die Emission und Absorption eines Volumelementes der Grundfläche $d\sigma$ und Höhe ds bezüglich der ν -Strahlung innerhalb des Raumwinkelementes $d\omega \perp d\sigma$ (Fig. 7). Es ist nach (2,4) bzw. (2,4)

$$\left. \begin{aligned} \text{Emission/sek} &= \varepsilon_\nu d\nu \cdot d\sigma \cdot ds \cdot d\omega \\ \text{Absorption/sek} &= \kappa_\nu ds \cdot I_\nu \cdot d\sigma \cdot d\omega \cdot d\nu \end{aligned} \right\} \quad (3,2)$$

Im thermischen Gleichgewicht müssen diese beiden Größen einander gleich sein und zwar unabhängig von irgendwelchen Materialeigenschaften, d. h.

$$\varepsilon_\nu/\kappa_\nu = I_\nu(\nu, T). \quad (3,3)$$

Diese grundlegende Beziehung ist zuerst von G. KIRCHHOFF entdeckt worden; sie besagt, daß im Zustande thermischen Gleichgewichtes das Verhältnis von Emissions- und Absorptionskoeffizient gleich der Intensität der Hohlraumstrahlung, also eine universelle Funktion der Frequenz und Temperatur ist.

Statt eines Volumelementes können wir auch ein Flächenelement $d\sigma$ der Wand unseres Hohlraumes betrachten. Dessen Absorption und Emission bezüglich eines Strahlenbündels $d\omega$, das mit der Normale von $d\sigma$ den Winkel ϑ bildet, sind gegeben durch folgende Beziehungen:

$$\text{Emission/sek} = E_\nu \cdot d\nu \cdot d\sigma \cos \vartheta d\omega \quad (3,4)$$

Den Koeffizienten E_ν (abhängig von ν , T , eventuell der Richtung) nennen wir das Emissionsvermögen der Wand. Entsprechend wird die

$$\text{Absorption/sek} = A_\nu \cdot I_\nu \cdot d\nu \cdot d\sigma \cdot \cos \vartheta d\omega \quad (3,5)$$

A_ν (abhängig von denselben Größen wie E_ν) bezeichnen wir als das Absorptionsvermögen der Wand. Da die nicht absorbierte Strahlung offenbar — diffus oder spiegelnd — reflektiert werden muß, so ist $1 - A_\nu = r_\nu$, der Reflexionskoeffizient. Setzen wir Absorption und Emission pro sek einander gleich, so erhalten wir den eigentlichen KIRCHHOFFSchen Satz:

$$E_\nu/A_\nu = I_\nu \quad (3,6)$$

Das Verhältnis von Emissions- und Absorptionsvermögen ist im Zustande thermischen Gleichgewichtes gleich der Intensität der Hohlraumstrahlung, also eine universelle Funktion von ν und T .

Ist $A_\nu = 1$, so wird alle auffallende Strahlung absorbiert (Schwarzer Körper!); das Emissionsvermögen wird dann $E_\nu = I_\nu$. Hierauf beruht die bekannte

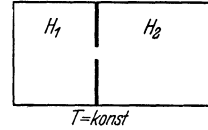


Fig. 6. Unabhängigkeit der Intensität der Hohlraumstrahlung von der Beschaffenheit des Hohlraumes usw.

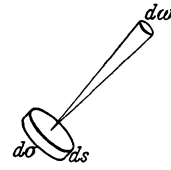


Fig. 7. Zum KIRCHHOFFSchen Satz.

Methode von W. WIEN und ST. JOHN zur Herstellung der Strahlung des schwarzen Körpers mit Hilfe eines Hohlraumes konstanter Temperatur, der nur durch eine kleine Öffnung mit der Außenwelt in Verbindung steht: Die durch diese Öffnung hereinkommende Strahlung wird (viele Reflexionen, vgl. Fig. 8!) völlig absorbiert, d. h. $A_\nu = 1$. Andererseits sieht man aber auch direkt, daß sich das Strahlungsfeld im Innern nicht merklich ändern kann, wenn man durch eine Öffnung einen kleinen Teil der Hohlraumstrahlung „abzapft“.

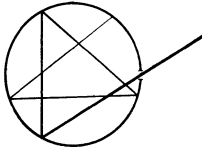


Fig. 8.
Hohlraumstrahlung.

Die Dichte der Hohlraumstrahlung wird nach (1,13) (Isotropie!)

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu \quad (3,7)$$

und die Ausstrahlung pro cm^2 und sek in den ganzen Halbraum

$$\int_0^{\pi/2} I_\nu \cos \vartheta \cdot 2\pi \sin \vartheta \, d\vartheta = \pi I_\nu. \quad (3,8)$$

Ergänzungsweise müssen wir uns nun noch überlegen, wie sich die vorstehenden Betrachtungen ändern, wenn ein Teil des Hohlraumes mit einem Medium vom Brechungsindex n erfüllt ist. Die auf 1 cm^2 der Trennungsfäche pro sek von links (s. Fig. 9) unter dem Einfallswinkel ϑ in dem Raumwinkel-element $d\omega = \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$ auftreffende Strahlung ist $I_\nu \, d\nu \cdot \cos \vartheta \, d\omega$. Von

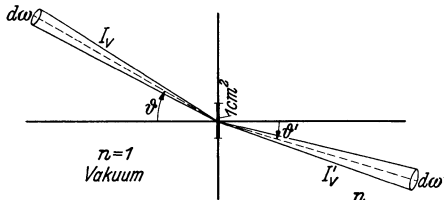


Fig. 9. Hohlraumstrahlung in Medium vom Brechungsindex n .

dieser werde der Bruchteil r reflektiert, der Bruchteil $1-r$ dringt in das Medium vom Brechungsindex n ein. Als „Kompensation“ trifft in umgekehrter Richtung auf die Flächeneinheit die Strahlung

$$I'_\nu \, d\nu \cos \vartheta' \, d\omega',$$

wobei ϑ und $d\omega$ einerseits, ϑ' und $d\omega'$ andererseits so einzurichten sind, daß die beiden Strahlenbündel nach dem

Brechungsgesetz ineinander übergehen. Der Reflexionskoeffizient ist nach dem Reziprozitätssatz der Optik in beiden Fällen $= r$. Es muß also sein

$$I_\nu \cos \vartheta \, d\omega = I'_\nu \cos \vartheta' \, d\omega' \quad (3,9)$$

oder

$$\frac{I'_\nu}{I_\nu} = \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \cdot d\varphi}{\cos \vartheta' \sin \vartheta' \, d\vartheta' \cdot d\varphi'}. \quad (3,10)$$

Nach dem SNELLIUSSchen Brechungsgesetz ist $\frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta'} = n$ und $\varphi = \varphi'$, also

$$I'_\nu / I_\nu = n^2. \quad (3,11)$$

Genau genommen ist also — bei thermischem Gleichgewicht — I'_ν / n^2 eine universelle Funktion von ν und T , die sog. KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion $I_\nu(\nu, T)$.

Auch der Zusammenhang zwischen Strahlungsdichte und Intensität (3,7) wird in einem Medium vom Brechungsindex n etwas abgeändert. An die Stelle der Vakuumlichtgeschwindigkeit c tritt c/n und es gilt

$$u'_\nu = \frac{4\pi}{c} \cdot n I'_\nu. \quad (3,12)$$

Zusammen mit (3,11) besagt diese Gleichung, daß auch u'_ν / n^3 eine universelle Funktion von ν und T ist.

Auf die grundlegenden Anwendungen des KIRCHHOFFSchen Satzes, die großenteils sein Entdecker selbst schon machte, braucht hier wohl nicht mehr hingewiesen zu werden (Deutung der FRAUNHOFER-Linien, Spektralanalyse!).

Wohl aber erscheint noch eine Warnung angebracht: Der KIRCHHOFFSche Satz gilt *nur für thermisches Gleichgewicht*, jede Anwendung auf Nicht-Gleichgewichtsverhältnisse hat nur Näherungscharakter und bedarf einer Rechtfertigung auf atomtheoretischer Grundlage. Der gänzlich verschwommene Begriff der *Temperaturstrahlung* hat besonders in der Astrophysik viel Unheil gestiftet und sollte endgültig verschwinden.

4. Das STEFAN-BOLTZMANN'Sche Gesetz.

Nach KIRCHHOFFS grundlegenden Untersuchungen erhob sich das Problem, die Intensität der Hohlraumstrahlung in Abhängigkeit von Frequenz und Temperatur T zu erforschen.

STEFAN fand 1879 auf experimentellem Weg, daß die gesamte Ausstrahlung eines schwarzen Körpers pro cm^2 und sek proportional der 4. Potenz der absoluten Temperatur sei. Das heißt, es ist

$$\pi F = \sigma \cdot T^4 \quad (4,1)$$

oder

$$I = F = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \quad (4,2)$$

und nach (1,13)

$$u = \frac{4\sigma}{c} T^4. \quad (4,3)$$

Für die Strahlungskonstante σ ergeben neuere Messungen — auf deren Prinzipien wir noch zurückkommen werden — als wahrscheinlichsten Wert:

$$\sigma = 5,75 \cdot 10^{-5} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{sek} \cdot \text{grad}^4} = 1,374 \cdot 10^{-12} \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \cdot \text{sek} \cdot \text{grad}^4}. \quad (4,4)$$

1884 gab sodann BOLTZMANN eine theoretische Begründung des Strahlungsgesetzes (4,1). Er betrachtet die Hohlraumstrahlung ähnlich wie ein Gas und berechnet ihren Druck im Anschluß an MAXWELL'S Untersuchungen über den Strahlungsdruck. Nachdem so die Hohlraumstrahlung einer thermodynamischen Behandlung zugänglich gemacht war, erhielt er das STEFAN-BOLTZMANN'Sche *Strahlungsgesetz* durch eine einfache Anwendung des 2. Hauptsatzes. Wir schicken zunächst einiges über den *Strahlungsdruck* voraus:

Ein Strahl werde charakterisiert durch den Vektor des Energiestromes pro cm^2 und sek (POYNTING'Scher Vektor) \mathfrak{E} (= dem Integral von I über den kleinen strahlungserfüllten Raumwinkel). Wie die Elektrodynamik lehrt, entspricht diesem Energiestrom ein Impulsstrom \mathfrak{E}/c (quantentheoretisch betrachtet: Ein Lichtquant der Energie $h\nu$ hat den Impuls $\frac{h\nu}{c}$). Trifft dieser Strom nun senkrecht auf eine schwarze Fläche, so übt er einen Druck (Impuls/sek cm^2)

$$p = |\mathfrak{E}|/c \quad (4,5)$$

aus. Nehmen wir statt der schwarzen eine spiegelnde Fläche, so kommt noch der Rückstoß der reflektierten Strahlung hinzu und es wird

$$p = \frac{2|\mathfrak{E}|}{c}. \quad (4,6)$$

Fällt endlich die Strahlung unter einem Winkel ϑ zur Normale der Fläche ein, so wird einerseits die pro sek auf 1 cm^2 der Fläche treffende Energie um einen Faktor $\cos \vartheta$ verkleinert, andererseits wirkt nur noch die senkrecht zur Fläche stehende Komponente des übertragenen Impulses. Statt (4,5 bzw. 4,6) gilt also

$$p = \frac{|\mathfrak{E}|}{c} \cos^2 \vartheta \quad \text{bzw.} \quad p = \frac{2|\mathfrak{E}|}{c} \cos^2 \vartheta. \quad (4,7 \text{ u. } 4,8)$$

Den Druck eines isotropen Strahlungsfeldes auf seine *spiegelnde Hülle* erhalten wir — mit $S = I d\omega$ — zu

$$p = \frac{2I}{c} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \vartheta \cdot 2\pi \sin \vartheta d\vartheta = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{I}{3} = \frac{u}{3}, \quad (4,9)$$

d. h. der Strahlungsdruck ist gleich $1/3$ der Strahlungsdichte. Für einen Hohlraum im thermischen Gleichgewicht gilt dieser Ausdruck unabhängig von der Beschaffenheit der Wände. Was an reflektierter Strahlung ausfällt, wird durch die Emission der Wand ersetzt.

Noch eleganter läßt sich der BOLTZMANN'Sche Ausdruck für den Druck des isotropen Strahlungsfeldes ableiten mit Hilfe des MAXWELL'Schen Spannungstensors (\mathfrak{E} und \mathfrak{H} sind die elektrische und magnetische Feldstärke):

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \begin{vmatrix} \mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{H}_x^2 - \frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) & \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y + \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y & \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_z + \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_z \\ \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y + \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y & \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{H}_y^2 - \frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) & \mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_z + \mathfrak{H}_y \mathfrak{H}_z \\ \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_z + \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_z & \mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_z + \mathfrak{H}_y \mathfrak{H}_z & \mathfrak{E}_z^2 + \mathfrak{H}_z^2 - \frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) \end{vmatrix}. \quad (4,10)$$

Wegen der Isotropie ist der Druck (ganz wie in der Elastizitätstheorie!) gleich dem negativen Mittelwert der 3 Diagonalglieder

$$p = -\frac{1}{3}(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) = \frac{u}{3}, \quad (4,11)$$

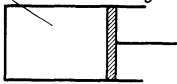


Fig. 10. Zum STEFAN-BOLTZMANN'Schen Strahlungsgesetz.

da ja $\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)$ bekanntlich die Energiedichte des Feldes darstellt.

Wir betrachten nun mit BOLTZMANN die Hohlraumstrahlung in einem Zylinder mit schwarzen Wänden (Volum V , Temperatur T) der durch einen verschiebbaren Kolben mit spiegelnder Innenfläche verschlossen ist (Fig. 10).

Verschieben wir den Kolben sehr langsam — so daß das Strahlungsfeld im Innern sich immer auf den Gleichgewichtszustand, d. h. „Hohlraumstrahlung“ einstellen kann — so ist die von den Wänden abgegebene Wärmeenergie

$$dQ = dU + p dV, \quad (4,12)$$

wobei $U = V \times$ Strahlungsdichte u die gesamte in V enthaltene Energie und $p = u/3$ den Strahlungsdruck, also $p dV$ die bei Vergrößerung des Volums um dV geleistete mechanische Arbeit bedeutet.

Da der ganze Vorgang reversibel verläuft, ist die entsprechende Entropieänderung:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU + p dV}{T}, \quad (4,13)$$

oder, wegen $U = V \cdot u$ und $p = u/3$:

$$dS = \left(\frac{V}{T} \frac{\partial u}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{4u}{3T} \right)_T dV. \quad (4,14)$$

Wir fordern nun gemäß dem 2. Hauptsatz, daß S eine Zustandsgröße, also dS ein vollständiges Differential sei:

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{V}{T} \frac{\partial u}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{4u}{3T} \right). \quad (4,15)$$

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{du}{u} = 4 \frac{dT}{T} \quad (4,16)$$

oder

$$u = a T^4$$

Durch Vergleich mit (4,3) erkennt man, daß die Integrationskonstante in unseren früheren Bezeichnungen

$$a = \frac{4\sigma}{c} \quad (4,17)$$

ist.

Die Entropie S selbst der Strahlung des Hohlraumes vom Volum V ergibt sich aus (4,14) durch

$$\frac{dS}{dT} = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} = V \cdot 4 a T^2 \quad (4,18)$$

oder

$$S = \frac{4a}{3} \cdot V \cdot T^3. \quad (4,19)$$

Hinsichtlich adiabatischer Zustandsänderungen ($S = \text{konst.}$) verhält sich die Hohlraumstrahlung daher in vieler Hinsicht wie ein Gas¹ mit $\kappa = c_p/c_v = 4/3$. Diese Analogie ist von Bedeutung für die EDDINGTONSche Theorie des inneren Baues der Sterne, sowie — nach SCHWARZSCHILD — für die Diskussion der Frage, unter welchen Verhältnissen Strahlungs- bzw. konvektives Gleichgewicht der stabile Zustand eines Sternes ist.

5. Spektrale Energieverteilung der Hohlraumstrahlung. WIENSCHES VERSchiebungsgesetz. Entropie eines (nahezu) monochromatischen Strahlenbündels.

In thermodynamischer Hinsicht ist der entscheidende Punkt bei BOLTZMANNs Überlegungen die Anwendung des Entropiebegriffes auf die Hohlraumstrahlung. Wie kann man nun zu weitergehenden Aussagen über die spektrale Energieverteilung I_ν kommen?

Den ersten Schritt über BOLTZMANN hinaus tat — in theoretischer Hinsicht — W. WIEN durch den Nachweis, daß man auch einem isolierten, nahezu monochromatischen Strahlenbündel Entropie zuschreiben darf. Man kann direkt der *Energiestrahlung* eine *Entropiestrahlung* gegenüberstellen:

	Intensität	Dichte pro Frequenzeinheit	Gesamtdichte
<i>Energiestrahlung</i>	I_ν	$u_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu$	$u = \frac{4\pi}{c} \int I_\nu d\nu$
<i>Entropiestrahlung</i>	H_ν	$s_\nu = \frac{4\pi}{c} H_\nu$	$s = \frac{4\pi}{c} \int H_\nu d\nu$

Im Zustand thermischen Gleichgewichtes muß nach dem 2. Hauptsatz sein:

$$s = \int s_\nu d\nu = \text{Maximum mit der Nebenbedingung } u = \int u_\nu d\nu = \text{konst.} \quad (5,1)$$

oder

$$\delta s = \int \frac{\partial s_\nu}{\partial u_\nu} \delta u_\nu d\nu = 0 \quad \text{mit} \quad \int \delta u_\nu d\nu = 0. \quad (5,2)$$

Die beiden Forderungen (5,2) sind nur miteinander verträglich, wenn

$$\frac{\partial s_\nu}{\partial u_\nu} = \text{konst.} \quad (5,3)$$

¹ Die Adiabatangleichung lautet bekanntlich $p \cdot V^\kappa = \text{konst.}$ oder mit $pV \sim T$ auch $V \cdot T^{1/\kappa-1} = \text{konst.}$

Da für die Gesamtstrahlung nach den Ergebnissen des vorgehenden Abschnittes

$$d s / d u = (d S / d U)_V = 1 / T, \quad (5,4)$$

so muß auch die Konstante in (5,3) = $1/T$ sein, d. h.

$$\partial s_v / \partial u_v = 1 / T \quad (5,5)$$

In der Hohlraumstrahlung haben also alle Strahlenbündel dieselbe Temperatur; die Berechtigung unserer neuen Begriffsbildungen ist damit nachgewiesen.

Mit W. WIEN betrachten wir nun einen mit Hohlraumstrahlung erfüllten Zylinder und zwar sollen seine Wände diffus, der Kolben dagegen spiegelnd reflektieren. (Bei einer Verschiebung des Kolbens kann also kein Energieaustausch zwischen Strahlung und Wänden erfolgen; das Strahlungsfeld bleibt aber stets isotrop). Wir zeigen zunächst, daß bei einer unendlich langsamen Verschiebung des Kolbens die Strahlung „schwarz“ bleibt:

1. Komprimieren wir. Dabei wird Arbeit gegen den Strahlungsdruck $p = u/3$ geleistet.

2. Bringen wir in den Hohlraum ein winziges Kohlestäubchen. Dadurch wird die Energie nicht verändert. Wenn die Strahlung noch nicht im Zustand thermischen Gleichgewichtes wäre, so würde sie den Zustand maximaler Entropie annehmen.

3. Expandieren wir zurück zum Anfangsvolumen. Dabei wird dieselbe Arbeit geleistet wie bei 1., da ja $p = u/3$ nur von der Stellung des Kolbens abhängt. Wir kommen also genau auf den Ausgangszustand zurück und haben damit bewiesen, daß das Einbringen des Kohlestäubchens *keine* Entropievermehrung bedingte, d. h. daß die Strahlung bei der Kompression schwarz blieb.

Fordert man nun für ein Strahlenbündel, das an dem bewegten spiegelnden Kolben (Dopplereffekt, Strahlungsdruck!) reflektiert wird, Erhaltung der Energie (unter Berücksichtigung der Arbeit am Spiegel!) und Entropie (wegen obiger Reversibilitätsbetrachtung) so ergibt sich¹, daß bei der unendlich langsamen Kompression die beiden „adiabatischen Invarianten“

$$I_\nu / \nu^3 \quad \text{und} \quad H_\nu / \nu^2 \quad (5,6)$$

unverändert bleiben.

$$\text{Es muß daher weiterhin} \quad (H_\nu / \nu^2) = f(I_\nu / \nu^3) \quad (5,7)$$

eine Funktion von I_ν / ν^3 allein sein.

$$\text{Nach (5,5) ist} \quad \frac{1}{T} = \frac{\partial H_\nu}{\partial I_\nu} = \frac{1}{\nu} f' \left(\frac{I_\nu}{\nu^3} \right), \quad (5,8)$$

oder

$$I_\nu = \nu^3 \varphi(\nu/T) = T^3 \Phi(\nu/T) \quad (5,9)$$

und nach (1,16)

$$I_\lambda = \frac{1}{\lambda^5} \psi(\lambda T) = T^5 \Psi(\lambda T), \quad (5,10)$$

wobei die $\varphi \dots \Psi$ noch unbekannte Funktionen sind, deren Zusammenhang mit f wohl nicht explizit angeschrieben werden braucht.

Aus der 2. Gleichung (5,10) lesen wir das WIENSche Verschiebungsgesetz ab: Für das Maximum der Energieverteilungskurve I_λ

$$d I_\lambda / d \lambda = 0 \quad (5,11)$$

gilt sicher

$$\lambda T = \text{konst.} = b \quad (5,12)$$

und

$$I_{\lambda \text{max}} \sim T^5.$$

¹ Die expliziten Rechnungen brauchen wir hier nicht wiederzugeben; der Leser findet sie in jedem Lehrbuch.

Die Wellenlänge des Maximums verschiebt sich also umgekehrt proportional der Temperatur; seine Höhe wächst mit T^5 . Neuere Messungen ergeben für die Konstante b den Wert 0,288 cm grad (vgl. unten). Die entsprechenden Gesetzmäßigkeiten für I_ν liest man leicht aus (5,9) ab. Ebenso führen (5,9) und (5,10) ohne weiteres auf das STEFAN-BOLTZMANNsche Gesetz zurück: z. B. gibt (5,9) mit $\nu/T = x$

$$I = \int I_\nu d\nu = T^4 \int_0^\infty x^3 \varphi(x) dx = \text{konst. } T^4. \quad (5,13)$$

6. Energieverteilung im Spektrum der Hohlraumstrahlung. Klassische Theorie; RAYLEIGH-JEANSsche Strahlungsformel.

Um die Energieverteilung im Spektrum der Hohlraumstrahlung zu ermitteln, untersuchen wir deren Wechselwirkung mit einem System materieller Körper, das sich im thermischen Gleichgewicht befindet und das wir infolgedessen nach den üblichen Methoden der kinetischen Theorie behandeln können. Da es nach dem KIRCHHOFFschen Satz (Unabhängigkeit der Hohlraumstrahlung von der Art des Hohlraumes) auf die spezielle Beschaffenheit dieses Systemes nicht ankommt, wählen wir mit PLANCK das einfachste: Eine elastisch an ihre Gleichgewichtslage gebundene Masse m mit der Ladung e (z. B. ein Elektron), die in einer bestimmten Richtung (x -Achse) schwingen kann (Eigenfrequenz ν_0). Wir bezeichnen dieses Gebilde als *linearen harmonischen Oszillator*.

Vernachlässigen wir zunächst seine Strahlung, so können wir seine Bewegungsverhältnisse beschreiben durch:

$$\ddot{x} + (2\pi\nu_0)^2 x = 0 \quad (6,1)$$

oder

$$x = A \cdot e^{2\pi i \nu_0 t} \quad (A \text{ reell}) \quad (6,2)$$

(Gemeint ist hier und in Zukunft bei derartigen Ausdrücken stets der reelle Teil; dies ist bei Bildung quadratischer Größen zu beachten). Die Energie unseres Oszillators setzt sich nun zusammen aus

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{m}{2} \dot{x}^2 &= \frac{m}{2} (2\pi\nu_0)^2 \cdot A^2 \sin^2 2\pi\nu_0 t \\ E_{\text{pot}} &= m (2\pi\nu_0)^2 \cdot \frac{x^2}{2} &= \frac{m}{2} (2\pi\nu_0)^2 \cdot A^2 \cos^2 2\pi\nu_0 t \end{aligned} \right\} E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}. \quad (6,3)$$

Im Zeitmittel ist also:

$$\overline{E_{\text{kin}}} = \overline{E_{\text{pot}}} = \frac{1}{2} \overline{E}. \quad (6,4)$$

Die mittlere Energie \overline{E} des linearen Oszillators können wir nun einerseits aus der klassischen Statistik (BOLTZMANNscher Gleichverteilungssatz; pro Freiheitsgrad $\overline{E_{\text{kin}}} = \frac{1}{2} k T$) berechnen zu ($k = \text{BOLTZMANN-Konstante}$):

$$\overline{E} = k T \quad (6,5)$$

Andererseits erhalten wir E in Abhängigkeit von der Dichte u_ν des Strahlungsfeldes für die Frequenz $\nu \sim \nu_0$ auf Grund folgender Überlegung: Wie jede beschleunigte Ladung emittiert und absorbiert der Oszillator Strahlung. Im Gleichgewicht muß sich seine Amplitude so einspielen, daß Emission und Absorption pro Zeiteinheit im Mittel einander gleich sind. Aus der Amplitude können wir aber nach (6,3 und 4) sofort die mittlere Energie \overline{E} berechnen.

Behandeln wir zunächst den freien Oszillator (ohne Strahlungsfeld) mit Berücksichtigung der bremsenden Wirkung seiner Ausstrahlung (*Strahlungsdämpfung*): Wie die Elektrodynamik lehrt (H. HERTZ) ist der Energieverlust/sek

einer schwingenden Ladung e gegeben durch

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{x}^2. \quad (6,6)$$

Diesen können wir auch auffassen als die Wirkung einer Reibungskraft der Größe:

$$K = \frac{2e^2}{3c^3} \cdot \ddot{x}, \quad (6,7)$$

da deren Arbeit/sek $K \cdot \dot{x} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{x} \cdot \dot{x} = \frac{2e^2}{3c^3} \left\{ \frac{d}{dt} (\dot{x} \cdot \dot{x}) - \dot{x}^2 \right\}$ im Zeitmittel $= -\frac{2e^2}{3c^3} \cdot \ddot{x}^2$ ist.

Die Bewegungsgleichung lautet nunmehr:

$$\ddot{x} + (2\pi\nu_0)^2 \cdot x - \frac{2e^2}{3mc^3} \cdot \ddot{x} = 0. \quad (6,8)$$

Da — wie wir noch verifizieren werden — die Dämpfung stets verhältnismäßig schwach ist, können wir näherungsweise nach (6,1) $\ddot{x} = -(2\pi\nu_0)^2 \cdot x$ schreiben und die Reibung wie üblich proportional zur Geschwindigkeit setzen. Dann wird aus (6,8)

$$\dot{x} + (2\pi\nu_0)^2 x + \gamma \dot{x} = 0 \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{8\pi^2 e^2 \nu_0^2}{3mc^3}. \quad (6,9)$$

Zur Lösung machen wir wieder den Ansatz $x = A e^{i\alpha t}$ und bekommen

$$-\alpha^2 + (2\pi\nu_0)^2 + i\alpha\gamma = 0$$

und wegen $\alpha \approx 2\pi\nu_0$

$$\alpha \approx \sqrt{(2\pi\nu_0)^2 + 2\pi\nu_0 \cdot i\gamma} \approx 2\pi\nu_0 + i\frac{\gamma}{2}. \quad (6,10)$$

Schreiben wir die Lösung der Übersichtlichkeit wegen gleich in reeller Form, so ist also

$$x = |A| \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(2\pi\nu_0 t + \delta) \quad (6,11)$$

und die Energie (proportional dem Amplitudenquadrat)

$$E = E_0 e^{-\gamma t} = E_0 e^{-\frac{t}{T}}. \quad (6,12)$$

Wir erhalten eine gedämpfte Schwingung mit der *Abklingungskonstante* $\gamma \text{ sek}^{-1}$ und der *Abklingungszeit*

$$T = 1/\gamma \text{ sek}. \quad (6,13)$$

Setzt man in (6,9) die Zahlenwerte von Elektronenmasse und -ladung ein, so erhält man für optische Frequenzen $T \sim 10^{-8} \text{ sek}$ in *größenordnungsmäßiger* Übereinstimmung mit den direkten Kanalstrahlungsmessungen von W. WIEN. (Auf alle diese Fragen werden wir später im Zusammenhang mit der Theorie der FRAUNHOFER-Linien nochmals ausführlich zurückkommen.)

Als nächsten Schritt untersuchen wir das Mitschwingen des gedämpften Oszillators im Feld einer Lichtwelle ($\nu \approx \nu_0$)

$$\mathfrak{E}_x = F \cdot e^{2\pi i \nu t} \quad (6,14)$$

mit dem Ziel der Berechnung seiner mittleren Energie in Abhängigkeit von F . An Stelle von (6,9) tritt nun

$$\ddot{x} + (2\pi\nu_0)^2 \cdot x + \gamma \dot{x} = \frac{e}{m} \mathfrak{E}_x. \quad (6,15)$$

Wir machen wieder den Ansatz $x = A \cdot e^{2\pi i \nu t}$; die zugehörige freie Schwingung (Lösung der homogenen Gleichung) klingt in einer Zeit der Größenordnung T

ab und kann also gleich wegbleiben. Damit erhalten wir

$$\{4\pi^2(\nu_0^2 - \nu^2) + 2\pi i\nu\gamma\} A = \frac{e}{m} F \quad (6,16)$$

und daher für das Amplitudenquadrat

$$|A|^2 = A \tilde{A} = \frac{e^2}{4\pi^2 m^2} \cdot \frac{|F|^2}{4\pi^2(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 \gamma^2} \quad (6,17)$$

und für $\nu \approx \nu_0$ ($\nu_0^2 - \nu^2 \approx 2\nu_0(\nu_0 - \nu)$):

$$|A|^2 = \frac{e^2}{4\pi^2 m^2 \nu_0^2} \cdot \frac{|F|^2}{[4\pi(\nu_0 - \nu)]^2 + \gamma^2} \quad (6,18)$$

Die mittlere Energie des Oszillators ist nun [da wir schwache Dämpfung annehmen, gelten die Gl. (6,3)]:

$$\bar{E} = \frac{m}{2} (2\pi\nu_0)^2 |A|^2 = \frac{e^2}{2m} \frac{|F|^2}{[4\pi(\nu_0 - \nu)]^2 + \gamma^2} \quad (6,19)$$

Nunmehr müssen wir noch die Feldstärke der anregenden Lichtwellen mit der Strahlungsdichte in Verbindung bringen. Es ist

$$u_\nu d\nu = \frac{1}{8\pi} \sum (\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2) + (\mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2), \quad (6,20)$$

wobei die Σ über alle in den Bereich $d\nu$ fallenden Wellen zu erstrecken ist. Nun ist

$$\bar{\mathfrak{E}}_x^2 = \bar{\mathfrak{E}}_y^2 = \dots \bar{\mathfrak{H}}_z^2 = \frac{1}{2} |F|^2$$

also

$$u_\nu d\nu = \frac{3}{8\pi} \sum_{\nu}^{\nu + d\nu} |F|^2. \quad (6,21)$$

Wir erhalten vollends \bar{E} , indem wir in (6,19) über alle anregenden Lichtwellen integrieren. Das heißt, es wird (da nur die Umgebung von ν_0 einen wesentlichen Beitrag liefert, so dürfen wir von $-\infty$ bis $+\infty$ integrieren und trotzdem u_ν als konstant betrachten):

$$E = \frac{e^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{8\pi}{3} u_\nu d\nu}{[4\pi(\nu_0 - \nu)]^2 + \gamma^2}. \quad (6,22)$$

Setzen wir $\frac{4\pi(\nu - \nu_0)}{\gamma} = x$, so erhält das Integral die Form $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctg x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$ und es wird

$$E = \frac{\pi e^2}{3m\gamma} u_\nu = \frac{c^3}{8\pi\nu^2} \cdot u_\nu. \quad (6,23)$$

Andererseits sollte nach dem Gleichverteilungssatz der klassischen Statistik (6,5)

$$\bar{E} = kT$$

sein. Das Strahlungsgesetz der klassischen Theorie lautet daher

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot kT. \quad (6,24)$$

Es wurde zuerst von RAYLEIGH und JEANS abgeleitet, indem sie das Strahlungsfeld eines Hohlraumes in seine Eigenschwingungen (stehende Wellen) zerlegten und auf diese direkt den Gleichverteilungssatz anwandten.

Man erkennt sofort, daß das RAYLEIGH-JEANSsche Gesetz (6,24) nicht der Wirklichkeit entsprechen kann: u_ν und entsprechend I_ν wachsen mit ν beliebig stark an; schon bei niedrigen Temperaturen müßte also ein schwarzer Körper starke Ultraviolettstrahlung aussenden! Außerdem nimmt $u = \int u_\nu d\nu$ einen unendlichen Wert an, statt dem STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetz zu folgen. Während das RAYLEIGH-JEANSsche Gesetz — wie gesagt — im kurzwelligen Gebiet völlig versagt, paßt es sich den Beobachtungen immer besser an, wenn man zu langwelligerer Strahlung übergeht. Offenbar ist es der Grenzfall des endgültigen Strahlungsgesetzes im limes $\lambda \rightarrow \infty$.

7. Quantentheorie. PLANCKsches Strahlungsgesetz (1900).

Um zu einer mit der Erfahrung übereinstimmenden Strahlungsformel zu gelangen, müssen wir mit PLANCK zuerst die Grundlagen des Gleichverteilungssatzes einer gründlichen Revision unterziehen:

In der *klassischen Statistik* geht man bekanntlich folgendermaßen vor: Nach dem LIOUVILLESchen Satz nimmt ein mechanisches System im Laufe seiner Bewegung im Phasenraum (Lage- und Impulskoordinaten) stets dasselbe Volumen ein. Dementsprechend teilt man den Phasenraum in Zellen gleicher Größe und bestimmt die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Zustandes (Verteilung der Moleküle usw. auf die Phasenzellen) aus der Zahl seiner Realisierungsmöglichkeiten (Lotterie!). Nachträglich geht man mit dem Volumen der einzelnen Phasenzelle zum *Grenzwert Null* über.

Nach der *Quantentheorie* ist nun gerade dieser Grenzübergang nicht berechtigt, man hat vielmehr den Phasenraum in endliche Zellen der Größe h pro Freiheitsgrad, also h^f bei einem System von f Freiheitsgraden einzuteilen. Einem bestimmten Quantenzustand eines Systems entspricht ein bestimmter Energiewert, ein sog. Energieniveau¹.

Gleichartige Partikel, die sich in demselben Quantenzustand (-zelle) befinden, sind nicht unterscheidbar²; es kann also in statistischer Hinsicht nur auf *ihre Anzahl pro Quantenzelle* ankommen. Ist diese Anzahl keinen weiteren Einschränkungen unterworfen, so spricht man von BOSE-EINSTEIN-Statistik. Sie ist in der Natur realisiert für die Strahlung und elektrisch neutrale Partikel. Bei den *materiellen* Elementarpartikeln (Elektron, Proton) dagegen gestattet die Natur, wie PAULI zuerst erkannt hat, nur je *einem* Partikel den Aufenthalt in einer Phasenzelle. Die Anwendung dieses PAULI-Prinzipes auf die Statistik hat zuerst FERMI gegeben. Der Unterschied zwischen FERMI-Statistik einerseits und BOSE-EINSTEINscher bzw. *klassischer Statistik* andererseits (*Gasentartung*) wird nur wesentlich, wenn die Partikel im Phasenraum sehr „gedrängt wohnen“; d. h. bei tiefer Temperatur und großem Druck (FOWLERS Theorie der weißen Zwergsterne!).

Wir beschränken uns hier — im Hinblick auf unser Hauptziel — auf Verhältnisse, bei denen noch keine Gasentartung einsetzt und betreiben also Quantenstatistik nur insofern, als wir die Einteilung des Phasenraumes in endliche Zellen und die Existenz diskreter Energiewerte berücksichtigen.

¹ Die Anwendung der Quantentheorie auf die Atomtheorie (BOHRsches Atommodell, Lichtquantenvorstellung usw.) kann heute wohl als allgemein bekannt vorausgesetzt werden. Wir werden uns hier auf die Darstellung der astrophysikalisch wichtigen Prinzipien der Quantenstatistik beschränken, die in der Literatur für den Astronomen zur Zeit noch nicht so bequem zugänglich sind.

² Wiedererkennen eines bestimmten Partikels ist unmöglich wegen der Gleichheit der Partikel (Systeme). Verfolgen eines bestimmten Partikels ist bei einem Zusammenstoß nicht möglich wegen der für die Quantentheorie charakteristischen Beschränkung unserer Meßmöglichkeiten (HEISENBERGSche Ungenauigkeitsrelation).

Betrachten wir ein System von N gleichartigen Partikeln (Oszillatoren, Gasmolekülen usw.), deren jedes der gequantelten Energiewerte¹

$$E_0, E_1, E_2 \dots E_n \dots \quad (7,1)$$

fähig sein soll. Die Anzahl der Partikel, die sich bei einer bestimmten Anordnung des Systems im n -ten Quantenzustand befinden, nennen wir N_n :

$$N_0, N_1, N_2 \dots N_n \dots \quad (7,2)$$

Ist N die Gesamtzahl der Partikel, \bar{E} ihre mittlere Energie, so gilt

$$\sum N_n = N \quad \text{und} \quad \sum E_n \cdot N_n = \bar{E} \cdot N = E \quad (\text{Gesamtenergie}). \quad (7,3)$$

Die *thermodynamische Wahrscheinlichkeit* des in (7,1 und 7,2) charakterisierten Zustandes, d. h. die Anzahl seiner Realisierungsmöglichkeiten (eine sehr große Zahl!) ist nach einer bekannten Formel der Wahrscheinlichkeitsrechnung

$$W = \frac{N!}{N_0! N_1! \dots N_n! \dots} \quad (7,4)$$

(Vertauschung aller N Partikel gibt $N!$ Möglichkeiten, die $N_0!$ bzw. $N_1! \dots$ Vertauschungen innerhalb des 0., 1. . . . Quantenzustandes führen aber zu nichts Neuem!). Da die N sehr große Zahlen sind, können wir die STIRLINGSche Formel anwenden:

$$\ln N! = \sum_1^N \ln n \approx \int_1^N \ln n \, dn \approx N (\ln N - 1), \quad (7,5)$$

oder

$$N! \approx \left(\frac{N}{e}\right)^N. \quad (7,6)$$

(Rechnet man genauer, so kommt zu (7,6) noch ein Faktor $\sqrt{2\pi N} + \dots$ der für unsere Zwecke aber schon belanglos ist). Damit wird aus (7,4):

$$\ln W = N (\ln N - 1) - \sum N_n (\ln N_n - 1) = - \sum N_n \ln N_n / N. \quad (7,7)$$

Das Verhältnis $N_n/N = w_n$ gibt den Bruchteil der Partikel im n -ten Quantenzustand an; sein Mittelwert ist die *mathematische Wahrscheinlichkeit* dieses Zustandes.

Mit (7,3), (7,4) und (7,7) können wir unser Hauptproblem der Auffindung der wahrscheinlichsten Verteilung (7,1 u. 7,2) nunmehr folgendermaßen formulieren: Die thermodynamische Wahrscheinlichkeit, bzw. der

$$\ln W = -N \sum w_n \ln w_n \quad (7,8)$$

soll zu einem Maximum gemacht werden² mit den Nebenbedingungen (7,3)

$$\sum w_n = 1 \quad \text{und} \quad \sum E_n w_n = \bar{E}. \quad (7,9)$$

Wir erhalten durch Variation der w_n :

$$\sum \ln w_n \delta w_n + \sum \delta w_n = 0 \quad (7,10)$$

und

$$\sum \delta w_n = 0; \quad \sum E_n \delta w_n = 0.$$

Nach Einführung LAGRANGEScher Multiplikatoren $\log \alpha$ und β wird aus (7,10) die *eine* Gleichung

$$\sum \delta w_n (\ln w_n - \ln \alpha + \beta E_n) = 0 \quad (7,11)$$

¹ Falls das ganze System auf ein endliches Volumen beschränkt ist, kommen nur diskrete Energiewerte vor. Den Fall einer kontinuierlichen Folge von Energiewerten können wir leicht nachträglich einschließen.

² Man kann unschwer zeigen, daß Zustände, die sich vom Wahrscheinlichsten auch nur unbeträchtlich entfernen, sofort sehr unwahrscheinlich werden.

oder, da die δw_n frei verfügbar und $\sum w_n = 1$ ist:

$$w_n = \alpha \cdot e^{-\beta E_n} = \frac{e^{-\beta E_n}}{\sum_0^{\infty} e^{-\beta E_n}} \quad (7,12)$$

Nachdem wir so die Konstante α schon festgelegt haben, müssen wir noch den Zusammenhang von β mit \bar{E} bzw. der Temperatur T ermitteln. Um letztere einzuführen, greifen wir direkt auf den 2. Hauptsatz zurück. Nach BOLTZMANN definieren wir die Entropie S durch

$$S = k \ln W \quad (7,13)$$

$k = 1,37 \cdot 10^{-16}$ erg/grad ist die bekannte BOLTZMANNsche Konstante; der \ln sorgt dafür, daß der *Multiplikation* von Wahrscheinlichkeiten die *Addition* von Entropien entspricht. Nach den vorhergehenden Formeln wird

$$S = -k N \sum w_n \ln w_n = -k N \sum w_n (\ln \alpha - \beta E_n) \quad (7,14)$$

oder wegen $\sum w_n = 1$ und $1/\alpha = \sum e^{-\beta E_n}$

$$S = k N \ln \sum e^{-\beta E_n} + k \beta \cdot E \quad (7,15)$$

Nach dem 2. Hauptsatz gilt nun

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = -k N \frac{\sum E_n e^{-\beta E_n}}{\sum e^{-\beta E_n}} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial E} + k E \frac{\partial \beta}{\partial E} + k \beta \quad (7,16)$$

oder, weil die zwei ersten Glieder rechts sich gerade wegheben:

$$\beta = \frac{1}{k T}. \quad (7,17)$$

Damit haben wir nun, um unsere Ergebnisse noch zusammenzustellen:

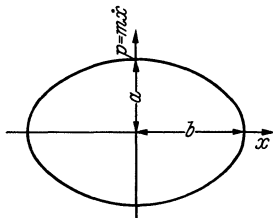


Fig. 11. Quantelung des linearen harmonischen Oszillators.

$$w_n = \frac{e^{-\frac{E_n}{kT}}}{\sum e^{-\frac{E_n}{kT}}}; \quad \bar{E} = \frac{\sum E_n e^{-\frac{E_n}{kT}}}{\sum e^{-\frac{E_n}{kT}}} \quad (7,18)$$

$$S = E/T + k N \ln \sum e^{-\frac{E_n^*}{kT}}. \quad (7,19)$$

Die immer wieder auftretende $\sum e^{-\frac{E_n}{kT}}$ bezeichnet man als die *Zustandsumme* (in der englischen Literatur: *partition function*).

Die Gleichung (7,18) wird uns später einen der Grundsteine zur Deutung der Sternspektren (Temperaturanregung!) liefern. Wir wollen aber hier unsere Betrachtungen nicht unterbrechen; vielmehr werden wir zunächst die *Energiestufen des linearen harmonischen Oszillators* berechnen und dann die Quantenstatistik auf ihn anwenden, um so schließlich zum PLANCKSchen Strahlungsgesetz zu gelangen.

Bezeichnen wir wieder den Ausschlag des Oszillators mit x und den zugehörigen Impuls mit $p = m \dot{x}$, so ist die Energie (vgl. 6,3 u. 6,4)

$$E = \frac{p^2}{2m} + 2\pi^2 m \nu_0^2 \cdot x^2 = \text{konst.} \quad (7,20)$$

x und p variieren periodisch mit der Zeit und zwar mit $1/4$ -Periode Phasenverschiebung (für $x = \text{Max.}$ ist $p = 0$ und umgekehrt). Zeichnen wir die Bewegung des Oszillators im Phasenraum (Koordinaten p und x) auf, so erhalten wir also eine Ellipse, deren Halbachsen a und b (Fig. 11) dadurch festgelegt

sind, daß in ihren Endpunkten die potentielle bzw. kinetische Energie verschwindet. Gemäß (7,20) ist daher

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{2 m E} \\ b &= \sqrt{\frac{E}{2 \pi^2 m \nu_0^2}} \end{aligned} \right\} \quad (7,21)$$

Im Sinne der Quantentheorie fordern wir nun, daß die Fläche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Bahnen im Phasenraum die Größe des PLANCKSchen Wirkungsquantums h (Dimension: Länge \times Impuls oder erg \times sek.) haben soll, oder etwas weitergehend (BOHR-SOMMERFELDSche Quantenbedingung), daß die Fläche einer Bahnellipse ein ganzzahliges Vielfaches von h sein soll, d. h.:

$$\pi a b = E/\nu = n h. \quad (7,22)$$

Die Energiestufen des linearen harmonischen Oszillators sind also¹

$$E_n = n \cdot h \nu. \quad (7,23)$$

Den Energieaustausch zwischen Oszillator und Strahlungsfeld haben wir uns jetzt so vorzustellen, daß beim *Übergang* von einem Energieniveau E_n zum nächsten E_{n-1} ein *Lichtquant* $h \nu$ emittiert wird. Trotzdem werden wir mit PLANCK die auf klassischem Weg abgeleitete Beziehung (6,23) zwischen \bar{E} und u_ν nachher in die Quantentheorie herübernehmen. Eine in sich konsequente Darstellung aller dieser Fragen gibt selbstverständlich erst die Quantenmechanik und -elektrodynamik.

Die mittlere Energie \bar{E} eines Oszillators der Frequenz ν wird nun (abgesehen von der Nullpunktenergie) bei der Temperatur T nach (7,18):

$$\bar{E} = \frac{\sum_0^{\infty} n h \nu e^{-n \cdot \frac{h \nu}{k T}}}{\sum_0^{\infty} e^{-n \cdot \frac{h \nu}{k T}}}. \quad (7,24)$$

Setzen wir $e^{-\frac{h \nu}{k T}} = x$, so wird mit Hilfe der bekannten Summenformel der geometrischen Reihe

$$\left. \begin{aligned} \sum_0^{\infty} x^n &= \frac{1}{1-x} \\ \sum_0^{\infty} n x^{n-1} &= \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{\sum n x^n}{\sum x^n} &= \frac{x(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{x-1} \end{aligned} \quad (7,25)$$

und also

$$E = \frac{h \nu}{e^{\frac{h \nu}{k T}} - 1}. \quad (7,26)$$

Andererseits gilt nach (6,23)

$$\bar{E} = \frac{c^3}{8 \pi \nu^2} \cdot u_\nu. \quad (7,27)$$

¹ Nach der Quantenmechanik käme zu E_n noch eine Nullpunktenergie $\frac{1}{2} h \nu$, die aber hier für uns ohne Bedeutung ist.

Wir erhalten durch Vergleich der beiden Ausdrücke¹ die PLANCKSche Strahlungsformel:

$$u_\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (7,28)$$

Die Strahlungsintensität selbst in der ν - bzw. λ -Skala gemessen, wird nach (1,13) und (1,16):

$$I_\nu = \frac{c}{4\pi} u_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (7,29)$$

und

$$I_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} \cdot I_\nu = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1} = \frac{2C_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}. \quad (7,30)$$

Die Strahlungskonstanten

$$C_1 = hc^2$$

und

$$c_2 = \frac{hc}{k} \quad (= 1,43 \text{ cm grad nach neueren Messungen)} \quad \left. \vphantom{c_2} \right\} \quad (7,31)$$

bestimmen zusammen die BOLTZMANNsche und PLANCKSche Konstante k bzw. h . In praxi wird jedoch meist nur c_2 direkt gemessen; statt C_1 bestimmt man lieber die Konstante σ im STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetz. Nach (7,29) wird die gesamte Ausstrahlung pro cm^2 und sek (nach allen Richtungen):

$$\pi I = \pi \int_0^\infty I_\nu d\nu = \int_0^\infty \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \cdot \frac{d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{2\pi h^4}{c^2 \cdot h^3} \cdot T^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}. \quad (7,32)$$

Der Wert des bestimmten Integrals ist

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}. \quad (7,33)$$

Andererseits soll die rechte Seite von (7,32) gleich σT^4 sein, es gilt also

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} \quad (= 5,75 \cdot 10^{-5} \text{ erg/cm}^2 \text{ sec grad}^4). \quad (7,34)$$

(7,31 und 7,34) geben zusammen die wohlbekanntesten Zahlenwerte:

$$k = 1,37 \cdot 10^{-16} \text{ erg/grad und } h = 6,55 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sek} \quad (7,35)$$

Eine Kontrolle für die Richtigkeit der PLANCKSchen Formel liefert das WIENSche Verschiebungsgesetz: Setzen wir $c_2/\lambda T = x$, so ist nach (7,30) im Maximum der Energieverteilungskurve ($dI_\lambda/d\lambda = 0$):

$$\frac{d}{dx} \frac{x^5}{e^x - 1} = \frac{5x^4}{e^x - 1} - \frac{x^5 e^x}{(e^x - 1)^2} = 0. \quad (7,36)$$

Als Wurzel der Gleichung

$$e^{-x} + x/5 - 1 = 0 \quad (7,37)$$

findet man — ausgehend von $x = 5$ — mit Hilfe der bekannten numerischen Verfahren

$$x_m = 4,9651 \quad (7,38)$$

¹ Diese Ableitung der PLANCKSchen Strahlungsformel, in der zum Teil noch Ergebnisse der klassischen Theorie mitbenutzt wurden, besitzt noch nicht die wünschenswerte innere Geschlossenheit. In Abschnitt 45 werden wir daher von einem rein quantentheoretischen Standpunkt aus nochmals auf das Problem zurückkommen.

Es ist also

$$\lambda_{\max} \cdot T = c_2/x_m = 0,288 \text{ cm} \cdot \text{grad} \quad (7,39)$$

in Übereinstimmung mit den direkten Messungen.

Von besonderem Interesse ist es noch, das Verhalten der Hohlraumstrahlung bei sehr kleinen bzw. großen Frequenzen zu diskutieren:

Für $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$ kann man die e -Funktion nach $\frac{h\nu}{kT}$ entwickeln und kommt auf das RAYLEIGH-JEANSsche Gesetz

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot kT \quad (7,40)$$

zurück. Charakteristischerweise verschwindet bei diesem Grenzübergang das PLANCKsches Wirkungsquantum vollständig. Im extrem langwelligen Gebiet, wo die Quanten $h\nu$ sehr klein werden, gehen klassische und Quantentheorie ineinander über.

Umgekehrt können wir für $\frac{h\nu}{kT} \gg 1$ (dem praktisch viel wichtigeren Fall!) die 1 im Nenner wegstreichen und erhalten das sog. WIENSche¹ Strahlungsgesetz:

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT}}. \quad (7,41)$$

Es ist nicht die Aufgabe dieses Buches, die glänzende Entwicklung, welche die Atomphysik im Anschluß an PLANCKs Entdeckung nahm, im einzelnen darzustellen. Statt dessen zur Erinnerung nur einige Daten:

1905 EINSTEINs Theorie des Photoeffektes; Lichtquanten.

1913 BOHRsche Theorie des Atombaus; Spektren.

1925 Wellen- und Quantenmechanik (DE BROGLIE-SCHRÖDINGER; HEISENBERG-DIRAC).

1927 Klärung der Kompetenzfrage von Wellen- und Partikelbild durch HEISENBERG's Ungenauigkeitsrelation.

Diese Dinge sind heute schon in hohem Maße (erfahrungsgemäß viel mehr, als die elementaren Grundlagen der Strahlungstheorie) Gemeingut der Physiker und Astrophysiker. Dem Anfänger stehen eine Reihe ausgezeichnete Lehrbücher zur Verfügung. Wir werden im folgenden daher nur auf einige astrophysikalisch besonders wichtige Teilgebiete der Quantentheorie zurückkommen, die sonst schwer zugänglich sind.

8. Herstellung der Hohlraumstrahlung. Messung der Strahlungskonstanten σ und e_2 .

Die Erzeugung „schwarzer“ Strahlung mit Hilfe eines nahezu geschlossenen Hohlraumes wurde zuerst 1895 von W. WIEN und LUMMER einerseits, ST. JOHN andererseits realisiert.

Zur Herstellung der gewünschten Temperatur dienen bei niedrigen Temperaturen Flüssigkeitsbäder. Bis $\sim 1500^\circ\text{C}$ kommt man nach LUMMER und KURLBAUM mit einem Platin-Widerstandsofen (dünnes, elektrisch geheiztes Platinrohr auf Porzellankörper mit passend geformten Kammern). Bis $\sim 3000^\circ\text{C}$ führt nach KING ein elektrisch geheiztes Kohlerohr (KINGscher Ofen).

Die Methoden zur σ -Bestimmung können nun in zwei Gruppen eingeteilt werden: Es wird entweder der Strahlungssender (A) oder der Empfänger (B)

¹ W. WIEN hat die Form des Gesetzes aus (5,9) in Anlehnung an die damals vorliegenden Beobachtungen erschlossen.

als Hohlraum ausgebildet. Anordnungen mit zwei Hohlräumen konnten noch nicht zur gleichen Genauigkeit entwickelt werden.

A. Der Empfänger (Fig. 12) erhält bei geöffneter Klappe pro sek die Zu- strahlung nach (1,4):

$$Q = A \cdot \frac{F_1 F_2}{r^2} \cdot \frac{\sigma}{\pi} \cdot T^4. \quad (8,1)$$

Schließt man die Klappe (Temperatur T_0) und heizt statt dessen den Empfänger elektrisch (Strom i , Spannung am Heizkörper e), so daß er dieselbe Energiemenge pro sek erhält (gleiche Temperatureinstellung!), so ist offenbar:

$$Q = i \cdot e + A \cdot \frac{F_1 F_2}{r^2} \cdot \frac{\sigma}{\pi} T_0^4. \quad (8,2)$$

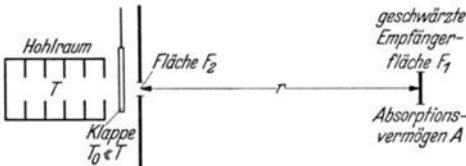


Fig. 12. σ -Bestimmung.

Um σ zu ermitteln, muß nur noch das Absorptionsvermögen A (in praxi $\sim 0,99$; Schwärzungskorrektur) des Empfängers bestimmt werden. Dies geschieht meist, indem man — gemäß dem KIRCHHOFFSchen Satz — bei

derselben Temperatur sein Emissionsvermögen mit dem eines gleich temperierten schwarzen Körpers vergleicht. Besonders zu achten ist bei den ganzen Messungen auf die Absorption langwelliger Strahlung infolge des (wechselnden!) Wasserdampf- und Kohlensäuregehaltes der Luft.

Bei der Konstruktion der Empfänger ist wesentlich, daß die elektrische Heizung in genau derselben Weise wirkt, wie die Erwärmung durch Strahlung. Die vollkommenste Lösung dieses Problems wurde im Anschluß an solare

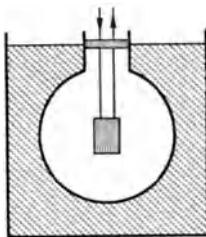


Fig. 13.
 σ -Bestimmung nach
SHAKESPEAR-WESTPHAL.

Strahlungsmessungen von K. ANGSTRÖM (s. unten) von PASCHEN angegeben und durch GERLACH und C. MÜLLER weiterentwickelt: Ein dünner geschwärzter Metallstreifen dient als Strahlungsempfänger und elektrischer Heizkörper. Das Temperaturmeßgerät (Thermosäule oder Bolometer) befindet sich, durch eine dünne Luftschicht getrennt, dahinter, so daß störende Temperaturunterschiede innerhalb des Streifens ausgeglichen werden.

B. Ein elektrischer Heizkörper (Fig. 13), dessen Temperatur auf dem Wert T gehalten wird, kann mit einer blanken (Absorptionsvermögen $A_1 < 1$) oder geschwärzten (Absorptionsvermögen $A_2 \approx 1$) Hülle der Oberfläche F umkleidet werden. Seine Energieabgabe erfolgt durch Leitung und Konvektion (durch Evakuieren möglichst herabgesetzt!) — Q — und durch Ausstrahlung an den umgebenden geschwärzten Hohlraum der konstanten Temperatur T_0 (z. B. Eispackung). Die entsprechende Energiezufuhr rührt von der elektrischen Heizung und von der Ausstrahlung des Hohlraumes. Es ist also:

	Ausstrahlung	Konvektion Leitung	Elektrische Heizung	Einstrahlung	
Blanker Heizkörper:	$A_1 \cdot F \cdot \sigma T^4$	$+ Q$	$= i_1 e_1$	$+ A_1 F \cdot \sigma T_0^4$	(8,3)
Geschwärzter Heizkörper:	$A_2 \cdot F \cdot \sigma T^4$	$+ Q$	$= i_2 e_2$	$+ A_2 F \cdot \sigma T_0^4$	

Q wird — wie man sieht — durch Differenzbildung eliminiert, A_1 und A_2 wie unter A. bestimmt. H_2O - und CO_2 -Korrekturen fallen weg.

Nun zur Bestimmung der zweiten Strahlungskonstante $c_2 = \frac{hc}{k}$! Zunächst muß die Strahlung mit Hilfe eines Monochromators (Streulicht!) spektral zerlegt werden. Dann bieten sich zwei Möglichkeiten:

A. *Isochromatenmethode*. Für eine bestimmte Wellenlänge λ wird I_λ als Funktion von T ermittelt. Im Bereich des WIENSchen Gesetzes ist

$$\ln I_\lambda = \text{konst.} - \frac{c_2}{\lambda T}. \quad (8,4)$$

Mißt man die Strahlungsintensität für die Wellenlänge λ bei zwei Temperaturen T und T' , so ist

$$\ln \frac{I_\lambda}{I'_\lambda} = -\frac{c_2}{\lambda} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'} \right). \quad (8,5)$$

Da nur das *Verhältnis* I_λ/I'_λ eingeht, braucht man die Energieverluste durch Absorption, Reflexion usw. in der Apparatur nicht zu kennen.

B. *Isothermenmethode*. T wird konstant gehalten und I_λ als Funktion von λ gemessen. Hier muß die Gesamtdurchlässigkeit der Apparatur in Abhängigkeit von λ gesondert gemessen werden, was sehr schwierig ist. Die Methode *B* ist daher nur zur direkten Prüfung der PLANCKSchen Strahlungsformel benützt worden. Für Präzisionsmessungen von c_2 kommt allein die Isochromatenmethode in Frage.

Die *Temperaturmessung* hat bei allen Bestimmungen der Strahlungskonstanten — direkt oder indirekt (Thermoelement, Schmelzpunkte) — die Bedeutung eines Anschlusses an die thermodynamische Temperaturskala (Gasthermometer). Von einer *Prüfung* der Strahlungsgesetze kann man nur sprechen bis zum höchsten gasthermometrisch erreichten Punkt, dem *Pd*-Schmelzpunkt mit $\sim 1822^\circ$ K. Darüber hinaus dienen die Strahlungsgesetze selbst zur *Definition* der Temperaturskala.

In astrophysikalischer Hinsicht wird es besonders interessant sein, die in diesem Abschnitt wenigstens in ihren Grundzügen charakterisierten Methoden der σ - und c_2 -Bestimmung zu vergleichen mit den in der Astronomie entwickelten Verfahren zur Strahlungsmessung an Sonne und Sternen. Eine Übersicht über diese Messungen und ihre *vorläufige* Deutung an Hand des PLANCKSchen Gesetzes zu geben, ist das Ziel des folgenden Kapitels.

II. Kapitel.

Anwendung des PLANCKSchen Gesetzes auf die Strahlung der Sonne. Strahlungsmessungen.

9. Grundprinzipien. Absorption in der Erdatmosphäre.

Um die Temperatur der Sonne zu bestimmen, liegt es nahe, die für den schwarzen Körper gültigen Strahlungsgesetze versuchsweise auf die Sonnenoberfläche anzuwenden. Zuvor aber muß die Frage geklärt werden, mit welcher Annäherung die Sonne sich tatsächlich wie ein schwarzer Strahler verhält.

Wie wir sahen, ist die Hohlraumstrahlung *isotrop*, d. h. ihre Intensität I_p unabhängig von der Richtung, in der sie das strahlende Gebilde verläßt (LAMBERTSches Gesetz). Eine Sonne, die wie ein schwarzer Körper strahlte, würde daher als gleichmäßig helle Scheibe erscheinen, während bekanntlich die Gesamtstrahlungsintensität beim Übergang von der Mitte zum Rande der Sonnenscheibe (wir sagen im folgenden kurz: von \odot -Mitte nach \odot -Rand) etwa im Verhältnis 1:0,4, d. h. um eine Größenklasse, abnimmt. Schon qualitative Betrachtung zeigt also, daß die Sonnenstrahlung beträchtlich von der eines schwarzen Körpers abweicht. Trotzdem wird es interessant sein, aus der Gesamtintensität und

spektralen Energieverteilung der Sonnenstrahlung mit Hilfe des STEFAN-BOLTZMANNschen bzw. PLANCKschen Strahlungsgesetzes versuchsweise eine Art mittlere Temperatur der Sonnenatmosphäre zu berechnen. Wenn die so bestimmten Werte nur wenig voneinander abweichen, so dürfen wir annehmen, daß ihnen einige physikalische Bedeutung zukommt. Unsere Betrachtungen über die Richtungsverteilung der Sonnenstrahlung lassen aber erwarten, daß wir auf diesem Wege nicht sehr weit kommen werden. Wir wollen daher vorerst den Temperaturbegriff möglichst beiseite lassen und die Strahlungsmessungen an der Sonne (unter Beiseitlassung experimenteller Einzelheiten so darstellen, daß ihre allgemeinen Prinzipien deutlich hervortreten und ihre Ergebnisse später auch im weiteren Rahmen der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes diskutiert werden können.

Zunächst seien, auch mit Rücksicht auf die folgenden Kapitel, einige Zahlenangaben über Größe, Masse usw. der Sonne zusammengestellt:

Scheinbarer Sonnendurchmesser (Messungen von AUWERS und der Sternwarte Greenwich):

$31'59'',3 = 1919'',3 = 0,009305$ rad. (Unsicherheit $\sim 1''$). Faustregel: Pro Meter Objektivbrennweite 1 cm Sonnenbild-Durchmesser.

Sonnenparallaxe (Äquatorialer Radius der Erde gesehen aus der mittleren Entfernung Erde-Sonne): $8'',80$.

Mittlere Entfernung Erde—Sonne (astr. Einheit):

$$1,4945 \cdot 10^8 \text{ km} = 1,4945 \cdot 10^{13} \text{ cm.}$$

Sonnendurchmesser $2R = 109,1$ Erddurchmesser = 1390600 km. Sonnenradius $R = 695300$ km = $6,953 \cdot 10^{10}$ cm. Auf der Sonnenscheibe entspricht $1'' \sim 725$ km; die kleinsten noch erkennbaren Objekte auf der Sonne haben also bereits einige 100 km Durchmesser.

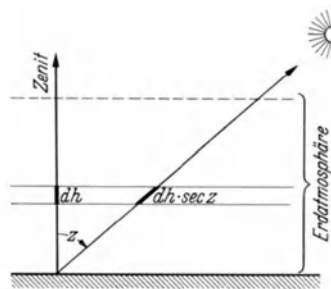


Fig. 14. Extinktionsbestimmung.

Sonnenmasse $M = 331950$ Erdmassen = $1,983 \cdot 10^{33}$ g.

Schwerebeschleunigung an der \odot -Oberfläche $g = 27,9 \times$ terrestrische Schwerebeschleunigung,

$$g = 2,736 \cdot 10^4 \text{ cm sek}^{-2}.$$

Mittlere Dichte der Sonne: $1,41 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Um die *Strahlung der Sonne* — wir wollen uns zunächst auf keinerlei theoretische Erörterungen einlassen — vollständig beschreiben zu können, müssen wir messen:

A. Die Energieverteilung $I_\lambda(\lambda)$ (relativ *und* absolut); vgl. die Definitionsgleichung 1,1) im Spektrum entweder der gesamten Sonnenstrahlung oder der Strahlung einer bestimmten Stelle der Sonnenscheibe.

B. Den Helligkeitsabfall von Sonnenmitte nach Sonnenrand in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ ; d. h. $I_\lambda(\vartheta)$ (Definition von ϑ vgl. Fig. 4).

Durch diese Messungen (oder eine äquivalente Kombination anderer) ist die Sonnenstrahlung in jeder Hinsicht beschrieben, alle weiteren Größen, wie z. B. die gesamte Ausstrahlung der Sonne pro Tag, können daraus berechnet werden.

Die Hauptschwierigkeit der unter A. zusammengefaßten Strahlungsmessungen liegt in der Berücksichtigung der Absorption der Strahlung in der Erdatmosphäre (Extinktion). Sie geschieht für Strahlung *einer bestimmten* Wellenlänge λ durch Beobachtung unter verschiedenen Zenitdistanzen z (Fig. 14): Legt in einer dünnen Schicht der Erdatmosphäre ein vom Zenit kommender Strahl den Weg dh zurück, so kommt auf einen unter der Zenitdistanz z eintreffenden (Sonnen-)

Strahl der Weg $dh/\cos z = dh \cdot \sec z$ und nach (2,6) ist die *extraterrestrische* Strahlungsintensität $I_{\lambda,0}$ mit der unter der Zenitdistanz z *am Boden ankommenden* I_{λ} verknüpft durch die Gleichung:

$$I_{\lambda} = I_{\lambda,0} e^{-\kappa(\lambda) \cdot H \cdot \sec z} \quad (9,1)$$

wobei wir gleich statt $\int \kappa(\lambda, h) dh$ kurz geschrieben haben $\kappa(\lambda) \cdot H$: $\kappa(\lambda)$ ist der mittlere Absorptionskoeffizient der Erdatmosphäre bei der Wellenlänge λ , H ihre äquivalente Höhe. Es kommt offenbar nur auf die *optische Dicke* $\kappa(\lambda) \cdot H$ der Erdatmosphäre, *nicht* aber auf ihre Schichtung an, solange wir die Krümmung der Erdoberfläche vernachlässigen können (d. h. nicht zu tief am Horizont beobachten). Trägt man die Meßwerte von $\log I_{\lambda}$ in Abhängigkeit von $\sec z$ auf, so muß sich nach (9,1) eine Gerade ergeben, deren Extrapolation auf $\sec z = 0$ die extraterrestrische Strahlungsintensität gibt. Für die spektral nicht zerlegte Gesamtstrahlung würde das entsprechende Diagramm eine *gekrümmte* Linie liefern; eine *direkte* Extrapolation der Gesamtstrahlung auf „Atmosphären-dicke Null“ ist *nicht* möglich. Aus demselben Grund gibt direkte Extrapolation von Gesamtstrahlungsmessungen, die in verschiedenen Höhen H (Berge, Ballon) gemacht sind, auf $\lim H \rightarrow 0$ nur sehr unsichere Ergebnisse.

In praxi hat sich nun — teilweise mitbestimmt durch die Bedürfnisse der Meteorologie — die Gewohnheit herausgebildet¹, die unter A. charakterisierten Messungen in zwei Schritten auszuführen:

a) *Messung der pro Minute auf eine senkrecht zu den Sonnenstrahlen stehende Fläche von 1 cm² auffallenden Strahlungsenergie* (reduziert auf mittleren Abstand Erde-Sonne) *in kleinen Kalorien*. Abgesehen von der historisch bedingten Wahl der Einheiten handelt es sich also um die Gesamtstrahlungsintensität, die wir in diesen Einheiten bei der Zenitdistanz z der Sonne gemessen mit $S(z)$ bezeichnen. Die entsprechende Strahlungsintensität pro Wellenlängenbereich 1 sei $S_{\lambda}(z)$; außerhalb der Erdatmosphäre S_{λ} . Dann ist nach (9,1)

$$S_{\lambda}(z) = S_{\lambda} e^{-\kappa(\lambda) \cdot H \sec z} \quad (9,2)$$

und

$$S(z) = \int_0^{\infty} S_{\lambda} e^{-\kappa(\lambda) \cdot H \sec z} d\lambda. \quad (9,3)$$

Die Größe $S(z)$, auf den Luftweg Null extrapoliert, bezeichnet man als die *Solarkonstante* S (= Gesamtstrahlungsintensität außerhalb der Erdatmosphäre, in cal/cm² min gemessen). Es gilt also:

$$\lim_{z=0} S(z) = S = \int_0^{\infty} S_{\lambda} d\lambda. \quad (9,4)$$

Wie aber schon bemerkt wurde, ist eine direkte Extrapolation von $S(z)$ auf Atmosphäre Null nicht möglich, man braucht vielmehr noch

b) *Relativmessungen der spektralen Energieverteilung*. Nach (9,2) kann man aus den $S_{\lambda}(z)$ ohne weiteres die extraterrestrische Strahlungsintensität S_{λ} durch Extrapolation gewinnen. Die Absolutwerte der $S_{\lambda}(z)$ sind dann festgelegt durch die Forderung

$$S(z) = \int_0^{\infty} S_{\lambda}(z) d\lambda. \quad (9,5)$$

Nach Extrapolation der $S_{\lambda}(z)$ auf Atmosphärendicke Null gibt (9,4) die Solarkonstante.

Die hier besprochenen Messungen bezogen sich noch auf die Strahlung der ganzen Sonnenscheibe, also genauer gesagt (nach 1,8 und 1,9) den *Strahlungsstrom*. Auf die Strahlungsintensität $I_{\nu}(\vartheta)$ in Abhängigkeit vom Austrittswinkel ϑ

¹ Die Frage, inwiefern sie heute noch sachlich begründet ist, werden wir später erörtern.

kann man leicht übergehen mit Hilfe der unter B. schon besprochenen relativen Messungen des Mitte-Rand-Kontrastes.

Endlich ist noch zu beachten, daß das Sonnenspektrum durchsetzt wird von vielen Absorptionslinien, den FRAUNHOFERSchen Linien. Man muß also von vornherein sich darüber im klaren sein, ob man die Intensität usw. des *ungestörten* kontinuierlichen Spektrums *zwischen den Linien* messen will oder ob man die Linien wegmitteln, sozusagen verschmieren will, wie das ein Spektralapparat mit kleinem Auflösungsvermögen ja von selbst tut.

Nachdem wir klare Begriffe geschaffen haben, die (NB.!) noch keinerlei Theorie voraussetzen, können wir uns den eigentlichen Messungen zuwenden.

10. Messung der Gesamtstrahlung der Sonne.

Zunächst die Messung der *Gesamtstrahlung* mit dem Ziel der Bestimmung der *Solarkonstante*: Man erkennt sofort die Analogie zur σ -Bestimmung (Abschn. 8). Würde die Sonne wie ein schwarzer Körper strahlen, so könnte man ja aus der Solarkonstanten mit Hilfe des STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetzes sofort „die Sonnentemperatur“ berechnen.

Die ersten Versuche zur Messung der Gesamtintensität der Sonnenstrahlung gehen auf S. S. POUILLET (1837) zurück. Sein *Aktinometer* bestand aus einer wassergefüllten Dose, deren aus geschwärztem Silberblech bestehender Boden der Sonne zugekehrt wird. Die — nach Zulassung der Sonnenstrahlung — mit einem Thermometer gemessene Temperatursteigerung pro min ergibt bei bekannter Wärmekapazität des Apparates direkt $S(z)$. Durch *direkte* Extrapolation auf Atmosphärendicke Null (deren Unkorrektheit erst nachträglich RADAU bemerkte) erhielt POUILLET den immerhin größenordnungsmäßig richtigen Wert der Solarkonstante $S = 1,76 \text{ cal/cm}^2 \cdot \text{min}$. Eine genaue Korrektur für Abkühlung durch Rückstrahlung, Konvektion u. dgl. ist bei dem POUILLETschen Aktinometer kaum möglich.

Einen wesentlichen Fortschritt (vgl. auch Abschn. 8 unter A.) brachte (~ 1893) das *Kompensationspyrheliometer* von K. ANGSTRÖM [209]. Es enthält zwei möglichst gleiche, auf einer Seite geschwärzte Manganstreifen, deren einer der Sonnenstrahlung ausgesetzt wird, während der andere elektrisch so geheizt wird, daß beide Streifen auf gleiche Temperatur kommen. (Dann Messung mit Vertauschung der Streifen). Zur Feststellung der Temperaturgleichheit dient ein Thermoelement, dessen Lötstellen an oder besser dicht neben den Manganstreifen angebracht sind. Die Fehlerquellen des Instrumentes wurden schon im Zusammenhang mit der σ -Bestimmung diskutiert: Notwendigkeit einer besonderen Schwärzungskorrektur, Verschiedenheit der elektrischen bzw. Strahlungserwärmung (Volum bzw. Oberfläche!); und Randeffect (der Streifenrand wird durch den Strom erwärmt, nicht durch die Strahlung). Die Weiterbildung des *Kompensationspyrheliometers* ging natürlich Hand in Hand mit der Verbesserung der σ -Messungen; die verbesserten ANGSTRÖM-Pyrheliometer sind auch heute noch durchaus „konkurrenzfähig“. Die *Meßergebnisse* werden wir nachher besprechen.

Eine entscheidende Förderung unseres Problems bedeutete es, als 1903 C. G. ABBOT [207] zusammen mit FOWLE und ALDRICH und im Anschluß an die Vorarbeiten LANGLEYs [217] die Smithsonian Institution (Washington) in den Dienst der Sonnenstrahlungsmessung stellte. ABBOTs Ziel war ein doppeltes: einmal den *Absolutbetrag* der *Solarkonstante* und die spektrale *Energieverteilung* möglichst genau zu bestimmen und daneben nach zeitlichen Schwankungen der Sonnenstrahlung zu suchen. Auf dieses zweite Problem werden wir später zurückkommen; es sei jedoch schon hier bemerkt, daß diese Schwankungen

— falls sie überhaupt reell sind — so klein bleiben ($\sim \pm 0,3\%$), daß ihre astrophysikalische Bedeutung nicht sehr groß ist¹.

In meßtechnischer Hinsicht ist der Grundgedanke ABBOTS, den Empfänger als Hohlraum auszubilden und ihn gleichzeitig als Kalorimetergefäß zu benutzen. Die Messung der pro min zugestrahlten Wärmeenergie geschah ursprünglich nach den gewöhnlichen Kalorimetermethoden, dann — schon wesentlich genauer — durch Vergleich mit einer elektrischen Heizung. Die neuesten Instrumente benutzen zwei solche — möglichst gleiche — Anordnungen *differenziell* in derselben Weise wie die zwei Manganinstreifen des ANGSTRÖM-Pyrheliometers.

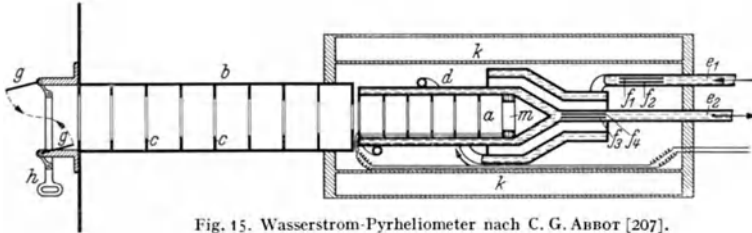


Fig. 15. Wasserstrom-Pyrheliometer nach C. G. ABBOT [207].

Die Tendenz der ganzen Entwicklung ist — wie bei jeder Meßtechnik — das Verfahren möglichst weitgehend *differenziell* zu gestalten.

Hinsichtlich der Messung der dem Empfängerhohlraum pro min zugestrahlten Energie verwendet ABBOT wiederum zwei Konstruktionen (bez. Details muß natürlich auf die Originalabhandlungen verwiesen werden):

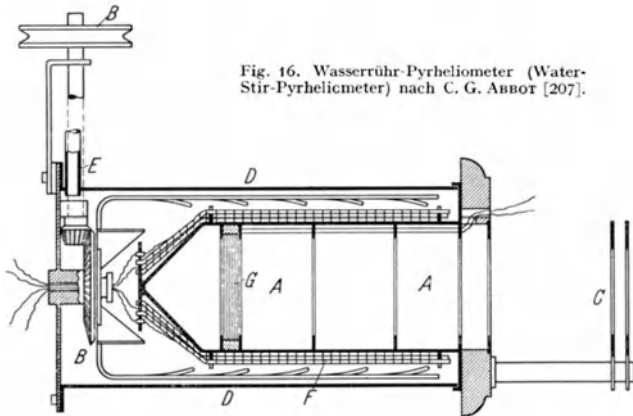


Fig. 16. Wasserrühr-Pyrheliometer (Water-Stir-Pyrheliometer) nach C. G. ABBOT [207].

a) Das *Wasserstrom-Pyrheliometer* (Water-Flow-Pyrheliometer)². Der geschwärmte Empfängerhohlraum *a* (Fig. 15), dessen Einlaß durch Blenden *c* in ähnlicher Weise begrenzt wird wie der Strahlenaustritt beim LUMMER-KURLBAUMSchen Hohlraumstrahler, ist umgeben von einem Mantel, durch den Wasser mit genau konstant gehaltener Geschwindigkeit strömt (MARIOTTESche Flasche). Die Temperaturdifferenz zwischen Ein- und Austrittsstelle wird mit Bolometer f_1, f_2 , bzw. f_3, f_4 oder Thermoelement gemessen. Die durch die Sonnenstrahlung hervorgerufene Temperaturdifferenz wird nachher mit Hilfe einer elektrischen Heizspule *m* dupliziert.

b) Beim *Wasserrühr-Pyrheliometer* (Water-Stir-Pyrheliometer)³ ist (Fig. 16) der Empfängerhohlraum *A* von einer festen Wassermenge umgeben. Der

¹ Veränderliche Sterne aller Art sind ja in reicher Auswahl bekannt.

² *Smithson Ann.* **2**, 39 (1908).

³ *Smithson Ann.* **3**, 64 (1913).

Temperatenausgleich wird befördert durch ein Rührwerk *B*, *E*. Die elektrische Vergleichsheizung erfolgt wieder durch die Spule *G*.

Beide Instrumente sind in neuerer Zeit zu rein *differentiell* arbeitenden *Zwillinginstrumenten* ausgestaltet worden:

a) Das *Wasserstrom-Pyrheliometer* durch SHULGIN, ABBOT und ALDRICH (Standard Water-Flow-Pyrheliometer Nr. 5) [208]. Zwei Kammern sind an dieselbe „Wasserleitung“ angeschlossen; die eine wird durch die Sonnenstrahlung, die andere elektrisch erwärmt (dann Messung mit vertauschten Rollen). Schwankungen in der Strömungsgeschwindigkeit und Temperatur des Wassers werden so weitgehend eliminiert.

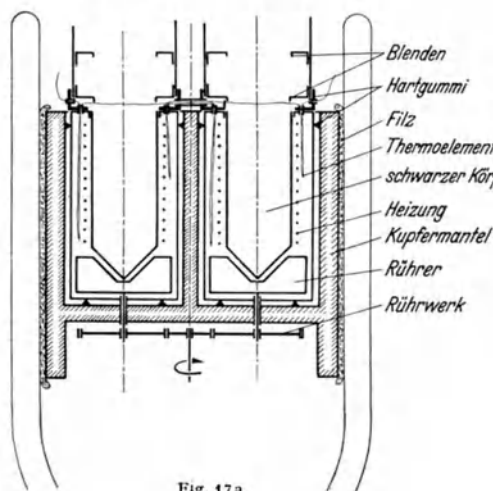


Fig. 17a.

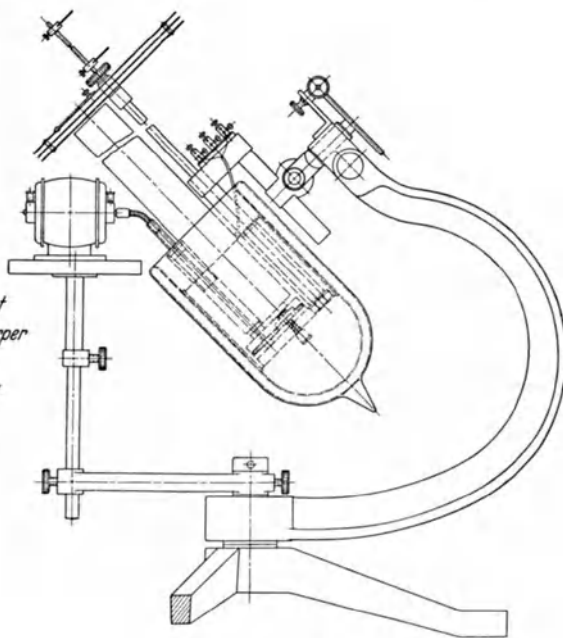


Fig. 17b.

Fig. 17a und b. Zwilling-Wasserrühr-Pyrheliometer nach C. TINGWALDT [232].

b) Das *Wasserrühr-Pyrheliometer* hat neuerdings C. TINGWALDT (Phys.-Techn. Reichsanstalt) [232] in derselben Weise weitergebildet (Fig. 17a und b). Die zwei Kalorimetergefäße mit Heizwicklung und Rührwerk sitzen thermisch isoliert in einem Kupfermantel, der für gleiche Umgebungstemperatur sorgt. Das ganze Instrument steckt zur Erzielung guten Wärmeschutzes in einem Dewargefäß.

Allen diesen Instrumenten haftet noch ein Übelstand an: In den Empfängerhohlraum kommt nicht nur die Strahlung der Sonne selbst, sondern auch noch die Himmelstrahlung der umgebenden Zone. Solange man die Begrenzung des „erfaßten“ Raumwinkels durch Diaphragmen herstellt, muß man diesen Übelstand in Kauf nehmen. ABBOT¹ hat neuerdings Versuche mit einem Zwillingpyrheliometer² gemacht, bei dem eine optische Abbildung der Sonne durch Quarzlinsen benutzt wird. Die Absorption in diesen Linsen muß gesondert bestimmt werden. Die Angaben des Instrumentes können mit denen der bisher besprochenen nur verglichen werden, wenn die spektrale Zusammensetzung der Strahlung bekannt ist.

¹ Smithson Ann. **5**, 89 (1932).

² Zur Feststellung der Temperaturgleichheit dient ein Differentialluftthermometer.

Im Zusammenhang damit müßte die Frage erörtert werden, wie die Winkelverteilung und spektrale Zusammensetzung des Streulichtes in unmittelbarer Nähe der Sonnenscheibe mit der Sonnenhöhe und den meteorologischen Verhältnissen variiert. Über diese — anscheinend sehr komplexe — Frage liegen jedoch noch kaum irgendwelche verlässlichen Messungen vor¹.

Nun zum Vergleich der verschiedenen Instrumente, d. h. der Festlegung einer absoluten Skala für Sonnenstrahlungsmessungen! Als ABBOT 1913 auf Grund seiner Messungen mit dem Wasserstrom- und Rührpyrheliometer die „Smithsonian-Revised-Skala“ (1913) aufstellte, lagen seine Meßwerte 3,9% über den von ANGSTRÖM mit seinem Kompensationspyrheliometer gewonnenen². Letztere sind wegen der „Randeffektkorrektur“ sicher zu niedrig; nach der neuesten Bestimmung von W. MARTEN [220] um 2,8%. Das TINGWALDTsche Zwillingrührpyrheliometer liefert nach vorläufigen Messungen [232] Werte, die 1,8% über den unkorrigierten ANGSTRÖMSchen liegen; eine direkte Vergleichung mit den ABBOTSchen Instrumenten wurde noch nicht vorgenommen. Andererseits ergeben Messungen, die ABBOT mit dem neuen Zwillingstrompyrheliometer [208] ausgeführt hat, Werte, die 2,5% unter der Smithsonian-Revised-Skala liegen. Der Zusammenstellung in Fig. 18 können wir schon mit ziemlicher Sicherheit entnehmen, daß die Smithsonian-Revised-Skala von 1913 um $\sim 2\%$ zu hoch liegt³.

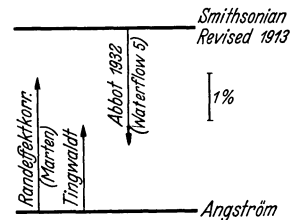


Fig. 18. Skalenvergleich der Pyrheliometermessungen.

11. Messung der Energieverteilung im Spektrum der gesamten Sonnenscheibe und der Mitte der Sonnenscheibe.

Ehe wir zu dem Zahlenwert der *Solarkonstante* gelangen können, müssen wir uns dem zweiten Hauptproblem (b) zuwenden, der *relativen Messung der Intensitätsverteilung im Sonnenspektrum*. Die wichtigsten Messungen wurden auch hier im Anschluß an LANGLEYS bahnbrechende Arbeiten (~ 1880) von ABBOT [207] (Smithsonian Institution) und WILSING [233, 234] (Potsdam) ausgeführt. Die seit LANGLEYS Untersuchungen im Prinzip beibehaltene Anordnung ist folgende: Durch einen Zölostaten (die oberflächenversilberten Spiegel ersetzt ABBOT zur Erzielung besserer Konstanz des Reflexionsvermögens durch Stellite-Edelstahl-Spiegel) wird das Sonnenlicht in das *Spektrobolometer* geworfen⁴. Dieses besteht im Prinzip aus einem Spektrographen (Monochromator) mit einfacher oder — zur Schwächung des Streulichtes anderer Wellenlängen — doppelter Zerlegung (Glas, Quarz bzw. Steinsalz für immer größere Wellenlängen) und einem Bolometer als nichtselektives Strahlungsmeßgerät. Letzteres besteht aus zwei gleichen, geschwärzten Pt-Streifen⁵, die in eine Brückenschaltung mit sehr empfindlichem Galvanometer eingefügt sind. Bei Bestrahlung eines Streifens

¹ Vgl. ABBOT: *Smithson Ann.* **3**, Kap. 6 (1913). Ferner E. PETTIT [228], B. LYOT [219], H. KIENLE [216], T. EINARSSON [211].

² *Smithson Ann.* **3**, 72 (1913).

³ TINGWALDT rechnet l. c. mit einer Differenz Smiths.Rev.-Angström = 3,5% statt unserer 3,9%. Der Ursprung dieses — praktisch belanglosen — Unterschiedes ist mir nicht ersichtlich.

⁴ Eine eigentliche Abbildung findet dabei nicht statt, man will ja auch die Intensitätsverteilung der von der *gesamten* Sonnenscheibe emittierten Strahlung messen („Integrierte Sonnenstrahlung“). Dies ist beim Vergleich mit anderen Messungen zu beachten.

⁵ Zur Erhöhung der Empfindlichkeit im Vakuum (Vakuumbolometer); Wegfall der Abkühlung durch Leitung und Konvektion der Luft.

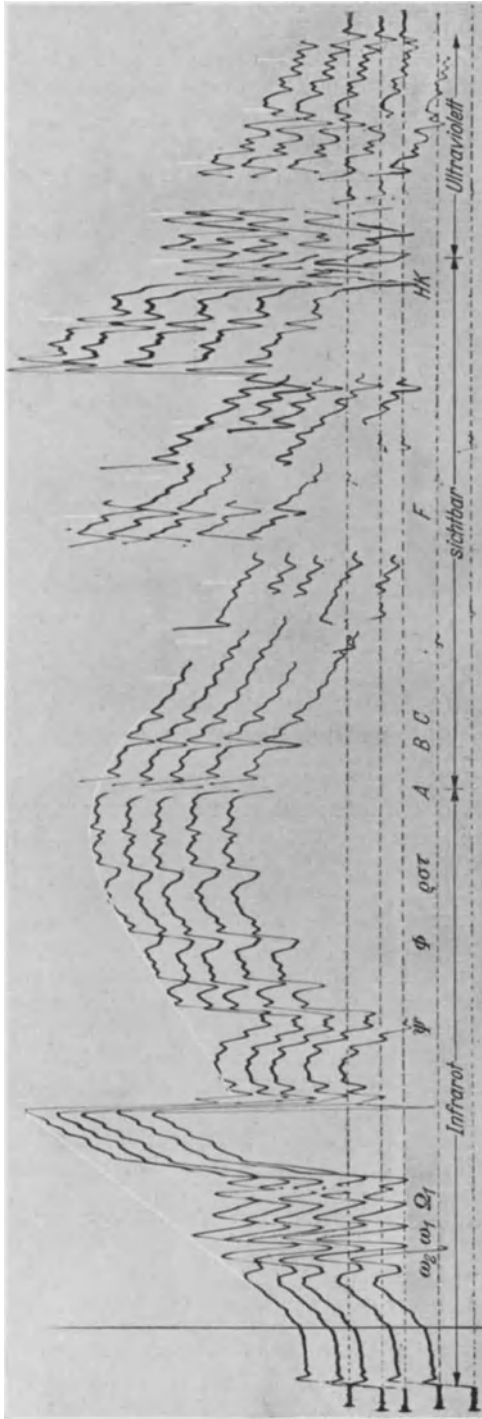


Fig. 19. *Photographenkurven* nach C. G. ABBOT (SMITHS. ANN. V.) Station Montezuma; trockener Tag; schwache Wasserdampfbanden. Die wichtigsten Banden und Linien sind bezeichnet. Die weißen Marken bestimmen die geglätteten Kurven und Meßpunkte. An einigen Stellen wurde die Skala während der Registrierung in bestimmter Weise verändert.

ändert sich seine Temperatur proportional der pro Zeiteinheit auffallenden Energie, das Galvanometer gibt einen entsprechenden Ausschlag. Dieser wird in Abhängigkeit von der Prismenstellung (bekannte Funktion der Wellenlänge) photographisch registriert (Fig. 19).

Die Hauptschwierigkeit solcher Messungen liegt in der Ermittlung der Lichtverluste im Zölostaten und Spektralapparat. Sie geschieht unter Verwendung zweier Hilfszölostaten Spiegel (die — nun meßbar! — dieselben Reflexionsverluste verursachen, wie die eigentlichen Zölostaten Spiegel) und eines besonderen Hilfsspektroskops, das in entsprechender Weise in den Strahlengang eingeschaltet werden kann. J. WILSING [234, 235] hat bei seinen Messungen zwischen λ 4510 und 21280 die von der Wellenlängenabhängigkeit der Dispersion, Absorption usw. herrührenden Korrekturen zusammen dadurch eliminiert, daß er zum Vergleich die Energieverteilung im Spektrum eines Hohlraumstrahlers (HERÄUSCHER Platinwiderstandsofen) von 1560° K ausmaß. Für den Wellenlängenbereich λ 4000 bis 5770 Å hatten WILSING [233] sowie MÜLLER und KRON [226] entsprechende Messungen schon früher auf photographischem Wege durchgeführt. Um „integrierte“ Sonnenstrahlung zu bekommen und gleichzeitig ihre Intensität der des schwarzen Körpers anzugleichen, streuten sie die Sonnenstrahlung vor dem Eintritt in den Spektrographen an einer Kreidplatte, deren Reflexionsvermögen in Abhängigkeit von der Wellenlänge bekannt war. Das

Messungsverfahren WILSINGs läuft im Prinzip — ganz verschieden von ABBOT — auf einen *Anschluß* der *Sonnenstrahlung* an den *schwarzen Körper* heraus.

Das spektrale Trennungsvermögen der Apparaturen war bei ABBOT und WILSING¹ so klein, daß die Mehrzahl der FRAUNHOFERSCHEN Linien (mit Ausnahme etwa von H und K und einigen starken Liniengruppen) völlig verwischt sind. Auf Reduktion und Ergebnisse der Messungen werden wir im nächsten Abschnitt zurückkommen (vgl. Fig. 20a).

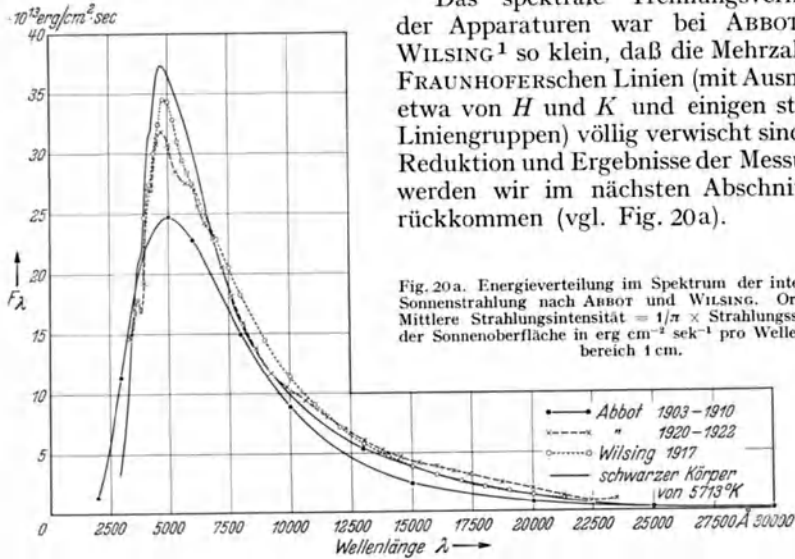


Fig. 20a. Energieverteilung im Spektrum der integrierten Sonnenstrahlung nach ABBOT und WILSING. Ordinaten: Mittlere Strahlungsintensität = $1/\pi \times$ Strahlungsstrom an der Sonnenoberfläche in $\text{erg cm}^{-2} \text{sek}^{-1}$ pro Wellenlängenbereich 1 cm.

Neuerdings hat E. PETTIT [228] die Energieverteilung von λ 2920 bis λ 7000 mit Quarzdoppelmonochromator und Thermoelement bzw. — für $\lambda < 3200$ bis 3100 Å, je nach Sonnenhöhe — einer gasgefüllten Natrium-Photozelle gemessen. Die Ergebnisse für integrierte Sonnenstrahlung sind in Fig. 20b dargestellt. Bei der einen Meßreihe ●●● (1931 Mai 19, 20, 23) wurde die Breite des 1. Monochromatorspaltes konstant gehalten und die der anderen Spalte proportional der Dispersion eingestellt, so daß an den Messungen keine Korrektur für variable Dispersion mehr anzubringen war. Bei der anderen Reihe ■■■ (1931 Mai 16, 17, 18) wurden die Monochromatorspalte so eingestellt, daß das Spektrum in seiner ganzen Ausdehnung dieselbe *Reinheit* hatte. Zum

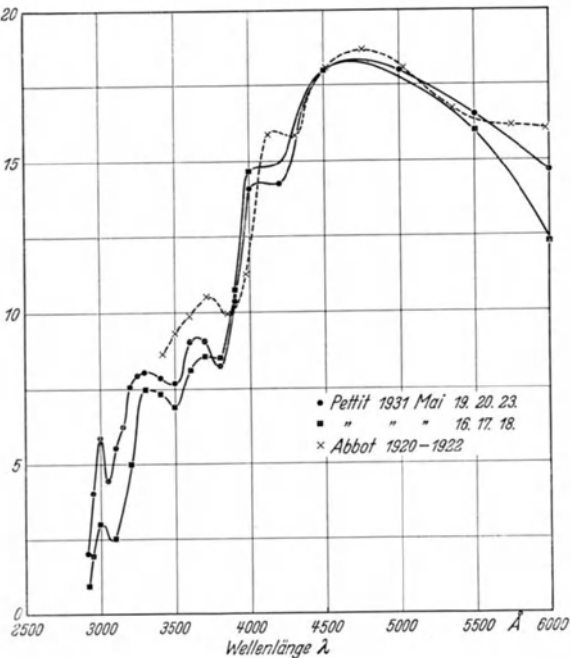


Fig. 20b. Energieverteilung im ultravioletten Sonnenspektrum. (Ordinatenmaßstab willkürlich.)

¹ Bei den photographischen Untersuchungen hat WILSING diesen Effekt absichtlich durch „falsches“ Fokussieren des Spektrographen hervorgerufen.

Vergleich ist noch die ABBOTsche Energieverteilungskurve $\times\times\times$ eingezeichnet. Die — an sich willkürliche — Ordinatenkala ist so eingerichtet, daß die drei Kurven bei $\lambda 4500$ zusammenfallen.

Endlich seien noch zwei Untersuchungen von H. H. PLASKETT [229] sowie CH. FABRY und H. BUISSON [212] besprochen, welche den kurzwelligen Teil des Spektrums der *Mitte der Sonnenscheibe* auf photographischem Wege an geeichte Normallichtquellen anschließen und zwar PLASKETT von $\lambda 4000$ —6687, FABRY und BUISSON von $\lambda 2922$ —3940. Da bei dieser Art der Messung eine größere Reinheit des Spektrums erreicht werden kann, als bei bolometrischen Messungen, so verschmieren PLASKETT, FABRY und BUISSON die gerade in diesem Spektralbereich sehr zahlreichen und kräftigen FRAUNHOFER-Linien *nicht*, sondern beschränken sich auf *solche* ausgewählte Stellen im Spektrum, die von Linien möglichst frei sind. Will man also diese Messungen mit den anderen vergleichen, so muß man die Mitte-Rand-Verdunkelung der Sonne und die Depression des Spektrums durch die Absorptionslinien in Rechnung stellen. (Wir werden hierauf im Abschnitt 14 noch ausführlich zurückkommen). Als Normallichtquelle benützte PLASKETT eine geeichte Wolframbandlampe, deren Farbtemperatur¹ bei 12 \AA gleich 2010°K war, bei 16 \AA . . . 2439°K und 20 \AA . . . 2830°K . Um sicherer zu gehen, verwandte er außerdem einen Kodak-Normal-Azetylenbrenner, der — mit reinem Gas von 9 cm (Wasser) Druck gespeist — in dem benützten Spektralgebiet dieselbe Energieverteilung hat², wie ein schwarzer Körper von 2360°K . Der Anschluß an die Sonne erfolgte auf dem Umweg über einem Kohlelichtbogen, der unter gut definierten Bedingungen brannte.

FABRY und BUISSON benützen als Normallichtquelle nur einen Kohlelichtbogen, dessen Energieverteilung sie der eines schwarzen Körpers von 3750°K gleich erachten. Leider sind die zugrundegelegten Laboratoriumsmessungen noch ziemlich unsicher, so daß dadurch eine beträchtliche Unbestimmtheit hereingebracht wird. Auf die *Ergebnisse* dieser Messungen und ihren Vergleich mit denen von ABBOT werden wir gleichfalls im Abschnitt 14 zurückkommen.

Ein bemerkenswertes Nebenergebnis der Arbeit von FABRY und BUISSON (vgl. auch PETTIT, l. c.) ist das enorme Anwachsen der atmosphärischen Extinktion bei kurzen Wellen infolge der Ozonabsorption. Während — unter den Verhältnissen der FABRYschen Beobachtungen — ein die Atmosphäre senkrecht durchsetzender Strahl bei $\lambda 3940$ erst auf die Hälfte geschwächt wird, geht die Intensität bei $\lambda 2922$ auf $1/70000$ herunter!

Unter Verwendung eines besonders streulichtfreien Quarzspektrographen mit doppelter Zerlegung ist P. GÖTZ — Arosa [213] photographisch bis $\lambda 2863\text{ \AA}$ vorgedrungen. Auf der kurzwelligen Seite der großen Ozonbande haben neuerdings EDGAR MEYER, M. SCHEIN und B. STOLL [221] mit Hilfe einer hochempfindlichen Zähleranordnung die ersten Spuren des Sonnenspektrums ($\lambda 2000$ bis 2300 ; Maximum bei $\lambda 2100$) entdeckt.

12. Reduktion der Messungen von ABBOT und WILSING. Solarkonstante und effektive Sonnentemperatur. Energieverteilung im Spektrum des Strahlungsstromes πF_λ in absolutem Maß.

Wie gewinnt man nun aus *spektrobologischen und pyrhelometrischen Messungen die extraterrestrische Intensitätsverteilung im Sonnenspektrum und*

¹ Die Farbtemperatur ist *definiert* als die Temperatur eines schwarzen Körpers, der in dem betreffenden Spektralbereich dieselbe *relative* spektrale Energieverteilung liefert wie z. B. die betrachtete Bandlampe. Die Farbtemperatur ist bei nichtschwarzen Körpern *verschieden* von der wahren Temperatur.

² Literatur vgl. H. H. PLASKETT l. c.

die *Solarkonstante*? Das Grundprinzip¹ der Reduktionsmethode ist folgendes: Man nimmt Bolographenkurven bei verschiedenem Sonnenstand auf. Die — zunächst noch verfügbare — Energieskala der einzelnen Kurven wird sodann dadurch festgelegt, daß die Integration jeder Strahlungsenergiekurve über alle Wellenlängen die — pyrheliometrisch in *absolutem* Maß bestimmte — Gesamtstrahlung geben muß. Aus den Beobachtungen für eine bestimmte Wellenlänge bei verschiedener Zenitdistanz z der Sonne kann nun nach (9,1) durch Extrapolation die entsprechende extraterrestrische Strahlungsenergie bestimmt werden. Integration über die extraterrestrische Energieverteilungskurve liefert endlich die *Solarkonstante*.

In Wirklichkeit sind noch eine Reihe von Komplikationen zu beachten: Besonders im Ultrarot zeigt das Sonnenspektrum (vgl. Fig. 19) starke Absorptionsbanden, die hauptsächlich vom Wasserdampf herrühren. Die Extinktion in diesen Banden ist so groß, daß die übliche Methode der Extinktionsbestimmung nicht mehr anwendbar ist, man muß vielmehr die Strahlungskurve über diese Lücken hinweg einfach interpolieren. Diese Korrektur hängt natürlich ab von der über dem Beobachter befindlichen Wasserdampfmenge in der Atmosphäre. Um nicht immer wieder diese sehr umständlichen Korrekturenrechnungen *de novo* ausführen zu müssen, hat FOWLE [207] ein für allemal die Wasserdampfkorrektur in Abhängigkeit von der Stärke der Absorption in *einer* Bande (zuerst die sog. ρ -Bande, jetzt die Ψ -Bande) bestimmt, so daß nur noch diese *eine* Größe gemessen werden muß. Um die wahre Solarkonstante zu erhalten, müssen an den mit Hilfe der Pyrheliometermessungen schon auf absolutes Maß reduzierten und auf Atmosphärendicke Null extrapolierten Strahlungskurven noch zwei Korrekturen angebracht werden, deren Größe nur unsicher abgeschätzt werden kann: Es müssen nämlich die von der Erdatmosphäre völlig abgeschnittenen Enden des Sonnenspektrums im Ultraviolett und Ultrarot ergänzt werden. Neuere Messungen haben zwar den beobachteten Bereich im Ultrarot beträchtlich erweitert, aber ihre Verlässlichkeit wird bei sehr langen Wellen wegen Streulichtgefahr im Spektrographen immer geringer. Im Ultraviolett setzt die bekannte Ozonabsorption den Messungen ein definitives Ende. Zur Berechnung der fehlenden Stücke macht man die Annahme, daß die Energieverteilung ebenso wie im zugänglichen Teil des Sonnenspektrums einigermaßen dem PLANCKSchen Gesetz folgt (s. unten!). Die neuesten Zahlenwerte sind für die Ultraviolett-korrektur nach ABBOT (1927): 3,44% und für die Ultrarotkorrektur nach ABBOT und ALDRICH (1923): 2,0%. Es ist ausdrücklich zu bemerken, daß die Unsicherheit dieser Korrekturen *nur* auf die Solarkonstante, nicht aber auf die Strahlungskurve im zugänglichen Teil des Sonnenspektrums zurückwirkt.

Nun endlich zu den *Ergebnissen*:

Für die *Solarkonstante* ergab ABBOTs Beobachtungsreihe 1902—12 den Wert 1,933 cal/cm² · min; 1912—20 den Wert 1,946 cal/cm² · min, im Mittel:

$$S = 1,94_0 \text{ cal/cm}^2 \text{ min} = 1,35_3 \cdot 10^6 \text{ erg/cm}^2 \text{ sek} \quad (12,1)$$

Diese Zahlen beziehen sich noch auf die Smithsonian-Revised-Skala von 1913. Die nach Fig. 18 anzubringende Korrektur von $\sim -2\%$ führt diesen Wert über in

$$S_{\text{korrt.}} = 1,90_1 \text{ cal/cm}^2 \text{ sek} = 1,32_6 \cdot 10^6 \text{ erg/cm}^2 \text{ sek.} \quad (12,2)$$

Den Gesamtstrahlungsstrom πF an der Sonnenoberfläche (= Ausstrahlung pro cm² und sek nach allen Richtungen; F = mittlere Strahlungsintensität) erhalten

¹ Die folgende Darstellung versucht die Grundgedanken der ABBOTschen Untersuchungen möglichst deutlich zu machen; sein tatsächlich benutztes Rechenverfahren ist mit Rücksicht auf die Umständlichkeit der Zahlenrechnung etwas anders.

wir auf Grund der Überlegung, daß alle Strahlung, die an der Sonnenoberfläche eine Kugel vom Sonnenradius R durchsetzt, in der Entfernung des Erdbahnradius ϱ von der Sonne eine Kugel von eben diesem Radius durchdringt. Das Verhältnis R/ϱ ist andererseits der Winkel (im Bogenmaß), unter dem uns der Sonnenradius erscheint, also

$$R/\varrho = 16',0 = 0,004652 \quad (12,3)$$

also

$$\pi F_{\text{korrt.}} = 1,326 \cdot 10^6 \cdot 0,004652^{-2} \text{ erg cm}^{-2} \text{ sek}^{-1} = 6,127 \cdot 10^{10} \text{ erg cm}^{-2} \text{ sek}^{-1} \quad (12,4)$$

Tabelle 1. Energieverteilung im Spektrum der ganzen Sonnenscheibe.

ABBOTS Messungen 1903—10 reduziert nach MINNAERT [223].

λ in Å	$F_\lambda \cdot 10^{-13}$ in erg/cm ² · sek	λ in Å	$F_\lambda \cdot 10^{-13}$ in erg/cm ² · sek
3000	3,23	5 500	33,77
3250	7,63	6 000	30,28
3500	16,12	7 000	21,89
3750	20,78	8 000	16,00
3900	21,70	10 000	9,96
4200	35,54	13 000	5,40
4300	31,96	16 000	3,19
4500	36,20	20 000	1,48
4700	37,47	25 000	0,25
5000	36,41	30 000	0,08

Unter der *Annahme*, daß die Sonne wie ein schwarzer Körper strahlt, können wir hieraus nach dem STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetz (4,1) sofort die „Sonnentemperatur“ berechnen. Man bezeichnet die so definierte Temperatur als *effektive Temperatur* und setzt also

$$\pi F = \sigma T_e^4 \quad (12,5)$$

Mit (12,4) und $\sigma = 5,75 \cdot 10^{-5}$ C.G.S.-Einh. wird

$$T_e = 5713^\circ \text{ K} \quad (12,6)$$

Berücksichtigt man die Unsicherheit in σ und S , so dürfte der mittlere Fehler von T_e etwa $\pm 30^\circ$ betragen.

Fig. 20a und Tabelle 1 und 2 geben die Strahlungsenergiekurven¹ nach zwei Beobachtungsreihen von ABBOT [207], 1903—10 bzw. 1920—22 zusammen mit WILSINGS [234] von ihm unter Berücksichtigung der früheren Potsdamer

Tabelle 2. Energieverteilung im Spektrum der ganzen Sonnenscheibe.

ABBOTS Messungen 1920—22 reduziert nach MINNAERT [223].

λ	$F_\lambda \cdot 10^{-13}$ C.G.S.	λ	$F_\lambda \cdot 10^{-13}$	λ	$F_\lambda \cdot 10^{-13}$
3415	14,7	5 980	27,3	13 020	6,1
3504	15,8	6 238	25,7	13 770	5,3
3600	16,7	6 530	24,3	14 520	4,7
3709	17,8	6 858	23,1	15 280	4,2
3853	16,9	7 222	20,6	16 030	3,9
3974	19,2	7 644	18,2	16 700	3,5
4127	27,0	8 120	15,9	17 380	3,2
4307	26,9	8 634	13,8	18 700	2,5
4516	30,8	9 220	11,8	20 000	2,0
4753	31,8	9 861	10,6	21 230	1,4
5026	30,7	10 620	9,5	22 420	0,9
5348	28,5	11 460	8,1	23 480	1,1
5742	27,5	12 250	7,1		

Messungen ausgeglichener Kurve (1917). Die Bedeutung der aufgetragenen Größe F_λ ist, wie schon bemerkt: $\pi F_\lambda =$ Ausstrahlung von 1 cm² Sonnenoberfläche in erg pro sek und pro Wellenlängenbereich 1 cm; F_λ selbst ist die entsprechende *Strahlungsintensität*, gemittelt über die Sonnenscheibe.

Die nicht unbeträchtlichen Unterschiede der drei Kurven geben ein deutliches Bild der großen Schwierigkeit derartiger Strahlungsmessungen. Soweit man dies nach der Vollkommenheit der Apparaturen beurteilen kann, dürfte die ABBOTSche Meßreihe 1920—22 die genaueste sein.

¹ Die ABBOTSchen Messungen wurden auf absolute Einheiten reduziert von M. MINNAERT [223]. Genauer gesagt, reduzierte MINNAERT die Energieverteilungskurve der Meßreihe {1903—10} mit der Solarkonstante der Beobachtungsreihe {1902—12}, d. h. {1,933} cal/cm² sek. {1920—22} entsprechend der Skalenkorrektur der Solarkonstante nach Fig. 18 haben wir seine Werte um 2% verkleinert. Die Reduktion der WILSINGSchen Kurve auf absolute Einheiten im wesentlichen nach E. A. MILNE [222], dessen Zahlen noch in entsprechender Weise umgerechnet wurden.

Unter Benützung der ABBOTSchen Energieverteilungskurve für das langwellige Gebiet und unter Heranziehung der ABBOTSchen Solarkonstantenmessung (er rechnet mit $1,95 \text{ cal/cm}^2 \text{ min}$) hat E. PETTIT [228] unabhängig von den schon erwähnten Untersuchungen von MILNE und MINNAERT — seine Messungen auf absolute Einheiten reduziert. Er findet für das Maximum der Strahlungskurve auf der Erde (außerhalb der Atmosphäre): $20,3 \text{ W}$ pro m^2 pro 100 A entsprechend — der Umrechnungsfaktor ist $\frac{10^9}{\pi \cdot 0,004652^2} = 1,47 \cdot 10^{13}$ — einem $F_\lambda = 29,9 \cdot 10^{13} \text{ erg/cm}^2 \text{ sek}$. Reduktion der Solarkonstante auf $1,90 \text{ cal/cm}^2 \text{ sek}$ würde diesen Wert auf $29,2 \cdot 10^{13} \text{ erg/cm}^2 \text{ sek}^1$ verkleinern; andererseits liefern ABBOTS Messungen allein ein etwas schärferes Maximum der Strahlungskurve als die PETTITSchen.

Zum Vergleich ist in Fig. 20a nach (7,30) die Intensitätsverteilung (ebenfalls *absolut*) für einen Hohlraumstrahler der Temperatur $T_e = 5713^\circ \text{ K}$ eingezeichnet. Bezüglich des allgemeinen Verlaufes stimmt die Strahlungskurve der Sonne leidlich mit der des schwarzen Körpers überein; im einzelnen treten aber beträchtliche Abweichungen auf. Wollte man z. B. im Maximum der neueren Meßreihe Übereinstimmung mit einer PLANCKSchen Kurve erzielen, so müßte deren Maximum gegenüber der eingezeichneten Kurve um $28,4\%$ erhöht werden, da $I_{\text{max}} \sim T^5$ geht, käme man auf eine Temperatur von 6960° K . Die dazu „berechnete“ Solarkonstante ($\sim T^4$) würde schon 22% über dem gemessenen Wert liegen.

Man kann den Vergleich der beobachteten Energieverteilung im Sonnenspektrum mit der PLANCKSchen Funktion auf alle möglichen Arten ausführen und so verschiedene „Temperaturen“ definieren. A. BRILL [210] spricht z. B. von Farbtemperatur, Gradationstemperatur, Strahlungstemperatur und schwarzer Temperatur. Allen derartigen Begriffsbildungen kommt aber nur ein sehr beschränkter Wert zu. Der Temperaturbegriff ist zunächst überhaupt *nur* für Systeme definiert, die sich im thermischen Gleichgewicht befinden. Seine näherungsweise Anwendung auf Systeme, die vom Zustande des Wärme Gleichgewichtes abweichen, muß stets besonders gerechtfertigt werden. Wenn man sagt: Ein System hat die Temperatur $T^\circ \text{ K}$, so ist z. B. die Geschwindigkeitsverteilung der Atome, die relative Häufigkeit von Quantenzuständen mit verschiedener Anregungsenergie usw. durch diesen *einen* Parameter bestimmt. In einem Nichtgleichgewichtszustand ist dies nicht mehr möglich; die obigen Pseudotemperaturen gestatten keinerlei thermodynamische Rückschlüsse auf andere Größen, als die bei ihrer Berechnung benutzten. Ihre Bedeutung sollte deshalb nicht überschätzt werden und wir ziehen es im folgenden vor, direkt auf die gemessene spektrale Energieverteilung zurückzugreifen¹.

Das Problem der *Deutung* des kontinuierlichen Sonnenspektrums behandeln wir später im Zusammenhang mit der *Theorie des Strahlungsgleichgewichtes*.

13. Mitte-Rand-Kontrast $I_\lambda(\vartheta)/I_\lambda(0)$. Strahlungsintensität und -Strom. $I_\lambda(0)/F_\lambda$.

Nachdem wir die Messungen des Strahlungsstromes πF_λ besprochen haben, fragen wir nach der Abhängigkeit der Strahlungsintensität $I_\lambda(\vartheta)$ vom Austrittswinkel ϑ (vgl. wieder Fig. 4) an der Sonnenoberfläche. Man mißt am besten den sog. Mitte-Rand-Kontrast, d. h. das Verhältnis der Strahlungsintensität

¹ Es sei noch vor einem in der älteren Literatur verschiedentlich wiederkehrenden Fehlschluß gewarnt: „Da das Absorptionsvermögen der Sonnenoberfläche sicher ≤ 1 ist, so erhält man jedenfalls eine *untere Grenze* T_{min} der Sonnentemperatur, indem man die PLANCKSche Strahlungskurve aufsucht, welche für alle Wellenlängen über der beobachteten Energieverteilungskurve liegt.“

Diese Überlegung ist falsch, weil dabei der KIRCHHOFFSche Satz entgegen seinen Voraussetzungen auf ein System angewandt wird, das sich nicht im thermischen Gleichgewicht befindet. Streng genommen, gibt es eben gar nicht „eine Sonnentemperatur“.

in der Entfernung r von der Mitte der Sonnenscheibe (Radius R ; $\varrho = \frac{r}{R} = \sin \vartheta$) zur Intensität der Mitte der Scheibe ($\vartheta = 0$) selbst. Die Verknüpfung zwischen I_λ und F_λ wird nach (1,6) hergestellt durch

$$F_\lambda = 2 \int_0^{\pi/2} I_\lambda(\vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \quad (13,1)$$

oder

$$F_\lambda = 2 \int I_\lambda(\varrho) \varrho d\varrho. \quad (13,2)$$

Messungen der Randverdunkelung hat ABBOT¹ in der Weise ausgeführt, daß er bei festgeklemmtem Zölostaten das Bild der Sonne vermöge ihrer täglichen Bewegung über den Spalt des Spektrobographen laufen ließ. Die Registrierplatte bewegte sich mit konstanter Geschwindigkeit, so daß eine \cap -förmige Registrierkurve entstand (Fig. 21).

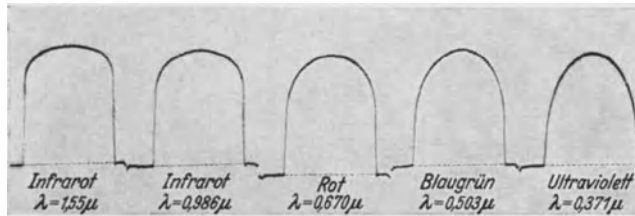


Fig. 21. Messung der Mitte-Rand-Verdunkelung der Sonne. Nach [207].

Die Ergebnisse — die neuere Beobachtungsreihe ist wohl genauer, umfaßt aber einen kleineren Wellenlängenbereich als die ältere — sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt. (Auf die Messungen für λ 3230 werden wir gleich zurückkommen.)

Tabelle 3. Mitte-Rand-Kontrast (1906—08). Nach ABBOT: Smithson. Ann. **3**, 157 (1913) $I_\lambda(0)/F_\lambda$ und ϱ^* nach MINNAERT [223].

$\varrho = \sin \vartheta$	0,00	0,20	0,40	0,55	0,65	0,75	0,825	0,875	0,92	0,95	$I_\lambda(0)/F_\lambda$	ϱ^*
$\cos \vartheta$	1,000	0,980	0,916	0,835	0,760	0,661	0,565	0,484	0,392	0,312		
λ in Å												
3 230	1,000	0,960	0,897	0,835	0,775	0,690	0,600	0,530	0,452	0,382	1,487	0,758
3 860	1,000	0,980	0,926	0,856	0,792	0,710	0,633	0,554	0,483	0,418	1,407	0,749
4 330	1,000	0,978	0,927	0,866	0,806	0,729	0,647	0,583	0,510	0,450	1,371	0,750
4 560	1,000	0,986	0,942	0,884	0,831	0,756	0,681	0,616	0,538	0,471	1,326	0,752
4 810	1,000	0,987	0,944	0,891	0,840	0,771	0,701	0,638	0,566	0,499	1,302	0,753
5 010	1,000	0,985	0,945	0,894	0,845	0,777	0,711	0,650	0,583	0,517	1,287	0,750
5 340	1,000	0,987	0,950	0,902	0,856	0,792	0,728	0,672	0,605	0,548	1,265	0,751
6 040	1,000	0,989	0,957	0,913	0,872	0,816	0,761	0,710	0,648	0,594	1,226	0,750
6 700	1,000	0,991	0,961	0,924	0,887	0,838	0,786	0,740	0,680	0,629	1,201	0,758
6 990	1,000	0,990	0,963	0,926	0,890	0,842	0,792	0,748	0,691	0,637	1,190	0,751
8 660	1,000	0,992	0,969	0,939	0,911	0,871	0,830	0,792	0,744	0,699	1,158	0,763
10 310	1,000	0,998	0,977	0,951	0,925	0,889	0,851	0,816	0,772	0,730	1,130	0,757
12 250	1,000	0,995	0,976	0,953	0,932	0,901	0,865	0,834	0,794	0,756	1,118	0,762
16 550	1,000	0,996	0,982	0,966	0,950	0,928	0,901	0,877	0,847	0,815	1,088	0,774
20 970	1,000	0,996	0,986	0,971	0,956	0,936	0,915	0,892	0,866	0,838	1,077	0,775

¹ Smithson. Ann. **3**, 157 (1913) und **4**, 221 (1922); 1906/08 und 1913. Inwieweit die Unterschiede zwischen beiden Reihen reell sind, mag einstweilen dahingestellt bleiben.

Tabelle 4. Mitte-Rand-Kontrast (1913). Nach ABBOT: *Smithson. Ann.* 4, 221 (1922).

$\varrho = \sin \vartheta$	0,00	0,20	0,40	0,55	0,65	0,75	0,825	0,875	0,92	0,95	0,97
$\cos \vartheta$	1,000	0,980	0,916	0,835	0,760	0,661	0,565	0,484	0,392	0,312	0,243
λ in Å											
3737	1,000	0,984	0,934	0,871	0,811	0,730	0,652	0,580	0,499	0,432	0,349
4265	1,000	0,985	0,937	0,872	0,812	0,734	0,655	0,587	0,511	0,445	0,388
5062	1,000	0,989	0,951	0,900	0,852	0,787	0,720	0,660	0,591	0,529	0,472
5955	1,000	0,990	0,959	0,916	0,876	0,821	0,764	0,713	0,651	0,595	0,541
6702	1,000	0,993	0,967	0,929	0,893	0,844	0,794	0,748	0,692	0,640	—
8580	1,000	0,993	0,972	0,944	0,916	0,877	0,836	0,799	0,753	0,710	—
10080	1,000	0,994	0,975	0,949	0,923	0,888	0,851	0,816	0,773	0,733	—

Leider sind auch diese Messungen sehr der Verfälschung durch systematische Fehler ausgesetzt. Zunächst wird die Intensität am \odot -Rand auf Kosten der \odot -Mitte vergrößert durch Lichtstreuung in der Erdatmosphäre und besonders in der Apparatur (vgl. B. LYOT [219], H. KIENLE [216], T. EINARSSON [211]). Da bei ABBOT das Sonnenlicht vor dem Bolographenspalt an 5 Spiegeln reflektiert wird, so dürfte namentlich der letztere Einfluß kaum vernachlässigbar sein. (Nach Erfahrung des Verf. sind die feinen Systeme fast paralleler Kratzer, die beim Polieren der Spiegel stets entstehen — schräge Betrachtung! —, die schlimmste Streulichtursache). Eine zweite Fehlerquelle dürfte in der Trägheit des Galvanometers liegen; (MOLL, BURGER und v. D. BILT [225], sowie ABBOTS Entgegnung auf deren Kritik [225]) die sich (vgl. *Smithson. Ann.* IV, Tabelle 63, S. 219) in einer leichten Unsymmetrie der beiden Seiten der \cap -Kurven äußert. Durch Mittelbildung wird dieser Fehler wohl größtenteils eliminiert. Wie groß zahlenmäßig die betrachteten Fehler sind, läßt sich ohne neue Beobachtungen kaum entscheiden.

Die Messungen für λ 3230 in Tabelle 3 wurden von K. SCHWARZSCHILD und W. VILLIGER [230] auf photographisch-photometrischem Wege aus Aufnahmen mit einem *versilberten* Objektiv gewonnen. Da dünne Silberschichten bekanntlich ein ziemlich scharfes Durchlässigkeitsmaximum haben (nach der kurzwelligen Seite noch verengt durch die Durchlässigkeitsgrenze des Glases), so können diese Messungen wohl den spektrolometrischen von ABBOT an die Seite gestellt werden.

Um der Verfälschung der Randverdunkelungsmessungen durch Streulicht aus der Erdatmosphäre und Apparatur völlig zu entgehen, hat K. SCHWARZSCHILD [231] folgenden Gedanken benutzt: Bei einer Sonnenfinsternis werden vor Eintritt der Totalität die Randpartien der Sonne Stück für Stück durch den Mond verdeckt. Nimmt man mit einem spaltlosen Spektrographen nun das Spektrum der Sonnensichel auf (die also selbst als „Spalt“ fungiert), so läßt sich aus der zeitlichen Intensitätsänderung (da ja die Geschwindigkeit der scheinbaren Relativbewegung Mond gegen Sonne nach den Ephemeriden berechnet werden kann) die Helligkeitsänderung einer bestimmten Stelle der Sichel für eine bestimmte Wellenlänge entnehmen. Durch Differentiation gewinnt man leicht vollends die Helligkeit der Sonnenscheibe im Licht einer bestimmten Wellenlänge in Abhängigkeit vom Abstand vom Sonnenrand $\left(1 - \frac{r}{R}\right)$. (Als Nebenprodukt erhält man das Profil des Mondrandes). Es liegt auf der Hand, daß diese Meßmethode für die Nähe des Sonnenrandes ($r \approx R$; $\vartheta \sim 90^\circ$) große Vorteile bietet. Leider ist sie später fast in Vergessenheit geraten, so daß bis jetzt außer den vorläufigen Beobachtungen von SCHWARZSCHILD selbst (1905) noch keine Ergebnisse vorliegen. Ungefähr gleichzeitig hat

W. H. JULIUS [214, 215; eine zusammenfassende Bearbeitung gibt M. MINNAERT 224] ähnliche Messungen *ohne* spektrale Zerlegung unter Verwendung der *gesamten* Sonnensichel versucht. Diese Methode ist jedoch der SCHWARZSCHILD-schen weit unterlegen, denn einerseits werden die Messungen durch die Zackigkeit des Mondrandes so gestört, daß gerade die interessanten äußersten Teile des Sonnenrandes nicht mehr erfaßt werden können, andererseits würde schon die mangelhafte spektrale Definiertheit (man mißt ja die durch die Erdatmosphäre-Wasserdampfbanden usw.! — gefilterte Gesamtstrahlung) einer weiteren Diskussion der Messungen große Schwierigkeiten in den Weg stellen.

Mit einiger Sicherheit läßt sich bis jetzt den Finsternisbeobachtungen nur entnehmen [224], daß der Helligkeitsabfall am äußersten Sonnenrand ein rapider sein muß.

Aus den ABBOT-schen Beobachtungen über den Mitte-Rand-Kontrast für einzelne Wellenlängen hat MILNE [222] — unter Benützung der spektralen Energieverteilungskurve — die Abnahme der *Gesamtstrahlung* von der Sonnenmitte nach

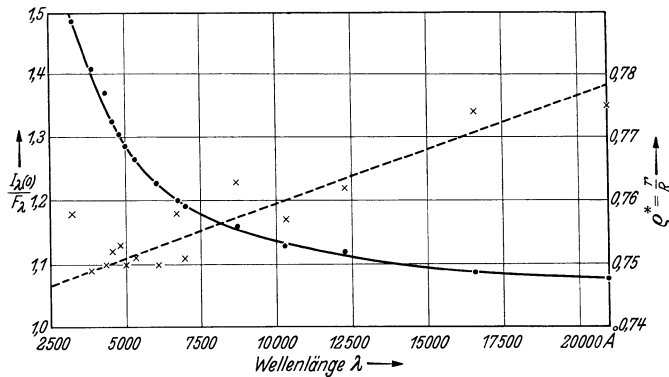


Fig. 22. a) Verhältnis der Intensität in der Mitte der Sonnenscheibe $I_{\lambda}(0)$ zur mittleren Strahlungsintensität F_{λ} (— und linke Ordinatenkala). b) In der Entfernung ρ^* (---- und rechte Ordinatenkala) von der \odot -Mitte ist $I_{\lambda}(\rho) = F_{\lambda}$.

dem Rand zu abgeleitet. Eine *direkte* Messung — etwa mit dem Bolometer — ist nicht möglich, da wegen der Wellenlängenabhängigkeit der Extinktion in der Erdatmosphäre die verschiedenen Spektralgebiete nicht mit den richtigen „Gewichtsfaktoren“ zur Geltung kämen. Die Ergebnisse, dessen grundlegende Bedeutung für die Theorie des Strahlungsgleichgewichtes wir noch eingehend würdigen werden, zeigt die folgende Tabelle 5. Um weiterhin auch die $I_{\lambda}(\vartheta)$ für verschiedene Wellenlängen in absolutem Maß ausdrücken zu können, hat MINNAERT [223] — in Verbesserung älterer Rechnungen von ABBOT — aus dessen Randverdunklungsmessungen mit Hilfe von (13,2) das Verhältnis $I_{\lambda}(0)/F_{\lambda}$ = Intensität in der Mitte der Sonnenscheibe/mittlere Intensität der Sonnenscheibe in Abhängigkeit von λ berechnet. Das Ergebnis ist in Tabelle 3 mit aufgenommen und in Fig. 22 graphisch dargestellt. MINNAERT hat sich außerdem noch die Frage vorgelegt: In welcher Entfernung $\rho^* = r/R$ von der Mitte der Sonnenscheibe

Tabelle 5. Mitte-Rand-Kontrast für die Gesamtstrahlung der Sonne. Nach MILNE [222], S. 213..

$q = \sin \vartheta$	0,00	0,40	0,55	0,65	0,75	0,825	0,875	0,92	0,95
$\cos \vartheta$	1,000	0,916	0,835	0,760	0,661	0,565	0,484	0,392	0,312
$I(\vartheta)/I(0)$	1,000	0,955	0,912	0,871	0,822	0,769	0,722	0,665	0,612

ist die Intensität $I_\lambda(\varrho)$ gleich der mittleren Intensität der Sonnenscheibe F_λ ? Das Ergebnis zeigt die letzte Spalte von Tabelle 3 und Fig. 22: In dem ganzen Bereich λ 3230 bis 20970 liegen die ϱ^* innerhalb der engen Grenzen 0,749 und 0,775. Auf die Deutung dieses merkwürdigen Befundes werden wir im Zusammenhang mit der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes noch zurückkommen.

14. Verzerrung des „wahren“ kontinuierlichen Sonnenspektrums durch die FRAUNHOFER-Linien. Intensitätsverteilung im „wahren“ kontinuierlichen Spektrum; F_λ und $I_\lambda(0)$ in $\text{erg/cm}^2 \cdot \text{sek.}$ Vergleich mit dem schwarzen Körper von $T_e = 5713^\circ \text{K.}$

Endlich ist noch die Frage zu erörtern, welcher Prozentsatz der Sonnenstrahlung in den FRAUNHOFER-Linien wegabsorbiert wird oder, anders ausgedrückt: Mit welchem Faktor muß man die F_λ bzw. $I_\lambda(\vartheta)$ der Meßreihen von ABBOT, WILSING u. a. multiplizieren, um die wahre Intensität des kontinuierlichen Spektrums *zwischen* den Linien — die Messungen von H. H. PLASKETT sowie FABRY und BUISSON geben nahezu *dieses* $I_\lambda(0)$ in willkürlichen Einheiten — zu erhalten?

Die eingehendste Untersuchung hierüber verdanken wir der Utrechter Dissertation von G. F. W. MULDER [227]. Er hat zunächst — je für Wellenlängengebiete von 100 Å — den von FRAUNHOFER-Linien¹ verschluckten

Tabelle 6. Innerhalb der in Spalte 2 angegebenen Wellenlängenbereiche (Schwerpunkt vgl. Spalte 1) liegen ABBOTS Beobachtungswerte von F_λ und I_λ wegen der nicht aufgelösten schwachen und mittelstarken FRAUNHOFER-Linien um I_A % tiefer als das *wahre* kontinuierliche Spektrum.
Nach MULDER [227], S. 59.

λ	Grenzen der Wellenlängenbereiche	I_A	λ	Grenzen der Wellenlängenbereiche	I_A	λ	Grenzen der Wellenlängenbereiche	I_A	λ	Grenzen der Wellenlängenbereiche	I_A
3000	2975	13,5	4100	4054	22	5200	5150	11	6400	6257	2,0
3100	3050	24	4200	4155	18,5	5300	5236	8	6700	6550	1,6
3200	3150	19	4300	4242	22	5400	5350	7	7000	6854	1,1
3300	3252	24	4400	4348	14	5500	5462	8	7200	7126	0,6
3400	3351	24,5	4500	4442	12	5600	5551	6	7700	7333	0,9
3500	3447	24,5	4600	4552	11	5700	5655	4	8200	8002	1,2
3600	3549	33	4700	4655	11	5800	5761	2,5	8600	8350	1,7
3700	3646	35	4800	4754	6	5900	5842	2,2	9500	8926	1,5
3800	3750	35	4900	4854	10	6000	5950	2,1		10218	
3900	3852	40	5000	4961	9	6100	6033	2,4			
4000	3945	30	5100	5040	9	6200	6154	3,7			
	4054			5150			6257				

¹ Es wird dabei angenommen, daß die Intensität der FRAUNHOFER-Linien auf der ganzen Sonnenscheibe konstant ist. Für den vorliegenden Zweck ist, wie wir später sehen werden, diese Vereinfachung zulässig.

Prozentsatz I_A des kontinuierlichen Spektrums ermittelt, indem er die Schätzungs-skala der Linienintensitäten der ROWLANDSchen Wellenlängentafeln in Abhängigkeit von λ kalibrierte (hierauf kommen wir später ausführlich zurück) und dann die Häufigkeit der Linien jeder ROWLAND-Intensität abzählte, wobei noch zu berücksichtigen war, daß zusammenfließende Linien („blends“) zunächst zu stark geschätzt werden. Die starken Linien wurden teilweise *nicht* berücksichtigt, nämlich eben soweit sie bei ABBOT noch aufgelöst sind. Das Ergebnis zeigt die vorstehende Tabelle 6.

Um die Intensität des *wahren* kontinuierlichen Spektrums der ganzen Sonnenscheibe zu erhalten, müssen also die früher angegebenen Werte von F_λ durch $1 - I_A/100$ dividiert werden (vgl. Fig. 23).

Tabelle 7. Intensitätsverteilung im Sonnenspektrum. Nach H. H. PLASKETT [229]; reduziert nach MULDERs ([227], Tabelle 16).

1 Wellenlänge in Å. 2 Intensität $I_\lambda(0)$ in der Mitte der Sonne nach PLASKETT; in willkürlichen Einheiten. 3 (2) korrigiert wegen nicht aufgelöster FRAUNHOFER-Linien. 4 Multipliziert mit $F_\lambda/I_\lambda(0)$. 5 $F_{\lambda \text{ korrr}}$ durch Multiplikation mit $4,40 \cdot 10^{13}$ auf C.G.S.-Einheiten umgerechnet.

1	2	3	4	5
λ	$I_\lambda(0)$ Pl.	$I_\lambda(0)$ korrr	F_λ korrr	$F_\lambda \cdot 10^{-13}$ erg/cm ² sek
4000	9,68	10,3	7,44	32,7
4094	9,00	10,4	7,57	33,3
4333	9,04	10,6	7,85	34,6
4507	9,80	10,3	7,73	34,0
4660	9,45	10,0	7,58	33,4
4796	9,49	9,61	7,35	32,4
4895	9,37	9,55	7,36	32,4
4948	9,11	9,20	7,12	31,3
5062	9,07	9,30	7,25	31,9
5222	8,85	9,25	7,27	32,0
5358	8,68	8,90	7,04	31,0
5609	8,26	8,47	6,78	29,8
5824	7,88	7,95	6,43	28,3
6035	7,41	7,48	6,10	26,8
6209	7,08	7,12	5,83	25,7
6687	6,05	6,06	5,04	22,2

wir zur *mittleren* Strahlungsintensität über. Der Umrechnungsfaktor auf absolute Einheiten muß dadurch ermittelt werden, daß man die PLASKETTsche Kurve möglichst gut mit der korrigierten und auf absolute Einheiten reduzierten ABBOT-Kurve (Fig. 23) zur Deckung bringt. MULDERs findet so einen Umrechnungsfaktor $4,40 \cdot 10^{13}$. Die hiermit berechnete mittlere Strahlungsintensität F_λ des wahren kontinuierlichen Sonnenspektrums in erg/cm² sek gibt die letzte Spalte unserer Tabelle 7.

Endlich sollen noch die Messungen von FABRY und BUISSON [212] in entsprechender Weise reduziert werden. Tabelle 8 gibt zunächst für fünf möglichst linienfreie Wellenlängen das gemessene und schon auf Atmosphärendicke Null reduzierte Intensitätsverhältnis: Mitte der Sonnenscheibe: Kohlebogen. Die Intensität des letzteren berechnen wir nach der PLANCKSchen Formel (7,30) mit $T = 3750^\circ$ K. Außerdem ist nach MULDERs und MINNAERT zu berücksichtigen, daß bei $\lambda 3940$ das wahre kontinuierliche Spektrum durch den Flügel

Unter Benützung der Energieverteilungskurve hat MULDERs weiterhin berechnet, daß *insgesamt* 8,3% der Sonnenstrahlung in den FRAUNHOFER-Linien absorbiert werden.

Die Umrechnung der PLASKETT-schen Messungen [229] auf wahre F_λ hat nach MULDERs [227] folgendermaßen zu geschehen: Auch hier ist noch eine *kleine* Korrektion für die nicht aufgelösten FRAUNHOFER-Linien in den von PLASKETT gemessenen Wellenlängengebieten (Ausdehnung zwischen 1,3 und 18 Å um die mittlere Wellenlänge herum) anzubringen. Außerdem sind die Punkte $\lambda 4094$ bzw. 4333 durch die Flügel der BALMER-Linien H_β bzw. H_γ gestört und — nach Messungen MINNAERTs — um 11 bzw. 8% zu erhöhen. In Tabelle 7 gibt Spalte 2 zunächst die PLASKETTschen Zahlen; Spalte 3 die so erhaltene Intensität des wahren kontinuierlichen Spektrums der Sonnenmitte in willkürlichen Einheiten. Durch Multiplikation mit $F_\lambda/I_\lambda(0)$ (Fig. 22) gehen

der K-Linie $\lambda 3933$ um 37% herabgedrückt ist. Die so ermittelte Intensität des wahren kontinuierlichen Spektrums der Sonnenmitte ist schließlich noch mit $F_\lambda/I_\lambda(0)$ zu multiplizieren. (Die MINNAERTSche Kurve — Fig. 22 — mußte ein wenig extrapoliert werden).

In Fig. 23 fassen wir nochmals die drei wichtigsten Meßreihen: ABBOT 1920 — 22; PLASKETT, FABRY und BUISSON zusammen, reduziert auf mittlere Intensität F_λ des wahren kontinuierlichen Spektrums. Die gestrichelte Kurve gibt die mit Hilfe von Fig. 22

berechneten entsprechenden Werte der Strahlungsintensität für die Mitte der Sonnenscheibe $I_\lambda(0)$ (vgl. MULDERs [227, Fig. 2 u. 3]).

Tabelle 8. Intensitätsverteilung im ultravioletten Sonnenspektrum. Nach FABRY und BUISSON [212]; reduziert nach MULDERs ([227], Tabelle 17).

1 Wellenlänge in Å. 2 Intensitätsverhältnis: Mitte der Sonnenscheibe $I_\lambda(0)$ /Kohlebogen. 3 $I_\lambda(0)$ in C.G.S.-Einheiten. 4 $I_{3940}(0)$ korrigiert wegen Einfluß der K-Linie. 5 Mittlere Strahlungsintensität F_λ in erg/cm² sek.

1	2	3	4	5
λ	$I_\lambda(0)/I_{\text{Bogen}}$	$I_\lambda(0)_{\text{Fabry}} \cdot 10^{-18}$ in erg/cm ² sek	$I_\lambda(0)_{\text{korrr}} \cdot 10^{-18}$	$F_\lambda \cdot 10^{-18}$ erg/cm ² sek
2922	134	14,7	14,7	9,55
3022	112	16,1	16,1	10,6
3143	79	15,2	15,2	10,1
3620	50	24,0	24,0	16,7
3940	40	29,9	47,5	34,0

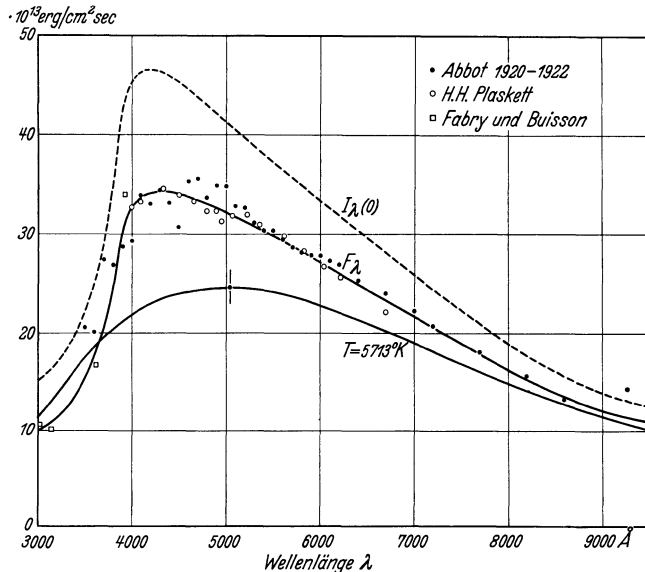


Fig. 23. F_λ = Intensität des wahren kontinuierlichen Spektrums der integrierten Sonnenstrahlung; $I_\lambda(0)$ = Intensität des wahren kontinuierlichen Spektrums der Sonnenmitte. Schwarzer Körper der effektiven Sonnentemperatur $T_e = 5713^\circ \text{K}$.

Zum Vergleich ist wie in Fig. 20a nochmals — ebenfalls in absoluten Einheiten — die Intensitätsverteilung für einen schwarzen Körper der effektiven Sonnentemperatur $T = 5713^\circ \text{K}$ mit eingezeichnet.

15. Kritische Bemerkungen über die Methodik der Sonnenstrahlungsmessungen.

Zum Schluß möge noch kurz erörtert werden, welche Anregungen unsere Diskussion der wichtigsten Untersuchungen über das kontinuierliche Sonnenspektrum für künftige Messungen gibt:

Es kann kaum einem Zweifel unterliegen, daß *heute* der direkte Anschluß der Sonnenstrahlung an einen schwarzen Körper bekannter Temperatur — relativ *und* absolut — das günstigste Meßverfahren¹ darstellt. Die Schwierigkeiten dieses Verfahrens sind durch die rapide Entwicklung der Experimentier-technik der letzten Jahre bedeutend verringert worden. Es genüge, auf die einfachen und bequemen Neukonstruktionen von Hohlraumstrahlern und sekundären Strahlungsnormalen hinzuweisen, auf die glänzende Entwicklung der photographischen Photometrie, die neuen Infrarotplatten u. a. m.

Weiterhin kann bei dieser Methode auch im Ultravioletten die Dispersion so groß gemacht werden, daß man den Einfluß der FRAUNHOFER-Linien eliminieren oder — wenn erwünscht — gesondert messen kann. Demgegenüber hatten der klassischen Methode (Messung der Gesamtstrahlung einerseits und der relativen Energieverteilung andererseits) schwerwiegende Nachteile an: Die Festlegung der absoluten Intensitätsskala hängt auch in den bequem zugänglichen Spektralgebieten mit ab von Messungen an den schwer erfaßbaren Enden des Spektrums. Mißt man ferner die spektrale Energieverteilung mit einem Absolutinstrument (Bolometer; ABBOT) so hat man im kurzwelligen Teil des Spektrums zu kleines Auflösungsvermögen, dazu kommt die Schwierigkeit der Bestimmung der Absorption im Spektrographen, restliche Selektivität des Empfängers und nicht zuletzt die Umständlichkeit der Reduktion. Benützt man aber — wie WILSING — das Bolometer nur als Relativinstrument, dann könnte ohne Einbuße an Genauigkeit gleich die Energieskala mitbestimmt werden, so daß man auf den ersten Vorschlag zurückkäme. — Für die Zwecke der Meteorologie werden natürlich Pyrheliometermessungen auch dann noch ihre grundlegende Wichtigkeit behalten, wenn die Astrophysiker zu einem ihren Bedürfnissen besser angepaßten Meßverfahren übergehen.

III. Kapitel.

Die Strahlung der Sterne.

16. Einführung in die Klassifikation der Sternspektren.

Schon die ersten Beobachter der Sternspektren bemerkten, daß man diese in der Hauptsache zu einer *einparametrischen Sequenz* ordnen kann. Zunächst richtete man sich hierbei lediglich nach dem „Aussehen“ der Spektren. Später versuchte man sich über die verwandten Klassifikationskriterien Rechenschaft zu geben und sie genauer zu definieren. Heute steht im Vordergrund die Aufgabe, an Hand der Theorie der Sternatmosphären eine physikalisch begründete Klassifikation mit quantitativen, jederzeit reproduzierbaren Kriterien zu schaffen. In diesem Abschnitt wollen wir uns nur einen vorläufigen Überblick verschaffen und dafür später auf die ganzen Klassifikationsprobleme noch einmal zurückkommen.

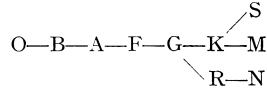
Die heute allgemein angenommene Klassifikation der Sternspektren wurde — im Anschluß an die grundlegenden Arbeiten von FRAUNHOFER, SECCHI, VOGEL u. a. — am *Harvard Observatorium* von PICKERING, MISS CANNON und vielen Mitarbeitern geschaffen. Der HENRY-DRAPER-Katalog, der neben Position und Helligkeit den Spektraltypus von rund einer Viertelmillion Sternen enthält, ist der sichtbare Niederschlag dieses nicht zuletzt in organisatorischer Hinsicht bewundernswerten Werkes.

Die Fig. 24 bis 27 geben zunächst eine Reihe typischer Sternspektren, die W. S. RUFUS und R. H. CURTISS [328] mit einem Einprismenspektro-

¹ Im Grunde handelt es sich also um eine Verfeinerung der FABRY-BUISSONSchen Methode.

graphen aufgenommen und nachträglich verbreitert haben¹. Rechts steht der Name des Sternes, links sein Spektraltypus.

Die Reihenfolge der Spektralklassen



entstand aus älteren Schemata, durch Umstellungen und Vereinfachungen, die durch die Verbesserung und Vergrößerung des Beobachtungsmaterials nötig wurden. Zwischen zwei Buchstaben wird die feinere Unterteilung durch nachgestellte Zahlen gekennzeichnet. Ein A5-Stern z. B. steht zwischen A0 und F0 und hat mit beiden Typen etwa ebensoviel Gemeinsames. Ein A7-Stern dagegen gleicht dem F0-Typus erheblich mehr als dem A0.

Ohne auf einzelne Klassifikationskriterien² und -probleme einzugehen, wollen wir die Harvardsequenz der Sternspektren nur kurz beschreiben:

Am Anfang stehen die planetarischen Nebel P und die O-Sterne. Ihre Spektren sind charakterisiert durch — vielfach sehr breite — *Emissionslinien*. Neben Wasserstoff (BALMER-Serie) und Helium beobachtet man erlaubte und „verbotene“ Übergänge mehrfach ionisierter leichter Atome (Sauerstoff, Stickstoff, Kohlenstoff usw.).

Beim Übergang von den O- zu den B-Sternen werden die *Emissionslinien* immer mehr durch die für die überwiegende Mehrzahl der Sterne charakteristischen *Absorptionslinien* verdrängt. Die Absorptionslinien des Wasserstoffes nehmen von B0 bis ungefähr A2 an Intensität zu, um dann wieder schwächer zu werden. Bis \sim B5 herrschen daneben Helium, Sauerstoff und Stickstoff; erst in zweifach dann in einfach ionisiertem Zustande.

Die A-Sterne kennzeichnet neben der enormen Stärke der BALMER-Linien das Auftreten einfach ionisierter Metalle (Ca^+ , Mg^+ , Fe^+ . . .), die dann bei der Spektralklasse F allmählich durch die entsprechenden neutralen Atome abgelöst werden.

Von K 5 ab treten Bandenspektren auf und zwar scheint sich die Spektralsequenz in drei Zweige aufzuspalten: Die M-Sterne mit Titanmonoxydbanden, die R- und N-Sterne mit Kohlenstoff- und Cyanbanden und die S-Sterne mit Zirkonoxoxydbanden.

Einige Besonderheiten mancher Sternspektren, die im Rahmen einer einparametrischen Klassifikation nicht untergebracht werden können, kennzeichnet man durch folgende Abkürzungen:

Das Präfix *c* bezeichnet Spektren, die sich durch besonders scharfe Linien und damit parallelgehende Abweichungen der Intensitätsverhältnisse gewisser Linien von der Normalsequenz unterscheiden (Miss MAURYs *c*-Sterne).

n (nebulous) bzw. *s* (sharp) — wie alle folgenden Bezeichnungen als *Suffix* gebraucht, — z. B. A2*n* — kennzeichnen besonders diffuses bzw. scharfes Aussehen der Linien (letzteres ohne die übrigen *c*-Kriterien).

e bedeutet Auftreten von Emissionslinien bei Spektraltypen, die sonst keine aufweisen.

v heißt variables Spektrum (meist mit Lichtwechsel verknüpft).

p (peculiar) charakterisiert irgendwelche Besonderheiten, z. B. anomale Stärke der Linien eines bestimmten Elementes.

¹ Der visuelle *Eindruck unverbreiteter* Spektren ist ein wesentlich anderer, aber direkte Reproduktionen von Sternspektren lassen meist zu wenig Details erkennen. Das Betrachten von Sternspektren ist eine *Kunst*, die nur durch praktische Übung erlernt wird.

² Man vergleiche besonders den ausgezeichneten Handbuchartikel von R. H. CURTISS [313].

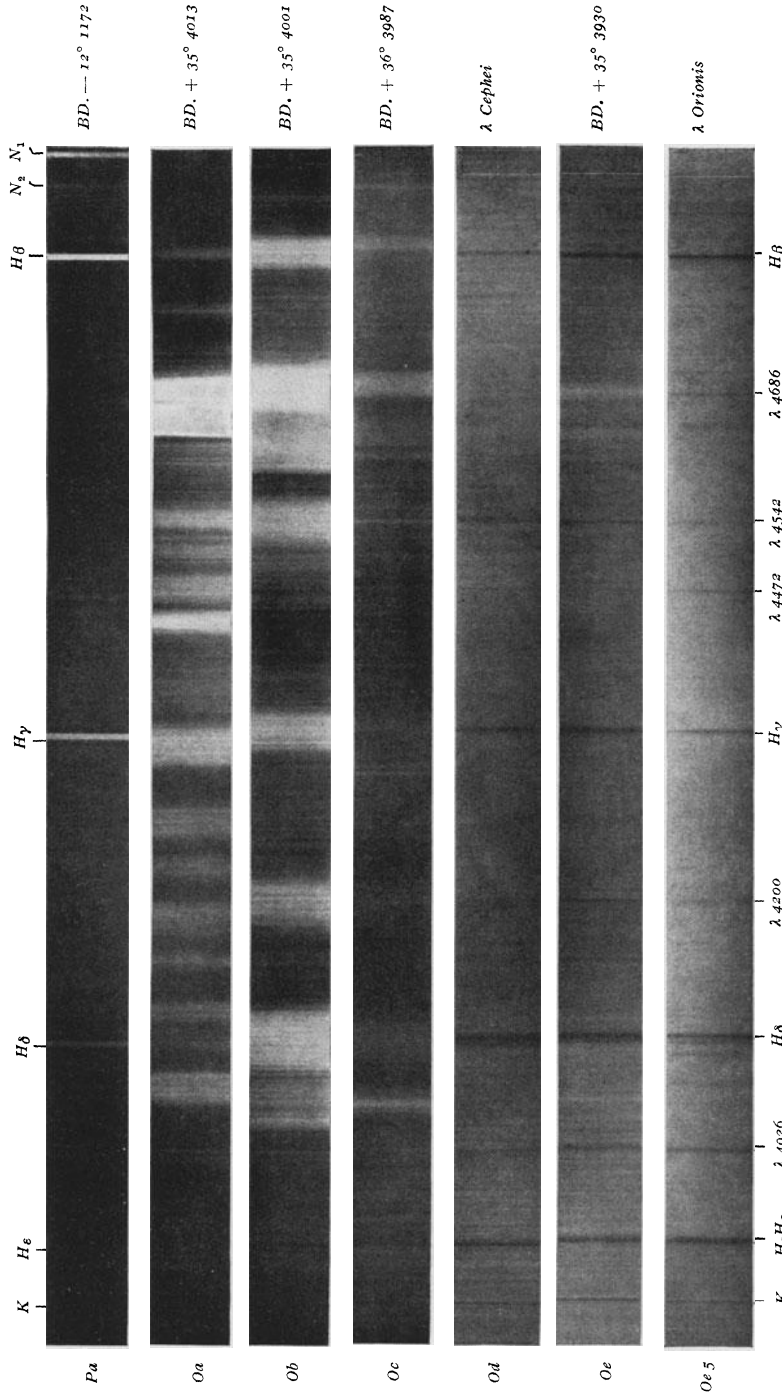


Fig. 24. Typische Sternspektren: Planetarischer Nebel (Pa) und O Sterne. Nach W. C. Rufus [328].

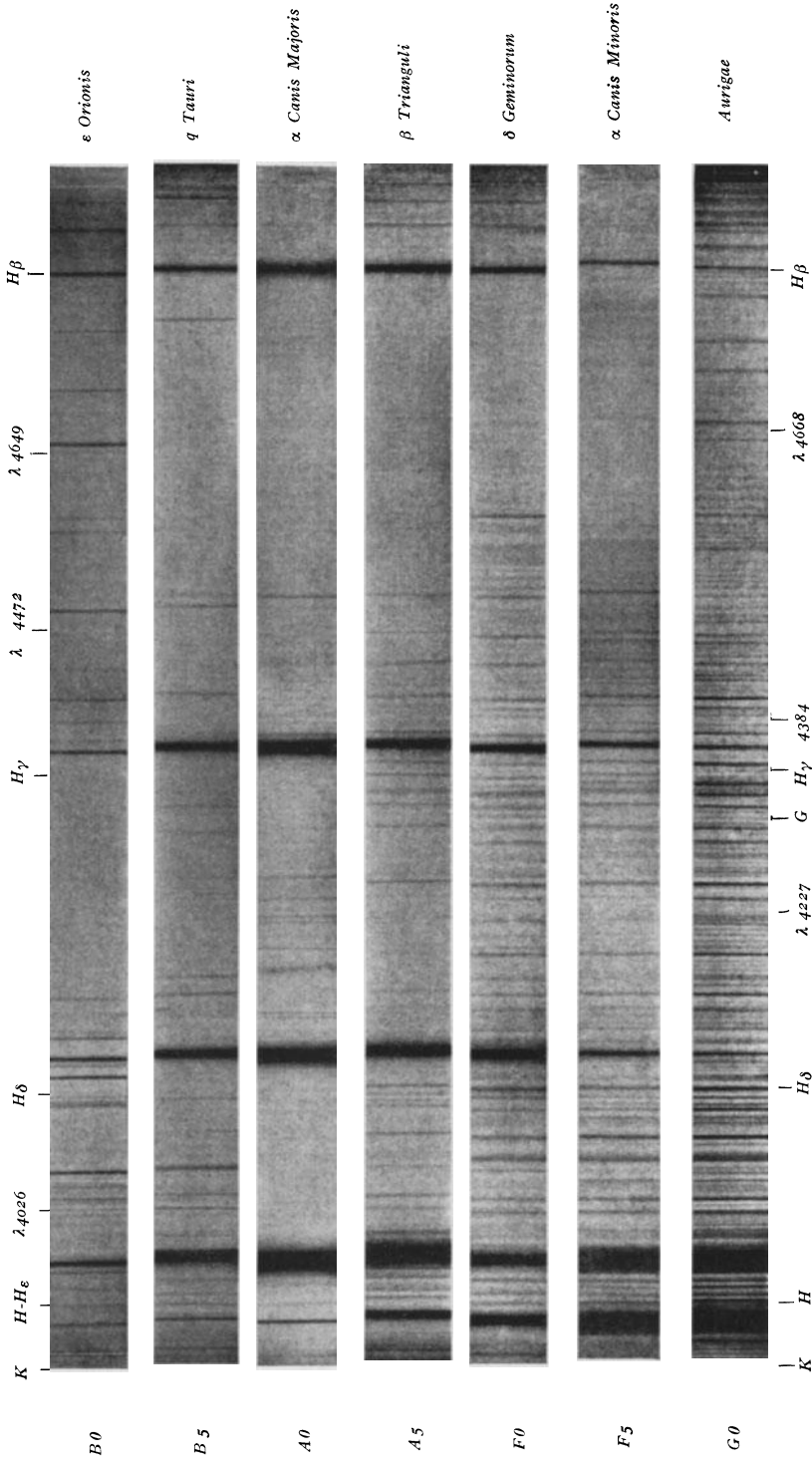


Fig. 25. Sternspektren der Typen B0 bis G0. Nach W. C. RUFUS [328].

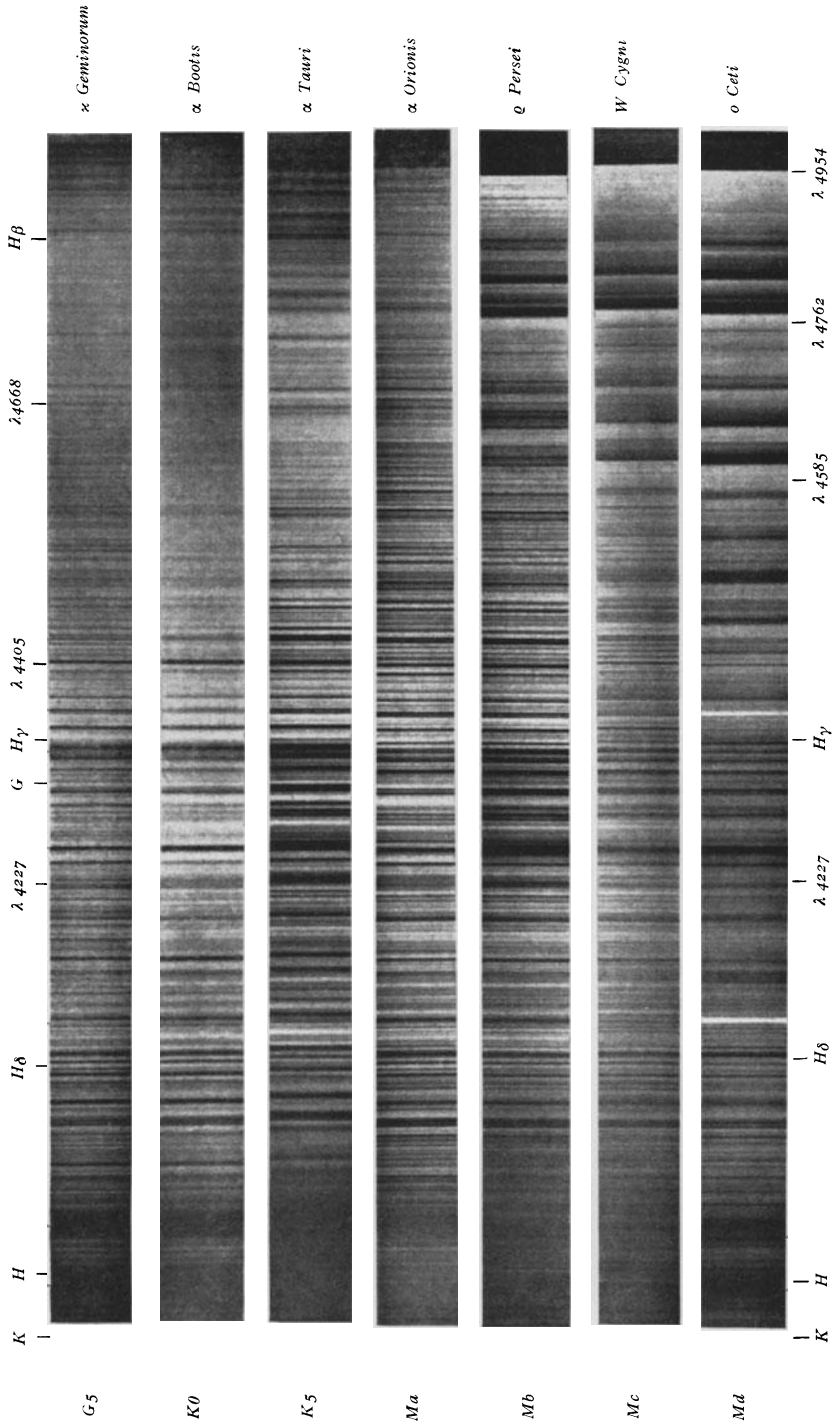


Fig. 26. Sternspektren der Typen G5 bis Md. Nach W. C. RUFUS [328].

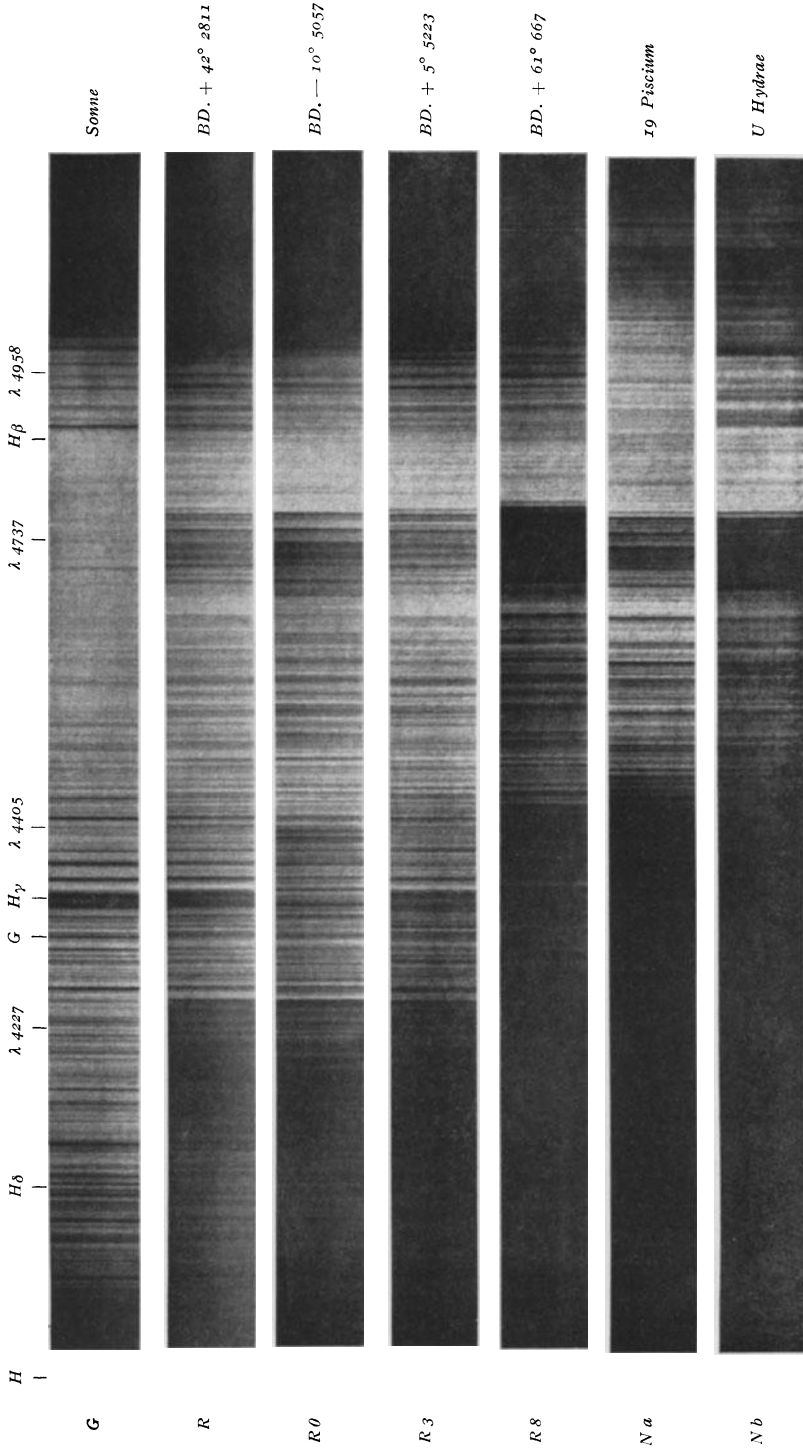


Fig. 27. Sternspektren der Typen G, R und N. Nach W. C. Rurus [328].

Schon frühzeitig erkannte man, daß entlang der Spektralsequenz die *Farben* der Sterne sich stetig von bläulichweiß (Sirius A0) über gelb (Capella und *Sonne* G0) nach rot (Beteigeuze cM0) ändern.

Da die Färbung der Sterne mit Absorptionsspektren im wesentlichen durch die Intensitätsverteilung in ihren kontinuierlichen Spektren bedingt sein muß, so legte der Vergleich mit einem glühenden Körper den Schluß nahe, daß die Harvardsequenz im wesentlichen eine *Temperatursequenz* ist. Die Stern-temperaturen nehmen offenbar von den „früheren“ Spektraltypen¹ O, B... nach den „späteren“ Typen K, M hin ab.

Die Frage nach dem *physikalischen* Zusammenhang zwischen den Stern-temperaturen einerseits und den im vorhergehenden kurz geschilderten Klassifikationskriterien andererseits blieb lange Zeit dunkel. Nachdem N. LOCKYER in jahrelangem spektroskopischem Beobachten der Lösung des Rätsels schon ziemlich nahe gekommen war (enhanced lines; Proto-Elemente), gelang unter Zuhilfenahme der inzwischen entstandenen Quantentheorie des Atombaus im Jahre 1920 MEGH NAD SAHA der entscheidende Schritt. Seine *Theorie der thermischen Ionisation* soll im nächsten Kapitel eingehend behandelt werden. Hier wollen wir nur ihr Grundprinzip auseinandersetzen:

Die Ionisation einer bestimmten Atomart, d. h. die Abtrennung eines Elektrons, wird begünstigt durch hohe *Temperatur* (große Strahlungsdichte)². Andererseits wird die Wiedervereinigung von Ion und Elektron bei niedrigem *Druck* langsamer erfolgen, als bei hohem Druck. Der Prozentsatz ionisierter Atome wird also mit wachsender Temperatur und abnehmendem Druck ansteigen und mit ihm die Stärke der Spektrallinien des Ions (Funkspektren), während umgekehrt der Prozentsatz neutraler Atome und damit die Stärke der Bogenlinien zurückgeht. Die Rechnung zeigt, daß Änderung des Druckes den Ionisationsgrad viel weniger beeinflußt, als Änderung der Temperatur.

Die Sterne werden demnach in den Harvardsequenz hauptsächlich geordnet nach abnehmendem *Ionisationsgrad* (und entsprechend abnehmendem Anregungsgrad). Das Auftreten immer höherer Ionisationsstufen bei den frühen Spektraltypen wird so leicht verständlich.

Weiterhin läßt sich z. B. das Intensitätsmaximum der BALMER-Linien bei A2 wenigstens in qualitativer Hinsicht erklären: Diese entstehen bekanntlich durch Absorption vom 2. Quantenzustand des neutralen H-Atoms aus. Bei sehr hohen Temperaturen ist nun aber der Wasserstoff größtenteils ionisiert, bei tiefen Temperaturen fehlt dem neutralen Atom die Energie zur Anregung des 2. Quantenzustandes. Dazwischen muß also — in Übereinstimmung mit der Beobachtung — ein für neutrale H-Atome im 2. Quantenzustand „günstiger“ Temperaturbereich liegen.

17. Messung der Energieverteilung in den kontinuierlichen Spektren der Sterne. Farbtemperaturen. Abweichungen vom PLANCKschen Strahlungsgesetz.

Um die „Temperaturen“ der Sterne zu bestimmen, lag es nahe, die bei der Sonne als näherungsweise anwendbar erprobten Gesetze der thermischen Gleichgewichtsstrahlung auch auf die Energieverteilung in Sternspektren anzuwenden³.

¹ Diese Bezeichnung hat ihren Ursprung in der — längst überholten — Vorstellung, daß die Sterne sich im Laufe ihrer Entwicklung abkühlen.

² Wir beschränken uns vorerst auf so niedrige Drucke, daß die Ionisation durch Stöße neben der durch Strahlung (Photoeffekt) vernachlässigt werden darf.

³ Darüber hinaus erheben sich aber die viel schwerwiegenden Fragen, ob die Sterne überhaupt wie schwarze Körper strahlen; wieviel die Störung des „wahren“ kontinuierlichen Spektrums durch zusammenfließende FRAUNHOFER-Linien ausmacht u. dgl.

Da wir — von ganz wenigen Ausnahmen abgesehen — die Durchmesser der Sterne und damit ihre strahlende Oberfläche zunächst nicht kennen, so muß sich dieser Vergleich auf die Energieverteilung im Spektrum beschränken, während der Absolutwert der Strahlungsintensität (Solarkonstantenmessung!) unzugänglich ist. Wir sprechen daher von *Farbtemperaturen*.

Wie im II. Kapitel werden wir zunächst wieder eine Darstellung der in prinzipieller Hinsicht interessanten Meßmethoden und Ergebnisse bringen. Wir wollen uns dabei möglichst wenig an bestimmte Hypothesen binden, bzw. — wo solche notwendig sind — deren Rolle deutlich erkennen lassen.

Im Anschluß an die grundlegende Arbeit von H. C. VOGEL und G. MÜLLER (1880) haben WILSING, SCHEINER und MÜNCH in Potsdam 1909 die erste brauchbare Untersuchung über die Energieverteilung in Sternspektren veröffentlicht [335, sowie 336 u. 337]:

Mit Hilfe eines visuellen Spektralphotometers am 80 cm-Refraktor wurden mehrere — von Absorptionslinien möglichst freie — Stellen der Sternspektren zwischen λ 4510 und 6420 an eine Kohlenfadenlampe angeschlossen. Diese wiederum konnte im Laboratorium mit einem Hohlraumstrahler LUMMERScher Bauart von bekannter Temperatur verglichen werden.

Nachdem SCHWARZSCHILD und HARTMANN die photographische Photometrie auf eine sichere Grundlage gestellt hatten, unternahm H. ROSENBERG [327] (1914) die ersten photographischen Messungen der Energieverteilung zwischen λ 3400 und λ 5750 in Sternspektren. Zur Aufnahme der Spektren diente eine U.V.-Prismenkamera (11 cm Öffnung, F:10, 45°-Prisma). Die Schwärzungskurven konnten aus Aufnahmen mit verschiedenen Belichtungszeiten abgeleitet werden. Die Sternspektren wurden zunächst untereinander verglichen, statt an einen Hohlraumstrahler wurde dann — mit Hilfe eines Kollimators — an das Sonnenspektrum angeschlossen.

Neuerdings haben GREAVES, DAVIDSON und MARTIN [309 u. 311] am 30''-Refraktor in Greenwich eine ähnliche Meßreihe durchgeführt. Das Sternlicht wird durch Haupt- und Cassegrainspiegel parallel gemacht und fällt dann auf ein 40°-Prisma. Als geeignetste Kameraoptik erwies sich nach längeren Versuchen ein Konkavspiegel von 19 cm Durchmesser und Öffnungsverhältnis 1:5.

Die Schwärzungskurven wurden teilweise — nach einem Vorschlage von HERTZSPRUNG — aus Aufnahmen abgeleitet, bei denen ein grobes Objektivgitter (Dispersionsrichtung \perp zu der des Prismas) gleichzeitig mehrere nebeneinanderliegende Spektren erzeugte, deren Intensitätsverhältnis nach der Beugungstheorie berechnet oder direkt gemessen werden konnte. Teilweise wurde auch ein besonderer Skalenspektrograph benützt, der auf dem Prinzip der Spaltbreitenvariation beruhte.

Zunächst wurden auch bei diesen Messungen eine Reihe von Standard-Sternen¹ untereinander verglichen und zwar in zwei je etwa 400 Å umfassenden Wellenlängenbereichen bei λ 4260 und λ 6320 Å. Über den eigentlichen Verlauf der Energieverteilungskurve geben diese Messungen also keine Auskunft.

Als Strahlungsnormale diente dann [311] — nachdem ein Kodak-Normal-Azetylenbrenner sich als nicht genügend zuverlässig erwiesen hatte — eine im National Physical Laboratory geeichte Wolframbandlampe (Farbtemperatur 2360° K).

Endlich sei noch auf eine besonders aufschlußreiche Beobachtungsreihe von H. JENSEN [318] hingewiesen, der in ähnlicher Weise wie die Greenwicher Astronomen (Spiegel von 20 cm Durchmesser in Cassegrain-Anordnung; 16°-Objektivprisma; Verbreiterung der Spektren durch eine Zylinderlinse.

¹ Diese sollen später als Farbtemperatur-Normalsequenz (analog der Polsequenz für die Sternhelligkeiten) dienen.

Plattenstandardisierung mit Objektivgitter sowie Hilfspektrograph mit Nicols) eine größere Anzahl von Sternen in dem Wellenlängenbereich $\lambda \sim 3700$ bis $\lambda 6410$ an den Polarstern angeschlossen hat. (Ein Vergleich mit dem schwarzen Körper oder einer äquivalenten Normallichtquelle wurde nicht durchgeführt.) Eine Ergänzung der JENSENSchen Untersuchungen für das langwelligere Gebiet (bis $\lambda 10000$) geben W. W. MORGAN und B. A. WOOTEN [322].

Auf eine größere Anzahl weiterer Untersuchungen (Literatur vgl. [312]) soll hier nicht eingegangen werden; wir möchten nur noch auf die noch nicht abgeschlossenen Göttinger Beobachtungen von H. KIENLE und seinen Mitarbeitern [319, 332, 333] hinweisen, die wichtige Beiträge zu unserem Problem versprechen¹.

Eine allen spektral-photometrischen Untersuchungen gemeinsame crux bildet die Bestimmung der atmosphärischen Extinktion. Ihre Methodik haben wir schon in Kap. II ausführlich besprochen. Solange man zwei *Sterne* unter ähnlichen Zenitdistanzen miteinander vergleicht, spielen Fehler in der Extinktionsbestimmung eine verhältnismäßig geringe Rolle. Beim Anschluß an den schwarzen Körper dagegen gehen sie in vollem Umfange ein und werden zu einer der bedenklichsten Fehlerquellen.

Ehe wir die *Ergebnisse* der geschilderten Messungen diskutieren, wird es zweckmäßig sein, noch einige Hilfsbegriffe einzuführen [vgl. z. B. 309, 314, 318]:

In einem nicht zu großen Wellenlängenbereich wird es stets möglich sein, die spektrale Energieverteilung I_λ eines Sternes innerhalb der Meßfehler durch eine PLANCKSche Funktion (7,30) mit passend gewählter Temperatur T darzustellen.

$$I_\lambda = \frac{\text{konst.}}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}. \quad (17,1)$$

(Es ist ja überdies noch die mit dem scheinbaren Sterndurchmesser zusammenhängende multiplikative Konstante verfügbar!) Das so *definierte* T bezeichnen wir als *Farbtemperatur*. Der spektralphotometrische Vergleich zweier Sterne 1 und 2 gibt zunächst die Größe

$$\ln \frac{I_{1\lambda}}{I_{2\lambda}} = \ln \frac{e^{\frac{c_2}{\lambda T_2}} - 1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T_1}} - 1}$$

in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ .

$$\Delta m_\lambda = 2,5 \log_{10} \frac{I_{1\lambda}}{I_{2\lambda}} = 1,086 \cdot \ln \frac{I_{1\lambda}}{I_{2\lambda}} \quad (17,2)$$

ist der entsprechende Helligkeitsunterschied in Größenklassen (vgl. Abschn. 18).

Unter den praktisch gegebenen Verhältnissen ist nun meist $e^{\frac{c_2}{\lambda T}} \gg 1$ (WIENSches Strahlungsgesetz) und $\ln I_{1\lambda}/I_{2\lambda}$ nahezu eine lineare Funktion der Wellenzahl $1/\lambda$. Wir schreiben deshalb

$$-\frac{d \ln (I_{1\lambda}/I_{2\lambda})}{d(1/\lambda)} = \Phi_1 - \Phi_2 = \Delta \Phi, \quad (17,3)$$

wo allgemein

$$\Phi = \frac{c_2}{T} \left/ \left(1 - e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \right) \right. = 5 \lambda \frac{d \ln I_\lambda}{d(1/\lambda)} \quad (17,4)$$

¹ Anm. b. d. Korr.: Vgl. H. KIENLE, Erg. d. exakt. Naturwiss. **16**, 437 (1937). Weiterhin A. ARNULF, D. BARBIER, D. CHALONGE u. R. CANAVAGGIA, Journ. d. Obs. **19**, 149 (1936).

ist. Die Größe $\Delta\Phi$, die wir nach (17,2) auch als

$$\Delta\Phi = -0,921 \frac{d\Delta m}{d(1/\lambda)} \tag{17,5}$$

schreiben können, bezeichnen wir als den „Relativen Gradienten“ zweier Sternspektra bei der Wellenlänge λ .

Im Bereiche des WIENSCHEN Strahlungsgesetzes hat er die einfache Bedeutung

$$\Delta\Phi = c_2/T_1 - c_2/T_2, \tag{17,6}$$

d. h. er gibt — unabhängig von der betrachteten Wellenlänge — die Differenz der reziproken Farbtemperaturen beider Sterne.

Man erkennt so auch, daß *Relativmessungen* der Energieverteilung in Sternspektren in der Hauptsache¹ die c_2/T -Skala bis auf eine additive *Konstante* festlegen. Die Größe Φ in (17,4) — bei der λ die Mitte des gemessenen Wellenlängengebietes bedeutet — bezeichnen wir [311] als den „*absoluten Gradienten*“. Um einen Überblick über die nach dem PLANCKSCHEN Strahlungsgesetz zu erwartende Temperatur- und Wellenlängenabhängigkeit des *absoluten Gradienten* zu geben, seien in Tabelle 9 die von H. JENSEN [318] nach Gl. (17,4) für λ 4000, 5000 und 6000 berechneten Werte wiedergegeben. Die Wellenlängen sind dabei — wie üblich — in μ gerechnet; die Zahlen also um einen Faktor 10^4 vergrößert. Die Messung des absoluten Gradienten für einen Bezugstern (bei den Greenwicher Beobachtungen Mittel aus neun A0-Sternen, bei JENSEN der Polarstern) erfordert den Anschluß an den schwarzen Körper und eine genaue Extinktionsbestimmung. Dieser Wert $\Phi = \Phi_0$ legt die Skala der Farbtemperaturen vollständig fest.

Wenn die Annahme, daß die Sterne wie schwarze Körper strahlen, der Wirklichkeit entspricht, dann müssen zum mindesten die in verschiedenen Spektralgebiete gemessenen Gradienten auf dieselbe Farbtemperatur führen, bzw. dürfen relative Gradienten nur die schwache Wellenlängenabhängigkeit der Gl. (17,3 u. 4) zeigen.

Tabelle 9. Temperatur T , c_2/T -Wert und absoluter Gradient $\Phi = \frac{c_2}{T} \left(1 - e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \right)$.
Nach H. JENSEN [318].

T	c_2/T	Absoluter Gradient			T	c_2/T	Absoluter Gradient		
		λ 4000	λ 5000	λ 6000			λ 4000	λ 5000	λ 6000
3000	4,78	4,78	4,78	4,78	9500	1,51	1,55	1,59	1,64
3200	4,50	4,50	4,50	4,50	10000	1,435	1,48	1,52	1,58
3400	4,23	4,23	4,23	4,23	11000	1,30	1,36	1,41	1,47
3600	3,99	3,99	3,99	3,99	12000	1,20	1,26	1,32	1,38
3800	3,78	3,78	3,78	3,78	13000	1,10	1,18	1,24	1,31
4000	3,60	3,60	3,60	3,60	14000	1,02	1,11	1,18	1,26
4200	3,42	3,42	3,42	3,42	15000	0,96	1,05	1,12	1,20
4400	3,26	3,26	3,26	3,26	16000	0,90	1,01	1,08	1,16
4600	3,12	3,13	3,13	3,13	17000	0,84	0,97	1,04	1,12
4800	3,00	3,01	3,01	3,01	18000	0,80	0,92	1,00	1,09
5000	2,87	2,88	2,88	2,89	19000	0,76	0,89	0,97	1,06
					20000	0,72	0,86	0,94	1,03
5500	2,61	2,62	2,62	2,63	25000	0,58	0,76	0,84	0,93
6000	2,39	2,40	2,41	2,43	30000	0,48	0,70	0,78	0,87
6500	2,20	2,22	2,23	2,25	40000	0,36	0,61	0,70	0,79
7000	2,05	2,07	2,09	2,12	50000	0,29	0,56	0,66	0,75
7500	1,91	1,93	1,95	1,98	100000	0,14	0,48	0,58	0,67
8000	1,79	1,82	1,85	1,89					
8500	1,69	1,72	1,75	1,79					
9000	1,59	1,62	1,66	1,71	∞	0,00	0,40	0,50	0,60

¹ D. h. bis auf die Korrekptionsgröße $1 - e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}$ und was damit zusammenhängt.

Tabelle 10. Relative Gradienten gegen Polaris (F 8).

Spektralgebiet Schwerpunkt		λ 4000—5000 4500		λ 4260—6320 5290		λ 4500—6400 5450	
Stern	Spektral- typus	ROSENBERG	JENSEN	GREENWICH	JENSEN	WILSING SCHEINER- MÜNCH	JENSEN
ι Ori	Oe5	—	— 2,10	—	—	—	— 1,32
γ Cas	B0p	— 2,10	— 1,47	— 0,97	— 0,78	— 0,41	— 0,67
ε Ori	B0	— 2,09	— 1,97	—	—	—	— 1,12
η UMa	B3	— 2,01	— 1,79	— 1,27	— 1,33	— 1,17	— 1,41
α Leo	B8	— 1,82	— 1,89	— 1,12	— 1,34	— 1,07	— 1,27
α CrB	A0	— 2,26	— 1,59	— 1,03	— 1,14	— 1,16	— 1,05
α Lyr	A0	— 1,86	— 1,59	— 1,04	— 1,17	— 0,98	— 1,10
α Cyg	cA2p	— 1,84	— 1,28	var.	—	— 0,98	— 0,66
α Aql	A5	— 1,31	— 0,99	— 0,62	— 0,74	— 0,75	— 0,68
α CMi	F5	— 0,68	— 0,72	—	—	— 0,55	— 0,15
α UMi	F8	0	0	0	0	0	0
α Aur	G0	+ 0,44	+ 0,40	+ 0,45	+ 0,43	(— 0,50)	+ 0,46
η Dra	G5	+ 1,06	+ 1,11	—	—	+ 0,42	+ 0,60
α Boo	K0	+ 1,88	+ 2,17	—	—	+ 1,30	+ 1,34
α Tau	K5	+ 3,88	+ 3,21	—	—	+ 1,52	+ 1,67
β UMi	K5	+ 3,69	+ 3,08	—	—	+ 1,30	+ 1,64
α Ori	Ma	+ 3,80	+ 3,57	—	—	+ 2,20	+ 2,32

Nun endlich zur Diskussion der Beobachtungen! Wir betrachten zunächst mit H. JENSEN [318] die relativen Gradienten gegen Polaris (Spektraltyp F 8) und zwar vergleichen wir in Tabelle 10 die in verschiedenen Spektralgebieten bestimmten Werte der schon besprochenen Beobachtungsreihen miteinander.

Die Übereinstimmung der verschiedenen Beobachter ist so gut, wie man dies bei der Schwierigkeit solcher spektralphotometrischer Messungen eben erwarten kann. Aber die Gradienten zeigen einen unerwartet großen Gang mit der Wellenlänge:

Legen wir α UMi eine Farbtemperatur von 6000° K bei (auf die absolute Festlegung der Skala kommen wir gleich zu sprechen; hier handelt es sich nur um die Größenordnung), so sollte z. B. der relative Gradient eines Sternes mit $T = 20000^\circ$ K nach Tabelle 9 sein:

$$\left. \begin{array}{l} \text{bei } \lambda 4500 \text{ und } \Delta\Phi = -1,50 \\ \text{und bei } \lambda 5450 \quad \Delta\Phi = -1,44 \end{array} \right\} \text{Diff. } 0,06.$$

Nach der Seite der niedrigen Temperaturen sollte die Wellenlängenabhängigkeit der Gradienten noch kleiner werden. Es kann demnach kein Zweifel daran bestehen, daß die Sterne *nicht durchweg wie schwarze Körper strahlen* und zwar ist die Temperaturabhängigkeit der Strahlungsintensität im Violet relativ zu der im Rot stärker, als man nach dem PLANCKSchen Strahlungsgesetz erwarten sollte. Ob diese Abweichungen vom PLANCKSchen Gesetz den heißeren oder den kühleren Sternen, dem lang- oder kurzwelligeren Spektralbereich zuzuordnen sind, kann erst der Anschluß an den schwarzen Körper lehren. Die Genauigkeit der *vorliegenden* Messungen reicht — um dieses Ergebnis vorwegzunehmen — zur Entscheidung dieser Frage noch nicht aus.

Anschlüsse von Sternspektren an den schwarzen Körper (bzw. geeichte Normallichtquellen) sind, wie schon erwähnt, ausgeführt worden von WILSING, SCHEINER und MÜNCH [335—337], ROSENBERG [327], GREAVES, DAVIDSON und MARTIN [311] und außerdem — mit der schon in Kap. II,11 beschriebenen Methodik — von H. H. PLASKETT [326] für das Gebiet λ 4000—6760. Man pflegt die Ergebnisse dieser Messungen so zu formulieren, daß man die Farb-

temperaturen von Sternen bestimmter Spektraltypen angibt. Die gefundenen Werte zeigen eine sehr starke Streuung. Diese dürfte zum Teil in der außerordentlichen Schwierigkeit solcher Messungen (die Temperatur des schwarzen Körpers muß sehr genau bekannt sein; dazu kommt die Extinktionsbestimmung, die Überbrückung großer Helligkeitsverhältnisse u. a.) begründet sein, teilweise aber auch in der Abhängigkeit der relativen Gradienten von der Wellenlänge (Tabelle 10!), welche die Beschreibung der Energieverteilung durch *eine* Temperatur T überhaupt illusorisch macht. Bei den Sternen der „frühen“ Spektraltypen O, B und A, die hauptsächlich in niederen galaktischen Breiten vorkommen, macht sich überdies noch vielfach die „Rötung“ durch interstellare Materie in ziemlich unberechenbarer Weise geltend. Die Ergebnisse der verschiedenen Beobachter im einzelnen wiederzugeben, würde zu weit führen. Für die Temperatur eines A0-Sternes z. B. finden WILSING, SCHEINER und MÜNCH $T \sim 10000^\circ$; ROSENBERG ursprünglich $\sim 28000^\circ$, eine Neureduktion von BRILL (der die Abweichungen vom schwarzen Körper in einer auch nicht weiter zu rechtfertigenden Weise zu korrigieren versucht) $\sim 12000^\circ$; GREAVES, DAVIDSON und MARTIN gaben in ihrer ersten Hauptpublikation [309] $T = 14300^\circ$, in ihrer neuesten Veröffentlichung [311] dagegen 18000° K an. Wir können also unsere Erörterungen wohl folgendermaßen zusammenfassen:

1. Die Messungen relativer Gradienten sind ziemlich zuverlässig.
2. Ihre Wellenlängenabhängigkeit entspricht nicht dem PLANCKSchen Gesetz der Hohlraumstrahlung.
3. Die Festlegung absoluter Gradienten durch Anschluß an den schwarzen Körper ist noch sehr unvollkommen.

Trotz dieser Schwierigkeiten wird es zunächst zweckmäßig sein, eine — wenn auch nur größenordnungsmäßig definierte — Farbtemperaturskala der Sterne aufzustellen und sogar versuchsweise diese Farbtemperaturen als wirkliche Temperaturen zu betrachten, d. h. aus der spektralen Intensitätsverteilung auf die absolute Strahlungsintensität zu schließen. Diese Hypothese erwies sich bei der Sonne (G0-Stern) als brauchbare Approximation und so dürfte sie auch bei den Sternen näherungsweise gültig sein.

Wir legen im folgenden nach BRILL [313 u. 308] eine Temperaturskala zugrunde, die etwa dem Bereich der WILSINGSchen Messungen (λ 4500—6400) entspricht und auch schon die später noch zu erwähnenden Messungen von Farbindices mitbenutzt. Auf die Teilung der Spektralsequenz von G0 ab werden wir ebenfalls noch zurückkommen.

Tabelle 11. Farbtemperaturskala (λ 4500—6400).

B 0	B 5	A 0	A 5	F 0	F 5
22000	17700	13500	10500	8550	7000
	G 0	G 5	K 0	K 5	M 0
Riesen .	5800	4860	4370	3460	3240
Zwerge .	6400	5700	5400	4280	3530

Man könnte die Frage aufwerfen, ob nicht die Abweichungen der Intensitätsverteilung in den Sternspektren vom PLANCKSchen Strahlungsgesetz nur durch das Zusammenfließen von FRAUNHOFERSchen Linien bedingt sind¹. C. T. ELVEY und O. STRUVE [310] haben nachgewiesen, daß bei manchen A-Sternen die

¹ Hierzu auch: G. SHAJN, M. N. **94**, 642 (1934).

Flügel der breiten Wasserstofflinien schon zwischen H_γ und H_δ (λ 4340 bzw. 4102) zusammenfließen. Weiterhin haben die Messungen von MULDERs (vgl. Abschn. 14) gezeigt, daß das Spektrum der Sonne (G0) durch zusammenfließende Linien schon beträchtlich entstellt wird. Man muß erwarten, daß bei kühleren Sternen (Bandenabsorption!) dieser Effekt noch viel stärker in Erscheinung tritt. Ein Teil der beobachteten Abweichungen vom PLANCKschen Gesetz kann also wohl auf dieser Ursache beruhen. Aber selbst wenn es gelänge, den Einfluß der Linien zu eliminieren und also das „wahre“ kontinuierliche Spektrum zu messen, so wäre zunächst wenig gewonnen: Bei den A-Sternen schließt sich bekanntlich an die Grenze der BALMER-Serie eine ausgeprägte kontinuierliche Absorption an, die ad oculos demonstriert, daß die Intensitätsverteilung in Sternspektren wesentlich durch die *Wellenlängenabhängigkeit des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten* mitbedingt ist. Einer wirklichen Deutung der kontinuierlichen Sternspektren muß also erst eine *Theorie des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten* vorangehen. Den vielen Versuchen, die Energieverteilungskurven der Sterne etwas besser oder schlechter in das Schema der PLANCKschen Funktion zu pressen [334 u. a.], möchten wir daher keine große Bedeutung beimessen.

Wir werden in den folgenden Kapiteln die kontinuierlichen Spektren der Sterne einer eingehenden theoretischen Behandlung unterwerfen. Zunächst aber wollen wir die Temperaturen der Tabelle 11 benutzen, um uns einen Überblick über die sonstigen Eigenschaften der Sterne zu verschaffen, wenn wir auch damit rechnen müssen, daß unsere *numerischen* Ergebnisse später eventuell einer Revision bedürfen.

18. Visuelle, photographische und bolometrische Helligkeit der Sterne. Farbenindizes. Absolute Helligkeit¹.

Die Strahlungsintensität (vgl. Abschn. 1) an der Oberfläche eines Sternes der Temperatur T ist bei der Wellenlänge λ nach der PLANCKschen Formel (7,30) — deren Anwendbarkeit wir im folgenden *voraussetzen* —

$$I_\lambda = \frac{2 C_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} = \frac{2 C_1}{\lambda^5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \left(1 - e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}\right)^{-1}. \quad (18,1)$$

Die letztere Schreibweise ist vielfach bequem, weil in praxi meist $e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \ll 1$ ist. Die *gesamte Ausstrahlung* eines Sternes vom Radius R (pro Wellenlängenbereich 1) wird dann

$$4 \pi R^2 \cdot \pi I_\lambda \text{ erg/sek.} \quad (18,2)$$

In der Astronomie ist es nun üblich, Helligkeitsverhältnisse in *Größenklassen* m auszudrücken gemäß der Definitionsgleichung

$$\Delta m = -2,5 \Delta \log_{10} I. \quad (18,3)$$

Einer Helligkeits*abnahme* um einen *Faktor* 10 entspricht also jeweils eine *Zunahme* von 2,5 Größenklassen. Die Wahl dieser höchst unrationellen Definition ist nur aus historischen und physiologischen (WEBER-FECHNERSches Gesetz) Erwägungen verständlich. Aus der neueren Entwicklung der Astrophysik wird

¹ In diesem und dem folgenden Abschnitt schließen wir uns ziemlich eng an die — kaum zu übertreffende — Darstellung des RUSSELLschen Buches an. Im Interesse der Geschlossenheit des vorliegenden Buches konnten wir uns nicht mit einem bloßen Hinweis auf RUSSELL begnügen.

man sie möglichst fernhalten¹. Der Nullpunkt der Größenklassenzählung wird durch Aufweisung festgelegt (s. unten).

Nach (18,1 bis 3) können wir nun das Größenklassensystem für die Wellenlänge λ festlegen durch:

$$\left. \begin{aligned} m_\lambda &= c_\lambda - 5 \log R + 2,5 \log e \cdot \frac{c_2}{\lambda T} + 2,5 \log \left(1 - e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \right) \\ m_\lambda &= c_\lambda - 5 \log R + \frac{1,56_0}{\lambda T} + x. \end{aligned} \right\} \quad (18,4)$$

Die Korrektionsgröße x als Funktion von $\frac{1,56_0}{\lambda T}$ hat folgende Werte:

$$\left. \begin{array}{ccccc} \frac{1,56}{\lambda T} : & 5,0 & 4,0 & 3,0 & 2,0 & 1,0 \\ x & -0,01 & -0,03 & -0,07 & -0,19 & -0,55. \end{array} \right\} \quad (18,5)$$

Die „effektive“ Wellenlänge λ ist nun beim System der *visuellen* bzw. *photographischen Helligkeiten* im wesentlichen festgelegt durch das Empfindlichkeitsmaximum des Auges (genau genommen wieder von der Helligkeit abhängig!) und der photographischen Platte. Daneben spielen eine Rolle die Durchlässigkeit der benützten Optik und der Atmosphäre. Da sich in Wirklichkeit diese Empfindlichkeitsbereiche über ein gewisses Wellenlängengebiet erstrecken, werden die effektiven Wellenlängen beim Übergang von heißen zu kühleren Sternen etwas anwachsen. Für unsere Zwecke genügt es, mit konstanten Mittelwerten zu rechnen und zwar wählen wir sie entsprechend dem System der visuellen bzw. photographischen HARVARD-Photometrie zu

$$\lambda_{\text{vis}} = 5290 \text{ \AA} \quad \text{und} \quad \lambda_{\text{phot}} = 4250 \text{ \AA}. \quad (18,6)$$

Die gegenseitigen Beziehungen von c_{vis} und c_{phot} werden (für *alle* photometrischen Systeme) durch die Übereinkunft festgelegt, daß für A0-Sterne die visuelle und photographische Helligkeit übereinstimmen sollen. Wenn wir mit RUSSELL [1] die Temperatur eines A0-Sternes $T = 11200^\circ \text{K}$ setzen, so ergibt sich mit den effektiven Wellenlängen (18,6) $c_{\text{vis}} - c_{\text{phot}} = +0,64$ (der BRILLSCHE Wert $T = 13500^\circ$ führt zu $c_{\text{vis}} - c_{\text{phot}} = 0,56$). Setzen wir noch die gemeinsame Konstante² beider Helligkeitssysteme gleich m_0 , so erhalten wir schließlich:

$$\left. \begin{aligned} m_v &= m_0 + 0,64 - 5 \log R + \frac{29\,500}{T} + x_v \\ m_p &= m_0 - 5 \log R + \frac{36\,700}{T} + x_p. \end{aligned} \right\} \quad (18,7)$$

Neben der visuellen und photographischen Helligkeit gewinnt immer größere Bedeutung die von A. S. EDDINGTON [5] und E. HERTZSPRUNG [314] eingeführte „*bolometrische Helligkeit*“, welche die *Gesamtstrahlung* des Sternes charakterisiert. Nach dem STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetz ist diese

$$4 \pi R^2 \cdot \sigma T^4$$

Wir können also schreiben

$$m_{\text{bol}} = c_b - 5 \log R - 10 \log T \quad (18,8)$$

Die Beziehung zwischen c_b und c_v wird per definitionem so festgelegt, daß die Differenz $m_v - m_b$ bei ihrem Minimum (nach Gl. (18,7 u. 8) $T \approx 6800^\circ$) verschwindet. Man erhält dementsprechend:

$$m_b = m_0 + 43,27 - 5 \log R - 10 \log T. \quad (18,9)$$

¹ Wenn man schon die Intensitätsverteilung in Linienkonturen u. dgl. Dinge in Größenklassen angibt, müßte man auch die Lichtgeschwindigkeit in babylonischen Schuh pro Montag oder ähnlichen Einheiten notieren!

² Diese hängt noch von der Parallaxe des Sternes ab!

Die Differenz zwischen photographischer und visueller Helligkeit eines Sternes bezeichnet man als seinen *Farbenindex* C . Wenn man die effektiven Wellenlängen (genauer gesagt die spektralen Empfindlichkeitskurven) der verwendeten photometrischen Systeme kennt, kann man von C ohne weiteres auf die Sterntemperatur zurückschließen.

Für die Harvardsysteme ist in der hier betrachteten Näherung — die Korrektur $x_p - x_v$ kann vernachlässigt werden — nach (18,7):

$$C = m_p - m_v = 7400/T - 0,64 \quad (18,10)$$

Die nach dieser Formel aus den KINGSchen Farbenindexbeobachtungen (Harvard) für die verschiedenen Spektraltypen abgeleiteten Temperaturen¹ (vgl. RUSSELL [4] S. 734, BRILL [304] u. a.) stimmen gut mit der aus dem gesamten in Betracht kommenden Beobachtungsmaterial von A. BRILL kompilierten Skala unserer Tabelle 11 überein.

Im Zusammenhang mit theoretisch-astrophysikalischen Problemen ist noch von besonderem Interesse die sog. *bolometrische Korrektur*:

$$\Delta m_b = m_v - m_b = -42,63 + \left. \begin{aligned} &+ 10 \log T + \frac{29\,500}{T} + x_v \end{aligned} \right\} (18,11)$$

in unserer Näherung. Sie gestattet, aus der visuell beobachteten Helligkeit auf die Gesamtstrahlung eines Sternes zu schließen. (Daß die Annahme schwarzer Strahlung hier besonders gefährlich ist, braucht kaum betont zu werden!). Fig. 28 gibt die nach (18,11) berechneten, sowie die

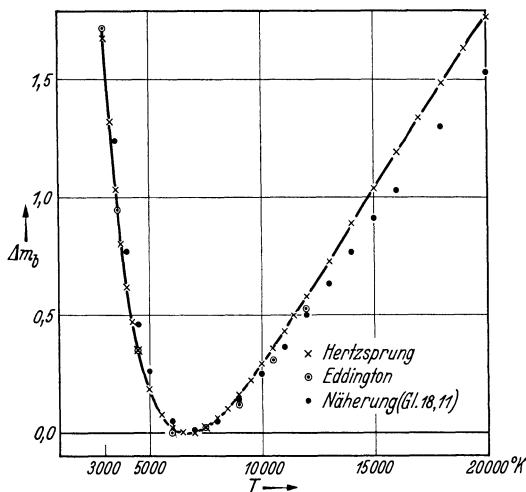


Fig. 28. Bolometrische Korrektur $\Delta m_b = m_v - m_b$.

erheblich genaueren Werte, die HERTZSPRUNG [314] und EDDINGTON [5] unter Benützung der genauen Empfindlichkeitsfunktion des Auges durch numerische Integration erhalten haben².

Die Verhältnisse bei extrem hohen Temperaturen hat S. R. PIKE [325] untersucht, sie sind wichtig für die Theorie der Novae, der planetarischen Nebel und verwandte Probleme. Im Gebiet des RAYLEIGH-JEANSschen Strahlungsgesetzes ($\frac{c_2}{\lambda T} \ll 1$) wird nach (7,40), (18,2 u. 3):

$$m_v = m_0 + 11,72 - 5 \log R - 2,5 \log T \quad (18,12)$$

und mit (18,10)

$$\Delta m_b \approx -31,55 + 7,5 \cdot \log T. \quad (18,13)$$

Die von S. R. PIKE berechneten Δm_b sind in der folgenden Tabelle 12 zusammen mit den nach der — natürlich nicht so genauen (vgl. außerdem die vorhergehenden Anm.) — asymptotischen Formel (18,13) für $T > 50000^\circ$ berechneten Werten angegeben.

¹ Auf die weiteren indirekten Methoden zur Messung von Sterntemperaturen, wie WILSINGS Rotkeilmethode, NORDMANN'S Dreifarbenphotometer, Messung von Wärmeindizes, Wasserzellenabsorption u. dgl. einzugehen, würde zu weit von unserem eigentlichen Ziele abführen.

² Ihre Zahlenwerte liegen für große T etwas höher als die nach (18,11) berechneten, entsprechen der Violettverschiebung der effektiven Wellenlänge. Weshalb sie bei niedrigen T tiefer liegen, ist nicht ohne weiteres zu ersehen.

Tabelle 12. Bolometrische Korrektur für hohe Temperaturen.

$T \cdot 10^{-4}$	1.2	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	5	6	7	8	10	12
Δm_b {Nach PIKE [325] {Gl. (18,13)	0,54	1,60	2,16	2,63	3,10	3,45	4,10	4,64	5,2	5,6	6,35	6,7
	—	—	—	—	—	—	3,69	4,28	4,79	5,22	5,95	6,54

Bis jetzt haben wir den Nullpunkt unserer Helligkeitssysteme und damit die Konstante m_0 der Gl. (18,7) in ziemlich unrationeller Weise festgelegt. Um zu Größen zu gelangen, die *nur* noch mit dem betrachteten Stern selbst zusammenhängen, führen wir den Begriff der *absoluten Helligkeit* M ein. Er gibt in Größenklassen (visuell oder photographisch; bei A0 sollen beide Systeme übereinstimmen) die Helligkeit an, die der betreffende Stern bekäme, wenn er in eine Entfernung von 10 parsec (= 32,6 Lichtjahre; Sternparallaxe von 0",1) vom Beobachter gestellt würde. Es ist also wegen der Abnahme der Helligkeit mit dem Quadrat der Entfernung (außerdem muß für $p = 1/10''$ $M = m$ werden):

$$M - m = 5 + 5 \log p, \tag{18,14}$$

wo p die Parallaxe des Sternes in Bogensekunden bedeutet (seine Entfernung ist $1/p$ parsek). Schreiben wir nun nach (18,7)

$$M_v = \text{konst.} - 5 \log R + 29500/T + x_v \tag{18,15}$$

und setzen rechts die für die Sonne geltenden Zahlenwerte $R = 1$ Sonnenradius (wir rechnen im folgenden alle Sterndurchmesser am einfachsten in dieser Einheit), $T = 6000^\circ$ und $M = 4^m83$ ein¹, so ergibt sich für die Konstante der Wert $-0,08$ und wir erhalten schließlich

$$\left. \begin{aligned} M_v &= -0,08 - 5 \log R + \frac{29\,500}{T} + x_v \\ M_p &= -0,72 - 5 \log R + \frac{36\,700}{T} + x_p. \end{aligned} \right\} \tag{18,16}$$

19. Sterndurchmesser. RUSSELL-HERTZSPRUNG-Diagramm. Riesen- und Zwergsterne. Vorläufiges über spektroskopische Parallaxen.

Sind für einen Stern die scheinbare Helligkeit (wir schreiben die folgenden Gleichungen für visuelle Helligkeiten; die beim Übergang zu photographischen Helligkeiten nötigen Änderungen sind trivial) m_v und die Parallaxe p bekannt, so kann man zunächst aus (18,14)

$$M_v = m_v + 5 (\log p + 1) \tag{19,1}$$

seine *absolute* visuelle Helligkeit M_v und weiterhin aus (18,16)

$$M_v = -0,08 - 5 \log R + 29\,500/T + x_v \tag{19,2}$$

seinen *Radius* R (Sonnenradius = 1) *berechnen*, wenn die Temperatur T aus spektralphotometrischen Messungen bzw. Farbenindex oder Spektraltyp bekannt ist.

Ist die Parallaxe p nicht bekannt, so muß man sich mit der Ermittlung des *scheinbaren Sterndurchmessers* d (in Bogensekunden) begnügen: Aus der Entfernung $1/p$ parsek (entsprechend einer Sternparallaxe von p'') erscheint der Erdbahnradius = 107 Sonnendurchmesser unter dem Winkel p'' . Ein Stern vom R -fachen Durchmesser der Sonne erscheint also unter dem Winkel

$$d'' = \frac{p \cdot R}{107} \text{ Bogensekunden.} \tag{19,3}$$

¹ Unter Berücksichtigung der Entfernung nach (18,14) berechnet aus der im System der visuellen Sternhelligkeiten gemessenen Helligkeit der Sonne.

Mit (19,1 u. 2) erhält man daraus ohne weiteres

$$\log d'' = -0,20 \cdot m_v + 5900/T - 3,05 + 0,20 x_v. \quad (19,4)$$

Die so berechenbaren Winkeldurchmesser erreichen im günstigsten Fall (α Orionis) die Größe $d = 0''048$.

Auf die am MT. WILSON-Observatorium mit dem MICHELSON-Interferometer von PEASE [324, dort eingehende Literaturangaben] ausgeführten direkten Messungen von d'' braucht hier wohl nur hingewiesen zu werden. Die gute Übereinstimmung der gemessenen und der nach (19,4) berechneten Winkeldurchmesser kann als Bestätigung der Annahme gebucht werden, daß die betreffenden Sterne wie schwarze Körper strahlen.

Man darf jedoch einerseits auf die genauen Zahlenwerte der interferometrisch gemessenen d'' kein zu großes Gewicht legen, da bei der Auswertung der Interferometerbeobachtungen eine — zur Zeit noch ziemlich unsichere — Annahme über den Mittel-Rand-Kontrast (vgl. auch Abschn. 13) des betreffenden Sternes gemacht werden muß (resultierende Unsicherheit von d : $\sim \pm 10\%$). Andererseits sind auch die in (19,4) eingehenden Temperaturen gerade bei den K- und M-Sternen (um die es sich durchweg handelt) wegen der starken Verzerrung des kontinuierlichen Spektrums durch Linien- und Bandenabsorption nicht sehr genau. (Nimmt man als Unsicherheit der Temperatur $\sim \pm 150^\circ$ an, so führt dies in d'' zu einer solchen von $\sim \pm 20\%$).

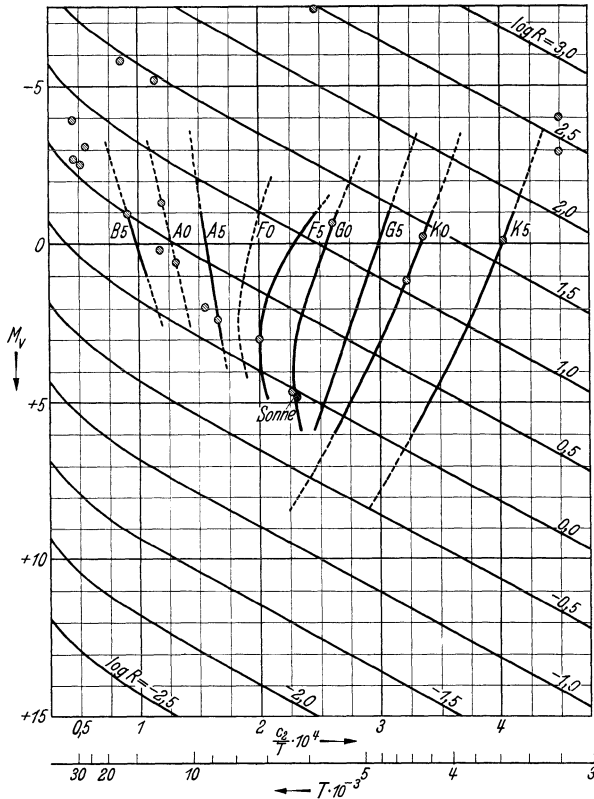


Fig. 29. Verknüpfung von vis. absoluter Helligkeit M_v , Sternradius R (Sonnensradius = 1), Temperatur T (bzw. c_2/T) und Spektraltypus. RUSSELL-HERTZSPRUNG-Diagramm der Sterne mit m_v heller als 1,6.

Eine direkte Bestimmung von wahren Sternradien R ist weiterhin noch möglich bei Verfinsterungsveränderlichen, deren Bewegung auch spektroskopisch beobachtet ist. Da jedoch für solche Objekte fast keine Parallaxen vorliegen, können die Gl. (19,2 oder 4) nicht nachgeprüft werden. Wir wollen daher auf diese Dinge hier nicht weiter eingehen.

In Fig. 29 ist zunächst noch einmal der durch Gl. (18,16) gegebene Zusammenhang zwischen visueller absoluter Helligkeit M_v , Temperatur T und Sternradius R dargestellt. Nach Tabelle 11 würde jedem Spektraltyp eine bestimmte Temperatur entsprechen. Dies trifft aber — wie genauere Untersuchungen zeigen — nur näherungsweise zu, diese Temperatur hängt vielmehr noch etwas von der absoluten Helligkeit des Sternes ab und zwar bei verschiedenen Spektraltypen in verschiedener Weise. Die in unserer Figur ein-

gezeichneten Linien „konstanten Spektraltypus“ sind einer statistischen Untersuchung von B. STICKER [330; vgl. auch W. BECKER 302] entnommen, die sich auf das 1930 vorhandene Material an Sterntemperaturen (hauptsächlich aus Farbenindizes) und absoluten Helligkeiten (Parallaxen) stützt. — Auf die Frage nach der Deutung dieser Kurven kommen wir später zurück; einstweilen können wir sie ebensogut als Definition der Spektraltypen betrachten.

In ein solches M_v, T (bzw. Spektraltyp)-Diagramm haben nun E. HERTZSPRUNG und H. N. RUSSELL die wirklichen Sterne eingetragen (in Fig. 29 sind als \bullet die Sterne heller als $m_v = 1^m,6$ eingezeichnet). Dabei zeigte sich, daß sie sich in diesem RUSSELL-HERTZSPRUNG-Diagramm in der Hauptsache nach zwei Gruppen sondern: Die *Riesensterne* (Durchmesser bis zu 300 Sonnenradien!), deren absolute Helligkeiten längs der ganzen Spektralreihe sich um $M_v \approx 0$ gruppieren und die *Zwergsterne*, deren M_v in gesetzmäßiger Weise von $\sim -3^m$ bei B0 über $+4^m,8$ bei G0 (Sonne) auf $\sim +10^m$ bei M0 abnehmen. Neuerdings bezeichnet man die 2. Gruppe — der die Mehrzahl der Sterne angehört — auch als *Hauptsequenz*.

Eine Untersuchung von E. HERTZSPRUNG [317] über die Beziehung zwischen Farbenindex und m_p bei den Plejaden (man hat damit eine Gruppe gleich weit entfernter Sterne und vermeidet die Fehler der Parallaxenmessung!) zeigt, daß die *Hauptsequenz* ziemlich scharf definiert ist; die Schwankungen in m_v sind bei festgehaltenem Farbenindex $< 0^m,5$. Die Gruppe der Riesensterne ist nicht so scharf definiert. Außer Riesen- und Zwergsternen kennt man noch einige Sterne mit hoher Temperatur und kleiner absoluter Helligkeit, die sog. weißen Zwerge (Siriusbegleiter u. a.).

Die in Fig. 29 eingezeichneten Sterne (heller als $1,6 m_v$) geben natürlich noch kein Bild der *wahren statistischen* Verteilung der Sterne im RUSSELL-HERTZSPRUNG-Diagramm, da wir — infolge der Auswahl nach *scheinbarer* Helligkeit — die Sterne mit großer Absoluthelligkeit stark bevorzugt haben. Um ein statistisch richtiges Bild zu bekommen, muß man versuchen, einen bestimmten Raum möglichst vollständig zu erfassen. Fig. 30 gibt nach A. v. MAANEN [320] das RUSSELL-HERTZSPRUNG-Diagramm für die Umgebung der Sonne bis zu einer Entfernung von $r = 5$ parsek. Die „Bevölkerung“ dieses Gebietes dürfte heute wenigstens einigermaßen vollständig bekannt sein. Die Figur bestätigt zunächst die gute Definiertheit der Hauptsequenz. Sie zeigt weiterhin, daß die Riesensterne relativ sehr selten sind, während die scheinbare Seltenheit der weißen Zwergsterne im wesentlichen durch die Schwierigkeit ihrer Entdeckung bedingt wird.

Um auch die Stellung der Riesensterne im RUSSELL-HERTZSPRUNG-Diagramm durch ein größeres Beobachtungsmaterial zu belegen, geben wir in Fig. 31 noch ein von J. J. NASSAU und McCUSKEY [323] aus etwa 4000 trigonometrischen Parallaxenmessungen konstruiertes Diagramm wieder.

Wir haben schon in Tabelle 11 und Fig. 29 darauf hingewiesen, daß innerhalb ein und desselben Spektraltypus die Temperatur der Riesensterne von der der Zwergsterne etwas verschieden ist. Genauer gesagt ist offenbar

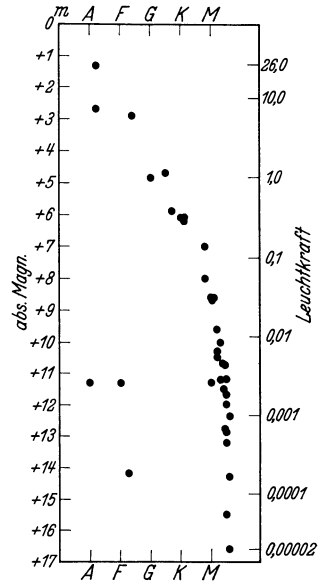


Fig. 30. RUSSELL-HERTZSPRUNG-Diagramm für die nächsten Sterne [320] ($r < 5$ parsek). 21 einfache, 6 doppelte und 2 dreifache Sterne; zusammen 39 Sterne. Darunter sind 3 weiße Zwerge, aber noch kein Riesenstern!

entsprechend Fig. 29 für einen bestimmten Spektraltyp T eine Funktion von M_v , d. h. $f(M_v, T) = 0$. Wie ist das zu erklären? Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, liegen die *Massen* der meisten Sterne in dem engen Intervall von $\sim 0,2$ bis 10 Sonnenmassen. Die Riesensterne müssen also eine sehr viel geringere *Dichte* als die Zwergsterne haben. Nun hängt aber das Spektrum eines Sternes — wie die Ionisationstheorie verstehen läßt — nicht nur von der Temperatur, sondern auch vom Druck (bzw. Dichte) ab. Wenn man also den

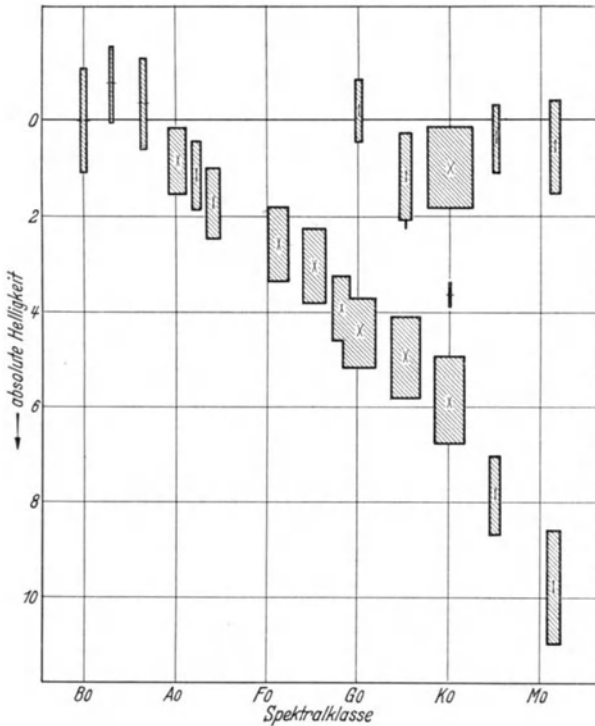


Fig. 31. RUSSELL-HERTZSPRUNG-Diagramm nach trigonometrischen Parallaxenmessungen [323]. Die Streuung in M_v wird dargestellt durch die Höhe der Rechtecke. Deren Breite entspricht der Anzahl der Meßwerte pro Gruppe.

verschiedener absoluter Helligkeit (Fig. 29), hinsichtlich Dichte und Temperatur noch Unterschiede bestehen, sollten dann ihre Spektren nicht — trotz der *allgemeinen* Ähnlichkeit — noch feinere Unterschiede aufweisen? Diese wurden in der Tat — nachdem HERTZSPRUNG schon in ähnlicher Richtung gearbeitet hatte — 1914 von W. S. ADAMS und A. KOHLSCHÜTTER [301] auf empirischem Wege gefunden. Sie entdeckten, daß jeweils für Sterne einer bestimmten Spektralklasse das (geschätzte) Intensitätsverhältnis gewisser Linienpaare ein Kriterium für die absolute Helligkeit ist. Da man aus der absoluten und der scheinbaren Helligkeit nach (19,1) leicht die Parallaxe berechnen kann, spricht man von der Methode der *spektroskopischen Parallaxen*. Eine genauere Theorie der bei ADAMS und KOHLSCHÜTTER und späteren Untersuchungen benützten Kriterien können wir jetzt noch nicht entwickeln, doch sei darauf hingewiesen, daß die *Ionisationstheorie* das Verhalten der Metalllinien im wesentlichen richtig darstellt, während bei den Wasserstoff- und Heliumlinien außerdem direkte *Druckverbreiterung* eine erhebliche Rolle spielt.

Spektraltypus durch die Konstanz *irgendwelcher* Bedingungen definiert, so kann dies nur heißen: Spektraltyp = Fkt(M_v, T). Bei den kühleren Sternen wird der Spektraltyp offenbar nach dem mittleren Ionisationsgrad der Sternatmosphäre beurteilt. Man kann *denselben* Ionisationsgrad aber offenbar erhalten bei kleinem Druck und niedriger Temperatur oder größerem Druck und höherer Temperatur; d. h. innerhalb eines bestimmten Spektraltypus sind die Riesensterne kühler als die Zwergsterne, in Übereinstimmung mit der Beobachtung. Der entgegengesetzte Gang bei B- und A-Sternen ist nicht so leicht zu verstehen. Wir werden später allen diesen Fragen mit besserem Rüstzeug entgegenreten.

Wenn zwischen den Sternen ein und desselben Spektraltypus, aber ver-

20. Die Massen der Sterne. EDDINGTONs Masse-Leuchtkraft-Beziehung. Schwerebeschleunigung an den Sternoberflächen.

Eine direkte Bestimmung der Masse μ eines Sternes ist nur möglich bei visuellen und spektroskopischen Doppelsternen sowie Verfinsterungsveränderlichen. Wir müssen also vorläufig die *Arbeitshypothese* benützen, daß derartige Sterne, trotzdem sie möglicherweise einen anderen Entwicklungsgang hatten als einfache Sterne, sonst dieselben physikalischen Eigenschaften besitzen wie diese. Die Gesamtheit der spektroskopischen Beobachtungen spricht durchaus für die — zum mindesten sehr weitgehende — Richtigkeit dieser Annahme.

Die Beziehungen der Masse μ zu den anderen Charakteristiken eines Sternes blieben lange Zeit dunkel, bis A. S. EDDINGTON (1924) auf Grund der Theorie des inneren Aufbaues der Sterne seine — auch von der Beobachtung bestätigte¹ — Beziehung zwischen Masse μ , Leuchtkraft L (= gesamte Ausstrahlung in erg/sek) und Oberflächentemperatur T entdeckte.

Der — später leider verschiedentlich mißverständene — Grundgedanke EDDINGTONs kann in qualitativer Hinsicht wohl am einfachsten folgendermaßen formuliert werden:

Die geologischen Beobachtungen über das Alter der *Erde* im Verein mit der bekannten Abschätzung der Abkühlungsgeschwindigkeit der *Sonne* nach LORD KELVIN weisen darauf hin, daß die Strahlungsenergie der Sonne und der Sterne subatomaren Quellen entstammt. Im *stationären* Zustand muß also die Leuchtkraft eines Sternes — aus der absoluten bolometrischen Helligkeit M_b leicht zu berechnen — gleich sein der im Sterninneren pro sek *erzeugten* Energie.

Denken wir uns nun eine Masse μ mit bestimmten Energiequellen L erg/sek zunächst irgendwie im Raum verteilt, so wird sie einer Konfiguration zustreben, in welcher Gas- und Strahlungsdruck und die gegenseitige Anziehung der Materie einander das Gleichgewicht halten. Mit anderen Worten: Es bildet sich ein Stern, dessen Radius R durch L und μ eindeutig festgelegt ist. Da weiterhin $L = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4$, so ist auch seine Oberflächentemperatur T bestimmt.

Ganz unabhängig von irgendwelchen speziellen Annahmen über das Sterninnere kommen wir also auf eine Relation der Form

$$\varphi(M_b, \mu, T) = 0. \tag{20,1}$$

¹ Eine zunächst noch übrige Unstimmigkeit konnte 1932 von B. STRÖMGREN [Z. S. f. Ap. 4, 118 (1932)], EDDINGTON [M. N. 92, 471 (1932)] u. A. behoben werden mit Hilfe der — auch durch spektroskopische Beobachtungen gestützten — Annahme, daß die Sterne zum großen Teil aus Wasserstoff bestehen.

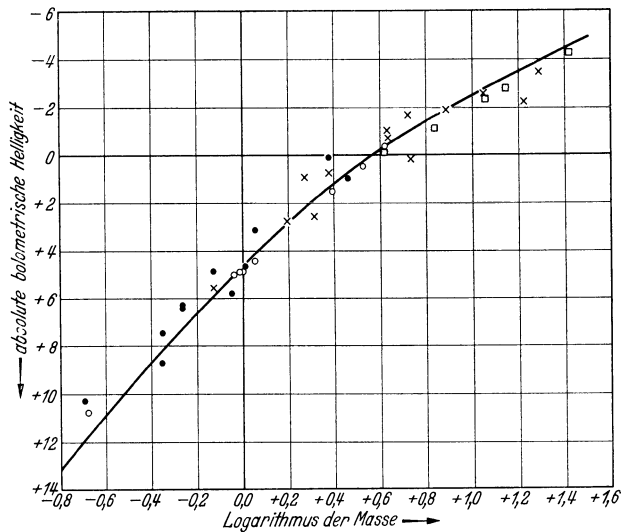


Fig. 32. Die Massenhelligkeitskurve (nach A. S. EDDINGTON [5]). o Erstklassige Bestimmungen. • Bestimmungen zweiter Klasse (weniger zuverlässig). x Verfinsterungsveränderliche. □ Cepheiden.

Um die Funktion φ näher festzulegen, hat nun EDDINGTON [5] im einzelnen den Aufbau solcher Sterne berechnet, in deren Innerem durchweg die *Zustandsgleichung des idealen Gases* gilt. Daneben muß noch — faute de mieux — eine Annahme über die räumliche Verteilung der Energiequellen gemacht werden; aber nachträgliche Kontrollrechnungen zeigen, daß das Schlußresultat von diesen nur wenig beeinflußt wird. Alle übrigen Größen sind — wenn wir die Zusammensetzung der Sterne (vgl. die letzte Anm.) als bekannt ansehen — durch *rein physikalische* Betrachtungen festgelegt.

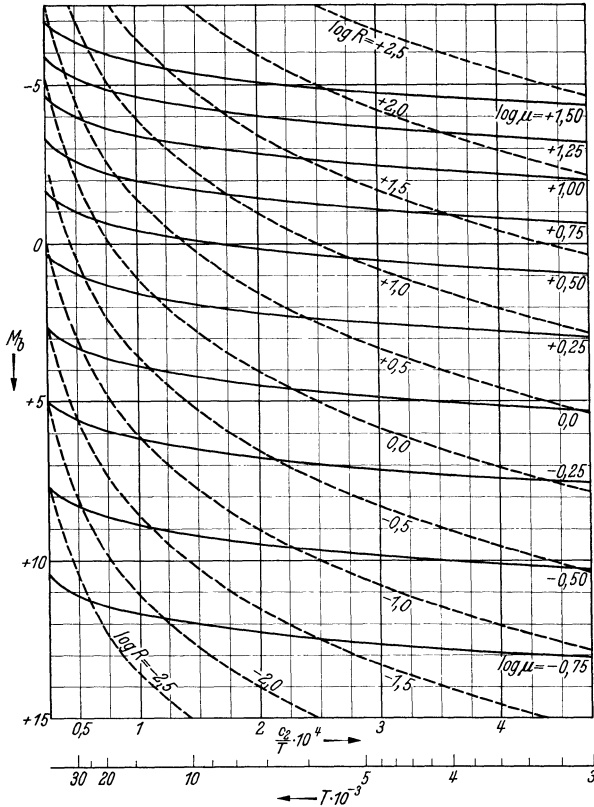


Fig. 33. $\log R$ und $\log \mu$ in Abhängigkeit von M_b und c_2/T bzw. T .

Unter diesen Voraussetzungen findet EDDINGTON, daß die Temperatur T , solange man in dem praktisch vorkommenden Bereich von 3000° bis $\sim 30000^\circ$ K bleibt, in (20,1) nur die Rolle einer Korrektionsgröße spielt und spricht deshalb kurz von der *Masse-Leuchtkraft-Beziehung*. Sie nimmt die Form an

$$M_b + 2 \log(T/5200) = \begin{cases} (20,2) \\ = f(\log \mu). \end{cases}$$

Bezüglich der Funktion $f(\log \mu)$ führt EDDINGTONS Theorie des gasförmigen Sterninneren zu guter Übereinstimmung mit den Beobachtungen. In Fig. 32 ist die von EDDINGTON berechnete Kurve zusammen mit den entsprechenden Beobachtungswerten wiedergegeben. Wegen der Diskussion des Beobachtungsmaterials im einzelnen sei auf EDDINGTONS Buch verwiesen; vgl. auch J. MEURERS [321].

Die weitergehende Frage, wie die charakteristische Verteilung der Sterne im HERTZSPRUNG-RUSSELL-Diagramm zu erklären ist oder — mit anderen Worten — weshalb nicht alle Wertetripel von M_b , μ und T in Wirklichkeit vorkommen, hängt offenbar mit der Physik der Energieerzeugung im Sterninneren und mit kosmogonischen Problemen zusammen. Alle *diese* Dinge liegen weit außerhalb des Rahmens der vorliegenden Darstellung.

Aus Masse μ und Radius R eines Sternes (die entsprechenden Werte für die Sonne = 1 gesetzt) können wir leicht die Schwerebeschleunigung g an seiner Oberfläche berechnen. Sie ist für die Sonne (vgl. Abschn. 9) $2,74 \cdot 10^4 \text{ cm} \cdot \text{sek}^{-2}$ und allgemein:

$$g = 2,74 \cdot 10^4 \mu/R^2 \text{ cm} \cdot \text{sek}^{-2}. \tag{20,3}$$

Die Zahlenwerte von g und T bestimmen — physikalisch gesehen — den Aufbau einer Sternatmosphäre. Wenn wir darangehen werden, eine genauere Theorie

der Spektralklassifikation und der spektroskopischen Parallaxenmethoden zu entwickeln, müssen wir stets auf diese Parameter zurückgreifen (aber auch mit O. STRUVE erörtern, ob sie ausreichen). Andererseits benützt man in praxi meist eine andere Beschreibung: Nämlich durch die absolute Helligkeit M_v (oder M_b) und die Temperatur T oder den Spektraltyp.

Um den Übergang vom einen System zum anderen zu erleichtern, geben wir noch die folgenden Diagramme¹ (Fig. 33 u. 34): Als Abszisse ist wie in Fig. 29 c_2/T bzw. T (vgl. Tabelle 9) gewählt, als Ordinate die bolometrische absolute Helligkeit M_b (Umrechnung auf visuelle Helligkeit $M_v = M_b + \Delta m_b$ mit Hilfe von Fig. 28 oder der oberen Hilfskurve der Fig. 34). Zunächst sind in Fig. 33 nach (18,9) die Linien $R = \text{konst.}$ nochmals eingezeichnet. Da für die Sonne $M_b = +4^m85$, $R = 1$ und $T \approx 6000^\circ$ ist, erhalten wir

$$M_b = +42,63 - \left. \begin{array}{l} \\ - 5 \log R - 10 \log T. \end{array} \right\} (20,4)$$

Die nahezu horizontal verlaufenden Kurven geben die nach (20,2) und Fig. 32 berechneten Sternmassen μ . Mit Hilfe dieser beiden Kurvenscharen $R = \text{konst.}$ bzw. $\mu = \text{konst.}$ sind in Fig. 34 nach Gl. (20,3) die Kurven konstanter Schwerebeschleunigung g gezeichnet (alles in logarithmischem Maßstab). Der Zusammenhang zwischen Spektraltyp einerseits und T und M_v andererseits ist schon aus Fig. 29 zu entnehmen. Der besseren Übersicht wegen ist in Fig. 34 nochmals (gestrichelt) die Mittellinie des Riesen- und Zwergastes eingetragen. Während der letztere — wie schon bemerkt — ziemlich gut definiert ist, sollte die Kurve für die Riesensterne mehr als qualitative Andeutung aufgefaßt werden.

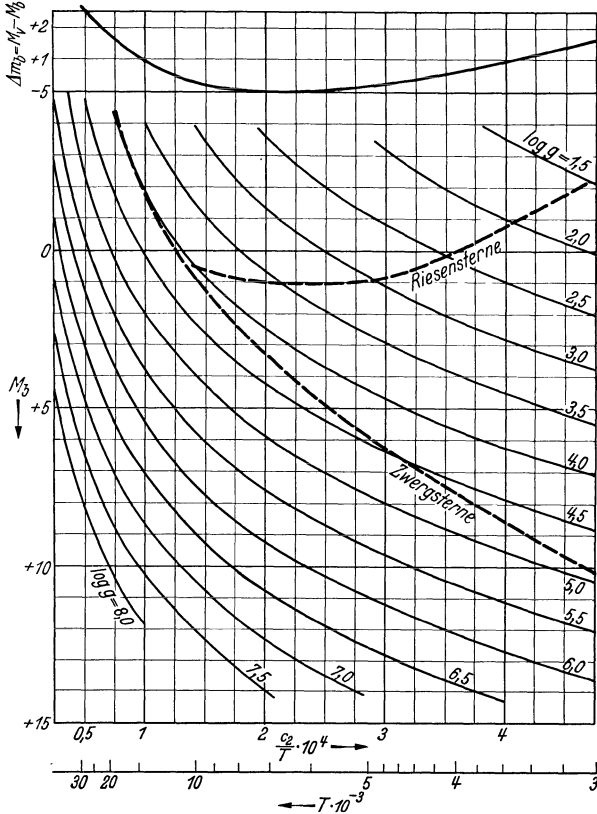


Fig. 34. Schwerebeschleunigung g an der Sternoberfläche in Abhängigkeit von M_b und c_2/T . Schematisiertes RUSSELL-HERTZSPRUNG-DIAGRAMM. Oben Hilfskurve $\Delta m_b = M_v - M_b$ zur Umrechnung von visuellen auf bolometrische Helligkeiten.

¹ Eine ähnliche Darstellung in Tabellenform gibt C. H. PAYNE: The Stars of High Luminosity (Harvard Monograph 3, 113 (1930)). (Die $\log g$ -Werte unserer Fig. 34 unterscheiden sich von den dortigen selten um mehr als $\pm 0,15$, was etwa der Unsicherheit der Masse-Leuchtkraft-Beziehung entspricht). Der Maßstab unserer Diagramme ist so gewählt, daß alle Größen (R , μ , g usw.) mit der z. Z. überhaupt erreichbaren Genauigkeit daraus abgelesen werden können. Wir konnten daher von der Aufnahme ausführlicher Tabellen absehen.

IV. Kapitel.

Thermische Ionisation und Anregung.

21. Anregung und Ionisation der Atome bei thermischem Gleichgewicht. BOLTZMANNsche und SAHASche Formel.

Nachdem wir im letzten Abschnitt des vorhergehenden Kapitels gezeigt haben, wie die Harvard-Sequenz der Sternspektren und die Methoden der spektroskopischen Parallaxenbestimmung nach der SAHASchen Theorie der thermischen Ionisation in qualitativer Hinsicht erklärt werden können, wollen wir uns nunmehr deren quantitativer Entwicklung zuwenden.

Betrachten wir zunächst einmal die *thermische Anregung* der Atome: Bei der Temperatur T sei im Mittel die Anzahl der Atome (oder eventuell Ionen) einer bestimmten Art im s -ten Quantenzustand n_s , im Grundzustand (= 0-ten Zustand) dagegen n_0 . Beide Zahlen wollen wir vorerst pro Quantenzelle¹ h^3 rechnen, d. h. wir betrachten alle Quantenzustände als *einfach* bzw. eine Mehrfachheit (sog. *Entartung*) derselben als durch ein schwaches magnetisches Hilfsfeld aufgehoben. Dann ist nach der Grundformel (7,18) der Statistik:

$$\frac{n_s}{n_0} = e^{-\frac{\chi_s}{kT}}. \quad (21,1)$$

χ_s bedeutet dabei die zur Anregung des s -ten Zustandes vom Grundzustand aus erforderliche Anregungsenergie (erg), k wie früher die BOLTZMANNsche Konstante. Wollen wir explizit zum Ausdruck bringen, daß es sich um Quantenzustände eines r -fach ionisierten Atoms (neutrales Atom $r = 0$) handelt, so schreiben wir deutlicher

$$\frac{n_{r,s}}{n_{r,0}} = e^{-\frac{\chi_{r,s}}{kT}}. \quad (21,2)$$

Da wir die zugrundeliegenden Prinzipien der Statistik (Abschn. 7) LUDWIG BOLTZMANN verdanken, so bezeichnen wir diese Formel und ihre Verallgemeinerung für entartete Quantenzustände (vgl. Ende dieses Abschnittes) kurz als *BOLTZMANNsche Formel*.

Die *Ionisation*, d. h. die Abtrennung eines Elektrons von einem neutralen Atom oder einem Ion, können wir auffassen als die Anregung eines Zustandes mit *positiver* Energie = der kinetischen Energie des Photoelektrons bzw. — bei Stoßionisation — Sekundärelektrons. Der einzige Unterschied gegenüber der thermischen *Anregung* besteht darin, daß wir im Gebiet positiver Energie keine diskreten Quantenzustände mehr haben, sondern die Quantenzellen der Größe h^3 — auf die sich ja die n_s und n_0 beziehen, aus dem Kontinuum des Phasenraumes (vgl. Abschn. 7 und die vorhergehende Anm.) „herausschneiden“ müssen.

Um ein Elektron aus dem Grundzustand des neutralen Atoms zu befreien, müssen wir erstens die Ionisierungsenergie χ_0 und zweitens die dem Elektron (Masse m) mitgegebene kinetische Energie aufwenden. Bezeichnen wir wieder die Lagekoordinaten des Elektrons relativ zum Atomkern — den wir in Anbetracht seiner großen Masse als ruhend betrachten dürfen — mit x, y, z und die entsprechenden Impulskoordinaten mit $m\dot{x} = p_x \dots$, so ist zunächst die Gesamtenergie des freien Elektrons:

$$\chi_0 + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \chi_0 + \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2). \quad (21,3)$$

¹ Der Phasenraum wird hier gebildet von den Koordinaten x, y, z des Elektrons relativ zu „seinem“ Atomkern und den entsprechenden Impulskoordinaten $p_x = m\dot{x}$, $p_y = m\dot{y}$, $p_z = m\dot{z}$.

Befinden sich dn_e Elektronen in einem Volumelement $dx dy dz = dV$ und liegen ihre Impulskomponenten in den Bereichen p_x bis $p_x + dp_x$, p_y bis $p_y + dp_y$. . . , so „bewohnen“ sie im Phasenraum ein Volum $d\Omega = dx dy dz \cdot dp_x dp_y dp_z$ oder $d\Omega/h^3$ Quantenzellen. Die Zahl der Elektronen pro Quantenzelle ist also:

$$dn_e \cdot h^3/d\Omega.$$

Die diesen freien Elektronen entsprechende Anzahl der neutralen, im Grundzustande (= 1 Quantenzelle per def.) befindlichen Atome bezeichnen wir mit n_0

Dann gilt entsprechend (21,1)

$$\frac{dn_e}{n_0} = e^{-\frac{1}{kT} \left\{ \chi_0 + \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \right\}} \cdot \frac{dp_x dp_y dp_z \cdot dV}{h^3}, \quad (21,4)$$

oder, wenn wir über den ganzen Bereich der Impulskordinaten und das Volumen ΔV der Lagekoordinaten integrieren¹:

$$\frac{n_e}{n_0} = \frac{(2\pi m k T)^{3/2}}{h^3} \cdot e^{-\frac{\chi_0}{kT}} \cdot \Delta V. \quad (21,5)$$

Da die Koordinaten x, y, z des Elektrons auf ein bestimmtes Ion bezogen waren, so ist offenbar das Volum ΔV , dessen Größe wir bis jetzt noch nicht festgelegt haben, so zu wählen, daß auf ΔV gerade dieses *eine* Ion entfällt — entsprechend der Zuordnung eines gebundenen Elektrons zu *einem* Atom. Bezeichnen wir mit n_1 die Zahl der Ionen *pro* cm^3 (NB.!), so ist also $n_1 \cdot \Delta V = 1$ und es wird

$$\frac{n_1 \cdot n_e}{n_0} = \frac{(2\pi m k T)^{3/2}}{h^3} \cdot e^{-\frac{\chi_0}{kT}}. \quad (21,6)$$

Anstatt n_e und n_0 pro Quantenzelle zu rechnen, können wir — alle Quantenzustände als einfach vorausgesetzt — auch beide Zahlen pro cm^3 rechnen und die linke Seite von Gl. (21,6) auffassen als:

$$\frac{\text{Zahl der Ionen pro } cm^3}{\text{Zahl der Atome pro } cm^3} \cdot \text{Zahl der Elektronen pro } cm^3.$$

Entsprechendes gilt sinngemäß für die BOLTZMANNsche Gleichung (21,2). Im folgenden werden wir — bis auf weiteres — die Bezeichnungen n_1 , n_0 und n_e in *diesem* Sinne gebrauchen. Da weiterhin nach der kinetischen Gastheorie n_e mit dem Partialdruck der freien Elektronen P_e (dyn/cm²) durch die bekannte Beziehung

$$P_e = n_e \cdot k T \quad (21,7)$$

verknüpft ist, so erhalten wir:

$$\frac{n_1}{n_0} \cdot P_e = \frac{(2\pi m)^{3/2} (k T)^{5/2}}{h^3} \cdot e^{-\frac{\chi_0}{kT}}. \quad (21,8)$$

Genau dieselbe Betrachtung können wir offensichtlich auf höhere Ionisationsstufen übertragen: Ebenso wie wir in (21,8) beim neutralen Atom die Häufigkeit der Zustände positiver Energie mit der Häufigkeit des tiefsten Zustandes negativer Energie verglichen, so können wir dies beim r -fach ionisierten Atom tun und erhalten:

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} \cdot P_e = \frac{(2\pi m)^{3/2} (k T)^{5/2}}{h^3} \cdot e^{-\frac{\chi_r}{kT}}, \quad (21,9)$$

wo χ_r die Ionisierungsenergie des r -fach geladenen Ions bedeutet.

Nummehr müssen wir noch die BOLTZMANNsche Formel (21,2) und die SAHASche Formel (21,9) in einem Punkte verallgemeinern: Die Quantenzustände

¹ Mit $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

der Atome sind meist nicht einfach, sondern bestehen aus einer Anzahl praktisch zusammenfallender Quantenzustände, die z. B. durch ein Magnetfeld voneinander getrennt werden können. Die Zahl der einfachen Quantenzustände (je entsprechend *einer* Quantenzelle) eines Atomzustandes (Termes) bezeichnet man als sein *statistisches Gewicht*. Das statistische Gewicht des s -ten Quantenzustandes im r -fach ionisierten Atom nennen wir $g_{r,s}$.

Die Zahlenwerte der $g_{r,s}$ liefert die Theorie der Spektren; insbesondere ist für das freie Elektron — wegen der 2 Einstellungsmöglichkeiten seines Spins in einem äußeren Feld — $g_e = 2$.

Wenn wir nunmehr die $n_{r,s}$, n_r , $n_e \dots$ in (21,2) und (21,7) auf den ganzen g -fach entarteten Quantenzustand beziehen wollen¹, so müssen wir ihre Zahlenwerte erst durch die entsprechenden statistischen Gewichte teilen, da ja unsere ursprünglichen Formeln sich auf Anzahlen pro einfacher Quantenzustand bezogen. Das Verhältnis der Anzahl der Atome im s -ten Zustand des r -fach ionisierten Atoms zur Anzahl der Atome im Grundzustand desselben Ions wird also endgültig²:

$$\frac{n_{r,s}}{n_{r,0}} = \frac{g_{r,s}}{g_{r,0}} e^{-\frac{\chi_{r,s}}{kT}} \quad (\text{BOLTZMANN-Formel}). \quad (21,10)$$

Entsprechend gilt für das Verhältnis der Atomzahlen in den Grundzuständen der $r+1$ -, bzw. r -fach ionisierten Atome:

$$\frac{n_{r+1,0}}{n_{r,0}} P_e = \frac{g_{r+1,0}}{g_{r,0}} \cdot 2 \cdot \frac{(2\pi m)^{3/2} (kT)^{5/2}}{h^3} e^{-\frac{\chi_r}{kT}} \quad (\text{SAHASCHES FORMEL}). \quad (21,11)$$

Auf eine andere Schreibweise der Formeln von BOLTZMANN und SAHA werden wir geführt, wenn wir an Stelle der Zahl der r -fach ionisierten Atome im Grundzustand $n_{r,0}$ die Gesamtheit aller r -fach ionisierten, aber *irgendwie* angeregten Atome n_r (ohne zweiten Index!) betrachten:

Aus (21,10) erhält man sofort — analog (7,18) —

$$\frac{n_{r,s}}{n_r} = \frac{g_{r,s}}{u_r} \cdot e^{-\frac{\chi_{r,s}}{kT}} \quad (21,12)$$

wo

$$u_r(T) = \sum_{s=0}^{\infty} g_{r,s} e^{-\frac{\chi_{r,s}}{kT}} = g_{r,0} + g_{r,1} \cdot e^{-\frac{\chi_{r,1}}{kT}} + g_{r,2} \cdot e^{-\frac{\chi_{r,2}}{kT}} + \dots \quad (21,13)$$

die sog. *Zustandsumme* (partition function) des r -fach ionisierten Atoms bedeutet.

Schreibt man auch die SAHASCHES FORMEL für die *Gesamtzahl* der $r+1$ - bzw. r -fach ionisierten Atome, so wird nach (21,11 u. 12):

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} \cdot P_e = \frac{u_{r+1}}{u_r} \cdot 2 \cdot \frac{(2\pi m)^{3/2} (kT)^{5/2}}{h^3} \cdot e^{-\frac{\chi_r}{kT}}. \quad (21,14)$$

Die Gleichungspaare (21,10 und 11) bzw. (21,12 und 14) sind selbstverständlich vollkommen gleichwertig, je nach Umständen wird das eine oder andere bequemer zu handhaben sein.

¹ Diese Bedeutung der $n_{r,s}$, $n_e \dots$ werden wir im folgenden durchweg festhalten.

² Zur Vermeidung von Irrtümern sei bemerkt, daß bei R. H. FOWLER [403] die $(\chi_r)_s$ unserem $\chi_r - \chi_{r,s}$ entsprechen.

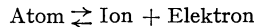
Die BOLTZMANNsche wie die SAHASche Gleichung gelten in den hier angegebenen Formen — ihrer Herleitung gemäß — ganz unabhängig vom Vorhandensein anderer Ionisationsstufen oder anderer Elemente. Man kann natürlich leicht die Ionisierung von Gemischen oder die Aufeinanderfolge mehrerer Ionisationsstufen auch in analytischen Formeln zum Ausdruck bringen (z. B. RUSSELL [429]), aber in praxi ist es meist einfacher und übersichtlicher, direkt auf die Grundgleichungen zurückzugreifen.

Die *Zustandssumme* (21,13) kann man — wegen der relativen Seltenheit angeregter Atomzustände — *in praxi* meist nach wenigen Gliedern abbrechen; häufig genügt schon die Näherung $u_r \approx g_{r,0}$. Trotzdem hat die Frage der Konvergenz der Reihe (21,13) seinerzeit viel Kopfzerbrechen verursacht: Die Terme der Atome häufen sich bekanntlich beim Energiewert Null, d. h. bei

$\chi_{r,s} \rightarrow \chi_r$. Demnach müßten in (21,13) die $e^{-\frac{\chi_{r,s}}{kT}}$ für große s einem konstanten Wert zustreben und da die $g_{r,s}$ mit s anwachsen, so müßte die Reihe divergieren. Dies tritt aber aus folgendem Grund¹ nicht ein: Eine unendliche Serie diskreter Terme kann sich nur ausbilden, wenn *einem* Atom ein unendlich großes Volumen zur Verfügung steht; in einem endlichem Raum bildet sich nur eine *endliche* Anzahl diskreter Terme aus². Physikalisch äußert sich dies darin, daß man in einer Spektralserie nicht unendlich viele scharfe Linien beobachtet, sondern daß diese schon vor der Seriegrenze zusammenfließen. Eine genauere Abschätzung zeigt, daß es bei den praktisch vorkommenden Temperaturen ziemlich gleichgültig ist, wo man nach Aufsummieren der ersten paar Glieder die Reihe (21,13) abbricht, der Einfluß der hochangeregten Zustände (große s) ist vernachlässigbar gering.

Zum Schluß mögen noch einige historische und methodische Bemerkungen Platz finden (vgl. auch A. PANNEKOEK [404]):

Die grundlegende Formel für die thermische Ionisation von Atomen ist zuerst 1919 von J. EGGERT [414] im Zusammenhang mit EDDINGTONs Untersuchungen über den inneren Aufbau der Sterne aufgestellt worden. M. N. SAHA [433—437] erkannte kurz darauf ihre enorme Bedeutung für die Theorie der Sternspektren und es erscheint daher vollkommen gerechtfertigt, daß sie seinen Namen trägt. Die Ableitungen von EGGERT und SAHA machen weitgehendem Gebrauch von thermodynamischen Methoden: Das chemische Gleichgewicht der Reaktion



wird nach den von VAN T'HOFF entwickelten Methoden behandelt, dann wird der NERNSTsche Wärmesatz angewandt und erst zur Festlegung der sog. chemischen Konstante des Elektronengases werden — in ziemlich indirekter Weise — Statistik und Quantentheorie herangezogen. (Die statistischen Gewichte bzw. Zustandssummen fehlen noch). Diese Methodik ist infolge ihrer Uneinheitlichkeit noch wenig befriedigend.

1923 untersuchten dann R. H. FOWLER und E. A. MILNE [416] das Ionisationsgleichgewicht auf rein statistischer Grundlage mit Hilfe einer kurz zuvor von C. G. DARWIN und R. H. FOWLER [413] entwickelten Methode: Die Zustandssumme, die — vgl. Abschn. 7 — in einfacher Weise mit der Entropie und den thermodynamischen Potentialen zusammenhängt, wird dabei in eleganter Weise mit Hilfe einer komplexen Integration nach der Sattelpunktmethode gewonnen. Abgesehen von einem kleinen Versehen (die Zustandssumme des ionisierten Atoms war in den ersten Arbeiten vergessen worden), führten diese Untersuchungen schon auf die hier gegebene endgültige Form der Gl. (21, 12 und 14). Andererseits ist es klar, daß die Anwendung der DARWIN-FOWLERSchen Methode auf ein so elementares Problem³ darauf herausläuft, daß man mit Kanonen nach Spatzen schießt.

Die hier gegebene ebenso elementare wie durchsichtige Darstellung schließt sich eng an eine 1932 erschienene Note von D. H. MENZEL [425] an. Hinsichtlich mathematischer

¹ Vgl. z. B. R. H. FOWLER [403] S. 343—353. Mit Literaturangaben.

² Wellenmechanisch gesprochen: In einem endlichem Volumen gibt es nur endlich viele Eigenfunktionen.

³ Die Leistungsfähigkeit der DARWIN-FOWLERSchen Methode wird erst bei der Behandlung komplizierterer Probleme (Schwankungen höherer Ordnung, Elektrolyte u. dgl.) ins rechte Licht gestellt.

Exaktheit ist sie der FOWLER-MILNESchen gleichwertig. Der näherungsweise Auswertung des komplexen Integrals nach der Sattelpunktmethode bei FOWLER-MILNE entspricht die Anwendung der STIRLINGSchen Formel (7,5) bei der Ableitung des BOLTZMANNschen Gleichverteilungssatzes. In der Tat kann man die genauere Form der STIRLINGSchen Formel (mit Fehlerabschätzung) wohl am einfachsten mit Hilfe funktionentheoretischer Methoden ableiten (vgl. COURANT-HILBERT [402], S. 431).

22. Zahlenmäßige Auswertung der SAHASchen Formel. Ionisations- und Anregungsspannungen. Statistische Gewichte.

Ehe wir die SAHASche Formel einer experimentellen Prüfung unterziehen und sie auf astrophysikalische Probleme anwenden, wollen wir sie auf eine handlichere Form bringen.

Die Ionisierungsarbeiten χ_r messen wir nicht mehr in erg, sondern in eVolt¹:

$$1 \text{ eVolt} = 1,591 \cdot 10^{-12} \text{ erg} \quad (22,1)$$

Rechnet man mit Termwerten in cm^{-1} , so entspricht bekanntlich

$$1 \text{ eVolt} \sim 8106 \text{ cm}^{-1} \quad (22,2)$$

Alle im folgenden angegebenen *Ionisierungs- und Anregungsspannungen* χ_r bzw. $\chi_{r,s}$ sind — soweit nichts anderes bemerkt ist — *stets in eVolt ausgedrückt*.

Den Elektronendruck P_e rechnen wir in diesem Buch stets in der C.G.S.-Einheit $1 \text{ dyn/cm}^2 = 1 \text{ Bar}$. In der älteren Literatur wird er meist in Atmosphären gemessen, wobei

$$1 \text{ at} = 1013000 \text{ Bar} \quad (22,3)$$

Diese Einheit ist jedoch hinsichtlich ihrer Größe und Definition (Bezugnahme auf die Erdbeschleunigung) den astrophysikalischen Verhältnissen — die Elektronendrucke in den Sternatmosphären sind von der Größenordnung $10^{-4} \text{ at} = 101 \text{ Bar}$ — so wenig angemessen, daß sie endlich verschwinden sollte.

Gehen wir nunmehr in Gl. (21,12) und (21,14) zu dekadischen Logarithmen über und führen gleichzeitig die Zahlenwerte der universellen Konstanten² ein, so erhalten wir die BOLTZMANNsche *Formel*:

$$\log \frac{n_{r,s}}{n_r} = -\chi_{r,s} \frac{5040}{T} + \log \frac{g_{r,s}}{u_r} \quad (22,4)$$

und die SAHASche *Formel* (P_e in Bar, χ_r in Volt):

$$\log \frac{n_{r+1}}{n_r} \cdot P_e = -\chi_r \cdot \frac{5040}{T} + \frac{5}{2} \log T - 0,48 + \log \frac{u_{r+1} \cdot 2}{u_r} \quad (22,5)$$

Da wir später sehr viel mit der SAHASchen Formel zu rechnen haben werden, wollen wir sie durch ein *Nomogramm*³ darstellen (A. UNSÖLD [442]). Die dafür aufgewandte Mühe wird sich reichlich lohnen.

Haben wir — allgemein — eine Gleichung der Form

$$\varphi(x) + \psi(y) \cdot \chi_1(z) + \chi_2(z) = 0 \quad (22,6)$$

so läßt sich diese folgendermaßen nomographisch (Fig. 35) darstellen: Auf der Basis AA' , deren Länge = 1 sei, errichtet man zwei Senkrechte, auf denen die $\varphi(x)$ bzw. $\psi(y)$ abgetragen werden (x - bzw. y -Skala). Zeichnet man nun

¹ 1 eVolt oder kurz 1 V ist die von einem Elektron beim Durchlaufen der Potentialdifferenz 1 V gewonnene Energie.

² Die hier angegebenen Zahlenwerte hat R. T. BIRGE [412] im Zusammenhang mit seiner Neureduktion der fundamentalen Naturkonstanten berechnet. Rechnet man P_e in at, so ist an Stelle von $-0,48$ in (22,5) zu schreiben $-6,480$.

³ Bezüglich der hier angewandten Prinzipien der Nomographie vgl. P. WERKMEISTER [409], S. 77f.

einen dritten Skalenträger für die z , dessen Abszissen und Ordinaten (von A aus gerechnet) gleich

$$\frac{\chi_1(z)}{1 + \chi_1(z)} \quad \text{bzw.} \quad -\frac{\chi_2(z)}{1 + \chi_1(z)}$$

sind, so verbindet eine *Ablesegerade* PP' stets je drei zusammengehörige Werte von x , y und z . Aus der Ähnlichkeit der beiden in Fig. 35 schraffierten Dreiecke folgt nämlich

$$\frac{\psi(y) - \varphi(x)}{1} = \frac{-\frac{\chi_2(z)}{1 + \chi_1(z)} - \varphi(x)}{\frac{\chi_1(z)}{1 + \chi_1(x)}} \quad (22,7)$$

oder — nach Ausmultiplizieren — die Gl. (22,6).

Um die SAHASCHEN Formel in die durch (22,6) vorgezeichnete Gestalt bringen zu können, setzen wir noch

$$\log \frac{n_r + 1}{n_r} \cdot P_e - \log \frac{u_r + 1 \cdot 2}{u_r} = \log K^* \quad (22,8)$$

und haben dann:

$$\left. \begin{aligned} \underbrace{C \cdot \log K^*}_{\varphi(x)} + \underbrace{C \cdot \frac{\chi_r - \chi'}{a}}_{\psi(y)} \cdot \underbrace{a \cdot \frac{5040}{T}}_{\chi_1(T)} + \underbrace{C \cdot \left(0,48 - \frac{5}{2} \log T + \chi' \cdot \frac{5040}{T} \right)}_{\chi_2(T)} = 0. \end{aligned} \right\} (22,9)$$

Die Konstanten C , a und χ' sind noch frei verfügbar. Man wird sie so wählen, daß einerseits das Nomogramm günstige Dimensionen erhält, andererseits die Ablesegenauigkeit in dem meist benützten Bereich möglichst gut wird.

In Fig. 36, die für Temperaturen von 3000 bis 10000° (M- bis A-Sterne) gedacht ist, haben wir gesetzt:

$$C = 1/8; a = 1 \text{ und } \chi' = 8 \text{ V.}$$

Entsprechend haben wir in Fig. 37, die für hohe Temperaturen (B- und O-Sterne) berechnet ist,

$$C = 1/8; a = 4 \text{ und } \chi' = 28 \text{ V}$$

gewählt. An der mittleren Skala sind in beiden Tafeln außer den Temperaturen T noch die Zahlenwerte von $\theta = 5040/T$ aufgetragen. Bei umfangreichen Rechnungen über thermische Ionisation und Anregung empfiehlt es sich (RUSSELL [431]) vielfach, diese Größe θ statt T als unabhängige Variable zu benutzen.

Hat man zu den vorgegebenen Werten der Temperatur T und Ionisierungsspannung χ_r aus Fig. 36 oder 37 den $\log K^*$ abgelesen, so erhält man auch sofort¹ — bei bekanntem P_e — nach (22,8) die gesuchte Größe $\log \frac{n_r + 1}{n_r}$.

In praxi sind nun vielfach die aufeinanderfolgenden Ionisierungsstufen so weit voneinander getrennt, daß gleichzeitig nur r - und $r + 1$ -fach ionisierte Atome in merklicher Menge vorhanden sind. Bezeichnen wir dann mit x den Bruchteil $(r + 1)$ -fach ionisierter Atome, so ist der Anteil r -fach ionisierter Atome $1 - x$ und also

$$\log \frac{n_r + 1}{n_r} = \log \frac{x}{1 - x}. \quad (22,10)$$

¹ Man kann die linke — logarithmische — Skala der Nomogramme gleich zur graphischen Division benutzen, indem man $\log P_e$ auf derselben Skala mit dem Zirkel abgreift und von $\log K^*$ abzieht.

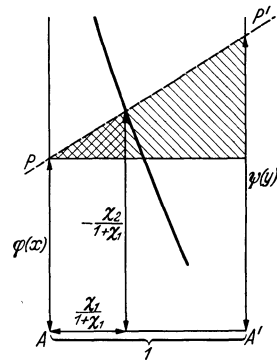


Fig. 35. Nomographische Darstellung der Gleichung $\varphi(x) + \psi(y) \chi_1(z) + \chi_2(z) = 0$.

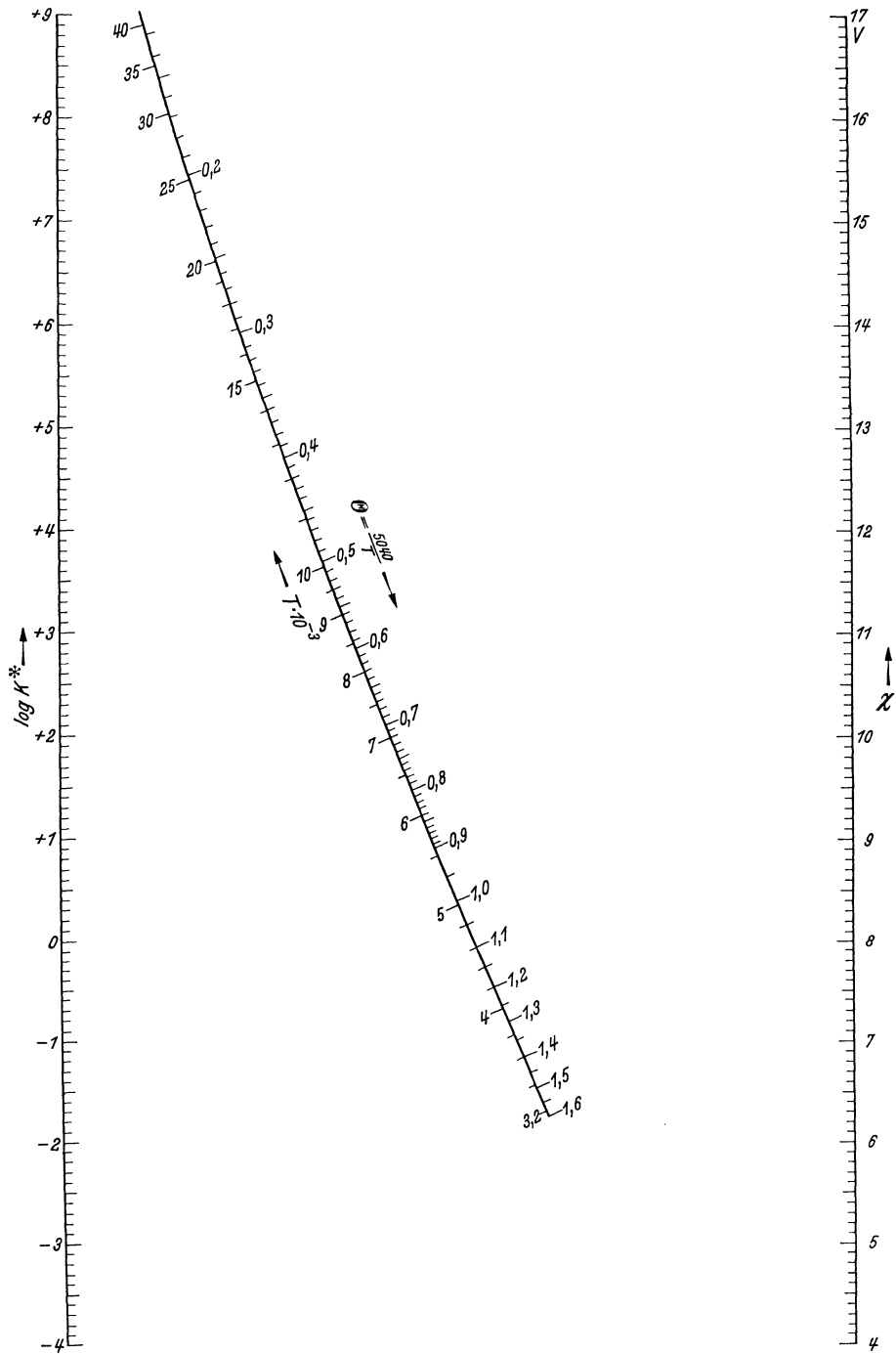


Fig. 36. Nomogramm der SAHAschen Gleichung ($4 < \chi < 17$ V).

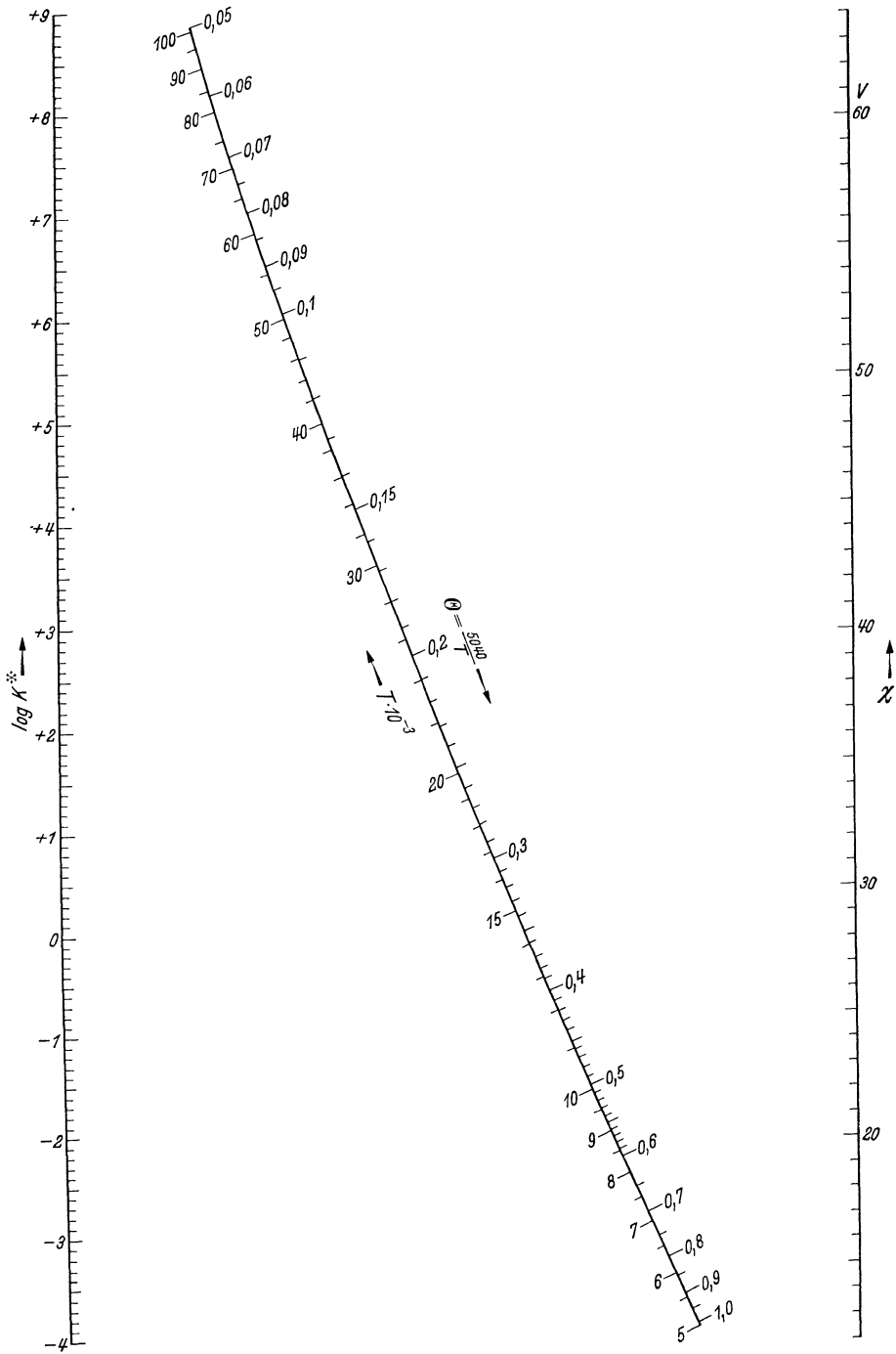


Fig. 37. Nomogramm der SAHASchen Gleichung ($12 < \chi < 64$ V).

Meist möchte man von der Hilfsgröße $\log \frac{x}{1-x} = C$ direkt zu $\log x$, $\log(1-x)$ oder — seltener — zu x und $1-x$ selbst übergehen. Dies bewerkstelligt man am einfachsten unter Zuhilfenahme von Additionslogarithmen. (MILNE-THOMSON und COMRIE [6]; Tafel III) nach folgendem Schema:

	$C > 0$	$C < 0$
$-\log x =$	addlog C	$C + \text{addlog } (-C)$
$-\log(1-x) =$	$C + \text{addlog } C$	addlog $(-C)$

Per definitionem ist nämlich für $C > 0$:

$$\text{addlog } C = \log \left(1 + \frac{1-x}{x} \right) = -\log x$$

und für $C < 0$:

$$\text{addlog } (-C) = \log \left(1 + \frac{x}{1-x} \right) = -\log(1-x),$$

woraus die Richtigkeit obiger Beziehungen ersichtlich ist. Noch bequemer ist die Tabelle 13; die linke und obere Beschriftung und in entsprechender Weise die rechte und untere gehören darin zusammen, wie in den bekannten sin- und cos-Tafeln.

Tabelle 13. Hilfstafel für Ionisationsberechnungen.

$\log \frac{x}{1-x}$	$-\log x$	$100 \cdot x$		$\log \frac{x}{1-x}$	$-\log x$	$100 \cdot x$	
-2,00	2,004	0,99	+ 2,00	- 0,60	0,697	20,1	+ 0,60
-1,95	1,955	1,11	+ 1,95	,55	,658	22,0	,55
,90	,905	1,25	,90	- 0,50	0,619	24,0	+ 0,50
,85	,856	1,39	,85	,45	,582	26,2	,45
,80	,807	1,56	,80	,40	,546	28,5	,40
,75	,758	1,75	,75	,35	,510	30,9	,35
,70	,709	1,95	,70	,30	,476	33,4	,30
,65	,660	2,19	,65	,25	,444	36,0	,25
,60	,611	2,45	,60	,20	,412	38,7	,20
,55	,562	2,74	,55	,15	,383	41,4	,15
-1,50	1,513	3,07	+ 1,50	,10	,354	44,3	,10
,45	,465	3,43	,45	- 0,05	,327	47,1	+ 0,05
,40	,417	3,83	,40	± 0,00	0,301	50,0	± 0,00
,35	,369	4,28	,35	+ 0,10	,254	55,8	- 0,10
,30	,321	4,78	,30	,20	,212	61,4	,20
,25	,274	5,32	,25	,30	,176	66,7	,30
,20	,227	5,94	,20	,40	,146	71,5	,40
,15	,180	6,61	,15	,50	,119	76,0	,50
,10	,133	7,36	,10	,60	,097	80,0	,60
,05	,087	8,19	,05	,70	,079	83,4	,70
-1,00	1,041	9,10	+ 1,00	,80	,064	86,4	,80
-0,95	0,996	10,1	+ 0,95	,90	,051	89,0	,90
,90	,951	11,2	,90	+ 1,00	0,041	91,0	- 1,00
,85	,907	12,4	,85	,20	,027	94,0	,20
,80	,864	13,7	,80	,40	,017	96,2	,40
,75	,821	15,1	,75	,60	,011	97,6	,60
,70	,779	16,6	,70	,80	,007	98,4	,80
,65	,738	18,3	,65	+ 2,00	0,004	99,1	- 2,00
	$-\log(1-x)$	$100(1-x)$	$\log \frac{x}{1-x}$		$-\log(1-x)$	$100(1-x)$	$\log \frac{x}{1-x}$

Tabelle 14. Statistische Gewichte und Ionisierungsspannungen.

Z	El.	Atomgew. μ	g_0	χ_0	g_1	χ_1	g_2	χ_2	g_3	χ_3	g_4	χ_4
1	H	1,008	2	13,53								
2	He	4,00	1	24,46	2	54,14						
3	Li	6,94	2*	5,37	1	75,28	2	121,8				
4	Be	9,02	1	9,28	2	18,12	1	153,1	2	216,6		
5	B	10,82	6	8,28	1	25,0	2	37,75	1	258,1	2	338,5
6	C	12,00	9*	11,22	6	24,27	1	47,65	2	64,22	1	389,9
7	N	14,01	4	14,48	9*	29,47	6	47,40	1	77	2	97,43
8	O	16,00	9*	13,55	4	34,93	9	54,87	6	77	1	113
9	F	19,00	6	18,6	9	34,6	4		9			
10	Ne	20,18	1	21,47	6	40,9	9	63,2	4			
11	Na	23,00	2	5,12	1	47,0	6					
12	Mg	24,32	1	7,61	2	14,96	1	~ 80	6		9	
13	Al	26,97	6	5,96	1	18,74	2	28,31	1	(122)	6	
14	Si	28,06	9**	8,12	6	16,27	1	33,35	2	44,93	1	(169)
15	P	31,02	4	10,3	9	19,8	6	30,0	1	(48)	2	64,70
16	S	32,06	9	10,3	4*	23,3	9	34,9	6	47,08	1	63
17	Cl	35,46	6	12,96	9	22,5	4	39,7	9	47,36	6	67,65
18	Ar	39,94	1	15,69	6	27,72	9	40,7	4			
19	K	39,10	2*	4,32	1	31,7	6	47	9			
20	Ca	40,07	1*	6,09	2*	11,82	1	51,0	6		9	
21	Sc	45,10	10*	6,7	15**	12,8	10	24,3		(72,2)		
22	Ti	47,90	21**	6,81	28**	13,6	21*	27,6	10	43,06		(95,7)
23	V	50,95	28**	6,76	25**	14,1	28*	26,4	21*	48	10	64
24	Cr	52,01	7**	6,74	6*	16,6	25	(31)	28	(50,4)	21*	73
25	Mn	54,93	6	7,41	7*	15,70	6	(32)	25	(52)	28	76
26	Fe	55,84	25**	7,83	30**	16,5					25	
27	Co	58,94	28**	7,81	21	17,3						
28	Ni	58,69	21**	7,61	10*	18,2						
29	Cu	63,57	2*	7,68	1	20,2						
30	Zn	65,38	1	9,36	2	17,89	1	40				
31	Ga	69,72	6	5,97	1	20,43	2	30,6	1	63,9		
32	Ge	72,60	9**	8,09	6	15,9	1	34,07	2	45,5	1	~ 90
33	As	74,96	4*	10			6	28,0	1		2	62,5
34	Se	79,2	9(?)	9,5			9				1	
35	Br	79,92	6	11,80	5		4		9		6	
36	Kr	82,9	1	13,94	6	26,4	9					
37	Rb	85,45	2*	4,16	1	27,3						
38	Sr	87,63	1*	5,67	2*	10,98						
39	Y	88,93	10*	6,5	1**	12,3	10**	20,4				
40	Zr	91,22	21**	6,92	28**	13,97	21**	24,00	10	33,8		
41	Nb	93,5	30		25**		28	24,2	21			
42	Mo	96,0	7*	7,35	30							
43	Ma											
44	Ru	101,7	35**	(7,5)	28*							
45	Rh	102,9	28**	~ 7,7	21							
46	Pd	106,7	1**	8,3	10	19,8						
47	Ag	107,88	2	7,54	1	21,9						
48	Cd	112,4	1	8,96	2	16,84	1	35				
49	In	114,8	6	5,76	1	18,81	2	27,9	1	~ 43		
50	Sn	118,7	9*	7,30	6	14,5	1	30,5	2	39,4	1	58
51	Sb	121,8	4*	(8,35)			6	24,7	1	44,0	2	55,5
52	Te	127,5	9*								1	60,0
53	J	126,9		(8)								
54	X	130,2	1	12,08		(24)	9					

Tabelle 14. (Fortsetzung).

Z.	El.	Atomgew. μ	g_0	χ_0	g_1	χ_1	g_2	χ_2	g_3	χ_3	g_4	χ_4
55	Cs	132,8	2*	3,87	1	~23,4						
56	Ba	137,4	1*	5,19	2**	9,96						
57	La	138,9	10**	5,5	21**	(12,5)	10*	~20,4				
58	Ce	140,1		(6,92)					14			
59	Pr	140,9		(5,76)								
60	Nd	144,3		(6,32)								
61	Il											
62	Sm	150,4		(6,55)								
63	Eu	152,0										
64	Gd	157,3		(6,65)								
65	Tb	159,2		(6,74)								
66	Dy	162,5		(6,82)								
67	Ho	163,5										
68	Er	167,6										
69	Tu	169,4										
70	Yb	173,5		(7,06)								
71	Cp	175,0										
72	Hf	178,6	21									
73	Ta	181,4										
74	W	184,0	25**									
75	Re	186,3	6									
76	Os	190,9										
77	Ir	193,1	10									
78	Pt	195,2	(15)**	8,9								
79	Au	197,2	2*	9,2	1							
80	Hg	200,6	1	10,38	2	18,67	1	(41)		(72)		(82)
81	Tl	204,4	(6)	6,07	1	20,3	2	29,7	1			
82	Pb	207,2	9	7,38	6	15,0	1	31,9	2	43,93	1	

In Tabelle 14 geben wir weiterhin eine Zusammenstellung¹ der Ionisierungsspannungen² χ_0 (Ionisierung des neutralen Atoms) bis χ_4 für alle Elemente mit Ordnungszahl $Z < 82$. Vor den Ionisierungsspannungen χ_r ist in Tabelle 14 jeweils das statistische Gewicht $g_{r,0}$ desjenigen Multipletts³ angeschrieben, das den Grundzustand der betreffenden Ionisationsstufe enthält. (Die Terme des tiefsten Multipletts liegen meist so nahe beisammen, daß wir sie hier als zusammenfallend behandeln dürfen).

Hat der tiefste Multiplett-Term die Quantenzahlen L (= resultierendes *Bahnimpuls*moment in Einheiten von $\frac{h}{2\pi}$) und S (= resultierendes *Spin*moment in Einheiten von $\frac{h}{2\pi}$), so gibt es in einem äußeren Feld $2L + 1$ Einstellmöglichkeiten von L und $2S + 1$ Möglichkeiten für S (die „*Multiplicität*“ ist $r = 2S + 1$). Das statistische Gewicht des gesamten Termes ist also (Tabelle 15)

$$g_{r,0} = (2S + 1)(2L + 1) \quad (22,11)$$

¹ Spalte 3 enthält — für spätere Rechnungen — die Atomgewichte μ (1931).

² Nach BACHER und GOUDSMIT [401]; schrägedruckte Zahlen sind einer Zusammenstellung von W. GROTRIAN im LANDOLT-BÖRNSTEIN [406] entnommen. Unsichere Werte sind eingeklammert. Wegen des Ursprunges der Zahlen und spektroskopischer Detailliteratur vgl. BACHER-GOUDSMIT.

³ Die Grundzüge der Termklassifikation und -nomenklatur müssen jedem Astrophysiker geläufig sein. Wir geben im Anhang A eine kurze Übersicht über die heute allgemein angenommene Bezeichnungsweise und verweisen im übrigen auf die Literatur (z. B. BACHER and GOUDSMIT [401] oder L. PAULING and S. GOUDSMIT. The Structure of Line Spectra. New York 1930, u. a. m.).

Sind hinter dem $g_{r,0}$ in Tabelle 14 zwei Sterne (**) angebracht, so heißt dies, daß auf den Grundterm schon in weniger als 1 V (= 8106 cm⁻¹) Abstand (mindestens) ein weiterer Term folgt. Ein Stern (*) grenzt in entsprechender Weise den Bezirk von 2 V (= 16212 cm⁻¹) ab.

Im ersten Fall muß man stets, im zweiten nur bei hohen Temperaturen ($T > 10000^\circ$) diese Terme bei der Berechnung¹ der Zustandssumme u_r berücksichtigen. Ihre Lage und ihre statistischen Gewichte entnimmt man den spektroskopischen Tabellenwerken (z. B. BACHER-GOUDSMIT [401]) $g_{r,0}$ -Werte ohne Stern entsprechen Termen, die vom nächsthöheren mindestens 2 V entfernt sind; in solchen Fällen kann man meist $u_r \approx g_{r,0}$ setzen.

Insgesamt wird der Faktor $\frac{2 \cdot u_{r+1}}{u_r}$ bzw. $\frac{2 \cdot g_{r+1,0}}{g_{r,0}}$ stets von der Größenordnung 1 sein.

Zum Schluß wollen wir noch einige numerische Beispiele zur SAHASCHEN und BOLTZMANN'SCHEN Formel durchrechnen, die das Vorhergehende weiter erläutern mögen:

Tabelle 15. Statistische Gewichte $g = (2S + 1)(2L + 1)$ der ganzen Multipletts.

Term	S	P	D	F	G	
	L = 0	1	2	3	4	
Singulett . . .	S = 0	1	3	5	7	9
Dublett . . .	1/2	2	6	10	14	18
Triplet . . .	1	3	9	15	21	27
Quartett . . .	1 1/2	4	12	20	28	36
Quintett . . .	2	5	15	25	35	45
Sextett . . .	2 1/2	6	18	30	42	54
Septett . . .	3	7	21	35	49	63

1. Welcher Prozentsatz des Natriums ist bei² $T = 5700^\circ$ und $P_e = 100$ Bar $\approx 10^{-4}$ at noch neutral?

Nach Tabelle 14 ist $\chi_0 = 5,12$ V; $g_0 = 2$ und $g_1 = 1$.

Die Berücksichtigung höherer Glieder der Zustandssummen ist nicht nötig (kein *). Ebenso kann doppelte Ionisation ($\chi_1 = 47$ V!) unberücksichtigt bleiben.

Aus unserem Nomogramm (Fig. 36) liest man sofort ab $\log K^* = 4,40$ und erhält

$$\log \frac{n_1}{n_0} = \log \frac{x}{1-x} = +4,40 - \log P_e + \log \frac{1 \cdot 2}{2} = 2,40$$

d. h. $-\log(1-x) = 2,40$; $1-x = 0,40\%$.

2. Welcher Bruchteil der neutralen Natriumatome befindet sich bei $T = 5700^\circ$ im zweittiefsten Anregungszustand, dem $3^2P_{1/2,3/2}$ -Term?

Es ist $g_{0,0} = 2$; $g_{0,1} = 6$ (Tabelle 15) und $\chi_{r,1} = 2,09$ V (entsprechend der Frequenz der D-Linien $3^2S - 3^2P = 16965$ cm⁻¹). Nach der BOLTZMANN-Formel (22,4) wird

$$\log n_{0,1}/n_0 = -2,09 \cdot 5040/5700 + \log 6/2 = -1,37.$$

Man hat also 4,3% angeregte Atome.

3. Wie verteilen sich die Siliziumatome bei $T = 12000^\circ$ ($\theta = 0,420$) und $\log P_e = 2,5$ auf die verschiedenen Ionisationsstufen?

Nach Tabelle 14 müssen beim neutralen Atom mehrere Glieder der Zustandssumme berücksichtigt werden. Es ist (vgl. BACHER-GOUDSMIT) mit $\theta = 5040/T$:

$$u_0 = 9 + 5 \cdot 10^{-0,76\theta} + 1 \cdot 10^{-1,90\theta} \approx 11,6 \quad (22,12)$$

Für die folgenden Ionisationsstufen ist $u_r = g_r$. Mit Hilfe unserer Nomogramme (Fig. 36) findet man weiterhin für die

1. Ionisation: $\log K^* = +6,32$, $\log n_1/n_0 = 3,85$, $n_1/n_0 = 7,08 \cdot 10^3$.
2. Ionisation: $\log K^* = +2,92$, $\log n_2/n_1 = -0,06$, $n_2/n_1 = 0,87$.
3. Ionisation: $\log K^*$ negativ, groß.

¹ Gemeint ist natürlich bei den für astrophysikalischen Rechnungen angemessenen Ansprüchen an Genauigkeit.

² Die Zahlenwerte von T und P_e entsprechen etwa der Sonnenatmosphäre.

Setzt man $\frac{n_2}{n_1} = \frac{x}{1-x}$, so ist nach Tabelle 13 $x = 0,465$ und (wegen $n_0 < n_1$):

$$n_0 : n_1 : n_2 = \frac{n_0}{n_1} (1-x) : (1-x) : x = 7,6 \cdot 10^{-3} : 53,5 : 46,5.$$

Durch das Einsetzen der 2. Ionisation wird nicht nur der Prozentsatz einfach ionisierter Atome, sondern auch der der *neutralen Atome* — um den Faktor $1-x$ — verringert.

23. Experimentelle Prüfung der SAHASchen Formel. Anwendung auf Sternatmosphären nach SAHA, FOWLER und MILNE.

Eine experimentelle Prüfung der Theorie der thermischen Anregung und Ionisation führte bald nach SAHAs Entdeckung A. S. KING [424] mit Hilfe seines elektrischen Ofens — dessen Konstruktion wohl als bekannt betrachtet werden kann — aus. Geht man von niederen zu höheren Temperaturen über, so treten im Absorptionsspektrum eines bestimmten Elementes immer mehr Linien auf und zwar in der Reihenfolge der Anregungsspannung $\chi_{0,s}$ des unteren Termes der betreffenden Linie, wie man nach der BOLTZMANNschen Formel erwarten muß. Die thermische *Ionisation* studierte KING hauptsächlich an den Spektren der Erdalkalien. Deren Ionisierungsspannungen χ_0 liegen so niedrig, daß man schon bei den erreichbaren Ofentemperaturen merkliche Ionisation erhält. Außerdem liegen die Resonanzlinien von Bogen- und Funkenspektrum (neutrales bzw. ionisiertes Atom) im bequem zugänglichen Spektralgebiet. Beim Ca z. B. dient als Maß für den Prozentsatz neutraler Atome die Stärke (in Absorption) der Linie $4^1S - 4^1P \lambda 4226,73$ (FRAUNHOFERS *g-Linie*). Die Resonanzlinien des Ions bilden das bekannte *H-K* = Dublett $4^2S - 4^2P_{1/2,3/2} \lambda 3968,46$ und $3933,66$. KING beobachtet zunächst, daß das Intensitätsverhältnis $3933 + 3968/4227$ mit steigender *Temperatur* anwächst — entsprechend dem nach der SAHASchen Formel erwarteten Ansteigen des Ionisationsgrades $n_1/n_0 = \frac{x}{1-x}$. Den *Elektronendruck* P_e kann man im elektrischen Ofen — bei sonst gleichbleibenden Verhältnissen — vergrößern durch Einführen eines noch leichter als Ca ionisierbaren Elementes wie K ($\chi_0 = 4,32$ V) oder Cs ($\chi_0 = 3,87$ V). Tatsächlich beobachtete KING eine Abnahme des Intensitätsverhältnisses $3933 + 68/4227$ beim Einbringen dieser Alkalien in den Ofen — entsprechend der Forderung der SAHASchen Formel, daß $n_1/n_0 \sim 1/P_e$ sein muß. Zu einer *quantitativen* Prüfung der SAHASchen Formel ist der KINGSche Ofen bis jetzt noch nicht benützt worden. Dagegen ließ sich eine solche für die Alkalien weitgehend durchführen mit Hilfe von Untersuchungen über die *Leitfähigkeit* von *Flammen*. Weiterhin spielt die SAHASche Formel eine erhebliche Rolle in der *Theorie des elektrischen Lichtbogens*. Nach heutiger Auffassung ist die Ionisation — jedenfalls im Kohlebogen — thermischen Ursprungs und kann nach der SAHASchen Formel berechnet werden. Auf diese Fragen können wir leider hier nicht näher eingehen und begnügen uns mit einem Hinweis auf die Gasentladungsliteratur¹. Ein engerer Kontakt zwischen diesen Forschungszweigen und der Astrophysik dürfte für beide Teile mancherlei Anregungen ergeben.

Nun zu den astrophysikalischen Anwendungen der Theorie der thermischen Ionisation und Anregung! Wir befinden uns hier in einer noch schlimmeren Lage als bei dem Versuch einer Anwendung der PLANCKschen Strahlungsformel auf die Sternatmosphären.

Wir müssen zunächst die Annahme machen, daß Ionisation und Anregung der Atome in der Atmosphäre eines Sternes den — streng genommen — nur für

¹ A. V. ENGEL und M. STEENBECK [415], J. J. und G. P. THOMSON [440] und R. SEELIGER [439].

thermisches Gleichgewicht (d. h. in einem Hohlraum konstanter Temperatur!) gültigen Formeln von SAHA und BOLTZMANN folgen.

Weiterhin ist vorerst über den Elektronendruck P_e wenig bekannt. Da nach der kinetischen Gastheorie der Druck = Zahl der Partikel pro $\text{cm}^3 \cdot kT$ ist, so verhält sich

$$\frac{\text{Elektronendruck } P_e}{\text{Gesamter Gasdruck } P_g} = \frac{\text{Zahl der Elektronen pro cm}^3 n_e}{\text{Gesamtzahl der Partikel pro cm}^3 n_e + n_0 + n_1 + \dots} \quad (23,1)$$

In einem großenteils einfach ionisierten Gas z. B. ist $P_e \sim P_g/2$. Der Elektronendruck wird in einer Sternatmosphäre also im allgemeinen einen mäßigen Bruchteil des Gesamtdruckes ausmachen.

Endlich ist vorläufig die Verknüpfung zwischen der Häufigkeit eines bestimmten Atomzustandes und der Stärke einer von diesem Zustand aus absorbierten¹ Linie noch unbekannt, ja wir besitzen noch nicht einmal ein quantitatives Maß für den zunächst noch recht unklaren Begriff der „Linienintensität“.

Die Aufklärung der damit angeschnittenen Probleme wird eine der wichtigsten Aufgaben der folgenden Kapitel dieses Buches bilden. Um aber die Bedeutung der *Ionisationstheorie* für die Astrophysik in das rechte Licht zu stellen, wollen wir zunächst die SAHASche Theorie in der Weise anwenden, wie dies zunächst SAHA selbst und anschließend daran — in wesentlich besserer Weise — R. H. FOWLER und E. A. MILNE getan haben:

Tabelle 16. Ionisation der Alkalien in den Sonnenflecken (nach RUSSELL [429]).

Element	x_0 v	λ der Resonanzlinien Internat. Å	Beobachtete Intensität		$\frac{1-x_\odot}{1-x_F}$
			Sonne	Fleck	
Li	5,37	6707,82	fehlt	5	1 : 40
Na	5,12	5895,94	20	60	1 : 35
		5889,97	30	90	
K	4,32	7699,00	5	13	1 : 22
		7664,92	6	15	
Rb	4,16	7947,64	fehlt	0	1 : 20
		7800,29	fehlt	1	

Vergleicht man mit SAHA [434] und RUSSELL [429] z. B. die Intensität² der Hauptlinien der Alkalien im Spektrum der normalen Sonnenoberfläche einerseits und der Sonnenflecke andererseits, so zeigt sich, daß der Unterschied ohne weiteres auf die Abnahme des Ionisationsgrades in den Flecken zurückgeführt werden kann (vgl. Tabelle 16).

Aus der Abnahme der Helligkeit des *kontinuierlichen* Spektrums im Fleck erhält man eine effektive Temperatur der Flecke $T_F \approx 4500^\circ K$ gegenüber $T_\odot = 5740^\circ$ für die normale Sonnenoberfläche. Die *relative* Abnahme des Bruchteiles neutraler Atome $1-x$ kann man damit auch ohne genauere Kenntnis des Elektronendruckes P_e berechnen, da man aus dem Stärkeverhältnis der Bogen- und Funkenlinien der Erdalkalien schließen muß, daß diese und damit a fortiori die Alkalien in der Sonnenatmosphäre größtenteils ionisiert ($x \approx 1$) sind. Es wird also nach (22,5) und (22,8) — wenn wir von evtl. Druckunterschieden Fleck-Umgebung absehen —:

$$\frac{(1-x)_\odot}{(1-x)_F} = \frac{K_{T=4500}^*}{K_{T=5740}^*} \quad (23,2)$$

Die danach mit Hilfe von Fig. 36 berechneten Verhältnisse sind in der letzten Spalte unserer Tabelle vermerkt. In entsprechender Weise könnten wir noch das Verhalten von Linien verschiedener Anregungsspannungen oder die Intensitätsabnahme der Funkenlinien im Fleckenspektrum diskutieren.

¹ Wir beschränken uns im folgenden auf die „normalen“ Sternspektren mit Absorptionslinien. Ein Teil unserer Überlegungen läßt sich in qualitativer Hinsicht auch — mutatis mutandis — auf Emissionsspektren anwenden.

² Nach den Schätzungen in der ROWLANDSchen Skala.

Um jedoch einen Einblick in die Mannigfaltigkeit der von der SAHASchen Theorie erfaßten Erscheinungen zu geben, wenden wir uns sogleich dem *Emissionsspektrum der Sonnenchromosphäre* zu: Wenn bei einer totalen Sonnenfinsternis der Mond sich immer weiter vor die Sonnenscheibe legt, so beobachtet man bekanntlich kurz vor Eintritt der Totalität des Aufblitzen des Emissionsspektrums der hohen Schichten der Sonnenatmosphäre, der sog. Chromosphäre („Flash“-Spektrum; zuerst beobachtet von YOUNG 1870). In der folgenden Tabelle 17 vergleichen wir — mit M. N. SAHA [433] und A. PANNEKOEK [426 und 404] — die Intensität einiger ausgewählter Linien im Spektrum der Sonnenscheibe einerseits und der Chromosphäre andererseits. Die ersteren Angaben beziehen sich auf die ROWLANDSche Schätzungsskala für die FRAUNHOFERSchen

Tabelle 17. Ionisation in der Sonnenchromosphäre.

	Neutrales Atom			Ionisiertes Atom		
	λ I. A.	Sonne (ROWLAND)	Flash (MITCHELL)	λ I. A.	Sonne (ROWLAND)	Flash (MITCHELL)
Ca	4226,73	20	25	3933,66 3968,46	1000 700	100 80
Sr	4607,34	1	2	4077,71 4215,52	8 5	40 40
Ba	5535,53	(2)	(1)	4554,04 4934,10	8 7	20 12
Fe	22 Linien	9,2	6,1	8 Linien	3,3	10,6
Ti	18 Linien	2,6	2,4	16 Linien	3,8	14,0
Se	14 Linien	0,9	1,0	14 Linien	2,4	8,0

Absorptionslinien, die letzteren auf eine von S. A. MITCHELL aufgestellte Intensitätsskala der Emissionslinien des Flashspektrums. Trotzdem also die Intensitätsangaben für „Sonne“ und „Chromosphäre“ nicht direkt vergleichbar sind, erkennt man deutlich, daß für die Bogenlinien (neutrales Atom) die Zahlenangaben beider Spalten etwa übereinstimmen, während bei den Funkenlinien (ionisiertes Atom) die „Intensität“ in der Chromosphäre erheblich größer ist. Dieses Verhalten kann nach SAHA ohne weiteres auf die Abnahme des Druckes in den hohen Atmosphärenschichten zurückgeführt werden.

Bei weitem die eindrucksvollste Leistung der SAHASchen Theorie — auf die wir schon in Abschn. 16 kurz hinwiesen — bildet die Erklärung der *Harvardsequenz der Sternspektren*:

Schon die Möglichkeit der Einordnung fast aller Sternspektren in ein so einfaches Klassifikationsschema; sodann das Fehlen terrestrisch seltener Elemente in den Sternspektren und das Vorherrschen terrestrisch häufiger Elemente¹ legen den Schluß nahe, daß die Atmosphären verschiedener Sterne sich *nicht* — oder jedenfalls nur wenig — hinsichtlich ihrer *Zusammensetzung*, sondern nur hinsichtlich der Stärke der *thermischen Ionisation und Anregung* unterscheiden.

Um überhaupt einmal einen Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen zu gewinnen — man kann ja die ganze Entwicklung der Astrophysik als eine Art sukzessiver Approximation auffassen — nahm SAHA [435 u. a.] an, daß der Druck in allen Sternatmosphären von der Größenordnung 0,1 bis 1 at sei². Unter dieser Voraussetzung berechnete er, bei welchen Temperaturwerten T eine bestimmte Ionisationstufe auftritt bzw. verschwindet und konnte

¹ Die evidenten Ausnahmefälle von H und He wird man mit ihrem niedrigen Atomgewicht in Zusammenhang bringen.

² Dieser, aus ziemlich zweifelhaften Beobachtungen über Druckverbreiterung und Druckverschiebung von Spektrallinien abgeleitete Wert galt damals als der wahrscheinlichste, trotzdem manche Astrophysiker schon darauf hingewiesen hatten, daß er viel zu hoch sein müsse.

zeigen, daß die auf solche Weise für das Auftreten bzw. Verschwinden der entsprechenden Spektrallinien berechneten Temperaturen mit den aus der Harvardsequenz in Verbindung mit den spektralphotometrischen Messungen von WILSING, ROSENBERG u. a. erschlossenen Werten gute Übereinstimmung zeigten. Für die „frühen“ Spektraltypen *B* und *O*, wo die spektralphotometrische Temperaturbestimmung sehr unsicher wird ($T > 20000^\circ$), versuchte schon SAHA, mit Hilfe der Ionisationstheorie die Temperatur zu bestimmen.

Der SAHASchen Methode hafteten noch zwei wesentliche Mängel an: Erstens war die Annahme über den *Druck* in den Sternatmosphären nur sehr schlecht begründet und zweitens hatte man für das *Auftreten* bzw. *Verschwinden einer Spektrallinie* weder in theoretischer noch in experimenteller Hinsicht ein eindeutiges Kriterium.

R. H. FOWLER und E. A. MILNE [417—419] richteten daher ihre Aufmerksamkeit nicht mehr auf das Auftreten und Verschwinden einer Spektrallinie in der Harvardsequenz, sondern auf ihr *Intensitätsmaximum*.

Nimmt man an, daß die wirksame Schichtdicke der Sternatmosphären und ihr Elektronendruck P_e für alle Spektraltypen etwa dieselben sind, so kann man mit Hilfe der SAHASchen und BOLTZMANNschen Formel die Lage des Maximums eines bestimmten angeregten Atomzustandes leicht in Abhängigkeit von T und P_e berechnen. Aus der Lage (T_{\max}) einiger im spektralphotometrisch gut zugänglichen Temperaturbereich liegender Maxima erhalten FOWLER und MILNE einen Mittelwert des Elektronendruckes $P_e \approx 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ at} = 132 \text{ Bar}$. Durch extrapolatorische Anwendung dieses Zahlenwertes auf weitere Linienmaxima kann man die Temperaturskala der Sterne nach oben hin ausdehnen.

Den umfangreichen von FOWLER und MILNE zur Berechnung der Maxima¹ entwickelten Formelapparat wollen wir hier nicht wiedergeben, sondern direkt — unter fortwährender Anwendung der im letzten Abschnitt gegebenen rechnerischen Hilfsmittel — als Beispiel die Änderung einiger Linien aus den Spektren des Siliziums in Abhängigkeit von T bei einem Elektronendruck $P_e = 132 \text{ Bar}$ studieren. Dieses Verfahren ist kaum umständlicher als die analytischen Methoden von FOWLER und MILNE und gibt überdies einen besseren Einblick in die physikalischen Verhältnisse. Sollte man einwenden, daß die graphische Bestimmung der Maxima unbefriedigend sei, so wäre hierauf zu erwidern, daß man bei der Bearbeitung des *Beobachtungsmaterials* ja doch nicht anders verfahren kann.

Die folgende Tabelle 18 gibt zunächst die Wellenlängen und Termbezeichnungen der betrachteten Linien. Dann folgt die Zustandssumme u_r für die

Tabelle 18. Ausgangsdaten zur Berechnung der Intensitätsmaxima von Si-Linien.

Spektrum	λ in Å.	Termbezeichnung	$u_r \sim g_{r,0}$	χ_r	$g_{r,s}$	$\chi_{r,s}$	Beob. Maximum bei Spektraltyp
Si I	3905,53	$3^1 S_0 - 4^1 P_1^0$	10,2	8,12	1	1,90	~G0
Si II	{ 4128,04 4130,88	$3^2 D_{1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}} - 4^2 F_{2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}}$	6	16,27	10	9,80	A0
Si III	{ 4552,65 4567,87 4574,78	$4^3 S - 4^3 P_{0,1,2}^0$	1	33,35	3	18,94	B1—2
Si IV	{ 4088,86 4116,10	$4^2 S - 4^2 P_{\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}}^0$	2	44,93	2	23,93	O9
Si V	—	—	1	(169)	—	—	—

¹ FOWLER und MILNE l. c.; zusammenfassende Darstellungen geben R. H. FOWLER [403] und C. H. PAYNE [408], letztere zugleich eine Zusammenfassung des hauptsächlich am Harvard-Observatorium von Miss PAYNE, MENZEL, HOGG u. a. gewonnenen Beobachtungsmaterials (mit ausgedehnten Literaturangaben bis 1925).

Tabelle 19. Berechnung des Intensitätsverlaufes und der Intensitätsmaxima

$T \cdot 10^{-4}$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
$\log \frac{n_1}{n_0}$	-3,72	-1,48	+0,11	+1,26	+2,15	+2,82	+3,36			
$-\log \frac{n_0}{\sum n_r}$	0,00	0,01	0,36	1,29	2,15	2,82	3,38			
$-\log \frac{n_{0,s}}{n_0}$	3,40	2,92	2,61	2,38	2,21	2,07	1,97			
$-\log \frac{n_{0,s}}{\sum n_r}$	3,40	2,93	2,97	3,67	4,36	4,89	5,35			
$\log \frac{n_2}{n_1}$					-3,65	-2,28	-1,30	-0,40	+0,33	+0,91
$-\log \frac{n_1}{\sum n_r}$					0,00	0,00	0,02	0,15	0,49	0,96
$-\log \frac{n_{1,s}}{n_1}$					5,96	5,27	4,72	4,27	3,90	3,58
$-\log \frac{n_{1,s}}{\sum n_r}$					5,96	5,27	4,74	4,42	4,39	4,54
$\log \frac{n_3}{n_2}$										
$-\log \frac{n_2}{\sum n_r}$										
$-\log \frac{n_{2,s}}{n_2}$										
$-\log \frac{n_{2,s}}{\sum n_r}$										
$\log \frac{n_4}{n_3}$										
$-\log \frac{n_3}{\sum n_r}$										
$-\log \frac{n_{3,s}}{n_3}$										
$-\log \frac{n_{3,s}}{\sum n_r}$										

betreffende Ionisationsstufe: Beim neutralen Atom verwenden wir durchweg einen nach (22,12) für $T \sim 6000^\circ$ berechneten Mittelwert; für die höheren Ionisationsstufen ist $u_r \approx g_{r,0}$.

Spalte 5 gibt die zugehörige Ionisierungsspannung χ_r . Weiterhin folgen statistisches Gewicht $g_{r,s}$, und Anregungsspannung desjenigen Termes, von dem die Bildung der Absorptionslinie ausgeht (z. B. bei Si III = Si⁺⁺ der 4³S-Term). Die letzte Spalte endlich gibt die *beobachtete Lage* des *Intensitätsmaximums* in der Harvardsequenz an (vgl. C. H. PAYNE [408] und R. H. FOWLER [403]).

In Tabelle 19 sind für jede Ionisationstufe zunächst nach der SAHASchen Formel (22,5) mit Hilfe unserer Nomogramme (Fig. 36 und 37) die Verhältnisse $\frac{n_{r+1}}{n_r}$ (alles logarithmisch!) berechnet. Daraus erhält man (Tabelle 13!) unter Berücksichtigung des Übereinandergreifens der verschiedenen Ionisationstufen (analog zum letzten Beispiel aus Abschn. 22) den neutralen, einfach ionisierten,

von Linien der Si I ... Si IV-Spektren nach FOWLER und MILNE ($P_e = 132$ Bar).

1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
+ 1,47	+ 1,92	+ 2,31	+ 2,70	+ 3,02	+ 3,32	+ 3,60					
1,48	1,92	2,32	2,72	3,10	3,55	4,11					
3,31	3,07	2,87	2,68	2,52	2,38	2,25					
4,79	4,99	5,19	5,40	5,62	5,93	6,36					
	-2,72	-1,97	-1,30	-0,71	-0,15	+ 0,35	+ 1,26	+ 1,97	+ 2,60	+ 3,10	
	0,00	0,01	0,02	0,08	0,23	0,51	1,28	2,01	2,79	3,67	
	5,88	5,49	5,14	4,82	4,54	4,29	3,86	3,50	3,19	2,93	
	5,88	5,50	5,16	4,90	4,77	4,80	5,14	5,51	5,98	6,60	
				-4,54	-3,80	-3,14	-2,07	-1,06	-0,25	+ 0,44	+ 1,08
				0,79	0,38	0,16	0,02	0,04	0,19	0,57	1,11
				6,70	6,35	6,03	5,48	5,02	4,64	4,31	4,02
				7,49	6,73	6,19	5,50	5,06	4,83	4,88	5,13

... Bruchteil *aller* Si-Atome: $\frac{n_0}{\sum n_r}, \frac{n_1}{\sum n_r}, \dots$. Hierauf berechnet man nach der BOLTZMANN-Formel (22,4) den Bruchteil $\frac{n_{0,s}}{n_0}, \frac{n_{1,s}}{n_1} \dots$ der neutralen, einfach ionisierten Atome, die sich in den gerade interessierenden Anregungszuständen befinden. Multiplikation der beiden letzten Größen gibt den Bruchteil $\frac{n_{0,s}}{\sum n_r}$... *aller* Atome, der sich in dem betreffenden Anregungszustand befindet (Fig. 38). Beim genaueren Betrachten¹ der Tabelle 19 erkennt man, wie die Maxima durch das „Gegeneinanderarbeiten“ von Ionisation und Anregung zustande kommen. Man beachte ferner die Bedeutung des *gleichzeitigen*

¹ Für den Anfänger ist es unerlässlich, einige analoge Probleme in allen Einzelheiten selbst numerisch durchzurechnen. Man vergleiche z. B. die Ionisation und Anregung des Wasserstoffes mit der des Siliziums (FOWLER l. c.). Oder man berechne das Verhalten der Natrium-D-Linien (1. Ionisierungsspannung sehr niedrig; 2. sehr hoch).

Vorkommens mehrerer Ionisationsstufen (vgl. besonders Abschn. 22, Beispiel 3) für die Intensitätsabnahme vom Maximum aus; z. B. bei Si II auf der Seite der hohen Temperaturen, bei Si IV auf der der niederen Temperaturen. Auf die Wichtigkeit dieses Umstandes hat zuerst R. H. FOWLER [419] hingewiesen;

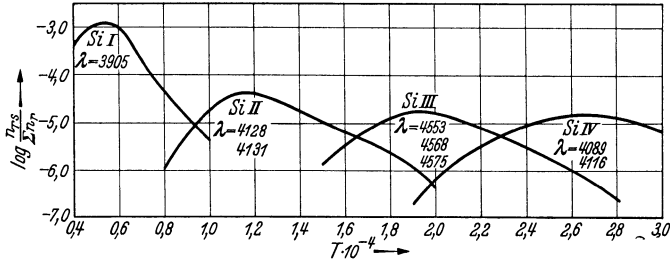


Fig. 38. Intensitätsverlauf einiger Si-Linien. Berechnet nach FOWLER und MILNE für $P_e = 132$ Bar.

vgl. auch das letzte Beispiel des vorhergehenden Abschnittes. Die maximale Konzentration $\left(\frac{n_{r,s}}{\sum n_r}\right)_{\max}$ angeregter Zustände liegt im allgemeinen zwischen 10^{-3} und 10^{-5} ; das Verhältnis $\frac{n_{r+1}}{n_r}$ ist dabei von der Größenordnung 1.

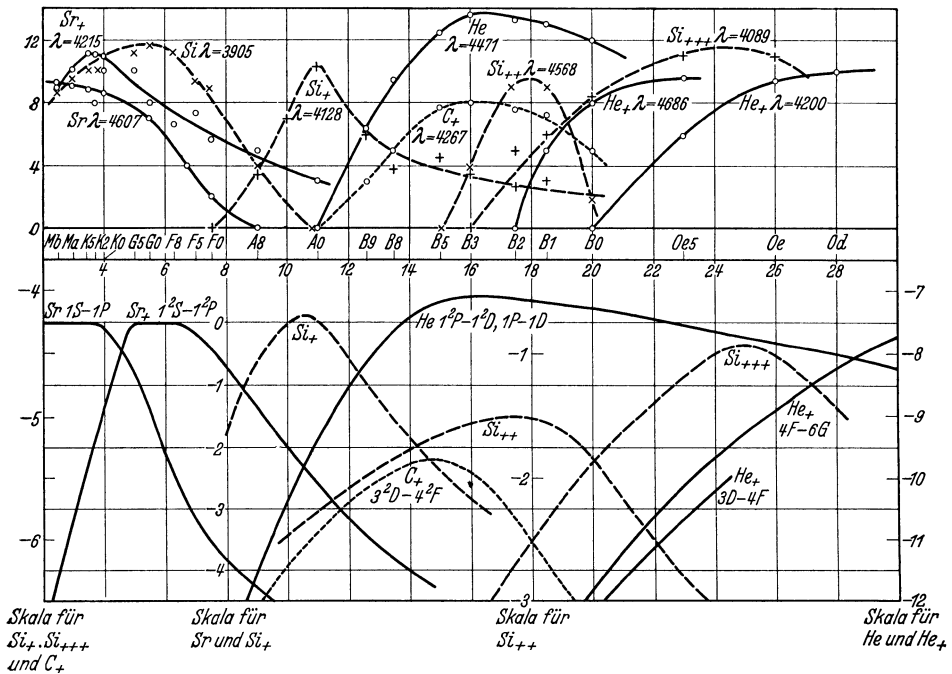


Fig. 39. (Nach C. H. PAYNE [408] und H. C. 256, 1924). Oberer Teil der Figur: Beobachtete Linienintensitäten. Unterer Teil der Figur: Nach FOWLER und Milne für $P_e = 132$ Bar berechnete Konzentrationen (in logarithmischem Maßstab). Die Skala der Spektraltypen ist der Temperaturskala (Abszissen = $T \cdot 10^{-4}$) so angepaßt, daß die beobachteten und berechneten Maxima zusammenfallen: Vorläufige Ionisations-Temperaturskala.

Als Abschluß unserer Darstellung dieses Entwicklungsstadiums der Theorie der Sternspektren geben wir nach C. H. PAYNE [408, Fig. 8] eine Zusammenstellung der — großenteils von ihr selbst — an Objektivprismenaufnahmen des Harvard-Observatoriums geschätzten Linienintensitäten in Abhängigkeit vom Spektraltyp (oberer Teil der Fig. 39). Der untere Teil der Figur enthält — als

Funktion der Temperatur T für $P_e = 132$ Bar berechnet¹ — die \log_{10} der Konzentration der betreffenden Atomzustände (analog Fig. 38). Die Abszissenskala des oberen Teiles der Figur ist so gezeichnet, daß die beobachteten und berechneten Maxima möglichst gut zusammenfallen. Man erhält so also eine provisorische *Ionisations-Temperaturskala*. Sind die Grundannahmen der Rechnung — konstanter Elektronendruck und konstante effektive Schichtdicke der Sternatmosphären innerhalb der *ganzen* Spektralsequenz — verbesserungsbedürftig, so würde dies zu einer Verzerrung der Temperaturskala der Fig. 39 führen. Diese ist also nur als eine vorläufige zu betrachten.

Miss PAYNE (s. S. 80) hat im Anschluß an die FOWLER-MILNESCHEN Untersuchungen einen ersten Versuch gemacht, die *quantitative Zusammensetzung der Sternatmosphären* zu bestimmen: Sie geht von der Annahme aus, daß eine Spektrallinie bei ihrem Erscheinen bzw. Verschwinden in der Harvardsequenz (beurteilt nach Spektren, welche unter etwa gleichen Bedingungen aufgenommen sind) eine ganz bestimmte *Intensität* haben muß, der wiederum — wenn man von der Verschiedenheit der noch eingehenden atomtheoretischen Größen absieht — eine bestimmte *Konzentration des betreffenden Atomzustandes* entspricht. Von dieser ausgehend, kann man umgekehrt — mit Hilfe der SAHA- und BOLTZMANN-Formel — die relative Häufigkeit des betreffenden Elementes bestimmen.

Das höchst bemerkenswerte Ergebnis dieser Untersuchung war, daß im großen und ganzen die kosmische Häufigkeit der Elemente der für den gesamten Erdkörper und die Meteoriten gefundenen weitgehend parallel geht bis auf zwei Ausnahmen: Wasserstoff und Helium, die ja auch leicht erklärbar sind.

Das damit angeschnittene Problem der kosmischen Häufigkeit der Elemente ist eines der grundlegendsten der neueren Astrophysik. Die Übereinstimmung der Spektren der fernsten Spiralnebel mit dem unserer Milchstraße zeigt, daß die Häufigkeitsverteilung der Elemente im ganzen Kosmos gleichartiger ist, als man irgendwie erwarten konnte — für alle kosmologischen Hypothesen eine entscheidende Feststellung. Weiterhin hängt das Verteilungsgesetz der Elemente zusammen mit dem Problem der Energieerzeugung im Inneren der Sterne: Wir dürfen wohl annehmen, daß die Strahlungsenergie der Sterne (vgl. auch Abschn. 20) letzten Endes den Atomkernen entstammt (Kernaufbau bzw. Zertrümmerung) [410]. In diesem Zusammenhang erscheint es höchst interessant, nachzuforschen, ob in der Zusammensetzung zwischen den Sternen verschiedener Spektraltypen und absoluter Helligkeiten nicht doch wenigstens kleine Unterschiede bestehen. Endlich wird der Unterschied in der Zusammensetzung von Erde und Sonne (Wasserstoff, Edelgase!) bedeutsame Anhaltspunkte für die Erklärung der Entstehung unseres Planetensystems liefern [432].

24. Ionisation von Gemischen mehrerer Elemente. Verhältnis von Elektronendruck P_e zu Gasdruck P_g . Effektives Molekulargewicht.

Im Hinblick auf unsere späteren Untersuchungen über den Aufbau der Sternatmosphären und die quantitative Deutung ihrer Spektren wollen wir uns noch einen Einblick verschaffen in die Abhängigkeit des mittleren Ionisationsgrades einer Sternatmosphäre von Temperatur und Druck und einige damit zusammenhängende Fragen.

Wir müssen dabei — wohl oder übel — ausgehen von einer bestimmten Arbeitshypothese bezüglich der chemischen Zusammensetzung der Sterne —

¹ Die statistischen Gewichte usw. waren bei diesen Rechnungen noch nicht ganz richtig angesetzt. Ein Vergleich der Si-Kurven mit der neu berechneten Fig. 38 läßt die Bedeutung dieser Faktoren erkennen.

Tabelle 20. Zusammensetzung der Sternatmosphären. Nach [441], Tabelle 1.

Element und Ordnungszahl	Häufigkeit ε_i in Atom-%	Atomgewicht μ_i	Häufigkeit nach Masse ε, μ_i	1. und 2. Ionisierungsspannung		Gruppeneinteilung		
				χ_0	χ_1	ε in Atom- und mittl. Molekulargewicht in ()	Ionisierungsspannungen	
							χ_0	χ_1
1 H	1370	1,0	1370	13,54	—	1370 (1,00)	13,54	—
8 O	51,3	16,0	821	13,56	34,9	51,3 (16,0)		
26 Fe	18,6	55,8	1038	7,83	16,5	42,4 (40,5)		
14 Si	14,7	28,1	413	8,14	16,3			
12 Mg	7,7	24,3	187	7,61	15,0			
28 Ni	1,4	58,7	82	8,65	18,2			
13 Al	3,1	27,1	84	5,95	18,7	6,3 (30,7)	5,8	
20 Ca	2,1	40,1	84	6,09	11,8			
11 Na	1,1	23,0	25	5,11	47,0			

die wir später gegebenenfalls in einer Art sukzessivem Approximationsverfahren verbessern können. Im Hinblick auf das am Ende des vorhergehenden Abschnittes Gesagte entnehmen wir die Häufigkeitsverteilung der „normalen“ Elemente (d. h. mit Ausnahme des Wasserstoffes) den geochemischen Analysen und den Untersuchungen an Meteoriten (nach einer Zusammenstellung von G. BERG [411]). In Tabelle 20 sind diese Häufigkeiten ε_i in Atomprozent (normiert auf $\sum \varepsilon_i = 100$) für die 8 häufigsten Elemente ($\sim 96\%$ aller Atome) angegeben. Die Häufigkeit des Wasserstoffes entnehmen wir den in Abschn. 20 (Anm.) schon erwähnten Untersuchungen von B. STRÖMGREN und A. S. EDDINGTON über die Massen-Helligkeitsbeziehung. Das ε des Wasserstoffes ergibt sich daraus (bezogen auf die eben erwähnte $\sum \varepsilon_i = 100$) zu ~ 1370 . Diese Zahl ist leider noch mit beträchtlicher Unsicherheit behaftet (Schätzungsweise ein Faktor ~ 3). Ebenso schlimm steht es mit der Berücksichtigung der leichten Elemente He, N, Ne usw., deren terrestrische Häufigkeit sicher nicht als „normal“ betrachtet werden kann (RUSSELL und MENZEL [432]), die aber auch spektroskopisch bis jetzt nur schlecht erfaßbar sind. Wir müssen uns also darauf gefaßt machen, daß wir später evtl. die Häufigkeitswerte des Wasserstoffes verbessern und diese Elemente mitberücksichtigen müssen (sie haben alle verhältnismäßig hohe Ionisierungsspannungen!).

Um die Berechnung des mittleren Ionisationsgrades usw. leichter durchführen zu können, fassen wir nunmehr die Elemente in Tabelle 20 (deren sonstige Angaben wohl keiner Erklärung bedürfen) nach ihren Ionisierungsspannungen in Gruppen¹ zusammen. Die Faktoren $\frac{2 \cdot u_1}{u_0}$ in der SAHASchen Formel setzen wir im Mittel = 1 und geben in Tabelle 21 zunächst die

$$\log K^* = \log \frac{n_{r+1}}{n_r} \cdot P_\varepsilon = -\chi_r \cdot \frac{5040}{T} + \frac{5}{2} \log T - 0,48 \quad (24,1)$$

für die 4 Gruppen-Ionisierungsspannungen an. Die Berechnung des neutralen, einfach bzw. zweifach ionisierten Bruchteiles mit Hilfe der Tabelle 13 ist dann eine Kleinigkeit. Bezeichnen wir mit $x_i = \frac{n_1}{n_0 + n_1}$ den Ionisationsgrad der ersten,

¹ Vgl. auch H. N. RUSSELL [431] und D. H. MENZEL [407], die ähnliche Rechnungen mit etwas anderen Ausgangsannahmen durchführen. RUSSELL versucht von vornherein Abweichungen von der SAHA-Formel mitzubersichtigen (vgl. den folgenden Abschnitt), was meines Erachtens nicht zweckmäßig ist.

Tabelle 21. Zur Berechnung des mittleren Ionisationsgrades der Sternmaterie.

$\theta = \frac{5040}{T}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
T	50400	25200	16800	12600	10080	8400	7200	6300	5600	5040	4582	4200	3877	3600	3360	3150
X_{Volt}	10,69	9,36	8,34	7,45	6,63	5,85	5,10	4,38	3,67	2,97	2,29	1,62	0,95	0,29	-0,36	-1,01
$\log R$	10,48	8,94	7,71	6,61	5,58	4,59	3,63	2,70	1,78	0,87	-0,02	-0,90	-1,78	-2,65	-3,51	-4,37
$\log R$	9,93	7,81	6,02	4,35	2,76	1,21	-0,32	-1,81	-3,30	-4,76	-6,22	-7,67	-9,11			
$\log R$	9,57	7,12	4,98	2,97	1,03	-0,87	-2,74	-4,58	-6,41	-8,23						

Tabelle 22¹. — $\log E$; für kleine θ und kleine P_g (links oben) nähert sich $\log E$ dem Grenzwert $+0,014$ (die betreffenden Fächer sind leer gelassen). $\log P_g$ nimmt innerhalb jeder Zeile links einen konstanten Grenzwert an. Für große θ und große P_g geht $P_g \sim P_g^2$; Werte von $P_g \gg 10^8$ Bar sind nicht mehr tabuliert; hier werden die physikalischen Grundlagen namentlich unserer späteren Rechnungen sehr schwankend. — μ bewegt sich zwischen Grenzwerten 1,38 und 2,80.

$\theta = \frac{5040}{T}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
$\log P_g$	-0,01						+0,01	0,22	1,10	1,46	1,48	1,51	1,65	2,02	2,30	2,41
$\log P_g$	-0,69					0,03	+0,08	0,79	1,42	1,49	1,51	1,69	2,08	2,33	2,45	2,67
$\log P_g$	+1,31					0,21	0,47	1,32	1,48	1,52	1,74	2,13	2,37	2,54	2,86	3,51
$\log P_g$	2,31				0,07	0,78	1,12	1,49	1,54	1,78	2,18	2,42	2,69	3,16	3,73	4,38
$\log P_g$	3,31				0,42	1,32	1,43	1,55	1,82	2,23	2,51	2,89	3,45	4,09	4,73	5,38
$\log P_g$	4,31				0,15	1,07	1,54	1,90	2,28	2,65	3,14	3,76	4,42	5,08	5,73	6,38
$\log P_g$	5,31				0,68	1,49	1,92	2,45	3,01	3,42	3,76	4,74	5,42	6,08	6,73	7,38
$\log P_g$	-1,69		0,03			1,92	2,45	3,01	3,68	4,38	5,07	5,74	6,42	7,08	7,73	8,38
$\log P_g$	-0,69					-0,69	-0,66	-1,58	-0,87	-0,53	-0,51	-0,48	-0,34	+0,02	+0,30	0,41
$\log P_g$	+1,31					+0,32	+0,60	-0,15	+0,44	+0,50	+0,52	+0,70	+1,08	+1,33	1,45	1,67
$\log P_g$	2,31				1,31	1,42	2,15	1,34	1,49	1,53	1,75	2,13	2,37	2,54	2,86	3,51
$\log P_g$	3,31				2,34	2,85	3,44	2,50	2,55	2,79	3,18	3,42	3,69	4,16	4,73	5,38
$\log P_g$	4,31				3,56	4,34	4,56	3,56	3,83	4,23	4,51	4,89	5,45	6,09	6,73	7,38
$\log P_g$	5,31				5,11	5,55	5,90	4,87	5,28	5,65	6,14	6,76	7,42	8,08	8,73	
μ	1,38				6,50	6,93	7,45	8,01	8,62	7,42	8,13					
μ	-2					1,39	1,42	1,74	2,60	2,70	2,71	2,71	2,74	2,77	2,78	2,79
μ	-1					1,45	2,08	2,68	2,71	2,71	2,72	2,74	2,78	2,78	2,79	2,80
μ	0					1,72	2,60	2,71	2,72	2,72	2,75	2,78	2,78	2,79	2,80	
μ	1				1,41	2,40	2,70	2,72	2,76	2,78	2,79	2,80				
μ	2				1,51	2,67	2,73	2,76	2,78	2,79						
μ	3				2,03	2,72	2,76	2,78	2,80							
μ	4				1,64	2,58	2,72	2,76								
μ	5				2,32	2,71	2,79	2,80								

¹ Nach [441], Tabelle 5.

mit $x'_i = \frac{n_2}{n_1 + n_2}$ den der zweiten Ionisationsstufe des i -ten Elementes, so ist zunächst die Zahl E der freien Elektronen pro Atomkern (irgendwelcher Art), wenn wir noch berücksichtigen, daß 1. und 2. Ionisation nicht übereinander greifen:

$$E = \frac{\sum \varepsilon_i (x_i + x'_i)}{\sum \varepsilon_i} = \frac{6,3 x_{5,8} + 42,4 x_{7,9} + 1421,3 x_{13,5} + 48,7 \cdot x_{17}}{1470} \quad (24,2)$$

Da auf E Elektronen insgesamt $E + 1$ Partikel kommen, so wird das *Verhältnis von Gasdruck zu Elektronendruck* (je \sim Partikelzahl)

$$\frac{P_g}{P_e} = \frac{1 + E}{E}. \quad (24,3)$$

Das mittlere Molekulargewicht der Sternmaterie ist bei der in Tabelle 20 angenommenen Zusammensetzung im nichtionisierten Zustand:

$$\mu_0 = \frac{\sum \varepsilon_i \mu_i}{\sum \varepsilon_i} = \frac{2734 + 1370}{100 + 1370} = 2,80. \quad (24,4)$$

Im teilweise ionisierten Zustand kommen auf einen Atomkern der mittleren Masse μ_0 insgesamt $1 + E$ Partikel; das Molekulargewicht wird also

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + E}. \quad (24,5)$$

Die nach (24,3—5) berechneten Werte von $-\log E$, $\log P_g$ und μ sind in Tabelle 22 (nach A. UNSÖLD [441]) in Abhängigkeit von $\Theta = 5040/T$ (vgl. auch Tabelle 21) und $\log P_e$ zusammengestellt.

25. Kinetische Deutung der SAHASchen Formel. Abweichung vom thermischen Gleichgewicht.

Wir haben mehrmals betont, daß die SAHASche Gleichung streng genommen nur gilt unter der *Voraussetzung thermischen Gleichgewichtes*. Das heißt die Geschwindigkeitsverteilung aller Partikel (Elektronen, Ionen und Atome) muß eine MAXWELLSche sein und außerdem muß die Strahlungsintensität dem PLANCKSchen Gesetz für *dieselbe* Temperatur T folgen.

Man sieht leicht, daß diese Bedingungen in einer Sternatmosphäre nie streng erfüllt sein können: Selbst wenn die Oberfläche eines Sternes genau nach der PLANCKSchen Formel strahlen würde (wie wir dies im vorhergehenden Kapitel provisorisch angenommen haben), so wäre die Strahlungsdichte nur die *Hälfte* der zu der Sterntemperatur gehörigen, da ja Strahlung nur vom Stern nach außen geht! Noch stärkere Abweichungen vom Zustande thermodynamischen Gleichgewichtes haben wir z. B. in den Hüllen planetarischer Nebel oder in der interstellaren Materie.

Es wäre deshalb von großer Wichtigkeit, den Ionisationsgrad eines Gases von bestimmtem Druck berechnen zu können für den Fall, daß dieses von einer Nichtgleichgewichtstrahlung der Dichte $u(\nu)$ durchsetzt wird.

Sobald wir uns vom Zustand thermischen Gleichgewichtes entfernen, lassen uns rein thermodynamische Betrachtungen im Stiche und wir müssen zu einer statistisch-kinetischen Betrachtung der Elementarprozesse greifen (es ist also zunächst einmal klar, daß es *eine völlig allgemeine Lösung des gestellten Problems gar nicht geben kann*).

Als ionisierende Prozesse kommen in Betracht:

1) Die *Stoßionisation* durch Elektronen und — nach den Laboratoriumserfahrungen zu schließen, in viel geringerem Maße — durch Ionen und Atome.

2) Der *Photoeffekt*: Ein Lichtquant der Energie $h\nu$ entfernt aus dem betreffenden Atom oder Ion ein Photoelektron, dessen kinetische Energie nach der EINSTEINSchen Gleichung

$$\frac{m}{2} v^2 = h\nu - \chi' \quad (25,1)$$

ist, wo χ' die Ablösungsarbeit in Erg bedeutet. Wird das Elektron aus dem Grundzustand genommen, so ist χ' gleich der Ionisierungsarbeit χ ; für andere Zustände ist die entsprechende Anregungsenergie abzuziehen.

Den Prozessen 1) und 2) wirken entgegen:

1') Die Rekombination (Wiedervereinigung) von Ion und Elektron unter Abgabe der überschüssigen Energie an ein drittes Teilchen (man kann diesen Vorgang auch als Stoß 2. Art auffassen).

2') Wiedervereinigung unter Ausstrahlung eines Lichtquanten nach (25,1).

Bei hohem Druck werden die Prozesse 1 bzw. 1' überwiegen, bei niedrigem dagegen 2 und 2'. Schon unter den in Sternatmosphären herrschenden Verhältnissen spielen nach Rechnungen von R. H. FOWLER [420] die Prozesse 1 bzw. 1' für tiefliegende Quantenzustände eine untergeordnete Rolle. Wir wollen diese Betrachtungen, deren atomtheoretische Grundlagen uns in quantitativer Hinsicht nicht sehr tragfähig erscheinen, hier nicht im einzelnen wiedergeben, sondern uns statt dessen später im Zusammenhang mit der Theorie der stellaren Absorptionslinien empirisch vergewissern, daß jedenfalls die obige Behauptung richtig ist.

Im folgenden beschränken wir uns demnach auf Drucke, die so niedrig sind, daß Stoßionisation und Stöße 2. Art hinreichend selten sind.

Aber auch, wenn wir unser Augenmerk nur auf die Photoionisation und die Wiedervereinigung mit Ausstrahlung richten, kommt es noch auf den Gasdruck an:

Ist dieser sehr niedrig und der Ionisationsgrad hoch, so werden die Photoelektronen, deren Geschwindigkeitsverteilung nach (25,1) durch die *spektrale Verteilung* der Strahlungsdichte $u(\nu)$ allein bestimmt ist, meist direkt rekombinieren. Das heißt die Geschwindigkeitsverteilung der rekombinierenden Elektronen wird größenordnungsmäßig der Farbtemperatur der Strahlung entsprechen (vgl. EDDINGTON [5] S. 472ff.).

Geht man zu etwas höheren Drucken über, so erleidet ein Photoelektron vor seiner Wiedereinfangung mehrere Zusammenstöße. Die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen entspricht dann einer Temperatur, die vermutlich zwischen der Farbtemperatur der Strahlung und der — durch die mittlere kinetische Energie der Atome usw. definierten — Gastemperatur liegt. Mit wachsendem Druck nähert sie sich der letzteren. Dieser Fall dürfte in den Sternatmosphären meist realisiert sein. Wir können also unserem Problem die folgende engere Fassung geben:

„In einem Gas, dessen Elektronen, Ionen ... eine MAXWELLSche Geschwindigkeitsverteilung für die „Gastemperatur“ T haben, besteht ein Strahlungsfeld der Dichte

$$u_\nu = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT_1}} - 1} \quad (25,2)$$

d. h. eine um den Faktor δ „verdünnte“ Hohlraumstrahlung der „Farbtemperatur“ T_1 . Man berechne den Ionisationsgrad“.

Kehren wir nochmals zu dem Fall extrem niedriger Drucke (interstellare Materie) zurück, so ist näherungsweise $T = T_1$; das nach der SAHASchen Gleichung

berechnete Verhältnis $\frac{n_{r+1}}{n_r}$ muß also — da die Zahl der Ionisierungsprozesse proportional u ist — mit einem Faktor

$$C = \delta^{-1} \quad (25,3)$$

multipliziert werden.

Bei etwas höheren Drucken wird die Verknüpfung von T mit T_1 und δ ein höchst kompliziertes Problem, das zur Zeit noch nicht in befriedigender Weise gelöst ist (die Theorie der Gasentladungen könnte hier mancherlei Anregungen geben). Wenn $\delta > 1$ ist, wird sicher $T < T_1$ sein und sich wohl einem etwa der Gesamtdichte der Strahlung entsprechenden Werte nähern; aber sichere oder gar quantitative Aussagen hierüber lassen sich — wie gesagt — zur Zeit noch nicht machen. Wir wollen daher im folgenden T einfach einmal als *gegeben* betrachten. Wie wird *dann* die SAHASche Formel abzuändern sein?

Dieses Problem haben zuerst M. N. SAHA und R. K. SWE [438, vgl. auch 443] behandelt unter der weiteren Annahme, daß alle Ionisationsprozesse vom Grundzustand ausgehen und durch Strahlung erfolgen, deren $h\nu$ praktisch gleich χ_r ist. Das heißt das kontinuierliche Absorptionsspektrum wird nach seiner Absorptionskante, die genau wie im Röntgengebiet aussieht, zusammengesoben. Dann ändert sich beim Übergang vom Zustand thermischen Gleichgewichtes bei der Temperatur T zu dem schon beschriebenen Nichtgleichgewichtszustand das Verhältnis $\frac{n_{r+1}}{n_r}$ proportional der Zahl der Photoionisationen und also proportional der Strahlungsdichte¹ bei der Absorptionskantenfrequenz $\nu_r = \chi_r/h$. Das heißt das $\frac{n_{r+1}}{n_r}$ ändert sich um den Faktor:

$$C = \frac{1}{\delta} \cdot e^{-\chi_r \left(\frac{1}{kT_1} - \frac{1}{kT} \right)}. \quad (25,4)$$

Nimmt man — etwas genauer — an, daß der Absorptionskoeffizient nach der Kante ($\nu > \nu_r$) wie $1/\nu^s$, die *Zahl* der entsprechenden Absorptionsprozesse also wie $1/\nu^{s+1}$ (bei jedem wird 1 Quant $h\nu$ umgesetzt!) abnimmt, so wird der Korrektionsfaktor der SAHASchen Gleichung

$$C = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\nu_r}{\int_{\nu_r}^{\infty} \nu^{-(s+1)} \cdot \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT_1}} d\nu}. \quad (25,5)$$

Setzt man mit A. PANNEKOEK [427] der Einfachheit wegen $s=2$, so wird

$$C = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{T_1}{T} e^{-\chi_r \left(\frac{1}{kT_1} - \frac{1}{kT} \right)}. \quad (25,6)$$

Nach quantentheoretischen Rechnungen liegt beim Wasserstoffatom s näher bei 3; die Integrale in (25,5) führen dann auf die Integral-Exponentialfunktion. Wie man schon am Bau von Gl. (25,5) erkennt, ändert sich das Resultat dadurch nicht wesentlich (GERASIMOVİČ [421], PANNEKOEK [404 und 428]).

Bei allen diesen Rechnungen wurde nur die Photoionisation vom *Grundzustand* aus in Betracht gezogen. Welchen Beitrag liefern die höheren, angeregten Quantenzustände?

¹ Von den EINSTEINSchen erzwungenen Übergängen kann man — wegen $\frac{\chi_r}{kT} \gg 1$ — absehen.

Im Falle extrem verdünnter Strahlung ($\delta \gg 1$) — also z. B. bei EDDINGTONS Problem der Ionisation des interstellaren Kalziums — sind angeregte Zustände so selten (ihre Häufigkeit ist etwa $\sim \delta^{-1}$), daß sie keine merkliche Rolle spielen. In den Sternatmosphären dagegen, wo δ von der Größenordnung 1—2 ist, werden die angeregten Zustände zur Ionisation in demselben Maße beitragen, wie zum kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten (genauer: Absorptionskoeffizient $\cdot \nu^{-1}$). Daß diese Beiträge nicht vernachlässigt werden dürfen, zeigt folgende Abschätzung: Ein Zustand der Anregungsspannung $\chi_{r,s}$ wird ionisiert durch Lichtquanten, deren $h\nu$ den Betrag $\chi_r - \chi_{r,s}$ nur wenig übersteigt. Die

Dichte dieser Strahlung geht aber (im Bereich des WIENSchen Gesetzes) $\sim e^{-\frac{\chi_r - \chi_{r,s}}{hT}}$. Andererseits ist nach der BOLTZMANN-Formel die Anzahl der Atome im Aus-

gangszustand $\sim e^{-\frac{\chi_{r,s}}{hT}}$. In dem entscheidenden *Produkt* beider Faktoren fällt also $\chi_{r,s}$ nahezu heraus, d. h. die Beiträge verschiedener angeregter Zustände sind in der Hauptsache proportional ihren Ionisierungswahrscheinlichkeiten, bezogen auf gleiche Strahlungsdichte. Diese wiederum sind nach der Quantenmechanik für den Grundzustand und die nächsten angeregten Zustände von derselben Größenordnung. Es bedarf also zur Berechnung der Abweichungen von der SAHA-Formel einer eingehenden Kenntnis dieser atomtheoretischen Größen. Die Rechnung könnte zur Zeit höchstens für Wasserstoff durchgeführt werden; ihre Anwendbarkeit auf andere Atome bliebe ziemlich zweifelhaft. Die Abweichung des C-Faktors von 1 wird jedoch sicher kleiner, als nach Gl. (25.6) zu erwarten ist, da die Dichte der langwelligen Strahlung, welche die angeregten Zustände ionisiert, mit T langsamer wächst, als die der kurzwelligen, welche für die Ionisation vom Grundzustand aus verantwortlich ist.

Nachdem wir gesehen haben, daß die Mitwirkung der hochangeregten Quantenzustände keineswegs vernachlässigt werden kann, müßten wir nachträglich doch noch die Wirkung der Zusammenstöße auf diese in Rechnung stellen¹. Hierzu fehlen zwar noch alle quantitativen Unterlagen, doch dürfte das Resultat eine weitere Annäherung des C-Faktors an 1 sein. Zusammenfassend müssen wir also feststellen, daß die Gl. (25.6) in quantitativer Hinsicht höchst unsicher fundiert ist, sie dürfte aber jedenfalls eine obere Grenze der zu erwartenden Abweichungen von der SAHASchen Formel geben (bezüglich weiterer Arbeiten, die aber kaum über das Gesagte hinausführen, sei auf das Literaturverzeichnis verwiesen).

¹ Die Wirkungsquerschnitte angeregter Zustände sind bekanntlich sehr groß.

Kontinuierliches Spektrum und Aufbau einer Sternatmosphäre.

V. Kapitel.

Strahlungsgleichgewicht und kontinuierliches Spektrum der Sternatmosphären.

26. Strömungs- und Kontinuitätsgleichung der Strahlung.

Um Aufbau und Ausstrahlung der Sternatmosphären genauer analysieren zu können, müssen wir uns zunächst die Frage vorlegen, ob der Energietransport in den Sternatmosphären vorwiegend durch Wärmeleitung, durch Konvektion oder durch Strahlung besorgt wird. Daß die *Wärmeleitung* keine Rolle spielen kann, bedarf angesichts der Kleinheit der Wärmeleitungskoeffizienten der Gase wohl keiner Erörterung. Wenn — z. B. in der Sonnenatmosphäre — ein erheblicher Energietransport durch *Konvektion* stattfinden würde, so müßten sich die entsprechenden Strömungen auch sonstwie bemerkbar machen. Gerade das Studium der Sonne zeigt aber, daß Konvektionsströme nur zur Erklärung der feineren Züge im Antlitz der Sonne (Sonnenflecke, Fackeln und Granulation) herangezogen werden können. In der Hauptsache findet der *Energietransport* in der Sonnenatmosphäre also *durch Strahlung* statt. Die Frage, unter welchen Umständen daneben Konvektionströme auftreten können, wollen wir noch zurückstellen und uns sogleich der *Strömungsgleichung der Strahlung* zuwenden.

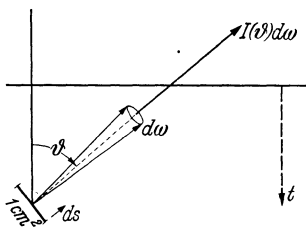


Fig. 40. Strahlungsgleichgewicht.

Um das *Strahlungsfeld* (hierzu Kap. I) einer Sternatmosphäre beschreiben zu können, denken wir uns (Fig. 40) in der Tiefe t — gerechnet von einem beliebig festgelegten Nullniveau aus¹ — ein Flächenelement von 1 cm^2 , dessen Normale mit der der Sternoberfläche den Winkel ϑ (Fig. 4) bilde ($0 \leq \vartheta \leq \pi$).

Innerhalb eines Raumwinkelementes $d\omega$ strömt durch dieses Flächenelement in Richtung seiner Normale pro sek die Strahlungsenergie $I(t, \vartheta) d\omega$. Richten wir unsere Aufmerksamkeit nur auf Strahlung des Frequenzintervalles ν bis $\nu + d\nu$, so haben wir statt $I(t, \vartheta) d\omega$ zu schreiben $I_\nu(t, \vartheta) d\nu d\omega$ ².

Längs eines Wegelementes $ds = -dt/\cos \vartheta = -dt \cdot \sec \vartheta$ verliert nun das betrachtete Strahlenbündel durch *Absorption* den Betrag $\kappa_\nu \cdot I_\nu(\vartheta) ds$ an Intensität, wo κ_ν — wie früher — den Absorptionskoeffizienten pro cm für die Frequenz ν bedeutet. Andererseits wird aber innerhalb des kleinen Zylinders von der Grundfläche 1 und der Höhe ds auch Strahlung *emittiert* und zwar erhält $I_\nu(\vartheta)$ den Zuwachs $\epsilon_\nu \cdot ds \cdot 1$, wo ϵ_ν der *Emissionskoeffizient* an der

¹ Da die Dicke der Sternatmosphären im allgemeinen viel kleiner ist als der Sternradius, können wir uns auf das *ebene* Problem beschränken.

² Das Argument t lassen wir im folgenden meistens weg.

betrachteten Stelle der Sternatmosphäre ist. Dieser könnte — im Prinzip — noch von ϑ abhängen, aber alle denkbaren Reemissionsmechanismen führen auf so geringe Abweichungen von der Isotropie, daß wir von vornherein ε_ν als unabhängig von ϑ betrachten dürfen. Insgesamt erhalten wir also:

$$dI_\nu(\vartheta) = \underbrace{-\kappa_\nu I_\nu(\vartheta) ds}_{\text{Absorption}} + \underbrace{\varepsilon_\nu \cdot ds \cdot 1}_{\text{Reemission}}. \quad (26,1)$$

Im Zustande vollständigen thermischen Gleichgewichtes wäre nach dem KIRCHHOFFSchen Satz $\varepsilon_\nu = \kappa_\nu I_\nu$. Entsprechend definieren wir im folgenden, ohne damit thermisches Gleichgewicht vorauszusetzen, eine der KIRCHHOFF-PLANCKschen Funktion analoge Größe J_ν durch die Gleichung:

$$\text{Die von } \vartheta \text{ unabhängige Größe } \varepsilon_\nu = \kappa_\nu \cdot J_\nu. \quad (26,2)$$

$$\int \varepsilon_\nu d\omega = 4\pi \kappa_\nu \cdot J_\nu \quad (26,3)$$

gibt die Emission pro cm^3 und sek innerhalb eines Frequenzintervalles 1 an; wir bezeichnen sie mit K. SCHWARZSCHILD als die *Ergiebigkeit*¹ in der Tiefe t . Um Gl. (26,1) vollends auf ihre endgültige Form zu bringen, führen wir noch den Begriff der *optischen Tiefe* τ_ν ein:

$$d\tau_\nu = \kappa_\nu dt; \quad \tau_\nu = \int_{-\infty}^t \kappa_\nu dt. \quad (26,4)$$

Seine anschauliche Bedeutung ist leicht zu erkennen: Durchsetzt ein Strahlenbündel der Intensität I_ν senkrecht eine — selbst nicht emittierende — Platte (z. B. ein Lichtfilter) der Dicke t , so ist

$$dI_\nu/dt = -\kappa_\nu I_\nu \quad \text{oder} \quad dI_\nu/d\tau_\nu = -I_\nu. \quad (26,5)$$

Die auffallende Intensität $I_{\nu,0}$ wird also beim Durchgang geschwächt im Verhältnis

$$I_\nu : I_{\nu,0} = e^{-\tau_\nu}. \quad (26,6)$$

Das heißt eine Platte der optischen Dicke 1 reduziert die Intensität eines durchgehenden Lichtstrahles auf $1/e = 0,37$. Unter Verwendung dieses außerordentlich nützlichen Hilfsbegriffes erhalten wir nun aus (26,1) mit $\kappa_\nu ds = -d\tau_\nu/\cos\vartheta$ die endgültige Form für die *Strömungsgleichung* der Strahlung:

$$\cos\vartheta \frac{dI_\nu(\tau_\nu, \vartheta)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\tau_\nu, \vartheta) - J_\nu(\tau_\nu). \quad (26,7)$$

Diese Gleichung gilt — ihrer Herleitung gemäß — unabhängig von der Art des Energietransportes in der Sternatmosphäre für Strahlung jeder Frequenz. Ist der Absorptionskoeffizient frequenzunabhängig, d. h. können wir schreiben $\kappa_\nu = \kappa$ und $\tau_\nu = \tau$, so gilt die entsprechende *Strömungsgleichung* für die Gesamtstrahlung:

$$\cos\vartheta \frac{dI(\tau, \vartheta)}{d\tau} = I(\tau, \vartheta) - J(\tau). \quad (26,8)$$

Wenn κ_ν von ν abhängt, so bleibt diese Gleichung offenbar gültig, wenn man für κ einen geeigneten Mittelwert über alle κ_ν einsetzt. Auf die zuerst von ROSSELAND untersuchte Theorie dieser Mittelbildung werden wir am Anfang des nächsten Kapitels zurückkommen.

Während sich die Strömungsgleichung (26,7) der Strahlung unter sehr allgemeinen Voraussetzungen als gültig erwies, können wir eine Verknüpfung

¹ Vielfach bezeichnet man auch J_ν selbst als Ergiebigkeit. Da ein Mißverständnis kaum möglich ist, werden wir beide Definitionen gebrauchen.

von $I_\nu(\vartheta)$ und J_ν bzw. $I(\vartheta)$ und J nur erhalten, wenn wir bestimmte Annahmen über die Art des Energietransportes machen. Erfolgt dieser ganz und gar durch *Strahlung*, so muß *insgesamt* jedes Volumelement pro sek ebensoviel Strahlung emittieren als es absorbiert, d. h. der Gesamtstrahlungsstrom (Abschn. 1).

$$\pi F = \int I(\vartheta) \cos \vartheta \, d\omega$$

muß unabhängig von τ sein. Integriert man (26,8) über die Einheitskugel, so erhält man

$$\frac{d}{d\tau} \int I(\vartheta) \cos \vartheta \frac{d\omega}{4\pi} = \int I(\vartheta) \frac{d\omega}{4\pi} - J = 0. \quad (26,9)$$

Die Gleichung

$$J = \int I(\vartheta) \frac{d\omega}{4\pi} = \frac{1}{2} \int I(\vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta \quad (26,10)$$

können wir als die *Kontinuitätsgleichung¹ der Strahlung* bezeichnen. Will man, als Gegenstück zu Gl. (26,7) eine entsprechende Formel für die Strahlung eines bestimmten Frequenzbereiches erhalten, so kommt man mit dem Energiesatz allein — (26,10) ist ja im Grunde genommen nichts anderes — nicht mehr aus, sondern muß von detaillierten Vorstellungen über die Wechselwirkung von Strahlung und Materie ausgehen.

Die Grundgleichungen (26,7 bzw. 8) und (26,10) der *Theorie des Strahlungsgleichgewichtes* sind zuerst 1905 von K. SCHWARZSCHILD [521] in seiner bahnbrechenden Arbeit „Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre“ aufgestellt worden. Während die ältere Strahlungstheorie sich auf die Behandlung des Strahlungsfeldes im Zustande thermischen Gleichgewichtes beschränkte, hat SCHWARZSCHILD zum erstenmal einen konsequenten Vorstoß in das Gebiet der *stationären* Strahlungszustände² unternommen und damit eine der wichtigsten Grundlagen der theoretischen Astrophysik geschaffen. Um die Weiterentwicklung der von SCHWARZSCHILD geschaffenen Ansätze haben sich besonders A. S. EDDINGTON und E. A. MILNE große Verdienste erworben.

27. Anwendung der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes auf die Gesamtstrahlung. Randverdunkelung der Sonne. Einführung des Temperaturbegriffes.

Nach (26,8) und (26,10) gilt für die Intensität $I(\vartheta)$ der Gesamtstrahlung (das Argument τ wollen wir wieder weglassen):

$$\cos \vartheta \frac{dI(\vartheta)}{d\tau} = I(\vartheta) - J, \quad (27,1)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\pi I(\vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta. \quad (27,2)$$

Um diese Gleichungen zu lösen, machen wir für $I(\vartheta)$ den Kugelfunktionsansatz:

$$I(\vartheta) = A + B \cos \vartheta. \quad (27,3)$$

¹ Diese Bezeichnung, ebenso wie die der Gl. (26,7) als Strömungsgleichung ist bis jetzt nicht allgemein üblich; der Verf. möchte ihre Einführung befürworten.

² Als Vorgänger wären zu nennen R. A. SAMPSON [518] und A. SCHUSTER [519 u. 520]. In diesem Zusammenhang sei noch auf die Arbeit von D. HILBERT: Begründung der elementaren Strahlungstheorie [509] nachdrücklich hingewiesen.

Dann wird zunächst der *Strahlungstrom* πF mit

$$F = 2 \int_0^\pi (A + B \cos \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta = 4/3 B = \text{konst.} \quad (27,4)$$

und die *Gesamtstrahlungsdichte* (nach 1,12) $\frac{4\pi}{c} J$ mit

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\pi (A + B \cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta = A. \quad (27,5)$$

Die Strömungsgleichung (27,1) nimmt nun die Form an:

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta \, dA/d\tau &= B \cos \vartheta \\ \text{oder} \quad A &= B \cdot \tau + \alpha. \end{aligned} \right\} (27,6)$$

Um die Integrationskonstante α festzulegen, benützen wir die *Grenzbedingung*, daß an der Oberfläche des Sternes die Einstrahlung von außen verschwinden muß:

$$\left. \begin{aligned} I(0, \vartheta) &= 0 \text{ für } \pi/2 \leq \vartheta \leq \pi \\ \text{und } \tau &= 0. \end{aligned} \right\} (27,7)$$

In dieser strengen Form können wir die Grenzbedingung mit unserem Näherungsansatz (27,3) aber nicht befriedigen. Wir begnügen uns daher — dies erscheint als die vernünftigste Approximation — mit der Forderung, daß für $\tau=0$ der Einstrahlungsstrom πF^- — vgl. (1,6) — verschwinden soll, d. h.

$$\left. \begin{aligned} \text{oder} \quad \int_{\pi/2}^\pi I_{\tau=0} \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta &= \int_{\pi/2}^\pi (\alpha + B \cos \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta = 0 \\ \frac{\alpha}{2} - \frac{B}{3} &= 0. \end{aligned} \right\} (27,8)$$

Da wegen (27,4) noch $\frac{4}{3} B = F =$ der mittleren Ausstrahlungsintensität [letzteres nach (1,9)] ist, so erhalten wir schließlich als Lösung der SCHWARZSCHILD'schen Differentialgleichung (27,1 u. 2):

$$I(\tau, \vartheta) = \frac{1}{2} F \left(1 + \frac{3}{2} \tau + \frac{3}{2} \cos \vartheta \right), \quad (27,9)$$

$$J(\tau) = \frac{1}{2} F \left(1 + \frac{3}{2} \tau \right). \quad (27,10)$$

Für $\tau=0$ entnehmen wir (27,9) mit SCHWARZSCHILD das Gesetz der *Randverdunkelung* der Sonne (das in gleicher Weise für die Gesamtstrahlung aller im Strahlungsgleichgewicht befindlichen Sternatmosphären gelten muß):

$$\frac{I(\vartheta)}{I(0)} = \frac{2}{5} \left(1 + \frac{3}{2} \cos \vartheta \right). \quad (27,11)$$

In Fig. 41 vergleichen wir den so berechneten Mitte-Rand-Kontrast¹ der Sonne mit dem von ABBOT gemessenen (Tabelle 5). Die Übereinstimmung von Messung

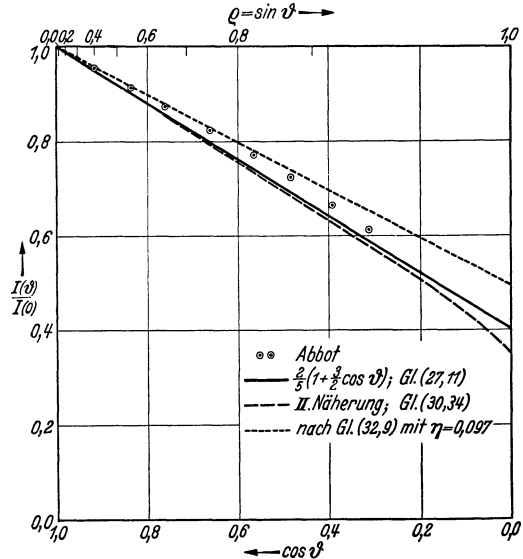


Fig. 41. Mitte-Rand-Kontrast für die Gesamtstrahlung der Sonne.

¹ Die anderen Kurven der Fig. 41 werden später erklärt werden.

und Rechnung ist so gut, daß man sie als eine wesentliche Stütze der Anschauung betrachten darf, daß die Sonnenatmosphäre sich im Strahlungsgleichgewicht befindet.

In Fig. 42 geben wir noch — alle in demselben Maßstab gezeichnet — *Richtungsdiagramme der Gesamtstrahlung* nach (27,9) für einige Werte der optischen

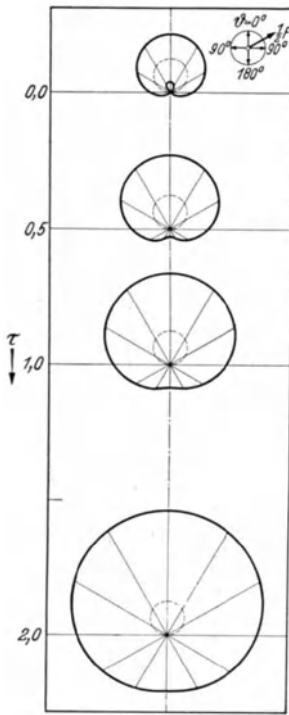


Fig. 42. Winkelverteilung der Gesamtstrahlungsintensität $I(\tau, \vartheta) = \frac{1}{2} F \left(1 + \frac{3}{2} \tau + \frac{3}{2} \cos \vartheta \right)$ für verschiedene optische Tiefen τ .

Tiefe τ . Die gestrichelten Kreise geben den von τ unabhängigen anisotropen Anteil $\frac{1}{2} F \cdot \frac{3}{2} \cos \vartheta$ der Strahlung allein. Man kann in sehr instruktiver Weise verfolgen, wie mit wachsendem τ der isotrope Anteil von $I(\vartheta)$ immer mehr überwiegt. Die Strahlung nimmt desto mehr den Charakter einer Hohlraumstrahlung an, je weiter wir in das Innere des Sternes vordringen. Daß Gl. (27,9) an der Oberfläche des Sternes ($\tau = 0$) für $\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi$ eine kleine, teils positive, teils negative Einstrahlung liefert, rührt natürlich nur von der Unvollständigkeit unseres Ansatzes (27,3) her.

Bis jetzt haben wir in unsere Strahlungsgleichgewichtsbetrachtungen den Begriff der *Temperatur* noch gar nicht eingeführt. In der Tat ist es auch gar nicht *möglich*, einem anisotropen Strahlungsfeld in eindeutiger Weise *eine* Temperatur zuzuordnen. Der Temperaturbegriff ist — streng genommen — nur sinnvoll im Falle thermischen Gleichgewichtes. Da wir aber bis jetzt Berechnungen des Ionisationsgrades, der Anregung höherer Quantenzustände usw. fast nur für thermische Gleichgewichtszustände ausführen können, wollen wir eine Temperatur T definieren, die unseren Anforderungen möglichst weitgehend gerecht wird: T soll — zusammen mit dem STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetz (4,3) — die richtige Gesamtstrahlungsdichte ergeben. Es ist also:

$$\frac{4\pi J}{c} = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{1}{2} F \left(1 + \frac{3}{2} \tau \right) = \frac{4\sigma}{c} T^4. \quad (27,12)$$

Die Temperatur T nähert sich demnach an der Sternoberfläche ($\tau \rightarrow 0$) einem bestimmten Grenzwert, der durch

$$\sigma T_0^4 = \frac{\pi}{2} F \quad (27,13)$$

bestimmten *Grenztemperatur* T_0 .

Allgemein gilt nach (27,13)

$$T^4 = T_0^4 \left(1 + \frac{3}{2} \tau \right). \quad (27,14)$$

Auf der anderen Seite haben wir in Kap. II, Gl. (12,5) die *effektive Temperatur* T_e eines Sternes definiert durch

$$\pi F = \sigma T_e^4, \quad (27,15)$$

d. h. T_e ergibt — in das STEFAN-BOLTZMANNsche Gesetz eingeführt — die richtige *Gesamtausstrahlung* πF bzw. mittlere Strahlungsintensität F an der Oberfläche. Während also T für eine bestimmte optische Tiefe gilt, bezieht sich T_e auf die Sternatmosphäre als ganzes.

Durch Vergleich mit (27,13) erkennt man, daß

$$T_0^4 = \frac{1}{2} T_e^4 \quad \text{oder} \quad T_e = T_0 \sqrt[4]{2} = 1,19 T_0 \quad (27,16)$$

ist. Für die Sonne finden wir¹ z. B. nach (12,6)

$$T_e = 5713^\circ \quad \text{und} \quad T_0 = 4802^\circ. \quad (27,17)$$

28. Zusammenhang von Strahlungsintensität $I(\tau, \vartheta)$, Strahlungsstrom $\pi F(\tau)$ und Ergiebigkeit $J(\tau)$.

Es leuchtet ohne weiteres ein, daß es möglich sein muß, die Strahlungsintensität $I(\tau, \vartheta)$ zu berechnen, wenn die *Ergiebigkeit* $J(\tau)$ für die ganze Sternatmosphäre bekannt ist. Die Beschreibung des ganzen Strahlungsfeldes ist damit zurückgeführt auf die Kenntnis dieser einen Funktion *einer* Variablen. Wir gehen aus von der Strömungsgleichung (26,7 bzw. 8):

$$\frac{dI}{d\tau \cdot \sec \vartheta} - I = -J. \quad (28,1)$$

Da diese in genau derselben Form für I_ν bzw. J_ν als Funktion von τ_ν gilt, so können die folgenden Rechnungen dieses Abschnittes ohne Ausnahme auch hierauf angewandt werden. Lediglich der Einfachheit wegen lassen wir die ν -Indizes weg. Da wir weiterhin von der Kontinuitätsgleichung keinen Gebrauch machen, so gelten unsere Formeln auch für Nicht-Strahlungsgleichgewichtszustände.

Multiplikation von (28,1) mit $e^{-\tau \sec \vartheta}$ ergibt zunächst

$$\frac{d(I e^{-\tau \sec \vartheta})}{d(\tau \sec \vartheta)} = -J \cdot e^{-\tau \sec \vartheta} \quad (28,2)$$

oder, wenn wir integrieren und dabei die τ entsprechende Integrationsvariable mit x bezeichnen:

$$I(\tau, \vartheta) e^{-\tau \sec \vartheta} = - \int_{x=\tau}^{\tau_1} J(x) e^{-x \sec \vartheta} dx \sec \vartheta. \quad (28,3)$$

Die untere Grenze des Integrals bzw. die Integrationskonstante müssen wir noch mit Hilfe der Grenzbedingungen des Problems festlegen.

Mit Rücksicht auf spätere Anwendungen betrachten wir sogleich den gegenüber Abschn. 27 etwas allgemeineren Fall, daß eine Atmosphäre der optischen Dicke τ_1 am „Boden“ begrenzt wird durch eine Ebene, die Strahlung der vorgegebenen² Intensität $I_0(\vartheta)$ aussendet (Fig. 43). Für $\tau=0$ soll selbstverständlich die Einstrahlung ($\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi$) verschwinden.

Unter Berücksichtigung dieser Grenzbedingungen für $\tau = \tau_1$ und $\tau = 0$ wird nunmehr (28,3):

Ausstrahlung:

$$0 \leq \vartheta \leq \pi/2 \quad I(\tau, \vartheta) = I_0(\vartheta) e^{-(\tau_1 - \tau) \sec \vartheta} + \int_{\tau}^{\tau_1} J(x) e^{-(x - \tau) \sec \vartheta} dx \sec \vartheta \quad (28,4)$$

$\sec \vartheta \geq 0$

Einstrahlung:

$$\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi \quad I(\tau, \vartheta) = - \int_0^{\tau} J(x) e^{-(x - \tau) \sec \vartheta} dx \sec \vartheta. \quad (28,5)$$

$\sec \vartheta \leq 0$

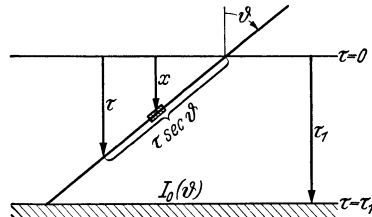


Fig. 43. Zusammenhang von Strahlungsintensität und Ergiebigkeit.

¹ Im folgenden rechnen wir auch vielfach mit den — innerhalb der Fehlergrenzen (schätzungsweise $\pm 30^\circ$) damit übereinstimmenden — Zahlen von E. A. MILNE [517]: $T_e = 5740^\circ$ und $T_0 = 4830^\circ$.

² Die Frage, wie die Ergiebigkeit $J(\tau)$ mit der Ausstrahlung des Bodens $I_0(\vartheta)$ zusammenhängt, kann natürlich nur unter Zuhilfenahme der Kontinuitätsgleichung (oder ihrer Verallgemeinerungen) behandelt werden und soll vorerst außer Betracht bleiben.

Die Bedeutung der einzelnen Ausdrücke ist an Hand der Fig. 43 sofort zu erkennen: In (28,4) gibt das 1. Glied die direkt vom Boden unter dem Winkel ϑ bis zur optischen Tiefe τ empordringende Strahlung. Das Integral entsteht durch Summation über die Emission aller auf diesem Weg liegenden Volumelemente unter Berücksichtigung der Absorption auf dem optischen Weg $(x - \tau) \sec \vartheta$. (28,5) kommt in entsprechender Weise durch Integration über die oberhalb vom τ liegenden Volumelemente zustande.

Für den praktisch besonders wichtigen Spezialfall einer unendlich tiefen Atmosphäre ($\lim \tau_1 \rightarrow \infty$) nehmen die Gl. (28,4 und 5) die einfache Form an¹:

$$\text{Ausstrahlung:} \quad I(\tau, \vartheta) = \int_{\tau}^{\infty} J(x) e^{-(x-\tau) \sec \vartheta} dx \cdot \sec \vartheta \quad (28,6)$$

$$\text{Einstrahlung:} \quad I(\tau, \vartheta) = -\int_0^{\tau} J(x) e^{-(x-\tau) \sec \vartheta} dx \cdot \sec \vartheta. \quad (28,7)$$

Insbesondere wird die an der Sternoberfläche austretende Strahlung:

$$I(0, \vartheta) = \int_0^{\infty} J(x) e^{-x \sec \vartheta} dx \sec \vartheta \quad (28,8)$$

wie man auch ohne Rechnung aus Fig. 43 ablesen kann. Diese Gleichung stellt — und darin liegt ihre große Wichtigkeit begründet — den Zusammenhang her zwischen der direkt beobachtbaren Mitte-Rand-Verdunkelung, d. h. $I(0, \vartheta)$ einerseits und der Tiefenabhängigkeit der Ergiebigkeit $J(x)$ andererseits. Je rascher J mit x anwächst, desto mehr Strahlung wird aus großen Tiefen an die Sternoberfläche empordringen und desto größer wird der Mitte-Rand-Kontrast, da ja am Sternrand ($\vartheta = \pi/2$; $\sec \vartheta \rightarrow \infty$) $I(0, \pi/2)$ den festen Wert $J(0)$ hat. Messung der Strahlungsintensität $I(0, \vartheta)$ in Abhängigkeit von ϑ gibt also eine Möglichkeit zur Erforschung der „Schichtung“ der Ergiebigkeit an die Hand, gleichgültig ob es sich um spektral zerlegte oder um die Gesamtstrahlung handelt.

Die besondere Wichtigkeit der Sonnenphysik liegt nicht zuletzt darin begründet, daß es nur bei der Sonne möglich ist, $I(0, \vartheta)$ mit einiger Genauigkeit zu messen (evtl. Bedeckungsveränderliche!).

Noch übersichtlicher wird der Zusammenhang zwischen $I(0, \vartheta)$ und $J(x)$, wenn wir mit R. LUNDBLAD [514] letztere Funktion in eine Potenzreihe entwickeln:

$$J(x) = \sum_0^{\infty} a_k \cdot x^k. \quad (28,9)$$

Dann ist nach (28,8)

$$I(0, \vartheta) = \int_0^{\infty} \sum_0^{\infty} a_k \cdot x^k \cdot e^{-x \sec \vartheta} dx \sec \vartheta, \quad (28,10)$$

oder mit $x \sec \vartheta = y$

$$I(0, \vartheta) = \sum_0^{\infty} a_k \cos^k \vartheta \int_0^{\infty} y^k e^{-y} dy = \sum_0^{\infty} a_k \cdot k! \cos^k \vartheta. \quad (28,11)$$

Die Reihenentwicklungen für $J(x)$ und $I(0, \vartheta)$ entsprechen einander also Glied für Glied

$$\left. \begin{aligned} J(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \\ I(0, \vartheta) &= a_0 + a_1 \cos \vartheta + 2 a_2 \cos^2 \vartheta + \dots \end{aligned} \right\} \quad (28,12)$$

¹ In der Literatur ist es teilweise üblich, ϑ nicht von 0 bis π durchzuzählen, sondern für Aus- und Einstrahlung in entgegengesetztem Sinne von 0 bis $\pi/2$ laufen zu lassen. Man gewinnt dadurch etwas an Anschaulichkeit, zerstört aber die mathematische Symmetrie der Formeln.

Ein Beispiel geben z. B. die Gl. (27,10 u. 11). Sollte $J(x)$ bei $x=0$ eine Singularität¹ haben, welche die Entwicklung nach Potenzen von x unmöglich macht, so kann man — ohne an den physikalischen Verhältnissen etwas zu ändern — die äußerste Schicht ($0 \leq \tau \leq \varepsilon \ll 1$) der Atmosphäre bei der Integration nach (28,8) weglassen und $J(x)$ von $x = \varepsilon$ aus entwickeln.

Wir wollen uns sodann noch darüber orientieren, in welchem Maße die in verschiedenen optischen Tiefen τ liegenden Schichten der Sonnenatmosphäre zur Gesamtausstrahlung $I(0, \vartheta)$ einer bestimmten Stelle der Sonnenscheibe beitragen. Die Antwort ist in den Gl. (28,8) und (27,10) schon enthalten: Die Schicht $d\tau$ in der Tiefe τ liefert zu $I(0, \vartheta)$ den Beitrag:

$$\frac{1}{2}F \left(1 + \frac{3}{2}\tau\right) e^{-\tau \sec \vartheta} \sec \vartheta \cdot d\tau.$$

Die Fig. 44 gibt graphische Darstellungen dieser Funktion für die Sonnenmitte ($\vartheta=0$), sodann für diejenige Zone der Sonnenscheibe, für welche $I(0, \vartheta)$ gleich der mittleren Strahlungsintensität F ist und endlich für eine nur noch 5,7% des \odot -Radius vom Sonnenrand entfernte Stelle, die etwa dem äußersten von ABBOT gemessenen Punkt entspricht. Die Kurven illustrieren in schöner Weise unsere frühere Bemerkung, daß die Strahlung des Sonnenrandes aus den höchsten Schichten stammt, während sie in der Mitte der Sonnenscheibe aus größeren Tiefen emporringt. Durch horizontale Linien sind noch die optischen Tiefen τ markiert, oberhalb deren jeweils die Hälfte der Gesamtstrahlung entspringt; letztere ist ja nach (28,8) einfach gegeben durch die Fläche zwischen der betreffenden Kurve und der τ -Achse. Man kann also sagen, daß z. B. die Gesamtstrahlung der Sonnenmitte im Durchschnitt in einer optischen Tiefe $\tau = 1,25$ entspringt, während wir am Sonnenrand (bei $\sin \vartheta = 0,943$) nur bis $\tau = 0,32$ vordringen können. Damit soll selbstverständlich nicht gesagt sein, daß die Energie in dieser Tiefe irgendwie entsteht, sondern in dieser Tiefe findet im allgemeinen der letzte Prozeß der Absorption und Reemission statt — ganz im Einklang mit der anschaulichen Bedeutung des Begriffes der optischen Tiefe (Abschn. 26).

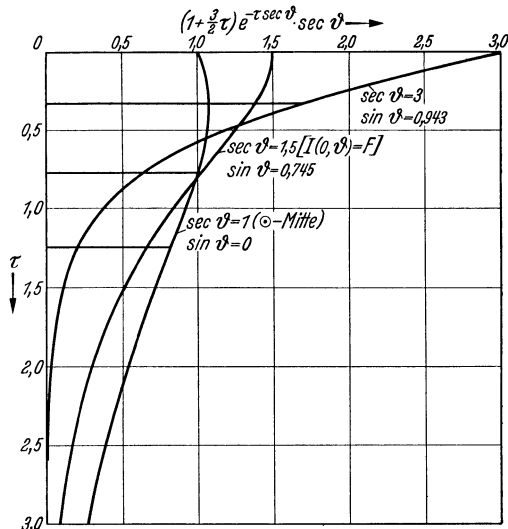


Fig. 44. Aus welchen optischen Tiefen τ stammt die Gesamtstrahlung verschiedener Teile der Sonnenscheibe?

In derselben Weise wie die Strahlungsintensität $I(\tau, \vartheta)$ kann man nach MILNE [517] auch den Strahlungsstrom² $\pi F(\tau)$ aus der Ergiebigkeit berechnen. Diese Beziehung ist für die Sternspektroskopie deshalb wichtig, weil man bei Sternen — vgl. Gl. (1,9) — nur den Mittelwert der Strahlungsintensität über die Sternscheibe $\bar{I} = F(0)$ beobachten kann. Es wäre natürlich sehr umständlich, immer erst $I(0, \vartheta)$ und dann durch Mittelbildung \bar{I} zu bestimmen.

¹ Hierzu vgl. E. A. MILNE [503, pg. 132].

² Da wir in diesem Abschnitt die Kontinuitätsgleichung nicht benutzen und also auch Nicht-Strahlungsgleichgewichtszustände zulassen, wird der Strahlungsstrom noch von τ abhängen.

Nach (1,5) ist

$$\frac{1}{2} F(\tau) = \int_0^{\pi} I(\tau, \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \quad (28,13)$$

oder mit (28,6 u. 7) — wir beschränken uns auf das Problem der unendlichen Atmosphäre —:

$$\frac{1}{2} F(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} J(x) \, dx \int_0^{\pi/2} e^{-(x-\tau) \sec \vartheta} \sin \vartheta \, d\vartheta - \int_0^{\tau} J(x) \, dx \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-(x-\tau) \sec \vartheta} \sin \vartheta \, d\vartheta, \quad (28,14)$$

wobei wir gleich die Reihenfolge der Integration vertauscht haben. Um die Integrationen über ϑ ausführen zu können, setzen wir im 1. Integral $\sec \vartheta = w$, im 2. Integral $-\sec \vartheta = w$ und erhalten so

$$\int_1^{\infty} e^{-(x-\tau)w} \frac{dw}{w^2} \quad \text{bzw.} \quad \int_1^{\infty} e^{+(x-\tau)w} \frac{dw}{w^2}. \quad (28,15)$$

Beide Integrale führen auf die Transzendenten¹

$$K_2(z) = \int_1^{\infty} e^{-z \cdot w} \frac{dw}{w^2} \quad (28,16)$$

und wir erhalten allgemein

$$\frac{1}{2} F(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} J(x) K_2(x-\tau) \, dx - \int_0^{\tau} J(x) K_2(\tau-x) \, dx. \quad (28,17)$$

Insbesondere wird an der Sternoberfläche $\tau = 0$:

$$\boxed{\frac{1}{2} F(0) = \int_0^{\infty} J(x) K_2(x) \, dx.} \quad (28,18)$$

Wie der Vergleich mit der analogen Beziehung (28,8) für $I(0, \vartheta)$ zeigt, kann man $2K_2(x)$ auffassen als Mittelwert über $e^{-x \sec \vartheta} \cdot \sec \vartheta$.

29. Weitere Näherungsmethoden zur Lösung der Differentialgleichung des Strahlungsgleichgewichtes.

In Abschn. 27 haben wir die Differentialgleichung² des *Strahlungsgleichgewichtes*

$$\cos \vartheta \frac{dI(\vartheta)}{d\tau} = I(\vartheta) - \int I(\vartheta) \frac{d\omega}{4\pi} \quad (29,1)$$

mit Hilfe des Ansatzes (27,3): $I(\vartheta) = A + B \cos \vartheta$ näherungsweise gelöst. Ergänzungsweise wollen wir nunmehr einige andere Approximationsmethoden kennen lernen:

1. A. SCHUSTER [520] und K. SCHWARZSCHILD [521] gingen ursprünglich so vor, daß sie mit einer richtungsunabhängigen

$$\text{Ausstrahlung} \quad I(\vartheta) = I_1 = \text{konst.} \quad \text{für} \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi/2 \quad (29,2)$$

und einer — davon verschiedenen —

$$\text{Einstrahlung} \quad I(\vartheta) = I_2 = \text{konst.} \quad \text{für} \quad \pi/2 \leq \vartheta \leq \pi \quad (29,3)$$

¹ Da die Integraleponentialfunktion und verwandte Transzendenten in der Strahlungstheorie eine bedeutende Rolle spielen, so haben wir — um unsere Darstellung nicht immer wieder unterbrechen zu müssen — im Anhang B die wichtigsten Formeln zusammengestellt.

² Eigentlich Integro-Differentialgleichung.

rechneten. Dann wird

$$J(\tau) = \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \quad (29,4)$$

und

$$F = I_1 - I_2 = \text{konst.} \quad (29,5)$$

Aus (29,1) erhält man zunächst mit $\overline{\cos^2 \vartheta} = 1/2$ die zwei Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} dI_1/d\tau &= I_1 - I_2 \\ -dI_2/d\tau &= I_2 - I_1 \end{aligned} \right\} \quad (29,6)$$

oder durch Subtraktion unter Berücksichtigung von (29,4) und (29,5) folgende Gleichung für die Ergiebigkeit

$$dJ/d\tau = F. \quad (29,7)$$

Beachtet man noch, daß für $\tau = 0$ die Einstrahlung $I_2 = 0$ und also $I_1 = F = 2J(0)$ sein muß, so ergibt sich aus (29,7)

$$J(\tau) = \frac{1}{2} F (1 + 2\tau) \quad (29,8)$$

und nach (28,12)

$$I(0, \vartheta) = \frac{1}{2} F (1 + 2 \cos \vartheta). \quad (29,9)$$

Bildet man umgekehrt mit diesem Wert von $I(\vartheta)$ wieder den Strahlungstrom, so erhält man den nicht ganz richtigen Wert:

$$F' = 2 \int_0^{\pi/2} I \cdot \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{7}{6} F. \quad (29,10)$$

Diese Inkonsistenz kann nach R. EMDEN [508] vermieden werden, wenn man bei der Mittelung über den $\cos \vartheta$ in (29,1) schon die Richtungsverteilung der Strahlung berücksichtigt oder — was auf dasselbe herauskommt — in (29,6) mit einem effektiven Absorptionskoeffizienten ($= 3/2 \times$ dem Absorptionskoeffizienten für parallele Strahlung) rechnet, der so eingerichtet wird, daß der Strahlungstrom am Ende richtig herauskommt. Im großen und ganzen dürfte das SCHUSTERSCHE Näherungsverfahren heute nur noch historische Bedeutung haben.

2. Nach A. S. EDDINGTON [501] kann man in sehr eleganter Weise eine Näherungslösung von (29,1) gewinnen, indem man zunächst folgende Mittelwerte von $I(\tau, \vartheta)$ einführt:

$$J = \int I \frac{d\omega}{4\pi}; \quad H = \frac{F}{4} = \int I \cos \vartheta \frac{d\omega}{4\pi}; \quad K = \int I \cos^2 \vartheta \frac{d\omega}{4\pi}. \quad (29,11)$$

Multipliziert man die Differentialgleichung des Strahlungsgleichgewichtes

$$\cos \vartheta \, dI/d\tau = I - J$$

mit $\frac{d\omega}{4\pi}$ bzw. $\cos \vartheta \frac{d\omega}{4\pi}$ und integriert über $d\omega$, so erhält man

$$dH/d\tau = 0 \quad (\text{Konstanz des Strahlungsstromes}) \quad (29,12)$$

und

$$dK/d\tau = H. \quad (29,13)$$

Da J und K sich nur durch den Faktor $\cos^2 \vartheta$ unter dem Integralzeichen unterscheiden, so wird (wegen $\overline{\cos^2 \vartheta} = \frac{1}{3}$) näherungsweise $K = \frac{1}{3} J$ und

$$dJ/d\tau = 3H; \quad J = 3H\tau + \alpha. \quad (29,14)$$

Setzen wir im 1. Integral $\sec \vartheta = w$, im 2. gleich $-w$, so wird zunächst $\sec \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = dw/w$ und

$$J(\tau) = \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} J(x) dx \int_{w=1}^{\infty} e^{-(x-\tau)w} \frac{dw}{w} + \frac{1}{2} \int_0^{\tau} J(x) dx \int_{w=1}^{\infty} e^{-(\tau-x)w} \frac{dw}{w}. \quad (30,3)$$

Da im 1. Integral $x - \tau \geq 0$, im 2. aber ≤ 0 ist, so kann der Exponent der e -Funktion beidemal $-|\tau - x| \cdot w$ geschrieben werden und es ergibt sich nach Einführung der Integraleponentialfunktion $K(z) = \int_1^{\infty} e^{-zw} \cdot dw/w$ (Anhang B) die lineare homogene Integralgleichung:

$$J(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} J(x) K(|\tau - x|) dx \quad (30,4)$$

Der Kern $K(|\tau - x|)$ hat bei $x = \tau$ eine logarithmische Singularität und geht für $|\tau - x| \rightarrow \infty$ wie e^{-x}/x gegen Null.

Wir wollen nunmehr mit E. HOPF¹ [510 u. 504] ein konsequentes Verfahren zur Gewinnung der Lösung dieser Integralgleichung entwickeln:

Unter Einführung des Integraloperators

$$A \dots = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \dots K(|\tau - x|) dx \quad (30,5)$$

schreiben wir (30,4) in der Operatorform²:

$$J(\tau) = AJ(x) \quad (30,6)$$

und versuchen zunächst, Einblick in das Verhalten der Lösung bei $\tau \rightarrow \infty$ zu bekommen. Nach (29,13) gilt allgemein

$$\frac{d}{d\tau} \int I(\tau, \vartheta) \cos^2 \vartheta \frac{d\omega}{4\pi} = \frac{1}{4} F. \quad (30,7)$$

Da in großer Tiefe die Richtungsverteilung der Strahlung sich immer mehr der isotropen annähern muß (Hohlraumstrahlung), so können wir im \lim in (30,7) den $\cos^2 \vartheta$ durch seinen Mittelwert $1/3$ ersetzen und erhalten $\tau \rightarrow \infty$

$$\frac{dJ}{d\tau} = \frac{3}{4} F \quad (30,8)$$

oder

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} J(\tau) = \frac{3}{4} F \cdot \tau. \quad (30,9)$$

Diese Gleichung, zusammen mit den Ergebnissen von Abschn. 27 legt nun den Ansatz nahe

$$J(\tau) = \frac{3}{4} F \cdot f(\tau) = \frac{3}{4} F (\tau + q(\tau)) \dots 0 \leq \tau \leq \infty. \quad (30,10)$$

¹ Diese Überlegungen E. HOPFS knüpfen an an entsprechende Rechnungen K. SCHWARZSCHILD'S [522] zur inhomogenen Integralgleichung für die „Atmosphäre mit Boden“. Da HOPF selbst eine ausgezeichnete zusammenfassende Darstellung seiner Untersuchungen gegeben hat, so beschränken wir uns darauf, die astrophysikalisch wichtigsten Punkte in möglichst einfacher Form herauszustellen, teilweise unter Verzicht auf größtmögliche mathematische Strenge.

² A führt — daran wollen wir festhalten — eine Funktion von x in eine Funktion von τ über.

E. HOPF (s. S. 99) konnte nun zeigen, daß (30,6) *eine* und nur *eine* Lösung hat, für die weiterhin

$$1/2 < q(\tau) < 1 \tag{30,11}$$

gilt.

Wir schließen zunächst die Integralgleichung (30,6) ein zwischen zwei Integralgleichungen. Es ist¹

$$\Lambda(x+c) = \tau + c - \frac{1}{2} \{c K_2(\tau) - K_3(\tau)\}. \tag{30,12}$$

Setzen wir hierin $c = 1/2$ und führen die Abkürzung

$$f_1 = \tau + \frac{1}{2} \tag{30,13}$$

ein, so wird nach Anhang B, Gl. (17) $K_2(\tau) - 2K_3(\tau) \leq 0$ und folglich:

$$f_1(\tau) < \Lambda f_1(x) \dots\dots\dots 0 \leq \tau \leq \infty. \tag{30,14}$$

Setzen wir noch allgemein

$$f_{n+1} = \Lambda f_n \tag{30,15}$$

so lautet (30,14):

$$f_1 < f_2. \tag{30,16}$$

Durch wiederholte Anwendung des Λ -Operators auf diese Ungleichung erhalten wir, da dessen Kern überall positiv ist

$$f_2 < f_3 \tag{30,17}$$

.....

.....

$$f_n < f_{n+1} \tag{30,18}$$

d. h. die f_n bilden eine *aufsteigende* Folge

$$f_1 < f_2 < f_3 \dots < f_n < f_{n+1} \dots \tag{30,19}$$

In ähnlicher Weise bilden wir eine *absteigende* Funktionenfolge ausgehend von

$$\bar{f} = \tau + 1. \tag{30,20}$$

Nach (30,12) und (B, 15) ist

$$\Lambda \bar{f}(x) < \bar{f}(\tau) \tag{30,21}$$

und mit (30,13) außerdem

$$f_1 < \bar{f}. \tag{30,22}$$

¹ Nach (30,3) ist

$$\Lambda(1) = \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} 1 \cdot K(x-\tau) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\tau} 1 \cdot K(\tau-x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} K(u) du - \frac{1}{2} \int_{\tau}^0 K(u) du$$

$$\Lambda(1) = \int_0^{\infty} K(u) du - \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} K(u) du = 1 - \frac{1}{2} K_2(\tau) \tag{nach (B, 10 und 9)}$$

und entsprechend

$$\Lambda(x) = \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} x \cdot K(x-\tau) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\tau} x \cdot K(\tau-x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\tau+u) K(u) du - \frac{1}{2} \int_{\tau}^0 (\tau-u) K(u) du$$

$$\Lambda(x) = \tau \left\{ \int_0^{\infty} K(u) du - \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} K(u) du \right\} + \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} u K(u) du = \tau + \frac{1}{2} K_3(\tau) \tag{nach (B,10 u. 11),}$$

woraus sofort (30,12) folgt.

Durch Anwenden des Λ -Operators auf diese Ungleichung erhält man mit (30,21)

$$f_2 < \Lambda \bar{f} < \bar{f} \tag{30,23}$$

und durch weitere Anwendung des Λ -Operators

$$f_3 = \Lambda f_2 < \Lambda \bar{f} < \bar{f}, \tag{30,24}$$

.....

$$f_n = \Lambda f_{n-1} < \Lambda \bar{f} < \bar{f}. \tag{30,25}$$

Die f_n liegen also alle unterhalb der Schranke $\bar{f} = \tau + 1$. Verbinden wir dieses Ergebnis mit (30,19), so ist damit gezeigt, daß die Grenzfunktion

$$f(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\tau) \tag{30,26}$$

existiert und zwischen den Grenzen

$$\tau + \frac{1}{2} < f(\tau) < \tau + 1 \tag{30,27}$$

liegt. Aus (30,15) folgt durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ sofort, daß $f(\tau)$ tatsächlich eine Lösung von (30,6) ist. Wie HOPF gezeigt hat, kann man von hier aus auch leicht vollends den Eindeutigkeitsbeweis führen, doch möchten wir hierauf nicht näher eingehen. Viel wichtiger ist für uns folgende Bemerkung HOPFS:

Wenn man von einer *Näherungslösung* $f^*(\tau)$ der SCHWARZSCHILD-MILNESCHEN Integralgleichung ausgeht, die der Bedingung

$$f_1 = \tau + \frac{1}{2} \cong f^*(\tau) \cong \tau + 1 = \bar{f} \tag{30,28}$$

genügt, so erhält man nach (30,19, 25 u. 26) durch wiederholte Anwendung des Λ -Operators auf f^* eine immer bessere Annäherung an die Lösung f , d. h.

$$f(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^*(\tau). \tag{30,29}$$

Das Verfahren¹ wird selbstverständlich desto rascher zum Ziele führen, je näher die Ausgangsfunktion f^* an f liegt.

Wir wollen in dieser Weise — ausgehend von unserer Näherungslösung (27,10)

$$J_1 = \frac{3}{4} F \left(\tau + \frac{2}{3} \right); \quad f_1^* = \tau + \frac{2}{3} \tag{30,30}$$

durch Anwendung des Λ -Operators eine 2. Näherung

$$J_2 = \Lambda J_1 \quad \text{bzw.} \quad f_2^* = \Lambda f_1^* \tag{30,31}$$

ableiten und erhalten nach (30,12):

$$J_2 = \frac{3}{4} F \left\{ \tau + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} K_2(\tau) - K_3(\tau) \right) \right\} \tag{30,32}$$

oder mit Hilfe der Formeln des Anhanges B:

$$J_2 = \frac{3}{4} F \left\{ \tau + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \left(\tau + \frac{1}{3} \right) e^{-\tau} + \frac{\tau}{4} \left(\tau + \frac{4}{3} \right) K(\tau) \right\}. \tag{30,33}$$

Diese Lösung ist — wie man an Hand von Gl. (30,9) erkennt — schon so normiert, daß sie in großer Tiefe den richtigen Strahlungstrom πF liefert. Bei $\tau = 0$ kommt nach einer numerischen Berechnung² von A. W. MAUE [523] ein um 0,85% zu kleiner Wert heraus, d. h. die Fehler unserer Näherung dürften in dieser Größenordnung liegen³.

¹ Ohne strenge Begründung zuerst angedeutet von K. SCHWARZSCHILD [522].

² Man berechnet — vgl. (30,34) — erst $I(0, \vartheta)$ und dann durch Mittelung über alle ϑ nach (28,13) den Strahlungsstrom.

³ Die 1. Näherung stimmt zwar, wie man leicht nachrechnet, bei $\tau = 0$ und ∞ . Dafür sind aber ihre Fehler sonst größer.

Das (30,33) entsprechende, verbesserte Gesetz des Mitte-Rand-Kontrastes [523] erhält man nach (28,8) mit Hilfe elementarer, aber ziemlich umständlicher Integration unter fortwährender Benützung der Formeln des Anhangs B zu

$$I_2(0, \vartheta) = \frac{1}{2} F \left\{ \left(1 + \frac{3}{2} \cos \vartheta \right) \left(1 + \frac{\cos \vartheta}{2} \ln (1 + \sec \vartheta) \right) - \frac{1}{8} (1 + 6 \cos \vartheta) \right\}. \quad (30,34)$$

Den Nachteil unserer 2. Näherung (30,32), gerade an der Sternoberfläche $\tau = 0$ die größte Abweichung von der Konstanz des Strahlungsstromes zu liefern, vermeidet eine im großen und ganzen ziemlich ähnliche Methode von A. S. EDDINGTON [504]. Allerdings ist sie in mathematischer Hinsicht nicht so durchsichtig, wie die im Anschluß an HOPFS Untersuchungen entwickelte.

Den Ausgangspunkt bildet wieder die 1. Näherung (mit $H = F/4$):

$$J_1(\tau) = \frac{3}{4} F \left(\tau + \frac{2}{3} \right) = H (2 + 3\tau). \quad (30,35)$$

Mit deren Hilfe berechnet EDDINGTON zunächst nach (28,6) und (28,7) genauere Ausdrücke für die Strahlungsintensität $I(\tau, \vartheta)$:

Ausstrahlung:

$$0 \leq \vartheta \leq \pi/2 \quad \left. \begin{aligned} I(\tau, \vartheta) &= H \int_{\tau}^{\infty} (2 + 3x) e^{-(x-\tau) \sec \vartheta} dx \sec \vartheta \\ &= H (2 + 3\tau + 3 \cos \vartheta), \end{aligned} \right\} \quad (30,36)$$

Einstrahlung:

$$\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi \quad \left. \begin{aligned} I(\tau, \vartheta) &= -H \int_0^{\tau} (2 + 3x) e^{-(x-\tau) \sec \vartheta} dx \sec \vartheta \\ &= H \{ 2 + 3\tau + 3 \cos \vartheta - (2 + 3 \cos \vartheta) e^{\tau \sec \vartheta} \}. \end{aligned} \right\} \quad (30,37)$$

Durch Integration über ϑ werden aus diesen Ausdrücken für $I(\tau, \vartheta)$ sodann nach (29,11) genauere für $J(\tau)$ und $K(\tau)$ abgeleitet. Mit Hilfe der Formeln von Anhang B ergibt eine elementare Rechnung:

$$J(\tau) = H \left\{ 2 + 3\tau - K_2(\tau) + \frac{3}{2} K_3(\tau) \right\} \quad (30,38)$$

$$K(\tau) = \frac{1}{3} H \left\{ 2 + 3\tau - 3 K_4(\tau) + \frac{9}{2} K(\tau) \right\}. \quad (30,39)$$

Der neue Ausdruck für $J(\tau)$ ist — selbstverständlich — identisch mit (30,32), denn die Integrationen über τ in (30,36 u. 37) zusammen mit der Mittelung über $d\omega$ in (29,11) sind ja äquivalent der Anwendung des HOPFSchen \mathcal{A} -Operators. H brauchen wir nicht neu zu berechnen, da diese Größe als Integrationskonstante fungieren soll.

Nun knüpft EDDINGTON an an die streng gültige Gl. (29,13)

$$K = H \cdot \tau + \text{konst.} \quad (30,40)$$

Die Konstante wird man am besten so festlegen, daß (30,39 u. 40) bei $\tau = 0$ erfüllt sind. Man erhält so — wegen $K_n(0) = \frac{1}{n-1}$ — den Wert konst. = $\frac{17}{24} H$.

Sodann wird $K(\tau)$ durch $J(\tau)$ ausgedrückt (vgl. 29,13—14); an Stelle des früheren $K = \frac{1}{3} J$ tritt nach (30,38 u. 39):

$$K = \frac{1}{3f} \cdot J \quad \text{mit} \quad f = \frac{2 + 3\tau - K_2(\tau) + \frac{3}{2} K_3(\tau)}{2 + 3\tau - 3 K_4(\tau) + \frac{9}{2} K_5(\tau)} \quad (30,41)$$

und es wird schließlich:

$$J(\tau) = 3 H f \left(\tau + \frac{17}{24} \right) = \frac{3}{4} F \cdot f \left(\tau + \frac{17}{24} \right). \quad (30,42)$$

E. HOPF [504; dort Zusammenstellung der Originalabhandlungen] und M. BRONSTEIN [506] ist es sogar gelungen, den genaueren Wert von $J(0)$ zu berechnen. Sie finden — die recht komplizierten Entwicklungen können hier nicht im einzelnen wiedergegeben werden —:

$$J(0) = \frac{3}{4} F \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{oder — vgl. (30,10) —} \quad q(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (30,43)$$

Für das Verhältnis der effektiven Temperatur T_e zur Grenztemperatur T_0 (Abschnitt 27):

$$\left(\frac{T_e}{T_0}\right)^4 = \frac{F}{J(0)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{q(0)} \quad (30,44)$$

erhalten wir auf Grund unserer verschiedenen Näherungen:

	$(T_e/T_0)^4 = F/J_0$	T_e/T_0
I. Näherung (30,30)	= 2,000	1,189
II. Näherung (30,32) und (30,42) :	16/7 = 2,286	1,231
Exakter Wert (30,43)	4/√3 = 2,309	1,233

Wie man sieht, führen unsere II. Näherungen bei $\tau = 0$ schon so nahe an die exakte Lösung heran, als man dies nur wünschen kann.

E. HOPF hat weiterhin bewiesen, daß die Funktion $q(\tau)$ in (30,10) mit τ ständig *anwächst* und sich für $\tau \rightarrow \infty$ einem Grenzwert q_∞ nähert, für den sich zunächst $17/24 < q_\infty < 5/7$ und später der exakte Wert

$$q_\infty = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{3}{\sin^3 \Phi} - \frac{\text{tg } \Phi}{\Phi - \text{tg } \Phi} \right\} d\Phi = 0,710 \quad (30,45)$$

ergab. Nach der I. Näherung war $q_\infty = 2/3 = 0,667$. Gl. (30,32) ergibt *dasselbe*, während die EDDINGTONSche II. Näherung (30,42) den wesentlich *besseren* Wert $q_\infty = 17/24 = 0,708$ liefert.

Der Verlauf der Funktion $q(\tau)$ nach (30,32 u. 33) bzw. (30,42), sowie die exakten Werte für $\tau = 0$ und ∞ sind in Fig. 45 graphisch dargestellt. Wie man sieht, approximiert die EDDINGTONSche II. Näherung die bekannten Eigenschaften der exakten Lösung am besten. Da es jedoch bei der Berechnung der an der Sternoberfläche austretenden Strahlung hauptsächlich auf die Werte für $\tau < 1$ ankommt, so ist die — rechnerisch handlichere — Näherung (30,32) fast ebenso brauchbar¹.

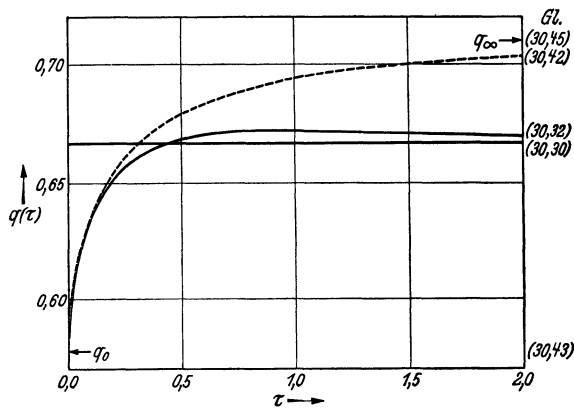


Fig. 45. Die Funktion $q(\tau)$ — definiert durch $J(\tau) = \frac{3}{4} F (\tau + q(\tau))$ — in I. und II. Näherung. Exakte Werte für $\tau = 0$ und $\tau = \infty$ nach E. HOPF [504].

Das nach (30,32) berechnete Gesetz der Randverdunkelung (30,34) ist in Fig. 41 durch die gestrichelte Kurve dargestellt. Eine entsprechende Rechnung nach (30,42) würde sehr langwierige numerische Rechnungen erfordern und — wie man aus der Ähnlichkeit der $q(\tau)$ sieht — zu fast demselben Ergebnis führen.

¹ Über andere Näherungsmethoden, die aber in keiner Richtung über das hier Dargestellte hinausführen, vgl. z. B. den Handbuchartikel von E. A. MILNE [503].

Auf jeden Fall können die kleinen Unterschiede zwischen Beobachtung und Theorie hinsichtlich des Mitte-Rand-Kontrastes für die Gesamtstrahlung der Sonne (Fig. 41) *nicht* auf die Ungenauigkeit der benützten mathematischen Methoden zurückgeführt werden.

31. Mitte-Rand-Kontrast in Abhängigkeit von λ . Energieverteilung im kontinuierlichen Sonnenspektrum. Wellenlängenabhängigkeit des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten in der Sonnenatmosphäre.

Um die an der Sternoberfläche austretende Strahlung in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ berechnen zu können, d. h. um einerseits ihren Mitte-Rand-Kontrast und andererseits ihre spektrale Energieverteilung für eine bestimmte Stelle der Sternscheibe oder für den Strahlungsstrom zu ermitteln, müssen wir eine *neue physikalische Vorstellung* einführen, die uns gestattet, die *Ergiebigkeit* als Funktion der Wellenlänge zu bestimmen. Während die *Strömungsgleichung* der Strahlung (26,7) bekanntlich auch für jeden *einzelnen Wellenlängenbereich* gilt, bezieht sich die *Kontinuitätsgleichung* (26,10) — der Energiesatz des Strahlungsfeldes — nur auf die *Gesamtstrahlung* und wir müssen uns also nach einem Ersatz dafür umsehen, sobald wir die spektral zerlegte Strahlung ins Auge fassen.

Nach E. A. MILNE [516 u. 517] und B. LINDBLAD [512 u. 513] auf deren grundlegende Arbeiten wir im folgenden vielfach zurückgreifen werden, wollen wir unseren Untersuchungen über die kontinuierlichen Spektren die — durch analoge Erfahrungen im Laboratorium gut begründete — Annahme zugrunde legen, daß die einzelnen Volumelemente einer Sternatmosphäre Strahlung gemäß dem KIRCHHOFFSchen Satz emittieren.

Wir nehmen also an, daß hierbei die Abweichungen vom Zustande thermodynamischen Gleichgewichtes vernachlässigt werden können, trotzdem das Strahlungsfeld von dem eines Hohlraumes konstanter Temperatur verschieden ist (vgl. Fig. 42).

Die Temperatur in der optischen Tiefe τ bestimmen wir nach (27,12) auf Grund unserer — mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung durchgeführten — Berechnung der Gesamtstrahlungsergiebigkeit:

$$\sigma T^4 = \pi J(\tau). \quad (31,1)$$

Diese Art des Strahlungsaustausches nennen wir mit MILNE (s. oben) *lokales thermodynamisches Gleichgewicht* oder mit SCHWARZSCHILD Strahlungsgleichgewicht mit *Absorption* im engeren Sinne.

Um Verwechslungen vorzubeugen, bezeichnen wir nunmehr den Absorptionskoeffizienten für die Gesamtstrahlung mit $\bar{\kappa}$, den für Strahlung der Frequenz ν (bzw. Wellenlänge $\lambda = c/\nu$) mit κ_ν bzw. κ_λ . κ_ν und $\bar{\kappa}$ können noch — in verschiedener Weise — von der geometrischen Tiefe t (Abschn. 26) in der Sternatmosphäre abhängen¹.

Wie in Abschn. 26 definieren wir weiterhin eine optische Tiefe für die ν -Strahlung (26,4)

$$d\tau_\nu = \kappa_\nu(t) dt; \quad \tau_\nu = \int_{-\infty}^t \kappa_\nu(t) dt \quad (31,2)$$

und für die Gesamtstrahlung

$$d\tau = \bar{\kappa}(t) dt; \quad \tau = \int_{-\infty}^t \bar{\kappa}(t) dt. \quad (31,3)$$

¹ Die naheliegende Frage, in welcher Weise der Mittelwert $\bar{\kappa}(t)$ aus den $\kappa_\nu(t)$ zu bilden ist, werden wir erst am Anfang des nächsten Kapitels in Angriff nehmen.

Nach (27,13 u. 15) sowie (30,10) ist nun die Temperaturschichtung einer Sternatmosphäre gegeben durch

$$T^4 = \frac{1}{2} T_e^4 \left(1 + \frac{3}{2} \tau + \Delta(\tau) \right), \quad (31,4)$$

wobei die Korrekptionsgröße $\Delta(\tau)$ mit unserem früheren $q(\tau)$ verknüpft ist durch

$$\frac{2}{3} (1 + \Delta(\tau)) = q(\tau). \quad (31,5)$$

In I. Näherung darf also $\Delta = 0$ gesetzt werden, die II. Näherung kann aus Fig. 45 entnommen werden. Die *effektive Temperatur* T_e ist — um daran nochmals zu erinnern — so definiert, daß sie in Verbindung mit dem STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetz auf die richtige *Gesamtausstrahlung* (Solarkonstante!) führt.

Die *Strahlungsergiebigkeit* für die Wellenlänge λ ist nun — gemäß unserer Annahme lokalen thermodynamischen Gleichgewichtes — nach dem PLANCKschen Gesetz (7,30)

$$J_\lambda = \frac{2 h c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}. \quad (31,6)$$

Die an der Sternoberfläche austretende Strahlungsintensität $I_\lambda(0, \vartheta)$ wird somit nach (28,8):

$$I_\lambda(0, \vartheta) = \frac{2 h c^2}{\lambda^5} \int_0^\infty \frac{e^{-\tau_\nu \cdot \sec \vartheta} d\tau_\nu \sec \vartheta}{\frac{c_2}{e^{\lambda T_e \cdot 2^{-1/4}} \left(1 + \frac{3}{2} \tau + \Delta(\tau) \right)^{-1/4}} - 1}. \quad (31,7)$$

Um die Integration ausführen zu können, müssen wir noch τ_ν als Funktion von τ oder — was auf dasselbe herausläuft — $\kappa_\nu/\bar{\kappa}$ als Funktion der Tiefe kennen. Da nun — man erinnere sich der Fig. 44! — nur eine verhältnismäßig dünne Zone der Sternatmosphäre zu (31,7) wesentlich beiträgt, so werden wir keinen großen Fehler begehen, wenn wir für $\kappa_\nu/\bar{\kappa}$ vorläufig einen konstanten Mittelwert einsetzen. Führen wir weiterhin die Abkürzungen ein

$$\alpha = \frac{c_2}{\lambda T_e \cdot 2^{-1/4}} \quad \text{und} \quad z = \frac{\kappa_\nu}{\bar{\kappa}} \cdot \sec \vartheta \quad (31,8a)$$

so ergibt sich (mit $c_2 = \frac{h c}{k}$):

$$I_\lambda(0, \vartheta) = \frac{c k}{c_2^4 \cdot 2^{1/4}} \cdot T_e^5 \cdot \alpha^5 \int_0^\infty \frac{e^{-z \cdot \tau} \cdot z d\tau}{e^{\alpha \left(1 + \frac{3}{2} \tau + \Delta(\tau) \right)^{-1/4}} - 1}. \quad (31,8b)$$

Es ist bemerkenswert, daß sich das Gesetz der Randverdunkelung in dieser Allgemeinheit auf die zwei Parameter α und z zurückführen läßt. Daß die Temperatur nur in der Verbindung λT_e auftritt, hängt natürlich mit dem WIENSchen Verschiebungsgesetz (5,10) zusammen. Die Kombination $\kappa_\nu/\bar{\kappa} \cdot \sec \vartheta$ andererseits zeigt, daß es gleichgültig ist, ob große optische Wege durch hohen Absorptionskoeffizienten κ_ν oder durch streifenden Austritt der Strahlung aus der Atmosphäre bedingt sind.

Am Sonnenrand ($\sec \vartheta \rightarrow \infty$) geht $I_\nu(0, \vartheta)$, unabhängig von dem Verhältnis $\kappa_\nu/\bar{\kappa}$, über in die Intensität der *Hohlraumstrahlung für die Grenztemperatur* T_0 : Man bekommt ja am Sonnenrand immer nur Strahlung aus der obersten Schicht (Fig. 44!).

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \pi/2} I_\lambda(0, \vartheta) = \frac{c k}{c_2^4 \cdot 2^{1/4}} \cdot \frac{\alpha^5 \cdot T_e^5}{e^\alpha - 1}.$$

Ist $\kappa_p \gg \bar{\kappa}$, so kann auch in der Mitte einer Sternscheibe die Strahlung nicht aus großer Tiefe empordringen. Man hat dann schwache Randverdunkelung und die Strahlungsintensität entspricht nahezu obigem Wert. Wird dagegen $\kappa_p < \bar{\kappa}$, so erhält man in der Mitte der Sternscheibe Strahlung aus immer größerer Tiefe, also starke Randverdunkelung und große Strahlungsintensität.

B. LINDBLAD [512 u. 513] und E. A. MILNE [517] haben die Funktion (mit $p = \frac{3}{2z} = \frac{\bar{\kappa}}{\kappa_p} \cdot \frac{3}{2} \cos \vartheta$)

$$f(\alpha, p) = \alpha^5 \int_0^\infty \frac{e^{-z \cdot \tau \cdot z} d\tau}{e^{\alpha(1 + \frac{3}{2}\tau + \Delta(\tau))^{-1/4}} - 1} \quad (31,9)$$

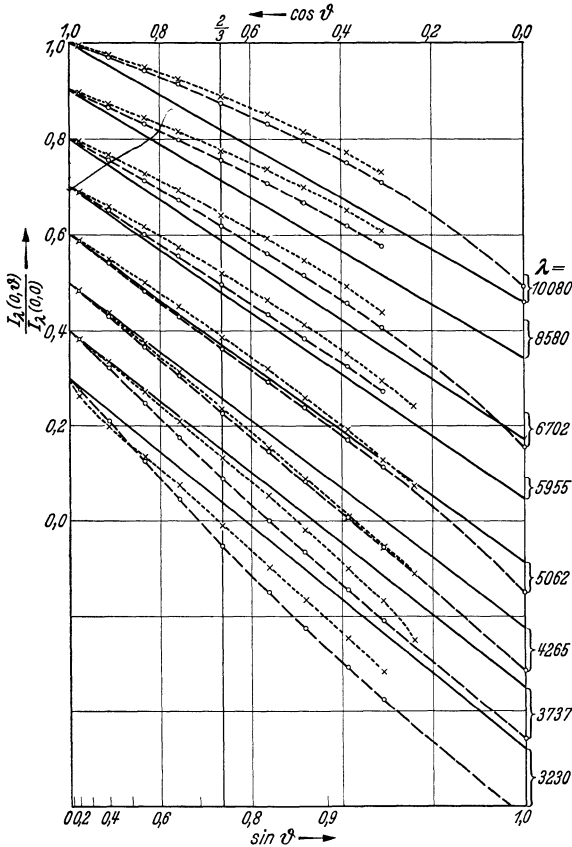


Fig. 46. Mitte-Rand-Kontrast der Sonne.
 x---x---x Beobachtungen von ABBOT (Tabelle 4 und 3).
 o---o---o Exakte Theorie (Tabelle 23) } mit $\frac{\kappa_p}{\bar{\kappa}} = 1$.
 ————— Genäherte Theorie (Tabelle 25)
 Die Ordinatenkala ist zwischen je zwei λ -Werten um 0,1 gesenkt. Die untere Abszissenskala gibt die Abstände von der Mitte der Sonnenscheibe. (Mit Sonnenradius = 1.)

in I. Näherung ($\Delta = 0$) teils mit Hilfe von Reihenentwicklungen, teils durch numerische Integration berechnet und tabuliert. A. W. MAUE und A. UNSÖLD [523] haben entsprechende Rechnungen unter Verwendung der II. Näherung (30,32 bzw. 33) durchgeführt. Die Unterschiede sind, wie bei den entsprechenden Rechnungen für die Gesamtstrahlung (Fig. 41) nur am äußersten Rand wesentlich.

In Tabelle 23 sind für die von ABBOT 1913 beobachteten Wellenlängen (Tabelle 4; λ 3230 nach Tabelle 3) die unter der Annahme $\kappa_p/\bar{\kappa} = 1$ berechneten Werte (2. Näherung nach MAUE und UNSÖLD) der Randverdunkelung der Sonne ($T_e = 5740^\circ K$) zusammengestellt. Für andere Werte von $\kappa_p/\bar{\kappa}$ brauchte man nur die $\cos \vartheta$ -Skala entsprechend zu ändern.

Den Vergleich der beobachteten (Tabelle 4) und der mit $\kappa_p/\bar{\kappa} = 1$ berechneten Randverdunkelung veranschaulicht Fig. 46. Die gute Übereinstimmung beider

Tabelle 23. Mitte-Rand-Verdunkelung der Sonne ($T_e = 5740^\circ$) berechnet für $\kappa_p/\bar{\kappa} = 1$ nach (31,8) mit (30,32).

sin ϑ cos ϑ	0,0 1,000	0,2 0,980	0,4 0,916	0,55 0,835	0,65 0,760	0,75 0,662	0,825 0,565	0,875 0,484	0,92 0,392	0,95 0,312	1,0 0,000
λ in Å											
3230	1,000	0,976	0,909	0,824	0,744	0,642	0,549	0,474	0,393	0,324	0,0977
3737	1,000	0,981	0,921	0,845	0,774	0,684	0,599	0,530	0,456	0,390	0,1410
4265	1,000	0,983	0,930	0,865	0,804	0,724	0,645	0,580	0,506	0,444	0,1861
5062	1,000	0,986	0,941	0,884	0,830	0,761	0,693	0,638	0,570	0,512	0,2498
5955	1,000	0,989	0,951	0,901	0,856	0,796	0,735	0,684	0,624	0,571	
6702	1,000	0,990	0,957	0,913	0,872	0,818	0,763	0,716	0,660	0,608	0,3575
8580	1,000	0,992	0,966	0,933	0,899	0,855	0,807	0,768	0,720	0,676	
10080	1,000	0,993	0,970	0,943	0,914	0,871	0,832	0,794	0,750	0,710	0,4966

Werte zeigt, daß in Wirklichkeit κ_ν nahezu konstant und gleich $\bar{\kappa}$ sein muß. Versucht man, durch geeignete Wahl von $\kappa_\nu/\bar{\kappa}$ als Funktion von λ die Übereinstimmung noch zu verbessern [523]¹, so erhält man folgenden Verlauf von $\kappa_\nu/\bar{\kappa}$ für die Sonnenatmosphäre:

Tabelle 24. $\kappa_\nu/\bar{\kappa}$ aus der Randverdunkelung der Sonne nach MAUE und UNSÖLD [523].

λ in Å	3230	3737	4265	5062	5955	6702	8580	10 080
$\kappa_\nu/\bar{\kappa}$	1,57	1,41	0,96	1,14	1,11	1,29	1,32	1,20

Auf die nähere Diskussion des Verhältnisses $\kappa_\nu/\bar{\kappa}$ werden wir im Zusammenhang mit der Deutung der spektralen Energieverteilung im Sonnenspektrum noch zurückkommen.

Die im vorhergehenden entwickelte Form der Theorie der Randverdunkelung ist zwar in mathematischer Hinsicht sehr vollkommen, aber auch sehr schwerfällig, da das Integral (31,9) nicht auf bekannte Funktionen zurückgeführt werden kann. Namentlich im Hinblick auf die Theorie der FRAUNHOFER-Linien erscheint es daher wünschenswert, daneben noch eine, wenn auch weniger exakte, so doch bequemere Darstellung zu finden.

Da die Ergiebigkeit für die Gesamtstrahlung mit großer Genauigkeit durch die zwei ersten Glieder einer Entwicklung nach τ dargestellt werden kann, so liegt es nahe, auch J_λ bzw. J_ν mit Hilfe von (31,6) und (31,4) (wir dürfen selbstverständlich $\Delta = 0$ setzen) nach τ_ν zu entwickeln. Wir erhalten so² ($T_0 = 2^{-1/4} T_e$ und $\alpha = \frac{h\nu}{k T_0} = \frac{c_2}{\lambda T_e \cdot 2^{-1/4}}$ nach (31,8)):

$$J_\nu = \frac{2 h \nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k T_0}} - 1} \{1 + \beta_0 \tau_\nu\} \quad (31,10)$$

mit

$$\beta_0 = \frac{1}{J_\nu} \cdot \frac{dJ_\nu}{dT} \cdot \frac{dT}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{d\tau_\nu} \Big|_{\tau=0} = \frac{\frac{3}{8} \alpha \cdot \bar{\kappa}}{1 - e^{-\alpha}} \cdot \frac{\kappa_\nu}{\bar{\kappa}} \quad (31,11)$$

Nach (28,8) oder (28,12) berechnet man sofort die an der Sternoberfläche austretende Strahlung:

$$I_\nu(0, \vartheta) = \int_0^\infty J_\nu(\tau_\nu) e^{-\tau_\nu \cdot \sec \vartheta} d\tau_\nu \sec \vartheta = I_\nu(0, \pi/2) \{1 + \beta_0 \cos \vartheta\}. \quad (31,12)$$

Das Gesetz der Mitte-Rand-Verdunkelung erhält also die einfache Form

$$\frac{I_\nu(0, \vartheta)}{I_\nu(0, 0)} = \frac{1 + \beta_0 \cos \vartheta}{1 + \beta_0}. \quad (31,13)$$

In Tabelle 25 haben wir — wieder mit $\kappa_\nu/\bar{\kappa} = 1$ — für die im Vorhergehenden schon betrachteten Wellenlängen des Sonnenspektrums die Werte von α und β_0 (für nicht zu lange Wellen kann man $\beta_0 = \frac{3}{8} \alpha$ setzen) angegeben und daraus

Tabelle 25. Mitte-Randverdunkelung der Sonne. Genäherte Theorie nach (31,10—13) mit $\kappa_\nu/\bar{\kappa} = 1$.

λ in Å	$\alpha = \frac{h\nu}{k T_0}$	β_0	$\frac{I_\nu(0, \pi/2)}{I_\nu(0, 0)} = \frac{1}{1 + \beta_0}$
3230	9,182	3,44	0,225
3737	7,936	2,98	0,251
4265	6,954	2,61	0,277
5062	5,859	2,21	0,312
5955	4,980	1,881	0,347
6702	4,425	1,680	0,373
8580	3,456	1,256	0,443
10080	2,942	1,166	0,462

¹ MILNE und LINDBLAD haben (l. c.) ähnliche Rechnungen unter Verwendung der fast ebenso guten I. Näherung ausgeführt.

² Vgl. z. B. S. ROSSELAND [505, S. 140]. Bei J_λ steht vorn der Faktor $\frac{2 h c^2}{\lambda^5}$.

das Helligkeitsverhältnis Sonnenrand: Sonnenmitte berechnet. Die entsprechenden „Randverdunkelungsgeraden“ sind in Fig. 46 mit eingetragen. Der Vergleich mit der exakten Berechnung zeigt, daß die Näherungsformel (31,10) für $4 < \alpha < 7$ recht brauchbar ist; im kurzwelligeren Gebiet wird sie allerdings ziemlich ungenau¹.

Durch Mittelung über die Sonnenscheibe erhält man sofort auch den Strahlungsstrom:

$$F_v = 2 \int_0^{\pi/2} I_v \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = I_v(0, \pi/2) \left\{ 1 + \frac{2}{3} \beta_0 \right\}. \quad (31,14)$$

Das Verhältnis der Strahlungsintensität in der Mitte der Sonnenscheibe zur mittleren Intensität der Sonnenscheibe wird (vgl. Tabelle 3):

$$\frac{I_v(0, 0)}{F_v} = \frac{1 + \beta_0}{1 + \frac{2}{3} \beta_0}. \quad (31,15)$$

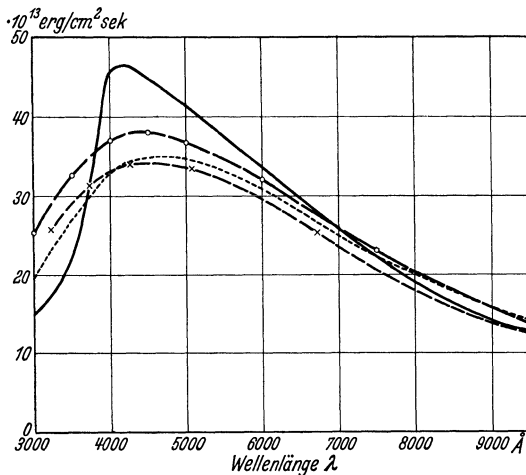


Abb. 47. Intensitätsverteilung im Spektrum der Sonnenmitte.
 — Beobachtet. Nach G. F. W. MULDER'S [227, Fig. 3] und Fig. 23.
 x-x-x Berechnet. Nach Gl. (31,16) mit $\kappa_v/\bar{\kappa} = 1$.
 - - - - - Schwarzer Körper von 6100° K.
 o-o-o Berechnet nach Gl. (32,16) (Blanketing effect).

Wir fragen ferner mit M. MINNAERT [223], an welcher Stelle der Sonnenscheibe $I_v(0, \vartheta) = F_v$ wird. Der Vergleich von (31,12) und (31,14) zeigt, daß dies — in unserer Näherung — für *alle* Wellenlängen bei $\cos \vartheta^* = 2/3$ der Fall ist. Der Abstand dieser Stelle von der Sonnenmitte beträgt $\sin \vartheta^* = 0,745$ Sonnenradien, was mit MINNAERT'S empirischen Befund (Tabelle 3 und Fig. 22) überraschend gut übereinstimmt.

In engstem Zusammenhang mit der λ -Abhängigkeit des Mittel-Rand-Kontrastes steht die *Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum*. Da in allen Formeln

dieses Abschnittes außer der effektiven Temperatur T_e noch das Verhältnis $\kappa_v/\bar{\kappa}$ vorkommt, so hat eine vollständige Theorie der kontinuierlichen Sternspektren die des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten zur Voraussetzung. Insbesondere ist a priori gar nicht zu sehen, wie groß die Abweichungen der Intensitätsverteilungen der Sternspektren vom PLANCK'Schen Gesetz sein werden. Wir müssen vielmehr später den Zusammenhang zwischen der effektiven Temperatur und den Farbtemperaturen für verschiedene Spektralgebiete eingehend diskutieren.

In diesem Abschnitt wollen wir versuchen, den umgekehrten Weg einzuschlagen und aus der Energieverteilung im kontinuierlichen Sonnenspektrum das Verhältnis $\kappa_v/\bar{\kappa}$ als Funktion von λ ermitteln. Da die Randverdunkelung der Sonne mit Hilfe der einfachen Annahme $\kappa_v = \bar{\kappa}$ schon sehr genau dargestellt werden konnte, so wählen wir auch jetzt diese Hypothese als Ausgangspunkt unserer Untersuchung.

Nach (31,8) u.9) ist dann die spektrale Energieverteilung für die Strahlung der Sonnenmitte gegeben durch:

$$I_\lambda(0, 0) = \frac{c \hbar}{c^4 \cdot 2^{1/4}} \cdot T_e^5 \cdot f\left(\alpha, \frac{3}{2}\right). \quad (31,16)$$

¹ Leider nützt es praktisch nichts, Glieder in τ_v^2, \dots mitzuberechnen, da die Reihe später sehr langsam konvergiert.

Der entsprechende Strahlungsstrom $F_\lambda(0)$ müßte durch numerische Integration über die Randverdunkelungskurve oder direkt nach (28,18) ebenfalls auf numerischem Wege berechnet werden¹.

Die so berechnete Energieverteilung² im Spektrum der Sonnenmitte $I_\lambda(0, 0)$ vergleichen wir in Fig. 47 mit den von MINNAERT und MULDERs (vgl. Kap. 2) reduzierten Beobachtungen (Fig. 23). Die berechnete Kurve weicht beträchtlich von den Beobachtungswerten ab. Versuchen wir sodann, die Beobachtungen durch passende Wahl von $\kappa_v/\bar{\kappa}$ als Funktion von λ darzustellen! Eine genaue Rechnung nach (31,8) wäre offenbar sehr umständlich. Um einen Einblick in die durch die Verschiedenheit von κ_v und $\bar{\kappa}$ hervorgerufenen Änderungen von $I_\lambda(0, 0)$ bzw. $F_\lambda(0)$ zu bekommen, genügt aber auch unsere rohere Näherungsmethode: Bezeichnen wir alle für $\kappa_v/\bar{\kappa} = 1$ gültigen Größen mit einem Index 00, so wird nach (31,12)

$$\frac{I_\nu(0, 0)}{I_{\nu, 0}(0, 0)} = \frac{1 + \beta_{00} \cdot \bar{\kappa}/\kappa_\nu}{1 + \beta_{00}} \tag{31,17}$$

und nach (31,14)

$$\frac{F_\nu}{F_{\nu, 0}} = \frac{1 + \frac{2}{3} \beta_{00} \cdot \bar{\kappa}/\kappa_\nu}{1 + \frac{2}{3} \beta_{00}} . \tag{31,18}$$

Die nach (31,17) aus Fig. 23 ermittelten Werte von $\kappa_v/\bar{\kappa}$ sind in der folgenden Tabelle 26 angegeben³.

Tabelle 26. $\kappa_v/\bar{\kappa}$ aus der spektralen Energieverteilung $I_\nu(0, 0)$

λ in Å	3230	3737	4265	5062	6702	10 080
$\kappa_v/\bar{\kappa}$	1,78	1,06	0,67	0,76	0,85	0,94

Es zeigt sich zunächst, daß diese Zahlenwerte mit den in Tabelle 24 aus der Mitte-Rand-Verdunkelung ermittelten sehr schlecht übereinstimmen. Weiterhin fällt auf, daß in Tabelle 24 fast durchweg $\kappa_\nu > \bar{\kappa}$ ist, während doch $\bar{\kappa}$ ein Mittelwert über κ_ν sein sollte! Nach den Erörterungen des Kap. II kann kaum ein Zweifel daran bestehen, daß mindestens ein Teil der Unstimmigkeiten zwischen den Beobachtungen und der im vorgehenden entwickelten Theorie davon herrührt, daß wir bis jetzt die Absorptionswirkung der FRAUNHOFERSchen Linien noch nicht berücksichtigt haben.

32. Einfluß der Absorptionslinien auf das kontinuierliche Sonnenspektrum.

Um den Einfluß der FRAUNHOFER-Linien auf den Mitte-Rand-Kontrast und auf die Energieverteilung im wahren kontinuierlichen Spektrum der Sonne zu berechnen, greift E. A. MILNE [517] auf die alte KIRCHHOFFsche Vorstellung zurück, daß das kontinuierliche Spektrum in den tieferen Schichten, der *Photosphäre*, entsteht, während die Bildung der Absorptionslinien in der darüberliegenden *umkehrenden Schicht* erfolgt.

Im Sinne der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes müssen wir dann annehmen, daß der von den Linien „verschluckte“ Bruchteil η der Strahlungsenergie des kontinuierlichen Spektrums zum großen Teil in die Photosphäre

¹ Anm. b. d. Korr.: Vgl. G. BURKHARDT, Z. Astrophys. **13**, 56 (1936).

² Vgl. E. A. MILNE [517], B. LINDBLAD [513], MAUE und UNSÖLD [523]. Die Kurve entspricht ziemlich genau einer PLANCKschen Strahlungskurve für $T = 6100^\circ K$

³ Vgl. MILNE und LINDBLAD l. c.

zurückgestrahlt wird. Die umkehrende Schicht wirkt wie eine Decke („blanketing effect“) oder — besser gesagt — wie ein Glashaus, das der obersten Schicht der Photosphäre eine zusätzliche Erwärmung gibt. Dadurch wird — wie es die Beobachtungen fordern — der Mitte-Rand-Kontrast verringert [s. Gl. (28,12)] und die Intensität des wahren kontinuierlichen Spektrums (zwischen den Linien) erhöht.

Eine Atmosphäre der geschilderten Bauart unterscheidet sich in mathematischer Hinsicht von der früher untersuchten nur dadurch, daß die frühere Grenzbedingung:

$$\text{Einfallende Strahlung} \Big|_{\tau=0} = 0 \quad (32,1)$$

ersetzt werden muß durch:

$$\text{Einwärtsstrom der Gesamtstrahlung} \Big|_{\tau=0} = \eta \cdot \pi F^+. \quad (32,2)$$

Dieselbe Änderung können wir aber offensichtlich auch dadurch hervorbringen, daß wir die *früher* untersuchte Atmosphäre mit der Grenzbedingung (32,1) bei einer *solchen* optischen Tiefe τ_0 „köpfen“, daß an der Schnittstelle die Bedingung (32,2) gerade erfüllt ist. Die *Ausstrahlung* in der Tiefe $\tau = \tau_0$ ist nach (28,6)

$$I(\tau_0, \vartheta) = \int_{\tau_0}^{\infty} J(x) e^{-(x-\tau_0) \sec \vartheta} dx \sec \vartheta \quad (32,3)$$

oder mit $(x - \tau_0) \sec \vartheta = v$

$$I(\tau_0, \vartheta) = \int_0^{\infty} J(\tau_0 + v \cos \vartheta) e^{-v} dv. \quad (32,4)$$

Mit $J(\tau) = \frac{1}{2} F \left(1 + \frac{3}{2} \tau \right)$ ergibt dies¹

$$I(\tau_0, \vartheta) = \frac{1}{2} F \left(1 + \frac{3}{2} \tau_0 + \frac{3}{2} \cos \vartheta \right). \quad (32,5)$$

Der entsprechende Auswärtsstrom der Strahlung ist

$$\pi F^+ = 2\pi \int_0^{\pi/2} I(\tau_0, \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \pi F \left(1 + \frac{3}{4} \tau_0 \right) \quad (32,6)$$

und der Einwärtsstrom:

$$\pi F^- = \pi(F - F^+) = \pi F \cdot \frac{3}{4} \tau_0. \quad (32,7)$$

Zwischen η und τ_0 besteht also die Beziehung:

$$\eta = \frac{\pi F^-}{\pi F^+} = \frac{\frac{3}{4} \tau_0}{1 + \frac{3}{4} \tau_0} \quad \text{oder} \quad \tau_0 = \frac{4}{3} \frac{\eta}{1 - \eta}. \quad (32,8)$$

Gl. (32,5) ergibt nun zusammen mit diesem Wert von τ_0 sofort die an der Sonnenoberfläche austretende Strahlungsintensität

$$I(\tau_0, \vartheta) = \frac{1}{2} F \left\{ \frac{1 + \eta}{1 - \eta} + \frac{3}{2} \cos \vartheta \right\} \quad (32,9)$$

und das Gesetz der Mitte-Rand-Verdunkelung wird

$$\frac{I(\tau_0, \vartheta)}{I(\tau_0, 0)} = \frac{1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1 - \eta}{1 + \eta} \cos \vartheta}{1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1 - \eta}{1 + \eta}}. \quad (32,10)$$

¹ Vgl. auch Gl. (30,36).

Nach den in Abschn. 14 schon besprochenen Messungen von MULDER'S [227] ist

$$\eta_{\text{Mulders}} = 0,083. \quad (32,11 a)$$

Da jedoch MILNE (s. S. 104) diese und die später zu besprechenden — zum Teil sehr komplizierten — Rechnungen mit dem innerhalb der Meßgenauigkeit damit übereinstimmenden Wert

$$\eta_{\text{Milne}} = 0,097 \quad (32,11 b)$$

($\tau_0 = 0,143$) durchgeführt hat, so werden wir im folgenden den letzteren benützen.

Die so berechnete Mitte-Rand-Verdunkelungskurve ist in Fig. 41 mit eingezeichnet. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung erscheint wesentlich besser als früher, besonders, wenn man berücksichtigt, daß an dieser I. Näherung noch eine Korrektion von ähnlicher Größenordnung anzubringen wäre wie an Gl. (27,11) (vgl. Fig. 41).

Im Hinblick auf die Theorie der äußersten Sonnenschichten wollen wir mit E. A. MILNE [517] den neuen Wert der *Grenztemperatur* T'_0 der Sonne berechnen. Analog zu (27,12) ist

$$\sigma T_0'^4 = \frac{\pi}{2} F \left(1 + \frac{3}{2} \tau_0 \right) = \frac{\sigma}{2} T_e^4 \frac{1 + \eta}{1 - \eta}, \quad (32,12)$$

oder $T'_0 = 5070^\circ$ verglichen mit $T_0 = 4830^\circ$. Berücksichtigung der II. Näherung der Ergiebigkeit würde T'_0 wieder etwas herabsetzen. Mit MILNE (s. oben) wenden wir uns nun der Berechnung des Mitte-Rand-Kontrastes für einzelne Wellenlängen und der Diskussion der spektralen Energieverteilung zu:

Nach (32,3 bzw. 4) erhalten wir analog zu (31,7) mit $\Delta = 0$

$$I_\lambda(\tau_0, \vartheta) = \frac{2 h c^2}{\lambda^5} \int_{v=0}^{\infty} \frac{e^{-v} dv}{e^{\lambda T_e \cdot 2^{-1/4}} \left(1 + \frac{3}{2} \tau_0 + \frac{3}{2} v \cos \vartheta \right)^{-1/4} - 1}. \quad (32,13)$$

Führen wir die Abkürzungen

$$\alpha' = \frac{c_2}{\lambda T'_0} = \frac{c_2}{\lambda T_e \cdot 2^{-1/4}} \left(1 + \frac{3}{2} \tau_0 \right)^{-1/4} \quad (32,14)$$

und ($\kappa_v/\bar{\kappa}$ setzen wir = 1)

$$p' = \frac{3}{2} \cos \vartheta \cdot \frac{T_e^4}{2 T_0'^4} = \frac{3}{2} \cos \vartheta \cdot \frac{1 - \eta}{1 + \eta} \quad (32,15)$$

ein, so wird

$$I_\lambda(\tau_0, \vartheta) = \frac{2 h c}{c_2^3} \cdot T_0'^5 \cdot \alpha'^5 \int_0^{\infty} \frac{e^{-v} dv}{e^{\alpha'(1+p'v)^{-1/4}} - 1} = \frac{2 h c}{c_2^3} \cdot T_0'^5 \cdot f(\alpha', p'). \quad (32,16)$$

Sowohl die Verkleinerung von p , wie die von α wirken im Sinne einer Verminderung des Mitte-Rand-Kontrastes. Die von MILNE [503, S. 149, Zeile 3 der Tabelle] nach dieser Formel mit $\eta = 0,097$ berechneten Randverdunkelungskurven vergleichen wir in Fig. 48, die sonst ganz unserer Fig. 46 nachgebildet ist, mit ABBOT'S Messungen (Tabelle 4). Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung ist nahezu eine vollständige. Berücksichtigung der II. Näherung würde, wie man leicht abschätzt, keine merklichen Änderungen geben, dagegen würde, wie auch bei der Randverdunkelungskurve für die Gesamtstrahlung, eine Verkleinerung von η — ganz im Sinne von MULDER'S Messungen — die Differenzen Ber.-Beob. noch etwas verringern.

Schließlich müssen wir Theorie und Beobachtung noch miteinander vergleichen hinsichtlich der *Energieverteilung im Spektrum der Sonnemitte* $I_\lambda(\tau_0, \vartheta)$,

in absolutem Maß gemessen. Verf. hat die Zahlenwerte von $I_\lambda(\tau_0, \vartheta)$ nach Gl. (32,16) mit Hilfe der MILNESchen Tafeln der $f(\alpha, \beta)$ -Funktion durch Interpolation berechnet und in Fig. 47 mit eingetragen. Die Übereinstimmung mit den Beobachtungen ist wesentlich besser als früher; nur die außerordentliche Steilheit des Maximums der beobachteten Energieverteilungskurve und ihr rapider Abfall bei λ 3700 werden noch nicht richtig dargestellt. Man muß sich jedoch beim Vergleich der Theorie mit den Beobachtungen darüber im klaren sein, daß auch die letzteren noch keineswegs als abgeschlossen betrachtet werden können (vgl. besonders Kap. II).

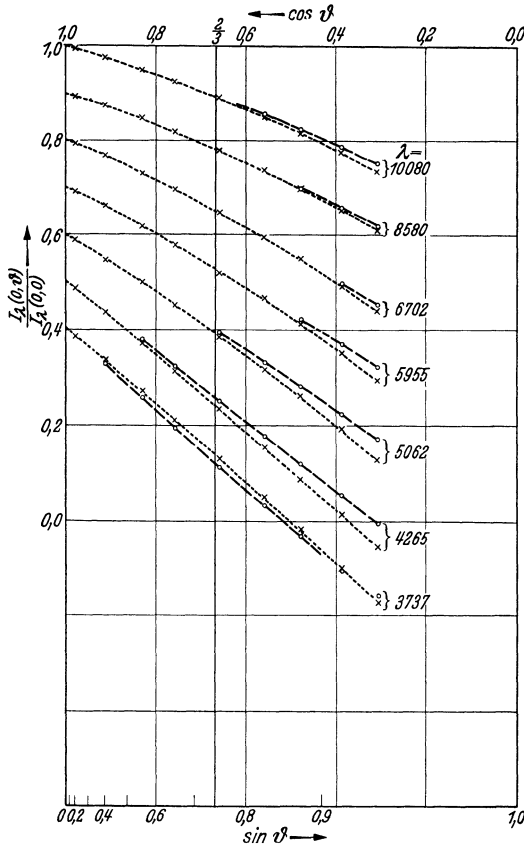


Fig. 48. Mitte-Rand-Kontrast der Sonne.
 x-----x-----x Beobachtungen von ABBO (Tabelle 4).
 o-----o-----o Theorie mit Berücksichtigung der Rückstrahlung der umkehrenden Schicht ($\eta = 0,097$) nach MILNE. $\kappa_v/\bar{\kappa} = 1$. (Die Kurve ist nur eingezeichnet, soweit sie von der x-----x-----x unterschieden werden kann.)

sein, daß auch die letzteren noch keineswegs als abgeschlossen betrachtet werden können (vgl. besonders Kap. II).

Im großen und ganzen darf man also wohl sagen, daß die MILNESche Theorie der „Glashauswirkung der umkehrenden Schicht“ in Verbindung mit der Annahme eines frequenzunabhängigen Absorptionskoeffizienten $\kappa_v = \bar{\kappa}$ eine befriedigende Darstellung der Sonnenbeobachtungen gibt.

Trotzdem müssen wir uns noch über zwei weitere Fragen Klarheit verschaffen:

1. Sind die den Rechnungen dieses Abschnittes zugrunde gelegten Modellvorstellungen über den Bau der Sonnenatmosphäre mit dem Verhalten der Mehrzahl der FRAUNHOFER-Linien verträglich? und

2. Inwieweit sind die mit den Messungen vergleichbaren Ergebnisse der MILNESchen Rechnungen von den speziellen Annahmen des beschriebenen Modelles abhängig bzw. unabhängig?

Die erste Frage können wir erst später im Zusammenhang mit der Theorie der FRAUNHOFER-Linien behandeln. Auf die zweite wollen wir dagegen jetzt schon eingehen und damit zugleich klarstellen, inwieweit unsere Erörterungen auch auf andere Sterne angewandt werden dürfen.

Betrachten wir einmal eine Sternatmosphäre, deren Absorptionslinien in denselben Schichten entstehen, wie das kontinuierliche Spektrum! Das starke Anwachsen des Absorptionskoeffizienten innerhalb der Linien gibt nur einen Beitrag zum $\bar{\kappa}$, d. h. das Vorhandensein der Linien bewirkt lediglich eine Verkleinerung von $\kappa_v/\bar{\kappa}$. Nun sahen wir aber, daß es nicht möglich ist, die Mitte-Rand-Verdunkelung für die spektral zerlegte Strahlung und die Energieverteilungskurve durch dasselbe $\kappa_v/\bar{\kappa}$ (vgl. Tabelle 24 und 26) darzustellen. Die Beobachtungen im kontinuierlichen Spektrum zeigen also, daß das letztere Modell auf die Mehrheit der FRAUNHOFER-Linien des Sonnenspektrums nicht so gut paßt, wie das zuerst behandelte. Man erkennt aber auch, daß auf anderen Sternen die Verhältnisse sehr wohl gerade umgekehrt liegen können.

Nehmen wir — als Idealfall — an, wir hätten vollständige und sehr genaue Messungen der Mitte-Rand-Verdunkelung der Sonne für alle Wellenlängen und außerdem die genaue Energieverteilung im Spektrum der Sonnenmitte in $\text{erg/cm}^2\text{sek}$. Welche Schlüsse könnten wir aus diesen Messungen ziehen?

Da wir am *Sonnenrand* tangential in die Sonnenatmosphäre hereinschauen, so bekommen wir nur Strahlung aus der obersten Schicht, d. h. die Strahlungsintensität ist gleich der Ergiebigkeit für $\tau_\nu = 0$, d. h. $J_\nu(0)$. Herrscht lokales thermodynamisches Gleichgewicht, so muß $J_\nu(0)$ gleich der KIRCHHOFF-PLANCKSchen Funktion für die — also empirisch bestimmbare — Grenztemperatur T_0 sein. Die Mitte-Rand-Verdunkelung gibt nach Gl. (28,12) die Abhängigkeit der Ergiebigkeit J von τ_ν für alle Frequenzen; man kann also den ganzen Verlauf der Funktion $J_\nu(\tau_\nu)$ und — nach (28,14) — auch den Strahlungsstrom $\pi F_\nu(\tau_\nu)$ für alle ν ermitteln.

Andererseits fordert die Theorie des Strahlungsgleichgewichtes die Unabhängigkeit des *Gesamtstrahlungsstromes* $\pi F = \int \pi F_\nu(\tau_\nu) d\nu$ von der optischen Tiefe τ für den mittleren Absorptionskoeffizienten $\bar{\kappa}$. Schreiben wir τ_ν als Funktion von ν und τ in der Form $\varphi(\nu, \tau)$, so soll also gelten:

$$\int F_\nu \{ \varphi(\nu, \tau) \} d\nu = F = \text{konst.} \quad \text{für } 0 < \tau < \infty. \quad (32,17)$$

Durch diese Integralgleichung ist aber, wie man sich leicht klar macht, die Funktion $\varphi(\nu, \tau)$ noch nicht vollständig bestimmt. Das heißt, wenn man *nur* die Annahme macht, daß eine Sternatmosphäre sich im Strahlungsgleichgewicht befindet, ist es mit Hilfe der vorausgesetzten Beobachtungen *nicht* möglich, die Abhängigkeit des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten von der Wellenlänge *und* der optischen Tiefe τ zu berechnen. Es wäre eine interessante Aufgabe, zu untersuchen, unter welchen einschränkenden Bedingungen unser Problem eine eindeutige Lösung zuläßt. Auch die Frage, inwieweit die in diesem Abschnitt gezogenen Schlüsse zwingend sind, bedarf also wohl noch einer endgültigen Klärung^{1, 2}.

VI. Kapitel.

Kontinuierlicher Absorptionskoeffizient und Energieverteilung in den kontinuierlichen Spektren der Sterne.

33. Der ROSSELANDSche Mittelwert $\bar{\kappa}$ (Opazitätskoeffizient) des Absorptionskoeffizienten κ_ν .

Vor allem müssen wir nun untersuchen, in welcher Weise aus dem Absorptionskoeffizienten κ_ν , dessen Abhängigkeit von ν wir als bekannt voraussetzen, der schon im vorhergehenden benützte Mittelwert $\bar{\kappa}$ zu bilden ist. $\bar{\kappa}$ soll so beschaffen sein, daß es die Strömung der *Gesamtstrahlung* durch die Sternatmosphäre in richtiger Weise regelt.

Vergleichen wir also die Grundgleichungen des Strahlungsgleichgewichtes für die Strahlung I_ν der einzelnen Frequenzen ν einerseits und die Gesamtstrahlung I andererseits:

¹ Hierzu vgl. auch P. TEN BRUGGENCATE [507].

² Anm. b. d. Korr.: Hierzu noch S. CHANDRASEKHAR M. N. **96**, 21 (1935) und E. HOPF, M. N. **96**, 522 (1936).

$$\begin{array}{l|l} \nu\text{-Strahlung:} & \text{Gesamtstrahlung:} \\ \cos \vartheta \frac{dI_\nu}{\kappa_\nu dt} = I_\nu - J'_\nu & \cos \vartheta \frac{dI}{\bar{\kappa} dt} = I - J. \end{array} \quad (33,1 \text{ a u. b})$$

Führen wir nach EDDINGTON (29,11 f.) wieder die Mittelwerte

$$\left. \begin{array}{l} J_\nu = \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi}, \\ H_\nu = \int I_\nu \cos \vartheta \frac{d\omega}{4\pi}, \\ K_\nu = \int I_\nu \cos^2 \vartheta \frac{d\omega}{4\pi} \end{array} \right\} \begin{array}{l} J = \int I \frac{d\omega}{4\pi}, \\ H = \int I \cos \vartheta \frac{d\omega}{4\pi}, \\ K = \int I \cos^2 \vartheta \frac{d\omega}{4\pi} \end{array} \quad (33,2 \text{ a u. b})$$

ein, so erhalten wir aus (33,1) zunächst durch Mittelbildung die *streng* gültigen Gleichungen:

$$\frac{dH_\nu}{\kappa_\nu dt} = J_\nu - J'_\nu \quad \left| \quad \frac{dH}{\bar{\kappa} dt} = 0 \quad (\text{wegen der Kontinuitätsgleichung}) \quad (33,3 \text{ a u. b})$$

$$\frac{dK_\nu}{\kappa_\nu dt} = H_\nu \quad \left| \quad \frac{dK}{\bar{\kappa} dt} = H, \quad (33,4 \text{ a u. b})$$

wobei näherungsweise wieder gilt:

$$K_\nu = \frac{1}{3} J_\nu \quad \left| \quad K = \frac{1}{3} J. \quad (33,5 \text{ a u. b})$$

Wir werden nun $\bar{\kappa}$ am günstigsten so „einrichten“, daß das linke und rechte Gleichungssystem denselben *Gesamtstrahlungsstrom* ergeben, d. h. wir fordern

$$\int H_\nu d\nu = H. \quad (33,6)$$

Nach (33,4 u. 5) folgt daraus:

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} \frac{dJ}{dt} = \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{dJ_\nu}{dt} d\nu. \quad (33,7)$$

Diese Art der Mittelbildung wurde zuerst von S. ROSSELAND [623] gefunden; nach EDDINGTON bezeichnen wir $\bar{\kappa}$ kurz als den *Opazitätskoeffizienten*, in Gegensatz zum *Absorptionskoeffizienten* κ_ν . Die anschauliche Bedeutung von (33,7) bedarf nach dem vorhergehenden kaum einer Erläuterung: $1/\bar{\kappa}$ ist der Mittelwert über die *Durchlässigkeit* $1/\kappa_\nu$ für die einzelnen Spektralbereiche, wobei als *Gewichtsfaktor* der in dem betreffenden Frequenzbereich fließende *Strahlungsstrom* fungiert. Wird z. B. in dem kleinen Frequenzbereich einer Spektrallinie κ_ν sehr groß, so fällt dieser Bereich in dem Integral (33,7) einfach aus; $\bar{\kappa}$ wird entsprechend der Ausdehnung des „blockierten“ ν -Bereiches vergrößert.

Neben (33,6) müßte streng genommen auch noch — wegen der Kontinuitätsgleichung —

$$\int_0^\infty (J_\nu - J'_\nu) d\nu = 0 \quad (33,8)$$

sein.

Diese Gleichung wird durch den ROSSELANDSchen Ansatz (33,7) nur in dem trivialen Falle $\kappa_\nu = \bar{\kappa} = \text{konst.}$ befriedigt. Sonst ist es nicht möglich, beide Bedingungen gleichzeitig zu erfüllen. Man erkennt daraus, daß die Mittelbildung (33,7) nur sinnvoll ist, solange die Schwankungen von κ_ν nicht *allzu* groß sind. (In praxi braucht man aber meist nicht ängstlich zu sein.)

Da man $\bar{\kappa}$ aber schon zur Berechnung des Strahlungsfeldes braucht, so ist es zweckmäßig, für den Gewichtsfaktor in (33,7) einen allgemein verwendbaren Näherungsausdruck zu haben. Wir setzen J_ν einfach gleich der Intensität der

Hohlraumstrahlung für die in der Tiefe t herrschende Temperatur T . Statt nach t kann man nun in (33,7) ebensogut rechts und links nach T differenzieren. Man hat:

$$J_\nu = \frac{2 h \nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad \text{und} \quad \frac{dJ_\nu}{dT} = \frac{2 h \nu^3}{c^2} \cdot \frac{\frac{h\nu}{kT^2} \cdot e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^2} \quad (33,9)$$

und nach dem STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetz (7,32 u. 33):

$$J = \frac{2 \pi^4 k^4}{15 c^2 h^3} \cdot T^4 \quad \text{und} \quad \frac{dJ}{dT} = \frac{8 \pi^4 k^4}{15 c^2 h^3} \cdot T^3. \quad (33,10)$$

Setzt man wieder $\frac{h\nu}{kT} = \alpha$ und schreibt (33,7) kurz in der Form

$$1/\bar{\kappa} = \int_0^\infty 1/\kappa_\nu \cdot G(\alpha) d\alpha, \quad (33,11)$$

so wird der Gewichtsfaktor $G(\alpha) = \frac{kT}{h} \cdot \frac{dJ_\nu/dT}{dJ/dT}$

$$G(\alpha) = \frac{15}{4 \pi^4} \cdot \frac{\alpha^4 e^\alpha}{(e^\alpha - 1)^2}. \quad (33,12)$$

Die Grundgleichungen der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes gelten in der im vorhergehenden stets benützten Form nur dann, wenn die Richtungsverteilung der reemittierten Strahlung unabhängig ist von der der absorbierten Strahlung.

Wie A. EINSTEIN 1917 in seiner grundlegenden Arbeit¹ „Zur Quantentheorie der Strahlung“ zeigte, muß man — um auf die PLANCKsche Formel zu kommen — zwei Arten von Emissionsprozessen annehmen: 1. Die „spontanen Emissionsprozesse“, bei denen z. B. ein Atom von selbst unter Emission eines Lichtquantens $h\nu$ aus einem höheren in einen tieferen Quantenzustand übergeht und 2. die entsprechenden „erzwungenen Emissionsprozesse“, deren Häufigkeit *cet. par.* der Strahlungsdichte bei der Frequenz ν proportional ist². Weiterhin zeigt sich, daß das bei einem erzwungenen Emissionsprozeß ausgesandte Lichtquant genau die Richtung des „stimulierenden“ Quantes bekommt. Das heißt der „erzwungene“ Anteil der Emission hat genau die Richtungsverteilung der ankommenden Strahlung und ist daher für die Ausgleichung der Richtungsverteilung im Sinne der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes unwirksam.

Diesem Umstand können wir in einfacher Weise dadurch Rechnung tragen, daß wir von vornherein mit einem um den Bruchteil $\frac{\text{Erzwungene Emission}}{\text{Gesamtemission}}$ verkleinerten Absorptionskoeffizienten κ'_ν in der altgewohnten Weise rechnen.

Da nach EINSTEIN das obige Verhältnis im thermischen Gleichgewicht $= e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ ist, so wird mit hinreichender Genauigkeit:

$$\kappa'_\nu = \kappa_\nu \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) \quad (33,13)$$

und entsprechend

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} = \int_0^\infty \frac{1}{\kappa'_\nu} \cdot G(\alpha) d\alpha. \quad (33,14)$$

¹ Wir werden in Kap. IX auf diese Fragen noch ausführlicher zurückkommen.

² In der klassischen Theorie (RAYLEIGH-JEANS-Formel!) gibt es nur die zu 2. analogen Prozesse. Sie kommen zustande durch die Ausstrahlung der vom elektromagnetischen Feld der Hohlraumstrahlung zum Mitschwingen angeregten Elektronenresonatoren der Frequenz ν .

Diese Korrektur ist nur von Bedeutung im RAYLEIGH-JEANSschen Gebiet $\frac{h\nu}{kT} < 1$, also z. B. auf der Sonne für $\lambda > 20000 \text{ \AA}$. In vielen Fällen kann man sie daher im visuellen und photographischen Spektralgebiet vernachlässigen.

34. Theorie des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten. Streuung an freien Elektronen.

Die kontinuierlichen Spektren der Sterne entstehen — vom Standpunkt der BOHRschen Theorie aus gesehen — einerseits durch Übergänge zwischen zwei hyperbolischen Bahnen des Elektrons im Feld des Atomkernes bzw. Atomrumpfes und andererseits durch Übergänge zwischen einer hyperbolischen und einer elliptischen Bahn. Die mit diesen Prozessen verbundene Absorption und Emission von Strahlung ist zuerst mit Hilfe des BOHRschen Korrespondenzprinzipes von H. A. KRAMERS [611] berechnet worden.

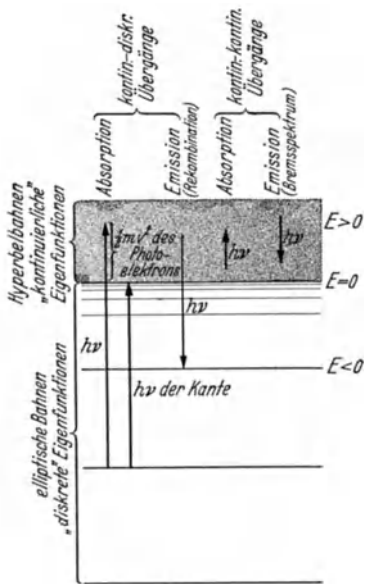


Fig. 49. Kontinuierliche Spektren.

Wie es in der Natur des Korrespondenzprinzipes begründet liegt, konnte man so keine wirkliche zwingende Behandlung des Problems durchführen und es bedeutete daher einen großen Fortschritt, als es möglich wurde, die neue Quantenmechanik auf die Theorie der kontinuierlichen Spektren anzuwenden. Im Sinne der Quantenmechanik entsprechen den BOHRschen *Hyperbelbahnen* Eigenfunktionen mit positiver Energie ($E > 0$), deren Betrag alle Werte $0 < E < \infty$ annehmen kann. Man spricht daher von *kontinuierlichen Eigenfunktionen*. E ist — anschaulich betrachtet — nichts anderes, als die kinetische Energie des freien Elektrons. Den *elliptischen* Bahnen der BOHRschen Theorie entsprechen solche Eigenfunktionen, deren *negative* Energie nur diskreter, gequantelter Werte fähig ist. Wir bezeichnen sie kurz als *diskrete Eigenfunktionen*.

Die *hyperbolisch-hyperbolischen* Übergänge nennen wir dementsprechend auch kontinuierlich-kontinuierliche oder kurzweg „kontinuierliche“ Übergänge.

In entsprechender Weise sind die hyperbolisch-elliptischen Übergänge als kontinuierlich-diskrete oder kurz „diskrete“ Übergänge zu bezeichnen.

Beide Prozesse sind aus dem Röntgengebiet seit langem bekannt. Die ersteren geben in Emission das sog. *Röntgen-Bremmspektrum*. Seine Intensität steigt von der *kurzwelligigen Grenze* (vollständige Umsetzung der kinetischen Energie $\frac{1}{2}mv^2$ des gebremsten Elektrons in ein Quant; EINSTEINs photoelektrische Gleichung!) zu einem Maximum an, um nach langen Wellen wieder abzunehmen.

Die Übergänge von diskreten in kontinuierliche Zustände geben im Röntgengebiet die bekannten *Absorptionskanten*. Die Absorption setzt plötzlich ein bei Frequenzen, deren $h\nu$ ausreicht, um das Elektron aus seiner stabilen Bahn loszulösen, d. h. in eine (Parabel-) Bahn mit $E = 0$ zu heben. Von dieser Grenze aus nimmt der Absorptionskoeffizient gewöhnlich nach langen Wellen zu ab. Bei jedem Absorptionsprozeß entsteht ein Photoelektron der kinetischen Energie $h\nu - \text{Ablösungsarbeit}$.

Der inverse Emissionsprozeß besteht im Einfangen (Rekombination) eines Elektrons mit $E > 0$ in einen diskreten Zustand ($E < 0$) unter Ausstrahlung der Energiedifferenz $h\nu$. Im Röntgengebiet sind diese Emissionsprozesse, da der untere Quantenzustand schon besetzt ist, durch das PAULI-Prinzip verboten. Im Gebiet längerer Wellen, wo die entsprechenden Zustände nur selten besetzt sind, spielen diese „Seriengrenzkontinua“ eine wichtige Rolle. Auf experimentelle Untersuchungen im sichtbaren und U.V.-Spektralgebiet werden wir im nächsten Abschnitt noch ausführlich zu sprechen kommen.

Eine quantentheoretische Berechnung der Absorptionskoeffizienten ist nur möglich, wenn man bestimmte Annahmen über das Feld des Atomkernes bzw. Atomrumpfes macht. Bis jetzt ist nur der einfachste Fall eines COULOMB-Feldes vollständig durchgerechnet. Beschränkt man sich — was für alle astrophysikalischen Zwecke vollkommen ausreicht — auf Übergänge, die nach kontinuierlichen Zuständen hinreichend kleiner Energie führen, so kommt man, wie die quantenmechanischen Berechnungen von GAUNT [607], SUGIURA [627], MAUE [612] u. a. gezeigt haben, auf die einfachen Formeln der KRAMERSschen Korrespondenzbetrachtungen zurück. Diese Formeln gelten — mit einem maximalen Fehler von $\sim 15\%$ — für Wasserstoff (der ja ohnedies in der Astrophysik von besonderer Bedeutung ist) und wasserstoffartige Atomzustände (Kernladungszahl Z), also insbesondere für die Absorption von genügend hoch angeregten Quantenzuständen der Metallatome.

In Ermangelung eines Besseren werden wir dieselben Formeln dann auch auf die gesamte Absorption der Metallatome usw. anwenden. Sowohl die genauere quantenmechanische Durchrechnung einzelner Spezialfälle wie auch die astrophysikalische Erfahrung werden zeigen, daß diese Extrapolation ziemlich unbefriedigend ist.

Zunächst wollen wir nun die Theorie für *Wasserstoff* ($Z = 1$) so genau durchrechnen, wie dies für unsere Zwecke sinnvoll erscheint¹:

Der „kontinuierlich-kontinuierliche“ Absorptionskoeffizient ist, bezogen auf 1 Wasserstoffkern und 1 absorbierendes Elektron der Geschwindigkeit v pro cm^3 :

$$a = \frac{4\pi Z^2 \cdot e^6}{3\sqrt{3} \cdot h c \cdot m^2 v} \cdot \frac{1}{\nu^3}, \quad (34,1)$$

wobei e und m die Ladung und Masse des Elektrons, h und c die bekannten Konstanten und ν die Frequenz (sek^{-1}) des absorbierten Quantes bedeuten.

In entsprechender Weise wird der „diskret-kontinuierliche“ Absorptionskoeffizient pro Atom im n -ten Quantenzustand der Energie

$$E_n = h\nu_n = R h c \cdot \frac{Z^2}{n^2} \quad (34,2)$$

($R = 109678 \text{ cm}^{-1}$):

$$a_n = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{64\pi^4}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{Z^4 m e^{10}}{c \cdot h^6 \cdot n^3} \cdot \frac{1}{\nu^3} \quad (34,3)$$

oder

$$a_n = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{16\pi^2 Z^2 \cdot e^6}{3\sqrt{3} \cdot h^3 c} \cdot \frac{1}{\nu^3} \cdot \Delta\nu, \quad (34,4)$$

wo

$$\Delta\nu = \frac{4\pi^2 m e^4 Z^2}{h^3 \cdot n^3} = 2 R c \cdot \frac{Z^2}{n^3} \quad (34,5)$$

den Frequenzabstand zweier benachbarter Quantenzustände n und $n \pm 1$ für große n darstellt.

¹ Mehrere Autoren haben sich große Mühe damit gemacht, z. B. die kleinen Korrekturen, welche die Quantenmechanik zu den sogleich anzuschreibenden Formeln von KRAMERS gibt, noch mitzuberücksichtigen. Eine solche Rechengenauigkeit ist jedoch sinnlos, da es sicher noch viele Jahrzehnte dauern wird, bis die übrigen astrophysikalischen Daten, die in die weiteren Rechnungen eingehen, mit entsprechender Genauigkeit gemessen sein werden.

Der Zusammenhang zwischen den — scheinbar ganz verschiedenen — Gl. (34,1) und (34,4) wird sofort klar, wenn wir zur Beschreibung der Quantenzustände beidmal den *Phasenraum* zu Hilfe nehmen. $h \Delta v$ ist ja nach den Grundprinzipien der Quantentheorie (Abschn. 7 und 21) die Energiedifferenz zweier Quantenzellen.

Andererseits ist der Geschwindigkeitsbereich Δv für ein freies Elektron pro cm^3 , der *einer* Quantenzelle h^3 entspricht, bestimmt durch¹

$$4\pi (m v)^2 \Delta m v = h^3. \quad (34,6)$$

Nach der EINSTEINSCHEN lichtelektrischen Gleichung ist $h\nu = \frac{m}{2} v^2 + \text{konst.}$ also $h \Delta v = m v \cdot \Delta v$. Mit (34,6) ergibt sich so

$$\Delta v = \frac{h^2}{4\pi m^2 v}. \quad (34,7)$$

Setzt man diesen Ausdruck in (34,4) ein², so ergibt sich gerade (34,1), d. h. für Übergänge zwischen Zuständen kleiner Energie gehen diese beiden Ausdrücke stetig ineinander über. Im Bilde des BOHRschen Korrespondenzprinzipes erscheint dies fast selbstverständlich, da ja die Folge: Langgestreckte Ellipse \rightarrow Parabel \rightarrow Hyperbel durchaus stetig ist.

In gleicher Weise führt — worauf nur kurz hingewiesen werden soll — eine stetige Verbindung von den diskret-diskreten Übergängen zwischen einem tieferen Term und höheren Termen kleiner negativer Energie (hohe Serienglieder) nach den entsprechenden Übergängen zu Zuständen kleiner positiver Energie (Seriengrenzkontinuum!). Sind die Linien in der Nähe der Seriengrenze z. B. durch Druckeffekt hinreichend verbreitert, so geht ihre „verschmierte“ Intensität pro cm^{-1} stetig über in die des Kontinuums, wie Theorie und Beobachtung übereinstimmend zeigen.

Um den Absorptionskoeffizienten κ_ν für die Frequenz ν zu erhalten, müssen wir zunächst die Beiträge (34,3) aller Absorptionskanten aufsummieren, deren Kantenfrequenz ν_n [Gl. (34,2)] *kleiner* als ν ist (vgl. Fig. 49). Die Zahl der Atome im n -ten Quantenzustand wird, pro Atom im Grundzustand (praktisch genommen pro Atom) gerechnet, bei der Temperatur T nach der BOLTZMANNschen Formel:

$$n^2 e^{-(u_1 - u_n)}, \quad \text{wo} \quad u_n = \frac{R h c / n^2}{k T} \quad (34,8)$$

da das statistische Gewicht des n -ten Wasserstoffzustandes gleich $2n^2$, relativ zum Grundzustand also n^2 ist. Man erhält so den kontinuierlich — diskreten Anteil von κ_ν pro g neutraler Wasserstoffatome ($m_H = \text{Masse des H-Atoms}$):

$$\kappa_\nu = \frac{64 \pi^4}{3 \sqrt{3}} \cdot \frac{m \cdot e^{10}}{c \cdot h^6 \cdot m_H} \cdot \frac{1}{\nu^3} \sum_{\substack{h\nu \\ kT > u_n}} \frac{1}{n^3} e^{-(u_1 - u_n)}. \quad (34,9)$$

Unter den in Sternatmosphären herrschenden Verhältnissen ($T < 50000^\circ$) rührt der überwiegende Teil des Absorptionskoeffizienten κ_ν im zugänglichen Spektralgebiet und der Hauptbeitrag zum ROSSELANDschen Mittelwert her von den Seriengrenzkontinua der 4 untersten Wasserstoffterme ($n = 1, 2, 3, 4$, d. h. LYMAN-, BALMER-, PASCHEN-, BRACKETT-Kontinuum). Wir werden dementsprechend die Summe in (34,9) bis $n = 4$ Glied für Glied ausrechnen und den Rest durch ein Integral approximieren, indem wir das Summationsintervall $\Delta n = 1$ als $\ll n$ betrachten:

$$\sum_{n=5} \frac{\Delta n}{n^3} e^{-(u_1 - u_n)} \rightarrow -\frac{1}{2} \int_{n=5} e^{-(u_1 - u_n)} d\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{e^{-u_1}}{2 u_1} \int_{u=u_5} e^{u_n} du_n. \quad (34,10)$$

¹ Volum im Lagerraum (1 cm^3) \times Volum im Impulsraum (Kugelschale vom Radius $m v$ und der Dicke $\Delta m v$) = PLANCKSches Wirkungsquantum h .

² In (34,4) ist der Absorptionskoeffizient pro Quantenzelle = $a_n \cdot n^2!$

Wir haben dabei von dem Umstand Gebrauch gemacht, daß nach (34,8) $u_n = u_1/n^2$ ist. Um über alle diskret-kontinuierlichen Übergänge zu summieren, muß die Integration von u_5 bis 0 erstreckt werden.

Nach unseren vorhergehenden Untersuchungen über den stetigen Zusammenhang von kontinuierlich-diskreten und kontinuierlich-kontinuierlichen Übergängen können wir den kleinen Beitrag der letzteren zu κ_ν nun leicht berücksichtigen, indem wir die Integration in (34,10) auch auf die Zustände positiver Energie bis $u_n \rightarrow -\infty$ ausdehnen. Die Summe (34,10) geht damit über in

$$\frac{e^{-(u_1 - u_s)}}{2 u_1}. \quad (34,11)$$

Schreiben wir noch¹ — der Symmetrie wegen — $u = \frac{h\nu}{kT}$, so wird der gesamte Absorptionskoeffizient pro g neutralen Wasserstoff:

$$\kappa_\nu = \frac{64 \pi^4}{3 \sqrt{3}} \cdot \frac{m \cdot e^{10}}{c \cdot h^3 \cdot m_H \cdot h^3} \cdot \frac{e^{-u_1}}{T^3} \cdot \frac{1}{u^3} \left\{ \sum_{u_1 < u}^{u_4} \frac{e^{u_n}}{n^3} + \frac{e^{u_s}}{2 u_1} \right\}. \quad (34,12)$$

Nunmehr bilden wir sogleich den ROSSELANDSchen Mittelwert $\bar{\kappa}$, und zwar mit Rücksicht auf die erzwungenen Übergänge nach (33,13) über

$$\kappa'_\nu = \kappa_\nu (1 - e^{-u}). \quad (34,13)$$

Den Faktor $(1 - e^{-u})$ können wir statt dessen auch dem ROSSELANDSchen Gewichtsfaktor $G(u)$ angliedern und schreiben dementsprechend

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} = \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} G'(u) du \quad \text{mit} \quad G'(u) = \frac{15}{4 \pi^4} \cdot \frac{u^4 \cdot e^{-u}}{(1 - e^{-u})^3}. \quad (34,14)$$

Zwischen je zwei Absorptionskanten (z. B. $n = 2$ bis 3, d. h. λ 3647 bis λ 8206) ist nun κ_ν nach (34,12) proportional u^{-3} (und daher $\sim \lambda^3$). Man kann daher — wie B. STRÖMGREN [626] zuerst bemerkt hat — die Berechnung des Opazitätskoeffizienten $\bar{\kappa}$ beträchtlich erleichtern, indem man die Funktion

$$\varphi(u) = \frac{15}{4 \pi^4} \int_0^u \frac{u'^2 e^{-u'}}{(1 - e^{-u'})^3} du' \quad (34,15)$$

ein für allemal tabuliert (Tabelle 27). Schreibt man zwischen zwei Kanten, d. h. für $u_n \leq u \leq u_{n-1}$

$$\kappa_\nu = D_n \cdot u^{-3},$$

so gibt dieser Bereich zu $1/\bar{\kappa}$ den Beitrag

$$\frac{1}{D_n} \{ \varphi(u_{n-1}) - \varphi(u_n) \}. \quad (34,16)$$

Am langwelligen Ende des Spektrums, d. h. für $u < u_4$ hätten wir gemäß (34,10) die $\{ \}$ in (32,12) gleich $\frac{e^{u_n}}{2 u_1}$ zu setzen. Da dieser Beitrag sehr klein ist, genügt es aber bei der Berechnung des ROSSELAND-Mittels mit dem unteren Grenzwert $\frac{e^{u_s}}{2 u_1}$ nach (34,16) von $n = 5$ bis ∞ zu integrieren.

Die numerischen Rechnungen — nach A. UNSÖLD [628] — sind in Tabelle 28 zusammengestellt. Als Argument wählen wir mit Rücksicht auf spätere Ionisationsrechnungen (vgl. Kap. IV) die Größe $\Theta = 5040/T$. Die nächsten Zeilen geben die entsprechende Temperatur T selbst und den \log_{10} des in Gl. (34,12) vor $1/u^3$ stehenden Faktors F — wie wir ihn kurz bezeichnen wollen. Dann

¹ Entsprechend dem α des vorhergehenden Kapitels.

Tabelle 27. Die Funktion $\varphi(u) = \frac{15}{4\pi^4} \int_0^u \frac{u^7 e^{-u}}{(1-e^{-u})^3} du$ nach B. STRÖMGREN [626].

u	$\varphi(u)$	u	$\varphi(u)$	u	$\varphi(u)$	u	$\varphi(u)$			
0,0	0,00	3,2	4,15	64	6,3	60,2	28	9,4	142,3	21
1	0,00	3	4,79	72	4	63,0	29	5	144,4	20
2	0,00	4	5,51	78	5	65,9	28	6	146,4	19
3	0,00	5	6,29	86	6	68,7	29	7	148,3	19
4	0,00	6	7,15	93	7	71,6	29	8	150,2	18
5	0,00	7	8,08	101	8	74,5	29	9	152,0	18
6	0,00	8	9,09	110	9	77,4	29	10,0	153,8	17
7	0,00	9	10,19	118	7,0	80,3	29	1	155,5	17
8	0,00	4,0	11,37	126	1	83,2	29	2	157,2	16
9	0,01	1	12,63	135	2	86,1	29	3	158,8	16
1,0	0,01	2	13,98	144	3	89,0	28	4	160,3	15
1	0,02	3	15,42	152	4	91,8	28	5	161,9	16
2	0,03	1	16,94	161	5	94,7	28	6	163,3	15
3	0,04	1	18,55	169	6	97,5	28	7	164,8	15
4	0,06	2	20,24	178	7	100,3	28	8	166,1	13
5	0,09	3	22,02	187	8	103,1	28	9	167,5	14
6	0,13	4	23,89	195	9	105,9	28	11,0	168,7	12
7	0,17	4	25,84	202	8,0	108,6	27	1	170,0	13
8	0,23	6	27,86	21	1	111,3	27	2	171,2	12
9	0,31	8	30,0	22	2	114,0	27	3	172,3	11
2,0	0,40	9	32,2	22	3	116,6	26	4	173,4	11
1	0,51	11	34,4	23	4	119,1	26	5	174,5	11
2	0,65	14	36,7	24	5	121,7	25	6	175,5	10
3	0,82	17	39,1	25	6	124,2	24	7	176,5	10
4	1,01	19	41,6	26	7	126,6	24	8	177,4	9
5	1,25	24	44,1	26	8	129,0	24	9	178,3	9
6	1,51	26	46,7	27	9	131,4	23	12,0	179,1	8
7	1,83	32	49,3	27	9,0	133,7	22	13	186,0	
8	2,18	35	52,0	27	1	135,9	22	14	190,4	
9	2,59	41	54,7	27	2	138,1	21	15	193,0	
3,0	3,05	46	57,4	28	3	140,2	21	16	194,6	
1	3,57	52	60,2		4	142,3	21	∞	196,5	
2	4,15	58								

folgen die Beiträge e^{u_n}/u^3 ($n = 1, \dots, 4$) der wichtigsten Absorptionskanten zu der $\{\}$ in Gl. (34,12) für κ_v , sowie der entsprechende Anteil der Kanten $n > 4$ und der kontinuierlich-kontinuierlichen Übergänge. Unter den zuerst genannten Zahlen sind noch die Werte der $\{\}$ selbst angegeben. (Die bei $n = 3$ angeschriebene Zahl z. B. bezieht sich auf den Bereich $u_2 \cong u \cong u_3$ bzw. das Wellenlängengebiet λ 3647 bis 8206.)

Die folgenden Zeilen geben für einige Wellenlängen die \log_{10} von

$$\kappa'_v = \kappa_v (1 - e^{-u}) = F \cdot \{\dots\} \frac{1 - e^{-u}}{u^3}. \tag{34,17}$$

Für die BALMER-Grenze λ 3647 und die PASCHEN-Grenze λ 8206 sind die κ'_v -Werte für die kurz- und langwellige Seite angegeben. Wir werden sie später benutzen, um den Intensitätssprung in den Spektren früher Spektraltypen bei diesen Wellenlängen zu berechnen.

Der nächste Abschnitt unserer Tabelle gibt die Berechnung von $\bar{\kappa}$. Zuerst sind nach (34,16) die Beiträge der Wellenlängengebiete zwischen je zwei Kanten zu $1/\bar{\kappa}$ und dann ihre Summe angegeben — beide noch ohne den Faktor $1/F$. Die letzte Zeile endlich gibt den Opazitätskoeffizienten $\bar{\kappa}$ selbst. An Hand der einzelnen Teilbeiträge kann man leicht übersehen, welchen Anteil die links angeschriebenen Wellenlängenbereiche zur „Gesamtdurchlässigkeit“ $1/\bar{\kappa}$ einer

Tabelle 28. Berechnung von κ'_p und $\bar{\kappa}$ pro Gramm neutralen Wasserstoffes.

$\theta = \frac{5040}{T}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
T :	50400	25200	16800	12600	10080	8400	7200	6300
$\log_{10} F$:	6,81	6,35	5,53	4,55	3,49	2,37	1,22	0,04
$n = 1$	$2,24 \cdot 10^1$	$5,13 \cdot 10^2$	$1,15 \cdot 10^4$	$2,63 \cdot 10^5$	$5,89 \cdot 10^6$	$1,32 \cdot 10^8$	$3,02 \cdot 10^9$	$6,76 \cdot 10^{10}$
$n = 2$	$2,29 \cdot 10^1$	$5,14 \cdot 10^2$	$1,15 \cdot 10^4$	$2,63 \cdot 10^5$	$5,89 \cdot 10^6$	$1,32 \cdot 10^8$	$3,02 \cdot 10^9$	$6,76 \cdot 10^{10}$
$n = 3$	$2,74 \cdot 10^{-1}$	$5,99 \cdot 10^{-1}$	1,27	2,80	6,12	$1,34 \cdot 10^1$	$2,92 \cdot 10^1$	$6,26 \cdot 10^1$
$n = 4$	$5,26 \cdot 10^{-1}$	$7,99 \cdot 10^{-1}$	1,48	3,05	6,43	$1,38 \cdot 10^1$	$2,97 \cdot 10^1$	$6,33 \cdot 10^1$
$n = 5$	$5,22 \cdot 10^{-2}$	$7,40 \cdot 10^{-2}$	$1,04 \cdot 10^{-1}$	$1,47 \cdot 10^{-1}$	$2,08 \cdot 10^{-1}$	$2,94 \cdot 10^{-1}$	$4,14 \cdot 10^{-1}$	$5,85 \cdot 10^{-1}$
$n = 6$	$2,52 \cdot 10^{-1}$	$2,00 \cdot 10^{-1}$	$2,09 \cdot 10^{-1}$	$2,48 \cdot 10^{-1}$	$3,09 \cdot 10^{-1}$	$4,00 \cdot 10^{-1}$	$5,31 \cdot 10^{-1}$	$7,13 \cdot 10^{-1}$
$n = 7$	$1,90 \cdot 10^{-2}$	$2,31 \cdot 10^{-2}$	$2,78 \cdot 10^{-2}$	$3,42 \cdot 10^{-2}$	$4,10 \cdot 10^{-2}$	$5,05 \cdot 10^{-2}$	$6,21 \cdot 10^{-2}$	$7,47 \cdot 10^{-2}$
$n = 8$	$2,00 \cdot 10^{-1}$	$1,26 \cdot 10^{-1}$	$1,05 \cdot 10^{-1}$	$1,01 \cdot 10^{-1}$	$1,01 \cdot 10^{-1}$	$1,06 \cdot 10^{-1}$	$1,17 \cdot 10^{-1}$	$1,28 \cdot 10^{-1}$
$n = 9$	$1,81 \cdot 10^{-1}$	$1,03 \cdot 10^{-1}$	$7,74 \cdot 10^{-2}$	$6,65 \cdot 10^{-2}$	$5,96 \cdot 10^{-2}$	$5,58 \cdot 10^{-2}$	$5,50 \cdot 10^{-2}$	$5,38 \cdot 10^{-2}$
$n = 10$	6,39	5,35	4,31	3,29	2,27	1,24	0,23	-0,80
$n = 11$	6,59	5,57	4,55	3,53	2,51	1,50	0,48	-0,54
$n = 12$	6,27	4,97	3,70	2,44	1,19	-0,04	-1,27	-2,49
$n = 13$	6,36	5,07	3,81	2,55	1,31	0,08	-1,15	-2,37
$n = 14$	6,58	5,32	4,07	2,82	1,59	0,36	-0,87	-2,09
$n = 15$	6,500	5,59	4,36	3,13	1,90	0,68	-0,54	-1,75
$n = 16$	8,206	5,83	4,61	3,39	2,17	0,96	-0,26	-1,47
$n = 17$	6,96	5,63	4,31	3,00	1,68	0,38	-0,92	-2,25
$n = 18$	7,14	5,82	4,50	3,22	1,91	0,61	-0,67	-1,83
$n = 19$	8,42	0,3	—	—	—	—	—	—
$n = 20$	7,02	73,1	94,9	58,8	28,6	12,7	5,3	2,2
$n = 21$	—	0,5	4,3	14,6	32,4	52,9	69,7	79,0
$n = 22$	—	—	0,1	0,6	1,8	4,3	8,8	15,6
$n = 23$	—	—	—	—	0,2	0,5	0,9	2,0
$n = 24$	15,44	73,9	99,3	74,0	63,0	70,4	84,7	98,8
$n = 25$	5,62	4,48	3,52	2,68	1,59	0,52	-0,71	-1,95

$$\frac{1}{n^3} e^{u_n} \text{ und } \sum_n \frac{1}{n^3} e^{u_n} + \frac{1}{2u_1} e^{u_5}$$

Absorptionskoeffizient $\lambda = 3000$

$$\log \kappa'_p = \log \kappa_p (1 - e^{-u})$$

Absorptionskante bei $\lambda = 0$

$$\varphi \frac{(u_{n-1}) - \varphi(u_n)}{n^3 e^{u_n} + \frac{1}{2u_1} e^{u_5}}$$

Opazitätskoeffizient $\log \bar{\kappa}$

Wasserstoff-Sternatmosphäre liefern: Bei 50400° fließt der Hauptanteil des Strahlungsstromes im LYMAN-Gebiet; $1/\bar{\kappa}$ wird also bestimmt durch die Durchlässigkeit in diesem Spektralgebiet. Bei 16800° ist $\bar{\kappa}$ fast ganz bedingt durch die Durchlässigkeit zwischen BALMER- und LYMAN-Grenze (vor der letzteren ist κ_r , ja besonders klein!); usw. Allgemein gesprochen: Maßgebend für $\bar{\kappa}$ ist stets das *kleinste* κ_r' in dem noch von einem merklichen Strahlungsstrom durchsetzten Frequenzbereich.

Wollte man mit Hilfe der Tabelle 28 den Absorptionskoeffizienten pro g einer reinen Wasserstoffatmosphäre berechnen, so müßten die κ_r' und $\bar{\kappa}$ noch mit der nach der SAHASCHEN Gleichung berechneten Verhältniszahl:

$$\frac{\text{neutrale Atome}}{\text{Atome} + \text{Ionen}} = 1 - x$$

multipliziert werden. Wir wollen diese Rechnung aber noch aufsparen und wenden uns zunächst der kontinuierlichen Absorption der Metalle und der übrigen Elemente zu.

Diese stellt uns vor wesentlich schwierigere quantentheoretische Probleme, von deren befriedigenden Lösung wir noch weit entfernt sind. Die im folgenden eingeschlagene Behandlungsweise schließt sich eng an eine Arbeit von A. UNSÖLD [629] an. Wir werden im folgenden Abschn. 35 im Zusammenhang mit der experimentellen Prüfung unserer Formeln und der genaueren quantenmechanischen Durchrechnung einiger Sonderfälle begründen, weshalb wir in den detaillierten Rechnungen von W. JAHN [608], A. PANNEKOEK [622] u. a. keinen Fortschritt erblicken können.

Man kann sich leicht überzeugen, daß diejenigen Elektronenbahnen — korrespondenzmäßig gesprochen —, welche für die kontinuierliche Absorption in den astrophysikalisch wichtigen Spektralbereichen wesentlich sind, dem Atomrumpf so nahe kommen, daß dessen Feld nicht mehr als coulombisch betrachtet werden kann. Man müßte also — streng genommen — die quantentheoretische Berechnung des Absorptionskoeffizienten für alle Quantenzustände aller häufigeren Atome besonders durchführen; ein fast aussichtsloses Unterfangen.

Wir werden uns vorerst damit begnügen, den Abweichungen vom COULOMB-Feld in rohester Weise Rechnung zu tragen durch Einführung einer effektiven Kernladungszahl $Z + s$. ($Z = 1$ neutrale Atome, $= 2$ erstes Funkenspektrum.) s soll einen Mittelwert für alle Atome und Quantenzustände darstellen. Sein Zahlenwert wurde durch Probieren an Hand der später zu besprechenden Anwendungen zu $s \approx 1,5$ abgeschätzt, ist aber noch sehr unsicher.

Weiterhin haben die Abweichungen vom COULOMB-Feld die Folge, daß bei den Metallen usw. jede Wasserstoffabsorptionskante in eine große Anzahl von Kanten aufgespalten ist, entsprechend der Vielfachheit (statistisches Gewicht) des betreffenden Quantenzustandes im Wasserstoffatom. Diesen Umstand machen wir uns zunutze, indem wir in allen Spektralgebieten die Summe in (34,9) nach (34,10) durch ein Integral ersetzen, dessen untere Grenze nun natürlich durch das $u = h\nu/kT$ der betrachteten Frequenz bestimmt ist.

Wir erhalten so den Absorptionskoeffizienten pro Atom $\kappa_{r, \text{at}}$ (u_n ist jetzt $Rhc(Z + s)^2/n^2 kT$; bezüglich der $(Z + s)^2$ -Faktoren vgl. die quantentheoretische Literatur, s. S. 128)

$$\kappa_{r, \text{at}} = \frac{64 \pi^4}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{m \cdot e^{10}}{c \cdot h^6} \cdot \frac{(Z + s)^2}{\nu^3} \sum_{u > u_n} \frac{(Z + s)^2}{n^3} e^{-(u_1 - u_n)} \quad (34,18)$$

oder

$$\kappa_{r, \text{at}} = \frac{16 \pi^2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{e^6 (Z + s)^2}{c \cdot h \cdot h^2} \cdot \frac{e^{-u_1}}{T^2} \cdot \frac{e^u}{u^3} \quad (34,19)$$

Da der Faktor e^{-u} ursprünglich in Gl. (34,8) bei der Berechnung der Häufigkeit der absorbierenden angeregten Atome im Verhältnis zu ihrer Anzahl im Grundzustand nach der BOLTZMANNschen Formel hereinkam, so erscheint es als sinngemäße Verallgemeinerung für wasserstoffähnliche Elemente, $u_1 = \text{Ionisierungsenergie}/kT$ zu setzen. Die Wellenlängenabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten steckt ganz in dem letzten Faktor. Wir können also — mit ohne weiteres verständlicher Abkürzung — schreiben:

$$\kappa'_\nu = \kappa_\nu (1 - e^{-u}) = C \cdot \frac{e^u - 1}{u^3}. \quad (34,20)$$

κ'_ν hängt also von ν und T in derselben Weise ab, wie die reziproke KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion I_ν , Gl. (7,29). Das nach dem KIRCHHOFFschen Satz berechnete Emissionsvermögen eines kleinen Volumelementes $\sim \kappa_\nu I_\nu$ ist also — bis auf den Korrektionsfaktor $(1 - e^{-u})$ — frequenzunabhängig. In dieser Form hat übrigens A. S. EDDINGTON [5] schon 1926 dieses auch aus der KRAMERSSchen Theorie folgende Ergebnis auf das kontinuierliche Sonnenspektrum angewandt. Nach (34,20) kann auch der ROSSELANDSche Opazitätskoeffizient leicht berechnet werden. Es wird mit Hilfe von (33,11) und (33,12):

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} = \frac{1}{C} \cdot \frac{15}{4\pi^4} \int_0^\infty \frac{u^7 \cdot e^{-2u}}{(1 - e^{-u})^3} du. \quad (34,21)$$

Das Integral kann durch Reihenentwicklung im Nenner und gliedweise Integration oder graphisch berechnet werden ($\int = 22,6$). Man erhält so:

$$\bar{\kappa} = 1,15 \cdot C \quad (34,22)$$

und das für die Theorie der kontinuierlichen Sternspektren grundlegende Verhältnis

$$\frac{\kappa'_\nu}{\bar{\kappa}} = \frac{e^u - 1}{1,15 \cdot u^3}. \quad (34,23)$$

Daß dieses nur von $u = h\nu/kT$ abhängt, ist natürlich an die ganz speziellen Voraussetzungen unserer Rechnung (COULOMB-Feld, Verschmierung der Absorptionskanten) gebunden. Eine graphische Darstellung gibt die ausgezogene Kurve in Fig. 50. Danach müßte z. B. innerhalb des in Tabelle 25 betrachteten Bereiches im Sonnenspektrum ($3230 < \lambda < 10080$) $\kappa'_\nu/\bar{\kappa}$ nach der kurzwelligen Seite zu um fast eine Zehnerpotenz anwachsen, was mit den Ergebnissen des vorhergehenden Kapitels keinesfalls verträglich ist. Verf. hat deshalb — auch mit Rücksicht auf die sogleich zu besprechenden Energieverteilungskurven der Sternspektren — in Ermangelung eines Besseren versucht, die $\kappa'_\nu/\bar{\kappa}$ -Kurve — rein empirisch — so abzuändern, daß sie den Beobachtungen einigermaßen gerecht wird. Sie ist in Fig. 50 als $(\kappa'_\nu/\bar{\kappa})_{\text{korr.}}$ eingezeichnet. Die Zahlenwerte von $\bar{\kappa}$ werden wir im folgenden direkt nach (34,22) berechnen. Dieses ganze — dem des Prokrustes nicht unähnliche! — Verfahren zur Berechnung der kontinuierlichen Absorption der wasserstoffunähnlichen Elemente ist natürlich sehr unbefriedigend. Aber solange nicht weitergehende quantentheoretische — oder evtl. experimentelle — Grundlagen vorhanden sind, ist nicht viel besseres möglich.

Damit haben wir nun die Unterlagen für die Berechnung des Opazitätskoeffizienten der in Tabelle 20 festgelegten „Sternmaterie“. Den Wasserstoff (versuchsweise angenommene Häufigkeit $\varepsilon_{\text{H}} = 1370$) wollen wir erst noch aus dem Spiel lassen. Die anderen Elemente (Metalle + Sauerstoff mit $\sum \varepsilon_i = 100$;

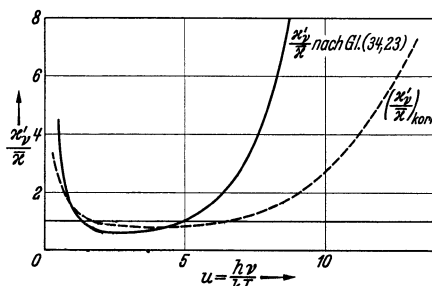


Abb. 50. $\kappa'_\nu/\bar{\kappa}$.

wir sprechen im folgenden stets kurzweg von ersteren, wobei O stillschweigend miteinbezogen ist) hatten wir in 3 Gruppen mit den Ionisierungsspannungen χ_0 13,54 V (O), 7,9 V (Fe, Si, Mg, Ni) und 5,8 V (Al, Ca, Na) eingeteilt; bei den letzten beiden wollen wir auch die 2. Ionisation mit $\chi_1 = 17$ V berücksichtigen. Bezeichnen wir die Häufigkeit der einzelnen Gruppen mit ε_i und mit n für $Z = 1$ den Bruchteil neutraler absorbierender Atome, für $Z = 2$ den der ionisierten — beidemal unter Berücksichtigung der 2. Ionisation —, so wird $\bar{\kappa}$ (der Einfachheit wegen pro Mol gerechnet $\bar{\kappa}_{\text{Mol}} = \bar{\kappa}_{\text{at}}/m_{\text{H}}$):

$$\bar{\kappa}_{\text{Mol}} = 1,15 \cdot \frac{16 \pi^2}{3 \sqrt{3}} \cdot \frac{e^6}{c \cdot h \cdot h^2 \cdot m_{\text{H}}} \cdot \frac{1}{T^2} \sum (Z + 1,5)^2 \cdot \frac{\varepsilon_i}{100} e^{-u_i} \cdot n. \quad (34,24)$$

Setzen wir die Zahlenwerte aus Tabelle 20 ein und bezeichnen (vgl. Kap. IV) die Verhältniszahl einfach ionisierte: neutrale Atome mit x und die doppelt: einfach ionisierter mit x' , wobei Indizes die Ionisierungsspannungen angeben, so geht die obige Gleichung — wenn man noch berücksichtigt, daß die Ionisationsstufen sauber getrennt sind — in hinreichender Näherung¹ über² in:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\kappa}_{\text{Mol}} = 10^{14,827} \cdot \frac{1}{T^2} \{ & (1 + 1,5)^2 [6,3 (1 - x_{5,8}) (1 - x'_{17}) \cdot 10^{-5,8 \theta} \\ & + 42,4 (1 - x_{7,9}) (1 - x'_{17}) \cdot 10^{-7,9 \theta} + 51,3 (1 - x_{13,5}) 10^{-13,5 \theta}] \\ & + (2 + 1,5)^2 [6,3 \cdot x_{5,8} (1 - x'_{17}) \cdot 10^{-17 \theta} + 42,4 \cdot x_{7,9} (1 - x'_{17}) \cdot 10^{-17 \theta}] \}. \end{aligned} \right\} \quad (34,25)$$

Will man den Beitrag $\bar{\kappa}_{\text{M}}$ der Metalle zum Opazitätskoeffizienten auf das Gramm Sternmaterie, d. h. H + Metalle, beziehen, so ist obiger Ausdruck noch zu multiplizieren mit

$$\frac{\varepsilon_{\text{M}}}{(\varepsilon_{\text{M}} + \varepsilon_{\text{H}}) \cdot \mu_0} = \frac{100}{1470 \cdot 2,80} = 10^{-1,615}, \quad (34,26)$$

wo μ_0 nach (24,4) das mittlere Molekulargewicht der Sternmaterie *ohne* Berücksichtigung der freien Elektronen bedeutet. Der entsprechende Beitrag der Wasserstoffatome zu $\bar{\kappa}$ — jetzt ebenfalls pro g der gesamten Sternmaterie von Tabelle 20 gerechnet — kann nun mit Hilfe der Tabelle 28 leicht berechnet werden. Nennen wir den dort tabulierten Opazitätskoeffizienten pro neutrales Atom jetzt der Deutlichkeit wegen $\bar{\kappa}_{\text{H,at}}$, so wird:

$$\bar{\kappa}_{\text{H}} = \frac{1370}{1470 \cdot 2,80} \cdot \bar{\kappa}_{\text{H,at}} (1 - x_{13,5}). \quad (34,27)$$

Neben der eigentlichen Absorption der Strahlung durch diskret-kontinuierliche und — meist in geringerem Maße — kontinuierlich-kontinuierliche Übergänge wird bei nahezu vollständiger Ionisation der Sternmaterie, also hoher Temperatur T verbunden mit kleinem Elektronendruck P_e , die Streuung an freien Elektronen von Bedeutung. Da wir es in den Sternatmosphären nur mit verhältnismäßig³ langwelliger Strahlung zu tun haben, so können wir die klassische THOMSON-Streuförmel benützen und brauchen die mit der Wellenlängenänderung beim Streuprozeß (COMPTON-Effekt) zusammenhängenden Verfeinerungen (DIRAC, KLEIN-NISHINA u. a.) nicht zu berücksichtigen.

Der THOMSONSche Streukoeffizient ist — unabhängig von der Wellenlänge — pro freies Elektron

$$s_{\text{el}} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \quad (34,28)$$

¹ Vgl. Kap. IV, Beispiel 3 am Ende des Abschnittes 22.

² Es ist $e^{-u_i} = 10^{-\chi_{0i} \cdot 5040/T}$.

³ $\lambda \gg$ COMPTON-Wellenlänge 0,024 Å.

und also pro g „Sternmaterie“:

$$s = s_{\text{el}} \cdot \frac{E}{m_{\text{H}} \cdot \mu_0} = 0,143 E, \quad (34,29)$$

wobei m_{H} wieder die Masse des H-Atoms und $\mu_0 = 2,80$ ist, während E die schon in Tabelle 22 berechnete Zahl der freien Elektronen pro Atomkern überhaupt bedeutet. Für große T und kleine P_e nähert sich s nach Tabelle 22 dem Grenzwert $s = 0,146$. Höchstwahrscheinlich sind — wie unsere folgenden Rechnungen lehren werden — solche Verhältnisse, bei denen s neben $\bar{\kappa}$ von Bedeutung wird, nur in den Atmosphären der heißesten Übergiganten¹ realisiert. Vorerst hat unsere Berechnung von s also mehr die Bedeutung einer Abgrenzung des Gültigkeitsbereiches unserer Opazitätsberechnungen.

Dadurch, daß wir die Opazitätskoeffizienten des Wasserstoffes und der Metalle getrennt berechnet haben, sind wir nicht an das in Tabelle 20 auf Grund der Untersuchungen über den inneren Aufbau der Sterne angenommene und noch ziemlich unsichere Häufigkeitsverhältnis $\text{H}:\text{M} = 13,7:1$ (in Atomzahlen) gebunden. Andererseits müssen wir uns überlegen, wie man aus $\bar{\kappa}_{\text{M}}$, $\bar{\kappa}_{\text{H}}$ und s den Gesamtopazitätskoeffizienten $\bar{\kappa}$ berechnen kann. Wie wir sogleich sehen werden, sind jeweils höchstens zwei dieser Anteile auf einmal von Bedeutung. Nennen wir sie κ_1 und κ_2 , so wäre streng genommen

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} = \frac{1}{\kappa_1 + \kappa_2}. \quad (34,30)$$

Nun gilt²

$$\frac{1}{\kappa_1 + \kappa_2} \cong \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) \quad (34,31)$$

mit dem Gleichheitszeichen für $\kappa_1 = \kappa_2$ und in brauchbarer Näherung, solange das Verhältnis κ_2/κ_1 bzw. κ_1/κ_2 den Wert ~ 3 nicht übersteigt (der Fehler ist dann $\sim 30\%$). Man kann also für $\kappa_1 \sim \kappa_2$ die Relation

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) \quad (34,32)$$

mit dem Gleichheitszeichen benutzen und im übrigen den größeren der beiden Werte nehmen. Diese vereinfachte Art der Berechnung von $\bar{\kappa}$ erscheint der zur Zeit für $\bar{\kappa}_{\text{M}}$ erreichbaren Genauigkeit angemessen. Eine strengere Rechnung nach (34,14) würde viele mühsame numerische Integrationen erfordern. In der folgenden Tabelle 29 sind — nach [629] — in Abhängigkeit von $\Theta = 5040/T$ und P_e (dyn cm⁻²) die nach den Formeln dieses Abschnittes berechneten Opazitätskoeffizienten der Metalle und des Wasserstoffes, sowie der Streukoeffizient der freien Elektronen (alle pro g Sternmaterie nach Tabelle 20) tabuliert. Für hohe Temperaturen und kleine Drucke ist darunter die Gesamtopazität $\bar{\kappa}$ angegeben. Wo diese Zeile fehlt, kann man mit genügender Genauigkeit $\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_{\text{M}}$ setzen, d. h. die Opazität rührt ganz von den Metallen her.

Zu den schrägedruckten $\bar{\kappa}$ -Werten der Tabelle 29 liefert die Streuung s den Hauptbeitrag, in diesem Fall ist die in Kap. V entwickelte allgemeine Theorie der kontinuierlichen Spektren nicht mehr ohne weiteres anwendbar³.

¹ Deren Theorie unterscheidet sich auch sonst (Strahlungsdruck usw.) so stark von der der übrigen Sterne, daß wir sie zunächst ausschließen müssen. Ein besonderes Studium der damit zusammenhängenden Fragen wäre sicher lohnend.

² Aus $0 \cong (\kappa_1 - \kappa_2)^2$ folgt $4\kappa_1\kappa_2 \cong (\kappa_1 + \kappa_2)^2$ und daraus (34,31).

³ Wir werden im Zusammenhang mit der Theorie der FRAUNHOFER-Linien das Strahlungsgleichgewicht in streuenden Atmosphären untersuchen. Diese Ergebnisse könnten großenteils auf das obige Problem übertragen werden. Da jedoch nicht einmal mit Sicherheit bekannt ist, ob es überhaupt Sterne gibt, auf denen solche Bedingungen realisiert sind, so wollen wir hier nicht weiter darauf eingehen.

Die zu den Θ - und P_e -Werten der Tabelle 29 gehörigen Gasdrucke P_g und Molekulargewichte μ können — um darauf nochmals hinzuweisen — aus Tabelle 22 direkt abgelesen werden.

Die Absorptionskoeffizienten κ'_ν für einzelne Frequenzen können nun ohne große Mühe berechnet werden: Für *Wasserstoff* gibt die Tabelle 28 zusammen mit Gl. (34,27), in der sinngemäß $\bar{\kappa}$ durch κ'_ν zu ersetzen ist, die notwendige Grundlage. Für die *Metalle* ist $\kappa'_\nu/\bar{\kappa}$ in Fig. 50 (man benütze die „korrigierte“ Kurve!) als Funktion von $\frac{h\nu}{kT} = \frac{c_2}{\lambda T}$ aufgetragen; zusammen mit den $\bar{\kappa}_M$ -Werten der Tabelle 29 erhält man leicht κ'_ν selbst. Der THOMSON-*Streukoeffizient* s ist von der Wellenlänge unabhängig. Im Hinblick auf die Theorie der kontinuierlichen Sternspektren haben wir in der folgenden Tabelle 30 nicht die κ'_ν selbst, sondern gleich das Verhältnis $\kappa'_\nu/\bar{\kappa}$ für „Sternmaterie“ bei einem Elektronendruck $P_e = 100$ Bar $\approx 10^{-4}$ at berechnet, den wir nach Kap. IV etwa als Mittelwert für alle Sternatmosphären ansehen dürfen. Da $\kappa'_\nu/\bar{\kappa}$ sowohl für reinen Wasserstoff, wie auch — nach (34,23) — für die Metalle allein von P_e unabhängig ist, so wird der resultierende Wert nur bei solchen Temperaturen von P_e abhängen, bei denen $\bar{\kappa}_H$ und $\bar{\kappa}_M$ von gleicher Bedeutung sind und außerdem ihr Verhältnis $\bar{\kappa}_H/\bar{\kappa}_M$ bei festgehaltenem Θ mit P_e stärker variiert. Wie man an Hand von Tabelle 29 sieht, lassen sich die Zahlenwerte von Tabelle 30 über ein großes Intervall von P_e verwenden, solange die Streuung der freien Elektronen nicht in Erscheinung tritt. Für $\Theta > 0,8$ ist $\kappa'_\nu/\bar{\kappa}$ einfach das der Metalle (Fig. 50).

Tabelle 30. $\log \kappa'_\nu/\bar{\kappa}$ für Sternmaterie ($\Theta \leq 0,8$ und $P_e = 100$ Bar).

$\Theta =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
λ 3647	0,68	0,58	0,54	0,51	0,60	0,51	0,03	0,02
	0,47	0,25	0,10	-0,06	-0,18	-0,05	-0,04	+0,02
4000	0,54	0,30	0,15	-0,02	-0,14	-0,05	-0,07	-0,02
5000	0,70	0,46	0,27	0,09	-0,02	0,00	-0,10	-0,09
6500	0,91	0,66	0,46	0,26	0,16	0,09	-0,07	-0,09
8206	1,10	0,85	0,64	0,44	0,22	0,21	-0,04	-0,07

Zum Schluß dieser Theorie des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten möge *nochmals* — dies ist in der Literatur oft übersehen worden — darauf hingewiesen werden, daß sie zwei sehr dunkle Stellen aufweist:

1. Die Berechnung des Absorptionskoeffizienten der Metalle ist mit Rücksicht auf ihre noch recht mangelhaften quantentheoretischen Grundlagen einerseits und die geringe Genauigkeit unserer Kenntnis der quantitativen Zusammensetzung der Sternatmosphären andererseits noch mit großer Unsicherheit behaftet. Die erstere Schwierigkeit ist dabei zur Zeit die ausschlaggebende.

2. Ist das Häufigkeitsverhältnis Wasserstoff: übrige Elemente noch ziemlich unsicher. Diese Schwierigkeit hängt zum Teil damit zusammen, daß wir die kontinuierliche Absorption der Metalle nicht genauer erfassen können.

3. Ist über die kosmische Häufigkeit von Elementen wie He, Ne, N, die möglicherweise ziemlich wichtig sind, noch fast nichts quantitatives bekannt.

Trotzdem dürften die Rechnungen dieses Abschnittes im großen und ganzen schon eine recht brauchbare Angriffsbasis auf die zahlreichen Probleme der kontinuierlichen und Linienspektren der Sterne geben. Durch eine Art sukzessives Approximationsverfahren wird die Theorie im Zusammenhang mit neuen Anwendungen immer weiter vervollkommnet werden.

35. Genauere Berechnung des Absorptionskoeffizienten für einzelne Kanten. Experimentelle Prüfungen der Theorie¹.

Ehe wir uns der eigentlichen Theorie der kontinuierlichen Sternspektren zuwenden, wollen wir noch die bis jetzt vorliegenden Ansätze zu einer strengeren quantenmechanischen Behandlung der kontinuierlichen Absorption der wasserstoffähnlichen Elemente kennenlernen.

Die Wechselwirkung der Elektronen wird dabei durch ein passend gewähltes, auf theoretischem oder empirischem Weg gewonnenes, kugelsymmetrisches Potentialfeld beschrieben in dem sich das *eine* Leuchtelektron bewegt, dessen Eigenfunktionen und Übergangswahrscheinlichkeiten mit Hilfe mehr oder weniger schwerfälliger numerischer Methoden berechnet werden. Bis jetzt sind — mit Ausnahme der Arbeiten von A. THOMA — nur die vom Grundzustand ausgehenden Grenzkontinua der Hauptserien durchgerechnet, eine Ausdehnung auf angeregte Zustände bietet aber keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Gleichzeitig werden wir unser Problem auch vom Standpunkt der Laboratoriumsspektroskopie aus beleuchten.

Um die Ergebnisse der Rechnungen und Beobachtungen bequemer darstellen zu können, führen wir noch den später viel zu benutzenden Begriff der „Oszillatorenstärke“ ein. Wir schreiben²

$$\kappa_{\nu, \text{Atom}} = \frac{\pi e^2}{m c^2 \cdot R} \cdot \frac{df}{dE}, \quad (35,1)$$

wo R die RYDBERG-Frequenz (cm^{-1}) und E der Abstand der betrachteten Stelle von der Seriengrenze in cm^{-1} , geteilt durch R ist. Mit anderen Worten: Wir betrachten den Quantensprung vom Grundzustand nach einem Zustand der positiven Energie $E \cdot R h c$ erg.

Das über das ganze Kontinuum erstreckte Integral³

$$\int \kappa_{\nu} d\nu = \frac{\pi e^2}{m c} \int \frac{df}{dE} dE = \frac{\pi e^2}{m c} \cdot f \quad (35,2)$$

gibt ein Maß für dessen gesamte Absorptionswirkung (hierzu Abschn. 45). f bezeichnet man als seine *Oszillatorenstärke*, weil für ein elastisch gebundenes Elektron, wie es in der klassischen Elektronentheorie benützt wird, $f = 1$ ist. Die folgende Tabelle 31 gibt — in der Hauptsache nach J. A. WHEELER [652] — für die bis jetzt untersuchten Atome⁴ die Grenzwellenlänge λ_0 der Hauptserie, dann die gesamte Oszillatorenstärke f und df/dE an der Seriengrenze ($E = 0$).

Tabelle 31. Genauere Berechnung der Hauptserien-Grenzkontinua einiger Elemente.

Atom	λ_0 in Å	f	$\left(\frac{df}{dE}\right)_{\text{grenz}}$	Literatur
H	912	0,437	0,78	SUGIURA: J. de Phys. 8 , 113 (1927)
He	507	1,58	0,93	WHEELER, J. A.: Phys. Rev. 43 , 258 (1933)
		1,55	1,05	VINTI, J. P.: Phys. Rev. 44 , 524 (1933)
Li	2281	0,24	0,46	KÖRWIEN, H.: ZS. f. Phys. 91 , 1 (1934)
				TRUMPY, B.: ZS. f. Phys. 54 , 372 (1929)
Na	2412	0,0021	0,038	TRUMPY, B.: ZS. f. Phys. 71 , 720 (1931)
K	2857		0,0024	PHILLIPS, M.: Phys. Rev. 39 , 905 (1932)

¹ Dieser Abschnitt erhebt keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit. Vgl. den Bericht von W. FINKELNBURG [638] sowie F. L. MOHLER, Recombination and Photo-Ionization. Rev. Mod. Phys. **1**, 216 (1929).

² $\frac{\pi e^2}{m c^2 \cdot R} = 8,02 \cdot 10^{-18} \text{ cm}^2$.

³ Es ist $d\nu = R c \cdot dE$.

⁴ Die umfangreichen Untersuchungen über kontinuierliche Absorption im Röntgengebiet (vgl. M. SIEGBAHN [646]) können wir leider nicht direkt heranziehen.

Bei *Helium* ist nach E. A. WHEELER [652], J. P. VINTI [651] und H. KÖRWIEN [640] die Gesamtstärke des Hauptserien-Grenzkontinuums beträchtlich größer, als beim Wasserstoff. Die Abnahme von κ_ν nach kurzen Wellen erfolgt langsamer als $1/\nu^3$. Die genannten Autoren haben ihre Berechnungen mit gutem Erfolg geprüft an den Messungen des mit dem Absorptionskoeffizienten eng verknüpften Brechungsindex. Auch eine vereinzelte direkte Absorptionsmessung bei der Kohlenstoff-K $_\alpha$ -Linie λ 44,6 Å (vgl. VINTI [651]) wird gut wiedergegeben.

Lithium zeigt nach den Rechnungen von B. TRUMPY [649] im großen und ganzen ziemliche Wasserstoffähnlichkeit, wie es dem Charakter seines Spektrums entspricht. Nur der Abfall von κ_ν hinter der Seriengrenze ist wieder langsamer als $1/\nu^3$.

Bei *Natrium* [648] ist das Hauptserienkontinuum sehr schwach. Im Gegensatz zu Li zeigt es nach der Seriengrenze zunächst einen sehr raschen Abfall. Direkte Absorptionsmessungen von B. TRUMPY [650] bestätigen innerhalb der Meß- bzw. Rechengenauigkeit die verschiedenartige Frequenzabhängigkeit bei Li und Na. Absolutwerte sind meines Wissens nicht gemessen.

Bei Kalium fanden R. W. DITCHEBURN [637], E. O. LAWRENCE und N. E. EDLEFSEN [642] und andere Autoren nach einem steilen Abfall von κ_ν hinter der Seriengrenze unerwarteterweise einen Wiederanstieg, der in diesem Falle aber möglicherweise noch nicht als endgültig gesichert betrachtet werden kann, da bei diesen Experimenten die störende Absorption der Alkalimoleküle schwer zu eliminieren ist. Eine quantentheoretische Behandlung des K-Kontinuums von M. PHILLIPS [644] ergab eine Abnahme rascher als $1/\nu^3$, aber keinen Wiederanstieg. Der Absorptionskoeffizient an der Kante ist — wie bei Na — sehr klein im Vergleich zu Wasserstoff.

Absorptionsversuche in *Cs-Dampf* von H. J. J. BRADDICK und R. W. DITCHEBURN [635, 636] ergaben ein äußerst rasches Abfallen von κ_ν hinter der Absorptionskante (λ_0 3184). Von $\lambda \approx 2750$ an jedoch steigt der Absorptionskoeffizient mit ν an. Ausgedehnte Versuche über die Beeinflussung der Absorption durch Fremdgaszusatz lassen es als nahezu sicher erscheinen, daß dieser theoretisch bis jetzt unerklärte Anstieg tatsächlich dem Cs-Atom und nicht irgendwelchen Molekülen zuzuschreiben ist. An der Grenze ist $\kappa_\nu \approx 2,2 \cdot 10^{-19}$ bzw. $d\kappa/dE \approx 0,027$ in guter Übereinstimmung mit den Messungen von F. L. MOHLER und C. BOECKNER [643]¹. Eine theoretische Untersuchung von A. THOMA [647] gibt zwar eine rasche Abnahme des Absorptionskoeffizienten hinter der Seriengrenze, aber keine Andeutung von einem Wiederanstieg.

Über die kontinuierliche Absorption von angeregten Atomzuständen aus, also die Nebenserien-Grenzkontinua, ist in experimenteller wie theoretischer Hinsicht fast nichts Quantitatives bekannt. Die Berechnungen von A. THOMA [647] sind leider in einer solchen Form publiziert, daß sie nur nach einer gründlichen Umarbeitung nutzbar gemacht werden könnten.

Zusammenfassend können wir — gleich im Hinblick auf unsere frühere Behandlung der Metallabsorption — wohl folgendes feststellen: Die Absorptionskoeffizienten der Hauptseriengrenzkontinua der Metalle zeigen sowohl hinsichtlich ihrer Frequenzabhängigkeit wie auch ihrer Absolutwerte große Abweichungen gegenüber Wasserstoff. Bei Na, K und Cs, die ja den astrophysikalisch wichtigen Elementen am ähnlichsten sind, ist das κ_ν des Hauptserienkontinuums um mehr als eine Zehnerpotenz kleiner als bei Wasserstoff. Andererseits müssen die Seriengrenzkontinua der *hochangeregten Atomzustände* sich wasserstoffähnlich verhalten, da in großer Entfernung vom Atomrumpf dessen Feld coulombisch

¹ Auf die indirekten elektrischen Methoden zur Messung von κ_ν oder — was dasselbe leistet — des Wirkungsquerschnittes für Photoionisation oder Rekombination können wir hier nicht eingehen. Vgl. z. B. RUARK-UREY [645, S. 467].

wird. Wir sehen hierin eine qualitative theoretische Rechtfertigung für die in Fig. 50 vorgenommene relative Verkleinerung von κ_ν bei großen Frequenzen. Die Unsicherheit des Absolutwertes von κ_ν bzw. $\bar{\kappa}$ der Metalle (Tabelle 29) dürfte immerhin etwa eine Zehnerpotenz betragen¹.

Sodann wollen wir noch den Zusammenhang der kontinuierlichen Sternspektren mit den in verschiedenen spektroskopischen Lichtquellen auftretenden Kontinua erörtern. Wir können uns dabei, auch hinsichtlich der Literaturangaben, ziemlich kurz fassen, da W. FINKELNBURG [638] erst vor kurzem eine zusammenfassende Bearbeitung der kontinuierlichen Gasspektren gegeben hat.

Den astrophysikalischen Verhältnissen am nächsten kommen die besonders von J. A. ANDERSON und S. SMITH [634] am Mt. WILSON-Observatorium untersuchten Kondensatorentladungen großer Stromdichte durch Vakuumröhren mit einigen Millimeter Druck oder durch eine Metaldampf Wolke, die aus dünnen Drähten oder entsprechend präparierten Asbestfasern beim Stromdurchgang entsteht („explodierende Drähte“). Um ein ungefähres Bild von den quantitativen Verhältnissen zu geben: ANDERSON und SMITH benützen eine Kondensatorbatterie von $\sim 0,6 \mu F$ bei Spannungen bis zu 55 kV. Die Stromdichte in der Entladungsbahn geht bis $\sim 100\,000$ A/cm², die Temperatur — aus Strahlungsmessungen geschätzt — bis $\sim 20000^\circ$; der bei der „Explosion“ entstehende Druck dürfte in der Größenordnung 10—100 at liegen. Besonders bei großer Stromdichte und hohem Druck — Einschließen des explodierenden Drahtes in die Bohrung eines Holzblockes — tritt außer den Linien ein völlig kontinuierliches Spektrum ohne erkennbare Kanten auf.

Wendet man — es ist dies natürlich nur in qualitativer Hinsicht zulässig — die im vorhergehenden Abschnitt entwickelten Formeln für den Absorptionskoeffizienten an, so zeigt sich, daß in der Tat unter den angegebenen Verhältnissen eine Gasschicht von einigen Millimeter Dicke eine merkliche optische Dicke besitzen kann.

In der älteren Literatur spielt bei der Deutung kontinuierlicher Spektren der ominöse Begriff² der „Temperaturstrahlung“ eine gewichtige Rolle, meist ohne nähere Angaben, was darunter zu verstehen ist. Dieser Begriff, der — wie wir schon früher bemerkten — in der Entwicklung der Spektroskopie so viel Unheil angerichtet hat, sollte endgültig verschwinden. Dagegen sollen zwei wichtige Bemerkungen nochmals ins Gedächtnis gerufen werden:

1. Befindet sich eine *optisch dünne Schicht* ($\tau_\nu = \int \kappa_\nu \rho dx \ll 1$) im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht, d. h. können alle mittleren Partikelgeschwindigkeiten usw. durch *dieselbe* Temperatur beschrieben werden, so beträgt die Emission im Frequenzbereich $d\nu$ pro g nach allen Seiten $4\pi \kappa_\nu \cdot J_\nu d\nu$, wo J_ν die KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion ist.

2. Wird die optische Dichte $\tau_\nu \gg 1$, so nähert sich, falls die Temperatur T des strahlenden Gebildes räumlich und zeitlich konstant ist, dessen Ausstrahlung pro Oberflächeneinheit der eines schwarzen Körpers der betreffenden Temperatur. Ist T dagegen variabel, so werden die Verhältnisse komplizierter und müssen — wie die Strahlung der Sternatmosphären — von Fall zu Fall untersucht werden.

Bei den ANDERSONSchen Versuchen kommen, nach seinen Absorptionsmessungen zu schließen, kleine und große³ optische Dicken der strahlenden Schicht vor. Trotzdem zeigt sich — wie gesagt — nie eine Andeutung von Absorptionskanten. W. FINKELNBURG [638] meint, diese seien ähnlich wie

¹ Es erscheint wohl möglich, daß insbesondere die Abschirmungszahl $s = 1,5$ zu groß ist.

² Hierzu auch W. FINKELNBURG, [638].

³ Daß auch bei $\tau_\nu \gg 1$ die Strahlung nicht dem PLANCKSchen Gesetz folgt, läßt sich durch die räumliche und zeitliche Variation der Temperatur zwanglos erklären.

im Sonnenspektrum nur verschmiert, die fraglichen Quantensprünge seien jedoch überwiegend kontinuierlich \rightarrow diskret. Diese Auffassung scheint mir nicht völlig gesichert zu sein. Nach der Theorie verhält sich der diskret-kontinuierliche zum kontinuierlich-kontinuierlichen Anteil des Absorptionskoeffizienten etwa wie $e^{\frac{h\nu}{kT}}:1$; bei 20000° für λ 4000 also ungefähr wie 5:1. Es ist durchaus denkbar, daß diese Abschätzung für die kontinuierlich-kontinuierlichen Übergänge noch zu ungünstig ist; eine Entscheidung der Frage ist zur Zeit noch kaum möglich.

Genauere Messungen an den ANDERSONSchen Lichtquellen sind wegen der äußerst kurzen Entladungsdauer sehr schwierig, so daß eine eigentliche Prüfung der Theorie noch nicht in Frage kommt.

Eng verwandt mit der Methode der „explodierenden Drähte“ ist der *Unterwasserfunke*. Die Schwierigkeiten einer quantitativen Untersuchung sind hier eher noch größer (Literatur vgl. FINKELNBURG).

Weiterhin treten Kontinua, die sicher großenteils atomaren Ursprunges und denen der Sterne also wesensgleich sind, auf im *Funken*, *Lichtbogen* und metall-dampfhaltigen *Flammen*. In einer Reihe von Arbeiten hat wieder W. FINKELNBURG [638] die sehr unübersichtliche ältere Literatur dieses Gebietes gesammelt und zu klären versucht, wo es sich um atomare Kontinua handelt und wo Moleküle und Pseudomoleküle beteiligt sind; ob die optische Dicke der strahlenden Schichten $<$ oder $>$ 1 ist, ob es sich um kontinuierlich-kontinuierliche oder kontinuierlich-diskrete Übergänge handelt u. dgl. Eine quantitative Prüfung der Theorie des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten ist jedoch ohne neue Messungen nicht möglich. Namentlich unter den mit heutigen experimentellen Hilfsmitteln schon gut erfaßbaren Bedingungen in der positiven Säule¹, Lichtbogen oder Flamme dürften quantitative Untersuchungen gute Aussicht auf Erfolg bieten. Es wäre sehr wünschenswert, wenn die Experimentalphysik sich dieses lange vernachlässigten Gebietes einmal wieder annehmen würde.

36. Energieverteilung in den kontinuierlichen Sternspektren. Intensitätssprung an der Grenze der BALMER-Serie λ 3647. Abweichungen vom schwarzen Körper. Farbtemperatur und effektive Temperatur der Sterne.

Nunmehr haben wir alle zur Zeit verfügbaren Hilfsmittel der Theorie an der Hand, um das Grundproblem dieses Kapitels in Angriff nehmen zu können:

„Welche Energieverteilung zeigt das Spektrum eines Sternes von vorgegebener effektiver Temperatur T_e und Schwerebeschleunigung g an der Sternoberfläche?“

Die spektrale Energieverteilung kann man für beschränkte Wellenlängenbereiche, wie wir sahen, auch durch Angabe der *Farbtemperatur* T_F oder des *Gradienten* Φ beschreiben. Die *effektive Temperatur* T_e dagegen ist dadurch *definiert*, daß sie in Verbindung mit dem STEFAN-BOLTZMANNschen Strahlungsgesetz die beobachtbare Gesamtausstrahlung pro cm^2 und sek geben muß.

Da g und T_e zusammen — wegen der EDDINGTONSchen Beziehung zwischen Masse, absoluter Helligkeit und T_e — die absolute Helligkeit eines Sternes festlegen, so können wir unsere ursprüngliche Fragestellung auch durch die folgende ihr äquivalente ersetzen:

„Welcher Zusammenhang besteht für Sterne von bestimmter absoluter Helligkeit zwischen Farbtemperatur T_F und effektiver Temperatur T_e ?“

¹ Z. B. H. KREFFT [641].

Eine „experimentelle“ Beantwortung dieser Frage wäre gegeben, sobald es gelänge, etwa mit Hilfe des MICHELSON-Interferometers die scheinbaren Durchmesser von Sternen aller Spektraltypen und absoluten Helligkeiten mit genügender Genauigkeit zu messen.

Hiervon sind wir aber noch so weit entfernt, daß es aussichtsreicher erscheint, das Problem unter Zuhilfenahme der Theorie der Sternspektren anzugreifen. Zunächst ziehen wir nur die kontinuierlichen Spektren in den Kreis unserer Betrachtungen; in einem der folgenden Kapitel werden wir auch die Spektrallinien zu Hilfe nehmen.

Bleiben wir also bei der zuerst gegebenen Formulierung und erledigen im voraus das untergeordnetere Problem der *g-Abhängigkeit*:

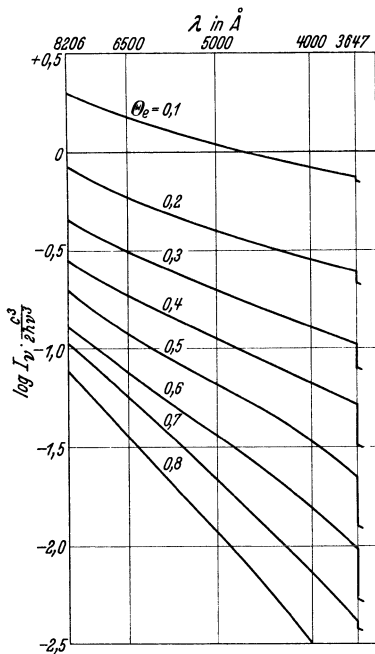


Fig. 51.

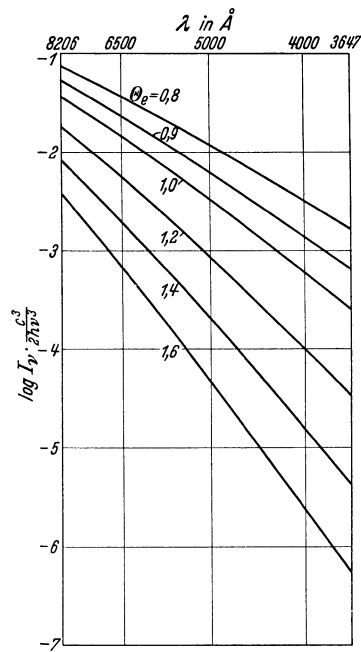


Fig. 52.

Fig. 51 u. 52. Berechnete Energieverteilung in kontinuierlichen Sternspektren. Nach A. UNSÖLD [629].

κ'_v/κ und damit die spektrale Energieverteilung hängen von g insofern ab, als bei gegebenem T_e die Schwerebeschleunigung den Druck in der Sternatmosphäre festlegt. κ'_v/κ hängt aber davon ab, in welchem Verhältnis der Wasserstoff bzw. die Metalle zur kontinuierlichen Absorption beitragen und dieses Verhältnis wird wegen der thermischen Ionisation durch P_e beeinflusst. Wie wir aber im vorletzten Abschnitt sahen, hängt das Verhältnis $\bar{\kappa}_M : \bar{\kappa}_H$ von P_e nicht sehr stark ab und wir werden demgemäß vorerst mit dem festen Mittelwert $P_e = 100$ bar rechnen, also die g -Abhängigkeit als untergeordneten Effekt vernachlässigen. Merkbare Fehler sind höchstens bei $\Theta = 5040/T \approx 0,65$ zu erwarten, wo die Vorherrschaft des Wasserstoffes im kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten an die Metalle übergeht.

Da wir bei den Sternen nur die Strahlung der ganzen Sternscheibe beobachten können, so genügt es, den Strahlungsstrom πF_v zu berechnen. Entsprechend der Genauigkeit, mit der wir heute den Absorptionskoeffizienten ermitteln können, dürfte die in Abschn 31 entwickelte Näherungsmethode ausreichend

sein. Nach (31,11 u. 14) ist

$$F_\nu = I_0 \left\{ 1 + \frac{u_0^4}{1 - e^{-u_0}} \cdot \frac{\kappa'}{\kappa_\nu} \right\}. \quad (36,1)$$

Dabei bedeutet I_0 [in Abschn. 31 mit $I_\nu(0, \pi/2)$ bezeichnet] die Strahlungsintensität am Rande der Sternscheibe, also die Intensität der Hohlraumstrahlung für die Grenztemperatur $T_0 = 2^{-1/4} \cdot T_e$ des Sternes. u_0 (in Abschn. 31 mit α bezeichnet) ist nach (31,11) gleich $\frac{h\nu}{kT_0} = \frac{c_2}{\lambda T_0}$. Das Verhältnis $\frac{\kappa'}{\kappa}$ ist als Mittelwert über die zur Ausstrahlung beitragenden Schichten der Sternatmosphäre zu verstehen. Wir rechnen es hier — vgl. Fig. 44 — durchweg für die Temperatur $T_e = 1,19 T_0$ und $P_e = 100$ bar. Die Streuung an freien Elektronen berücksichtigen wir *nicht*. Wo diese wesentlich wird, müßte, wie gesagt, die *ganze* Theorie abgeändert werden. Das *ohne* die Streuung berechnete Verhältnis κ'_ν/κ ist bei hohen Temperaturen ($\Theta < 0,25$, vgl. Tabelle 29) von P_e unabhängig. Unsere späteren Zahlenangaben, so können wir also auch sagen, gelten im Gebiet höchster Temperaturen für die Sterne, bei denen die Streuung freier Elektronen noch nicht wesentlich ist, also Sterne unterhalb einer gewissen absoluten Helligkeit.

κ'_ν/κ ist für $\Theta_e = 5040/T_e \leq 0,8$ schon in Tabelle 30 angegeben. Für $\Theta_e > 0,8$ benützen wir die „korr.“-Kurve der Fig. 50. F_ν/I_0 kann dann ein für allemal als Funktion von $u_0 = \frac{h\nu}{kT_0}$ oder $u = \frac{h\nu}{kT_e}$ berechnet werden. Bezüglich der Zahlenrechnungen sei auf die Originalarbeit des Verfassers [629] verwiesen — auf andere werden wir im nächsten Abschnitt noch zu sprechen kommen —; wir geben hier gleich ihr Resultat in Form der graphischen Darstellungen Fig. 51 und 52 für $\log I_\nu \cdot \frac{c^3}{2h\nu^3}$ (statt F_ν haben wir hier wie in der Originalarbeit I_ν geschrieben) als Funktion¹ von $\Theta_e = \frac{5040}{T_e}$ und $\frac{1}{\lambda}$.

Das Auffallendste an diesen Kurven ist ohne Zweifel der *Intensitätssprung an der Grenze der BALMER-Serie $\lambda 3647$* : Er demonstriert ad oculos, daß die kontinuierlichen Sternspektren dem PLANCKSchen Gesetz nicht folgen und gibt uns außerdem eine erste Möglichkeit, unser in Tabelle 20 angenommenes Häufigkeitsverhältnis des Wasserstoffes zu den Metallen nachzuprüfen:

Wie kommt er zustande? Nach Tabelle 28 ist für reinen Wasserstoff und nach Tabelle 30 auch noch für unsere „Sternmaterie“ auf der kurzwelligen Seite der BALMER-Grenze ($\lambda < 3647$) $\kappa'_\nu/\kappa > 1$; d. h. wir bekommen fast nur Strahlung aus den obersten Sternschichten der Grenztemperatur T_0 und es ist F_ν nur ganz wenig größer als I_0 . Wenn es im Laufe der Zeit gelänge — die Sache erscheint nicht aussichtslos —, die Intensitätsverteilung für $\lambda < 3647$ durch Anschluß an den schwarzen Körper absolut zu messen, so hätte man einen ziemlich direkten Weg zur Messung der Grenztemperatur T_0 der Spektraltypen B5 bis A5.

Für $\lambda > 3647$, d. h. auf der langwelligen Seite der BALMER-Grenze, ist für $0,3 < \Theta < 0,7$ das Verhältnis $\kappa'_\nu/\kappa < 1$, d. h. man bekommt Strahlung aus tiefen Schichten hoher Temperatur, das kontinuierliche Spektrum zeigt eine Überhöhung über die für T_e erwartete Intensität hinaus.

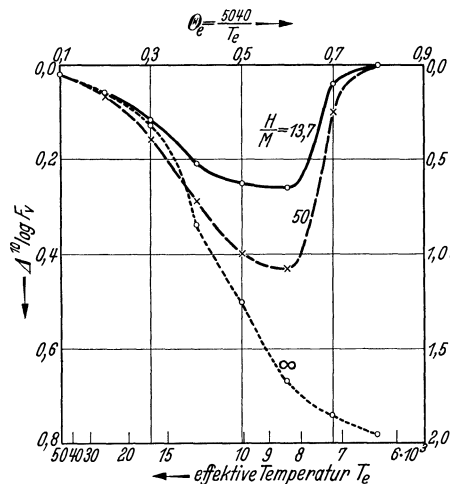
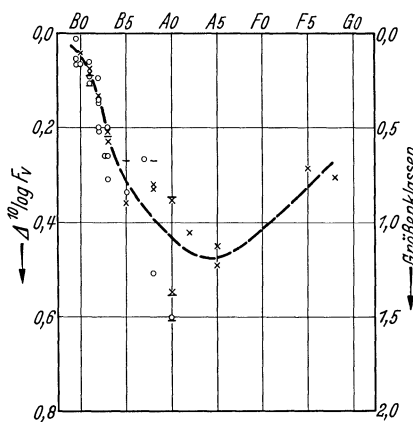
Es ist also ganz falsch, sich vorzustellen, daß das BALMER-Kontinuum aus einem „ungestörten Spektrum“ herausabsorbiert wird, wie etwa das NAKontinuum durch ein Absorptionsrohr aus dem Licht einer Bogenlampe. Man kann vielmehr nur das kontinuierliche Sternspektrum, da κ ja durch Mittelung über alle Spektralgebiete entsteht, als *ein Ganzes* verstehen.

¹ Bei dieser Art der Darstellung gibt das WIENSche Strahlungsgesetz ($u = \frac{h\nu}{kT_e} \gg 1$) eine Gerade.

Tabelle 32. Intensitätssprung $\Delta \log F_\nu$ an der Grenze der BALMER-Serie.

$\Theta_e = \frac{5040}{T_e}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	
Atomzahl- verhältnis	13,7	0,02	0,06	0,12	0,21	0,25	0,26	0,04	0,00
H : M	50	0,02	0,07	0,16	0,29	0,40	0,43	0,10	0,00
	∞	0,02	0,05	0,13	0,34	0,50	0,67	0,74	0,78

In Tabelle 32 und Fig. 53 a haben wir die berechnete Größe des Intensitätssprunges $\Delta \log_{10} F_\nu = \log \frac{F_{3647+\epsilon}}{F_{3647-\epsilon}}$ als Funktion von $\Theta_e = \frac{5040}{T_e}$ angegeben. Um klarzustellen, in welchem Maße diese Zahlenwerte von der ziemlich unsicheren Ausgangsannahme über das Verhältnis $\frac{\text{Wasserstoff}}{\text{Metalle}}$ H : M = 13,7 : 1 (in Atomzahlen) abhängen, hat Verf. dieselbe Rechnung für das 3,65 mal größere

Fig. 53 a. Intensitätssprung bei λ 3647. Berechnet für verschiedene Häufigkeitsverhältnisse Wasserstoff : Metalle.Fig. 53 b. Messungen des Intensitätssprunges bei λ 3647. \circ B. G. KARPOV [609], \times D. BARBIER, D. CHALONGE u. E. VASSY [601], $-$ H. STRASSL [625].

Verhältnis H : M = 50 : 1 und für eine reine Wasserstoffatmosphäre [628] durchgeführt¹. Mit wachsendem H-Gehalt wächst die maximale Sprunggröße Δ_{\max} erst rasch, dann langsamer. Gleichzeitig verschiebt sich das Maximum ein wenig nach niedrigeren Temperaturen. In einer reinen H-Atmosphäre müßte, wie W. H. McCREA [605] zuerst bemerkt hat, $\Delta \log F_\nu$ nach tieferen Temperaturen zu unbegrenzt anwachsen. Es dürfte jedoch nicht möglich sein, den steilen Abfall des Sonnenspektrums bei kurzen Wellenlängen damit in Zusammenhang zu bringen: Wie wir später sehen werden, ist die Intensität der BALMER-Linien zwangsläufig mit der des *Kontinuums* gekoppelt und die höheren Glieder der BALMER-Serie sind bekanntlich im Sonnenspektrum ziemlich schwach.

Die Abhängigkeit des $\Delta \log F_\nu$ von der absoluten Helligkeit der Sterne oder, was auf dasselbe herauskommt, dem Elektronendruck P_e läßt sich an Hand der Tabelle 29 leicht übersehen, da κ'_ν/κ_ν für H bzw. M *allein* von P_e unabhängig ist: Der Steilabfall der Kurven in Fig. 53 bei $T = 7500^\circ$ würde für Riesensterne (kleines P_e , mehr H-Absorption) bei etwas kleineren Temperaturen liegen, als für Zwergsterne (größeres P_e , mehr Metallabsorption). Nunmehr wollen wir uns den entsprechenden Beobachtungen zuwenden!

¹ Im letzteren Falle wurde κ'_ν/κ_ν für $T = T_0$ gerechnet, der Unterschied gegen obiges Verfahren ist ziemlich belanglos. Vgl. [628, S. 39].

Die grundlegenden Beobachtungsreihen von C. S. YÜ [633], der das BALMER-Kontinuum der frühen Spektraltypen zuerst *quantitativ* untersucht hat, dürften durch die neueren Messungen, welche übereinstimmend größere Absorptionsbeträge¹ ergeben, überholt sein.

Wichtig sind für uns vor allem die Beobachtungen von B. G. KARPOV [609] am LICK-Observatorium und von D. BARBIER, D. CHALONGE und E. VASSY [601] auf dem Jungfrauoch. Bekanntlich zeigen viele Sterne der frühen Spektraltypen die Wasserstofflinien in Emission statt in Absorption, was vermutlich mit dem Vorhandensein einer ausgedehnten, nebelartigen Hülle zu sammenhängt. Bei solchen Sternen erscheint zum Teil auch das BALMER-Kontinuum in Emission (z. B. γ Cas B0e). Es ist klar, daß auf solche Gebilde unsere Theorie nicht mehr anwendbar ist; wir geben daher in den

Tabelle 33. Intensitätssprung $\Delta \log F_\nu$ bei λ 3647 nach den Messungen von B. G. KARPOV [609, Tabelle XIX]. Nur Absorptionsspektren.

Stern	Spektral- typ	$\Delta \log_{10} F_\nu$	Stern	Spektral- typ	$\Delta \log F_\nu$
+ 61° 2193	O9	0,013	γ Peg	B2	0,201
19 Cep	O9	0,055	ζ Cas	B2	0,208
10 Lac	O9	0,065	6 Lac	B3	0,201
σ Ori	B0	0,065	π^2 Cyg	B3	0,260
Boss 5003	B1	0,061	16 Peg	B3	0,260
Boss 5796	B1	0,092	τ Her	B7	0,268
β Cep	B1	0,108	ξ Cas	B3	0,310
9 Cep	B2	0,097	Boss 149	B5	0,338
55 Cyg	B2	0,149	ζ Peg	B8	0,509
σ Cas	B2	0,143	δ Cyg	A0	0,602

nebenstehenden Tabellen nur die an einigermaßen normalen Spektren gemessenen Zahlenwerte des Sprunges $\Delta \log F_\nu$ bei λ 3647 wieder. In bester Übereinstimmung mit den angegebenen Daten befinden sich einige *Relativmessungen*, die H. KIENLE [610, Abb. 7]

1931 am Großglockner vorgenommen hat. Auch aus den spektralphotometrischen Anschlüssen einiger B1- bis A0-Sterne an den B5-Stern cPlej. von H. STRASSL [625, Abb. 9] erhält man $\Delta \log F_\nu$ -Werte, die mit denen der Tabelle 33 und 34 gut übereinstimmen, wenn man für den „Normalstern“ cPlej. $\Delta \log F_\nu = 0,35$ setzt. In

Tabelle 34. Intensitätssprung $\Delta \log F_\nu$ bei λ 3647 nach Messungen von D. BARBIER, D. CHALONGE und E. VASSY [601].

Stern	Spektral- typ	$\Delta \log F_\nu$	Stern	Spektral- typ	$\Delta \log F_\nu$
ζ Oph	B0	0,04	β Tau	B8	0,33
ζ Per	B1	0,075	α And	A0p	0,35
ε Per	B1	0,09	ε UMa	A0p	0,55
γ Peg	B2	0,135	α Cyg	A2p	0,42
ζ Tau	B3p	0,21	δ Cas	A5	0,49
η UMa	B3	0,23	α Aql	A5	0,45
η Tau	B5p	0,36	β Cas	F5	0,285
β Per	B8	0,32	α UMi	F8	0,305

Fig. 53 b ist $\Delta \log F_\nu$ als Funktion des Spektraltyps unter Benützung der Tabelle 33 und 34, sowie den in angegebener Weise reduzierten Messungen von H. STRASSL aufgetragen. Weitere Beobachtungen an F -Sternen wären sehr erwünscht.

Der Vergleich der in den Fig. 53 a und b zusammengefaßten Aussagen von Theorie und Beobachtung zeigt, daß die für H : M = 50 : 1 berechnete Kurve sich hinsichtlich der maximalen Absorption den Beobachtungen am besten anpaßt. Man könnte zunächst geneigt sein, dieses *Häufigkeitsverhältnis* 50 : 1 dadurch für ziemlich sicher bestimmt zu halten. Dem ist jedoch leider nicht so:

¹ Wahrscheinlich war Yüs photometrische Methode nicht ganz korrekt. Auch Yüs Methode der Parallaxenbestimmung mit Hilfe des BALMER-Kontinuums ist nach neueren Untersuchungen von Y. ÖHMAN [618] bzw. Y. ÖHMAN und W. IWANOKOWSKA [619] nicht stichhaltig. Wir kommen hierauf noch ausführlich zurück im Zusammenhang mit der Theorie der stellaren Wasserstofflinien.

Was man direkt vergleicht, sind ja nicht die Häufigkeiten der Elemente, sondern ihre Beiträge zum kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten, dessen Theorie bei den Metallen — wie wir sahen — noch ziemlich unsicher ist. Wir können unsere mit $H : M = 13,7 : 1$ durchgeführten Rechnungen in Übereinstimmung mit den Beobachtungen bringen, indem wir *entweder* die Häufigkeit ϵ_H des Wasserstoffes um einen Faktor $\sim 3,7$ vergrößern *oder* den Faktor $(Z + s)^2$ in der Formel (34,19ff.) in demselben Verhältnis verkleinern, also s statt $= 1,5$ etwa $= 0,4$ setzen, eine Änderung die durchaus diskutabel wäre. Eine Entscheidung zwischen beiden Möglichkeiten (inkl. der entsprechenden Kompromißlösungen) können wir jetzt noch nicht treffen. Wir werden daher im folgenden stets mit der ursprünglich angenommenen Mischung der Sternmaterie und den ursprünglichen Ansätzen für den Absorptionskoeffizienten weiterrechnen und versuchen, weitere Möglichkeiten einer Prüfung und Korrektur zu entdecken. Mit ziemlicher Sicherheit können wir aber feststellen, daß das Verhältnis $H : M$ jedenfalls nicht größer als $50 : 1$ sein kann, im Gegensatz zu dem von H. N. RUSSELL¹ [624] zeitweise angenommenen und von mehreren Autoren akzeptierten Wert 1000 bis $2000 : 1$.

Ein Vergleich der absteigenden Kurventeile in Fig. 53a und b zeigt ferner, daß unsere früher angenommenen (Tabelle 11) Temperaturen für die Spektraltypen B0 bis A0 jedenfalls nicht weit von den wahren effektiven Temperaturen T_e entfernt sein können². Dies ist sehr beruhigend, da gerade bei diesen Spektraltypen die spektralphotometrische Messung der Farbtemperatur sehr unsicher und auch die Gleichsetzung von effektiver und Farbtemperatur nicht unbedenklich ist.

Wir kommen damit auf unser Ausgangsproblem zurück: „*Welche Beziehung besteht zwischen effektiver Temperatur einerseits und spektraler Energieverteilung, Farbtemperatur oder Gradient andererseits?*“

Aus den in Fig. 51 und 52 zusammengestellten Energieverteilungskurven haben wir durch Anpassen an die PLANCKSche Kurve des Hohlraumstrahlers für die beiden Wellenlängenbereiche $\lambda 4000\text{—}5000 \text{ \AA}$ und $\lambda 5000\text{—}6500 \text{ \AA}$ zunächst die Farbtemperaturen T_F bzw. die $\Theta_F = 5040/T_F$ bestimmt³.

Ebenso berechnet man leicht den durch Gl. (17,4) definierten „*absoluten Gradienten*“, den man auch in folgender Form schreiben kann:

$$\Phi = - \frac{\lambda \ln(I_\nu/\nu^3)}{10^{-4} \cdot \lambda(1/\lambda)} \approx \frac{c_2 \cdot 10^4}{T_F} \left/ 1 - e^{-\frac{c_2}{\lambda T_F}} \right. . \quad (36,2)$$

Die Zahlenwerte sind in der folgenden Tabelle 35 und Fig. 54 zusammengestellt. Zum Vergleich sind für $\Theta_e < 0,9$ auch noch die für eine reine Wasserstoffatmosphäre⁴ berechneten Farbtemperaturen bzw. Θ_F angegeben.

Versuchen wir nun die Verbindung zwischen der Theorie und den in Kap. III, Abschn. 17 zusammengefaßten Beobachtungen herzustellen! Es bedarf kaum eines Hinweises, daß die für eine reine H-Atmosphäre berechnete Beziehung zwischen T_e und T_F in keiner Weise der Wirklichkeit entspricht. Ein A-Stern ($T_e \sim 10000^\circ$) müßte danach im photographischen Gebiet eine Farbtemperatur von $\sim 50000^\circ$ haben, ja die Farbtemperatur würde nicht einmal monoton mit T_e ansteigen!

¹ Auf die Untersuchungen von RUSSELL u. a. werden wir im folgenden Abschnitt noch zurückkommen.

² Auf das grundlegende Problem der Fixierung einer „spektroskopischen Temperaturskala“ unter Zuhilfenahme aller verwendbaren Beobachtungen über Linienintensitäten, BALMER-Kontinuum, usw. werden wir später eingehen.

³ Innerhalb so kleiner λ -Bereiche lassen sich die beiden Kurven so gut wie vollständig zur Deckung bringen. Wegen der ausführlichen Zahlenrechnungen auch zum folgenden vgl. evtl. A. UNSÖLD [629].

⁴ Interpoliert nach den in [628] als Funktion von Θ_0 berechneten Werten.

Tabelle 35. Farbtemperaturen T_F bzw. $\Theta_F = \frac{5040}{T_F}$ und absolute Gradienten.

		$\Theta_e = \frac{5040}{T_e}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,4
„Stern- materie“	Θ_F	λ 4000/5000	0,070	0,14	0,26	0,32	0,44	0,58	0,75	0,91	1,06	1,19	1,48	1,82
		λ 5000/6500	0,080	0,17	0,22	0,30	0,35	0,52	0,70	0,85	0,97	1,14	1,44	1,70
	Φ	λ 4000/5000	0,55	0,69	0,92	1,06	1,33	1,70	2,16	2,62	3,04	3,41	4,23	5,21
		λ 5000/6500	0,70	0,85	0,95	1,10	1,25	1,60	2,05	2,45	2,80	3,26	4,11	4,85
Reiner Wasser- stoff	Θ_F	λ 4000/5000	0,063	0,14	0,17	0,14	0,08	0,10	0,12	0,17	0,25			
		λ 5000/6500	0,080	0,09	0,19	0,23	0,20	0,22	0,16	0,17	0,29			

Um diese Fehler zu korrigieren, muß man offenbar die zu starke Wellenlängenabhängigkeit des Wasserstoff-Absorptionskoeffizienten $\sim \lambda^3$ durch Beimischung von Metallen „mildern“. Rechnet man mit unserer „Sternmischung“ (H: M = 13,7: 1), so ist bei $T_e > 7500^\circ$ die Farbtemperatur immer noch höher als die effektive Temperatur, so daß z. B. $T_e = 10000^\circ$ im photographischen Gebiet eine Farbtemperatur von $\sim 11000^\circ$, im visuellen $\sim 14000^\circ$ entspricht. Dies würde qualitativ zu der Greenwicher Bestimmung des absoluten Gradienten der A-Sterne passen, aber diese ist noch ziemlich unsicher und wird durch andere neuere Messungen nicht bestätigt (vgl. [601], [631]). Für $T_e < 7500$ liegt die Farbtemperatur stets ein wenig unterhalb der effektiven Temperatur. Unsere Rechnungen beruhen in diesem Bereich ganz auf der in Fig. 50 „korrigierten“ Frequenzabhängigkeit von $\kappa'_v/\bar{\kappa}$. Durch Anwachsen von $\kappa'_v/\bar{\kappa}$ im Violetten wird die Energieverteilungskurve dort herabgedrückt. Sie nähert sich also der PLANCKSchen Kurve für die Grenztemperatur des Sternes und imitiert eine PLANCKSche Kurve mit niedrigerer Temperatur, während bei hohen Temperaturen der Absorptionskoeffizient des Wasserstoffes und der Metalle nach der kurzwelligen Seite des Spektrums abnimmt und dadurch $T_F > T_e$ macht. Weiterhin führen die Rechnungen der Tabelle 35 für Sternmaterie auf eine Differenz der Gradienten für das visuelle (λ 5000/6500) und photographische λ 4000/5000 Gebiet $\Phi_{5750} - \Phi_{4500}$, die in dem Temperaturbereich $\Theta_e = 0,2$ bis 1,4 (B \rightarrow M-Sterne) um $\sim 0,45$ abnimmt. Dies paßt qualitativ zu den von H. JENSEN und BRILL (s. S. 50—51) gefundenen „Abweichungen vom

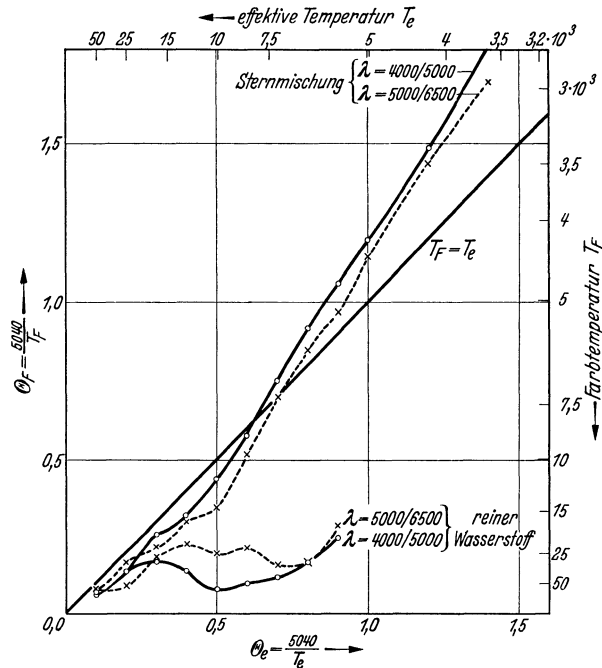


Fig. 54. Beziehung zwischen effektiver Temperatur und Farbtemperatur.

Fig. 50 „korrigierten“ Frequenzabhängigkeit von $\kappa'_v/\bar{\kappa}$. Durch Anwachsen von $\kappa'_v/\bar{\kappa}$ im Violetten wird die Energieverteilungskurve dort herabgedrückt. Sie nähert sich also der PLANCKSchen Kurve für die Grenztemperatur des Sternes und imitiert eine PLANCKSche Kurve mit niedrigerer Temperatur, während bei hohen Temperaturen der Absorptionskoeffizient des Wasserstoffes und der Metalle nach der kurzwelligen Seite des Spektrums abnimmt und dadurch $T_F > T_e$ macht. Weiterhin führen die Rechnungen der Tabelle 35 für Sternmaterie auf eine Differenz der Gradienten für das visuelle (λ 5000/6500) und photographische λ 4000/5000 Gebiet $\Phi_{5750} - \Phi_{4500}$, die in dem Temperaturbereich $\Theta_e = 0,2$ bis 1,4 (B \rightarrow M-Sterne) um $\sim 0,45$ abnimmt. Dies paßt qualitativ zu den von H. JENSEN und BRILL (s. S. 50—51) gefundenen „Abweichungen vom

*schwarzen Körper*¹. Die beobachteten Unterschiede sind jedoch etwa viermal größer. Immerhin kann man dies als eine qualitative Bestätigung unseres Ansatzes für das κ'_v/κ der Metalle betrachten. Wenn dieses Verhältnis mit $\frac{h\nu}{kT}$ so rasch anwachsen würde, wie dies unsere ursprüngliche Formel erwarten ließ, so würde von einer gewissen Temperatur T_e an nur noch Strahlung aus der obersten Schicht der Sternatmosphären mit der Grenztemperatur T_0 zu beobachten sein. Es wäre dann für alle Spektralgebiete $T_F = T_0 = T_e/1,19$, was kaum zu den Beobachtungen von H. JENSEN u. a. passen würde.

Zusammenfassend können wir sagen: Die für „Sternmaterie“ berechnete Frequenzabhängigkeit von κ'_v/κ gibt eine qualitativ richtige Darstellung der kontinuierlichen Sternspektren und ihrer Abweichungen vom PLANCKSchen Strahlungsgesetz. In quantitativer Hinsicht sind die Aussagen der *Theorie* ziemlich unsicher wegen der bekannten Unzuverlässigkeit der Berechnung des Metallabsorptionskoeffizienten und seiner Frequenzabhängigkeit. Von seiten der Beobachtung fehlt noch — wie schon in Kap. III betont wurde — eine endgültige Festlegung der absoluten Farbtemperaturskala der Sterne. Zur Zeit erscheint es daher als das Klügste, die Skala der effektiven Sterntemperaturen, die ja in jeder Hinsicht viel wichtiger sind, als die formal definierten Farbtemperaturen, nicht aus diesen, sondern aus der Gesamtheit der Beobachtungen über das BALMER-Kontinuum, Linienintensitäten usw. unter Zuhilfenahme der Theorie abzuleiten. Jedoch ist schon beim jetzigen Stand unserer Untersuchung nach Fig. 53—54 vorauszusehen, daß wir uns dabei nicht sehr weit von der provisorischen Skala der Tabelle 11 entfernen werden.

37. Historische und kritische Bemerkungen zur Theorie des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten und der kontinuierlichen Sternspektren. Literatur.

In den vorhergehenden Abschnitten dieses Kapitels haben wir — entsprechend der im Vorwort auseinandergesetzten Grundtendenz dieses Buches — versucht, die Grundlagen einer Theorie der kontinuierlichen Sternspektren in möglichst einfacher Weise zu entwickeln. Um nicht ein einseitiges Bild zu geben, müssen wir nachträglich kurz auf die historische Entwicklung und die noch nicht explizit erwähnte Literatur dieses Forschungsgebietes zurückkommen. Gleichzeitig wird dadurch das Verhältnis unserer Darstellungsweise zu der anderer Autoren deutlicher werden.

Nachdem H. A. KRAMERS [611] 1923 seine korrespondenzmäßige Theorie des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten entwickelt hatte, wurde diese alsbald von A. S. EDDINGTON [606] und E. A. MILNE [614] auf astrophysikalische Probleme angewandt. Die mit der Anwendung des BOHRschen Korrespondenzprinzips naturgemäß verknüpfte Unbestimmtheit wurde in den Jahren 1927 bis 1932 durch die Anwendung der SCHRÖDINGERSchen Wellenmechanik (1926) behoben. Die Arbeiten von Y. SUGIURA [627], J. A. GAUNT [607], A. W. MAUE [612], B. STRÖMGREN [626] u. a. zeigten, daß hinsichtlich der astrophysikalisch wichtigen Aussagen die KRAMERSsche Formel durch die Quantenmechanik bestätigt wird. Trotzdem so die physikalischen Grundlagen gesichert vorlagen und A. S. EDDINGTON 1926 in seinem Buch eine Behandlung des kontinuierlichen Sonnenspektrums gegeben hatte, die von unserer im Prinzip nicht so sehr verschieden ist, ging die astrophysikalische Forschung zunächst komplizierte Umwege. Teilweise wurde verkannt, in welcher grundlegender Weise der Absorptions-

¹ Möglicherweise rührt auch ein Teil der JENSENSchen Abweichungen vom schwarzen Körper von zusammenfließenden FRAUNHOFER-Linien her. Vgl. A. I. WESSELINK [334].

koefizient einer Sternatmosphäre von ihrer Zusammensetzung abhängt. Dann wurde vielfach mit dem arithmetischen Mittelwert von κ_ν statt des ROSSELANDschen gerechnet. Insbesondere hat eine von E. A. MILNE [616] viel gebrauchte Formel $\kappa \sim T^{-9/2} \cdot P_e$ zeitweilig eine erhebliche Rolle gespielt. Diese hat folgenden Ursprung: Nach (34,19 bis 23) ist der Opazitätskoeffizient pro neutrales Atom, mit $(Z + s) = 1$:

$$\bar{\kappa}_{\text{neutr. at.}} = 1,15 \cdot \frac{16 \pi^2}{3 \sqrt{3}} \cdot \frac{e^6}{c \cdot h \cdot k^2} \cdot \frac{e^{-u_1}}{T^2}. \quad (37,1)$$

Verbindet man diesen Ausdruck mit der SAHASchen Formel¹ (21,14)

$$\frac{n_1}{n_0} P_e = \frac{(2 \pi m)^{3/2} \cdot (k T)^{5/2}}{h^3} \cdot e^{-u_1}, \quad (37,2)$$

so erhält man, sofern nur die 1. Ionisation im Gang ist, durch Division den Opazitätskoeffizienten *pro Ion*:

$$\bar{\kappa}_{\text{Ion}} = 1,15 \cdot \frac{16 \pi^2}{3 \sqrt{3}} \cdot \frac{e^6 \cdot h^2}{c \cdot (2 \pi m)^{3/2}} \cdot \frac{P_e}{(h T)^{9/2}} = 3,35 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{P_e}{T^{4,5}}. \quad (37,3)$$

Der entsprechende Ausdruck für den *direkten* Mittelwert von κ_ν unterscheidet sich hiervon nur in dem Zahlenfaktor. Physikalisch läßt sich die Proportionalität mit P_e leicht verstehen, wenn man — wie dies z. B. KRAMERS ursprünglich tat — den Emissionsvorgang ins Auge faßt. Die Strahlungsemission pro Ion ist nämlich proportional der Zahl der einfangbaren Elektronen und daher $\sim P_e$. Die Gl. (37,3) scheint gegenüber (37,1) zunächst den Vorteil zu haben, daß darin die Ionisierungsspannung nicht mehr vorkommt. Dies ist aber nur scheinbar so: Wenn man den Absorptionskoeffizienten *pro Gramm Materie* ermitteln will, so muß man bei Anwendung von (37,1) erst den Bruchteil der neutralen, bei (37,3) den der ionisierten Atome² nach der SAHASchen Formel berechnen. Bei genauen Rechnungen für kompliziertere Elementgemische dürfte der erstere Weg etwas einfacher sein. Wenn es sich dagegen um nahezu vollständig ionisierte Materie handelt, ist (37,3) als Abschätzungsformel oft bequemer³. Der Umstand, daß auch in (37,3) der Ionisationsgrad der Materie berücksichtigt werden muß, ist in der Literatur oft nicht genügend beachtet worden.

Im Anschluß an die quantenmechanischen Rechnungen von SUGIURA, GAUNT u. a. haben manche Autoren große Mühe darauf verwandt, teils die letzten Feinheiten der quantenmechanischen Formeln noch zu berücksichtigen (vgl. z. B. S. CHANDRASEKHAR II [603]) oder der Mannigfaltigkeit der Absorption der Metallatome durch komplizierte Summierungen Rechnung zu tragen (vgl. z. B. W. JAHN [608], A. PANNEKOEK [622] u. a.). Wir haben schon im Abschn. 35 auseinandergesetzt, weshalb wir diese Bemühungen für verfrüht halten.

Trotzdem A. S. EDDINGTON, wie gesagt, schon 1926 die in Gl. (34,23) enthaltene Frequenzabhängigkeit des Metallabsorptionskoeffizienten hatte, behandelte A. PANNEKOEK 1930 [620] das Problem nach der auch in Abschn. 34 befolgten Methode, gelangte aber zu einem unrichtigen Resultat da er nicht berücksichtigte, daß die statistischen Gewichte der Wasserstoffzustände $\sim n^2$ sind. Auch in der großen Arbeit von H. N. RUSSELL [624] wurde diese unrichtige Formel benützt, die Fehler sind glücklicherweise zahlenmäßig meist nicht groß.

Einen großen Fortschritt gegenüber bis dahin vorliegenden Untersuchungen brachte die 1931 erschienene Arbeit von W. H. MCCREA: „Model Stellar Atmospheres“ [605]. Hier ist die Bedeutung der Zusammensetzung der Sternatmo-

¹ Der Zustandssummenfaktor $\frac{u_{r+1} \cdot 2}{u_r}$ werde im Mittel für alle Elemente = 1 gesetzt. $\frac{\chi_0}{kT}$ in (21,14) ist gleich dem u_1 in (37,1).

² Die beim gleichzeitigen Vorkommen mehrerer Ionisationsstufen nötigen Änderungen in Gl. (37,3) sind leicht zu übersehen.

³ Man vgl. (37,3) mit den Zahlenwerten der Tabelle 29!

sphären klar erkannt. Weiterhin hat MCCREA zum erstenmal den Intensitätssprung bei $\lambda 3647$, die Beziehung zwischen effektiver und Farbtemperatur und die Theorie der Absorptionslinien unter einheitlichen Gesichtspunkten behandelt. Die Arbeiten des Verf. [628, 629] versuchen diese Ansätze in mathematischer Hinsicht soweit zu vereinfachen, daß die Bedeutung aller einzelnen Faktoren durch die ganze Rechnung hindurch leicht verfolgt werden kann, so daß man die Möglichkeit bekommt, Theorie und Beobachtung in engeren Kontakt zu bringen. Das Schwergewicht dieser beiden Arbeiten liegt — wie schon hier bemerkt sein möge — auf Seiten der Theorie der FRAUNHOFER-Linien, die nur im Anschluß an die des kontinuierlichen Spektrums erfolgreich weiterentwickelt werden kann.

In großen Zügen dieselbe Tendenz verfolgt die schon vorher erschienene Arbeit von H. N. RUSSELL: "Opacity Formulae and Stellar Line Intensities" [624]. Soweit sie sich mit der Theorie des kontinuierlichen Spektrums beschäftigt, liegen die Hauptunterschiede gegenüber unserer Auffassung in folgendem: 1. Anwendung der unrichtigen PANNEKOEKSchen Formel für den Absorptionskoeffizienten, was aber nicht viel ausmacht. 2. Annahme eines Häufigkeitsverhältnisses Wasserstoff : Metalle ≈ 1000 bis $2000 : 1$. Dies macht einen Vergleich der RUSSELLSchen Resultate mit unseren höchst lehrreich, wenn man auch heute schon mit ziemlicher Sicherheit sagen kann, daß dieses Verhältnis zu groß ist. Auf alle mit der Theorie der Absorptionslinien usw. zusammenhängenden Fragen müssen wir später zurückkommen.

Eine gleichzeitig mit der zweiten Arbeit des Verf. entstandene Abhandlung von R. v. D. R. WOOLLEY [632] über den Zusammenhang von Farbtemperatur und effektiver Temperatur führt zu ganz ähnlichen Ergebnissen; ebenso eine 1 Jahr später unter Ignorierung¹ alles vorher Vorhandenen geschriebene Note von A. PANNEKOEK [621]. Die ausführliche Mitteilung A. PANNEKOEKS [622] verhält sich zu unserer Darstellung der Theorie der kontinuierlichen Spektren folgendermaßen: Im großen und ganzen ist PANNEKOEKS Berechnung des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten der unserigen ziemlich ähnlich, die Wasserstoffhäufigkeit wird größer angenommen ($H : M \approx 1000 : 1$), außerdem wird versucht, den Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht in der in Abschn. 25 auseinandergesetzten Weise Rechnung zu tragen, was — wie schon dort bemerkt wurde — höchst bedenklich ist. Daß die Berechnung des Absorptionskoeffizienten der Metalle durch Anwendung der Wasserstoffformeln auf die einzelnen Absorptionskanten keinen Fortschritt darstellt, haben wir schon bemerkt. Auf PANNEKOEKS Behandlung der Linienintensitäten werden wir später im Zusammenhang mit unseren diesbezüglichen Entwicklungen zurückkommen.

Am Schluß dieses Kapitels möge noch einmal — um mit R. EMDEN zu sprechen — auf einige „fühlbare Lücken der Erkenntnis“ teils experimenteller (1—3), teils theoretischer Art (4—6) hingewiesen werden:

1. Festlegung der *absoluten* Gradienten (vgl. Kap. III).
2. Weitere Messungen des Intensitätssprunges an der Grenze der BALMER-Serie. Entsprechende Untersuchungen an der Grenze der PASCHEN-Serie.
3. Quantitative Untersuchungen über kontinuierliche Gasspektren terrestrischer Lichtquellen.
4. Der kontinuierliche Absorptionskoeffizient der Metallatome.
5. Ausdehnung unserer Theorie der spektralen Energieverteilung nach dem Ultravioletten und Ultraroten Spektralgebiet (PASCHEN-Kontinuum!).
6. Einfluß der Linien auf die kontinuierlichen Spektren der Sterne (vgl. Abschn. 32 und Kap. III).

¹ Hierzu [630].

VII. Kapitel.

Der Aufbau der Sternatmosphären.

38. Gasdruck und Strahlungsdruck.

In den vorhergehenden Kapiteln haben wir wiederholt von dem seinerzeit durch primitive Anwendung der SAHASchen Formel gefundenen Mittelwert des „Elektronendruckes der Sternatmosphären“ von ~ 100 bar Gebrauch gemacht. Wir wollen nun die Theorie der Sternatmosphären in diesem Punkt weiter entwickeln und den Elektronendruck P_e und den Gasdruck P_g in Abhängigkeit von der optischen Tiefe τ berechnen. Gleichzeitig erhalten wir damit den Zusammenhang zwischen τ und der geometrischen Tiefe $t = -h$ in km (gerechnet von einem willkürlich festgesetzten Nullniveau aus). Mit anderen Worten: wir werden erfahren, wie dick die Schichten der Sternatmosphären sind, welche einen erheblichen Beitrag zu ihrer Ausstrahlung liefern.

Das mechanische Gleichgewicht einer Sternatmosphäre¹ kommt zustande durch das Wechselspiel von Gravitation — *Schwerebeschleunigung* g — einerseits und *Gasdruck* + *Strahlungsdruck* andererseits.

Fassen wir ein Volumelement mit der Grundfläche 1 cm^2 und der Dicke² dh ins Auge, so ist dessen Schwere $g \cdot \rho \cdot dh$, wo ρ die *Dichte* der Materie bedeutet. Herrscht zwischen Grund- und Deckfläche des betreffenden Volumelementes eine Gas- bzw. Strahlungsdruckdifferenz dP_g bzw. dP_r , so wird also

$$dP_g + dP_r = -g \cdot \rho \cdot dh. \quad (38,1)$$

Der *Strahlungsdruck* P_r ist nach (4,9) gleich $1/3$ der Strahlungsdichte, also nach (27,12) und (27,14)

$$P_r = \frac{1}{3} \cdot \frac{4\sigma}{c} T^4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sigma}{c} T_e^4 \left(1 + \frac{3}{2}\tau\right). \quad (38,2)$$

Die der Schwerebeschleunigung g analoge Strahlungsbeschleunigung g_r wird also

$$g_r = -\frac{dP_r}{\rho dh} = \bar{\kappa} \frac{dP_r}{d\tau} = \frac{\kappa \cdot \sigma}{c} \cdot T_e^4. \quad (38,3)$$

Diese Art der Betrachtung ist natürlich nur korrekt, solange es möglich ist, die streng nur für isotrope Strahlung gültige Formel $P_r = u/3$ anzuwenden. Man kann aber (38,3) auch folgendermaßen direkt ableiten:

Dem durch die Sternatmosphäre fegenden Strahlungsstrom πF entspricht nach (4,5) ein Impulsstrom $\frac{\pi F}{c}$ pro cm^2 . Von diesem wird auf eine Schicht der Dicke dh der Bruchteil $\kappa \rho dh$ übertragen³. Da andererseits Masse \times Strahlungsbeschleunigung $g_r \approx$ übertragener Impuls pro sek ist, erhält man

$$\rho dh \cdot g_r = \kappa \rho dh \cdot \frac{\pi F}{c}$$

oder — wegen $\pi F = \sigma T_e^4$ — wieder

$$g_r = \frac{\kappa \cdot \sigma}{c} T_e^4. \quad (38,4)$$

Wie man bei dieser Art der Betrachtung ohne weiteres erkennt, addieren sich die Beiträge der einzelnen Spektralgebiete zu g_r direkt. Es wäre daher richtiger,

¹ Wir beschränken uns vorerst auf den *statischen* Fall. Andere Möglichkeiten werden uns später begegnen.

² Die Höhe h werde nach außen *positiv* gezählt.

³ Man macht sich leicht klar, daß dies auch bei Berücksichtigung der Neigung der verschiedenen Strahlenbündel streng gilt.

statt des ROSSELANDSchen *Opazitätskoeffizienten* einen arithmetischen Mittelwert über κ_ν zu gebrauchen. Da jedoch in Spektralbezirken (z. B. Linien), wo κ_ν sehr groß ist, der Strahlungsstrom abgesehen von den alleräußersten Schichten stark zurückgedämmt wird, so können wir im allgemeinen auch in (38,3 bzw. 4) ruhig den ROSSELANDSchen Mittelwert anwenden.

Nicht erlaubt ist dies unter Umständen in den äußersten Schichten, wo der selektive Strahlungsdruck — hervorgerufen durch das Anwachsen des Absorptionskoeffizienten innerhalb einzelner Linien oder Absorptionskanten — die Oberhand gewinnt, sowie in den Atmosphären sehr heißer Übergiganten. Das erstere Problem werden wir im Zusammenhang mit der Theorie der Sonnenchromosphäre behandeln. Beim zweiten Problem handelt es sich um Atmosphären, bei denen — wie wir sahen — außerdem die Streuung durch freie Elektronen wichtig wird im Vergleich zur eigentlichen Absorption durch Photoeffekt. Die ganze Theorie müßte daher in grundlegender Weise abgeändert werden; wir werden diesen Fall vorerst beiseite lassen.

Kehren wir zur Berechnung des hydrostatischen Gleichgewichtes der normalen Sternatmosphären zurück, so ist also nach (38,1 u. 4):

$$-\frac{dP_g}{d h} = g - g_r \quad \text{mit} \quad g_r = \bar{\kappa} \cdot \frac{\sigma}{c} T_e^4. \quad (38,5)$$

Führen wir wieder die optische Tiefe $d\tau = -\bar{\kappa} \cdot \rho \, d h$ ein und bezeichnen

$$g_{\text{eff}} = g - g_r \quad (38,6)$$

als *effektive* Schwerebeschleunigung, so nimmt (38,5) die Form an:

$$\boxed{dP_g/d\tau = g_{\text{eff}}/\bar{\kappa}.} \quad (38,7)$$

Um einen ersten Überblick über die Drucke usw. in den Sternatmosphären zu bekommen, integrieren wir diese Gleichung unter der *Annahme*, daß $g_{\text{eff}}/\bar{\kappa}$ *innerhalb einer Atmosphäre als konstant betrachtet* werden kann. Dann gilt für den Druck P_g in der optischen Tiefe $\tau = \tau_0$:

$$P_g/\tau_0 = g_{\text{eff}}/\bar{\kappa}. \quad (38,8)$$

Wie berechnen wir nun am einfachsten für eine Sternatmosphäre mit vorgegebener effektiver Temperatur T_e und Schwerebeschleunigung g den Gasdruck P_g usw. in einer bestimmten optischen Tiefe τ_0 (z. B. für die Photosphäre $\approx 0,6$)?

In Fig. 55 haben wir zunächst — nach [629] — mit Hilfe der Tabelle 22 (P_g als Funktion von P_e und $\Theta = 5040/T$) und Tabelle 29 ($\bar{\kappa}$ als Funktion von P_e und Θ) den Absorptionskoeffizienten $\bar{\kappa}$ für $\Theta = 0,3$ bis $1,6$ als Funktion von P_g aufgetragen. Die Kurven sind der Deutlichkeit wegen abwechselnd gestrichelt und ausgezogen gezeichnet; ihr etwas unregelmäßig scheinender Verlauf ist durch die Ionisationsverhältnisse der einzelnen Elementgruppen unserer Sternmischung bedingt¹.

Solange $g_r \ll g$ und also, wie in der Mehrzahl der Sternatmosphären, $g_{\text{eff}} \approx g$ ist, können wir nun folgendermaßen vorgehen:

Wir berechnen zunächst die zu T_e und τ_0 gehörige Temperatur

$$T^4 = \frac{1}{2} T_e^4 \left(1 + \frac{3}{2} \tau_0 \right) \quad (38,9)$$

und erhalten so $\Theta = 5040/T$. Dann suchen wir in Fig. 55 den Schnittpunkt der unter 45° nach rechts unten verlaufenden Geraden

$$P_g \cdot \bar{\kappa} = \tau_0 \cdot g = \text{konst.} \quad (38,10)$$

¹ Eine analoge Rechnung mit anderen Ausgangsannahmen — vgl. Abschn. 37 — hat später A. PANNEKOEK [622, Fig. 5] ausgeführt.

mit der $\bar{\kappa}$ -Kurve für Θ und erhalten so P_g und den mittleren Absorptionskoeffizienten $\bar{\kappa}$. Aus P_g und Θ berechnet man nach Tabelle 22 leicht den Elektronendruck P_e .

Als Beispiel wollen wir die *Sonnenatmosphäre* ($T_e = 5740^\circ$; $g = 2,74 \cdot 10^4 \text{ cm sek}^{-2}$) in einer optischen Tiefe $\tau_0 = 0,65$ untersuchen¹:

Die Temperatur in dieser Tiefe wird nach (38,9) $T = 5720^\circ$ ($\Theta = 0,881$), also nahezu gleich T_e , wie zu erwarten war. (38,10) lautet nun:

$$\log P_g + \log \bar{\kappa} = 4,25. \quad (38,11)$$

Trägt man diese Gerade in Fig. 55 ein, so liest man am Schnitt mit der (interpolierten) Kurve für $\Theta = 0,88$ ab:

$$\log \bar{\kappa} = 0,81 \quad \text{und} \quad \log P_g = 3,44; \quad \text{d. h.} \quad P_g \sim 2 \text{ mm Hg.} \quad (38,12)$$

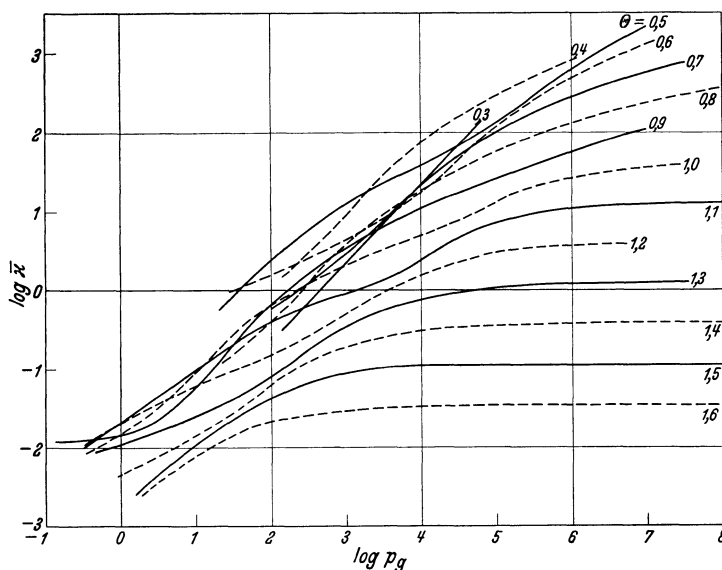


Fig. 55. Opazitätskoeffizient $\bar{\kappa}$ als Funktion von P_g und $\Theta = 5040/T$. Nach [629].

Aus Tabelle 22 erhält man aus Θ und P_g den Elektronendruck

$$\log P_e = 1,72; \quad P_e \approx 52 \text{ bar} \quad (38,13)$$

in naher Übereinstimmung mit dem FOWLER-MILNESCHEN Wert. Für die Strahlungsbeschleunigung erhält man nachträglich aus (38,3 u. 12) $g_r \approx 14 \ll g$, so daß ihre Vernachlässigung vollkommen gerechtfertigt erscheint.

Wenn g_r berücksichtigt werden muß, so geht man am einfachsten folgendermaßen vor:

Für eine Anzahl von P_e -Werten, die in der Nähe des zu erwartenden gewählt werden, berechnet man mit Tabelle 22 und 29 den Absorptionskoeffizienten $\bar{\kappa}$ und den Gasdruck P_g . Dann erhält man aus (38,8) die effektive Schwerebeschleunigung g_{eff} . Mit $\bar{\kappa}$ gibt andererseits (38,3) die Strahlungsbeschleunigung und damit $g = g_{\text{eff}} + g_r$ als Funktion von P_e . Durch Interpolieren findet man nun rückwärts das zu dem vorgegebenen g gehörende P_e und damit $\bar{\kappa}$ und P_g .

Diese Untersuchungen über die Mittelwerte von $\bar{\kappa}$, P_e , P_g usw. werden später einen der *Grundpfeiler unserer Theorie der stellaren Absorptionslinien* bilden. Diese wird in erster Linie noch die Frage zu erörtern haben, welche optische Tiefe $\tau_0(T_e, g)$ für die Entstehung der Linien maßgebend ist.

¹ Der Leser möge selbst einige analoge Probleme durchrechnen!

Zuvor aber soll noch ermittelt werden, wie $\bar{\kappa}$, $P_g \dots$ im einzelnen von der Tiefe h in der Sternatmosphäre abhängen. Gleichzeitig können wir uns damit ein Urteil über die Genauigkeit und die Grenzen des im vorliegenden Abschnitt angewandten Näherungsverfahrens bilden.

39. Genaue Berechnung der Druck- und Temperaturschichtung einiger Sternatmosphären.

Seit K. SCHWARZSCHILDS grundlegender Arbeit [705] = [521] vom Jahre 1905 haben viele Astrophysiker sich bemüht, die Druckschichtung usw. der Sternatmosphären nach Gl. (38,7) auf *analytischem* Wege zu berechnen.

Selbst wenn man den *Strahlungsdruck* — wie wir das in diesem Abschnitt ebenfalls zunächst tun werden — *vernachlässigt*, ist aber eine solche Behandlungsweise nahezu aussichtslos, da $\bar{\kappa}$ von P_g sowie $\Theta = 5040/T$ und damit τ in einer höchst komplizierten Weise abhängt, die sich jeder Formulierung durch geschlossene Ausdrücke entzieht, sobald man der wahren Zusammensetzung der Sterne einigermaßen Rechnung tragen will.

Es bleibt daher nichts anderes übrig, als die Lösung der Gl. (38,7):

$$\frac{dP_g}{d\tau} = \frac{g}{\bar{\kappa}(P_g, \Theta)} \quad (39,1)$$

auf rein *numerischem* Wege zu versuchen.

Wählen wir als unabhängige Variable nach H. N. RUSSELL $\Theta = 5040/T$, so gibt zunächst (mit $\Theta_0 = \frac{5040}{T_0} = \frac{5040}{2^{-1/4} \cdot T_e}$):

$$\left(\frac{\Theta_0}{\Theta}\right)^4 = 1 + \frac{3}{2}\tau \quad (39,2)$$

die Verknüpfung von Θ und τ .

Um den weiteren Gang des Verfahrens deutlich zu machen, wollen wir unser Beispiel vom vorhergehenden Abschnitt wieder aufgreifen und die *Schichtung der Sonnenatmosphäre* genauer untersuchen.

Tabelle 36. Schichtung der Sonnenatmosphäre. Nach [629].

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\Theta = \frac{5040}{T}$	τ	$\log \tau$	$\log \bar{\kappa}_0$ (39,4)	$\log P_g$ (39,5)	$\log \bar{\kappa}_1$	$\log P_g$	$\log \bar{\kappa}_2$	$\log P_e$	μ	$\frac{3,5 \cdot 10^7}{\mu \Theta}$	h km	$\log P_r$
(1,037)	0,01	-2,00	—	—	—	2,60	0,04	0,77	$\sim 2,72$	$1,24 \cdot 10^7$	138	0,15
1,0	0,116	-0,94	0,59	3,22	0,40	3,27	0,41	1,34	2,76	1,27	54	0,22
0,9	0,53	-0,27	0,92	3,55	0,84	3,62	0,86	1,84	2,75	1,41	7	0,40
0,8	1,25	+0,10	1,10	3,73	1,12	3,80	1,15	2,19	2,73	1,60	-20	0,60
0,7	2,62	0,42	1,26	3,89	1,24	3,95	1,23	2,45	2,71	1,84	-46	0,84
0,6	5,40	0,73	1,42	4,05	1,30	4,12	1,37	2,85	2,63	2,22	-80	1,10
0,5	11,9	1,08	1,59	4,22	1,70	4,28	1,76	3,47	2,29	3,06	-121	1,42
0,4	30,1	1,48	1,79	4,42	2,15	4,41	2,14	4,02	1,65	5,30	-172	1,81
0,3	96,1	1,98	2,05	4,68	2,00	4,59	1,90	4,28	1,40	8,33	-300	2,31

In Tabelle 36 ist also nach (39,2) mit $\Theta_0 = 1,041$ zunächst τ und $\log \tau$ als Funktion von Θ angegeben. Um nun P_g als Funktion von Θ bzw. τ zu berechnen, gehen wir aus von dem in Abschn. 38 ermittelten genäherten Wertetripel (nullte Näherung):

$$\tau_0 = 0,65 \text{ (bzw. } \Theta = 0,88_1), \quad \log \bar{\kappa}_0 = 0,81, \quad \log P_g = 3,44. \quad (39,3)$$

In dessen Nähe stellen wir mit Hilfe unserer Fig. 55 den geschätzten Verlauf von $\bar{\kappa}$ in der Atmosphäre durch eine Interpolationsformel als Funktion von P_g

allein dar, wobei aber der Änderung von $\bar{\kappa}$ mit T implizit schon entsprechend der nullten Näherung näherungsweise Rechnung getragen wird. Wir finden so¹

$$\log \bar{\kappa}_0 = -2,63 + \log P_g. \quad (39,4)$$

Durch Eintragen in die Grundgleichung (39,1) und Integrieren erhält man sodann:

$$\text{oder} \quad \left. \begin{aligned} P_g d P_g &= 11,7 \cdot 10^8 d\tau \\ \log P_g &= 3,685 + \frac{1}{2} \log \tau. \end{aligned} \right\} \quad (39,5)$$

Die nach (39,4 u. 5) berechneten Zahlenwerte von $\log \kappa_0$ und $\log P_g$ sind in Spalte 4 und 5 unserer Tabelle angegeben.

Um ein Bild von der Richtigkeit unseres Ansatzes (39,4) zu bekommen, so daß wir ihn gegebenenfalls verbessern können, lesen wir zu Θ und P_g (Spalte 1 und 5) aus Fig. 55 verbesserte Werte des Absorptionskoeffizienten $\log \kappa_1$ ab (Spalte 6). Die gute Übereinstimmung von Spalte 6 und 4 zeigt, daß (39,4) richtig gewählt war, so daß wir die κ_1 -Werte als Grundlage für eine 2. Näherung benutzen können:

Schreibt man (39,1) in der Form

$$d P_g = \frac{g}{\bar{\kappa}_1(\tau)} d\tau, \quad (39,6)$$

so erhält man durch graphische Integration² leicht verbesserte Werte von $P_g(\tau)$; vgl. Spalte 7 unserer Tabelle. Aus Θ und diesen P_g berechnet man nach Fig. 55 die verbesserten Absorptionskoeffizienten $\bar{\kappa}_2$ und nach Tabelle 22 den $\log P_g$. Wie man sieht, konvergiert dieses Iterationsverfahren bei geschickter Wahl der Anfangsfunktion sehr rasch³. Außerdem zeigt sich, daß die nach dem groben Näherungsverfahren des Abschn. 38 gewonnenen Mittelwerte von $\bar{\kappa}$, P_g usw. vom Richtigen gar nicht weit entfernt sind, so daß man in den meisten Fällen — im Hinblick auf den approximativen Charakter unserer physikalischen Grundlagen — damit zufrieden sein kann.

Um vollends die eigentliche Schichtung der Sonnenatmosphäre, d. h. die Abhängigkeit der Temperatur, des Druckes usw. von der Höhe h zu berechnen, verbinden wir die Gl. (38,5) mit der Gasgleichung (R = Gaskonstante):

$$\varrho = P_g \cdot \frac{\mu}{R T} \quad (39,7)$$

und erhalten so:

$$\frac{d \ln P_g}{d h} = - \frac{g \mu}{R T}. \quad (39,8)$$

Dabei ist zu beachten, daß das Molekulargewicht μ nach Tabelle 22 selbst von der Tiefe in der Atmosphäre abhängt. Fassen wir es innerhalb der Sonnenatmosphäre als Funktion von P_g allein auf, so können wir die „barometrische Höhenformel“ (39,8) in der Form

$$d h = - \frac{R T}{g \cdot \mu(P_g)} \cdot d \ln P_g = - 3,50 \cdot 10^7 \cdot \frac{1}{\mu \Theta} d \log_{10} P_g \quad (39,9)$$

¹ Trotz der formalen Ähnlichkeit dieser Gleichung mit (38,11) ist deren physikalische Bedeutung völlig verschieden. (39,4) approximiert den Verlauf von $\bar{\kappa}$ durch die *ganze* Atmosphäre; Gl. (38,11) bezieht sich dagegen nur auf die eine Tiefe τ_0 .

² Für kleine τ benützt man zweckmäßig — auch im folgenden — passende Interpolationsformeln. Vgl. A. UNSÖLD [629; S. 261 ff.].

³ Ein mathematisch strenger Konvergenzbeweis wäre trotzdem wünschenswert.

leicht graphisch integrieren. In Tabelle 36 ist zunächst als Spalte 10 das Molekulargewicht, dann der Faktor $\frac{3.5 \cdot 10^7}{\mu \Theta}$ und endlich in Spalte 12 die Höhe h in km angegeben. Das — willkürliche — Nullniveau von h ist dabei so gewählt, daß es auf $\tau = 2/3$ fällt. Wie man sieht, stammt der überwiegende Teil der Sonnenstrahlung — in dem früher erläuterten Sinne — aus einem Schichtpaket von kaum 100 km Dicke. Wir erhalten so nachträglich eine Rechtfertigung dafür, daß wir bis hart an den Sonnenrand hin die Sonnenatmosphäre stets als „ebenes Problem“ behandelt haben. Weiterhin wird so, wie K. SCHWARZSCHILD [705] bemerkt hat, verständlich, weshalb uns der Sonnenrand so scharf begrenzt erscheint: 100 km auf der Sonne erscheinen uns ja unter einem Gesichtswinkel von nur 0''14!

Nachträglich wollen wir auch noch den Strahlungsdruck P_r nach (38,2) berechnen (Spalte 13) und mit dem Gasdruck P_g (Spalte 7) vergleichen: Durch die ganze Tabelle hindurch ist $P_r \ll P_g$. Erst bei $\tau \ll 0,01$ kehrt sich dieses Verhältnis allmählich um, indem bei $\tau = 0$ der Gasdruck $P_g \rightarrow 0$ geht, während P_r entsprechend der Grenztemperatur T_0 dem endlichen Wert 1,4 bar zustrebt. Trotzdem ist für das Gleichgewicht der Atmosphäre der Strahlungsdruck auch hier belanglos, da sein Gefälle, auf das es ja allein ankommt, immer noch kleiner ist, als das des Gasdruckes; d. h. $g_r \ll g$. Namentlich in der halbpopulären Literatur werden die Begriffe Strahlungsdruck P_r und Strahlungsbeschleunigung ($\sim \text{grad } P_r$) oft vermengt und infolgedessen dem Strahlungsdruck eine übertriebene Bedeutung beigemessen.

Um einen Einblick in die Variationsbreite der Zustandsgrößen der Sternatmosphären zu geben, behandeln wir als zweites Beispiel einen roten Riesenstern mit der effektiven Temperatur $T_e = 3740^\circ$ ($T_0 = 3140^\circ$, $\Theta_0 = 1,6$) und der Schwerebeschleunigung $g = 10 \text{ cm/sek}^{-2}$.

Tabelle 37. Atmosphäre eines roten Riesensternes. Nach [629].

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12a	12b	13	
$\Theta = \frac{5040}{T}$	τ	$\log \tau$	$\log \bar{\kappa}_0$	$\log P_g$	$\log \bar{\kappa}_1$	$\log P_g$	$\log \bar{\kappa}_2$	$\log P_e$	μ	h in 1000km (über $\tau = 2/3$)	λ_{4000} $h \nu / k T$	$\kappa'_\nu \bar{\kappa}$	τ_ν (λ_{4000})	
1,59	0,01	-2,00				1,18	-1,95	-1,41	2,79	229	11,30	4,2	0,042	
1,55	0,10	-1,00				1,77	-1,54	-0,82	2,79	103	11,00	3,8	0,40	
1,5	0,20	-0,70	-1,15	1,97	-1,40	1,92	-1,40	-0,67	2,79	68,7	10,65	3,4	0,76	
1,4	0,47	-0,33	-0,89	2,08	-1,15	2,13	-1,13	-0,34	2,79	19,8	9,94	2,7	1,56	
1,3	0,86	-0,07	-0,70	2,15	-1,00	2,27	-0,92	-0,08	2,78	—	15,7	9,23	2,1	2,46
1,2	1,44	0,16	-0,54	2,22	-0,72	2,37	-0,65	+0,19	2,78	—	43,1	8,52	1,7	3,55
1,1	2,31	0,36	-0,39	2,27	-0,28	2,43	-0,22	+0,48	2,76	—	60,2	7,81	1,4	4,88
1,0	3,70	0,57	-0,24	2,33	0,00	2,46	+0,05	0,74	2,74	—	70,5	7,10	1,2	6,65
0,9	6,00	0,78	-0,09	2,39	+0,13	2,49	+0,20	0,94	2,72	—	81,4	6,39	1,0	9,21
0,8	10,0	1,00	+0,06	2,46	+0,06	2,54	+0,14	1,04	2,71	—	103	5,68	0,9	12,95
0,7	17,5	1,24	+0,24	2,53	+0,15	2,61	+0,20	1,36	2,64	—	137	4,97	0,85	19,43
0,6	33,1	1,52	+0,43	2,60	+0,45	2,70	+0,50	1,90	2,33	—	190	4,26	0,8	
0,5	69,3	1,84	+0,66	2,70	+0,90	2,77	+0,96	2,35	1,69	—	252	3,55	0,8	

Die Berechnung der Druckschichtung usw. verläuft ganz analog wie bei der Sonne; bezüglich der einzelnen Interpolationsformeln sei auf die Originalarbeit (s. S. 144) verwiesen. Nur die letzten Spalten der Tabelle 37 enthalten etwas Neues:

Da bei großen $\frac{h \nu}{k T}$ nach Fig. 50 der Absorptionskoeffizient κ_ν ziemlich stark von der Wellenlänge abhängt, so ist die optische Tiefe z. B. für sichtbare

Licht von der für die Gesamtstrahlung gültigen verschieden. In den Spalten 12a und b ist nun — als Illustration hierzu und im Hinblick auf die Theorie der FRAUNHOFER-Linien — für λ 4000 zunächst $\frac{h\nu}{kT}$ und dann $\kappa'_\nu/\bar{\kappa}$ angegeben. Gemäß der Definition der optischen Tiefen erhält man hieraus leicht

$$\tau_\nu = \int_0^{\bar{\tau}} \kappa'_\nu/\bar{\kappa} d\tau \quad (39,10)$$

durch graphische Integration (Spalte 13).

Beim Vergleich der Sonnenatmosphäre (Tabelle 36) mit der des roten Riesensternes (Tabelle 37) fällt auf: Bei gleichen τ verhalten sich die Drucke P_g bzw. P_e etwa wie 100:1. Dies rührt natürlich daher, daß cet. par. der Druck an der Basis einer bestimmten Gasschicht proportional deren Gewicht und daher $\sim g$ ist. Daß nicht das Verhältnis der g selbst herauskommt, hängt in leicht erkennbarer Weise mit der Druck- und Temperaturabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten zusammen. Die geometrische Dicke der Atmosphäre des Riesensternes ist ~ 2000 mal größer als die der Sonnenatmosphäre — in erster Linie wieder wegen der kleinen Schwerebeschleunigung g . Daß auch hier der Strahlungsdruck keine erhebliche Rolle spielt, lehrt eine einfache Überschlagsrechnung.

Damit schließen wir die Theorie der kontinuierlichen Spektren und des Aufbaues der Sternatmosphären vorläufig ab und wenden uns den physikalischen Grundlagen einer Theorie der stellaren Absorptionslinien zu.

Dritter Teil.

Physikalische Grundlagen der Theorie der FRAUNHOFER-Linien.

VIII. Kapitel.

Physikalische Grundlagen der Theorie der FRAUNHOFER-Linien. 1. Teil: Klassische Theorie.

40. Elektronentheorie (H. A. LORENTZ). Absorption, Emission und Dispersion des harmonischen Oszillators. Gesamtabsorption.

Ebenso wie die Theorie der kontinuierlichen Sternspektren werden wir nunmehr die der FRAUNHOFER-Linien in zwei Schritten entwickeln:

Zunächst versuchen wir, uns eine möglichst eingehende Kenntnis der Wellenlängenabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten innerhalb einer Linie zu verschaffen und die am Strahlungsaustausch beteiligten *Elementarprozesse* kennenzulernen (Kap. 8—10). Soweit betreiben wir reine Laboratoriumsphysik.

Sodann wenden wir uns dem für die Astrophysik charakteristischen Problem des *Strahlungsaustausches* in den Sternatmosphären zu (Kap. 12ff.): Während in einem Absorptionsrohr die wegabsorbierte Strahlungsenergie restlos beseitigt wird, teils an den Wänden, teils im Gas selbst, muß man in einer Sternatmosphäre die *weitergestreute* Strahlung und die eigene *Emission* des Gases in Rechnung stellen. Die mathematischen Hilfsmittel liefert wieder die geeignet erweiterte Theorie des Strahlungsgleichgewichtes.

In dem vorliegenden Kapitel wollen wir zunächst die Wechselwirkung von Strahlung und Materie mit Hilfe der H. A. LORENTZschen *Elektronentheorie* untersuchen. Wir beschreiben also wie in Kap. 2, Abschn. 6, auf den wir zum Teil zurückgreifen können, die Materie durch *gedämpfte harmonische Oszillatoren*. In Kap. 9 wird sich zeigen, daß wir die so erhaltenen Formeln mit geringfügigen Änderungen in die Quantentheorie herübernehmen können. Es ist daher wohl der Mühe wert, das durch seine Einfachheit und Anschaulichkeit ausgezeichnete klassische Modell genauer durchzurechnen.

Die Lichtfortpflanzung in einem absorbierenden und dispergierenden Medium, also insbesondere auch die Absorption und Dispersion innerhalb einer Spektrallinie können wir am einfachsten beschreiben unter Zuhilfenahme eines komplexen Brechungsindex

$$n = n(1 - i\kappa). \quad (40,1)$$

n bedeutet dabei den gewöhnlichen Brechungsindex, κ bezeichnen wir als Absorptionsindex, i ist die imaginäre Einheit. Eine in der z -Richtung fortschreitende Lichtwelle der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu = 2\pi c/\lambda$ wird nun beschrieben durch

$$A = A_0 e^{i\omega\left(t - \frac{n}{c}z\right)} = A_0 e^{-\frac{\omega n \kappa}{c} \cdot z} \cdot e^{i\omega\left(t - \frac{n}{c}z\right)}, \quad (40,2)$$

wo A bzw. A_0 den elektrischen oder magnetischen Vektor charakterisieren. Der Ausdruck (40,2) unterscheidet sich von den gewohnten für nichtabsorbierende Medien formal nur dadurch, daß n durch \mathfrak{n} ersetzt ist. Physikalisch äußert sich dies darin, daß die Intensität (\sim Amplitude²) in der z -Richtung mit $e^{-\frac{2\omega\mathfrak{n}\kappa}{c}\cdot z}$ abnimmt.

Es ist also der Absorptionskoeffizient pro cm:

$$k = \frac{2\omega\mathfrak{n}\kappa}{c} = \frac{4\pi\mathfrak{n}\kappa}{\lambda}. \quad (40,3)$$

Nach der elektromagnetischen Lichttheorie ist andererseits der komplexe Brechungsindex \mathfrak{n} in einfacher Weise verknüpft mit der

$$\text{Polarisierbarkeit } \alpha = \frac{\text{Dipolmoment}}{\text{Feldstärke}}$$

(unter Berücksichtigung der Phase; α ist also hier auch komplex!) der Partikel des betrachteten Mediums. Es ist

$$\mathfrak{n}^2 - 1 = 4\pi\mathfrak{N} \cdot \alpha, \quad (40,4)$$

wo \mathfrak{N} die Zahl der Partikel — in unserem Falle also der harmonischen Oszillatoren der betrachteten Eigenfrequenz — pro cm^3 bedeutet. Wir rechnen im folgenden mit nur *einer* Oszillatorenart, deren Eigenfrequenz $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ sei, die Verallgemeinerung für mehrere Eigenfrequenzen bietet keine Schwierigkeit. Dann ist

$$\alpha = \frac{e \cdot x}{E} \quad (40,5)$$

wo e = Ladung des Oszillators (Elektronenladung),

x = Ausschlag des Oszillators,

$E = E_0 e^{i\omega t}$ = elektrische Feldstärke der Lichtwelle am Ort des Oszillators.

Um das Mitschwingen des Oszillators im Feld der Lichtwelle beschreiben zu können, greifen wir auf unseren Ansatz von Abschn. 6 zurück: Nennen wir wieder γ die Dämpfungskonstante¹ des Oszillators, so gilt für dessen Schwingung die bekannte Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma \cdot \dot{x} = \frac{e}{m} E. \quad (40,6)$$

Machen wir den üblichen Ansatz $x = x_0 e^{i\omega t}$, so wird

$$(-\omega^2 + \omega_0^2 + i\omega\gamma) x = \frac{e}{m} E \quad (40,7)$$

und damit

$$\mathfrak{n}^2 - 1 = 4\pi\mathfrak{N} \cdot \frac{e x}{E} = \frac{4\pi\mathfrak{N} e^2}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}. \quad (40,8)$$

Den gewöhnlichen Brechungsindex und den Absorptionskoeffizienten erhalten wir leicht vollends durch Trennung von reellem und imaginärem Teil. Nach (40,1) ist

$$\mathfrak{n}^2 - 1 = n^2(1 - \kappa^2) - 1 - i \cdot 2n^2\kappa. \quad (40,9)$$

Die rechte Seite von (40,8) multiplizieren wir oben und unten mit $\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega$ und finden so:

$$n^2(1 - \kappa^2) - 1 = \frac{4\pi\mathfrak{N} e^2}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (40,10)$$

$$2n^2\kappa = \frac{4\pi\mathfrak{N} e^2}{m} \cdot \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (40,11)$$

¹ Nach (6,12 u. 13) ist γ zugleich die Abklingkonstante oder reziproke Abklingzeit des Oszillators.

Beschränken wir uns auf die Umgebung der Eigenfrequenz (Spektrallinie) des Oszillators $\omega \approx \omega_0$ und schreiben

$$\Delta \omega = \omega - \omega_0 \ll \omega \text{ oder } \omega_0 \quad (40,12)$$

(in Wellenlängen ist $\Delta \omega = -2\pi c \cdot \Delta \lambda / \lambda^2$), so nehmen (40,10 u. 11) nach Division durch $4\omega^2$ die einfachere Form an:

$$n^2(1 - \kappa^2) - 1 = -\frac{\pi e^2 \mathfrak{N}}{m \omega_0} \cdot \frac{2 \Delta \omega}{(\Delta \omega)^2 + (\gamma/2)^2} \quad (40,13)$$

$$2n^2\kappa = \frac{\pi e^2 \mathfrak{N}}{m \omega_0} \cdot \frac{\gamma}{(\Delta \omega)^2 + (\gamma/2)^2}. \quad (40,14)$$

In einem hinreichend verdünnten Gas (praktisch weitaus der wichtigste Fall!) ist $\kappa \ll 1$ und $n \approx 1$. Man kann dann aus (40,13 u. 14) den Brechungsindex n und den Absorptionskoeffizienten $2\omega n \kappa / c$ direkt entnehmen¹:

$$n - 1 \approx -\frac{\pi e^2 \mathfrak{N}}{2m \omega_0} \cdot \frac{2 \Delta \omega}{(\Delta \omega)^2 + (\gamma/2)^2} \quad (40,15)$$

$$k = \frac{2\omega n \kappa}{c} \approx \frac{\pi e^2 \mathfrak{N}}{m c} \cdot \frac{\gamma}{(\Delta \omega)^2 + (\gamma/2)^2}. \quad (40,16)$$

Die Frequenzabhängigkeit von Absorptionskoeffizient und Brechungsindex läßt sich innerhalb des Gültigkeitsbereiches dieser Gleichungen sofort übersehen (Fig. 56):

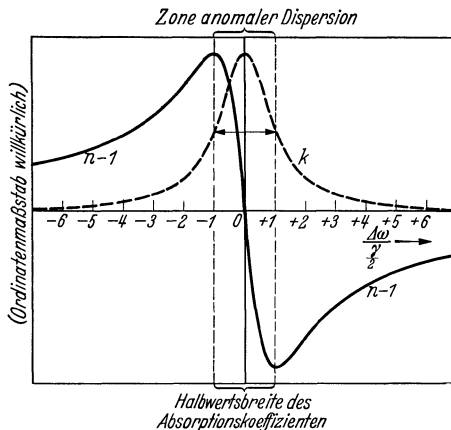


Fig. 56. Frequenzabhängigkeit von Absorptionskoeffizient k und Brechungsindex n in der Nähe einer Spektrallinie.

k nimmt von seinem steilen Maximum $k = k_{\max}$ in der Linienmitte ($\Delta \omega = 0$) symmetrisch nach beiden Seiten ab. Bei $\Delta \omega = \pm \gamma/2$ ist $k = \frac{1}{2} k_{\max}$, d. h. die (ganze) Halbwertsbreite des Absorptionskoeffizienten $|2 \Delta \omega|$ ist gleich der Dämpfungskonstante γ des Oszillators.

In großem Abstand von der Linienmitte ($\gamma \ll \Delta \omega \ll \omega_0$) nimmt der Absorptionskoeffizient $\sim 1/(\Delta \omega)^2$ oder $\sim 1/(\Delta \lambda)^2$ ab. Die Stärke der Absorption ist bestimmt durch $\mathfrak{N} \cdot \gamma =$ Zahl der Oszillatoren pro Volumeinheit \times deren Dämpfungskonstante. Beides wird von grundlegender Bedeutung für die Theorie der FRAUNHOFER-Linien sein.

Der Brechungsindex hat, wie man leicht verifiziert, bei $\Delta \omega = \pm \gamma/2$ sein Maximum bzw. Minimum. Dazwischen liegt der Streifen anomaler Dispersion (n nimmt mit wachsender Frequenz ab). Außerhalb dieser Zone der Breite γ ist die Wellenlängenabhängigkeit von n normal (s. Fig. 56).

Für $\gamma \ll \Delta \omega \ll \omega_0$ ist $n - 1$ proportional $1/\Delta \omega$; als Faktor tritt hier \mathfrak{N} allein auf. Durch Kombination von Absorptions- und Dispersionsmessungen², kann man also \mathfrak{N} und γ bestimmen. Auf diese Bemerkung werden wir im Kap. 10 zurückgreifen.

¹ Bei größeren Dichten hätte man die beiden Gleichungen streng nach n und κ aufzulösen, was etwas umständlich ist.

² Man kann auch magnetooptische Effekte benutzen.

Zum Schluß betrachten wir die Absorption der Strahlung in einer optisch dünnen Schicht der Dicke l . Die im Bereich der Linie konstante Intensität der einfallenden Strahlung sei $I_{\nu,0}$, nach Durchlaufen der Schicht sei sie I_{ν} . Dann ist nach (2,6)

$$I_{\nu} = I_{\nu,0} \cdot e^{-k l} \approx I_{\nu,0} (1 - k l). \quad (40,17)$$

Die gesamte absorbierte Energie, bezogen auf die einfallende Intensität pro Frequenzeinheit wird also

$$A_{\nu} = \int \frac{I_{\nu,0} - I_{\nu}}{I_{\nu,0}} d\nu = l \cdot \int k d\nu. \quad (40,18)$$

Diese Größe bezeichnen wir als die¹ „Gesamtabsorption“ (im engeren Sinne)

$$A_{\nu} = l \cdot \int \frac{2 \omega n \kappa}{c} \cdot \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (40,19)$$

wobei die Integration über die ganze Linie hinweg zu erstrecken ist. Mit Hilfe von (40,16) finden wir nun

$$A_{\nu} = \frac{e^2 \mathfrak{N} \cdot l}{2 m c} \int \frac{\gamma d(\Delta \omega)}{(\Delta \omega)^2 + (\gamma/2)^2}. \quad (40,20)$$

Da der Integrand (Fig. 56) bei $\Delta \omega = 0$ ein steiles Maximum hat und dann rapide auf Null abfällt, so können wir die Integration ohne merklichen Fehler von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken. Mit $x = \frac{2 \Delta \omega}{\gamma}$ wird dann²

$$A_{\nu} = \frac{e^2 \cdot \mathfrak{N} l}{m c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi e^2}{m c} \cdot \mathfrak{N} l. \quad (40,21)$$

Führt man dieselbe Überlegung unter Zugrundelegung der Wellenlängen statt der Frequenzskala aus, so wird wegen $d\lambda = \frac{\lambda_0^2}{c} d\nu$ (λ_0 sei die Wellenlänge der Linie)

$$A_{\lambda} = \frac{\pi e^2 \lambda_0^2}{m c^2} \cdot \mathfrak{N} l. \quad (40,22)$$

Es ist sehr bemerkenswert, daß die Gesamtabsorption von der Größe der Dämpfungskonstante γ *unabhängig* ist. Ihre Messung (Kap. 10) ergibt also die Zahl \mathfrak{N} der Oszillatoren pro cm^3 . Statt der Absorption kann man, was praktisch sehr wichtig ist, auch die *Emission* heranziehen, sofern diese in hinreichendem Maße den Voraussetzungen des KIRCHHOFFSchen Satzes entspricht. Dann ist ja die Gesamtemission (wieder dünne Schicht!) gleich der Gesamtabsorption \times der im Bereich der Linie konstanten KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion für die Wellenlänge der Linie und die Temperatur des leuchtenden Gases. Die Gesamtintensitäten benachbarter Emissionslinien verhalten sich unter diesen Umständen also wie ihre Gesamtabsorptionen.

41. Strahlungsdämpfung und Stoßdämpfung.

Um die Wellenlängenabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten berechnen zu können, wenden wir uns zunächst der Theorie der Dämpfungskonstante γ zu. Während die Formeln des letzten Abschnittes fast unverändert in die Quantentheorie übernommen werden können, müssen wir allerdings später die klassische Theorie von γ einer Revision unterziehen (Kap. 9, Abschn. 46). Trotzdem dürfte die klassische Theorie auch heute noch den natürlichsten Ausgangspunkt für die exaktere Behandlung des Problems geben.

¹ Vielfach wird auch der Faktor l *nicht* mit in die Definition einbezogen. Diese Definition hat den Vorzug, eine reine atomare Größe zu geben.

² Vgl. auch (6,22).

Haben wir es mit einem so stark verdünnten Gas zu tun, daß die Störungen der absorbierenden bzw. emittierenden Atome durch Zusammenstöße vernachlässigt werden dürfen, so wird nach Abschn. 6 γ bestimmt durch *Strahlungsdämpfung*, d. h. durch die Ausstrahlung der schwingenden Oszillatoren. Nach (6,9) ist dann

$$\gamma = \frac{2 e^2}{3 m c^3} \cdot \omega_0^2 \quad (41,1)$$

die (ganze) Halbwertsbreite des Absorptionskoeffizienten, die sog. *natürliche Linienbreite* in Kreisfrequenzeinheiten. Messen wir in Wellenlängeneinheiten, so wird

$$\Delta \lambda_N = \frac{2 \pi c}{\omega_0^2} \cdot \gamma = \frac{4 \pi e^2}{3 m c^2} \cdot \quad (41,2)$$

Setzt man für e und m die Elektronenladung bzw. -masse ein, so erhält man

$$\Delta \lambda_N = 1,18 \cdot 10^{-4} \text{ \AA} \quad (41,3)$$

unabhängig von der Wellenlänge der Linie. Im optischen Gebiet liegt diese Linienbreite an der Grenze des interferometrisch erreichbaren, außerdem wird eine direkte Messung meist schon durch andere Verbreiterungseffekte vereitelt. Auf die schon am Ende des vorigen Abschnittes gestreifte Möglichkeit einer indirekten Messung werden wir, wie gesagt, zurückkommen.

Neben seiner Bedeutung als natürliche Linienbreite hat γ noch die der reziproken Abklingzeit T eines Oszillators der Frequenz ω_0 bzw. einer Spektrallinie der Wellenlänge $\lambda_0 = \frac{2 \pi c}{\omega_0}$. Nach (41,1) wird

$$\gamma = \frac{1}{T} = \frac{8 \pi^2}{3} \cdot \frac{e^2}{m c} \cdot \frac{1}{\lambda_0^2} \quad (41,4)$$

oder nach Einführung der numerischen Konstanten

$$1/T = 0,220/\lambda_0^2. \quad (41,5)$$

Für die Wellenlänge der NaD-Linien $\lambda = 5893 \text{ \AA}$ ergibt sich z. B. $T = 1,58 \cdot 10^{-8}$ sek in größenordnungsmäßiger Übereinstimmung mit den bekannten Kanalstrahl-Abklingungsmessungen von W. WIEN.

Führen wir endlich — im Hinblick auf die spätere Anwendung — den aus der LORENTZschen Theorie der Strahlungsdämpfung berechneten γ -Wert von Gl. (41,1) in unseren Ausdruck (40,16) ein und beschränken uns auf solche Abstände von der Linienmitte, daß $\Delta \omega \gg \gamma$ ist, so erhalten wir¹ (mit $\frac{\Delta \omega}{\omega} = -\frac{\Delta \lambda}{\lambda}$):

$$k = \frac{2 \pi}{3} \cdot \left(\frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \cdot \frac{\lambda_0^2 \cdot \mathfrak{K}}{(\Delta \lambda)^2} = 16,5 \cdot 10^{-26} \cdot \frac{\lambda_0^2 \cdot \mathfrak{K}}{(\Delta \lambda)^2}. \quad (41,6)$$

Bei höheren Gasdrucken macht sich neben der Strahlungsdämpfung die ebenfalls zuerst von H. A. LORENTZ [812] genauer untersuchte *Stoßdämpfung* bemerkbar. Wenn das strahlende Atom Zusammenstöße mit anderen Partikeln erfährt, so werden diese — makroskopisch betrachtet — wie eine Reibungskraft wirken. Deren Größe können wir folgendermaßen abschätzen:

Wie wir sahen, ist die Abklingzeit der *Amplitude* eines gedämpften Oszillators gleich $2/\gamma$. An Stelle dieser Zeit haben wir nunmehr offenbar diejenige einzusetzen, während deren der Oszillator jeweils ungestört schwingen kann, d. h. die mittlere Zeit τ zwischen zwei Stößen. D. h. wir müssen im Falle reiner

¹ $\frac{e^2}{m c^2}$ ist $\frac{3}{2}$ mal dem klassischen Elektronenradius!

Stoßdämpfung in den Gleichungen des Abschn. 40 lediglich

$$\gamma' = 2/\tau \quad (41,7)$$

setzen¹.

Wir haben also noch τ oder die Anzahl $Z = 1/\tau$ der Stöße pro sek nach der kinetischen Gastheorie zu berechnen. Dabei beschränken wir uns der Einfachheit wegen auf den Fall, daß neben den „Oszillatorträgern“ nur noch *eine* weitere Teilchenart (das sog. Fremdgas) vorhanden sein soll. Weiterhin sollen die Fremdgasmoleküle so stark in der Überzahl sein, daß wir nur Stöße zwischen verschiedenen Teilchenarten zu berücksichtigen brauchen. Dann gilt:

$$Z = 2n \cdot \sigma^2 \sqrt{2\pi RT \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right)}. \quad (41,8)$$

Dabei bedeuten:

μ_1 bzw. μ_2 die Molekulargewichte der beiden Teilchenarten.

σ den Wirkungsradius für den betrachteten Stoß.

In der kinetischen Gastheorie ist σ gleich der Summe der Radien beider Moleküle. Wie wir in Kap. 10 sehen werden, sind jedoch die „Wirkungsradien für Stoßdämpfung“ oft ein Vielfaches der „gaskinetischen“ Werte.

σ^2 bezeichnet man als „effektiven Wirkungsquerschnitt“.

$n = \frac{p \cdot L}{R \cdot T}$ die Zahl der Fremdgasmoleküle pro cm^3 .

R die Gaskonstante.

T die absolute Temperatur.

L die LOSCHMIDTSche Zahl.

Führen wir in (41,8) den Fremdgasdruck p ein, so wird²

$$Z = \frac{\gamma'}{2} = 2\sigma^2 L \sqrt{\frac{2\pi}{R} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right)} \cdot \frac{p}{\sqrt{T}} \quad (41,9)$$

Im Hinblick auf die Deutung der FRAUNHOFER-Linien wollen wir sodann abschätzen, bei welchem Wirkungsradius *z. B.* in der Sonnenatmosphäre Strahlungs- und Stoßdämpfung denselben Beitrag zur Breite der Na *D*-Linien geben. Nach (41,5) ist deren Strahlungsdämpfungs-konstante $\gamma = 0,63 \cdot 10^{-8} \text{ sek}^{-1}$.

Als Fremdgas, das die Stoßdämpfung erzeugt, kommt in erster Linie der Wasserstoff in Betracht ($\mu_1 = 1$ und $\mu_2 = 23$). Dessen Druck können wir nach Tabelle 36 größenordnungsmäßig gleich $4 \cdot 10^3 \text{ Bar} \sim 3 \text{ mm Hg}$ setzen. T ist etwa 5600° K . Man findet dann nach (41,9) $\gamma' = \gamma$ für $\sigma_{\text{kr}} = 4,2 \text{ \AA}$. Da einerseits die Laboratoriumsmessungen nicht direkt auf astrophysikalische Verhältnisse angewandt³ werden können, andererseits aber dieser kritische

¹ Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die ungestörte Schwingungszeit des Oszillators zwischen t und $t + dt$ liegt, ist — entsprechend dem bekannten Verteilungsgesetz der

freien Weglängen — proportional $e^{-\frac{t}{\tau}} dt$. Die formale Gleichheit dieses Gesetzes mit dem Abklingungsgesetz des gedämpften Oszillators bedingt die gleiche Art der Frequenzabhängigkeit für Stoß- und Strahlungsdämpfung.

Unsere Betrachtung enthält allerdings noch keine strenge Rechtfertigung für den genaueren Wert des Zahlenfaktors 2 in (41,7). Auf solche Feinheiten einzugehen hat aber erst Sinn, wenn man den Begriff des „störenden Stoßes“ genauer analysiert, was natürlich eingehende quantentheoretische Untersuchung verlangt. Uns kommt es zunächst mehr auf die Abschätzung der Größenordnungen an.

² Qualitativ kommen die Formeln (41,8 bzw. 9) folgendermaßen zustande: Pro sek durchfließt ein „Oszillatormolekül“ durchschnittlich einen Raum vom Querschnitt $\pi \sigma^2$ und der Länge \bar{v} , wo \bar{v} seine mittlere Geschwindigkeit bedeutet. In diesem Raum befinden sich $Z = n \cdot \pi \sigma^2 \cdot \bar{v}$ Moleküle. Z ist daher zugleich die mittlere Stoßzahl pro sek. Diese rohe Betrachtung vernachlässigt noch die gegenseitige Bewegung der Moleküle. Deren Berücksichtigung, die im einzelnen ziemlich kompliziert ist, führt vollends zu obigen Gleichungen.

³ Messungen mit atomarem Wasserstoff sind kaum möglich. Außerdem hängt σ auch von T ab.

Wirkungsradius noch in der Größenordnung der bekannten Radien fällt, so gestatten unsere bisherigen Untersuchungen noch keine eindeutige Entscheidung über die relative Bedeutung von Strahlungs- und Stoßdämpfung¹. Wir werden in Abschn. 71 nochmals auf dieses Problem zurückkommen.

Falls Strahlungs- und Stoßdämpfung gleichzeitig wirken, hat man — der Beweis ist wohl selbstverständlich — in Abschn. 40 überall

$$\gamma_{\text{eff}} = \gamma + \gamma' \quad (41,10)$$

einzusetzen.

Anstatt die Frequenzabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten durch unmittelbare Betrachtung des Absorptionsvorganges selbst zu ermitteln, kann man nach dem KIRCHHOFFSchen Satz auch den entsprechenden *Emissionsprozeß* ins Auge fassen.

Die Emission eines Oszillators mit Strahlungsdämpfung besteht, wie wir sahen, aus einem Wellenzug, dessen Amplitude $\sim e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ abklingt. Analysiert man diese nach FOURIER², so erhält man in der Tat wieder die durch Gl. (40,16) beschriebene Spektrallinie mit der natürlichen Breite γ nach (41,1).

Im Falle der Stoßdämpfung müssen wir einen Wellenzug harmonisch analysieren, der an *willkürlich* verteilten Stellen im Mittel Z mal pro sek gestört wird. Ob diese Störungen dabei nur in einer Veränderung der Schwingungsphase oder in einer Unterbrechung des Wellenzuges bestehen, ist ohne Einfluß auf das Ergebnis der Rechnung. Diese führt wieder auf unsere Gl. (40,16) mit $\gamma' = 2Z$.

42. Lichtstreuung an freien und gebundenen Elektronen. THOMSON-Streuung bzw. RAYLEIGH- und Resonanzstreuung.

Wenn Elektronen durch ein Strahlungsfeld (von Stößen wollen wir vorerst wieder absehen) zum Mitschwingen gebracht werden, so strahlen sie selbst wieder als HERTZSche Oszillatoren. Da ihre Schwingungen im Takt der einfallenden Lichtwelle erfolgen, so hat das *Streulicht genau dieselbe Frequenzverteilung wie die einfallende Strahlung*.

Ist \ddot{x} die Beschleunigung eines streuenden Elektrons, ϑ der Winkel zwischen der Schwingungsrichtung des Elektrons, und der Verbindungslinie Elektron-Beobachter, sowie r deren Abstand, so ist nach H. HERTZ der Strahlungsstrom (Energiestrom pro cm^2) am Orte des Beobachters

$$S = \frac{e^2 \ddot{x}^2}{4 \pi c^3 \cdot r^2} \cdot \sin^2 \vartheta. \quad (42,1)$$

Der elektrische Vektor \mathcal{E} der Streulichtwelle schwingt dabei $\perp r$ in der durch r und die Schwingungsrichtung des Elektrons gehenden Ebene.

Wird das Elektron E (Fig. 57) mit unpolarisiertem Licht bestrahlt, so zerlegen wir gedanklich seine Bewegung am einfachsten in die beiden Komponenten x_1 (\perp zur Ebene LEB) und x_2 (*in* dieser Ebene $\perp LE$). Die entsprechenden

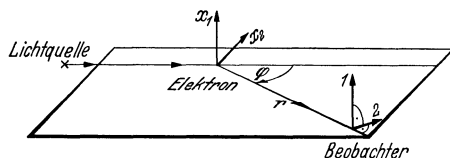


Fig. 57.
Streuung unpolarisierter Strahlung an einem Elektron.

¹ Bis vor wenigen Jahren wußte man nichts von der überwältigenden Häufigkeit des Wasserstoffes in den Sternatmosphären und rechnete daher mit Gasdrucken, die von der Größenordnung des Elektronendruckes, also $\sim 100 \text{ Bar} \approx 0,08 \text{ mm Hg}$ waren. Bei solchen Drucken kann man natürlich die Stoßdämpfung ohne weiteres vernachlässigen. Heute bedarf unsere Frage dagegen, wie gesagt, einer eingehenden Untersuchung.

² Bezüglich der mathematischen Einzelheiten dieser und der folgenden Rechnung sei auf die Literatur verwiesen.

Anteile am Strahlungsstrom S in B sind dann:

$$S_1 = \frac{e^2 \ddot{x}_1^2}{4 \pi c^3 r^2} \cdot 1 \quad \text{und} \quad S_2 = \frac{e^2 \ddot{x}_2^2}{4 \pi c^3 r^2} \cos^2 \varphi \quad (42,2)$$

wo φ (s. Fig. 57) den Streuwinkel bedeutet.

Da wir wieder $x = x_0 e^{i\omega t}$ schreiben können, wo ω die Kreisfrequenz des erregenden Lichtes bedeutet, so ist zunächst $\ddot{x} = -\omega^2 x$ und es wird

$$S_{1,0} = \frac{\omega^4 \cdot \frac{1}{2} (e x_{1,0})^2}{4 \pi c^3 \cdot r^2} \quad \text{und} \quad S_{2,0} = \frac{\omega^4 \cdot \frac{1}{2} (e x_{2,0})^2}{4 \pi c^3 \cdot r^2} \cos^2 \varphi \quad (42,3)$$

wo der Index $_0$ jeweils die Amplituden bezeichnet. Die elektrischen Momente $e x_0$ setzen wir $= \alpha E_0$, wo α wieder die *Polarisierbarkeit* und E_0 die Amplitude des elektrischen Feldes der einfallenden Lichtwelle bedeutet. E_0 ist andererseits mit dem entsprechenden Energiestrom S'_0 pro cm^2 (POYNTING'Scher Vektor) am Ort des Elektrons verknüpft durch die bekannte Beziehung:

$$S'_0 = \frac{c}{4 \pi} \cdot \frac{1}{2} E_0^2 \quad (\text{für Richtung 1 oder 2}). \quad (42,4)$$

Es ist also schließlich:

$$S_{1,0} = \frac{\omega^4 \cdot \alpha^2}{c^4 \cdot r^2} \cdot S'_{1,0} \quad \text{und} \quad S_{2,0} = \frac{\omega^4 \cdot \alpha^2}{c^4 \cdot r^2} \cdot \cos^2 \varphi \cdot S'_{2,0}. \quad (42,5)$$

Das Verhältnis von gestreuter¹ Intensität ($S_{1,0} + S_{2,0}$) zu einfallender Intensität $S'_{1,0} + S'_{2,0} = 2 S'_{1,0} = 2 S'_{2,0}$ ist aber per definitionem nichts anderes als der Streukoeffizient pro Atom. Dieser wird daher

$$2 \pi (\omega/c)^4 \cdot \alpha^2 (1 + \cos^2 \varphi). \quad (42,6)$$

Diese Formel gilt nicht nur für ein einzelnes Elektron, sondern auch für Atome und Moleküle (α ist dann die Polarisierbarkeit des Atoms bzw. Moleküls) mit mehreren Elektronen, *sofern* deren gegenseitige Abstände \ll die Wellenlänge λ der einfallenden Strahlung sind, so daß sie völlig synchron schwingen.

Die Atome oder Moleküle eines Gases sind dagegen bei nicht zu hohen Drucken durchschnittlich so weit voneinander entfernt, daß sich in einem festen Punkt die Streuwellen verschiedener Teilchen nur mit statistisch verteilten Phasen überlagern. Wir dürfen dann also einfach die Intensitäten addieren und erhalten bei \mathfrak{N} Partikeln/ cm^3 den Streukoeffizienten σ pro cm

$$\sigma(\varphi) = 2 \pi \mathfrak{N} (\omega/c)^4 \cdot \alpha^2 (1 + \cos^2 \varphi). \quad (42,7)$$

Die *Polarisation der Streustrahlung* ist nach dem Vorhergehenden leicht zu übersehen: Bei Streuung um $\varphi = 0^\circ$ oder 180° sind S_1 und S_2 gleich groß, die Streustrahlung also unpolarisiert. Streuung um $\varphi = 90^\circ$ dagegen gibt nur den Anteil S_1 , d. h. die Streustrahlung ist dann linear polarisiert; ihr elektrischer Vektor schwingt senkrecht zum Primärstrahl, die Polarisationssebene geht also durch diesen.

Mittelt man $\sigma(\varphi)$ über alle Streurichtungen, so erhält man den Mittelwert

$$\sigma = \frac{8 \pi}{3} \cdot \mathfrak{N} \cdot \left(\frac{\omega}{c} \right)^4 \cdot \alpha^2. \quad (42,8)$$

Die weitere Entwicklung der Theorie des Streukoeffizienten beschäftigt sich mit der Berechnung der Polarisierbarkeit $\alpha = \sum$ Ladung \times Ausschlag der Elektronen/Feldstärke. Am einfachsten liegen die Dinge bei der

Streuung an freien Elektronen (THOMSON-Streuung): Hier ist $\omega_0 = 0$, die Dämpfung kann vernachlässigt werden und es ist also nach (40,5)

$$\alpha = \frac{e x}{E} = - \frac{e^2}{m \omega^2}. \quad (42,9)$$

¹ Die Fläche 1 bei B entspricht, von E aus gesehen, einem Raumwinkel $\frac{1}{4 \pi r^2}$.

Einsetzen in (42,8) ergibt¹ den Streukoeffizienten (cm^{-1}) freier Elektronen:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \cdot \left(\frac{e^2}{m c^2}\right)^2 \cdot \mathfrak{N} = 0,66_0 \cdot 10^{-24} \cdot \mathfrak{N}. \quad (42,10)$$

Diese Formel haben wir in Kap. 6 Gl. (34, 28 u. 29) und Tabelle 22 schon angewandt auf die Streuung von Licht an den durch thermische Ionisation entstandenen freien Elektronen in den Sternatmosphären. Weiterhin hat man versucht, das kontinuierliche Spektrum der Sonnenkorona so zu erklären. (Hierauf werden wir noch zurückkommen.) Eine grundlegende Rolle hat weiterhin die THOMSONSche Streuformel in der Entwicklung der Atomphysik gespielt: Sie gestattete nämlich, aus Messungen von BARKLA und SADLER über die Streuung von Röntgenstrahlen² die Zahl Z der Elektronen pro Atom zu bestimmen, deren Gleichheit mit der Ordnungszahl im periodischen System ja einen der Grundsteine der neueren Atomphysik darstellt.

Sodann wenden wir uns dem astrophysikalisch besonders wichtigen Fall zu, daß die Frequenz der einfallenden Strahlung nahezu mit der Eigenfrequenz des streuenden Oszillators zusammenfällt. Dieser gerät infolge der Resonanz in desto heftigere Schwingungen, je näher die Wellenlänge der einfallenden Strahlung an die der betreffenden Spektrallinie heranrückt. Man erhält das bekannte, zuerst von R. W. WOOD am Natriumdampf untersuchte Phänomen der *Resonanzstreuung* oder *Resonanzfluoreszenz*. Eine monochromatische Lichtwelle wird dabei nach der klassischen Theorie — mit der wir uns hier zunächst ausschließlich beschäftigen — ohne Änderung der Frequenz gestreut. Auch die Frage der Richtungsverteilung und Polarisation des Streulichtes haben wir schon generell behandelt. Um den Streukoeffizienten vollends anschreiben zu können, führen wir in (42,8) den Wert von α aus Gl. (40,7) ein. Wir erhalten zunächst:

$$\alpha = \frac{e x}{E} = \frac{e^2}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \gamma \omega}$$

und (\sim = konjugiert komplex):

$$\alpha^2 = \alpha \tilde{\alpha} = \frac{e^4}{m^2} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}.$$

Beschränken wir uns auf die Umgebung der „Resonanzlinie“ ω_0 und setzen wieder $\omega - \omega_0 = \Delta \omega$, wobei $\omega_0 \gg |\Delta \omega|$, so wird schließlich

$$\alpha^2 = \frac{e^4}{4 m^2 \omega^2} \cdot \frac{1}{(\Delta \omega)^2 + (\gamma/2)^2} \quad (42,11)$$

und damit

$$\sigma = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m c^2}\right)^2 \cdot \frac{\omega_0^2}{(\Delta \omega)^2 + (\gamma/2)^2} \cdot \mathfrak{N}. \quad (42,12)$$

Wir haben so — wie zu erwarten war — genau unseren alten Ausdruck (40,16), (41,1) für die Form einer Spektrallinie wiedergefunden, die durch reine Strahlungsdämpfung³ entsteht.

Betrachtet man die Lichtstreuung bei Frequenzen, die *nicht* in der Nähe der Resonanzstellen der streuenden Partikel liegen und will man auch Moleküle, die nicht mehr durch *einen* Resonator beschrieben werden können, in den Kreis der Betrachtung ziehen, so ist es zweckmäßig, α mit dem — experimentell

¹ $\sigma(\varphi)$ brauchen wir hier und im folgenden nicht besonders anzuschreiben, da das Verhältnis $\sigma(\varphi)/\sigma$ unabhängig von α gleich $3/4 (1 + \cos^2 \varphi)$ ist.

² Da die Wellenlänge der benutzten Röntgenstrahlung \ll der Atomdurchmesser ist, so wird die Streuintensität proportional Z .

³ Auf den Einfluß der *Stoßdämpfung* auf die Streuung — Auslöschung der Resonanzfluoreszenz usw. — können wir erst im folgenden Kapitel eingehen.

ja direkt bestimmbar — Brechungsindex n zu verknüpfen. Dessen imaginären Teil können wir hier vernachlässigen; es ist also nach (40,4)

$$n^2 - 1 = 4\pi \mathfrak{N} \cdot \alpha, \quad (42,13)$$

wo \mathfrak{N} jetzt die *Zahl der Moleküle* pro cm^3 bedeutet. Nach (42,8) erhalten wir damit für den Streukoeffizienten die *RAYLEIGHsche Formel*:

$$\sigma = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{\omega}{c} \right)^4 \frac{(n^2 - 1)^2}{\mathfrak{N}} = \frac{8\pi^3}{3\mathfrak{N}} \cdot \frac{(n^2 - 1)^2}{\lambda^4}. \quad (42,14)$$

Diese Formel gibt bekanntlich eine Erklärung für die blaue Farbe des Himmels und die rote der untergehenden Sonne. Der Brechungsindex n der Luft ändert sich nämlich im Sichtbaren nur wenig, so daß praktisch $\sigma \sim \lambda^{-4}$ geht. Die Beobachtungen bestätigen die entsprechende Wellenlängenabhängigkeit der Intensität des Himmelsstreulichtes und der atmosphärischen Extinktion (vgl. Kap. II, Abschn. 9) im ultravioletten Spektralgebiet.

Da die streuende Luftmasse bekannt ist und in der RAYLEIGHschen Streuformel keine weiteren universellen Konstanten vorkommen, so kann man mit Hilfe derartiger Messungen — vgl. z. B. H. DEMBER [807] — direkt \mathfrak{N} oder die LOSCHMIDTische Zahl L bestimmen. Im Sichtbaren und Infraroten dagegen macht sich die Streuung an größeren Staub- usw. Partikelchen bemerkbar, die meist schwächer von der Wellenlänge abhängig ist. Die Theorie der Streuung an Partikeln, deren Umfang in die Größenordnung der Wellenlänge fällt¹, ist sehr kompliziert; wir begnügen uns mit einem Hinweis auf das Optik-Lehrbuch von M. BORN ([801] dort weitere Literatur: SCHWARZSCHILD, DEBYE, MIE, GANS u. a.). Das Problem der Streuung an feinen Staubteilchen tritt zwar in der Physik der Sternatmosphären selbst nicht auf, es ist aber von Bedeutung für das Verständnis der Absorption der dunklen Milchstraßenwolken (M. WOLF, TRÜMLER, SCHALÉN; vgl. W. BECKER [806]).

43. Dopplereffekt.

Bis jetzt haben wir die absorbierenden und emittierenden Atome² als ruhend betrachtet. In Wirklichkeit besitzen sie vielfach beträchtliche Geschwindigkeiten: Zunächst auf jeden Fall die thermische Bewegung (MAXWELLSche Geschwindigkeitsverteilung). Daneben aber zeigen, wie wir sehen werden, z. B. die Gase der Sonnenchromosphäre und die Atmosphären mancher Sterne eine Art *Brodeln* — gewöhnlich als „*Turbulenz*“ bezeichnet, trotzdem diese Erscheinung nichts mit der Turbulenz der Hydrodynamik zu tun hat — das gleichfalls zu Geschwindigkeiten von der Größenordnung einiger km/sek führt.

Die Bewegungen der Atome führen wegen des *Dopplereffektes* für jedes einzelne Partikel zu einer Linienverschiebung; im Mittel geben sie also einen *Beitrag zur Linienbreite*. In diesem Abschnitt wollen wir noch voraussetzen, daß andere Verbreiterungsursachen gegenüber dem Dopplereffekt vernachlässigt werden können; im nächsten werden wir dann das Zusammenwirken von Dopplereffekt *und* Strahlungs- plus Stoßdämpfung untersuchen.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeitskomponente eines Atoms in der Sehlinie mit ξ , so schreiben wir den Bruchteil dN/N der Atome, deren „Radialgeschwindigkeit“ zwischen ξ und $\xi + d\xi$ liegt, in der Form

$$\frac{dN}{N} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2} \frac{d\xi}{\xi_0}, \quad (43,1)$$

¹ Etwa 10mal größere Partikel streuen im wesentlichen schon wie das massive Material.

² Dasselbe gilt natürlich für Ionen und Moleküle.

wobei $\frac{1}{2} \xi_0^2$ den Mittelwert von ξ^2 bedeutet:

$$\overline{\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{-\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2} \frac{d\xi}{\xi_0} = \frac{1}{2} \xi_0^2. \quad (43,2)$$

Der Mittelwert des Quadrates der Gesamtgeschwindigkeit wird

$$\overline{v^2} = \overline{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \frac{3}{2} \xi_0^2. \quad (43,3)$$

Hat man es nur mit thermischer Bewegung zu tun, so gilt die Form (43,1) der Geschwindigkeitsverteilung genau und da nach dem Gleichverteilungssatz die mittlere kinetische Energie der Translationsbewegung pro Mol $\frac{1}{2} \mu \overline{v^2} = \frac{3}{2} R T$ ist (μ = Atomgewicht; R = Gaskonstante), so wird

$$\xi_0^2 = \frac{2 R T}{\mu}. \quad (43,4)$$

Tritt zu der thermischen Geschwindigkeit noch die einer „Turbulenz“bewegung hinzu, so ist (43,1) natürlich nur als ein empirischer Ansatz zu betrachten. Nehmen wir an, daß die Geschwindigkeitsverteilung der durcheinanderwirbelnden Gasmassen, makroskopisch betrachtet, durch (43,1) mit $\xi_0 = \xi_t$ dargestellt werden kann, so erhalten wir — entsprechend dem bekannten Additionsgesetz der Fehlerrechnung — insgesamt

$$\xi_0^2 = \frac{2 R T}{\mu} + \xi_t^2. \quad (43,5)$$

Die Radialgeschwindigkeit ξ gibt eine Verschiebung¹ $\Delta \omega$ bzw. $\Delta \lambda$ der Kreisfrequenz $\omega = \frac{2 \pi c}{\lambda}$ bzw. der Wellenlänge λ um

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\xi}{c}. \quad (43,6)$$

Insbesondere setzen wir

$$\frac{\Delta \omega_D}{\omega} = \frac{\Delta \lambda_D}{\lambda} = \frac{\xi_0}{c} \quad (43,7)$$

und erhalten damit die relative Intensitätsverteilung in der Linie:

$$\frac{dI}{I} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\Delta \omega}{\Delta \omega_D}\right)^2} \frac{d\omega}{\Delta \omega_D} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dI}{I} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\Delta \lambda}{\Delta \lambda_D}\right)^2} \frac{d\lambda}{\Delta \lambda_D}. \quad (43,8)$$

$\frac{dI}{I}$ ist auf die Hälfte seines Maximalwertes gesunken bei

$$e^{-\left(\frac{\Delta' \omega}{\Delta \omega_D}\right)^2} = \frac{1}{2} \quad (43,9)$$

die ganze Halbwertsbreite der Linie ist daher

$$2 \Delta' \omega = \Delta \omega_D \cdot 2 \sqrt{\ln 2} \quad \text{bzw.} \quad 2 \Delta' \lambda = \Delta \lambda_D \cdot 2 \sqrt{\ln 2}, \quad (43,10)$$

wo $2 \sqrt{\ln 2} = 1,665$.

Um die Größenordnung der Dopplerverbreiterung bequem überblicken zu können, wollen wir die letztere Formel numerisch auswerten. Es wird

$$\text{oder} \quad \left. \begin{aligned} 2 \Delta' \lambda &= 1,665 \cdot \frac{\lambda}{c} \xi_0 = 1,665 \cdot \frac{\lambda}{c} \sqrt{\frac{2 R T}{\mu}} \\ 2 \Delta' \lambda &= 7,16 \cdot 10^{-7} \cdot \lambda \sqrt{T/\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (43,11)$$

¹ Ohne Berücksichtigung des Vorzeichens.

Wenn z. B. die Wasserstofflinie H_β (λ 4861 Å) auf der Sonne ($T \sim 5700^\circ$) nur durch thermischen Dopplereffekt verbreitert würde — was in Wirklichkeit nicht der Fall ist — so wäre ihre ganze Halbwertsbreite nach dieser Formel $2\Delta'\lambda = 0,263$ Å. Für eine Fe-Linie ($\mu = 55,84$) wäre cet. par. nur noch $2\Delta'\lambda = 0,035$ Å.

Die Verbreiterung des *Absorptionskoeffizienten* durch Dopplereffekt ist also im allgemeinen wesentlich stärker, als die durch Dämpfung. Solange wir uns auf die *Absorption optisch dünner Schichten* beschränken, wird daher (43,8) zur Berechnung des Absorptionskoeffizienten genau genug sein. Da nach (40,19—22)

$$\int k d\omega = \frac{2\pi^2 e^2}{m c} \cdot \mathfrak{N} \quad \text{bzw.} \quad \int k d\lambda = \frac{\pi e^2 \cdot \lambda_0^2}{m e^2} \cdot \mathfrak{N} \quad (43,12)$$

ist, so erhalten wir in Verbindung mit (43,8) für den Absorptionskoeffizienten die von der Dämpfungskonstante unabhängigen Ausdrücke:

$$k = \frac{2\pi^3/2 \cdot e^2}{m c} \cdot \frac{\mathfrak{N}}{\Delta\omega_D} \cdot e^{-\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_D}\right)^2} \quad (43,13)$$

bzw.

$$k = \frac{\sqrt{\pi} \cdot e^2}{m c^2} \cdot \frac{\lambda_0^2 \mathfrak{N}}{\Delta\lambda_D} \cdot e^{-\left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_D}\right)^2} \quad (43,14)$$

Betrachtet man dagegen die Absorption *optisch dicker Schichten* (d. h. $k \times$ Schichtdicke soll für die *Linienmitte* ≥ 1 sein), so muß man, wie R. MINKOWSKI [1013] und W. SCHÜTZ [1015] zuerst bemerkt haben, die Dämpfungsverbreiterung auf jeden Fall mit berücksichtigen. Da nämlich in großem Abstand von der Linienmitte die Dämpfungsverbreiterung wie $1/(\Delta\lambda)^2$ abnimmt, während der Dopplereffekt nach obiger Formel exponentiell absinkt, so wird in den äußeren Teilen der Linie der Dämpfungseffekt die Oberhand gewinnen. Bei *sehr* großen Schichtdicken werden also — abgesehen von dem ohnedies totale Absorption zeigenden innersten Teil der Linie — trotz des Dopplereffektes die alten Formeln von Abschn. 40—42 gültig bleiben. Die quantitativen Verhältnisse beim allmählichen Übergang von Doppler- zu Dämpfungsverbreiterung und die exakten Bedingungen für die Anwendbarkeit der verschiedenen Formelgruppen untersuchen wir im folgenden Abschnitt.

44. Dopplereffekt und Dämpfung.

Wenn Dopplereffekt *und* Dämpfung¹ an der Verbreiterung einer Spektrallinie gleichzeitig beteiligt sind, so können wir den Absorptionskoeffizienten k folgendermaßen berechnen:

Ein Atom mit der „Radialgeschwindigkeit“ ξ gibt eine Linie, deren Kreisfrequenz $\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$ durch den *Dopplereffekt* um $\Delta\omega = \omega \cdot \frac{\xi}{c}$ verschoben ist. Der Absorptionskoeffizient bei der Frequenz ω wird daher² für ein solches „ ξ -Atom“ nach (40,16):

$$\frac{\pi e^2}{m c} \cdot \gamma \cdot \frac{1}{(\omega - \omega_0 - \Delta\omega)^2 + (\gamma/2)^2} \quad (44,1)$$

¹ Ob es sich um Strahlungs- oder Stoßdämpfung handelt, ist für das Folgende belanglos. Wir lassen den Zahlenwert der Dämpfungskonstante γ zunächst offen.

² ω_0 ist wieder die Frequenz der unverschobenen Linie. Man beachte, daß $\Delta\omega$ hier eine andere Bedeutung hat, als in Abschn. 40.

Andererseits ist der Bruchteil der Atome, deren Radialgeschwindigkeit zwischen ξ und $\xi + d\xi$ liegt, nach (43,1)

$$\frac{d\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2} \frac{d\xi}{\xi_0}, \quad (44,2)$$

oder, wenn wir nach (43,6 u. 7) die entsprechenden Dopplerverschiebungen

$$\Delta\omega = \omega \cdot \frac{\xi}{c} \quad \text{und} \quad \Delta\omega_D = \omega \cdot \frac{\xi_0}{c} \quad (44,3)$$

einführen

$$\frac{d\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_D}\right)^2} \frac{d\Delta\omega}{\Delta\omega_D}. \quad (44,4)$$

Den Absorptionskoeffizienten k des Gases erhalten wir nun nach (44,1 u. 4) durch Überlagerung der Beiträge der Atome mit allen möglichen Geschwindigkeiten bzw. Dopplerverschiebungen. Es wird:

$$k(\omega) = \frac{\pi e^2 \mathfrak{N} \gamma}{m c} \int_{\Delta\omega = -\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_D}\right)^2} \left(\frac{d\Delta\omega}{\Delta\omega_D}\right) \frac{1}{(\omega - \omega_0 - \Delta\omega)^2 + (\gamma/2)^2}. \quad (44,5)$$

Die mathematische Diskussion dieses Integrales¹ ist zwar etwas kompliziert, sie ist aber für die Astrophysik von solcher Wichtigkeit, daß wir sie unbedingt durchführen müssen.

Zunächst führen wir die dimensionslosen Hilfsgrößen

$$y = \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_D}, \quad v = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_D} \quad \text{und} \quad a = \frac{\gamma}{\Delta\omega_D} \quad (44,6)$$

ein. Rechnet man mit Wellenlängen, so gilt entsprechend

$$y = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_D}, \quad v = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\Delta\lambda_D} \quad \text{und (vgl. 41,2)} \quad a = \frac{\Delta\lambda_N}{\Delta\lambda_D}. \quad (44,7)$$

Damit nimmt (44,5) die einfachere Form an:

$$k(v) = \frac{2\pi^{3/2} \cdot e^2 \cdot \mathfrak{N}}{m c \cdot \Delta\omega_D} \cdot \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2} dy}{(a/2)^2 + (v-y)^2}. \quad (44,8)$$

Der vorne stehende Faktor, der schon in Gl. (43,13) vorkam, ist — wie wir sehen werden — der Absorptionskoeffizient in der Linienmitte $v = 0$. Wir setzen daher

$$k_0 = \frac{2\pi^{3/2} \cdot e^2 \cdot \mathfrak{N}}{m c \cdot \Delta\omega_D}. \quad (44,9)$$

Das Integral kann man auf GAUSSsche Fehlerfunktionen komplexen Argumentes zurückführen, indem man zunächst schreibt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (v-y)^2} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\frac{a}{2} - i(v-y)} + \frac{1}{\frac{a}{2} + i(v-y)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ e^{-\frac{a}{2}x + i(v-y)x} + e^{-\frac{a}{2}x - i(v-y)x} \right\} dx. \end{aligned} \right\} \quad (44,10)$$

¹ Auf die diesbezügliche Literatur gehen wir am Ende des Abschnittes ein.

Damit nimmt (44,8) die Form an:

$$\frac{k(v)}{k_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{x=0}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x + ivx} \int_{y=-\infty}^{+\infty} e^{-y^2 - iyx} dx dy + \frac{1}{2\pi} \int_{x=0}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x - ivx} \int_{y=-\infty}^{+\infty} e^{-y^2 + iyx} dx dy. \quad (44,11)$$

Die Integration nach y kann nun leicht ausgeführt werden. In dem vorderen Integral setzen wir z. B.

$$-y^2 - iyx = -\left(y + i\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4} = -z^2 - \frac{x^2}{4} \quad \text{mit } z = y + i\frac{x}{2} \quad (44,12)$$

und finden so

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2 - iyx} dy = e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty + i\frac{x}{2}}^{+\infty + i\frac{x}{2}} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{4}}. \quad (44,13)$$

Auf diese Weise erhalten¹ wir:

$$\frac{k(v)}{k_0} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x - \frac{x^2}{4}} \{e^{ivx} + e^{-ivx}\} dx. \quad (44,14)$$

Unter astrophysikalischen Verhältnissen ist nun — wie unsere früheren Abschätzungen erkennen lassen — die Dopplerbreite $\Delta\omega_D$ erheblich größer, als die Dämpfungsbreite γ . Wir beschränken uns daher im folgenden auf den Fall

$$\Delta\omega_D \gg \gamma \quad \text{oder} \quad a \ll 1 \quad (44,15)$$

und entwickeln (44,14) nach a :

$$\frac{k(v)}{k_0} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4}} \{e^{ivx} + e^{-ivx}\} dx - \frac{a}{4\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{4}} \{e^{ivx} + e^{-ivx}\} dx. \quad (44,16)$$

Das 1. Integral kann nach der Methode von (44,13) sofort berechnet werden und gibt e^{-v^2} . Unter dem 2. Integral schreiben wir $-\frac{x}{2} \cdot e^{-\frac{x^2}{4}} \cdot dx = de^{-\frac{x^2}{4}}$ und integrieren partiell. Dann wird:

$$\frac{k(v)}{k_0} = e^{-v^2} - \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \left[-\{e^{ivx} + e^{-ivx}\} e^{-\frac{x^2}{4}} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4}} \cdot iv \{e^{ivx} - e^{-ivx}\} dx \right]. \quad (44,17)$$

Die beiden übrigbleibenden Integrale formen wir wieder entsprechend Gl. (44,13) um (man setze $z = i\frac{x}{2} + v$ bzw. $z' = i\frac{x}{2} - v$) und erhalten:

$$\frac{k(v)}{k_0} = e^{-v^2} - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \left[1 + v \cdot e^{-v^2} \left\{ \int_{z=+v}^{i\infty} e^{z^2} dz - \int_{z'=-v}^{i\infty} e^{z'^2} dz' \right\} \right], \quad (44,18)$$

wofür man schreiben kann:

$$\frac{k(v)}{k_0} = e^{-v^2} - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \left[1 - 2v e^{-v^2} \int_0^v e^{z^2} dz \right]. \quad (44,19)$$

¹ Die $\{ \}$ ist gleich $2 \cos vx$; es erscheint jedoch zweckmäßiger, die obige Schreibweise beizubehalten.

Die Transzendente¹

$$F(v) = e^{-v^2} \int_0^v e^{z^2} dz \quad (44,20)$$

— wie gesagt im wesentlichen die *Fehlerfunktion imaginären Argumentes* — kann mit Hilfe von Reihenentwicklungen berechnet werden:

Für *kleine v* entwickelt man die beiden Exponentialfunktionen und erhält

$$F(v) = \left\{ 1 - \frac{v^2}{1} + \frac{v^4}{1 \cdot 2} - \frac{v^6}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right\} \cdot \int_0^v \left(1 + \frac{z^2}{1} + \frac{z^4}{1 \cdot 2} + \frac{z^6}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right) dz$$

$$F(v) = v - \frac{2 \cdot v^3}{1 \cdot 3} + \frac{2^2 \cdot v^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{2^3 \cdot v^7}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \quad (44,21)$$

$$[\dots] = 1 - 2v F(v) = 1 - \frac{2v^2}{1} + \frac{(2v^2)^2}{1 \cdot 3} - \frac{(2v^2)^3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{(2v^2)^4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \dots \quad (44,22)$$

Im lim nähert sich also $\frac{k(v)}{k_0}$ für $a \ll 1$ immer mehr der reinen *Dopplerverteilung* e^{-v^2} an, d. h. wir kommen auf Gl. (43,13 bzw. 14) zurück.

Für *große v* gibt es eine semikonvergente, asymptotische Entwicklung: Durch wiederholte partielle Integration findet man zunächst für das unbestimmte Integral

$$\left. \begin{aligned} \int e^{z^2} dz &= \int \frac{1}{2z} d e^{z^2} = \frac{e^{z^2}}{2z} + \int \frac{e^{z^2}}{2z^2} dz \\ &= e^{z^2} \left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{2^2 \cdot z^3} \right) + \int \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot z^4} \cdot e^{z^2} dz \\ &= \dots \end{aligned} \right\} \quad (44,23)$$

Da der Integrand e^{z^2} mit z sehr rasch anwächst, so kann man als untere Grenze des Integrals statt $z=0$ auch eine nicht zu große Zahl >0 wählen und dann — im Hinblick auf den hinzukommenden Faktor e^{-v^2} — den von der unteren Grenze herrührenden Teil von (44,23) vernachlässigen. Man erhält so

$$F(v) = \frac{1}{2v} + \frac{1}{2^2 v^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot v^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot v^7} + \dots \quad (44,24)$$

und

$$[\dots] = 1 - 2v F(v) = - \left(\frac{1}{2v^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2v^2)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2v^2)^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{(2v^2)^4} + \dots \right). \quad (44,25)$$

Da für *große v* außerdem das erste Glied e^{-v^2} der Gl. (44,19) vernachlässigt werden kann, so wird also in der 1. Näherung

$$\frac{k(v)}{k_0} = \frac{a}{2\sqrt{\pi} \cdot v^2} \quad (44,26)$$

oder

$$k(v) = \frac{2\pi^{3/2} e^2}{m c \cdot \Delta \omega_D} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\gamma}{\Delta \omega_D} \cdot \left(\frac{\Delta \omega_D}{\Delta \omega} \right)^2 = \frac{\pi e^2}{m c} \cdot \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2}, \quad (44,27)$$

also genau die *reine Dämpfungsverteilung* (40,16) ohne das für große v unwesentliche $(\gamma/2)^2$ im Nenner. Berücksichtigt man den Dopplereffekt in 2. Näherung noch mit, so wird nach (44,25)

$$k(v) = \frac{\pi e^2}{m c} \cdot \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2} \left\{ 1 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{\Delta \omega_D}{\omega - \omega_0} \right)^2 + \dots \right\}. \quad (44,28)$$

Wie man sieht, wird also — trotz des Dopplereffektes — die reine Dämpfungsverteilung (44,27) brauchbar sein bis herunter zu $v \approx 7$; das 2. Glied der { }

¹ Der Faktor e^{-v^2} ist in die Definitionsgleichung einbezogen, um eine gut interpolierbare Funktion zu erhalten.

macht dann 3% aus. Wie R. MINKOWSKI [1013] und W. SCHÜTZ [1015] bemerkt haben, kann man dies in eleganter Weise benützen, um die direkt kaum erfaßbare Dämpfungskonstante γ der Messung zugänglich zu machen (vgl. Kap. 10). Übrigens kann man Gl. (44,28) auch leicht *direkt* aus (44,5) ableiten, indem man in dem Resonanznenner γ vernachlässigt, nach $1/v$ entwickelt und gliedweise integriert:

$$\frac{k(v)}{k_0} \approx \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2} dy}{v^2 \left(1 - \frac{y}{v}\right)^2} = \frac{a}{2\pi v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \left[1 + 2 \frac{y}{v} + 3 \left(\frac{y}{v}\right)^2 + \dots\right] dy \quad (44,29)$$

$$= \frac{a}{2\sqrt{\pi} \cdot v^2} \left[1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{v^2} + \dots\right].$$

Die folgende Tabelle 38 (entnommen aus A. C. MITCHELL und M. ZEMANSKY [802]) gibt die Zahlenwerte von $F(v)$ und $1 - 2vF(v)$.

Um die Handhabung dieses — zunächst etwas garstig erscheinenden — Formelapparates weiter zu erläutern, berechnen wir den Absorptionskoeffizienten pro Oszillator¹ ($\mathfrak{N} = 1$) für eine der NaD-Linien und zwar soll γ ganz durch Strahlungsdämpfung verursacht sein, während der Dopplereffekt einer Temperatur

Tabelle 38. $F(v) = e^{-v^2} \int_0^v e^{z^2} dz$ und $1 - 2vF(v)$.

Nach A. MITCHELL und M. ZEMANSKY [802].

v	$F(v)$	$1 - 2vF(v)$	v	$F(v)$	$1 - 2vF(v)$
,0	0,0000	1,0000	6,0	0,08454	—,01451
,2	,1948	,9221	6,2	,08174	—,01355
,4	,3599	,7121	6,4	,07912	—,01268
,6	,4748	,4303	6,6	,07666	—,01190
,8	,5321	,1487	6,8	,07435	—,01118
1,0	,5381	—,07616	7,0	,07218	—,01053
1,2	,5073	—,2175	7,2	,07013	—,009938
1,4	,4565	—,2782	7,4	,06820	—,009393
1,6	,3999	—,2797	7,6	,06637	—,008892
1,8	,3468	—,2485	7,8	,06464	—,008429
2,0	,3013	—,2052	8,0	,06300	—,008000
2,2	,2645	—,1638	8,2	,06144	—,007608
2,4	,2353	—,1295	8,4	,05995	—,007242
2,6	,2122	—,1033	8,6	,05854	—,006902
2,8	,1936	—,08389	8,8	,05719	—,006586
3,0	,1783	—,06962	9,0	,05591	—,006290
3,2	,1655	—,05896	9,2	,05467	—,006014
3,4	,1545	—,05076	9,4	,05350	—,005757
3,6	,1450	—,04430	9,6	,05237	—,005516
3,8	,1367	—,03908	9,8	,05129	—,005290
4,0	,1293	—,03480	10,0	,05025	—,005076
4,2	,1228	—,03119	10,2	,04926	—,004877
4,4	,1168	—,02815	10,4	,04830	—,004688
4,6	,1115	—,02554	10,6	,04738	—,004511
4,8	,1066	—,02336	10,8	,04650	—,004344
5,0	,1021	—,02134	11,0	,04564	—,004183
5,2	,09804	—,01963	11,2	,04482	—,004035
5,4	,09427	—,01812	11,4	,04403	—,003893
5,6	,09078	—,01678	11,6	,04327	—,003757
5,8	,08755	—,01558	11,8	,04253	—,003630
			12,0	,04181	—,003510

¹ Wie wir im folgenden Kapitel sehen werden, ist für die NaD-Linien die Zahl der Oszillatoren = $\frac{2}{3}$ bzw. $\frac{1}{3}$ der Zahl der Atome zu setzen, während γ genau den klassischen Wert behält.

$T = 5700^\circ \text{K}$ entspreche. Da man in der praktischen Spektroskopie ohnedies lieber mit Wellenlängen als mit Kreisfrequenzen rechnet, wollen wir dies von Anfang an tun.

Der Dopplereffekt¹ $\Delta \omega_D$ entspricht nach Abschn. 43 ein

$$\Delta \lambda_D = \frac{\lambda}{c} \sqrt{\frac{2 R T}{\mu}} = \frac{5893}{3 \cdot 10^{10}} \sqrt{\frac{2 \cdot 8,315 \cdot 10^7 \cdot 5700}{23,0}} \text{ \AA} \quad (44,30)$$

$$\Delta \lambda_D = 0,0398 \text{ \AA}.$$

Der Dämpfungsbreite γ entspricht nach (41,3) ein in der klassischen Theorie von λ unabhängiges

$$\Delta \lambda_N = 1,18 \cdot 10^{-4} \text{ \AA}. \quad (44,31)$$

Es wird somit nach (44,7)

$$a = \frac{\Delta \lambda_N}{\Delta \lambda_D} = 2,96 \cdot 10^{-3} \quad (\text{dimensionslos!}) \quad (44,32)$$

also, wie zu erwarten war, $\ll 1$ und nach (44,7)

$$v = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\Delta \lambda_D} = \frac{\Delta \lambda \text{ in \AA}}{0,0398_5}. \quad (44,33)$$

Die Konstante k_0 wird nach (44,9) — vgl. auch (43,14) — bezogen auf 1 Oszillator:

$$k_0 = \frac{2 \pi^{3/2} e^2}{m c \cdot \Delta \omega_D} = \frac{\sqrt{\pi} e^2}{m c^2} \cdot \frac{\lambda_0^2}{\Delta \lambda_D} \quad (44,34)$$

$$k_0 = \frac{\sqrt{\pi} \cdot 4,77^2 \cdot 10^{-20}}{9,0 \cdot 10^{-28} \cdot 9 \cdot 10^{20}} \cdot \frac{5893^2 \cdot 10^{-8}}{0,0398_5} = \left. \begin{aligned} &= 4,34 \cdot 10^{-12} \text{ C.G.S.-Einh.} \\ & \end{aligned} \right\} (44,35)$$

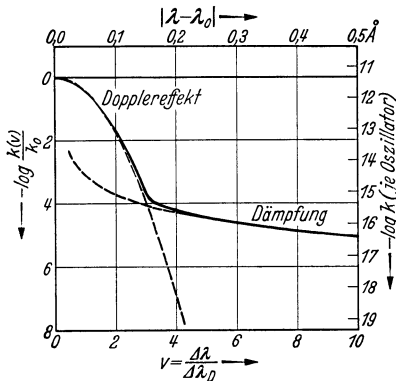


Fig. 58. Dopplereffekt und Strahlungsdämpfung für die NaD-Linien ($\lambda = 5893$) bei $T = 5700^\circ$.

In Fig. 58 haben wir für unser Beispiel $\log k/k_0$ nach Tabelle 38 als Funktion von $\Delta \lambda$ aufgetragen. Daneben sind (gestrichelt) noch die reine Dopplerverteilung e^{-v^2} und die reine Strahlungsdämpfungsverteilung (44,26) von k in denselben Einheiten aufgetragen.

Wie M. MINNAERT und G. F. W. MULDER [815] bemerkt haben (vgl. auch A. PANNEKOEK [816], Fig. 1), erhält man schon eine gute Darstellung von $k(v)/k_0$, wenn man die Dopplereffekt- und Dämpfungskurve in der aus Fig. 58 ersichtlichen Weise einfach aneinandersetzt.

Sodann nachträglich noch einige Bemerkungen zur Literatur unseres Problems:

Die Verbreiterung von Spektrallinien durch die gemeinsame Wirkung von Dopplereffekt und Dämpfung ist wohl zuerst (1912) untersucht worden von W. VOIGT [821].

Er findet — in unserer Bezeichnungsweise geschrieben —

$$\frac{k(v)}{k_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty y e^{-y^2} \arctg \frac{a y}{(a/2)^2 + v^2 - y^2} dy. \quad (44,36)$$

Nach längeren Umrechnungen (vgl. MITCHELL u. ZEMANSKY, [802] S. 320) erweist sich diese Formel als *identisch* mit (44,8). Die in (44,14) enthaltene Darstellung von $k(v)/k_0$ geht zurück auf eine Untersuchung von F. REICHE [817]. Unsere

¹ Nicht Halbwertsbreite!

weiteren Entwicklungen schließen sich vorzugsweise an das mehrfach erwähnte Buch von MITCHELL u. ZEMANSKY [802] an (vgl. auch M. BORN [801]). Auf die Anwendung der theoretischen Entwicklungen in den Untersuchungen von MINKOWSKI und SCHÜTZ werden wir, wie gesagt, in Kap. 10 eingehen. Mit der Darstellung von MITCHELL und ZEMANSKY im wesentlichen identisch, aber nicht ganz so elegant, ist die frühere Arbeit von v. D. HELD [808]. Über die Berechnung¹ der $F(\nu)$ -Funktion (44,20) vgl. W. L. MILLER und A. R. GORDON [813] mit weiteren Formeln und ausführlichen Tabellen von $\nu = 0$ bis 12. Endlich geben wir, um dem Leser das Zurechtfinden in der babylonischen Zeichenverwirrung der Literatur zu erleichtern, noch eine Zusammenstellung der Bezeichnungsweisen der wichtigsten Arbeiten:

Unsere Bezeichnungen	VOIGT, SCHÜTZ, v. D. HELD u. a.	MITCHELL-ZEMANSKY
Abstand von der Linienmitte $\omega - \omega_0 = \Delta \omega$	μ	$2\pi \delta = 2\pi(\nu - \nu_0)$
Dopplereffekt: $\Delta \omega_D$	b	$2\pi \cdot \frac{\Delta \nu_D}{2\sqrt{\ln 2}}$
ν bzw. $\gamma = \frac{\Delta \omega}{\Delta \omega_D}$	ν bzw. γ	ω bzw. $\gamma = \frac{\delta \cdot 2\sqrt{\ln 2}}{\Delta \nu_D}$
Dämpfung: γ	ω'	$2\pi \Delta \nu_N$
$a = \frac{\gamma}{\Delta \omega_D}$	$a = \frac{\gamma}{\Delta \omega_D}$	$2a = \frac{\Delta \nu_N}{\Delta \nu_D} \cdot 2\sqrt{\ln 2}$
		(NB! Das a von M u. Z ist gleich dem $a/2$ der anderen Autoren).

Nunmehr wenden wir uns der schon in Abschn. 40 angeschnittenen Frage zu, welche Energie insgesamt durch eine Spektrallinie aus einem kontinuierlichen Spektrum heraus absorbiert — oder gestreut wird. Solange man sich auf den Grenzfall „unendlich dünner Schichten“ beschränkt, d. h. auf Schichten, deren *optische Dicke für alle Frequenzen* $\ll 1$ ist, bleiben die Gl. (40,21 u. 22) unverändert gültig. Denn hierbei absorbiert sozusagen jeder Oszillator für sich; die Verschiebung seiner Frequenz durch Dopplereffekt usw. ist ohne Einfluß.

Wesentlich komplizierter werden die Verhältnisse, wenn wir zu Schichten übergehen, die nicht mehr für alle Frequenzen als optisch dünn betrachtet werden dürfen. Dieser Fall ist zuerst von R. LADENBURG und F. REICHE [809] für reine Dämpfungsverbreiterung, dann von R. LADENBURG [810] für reine Dopplerverbreiterung und endlich von W. SCHÜTZ [820] und v. D. HELD [808] auch für das Übergangsgebiet behandelt worden. Wir beschränken uns hier wieder auf den astrophysikalisch allein interessierenden Fall $a = \gamma/\Delta \omega_D \ll 1$ (Dämpfungsbreite \ll Dopplerbreite).

Es sei wie in Abschn. 40 \mathfrak{N} die Zahl der Oszillatoren pro cm^3 , l die Länge der absorbierenden Schicht und k der Absorptionskoeffizient pro Oszillator, also $k \cdot \mathfrak{N}$ pro cm . Ferner bezeichnen wir die — im Bereich der Linie konstante — Intensität des einfallenden Lichtes mit $I_{\nu,0}$; nach Verlassen des Absorptionsrohres sei sie I_{ν} . Dann definieren wir die *Gesamtabsorption* A_{ω} durch die Beziehung (das Integral ist über die Linie zu erstrecken):

$$A_{\omega} = \int \frac{I_{\nu,0} - I_{\nu}}{I_{\nu,0}} d\omega = \int \{1 - e^{-k(\omega) \cdot \mathfrak{N}l}\} d\omega, \quad (44,37)$$

¹ Die unabhängig davon von v. D. HELD [808] berechneten Tabellen weisen gegen diese gelegentlich Abweichungen von 1–2% auf, was aber *praktisch* belanglos ist.

d. h. die in der Linie absorbierte Energie ist gleich der in einem Frequenzbereich $\Delta\omega = A_\omega$ des ursprünglichen (oder benachbarten) Spektrums enthaltenen Energie. Statt auf die Skala der Kreisfrequenzen kann man die Gesamtabsorption ebensogut auf die der Frequenzen oder Wellenlängen beziehen und erhält so

$$A_\nu = \frac{1}{2\pi} A_\omega \quad \text{und} \quad A_\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi c} A_\omega. \quad (44,38)$$

Um die Verhältnisse besser überblicken zu können, knüpfen wir an das Beispiel der Fig. 58 an und überlegen zunächst qualitativ, wie die *Gesamtabsorption* A_ω mit der Zahl $\mathfrak{N} \cdot l$ der Oszillatoren in einer durchstrahlten Säule von 1 cm^2 Querschnitt anwächst.

Bis $\mathfrak{N}l \leq 10^{10}$ ist die optische Dicke in der Linienmitte $k(0) \cdot \mathfrak{N}l \leq 0,05 \ll 1$, d. h. bis zu dieser Mächtigkeit der absorbierenden Schicht gilt Gl. (40,21) oder $A_\omega \sim \mathfrak{N}l$ mit genügender Genauigkeit. Wächst $\mathfrak{N}l$ so, daß $k(0) \cdot \mathfrak{N}l \gg 1$ wird, so wird die Linienmitte gänzlich dunkel; die Ränder oder — wie man sagt — die *Flügel* der Linie werden aber zunächst noch durch den Dopplereffektteil der $k(v)$ -Kurve bestimmt. Da die e^{-v^2} -Funktion sehr rasch abfällt, wird auch die Linie ziemlich scharf begrenzt erscheinen. Die Gesamtabsorption wächst zunächst sehr langsam mit $\mathfrak{N}l$; aus dem kontinuierlichen Spektrum wird eben ein Streifen der Breite $\sim 4\Delta\omega_D$ herausabsorbiert. Erst wenn $\mathfrak{N}l$ gleich 10^{15} bis 10^{16} wird, erreicht die optische Dicke auch in den durch Strahlungsdämpfung bestimmten Teilen der $k(v)$ -Kurve merkliche Werte. Da $k(v)$ mit wachsendem Abstand von der Linienmitte nur noch wie $1/v^2$, d. h. sehr langsam abnimmt, so bekommt nun die Linie ausgedehnte Flügel und die Gesamtabsorption wächst wieder rascher mit $\mathfrak{N}l$. Da weiterhin die Linienmitte ohnedies völlig dunkel ist, so können wir *durchweg* mit der reinen Dämpfungsverteilung von k rechnen. Die optische Dicke geht dann $\sim \frac{\mathfrak{N}\gamma \cdot l}{v^2}$. Vergleichen wir also die Absorptionslinien für zwei verschiedene $\mathfrak{N}l$, so erhalten wir jeweils die gleiche Intensität in einem Abstand v bzw. $\Delta\lambda$ von der Linienmitte, der $\sim \sqrt{\mathfrak{N}\gamma \cdot l}$ ist. Für $\mathfrak{N}l > 10^{16}$ wächst also die Breite der Linie bei jeder Intensität $I_v/I_{v,0}$ proportional $\sqrt{\mathfrak{N}\gamma \cdot l}$; ihre Form bleibt dieselbe. Die Gesamtabsorption wird daher schließlich ebenfalls $\sqrt{\mathfrak{N}\gamma \cdot l}$ anwachsen.

Da das Integral (44,37) im allgemeinen nur auf rein numerischem Weg ausgewertet werden kann, so führen wir die Berechnung der Gesamtabsorption zunächst für die analytisch zugänglichen Grenzfälle aus.

1. *Reine Dopplerverbreiterung.* $\lim a = \frac{\gamma}{\Delta\omega_D} \rightarrow 0$.

Diese Formeln gelten auch bei Vorhandensein von Dämpfung für hinreichend kleine $\mathfrak{N}l$ (sicher für $A_\omega < \Delta\omega_D$, für kleine a noch etwas weiter).

Nach (44,19) ist zunächst

$$k(v) = k_0 \cdot e^{-v^2}$$

und nach (44,37) unter Berücksichtigung der Symmetrie der Linie

$$\frac{A_\omega}{2\Delta\omega_D} = \int_0^\infty \{1 - e^{-k_0 \mathfrak{N}l \cdot e^{-v^2}}\} dv. \quad (44,39)$$

Nach R. LADENBURG [810] setzen wir zur Abkürzung

$$k_0 \cdot \mathfrak{N}l = C \quad (44,40)$$

und entwickeln die Exponentialfunktion:

$$\frac{A_\omega}{2\Delta\omega_D} = \int_0^\infty \left\{ C e^{-v^2} - \frac{1}{2!} C^2 e^{-2v^2} + \frac{1}{3!} C^3 e^{-3v^2} - \dots \right\} dv. \quad (44,41)$$

Wir erhalten so die für $C < 3$ brauchbare Reihenentwicklung

$$\frac{A_\omega}{2 \Delta \omega_D} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} C \left\{ 1 - \frac{C}{2! \sqrt{2}} + \frac{C^2}{3! \sqrt{3}} - \frac{C^3}{4! \sqrt{4}} + \dots \right\}. \quad (44,42)$$

Für kleine optische Dicken, d. h. $C \ll 1$ kommen wir auf das alte Grenzgesetz (40,21) zurück:

$$A_\omega = \sqrt{\pi} \cdot C \cdot \Delta \omega_D = \frac{2 \pi^2 e^2}{m c} \cdot \mathfrak{N} l. \quad (44,43)$$

Hat' man optisch *dicke* Schichten, also $C \gg 1$, so setzt man in (44,39) $\ln C = \alpha^2$ und schreibt die Gleichung in der Form

$$\frac{A_\omega}{2 \Delta \omega_D} = \int_0^\infty \{1 - e^{-e^{\alpha^2 - v^2}}\} dv. \quad (44,44)$$

Der Integrand ist für $0 < v < \alpha$ praktisch gleich 1 und sinkt dann sehr rasch auf Null. Das Integral ist also in 1. Näherung gleich $\int_0^\alpha 1 \cdot dv = \alpha$. Entwickelt man in der Umgebung von $v = \alpha$, so erhält man eine von W. BARTKY (angegeben bei O. STRUVE und C.T. ELVEY [818], Gl.6) gefundene asymptotische Darstellung:

$$\frac{A_\omega}{2 \Delta \omega_D} = \sqrt{\ln C} \left\{ 1 + \frac{0,2886}{\ln C} - \frac{0,1355}{(\ln C)^2} + \dots \right\}. \quad (44,45)$$

Für mittlere C integriert man numerisch; vgl. R. LADENBURG [810].

2. *Reine Dämpfungsverbreiterung.* Diese Formeln gelten für *große* $\mathfrak{N} l$. Der Absorptionskoeffizient wird nach (44,29)

$$k(v) = \frac{k_0 a \cdot \mathfrak{N} l}{2 \sqrt{\pi} \cdot v^2} \quad (44,46)$$

und somit nach (44,37)

$$\frac{A_\omega}{2 \Delta \omega_D} = \int_0^\infty \left\{ 1 - e^{-\frac{k_0 a \mathfrak{N} l}{2 \sqrt{\pi} \cdot v^2}} \right\} dv. \quad (44,47)$$

Um die Integration auszuführen, setzen wir

$$\frac{k_0 \cdot a \mathfrak{N} l}{2 \sqrt{\pi} \cdot v^2} = \frac{1}{z^2} \quad (44,48)$$

und ersetzen das kontinuierliche Spektrum mit konstanter Intensität aus Konvergenzgründen durch eine Fehlerkurve $e^{-q^2 z^2}$, wobei wir *nachher* mit $q \rightarrow 0$ gehen. Dann wird

$$\frac{A_\omega}{2 \Delta \omega_D} = \sqrt{\frac{k_0 a \mathfrak{N} l}{2 \sqrt{\pi}}} \int_0^\infty \left\{ e^{-q^2 z^2} - e^{-q^2 z^2 - \frac{1}{z^2}} \right\} dz. \quad (44,49)$$

Nach quadratischer Ergänzung des 2. Exponenten kann man das Integral über $e^{-\left(qz - \frac{1}{z}\right)^2}$ mit genügender Genauigkeit¹ $= \frac{\sqrt{\pi}}{2q}$ setzen und erhält so zunächst

$$\frac{A_\omega}{2 \Delta \omega_D} = \sqrt{\frac{k_0 a \mathfrak{N} l}{2 \sqrt{\pi}}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2q} [1 - e^{-2q}]. \quad (44,50)$$

Geht man nun mit $q \rightarrow 0$, so wird

$$\frac{A_\omega}{2 \Delta \omega_D} = \sqrt{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \cdot k_0 a \mathfrak{N} l = \sqrt{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \cdot a C \quad (44,51)$$

¹ Man erkennt dies sofort, wenn man den Integranden aufzeichnet.

oder

$$A_{\omega} = \sqrt{\frac{4 \pi^2 e^2}{m c} \cdot \mathfrak{N} \gamma \cdot l}. \quad (44,52)$$

In dem durch Dopplereffekt *und* Dämpfung bestimmten Bereich der Linienbreiten, wo man also für $k(\nu)$ die vollständige Gl. (44,19) benutzen muß, kann A_{ω} nur mit Hilfe numerischer Integration berechnet werden.

Die folgende Fig. 59 gibt nach v. D. HELD [808] *eine graphische Darstellung von A_{ω} als Funktion von $\mathfrak{N}l$* . Der linke Teil der Kurven ist nach (44,43) berechnet, der rechte nach (44,52); die Zwischenwerte sind — wie gesagt — auf numerischem Wege gewonnen. Für $a = 0$ sind noch Gl. (44,42 u. 45) anwendbar.

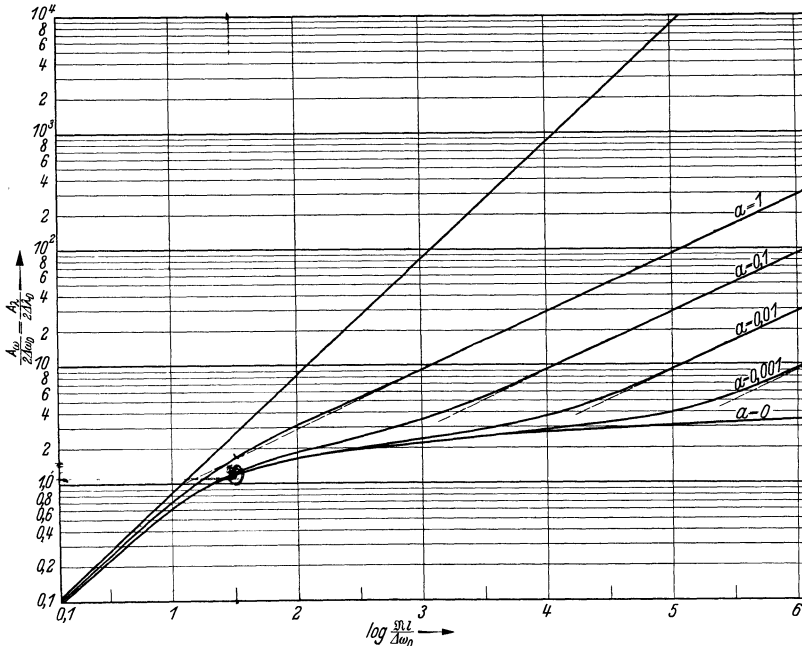


Fig. 59. Gesamtabsorption als Funktion der Anzahl $\mathfrak{N} \cdot l$ absorbierender Oszillatoren pro 1 cm^2 -Säule nach v. D. HELD [808]. Ordinaten: $\frac{A_{\omega}}{2 \Delta \omega_D} = \frac{A_{\lambda}}{2 \Delta \lambda_D}$ (logarithmisch). Abszissen: $\log \frac{\mathfrak{N} l}{\Delta \omega_D}$. $a = \frac{\text{Dämpfungskonstante } \gamma}{\text{Dopplerbite } \Delta \omega_D}$.

Als Abszisse ist aufgetragen $\log \frac{\mathfrak{N} l}{\Delta \omega_D}$, als Ordinate $\frac{A_{\omega}}{2 \Delta \omega_D} = \frac{A_{\lambda}}{2 \Delta \lambda_D}$ in logarithmischem Maßstab. Man erkennt wieder sehr schön, wie für *kleine* $\mathfrak{N}l$ die Gesamtabsorption durch $\mathfrak{N}l$ allein bestimmt ist ($\Delta \omega_D$ kommt in beiden Skalen in derselben Weise vor). Für mittlere $\mathfrak{N}l$ wird A_{ω} bzw. A_{λ} in 1. Linie durch den Dopplereffekt bestimmt; es ist A_{ω} etwa gleich 3 bis $5 \times \Delta \omega_D$; $\mathfrak{N}l$ und die Dämpfungskonstante sind von untergeordneter Bedeutung. Für große $\mathfrak{N}l$ ist $A_{\omega} \sim \sqrt{a \cdot \mathfrak{N}l}$; hier ist der Dopplereffekt wieder belanglos, dagegen die Dämpfungskonstante γ von ausschlaggebender Wichtigkeit.

Um die Handhabung der Figur zu erläutern, wollen wir — im Anschluß an unser früheres Beispiel von Fig. 58 — berechnen, welche Gesamtabsorption (wieder bei $T = 5700^{\circ}$) eine Schicht von $\mathfrak{N}l = 10^{15}$ NaD-Oszillatoren gibt. Nach Abschn. 43 ist zunächst

$$\Delta \omega_D = \frac{2 \pi}{\lambda} \sqrt{\frac{2 R T}{\mu}} = 2,16_5 \cdot 10^{10} \text{ sek}^{-1}, \quad (44,53)$$

also $\log \frac{\mathfrak{N}l}{\Delta \omega_D} = 4,664$. In Gl. (44,32) fanden wir $a = 2,96 \cdot 10^{-3}$. Aus der v. D. HELDSchen Figur lesen wir nun ab $\frac{A_\omega}{2 \Delta \omega_D} = \frac{A_\lambda}{2 \Delta \lambda_D} = 4,4$ oder nach (44,53) bzw. (44,30)

$$A_\omega = 1,9_1 \cdot 10^{11} \text{ sek}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad A_\lambda = 0,35_1 \text{ \AA}. \quad (44,54)$$

Außerdem entnehmen wir der Figur, daß wir uns im Übergangsbereich zwischen „Dopplereffekt“ und „Strahlungsdämpfung“ befinden. Das heißt für das Resultat (44,54) sind sowohl die angenommene Dopplerbreite, wie die Dämpfungskonstante wesentlich. Erst bei einem etwa 10mal größeren $\mathfrak{N}l$ wären wir im Gebiet reiner Dämpfungsverbreiterung.

IX. Kapitel.

Physikalische Grundlagen der Theorie der FRAUNHOFER-Linien. 2. Teil: Quantentheorie.

45. Die Übergangswahrscheinlichkeiten A_{nm} , B_{mn} , B_{nm} (EINSTEIN). Mittlere Lebensdauer angeregter Zustände. Oszillatorenstärken.

Im Rahmen der extremen Quantentheorie der Strahlung läßt sich deren Wechselwirkung mit der Materie nach A. EINSTEIN [908] durch folgende *Übergangsprozesse* (Quantensprünge) und *Übergangswahrscheinlichkeiten* beschreiben:

1. Spontane Emission. Befindet sich das Atom in dem angeregten Zustand m (wir schreiben kurz *ein* Symbol für sämtliche Quantenzahlen), so zeigt es die Tendenz, unter Emission eines Lichtquanten der Energie¹

$$h \nu_{nm} = |E_m - E_n| \quad (45,1)$$

spontan in den „tieferen“ (energieärmeren) Zustand n überzugehen. Haben wir zu einem bestimmten Zeitpunkt N_m Atome im Zustand m , so machen wir mit EINSTEIN für die *Anzahl dieser Übergänge pro sek* in Analogie zum RUTHERFORDSchen Zerfallsgesetz der Radioaktivität den Ansatz²:

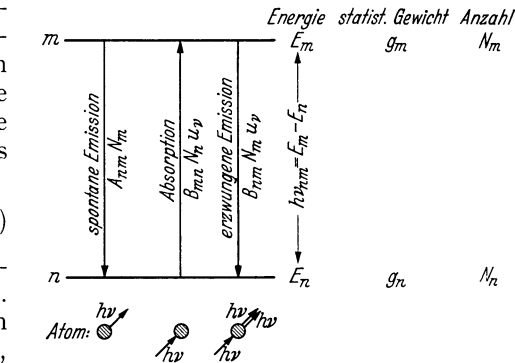


Fig. 60. Übergänge und Übergangswahrscheinlichkeiten.

Die pro sek emittierte Energie erhält man durch Multiplikation mit der Energie pro Quant, also $h \nu_{nm}$.

$$A_{nm} \cdot N_m. \quad (45,2)$$

Die pro sek emittierte Energie erhält man durch Multiplikation mit der Energie pro Quant, also $h \nu_{nm}$.

2. Absorption. Die Zahl der Absorptionsprozesse $n \rightarrow m$ pro sek ist sicher proportional der Zahl N_n der Atome im Ausgangszustand n und der Dichte u_n der absorbierten Strahlung der Frequenz ν_{nm} . Wir müssen dabei fordern, daß u_n

¹ Um Vorzeichenschwierigkeiten zu vermeiden, rechnen wir absorbierte und emittierte Frequenzen als *positive* Größen.

² Hier und im folgenden schreiben wir die *Indizes stets in der Folge: Endzustand, Anfangszustand* in Übereinstimmung mit dem Handbucharikel von H. BETHE [903], auf den wir verschiedentlich zurückgreifen werden.

in dem Frequenzbereich der Linie nicht merklich variiert, sonst verliert das Rechnen mit den EINSTEINSchen Übergangswahrscheinlichkeiten — wie wir sehen werden — überhaupt seinen Sinn. Wir setzen also die Zahl der Absorptionsübergänge $n \rightarrow m$ pro sek gleich

$$B_{mn} \cdot N_n \cdot u_\nu. \quad (45,3)$$

3. Induzierte oder erzwungene Emission. Nach der klassischen Theorie entzieht ein Atom bzw. Oszillator dem Strahlungsfeld nicht nur Energie, sondern wird selbst zum Mitschwingen angeregt und strahlt daher in der Absorptionsfrequenz. Als quantentheoretisches Analogon zu diesem Vorgang betrachtet EINSTEIN die sog. *erzwungene* Emission. Durch ein Lichtquant der Frequenz $\nu = \nu_{nm}$ wird ein Atom in dem *angeregten* Zustand m veranlaßt, ein dem ankommenden hinsichtlich Frequenz und Richtung¹ genau gleiches Lichtquant zu emittieren. Die Zahl *dieser* Prozesse pro sek schreiben wir

$$B_{nm} \cdot N_m \cdot u_\nu. \quad (45,4)$$

Nach MILNE beziehen manche Autoren die Übergangswahrscheinlichkeiten B_{mn} und B_{nm} auf die Strahlungsintensität I_ν , statt auf die Strahlungsdichte u_ν . Im isotropen Strahlungsfeld ist nach (3,7) $u_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu$, also $B_{\text{Milne}} = \frac{4\pi}{c} B_{\text{Einstein}}$. Wir gebrauchen durchweg die ursprünglichen Definitionen.

Wir betrachten nun mit EINSTEIN [908] den Zustand *thermodynamischen Gleichgewichtes*:

Dann ist die Zahl der Übergänge $m \rightarrow n$ pro sek offenbar gleich der der Quantensprünge $n \rightarrow m$, also

$$(A_{nm} + B_{nm} \cdot u_\nu) N_m = B_{mn} \cdot u_\nu \cdot N_n. \quad (45,5)$$

Das Verhältnis der Atomzahlen N_m und N_n ist im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T nach der BOLTZMANNschen Formel (21,10)

$$\frac{N_m}{N_n} = \frac{g_m}{g_n} e^{-\frac{E_m - E_n}{kT}} = \frac{g_m}{g_n} \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}}. \quad (45,6)$$

Dabei sind g_m und g_n die statistischen Gewichte (Vielfachkeit) der betreffenden Zustände und $E_m - E_n = h\nu$ ihre Energiedifferenz (in Abschn. 21 als $\chi_{r,s}$ bezeichnet).

Durch Einsetzen in (45,5) erhält man für die Dichte u_ν der Hohlraumstrahlung bei der Temperatur T

$$u_\nu = \frac{A_{nm}}{\frac{g_n}{g_m} B_{mn} \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}} - B_{nm}}. \quad (45,7)$$

Dieser Ausdruck muß — um den Anschluß an die klassische Theorie zu ermöglichen, für $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$ in die RAYLEIGH-JEANSsche Strahlungsformel (6,24) übergehen; d. h. es ist:

$$u_\nu = \frac{A_{nm}}{\left(\frac{g_n}{g_m} B_{mn} - B_{nm}\right) + \frac{g_n}{g_m} B_{mn} \cdot \frac{h\nu}{kT}} \rightarrow \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot kT. \quad (45,8)$$

Durch Vergleich der beiden Ausdrücke erhalten wir die wichtigen Beziehungen zwischen den drei Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\boxed{g_m \cdot B_{nm} = g_n \cdot B_{mn}} \quad (45,9)$$

¹ Letzteres begründet EINSTEIN durch Betrachtung der Impulsübertragung (pro Quant $h\nu/c$) zwischen Strahlung und Materie.

und

$$A_{nm} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot B_{nm} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{g_n}{g_m} \cdot B_{mn}. \quad (45,10)$$

Würde man — rationeller — die B auf die Zahl der Atome pro Quantenzelle N_n/g_n bzw. N_m/g_m beziehen, so wäre stets $B_{nm} = B_{mn}$. Die Unsymmetrie der Formeln ist also nur formaler Natur.

Setzt man (45,9 u. 10) in (45,7) ein, so erhält man wieder — nun mit strengerer Begründung — die PLANCKSche Strahlungsformel (7,28)

$$u_\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Wir benützen die EINSTEINSchen Ansätze zunächst, um die zeitliche Änderung der Anzahl N_m der Atome in einem angeregten Zustand m zu berechnen. Da nach (45,2) die Emission pro sek N_m proportional ist, erhalten wir so das *zeitliche Abklingen des Leuchtens angeregter Atome* (idealisiertes WIENScher Kanalstrahlversuch!). Beim Fehlen eines äußeren Strahlungsfeldes gilt nach (45,2) das „Zerfallsgesetz“:

$$\frac{dN_m}{dt} = -N_m \cdot \sum_n A_{nm}, \quad (45,11)$$

wobei die Summation über alle „unter“ m liegenden Zustände zu erstrecken ist. Die Integration ergibt für die zeitliche Abnahme der N_m und damit der Intensität aller von m aus emittierten Spektrallinien

$$N_m = N_{m,0} \cdot e^{-\gamma_m t}, \quad (45,12)$$

wo

$$\gamma_m = \sum_n A_{nm} = \frac{1}{T_m} \quad (45,13)$$

die reziproke *Abklingzeit* ($t = T_m$ gibt Abnahme der N_m auf den e -ten Teil) bedeutet. Gleichzeitig ist T_m gleich der *mittleren Lebensdauer* \bar{t} des Zustandes m : Die Wahrscheinlichkeit einer Lebensdauer zwischen t und $t + dt$ ist nach (45,12) gleich $e^{-\gamma_m t} \cdot \gamma_m dt$, also

$$\bar{t} = \int_0^\infty t \cdot e^{-\gamma_m t} \cdot \gamma_m \cdot dt = T_m \quad \text{q. e. d.} \quad (45,14)$$

Ist ein hinreichend starkes Strahlungsfeld der Frequenz ν vorhanden, so müssen¹ selbstverständlich auch die B -Prozesse bei der Berechnung der Abklingkonstante γ_m berücksichtigt werden. Bezeichnen wir die unterhalb m liegenden Atomzustände (Terme) mit Indizes n , die oberhalb liegenden mit n' , so geht nach (45,2—5) die Gl. (45,13) über in

$$\gamma_m = \underbrace{\sum_n A_{nm}}_{\substack{\text{Spontane} \\ \text{Emission} \\ m \rightarrow n}} + \underbrace{\sum_n B_{nm} \cdot u(\nu_{nm})}_{\substack{\text{Erzwungene} \\ \text{Emission } m \rightarrow n}} + \underbrace{\sum_{n'} B_{n'm} \cdot u(\nu_{n'm})}_{\substack{\text{Absorption} \\ m \rightarrow n'}}. \quad (45,15)$$

Beindet sich das angeregte Atom in einem Hohlraumstrahlungsfeld der Temperatur T , so kann man u_ν nach der PLANCKSchen Formel berechnen und erhält mit Hilfe der Beziehungen (45,9 u. 10) zwischen den Übergangswahrscheinlichkeiten (die 3 Glieder in der obigen Reihenfolge geschrieben)

¹ M. MINNAERT und G. F. W. MULDER [815].

$$\gamma_m = \sum_n A_{nm} \left(1 + \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \right) + \sum_{n'} A_{mn'} \cdot \frac{g_{n'}}{g_m} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (45,16)$$

oder

$$\gamma_m = \sum_n \frac{A_{nm}}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}} + \sum_{n'} \frac{\frac{g_{n'}}{g_m} \cdot A_{mn'}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad (45,17)$$

wobei in der vorderen Summe unter ν das jeweilige $|\nu_{nm}|$, in der hinteren das $|\nu_{n'm}|$ zu verstehen ist. Die durch das Strahlungsfeld verursachten Zusatzglieder sind nur wesentlich, wenn für hinreichend starke Übergänge $m \rightarrow n$ bzw. $n' \rightarrow m$ das $\frac{h\nu}{kT} = \frac{1,43}{\lambda T} < 1$ ist, d. h., wenn diese im RAYLEIGH-JEANSschen Bereich der Energieverteilungskurve liegen (vgl. Abschn. 7).

Nunmehr wollen wir für den *Absorptionsprozeß* die Verbindung herstellen zwischen der quantentheoretischen Beschreibung mit Hilfe der Übergangswahrscheinlichkeiten und der gewohnten Beschreibung mit Hilfe des Absorptionskoeffizienten k_ν (cm^{-1}):

Nach Gl. (3,2) wird pro sek und cm^3 aus einem Strahlenbüschel mit der Intensität I_ν und dem Öffnungswinkel $d\omega$ die Energie $k_\nu \cdot I_\nu \cdot d\nu d\omega$ absorbiert. Integriert man über $d\omega$ — die Strahlung sei wieder isotrop — und berücksichtigt, daß $4\pi I_\nu = c \cdot u_\nu$ ist, so erhält man für die in der betreffenden Spektrallinie absorbierte Energie pro sek und cm^3

$$c \cdot u_\nu \int k_\nu d\nu. \quad (45,18)$$

Andererseits gibt die Quantentheorie, wenn wir die erzwungenen Übergänge vorerst vernachlässigen, nach (45,3) für dieselbe Größe den Ausdruck

$$B_{mn} \cdot h\nu \cdot N_n \cdot u_\nu, \quad (45,19)$$

wo N_n wieder die Anzahl der Atome im Ausgangszustand des Absorptionsprozesses $n \rightarrow m$ pro cm^3 bedeutet.

Durch Vergleich von (45,18 u. 19) findet man die von CHR. FÜCHTBAUER [911] und R. LADENBURG [919] entdeckte Relation:

$$\int k_\nu d\nu = \frac{h\nu}{c} \cdot B_{mn} \cdot N_n. \quad (45,20)$$

Ist die Anzahl (pro cm^3) der Atome im Zustand m von derselben Größenordnung wie die im Zustand n (starke Anregung; große Strahlungsdichte), so muß man die erzwungene Emission berücksichtigen¹. Jeder solche Prozeß erzeugt ein Extraquant in der Richtung des einfallenden und ist daher als *negative Absorption* zu buchen. Das heißt das $B_{mn} \cdot N_n$ in (45,19 u. 20) ist zu verringern um $B_{nm} \cdot N_n$ und wir erhalten nach (45,9)

$$\int k'_\nu d\nu = \frac{h\nu}{c} \cdot B_{mn} \cdot N_n \left(1 - \frac{g_n \cdot N_m}{g_m \cdot N_n} \right). \quad (45,21)$$

Im Falle thermischen Gleichgewichtes wird nach der BOLTZMANNschen Formel vollends

$$\int k'_\nu d\nu = \frac{h\nu}{c} B_{mn} \cdot N_n \cdot \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right). \quad (45,22)$$

Die erzwungene Emission ist — wie zu erwarten — nur im RAYLEIGH-JEANS-Gebiet von Bedeutung. Die ganz gleichartigen Verhältnisse in der Theorie des

¹ Den so definierten Absorptionskoeffizienten bezeichnen wir wie in Abschn. 33 mit k'_ν .

kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten haben wir schon im Abschn. 33 besprochen.

Um die Verbindung zwischen den klassischen Rechnungen des vorhergehenden Kapitels und der Quantentheorie anzubahnen, vergleichen wir nach R. LADENBURG [919] die „quantentheoretische“ Gesamtabsorption (45,20) mit dem entsprechenden klassischen Ausdruck (40,21):

$$\int k_\nu d\nu = \left. \begin{array}{l} \frac{h\nu}{c} \cdot B_{mn} \cdot N_n \quad (\text{Quantentheorie}) \\ \frac{\pi e^2}{mc} \cdot \mathfrak{N} \quad (\text{klassische Elektronentheorie}). \end{array} \right\} \quad (45,23)$$

Die Anzahl klassischer Oszillatoren, die die Absorptionswirkung *eines* Atoms im Zustand n ersetzen, bezeichnen wir als die *Oszillatorenstärke* f_{mn} für den Übergang $n \rightarrow m$. Es ist also per definitionem

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_{mn} = N_n \cdot f_{mn} \quad (45,24)$$

und nach (45,23)

$$f_{mn} = \frac{m \cdot h\nu}{\pi e^2} \cdot B_{mn}. \quad (45,25)$$

Mit Hilfe von (45,10) wird entsprechend

$$f_{mn} = \frac{g_m}{g_n} \cdot A_{nm} \cdot \frac{m c^3}{8 \pi^2 e^2 \nu^2} = \frac{g_m}{g_n} \cdot \frac{A_{nm}}{3 \gamma_{kl}}, \quad (45,26)$$

wo nach (41,1) $\gamma_{kl} = \frac{8 \pi^2 e^2 \nu^2}{3 m c^3}$ die *klassische* Dämpfungskonstante (reziproke Abklingzeit) eines Oszillators der Frequenz ν bedeutet. Entsprechend der *Absorptions-Oszillatorenstärke* f_{mn} definieren wir zweckmäßig in Analogie zu der bekannten Relation $B_{nm} = \frac{g_n}{g_m} \cdot B_{mn}$ noch die *Emissions-Oszillatorenstärke*

$$f_{nm} = - \frac{g_n}{g_m} \cdot f_{mn} = - \frac{A_{nm}}{3 \gamma_{kl}}. \quad (45,27)$$

Wie wir sehen werden, kann man die ganzen in Kap. 8 entwickelten Formeln der klassischen Theorie in die Quantentheorie übernehmen, indem man einfach nach (45,24) \mathfrak{N} durch die Zahl der „Ersatzoszillatoren“ $\mathfrak{N}_{mn} = N_n \cdot f_{mn}$ ersetzt und für die Dämpfungskonstante γ den im nächsten Abschnitt zu berechnenden quantentheoretischen Wert einsetzt.

Ehe wir uns jedoch der Quantentheorie der Strahlungsdämpfung zuwenden, sollen noch einige ergänzende Bemerkungen über Ursprung und Begründung der Ansätze dieses Abschnittes Platz finden: A. EINSTEIN hat 1916/17 [908] seine Formeln für die Wechselwirkung von Strahlung und Materie begründet durch *Analogie* zum *Zerfallsgesetz* der radioaktiven Elemente für die A_{nm} und zur *klassischen Theorie* für die B_{nm} . Die Forderung, daß im Falle thermischen Gleichgewichtes das *PLANCKSche Strahlungsgesetz* gelten soll, führte auf die Verknüpfungsgleichungen zwischen den drei Übergangswahrscheinlichkeiten (auch die Möglichkeiten für die Wahrscheinlichkeitsansätze selbst werden dadurch wesentlich eingeschränkt). Die Betrachtung des Energie- und *Impuls*-austausches von Strahlung und Materie (*MAXWELLSche* Geschwindigkeitsverteilung) und weiterhin der Schwankungserscheinungen des Strahlungsfeldes zwingt dann zu der Annahme, daß jedes Quant den Impuls $h\nu/c$ besitzt und daß die erzwungenen Emissionsprozesse in der schon besprochenen Weise erfolgen.

Eine in sich geschlossene *Quantentheorie des Strahlungsfeldes* hat nach Entdeckung der Quantenmechanik P. A. M. DIRAC 1927 entwickelt. Sie führt in völlig zwangsläufiger Weise auf die EINSTEINschen Ansätze und gibt überdies

die Grundlage für eine *vollständige*¹ Theorie der Wechselwirkung von Strahlung und Materie, insbesondere auch der *Strahlungsdämpfung* (V. WEISSKOPF und E. WIGNER, vgl. Abschn. 46). Wie W. HEISENBERG [913] 1931 gezeigt hat, nimmt die mathematisch ziemlich diffizile Strahlungstheorie DIRACS eine einfachere und den anschaulichen Vorstellungen der klassischen Theorie viel besser angepaßte Form an, wenn man nicht von der SCHRÖDINGER-Gleichung im Konfigurationsraum ausgeht, sondern von der entsprechenden *Wellengleichung* (gequantelte Wellen).

46. Quantentheorie der Strahlungsdämpfung.

Wie wir im vorhergehenden Abschnitt sahen, hat ein angeregtes Energieniveau m mit der Energie E_m eine mittlere Lebensdauer der Größe

$$T_m = \frac{1}{\gamma_m} = \frac{1}{\sum_n A_{nm}} \quad (46,1)$$

nach (45,13). (Falls ein intensives Strahlungsfeld vorhanden ist, wäre statt dieser Formel (45,17) zu benützen.)

Will man die *Energie* des Quantenzustandes m bestimmen, so steht also nur eine *Zeit* der Größenordnung $\Delta t = T_m$ zur Verfügung. Nach der HEISENBERGSchen *Ungenauigkeitsrelation* kann also E_m im *günstigsten* Falle mit einem mittleren Fehler ΔE gemessen werden, der durch

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim \frac{h}{2\pi} \quad (46,2)$$

bestimmt ist². Messen wir die Ungenauigkeit des Termwertes im Kreisfrequenzmaß, setzen also

$$\Delta E = \frac{h}{2\pi} \cdot \Delta \omega, \quad (46,3)$$

so wird

$$\Delta \omega \sim 1/T_m = \gamma_m. \quad (46,4)$$

Während in der klassischen Elektronentheorie die Unschärfe, d. h. die natürliche Breite einer *Linie* durch *deren* Abklingzeit bestimmt war, ist in der Quantentheorie zunächst die Unschärfe eines *Energieniveaus* durch *dessen* Abklingzeit festgelegt.

Wie V. WEISSKOPF und E. WIGNER [931] auf Grund der DIRACschen Strahlungstheorie gezeigt haben, ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Atom im Zustand m mit einer Energie zwischen E und $E + dE$ angetroffen wird, in Übereinstimmung mit unseren qualitativen Überlegungen gegeben durch:

$$W(E) dE = \frac{\gamma_m}{h} \cdot \frac{dE}{\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 (E - E_m)^2 + \left(\frac{\gamma_m}{2}\right)^2}. \quad (46,5)$$

Dabei haben wir angenommen, daß die Anregung des Ausgangszustandes durch Licht erfolgt, dessen Intensität im Frequenzbereich der anregenden Linien

¹ Auf die prinzipiellen Schwierigkeiten dieser Theorie einzugehen, ist hier noch weniger am Platze, als eine detaillierte Auseinandersetzung ihrer Grundlagen und Methoden.

² In einfacher Weise kann man sich das Zustandekommen der HEISENBERGSchen Ungenauigkeitsrelation für E und t z. B. klar machen für den Fall eines geradlinig-gleichförmig bewegten Partikels. Diesem entspricht nach DE BROGLIE eine *ebene Welle* der Frequenz E/h . Wird aus diesem Wellenzug nun — da für die Beobachtung ja nur die Zeit Δt zur Verfügung stehen soll — ein Stück der „zeitlichen“ Länge Δt herausgeschnitten, so ergibt die FOURIER-Analyse dieses *abgeschnittenen Wellenzuges* eine Frequenzbreite der

Größenordnung $\frac{1}{2\pi \cdot \Delta t}$ (ganz analog zur *klassischen* Theorie der Stoßdämpfung:). Das heißt

es ist $\Delta\left(\frac{E}{h}\right) \sim \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\Delta t}$ oder $\Delta E \cdot \Delta t \sim \frac{h}{2\pi}$.

konstant ist, oder durch Stöße von Elektronen usw. aller möglicher Geschwindigkeiten, so daß $W(E)$ die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ausgangszustandes¹ gibt. Wir sprechen in diesem Falle von „natürlicher Anregung“. Die Normierung in (46,5) ist so gewählt, daß das $\int W(E) dE = 1$ wird.

Betrachten wir nun den Übergang des Elektrons von der Energie E in der Nähe des Niveaus E_m mit der Unschärfe γ_m nach der Energie E' in der Nähe des Niveaus n mit der Unschärfe γ_n unter Emission eines Lichtquantens $h\nu = E - E' \sim E_m - E_n$! Da die Unschärfen von Anfangs- und Endzustand beide direkt beobachtet werden können, so sind die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen voneinander unabhängig. Man kann also gemäß den allgemeinen Prinzipien der Quantenmechanik die Übergangswahrscheinlichkeit durch Anwendung der Produktregel der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung² erhalten. Die Wahrscheinlichkeit der Emission eines Lichtquantens

$$h\nu = E - E' \quad (46,6)$$

beim Übergang zwischen E bis $E + dE$ und E' bis $E' + dE'$ ist also

$$W(E) dE \cdot W(E') dE' = \frac{\gamma_m \gamma_n}{h^2} \cdot \frac{dE \cdot dE'}{\left[\left(\frac{2\pi}{h} \right)^2 (E - E_m)^2 + \left(\frac{\gamma_m}{2} \right)^2 \right] \cdot \left[\left(\frac{2\pi}{h} \right)^2 (E' - E_n)^2 + \left(\frac{\gamma_n}{2} \right)^2 \right]} \quad (46,7)$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit $J(\nu) d\nu$ für die Emission (oder die entsprechende Absorption) eines Quants im Frequenzbereich ν bis $\nu + d\nu$ erhalten wir vollends durch Integration über dE (dE' ist nach (46,6) vorher gleich $h \cdot d\nu$ zu setzen):

$$J(\nu) d\nu = \frac{\gamma_m \cdot \gamma_n}{h} \cdot d\nu \int \frac{dE}{\left[\left(\frac{2\pi}{h} \right)^2 (E - E_m)^2 + \left(\frac{\gamma_m}{2} \right)^2 \right] \cdot \left[\left(\frac{2\pi}{h} \right)^2 (E - h\nu - E_n)^2 + \left(\frac{\gamma_n}{2} \right)^2 \right]} \quad (46,8)$$

oder³:

$$J(\nu) d\nu = \frac{(\gamma_m + \gamma_n) d\nu}{4\pi^2(\nu - \nu_{nm})^2 + \frac{1}{4}(\gamma_m + \gamma_n)^2} \quad (46,9)$$

¹ Falls diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, hat es, wie V. WEISSKOPF [934] gezeigt hat, überhaupt keinen Sinn mehr, von angeregten Zuständen in dem üblichen Sinne zu sprechen. Über die quantentheoretische Behandlung solcher Verhältnisse vgl. die angegebene Arbeit.

² Vgl. W. HEISENBERG [913], S. 45—47. Diese Tatsache erspart uns, in jedem Einzelfalle auf den schwerfälligen Apparat der DIRACschen Theorie zurückgreifen zu müssen.

³ Schreibt man zur Abkürzung die beiden Verteilungsfunktionen in der Form

$$\frac{a_1}{\pi} \frac{dx}{x^2 + a_1^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a_2}{\pi} \frac{dx}{(x - x_0)^2 + a_2^2},$$

so gilt ihre Überlagerung („Faltung“) entsprechend (46,8)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_1 a_2}{\pi^2} dx_0 \frac{dx}{[x^2 + a_1^2] [(x - x_0)^2 + a_2^2]} = \frac{a_1 a_2}{\pi^2} d x_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x + i a_1)(x - i a_1)(x - x_0 + i a_2)(x - x_0 - i a_2)}.$$

Der Integrationsweg längs der reellen Achse (Fig. 61) läßt sich deformieren in je einen positiven Umlauf um die Singularitäten $x = i a_1$ bzw. $x - x_0 = i a_2$. Man erhält so nach dem Residuensatz

$$\frac{a_1 a_2}{\pi^2} d x_0 \cdot 2\pi i \left\{ \frac{1}{(x + i a_1)(x - x_0 + i a_2)(x - x_0 - i a_2)} \Big|_{x=i a_1} + \frac{1}{(x - x_0 + i a_2)(x + i a_1)(x - i a_1)} \Big|_{x-x_0=i a_2} \right\},$$

oder

$$\frac{a_1 + a_2}{\pi} \cdot \frac{d x_0}{x_0^2 + (a_1 + a_2)^2},$$

d. h. die Form der Verteilungsfunktion bleibt erhalten und die Halbwertsbreiten addieren sich.

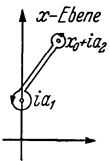


Fig. 61. Zur Auswertung der Gl. (46,8).

Die DIRACsche Strahlungstheorie führt also — dies ist das grundlegende Ergebnis von WEISSKOPF und WIGNER (s. S. 174) — auf genau dieselbe Linienform wie die klassische Elektronentheorie¹, nur ist die *klassische Dämpfungskonstante* γ_{kl} zu ersetzen durch die *Summe* $\gamma_m + \gamma_n$ *der quantentheoretischen Dämpfungskonstanten* (45,13 bzw. 17) *des oberen und unteren Termes*.

Weiterhin hatten wir schon im vorhergehenden Abschnitt gezeigt, daß bezüglich der *Gesamtabsorption* die klassische und die Quantentheorie in Übereinstimmung kommen, wenn man die *Zahl der Oszillatoren* \mathfrak{R} in den klassischen Formeln ersetzt durch die *Zahl der Atome im unteren Quantenzustand* N_n *mal der Oszillatorenstärke* f_{mn} *nach* (45,25 u. 26).

Das heißt wir dürfen sämtliche Formeln des VIII. Kapitels (klassische Theorie) ohne weiteres beibehalten, wenn wir einführen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &\rightarrow N_m \cdot f_{mn} \\ \gamma &\rightarrow \gamma_m + \gamma_n. \end{aligned} \tag{46,10}$$

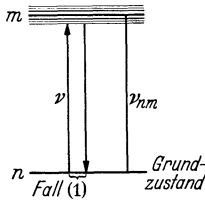


Fig. 62. Quantentheorie der Resonanzstreuung.

Bei der Entstehung der FRAUNHOFERSchen Linien spielt — im Gegensatz zu Absorptionsversuchen im Laboratorium — die Reemission² eine wesentliche Rolle. Ihre Theorie ist gleichfalls von V. WEISSKOPF [931, 934 u. bes. 805] mit Hilfe der im vorhergehenden dargestellten Ansätze entwickelt worden. Wir möchten die entscheidenden Punkte an Hand einiger astrophysikalisch wichtiger Beispiele darlegen, bezüglich der ziemlich komplizierten allgemeinen Ausdrücke dagegen auf WEISSKOPFs Originalarbeit verweisen.

1. Übergänge zwischen den beiden tiefsten Termen (Fig. 62) eines Atoms; Resonanzlinie (z. B. die NaD-Linien $3^2S - 3^2P_{1/2, 3/2}$):

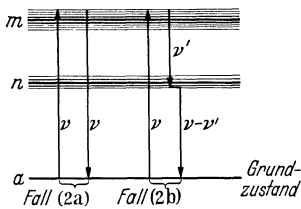


Fig. 63. Natürliche Linienbreite. Drei Quantenzustände.

Falls die Strahlungsdichte nicht zu hoch ist, ist der Grundterm völlig scharf, d. h. $\gamma_n = 0$. Monochromatische Strahlung³ der Frequenz $\nu \approx \nu_{nm}$ muß also — da das Leuchtelektron in das scharfe Niveau E_n zurückfällt — mit *genau derselben* Frequenz reemittiert werden⁴. Der Absorptions- und Emissionskoeffizient ist proportional (46,5).

2. Außer dem scharfen Grundterm a mit $\gamma_a = 0$ seien noch *zwei* höhere Terme n und m mit den Abklingkonstanten γ_n und γ_m vorhanden (Fig. 63). Liegt die eingestrahlte Frequenz ν in der Nähe von ν_{an} , so kommen wir genau auf Fall 1 zurück. Strahlt man dagegen mit monochromatischem Licht einer Frequenz $\nu \sim \nu_{am}$ ein, so wird ein Teil der Elektronen (Fall a) aus dem angeregten Niveau direkt in den Grundzustand zurückfallen und dabei genau die eingestrahlte Frequenz ν reemittieren. In den übrigen Fällen (b) wird das Elektron zunächst einen Übergang nach n ausführen. Wie man aus Fig. 63 mit Gl. (46,5) abliest, ist die Frequenzverteilung $\nu' \approx \nu_{nm}$ dieser Emissionsprozesse (auf Eins normiert) gegeben durch

¹ Wegen der tieferen Begründung dieser Korrespondenz müssen wir auf W. HEISENBERG [913] verweisen.

² In dem Spezialfall, daß die reemittierte Frequenz in der Nähe der eingestrahlten liegt, spricht man meist von Streuung.

³ Bekanntlich kann eine endliche Energie nur durch ein Strahlenbündel *endlicher* Frequenzbreite $\Delta\nu$ transportiert werden. Wenn wir hier und im folgenden von monochromatischer Strahlung sprechen, so soll stets $\Delta\nu \ll$ die natürliche Breite der in Frage kommenden Terme sein.

⁴ Daß z. B. bei Na der obere Term doppelt ist, macht offensichtlich nichts aus. Die Streuung in den beiden Linien erfolgt unabhängig voneinander.

$$\frac{\gamma_n d\nu'}{4\pi^2(\nu_{am} - \nu_{nm} - \nu + \nu')^2 + (\gamma_n/2)^2}, \quad (46,11)$$

wobei z. B. $h\nu_{am} = |E_m - E_a|$ ist. Die *Linienmitte* liegt also *nicht* genau bei $\nu' = \nu_{nm}$, sondern etwas verschoben bei $\nu - \nu_{an}$. Die *Linienbreite* ist durch das Niveau n allein bestimmt. An diesen Übergang schließt sich zwangläufig ein solcher mit der Frequenz $\nu - \nu' \approx \nu_{an}$ an, der zum Grundzustand führt. Die *Häufigkeiten* der Prozesse a und b verhalten sich wie die Übergangswahrscheinlichkeiten A_{am} zu A_{nm} .

Bis jetzt haben wir unter 2. nur die Anregung des Atoms durch *monochromatische* Strahlung der Frequenz ν betrachtet. Nunmehr wollen wir statt dessen ein kontinuierliches Spektrum benützen, so daß die Strahlungsdichte u_ν bei $\nu \approx \nu_{ma}$ konstant ist.

Dann ist die Gesamtzahl der Übergänge $a \rightarrow m$ pro sek und pro Atom im Grundzustand

$$B_{ma} \cdot u_\nu. \quad (46,12)$$

Die Zahl der Reemissionsprozesse $m \rightarrow a$ bzw. $m \rightarrow n$ wird also

$$\left. \begin{aligned} B_{ma} \cdot u_\nu \cdot \frac{A_{am}}{A_{am} + A_{nm}} \\ B_{ma} \cdot u_\nu \cdot \frac{A_{nm}}{A_{am} + A_{nm}} \end{aligned} \right\} \quad (46,13)$$

und man erhält als Intensitätsverteilung (d. h. Zahl der Übergänge pro Atom und sek) der Emissionslinie $m \rightarrow a$

$$B_{ma} \cdot u_\nu \cdot \frac{A_{am}}{A_{am} + A_{nm}} \cdot \frac{\gamma_m d\nu}{4\pi^2(\nu_{am} - \nu)^2 + (\gamma_m/2)^2}. \quad (46,14)$$

Die Wahrscheinlichkeit für die Emission einer Frequenz $\nu' \sim \nu_{nm}$ im Anschluß an die Absorption eines Quants $\nu \sim \nu_{ma}$ ist dagegen

$$B_{ma} \cdot u_\nu \cdot \frac{A_{nm}}{A_{am} + A_{nm}} \cdot \frac{\gamma_m d\nu}{4\pi^2(\nu_{am} - \nu)^2 + (\gamma_m/2)^2} \cdot \frac{\gamma_n d\nu'}{4\pi^2(\nu_{am} - \nu_{nm} - \nu + \nu')^2 + (\gamma_n/2)^2}. \quad (46,15)$$

Durch Integration über ν erhält man sofort die Intensitätsverteilung der Emissionslinie bei $\nu' \approx \nu_{nm}$.

Wir kommen — selbstverständlich — zurück auf die schon aus Gl. (46,9) bekannte Verteilung

$$B_{ma} \cdot u_\nu \cdot \frac{A_{nm}}{A_{am} + A_{nm}} \cdot \frac{(\gamma_n + \gamma_m) d\nu'}{4\pi^2(\nu_{nm} - \nu')^2 + \frac{1}{4}(\gamma_n + \gamma_m)^2}. \quad (46,16)$$

3. Als allgemeinsten Fall behandeln wir nun (Fig. 64) die Streuung von Licht der Frequenz $\nu \sim \nu_{mk}$ an einem angeregten Zustand k unter Reemission eines Quants ν'_{nm} . Den Zustand k denken wir uns dabei hergestellt durch „natürliche“ Anregung, d. h. also durch Stöße von Elektronen aller möglichen Geschwindigkeiten oder durch Einstrahlung eines in der Umgebung von ν_{ka} ($a =$ Grundzustand) *kontinuierlichen* Spektrums. Den gesamten Vorgang dieser „Kaskaden-“ Absorption und -Emission kann man genau wie in den bisher besprochenen Fällen durch Überlagerung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen des Typs (46,5) beschreiben. Wir möchten diese schon etwas umständlichen Rechnungen V. WEISSKOPFS [934, 805] hier nicht im Detail wiedergeben, sondern beschränken uns auf die Wiedergabe und anschauliche Deutung der Ergebnisse für den

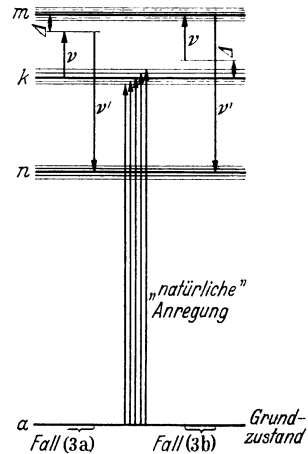


Fig. 64. Streuung an angeregten Atomen. Nach V. WEISSKOPF.

astrophysikalisch wichtigsten Fall, daß die eingestrahlte monochromatische Frequenz ν sich von ν_{mk} um mehr als die natürliche Linienbreite unterscheidet.

Betrachten wir zunächst die *Gesamtwahrscheinlichkeit* für den Vorgang:

Absorption $k \rightarrow m$ plus Emission $m \rightarrow n$, wobei es sich — im Unterschied zum vorhergehenden — um breite Frequenzbereiche handelt, so ist diese nach Abschn. 45

$$B_{mk} \cdot u(\nu_{mk}) \cdot \frac{A_{nm}}{\sum A_{n'm}} = B_{mk} \cdot u(\nu_{mk}) \cdot \frac{A_{nm}}{\gamma_m}. \quad (46,17)$$

Die $\sum A_{n'm}$ ist dabei über alle von m aus möglichen Emissionsprozesse $m \rightarrow n'$ zu erstrecken. Die Wahrscheinlichkeit für *den* Teil¹ dieser Prozesse, der durch Absorption in dem Frequenzbereich ν bis $\nu + d\nu$ ($d\nu \ll$ natürliche Linienbreite) eingeleitet wird, ist entsprechend (46,9):

$$B_{mk} \cdot u(\nu) \frac{A_{nm}}{\gamma_m} \cdot \frac{(\gamma_m + \gamma_k) d\nu}{4\pi^2 (\nu - \nu_{km})^2 + \frac{1}{4} (\gamma_m + \gamma_k)^2}. \quad (46,17')$$

Diese Absorptionsprozesse erfolgen in der Hauptsache auf zweierlei Art und Weise (Fig. 64):

a) Der „Ausgangspunkt“ des Absorptionsprozesses mit der Frequenz ν liegt im Schwerpunkt des Niveaus k . Durch Streuung bei m in einem Abstand $\Delta = \nu_{km} - \nu$ vom Termschwerpunkt entsteht eine Emissionslinie der mittleren Frequenz $\nu' = \nu + \nu_{nm} - \nu_{km} = \nu_{nm} - \Delta$, deren Unschärfe durch die Niveaus k und n bestimmt ist, da die Wahrscheinlichkeitsverteilung bei m in dem relativ großen Abstand Δ von der Termmitte sich nur langsam ändert.

b) Der Ausgangspunkt der Absorption ν liegt im Abstand Δ vom Niveau k . Dann wird eine Linie der Frequenz $\nu' = \nu_{nm}$ emittiert, deren Unschärfe nunmehr durch die Niveaus m und n bestimmt ist.

Man sieht weiterhin, daß die relative Häufigkeit der Prozesse 3a desto größer ist, je breiter das Niveau m ist, während die Prozesse 3b durch große Breite von k begünstigt werden. Die Rechnung ergibt nach V. WEISSKOPF [934] u. [805], daß ihre Häufigkeiten sich wie $\gamma_m : \gamma_k$ verhalten.

Fassen wir diese Überlegungen formelmäßig zusammen, so erhalten wir die Wahrscheinlichkeit der Emission eines Quants ν' bis $\nu' + d\nu'$, indem wir (46,17) multiplizieren mit

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\gamma_m}{\gamma_k + \gamma_m} \cdot \frac{(\gamma_k + \gamma_n) d\nu'}{4\pi^2 (\nu + \nu_{nm} - \nu_{km} - \nu')^2 + \frac{1}{4} (\gamma_k + \gamma_n)^2} \\ & + \frac{\gamma_k}{\gamma_k + \gamma_m} \cdot \frac{(\gamma_m + \gamma_n) d\nu'}{4\pi^2 (\nu_{nm} - \nu')^2 + \frac{1}{4} (\gamma_m + \gamma_n)^2} \end{aligned} \right\} \quad (46,18)$$

Durch Absorption der Frequenz ν werden also in der Nähe von ν_{nm} zwei Linien der Frequenzen $\nu + \nu_{nm} - \nu_{km}$ bzw. ν_{nm} erregt, deren Stärken sich wie $\gamma_m : \gamma_k$ verhalten.

Die in diesem Abschnitt behandelten Untersuchungen V. WEISSKOPFS über die Quantentheorie der natürlichen Linienbreite und die Streuung des Lichtes an angeregten Atomen bilden — wie schon bemerkt — eine der wichtigsten Grundlagen für die *Theorie der FRAUNHOFER-Linien*. Ehe wir uns jedoch diesem Hauptgegenstand unserer Untersuchung zuwenden können, müssen wir noch kurz auf die Quantentheorie der *Stoßdämpfung* und *Druckverbreiterung* eingehen und vor allem die Methoden der Quantenmechanik zur *Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten* und *Oszillatorenstärken* kennenlernen.

¹ Im folgenden „zerlegen“ wir sozusagen die Wahrscheinlichkeit (46,17) immer weitgehender.

47. Quantentheorie der Stoßdämpfung und Druckverbreiterung.

A. Stoßdämpfung. Wenn ein *angeregtes* Atom einem zweiten Partikel (Atom, Molekül, Elektron usw.) hinreichend nahe kommt, so gibt es nach der Quantentheorie — W. LENZ [920] — zwei Möglichkeiten der Wechselwirkung (im weiteren Sinne):

1. Das angeregte Atom überträgt seine Anregungsenergie ohne Strahlungsemission auf das stoßende Teilchen in Form von Anregungsenergie, kinetischer Energie u. dgl. Die Möglichkeit solcher „*Stöße 2. Art*“ haben zuerst O. KLEIN und S. ROSSELAND gefordert auf Grund der Überlegung, daß im Zustande thermodynamischen Gleichgewichtes ein zu den gewöhnlichen Anregungstößen (1. Art) inverser Prozeß wirksam sein muß. Diese Stöße treten am auffälligsten in Erscheinung bei den bekannten Versuchen von R. W. WOOD, H. STUART, R. MANNKOPFF u. a. über die *Auslöschung der Resonanzfluoreszenz* von Hg oder Na-Dampf durch *Fremdgaszusatz*: Jeder Stoß 2. Art „kostet“ ein angeregtes Atom; aus der Schwächung der Resonanzfluoreszenz kann man daher — wie das O. STERN und M. VOLMER zuerst taten — den Wirkungsquerschnitt für diese Prozesse abschätzen. Eine Komplikation tritt dabei jedoch dadurch ein, daß durch die Stöße auch die Frequenzverteilung des Absorptionskoeffizienten verändert wird. Wenn man nicht in optisch dünner Schicht beobachtet, so muß dies bei der Auswertung der Messungen berücksichtigt werden. Ältere Arbeiten sind daher mit Vorsicht zu gebrauchen. Das Problem der Diffusion der Resonanzstrahlung zeigt — wie zu erwarten — große Ähnlichkeit mit dem der Theorie der FRAUNHOFER-Linien. Wir können darauf aber nicht weiter eingehen, sondern verweisen auf die ausgezeichnete Darstellung von A. C. MITCHELL und M. W. ZEMANSKY [802].

2. Wenn das stoßende Partikel keine Möglichkeit hat, die zur Verfügung stehende Anregungsenergie in seinem Niveauschema größtenteils unterzubringen¹, so werden während der Begegnung nur die Frequenzen des strahlenden Atoms etwas „verstimmt“. Bezeichnen wir die Änderung der ungestörten Kreisfrequenz ω_0 als Funktion der Zeit t mit $\Delta\omega$, so ist die gesamte Änderung der Schwingungsphase durch einen Vorübergang gleich

$$\int_{\text{Stoß}} \Delta\omega \cdot dt. \quad (47,1)$$

Eine *wesentliche* Störung, d. h. einen verbreiternden Stoß im Sinne der klassischen Theorie der Stoßdämpfung können wir also mit W. LENZ [921] und V. WEISSKOPF [933, 804] größenordnungsmäßig definieren durch die Bedingung

$$\int \Delta\omega \cdot dt \geq 1. \quad (47,2)$$

Die LORENTZsche Theorie der Stoßdämpfung und insbesondere die von ihr geforderte Intensitätsverteilung bleiben gültig, sofern man als Stöße 1. die „auslöschenden Stöße und 2. die durch (47,2) definierten Phasenstörungsstöße berücksichtigt.

In praxi spielen — namentlich bei Verbreiterung durch Atome — die auslöschenden Stöße eine untergeordnete Rolle². Wir können uns daher auf die *nur* verbreiternden Stöße beschränken. Die Aufgabe der *Quantenmechanik* liegt dann lediglich in der Berechnung der Frequenzverschiebung $\Delta\omega$ als Funktion des Abstandes r zweier Partikel und in der Integration (47,2) über die Flugbahn.

¹ Theorie und Experiment zeigen übereinstimmend, daß Prozesse mit einem großen Überschuß an *Translationsenergie* relativ selten sind.

² Die Moleküle können vermöge ihres komplizierten Termspektrums einen vorgegebenen Betrag an Anregungsenergie leichter aufnehmen.

V. WEISSKOPF [934, 804] hat diese Rechnung ausgeführt für den Stoß zweier gleichartiger Atome und für den Stoß des angeregten Atoms mit andersartigen Atomen und Molekülen. Im ersten Fall geht $\Delta\omega \sim 1/r^3$ im zweiten $\sim 1/r^6$ (v. d. WAALS-Kräfte!). Zahlenmäßig ergibt sich z. B. für Stöße Na—Na ein Wirkungsradius von $\sim 35 \text{ \AA}$; für Na—He dagegen nur $\sim 5 \text{ \AA}$ in größenordnungsmäßiger Übereinstimmung mit den Beobachtungen (Kap. 10). Der Unterschied beider Zahlen spiegelt deutlich die verschiedene „Reichweite“ der Wechselwirkungskräfte wieder. Führt man die im vorhergehenden skizzierte Theorie noch genauer durch, so kann man auch die bei Fremdgaszusatz auftretenden *Linienverschiebungen* verstehen. Wir möchten hierauf jedoch nicht weiter eingehen und begnügen uns mit einem Hinweis auf die Originalarbeiten von V. WEISSKOPF und W. LENZ (s. oben).

Im Rahmen der Stoßdämpfungstheorie hängt die Intensitätsverteilung einer Spektrallinie in 1. Näherung gar nicht ab von der *Art* der Wechselwirkung zwischen dem strahlenden und dem störenden Partikel. Die Linienform ist nicht nur bedingt durch die verschiedenen Frequenzen $\omega(t)$, die das Atom unter der Einwirkung der störenden Partikel ausstrahlt, sondern das Entscheidende sind die *zeitlichen Änderungen* von $\omega(t)$, die bei der *FOURIER-Analyse* des gestörten Wellenzuges wesentlich zur Geltung kommen.

B. Druckverbreiterung. Wenn sich jedoch $\omega(t)$ hinreichend langsam ändert, so muß schließlich die Intensität in dem Frequenzintervall ω bis $\omega + d\omega$ proportional werden der Zeit, während der $\omega(t)$ sich in diesem Intervall befindet.

W. LENZ¹ [922] hat die Frage genauer untersucht, wann dieses Rechenverfahren zulässig ist: Bezeichnet man die beim Vorbeifliegen des störenden Teilchens auftretende Frequenzstörung mit $\Delta\omega$ und die Zeitdauer der Störung (\approx kleinste Entfernung ϱ der wechselwirkenden Teilchen/Geschwindigkeit c_0) mit T , so muß sein

$$T \cdot \Delta\omega \gg 1. \quad (47,3)$$

Diese Bedingung wird am ehesten erfüllt sein (große $\Delta\omega$!) bei Verbreiterung durch die elektrischen Felder von Ionen oder Dipolmolekülen. Die Linienbreite (und evtl. Verschiebung) geht dann proportional der Aufspaltung im Starkeffekt. Man spricht daher von *intermolekularem Starkeffekt* oder wohl auch kurz von *Starkeffekt-Verbreiterung*:

Schon J. STARK [929] hat durch experimentellen Vergleich von Druckeffekt und Starkeffekt wahrscheinlich gemacht, daß man so die Verbreiterung der BALMER-Linien sowie der höheren Serienglieder von He, Li und ähnlicher gegen elektrische Felder empfindlicher Linien erklären kann. Astrophysikalisch besonders wichtig ist natürlich die Verbreiterung der Wasserstoff- und Heliumlinien durch die Felder der Elektronen und Ionen in teilweise ionisierten Gasen.

Die Theorie des Effektes ist entwickelt worden von P. DEBYE [906] und J. HOLTSMARK [914, 915]. Hat man n einfach geladene Ionen + Elektronen² pro cm^3 , so ist der mittlere Abstand des gestörten Atomes vom nächsten Ion, das den größten Beitrag zum Störfeld gibt, von der Größenordnung $n^{-1/3}$; die Feldstärke am Ort des gestörten Atomes also $\sim e \cdot n^{2/3}$. Aus mathematischen Gründen führt HOLTSMARK die „Normalfeldstärke“

$$F_0 = 2,61 \cdot e \cdot n^{2/3} \quad (47,4)$$

ein.

¹ Hierzu auch H. KUHN und F. LONDON [917] sowie H. KUHN [918] die — vorerst ohne exakte Begründung — eine detailliertere Theorie entwerfen.

² Die Verbreiterung durch Dipole usw. ist astrophysikalisch ohne Bedeutung, außerdem dürfte hierauf die HOLTSMARKSche Theorie wegen (47,3) meist nicht mehr anwendbar sein.

Ist T die Temperatur des Gases und P_e der Partialdruck der freien Elektronen und damit auch der Ionen in Bar, so ist $2 P_e = n \cdot kT$ und es wird

$$F_0 = 2,61 e \left(\frac{2 P_e}{k T} \right)^{2/3} = 46,8 \left(\frac{2 P_e}{T} \right)^{2/3} \text{ elst. C.G.S.-Einheiten.} \quad (47,5)$$

Durch Multiplikation mit 0,3 rechnet man evtl. auf kV/cm um.

Ist weiterhin die momentane Feldstärke am Ort des gestörten Atoms gleich F , so bezeichnen wir

$$F/F_0 = \beta \quad (47,6)$$

als die „reduzierte Feldstärke“. Die *Wahrscheinlichkeit* $W(\beta) d\beta$, daß diese zwischen β und $\beta + d\beta$ liegt, hat nun J. HOLTSMARK (s. oben) nach den Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung ermittelt. Er findet

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi \beta} \int_0^\infty v \sin v e^{-\left(\frac{v}{\beta}\right)^{3/2}} \cdot dv \quad (47,7)$$

mit den Reihenentwicklungen¹

$$W(\beta) = \frac{4}{3\pi} \beta^2 (1 - 0,4628 \beta^2 + 0,1227 \beta^4 - 0,02380 \beta^6 \dots) \quad (47,8)$$

bzw.

$$W(\beta) = \frac{1,496}{\beta^{5/2}} \left(1 + \frac{5,106}{\beta^{3/2}} + \frac{14,43}{\beta^3} + \dots \right) \quad (47,9)$$

für kleine bzw. große Werte der reduzierten Feldstärke. Eine graphische Darstellung gibt Fig. 65 nach S. VERWEY [1367].

H. N. RUSSELL und J. Q. STEWART [927] haben das Problem in nicht so genauer, aber viel einfacherer Weise folgendermaßen behandelt: Den Hauptbeitrag zum intermolekularen Feld F gibt stets das dem strahlenden Atom nächstbenachbarte Ion. Man wird daher keinen großen Fehler machen, wenn man dieses allein berücksichtigt, zumal die Felder der entfernteren Ionen sich weitgehend kompensieren. Die *Wahrscheinlichkeit* W , daß das nächste Ion einen Abstand zwischen x und $x + dx$ vom dem Atom hat, ist

$$W(x) dx = e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^3} \cdot d\left(\frac{x}{x_0}\right)^3, \quad \text{wo} \quad \frac{4\pi}{3} \cdot n x_0^3 = 1. \quad (47,10)$$

Führen wir die Normalfeldstärke (nahezu gleich der HOLTSMARKSchen)

$$F'_0 = \frac{e}{x_0^2} = \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{2/3} \cdot e \cdot n^{2/3} = 2,60 e \cdot n^{2/3} \quad (47,11)$$

und die reduzierte Feldstärke $\beta = F/F'_0$, ein, so wird

$$W(\beta) d\beta = -e^{-\beta^{-3/2}} \cdot d\left(\beta^{-3/2}\right) = \frac{1,50}{\beta^{5/2}} \cdot e^{-\beta^{-3/2}} d\beta. \quad (47,12)$$

Wie die numerische Rechnung zeigt, ist diese Funktion der HOLTSMARKSchen ziemlich ähnlich; für große β insbesondere stimmt sie mit (47,9) exakt überein (nahe Begegnung von Atom und störendem Teilchen).

Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsverteilung $W(\beta)$ haben nun S. VERWEY und A. PANNEKOEK [925, 1367] den Absorptionskoeffizienten für die druckverbreiterten *Wasserstofflinien* berechnet. Diese zeigen bekanntlich im Stark-effekt symmetrische Aufspaltung in mehrere Komponenten, deren Abstand von der Linienmitte nach der Quantentheorie (z. B. [924])

$$\Delta \lambda = \frac{3 h c}{8 \pi^2 m e} \cdot \lambda^2 \cdot n_K \cdot F = 0,0193 \cdot \lambda^2 \cdot n_K \cdot F \quad (47,13)$$

ist, wobei λ in cm, F in elst. C.G.S.-Einheiten gerechnet werden soll. n_K ist bekanntlich eine ganze Zahl, die mit den Quantenzahlen von Anfangs- und

¹ Wie S. VERWEY [1367] gezeigt hat, enthalten HOLTSMARKS Formeln eine Reihe von Rechenfehlern. Wir geben hier — nach nochmaliger Kontrolle — die verbesserten Zahlenwerte.

Endterm zusammenhängt. Für (47,13) schreiben wir kurz

$$\Delta \lambda = c_k \cdot F. \tag{47,14}$$

c_k bedeutet also die Verschiebung der Komponente k bei der Feldstärke 1.

Bezeichnen wir die *Intensität* dieser Komponente, bezogen auf Gesamtintensität der Linie = 1, mit I_k , so gibt sie in dem Wellenlängenbereich $\Delta \lambda$ bis $\Delta \lambda + d\lambda$ den Beitrag $I_k \cdot W(\beta) d\beta$, wo nach (47,6 u. 14)

$$\beta = \frac{F}{F_0} = \frac{\Delta \lambda}{c_k \cdot F_0} \tag{47,15}$$

ist. Führen wir noch die Variable

$$\alpha = \frac{\Delta \lambda}{F_0} \tag{47,16}$$

(Abstand von der Linienmitte, bezogen auf *Normalfeldstärke* 1) ein, so ist die

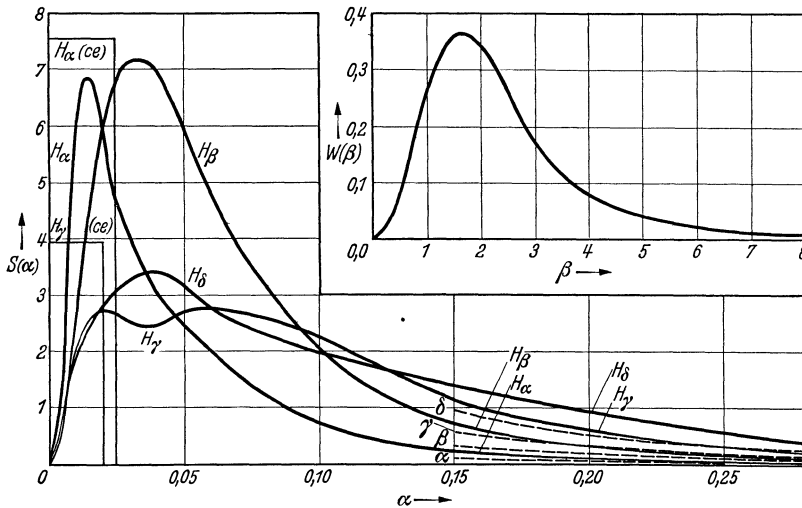


Fig. 65. Oben: Wahrscheinlichkeitsverteilung der zwischenmolekularen Felder. Nach J. HOLTSMARK und S. VERWEY. Unten: Relative Intensitätsverteilung (dünne Schicht) $S(\alpha)$ der BALMER-Linien Nach S. VERWEY und P. SCHMALJOHANN.

relative Intensitätsverteilung (für dünne Schicht) in der Linie gegeben durch

$$S(\alpha) d\alpha = \sum_k I_k \cdot W\left(\frac{\alpha}{c_k}\right) \frac{d\alpha}{c_k} \tag{47,17}$$

wobei also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(\alpha) d\alpha = 1 \tag{47,18}$$

ist. Die Berechnung von $S(\alpha)$ ist mit Hilfe der von E. SCHRÖDINGER nach der Quantenmechanik ermittelten Intensitäten¹ zuerst von S. VERWEY (s. S. 181) ausgeführt worden.

Im Hinblick auf das in der vorhergehenden Anmerkung erwähnte Versehen geben wir statt seiner Kurven hier die von Herrn cand. SCHMALJOHANN berichtigte Fig. 65.

Um vollends den Absorptionskoeffizienten $k(\Delta \lambda)$ pro absorbierendes Atom zu erhalten, bedenken wir, daß dieser einerseits proportional zu $S(\alpha)$ ist, daß

¹ Da über alle möglichen Feldrichtungen gemittelt werden muß, so sind die σ -Komponenten mit *doppeltem Gewicht* zu berücksichtigen. Dies hat VERWEY [1367, Anm. S. 16] versehentlich nicht getan; die Resultate werden dadurch nur wenig beeinflusst. Unsere folgenden Rechnungen — insbesondere (47,2c) — sind jedoch in der richtigen Weise durchgeführt.

aber andererseits nach (45,23 usw.)

$$\int k \, d\lambda = \frac{\pi e^2}{m c^2} \cdot \lambda^2 \cdot f \quad (47,19)$$

sein muß, wo f die Oszillatorenstärke der betreffenden Linie bedeutet. Es wird also

$$k(\alpha) = \frac{\pi e^2}{m c^2} \lambda^2 f \frac{S(\alpha)}{F_0} = \frac{\pi e^2}{m c^2} \lambda^2 \cdot f \cdot \sum \frac{I_k}{c_k \cdot F_0} \cdot W\left(\frac{\alpha}{c_k}\right). \quad (47,20)$$

Besonders einfach und praktisch bedeutsam ist die Berechnung des Absorptionskoeffizienten in den *Flügeln* der Linien ($\beta \gg 1$), wo wir nach (47,9)

$$W(\beta) \approx 1,496 \cdot \beta^{-5/2} = 1,496 \left(\frac{c_k \cdot F_0}{\Delta \lambda}\right)^{5/2} \quad (47,21)$$

setzen können. Damit wird

$$k(\Delta \lambda) = \frac{\pi e^2}{m c^2} \lambda^2 f \cdot 1,496 \cdot F_0^{3/2} \sum_k \frac{I_k \cdot c_k^{3/2}}{\Delta \lambda^{5/2}}. \quad (47,22)$$

Benützen wir für c_k wieder die quantentheoretische Gl. (47,13), so wird

$$k(\Delta \lambda) = \frac{\pi e^2}{m c^2} \cdot \lambda^2 f \cdot (0,0193 \lambda^2)^{3/2} \cdot F_0^{3/2} \cdot 1,496 \sum I_k \cdot n_k^{3/2} \cdot \frac{1}{\Delta \lambda^{5/2}} \quad (47,23)$$

oder nach Einsetzen der Zahlenkonstanten:

$$k(\Delta \lambda) = 3,54 \cdot 10^{-15} \cdot \lambda^5 \cdot f \cdot F_0^{3/2} \frac{\sum I_k \cdot n_k^{3/2}}{\Delta \lambda^{5/2}}. \quad (47,24)$$

Berechnen wir die $\sum I_k n_k^{3/2}$ nach SCHRÖDINGER (s. S. 182), entnehmen die f -Werte der Quantenmechanik (vgl. Tabelle 40) und schreiben kurz

$$k(\Delta \lambda) = C \cdot \frac{F_0^{3/2}}{\Delta \lambda^{5/2}}, \quad (47,25)$$

wobei $\Delta \lambda$ in *Angström* gerechnet werden soll, so erhalten wir für die vier ersten Linien der BALMER-Serie:

λ	$=$	H_α	H_β	H_γ	H_δ	}	(47,26)	
		6562,79	4861,33	4340,47	4101,74			
		f	$=$ 0,637	0,119	0,0443			0,0212
		$\sum I_k \cdot n_k^{3/2}$	$=$ 1,140	7,74	18,3			35,4
		$C \cdot 10^{16}$	$=$ 3,13	0,885	0,442			0,309

Es überrascht zunächst, daß — abgesehen von H_α — die Absorptionskoeffizienten¹ bei gleichem $\Delta \lambda$ so wenig von der Gliednummer in der Serie abhängen. Der Grund ist jedoch leicht zu verstehen: Für große Quantenzahlen geht $f \sim 1/n^3$. Der Mittelwert von n_k dagegen wächst etwa proportional $n(n-1) \sim n^2$, entsprechend der Energieänderung eines Dipoles von den Dimensionen der BOHRschen Bahn (große Halbachse $\sim n^2$) im Feld 1. Der Faktor $f \cdot \sum I_k \cdot n_k^{3/2}$ in (47,24) wird also für große Quantenzahlen — wie Verf. [1359] zuerst gezeigt hat — nahezu konstant.

Ehe wir die HOLTSMARKSche Theorie anwenden, müssen wir uns schließlich noch vergewissern, inwieweit in den Sternatmosphären die LENZsche Bedingung (47,3) erfüllt ist:

In A-Sternen (Intensitätsmaximum der BALMER-Linien) beobachtet man (Halb-) Breiten der H_γ -Linie — bei $\sim 20\%$ Absorption gemessen — von $\sim 25 \text{ \AA} = 2,5 \cdot 10^{13} \text{ sek}^{-1}$ in Kreisfrequenzeinheiten. Um die Hauptkomponenten

¹ Dies gilt entsprechend dem Gültigkeitsbereich von (47,25) selbstverständlich nur für die *Linienflügel*.

von H_γ soweit zu verschieben, braucht man ein Feld von ~ 460 elst. Einh. = 140 kV/cm. Um dieses zu erzeugen, muß ein Ion oder Elektron sich dem H-Atom bis zu einem Abstand ϱ nähern, der gegeben ist durch $e/\varrho^2 = 460$ oder $\varrho \approx 1,0 \cdot 10^{-5}$ cm¹.

Die mittlere Geschwindigkeit c_0 der *H-Ionen* (Häufigkeit des Wasserstoffes!) ist bei 10000° K nach Abschn. 43 gleich $1,6 \cdot 10^6$ cm/sek. Die Dauer T eines Vorbeiganges wird mit $\sim \varrho/c_0 = 64 \cdot 10^{-13}$ sek und man erhält $T \cdot \Delta \omega \approx 160 \gg 1$. Wenn wir zu größeren bzw. kleineren $\Delta \omega$ übergehen, so ändert sich $\Delta \omega \sim 1/\varrho^2$ und $T \sim \varrho$; $T \cdot \Delta \omega$ geht also proportional $1/\varrho$. Für die äußeren Teile der Linien ist also $T \cdot \Delta \omega$ a fortiori $\gg 1$. Dasselbe gilt, wie man sich leicht überzeugt, für höhere Serienglieder. Die Anwendung der HOLTSMARKSchen Theorie auf die Verbreiterung durch die *Ionen* erscheint — abgesehen von der innersten Zone der Linien — gerechtfertigt. Für die *Elektronen* ist die thermische Geschwindigkeit $\sqrt{1840} = 43$ mal größer, man erhält entsprechend $T \cdot \Delta \omega \approx 3,7$; hier wird also die HOLTSMARKSche Theorie zwar nicht mehr sehr genau sein, aber doch eine größenordnungsmäßige Abschätzung geben.

In Summa finden wir also, daß die HOLTSMARKSche Theorie auf die BALMER-Linien in Sternspektren jedenfalls näherungsweise angewandt werden darf.

Zeigen die Komponenten einer Linie quadratischen Starkeffekt, wie z. B. viele He-Linien, so schreiben wir für die k -te Komponente

$$\Delta \lambda = c_k \cdot F^2 = c_k \cdot F_0^2 \cdot \beta^2 \quad (47,27)$$

und erhalten so wegen $d\lambda = d(\Delta \lambda) = 2 c_k F_0^2 \cdot \beta d\beta$ analog (47,17) die Verteilung:

$$S(\Delta \lambda) d\lambda = \sum_k I_k \cdot \frac{W\left(\sqrt{\frac{\Delta \lambda}{c_k \cdot F_0^2}}\right)}{\sqrt{\frac{\Delta \lambda}{c_k \cdot F_0^2}}} \cdot \frac{d\lambda}{2 c_k \cdot F_0^2} \quad (47,28)$$

Im Heliumspektrum werden weiterhin durch makroskopische elektrische Felder bekanntlich die normalerweise „verbotenen“ Übergänge mit $\Delta l \pm 1$ ermöglicht. Zum Beispiel treten neben den *P-D*-Kombinationen auch *P-F*- und *P-P*-Linien auf, deren Intensität relativ zu der der *P-D*-Linie mit der Feldstärke anwächst. Die intermolekularen Felder haben qualitativ eine durchaus gleichartige Wirkung. Ob es in quantitativer Hinsicht erlaubt ist, die auf theoretischem Wege oder durch Starkeffektbeobachtung gewonnenen Erfahrungen einfach auf die veränderlichen intermolekularen Felder zu übertragen, erscheint nicht völlig sicher.

Wir werden auf alle diese Fragen später im Zusammenhang mit Beobachtungen an Sternspektren nochmals zurückkommen.

48. Quantenmechanische Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten und Oszillatorenstärken².

Wie zuerst H. HERTZ auf Grund der MAXWELLSchen Theorie berechnet hat, ist die mittlere Ausstrahlung [erg/sek] eines harmonischen Oszillators³ mit der Ladung e und der Frequenz ν

$$J = \frac{(2\pi\nu)^4}{3c^3} \cdot |e r_0|^2 = \frac{(2\pi\nu)^4}{3c^3} \cdot e^2 (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2), \quad (48,1)$$

¹ Man erkennt so übrigens auch, daß die *Inhomogenität* des Ionenfeldes nicht viel ausmachen kann. Der Durchmesser der 5-ten Wasserstoffbahn ist ja $\sim 2,6 \cdot 10^{-7}$ cm, also $\ll \varrho$.

² Die Darstellung dieses Abschnittes schließt sich weitgehend an den Handbuchartikel von H. BETHE [903] an.

³ Vgl. auch Abschn. 6 u. 41.

wo der Vektor \mathbf{r}_0 mit den Komponenten x_0, y_0, z_0 die Schwingungsamplitude darstellt.

Nach der *Quantenmechanik* kann die Energie, welche ein Atom im Quantenzustand¹ m durchschnittlich pro sek mittels der Übergänge $m \rightarrow n$ abstrahlt, in analoger Weise berechnet werden, wenn man $|\mathbf{r}_0|^2$ ersetzt durch

$$|2 \mathbf{r}_{nm}|^2, \quad (48,2)$$

wo $e \cdot \mathbf{r}_{nm}$ eine Art Dipolmoment bedeutet, das dem Übergang $m \rightarrow n$ zugeordnet ist. (Der Faktor 2 rührt daher, daß es ein \mathbf{r}_{nm} und \mathbf{r}_{mn} gibt, die einander gleich sind.) Korrespondenzmäßig haben die \mathbf{r}_{nm} folgende Bedeutung: Wenn man eine BOHRsche Bahn nach FOURIER in ihre harmonischen Komponenten zerlegt, so können deren Frequenzen den quantentheoretischen Frequenzen ν_{nm} in eindeutiger Weise zugeordnet werden, so daß im Limes großer Quantenzahlen beide zusammenfallen. In entsprechender Weise kann man im Limes großer Quantenzahlen die Ausstrahlung für eine bestimmte Frequenz (bzw. FOURIER-Komponente) erhalten, indem man in (48,1) deren Amplitude einsetzt. *Allgemein* muß man ihre quantenmechanischen Analoga benützen, die $\mathbf{r}_{nm} + \mathbf{r}_{mn}$.

Die Gesamtheit der \mathbf{r}_{nm} bildet die *Matrix* \mathbf{r}

$$\begin{array}{cccc} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdot \cdot \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \cdot \cdot \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \cdot \end{array}$$

welche in der Quantenmechanik die klassische Bahn — beschrieben durch die Gesamtheit ihrer FOURIER-Koeffizienten — vertritt. Die einzelnen \mathbf{r}_{nm} bezeichnet man als *Matrixelemente* von \mathbf{r} .

Wir untersuchen zunächst den Zusammenhang der \mathbf{r}_{nm} mit den EINSTEINSchen Übergangswahrscheinlichkeiten und den Oszillatorenstärken, um uns dann ihrer expliziten Berechnung zuzuwenden:

Nach unseren bisherigen Erörterungen strahlt ein Atom im Zustand m in der Frequenz ν_{nm} pro sek durchschnittlich die Energie aus

$$J_{nm} = \frac{64 \pi^4}{3} \cdot \frac{e^2 \nu_{nm}^4}{c^3} |\mathbf{r}_{nm}|^2. \quad (48,3)$$

Diese ist andererseits nach (45,2) gleich $A_{nm} \cdot h \nu_{nm}$. Wir erhalten also die *Wahrscheinlichkeit für spontane Übergänge*

$$A_{nm} = \frac{64 \pi^4}{3} \cdot \frac{e^2 \nu_{nm}^3}{h c^3} |\mathbf{r}_{nm}|^2, \quad (48,4)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten B_{nm} und B_{mn} können danach aus Gl. (45,10) leicht berechnet werden. Besonders anmerken wollen wir dagegen noch die *Oszillatorenstärke* (45,26 u. 27)

$$f_{nm} = \frac{8 \pi^2 m}{3 h} \cdot \nu_{nm} \cdot |\mathbf{r}_{nm}|^2, \quad (48,5)$$

wobei die Frequenz ν_{nm} bei Absorption positiv, bei Emission negativ gerechnet werden soll.

Nunmehr wollen wir den allgemeineren Fall zulassen, daß der Zustand m aus g_m unendlich benachbarten einfachen Zuständen m' bestehe. Sein statistisches Gewicht ist dann g_m ; er ist — wie man sagt — g_m -fach entartet. Entsprechendes gelte für n . Wie hat man z. B. das A_{nm} aus den $A_{n'm'}$ zu berechnen?

¹ Wir charakterisieren durch *einen* Buchstaben, z. B. m , wieder alle Quantenzahlen, soweit dies ohne Zweideutigkeit möglich ist. Vorerst betrachten wir nur *nicht entartete Zustände* (statistisches Gewicht 1).

Wir knüpfen an den bekannten Abklingversuch an: Dort ist

$$-\frac{dN_m}{dt} = N_m \cdot A_{nm} = \sum_{n', m'} \frac{N_m}{g_m} \cdot A_{n' m'} \quad (48,6)$$

da in jedem Unterniveau m' ja N_m/g_m Atome sitzen. Wir erhalten daher (für J_{nm} gilt Entsprechendes):

$$A_{nm} = \frac{1}{g_m} \sum_{n', m'} A_{n' m'} = \frac{64 \pi^4}{3} \cdot \frac{e^2 \nu_{nm}^3}{h c^3} \cdot \frac{1}{g_m} \sum |\mathbf{r}_{n' m'}|^2 \quad (48,7)$$

und nach (45,26 u. 27)

$$f_{nm} = \frac{8 \pi^2 m}{3 h} \cdot \nu_{nm} \cdot \frac{1}{g_m} \sum |\mathbf{r}_{n' m'}|^2 \quad (48,8)$$

bzw.

$$f_{mn} = \frac{8 \pi^2 m}{3 h} \cdot \nu_{mn} \cdot \frac{1}{g_n} \sum |\mathbf{r}_{n' m'}|^2, \quad (48,9)$$

wobei wieder die Absorptions-Oszillatorenstärken positiv, die Emissions-Oszillatorenstärken negativ gerechnet werden sollen ($\nu_{nm} < 0$, $\nu_{mn} > 0$).

Die *Amplitudenquadrate* $|\mathbf{r}_{nm}|^2 = |x_{nm}|^2 + |y_{nm}|^2 + |z_{nm}|^2$ selbst können mit Hilfe der *SCHRÖDINGERSchen Wellenmechanik*¹ berechnet werden. Jedem Energieniveau E_n wird eine *Eigenfunktion* $\psi_n(x, y, z)$ zugeordnet, die sich ergibt als überall eindeutige und endliche Lösung der *SCHRÖDINGER-Gleichung*

$$\frac{h^2}{8 \pi^2 m} \Delta \psi_n + (E_n - U(x, y, z)) \psi_n = 0, \quad (48,10)$$

wo $U(x, y, z)$ die potentielle Energie im Atom bedeutet. Die E_n sind ihrerseits dadurch festgelegt, daß es nur für diese bestimmten Werte, die sog. *Eigenwerte* der Energie, eindeutige und endliche Lösungen ψ_n der partiellen Differentialgleichung (48,10) gibt. Bei den *Atomen* z. B. bilden normalerweise die E_n für $E < 0$ eine diskrete Folge (gequantelte Bahnen, Linienspektren) für $E > 0$ dagegen eine kontinuierliche (freie Elektronen, kontinuierliche Spektren vgl. Kap. VI).

Die *physikalische Bedeutung* der ψ -Funktionen ist die, daß $\psi_n(x, y, z) \cdot \tilde{\psi}_n(x, y, z) dV$ ($\tilde{\psi}_n$ bedeutet konjugiert komplex) die *Wahrscheinlichkeit* dafür angibt, im Quantenzustand n das Elektron bei der Stelle x, y, z in einem Volumenelement dV anzutreffen. Die bekannte Normierungsbedingung $\int \psi_n \tilde{\psi}_n dV = 1$ erscheint so leicht verständlich. Weiterhin wird man erwarten — und die Rechnung bestätigt es —, daß ψ_n nur im Bereich der Elektronenbahn n der älteren BOHRschen Theorie erhebliche Werte annimmt.

Zur Berechnung der x_{nm} usw. gibt nun die Wellenmechanik folgende Regel:

$$x_{nm} = \int \tilde{\psi}_n \cdot x \cdot \psi_m dV. \quad (48,11)$$

$e \cdot x_{nm}$ ist also — wie schon angedeutet wurde — eine Art Dipolmoment für den Übergang $m \rightarrow n$. Für seine Berechnung ist die Kenntnis der betreffenden ψ -Funktionen in den Bereichen wesentlich, wo *beide* merkliche Werte annehmen.

¹ Die folgende kurze Übersicht soll nicht eine Einführung in die Wellenmechanik ersetzen, sondern nur das Allerwichtigste nochmals kurz vergegenwärtigen. Wir beschränken uns hier darauf, die Formeln für ein Ein-Elektronensystem anzuschreiben. Wer tiefer in diese Dinge eindringen will, muß ohnedies die quantenmechanische Literatur zu Hilfe nehmen.

Vollständig durchgeführt ist die Berechnung der ψ -Funktionen, Amplitudenquadrate, Übergangswahrscheinlichkeiten usw. bis jetzt nur für das *Wasserstoffatom*. Da die Wasserstofflinien in den Sternspektren eine hervorragende Rolle spielen und die Ergebnisse auf die wasserstoffähnlichen Zustände anderer Elemente näherungsweise angewandt werden können, so wollen wir diese im folgenden oft gebrauchten Zahlen kurz zusammenstellen.

Tabelle 39. Oszillatorenstärken für Wasserstoff. Nach H. BETHE [903].

Ausgangszustand	1 s	2 s	2 p		3 s	3 p		3 d	
Endzustand	n p	n p	n s	n d	n p	n s	n d	n p	n f
n = 1	—	—	0,139	—	—	—0,026	—	—	—
2	0,4162	—	—	—	—0,041	—0,142	—	—0,447	—
3	0,0791	0,425	0,014	0,694	—	—	—	—	—
4	0,0290	0,102	0,0031	0,122	0,484	0,032	0,619	0,011	1,016
5	0,0139	0,042	0,0012	0,044	0,121	0,007	0,139	0,0022	0,156
6	0,0078	0,022	0,0006	0,022	0,052	0,003	0,056	0,0009	0,053
7	0,0048	0,013	0,0003	0,012	0,027	0,002	0,028	0,0004	0,025
8	0,0032	0,008	0,0002	0,008	0,016	0,001	0,017	0,0002	0,015
n = 9 bis ∞ zus. asympt. Formel	0,0101 $1,6n^{-3}$	0,026 $3,7n^{-3}$	0,0007 $0,1n^{-3}$	0,053 $3,3n^{-3}$	0,048 $6,2n^{-3}$	0,002 $0,3n^{-3}$	0,045 $6,1n^{-3}$	0,0007 $0,07n^{-3}$	0,037 $4,4n^{-3}$
Diskretes Spektrum	0,5641	0,638	—0,119	0,923	0,707	—0,121	0,904	—0,402	1,302
Kontinuierliches Spektrum . .	0,4359	0,362	0,008	0,188	0,293	0,010	0,207	0,002	0,098
Insgesamt	1,000	1,000	—0,111	1,111	1,000	—0,111	1,111	—0,400	1,400
Energie des kontinuierlichen Spektrums	0,54	0,61	0,6	0,42	0,78	0,47		0,39	

Anfangszustand	4 s	4 p		4 d		4 f	
Endzustand	n p	n s	n d	n p	n f	n d	n g
n = 1	—	—0,010	—	—	—	—	—
2	—0,009	—0,034	—	—0,073	—	—	—
3	—0,097	—0,161	—0,018	—0,371	—	—0,727	—
4	—	—	—	—	—	—	—
5	0,545	0,053	0,610	0,028	0,890	0,009	1,345
6	0,138	0,012	0,149	0,006	0,187	0,0016	0,183
7	0,060	0,005	0,063	0,002	0,072	0,0006	0,058
8	0,033	0,003	0,033	0,001	0,037	0,0003	0,027
n = 9 bis ∞ zus. asympt. Formel	0,082 $9,3n^{-3}$	0,006 $0,7n^{-3}$	0,075 $9,1n^{-3}$	0,002 $0,3n^{-3}$	0,071 $8,6n^{-3}$	0,0006 $0,05n^{-3}$	0,045 $3,5n^{-3}$
Diskretes Spektrum	0,752	—0,126	0,912	—0,406	1,257	—0,715	1,658
Kontinuierliches Spektrum . .	0,248	0,015	0,199	0,006	0,143	0,001	0,056
Insgesamt	1,000	—0,111	1,111	—0,400	1,400	0,714	1,714
Energie im kontinuierlichen Spektrum . .	1,25	0,72		0,45		0,32	

Tabelle 39 gibt¹ zunächst die *Oszillatorenstärke f* der einzelnen *Teilübergänge*, aus denen sich die Wasserstofflinien zusammensetzen. Darunter stehen die *Summen* der Oszillatorenstärken für die Linien und dann (vgl. Kap. VI) für die entsprechenden Seriegrenzkontinua. Dann folgt die gesamte Summe der Oszillatorenstärke *aller* Übergänge, die von einem bestimmten Niveau aus

¹ Nach BETHE [903]. Die Berichtigungen von P. RUDNICK [926] wurden berücksichtigt.

möglich sind. Addiert man noch die Zahlen für $l \rightarrow l-1$ und $l \rightarrow l+1$, so erhält man stets $\Sigma f = 1$ in Einklang mit dem f -Sommensatz von KUHN und THOMAS (Abschn. 49)

Die nächste Tabelle 40 gibt die mit Hilfe von Tabelle 39 berechneten Oszillatorenstärken der Linien und Grenzkontinua der LYMAN-, BALMER- und PASCHEN-Serie des Wasserstoffes¹. Da das statistische Gewicht eines Teilniveaus mit der Quantenzahl l gleich $2l+1$ und das Gesamtgewicht des n -ten Niveaus gleich n^2 ist (beide ohne Berücksichtigung des Elektronenspins, der je noch einen Faktor 2 geben würde), so wird z. B. für die BALMER-Linien nach (48,9)

Tabelle 40. Oszillatorenstärken der Linien und Grenzkontinua des Wasserstoffes.

Serie und Ausgangszustand	LYMAN $n = 1$	BALMER $n = 2$	PASCHEN $n = 3$
Endzustand			
$n = 1$	—	—0,104	—0,0087
2	0,416	—	—0,284
3	0,0791	0,637	—
4	0,0290	0,119	0,841
5	0,0139	0,0443	0,150
6	0,0078	0,0212	0,0554
7	0,0048	0,0122	0,0269
8	0,0032	0,0080	0,0161
$n = 9$ bis ∞ zus.	0,0101	0,0237	0,0421
Asymptotische Formel	$1,6 \cdot n^{-3}$	$3,5 \cdot n^{-3}$	$5,3 \cdot n^{-3}$
Diskretes Spektrum	0,564	0,762	0,839
Kontinuierliches Spektrum	0,436	0,238	0,161
Σf	1,000	1,000	1,000

$$f_{n,2} = \frac{1}{4} \{ f_{np,2s} + 3(f_{ns,2p} + f_{nd,2p}) \} \quad (48,12)$$

Schließlich tabulieren wir nach BETHE [903] noch die Übergangswahrscheinlichkeiten A_{nm} in Einheiten von 10^8 sek^{-1} . Zunächst sind (Tabelle 41) die Werte für die einzelnen Teilübergänge angegeben. Sodann rechts die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller von einem Teilniveau aus möglichen Übergänge $\gamma_m = \sum_n A_{nm}$, die nach Abschn. 46 die natürliche Breite dieses Niveaus bestimmt. $1/\gamma_m = T_m$ (letzte Spalte) ist die Abklingzeit. In den mit „Mittel“ bezeichneten

Zeilen sind jeweils die mittleren Übergangswahrscheinlichkeiten usw. des ganzen Wasserstoffniveaus angegeben. Bei ihrer Berechnung wurde angenommen, daß die Besetzung der einzelnen Teilniveaus ihren statistischen Gewichten entspricht.

Wie ändern sich weiterhin die Oszillatorenstärken usw., wenn man vom Wasserstoff mit der Kernladungszahl $Z = 1$ übergeht zu beliebigem Z (z. B. HeII-Spektrum mit $Z = 2$ oder wasserstoffähnliche Terme anderer Ionen)? Da die Amplituden $r_{nm} \sim Z^{-1}$ gehen, die $\nu_{nm} \sim Z^2$, so ändern sich die Oszillatorenstärken $f \sim \nu_{nm} |r_{nm}|^2$ gar nicht. Die $A_{nm} \sim \nu_{nm}^3 \cdot |r_{nm}|^2$ dagegen gehen $\sim Z^4$.

Um die Übergangswahrscheinlichkeiten komplizierterer Atome — wasserstoffähnliche Terme — wenigstens näherungsweise berechnen zu können, muß man das entsprechende quantenmechanische Problem weitgehend vereinfachen: Man ersetzt die Einwirkung der anderen Elektronen auf das gerade interessierende Leuchtelektron durch ein geeignetes zentralsymmetrisches Potentialfeld $U(r)$. Die SCHRÖDINGER-Gleichung (48,10) wird dann auf numerischem Wege integriert, worauf man durch nochmalige Integration über die Eigenfunktionen nach (48,11) die Übergangswahrscheinlichkeiten usw. erhält. Zur Ermittlung des Feldes $U(r)$ gibt es mehrere Möglichkeiten:

a) $U(r)$ muß in Verbindung mit der SCHRÖDINGER-Gleichung — näherungsweise — die richtigen Energieniveaus E_n liefern. Umgekehrt kann mit Hilfe der spektroskopisch bestimmten E_n das Zentralfeld $U(r)$ weitgehend festgelegt werden. Dieses Verfahren ist im Rahmen der älteren Quantenmechanik von

¹ Die Zahlen von Y. SUGIURA [930] zeigen gegenüber denen BETHES gelegentlich Unterschiede von einigen Prozent, die für uns aber völlig belanglos sind.

Tabelle 41. Übergangswahrscheinlichkeiten für Wasserstoff in 10^8 sek^{-1} .
Nach H. ВЕТНЕ [903].

Ausgangs- zustand	End- zustand	$n = 1$	2	3	4	5	Summe	Lebensdauer in 10^{-8} sek
2 s	n p	—	—	—	—	—	0	∞
2 p	n s	6,25	—	—	—	—	6,25	0,16
2	Mittel	4,69	—	—	—	—	4,69	0,21
3 s	n p	—	0,063	—	—	—	0,063	16
3 p	n s	1,64	0,22	—	—	—	1,86	0,54
3 d	n p	—	0,64	—	—	—	0,64	1,56
3	Mittel	0,55	0,43	—	—	—	0,98	1,02
4 s	n p	—	0,025	0,018	—	—	0,043	23
4 p	n s	0,68	0,095	0,030	—	—	0,81	1,24
	n d	—	—	0,003	—	—		
4 d	n p	—	0,204	0,070	—	—	0,274	3,65
4 f	n d	—	—	0,137	—	—	0,137	7,3
4	Mittel	0,12 ₈	0,083	0,089	—	—	0,299	3,35
5 s	n p	—	0,012 ₇	0,008 ₅	0,006 ₅	—	0,027 ₇	36
5 p	n s	0,34	0,049	0,016	0,007 ₅	—	0,415	2,40
	n d	—	—	0,001 ₅	0,002	—		
5 d	n p	—	0,094	0,034	0,014	—	0,142	7,0
	n f	—	—	—	0,000 ₅	—		
5 f	n d	—	—	0,045	0,026	—	0,071	14,0
5 g	n f	—	—	—	0,042 ₅	—	0,042 ₅	23,5
5	Mittel	0,040	0,025	0,022	0,027	—	0,114	8,8
6 s	n p	—	0,007 ₃	0,0051	0,0035	0,0027	0,0176	57
6 p	n s	0,195	0,029	0,0096	0,0045	0,0024	0,243	4,1
	n d	—	—	0,0007	0,0009	0,0010		
6 d	n p	—	0,051	0,0187	0,0086	0,0045	0,080	12,6
	n f	—	—	—	0,0002	0,0004		
6 f	n d	—	—	0,0210	0,0129	0,0072	0,0412	24,3
	n g	—	—	—	—	0,0001		
6 g	n f	—	—	—	0,0137	0,0110	0,0247	40,5
6 h	n g	—	—	—	—	0,0164	0,0164	61
6		0,0162	0,0092	0,0077	0,0077	0,0101	0,0510	19,6

E. FUES entwickelt worden. In der Quantenmechanik hat sich in diesem Zusammenhang das WENTZEL-KRAMERS-BRILLOUINSche Verfahren zur Lösung der Wellengleichung als sehr geeignet erwiesen.

b) Nach L. H. THOMAS und E. FERMI [909] kann man die Elektronenhüllen besonders der schwereren Atome als eine Art Elektronengaskugeln betrachten. Im Gegensatz zu den z. B. in Kap. IV betrachteten Verhältnissen sind hier jedoch alle Quantenzustände bis zu dem des Leuchtelektrons herauf besetzt (PAULI-Prinzip:); d. h. das Elektronengas ist völlig *entartet*. FERMI behandelt also das Atom als eine Art Mikro-Stern, dessen Gas der „entarteten“ Zustandsgleichung folgt und durch Anziehung des Kernes zusammengehalten wird. Mit der Dichteverteilung des Elektronengases ist das Potentialfeld $U(r)$ direkt gegeben.

c) D. R. HARTREES Methode des *selfconsistent field* [912] beruht — in Weiterbildung der unter a) genannten Verfahren — auf folgender Überlegung: Jedes Elektron bewegt sich im Felde des Atomkernes und aller übrigen Elektronen. Deren mittlere Aufenthaltswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von den Koordinaten ist aber wiederum durch ihre SCHRÖDINGER-Funktionen als $\psi_n \bar{\psi}_n$

bestimmt. Alle ψ müssen also „zusammenpassen“ und können durch ein Verfahren sukzessiver Näherung berechnet werden.

Diese Methode wäre im Sinne der klassischen Mechanik *völlig* korrekt. Vom Standpunkt der Quantenmechanik aus ist sie es noch nicht ganz. Hier müssen vielmehr, wie das V. FOCK [910] zuerst getan hat, die sog. *Austausch-* (Resonanz-) Effekte¹ berücksichtigt werden, die z. B. bei den Erdalkalien die Aufspaltung Singulett-Triplett-Term verursachen. Einen großen Fortschritt bedeutet es, daß es neuerdings HARTREE gelungen ist, die außerordentlich umfangreichen Rechnungen, die sein Verfahren mit sich bringt, zu mechanisieren.

Leider muß man zur Berechnung der *Übergangswahrscheinlichkeiten* usw. die betreffenden Eigenfunktionen *sehr* genau kennen, da der Integrand in (48,11) meist oszilliert, so daß schon kleine Fehler einer ψ -Funktion das Endresultat beträchtlich beeinflussen können. Man hat heute den Eindruck, daß im großen und ganzen die HARTREESchen Methoden die genauesten Ergebnisse liefern; in den Übergangswahrscheinlichkeiten dürfte man auf schätzungsweise $\pm 20\%$ kommen, was für astrophysikalische Zwecke auch ausreicht. *Es wäre außerordentlich wünschenswert, daß im Laufe der Zeit die Übergangswahrscheinlichkeiten usw. vieler astrophysikalisch wichtiger Linien berechnet würden.*

Wir geben noch kurz eine Zusammenstellung² der bis jetzt (nach verschiedenen Methoden) berechneten Oszillatorenstärken für wasserstoffunähnliche Linien, soweit sie für die Astrophysik von Bedeutung sind. Für die wasserstoffähnlichen Übergänge zwischen je zwei hochangeregten Termen kann man die früheren Tabellen anwenden. Wo für ein Element mehrere Berechnungen vorliegen, hat Verf. die nach seiner Auffassung genaueste ausgewählt (Tab. 42).

Aus den wenigen theoretischen Untersuchungen, welche bis jetzt vorliegen, erkennt man, daß sowohl die Absolutwerte der Oszillatorenstärken als auch ihre Variation innerhalb einer Serie von Element zu Element stark variieren. Als allgemeine Regel kann man nur entnehmen, daß das f des ersten Seriengliedes meist von der Größenordnung 1 ist, wie man nach dem *f-Summensatz* von KUHN-THOMAS-REICHE erwarten kann, den wir im folgenden Abschn. 49 behandeln werden. Auf die *Messungen* von Oszillatorenstärken, Übergangswahrscheinlichkeiten usw. und ihren Vergleich mit der Theorie werden wir im folgenden Kap. X eingehen, soweit dies für unsere Zwecke erforderlich ist.

49. Der f -Summensatz von KUHN und THOMAS-REICHE; seine Verallgemeinerungen und seine Gültigkeitsgrenzen.

Die Quantenmechanik gestattet eine Reihe von Aussagen zu machen über die Summe der *Oszillatorenstärken* für alle Übergänge, die von einem bestimmten Niveau ausgehen (in Absorption *und* Emission). Da diese Summensätze vielfach zur Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten usw. herangezogen werden können, so wollen wir sie hier zusammenstellen. Wegen der Beweise müssen wir wieder auf den Handbuchartikel von H. BETHE (s. S. 184) und die sonstige Quantenmechanikliteratur verweisen.

Für ein beliebiges System mit z Elektronen im Zustand n gilt in völliger Allgemeinheit der KUHN-THOMAS-REICHESche *Summensatz*

$$\sum_m f_{mn} = z. \quad (49,1)$$

¹ Auch beim FERMISchen Atommodell [und den unter (a) genannten Verfahren] ist der Austausch zunächst vernachlässigt. Über näherungsweise Berücksichtigung vgl. P. A. M. DIRAC [907] und H. JENSEN [916].

² Die Literaturangaben der Tabelle sind am Ende des Buches nicht wiederholt. Vgl. auch MITCHELL-ZEMANSKY [802, S. 146 ff.].

Schreiben wir die Absorptions- und Emissionsübergänge getrennt und drücken die Emissions-Oszillatorenstärken nach (45,27) durch die Absorptions-Oszillatorenstärken aus, so nimmt (49,1) die Form an

$$\sum_{\text{Absorption}}^m f_{mn} - \sum_{\text{Emission}}^m \frac{g_m}{g_n} f_{nm} = z. \quad (49,2)$$

Unter Benützung der spontanen Übergangswahrscheinlichkeiten wird nach (45,27)

$$\frac{1}{3} \sum_{m>n} \frac{g_m}{g_n} \cdot \frac{A_{nm}}{\gamma_{kl}} - \frac{1}{3} \sum_{m<n} \frac{A_{mn}}{\gamma_{kl}} = z, \quad (49,3)$$

wobei sich die $\left\{ \begin{array}{l} \text{erste} \\ \text{zweite} \end{array} \right\}$ Summe auf alle $\left\{ \begin{array}{l} \text{oberhalb} \\ \text{unterhalb} \end{array} \right\}$ von n gelegenen Niveaus m bezieht. Spezielle Beispiele gaben schon die Tabelle 39 u. 40 für das Einelektronensystem ($z = 1$) des Wasserstoffes; Tabelle 42 für das Zweielektronensystem ($z = 2$) des Heliums. Diese Tabellen zeigen, daß die negativen *Emissions*-oszillatorenstärken vielfach einen beträchtlichen Bruchteil der Gesamtsumme ausmachen.

Die direkte Anwendung der allgemeinsten Form (49,1—3) des f -Summensatzes auf *Mehrelektronensysteme* hat praktisch wenig Bedeutung, da bei der Summierung *sämtliche* Übergangsmöglichkeiten *aller* Elektronen zu berücksichtigen sind, also z. B. bei Na auch die Röntgenabsorption in der *K*- und *L*-Schale.

In praxi interessieren wir uns aber nur für die Übergänge des äußersten — sog. Leuchtelektrons. Um *nur* diese mitzubekommen, müssen wir das Na-Atom offenbar als Einelektronenproblem auffassen. Dann ist — wie aus der quantenmechanischen Herleitung sofort hervorgeht — der f -Summensatz mit $z=1$ gültig, *wenn man auch die durch das PAULI-Prinzip verbotenen Übergänge nach besetzten Elektronenschalen mitrechnet*¹. Der Grund dafür, daß hier in der Theorie Frequenzen auftreten, die in Wirklichkeit gar nicht existieren, liegt — wie schon angedeutet wurde — darin, daß wir das Atom als *Einelektronen*-problem behandeln. Dort aber besteht keine Möglichkeit, das PAULI-Prinzip in einer konsequenten Weise einzubauen.

Tabelle 42. Nach der Quantenmechanik berechnete Oszillatorenstärken.

He $1^2S - n^1P$	λ	f	Literatur ²
$n = 2$	584,4	0,349	VINTI, J. P.: Physic. Rev. 42 , 632, (1932);
3	537,1	0,0928	44 , 524 (1933)
4	522,2	0,0357	Ähnliche Rechnungen bei
5	515,6	0,0177	WHEELER, J. A.: Physic. Rev. 43 , 258 (1933)
6	512,1	0,0105	KÖRWIEN, H.: Z. Physik 91 , 1, (1934),
7	510,1	0,0063	die z. B. für das 1. Serienglied
$\lim n \rightarrow \infty$		$2,09/n^3$	$f = 0,266$ bzw. $0,365$ finden
f -Summen		0,54 0,04 1,55	Diskrete Übergänge Gleichzeitige Sprünge beider Elektronen Kontinuierliches Spektrum
Zusammen		2,13	Statt 2,00 nach dem Summensatz von KUHN-THOMAS (Abschn. 49)

¹ Dies ist z. B. übersehen bei H. N. RUSSELL [1524].

² Anm. b. d. Korr.: Oszillatorenstärken für Übergänge zwischen *angeregten* Zuständen des Heliums hat neuerdings E. A. HYLLEAAS, Z. Physik **106**, 395, 1937 berechnet.

Tabelle 42 (Fortsetzung).

Li $2^2S - n^2P$	λ	f	Literatur
$n = 2$	6708	0,750	Nach TRUMPY, B.: Z. Physik 71 , 720 (1931) Ältere Rechnungen desselben Verf. [Z. Physik 54 , 372 (1929)] ergaben für das 2. und 3. Serienglied die f -Werte 0,064 und 0,015; ein Zeichen für die „Empfindlichkeit“ solcher Rechnungen [vgl. auch Z. Physik 57 , 787, (1929)].
3	3233	0,0055	
4	2741	0,0052	
5	2563	0,0025	
f -Summen		0,77 0,24	Diskrete Übergänge Kontinuierliches Spektrum
Zusammen		1,01	Statt 1,00 nach KUHN-THOMAS
Na $3^2S - n^2P$	λ^1	f	Literatur
$n = 3$	5893	0,975	Nach TRUMPY, B.: Z. Physik 71 , 720 (1931). Vgl. auch Z. Physik 61 , 54 (1930) und die bei Li angegebene Literatur SUGIURA, Y.: Philos. Mag. 4 , 495 (1927), berechnete die Oszillatorenstärken der Linien nach Metho- de a). Die Zahlenwerte stimmen mit denen TRUMPYS gut überein. Bei der Anwendung des f -Sommensatzes (vgl. Abschn. 49) hat TRUMPY irrtümlicherweise den Übergang $3^2S - 2^2P$ weg- gelassen. — Außerdem PROKOFJEV, W. K.: Z. Physik 58 , 255 (1929)
4	3303	0,0144	
5	2853	0,00241	
6	2680	0,00098	
...	
f -Summen		0,996 0,0021 -0,043	Diskrete Übergänge Kontinuierliches Spektrum Für den nach dem PAULI-Prinzip verbotenen Übergang $3^2S - 2^2P$ (nach SUGIURA, s. oben)
Zusammen		0,955	Statt 1,00 nach dem f -Sommensatz
	λ	f	Literatur
Na $3^2P - 3^2D$	8190	0,832	W. K. PROKOFJEV, s. oben
$3^2P - 4^2D$	5685	0,108	
Na $3^2P - 4^2S$	11393	0,163	
Na $4^2S - 4^2P$	22070	1,35	
	λ	f	Literatur
Ca ⁺ $4^2S - 4^2P$	3933, 3968	1,08	ZWAAN, A.: Naturwiss. 17 , 121 (1928); Proc. Amsterdam Acad. (1929)
$3^2D - 4^2P$	8498, 8542, 8662	0,09	

Beim Na-Grundterm $3^2S_{1/2}$ z. B. handelt es sich um die Übergänge nach $2^2P_{1/2, 3/2}$. Glücklicherweise sind die berechneten Wahrscheinlichkeiten solcher Übergänge meist verhältnismäßig klein (vgl. Tabelle 42; Na). Vernachlässigt man weiter die Oszillatorenstärken der höheren Glieder der Hauptserie gegenüber dem f der Resonanzlinie, so wird für diese $f \approx 1$. Das heißt die beiden NaD-Linien verhalten sich zusammen nahezu wie ein klassischer Oszillator. Daß dies so ist, hatten die Dispersionsmessungen schon lange gezeigt; solche Beobachtungen gaben dann den Anstoß zur Entdeckung des f -Sommensatzes, der wiederum bei der Entstehung der Quantenmechanik eine grundlegende Rolle spielte.

Beim Eimelektronensystem kann man nach E. WIGNER und J. G. KIRKWOOD² die Oszillatorensummen für die Übergänge mit $\Delta l = +1$ bzw. -1

¹ Die Wellenlängen geben Mittelwerte des betreffenden Dubletts an. Die Oszillatorenstärken beziehen sich auf das ganze Dublett.

² Literatur vgl. H. BETHE [903].

getrennt angeben: Es ist für

$$\left. \begin{aligned} n, l \rightarrow n', l-1: \quad \sum f &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{l(2l-1)}{2l+1}, \\ n, l \rightarrow n', l+1: \quad \sum f &= \frac{1}{3} \cdot \frac{(l+1)(2l+3)}{2l+1}. \end{aligned} \right\} \quad (49,4)$$

Einige Beispiele gibt die folgende Tabelle 43.

Tabelle 43. Partieller f -Summensatz von WIGNER und KIRKWOOD.

Übergang	$l \rightarrow l-1$	$l \rightarrow l+1$
$\sum f \left\{ \begin{array}{l} l=0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} - \\ -\frac{1}{9} (P-nS) \\ -\frac{2}{5} (D-nP) \\ -\frac{5}{7} (F-nD) \end{array}$	$\begin{array}{l} \frac{1}{9} (S-nP) \\ +\frac{10}{9} (P-nD) \\ +\frac{7}{5} (D-nF) \\ +\frac{12}{7} (F-nG) \end{array}$

Bei den Übergängen nach kleinerem l überwiegt also die Emission ($f < 0$); bei $l \rightarrow l+1$ die Absorption ($f > 0$). Bildet man nach (49,4) die Gesamtsumme der f , so kommt man selbstverständlich wieder zum THOMAS-KUHNschen Summensatz zurück.

50. Übergangswahrscheinlichkeiten von Multiplett Komponenten.

BURGER-DORGELOSche Summenregel.

Die im physikalischen Institut Utrecht von 1924 an entwickelten Methoden zur Messung der *Intensität* von Spektrallinien ergaben für die Komponenten von *Multipletts*¹ besonders einfache Verhältnisse.

Zunächst zeigte sich, daß die relativen *Intensitäten der S—P-Kombinationen direkt proportional den statistischen Gewichten* $g = 2J+1$ (= Zahl der Einstellungsmöglichkeiten der Bahn in einem äußeren Feld) der P -Terme sind.

Einige Anwendungen gibt die folgende Zusammenstellung:

Tabelle 44. Relative Intensitäten von S — P -Kombinationen.

	J der P -Terme	Intensität $\sim g = 2J+1$	Beispiele
Dublettsystem . . .	$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2}$	2 : 4	Na $3^2S - 3^2P_{1/2, 3/2}$; λ 5896, 5890
Triplettsystem . . .	0 1 2	1 : 3 : 5	Mg $3^3P_{0, 1, 2} - 4^3S_1$; λ 5167, 5173, 5184
Quartettsystem . . .	$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{2}$	2 : 4 : 6	Mn $z^4P_{1/2, 1^1/2, 2^1/2} - e^4S_{1^1/2}$; λ 5414, 5399, 5378
Quintettsystem . . .	1 2 3	3 : 5 : 7	Cr $a^5S_2 - z^5P_{3, 2, 1}^0$; λ 5208, 5206, 5204

Wie die Tabelle zeigt, kommt es nicht darauf an, ob der P -Term höher oder tiefer als der S -Term liegt. Dies legt die von BURGER und DORGELO [936] gefundene und experimentell auf das beste bestätigte *Summenregel* für die Kombination zweier Mehrfachterme nahe:

Läßt man in Gedanken die Unterteilungen des Anfangs- oder Endtermes zusammenrücken, so verhalten sich die entstehenden Intensitätssummen wie die statistischen Gewichte des nicht zusammengerückten Termes.

¹ Hierzu auch Anh. A; dort weitere Literatur.

Betrachten wir beispielsweise das aus dem Sonnenspektrum wohlbekannte infrarote Triplet (eigentlich zusammengesetzte Dublett) des Ca^+ : Die folgende Tabelle gibt zunächst die Terme mit ihren statistischen Gewichten.

Tabelle 45. Intensitäten in einem zusammengesetzten Dublett (Ca^+).

	$3^2D_{3/2}$		$3^2D_{5/2}$
	g	4	6
$4^2P_{1/2}$	2	5	—
		$\lambda 8662$	
$4^2P_{3/2}$	4	1	9
		$\lambda 8498$	$\lambda 8542$

Wie man sieht, sind in diesem Falle alle Intensitäten *eindeutig* bestimmt durch die Forderung, daß sich die Intensitätssummen der Horizontalreihen wie 2:4, die der Vertikalreihen wie 4:6 verhalten sollen: Man erhält für das ganze Multipllett die Intensitätsverhältnisse 1:5:9.

Bei komplizierteren Multiplletts reicht die Summenregel nicht mehr aus, um alle Intensitäten zu berechnen. Es ist aber fast gleichzeitig (1925) R. DE L. KRONIG [942], A. SOMMERFELD und H. HÖNL [946], sowie H. N. RUSSELL [944] gelungen, die korrespondenzmäßigen Berechnungen von A. SOMMERFELD und W. HEISENBERG [945] so zu verschärfen, daß sie den Summenregeln genügen. Die Quantenmechanik hat nachträglich die so gewonnenen Formeln vollauf bestätigt.

Wir bezeichnen mit A. SOMMERFELD [947] die Intensitäten der Übergänge

$$L \rightleftharpoons L-1 \left\{ \begin{array}{l} J \rightleftharpoons J-1 \\ J \rightleftharpoons J \\ J-1 \rightleftharpoons J \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} I_p \\ I_i \\ I_a \end{array} \quad (50,1)$$

um anzudeuten, daß die Änderungen von L und J parallel, indifferent, antiparallel gehen. Die oberen bzw. unteren Pfeile gehören zusammen; in dem Schema können — wie man sieht — alle Übergänge mit $L = \pm 1$ und $\Delta J = 0, \pm 1$ untergebracht werden.

Für Übergänge vom Typus PP' (Erdalkalien!) benutzen wir das Schema:

$$L \rightleftharpoons L \left\{ \begin{array}{l} J \rightleftharpoons J \quad \dots I_\pi \\ J \rightleftharpoons J-1 \quad \dots I_\alpha. \end{array} \right. \quad (50,2)$$

Führen wir noch die Abkürzungen ein

$$\left. \begin{array}{l} P(J) = (J+L)(J+L+1) - S(S+1) \\ Q(J) = S(S+1) - (J-L)(J-L+1) \\ R(J) = J(J+1) + L(L+1) - S(S+1) \end{array} \right\} \quad (50,3)$$

so wird für $\Delta L = \pm 1$:

$$\left. \begin{array}{l} I_p = C \cdot \frac{P(J)P(J-1)}{4JL} \\ I_i = C \cdot \left(\frac{1}{J} + \frac{1}{J+1} \right) \frac{P(J)Q(J)}{4L} \\ I_a = C \cdot \frac{Q(J)Q(J-1)}{4JL} \end{array} \right\} \quad (50,4)$$

und für $\Delta L = 0$

$$\left. \begin{array}{l} I_\pi = C' \cdot \frac{R(J)R(J-1)}{2JL} + \frac{R(J+1)R(J)}{2(J+1)L} = C' \cdot \frac{2J+1}{2J(J+1)L} R^2(J) \\ I_\alpha = C' \cdot \frac{P(J)Q(J-1)}{2JL} \end{array} \right\} \quad (50,5)$$

Wenn man mit SOMMERFELD und HÖNL (s. S. 194) die Normierungsfaktoren C bzw. C' so einrichten will, daß die Summe der Intensitäten *aller* Linien eines Multipletts gleich dem Produkt der statistischen Gewichtssummen von Anfangsterm und Endterm wird, so ist

$$C = 2S + 1 \quad \text{und} \quad C' = (2S + 1) \frac{2L + 1}{2(L + 1)} \quad (50,6)$$

zu setzen.

Diese einfachen Regeln, deren Anwendung durch die ausführlichen Tabellen von H. E. WHITE und A. Y. ELIASON [948]¹, sowie die Multipllett-Tabellen von CH. E. MOORE [943] noch erleichtert wird, bilden einen der Grundsteine der neueren Astrophysik. Mit den Multipletts sind uns in den Sternspektren Liniengruppen gegeben, für welche die *relativen* Übergangswahrscheinlichkeiten bekannt sind. Man hat so eine direkte Möglichkeit, die Abhängigkeit irgendwelcher Eigenschaften der Spektrallinien von der Übergangswahrscheinlichkeit zu studieren (H. N. RUSSELL, W. S. ADAMS, O. STRUVE u. a.).

Die relativen Intensitäten *verschiedener* Multipletts können in ähnlicher Weise berechnet werden, wie die Intensitäten innerhalb *eines* Multipletts, wenn die entsprechenden Terme aus *ein* und *derselben* Elektronenkonfiguration hervorgehen.

Haben wir z. B. — abgesehen von abgeschlossenen Schalen — zwei p -Elektronen, so bilden diese die Terme (vgl. Anh. A) $p \cdot p$: 3D , 3P , 3S ; 1D , 1P , 1S . Entsprechend erhält man aus einem p und einem s -Elektron die Terme $p \cdot s$: 3P ; 1P . Die Übergänge zwischen allen diesen Termen (insgesamt 6 Multipletts, die sich in diesem einfachsten Beispiel allerdings zum Teil auf *eine* Linie reduzieren) bilden ein sog. *Supermultiplett*. Intensitätsformeln für solche Supermultipletts sind zum Teil schon von R. DE L. KRONIG (s. S. 194) angegeben worden. Am vollständigsten ist das Problem behandelt bei L. GOLDBERG [939], auf dessen ausführliche *Tabellen* nachdrücklich hingewiesen sei. Für das angegebene Supermultiplett z. B. findet L. GOLDBERG ([939], Tabelle XIV) folgende Intensitäten:

$\begin{array}{c} p p \\ p s \end{array}$	3D 3P 3S			
$({}^2P) {}^3P$	15	9	3	1D 1P 1S
			1P	
			5	3
				1

Die im vorhergehenden zusammengestellten Formeln usw. setzen voraus — dies muß bei ihrer Anwendung unbedingt beachtet werden —, daß der Fall der RUSSELL-SAUNDERS-Koppelung verwirklicht ist; d. h. die gegenseitigen Abstände der Terme eines Multipletts müssen klein sein im Verhältnis zu den Abständen benachbarter Multipletts.

Auf andere Koppelungsverhältnisse der Impulsvektoren können wir hier nicht eingehen; ebensowenig auf die von E. FERMI gedeuteten Abweichungen der höheren Glieder der Cs-Hauptserie von der BURGER-DORGELOSCHEN Summenregel. Wir müssen uns vielmehr auf die für die Astrophysik wichtigsten Dinge beschränken und verweisen im übrigen auf die am Ende des Buches zusammengestellte Literatur.

¹ Anm. b. d. Korr.: H. N. RUSSELL, Ap. J. **83**, 129 (1936).

X. Kapitel.

Physikalische Grundlagen der Theorie der FRAUNHOFER-Linien. 3. Teil. Experimentelle Prüfung der Theorie und Messung von Übergangswahrscheinlichkeiten usw.

51. Messung von Oszillatorenstärken mit Hilfe der Dispersion in der Nähe der Linien.

In Kap. VIII, Gl. (40,10) haben wir den Verlauf des Brechungsindex n oder — genauer gesagt — des $n^2 - 1$ in der Umgebung einer Spektrallinie nach der klassischen Elektronentheorie berechnet. Nach der Quantentheorie müssen — wie wir sahen — die \mathfrak{R} durch Atomzahl $N \times$ Oszillatorenstärke f ersetzt werden; die γ durch die Summe der Abklingkonstanten $\gamma_m + \gamma_n$ des oberen und unteren Energieniveaus. Durch Addition der Beiträge aller Eigenfrequenzen des Atoms erhält man so die KRAMERS-HEISENBERGSche *Dispersionsformel*: Sie setzt sich zusammen aus positiven Gliedern, welche den Frequenzen von *Absorptionsübergängen* entsprechen und *negativen* Gliedern, die den *Emissionsübergängen* zugeordnet sind.

Jede Linie gibt also in ihrer Umgebung (es muß aber $\Delta\omega >$ Dopplerbreite sein; bei kleineren $\Delta\omega$ kann man auch praktisch nicht arbeiten) zum $n - 1$ nach Gl. (40,15) — deren Bezeichnungen wir beibehalten — einen Beitrag

$$\Delta(n-1) = -\frac{\pi e^2 N \cdot f}{m \omega_0} \cdot \frac{1}{\omega - \omega_0} = \frac{e^2 \cdot N f}{4 \pi m c^2} \cdot \frac{\lambda_0^3}{\lambda - \lambda_0}, \quad (51,1)$$

der nur von Nf abhängt. Umgekehrt kann man aus Messungen des Brechungsindex bei bekannter Dampfdichte (d. h. bekanntem N) die *Oszillatorenstärke* f *ermitteln*. Ist N nicht bekannt, so kann man wenigstens die relativen f -Werte verschiedener Linien bestimmen.

Zur Messung¹ von $n - 1$ bildet man nach dem Vorgange von L. PUCCIANTI das Streifensystem eines JAMINSchen Interferometers auf den Spalt eines Spektralapparates ab (Streifen \perp Spalt). Die Interferenzstreifen zeigen dann in der Umgebung der Absorptionslinien Abweichungen vom geradlinigen Verlauf. Deren Ausmessung läßt sich noch besser durchführen, wenn man in *einem* Strahlengang des Interferometers durch eine Glasplatte einen größeren Gangunterschied erzeugt. Die „Hakenmethode“ von D. ROSCHDESTWENSKY — so genannt nach der Form der Interferenzstreifen — ist später besonders von R. LADENBURG und seinen Mitarbeitern weitergebildet worden.

Außer der Dispersion kann man in ähnlicher Weise auch die *Magnetorotation* (FARADAY-Effekt) in der Nähe der Linien zur Bestimmung der f bzw. Nf heranziehen. Eine genauere Darlegung würde weit über den Rahmen dieses Buches hinausgehen. Bezüglich Literatur vgl. die vorhergehende Anmerkung.

Wesentlich für uns ist noch die Feststellung, daß Dispersion und Magnetorotation *nur* die Oszillatorenstärke f , *nicht* aber die Dämpfungskonstante γ festzulegen gestatten.

¹ Bezüglich experimenteller Details und Literaturangaben vgl. z. B. MÜLLER-POUILLET [803] und MITCHELL-ZEMANSKY [802].

52. Bestimmung der Oszillatorenstärke f aus der Absorption optisch dünner Schichten.

In Abschn. 40, Gl. (40,17—22), haben wir uns klar gemacht, daß die sog. *Gesamtabsorption*, d. h. im wesentlichen das Integral über den Absorptionskoeffizienten, unabhängig von der Dämpfungskonstante und proportional dem f ist.

Schicken wir also Licht der Intensität $I_{\nu,0}$ durch ein Absorptionsrohr der Länge l mit N absorbierenden Atomen pro cm^3 , so ist zunächst die herauskommende Intensität $I_{\nu} = I_{\nu,0} \cdot e^{-k_{\nu} l}$ und nach Abschn. 40:

$$\int k_{\nu} d\nu = \frac{1}{l} \int \ln \frac{I_{\nu,0}}{I_{\nu}} d\nu = \frac{\pi e^2}{m c} \cdot N f. \quad (52,1)$$

Das zweite Integral hat folgende anschauliche Bedeutung: Zeichnet man den $\ln I_{\nu}/I_{\nu,0}$ als Funktion der Frequenz ν auf, so ist das Integral gleich der *Fläche* zwischen dieser „Linienkontur“ und der Abszissenachse. Es kann also durch Planimetrieren einer entsprechend reduzierten Photometerkurve experimentell bestimmt werden, sofern — und dies ist das Entscheidende! — $I_{\nu}/I_{\nu,0}$ in der Linienmitte keine zu kleinen Werte (praktisch $\sim 10\%$) annimmt. Mit anderen Worten: Man muß dafür sorgen, daß für alle Frequenzen die *optische Dicke* des Absorptionsrohres¹ nicht wesentlich größer als Eins wird, da sonst der $\ln I_{\nu}/I_{\nu,0}$ durch kleine Meßfehler zu stark beeinflusst wird. Dies haben CHR. FÜCHTBAUER und seine Mitarbeiter [1002—4] dadurch erreicht, daß sie durch Fremdgaszusatz bis zu einigen at Druck (Stoßdämpfung, Druckverbreiterung) die Linien soweit verbreiterten, daß einerseits die obige Bedingung erfüllt war, andererseits aber die Linienabsorption noch eine gut meßbare Größe hatte. Da die Oszillatorenstärke selbst durch hohe Drucke auch schon ein wenig beeinflusst wird, so ist es zweckmäßig, bei verschiedenen Fremdgasdrucken p zu messen und dann auf $p=0$ zu extrapolieren.

Wenn die optische Dicke des Absorptionsrohres über die ganze Linie $\ll 1$, ist — „dünne Schicht“, schwache Absorption —, so kann man den $\ln \frac{I_{\nu,0}}{I_{\nu}}$ durch $\frac{I_{\nu,0} - I_{\nu}}{I_{\nu,0}}$ ersetzen. Die *Gesamtabsorption* (40,18), auf deren Messung man dann zurückkommt, hat den Vorteil, vom *Trennungsvermögen* des benützten Spektrographen *unabhängig* zu sein. Solche Messungen haben neuerdings R. B. und A. S. KING [1009] an Fe-Linien im elektrischen Ofen ausgeführt, wobei sie Gesamtabsorptionen A_{λ} bis zu $0,002 \text{ \AA}$ (d. h. die absorbierte Energie entspricht der Energie des kontinuierlichen Spektrums in einem Streifen dieser Breite) herunter messen konnten².

Auf Messungen an spektral nicht aufgelösten Linien bei größeren Schichtdicken werden wir am Ende des folgenden Abschnittes zurückkommen.

53. Messung von $f \cdot \gamma$ mit Hilfe der Absorption „dicker“ Schichten. Berechnung von f und γ . Prüfung der Quantentheorie der Strahlungsdämpfung. Messung der Gesamtabsorption.

Wie wir im Abschn. 44 (besonders Gl. 28) gesehen haben, ist der Absorptionskoeffizient in den *Rändern* oder „*Flügeln*“ — wie man im Hinblick auf die Form der Photometerkurven sagt — einer Spektrallinie *unabhängig* vom

¹ In Abschn. 40 haben wir im Hinblick auf spätere astrophysikalische Anwendungen vorausgesetzt, daß diese $\ll 1$ sein soll; in (52,1) ist diese Voraussetzung nicht mehr gemacht.

² Wenn die Halbwertsbreite des Absorptionskoeffizienten (bei den KINGschen Versuchen = Dopplerbreite) von der Größenordnung $\Delta\lambda$ ist, so muß natürlich $A_{\lambda} < \Delta\lambda$ sein, wenn die Absorption „schwach“ sein soll.

Vorhandensein des *Dopplereffektes* einzig und allein bestimmt durch das *Produkt* aus Oszillatorenstärke $f \times$ Dämpfungskonstante γ . Erst wenn der Abstand von der Linienmitte in die Größenordnung der Dopplerbreite kommt, macht sich nach (44,28) deren Einfluß bemerkbar.

Die Dämpfungskonstante wird bei *kleinem Druck* im Absorptionsrohr nur durch die *Strahlungsdämpfung* (Abschn. 46) bestimmt sein, d. h. $\gamma = \gamma_n + \gamma_m$. Wenn dagegen bei größeren Drucken die Zeit zwischen zwei Stößen in die Größenordnung von $\gamma_{\text{Dämpfung}}^{-1}$ kommt, macht sich daneben die Stoßdämpfung bemerkbar, um schließlich die Oberhand zu gewinnen. Von eigentlichen Druckeffekten (z. B. Verbreiterung der Wasserstofflinien durch Ionenfelder) wollen wir zunächst absehen.

Auf diesen Überlegungen beruht die Messung der Strahlungsdämpfungskonstante der NaD-Linien von R. MINKOWSKI [1013]. Um bei niederem Druck große Schichtdicke zu bekommen, benützt er ein 1 m langes Absorptionsrohr. Die Messung des Absorptionskoeffizienten in den Linienflügeln (dessen Proportionalität mit $1/\Delta\lambda^2$ geprüft wurde) gibt dann die $f \cdot \gamma$. Die f andererseits bestimmte MINKOWSKI durch Magnetorotationsmessungen an demselben Absorptionsrohr, so daß f und γ selbst berechnet werden konnten. Die Untersuchungen der Druckabhängigkeit von γ zeigte, daß dieses unterhalb 0,0087 mm Na-Dampfdruck ($T = 560,5^\circ \text{K}$; $n = 1,5 \cdot 10^{14}$ Na-Atome pro cm^3) einen konstanten Grenzwert annimmt, der also die *Strahlungsdämpfungskonstante* sein muß. Die gemessenen f -Werte $1/3$ und $2/3$ zeigten beste Übereinstimmung mit der BURGER-DORGELOSCHEN Regel und den Aussagen der Quantentheorie (Tabelle 42; KUHN-THOMAS-Summensatz:). Für γ ergab sich, wie das bei $f_1 + f_2 = 1$ in Anbetracht der völligen Schärfe des Grundtermes zu erwarten ist, genau der klassische Wert von $0,6_2 \cdot 10^8 \text{sek}^{-1}$.

Entsprechende Messungen von W. SCHÜTZ [1015] und M. WEINGEROFF [1019] mit anderen magneto-optischen Methoden ergaben praktisch übereinstimmende Resultate. Die natürliche Breite der *Kaliumresonanzlinien* λ 7665 und 7699, hat später J. F. HEARD [1006] gemessen. Seine Ergebnisse decken sich mutatis mutandis ganz mit denen MINKOWSKIS. Die Stoßdämpfung wird im K-Dampf unmerklich bei $n = 0,8 \cdot 10^{14}$ K-Atomen pro cm^3 .

Da die Beobachtungen an den Resonanzlinien des Natriums und anderer Elemente durch die klassische Theorie ebensogut erklärt werden können, wie durch die Quantentheorie (was durchaus in Ordnung ist), so hat W. SCHÜTZ eine Reihe von Untersuchungen ausgeführt, bei denen die charakteristischen Züge der Quantentheorie der natürlichen Linienbreite (Abschn. 46) besser zur Geltung kommen:

Magnetorotations- und Absorptionsmessungen am zweiten Glied der Cs-Hauptserie $6^2S - 7^2P_{1/2, 3/2}$; λ 4555 und 4593 ergaben [1016] eine Dämpfungskonstante von nur $0,24 \times$ der klassischen Konstante (41,1 bzw. 5). Dieses Ergebnis ist qualitativ leicht verständlich: Die Dämpfungskonstante γ ist gleich der reziproken Abklingzeit der 7^2P -Terme, von denen außer nach 6^2S noch Übergänge nach 5^2D und 7^2S möglich sind. Erstere haben nach den Magnetorotationsmessungen sehr kleine f ; für die letzteren dürfte zwar nach dem THOMAS-KUHNschen Summensatz $f \sim 1$ sein, sie liegen aber bei so kleinen Frequenzen (Ultrarot), daß die entsprechenden Beiträge zur Abklingkonstante ($\sim \nu^2 \cdot f$) trotzdem klein bleiben.

Nach WEISSKOPF und WIGNER (Kap. 9, Gl. (46,9)) soll weiterhin die natürliche Linienbreite durch die *Summe* der Abklingkonstanten $\gamma_n + \gamma_m$ des oberen *und* unteren Termes bedingt sein und nicht nur, wie man zunächst in falscher Analogie zur klassischen Theorie annahm, durch die des oberen Termes allein.

Das Neonspektrum enthält nun im Sichtbaren einige Übergänge, die von denselben oberen Termen teils zu metastabilen, teils aber auch zu instabilen Niveaus führen, von denen aus das Elektron mit sehr großer Wahrscheinlichkeit nach dem Grundzustand springt. Die natürliche Breite der zweiten Gruppe muß größer sein als die der ersten und zwar um einen Betrag, der der natürlichen Breite oder reziproken Abklingzeit des unteren Termes entspricht.

W. SCHÜTZ und H. SCHILLBACH [1017—18] bestimmten zunächst mit Hilfe der Magnetorotation die Oszillatorenstärken f der verwendeten Neonlinien. Das $f\gamma$ wurde — da es sich ja um Übergänge zwischen *angeregten* Termen handelt — aus Messungen an den Emissionslinien¹ der positiven Säule gewonnen: Die Emission pro Volumeneinheit und Raumwinkel 1 ist — diese Teilaussage des KIRCHHOFFSchen Satzes können wir ohne weiteres als gültig betrachten — proportional dem Absorptionskoeffizienten k_ν [cm⁻¹], sagen wir $= I_0 \cdot k_\nu$. Eine Säule der Länge l emittiert daher unter Berücksichtigung der Selbstabsorption die Intensität:

$$I_\nu = \int_0^l I_0 \cdot k_\nu e^{-k_\nu l} dl = I_0 (1 - e^{-k_\nu l}). \quad (53,1)$$

In der Linienmitte wird also bei einer hinreichend langen Säule ($k_\nu l \gg 1$) $I_\nu = I_0$; in einigem Abstand von der Linienmitte dagegen ist $k_\nu l \ll 1$ und $I_\nu = I_0 \cdot k_\nu l$. Man kann also den Absorptionskoeffizienten k_ν ermitteln und im übrigen genau so verfahren wie bei den Absorptionsmessungen.

Die Untersuchungen von W. SCHÜTZ und H. SCHILLBACH (s. oben) ergaben, daß die Halbwertsbreite der Neonlinien, welche von Übergängen nach dem instabilen s_2 -Term (PASCHENSche Bezeichnung) herrühren, um $0,8 \pm 0,4 \cdot 10^9$ sek⁻¹ größer ist, als die der anderen Linien, welche nach den stabileren Termen s_3 , s_4 und s_5 führen. Man kann hieraus sogar die Oszillatorenstärke der Ne-Resonanzlinie $p_0 - s_2$, $\lambda 736 \text{ \AA}$ zu $f \sim 0,2$ abschätzen, was etwa der erwarteten Größenordnung entspricht (vgl. Tabelle 42).

Die im vorhergehenden kurz beschriebenen Methoden zur experimentellen Bestimmung der Dämpfungskonstante γ verlangen alle eine weitgehende spektrale Auflösung der betreffenden Linie. Dabei werden an das Trennungsvermögen des Spektralapparates Anforderungen gestellt, die hart an der Grenze des Erreichbaren liegen.

Wie wir schon früher sahen, kann jedoch die Gesamtabsorption (44,37), d. h. die gesamte in einer Linie absorbierte Intensität, ausgedrückt in Einheiten der Intensität des kontinuierlichen Spektrums pro cm⁻¹ oder pro \AA , unabhängig vom Trennungsvermögen des Spektrographen gemessen werden. Falls die Breite oder — was auf dasselbe herauskommt — die Gesamtabsorption der aufgelöst gedachten Linie wesentlich größer ist, als die Dopplerbreite, so wird nach (44,52) die Gesamtabsorption A_ω bzw. A_λ abgesehen von universellen Faktoren proportional $\sqrt{f\gamma \cdot N l}$. Das heißt A_ω ist proportional der Wurzel aus der Anzahl absorbierender Atome in einer Säule von 1 cm² Querschnitt Nl mal $\sqrt{f\gamma}$. Diese Aussage der Theorie hat R. MINKOWSKI² (s. S. 198) bestätigt gefunden; insbesondere verhalten sich die Gesamtabsorptionen der beiden NaD-Linien mit $f = 1/3$ bzw. $2/3$ stets wie $1 : \sqrt{2} = 1 : 1,41$. Durch Ausmessen der Gesamtabsorptionen erhielt MINKOWSKI sogar die genauesten Werte der natürlichen Breite γ der NaD-Linien.

Da das „Wurzelgesetz“ der Gesamtabsorption und der Linienbreite eine der Grundlagen für die Deutung der Sternspektren bildet, so ist es auch noch in anderer Weise nachgeprüft worden: Wir beobachteten z. B. das Sonnenspektrum

¹ Da deren Breite sehr klein ist, wurde mit Interferometer gearbeitet.

² Vgl. auch [1006, 1011, 1015].

stets durch eine Luftschicht, deren wirksame Dicke nach Kap. II mit dem Secans der Zenitdistanz variiert.

H. v. KLÜBER¹ [1010] hat nun die Absorption in der Sauerstoffbande λ 7600 in Abhängigkeit vom Sonnenstand untersucht und findet für die hinreichend breiten Linien tatsächlich ein Anwachsen der *Linienbreite* (gemessen bei einem bestimmten Bruchteil der Intensität des kontinuierlichen Spektrums) und der *Gesamtabsorption* $\sim \sqrt{\sec z}$. Die Dämpfungskonstante γ dürfte jedoch bei den atmosphärischen Sauerstoffbanden im Gegensatz zu den MINKOWSKISCHEN Versuchen mit Na-Dampf und ähnlichen vorwiegend durch *Stoßdämpfung* bedingt sein.

Schließlich wollen wir noch kurz auf die Interpretation von Gesamtabsorptionsmessungen, bei denen die Bedingung „Gesamtabsorption \gg Dopplerbreite“ nicht mehr erfüllt ist, eingehen:

Ist die Gesamtabsorption \ll Dopplerbreite, so kommen wir auf in Abschn. 52 besprochene Methodik zur Bestimmung von f zurück. Neuerdings haben R. B. und A. S. KING [1009] so im elektrischen Ofen (relative) Oszillatorenstärken in FeI-Multipletts gemessen. Diese Versuche dürften für die weitere Entwicklung der Sternspektroskopie vor allem auch deshalb von grundlegender Bedeutung sein, weil hier zum erstenmal derartige Messungen an *angeregten* Atomzuständen unter *definierten* Anregungsbedingungen (BOLTZMANN-Verteilung, Kap. IV) ausgeführt sind (vgl. auch Abschn. 57).

In dem Übergangsbereich zwischen reiner Dopplerverbreiterung (oder allgemeiner: Absorption in dünner Schicht) und Dämpfungsverbreiterung (dicke Schicht) muß der etwas schwerfällige Apparat des Abschn. 44 insbesondere Fig. 59 angewandt werden.

Unter derartigen Verhältnissen hat W. SCHÜTZ [820] die Gesamtabsorption des Cs-Dubletts λ 4555 und 4593 gemessen und die Theorie qualitativ bestätigt gefunden. Über Messungen an der Sauerstoffbande λ 7600 vgl. W. H. J. CHILDS und R. MECKE [1001].

54. Intensitätsmessungen an Emissionslinien. Selbstabsorption.

Beschränken wir uns zunächst auf den einfachsten Fall der Emission einer für alle Frequenzen „optisch dünnen“ Schicht:

Befinden sich pro cm^3 N_n Atome im Quantenzustand n , so wird von diesen pro sek vermittle des Überganges $n \rightarrow m$ mit der Frequenz ν_{mn} die Energie

$$N_n \cdot A_{mn} \cdot h \nu_{mn} \quad (54,1)$$

ausgestrahlt, wo A_{mn} die entsprechende „spontane“ Übergangswahrscheinlichkeit bedeutet. Die Frequenzverteilung der Linie ist meistens wieder durch den *Dopplereffekt* bedingt.

In den meisten Lichtquellen hat nun die Anregung noch soweit Ähnlichkeit mit der thermischen, daß die N_n eng benachbarter Terme sich wie deren statistische Gewichte verhalten. Man kann dann die Verhältnisse der „theoretischen Intensitäten“ bzw. die Oszillatorenstärken und Übergangswahrscheinlichkeiten von Linien, die von benachbarten Termen ausgehen, direkt vergleichen.

So sind die ausgedehnten Meßreihen über relative Intensitäten innerhalb von *Multipletts*, die zur Aufstellung und Prüfung der BURGER-DORGELOSCHEN Summenregel und ihrer Weiterbildungen geführt haben, im Utrechter Institut größtenteils nach dieser Methode durchgeführt worden. Über experimentelle

¹ Beobachtungen von R. v. D. R. WOOLLEY [1020], die abweichende Ergebnisse erzielten, waren ohne Zweifel durch mangelhafte spektrale Auflösung gestört.

Details vgl. den Bericht von DORGELO [938]. Die Literatur über *gemessene* Multiplettintensitäten werden wir am Schluß dieses Kapitels zusammenstellen.

Bei Na-Flammen kann man N_n sogar absolut bestimmen. Hierzu muß man zunächst die Menge des in der Flamme enthaltenen Na-Salzes kennen, sodann dessen Dissoziation berücksichtigen und endlich mit Hilfe der bekannten Flammentemperatur die Anregung der Na-Atome nach der BOLTZMANNschen Formel berechnen. Durch absolute Messung der Strahlungsintensität kann man dann nach (54,1) die Übergangswahrscheinlichkeit A_{mn} ermitteln. Über Literatur und Ergebnisse dieses in praxi sehr diffizilen Verfahrens, das bis jetzt — wie gesagt — nur auf die NaD-Linien angewandt wurde, vgl. z. B. MITCHELL-ZEMANSKY (S. 116).

Die Emission optisch dicker Schichten kann — wie man im Falle thermischen Gleichgewichtes schon aus dem KIRCHHOFFschen Satz entnimmt — in engster Analogie zu dem entsprechenden Absorptionsproblem behandelt werden. Die Emission einer homogen leuchtenden Schicht der Dicke l mit dem Absorptionskoeffizienten k_ν ist nach (53,1)

$$I_\nu = I_0 \int_0^l k_\nu e^{-k_\nu l} dl = I_0 (1 - e^{-k_\nu l}).$$

I_0 bedeutet dabei wieder den Grenzwert I_ν für große $k_\nu \cdot l$. Im Falle thermischen Gleichgewichtes ist I_0 gleich der Intensität eines Hohlraumstrahlers mit der Temperatur der Lichtquelle.

Integriert man über den ganzen Frequenzbereich der Linie, so kommt man — $I_0 = 1$ gesetzt — auf den bekannten Ausdruck (44,37) für die Gesamtabsorption zurück. Wir können also — wie dies im vorhergehenden Abschnitt schon zum Teil geschah — *alle Ergebnisse des Abschn. 44 auf die Emission homogener Schichten anwenden*.

Insbesondere wird im Gebiet, wo die Gesamtintensität von der Größenordnung $I_0 \times$ Dopplerbreite ist, die Linienintensität nur sehr langsam mit der emittierenden Atomzahl und der Übergangswahrscheinlichkeit anwachsen. Das heißt durch Selbstabsorption in der Lichtquelle werden z. B. die Intensitätsverhältnisse in Multipletts systematisch verkleinert.

Wird endlich die optische Dicke in der Linienmitte $\gg 1$, so erreicht dort die Intensität den festen Grenzwert I_0 , die Intensität in den Linienflügeln aber bekommt die typische Dämpfungsverteilung (40,16)

$$I_\nu = I_0 \cdot \frac{\pi e^2 N \cdot f}{m c} \cdot \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2}. \quad (54,2)$$

Das heißt die Linienbreite bei einem bestimmten I_ν und damit auch die Gesamtintensität der Linie geht $\sim \sqrt{N f \gamma}$, wie wir schon in Abschn. 53 sahen.

Praktisch ist die Theorie der Emission optisch dicker Schichten hauptsächlich wichtig, um entscheiden zu können, wann der zuerst betrachtete Grenzfall optisch dünner Schichten realisiert ist und wann nicht¹:

Wie wir sahen, muß *einerseits* die Dichte der leuchtenden Atome so klein genommen werden, daß die Intensität in der Linienmitte $\ll I_0$ wird, d. h. kleiner als die Maximalintensität, die man mit der betreffenden Lichtquelle erzielen kann. *Andererseits* aber darf die Linienintensität eine gewisse Größe nicht *unterschreiten*, um noch photographisch mit vernünftigen Belichtungszeiten nachweisbar zu sein.

¹ Solange die Selbstabsorption nicht zu groß ist ($k_\nu \cdot l$ für die Linienmitte maximal ~ 1), kann man gegebenenfalls die Formeln des Abschn. 44 benutzen, um auf unendlich dünne Schicht zu reduzieren.

Bei Flammen kann I_0 nach dem PLANCKSchen Gesetz abgeschätzt werden; es nimmt dementsprechend nach kurzen Wellen rapide ab. Unter Benützung plausibler Daten für die Plattenempfindlichkeit, Lichtstärke des Spektrographen usw. findet so R. MINKOWSKI [1014], daß man in der Bunsenflamme mit $T \approx 2000^\circ \text{K}$ selbstumkehrfreie Linien nur für $\lambda > 5900 \text{ \AA}$, im Knallgasbrenner mit $T \approx 2500^\circ \text{K}$ für $\lambda > 5000 \text{ \AA}$, bekommen kann. In elektrischen Entladungen liegen die Verhältnisse vielfach nicht viel günstiger. Der Lichtbogen dürfte für viele Linien (es kommt im einzelnen natürlich auf die Anregungsverhältnisse an) nicht als homogen zu betrachten sein¹; die Absorption der kalten äußeren Schichten muß jedenfalls im Auge behalten werden.

Zusammenfassend müssen wir also mit R. MINKOWSKI feststellen, daß selbstumkehrfreie Emissionslinien nur unter besonderen Vorsichtsmaßregeln zu erzielen sind.

Um die Selbstabsorption zu untersuchen, benützt man vielfach folgenden Kunstgriff: Durch einen Hohlspiegel wird die Lichtquelle in sich selbst abgebildet, so daß man sozusagen zwei hintereinander gestellte Flammen beobachtet. Alle optischen Schichtdicken werden daher genau verdoppelt. In Verbindung mit Fig. 59 kann man dann auf dünne Schicht reduzieren, falls die Selbstabsorption nicht zu stark und die Lichtquelle einigermaßen homogen ist.

Auf Einzelheiten der zahlreichen Untersuchungen an Natriumflammen von S. L. GOUY, R. LADENBURG und F. REICHE und deren Mitarbeitern einzugehen, würde hier zu weit führen.

55. Direkte Messung der Lebensdauer angeregter Zustände. Abklingleuchten. Resonanzfluoreszenz.

Der Vollständigkeit wegen sollen noch kurz einige Methoden zur *direkten* Messung von Übergangswahrscheinlichkeiten erwähnt werden, die zwar für unsere Zwecke kaum in Betracht kommen, aber doch prinzipielles Interesse bieten:

a) Die Messungen des *Abklingleuchtens von Kanalstrahlen* im Hochvakuum nach W. WIEN [1005] würden die spontanen Übergangswahrscheinlichkeiten $A_{m,n}$ angeregter Zustände geben, wenn es möglich wäre, jeweils nur *ein* solches Energieniveau anzuregen. In praxi wird der Abklingvorgang wesentlich beeinflusst durch die „Nachlieferung“ von Elektronen aus höheren Energieniveaus und vielleicht auch Neuanregung, so daß man aus den Versuchen nur entnehmen kann, daß die Lebensdauern angeregter Niveaus von der *Größenordnung* 10^{-8} sek sind. Über Versuche mit besser definierten Anregungsbedingungen — die wenigstens eine qualitative Übereinstimmung mit den berechneten Übergangswahrscheinlichkeiten ergeben — vgl. H. BETHE (S. 460), dort auch Literaturangaben.

b) Messungen über die *Auslöschung der Resonanzfluoreszenz* durch Gaszusatz ergeben die mittlere Lebensdauer T des betreffenden angeregten Zustandes (bei Na z. B. 3^2P), wenn man die Zahl der Stöße pro sek mit Hilfe der gaskinetischen Wirkungsquerschnitte berechnet. Richtiger wird man T als bekannt betrachten und aus solchen Versuchen die „Wirkungsquerschnitte“ für Auslöschung ableiten. Einige Zahlenwerte werden wir im nächsten Abschnitt zusammen mit den entsprechenden „Wirkungsquerschnitten für Stoßdämpfung“ angeben.

c) Untersuchungen über den *zeitlichen Verlauf der Resonanzfluoreszenz* sowie *polarimetrische Messungen über Resonanzfluoreszenz im Magnetfeld* (HANLE u. a.) geben ebenfalls Abklingzeiten. Wir müssen uns jedoch mit einem Hinweis auf die ausgezeichnete Zusammenfassung von MITCHELL-ZEMANSKY [802] begnügen.

¹ Hier könnten evtl. die Untersuchungen von R. MANNKOPFF und seinen Schülern weiterführen. Vgl. [1007].

56. Ergebnisse einiger experimenteller Untersuchungen über Stoßdämpfung und Druckverbreiterung.

Für die Deutung der FRAUNHOFERSCHEN Linien wird es eine Frage von grundlegender Bedeutung sein, ob die Dämpfungskonstante γ durch Strahlungsdämpfung allein bestimmt ist oder ob auch noch die Stoßdämpfung zu berücksichtigen ist. Im ersten Fall wird nämlich γ eine Konstante des betreffenden Atoms, während es im zweiten Fall von Druck und Temperatur abhängt. Da weiterhin die Berechnung der Wirkungsquerschnitte nach der Quantenmechanik zur Zeit noch einen sehr approximativen Charakter hat, so wird es gut sein, sie unter Bedingungen nachzuprüfen, die den astrophysikalischen weitgehend entsprechen. Auf die zahlreichen Untersuchungen über Molekülgame werden wir dagegen trotz ihrer Wichtigkeit für die Physik kaum eingehen.

Zur Messung von Stoßdämpfungskonstanten γ (= 2/mittlere Zeit zwischen 2 Stößen) bzw. Wirkungsradien σ „für verbreiternde Stöße“ nach Gl. (41,9) stehende folgende Methoden zur Verfügung:

1. Direkte photometrische Messung von Linienbreiten bei hohen Drucken (einige atm). Derartige Untersuchungen sind besonders von CHR. FÜCHTBAUER [1002—4] und seinen Mitarbeitern ausgeführt worden.

2. Messung des Absorptionskoeffizienten in den äußeren Teilen der Linie ($\Delta\lambda \gg$ Dopplerbreite) bei großer Schichtdicke. Solche Untersuchungen hat insbesondere R. MINKOWSKI im Anschluß an seine Messung der Strahlungsdämpfungskonstante der NaD-Linien ausgeführt.

Daneben kann man — entsprechend unseren früheren Erörterungen — auch die Gesamtabsorption und magnetooptische Erscheinungen zur Bestimmung von $\gamma_{\text{Stoß}}$ heranziehen. Auf Details brauchen wir nicht nochmals einzugehen.

Eine weitere Möglichkeit zur Erfassung der Wechselwirkung zwischen leuchtendem Atom und Fremdgas bietet die von R. W. WOOD entdeckte *Auslöschung der Resonanzfluoreszenz*: Sobald die mittlere Zeit zwischen zwei *auslöschenden* Stößen wesentlich kleiner wird als die natürliche Lebensdauer des betreffenden oberen Termes, nimmt die Intensität der Resonanzfluoreszenz ab. Da aber zur Dämpfungskonstante auch schon die nicht auslöschenden „Phasenstörungsstöße“ einen Beitrag geben, so muß jedenfalls $\sigma_{\text{Auslöschung}} < \sigma_{\text{Verbreiterung}}$ sein. Bei Verbreiterung durch Molekülgame sind beide σ im allgemeinen von derselben Größenordnung, da die Moleküle vermöge ihres komplizierten Termschemas jede angebotene Anregungsenergie leicht „verdauen“ können. Bei Edelgasen usw. trifft dies nicht zu; hier sind die Auslöschungsradien verschwindend klein. Eine Zusammenstellung gemessener Wirkungsradien für die NaD-Linien gibt die folgende Tabelle nach V. WEISSKOPF [804] zusammen mit den von ihm

Tabelle 46. Optische Wirkungsradien σ (in Å) der NaD-Linien gegen verschiedene Fremdgase.

		He	Ne	Ar	H ₂	N ₂	
Gemessener Wirkungsradius für	Verbreiterung	5,6	6,15	9,0	5,8	8,3	SCHÜTZ, W.: Z. Physik 45 , 30 (1927)
	Auslöschung	---	--	7,9	---	7,7	MINKOWSKI, R.: Physik. Z. 23 , 72 (1922); Z. Physik 55 , 18 (1929)
					4,5	8,2	MANNKOPFF, R.: Z. Physik 36 , 315 (1926)
Berechnet:	σ_{max}	6,3	7,9	10,0	---	---	V. WEISSKOPF [804]
	σ_{min}	4,8	6,0	7,6	---	---	

berechneten (vgl. Abschn. 47) oberen und unteren Grenzwerten. Wie man sieht, ist die Übereinstimmung von Theorie und Beobachtung eine recht befriedigende.

Neben der Linienverbreiterung durch Stoßdämpfung betrachten wir nun den eigentlichen *Druckeffekt*, d. h. die Linienverbreiterung und -verschiebung durch *intermolekulare elektrische Felder* (Abschn. 47):

In den Sternatmosphären macht sich dieser Effekt — wie wir sehen werden — wohl nur bei den besonders empfindlichen *Wasserstoff-* und *Heliumlinien* bemerkbar. Wieweit evtl. auch Übergänge zwischen den locker gebundenen, hochangeregten Termen schwerer Elemente davon erfaßt werden, ist zur Zeit noch nicht bekannt. Immerhin wird man auch hier auf die Möglichkeit intermolekularer Starkeffekte zu achten haben.

Qualitative experimentelle Untersuchungen über die Verbreiterung der BALMER-Linien in teilweise ionisierten Gasen liegen in großer Anzahl vor. Als Lichtquelle sind namentlich Lichtbögen und Kondensatorentladungen im verdünnten Gas benützt worden. Es zeigt sich, daß die Linienbreite etwa proportional der Breite des entsprechenden Starkeffektbildes anwächst. Quantitative Untersuchungen, bei denen die Selbstabsorption berücksichtigt und die Ionendichte erfaßbar ist, fehlen vollständig.

Relative Messungen der Breiten und Verschiebungen mehrerer Linien von Li, Ag, Cu und Ni haben J. HOLTSMARK und B. TRUMPY [1008] im Lichtbogen ausgeführt. Sie finden, daß ihre Messungen¹ recht gut durch die HOLTSMARKSche Theorie (Abschn. 47, 2. Hälfte) wiedergegeben werden, wenn man z. B. für einen 10 A.-Bogen im Sinne von Gl. (47,4) eine Normalfeldstärke F_0 der Größenordnung 8—25 kV/cm annimmt. Eine unabhängige Prüfung des angenommenen F_0 -Wertes gestatten neuere Untersuchungen von H. HÖRMANN [1007]. Er findet für die Zahl der Elektronen + Ionen pro cm^3 in einem solchen Bogen — ziemlich unabhängig von Salzfüllung usw. — etwa $n = 4 \cdot 10^{15}$. Danach würde man nach Gl. (47,4) berechnen $F_0 = 2,60 \cdot e \cdot n^{2/3} = 9,4 \text{ kV/cm}$. In Anbetracht der Unsicherheit der Messung der Linienbreiten, wie auch der n -Bestimmung darf man die Übereinstimmung der beiden F_0 -Werte als eine Bestätigung der HOLTSMARKSchen Theorie betrachten. Wie man sich leicht klarmacht, gibt der Kohlebogen hinsichtlich Temperatur und Elektronendruck unter allen Lichtquellen zur Zeit die beste Annäherung an die Verhältnisse in Sternatmosphären. Die Weiterführung derartiger Versuche erscheint daher sehr aussichtsreich.

57. Zusammenstellung astrophysikalisch wichtiger Bestimmungen von Oszillatorenstärken usw. Möglichkeiten zur Messung von Übergangswahrscheinlichkeiten für Quantensprünge zwischen angeregten Atomzuständen.

Als Abschluß unserer atomtheoretischen Vorstudien zur Theorie der FRAUNHOFER-Linien geben wir noch eine Zusammenstellung² der nach den verschiedensten Methoden gemessenen Übergangswahrscheinlichkeiten, soweit sie direkt oder als Analoga astrophysikalisches Interesse bieten. Wo sie bekannt sind (Tabelle 42), haben wir die quantentheoretisch berechneten Werte daneben vermerkt. Wir haben dabei den Messungen nach der Methode der *anormalen Dispersion* das größte Vertrauen geschenkt, dann folgen *Absorptionsmessungen*,

¹ Die gemessenen Halbbreiten liegen in der Größenordnung von 1 Å.

² Die Literaturangaben der Tabelle sind am Schluß des Buches meist *nicht* wiederholt. Vgl. auch insbesondere MITCHELL-ZEMANSKY [802], Tabelle 13—17 und MÜLLER-POUILLET [803].

Tabelle 47. Gemessene Oszillatorenstärken.

A. Alkalien^{1,2}.

Li $2^2S - n^2P$	λ	$f_{\text{ber.}}^*$	$f_{\text{beob.}}$	Literatur
$n = 2$	6708	0,750	0,750	Relativwerte von f mit anomaler Dispersion gemessen von A. FILIPPOV (Z. Physik 69 , 526 (1931)) in guter Übereinstimmung mit Absorptionsmessungen von B. TRUMPY (Z. Physik 57 , 787 (1929)). Die FILIPPOV'schen Werte haben wir so normiert, daß für $n = 2$ das $f = 0,750$ wird. Absolutmessungen liegen meines Wissens <i>nicht</i> vor
3	3233	0,0055	0,0055	
4	2741	0,0052	0,0048	
5	2563	0,0025	0,0032	
...	
Na $3^2S - n^2P$	λ	$f_{\text{ber.}}^*$	$f_{\text{beob.}}$	Literatur
$n = 3$	5893	0,975	1,00	Absolutmessung der D -Linien von R. MINKOWSKI [1013] (Absorption) und viele weitere Untersuchungen Relativmessungen für $n = 3$ bis 16 von A. FILIPPOV und W. PROKOFJEW (Z. Physik 56 , 458 (1929)). (Anomale Dispersion.)
4	3303	0,0144	0,0144	
5	2853	0,00241	0,00211	
6	2680	0,00098	0,00065	
...	
K $4^2S - n^2P$	λ	$(f_2/f_1)_{\text{beob.}}$	$f_{\text{beob.}}$	Literatur
$n = 4$	7699 7665	} 2	1,00	Magnetooptische Absolutmessung des 1. und 2. Seriengliedes nach J. WEILER (Ann. Physik 1 , 361 (1929)). Auch J. F. HEARD [1006] — Absorption — Relativmessung nach der Hakenmethode von W. PROKOFJEW und G. GAMOW (Z. Physik 44 , 887 (1927)) FILIPPOV, A.: Z. Sov. Physik 5 , 1 (1932) (Relativmessung, Hakenmethode)
5	4047 4044			
6	3447,5 3446,5	—	0,000879	
7	3217,8 3217,3	—	0,000210	
...	
Cs $6^2S - n^2P_{1/2}, 3/2$	λ	f_2/f_1	$f_1 + f_2$	Literatur
$n = 6$	8943,6 8521,2	$2,1 \pm 0,2$	0,98	MINKOWSKI, R. u. W. MÜHLENBRUCH: Z. Physik 63 , 198 (1930). (Magnetorotation.) Vgl. auch SCHÜTZ, W.: Z. Physik 64 , 682 (1930)
7	4593,3 4555,4	$4,27 \pm 0,12$	$0,014_2$	

Über die höheren Serienglieder vgl. auch CHR. FÜCHTBAUER und W. HOFMANN (Ann. Physik **43**, 96 (1914)) und CHR. FÜCHTBAUER und H. W. WOLFF (Ann. Physik **3**, 359 (1929)).

¹ Die zahlreichen *Emissionsmessungen* von C. E. BLEEKER (Diss. Utrecht, 1928) haben wir nicht aufgenommen, da ihre Selbstumkehrfreiheit nicht gesichert erscheint (R. MINKOWSKI [1014]).

² Die Deutung der Dispersions-, Absorptions- und Emissionsmessungen an *atomarem Wasserstoff* wird sehr erschwert durch Besonderheiten der Anregung, die bewirken, daß die Besetzungszahlen der Quantenzustände vielfach *nicht* deren statistischen Gewichten entsprechen. Eine eingehende Diskussion gibt H. BETHE [903, S. 456ff.].

* Vgl. Tabelle 42. Die Zahlen geben die Summe beider Dublett Komponenten. (Intensitätsverhältnis 1 : 2).

Tabelle 47 (Fortsetzung).

B. II. Gruppe des periodischen Systems.

Relativmessungen des Verhältnisses: 1. Hauptserienlinie: 1. Interkombination.

	n	$n^1S_0 - n^1P_1$	$n^1S_0 - n^3P_1$	f_1/f_2	Literatur
		λ_1	λ_2		
Ca	4	4226,73	6572,78	33000	PROKOFJEW, W.: Z. Physik 50 , 701, (1928) (Hakenmethode)
Sr	5	4607,52	6892,86	1660	
Ba	6	5535,53	7911,00	146	

Höhere Glieder der Ca-Hauptserie (λ 2722...) bei A. FILIPPOV und N. KREMEŃEWSKY (Z. Sov. Physik **1**, 299 (1932)).

	n	$n^1S_0 - n^1P_1$	$n^1S_0 - n^3P_1$	f_1/f_2	f_1	Literatur	
						Relativmessungen	Absolutmessungen
		λ_1	λ_2				
Zn	4	2139,33	3075,99	7200	—	FILIPPOV, A.: Z. Sov. Physik 1 , 289 (1932)	KUHN, W.: K. Danske Vid. Selskab. Medd. 7 , 12 (1925) u. ZEMANSKY, M. W.: Z. Physik 72 , 587 (1931)
Cd	5	2288,79	3261,17	680			
Hg	6	1849,50	2536,52	46,8	1,19 ± 0,02		WOLFSOHN, G.: Z. Physik 83 , 234 (1933), sowie mit LADENBURG, R.: Z. Physik 63 , 616 (1930)

Weitere Literatur über Hg vgl. MITCHELL-ZEMANSKY.

C. III. Gruppe des periodischen Systems.

Thallium	λ	f	Literatur
$6^2P_{3/2} - 7^2S_{1/2}$	5350	0,076	Relativmessung von W. K. PROKOFJEW und W. N. SOLOWIEW (Z. Physik 48 , 276 (1928))
$6^2P_{1/2} - 7^2S_{1/2}$	3776	0,08	
$6^2P_{1/2} - 6^2D_{3/2}$	2768	0,20	Absolutmessung nach W. KUHN (K. Danske Vid. Selskab. Medd. 7 , 12 (1925) u. Naturwiss. 13 , 724 (1925)). Dort noch einige Relativmessungen ultravioletter Tl-Linien

während die *Emissionsmessungen* größtenteils als zu selbstumkehrverdächtig beiseitegelassen wurden. Wo ein Vergleich zwischen Theorie und Beobachtung möglich ist, fällt er recht befriedigend aus. Ganz allgemein bemerkt man, daß die *Resonanzlinie* (Übergang vom Grundterm zum nächst höheren damit kombinierenden Term) *den größten Teil der durch den THOMAS-KUHNSchen Satz festgelegten f -Summe auf sich vereinigt*.

Leider beziehen sich die bis jetzt ausgeführten f -Messungen (bis auf die belanglose Ausnahme von Tl λ 5350) nur auf Übergänge vom Grundzustand aus. Für die Astrophysik wäre es aber von *grundlegender Bedeutung*, ein Verfahren zur Messung der Oszillatorenstärken f (und evtl. Dämpfungskonstanten γ) von Übergängen zwischen angeregten Zuständen zu kennen. Erste Voraussetzung hierfür ist die Schaffung genügend hoher Anregung unter definierten Bedingungen.

Einen vielversprechenden Ansatz in dieser Richtung bilden die von R. B. und A. S. KING [1009] ausgeführten *Gesamtabsorptionsmessungen* an Fe-Linien im elektrischen Ofen.

Daneben erscheint es nach den Untersuchungen von R. MANNKOPFF und seinen Schülern (z. B. [1007]) nicht aussichtslos, den Kohlebogen als Lichtquelle für entsprechende *Emissionsmessungen* auszubilden.

Neben den im Vorhergehenden besprochenen Untersuchungen sind für den Astrophysiker noch wichtig Messungen der *relativen Intensitäten von Multipllettlinien*; ein besonders vom Utrechter physikalischen Institut intensiv gefördertes Arbeitsgebiet. Eine Zusammenstellung der vorliegenden Ergebnisse würde zu weit führen, wir geben vielmehr am Schluß dieses Abschnittes eine nach Elementen geordnete Literaturzusammenstellung¹ (größtenteils nach C. W. ALLEN [A, 7]). Bei den meisten Multipletts ist die Übereinstimmung zwischen der Theorie (Abschn. 50) und den Messungen ausgezeichnet. Aber gerade bei den astrophysikalisch wichtigen Komplexspektren wie Fe, Fe II usw. treten manchmal beträchtliche Differenzen auf, die auch verständlich sind, da hier die Voraussetzungen der Theorie nicht mehr erfüllt sind (kompliziertere Koppelung der Impulsvektoren; Übereinandergreifen der Multipletts usw.). In solchen Fällen entnimmt man die relativen Übergangswahrscheinlichkeiten am besten direkt den Messungen.

Messungen von Multipllettintensitäten.

DORGELO: Physik. Z. 26 , 756 (1925). (Bericht über das bis dahin Bekannte)	Alkalien, Erdalkalien Zn, Cd, Mn
FRERICHS, R.: Z. Physik 31 , 305 (1925) und Ann. Physik 81 , 807 (1926)	Ca, Cr Ca, Cr, Fe, Mn, Ti, V
MILAAN, I. B. v.: Z. Physik 34 , 921 (1925); 38 , 427 (1926) . . .	Fe
HARRISON, G. R.: J. opt. Soc. Amer. 17 , 389 (1928)	Ti I und II
18 , 109 (1929) (mit ENGWICHT) und 19 , 109 (1929) . . .	Ti
CLARKSON, W.: Philos. Mag. 7 , 98 (1929)	Fe II
ORNSTEIN, L. S. and T. BOUMA: Physic. Rev. 36 , 679 (1930) . .	Ni I und II, Co
DEKKERS, W. A. M. u. A. A. Kruithof, Z. Physik 66 , 491 (1930)	Ni
SEWARD, R. S.: Physic. Rev. 37 , 344 (1931)	Mn I und II
KAST, W.: Z. Physik 79 , 731 (1932)	Sr
ALLEN, J. S. V. and C. E. HESTHAL: Physic. Rev. 47 , 925 (1935)	Cr I und II
ALLEN, C. W.: M. N. 96 , 145 (1935).	Fe I

¹ Wegen der Möglichkeit von Selbstumkehr bzw. Selbstabsorption ist eine kritische Einstellung angebracht.

Vierter Teil.

Messung und Deutung der Intensitätsverteilung in den FRAUNHOFER-Linien.

XI. Kapitel.

Messung der Konturen und Gesamtabsorptionen von FRAUNHOFER-Linien.

58. Der Spektrograph: Trennungsvermögen; Entzerrungsfragen; Gittergeister; Streulicht.

Wenn man die Intensitätsverteilungen in Absorptions- oder Emissionslinien — wir sprechen meist kurz von *Linienkonturen* — mißt, so ist zu berücksichtigen, daß diese zunächst noch durch den Spektrographen *verzerrt* sind. Als Ursachen der Verzerrung kommen in Frage:

1. Beugungserscheinungen an der kleinsten Blende — meist Rand des Kameraobjektivs —, die das „*theoretische Auflösungsvermögen*“ festlegen.
2. Endliche Spaltbreite.
3. Geometrisch-optische Bildfehler.

Diese Effekte beschreibt man summarisch durch Angabe des „*Trennungsvermögens*“: Ist $\Delta\lambda_0$ der Abstand zweier Spektrallinien, die man eben noch trennen kann, so setzt man dieses gleich $\lambda/\Delta\lambda_0$. Die Größe und *Art* der Verzerrung kann man am besten charakterisieren, indem man angibt, welche Intensitätsverteilung auf der Platte durch eine in Wirklichkeit völlig scharfe Spektrallinie erzeugt wird. Kennt man diese „*Apparatefunktion*“, so wird es möglich sein, aus der gemessenen *scheinbaren Intensitätsverteilung* die wahre *Intensitätsverteilung* (wie sie ein vollkommener Spektrograph liefern würde) zu *berechnen*.

Neben 1—3 spielen namentlich bei der Messung von Absorptionslinien eine Rolle: in Gitterspektrographen.

4. Die Gittergeister
und bei allen Instrumenten
5. Streulicht.

Beide Effekte *überdecken* eine Spektrallinie mit Licht *anderer* Wellenlängen. Wir werden sie daher gesondert betrachten.

Nachdem wir einen ersten Überblick gewonnen haben, wenden wir uns zunächst der Diskussion der unter 1—3 genannten Verzerrungsursachen zu:

1. Theoretisches Auflösungsvermögen von Prismen- und Gitterspektrograph. Beugung. Ist die *Austrittsblende* des Spektrographen ein Rechteck der *Breite*¹ a , d. h. ist a die Breite des auf der Kameraseite austretenden Strahlenbündels, so erhält man für monochromatisches Licht neben dem Beugungshauptmaximum (der Spektrallinie) das erste Minimum unter einem solchen

¹ Auf dessen Ausdehnung || zur Spektralrichtung kommt es nicht an. Hat die Blende Kreis- oder Ellipsenform, so kann man sie mit genügender Genauigkeit durch ein sinngemäß gewähltes Rechteck approximieren.

Winkel $\Delta\delta$, daß der Gangunterschied der Randstrahlen gerade gleich λ wird¹. Es ist also

$$a \cdot \Delta\delta = \lambda. \tag{58,1}$$

Zwei Spektrallinien können nun eben noch getrennt werden, wenn das Hauptmaximum der einen Linie mit dem 1. Minimum der anderen zusammenfällt (Lord RAYLEIGH), d. h., wenn ihre Wellenlängendifferenz $\Delta\lambda_0$ dieser Winkeldifferenz $\Delta\delta$ entspricht. Das *Auflösungsvermögen* erhält man also durch Division der oben Gleichung mit $\Delta\lambda_0$:

$$\lambda/\Delta\lambda_0 = a \cdot d\delta/d\lambda. \tag{58,2}$$

Die „*Winkeldispersion*“ $d\delta/d\lambda$ führt man zweckmäßig auf die lineare Dispersion des Spektrums zurück.

Ist f die Kamerabrennweite und x die Koordinate in Richtung des Spektrums auf der Platte, so wird

$$d\delta = \frac{dx}{f} \cdot \cos \alpha, \tag{58,3}$$

wo α den Winkel zwischen Plattennormale und Kameraachse bedeutet. Man erhält so mit (58,2)

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda_0} = \frac{a}{f} \cdot \frac{dx}{d\lambda} \cdot \cos \alpha. \tag{58,4}$$

In dieser für Prismen- und Gitterspektrographen in gleicher Weise gültigen Formel kommen nur leicht meßbare Größen vor:

a/f ist das Öffnungsverhältnis der Kamera, $d\lambda/dx$ die lineare Dispersion ($\text{\AA}/\text{mm} \cdot 10^{-7}$) und α die Plattenneigung.

Die in den Optiklehrbüchern meist angegebenen Formeln für $\lambda/\Delta\lambda_0$ erhält man leicht durch direkte Berechnung der Winkeldispersion $d\delta/d\lambda$ für das Prisma bzw. Gitter:

Beim *Prismenspektrographen* — der von vornherein auf Minimum der Ablenkung eingestellt sei — sind nach dem FERMATSchen Prinzip die beiden in Fig. 66 ausgezogenen „optischen Weglängen“ (Brechungsindex $n \times$ Weg) zwischen zwei Wellenflächen einander gleich. Ändert sich nun beim Übergang von λ zu $\lambda + d\lambda$ der Brechungsindex von n auf $n + dn$ und der Ablenkungswinkel von δ auf $\delta + \Delta\delta$, so müssen die Änderungen der Lichtwege beider Randstrahlen einander gleich sein. Das heißt es gilt

$$b \cdot dn = 2 \cdot a \cdot d \left(\frac{\delta + \varphi}{2} \right) = a \cdot d\delta \tag{58,5}$$

und wir erhalten mit (58,2) für das Auflösungsvermögen die RAYLEIGHsche Formel:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda_0} = a \cdot \frac{d\delta}{dn} \cdot \frac{dn}{d\lambda} = b \cdot \frac{dn}{d\lambda}. \tag{58,6}$$

Das Auflösungsvermögen eines Prismenspektrographen ist gleich dem Produkt aus Prismenbasis² \times Dispersion des Prismenmaterials.

Beim *Gitterspektrographen* sind die Winkel des ein- bzw. ausfallenden Strahlenbündels mit der Gitternormale ψ bzw. φ verknüpft durch die bekannte Gleichung

$$s (\sin \varphi - \sin \psi) = n \lambda, \tag{58,7}$$

wo s die *Gitterkonstante* (Abstand zweier benachbarter Gitterstriche) und n die *Ordnung* des Spektrums bedeutet. Hält man ψ fest, so ist also $d\varphi = d\delta$ und daher

$$s \cdot \cos \varphi \cdot d\delta = n d\lambda. \tag{58,8}$$

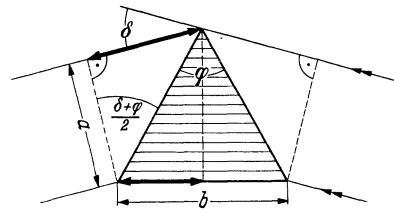


Fig. 66. Berechnung der Winkeldispersion des Prismas. $\frac{d\delta}{dn}$

¹ Je zwei im Abstand $a/2$ stehende Zonen des Bündels haben dann den Gangunterschied $\lambda/2$; es entsteht also völlige Dunkelheit.

² Im Sinne von Fig. 66 kommt es natürlich nur auf den durchstrahlten Teil des Prismas an!

Berücksichtigt man, daß $s \times$ der Anzahl der Gitterstriche N gleich der Breite des Gitters und daher $s \cdot N \cdot \cos \varphi =$ dem Durchmesser a des austretenden Strahlenbündels ist, so erhält man nach (58,2)

$$\frac{\lambda}{\Delta \lambda_0} = a \frac{d\delta}{d\lambda} = nN, \quad (58,9)$$

d. h. *das Auflösungsvermögen eines Gitterspektrographen ist gleich dem Produkt aus Ordnung des Spektrums \times Zahl der Gitterstriche.*

Die — bei Prisma und Gitter gleiche — Intensitätsverteilung für eine monochromatische Spektrallinie kann man nun leicht vollends berechnen¹. Sie entsteht durch die FRAUNHOFERSche Beugung an der Blende der Breite a . Setzt man zur Abkürzung

$$v = \pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot \frac{\Delta y}{f}, \quad (58,10)$$

wo $\Delta y = \Delta x \cdot \cos \alpha$ den Abstand von der Mitte der Linie, projiziert auf eine Ebene \perp zur Achse der Kamera und f die Brennweite bedeutet, so ist nach einer bekannten Formel der Beugungstheorie

$$I(v) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin v}{v} \right)^2. \quad (58,11)$$

Der π -Faktor ist so gewählt, daß $\int_{-\infty}^{+\infty} I(v) dv = 1$ wird. Das erste Beugungsminimum erhält man für $v = \pi$ oder nach (58,10) $a \cdot \frac{\Delta y_0}{f} = \lambda$ in Übereinstimmung mit (58,1). Da dieses Δy_0 dem kleinsten noch auflösbaren Wellenlängenunterschied $\Delta \lambda_0 = \lambda / \text{Auflösungsvermögen}$ entspricht, so kann man (58,10) auch anschaulicher schreiben als

$$\lambda : v = \pi \cdot \frac{\Delta y}{\Delta \lambda_0} = \pi \frac{\Delta \lambda}{\Delta \lambda_0}. \quad (58,12)$$

2. Spaltbreite. Hat der Spektrographenspalt die Breite s , so können wir im Falle inkohärenter Spaltbeleuchtung² die Intensitätsverteilung in einer monochromatischen Spektrallinie berechnen, indem wir die Beugungsverteilung (58,11) überlagern mit einer Rechteckverteilung der Breite

$$\sigma = \pi \frac{a}{\lambda} \cdot \frac{s}{f} \quad (58,13)$$

entsprechend (58,10). Die Brennweiten von Kollimator und Kamera sind dabei als gleich angenommen, sonst käme noch der entsprechende Vergrößerungsfaktor hinzu. Die gesuchte Intensitätsverteilung wird also

$$I(w) = \frac{1}{\pi} \int_{v=w-\frac{\sigma}{2}}^{v=w+\frac{\sigma}{2}} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv. \quad (58,14)$$

Durch partielle Integration (mit $dv/v^2 = -d(1/v)$) erhält man

$$I(w) = -\frac{1}{\pi} \left[-\frac{\sin^2 w}{w} + \text{Si}(2w) \right]_{w-\frac{\sigma}{2}}^{w+\frac{\sigma}{2}}, \quad (58,15)$$

wo $\text{Si}(z) = -\text{Si}(-z) = \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt$ die bekannte Integralsinusfunktion bedeutet

¹ Die Spaltbreite und die geometrisch-optischen Bildfehler sollen zunächst noch nicht berücksichtigt werden.

² Über andere Fälle vgl. P. H. v. CITTERT [1117]. Für unsere Zwecke können die obigen Formeln immer mit hinreichender Genauigkeit angewandt werden.

(vgl. JAHNKE-EMDE). Graphische Darstellungen für eine Reihe von σ -Werten gibt die folgende Fig. 67 nach P. H. v. CITTERT [1117]. Die anschauliche Bedeutung der angeschriebenen σ ist nach (58,12 u. 13) klar: Es ist $\sigma = \pi \cdot \frac{\text{Spaltbreite}}{\Delta y_0} = \pi \cdot \frac{\text{Spaltbreite} \times \text{Dispersion}}{\Delta \lambda_0}$. In praxi wird man meist einen Kompromiß schließen zwischen der Forderung großer Lichtstärke einerseits und möglichst großen Trennungsvermögens andererseits. Nach Fig. 67 dürfte die günstigste Wahl bei $\sigma \approx \pi$ liegen. d. h. nach (58,13):

$$s/\lambda \approx f/a. \tag{58,16}$$

Betrachtet man mit NEWALL das Beugungsbild des Spaltes in der Ebene der Kollimatorlinse, so ist nach dieser Gleichung der Abstand des 1. Minimums von der optischen Achse etwa gleich dem Durchmesser der Linse. Man kann diese Bemerkung benützen, um leicht die günstigste Spaltbreite zu finden.

3. Geometrisch - optische Bildfehler. Leider wird — was nicht immer genügend beachtet worden ist — die praktische Anwendbarkeit der Formeln (58,11 u. 15) beträchtlich vermindert durch das Hinzutreten von Linsenfehlern, die meist eine erhebliche Änderung der Apparatefunktion hervorrufen¹. Die unter 1. und 2. angegebenen Formeln sind daher nur als größenordnungsmäßig richtig zu betrachten. Sie geben aber auf jeden Fall eine untere Grenze für die Breite der Apparatefunktion. Besonders wichtig ist noch die Bemerkung, daß diese nach (58,11 bzw. 15) für große $|w|$ nur mit $1/w^2$, also ziemlich langsam, abfällt.

In praxi bleibt — um eine Grundlage für die Entzerrung von Photometerkurven zu bekommen — nichts anderes übrig, als die Apparatefunktion empirisch zu bestimmen.

Dies geschieht am besten durch Photometrierung von Aufnahmen sehr scharfer Emissionslinien, deren Breite evtl. aus Interferometer-Messungen bekannt ist. Eine solche Untersuchung hat R. O. REDMAN [1146] für einen großen Prismenapparat des Solar Physics Observatory in Cambridge mit Hilfe von Neon- und Argon-Entladungsröhren durchgeführt. Die erwartete Abnahme der Apparatefunktion in ihren äußeren Teilen $\sim \frac{1}{w^2}$ wurde bestätigt (vgl. REDMANS Fig. 6); das Trennungsvermögen erreichte in diesem Fall nur $\sim \frac{1}{3}$ des theoretischen Auflösungsvermögens. Will man zur Bestimmung der Apparatefunktion Linien (z. B. ein Fe-Spektrum) verwenden, deren Breite interferometrisch nicht gemessen ist, so braucht man nur zu verifizieren, daß alle verwendeten Linien *dieselbe* Intensitätsverteilung geben². In ähnlicher Weise kann

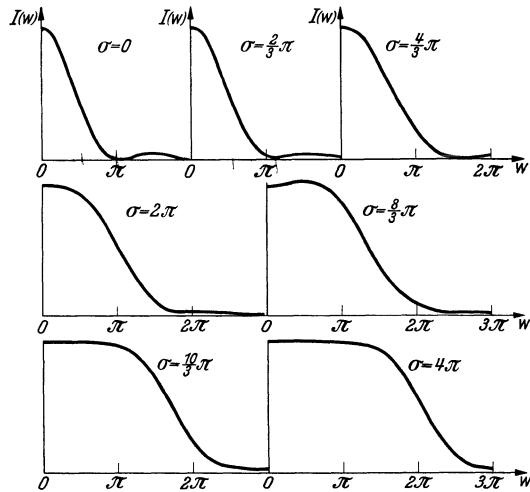


Fig. 67. Einfluß der Spaltbreite auf die Intensitätsverteilung in einer monochromatischen Spektrallinie nach Gl. (58,13—15). Nach P. H. v. CITTERT [1117].

¹ Vgl. auch die experimentelle Untersuchung von A. D. SHENSTONE [1150].

² Dabei ist selbstverständlich angenommen, daß die Breite der Apparatefunktion \gg Dopplerbreite der Linien ist!

man auch an Sonnen- oder Sternspektren die Apparatefunktion des Spektrographen — falls dessen Auflösungsvermögen unter ~ 100000 liegt — größenordnungsmäßig bestimmen: Alle hinreichend feinen Linien zeigen „ähnliche“ Konturen, die sich nur im Maßstab der Intensitätskala unterscheiden. Reduziert man auf eine *bestimmte* Tiefe der Linienmitte, so hat man schon (abgesehen von Streulicht usw. -Effekten) die genäherte Apparatefunktion.

Nachdem wir uns klar gemacht haben, wie man die Apparatefunktion, d. h. die vom Spektrographen erzeugte Kontur einer monochromatischen Linie, ermitteln kann, wenden wir uns dem praktisch außerordentlich wichtigen *Problem der Entzerrung gemessener Linienkonturen* zu:

Bezeichnen wir jetzt mit y bzw. x die Koordinate längs des Spektrums (in cm oder Å), jeweils gemessen vom Maximum der betreffenden Kurve aus, so sei

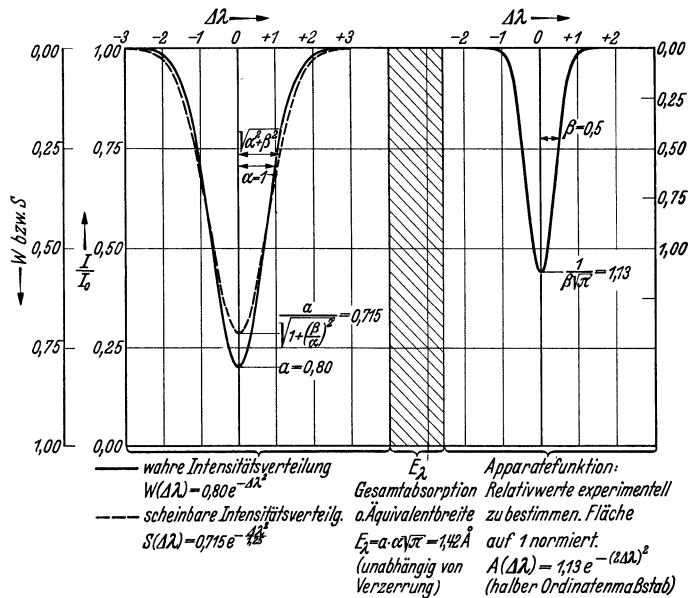


Fig. 68. Verzerrung und Entzerrung. Gesamtabsorption.

die *scheinbare*, d. h. durch den Spektrographen verzerrte, *Intensitätsverteilung* der betrachteten Spektrallinie = $S(y)$, deren *wahre Intensitätsverteilung* — wie sie ein idealer Spektrograph zeigen würde — gleich $W(y)$ und endlich die *Apparatefunktion*, d. h. die durch den Spektrographen verzerrte Intensitätskurve einer monochromatischen Linie, gleich $A(y)$. Da sozusagen jeder senkrechte schmale Streifen der $W(y)$ -Kurve durch den Spektrographen in eine Kurve der Form $A(y)$ auseinandergezogen wird, so gilt die bekannte Beziehung (vgl. auch Abschn. 44 u. 46):

$$S(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x) A(y-x) dx. \tag{58,17}$$

Unsere Hauptaufgabe wird nun sein, bei *bekanntem* $A(y)$ aus der *scheinbaren Intensitätsverteilung* $S(y)$ die *wahre Intensitätsverteilung* $W(y)$ durch *Auflösung dieser Integralgleichung zu berechnen*.

Ehe wir dieses ziemlich schwierige Problem in voller Allgemeinheit behandeln, wollen wir uns an Hand einiger analytisch bequem zugänglicher Spezialfälle einen Überblick verschaffen. Insbesondere wollen wir untersuchen, in welcher Weise die Intensität in der Mitte von Absorptionslinien, die sog. *Restintensität*,

durch den Spektralapparat scheinbar vergrößert wird. Als erstes Beispiel behandeln wir [1152] folgendes:

a) Die *wahre* Intensitätsverteilung in der Absorptionslinie sei gegeben durch (Fig. 68)

$$I = I_0 \left\{ 1 - a \cdot e^{-\left(\frac{\Delta\lambda}{\alpha}\right)^2} \right\}, \quad (58,18)$$

bzw. der „Kontrast“ oder die „Absorption“ durch

$$W(\Delta\lambda) = \frac{I_0 - I}{I_0} = a \cdot e^{-\left(\frac{\Delta\lambda}{\alpha}\right)^2}, \quad (58,19)$$

a ist also die Linientiefe; $\alpha\sqrt{\ln 2}$ die (halbe) Halbwertsbreite.

Die Apparatefunktion werde — aus Gründen der mathematischen Einfachheit — ebenfalls durch eine Fehlerkurve beschrieben:

$$A(\Delta\lambda) = \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\Delta\lambda}{\beta}\right)^2}. \quad (58,20)$$

Deren Fläche ist auf 1 normiert. Ihre (halbe) *Halbwertsbreite* ist $\beta\sqrt{\ln 2} = 0,83\beta$.

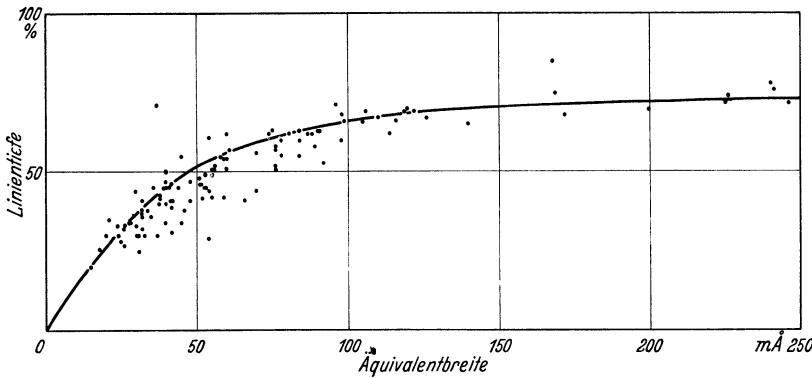


Fig. 69. Linientiefe als Funktion der Gesamtabsorption nach Messungen von R. v. D. R. WOOLLEY [1155] im Sonnenspektrum (λ 4040—4274). Großer Prismenspektrograph; $\frac{\lambda}{\Delta\lambda_0} \sim 50\,000$.

Man wird also mit dem betreffenden Spektrographen zwei Linien eben noch trennen können, wenn ihr Abstand

$$\Delta\lambda_0 \approx 1,66\beta \quad (58,21)$$

ist. Das heißt β ist mit dem *Trennungsvermögen* $\lambda/\Delta\lambda_0$ so verknüpft, daß

$$\beta \approx 0,6 \cdot \Delta\lambda_0 \quad (58,22)$$

wird¹.

Die vom Spektralapparat gelieferte *scheinbare* Intensitätsverteilung ist nun nach (58,17):

$$S(\Delta\lambda) = a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} \cdot \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\left(\frac{\Delta\lambda-x}{\beta}\right)^2} dx = \frac{a}{\sqrt{1 + (\beta/\alpha)^2}} e^{-\frac{\Delta\lambda^2}{\alpha^2 + \beta^2}}. \quad (58,23)$$

Die Halbwertsbreiten superponieren sich also in diesem Fall entsprechend dem bekannten Fehler-Additionsgesetz; die Linientiefe wird im Verhältnis $\left[1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right]^{-1/2}$ verkleinert. Umgekehrt kann bei vorgegebenem $S(\Delta\lambda)$ nun $W(\Delta\lambda)$ leicht berechnet werden.

¹ Zu derselben Abschätzung kann man nach [1152] auch durch Vergleich der Apparatefunktionen (58,20) und (58,11) kommen.

Nehmen wir an, daß alle Absorptionslinien, z. B. einer bestimmten Gegend des Sonnenspektrums etwa dieselbe wahre Tiefe a haben, so können wir die scheinbare Tiefe

$$a \left[1 + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (58,24)$$

als Funktion der von der Verzerrung unabhängigen Gesamtabsorption

$$E_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} W \, d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} S \, d\lambda = a \cdot \alpha \sqrt{\pi} \quad (58,25)$$

darstellen.

In Fig. 69 sind die von R. v. D. R. WOOLLEY [1155] im Gebiet λ 4040—4274 des Sonnenspektrums mit einem großen Prismenspektrographen gemessenen Tiefen der FRAUNHOFER-Linien (in %) als Funktion ihrer Gesamtabsorption in Milliångström ($1/1000 \text{ \AA}$) aufgetragen. Wie die eingezeichnete Kurve zeigt, lassen sich die Beobachtungen darstellen mit

$$a = 0,75 \quad \text{und} \quad \beta = 40 \text{ m\AA}. \quad (58,26)$$

Dieser Wert von β entspricht einem Trennungsvermögen von ~ 60000 , während WOOLLEY direkt ~ 50000 schätzt. Der Wert von a ist ziemlich unsicher und ändert sich nach WOOLLEY beträchtlich, wenn man mit der Möglichkeit von Streulicht (s. unten) rechnet. a wäre dann ungefähr um dessen Betrag zu verkleinern. Auf jeden Fall aber erkennt man, daß die Restintensitäten von Linien mit weniger als 100 m\AA (entsprechend ROWLAND-Intensität ~ 3) in der Hauptsache instrumentellen Ursprunges sind, während — wie man leicht nachrechnet — die Intensitätsverteilung in den Linienflügeln nicht so stark affiziert wird.

In ähnlicher Weise wie die besprochenen Messungen, WOOLLEYS lassen sich die von M. MINNAERT und B. v. ASSENBERGH [1136, Fig. 1] darstellen; für das Trennungsvermögen des von diesen Autoren benützten Apparates ergibt sich ein etwa 10mal kleinerer Wert.

b) Ebenso wie die Überlagerung zweier Fehlerkurven läßt sich auch die zweier *Dispersionskurven* nach Abschn. 46. analytisch behandeln. Setzt man

$$W(\Delta\lambda) = C \cdot \frac{a_1}{\pi} \cdot \frac{1}{(\Delta\lambda)^2 + a_1^2} \quad (58,27)$$

(Linientiefe $\frac{C}{\pi a_1}$; Halbwertsbreite a_1 ; Gesamtabsorption C) und

$$A(\Delta\lambda) = \frac{a_2}{\pi} \cdot \frac{1}{(\Delta\lambda)^2 + a_2^2}, \quad (58,28)$$

so wird

$$S(\Delta\lambda) = C \cdot \frac{a_1 + a_2}{\pi} \cdot \frac{1}{(\Delta\lambda)^2 + (a_1 + a_2)^2}. \quad (58,29)$$

In diesem Falle addieren sich also die Breiten von W und A . Diese Formeln sind als Ergänzung zu (58,18—25) nützlich, da — wie wir noch sehen werden — die *starken* FRAUNHOFER-Linien (mit Ausnahme der Wasserstofflinien) näherungsweise die Form (58,27) haben und die Apparatefunktion vielfach in ihren *äußeren* Teilen mit $1/\Delta\lambda^2$ geht. Leider kann man meist *nicht* die ganze Apparatefunktion durch (58,28) darstellen.

In praxi kann man häufig eine ausreichende Entzerrung durchführen, indem man S und A durch eine Summe *mehrerer* Dispersionskurven¹ bzw. Fehlerkurven approximiert; vgl. auch C. W. ALLEN [1110].

Zur *allgemeinen Lösung der Entzerrungsintegralgleichung* (58,17)

$$S(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x) A(y-x) \, dx \quad (58,30)$$

¹ Über die Superposition von *Fehler- und Dispersionskurve* vgl. Abschn. 44.

bei *beliebig* vorgegebener scheinbarer Intensitätsverteilung und Apparatefunktion $A(y)$ sind eine Reihe von Verfahren angegeben worden.

Vorweg sei bemerkt, daß das zur Spaltbreitenkorrektur in der Ultrarot-spektroskopie viel benützte elegante Verfahren von Lord RAYLEIGH [1145] für unsere Zwecke nicht geeignet ist, da es voraussetzt, daß $A(y)$ für große $|y|$ stärker als irgendeine Potenz von y gegen Null geht.

C. D. SHANE [1149] löst Gl. (58,30) nach einem „trial and error“-Verfahren: Ist $W_1(x)$ eine geschätzte erste Näherungslösung, so berechne man durch Einsetzen in (58,30)

$$S_1(y) = \int W_1(x) A(y-x) dx.$$

Dann gilt

$$S(y) - S_1(y) = \int (W(x) - W_1(x)) A(y-x) dx.$$

Nun wird $W - W_1$ geschätzt und durch Ausintegrieren nachgeprüft usw. Nach Angabe des Verf. erreicht man mit zwei „Schritten“ im allgemeinen eine ausreichende Approximation.

H. C. BURGER und P. H. v. CITTERT [1114] verwandeln durch einen Kunstgriff (58,30) zunächst in eine inhomogene *Integralgleichung*

$$S(y) = W(y) + \int W(x) \{A(y-x) - \Delta(y-x)\} dx, \quad (58,31)$$

wo $\Delta(z)$ eine *Zackenfunktion* bedeutet, die nur für $z = 0$ von Null verschieden ist, so daß $\int \Delta(z) = 1$ wird. Die Integralgleichung

$$W(y) = S(y) - \int W(x) \{A(y-x) - \Delta(y-x)\} dx \quad (58,32)$$

wird nun, ausgehend von der 1. Näherung $W_1 = S$, durch sukzessive Approximation (NEUMANNsche Reihe) gelöst, indem man für das W unter dem Integralzeichen jeweils die vorhergehende Näherung einsetzt. Man erhält so

$$\left. \begin{aligned} W_1(y) &= S(y) \\ W_2(y) &= S(y) - \int S(x) \{A(y-x) - \Delta(y-x)\} dx = 2S(y) - \int S(x) A(y-x) dx \\ W_3(y) &= S(y) - \int \{2S(x) - \int S(z) A(x-z) dz\} \{A(y-x) - \Delta(y-x)\} dx \\ &= 3S(y) - \int S(x) \{3A(y-x) - A_1(y-x)\} dx, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} (58,33)$$

wo

$$A_1(u) = \int A(v) A(u-v) dv \quad (58,34)$$

die iterierte Verzerrungsfunktion bedeutet. Setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man

$$W_n(y) = n \cdot S(y) - \int S(x) \mathfrak{A}_n(y-x) dx, \quad (58,35)$$

wobei der „lösende Kern“ \mathfrak{A}_n gegeben ist durch

$$\mathfrak{A}_n = \frac{n(n-1)}{2!} A - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} A_1 + \dots \pm A_{n-2} \quad (58,36)$$

wo A_n die n -fache iterierte Apparatefunktion

$$A_n(u) = \int A_{n-1}(v) A(u-v) dv \quad (58,37)$$

bedeutet. Für eine vorgegebene Apparatefunktion $A(v)$ kann also der lösende oder entzerrende Kern \mathfrak{A} ein für allemal ermittelt werden. Zur Entzerrung einer bestimmten Funktion $S(y)$ braucht dann nur noch die *eine* Quadratur in (58,35) ausgeführt zu werden. Unter Umständen wird man aber auch die Näherungen W_2, W_3, \dots einfach sukzessive im Sinne unserer Ausgangsüberlegung berechnen.

Zur mechanischen Berechnung von Integralen des Typus (58,30 oder 37...) geben BURGER und v. CITTERT [1114] ein optisches Gerät an.

Nunmehr betrachten wir eine weitere bei Photometrie von *Absorptionslinien* mit Hilfe eines *Gitterspektrographen* zu berücksichtigende Fehlerquelle, nämlich

4. Die Gittergeister. Auf einem hinreichend exponierten Spektrum mit *Emissionslinien* erkennt man zu beiden Seiten jeder Linie in einigen Å Abstand die sog. „Geister“. In einem *Absorptionsspektrum* wird daher das Zentrum einer Linie aufgehellert durch die von benachbarten Stellen des kontinuierlichen Spektrums herrührenden Geister. Ist die Breite der zu messenden Linie kleiner als die Ausdehnung der zu einer Linie gehörigen Gruppe von Geistern — so daß alle in das Zentrum der Absorptionslinie fallenden Geister vom unge-

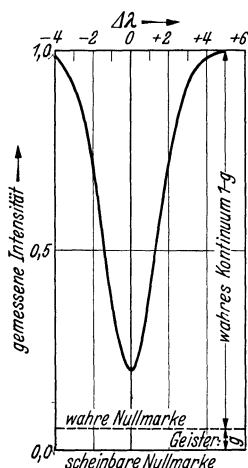


Fig. 70. Korrektur für Gittergeister. Nach M. MINNAERT.

störten Kontinuum herrühren —, so kann man nach M. MINNAERT [1134] ihren Einfluß folgendermaßen korrigieren:

Man mißt in einem Linienspektrum (z. B. Hg-Bogen) das Verhältnis der Intensitätssumme aller Geister zur Intensität der Hauptlinie $\frac{g}{1-g}$. Dann rührt in einem kontinuierlichen Spektrum der Bruchteil g von Geistern her und nur der Anteil $1-g$ gehört „wirklich“ an die betrachtete Stelle. Die *gemessenen* Linientiefen und Gesamtabsorptionen sind also auf die wahre Nullmarke (s. Fig. 70) umzurechnen, d. h. durch $1-g$ zu dividieren.

Falls bei sehr breiten Absorptionslinien, wie *H* und *K* im Sonnenspektrum, die Linienbreite von derselben Größenordnung ist, wie die Ausdehnung der Geisterzone einer Emissionslinie, so muß auch die Geisterkorrektur im Sinne der Überlegungen unter 3. ausgeführt werden.

Bei *allen* Spektrographen spielt weiterhin eine in ihren Auswirkungen den Gittergeistern analoge Erscheinung eine wichtige Rolle:

5. Das Streulicht. Das allgemeine Streulicht kommt zustande durch Zerstreuung und Reflexion von Licht aller Wellenlängen an den Oberflächen der Optik, an den Wänden des Spektrographen usw. Ist in dem betrachteten Spektralbezirk das Intensitätsverhältnis von Streulicht: Streulicht + Spektrum gleich g' , so sind wie unter 4. die direkt gemessenen Linientiefen R und Gesamtabsorptionen durch $1-g'$ zu dividieren. Man kann g' — wenigstens näherungsweise — messen, indem man die auf der Platte dicht *neben* dem Spektrum herrschende Intensität mit der des Spektrums selbst vergleicht. (Vorsicht wegen chemischen Schleiens, der daran zu erkennen ist, daß er sich auf vorher abgedeckten Teilen der Platte fortsetzt.)

Neben der allgemeinen Streuung bekommt man bei *Gitterspektrographen* noch eine *Lichtstreuung in der Dispersionsrichtung des Spektrums*. Diese rührt offenbar davon her, daß der eigentlichen, streng periodischen Teilung des Gitters noch ein paralleles *unperiodisches* Strichsystem überlagert ist¹. (Ungleiche Breite und Tiefe der Gitterstriche u. dgl.!) Eine direkte *Messung* dieses Beitrages zum Streulicht ist meines Wissens nur möglich mit Hilfe künstlicher Absorptionslinien (Na-Rohr; seltene Erden).

¹ Man kann diesen Effekt leicht beobachten, wenn man eine entfernte Straßenlaterne durch eine Brille betrachtet, über die man mit fettigen Fingern gewischt hat. Auch das Streulicht von Zölostaten hat großenteils eine ähnliche Ursache.

Es ist wichtig, sich klar zu machen, wie stark die Restintensitäten tiefer Absorptionslinien durch Streulicht (und evtl. Geister) beeinflußt werden. Ist z. B. $g + g' = 5\%$ und mißt man zunächst eine Restintensität $1 - R = 20\%$, so erhält man $R_{\text{korrr.}} = \frac{80}{1 - 0,05} = 84,2\%$ also ein korrigierte Restintensität $1 - R_{\text{korrr.}} = 15,8\%$.

Wenn man einigermaßen zuverlässige Werte von Restintensitäten bekommen will, so muß man das Streulicht möglichst herabsetzen. Hierzu gibt es folgende Mittel:

a) Man wählt die *Breite* des Spektrums nur so groß, wie dies eben für eine sichere Photometrierung nötig ist (~ 3 mm).

b) Besonders im Ultraviolett und Ultrarot müssen die anderen Wellenlängengebiete ausgeschaltet werden; entweder durch Vorschalten von *Filttern* (Vorsicht mit Interferenzstreifen!) oder noch besser nach A. D. THACKERAY [1151] und R. O. REDMAN [1146] mit Hilfe eines *Monochromators*. Dessen Spaltbreite muß man so einstellen, daß das im Hauptspektrographen aufgenommene Stück des Spektrums noch eine genaue Festlegung der Intensität des ungestörten Kontinuums erlaubt. Es darf — dies ist ganz allgemein zu betonen — nicht übersehen werden, daß eine *Hauptschwierigkeit* aller Messungen an Absorptionslinien in der Festlegung des ungestörten kontinuierlichen Spektrums liegt; die Linien sind meist viel breiter, als der Anfänger schätzt!

59. Die photographische Platte.

Da spektralphotometrische Messungen an den FRAUNHOFER-Linien von Sonnen- und Sternspektren in erster Linie auf photographischem Wege¹ ausgeführt werden, so befassen wir uns kurz mit den hierfür wichtigen Eigenschaften und Fehlern der photographischen Platten.

Zunächst ist zu berücksichtigen², daß infolge der *Ausdehnung der Plattenkörner und der Diffusion* des Lichtes in der Schicht — der Lichthof ist bei geeigneten Platten zu vernachlässigen — die Platte nur ein endliches Auflösungsvermögen hat. Dieser Effekt wird bei den in Abschn. 58 besprochenen Entzerrungsverfahren größtenteils automatisch mitkorrigiert. Trotzdem wollen wir ihn genauer betrachten und eine für den Bau von Sonnentelaskopen interessante Konsequenz ziehen:

Auf den üblichen Platten werden Linien von $> 1/20$ mm Breite schon ziemlich richtig wiedergegeben (Genauerer vgl. F. ROSS [1105]). Will man nun das Auflösungsvermögen eines Spektrographen voll ausnützen, so muß also der Abstand Δy_0 des ersten Beugungsminimums von der Linienmitte $\approx 1/20$ mm sein. Nach Gl. (58,1) ist aber

$$\Delta y_0 = f \cdot \Delta \delta = \lambda \cdot \frac{f}{a} \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ cm.} \quad (59,1)$$

Für $\lambda \sim 5000 \text{ \AA}$ kommt man so auf ein Öffnungsverhältnis

$$a/f \leq 1/100. \quad (59,2)$$

Bei dem 150'-Turmteleskop an MT. WILSON wird diese Grenze sogar überschritten. Eventuell kann man zur Vergrößerung der Lineardispersion auch eine Vergrößerungskamera oder Negativlinse benützen; vgl. z. B. L. S. ORNSTEIN und M. MINNAERT [1142].

In der spektralphotometrischen Literatur spielt sodann eine wichtige Rolle der sog. *EBERHARD-Effekt* [1122]3; 1148, 1153]:

¹ Über direkte photoelektrische Messungen vgl. TH. DUNHAM [1121]. Über bolometrische Messungen infraroter Sonnenlinien A. DAHME [1119].

² Wir beschränken uns auf normale Schwärzungen, wie sie in praxi benützt werden.

Grenzen auf der Platte eine stark und eine schwach belichtete Fläche scharf aneinander, so bekommt die $\left. \begin{array}{l} \text{stark} \\ \text{schwach} \end{array} \right\}$ geschwärzte Zone an der Grenze einen $\left. \begin{array}{l} \text{dunklen} \\ \text{hellen} \end{array} \right\}$ Saum, analog dem bekannten Kontrastphänomen des menschlichen Auges. Die Ursache des Effektes liegt wohl — vgl. besonders H. SEEMANN [1148] — hauptsächlich darin, daß bei der Entwicklung irgendwelche Reaktionsprodukte vom stark zum schwach geschwärzten Teil der Platte diffundieren und umgekehrt.

Man wird also erwarten, daß bei den geringen *Schwärzungsgradienten*, wie man sie in der Spektralphotometrie ohnedies benützen muß, und bei *ausreichender Bewegung des Entwicklers* (Schaukeln oder besser geeignete Planschapparate!) der EBERHARD-Effekt *verschwindet*. Dies bestätigt eine Arbeit von N. WALENKOW [1153]. Von der Verwendung angeblich EBERHARD-Effektfreier Spezialentwickler möchte Verf. abraten. Am sichersten ist in jeder Hinsicht die Anwendung erprobter Markenerzeugnisse; z. B. Agfa Rodinal 1:20. Hat man *große* Helligkeitsintervalle zu überbrücken (z. B. Messung von Restintensitäten tiefer Linien), so wird man „weich“ entwickeln — stärker verdünntes Rodinal —. Genaue Messung *kleiner* Helligkeitsunterschiede (z. B. Gesamtabsorption schwacher Linien) dagegen erfordert härtere Entwicklung, aber auch genau richtige Wahl der Belichtungsdauer.

Besonders zu beachten ist nach G. EBERHARD [1123] u. a. weiterhin, daß auch nach gleichmäßiger Belichtung und Entwicklung einer Platte deren Schwärzung hauptsächlich infolge von Schwankungen der Schichtdicke usw. variiert. Fehler von $\sim 10\%$ in der Messung von Intensitäten scheinen bei größeren Platten nicht selten zu sein.

Man muß also das zu photometrierende Spektrum und die Intensitätsmarken nahe beisammen anordnen (Vorsicht wegen Streulicht der intensiven Marken s. u.!) und den Rand der Platte nach Möglichkeit nicht benützen. Alle weiteren störenden Einflüsse, wie Temperatur- und Feuchtigkeitsunterschiede vermeidet man am besten, indem man Spektrum und Intensitätsmarken unter denselben Bedingungen aufnimmt, wie überhaupt die Grundregel der photographischen Photometrie ist: „*Möglichst differenziell arbeiten!*“

60. Standardisierung der Platten. Schwärzungskurve.

Da die *Schwärzung*¹ einer Platte in fast unübersehbarer Weise von der Belichtungszeit, Wellenlänge, Art der Entwicklung usw. abhängt, so muß man — wie besonders J. HARTMANN und P. P. KOCH klargestellt haben — *differenziell* arbeiten. Man nimmt also neben dem zu photometrierenden Spektrum auf derselben Platte (oder mindesten einer Platte derselben Packung) eine Reihe von *Intensitätsmarken* auf, die bekannten Intensitätsverhältnissen entsprechen. Diese müssen mit Licht *derselben Wellenlänge*, mit derselben Belichtungszeit und auch sonst unter denselben Verhältnissen hergestellt werden, wie das zu messende Spektrum. In praxi dürfte *eine* Schwärzungskurve meist für ein Wellenlängenintervall von $\sim 100 \text{ \AA}$ genügen. In Gegenden, wo die *Platten-*

¹ Man definiert in quantitativer Hinsicht die *Schwärzung* oder *Dichte* als

$$\log_{10} \frac{\text{Auffallendes Licht}}{\text{Durchgelassenes Licht}}$$

Sie hängt aber noch ab von der spektralen Intensitätsverteilung und dem Öffnungswinkel des im Photometer benützten Strahlenbündels. Man darf daher zunächst nur die Messungen mit *einem* Photometer untereinander vergleichen.

empfindlichkeit stark variiert, tut dies im allgemeinen auch die Schwärzungskurve. Die Abhängigkeit der Steilheit der Schwärzungskurve von der *Belichtungszeit* ist ziemlich gering, auf einen Faktor 5 dürfte es meist nicht ankommen.

Mit Hilfe der Schwärzungsmarken gewinnt man sodann die *Schwärzungskurve*, indem man die „Schwärzung“ oder einfacher den Photometerausschlag (Abschn. 61) als Funktion des \log_{10} der Intensität aufträgt. Man kann dann umgekehrt für die betrachtete Wellenlänge beliebige Photometerausschläge in Intensitäten umrechnen.

Das Hauptproblem der photographischen Spektralphotometrie liegt also offenbar darin, eine Methode zu finden, die es gestattet, eine Reihe von Spektren bekannter Intensitätsverhältnisse herzustellen. In vielerlei Hinsicht am sichersten, aber dafür ziemlich zeitraubend, sind Verfahren, bei denen die Intensitätsmarken — mit jeweils gleicher Belichtungszeit — *nacheinander* hergestellt werden. Wir nennen nur die wichtigsten:

1. Spaltbreitenvariation. Da die Intensität eines *kontinuierlichen* Spektrums der Spaltbreite proportional ist, solange die Beugung noch keine Rolle spielt so kann man durch Verändern der Spaltbreite Spektren von bekannten Intensitätsverhältnissen erzeugen. Die Festlegung der Spaltbreiten auf $\pm 3\%$ ist allerdings bei kleinen Spaltbreiten nicht ganz einfach. Man muß weiterhin darauf achten, daß in dem benützten Spektralgebiet die Schwärzung des Spektrums nicht stark von der Wellenlänge abhängt, da sonst die „Verschmierung“ des Spektrums bei großer Spaltbreite Fehler verursacht.

Wohl die sicherste Methode der Intensitätsänderung ist

2. Die KOCHSche Sektorblende. In dem parallelen Strahlenbündel zwischen Kollimatorlinse und Prisma (bzw. Gitter) werden Blenden der in Fig. 71a dargestellten Form angebracht, die — entsprechend dem Verhältnis der offenen Sektoren: 360° — eine wellenlängenunabhängige Abschwächung erzeugen.

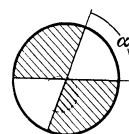


Fig. 71 a. Kochsche Sektorblende. Abschwächungsverhältnis α : 180.

Um kleine Ungleichheiten in der Absorption usw. der Optik auszuschalten, läßt man die Blende um ihren Mittelpunkt rotieren.

3. Anwendung des $1/r^2$ -Gesetzes. Man beleuchtet z. B. einen vor dem Spalt fest aufgestellten Magnesiumschirm aus verschiedenen Entfernungen. Bei Verwendung von Glühlampen ist auf die Linseneigenschaft der Glaswände zu achten.

Da es — besonders bei langen Belichtungszeiten — recht mühsam ist, etwa 10 Intensitätsmarken hintereinander herzustellen, so wird man versuchen, alle Schwärzungsmarken *gleichzeitig* zu erzeugen, indem man vor dem Spalt eine Abschwächungsvorrichtung anbringt. Man muß dann jedoch auf *Konstanz von Spaltbreite und -beleuchtung*¹ achten (Kontrollaufnahme *ohne* Abschwächungsvorrichtung!) und besonders das *Streulicht* im Spektrographen sehr niedrig halten. Sollte z. B. das Intensitätsverhältnis der stärksten zur schwächsten Stufe 20:1 sein und gibt erstere auch nur 1% Streulicht, so wird das Intensitätsverhältnis 20:1,2; man erhält also einen Fehler von 20%. Die gleichzeitige Herstellung mehrerer Intensitätsmarken erlauben folgende Anordnungen.

4. Absorptionskeile und Stufenabschwächer. Da es hinreichend neutrale Rauchgläser nicht gibt, und auch die auf Glas oder Quarz aufgestäubten oder aufgedampften Platinschichten nicht völlig neutral absorbieren, so muß

¹ Da Milchglasscheiben oft nicht gleichmäßig sind, lasse man sie — nach KOCH — rotieren.

die Durchlässigkeit von Keilen und Stufenabschwächern in spektral zerlegtem Licht gemessen werden; sei es mit Monochromator und Thermosäule oder photographisch unter Zuhilfenahme eines der folgenden Abschwächungsverfahren. Den in Deckplatten usw. entstehenden Interferenzen ist besonderes Augenmerk zu schenken!

5. Treppenspalt. Ein treppenförmig gestufter Spalt gibt eine Serie von Spektren, deren Intensität der *Breite* der Stufen proportional ist. Im übrigen vgl. unter Spaltbreitenvariation (4).

6. Die Methode von R. v. HIRSCH und M. SCHÖN [1127]. Im Strahlengang des Spektrographen (vor dem Spalt oder im Kollimator) befindet sich eine rechteckige Blende und eine horizontale Schneide (Fig. 71 b), die senkrecht zur Richtung des Spaltes steht. So entsteht bei gleichmäßiger Ausleuchtung ein linearer Helligkeitsabfall senkrecht zur Dispersionsrichtung.

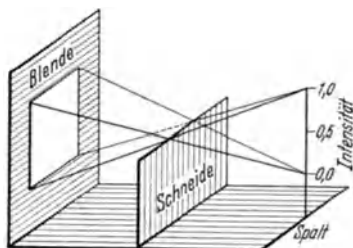


Fig. 71 b. Methode von R. v. HIRSCH und M. SCHÖN.

7. Bei der HANSENSchen Stufenblende [1126] wird ein Treppenspalt, von dem diffuses Licht ausgehen soll, durch eine Zylinderlinse abgebildet, so daß quer zum Spektrographenspalt Streifen entstehen, deren Intensität der Breite dieser Stufen proportional ist. Durch die Hilfsoptik wird zwar die unter 1. erwähnte Verschmierung des Spektrums beseitigt, dafür nimmt man aber viele andere *Nachteile* in Kauf: Das Instrument ist lichtschwach und

hinsichtlich der Justierung ziemlich anspruchsvoll; vgl. K. SCHACHTSCHABEL [1147]. Außerdem können nach v. CITERT [1118] die Beugung am Spalt und die Absorption im Prisma grobe Fehler verursachen.

Eine besondere Erörterung erfordert noch

8. Der rotierende Sektor. Eine rasch rotierende Scheibe, aus der ein Sektor vom Zentriwinkel α ausgeschnitten ist, soll eine Abschwächung im Verhältnis $\alpha:360^\circ$ geben. Diese Behauptung ist jedoch keineswegs selbstverständlich, da für die photographische Wirkung bekanntlich *nicht* das Produkt aus Intensität $I \times$ Belichtungszeit t maßgeblich ist, sondern — nach K. SCHWARZSCHILD — ein Ausdruck der Art $I \cdot t^p$, wobei der „SCHWARZSCHILD-Exponent“ p von der Wellenlänge abhängt und meist < 1 ist. Diesem Effekt wirkt entgegen der sog. *Intermittenzeffekt*, wonach intermittierende Beleuchtung im allgemeinen schwächer wirkt als kontinuierliche mit demselben $\int I dt$.

Im Bereich normaler Schwärzungen und genügend hoher Umdrehungszahlen heben sich offenbar beide Effekte praktisch auf. Es gibt jedoch auch Autoren, welche die Anwendbarkeit des rotierenden Sektors in Zweifel ziehen. Wir wollen hier nicht eine detaillierte Auseinandersetzung aller diesbezüglichen Untersuchungen geben, sondern verweisen auf die Literatur [1154, 1128, 1101].

Trotzdem, wie gesagt, die Frage nach dem Genauigkeitsgrad und den Anwendbarkeitsgrenzen des rotierenden Sektors noch nicht endgültig geklärt ist, möchten wir seine Verwendung bei Untersuchungen, die nicht gerade äußerste Präzision anstreben, nicht verdammen. Erwähnt sei schließlich noch, daß man nach W. BAADE, F. GOOS, P. P. KOCH und R. MINKOWSKI [1112] mit Hilfe des rotierenden Sektors ein Intensitätsmarkengerät konstruieren kann, das *gleichzeitig* mehrere Spektren gibt *und* die erwähnte Streulichtschwierigkeit vermeidet. Man braucht nämlich nur einen Stufensektor mit großem Radius dicht vor der Platte laufen zu lassen, so daß er ein breites Spektrum in Streifen abgestufter Intensität zerlegt.

61. Mikrophotometer. Reduktion der Photometerkurven.

Nachdem wir die wichtigsten Methoden der Herstellung von Intensitätsmarken kennengelernt haben, sollen noch einige Bemerkungen über die *Prinzipien* der wichtigsten *Mikrophotometer* Platz finden.

Da das Auge in der Beurteilung breiter Linien — besonders wenn diese von schmalen Fremdlinien („blends“) gestört sind — starken Täuschungen unterworfen ist, so benützt man zur Messung der Intensitätsverteilung in FRAUNHOFER-Linien am besten ein *Registrierphotometer*: Auf der Registrierkurve wird man die zur Messung geeigneten Stellen besser erkennen, als bei direkter Betrachtung der Platte. In mechanischer Hinsicht erscheint es wünschenswert, das Übersetzungsverhältnis Spektrum: Registrierkurve variieren zu können (1:1 bis etwa 1:50). Die Breite des Photometerspaltes wählt man so, daß das Plattenkorn in der Registrierkurve eben noch schwach erkennbar ist. Arbeitet man mit sehr engem Spalt, so wird man also nach Möglichkeit seine Länge vergrößern; man muß dann jedoch peinlich darauf achten, daß Photometerspalt und Spektrallinien parallel sind.

Bezüglich der Wahl des lichtempfindlichen Organs und der elektrischen Einrichtung sind folgende Möglichkeiten praktisch erprobt:

A. *Photozelle + Elektrometer*.

a) Mit Kompensation der Lampenschwankungen durch eine zweite Photozelle nach P. P. KOCH [1132], F. GOOS und P. P. KOCH [1124] u. a.

b) Ohne Kompensation. Zeiß-Photometer (G. HANSEN); H. KULENKAMPFF [1133] u. a.

B. *Photozelle mit Verstärker und Galvanometer*. Zum Beispiel C. S. BEALS [1113] (dort ohne Registrierung).

C. *Sperrschichtphotozelle + Galvanometer*. B. LANGE; vgl. [1106].

D. *Thermoelement + Galvanometer*. W. J. H. MOLL (Kipp und Zonen-Delft) [1137]; H. H. PLASKETT [1144].

An sich führen alle diese Konstruktionen zum Ziel; hinsichtlich Schnelligkeit der Einstellung — bei Messung eines großen Plattenmaterials ein wichtiger Faktor! — dürfte den unter A. genannten Instrumenten der Vorzug zu geben sein.

Die *Reduktion der Photometerkurven* vollzieht sich folgendermaßen: Mit Hilfe der Intensitätsmarken konstruiert man für das betrachtete Spektralgebiet die *Schwärzungskurve*: \log_{10} Intensität als Funktion des Photometerausschlages. Hiermit führt man die Photometerausschläge in $\log_{10} I$ über, zeichnet das ungestörte kontinuierliche Spektrum ein und reduziert dann auf $I_{\text{cont.}} = 1$. Die Hauptschwierigkeit liegt natürlich in der Festlegung des „ungestörten kontinuierlichen Spektrums“, die bis zu einem gewissen Grade Sache des Gefühls ist.

Bei den breiten *Metalllinien* — wie z. B. H und K im Sonnenspektrum, die sich über ein Gebiet von $\sim 100 \text{ \AA}$ ausdehnen — kann man nach M. MINNAERT [1136] die Lage des kontinuierlichen Untergrundes am besten ermitteln, indem man eine unter sehr allgemeinen Voraussetzungen gültige Aussage der Theorie zu Hilfe nimmt:

Bezeichnet man den Abstand von der Linienmitte — im folgenden in Å gerechnet — mit $\Delta\lambda$, so geht die Tiefe der durch Strahlungs- oder Stoßdämpfung hervorgerufenen Linienflügel $\sim \frac{1}{\Delta\lambda^2}$ und man kann die Intensität in den äußeren Teilen der Linie, bezogen auf das kontinuierliche Spektrum als Einheit, näherungsweise durch

$$\frac{1}{1 + \frac{c}{\Delta\lambda^2}} \tag{61,1}$$

darstellen. Nun sei die direkt gemessene Intensität — in irgendwelchen Einheiten — gleich $i(\Delta\lambda)$. Die zunächst noch unbekannte Intensität des kontinuierlichen Grundes werde durch $i_0 + m \cdot \Delta\lambda$ dargestellt. Die Korrekptionsgröße m kann schon ohne Kenntnis von i_0 mit genügender Genauigkeit durch Vergleich der beiden Linienflügel ermittelt werden. Sodann schreiben wir

$$\frac{i(\Delta\lambda)}{i_0 + m \cdot \Delta\lambda} = \frac{1}{1 + \frac{c}{\Delta\lambda^2}} \quad (61,2)$$

oder

$$i - m \cdot \Delta\lambda = i_0 - c \cdot \frac{i}{\Delta\lambda^2}. \quad (61,3)$$

Trägt man also $i - m \cdot \Delta\lambda$ als Funktion von $i/\Delta\lambda^2$ auf, so muß man für hinreichend kleine $i/\Delta\lambda^2$ eine Gerade erhalten, deren Schnitt mit der Ordinatenachse die (gedachte) Intensität i_0 des Kontinuums am Ort der Linie gibt, während ihre

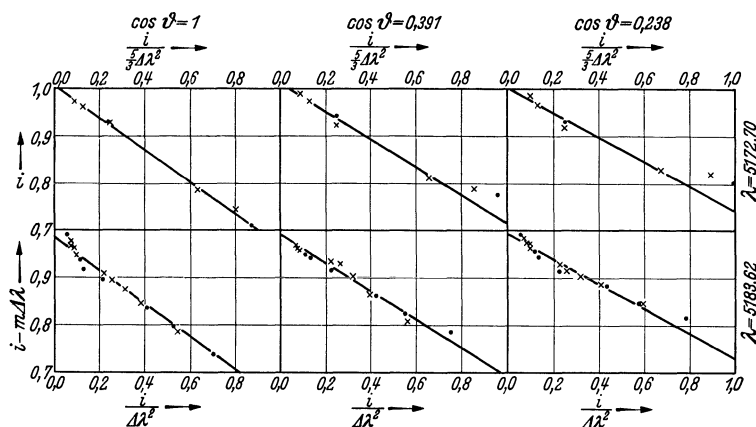


Fig. 72a. Flügel der Mg-Linien $3^3 P_{1,2} - 4^3 S_1$ an verschiedenen Stellen der Sonnenscheibe nach Messungen von H. H. PLASKETT [1143]. Anwendung der Methode von M. MINNAERT [1136] zur genauen Festlegung des kontinuierlichen Grundes.

Neigung die Konstante c liefert, der — wie wir sehen werden — im Zusammenhang mit der Theorie der FRAUNHOFER-Linien eine grundlegende Bedeutung zukommt.

Zur Illustration behandeln wir nach dem MINNAERTSchen Verfahren die von H. H. PLASKETT [1143] an mehreren Stellen der Sonnenscheibe (charakterisiert durch $\cos \vartheta$; vgl. Fig. 4) gemessenen Mg-Linien¹ λ 5183,62 und 5172,70. Da die Breiten der beiden Linien sich nach der Theorie (Kap. XII) wie $\sqrt{5} : \sqrt{3}$ verhalten, haben wir λ 5172 gleich auf λ 5183 reduziert, indem wir ihre $\Delta\lambda$ -Werte mit $\sqrt{5/3}$ multiplizierten. Eine genaue Bestimmung der Konstante m ist nur bei λ 5183 möglich. Der Vergleich beider Linienflügel gibt für

$\cos = 1$	0,391	0,238
$m = 0,004$	0,002	0,0013

Die weitere Bearbeitung der Beobachtungen dürfte aus der vorstehenden Fig. 72a hervorgehen. Man sieht, daß die ursprüngliche Festlegung des kontinuierlichen Untergrundes bei PLASKETT nirgends um mehr als $\sim 2\%$ geändert werden muß. Für die Konstante c , die ja das eigentlich Interessierende ist, erhält man als Mittel von λ 5183 und der mit $\Delta'\lambda = \sqrt{5/3} \Delta\lambda$ reduzierten λ 5172 die Werte

¹ Die dritte Linie λ 5167,33 ist durch Fremmlinien so stark gestört, daß wir sie nicht gebrauchen können.

($\Delta\lambda$ wieder in Å gerechnet)

$\cos \vartheta = 1$	0,391	0,238
$c = 0,45_5$	0,30 ₀	0,26

Zum Vergleich bearbeiten wir noch in derselben Weise die an den gleichen Linien ausgeführten Interferometermessungen von E. CHERRINGTON [1116]. Wie die Fig. 72b zeigt, dürfte bei ihm der kontinuierliche Grund durchweg um $\sim 2\%$ zu tief angenommen sein. Für c ergeben sich die Werte

$\cos \vartheta = 1$	0,32
$c = 0,34_5$	0,33

Während also für \odot -Mitte die beiden Meßreihen ausgezeichnet übereinstimmen, ergeben sich bezüglich der Mitte-Rand-Variation (mit der wir uns vom theoretischen Standpunkt aus noch eingehend beschäftigen werden) unerwartete Differenzen, deren Ursache zur Zeit nicht zu erkennen ist. Weitere Untersuchungen¹ auf diesem Gebiet sind daher dringend erforderlich.

Leider ist es nicht möglich, für die — wie wir finden werden — durch Druckeffekt verbreiterten Wasserstofflinien ein entsprechendes Verfahren anzugeben. Man mache sich auf jeden Fall zur Regel, ein möglichst großes Stück des Spektrums in Betracht zu ziehen und auf die ausgedehnten „Flügel“ starker Linien zu achten.

Um die langweilige Arbeit von Umrechnung von Photometerausschlägen in Intensitäten abzukürzen, hat man Apparate konstruiert, die diese Reduktion auf mechanischem Wege ausführen. Vgl. K. HABERL [1125], dessen Apparat sogar direktes Planimetrieren von Gesamtabsorptionen erlaubt, und TH. DUNHAM jr. [1120].

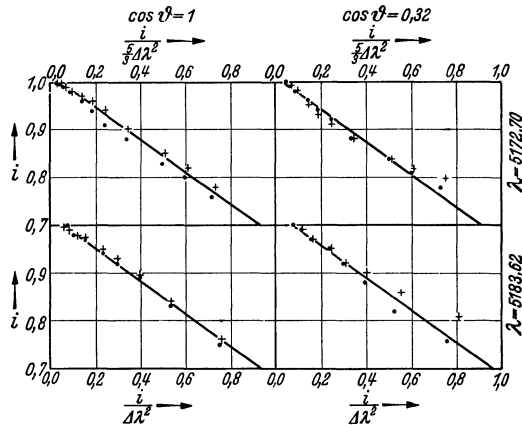


Fig. 72b. Dasselbe nach Messungen von E. CHERRINGTON [1116].

62. Messung der Gesamtabsorption. Abgekürzte Methoden zur Messung schwacher Linien. Schätzungsskalen.

Da die Messung der wahren Intensitätsverteilung in FRAUNHOFER-Linien an das Trennungsvermögen des Spektrographen sehr hohe Anforderungen stellt, so muß man sich bei schwachen Linien auf die Beobachtung der *Gesamtabsorption* oder *äquivalenten Linienbreite* E_λ beschränken. Diese gibt — wie wir sahen — die in der Linie absorbierte Energie an im Vergleich zu einem vollständig dunklen Streifen des Spektrums von 1 Å Breite² (vgl. Fig. 68). Sie ist daher *unabhängig* vom Trennungsvermögen des Spektrographen. Dagegen sind Gittergeister, Streulicht und photographische Effekte von Bedeutung.

Die *Messung der Gesamtabsorption* von FRAUNHOFER-Linien erfolgt einfach durch *Planimetrieren* der Intensitätskurve. Es ist notwendig, sich klarzumachen, wie wichtig auch hier die Berücksichtigung der ausgedehnten Flügel starker Linien ist. Betrachten wir z. B. mit M. MINNAERT [1136] das etwas schematisierte, aber der Wirklichkeit ganz gut angepaßte Linienprofil (61,1), so ist

¹ Nach Abschluß dieses Kapitels erschien die wichtige Arbeit von M. MINNAERT und J. HOUTGAST [1206].

² Gelegentlich rechnen wir auch mit der Frequenz- oder Kreisfrequenzeinheit.

zunächst dessen Gesamtabsorption

$$E_{\lambda} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{c}{\Delta\lambda^2}} \right) d\mathcal{A} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(\Delta\lambda)}{1 + \frac{\Delta\lambda^2}{c}} = \pi\sqrt{c}. \quad (62,1)$$

Die Fläche unter *einem* Flügel von $\Delta\lambda$ bis ∞ ist dagegen

$$\int_{\Delta\lambda}^{\infty} \frac{d(\Delta\lambda)}{1 + \frac{\Delta\lambda^2}{c}} = \sqrt{c} \left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tg } \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{c}} \right). \quad (62,2)$$

Mit Hilfe dieser Formel kann man leicht ausrechnen, welchen Fehler man in der Messung von E_{λ} macht, wenn man nur bis zu dem Abstand $\Delta\lambda$ — entsprechend der wahren Intensität $\frac{i}{i_0} = \frac{1}{1 + \frac{c}{\Delta\lambda^2}}$ — von der Linienmitte geht und die Intensität

an dieser Stelle als kontinuierlichen Untergrund betrachtet. Das Ergebnis zeigt — nach MINNAERT (s. oben) — die folgenden kleine Tabelle:

$\frac{\Delta\lambda}{\text{halbe Halbwertsbreite } \sqrt{c}}$	1	5	10	50	100
Wahre Intensität i/i_0	0,50	0,96	0,99	1,000	1,000
Scheinbare Äquivalentbreite					
Wahre Äquivalentbreite $\pi\sqrt{c}$	0,370	0,782	0,872	0,975	0,987

Um eine Genauigkeit von 2,5% zu erzielen, muß man also bis zur 50fachen Halbbreite bzw. 16fachen Äquivalentbreite photometrieren. Für die K-Linie im Sonnenspektrum ist $c \sim 30 \text{ \AA}^2$, man müßte also bis $\Delta\lambda \sim \pm 270 \text{ \AA}$ gehen, was praktisch kaum durchführbar ist. In solchen Fällen dürfte es daher das beste sein, die Form der Flügel nach dem MINNAERTSchen Verfahren (Abschn. 61; z. B. Fig. 72a u. b) zu ermitteln und nach (62,2) zu integrieren. Bei den Wasserstofflinien ist — wie wir schon bemerkten — diese Methodik leider nicht anwendbar. Ihre Gesamtabsorptionen bleiben daher vorerst mit einer beträchtlichen Unsicherheit behaftet, was auch in der augenfälligen Diskrepanz zwischen den Fehlerangaben der einzelnen Beobachter einerseits und den Differenzen unabhängiger Meßreihen andererseits zum Ausdruck kommt.

Bei hinreichend *schwachen Linien*, deren gemessene Intensitätsverteilung ganz durch den Spektrographen bedingt ist, gibt schon die *Tiefe* der Linienmitte R_c (scheinbare Restintensität) ein Maß der Gesamtabsorption E_{λ} . Den Zusammenhang von E_{λ} und R_c bestimmt man am besten empirisch durch Ausmessen und Planimetrieren einiger Linien. Vgl. M. MINNAERT und v. ASSENBERGH [1135a], sowie Fig. 69 nach Messungen von R. v. D. R. WOOLLEY [1155].

Muß man mit sehr kleiner Dispersion arbeiten, so macht die photometrische Messung des Intensitätsverlaufes oder der maximalen Tiefe der Linien erhebliche Schwierigkeiten. Y. ÖHMAN [1139] hat daher — besonders für Durchmusterungszwecke — folgendes Verfahren benützt: Der Photometerspalt wird so weit geöffnet, daß er die *ganze* Linie nebst einiger Umgebung erfaßt. Die so gemessene Pseudointensität ist im Bereich mittlerer Dichte des kontinuierlichen Spektrums ($\sim 0,5$ bis 1) von dieser praktisch unabhängig und gibt ein Maß der Gesamtabsorption, solange man Linien von etwa derselben scheinbaren Intensitätsverteilung vergleicht. Wie man leicht sieht, ist das Verfahren jedoch gegen Fokusänderungen, Luftunruhe (bei Aufnahmen mit Objektivprisma) usw. ziemlich empfindlich.

Wenn es nicht auf hohe Genauigkeit ankommt, so kann man auch „Linienintensitäten“, die nach irgendeiner *Gedächtnisskala* oder künstlichen *Vergleichs-*

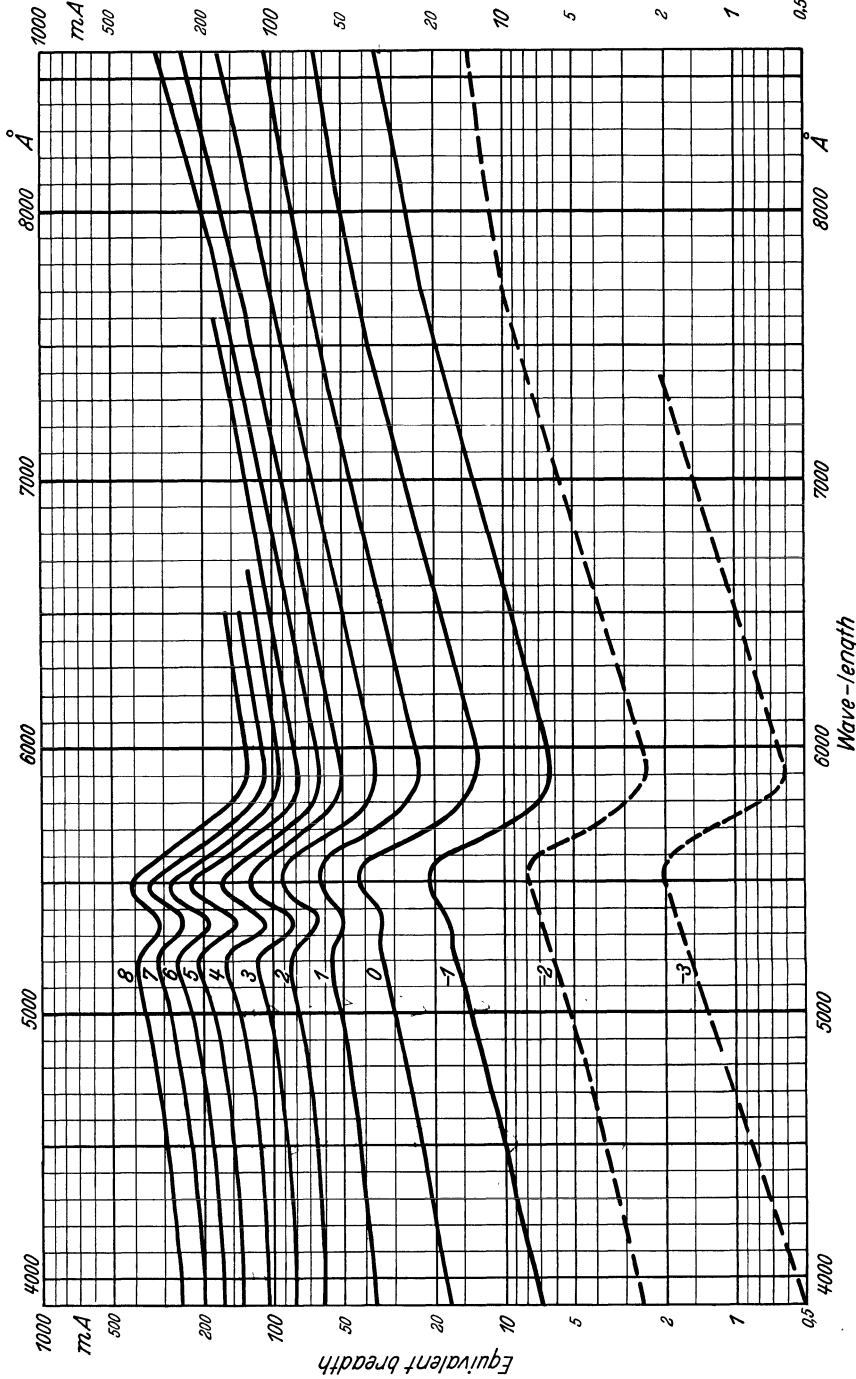


Fig. 73. Gesamtabsorption als Funktion der ROWLAND-Intensität und Wellenlänge nach G. F. W. MULDER'S [1138].

skala geschätzt sind, als Maß der Gesamtabsorption E_{λ} heranziehen. Die Verknüpfung der geschätzten Intensität mit E_{λ} wird natürlich von der Schwärzung

und Gradation der benützten Platte abhängen. Für eine vorgegebene Aufnahme wird sie also eine Funktion der Wellenlängen sein.

Die bekannteste Schätzungsskala ist die ROWLANDSche Skala für die FRAUNHOFER-Linien des *Sonnenspektrums*. Ihre Kalibrierung auf Gesamtabsorptionen hat G. F. W. MULDER [1138] durchgeführt; das Ergebnis zeigt die seiner Dissertation entnommene Fig. 73. Die mittleren Fehler der aus den „ROWLAND-Intensitäten“ mit Hilfe der MULDERSSchen Eichkurven ermittelten Gesamtabsorptionen bewegen sich zwischen 17% für ROWLAND-Intensität 7 und 55% für ROWLAND-Intensität —2 (—3 Linien sind schon mit einem Unsicherheitsfaktor ~ 2 behaftet). Diese Fehler erscheinen erstaunlich niedrig, wenn man zum Vergleich die *Meßfehler* der Gesamtabsorptionen danebenhält: G. F. W. MULDER gibt als mittleren zufälligen Fehler seiner Messungen, die zur Zeit wohl zu den genauesten gehören, $\pm 8\%$ an und meint, daß inklusive Unsicherheit des kontinuierlichen Untergrundes usw. Fehler von mehr als 20% kaum vorkommen dürften. Beim Vergleich seiner Messungen mit denen WOOLLEYS (s. S. 213) findet er systematische Unterschiede von $\sim 30\%$, in dem Sinne, daß WOOLLEYS Gesamtabsorptionen kleiner sind. Heranziehung weiterer Beobachtungsreihen würde nur den Eindruck bestätigen, daß noch viel systematische Arbeit notwendig sein wird, um ein einigermaßen zuverlässiges Beobachtungsmaterial zu bekommen¹.

Andererseits läßt es der günstige Ausfall der MULDERSSchen *Kalibrierung* als aussichtsreich erscheinen, zur Bearbeitung eines größeren Beobachtungsmaterials (man denke an spektroskopische Parallaxen und das Problem einer quantitativen Spektralklassifikation!) *Intensitätsschätzungen mit Vergleichsskalen* — evtl. unter dem Komparator — heranzuziehen. Einen vielversprechenden Ansatz in dieser Richtung zeigt eine am Harvard Observatory entstandene Arbeit von E. ÖPIK und M. OLMSTED [1140] mit interessanten Angaben über Herstellung von Vergleichsskalen, Berücksichtigung der Schwärzungsunterschiede der Spektren usw. Im Interesse einer erfolgreichen Zusammenarbeit von Beobachtung und Theorie ist es jedoch unbedingt notwendig, daß für alle derartigen Skalen die zur Umrechnung in Gesamtabsorptionen notwendigen Daten angegeben werden.

XII. Kapitel.

Strahlungsgleichgewicht und FRAUNHOFER-Linien.

63. Die SCHWARZSCHILDsche Differentialgleichung des Strahlungsgleichgewichtes. Strahlungsintensität und Strahlungsstrom.

Nachdem wir in Kap. VIII—X die *physikalischen Grundlagen zur Theorie der FRAUNHOFER-Linien* bereitgestellt und in Kap. XI die empirische Seite des Problems kurz erörtert haben, wenden wir uns nunmehr der *Theorie des Strahlungsaustausches in den FRAUNHOFER-Linien* zu.

Während für ein Absorptionsrohr im Laboratorium die Beziehung zwischen ein- und austretender Strahlung durch das bekannte Gesetz $I_v = I_{v,0} \cdot e^{-k_v l}$

¹ Dies gilt in noch höherem Maße bezüglich der Restintensitäten; vgl. R. O. REDMAN [1146]. Abgesehen von den stärksten Linien im Sonnenspektrum und den BALMER-Linien der A-Sterne besitzen wir auf diesem Gebiet keinerlei auch nur einigermaßen zuverlässige Messungen.

gegeben ist, muß in den Sternatmosphären die *Reemission der absorbierten Strahlungsenergie* berücksichtigt werden. Wir werden also die in Kap. V entwickelten Ansätze der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes¹ in solcher Weise weiterbilden, daß sie den Strahlungsaustausch in den *Linien* mit umfassen.

Wie aus den Erörterungen des IX. Kapitels hervorgeht, ist die exakte Berechnung der Reemission in einer beliebigen Spektrallinie ein praktisch kaum mehr zu bewältigendes Problem. Aber auch abgesehen von rechnerischen Schwierigkeiten würde eine Theorie, die für jede Spektrallinie wieder von vorne beginnen müßte, dem praktischen Astrophysiker wenig nützen.

Wir werden uns daher zunächst im Anschluß an K. SCHWARZSCHILDS grundlegende Arbeit [1211] auf die Behandlung zweier konträrer Typen von Reemission beschränken, die wir als *Streuung* und *Absorption* oder nach E. A. MILNE als *monochromatisches Strahlungsgleichgewicht* und *lokales thermodynamisches Gleichgewicht* bezeichnen.

1. Von Streuung oder monochromatischem Strahlungsgleichgewicht sprechen wir, wenn für jedes absorbierte Lichtquant der Frequenz ν ein Quant von genau derselben Frequenz in irgendeiner Richtung emittiert wird. Nach Kap. VIII und IX ist diese Voraussetzung z. B. realisiert bei der *Resonanzfluoreszenz*. Ein in der Nähe der NaD-Linien oder ähnlicher „Resonanzlinien“ absorbiertes Quant wird ohne Frequenzänderung gestreut, sofern nicht Stöße 2. Art oder weitere Absorptionsprozesse vom oberen Quantenzustand aus die Resonanzfluoreszenz auslöschen. Dasselbe gilt — für die Theorie der FRAUNHOFER-Linien sind diese Prozesse allerdings bis jetzt ohne Bedeutung — von der RAYLEIGH-Streuung sowie der THOMSON-Streuung an freien Elektronen.

Um den mathematischen Apparat nicht zu schwerfällig werden zu lassen, wollen wir im folgenden annehmen, daß die Reemission *isotrop* erfolgt. In Wirklichkeit befolgt sie zwar im einfachsten Falle nach Abschn. 42 das $1 + \cos^2 \vartheta$ -Gesetz. Da wir es aber innerhalb der Sternatmosphären mit nahezu isotroper Strahlung zu tun haben, so dürfen wir ruhig mit einem richtungsunabhängigen Mittelwert des Streukoeffizienten σ_ν [cm^{-1}] rechnen. Dann können wir die Größe der Reemission sofort angeben, indem wir den in Abschn. 26 abgeleiteten Ausdruck für die Ergiebigkeit an Gesamtstrahlung auf die Strahlung einer bestimmten Frequenz ν übertragen. Nach (26,3 u. 10) ist also die „Ergiebigkeit“ oder Emission pro cm^3 , sek und Frequenzintervall 1 gleich

$$\sigma_\nu \int I_\nu(\vartheta) d\omega \quad (63,1)$$

und die Differentialgleichung des Strahlungsgleichgewichtes nimmt die aus der Theorie der Gesamtstrahlung schon geläufige Form an

$$\cos \vartheta \frac{dI_\nu(t, \vartheta)}{dt} = \sigma_\nu I_\nu(t, \vartheta) - \sigma_\nu \int I_\nu(t, \vartheta) \frac{d\omega}{4\pi}, \quad (63,2)$$

wo die Bedeutung der geometrischen Größen aus Fig. 40 hervorgeht.

Der Mechanismus der Streuung entspricht einer denkbar starken Verkettung von Absorptions- und Emissionsprozeß. Wir stellen ihm daher als anderes Extrem gegenüber den schon in Abschn. 31 betrachteten Fall einer sehr losen Koppelung von Absorption und Emission.

2. „Absorption“ oder lokales thermodynamisches Gleichgewicht. In diesem Falle berechnen wir die Reemission durch näherungsweise Anwendung des KIRCHHOFFSchen Satzes als

$$\text{Absorptionskoeffizient} \times \text{KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion } E_\nu(t).$$

¹ Der Anfänger möge sich an dieser Stelle den Inhalt des Kap. V nochmals vergegenwärtigen.

Dieser Ansatz gilt nach Abschn. 31 zunächst für die kontinuierliche Absorption, die wir ja auch hier berücksichtigen müssen. Wir bezeichnen im folgenden den in Kap. VI berechneten *kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten* mit κ . Für eine bestimmte Spektrallinie und ihre Umgebung können wir ihn als konstant betrachten.

Weiterhin wird aber in den *Linien* durch Kaskadensprünge, Rekombination, evtl. Stoßanregung usw. Emission auftreten, die mit der Absorption in derselben Linie — in Gegensatz zur Streuung — nicht direkt verknüpft ist. Namentlich bei Linien, die Übergängen zwischen hoch angeregten Termen entsprechen, von denen aus viele Übergänge möglich sind, dürfte man es im Gegensatz zu den Resonanzlinien vorwiegend mit „Absorption“ und nicht mit „Streuung“ zu tun haben. Den Linien-Absorptionskoeffizienten, der nach der Linienmitte zu enorm anwächst, bezeichnen wir als κ_ν .

Die Differentialgleichung des Strahlungsgleichgewichtes¹ wird also im Falle reiner „Absorption“:

$$\cos \vartheta \frac{dI_\nu(t, \vartheta)}{dt} = (\kappa + \kappa_\nu) \cdot I_\nu(t, \vartheta) - (\kappa + \kappa_\nu) E_\nu(t). \quad (63,3)$$

Zur Berechnung der Temperatur T und damit der KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion E_ν in Abhängigkeit von der Tiefe t in der Sternatmosphäre brauchen wir endlich noch den ROSSELANDSchen Opazitätskoeffizienten $\bar{\sigma}$, der nach Abschn. 33 als geometrischer Mittelwert von $\kappa + \kappa_\nu + \sigma_\nu$ zu berechnen ist. Im übrigen können wir auf die Formeln des Abschn. 31 zurückgreifen.

Fassen wir die Gl. (63,2) und (63,3) zusammen, so erhalten wir die SCHWARZSCHILDSche Differentialgleichung für eine Atmosphäre mit Streuung und Absorption (die ν -Indizes bei I und E lassen wir im weiteren als selbstverständlich weg):

$$\cos \vartheta \frac{dI}{dt} = (\kappa + \kappa_\nu + \sigma_\nu) I - \sigma_\nu \int I \frac{d\omega}{4\pi} - (\kappa + \kappa_\nu) E(t) \quad (63,4)$$

mit folgenden Bezeichnungen, die wir der Übersicht wegen nochmals zusammenstellen:

t = Tiefe in der Sternatmosphäre; gemessen von einem beliebig festgelegten Nullpunkt aus.

ϑ = Winkel zwischen Strahlrichtung und Normale der Sternatmosphäre.
 $\vartheta = 0$: Mitte, $\vartheta = \pi/2$ Rand der „Sternscheibe“.

$0 \leq \vartheta \leq \pi/2$: Ausstrahlung, $\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi$: Einstrahlung.

$d\omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$ = Raumwinkelelement.

$I = I_\nu(t, \vartheta)$ = Intensität der in der Tiefe t unter dem Winkel ϑ verlaufenden Strahlung der Frequenz ν .

$E = E_\nu(t)$ = KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion für die Frequenz ν und die der Tiefe t entsprechende Temperatur T ; d. h.

$$E_\nu = \frac{2 h \nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

σ_ν = Streukoeffizient.

κ_ν = Linienabsorptionskoeffizient.

κ = kontinuierlicher Absorptionskoeffizient (Kap. VI). (Ändert sich im allgemeinen langsam mit ν .)

$\bar{\sigma}$ = ROSSELANDScher Mittelwert von $\kappa + \kappa_\nu + \sigma_\nu$.

¹ Um die Wirkung evtl. Abweichungen vom lokalen thermodynamischen Gleichgewicht in der Linienreemission zu übersehen, kann man den κ_ν entsprechenden Teil der Reemission noch mit einem Faktor $\eta \approx 1$ multiplizieren. Wenn man dann $(\kappa + \eta \kappa_\nu) E_\nu(t) = (\kappa + \kappa_\nu) E'(t)$ setzt, so kommt man wieder auf die alte Form der Differentialgleichung (63,3) zurück. Solche Abweichungen von thermischem Gleichgewicht können also *nachträglich* leicht berücksichtigt werden, indem man in den späteren Formeln die entsprechende Änderung vornimmt.

Alle 4 Koeffizienten rechnen wir vorerst pro cm. Entsprechend der Änderung von Druck, Temperatur, Ionisationsgrad usw. mit der Tiefe hängen sie alle — und zwar in *verschiedener* Weise — von t ab.

Um Mißverständnisse zu vermeiden, sei nochmals betont, daß die Unterscheidung von „*Streuung*“ und „*Absorption*“ sich nur auf die *Art der Reemission* bezieht. Die in Kap. VIII—X berechneten Absorptionskoeffizienten sind also im Sinne der Gl. (63,4) mit $\kappa_\nu + \sigma_\nu$ zu bezeichnen!

Da in der SCHWARZSCHILD'Schen Differentialgleichung (63,4) für die ebene Sternatmosphäre die Tiefe t nur in Verbindung mit den Absorptions- usw. Koeffizienten auftritt, so werden wir wie in Kap. V zweckmäßig wieder *optische Tiefen* einführen. Wir definieren also (die Integrale sind sämtlich von außen herein, d. h. $t = -\infty$ bis zur betrachteten Tiefe t zu erstrecken) die optische Tiefe für

$$\left. \begin{array}{l} \text{Streuung: } ds_\nu = \sigma_\nu dt; \quad s_\nu = \int \sigma_\nu dt, \\ \text{Linienabsorption: } d\tau_\nu = \kappa_\nu dt; \quad \tau_\nu = \int \kappa_\nu dt, \\ \text{kontinuierliche Absorption} \\ \text{bei der Frequenz } \nu: \quad d\tau = \kappa dt; \quad \tau = \int \kappa dt, \end{array} \right\} \quad (63,5)$$

sowie für

$$\left. \begin{array}{l} \text{gesamte Absorption und Streuung: } dx = (\sigma_\nu + \kappa_\nu + \kappa) dt; \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x = \int (\sigma_\nu + \kappa_\nu + \kappa) dt, \\ \text{Absorption der Gesamtstrahlung: } d\bar{\tau} = \bar{\kappa} dt; \quad \bar{\tau} = \int \bar{\kappa} dt. \end{array} \right\} \quad (63,6)$$

Weiterhin schreiben wir die *gesamte Ergiebigkeit* $\times \frac{1}{4\pi}$, d. h. die Strahlungsemission pro cm^3 , sek, Raumwinkel- und Frequenzintervall 1 bei der Frequenz ν in der Form:

$$\sigma_\nu \int I \frac{d\omega}{4\pi} + (\kappa + \kappa_\nu) E(t) = (\sigma_\nu + \kappa_\nu + \kappa) J(t). \quad (63,7)$$

Dann nimmt die Differentialgleichung (63,4) für die ν -Strahlung genau die schon aus Kap. V bekannte (vgl. z. B. 28,1) *Form* — aber mit verallgemeinerter *Bedeutung* der Zeichen — an:

$$\frac{dI}{dx \cdot \sec \vartheta} - I = -J. \quad (63,8)$$

Die in Abschn. 28 gefundenen Beziehungen zwischen *Ergiebigkeit*, *Strahlungsintensität* und *Strahlungsstrom* bleiben also unverändert bestehen. Insbesondere gelten für die *Intensität* und den *Strom* der an der *Oberfläche* einer sehr tiefen Atmosphäre austretenden ν -Strahlung die wichtigen Gl. (28,8 u. 18):

$$I(0, \vartheta) = \int_0^\infty J(x) e^{-x \sec \vartheta} dx \sec \vartheta \quad (63,9)$$

und

$$\frac{1}{2} F(0) = \int_0^\infty J(x) \cdot K_2(x) dx. \quad (63,10)$$

Unsere weiteren Entwicklungen werden nun auf folgendem Plan basieren: In Kap. V—VII haben wir gelernt, *Druck*, *Temperatur* usw. in einer Sternatmosphäre als Funktion von $\bar{\tau}$, τ oder t zu berechnen. Damit ist also zunächst einmal E als Funktion der Tiefe *bekannt*. Weiterhin aber können nach Kap. VIII bis X (im einzelnen soll dies noch ausgeführt werden) wenigstens im Prinzip auch die Linienstreuungs- und Absorptionskoeffizient als Funktion des Frequenzabstandes von der Linienmitte *und* der Tiefe in der Atmosphäre berechnet werden,

sofern wir die Zusammensetzung der Sterne als bekannt annehmen. (Die entsprechende Umkehrung dieser Schlußweise ist wohl selbstverständlich!) Um also die Intensitätsverteilung in den FRAUNHOFER-Linien zu berechnen, sollte — dies wäre der Idealzustand der Theorie — die SCHWARZSCHILDsche Differentialgleichung für eine beliebig vorgegebene Tiefenabhängigkeit von σ_ν , κ_ν , \dots , $\bar{\kappa}$ und E gelöst werden. Da dieses mathematische Problem in solcher Allgemeinheit keine praktisch anwendbare Lösung zuläßt, so werden wir es zunächst unter bestimmten vereinfachenden Annahmen über die Tiefenabhängigkeit der erwähnten Größen oder — wie wir kurz sagen wollen — die „Schichtung“ durchrechnen. An Hand des Studiums verschiedener solcher „Modelle“ von Sternatmosphären wollen wir dann untersuchen, in welcher Hinsicht die Konturen der FRAUNHOFER-Linien von der Schichtung abhängen und in welcher Hinsicht die Art des Strahlungsaustausches („Streuung“ bzw. „Absorption“) das Entscheidende ist.

Für die praktische Astrophysik werden natürlich die Ergebnisse der Theorie besonders wichtig sein, die für „Absorption“ und „Streuung“ in gleicher Weise gelten, d. h. die von genaueren Annahmen über den Mechanismus der Reemission unabhängig sind. Denn für die überwiegende Mehrzahl der FRAUNHOFER-Linien ist das Problem der Reemission — wie schon bemerkt — viel zu kompliziert, um im einzelnen mathematisch erfaßbar zu sein.

64. Das SCHUSTER-SCHWARZSCHILD-Modell einer Sternatmosphäre für reine Streuung und reine Absorption.

Das von A. SCHUSTER [1210] und K. SCHWARZSCHILD [1211] in ihren grundlegenden Arbeiten zur Theorie der FRAUNHOFER-Linien benützte S.S.-Modell (wie wir es kurz nennen wollen) schließt sich — historisch gesehen — an die ursprünglichen Vorstellungen KIRCHHOFFS über den Bau der Sonnenatmosphäre an:

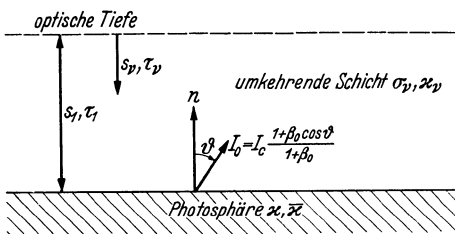


Fig. 74. SCHUSTER-SCHWARZSCHILD-Modell.

Den „Boden“ der Atmosphäre (Fig. 74) bildet die Photosphäre. In ihr soll es nur kontinuierliche Absorption geben. Sie emittiert also ein kontinuierliches Spektrum, dessen Richtungsverteilung wir näherungsweise in der Form

$$I_0(\vartheta) = I_c \frac{1 + \beta_0 \cos \vartheta}{1 + \beta_0} \quad (64,1)$$

darstellen können¹. Der Koeffizient β_0 kann als Funktion der Grenztemperatur T_0 des Sternes und der Wellenlänge λ näherungsweise nach (31,11) berechnet oder — für die Sonne — den Beobachtungen von ABBOT entnommen werden (vgl. Fig. 46 u. 48). Für den Bereich einer Linie oder Liniengruppe darf er als konstant betrachtet werden. I_c ist die Intensität in der Mitte der Sonnen- bzw. Sternscheibe ($\cos \vartheta = 1$).

Über dieser Photosphäre liegt nun die „umkehrende Schicht“, welche die FRAUNHOFER-Linien erzeugt. Hier soll nun κ und $\bar{\kappa} = 0$ sein; dafür aber in der Nähe der Linien selektive Streuung und Absorption stattfinden, entsprechend σ_ν und κ_ν .

Das S.S.-Modell dürfte demnach für solche Linien eine befriedigende Annäherung an die Erfahrung geben, für die σ_ν/κ bzw. κ_ν/κ nach der Oberfläche

¹ Für unsere jetzigen Rechnungen kommt es nicht auf große Genauigkeit des Zahlenwertes von β_0 an. Die in Abschn. 31 u. 32 erörterten Verfeinerungen können daher außer Betracht bleiben.

des Sternes zu ($\tau \rightarrow 0$) rasch *zunimmt*. Dies wird insbesondere dann der Fall sein, wenn der Atomzustand, von dem aus die Absorption der Linie erfolgt, in größeren Tiefen infolge Ionisation der betreffenden Atomart nicht mehr existieren kann.

Bezüglich der Art des Strahlungsaustausches in der umkehrenden Schicht machen wir zunächst — wie dies SCHUSTER und SCHWARZSCHILD ausschließlich taten — die Annahme reiner *Streuung* σ_ν und denken dabei besonders an die Resonanzstreuung in Linien wie NaD, H und K des Ca⁺ usw. Die gesamte optische Dicke der umkehrenden Schicht sei $s_\nu = s_1$. (Anschließend werden wir zum Vergleich den Fall reiner *Absorption* κ_ν durchrechnen.)

Da die Differentialgleichung des Strahlungsgleichgewichtes bei reiner Streuung für Strahlung einer bestimmten Frequenz (63,2) dieselbe Form hat, wie die Differentialgleichung für die Gesamtstrahlung, so können wir deren Lösung (27,10) einfach übernehmen. Es ist also¹

$$J(s_\nu) = \frac{1}{2} F \left(1 + \frac{3}{2} s_\nu \right). \tag{64,2}$$

Die Integrationskonstante F ist $= 1/\pi \times$ dem *Strahlungsstrom* für die Frequenz ν . Sie muß nun festgelegt werden durch Bezugnahme auf die vorgegebene *Einstrahlung* I_0 an der Grenze von umkehrender Schicht und Photosphäre ($s_\nu = s_1$).

Wir berechnen also mit Hilfe der Gl. (28,4 u. 5) zunächst die Intensitäten der Aus- und Einstrahlung in der optischen Tiefe s_ν :

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}: \quad I(s_\nu, \vartheta) &= I_0(\vartheta) \cdot e^{-(s_1 - s_\nu) \sec \vartheta} + \int_{s_\nu}^{s_1} J(x) e^{-(x - s_\nu) \sec \vartheta} dx \sec \vartheta \\ \frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi: \quad I(s_\nu, \vartheta) &= - \int_0^{s_\nu} J(x) e^{-(x - s_\nu) \sec \vartheta} dx \sec \vartheta \end{aligned} \right\} \tag{64,3}$$

oder ausgerechnet:

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}: \quad I(s_\nu, \vartheta) &= \frac{1}{2} F \left(1 + \frac{3}{2} s_\nu + \frac{3}{2} \cos \vartheta \right) + \\ &\quad + e^{-(s_1 - s_\nu) \sec \vartheta} \left[I_0(\vartheta) - \frac{1}{2} F \left(1 + \frac{3}{2} s_1 + \frac{3}{2} \cos \vartheta \right) \right], \\ \frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi: \quad I(s_\nu, \vartheta) &= \frac{1}{2} F \left(1 + \frac{3}{2} s_\nu + \frac{3}{2} \cos \vartheta \right) - \\ &\quad - e^{s_\nu \sec \vartheta} \cdot \frac{1}{2} F \left(1 + \frac{3}{2} \cos \vartheta \right). \end{aligned} \right\} \tag{64,4}$$

Damit wird weiterhin der Strahlungsstrom in der Tiefe s_1

$$\left. \begin{aligned} \pi F &= \int_0^\pi I_{s_\nu = s_1} \cos \vartheta \cdot 2\pi \sin \vartheta d\vartheta = \\ &= \pi \int_0^{\pi/2} \left[2 I_0 - F \left(1 + \frac{3}{2} s_1 - \frac{3}{2} \cos \vartheta \right) + e^{-s_1 \sec \vartheta} \cdot F \left(1 - \frac{3}{2} \cos \vartheta \right) \right] \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta, \end{aligned} \right\} \tag{64,5}$$

oder ausintegriert nach einfacher Rechnung (I_0 aus (64,1) einsetzen; als Variable im 1. Glied $\cos \vartheta$ und im 2. Glied $\sec \vartheta$ benutzen!):

$$F = I_c \frac{1 + \frac{2}{3} \beta_0}{1 + \beta_0} - F \cdot \frac{3}{4} s_1 + F \int_1^\infty \left(1 - \frac{3}{2x} \right) e^{-s_1 x} \cdot \frac{dx}{x^3}. \tag{64,6}$$

¹ Diese Näherung ist für unsere Zwecke genau genug.

Bezeichnen wir noch den Strahlungsstrom des ungestörten kontinuierlichen Spektrums mit

$$F_0 = I_c \frac{1 + \frac{2}{3} \beta_0}{1 + \beta_0}, \tag{64,7}$$

so erhalten wir für den Strahlungsstrom durch eine streuende Schicht der optischen Dicke s_1 aus (64,6)

$$\frac{F}{F_0} = \frac{1}{1 + s_1 \cdot \varphi(s_1)}. \tag{64,8}$$

wo nach den Formeln von Anhang (A)

Tabelle 48. Die Funktion $\varphi(s_1) = \frac{1}{4} \{3 + (1 + s_1) e^{-s_1} - (2s_1 + s_1^2) K(s_1)\}$ (64,9)
 $\varphi(s_1)$ nach Gl. (64,9).

s_1	$\varphi(s_1)$	s_1	$\varphi(s_1)$
0,00	1,000	0,50	0,803
0,03	0,955	0,75	0,781
0,10	0,904	1,00	0,770
0,20	0,862	1,50	0,758
0,30	0,834	2,00	0,754

wird. Für $s_1 \ll 1$ ist $\varphi \approx 1$; für große s_1 strebt es gegen $3/4$ (Tabelle 48). Es genügt also vielfach, mit einem konstanten Näherungswert $\bar{\varphi}$ zu rechnen. Während (64,8) nach Gl. (1,9) die *mittlere Ausstrahlung* der ganzen „Scheibe“ eines Sternes bestimmt, können wir die Strahlungsintensität an der Sternoberfläche ($s_\nu = 0$) in Abhängigkeit vom

Austrittswinkel ϑ leicht vollends aus (64,4) berechnen und erhalten für das Intensitätsverhältnis von Linie: Kontinuum die Formel:

$$\frac{I(0, \vartheta)}{I_0(\vartheta)} = e^{-s_1 \cdot \sec \vartheta} + \frac{1 + \frac{\beta_0}{3}}{1 + \beta_0 \cos \vartheta} \cdot \frac{\left(1 + \frac{3}{2} \cos \vartheta\right) (1 - e^{-s_1 \cdot \sec \vartheta}) - \frac{3}{2} s_1 \cdot e^{-s_1 \cdot \sec \vartheta}}{1 + s_1 \cdot \varphi(s_1)}. \tag{64,10}$$

Das 1. Glied entspricht der Photosphärenstrahlung, welche von der umkehrenden Schicht direkt durchgelassen wird; das 2. Glied beschreibt die Reemission der streuenden Schicht der optischen Dicke s_1 . Die Wellenlängenabhängigkeit der Intensität in der Linie steckt ganz in s_1 ; β_0 kann — wie wir schon bemerkten, für Spektralbereiche von einigen 100 Å als konstant betrachtet werden.

Die Gl. (64,8 u. 10) sind — in einer mathematisch noch etwas primitiveren Form — im Jahre 1914 von K. SCHWARZSCHILD (s. S. 227) — entwickelt und auf die *Theorie der FRAUNHOFER-Linien* angewandt worden. Die mathematisch vervollkommnete Schreibweise, die wir ihnen hier von vornherein gegeben haben, geht auf E. A. MILNE [1203] zurück. Ihre Verknüpfung mit den in Kap. VIII—IX entwickelten Formeln der *Dispersionstheorie* hat dann — nachdem schon K. SCHWARZSCHILD (s. S. 227) und besonders J. Q. STEWART [1212] auf diesen Punkt hingewiesen hatten¹ — im Jahre 1927 der Verf. hergestellt und durch spektralphotometrische Messungen nachgeprüft.

Um den mathematischen Formalismus nicht zu sehr überwuchern zu lassen und die Verbindung mit der Beobachtung wieder aufzunehmen, wollen wir unsere allgemeinen Entwicklungen zur Theorie des Strahlungsgleichgewichtes für einen Augenblick unterbrechen und uns die *Anwendungsweise und die Bedeutung der Gl. (66,8 u. 10)* klarmachen:

¹ In der Literatur ist in diesem Zusammenhang mehrfach auch an die JULIUSsche Sonnentheorie erinnert worden. Meines Erachtens hat jedoch diese mit den heutigen Vorstellungen über das Zustandekommen der FRAUNHOFER-Linien usw. so gut wie nichts gemeinsam. Die *anomale Refraktion* — die bei JULIUS eine Hauptrolle spielt — ist ja in unseren Rechnungen noch ganz vernachlässigt!

Nach der Theorie der Resonanzstreuung ist der Streukoeffizient im Abstand $\Delta\omega$ (\gg Dopplerbreite) von einer *Resonanzlinie* der Kreisfrequenz ω_0 gegeben durch die Gl. (40,16) in Verbindung mit (46,10) als

$$\sigma_v = \frac{\pi e^2}{m c} \cdot \frac{N_n \cdot f_{mn} \cdot \gamma}{\Delta \omega^2}. \quad (64,11)$$

Dabei bedeutet N_n die Anzahl der Atome im Ausgangszustand der Linie pro cm^3 . Hat man es mit einem Mehrfachterm zu tun, so ist für *eine* Linie des Resonanz-Multipletts:

$$N_n = N \cdot \frac{g_n}{\sum g_{n'}}, \quad (64,11a)$$

wo nunmehr N die Gesamtzahl der Atome im Grundzustand, g_n das statistische Gewicht des Teiltermes und $\sum g_{n'}$ das gesamte statistische Gewicht des Grundtermes bedeuten.

f_{mn} ist die (Absorptions-) Oszillatorenstärke der betrachteten Linie und γ deren Dämpfungskonstante.

Rechnen wir mit Wellenlängendifferenzen $\Delta\lambda$ und setzen γ in Vergleich zu der klassischen Strahlungsdämpfungskonstante (41,4)

$$\gamma_{kl} = \frac{2 e^2}{3 m c^3} \omega_0^2, \quad (64,12)$$

so nimmt diese Gleichung die Form an

$$\sigma_v = \frac{2\pi}{3} \cdot \left(\frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \cdot \frac{\lambda_0^2}{\Delta \lambda^2} \cdot N_n \cdot f_{mn} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_{kl}} \quad (64,13)$$

oder — analog der klassischen Gl. (41,6) —

$$\sigma_v = 16,5 \cdot 10^{-26} \cdot \frac{\lambda_0^2}{\Delta \lambda^2} \cdot N_n \cdot f_{mn} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_{kl}}, \quad (64,14)$$

wofür wir kurz schreiben wollen:

$$\sigma_v = \frac{C \cdot N}{\Delta \lambda^2}. \quad (64,15)$$

Sind die Drucke in den Sternatmosphären — wie wir zunächst einmal annehmen wollen¹ — so niedrig, daß die Stoßdämpfung gegenüber der *Strahlungsdämpfung* vernachlässigt werden darf, so wird für eine *Resonanzlinie* (da der Grundterm ja völlig scharf ist) $\gamma = \sum A_{n'm}$ und nach (45,27) also

$$\frac{\gamma}{\gamma_{kl}} = \sum_n 3 \cdot \frac{g_{n'}}{g_m} f_{mn'}, \quad (64,16)$$

wo g_m bzw. $g = \sum g_{n'}$ das statistische Gewicht des oberen bzw. unteren Termes bedeuten.

Die folgende Tabelle 49 (die mit $\log_{10} NH$ überschriebene Spalte soll später erklärt werden) gibt die zur Deutung der wichtigsten Resonanzlinien des Sonnenspektrums — bei Annahme reiner Strahlungsdämpfung — notwendigen physikalischen Daten. Über den Ursprung der angegebenen f -Werte unterrichten die Bemerkungen in der letzten Spalte.

¹ Die Berechtigung dieser Annahmen werden wir im folgenden Kapitel eingehend prüfen. Hier soll zunächst einmal in erster Linie die praktische Handhabung der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes erläutert werden.

Tabelle 49. Resonanzlinien im Sonnenspektrum.

Linie	λ_0 in Å	Statist. Gewichte		Oszillatorstärke f_{mn}	$\frac{g_n}{\sum g_n} \cdot f_{mn} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_{kl}}$	$\log_{10} NH$	Bemerkungen zum Ursprung der f -Werte
		g_m	g_n				
Na $\left\{ \begin{array}{l} 3^2S_{1/2} - 3^2P_{3/2} \\ 3^2S_{1/2} - 3^2P_{1/2} \end{array} \right.$	5889,96	4	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	16,42	Tabelle 47 und f -Summensatz
	5895,93	2	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
Ca ⁺ $\left\{ \begin{array}{l} 4^2S_{1/2} - 4^2P_{3/2} \\ 4^2S_{1/2} - 4^2P_{1/2} \end{array} \right.$	3933,66	4	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	19,37	
	3968,46	2	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
Sr ⁺ $\left\{ \begin{array}{l} 5^2S_{1/2} - 5^2P_{3/2} \\ 5^2S_{1/2} - 5^2P_{1/2} \end{array} \right.$	4077,71	4	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	16,32	f -Summensatz
	4215,52	2	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
Ba ⁺ $\left\{ \begin{array}{l} 6^2S_{1/2} - 6^2P_{3/2} \\ 6^2S_{1/2} - 6^2P_{1/2} \end{array} \right.$	4554,04	4	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	15,60	
	4934,10	2	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
Ca $4^1S_0 - 4^1P_1$	4226,73	3	1	$\sim 1,2$	$\sim 1,4_4$	16,67	Analogie zu Tabelle 47 B.
Sr $5^1S_0 - 5^1P_1$	4607,34	3	1	$\sim 1,2$	$\sim 1,4_4$	14,18*	
Al $\left\{ \begin{array}{l} 3^2P_{3/2} - 4^2S_{1/2} \\ 3^2P_{1/2} - 4^2S_{1/2} \end{array} \right.$	3961,54	2	4	$\sim 0,1$	$\sim 0,06$	17,89	Analogie zu Tabelle 47 C.
	3944,03	2	2	$\sim 0,1$	$\sim 0,03$		

Mit Hilfe der Gl. (64,15) können wir nun die optische Dicke s_1 der umkehrenden Schicht in Abhängigkeit von $\Delta\lambda$ in der Form schreiben:

$$s_1 = C \cdot \frac{NH}{\Delta\lambda^2}, \quad (64,17)$$

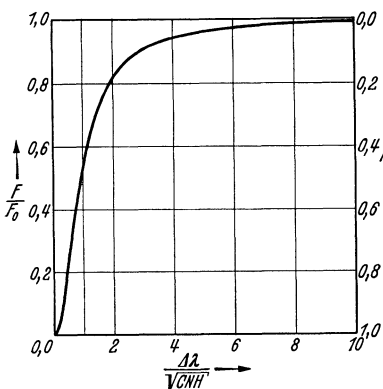


Fig. 75. Linienkontur für den Strahlungsstrom des S.S.-Modelles mit Streuung nach Gl. (64,8) und (64,17).

wo C aus (64,14 u. 15) mit (64,11a) und (64,16) zu berechnen ist. H bedeutet die Höhe der „homogenen Atmosphäre“, N die mittlere Anzahl der Atome (im Grundzustand) pro cm^3 . Ganz allgemein ist NH die Zahl der betreffenden Atome über 1 cm^2 der Photosphäre.

Die Gl. (64,17) und (64,8 bzw. 10) ermöglichen nun die Berechnung der Linienkonturen für das Spektrum des Strahlungsstromes πF bzw. der Strahlung $I(0, \vartheta)$ einer bestimmten Stelle der Sonnenscheibe in Abhängigkeit von NH . Umgekehrt kann man dann durch Vergleich von berechneten und beobachteten Konturen die Anzahl NH der Atome¹ (welche die betreffende Resonanzlinie erzeugen) über 1 cm^2 der Photosphäre ermitteln.

Die vorstehende Fig. 75 zeigt zunächst für den Strahlungsstrom — d. h. das gemittelte Spektrum eines Sternes — die nach (64,8 u. 17) berechnete Linienkontur als Funktion von $\frac{\Delta\lambda}{\sqrt{C \cdot NH}}$.

Um NH aus einer beobachteten Kontur zu ermitteln, braucht man also nur den Abzissenmaßstab so zu ändern, daß beobachtete und berechnete Kontur möglichst gut übereinstimmen.

Im Sonnenspektrum kann man außer dem Strahlungsstrom auch die Strahlungsintensität $I(0, \vartheta)$ in Abhängigkeit von ϑ messen. Ja, die Bedeutung der Sonnenforschung beruht — wie wir schon in ähnlichem Zusammenhang bemerkt haben — großenteils auf diesem Umstand!

* Wohl infolge von Apparateinfluß zu groß.

¹ Genauer gesagt handelt es sich um die im Grundzustande befindlichen Atome.

Für die NaD-Linien ist der Vergleich zwischen Theorie (64,10) und Beobachtung in den Fig. 76 u. 77 durchgeführt. Die Randverdunkelungskonstante β wurde dabei — in Anschluß an ABBOTS Messungen — $\approx 1,5$ gesetzt¹. Die Anzahl der neutralen Na-Atome über 1 cm² der Photosphäre NH mußte gleich $2,6 \cdot 10^{16}$ gesetzt werden, um möglichst gute Anpassung der berechneten Kurven an die Meßpunkte zu geben. Die beiden Figuren beziehen sich auf Beobachtung a) in der Mitte der Sonnenscheibe, also $\cos \vartheta = 1$ bzw. b) in einem Abstand von nur 0,0744 Sonnenradien vom *Sonnenrand*, d. h. bei $\sin \vartheta = 0,926$ bzw. $\cos \vartheta = 0,38^*$.

Wie man sieht, wird die Intensitätsverteilung in den Linienflügeln gut wiedergegeben. Die *Breiten* der Linien (bei gleicher Intensität gemessen) verhalten sich wie $1 : \sqrt{2}$ (allgemein $\sim \sqrt{f \cdot \gamma}$) in Übereinstimmung mit Gl. (64,14) — ein Ergebnis, das, wie wir schon früher bemerkten, unabhängig von der Art des Strahlungsaustausches gilt.

Die *Linienmitte* müßte nach dem hier benützten Stande der Theorie völlig dunkel sein. Daß dies nach den Messungen *nicht* zutrifft, dürfte zum Teil davon

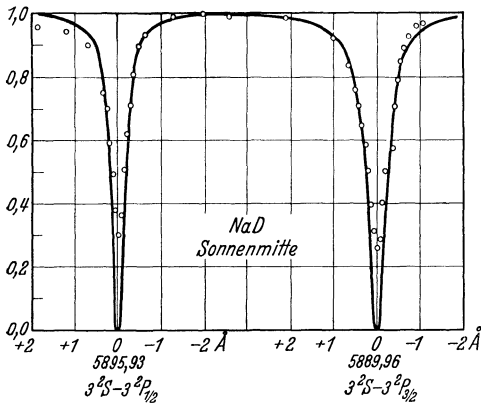


Fig. 76. NaD-Linien; $\cos \vartheta = 1$. Nach [1214].

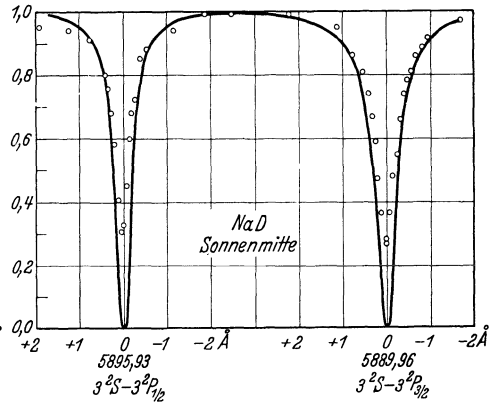


Fig. 77. NaD-Linien; $\cos \vartheta = 0,38$. Nach [1214].

herrühren, daß die in unseren Figuren zugrunde gelegten Messungen (1927!) noch in keiner Weise korrigiert sind, also sicher zu große „Restintensitäten“ geben. Andererseits aber zeigen auch neuere Messungen, daß viele starke Linien, die durch Meßfehler weniger beeinflusst sind, wie z. B. Ca^+H und K in der Mitte nicht völlig dunkel sind, sondern eine *endliche Restintensität* besitzen, die also noch zu erklären bleibt.

Der *Vergleich* von Sonnenmitte und Sonnenrand (Fig. 76 u. 77) läßt erkennen, daß die Intensitätsverteilung in den Linien von $\cos \vartheta$ erstaunlich wenig abhängt. Dies ist offenbar eine Folge der *Reemission*. Wäre diese nämlich nicht vorhanden, so würde $I(0, \vartheta) = I_0(\vartheta) e^{-s_1 \cdot \sec \vartheta}$ sein, d. h. die Linienbreite müßte nach dem Sonnenrande zu $\sim \sqrt{\sec \vartheta}$ anwachsen (in unserem Beispiel um einen Faktor 1,6). Man kann sich die Wirkung der Reemission *anschaulich* im Falle $s_1 \ll 1$ (sonst sind die Verhältnisse zu kompliziert) etwa folgendermaßen klar machen:

Eine dünne horizontale Zone der umkehrenden Schicht zerstreut einen gewissen Prozentsatz der auf sie treffenden Strahlung nach allen Seiten. Hiervon wird die eine Hälfte von der Photosphäre endgültig verschluckt; die andere Hälfte aber *verstärkt* die ausfallende Strahlung, d. h. *schwächt* die Absorptionswirkung der umkehrenden Schicht. So kommt es, daß für $s_1 \ll 1$ nach (64,8)

¹ Auf den genauen Wert kommt es — wie man aus Gl. (64,10) ersieht — wenig an.

* Zu kleineren Werten von $\cos \vartheta$ vorzudringen ist wegen Luftunruhe, Streulicht, Farbfehler der Teleskoplinse usw. sehr schwierig!

die Linientiefe für die *mittlere Strahlungsintensität*

$$R = \frac{F_0 - F}{F_0} = s_1 + \dots \quad (64,18)$$

wird, trotzdem die Strahlen der Photosphäre eine optische Schicht $s_1 \cdot \sec \vartheta$, also durchschnittlich $\sim 2s_1$, durchlaufen:

Die geringe Abhängigkeit des Intensitätsverhältnisses I/I_0 von ϑ erklärt sich anschaulich daraus, daß man nach dem *Sonnenrande* zu immer mehr gestreute Strahlung mitbekommt, welche die $\sim \sec \vartheta$ vermehrte Absorption kompensiert. Im einzelnen erhält man für $s_1 \ll 1$ durch Entwicklung von (64,10) die Tiefe der Linienflügel in *Abhängigkeit von ϑ*

$$r(\vartheta) = \frac{I_0(\vartheta) - I(0, \vartheta)}{I_0(\vartheta)} = s_1 \cdot \frac{\beta_0 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta_0}{3}\right) \sec \vartheta}{1 + \beta_0 \cos \vartheta} + \dots \quad (64,19)$$

Ehe wir unsere prinzipiellen Erörterungen fortsetzen, wollen wir nochmals kurz zu unserer Tabelle 49 zurückkehren. In entsprechender Weise wie für die NaD-Linien hat Verfasser 1927 auch für die anderen dort aufgeführten Resonanzlinien unter der Annahme reiner Strahlungsdämpfung und unter Zugrundelegung des SCHUSTER-SCHWARZSCHILD-Modells die *NH* durch spektralphotometrische Messungen¹ bestimmt.

Aus dem Verhältnis

$$(NH)_{Ca^+} : (NH)_{Ca} = 5,0 \cdot 10^2 \quad (64,20)$$

kann man nach der SAHASchen Gleichung (Kap. IV) den mittleren Elektronendruck in der umkehrenden Schicht berechnen. Rechnet man mit einer mittleren Temperatur von 5600° K, so ergibt sich $P_e = 22$ Bar. (Für 5040° erhalte man $P_e = 4,0$ Bar.)

Alle diese zahlenmäßigen Ergebnisse setzen jedoch — daran muß nochmals erinnert werden — voraus, daß für die Resonanzlinien die Strahlungsdämpfung \gg Stoßdämpfung ist. Wie wir im folgenden Kapitel sehen werden, ist es wahrscheinlich, daß dies vielfach *nicht* zutrifft. Wir wollen jedoch hier noch nicht auf dieses für die Theorie der FRAUNHOFER-Linien grundlegende Problem eingehen, sondern nach unserem Exkurs, der nur einen ersten Einblick in die Reichweite der Theorie geben sollte, zu dem Ausgangsproblem zurückkehren: „In welcher Hinsicht hängen die Linienkonturen von der Schichtung der Atmosphäre (dem „Modell“) ab und in welcher Weise von der Art des Strahlungsaustausches („Streuung“ — „Absorption“)?“

Im Hinblick darauf untersuchen wir als Gegenstück zu unseren bisherigen Rechnungen das *S.S.-Modell für wahre Absorption*:

Eine selektiv absorbierende „umkehrende Schicht“ der optischen Dicke $\tau_\nu = \tau_1$ liegt über der Photosphäre, deren optische Tiefe — von der Trennungslinie aus gerechnet — für die Frequenz ν gleich τ sei. Führen wir für die ν -Strahlung nach (63,6) eine von außen nach innen fortlaufend gezählte optische Tiefe x ein, so ist für $0 \leq x < \tau_1$ die für die Temperaturverteilung entscheidende optische Tiefe $\bar{\tau}$ gleich Null und für $x > \tau_1$ proportional zu $\tau = x - \tau_1$, wenn wir — wie früher — für die Photosphäre $\kappa/\bar{\kappa}$ näherungsweise als konstant betrachten.

¹ Für einige Linien haben inzwischen andere Autoren genauere Messungen publiziert. Der Einheitlichkeit wegen haben wir jedoch durchweg die ursprünglichen Messungen benützt. Die Berechnung der Oszillatorenstärken und die Berücksichtigung der Abweichungen der Dämpfungskonstanten von ihrem klassischen Wert sind jedoch gegenüber der Originalarbeit verbessert. Die Änderung ist nur bei den Al-Linien einigermaßen beträchtlich.

Für die *Ergiebigkeit* benutzen wir — dies genügt vorerst — die lineare Näherung von Gl. (31,10ff.) und erhalten so für

$$\text{und für } \left. \begin{aligned} 0 \leq x \leq \tau_1 & \quad J(x) = J_0 \\ x \geq \tau_1 & \quad J(x) = J_0 \{1 + \beta_0 (x - \tau_1)\}, \end{aligned} \right\} \quad (64,21)$$

wo J_0 die KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion an der Sonnenoberfläche bedeutet. Nach Abschn. 31 ist J_0 gleich der Intensität am Sonnenrand $I(0, \pi/2)$. Bezüglich β_0 vergleiche (31,11). Mit Hilfe von Gl. (63,9) erhält man nun leicht die Strahlungsintensität in der Linie.

$$I(0, \vartheta) = J_0 \left\{ \int_0^{\tau_1} e^{-x \sec \vartheta} dx \sec \vartheta + \int_{\tau_1}^{\infty} [1 + \beta_0 (x - \tau_1)] e^{-x \sec \vartheta} dx \sec \vartheta \right\} \quad (64,22)$$

$$= J_0 \{1 + \beta_0 \cos \vartheta \cdot e^{-\tau_1 \sec \vartheta}\}.$$

Für das ungestörte kontinuierliche Spektrum neben der Linie ist $\tau_1 = 0$ und daher wie in (31,12)

$$I_0(\vartheta) = J_0 \{1 + \beta_0 \cos \vartheta\}. \quad (64,23)$$

Das Analogon zu Gl. (64,10) wird also für das S.S.-Modell mit Absorption:

$$\boxed{\frac{I(0, \vartheta)}{I_0(\vartheta)} = \frac{1 + \beta_0 \cos \vartheta e^{-\tau_1 \sec \vartheta}}{1 + \beta_0 \cos \vartheta}.} \quad (64,24)$$

Für den *Strahlungsstrom* F (z. B. die gemittelte Strahlung der Sonnenscheibe) erhält man nach (63,10) durch eine entsprechende Rechnung mit Hilfe der der Formeln von Anhang B:

$$\boxed{\frac{F}{F_0} = \frac{1 + 2\beta_0 K_4(\tau_1)}{1 + \frac{2}{3}\beta_0}.} \quad (64,25)$$

Zum Vergleich mit (64,19 u. 18) berechnen wir noch Näherungsformeln für die *Tiefe der Linienflügel*, indem wir nach τ_1 entwickeln. Es ergibt sich

$$\boxed{r(\vartheta) = \frac{I_0(\vartheta) - I(0, \vartheta)}{I_0(\vartheta)} = \tau_1 \cdot \frac{\beta_0}{1 + \beta_0 \cos \vartheta} + \dots} \quad (64,26)$$

und

$$\boxed{R = \frac{F_0 - F}{F_0} = \tau_1 \cdot \frac{\beta_0}{1 + \frac{2}{3}\beta_0} + \dots} \quad (64,27)$$

Auch in diesen Gl. (64,24—27) kann — um daran nochmals zu erinnern — β_0 für größere Spektralbezirke als konstant betrachtet werden. Die Intensitätsverteilung in der Linie ist durch τ_1 (analog dem s_1 bei Streuung) bestimmt.

Aus (64,24 u. 25) erkennt man zunächst, daß die *Intensität in der Mitte einer durch wahre Absorption entstehenden Linie* — im Gegensatz zum Fall reiner Streuung — für $\tau_1 \rightarrow \infty$ nicht Null wird, sondern einem *endlichen Grenzwert* zustrebt. Man erhält nämlich in der Linienmitte thermische Gleichgewichtsstrahlung aus der obersten Schicht der Sternatmosphäre mit der Grenztemperatur T_0 . Oder — was dasselbe besagt — wir erhalten in der Linienmitte über die ganze Sonnenscheibe hinweg Strahlung von derselben Intensität, wie sie das kontinuierliche Spektrum des Sonnenrandes zeigt.

Linien, die durch reine Absorption entstehen, verschwinden daher am Sonnenrand. Diesen wichtigen Satz, der auf K. SCHWARZSCHILD (s. S. 227) zurückgeht, liest man auch leicht direkt aus Gl. (64,24) ab¹: für $\cos \vartheta \rightarrow 0$ wird $I(0, \vartheta) = I_0(\vartheta)$. Man wird also allgemein vermuten, daß das Auftreten endlicher Restintensitäten bei starken FRAUNHOFER-Linien mit dem Vorhandensein wahrer Absorption κ_v zusammenhängt, ein Gedanke, den wir später weiter verfolgen werden.

Wenden wir uns nunmehr den *Linienflügeln* zu, so zeigt der Vergleich von (64,19) mit (64,26), daß wenig Unterschied zwischen Streuung und Absorption besteht. Für $\beta_0 = 3/2$ (also gerade im wichtigsten Bereich des Sonnenspektrums!) stimmen beide Formeln vollständig überein und für β_0 -Werte, die sich nicht zu weit von 1,5 entfernen, geben Streuung und Absorption jedenfalls in dem gewöhnlich der Beobachtung zugänglichen Bereich $1 \geq \cos \vartheta > 0,25$ praktisch dieselben Ergebnisse.

Die Betrachtung des *Strahlungsstromes* bestätigt diese Aussagen: Der Faktor von τ_1 in (64,27) ist für

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \text{gleich} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \beta_0 = 1 & 3 & 6 \\ 0,60 & 1 & 1,20, \end{array}$$

er entfernt sich also nie allzu weit von dem Faktor 1 der Streudicke s_1 in (64,18).

Zusammenfassend können wir also unsere Untersuchung des *S.S.-Modelles* folgendermaßen darstellen:

Die Struktur der Linienflügel (s_1 bzw. $\tau_1 \ll 1$) hängt — abgesehen vom äußersten Sonnenrand — wenig von der Art des Strahlungsaustausches ab; die Intensität der Linienmitte dagegen sehr stark.

Im folgenden Abschnitt soll nun durch Untersuchung eines zweiten „Modelles“ weiterhin geklärt werden, welche Eigenschaften der Linienkonturen an ein bestimmtes *Modell* gebunden sind und welche an eine bestimmte *Art des Strahlungsaustausches*.

65. Das MILNE-EDDINGTON-Modell einer Sternatmosphäre. (Kombination von Streuung und Absorption.)

Im S.S.-Modell einer Sternatmosphäre war die selektive Streuung σ_v bzw. Absorption κ_v auf die oberste Schicht beschränkt, deren kontinuierliche Absorption κ dafür vernachlässigt werden konnte. Auf dasselbe kommt es heraus, wenn das Verhältnis σ_v/κ bzw. κ_v/κ sehr rasch anwächst, wenn man in der Atmosphäre nach außen geht.

Nunmehr wollen wir mit A. S. EDDINGTON [5 u. 1202] und E. A. MILNE [1204] als anderes Extrem annehmen, daß die Verhältnisse σ_v/κ und κ_v/κ bei festgehaltenem ν von der Tiefe t in der Atmosphäre *unabhängig* sind². Die Intensität in der Linie wird dann eben durch σ_v/κ bzw. κ_v/κ bedingt sein. Die SCHWARZSCHILDsche Differentialgleichung lautet nunmehr:

$$\cos \vartheta \frac{dI}{dt} = (\kappa + \kappa_v + \sigma_v) I - \sigma_v \int I \frac{d\omega}{4\pi} - (\kappa + \kappa_v) E. \quad (65,1)$$

Die KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion E werde wieder durch die lineare Näherung analog Gl. (31,10 u. 11) dargestellt ($\tau + \tau_v = \int (\kappa + \kappa_v) dt$):

$$E = E_0 \{1 + \beta_0 \tau\} = E_0 \{1 + \beta (\tau + \tau_v)\}. \quad (65,2)$$

$$E_0 = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/T_0} - 1} \quad (65,3)$$

¹ Die Reihenentwicklung (64,26) konvergiert — ebenso wie (64,19) — für $\sec \vartheta \rightarrow \infty$ nicht mehr!

² Im Gegensatz zum S.S.-Modell bringt *hier* die gleichzeitige Berücksichtigung von σ_v und κ_v keine mathematischen Umständlichkeiten mit sich.

ist die KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion für die Oberflächentemperatur T_0 (\sim Helligkeit des Sternrandes) und

$$\beta_0 = \frac{\frac{3}{8} \frac{h\nu}{kT_0}}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT_0}}} \cdot \frac{\bar{\kappa}}{\kappa} \quad \text{bzw.} \quad \beta = \frac{\kappa}{\kappa + \kappa_\nu} \cdot \beta_0, \quad (65,4)$$

wobei auch das Verhältnis $\frac{\bar{\kappa}}{\kappa + \kappa_\nu}$ von der Tiefe unabhängig sein soll. Während β_0 wie früher für einen größeren Spektralbereich als konstant betrachtet werden darf, ist β außerhalb einer Spektrallinie gleich β_0 und nimmt nach der Linienmitte zu rapide ab. Bei der Berechnung der Linienkonturen ist also auf die Wellenlängenabhängigkeit von β zu achten!

Zur Lösung der Differentialgleichung (65,4) bedienen wir uns am besten des schon in Abschn. 29 benützten Näherungsverfahrens von A. S. EDDINGTON:

Für die Mittelwerte (29,11)¹

$$J = \int I \frac{d\omega}{4\pi}; \quad H = \int I \cos \vartheta \frac{d\omega}{4\pi} \quad \text{und} \quad K = \int I \cos^2 \vartheta \frac{d\omega}{4\pi} \quad (65,5)$$

erhält man durch Multiplikation von (65,4) mit $\frac{d\omega}{4\pi}$ bzw. $\cos \vartheta \cdot \frac{d\omega}{4\pi}$ die Differentialgleichungen

$$\frac{dH}{dt} = (\kappa + \kappa_\nu) (J - E) \quad (65,6)$$

und

$$\frac{dK}{dt} = (\kappa + \kappa_\nu + \sigma_\nu) H. \quad (65,7)$$

In der letzten Gleichung setzen wir nun wie in Abschn. 29 — da $\overline{\cos^2 \vartheta} = 1/3$ ist — näherungsweise

$$K = \frac{1}{3} J \quad (65,8)$$

und erhalten durch nochmaliges Differenzieren zunächst

$$\frac{d^2 J}{dt^2} = 3(\kappa + \kappa_\nu + \sigma_\nu) \cdot \frac{dH}{dt} = 3(\kappa + \kappa_\nu + \sigma_\nu)(\kappa + \kappa_\nu)(J - E). \quad (65,9)$$

Führen wir noch eine optische Tiefe u durch die Definitionsgleichung

$$du = \sqrt{3(\kappa + \kappa_\nu + \sigma_\nu)(\kappa + \kappa_\nu)} dt \quad (65,10)$$

ein, so ergibt sich wegen $\frac{d^2 E}{du^2} = 0$ die einfache² Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\frac{d^2 (J - E)}{du^2} = J - E. \quad (65,11)$$

Da für $u \rightarrow \infty$ die Lösung J nicht stärker anwachsen kann als E , so muß sie die Form haben

$$J = E + A \cdot e^{-u}. \quad (65,12)$$

Ein Glied mit e^{+u} kann nicht vorkommen.

Schreiben wir zunächst auch E als Funktion von u , so wird

$$E = E_0 \left\{ 1 + \beta \cdot \frac{\kappa + \kappa_\nu}{\sqrt{3(\kappa + \kappa_\nu + \sigma_\nu)(\kappa + \kappa_\nu)}} \cdot u \right\} = E_0 \left\{ 1 + \beta \cdot \alpha u \right\}, \quad (65,13)$$

¹ J hat hier noch einmal die alte Bedeutung, wie in Abschn. 29, nicht die erweiterte der Gl. (63,7)!

² Das allgemeinere Problem mit einer beliebigen von t abhängigen KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion ist leicht auf Quadraturen zurückzuführen.

wobei wir zur Abkürzung

$$\alpha = \sqrt{\frac{\kappa + \kappa_v}{3(\kappa + \kappa_v + \sigma_v)}} \quad (65,14)$$

gesetzt haben. Damit erhalten wir nach (65,7—10 u. 14)

$$H = \frac{1}{3(\kappa + \kappa_v + \sigma_v)} \cdot \frac{dJ}{dt} = \alpha \cdot \frac{dJ}{du} \quad (65,15)$$

oder mit (65,12 u. 13)

$$H = E_0 \cdot \beta \alpha^2 - \alpha A \cdot e^{-u}. \quad (65,16)$$

Um nun die Integrationskonstante A vollends festzulegen, benützen wir wie in (29,15) die *Grenzbedingung*, daß für

$$u = 0 \dots J = 2H \quad (65,17)$$

sein soll. Dies gibt mit (65,12, 13 u. 16)

$$2(E_0 \cdot \beta \alpha^2 - \alpha A) = E_0 + A \quad \text{oder} \quad A = E_0 \frac{2\beta \alpha^2 - 1}{1 + 2\alpha}. \quad (65,18)$$

Durch Einsetzen in (65,16) berechnen wir den Strahlungsstrom $\pi F = 4\pi H$ (0) der Sternoberfläche

$$H(0) = \frac{F}{4} = E_0 \cdot \alpha \frac{1 + \beta \alpha}{1 + 2\alpha}. \quad (65,19)$$

Außerhalb einer Spektrallinie wird $\sigma_v = \kappa_v = 0$, also

$$\alpha = 1/\sqrt{3} \quad \text{und} \quad \beta = \beta_0 \quad (65,20)$$

und

$$H_0(0) = \frac{F_0}{4} = E_0 \frac{1 + \beta_0/\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}. \quad (65,21)$$

Das Verhältnis von Linie: Kontinuum wird also für den *Strahlungsstrom* (ganze Sternoberfläche) schließlich:

$$\frac{F}{F_0} = \frac{\alpha(2 + \sqrt{3})}{1 + 2\alpha} \cdot \frac{1 + \beta \alpha}{1 + \beta_0/\sqrt{3}}, \quad (65,22)$$

wo — um daran nochmals zu erinnern — für eine bestimmte Linie β_0 eine Konstante ist, während die Frequenzabhängigkeit von β und α durch (65,4 u. 14) definiert wird.

Um den Vergleich von S.S.- und M.E.-Modell vorzubereiten, spezialisieren wir zunächst die — fast gar zu inhaltsreiche — Gl. (65,22) für die Grenzfälle reiner Streuung bzw. Absorption:

1. *Strahlungsstrom im M.E.-Modell mit reiner Streuung*: Hier ist $\kappa_v = 0$ und daher $\beta = \beta_0$; man erhält

$$\frac{F}{F_0} = \frac{\alpha(2 + \sqrt{3})}{1 + 2\alpha} \cdot \frac{1 + \beta_0 \alpha}{1 + \beta_0/\sqrt{3}} \quad (65,23)$$

mit

$$\alpha = \sqrt{\frac{\kappa}{3(\kappa + \sigma_v)}}. \quad (65,24)$$

In der *Mitte* der starken FRAUNHOFER-Linien ist nun sicher der selektive Streukoeffizient σ_v viel größer als der kontinuierliche Absorptionskoeffizient κ . Es geht also $\alpha \rightarrow 0$ und damit auch $F \rightarrow 0$. Das heißt im Falle *reiner Streuung* führt auch das M.E.-Modell auf *Restintensität Null* (was ja auch ohne weiteres einleuchtet).

Für die *Linienflügel* ist $\sigma_v/\kappa \ll 1$ und wir werden zweckmäßig nach dieser Größe entwickeln. Aus der Definition von α folgt zunächst

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\alpha} &= \sqrt{3 \left(1 + \frac{\sigma_v}{\kappa}\right)} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sigma_v}{\kappa} + \dots \\ \text{sowie} \\ \alpha &= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sigma_v}{\kappa} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (65,25)$$

und (65,23) geht über in

$$R_{\text{Str}} = \frac{F_0 - F}{F_0} = \frac{\sigma_v}{\kappa} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{\beta_0}} \right\}. \quad (65,26)$$

2. *Strahlungsstrom im M.E.-Modell mit reiner Absorption.* In diesem Grenzfalle wird $\sigma_v = 0$ und daher

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad \beta = \beta_0 \cdot \frac{\kappa}{\kappa + \sigma_v}. \quad (65,27)$$

Nach unserer „Stammformel“ (65,22) erhält man so

$$\frac{F}{F_0} = \frac{1 + \frac{\kappa}{\kappa + \sigma_v} \cdot \frac{\beta_0}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{\beta_0}{\sqrt{3}}}. \quad (65,28)$$

Wir kommen damit auf unsere alte Gl. (31,18) aus der Theorie der kontinuierlichen Spektren zurück, wo es sich ja auch ausschließlich um wahre Absorption handelt. Infolge unserer Anwendung des EDDINGTONSchen Näherungsverfahrens haben wir hier statt des dortigen Faktors $3/2 = 1,5$ im Nenner von β den nicht ganz korrekten, aber hinreichend übereinstimmenden Zahlenfaktor $\sqrt{3} = 1,73$ erhalten¹.

Für die *Mitte* einer starken Linie mit $\kappa_v \gg \kappa$ erhalten wir — abgesehen von dem kleinen mathematischen Schönheitsfehler — wieder den für das S.S.-Modell gefundenen Wert $\frac{F}{F_0} = 1 \left/ \left(1 + \frac{2}{3} \beta_0\right)\right.$. Dies ist nach dem s. Zt. gesagten selbstverständlich. Die tieferen Schichten sind nämlich an der Bildung der Restintensität gar nicht beteiligt.

Für die *Linienflügel* erhalten wir durch Entwickeln nach κ_v/κ sofort (bis auf Glieder in $(\kappa_v/\kappa)^2 \dots$):

$$R = \frac{F_0 - F}{F_0} = \frac{\kappa_v}{\kappa} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{\beta_0}} \quad \text{bzw. genauer:} \quad \frac{\kappa_v}{\kappa} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{2\beta_0}}. \quad (65,29)$$

Der Vergleich mit der entsprechenden Formel (65,26) für Streuung zeigt, daß für die *Linienflügel* auch im M.E.-Modell die *Art des Strahlungsaustausches ziemlich belanglos ist*. Für $\beta_0 = 3/2$ stimmen (65,26 u. 29) völlig überein; für andere β_0 -Werte ist der Unterschied wieder nicht groß.

¹ Der in Abschn. 31 gegebene Ausdruck folgte aus dem hier wie dort benützten Ansatz für die Tiefenabhängigkeit der KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion ohne jede Vernachlässigung. Es ist übrigens leicht zu sehen, daß Fehler der hier bemerkten Größenordnung an vielen Stellen der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes zu erwarten sind. Man denke z. B. an die schon in der SCHWARZSCHILDschen Differentialgleichung vernachlässigte Winkelabhängigkeit von σ_v !

Während zur Deutung der Sternspektren die Kenntnis der Formeln für den *Strahlungsstrom* ausreicht, bietet uns die Sonnenforschung die weitergehende Möglichkeit der Beobachtung der *Strahlungsintensität* $I(0, \vartheta)$. Wir gehen daher wie im vorhergehenden Abschnitt über zur

Berechnung der Strahlungsintensität $I(0, \vartheta)$ an der Stern- (bzw. Sonnen-) Oberfläche für das M.E.-Modell:

Auf Grund der vielbenützten Gl. (63,9) wird zunächst¹

$$I(0, \vartheta) = \int_0^{\infty} \{ \sigma_{\nu} J + (\kappa_{\nu} + \kappa) E \} e^{-(\sigma_{\nu} + \kappa_{\nu} + \kappa) t \sec \vartheta} \cdot dt \sec \vartheta. \quad (65,30)$$

Führen wir wieder die Variable u nach (65,10) und die Abkürzung $\alpha = \sqrt{\frac{\kappa + \kappa_{\nu}}{3(\kappa + \kappa_{\nu} + \sigma_{\nu})}}$ nach (65,14) ein, so wird zunächst

$$\left. \begin{aligned} (\kappa_{\nu} + \kappa) dt &= \alpha du \\ \sigma_{\nu} dt &= \frac{1 - 3\alpha^2}{3\alpha} du \\ \text{und} \\ (\sigma_{\nu} + \kappa_{\nu} + \kappa) dt &= \frac{1}{3\alpha} du. \end{aligned} \right\} \quad (65,31)$$

Andererseits sind J und E schon durch (65,12 u. 18) bzw. (65,13) gegeben und wir erhalten

$$I(0, \vartheta) = E_0 \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{3\alpha} (1 + \beta \alpha \cdot u) + \frac{1 - 3\alpha^2}{3\alpha} \cdot \frac{2\beta\alpha^2 - 1}{1 + 2\alpha} e^{-u} \right\} e^{-\frac{u \sec \vartheta}{3\alpha}} \cdot du \sec \vartheta. \quad (65,32)$$

Vergleichen wir die Intensität in der Linie $I(0, \vartheta)$ wieder mit dem ungestörten Kontinuum

$$I_0(\vartheta) = E_0 (1 + \beta_0 \cos \vartheta), \quad (65,33)$$

so erhalten wir nach Ausintegrieren von (65,32)

$$\boxed{\frac{I(0, \vartheta)}{I_0(\vartheta)} = (1 + \beta_0 \cos \vartheta)^{-1} \left\{ 1 + 3\alpha^2 \beta \cdot \cos \vartheta + \frac{1 - 3\alpha^2}{1 + 2\alpha} \cdot \frac{2\alpha^2 \beta - 1}{1 + 3\alpha \cos \vartheta} \right\}}, \quad (65,34)$$

wo α , β und β_0 durch (65,4 u. 14) definiert sind.

1. Im Grenzfall *reiner Streuung* ist $\beta = \beta_0$; sonst läßt sich unsere Formel leider nicht weiter vereinfachen.

2. Für *reine Absorption* dagegen ist nach (65,27) wieder $\alpha = 1/\sqrt{3}$ und $\beta = \beta_0 \frac{\kappa}{\kappa + \kappa_{\nu}}$; man kommt auf die (31,13) entsprechende Formel zurück:

$$\frac{I(0, \vartheta)}{I_0(\vartheta)} = \frac{1 + \beta_0 \frac{\kappa}{\kappa + \kappa_{\nu}} \cos \vartheta}{1 + \beta_0 \cos \vartheta}. \quad (65,35)$$

Berechnen wir nunmehr speziell die Mitte-Rand-Variation der *Linienflügel*, indem wir nach σ_{ν}/κ bzw. κ_{ν}/κ entwickeln! (Daß in 1. Näherung die Wirkungen der selektiven Streuung und Absorption sich einfach überlagern, bedarf wohl keines Hinweises.)

¹ Man beachte, daß das J in Gl. (63,9) = $\frac{1}{\sigma_{\nu} + \kappa_{\nu} + \kappa} \{ \sigma_{\nu} J + (\kappa + \kappa_{\nu}) E \}$ in den Bezeichnungen des vorliegenden Abschnittes ist!

Für *reine Streuung* erhält man aus (65,34) nach einigem Umformen:

$$r = \frac{I(\vartheta) - I(0, \vartheta)}{I_0(\vartheta)} = \frac{\sigma_v}{\kappa} \cdot \frac{\beta_0 \cos \vartheta + \frac{1 - \frac{2}{3} \beta_0}{\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) (1 + \sqrt{3} \cos \vartheta)}}{1 + \beta_0 \cos \vartheta} + \dots, \quad (65,36)$$

während für *reine Absorption* sich aus (65,35) sofort ergibt:

$$r = \frac{I_0(\vartheta) - I(0, \vartheta)}{I_0(\vartheta)} = \frac{\kappa_v}{\kappa} \cdot \frac{\beta_0 \cos \vartheta}{1 + \beta_0 \cos \vartheta}. \quad (65,37)$$

Für $\beta_0 = 3/2$ stimmen diese beiden Formeln vollständig überein; für andere β_0 -Werte ist der Unterschied nicht sehr erheblich. Wie am Schluß des vorhergehenden Abschnittes finden wir auch hier, daß die *Stärke und Mitte-Rand-Variation der Linienflügel nur wenig davon abhängt, ob sie durch Streuung oder Absorption entstehen*.

Dagegen zeigt der Vergleich von (64,19 u. 26) einerseits mit (65,36 u. 37) andererseits, daß die *Mitte-Rand-Variation der Linienflügel in erheblicher Weise von der Wahl des Modelles, d. h. — allgemeiner gesprochen — von der Schichtung der Sternatmosphäre abhängt*.

Sitzt das selektiv absorbierende bzw. streuende Material an der Sternoberfläche (S.S.), so wächst die Intensität der Linienflügel nach dem Sonnenrande zu jedenfalls bis $\cos \vartheta \sim 0,3$. Ist dagegen das selektiv absorbierende bzw. streuende Material so verteilt, daß κ_v bzw. σ_v (pro cm!) dieselbe Tiefenabhängigkeit zeigen, wie der kontinuierliche Absorptionskoeffizient κ , so nimmt die Intensität der Linienflügel nach dem Sonnenrande zu ab.

Im folgenden Abschnitt werden wir diesen Vergleich zahlenmäßig noch genauer durchführen, um in Abschn. 67 dann das entsprechende Problem für eine *beliebig geschichtete Atmosphäre* in Abgriff zu nehmen.

In seiner grundlegenden Arbeit hat K. SCHWARZSCHILD die Behauptung aufgestellt, daß bei Streuung die Linien am Sonnenrand bleiben, bei Absorption dagegen verschwinden. Unsere Untersuchung zeigt, daß die Verhältnisse nicht so einfach liegen: Solange man sich auf den gewöhnlich beobachteten Bereich $1 \geq \cos \vartheta \geq 0,3$ beschränkt, gilt unser obiger Satz. Am *äußersten* Sonnenrande dagegen hängt die Intensität nicht nur von der Art des Strahlungsaustausches, sondern auch erheblich von β_0 , d. h. dem Mitte-Rand-Kontrast des kontinuierlichen Untergrundes ab. Daß SCHWARZSCHILD zu einer etwas schiefen Auffassung kam, rührt daher, daß er seinerzeit für Streuung das S.S.-Modell, für Absorption dagegen das M.E.-Modell untersuchte, während man korrekterweise die vier hier durchgerechneten Ansätze vergleichen muß, um zu erkennen, wie die Art des Strahlungsaustausches bzw. die Wahl des Modelles die Linienkonturen beeinflusst.

Schließlich wollen wir noch kurz — von einem rein phänomenologischen Standpunkt aus — uns mit der *Intensität in der Mitte der FRAUNHOFER-Linien* beschäftigen. Handelt es sich um hinreichend starke Linien¹, so wird $\kappa_v/\kappa \rightarrow \infty$, während κ_v/σ_v einem endlichen Grenzwert zustrebt, der — nach Kap. VIII—X — im Bereich der Linie praktisch konstant bleibt. Nehmen wir noch an, daß er von der Tiefe in der Atmosphäre unabhängig ist, so können wir die Formeln für das M.E.-Modell anwenden und erhalten zunächst

$$\beta = 0 \quad \text{sowie} \quad \frac{1}{3 \alpha^2} = 1 + \frac{\sigma_v}{\kappa_v} \quad (65,38)$$

und damit für den *Strahlungsstrom* F_c der Linienmitte nach (65,22)

$$\frac{F_c}{F_0} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\beta_0}{\sqrt{3}}}. \quad (65,39)$$

¹ Bei den schwachen Linien ist eine Messung der Restintensität ohnedies kaum möglich.

Für kleine Restintensitäten, d. h. $\kappa_v/\sigma_v \ll 1$ erhält man durch Reihenentwicklung

$$\frac{F_c}{F_0} \approx \frac{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{\beta_0}{\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{\frac{\kappa_v}{\sigma_v}}. \quad (65,40)$$

Entsprechend findet man für die *Strahlungsintensität* I_c in Abhängigkeit von ϑ nach (65,34)

$$\frac{I_c(\vartheta)}{I_0(\vartheta)} = (1 + \beta_0 \cos \vartheta)^{-1} \cdot \left\{ 1 - \frac{1 - 3\alpha^2}{(1 + 2\alpha)(1 + 3\alpha \cos \vartheta)} \right\} \quad (65,41)$$

und als Näherung für $\kappa_v/\sigma_v \ll 1$

$$\frac{I_c(\vartheta)}{I_0(\vartheta)} \approx \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{3}{2} \cos \vartheta \right)}{1 + \beta_0 \cos \vartheta} \sqrt{\frac{\kappa_v}{\sigma_v}} + \dots \quad (65,42)$$

Die Anwendung unserer Formeln — die noch keine eingehendere Vorstellung über das Zustandekommen des κ_v/σ_v voraussetzen — vollzieht sich nun folgendermaßen: Die *Linienflügel* bestimmen in erster Linie das $\kappa_v + \sigma_v$; nicht nur für die Flügel, sondern damit auch für die *ganze* Linie. Ebenso bestimmt *eine* Restintensitätsmessung das Verhältnis κ_v/σ_v , das schon aus thermodynamischen Gründen für die *ganze* Linie konstant sein wird. Für das zugrunde gelegte Modell ist damit die *ganze Linienkontur und ihre Mitte-Rand-Variation* festgelegt.

Als Beispiel zu den allgemeinen Erörterungen dieses Abschnittes wollen wir die K -Linie¹ $\lambda 3933$ des CaII im Sonnenspektrum genauer diskutieren. Diese ist für \odot -Mitte ($\cos \vartheta = 1$) von M. MINNAERT [1135] und A. D. THACKERAY [1151] sehr sorgfältig photometriert worden. Bezüglich ihrer Mitte-Rand-Variation vgl. M. MINNAERT und J. HOUTGAST [1206].

Zunächst fragen wir, ob für die Ca II-Resonanzlinien das S.S.- oder das M.E.-Modell angemessener sein dürfte. Wir müssen also untersuchen, in welcher Weise σ_v/κ von der Tiefe in der Sonnenatmosphäre abhängt. Nach Tabelle 36 von Kap. VII wächst κ (pro Gramm gerechnet) mit τ nur langsam (zwischen $\tau = 0,12$ und $0,53$ um einen Faktor ≈ 3). Wie man weiterhin mit den dort angegebenen Elektronendruck P_e und Temperaturen T nach der SAHASCHEN Gleichung leicht nachrechnet, ist in der ganzen Sonnenatmosphäre das Kalzium vorwiegend einfach ionisiert. σ_v/κ wird sich also mit τ nur wenig ändern. Wir können dementsprechend näherungsweise das *M.E.-Modell* benutzen, müssen aber eine Abweichung in der vom S.S.-Modell angezeigten Richtung erwarten.

Die Randverdunkelungskonstante β_0 wird für $\lambda 3933$ nach (65,4) gleich 2,83. Mit Hilfe der für $\cos \vartheta = 1$ beobachteten Restintensität von $\sim 7\%$ finden wir nach (65,42) das für die ganze Linie geltende Verhältnis $\kappa_v/\sigma_v = 0,010$.

Für die Wellenlängenabhängigkeit des Streukoeffizienten setzen wir wieder die Dispersionsverteilung an und schreiben also

$$\frac{\sigma_v}{\kappa} = \frac{C^2}{\Delta \lambda^2}. \quad (65,43)$$

Die Konstante C — die in einfacher Weise mit der Häufigkeit des Ca^+ und der Übergangswahrscheinlichkeit der K -Linie zusammenhängt, bestimmen wir² nachträglich, indem wir die $\Delta \lambda/C$ -Skala der berechneten Linienkontur den Beobachtungen anpassen. Nach (65,14) wird zunächst

¹ Die H -Linie ist durch H_e merklich gestört. Im übrigen unterscheidet sie sich von K nur dadurch, daß ihre Breite ($\sim \sqrt{I}$) im Verhältnis $1 : \sqrt{2} = 0,706$ kleiner ist.

² Es sei nochmals an die analoge Methode in Abschn. 64 erinnert!

$$3 \alpha^2 = \frac{1 + 0,01 \cdot \frac{C^2}{\Delta \lambda^2}}{1 + 1,01 \cdot \frac{C^2}{\Delta \lambda^2}} \quad (65,44)$$

und nach (65,4 u. 14) mit $\beta_0 = 2,83$

$$3 \alpha^2 \beta = \frac{2,83}{1 + 1,01 \cdot \frac{C^2}{\Delta \lambda^2}}. \quad (65,45)$$

Die weitere Rechnung mit Gl. (65,25) bedarf wohl keiner näheren Erläuterung mehr. Das Ergebnis und den Vergleich mit den Beobachtungen von MINNAERT und THACKERAY zeigt die folgende Fig. 78. Wenn man $C^2 = 49 \cdot 10^{-16}$ wählt, so wird für die ganze Linie die Übereinstimmung von Theorie und Beobachtung recht gut. Sie würde noch wesentlich verbessert, wenn man den kontinuierlichen Untergrund bei THACKERAY $\sim 6\%$ höher legen würde. Man ist immer wieder geneigt, die enorme Ausdehnung der Linienflügel zu unterschätzen.

Zum Vergleich haben wir die Linienkontur noch für $\cos \vartheta = 0,25$, d. h. eine 3,2% des Sonnenradius vom \odot -Rand entfernte Stelle, berechnet. Sowohl das Anwachsen der Restintensität, wie auch das Schwächerwerden der Linienflügel beim Übergang von \odot -Mitte zu \odot -Rand stimmt in qualitativer Hinsicht überein mit den erwähnten Messungen.

Schließlich wollen wir noch — um die Hauptsache nicht zu vergessen — aus dem gemessenen Wert von C die Häufigkeit des Kalziums berechnen.

Da für die K Linie die Oszillatorenstärke $f = 2/3$ und bei reiner Strahlungsdämpfung¹ $\gamma = \gamma_{kl}$ ist, so wird der Streukoeffizient pro Ca^+ -Ion nach (64,14)

$$\sigma_{v,at} = 16,5 \cdot 10^{-26} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda^2}. \quad (65,46)$$

Setzen wir die Häufigkeit des Ca (wie wir schon sahen, ist praktisch alles Kalzium einfach ionisiert) bezogen auf die Zahl aller Atome im Sinne der Tabelle 20, Abschn. 24² gleich $\varepsilon/1470$, so kommen auf ε Ca^+ -Ionen insgesamt $1470 \cdot \mu_0 \cdot m_H$ Gramm Sternmaterie und der Streukoeffizient für die K-Linie pro Gramm Sternmaterie wird also

$$\sigma_{v,gr} = \sigma_{v,at} \cdot \frac{\varepsilon}{1470 \cdot \mu_0 \cdot m_H} = \frac{2,49 \cdot 10^{-14}}{\Delta \lambda^2} \cdot \varepsilon \text{ [cm}^2 \text{ g}^{-1}\text{]}. \quad (65,47)$$

¹ Die Möglichkeit von Stoßdämpfung wollen wir auch hier noch beiseite lassen; wir werden sie im folgenden Kapitel eingehend diskutieren.

² Bei dem dort angenommenen Mischungsverhältnis Wasserstoff: Metalle = 13,7:1 ist ε = Zahl der Ca-Atome pro 100 Metallatome. $\mu_0 = 2,80$ ist das mittlere Molekulargewicht der unionisierten Sternmaterie nach (24,4); m_H die Masse der Atomgewichtseinheit.

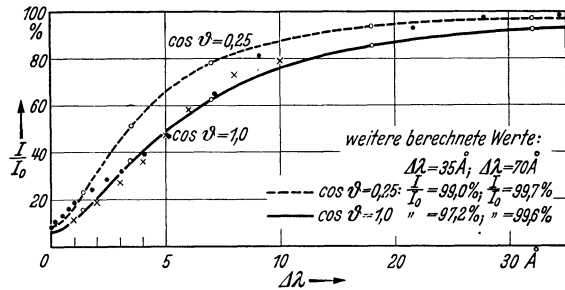


Fig. 78. Die Ca^+ -Linie λ 3933 (K) im Sonnenspektrum. Beobachtungen von A. D. THACKERAY [1451]; \odot -Mitte \dots (Bis $\Delta \lambda = 10 \text{ \AA}$ Mittel aus beiden Linienhälften. Für $\Delta \lambda < 10 \text{ \AA}$ nur kurzweiliger Flügel, da langweiliger durch die H-Linie gestört wird.) Beobachtungen von M. MINNAERT [1435 a]; \odot -Mitte $\times \times \times$. (Mittelwert beider Linienhälften.) Berechnete Linienkonturen für das M. E.-Modell mit $\frac{\sigma_v}{\sigma_p} = \frac{49 \cdot 10^{-16}}{\Delta \lambda^2}$ und $\frac{\sigma_v}{\sigma_p} = 0,01$. \odot -Mitte ($\cos \vartheta = 1$) —; \odot -Rand ($\cos \vartheta = 0,25$) ---. Die Übereinstimmung von Beobachtung und Theorie wurde noch wesentlich verbessert durch eine Hebung des kontinuierlichen Untergrundes bei THACKERAY um $\sim 6\%$.

Andererseits ist nach Tabelle 36 der mittlere Massenabsorptionskoeffizient für die Sonnenatmosphäre (bei denselben Annahmen über deren mittlere Zusammensetzung)

$$\kappa_{\text{gr}} \approx 4 [\text{cm}^2 \text{g}^{-1}]. \quad (65,48)$$

Es ist also schließlich nach (65,43)

$$C^2 = 6,2 \cdot 10^{-15} \cdot \varepsilon. \quad (65,49)$$

Durch Vergleich mit dem empirisch gefundenen Wert $C^2 = 4,9 \cdot 10^{-15}$ findet man die *Ca-Häufigkeit*

$$\varepsilon = 0,8 \quad (65,50)$$

Die größenordnungsmäßige Übereinstimmung dieser Zahl mit unserer Ausgangsannahme von Tabelle 20, nämlich $\varepsilon = 2,1$, dürfen wir als eine vorläufige Bestätigung unserer Formeln für den Streukoeffizienten und den kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten der Metalle auffassen; die angenommene Häufigkeit des Wasserstoffes ist — wie man sich leicht klarmacht — für unser jetziges Problem nahezu irrelevant.

66. Vergleich von SCHUSTER-SCHWARZSCHILD- und MILNE-EDDINGTON-Modell. Allgemeinere Ansätze von EDDINGTON, TEN BRUGGENCATE und PANNEKOEK.

Deutet man die beobachtete Kontur einer FRAUNHOFER-Linie nach dem S.S.-Modell, so erhält man zunächst die optische Dicke s_1 bzw. τ_1 der „umkehrenden Schicht“ als Funktion der Wellenlänge und daraus die „Anzahl der Atome über 1 cm^2 der Photosphäre“ NH .

Legt man dagegen seinen Rechnungen das M.E.-Modell zugrunde, so erhält man zunächst das Verhältnis σ_v/κ bzw. κ_v/κ als Funktion der Wellenlänge und daraus — wenn die Koeffizienten σ_v bzw. κ_v und κ pro Atom nach der Quantentheorie bekannt sind — die *Häufigkeit* ε des betreffenden Elementes.

Da sowohl die Annahme einer gegen die Photosphäre scharf abgesetzten umkehrenden Schicht beim S.S.-Modell, wie auch die eines konstanten Verhältnisses von σ_v/κ bzw. κ_v/κ beim M.E.-Modell nur aus *mathematischen* Rücksichten gemacht wurde, so wird man fragen, wie die Aussagen der beiden Modelle zusammenhängen und welcher allgemeinere Sinn ihnen zukommt.

Bei dieser Diskussion beschränken wir uns sinngemäß zunächst auf die *Linienflügel*, da nach dem vorhergehenden Abschnitt die *Restintensität* mit der Häufigkeit usw. der Atome gar nichts zu tun hat. Weiterhin wollen wir zunächst annehmen, daß σ_v und κ_v pro Atom im betreffenden Zustand gerechnet, von der Tiefe in der Atmosphäre unabhängig sind. Sollte jedoch, wie bei Stoßdämpfung und Druckeffekt, diese Voraussetzung nicht erfüllt sein, so ist die entsprechende Verallgemeinerung der folgenden Überlegungen ziemlich selbstverständlich.

Um die beobachteten Linienkonturen von atomaren Faktoren, wie Oszillatorenstärke, Dämpfungskonstante usw. zu befreien, führen wir den für das Folgende zweckdienlichen Hilfsbegriff der „Anzahl wirksamer Atome über 1 cm^2 der Sonnen- (Stern-) Oberfläche“ ein, indem wir *definieren*:

$$R = \frac{F_0 - F}{F_0} = \sigma_v \cdot N_F H + \dots \quad \text{bzw.} \quad \kappa_v \cdot N_F H + \dots \quad (66,1)$$

und

$$r = \frac{I_0(\vartheta) - I(0, \vartheta)}{I_0(\vartheta)} = \sigma_v \cdot N_\vartheta H + \dots \quad \text{bzw.} \quad \kappa_v \cdot N_\vartheta H + \dots \quad (66,2)$$

Anschaulich heißt dies: *Wenn man in einem Absorptionsrohr (ohne Reemission) dieselben Linienflügel erzeugen wollte, wie man sie im Strahlungsstrom F bzw.*

der Strahlungsintensität $I(0, \vartheta)$ beobachtet, so müßte man in einer Säule von 1 cm^2 Querschnitt $N_F H$ - bzw. $N_\vartheta H$ -Atome haben.

Beim S.S.-Modell mit Streuung z. B. ist nach (64,8) einfach $N_F H = NH$; bei Absorption dagegen nach (64,27) $N_F H = \frac{\beta_0}{1 + \frac{2}{3}\beta} NH$. Wie liegen die

Dinge nun beim M.E.-Modell? Nach (65,26) bzw. 29 können wir schreiben

$$N_F H = \frac{1}{\kappa} \cdot Fkt \cdot (\beta_0), \tag{66,3}$$

wobei aber (NB!) der kontinuierliche Absorptionskoeffizient κ nun zu rechnen ist pro Atom, das die betrachtete Linie erzeugt. Statt dessen führen wir den Massen-Absorptionskoeffizienten κ_{gr} ein. Wir bezeichnen das Verhältnis der Anzahl der Atome, die die betrachtete Linie erzeugen, zur Zahl aller Atome mit ζ , das mittlere Atomgewicht der unionisierten Sternmaterie mit μ_0 und die Masse der Atomgewichtseinheit mit m_H . Dann ist $\kappa_{gr} = \kappa \cdot \frac{\zeta}{\mu_0 \cdot m_H}$ und es wird

$$N_F H = \frac{1}{\kappa_{gr}} \cdot \frac{\zeta}{\mu_0 m_H} \cdot \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{\beta_0}} \right\} \text{ für Streuung} \\ \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{\beta_0}} \text{ für Absorption.} \end{array} \right\} \tag{66,4}$$

Nach E. A. MILNE [1204 u. 1205] können wir dieser Anzahl wirksamer Atome im M.E.-Modell eine sehr anschauliche Deutung geben: Bringen wir in (66,3) das κ nach links, so ist $\kappa \cdot N_F H$ die *optische Tiefe für kontinuierliche Absorption*, welche der Säule von $N_F \cdot H$ selektiv wirksamen Atome entspricht. Anders formuliert: Würde man aus einer M.E.-Atmosphäre die selektiv absorbierenden bzw. streuenden Atome bis zu dieser Tiefe τ_0 herausnehmen und diese Schicht mit einem Scheinwerfer senkrecht durchstrahlen, so erhielte man dieselben Linienflügel, wie sie die betreffende FRAUNHOFER-Linie zeigt. τ_0 ist also eine Art wirksame Tiefe der Atmosphäre; es kennzeichnet zugleich die Schichten, die noch einen merklichen Betrag zu den Linienflügeln liefern¹. Nach (66,4) ist ²

$$\left. \begin{array}{l} \text{für Streuung} \quad \tau_0 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{\beta_0}} \right\} \\ \text{und für Absorption} \quad \tau_0 = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{\beta_0}} \end{array} \right\} \tag{66,5}$$

Die folgende kleine Tabelle (zur Orientierung über die Wellenlängenabhängigkeit von β_0 im Sonnenspektrum vergleiche auch Tabelle 25) gibt einige Zahlenwerte. Daß sie sämtlich nahe bei $\tau_0 \approx 0,5$ liegen, ist nicht verwunderlich, da eine Schicht dieser Dicke $e^{-0,5} = 61\%$ eines senkrecht durchgehenden Lichtstrahles passieren läßt.

Tabelle 50. „Wirksame Tiefe“ τ_0 der M.E.-Atmosphäre.

β_0	1	2	3	4
τ_0 { Absorption . . .	0,366	0,536	0,634	0,698
{ Streuung . . .	0,415	0,500	0,549	0,581

¹ Daß die Linienmitte mit κ_ν bzw. $\sigma_\nu \gg \kappa$ in den höchsten Schichten entsteht, haben wir schon bemerkt.

² Die entsprechenden Ausdrücke für die Linienflügel in $I(0, \vartheta)$ brauchen wohl nicht explizit angeschrieben werden. τ_ϑ nimmt selbstverständlich mit wachsenden ϑ ab, so daß sein Mittelwert $\approx \tau_0$ ist.

gezeichnet. Kurve B entspricht dem anderen Grenzfall: Reine Absorption, $x_v = \kappa_v \cdot N_F H \cdot R_c = 1 / \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{\beta_0} \right)$ ist die *größte* Restintensität, die eine Linie, in deren Mitte $x_v \gg 1$ ist, überhaupt erreichen kann¹. Mehr oder weniger zufällig stimmt diese Kurve exakt mit der für das M.E.-Modell mit reiner Absorption nach (65,28) gezeichneten überein. Ganz allgemein erkennt man, daß die Interpolationsformel (66,7) allen einigermaßen billigen Anforderungen gerecht wird.

Da wir im folgenden Abschnitt eine sehr einfache und von allen speziellen Annahmen über die Schichtung der Atmosphären unabhängige Theorie der Linienflügel entwickeln werden, so brauchen wir auf die in der Literatur aufgetauchten Versuche einer vollständigen Lösung der Differentialgleichung des Strahlungsgleichgewichtes für weitere Modell-Atmosphären hier nur kurz hinzuweisen.

a) Verallgemeinerungen des S.S.-Modelles, in denen σ_v/κ bzw. κ_v/κ sich sprungweise mit der Tiefe ändert, hat A. S. EDDINGTON in seiner grundlegenden Arbeit [1202] behandelt. Ebenda auch ein Modell, dessen Differentialgleichung mit BESSEL-Funktionen gelöst werden kann.

b) Ein Modell mit sehr vielen Schichten, in denen jeweils die Verhältnisse σ_v/κ und κ_v/κ konstant sind, hat P. TEN BRUGGENCATE [507] behandelt.

c) Endlich hat A. PANNEKOEK [1207—8] eine Reihe von Normalmodellen mit numerischer Integration durchgerechnet.

Da alle diese Verfahren sehr schwerfällig und vor allen Dingen unübersichtlich sind, so werden wir sie in diesem Buch nicht anwenden.

Bis jetzt haben wir uns fast ausschließlich mit den Linienkonturen für den Strahlungsstrom F beschäftigt, der ja bei den Sternen auch das einzig Beobachtbare ist. Für die Mitte der Sonnenscheibe ($\vartheta = 0$) liegen die Dinge so ähnlich, daß wir sie nicht besonders zu untersuchen brauchen. Die entsprechenden Formeln kann man aus dem Vorhergehenden leicht entnehmen.

Von Interesse ist dagegen noch ein genauere Vergleich der *Mitte-Rand-Variation der Linienflügel* im S.S.- und M.E.-Modell für Streuung und Absorption. Wir knüpfen an die Untersuchungen vom Schluß des Abschn. 65 an, benützen aber jetzt nicht mehr die Näherungsformeln für die Linienflügel — z. B. (65,26 u. 28) für das M.E.-Modell —, da diese am Sonnenrand, d. h. für $\sec \vartheta \rightarrow \infty$ oder $\vartheta \rightarrow \pi/2$ teilweise nicht mehr konvergieren. Vielmehr wählen wir — unter Benützung der vorhergehenden Formeln — das s_1 bzw. τ_1 im S.S.-Modell oder das σ_v/κ bzw. κ_v/κ im M.E.-Modell, d. h. allgemein gesprochen das x_v (mit Hilfe der Näherungsformeln für kleine R) so, daß im Strahlungsstrom eine Linientiefe R von $\sim 10\%$ entsteht und rechnen dann mit den vollständigen Formeln für die *Intensität* $I(0, \vartheta) / I_0(\vartheta)$.

Da nach unseren früheren Ergebnissen der Wert von β_0 für die Mitte-Rand-Änderung der Linien wesentlich ist, so wollen wir diese Rechnungen für $\beta_0 = 2,5$ und $\beta_0 = 1$ durchführen. Die Ergebnisse sind in der folgenden Fig. 80 übersichtlich zusammengestellt.

Beschränkt man sich zunächst auf $1 > \cos \vartheta > 0,3$ — letzteres entspricht einer nur noch um 4,6% des Sonnenradius vom \odot -Rand entfernten Stelle — so ist die Mitte-Rand-Variation der Linienflügel nahezu unabhängig von der Art des Strahlungsaustausches und dem Werte von β_0 . Häuft sich das selektiv streuende oder absorbierende Material nach der Sonnenoberfläche (S.S.-Modell), so wächst die Stärke der Linienflügel nach dem \odot -Rand hin. Hängen dagegen (M.E.-Modell) die selektive Absorption und Streuung einerseits und der kontinuierliche Absorptionskoeffizient in derselben Weise von der Tiefe ab oder

¹ Natürlich im Rahmen des SCHWARZSCHILD'Schen Ansatzes für die Reemission!

nehmen die ersteren gar rascher mit der Tiefe zu, so werden die Linienflügel am \odot -Rand schwächer.

Erst am alleräußersten Sonnenrand, der nur mit großen Turmteleskopen oder — nach der Methode von SCHWARZSCHILD und JULIUS — bei totalen

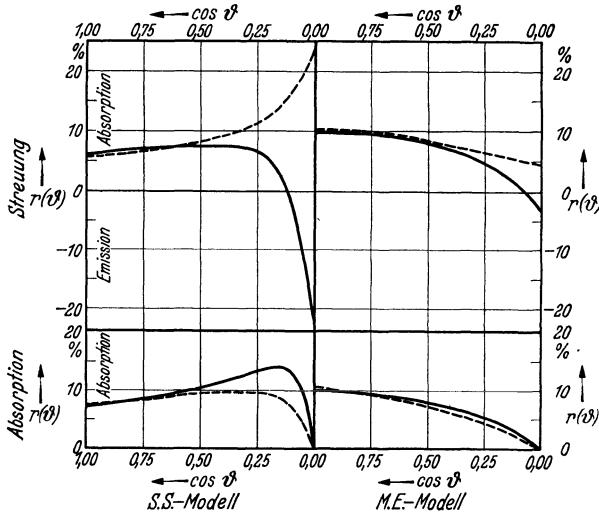


Fig. 80. Mitte-Rand-Kontrast der Linienflügel. $r(\vartheta) = \frac{I_0(\vartheta) - I(0, \vartheta)}{I_0(\vartheta)}$.

— für $\beta_0 = 2,5$; - - - für $\beta_0 = 1$. Die Kurven sind so gerechnet, daß die Linientiefe im Strahlungsstrom bei Vernachlässigung höherer Potenzen von σ_p bzw. κ_p ungefähr $R = 10\%$ wird. Im einzelnen sind folgende Ausgangsdaten benutzt worden:

S.S.-Modell mit Streuung	für $\beta_0 = 2,5$	$s_1 = 0,10$
„ „ Absorption	„ $\beta_0 = 1,0$	$s_1 = 0,10$
	„ $\beta_0 = 2,5$	$\tau_1 = 0,1067$
	„ $\beta_0 = 1,0$	$\tau_1 = 0,1667$
M.E.-Modell mit Streuung	für $\beta_0 = 2,5$	$\sigma_p/\kappa = 0,1896$
	„ $\beta_0 = 1,0$	$\sigma_p/\kappa = 0,2410$
„ „ Absorption	„ $\beta_0 = 2,5$	$\kappa_p/\kappa = 0,1693$
	„ $\beta_0 = 1,0$	$\kappa_p/\kappa = 0,2732$

Für $1 \geq \cos \vartheta > 0,25$ (d. h. für den normalerweise beobachteten Teil der Sonnenscheibe) ist der Mitte-Rand-Kontrast der Linienflügel in erster Linie eine Frage des Modelles, d. h. der Schichtung. Erst am äußersten Sonnenrand ($\cos \vartheta < 0,25$) zeigt sich ein Einfluß der Art des Strahlungsaustausches und der Randverdunkelungskonstante β_0 .

Modellvorstellungen befreite allgemeine Theorie der Linienflügel ein tieferes Verständnis der im vorhergehenden entwickelten Gesetzmäßigkeiten eröffnet hat.

67. Die SCHWARZSCHILDsche Integralgleichung des Strahlungsgleichgewichtes. Berechnung der Intensität der Linienflügel für eine beliebig geschichtete Atmosphäre.

Der zuerst von MILNE durchgeführte Vergleich von M.E.- und S.S.-Modell läßt vermuten, daß in einer beliebig geschichteten Atmosphäre¹ die selektiv absorbierenden oder streuenden Atome in der optischen Tiefe τ (für kontinuierliche Absorption) zu den Linienflügeln einen Beitrag geben, der durch eine Art Gewichtsfunktion $G(\tau)$ dargestellt wird, die von $G \approx 1$ bei $\tau = 0$ aus für $\tau > 1$ rasch gegen Null geht. Diese Gewichtsfunktion wird natürlich verschieden sein, je nachdem wir es mit Streuung oder Absorption zu tun haben und je nachdem wir den Strahlungsstrom F oder die Strahlungsintensität $I(0, \vartheta)$ berechnen wollen.

¹ Das heißt κ_p und σ_p seien als Funktionen von κ gegeben; ebenso $\kappa/\bar{\kappa}$.

Finsternissen zu beobachten sein dürfte, machen sich die Unterschiede von Streuung und Absorption, sowie von β_0 bemerkbar.

Bei Absorption geht mit $\cos \vartheta \rightarrow 0$ auch $R \rightarrow 0$, wie wir im Anschluß an SCHWARZSCHILD schon erklärt haben.

Bei Streuung gehen für $\beta_0 > 1,5$ am Rand noch innerhalb der Sonnenscheibe die Flügel der FRAUNHOFER-Linien in Emission über und zwar beim S.S.-Modell stärker als beim M.E.-Modell. Für $\beta_0 < 1,5$ dagegen bleibt der Absorptionscharakter der Linienflügel erhalten.

Beobachtungen, an denen diese mannigfaltigen Aussagen der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes nachgeprüft werden könnten, gibt es nur wenig. Wir werden sie im folgenden Abschnitt diskutieren, nachdem uns eine von speziellen

Daß eine derartige Darstellung nur für die Linienflügel möglich sein kann, ersieht man daraus, daß nur in diesem Falle die selektive Absorption und Streuung verschiedener tiefer Schichten sich ungestört überlagern. Die in Abschn. 64—66 gefundenen Formeln für die Linienflügel spezieller Modelle erscheinen in unserer neuen Behandlungsweise der Theorie als Spezialfälle, die durch eine kontinuierliche Serie von Übergängen verbunden werden. Trotzdem behalten unsere früheren Rechnungen auch jetzt noch eine selbständige Bedeutung, da die mathematischen Methoden des vorliegenden Abschnittes für die Mitte der Linien ($\sigma_v + \kappa_v/\kappa > 1$) und den äußersten Rand der Sonne ($\sec \vartheta \rightarrow \infty$) nicht mehr kompetent sind.

Um unserem Ziel näher zu kommen, erweist es sich — vgl. [1215] — als zweckmäßig, wie in Kap. V, Abschn. 30 von der SCHWARZSCHILDSchen Differentialgleichung des Strahlungsgleichgewichtes zu der entsprechenden *Integralgleichung* überzugehen¹:

Mit Hilfe der Gl. (63,9) führen wir zuerst das $\int I \frac{d\omega}{4\pi} = \frac{1}{2} \int I \sin \vartheta d\vartheta$ auf das in (63,7) definierte $J(x)$ zurück. Dabei können wir einfach die Gl. (30,1—4) übernehmen, indem wir dem $J(x)$ die angegebene Bedeutung zulegen. Setzen wir das so berechnete $\int I \frac{d\omega}{2\pi}$ in (63,7) ein, so haben wir schon die *inhomogene Integralgleichung* von K. SCHWARZSCHILD [1211]:

$$(\kappa + \kappa_v + \sigma_v) J(z) = (\kappa + \kappa_v) E(z) + \frac{\sigma_v}{2} \int_0^\infty J(x) \cdot K(|z-x|) dx. \quad (67,1)$$

Dabei ist dx bzw. dz gleich $(\kappa + \kappa_v + \sigma_v) dt$. κ , κ_v und σ_v sind vorgegebene Funktionen der Tiefe. J wird durch (63,7) definiert, hat also eine gegenüber Kap. V erweiterte Bedeutung. E ist die KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion in der Tiefe z . *Hat man diese SCHWARZSCHILDSche Integralgleichung für $J(z)$ aufgelöst, so können $F(0)$ und $I(0, \vartheta)$ nach (63,10 u. 9) durch einfache Quadratur berechnet werden.*

Für die *Linienflügel* ist nun σ_v und $\kappa_v \ll \kappa$, wir können also das letzte Glied in (67,1) als kleine Korrektion auffassen und als Ausgangspunkt unseres Lösungsverfahrens die „nullte“ Näherung

$$J(z) = \frac{\kappa + \kappa_v}{\kappa + \kappa_v + \sigma_v} \cdot E(z) = E(z) + \dots \quad (67,2)$$

benützen.

Setzen wir diese unter dem Integralzeichen ein, so erhalten wir [1215] bis auf Glieder in $\sigma_v^2 \dots$ die NEUMANNSche *Reihenentwicklung*:

$$(\kappa + \kappa_v + \sigma_v) J(z) = (\kappa + \kappa_v) E(z) + \frac{\sigma_v}{2} \int_0^\infty E(x) \cdot K(|z-x|) dx + \dots \quad (67,3)$$

Der physikalische Sinn dieser Näherung ist, daß wir nur die *Einfachstreuung* berücksichtigen, Mehrfachstreuung dagegen vernachlässigen und dementsprechend bei der Berechnung des $\int I \frac{d\omega}{4\pi}$ in (63,7) nur die thermische Emission E berücksichtigen. Die Voraussetzung $\kappa_v \ll \kappa$ ist im Prinzip nicht notwendig,

¹ Anm. b. d. Korr.: Inzwischen ist es M. MINNAERT, ZS. f. Ap. **12**, 313 (1936) gelungen, eine entsprechende Darstellung auch direkt von der SCHWARZSCHILDSchen Differentialgleichung aus zu entwickeln. Sogar der Fall einer nichtlinearen Abhängigkeit der KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion E von τ (Gl. 67,15) läßt sich noch gut übersehen. Weiterhin vgl. B. STRÖMGREN, Ap. J. **86**, 1 (1937).

da ja nur die Verbindung $\varkappa + \varkappa_v$ auftritt; wir wollen aber trotzdem Streuung und Absorption in symmetrischer Weise behandeln, um sie besser vergleichen zu können.

Mit Hilfe des obigen $J(z)$ berechnen wir zuerst den *Strahlungsstrom* $F = F(0)$ an der Sternoberfläche im Hinblick auf die FRAUNHOFER-Linien der Sterne und der integrierten Sonnenstrahlung. Nach (63,10) wird — alles bis auf Glieder in $\sigma_v^2 \dots$ —

$$\frac{1}{2} F = \int_0^\infty \frac{\varkappa + \varkappa_v}{\varkappa + \varkappa_v + \sigma_v} \cdot E(z) \cdot K_2(z) dz + \int_0^\infty \frac{\sigma_v}{2\varkappa} \left\{ \int_0^\infty E(x) K(|z-x|) dx \right\} K_2(z) dz. \quad (67,4)$$

Im vorderen Integral ist zunächst $\frac{\varkappa + \varkappa_v}{\varkappa + \varkappa_v + \sigma_v} dz = d\tau + d\tau_v$ (bezüglich der Bezeichnungen vgl. (63,5 u. 6)!). Da E praktisch immer als Funktion der optischen Tiefe für kontinuierliche Absorption τ gegeben ist, so führen wir diese statt z als Variable ein, wobei wir sogleich unter den Integralzeichen nach (B, 14) entwickeln:

$$K_2(z) = K_2(\tau + \tau_v + s_v) = K_2(\tau) - (\tau_v + s_v) K(\tau) + \dots \quad (67,5)$$

Damit geht (67,4) über in

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} F = & \int_0^\infty E(\tau) K_2(\tau) d\tau - \int_0^\infty (\tau_v + s_v) \cdot E(\tau) \cdot K(\tau) d\tau \\ & + \int_0^\infty E(\tau) \cdot K_2(\tau) d\tau_v + \int_0^\infty \frac{1}{2} K_2(\tau) ds_v \int_0^\infty E(x) K(|\tau-x|) dx. \end{aligned} \right\} \quad (67,6)$$

Dieser Ausdruck nimmt die nach unseren anschaulichen Überlegungen zu erwartende Form an, wenn wir auch das 2. Integral rechts so umformen, daß s_v und τ_v als Variable auftreten. Setzt man zur Abkürzung noch

$$\Phi(\tau) = \int_\tau^\infty E(\tau) \cdot K(\tau) d\tau, \quad (67,7)$$

so ergibt sich durch partielle Integration z. B.:

$$\int_0^\infty s_v \cdot E(\tau) \cdot K(\tau) d\tau = -s_v \cdot \Phi(\tau) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \Phi(\tau) ds_v = \int_0^\infty \Phi(\tau) ds_v, \quad (67,8)$$

und man erhält

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} F = & \int_0^\infty E(\tau) \cdot K_2(\tau) d\tau - \int_0^\infty \{ \Phi(\tau) - E(\tau) \cdot K_2(\tau) \} d\tau, \\ & - \int_0^\infty \left\{ \Phi(\tau) - \frac{K_2(\tau)}{2} \int_0^\infty E(x) K(|\tau-x|) dx \right\} ds_v. \end{aligned} \right\} \quad (67,9)$$

Das 1. Glied rechts gibt den Strahlungsstrom des kontinuierlichen Spektrums, d. h. $\frac{1}{2} F_0$. Das 2. Glied bzw. 3. Glied gibt den durch wahre Absorption bzw. Streuung entstehenden Anteil der Linienflügel. Zur praktischen Ausführung der Integrationen wird man stets schreiben

$$d\tau_v = \frac{\varkappa_v}{\varkappa} d\tau \quad \text{und} \quad ds_v = \frac{\sigma_v}{\varkappa} d\tau. \quad (67,10)$$

Nunmehr können wir die „Tiefe“

$$R = \frac{F_0 - F}{F_0} \quad (67,11)$$

der Linienflügel in die gewünschte Form bringen:

$$R = \int_0^{\infty} G_1(\tau) d\tau_v + \int_0^{\infty} G_2(\tau) ds_v = \int_0^{\infty} \frac{\kappa_v}{\kappa} G_1(\tau) d\tau + \int_0^{\infty} \frac{\sigma_v}{\kappa} G_2(\tau) d\tau, \quad (67,12)$$

wobei nach (67,9) die Gewichtsfunktionen $G(\tau)$, welche die Wirksamkeit der Atome in der Tiefe τ charakterisieren, zu schreiben sind als

$$G_1(\tau) = \frac{\Phi(\tau) - E(\tau) K_2(\tau)}{\int_0^{\infty} E(\tau) \cdot K_2(\tau) d\tau} \quad (67,13)$$

und

$$G_2(\tau) = \frac{\Phi(\tau) - \frac{K_2(\tau)}{2} \int_0^{\infty} E(x) K(|\tau - x|) dx}{\int_0^{\infty} E(\tau) K_2(\tau) d\tau}. \quad (67,14)$$

Diese Funktionen können — unabhängig von der Art der betrachteten FRAUNHOFER-Linien — ein für allemal für jeden Stern in Abhängigkeit von der Wellenlänge berechnet werden¹. In den meisten Fällen dürfte die bekannte lineare Näherung für E ausreichen, also

$$E = E_0 (1 + \beta_0 \tau) \quad \text{mit} \quad \beta_0 = \frac{\frac{3}{8} \frac{h\nu}{k T_0}}{1 - e^{-\frac{h\nu}{k T_0}}} \cdot \frac{\bar{\kappa}}{\kappa}, \quad (67,15)$$

wobei wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit noch $E_0 = 1$ setzen können². Mit Hilfe der im Anhang B zusammengestellten Formeln erhält man die teilweise auch schon von früher bekannten Ausdrücke:

$$\frac{1}{2} F_0 = \int_0^{\infty} E(\tau) K_2(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} (1 + \beta_0 \tau) K_2(\tau) d\tau = \frac{1}{2} + \frac{\beta_0}{3}, \quad (67,16)$$

$$\Phi(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} (1 + \beta_0 \tau) K(\tau) d\tau = K_2(\tau) + \beta_0 \{\tau K_2(\tau) + K_3(\tau)\}, \quad (67,17)$$

sowie das dritte Integral in (67,14)

$$\left. \begin{aligned} \Psi(\tau) &= \int_0^{\infty} E(x) K(|\tau - x|) dx \\ &= \int_{u=0}^{\tau} (1 + \beta_0 \tau - \beta_0 u) K(u) du + \int_{u=0}^{\infty} (1 + \beta_0 \tau + \beta_0 u) K(u) du \\ &= (1 + \beta_0 \tau) (2 - K_2(\tau)) + \beta_0 (\tau K_2(\tau) + K_3(\tau)). \end{aligned} \right\} \quad (67,18)$$

¹ In praxi kann man für Hundert und evtl. mehr Angström mit *einem* Paar von Gewichtsfunktionen auskommen.

² Das heißt wir betrachten die Strahlungsintensität am Sternrand $\vartheta = \pi/2$ als Einheit.

Damit berechnen wir schließlich nach (67,13 u. 14) die Gewichtsfunktionen für

$$\text{Absorption: } G_1(\tau) = \beta_0 K_3(\tau) \cdot \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\beta_0}{3} \right\}^{-1} \quad (67,19)$$

$$\text{und Streuung: } G_2(\tau) = \left\{ \frac{K_3^2(\tau)}{2} + \beta_0 K_3(\tau) \left(1 - \frac{K_2(\tau)}{2} \right) \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\beta_0}{3} \right\}^{-1} \quad (67,20)$$

Fig. 81 gibt für $\beta_0 = 2,5$ (entsprechend z. B. $\lambda 4430 \text{ \AA}$ bei Sonnentemperatur $T_0 = 4830$ und $\kappa/\bar{\kappa} = 1$) eine graphische Darstellung der beiden Gewichtsfunktionen zur Berechnung der Linienflügel im Strahlungsstrom, sie bestätigt die schon aus dem Vergleich vom S.S.- und M.E.-Modell gewonnene Einsicht, daß es für die Berechnung von R praktisch belanglos ist, ob man es mit „Absorption“ oder „Streuung“ zu tun hat. Daß es jedoch unrichtig wäre, hieraus auf die Unwichtigkeit der Reemission überhaupt zu schließen, zeigt die dritte Kurve der Fig. 81; sie ist — wie hier nicht weiter ausgeführt werden soll — für den Fall verschwindender selektiver Reemission berechnet.

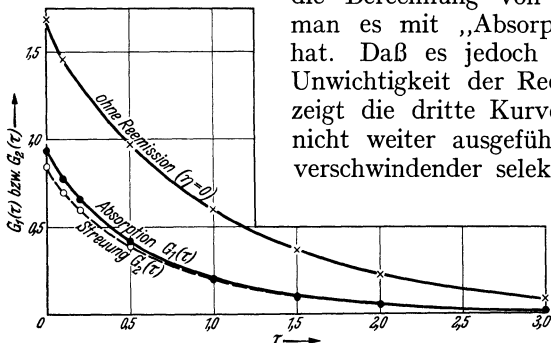


Fig. 81. Gewichtsfunktionen zur Berechnung von Linienintensitäten im Spektrum des Strahlungsstromes. Für $\beta_0 = 2,5$.

Aber auch im einzelnen können wir — nun von höherer Warte aus — die für die Linienflügel spezieller Modelle abgeleiteten Formeln leicht wiederfinden:

a) Beim S.S.-Modell ist selektiv absorbierendes und streuendes Material nur an der Oberfläche $\tau = 0$ vorhanden¹. Wir können also über diese Schicht integrieren, deren optische Dicke für selektive Absorption τ_1 und für Streuung s_1 sei. Dann erhalten wir nach (67,12)

$$R_{SS} = G_1(0) \cdot \tau_1 + G_2(0) \cdot s_1 \quad (67,21)$$

oder mit (67,19 u. 20)

$$R_{SS} = \left\{ \beta_0 \cdot \tau_1 + \left(1 + \frac{\beta_0}{2} \right) \cdot s_1 \right\} \cdot \left\{ 1 + \frac{2}{3} \beta_0 \right\}^{-1}, \quad (67,22)$$

was mit den direkt aus der SCHWARZSCHILD'Schen Differentialgleichung gefundenen Ausdrücken (64,27) bzw. (64,18) im ersteren Falle exakt, im zweiten mit aller wünschenswerten Genauigkeit übereinstimmt.

b) Beim M.E.-Modell ist $\kappa_\nu/\bar{\kappa}$ bzw. $\sigma_\nu/\bar{\sigma}$ von τ unabhängig; man kann (67,12) also schreiben:

$$R_{ME} = \frac{\kappa_\nu}{\bar{\kappa}} \int_0^\infty G_1(\tau) d\tau + \frac{\sigma_\nu}{\bar{\sigma}} \int_0^\infty G_2(\tau) d\tau. \quad (67,23)$$

Das 1. Integral wird mit (67,19) und (B, 10 u. 9) gleich $\left(1 + \frac{3}{2} \beta_0 \right)^{-1}$, was mit (65,29) exakt übereinstimmt. Das 2. Integral muß numerisch berechnet werden; auch hier ergibt sich gute Anpassung an die frühere Gl. (65,26).

Die große Bedeutung der Gl. (67,12 mit 19 u. 20) liegt aber natürlich nicht in der Bestätigung früherer Ergebnisse, sondern darin, daß man die Berechnung der Linienflügel, ohne vorher irgendwelche spezielle Modellannahmen machen zu müssen, auf eine einfache Quadratur zurückführen kann. Braucht man die ganze Linienkontur, so wird man gesondert die Restintensität berechnen und dann die Interpolationsformel (66,7) anwenden.

¹ Man könnte zunächst denken, daß diese Annahme den mathematischen Voraussetzungen dieses Abschnittes zuwiderlaufe. Eine genauere Überlegung zeigt jedoch, daß dies nicht der Fall ist.

Vergleicht man unsere Fig. 81, die den Beitrag verschieden tiefer Zonen, einer Sternatmosphäre zu der *Flügel* der FRAUNHOFER-Linien beurteilen läßt, mit der entsprechenden Fig. 44 (insbesondere der mittleren Kurve) für das *kontinuierliche Spektrum*, so zeigt sich, daß Linien und Kontinuum im großen und ganzen in *denselben* Schichten entstehen, sofern nicht κ_v/κ bzw. σ_v/κ mit τ stark variieren (was meist nicht der Fall ist). Die altgewohnte Einteilung der Sternatmosphären in Photosphäre und umkehrende Schicht ist also heute nicht mehr berechtigt, wir sprechen daher meist einfach von *Sternatmosphären*.

Nachdem wir die Theorie der Linienflügel für den Strahlungsstrom in aller nur wünschenswerten Allgemeinheit entwickelt haben, wenden wir uns der Berechnung der Strahlungsintensität $I(0, \vartheta) = I(\vartheta)$ zu, d. h. der *Mitte-Rand-Variation* der Linienflügel.

Durch Einsetzen der Näherungslösung (67,3) für $J(z)$ in (63,9) erhält man zunächst

$$I(\vartheta) = \int_0^\infty \frac{\kappa + \kappa_v}{\kappa + \kappa_v + \sigma_v} E(z) \cdot e^{-z \sec \vartheta} dz \sec \vartheta + \int_0^\infty \frac{\sigma_v}{2\kappa} e^{-z \sec \vartheta} dz \sec \vartheta \int_0^\infty E(x) K(|z-x|) dx. \quad (67,24)$$

Berücksichtigt man wieder, daß $\frac{\kappa + \kappa_v}{\kappa + \kappa_v + \sigma_v} dz = d\tau + ds_v$ ist und entwickelt das $e^{-z \sec \vartheta}$, so wird $-\Psi(\tau)$ ist durch (67,18) definiert —:

$$I(\vartheta) = \left. \begin{aligned} & \int_0^\infty E(\tau) e^{-\tau \sec \vartheta} d\tau \sec \vartheta - \int_0^\infty (\tau_v + s_v) E(\tau) e^{-\tau \sec \vartheta} d\tau \sec^2 \vartheta \\ & + \int_0^\infty E(\tau) e^{-\tau \sec \vartheta} d\tau_v \sec \vartheta + \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-\tau \sec \vartheta} ds_v \sec \vartheta \cdot \Psi(\tau). \end{aligned} \right\} \quad (67,25)$$

Setzen wir weiterhin analog (67,7)

$$\Phi^*(\tau) = \int_\tau^\infty E(\tau) e^{-\tau \sec \vartheta} \cdot \sec \vartheta d\tau, \quad (67,26)$$

so ergibt eine partielle Integration z. B.

$$\int_0^\infty s_v E(\tau) e^{-\tau \sec \vartheta} d\tau \cdot \sec \vartheta = -s_v \cdot \Phi^*(\tau) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \Phi^*(\tau) ds_v, \quad (67,27)$$

und es wird insgesamt:

$$I(\vartheta) = \left. \begin{aligned} & \int_0^\infty E(\tau) e^{-\tau \sec \vartheta} d\tau \sec \vartheta - \int_0^\infty \{\Phi^*(\tau) - E(\tau) e^{-\tau \sec \vartheta}\} d\tau_v \sec \vartheta \\ & - \int_0^\infty \left\{ \Phi^*(\tau) - \frac{1}{2} e^{-\tau \sec \vartheta} \cdot \Psi(\tau) \right\} ds_v \cdot \sec \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (67,28)$$

Benützen wir für $E(\tau)$ nunmehr wieder die lineare Näherung $1 + \beta_0 \tau$, so wird

$$\Phi^*(\tau) = (1 + \beta_0 \tau + \beta_0 \cos \vartheta) \cdot e^{-\tau \sec \vartheta}. \quad (67,29)$$

Das erste Integral rechts ist die Intensität des ungestörten kontinuierlichen Spektrums $I_0(\vartheta) = \Phi^*(0)$. Schreiben wir schließlich die *Tiefe der Linienflügel* analog (67,12) in der Form

$$r = \frac{I_0(\vartheta) - I(\vartheta)}{I_0(\vartheta)} = \left. \begin{aligned} & \int_0^\infty g_1(\tau, \vartheta) d\tau_v + \int_0^\infty g_2(\tau, \vartheta) ds_v \\ & = \int_0^\infty \frac{\kappa_v}{\kappa} \cdot g_1(\tau, \vartheta) d\tau + \int_0^\infty \frac{\sigma_v}{\kappa} g_2(\tau, \vartheta) d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (67,30)$$

so erhalten wir die *Gewichtsfunktionen* für

Absorption:
$$g_1(\tau, \vartheta) = \frac{\beta_0}{1 + \beta_0 \cos \vartheta} \cdot e^{-\tau \sec \vartheta} \tag{67,31}$$

und Streuung:
$$g_2(\tau, \vartheta) = \{1 + \beta_0 \cos \vartheta\}^{-1} \times \left\{ \frac{K_2(\tau)}{2} + \beta_0 \left(\cos \vartheta - \frac{K_3(\tau)}{2} \right) \right\} \sec \vartheta e^{-\tau \sec \vartheta} \tag{67,32}$$

als deren Mittelwerte über ϑ wir G_1 und G_2 auffassen können.

Graphische Darstellungen — wieder mit $\beta_0 = 2,5$ — gibt die folgende Fig. 82 für $\cos \vartheta = 1$ (⊙-Mitte) und¹ $\cos \vartheta = 0,2$ (⊙-Rand). Wieder zeigt sich, daß der Unterschied von Streuung und Absorption ziemlich klein ist. Bei kleinen τ liegen die Kurven für $\cos \vartheta = 0,2$ über denen für $\cos \vartheta = 1$, später darunter. Ist also das selektiv absorbierende und streuende Material an der Oberfläche angehäuft, so *wächst* die Intensität der Linienflügel entsprechend $g_{1,2}(0, \vartheta)$ nach dem Sonnenrand. Ist dagegen σ_ν/κ und κ_ν/κ von τ unabhängig, so kommt

es auf das $\int_0^\infty g(\tau, \vartheta) d\tau$, d. h. auf die Flächen unter den Kurven in Fig. 82 an. Die Flügel werden also, wie man der Figur entnimmt, nach dem Sonnenrande zu *schwächer*.

Beide Befunde passen ausgezeichnet zu den in Fig. 80 übersichtlich zusammengestellten Ergebnissen für das S.S.- und M.E.-Modell. Auch in quantitativer Hinsicht ist — wie man in derselben Weise wie beim Strahlungsstrom leicht nachrechnet — die Übereinstimmung mit den direkt aus der Differentialgleichung erhaltenen Näherungsformeln ausgezeichnet, solange $\cos \vartheta > 0,2$ bleibt. Wie aus Fig. 82 direkt hervorgeht, gibt die *Messung des Mitte-Rand-Kontrastes* in den Linienflügeln — nahezu *unabhängig* von näherer Kenntnis der Art des Strahlungsaustausches — ein Mittel an die Hand, um die Abhängigkeit des $\frac{\kappa_\nu + \sigma_\nu}{\kappa}$ von τ zu erfassen, d.h. die *Schichtung* der Atmosphären zu studieren.

Um die Anwendung dieser reichlich allgemeinen Entwicklungen zu erläutern, wenden wir sie auf die Mg-Linie² $\lambda 5183,61$; $3^3 P_2 - 4^3 S_1$ und ihre Mitte-Rand-Variation auf der Sonne an:

Da die Linie eine ziemlich kleine Restintensität hat, so dürfen wir mit genügender Genauigkeit die Formeln für „reine Streuung“ anwenden. Wir ermitteln also zuerst σ_ν/κ in Abhängigkeit von der optischen Tiefe τ für kontinuierliche Absorption (da in der Sonne κ nur sehr wenig von ν abhängt, können wir die Unterscheidung von κ und $\bar{\kappa}$ in diesem speziellen Falle ignorieren).

Bezeichnen wir die Häufigkeit der Mg-Atome (im Sinne der Tabelle 20 bezogen auf 100 Metallatome) mit ϵ , so ist die Gesamtzahl aller Mg-Atome + Ionen pro Gramm „Sternmaterie“ nach Abschn. 24 gleich

$$\frac{\epsilon}{1470 \cdot \mu_0 m_H} = \frac{\epsilon}{1470 \cdot 2,80 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24}} \tag{67,33}$$

Den Bruchteile $1 - x = \frac{n_{e,0}}{n_{0,0} + n_{1,0}}$ *neutraler* Mg-Atome berechnen wir nach der

¹ Für $\cos \vartheta = 0$ konvergieren die Reihenentwicklungen nicht mehr.

² Die anderen Linien des Triplets gehen aus dieser durch Veränderung des λ -Maßstabes im Verhältnis $\sqrt{5} : \sqrt{3} : \sqrt{1}$ hervor, brauchen also nicht besonders behandelt zu werden.

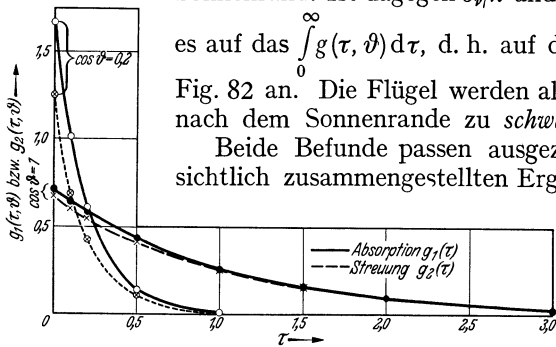


Fig. 82. Gewichtsfunktionen zur Berechnung der Intensität der Linienflügel in Abhängigkeit von $\cos \vartheta$.

SAHASchen Gleichung (Kap. IV). Die Ionisierungsspannung ist nach Tabelle 14 gleich 7,61 V; die statistischen Gewichte der Grundterme von Atom bzw. Ion sind 1 und 2. Den Bruchteil der neutralen Atome im 3^3P -Term (die Teilniveaus mit $j=0, 1, 2$ zunächst zusammengefaßt) ergibt die BOLTZMANNsche Formel mit den Daten: Anregungsspannung 2,70 V; statistisches Gewicht des angeregten Termes gleich $1 + 3 + 5 = 9$; des SINGULETT-Grundtermes gleich 1.

Die Temperaturen T , bzw. die Hilfsgröße $\Theta = \frac{5040}{T}$, und die Elektronendrucke P_e [Bar] sind für einige Werte der optischen Tiefe τ nach den Berechnungen von Tabelle 36, Kap. VII in der folgenden Tabelle 51 nochmals zusammengestellt. Dann folgt der $\log_{10}(1-x)$ und der \log_{10} des Anregungsfaktors $\frac{n_{0,3P}}{n_{0,0}} = 9 \cdot 10^{-2,70 \cdot \Theta}$. Die nächste Spalte enthält den \log_{10} des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten pro Gramm Sternmaterie, wieder nach Tabelle 36, Spalte 8. Dann kommt das für die Berechnung von (67,30) entscheidende Produkt¹

$$F = \frac{n_{0,3P}}{n_{0,0}} \cdot \frac{n_{0,0}}{n_{0,0} + n_{1,0}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{n_{0,3P}}{n_{0,0}} \cdot \frac{1-x}{x} \quad (67,34)$$

Um σ_v/κ zu erhalten, muß dieser Faktor noch mit (67,33) und dem Streukoeffizienten pro Atom im 3^3P -Term, also einer im Falle reiner Strahlungsdämpfung von τ unabhängigen Größe, multipliziert werden.

Tabelle 51. Berechnung der Stärke und Mitte-Rand-Variation der Mg-Linie λ 5183,6 im Sonnenspektrum mit Hilfe der Näherungslösung der SCHWARZ-

$$\text{SCHILDSchen Integralgleichung } r = \int \frac{\sigma_v}{\kappa} \cdot g_2(\tau, \vartheta) \cdot d\tau.$$

τ	$\Theta = \frac{5040}{T}$	$\log P_e$	$-\log \frac{1}{(1-x)}$	$-\log \frac{n_{0,3P}}{n_{0,0}}$	$\log \bar{\kappa}$	$-\log F$	$\cos \vartheta = 1$		$\cos \vartheta = 0,391$		$\cos \vartheta = 0,238$	
							$-\log g_2$	$F \cdot g_2 \cdot 10^3$	$-\log g_2$	$F \cdot g_2 \cdot 10^3$	$-\log g_2$	$F \cdot g_2 \cdot 10^3$
0,01	1,037	0,77	0,76	1,85	0,04	2,65	0,18	1,48	-0,03	2,40	-0,09	2,75
0,116	1,0	1,34	0,56	1,75	0,41	2,72	0,24	1,10	+0,11	1,48	+0,13	1,41
0,53	0,9	1,84	0,86	1,48	0,86	3,20	0,42	0,24	0,56	0,174	0,88	0,083
1,25	0,8	2,19	1,36	1,21	1,15	3,72	0,72	0,036	1,34	0,009	2,17	0,001
2,62	0,7	2,45	1,98	0,94	1,23	4,15	1,31	0,004				
$\int_0^\infty g_2(\tau, \vartheta) \cdot F(\tau) \cdot d\tau \cdot 10^3 =$								0,46 ₂		0,50 ₈		0,48 ₈

Bezeichnen wir weiterhin die Oszillatorenstärke der Linie mit f , so ist der Streukoeffizient pro Atom im 3^3P -Term (von diesen sitzen 5/9 im Ausgangszustand der betrachteten Linie; die f -Werte für die 3 Linien des Triplets sind nach den Regeln von Abschn. 50 einander gleich) nach (64,14), wenn $\Delta\lambda$ in Å gemessen wird:

$$16,5 \cdot 10^{-26} \cdot \frac{5180^2}{\Delta\lambda^2} \cdot \frac{5}{9} f \cdot \frac{\gamma}{\gamma_{kl}} \quad (67,35)$$

Ist γ — wie wir zunächst wieder ohne vollständige Begründung annehmen wollen — durch *Strahlungsdämpfung* bedingt, so müssen wir es, da der 3^3P -Term metastabil ist, allein dem 4^3S_1 -Term zuschreiben. Dann gilt nach den bekannten Beziehungen zwischen den Übergangswahrscheinlichkeiten, Oszillatorenstärken usw. (der Index n bezieht sich auf den 3^3P -Term, m auf den 4^3S -Term):

$$\frac{\gamma}{\gamma_{kl}} = \frac{A_{nm}}{\gamma_{kl}} = \frac{3g_n}{g_m} \cdot f_{mn} = 9 \cdot f \quad (67,36)$$

¹ Vernachlässigt haben wir im Schlußeffekt nur die höheren Glieder der Zustandssumme des Mg-Ions, was keinen merklichen Fehler verursacht.

Insgesamt wird also schließlich für die Linie λ 5183,61 nach (67,33—36)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_v}{\kappa} &= F \cdot \frac{\varepsilon}{1470 \cdot 2,80 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \cdot 16,5 \cdot 10^{-26} \cdot \frac{5180^2}{\Delta \lambda^2} \cdot 5 f^2} \\ \frac{\sigma_v}{\kappa} &= F(\tau) \cdot 32,4 \cdot 10^3 \cdot \varepsilon \cdot f^2 \cdot \frac{1}{\Delta \lambda^2} \end{aligned} \right\} \quad (67,37)$$

Nunmehr wenden wir uns der Berechnung der *Gewichtsfunktion* $g_2(\tau, \vartheta)$ nach (67,30 u. 32) zu:

Die Randverdunkelungskonstante ist für λ 5184 und $T_0 = 4830^\circ$ gleich $\beta_0 = \frac{3}{8} \cdot \frac{c_2}{\lambda T_0} = 2,15$. H. H. PLASKETT [1143] fand unmittelbar aus den ABBOT-
schen Messungen 2,02. Die Fehler der linearen Näherung sind also nicht sehr groß; wir rechnen im folgenden mit

$$\beta_0 = 2,1. \quad (67,38)$$

Die Werte von $\log g_2$ sind nach (67,32) in Tabelle 51 für die von H. H. PLASKETT untersuchten Stellen der Sonnenscheibe berechnet¹: $\cos \vartheta = 1$ (\ominus -Mitte), 0,391 und 0,238 (\ominus -Rand). Dann folgen die $F(\tau) \cdot g_2(\tau, \vartheta)$ und darunter ihre mit dem Planimeter bestimmten Integrale. Multipliziert man diese nach (67,37) mit $3,24 \cdot 10^3 \cdot \varepsilon \cdot f^2$, so erhält man die in Abschn. 61 nach M. MINNAERT empirisch bestimmten Konstanten c , das rationale Maß für die Stärke der Linienflügel.

Für die Mitte der Sonnenscheibe ($\cos \vartheta = 1$) finden wir nach PLASKETT, CHERRINGTON und MINNAERT $c = 0,34$. Es ist also (N.B.: bei Strahlungsdämpfung)

$$3,24 \cdot 10^3 \cdot \varepsilon \cdot f^2 \cdot 0,462 \cdot 10^{-3} = 0,34$$

oder $\varepsilon \cdot f^2 = 0,23$. Da die Oszillatorenstärke f der grünen Mg-Linien nicht bekannt ist, wollen wir sie probeweise bestimmen, indem wir von der in Tabelle 20 angenommenen Häufigkeit $\varepsilon = 7,7$ ausgehen. Dann erhalten wir $f = 0,17$, einen nach dem f -Summensatz noch plausiblen Wert. (Das Verhältnis der Strahlungsdämpfungskonstante zu ihrem klassischen Wert würde damit $\gamma/\gamma_{k1} = 1,6$.)

Die von der Kenntnis des ε, f usw. unabhängige Mitte-Rand-Variation der Linienflügel vergleichen wir mit den Beobachtungen, indem wir das c für \ominus -Mitte als Einheit wählen:

		$\cos \vartheta = 1$	0,391	0,320	0,238
$\frac{c}{c_{\text{Mitte}}}$	{	Berechnet (Tabelle 51)	1	1,1	1,16
		Beobachtet nach H. H. PLASKETT	1	0,87	0,75
		Beobachtet nach E. CHERRINGTON	1		0,97

Da die Übereinstimmung der Messungen untereinander noch sehr zu wünschen übrig läßt, so können wir aus diesem Vergleich noch keine weitergehenden Schlüsse ziehen, sondern legen vorerst den Nachdruck auf die gemeinsame Aussage von Theorie und Beobachtung, daß das Verhalten unserer Mg-Linie auf eine Schichtung schließen läßt, die zwischen S.S.- und M.E.-Modell etwa die Mitte hält. Man überzeugt sich ferner leicht, daß schon eine sehr geringfügige Abänderung der Tiefenabhängigkeit der Ionisation und Anregung oder des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten die Zunahme des c nach dem \ominus -Rand in eine Abnahme verwandeln würde².

Wenn auch unsere Diskussion des grünen Mg-Tripletts noch zu keinen sehr weitgehenden astrophysikalischen Folgerungen geführt hat, so dürfte sie doch

¹ Man berechnet zweckmäßig g_2 für $\tau = 0, 0,1, 0,2, 0,5, 1 \dots$. Rekursionsformeln für die K -Funktionen in Anh. B. Tabellen der Integraleponentialfunktion bei JAHNKE-EMDE. Schließlich interpoliere man $\log g_2(\tau, \vartheta)$ nach τ .

² Bei kleinen $\cos \vartheta$ muß man auch an die Ungenauigkeit unserer Näherungslösung der Integralgleichung des Strahlungsgleichgewichtes denken. Vgl. A. UNSÖLD [1215].

einerseits dem Leser das Eindringen in die Theorie der Linienkonturen erleichtern und andererseits zeigen, daß die Untersuchung der Mitte-Rand-Variation der FRAUNHOFER-Linien auf der Sonne dem Beobachter wie dem Theoretiker ein ebenso vielversprechendes wie schwieriges Arbeitsgebiet eröffnet. Vgl. insbesondere die nach Abschluß dieses Kapitels erschienene wichtige Arbeit von M. MINNAERT und J. HOUTGAST [1206].

68. Berechnung von Linienstärken. „Anzahl der Atome über 1 cm^2 der Photosphäre“. Wirksame Tiefe τ_0 der Atmosphäre.

Die beste Methode zur Berechnung der Intensitätsverteilung in den FRAUNHOFER-Linien der Sternatmosphären dürfte zur Zeit eine Verbindung der im vorhergehenden Abschnitt entwickelten Näherungslösung — ergänzt durch die Interpolationsformel (66,7) und die noch zu entwickelnde Theorie der Restintensitäten — mit der in Abschn. 39 dargestellten Methode zur Berechnung der Druck- und Temperaturschichtung sein.

Aber schon das im vorhergehenden Abschnitt durchgerechnete Beispiel der grünen Mg-Linien im Sonnenspektrum zeigt, daß es wünschenswert wäre, daneben ein einfacheres, wenn auch nicht ganz so genaues Rechenverfahren zu entwickeln.

Wir haben schon früher bemerkt, daß die Veränderungen des Absorptionskoeffizienten, der Ionisation usw., die der mit der Tiefe in der Atmosphäre anwachsende Druck hervorrufen würde, größtenteils kompensiert werden durch das Ansteigen der Temperatur in den tieferen Schichten. Es dürfte also für die Zwecke einer möglichst übersichtlichen Näherungstheorie am besten sein, mit *konstanten Mittelwerten* von Temperatur, Druck, Absorptionskoeffizient usw. für die ganze Atmosphäre zu rechnen und damit direkt an Abschn. 38 anzuknüpfen. Hinsichtlich der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes werden wir auf das M.E.-Modell zurückgeführt; jedoch mit einer wichtigen Ergänzung: Wir können [1216] nunmehr ermitteln, *wie* die Mittelwerte von σ_ν/κ , κ_ν/κ usw. zu bilden sind.

Die Intensitätsverteilung der Linienflügel im Spektrum des Strahlungsstromes wird nach (67,12) — zunächst noch ganz allgemein — dargestellt durch

$$R = \frac{F_0 - F}{F_0} = \int_0^\infty \frac{\kappa_\nu}{\kappa} G_1(\tau) d\tau + \int_0^\infty \frac{\sigma_\nu}{\kappa} G_2(\tau) d\tau, \quad (68,1)$$

κ_ν , σ_ν und κ sollen dabei auf 1 g Sternmaterie bezogen sein (es kommt ja nur auf ihre Verhältnisse an!). Wollen wir — was zweckmäßiger ist — κ_ν und σ_ν pro Atom (Index A) rechnen, so wird

$$\kappa_\nu = \kappa_{\nu,A} \cdot \frac{\zeta}{\mu_0 m_H} \quad \text{und} \quad \sigma_\nu = \sigma_{\nu,A} \cdot \frac{\zeta}{\mu_0 m_H}. \quad (68,2)$$

Dabei bedeutet ζ das Verhältnis der Anzahl der Atome, welche an der Bildung der betreffenden Linie mitwirken, zur Gesamtzahl aller Atome. ζ kann also als Funktion von Druck und Temperatur nach den Formeln von BOLTZMANN und SAHA berechnet werden, wenn die Zusammensetzung der Atmosphäre als bekannt angenommen wird. $\mu_0 = 2,80$ ist wieder das mittlere Atomgewicht der unionisierten Sternmaterie; m_H die Masse der Atomgewichtseinheit.

Damit wird

$$R = \int_0^\infty \kappa_{\nu,A} \frac{\zeta}{\mu_0 m_H \cdot \kappa} G_1(\tau) d\tau + \int_0^\infty \sigma_{\nu,A} \cdot \frac{\zeta}{\mu_0 m_H \cdot \kappa} G_2(\tau) d\tau \quad (68,3)$$

und wenn wir nunmehr für die vorn stehenden Faktoren konstante Mittelwerte annehmen

$$R = \frac{\zeta}{\mu_0 m_H \kappa} \left\{ \kappa_{v,A} \int_0^\infty G_1(\tau) d\tau + \sigma_{v,A} \int_0^\infty G_2(\tau) d\tau \right\} \quad (68,4)$$

Da — wie wir sahen — die Gewichtsfunktionen G_1 und G_2 sich nur wenig voneinander unterscheiden, so dürfen wir im folgenden mit einer sinngemäß mittleren Funktion $G(\tau)$ rechnen¹.

Dann hat (68,4) eine schon aus Abschn. 66 geläufige anschauliche Bedeutung: Die Linienflügel — und damit der Hauptteil der Linien — unserer Sternatmosphäre entsprechen der Absorption und Streuung in einem Absorptionsrohr, dessen optische Dicke für kontinuierliche Absorption in der Nähe der Linie den Wert

$$\tau_0 = \int_0^\infty G(\tau) d\tau \quad (68,5)$$

besitzt. Den Wert von τ_0 können wir durch Ausführung dieser Integration oder — was auf dasselbe herauskommt — durch Zurückgreifen auf (66,5) ermitteln; es war für

$$\left. \begin{array}{l} \text{Streuung:} \\ \text{Absorption:} \end{array} \right\} \tau_0 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}} - \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{\beta_0}} \right\} \quad (68,6)$$

$$\tau_0 = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{\beta_0}} \quad \text{bzw. etwas genauer} \quad \frac{1}{1 + \frac{3}{2\beta_0}} .$$

Die Zahlenwerte entfernen sich nach Tabelle 50 nie weit von 0,5 bis 0,6.

Die Anzahl der wirksamen absorbierenden und streuenden Atome in einer Säule von 1 cm² Querschnitt ergibt sich wieder zu

$$NH = \frac{\zeta}{\mu_0 m_H} \cdot \frac{\tau_0}{\kappa} . \quad (68,7)$$

Die Anzahl *aller* Atome in einer solchen Säule, ein sehr anschauliches Maß für die wirksame Dicke einer Atmosphäre, ist entsprechend

$$\bar{N}H = \frac{1}{\mu_0 m_H} \cdot \frac{\tau_0}{\kappa} . \quad (68,8)$$

Nunmehr muß noch die wichtige Frage geklärt werden, wie die im vorhergehenden benützten Mittelwerte² von $(\kappa_v + \sigma_v) \cdot \frac{\zeta}{\mu_0 m_H \kappa} = w(\tau)$ (wie wir es vorübergehend nennen wollen) zu bilden sind?

Offenbar müssen wir das w einer so gewählten optischen Tiefe $\tau = \tau'$ nehmen, daß

$$w(\tau') \int_0^\infty G(\tau) d\tau = \int_0^\infty w(\tau) \cdot G(\tau) d\tau . \quad (68,9)$$

Stellen wir nun die Tiefenabhängigkeit von $w(\tau)$ näherungsweise dar durch

$$w(\tau) = w(\tau') + \left(\frac{dw}{d\tau} \right)_{\tau=\tau'} \cdot (\tau - \tau') , \quad (68,10)$$

¹ Diese Vereinfachung treffen wir in erster Linie, um die folgenden Formulierungen nicht zu schwerfällig zu gestalten. Streng genommen wäre $G(\tau) = \frac{\kappa_v}{\kappa_v + \sigma_v} \cdot G_1(\tau) + \frac{\sigma_v}{\kappa_v + \sigma_v} \cdot G_2(\tau)$ zu setzen.

² Anm. b. d. Korr.: Hierzu auch B. STRÖMGREN, Ap. J. **86**, 1 (1937).

so geht (68,9) über in

$$\tau' = \frac{\int_0^{\infty} \tau G(\tau) d\tau}{\int_0^{\infty} G(\tau) d\tau}. \quad (68,11)$$

Benützt man die für reine Absorption gültige Gewichtsfunktion (67,19), d. h. $G(\tau) \sim K_3(\tau)$, so erhält man mit Hilfe der Formeln von Anh. B unabhängig von β_0 den Mittelwert $\tau' = 3/4$. Die entsprechenden Integrale über die Streuungsgewichtsfunktion müßten graphisch ausgewertet werden. Aus Fig. 81 sieht man, daß τ' in diesem Falle bei $\beta_0 = 2,5$ ein wenig kleiner würde. Wie man aus (68,9—11) erkennt, hat die ganze Mittelbildung nur Sinn, wenn die τ -Abhängigkeit von w nicht zu stark ist, insbesondere wenn $w(\tau)$ nicht stark mit τ anwächst. Da κ mit τ im allgemeinen anwächst und ζ für die meisten Linien mit der Tiefe abnimmt oder jedenfalls nicht stärker anwächst als κ , so nimmt $w(\tau)$ mit wachsendem τ meist ab. Wir werden dem Rechnung tragen, indem wir für τ' nicht den strikte nach (68,11) berechneten Wert, sondern das etwas kleinere τ_0 von (68,6) benützen^{1, 2}.

Für die folgenden numerischen Rechnungen benützen wir — wie gesagt kommt es auf die kleinen in Frage stehenden Unterschiede nicht an — die einfache Formel:

$$\tau_0 = \tau' = \frac{1}{1 + \frac{3}{2\beta_0}}. \quad (68,12)$$

Um die Temperatur in dieser Tiefe berechnen zu können, ermitteln wir noch die entsprechende optische Tiefe für die Gesamtstrahlung

$$\tau_0 = \frac{\bar{\kappa}}{\kappa} \cdot \tau_0. \quad (68,13)$$

¹ Bei dieser Gelegenheit müssen wir auf einige in der Literatur verbreitete Mißverständnisse hinweisen, die im Anschluß an die in Abschn. 66 besprochenen Untersuchungen MILNES entstanden sind:

a) Die optische Tiefe τ_0 hat *nicht* die Bedeutung, daß tiefere Schichten nicht mehr zur Bildung der Linien beitragen. τ_0 — und nicht ein Wert $\sim \frac{\tau_0}{2}$, wie vielfach angenommen wird — bildet vielmehr den „Schwerpunkt“ der Atmosphäre.

b) Es ist so gut wie wertlos — wie dies vielfach geschieht — bei der Berechnung des Ionisationsgrades oder des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten die Änderung von P_0 , nicht aber die von T zu berücksichtigen. Ein einfaches Rechenbeispiel zeigt, daß beide Effekte fast immer von derselben Größenordnung sind.

c) Wenn man mit dem M.E.-Modell rechnet, d. h. σ_p/κ bzw. κ_p/κ als konstant betrachtet, so erscheint es sinngemäß, dieselbe Annahme bezüglich des Ionisationsgrades usw. zu machen. Berücksichtigt man aber die Schichtungseffekte bei der Berechnung der Ionisation usw., so muß man auch den Formelapparat der Strahlungsgleichgewichtstheorie entsprechend verfeinern.

² Die in Abschn. 68 dargestellte Näherungstheorie kann aufgefaßt werden als eine Verallgemeinerung der in Kap. IV wiedergegebenen Theorie von FOWLER und MILNE.

Unsere Rechnungen sind genauer und vor allem viel einfacher als die vielzitierte „generalised ionization theory“ von MILNE. Daß die MILNESchen Untersuchungen die Klärung dieses ganzen Problemkreises erst angeregt haben, ist selbstverständlich ihr bleibendes Verdienst.

Zu einer im *Prinzip* der unseren ähnlichen Darstellung ist H. N. RUSSELL [1209] gelangt. Er rechnet jedoch mit einer viel größeren Wasserstoffhäufigkeit, so daß seine *Zahlenwerte* sich von unseren zum Teil erheblich unterscheiden. Ein Vergleich der RUSSELLschen Rechnungen mit unseren ist — wie schon bemerkt wurde — insofern interessant, als er erkennen läßt, welche Züge der Sternspektren durch Änderung der Wasserstoffhäufigkeit beeinflusst werden und welche nicht. Auf eine Unrichtigkeit in RUSSELLS Berechnung des Absorptionskoeffizienten haben wir in Abschn. 37 schon hingewiesen.

Dann ist die *mittlere Temperatur* T der Atmosphäre mit ihrer *effektiven Temperatur* T_e verknüpft durch

$$T^4 = \frac{1}{2} T_e^4 \left(1 + \frac{3}{2} \tau_0 \right). \quad (68,14)$$

Die Berechnung von κ/κ in (68,13), das für die in der Tiefe τ_0 geltenden Werte der Temperatur T und des Elektronendruckes P_e zu wählen ist, geschieht am einfachsten durch eine sukzessive Approximation. Bei der Berechnung von β_0 nach (65,4) geht man in derselben Weise vor; auch hier kommt es nicht auf große Genauigkeit an.

Die Berechnung des Gasdruckes P_g in der Tiefe τ_0 , also des mittleren Druckes der Atmosphäre, haben wir schon in Abschn. 38 ausgeführt; es ist nach (38,8)

$$P_g = \tau_0 \cdot \frac{g_{\text{eff}}}{\kappa}. \quad (68,15)$$

Der entsprechende Elektronendruck ergibt sich sofort aus Tabelle 22.

Damit haben wir alle Formeln, um das NH in Abhängigkeit von der effektiven Temperatur T_e und der Schwerebeschleunigung g an der Sternoberfläche zu berechnen. (Die Stärke bestimmter Linien erhält man aus NH dann einfach — wie gesagt — durch Hinzufügen des Faktors ζ , der die Häufigkeit, Anregungs- und Ionisationsverhältnisse (Kap. IV) berücksichtigt und der Absorptions- und Streukoeffizienten κ_ν und σ_ν , deren Theorie wir in Kap. VIII—X bereitgestellt haben). Wir führen diese Berechnung im Anschluß an [1216] durch für die Wellenlänge λ 4000. Die Zahlen können für das ganze photographische Gebiet benützt werden; erst jenseits der BALMER-Kante (bei heißen Sternen) und für $\lambda > 5000$ werden Änderungen nötig:

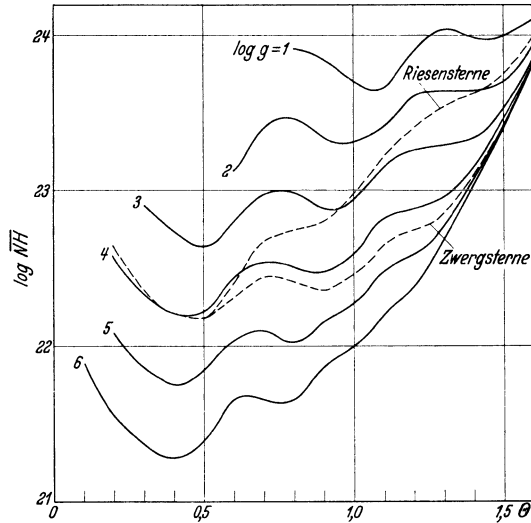


Fig. 83. Gesamtzahl NH aller absorbierenden Atome über 1 cm^2 der Sternoberfläche als Funktion der mittleren Temperatur der Atmosphäre ($\theta = 5040/T$) und der Schwerebeschleunigung g . Berechnet für $\lambda = 4000 \text{ \AA}$. Nach [1216].

Als unabhängige Variable wählen wir zunächst (vgl. Tabelle 52) die *mittlere Temperatur* T bzw. $\theta = 5040/T$. Da κ_e/κ vom Elektronendruck P_e wenig abhängt, können wir für $\theta < 0,8$ die in Tabelle 30 für $P_e = 100$ Bar tabulierten Werte benützen, für $\theta > 0,8$ greifen wir auf die — leider noch ziemlich unsichere — Fig. 50 („korr.“-Kurve) zurück. Damit haben wir β_0 und nach (68,12 u. 13) die mittleren Tiefen τ_0 und τ_0 . (68,14) endlich gibt die *effektive Temperatur* T_e bzw. $\theta_e = 5040/T_e$. Damit haben wir also die Verknüpfung von T_e — die in bekannter Weise durch den Gesamtstrahlungsstrom bedingt ist — mit der für alle Ionisationsberechnungen maßgebenden mittleren Temperatur T .

Nummehr führen wir als zweite unabhängige Variable wie in Kap. IV und VI den Elektronendruck P_e ein und berechnen nach Tabelle 29 den Opazitätskoeffizienten $\kappa(\theta, P_e)$. Dann gibt Gl. (68,8), da $\frac{\tau_0}{\kappa} = \frac{\tau_0}{\kappa}$ ist, die „Gesamtzahl aller Atome“ NH . Endlich entnehmen wir aus Tabelle 22 den zu θ und P_e gehörigen Gasdruck P_g und berechnen damit nach (68,15) rückwärts die effektive

Schwerebeschleunigung g_e an der Sternoberfläche. Addiert man hierzu die Strahlungsbeschleunigung g_r nach (38,5), so ergibt sich die eigentlich Schwerebeschleunigung g an der Sternoberfläche (Tabelle 52 unten).

In praxi wird man meist von der Temperatur der Atmosphäre $T = 5040/\Theta$ bzw. der effektiven Temperatur T_e (Umrechnung nach Tabelle 52) oder der Farbtemperatur T_F (Umrechnung nach Fig. 54; für die praktische Anwendung noch recht unsicher!) einerseits und der Schwerebeschleunigung g andererseits ausgehen. Wir haben daher

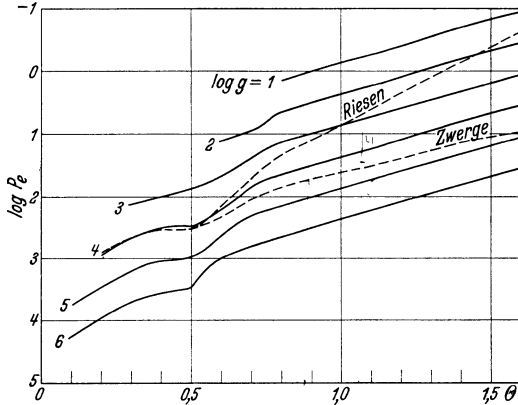


Fig. 84. Elektronendruck P_e [Bar] als Funktion von Θ und g .
Nach [1216].

in Fig. 83 und 84 $\log \bar{N}H$ und $\log P_e$ als Funktionen von Θ und g nach unseren Berechnungen [1216] graphisch dargestellt. Da die Unterschiede der drei erwähnten Temperaturen nie sehr groß sind, so können wir für die meisten Zwecke die g -Werte von Kap. III, Fig. 34 (nach RUSSELL) übernehmen. Der Riesen- und Zwergast (es handelt sich natürlich nur um Mittelwerte!) sind dementsprechend in unseren Figuren durch gestrichelte Linien angezeichnet.

Die praktische Anwendung der Fig. 83 und 84, welche die

Grundlage für ein Verständnis der Harvardklassifikation und der spektroskopischen Parallaxenmethoden geben sollten, stellen wir noch bis Kap. XV zurück und ergänzen zunächst die Theorie der FRAUNHOFER-Linien nach ihrer physikalischen Seite.

XIII. Kapitel.

Die Deutung der FRAUNHOFER-Linien. Beobachtung und Theorie.

69. Die „Wachstumskurve“. Berechnung der Gesamtabsorption von FRAUNHOFER-Linien mit Dopplereffekt und Dämpfung.

Das Grundproblem der Theorie der FRAUNHOFER-Linien besteht — wie wir mehrfach bemerkten — darin, den Übergang von der „Intensität“ der Linien zur „Anzahl der erzeugenden Atome“ zu finden.

Dieses Ziel versuchten 1928 H. N. RUSSELL, W. S. ADAMS und C. E. MOORE [1340] unter Umgehung weitläufiger theoretischer Betrachtungen folgendermaßen direkt zu erreichen: In den *Multipletts* sind uns von der Natur Liniengruppen gegeben, deren relative Übergangswahrscheinlichkeiten bekannt sind (Abschn. 50). Nimmt man nun an (wir werden nachher sehen, daß dies nur für die schwächeren Linien mit ROWLAND-Intensität $< \sim 3$ streng richtig ist), daß Vergrößerung der Anzahl absorbierender Atome oder Vergrößerung der Übergangswahrscheinlichkeit die Stärke der Linien in gleicher Weise beeinflußt, so gibt jedes Multiplett in seinem Bereich den Zusammenhang zwischen der in irgendeinem Maß gemessenen oder geschätzten Linienintensität und der wirklichen Atomzahl \mathfrak{N} . Nimmt man weiterhin an, daß dieser Zusammenhang für

alle Multipletts derselbe ist (wie sich zeigen wird, trifft auch dies nur unter der angegebenen Voraussetzung zu), so kann man die von verschiedenen Multipletts (Fe, Ti, Cr, Ni usw.) bestimmten Kurvenstücke durch Verschieben längs der $\log \mathcal{N}$ -Skala zusammenstücken. Auf diese Weise erhielten RUSSELL, ADAMS und MOORE Eichkurven, die gestattet, für jedes Wellenlängengebiet im Sonnenspektrum die ROWLAND-Intensitäten in „Atomzahlen“ überzuführen.

Die Bedeutung dieser Eichkurven und zugleich die Grenzen des Verfahrens wurden erkennbar, als M. MINNAERT und G. F. W. MULDER [1325] den Übergang von der willkürlichen ROWLANDSchen Intensitätsskala zu den „Gesamtabsorptionen“ oder „äquivalenten Linienbreiten“ vollzogen:

Die sog. „Wachstumskurven“, welche die Gesamtabsorption A_λ oder A_ω als Funktion der Anzahl absorbierender Atome $NH \times$ der Oszillatorenstärke f darstellen, sind nach MINNAERT und MULDER das Gegenstück der von R. LADENBURG und F. REICHE, W. SCHÜTZ, v. D. HELD u. a. gefundenen Zusammenhänge, die wir im Abschn. 44 (insbesondere Fig. 59) ausführlich dargestellt haben. Der Unterschied zwischen der in Abschn. 44 entwickelten Theorie der Gesamtabsorption von Linien, welche in einem Absorptionsrohr entstehen und ihrem astrophysikalischen Gegenstück besteht nur darin, daß wir an Stelle des einfachen Absorptionsgesetzes (44,37) $I_\nu = I_{\nu,0} e^{-k \cdot \mathcal{N} l}$ die im vorhergehenden Kapitel entwickelten Vorstellungen der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes anwenden müssen.

Da die Messung der wahren Intensitätsverteilung in FRAUNHOFER-Linien an den Spektrographen sehr hohe Anforderungen stellt, so muß man sich — besonders bei Sternspektren — meist mit der Messung von *Gesamtabsorptionen* begnügen. Dieses kommt daher eine besonders große Bedeutung zu (MINNAERT [814]) und wir wollen ihre theoretische Deutung — über die Originalarbeiten von M. MINNAERT, G. F. W. MULDER und C. SLOB [1325/6] noch etwas hinausgehend — auf möglichst breiter Basis entwickeln:

In Abschn. 67 und 68 haben wir gezeigt, daß bei *schwacher* Absorption, d. h. $R \lesssim 15\%$, eine beliebig geschichtete Sternatmosphäre wie ein Absorptionsrohr wirkt mit der optischen Dicke¹ (68,3)

$$x_\nu = (\kappa_{\nu,A} + \sigma_{\nu,A}) \int_0^\infty G(\tau) \cdot \frac{\zeta(\tau)}{\mu_0 m_H \cdot \kappa} d\tau = (\kappa_{\nu,A} + \sigma_{\nu,A}) NH, \quad (69,1)$$

wo

$$G(\tau) = \frac{\kappa_{\nu,A}}{\kappa_{\nu,A} + \sigma_{\nu,A}} G_1(\tau) + \frac{\sigma_{\nu,A}}{\kappa_{\nu,A} + \sigma_{\nu,A}} G_2(\tau) \quad (69,2)$$

die bekannte Gewichtsfunktion bedeutet. Da G_1 und G_2 sich nur wenig voneinander unterscheiden, so kann man G auch als ihren Mittelwert auffassen. Die übrigen Bezeichnungen sind wie in Abschn. 68:

$\sigma_{\nu,A}$ bzw. $\kappa_{\nu,A}$ = selektiver Streu- bzw. Absorptionskoeffizient pro Atom im Ausgangszustand der betreffenden Linie.

NH = „Zahl der absorbierenden bzw. streuenden Atome über 1 cm² der Sternoberfläche“.

$\zeta(\tau)$ = Bruchteil *aller* Atome, die sich in diesem Zustand befinden.

κ = kontinuierlicher Absorptionskoeffizient pro Gramm Sternmaterie für die Spektralgegend der Linie.

$d\tau = \kappa \cdot dt$, wo t die geometrische Tiefe in der Atmosphäre bedeutet.

μ_0 = mittleres Atomgewicht der unionisierten Sternmaterie.

m_H = Masse der Atomgewichtseinheit.

¹ Die Bezeichnung R verwenden wir *jetzt* für beliebige Tiefen in der Linie. Für $x_\nu \ll 1$ ist natürlich nach wie vor $x_\nu \approx R$.

So, wie sie dastehen, gelten die Gl. (69,1 u. 2) für das Spektrum des Strahlungsstromes $F_\nu(0)$, d. h. die „integrierte“ Strahlung der Sonne oder der Sterne. Faßt man dagegen eine bestimmte Stelle der Sonnenoberfläche ins Auge, d. h. beobachtet man die *Intensität* $I_\nu(0, \vartheta)$, so sind in unseren Gleichungen die $G(\tau)$ durch die entsprechenden $g(\tau, \vartheta)$ zu ersetzen.

Für *große* x_ν , d. h. in der Mitte starker Linien, nähert sich R nach (65,39 u. 41) einem Grenzwert R_c , der durch den $\lim_{x_\nu \rightarrow \infty} (x_\nu/\sigma_\nu)$ bestimmt ist. Dem Problem der Berechnung von x_ν/σ_ν werden wir uns erst im Abschn. 74 zuwenden, vorerst betrachten wir R_c als gegeben.

Eine Linienkontur, für welche einerseits bei $x_\nu \ll 1$ die Linientiefe $R = \frac{F_0 - F}{F_0} \approx x_\nu$ wird, andererseits bei $x_\nu \gg 1$ das $R \rightarrow R_c$ geht, läßt sich nach (66,7) und Fig. 79 stets mit genügender Genauigkeit darstellen durch die einfache Interpolationsformel

$$R = \frac{1}{\frac{1}{x_\nu} + \frac{1}{R_c}}. \quad (69,3)$$

Wenn wir nun die *Gesamtabsorption* von Linien berechnen, so unterscheiden sich also unsere Formeln von den in Abschn. 44 entwickelten nur darin, daß wir statt der für das Absorptionsrohr gültigen Formel $R = 1 - e^{-x_\nu}$ die für die Sternatmosphären gültige Gl. (69,3) anwenden¹.

Führen wir wieder die Bezeichnungen² von (44,6 u. 7) usw. ein, so wird

$$\frac{A_\omega}{2\Delta\omega_D} = \frac{A_\lambda}{2\Delta\lambda_D} = \int_0^\infty \frac{dv}{\frac{1}{x_\nu} + \frac{1}{R_c}} \quad (69,4)$$

oder

$$\frac{1}{R_c} \cdot \frac{A_\omega}{2\Delta\omega_D} = \int_0^\infty \frac{dv}{\frac{R_c}{x_\nu} + 1}. \quad (69,5)$$

Nach (44,9; 19 u. 20) ist weiterhin — alles in den Bezeichnungen von Abschn. 44; nur \mathfrak{N} haben wir durch Nf ersetzt —:

$$\frac{x_\nu}{R_c} = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}} \cdot e^2}{mc} \cdot \frac{1}{R_c} \cdot \frac{NHf}{\Delta\omega_D} \cdot \left\{ e^{-v^2} - \frac{a}{\sqrt{\pi}} [1 - 2vF(v)] \right\}. \quad (69,6)$$

Der Faktor $\frac{2\pi^{\frac{3}{2}} \cdot e^2}{mc}$ ist gleich $9,354 \cdot 10^{-2}$.

Schreiben wir noch zur Abkürzung — analog (44,40) —

$$\frac{2\pi^{\frac{3}{2}} \cdot e^2}{mc} \cdot \frac{1}{R_c} \cdot \frac{NH \cdot f}{\Delta\omega_D} = C, \quad (69,7)$$

¹ Anm. b. d. Korr.: Eine entsprechende Darstellung für den Spezialfall $R_c = 1$ hat inzwischen D.H.MENZEL, Ap. J. **84**, 462 (1936) publiziert.

² Zur Bequemlichkeit des Lesers seien die wichtigsten nochmals zusammengestellt:

A_ω bzw. A_λ = Gesamtabsorption (äquivalente Linienbreite) in Kreisfrequenz- bzw. Wellenlängeneinheiten.

$\Delta\omega_D$ bzw. $\Delta\lambda_D$ = Dopplerbreite nach Gl. (43,5 und 7).

$v = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_D} = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\Delta\lambda_D} = \frac{\text{Abstand von der Linienmitte}}{\text{Dopplerbreite}}$

$a = \frac{\text{Dämpfungskonstante } \gamma}{\text{Dopplerbreite } \Delta\omega_D}$. ($a \ll 1$)

f = Oszillatorenstärke der Linie ($\mathfrak{N} = Nf$).

$F(v)$ vgl. Tabelle 38 nach MITCHELL-ZEMANSKY.

so haben wir alles vorbereitet, um die analytisch zugänglichen Grenzfälle behandeln zu können:

1. *Reine Dopplerverbreiterung.* $\lim a \rightarrow 0$.

Hat man es mit Absorption und Streuung in optisch dünner Schicht zu tun, d. h. ist $C < 1$, so bringt man zweckmäßig (69,5) in die Form

$$\frac{1}{R_c} \cdot \frac{A_\omega}{2 \Delta \omega_D} = \int_0^\infty \frac{C \cdot e^{-v^2} dv}{1 + C \cdot e^{-v^2}} = \int_0^\infty C \cdot e^{-v^2} \{1 - C \cdot e^{-v^2} + C^2 \cdot e^{-2v^2} - \dots\} dv \quad (69,8)$$

und erhält durch gliedweises Integrieren

$$\frac{1}{R_c} \cdot \frac{A_\omega}{2 \Delta \omega_D} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot C \left\{ 1 - \frac{C}{\sqrt{2}} + \frac{C^2}{\sqrt{3}} - \frac{C^3}{\sqrt{4}} + \dots \right\}. \quad (69,9)$$

Diese Reihe — das Analogon von (44,42) ist praktisch brauchbar für $0 \leq C < 0,5$; für $C \ll 1$ kommt man selbstverständlich genau auf die alte Formel (44,43) zurück.

Ist die optische Dicke x_ν für die Linienmitte $\gg 1$, d. h. ist $C \gg 1$, so setzt man

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} C &= e^a; & a &= \ln C \\ v^2 &= u. \end{aligned} \right\} \quad (69,10)$$

Dann geht (69,5) über in

$$\frac{1}{R_c} \cdot \frac{A_\omega}{2 \Delta \omega_D} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{u^{-\frac{1}{2}} du}{e^{u-a} + 1}. \quad (69,11)$$

Integrale dieses Typs spielen eine große Rolle in der Elektronentheorie der Metalle. Wir können ihre asymptotische Darstellung für $a \gg 1$ direkt der grundlegenden Arbeit von A. SOMMERFELD [1342] entnehmen¹ und erhalten

$$\frac{1}{R_c} \cdot \frac{A_\omega}{2 \Delta \omega_D} = \sqrt{a} \left\{ 1 - \frac{c_2}{2a^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3} \cdot \frac{c_4}{a^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2^5} \cdot \frac{c_6}{a^6} - \dots \right\} \quad (69,12)$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2^7} \cdot \frac{c_8}{a^8} - \dots,$$

wobei die c_n definiert sind durch

$$c_n = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \dots \quad (69,13)$$

Diese Summen können auf funktionentheoretischem Wege berechnet werden². Es wird für

$$\begin{array}{cccc} n & = & 2 & 4 & 6 & 8 \\ \frac{c_n}{\pi^n} & = & \frac{1}{12} & \frac{7}{720} & \frac{31}{30240} & \frac{127}{1\,209\,600} \end{array}$$

und damit

$$\frac{1}{R_c} \cdot \frac{A_\omega}{2 \Delta \omega_D} = \sqrt{\ln C} \left\{ 1 - \frac{0,4112}{(\ln C)^2} - \frac{1,776}{(\ln C)^4} - \frac{29,11}{(\ln C)^6} - \frac{1052}{(\ln C)^8} - \dots \right\}. \quad (69,14)$$

Diese Reihe — das Analogon zu (44,45) — ist anwendbar für $a \geq 4$ d. h. $C \geq 55$. Für $0,5 < C < 55$ muß man das Integral graphisch auswerten.

2. *Reine Dämpfungsverbreiterung.* Diese Formeln gelten für große NHf ; als praktisches Gültigkeitskriterium wird sich nachträglich ergeben $\frac{1}{R_c} \cdot \frac{A_\omega}{2 \Delta \omega_D} > 7$.

¹ Dessen Gl. (28); das Integral in (69,11) ist in SOMMERFELDS Bezeichnungweise gleich $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot U_{-\frac{1}{2}}$.

² Vgl. z. B. L. BIEBERBACH [1306]; S. 182.

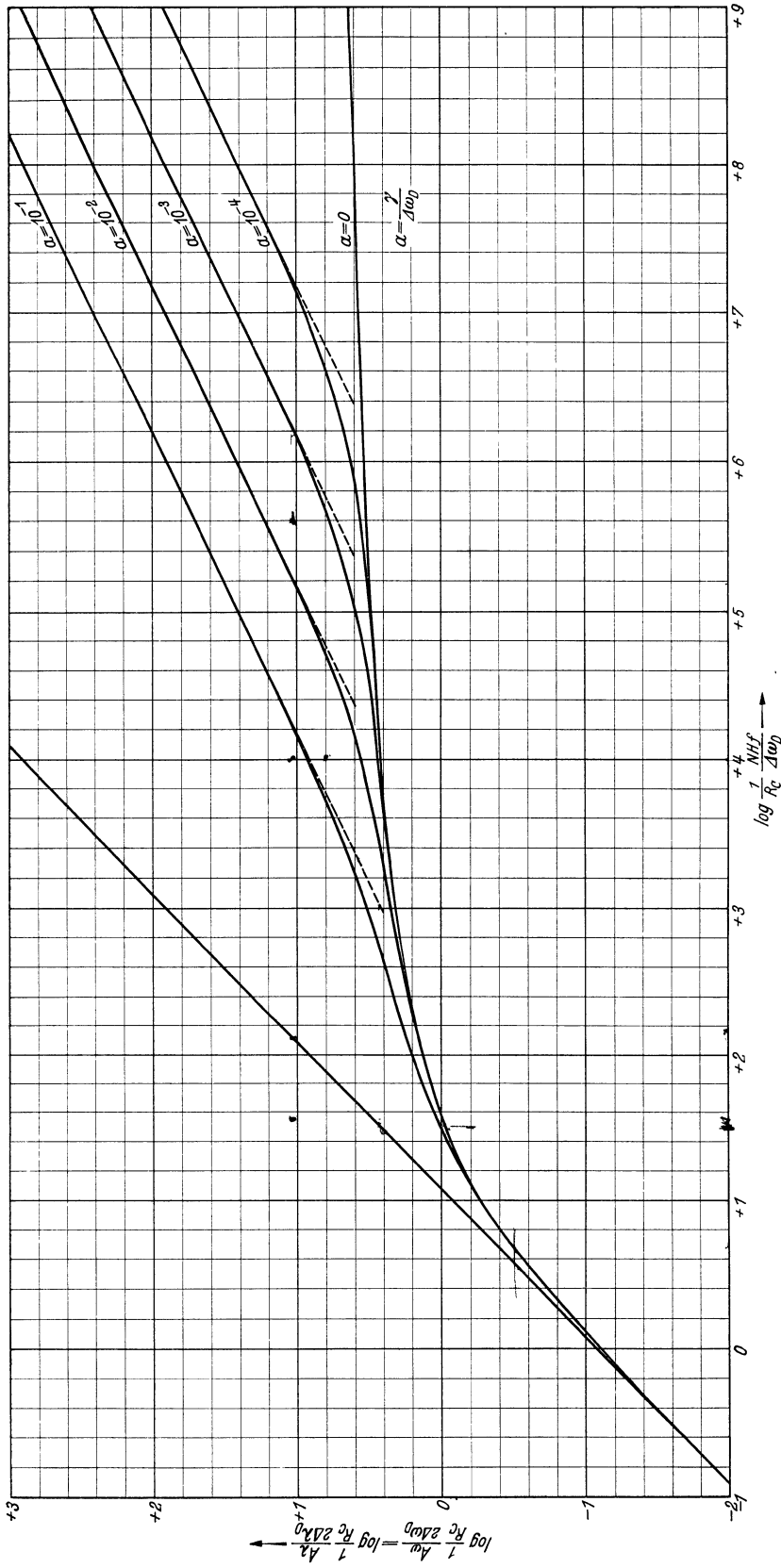


Fig. 85. Gesamtabsorption A_ω bzw. A_λ als Funktion von Zahl der absorbierenden Atome (pro cm^2 -Säule) $N_H \times$ Oszillatorenstärke I , Dopplerbreite $\Delta \omega_D$ bzw. $\Delta \lambda_D$, Dämpfungskonstante γ bzw. $a = \frac{\gamma}{\Delta \omega_D}$ und wahrer Grenztiefe $R_c = R_{c,\gamma} \rightarrow \infty$.

In diesem Falle wird nach (44,25) oder (44,46) die $\{ \dots \}$ in Gl. (69,6) gleich

$$\frac{a}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{v^2} \quad (69,15)$$

und damit das Integral (69,5)

$$\frac{1}{R_c} \cdot \frac{A_\omega}{2\Delta\omega_D} = \int_0^\infty \frac{dv}{\frac{2\sqrt{\pi}}{aC} \cdot v^2 + 1} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{aC}{2\sqrt{\pi}}} \quad (69,16)$$

Diese Formel unterscheidet sich von der entsprechenden Gl. (44,51) für das Absorptionsrohr nur durch einen Faktor $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0,885$ in dem Sinne, daß A_ω durch die Reemission verkleinert wird.

Einige Gesamtabsorptionswerte, die den Anschluß des zwischen dem „Dämpfungsgebiet“ (69,16) und dem „Dopplergebiet“ (69,14) herstellen, hat Verf. numerisch berechnet. Man integriert am besten von $v=0$ bis 12 mit Tabelle 38 graphisch, von 12 bis ∞ analytisch (arctg-Funktion!) unter Anwendung der Näherungsformel (69,15), die hier auf $\sim 1\%$ genau ist.

Eine graphische Darstellung von $\frac{1}{R_c} \cdot \frac{A_\omega}{2\Delta\omega_D} = \frac{1}{R_c} \cdot \frac{A_\lambda}{2\Delta\lambda_D}$ als Funktion von $\frac{1}{R_c} \cdot \frac{NHf}{\Delta\omega_D}$ gibt die nebenstehende Fig. 85. In den größeren Zügen unterscheidet sie sich kaum von v. D. HELDS entsprechender Theorie für das Absorptionsrohr ohne Reemission (Fig. 59); wir verweisen daher im allgemeinen auf die Diskussion in Abschn. 44. Zu erörtern bleibt nur noch die Wirkung einer endlichen (wahren) Grenztiefe R_c auf die Gesamtabsorption. Aus Fig. 85 und den zugehörigen Formeln liest man folgendes ab:

a) Solange $A_\omega \sim NHf$ ist, hat R_c keinerlei Einfluß auf die Berechnung der Gesamtabsorption.

b) In dem folgenden Gebiet, wo A_ω nur ganz wenig mit NHf anwächst, ist A_ω nahezu proportional R_c .

Die Linie ist hier ein ziemlich scharf begrenztes Band der Breite $\sim 4\Delta\omega_D$ und der Tiefe R_c . Sofern man in diesem Gebiet R_c nicht aus theoretischen Berechnungen ziemlich gut kennt, sind daher Rückschlüsse aus beobachteten Gesamtabsorptionen auf NHf recht ungenau. (Abgesehen davon machen sich hier natürlich auch Meßfehler besonders stark bemerkbar).

c) Im Bereich der starken Linien, geht $A_\omega \sim \sqrt{NHf \cdot \lambda} \cdot \sqrt{R_c}$. Eine genaue Kenntnis der wahren Restintensität ist hier also nicht mehr so wichtig. Immerhin können Korrekturen von $\sim 20\%$ leicht auftreten.

Damit haben wir nun alle Mittel an der Hand, um die Verbindung zwischen den im vorhergehenden Kapitel entwickelten strahlungstheoretischen Vorstellungen einerseits und den in Kap. VIII—X dargestellten physikalischen Grundlagen der Theorie der FRAUNHOFER-Linien andererseits herzustellen. Wir versuchen im folgenden insbesondere klarzulegen, in welchem Umfange die dort in Betrachtung gezogenen Effekte an der Bildung der FRAUNHOFER-Linien beteiligt sind.

70. Dopplereffekt und „Turbulenz“ (O. STRUVE).

Der direkte Nachweis der Linienverbreiterung durch „thermischen“ Dopplereffekt in den Sternatmosphären wird sehr erschwert durch die Kleinheit des Effektes.

Die Wasserstofflinien, bei denen die größte Verbreiterung zu erwarten wäre, scheiden von vornherein aus, da hier die Druckverbreiterung bei weitem überwiegt.

Am günstigsten dürften nach O. STRUVE [1349] die Verhältnisse bei den *Heliumlinien* der B-Sterne liegen. Unter diesen sind ziemlich frei von Druckeffekt, Feinstruktur und störenden Fremdlinien („blends“) die $\lambda 4437,55$ 2^1P-5^1S und $\lambda 3964,73$ 2^1S-4^1P . Aus der beobachteten Stärke der Linien erkennt man, daß der Fall „dünner Schicht“ jedenfalls näherungsweise realisiert ist.

Nach Gl. (43,11) berechnet man für $T \approx 22000^\circ \text{K}$ und $\lambda 4200 \text{ \AA}$ eine totale Halbwertsbreite von $0,22 \text{ \AA}$.

Andererseits erscheint in dem großen 3-Prismen-Spektrographen des Yerkes-Observatoriums bei einer Dispersion von $\sim 10 \text{ \AA/mm}$ und einer Spaltbreite von $0,05 \text{ mm}$ schon eine völlig monochromatische Linie als ein $0,5 \text{ \AA}$ breiter Streifen (Beugung und geometrisch-optische Fehler sind dabei vernachlässigt).

Tatsächlich glaubt O. STRUVE [1349] beim Vergleich der angegebenen He-Linien mit benachbarten OII-Linien Spuren einer Verbreiterung zu bemerken.

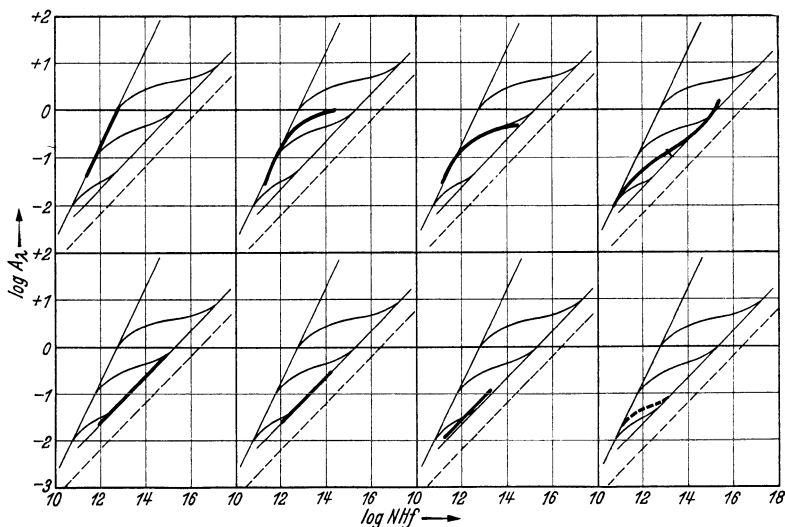


Fig. 86. Beobachtete (ausgezogene Kurvenstücke) und theoretische Wachstumskurven nach O. STRUVE und C. T. ELVEY [1350] für:

17 Lep., ϵ Aur., α Per und Sonne (obere Reihe);
 α Gyg., α CaMa, α Lyr und Theorie für 10000°K (untere Reihe).
 Ordinaten: $\log A_\lambda$; Abszissen: $\log N h f + \text{konst.}$

Um sicher zu gehen, müßte man jedoch, wie STRUVE bemerkt, wesentlich größere Dispersion zu Verfügung haben.

Ein viel weiter reichendes Verfahren gibt uns nach O. STRUVE und C. T. ELVEY [1350] das Studium der *Gesamtabsorptionen in Multipletts* in Verbindung mit der „Wachstumskurve“ (Abschn. 69) an die Hand. Nach Fig. 85 liegt der flache Teil der Wachstumskurve bei Gesamtabsorptionen der Größenordnung

$$A_\lambda = 3,7 \Delta \lambda_D. \quad (70,1)$$

Konstruiert man also durch Zusammensetzen einzelner Multipletts — wie am Anfang des vorhergehenden Abschnittes beschrieben — auf empirischem Weg die Wachstumskurve, so kann man aus der Höhe des flachen Teiles oder genauer durch Vergleich mit den theoretischen Kurven die Dopplerbreite $\Delta \lambda_D$ der Gl. (43,1—8) bestimmen. Daß die Dämpfungskonstanten bzw. die $a = \gamma/\Delta \omega_D$ verschiedener Multipletts evtl. verschieden sind, schadet dabei wenig, da der flache Teil der Wachstumskurve von a kaum abhängt, solange $a < 0,1$, was fast immer zutrifft.

O. STRUVE und seine Mitarbeiter wandten diese Methodik zunächst auf eine Reihe von Sternen an, deren Spektren nach früheren Untersuchungen am Yerkes Observatorium einer Einreihung in das Schema der Harvardklassifikation, ja überhaupt der Einordnung in ein zweidimensionales System — etwa nach Temperatur und absoluter Helligkeit — trotzten. In der nebenstehenden Fig. 86 sind (man vgl. mit Fig. 85!) als Ordinaten die $\log_{10} A_\lambda$ aufgetragen, als Abzissen im halben Maßstab die $\log NHf$. Die steile Gerade links $A_\lambda = 1,8 \cdot 10^{-13} NHf$ gilt für „dünne Schicht“; die andere $A_\lambda = 6,5 \cdot 10^{-9} \sqrt{NHf}$ ist für „dicke Schicht“ berechnet, wobei für die Dämpfungskonstante γ entsprechend der Untersuchung von MINNAERT und MULDERs [4325] am Sonnenspektrum das 10fache des klassischen Wertes angenommen wurde. Die parallele gestrichelte Kurve würde für $\gamma = \gamma_{kl}$ gelten. Die gekrümmten Kurvenstücke stellen die Verbindung her zwischen dem linken unteren und rechten oberen geraden Teil der Wachstumskurve¹ für 3 Werte der Dopplerverbreiterung nämlich $\Delta\lambda_D = 0,01, 0,1$ und 1 \AA .

Die aus den Beobachtungen an zahlreichen Multipletts der Bogen- und Funkenspektren von Metallen empirisch ermittelten² Teile der Wachstumskurve sind — in horizontaler Richtung gleich in die richtige Lage gebracht — für eine Reihe von Sternen eingezeichnet.

Für die drei Sterne 17 Lep (A0), ϵ Aur (F5p) und α Pers (F5) ergeben sich (Tabelle 53) Werte der mittleren Geschwindigkeit³ ξ_0 [vgl. (43,5)] die weit über dem thermischen Wert $\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$ liegen, der für $T = 10000^\circ$ und Atomgewicht 50 (Mittel von Fe, Cr, Ti) $\sim 1,8 \text{ km/sek}$ ist. Direkte Messungen der Halbwertsbreite schwacher Linien bestätigten diesen Schluß.

Die beobachteten Teile der Wachstumskurven von α Cyg (cA2), α CMa (A2) und α Lyr (A0) dagegen liegen ganz auf dem „Dämpfungszweig“ $A_\lambda \sim \sqrt{NHf}$, so daß der Betrag der Dopplerverbreiterung nicht mehr direkt ablesbar ist; er kann aber nicht wesentlich über dem thermischen liegen. Für die Sonne ist letzteres durch MINNAERT und MULDERs (s. S. 265) direkt bestätigt.

Tabelle 53. „Turbulenz“ und thermischer Dopplereffekt nach O. STRUVE und C. T. ELVEY [4350].

$\xi_0^2 = \frac{2RT}{\mu} + \xi_i^2 =$ Mittelwert des Quadrates der Geschwindigkeitskomponente in einer bestimmten Richtung.

Stern	$\Delta\lambda_D$	ξ_0 km/sek	
17 Lep	1,0 \AA	67	} $\xi_0 \gg \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$; Turbulenz
ϵ Aur	0,3	20	
α Pers	0,1	7	
α Cyg	(0,03)	(2)	} $\xi_0 \approx \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$; thermische Geschwindigkeit
α CMa	(0,03)	(2)	
α Lyr	(0,03)	(2)	

Die von O. STRUVE und seinen Mitarbeitern gemachte Entdeckung, daß sich in den Atmosphären mancher Sterne den thermischen Geschwindigkeiten der Atome noch eine Art „Turbulenz“⁴ mit Geschwindigkeiten bis zu 67 km/sek überlagert, gehört ohne Zweifel zu den wichtigsten Ergebnissen der neueren

¹ O. STRUVE und C. T. ELVEY [4350] haben die in Abschn. 44 dargestellten Formeln für Absorption nach dem e^{-kI} -Gesetz benützt an Stelle der in Abschn. 69 entwickelten Ausdrücke, die der Reemission der Sternatmosphäre Rechnung tragen. Der Unterschied ist jedoch vorerst ziemlich belanglos; wir haben daher die Fig. 86 ungeändert aus der angegebenen Arbeit übernommen.

² Bezüglich Details des Beobachtungsmaterials sei auf die zitierten und zahlreich vorhergehenden Arbeiten von O. STRUVE und Mitarbeitern verwiesen.

³ Genauer gesagt handelt es sich hier und im folgenden immer um die Geschwindigkeitskomponenten in *einer* Richtung.

⁴ Daß dieses Phänomen mit der bekannten Turbulenz der Hydrodynamiker nichts zu tun hat, braucht kaum bemerkt zu werden.

Sternspektroskopie¹. Schon die wenigen vorliegenden Beobachtungen zeigen, daß die Größe der turbulenten Geschwindigkeit ξ_i nicht eindeutig durch Spektraltyp bzw. Temperatur und absolute Helligkeit festgelegt ist. Man muß ξ_i daher als einen 3. Parameter der Sternspektren betrachten². Ehe man für einen vor-

gegebenen Stern ihn nicht bestimmt oder gezeigt hat, daß $\xi_i \ll \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$, kann man die Gesamtabsorptionen der auf dem flachen Teil der Wachstumskurve liegenden Linien nicht in Atomzahlen überführen, wie dies für ihre weitere astrophysikalische Auswertung notwendig ist. (Bei einigen Sternen besteht nach STRUVE sogar die Möglichkeit, daß ξ_i zeitlich veränderlich ist!)

Was kann man nun aus Beobachtung und Theorie weiteres über dieses ziemlich unerwartete Turbulenzphänomen entnehmen? Zunächst müssen die in Frage stehenden Geschwindigkeitsunterschiede offenbar auftreten innerhalb von Gebieten, die kleiner sind als die durchschnittliche freie Weglänge l eines Lichtquanten. Denn sonst würde nicht der Absorptionskoeffizient geändert, sondern es würde nur das *Spektrum* als Ganzes etwas verwaschen, ähnlich wie durch zu große Spaltbreite, ohne daß die Gesamtabsorptionen verändert würden. Für die äußeren Teile der Linien ist l etwa gleich dem reziproken kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten in $[\text{cm}^{-1}]$ es entspricht also einem $\Delta\tau_v \approx 1$. In der maßgebenden Schicht bei $\tau_v \sim 0,5$ findet man für die Sonne nach Tabelle 36 $l \sim 70$ km, für einen roten Riesenstern nach Tabelle 37 dagegen $l \sim 80000$ km. Wenn sich ein STRUVEScher Turbulenzeffekt z. B. auf der Sonne zeigen sollte, so müßten also jedenfalls die einzelnen Turbulenzkörper einen Durchmesser < 70 km haben.

J. EVERSHERD [1313] hat mit Hilfe einer von ihm erdachten sehr empfindlichen Methode zur Messung kleinster *Linienverschiebungen*³ in den äußeren Teilen der Sonnenscheibe unregelmäßige Dopplereffekte von durchschnittlich 0,21 km/sek (in der Sehlinie gemessen) beobachtet. Schließt man aus der Seltenheit solcher Verschiebungen in der \odot -Mitte auf einen horizontalen Charakter der Strömungen, so kommt man auf mittlere Gesamtgeschwindigkeiten von $\sim 0,5$ km/sek. Daß diese Dopplereffekte auf die Wachstumskurve keinen Einfluß haben, liegt wohl in erster Linie an der zu großen Ausdehnung der Turbulenzkörper.

O. STRUVE und C. T. ELVEY diskutierten (s. S. 270) die Möglichkeit eines Zusammenhanges zwischen ξ_i und den von W. S. ADAMS, CH. E. ST. JOHN und E. McCORMACK [1301 u. 1317] u. a. bei vielen Sternen gefundenen Radialgeschwindigkeitsdifferenzen zwischen Linien verschiedener Anregungs- oder Ionisationsstufen. Eine direkte Verknüpfung scheint nicht zu bestehen; vielleicht aus dem schon angegebenen Grunde.

Ob ein Zusammenhang zwischen Turbulenz ξ_i und der *Rotation* der Sterne (s. Kap. XIV) besteht, ist zur Zeit noch nicht endgültig geklärt.

¹ In diesem Zusammenhang sind noch Gesamtabsorptionsmessungen zu erwähnen, die A. D. THACKERAY [1353] an dem Fe-Multiplett $a^5F - z^5D^0$ (λ 5269—5506) in Spektren der Typen *F* bis *M* ausgeführt hat. Prinzipiell wären derartige Meßreihen ein ausgezeichnetes Mittel, um die Variation der Turbulenz sowie evtl. der Dämpfungskonstante γ (s. folgendes Kapitel) mit Spektraltyp und absoluter Helligkeit zu studieren. Leider scheinen jedoch THACKERAYS Messungen mit einem systematischen Fehler behaftet zu sein: In der Sonne und anderen G-Sternen sind bei ihm die A_λ der starken Linien — die der schwachen nicht — fast doppelt so groß, wie nach den sicher genaueren und auch gegenseitig gut übereinstimmenden Messungen, die C. W. ALLEN [1110], sowie M. MINNAERT und G. F. W. MULDER [1135 u. 1138] an der Sonne mit großer Dispersion ausgeführt haben. Wir können daher die Messungen THACKERAYS vorerst nicht verwenden.

² Es sei nochmals an die frühere Entwicklung vom eindimensionalen Schema der älteren Harvardklassifikation zum zweidimensionalen (spektroskopische Parallaxen; ADAMS-KÖHLSCHÜTTER, HERTZSPRUNG) erinnert.

³ Das Spektrum wird dabei gegen sein eigenes Positiv verschoben.

Als einzige Andeutung eines Zusammenhanges mit anderen Größen vermuten STRUVE und ELVEY (s. S. 270) eine lose Korrelation von „*Turbulenz*“ und *absoluter Helligkeit*. Daß die freie Weglänge l der Lichtquanten in c -Sternen viel größer ist als in den normalen, würde eine solche Beziehung jedenfalls begünstigen; mehr können wir zur Zeit nicht sagen.

Auf die thermodynamischen und hydrodynamischen Probleme der Konvektion in Sternatmosphären werden wir später noch zurückkommen. Vorerst müssen wir die turbulente Geschwindigkeit ξ_t als einen *empirischen* Parameter betrachten, der gegebenenfalls aus den Beobachtungen zu ermitteln ist.

71. Strahlungs- und Stoßdämpfung.

Wenn an der Verbreiterung einer Linie neben dem Dopplereffekt in erster Linie die *Dämpfung* mitwirkt — ob es sich um Strahlungs- oder Stoßdämpfung handelt, soll dabei zunächst noch offen bleiben —, so ist der Absorptions- + Streukoeffizient in einem Abstand von der Linienmitte gegeben durch (44,28)

$$\kappa_\nu + \sigma_\nu = k_\nu = \frac{\pi e^2}{m c} \cdot \frac{N f \gamma}{(\omega - \omega_0)^2} \left\{ 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{\Delta \omega_D}{\omega - \omega_0} \right)^2 + \dots \right\} \quad (71,1 a)$$

Nach MINKOWSKI und SCHÜTZ (s. S. 198) kann man also in einem Abstand von der Linienmitte, der etwa die 7-fache Dopplerbreite $\Delta \omega_D$ übertrifft, den Dopplereffekt vernachlässigen und findet

$$k_\nu \sim \frac{N f \gamma}{(\lambda - \lambda_0)^2}. \quad (71,1 b)$$

Hieraus ergeben sich folgende Konsequenzen:

1. Die Tiefe R bzw. $r(\vartheta)$ in den *Linienflügeln* soll mit $1/(\lambda - \lambda_0)^2$ gehen; unabhängig von der Schichtung der Atmosphäre. Dies wird auf das schönste bestätigt durch die von Schwierigkeiten in der Festlegung des kontinuierlichen Untergrundes freie Methode von M. MINNAERT (Abschn. 61).

2. Wenn man unsere — freilich noch nicht restlos befriedigende — Kenntnis der Schichtung der Sternatmosphären hinzunimmt, und weiterhin (die Begründung folgt später) voraussetzt, daß das Verhältnis κ_ν/σ_ν in der ganzen Linie einen von $\lambda - \lambda_0$ unabhängigen Wert hat, so kann man auch die ganzen *Linienkonturen* berechnen und mit der Beobachtung vergleichen. Schon im vorhergehenden Kapitel haben wir dies für einige Beispiele durchgeführt und bemerkt, daß die Übereinstimmung so gut ist, wie man dies eben erwarten kann.

3. Die bei einer bestimmten Tiefe R , d. h. bei einem bestimmten Wert von k_ν , gemessenen *Breiten* $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$ der *Linien eines Multipletts* sind nach (71,1) $\sim \sqrt{N f \gamma}$. Da die Dämpfungskonstante innerhalb eines Multipletts auf alle Fälle denselben Wert behält, so gehen die Linienbreiten proportional der $\sqrt{\quad}$ aus den in Abschn. 50 behandelten „*theoretischen*“ Intensitäten, die man aus der BURGER-DORGELOSCHEN Summenregel sowie den Formeln von SOMMERFELD-HÖNL, RUSSELL, DE KRONIG u. a. erhält. Dieses $\sqrt{\quad}$ -Gesetz ist nachgeprüft worden an mehreren Dubletts (Ca^+H u. K , NaD usw.), sowie dem grünen Hg -Triplet im Sonnenspektrum.

4. Von Schwierigkeiten der spektroskopischen Auflösung kommt man frei durch Messung von *Gesamtabsorptionen* A_λ ; man muß jedoch beachten, daß nach Fig. 85 ein merklicher Einfluß des Dopplereffektes zu erwarten ist, sobald $A_\lambda < 16 \Delta \lambda_D$ wird¹. Die Gültigkeit des $\sqrt{\quad}$ -Gesetzes der Gesamtabsorption ist vielfach nachgeprüft worden und zwar nicht nur an den erwähnten Linien des Sonnenspektrums (Literatur vgl. Kapl. XI), sondern auch an Sternspektren

¹ Für Fe-Linien im photographischen Teil des Sonnenspektrums z. B. gilt also das $\sqrt{\quad}$ -Gesetz erst für $A_\lambda > 0,3 \text{ \AA}$.

(O. STRUVE, C. H. PAYNE u. a.). Eine Wiedergabe des Beobachtungsmaterials im einzelnen dürfte kaum erforderlich sein. Die Unstimmigkeiten, die bei solchen Untersuchungen zutage traten, haben — wie wir im vorhergehenden Abschnitt sahen — durch STRUVE und ELVEYS Turbelenzeffekt eine bemerkenswerte Deutung gefunden.

Zusammenfassend können wir also mit aller Bestimmtheit feststellen, daß die *starken FRAUNHOFER-Linien*¹ durch Dämpfung entsprechend Gl. (71,1 b) verbreitert werden.

Viel schwieriger ist die Entscheidung der Frage, ob die Dämpfungskonstante γ vorzugsweise durch Strahlungs- oder Stoßdämpfung bedingt ist, bzw. unter welchen Umständen der eine oder andere Effekt überwiegt. Das hiermit aufgeworfene Problem ist deshalb sehr wichtig, weil wir zunächst aus der Kontur einer starken Linie nur das $NH \cdot f\gamma$ entnehmen können. Um die Anzahl absorbierender Atome zu ermitteln, muß also γ sonstwie bestimmt werden.

Früher nahm man an, daß in den Sternatmosphären die Stoßdämpfung neben der Strahlungsdämpfung zu vernachlässigen sei. Diese Annahme basierte auf folgenden Überlegungen: Man glaubte, daß alle Stöße, die zur Dämpfungsbreite γ einen Beitrag geben, bei Resonanzlinien auch „auslöschend“ wirken. Diesen Auslöschungsstößen müßten — als thermodynamisch inverser Prozeß — Anregungsstöße entsprechen. Es würde also das $\frac{\kappa_\nu}{\sigma_\nu}$ in der Linie $\approx \frac{\gamma_{\text{Stoß}}}{\gamma_{\text{Strahlung}}}$ sein. Aus der kleinen Intensität in der Mitte der starken Resonanzlinien, die nach Gl. (65,40) von der Größenordnung $R_c \sim \sqrt{\frac{\kappa_\nu}{\sigma_\nu}}$ ist, schloß man nun weiter, daß die mittlere Zeit τ zwischen zwei Stößen \ll als die natürliche Lebensdauer der betrachteten Quantenzustände sei. — Zu diesen Gedankengängen schienen gaskinetische Abschätzungen von τ gut zu passen, die man mit den damals angenommenen Wirkungsradien bzw. Drucken in den Sternatmosphären ausführte.

Leider waren diese Betrachtungen gänzlich unzureichend: Wir wissen heute (vgl. Abschn. 41, 2. Teil u. 47), daß durchaus nicht alle verbreiternden Stöße auslöschend wirken. Weiterhin haben wir gesehen, daß die Größe der Wirkungsradien auf das engste zusammenhängt mit der Wechselwirkung zwischen leuchtendem und stoßenden Teilchen; wir werden also unser Augenmerk insbesondere auf die Elektronen und Ionen zu richten haben. Und endlich wissen wir heute, daß die Gasdrucke in den Sternatmosphären gar nicht unerheblich sind (Sonne ~ 3 mm Hg nach Tabelle 36), so daß auch die Stöße mit H-Atomen und — in Spezialfällen — die Stöße gleichartiger Teilchen beachtet werden müssen.

Ehe wir die LENZ-WEISSKOPFSche Quantentheorie der Stoßdämpfung (Abschn. 47) auf die Sternatmosphären anwenden, wollen wir unser Problem noch von der empirischen Seite betrachten. Da zuverlässige Beobachtungen über Linienkonturen und Äquivalentbreiten an Sternspektren noch nahezu fehlen, so müssen wir uns dabei notgedrungen auf die Sonne beschränken.

Da nach Abschn. 69 die Gesamtabsorption der starken Linien $\sim \sqrt{NHf \cdot \gamma}$, die der schwachen dagegen $\sim NHf$ ist, so kann man durch Vergleich der Gesamtabsorptionen zweier solcher Linien, deren NHf relativ zueinander bekannt sind, die Dämpfungskonstante γ der starken Linie bestimmen.

Dieses Verfahren liegt schon den Untersuchungen von M. MINNAERT und seinen Mitarbeitern [1325] über die Wachstumskurve zugrunde.

¹ Eine Ausnahme machen nur die nach Abschn. 47 besonders starkeffektempfindlichen Linien des Wasserstoffes und vielleicht des Heliums. Wir werden sie in Abschn. 72 gesondert betrachten.

Später hat dann auf seine Veranlassung G. RIGHINI¹ [1336] für alle erreichbaren Na-Linien des Sonnenspektrums die Oszillatorenstärken f berechnet und die Äquivalentbreiten A_λ gemessen. Die Mehrzahl der Linien liegt im flachen Teil der Wachstumskurve $A_\lambda \approx 2$ bis $5 \cdot \Delta\lambda_D$ und bestätigt im wesentlichen das Fehlen merklicher Turbulenz (im Sinne STRUVES) auf der Sonne. Im Dämpfungsbereich liegen nur die D-Linien 3^2S-3^2P ; im linearen nur das Dublett $3^2P-7^2D \lambda 4494/7$. Das Verhältnis der Atomzahlen im 3^2S - bzw. 3^2P -Zustand kann mit genügender Genauigkeit nach der BOLTZMANN-Formel berechnet werden; wir benützen dabei eine mittlere Temperatur von 5600°K , entsprechend einer optischen Tiefe $\tau \approx 0,5$.

Die folgende Tabelle 54 gibt zunächst die Wellenlängen und Klassifikationen der betrachteten Linien. Dann folgen die Oszillatorenstärken (nach RIGHINI) sowie die $\log NHf$, bezogen auf Zahl der Atome im Grundzustand = 1 und schließlich — als Abzissen für die „Normalform“ der Wachstumskurve Fig 85 — die $2 \log \frac{NHf}{\Delta\omega_D} + \text{konst.}$

Tabelle 54. Bestimmung der Dämpfungskonstante γ der NaD-Linien aus Gesamtabsorptionsmessungen.

1	2	3	4*	5*	6			9	10	11					
					λ	Klassifikation	f				$\log NHf$	$\log \frac{NHf}{\Delta\omega_D}$	Messungen von $A_\lambda \cdot 10^3$		
													RIGHINI ¹	ALLEN	Mittel
5895,944	$3^2S_{1/2} - 3^2P_{1/2}^0$	0,325	-0,488	-0,488	557	544	550	79,0	0,843	4,374					
5889,977	$3^2S_{1/2} - 3^2P_{3/2}^0$	0,650	-0,187	-0,187	700	753	725		0,963	4,675					
4497,682	$3^2P_{1^1/2}^0 - 7^2D_{2^1/2, 1^1/2}$	0,0035	-4,040	-4,157	22	18	20	60,3	-0,479	0,705					
4494,194	$3^2P_{1^1/2}^0 - 7^2D_{1^1/2}$	0,0035	-4,341	-4,457	10	12	11		-0,739	0,405					

Nun ermitteln wir die zugehörigen Ordinaten. Spalte 6—10 geben die gemessenen Äquivalentbreiten nach RIGHINI (s. oben) bzw. ALLEN [1110] und deren Mittelwert und schließlich den $\log \frac{A_\lambda}{2\Delta\lambda_D} = \log \frac{A_\omega}{2\Delta\omega_D}$, wobei die Dopplerbreiten $\Delta\lambda_D$ nach (43,4 u. 7) mit $T = 5600^\circ$ berechnet sind.

Für die Linien $\lambda 4497/4$ findet man aus $\frac{A_\lambda}{2\Delta\lambda_D}$ mit Hilfe von Fig. 85 die wahren $\log \frac{NHf}{\Delta\omega_D}$ zu 0,705 bzw. 0,405 und ermittelt sodann aus wahren $\frac{NHf}{\Delta\omega_D}$ und $\frac{A_\lambda}{2\Delta\lambda_D}$ der D-Linien deren $\log a = -1,55$. Da für die D-Linien $\Delta\omega_D = 2,16 \cdot 10^{10}$ ist, ergibt sich hiermit ihre Dämpfungskonstante

$$\gamma_{\text{beob.}} = 6,0 \cdot 10^8 \text{ sek}^{-1}. \tag{71,2}$$

Für reine Strahlungsdämpfung erhält man (auch nach der Quantentheorie) den klassischen Wert

$$\gamma_{\text{str.}} = 0,63 \cdot 10^8 \text{ sek}^{-1}. \tag{71,3}$$

In ganz entsprechender Weise können wir auch die Dämpfungskonstante der Ca-Resonanzlinie $\lambda 4227$ auf der Sonne bestimmen durch Vergleich mit der

¹ Die hier gegebene Darstellung weicht in Einzelheiten von RIGHINI ab und versucht die entscheidenden Punkte klarer herauszustellen.

² $\Delta\omega_D$ ist einfach $\sim \lambda^{-1}$.

* Diese Spalten enthalten noch eine verfügbare additive Konstante.

Interkombinationslinie λ 6572. Das NH ist für beide Linien gleich; das Verhältnis der Oszillatorenstärken ist durch Dispersionsmessungen von W. PROKOFJEW (Tabelle 47B) zu 33000 bestimmt. Die Gesamtabsorptionen im Spektrum der \odot -Mitte sind von C. W. ALLEN [1110], sowie G. F. W. MULDER [1138] und R. O. REDMAN [1146] gemessen. Im übrigen dürfte die folgende Tabelle 55

Tabelle 55. Bestimmung der Dämpfungskonstante γ der Ca-Resonanzlinie λ 4227 aus Gesamtabsorptionsmessungen.

1	2	3 *	4			7	8	9
			Messungen von $A\lambda \cdot 10^3$					
			ALLEN	REDMANN bzw. MULDER	Mittel			
λ	Klassifikation	$\log \frac{NHf}{A\omega_D}$				$2\Delta\lambda_D \cdot 10^3$	$\log \frac{A\lambda}{2\Delta\lambda_D}$	Wahrer $\log \frac{NHf}{A\omega_D}$
4226,742	$4^1S - 4^1P^0$	4,327	1185	1320	1250	42,9	1,465	5,257
6572,804	$4^1S - 4^3P^0$	0,000	33	30	32	66,7	0,681-1	0,930

ohne weiteres verständlich sein. In Verbindung mit Fig. 85 erhält man für λ 4227 zunächst $\log a = -1,14$ und damit

$$\gamma_{\text{beob.}} = 16,3 \cdot 10^8 \text{ sek}^{-1}. \quad (71,4)$$

Leider gibt es noch keine Messung oder Berechnung des Absolutwertes der Oszillatorenstärke von λ 4227. Nach dem f -Summensatz und den in Tabelle 47B wiedergegebenen Messungen an Cd und Hg darf man erwarten, daß er nicht weit von $f = 1,20$ liegt. Damit erhielt man nach (45,26)¹

$$\gamma_{\text{Str.}} = A_{nm} = \frac{3 g_n}{g_m} \cdot \gamma_{k1} \cdot f_{mn} \quad (71,5)$$

oder

$$\gamma_{\text{Str.}} = 1,48 \cdot 10^8 \text{ sek}^{-1}.$$

Trotzdem beim Natrium das Verhältnis der Oszillatorenstärken und bei Ca deren Absolutbetrag mit erheblicher Unsicherheit behaftet ist (hierzu vgl. Kap. IX), so können wir doch kaum umhin, anzunehmen, daß die großen Dämpfungskonstanten $\frac{\gamma_{\text{Strahlung}}}{\gamma_{\text{beob.}}} = 10$ für D -Linien und 11 für Ca 4227 mit durch *Stoßdämpfung* verursacht sind. Sollte sich diese Annahme auch weiterhin bestätigen, so wären selbstverständlich eine große Anzahl von Schlüssen, die unter der früher als selbstverständlich betrachteten Voraussetzung reiner Strahlungsdämpfung gezogen waren (insbesondere in Kap. XII) dementsprechend zu revidieren.

Eine weitere Möglichkeit zur empirischen Bestimmung von Dämpfungskonstanten bieten geeignete *Multipletts*. Schon M. MINNAERT und G. F. W. MULDER [1325] bemerkten, daß der Mittelwert der Dämpfungskonstante, wie man ihn aus der empirisch bestimmten Wachstumskurve (MINNAERT-RUSSELL) erhält, im wesentlichen bestimmt ist durch einige wenige Multipletts, deren NHf einen solchen Bereich überdecken, daß einige Linien auf dem linken, andere auf dem rechten verhältnismäßig steilen Teil der Wachstumskurve liegen². Inwieweit ein derartiger Mittelwert für die übrigen Linien von Bedeutung ist, kann man zunächst wohl in Zweifel ziehen; wir wollen daher die Dämpfungskonstanten der betreffenden Multipletts einzeln zu ermitteln versuchen.

* Enthält noch eine verfügbare additive Konstante.

¹ m bezeichne den oberen, n den unteren Term; die statischen Gewichte sind $g_m = 3$ und $g_n = 1$.

² Für Fe im Sonnenspektrum handelt es sich also um Multipletts, die *mindestens* den Bereich $0,03 < A_\lambda < 0,14 \text{ \AA}$ überdecken.

Man geht dabei so vor, daß man für jedes Multiplett zunächst die $\log \frac{A_\lambda}{2\Delta\lambda_D}$ als Funktion der $\log \frac{NHf}{\Delta\omega_D} + \text{konst}$ oder — was auf dasselbe herauskommt — der \log_{10} der nach den Multiplettformeln (Abschn. 50) berechneten „theoretischen Intensitäten“ auf durchscheinendes Papier zeichnet. Dieses Kurvenstück bringt man durch Verschiebung parallel zur $\log \frac{NHf}{\Delta\omega_D}$ -Achse in Fig. 85 möglichst gut zur Deckung mit einer der Wachstumskurven¹ und erhält so das a und damit die Dämpfungskonstante $\gamma = a \Delta\omega_D$ des betreffenden Multipletts. Dieses Verfahren haben wir in Fig. 87 auf sämtliche geeignete Multipletts der Tabellen von C. W. ALLEN angewandt²; die Horizontalverschiebung ist in der Figur

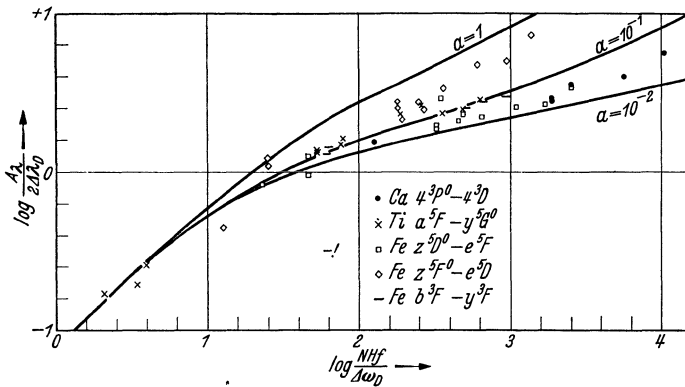


Fig. 87. Empirische Bestimmung der Dämpfungskonstante $\gamma = a \cdot \Delta\omega_D$ von Multipletts im Sonnenspektrum. Messungen von C. W. ALLEN [1110].

schon in der richtigen Weise ausgeführt. Die Unsicherheit der Bestimmung von a bzw. γ dürfte einen Faktor 3 wohl erreichen, teils wegen der photometrischen Meßfehler und „blends“, teils wegen Abweichungen von den Multiplettintensitätsregeln. Wir haben *nicht* versucht, die letztere Fehlerquelle, durch Heranziehen von Laboratoriumsmessungen zu verbessern, da die Intensitätsverhältnisse der stärksten zu den schwächsten Linien — auf die es uns in erster Linie ankommt — besonders leicht durch Selbstabsorption verfälscht werden³. Mit diesen Vorbehalten geben wir in der folgenden Tabelle 56 die Ergebnisse unserer Untersuchung.

Die so bestimmten Dämpfungskonstanten liegen ebenso wie der von MINNAERT und MULDERs seiner Zeit gefundene Mittelwert von 7 bis $11 \cdot 10^8 \text{ sek}^{-1}$ wohl über dem, was man für reine Strahlungsdämpfung erwarten muß. Ein zwingender Schluß ist allerdings auch hier noch nicht möglich, da wir keine sichere Kenntnis der Übergangswahrscheinlichkeiten haben und nur auf die f -Summensätze und Analogiebetrachtungen angewiesen sind.

Tabelle 56. Empirische Bestimmung der Dämpfungskonstante in Multipletts.

Multiplett	Wellenlängenbereich	$-\log a$	$\gamma_{\text{beob.}}$ [sek ⁻¹]
Ca $4^3P^0 - 4^3D$	4425—4456	1,5	$6,8 \cdot 10^8$
Ti $a^5F - y^5G^0$	4981—5045	0,9	22
Fe $z^5D^0 - e^5F$	4565—4736	1,7	3,5
Fe $z^5F^0 - e^5D$	5569—5784	0,5	45
Fe $b^3F - y^3F^0$	6005—6322	1,0	13

¹ Weitere kann man evtl. leicht interpolieren.

² ALLEN selbst hat [1110] auch schon ähnliche Betrachtungen angestellt.

³ Vgl. v. MILAAN am Ende des Kap. X.

Die Grundlage für den eindeutigen Nachweis von Stoßdämpfung in der Sonnenatmosphäre (A. UNSÖLD [1366]) lieferte erst eine Untersuchung von M. MINNAERT und J. GENARD [1327] über die Äquivalentbreiten in der diffusen Nebenserie $3^1P^0 - n^1D$ des Magnesiums. Die folgende Tabelle gibt zunächst die Beobachtungen der genannten Autoren zusammen mit einer unabhängig davon ausgeführten Meßreihe von C. W. ALLEN [1110]. Die Linien $n=6$ und 8 sind durch Fremdlinien stark gestört, ebenso $n=10-12$, $n=13$ erscheint nach MINNAERT und GENARD im Sonnenspektrum nicht mehr.

Tabelle 57. Stoßdämpfung in der $3^1P^0 - n^1D$ -Serie des Mg im Sonnenspektrum nach MINNAERT und GENARD [1327].

n	λ	A_λ in Milliångström		$\log \frac{A_\lambda}{2\Delta\lambda_D}$	const · $f\gamma$
		MINNAERT u. GENARD	ALLEN		
3	8806,776	512	—	0,649	1,00
4	5528,420	307*	291	0,617	2,20
5	4703,005	360	336	0,754	5,68
6	4351,923	—	—	—	—
7	4167,279	311	347	0,782	8,25
8	4057,520	—	—	—	—
9	3986,761	237	—	0,659	5,12

Trotzdem ohne Zweifel die Übergangswahrscheinlichkeiten nach höheren Serienstadien zu erheblich abnehmen müssen (etwa $\sim 1/n^3$), bleiben — wie man sieht — die *Gesamtabsorptionen fast konstant*. Dieses Verhalten erscheint zunächst noch merkwürdiger, wenn man die in der nächsten Spalte berechneten¹ $\log \frac{A_\lambda}{2\Delta\lambda_D}$ ansieht. Wie man an Hand der theoretischen Wachstumskurven (Fig. 85)

erkennt, liegen nämlich sämtliche Linien noch im Bereich reiner *Dämpfungsverbreiterung* (\sqrt{v} -Gesetz). Wir müssen also schließen, daß die *Abnahme der Oszillatorenstärken* f entlang der Serie gerade etwa kompensiert wird durch eine entsprechende *Zunahme der Dämpfungskonstanten* γ . Genauer gesagt ist nach Abschn. 69 cet. par.² $A_\lambda \sim \lambda^2 \sqrt{f \cdot \gamma}$; die danach berechneten Relativwerte von $f \cdot \gamma$ sind in der letzten Spalte der Tabelle 57 vermerkt.

Hätten wir es vorwiegend mit Strahlungsdämpfung zu tun, so wäre γ nach WEISSKOPF und WIGNER die Summe aus den Abklingkonstanten des oberen und unteren Termes. Da aber erstere mit wachsendem n nach der Quantentheorie rasch abnimmt, so wäre γ jedenfalls für die höheren Serienstadien praktisch gleich der reziproken Lebensdauer des 3^1P^0 Termes. Von diesem aus führt nur der eine Übergang $\lambda_0 = 2825 \text{ \AA}$ zum Grundterm. Setzt man die Oszillatorenstärke dieser Resonanzlinie ≈ 1 , so erhält man für alle Serienstadien dieselbe Dämpfungskonstante.

$$\gamma_{\text{Str.}} = \frac{0,22}{\lambda_0^2} = 2,7 \cdot 10^8 \text{ sek}^{-1}.$$

Wir müssen also folgern, daß die *Dämpfungskonstanten* γ der n^1D -Terme des Mg durch Stoßdämpfung bestimmt werden, mit n rasch anwachsen und $\gg 3 \cdot 10^8 \text{ sek}^{-1}$ sind.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun die LENZ-WEISSKOPFSche Quantentheorie der Stoßdämpfung, deren Grundgedanken wir schon in Abschn. 47 dargestellt haben, im einzelnen auf die Sternatmosphären anwenden (A. UNSÖLD [1366]). Als verbreiternde Agentien dürften in Betracht kommen:

* Mittel aus 4 Meßreihen, zum Teil von MULDER.

¹ Die A_λ sind Mittelwerte beider Meßreihen; $\Delta\lambda_D$ wurde wieder für 5600° K gerechnet.

² Man könnte noch daran denken, daß die NH durch die Wellenlängenabhängigkeit des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten κ und damit der wirksamen Tiefe τ_0 der Atmosphäre beeinflusst würden. Wie sich jedoch im Kap. V und VI zeigte, ist κ praktisch konstant, so daß dieser Effekt nur von ganz untergeordneter Bedeutung sein kann.

1. *Elektronen und Ionen* wegen der Stärke der Wechselwirkung.
2. *H-Atome* wegen ihres großen Partialdruckes.
3. *Gleichartige Atome* wegen der Größe der Wechselwirkung. Nach MIN-KOWSKI, HEARD (Abschn. 53) u. a. ist bei Absorptionsrohrversuchen mit Na oder K schon bei Eigengasdrucken von $\sim 1/100$ mm Hg die Stoßdämpfung von derselben Größenordnung wie die Strahlungsdämpfung.

1. Berechnung der Wirkungsradien für verbreiternde Stöße zwischen angeregten Atomen und Elektronen bzw. Ionen. Die Verstimmung $\Delta\nu$ [sek⁻¹] der Frequenz eines strahlenden Atomes durch ein vorbeifliegendes Elektron oder Ion können wir auffassen als einen quadratischen Starkeffekt. Bezeichnen wir mit r den zeitlich veränderlichen Abstand zwischen strahlendem und störendem Partikel, so ist die Feldstärke am Ort des ersteren $\sim \frac{1}{r^2}$; wir können also

$$\Delta\nu = \frac{C}{r^4} \tag{71,6}$$

setzen und die Konstanten C aus Laboratoriumsmessungen oder evtl. quantentheoretischen Berechnungen entnehmen. Hat man bei einer Feldstärke F kV/cm = $\frac{F}{0,3}$ elst. C.G.S.-Einheiten eine Linienverschiebung (Schwerpunkt aller π - und σ -Komponenten) von $\Delta\lambda$, so ist (λ und $\Delta\lambda$ in Å gemessen)

$$\frac{c \cdot \Delta\lambda}{\lambda^2 \cdot 10^{-8}} = \frac{C}{e^2} \cdot \left(\frac{e}{r^2}\right)^2 = \frac{C}{e^2} \cdot \left(\frac{F}{0,3}\right)^2$$

oder

$$C = 0,0615 \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{F^2} \tag{71,7}$$

Während des Vorüberganges eines störenden Partikels an dem leuchtenden Atom können wir nun den Abstand r in Abhängigkeit von der Zeit t schreiben als¹

$$r = \sqrt{v^2 t^2 + \varrho^2} \tag{71,8}$$

wo ϱ den Stoßparameter (kürzesten Abstand) und v die Relativgeschwindigkeit bezeichnet.

Die gesamte Phasenänderung bei einem Vorübergang $\int 2\pi\Delta\nu \cdot dt$ wird damit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi C \cdot dt}{(v^2 t^2 + \varrho^2)^2} = \frac{\pi^2 C}{v \cdot \varrho^3} \tag{71,9}$$

Mit WEISSKOPF und LENZ, vgl. (47,2), haben wir nun jeden Vorübergang als Verbreiterungsstoß zu betrachten, bei dem die Änderung der Schwingungsphase des leuchtenden Atomes $\cong 1$ ist. Nach (71,9) wird also der Wirkungsradius ϱ für Zusammenstöße mit Elektronen und Ionen

$$\varrho = \left(\pi^2 \frac{C}{v}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{71,10}$$

Die Zahl z der Stöße pro sek bzw. die Stoßdämpfungskonstante $\gamma = 2z$ ist nun vollends bestimmt durch

$$\gamma = 2z = 2\pi\varrho^2 \cdot v \cdot N, \tag{71,11}$$

wo N die Zahl der störenden Partikel pro cm³ bedeutet. Es ist also

$$N = \frac{1}{kT} \times \text{Partikeldruck der störenden Partikel} \tag{71,12}$$

¹ Wir vernachlässigen damit die „Bahnstörungen“. Dies ist erlaubt, solange ein Partikel neutral ist. Die Beeinflussung von Funkenlinien durch Elektronen oder Ionen bedarf noch einer genaueren Untersuchung.

Weiterhin ist nach einer bekannten Formel der kinetischen Gastheorie die mittlere Relativgeschwindigkeit der Teilchen mit Atomgewicht μ_1 bzw. μ_2 bestimmt durch

$$v^2 = \frac{8}{\pi} RT \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right). \quad (71,13)$$

Man erhält also schließlich¹ mit (71,10—13) die *Dämpfungskonstante bei Verbreiterung durch Elektronen oder Ionen* (analog 41,9).

$$\gamma = 2^{\frac{3}{2}} \cdot \pi^{\frac{13}{6}} \cdot C^{\frac{2}{3}} (RT)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right)^{\frac{1}{6}} \cdot N. \quad (71,14)$$

Zunächst vergleichen wir die Verbreiterung z. B. der Mg-Linien ($\mu_1 = 24$) durch Elektronen ($\mu_2 = 1/1838$) mit der durch Ionen ($\mu_2 \sim 24$): Die Dämpfungskonstante γ für Stöße mit *Elektronen* ist nach (71,14) um einen Faktor $\left(\frac{24}{2} \cdot 1838 \right)^{\frac{1}{6}} = 5,3$ größer. Die Wirkung der Ionen ist immer noch so beträchtlich, daß unsere Abschätzungen noch gültig bleiben würden, falls sich die Anwendung der Theorie in ihrer jetzigen Form auf die Elektronen als eine zu rohe Approximation herausstellen sollte².

Nunmehr wollen wir untersuchen, ob die Stoßdämpfung von Elektronen und Ionen ausreicht, um das im vorhergehenden beschriebene merkwürdige Verhalten der diffusen Mg-Nebenwerte zu erklären:

Der quadratische Starkeffekt ist bis jetzt nur für die eine Linie $n=6$; $\lambda 4352$ gemessen³ von TAKAMINE und KOKUBU [vgl. 1327]. Bei 78 kV/cm finden sie eine Verschiebung von $\sim 2,2 \text{ \AA}$; woraus man nach (71,7) berechnet $C = 1,17 \cdot 10^{-12} [\text{cm}^4 \text{sek}^{-1}]$. Nach der Theorie des quadratischen Starkeffektes muß man erwarten, daß C etwa $\sim n^7$ geht. Es wird also

$$C = 1,17 \cdot 10^{-12} \cdot \left(\frac{n}{6} \right)^7. \quad (71,15)$$

Rechnen wir weiterhin nach Tabelle 36 für die Sonnenatmosphäre mit einer mittleren Temperatur $T \approx 5600^\circ$ und einem mittleren Elektronendruck $P_e = 69,2$ Bar (entsprechend $\bar{\tau} = 0,53$), so ergeben sich nach (71,14 u. 15) folgende Dämpfungskonstanten (Elektronen + Ionen)

$$\left. \begin{array}{l} n = 3 \quad \dots \quad 6 \quad \dots \quad 9 \\ \gamma_{\text{Stoß}} = 4,9 \cdot 10^8 \quad 124 \cdot 10^8 \quad 822 \cdot 10^8 \text{ sek}^{-1}. \end{array} \right\} \quad (71,16)$$

Für alle Linien der $3^1P^o - n^1D$ -Serie des Magnesiums ist also die Stoßdämpfung erheblich größer als die Strahlungsdämpfung mit $\gamma_{\text{Str.}} = 2,7 \cdot 10^8 \text{ sek}^{-1}$. Auch das Anwachsen der $f \cdot \gamma$ mit n wird von unserer Theorie ziemlich richtig wiedergegeben: Wie schon bemerkt, gehen die $f \sim 1/n^3$, die $\gamma \sim C^{2/3} \sim n^{14/3}$. Es sollte also $f \cdot \gamma$ etwa $\sim n^{5/3}$ sein und von $n=3$ bis $n=9$ um einen Faktor $3^{5/3} = 6,2$ anwachsen, was gut zu den Beobachtungen von MINNAERT und GENARD (letzte Spalte der Tabelle 57) paßt.

Auch das plötzliche Abbrechen der Serie zwischen $n=9$ und 13 kann leicht erklärt werden: Geht man zu hohen Seriengliedern über, so wird γ immer größer. Da $\gamma > \Delta \omega_D$, so ist γ nun zugleich die Halbwertsbreite des Absorptionskoeffizienten. Man nähert sich also dem Fall der Absorption in dünner Schicht; A_λ nimmt dann unabhängig von γ mit f ab. Als Kriterium für den Übergang

¹ Die Mittelung über die Geschwindigkeiten ist — wie man sieht — noch nicht ganz exakt. Solange wir die primitive Definition (47,2) für den Wirkungsradius benützen, reicht sie vollständig aus. Ansätze zu einer genaueren Betrachtungsweise gibt W. LENZ [921].

² Vgl. A. UNSÖLD [1366]; S. 60.

³ Anm. b. d. Korr.: Neue Messungen für $n = 4, 5, 6$ und zahlreiche andere Mg-Linien hat inzwischen H. ECKARTH, Z. Physik **107**, 182 (1937) ausgeführt.

von „dicker“ zu „dünnere“ Schicht können wir (analog entsprechenden Betrachtungen bei der Dopplerverbreiterung) benutzen, daß an der Übergangsstelle $A_\omega \approx \gamma$ oder $A_\lambda \approx \frac{\lambda^2}{2\pi c} \cdot \gamma$ wird. Nun ist für $n = 9$ die Gesamtabsorption $A_\lambda = 0,237 \text{ \AA}$ und $\frac{\lambda^2}{2\pi c} \cdot \gamma \approx 0,07 \text{ \AA}$; man versteht also, daß die Serie bald darauf abbrechen muß.

Wie steht es nun mit der Stoßdämpfung durch Elektronen und Ionen bei anderen Linien, insbesondere den starken Resonanzlinien?

Zunächst ist klar, daß die diffuse Nebenserie des Mg — wie schon ihr Name sagt — sich durch besonders hohe Starkeffekttempfindlichkeit auszeichnet. Wir können also z. B. bei den NaD-Linien nur wesentlich kleinere Effekte erwarten, so daß es wohl verständlich erscheint, daß sie sich so lange der Aufmerksamkeit entzogen haben.

Der Starkeffekt der D-Linien ist von R. LADENBURG [1320] untersucht worden. Er fand bei 160 kV/cm eine Rotverschiebung von $\Delta\lambda = 0,025 \text{ \AA}$ (auch die Proportionalität mit F^2 wurde bestätigt). Damit berechnet man nach unseren Formeln für die Sonne ($T = 5600^\circ$; $P_s = 69,2 \text{ Bar}$) eine Stoßdämpfungskonstante $\gamma_{\text{Stoß}} = 1,5 \cdot 10^8$. Die gesamte Dämpfungskonstante der D-Linien wäre also $\gamma_{\text{Stoß}} + \gamma_{\text{Str}}$ oder

$$\gamma = (1,5 + 0,6) \cdot 10^8 = 2,1 \cdot 10^8 \text{ sek}^{-1}. \quad (71,17)$$

Dieser Wert ist zwar noch kleiner als der „beobachtete“ (71,2) von $6 \cdot 10^8$; aber man kann nach Abwägung aller Unsicherheitsfaktoren doch kaum umhin anzunehmen, daß die D-Linien auf der Sonne eben noch durch Stoßdämpfung affiziert werden. In Riesensternen dürfte dies schon nicht mehr zutreffen, doch können solche Feinheiten heute noch nicht mit Sicherheit entschieden werden.

Der Starkeffekt der Ca-Resonanzlinie $\lambda 4227$ ist noch nicht gemessen. Nach den quantenmechanischen Formeln¹ von J. G. KIRKWOOD [1318], deren Unsicherheit — nach den von KIRKWOOD durchgeführten Vergleichen mit dem Experiment zu urteilen — einen Faktor 2 kaum überschreiten dürfte, findet man für 160 kV/cm zwei Komponenten mit 0,31 und 0,41 \AA Violettverschiebung². Rechnet man mit einem Mittelwert $\Delta\lambda = 0,35 \text{ \AA}$, so erhält man für die Sonne

$$\gamma_{\text{Stoß}} = 14,4 \cdot 10^8. \quad (71,18)$$

Zusammen mit der Strahlungsdämpfung (71,5) kommt man genau auf den „beobachteten“ Wert $\gamma = 16 \cdot 10^8$ aus Gl. (71,4). Daß die Übereinstimmung so gut herauskommt, ist natürlich Zufall. Man kann es aber als ziemlich sicher betrachten, daß die Dämpfung von $\lambda 4227$ auf der Sonne im wesentlichen durch Stöße von Elektronen verursacht wird.

Nach unseren bisherigen Befunden müssen wir annehmen, daß die meisten starken FRAUNHOFER-Linien zumindest in den Zwergsternen durch Stoßdämpfung beeinflusst sind. Für die astrophysikalisch wichtigen Linien liegen jedoch noch keine Starkeffektmessungen vor und eine theoretische Abschätzung ist jedenfalls für so komplizierte Spektren wie Fe, Ti usw. kaum möglich. Wir müssen also die weitere Diskussion von Fig. 87 einstweilen ruhen lassen und wünschen, daß die entsprechenden Starkeffektmessungen — die keine prinzipielle Schwierigkeit bieten dürften — möglichst bald ausgeführt werden.

¹ Die wichtigsten Arbeiten zur Quantentheorie des Starkeffektes von Serienlinien sind — in zeitlicher Folge — [1304, — 56, — 14, — 70, — 18], sowie der Handbuchartikel von H. BETHE [903].

² Diese große Verschiebung hängt damit zusammen, daß der 3^1D -Term dicht unter dem 4^1P -Term liegt.

2. Berechnung der Wirkungsradien für verbreiternde Stöße zwischen angeregten Atomen und H-Atomen. Nächste der Verbreiterung durch Elektronen und Ionen dürfte die durch *Wasserstoffatome* verursachte evtl. in den kühleren Sternen eine Rolle spielen. Wir wollen daher auch diesen Effekt genauer untersuchen.

Die Wechselwirkung zwischen einem angeregten Atom (z. B. Na im 3^2P -Zustand) und einem H-Atom, das sich im Grundzustand befindet, ist nach V. WEISSKOPF (s. S. 180) vom Typus der v. D. WAALS-Kräfte, d. h. $\sim \frac{1}{r^6}$. Für die bei einem Vorübergang auftretende Frequenzverstimmung können wir also den Ansatz machen

$$|\Delta\nu| = \frac{C}{r^6}. \quad (71,19)$$

Damit wird die *gesamte*, durch einen Vorübergang mit der Relativgeschwindigkeit v und dem Stoßparameter ϱ verursachte Phasenverschiebung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi C \cdot dt}{(v^2 t^2 + \varrho^2)^3} = \frac{3\pi^2}{4} \cdot \frac{C}{v \cdot \varrho^5}. \quad (71,20)$$

Rechnen wir wieder mit WEISSKOPF und LENZ als „verbreiternden Stoß“ jeden Vorübergang, bei dem eine Phasenverschiebung ≥ 1 bleibt, so erhalten wir sofort den Wirkungsradius

$$\varrho = \left(\frac{3\pi^2}{4} \cdot \frac{C}{v} \right)^{\frac{1}{5}}. \quad (71,21)$$

Der Beitrag zur Dämpfungskonstante γ wird analog (71,14)

$$\gamma = 18,52 \cdot C^{\frac{2}{5}} \cdot (RT)^{\frac{3}{10}} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right)^{\frac{3}{10}} \cdot N. \quad (71,22)$$

N bedeutet hier zunächst die Zahl der Wasserstoffatome pro cm^3 . Um auch die — ziemlich nebensächliche — Wirkung anderer Atome näherungsweise zu berücksichtigen, kann man sie in N einfach mitrechnen.

Das Hauptproblem ist nun weiterhin die *Berechnung*¹ der Wechselwirkungskonstante C , die ja bei Verbreiterung mit atomarem Wasserstoff nicht direkt gemessen werden kann: Die Wechselwirkungsenergie zweier neutraler Atome ist nach der Quantenmechanik² — alles zunächst in den HARTREESchen atomaren Einheiten (BETHE, S. 273) geschrieben —

$$E_2 = \frac{6}{r^6} \sum_{k', e'} \frac{z_{kk'}^2 z_{ee'}^2}{E_k - E_{k'} + E_e - E_{e'}}. \quad (71,23)$$

Dabei bedeutet

r den Abstand der beiden Atome.

z die Koordinate in der Verbindungslinie der Kerne.

k die Quantenzahlen des Zustandes mit der Energie E_k , in dem sich das angeregte Atom befindet.

k' die Quantenzahlen irgendwelcher damit kombinierender Terme.

e die Quantenzahlen des Grundzustandes im H-Atom.

e' die Quantenzahlen angeregter Zustände im H-Atom.

$z_{kk'}$ bzw. $z_{ee'}$ sind die zugehörigen Marixelemente von z .

¹ Die folgende Rechnung dürfte nur für Kenner der Quantenmechanik verständlich sein. Andere mögen sogleich sich dem Schlußresultat Gl. (71,28) zuwenden.

² Vgl. H. BETHE [903], S. 547f.; Gl. (63,8). Dort weitere Literatur. Diese Formel ist identisch mit der bei V. WEISSKOPF [804] angegebenen Formel von LONDON (ebd. S.13 unten). Unsere weitere Umformung scheint dem Verf. jedoch übersichtlicher und genauer zu sein, als die von WEISSKOPF vorgeschlagene.

Nun ist in unserem Problem stets $E_e - E_{e'} \gg E_k - E_{k'}$, da ja die unterste Anregungsstufe des H-Atoms etwa 10 V beträgt, während z. B. der Na 3^2P -Term von seinen Nachbartermen nur ~ 1 V entfernt ist. Wir können also mit einem Fehler von höchstens $\sim 20\%$ den Nenner durch $E_e - E_{e'}$ ersetzen. Nun ist aber

$$\sum_{e'} \frac{z_{ee'}^2}{E_e - E_{e'}} = -\frac{\alpha}{2} \quad (71,24)$$

die halbe *Polarisierbarkeit* des H-Atoms. Wir erhalten also

$$E_2 = -\frac{3\alpha}{r^6} \sum_{k'} z_{kk'}^2.$$

Die letztere Summe läßt sich nach Mittelung über alle Richtungen gleichfalls auswerten und ergibt $\frac{\bar{R}_k^2}{3}$, wo \bar{R}_k^2 der Mittelwert des (Bahnradius)² für den Quantenzustand k bedeutet. Damit wird¹

$$E_2 = -\frac{\alpha \cdot \bar{R}_k^2}{r^6}. \quad (71,25)$$

Gehen wir unter Beibehaltung der alten Symbole zu den gewöhnlichen C.G.S.-Einheiten über, so wird

$$E_2 = -e^2 \cdot \frac{\alpha \bar{R}_k^2}{r^6}, \quad (71,26)$$

wo e die Elektronenladung bedeutet. Die \bar{R}_k^2 kann man genau ausrechnen, wenn die Eigenfunktionen des gestörten Termes k etwa mit Hilfe des HARTREE-Feldes berechnet ist. Für unsere Zwecke wird es meist schon genügen, die entsprechenden Wasserstoffmatrizen zu verwenden. Für einen Term der Hauptquantenzahl n und der Impulsquantenzahl l ist nach BETHE (S. 286; (Gl. 3,21))

$$\bar{R}_{nl}^2 = a^2 \cdot \frac{n^2}{2} \{5n^2 + 1 - 3l(l+1)\}, \quad (71,27)$$

wo a den Wasserstoffradius bedeutet. Die Abweichungen vom Idealfall des Wasserstoffes kann man noch berücksichtigen, indem man für n einen zwischen der wahren und der effektiven Hauptquantenzahl liegenden Wert einsetzt. So ergibt sich schließlich für unsere Konstante C in (71,19—22)

$$C = \frac{e^2 a^2}{h} \cdot \alpha \cdot \frac{n^2}{2} \{5n^2 + 1 - 3l(l+1)\}. \quad (71,28)$$

Die Polarisierbarkeit α des H-Atoms ist nach der Quantenmechanik (näheres s. BETHE)

$$\alpha = 0,663 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3. \quad (71,29)$$

Es wird also

$$C = 64,4 \cdot 10^{-35} \cdot \frac{n^2}{2} \{5n^2 + 1 - 3l(l+1)\}. \quad (71,30)$$

Berechnen wir nun mit (71,22 u. 30) beispielsweise den durch H-Atome verursachten Anteil der Dämpfungskonstante der NaD-Linien auf der Sonne! Für den oberen Quantenzustand liegt n zwischen 3 und der effektiven Quantenzahl 2,12. Wir rechnen also in (71,30) mit $n \sim 2,5$ und $l=1$ und erhalten $C = 5,28 \cdot 10^{-32}$. Hiermit gehen wir in Gl. (71,22) ein: Den Wasserstoffdruck dürfen wir praktisch mit dem Gasdruck identifizieren. Für eine mittlere optische Tiefe $\bar{\tau} = 0,53$ ist nach Tabelle 36 größenordnungsmäßig $P = 4170$ Bar bei $T = 5600^\circ$; also $N = 54,4 \cdot 10^{14}$ Atome/cm³. Man erhält so schließlich

$$\gamma_H \approx 1 \cdot 10^8 \text{ sek}^{-1}. \quad (71,31)$$

¹ In BETHES analoger Berechnung der Wechselwirkung zweier H-Atome tritt noch ein Faktor 1/2 auf, was daher rührt, daß dort $E_e - E_{e'} \approx E_k - E_{k'}$ ist.

Die Dämpfung durch Stöße mit H-Atomen kommt bei den D -Linien also etwa in die Größenordnung der Strahlungsdämpfung. Wie man aus (71,26 u. 30) ersieht, liegen die Wirkungsradien für Stöße mit H-Atomen in einem viel engeren Bereich, als die mit Elektronen. Während erstere in übersichtlicher Weise mit der Größe der Bahn, genauer gesagt dem Mittelwert des (Bahnradius)² variieren, imitieren die letzteren das nach der Quantentheorie auch verständliche erratische Verhalten der quadratischen Starkeffekte.

Für die Atmosphären von Sternen in der Art der Sonne läßt sich zusammenfassend die Herkunft der Dämpfungskonstante folgendermaßen beschreiben: *Hochangeregte, locker gebundene Terme (insbesondere D -, F -Terme usw.) werden in erster Linie durch Elektronen und Ionen verbreitert. Bei den fest gebundenen Termen sind daneben die Stoßdämpfung durch H-Atome und die Strahlungsdämpfung von Bedeutung.*

Schließlich wenden wir uns noch kurz einem Effekt zu, der nur in Spezialfällen von Bedeutung sein dürfte:

3. Verbreiterung durch gleichartige Atome. Aus Laboratoriumsuntersuchungen über Resonanzfluoreszenz, natürliche Linienbreite usw. ist seit langem bekannt, daß z. B. die NaD -Linien besonders stark durch Na-Atome beeinflusst werden. Um zu sehen, wieweit diese Erfahrungen von Bedeutung für die Astrophysik sind, müssen wir wieder den Umweg über die Theorie gehen.

Nach V. WEISSKOPF [933] geht die Wechselwirkungsenergie in diesem Falle $\sim \frac{1}{r^3}$; wir schreiben also die Frequenzverstimmung

$$\Delta \nu = \frac{C}{r^3}, \quad (71,32)$$

wo nach Weißkopf größenordnungsmäßig

$$C = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{e^2}{m \omega_0} \cdot f. \quad (71,33)$$

Dabei bedeutet ω_0 die Kreisfrequenz der betreffenden Resonanzlinie, $f \approx 1$ ihre Oszillatorenstärke. Die gesamte Phasenstörung bei einem Vorübergang wird nun

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi C dt}{(v^2 t^2 + \varrho^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi C}{v \cdot \varrho^2}. \quad (71,34)$$

Der Stoßradius wird also

$$\varrho = \sqrt{\frac{4\pi C}{v}} \quad (71,35)$$

und die Dämpfungskonstante

$$\gamma = 8\pi^2 C \cdot N, \quad (71,36)$$

wo N die Anzahl gleichartiger Atome pro cm^3 bezeichnet. Wir sehen also mit WEISSKOPF [933], daß die Dämpfungskonstante hier *nur* von der Dichte, *nicht* aber explizit von der Temperatur abhängt. Wir können daher, anstatt die nur größenordnungsmäßige Abschätzung (71,33) für C zu benutzen, *direkt* auf die vorliegenden Experimente zurückgreifen: Nach R. MINKOWSKI [1013] wird bei Na die Eigendruckverbreiterung gleich der natürlichen Linienbreite ($\gamma_{\text{Stoß}} = \gamma_{\text{Str.}} \approx 0,63 \cdot 10^8 \text{ sek}^{-1}$) für $N \sim 6 \cdot 10^{14}$ Na-Atome/ cm^3 . Ähnlich ist nach J. F. HEARD [1006] bei K $\gamma_{\text{Stoß}} = \gamma_{\text{Str.}} = 0,37 \cdot 10^8 \text{ sek}^{-1}$ für $N \sim 1,5 \cdot 10^{14}$ K-Atome/ cm^3 in größenordnungsmäßiger Übereinstimmung mit der Theorie.

Auf der *Sonne* haben wir in der für die Erzeugung der Linien wichtigen Schicht — wie wir unter 2. berechneten — *insgesamt* $\sim 54 \cdot 10^{14}$ Atome/ cm^3 ; es erreicht also kein einzelnes Element, die das für Auftreten von Eigendruckverbreiterung nötige Dichte.

Anders liegen die Dinge in *roten Zwergsternen*: Nach Tabelle 84 haben wir in einem solchen Stern bei $\Theta = 1,5$, d. h. $T = 3360^\circ$, einen Elektronendruck $P_e \sim 10$ Bar zu erwarten. Nach Tabelle 22 entspricht dem ein Gasdruck $P_g \sim 5,4 \cdot 10^4$ Bar. Danach berechnet man insgesamt $N = 1,2 \cdot 10^{17}$ Atome/cm³. Macht nur *ein* Element wie Ca oder Na ungefähr 2% der Nicht-Wasserstoffatome, also $\sim \frac{2}{1470}$ aller Atome aus (Tabelle 20), so kommt man auf eine Eigengas-dichte von $\sim 1,6 \cdot 10^{14}$ Atomen/cm³. Der Effekt dürfte also neben den schon betrachteten Effekten nur bei extremen roten Zwergen von Bedeutung werden.

Dazu paßt folgende Beobachtung von B. LINDBLAD [1322]: Beim spektral-photometrischen Vergleich eines M-Riesensternes (Boss 3584; gM2; abs. Helligkeit $\sim -0^m,5$) mit einem entsprechenden Zwerg (Boss 2935; dM2; abs. Helligkeit $\sim +10^m,7$) zeigte sich, daß in dem Zwergstern die Ca-Resonanzlinie $\lambda 4227$ von einem ausgedehnten Absorptionskontinuum umgeben ist, das von $\lambda 4120$ einerseits bis $\lambda 4650$ andererseits reicht. Dieses Kontinuum kann man entweder einer extremen Eigendruckverbreiterung zuschreiben oder — wie dies LINDBLAD im Anschluß an analoge terrestrische Beobachtungen von H. HAMADA tut — einen Quasimolekül Ca_2 . Die letztere Auffassung entspricht der „quasistatischen“ Theorie der Druckverbreiterung (Abschn. 47, 2. Hälfte) und dürfte bei so starken Verbreiterungen die richtigere sein, während wir ursprünglich von der bei kleinen Verbreiterungen angemesseneren „nichtadiabatischen“ Theorie (Abschn. 47, 1. Hälfte) ausgingen. LINDBLADs Beobachtung läßt darauf schließen, daß in M-Zwergen noch erheblich größere Gasdichten vorkommen, als wir sie in unserem obigen Rechenbeispiel erhalten hatten. Die Eigendruckverbreiterung dürfte also — wie gesagt — für Ca 4227 und evtl. die D-Linien solcher Sterne nicht zu vernachlässigen sein¹.

Zum Schluß dieses Abschnittes sollen noch einige weitere astrophysikalisch wichtige Konsequenzen der Stoßdämpfungstheorie diskutiert werden:

Vergleichen wir das Spektrum eines Riesen- und Zwergsternes, welche z. B. die gleiche Anzahl NH von Fe-Atomen eines bestimmten Anregungszustandes über 1 cm² der Photosphäre haben. Dann werden die in den *linearen Teil* der Wachstumskurve fallenden Linien in beiden Sternen auf jeden Fall gleich stark erscheinen. Die Gesamtabsorption der auf dem $\sqrt{\gamma}$ -Teil der Wachstumskurve liegenden starken Linien ist dagegen *et. par.* proportional $\sqrt{\gamma}$. Wenn γ durch Strahlungsdämpfung verursacht ist, so werden auch diese Linien in beiden Sternen gleich stark sein. Hat dagegen die Stoßdämpfung das Übergewicht, so werden die Linien im Zwergstern stärker sein. Handelt es sich z. B. — wohl der häufigste Fall — um Stoßdämpfung durch Elektronen, so ändert sich der Elektronendruck P_e beim Übergang von Riesen zu Zwergen der späteren Spektraltypen um einen Faktor ~ 10 , die Gesamtabsorption um ein Faktor ~ 3 ! Leider gibt es noch keine Beobachtungen, um diesen Effekt nachzuprüfen; mit den üblichen Sternspektrographen bietet das Vordringen in den linearen Teil der Wachstumskurve schon große Schwierigkeiten. Es bedarf keines Hinweises, daß dieses Phänomen für die Deutung der spektroskopischen Parallaxeneffekte von großer Bedeutung ist.

Ebenso kommt es — was vielfach übersehen wurde — bei der Diskussion der Intensitätsänderung von Linien entlang der Spektralsequenz *nicht* nur auf die Diskussion der NH an, sondern man muß die Lage der Linien auf der Wachstumskurve und evtl. die Druck- und Temperaturabhängigkeit der Dämpfungskonstante mit in Rechnung stellen.

¹ Anm. b. d. Korr.: Neue terrestrische Beobachtungen von K. WURM u. H. J. MEISTER, ZS. f. Ap. 13, 25 (1936) scheinen *gegen* diese Annahme zu sprechen.

72. Druckverbreiterung der Wasserstofflinien. Zwischenmolekularer Starkeffekt.

Im 2. Teil von Abschn. 47 haben wir nachgewiesen, daß die Verbreiterung der Wasserstofflinien durch die elektrischen Felder der Ionen und Elektronen in Sternatmosphären in der Hauptsache (d. h. solange man nicht zu nahe an die Linienmitte hergeht) als ein *adiabatischer* Vorgang betrachtet werden kann.

Für unser jetziges Problem ist also nicht mehr die LORENTZsche Theorie zuständig. Wir müssen vielmehr mit STARK, DEBYE und HOLTSMARK (s. S. 180) die Verbreiterung auffassen als Starkeffekt der zwischenmolekularen Felder, deren Verteilungsgesetz zuerst HOLTSMARK berechnet hat.

Die Anwendung dieser Vorstellungen zur Deutung der Sternspektren geht hauptsächlich¹ auf O. STRUVE und C. T. ELVEY [1311], S. VERWEY und A. PANNEKOEK [1334 u. 67] und Verf. [1359] zurück. In der Atmosphäre eines typischen *A-Sternes* haben wir $T \approx 10000^\circ$ und nach Fig. 84 $\log P_e \approx 2,5$. Die „Normalfeldstärke“ im Sinne HOLTSMARKs wird also nach Gl. (47,5)

$$F_0 = 46,8 \cdot \left(\frac{2 P_e}{T} \right)^{\frac{2}{3}} \text{ elst. Einh.} \quad (72,1)$$

oder

$$F_0 = 7,4 \text{ elst. Einh.} = 2,2 \text{ kV/cm.} \quad (72,2)$$

Vergleichen wir zunächst — ganz naiv — das Aussehen der BALMER-Serie im Spektrum z. B. des Sirius einerseits und einer Starkeffektaufnahme bei 2,2 kV/cm andererseits, so fallen zwei Unterschiede auf, die zunächst auch als schwerwiegende Einwände gegen die Theorie angesehen wurden:

1. Die Linien des Sternspektrums sind größenordnungsmäßig breiter als die der Starkeffektaufnahme.

2. Die Größe der Starkeffektaufspaltungen wächst mit der Gliednummer in der Serie stark an, während in den Sternspektren $H_\beta \dots H_\delta$ nahezu die gleiche Breite aufweisen.

Beide Schwierigkeiten verschwinden mit einem Schlage, wenn wir uns klarmachen, daß *die Absorption der ersten Glieder der BALMER-Serie in optisch dicker Schicht erfolgt*. Wir benützen also zur Berechnung der Konturen und evtl. Gesamtabsorptionen von $H_\alpha \dots H_\delta$ den in (47,25) für $\beta \gg 1$ berechneten Absorptionskoeffizienten² (pro Atom $\cdot F_0$ in elst. C.G.S.-Einheiten, $\Delta \lambda$ in Å zu rechnen).

$$k = C \frac{F_0^{\frac{3}{2}}}{\Delta \lambda^{\frac{5}{2}}}, \quad (72,3)$$

wo nach (47,26) die Konstante folgende Werte hat:

$$C \cdot 10^{16} = \left. \begin{array}{cccc} H_\alpha & H_\beta & H_\gamma & H_\delta \\ 3,13 & 0,885 & 0,442 & 0,309 \end{array} \right\} \quad (72,4)$$

Hätten wir es nun einfach mit einem *Absorptionsrohr* zu tun, so würden die Breiten der Linien, bei gleicher Tiefe gemessen $\sim C^{\frac{2}{3}}$ sein, d. h. von H_β bis H_δ um einen Faktor 1,5 *abnehmen*. Die Zunahme der Starkeffektaufspaltungen würde also — wie man in (47,26) schön sieht — noch in wenig *überkompensiert* durch die Abnahme der Oszillatorenstärken und der Wellenlängen.

¹ Vgl. Literaturverzeichnis. Qualitative und halbqualitative Ansätze gehen natürlich weiter zurück; vgl. insbesondere die mehrfach erwähnte Arbeit von H. N. RUSSELL und J. Q. STEWART [1339].

² Bei kleinen β versagt unter den in Sternatmosphären herrschenden Bedingungen nach Abschn. 47 die „adiabatische“ Theorie ohnedies. Es hat also kaum viel Sinn, genauer zu rechnen.

Wenn wir die Konturen und Gesamtabsorptionen der BALMER-Linien in den Spektren früher Typen berechnen wollen, so müssen wir außer diesem Effekt — der die früher bemerkten Schwierigkeiten in der Hauptsache aufklärt — noch einen zweiten berücksichtigen:

In den frühen Spektraltypen ($\Theta < 0,6$) nimmt nach Tabelle 30 der kontinuierliche Absorptionskoeffizient κ und das Verhältnis $\kappa/\bar{\kappa}$ nach kürzeren Wellenlängen hin *ab*, bei H_α bekommen wir also nur Strahlung aus einer dünneren und oberflächennäheren Schicht, als z. B. bei H_δ . Sowohl die wirksame Zahl der absorbierenden Wasserstoffatome im 2. Quantenzustand N_2H wie auch — wegen des abnehmenden Druckes — die mittlere Normalfeldstärke F_0 werden also von H_α nach H_δ hin *zunehmen*, ebenso nach (72,3) die optische Dicke für selektive Absorption bei gleichen $\Delta\lambda$. Das heißt die Breite der BALMER-Linien wird in den Sternspektren mit der Gliednummer *noch weniger* variieren, als wir dies eben für ein Absorptionsrohr mit dicker Schicht berechnet hatten.

Versuchen wir nun, diesen Effekt quantitativ zu erfassen! Für einen Stern mit $T = 12600^\circ$ ($\Theta = \frac{5040}{T} = 0,4$) und der Schwerebeschleunigung $g = 10^4$ (cmsek^{-2}), also etwa einen normalen B8-Stern, entnehmen wir zunächst aus Tabelle 30 das unter unseren Standardannahmen berechnete Verhältnis $\kappa/\bar{\kappa}$ als Funktion der Wellenlänge¹. Damit berechnen wir nach (68,13 + 12) die „wirksame optische Tiefe für Gesamtstrahlung“

$$\bar{\tau}_0 = \frac{\bar{\kappa}}{\kappa} \left(1 + \frac{3}{2\beta_0} \right)^{-1}, \tag{72,5}$$

wo β_0 in der üblichen Weise durch (67,15) definiert ist. Geht man von λ 4000 bis 6500, so nimmt $\bar{\tau}_0$ von 0,502 auf 0,135 ab. Zu $\bar{\tau}_0$ berechnen wir weiterhin, wie in Abschn. 38, Gl. (8ff.) auseinandergesetzt, zunächst $\bar{\kappa}$ und P_g und damit nach (68,7) und mit Anwendung der Ionisationstabellen von Kap. IV die Anzahl absorbierender Atome N_2H und den Elektronendruck P_e . Die folgende Tabelle 58 gibt für H_α bis H_δ die so berechneten $\log N_2H$ und die aus P_e und T berechneten Normalfeldstärken F_0 in elst. C.G.S.-Einheiten. Dann folgen nochmals die Konstanten C aus (72,4). Schreiben wir die wirksame optische Dicke der Atmosphäre für selektive Absorption in den BALMER-Linien in der Form

Tabelle 58. Berechnung der wirksamen optischen Tiefe $x_p = B \cdot \Delta\lambda^{-5/2}$ für die BALMER-Linien eines Sternes mit $T=12600^\circ$ und $g = 10^4 \text{ cm sek}^{-2}$.

$$x_p = k \cdot N_2H = C \cdot \frac{F_0^{3/2}}{\Delta\lambda^{5/2}} \cdot N_2H \tag{72,6}$$

oder kurz

$$x_p = \frac{B}{\Delta\lambda^{5/2}}, \tag{72,7}$$

so erhalten wir für B in der letzten Spalte angegebenen Werte.

	$\log N_2H$	$\log F_0$	$\log C$ nach (47,26)	$\log B$ zu Gl. (72,7)
H_α	16,32	0,659	0,50—16	1,81
H_β	16,73	0,788	0,95—17	1,86
H_γ	16,84	0,828	0,65—17	1,73
H_δ	16,89	0,848	0,49—17	1,65

Wie man sieht, sollte nach unserer Rechnung die Linienstärke von H_α nach H_β ein wenig zunehmen, um dann nach H_δ zu langsam abzunehmen. Die Beobachtungen (Einzelabgaben s. unten) zeigen bei Sternen der betrachteten Temperatur gleichfalls ein Anwachsen der Linienbreite von H_α nach H_β in der richtigen Größenordnung; die Breiten der weiteren Linien dagegen wachsen mit der Gliednummer in der Serie in kaum merklicher Weise zunächst noch *an*. Man erkennt aber auch aus dem Gang unserer Rechnungen, daß die Theorie dieses Effektes sehr empfindlich ist gegen kleine Änderungen in den Ausgangsannahmen.

¹ Wir nehmen *nicht* einen Stern beim Maximum der BALMER-Linien ($\Theta \sim 0,5$), weil dort die Druckabhängigkeit von $\kappa/\bar{\kappa}$ die Rechnung sehr erschwert. Bei $\Theta = 0,4$ kann sie schon vernachlässigt werden.

Schließlich berechnen wir noch beispielsweise für H_γ , die *Kontur* der Linie im einzelnen:

Der *Strahlungsaustausch* in den Wasserstofflinien (abgesehen vielleicht von H_α) dürfte im wesentlichen dem Schema der „*Absorption*“ folgen. Denn es ist außerordentlich unwahrscheinlich, daß das Elektron des Atoms im Anschluß an einen Absorptions-Quantensprung $n = 2 \rightarrow 5$ gerade die Emission $5 \rightarrow 2$ ausführt. Die zahlreichen „Verkehrsmöglichkeiten“ zwischen den höheren Quantenbahnen werden vielmehr eine weitgehende Annäherung an den Zustand lokalen thermodynamischen Gleichgewichtes herbeiführen. Nach Kap. XII können wir also die Tiefe R in der Linie berechnen nach der bekannten Formel

$$R = \left(\frac{1}{x_\nu} + \frac{1}{R_c} \right)^{-1}. \quad (72,8)$$

Da wir auf die Berechnung der Tiefe R_c in der Mitte der BALMER-Linien in Abschn. 74 noch ausführlich zurückkommen werden, wollen wir zunächst einfach den — wie sich zeigen wird mit der Theorie gut verträglichen — Beobachtungswert $R_c = 60\%$ benützen und berechnen mit (72,7) die in der folgenden Fig. 88 wiedergegebene Kontur. Ihre Gesamtabsorption ergibt sich durch

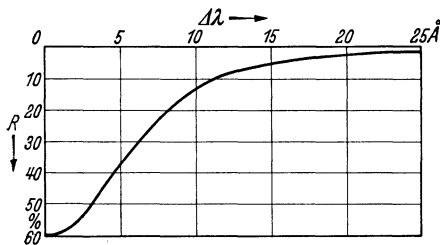


Fig. 88. Kontur von H_γ . Berechnet für $T = 12600^\circ$ und $g = 10^4 \text{ cm sek}^{-2}$.

Planimetrieren zu $E_\lambda = 9,3 \text{ \AA}$. Kontur wie Gesamtabsorption stimmen mit den Beobachtungen gut überein. Für die H_γ -Linie der normalen B8-Sterne (entsprechend $\Theta \sim 0,4$) findet S. GÜNTHER [1316] im Mittel $E_\lambda = 8,5 \text{ \AA}$.

S. VERWEY [1367] hat in seiner mehrfach erwähnten Dissertation Berechnungen von Konturen und Gesamtabsorptionen der BALMER-Linien in größerem Umfange nach den von A. PANNEKOEK entwickelten Methoden durchgeführt. Die

physikalischen Grundlagen, wie die Ergebnisse dieser Arbeit sind den unserigen sehr ähnlich, doch scheint mir die hier entwickelte Darstellungsweise den Vorzug größerer Durchsichtigkeit zu besitzen (der allerdings durch etwas geringere Genauigkeit erkauft wird). Für den kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten benützt VERWEY die schon besprochenen Rechnungen PANNEKOEKS. Hinsichtlich des Strahlungsaustausches wäre es physikalisch richtiger und mathematisch einfacher, mit Absorption statt mit Streuung zu rechnen. Der Unterschied ist jedoch — entsprechend Kap. XII — nur für die Mitte der Linien wesentlich.

Ehe wir — wieder größtenteils im Anschluß an VERWEY — die Intensität der BALMER-Linien in Abhängigkeit von T und g bzw. Spektraltyp und absoluter Helligkeit diskutieren, wenden wir uns noch der Deutung der höheren Serierglieder zu:

Geht man von $H_\alpha, H_\beta \dots$ aus zu Linien mit immer größerer Hauptquantenzahl n des oberen Termes und entsprechend kleinerer Übergangswahrscheinlichkeit und größerer Starkeffektverbreiterung, so erfolgt schließlich die *Absorption in optisch dünner Schicht*¹. Bezeichnen wir die wirksame optische Tiefe der Atmosphäre für selektive Absorption wieder mit x_ν ($\ll 1$ für alle ν), den Absorptionskoeffizienten pro Wasserstoffatom im 2. Quantenzustand mit κ_ν , und die Zahl dieser Atome über 1 cm^2 der Sternoberfläche mit $N_2\text{H}$, so ist

$$x_\nu = \kappa_\nu \cdot N_2\text{H}. \quad (72,9)$$

¹ Vgl. hierzu auch Abschn. 52.

Integriert man über die Linie, so wird zunächst

$$\int x_\nu d\lambda = N_2 H \cdot \int \kappa_\nu d\lambda \quad (72,10)$$

und nach (45,23) völlig unabhängig von der Art des Verbreiterungsmechanismus

$$\int x_\nu d\lambda = \frac{\pi e^2 \lambda^2}{m c^2} \cdot f \cdot N_2 H, \quad (72,11)$$

wo f die Oszillatorenstärke der betreffenden Linie (Tabelle 40) bedeutet. Ist nun — wie wir voraussetzen — $x_\nu \ll 1$, so können wir nach (72,8) $x_\nu = R$ setzen. Das linke Integral ist dann einfach die Gesamtabsorption E_λ und wir erhalten

$$E_\lambda = \frac{\pi e^2 \lambda^2}{m c^2} \cdot f \cdot N_2 H. \quad (72,12)$$

Um beginnende Abweichungen vom Fall dünner Schicht (das Analogon von Selbstabsorption bei Emissionslinien) zu berücksichtigen, wird man x_ν in (72,11) besser aus (72,8) entnehmen und also statt E_λ schreiben

$$\int \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_c} \right)^{-1} d\lambda \quad (72,13)$$

oder, indem man wie beim Absorptionsrohr näherungsweise $R = 1 - e^{-x_\nu}$ setzt,

$$\int \ln(1 - R) d\lambda. \quad (72,14)$$

Für große n laufen die drei Ausdrücke selbstverständlich auf dasselbe heraus.

Auf Grund dieser Überlegungen kann man nun $N_2 H$ folgendermaßen bestimmen: Nach Messungen der E_λ — die den Vorteil haben, vom Trennungsvermögen des Spektrographen unabhängig zu sein — oder evtl. der durch (72,13 oder 14) definierten Größen berechnet man für alle erreichbaren Serierglieder formal nach (72,12) die $N_2 H$. Mit wachsendem n werden diese, in dem Maße wie man sich dem Falle dünner Schicht nähert, einem bestimmten Grenzwert zustreben, dem wahren $N_2 H$. Erst wenn die Starkeffektverbreiterung so groß ist, daß die Linienflügel sich gegenseitig überdecken und die Intensität des Kontinuums zwischen den Linien herabdrücken, dann nehmen die $N_2 H$ scheinbar wieder ab. Es ist natürlich auch denkbar, daß mit wachsendem n dieser Überlappungseffekt die Oberhand gewinnt, ehe der Fall dünner Schicht realisiert ist; dann bekommt man nur einen *unteren Grenzwert der $N_2 H$* .

Da an der Seriegrenze die Summe der sich überlagernden Linien-Absorptionskoeffizienten nach der Quantenmechanik stetig in den Absorptionskoeffizienten des Seriegrenzkontinuums übergeht, so wird der letztere Fall daran erkennbar sein, daß das Grenzkontinuum nahezu Sättigung zeigt, d. h. daß dort $\kappa/\bar{\kappa} \gg 1$ ist. Nach Tabelle 30 ist man bei den A-Sternen nicht weit davon entfernt.

Das im vorhergehenden beschriebene Verfahren ist zuerst auf die *BALMER-Linien des Sonnenspektrums* von A. UNSÖLD [1359] angewandt worden. Von $n = 10$ bis 16 sind die mit (72,14) berechneten $N_2 H$ ziemlich konstant; ihr Maximalwert ist $\sim 5 \cdot 10^{15}$. Daß man es bei großen n wirklich mit optisch dünnen Schichten zu tun hat, zeigt sich darin, daß die Tiefe in der Mitte der Linie z. B. für $n = 15$ und 16 nur $R \approx 13\%$ ist, während die Maximaltiefe R_c (für $\kappa_\nu/\bar{\kappa} \rightarrow \infty$) etwa 85% sein müßte (s. Abschn. 65). Infolge ihrer Flachheit und zahlreicher störender Fremdlinien waren die höheren Glieder der BALMER-Serie im Sonnenspektrum früheren Beobachtern völlig entgangen; erst Mikrophotometerkurven mit großer Dispersion ließen sie erkennen.

Für zahlreiche *Sterne* der Spektraltypen Od bis F5 hat S. GÜNTHER [1316] die Gesamtabsorptionen E_λ der BALMER-Linien gemessen und daraus nach

(72,12) die N_2H berechnet. In Fig. 89 vergleichen wir den cA2-Stern α Cygni¹ mit dem normalen A0-Stern Sirius. Beide Sterne geben — wie im folgenden gezeigt werden soll, in Einklang mit der Theorie — etwa denselben Wert $\log N_2H = 16,2$ bis 16,4. Die Verschiedenheit der beiden Kurven in Fig. 89 läßt sich zwanglos darauf zurückführen, daß in α Cyg das zwischenmolekulare Feld viel kleiner ist als in Sirius. Die Gesamtabsorption der in optisch dicker Schicht gebildeten Linien $n < 8$ wächst mit dem Druckeffekt stark an. Andererseits überlappen sich die Flügel der hohen Serienglieder im Sirusspektrum bei kleineren n als in α Cyg, so daß die N_2H in ersterem schon von $n = 10$ an scheinbar abnehmen. Die gesamten N_2H -Bestimmungen von GÜNTHER sind in Fig. 90a zusammengestellt. Wir kommen später nochmals darauf zurück.

Entsprechende Messungen sind auch für die PASCHEN-Serie von P. W. MERRILL und O. C. WILSON [1324] an Sternen früher Spektraltypen, von

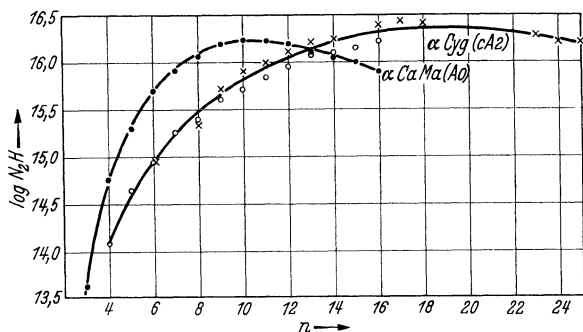


Fig. 89. Bestimmung von $\log N_2H$ für α Cyg (cA2) und α CaMa (A0).

A. H. ROSENTHAL [1337] und A. DAHME [1307] an der Sonne ausgeführt worden. Aus dem Verhältnis N_3/N_2 kann man im Prinzip nach der BOLTZMANN-Formel die Temperatur der absorbierenden Schicht bestimmen. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen², daß wegen der Wellenlängenabhängigkeit des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten N_3H und N_2H sich auf verschiedene Schichtdicken beziehen.

Man müßte also eine ziemlich genaue Kenntnis der κ_ν/κ bei λ 3700 und 8400 haben, was zur Zeit noch nicht der Fall ist.

Bei Gelegenheit solcher Untersuchungen liegt es nahe, die Konturen solcher BALMER- und PASCHEN-Linien miteinander zu *vergleichen*³, die denselben oberen Term n haben. Ist n so groß, daß man die Breite des unteren Terms ($n = 2$ bzw. 3) gegenüber der des oberen vernachlässigen kann, so sollte die relative Verteilung des Absorptionskoeffizienten in der Frequenzskala für beide Linien dieselbe sein (man erinnere sich an analoge Betrachtungen in Abschn. 46!). Da $\int \kappa_\nu d\nu = \frac{\pi e^2}{m c} N H f$ ist, so verhalten sich die optischen Dicken x_ν der PASCHEN- und BALMER-Linien mit demselben n , gemessen im gleichen Frequenzabstand $\Delta\nu$ von der Linienmitte, wie

$$\frac{(x_\nu)_{\text{Paschen}}}{(x_\nu)_{\text{Balmer}}} = \frac{N_3H \cdot f_{\text{Pa}}}{N_2H \cdot f_{\text{Ba}}} \quad (72,15)$$

Sind weiterhin $R_{c, \text{Pa}}$ bzw. $R_{c, \text{Ba}}$ die Maximaltiefen⁴ (für $\kappa_\nu/\kappa \rightarrow \infty$) für die beiden Spektralgegenden — in praxi kann man dafür die maximale Linientiefe der betreffenden Serien nehmen — so sollte nach (72,8) sein

$$\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_c} \right)_{\text{Paschen}} = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_c} \right)_{\text{Balmer}} \cdot \frac{N_2H \cdot f_{\text{Ba}}}{N_3H \cdot f_{\text{Pa}}}, \quad (72,16)$$

wobei — wie gesagt — die R sich auf gleichen Frequenzabstand von der Mitte der Linie beziehen.

¹ Die mit \times eingezeichneten Messungen an α Cyg von P. W. MERRILL und O. C. WILSON (s. S. 291) sind mit (72,14) reduziert; alle übrigen nach S. GÜNTHER (s. oben) mit (72,12).

² In den erwähnten Arbeiten wurde dies zum Teil übersehen.

³ Die Art und Weise, wie MERRILL und WILSON ([1324], Fig. 6) diesen Vergleich ausführen, scheint mir keinen tieferen physikalischen Sinn zu besitzen.

⁴ Auf deren Theorie werden wir in Abschn. 74 zurückkommen.

Für α Cyg haben MERRILL und WILSON die Konturen der BALMER- und PASCHEN-Linien bis $n = 24$ bzw. 25 gemessen und nach dem im vorhergehenden entwickelten Verfahren $\log N_3H = 16,42$ und $\log N_3H = 15,50$ bestimmt. R_c ist — ebenfalls nach MERRILL und WILSON — in α Cyg für die BALMER-Serie $\sim 78\%$, für die PASCHEN-Serie $\sim 35\%$. Berechnete man danach aus der Kontur einer BALMER-Linie die der entsprechenden PASCHEN-Linie, so erhält man größenordnungsmäßige Übereinstimmung mit der direkt gemessenen. Um bessere Anpassung zu erzielen, muß man das Verhältnis N_3H/N_2H um einen Faktor ~ 2 verkleinern, was noch mit den Fehlergrenzen der N_3H und N_2H verträglich sein dürfte. Vielleicht läßt sich an Hand von (72,16) sogar eine genauere Methode zur Messung von N_3H/N_2H entwickeln.

Nachdem wir nunmehr die Verbindung zwischen den astronomischen Beobachtungen und der Theorie des zwischenmolekularen Starkeffektes hergestellt haben, erscheint es an der Ordnung, uns deren Grenzen deutlich zu machen. Wie wir schon bemerkten, ist es nicht zu erwarten, daß die Rechnungen von HOLTSMARK und VERWEY (s. S. 184) auch noch in geringem Abstand von der Mitte der Wasserstofflinien gelten, da dort die Voraussetzung der Adiabase ($T \cdot \Delta\omega \gg 1$) nicht mehr erfüllt ist. Tatsächlich zeigen auch die höheren Glieder der BALMER-Serie im Sonnenspektrum in der Mitte *nicht* die dem Absinken von $S(\alpha)$ (vgl. Fig. 65) entsprechende Aufhellung. Da weiterhin für H_α die Starkeffektverbreiterung am geringsten ist, so dürften bei dieser Linie andere Verbreiterungsursachen am stärksten in Erscheinung treten.

Einen *unteren Grenzwert* für ihre Verbreiterung und Gesamtabsorption erhalten wir auf jeden Fall, indem wir nur die *Strahlungsdämpfung* berücksichtigen. Der Absorptionskoeffizient pro zweiquantiges Atom wäre in diesem Falle nach Kap. VIII und IX (z. B. (40,16) und (46,10)):

$$k = \frac{e^2 \cdot \lambda^2}{4 \pi m c^3} \cdot \frac{1}{\Delta \lambda^2} \sum_{n,m} \frac{g_n}{g} f_{mn} (\gamma_n + \gamma_m). \quad (72,17)$$

Die Summe ist dabei zu erstrecken über alle Teilniveaus des unteren Termes, entsprechend ihren Besetzungszahlen g_n/g (wo $g = \sum g_n$). γ_n und γ_m sind die Abklingkonstanten (= reziproke Lebensdauer) der betreffenden Terme. Für H_α gibt die folgende Tabelle 59 im Anschluß an Tabelle 39 und 40 die nötigen Zahlenangaben. Man erhält so

$$k_\alpha = \frac{5,40 \cdot 10^{-17}}{\Delta \lambda^2}, \quad (72,18)$$

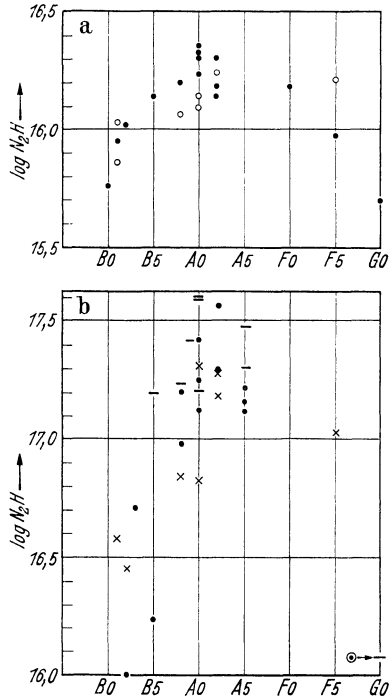


Fig. 90a. *Unterer* Grenzwert von $\log N_2H$ für $\lambda 3750$ aus den hohen Gliedern der BALMER-Serie bestimmt von S. GÜNTHER [1316].
● Sterne der Hauptsequenz, ○ c-Sterne.

Fig. 90b. *Oberer* Grenzwert von $\log N_2H$ für $\lambda 6563$ bestimmt aus Gesamtabsorption von H_α . ● C. T. ELVEY und P. C. KEENAN [1312].
— A. UNSÖLD [1364]. × S. GÜNTHER [1316].

Beim Vergleich von Fig. 90a und b ist zu berücksichtigen, daß die wirksame Schichtdicke bei frühen Spektraltypen für H_α etwa 4mal kleiner ist als bei $\lambda 3750$. Um auf letztere zu reduzieren und vergleichbare Zahlen zu erhalten, müssen daher die aus H_α bestimmten $\log N_2H$ der B0 — A 5 Sterne um $\sim 0,6$ vergrößert werden.

Tabelle 59. Strahlungsdämpfung in H_α .

$$\sum \frac{g_n}{g} \cdot f_{mn} (\gamma_n + \gamma_m) = \left\{ \frac{1}{4} \cdot 0,435 \cdot 19,16 + \frac{3}{4} (0,0136 \cdot 63,8 + 0,696 \cdot 69,67) \right\} \cdot 10^7 \\ = 39,1 \cdot 10^7 \text{ sek}^{-1}.$$

		Term m		
		3 s	3 p	3 d
Term n	g_m	2	4	6
	γ_m	0,632	19,16	$6,47 \cdot 10^7$
2 s	2	—	$f = 0,435$	—
2 p	6	$63,2 \cdot 10^{+7}$	$f = 0,0136$	$f = 0,696$

wo $\Delta\lambda$ in \AA zu rechnen ist. Für die *Gesamtabsorption* ergibt sich damit unter der Annahme kleiner Restintensität — wenn wir die Konstante in (72,18) für den Moment mit k^2 bezeichnen — nach Abschn. 69:

$$E_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(\Delta\lambda)}{1 + \frac{\Delta\lambda^2}{k^2 N_2 H}} = \pi k \sqrt{N_2 H} = 2,31 \cdot 10^{-8} \sqrt{N_2 H}. \quad (72,19)$$

Für H_α im *Sonnenspektrum* ist nach C. W. ALLEN [1410] u. a. $E_\lambda = 2,53 \text{ \AA}$. Man berechnet daraus nach (72,19)

$$N_2 H < 12 \cdot 10^{15} \text{ zweiqu. H-Atome.}$$

Da dieser *obere* Grenzwert mit dem aus den hohen Seriengliedern gewonnenen *unteren* Grenzwert

$$N_2 H > 5 \cdot 10^{15} \text{ zweiqu. H-Atome}$$

nahe übereinstimmt und die wirksame Tiefe $\bar{\tau}_0$ im Sonnenspektrum für $\lambda 6563$ und $\lambda 3750$ fast dieselbe ist, so dürfen wir schließen, daß H_α auf der Sonne jedenfalls zum Teil durch Strahlungsdämpfung verbreitert wird. Wie Verf. [1362] gezeigt hat, paßt auch die Kontur von H_α gut zu dieser Annahme; inwieweit die dort angestellten Betrachtungen über Mitte-Rand-Variation im Lichte der in Kap. XII dargestellten neueren Erkenntnisse noch haltbar sind, erscheint zumindest fraglich.

An Sternen der Typen *B* bis *F* haben C. T. ELVEY und P. C. KEENAN [1312], A. UNSÖLD [1364] und S. GÜNTHER [1316] die Gesamtabsorption E_λ von H_α gemessen. Eine Zusammenstellung der hieraus nach (72,19) berechneten oberen Grenzwerte von $\log N_2 H$ gibt Fig. 90b — nach Spektraltypen geordnet—; eine Unterteilung nach absoluter Helligkeit ist kaum möglich. Beim Vergleich mit den von S. GÜNTHER (s. S. 289) bestimmten unteren Grenzwerten von $N_2 H$ ist zu beachten, daß in Sternen früherer Spektraltypen die wirksame Schichtdicke bei H_α (vgl. Tabelle 58) etwa¹ viermal kleiner ist, als bei den hohen Seriengliedern. Um Fig. 90a u. b direkt vergleichbar zu machen, müßten also z. B. die aus H_α bestimmten $\log N_2 H$ um $\sim 0,6$ vergrößert werden. Wie man sieht, bleibt zwischen oberer und unterer Grenze der so auf $\lambda 3750$ reduzierten $\log N_2 H$ ein Spielraum von $\sim 1,0$ bis $1,8$. Dieser rührt zum Teil daher, daß H_α noch Starkeffektverbreiterung zeigt, zum Teil auch wohl daher, daß mit wachsendem n der Fall dünner Schicht nicht mehr erreicht wird, ehe benachbarte Linien sich merklich stören.

¹ Der *Zahlenwert* hängt mit dem kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten zusammen und teilt dessen Unsicherheit!

Nunmehr haben wir die *prinzipiellen* Fragen der Deutung der Wasserstofflinien¹ soweit gefördert, daß wir mit der Behandlung des Hauptproblems beginnen können: „Wie hängen die Konturen und Gesamtabsorptionen der Wasserstofflinien und der Intensitätssprung bei $\lambda 3647$ zusammen mit der effektiven Temperatur T_e der Sterne und der Schwerebeschleunigung g an ihrer Oberfläche? Müssen außer T_e und g noch andere Parameter² zu Charakterisierung eines Sternes herangezogen werden (etwa Häufigkeit des Wasserstoffes)?“

Dieses Problem ist auch in praktischer Hinsicht (Spektralklassifikation; spektroskopische Parallaxen!) von so enormer Wichtigkeit, daß es gerechtfertigt erscheint, es schon hier ausführlich zu behandeln, trotzdem wir auf die entsprechenden Probleme anderer Linien erst in Kap. XV eingehen werden.

Als Vorbereitung berechnen wir für das in diesem Buch durchweg angenommene Modell die Anzahl der Wasserstoffatome im 2. Quantenzustand N_2H über 1 cm^2 der Sternoberfläche für $\lambda 4000^*$ in Abhängigkeit von T_e und g .

Die Umrechnung von T_e und g in Spektraltyp und absolute Helligkeit haben wir unter der Annahme, daß die Sterne wie schwarze Körper strahlen, in Kap. III durchgeführt. In Kap. VI haben wir dann untersucht, wie diese Rechnung im Prinzip abgeändert werden müßte (insbesondere Fig. 54). Unsere Kenntnis des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten ist jedoch noch zu unsicher, um dieses Programm durchzuführen und man wird eher versuchen, die Umrechnung von (T_e , g) auf (Spektraltyp, absolute Helligkeit) durch Vergleich der berechneten und beobachteten Eigenschaften der Spektrallinien zu bewerkstelligen. Auch dies ist freilich noch mehr ein Programm, aber es erscheint aussichtsreich, es in Angriff zu nehmen.

In Fig. 83 haben wir die *Gesamtzahl* NH aller Atome über 1 cm^2 als Funktion der *mittleren* Temperatur T (bzw. $\Theta = \frac{5040}{T}$) der Sternatmosphäre und ihrer Schwerebeschleunigung g berechnet. (Über den Zusammenhang von T und T_e vgl. Tabelle 52; in 1. Näherung kann der Unterschied vielfach vernachlässigt werden.) Da wir ein Mischungsverhältnis Wasserstoff: übrige Elemente = 13,7:1 annahmen, so ist der Bruchteil der H-Atome $13,7/14,7$. Von diesen wiederum ist der Bruchteil $1-x$ neutral. Dessen Berechnung erfolgt nach der SAHASCHEN Gleichung (Hilftabelle 21) mit Hilfe der Elektronendrucke P_e aus Fig. 84. Schließlich ist von den neutralen Atomen nach der BOLTZMANN-Formel der Bruchteil $4 \cdot 10^{-10,15 \cdot \Theta}$ angeregt³. Man erhält also schließlich⁴

$$N_2H = \frac{13,7}{14,7} \cdot (1-x) \cdot 4 \cdot 10^{-10,15 \cdot \Theta}. \quad (72,20)$$

Das Ergebnis zeigt die folgende Fig. 91 nach [1216]. Für $\Theta < 0,55$ ist N_2H von g — d. h. grob gesagt von der absoluten Helligkeit — unabhängig, da die Druckabhängigkeit von $1-x$ genau kompensiert wird durch die des NH . Physikalisch betrachtet rührt dies daher, daß in unserem *Modell* die kontinuierliche Absorption durch Elemente erzeugt wird, deren durchschnittliche Ionisierungsspannung etwa gleich der des Wasserstoffes ist.

Für $\Theta > 0,55$ wird die kontinuierliche Absorption durch die leichter ionisierbaren Metalle hervorgerufen. Nimmt also P_e z. B. ab, so nimmt auch der kontinuierliche Absorptionskoeffizient ab, die wirksame Schichtdicke wächst und damit auch N_2H , da für $\Theta > 0,4$ praktisch *aller* Wasserstoff neutral ist. In

¹ Bezüglich des BALMER-Kontinuums sei an Abschn. 36 erinnert!

² Der STRUVESCHE Turbulenzeffekt ist für die breiten Wasserstofflinien ohne Bedeutung.

* Praktisch sind diese Zahlen von H_γ bis zur Seriegrenze brauchbar.

³ Man überlegt sich leicht, daß man keinen merklichen Fehler begeht, wenn man *durchweg* die Zustandssummen durch die statistischen Gewichte ersetzt.

⁴ In praxi rechnet man am bequemsten wie in Tabelle 52 mit Θ und P_e als Argument und interpoliert nachträglich auf die gewünschten g -Werte.

Fig. 91 ist zur besseren Orientierung noch die Mitte des Riesen- und Zwergastes (nach RUSSELL) gestrichelt eingezeichnet.

Wie verhalten sich nun diese Aussagen der Theorie zu den Ergebnissen der Beobachtungen? (Gerade für die Wasserstofflinien haben diese schon einen erfreulichen Grad von Vollständigkeit erreicht).

Betrachten wir zunächst wieder den Temperaturbereich $\Theta < 0,55$ vor dem Maximum der BALMER-Serie, also Spektraltypen früher als $\sim A_2$:

Die von S. GÜNTHER aus den hohen Seriengliedern bestimmten N_2H der Fig. 90a kommen mit den Erwartungen der Theorie in Einklang, wenn man — wie üblich — den B0-Sternen etwa 22000° oder $\Theta = 0,23$ und den A0-Sternen etwa 10000° oder $\Theta = 0,5$ zuweist.

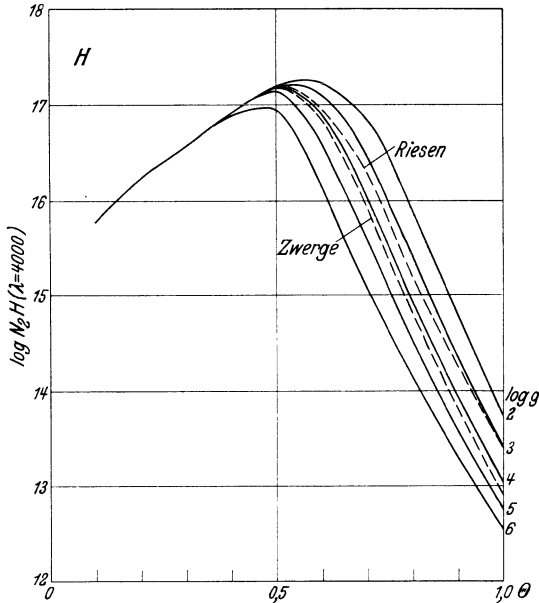


Fig. 91. Anzahl zweiquantiger Wasserstoffatome N_2H über 1 cm^2 der Sternoberfläche. Berechnet für 24000. Nach A. UNSÖLD [1216].

(Dieselbe Wahl der Temperaturskala paßt, wie aus Fig. 53 a u. b erinnerlich, auch für das BALMER-Kontinuum). Daß bei den A0-Sternen der empirische N_2H -Wert, der ja streng genommen ein unterer Grenzwert ist, ein wenig hinter dem theoretischen zurückbleibt, ist wegen der Überlappung der Linienflügel (s. u.) verständlich. Soweit dies an Hand von Fig. 90a zu entscheiden ist, zeigen die N_2H keine fehlergrenze überschreitende Abhängigkeit von der absoluten Helligkeit, d. h. keinen g -Effekt. Ein gutes Beispiel gibt der Vergleich von $\alpha \text{Cyg}(cA_2)$ und $\alpha \text{CaMa}(A_0)$ in Fig. 89. Trotzdem die ersten Serienglieder im Sirius viel stärker sind, als in αCyg (s. u.), nähern sich die Gesamtabsorptionen entsprechender Linien in beiden Sternen mit wachsen-

dem n immer mehr an und gehen erst wieder auseinander, wo der Sirius mit $n \approx 12$ der Überlappungseffekt einsetzt. Einen an Schlagkraft kaum zu überbietenden Beweis dafür, daß die verschiedene Stärke von $H_\alpha \dots H_\delta$ der beiden Spektren nicht durch einen Unterschied in der wirksamen Zahl der H-Atome N_2H verursacht wird, gibt die Unabhängigkeit des Intensitätssprunges $\Delta \log F_v$ an der BALMER-Grenze von g . Nach D. CHALONGE und Mitarbeitern [1303] ist dieser für αCyg 0,32 (nach der früheren Meßreihe von Tabelle 34 gleich 0,42) und für αCaMa 0,36*. Ein entsprechendes Ergebnis erhielt schon früher Y. ÖHMAN [1331, Fig. 2] durch Vergleich des cA_2 -Sternes v. MAANEN Nr. 358, mit dem A0-Stern v. MAANEN Nr. 315. Diese Ergebnisse stehen in Widerspruch zu den älteren Untersuchungen von C. S. YÜ [633], der glaubte, das BALMER-Kontinuum sogar als Kriterium zur Bestimmung absoluter Helligkeiten verwenden zu können. Die Unterschiede dürften zum Teil auf Mängeln der photometrischen Technik bei YÜ beruhen. Zum Teil spielte wohl auch die im RUSSELL-Diagramm zum Ausdruck kommende statistische Korrelation zwischen absoluter Helligkeit und T und damit $\Delta \log F_v$ herein.

* Anm. b. d. Korr.: Vgl. jedoch A. ARNULF, D. BARBIER, D. CHALONGE u. R. CANAVAGGIA, Journ. d. Obs. 19, 149 (1936).

Ein ganz anderes Verhalten als die hohen Serieglieder und das stetig anschließende Kontinuum zeigen die ersten Glieder der BALMER-Serie H_β bis $\sim H_\zeta$. Wie Y. ÖHMAN [1328—9], C. T. ELVEY und O. STRUVE [1311], E. T. R. WILLIAMS [1368], E. G. WILLIAMS [1369], C. J. ANGER [1302] u. a. durch eingehende quantitative Untersuchungen nachgewiesen haben, wächst bei den frühen Spektraltypen die Breite und Gesamtabsorption dieser Linien mit g erheblich an, so daß die Variation mit T im Vergleich dazu von untergeordneter Bedeutung wird.

Diese Beobachtungen kann man nach C. T. ELVEY und O. STRUVE (s. oben), deren Theorie dann von S. VERWEY und A. PANNEKOEK [1334 u. 1367] erheblich vervollkommen wurde, zwanglos mit Hilfe des *zwischenmolekularen Stark-effektes* erklären, der in Zwergsternen viel stärker ist, als in c-Sternen.

Nach Gl. (72,6) geht x_ν und damit die Tiefe R in einer BALMER-Linie bei festgehaltener Temperatur $\sim \frac{F_0^{\frac{3}{2}}}{\Delta\lambda^{\frac{5}{2}}}$. Oder — anders ausgedrückt — mißt man bei einer bestimmten Tiefe die Breite der Linie $\Delta\lambda$, so geht

$$\Delta\lambda^{\frac{5}{2}} \sim F_0^{\frac{3}{2}}. \quad (72,21)$$

Da die Konturen in verschiedenen Sternen (solange die Näherung (72,6) ausreicht) sich nur im Maßstab der $\Delta\lambda$ -Skala unterscheiden, so variiert auch E_λ in derselben Weise. Nach (72,4) ist weiterhin

$$\Delta\lambda^{\frac{5}{2}} \sim P_e \quad (72,22)$$

und da nach Fig. 84 bei konstantem T mit ausreichender Genauigkeit

$$P_e \sim g^{\frac{1}{2}} \quad (72,23)$$

geht, so sollte schließlich die Linienbreite bei festgehaltenem R und die Gesamtabsorption E_λ

$$\Delta\lambda \sim E_\lambda \sim g^{\frac{1}{5}} \quad (72,24)$$

sein. Benützen wir provisorisch die in Fig. 34 berechneten g -Werte, so sollte z. B. für einen A0-Stern mit $\sim 10000^\circ$ und $M_v = +1^m$ etwa $\log g = 4,0$, für einen entsprechenden c-Stern mit $M_v = -4^m$ dagegen $\log g = 2,9$ sein. Die Gesamtabsorptionen z. B. der H_ν -Linien beider Sterne müßten sich nach (72,24) also um einen Faktor $\sim 1,7$ unterscheiden. Die Beobachtungen — vgl. z. B. S. GÜNTHER [1316] Fig. 8 — dagegen geben ein Anwachsen der E_λ um einen Faktor 4 bis 5. Wie man sieht gibt die Theorie zwar die richtige Größenordnung, aber es bleibt eine zahlenmäßige Unstimmigkeit. Ob diese ihre Ursache in der provisorischen g -Berechnung hat, oder ob eine der Gl. (72,22 oder 23) noch einer Verbesserung bedarf, ist zur Zeit noch kaum zu entscheiden.

Da die Gesamtabsorption der Linien H_β — H_δ in den frühen Spektraltypen — wie Beobachtung und Theorie übereinstimmend zeigen — von der absoluten Helligkeit M viel stärker abhängen, als vom Spektraltyp, so geben Intensitätsmessungen der BALMER-Linien eine ausgezeichnete Methode zur *Bestimmung spektroskopischer Parallaxen*. Die schon genannten Untersuchungen beschäftigen sich alle mehr oder weniger mit diesem Problem. Auf die älteren Versuche von ADAMS und JOY an MT. WILSON sowie B. LINDBLAD u. a. am Stockholmer Observatorium, die mit geschätzten „Linienschärfen“ arbeiten, können wir trotz ihrer praktischen Wichtigkeit nicht näher eingehen.

Besonders bemerkenswert sind Untersuchungen von Y. ÖHMAN [1329 u. a.] und C. J. ANGER [1302] über die Gesamtabsorption von H_γ und H_δ in *Sternhaufen*. Da hier die Verfälschung der absoluten Helligkeitswerte durch die Unsicherheit

der Parallaxen und galaktische Absorption wegfällt, so tritt der Zusammenhang zwischen E_λ und der Sternhelligkeit m besonders deutlich zutage. Durch „Aufschieben“ der (E_λ, m) -Kurven längs der m -Achse kann man direkt die Entfernungen zweier Sternhaufen vergleichen. Praktisch wichtig ist, daß die Auswahl der Spektraltypen nicht sehr genau zu sein braucht. Nach C. J. ANGER (s. oben) kann man für B5—A3 mit *einer* Eichkurve auskommen. In Verbindung mit den in Kap. XI dargestellten „Kurzverfahren“ zur Messung der E_λ dürften wir hier *die* spektroskopische Parallaxenmethode der Zukunft vor uns haben.

Ein weiteres Ergebnis der Untersuchung von Miss ANGER verdient noch unser Interesse: Beim Vergleich der Eichkurven von Messier 7 und den Plejaden zeigen sich Unterschiede, die nicht auf eine Verschiebung längs der m -Achse zurückgeführt werden können¹. Wenn dieses Ergebnis nicht doch schließlich durch irgendwelche systematische Fehler vorgetäuscht wird, so müßte man zur Erklärung wohl *Unterschiede in der chemischen Zusammensetzung* beider Sternhaufen annehmen. Ein solcher Schluß, dem im Hinblick auf kosmologische Fragen (vgl. KUIPER [1319]) höchste Bedeutung zukäme, dürfte jedoch erst gerechtfertigt sein, wenn seine empirischen Grundlagen besser gesichert sind.

Im Hinblick auf den g -Effekt der BALMER-Linien sind noch besonders interessant die von Y. ÖHMAN [1330—1] untersuchten Spektren der weißen Zwerge O₂ Eridani B und v. Maanen Nr. 1166. Die Mikrophotometerkurven beider Sterne zeigen nur die sehr starken und breiten BALMER-Linien H_β bis H_ζ . Von den folgenden Linien und auch dem BALMER-Kontinuum ist nichts zu sehen. Dies überrascht zunächst, denn nach den üblichen Kriterien (Stärke der BALMER-Linien, Fehlen der K -Linie λ 3933) würde man diese Sterne als \sim A0 klassifizieren und demnach an der BALMER-Grenze einen Sprung von \sim 1 Größenklasse erwarten.

Die Schwierigkeiten lassen sich auf Grund der Theorie des zwischenmolekularen Starkeffektes klären, wenn man annimmt, daß die Temperatur dieser Sterne etwa der eines B0—B2-Sternes gleich ist. Dann zeigt das BALMER-Kontinuum entsprechend der hohen Temperatur kleine Intensität, deren Erkennen durch die Breite von H_ϵ , H_ζ ... weiter erschwert wird. Die *ersten Serienglieder* dagegen werden durch den *hohen Elektronendruck* so stark verbreitert, daß sie aussehen, wie wenn sie zu einem regulären A-Stern gehörten. Es sollte möglich sein, diese Hypothese durch Vergleich der Farbtemperatur von O₂ Eridani mit B- und A-Sternen zu prüfen. (Farbenindizes dürften wegen der Mitwirkung der BALMER-Linien und des BALMER-Kontinuums keinen sicheren Schluß zulassen.)

Nachdem wir für $\Theta < 0,55$ Beobachtung und Theorie verglichen haben versuchen wir dasselbe für die *späteren Spektraltypen*, d. h. $\Theta > 0,55$ und betrachten zunächst den g -Effekt.

Da die hohen Serienglieder wegen der zahlreichen störenden Metalllinien nur mit sehr großer Dispersion gemessen werden können, so gibt es für Sterne noch keine N₂H-Bestimmung nach der Methode „dünnere Schicht“. Dagegen konnten Y. ÖHMAN und W. IWANOWSKA [1332] durch spektralphotometrischen Vergleich zeigen, daß das BALMER-Kontinuum in cF-Sternen wesentlich stärker ist, als in normalen F-Sternen. Die in Fig. 91 zum Ausdruck kommende Zunahme von N₂H mit abnehmendem g wird also in qualitativer Hinsicht bestätigt.

In den BALMER-Linien H_β , H_γ ... arbeiten — wenn wir wieder c-Sterne und Zwerge vergleichen — das Anwachsen der N₂H und die Abnahme des Elektronendruckes einander entgegen. Tatsächlich beobachtet man bei den Spektraltypen später als G0 eine *Zunahme* der Intensität der Wasserstofflinien

¹ Vgl. auch Y. ÖHMAN [1329].

beim Übergang von Zwergen zu Riesen desselben Spektraltyps¹. Zwischen A5 und G0 liegt eine Stelle, bei der die Stärke der BALMER-Linien von der absoluten Helligkeit unabhängig ist; nach Y. ÖHMAN [1328—9] etwa bei G0, nach E. G. WILLIAMS [1369] schon bei F.

Die Theorie scheint in quantitativer Hinsicht diesen Feststellungen noch nicht ganz gerecht zu werden: Nach Fig. 84 geht für die späteren Spektraltypen $P_e \sim \sqrt{g}$ und nach Fig. 91 das $N_2H \sim g^{-\frac{1}{2}}$ bis $g^{-\frac{1}{3}}$. Da nach (72,6) die Stärke der Linien durch $F_0^{\frac{2}{3}} \cdot N_2H \sim P_e \cdot N_2H$ bedingt ist, so sollte diese also von g unabhängig sein bzw. höchstens mit g ein wenig zunehmen. Dasselbe findet auch S. VERWEY [1367] auf Grund von Rechnungen nach dem PANNEKOEKSchen Modell. Wahrscheinlich sind für die nicht mehr sehr breiten Wasserstofflinien z. B. der G-Sterne die physikalischen Voraussetzungen der HOLTMARKSchen Theorie nicht mehr erfüllt.

Vergleichen wir weiterhin Beobachtung und Theorie bezüglich der Absolutwerte von $\log N_2H$:

Für die Sonne (G0) fanden wir aus den Gesamtabsorptionen der hohen Serienglieder mit großer Sicherheit $\log N_2H = 15,7$, während die Theorie nach Fig. 91 mit $\Theta = 0,88$ und $\log g = 4,44$ den viel kleineren Wert 14,0 liefert. Diese Diskrepanz wird bei tieferen Temperaturen immer stärker. Nach E. M. LINDSAY [1323] zeigen die mit Gl. (72,12 bzw. 14) aus H_δ bestimmten unteren Grenzwerte von N_2H vom Spektraltyp G nach M hin eher eine Zu- als Abnahme.

Da wir durchweg mit unteren Grenzwerten von N_2H operieren, so kann die viel zu große Stärke der BALMER-Linien in den späten Typen *nicht* irgendwie durch einen Mangel der Theorie des Linienabsorptionskoeffizienten verursacht sein. Daß sie weiterhin *nicht* — wie gelegentlich angenommen wurde — mit einer Art Metastabilität des 2²S-Niveaus zusammenhängt, wird dadurch bewiesen, daß z. B. auf der Sonne auch der aus den PASCHEN-Linien bestimmte Wert von $\log N_3H = 14,1$ viel zu groß ist. Das beobachtete Verhältnis $\log \frac{N_3H}{N_2H} = -1,6$ entspricht etwa dem, was man bei nahezu wellenlängenunabhängiger wirksamer Tiefe nach der BOLTZMANNschen Formel erwartet. Für $\Theta = 0,88$ ergibt diese nämlich $\log \frac{N_3}{N_2} = -1,3$.

H. N. RUSSELL und W. S. ADAMS [1341] haben dann zuerst erkannt², daß die besprochene Erscheinung nicht auf die Wasserstofflinien beschränkt ist, sondern daß *in den kühleren Sternen alle Linien mit hohen Anregungsspannungen stärker erscheinen, als man erwartet, wenn man in der üblichen Weise die BOLTZMANNsche Formel auf eine wirksame Schicht bestimmter Dicke anwendet* (mit insgesamt \overline{NH} Atomen/cm²; vgl. etwa Fig. 83). Man spricht daher vielfach von „Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht“. Wir ziehen die neutralere Bezeichnung „ADAMS-RUSSELL-Phänomen“ vor. Verf. hat seinerzeit [1360] versucht, dieses Phänomen zurückzuführen auf Abweichungen der Strahlungsdichte vom PLANCKSchen Gesetz: Nimmt man nämlich an, daß der kontinuierliche Absorptionskoeffizient von λ unabhängig ist, so erhält man im kurzwelligen Gebiet, da die Ergiebigkeit mit der Tiefe sehr rasch anwächst, noch Strahlung aus größerer Tiefe als im langwelligen Gebiet. Infolgedessen wird dann z. B. die Strahlungsdichte an der Sternoberfläche im Lymangebiet — das ja für die Anregung der Wasserstofflinien entscheidend ist — wesentlich stärker, als man

¹ E. M. LINDSAY [1323] erhält allerdings für die späteren Spektraltypen überhaupt keinen deutlichen g -Effekt.

² Diese Arbeit ist zwar in quantitativer Hinsicht als überholt zu betrachten, da es nicht statthaft ist, die „Eichkurve“ der Sonne auf alle Sterne anzuwenden; das qualitative Ergebnis bleibt jedoch bestehen.

zunächst auf Grund „der Temperatur“ des Sternes erwarten würde. Diese Theorie ist jedoch heute hinfällig, da nach Kap. VI im kurzwelligen Gebiet $\kappa \gg \bar{\kappa}$ wird, so daß die Dichte der kurzwelligen Strahlung in der Sternatmosphäre wenig vom thermischen Gleichgewichtswert abweichen sollte.

Vielleicht kann man dagegen die scheinbaren Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht erklären durch eine sorgfältigere Berücksichtigung der *Schichtungseffekte in der Theorie des Strahlungsaustausches*. Nach Abschn. 67 läßt sich die Tiefe in den Linienflügeln, durch die die „Stärke“ einer Linie im wesentlichen bedingt ist, in der Form schreiben¹

$$R = \int_0^{\infty} \frac{\kappa_{\nu}}{\bar{\kappa}} G_1(\tau) d\tau, \quad (72,25)$$

wo die Gewichtsfunktion $G_1(\tau)$ nach Abb. 81 mit τ rasch abnimmt. Solange $\kappa_{\nu}/\bar{\kappa}$ mit τ nicht stark variiert, kann man nun (72,25) wie gewohnt schreiben als

$$\text{Mittelwert von } \kappa_{\nu}/\bar{\kappa} \text{ über die Schichten um } \tau = 0,5 \text{ mal dem } \int G_1(\tau) d\tau.$$

Dieses Verfahren ist aber *nicht* mehr statthaft bei Linien, deren Anregungsenergie $\gg kT$ ist. Dann wächst der BOLTZMANN-Faktor $e^{-\frac{\chi_{\nu, s}}{kT}}$ mit τ sehr rasch an und kann die Abnahme von $G_1(\tau)$ zunächst *überkompensieren*. Das Integral (72,25) wird dann viel größer, als man zunächst erwartet, da eben auch noch tiefere Schichten zur Verstärkung der Linien beitragen. Für die Sonne erhielt Verf. [1216] durch eine derartige Rechnung — deren Grundlagen in Tabelle 36 vollständig bereitgestellt sind — $\log N_2H = 14,6$, also einen zwar verbesserten, aber immer noch zu kleinen Wert. Für den roten Riesenstern von Tabelle 37 ergab sich $\log N_2H \sim 10,8$; wenn man mit $\kappa/\bar{\kappa} = 1$ rechnet, sogar 12,3. Es läßt sich noch nicht entscheiden, ob man mit genaueren Tabellen für den kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten Übereinstimmung von Theorie und Beobachtung erreichen wird.

Ähnliche „Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht“ wie in den Absorptionsspektren der Sterne machen sich in verstärktem Maße im Emissionsspektrum des Sonnenrandes, dem *Flashspektrum*, bemerkbar. Wir erinnern nur an das Vorkommen der Linien von He und sogar He II 4686. Es erscheint zunächst verlockend, diese Beobachtungen mit den schon betrachteten in Zusammenhang zu bringen. Man macht sich aber leicht klar, daß jedenfalls die oben skizzierte Erklärung auf das Flashspektrum *nicht* anwendbar ist. Hier müssen wir es vielmehr mit *wirklichen* Abweichungen von der BOLTZMANN- und SAHA-Formel zu tun haben. Vielleicht hängen diese damit zusammen, daß die Sonnenoberfläche infolge der *Granulation* kleine Stellen hoher Temperatur enthält, deren starke kurzwellige Strahlung für die Überanregung verantwortlich gemacht werden könnte. Wir werden die Frage später im Zusammenhang mit der „Meteorologie der Sonnenatmosphäre“ nochmals aufgreifen. Ob dieser zweite Effekt *neben* dem „Schichtungseffekt“ auch für die tieferen Schichten, in denen die Absorptionslinien entstehen, von Bedeutung ist, läßt sich heute noch nicht übersehen.

73. Druckeffekte und verbotene Linien im Heliumspektrum.

Den handgreiflichsten Beweis für die Wirksamkeit zwischenmolekularer Felder in den Sternatmosphären fanden O. STRUVE und C. T. ELVEY [1344—8; 1308—9] in dem Auftreten der „verbotenen“ Heliumlinien. Zum Beispiel

¹ Bei den BALMER-Linien haben wir vorwiegend „Absorption“. Die Art des Strahlungsaustausches hat im übrigen kaum einen Einfluß auf das Ergebnis.

erscheint im kurzwelligen Flügel der „erlaubten“ Linie

$$2^3P^0 - 4^3D \dots \lambda 4471,6$$

die „verbotene“ Linie

$$2^3P^0 - 4^3F^0 \dots \lambda 4469,9.$$

Entsprechend bei $2^1P^0 - 5^1D \lambda 4388$ und — in etwas geringerem Maße — bei allen Linien der diffusen Nebenserien von Ortho- und Parhelium.

Fig. 92 zeigt nach J. PAUWEN [1335] die Konturen der erwähnten Linien in dem B2-Stern 88γ Peg. Bei $\lambda 4472$ ist die verbotene Komponente durch Spiegelung isoliert. Um erkennen zu lassen, wie weit die gemessenen Konturen durch den Spektrographen beeinflusst werden, sind noch einige schwache Metall-Linien gemessen.

Die Wellenlängendifferenzen: erlaubte—verbotene Linien stimmen nach zahlreichen Messungen am Yerkes-Observatorium so genau mit den entsprechenden Laboratoriumsdaten überein, als man dies bei dem diffusen Charakter der Linien erwarten kann.

Das Intensitäts- (d. h. Gesamtabsorptions-) Verhältnis von verbotener und erlaubter Linie hat C. T. ELVEY [1308] an den Sternen 17ζ Cas, 85ι Her(B3) und 88γ Peg(B2) gemessen. Er findet im Mittel (mit einer Unsicherheit von schätzungsweise 30%)

$$(v_{4472})_{\text{beob.}} = \frac{2^3P^0 - 4^3F^0; \lambda 4469,9}{2^3P^0 - 4^3D; \lambda 4471,6} \approx 0,29 \quad (73,1)$$

und

$$(v_{4388})_{\text{beob.}} = \frac{2^1P^0 - 5^1F^0; \lambda 4386,8}{2^1P^0 - 5^1D; \lambda 4387,9} \approx 0,21. \quad (73,2)$$

Nach (72,1) berechnet man für einen B-Stern mit $T = 20000^\circ$ und $\log P_e = 2,75$ (Fig. 84) eine Normalfeldstärke

$$F_0 = 6,9 \text{ elst. C.G.S.-Einheiten} = 2,1 \text{ kV/cm} \quad (73,3)$$

und damit eine mittlere Feldstärke¹

$$\bar{F} = F_0 \int_0^\infty \beta W(\beta) d\beta = 3,4 F_0 \quad (73,4)$$

oder

$$F = 7 \text{ kV/cm.}$$

¹ Da die Intensität der verbotenen Linien nach der Quantenmechanik $\sim F^2$ geht, so müßten wir richtiger den Mittelwert $\sqrt{\bar{F}^2}$ bilden. Dieser konvergiert aber mit der HOLTMARCKSchen $W(\beta)$ -Funktion nicht; man müßte vielmehr die Wechselwirkung von H-Atom und störendem Elektron bzw. Ion in Rechnung stellen. Die folgenden Rechnungen haben mehr den Charakter einer vorläufigen Abschätzung.

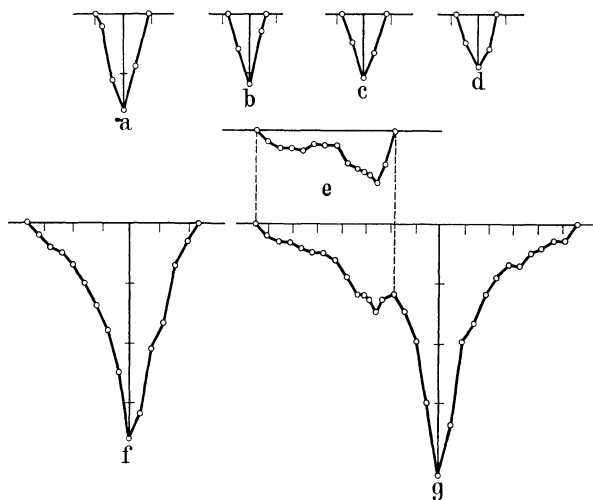


Fig. 92. Konturen der Heliumlinien $\lambda 4388$ (f) und $\lambda 4472$ (g) mit „verbotener“ Komponente in 88γ Peg. (B2). Nach J. PAUWEN [1335]. Zur Beurteilung des Spektrographen oben die Linien Mg II 4481, Si III 4552, 4568 und 4574 (a—d). Abszissenskala: 0,5 Å; Ordinaten: 10% Absorption.

Damit erhält man nach J. S. FOSTER [1314], dem wir die bei weitem gründlichste experimentelle und theoretische Bearbeitung des He-Starkeffektes verdanken¹, für die obigen Intensitätenverhältnisse

$$(v_{4472})_{\text{th.}} \approx 0,6 \quad \text{und} \quad (v_{4388})_{\text{th.}} \approx 0,3. \quad (73,5)$$

Wie man sieht, gibt die Theorie der Größenordnung richtig wieder. Ein quantitativer Vergleich von Beobachtung und Theorie ist aber nicht statthaft, da — wie man z. B. aus Fig. 92 sieht — die verbotene Linie in optisch dünner, die erlaubte dagegen in dicker Schicht absorbiert wird. Die $v_{\text{th.}}$ sind vielmehr nur als *unterer Grenzwert* zu betrachten², da bekanntlich bei Schichtdickenvergrößerung irgendwelche Intensitätsverhältnisse sich zunächst immer der Eins nähern.

Als weitere Wirkung des zwischenmolekularen Feldes findet O. STRUVE [1345], daß sämtliche Linien der *diffusen* Nebenserie ($P-D$) von Ortho- und Parhelium ein verwaschenes Aussehen zeigen, während die Linien der *scharfen* Nebenserien ($P-S$) ganz schmal sind³. Dies hängt ohne Zweifel damit zusammen, daß die D -Terme viel starkeffektempfindlicher sind als die S -Terme. Aber nach unseren früheren Erörterungen ist es hier nicht statthaft, die adiabatische Theorie von HOLTSMARK, d. h. Gl. (47,27 u. 28) anzuwenden, sondern man muß die erweiterte *Stoßdämpfungstheorie* von LORENTZ, WEISSKOPF und LENZ aus Abschn. 71 heranziehen.

Dies wird nach O. STRUVE dadurch bestätigt, daß in Fig. 92 die Konturen von λ 4472 und 4388 selbst im wesentlichen *symmetrisch* verbreitert werden, während die HOLTSMARKSche Theorie ja eine völlig einseitige Verbreiterung erwarten ließe.

Auch die geringe Abnahme der Linienintensitäten mit wachsender Gliednummer in der $2^1P^0-n^1D$ -Serie (qualitative Schätzungen bei O. STRUVE [1345]) erinnert an die in Abschn. 71 diskutierten Beobachtungen von MINNAERT und GENARD in der entsprechenden Mg-Serie des Sonnenspektrums.

Die Berechnung der Stoßdämpfung bietet keine Schwierigkeit, solange der Starkeffekt mit dem *Quadrat* der Feldstärke geht. Befindet man sich aber, wie gerade bei den He $P-D$ -Linien, schon zum Teil im linearen Bereich, so treten theoretische Schwierigkeiten auf, die bis jetzt noch nicht überwunden sind.

Die Abhängigkeit der Intensität der Heliumlinien von Spektraltyp und absoluter Helligkeit, bzw. T und g , scheint eines der kompliziertesten Probleme der Sternspektroskopie zu sein. Eine Zusammenfassung der vorliegenden, in der Hauptsache nur qualitativen Beobachtungen, gibt O. STRUVE [1347]. Über Messungen der Konturen von λ 4472 und 4388 in Od—B9 Sternen vgl. C. T. ELVEY [1309]. In theoretischer Hinsicht sind an der Verbreiterung der He-Linien sicher beteiligt:

1. *Dopplereffekt* (hohe Temperatur; kleines Atomgewicht; vgl. Abschn. 70) und evtl. Turbulenz.

2. *Strahlungsdämpfung*. Insbesondere der 2^1P^0 -Term wird durch die Möglichkeit des Überganges zum Grundterm stark verbreitert; im Triplettssystem fällt dieser weg.

3. *Stoßdämpfung*. Besonders bei den D -Termen; quantitativ noch nicht genau erfaßbar.

¹ Ältere Literatur dort und bei STRUVE, s. S. 298.

² Dies zu der Diskussion von J. S. FOSTER und A. V. DOUGLAS [1315] mit O. STRUVE [1348].

³ Geringe Verbreiterungseffekte zeigen nach BAXANDALL und STRUVE (s. S. 298) auch einige vom Laboratorium als druckempfindlich bekannte *III*-Linien.

Ob neben diesen Effekten noch Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht, die mit der Metastabilität des 2^3P^0 -Niveaus zusammenhängen könnten, auftreten, ist zur Zeit noch nicht zu sagen.

Auch die Bestimmung der wirksamen Anzahl absorbierender Heliumatome und damit der kosmischen Häufigkeit dieses Elementes wird sehr behindert durch diesen unbefriedigenden Zustand von Theorie und Beobachtung. Aus den erwähnten Beobachtungen von C. T. ELVEY hat Verf. [1363] Abschätzungen von den Grenzfällen dicker Schicht (mit Strahlungsdämpfung) und dünner Schicht her versucht und erhielt ein Häufigkeitsverhältnis

$$\text{Helium : Wasserstoff} \sim 1 : 100.$$

Die Unsicherheit dieser Zahl dürfte etwa einen Faktor 4 betragen.

Es bedarf schließlich kaum eines Hinweises, daß sowohl die Verwaschenheit der diffusen Serien, wie die relative Stärke der verbotenen Linien im Prinzip zur Bestimmung absoluter Helligkeiten herangezogen werden können, doch dürfte die Genauigkeit dieser Methoden sehr beschränkt sein.

74. Die Intensität in der Mitte der FRAUNHOFER-Linien. (Restintensität).

Bei den „schwachen“ FRAUNHOFER-Linien, in denen für alle Wellenlängen der Fall *dünnere* Schicht realisiert ist, bietet die Erklärung einer endlichen Intensität in der Linienmitte keine Schwierigkeit. Es ist allerdings zu bemerken, daß die „gemessenen“ Restintensitäten der *Metalllinien* in diesem Bereich (nach Abschn. 69 muß $E_\lambda \ll \Delta\lambda_D$ sein) rein instrumenteller Natur sind. Mit einiger Sicherheit erfaßbar ist die Restintensität für den Fall dünner Schicht vielmehr nur für die stark druckverbreiterten höheren Glieder der BALMER-Serie. Im Sonnenspektrum z. B. ist nach Messungen des Verf. [1359] die Tiefe in der Mitte der Linien H_{15} und H_{16} λ 3711,97 und 3703,85 etwa 15%.

Bei den „starken“ FRAUNHOFER-Linien, in deren Mitte die wirksame Schichtdicke für selektive Streuung + Absorption $\gg 1$ wird, ist die Erklärung endlicher Restintensitäten nicht ganz so einfach. Betrachten wir daher das Problem zunächst vom phänomenologischen Standpunkt aus!

Die in Kap. XII entwickelten Formeln ergeben für S.S.- und M.E.-Modell im Falle reiner Streuung durchweg die *Restintensität Null*.

Ist dagegen der Elementarprozeß der Reemission unabhängig von dem der Absorption, d. h. erfolgt der Strahlungsaustausch nach dem Schema „*Absorption*“, so erhält man in der Linienmitte über die ganze Sonnen- (bzw. Stern-) Scheibe hinweg thermische Gleichgewichtsstrahlung der Grenztemperatur T_0 . Die Intensität in der *Linienmitte* ist also überall gleich der Intensität des kontinuierlichen Spektrums am Sonnenrande.

Beschäftigen wir uns zunächst etwas eingehender mit diesem *Grenzfall reiner „Absorption“* oder „*lokalen thermodynamischen Gleichgewichtes*“!

Die Berechnung der Reemission in einer Linie durch Anwendung des KIRCHHOFFSchen Satzes ist nur erlaubt, wenn die Sternatmosphäre vom Zustande thermischen Gleichgewichtes nicht allzu weit entfernt ist. Sie ist also insbesondere *nicht* statthaft für *sehr ausgedehnte Atmosphären* (*sphärisches* im Gegensatz zu dem hier fast ausschließlich behandelten *ebenen* Problem) in denen die Dichte und Frequenzverteilung der Strahlung nicht mehr in der durch das PLANCKSche Gesetz gegebenen Beziehung stehen¹.

¹ Tatsächlich scheint das nach unseren Formeln noch unverständliche Auftreten von *Emissionslinien* in den Spektren früher Spektraltypen von ausgedehnten *Nebelhüllen* herzurühren.

Die zweite schon erwähnte Voraussetzung, nämlich die Unabhängigkeit der Elementarprozesse von Absorption und Reemission, wird in erster Linie bei Quantensprüngen zwischen *hochangeregten Atomzuständen* verwirklicht sein. Denn es ist außerordentlich unwahrscheinlich, daß z. B. das Leuchtelektron eines Wasserstoffatoms nach dem Absorptionsquantensprung $2 \rightarrow 10$ gerade die Emission $10 \rightarrow 2$ ausführt. Von da führt eine völlige stetige Verbindung zu Übergängen zwischen diskreten und kontinuierlichen Zuständen, also zur Theorie der *Seriengrenzkontinua*. Wir erinnern an den in Abschn. 36 eingehend untersuchten Intensitätssprung an der Grenze der BALMER-Serie $\lambda 3645$!

Beide Voraussetzungen dürften in den „normalen“ Sternspektren recht gut realisiert sein für die *höheren Glieder der BALMER- und PASCHEN-Serie des Wasserstoffes*.

Wie C. S. Yü [633] zuerst bemerkt und andere Beobachter bestätigt haben, geht bei den *A-Sternen* die Folge der Restintensitäten der höheren Linien der BALMER-Serie stetig in die Intensität der an die Seriengrenze bei $\lambda 3645$ anschließenden kontinuierlichen Absorption über¹. Diese Beobachtung ist leicht zu erklären:

Nach Tabelle 30 ist für $\Theta < 0,6$, d. h. $T > 8400^\circ \text{K}$ hinter der Seriengrenze $\lambda 3645$ das Verhältnis $\kappa/\bar{\kappa} \approx 3 > 1$, d. h. wir bekommen dort *ebenso* wie in der Mitte der Linien fast nur thermische Gleichgewichtsstrahlung der obersten Atmosphärenschicht mit der Grenztemperatur T_0 .

Für *beliebige Spektraltypen*, bei denen für $\lambda < 3645$ das Verhältnis $\kappa/\bar{\kappa}$ nicht mehr groß genug ist, um die Strahlung tieferer und heißerer Schichten abzustoppen, kann man das Intensitätsverhältnis der Linienmitte zum benachbarten kontinuierlichen Spektrum für die höheren Glieder der BALMER-Serie leicht berechnen als Verhältnis der Gleichgewichtsstrahlung der Temperatur T_0 zur Intensität des kontinuierlichen Spektrums. Mit Hilfe unserer „linearen Näherung“, für den Strahlungsstrom erhalten wir nach Gl. (65,28) oder (31,14)

$$\frac{F}{F_0} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \beta_0}, \quad (74,1)$$

wo β_0 in der durch (65,4) beschriebenen Weise von $\kappa/\bar{\kappa}$ abhängt.

Für die in Kap. VI meist zugrunde gelegte „Sternmischung“ (Wasserstoff: Metalle = 13,7:1; $Z_{\text{eff.}} = Z + 1,5$) haben wir $\kappa/\bar{\kappa}$ in Tabelle 30 berechnet. bei $\lambda 4000$ bzw. 3645 erhält man damit die in den ersten Zeilen der folgenden Tabelle in % angegebenen Linientiefen $R_c = F_0 - F/F_0$. Würde man mit $H:M = 50:1$ rechnen oder das $Z_{\text{eff.}}$ in der Theorie des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten im entsprechenden Verhältnis verkleinern, so erhielte man statt dessen für $\lambda 3645$ die in der letzten Zeile angegebenen Werte.

Tabelle 60. Berechnete Tiefe $R_c = F_0 - F/F_0$ der BALMER-Linien in Prozent als Funktion der Temperatur T (bzw. $\Theta = 5040/T$) der Sternatmosphäre.

Θ_e	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
T_e	50400	25200	16800	12600	10080	8400	7200	6300
Sternmischung $\left\{ \begin{array}{l} \lambda 4000 \\ \lambda 3645^+ \end{array} \right.$	9,6	20,7	32,8	47,6	56,3	59,3	63,7	63,7
$H:M = 13,7:1$	11,4	23,6	36,9	52,1	56,3	61,1	63,7	63,7
$H:M = 50:1$	7,7	21,6	38,6	56,3	65,3	70,5	63,7	63,7

¹ Selbstverständlich gilt dies nur, wenn das Trennungsvermögen der Apparatur ausreicht, um die wahren Restintensitäten wiederzugeben. Ebenso sind Sterne auszuschließen, deren Linien durch Rotation — Dopplereffekt — verbreitert werden.

Die Ergebnisse der Theorie vergleichen wir nunmehr mit den Beobachtungen von E. G. WILLIAMS [1369], S. GÜNTHER [1316] und P. W. MERRILL und O. C. WILSON jr. [1324] — um nur die wichtigsten zu nennen. Diese zeigen übereinstimmend, daß die Restintensität bzw. die maximale Linientiefe von $H_\gamma = H_\delta$ an fast konstant bleibt (vgl. Fig. 93 nach S. GÜNTHER, s. oben) bis

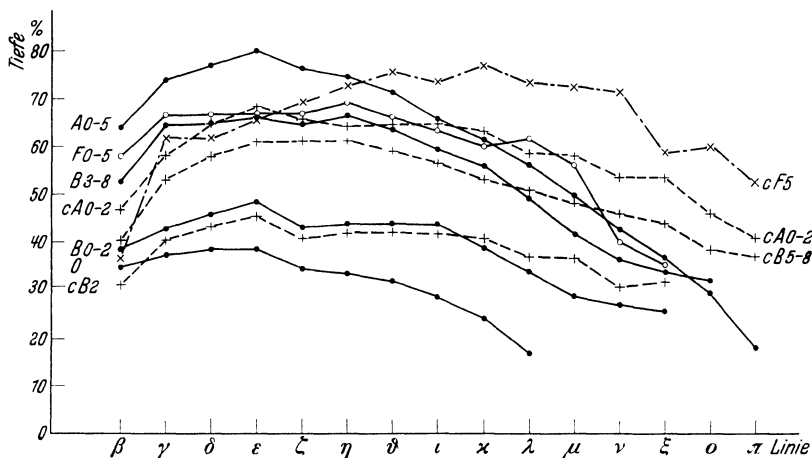


Fig. 93. Verlauf der Linientiefen der BALMER-Serie in den einzelnen Spektralklassen nach S. GÜNTHER [1316].

man zu so hohen Serienglieder kommt, daß entweder die wirksame Schichtdicke für selektive Absorption in der Linienmitte < 1 wird oder die Linienflügel sich so stark überlappen, daß die Intensität *zwischen* den Linien erheblich herabgedrückt wird. Dadurch ist erwiesen, daß die Restintensität nichts mit den

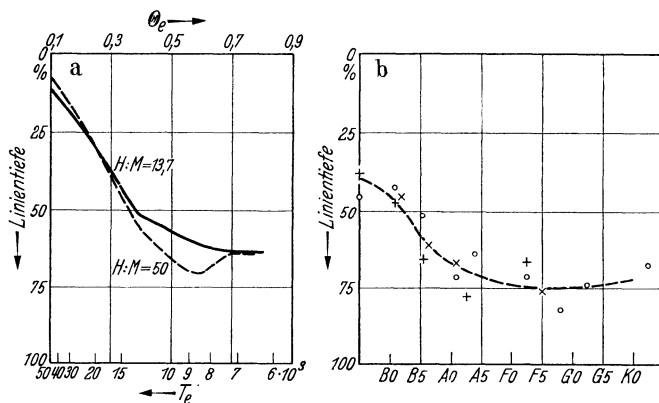


Fig. 94a. Maximale Tiefe der höheren Glieder der BALMER-Serie. Berechnet für $\lambda 3645$.

Fig. 94b. Beobachtungen der Linientiefe der höheren Glieder der BALMER-Serie. H_δ nach E. G. WILLIAMS [1369]: $\circ \circ$. Mittelwert der drei tiefsten Linien nach S. GÜNTHER [1316]: + Sterne der Hauptsequenz. \times e-Sterne.

Oszillatorenstärken usw. zu tun hat (denn diese variieren z. B. von H_4 bis H_{17} im Verhältnis 165 : 1!).

In Fig. 94a haben wir die Ergebnisse von Tabelle 60 nochmals übersichtlich dargestellt und vergleichen sie mit den in Fig. 94b als Funktion des Spektraltypes aufgezeichneten Messungen.

Hinsichtlich der Absolutbeträge der Linientiefen stimmen Beobachtung und Theorie (B0 entspricht $\theta \approx 0,25$) am besten überein, wenn man mit $H : M$

50:1 oder mit $H:M=13,7:1$ und entsprechend verkleinertem Z_{eff}^2 rechnet. Dies paßt gut zu den Ergebnissen unserer Untersuchung über das BALMER-kontinuum in Fig. 53 a u. b. Daß die berechneten Tiefen bei $T \sim 7000^\circ$ etwas zu klein ausfallen, rührt — wie wir sogleich sehen werden — im wesentlichen von der Ungenauigkeit unserer „linearen“ Näherung für die Ergiebigkeit her. Die Ursache der Differenzen bei den O und B0-Sternen dagegen ist nicht-recht klar.

Der Vergleich von normalen und c-Sternen in Fig. 94 b zeigt weiterhin, daß die Restintensitäten praktisch unabhängig vom *Druck* sind. Auch hierin finden wir beste Übereinstimmung mit der Theorie: Nach Kap. VI ist nämlich das Verhältnis $\kappa/\bar{\kappa}$ und damit β_0 nahezu druckunabhängig. Die Ausdehnung der Theorie auf die PASCHEN-Serie dürfte keine Schwierigkeiten bieten, doch wollen wir hierauf nicht näher eingehen.

Um die *Genauigkeit* unserer berechneten Restintensitäten festzustellen, rechnen wir ein einfaches Problem einmal mit Hilfe der linearen Näherung und dann streng durch. Wir betrachten die Tiefe von Linien, die durch reine „Absorption“ entstehen, im Spektrum der *Mitte der Sonnenscheibe*. Das Intensitätsverhältnis von Linienmitte: Kontinuum ist dann gleich dem für das kontinuierliche Spektrum geltenden Verhältnis von \odot -Rand zu \odot -Mitte, also — wie auch

Tabelle 61. Linientiefen im Spektrum der \odot -Mitte. Für eine Absorption mit $\kappa/\bar{\kappa} = 1$ und $T_e = 5740^\circ \text{K}$. a) Mit der linearen Näherung für die Ergiebigkeit. b) Exakt nach MAUE und UNSÖLD [523].

λ	Linientiefe in % Spektrum der \odot -Mitte	
	Lineare Näherung	Exakter Wert
3230	77,5	90,2
3737	74,9	85,9
4265	72,3	81,4
5062	68,8	75,0
6702	62,7	64,2
10080	53,8	50,3

z. B. aus (64,24) hervorgeht — nach der linearen Näherung

$$\frac{I(0,0)}{I_0(0)} = \frac{1}{1 + \beta_0} \quad (74,2)$$

Andererseits haben wir in Tabelle 23 dieses Verhältnis (für die Sonne ist praktisch $\kappa/\bar{\kappa} = 1$) auch exakt berechnet. Den Vergleich der Linientiefen $I_0 - I/I_0$ in % gibt für einige Wellenlängen die nebenstehende Tabelle 61. Man erkennt zunächst, daß die Unstimmigkeiten der Fig. 94 a für $T < 8000^\circ$ offenbar rein mathematischen

Ursprunges sind. Es ist weiterhin interessant, die Berechnungen der Tabelle 61 mit Messungen der Tiefe von H_γ und H_δ im \odot -Spektrum zu vergleichen¹:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda \\ \text{Linien-} \\ \text{tiefe in \%} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Beob.} \\ \text{Ber.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} H_\gamma \\ H_\delta \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} 4340 \\ 85 \\ 81 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 4102 \\ 78 \\ 83 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Nach C. W. ALLEN [1110]} \\ \text{Nach Tabelle 61; Spalte 3} \end{array} \right\} \quad (74,3)$$

Die Übereinstimmung von Beobachtung und Theorie ist recht befriedigend.

Trotz der großen Schwierigkeit aller Restintensitätsmessungen dürfte es heute schon sicher sein, daß z. B. viele der starken Metalllinien im Sonnenspektrum Restintensitäten haben, die zwischen Null und den für reine Absorption berechneten Werten liegen. Zum Beispiel finden M. MINNAERT [1135] und A. D. THACKERAY [1151] für die sehr breiten und daher relativ sicher meßbaren Resonanzlinien des CaII $\lambda 3933/68$ (*K* und *H*) im Spektrum der \odot -Mitte $\sim 8\%$. Für die CaI-Resonanzlinie $\lambda 4227$ ergibt eine Präzisionsmessung von R. O. REDMAN [1146] eine Restintensität von nur $\sim 2\%$. Dagegen zeigt das Mg-Triplett $\lambda 5167, 5173, 5184$ anscheinend erheblich größere Restintensitäten: H. H. PLASKETT [1143] fand für \odot -Mitte $\sim 20\%$; nach einer neueren

¹ Auf H_α und β darf unsere einfache Theorie wohl nicht angewandt werden; für die höheren Serienglieder dürfte in der Linienmitte κ nicht mehr $> \bar{\kappa}$ sein.

Untersuchung von E. CHERRINGTON [1116] soll dieser Wert bei Berücksichtigung aller Korrekturen sich auf $\sim 10\%$ reduzieren.

Diese Restintensitäten haben wir in Abschn. 65 (S. 243 f.) schon von einem rein phänomenologischen Standpunkt aus behandelt: *In der Linienmitte gehen zwar κ_ν und σ_ν praktisch gegen unendlich. Wenn aber das Verhältnis κ_ν/σ_ν dabei einen endlichen Wert behält, so ist die Restintensität der Linie und ihre Mittelrand-Variation durch die Gl. (65,39—42) bestimmt.*

Es bleibt also noch die Aufgabe, herauszufinden, wie dieses κ_ν/σ_ν zustande kommt und berechnet werden kann. Wir beschränken uns dabei zunächst auf *Resonanzlinien* vom Typus der NaD-Linien; in komplizierteren Fällen werden wir uns mit einer mehr qualitativen Behandlung begnügen.

A. UNSÖLD [1358] und R. v. D. R. WOOLLEY [1371] dachten zunächst an die Wirkung von *Stößen*. Wird — um beim Beispiel der D-Linien zu bleiben — das Leuchtelektron aus dem 3^2P -Term gelegentlich durch einen Stoß 2. Art entfernt, so muß — als inverser Prozeß — derselbe Term auch durch Stöße 1. Art angeregt werden. Da die Geschwindigkeitsverteilung der stoßenden Teilchen — welcher Art sie sind, braucht uns nicht zu interessieren — von der MAXWELLSCHEN kaum wesentlich abweichen kann, so darf man die Absorption durch Stöße 2. Art und die entsprechende Reemission nach dem KIRCHHOFFSchen Satz verknüpfen und hat damit einen Modus, um auch in Resonanzlinien wahre Absorption κ_ν zu bekommen. Aber diese Theorie ist nach A. PANNEKOEK [1207—8] einem verhängnisvollen Einwand ausgesetzt: Der Streukoeffizient z. B. der D-Linien im Sonnenspektrum ist nach Fig. 58 in der *Linienmitte* etwa 10^5 mal größer als bei der Halbwertsbreite, wo er nach Kap. XII etwa gleich dem kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten wird. Während wir in den *äußeren* Teilen der Linie Strahlung aus einer Schicht der optischen Dicke $\tau_0 \sim 0,5$ (für kontinuierliche Absorption) bekommen; können wir in der *Linienmitte* nur bis $\tau'_0 \sim 10^{-5}$ „hereinsehen“. Man kann aber leicht überschlagen, daß in *diesen* Höhen der Druck längst *nicht ausreicht*, um die mittlere Zeit zwischen zwei auslöschenden Stößen in die Größenordnung 10^{-8} sek zu bringen. Auch die in Abschn. 71 gefundenen Stoßdämpfungskonstanten (die sich ja auf die tiefere Schicht $\tau_0 \approx 0,5$ beziehen) zwingen zu demselben Schluß. Die Stoßtheorie der Restintensitäten ist also nicht zu halten.

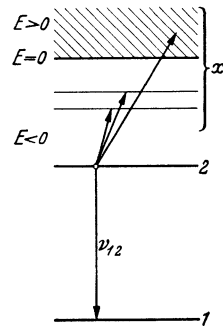


Fig. 95. Entstehung der Restintensität einer Resonanzlinie.

Man muß vielmehr, wie S. ROSSELAND [1338] zuerst bemerkt hat, die Wechselwirkung des absorbierenden Atoms mit dem *Strahlungsfeld* (dessen Intensität mit $\tau \rightarrow 0$ ja einem *endlichen* Wert zustrebt) berücksichtigen. Die Restintensität wird damit auf eine Art *Fluoreszenz- oder Rekombinationsleuchten* zurückgeführt.

Die Theorie dieser Vorgänge ist von A. UNSÖLD [1365] und B. STRÖMGREN [1343] entwickelt worden. Auf eine zeitlich dazwischenliegende Arbeit von R. v. D. R. WOOLLEY [1374], der mit ganz anderen Methoden zu nahezu demselben Ergebnis kommt, werden wir nachher eingehen.

Betrachten wir wieder eine *Resonanzlinie*, die (Fig. 95) durch Übergänge zwischen dem Grundterm 1 und dem nächsthöheren Term 2 (statistische Gewichte g_1 und g_2) zustande komme. Die Wahrscheinlichkeit¹ des Überganges $2 \rightarrow 1$ mit der Frequenz ν_{12} ist — pro Atom im Zustand 2 — gleich A_{12} .

¹ Die erzwungene Emission können wir hier und im folgenden vernachlässigen. Dementsprechend rechnen wir auch mit dem WIENSchen Strahlungsgesetz.

Nun kann aber das Leuchtelektron vom Zustand 2 aus, anstatt direkt nach 1 zurückzukehren, auch unter Absorption eines weiteren Lichtquants ν_{x2} auf ein *höheres Niveau* x gehoben werden oder — falls x im Bereich positiver Energie liegt — als *Photoelektron* ausgeworfen werden. Die Wahrscheinlichkeit solcher Vorgänge ist (wieder pro Atom im Zustand 2) gleich $\sum B_{x2} \cdot \varrho_{x2}$, wo B_{x2} die bekannte EINSTEINSche Übergangswahrscheinlichkeit und ϱ_{x2} die Strahlungsdichte bei ν_{x2} bedeutet. Die Summe ist zu erstrecken über *alle* von 2 aus nach „oben“ führenden Übergänge nach $E >$ und < 0 .

Entspricht nun die diesen Absorptionsprozessen zugehörige Reemission dem SCHWARZSCHILDschen Schema: „Absorption“?

Für die Übergänge nach $E > 0$, die STRÖMGREN (s. S. 305) allein betrachtet, ist diese Frage ohne Zweifel zu bejahen, denn bis die ausgeworfenen Photoelektronen von irgendwelchen Ionen wieder eingefangen werden (Rekombinationen) hat sich ihre Geschwindigkeitsverteilung längst der MAXWELL-Kurve für die Temperatur ihrer Umgebung angepaßt. Ebensogut wie wir die Ionisation in Sternatmosphären nach der SAHASchen Formel berechnen, dürfen wir also jedenfalls auf den *kontinuierlichen* Teil der Absorptionsvorgänge $2 \rightarrow x$ den KIRCHHOFFSchen Satz anwenden¹.

Wie steht es aber mit den diskreten Niveaus x ($E < 0$), die Verf. seinerzeit allein in Betracht zog? Gegen ihre Berücksichtigung hat A. PANNEKOEK [1333] einen Einwand erhoben, der — nach Abstreifung mathematischen Beiwerks — auf folgendes herausläuft:

Nehmen wir — der Einfachheit wegen — an, es sei nur *ein* Niveau x vorhanden und schematisieren die Wellenlängenabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten in ν_{12} und ν_{x2} durch ein Rechteck \square der Frequenzbreite $\Delta\nu$ (was für den Dopplerkern eine ganz passable Annäherung ist), so muß jedem Übergang $2 \rightarrow x$ ein solcher von $x \rightarrow 2$ folgen. Ein gelegentlicher „Ausflug“ des Leuchtelektrons n nach x ändert an der Reemission in der Frequenz ν_{12} also *nichts*. Die Verhältnisse ändern sich aber — was PANNEKOEK (s. oben) nicht berücksichtigt hat — grundlegend, wenn man den „Verkehr“ von x nach den anderen hochgelegenen Niveaus in Betracht zieht. Wenn x nicht zu weit ($\sim 2V$) von der Grenze $E = 0$ entfernt ist, so wird nämlich² das Leuchtelektron von x aus nahezu ebenso häufig nach anderen hochgelegenen Niveaus oder in das Kontinuum $E > 0$ springen, wie es direkt nach 2 zurückkehrt. Durch diese Kreuz- und Quersprünge werden die Besetzungsverhältnisse der hochgelegenen Niveaus rasch dem BOLTZMANNschen Gesetz angepaßt. Wir dürfen also auch auf diskrete Niveaus x den KIRCHHOFFSchen Satz anwenden, sofern sie nicht zu weit von der Masse der übrigen hochgelegenen Niveaus entfernt sind. Wie ein Blick auf die Niveauschemata zeigt, dürfte die Einschränkung z. B. bei den NaD-Linien ziemlich gegenstandslos sein, während sie bei den H- und K-Linien wohl von Bedeutung werden kann.

Damit können wir das gewünschte Verhältnis κ_ν/σ_ν sofort anschreiben. Es ist nach dem obigen

$$\frac{\kappa_\nu}{\sigma_\nu} = \frac{\sum_x B_{x2} \varrho_{x2}}{A_{12}} \quad (74,4)$$

¹ B. STRÖMGREN [1343] beschreibt die Vorgänge zunächst durch Übergangswahrscheinlichkeiten und wendet dann die SAHASche Formel an. Es ist einfacher und hat genau denselben Grad von Zuverlässigkeit, wenn wir *direkt* den KIRCHHOFFSchen Satz anwenden. Die Rechnungen STRÖMGRENS für „verdünnte“ Hohlraumstrahlung unterliegen den in Kap. IV Abschn. 25 bei der Behandlung der entsprechenden Ionisationsprobleme geäußerten Bedenken und sollen daher hier weggelassen werden.

² Wie unsere folgende Abschätzungsformel (74,8) zeigt.

wobei es nach Abschn. 46 keiner Erläuterung bedarf, daß dieses Verhältnis über die ganze Linie hinweg konstant bleibt. Führen wir statt der B_{x2} bzw. A_{12} die entsprechenden Absorptionsoszillatorenstärken f_{x2} bzw. f_{21} nach (45,25 u. 26) ein und berechnen die Strahlungsdichten ϱ_{2x} nach dem WIENSCHEN Gesetz (7,41), so geht (74,4) über in

$$\frac{\kappa_\nu}{\sigma_\nu} = \frac{\sum_x f_{x2} \cdot \nu_{x2}^2 e^{-\frac{h\nu_{x2}}{kT}}}{\frac{g_1}{g_2} f_{21} \cdot \nu_{12}^2}. \quad (74,5)$$

Diesen Ausdruck kann man — wie es STRÖMGREN (s. S. 305) für den kontinuierlichen Teil¹ der $\sum_x \dots$ getan hat — z. B. unter Benützung der Wasserstoff-Übergangswahrscheinlichkeiten (Tabelle 39 u. 40) ausrechnen. Einfacher und für die Metallatome sicherlich nicht ungenauer ist es, die Summe auf einen Schwerpunkt ν zusammenzuziehen und dann — wie dies Verf. [1365] getan hat — den KUHNschen f -Summensatz anzuwenden. Wir schreiben also zunächst

$$\frac{\kappa_\nu}{\sigma_\nu} = \frac{\sum_x f_{x2}}{\frac{g_1}{g_2} \cdot f_{21}} \cdot \left(\frac{\nu}{\nu_{12}} \right)^2 e^{-\frac{h\nu}{kT}}. \quad (74,6)$$

Weiterhin ist nach dem Summensatz (49,2), angewandt auf das Niveau 2

$$\sum_x f_{x2} - \frac{g_1}{g_2} f_{21} = 1. \quad (74,7)$$

Daß wir dabei die durch das PAULI-Prinzip verbotenen Übergänge nach den abgeschlossenen Schalen nicht berücksichtigen, dürfte nach Abschn. 49 kaum viel ausmachen. Da weiterhin für eine Resonanzlinie $f_{21} \approx 1$ ist, so wird $\sum_x f_{x2} : \frac{g_1}{g_2} f_{21} \approx 1 + \frac{g_2}{g_1}$. Falls der Term 2 oder 1 aufgespalten ist, so daß man statt einer Resonanzlinie ein *Multiplet* erhält, macht man sich an Hand der BURGER-DORGELOSCHEN Summenregeln (Abschn. 50) leicht klar, daß dann für jede Komponente des Multipletts *derselbe* Ausdruck herauskommt. Es gilt also allgemein:

$$\frac{\kappa_\nu}{\sigma_\nu} = \left(1 + \frac{g_2}{g_1} \right) \left(\frac{\bar{\nu}}{\nu_{12}} \right)^2 e^{-\frac{h\bar{\nu}}{kT}}, \quad (74,8)$$

oder, wenn man $\bar{\nu}$ in cm^{-1} rechnet:

$$\frac{\kappa_\nu}{\sigma_\nu} = \left(1 + \frac{g_2}{g_1} \right) \left(\frac{\bar{\nu}}{\nu_{12}} \right)^2 e^{-\frac{1,43\bar{\nu}}{T}}. \quad (74,9)$$

Den Schwerpunkt $\bar{\nu}$ wird man zwischen dem kleinsten ν_{2x} und dem Übergang nach $E \approx 0$, d. h. $\nu_{2\infty}$ zu suchen haben, jedoch im Hinblick auf PANNEKOEKS Einwand näher bei dem *letzteren* Wert, als dies Verf. (s. S. 305) annahm. Glücklicherweise kommt es in (75,9) auf den Zahlenwert von $\bar{\nu}$ meist nicht sehr genau an.

Zur weiteren Illustration schätzen wir die κ_ν/σ_ν und damit die *Restintensitäten* von einigen der *starken Metalllinien im Sonnenspektrum* ab:

a) *Die NaD-Linien*: $3^2S - 3^2P_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}$. Der langwelligste starke Übergang² vom 3^2P -Term aus nach „oben“ führt zum 3^2D -Term. Es ist also $\bar{\nu}_{\min} \approx 12208 \text{ cm}^{-1}$. Andererseits ist der Frequenzabstand bis $E = 0$ gleich der Termgröße von 3^2P .

¹ (74,5) ist dann identisch mit STRÖMGRENS Gl. (18) für verschwindende Anzahl der Stöße 2. Art ($c_{k1} = 0$).

² Der Übergang nach 4^2S ist viel schwächer.

Diesen Wert dürfen wir als oberen Grenzwert $\bar{\nu}_{\max} = 24484 \text{ cm}^{-1}$ ansehen. Weiterhin ist bekanntlich $\nu_{12} = 16965$, $g_2/g_1 = 3$ und die Temperatur T der äußeren Zone der Sonnenatmosphäre $\approx 5000^\circ$. Damit wird

$$0,0076 < \frac{\kappa_\nu}{\sigma_\nu} < 0,063 \quad (74,10)$$

und man berechnet leicht vollends nach (65,42) mit $\beta_0 = 1,9$ die Restintensität für

$$\text{und} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Sonnenmitte } (\cos \vartheta = 1): \quad 8,7 < \frac{I_c}{I_0} < 25 \% \\ \text{Sonnenrand } (\cos \vartheta = 0): \quad 10 < \frac{I_c}{I_0} < 29 \% . \end{array} \right\} \quad (74,11)$$

Da die Restintensität mit $\sqrt{\kappa_\nu/\sigma_\nu}$ geht, so fällt die Unsicherheit in der Berechnung dieser Größe gar nicht so sehr ins Gewicht.

Die Aussagen der Theorie passen größenordnungsmäßig gut zu den — auch nicht sehr genauen — Beobachtungen: Es findet für $\cos \vartheta = 1$: A. UNSÖLD [1357] $I_c/I_0 \approx 30\%$, L. D'AZAMBUJA [1111] für $\lambda 5890 \dots \sim 23\%$; C. W. ALLEN [1110] 14 bzw. 17%. Die Mitte-Rand-Variation der Restintensität ist nach den Messungen des Verf. gering. Die Gleichheit der Restintensität für beide Dublett-komponenten wird — so genau man dies bei der Schwierigkeit der Restintensitätsmessungen erwarten kann — bestätigt.

b) Die *Mg-Linien* $3^2P_{2,1,0} - 4^3S$. Hier ist

$$6652 < \bar{\nu} < 24474 \text{ cm}^{-1}, \quad (74,12)$$

$$\nu_{12} = 19300 \text{ cm}^{-1}, \quad \frac{g_2}{g_1} = \frac{1}{3} \text{ und damit}$$

$$0,00195 < \frac{\kappa_\nu}{\sigma_\nu} < 0,0232 \quad (74,13)$$

und man erhält mit $\beta_0 = 2,14$ nach (65,42) für

$$\text{und} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Sonnenmitte } (\cos \vartheta = 1): \quad 4,1 < \frac{I_c}{I_0} < 14 \% \\ \text{Sonnenrand } (\cos \vartheta = 0): \quad 5,1 < \frac{I_c}{I_0} < 18 \% . \end{array} \right\} \quad (74,14)$$

Die Messungen ergeben für \odot -Mitte folgende Werte in %:

	$\lambda 5167$	5172	5183
H. H. PLASKETT [1143]	23	22	10
MINNAERT und MULDER [1325]	—	16	16
L. D'AZAMBUJA [1111]	—	—	20
E. CHERRINGTON [1116]	11	10	9

Auch die Zunahme der Restintensität nach dem Sonnenrande hin wird von der Beobachtung qualitativ bestätigt. Eine quantitative Diskussion erscheint in Anbetracht der geringen Genauigkeit der Absolutwerte verfrüht. Ganz allgemein ist nach Gl. (65,42) im kurzwelligen Teil des Spektrums ($\beta_0 > 3/2$) eine Zunahme der Restintensität nach dem \odot -Rande, für $\beta_0 < 3/2$ eine Abnahme zu erwarten. Bei einem genaueren Vergleich von Theorie und Beobachtung wäre noch zu beachten, daß die den Gl. (65,39—42) zugrunde liegende Behandlung des Strahlungsgleichgewichtes nur eine ziemlich rohe Approximation darstellt.

c) Für die *Wasserstofflinie* H_α * endlich ist

$$5332 < \bar{\nu} < 12186 \text{ cm}^{-1}, \quad (74,15)$$

* Daß es berechtigt ist, unsere Formeln auf H_α anzuwenden, soll im folgenden Abschnitt genauer erläutert werden.

$$\nu_{12} = 15\,233 \text{ cm}^{-1}, \quad \frac{g_2}{g_1} = \frac{9}{4} \text{ und damit}$$

$$0,0635 < \frac{\kappa_\nu}{\sigma_\nu} < 0,0865. \quad (74,16)$$

Gl. (65,42) ist für so große κ_ν/σ_ν -Werte nicht mehr genau genug; sie würde mit $\beta_0 = 1,63$ für $\cos \vartheta = 1$ die merklich zu große Restintensität $28 < I_c/I_0 < 32\%$ geben. Nach der vollständigen Gl. (65,41) erhält man

$$18 < \frac{I_c}{I_0} < 20\%. \quad (74,17)$$

Die — wohl genauesten — Messungen von M. MINNAERT [1135 a] und A. THAKKERAY [1151] geben 15 % bzw. 15,4 %.

In ähnlicher Weise findet man, daß die Theorie für Ca 4227 etwas zu große, für die *H*- und *K*-Linien eine etwas zu kleine Restintensität ergibt. Beim jetzigen Stand von Theorie und Beobachtung dürfte jedoch auf die größenordnungsmäßige Übereinstimmung beider mehr Gewicht zu legen sein, als auf irgendwelche feinen Unterschiede.

Von einem rein atomtheoretischen Standpunkt aus — also *ohne* Zuhilfenahme des KIRCHHOFFSchen Satzes — hat R. v. D. R. WOOLLEY [1374] das Problem der *Restintensitäten der Wasserstofflinien* in Angriff genommen (nur in diesem Fall liegen sämtliche Übergangswahrscheinlichkeiten berechnet vor).

Für die von B. STRÖMGREN in den Vordergrund gestellten *diskret-kontinuierlichen* Übergänge vom oberen Term aus bietet die Frage der „Anpassung“ der Reemission an den KIRCHHOFFSchen Satz kaum ernstliche Schwierigkeiten, da ein Photoelektron vor der Rekombination sicher mehrere Zusammenstöße erleidet. In WOOLLEYS Rechnungen wird übrigens — um dies schon vorwegzunehmen — dieser Ausgleich der Geschwindigkeiten der Photoelektronen nicht berücksichtigt; sie beziehen sich also auf Drucke, die so niedrig sind, daß die meisten Photoelektronen direkt wieder eingefangen werden. Der Unterschied beider Auffassungen ist — für normale Sternatmosphären — in quantitativer Hinsicht nicht sehr groß.

Nicht ganz so einfach liegen die Verhältnisse — wie aus PANNEKOEKS Kritik hervorgeht — bei den vom Verf. vorzugsweise betrachteten diskret-diskreten Übergängen. Wenn auch meines Erachtens der Anwendung des KIRCHHOFFSchen Satzes auf die *höheren* Quantenzustände nichts im Wege steht, so ist es doch interessant, die sukzessive Einstellung des thermischen Gleichgewichtes auch quantitativ zu verfolgen.

Den Ausgangspunkt von WOOLLEYS Überlegungen bildet die ursprünglich zur Erklärung der hellen Linien bei den frühen Spektraltypen von S. ROSSELAND [1338] entwickelte *Theorie der zyklischen Quantenübergänge*:

Betrachten wir der Einfachheit wegen Übergänge zwischen nur drei Termen 1, 2 und 3 die miteinander kombinieren sollen (Fig. 96), so werden im *thermischen Gleichgewicht* die Zyklen $I = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ und $II = 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ *gleich oft* durchlaufen. Setzen wir dagegen das Atom nicht der vollen Intensität der Hohlraumstrahlung aus, sondern erregen es durch Hohlraumstrahlung, die im Verhältnis δ „verdünnt“ ist (25,2), so wird der Zyklus *II* mit nur *einem* Absorptionsvorgang gegenüber Zyklus *I* mit *zwei* Absorptionsvorgängen bevorzugt. Die langwelligeren Linien ν_{12} und ν_{23} werden also auf Kosten von ν_{13} zur Fluoreszenz erregt.

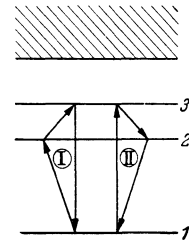


Fig. 96. Zyklische Quantenübergänge (ROSSELAND).

Fassen wir nun mit WOOLLEY die Fluoreszenz von H_α und H_β in den Schichten (s. o.) ins Auge, die für die Restintensität bestimmend sind!

Da der Absorptionskoeffizient für die Mitte der LYMAN-Linien viel größer ist, als für die BALMER-Linien, so braucht man bei ersteren die erst in optischen Tiefen < 1 erheblich werdende „Vertiefung“ der Linien in 1. Näherung nicht zu berücksichtigen und behält also nur die Tiefen der BALMER-Linien als Unbekannte. In deren Mitte wird nun die Intensität soweit zurückgehen, bis die Emission etwa das *Doppelte* der Absorption beträgt; denn *emittiert* wird stets in einem Raumwinkel 4π , *absorbiert* nur aus 2π . Formuliert man die Bedingung Emission : Absorption ≈ 2 mit Hilfe der Übergangswahrscheinlichkeiten und der Restintensitäten von H_α und H_β , so kann man damit umgekehrt für letztere einen unteren *Grenzwert* berechnen. WOOLLEY findet (betr. Details der Rechnung muß auf die Originalarbeit verwiesen werden) für H_α 3% und H_β 17%. Bei genauerer Berücksichtigung des Strahlungsaustausches in den LYMAN-Linien erhöht sich der erste Wert auf $\sim 23\%$, während der zweite nur wenig vergrößert wird. H_α wird offenbar viel leichter zur Fluoreszenz erregt, als H_β . Damit dürfte auch zusammenhängen, daß in B-Sternen H_α viel häufiger in Emission erscheint als H_β und die folgenden Serienglieder. Weiterhin zieht WOOLLEY seine Überlegungen zur Deutung der H_α -Spektroheliogramme heran; wir werden auf diese Fragen noch zurückkommen. Es wäre noch sehr interessant, nach dem Vorgange WOOLLEYS die Restintensität auch für eine Linie zu berechnen, bei der die diskret-kontinuierlichen Übergänge im Verhältnis zu den diskret-diskreten vermutlich wenig ausmachen, also z. B. die *H*- und *K*-Linien. Leider fehlt zur Zeit noch die hierzu notwendige Kenntnis der Übergangswahrscheinlichkeiten.

75. Verkettung mehrerer Linien (Interlocking).

Bis jetzt sind wir uns darüber klar geworden, daß der Strahlungsaustausch in den typischen Resonanzlinien hauptsächlich durch „*Streuung*“ erfolgt (der kleine Beitrag von Absorption äußert sich praktisch nur in der Restintensität), während Übergänge zwischen hochangeregten Termen nach dem Schema „*Absorption*“ zu behandeln sind.

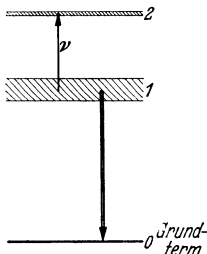


Fig. 97. Strahlungsaustausch in einer „subordinate line“ v .

Wie aber steht es mit den Übergängen zwischen den tiefer liegenden angeregten Termen, den typischen „subordinate lines“?

Die *Grundlagen* für eine Berechnung des Strahlungsaustausches sind im Prinzip durch die in Abschn. 46 dargestellten Entwicklungen von WEISSKOPF und WIGNER vollständig gegeben, wenn man die Dämpfungskonstante jeden Termes aus ihrem Strahlungs- und Stoßanteil¹ zusammensetzt. (Die in der astrophysikalischen Literatur beliebten Diskussionen über das „Gedächtnis“ der Terme usw. können also ad acta gelegt werden.)

Da es aber praktisch nicht möglich ist, für jede Linie einen umfangreichen mathematischen Apparat in Bewegung zu setzen, so wollen wir unser Problem mehr von einem qualitativen Standpunkt aus betrachten und erörtern, ob irgendwelche erhebliche Abweichungen von den beiden Grenzfällen der SCHWARZSCHILDschen Theorie zu erwarten sind.

a) Als einfachstes Beispiel betrachten wir (Fig. 97) eine Linie, deren Verbreiterung — im Gegensatz zu den Resonanzlinien — durch das *untere Niveau 1*

¹ Unelastische Stöße spielen, wie schon bemerkt, in den Sternatmosphären keine erhebliche Rolle.

bestimmt ist. Mit anderen Worten: die mittlere Lebensdauer des unteren Niveaus (1) soll erheblich kürzer sein als die des oberen (2). Andererseits soll aber 2 in der Hauptsache nur mit (1) kombinieren. Beispiele bilden — in gewisser Näherung und abgesehen von Druckeffekten — die Hauptkomponenten $2^2P - 3^2D$ von H_α und die $2^1S - n^1S$ -Linien von He.

Im *Kern* der Linie — einem Bereich von der Größenordnung der Dopplerbreite — in dem der Hauptenergieumsatz erfolgt, entspricht jeder Absorption eine Reemission. Es gilt also der Formalismus für *Streuung*¹.

In den *Flügeln* wird die Struktur der Linie durch das *untere* breite Niveau bestimmt; Reemission und Absorption sind also nur integral gekoppelt. Aber in *den* Zonen der Atmosphäre, die zur Bildung der *Flügel* den Hauptbeitrag geben, ist man für die *Linienmitte* bereits in großer optischer Tiefe. Die Anregungsverhältnisse und damit auch die Reemission in den Flügeln nähern sich also schon dem thermischen Gleichgewicht an. Für die *Flügel* gilt also nahezu das Schema „*Absorption*“. Da andererseits für die Flügel der Unterschied von Streuung und Absorption gering ist, so begeht man auch keinen erheblichen Fehler, wenn man die *ganze* Linie mit Streuung rechnet.

b) Als nächstes Problem (Fig. 98) betrachten wir — zum Teil im Anschluß an Arbeiten von R. v. D. R. WOOLLEY [1372—3] — die Verkettung zweier Linien vom Typus der Al-Resonanzlinien $3^2P_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} - 4^2S$; λ 3944 und 3961. Ein entsprechender Fall mit drei Linien wäre das Mg-Triplett $3^2P_{2, 1, 0} - 4^3S$. Die Absorption im Abstand $\Delta\nu$ von der Mitte der *einen* Linie wird hier stets im Verhältnis der Übergangswahrscheinlichkeiten auf die Reemission in $\nu_1 + \Delta\nu$ und $\nu_2 + \Delta\nu$ verteilt.

In den *Flügeln* können wir in 1. Näherung die Reemission mit Hilfe der unveränderten Intensität des Kontinuums berechnen. Man sieht so ohne weiteres, daß die Reemission beider Linien im selben Verhältnis steht wie die Absorption und daß ihre Verkettung (Interlocking) den Strahlungsaustausch jedenfalls in 1. Näherung *nicht* beeinflusst.

Die Verhältnisse in den *Linienmitten* übersieht man am einfachsten folgendermaßen: Berücksichtigt man die vom oberen Niveau weiter führenden Übergänge, vernachlässigt aber vorerst das „Interlocking“, so bekommen beide Linien *dieselbe* Restintensität. (Für die Quantensprünge gilt hier ja nach WEISSKOPF-WIGNER das gewöhnliche Multiplikationsgesetz der Wahrscheinlichkeiten.)

„Eröffnet“ man nachträglich den Herüber-Hinüber-Verkehr, so bemerkt man, daß gleichviel Übergänge $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1'$ wie $1' \rightarrow 2 \rightarrow 1$ erfolgen. Die Verkettung beider Linien beeinflusst also auch die Restintensitäten *nicht*.

Ob in den mittleren Teilen der Linien eine Beeinflussung ihrer Konturen durch die Verkettung stattfindet, kann ohne komplizierte Rechnungen wohl nicht entschieden werden. Von praktischer Bedeutung können sie wegen des stetigen Zusammenhanges von Flügeln und Linienmitte jedenfalls nicht sein. H. H. PLASKETTS und M. MINNAERTS mehrfach erwähnte Messungen der grünen Mg-Linien zeigen innerhalb der Meßgenauigkeit eine völlige Ähnlichkeit der drei Linien, d. h. durch Änderung der $\Delta\lambda$ -Maßstäbe können die drei Konturen zur Deckung gebracht werden.

Unsere Vermutung, daß die in Kap. XII entwickelten Vorstellungen und Formeln einen viel weiteren Gültigkeitsbereich haben, als man zunächst dachte, bestätigt sich also durchaus. Schwierigkeiten dürften erst auftreten bei der Behandlung sehr ausgedehnter Atmosphären (sphärisches Problem), wo die

¹ Die schon in Abschn. 74 diskutierten Übergänge $2 \rightarrow x$ der Fig. 95 wollen wir *hier* außer Betracht lassen.

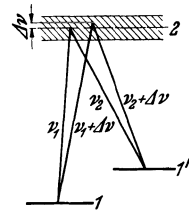


Fig. 98. Einfachster Fall der Verkettung zweier Linien (Interlocking).

„Verdünnungsfaktoren“ der Strahlung erhebliche Werte annehmen. Hier dürfte S. ROSSELANDS Theorie der Zyklen den Ausgangspunkt für eine rationelle Deutung der Linienkonturen geben.

76. Gegenseitige Störung zweier Linien („Blends“).

Wenn eine FRAUNHOFER-Linie l zufällig im Bereich einer zweiten Linie L liegt¹, so wollen wir — um erst einmal klare Begriffe zu schaffen — folgende Bezeichnungen einführen (Fig. 99):

Intensität des kontinuierlichen Spektrums	$I = 1 - R$
Direkt gemessene Intensität ($L + l$), bezogen auf diese Einheit	$I_L = 1 - R_L$
Durch <i>Interpolation</i> bestimmte Intensität in L	$I_l = I/I_L$
Reduzierte Intensität in l	$R_l = \frac{I_L - I}{I_L}$
Reduzierte Tiefe in l	$A_l = \int R_l d\lambda$
Gesamtabsorption (Äquivalentbreite) von l	

In praktischer Hinsicht interessiert nun vor allem die Frage: „Welche Gesamtabsorption bzw. Kontur hätte l , wenn L nicht vorhanden wäre“?

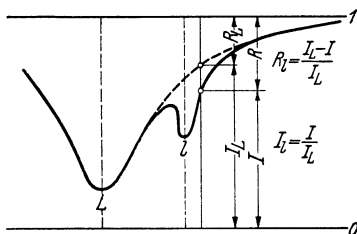


Fig. 99. Überlagerung zweier Linien l und L . („Blend“).

Daneben aber — und dies erscheint fast noch wichtiger — gibt uns die Störung zweier Linien eine Möglichkeit zur Erforschung der relativen Schichtung der betreffenden Atomzustände.

Entsteht z. B. l in einer SCHUSTER-SCHWARZSCHILD-Atmosphäre, deren unterer Teil die Linie L durch „Absorption“ erzeugt, so stören sich die beiden Linien überhaupt nicht, d. h. A_l wird durch die Gegenwart der Linie L nicht beeinflusst. Entsprechendes gilt selbstverständlich für interstellare Linien.

Entstehen dagegen L und l in derselben Schicht, so überlagern sich nicht einfach die Intensitäten, sondern die Absorptions- bzw. Streuungskoeffizienten. Mit anderen Worten: L verkleinert die wirksame Schichtdicke der Atmosphäre für l . Die Linie l wird also durch die Anwesenheit von L geschwächt (A. UNSÖLD, O. STRUVE und C. T. ELVEY [1361]). Hinsichtlich der Art des Strahlungsaustausches sind — selbst wenn wir der Einfachheit wegen von Schichtungseffekten einmal absehen — noch die Möglichkeiten zu betrachten, daß L bzw. l durch „Streuung“ oder „Absorption“ oder endlich ein Gemisch beider gebildet werden können. Wir werden hier keine vollständige Behandlung dieser Probleme geben, die übrigens nach Kap. XII keinerlei Schwierigkeiten bietet, sondern im Anschluß an eine Arbeit² von P. SWINGS und O. STRUVE [1352] einige Beispiele herausgreifen. Es handelt sich durchweg um *Multiplets*, in denen ein Teil der Linien ungestört ist, während ein anderer durch den Flügel einer starken Linie L geschwächt wird. Da die „theoretischen“ Intensitätsverhältnisse der Linien bekannt sind (Abschn. 50), so kann man die Wirkung von L quantitativ erfassen.

1. In den B0—B2-Sternen fallen einige Linien des OII Multipletts $\gamma^4P - e^4P^0$ in den Bereich von H_γ , $\lambda 4340 \cdot 47$. Die folgende Tabelle 62 gibt nach P. SWINGS und O. STRUVE zunächst die Wellenlängen und „theoretischen“ Intensitäten

¹ Wir nehmen an, daß L sehr viel breiter als l ist, so daß der „ungestörte“ Verlauf von L an der Stelle von l sicher interpoliert werden kann.

² In Einzelheiten der theoretischen Entwicklungen weicht die folgende Darstellung von der Originalarbeit ab.

Tabelle 62. Beeinflussung des OII-Multipletts $\gamma^4P - e^4P^0$ durch H_γ nach P. SWINGS und O. STRUVE [1352].

λ	$I_{\text{theor.}}$	ζ Persei (B1)		τ Scorpii (B0)		ϑ Ophiuchi (B2)	
		A_λ	H_γ -Flügel R_L %	A_λ	H_γ -Flügel R_L %	A_λ	H_γ -Flügel R_L %
		Å		Å		Å	
4317,16	39,7	0,14	0	0,07	0	0,05	0
19,65	42,9	0,13	0	0,08	0	0,05	0
25,77	7,9	0,05	0	0,04	0	0,02	0
H_γ							
45,57	39,7	0,09	7	0,05	12	0,01	17
49,43	100,0	0,26	3	0,09	5	0,03	10
66,91	42,9	0,14	0	0,08	0	0,05	0

(relative f -Werte) der Linien; dann für drei Sterne die Gesamtabsorptionen A_λ und die Tiefe R_L des H_γ -Flügels an der betreffenden Stelle in %. Indem man

zunächst für die ungestörten Linien $\log A_\lambda$ in Abhängigkeit von $\log I_{\text{th}}$ aufträgt und die Kurvenstücke für die drei Sterne durch Verschiebung längs der Abszissenachse möglichst gut aneinander setzt, erhält man die mittlere Wachstumskurve^{1,2} für das OII-Multiplett (Fig. 100). Der horizontale Abstand der (selbstverständlich mitverschobenen) Punkte für die gestörten Linien (beigeschriebene Zahlen = Tiefe R_L im H_γ -Flügel) zeigt in logarithmischem Maß die Änderung der wirksamen Tiefe τ_0 durch das Vorhandensein von H_γ . Im Mittel gibt, wie man der Figur entnimmt, eine Flügeltiefe R_L von $\sim 10\%$ schon eine Verkleinerung von τ_0 um einen Faktor $\sim 0,3 - 0,2$.

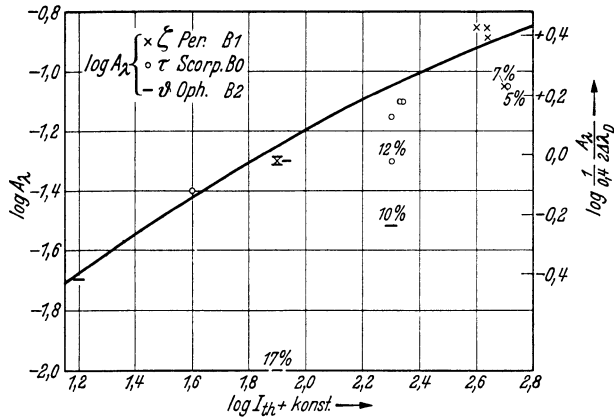


Fig. 100. Wachstumskurve des OII-Multipletts $\gamma^4P - e^4P^0$ in B0-B2-Sternen. Die beigeschriebenen Zahlen geben die Tiefe des störenden H_γ -Flügels in %. Der horizontale Abstand der „gestörten“ Punkte von der Kurve gibt $\log \frac{NH_0}{NH}$.

Nunmehr versuchen wir, diese Verhältnisse theoretisch zu erfassen: Sowohl H_γ wie die OII-Linien dürften, da es sich um Übergänge zwischen hochangeregten Termen handelt, dem „Absorptions“-Schema folgen. Wir bezeichnen die Summe von kontinuierlichem Absorptionskoeffizienten für die betrachtete Spektralgegend plus Linienabsorptionskoeffizient in H_γ mit κ und den ROSSELANDSchen Opazitätskoeffizienten mit $\bar{\kappa}$ und nehmen weiterhin an, daß $\bar{\kappa}$, κ und der selektive Absorptionskoeffizient der Linie l in derselben Weise mit der Tiefe variieren (M.E.-Modell). Dann ist die wirksame Tiefe (bezogen auf die Gesamtstrahlung)

¹ Der von SWINGS und STRUVE mitgemessene Stern κ Ori (B0), in dem die OII-Linien durch H_γ noch gar nicht gestört werden, paßt in keiner Weise zu der mittleren Wachstumskurve der Fig. 100, sondern gibt $A_\lambda \sim I_{\text{th}}$. Die naheliegende Erklärung ist kräftige Turbulenz. Wir haben diesen Stern daher beiseitegelassen.

² Rechts sind in Fig. 100 noch entsprechend Fig. 85 die $\log \frac{1}{R_c} \cdot \frac{A_\lambda}{2 \Delta \lambda_D}$ aufgetragen. R_c wurde dabei (s. u.) $\sim 0,4$ gesetzt. Die empirische Wachstumskurve entspricht — wie man durch Vergleich mit Fig. 85 und 87 findet — der theoretischen, wenn man $a \sim 0,3$ wählt.

für die Erzeugung der OII-Linien nach (68,6) und (65,4)

$$\bar{\tau}_0 = \frac{\bar{\kappa}}{\kappa} \left\{ 1 + \frac{1 - e^{-u_0}}{\frac{1}{4} u_0} \cdot \frac{\kappa}{\bar{\kappa}} \right\}^{-1}, \quad (76,1)$$

wo $u_0 = \frac{h\nu}{kT_0} = \frac{c_2}{\lambda T_0}$ ist. Andererseits hängt auch der Strahlungsstrom F_ν an der Sternoberfläche von $\kappa/\bar{\kappa}$ ab und zwar ist nach (31,11 u. 14) oder (36,1)

$$F_\nu = I_0 \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{4} u_0}{1 - e^{-u_0}} \cdot \frac{\bar{\kappa}}{\kappa} \right\}, \quad (76,2)$$

wo I_0 die Intensität der thermischen Gleichgewichtsstrahlung für die Grenztemperatur T_0 des Sternes bedeutet. Andererseits ist I_0 aber auch — wie wir in Abschn. 74 sahen — gleich der *Restintensität* I_c in der Mitte starker FRAUNHOFER-Linien, die durch Absorption entstehen. In unseren Problem können wir also $I_0 = I_c =$ der Restintensität von H_γ setzen und schreiben:

$$\frac{F_\nu}{I_0} = \frac{I_L}{I_c} = 1 + \frac{\frac{1}{4} u_0}{1 - e^{-u_0}} \cdot \frac{\bar{\kappa}}{\kappa}. \quad (76,3)$$

Eliminieren wir aus (76,1 u. 3) $\kappa/\bar{\kappa}$, so wird zunächst

$$\bar{\tau}_0 = \frac{(I_L - I_c)^2}{I_L \cdot I_c} \cdot \frac{1 - e^{-u_0}}{\frac{1}{4} u_0}. \quad (76,4)$$

Vergleichen wir diese wirksame optische Tiefe mit derjenigen, die wir erhalten würden, wenn H_γ nicht vorhanden und also $I_L = 1$ wäre

$$(\bar{\tau}_0)_0 = \frac{(1 - I_c)^2}{1 \cdot I_c} \cdot \frac{1 - e^{-u_0}}{\frac{1}{4} u_0}, \quad (76,5)$$

so gibt $\bar{\tau}_0 : (\bar{\tau}_0)_0$ direkt die durch den Flügel von H_γ verursachte Änderung der Anzahl wirksamer Atome NH . Es ist also schließlich

$$\frac{NH}{NH_0} = \frac{\bar{\tau}_0}{(\bar{\tau}_0)_0} = \frac{1}{I_L} \left(\frac{I_L - I_c}{1 - I_c} \right)^2. \quad (76,6)$$

Für H_γ in B0—B2-Sternen ist (vgl. Fig. 94b) im Mittel die Restintensität $I_c \approx 0,55$. Wir berechnen damit für eine Tiefe des H_γ -Flügels von 10% ($I_L = 0,9$) eine Reduktion der Atomzahlen um den Faktor $\frac{NH}{NH_0} = 0,67$; für 20% um 0,39. Die *berechnete* Schwächung der OII-Linien ist also noch um einen Faktor 2—3 *zu gering*. Wenn wir den — an systematischen Schwierigkeiten besonders reichen — Messungen so weit vertrauen dürfen, so müssen wir schließen, daß die OII-Linien in tieferen Schichten entstehen als H_γ . Eine genauere Durchrechnung im Anschluß an die in Abschn. 67 entwickelten Methoden wäre ohne Zweifel interessant.

2. Als zweites Beispiel untersuchen P. SWINGS und O. STRUVE (s. S. 312) die Schwächung der Ca H-Linie $\lambda 3968$ durch den H_ϵ -Flügel in A0—A2-Sternen. Da H und K schon im $\sqrt{\quad}$ -Bereich der Wachstumskurve liegen und ihre Oszillatorenstärken sich wie 1:2 verhalten, so ist einfach

$$\left(\frac{NH}{NH_0} \right)_{\text{beob.}} = 2 \cdot \left(\frac{H}{K} \right)^2. \quad (76,7)$$

Die einzelnen Daten gibt die folgende Tabelle 63. Hier müßten wir — streng genommen — für die Wasserstofflinie wieder mit „Absorption“, für die CaII-Linie dagegen mit „Streuung“ rechnen. Da aber nach (66,5) die $\bar{\tau}_0$ für Ab-

Tabelle 63. Beeinflussung von H durch H_ϵ nach P. SWINGS und O. STRUVE [1352].

λ	$I_{\text{theor.}}$	α Cygni (cA2)		η Leonis (A0)		α Lyrae (A0)		α CMa	
		A_λ	H_ϵ -Flügel R_L %	A_λ	H_ϵ -Flügel R_L %	A_λ	H_ϵ -Flügel R_L %	A_λ	H_ϵ -Flügel R_L %
3968,46 (H)	1	0,71	25	0,25	43	0,26	74	0,22	62
3933,66 (K)	2	1,02	0	0,43	0	0,56	0	0,58	0
$\left(\frac{NH}{NH_0}\right)_{\text{beob.}}$		0,97		0,68		0,43		0,29	

sorption bzw. Streuung sich kaum unterscheiden, so begehen wir keinen merklichen Fehler, wenn wir wieder Gl. (76,6) anwenden. Für H_ϵ in A0-Sternen ist $I_\epsilon \sim 0,2$ für $R_L = 60\%$, d. h. $I_L = 0,4$ wird also z. B.

$$\left(\frac{NH}{NH_0}\right)_{\text{ber.}} = 0,16. \tag{76,8}$$

Die berechnete Schwächung ist hier also — im Gegensatz zu den OII-Linien — um einen Faktor ~ 3 zu groß. Mit demselben Vorbehalt wie oben müssen wir also schließen, daß in den A0-Sternen das Ca^+ durchschnittlich in höheren Schichten liegt, als der zweiquantige Wasserstoff. Eine genauere Durchrechnung steht noch aus¹.

3. Während in den bis jetzt betrachteten Fällen die Hauptlinie L durch „Absorption“ entsteht, ist der Fall der Störung durch eine „Streu“-Linie realisiert bei den zahlreichen Metalllinien, die in den Spektren der späteren Spektraltypen die Flügel der breiten H - und K -Linien förmlich spicken. Quantitative Untersuchungen im Sonnenspektrum sind von A. D. THACKERAY [Ap. J. **84**, 433 (1936)] ausgeführt worden (Zus. b. d. Korr.).

4. Wie J. EVERSHED (und schon früher in einem Falle JEWELL) bemerkte, erscheinen am Sonnenrand in unmittelbarer Nähe der H - und K -Linien einige schwache Emissionslinien, die ziemlich weit in die Sonnenscheibe herein noch als solche bestehen bleiben. Im Spektrum der \odot -Mitte dagegen sind die beiden stärksten Linien gar nicht, die anderen unsicher als Absorption zu erkennen.

Nach A. D. THACKERAY [1354, dort übrige Literatur], dessen Arbeit wir die folgende Tabelle 64 entnehmen, gehören diese Linien den Spektren der seltenen Erden an. Die Identifikation der 2. und 3. Linie ist ziemlich sicher, die der 1. und 4. erheblich weniger. $\text{Nd}^+ \lambda 3934,80$ ist nach THACKERAY noch 1'

Tabelle 64. Emissionslinien der seltenen Erden in H und K am \odot -Rand
Nach A. D. THACKERAY [1354].

Emission am \odot -Rand (EVERSHED)		Absorption (ROWLAND Rev.)		Chromosphäre (MENZEL)		Identifikation (THACKERAY)	
λ	Int.	λ	Int.	λ	Element	λ	Element
3931,54	0	? 3931,59	1	3931,28	V? Ce?	3931,533	Dy II
				,74	?		
34,80	2	3934,89	Nd ⁺	34,813	Nd II
67,04	0	3967,057	od?	67,048	Ce II
3969,40	3	3969,27	Fe, Eu ⁺ (c to red)	3969,23	Eu II
						,27	Fe

¹ Anm. b. d. Korr.: Hierzu vgl. P. SWINGS u. S. CHANDRASEKHAR, M. N. **97**, 24 (1936).

innerhalb des Sonnenrandes, also bei $\cos \vartheta = 0,37$ als Emission zu erkennen; auf der Sonnenscheibe verschwindet sie vollständig.

Schon D. H. MENZEL [407] hat beobachtet, daß bei Sonnenfinsternissen die Linien der seltenen Erden als erste den Umschlag von Absorption in Emission vollziehen. Dies dürfte irgendwie mit der ungewöhnlichen Struktur ihrer Termschemata zusammenhängen, wenn auch eine genaue Deutung noch fehlt.

Die Besonderheit der Linien von EVERSHEDE, in Absorption *nicht* zu erscheinen, ist wohl folgendermaßen zu verstehen: Infolge der erwähnten Kompliziertheit ihrer Termschemata dürften die Linien der seltenen Erden — soweit eine phänomenologische Theorie überhaupt ausreicht — dem Schema „Absorption“ folgen. Wenn nun die wirksame optische Tiefe für selektive Absorption in der Linienmitte, wie wir wohl annehmen dürfen, > 1 ist, so erhalten wir dort bekanntlich — unabhängig von allem anderen — die Intensität des Hohlraumstrahlers der Grenztemperatur T_0 oder, mit anderen Worten, dieselbe Strahlungsintensität, wie am \odot -Rand außerhalb der FRAUNHOFER-Linien. Diese Intensität ist nach A. W. MAUE und A. UNSÖLD (Tabelle 23) bei H und K gleich 16% der Intensität in \odot -Mitte.

Auf der anderen Seite ist die Intensität z. B. der K -Linie an der Stelle von $\text{Nd}^+ \lambda 3934,80$ nach A. D. THACKERAY und M. MINNAERT (Fig. 78) in \odot -Mitte 20 bzw. 13%, also im Mittel gerade ebenfalls $\approx 16\%$ der Intensität des kontinuierlichen Spektrums. Man versteht so, daß dort eine „Absorptions“-Linie nicht erscheinen kann. Nach dem \odot -Rand zu nimmt die Intensität in der K -Linie (gemessen in *denselben* Einheiten, *nicht* bezogen auf das Kontinuum derselben Stelle) ab; die Nd^+ -Linie kann also in Emission auftreten. Auch in quantitativer Hinsicht fast dasselbe gilt für die 3. und 4. Linie der Tabelle. Die 1. ist etwas weiter von der Mitte der K -Linie entfernt, so daß es verständlich erscheint, daß sie andeutungsweise auch in Absorption erscheint.

5. In den bisher betrachteten Fällen von „blends“ handelt es sich stets um rein optische Wechselwirkung der beiden Linien. Ein Fall selektiver Übertragung von Anregungsenergie von einem Atom auf ein anderes scheint dagegen nach A. D. THACKERAY [1355] vorzuliegen bei der in vielen *langperiodischen Veränderlichen* (M) in *Emission* auftretenden $\lambda 4511$. Diese kann man nach JOY und MERILL identifizieren mit der *einen* Resonanzlinie $5^2P_{1/2} - 6^2S_{1/2} \lambda 4511,31$ des In-Spektrums. Die *andere* Linie des Grunddoublets $\lambda 4101,72$ fällt genau auf H_δ . Es liegt also nahe, eine Art Energieübertragung vom Wasserstoff auf die In-Atome anzunehmen, wenn auch der Mechanismus noch nicht ganz geklärt ist.

XIV. Kapitel.

Beeinflussung der Linienkonturen durch Rotation und Expansion der Sterne.

77. Berechnung der Linienkonturen rotierender Sterne.

Bis jetzt haben wir in der Theorie der Linienkonturen nur solche Verbreiterungsursachen berücksichtigt, die in den Sternatmosphären selbst ihren Sitz haben und also direkt den Absorptions- bzw. Streukoeffizienten beeinflussen.

Wenn nun ein Stern *rotiert* (oder — man denke an Cepheiden, Novae usw. — Expansions- bzw. Kontraktionsbewegungen ausführt), so verbreitern die entstehenden Dopplereffekte *alle Linien* des Spektrums in ähnlicher Weise.

Trotzdem diese Erkenntnis schon alt ist, war eine *eigentliche Erforschung der Rotation der Sterne* erst möglich, nachdem die physikalischen Ursachen der

Linienverbreiterung wenigstens in groben Zügen klargestellt waren. Wir verdanken sie in erster Linie O. STRUVE und seinen Mitarbeitern C. T. ELVEY und G. SHAJN (s. Literaturverzeichnis). Bezüglich der Vorgeschichte des Problems genüge ein Hinweis auf deren erste Arbeit [1414].

Am deutlichsten wird sich der Rotationskoeffizient bei solchen Linien zeigen, deren „wahre“ Breite (für einen ruhenden Stern) sehr viel kleiner ist, als die Rotationsverbreiterung. Wir berechnen daher zuerst die „Rotationskontur“ derartiger Linien:

Die Winkelgeschwindigkeit w des Sternes tragen wir als Vektor \mathfrak{w} in Richtung der Drehachse auf. Ferner legen wir durch den Mittelpunkt des Sternes ein Koordinatensystem, dessen ζ -Achse nach dem Beobachter zeigt. Die η -Achse liege in der Ebene durch ζ und \mathfrak{w} ; die ξ -Achse stehe senkrecht auf der η, ζ -Ebene (Fig. 101). Dann sind die Komponenten des Drehvektors

$$\mathfrak{w} = \{0, w \sin i, w \cos i\}, \quad (77,1)$$

wo i den Winkel zwischen Drehachse und Visierlinie bedeutet. Die Lage eines Punktes auf der Sternoberfläche beschreiben wir durch den Vektor

$$\mathfrak{r} = \{\xi, \eta, \zeta\}. \quad (77,2)$$

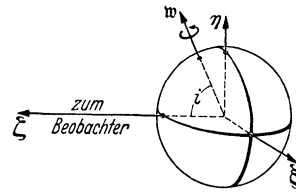


Fig. 101. Rotierender Stern.

Die Geschwindigkeit \mathfrak{v} dieses Punktes ist nun bekanntlich gegeben durch das Vektorprodukt

$$\mathfrak{v} = [\mathfrak{w}, \mathfrak{r}]. \quad (77,3)$$

Insbesondere ist ihre Komponente in der Sechrichtung

$$v_\zeta = \mathfrak{w}_\xi \cdot \eta - \mathfrak{w}_\eta \cdot \xi = -\xi \cdot w \sin i. \quad (77,4)$$

Die entsprechende Dopplerverschiebung für eine Linie der Wellenlänge λ wird

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{c} \cdot \xi \cdot w \sin i. \quad (77,5)$$

Insbesondere erhalten wir die maximale Verschiebung und damit die Halbbreite b unserer Linie, wenn wir $\xi =$ dem Sternradius R setzen. (wR ist dann die volle Geschwindigkeit, $w \cdot R \cdot \sin i = v \sin i$ die Radialgeschwindigkeit am Äquator). Wir schreiben also

$$b = \frac{\lambda}{c} R \cdot w \sin i \quad (77,6)$$

und weiterhin zur Abkürzung

$$\frac{\Delta\lambda}{b} = \frac{\xi}{R} = x \quad \text{sowie} \quad \frac{\eta}{R} = y. \quad (77,7)$$

Die Stärke der Linie — einerlei ob es sich um Absorption oder Emission handelt — in dem Bereich x bis $x + dx$ wird nun proportional sein der Gesamthelligkeit des entsprechenden Streifens der Sternscheibe zwischen ξ und $\xi + d\xi$. Dabei nehmen wir an, daß die Linienkontur auf der ganzen Sternscheibe dieselbe ist, was in 1. Näherung immerhin erlaubt sein dürfte. Die Helligkeitsverteilung auf der Sternscheibe stellen wir wieder dar durch die gewohnte Näherungsformel

$$I = \text{konst.} (1 + \beta \cos \vartheta), \quad (77,8)$$

wo in unseren jetzigen Bezeichnungen

$$\sin \vartheta = \frac{\sqrt{\zeta^2 + \eta^2}}{R} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (77,9)$$

ist. Es wird also

$$I = \text{konst.} (1 + \beta \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}) \quad (77,10)$$

und wir erhalten die Intensitätsverteilung $A(x)$ unserer Linie — gleich auf

$$\int_{-1}^{+1} I dx = 1 \text{ normiert —}$$

$$A(x) = \frac{\int_0^{\sqrt{1-x^2}} I(x, y) dy}{\int_{x=-1}^{+1} \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} I(x, y) dy dx} = \frac{\frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} + \frac{\beta}{2} (1-x^2)}{1 + \frac{2}{3} \beta}. \quad (77,11)$$

Für $\beta=0$, d. h. keine Randverdunkelung, wird die Linienkontur eine Ellipse. Man erkennt dies auch ohne Rechnung daraus, daß $A(x)$ dann einfach der Höhe η der kreisförmigen Sternscheibe bei dem entsprechenden ξ proportional

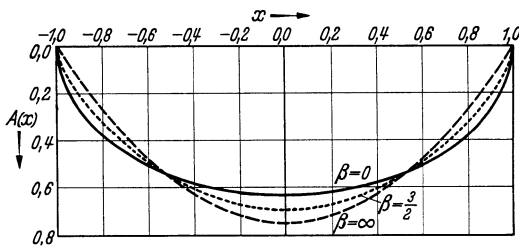


Fig. 102. „Rotationskontur“ $A(x) = \frac{\frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} + \frac{\beta}{2} (1-x^2)}{1 + \frac{2}{3} \beta}$

für verschiedene Werte des Randverdunkelungskoeffizienten β .

ist. Graphische Darstellungen der Rotationskontur für $\beta = 0, 3/2$ und ∞ gibt die nebenstehende Fig. 102.

Ist die Breite der „wahren“ Linienkontur W (d. h. derjenigen, die wir bei einem analogen nichtrotierenden Stern beobachten) *nicht* vernachlässigbar gegenüber der „Rotationsbreite“ b — nach Gl. (77,6) entspricht diese $x = \pm 1$ —, so erhalten wir die Linienkontur S des rotierenden Sternes durch *Überlagerung* von W mit

der reinen Rotationskontur A . Das mathematische Problem ist völlig gleichartig dem in Abschn. 58 behandelten Problem der Verzerrung durch den Spektrographen. Es gilt also, wenn wir der Einfachheit wegen alle Wellenlängendifferenzen auf den maximalen Rotations-Dopplereffekt als Einheit beziehen, analog (58,17)

$$S(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(y-x) A(x) dx. \quad (77,12)$$

Ist A wesentlich breiter als W , so muß die Integration numerisch ausgeführt werden¹. Einige Beispiele gibt nach J. A. CARROLL [1403] die Fig. 103.

Ist dagegen W breiter als A , die Verzerrung der ursprünglichen Linienkontur durch die Rotation also nicht zu groß, so läßt sich diese außerordentlich mühsame Rechenarbeit fast auf Null reduzieren durch folgendes *graphische Verfahren*, dessen Grundgedanke auf Lord RAYLEIGH zurückgehen dürfte:

Wir entwickeln in (77,12) ... $W(y-x)$ in eine Potenzreihe nach x , wobei wir Glieder bis x^5 inklusive mitnehmen:

$$W(y-x) = W(y) - \frac{x}{1!} W'(y) + \frac{x^2}{2!} W''(y) - \frac{x^3}{3!} W'''(y) + \frac{x^4}{4!} W^{IV}(y) - \frac{x^5}{5!} W^V(y). \quad (77,13)$$

Damit erhalten wir, da $A(x)$ eine gerade Funktion und $\int_{-\infty}^{+\infty} A(x) dx = 1$ ist, durch gliedweise Integration:

$$S(y) = W(y) + \frac{W''(y)}{2!} \int x^2 A(x) dx + \frac{W^{IV}(y)}{4!} \int x^4 A(x) dx. \quad (77,14)$$

¹ Eventuell könnte man den früher erwähnten Apparat von H. C. BURGER und P. H. v. CITTERT [1114] anwenden.

Die beiden rechts stehenden Korrektionsglieder lassen sich nun leicht ausrechnen mit Hilfe des 2. *Differenzenquotienten*. Gehen wir von y ein — hinsichtlich seiner Größe noch festzulegendes — Stück Δ nach rechts und links, so gilt:

$$W(y \pm \Delta) = W(y) \pm \frac{\Delta}{1!} W'(y) + \frac{\Delta^2}{2!} W''(y) \pm \frac{\Delta^3}{3!} W'''(y) + \frac{\Delta^4}{4!} W^{IV}(y) \pm \dots \quad (77,15)$$

und damit

$$\Delta''(y) = \frac{W(y + \Delta) - W(y - \Delta)}{2} - W(y) = \frac{\Delta^2}{2!} W''(y) + \frac{\Delta^4}{4!} W^{IV}(y). \quad (77,16)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (77,14), so sieht man, daß man den letzteren schreiben kann als

$$S(y) = W(y) + C \cdot \Delta''(y), \quad (77,17)$$

wenn man

$$\Delta^2 = \frac{\int x^4 A(x) dx}{\int x^2 A(x) dx} \quad \text{und} \quad C = \frac{[\int x^2 A(x) dx]^2}{\int x^4 A(x) dx} \quad (77,18)$$

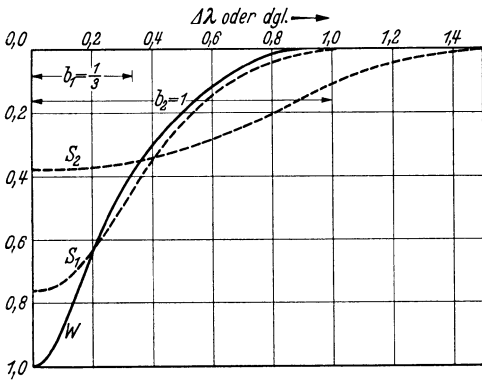


Fig. 103. Verzerrung der Linienkontur W durch Rotation. Nach J. A. CARROLL [1403]. Die mit b_1 bzw. b_2 bezeichneten Strecken geben die Halbbreiten der reinen Rotationskonturen. Deren Überlagerung mit W gibt S_1 bzw. S_2 . (Der Randverdunkelungskoeffizient β ist gleich Null gesetzt.)

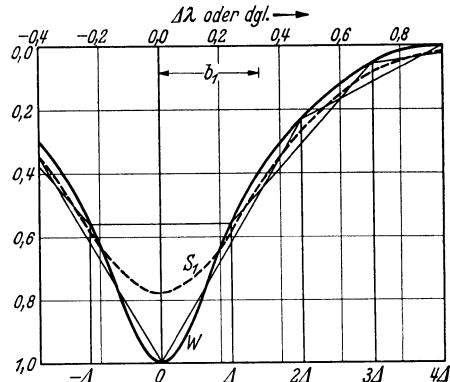


Fig. 104. Graphische Konstruktion der Linienkontur S_1 (vgl. Fig. 103) nach (77,18). Es ist $\Delta = 0,707$, $b_1 = 0,263$ und $C = 0,5$. Die Übereinstimmung mit der exakt berechneten Kurve von Fig. 103 ist ausgezeichnet. Für Kurven, die so stark verzerrt sind wie S_2 dagegen reicht unser einfaches graphisches Verfahren nicht aus.

setzt. Beide Integrale kann man mit (77,11) leicht ein für allemal berechnen und erhält

$$\Delta^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \frac{16}{30} \beta}{1 + \frac{16}{35} \beta} \quad \text{und} \quad C = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{8}{15} \beta\right)^2}{\left(1 + \frac{2}{3} \beta\right) \left(1 + \frac{16}{35} \beta\right)}. \quad (77,19)$$

Ihre Abhängigkeit von β ist nur geringfügig, wie auch die folgende kleine Tabelle zeigt:

$\beta =$	0	1	2	5	∞
(keine Randverd.)					
$\Delta =$	0,707	0,689	0,680	0,669	0,655
$C =$	0,500	0,484	0,478	0,472	0,467

Die graphische Konstruktion der Linienkontur $S(y)$ für den rotierenden Stern geht nun also folgendermaßen vor sich:

Man führt als Abszisseneinheit die Rotationsbreite b ein. In diesen Einheiten geht man von dem Ausgangspunkt y um Δ nach rechts und links. Die Differenz zwischen der Mitte der Verbindungslinie beider Punkte und $W(y)$ gibt $\Delta''(y)$. Dieses $\times C$ liefert schon die gewünschte Differenz $S(y) - W(y)$.

In Fig. 104 haben wir die von CARROLL (s. S. 318) (s. Fig. 103) exakt durchgerechneten Beispiele nach unserer Näherungsmethode behandelt. Wie der

Vergleich beider Figuren zeigt, reicht unser Verfahren vollständig aus, solange die Reduktion der Restintensität (dies ist als praktisches Kriterium am geeignetsten) einen Faktor $\sim 1,5$ nicht überschreitet.

Man könnte daran denken, den zuerst besprochenen Fall Rotationsbreite \gg ursprüngliche Linienbreite ebenfalls nach dem soeben entwickelten Verfahren zu behandeln, indem man einfach die Rollen von W und A vertauscht. Dies ist aber *nicht* möglich, da für die meisten Linienkonturen die Integrale $\int x^2 W(x) dx$ usw. *nicht* konvergieren.

78. Spektroskopische Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeit $v \sin i$ von Sternen.

Nummehr betrachten wir — zunächst ebenfalls vom theoretischen Standpunkt aus — die Umkehrung des in Abschn. 77 gelösten Problems:

„Wie kann man aus beobachteten Linienkonturen die Rotationsgeschwindigkeit $v \sin i$ eines Sternes ermitteln?“ (Daß man nur die in die Sehlinie fallende Komponente $v \cdot \sin i$ der Äquatorialgeschwindigkeit bestimmen kann, nicht aber v und i getrennt, bedarf nach Gl. (77,4) keiner Erläuterung.)

1. Einen *oberen Grenzwert* der Rotationsgeschwindigkeit erhalten wir zunächst, wenn wir den Beitrag von W zur Linienbreite vernachlässigen:

Dann können wir aus der maximalen Breite der Linie nach der Dopplerformel (77,6) $v \sin i$ abschätzen. Besser wird man aber nicht die unsicheren Ränder der Linie benützen, sondern von *Gesamtabsorption* A_λ und *Tiefe* R_λ in der Linienmitte ausgehen. Nach (77,11) ist die Tiefe in der Mitte einer Linie der Gesamtabsorption 1 (in Einheiten der Dopplerbreite b) gleich $A_{x=0}$ oder

$$\frac{\frac{2}{\pi} + \frac{\beta}{2}}{1 + \frac{2}{3}\beta}. \quad (78,1)$$

Es gilt also in den gewöhnlichen Einheiten

$$A_\lambda = b \cdot R_\lambda \frac{1 + \frac{2}{3}\beta}{\frac{2}{\pi} + \frac{\beta}{2}}, \quad (78,2)$$

für die reine Rotationskontur und daher allgemein

$$b < \frac{A_\lambda}{R_\lambda} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 + \frac{\pi}{4}\beta}{1 + \frac{2}{3}\beta}. \quad (78,3)$$

2. Da die Gesamtabsorption A_λ durch die Rotation selbstverständlich nicht verändert wird, so kann man zu einer vorgegebenen Rotationskontur S sich die entsprechende rotationsfreie Kontur beschaffen, indem man einen Stern mit scharfen Linien aufsucht, welche dieselben Gesamtabsorptionen haben wie die des rotierenden Sternes. Ausgehend von dieser wahren Kontur W kann man dann in der Art von Fig. 103 u. 104 die Rotationskonturen für eine Reihe von $v \sin i$ -Werten berechnen. Durch Vergleich einer *gemessenen* Kontur mit dieser *berechneten* Kurvenschar läßt sich dann nach C. T. ELVEY [1408] umgekehrt $v \sin i$ ermitteln. Dieses Verfahren hat den Vorteil, daß die durch den *Spektrographen* verursachte Verzerrung¹ der Linienkonturen das *Endergebnis* kaum beeinflussen dürfte.

3. J. A. CARROLL [1403—5] hat endlich die überraschende Entdeckung gemacht, daß man *aus einer gemessenen Linienkontur S die Rotationsgeschwindigkeit*

¹ Selbstverständlich müssen S und W unter denselben Bedingungen gemessen werden.

$v \sin i$ und die ursprüngliche Kontur W bestimmen kann, ohne irgendwelche Zusatzannahmen machen zu müssen. (D. h. in praxi muß man wegen der beschränkten Meßgenauigkeit den Randverdunkelungskoeffizienten β als bekannt annehmen, was aber auf $v \cdot \sin i$ wenig Einfluß hat).

Da wir die Rotationsbreite $b = \frac{\lambda}{c} \cdot v \sin i$ noch nicht kennen, so beziehen wir S und W z. B. auf die gewöhnliche Wellenlängenskala¹ $y' = by$ bzw. $x' = bx$. Dann lautet (77,12)

$$S(y') = \int_{-\infty}^{+\infty} W(y' - x') A\left(\frac{x'}{b}\right) \frac{dx'}{b} \quad (78,4)$$

oder, wenn wir wieder $x = x'/b$ einführen und bei y' den \dots der Kürze wegen einfach weglassen (eine Verwechslung mit dem früheren y ist nicht zu befürchten), so wird

$$S(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(y - bx) A(x) dx. \quad (78,5)$$

Um nun b mit Hilfe von $S(y)$ zu bestimmen, entwickelt CARROLL beide Seiten dieser Gleichung nach FOURIER. Da alle vorkommenden Funktionen gerade sind, so treten nur \cos -Glieder auf und wir erhalten für die „Intensität des Spektrums von $S(y)$ bei der Frequenz u “ (alles natürlich im übertragenen Sinne verstanden!)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(y) \cos uy dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos uy \int_{-1}^{+1} W(y - bx) A(x) dx \cdot dy \quad (78,6)$$

oder nach Vertauschung der Integrationsfolge und anschließender Umbenennung der einen Integrationsvariablen

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} S(y) \cos uy dy &= \int_{-1}^{+1} A(x) \int_{-\infty}^{+\infty} W(y - bx) \cos uy dy \cdot dx, \\ &= \int_{-1}^{+1} A(x) \int_{-\infty}^{+\infty} W(z) \cos u(z + bx) dz \cdot dx. \end{aligned} \right\} \quad (78,7)$$

Schreibt man den $\cos \dots$ in der Form $\cos uz \cdot \cos ubx - \sin uz \cdot \sin ubx$, so gibt das Integral mit $\sin uz$ Null, da $W(z)$ gerade ist und man erhält schließlich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(y) \cos uy dy = \int_{-1}^{+1} A(x) \cos ubx dx \times \int_{-\infty}^{+\infty} W(z) \cos uz dz. \quad (78,8)$$

Rechts erscheinen die Funktionen A und W vollkommen getrennt. Betrachten wir insbesondere die Nullstellen des rein empirisch bestimmbaren Spektrums von S (links), so setzen diese sich zusammen aus den Nullstellen des Spektrums von A und W . Ist nun die Verteilung A wesentlich breiter als W , so werden die kleinsten Nullstellen mit ziemlicher Sicherheit zu A gehören. Man kann also b bestimmen, indem man die Nullstellen des linken Integrals vergleicht mit denen des ersten rechten. Letzteres läßt sich leicht ausrechnen; man erhält nach CARROLL (s. S. 320)

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} + \frac{\beta}{2} (1-x^2)}{1 + \frac{2}{3} \beta} \cos ubx \cdot dx = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{\beta}{3}} \left\{ \frac{J_1(ub)}{ub} - \beta \left(\frac{\cos ub}{(ub)^2} - \frac{\sin ub}{(ub)^3} \right) \right\}, \quad (78,9)$$

¹ Man kann selbstverständlich ebensogut eine Frequenzskala oder noch besser eine $\Delta\lambda/\lambda$ -Skala nehmen.

wo J_1 die 1. BESSEL-Funktion bedeutet. Die Nullstellen der Funktion (78,9) liegen z. B. für $\beta = 3/2$ bei

$$u b = 4,147; 7,303; 10,437; 13,569 \dots \quad (78,10)$$

Hat man durch Vergleich mit den Nullstellen $u = u_1, u_2 \dots$ des $\int S(y) \cos u y \cdot dy$ den Wert von b ermittelt¹, so kann man W durch FOURIER-Synthese berechnen: Zunächst gibt (78,8) mit (78,9) das „ u -Spektrum“ von W und damit wird in bekannter Weise

$$W(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} W(z) \cos u z dz \right\} \cos u y du. \quad (78,11)$$

Wie J. A. CARROLL [1405] bemerkt, ist seine Methode zur Bestimmung von $v \sin i$ im Prinzip unabhängig von der verzerrenden Wirkung des Spektrographen. Letztere ist nämlich mit der Rotationsverbreiterung (man sieht dies am einfachsten, wenn man (77,12) in Operatorform schreibt) vertauschbar und äußert sich also nur in $W(y)$, während die mit $A(x)$ zusammenhängenden Nullstellen in (78,8) unverändert bleiben. In *praxi* sieht die Sache jedoch anders aus: Wenn A nicht mehr wesentlich breiter ist als W bzw. die Apparatefunktion des Spektrographen, dann liegen die Nullstellen der beiden rechtsstehenden Faktoren in Gl. (78,8) in demselben Bereich von u und sind nicht mehr auseinanderzuerkennen. Eine \square -förmige Apparatefunktion gäbe z. B. eine äquidistante Serie von Nullstellen, die von der Folge (78,10) kaum zu unterscheiden ist, wenn nur zwei derselben überhaupt zu bekommen sind. Wenn auch das CARROLLsche Verfahren im Prinzip sehr interessant ist, so dürfte doch in *praxi* die viel einfachere Methode ELVEYS (s. u. 2.) mindestens dasselbe leisten.

79. Beobachtung von Rotationseffekten bei spektroskopischen Doppelsternen und Bedeckungsveränderlichen.

Es ist — in qualitativer Hinsicht — eine alte Erfahrung (Literatur bei SHAJN und STRUVE, s. S. 317), daß Systeme mit großer Radialgeschwindigkeitsamplitude meist breite Linien haben und daß in Bedeckungsveränderlichen während der Verfinsternung des Hauptsternes merkwürdige Linienverschiebungen auftreten.

Beide Beobachtungen lassen sich zwanglos durch die — vom hydrodynamischen Standpunkt aus fast selbstverständliche — Annahme deuten, daß enge Doppelsternsysteme nahezu wie *ein* starrer Körper rotieren oder — genauer gesagt —, daß ähnlich wie beim Mond *Revolutions- und Rotationsdauer gleich sind*.

Quantitative spektroskopische Untersuchungen der Linienkonturen solcher Systeme hat zuerst O. STRUVE [1415] durchgeführt. Als Beispiel geben wir seine Beobachtungen an dem spektroskopischen Doppelstern 67 α Virginis (Periode 4 Tage) dessen Komponenten nahezu demselben Spektraltyp (B2) angehören. Fig. 105 a zeigt einen Ausschnitt aus der Mikrophotometerkurve des Spektrums bei maximaler Trennung der Linien beider Komponenten. Die violetten Komponenten I sowohl von He 4472 als auch Mg II 4481 sind wesentlich breiter als die roten Komponenten II. Die auf Intensitäten reduzierten Kurven (b) bestätigen dieses Bild. Fig. 105 c gibt zum Vergleich dieselben Linien in dem offensichtlich nicht rotierenden B2-Stern γ Pegasi. „Verzerrt“ man diese versuchsweise mit verschiedenen Rotationsgeschwindigkeiten, so ergibt sich gute Übereinstimmung mit den Konturen in α Virg, wenn man für Komponente I

¹ Die Verhältnisse $u_1 : u_2 \dots$ geben eine gewisse Kontrolle und gestatten im Prinzip sogar eine Bestimmung des Randverdunkelungskoeffizienten β .

$v_1 \sin i = 200$ km/sek, für Komponente II $v_2 \sin i \approx 50$ km/sek annimmt, wobei der letztere Wert ziemlich unsicher ist und mehr eine obere Grenze darstellt. Da beide Komponenten mit derselben Winkelgeschwindigkeit w rotieren, so sind die Randgeschwindigkeiten v proportional den Sternradien r . Es ist also

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{v_1 \sin i}{v_2 \sin i} \approx 4. \quad (79,1)$$

Dieses Verhältnis läßt sich an Hand der Gesamtabsorptionen der Linien folgendermaßen nachprüfen:

Da beide Komponenten vom selben Spektraltyp sind, so ist die *wirkliche* Gesamtabsorption A einer bestimmten Linie, z. B. He 4472, in beiden Sternen

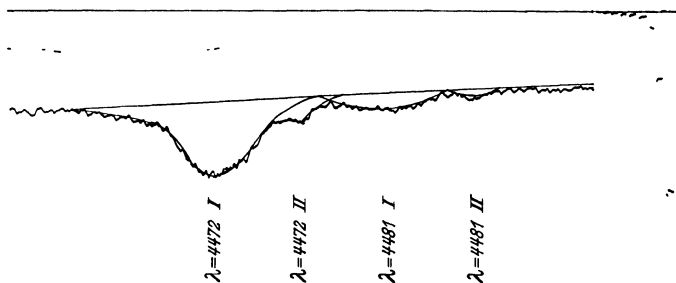


Fig. 105 a. Mikrophotometerkurve von α Virginis. (1930, April 24; 5h 35^m U. T.). Rechts Intensitätsmarken.

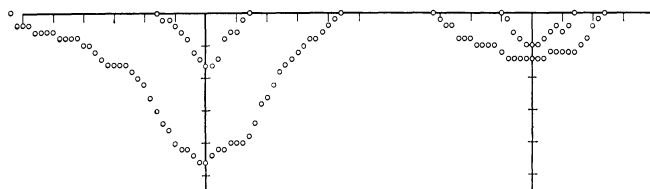


Fig. 105 b. Konturen von He λ 4472 (links) und Mg II 4481 (rechts) beider Komponenten von α Virg. auf Intensitäten umgerechnet. Einheiten der Abszissenskala 1,28 Å, der Ordinatenkala 5% Absorption.

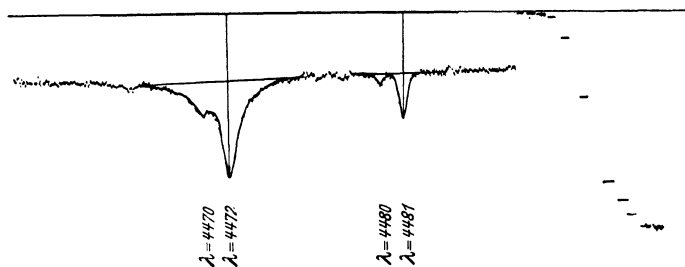


Fig. 105 c. Mikrophotometerkurve des nicht rotierenden B 2-Sternes γ Pegasi. Links neben He 4472 die verbotene Heliumlinie λ 4470. Die Linie 4480 rührt von Al III her.
Fig. 105 a—c nach O. SRUVE [1415].

dieselbe. Die in Fig. 105 b gemessenen Gesamtabsorptionen A_1 und A_2 für die Komponenten I und II *erscheinen* nur deshalb verschieden, weil jede Linie vom kontinuierlichen Spektrum der andern Komponente überlagert wird. Bezeichnen wir die Intensitäten der beiden Kontinua mit i_1 und i_2 , so gilt offensichtlich

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{i_1}{i_1 + i_2} A \\ A_2 &= \frac{i_2}{i_1 + i_2} A \end{aligned} \right\} \frac{i_1}{i_2} = \frac{A_1}{A_2}. \quad (79,2)$$

Nach Fig. 105 b ist das Verhältnis $A_1/A_2 \approx 8,8$. Da beide Sterne dieselbe Temperatur haben und also pro Flächeneinheit gleichviel Strahlung emittieren, so gilt

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad (79,3)$$

und wir erhalten auf diesem Wege in hinreichender Übereinstimmung mit (79,1)

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{A_1}{A_2}} \approx 3. \quad (79,4)$$

Der Helligkeitsunterschied beider Komponenten in Größenklassen ergibt sich entsprechend zu

$$M_2 - M_1 = 2,5 \log \frac{i_1}{i_2} = 2,4 m. \quad (79,5)$$

Als Beispiel eines *Bedeckungsveränderlichen* haben O. STRUVE und C. T. ELVEY [1417] den *Algol* (B8) eingehend untersucht. Außerhalb der Verfinsterung zeigt z. B. die Mg II-Linie $\lambda 4481$ die typische „tellerförmige“ Rotationskontur. Durch Vergleich mit derselben Linie in Vega (A0) erhält man $v \sin i = 60 \pm 15$ km/sek. Während der Verfinsterung ergeben sich — wie Beobachtung und Theorie in quantitativer Übereinstimmung zeigen — unsymmetrische Deformationen der Linien. Bei gewöhnlichen Radialgeschwindigkeitsmessungen machen sich diese als Zacken in der Geschwindigkeitskurve bemerkbar. Eine sehr eingehende Untersuchung dieses Rotationseffektes bei Algol und anderen Systemen gibt U. B. McLAUGHLIN [1412, mit eingehenden Literaturangaben].

Aus dem vorhergehenden dürfte mit genügender Deutlichkeit hervorgehen, daß die spektralphotometrische Untersuchung von Linienkonturen der Erforschung spektroskopischer Doppelsterne und Bedeckungsveränderlicher ganz neue Möglichkeiten¹ eröffnet.

80. Beobachtung der Rotation einzelner Sterne.

Ausgehend von den Untersuchungen an Doppelsternen entdeckten O. STRUVE und C. T. ELVEY, daß es auch rasch *rotierende Einzelsterne* gibt. Fig. 106 zeigt

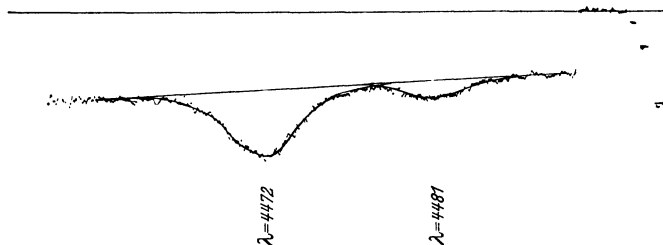


Fig. 106. Mikrophotometerkurve von η Ursae Majoris. Rotierender Einzelstern. Man vergleiche mit Fig. 105. Nach O. STRUVE [1415].

z. B. eine Mikrophotometerkurve von η UMa, der hinsichtlich Spektraltyp und absoluter Helligkeit etwa der helleren Komponente von α Virg. entspricht. Wie der Vergleich mit Fig. 105 a zeigt, hat er auch nahezu dieselbe Rotationsgeschwindigkeit, also

$$v \sin i \approx 200 \text{ km/sek.} \quad (80,1)$$

Es liegt nahe, an das Vorkommen so enormer Rotationsgeschwindigkeiten Betrachtungen über die Stabilität solcher Sterne und die Entstehung von Doppelsternen anzuknüpfen. Doch wollen wir hier dieser Versuchung nicht nachgeben, sondern uns lieber an die Beobachtungen halten.

¹ Vgl. z. B. die noch nicht erklärten Beobachtungen von O. STRUVE und E. EBBIGHAUSEN (A p. J. **80**, 365 (1934)) an α Virginis!

Daß die breiten und flachen Linien solcher Spektren tatsächlich durch *Rotation* und nicht durch irgendeinen *in* den Sternatmosphären selbst wirkenden Mechanismus hervorgerufen werden, läßt sich nach O. STRUVE und C. T. ELVEY durch folgende Beobachtungen stützen:

1. *Alle* Linien (natürlich mit Ausnahme der interstellaren!) sind in *gleicher* Weise verbreitert.

2. Die *Linienbreiten* wachsen $\sim \lambda$ an, entsprechend der bekannten Dopplerformel $\Delta \lambda = \frac{v}{c} \lambda$.

3. Die Verhältnisse der Gesamtabsorptionen der Linien sind *unabhängig* von der Verbreiterung. Dies haben O. STRUVE und C. T. ELVEY [1416] an dem Si III-Triplett λ 4553, 4568, 4575 nachgeprüft, dessen Gesamtabsorptionen sich — entsprechend den nach der BURGER-DORGELOSCHEN Regel berechneten Übergangswahrscheinlichkeiten — wie

$$\sqrt{5} : \sqrt{3} : 1 = 2,24 : 1,73 : 1 \quad (80,2)$$

verhalten sollen. Abgesehen von gelegentlichen kleinen Abweichungen, die sich zwanglos auf *Turbulenz* (Abschn. 70) zurückführen lassen [1409], bestätigen die Beobachtungen durchaus das erwartete Verhältnis.

In größerem Umfange sind Bestimmungen der Rotationsgeschwindigkeit $v \sin i$ von C. T. ELVEY [1408] mit Hilfe der Linie λ 4481 ausgeführt worden. CHR. WESTGATE [1418—20] hat dann die Verteilung der *Rotationsgeschwindigkeiten* in Abhängigkeit vom Spektraltyp¹ genauer untersucht. Bei den O- und B-Sternen mißt sie unter dem Komparator die Breite von Mg II 4481 und He 4472, bei den A-Sternen ebenfalls λ 4481 und bei den F-Sternen Sr II 4215.

Die Ergebnisse dieser Messungen lassen sich nun statistisch in folgender Weise weiterverarbeiten: Bezeichnet man mit $W(V) dV$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die *scheinbare* Äquatorialgeschwindigkeit $V = v \sin i$ eines Sternes zwischen V und $V + dV$ liegt, so zeigt die Verteilungsfunktion $W(V)$ für die *frühen Spektraltypen* O—F2 bei kleinen V einen steilen Anstieg, ein Maximum bei $V \approx 60$ km/sek und dann wieder eine Abnahme, so daß Rotationsgeschwindigkeiten > 250 km/sek kaum vorkommen dürften. Bei den *späteren Spektraltypen* F5—M werden die durchschnittlichen Rotationsgeschwindigkeiten rasch kleiner; schon bei G-Sternen ist bis jetzt überhaupt *kein* Fall von Rotationsverbreiterung nachgewiesen. Die kleine Rotationsgeschwindigkeit der Sonne ($v \sim 2$ km/sek) dürfte also kein Ausnahmefall sein.

Aus der Verteilungsfunktion $W(V)$ der *scheinbaren Rotationsgeschwindigkeiten* $v \sin i$ kann man die der *wahren Äquatorialgeschwindigkeiten* v leicht berechnen, wenn man die selbstverständliche Annahme hinzunimmt, daß die *Richtungen* der Rotationsachsen gleichmäßig über die Kugel verteilt sind: Die Wahrscheinlichkeit, daß i zwischen i und $i + di$ liegt, ist dann proportional der Fläche der entsprechenden Kugelzone, also $\sin i di$. Nehmen wir zunächst an, alle Sterne *hätten* dieselbe wahre Rotationsgeschwindigkeit v , so ist die Wahrscheinlichkeit, daß $v \sin i$ zwischen V und $V + dV$ bzw. $v \sin i$ und $v(\sin i + \cos i di)$ liegt, proportional zu $\operatorname{tg} i dV$. Es wird dann also

$$W^*(V) dV = \frac{V}{\sqrt{1-V^2}} \cdot \frac{dV}{v} \quad (\text{für } v = \text{konst.}). \quad (80,3)$$

Analysiert man mit Hilfe dieser Funktion $W^*(V)$ die beobachtete Verteilungsfunktion $W(V)$, so kann man leicht die Verteilung der *wahren Rotations-*

¹ Eine Unterteilung des Beobachtungsmaterials nach absoluten Helligkeiten — etwa an Hand der von der Rotation ja unabhängigen Gesamtabsorptionen der Wasserstofflinien — wäre natürlich sehr zu wünschen.

geschwindigkeiten v ermitteln. CHR. WESTGATE (s. oben) findet z. B. für die B-Sterne

v km/sek	0	—	50	—	100	—	150	—	200	—	250
Häufigkeit	27		53		15		4		1		%

Schließlich sei noch — der Kuriosität wegen — bemerkt, daß die beobachteten Verteilungskurven $W(V)$ ganz leidlich zu dem passen, was man bei extrapolatorischer Anwendung der kinetischen Gastheorie auf die Rotation der Sterne erwarten müßte, nämlich

$$W(V) \sim e^{-\text{konst. } V^2} \cdot V. \tag{80,4}$$

Es wäre aber sicher abwegig, daraus weitere Konsequenzen ziehen zu wollen.

81. Radiale Bewegung von Atmosphären, deren Höhe klein ist im Vergleich zum Radius des Sternes.

Im Hinblick auf die *Pulsationstheorie der Cepheiden* und verwandter Veränderlicher untersuchen wir mit H. SHAPLEY und S. B. NICHOLSON [1413] die Beeinflussung der Linienkonturen sonst „normaler“ Spektren durch Expansion oder Kontraktion des ganzen Sternes.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit eines Punktes der Sternatmosphäre mit v , so ist deren Komponente in der Sehlinie

$$V = -v \cos \vartheta, \tag{81,1}$$

wo der Winkel ϑ die übliche Bedeutung hat. Die entsprechende Dopplerverschiebung ist

$$\Delta \lambda = -\lambda \cdot \frac{v}{c} \cdot \cos \vartheta. \tag{81,2}$$

Die Helligkeitsverteilung auf der Sternscheibe sei für die betrachtete Wellenlänge wieder gegeben durch

$$I_v = \text{konst.} (1 + \beta \cos \vartheta). \tag{81,3}$$

Dann ist die von einer Zone $d\vartheta$ in Richtung auf den Beobachter emittierte Strahlung proportional

$$I_v \cdot \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta. \tag{81,4}$$

Drücken wir hier $d\vartheta$ durch (81,2) aus, und setzen noch

$$\cos \vartheta = -\frac{\Delta \lambda}{\lambda} \cdot \frac{c}{v} = x, \tag{81,5}$$

so wird die Intensitätsverteilung in einer ursprünglich sehr schmalen Linie

$$A(x) = \frac{(1 + \beta x) x}{\frac{1}{2} + \frac{\beta}{3}}. \tag{81,6}$$

Die Normierung ist dabei so gewählt, daß das $\int_0^1 A(x) dx = 1$ wird. Graphische Darstellungen für die Werte $\beta = 0, 3/2$ und ∞ des Randverdunkelungskoeffizienten gibt unsere Fig. 107. Die Verschiebung des *Schwerpunktes* der Linie, gemessen in Einheiten der Verschiebung, die man in der Mitte der Stern-

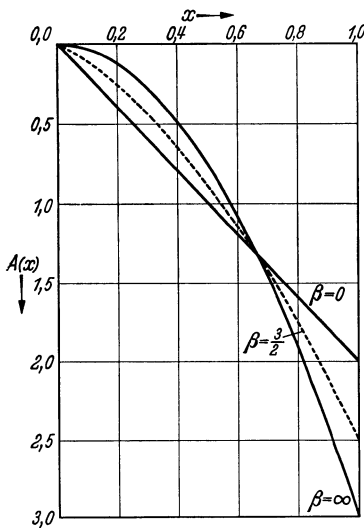


Fig. 107. „Expansionskurve“ $A(x) = \frac{(1 + \beta x) x}{\frac{1}{2} + \frac{\beta}{3}}$ für verschiedene Werte des Randverdunkelungskoeffizienten β .

scheibe beobachten würde, ist

$$\bar{x} = \int_0^1 x \cdot A(x) dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 + \frac{3}{4}\beta}{1 + \frac{2}{3}\beta}, \tag{81,7}$$

also für $\beta = 0, 3/2$ und ∞ bzw. $\bar{x} = 0,667, 0,708$ und $0,750$.

Da für Cepheiden Radialgeschwindigkeiten von günstigenfalls 20 km/sek beobachtet werden, so entspricht bei $\lambda 4500$ die Ausdehnung der Dreiecks-konturen von Fig. 107 etwa $0,4 \text{ \AA}$. Die mit der Pulsation zusammenhängende Unsymmetrie der schwachen Linien dürfte also mit den heutigen Hilfsmitteln eben erfaßbar sein. Beobachtungen liegen noch nicht vor.

Ist die ursprüngliche Breite einer Linie gegenüber der von $A(x)$, d. h. $\lambda \cdot \frac{v}{c}$, nicht zu vernachlässigen, so muß man die beiden Kurven wieder überlagern. Die Asymmetrie der Linien ist dann spektralphotometrisch natürlich noch schlechter zu erfassen. Die Verschiebung ihres Schwerpunktes wird mit genügender Genauigkeit durch (81,7) gegeben.

82. Rotation und Expansion ausgedehnter durchsichtiger Nebelhüllen.

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir die Wirkungen der Rotation und Expansion bzw. Kontraktion auf die Linienkonturen gewöhnlicher Sterne untersucht, deren Atmosphären den Stern nur wie eine dünne Haut umkleiden.

Im Hinblick auf die Deutung der *Emissionsspektren* der *Be-Sterne*, *WOLF-RAYET-Sterne*, *Novae* usw. betrachten wir nun im Gegenteil die Beeinflussung der Linien ausgedehnter und — wie wir annehmen wollen — völlig durchsichtiger Hüllen durch Rotation und Expansion. Auf die viel weitergehenden Probleme der Dynamik und der Leuchterregung solcher Nebelhüllen wollen wir hier nicht eingehen, sondern nur die einfachsten geometrischen Prinzipien klarstellen.

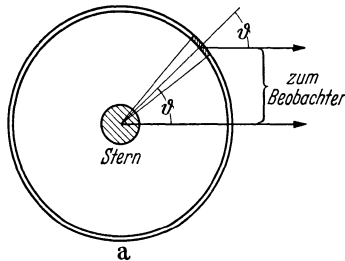


Fig. 108 a. Rand-„Erhellungsgesetz“ $I \sim \frac{1}{\cos \vartheta}$ einer leuchtenden durchsichtigen Kugelschale.

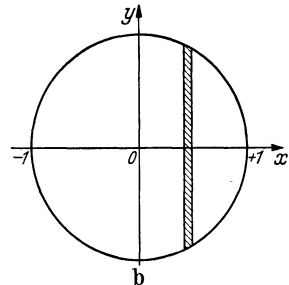


Fig. 108 b. Zustandekommen der Rotationskontur dieser Kugelschale.

1. Rotation einer dünnen Kugelschale ohne Selbstabsorption. Die *Intensität* I_ν der Strahlung, die von der dünnen Kugelschale unter dem Winkel ϑ zur Normale in Richtung auf den Beobachter emittiert wird, ist nach Fig. 108 a proportional der in Richtung der Sehlinie gemessenen Dicke der Schale. Es gilt also das Rand-„Erhellungsgesetz“

$$I_\nu \sim \frac{1}{\cos \vartheta}. \tag{82,1}$$

Wie in Abschn. 77 führen wir nun auf der Projektion der Nebelhülle wieder (Fig. 108 b) die Koordinaten x und y (\perp bzw. \parallel zur Rotationsachse) ein, so daß x mit der entsprechenden Dopplerverschiebung $\Delta\lambda$ nach (77,6 u. 7) verknüpft ist durch

$$\frac{\Delta\lambda}{b} = x \quad \text{mit} \quad b = \frac{\lambda}{c} \cdot v \sin i = \begin{cases} \text{maximale} \\ \text{Verschiebung.} \end{cases} \tag{82,2}$$

Nehmen wir zunächst an, daß der Radius der Nebelhülle erheblich größer ist als der des Sternes, so wird die auf den $\Delta\lambda$ -Bereich $b \cdot x$ bis $b(x + dx)$ fallende Intensität proportional der Emission des entsprechenden Streifens im Nebel, also

$$A(x) = \text{konst.} \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \text{konst.} \left[\arcsin \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} = \text{konst.} \frac{\pi}{2}. \quad (82,3)$$

Die Kontur einer ursprünglich scharfen Linie wird symmetrisch in ein *Rechteck der Halbbreite b* (Fig. 109a) auseinandergezogen.

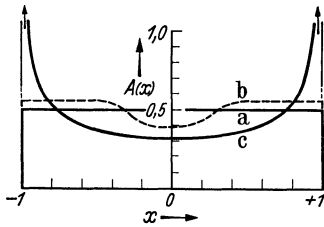


Fig. 109. Rotationskontur einer leuchtenden durchsichtigen Kugelschale. a Ohne Verdunkelungseffekt. b Beginnender Verdunkelungseffekt (qualitativ). c Extremes Verdunkelungseffekt. Gl. (82.4). Alle Kurven normiert auf $\int A(x) dx = 1$.

Ist der Radius des Sternes gegenüber dem der Hülle *nicht* zu vernachlässigen, so erhält — wie man an Hand von Fig. 108a ohne weiteres ersieht — die Rechteckskontur in der *Mitte* eine Einsattelung (Fig. 109b).

Nehmen wir endlich an, daß eine völlig *durchsichtige* dünne Hülle den Stern wie eine Aureole umgibt, so wird die Linienkontur (Fig. 109c) — wie man sich leicht überlegt —

$$A(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}}. \quad (82,4)$$

Kann man die *Dicke* der Nebelhülle gegenüber ihrem Radius nicht mehr vernachlässigen, so wird man sie sich in sinngemäßer Weise aus dünnen Schalen aufgebaut denken und über diese integrieren. Wir behandeln ein derartiges Problem nachher im Zusammenhang mit den Linienkonturen expandierender Hüllen.

2. Expansion einer dünnen Kugelschale ohne Selbstabsorption. Die in einer ringförmigen Zone $d\vartheta$ emittierte Strahlung ist proportional

$$I_v \cdot \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \sim \sin \vartheta d\vartheta = -d(\cos \vartheta). \quad (82,5)$$

Diese Strahlung zeigt eine Dopplerverschiebung

$$\Delta \lambda = -\lambda \cdot \frac{v}{c} \cos \vartheta. \quad (82,6)$$

Schreiben wir wie in Abschn. 81 kurz

$$-\frac{\Delta \lambda}{\lambda} \cdot \frac{c}{v} = \cos \vartheta = x, \quad (82,7)$$

so wird die Intensitätsverteilung in einer ursprünglich scharfen Linie, wie C. S. BEALS [1401] zuerst bemerkte,

$$A(x) = \text{konst.} \quad (-1 \leq x \leq +1). \quad (82,8)$$

Eine expandierende Nebelhülle zeigt also genau wie eine rotierende rechteckige Linienkonturen (Fig. 110a). Man kann also bei einer Nebelhülle¹ ohne Selbstabsorption, deren Ausdehnung groß gegenüber der des Sternes ist, an Hand der Linienkonturen *nicht* zwischen Rotation und Expansion unterscheiden.

Dies wird anders, wenn wir mit S. CHANDRASEKHAR [1406] den „Verdunkelungseffekt“ betrachten: Ist der Radius r des Sternes gegenüber dem Radius R der Hülle nicht zu vernachlässigen, so sehen wir deren rückwärtigen Teil nur bis

$$\sin \vartheta^* = r/R. \quad (82,9)$$

¹ Daß dies nicht nur für dünne, sondern auch für dicke Hüllen gilt, erkennt man sofort durch Überlagerung der $A(x)$.

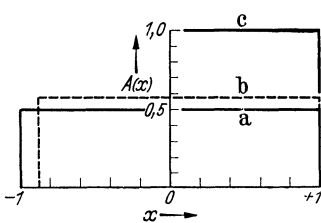


Fig. 110. Expansionskontur einer leuchtenden durchsichtigen Kugelschale. a Ohne Verdunkelungseffekt. b Mit Verdunkelungseffekt für $\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$. c Extremes Verdunkelungseffekt; $r \approx R$.

Die Kontur ist also auf der *langwelligen* Seite bei

$$x^* = -\sqrt{1 - \left(\frac{v}{R}\right)^2} \quad (82,10)$$

abzuschneiden (Fig. 110b u. c), während ihre kurzwellige Hälfte durch den Verdunkelungseffekt auf keinen Fall affiziert wird. In praxi dürfte ein nicht sehr ausgeprägter Verdunkelungseffekt schwer von einer gewöhnlichen Dopplerverschiebung des ganzen Spektrums zu unterscheiden sein.

Führen die Atome der leuchtenden Hülle neben der *Auswärtsbewegung* mit der Geschwindigkeit v (entsprechend $x = 1$) noch unregelmäßige, z. B. thermische oder Turbulenzbewegungen aus, so werden die Ecken der Rechteckkonturen abgerundet: Schwankt z. B. die diesen Bewegungen entsprechende Dopplerverschiebung x (bezogen auf $x = 1$ für die Geschwindigkeit v) um den Mittelwert x_0 nach der Verteilungsfunktion

$$W(x) = e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}, \quad (82,11)$$

so erhält man die Linienkontur durch Überlagerung mit

$$A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq 1 \\ 2 & \text{für } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases} \quad (82,12)$$

zu

$$S(y) = \frac{1}{2} \int_{x=y-1}^{x=y+1} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} dx = \text{konst.} \left\{ \Phi\left(\frac{y+1}{x_0}\right) - \Phi\left(\frac{y-1}{x_0}\right) \right\}, \quad (82,13)$$

wo

$$\Phi(z) = -\Phi(-z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx \quad (82,14)$$

die GAUSSsche Fehlerfunktion bedeutet

Bei den *Novae*, *WOLF-RAYET-Sternen* usw. ist jedoch, wie B. P. GERASIMOVIC [1410] bemerkte, die Abschrägung der Linienkonturen so stark, daß den x_0 Geschwindigkeiten von ~ 350 km/sek entsprechen müßten. So große thermische Geschwindigkeiten erscheinen im Hinblick auf die Temperaturen dieser Sterne nicht möglich und die Existenz derartiger turbulenter Bewegungen ist trotz der geringen Dichte höchst unplausibel.

Man wird daher Konturen mit „abgerundeten Ecken“ in den meisten Fällen besser erklären durch die Annahme einer ausgedehnten Hülle, innerhalb deren die Expansionsgeschwindigkeit v mit dem Radius variiert.

Ohne hier auf die Dynamik solcher Hüllen einzugehen, fragen wir mit O. C. WILSON [1421] zunächst besser: „Was kann man aus den Linienkonturen entnehmen“?

Zunächst sieht man, daß der violette Linienflügel, der von der vorderen Hälfte der Nebelhülle emittiert wird, durch den Verdunkelungseffekt *nicht* beeinflusst wird. Seine Deutung ist daher am übersichtlichsten:

Es sei (diese Begriffsbildung ist das Entscheidende!) für die betrachtete Spektrallinie $I(v)dv$ die gesamte Emission aller Kugelschalen (auf deren Größe kommt es vorerst nicht an!), deren Expansionsgeschwindigkeit in dem Bereich v bis $v + dv$ liegt. Diese Strahlung gibt eine rechteckige Spektrallinie, dessen Halbbreite (in km/sek gemessen) $v = -\frac{d\lambda}{\lambda} \cdot c$ und deren Höhe proportional¹

¹ Die Fläche der Linie muß ja $\sim I(v)$ sein.

$I(v)/v$ ist. Betrachten wir nun die Intensität in einem Abstand V (wieder in km/sek) von der Linienmitte, so superponieren sich dort alle *die* Rechtecke mit den Höhen $I(v)/v$, deren $v \geq V$ ist. Es wird also schließlich die Kontur $K(V)$ der Linie gegeben sein durch

$$K(V) = - \int_{v=V}^{\infty} \frac{I(v)}{v} dv. \quad (82,15)$$

Umgekehrt findet man durch Differentiation der Kontur des violetten Flügels nach V

$$\frac{dK(V)}{dV} = - \frac{I(V)}{V}. \quad (82,16)$$

Man kann also die Funktion $I(v)$ — und nichts weiter — empirisch bestimmen.

Wenn es möglich wäre, in der Kontur des roten Flügels den *Bedeckungseffekt* zu isolieren, so würde man damit wesentlich mehr über die räumliche Struktur der Nebelhülle erfahren. Da dies noch nicht gelungen ist, so verweisen wir bezüglich der eingehenden Durchrechnung verschiedener Fälle auf die erwähnte Arbeit von S. CHANDRASEKHAR [1406]. Der größenordnungsmäßige Zusammenhang zwischen Asymmetrie der Linie und Größenverhältnis Nebel : Stern ist schon aus Fig. 110 zu ersehen.

Fünfter Teil.

Probleme und Anwendungen der quantitativen Theorie der Sternspektren¹.

XV. Kapitel.

Anwendung der Theorie der FRAUNHOFER-Linien.

83. Überblick über die Probleme der Spektralklassifikation und der spektroskopischen Parallaxenbestimmung.

Die *Harvard-Klassifikation* [1508] der Sternspektren ist, wie wir schon in Abschn. 16 bemerkt haben, ursprünglich rein empirischer Natur. Praktisch *angewandt* werden Klassifikationskriterien, die mit kleiner Dispersion möglichst gut zugänglich sind. Diese beruhen teils auf der Schätzung der *Intensität einzelner Linien*, teilweise auch auf der Schätzung von *Intensitätsverhältnissen*. Da aber nicht weiter definiert wird, was unter „Intensität“ zu verstehen ist, so ist das System der Harvard-Klassifikation z. B. von einer Sternwarte auf eine andere nur durch *Aufweisung* zu übertragen, indem man erklärt: „Ein A0-Spektrum sieht aus wie das von Sirius usw.“. Die im HENRY DRAPER Katalog publizierten *Beschreibungen* beziehen sich auf einige eingehender untersuchte helle Sterne; sie haben mehr akzessorischen Charakter und sind für die Klassifikationstätigkeit von untergeordneter Bedeutung.

Die am Mt. Wilson *Observatorium* entwickelten Methoden zur *Bestimmung spektroskopischer Parallaxen* [1501,5] bzw. absoluter Helligkeiten sind ursprünglich ähnlicher Natur: Unter Zuhilfenahme von Sternen mit bekannter absoluter Helligkeit werden spektrale Kriterien gesucht, die bei konstantem Spektraltyp die absolute Helligkeit erkennen lassen. Im Hinblick auf die Erreichung möglichst großer Genauigkeit wird noch gefordert, daß diese Kriterien bei Änderung des Spektraltyps sich nur langsam verschieben. Die Schätzung des „Intensitätsverhältnisses“ benachbarter Bogen- und Funkenlinien von ähnlicher Stärke² erfüllt alle diese Bedingungen ausgezeichnet.

Bleiben wir zunächst auf der an Harvard und Mt. Wilson geschaffenen Basis, so können wir zusammenfassend feststellen:

Zwei voneinander unabhängige spektrale Kriterien (Absolutintensität oder Intensitätsverhältnis in irgendeiner Skala) bestimmen *Spektraltyp* (Sp.) und absolute Helligkeit (*M*). *Wie* man die Kriterien wählt, ist *im Prinzip* gleichgültig. Es ist z. B. durchaus nicht notwendig, daß das eine Kriterium annähernd die Sterntemperatur, das andere die absolute Helligkeit gibt. Vielmehr kommt unserem zweidimensionalen Schema (RUSSELL-Diagramm!) folgender Sinn zu:

¹ Im Hinblick auf das während der Ausarbeitung des Manuskriptes erschienene Buch von S. ROSSELAND: *Theoretical Astrophysics* (Oxford 1936) habe ich die dort besonders eingehend behandelten Probleme der *Bandenspektren* und der *Theorie des Nebelleuchtens* ganz beiseite gelassen.

² Eine Zusammenstellung der 1935 noch angewandten Kriterien vgl. [1505; S. 188]. Ausserdem [1503; S. 25].

Das *Spektrum einer ruhenden Sternatmosphäre bestimmter Zusammensetzung* ist, wie wir in den vorhergehenden Kapiteln sahen, bestimmt durch die *effektive Temperatur* T_e (σT_e^4 ist dann per def. die gesamte Ausstrahlung pro cm^2 und sek) und die *Schwerebeschleunigung* g an der Sternoberfläche. Da durch T_e und g auch die für Ionisation und Anregung maßgebende *mittlere Temperatur* T der Atmosphäre (soweit dieser Begriff überhaupt einen Sinn hat) bestimmt ist, so können wir statt T_e mit einiger Einschränkung auch T oder die Farbtemperatur T_F benützen.

Jedem spektralen Kriterium entspricht eine *Kurvenschar* in der T_e, g -Ebene (provisorisches Beispiel vgl. Fig. 29). Der Schnitt zweier Kurven verschiedener Scharen¹ fixiert beide Parameter.

Wenn wir noch einmal — in anderer Weise — die Voraussetzung machen, daß alle Sterne dieselbe Zusammensetzung haben und daß die Energiebilanz eines Sternes *nur* von seinem momentanen Zustand bestimmt wird, so besteht nach EDDINGTON (Abschn. 20) eine Beziehung zwischen Masse μ , absoluter Helligkeit M und effektiver Temperatur T_e bzw. Radius R eines Sternes. Mit T_e und $g \sim \frac{\mu}{R^2}$ ist also auch M gegeben und man kann — was vom praktischen Standpunkt aus anschaulicher ist — statt der T_e, g -Ebene eine T_e, M -Ebene benützen.

Inwieweit — dies wollen wir nachträglich noch überlegen — ist aber die im vorhergehenden gemachte Voraussetzung der Konstanz der chemischen Zusammensetzung aller Sterne für die Richtigkeit unserer Überlegungen und damit die Anwendbarkeit der spektroskopischen Parallaxenmethode wirklich *notwendig*? Das heißt, welches Minimum an Voraussetzungen ist erforderlich, um die Möglichkeit einer Bestimmung absoluter Sternhelligkeiten mit Hilfe spektraler Kriterien zu gewährleisten? Man sieht sofort, daß der qualitative Charakter der funktionalen Zusammenhänge erhalten bleibt, wenn die Zusammensetzung eines Sternes *eindeutig* durch T_e und M , d. h. seine Stellung im RUSSELL-Diagramm, festgelegt ist. Dann werden nämlich auch g und weiterhin alle spektralen Kriterien immer noch *eindeutig* durch T_e und M bestimmt sein. Solche Variationen der Zusammensetzung würden sich also bei der an Mt. WILSON angewandten Methode der spektroskopischen Parallaxenbestimmung *nicht* bemerkbar machen; sie würden vielmehr erst bei quantitativem Vergleich von *Theorie* und *Beobachtung* in Erscheinung treten. Nur wenn zwei Sterne mit *gleichem* T_e und *verschiedener* Zusammensetzung hätten, so würde sich dies in einem Unterschied von „spektroskopischer“ und „geometrischer“ Parallaxe zeigen.

84. Ansätze zur Verbesserung und Erweiterung des zweidimensionalen Klassifikationsschemas.

In neuerer Zeit sind zahlreiche Versuche veröffentlicht worden, das im vorhergehenden betrachtete Schema zu verbessern und erweitern. Wir nennen vor allem die Untersuchungen von O. STRUVE und seinen Mitarbeitern P. RUDNICK, W. W. MORGAN und J. A. HYNEK an Yerkes, E. G. WILLIAMS an Mt. Wilson, sowie C. H. PAYNE u. a. an Harvard (vgl. Literaturverzeichnis). Wenn es auch nicht möglich ist, diese Ansätze heute schon auf einen Generalnenner zu bringen, so möchten wir doch versuchen, hier auf eine *Klärung der Grundgedanken* hinzuarbeiten.

¹ Wie man sieht, liegt es im Interesse der Genauigkeit, daß die zwei Kurvenscharen sich unter einem möglichst steilen Winkel schneiden. Sonst ist ihre Lage in der T_e, g - oder T_e, M -Ebene belanglos. Diese Einsicht erspart viele unnötige Diskussionen.

1. Bedeutung quantitativer Beobachtungen. Ein gemeinsamer Zug der neueren Entwicklung (SCHWARZSCHILD, SHAPLEY u. a.) liegt in der Ersetzung der *geschätzten Linienintensitäten* und -intensitätsverhältnisse durch *gemessene Gesamtabsorptionen* bzw. — soweit erfaßbar — Linienkonturen. Der Vorteil des quantitativen Verfahrens liegt *nicht* so sehr — wie man zunächst denken möchte — in der Erhöhung der *Genauigkeit*¹, sondern in seiner *Reproduzierbarkeit*. Man wird unabhängig von der Beschaffenheit der Spektren und des Spektrographen und erhält die Möglichkeit, Messungen verschiedener Institute direkt miteinander zu vergleichen. Das Wichtigste aber ist: *Nur quantitative Beobachtungen können mit der Theorie in Verbindung gebracht werden.* Der rapide Aufschwung der Sternspektroskopie in den letzten Jahren ist ein genügender Beweis für die Fruchtbarkeit und Notwendigkeit dieser Vereinigung.

Andererseits möchten wir aber auch davor warnen, über das Ziel hinauszuschießen: Für stellarstatistische Zwecke usw. dürfte die Harvard-Klassifikation noch auf lange hin ausreichen und gerade ihr empirisch-praktischer Ursprung gibt ihr hier ein Übergewicht über neuere Methoden. Man wird also in dem immer wieder auftretenden Klassifikationsstreit am besten folgenden Standpunkt einnehmen (dies gilt auch für das Folgende): Für „normale“ Zwecke *Beibehaltung* und evtl. vorsichtige Erweiterung des Alten. *Daneben* versuche man für eine *Auswahl heller Sterne*, für die *alle* wesentlichen Daten (insbesondere Parallaxe!), bestimmbar sind, von rein prinzipiellen physikalischen Gesichtspunkten geleitet ein *rationelles Schema* zu entwickeln. Die Untersuchung der Beziehungen beider Systeme möge man vorerst als *cura posterior* betrachten.

2. Eindeutigkeit. Von praktischem Standpunkt aus betrachtet erhält die Klassifikation² erhöhte Sicherheit durch gleichzeitige Verwendung *mehrerer* Kriterien. Andererseits entsteht dabei die Möglichkeit einer *Mehrdeutigkeit*, indem genauere Messungen zeigen könnten, daß die verschiedenen Kriterien doch nicht *genau* parallel gehen. (Insbesondere ist zu bedenken, daß im Beobachtungsmaterial vielfach schon eine statistische Korrelation von Spektraltyp und absoluter Helligkeit besteht, so daß unter Umständen gar nicht ohne weiteres zu erkennen ist, wie irgendein Kriterium sich bei Änderung von T_e oder M *allein* verhalten würde.) In praxi wird man einen dem Instrumentarium angepaßten *Kompromiß* schließen, wobei die Theorie wertvolle Beratung geben kann. Der unter 1. angebrachte Vorschlag hat auch von diesem Gesichtspunkt aus betrachtet viel für sich.

3. Erweiterungen des zweidimensionalen Klassifikationsschemas. Neuere Untersuchungen haben mit immer größerer Deutlichkeit gezeigt, daß zwei Parameter nicht ausreichen, um die Gesamtheit der Sternspektren in eindeutiger Weise zu ordnen. Ihrer physikalischen Natur nach wenigstens in groben Umrissen bekannt sind folgende Effekte:

a) *Interstellare Absorptionslinien* (insbesondere Ca+K und NaD) und *Verfärbung durch interstellare Wolken* (Colour excess). Beide Effekte haben mit dem Stern selbst zwar nichts zu tun, sind aber doch wegen ihres Zusammenhanges mit der Parallaxe bzw. absoluten Helligkeit (und allerdings auch den galaktischen Koordinaten) von Bedeutung. So weist z. B. E. G. WILLIAMS [1536] in seiner Reklassifikation der B-Sterne der Intensität der interstellaren K-Linie eine dominierende Stellung zu. Ehe man diesem Schritt zustimmt, wird man

¹ Vergleicht man z. B. die von W. S. ADAMS [1503] geschätzten Intensitätsverhältnisse von Parallaxen-Linienpaaren mit den entsprechenden *Gesamtabsorptionsmessungen* von J. A. HYNEK [1511], so sieht man, daß die ersteren für die *praktische* Bestimmung absoluter Helligkeiten zur Zeit noch überlegen sind.

² Hier und im folgenden in erweitertem Sinne als Festlegung einer Kurvenschar in der T_e , g -Ebene zu verstehen.

eingehendere Untersuchungen über die Abhängigkeit der interstellaren Linien von Richtung und Entfernung abwarten.

Die oft wiederholte Behauptung, daß es — *abgesehen* von der Verfärbung durch interstellare Wolken und der Emission von Nebelhüllen (Be) — Sterne gebe, die sich *nur* durch die Intensitätsverteilung im kontinuierlichen Spektrum unterscheiden, während alle sonstigen spektralen Kriterien dieselben seien, kann Verf. nicht als bewiesen betrachten. Sorgfältige Beobachtungen zu dem Problem der „gelben B-Sterne“ sind unbedingt erforderlich.

b) *Rotation*. Die in Kap. XIV dargestellten Untersuchungen von O. STRUVE und seinen Mitarbeitern lassen keinen Zweifel darüber, daß das häufige Vorkommen verwaschener Linien (*n* und *nn* in der üblichen Bezeichnung) bei den Spektraltypen O—F auf *Rotation* zurückzuführen ist.

Die Bedeutung der Rotation für die Spektralklassifizierung hat dann J. A. HYNEK [1512] genauer untersucht.

Er zeigt zunächst, daß der Zusammenhang zwischen der Intensitätsverteilung im kontinuierlichen Spektrum (Farbenindex) und der Gesamtabsorption der Linien für *n*- und *s*-Sterne, d. h. für rotierende und nicht rotierende Sterne *derselbe* ist und beweist damit, daß die Rotation im allgemeinen keinen nachweisbaren Einfluß auf den Aufbau der Sternatmosphären hat. Dies ist auch leicht verständlich: Wenn im *Mittel* über der ganzen Sternoberfläche die Zentrifugalkraft einen erheblichen Bruchteil der Schwerebeschleunigung kompensieren soll, so muß am *Äquator* die Fliehkraft schon so groß sein, daß Instabilität einsetzt und Material abgeschleudert wird. O. STRUVE nimmt an, daß solche Nebelhüllen oder -ringe die Emission der Be-Sterne verursachen. Man sieht jedenfalls, daß der Übergang von unmerklich kleinem Einfluß der Rotation zu völliger Umstellung des Spektrums ein sehr plötzlicher sein muß und braucht sich daher nicht zu wundern, daß die *n*-Sterne ohne Emission hinsichtlich der *Gesamtabsorption* ihrer Linien nicht von den normalen Spektren zu unterscheiden sind.

Eine Spektralklassifikation, die auf *Gesamtabsorptionen* basiert, wird also die Rotation der Sterne einfach *ignorieren* und in erster Linie den inneren Aufbau der Sternatmosphären beschreiben. HYNEK zeigt [1512], daß bei der DRAPER-Klassifikation (Harvard) tatsächlich für jeden Spektraltyp die Gesamtabsorption der Linien von der Rotationsverbreiterung *unabhängig* ist. Für die an Mt. Wilson ausgeführten Klassifikationen dagegen trifft dies — trotzdem ihr Plan sich auf das engste an Harvard anschließt — *nicht* zu. Sterne mit bestimmten Gesamtabsorptionen, die an *Harvard* unabhängig von Rotation, z. B. als F0 klassifiziert sind, gelten an Mt. Wilson zwar ebenfalls als F0, wenn sie nicht rotieren, dagegen als durchschnittlich A5,6, wenn sie rasch rotieren! Der Grund dieses Unterschiedes dürfte in folgendem zu suchen sein: Die DRAPER-Klassifikation ist mit so kleiner Dispersion ausgeführt, daß auch bei starken Linien nur die *Gesamtabsorption* zur Geltung kommt, während die *Linienkonturen* rein instrumenteller Herkunft sind. MT. WILSON dagegen arbeitet mit Spaltspektrographen größerer Dispersion: In einem rotierenden Stern erscheinen daher die Metalllinien geringer Intensität *schwächer*, als dies ihrer Gesamtabsorption entspricht; der Stern wird daher in der Spektralsequenz vorverschoben.

Da es im Einzelfalle dem Zufall überlassen bleibt, welcher Bruchteil $v \cdot \sin i$ der Rotationsgeschwindigkeit eines Sternes spektroskopisch in Erscheinung tritt, so wird man selbstverständlich einer Klassifikation den Vorzug geben, deren Hauptkriterien von der Rotation nicht beeinflusst werden.

c) *Turbulenz*. Eine Klasse von peculiar spectra, bei denen die schwachen und starken Linien zunächst nicht zusammenzupassen schienen, kann, wie

wir mit O. STRUVE und C. T. ELVEY in Abschn. 70 sahen, auf „Turbulenz“ zurückgeführt werden. Mit Hilfe der *Wachstumskurve* kann die Zuordnung¹ von normalen und turbulenten Sternen folgendermaßen getroffen werden: Wir wissen, daß die Gesamtabsorption der ganz schwachen Linien und ebenso die der ganz starken durch Vergrößerung des Dopplereffektes nicht beeinflußt werden. Nur der *flache* Teil der Wachstumskurve wird gehoben. Daß in der Harvard-Klassifikation turbulente Sterne in gleicher Weise wie rotierende vielfach mit dem Präfix *n* versehen werden, ist — vom heutigen Standpunkt aus gesehen — unrationell, doch ist es natürlich bis zu einem gewissen Grade Geschmackssache, ob eine Klassifikation nur das direkte Aussehen der Spektren, oder auch ihre Bedeutung (soweit sie bekannt ist) beschreiben soll.

Für das vorgeschlagene „Mustersystem“ möchte Verf. den letzteren Standpunkt befürworten, während für die Klassifikationsarbeit im großen der erstere manches für sich hat.

Im Zusammenhang mit dem Klassifikationsproblem wäre es wichtig zu wissen, ob die Turbulenz mit anderen Parametern verknüpft ist. Soviel bis jetzt zu erkennen ist, tritt Turbulenz zwar vorzugsweise bei Riesensternen der frühen Typen auf; ob sie aber mit Spektraltyp und absoluter Helligkeit *eindeutig* verknüpft ist, läßt sich noch nicht sagen.

d) *Emissionslinien*. Die überwiegende Mehrzahl der *p*-Spektren der Harvard-Klassifikation verdankt ihr Präfix dem *Auftreten heller Linien*. Da wir uns mit deren Theorie nicht beschäftigt haben, so wollen wir diesen Gegenstand noch zurückstellen.

e) *Notwendigkeit weiterer Parameter? Unterschiede in der Zusammensetzung der Sterne?* Das Resultat von a) bis d) können wir folgendermaßen zusammenfassen: Wenn wir Sterne mit Emissionslinien vorerst beiseitelassen, so wird der Zustand einer Sternatmosphäre vollständig beschrieben durch Angabe von *Spektraltyp*, *absoluter Helligkeit* und Stärke der *Turbulenz*, wobei noch die Möglichkeit offen bleibt, daß der letztere Parameter sich schließlich doch noch als eine Funktion der beiden anderen herausstellt. Das Aussehen der Spektren wird weiterhin noch mitbestimmt von *Rotation* und *interstellarer Absorption*.

Wir fragen mit O. STRUVE [1530]: „Reichen diese Parameter vollständig aus, um die Sternspektren zu ordnen?“ Nach genauer Überprüfung der B0—F0-Spektren finden O. STRUVE [1530] und W. W. MORGAN [1516] u. a., daß diese Frage wahrscheinlich zu *verneinen* ist². Trotzdem eine physikalische Analyse der nach Berücksichtigung der eingangs genannten Effekte übrigbleibenden „Reste“ noch aussteht, so übersehen wir doch schon folgendes: Wenn nicht irgendwelche uns noch völlig unbekannte Effekte am Werk sind, so müssen wir schließen, daß die *Zusammensetzung der Sterne nicht eindeutig durch T_e und g bzw. Spektraltyp und absolute Helligkeit festgelegt ist*. Eine gesetzmäßige Variation der Zusammensetzung der Sterne mit ihrer Stellung im RUSSELL-Diagramm würde — wie wir sahen — im Zusammenhang mit dem Klassifikationsproblem gar nicht in Erscheinung treten, sondern nur beim Vergleich von Beobachtung und *Theorie* zu entdecken sein. Wenn die obige Vermutung richtig ist, so würde dies also heißen, daß der Aufbau eines Sternes nicht nur von seinen *Zustandsgrößen* Masse und Leuchtkraft, sondern auch von seiner *Vorgeschichte* abhängt.

Vielleicht gehört in diesen Zusammenhang auch die Teilung der Spektralsequenz bei den *kühlen Sternen* in den *M-Zweig* (Sauerstoffsterne) und *R-N-Zweig*

¹ Die weitere Frage, wie der innere Aufbau der Sternatmosphären durch die Turbulenz beeinflußt wird, muß dabei allerdings noch offen gelassen werden.

² Bezüglich Einzelheiten müssen wir uns mit einem Hinweis auf die Originalarbeiten begnügen.

(Kohlenstoffsterne) — vgl. H. N. RUSSELL [1526] — sowie bei den WOLF-RAYET-Sternen in „Kohlenstoff“- und „Stickstoffsterne“. Unterschiede im Häufigkeitsverhältnis Wasserstoff: Metalle, die im Hinblick auf die Energieerzeugung im Inneren der Sterne besonderes Interesse verdienen, sollten am besten etwa bei A5 erkennbar sein, wo die kontinuierliche Absorption des Wasserstoffes ihre Vorherrschaft an die Metalle abtritt.

Hinsichtlich der klassifikationsmäßigen Kennzeichnung von Effekten, die zur Zeit noch sehr unvollkommen verstanden werden, wird man — wie dies auch meist geschieht — sich zunächst an die direkten *Beobachtungstatsachen* halten, ohne damit eine Zuhilfenahme theoretischer Einsicht von vornherein abzulehnen¹.

85. Übergang vom Sp , M -System² zum T_e , g -System. Die Skala der Sterntemperaturen.

Während wir im vorhergehenden Abschnitt das — man möchte sagen — topologische Problem der Ordnung der Sternspektren in den Vordergrund stellten, wollen wir jetzt wieder (der Einfachheit wegen) von Feinheiten, die über das zweidimensionale Klassifikationsschema hinausgehen, absehen und dafür dieses vom quantitativen Standpunkt aus betrachten.

Das *Ideal* wäre, aus zwei spektralen Kriterien direkt T_e und g zu *berechnen* und dann mit Hilfe der Masse-Leuchtkraft-Beziehung evtl. die absolute Helligkeit M zu finden. Aber von diesem Ziel sind wir noch sehr weit entfernt und müssen uns hier in der Hauptsache damit begnügen, die Annäherungsmöglichkeiten auszukundschaften.

1. In Kap. III haben wir provisorisch angenommen, daß die *Farbtemperatur* T_F und die *effektive Temperatur* T_e der Sterne einander *gleich* sind. Unter Zugrundelegung der (schon vom experimentellen Standpunkt aus recht unsicheren) üblichen Skala der Farbtemperaturen berechneten wir so die Diagramme, Fig. 29, 33 u. 34, welche die Beziehungen zwischen den Zustandsgrößen der Sterne vorläufig herstellen sollten.

2. Eine Möglichkeit zur Verbesserung dieses Vorgehens scheint zunächst darin zu liegen, daß man mit Hilfe der Theorie des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten die Beziehung zwischen T_F und T_e (evtl. geht auch die absolute Helligkeit noch ein wenig ein) berechnet (vgl. Fig. 54) und damit die Farbtemperaturen in effektive Temperaturen überführt. Aber selbst abgesehen davon, daß oberhalb 10000° die Skala der Farbtemperaturen sehr unsicher wird, setzt dieser Vorschlag voraus, daß man die zur Berechnung von $\kappa/\bar{\kappa}$ nötige Kenntnis der Zusammensetzung der Sterne bereits besitzt. Was wir aber aus Fig. 54 entnehmen dürfen, ist, daß T_F und T_e sich nie sehr weit voneinander entfernen und daß für $T_F \geq 7500^\circ$ höchstwahrscheinlich $T_F \geq T_e$ ist. Infolgedessen dürfte es legitim sein, bei der Untersuchung nicht zu großer Temperaturdifferenzen ΔT_e diese in der üblichen Weise durch ΔT_F zu ersetzen.

3. Offenbar bleibt also, um den Übergang vom Sp , M -System zum T_e , g -System zu bewerkstelligen, nichts anderes übrig, als *Beobachtung und Theorie als Ganzes miteinander zu vergleichen und die Ausgangsannahmen der letzteren sukzessive zu verbessern*. Als theoretische Basis kommen dabei in erster Linie die Untersuchungen von E. A. MILNE [1514], H. N. RUSSELL [1525], A. UNSÖLD [1533] und A. PANNEKOEK [1518] in Frage, die wir zum Teil schon kritisch gewürdigt haben.

Man wird versuchen, die angenommene mittlere Zusammensetzung der Sternatmosphären zu korrigieren mit Hilfe von Kriterien, die in der Hauptsache von

¹ Vgl. H. N. RUSSELL, C. H. PAYNE-GAPOSCHKIN und D. H. MENZEL [1527].

² Sp = Spektraltyp; M = absolute Helligkeit.

dieser abhängen, von der absoluten Helligkeit und der Temperaturskala dagegen nur wenig beeinflußt werden. Umgekehrt wird man die Temperaturskala ermitteln mit Hilfe von Kriterien, die in erster Linie temperaturabhängig sind (s. B. *steile Maxima* von Linien) usw.

Die Durchführung eines solchen Programms wird sehr erschwert dadurch, daß nach Kap. XIII der Zusammenhang zwischen der *Gesamtabsorption* einer Linie und der Konzentration des betreffenden Atomzustandes in der Sternatmosphäre oder der „Anzahl der absorbierenden Atome“ NH ein sehr verwickelter ist. Qualitative Intensitätsschätzungen erlauben daher in den meisten Fällen gar keine Schlüsse und auch die Deutung von *Maxima* ist — sofern sie nicht sehr scharf ausgeprägt sind — viel vorsichtiger zu handhaben, als dies meist geschieht. Sogenannte „empirische“ Methoden — dies gilt ziemlich allgemein — setzen meist implizite irgendeine unzulängliche „Theorie“ (besser gesagt Spekulation) voraus.

Einige Beispiele mögen die Mehrdeutigkeit in der Interpretation qualitativer Beobachtungen veranschaulichen:

a) Beobachtet man, daß die Intensität einer Linie in einem bestimmten Bereich der Spektralsequenz sich wenig ändert, so kann dies daher rühren, daß NH nahezu konstant ist. Oder aber es liegt ihre Gesamtabsorption A_λ gerade im flachen Teil der Wachstumskurve. Eine *Messung* von A_λ gibt sofort die Entscheidung zwischen beiden Möglichkeiten.

b) Wenn eine Linie beim Übergang von Riesen- zu Zwergsternen derselben Temperatur¹ keine Änderung zeigt (sog. „Nulleffekt“), so kann dies sogar dreierlei Ursachen haben:

α) Die Änderung in der Ionisation und Anregung des betreffenden Atomzustandes wird gerade kompensiert durch die Änderung der wirksamen Dicke der Atmosphäre \overline{NH} in Fig. 83, so daß NH konstant bleibt. Der Mechanismus der Linienentstehung soll druckunabhängig sein.

β) NH nimmt mit wachsendem Druck ab, aber die Linienverbreiterung erfolgt durch Stoßdämpfung. Die Gesamtabsorption starker Linien ist dann durch $NH\gamma$ bedingt; die Abnahme von NH kann also durch die Zunahme von γ kompensiert werden. Dasselbe gilt natürlich für Druckeffekt (Beispiel: BALMER-Linien zwischen A und F).

γ) Die Gesamtabsorption liegt im flachen Teil der Wachstumskurve.

Während die Entscheidung zwischen γ) und den beiden anderen Möglichkeiten an Hand von *Messungen* keine Schwierigkeit bietet, ist die Trennung von α) und β) nicht leicht. Das Sicherste dürfte die Heranziehung ganz schwacher Linien sein, deren Gesamtabsorption durch die Dämpfungskonstante γ nicht mehr beeinflußt wird. Solche Messungen können aber nur mit allergrößten Spektrographen ausgeführt werden. Anders dürfte nur unter Zuhilfenahme nicht explizit geprüfter theoretischer Ansätze weiterzukommen sein.

Um für die Durchrechnung spezieller Probleme im folgenden Abschnitt schon eine Unterlage zu haben, wollen wir die besprochenen Schwierigkeiten erst umgehen und auf die Kenntnis der kontinuierlichen Absorption an der Grenze der BALMER-Serie λ 3647 zurückgreifen (Fig. 53, Abschn. 36²):

Aus der *Größe* des maximalen Intensitätssprunges $\Delta \log F_\nu = 0,5_2$ (bei A_2) schließen wir nach Fig. 53 a u. b, daß die relativen Beiträge des Wasserstoffes und der Metalle zum kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten (mit unseren Ansätzen für letztere) richtig werden, wenn wir $H:M \approx 50:1$ setzen. Nach der

¹ *Praktisch* kann man vielfach dafür setzen: desselben Spektraltyps.

² Vgl. auch die dort noch nicht berücksichtigte Arbeit [1303].

Lage des maximalen Intensitätssprunges und der Maximalintensität der BALMER-Linien in der Spektralsequenz müssen wir dann einem A2-Stern eine effektive Temperatur von $\sim 8800 \pm 1000^\circ \text{K}$ zusprechen. Für die frühen Typen läßt sich die effektive Temperatur größenordnungsmäßig durch Vergleich von Fig. 53 a u. b finden. Man erhält für B5 $14000^\circ \pm 2500$ und für B1 $23000^\circ \pm 4000$. Auf der anderen Seite liegt wenigstens die effektive Temperatur der Sonne (dG0) mit 5740° ziemlich sicher fest. Vergleicht man unsere — freilich noch sehr rohe — Skala der effektiven Temperaturen mit der *Farbtemperaturskala* von Tabelle 11, so erhält man den Eindruck, daß die in Fig. 54 dargestellte theoretische Beziehung zwischen T_e und T_F wenigstens qualitativ einigermaßen das Richtige trifft. In quantitativer Hinsicht dürften die *berechneten* Differenzen $|T_F - T_e|$ durchweg zu groß sein. Solange wir keine größere Genauigkeit erreichen können, dürfte es nach wie vor für viele Zwecke ausreichen, Farbtemperatur, effektive Temperatur und mittlere Temperatur der Sterne als ungefähr gleich zu betrachten. Es ist jedoch zu erwarten, daß in nicht allzuferner Zeit die direkte spektroskopische Festlegung der *Skala der effektiven Temperaturen* eine viel größere Genauigkeit erreichen wird, als die Skala der Farbtemperaturen. Ein nicht zu unterschätzender Vorteil des ersteren Verfahrens ist — nebenbei bemerkt — seine Unabhängigkeit von der selektiven Absorption interstellarer Wolken.

Die Bedeutung spektralphotometrischer Messungen in den kontinuierlichen Sternspektren, d. h. die Bestimmung von Farbtemperaturen wird jedoch durch vorstehende Überlegungen in keiner Weise verringert: Sie bilden einen der wichtigsten Prüfsteine für die Theorie des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten.

Nachdem wir so die Temperaturskala in groben Zügen festgelegt haben, müssen wir noch kurz auf die *Temperaturunterschiede von Riesen- und Zwergsternen* eingehen: Ihre zahlenmäßige Bestimmung erfolgt auch heute noch wohl am besten, indem man $T_e \approx T_F$ setzt und spektralphotometrische Messungen oder nötigenfalls Farbenindizes heranzieht. Vgl. W. BECKER [302] und B. STICKER [330/1], sowie unsere Tabelle 11 und Fig. 29.

Einer *Berechnung* der Beziehung zwischen T_e und g bzw. M für konstanten Spektraltyp steht zunächst die prinzipielle Schwierigkeit im Wege, daß die für die Festlegung der Harvardtypen verwandten Kriterien quantitativ gar nicht faßbar sind. Selbst wenn dieser Mangel behoben wäre — wozu die in Abschn. 84 schon erwähnten Untersuchungen von E. G. WILLIAMS, J. A. HYNEK u. a. wertvolle Ansätze geben — so blieben doch noch die unter 2. genannten Schwierigkeiten. Wir müssen also — ohne auf die in der Literatur verbreiteten Scheinlösungen des Problems einzugehen — uns mit einer qualitativen Übersicht begnügen:

Bei den *späteren Spektraltypen* (F0—M) nimmt die Temperatur mit wachsender absoluter Helligkeit (abnehmendem Druck in der Atmosphäre) *ab*. Die Klassifikationskriterien für diese Sterne involvieren also offenbar irgendwelche *Ionisationsvorgänge*. Im einzelnen bedarf das Problem dringend genauerer Untersuchung.

Bei den *frühen Spektraltypen* (B0—A5) erscheinen im Gegenteil die Riesensterne heißer als die Zwergsterne. Dies dürfte zum Teil damit zusammenhängen, daß bei Farbenindexmessungen das kurzwellige Spektralgebiet durch die breiten Wasserstofflinien der Zwergsterne geschwächt wird, während dieser Effekt bei den Riesen viel schwächer ist. (Leider fehlen spektralphotometrische Messungen von ausreichender Genauigkeit.) Was nach Abzug dieses Scheineffektes übrigbleibt, ist nicht bekannt und es erscheint müßig, darüber unsichere Spekulationen anzustellen.

86. Beobachtung und Theorie: Diskussion spezieller Linien.

Trotzdem unser Verständnis der Linienspektren der Sterne — wie gesagt — noch sehr unvollkommen ist, wollen wir einige Linien genauer durchrechnen in der Hoffnung, dabei Anregungen für weitere Verbesserungen zu finden.

1. Die K-Linie CaII λ 3933 und die g-Linie CaI λ 4227. In Fig. 83 u. 84 (und den entsprechenden Tabellen) haben wir die *Gesamtzahl aller Atome über 1 cm^2 der Sternoberfläche \overline{NH}* und den *Elektronendruck P_e (Bar)* in Abhängigkeit von der *mittleren Temperatur T* der Sternatmosphären bzw. $\Theta = \frac{5040}{T}$ und der Schwerebeschleunigung g (cm sek^{-2}) berechnet. Die Zusammensetzung der

Atmosphären hatten wir dabei nach Tabelle 20 (Kap. IV) angenommen. Wiederum nach dieser Tabelle nehmen wir — vorbehaltlich späterer Korrektur — an, daß auf 1470 Atome insgesamt jeweils 2,1 Ca-Atome kommen. Nach der SAHASchen Gleichung kann man nun leicht berechnen, welcher Bruchteil des Kalziums einfach ionisiert bzw. neutral ist (die 2. Ionisation muß dabei selbstverständlich berücksichtigt werden!) und erhält so die *Anzahl der Ca^+ bzw. Ca-Atome* (im Grundzustand) über 1 cm^2 der Sternoberfläche. Das Ergebnis dieser Rechnung zeigt Fig. 111. Die gestrichelten Linien deuten den *Riesen- und Zwergstern* an (nach H. N. RUSSELL; vgl. auch Fig. 34).

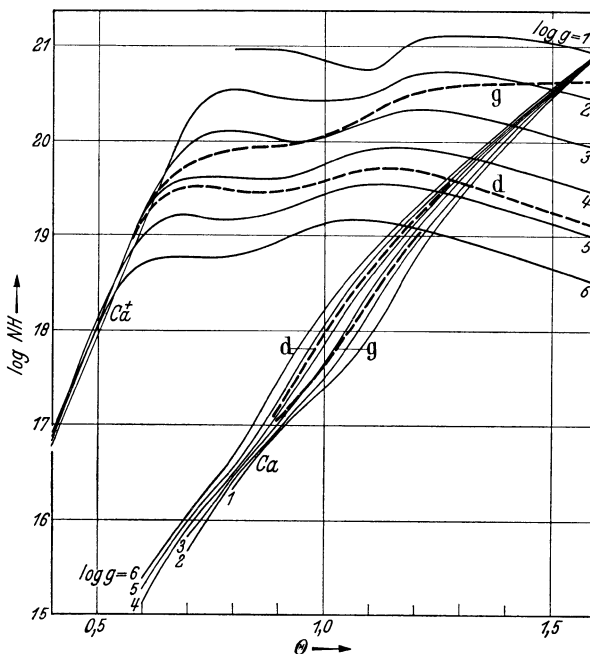


Fig. 111. Anzahl der Ca^+ und Ca-Atome im Grundzustand; als Funktion von $\Theta = \frac{5040}{T}$ und g berechnet für $\epsilon = 2,1\%$.

Ähnliche Berechnungen mit anderen Ausgangsannahmen, insbesondere wesentlich größerer Wasserstoffhäufigkeit haben H. N. RUSSELL [1525] und A. PANNEKOEK [1518] ausgeführt. In groben Zügen geben diese dasselbe Bild. Nur nach den hohen Temperaturen zu ist der Abfall der $\log NH$ wesentlich rascher: Er wird ja zum großen Teil dadurch verursacht, daß bei $\Theta \sim 0,5$ die kontinuierliche Absorption des Wasserstoffes die der Metalle überflügelt.

Die Abhängigkeit der NH von g bzw. dem damit engstens verknüpften P_e läßt sich anschaulich leicht verstehen: Wenn das die *Linie* erzeugende Atom oder Ion durch die Ionisation in *ähnlicher* Weise erfaßt wird, wie das Gros der Atomzustände, welche die kontinuierliche Absorption für die betreffende Wellenlänge geben, so erhält man *keinen* g -Effekt¹ („Nulleffekt“ nach MILNE). Ein Beispiel gibt Ca^+ für $\Theta < 0,6$: die Ionisierungsspannung von Ca^+ mit 11,8 V liegt nahe bei der des Wasserstoffes mit 13,5 V. Daß Ca bei *hohen* Temperaturen

¹ Wir sprechen hier (N.B.!) durchweg von den Änderungen der NH ; deren Zusammenhang mit den Gesamtabsorptionen s. u.

fast keinen *g*-Effekt zeigt, hat denselben Grund. Bei niedrigen Temperaturen liegt der Mittelwert der Ionisierungsspannungen der Metalle — nach Tabelle 20 $\chi = 5,8$ bzw. $7,9$ V — nahe bei $\chi_{\text{Ca}} = 6,1$ V. Bei $\Theta \approx 1$ bleibt ein kleiner Resteffekt übrig. Einen sehr ausgeprägten *g*-Effekt sollte dagegen CaII bei $\Theta > 0,7$ zeigen: Mit abnehmendem Druck wird hier Ca^+ begünstigt, die kontinuierliche Absorption der neutralen Metalle dagegen geschwächt. Wie man sieht, stehen unsere Voraussagen qualitativer Art auf einer recht sicheren Basis; ihre quantitative Seite dagegen ist in mannigfacher Weise an die Ausgangsannahmen der Theorie des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten geknüpft und bedarf sicher noch einer späteren Revision.

Nunmehr betrachten wir das entsprechende *Beobachtungsmaterial*:

Die *Gesamtabsorptionen* A_λ der Linien *K* $\lambda 3933$ und *g* $\lambda 4227$ sind von E. G. WILLIAMS [1534] für 26 Riesen- und Zwergsterne der Spektraltypen

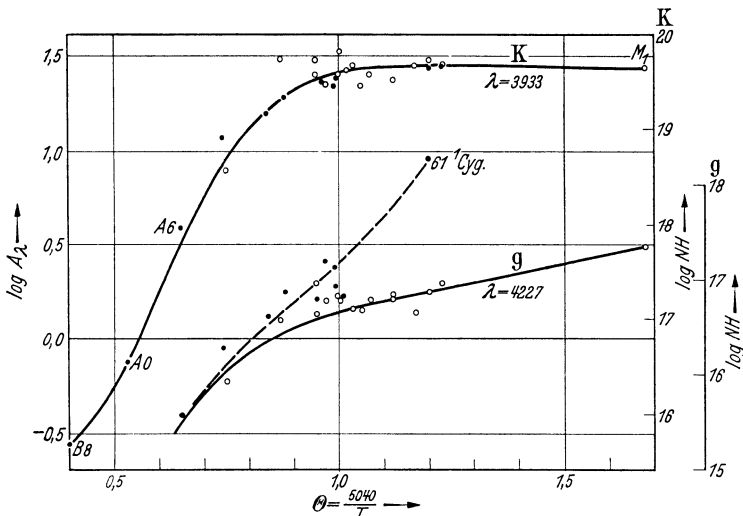


Fig. 112. Gemessene Gesamtabsorption A_λ der Linien $\text{Ca}^+\text{K } \lambda 3933$ und $\text{Ca } \lambda 4227$. Nach E. G. WILLIAMS [1534] u. a.
 • Hauptsequenz ($\log g > 3,5$). ○ Riesensterne ($\log g < 3,5$). Die rechten Skalen geben die unter *Annahme reiner Strahlungsdämpfung* aus A_λ berechneten $\log NH$.

A6—M1 gemessen worden. Wir haben in Fig. 112 die $\log A_\lambda$ aufgetragen. Dabei wurden nach WILLIAMS' Tabelle 1 die Spektraltypen unter Berücksichtigung der absoluten Helligkeiten in der üblichen Weise in Temperaturen umgerechnet. Die Temperaturskala dürfte also im großen und ganzen richtig sein, im einzelnen dagegen können wohl Korrekturen der Größenordnung $\Delta \Theta \sim 0,1$ erforderlich werden. Riesensterne und c-Sterne mit $\log g < 3,5$ (vgl. WILLIAMS Tabelle 1) sind mit ○, Sterne der Hauptsequenz mit $\log g > 3,5$ durch • bezeichnet. Für die schwachen *K*-Linien der Typen B8—A5 haben wir Mittelwerte aus den Messungen von Miss WILLIAMS [1368] sowie O. STRUVE und C. D. HIGGS [1529] eingetragen. Die Genauigkeit ist hier nicht groß. Die rechts in Fig. 112 angezeichneten Skalen geben die aus A_λ unter der *Annahme reiner Strahlungsdämpfung* berechneten Atomzahlen $\log NH$ (vgl. Tabelle 49 und Gl. (69,16)).

Ältere Beobachtungen an Harvard, die C. H. PAYNE [1520, S. 269] zusammengefaßt hat, lassen im großen und ganzen dasselbe Bild erkennen.

Die Intensität der *K*-Linie ist nach den Beobachtungen von WILLIAMS von $\Theta = 0,9$ bis $1,6$ (F5—M) nahezu konstant¹ und im Gegensatz zu dem, was man nach Fig. 111 zunächst erwarten möchte, auch fast *unabhängig von g*.

¹ Die Harvardbeobachtungen geben nach G5—K0 wieder eine geringe Abnahme.

Dieses Verhalten können wir nur erklären, wenn wir eine Verbreiterungsursache annehmen, die in den Zwergsternen wesentlich *stärker* wirkt, als in den Riesensternen, mit anderen Worten *Stoßdämpfung*. Da die Theorie der Stoßdämpfung für ionisierte Atome noch nicht genügend entwickelt ist, so sind wir bezüglich der genaueren Kenntnis des Mechanismus auf empirische Schlüsse angewiesen. Betrachten wir daher inzwischen die *K*-Linie der frühen Spektraltypen. Die $\log A_\lambda$ nehmen nach den Beobachtungen mit steigender Temperatur offenbar etwas *rascher* ab, als nach Fig. 111 bei Annahme konstanter Dämpfung zu erwarten ist. Eine *mäßige Erhöhung* des Beitrages des Wasserstoffes zum kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten — etwa in dem schon aus anderem Anlasse vorgeschlagenen Maße — würde hier eine Verbesserung geben.

Die RUSSELLSchen Rechnungen (s. S. 140) scheinen jedoch dem Verf. in dieser Beziehung weit über das Ziel hinauszuschießen. Nach RUSSELLS Figuren *beginnt* die Abnahme der Intensität der *K*-Linie erst beim Maximum der Wasserstofflinien und der Linie Mg II 4481, was mit den Beobachtungen sicher nicht verträglich ist.

Eine merkliche *Erhöhung* der A_λ bei den frühen Spektraltypen durch Druckeffekt kann man kaum annehmen, ohne gleichzeitig eine mit anderen Beobachtungen unverträgliche Häufigkeit des Wasserstoffes zu postulieren.

Die plausibelste Deutung der Beobachtungen dürfte also in der Annahme liegen, daß Stoßdämpfung durch Gasatome der ausschlaggebende Faktor ist: Der *Gasdruck* P_g ist nämlich bei den roten Zwergsternen am höchsten, wie man aus Tabelle 22 in Verbindung mit Fig. 84 leicht abliest.

Die angenommene *Häufigkeit* des Kalziums ($\varepsilon = 2,1\%$ der Metalle) scheint, wenn wir uns darauf verlassen dürfen, daß die *K*-Linie in den Riesensternen der mittleren Spektraltypen tatsächlich durch Strahlungsdämpfung verbreitert wird, jedenfalls *größenordnungsmäßig* richtig zu sein ($\Delta \log \varepsilon \sim \pm 0,5$).

Nunmehr versuchen wir, die Messungen der *g*-Linie Ca I λ 4227 mit der Theorie in Zusammenhang zu bringen:

Aus Abschn. 71, Gl. (71,4 u. 18) wissen wir, daß auf der *Sonne* für diese Linie die Stoßdämpfung durch Elektronen und Ionen etwa das 10-fache der Strahlungsdämpfung beträgt. Die berechnete Gesamtabsorption der *g*-Linie für die Sonne wird damit etwa 3mal zu groß. Wir werden später mit H. N. RUSSELL [1524] noch andere Argumente dafür finden, daß offenbar unser berechneter *Elektronendruck* $P_e \approx 50$ Bar zu hoch ist, wahrscheinlich um einen Faktor ~ 5 . Das Ionisationsgleichgewicht sollte also etwa in diesem Verhältnis zuungunsten der neutralen Atome verschoben werden. Ob die tiefere Ursache der bemerkten Unstimmigkeit in der Berechnung des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten oder in der angenommenen Zusammensetzung der Sternatmosphären zu suchen ist, läßt sich noch nicht sagen. (Beiläufig bemerkt, scheinen RUSSELLS Rechnungen [1525] auf dieselbe Schwierigkeit zu stoßen.)

Bei den späteren Spektraltypen zeigt die *g*-Linie (vgl. 61¹Cyg; K6) einen zunächst unerwarteten *g*-Effekt. Nach den Beobachtungen B. LINDBLADS [1322] an *M*-Zwergen haben wir es wahrscheinlich mit *Eigendruck-Verbreiterung* zu tun, die schließlich in eine regelrechte Ca_2 -Bandenabsorption übergeht (vgl. Abschn. 71,3). Ob *daneben* auch noch andere Druckeffekte von Bedeutung sind, ist zur Zeit noch nicht zu übersehen. Bei den roten Riesensternen hat man den Eindruck, daß wieder der berechnete Ionisationsgrad zu klein bzw. der berechnete Elektronendruck zu groß ist. Da hier die *Gesamtzahl* der $\text{Ca} + \text{Ca}^+$ -Atome über 1 cm^2 ungefähr richtig herauskommt, so dürften P_g und \bar{n} ziemlich richtig sein. Eine Änderung von P_e , die P_g und \bar{n} wenig beeinflußt, wäre vielleicht durch passende Abänderung der Zusammensetzung (leicht ionisierbare Elemente!) zu erreichen. Möglicherweise muß aber auch bei $\Theta > 1,3$ nach H. N. RUSSELL [1526] die Molekülbildung berücksichtigt werden.

Wenden wir uns schließlich noch dem anderen Ende der Spektralsequenz zu, so bemerken wir, daß hier die relative Abnahme der Intensität der g -Linie ziemlich richtig herauskommt. Der g -Effekt dürfte hier zum Teil auf Stoßdämpfung durch Elektronen, zum Teil auf wirklicher Änderung der NH beruhen.

2. Die NaD-Linien λ 5890/6. Als zweites Beispiel betrachten wir die D -Linien, die A. D. THACKERAY [1532] in den Spektraltypen B8—M gemessen hat.

Aus \overline{NH} , $\Theta = \frac{5040}{T}$ und P_e berechnen wir zunächst die Anzahl der Na-Atome im Grundzustand über 1 cm^2 der Sternoberflächen. Die Häufigkeit des Natriums entnehmen wir — natürlich vorbehaltlich späterer Korrektur — der Tabelle 20 zu $\varepsilon = 1,1\%$ der Metalle. Streng genommen müßten wir noch berücksichtigen, daß \overline{NH} und P_e von Fig. 83 u. 84 sich auf die Spektralgegend λ 4000 beziehen, während wir jetzt bei λ 5900 arbeiten. Die Korrektur ist aber so gering, daß wir sie vernachlässigen dürfen.

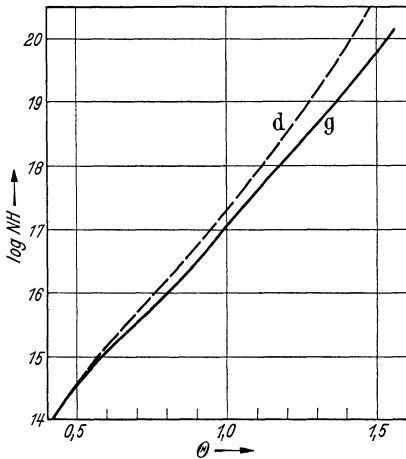


Fig. 113. Anzahl der Na-Atome im Grundzustand als Funktion der Temperatur berechnet für Riesen- und Zwergsterne (mit $\varepsilon = 1,1\%$).

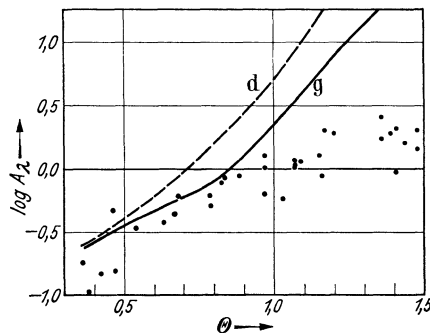


Fig. 114. Gesamtabsorption A_λ der D_2 -Linie. Berechnet für Riesen- und Zwergsterne — bzw. — Beobachtungen von A. D. THACKERAY [1532] (für $\Theta > 1,0$ nur Riesensterne).

Das Ergebnis dieser Rechnung zeigt Fig. 113. Man vergleiche sie mit den entsprechenden Kurven für Ca: In den groben Zügen bemerkt man weitgehende Ähnlichkeit; der g -Effekt bei niederen Temperaturen ist bei Na viel ausgeprägter, da die 2. Ionisation wegfällt ($\chi_1 = 47 \text{ V}$!).

Mit Hilfe der NH -Werte berechnen wir nun die Gesamtabsorption: Für hohe Temperaturen ($\Theta < 0,5$) liegen die D -Linien, wie schon THACKERAY (s. oben) bemerkt hat, im flachen Teil der Wachstumskurve. Damit wird ohne weiteres verständlich, daß sich die Linien in der Spektralsequenz so lange verfolgen lassen.

Bei $\Theta \sim 0,6$ kommen wir in den Dämpfungsbereich; es gilt also Gl. (69,16) oder $A_\lambda \sim \sqrt{NHf} \cdot \gamma$. Für die D -Linien können wir die Stoßdämpfung mit einiger Sicherheit berechnen. Vernachlässigen wir die minimale Temperaturabhängigkeit der Dämpfungskonstante, so geben nach Kap. XIII, Abschn. 71 die Stöße der Elektronen einen Beitrag $\gamma_{\text{el.}} \sim 2,2 \cdot 10^6 \cdot P_e$ und die der Gasatome (hauptsächlich H) einen Beitrag¹ $\gamma_{\text{at.}} \sim 2,4 \cdot 10^4 P_g$ neben der Strahlungsdämpfung $\gamma_{\text{str.}} = 0,63 \cdot 10^8 \text{ sek}^{-1}$. Die folgende Tabelle zeigt, daß in den Zwergsternen bei hohen Temperaturen die Elektronen, bei niederen die H-Atome den Ausschlag geben. Bei den Riesensternen dagegen geht die Stoßdämpfung durch Elektronen mit abnehmender Temperatur in reine Strahlungsdämpfung über.

¹ Die Gasdrucke P_g berechnet man aus P_e und Θ nach Tabelle 22.

Das Endergebnis (alle Zwischenstufen mitzuteilen, würde zu weit führen) der Berechnung der *Gesamtabsorption* A_λ für die D_2 -Linie¹ λ 5890 vergleichen wir nun in Fig. 114 mit THACKERAYs Messungen. (Eine Unterteilung des Beobachtungsmaterials in Riesen- und Zwergsterne erschien nicht zweckmäßig, da für $\Theta > 1,0$ praktisch *nur Riesen* beobachtet sind.)

Daß Beobachtung und Theorie bei *hohen* Temperaturen gut übereinstimmen, besagt in unserem Falle so gut wie *nichts*: A_λ liegt in der Größenordnung $\sim 5 \Delta\lambda_D$ und ist daher von NH nahezu unabhängig.

Bei niedrigen Temperaturen sind die berechneten A_λ erheblich zu groß. Wir stoßen hier wieder auf das schon bei Ca 4227 bemerkte Phänomen und erklären es wieder wohl am besten durch die Annahme, daß die berechneten Elektronendrucke für die roten Riesensterne *zu groß* sind.

Über den g -Effekt der Gesamtabsorption der D -Linien bei niederen Temperaturen liegen noch kaum Beobachtungen vor. Doch möge bemerkt sein, daß SHANE

[1528] in N-Sternen Linienbreiten von $\sim 100 \text{ \AA}$ beobachtet hat. Die Theorie dürfte also in dieser Beziehung qualitativ das Richtige treffen. Bei roten Zwergen ist übrigens ähnlich wie bei Ca auch Eigendruckverbreiterung bzw. Bandenbildung möglich.

Zusammenfassend können wir feststellen, daß schon die Diskussion der Resonanzlinien von CaI und II eine Menge Anregungen für den weiteren Ausbau der Theorie gibt. Um aber wirklich sicheren Grund zu bekommen, muß man Beobachtungen an möglichst verschiedenartigen Linien heranziehen. Wenn auch das Beobachtungsmaterial zur Zeit noch sehr spärlich ist, so dürfte doch schon zu erkennen sein, daß wir so und nur so zu einem wirklichen Verständnis der Sternspektren vordringen *werden*.

Tabelle 65. Berechnung der Dämpfungs-konstante γ (alles in 10^8 sek^{-1}) der D -Linien für Zwerg- und Riesensterne verschiedener Temperaturen.

$\Theta = \frac{5040}{T}$		0,6	1,0	1,4
Zwergsterne	Strahlung	0,63	0,63	0,63
	Elektronen	4,34	0,87	0,33
	Gas (H)	0,48	1,08	6,76
	γ	5,45	2,58	7,72
Riesensterne	Strahlung	0,63	0,63	0,63
	Elektronen	2,77	0,15	—
	Gas (H)	0,24	0,10	—
	γ	3,64	0,88	0,63

87. Empirische Bestimmung von T , P_e und \overline{NH} als Funktion von Spektraltyp und absoluter Helligkeit.

Man möchte zunächst hoffen, die im vorhergehenden Abschnitt aufgetretenen Schwierigkeiten zum Teil umgehen zu können, indem man sich vorerst damit begnügt, die mittlere Temperatur T und den mittleren Elektronendruck P_e (sowie evtl. die Anzahl aller Atome \overline{NH} über 1 cm^2) in Abhängigkeit vom Spektraltyp und absoluter Helligkeit zu bestimmen. Die Umrechnung dieser Variablen in T_e und g bliebe dann eine Cura posterior.

Ein solches Verfahren haben seinerzeit W. S. ADAMS und H. N. RUSSELL [1506] eingeschlagen. Wenn auch ihre *Ergebnisse* heute nicht mehr akzeptiert werden können, da es nicht statthaft ist², für alle Linien und alle Stern-temperaturen *dieselbe* Eichkurve zur Umrechnung der Gesamtabsorptionen (oder geschätzten ROWLAND-Intensitäten) in NHf zu benutzen, so verdient dieser Versuch doch Beachtung. Die Hauptschwierigkeit macht natürlich auch hier

¹ D_1 würde natürlich nahezu dasselbe Verhalten zeigen.

² Vgl. hierzu insbesondere den folgenden Abschnitt.

die Bestimmung der *Dämpfungskonstanten*, soweit sie vom Elektronendruck oder Gasdruck abhängen. Vom rein theoretischen Standpunkt aus das Sicherste wäre, nur so schwache Linien zu benützen, daß die Kenntnis von γ unwesentlich wird. Aber dieser Vorschlag dürfte in experimenteller Hinsicht fast undurchführbar sein. So muß man also wohl oder übel eine Art von sukzessivem Näherungsverfahren einschlagen und wird damit in vieler Hinsicht wieder weitgehend auf den Standpunkt des Abschn. 86 zurückgeführt.

88. Quantitative Analyse der Sonnenatmosphäre.

Während wir bis jetzt jeweils die Intensität *einer* bestimmten FRAUNHOFER-Linie durch die Spektralsequenz verfolgt haben, wollen wir nunmehr sehen, was sich durch Heranziehung aller verfügbaren Linien über Aufbau und Zusammensetzung *einer* bestimmten Sternatmosphäre ermitteln läßt.

Zuvor aber sei noch erwähnt, daß schon im Jahre 1925 C. H. PAYNE [1519] einen ersten Versuch zur *quantitativen Bestimmung der Zusammensetzung der Sternatmosphären* unternommen hat. Er beruht — wie schon in Abschn. 23 kurz ausgeführt wurde — auf der Annahme, daß das *erste Auftreten* oder das *Verschwinden* der Hauptlinien eines Elementes in der Harvardsequenz — selbstverständlich immer mit demselben Instrument beobachtet — stets bei einer *bestimmten Grenzkonzentration* des betreffenden Atomzustandes erfolge. Unterschiede in der wirksamen Schichtdicke der Atmosphären und in den Übergangswahrscheinlichkeiten usw. der Linien werden also *nicht* berücksichtigt.

Aus der Konzentration eines bestimmten Atomzustandes (von dem aus die Absorption der betrachteten Linien erfolgt) kann man nach den Formeln von BOLTZMANN und SAHA (Kap. IV) leicht auf die Konzentration der betreffenden Atomart selbst zurückschließen, wenn man den Elektronendruck P_e und die mittlere Temperatur T kennt. Für P_e benützt C. H. PAYNE den FOWLER-MILNESCHEN Mittelwert von ~ 132 Bar. Die Temperaturskala wird — ausgehend von der spektralphotometrischen für die kühleren Sterne — in der Hauptsache mit Hilfe der Linienmaxima aufgebaut, so daß schließlich Fehler in P_e und T sich weitgehend kompensieren dürften. Die Ergebnisse C. H. PAYNES sind in Tabelle 66 mit aufgenommen.

Im Jahre 1929 hat dann H. N. RUSSELL [1524] im Anschluß an die kurz vorher beendete *Revision of ROWLANDS Preliminary Table of Solar Spektrum Wave-Lengths* des Mt. WILSON Observatory [1522] das Problem der *quantitativen Analyse der Sonnenatmosphäre* in großzügiger Weise in Angriff genommen.

Zunächst eine qualitative Übersicht (größenteils im Anschluß an St. JOHN [1522]): Von den 79 Elementen, deren Spektren im Laboratorium ausreichend untersucht sind, sind im Sonnenspektrum

		Nachgewiesen durch:
		22 nur Bogenspektrum
Sicher vorhanden: 49	{	18 Bogen- und Funkenspektrum
		7 nur Funkenspektrum
		2 Bandenspektren
Zweifelhaft: 9		
Nicht vorhanden 21		

Die letzteren zerfallen ziemlich eindeutig in zwei Gruppen:

1. Bei den *leichteren Elementen* (hauptsächlich die Nichtmetalle bis $Z = 54$, Xe) erfordern die im zugänglichen Spektralgebiet liegenden Linien eine zu hohe *Anregungsspannung*. Wie wichtig dieser Faktor ist¹, geht daraus hervor, daß — ohne die BALMER-Serie — im ganzen Sonnenspektrum unter etwa 6000

¹ Bei 5040°K entspricht 1 V gerade einer Zehnerpotenz im Anregungsfaktor $e^{-\frac{x_{r,s}}{kT}}$.

Linien nur 41 mit einer Anregungsspannung $\chi_{r,s} > 5$ V vorkommen. Abgesehen von *einer* Ausnahme (Si 5948) hat keine dieser Linien eine ROWLAND-Intensität $> 2!$

2. Bei den im Sonnenspektrum nicht vertretenen *schwereren Elementen* fehlt großenteils dieser „Entschuldigungsgrund“. In Übereinstimmung mit der terrestrischen Erfahrung muß man annehmen, daß diese Stoffe (wie Au, Hg, Ra u. a.) sehr *selten* sind.

An diese qualitativen Betrachtungen anknüpfend versucht nun H. N. RUSSELL die quantitative Zusammensetzung der Sonne zu ermitteln. Wir beschreiben zunächst sein Verfahren und beleuchten erst nachher einige fragliche Punkte vom Standpunkte der Theorie aus.

Mit Hilfe seiner *Eichkurve* [1340], deren Entstehung wir schon am Anfang von Abschn. 69 betrachtet haben, rechnet RUSSELL zunächst die geschätzten ROWLAND-Intensitäten der FRAUNHOFER-Linien in „wirksame Atomzahlen“ um. Es handelt sich dabei — wie erinnerlich — nur um *Relativ-Zahlen* und zwar wählt RUSSELL als Einheit die Anzahl wirksamer Atome, die eine Linie der ROWLAND-Intensität 0 erzeugen.

Die *Summe* aller solcher Atomzahlen, die sich auf einen bestimmten *unteren* Term beziehen, wird — unter Berufung auf den KUHNSchen *f*-Sommensatz — betrachtet als die *Zahl der Atome in diesem Quantenzustand*.

Mit Hilfe der BOLTZMANN-Formel (21,12) kann weiterhin für mehrere Elemente die Anzahl der Atome im neutralen bzw. ionisierten Zustand berechnet werden, wenn man die mittlere Temperatur T der Sonnenatmosphäre als bekannt voraussetzt. Für große Ionisierungsspannungen wird eine kleine empirische Korrektur angebracht, die dem schon erwähnten ADAMS-RUSSELL-Phänomen Rechnung tragen soll¹.

Aus dem Verhältnis n_1/n_0 , das für die Elemente Ca, Sc, Ti, Sr und Yt bestimmt werden kann, erhält man nach der SAHASchen Gleichung (21,14) — wieder bei bekanntem T — leicht vollends den mittleren Elektronendruck P_e der Sonnenatmosphäre. In mancher Hinsicht ist es zweckmäßiger, an Stelle von T und P_e das sog. „*Ionisationsniveau*“ $\bar{\chi}$ anzugeben, d. h. diejenige Ionisationsspannung, für welche das Verhältnis ionisierte/neutrale Atome² gleich 1 wird. Es ist also nach (22,5)

$$\chi \cdot \frac{5040}{T} = \frac{5}{2} \log T - 0,48 - \log P_e \quad (88,1)$$

und die SAHASche Gleichung nimmt die einfache Form an

$$\log \frac{n_{r+1}}{n_r} = (\bar{\chi} - \chi_r) \cdot \frac{5040}{T} + \log \frac{u_{r+1} \cdot 2}{u_r}, \quad (88,2)$$

wobei das letzte Glied meist vernachlässigt werden kann.

So findet H. N. RUSSELL für

$$T = 5040^\circ \text{ K} \dots \bar{\chi} = 8,3 \text{ V} \quad \text{und} \quad P_e = 3,1 \text{ Bar} \quad (88,3)$$

oder mit dem heute wahrscheinlichsten Wert

$$T = 5600^\circ \text{ K} \dots \bar{\chi} = 8,48 \text{ V} \quad \text{und} \quad P_e = 18 \text{ Bar} \quad (88,4)$$

Während P_e mit dem Ausgangswert von T ziemlich stark variiert, bleibt $\bar{\chi}$ sehr stabil.

Mit Hilfe von $\bar{\chi}$ und — darauf kommt es nun nicht mehr so genau an — T läßt sich nach den Formeln von BOLTZMANN und SAHA — wie wir dies in Kap. IV zur Genüge exerziert haben — die *Gesamthäufigkeit* aller Atome berechnen, die

¹ Rechnet man mit $T = 5040^\circ$, so werden die Anregungsspannungen $\chi_{r,s}$ um $0,15 \cdot \chi_{r,s}$ verringert; für $T = 5740^\circ$ ist die Korrektur nur noch $0,05 \cdot \chi_{r,s}$.

² Genauer gesagt, pro Quantenzelle.

im Sonnenspektrum vertreten sind. Das Ergebnis zeigt Tabelle 66 und die RUSSELLs Arbeit entnommene Fig. 115.

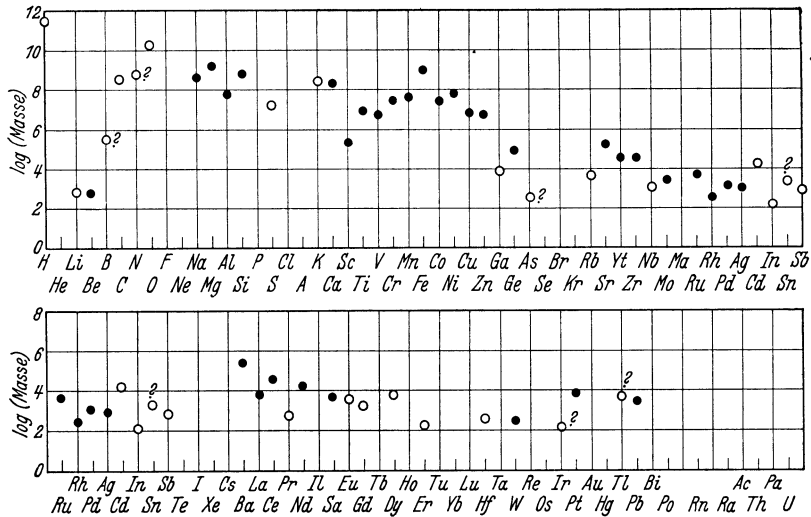


Fig. 115. Häufigkeit der Elemente auf der Sonne nach H. N. RUSSELL [1524]. Ordinaten: \log_{10} der Masse über 1 cm² der Sonnenoberfläche in RUSSELLs Einheiten (s. Text). Abszissen: Ordnungszahl im periodischen System.

Tabelle 66. Kosmische Häufigkeit der Elemente. Spalte 2—4: log der Atomzahlen (in RUSSELLs Einheit). Die Zahlen von PAYNE und MENZEL sind durch Addition passender Konstanten mit denen von RUSSELL vergleichbar gemacht. Spalte 5: log der Häufigkeit nach MASSE (Spalte 3 \times Atomgewicht).

Element	\log_{10} (Atomzahlen)			\log_{10} (Masse) RUSSELL (Sonne)	Element	\log_{10} (Atomzahlen)			\log_{10} (Masse) RUSSELL (Sonne)
	PAYNE (Sterne)	RUSSELL (Sonne)	MENZEL (Chromo- sphäre)			PAYNE (Sterne)	RUSSELL (Sonne)	MENZEL (Chromo- sphäre)	
H	12,9	11,5::	13,6	11,5	Yt		2,6	3,5	4,5
He	10,2				Zr		2,5	3,1	4,5
Li	1,9	2,0:		2,8	Cb		1,0:		3,0
Be		1,8		2,8	Mo		1,4		3,4
C	6,4	7,4:		8,5	Ru		1,7		3,7
N		7,6?		8,7	Rh		0,5		2,5
O	8,0	9,0:		10,2	Pd		1,1		3,1
Na	7,1	7,2	7,2	8,6	Ag		1,0		3,0
Mg	7,5	7,8	7,4	9,2	Cd		2,2:		4,2
Al	6,9	6,4	6,2	7,8	In		0,0:		2,1
Si	7,5	7,3	5,7	8,8	Sn		1,2		3,3
S		5,7:		7,2	Sb		0,8:		2,9
K	5,3	6,8:		8,4	Ba	3,0	3,3	3,1	5,4
Ca	6,7	6,7	6,6	8,3	La		1,8	3,0	3,9
Sc	6,0	3,6	3,8	5,3	Ce		2,4	3,5	4,6
Ti	6,0	5,2	5,7	6,9	Pr		0,6:	2,5	2,8
V	4,9	5,0	5,6	6,7	Nd		2,0	3,2	4,2
Cr	5,8	5,7	6,1	7,4	Sa		1,5	2,6	3,7
Mn	6,5	5,9	6,4	7,6	Eu		1,4:	3,1	3,6
Fe	6,7	7,2	7,0	9,0	Gd		1,1:	2,6	3,3
Co		5,6	5,0	7,4	Dy		1,6:	2,4	3,8
Ni		6,0	6,0	7,8	Er		0,1:		2,3
Cu		5,0		6,8	Hf		0,4		2,6
Zn	6,1	4,9	4,3	6,7	W		0,2		2,5
Ga		2,0:		3,8	Ir		—0,2?		2,1
Ge		3,0		4,9	Pt		1,6		3,9
As		0,6?		2,5	Tl		1,4?		3,7
Rb		1,7:		3,6	Pb		1,2		3,5
Sr	3,5	3,3	3,1	5,2					

Ohne auf die Besonderheiten einzelner Elemente (besonders Wasserstoff!) eingehen zu wollen, unterbrechen wir einen Augenblick, um die Berechtigung des RUSSELLSchen Verfahrens kritisch zu beleuchten:

Nach Abschn. 69 ist es nicht möglich, *eine* einheitliche Eich- oder Wachstumskurve anzugeben. Vielmehr hängt deren Form bei den mittelstarken Linien (ROWLAND 0—5) von der Dopplerbreite $\Delta\lambda_D$ bzw. dem Atomgewicht und bei den stärkeren Linien (ROWLAND >5) von der Dämpfungskonstante γ der Linien ab.

Was RUSSELL also — bis auf den offen gebliebenen Einheitenfaktor — bestimmt, ist bei den *schwachen* Linien in unseren Bezeichnungen NHf .

Bei den *mittelstarken* Linien ($A_\lambda \approx 3,7 \Delta\lambda_D$) gehen, wie man an Hand der theoretischen Wachstumskurve (Fig. 85) sieht, $\Delta\lambda_D$ und γ in ziemlich verwickelter Weise in das Resultat ein. In diesem flachen Teil der Eichkurve verursacht ein Faktor 2 im Atomgewicht (z. B. Si—Fe) bzw. $\sqrt{2}$ in $\Delta\lambda_D$ schon ein $\Delta \log NHf \sim 0,5$.

Bei den *starken* Linien endlich bestimmt RUSSELL in Wirklichkeit $NHf \cdot \frac{\gamma}{\bar{\gamma}}$, wo $\bar{\gamma}$ eine *mittlere Dämpfungskonstante* bedeutet.

Über die Annahme *einer* mittleren Dämpfungskonstante $\bar{\gamma}$ wird man heute — nach Entdeckung der Stoßdämpfung in den Sternatmosphären — günstiger denken, als zur Zeit der Entstehung von RUSSELLS Untersuchung. Denn die hochliegenden Terme mit *schwacher Strahlungsdämpfung* sind im Durchschnitt besonders starkeffektempfindlich und zeigen daher *starke Stoßdämpfung*, während bei den tiefliegenden Termen die Verhältnisse gerade umgekehrt liegen. Es besteht also eine Art „Stabilisierungstendenz“ der gesamten Dämpfungskonstante. Trotzdem dürften die γ mindestens um einen Faktor 10 streuen.

Schließlich hat RUSSELL noch nicht beachtet, daß im f -Summensatz auch die *Emissions-Oszillatorenstärken* für die erlaubten *und* die vom PAULI-Prinzip verbotenen Übergänge nach den tieferen Termen zu berücksichtigen sind. Dieser letztere Fehler dürfte jedoch durch die unvermeidliche Unvollständigkeit der empirisch gebildeten Liniensummen weitgehend kompensiert werden.

Alles in allem darf man — wie wir einer verbreiteten, allzu optimistischen Einstellung gegenüber betonen müssen — die Unsicherheit der RUSSELLSchen Häufigkeitslogarithmen auf etwa ± 1 einschätzen.

Nun zur Frage der *absoluten* Festlegung der NH -Werte, d. h. der Bestimmung des bis hierher noch offengelassenen Einheitenfaktors $N_0 = NHf$ einer Linie der ROWLAND-Intensität Null!

H. N. RUSSELL (s. S. 344) greift zurück auf die vom Verf. [1357] aus *Linienkonturenmessungen* unter der Annahme *reiner Strahlungsdämpfung* bestimmten NHf -Werte (im wesentlichen Tabelle 49). Durch Vergleich mit seinen Zahlen (Tabelle 65) erhält er

$$\log N_0 = 12,67 \pm 0,10. \quad (88,5)$$

Inzwischen haben wir aber gelernt, daß auch die starken FRAUNHOFER-Linien höchstwahrscheinlich durch *Stoßdämpfung* beeinflußt werden. Wie MINNAERT und MULDER nachträglich erkannten, weist der Abstand des linearen vom $\sqrt{\quad}$ -Zweig der RUSSELLSchen Eichkurve auf eine mittlere Dämpfungskonstante von etwa dem 10-fachen des klassischen Wertes. Da die vom Verfasser gemessenen Linien alle auf dem $\sqrt{\quad}$ -Zweig liegen und die dortigen NHf also richtiger als $NHf \cdot \frac{\gamma}{\gamma_{kl}}$ zu betrachten sind, so muß man — sofern es überhaupt

zulässig ist, mit *einer* mittleren Dämpfungskonstante zu operieren — den N_0 -Wert um einen Faktor ~ 10 verringern. Wir rechnen also provisorisch mit

$$\log N_0 \approx 11,8. \quad (88,6)$$

Damit ergibt sich die *Gesamtzahl der Metallatome* über 1 cm² der Sonnenoberfläche zu¹

$$N_{\text{Met.}} = 8 \cdot 10^{19} \tag{88,7}$$

von denen 20% neutral und 80% ionisiert sind. Ihre Masse ist (mittleres Atomgewicht 32)

$$4,2 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^2. \tag{88,8}$$

Wären *nur* die Metalle vorhanden, so würde diese Säule einen *Gesamtdruck* (Masse × Schwerebeschleunigung) von 116 Bar und einen Elektronendruck von

$$P'_e = 116 \cdot \frac{80}{20 + 2 \cdot 80} = 51 \text{ Bar} \tag{88,9}$$

hervorrufen². Dieser Wert — und erst recht der ursprünglich von RUSSELL erhaltene von 510 Bar! — ist nun wesentlich höher als der nach der SAHASchen Gleichung bestimmte Elektronendruck, dessen wahrscheinlichster Wert nach (88,4)

$$P_e = 18 \text{ Bar bis evtl. } \sim 5 \text{ Bar} \tag{88,10}$$

ist. Der Unterschied erklärt sich zwanglos, wenn man berücksichtigt, daß noch viel nichtionisierter Wasserstoff vorhanden ist. Rechnen wir — in Anlehnung teils an RUSSELL, teils an unsere Tabelle 20 mit folgender stark schematisierter

Element	Atomzahlen bzw. Volumen	Masse
H	28	28
O	1	16
Metalle	1	32
Elektronen	0,8	—
Summe	30,8	76

Zusammensetzung, so wird die Masse über 1 cm² der Sonnenoberfläche mit (88,8) gleich $\frac{76}{32} \cdot 4,2 \cdot 10^{-3} = 10^{-2} \text{ g/cm}^2$ und dementsprechend der *gesamte Gasdruck*

$$P_g = 274 \text{ Bar.} \tag{88,11}$$

Der Elektronendruck ist jetzt³ das 0,8/30,8-fache davon, also

$$P_e = 7,1 \text{ Bar,} \tag{88,12}$$

was mit dem aus der SAHA-Gleichung berechneten Wert von 18 bis ~ 5 Bar gut verträglich ist. RUSSELLs quantitative Analyse der Sonnenatmosphäre ist also durchaus mit der auch aus EDDINGTONs Theorie des Sterninneren folgenden Vorstellung im Einklang, daß durchschnittlich etwa $\frac{1}{3}$ der Masse der Sterne aus Wasserstoff besteht. Historisch betrachtet, hat sogar RUSSELLs Untersuchung den entscheidenden Anstoß zu der grundlegenden Erkenntnis der großen kosmischen Häufigkeit des Wasserstoffes gegeben.

Schließlich vergleichen wir noch kurz das Ergebnis der rein *analytischen* Untersuchung RUSSELLs mit unseren mehr vom *synthetischen* Standpunkt aus durchgeführten Rechnungen der vorhergehenden Kapitel.

Für eine Atmosphäre mit $T = 5600$ oder $\Theta = 0,90$ und $\log g = 4,44$ fanden wir nach Fig. 84 einen mittleren Elektronendruck $P_e \approx 50$ Bar. Fig. 83 gibt die Gesamtzahl *aller* Atome über 1 cm² zu $\log \overline{NH} = 22,35$. Da nach Tabelle 20 der 30. Teil hiervon Metalle sind, so erhalten wir

$$N_{\text{Met.}} = 74 \cdot 10^{19}.$$

Beide Zahlen sind zu groß. Ob die Differenz der Berechnung des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten oder unseren Ausgangsannahmen über die Zusammen-

¹ Die folgenden Zahlen sind alle einen Zehnerfaktor niedriger als in der RUSSELLschen Originalarbeit. Dadurch verschiebt sich das Bild verschiedentlich.

² Diese Berechnung gibt nicht den Druck am *Grunde* der umkehrenden Schicht, wie man früher teilweise annahm, sondern — wie aus Kap. XII hervorgeht — einen *Mittelwert* über die wirksame Schicht.

³ Da bekanntlich: Druck = Zahl der Partikel pro cm³ × kT .

setzung der Sternatmosphären oder der Festlegung von N_0 zur Last zu legen ist, läßt sich heute noch nicht übersehen.

Wir haben uns hier mit der Darstellung und Kritik der RUSSELLSchen Arbeit deshalb so eingehend beschäftigt, weil wir derartige von einem vorzugsweise empirischen Standpunkt ausgehende Untersuchungen für besonders wichtig halten. Auf der anderen Seite dürfte aber deutlich zu erkennen sein, daß auch hier eine Vertiefung der theoretischen Grundlagen unumgänglich notwendig ist.

In verschiedener Hinsicht einen wesentlichen Fortschritt bedeutet die schon mehrfach erwähnte Arbeit von C. W. ALLEN [1507]. Er ersetzt die geschätzten ROWLAND-Intensitäten durch *gemessene Gesamtabsorptionen* A_λ . Deren Reduktion auf $\log NHf$ ist im linearen und flachen mittleren Teil der Wachstumskurve (unter Berücksichtigung der Atomgewichte) korrekt möglich. Im $\sqrt{\quad}$ -Zweig dagegen muß ALLEN in Ermangelung eines Besseren mit einer empirisch bestimmten mittleren Dämpfungskonstante¹

$$\gamma = 8,4 \cdot 10^8 \text{ sek}^{-1} \quad \text{bei } \lambda 5000$$

rechnen ($\gamma_{\text{klass.}}$ wäre $0,88 \cdot 10^8 \text{ sek}^{-1}$).

Darüber hinausgehend hat ALLEN sogar versucht, die Wellenlängenabhängigkeit des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten mit Hilfe ausgedehnter Super-Multipletts zu bestimmen. Dies scheint mir nicht berechtigt zu sein, da die Multiplett-Intensitätsformeln nur in dem Maße richtig sind, als die Liniengruppen als *eng* betrachtet werden dürfen. Da jedoch ALLEN nur den Spektralbereich $\lambda 4036\text{—}6600 \text{ \AA}$ benützt, so ist dieser Punkt nebensächlich.

Um ALLENS Häufigkeitszahlen auf $\log NHf$ zu reduzieren, sind, wie man leicht nachrechnet, seine Logarithmen um 10,60 zu vergrößern.

Im weiteren benützt dann ALLEN ähnlich wie RUSSELL den f -Summensatz (unter Berücksichtigung der negativen Glieder).

In der Größenordnung stimmen seine Ergebnisse gut mit RUSSELL überein. Da seine Messungen das ultraviolette Spektralgebiet noch nicht einbeziehen, so kann er natürlich viele Elemente nicht erfassen.

Die Hauptschwierigkeit derartiger Untersuchungen liegt — das ist heute schon klar und soll hier nochmals hervorgehoben werden — in der Bestimmung der *Oszillatorenstärken* und *Dämpfungskonstanten*.

Soweit es sich um *schwache* Linien handelt, können letztere außer Betracht bleiben und man kann hoffen, daß es im Laufe der Zeit teils auf experimentellem, teils auf theoretischem Wege möglich sein wird, den Bestand an bekannten f -Werten zu vergrößern. Bei Übergängen zwischen hochangeregten Termen wird man provisorisch auch die umfangreichen Rechnungen mit Wasserstoff-eigenfunktionen heranziehen.

Mit der Berechnung der *Dämpfungskonstanten* stehen wir erst am Anfang der Entwicklung. Hier ist insbesondere eine Erweiterung und Verbesserung des experimentellen Materials an *Starkeffekten* unbedingt erforderlich.

Schließlich sei noch erwähnt, daß D. H. MENZEL [1513] das Emissionsspektrum des Sonnenrandes (Flashspektrum) zu einer quantitativen Analyse der Sonne herangezogen hat. Hier dürfte — wegen der kleinen Drucke — die Stoßdämpfung meist kleiner sein als die Strahlungsdämpfung. Im übrigen werden wir auf diese Untersuchung erst in Kapitel XVII eingehen und geben einstweilen in Tabelle 66 MENZELS Häufigkeitszahlen ohne weiteren Kommentar wieder.

¹ ALLEN bezeichnet unser γ mit $\omega = 4\pi\gamma$!

XVI. Kapitel.

Die Struktur der äußeren Schichten der Sonne.**89. Übersicht über die beobachteten Erscheinungen.****Der Zyklus der Sonnenaktivität.**

Wir wenden uns nunmehr dem Studium der veränderlichen Erscheinungen der Sonnenoberfläche zu. Die „*Meteorologie der Sonnenatmosphäre*“ ist einmal für die Astrophysik von großer Bedeutung, da wir keinen anderen Stern im Detail beobachten können. Zum anderen dürften derartige Untersuchungen auch für die terrestrische Meteorologie mancherlei Anregung geben. Denn viele Erscheinungen, die auf der Erde nur schwer erfaßbar sind, treten erst unter den ganz andersartigen Verhältnissen der Sonne deutlich in Erscheinung.

Während wir uns in den vorhergehenden Kapiteln fast ausschließlich mit Problemen des Strahlungsaustausches und *Strahlungsgleichgewichtes* beschäftigt haben, wird im folgenden der Energietransport durch *Konvektion* eine wesentliche Rolle spielen. Damit erfährt zugleich das wechselseitige Verhältnis von Beobachtung und Theorie eine Änderung: Bisher bildeten *Strahlungstheorie und Atomphysik* die sichere Grundlage unserer Rechnungen. Jetzt müssen wir dagegen die noch lange nicht zu solcher Vollkommenheit entwickelte *Hydrodynamik turbulenter Strömungsvorgänge* zu Hilfe nehmen.

In Analogie zur Meteorologie der Erdatmosphäre sind wir daher genötigt, uns an Hand der Beobachtungen vorsichtig vorwärts zu tasten. Immerhin ermöglichen schon die heute verfügbaren Hilfsmittel der Theorie eine wesentliche Klärung der Lage und damit eine rationelle Gestaltung zukünftiger Beobachtungsprogramme.

Wir dürfen wohl annehmen, daß der Leser mit der historischen Entwicklung und den wichtigsten Beobachtungsmethoden und -ergebnissen der Sonnenphysik schon bekannt ist. Der Anfänger sei nochmals auf die ausgezeichneten Darstellungen von G. ABETTI [1601—2], G. BRUHAT [1603] und H. N. RUSSELL [1604] hingewiesen¹. Wir beschränken uns hier auf eine kurze Übersicht der verfügbaren Beobachtungsmethoden. Dann betrachten wir — wieder ohne jeden Anspruch auf Vollständigkeit, insbesondere in historischer Hinsicht — die *Granulation*, die *Sonnenflecken* und *-fackeln*, die *Protuberanzen* sowie die *Korona* und ihre gegenseitige Verknüpfung im Rahmen des 11,5jährigen Zyklus der Sonnenaktivität. Schließlich werfen wir noch einen Blick auf das Problem der *Rotation der Sonne*.

In den folgenden Abschnitten werden wir dann die erwähnten Phänomene eingehender unter physikalischen Gesichtspunkten betrachten, wobei — entsprechend dem heutigen Stande der Forschung — spektroskopische Probleme im Vordergrund stehen werden.

A. Beobachtungsmethoden und Apparate. a) *Visuelle Beobachtung* der Sonne unter Anwendung des helioskopischen Okulars dürfte auch heute noch zur Erforschung der feineren Struktur und der Bewegungen in der Granulation und den Flecken nicht zu verachten sein.

b) *Direkte Photographie*. Da die feinen Details der Sonnenoberfläche in der Größenordnung von 1'' liegen, so ist hohes optisches und photographisches Auflösungsvermögen notwendig. J. JANSSENS [1645] Aufnahmen auf den fast kornlosen feuchten Platten gehören heute noch zu den besten! Bei Zölostaten stört die Verzerrung der Spiegel infolge der Sonnenwärme. Man muß sie bis

¹ Das PRINGSHEIMSche Buch — das einzige in deutscher Sprache — ist leider völlig veraltet.

kurz vor der Aufnahme schützen. In vieler Hinsicht empfiehlt sich die Anwendung großer Refraktoren. Luftschlieren erzeugen das von JANSSEN noch für eine solare Erscheinung gehaltene „photosphärische Netz“. Für photometrische Untersuchungen ist wichtig ein gleichmäßig und reproduzierbar arbeitender Verschuß. Rotierende Anordnungen [z. B. 1622] dürften solchen mit Gleitbahnen vorzuziehen sein. Direkte Aufnahmen — namentlich im Ultraviolett — mit Farbfiltern genau bekannter Durchlässigkeit unter sorgfältiger Berücksichtigung des Streulichtes [1690] bilden eines der wichtigsten desiderata der Sonnenphysik.

c) *Spektroheliograph und Spektrohelioskop*. Die direkte Beobachtung — visuell oder photographisch — verwendet hauptsächlich das kontinuierliche Spektrum. Viel mannigfaltigere, aber auch dementsprechend schwerer deutbare Erscheinungen werden durch Heranziehen der Linien erschlossen. Das Grundprinzip des aus dem Protuberanzenspektroskop hervorgegangenen *Spektroheliographen* ist zu bekannt, als daß wir es hier nochmals auseinanderzusetzen brauchten. Über Einzelheiten der Konstruktion und Handhabung orientieren am besten die beiden grundlegenden Arbeiten von G. E. HALE [1635] sowie die ersten Bände der *Contr. Mt. Wilson Obs.* und H. DESLANDRES [1628]. In neuerer Zeit hat G. E. HALE [1642] zwecks Beobachtung rasch veränderlicher Eruptionen (Protuberanzen usw.) ein analoges Instrument für visuelle Beobachtung im Licht von H_{α} konstruiert, das *Spektrohelioskop*. Durch Anbringen eines kippbaren Glasplättchens, des sog. line-shifter's, vor dem 2. Spalt ist es möglich, fortlaufend die *Radialgeschwindigkeit* der betrachteten Objekte zu verfolgen, eine Aufgabe, die in anderer Weise schon H. DESLANDRES (s. oben) mit dem „enrégistreur des vitesses“ in Angriff genommen hatte. Die physikalische Interpretation der spektroheliographischen Aufnahmen der Sonnenscheibe ist viel schwieriger, als man gemeinhin annimmt. Das meiste, was man darüber in der Literatur vorfindet, kann heute nicht mehr befriedigen. Wir werden in Abschn. 100 versuchen, wenigstens einige Grundprinzipien klarzustellen, ohne jedoch eine völlige theoretische Durchdringung der Beobachtungen zu erreichen.

d) B. LYOTS *Beobachtungen der Sonnenkorona außerhalb von Finsternissen. Protuberanzenbeobachtung ohne Spektralapparat*.

Die Strahlung der äußersten Zonen der Sonnenatmosphäre, der *Chromosphäre* mit den Protuberanzen und der Korona wird normalerweise überdeckt von dem Streulicht der Erdatmosphäre und der Apparatur. Ursprünglich konnte man diese Objekte daher nur bei totalen Sonnenfinsternissen¹ beobachten und für die meisten feineren *photometrischen* Untersuchungen ist deren Zuhilfenahme auch heute noch unentbehrlich. Die unter c) zusammengefaßten Apparate gestatten eine Beobachtung der Formen von Protuberanzen usw., indem sie die *Linienemission* vom kontinuierlichen Untergrund des Streulichtes durch spektrale Zerlegung trennen.

Eine zweite Möglichkeit zur Beobachtung der äußeren Teile der Sonnenatmosphäre hat neuerdings B. LYOT [1657] in genialer Weise entwickelt: Er bemerkte zunächst, daß unter erstklassigen atmosphärischen Verhältnissen (er arbeitete auf dem Pic du Midi) das Himmelstreulicht wesentlich geringer ist, als das der bis dahin benützten optischen Geräte. Durch systematisches Herabdrücken des Streulichtes in der Apparatur (besonders klares Glas; peinliche Staubfreiheit; doppelte Abbildung zur Elimination der Beugung am Rand des Objektivs) gelang es LYOT, ein Abbildungssystem zu schaffen, das (evtl. unter Zuhilfenahme einfacher Farbfilter) an erstklassigen Tagen direkte Aufnahmen der *Protuberanzen* und der *inneren Korona* erlaubt. Die stärkeren Koronalinien

¹ Vgl. Abschn. 95.

konnten mit großer Dispersion aufgenommen werden. Polarisationsmessungen mit einem Apparat, der noch Polarisationsgrade von $\sim 1\%$ zu messen gestattet, lassen an vielen Tagen die Helligkeitsverteilung des kontinuierlichen Koronalichtes rund um die Sonne erkennen und ermöglichen zum erstenmal Beobachtungen der zeitlichen Veränderlichkeit der Korona. Sodann ist es B. LYOT [1658] gelungen, seinen Apparat durch ein Rotfilter (0,5 cm SCHOTT'Sches Rotglas RG2 + 5 cm leicht saure gesättigte Neodymnitratlösung) zu ergänzen, das in der Umgebung von H_{α} einen Bereich von nur $\sim 80 \text{ \AA}$ aussondert¹ und so in Meudon sogar bei mäßiger Sicht die Protuberanzen des ganzen Sonnenrandes mit einer Belichtungszeit von ~ 1 sek aufzunehmen. Für die Beobachtung eruptiver Gebilde, die im Verlauf einer Minute oft schon wesentliche Änderungen erleiden, dürfte diese Anordnung eine wertvolle Ergänzung des Spektroheliokopes darstellen.

e) Die im vorhergehenden zusammengestellten Hilfsmittel des Beobachters erhalten erst ihre volle Leistungsfähigkeit in Verbindung mit *photometrischen Methoden*. Ohne Übertreibung könnte man in der Sonnenforschung von einer Ära des Mikrophotometers sprechen. Insbesondere kann die Verbindung zwischen Theorie und Beobachtung in den meisten Fällen nur hergestellt werden, wenn auf beiden Seiten quantitative Aussagen vorliegen.

Neben der Photometrie spielt die *Polarimetrie* eine wichtige Rolle. G. E. HALE'S Beobachtung des *ZEEMAN-Effektes in Sonnenflecken* [1636, 39—41] haben den inneren Zusammenhang der Flecke einer Gruppe klargestellt (bipolare Flecke!) und weiterhin gezeigt, daß die wahre Periode der Sonnenaktivität nicht 11,5 Jahre, sondern $2 \times 11,5 = 23$ Jahre ist, indem nach je 11,5 Jahren die Polarität entsprechend liegender Flecken sich umkehrt.

Sodann erwähnen wir die an Mt. WILSON ausgeführte Messung des *allgemeinen Magnetfeldes* der Sonne, das bis jetzt allen Bemühungen der Theoretiker getrotzt hat.

Endlich zeigt die Polarisation des kontinuierlichen Spektrums der *Korona*, daß dieses — zum mindesten größtenteils — durch Streuung der Sonnenstrahlung entsteht.

B. Der Zyklus der Sonnenaktivität. Nunmehr betrachten wir die „Witterungserscheinungen“ der Sonnenoberfläche — noch ohne auf ihre physikalischen Ursachen einzugehen — und ihre *statistischen* Zusammenhänge im Rahmen des 11,5jährigen Zyklus.

a) *Granulation*. Mit größeren Instrumenten erkennt man bei guten Sichtverhältnissen, daß die Sonnenoberfläche nicht gleichmäßig leuchtet, sondern eine körnig aussehende Struktur besitzt. Nach den Beobachtungen von S. CHEVALIER [1625], auf die wir in Abschn. 92 noch zurückkommen, zeigt die Beschaffenheit der *Granulation* keinerlei Abhängigkeit von der *heliographischen Breite* oder der *Phase* im 11,5jährigen Zyklus. Dies deutet darauf hin, daß die *Granulation mit dem Zyklus der Sonnenaktivität nichts zu tun hat*. Wir werden später sehen, daß theoretische Untersuchungen über die Konvektionserscheinungen der Sonnenatmosphäre in dieselbe Richtung weisen.

b) *Sonnenflecken*. Um die *Fleckenaktivität* der Sonne kurz zu kennzeichnen, hat R. WOLF die sog. *Relativzahlen R* eingeführt: Ist g die Anzahl der auf der Sonnenscheibe sichtbaren Fleckengruppen plus einzelstehenden Flecke und f die Anzahl aller Flecke (ohne Rücksicht darauf, ob einzeln oder in Gruppen stehend), so definiert er

$$R = k(10g + f). \quad (89,1)$$

¹ In einer neueren Arbeit [1659] schlägt LYOT ein noch wirksameres „Filter“ vor, das Interferenzen polarisierten Lichtes benützt.

Die Konstante k hängt von der Wahl des Beobachtungsinstrumentes ab; für das in Zürich stets benützte Fernrohr mit 10 cm Öffnung und Vergrößerung 64 wird sie = 1 gesetzt. Die Relativzahlen werden laufend in den *Astronomischen Mitteilungen der Eidg. Sternwarte Zürich* veröffentlicht.

An der *Greenwicher Sternwarte* werden seit CARRINGTON täglich auf photographischen Aufnahmen die *Flächen* der Sonnenflecke, korrigiert auf perspektivische Verkürzung, in Einheiten von 1 Millionstel der Sonnenscheibe gemessen. Die Gesamtfläche der Flecke wird fortlaufend in den *Greenwich Photoheliographic Results* publiziert: Sie zeigt in statistischer Hinsicht eine enge Korrelation zu den Relativzahlen.

Die zeitliche Abhängigkeit der Fleckenbedeckung der Sonne zeigt, wie SCHWABE (~ 1843) entdeckte, einen etwa 11,5jährigen Rhythmus. Der Abstand zweier aufeinanderfolgender Fleckenmaxima bzw. -minima schwankt — ebenso wie deren Höhe¹ — innerhalb ziemlich weiter Grenzen (vgl. Fig. 119 oben). Obige Zahl gilt also nur im Mittel über lange Zeiträume. Der Anstieg vom Minimum zum Maximum erfolgt meist rascher, als die darauf folgende Abnahme der Fleckenaktivität.

Es sind viele Versuche gemacht worden, die Fleckenkurve durch Überlagerung mehrerer (strenger) Perioden darzustellen. Andere Autoren ließen sich durch die größenordnungsmäßige Übereinstimmung der Fleckenperiode mit der Umlaufzeit des Jupiter verleiten, nach planetarischen Einflüssen und Perioden zu suchen. Diese Ansätze können von vornherein als verfehlt betrachtet werden: Sowohl der Wechsel der magnetischen Polarität in alternierenden Zyklen wie auch insbesondere das sogleich zu besprechende SPÖRERSche Gesetz der Wanderung der Fleckenzone zeigen, daß zwei aufeinanderfolgende Zyklen — ob länger oder kürzer — ein in sich geschlossenes Ganzes bilden, das von Nebenperioden keine Spur erkennen läßt.

In diesem Sinne haben H. LUDENDORFF [1655] und M. WALDMEIER [1689] untersucht, inwieweit die Länge und der sonstige Verlauf eines Zyklus durch die Höhe seines Maximums und evtl. der vorhergehenden Maxima bestimmt sind. Dabei ergaben sich folgende Gesetzmäßigkeiten (in der Formulierung schließen wir uns hauptsächlich an die letztere Arbeit an):

1. Die Anstiegszeit T (Jahre) vom Minimum zum Maximum nimmt mit der Höhe des Maximums R_M (Relativzahl) ab^2 und zwar für alternierende Zyklen in etwas verschiedener Weise. Bezeichnet man den Zyklus 1755—66 als Nr. 1 usw., so findet WALDMEIER³ für

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ungerade Zyklen:} \\ \text{Gerade Zyklen:} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \log R_M = 2,48 - 0,10 T \\ \quad \pm 0,10 \pm 0,02 \\ \log R_M = 2,69 - 0,17 T \\ \quad \pm 0,09 \pm 0,02 . \end{array} \quad (89,2)$$

2. Die Abstiegszeit Θ , gemessen in Jahren vom Maximum bis zu einer Abnahme der Relativzahl auf $R_0 = 7,5$ (das Minimum ist vielfach schlecht definiert), wächst mit R_M . Für ungerade *und* gerade Zyklen findet WALDMEIER

$$\left. \begin{array}{l} \Theta = 3,0 + 0,030 R_M \\ \quad \pm 0,6 \pm 0,006 . \end{array} \right\} \quad (89,3)$$

3. Zum Teil eine Konsequenz der vorhergehenden sind die folgenden Gesetzmäßigkeiten: α) Die Fläche der Fleckenkurve von Minimum bis zum folgenden

¹ Durchschnittlich ist im Maximum $R \approx 100$, im Minimum ≈ 5 .

² Schon von R. WOLF 1861 vermutet.

³ LUDENDORFF gleicht T als lineare Funktion von $R_{\text{Max}} - R_{\text{Min}}$ aus, was nahezu auf dasselbe herausläuft, aber ein wenig größere Reste gibt.

Maximum (Anstieg) ist konstant. β) Die entsprechende Fläche vom Maximum bis zum Minimum (Abstieg) ist proportional R_M .

4. Eine Folge von 1 und 2 ist weiterhin, daß das Verhältnis $Q = T/\Theta$ von Anstiegszeit T zu Abstiegszeit Θ mit abnehmendem R_M anwächst und zwar für ungerade Zyklen rascher als für gerade. Q schwankt so zwischen den Grenzen 0,37 und 1,72 um einen Mittelwert $\sim 0,7$. Die Behauptung, daß der Anstieg der Fleckenkurve rascher erfolge, als der Abstieg ist daher nur im Mittel richtig.

5. Aus dem Gesagten geht hervor, daß der ganze Verlauf der Fleckenkurve während eines geradzahigen bzw. ungeradzahigen Zyklus im wesentlichen durch die Höhe Maximums R_M bestimmt ist. Einige charakteristische Kurven zeigt die aus M. WALDMEIERS Arbeit (s. S. 353) entnommene Fig. 116. Aufgetragen

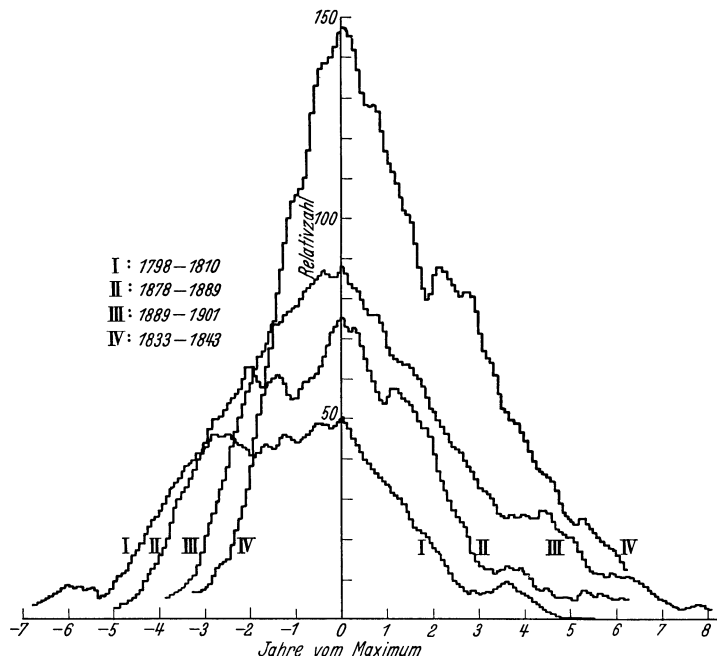


Fig. 116. Charakteristische Fleckenkurven. Nach M. WALDMEIER [1689]. Ordinaten: Ausgeglichene monatliche Relativzahlen. Abszissen: Abstand vom Maximum in Jahren.

sind ausgeglichene monatliche Relativzahlen als Funktion des zeitlichen Abstandes vom Fleckenmaximum in Jahren.

6. Richtet man mit H. LUDENDORFF (s. S. 353) den Blick mehr auf die ganze Fleckenkurve, so kann man auch sagen: Über dem Durchschnitt liegende Werte von R_M bewirken eine *Verfrühung* des betreffenden Maximums selbst und umgekehrt. Darüber hinausgehend findet LUDENDORFF noch eine entsprechende — nur nicht so starke — Auswirkung auch auf das folgende Minimum und Maximum. Nach Korrektur der Max.- und Min.-Zeiten wegen der Verschiedenheiten von R_M^1 tritt der Unterschied „gerader“ und „ungerader“ Zyklen auch in dieser Darstellungsweise deutlich in Erscheinung.

Untersucht man die *Verteilung der Sonnenflecke in heliographischer Breite*, so zeigt sich, daß diese auf beiden Hemisphären je eine bestimmte Zone stark bevorzugen. Wie G. SPÖRER (~ 1880) fand, entstehen die ersten Flecken eines beginnenden Zyklus (Minimum) in einer heliographischen Breite $\varphi \approx \pm 30^\circ$.

¹ LUDENDORFF berücksichtigt außerdem noch eine Art säkularen Gang der Fleckenperiode.

Im Laufe von 11,5 Jahren verschiebt sich die Zone maximaler Fleckenzahl dann erst rasch, später langsamer äquatorwärts bis $\varphi \approx \pm 8^\circ$, worauf sich das

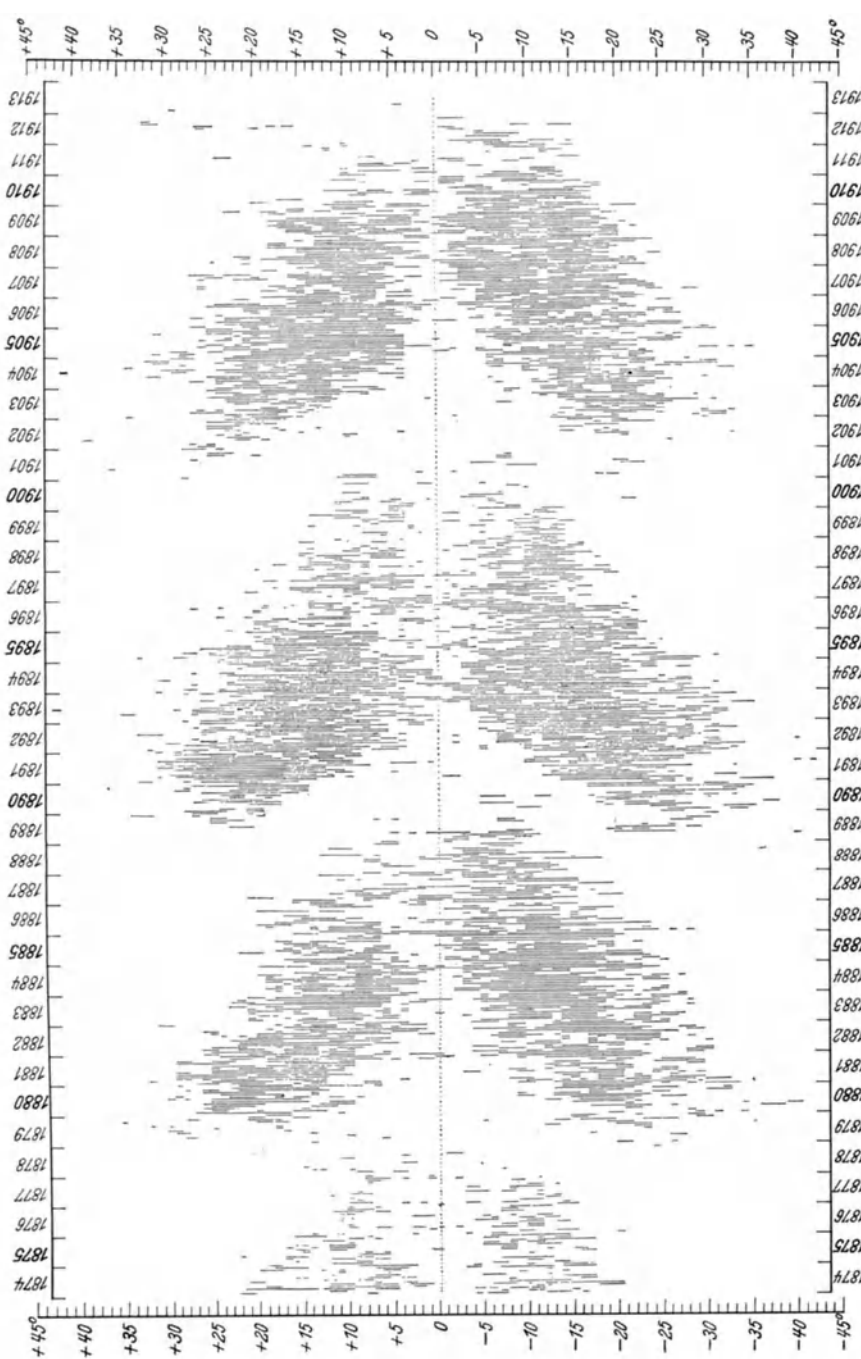


Fig. 117. „Schmetterlingsdiagramm“ nach E. W. MAUNDER [1661]. Jeder Sonnenfleck ist entsprechend seiner heliographischen Breite durch einen kurzen Strich angezeichnet.

Spiel wiederholt (vgl. Fig. 119). Einen noch deutlicheren Eindruck gibt E. W. MAUNDERS sog. „Schmetterlingsdiagramm“ (Fig. 117 nach [1661]). Jeder

Fleck ist hier entsprechend seiner heliographischen Breite durch einen kurzen Strich angezeichnet. In der Nähe der Fleckenminima kann man die zum „alten“ Zyklus gehörenden Flecken in niederen Breiten von denen des „neuen“ Zyklus in höheren Breiten leicht unterscheiden.

G. E. HALES Entdeckung des *Magnetfeldes der Sonnenflecke* hat neben anderen bemerkenswerten Folgerungen zu dem Beweis geführt, daß diese Unterscheidung eine tiefere Bedeutung hat: Wir werden die Struktur usw. des einzelnen Fleckes und der einzelnen Fleckengruppe erst in Abschn. 90 genauer betrachten und beschränken uns hier auf die sog. *bipolaren Flecke*, d. h. Fleckenpaare, die entgegengesetzte *magnetische Polarität* haben. ZEEMAN-Effektbeobachtungen an Mt. WILSON [1641], die seit 1915 täglich mit Hilfe der Fe-Linie $\lambda 6173,5$ visuell ausgeführt werden, ließen folgende *Gesetze* erkennen:

Die bei Beginn eines 11,5jährigen Zyklus in Breiten von etwa $\pm 30^\circ$ entstehenden Flecke haben auf der nördlichen bzw. südlichen Hemisphäre entgegengesetzte Polarität. Das heißt, zeigen z. B. auf der einen Hemisphäre die

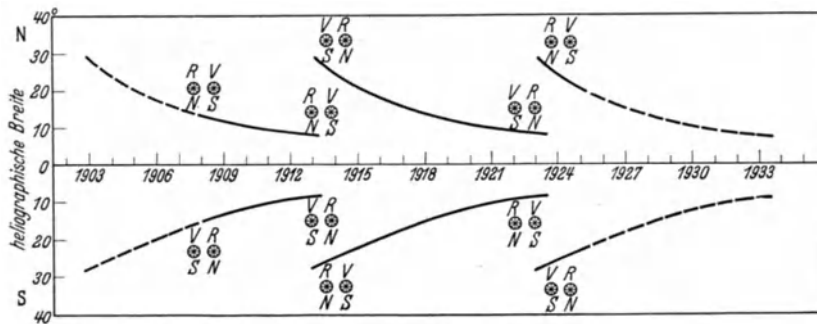


Fig. 118. G. E. HALES *Gesetz der magnetischen Polarität der Sonnenflecke* [1641]. Die Kurven zeigen die Verschiebungen der mittleren Breite (näherungsweise) und die entsprechenden magnetischen Polaritäten der Fleckengruppen. „Vorderer“ Fleck jeweils rechts. N bezeichnet einen Nordpol (d. h. entsprechend dem nach Norden weisenden Pol der Magnetnadel); S einen Sudpol. R (rot) und V (violett) charakterisieren die entsprechenden Linienverschiebungen bei der an Mt. Wilson benutzten Anordnung des Polarisationsapparates.

(im Sinne der Rotation der Sonne) vorausgehenden Flecke N-Polarität und die folgenden S-Polarität, so gilt für die andere Hemisphäre das Entgegengesetzte.

Im Laufe des Zyklus nimmt die heliographische Breite der Fleckenzone ab, die Polarität bleibt dieselbe.

Die beim Fleckenminimum zuerst wieder in hohen Breiten auftretenden Flecken des *neuen* Zyklus dagegen zeigen diesen *ganzen* Zyklus hindurch *entgegengesetzte* Polarität gegenüber dem vorhergehenden Zyklus (Fig. 118). Die wahre Periode der Sonnenaktivität ist also $2 \times 11,5 = 23$ Jahre.

c) *Fackeln*. Diese ausgedehnten hellen Gebiete, die nur nach dem Sonnenrande zu deutlich erkennbar sind, stehen gleichfalls in engster Beziehung zum Zyklus der Sonnenaktivität. Die größeren Fackeln treten fast nur in der Umgebung von Flecken auf und befolgen hinsichtlich Periodizität, Verteilung in heliographischer Breite usw. genau dieselben Gesetze. Daneben beobachtet man aber auch in höheren Breiten, wo keine Flecke mehr vorkommen, kleinere Fackelgruppen. Deren Breitenverteilung haben A. MASCARI [1660], J. KORN [1650] u. a. untersucht.

d) *Protuberanzen*. Die Protuberanzentätigkeit der Sonne wird seit ~ 1869 (RESPIGHI) fortlaufend überwacht. Da weiterhin die *Fläche* der am Sonnenrand beobachteten Protuberanzen — in Einheiten von 1° des Sonnenumfanges $\times 1''$ Höhe — ein einfaches Maß derselben darstellt, so haben wir hier einen günstigen Boden für statistische Untersuchungen.

Die *Gesamthäufigkeit* der Protuberanzen folgt genau der Sonnenfleckenkurve. Dagegen enthüllte die Untersuchung ihrer *Verteilung in heliographischer Breite* durch RESPIGHI, RICCÒ, EVERSHED u. a. einen neuen Zug des Sonnenzyklus (Fig. 119, nach W. J. S. LOCKYER [1654]): Das eine Maximum der Protuberanzenhäufigkeit in niederen Breiten verschiebt sich im Verlaufe des 11,5-jährigen Zyklus (Min.—Min.) von $\sim \pm 35^\circ$ bis $\sim \pm 20^\circ$, d. h. es bewegt sich stets in etwa 10° Abstand neben der Fleckenzone her.

Das zweite Protuberanzenmaximum wandert alternierend zum ersten (Fig. 119) von $\sim \pm 40^\circ$ polwärts bis $\sim \pm 80^\circ$. Die Aktivität dieser Zone der „*polaren Protuberanzen*“ ist im allgemeinen geringer, als die der äquatorialen; z. B.

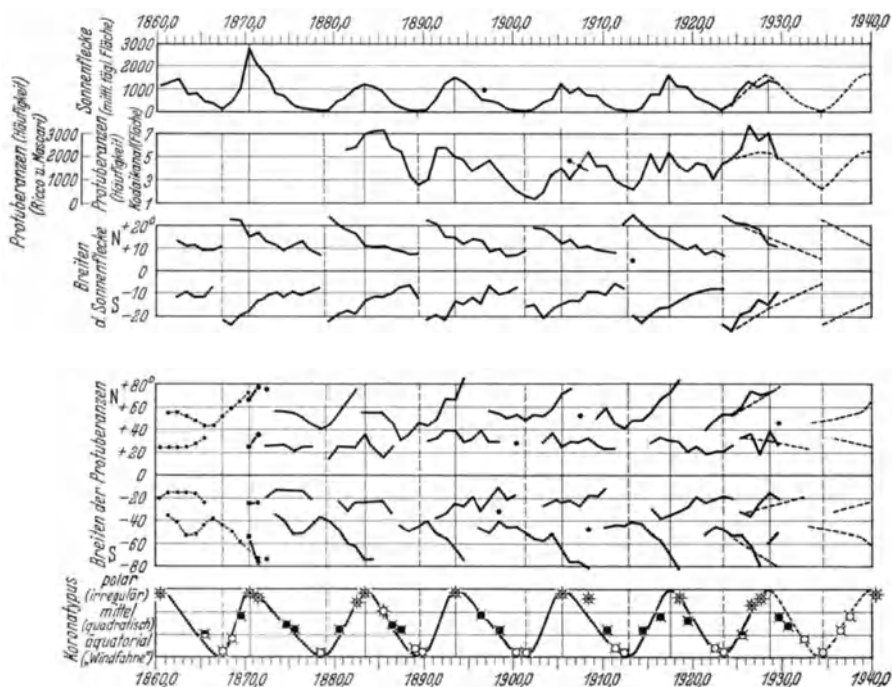


Fig. 119. Der 11,5jährige Zyklus der Sonnenaktivität. Nach W. J. S. LOCKYER [1654c].

bevorzugen die eruptiven Protuberanzen die niedrigen Breiten. Höchstwahrscheinlich stehen die polaren Protuberanzen zu den unter c) erwähnten polaren Fackeln in ähnlicher Verwandtschaft wie die äquatorialen Protuberanzen zu den äquatorialen Fackeln. Das vorliegende Beobachtungsmaterial reicht leider noch nicht aus, um völlige Klarheit zu gewinnen.

Das Gesetz der Breitenverteilung der Protuberanzen drängt geradezu die Anschauung auf, daß eine mit dem Aktivitätszyklus zusammenhängende Zirkulation im Inneren der Sonne in ähnlicher Weise nach Zonen aufgeteilt ist, wie die große Zirkulation unserer Erdatmosphäre. Wir werden diesen Gedanken in Abschn. 94 aufgreifen. Zuvor aber betrachten wir noch die

e) *Korona*: Deren Form zeigt nach Untersuchungen von W. J. S. LOCKYER [1654] u. a. eine enge Korrelation zur Phase des Sonnenzyklus. In der Nähe des Fleckenminimums ist die Korona stark abgeplattet; zu beiden Seiten des Äquators erkennt man die charakteristische „Windfahnen-Struktur“. Man spricht von einer *äquatorialen* oder *Minimumskorona*. Beim Fleckenmaximum dagegen strahlen auch von den Polen Koronabüschel aus. Die Korona gewinnt

dadurch ein mehr rundes Aussehen, man hat die sog. *polare* oder *Maximums-korona*. Zwischen beiden Extremen gibt es natürlich einen stetigen Übergang. Eine anschauliche Darstellung dieser Gesetzmäßigkeiten im Zusammenhang mit den schon erwähnten Phänomenen des Sonnenzyklus zeigt Fig. 119. W. J. S. LOCKYER, dessen Arbeit [1654, III] wir diese Figur entnehmen, hat nun darauf aufmerksam gemacht, daß man die Formänderungen der Korona verstehen kann, wenn man annimmt, daß die „Koronaaktivität“ in derselben Weise mit der Breite variiert, wie die in Fig. 119 gleichfalls aufgezeichnete „Protuberanzenaktivität“. Die Polarbüschel der Korona bilden demnach ein Analogon der polaren Protuberanzen. Inwieweit ein Zusammenhang einzelner Protuberanzen mit bestimmten Koronastrahlen besteht, ist noch nicht genügend geklärt. Wahrscheinlich sind beide Erscheinungen auf *eine* tiefer liegende Ursache zurückzuführen.

W. J. S. LOCKYER'S Untersuchungen basieren im wesentlichen auf *qualitativer* Betrachtung der in der Literatur zerstreuten Koronaaufnahmen. H. LUDENDORFF [1656]¹ und Ö. BERGSTRAND [1618]¹ haben darüber hinaus eine *quantitative* Charakterisierung der Koronaformen angestrebt. LUDENDORFF mißt im wesentlichen direkt die Abplattung der Isophoten. BERGSTRAND versucht — was natürlich nicht ohne gewisse Annahmen möglich ist — den polaren und äquatorialen Anteil zahlenmäßig zu trennen. Die Ergebnisse beider Arbeiten lassen sich mit dem im vorhergehenden entworfenen Bild gut vereinbaren.

C. Die Rotation der Sonne. Zum Abschluß unserer Darstellung der statistischen Zusammenhänge solarer Erscheinungen werfen wir einen Blick auf die Rotation der Sonnenoberfläche. Auch hier wollen wir keinerlei Vollständigkeit anstreben, sondern uns nur die wichtigsten Dinge ins Gedächtnis zurückrufen:

Schon CHR. SCHEINER hat aus der Bewegung der Sonnenflecke die räumliche Lage der Rotationsachse und die Rotationsdauer der Sonne abgeleitet.

Weitere Beobachtungen von CARRINGTON (~1860) und SPÖRER zeigen dann — was SCHEINER schon vermutet hatte —, daß die Sonne nicht wie ein starrer Körper rotiert, sondern daß die höheren Breiten gegenüber dem Äquator zurückbleiben. Stellt man nach FAYE die tägliche (siderische) Drehung ξ in Abhängigkeit von der heliographischen Breite φ durch eine Interpolationsformel der Gestalt

$$\xi = a - b \cdot \sin^2 \varphi \quad (89,4)$$

dar, so ist z. B. nach den *Greenwicher* Beobachtungen langlebiger Flecke von 1878—1923

$$\xi = 14^\circ 37' - 2^\circ 60' \sin^2 \varphi. \quad (89,5)$$

Beobachtungen der *Fackeln* (STRATONOFF, CHEVALIER, MAUNDER) und *Kalziumfloculi* (P. FOX [1634] u. a.) ergeben durchweg etwas höhere Rotationsgeschwindigkeiten.

Eine zweite Methode zur Messung der Rotationsgeschwindigkeit der Sonne gibt der *Dopplereffekt* (DUNÉR); er ermöglicht bis zu heliographischen Breiten von 75° vorzudringen. Die eingehendste Untersuchung dieser Art hat W. S. ADAMS [1612] durchgeführt. Es zeigt sich, daß sowohl die Rotationsgeschwindigkeit am Äquator, als auch die äquatoriale Beschleunigung für verschiedene Linien verschieden ausfallen. Eine zusammenfassende Übersicht über das 1921 vorhandene Material an direkten und spektroskopischen Beobachtungen gibt die folgende Fig. 120 (nach PH. FOX [1634]). Man pflegt deren Aussagen dahingehend zusammenzufassen, daß *höhere Schichten eine größere Äquatorialgeschwindigkeit und eine geringere Breitenabhängigkeit der Rotation geben als die tieferen und umgekehrt*.

¹Dort Hinweise auf frühere Arbeiten derselben Autoren.

Zu einer physikalischen Deutung der gesamten Rotationsbeobachtungen fehlt uns zur Zeit noch jeder Anhaltspunkt. Daß es auch nicht möglich ist, aus den Beobachtungen eindeutige Rückschlüsse auf die Bewegungen im Inneren der Sonne zu ziehen, hat neuerdings R. EMDEN [1629] betont.

Erinnern wir uns weiterhin an die Erscheinungen des Sonnenzyklus (Fig. 119), so erscheint es überraschend, daß die Trennungslinie der beiden Aktivitäts-

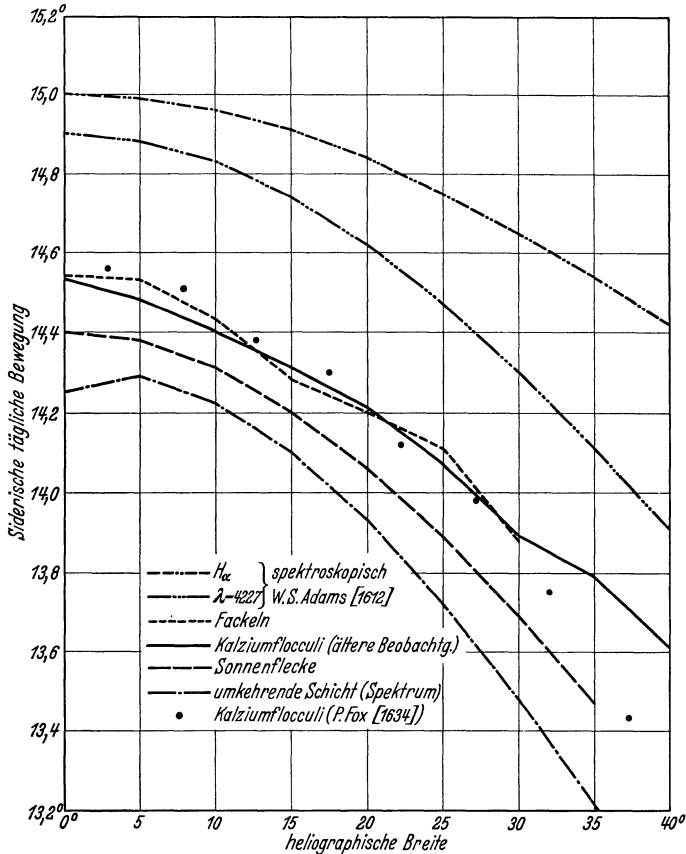


Fig. 120. Rotation der Sonne, nach P. Fox [1634]. Mittelwerte der in verschiedener Weise gemessenen siderischen täglichen Bewegung. (Nach neueren Untersuchungen sind die „spektroskopischen“ Werte von Mr. Wilson um etwa 4% zu erhöhen.)

zonen der Sonne bei $\sim \pm 40^\circ$ heliographischer Breite sich im Rotationsgesetz überhaupt nicht bemerkbar macht.

Im Hinblick auf evtl. zeitliche Änderungen der Rotation der Sonne sind an Mt. Wilson (seit 1914) und anderen Observatorien [1612] spektroskopische Messungen der Rotationsgeschwindigkeit viele Jahre hindurch fortgesetzt worden. Sowohl innerhalb der einzelnen Meßzeiten, als auch beim Vergleich verschiedener Serien zeigen sich unerwartet große Schwankungen, während die Greenwicher Beobachtungen langlebiger Flecke völlige Konstanz der Rotationsdauer der Sonne ergeben. Neuere Untersuchungen an Mt. Wilson [1693] zeigen nun, daß die älteren spektroskopischen Messungen durch Streulicht in der Apparatur verfälscht sind. Die Rotationsgeschwindigkeiten der Mt. Wilson-Meßreihen ab 1914 sollen um $\sim 4\%$ erhöht werden. In Fig. 119 würde damit die „reversing layer“-Kurve von ADAMS über die „sun-spot“-Kurve zu liegen kommen, was auch a priori vernünftiger erscheint.

Da — wie gesagt — die Rotation der Sonne in theoretischer Hinsicht zur Zeit noch ein nahezu unerforschtes Gebiet ist, so wollen wir diese Übersicht damit abschließen, und verweisen bezüglich Einzelheiten und weiterer Literatur usw. auf die angegebenen Abhandlungen von PH. FOX [1634] und W. S. ADAMS [1612], sowie die *Greenwicher Publikationen* und den Handbuchartikel von G. ABETTI.

90. Die Sonnenflecke.

Den Beobachtern der Sonne hat sich schon frühzeitig der Gedanke aufgedrängt, daß die *Sonnenflecke* riesige Wirbel darstellen, in denen die Gase der Sonnenatmosphäre durch Expansion *abgekühlt* werden. H. N. RUSSELL [1681], der wohl zuerst eine genauere Durchrechnung dieser Vorstellung versucht hat, vergleicht daher treffend den Sonnenfleck mit einer *Kältemaschine*. Aus den schon auseinandergesetzten Gründen werden wir unseren Rechenifer zunächst bezähmen und versuchen, aus den Beobachtungen die *Stärke der Abkühlung* zu ermitteln. Dabei stoßen wir auf die zuerst von M. MINNAERT und A. J. M. WANDERS [1664] gestellte und gelöste Frage, ob der *Energietransport* in den zugänglichen Teilen der Flecke vorzugsweise durch *Konvektion* oder durch *Strahlung* erfolge. Nachdem wir uns überzeugt haben, daß auch die Sonnenflecke sich im *Strahlungsgleichgewicht* befinden, beschäftigen wir uns mit der Analyse des *Fleckenspektrums*, das uns die Möglichkeit gibt, sozusagen *zwei* Sternatmosphären von genau gleicher Zusammensetzung und Schwerebeschleunigung, aber verschiedener Temperatur miteinander zu vergleichen. Dann versuchen wir uns an Hand spektroskopischer und direkter Beobachtungen ein Bild der *hydrodynamischen Vorgänge* im Einzelfleck und in der Fleckengruppe zu machen. Die weitere — zur Zeit noch nicht endgültig geklärte — Frage nach dem „*Antriebsmechanismus*“ dieser Strömungen und damit der tieferen *Ursache des 23jährigen Zyklus* werden wir erst in Abschn. 94 aufnehmen, nachdem wir die offensichtlich ebenfalls mit Konvektionserscheinungen zusammenhängenden Phänomene der *Fackeln* und der *Granulation* genauer studiert haben.

A. Helligkeit und spektrale Energieverteilung der Flecke relativ zu ihrer Umgebung. Betrachtet man einen Sonnenfleck im Teleskop oder auf einer direkten Aufnahme, so erkennt man zwei Zonen: Innen den dunkleren Kern, die *Umbra*; anschließend bildet den Übergang zur Photosphäre ein hellerer Hof, die *Penumbra*¹.

Photometrische Messungen der Helligkeitsverteilung in Sonnenflecken werden sehr erschwert durch das *Streulicht* der Erdatmosphäre und der Optik. E. PETTIT und S. B. NICHOLSON [1669] sowie insbesondere A. J. M. WANDERS [1690] haben daher diese Fehlerquelle eingehend untersucht. Neben dem in nicht zu großer Sonnennähe und daher wohl auch über die Sonnenscheibe nahezu konstanten *Himmels hintergrund* ($\sim 2\%$ der Intensität in \odot -Mitte) erhält man — durch Streuung an größeren Partikeln usw. — im Fleck noch eine *Einstrahlung von Photosphärenlicht aus der unmittelbaren Umgebung*. A. J. M. WANDERS nimmt nun an, daß durch diese Zerstreuung ein leuchtender Punkt der Sonnenscheibe, dessen Intensität \times Fläche = 1 sei, in ein Scheibchen auseinandergezogen

¹ A. WILSON bemerkte 1774, daß die Sonnenflecke bei ihrer Bewegung nach dem Sonnenrande hin häufig den Eindruck erwecken, daß es sich um *trichterartige Eintiefungen* handle. Neuere Beobachtungen mit besseren Hilfsmitteln haben für die Tiefe der Flecke immer geringere Werte ergeben (Literatur vgl. ABETTI [1601—2]). Höchstwahrscheinlich ist das sog. „*WILSON-Phänomen*“ größtenteils *physiologisch-psychologischen Ursprunges* (man erinnere sich an die Historie von den Marskanälen!!). Man ist auf Grund der Erfahrung des täglichen Lebens leicht geneigt, eine dunkle Stelle auf einer gleichmäßig hellen Fläche für ein Loch zu halten. Vielleicht läßt sich die Frage durch Modellversuche weiter klären.

wird, dessen Intensitätsverteilung durch die *Zerstreuungsfunktion*

$$U(x, y) = \frac{a}{\pi} e^{-a(x^2 + y^2)} \quad (90,1)$$

beschrieben ist, wo x und y von der Mitte des Scheibchens aus in Bogensekunden gemessen werden. Die Konstante a kann ermittelt werden durch Messung der *scheinbaren* Helligkeitsabnahme am äußersten Sonnenrand, da die Beobachtungen totaler Finsternisse in Einklang mit der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes zeigen, daß der *wahre* Helligkeitsabfall am äußersten Sonnenrand — praktisch gesprochen — völlig abrupt erfolgt. Hat man so die Größe a ermittelt (der Radius des Zerstreuungsscheibchens ging bei WANDERS an günstigen Tagen auf $1/\sqrt{a} \approx 3''$ herunter), so kann man aus der gemessenen *scheinbaren* Intensitätsverteilung in einem Fleck dessen *wahre* Intensitätsverteilung berechnen mit Hilfe der in Abschn. 58 schon besprochenen *Entzerrungsverfahren*.

Direkte Messungen der *Gesamtstrahlung* in der Umbra sind schon 1894 von W. E. WILSON [1692] mit dem Radiometer ausgeführt. In neuerer Zeit haben dann E. PETTIT und S. B. NICHOLSON [1669], sowie T. W. WORMELL [1694] die Veränderung der Gesamtstrahlung beim Überqueren eines Sonnenfleckes mit dem Thermoelement gemessen. Nach 20 Messungen an 6 verschiedenen Flecken finden erstere für das Verhältnis *Umbra : Photosphäre* im Mittel **0,47₁** (Einzelwerte zwischen 0,428 und 0,524). WORMELL erhält — nach Korrektion für Streulicht — im Mittel **0,46₅** (Einzelwerte zwischen 0,27 und 0,77).

Da — wie wir sehen werden — die spektrale Energieverteilung in Fleck und Photosphäre nicht genau gleich ist, so werden beide Messungen durch die Extinktion in der Erdatmosphäre und im Instrument in etwas verschiedener Weise beeinflusst. WORMELL berechnet (s. oben), daß das gemessene Gesamtstrahlungsverhältnis *Umbra : Photosphäre* bei 2 Silberreflexionen + 5 cm Glas in der Apparatur und Luftmasse 1 bzw. 2 um 7% bzw. 12% zu *verkleinern* ist.

Wir können also (im Mittel) das *wahre* Intensitätsverhältnis der Gesamtstrahlung von

$$\frac{\text{Umbra}}{\text{Photosphäre}} = 0,42 \quad (90,2)$$

nehmen. Berechnen wir daraus nach dem STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetz die *effektive Temperatur der Sonnenfleck*, so erhalten wir — ausgehend von dem bekannten Wert $T_{e,0} = 5740^\circ$ für die normale Sonnenoberfläche —

$$T_{e, \text{Fleck}} = 5740 \cdot \sqrt[4]{0,42} = 4620^\circ \text{ K.} \quad (90,3)$$

Wir betrachten nun zunächst weitere Beobachtungsdaten, die uns nach dem Vorgange von M. MINNAERT und A. J. M. WANDERS [1664] einen Rückschluß auf die Art des Energietransportes im Fleck — Strahlungsgleichgewicht oder Konvektion — ermöglichen werden.

Die *Energieverteilung im Spektrum der Sonnenfleck* ist zuerst wohl von C. G. ABBOT [1610] mit dem Bolometer untersucht worden. 1930 haben dann E. PETTIT und S. B. NICHOLSON [1669] die Spektren¹ mehrerer Flecke von $\lambda 4000$ — 22000 mit Monochromator und Thermoelement, von $\lambda 3000$ — 4000 photographisch ausgemessen. Das Ergebnis ihrer Messungen (zusammen mit denen ABBOTs) zeigt Fig. 121. Im Anschluß an A. J. M. WANDERS [1690—1] haben wir die ursprünglichen Ordinaten um eine Streulichtkorrektion von 0,04 Einheiten verringert. Daß die atmosphärischen Wasserdampfbanden Ψ und Ω auch in der *relativen* Energieverteilung Fleck/Photosphäre noch kleine

¹ Da alle Beobachtungen nahe der *Mitte* der Sonnenscheibe gemacht wurden, so handelt es sich — genauer gesagt — um $I_v(0, 0)$.

Einsenkungen hinterlassen, hängt wohl damit zusammen, daß die geringen Intensitäten, die in diesen Wellenlängenbereichen von der Erdatmosphäre noch durchgelassen werden, mit verhältnismäßig großen Meßfehlern behaftet sind.

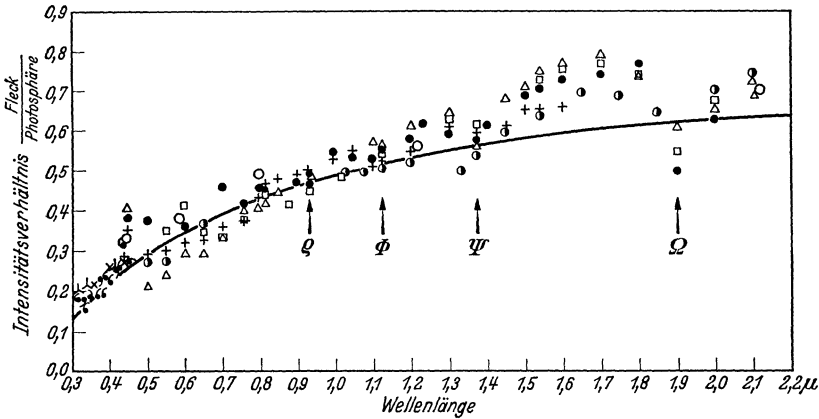


Fig. 121. Wellenlängenabhängigkeit des Intensitätsverhältnisses Fleck/Photosphäre nach E. PETTIT und S. B. NICHOLSON [1669]. (Ursprüngliche Werte nach WANDERS um eine Streulichtkorrektur von 0,04 Einheiten verringert). ——— berechnet unter der Annahme von Strahlungsgleichgewicht mit $T_s^* = 4480^\circ \text{ K}$ gegenüber $T_e = 5740^\circ \text{ K}$.

Die Winkelabhängigkeit des Intensitätsverhältnisses Umbra : Photosphäre, d. h. seine Änderung von \odot -Mitte nach dem \odot -Rand hin, ermöglicht nach den aus Kap. V schon bekannten Prinzipien die Berechnung der Ergiebigkeit und damit der Temperatur als Funktion der optischen Tiefe. Sie bildet also recht eigentlich den Schlüssel zu unserem Problem.

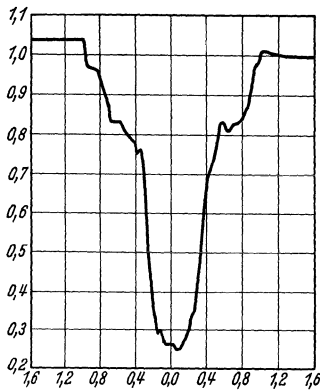


Fig. 122. Intensitätsverteilung in einem Sonnenfleck (Mt. WILSON Nr. 4362, $\sin \vartheta = 0,36$; Fläche = 200 Millionstel der Sonnenscheibe) gemessen bei $\lambda 6450$ von R. S. RICHARDSON [1677]. Einheit der Ordinaten: Intensität der anschließenden Photosphäre. Einheit der Abszissen: Radius des Fleckes.

Die älteren Messungen von W. E. WILSON (s. S. 361), K. SCHWARZSCHILD und W. VILLIGER [1682], sowie N. BARABASCHEFF und B. SEMEJKIN [1616] schienen zunächst zu zeigen, daß das Intensitätsverhältnis Fleck : Umgebung sich am Sonnenrande der Eins näherte. Aber neuere Beobachtungen lassen keinen Zweifel darüber, daß die Aufhellung des Flecks relativ zu seiner Umgebung am Sonnenrand nur eine Folge des mit seiner perspektivischen Verkürzung anwachsenden Streulichteinflusses ist. R. S. RICHARDSON [1677] hat an Mt. Wilson photographische Aufnahmen in drei Spektralgebieten um $\lambda 4330$, 5780 und 6450 ausgewertet (vgl. Fig. 122) und nach Berücksichtigung der Streulichteinflüsse gefunden, daß das Intensitätsverhältnis Fleck : Photosphäre von $^1 \sin \vartheta = 0$ (\odot -Mitte) bis $\sim 0,96$ (\odot -Rand) innerhalb der Meßgenauigkeit konstant bleibt. Dasselbe

findet A. J. M. WANDERS [1691] für $\lambda 4027$ und 4194 und auch die Gesamtstrahlungsmessungen von T. W. WORMELL (s. S. 361) lassen sich gut damit vereinbaren.

Als Nebenprodukt finden alle drei Autoren eine Abnahme des Intensitätsverhältnisses Fleck : Photosphäre mit zunehmender Ausdehnung des Fleckes. In quantitativer Hinsicht gehen ihre Angaben noch stark auseinander, was mit der Schwierigkeit der Streulichtkorrektur zusammenhängen dürfte.

¹ Der Winkel ϑ hat die gewohnte Bedeutung.

Aus der Gleichartigkeit der Mitte-Rand-Variation der Strahlungsintensität von Fleck und Photosphäre müssen wir nach Abschn. 28 (insbesondere Gl. (28,12)) schließen, daß die *Abhängigkeit der Ergiebigkeit und damit der Temperatur von der optischen Tiefe für Fleck und Photosphäre dieselbe ist*. Damit wird — wie MINNAERT und WANDERS [1664] zuerst bemerkten — der Nachweis erbracht, daß die Sonnenflecke jedenfalls bis in solche Tiefen, die noch direkt Strahlung an die Oberfläche senden, sich im *Strahlungsgleichgewicht* befinden. Dieser Schluß überrascht zunächst, denn man kann schwerlich ohne die Annahme auskommen, daß die Abkühlung in den Flecken letzten Endes durch Konvektionsprozesse (adiabatische Expansion) zustande kommt.

Prüfen wir daher mit MINNAERT und WANDERS die Hypothese des Strahlungsgleichgewichtes zunächst noch an den Messungen der spektralen Energieverteilung: Das Intensitätsverhältnis Fleck zu Photosphäre (wir bezeichnen alle auf den Fleck bezüglichen Größen mit *) sollte nach Gl. (31,8 u. 9) für \odot -Mitte ($\vartheta = 0$) sein

$$\left. \begin{aligned} \frac{I^*(0,0)}{I(0,0)} &= \left(\frac{T_e^*}{T_e} \right)^5 \cdot \frac{f\left(\alpha^*, \frac{3}{2}\right)}{f\left(\alpha, \frac{3}{2}\right)}, \\ \text{wo} \quad \alpha^* &= \frac{c_2}{2^{-\frac{1}{4}} \cdot \lambda T_e^*} \quad \text{sowie} \quad \alpha = \frac{c_2}{2^{-\frac{1}{4}} \cdot \lambda T_e} \end{aligned} \right\} \quad (90,4)$$

ist und $f(\alpha, \vartheta)$ die durch (31,9) definierte und von E. A. MILNE [517] und B. LINDBLAD [512, 513] berechnete Funktion bedeutet.

Nach M. MINNAERT und A. J. M. WANDERS [1664] kann man die Beobachtungen von ABBOT, PETTIT und NICHOLSON gut darstellen, wenn man im Vergleich zur effektiven Temperatur $T_e = 5740^\circ$ der Photosphäre die der Umbra mittelgroßer Flecke zu $T_e^* = 4480^\circ K$ annimmt. (In guter Übereinstimmung mit dem aus der Gesamtstrahlung bestimmten Wert von $4620^\circ K$.)

Die mit diesen effektiven Temperaturen nach (90,4) berechnete relative Energieverteilung ist in Fig. 121 miteingezeichnet. Ihre gute Anpassung an die Messungen spricht wiederum für die Annahme, daß die *zugänglichen Schichten der Sonnenflecke sich im Strahlungsgleichgewicht befinden*.

Zur Ergänzung der vorhergehenden Betrachtungen wollen wir noch überlegen, wie die Winkelabhängigkeit und die spektrale Energieverteilung der Strahlung eines Sonnenfleckes aussehen *würde*, wenn dessen obere Schichten in rein *konvektivem Gleichgewicht* wären. Zur Vereinfachung der Rechnungen nehmen wir an, daß der Absorptionskoeffizient von der Tiefe und der Wellenlänge nicht abhängen soll, was gerade für die Sonne — mehr oder weniger zufällig — eine recht gute Approximation ist. Außerdem soll auch das Verhältnis der spezifischen Wärmen $c_p/c_v = \gamma$ konstant sein. MINNAERT und WANDERS (s. S. 360) haben noch eine Reihe allgemeinerer Modelle durchgerechnet; stets mit demselben Ergebnis — das wir schon vorwegnehmen wollen —, daß die Annahme rein konvektiven Gleichgewichtes den Beobachtungen *nicht* gerecht wird. Nun zu unserem einfachen Modell (vgl. auch H. N. RUSSELL [1681], R. M. PETRI [1668] und E. A. MILNE [1662]):

Da der Absorptionskoeffizient konstant ist, so wächst nach dem früheren zunächst der *Gasdruck* p proportional der *optischen Tiefe* τ

$$p \sim \tau. \quad (90,5)$$

Andererseits gilt im Fleck die Adiabatangleichung

$$T \sim p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (90,6)$$

oder

$$T = C \cdot \tau^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad (90,7)$$

wobei die Konstante C noch festzulegen sein wird. Andererseits gilt für die Photosphäre die aus der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes bekannte Beziehung¹

$$T^4 = T_g^4 \left(1 + \frac{3}{2} \tau\right), \quad (90,8)$$

wo $T_g = 4830^\circ$ die Grenztemperatur der Sonne bedeutet. Wir nehmen nun an, daß die Materie im Fleck aus einer Tiefe $\tau = \tau_0$ mit der Temperatur $T_0 = T_g \left(1 + \frac{3}{2} \tau_0\right)^{\frac{1}{4}}$ emporsteigen und sich dabei adiabatisch abkühlen soll. Durch diese Grenzbedingung wird C mit der „Tiefe des Flecks“ τ_0 verknüpft; man erhält aus (90,7 u. 8)

$$C = T_0 \left[\frac{2}{3} \left(\frac{T_0^4}{T_g^4} - 1 \right) \right]^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (90,9)$$

Da die *Gesamtstrahlungsergiebigkeit* proportional T^4 geht, so können wir das *Intensitätsverhältnis Fleck : Photosphäre* für die Gesamtstrahlung als *Funktion des Austrittswinkels* ϑ nach (28,8) leicht berechnen. Es wird

$$\frac{I^*(0, \vartheta)}{I(0, \vartheta)} = \frac{\int_0^\infty C^4 \cdot \tau^{\frac{4(\gamma-1)}{\gamma}} \cdot e^{-\tau \sec \vartheta} d\tau \sec \vartheta}{\int_0^\infty T_g^4 \left(1 + \frac{3}{2} \tau\right) e^{-\tau \sec \vartheta} d\tau \sec \vartheta} = \left(\frac{C}{T_g}\right)^4 \cdot \Gamma\left(\frac{5\gamma-4}{\gamma}\right) \cdot \frac{\cos^\gamma \vartheta}{1 + \frac{3}{2} \cos \vartheta}. \quad (90,10)$$

Da wir von γ zunächst nur wissen, daß es $\cong 5/3$ ist, so wollen wir für einige γ -Werte die Temperatur T_0 an der Basis des Flecks aus dem beobachteten Verhältnis $I^*(0, 0)/I(0, 0) \approx 0,42$ berechnen. Aus (90,9 u. 10) ergibt sich, wenn man noch bedenkt, daß sicher $T_0 \gg T_g$ wird

$$\frac{I^*(0, 0)}{I(0, 0)} = \frac{\Gamma\left(\frac{5\gamma-4}{\gamma}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4(\gamma-1)}{\gamma}} \cdot \frac{5}{2}} \cdot \left(\frac{T_0}{T_g}\right)^{-\frac{4(3\gamma-4)}{\gamma}} \approx 0,42. \quad (90,11)$$

Mit $T_g = 4830^\circ$ findet man hieraus für

$$\gamma = \quad 5/3 \qquad 7/5 \qquad 4/3$$

bzw.

$$T_0 = 7200^\circ \qquad 11\,200^\circ \qquad \infty,$$

d. h. γ muß (solange man annimmt, daß es konstant ist) zwischen $5/3$ und $4/3$ liegen.

Die nach (90,10) berechnete Winkelabhängigkeit des Intensitätsverhältnisses I^*/I — bezogen auf seinen Wert für \odot -Mitte ($\cos \vartheta = 1$) als Einheit — gibt die folgende Tabelle 67.

Wie man sieht, müßten nach der „adiabatischen“ Theorie die Flecke nach dem Sonnenrande zu erheblich dunkler werden. Dies gilt natürlich nicht nur für die Gesamtstrahlung, sondern, wie MINNAERT und WANDERS (s. S. 360) durchgerechnet² haben, auch für die spektral zerlegte Strahlung. Wir müssen also

¹ Wir nehmen an, daß der Absorptionskoeffizient im Fleck und der Photosphäre denselben Wert hat. Sonst müßten wir die optischen Tiefen in (90,7 u. 8) voneinander unterscheiden, was gegebenenfalls leicht durchzuführen wäre.

² Die Übertragung von Gl. (31,7) auf dieses Problem bedarf wohl keiner Erläuterung.

schließen, daß die Annahme adiabatischen Gleichgewichtes den Beobachtungen nicht gerecht wird und MINNAERT und WANDERS haben überdies gezeigt, daß auch keine einigermaßen vernünftige Abänderung der Ausgangsannahmen zum Ziel führt. Wir sehen uns vielmehr zu dem Schluß gezwungen, daß die zugänglichen Schichten der Flecke sich im *Strahlungsgleichgewicht* befinden.

Zu demselben Schluß führt auch die Berechnung der spektralen Energieverteilung. Da bei adiabatischem Gleichgewicht die Temperaturabnahme mit der Höhe nach (90,7) für $\gamma > 4/3$ *rascher* erfolgt, als bei Strahlungsgleichgewicht nach (90,8), so ist in einem „adiabatischen“ Fleck die — nach unseren früheren Ergebnissen — vorzugsweise aus höheren Schichten stammende langwellige Strahlung gegenüber der aus größeren Tiefen empordringenden kurzwelligen benachteiligt. Das heißt die nach der adiabatischen Theorie berechnete Kurve der relativen Energieverteilung (analog Fig. 121) würde nach dem Ultrarot hin zu langsam ansteigen. Die numerischen Rechnungen von MINNAERT und WANDERS (s. S. 360) zeigen, daß die Differenzen „Beobachtung—adiabatische Theorie“ weit außerhalb der zulässigen Grenzen liegen.

Tabelle 67. Mitte-Rand-Variation des Intensitätsverhältnisses der Gesamtstrahlung Sonnenfleck: Photosphäre; berechnet unter der Annahme adiabatischen Gleichgewichtes im Fleck.

$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$	$\cos \vartheta = 1$ $\sin \vartheta = 0$	0,7 0,795	0,4 0,916
$I^*(0, \vartheta)/I(0, \vartheta)$	1	0,69	0,36
$I^*(0, 0)/I(0, 0)$	1	0,81	0,55
	1	0,85	0,62

B. Das Spektrum der Sonnenflecke. Nachdem wir aus den Beobachtungen des kontinuierlichen Spektrums und der Gesamtstrahlung der Flecke mit Sicherheit schließen konnten, daß der *Energietransport* im Fleck in genau derselben Weise erfolgt, wie in der normalen Sonnenatmosphäre, wenden wir uns der Deutung der *FRAUNHOFER-Linien des Fleckenspektrums* zu.

Wir haben schon in Kap. IV uns überzeugt, daß die Theorie der *thermischen Ionisation und Anregung* in qualitativer Hinsicht allen Erscheinungen gerecht wird und wollen uns daher sogleich mit den quantitativen Problemen befassen.

Da Messungen von *Linienkonturen* in Fleckenspektren noch nicht vorliegen, so hat CH. E. MOORE [1665] an Mt. WILSON zunächst die Stärke aller Linien atomaren Ursprunges¹ in der ROWLANDSchen *Skala* geschätzt und mit Hilfe der *Kalibrierungskurven* von RUSSELL, ADAMS und MOORE (vgl. Abschn. 69) in „wirksame Atomzahlen“ NHf bzw. bei den starken Linien genauer $NHf \frac{\gamma}{\nu}$ übergeführt. Dabei ist jedoch zu beachten, daß die Eichkurven für Photosphäre und Fleck *nicht* vollständig übereinstimmen. Im Fleck wird nämlich der Dopplerkern der Linien durch den ZEEEMAN-Effekt aufgespalten oder — bei schwachen Feldern — verbreitert. Andererseits wird aber durch die bei den Mt. Wilson-Aufnahmen stets gebrauchte Polarisationsapparatur ein Teil der Linie entfernt. Miss MOORE hat beiden Einflüssen durch eine entsprechende Korrektur Rechnung zu tragen versucht. Weiterhin dürfte aber auch bei den starken Linien, sofern sie durch Stoßdämpfung beeinflußt werden, infolge der Verschiedenheit der Drucke (s. u.) die Dämpfungskonstante im Fleck bzw. der Photosphäre verschieden sein. Dieser letztere Effekt war bei der Entstehung der MOORESchen Arbeit noch nicht bekannt und läßt sich auch heute noch nicht vollständig erfassen. Er dürfte jedoch glücklicherweise für das folgende von untergeordneter Bedeutung sein, da es sich größtenteils um schwache Linien handelt.

¹ Von den *Bandenlinien*, auf die wir noch zurückkommen, können diese dadurch getrennt werden, daß letztere keinen merklichen ZEEEMAN-Effekt zeigen.

Aus diesen Atomzahlen — statt NHf bzw. $NHf \frac{\gamma}{\gamma}$ schreiben wir im folgenden kurzweg N — kann man nun nach dem Vorgang von RUSSELL die mittlere Temperatur im Fleck T^* bezogen auf die der Photosphäre T bestimmen, ferner das Verhältnis des Elektronendruckes im Fleck P_e^* zu dem in der Photosphäre P_e und das Verhältnis der entsprechenden wirksamen Schichtdicken $\overline{NH^*}/\overline{NH} = C$.

Es seien¹ $N_{r,s}^*$ bzw. $N_{r,s}$ die wirksamen Anzahlen r -fach ionisierter Atome eines bestimmten Elementes im Anregungszustand s mit der Anregungsspannung $\chi_{r,s}$ für Fleck bzw. Photosphäre. Die entsprechenden Anzahlen der Atome im Grundzustand seien $N_{r,0}^*$ bzw. $N_{r,0}$. Dann gilt nach der BOLTZMANNschen Formel im Fleck:

$$\left. \begin{aligned} \log \frac{N_{r,s}^*}{N_{r,0}^*} &= \log \frac{g_{r,s}}{g_{r,0}} - \chi_{r,s} \cdot \frac{5040}{T^*} \\ \text{und in der Photosphäre:} \\ \log \frac{N_{r,s}}{N_{r,0}} &= \log \frac{g_{r,s}}{g_{r,0}} - \chi_{r,s} \cdot \frac{5040}{T} \end{aligned} \right\} \quad (90,12)$$

und folglich

$$\log \frac{N_{r,s}^*}{N_{r,s}} = \log \frac{N_{r,0}^*}{N_{r,0}} - \chi_{r,s} \cdot 5040 \left(\frac{1}{T^*} - \frac{1}{T} \right). \quad (90,13)$$

Trägt man also das aus den Beobachtungen für verschiedene Linien derselben Ionisationsstufe r bestimmten $\log \frac{N_{r,s}^*}{N_{r,s}}$ als Funktion der Anregungsspannung $\chi_{r,s}$ auf, so muß man eine Gerade² erhalten, deren Neigung den Wert von $\Delta\Theta = 5040 \left(\frac{1}{T^*} - \frac{1}{T} \right)$ ergibt. CH. E. MOORE findet so

$$\Delta\Theta = 0,190 \pm 0,010, \quad (90,14)$$

was unter der Annahme einer mittleren Photosphärentemperatur³ von $T = 5740^\circ \text{K}$ auf eine Fleckentemperatur von $T^* = 4720^\circ \text{K}$ führt in guter Übereinstimmung mit den unter A. ermittelten Werten.

Ähnlich wie in (90,12) schreiben wir nun auch die SAHASche Gleichung⁴ für die Ionisation $r+1 \rightleftharpoons r$ mit der Ionisierungsspannung χ_r in Fleck und Photosphäre an und zwar jeweils für die Zahl der Atome im Grundzustand.

Fleck:

$$\log \frac{N_{r+1,0}^*}{N_{r,0}^*} = \log \frac{2 \cdot g_{r+1,0}}{g_{r,0}} - \chi_r \cdot \frac{5040}{T^*} + \frac{5}{2} \log T^* - 0,48 - \log P_e^* \quad (90,15)$$

Photosphäre:

$$\log \frac{N_{r+1,0}}{N_{r,0}} = \log \frac{2 \cdot g_{r+1,0}}{g_{r,0}} - \chi_r \cdot \frac{5040}{T} + \frac{5}{2} \log T - 0,48 - \log P_e,$$

woraus sofort folgt

$$\log \frac{N_{r+1,0}^*}{N_{r+1,0}} \cdot \frac{N_{r,0}}{N_{r,0}^*} = -\chi_r \cdot 5040 \left(\frac{1}{T^*} - \frac{1}{T} \right) + \frac{5}{2} \log \frac{T^*}{T} - \log \frac{P_e^*}{P_e}. \quad (90,16)$$

¹ Wir gebrauchen durchweg die Bezeichnungsweise von Kap. IV, Abschn. 21.

² CH. E. MOORE findet, daß die von RUSSELL für das normale Sonnenspektrum behaupteten sog. Abweichungen von thermischem Gleichgewicht sich für $\chi_{r,s} < 5 \text{ V}$ hier nicht bemerkbar machen. Die auffällig geringe Intensitätsänderung der Wasserstofflinien im Fleck erscheint jedoch verdächtig.

³ Ein etwas niedrigerer Wert von $\sim 5600^\circ$ wäre wohl besser, wir wollen aber hier die Zahlenwerte der Originalarbeit beibehalten, da die Unterschiede ziemlich unwichtig sind.

⁴ MISS MOORE rechnet mit einer von A. PANNEKOEK abgeänderten Ionisationsgleichung, welche den Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht Rechnung tragen soll. Aus den schon in Kap. IV auseinandergesetzten Gründen können wir darin keine Verbesserung erblicken. Die Ergebnisse sind in beiden Fällen praktisch dieselben.

Die links stehenden Verhältnisse $\frac{N_{r+1,0}^*}{N_{r+1,0}}$ bzw. $\frac{N_{r,0}^*}{N_{r,0}}$ können nun entweder direkt oder mit Hilfe von (90,13) durch Extrapolation auf χ_r bzw. $r+1, s \rightarrow 0$ bestimmt werden, indem man dieselben Linien im Fleck bzw. der Photosphäre vergleicht. Man kann daher das Verhältnis der Elektronendrucke von Fleck zu Photosphäre bestimmen und erhält nach CH. E. MOORE

$$\frac{P_e^*}{P_e} = 0,60 \pm 0,10. \quad (90,17)$$

Durch Zusammenfassen aller vorkommenden Ionisationsstufen kann man endlich leicht die Gesamtzahl der Atome irgendeines Elementes über 1 cm^2 der Oberfläche von Fleck bzw. Photosphäre ermitteln und hat damit auch das Verhältnis C der *Gesamtzahlen aller Atome* \overline{NH} über 1 cm^2 des Sonnenfleckes bzw. der Photosphäre. CH. E. MOORE findet so

$$C = \frac{\overline{NH}^*}{\overline{NH}} = 1,70 \pm 0,11. \quad (90,18)$$

Die in den drei Größen $\Delta\Theta$, P_e^*/P_e und C der Gl. (90,14, 17 u. 18) zusammengefaßten Ergebnisse des *Vergleiches von Flecken- und Photosphärenspektrum* lassen sich nun, wie auch CH. E. MOORE (s. S. 365) in ähnlicher Weise ausgeführt hat, mit Hilfe der *Theorie* in schönster Weise untereinander verknüpfen: Da sich auch der Fleck im Strahlungsgleichgewicht befindet, so können wir Fleck und Photosphäre wie zwei Sternatmosphären behandeln, die zwar *dieselbe* Schwerebeschleunigung $\log g = 4,437$, aber *verschiedene* Temperaturen haben, nämlich 4720 K° bzw. 5740 K° . Die zugehörigen *Elektronendrucke* können wir dann ohne weiteres aus unserer Fig. 84 ablesen. Insbesondere läßt sich das *Verhältnis* der P_e von Fleck und Photosphäre recht sicher bestimmen zu

$$\left(\frac{P_e^*}{P_e}\right)_{\text{ber.}} = 0,55. \quad (90,19)$$

In derselben Weise liest man das $\Delta\Theta = 0,19$ entsprechende Verhältnis der \overline{NH} aus Fig. 83 ab zu

$$C_{\text{ber.}} = 1,69. \quad (90,20)$$

Die ausgezeichnete Übereinstimmung beider Zahlenwerte mit den Beobachtungen Gl. (90,17 u. 18) dürfen wir als eine hervorragende Bestätigung der quantitativen Methoden und Ansätze der neueren Astrophysik betrachten. Eine photometrische Untersuchung der Linienkonturen und ihrer Mitte-Rand-Variation in den Sonnenflecken verspricht darüber hinaus die interessantesten Aufschlüsse über deren Aufbau.

In ähnlicher Weise wie Miss MOORE die Atomspektren, hat R. S. RICHARDSON [1675—76] die *Bandenspektren* herangezogen, um die Druck- und Temperaturunterschiede zwischen den Flecken und ihrer Umgebung zu bestimmen. Da wir — aus den schon auseinandergesetzten Gründen — in diesem Buch auf Probleme der Molekülspektren im allgemeinen *nicht* eingehen wollen, so geben wir an dieser Stelle wenigstens eine tabellarische Übersicht (Tabelle 68) der auf der Sonne (mehr oder weniger sicher) identifizierten Banden.

Die *Temperatur* kann nun aus Beobachtungen des Intensitätsverlaufes in einer Bande auf Grund folgender Überlegung ermittelt werden: Die relativen *Übergangswahrscheinlichkeiten* wachsen mit der Rotationsquantenzahl des Ausgangszustandes in einer nach der Quantenmechanik berechenbaren Weise an. Andererseits nimmt die *Besetzungszahl* dieser Zustände nach der BOLTZMANN-Formel in bekannter Weise mit wachsender Anregungsenergie/ kT ab. Sowohl

der Verlauf von NHf mit der Rotationsquantenzahl wie auch die Lage des Intensitätsmaximums einer Bande gestatten daher direkt eine Bestimmung der Temperatur.

R. BIRGE [1619], der (1922) dieses Verfahren zuerst auf die CN-Banden anwandte, erhielt für die Sonne die viel zu niedrige Temperatur $T \approx 4000^\circ \text{K}$. Wie M. MINNAERT [1663] später zeigte, erhöht sich dieser Wert auf mindestens

5000° , wenn man den inzwischen gemachten Fortschritten der Theorie der Bandenspektren und der FRAUNHOFER-Linien Rechnung trägt.

Tabelle 68. Banden in den Spektren der Sonnenfleckennormalen Sonnenoberfläche nach R. S. RICHARDSON [1675/6]. (Dort weitere Literatur.) .. sicher; . wahrscheinlich vorhanden; ? unsicher; — nicht vorhanden; freier Platz: keine Beobachtungen.

Molekül	Abschattung R = rot; V = viol.	Wichtige Bandenköpfe $\lambda \text{ \AA}$.	Vorkommen in	
			Fleck	Sonne
AlH	R	4546	.	—
		4671	.	—
		4752	.	—
CaH	V	6902,62	..	—
		3443
CH	V	3900		
		4314,1 (G)		
MgH	V	5210,95
		3360,04
NH	R	3063,71
OH	R	4143,89	..	.
SiH	R	4647,96	..	—
		4842,26		
BO	R	5079,34	..	—
		4363,4	..	—
TiO	R	4612,7		
		5040,1	..	—
ZrO	R	4954,55	..	—
		5166,86	.	—
C ₂	V	6473,66	.	—
		5165,22
CN	V	3590,33
		3883,40		
H ₂	R	4215,96		
		6018,29	?	—
SiF	R	6327,07		
		5760,37		
		4368,22	..	.
		4400,50		

Neuerdings hat nun R. S. RICHARDSON [1675] mit Hilfe der C₂(Swan-)Bande $\lambda 5165$ die Temperaturen der Sonnenflecke und der normalen Sonnenatmosphäre („Sonne“) bestimmt. Da nur geschätzte Intensitäten vorliegen, so wendet er, um die Verbindung mit der Theorie herzustellen, folgende Kunstgriffe an:

I. Methode: Die „theoretischen“ Intensitäten wurden für verschiedene Temperaturen zwischen 3800° und 6400° berechnet und als Funktion der geschätzten Beobachtungswerte aufgetragen. Nur für die „richtige“ Temperatur stimmen die beiden Kurvenzweige, die den Linien vor bzw. hinter dem Maximum entsprechen, miteinander überein.

II. Methode: Bestimmung des Maximums.

III. Methode: Umrechnung der geschätzten Intensitäten auf NHf mit Hilfe der Kalibrierungskurve von RUSSELL, ADAMS und MOORE und direkter Vergleich mit der Theorie.

Offensichtlich gibt Methode III, bei der alle Beobachtungen mit gleichem Gewicht eingehen, die genauesten Ergebnisse, II aus analogen Gründen die ungenauesten. Wir stellen sie kurz zusammen:

	T^* (Sonnenfleck)	T (Sonne)
Methode	I . . . $4900 \pm 600^\circ \text{K}$	$6000 \pm 700^\circ \text{K}$
	II . . . 4900 ± 750	5700 ± 1600
	III . . . 4500 ± 400	5300 ± 400

Der Temperaturunterschied bzw. $\Delta\Theta = 5040 \left(\frac{1}{T^*} - \frac{1}{T} \right)$ ist natürlich viel sicherer als die Werte von T^* bzw. T einzeln. Im Mittel geben RICHARDSONs Zahlen den mit Miss MOOREs Ergebnis (90,14) $\Delta\Theta_M = 0,19 \pm 0,10$ gut übereinstimmenden Wert

$$\Delta\Theta_R = 0,17. \tag{90,21}$$

R. S. RICHARDSON [1676] hat weiterhin bemerkt, daß die CH-Bande bei λ 4350 im Fleck und seiner Umgebung praktisch dieselbe Intensität hat. Indem er daraus schließt, daß beidemal der *Prozentsatz* undissoziierter, angeregter CH-Moleküle derselbe sei (was wegen (90,18) nicht ganz korrekt ist) erhält er aus der Betrachtung des *Dissoziationsgleichgewichtes* $C + H \rightleftharpoons CH$ das Verhältnis der Drucke von $H + C + CH$ (da ersterer bei weitem überwiegt, könnte man ebensogut sagen, der Gasdrucke) im Fleck und seiner Umgebung. Mit $T^* = 4750^\circ$ und $T = 5080^\circ$ K (wohl zu niedrig) findet er so

$$(P_{H+C+CH})_{\text{Fleck}} / (P_{H+C+CH})_{\text{Sonne}} = 0,5. \quad (90,22)$$

C. Die Strömungsvorgänge im Sonnenfleck. EVERSHERD-Effekt. Nachdem wir uns an Hand eines umfangreichen Beobachtungsmaterials überzeugt haben, daß die Sonnenflecke (1) kühler sind, als ihre Umgebung und (2) sich in ihren zugänglichen Teilen im Strahlungsgleichgewicht befinden, wenden wir uns der *hydrodynamischen* Seite des Fleckenproblems zu:

J. EVERSHERD [1630] entdeckte 1909 bei der spektroskopischen Beobachtung von Flecken am Sonnenrand Linienverschiebungen, welche sich in einfachster Weise auf *Strömungen* zurückführen ließen, die *tangential zur Sonnenoberfläche* und nahezu *radial zur Achse des Sonnenflecks* verliefen. 1913 hat dann C. E. ST. JOHN [1646] insbesondere die schon von EVERSHERD bemerkte *Abhängigkeit* der Dopplerverschiebung bzw. Strömungsgeschwindigkeit und -richtung *von der Intensität* der benutzten FRAUNHOFER-Linien genauer studiert. Während die *schwachen Metalllinien* (ROWLAND-Intensität $-1, -2$) eine *Auswärtsströmung* mit ~ 2 km/sek anzeigen, lassen viele der *starken Metalllinien* (ROWLAND-Intensität ~ 20) nahezu *keinen* Dopplereffekt erkennen. Die *stärksten Linien* endlich (wie NaD, H und K, BALMER-Linien) ergeben eine *Einwärtsströmung* mit bis zu 3 km/sek. Diese Unterschiede lassen sich nach ST. JOHN dahingehend deuten, daß die schwachen Linien tieferen Niveaus, die starken Linien höheren Niveaus angehören. Wir sahen schon, daß diese Annahme auch in die Messungen der Rotationsdauer der Sonne mittels Dopplereffektes (ADAMS u. a.) eine gewisse Ordnung bringt und wir werden später sehen, daß sie sich auch bei der Deutung der Spektroheliogramme im großen und ganzen bewährt¹. Man kann also zusammenfassend sagen: *In tieferen Schichten strömt die Materie aus dem Fleck, in höheren Schichten in den Fleck.*

In Analogie zu den Zyklonen und Antizyklonen der Erdatmosphäre sollte man erwarten, daß auch die Sonnenflecke eine *Wirbelbewegung* erkennen ließen. Die Beobachtungen von EVERSHERD und ST. JOHN zeigten zunächst nichts derartiges.

Dagegen hat G. E. HALE [1636] schon früh auf *Spektroheliogrammen*, welche mit der H_α -Linie aufgenommen waren, eine Wirbelstruktur erkannt, seine berühmten „*solar vortices*“.

Langjährige Beobachtungsreihen zeigten [1640], daß der Umlaufsinn dieser Wirbel in 82% aller Fälle² dem Gesetz der terrestrischen Zyklone (Einströmung!) folgt. Das heißt auf der N-Halbkugel geht die Drehung *entgegen*, auf der S-Halbkugel *mit* dem Sinn des Uhrzeigers. Eine Beziehung zwischen der magnetischen Polarität eines Fleckes und der Umlaufrichtung dieses Wirbels in den höheren Schichten besteht nicht. Spektroheliographische und insbesondere

¹ Nicht statthaft dagegen ist — wie wir heute sicher wissen — die Heranziehung der Beobachtungen des *Flashspektrums* als Stütze dieser Auffassung. Die „*Höhe*“ einer Linie im Flashspektrum ist in erster Linie durch ihre *Intensität* bestimmt. Wir verzichten daher auf eine Wiedergabe der bekannten Schichtungsbilder und -tabellen, denen höchstens eine *qualitative* Bedeutung zukommen dürfte.

² Da in Fleckengruppen usw. das Erkennen des Drehsinnes oft schwierig ist, so kann man dieses Ergebnis als praktisch eindeutig betrachten.

die neueren *spektrohelioskopischen Beobachtungen* von G. E. HALE [1642] und seinen Mitarbeitern legen den Gedanken nahe, daß das Einströmen der Materie in den höheren Schichten der Flecke derselben Natur ist, wie die Anziehung von Protuberanzen (Filamenten) durch die Flecke. (Wir werden sehen, daß man in vieler Hinsicht die höheren Schichten der Sonnenatmosphäre bzw. Chromosphäre als einen „Wald“ kleiner Protuberanzen auffassen kann.) Wenn man nun annimmt, daß die Protuberanzen durch *Strahlungsdruck* getragen bzw. beschleunigt werden (Abschn. 97), so wird man auch schließen, daß die Materie der höchsten Fleckenschichten durch den „Strahlungsüberdruck“ der umgebenden Photosphäre nach dem Fleck hin getrieben wird. Zusammenfassend können wir also feststellen, daß *die mit Hilfe der BALMER-Linien, der Ca⁺-Linien H und K usw. beobachteten Strömungen in den höchsten Schichten der Sonnenflecke nur eine sekundäre Erscheinung darstellen, die durch das Strahlungsdefizit der Flecke hervorgerufen wird.*

Wie wir schon bemerkten, konnten seinerzeit EVERSHERD und ST. JOHN an Hand der Dopplereffekte der schwächeren Metalllinien in den *tieferen Schichten* der Sonnenflecke keine Anzeichen einer Wirbelbewegung, sondern nur eine radiale Auswärtsströmung entdecken. Auch die Spektroheliogramme ließen nichts erkennen. 1926—30 hat nun G. ABETTI [1611] den EVERSHERD-Effekt der Metalllinien nochmals an 26 Fleckengruppen mit radial und tangential zum Sonnenrand gestelltem Spalt untersucht und G. CALAMAI [1624] hat seine Messungen genauer analysiert. Es zeigte sich zunächst, daß die *radiale* Geschwindigkeitskomponente zwischen 0 und 6 km/sek variiert, also viel stärker, als man früher annahm. Ihr Mittelwert von 1,5 km/sek stimmt befriedigend mit den älteren Messungen überein. Daneben aber findet ABETTI im Gegensatz zu ST. JOHN und EVERSHERD auch eine *Tangentialkomponente* der Geschwindigkeit von 0 bis 3 km/sek, mit Mittel ~ 1 km/sek. Der *Umlaufsinn* dieser tieferliegenden Wirbel war während des angegebenen Zeitraumes dem der „Wasserstoff“- bzw. „Kalzium“-Wirbel stets *entgegengesetzt*, also *antizyklonisch*. Dies paßt ausgezeichnet dazu, daß wir es hier mit *Ausströmung* zu tun haben: das Vorzeichen der *Corioliskraft* wird infolgedessen gegenüber dem zuerst diskutierten Fall umgekehrt! Um sicher entscheiden zu können, ob nun *diese* Wirbel irgendwie mit dem Magnetfeld der Flecke zusammenhängen, müßte man untersuchen, ob ihr Umlaufsinn *et. par.* in zwei aufeinanderfolgenden 11,5jährigen Zyklen sich umkehrt. Die angeführten dynamischen Überlegungen lassen erwarten, daß dies nicht zutrifft. Wir müssen also wohl annehmen, daß der *Ursprung der Magnetfelder* der Sonnenflecke wie auch deren eigentlicher „Antrieb“ in Schichten zu suchen sind, die mit optischen Beobachtungsmethoden nicht mehr erfaßt werden können.

D. Abschätzung des Energietransportes durch Konvektion bzw. Strahlung im Sonnenfleck¹. Die beobachtete Größe des EVERSHERD-Effektes verhilft uns, wie H. SIEDENTOPF [1684] und T. G. COWLING [1627] bemerkt haben, zu einem Verständnis der von M. MINNAERT und A. J. M. WANDERS (vgl. A.) entdeckten Tatsache, daß die beobachtbaren Schichten der Sonnenflecke sich im *Strahlungsgleichgewicht* befinden. Schätzen wir ab, wieviel Energie in einem Fleck pro cm² und sek einerseits durch *Konvektion*, andererseits durch *Strahlung* transportiert wird!

Der *Energieinhalt pro Gramm* der aufsteigenden Gase ist nach der kinetischen Theorie von der Größenordnung

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{R}{\mu} \cdot T, \quad (90,23)$$

¹ Auf die tiefer liegenden Probleme der Konvektion in Sternatmosphären werden wir erst in Abschn. 93 u. 94 zu sprechen kommen.

wo R die Gaskonstante und μ das Molekulargewicht bedeutet. Steigt nun die Materie bei der Dichte ρ mit einer Geschwindigkeit von u cm/sek empor, so ist die pro cm^2 und sek transportierte Masse $\rho \cdot u$ und die mitgeführte Energie höchstens

$$\sim \frac{3}{2} \frac{R}{\mu} \cdot T \cdot \rho u. \tag{90,24}$$

Nach der Zustandsgleichung ist andererseits der Gasdruck $p = \frac{R}{\mu} \cdot T \cdot \rho$ und der *Energietransport durch Konvektion* wird daher

$$\pi F_K \leq \frac{3}{2} p \cdot u. \tag{90,25}$$

Setzen wir $u = 10^5$ cm/sek und nach Tabelle 36 $p = 3000$ Bar, so ergibt sich

$$\pi F_K \leq 5 \cdot 10^8 \text{ erg cm}^{-2} \text{ sek}^{-1}. \tag{90,26}$$

Andererseits ist der *Strahlungsstrom im Fleck* etwa $0,42 \times$ dem der Photosphäre, also nach Kap. II

$$\left. \begin{aligned} \pi F_{\text{Str.}} &\sim 2,5 \times \\ &\times 10^{10} \text{ erg cm}^{-2} \text{ sek}^{-1} \end{aligned} \right\} \tag{90,27}$$

und folglich $F_K \ll F_{\text{Str.}}$. Mit anderen Worten: *Der Energietransport im Fleck erfolgt vorwiegend durch Strahlung*, wie dies die Beobachtungen fordern.

E. Das Magnetfeld der Sonnenflecke. HALEs Klassifikation. Entstehung, Bau und Eigenbewegungen der Flecke und Fleckengruppen. Im Jahre 1908 entdeckte G. E. HALE [1636], daß in den Sonnenflecken mächtige Magnetfelder herrschen, deren Stärke oft einige Tausend Gauß erreicht. Wie schon HALE erkannte, deuteten zunächst die ZEEMAN-Aufspaltungen der schwachen FRAUNHOFER-Linien auf größere Feldstärken hin, als die der starken Linien. HALE und ST. JOHN nahmen daher an, daß die Feldstärke in den Flecken mit der Höhe rasch abnehme. 1934 hat dann R. B. KING [1649] den Zusammenhang von ZEEMAN-Aufspaltung und Linienintensität genauer untersucht mit dem Ergebnis, daß nicht einmal sicher gesagt werden kann, ob der fragliche Effekt nicht ganz oder teilweise auf der Mitwirkung von Streulicht und Überlagerung der verschiedenen ZEEMAN-Komponenten beruht.

Die aus den charakteristischen Polarisationsverhältnissen der ZEEMAN-Aufspaltungen erschlossene durchschnittliche *Richtungsverteilung der Kraftlinien* zeigt folgende kleine Übersicht:

Abstand von der Fleckenmitte	0	3	6	9
(Fleckenradius = 10 gesetzt)				
Winkel zwischen Kraftlinien und Sonnenradius . . .	0°	18°	49°	73°

Entsprechende Messungen der *Feldstärke* scheinen nicht vorzuliegen. Dagegen hat S. B. NICHOLSON [1667] die Abhängigkeit der Feldstärke in der Mitte eines Fleckes von dessen *Fläche* untersucht. Das Ergebnis zeigt seine Fig. 123, wobei allerdings noch zu klären wäre, inwieweit die Feldstärken kleiner Flecke durch

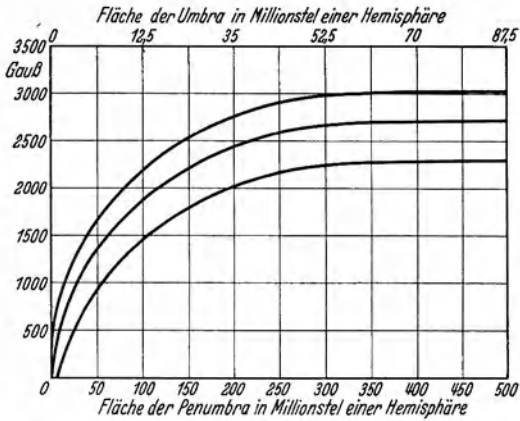


Fig. 123. Feldstärke in der Mitte der Sonnenflecke als Funktion ihrer Fläche; nach S. B. NICHOLSON [1667]. Die äußeren Kurven zeigen die durchschnittlichen Abweichungen von der mittleren. Die Fläche der Umbra (obere Skala) ist im Mittel $0,175 \times$ der Fläche der Penumbra (untere Skala).

photosphärisches Streulicht scheinbar verringert werden. Bei großen Flecken scheint sich die Feldstärke — ähnlich wie die Temperatur — nur wenig mit dem Durchmesser zu ändern.

Trotzdem auf die *Erklärung* der Magnetfelder der Sonnenflecke wie auch des allgemeinen Magnetfeldes der Sonne viel Scharfsinn verwandt worden ist, haben diese Versuche bis jetzt noch zu keinerlei Ergebnis geführt. Wir begnügen uns daher mit einem Hinweis auf zwei der wichtigsten Arbeiten von S. ROSSELAND [1678] bzw. T. G. COWLING [1626].

Einen unmittelbaren Einblick in die Natur der Flecke und insbesondere die Zusammenhänge innerhalb einer Fleckengruppe gewährt die gleichfalls von G. E. HALE und seinen Mitarbeitern [1636, 39, 41] begründete *Magnetische Klassifikation der Sonnenflecke*. Sie betrachtet als „Urphänomen“ die sog. *bipolare Fleckengruppe*, zwei benachbarte Flecke entgegengesetzter Polarität (deren Gesetz wir schon besprochen), deren Verbindungslinie nahezu parallel dem Äquator verläuft. Andere Erscheinungsformen lassen sich an diesen Urtyp anschließen, wenn man die *Flocculi* von Kalziumspektroheliogrammen (*H* und *K*) zu Hilfe nimmt: Vielfach wird der eine Fleck nur durch das zugehörige Feld der *Flocculi* vertreten. Oder man beobachtet nur ein lokales Magnetfeld ohne erkennbare Verdunkelung. In solchen Fällen reicht offenbar die Störung nicht bis zur Sonnenoberfläche; HALE spricht daher von „*unsichtbaren Flecken*“.

Nach diesen Vorbemerkungen dürfte der Sinn der folgenden *Klassifikationsvorschriften* [1639 u. 41]¹ leicht verständlich sein. Die Beobachtungsergebnisse von M. T. WILSON werden in dieser abgekürzten Form fortlaufend in den *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* veröffentlicht.

Unipolare Flecke. Einzelflecke oder Gruppen derselben magnetischen Polarität.

(α) Verteilung der Kalziumflocculi vor und hinter² der Gruppe einigermaßen symmetrisch.

(αp) Die Fleckengruppe geht der Hauptmasse der umgebenden Flocculi voraus („*preceding*“).

(αf) Die Fleckengruppe folgt der Hauptmasse der umgebenden Flocculi.

Bipolare Flecke. Einfachste Form: Zwei Flecke entgegengesetzter Polarität, deren Verbindungslinie nahezu parallel zum Äquator liegt. Gewöhnlich jedoch ein Strom von Flecken, dessen vordere bzw. hintere Glieder entgegengesetzte Polarität haben. Der Wechsel der Polarität findet meist (aber nicht notwendig) nahe der Mitte des Stromes statt.

(β) Vordere und hintere Gruppe (bzw. Flecke) etwa flächengleich.

(βp) Vordere Gruppe bildet die Hauptkomponente } (Häufig begleitet von „un-

(βf) Hintere Gruppe bildet die Hauptkomponente } sichtbaren“ Flecken)

($\beta \gamma$) Bipolar; ohne deutliche Trennungslinie zwischen den Gruppen beider

Polaritäten. Vordere oder hintere Gruppe evtl. begleitet von kleinen Flecken entgegengesetzter Polarität.

Multipolare Flecke (γ). Gruppen, in denen die Verteilung beider Polaritäten keine Gesetzmäßigkeit erkennen läßt.

Den *Prozentsatz der Fleckengruppen*, welche auf die verschiedenen Klassen entfallen, gibt die folgende Tabelle nach G. E. HALE und S. B. NICHOLSON [1644], die auf den Beobachtungen von 1915—24 inkl. basiert (2174 Gruppen). Nur 7% aller Gruppen konnten nicht klassifiziert werden.

¹ Bezüglich Abbildungen verweisen wir auf diese beiden Abhandlungen sowie den Handbucharikel von G. ABETTI.

² Die Bezeichnungen „vor“ und „hinter“ sind hier bezogen auf den Sinn der Sonnenrotation. Leider gibt es keinen prägnanten Ersatz für das englische „preceding“ und „following“.

Klasse	α	αp	αf	β	βp	βf	$\beta \gamma$	γ
Prozentsatz . .	14	20	4	21	29	8	3	1

Im Laufe des 11,5-jährigen Zyklus erfährt dieses Verteilungsgesetz *keine* merkliche Änderung.

Aus dieser Statistik geht wiederum hervor, daß die *bipolaren Gruppen*, denen ja vom physikalischen Standpunkt aus betrachtet auch die Mehrzahl der αp und αf zuzurechnen wäre, den eigentlichen Grundtyp bilden. Es überrascht daher nicht, daß sie auch sonst eine Reihe augenfälliger Gesetzmäßigkeiten aufweisen.

Betrachten wir mit S. B. NICHOLSON [1666] u. a. zunächst die Entwicklung einer typischen bipolaren Gruppe!

Bei ihrem *Erscheinen* besteht diese aus zwei kleinen Flecken oder Gruppen entgegengesetzter Polarität, die bei nahezu gleicher heliographischer Breite etwa 3—4° in Länge voneinander entfernt sind. Der „vordere“ (westliche) Fleck entsteht oft schon kurz *vor* dem „hinteren“. Während der folgenden Tage *wachsen* die Hauptflecke der Gruppe rasch und es bilden sich häufig kleinere Flecke in der Umgebung und zwischen den Hauptflecken. Währenddessen bewegen sich die beiden Hauptkomponenten auseinander, bis ihr Abstand in Länge etwa 10° beträgt.

Nun beginnt der *Zerfall* der Fleckengruppe. Zunächst verschwindet der schwächere „hintere“ Fleck, oft indem er in eine Reihe kleinerer Flecke zerfällt, die sich dann auflösen. Erst viel später erleidet der „vordere“ Fleck ein ähnliches Schicksal. Die oben erwähnten Bewegungen der Flecke werden während des 2. Stadiums weitgehend rückgängig gemacht.

Die *Kalziumfloculi* bilden — wie aus dem früheren hervorgeht — ein sehr empfindliches Reagens auf die Aktivität der Sonne. Sie erscheinen dementsprechend häufig schon 1—2 Tage vor den zugehörigen Flecken und bleiben auch nach dem Verschwinden des Fleckes noch einige Zeit bestehen, so daß z. B. eine β -Gruppe im Laufe ihrer Entwicklung vielfach in die αp -Klasse übertritt.

Wir ergänzen diese qualitative Schilderung zunächst durch einige zahlenmäßige Angaben:

A. H. JOY [1639] und später W. BRUNNER [1623] haben die *Neigung der Achsen* (Richtung größter Ausdehnung) *der Fleckengruppen gegen die Breitenkreise* in Abhängigkeit von der *heliographischen Breite* untersucht. Ersterer benützte hierzu die Beobachtungen von CARRINGTON (1856—61) und SPÖRER (1861—93), letzterer das Züricher Material von 1894—1928. Es zeigte sich, daß in der Regel der „vordere“ (westliche) Hauptfleck dem Äquator *näher* steht als der „hintere“ (östliche) Fleck. Die folgende Übersicht gibt die Mittelwerte beider Untersuchungen. Ein Unterschied zwischen dem an- und absteigenden Teil des Fleckzyklus war nicht zu erkennen.

Heliographische Breite	0—4°	5—9°	10—14°	15—19°	20—24°	25—29°	30—34°
Neigung } Nach JOY	3,7	2,4	5,6	5,8	8,7	9,3	10,8
in Grad } Nach BRUNNER . . .	0,6	3,6	5,4	7,2	9,9	14,4	19,0

W. BRUNNER (s. oben) hat weiterhin gezeigt, daß im Laufe der Entwicklung einer Fleckengruppe ihr Neigungswinkel von durchschnittlich 7,6° auf 4,6° *abnimmt*. Dies ist offensichtlich eine Folge der sogleich zu besprechenden Eigenbewegungen.

Diese *Eigenbewegungen* der Flecke, sowie ihr *Flächenwachstum*, sind besonders in *Greenwich* [1613—14] eingehend verfolgt worden: Die *Eigenbewegungen in heliographischer Breite* zeigen im wesentlichen einen zufälligen Charakter, sie betragen durchschnittlich $\sim 1^\circ$ pro siderische Rotation.

Viel interessanter sind die *Bewegungen in heliographischer Länge*. Die folgende Fig. 124 gibt die *mittlere Verschiebung in °Länge*, gerechnet von der mittleren Lage aus¹ und die *Fläche* der Flecke (auf perspektivische Verkürzung korrigiert; in Millionstel der sichtbaren Sonnenscheibe) einmal für die „vorderen“ (Haupt-) Flecke von ~ 60 Tagen Lebensdauer², die also 3 Umdrehungen der der Sonne überdauern und sodann für die „hinteren“ Flecke, die infolge ihrer kürzeren Lebensdauer nur während *einer* Umdrehung der Sonne beobachtet werden können. Diese graphischen Darstellungen geben eine schöne Illustration der obigen qualitativen Schilderung.

Es sei noch beiläufig bemerkt, daß diese Eigenbewegungen der Flecke auf die *Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeit* der Sonne einen erheblichen Einfluß ausüben. In einer heliographischen Breite von 15° ist z. B. die siderische tägliche Bewegung eines „durchschnittlichen“ Flecks $14^\circ, 2$, während die eines „jungen“ Fleckes $15^\circ, 2$ beträgt (selbst H_α gibt nach ADAMS nur $14^\circ, 9$).

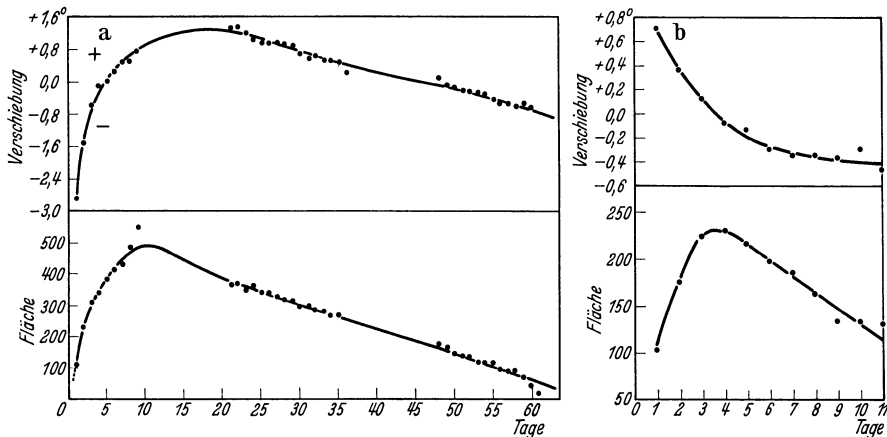


Fig. 124 a u. b. Verschiebung der Sonnenflecke in heliographischer Länge und Veränderung ihrer Fläche; nach [1614]. a) „Vordere“ Flecke mit etwa 60 Tagen Lebensdauer. b) „Hintere“ Flecke. Nullpunkt der Ordinaten ist die mittlere Lage des Fleckes. Abszissen: Tage von der Entstehung der Flecke a.

Die naheliegende Frage nach dem inneren Zusammenhang und der tieferen *Ursache* der beschriebenen Phänomene wollen wir noch auf Abschn. 94 zurückstellen und vorher zwei wichtige Gruppen von Erscheinungen betrachten, die offensichtlich ebenfalls mit Konvektion zusammenhängen, nämlich die *Fackeln* und die *Granulation*. Insbesondere das Verhalten der Granulation in der Umgebung und Penumbra der Flecke dürfte für das Verständnis der solaren Konvektionserscheinungen von großer Bedeutung sein.

91. Die Sonnenfackeln.

Die helleren und ausgedehnten Fackelgebiete in niederen heliographischen Breiten bilden die unzertrennlichen Begleiter der Flecke und befolgen auch deren statistische Gesetzmäßigkeiten. Daneben gibt es — wie wir ebenfalls schon bemerkten — auch in höheren Breiten kleine Fackeln, die anscheinend denselben Zug der Sonnenaktivität anzeigen, wie die polaren Protuberanzen.

Bekanntlich heben sich die Fackeln von der umgebenden Photosphäre nur in der äußeren Hälfte des Sonnenradius genügend ab, um einigermaßen deutlich erkennbar zu sein. *Photometrische Messungen des Helligkeitsverhältnisses der*

¹ Das bei der Reduktion benützte Rotationsgesetz war $\xi = 14^\circ, 37 - 2^\circ, 60 \sin^2 \varphi$.

² „Vordere“ Flecke von kürzerer Lebensdauer zeigen praktisch dasselbe Verhalten.

Fackeln zu ihrer Umgebung und dessen Mitte-Rand-Variation sind von R. S. RICHARDSON [1677] photographisch für zwei Wellenlängenbereiche mit den Schwerpunkten $\lambda 4300$ und $\lambda 5780$ sowie von T. W. WORMELL [1694] für die Gesamtstrahlung ausgeführt worden. Deren Ergebnisse — die Einzelwerte streuen erheblich — haben wir in Tabelle 69 zusammengestellt.

Geht man nach den bekannten Formeln (28,12) von der Winkelabhängigkeit der Strahlungsintensität $I(0, \vartheta)$ über zur Abhängigkeit der Ergiebigkeit $J(\tau)$ von der optischen Tiefe¹ τ für die Strahlung der betrachteten Frequenz bzw. die Gesamtstrahlung, so bemerkt man schon ohne jede Rechnung folgendes:

An der Sonnenoberfläche $\tau=0$ ist J in den Fackeln *größer* als in ihrer Umgebung. Für größere τ dagegen muß die Ergiebigkeit unter den Fackeln *kleiner* sein als unter der Photosphäre.

Schreiben wir z. B. für die *Gesamtstrahlung der Photosphäre* (deren Intensität in \odot -Mitte als Einheit genommen) in bekannter Weise

$$\left. \begin{aligned} I(0, \vartheta) &= 0,4(1 + 1,5 \cos \vartheta) \\ \text{und } J(\tau) &= 0,4(1 + 1,5 \tau), \end{aligned} \right\} (91,1)$$

so gilt in denselben Einheiten für die *Gesamtstrahlung der Fackeln*

$$\left. \begin{aligned} I(0, \vartheta) &= 0,4(1,1 + 1,4 \cos \vartheta) \\ \text{und } J(\tau) &= 0,4(1,1 + 1,4 \tau). \end{aligned} \right\} (91,2)$$

Wie man nämlich leicht verifiziert, paßt sich der Ausdruck

$$\frac{I_{\text{Fackel}}}{I_{\text{Photosphäre}}} = \frac{1,1 + 1,4 \cos \vartheta}{1,0 + 1,5 \cos \vartheta} \quad (91,3)$$

den in Tabelle 69 wiedergegebenen Beobachtungen von WORMELL gut an.

Aus (91,2) müssen wir schließen, daß die Temperatur T'_0 an der Oberfläche ($\tau=0$) der Fackeln um einen Faktor $\sqrt[4]{1,1}$ höher ist, als die Grenztemperatur $T_0=483^\circ$ der Photosphäre. Es wird also $T'_0 \approx 495^\circ$, d. h. die Fackeloberfläche ist etwa 12° wärmer als ihre Umgebung. RICHARDSONs Beobachtungen im sichtbaren Spektralgebiet bestätigen im ganzen diese Folgerungen, sie deuten vielleicht auf etwas größere Temperaturunterschiede von $\sim 200^\circ$ hin. *Unterhalb* einer optischen Tiefe von $\tau \approx 1$ ist nach (91,2) die Temperatur in den Fackeln *niedriger* als in der Photosphäre.

Genauere Messungen der *Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum der Fackeln* relativ zu ihrer Umgebung würden — ähnlich wie bei den Flecken — eine unabhängige Nachprüfung der Abhängigkeit der Temperatur von der optischen Tiefe ermöglichen.

Leider ist auch über das Verhalten der *FRAUNHOFER-Linien im Spektrum der Fackeln* noch sehr wenig bekannt. C. E. ST. JOHN [1648] findet generell eine Verstärkung der Funkenlinien und eine Schwächung der Bogenlinien. Ein photometrischer Vergleich der Konturen der *H-* und *K-Linien* von CaII in Fackeln und ihrer Umgebung durch P. KREMER [1652] ergab dagegen überraschenderweise eine *Abnahme* der Anzahl wirksamer Atome um $\sim 15\%$. Ehe nicht ein größeres und einigermaßen eindeutiges Beobachtungsmaterial vorliegt, wird man sich mit weiteren Schlüssen am besten zurückhalten. Deren Methodik dürfte aus dem bezüglich der Sonnenflecke Gesagten hervorgehen.

¹ Ein und demselben Wert der *optischen* Tiefe in Fackel bzw. Photosphäre braucht selbstverständlich *nicht* dieselbe geometrische Tiefe zu entsprechen.

Tabelle 69. Intensitätsverhältnis von Fackeln/Photosphäre. Photographische Beobachtungen von R. S. RICHARDSON [1677]. Gesamtstrahlungsmessungen von T. W. WORMELL [1694]. ($\sin \vartheta =$ Abstand von \odot -Mitte in Einheiten des Sonnenradius).

$\sin \vartheta$	$\cos \vartheta$	$\lambda 4330$	$\lambda 5780$	Gesamtstrahlung
0,60	0,800	1,04	1,02	—
0,70	0,714	1,06	1,03	1,02
0,80	0,600	1,10	1,04	1,02 ₅
0,90	0,436	1,14	1,10	1,04
0,95	0,312	1,17	1,16	1,06

Wenn auch unsere Kenntnis der Fackeln im einzelnen noch gering ist, so läßt sie doch schon deutlich eine Schwierigkeit erkennen, deren Auflösung — um dies vorwegzunehmen — noch nicht gelungen ist:

Die Abweichungen der *Temperaturschichtung* in den Fackeln von der in der Photosphäre beobachteten zeigen, daß der *Energietransport* in den Fackeln nicht ausschließlich durch *Strahlung* erfolgt. Man möchte daher zunächst geneigt sein, an Energietransport durch *Konvektion* zu denken. Aber dieser Annahme stehen zwei schwerwiegende Bedenken gegenüber: Erstens sind in den Fackeln keine erheblichen Strömungen beobachtet worden¹ und zweitens zeigen die Abschätzungen von Abschn. 90D, daß selbst Strömungen von mehreren km/sek bei den kleinen Drucken der direkt beobachtbaren Schichten keinen erheblichen Energietransport zu leisten vermögen, was durch die Beobachtungen an den Flecken auch bestätigt wird. Wie dieses Dilemma zu lösen ist, wissen wir zur Zeit noch nicht.

92. Die Granulation.

A. Durchmesser der Granulationselemente. Um zahlenmäßige Aussagen über die Größe der einzelnen Körper oder Elemente der Sonnengranulation machen zu können, müssen wir — da deren Form ja ganz unregelmäßig ist — zunächst eine Übereinkunft darüber treffen, was wir als „*mittleren Durchmesser der Granulationselemente*“ bezeichnen wollen.

Im Anschluß an H. H. PLASKETT [1671] gehen wir folgendermaßen vor: Photometriert man (mit sehr kleinem Photometerfleck) längs einer Strecke von l Bogensekunden auf der Sonnenoberfläche, so wird die Helligkeit I um einen längs l evtl. langsam veränderlichen Mittelwert \bar{I} schwanken. Hat nun $I - \bar{I}$ auf der Strecke l'' insgesamt N Maxima, so sei $d = l/2N$. Um die durch das Plattenkorn usw. verursachten kleinen Maxima auszuschließen, wird man noch festsetzen, daß nur solche Maxima gezählt werden sollen, die von dem Mittelwert des vorhergehenden und folgenden Minimums um mehr als einen sinngemäß gewählten unteren Grenzwert ΔI_0 differieren.

In diesem Sinne ergeben die neueren Beobachtungen von H. STREBEL und B. THÜRING² [1686] $d \approx 7''$. H. H. PLASKETT [1671] findet $d \approx 5''$, entsprechend 3700 km, ebenso P. TEN BRUGGENCATE und W. GROTRIAN [1622]. Die älteren Beobachter der Granulation wie J. JANSSEN [1645], dessen Aufnahmen auch heute noch nicht übertroffen sind, A. HANSKY [1643—44] und S. CHEVALIER [1625] schreiben den Granulationselementen Durchmesser von der Größenordnung 1—2'' zu. Der Unterschied der älteren und neueren Angaben dürfte in der Hauptsache eine Frage der *Definition* von d sein. Während jene den noch von der Gradation der Platte usw. abhängigen „Durchmesser“ der feinsten wahrnehmbaren Details angeben, versuchen diese bestimmte *statistische Aussagen* zu machen. TEN BRUGGENCATE und GROTRIAN halten es überdies für möglich, daß z. B. CHEVALIERS Angaben durch eine „*falsche Granulation*“ photographischen Ursprunges³ beeinflusst sind.

B. Helligkeit und Mitte-Rand-Variation der Granulation. Die Messung der *Helligkeitsunterschiede in der Granulation* wird durch die Kleinheit der Granulationselemente und die Geringfügigkeit der Kontraste sehr erschwert. H. STREBEL und B. THÜRING finden im *Ultraviolett* eine maximale Helligkeitsdifferenz Max.—Min. von $\sim 10\%$ der Photosphärenhelligkeit. Es ist wohl möglich — wie PLASKETT bemerkt —, daß bei diesen Aufnahmen neben dem

¹ Dopplereffekte von ~ 2 km/sek würden den Beobachtern wohl kaum entgangen sein.

² Siehe [1686] Fig. 3 mit $\Delta I_0 \approx 0,04$. Die genannten Autoren schlagen selbst eine etwas andere Definition von d vor.

³ Es handelt sich um *Schwankungen* der Zahl der Plattenkörner pro Flächeneinheit.

kontinuierlichen Spektrum auch die dicht gehäuften FRAUNHOFER-Linien zur Geltung kommen, so daß eine Art Übergang von den gewöhnlichen Aufnahmen zu den Spektroheliogrammen entsteht.

H. H. PLASKETT hat dann die Helligkeitsverteilung der Granulation an vier von Linien möglichst freien Wellenlängen gemessen. Im Mittel von fünf Aufnahmen mit gut ausgeprägter Granulation findet er folgende *mittlere Helligkeitsschwankungen* (Max.—Min.) in Prozent der durchschnittlichen Helligkeit der betreffenden Stelle:

λ	4012	4365	4811	5837 Å
$\Delta I/I$	3,9	2,7	2,9	1,9%

Das *maximale Helligkeitsverhältnis* von Granulation zu Zwischengebiet (Max.—Min.) ergab sich (für die mittleren Wellenlängen) zu 1,10. Die entsprechende *Temperaturdifferenz* liegt demnach bei $\sim 100^\circ$.

Um die Art des *Energietransportes* und die *Temperaturschichtung* in den Granula beurteilen zu können, müßte man wissen, ob die *relativen Helligkeitsschwankungen* der Granulation nach dem Sonnenrand hin *zu- oder abnehmen*. Nach PLASKETT trifft letzteres sicher *nicht* zu und nach den Aufnahmen von JANSSEN zu urteilen nehmen die Helligkeitsunterschiede der Granula gegen ihre Umgebung nach dem Sonnenrande hin jedenfalls nicht so stark zu, wie die der Fackeln. Wenn unsere Frage also auch noch nicht definitiv zu entscheiden ist, so weisen die vorhandenen Beobachtungen doch darauf hin, daß bei idealem Luftzustand die Helligkeitsschwankungen in der Granulation an \odot -Mitte und \ominus -Rand (bei Berücksichtigung der perspektivischen Verkürzung) etwa gleich sind, daß also der *Energietransport in der Granulation* im wesentlichen durch Strahlung erfolgt. Die Messungen der spektralen Energieverteilung sind mit dieser Auffassung verträglich; ihre Genauigkeit ist aber naturgemäß zu gering, um ihnen großes Gewicht beizulegen.

Man kann noch fragen, ob die Granulation bei der Deutung der *spektralen Energieverteilung* und des *Mitte-Rand-Kontrastes* der kontinuierlichen Strahlung der Sonne (Kap. V) berücksichtigt werden muß. Wie man leicht abschätzt, ist dies *nicht* notwendig, sofern nicht in Bereichen, die unterhalb des teleskopischen Trennungsvermögens liegen, Helligkeitsschwankungen auftreten, die erheblich über den bis jetzt beobachteten liegen. Die Möglichkeit solcher Schwankungen läßt sich zwar nicht a priori in Abrede stellen, aber die später zu entwickelnden theoretischen Vorstellungen über den Ursprung der Granulation sprechen nicht zugunsten einer solchen Annahme. H. H. PLASKETT (s. S. 376) glaubt, aus den Messungen der Randverdunkelung der Sonne bei $\lambda 5500$ von W. J. H. MOLL, H. C. BURGER und J. V. D. BILT [225] auf Abweichungen vom Strahlungsgleichgewicht bei $\tau \approx 1$ schließen zu können und bringt diese in Zusammenhang mit der Granulation. Abgesehen von den aus Kap. V bekannten Schwierigkeiten (Variation von $\kappa/\bar{\kappa}$ mit τ ; Einfluß der Linien) halten wir die experimentellen Grundlagen nicht für ausreichend, um diesen Schluß einigermaßen sicher erscheinen zu lassen.

C. Lebensdauer der Granulation. Strömungen? Schon die älteren Beobachter haben bemerkt, daß ein bestimmtes Granulationselement nur während einiger Minuten verfolgt werden kann. Um nun die *Lebensdauer* der Granulation genauer zu messen, gingen P. TEN BRUGGENCATE und W. GROTRIAN [1622] von folgender Überlegung aus:

Bringt man zwei *identische* Aufnahmen zunächst zur Deckung und verdreht sie sodann um einige Grad gegeneinander, so wird jedes helle bzw. dunkle Gebilde auf der einen Platte durch seinen „Bruder“ auf der anderen Platte fortgesetzt. Es entsteht infolgedessen in der Durchsicht ein *moiréartiges Muster*

mit dem Drehpunkt in der Mitte. Zwei *völlig verschiedene* Platten dagegen zeigen — wie zu erwarten — *keinen* solchen MOIRÉ-Effekt. Schätzt man dessen Stärke in einer *Gedächtnisskala*, so hat man also ein Maß der „Verschiedenheit“ zweier in bestimmtem Zeitabstand aufgenommener Granulationsplatten. TEN BRUGGEN-CATE und GROTRIAN gelang es, die erwähnte Gedächtnisskala mit Hilfe einer „künstlichen Granulation“ zu kalibrieren¹.

Bezeichnet man den Bruchteil der nach t min noch erkennbaren Elemente der Sonnengranulation mit N/N_0 , so konnten die genannten Autoren ihre Beobachtungen gut darstellen in der Form

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\frac{t}{3,2}}. \quad (92,1)$$

Das heißt nach 3,2 min ist nur noch der e -te Teil der Granulationselemente vorhanden. Die *Halbwertszeit* ($N=N_0/2$) der Granulation beträgt 2,2 min. Wenn man annimmt (was aber keineswegs notwendig ist), daß die Umgruppierung der Granulationselemente durch wirkliche Strömungen erfolge, so müßten dabei *Geschwindigkeiten* von ~ 10 km/sek (1900 km in 3,2 min) auftreten. Messungen von *Dopplerverschiebungen innerhalb der Granulation* (die wegen der Schwierigkeit der Nachführung, der Luftunruhe usw. am einfachsten visuell zu machen wären) gibt es leider noch nicht.

D. Verhalten der Granulation in den Fackeln und den Penumbren der Flecke. Unabhängigkeit von der heliographischen Breite. Für ein tieferes Verständnis der Konvektionserscheinungen in der Sonne ist es von Wichtigkeit, über das gegenseitige *Verhältnis von Flecken, Fackeln und Granulation* ins Klare zu kommen. Wir fanden schon vielerlei Indizien dafür, daß die *Flecke* und *Fackeln* auf das engste miteinander zusammenhängen. Wie steht es in dieser Hinsicht nun mit der Granulation?

Wie schon J. JANSSEN [1645, S. 110] an Hand seiner Aufnahmen bemerkte, ist in der von *Fackeln* besetzten Umgebung der Flecke genau dieselbe Granulationsstruktur zu erkennen², wie in der übrigen Photosphäre. Das heißt die Fackel- und Granulationsbildung überlagern sich einfach.

In den *Penumbren der Flecke* zeigen nach den Aufnahmen von JANSSEN, CHEVALIER, STREBEL u. a. die Granula eine langgezogene, fädige Struktur. Nach der Umbra zu enden sie vielfach mit einer etwas helleren keulenartigen Verdickung³. Wir werden später sehen, daß diese Veränderungen der Granulation durch die Strömung im Fleck einer einfachen hydrodynamischen Deutung fähig sind. Damit sind wir aber der Hauptfrage noch nicht näher gekommen, ob Flecke und Granulation letzten Endes auf die gleiche oder auf verschiedene Ursachen zurückgehen.

Die *Entstehung der Flecke* aus sehr kleinen dunklen Stellen der Photosphäre, den sog. *Poren*, die sich nur wenig von dem Zwischenraum mehrerer Granula unterscheiden, legt zunächst den Gedanken einer engen Verwandtschaft beider Gebilde nahe. Vergleicht man aber auf den erwähnten Aufnahmen die Beschaffenheit der *Granulation in verschiedenen heliographischen Breiten*, so bemerkt man, daß diese im Gegensatz zu den Flecken und Fackeln keine bestimmten Zonen bevorzugt. Ebenso unterliegt nach S. CHEVALIER [1625] die Granu-

¹ Diese wurde erzeugt durch photographische Aufnahmen von *Kampferpulver* bestimmter Korngröße. Der durchschnittliche Schwund eines Kornes konnte durch Wägung festgestellt werden.

² H. H. PLASKETT [1671, S. 423] dagegen behauptet im Anschluß an S. CHEVALIER, daß in den Fackeln die Granulation fehle. Dies mag am \odot -Rand zutreffen, obwohl hier auch die Möglichkeit einfacher Überstrahlung besteht. In \odot -Mitte zeigen jedenfalls die von Fackeln besetzten Stellen genau dieselbe Granulation wie die normale Photosphäre.

³ Ob die Umbra selbst eine Feinstruktur besitzt, ist nicht bekannt.

lation keinerlei Änderungen im Laufe des 11,5jährigen Zyklus. Angesichts dieser Tatsachen können wir die zuerst ausgesprochene Vermutung nicht aufrecht erhalten; wir müssen vielmehr schließen, daß *Granulation und Flecke völlig verschiedene Ursachen* haben.

93. Theorie der Konvektion in Sternatmosphären.

1. Teil: Die Wasserstoffzone als Ursache der Granulation.

A. Strahlungsgleichgewicht und Konvektion. Stabilitätskriterium von K. SCHWARZSCHILD. Man kann die Beobachtungen der Granulation, der Sonnenflecke usw. kaum anders deuten, als durch die Annahme mächtiger Strömungen, von *Konvektion*. Auf der anderen Seite haben wir früher gesehen, daß z. B. das Randverdunkelungsgesetz der Sonne darauf hinweist, daß deren Atmosphäre vom Zustande des *Strahlungsgleichgewichtes* nicht weit entfernt sein kann.

Untersuchen wir daher — wie dies K. SCHWARZSCHILD [1683] schon 1905 in seiner grundlegenden Arbeit getan hat — zunächst die Frage, unter welchen Bedingungen das *Strahlungsgleichgewicht* in den uns von den tieferen Schichten der Erdatmosphäre vertrauten Zustand des *konvektiven oder adiabatischen Gleichgewichtes* überzugehen beginnt:

Wenn eine von $\left\{ \begin{array}{l} \text{unten aufsteigende} \\ \text{oben herabsinkende} \end{array} \right\}$ Gasmasse vermöge der adiabatischen $\left\{ \begin{array}{l} \text{Expansion} \\ \text{Kompression} \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{wärmer} \\ \text{kühler} \end{array} \right\}$ wird, als ihre im Strahlungsgleichgewicht gedachte Umgebung, so wird ihre Bewegung immer neuen Antrieb erhalten. Konvektionsströme sind dann thermodynamisch stabil (und umgekehrt). Mit anderen Worten: In einer Atmosphäre können sich nur dann *Konvektionsströme bilden*, wenn der *adiabatische Temperaturgradient seinem Betrage nach kleiner ist, als der dem Zustand des Strahlungsgleichgewichtes entsprechende*, d. h.

$$\left| \frac{dT}{dh} \right|_{\text{ad.}} < \left| \frac{dT}{dh} \right|_{\text{Str.}} . \quad (93,1)$$

Nach der Barometerformel ist

$$\frac{dP}{dh} = - \frac{g\mu}{RT} \quad (93,2)$$

($P = \text{Gasdruck}$, $g = \text{Schwerebeschleunigung}$, $\mu = \text{Molekulargewicht}$; den Strahlungsdruck vernachlässigen wir) und damit

$$\frac{dT}{dh} = - \frac{g\mu}{R} \cdot \frac{d \ln T}{d \ln P} , \quad (93,3)$$

womit die *Konvektionsbedingung* die handlichere Form annimmt:

$$\left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{\text{ad.}} < \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{\text{Str.}} . \quad (93,4)$$

Berechnen wir zuerst den zweiten Ausdruck!

Die Temperatur T wächst bei *Strahlungsgleichgewicht* mit der optischen Tiefe τ für Gesamtstrahlung gemäß der Beziehung

$$T = T_0 \left(1 + \frac{3}{2} \tau \right)^{\frac{1}{4}} , \quad (93,5)$$

wo T_0 die Grenztemperatur bedeutet. Andererseits ist nach (38,7)

$$dP = \frac{g}{\kappa} d\tau , \quad (93,6)$$

wo $\bar{\kappa}$ den Opazitätskoeffizienten bedeutet. Stellen wir dessen Tiefenabhängigkeit durch eine Interpolationsformel des Typs

$$\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_0 \cdot \tau^m \quad (93,7)$$

dar, so wird¹

$$\left(\frac{d \ln T}{d \ln P}\right)_{\text{Str.}} = \left(\frac{d \ln T}{d \ln \tau}\right) \cdot \left(\frac{d \ln \tau}{d \ln P}\right) = \frac{1}{4(1-m)} \cdot \frac{\tau}{\frac{3}{2} + \tau}. \quad (93,8)$$

Der *adiabatische Temperaturgradient* ist in bekannter Weise durch das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck bzw. Volum $\gamma = c_p/c_v$ bestimmt:

$$\left(\frac{d \ln T}{d \ln P}\right)_{\text{ad.}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}. \quad (93,9)$$

Für einatomige Gase ist $\gamma = \frac{5}{3}$ und also $\left(\frac{d \ln T}{d \ln P}\right)_{\text{ad.}} = 0,40$. Diesen Wert vergleichen wir mit den für $m=0$ (konstanten Opazitätskoeffizienten) und $m=1/2$ (was nach Tabelle 36 u. 37, Spalte 7 u. 8 noch durchaus im Bereich des Möglichen liegt) nach (93,8) für Strahlungsgleichgewicht berechneten Werten (Tabelle 70). Wie man sieht, ist in *den* Schichten, deren Strahlung wir direkt erhalten ($\tau < 3$), mit ziemlicher Sicherheit $\left(\frac{d \ln T}{d \ln P}\right)_{\text{ad.}} < 0,4$, d. h. der Zustand des Strahlungsgleichgewichtes ist stabil, *sofern* die Sternatmosphäre aus normalen

Tabelle 70. $\left(\frac{d \ln T}{d \ln P}\right)_{\text{Str.}}$ als Funktion der optischen Tiefe τ .

τ	0	0,5	1	3	5	10	∞
$m = 0$	0,00	0,11	0,15	0,20	0,22	0,23	0,25
$m = 1/2$	0,00	0,21	0,30	0,40	0,44	0,47	0,50

einatomigen Gasen besteht. In größerer Tiefe dagegen kann die Druckabhängigkeit der Opazität sehr wohl da und dort eine Konvektionszone hervorrufen.

Neben diesem Effekt müssen wir nach R.H.FOWLER und E. A. GUGGENHEIM [1633] noch einen zweiten berücksichtigen: In einer z. B. in der Sonnenatmosphäre herabsinkenden Gasmasse ändern sich nicht nur Druck und Temperatur, sondern auch der *Ionisationsgrad*. Bei Temperaturerhöhung wächst nicht nur die Translationsenergie, sondern es muß noch Ionisationsarbeit geleistet werden und die abgespaltenen Elektronen müssen ihr $3/2 kT$ bekommen. Ein Gas, dessen Ionisationsgrad sich ändert, nähert sich also in seinem Verhalten einem mehratomigen Gas. Sein effektives γ , das wir nun durch (93,9) *definieren*, wird daher $< 5/3$. Nachdem die verschiedensten Beobachtungen auf eine sehr große kosmische Häufigkeit der Wasserstoffes hingewiesen hatten, konnte A. UNSÖLD [1688] zeigen, daß in *der* Zone der Sternatmosphären, wo der Wasserstoff *teilweise* ionisiert ist, γ so klein wird, daß auf jeden Fall Konvektionsströme entstehen müssen.

B. Die Adiabate ionisierbarer Gase. Die Wasserstoffzone der Sonnenatmosphäre. Sterne anderer Spektraltypen. Wir berechnen nun $\left(\frac{d \ln T}{d \ln P}\right)_{\text{ad.}}$ für ein Gas, in dem der Bruchteil ν_1 der Atome in der Ionisation begriffen sei; sein Ionisationsgrad sei x_1 . Nachher werden wir die „Atomart 1“ selbstverständlich mit Wasserstoff gleichsetzen. Daneben sei ein Bruchteil ν_2 solcher Elemente vorhanden, die in dem betrachteten Druck- und Temperaturbereich entweder

¹ Faßt man die Druck- und Temperaturabhängigkeit der Opazität zusammen in $\bar{\kappa} \sim P^n$, so steht in (93,8) statt $\frac{1}{1-m}$ der Faktor $1+n$, was wegen der Verknüpfung von P und τ natürlich auf genau dasselbe herausläuft.

gar nicht oder schon vollständig (evtl. auch mehrfach) ionisiert sind. Die Anzahl x_2 der freien Elektronen pro Atom bzw. Ion der Sorte 2 ist demnach unabhängig von Druck und Temperatur.

Der *mittlere Ionisationsgrad* des ganzen Gemisches \bar{x} = Anzahl der freien Elektronen/Anzahl der Atome + Ionen wird dann

$$\bar{x} = \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2. \quad (93,10)$$

Bezeichnen wir mit N die Anzahl der Atome + Ionen im Volumen V und mit $n = N/V$ ihre Anzahl pro cm^3 , so lautet die *Zustandsgleichung* (P = Gesamtdruck):

$$P = (1 + \bar{x}) \cdot N k T / V. \quad (93,11)$$

Für kleine Änderungen der Zustandsgrößen erhält man durch logarithmische Differentiation:

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\bar{x}}{1 + \bar{x}} + \frac{dT}{T} - \frac{dV}{V}. \quad (93,12)$$

Die in dem Volum V enthaltene Translations- + Ionisationsenergie E ist

$$E = \left\{ (1 + \bar{x}) \cdot \frac{3}{2} k T + \sum \nu_i x_i \chi_i \right\} N, \quad (93,13)$$

wo χ_i die Ionisierungsarbeit für die Elemente 1 bzw. 2 bedeutet. (χ_2 , das in unsere weiteren Rechnungen nicht eingeht, ist als Mittelwert über die Elemente der Gruppe 2 zu betrachten.) Die Bedingung der *Adiabase* (Konstanz der Entropie) lautet nun

$$dE + P dV = 0. \quad (93,14)$$

Berechnet man hieraus zunächst $-\frac{dV}{V} = \frac{dE}{PV}$ mit (93,11 u. 13) und eliminiert $\frac{dV}{V}$ mit (93,12), so erhält man leicht

$$\frac{dP}{P} = \frac{5}{2} \frac{dT}{T} + \frac{\sum \left(\frac{5}{2} + \frac{\chi_i}{kT} \right) \nu_i dx_i}{1 + \bar{x}}. \quad (93,15)$$

Nach Voraussetzung ist nur dx_1 von Null verschieden; wir berechnen es aus der *SAHASchen Gleichung*

$$\frac{x_1}{1 - x_1} \cdot \frac{\bar{x}}{1 + \bar{x}} \cdot P = \text{konst.} \cdot T^{\frac{5}{2}} \cdot e^{-\frac{\chi_1}{kT}}, \quad (93,16)$$

wobei zu berücksichtigen ist, daß nach (93,10) $d\bar{x} = \nu_1 dx_1$ ist:

$$dx_1 \left\{ \frac{1}{x_1(1-x_1)} + \frac{\nu_1}{\bar{x}(1+\bar{x})} \right\} + \frac{dP}{P} = \frac{dT}{T} \left(\frac{5}{2} + \frac{\chi_1}{kT} \right). \quad (93,17)$$

Setzt man dx_1 in die Σ der Gl. (93,15) ein, die sich auf dieses eine Glied beschränkt, so erhält man nach gehöriger Ordnung die *Adiabatengleichung*:

$$\left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{\text{ad.}} = \frac{\left(\frac{1 + \bar{x}}{x_1(1-x_1)} + \frac{\nu_1}{\bar{x}} \right) + \nu_1 \left(\frac{5}{2} + \frac{\chi_1}{kT} \right)}{2 \left(\frac{1 + \bar{x}}{x_1(1-x_1)} + \frac{\nu_1}{\bar{x}} \right) + \nu_1 \left(\frac{5}{2} + \frac{\chi_1}{kT} \right)^2}. \quad (93,18)$$

Für *ein* Element ($\nu_1 = 1$; $x_1 = \bar{x}$) reduziert sich dieser Ausdruck auf

$$\left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{\text{ad.}} = \frac{2 + x(1-x) \left(\frac{5}{2} + \frac{\chi}{kT} \right)}{5 + x(1-x) \left(\frac{5}{2} + \frac{\chi}{kT} \right)^2}. \quad (93,19)$$

Diese Gleichung ist — nachdem schon FOWLER und GUGGENHEIM [1633] ähnliche Rechnungen ausgeführt hatten — vom *Verf.* [1688] durch direkte Berechnung der *Entropie* abgeleitet worden. Die Verallgemeinerung für ein *Gemisch* mehrerer Elemente, die einmal

ionisiert werden können, hat dann H. SIEDENTOPF [1684] in zwei Arbeiten versucht. Seine Formeln sind aber nicht richtig. Die in der 1. Arbeit angewandte Form der SAHASCHEN Gleichung (ebd., Gl. (6)) gilt nur für ein Element, Gl. (8) (ebd.), ist daher auf ein Gemisch mehrerer Elemente nicht anwendbar. In der 2. Arbeit ist zwar die Ionisationsgleichung (ebd., Gl. (3)) richtig, aber bei den zu Gl. (4) führenden Zwischenrechnungen scheint ein Versehen unterlaufen zu sein, indem diese Gleichung — entgegen H. SIEDENTOPFS Angabe — für ein Element nicht in (93,19) übergeht. Verknüpft man $d\bar{x}$ in richtiger Weise mit den dx_i , so erhält man nach ziemlich umständlicher Rechnung vielmehr:

$$\left(\frac{d \ln T}{d \ln P}\right)_{\text{ad.}} = \frac{1 + \bar{x} + \sum \left(\frac{5}{2} + \frac{\chi_i}{kT}\right) \nu_i x_i (1 - x_i) \frac{\bar{x} + \bar{x}^2}{2\bar{x} + \bar{x}^2 - \bar{x}^2}}{\frac{5}{2}(1 + \bar{x}) + \sum \left(\frac{5}{2} + \frac{\chi_i}{kT}\right)^2 \nu_i x_i (1 - x_i) - \frac{\left[\sum \nu_i x_i (1 - x_i) \left(\frac{5}{2} + \frac{\chi_i}{kT}\right)\right]^2}{2\bar{x} + \bar{x}^2 - \bar{x}^2}}, \quad (93, 20)$$

wo $\bar{x}^2 = \sum \nu_i x_i^2$ ist. Schon die Berücksichtigung der 2. Ionisation würde eine Formel von unmöglicher Länge geben. In praxi dürfte auch (93,18) meist ausreichen. Sollte später eine genauere Rechnung nötig werden, so dürfte eine numerische Berechnung der Entropie am raschesten zum Ziel führen.

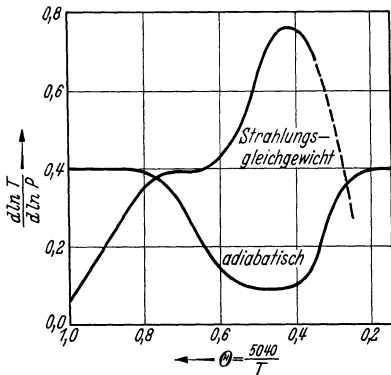


Fig. 125. Temperaturgradient bzw. $\frac{d \ln T}{d \ln P}$ in der Sonnenatmosphäre für Strahlungsgleichgewicht und adiabatisches Gleichgewicht.

Nach dem Vorgang von H. SIEDENTOPF [1684] berechnen¹ wir nunmehr für das in Tabelle 36 behandelte Modell der Sonnenatmosphäre zunächst $\left(\frac{d \ln T}{d \ln P}\right)_{\text{ad}}$. Entsprechend den seinerzeit gemachten Annahmen ist die Konzentration des Wasserstoffes $\nu_1 = 0,932$. Wir nehmen weiterhin an, daß die restliche Materie $\nu_2 = 0,068$ durchschnittlich einfach ionisiert ist ($x_2 = 1$). Die weitere Rechnung nach Gl. (93,18) bedarf keiner Erläuterung; ihr Ergebnis zeigt die eine Kurve der Fig. 125. Es ist bemerkenswert, daß ein Ionisationsgrad $x_1 = 0,002$ bei $\Theta = 0,7$ bzw. $x_1 = 0,983$ bei $\Theta = 0,3$ die Ordinate von dem „Normalwert“ 0,40 schon auf $\sim 0,3$ herabdrückt!

Die entsprechenden $\left(\frac{d \ln T}{d \ln P}\right)_{\text{Str.}}$ erhält man am einfachsten mit Hilfe von Differenzenbildung in Spalte 7 unserer Tabelle 36. Das Ergebnis zeigt die andere Kurve der Fig. 125.

Die Ionisation des Wasserstoffes bewirkt demnach durch Beeinflussung der Opazität eine Vergrößerung des Strahlungsgleichgewichts-Temperaturgradienten und durch Inangasetzen neuer Freiheitsgrade eine Verkleinerung des adiabatischen Temperaturgradienten. Zwischen $\Theta = 0,77$ und $\Theta = 0,26$ bzw. in der optischen Tiefe $\tau = 1,6$ bis ~ 170 , d. h. in einer Schicht, deren Dicke nach Tabelle 36 etwa 500 km beträgt, sind also Konvektionsströme thermodynamisch stabil. (Während die Berechnung der oberen Grenze der „Wasserstoffzone“ bei $\tau = 1,6$ recht sicher ist, kann man dies von der unteren nicht behaupten. Sowohl bei der Berechnung der Opazität wie auch der des adiabatischen Temperaturgradienten sollten hier vermutlich die höheren Ionisationsstufen der Metalle berücksichtigt werden.) Ehe wir die Bedeutung der Konvektionszone in der Sonnenatmosphäre weiter verfolgen, fragen wir noch mit H. SIEDENTOPF [1684], ob derartige Zonen auch auf anderen Sternen zu erwarten sind. Zunächst wird sicher dort, wo die Ionisation des Wasserstoffes im Gang ist, Konvektion entstehen. Diese Schicht liegt natürlich bei kühlen Sternen tiefer, bei heißen höher

¹ Die numerischen Rechnungen sind durchweg berichtigt; die wichtigeren Ergebnisse bleiben selbstverständlich erhalten.

als in der Sonne und verschwindet schließlich bei den B-Sternen. Daneben aber müßte die Ionisation der Metalle und insbesondere die Zunahme der Opazität mit der Tiefe genauer berücksichtigt werden. Das Problem erfordert offensichtlich umfangreich numerische Untersuchungen; die Rechnungen von SIEDENTOPF können heute nicht mehr befriedigen.

C. Energietransport durch Strahlung und Konvektion. Theorie der Granulation (H. SIEDENTOPF). Die Art der Strömung — laminar oder turbulent — in der Konvektionszone der Sonnenatmosphäre wird bestimmt durch die REYNOLDSSche Zahl, die für Gase näherungsweise

$$R \approx \frac{\text{Strömungsgeschwindigkeit} \times \text{Lineardimension}}{\text{Molekulargeschwindigkeit} \times \text{freie Weglänge}} \quad (93,21)$$

ist. Diese überschreitet den kritischen Wert $R \approx 10^3$ erheblich, die Strömung wird also *turbulent*.

Im Anschluß an Untersuchungen von L. PRANDTL [1672] hat nun H. SIEDENTOPF [1684] gezeigt, wie man den Energietransport durch turbulente Scheinleitung in der Konvektionszone abschätzen kann: Steigt ein Massenelement dm um das Stück dh auf, so führt es an seine Umgebung einen Energiebetrag dE ab, der gegeben ist durch¹

$$dE = c_p \cdot dm \left\{ \left(\frac{dT}{dh} \right)_{\text{Str.}} - \left(\frac{dT}{dh} \right)_{\text{ad.}} \right\} dh. \quad (93,22)$$

Dabei ist angenommen, daß das Aufsteigen streng adiabatisch erfolgt; Berücksichtigung des Strahlungsaustausches zwischen dem Volumelement und seiner Umgebung dürfte eine geringe Verkleinerung von dE bewirken.

Um den Energietransport durch Konvektion pro cm^2 und sek $H_K = \pi F_K$ zu berechnen, dividieren wir durch die Fläche df des Volumelementes und die zum Zurücklegen von dh benötigte Zeit dt und erhalten

$$H_K = c_p \frac{dm}{df} \left\{ \left(\frac{dT}{dh} \right)_{\text{Str.}} - \left(\frac{dT}{dh} \right)_{\text{ad.}} \right\} \frac{dh}{dt}. \quad (93,23)$$

Wir bezeichnen noch die Steiggeschwindigkeit dh/dt mit u und setzen die Masse pro Grundflächeneinheit dm/df eines Turbulenzelementes im Mittel gleich Dichte ρ mal seiner Länge, dem sog. *Mischungsweg* l . Damit wird

$$H_K = c_p \cdot \rho \cdot u \cdot l \left\{ \left(\frac{dT}{dh} \right)_{\text{Str.}} - \left(\frac{dT}{dh} \right)_{\text{ad.}} \right\}. \quad (93,24)$$

Die Größe

$$\rho \cdot u \cdot l = A \quad (93,25)$$

bezeichnet man als die sog. *Austauschgröße*. Nehmen wir noch (93,3) zu Hilfe, so erhalten wir schließlich mit H. SIEDENTOPF die Beziehung

$$H_K = g \cdot \frac{c_p \cdot \mu}{R} \cdot A \left\{ \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{\text{Str.}} - \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{\text{ad.}} \right\}. \quad (93,26)$$

die evtl. noch mit (93,8 u. 9) verknüpft werden kann.

Diese Gleichung wenden wir nun auf die *Granulation* an: Nach den Messungen von H. H. PLASKETT u. a. beträgt die Änderung des Strahlungsstromes in den Granula $\sim 10\%$ des normalen Strahlungsstromes (12,4) $\pi F = 6,13 \cdot 10^{10}$ erg $\text{cm}^{-2} \text{sek}^{-1}$; es ist also $H_K \approx 6 \cdot 10^9$ erg $\text{cm}^{-2} \text{sek}^{-1}$. Weiterhin ist $g = 2,74 \cdot 10^4$ cmsek^{-2} und $\frac{c_p \cdot \mu}{R} \approx 5$. Setzen wir nach Fig. 125 die $\{\dots\}$ im Mittel $\approx 0,2$, so erhalten wir

$$A_{\text{Gran.}} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ [gr cm}^{-1} \text{sek}^{-1} \text{]}. \quad (93,27)$$

¹ Die dT/dh meinen stets die Absolutbeträge.

Mit Hilfe von A können wir die mittlere Strömungsgeschwindigkeit u in der Konvektionszone abschätzen: Deren mittlere Dichte ist nach Tabelle 36 größenordnungsmäßig $\rho = 5 \cdot 10^{-8} \text{ g cm}^{-3}$. Da ferner ein einmal in Bewegung gerates Volumenelement immer neuen Antrieb erfährt, so dürfte der Mischungsweg l von derselben Größenordnung sein wie die Dicke der instabilen Schicht, also etwa $l = 500 \text{ km} = 5 \cdot 10^7 \text{ cm}$. Damit erhalten wir für die mittlere *Strömungsgeschwindigkeit* nach (93,25)

$$u = 0,8 \cdot 10^5 \text{ cm sek}^{-1}. \quad (93,28)$$

Die *Lebensdauer* τ eines Turbulenzelementes (Granulums) dürfte — ebenfalls nur größenordnungsmäßig —

$$\tau = \frac{\text{Mischungsweg } l}{\text{Geschwindigkeit } u} \quad (93,29)$$

sein. So ergibt sich theoretisch

$$\tau = 6 \cdot 10^2 \text{ sek} = 10 \text{ min} \quad (93,30)$$

in ausgezeichneter Übereinstimmung mit dem von P. TEN BRUGGENCATE und W. GROTRIAN [1622] gemessenen Wert von 3,2 min.

Bis jetzt haben wir die *Geschwindigkeit* u der *Strömung* (und des konvektiven Energietransportes) aus den *beobachteten Helligkeitsunterschieden* in der Granulation ermittelt. Nach H. SIEDENTOPF (s. S. 382) kann aber auch diese Größe — wenigstens in grober Näherung — berechnet werden durch Anwendung des NEWTONSchen *Widerstandsgesetzes*¹ auf die bewegten Gasmassen: Ein Turbulenzkörper vom Querschnitt F durchstreicht pro sek ein Volum $F \cdot u$ und teilt also einer Masse $F \rho u$ eine Geschwindigkeit der Größenordnung u mit. Der pro sek übertragene Impuls, mit anderen Worten der *Widerstand* W des bewegten Körpers wird also

$$W \approx F \rho \cdot u^2. \quad (93,31)$$

Andererseits erfährt ein Turbulenzkörper, dessen Volum \approx Querschnitt $F \times$ Mischungsweg l ist und dessen Dichte sich von der seiner Umgebung um $\Delta \rho$ unterscheidet, einen *Auftrieb* $K = -F l \cdot g \cdot \Delta \rho = -F \rho \cdot g l \cdot \frac{\Delta \rho}{\rho}$. Ist die Temperaturdifferenz des Turbulenzelementes gegenüber seiner Umgebung ΔT , so gilt $\frac{\Delta \rho}{\rho} = -\frac{\Delta T}{T}$, der Auftrieb wird also

$$K = F \rho \cdot g l \cdot \frac{\Delta T}{T}. \quad (93,32)$$

Durch Gleichsetzen von W und K ergibt sich die *Geschwindigkeit* größenordnungsmäßig zu

$$u \approx \sqrt{g l \cdot \frac{\Delta T}{T}}. \quad (93,33)$$

$\Delta T/T$ ist größenordnungsmäßig gleich der $\sqrt[4]{}$ aus den relativen Helligkeitsdifferenzen in der Granulation, also $\sim 2\%$. Wir finden danach mit $g = 2,74 \cdot 10^4$ und $l = 5 \cdot 10^7 \text{ cm}$

$$u \approx 1,6 \cdot 10^5 \text{ cm sek}^{-1} \quad (93,34)$$

in ausreichender Übereinstimmung mit (93,28). Im *Prinzip* gestatten die beiden Gl. (93,26 u. 34) sowohl die Größe des Energietransportes wie auch die Strömungsgeschwindigkeit bei gegebener Dicke der Konvektionszone zu berechnen. Im

¹ Hierzu L. PRANDTL und O. TIETJENS: Hydro- und Aeromechanik, Bd. II, S. 100ff. L. PRANDTL [1672].

Hinblick auf den größenordnungsmäßigen Charakter der ganzen Betrachtungen erscheint jedoch die hier im Anschluß an H. SIEDENTOPF gegebene Darstellungsweise angemessener.

Wie H. H. PLASKETT [1671] bemerkt hat, kann man die Art der Bewegung in der Konvektionszone verstehen durch Zurückgreifen auf Untersuchungen von H. BÉNARD [1617] über Konvektionszellen — „tourbillons cellulaires“ — in einer ebenen Flüssigkeits- oder Gasschicht, die Wärme durch Konvektion transportiert. Wird eine solche Schicht von *unten* erwärmt, aber sonst vor Störungen gut geschützt, so bildet sich ein regelmäßiges Netz sechseckiger Wirbel, so, daß die Materie in der Achse jeder Zelle hochsteigt und längs deren äußerern Begrenzung abwärts strömt. Der gegenseitige Abstand der Achsen benachbarter Konvektionszellen beträgt stets etwa das 3,3fache der Dicke d der betreffenden Schicht.

Diese Modellversuche von H. BÉNARD sind schon von G. T. WALKER und Mitarbeitern auf meteorologische Probleme angewandt worden¹. Sie geben offensichtlich auch eine Deutung des Aussehens der *Granulation*. Nimmt man den mittleren Abstand zweier Granula zu ~ 10000 km, so sollte man auf eine Dicke der Konvektionsschicht von ~ 3000 km schließen. Dies ist zwar wesentlich mehr als der oben angenommene Wert von ~ 500 km. Ob die Konvektionszone wirklich tiefer reicht, als wir ursprünglich berechneten² oder ob die BÉNARDSche Beziehung für eine Atmosphäre, deren Dichte nach oben abnimmt, abzuändern ist, können wir noch nicht entscheiden.

Da in der instabilen Zone *aufsteigende* Gasmassen sich relativ zu ihrer Umgebung *erwärmen*, so kann man auf Grund der BÉNARDSchen Versuche auch verstehen, daß die Granulation aus *hellen Stellen* (Mitte der Zellenwirbel) besteht, die durch *dunkle Zwischenräume* getrennt werden. (Die *über* der Konvektionszone liegende dünne stabile Zone $0 < \tau \leq 1,5$ kann den Energiestrom selbstverständlich nicht merklich beeinflussen.) Es erscheint nicht aussichtslos, den hier angenommenen Strömungscharakter der Granulation durch visuelle³ Beobachtung der Dopplerverschiebungen scharfer Linien zu prüfen: An den hellen Stellen des Spektrums müßten diese kleine Ausbuchtungen nach Violett zeigen.

Weiterhin zeigen die terrestrischen Beobachtungen, daß die Konvektionszellen unter dem Einfluß von Geschwindigkeitsgradienten eine *langgestreckte Form* annehmen. Das fadenförmige Aussehen der Granulation in den Penumbren der Sonnenflecke wird so verständlich.

Zusammenfassend können wir feststellen, daß *die Theorie einer mit der Ionisation des Wasserstoffes zusammenhängenden Konvektionszone in Verbindung mit den auf dieses Problem zuerst von H. SIEDENTOPF angewandten hydrodynamischen Ansätzen von L. PRANDTL u. a. eine befriedigende Erklärung der Granulation liefert*. Da die Dicke der Konvektionszone klein ist im Vergleich zum Sonnenradius, so erscheint es auch erklärlich, daß die Granulation von der *heliographischen Breite* und der *Phase im 11,5jährigen Zyklus unabhängig* ist, wie dies die schon erwähnten Beobachtungen von S. CHEVALIER zeigen. Wir müssen aber auch weiter schließen, daß die Theorie der Wasserstoffkonvektionszone *keine Deutung* für die mit dem 11,5jährigen Zyklus zusammenhängenden Erscheinungen der *Sonnenflecke, Fackeln* usw. geben kann⁴. In dieser Hinsicht

¹ Vgl. auch R. RAETHJEN, Strömungsvorgänge und Wolkenformen. Erfahrungsber. d. Dtsch. Flugwetterdienst. 2. Sonderbd. (1932).

² Was durchaus möglich ist (Absorptionskoeffizient; Zusammensetzung der Sonne usw.!).

³ Photographische Aufnahmen sind von vornherein nahezu aussichtslos.

⁴ In diesem Zusammenhange sei noch auf ein Phänomen hingewiesen das wir zur Zeit noch nicht erklären können: Nach H. DESLANDRES [1628, S. 116ff und Pl. 28/29] bilden

hat der Verfasser seinerzeit die Reichweite seiner Theorie überschätzt (siehe [1688b]). Wir müssen uns demnach, wie zuerst H. SIEDENTOPF und S. ROSSELAND erkannt haben, nach einer anderen Grundlage für die Theorie der Sonnenflecke usw. umsehen.

94. Konvektion in Sternatmosphären.

2. Teil: Die Sonnenflecke und der $2 \times 11,5$ jährige Zyklus.

A. Kritisches. Die Vorstellung, daß die Abkühlung in den Sonnenflecken durch *adiabatische Ausdehnung* der aufwärts¹ strömenden Gase (EVERSHED-Effekt) hervorgerufen werde, ist zuerst (1921) von H. N. RUSSELL [1681] genauer formuliert worden. Später haben dann R. M. PETRIE [1668] und E. A. MILNE [1662] die Druck- und Temperaturschichtung im Fleck unter der Annahme durchgerechnet, daß der Energietransport rein adiabatisch-konvektiven Charakter trage. Wie wir in Abschn. 90 sahen, ist diese Annahme für die höheren Schichten ($\tau < 2$) sicher unzulässig; Beobachtung (90A) und Theorie (90D) zeigen vielmehr übereinstimmend, daß der Energietransport in den höheren Schichten der Flecke zum größten Teil durch Strahlung erfolgt.

E. A. MILNE hat sich in der genannten Arbeit weiterhin mit der Zirkulation der Materie im Fleck beschäftigt: Diese erfolgt höchstwahrscheinlich in der Weise, daß die Gase im Fleck aufsteigen und außerhalb des Fleckes absinken, so daß dieser eine Art Wirbelring darstellt. MILNE nimmt nun an, daß eine solche Bewegung — nachdem sie durch irgendeine Störung einmal im Gang gesetzt ist — von selbst weitergehe. Dies ist jedoch, wie insbesondere T. G. COWLING [1627] ausgeführt hat, nicht mehr richtig, sobald man die Temperaturänderungen berücksichtigt. Wie schon aus den allgemeinen *Stabilitätsbetrachtungen* von Abschn. 93 hervorgeht, sind *Konvektionsströme, in denen Aufwärtsbewegung eine Abkühlung relativ zur Umgebung herbeigeführt, nicht stabil*. Eventuelle Störungen werden in diesem Falle vielmehr normalerweise unter Entstehung stark gedämpfter Schwingungen ausgeglichen. Man kann denselben Gedanken auch folgendermaßen formulieren: Bei dem MILNESchen Modell eines Sonnenfleckes werden Temperaturunterschiede erzeugt bzw. aufrechterhalten ohne Aufwendung mechanischer Arbeit; es stellt also nichts anderes dar, als ein Perpetuum mobile II. Art! Da die Existenz eines solchen Gebildes höchst unwahrscheinlich ist, so müssen wir auch MILNES Versuch (ebd.) einer Berechnung des EVERSHED-effektes mit Hilfe des BERNOULLISchen Theorems, d. h. des Energiesatzes der Hydrodynamik, ablehnen.

Da die Sonnenflecke kühler sind, als ihre Umgebung, so müssen sie nach dem SCHWARZSCHILDschen Kriterium (93,1) selbst *instabil* sein. Dies ist in Einklang mit der Beobachtung, daß die Flecke nur eine *begrenzte Lebensdauer* haben. Auf der anderen Seite müssen wir uns aber nun die Frage vorlegen, woher die *mechanische Energie* stammt, die — im Sinne des II. Hauptsatzes — die Abkühlung in den Flecken ermöglicht; d. h. „welcher Motor die Kältemaschine antreibt“.

Verf. [1688] hat seinerzeit folgende Theorie vorgeschlagen: In der *Wasserstoffzone* haben wir *stabile Konvektionsströme* (deren aufsteigende Massen, also die *Floculi* auf Spektroheliogrammen, die mit den Komponenten „ K_2 “ oder „ K_3 “ der K -Linie λ 3933 aufgenommen sind, ein *Netz*, das den Eindruck eines Systems BÉNARDscher Zellenwirbel erweckt. Der mittlere Abstand zweier Zellen ist hier jedoch viel größer, als bei der Granulation, nämlich ~ 30000 km. Außerdem sind — im Gegensatz zur Granulation — die *Ränder der Zellen hell* und die *Mitten dunkel*.

¹ Die z. B. mit Hilfe der H - und K -Linien festgestellte *Abwärtsbewegung* in den *obersten Schichten* wird offenbar durch den Strahlungsdruck der Umgebung bewirkt. Wir werden analoge Erscheinungen in Abschn. 97 (Protuberanzen) kennenlernen. Im Augenblick können sie außer Betracht bleiben.

wärmer sind als ihre Umgebung). Diese sollten nun durch Reibung in der obersten Schicht $0 < \tau \leq 1,5$, in der Konvektionsströme nicht mehr stabil sind, Wirbel erzeugen, in denen dann adiabatische Expansion die gewünschte Abkühlung hervorrufen konnte. Diese Theorie ist zwar thermodynamisch möglich, aber wie wir in Abschn. 90D sahen, überwiegt in den hohen Schichten auf jeden Fall der Energietransport durch Strahlung¹. Wir müssen uns daher — wie H. SIEDENTOPF [1684] gezeigt hat — damit begnügen, die *Wasserstoffzone* als Ursache der *Granulation* anzusehen. Zur Deutung der *Sonnenflecke* und des *Zyklus der Sonnenaktivität* (mit dem die Granulation — wie schon bemerkt — charakteristischerweise *nicht* zusammenhängt) brauchen wir eine — im wahrsten Sinn des Wortes — *tiefer* liegende Ursache.

B. Zur Hydrodynamik der Sonnenflecke und des $2 \times 11,5$ jährigen Zyklus.

G. E. HALE hat im Zusammenhang mit seinen Untersuchungen über das Magnetfeld der Sonnenflecke sich die Vorstellung gebildet, daß die beiden Komponenten eines *bipolaren Fleckes* — den wir als Grundtyp aller Flecke aufzufassen haben — unter der Sonnenoberfläche durch einen U-förmigen Wirbel verbunden sind (Fig. 126 a). Dessen freie Enden wirken, wenn die Zentrifugalkraft nach oben zunimmt, wie *Kreiselpumpen* und erzeugen so durch adiabatische Expansion die *Abkühlung*. Den entgegengesetzten Umlaufsinn beider „Flecke“ wird man mit ihrer *magnetischen Polarität* in Verbindung bringen dürfen, wenn der Zusammenhang im einzelnen auch noch völlig ungeklärt ist.

Die *Tiefe*, bis zu welcher die Fleckenwirbel in der Sonnenatmosphäre hinunterreichen, dürfte von derselben Größenordnung sein, wie ihr Durchmesser, also ~ 20000 km. Daß die Flecke aus viel größeren Tiefen kommen müssen, als die ersten Rechnungen von RUSSELL, MILNE u. a. (s. S. 386, vgl. auch Abschn. 90) erwarten ließen, folgt einfach daraus, daß in den hohen Schichten mit kleiner Dichte der Energietransport durch Strahlung unter allen plausiblen Annahmen den durch Konvektion erheblich überwiegt. Durch Konvektion könnten dort nur kleine Temperaturdifferenzen entstehen, die zudem in der Wasserstoffzone (wie dies für die *Granulation* gerade paßt) das falsche Vorzeichen hätten!

Wir müssen also insbesondere schließen, daß die Wasserstoffzone für die Flecke nur von untergeordneter Bedeutung ist (s. u.). *Vielleicht* kann man sie zur Erklärung der sog. „*unsichtbaren Flecke*“ (HALE), die sich nur durch Magnetfeld und Flocculi zu erkennen geben, heranziehen, indem man annimmt, daß bei schwachen Wirbeln die in den tiefen Schichten bewirkte Abkühlung durch Erwärmung in der Wasserstoffzone kompensiert wird.

Mit H. SIEDENTOPF (s. S. 383) versuchen wir nun — ähnlich wie bei der Granulation — den Energietransport im Fleck durch Gl. (93,26) zu beschreiben. Da die *Gesamtstrahlung* des Fleckes nach (90,2) etwa gleich 0,42 mal dem normalen

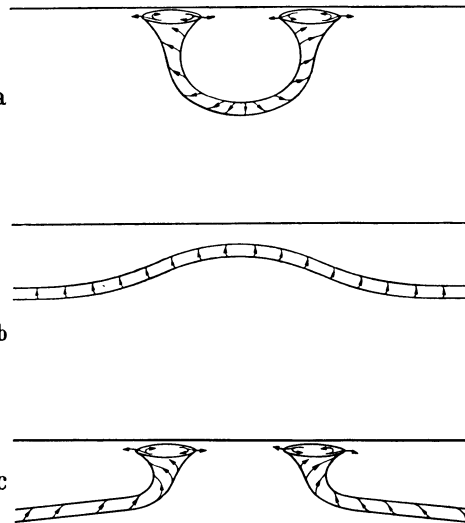


Fig. 126 a–c. Sonnenflecke als Wirbel. a) Nach HALE. b) und c) Nach BJERKNES. AUS [1].

¹ Demselben Einwand unterliegt die Auffassung von T. G. COWLING [1627], daß die Flecke durch Abwärtsbewegung in der Wasserstoffzone entstehen könnten. Abgesehen davon widerspricht sie auch den Beobachtungen des EVERSHED-Effektes.

Strahlungsstrom ist, so wird $H_K = -0,58 \cdot 6,13 \cdot 10^{10} = -3,5 \cdot 10^{10} \text{ erg cm}^{-2} \text{ sek}^{-1}$. Weiterhin ist $g = 2,74 \cdot 10^4 \text{ cm sek}^{-2}$ und $\frac{c_p \cdot \mu}{R} \sim 3 \cdot \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{\text{Str}}$ können wir nach (93,8) etwa $= 0,3$ setzen und $\left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{\text{ad}}$ wird nach (93,9) außerhalb der Wasserstoffzone rasch $= 0,40$. So finden wir nach (93,26) die (natürlich noch mit erheblicher Unsicherheit behaftete) *Austauschgröße* für den Sonnenfleck

$$A_{\text{Fl.}} \approx 5 \cdot 10^6 \text{ g cm}^{-1} \text{ sek}^{-1}. \quad (94,1)$$

Setzen wir den *Mischungsweg* etwa gleich den Dimensionen des Fleckes $l \approx 20000 \text{ km}$ und die mittlere Dichte der aufsteigenden Materie $\rho \approx 10^{-6}$, so wird deren mittlere *Geschwindigkeit*

$$u = \frac{A}{\rho l} \approx 2,5 \cdot 10^3 \text{ cm sek}^{-1}. \quad (94,2)$$


Damit können wir nach Gl. (93,29) die *mittlere Lebensdauer eines Fleckes* berechnen zu

$$\tau \approx \frac{l}{u} \approx 0,8 \cdot 10^6 \text{ sek} \sim 9 \text{ Tage}, \quad (94,3)$$

was immerhin in die richtige Größenordnung kommt (mehr ist bei dieser einfachen Abschätzung gar nicht zu erwarten). An die Stelle von Gl. (93,33) der Granulationstheorie hätte in der Theorie der Sonnenflecke eine hydrodynamische Berechnung des „Kreiselpumpeneffektes“ zu treten, zu der aber zur Zeit noch alle Unterlagen fehlen.

Nachdem wir die Hydrodynamik des einzelnen Sonnenfleckes geklärt haben¹, soweit dies zur Zeit möglich ist, wollen wir mit V. BJERKNES [1620] versuchen, uns an Hand der Beobachtungen ein Bild von den *Strömungen* im Innern der Sonne zu machen, die für die *Entstehung der Sonnenflecke* und den $2 \times 11,5$ -*jährigen Zyklus* verantwortlich sind.

Zunächst eine Ergänzung zum vorhergehenden: BJERKNES nimmt an, daß nicht die beiden Flecke einer bipolaren Gruppe durch einen U-Wirbel zusammenhängen, sondern daß der hintere Fleck einer Gruppe mit dem vorderen der folgenden durch einen Wirbelschlauch verbunden ist. Die Sonnenflecke entstehen nach diesem Bild (Fig. 126 b u. c) also durch das gelegentliche Auftauchen von Wirbeln, die die ganze Sonne wie Seeschlangen umwinden. Da derartige Gebilde aber sehr wenig stabil sind und sich auch wohl sonstwie bemerkbar machen müßten, so möchte Verf. lieber an der älteren Vorstellung von G. E. HALE (Fig. 126 a) festhalten und diese durch die aus der Hydrodynamik geläufige Vorstellung ergänzen, daß die einzelnen U-Wirbel durch *Ablösung* an der Grenzfläche tiefer liegender Wirbel entstehen, die den $2 \times 11,5$ -jährigen Zyklus hervorrufen und in vieler Hinsicht der „großen Zirkulation“ der Erdatmosphäre entsprechen.

Um das CARRINGTON-SPÖRERSche Gesetz der Wanderung der Fleckenzone für die *niederen heliographischen Breiten* und die durch die *Protuberanzen* und — mit gewissen Einschränkungen — durch die polaren Fackeln angezeigte periodische Verschiebung der Aktivität in *höheren Breiten* darzustellen, liegt es nahe, sich des in Fig. 127 a angedeuteten Bildes zu bedienen. Die „Herde der Aktivität“  — deren Natur wir zunächst noch offen lassen wollen — bewegen sich im Sinn der Pfeile so, daß die geschlossenen Kurven in $2 \times 11,5$ Jahren durchlaufen werden. Im Anschluß an V. BJERKNES (s. oben) kann man dieses

¹ Auch bei dieser Gelegenheit möchte Verf. nochmals darauf hinweisen, daß der Mechanismus der Entstehung der *Fackeln* zur Zeit noch ganz unbekannt ist.

Bild, um G. E. HALES' Entdeckung der *Umkehr der Fleckenpolarität*¹ Rechnung zu tragen, dahingehend ausgestaltet, daß man die „Aktivitätsherde“ selbst als Wirbel auffaßt (Fig. 127b). Nach BJERKNES' „Seeschlangentheorie“ hätte man anzunehmen, daß das Empортаuchen dieser Wirbel selbst die Flecke erzeugt. Wir möchten eher glauben, daß entweder dort, wo diese Wirbel der Oberfläche am nächsten kommen oder vielleicht auch je zwischen zwei solchen Wirbeln die U-Wirbel der Sonnenflecke sich ablösen. Daß in den höheren Breiten keine Flecke, sondern nur Protuberanzen- und Fackel-Aktivität auftritt, kann man wohl zwanglos durch die Annahme einer geringeren Mächtigkeit der zirkulierenden Massen in höheren Breiten deuten. Vielleicht wäre es übrigens nicht aussichtslos, in höheren Breiten nach „unsichtbaren Flecken“ zu suchen.

Noch nicht befriedigend geklärt ist im einzelnen, weshalb die Protuberanzenzone mit der Flecken + Fackelzone in den niederen Breiten und der Zone der polaren Fackeln in den höheren Breiten nicht genau zusammenfällt. Immerhin dürfte unser Bild die Grundzüge der Erscheinungen wohl darstellen; in Einzelheiten bedarf es jedoch ohne Zweifel noch einer gründlichen Überarbeitung.

C. Mögliche Ursachen des $2 \times 11,5$ jährigen Zyklus. Wir gehen nun einen Schritt weiter und fragen nach dem „Antriebsmechanismus“ der Konvektionsströme im Inneren der Sonne, die den Fleckenzklus hervorrufen. In der mehrfach erwähnten Abhandlung ging V. BJERKNES noch von der Vorstellung aus, daß das Innere der Sonne sich im *konvektiven Gleichgewicht* befinde. Diese Annahme können wir heute nicht mehr als richtig betrachten,

nachdem R. H. FOWLER und E. A. GUGGENHEIM² gezeigt haben, daß im Sterninneren γ durchweg so nahe bei $5/3$ liegt, daß der Zustand des *Strahlungsgleichgewichtes* stabil sein sollte.

Auf eine Möglichkeit zur Erklärung von Konvektionsströmen in tieferen Schichten der Sonne hat nun kürzlich S. ROSSELAND [1680] hingewiesen. Er zeigt zunächst — in Fortführung von Arbeiten von MILNE, v. ZEIPPEL, JEANS u. a. —, daß in einem rotierenden Stern — wegen des Drehimpulstransportes — die *Winkelgeschwindigkeit mit der Tiefe rasch anwächst*. Im Zusammenhang damit entsteht in den äußeren Teilen des Sternes eine *Instabilitätszone*³, deren Dicke vom Äquator nach den Polen hin abnimmt.

¹ Wir nehmen wieder an, daß die Polarität *irgendwie* mit der Rotation in tieferen Schichten zusammenhängt.

² Vgl. EDDINGTONS Buch [5]. Durch die große Häufigkeit des Wasserstoffes rückt unterhalb seiner Ionisationszone γ noch näher an $5/3$ heran.

³ Eine derartige Rotationsinstabilität hatte schon 1932 D. RIABOUCHINSKY [1673] bei Modellversuchen gefunden: Eine wassergefüllte Glaskugel wird um eine vertikale Achse in gleichförmige Rotation versetzt. Ein im Kugelmittelpunkt angebrachter kleiner Propeller, der sich in demselben Sinne wie die Kugel — aber etwas rascher — dreht, erzeugt eine konvektive Zirkulation, die bei bestimmten Verhältnissen *periodisch* vom Zustand einer *stetigen Wirbelbewegung* in vollständige *Turbulenz* übergeht und umgekehrt. D. RIABOUCHINSKY meint, die *Periodizität der Sonnenflecke* könnte durch einen ähnlichen Mechanismus erklärt werden, doch dürfte es kaum möglich sein, auf dieser Grundlage z. B. das CARRINGTON-SPÖRERSche Gesetz usw. zu deuten. Immerhin hat diese Arbeit das Verdienst, wohl zum ersten Male auf die Möglichkeit der *Rotationsinstabilität* und ihre Bedeutung für die Astrophysik hingewiesen zu haben.

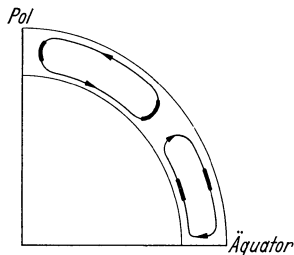


Fig. 127 a. Wanderung der Aktivitätszonen — im Laufe des $2 \times 11,5$ jährigen Zyklus (schematisch).

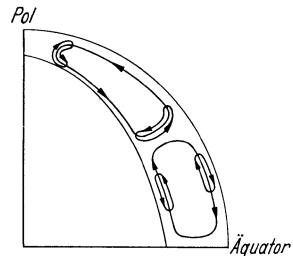


Fig. 127 b. Allgemeine Zirkulation im Inneren der Sonne. Frei nach V. BJERKNES [1620].

Es erscheint durchaus denkbar, daß in dieser instabilen Zone sich ein *Wirbel-system* bildet, wie wir es im vorhergehenden angenommen haben¹. Auf der anderen Seite bietet, wie schon FAYE und weiterhin ROSSELAND und VOGT ausgeführt haben, das bemerkte Anwachsen der Winkelgeschwindigkeit mit der Tiefe wahrscheinlich auch eine Möglichkeit zur Erklärung der *Breitenabhängigkeit der Rotation der Sonnenoberfläche*. Diese Probleme können aber offensichtlich nur im Zusammenhang mit der *Theorie des Sterninneren* gefördert werden und wir müssen uns daher in diesem Buche damit begnügen, auf ihre Bedeutung hinzuweisen.

XVII. Kapitel.

Der Sonnenrand. Protuberanzen, Chromosphäre und Korona. Spektroheliogramme.

95. Finsternisbeobachtungen.

Wir ergänzen zunächst den einleitenden Abschn. 89 des vorhergehenden Kapitels durch einige allgemeine Bemerkungen über Art und Technik der *Beobachtung totaler Sonnenfinsternisse*:

Kurz vor Beginn der Totalität strahlt die äußerste Zone der Photosphäre stellenweise durch die Täler des Mondes. Dessen Rand erscheint daher wie von einer Kette leuchtender Perlen umgeben, den sog. *Baily-Beads*.

Nachdem dieses Phänomen vergangen ist, tritt kurze Zeit — „flash“ — das *gesamte FRAUNHOFER-Spektrum in Emission* auf. Gleich darauf verschwinden die schwächeren Metalllinien und es bleiben in der Hauptsache die BALMER-Linien des Wasserstoffs, die Heliumlinien und $H + K$ von Ca^+ . Wir bezeichnen die *ganze Schicht*, welche die Emissionslinien des Flashspektrums liefert, als *Chromosphäre*. Früher nahm man an, daß deren unterer Teil auch für die Entstehung der FRAUNHOFERschen Absorptionslinien verantwortlich sei und nannte sie daher *umkehrende Schicht*. Die in den vorhergehenden Kapiteln entwickelte Theorie der FRAUNHOFER-Linien hat aber gezeigt, daß diese zum überwiegenden Teil (nämlich mit Ausnahme der Mitten der starken Linien) in etwa denselben Schichten entstehen wie das kontinuierliche Spektrum. Wir wollen daher den Terminus „umkehrende Schicht“ gänzlich fallen lassen.

Aus der Chromosphäre erheben sich da und dort die *Protuberanzen*. Während deren Form und Bewegung jederzeit mit dem Spektroheliographen studiert werden kann, ist zum genaueren Studium ihres Spektrums — das in vieler Hinsicht dem der Chromosphäre ähnelt — die Finsternisbeobachtung nicht zu entbehren. Auf die äußerste Hülle der Sonne, die *Korona* werden wir in Abschn. 99 zurückkommen.

Das zur Beobachtung von Chromosphäre und Protuberanzen bei Finsternissen meist gebrauchte Instrument ist die *Objektivprismenkamera*. Fig. 128 gibt ein von der Cambridge Expedition in Benkoelen aufgenommenes Flashspektrum nebst den zugehörigen instrumentellen Daten und Hinweisen auf einige besonders bemerkenswerte Einzelheiten. Mit dem *Konkavgitter* kann man ohne jede Hilfsoptik arbeiten, da Parallelstrahlenbündel, die in Richtung der Achse einfallen, bekanntlich stigmatisch abgebildet werden. Diese Anordnung, die sich durch hohe Dispersion und Lichtstärke auszeichnet, ist namentlich von S. A.

¹ Die *Antriebsenergie* der Sonnenflecken-Kältemaschine stammte dann also letzten Endes von der *Rotation* der Sonne.

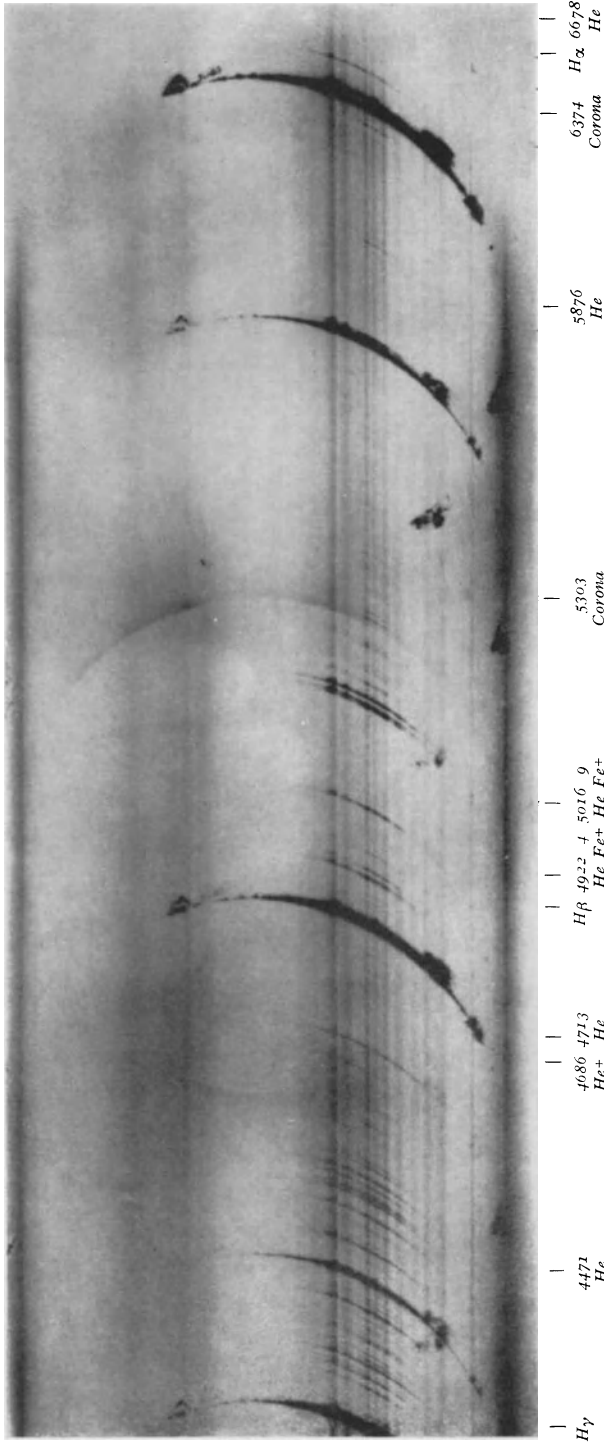


Fig. 128. *Flashspektrum* (1926. Jan. 14) nach C. R. DAVIDSON und F. J. M. STRATTON [1716], aufgenommen mit einem Objektiv von 4" Durchmesser und 38' Brennweite + 45°-Objektivprisma. Belichtung 10 sek. Die Protuberanzen zeigen auf *gleichstarken* Linien verschiedener Elemente (z. B. $H\gamma$ und He 5876) nahezu dasselbe Aussehen. Man beachte das *kontinuierliche* Spektrum der starken Protuberanzen! Oben und unten kontinuierliches Spektrum der *Corona*. Die „Ringe“ der *Koronalinien* λ 5303 und λ 6374 sind deutlich zu erkennen. Ihre Verstärkung am Ort der Protuberanzen scheint in erster Linie durch Überlagerung des kontinuierlichen Protuberanzenspektrums verursacht zu sein.

MITCHELL [1740—41] mit Erfolg angewandt worden. Um die Größe der „Monde“ unabhängig von der Brennweite des Gitters wählen zu können, erzeugt J. A. ANDERSON [1704] zunächst durch einen Konkavspiegel ($f \sim 1$ m) ein reelles Sonnenbild, macht durch einen 2. Konkavspiegel, dessen Krümmungsradius gleich dem des Gitters ist ($R \approx 6,6$ m) die Strahlenbündel wieder parallel und läßt sie dann senkrecht auf das Konkavgitter auftreffen. Man sieht leicht, daß dieses Instrument durch Luftunruhe, thermische Verzerrung der Zölostatenpiegel usw. (unabhängig von der Dispersion) nur in dem Maß beeinflußt wird wie eine direkt arbeitende Kamera mit der Brennweite des 1. Spiegels, der die Größe der „Monde“ bestimmt. Bei der Festlegung des Verhältnisses der Skala der monochromatischen Bilder zur Dispersion ist zu beachten, daß mit dessen Abnahme die kontinuierlichen Spektre z. B. von Protuberanzen und Korona gegenüber deren Linienspektren zurücktreten.

Da der Mond bei einer Finsternis sich mit genau bekannter Geschwindigkeit über die Sonne hinwegbewegt¹, so geben *Reihenaufnahmen mit bekannten zeitlichen Abständen* die wertvollsten Aufschlüsse über *Schichtung und Aufbau der Chromosphäre*. Trotzdem K. SCHWARZSCHILD [1774] schon 1905 — die Publikation ist leider viel zu wenig bekannt geworden — diesen einfachen Gedanken angewandt hat, ist er erst 1932 von D. H. MENZEL [1711] in seinem „*Jumping-Film*“-*Spektrograph* weiter entwickelt worden (Expositionsdauer = Zwischenraum zweier Aufnahmen = 1,2 sek). Eine zeitlich stetige Registrierung des Spektrums einer bestimmten Stelle der Chromosphäre gestattet der (ältere) „*Moving-Plate*“-*Spektrograph* von W. W. CAMPBELL und D. H. MENZEL [1735]. Aus dem Spektrum wird hier in der Dispersionsrichtung ein schmaler Streifen durch einen Spalt ausgeschnitten, hinter dem sich senkrecht dazu mit bekannter Geschwindigkeit die Platte bewegt. Da bei dieser Anordnung die Auswahl einer ungestörten (d. h. von Protuberanzen freien) Stelle der Chromosphäre Schwierigkeiten bereitet, und eine gewisse zeitliche „Verwaschung“ doch nicht zu vermeiden ist, so wird man aber im allgemeinen der „*Jumping-film*“-Methode den Vorzug geben, die auf einer Aufnahmeserie *alles* überhaupt Beobachtbare gibt. Um den erfaßbaren Intensitätsbereich zu vergrößern, dürfte in Zukunft die Anwendung simultan arbeitender Kammern von verschiedenem Öffnungsverhältnis, aber sonst identischem Bau, zu erwägen sein.

Bei der Auswertung aller derartiger Aufnahmen ist zu bedenken, daß der *Mondrand* nicht glatt, sondern mit *Gebirgen* besetzt ist, deren Höhe in der Projektion nahezu von denselben Dimensionen ist, wie die der Chromosphäre. K. SCHWARZSCHILD [1774] und G. G. CILLIÉ und D. H. MENZEL [1711] haben 1905 bzw. 1932 gefunden, daß die Helligkeit der feinen Photosphärensichel kurz vor Eintritt der Totalität an jeder Stelle *linear* mit der Zeit abnimmt. Man muß hieraus zunächst schließen, daß die *Helligkeit am äußersten Sonnenrand nahezu konstant* ist, was nach der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes auch leicht verständlich ist. Weiterhin kann man nun aber durch photometrischen Vergleich verschiedener Stellen der „Sichel“ ein sehr detailreiches *Profil des Mondrandes* ableiten. Über die Durchführung vgl. K. SCHWARZSCHILD (s. oben). Die Variation der bei einer bestimmten Aufnahme erfaßten *Höhen über dem Sonnenrand* mit der Phase (Abstand vom Eintritt der Totalität in sek) zeigt für die Finsternis von 1905 die von D. H. MENZEL [1735] berechnete Fig. 129. Für eine im Abstand y_0/a (in Einheiten des Sonnenradius) von der Verbindungslinie Sonne—Mondmitte liegenden Stelle, die sich $h \cdot 10^3$ km über dem Sonnenrand erhebt, liest man daraus leicht den Zeitpunkt ihrer Berührung mit dem *Mondrand* ab. Die glatten Kurven sind für einen „sphärischen“ Mond berechnet,

¹ Projiziert auf die Sonne entspricht sie — der genaue Wert variiert natürlich von Finsternis zu Finsternis — etwa 300 km/sek.

während für Phase 0 sek auch das auf Photographien großen Maßstabes ausgemessene „Mondprofil“ eingezeichnet ist. Da dessen „Höhen“ durchaus in derselben Größenordnung liegen, wie die der Chromosphäre, so ist seine sorgfältige Berücksichtigung unerlässlich. Hat man am Mondrand mehrere hinreichend ausgedehnte „Ebenen“ mit *passenden Höhendifferenzen*, so kann man diese evtl. heranziehen, um die *zeitliche Folge* der Aufnahmen sozusagen zu verdichten.

In der älteren Literatur spielt die Bestimmung der „Höhen“ verschiedener Linien (woraus man voreilig vielfach sogar gleich auf Schichtung nach Elementen schloß) mit Hilfe der auf *einer* Objektivprismen- oder Konkavgitteraufnahme gemessenen Ausdehnung der „Monde“ eine große Rolle. Derartige Messungen werden aber, wie MENZEL (s. S. 392) an Hand von Fig. 129 bemerkt, durch Unebenheiten des Mondrandes unter Umständen sehr stark affiziert. Abgesehen davon sind sie natürlich abhängig von der Lichtstärke der Apparatur usw. Daß sie mit „Höhen“ direkt nichts zu tun haben, ersieht man schon aus der erheblichen Abnahme der Zahlenwerte mit wachsender Gliednummer in der BALMER-Serie. Im günstigsten Falle (nämlich wenn der scheinbare Mondrand einigermaßen glatt ist und keine Protuberanzen stören) bilden die „Höhen“ ein qualitatives Maß der *Intensität* der Linien.

Bei den bisher betrachteten Apparaturen dient durchweg die Chromosphäre selbst als Spektrophenspalt. Es bleibt noch kurz zu erörtern, was bei Benutzung eines *Spaltspektrographen* zu beachten ist: Ein *weiter* Spalt, der das Bild der *gesamten* Chromosphäre faßt, kann mit Nutzen angewandt werden, um das kontinuierliche Spektrum von Korona und Himmelstreulicht zu reduzieren. Außerdem beseitigt er störende Spektren, die evtl. von der „anderen“ Seite des Sonnenrandes herrühren. Wählt man dagegen einen *engen* Spalt, so wird vielfach das Bild der Chromosphäre in der Größenordnung der Spaltbreite liegen. Die Intensitäten der Linien werden dann durch kleinste Veränderungen am Instrument stark beeinflußt. Eine solche Anordnung ist also für allgemeine photometrische Untersuchungen nicht zu empfehlen; man wird sie nur anwenden, wenn bei großer Dispersion Präzisionswellenlängen oder die Konturen einzelner Linien gemessen werden sollen.

Außerhalb von Finsternissen erhält man mit den großen Gitterspektrographen der Turmteleskope in Chromosphäre und Protuberanzen meist nur die starken BALMER- und PASCHEN-Linien des Wasserstoffes, *H* und *K* sowie die infrarote Gruppe von CaII, die *D₃*-Linie von Helium und das infrarote Sauerstofftriplett. Wenn auch diese Spektren durch Himmelsstreulicht (das evtl. durch Anwendung der LYOTSchen Technik herabgedrückt werden könnte) noch erheblich verunreinigt sind, so sind sie doch von großer Bedeutung, da sie eine genaue Messung von *Linienkonturen* gestatten. Unter besonders günstigen Umständen haben

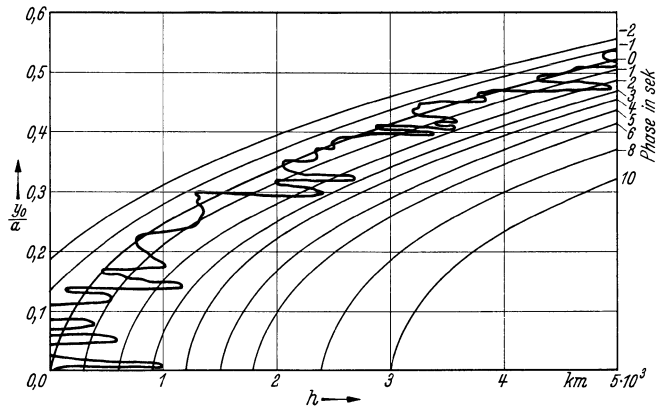


Fig. 129. Die Kurven zeigen die Stellungen der Mondoberfläche in Intervallen von 1 sek. Für Phase 0 ist das wahre Mondprofil eingezeichnet. *Abzissen:* Höhe über dem Sonnenrand. *Ordinaten:* Abstand von der Verbindungslinie der Zentren von Sonne und Mond in Einheiten des Sonnenradius. Für die Finsternis von 1905 berechnet von D. H. MENZEL [1735].

seinerzeit W. S. ADAMS und C. BURWELL [1703] an MT. WILSON sogar ein vollständiges Spektrum der Chromosphäre ohne Finsternis aufgenommen, aber abgesehen von der Seltenheit derartiger Gelegenheiten dürfte eine photometrische Auswertung durch das Streulicht nahezu unmöglich gemacht werden.

96. Der Helligkeitsabfall am äußersten Sonnenrand.

Die altbekannte Tatsache, daß der Sonnenrand uns scharf begrenzt erscheint, hat früher zu den merkwürdigsten Hypothesen Anlaß gegeben. Mochte die Vorstellung einer *flüssigen Photosphäre* zu ihrer Zeit noch ganz vernünftig erscheinen, so kann man die SCHMIDT'sche *Theorie*, welche mit Strahlenbrechungen von der Art einer Fata Morgana in der Sonne operierte, nur unter die zahlreichen Curiosa der Astrophysik einreihen, die ihre Entstehung einem gelegentlichen Überwuchern der Spekulation verdanken.

Die fast selbstverständlichen Grundlagen der richtigen Erklärung hat K. SCHWARZSCHILD (1905) in seiner schon oft erwähnten Arbeit gegeben. Wir entwickeln sie hier sogleich in etwas vervollständigter Fassung.

Die Temperatur der äußersten Schichten der Sonnenatmosphäre ist nach Abschn. 27 nahezu konstant und gleich $T = T_0 = 4830^\circ$. Das Molekulargewicht ist nach Tabelle 36, Spalte 10 und Tabelle 22 bei dieser Temperatur vom Druck (in dem fraglichen Bereich) nur wenig abhängig; wir können mit einem Mittelwert $\mu = 2,75$ rechnen. Da nach Kap. VII weiterhin in der Sonnenatmosphäre der Gradient des Strahlungsdruckes gegenüber dem des Gasdruckes stets vernachlässigbar ist, erwarten wir also, daß die Abnahme des Gasdruckes P mit der Höhe h (gemessen von einem Ausgangsniveau mit dem Druck P_0 aus) dargestellt wird durch die *Barometerformel* ($R =$ Gaskonstante; $g =$ Schwerebeschleunigung):

$$P = P_0 e^{-\alpha h}. \quad (96,1)$$

Dabei ist

$$\alpha = \frac{g \mu}{RT} = 18,7 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{-1} \quad (96,2)$$

und $\frac{1}{\alpha} = 53,3$ km die sog. „Höhe der homogenen Atmosphäre“. Da nach (96,1) der Druck auf je 53,3 km, entsprechend $0'',074$ um einen Faktor $e = 2,72$ abnimmt, so ist damit der scharfe Sonnenrand qualitativ schon erklärt.

Es bleiben uns noch die für die Deutung des Flashspektrums wichtigen Aufgaben, zu berechnen 1. *wie* der Helligkeitsabfall am äußersten Sonnenrand in quantitativer Hinsicht erfolgt und 2. welcher optischen Tiefe (in Richtung des Sonnenradius gemessen) der scheinbare Sonnenrand entspricht.

Die Druckabhängigkeit des *kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten* (den wir für die Sonne näherungsweise als wellenlängenunabhängig betrachten dürfen) wird bei der Temperatur T ($\Theta = 1,043$) in dem in Betracht kommenden Druckbereich dargestellt durch

$$\kappa = \kappa_0 P^n \quad \text{oder} \quad \log \kappa = \log \kappa_0 + n \log P, \quad (96,3)$$

wobei nach Fig. 55 die Konstanten $\log \kappa_0 = -1,71$ und $n = 0,563$ sind. Der Absorptionskoeffizient pro cm ist demnach ($\rho =$ Dichte)

$$\kappa \rho = \frac{\kappa_0 \mu}{RT} \cdot P^{n+1} \quad (96,4)$$

und der Höhe h entspricht die von außen herein *in Richtung des Sonnenradius* gemessene *optische Tiefe* τ

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \int_h^\infty \kappa \varrho \, dh = \frac{\kappa_0 \mu}{RT} \cdot P_0^{n+1} \int_h^\infty e^{-(n+1)\alpha h} \, dh, \\ \text{oder} \quad \tau &= \frac{\kappa_0 \cdot P_0^{n+1}}{g(n+1)} \cdot e^{-(n+1)\alpha h}. \end{aligned} \right\} \quad (96,5)$$

Betrachtet man andererseits den Sonnenrand, so erhält man im scheinbaren Abstand x (zum folgenden vgl. Fig. 130) vom Sonnenrand Strahlung aus einer Schicht der optischen Dicke

$$\tau' = 2 \int_0^\infty \kappa \varrho \, dy. \quad (96,6)$$

Nun ist nach Fig. 130 für x und $h \ll$ Sonnenradius $a = 6,95 \cdot 10^{10}$ cm

$$\left. \begin{aligned} y^2 &= (a+h)^2 - (a+x)^2 \approx 2a(h-x) \dots \\ \text{und} \quad dy &= \sqrt{\frac{a}{2(h-x)}} \, dh \end{aligned} \right\} \quad (96,7)$$

und damit

$$\tau' = \frac{2\kappa_0 \mu}{RT} \cdot P_0^{n+1} \int_x^\infty e^{-(n+1)\alpha h} \cdot \sqrt{\frac{a}{2(h-x)}} \, dh. \quad (96,8)$$

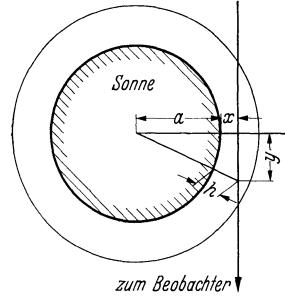


Fig. 130. Beobachtung am Sonnenrand.

Nach Ausführung der Integration (Variable $\sqrt{h-x}$) ergibt sich mit (96,2)

$$\tau' = \frac{\kappa_0 P_0^{n+1}}{g} \sqrt{\frac{2\pi}{n+1}} \cdot a \alpha \cdot e^{-(n+1)\alpha x}, \quad (96,9)$$

τ' und τ sind also verknüpft durch die einfache Beziehung ($n = 0,563$; $a = 6,95 \cdot 10^{10}$ cm; $\alpha = 18,7 \cdot 10^{-8}$ cm $^{-1}$)

$$\frac{\tau'}{\tau} = \sqrt{2\pi(n+1)} \cdot a \alpha = 358. \quad (96,10)$$

Die *Strahlungsintensität* die wir von einer Schicht der optischen Dicke τ' im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht bei der Temperatur T bekommen, ist

$$I = I_0(1 - e^{-\tau'}), \quad (96,11)$$

wo I_0 die KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion für T oder die im Sinne des *ebenen* Problems (Kap. V) verstandene Helligkeit des Sonnenrandes bedeutet. Die nebenstehende Fig. 131 gibt eine graphische Darstellung von I/I_0 in Abhängigkeit von der Höhe h (in km vom Niveau $\tau' = 1$ aus gerechnet) bzw. $\log \tau$ und $\log \tau'$.

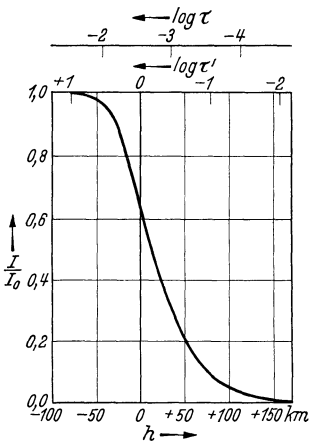


Fig. 131. Helligkeitsabfall am äußersten Sonnenrand. Abszissen: τ = optische Tiefe senkrecht zur Sonnenoberfläche; τ' = optische Dicke in Richtung der Sehlinie; h = Höhe in km; gerechnet von $\tau' = 1$ aus. Ordinaten: Intensität in Einheiten der für das ebene Problem berechneten Randintensität.

Wie man sieht, vollzieht sich der ganze Helligkeitsabfall am Sonnenrand (bei der Gesamtstrahlung also z. B. von 40% der Intensität in \odot -Mitte auf Null) auf einer Strecke von nur ~ 100 km entsprechend $0,14$. Da dies viel weniger ist als die projizierte Höhe selbst kleiner Unebenheiten der Mondoerfläche, so dürfte es kaum möglich sein, die wahre Helligkeitsabnahme am äußersten Sonnenrand irgendwie zu messen, sofern nicht schon in den hier betrachteten Schichten sich die in der Chromosphäre (vgl. Abschn. 98) beobachtete anomale Vergrößerung von $1/\alpha$ auf etwa das 10fache des in (96,2) berechneten Betrages bemerkbar

machen sollte. (Diese Frage kann zur Zeit noch nicht entschieden werden. Einstweilen rechnen wir mit dem „theoretischen“ α von Gl. (96,2) weiter, behalten jedoch die andere Möglichkeit im Auge.)

Die optische Tiefe τ — senkrecht zur Sonnenoberfläche gemessen — welche der scheinbaren Begrenzung (= steilster Helligkeitsabfall) des Sonnenrandes entspricht ($\tau' \sim 1$), ist $\tau \sim 0,0028$. Nach Gl. (96,5) berechnet man leicht den

zu dieser optischen Tiefe gehörigen *Gasdruck* P bzw. $P_g = \left(\frac{(n+1)g \cdot \tau}{z_0} \right)^{\frac{1}{n+1}}$ und dann nach Tabelle 22 den *Elektronendruck* P_e :

$$\tau = 0,0028: \log P_g = 2,42 \quad \text{und} \quad \log P_e = 0,62. \quad (96,12)$$

Zum Vergleich geben wir nochmals die in Tabelle 36 enthaltenen Werte für

$$\tau = 0,53: \log P_g = 3,62 \quad \text{und} \quad \log P_e = 1,84. \quad (96,13)$$

Gasdruck wie Elektronendruck dürften also in der Chromosphäre 16 bis (in höheren Schichten) etwa 500mal kleiner sein, als in den Schichten, welche die FRAUNHOFER-Linien erzeugen.

Unsere Rechnungen bestätigen die schon im vorhergehenden Abschnitt geäußerte Anschauung, daß die das Flashspektrum hervorruhenden Schichten nur einen verschwindend kleinen Beitrag zu den FRAUNHOFER-Linien geben. Es erscheint daher — wie insbesondere D. H. MENZEL betont hat — heute nicht mehr gerechtfertigt, von einer besonderen „umkehrenden Schicht“ zu sprechen.

97. Protuberanzen.

Entgegen der Gewohnheit älterer Darstellungen betrachten wir die Protuberanzen *vor* der Chromosphäre, nachdem neuere Untersuchungen gezeigt haben, daß letztere am besten als ein Haufwerk kleiner Protuberanzen aufzufassen ist. Wenn auch äußerlich betrachtet die Chromosphäre ein Bild größerer Gesetzmäßigkeit zu bieten scheint, als die phantastisch anmutenden Formen und Bewegungen der Protuberanzen, so kann doch kein Zweifel darüber bestehen, daß ein physikalisches Verständnis der Chromosphäre das der Protuberanzen zur Voraussetzung hat.

A. Form und Klassifikation der Protuberanzen (E. PETTIT). An Hand von Beobachtungen der *Form und Bewegung der Protuberanzen*, wie sie in Emission am Sonnenrand erscheinen, hat E. PETTIT [1763] folgende *Klassifikation* entworfen (Fig. 132):

Klasse 1. *Aktive Protuberanzen*. Werden anscheinend durch ein sog. „Anziehungszentrum“ (s. u.) oder einen benachbarten Sonnenfleck von der Stelle gerissen.

Klasse 2. *Eruptive Protuberanzen*. Steigen in mehr oder weniger vertikaler Richtung empor.

Klasse 3. „Fleck“- oder „Spritz“-Protuberanzen („spot“ or „flash“-type). Erinnern an die Wasserstrahlen eines Springbrunnens. Wie der Name sagt, kommt dieser Typ nur in der Nähe von Sonnenflecken vor.

Klasse 4. *Tornado-Protuberanzen* zeigen das Aussehen einer vertikalen Spirale, wie ein gedrehtes Seil.

Klasse 5. *Ruhende Protuberanzen* zeigen innerhalb einiger Minuten nur geringfügige Veränderungen. Halten sich oft tagelang.

Es ist klar, daß Klasse 1 und 2 so gut wie stetig ineinander übergehen und auch zu 3 noch eine gewisse Verwandtschaft zeigen. Die *Häufigkeit* der verschiedenen Typen wächst — ebenso wie ihre mittlere Lebensdauer — von Klasse 1 nach Klasse 5 an.

Neben die in neuerer Zeit besonders von E. PETTIT (s. oben) geförderten Beobachtungen der Protuberanzen in Emission am Sonnenrand stellen wir die Beobachtungen in *Absorption auf der Sonnenscheibe*.

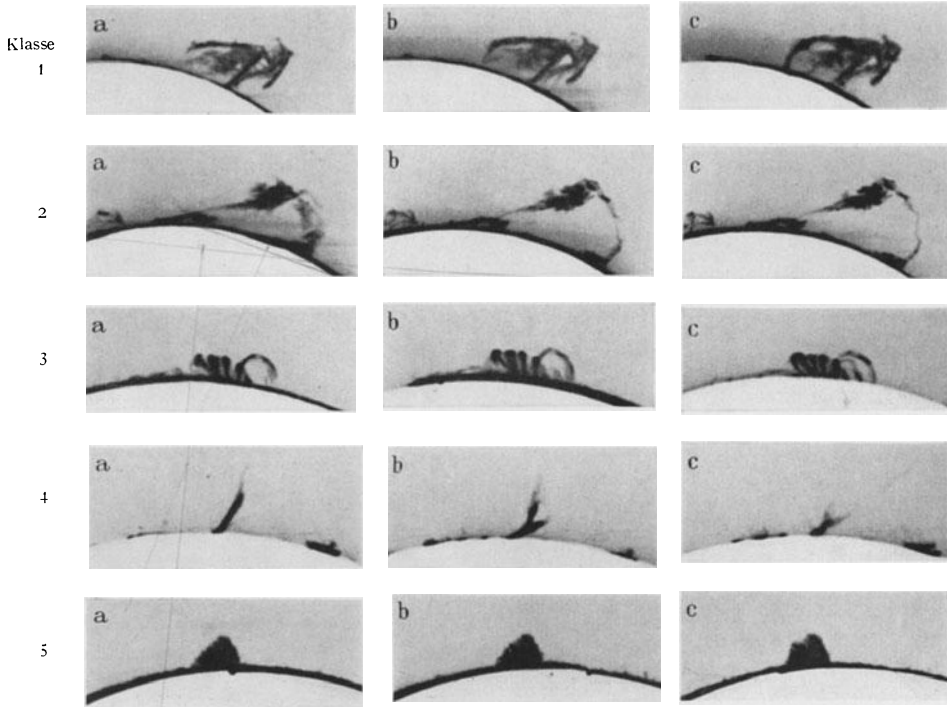


Fig. 132. *Klassifikation der Protuberanzen* nach E. PETTIT [1763]. Die Reihenaufnahmen a—c zeigen die Veränderungen im Verlaufe einiger Minuten.

	a—b	b—c Zeitintervall
Klasse 1: Aktiver Typus	19	11 min
„ 2: Eruptiver Typus	5	6 min
„ 3: Flecktypus	4	4 min
„ 4: Tornadotypus	6	7 min
„ 5: Ruhender Typus	15	6 min

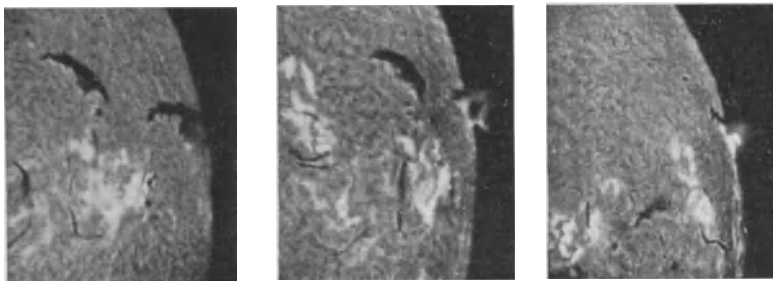


Fig. 133. Wasserstoffflocculi an drei aufeinanderfolgenden Tagen. Nach G. E. HALE [1642 I]; Aufnahmen von A.H. JOY vom 27., 28. und 30. Juni 1916. Am Sonnenrand erscheint der dunkle Flocculus als Protuberanz.

Spektroheliographische Aufnahmen mit Licht aus der Mitte der K - oder besser der H_{α} -Linie brachten G. E. HALE [1725] und H. DESLANDRES [1718] bald auf den Gedanken, daß die langgestreckten dunklen „*Filamente*“ (auch dunkle Flocculi oder dark markings genannt) nichts anderes sind, als Protuberanzen in Absorption (Fig. 133). Der Fortschritt auf diesem Forschungsgebiet

wurde jedoch erheblich gehemmt durch zwei nachteilige Eigenschaften des Spektroheliographen:

1. Bei den üblichen Konstruktionen kann man den *zeitlichen Abstand* zweier Aufnahmen (Exposition, Nachjustieren usw.) kaum unter etwa 4 min bringen.

2. Wenn ein Gebilde (in Absorption *oder* Emission) eine erhebliche *Radialgeschwindigkeit* (bei E. PETTIT [1762] z. B. $v > 30$ km/sek) hat, so wird die Linie durch den *Dopplereffekt* aus dem Bereich des 2. Spaltes entfernt. Der betreffende Teil der Protuberanz fehlt also auf der Aufnahme.

Beide Nachteile vermeidet das von G. E. HALE [1642] konstruierte *Spektrohelioskop*. Die Beobachtung erfolgt hier (vgl. auch Abschn. 89) visuell mit der H_{α} -Linie, deren Lage relativ zum 2. Spalt durch den „line-shifter“ meßbar verändert werden kann, so daß man einerseits Gebilde aller Geschwindigkeiten erfassen und andererseits die letztere in km/sek direkt ablesen kann.

Mit diesem Instrument haben G. E. HALE [1642] selbst in Pasadena und H. W. NEWTON [1747—48] in Greenwich unsere Kenntnis der Protuberanzen in ungeahnter Weise erweitert. Letzterer trifft zunächst folgende Einteilung:

Klasse I. Dunkle Flocculi („markings“), welche die Nähe von Flecken (nicht aber die Fleckenzone als ganzes) meiden. Meist langgestreckte wohldefinierte Filamente, die sich oft über einen erheblichen Teil der Sonnenscheibe erstrecken. Dann und wann auch diffuse Flecke. Lebensdauer in der Größenordnung von Tagen. Diese Gebilde sind zweifellos als ruhende Protuberanzen — PETTITS Klasse 5 — anzusprechen, wie auch gelegentlich direkt verifiziert werden konnte.

Klasse II umfaßt dunkle Flocculi, die mit Sonnenflecken oder den zugehörigen hellen Wasserstoffflocculi verknüpft sind. Sie sind meist kleiner als Klasse I, gerade oder gekrümmte Filamente, auch kleine dichte Flecke. Ihre Lebensdauer zählt nach Stunden oder Minuten.

Die spektrohelioskopische Beobachtung auf der Sonnenscheibe hat vor der Beobachtung am Sonnenrand den Vorteil, daß sie zugleich Auskunft gibt über die Vorgänge in tieferen Schichten, durch welche die Protuberanzen vermutlich hervorgerufen werden. In diesem Sinne trifft H. W. NEWTON [1748] folgende feinere Unterteilung der unter II zusammengefaßten Eruptionen:

IIA. Zuerst erscheint eine helle Emission (Wasserstoffflocculus). Sofort oder innerhalb einiger Minuten entsteht dann ein „absorption marking“ = Protuberanz mit großer Radialgeschwindigkeit.

II B. Einem bereits vorhandenen ruhenden Flocculus (Kl. I) wird durch eine plötzlich auftretende Emission (die selbst nahezu ruhend bleibt) eine hohe Radialgeschwindigkeit erteilt.

Die Gruppen IIA u. B entsprechen offenbar im großen und ganzen PETTITS Kl. 1 und 2; evtl. auch 4. In der Nähe von Sonnenflecken ist sowohl von HALE wie auch von NEWTON (s. oben) u. a. beobachtet worden, daß Filamente in den Fleck mit großen Geschwindigkeiten „ingesogen“ werden. Weiterhin beobachtet man dann und wann, wie aus einem hellen kleinen Fleck ein Flocculus (Protuberanz) emporsteigt, um dicht daneben in einem dunklen Fleck wieder zu verschwinden. Wir haben es hier offenbar mit „Fleck“- oder „Spritz“-Protuberanzen (PETTITS Kl. 3) zu tun.

Ehe wir die Bewegungen der Protuberanzen genauer studieren, wollen wir mit E. PETTIT [1763] versuchen, durch Zusammenfassung von Grund- und Aufriß ein anschauliches Bild ihres räumlichen Baues zu entwerfen und bezüglich ihrer Dimensionen einige Zahlenangaben mitzuteilen:

Die gewöhnlichen *ruhenden* Protuberanzen (Filamente) stellen sich dar als eine dünne Schicht leuchtender Materie, die auf einer Schmalseite steht, „ähnlich der Flamme eines Fischschwanzbrenners“ — wie PETTIT treffend bemerkt. Meist berührt diese Schicht die Chromosphäre nicht überall, sondern beginnt

erst einige tausend Kilometer höher und ist mit dem Untergrund durch Gebilde verbunden, die man am ehesten den Luftwurzeln der Mangroven vergleichen kann. Kleinere Protuberanzen scheinen direkt aus der Chromosphäre herauszuwachsen, die — wie wir schon bemerkten und später eingehend begründen werden — selbst als ein Gewimmel kleinster Protuberanzen aufzufassen ist. Die *eruptiven Protuberanzen* (Kl. 2) gleichen weitgehend den Wolken terrestrischer Vulkane. PETTITs Klasse 3, die *Fleck- oder Spritzprotuberanzen*, sind durch ihre Bezeichnung schon weitgehend beschrieben. Sie erheben sich innerhalb des Bereiches einer Sonnenfleckengruppe und kehren wie die Wasserstrahlen eines Springbrunnens wieder zur Chromosphäre zurück. *Aktive Protuberanzen* zeigen oft ausgedehnte nahezu horizontale Stücke, ehe sie „mit Kopsprung“ in einen Sonnenfleck oder ein sog. Anziehungszentrum eintauchen.

Die durchschnittlichen Dimensionen der Protuberanzen¹ (in Klammern die selten überschrittenen Grenzwerte) sind nach E. PETTIT [1763]

Dicke \sim 10 000 km (6 000— 12 000 km)
 Länge \sim 200 000 km (60 000—600 000 km)
 Höhe \sim 50 000 km (bis 100 000 km)

Den Höhenrekord hält zur Zeit eine von T. ROYDS [1770] Nov. 19, 1928 beobachtete eruptive Protuberanz, die 929 000 km = 1,3 Sonnenradien über die Chromosphäre emporstieg.

B. Geschwindigkeit und Bewegungsgesetze der Protuberanzen. Durch direkte Vermessung zahlreicher in kurzen Zeitabständen aufgenommener Spektroheliogramme des Sonnenrandes hat E. PETTIT^{2,3} [1761—64] die „Eigenbewegungen“ der Protuberanzen eingehend untersucht. Erfäßt wird dabei naturgemäß nur die *senkrecht* zum Visionsradius stehende Geschwindigkeitskomponente. Weiterhin sei nochmals daran erinnert, daß Teile einer Protuberanz, die große Geschwindigkeitskomponenten *im* Visionsradius (Radialgeschwindigkeit > 30 km/sek) haben, dabei überhaupt nicht zur Abbildung gelangen.

Mit Spektrohelioskop und line-shifter haben sodann G. E. HALE [1642] und H. W. NEWTON [1747—48] auf der Sonnenscheibe die im Visionsradius liegende — also zur Sonnenoberfläche meist nahezu senkrechte — Geschwindigkeitskomponente beobachtet. Diese Technik ermöglicht gleichzeitig ein genaueres Studium des „Untergrundes“ der Protuberanzen und erscheint so berufen, Hinweise auf deren tiefere Ursachen zu geben.

Betrachten wir nun die verschiedenen Klassen von Protuberanzen!

Die *ruhenden Protuberanzen* (Klasse 5) zeigen nach E. PETTIT [1763] innere „Eigen“bewegungen von größenordnungsmäßig 5—10 km/sek (selten über 15 km/sek), deren Richtung innerhalb einer und derselben Protuberanz von Stelle zu Stelle rasch wechselt. Entsprechend findet H. W. NEWTON [1747] für 83% seiner Klasse I Radialgeschwindigkeiten von 0—4 km/sek, für 14% solche von 5—9 km/sek. Da weiterhin solche Gebilde sich oft tagelang mit ziemlich geringen Änderungen erhalten, so müssen wir schließen, daß *in den ruhenden Protuberanzen die Schwerkraft der Sonne durch irgendeine Gegenkraft — deren Natur zunächst noch offen bleiben möge — mit großer Genauigkeit kompensiert ist*. Nach den Fallgesetzen würde nämlich schon eine Beschleunigungsdifferenz von $1/10$ der Schwerebeschleunigung $g = 2,74 \cdot 10^4$ cm sek⁻² in $1/2$ Stunde eine Geschwindigkeit von ~ 50 km/sek erzeugen. Die Kompensation der Schwerkraft durch die hypothetische Gegenkraft muß also so genau sein, daß sie bei der Häufigkeit

¹ Die Mittelwerte beziehen sich in erster Linie auf die am häufigsten beobachteten ruhenden Protuberanzen.

² Ältere Literatur ist dort angegeben.

³ Anm. b. d. Korr.: Weiterhin R. R. McMATH u. E. PETTIT, Ap. J. **85**, 279 (1937).

der ruhenden Protuberanzen nicht als ein Werk des Zufalles angesehen werden kann. Wir müssen vielmehr einen Mechanismus annehmen, der die Gegenkraft auf den Zahlenwert von $-g$ gerade stabilisiert.

Die eruptiven Protuberanzen (Klasse 2) zeigen nach E. PETTIT (s. oben) u. a. am Sonnenrand im allgemeinen seitliche Geschwindigkeitskomponenten von $\sim 20\text{--}40$ km/sek. Insbesondere bei kleinen, rasch explodierenden Gebilden hat PETTIT mit Sicherheit noch Geschwindigkeiten bis 525 km/sek gemessen. Die

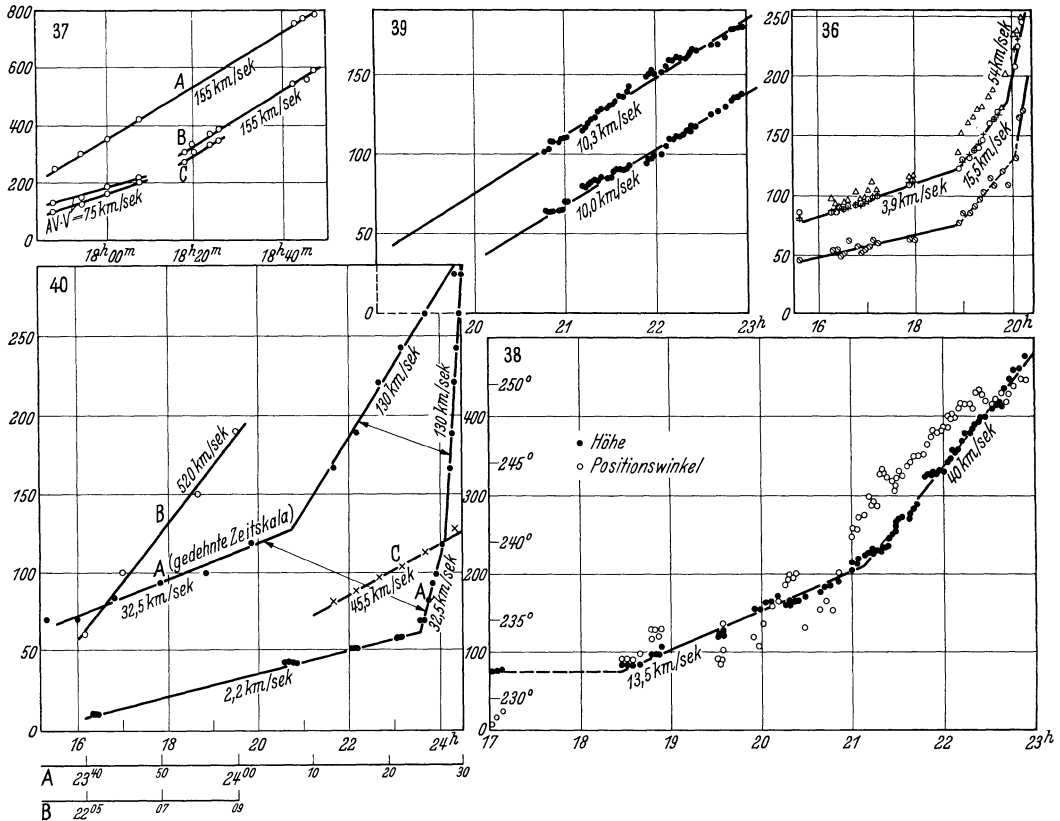


Fig. 134. Bewegung eruptiver Protuberanzen. Nach E. PETTIT [1764]. Nr. 36. September 21, 1932; Nr. 37. Oktober 21, 1934; Nr. 38. November 14, 1934; Nr. 39. Juli 27, 1920; Nr. 40. September 22, 1935. Abszissen: G. C. T. der Beobachtung, Ordinaten: Höhen der Protuberanz; Einheit = 1000 km.

Beobachtungen H. W. NEWTONS (s. oben) an den absorption markings der Sonnenscheibe liefern ein ähnliches Bild; mit dem line-shifter konnte er Dopplereffekte bis zu -450 km/sek nachweisen.

E. PETTITS eingehende Untersuchungen der Bewegung von insgesamt 40 Protuberanzen ergaben nun das völlig unerwartete *1. Bewegungsgesetz*, daß die Geschwindigkeit der eruptiven Protuberanzen nicht gleichmäßig anwächst, sondern im allgemeinen konstant ist und nur gelegentlich ruckartig zunimmt. Diese Erscheinung kann sich in Zeitabständen von der Größenordnung einiger Minuten bis Stunden wiederholen. Fig. 134 zeigt einige der neuesten Arbeit PETTITS [1764] entnommene charakteristische Geschwindigkeitskurven. Um sich gegen subjektive Meßfehler zu sichern, ließ PETTIT eine Protuberanz von drei erfahrenen Beobachtern völlig unabhängig ausmessen, ohne daß sich an dem Charakter der Ergebnisse etwas geändert hätte. Wir müssen also folgern, daß bei den eruptiven Protuberanzen wie bei den ruhenden normalerweise die Schwerkraft

durch die erwähnte Gegenkraft ziemlich genau kompensiert wird. Die Beschleunigung erfolgt in Impulsen, deren Übertragung kaum mehr als einige Minuten dauert.

Neuerdings glaubt E. PETTIT [1764] noch ein zweites Bewegungsgesetz der eruptiven Protuberanzen gefunden zu haben, das besagt, daß bei einer Geschwindigkeitsänderung die neue Geschwindigkeit ein kleines ganzzahliges Vielfaches der alten ist. Das würde also heißen, daß die einer Protuberanz mitgeteilten Impulse ($\int K dt$) immer ganzzahlige Vielfache eines bestimmten — für verschiedene Protuberanzen verschiedenen — Betrages sind. Vom Standpunkt der vorhergehenden Erörterungen aus erscheint es naheliegend, dies dahin zu deuten, daß auf eine Protuberanz mehrmals hintereinander, sei es in Zeitabständen von der Größenordnung einer Stunde oder weniger Minuten Impulse derselben Größe übertragen werden können.

Systematische Untersuchungen über das Anwachsen der Geschwindigkeit eruptiver Protuberanzen mit Spektrohelioskop und line-shifter in Absorption auf der Sonnenscheibe scheinen noch nicht vorzuliegen. Dagegen geben die erwähnten Beobachtungen von G. E. HALE und H. W. NEWTON (s. S. 398) schon bestimmte Hinweise auf die „tiefer“ liegenden Ursachen der Protuberanzen-eruptionen. Wie schon die unter A. gegebene Klassifikation H. W. NEWTONS (IIA und B) andeutet, sind die wichtigsten Möglichkeiten, daß ein heller Wasserstoffflocculus entweder selbst eine Protuberanz erzeugt oder eine schon vorhandene ruhende Protuberanz in Bewegung versetzt. Die hellen Wasserstoffflocculi (-Eruptionen) üben also auf die Materie der Protuberanzen eine Abstoßung aus. Wie dagegen der Untergrund einer ungestörten ruhenden Protuberanz sich von der normalen Photosphäre unterscheidet, scheint beobachtungsmäßig noch nicht mit Sicherheit festzustehen. Auf vielen H_{α} -Spektroheliogrammen der Sonnenscheibe erscheinen die langgestreckten Filamente = Protuberanzen von einem hellen Saum umgeben, so daß man vermuten kann, daß sie auf einem hellen Flocculus aufsitzen.

Weiteren Aufschluß über den Mechanismus der Protuberanzenbewegung geben die umfangreichen Beobachtungen von E. PETTIT (s. S. 399) am Sonnenrand und von G. E. HALE und H. W. NEWTON (s. S. 399) auf der Sonnenscheibe über die

Protuberanzen vom Sonnenfleckentyp (Klasse 3).

Ganz allgemein üben Sonnenflecken auf benachbarte Protuberanzen eine Art von *Anziehungskraft* aus, so daß man nicht selten beobachtet, wie eine Protuberanz von einem Fleck „ingesogen“ wird. Die entstehenden Geschwindigkeiten liegen durchschnittlich bei 30—50 km/sek, erreichen aber gelegentlich über 100 km/sek. Die Annäherung an den Fleck erfolgt nach PETTIT meist in nahezu horizontaler Richtung; dann geht der Kopf der Protuberanz steil nach unten und taucht meist in die Penumbra des Fleckes ein. Im Spektrohelioskop erscheint (bei Beobachtung auf der \odot -Scheibe) dort daher ein dunkler Knoten. Die „Splash“-Protuberanzen sind nun — wie die Beobachtungen von HALE und NEWTON eindeutig zeigen — so aufzufassen, daß eine aus einem hellen Flocculus emporsteigende Protuberanz von einem benachbarten Fleck sofort wieder eingesogen wird, so daß ein Bogen entsteht, der an den Wasserstrahl eines Springbrunnens erinnert. Endlich bestehen die auf den Wasserstoffspektroheliogrammen häufig sichtbaren „Hydrogen-Vortices“ von HALE offenbar aus kleinen Protuberanzen, die — bei den hohen Geschwindigkeiten entstehen erhebliche Corioliskräfte — spiralg in die Flecke hereingezogen werden.

Neben den Sonnenflecken scheinen nach Angaben der Beobachter die Protuberanzen auch durch sog. *Anziehungszentren* beeinflusst zu werden, deren Natur

noch nicht geklärt ist. Vielleicht handelt es sich dabei einfach um Stellen mit wenig ausgeprägter Fleckbildung.

Nach E. PETTIT [1764] befolgen auch die von Sonnenflecken hervorgerufenen Strömungen von Protuberanzen der Klasse 3 die schon formulierten beiden Bewegungsgesetze der eruptiven Protuberanzen.

Die übrigen Typen von Protuberanzen bieten in prinzipieller Hinsicht nicht viel Neues. Wir können also zusammenfassend — soweit sich dies zur Zeit übersehen läßt — die Bewegungserscheinungen der Protuberanzen aller Klassen zurückführen auf folgende Prinzipien:

a) Die auf die Protuberanzen wirkenden Kräfte unterliegen einem regulierenden Mechanismus, der die Tendenz hat, sie gerade gegen die Schwerkraft auszubalancieren. Die Protuberanzen können daher lange Zeit im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung beharren.

b) Die Beschleunigung der Protuberanzenmaterie erfolgt stoßartig; d. h. innerhalb sehr kurzer Zeit wird der Protuberanz ein erheblicher Impuls $\Delta(mv)$ erteilt¹. Häufig werden auf eine Protuberanz mehrmals hintereinander Impulse *desselben* Betrages übertragen.

c) Helle Wasserstoffflocculi (-Eruptionen) wirken auf Protuberanzen abstoßend, Sonnenflecke anziehend.

Wenn auch die Versuchung groß ist, so wollen wir doch an dieser Stelle noch keine Hypothesen über den physikalischen Charakter der „Protuberanzkraft“ entwickeln, sondern uns zunächst spektroskopischen Problemen zuwenden.

C. Verteilung der Elemente in Protuberanzen. Da die Protuberanzen sich häufig mit Überschallgeschwindigkeit bewegen, so muß man — noch ohne sich auf detailliertere Vorstellungen festzulegen — annehmen, daß die treibenden Kräfte nicht hydrodynamischer Art sind, wie bei terrestrischen Vulkanausbrüchen, sondern daß sie *direkt an einzelnen Atomen angreifen*. Man ist daher zunächst geneigt, zu erwarten, daß zum mindesten in eruptiven Protuberanzen verschiedene Elemente „aussortiert“ werden. Trotzdem dieses Problem der Trennung verschiedener Elemente schon alt ist, haben es erst neuerdings E. PETTIT [1763] vom empirischen und W. H. McCREA [1715] vom theoretischen Standpunkt aus eingehender behandelt mit dem Ergebnis — das wir gleich vorwegnehmen —, daß ein solcher Effekt in den Protuberanzen *keine* merkliche Rolle spielt.

Die ältere Literatur unterscheidet meist die *gewöhnlichen Protuberanzen*, die in der Hauptsache die Wasserstofflinien, die starken Ca^+ -Linien und HeD_3 zeigen, von den *metallischen Protuberanzen*², die außerdem das grüne Mg-Triplett, eine Reihe von Fe^+ -Linien, manchmal auch die NaD-Linien usw. zeigen. E. PETTIT [1763] vergleicht nun beide Typen von Spektren hinsichtlich der Linienintensitäten mit den *Flashspektrum*beobachtungen von S. A. MITCHELL. Dabei zeigt sich, daß die Spektren der gewöhnlichen Protuberanzen in der Hauptsache aus *den* Linien bestehen, die in MITCHELLS Schätzungsskala eine Intensität > 30 aufweisen, während in den metallischen Protuberanzen auch noch die schwächeren Flashlinien bis $\cong 15$ auftreten. Es kann also kein Zweifel darüber bestehen, daß die „gewöhnlichen“ und die „metallischen“ Protuberanzen sich in der Hauptsache nur durch ihre *Intensität* unterscheiden. Wieweit es sich im einzelnen um Unterschiede in der wirksamen Schichtdicke oder in der Stärke der Anregung handelt, könnte nur durch ausgedehnte spektralphotometrische Messungen geklärt werden.

¹ Man beachte den engen Zusammenhang dieser Aussage mit dem Prinzip *a*.

² Vgl. besonders Kodaikanal Obs. Bulletin.

Vergleicht man weiterhin auf Flashaufnahmen von großem Maßstab (Fig. 128 — nach STRATTON) das Aussehen der Protuberanzenbilder in Linien *verschiedener Elemente* aber *gleicher Intensität*, so kann man keinerlei Unterschied erkennen. Es findet also keine merkliche Trennung der Elemente statt.

Die Unterschiede zwischen den Bildern mit Linien verschiedener Intensität muß man in der Hauptsache auf Selbstabsorption in den Protuberanzen und photographische Effekte zurückführen. E. PETTIT (s. S. 402) hat noch Protuberanzenaufnahmen im Lichte der Ca^+ -Linien H und K eingehend verglichen mit Aufnahmen und spektroheliostkopischen Beobachtungen in H_α . Er gibt — noch mit Vorbehalt — an, daß die sog. „streamers“, also Anhänge der Protuberanzen, die meist einem Fleck oder Anziehungszentrum zustreben, im H_α -Licht relativ *schwächer* erscheinen. Nach visuellen Beobachtungen von B. LYOT [1733] tritt dasselbe Phänomen im D_3 -Licht noch ausgesprochener in Erscheinung. Wie schon LYOT bemerkt und die unter D. zu besprechenden spektralphotometrischen Messungen mit Bestimmtheit zeigen, kann man diese Unterschiede zwanglos darauf zurückführen, daß die *Selbstabsorption* in H und K stärker ist als in H_α und in dieser Linie wiederum stärker als in der D_3 -Linie, welche praktisch selbstabsorptionsfrei ist. Ob *daneben* noch wirkliche Anregungs- oder Ionisationsunterschiede in Betracht zu ziehen sind, ließe sich nur durch exakte spektralphotometrische Messungen entscheiden.

Für die Annahme einer Trennung verschiedener Elemente scheint zunächst auch die Beobachtung von E. J. PEREPKIN [z. B. 1755] zu sprechen, daß die Ca^+ -Linien gewöhnlich größere Radialgeschwindigkeiten ergeben als die Wasserstofflinien. Aber auch diese Wahrnehmung läßt sich — wie wir sehen werden — zwanglos mit der Selbstabsorption der Ca^+ -Linien in Verbindung bringen.

Nachdem wir uns überzeugt haben, daß in den Protuberanzen *keine* merkliche Trennung verschiedener Elemente eintritt, betrachten wir mit W. H. MCCREA [1715] unser auch für die Deutung der WOLF-RAYET-Sterne und NOVAE wichtiges Problem vom Standpunkt der *Theorie* aus.

Wir berechnen zunächst die *Kraft F , welche zwei Gase 1 und 2 pro Volumeneinheit aufeinander ausüben, wenn sie sich mit der Relativgeschwindigkeit U durchdringen*. Dieselbe Kraft — nur mit entgegengesetztem Vorzeichen — wäre erforderlich, um die Relativgeschwindigkeit U aufrecht zu erhalten.

MCCREA bedient sich zur Lösung dieses Problems der allgemeinen Ansätze der S. CHAPMANSchen Diffusionstheorie. Wir möchten daneben auf die enge Analogie zur klassischen¹ Theorie der Elektronenleitung in Metallen von DRUDE-LORENTZ hinweisen (Elektronengas bewegt sich unter der Wirkung des elektrischen Feldes durch das Ionengitter). Da es uns auf große Genauigkeit nicht ankommt, so begnügen wir uns mit den einfachen und anschaulichen Rechenmethoden DRUDES. Es bedeute im folgenden

$$\left. \begin{array}{l} m_1, m_2 \text{ Masse} \\ \nu_1, \nu_2 \text{ Anzahl pro cm}^3 \end{array} \right\} \text{ der Partikel des Gases 1 bzw. 2.}$$

$$\left. \begin{array}{l} u_1, u_2 \text{ die mittlere Geschwindigkeit der Gase} \\ P_1 = m_1 g_1 \quad P_2 = m_2 g_2 \text{ äußere Kraft pro Teilchen} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{in Richtung der Kraft } F \\ \text{bzw. der Relativ-} \\ \text{geschwindigkeit } U \text{ (s. u.)} \end{array}$$

$$U = u_1 - u_2 \text{ Relativgeschwindigkeit der Gase 1 und 2.}$$

¹ Da in den Protuberanzen usw. die Drucke niedrig sind, so spielen Entartungserscheinungen selbstverständlich keine Rolle und die für die Metalle selbst ja zum Teil unrichtigen Ansätze der klassischen Theorie sind also fast ohne Änderung anwendbar.

Es sei weiterhin

$1/\tau$ die Zahl der Stöße von Teilchen des Gases 1 mit solchen des Gases 2 pro cm^3 und sek. (Nur diese beteiligen sich ja an der Impulsübertragung.)

$1/\tau_1$ die Zahl der Stöße *eines* bestimmten Teilchens 1 mit irgendwelchen Teilchen 2 pro cm^3 und sek.

$1/\tau_2$ die Zahl der Stöße *eines* bestimmten Teilchens 2 mit irgendwelchen Teilchen 1 pro cm^3 und sek.

Dann gilt zunächst offensichtlich

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\nu_1}{\tau_1} = \frac{\nu_2}{\tau_2}. \quad (97,1)$$

Unter dem Einfluß der Kraft P_1 erlangt nun ein Teilchen 1 während seiner Flugzeit τ_1 eine Zusatzgeschwindigkeit $\frac{P_1}{m_1} \cdot \tau_1$. Seine *mittlere* Zusatzgeschwindigkeit würde also $\frac{1}{2} \cdot \frac{P_1}{m_1} \cdot \tau_1$, wenn wir annehmen dürften, daß bei jedem Zusammenstoß eine vollständige Abgabe des Extraimpulses erfolgte. Dies trifft jedoch nur für zentrale Stöße zu, bei streifenden Zusammenstößen zweier Teilchen wird gar kein Impuls übertragen. Wir zählen daher nur die Hälfte aller Stöße als „impulsübertragend“ und erhalten für die mittlere Zusatzgeschwindigkeit der Teilchen 1

$$m_1 u_1 = P_1 \cdot \tau_1. \quad (97,2)$$

Für die Teilchen 2 wird entsprechend

$$m_2 u_2 = P_2 \cdot \tau_2. \quad (97,3)$$

Nun ist nach dem Prinzip von actio und reactio die Kraft F , welche die beiden Gase pro cm^3 aufeinander ausüben

$$F = \nu_1 P_1 = -\nu_2 P_2 \quad (97,4)$$

und (97,2 u. 3) gehen wegen (97,4) über in

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 m_1 u_1 &= \nu_1 P_1 \tau_1 = \nu_1 F \tau \\ \nu_2 m_2 u_2 &= \nu_2 P_2 \tau_2 = -\nu_2 F \tau \end{aligned} \right\} \quad (97,5)$$

Definieren wir noch in bekannter Weise die effektive Molekülmasse durch

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \text{oder} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (97,6)$$

so erhalten wir aus (97,5) die einfache Verknüpfung zwischen der trennenden Kraft F und der Relativgeschwindigkeit der beiden Gase

$$U = u_1 - u_2 = \frac{1}{\mu} \cdot F \tau \quad \text{bzw.} \quad F = \frac{\mu}{\tau} U. \quad (97,7)$$

Nunmehr bleibt noch die mittlere Zeit τ zwischen zwei Stößen $1 \leftrightarrow 2$ pro cm^3 und sek zu berechnen. Bezeichnen wir den *Wirkungsradius* (= Summe der Radien) beider Teilchen für diese Stöße mit

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad (97,8)$$

so ist die freie Weglänge l_1 , welche ein Teilchen 1 im Mittel zurücklegt, bis es auf ein Teilchen 2 stößt, festgelegt durch

$$\pi \sigma^2 \cdot l_1 \nu_2 \approx 1 \quad (97,9)$$

und die mittlere Zeit τ_1 zwischen zwei Stößen wird

$$\tau_1 = l_1 / \bar{v}, \quad (97,10)$$

wo \bar{v} die *mittlere Relativgeschwindigkeit* (geordnete + ungeordnete Bewegung!) der Teilchen 1 und 2 bedeutet. Aus (97,9 u. 10) erhält man mit (97,1)

$$1/\tau = \nu_1 \nu_2 \pi \sigma^2 \cdot \bar{v} \quad (97,11)$$

und mit (97,7)

$$F = \nu_1 \nu_2 \cdot \mu \cdot \pi \sigma^2 \cdot \bar{v} U. \quad (97,12)$$

Bei der Berechnung von \bar{v} fassen wir zunächst mit MCCREA zweckmäßig zwei Grenzfälle ins Auge:

Fall I: U ist *klein* verglichen mit den thermischen Geschwindigkeiten. Dann wird nach einer bekannten Formel der kinetischen Gastheorie

$$\bar{v} = \frac{2}{\pi} \sqrt{2\pi kT/\mu} \quad (97,13)$$

und also nach (97,12)

$$F = F' = 2\nu_1 \nu_2 \sigma^2 \sqrt{2\pi kT \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \cdot U. \quad (97,14)$$

Die von MCCREA ([1715], Gl. 7) mit Hilfe der CHAPMANSchen Theorie abgeleitete exakte Formel unterscheidet sich hiervon nur durch einen Zahlenfaktor $4/3$, der bei uns durch nicht ganz korrekte Mittelbildungen verloren ging. (Beim heutigen Stande unserer Kenntnis der Wirkungsradien σ ist er übrigens völlig belanglos.)

Fall II: U ist *groß* verglichen mit den thermischen Geschwindigkeiten. Dann ist einfach

$$\bar{v} = U \quad (97,15)$$

und nach (97,12)

$$F = F'' = \pi \cdot \nu_1 \nu_2 \cdot \sigma^2 \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot U^2. \quad (97,16)$$

Ganz *allgemein*, also auch für das Übergangsbereich zwischen Fall I und II kann man ersichtlich mit ausreichender Genauigkeit schreiben

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu} + U^2} \quad (97,17)$$

und mit (97,12)

$$F = \nu_1 \nu_2 \cdot \mu \cdot \pi \sigma^2 \sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu} + U^2} \cdot U. \quad (97,18)$$

Nachdem wir den Zusammenhang zwischen der Relativgeschwindigkeit U zweier Gase und ihrer Wechselwirkungskraft F für den Fall gleichförmiger Bewegung berechnet haben, verallgemeinern wir nunmehr auf *beliebige Bewegungszustände*.

Die Kraft (Gravitation, Strahlungsdruck usw.), welche auf ein Teilchen des Gases 1 wirkt, sei wieder $P_1 = m_1 g_1$. Die Geschwindigkeit des Gases 1 sei u_1 und seine Beschleunigung \dot{u}_1 . Entsprechende Bezeichnungen gelten für Gas 2. Dann lautet nach den Grundprinzipien der Mechanik die Gleichung für die Relativbewegung der beiden Gase

$$M \{ (g_1 - \dot{u}_1) - (g_2 - \dot{u}_2) \} = F, \quad (97,19)$$

wo M die effektive Masse pro cm^3 bedeutet. Das heißt

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{\nu_1 m_1} + \frac{1}{\nu_2 m_2} \quad \text{oder} \quad M = \frac{\nu_1 m_1 \cdot \nu_2 m_2}{\nu_1 m_1 + \nu_2 m_2}. \quad (97,20)$$

Berücksichtigen wir noch, daß

$$\rho = \nu_1 m_1 + \nu_2 m_2 \quad (97,21)$$

die Dichte des Gases $1 + 2$ bedeutet und setzen zur Abkürzung

$$F = v_1 m_1 \cdot v_2 m_2 \cdot \Phi(U), \quad (97,22)$$

sowie entsprechend

$$u_1 - u_2 = U \quad (97,23)$$

noch

$$g_1 - g_2 = G, \quad (97,24)$$

so nimmt die Bewegungsgleichung (97,19) die übersichtliche Form an

$$\dot{U} = G - \varrho \Phi(U). \quad (97,25)$$

Dabei ist nach (97,14) im *Fall I* (kleine Trennungsgeschwindigkeit):

$$\Phi(U) = \alpha U \quad \text{mit} \quad \alpha = 2\sigma^2 \sqrt{\frac{2\pi k T}{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}} \quad (97,26)$$

und nach (97,16) im *Fall II* (große Trennungsgeschwindigkeit):

$$\Phi(U) = \beta U^2 \quad \text{mit} \quad \beta \doteq \frac{\pi \sigma^2}{m_1 + m_2}. \quad (97,27)$$

Aus (97,25) entnehmen wir zunächst die *Grenzggeschwindigkeit* $U = U_0$, die sich unter der Wirkung einer konstanten Relativbeschleunigung G nach einer hinreichend langen Zeit einstellt. Für $\dot{U} = 0$ wird¹

$$\Phi(U_0) = \frac{G}{\varrho} \quad (97,28)$$

und also bezw. für

$$\text{Fall I:} \quad U'_0 = \frac{G}{\varrho \alpha}, \quad (97,29)$$

$$\text{Fall II:} \quad U''_0 = \frac{G}{\sqrt{\varrho \beta G}}. \quad (97,30)$$

Weiterhin können wir mit Gl. (97,25) aber auch leicht die *Relaxationszeit* t_0 abschätzen, die verstreichen muß, bis sich der stationäre Zustand mit der Trennungsgeschwindigkeit U'_0 bzw. U''_0 nahezu eingestellt hat. Wir schreiben Gl. (97,25) im

$$\text{Fall I:} \quad \Delta U = (G - \varrho \alpha U) \Delta t \quad (97,31)$$

und erhalten durch einfache Dimensionsbetrachtung

$$t'_0 \approx \frac{1}{\varrho \alpha}. \quad (97,32)$$

Wie man erwarten muß und unschwer nachrechnet, ist t'_0 stets von derselben Größenordnung, wie die *kleinere* der eingangs betrachteten Stoßzeiten τ_1 bzw. τ_2 .

Entsprechend wird im

$$\text{Fall II:} \quad \Delta U = (G - \varrho \beta U^2) \Delta t \quad (97,33)$$

und damit

$$t''_0 = \frac{1}{\varrho \beta U_0} = \frac{1}{\sqrt{\varrho \beta G}}. \quad (97,34)$$

Der allgemeine Fall ließe sich nach (97,18) ebenfalls ohne nennenswerte Schwierigkeiten behandeln.

Um die im vorhergehenden entwickelte Theorie auf die Protuberanzen usw. anwenden zu können, muß noch wenigstens die *Größenordnung der Stoßradien* σ

¹ Dieses Teilergebnis kann man natürlich auch direkt unseren Ausgangsformeln entnehmen.

erörtert werden. Für Zusammenstöße neutraler Atome kann man etwa die bekannten *gaskinetischen* Daten benützen. Für Zusammenstöße von *Wasserstoffkernen* mit Atomen zieht McCREA Messungen von RAMSAUER und Mitarbeitern heran, die für den in Frage kommenden Geschwindigkeitsbereich auf dieselbe Größenordnung führen. Wir werden also nicht weit fehl gehen, wenn wir mit McCREA allgemein

$$\sigma \sim 2 \cdot 10^{-8} \text{ cm} \quad (97,35)$$

setzen¹.

Nunmehr können wir uns endlich an die Zahlenrechnung begeben:

Gas 1 sei das weitaus häufigste Element, der Wasserstoff mit $m_1 = m_H$. Gas 2 sei z. B. Ca^+ mit $m_2 = 40 m_H$; ferner $v_1 \gg v_2$ und daher $\rho \approx v_1 m_1$. Die Relativbeschleunigung sei

$$G = k \cdot g. \quad (97,36)$$

$g = 2,74 \cdot 10^4 \text{ cmsek}^{-2}$ bedeutet dabei die Schwerebeschleunigung auf der Sonne. k dürfte (s. u.) während größerer Zeitintervalle ($>$ etwa 5 min) den Wert 1 nicht erheblich überschreiten. Die Temperatur T setzen wir gleich 5000° K . Dann erhalten wir:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fall I } (U \leq 10 \text{ km/sek}): \\ U'_0 = 8,6 \cdot 10^{14} \cdot \frac{k}{v_1} \text{ [cm/sek}^{-1}] \text{ und } t'_0 = \frac{3,1 \cdot 10^{10}}{v_1} \text{ [sek]} \dots \end{array} \right\} \quad (97,37)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fall II } (U \geq 10 \text{ km/sek}): \\ U''_0 = 3,0 \cdot 10^{10} \sqrt{\frac{k}{v_1}} \text{ [cm/sek}^{-1}] \text{ und } t''_0 = \frac{1,1 \cdot 10^6}{\sqrt{v_1 k}} \text{ [sek]} \dots \end{array} \right\} \quad (97,38)$$

Damit die Geschwindigkeitsdifferenzen zwischen Kalzium und Wasserstoff den Betrag von $U'_0 = 5 \text{ km/sek} = 5 \cdot 10^5 \text{ cm/sek}$ nicht überschreiten, muß nach (97,37) — wenn wir noch $k \approx 1$ annehmen — die Konzentration

$$v_1 > 1,7 \cdot 10^9 \text{ Teilchen/cm}^3 \quad (97,39)$$

sein. Für $U''_0 < 20 \text{ km/sek}$ erhält man entsprechend nach Gl. (97,38)

$$v_1 > 2,2 \cdot 10^8 \text{ Teilchen/cm}^3. \quad (97,40)$$

Wir werden unten zeigen, daß die spektroskopischen Beobachtungen ganz unabhängig von den im vorhergehenden entwickelten Formeln auf Dichten führen, die mit den Bedingungen (97,39 u. 40) durchaus verträglich sind.

Die *Relaxationszeiten* berechnet man nach (97,37 bzw. 38) leicht für

$$v_1 = 1,7 \cdot 10^9 \text{ Teilchen/cm}^3 \text{ zu } t'_0 = 18 \text{ sek} \quad (97,41)$$

und für

$$v_1 = 2,2 \cdot 10^8 \text{ Teilchen/cm}^3 \text{ zu } t''_0 = 74 \text{ sek}, \quad (97,42)$$

d. h. der stationäre Zustand stellt sich praktisch *momentan* ein.

D. Quantitative Untersuchungen über das Linienspektrum² der Protuberanzen. Anlässlich seiner Beobachtung der Sonnenfinsternis vom 30. Aug. 1905 hat K. SCHWARZSCHILD³ [1774] eine rationale *Einheit* für die Intensität von Protuberanzenlinien definiert: Die in der Linie emittierte Energie wird verglichen mit der innerhalb von 1 \AA im Spektrum des Sonnenrandes (unter denselben sonstigen Verhältnissen) ausgestrahlten Energie. SCHWARZSCHILD'S

¹ Dieser Wert ist eher zu klein, als zu groß. — Bei einer strengen Rechnung müßte insbesondere das im vorhergehenden stets benützte elastische Kugel-Modell aufgegeben werden.

² Kontinuierliches Spektrum s. unter G.

³ Diese Arbeit sollte jeder angehende Astrophysiker auf das Gründlichste studieren!

Maßeinheit gibt also — mit anderen Worten — die *Äquivalentbreite* A_λ der Linie, bezogen auf das Spektrum des Sonnenrandes. Da letzteres nach der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes der Hohlraumstrahlung für die Grenztemperatur T_0 der Sonne entspricht, so bildet nach dem KIRCHHOFFSchen Satz die SCHWARZSCHILDsche Emissionseinheit das genaue Analogon der in der Theorie der Absorptionslinien schon viel benützten „Gesamtabsorption“, sofern wir annehmen dürfen, daß in den Protuberanzen thermisches Gleichgewicht für die Temperatur T_0 besteht.

Aber nicht nur theoretische Gesichtspunkte, sondern auch praktische Erwägungen lassen SCHWARZSCHILDs Einheit — mindestens für Finsternisbeobachtungen — als die rationellste erscheinen: Da das Spektrum des äußersten Sonnenrandes (Baily beads) bei Objektivprismenapparaten nahezu gleichzeitig mit dem der Protuberanzen aufgenommen wird, so sind meteorologische Einflüsse usw. weitgehendst ausgeschaltet.

Sollen Intensitätsmessungen an Protuberanzenlinien außerhalb von Finsternissen ausgeführt werden¹, so läßt sich schon wegen der Luftunruhe der äußerste Sonnenrand nicht als „Vergleichslichtquelle“ benützen. Man rüh dann, wie dies z. B. M. MINNAERT und C. SLOB [1738] bei ihren wichtigen Messungen an H_α und $He D_3$ getan haben, die Äquivalentbreite zunächst auf das Spektrum der Sonnenmitte beziehen. Die Umrechnung auf die SCHWARZSCHILDsche Einheit geschieht dann einfach durch Multiplikation mit dem Intensitätsverhältnis Sonnenmitte: Sonnenrand = $I_{\vartheta=0}/I_{\vartheta=\pi/2}$ für die betreffende Wellenlänge. Leider ist dieses Verhältnis wegen der Unsicherheit in der Extrapolation für $\vartheta \rightarrow \pi/2$ noch nicht sehr genau bekannt, doch werden verbesserte Randverdunkelungsmessungen diesem Mangel hoffentlich bald abhelfen.

Eine ganz andere Methodik zur Messung der Intensität von Protuberanzenlinien haben bei der Finsternis vom 29. Juni 1927 A. PANNEKOEK und N. W. DOORN [1752] angewandt. Sie benützen als Vergleichslichtquelle eine geeichte Nitalampe und geben schließlich die gesamte Emission ihrer Protuberanzen (in den Raumwinkel 4π) in erg/sek an (ebd., Tabelle 8, Spalte 8). Die Beziehung dieser Einheit zur SCHWARZSCHILDschen läßt sich mit Hilfe der bekannten Fläche der Protuberanzen und der gleichfalls bekannten KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion für die Grenztemperatur T_0 der Sonne leicht herstellen. In meßtechnischer Hinsicht ist das Verfahren von PANNEKOEK und DOORN wegen der Schwierigkeit und Unsicherheit der Transmissions- und Extinktionskorrekturen usw. dem SCHWARZSCHILDschen erheblich unterlegen.

Die bis jetzt beschriebenen Untersuchungen beschränken sich mit Rücksicht auf das Trennungsvermögen der benützten Spektralapparate auf die Messung von Äquivalentbreiten. Einen ersten Versuch zur direkten Erfassung der Konturen von Protuberanzenlinien (bezogen auf das Spektrum der C-Mitte als Intensitätseinheit) hat 1929 A. UNSÖLD [1359] mit dem 150'-Turmteleskop an Mt. Wilson gemacht. Die Ergebnisse — auf die wir noch zurückkommen werden — ermutigen durchaus zur Fortsetzung dieser aus äußeren Gründen vorzeitig abgebrochenen Beobachtungen.

Ehe wir diese praktischen Probleme verlassen, sei noch generell auf einige Fehlerquellen hingewiesen: Einmal ist die Messung der Höhe einer bestimmten Protuberanzenstelle über dem Sonnenrand wegen der Luftunruhe und Nachführungsschwierigkeit nicht so einfach, wie man zunächst annehmen möchte. Hierzu vgl. E. J. PEREPOLKIN [1754 u. 1758]. Bei Benützung von Linsenfernröhren sind sodann deren Farbfehler zu beachten, die beim Vergleich z. B. von H_α mit H und K leicht verhängnisvoll werden können. Endlich sei noch an die bekannte Notwendigkeit und Schwierigkeit der Streulichtkorrektur erinnert.

¹ Neuerdings haben R. v. d. R. WOOLLEY und H. W. NEWTON [1781] eine vielversprechende Technik für Intensitätsmessungen mit dem Spektrohelioskop entwickelt.

E. Selbstabsorption in den Spektrallinien von Protuberanzen. Aus der *Intensität* von Spektrallinien wollen wir Rückschlüsse ziehen auf die *Anzahl strahlender Atome* und damit auf *Zusammensetzung, Ionisations- und Anregungszustand* der Protuberanzen. Dazu müssen wir zunächst prüfen, ob die *Austrahlung* der Protuberanzen durchweg in optisch dünner Schicht — also proportional der Anzahl strahlender Atome — erfolgt oder ob wir mit *Selbstabsorption* zu rechnen haben.

Betrachten wir daher noch einmal die Theorie der *Wachstumskurve*, wobei wir vorerst annehmen, daß die *relative Verteilung der Atome auf die an der betreffenden Spektrallinie beteiligten Quantenzustände durch eine BOLTZMANN-Formel mit der Grenztemperatur T_0 der Sonne beschrieben werde*¹. Dann können wir auf die Emission und Absorption dieser Spektrallinie einfach den KIRCHHOFFSchen Satz anwenden². Es wird also die Gesamtemission geteilt durch die KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion gleich der Gesamtabsorption. Ersteres ist aber ja gerade die äquivalente Linienbreite A_λ bezogen auf das Spektrum des Sonnenrandes, d. h. gemessen in der SCHWARZSCHILDSchen Einheit. Auf diese A_λ dürfen wir also ohne jede Änderung die in Abschn. 44 entwickelte Theorie der Wachstumskurve anwenden. Da ferner die optischen Dicken der Protuberanzen — wie wir sehen werden — nicht *sehr* groß sein dürften, so können wir Dämpfungsverbreiterung außer Acht lassen und uns auf reine Dopplerverbreiterung beschränken, also auf die Kurve $a=0$ der Fig. 59 (nach v. D. HELD) oder die Tabellen von R. LADENBURG [810].

Diese theoretischen Überlegungen wenden wir nun an auf vergleichende Intensitätsmessungen der Wasserstofflinie H_α und der Heliumlinie D_3 , die M. MINNAERT und C. SLOB [1738] für drei Protuberanzen publiziert und für weitere vier dem Verf. brieflich mitgeteilt und zur Verfügung gestellt haben³. Von den bei MINNAERT und SLOB angegebenen Äquivalentbreiten I_{H_α} bzw. I_{He} , welche auf 1 Å des Spektrums der Sonnenmitte bezogen sind, gehen wir zunächst durch Multiplikation mit dem Intensitätsverhältnis \odot -Mitte/ \odot -Rand (für H_α gleich 1/0,4) auf die SCHWARZSCHILDSchen A_λ über und sodann auf $\frac{A_\lambda}{2\Delta\lambda_D}$ (für H_α ist bei $T = 48\ 30^\circ$ die Dopplerbreite $\Delta\lambda_D = 0,196$ Å).

Man erkennt sofort, daß für D_3 stets $\frac{A_\lambda}{2\Delta\lambda_D} \ll 1$ ist. Für diese Linie ist also der Fall dünner Schicht realisiert und wir können fortan ihre Intensität I_{He} als proportional zur wirksamen Schichtdicke der Protuberanz ansehen. Andererseits dürfte im allgemeinen die Annahme berechtigt sein, daß verschieden helle Teile derselben Protuberanz sich weniger durch verschiedene Anregung oder Dichte, sondern in erster Linie durch verschiedene *wirksame Dicke* in Richtung der Sehlinie unterscheiden. Wenn dies zutrifft, so müßte der Zusammenhang von $\left(\log \frac{A_\lambda}{2\Delta\lambda_D}\right)_{H_\alpha}$ mit $\log I_{He}$ für verschiedene Stellen ein und derselben Protuberanz bis auf eine Verschiebung⁴ parallel der $\log I_{He}$ -Achse durch die universelle Wachstumskurve gegeben sein.

¹ Das Verhältnis der Atome in hochangeregten Zuständen zu den im Grundzustand befindlichen dagegen darf vom Zustande thermischen Gleichgewichtes abweichen.

² Daß die fragliche Pseudotemperatur nicht wesentlich *höher* als T_0 sein kann, ersieht man schon aus der bekannten Beobachtungstatsache, daß die Protuberanzen auf der ganzen Sonnenscheibe in *Absorption* („absorption markings“) erscheinen. Daß sie andererseits wesentlich *tiefer* als T_0 sein sollte, erscheint nach der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes höchst unwahrscheinlich.

³ Verf. möchte auch an dieser Stelle den Herrn Drs. M. MINNAERT und C. SLOB für dieses freundliche Entgegenkommen seinen verbindlichsten Dank aussprechen.

⁴ Diese Verschiebung stellt die richtige Verknüpfung von I_{He} mit der Wasserstoff-Schichtdicke her und hängt also in einfacher Weise mit dem Häufigkeitsverhältnis des angeregten Wasserstoffes bzw. Heliums zusammen.

In der folgenden Fig. 135 wurde zunächst für eine Temperatur von $T_0 = 4830^\circ K$ die theoretische Wachstumskurve der H_α -Linie mit $\log I_{H_\alpha}$ bzw. $\left(\log \frac{A_\lambda}{2 \Delta \lambda_D}\right)_{H_\alpha}$ als Ordinate (links bzw. rechts) und $\left(\log \frac{NHf}{\Delta \omega_D}\right)_{H_\alpha}$ als Abszisse (oben) aufgezeichnet. Die gestrichelte Gerade stellt ihre Asymptote für den Grenzfall dünner Schicht dar. Sodann wurde für jede Protuberanz $\log I_{H_\alpha}$ als Funktion von $\log I_{He}$ aufgetragen und diese Gruppe von Punkten soweit in horizontaler Richtung verschoben, bis sich möglichst gute Deckung mit der theoretischen Wachstumskurve ergab. In Fig. 135 ist diese Verschiebung bereits ausgeführt und als Abszisse (unten) $\log I_{He} - k$ aufgetragen. Die durch Probieren gefundenen Werte der Verschiebungskonstante k sind in der Figur vermerkt.

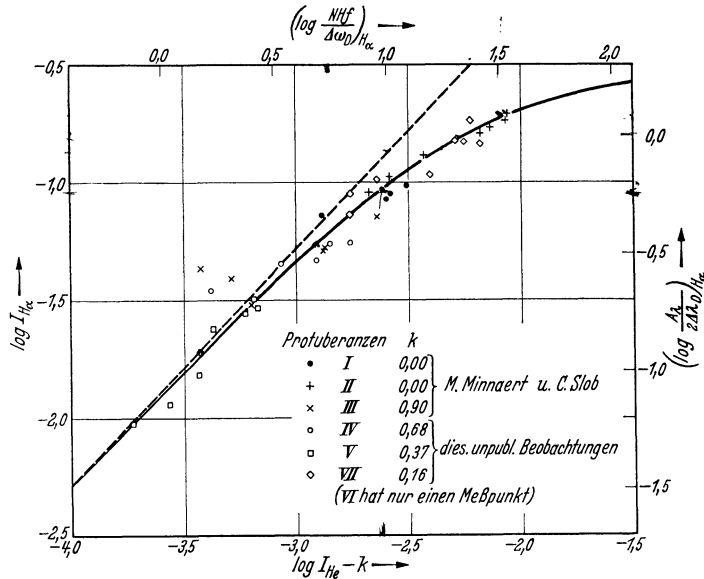


Fig. 135. Selbstabsorption in der H_α -Linie von Protuberanzen. Messungen von M. MINNAERT und C. SLOB [1738].

Man ersieht aus unserer Figur, daß die Meßpunkte der Protuberanzen I, II, V und VII (VI hat nur 1 Punkt und mußte daher ausscheiden) sich in ihrer Steigung ausgezeichnet der berechneten Kurve anschließen. Die angeschriebenen k -Werte zeigen weiterhin, daß für diese vier Protuberanzen das Verhältnis von angeregtem Wasserstoff zu angeregtem Helium maximal um einen Faktor 1,5 nach oben und unten, also erstaunlich *wenig* variiert.

Die durch die Protuberanzen III und IV (\times und \circ) festgelegten Kurvenstücke verlaufen dagegen entschieden flacher, als die Theorie erwarten läßt. Welche Ursache kann diese Abweichung haben? Wir haben bis jetzt angenommen, daß die Dopplerverbreiterung der H_α -Linien rein thermischer Natur ist. Kommen nun innerhalb der längs einer Schlinie liegenden Teile einer Protuberanz im Zusammenhang mit deren makroskopischer Bewegung Radialgeschwindigkeitsdifferenzen > 6 km/sek vor, so bewirken diese eine Vergrößerung¹ von $\Delta \lambda_D$. Dadurch würde jedoch eine Verkleinerung der optischen Schichtdicke und damit eine Annäherung der Wachstumskurve an die gestrichelte 45° -Gerade

¹ Dieser Effekt ist schön zu sehen an den von Verf. [1359, Fig. 16] gemessenen *Konturen* von H_α sowie H und K . Die Breite der Ca^+ -Linien ist dort ausschließlich durch makroskopische Bewegungen bestimmt. Bei H_α überlagert sich der in den untersuchten drei Fällen relativ kleine thermische Dopplereffekt.

bewirkt; der bei III und IV beobachtete Effekt kann so daher nicht erklärt werden. Man muß also wohl annehmen, daß diese beiden Protuberanzen entweder nicht so homogen sind wie die übrigen oder — was weniger wahrscheinlich ist — daß sie schwächer angeregt sind, als dies thermischem Gleichgewicht für die Grenztemperatur T_0 entspricht. Andererseits bestätigen die Messungen von MINNAERT und SLOB in Verbindung mit unserer vorstehenden Betrachtung das von E. PETTIT [1763] durch direkte Messung am Blinkkomparator erhaltene Ergebnis, daß die Geschwindigkeiten in ruhenden Protuberanzen vielfach unterhalb der thermischen Geschwindigkeit der Wasserstoffatome bleiben.

Das *Hauptergebnis* der Beobachtungen von MINNAERT und SLOB wollen wir nochmals kurz zusammenfassen: Die Heliumlinie D_3 ist praktisch selbstabsorptionsfrei. Für H_α trifft dies nur in den schwächeren Protuberanzen zu. In den hellsten (*loc. cit.*) untersuchten Protuberanzen wird die Intensität der H_α -Linie durch Selbstabsorption um einen Faktor 2,4 (senkrechter Abstand der Wachstumskurve von ihrer Asymptote) verringert. Da die optische Dicke (genauer gesagt $\frac{NHf}{\Delta\omega_D}$) für H_β stets 7,2mal kleiner ist als für H_α , so können wir aus Fig. 135 weiterhin entnehmen, daß H_β und a fortiori die höheren Glieder der BALMER-Serie so gut wie selbstabsorptionsfrei sind. Dies steht in Einklang mit der Beobachtung von K. SCHWARZSCHILD (s. S. 407), daß die Intensitätsverhältnisse $H_\beta : H_\gamma : H_\delta \dots$ von der Helligkeit der H_β -Linie unabhängig sind (Tabelle 71).

Tabelle 71. Linienintensitäten in vier Protuberanzen (1905).
Nach K. SCHWARZSCHILD [1774].

a) Äquivalentbreiten bezogen auf 1 Å im Spektrum des Sonnenrandes							b) Dieselben, bezogen auf H_β als Einheit						
Prot.*	H_β	H_γ	H_δ	H_ζ	H^{**}	K	Prot.*	H_β	H_γ	H_δ	H_ζ	H^{**}	K
<i>b</i>	0,70	0,24	0,073	0,040	0,11	0,22	<i>b</i>	1	0,34	0,10	0,06	0,16	0,31
<i>a</i>	0,44	0,087	0,026		0,54	0,46	<i>a</i>	1	0,20	0,06		1,2	1,0
<i>c</i>	0,059	0,031	0,008		0,044	0,081	<i>c</i>	1	0,53	0,14		0,74	1,4
<i>b'</i>	0,037	0,012			0,070	0,11	<i>b'</i>	1	0,32			1,9	3,0
							Mittel	1	0,35	0,10	0,06		

Eine analoge Schlußweise läßt sich auf die schwachen¹ Metalllinien anwenden. Die theoretische Erwartung, daß deren Intensitäten direkt proportional den Übergangswahrscheinlichkeiten sein sollen, wird auf das schönste bestätigt durch die Multiplettmessungen von C. R. DAVIDSON, M. MINNAERT, L. S. ORNSTEIN und F. J. M. STRATTON [1717].

Wie steht es nun aber mit den Ca^+ -Linien H und K (λ 3968/33), die alle anderen an Intensität weit übertreffen? Nach den Beobachtungen von K. SCHWARZSCHILD (Tabelle 71) aus dem Jahre 1905 nimmt das Intensitätsverhältnis der K -Linie λ 3933 zu der selbstabsorptionsfreien H_β -Linie mit wachsender Intensität von H_β — d. h. wachsender Schichtdicke — um einen Faktor ~ 10 ab. Die Selbstabsorption in der K -Linie ist also viel stärker als in H_α ; wir befinden uns schon im flachen Teil der Wachstumskurve, so daß A_λ im wesentlichen durch die Dopplerbreite $\Delta\lambda_D$ bestimmt wird. Ob letztere dabei thermischen Ursprunges ist oder durch die inneren Bewegungen der Protuberanz verursacht wird, spielt in qualitativer Hinsicht keine Rolle.

* Vgl. Fig. 3 bei SCHWARZSCHILD.

** Etwas gestört durch H_e .

¹ Da der thermische Dopplereffekt der Metalle kleiner ist, als der des Wasserstoffes, so kann man sicher als „schwach“ (d. h. in dünner Schicht emittiert) alle Linien bezeichnen, die weniger intensiv sind als H_γ .

Die Entwicklung einer *quantitativen* Theorie der Selbstabsorption in den Ca^+ -Linien H und K stößt zur Zeit noch auf zweierlei Schwierigkeiten: a) Nach E. PETTIT (s. S. 399) sind die Geschwindigkeiten in einer „ruhenden“ Protuberanz im allgemeinen *größer* als die thermischen Geschwindigkeiten der Ca^+ -Ionen bei $\sim 5000^\circ$. $\Delta\lambda_D$ kann also nur von Fall zu Fall durch direkte Ausmessung von Linienkonturen gefunden werden.

b) Es ist sehr fraglich, ob wir für die Ca^+ -Resonanzlinien thermische Anregung (in dem oben gebrauchten Sinn) annehmen dürfen. Wahrscheinlicher beruht vielmehr ihre Strahlung auf *Resonanzfluoreszenz*. Dann wäre — wie man and Hand von Kap. XII sieht — im vorhergehenden an die Stelle der KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion, d. h. der Intensität des Sonnenrandes, für diese Linien ein passender Mittelwert über die Intensität der anregenden Strahlung zu setzen, also der Strahlung in der Mitte der Absorptionslinien H und K . Wenn unsere zweite Annahme richtig ist, so sollte die Intensität in der Mitte der H - und K -Linien auch beliebig heller Protuberanzen nie über diesen durch den photosphärischen Untergrund festgelegten Grenzwert steigen. Eine Entscheidung kann nur durch ziemlich schwierige Konturenmessungen erbracht werden; die wenigen Beobachtungen des Verf. (s. S. 408) reichen dazu noch nicht aus.

Durch die Erkenntnis, daß die Ca^+ -Linien H und K erhebliche Selbstabsorption zeigen, während die danebenliegende Wasserstofflinie H_ϵ selbstabsorptionsfrei ist, wird auch die Beobachtung von E. J. PEREPELKIN [1755, Tabelle 6] erklärt, daß rasch bewegte Protuberanzen im Vergleich zu ruhenden ein kleineres Intensitätsverhältnis H_ϵ/H zeigen. Die rasch bewegten Protuberanzen werden nämlich auch relativ große innere Bewegungen — also großes $\Delta\lambda_D$ haben; dadurch wird die Intensität von H_ϵ relativ zu H entsprechend vergrößert.

E. J. PEREPELKIN [1757a] selbst nimmt einen anderen Standpunkt ein: Er zeigt zunächst, daß das Verhältnis H_ϵ/H im Mittel von der Intensität der H -Linie unabhängig ist und folgert daraus, daß Selbstabsorption keine Rolle spiele. Dieser Schluß ist aber nicht zwingend. Man kann vielmehr PEREPELKINS zunächst überraschende Beobachtung wohl besser so verstehen: Da H im flachen Teil der Wachstumskurve liegt, so wird ihre Äquivalentbreite im wesentlichen durch $\Delta\lambda_D$ bestimmt. Hätten alle Protuberanzen dieselbe Schichtdicke und nur verschiedene Dopplereffekte, so müßte also H_ϵ/H mit wachsender H -Intensität *abnehmen*. Hätten andererseits alle Protuberanzen denselben Dopplereffekt und nur verschiedene Schichtdicken, so müßte H_ϵ/H mit wachsender H -Intensität *zunehmen*, da H_ϵ rascher mit der Schichtdicke anwächst als H . Da diese beiden Effekte sich überlagern, so ist eine klare Korrelation des Verhältnisses H_ϵ/H mit H gar nicht zu erwarten. Daß es im Mittel etwa konstant ist, hat wohl keine tiefere Bedeutung. (Trägt man nach Tabelle 71 etwa das Verhältnis $H + K/H_\beta$ als Funktion von $H + K$ auf, so sieht man diese Anschauung bestätigt.)

Weiterhin zeigt E. J. PEREPELKIN [1757a], daß das Intensitätsverhältnis H_ϵ/H mit der Aktivität der Sonne anwächst und führt dies auf entsprechende Variationen der anregenden $U.V.$ -Strahlung zurück. Obwohl diese Annahme nicht unplausibel ist, so wird man doch nach dem Gesagten auch andere Möglichkeiten in Betracht ziehen müssen wie Variation der inneren Geschwindigkeiten (d. h. $\Delta\lambda_D$) oder der wirksamen Schichtdicke (H_ϵ/H nimmt zu mit wachsender Schichtdicke und abnehmendem Dopplereffekt).

Das grundlegende Ergebnis unserer bisherigen Diskussion, daß die Ca^+ -Linien $H + K$ *starke*, die H_α -Linie *mäßige* und HeD_3 - sowie alle *schwächeren* Linien *praktisch keine Selbstabsorption* zeigen, hat mehrere interessante *Konsequenzen*.

Wie wir im Anschluß an B. LYOT [1733] schon bemerkten, wird so zwanglos die Beobachtung erklärt, daß die „streamer“ relativ zum Hauptteil der Protuberanzen im Ca^+ -Licht am ausgeprägtesten, in H_α weniger deutlich und in HeD_3 am schwächsten erscheinen: Ist nämlich die wirksame Schichtdicke des „streamers“ beispielsweise 10mal kleiner als die der Protuberanz, so wird nach

unseren Ergebnissen ihr Helligkeitsverhältnis in $\text{He}D_3$ gleich 1 : 10, in H_α nach Fig. 135 für hellere Objekte $\sim 1 : 5$ und in Ca^+ nach Tabelle 71 größenordnungsmäßig 1 : 2 bis 1 : 1 sein!

Da ferner die Intensität der starken Protuberanzenlinien durch den Dopplereffekt makroskopischer Bewegungen ($\Delta\lambda_D$) beeinflusst wird, so muß man erwarten, daß im Zusammenhang mit inneren Bewegungen Unterschiede zwischen den Ca^+ , H_α - und D_3 -Bildern auftreten, die nicht das Geringste mit Unterschieden der Zusammensetzung, Anregung oder gar Aussortierung der Elemente durch selektiven Strahlungsdruck zu tun haben. Die Führung der Theorie ist hier bei der Interpretation der Beobachtungen gar nicht zu entbehren.

Schon eingangs wiesen wir sodann auf die Beobachtung von E. J. PEREPELKIN [z. B. 1755] hin, der für Ca^+ H und K durchschnittlich größere Radialgeschwindigkeiten findet als für H_e . Dies kann — zumindest in qualitativer Hinsicht — so verstanden werden: Da H_e in optisch *dünnere* Schicht emittiert wird, so mißt man einen *Mittelwert* \bar{v} der Radialgeschwindigkeit über die emittierende Schicht, wobei die Konzentration der Wasserstoffatome als Gewichtungsfaktor eingeht. H und K andererseits werden in optisch *dicker* Schicht emittiert. Die Intensität innerhalb der Linie ist also konstant und gleich dem oben erörterten Maximalwert. Das heißt die Linienkontur hat die Form eines Rechtecks mit abgerundeten Ecken, das den Wellenlängenbereich von der kleinsten bis zur größten Dopplerverschiebung¹ einnimmt. Sind also v_{\min} . bzw. v_{\max} die kleinste bzw. größte Radialgeschwindigkeit, welche in der Sehlinie vorkommen, so mißt man als „Radialgeschwindigkeit der Protuberanz in H und K “ $\frac{1}{2}(v_{\min} + v_{\max})$. Da nun erfahrungsgemäß die Häufigkeit einer bestimmten Radialgeschwindigkeit v bei großen v sehr rasch abnimmt, so wird man im allgemeinen

$$\bar{v} < \frac{1}{2}(v_{\min} + v_{\max}) \quad (97.43)$$

erwarten, in Einklang mit den Beobachtungen.

Zusammenfassend können wir also sagen, daß die bei Beobachtung mit verschiedenen Linien gefundenen kleinen Unterschiede ohne weiteres auf Selbstabsorption zurückgeführt werden können. Ob daneben — in untergeordnetem Maße — noch wirkliche Anregungsunterschiede od. dgl. vorkommen, dürfte nur durch Beobachtung „schwacher“ Linien (welche in optisch dünner Schicht emittiert werden) bei Sonnenfinsternissen zu klären sein.

F. Quantitative Deutung² des Protuberanzenspektrums. Dichte, Anregung und Ionisation. Schon die bekannte Beobachtung, daß im Spektrum der Protuberanzen die Heliumlinien mit etwa 20 V Anregungsspannung, ja sogar die HeII -Linie $\lambda 4686$ mit 48 V Anregung + 24,5 V Ionisierungsspannung auftreten, weisen deutlich darauf hin, daß wir vom Zustande thermischen Gleichgewichtes weit entfernt sind.

Trotzdem erscheint es — wie wir schon andeuteten — durchaus sinnvoll, auf Gruppen eng benachbarter Terme, zwischen denen sehr häufig Übergänge unter Absorption und Emission nicht zu kurzweiliger Strahlung stattfinden, näherungsweise die für thermisches Gleichgewicht abgeleiteten Formeln anzuwenden. Betrachtet man z. B. die Anregung und Ionisation des Wasserstoffes

¹ Genauer gesagt: Den Verschiebungen, welchen noch eine optische Dicke der emittierenden Schicht ≈ 1 entspricht.

² Die folgenden Überlegungen und Rechnungen knüpfen in vieler Hinsicht an W. H. MCCREA [1712], D. H. MENZEL [1735, 1711] und andere Untersuchungen zur Theorie der *Chromosphäre* an. Da es zu weit führen würde, die Herkunft aller Einzelheiten auseinanderzusetzen, so möchten wir hier generell auf diese wichtigen Arbeiten hinweisen.

und schätzt die relative Häufigkeit verschiedener Übergänge ab, so erkennt man, daß die hoch angeregten diskreten Zustände zusammen mit den freien Elektronen nicht zu großer Geschwindigkeit unter sich eine Art thermisches Gleichgewicht imitieren werden mit einer Temperatur, die jedenfalls nicht weit von der Grenztemperatur T_0 der Sonne entfernt sein dürfte. Das Verhältnis der hochangeregten Zustände zur Anzahl der Atome im Grundzustand dagegen kann z. B. infolge zu starker U.V.-Strahlung oder eines Überschusses an schnellen Partikeln sehr wohl gleichzeitig beliebige Abweichungen von der BOLTZMANN-Verteilung aufweisen.

Unter diesen Gesichtspunkten betrachten wir als erstes Teilproblem die *Intensität der BALMER-Linien des Wasserstoffes*. Die Gesamtintensität einer Linie ist nach Voraussetzung gleich KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion mal Gesamtabsorption. Ihre Äquivalentbreite, bezogen auf 1 Å des Randspektrums (SCHWARZSCHILDSche Einheit) wird¹ also nach (40,22):

$$A_\lambda = \frac{\pi e^2}{m c^2} \cdot \lambda^2 \cdot 10^8 \cdot N H f. \quad (97,44)$$

Dabei bedeutet NH die Anzahl der im 2. Quantenzustand befindlichen Wasserstoffatome pro cm^2 -Säule in Richtung des Visionsradius', f die Oszillatorenstärke (Tabelle 40) und λ die Wellenlänge der Linie. Die folgende Tabelle 72 gibt für $H_\beta \dots H_\zeta^2$ zunächst die λ und f , sodann die *berechneten Äquivalentbreiten* $A_\lambda \sim \lambda^2 f$, bezogen auf $H_\beta = 1$. Diese vergleichen wir mit dem Mittelwert der Beobachtungen von K. SCHWARZSCHILD nach Tabelle 71 und neueren Messungen von E. J. PEREPOLKIN und V. P. VIASANIZYN³ [1757b]. Letztere sind zunächst auf 1 Å im Kontinuum der \odot -Mitte bezogen (Spalte 6; A_λ^*) und wurden durch Division mit den relativen Randverdunklungsfaktoren $I_{\pi/2}/I_0$ der Spalte 7 auf SCHWARZSCHILDS Einheit umgerechnet (A_λ). Man hat nach Tabelle 72 den Eindruck, daß die Intensitätsabnahme nach höheren Seriengliedern zu in Wirklichkeit etwas langsamer erfolge, als nach Gl. (97,44). Dies könnte man evtl. mit den später zu erörternden Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht in Verbindung bringen. Vielleicht kommt darin aber auch nur eine etwas zu kleine Streulichtkorrektur der Messungen zum Ausdruck.

Tabelle 72. Äquivalentbreiten A_λ der BALMER-Linien in Protuberanzen (SCHWARZSCHILDSche Einheit) bezogen auf $H_\beta = 1$.

Linie	λ	f	A_λ (ber.)	A_λ (beob.)			
				SCHWARZSCHILD	PEREPOLKIN-VIASANIZYN		
					A_λ^*	$I_{\pi/2}/I_0$	A_λ
H_β	4861	0,119	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
H_γ	4340	0,0443	0,30	0,35	0,38	0,83	0,46
H_δ	4101	0,0212	0,13	0,10	0,14	0,75	0,19
H_ϵ	3970	0,0122	0,068	—	0,09	0,67	0,13
H_ζ	3889	0,0080	0,043	0,06	—	—	—

Für die Anzahl NH zweiquantiger Wasserstoffatome in einer Säule von 1 cm^2 Querschnitt längs der Sehlinie erhält man nach Gl. (97,44) aus den H_β -Messungen

¹ Dabei setzen wir *optisch dünne Schicht* voraus. H_α z. B. müßte also gegebenenfalls nach Fig. 135 (nur für ruhende Protuberanzen gültig!) auf dünne Schicht reduziert werden.

² Bezüglich der höheren Serienglieder $n = 6$ bis 28 vgl. auch C. R. DAVIDSON, M. MINNAERT, L. S. ORNSTEIN und F. J. M. STRATTON [1717].

³ Bei der Umrechnung auf absolute Einheiten scheint den Autoren ein Versehen unterlaufen zu sein.

(1905) von K. SCHWARZSCHILD (Tabelle 71 a) die Zahlenwerte (Protuberanz b , a , c , b')

$$NH = 280, 180, 24 \quad \text{und} \quad 15 \times 10^{11} \quad \text{2 qu. H-Atome/cm}^2.$$

Einige H_α -Messungen (1929) von A. UNSÖLD [1359], die infolge innerer Dopplereffekte ziemlich selbstabsorptionsfrei sind, ergaben entsprechend

$$NH = 9, 4,5 \quad \text{und} \quad 0,7 \times 10^{11} \quad \text{2 qu. H-Atome/cm}^2.$$

Die H_α -Messungen (1930) von M. MINNAERT u. C. SLOB [1738] endlich erfüllen nach Fig. 135 (obere Abszissenskala; $\Delta\omega_D = 8,58 \cdot 10^{10} \text{ sek}^{-1}$) mit Berücksichtigung der Selbstabsorption einen Bereich

$$NH = 30 \quad \text{bis} \quad 0,8 \times 10^{11} \quad \text{2 qu. H-Atome/cm}^2.$$

Rechnen wir unter stärkerer Berücksichtigung der neueren Messungen mit einem Mittelwert $NH = 5 \cdot 10^{11}$ und setzen nach E. PETTIT (s. unter A.) die Dicke H der Protuberanzen etwa gleich 10000 km, so erhalten¹ wir größenordnungsmäßig

$$N = n_{0,2} \approx 500 \quad \text{2 qu. H-Atome/cm}^3. \quad (97,45)$$

Diese Zahl, der wir gleich ihre rationelle Bezeichnung im Sinne von Kap. IV mitgegeben haben, verknüpfen wir nun mit der Anzahl n_1 ionisierter H-Atome pro cm^3 . Durch Kombination der SAHASCHEN mit der BOLTZMANN'SCHEN Formel (21,11 u. 10) erhält man zunächst (die Quantenzahl 2 ersetzen wir etwas allgemeiner durch s)

$$\frac{n_1}{n_{0,s}} \cdot P_e = \frac{g_1 \cdot 2}{g_{0,s}} \cdot \frac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}} \cdot (kT)^{\frac{5}{2}}}{h^3} e^{-\frac{\chi_0 - \chi_{0,s}}{kT}}. \quad (97,46)$$

Dabei ist $\chi_0 - \chi_{0,s}$ der Abstand des Niveaus s von der Seriengrenze im neutralen Atom; für $s=2$ bei Wasserstoff also z. B. 3,38 V. Es leuchtet ein, daß für eine so kleine Energiedifferenz die Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht nicht viel ausmachen können. Die statistischen Gewichte sind in unserem Fall $g_1 = 1$ und $g_{0,2} = 2 \cdot 2^2$. Da ferner bei der großen Häufigkeit des Wasserstoffes etwa auf jedes Proton ein freies Elektron kommt, also $n_1 \approx n_e$ ist, so können wir wegen

$$P_e = n_e \cdot kT \approx n_1 \cdot kT \quad (97,47)$$

auch schreiben

$$P_e^2 = \frac{n_{0,2}}{4} \cdot \frac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{7}{2}}}{h^3} e^{-\frac{\chi_0 - \chi_{0,s}}{kT}}. \quad (97,48)$$

Aus dieser Gleichung können wir nun den *Elektronendruck P_e in den Protuberanzen* bestimmen. Mit $n_{0,2} = 500$ und $T = 5036^\circ$ ($\Theta = 1$; der Unterschied gegen 4830° ist völlig belanglos) erhalten wir so²

$$P_e = 0,46 \cdot 10^{-2} \text{ Bar} \quad \text{oder} \quad n_e = 6,7 \cdot 10^9 \text{ Elektronen/cm}^3. \quad (97,49)$$

Eine Teilchenzahl von $1,3 \cdot 10^{10}$ pro cm^3 (auf jedes Elektron kommt größenordnungsmäßig ein Ion) reicht nach der Theorie von MCCREA — vgl. (97,39

¹ Würde man die Annahme teilweisen thermischen Gleichgewichtes a limine ablehnen, so müßte man z. B. aus der Emission von H_α zunächst die Anzahl der 3quantigen H-Atome bestimmen und erhielte — wie man leicht sieht — dafür das obige $n_{0,2}$ multipliziert mit dem BOLTZMANN-Faktor für die Anregungsdifferenz 3—2 und die oben *angenommene* Temperatur T_0 . Wir werden die angedeutete Art der Betrachtung nachher noch genauer durchführen, möchten aber schon hier darauf hinweisen, daß sie — im Gegensatz zu einer weitverbreiteten Meinung — nichts wesentlich Neues ergibt.

² Der in (97,49) gefundene Elektronendruck P_e der Protuberanzen ist nicht so ungenau, wie man bei dem großen Schwankungsbereich der Ausgangsdaten und der Unsicherheit in der Annahme thermischen Gleichgewichtes vielleicht erwarten möchte. $n_{0,2}$ geht ja nur unter der $\sqrt{\quad}$ ein und mit dem ganz unwahrscheinlich hohen Temperaturwert $T = 10000^\circ$ in (97,48) würde n_e erst um einen Faktor ~ 17 vergrößert.

u. 40) längst aus, um eine merkliche Trennung verschiedener Elemente in den Protuberanzen (z. B. durch selektiven Strahlungsdruck) zu *verhindern*, wie dies die Beobachtungen verlangen.

In einer 20000 km hohen Gassäule im *hydrostatischen Gleichgewicht*, welche pro cm^3 $6,7 \cdot 10^9$ Ionen mit dem mittleren Atomgewicht 2,8 enthält, würde ein mittlerer Gasdruck (halbes Gewicht der Säule) von 0,85 Bar und ein Elektronendruck von $\sim 0,46$ Bar herrschen. Der Vergleich mit (97,49) zeigt wieder, daß in den Protuberanzen die Gravitation nahezu vollständig durch eine „Gegenkraft“ kompensiert wird.

In derselben Weise wie die BALMER-Linien des Wasserstoffes behandeln wir nun die analoge 2^3P-n^3D -Serie des *Heliums* mit dem Ziel, das *Häufigkeitsverhältnis* He : H in den Protuberanzen zu bestimmen. Wir stützen uns dabei zunächst auf die im vorhergehenden schon viel benützten Messungen von M. MINNAERT und C. SLOB [1738] an der D_3 -Linie 2^3P-3^3D λ 5876. Deren Oszillatorenstärke können wir unter der Annahme, daß das entsprechende Amplitudenquadrat denselben Wert hat wie bei Wasserstoff, berechnen¹ zu $f = 0,70 \cdot \frac{6563}{5876} = 0,78$ (Unsicherheit schätzungsweise 30%).

Aus Fig. 135 (rechte und untere Skala) entnehmen wir zunächst, daß das Intensitätsverhältnis $D_3 : H_\alpha$ nach Korrektur für Selbstabsorption (gestrichelte Gerade) unter Benützung der MINNAERTSchen Einheiten (Äquivalentbreiten in Å, bezogen auf \odot -Mitte) im Mittel (für $k = 0,13$) ist

$$I_{D_3} : I_{H_\alpha} = 1 : 39. \quad (97,50)$$

Unter Berücksichtigung des kleinen Unterschiedes der Randverdunkelung erhält man das Verhältnis in SCHWARZSCHILDSchen Einheiten (Äquivalentbreiten in Å, bezogen auf \odot -Rand) zu

$$A_\lambda(D_3) : A_\lambda(H_\alpha) = 1 : 34. \quad (97,51)$$

Das Verhältnis der Anzahl der He-Atome im 2^3P -Zustand Anzahl zur der H-Atome im 2. Quantenzustand wird nun nach (97,44)

$$\frac{n(\text{He}, 2^3P)}{n(\text{H}, 2)} = \frac{1}{34} \cdot \frac{0,64}{0,73} \left(\frac{6563}{5876} \right)^2 = \frac{1}{33}. \quad (97,52)$$

Um hieraus das Häufigkeitsverhältnis He : H bzw. — genauer gesagt — das Verhältnis der entsprechenden Ionen zu berechnen, schreiben wir die Gl. (97,46) einmal für Wasserstoff und dann für Helium an, wobei wir alle auf He bezüglichen Größen fernerhin mit einem * bezeichnen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{n_1}{n_{0,s}} \cdot P_e &= \frac{g_1 \cdot 2}{g_{0,s}} \cdot \frac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{5}{2}}}{h^3} \cdot e^{-\frac{\chi_0 - \chi_{0,s}}{kT}} \\ &\quad \text{mit } g_1 = 1; g_{0,s} = 8 \text{ für den 2. Zustand von H,} \\ \frac{n_{1,0}^*}{n_{0,s}^*} \cdot P_e &= \frac{g_{1,0}^* \cdot 2}{g_{0,s}^*} \cdot \frac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{5}{2}}}{h^3} \cdot e^{-\frac{\chi_0^* - \chi_{0,s}^*}{kT}} \\ &\quad \text{mit } g_{1,0}^* = 2; g_{0,s}^* = 9 \text{ für den } 2^3P\text{-Zustand von He.} \end{aligned} \right\} (97,53)$$

Durch Division beider Gleichungen entfernen wir fast alle unsicheren Faktoren und es bleibt:

$$\frac{n_{1,0}^*}{n_1} = \frac{n_{0,2}^* \cdot 2^3P}{n_{0,2}} \cdot \frac{16}{9} e^{-\frac{\Delta}{kT}}, \quad (97,54)$$

wobei $\Delta = (\chi_0^* - \chi_{0,2}^* \cdot 2^3P) - (\chi_0 - \chi_{0,2})$ die Differenz des He 2^3P -Termes minus dem 2-ten H-Term ist, also nach BACHER-GOUDSMIT 29224—27419 = 1805 cm^{-1} = 0,22 V. Es wird also mit (97,52):

$$\frac{\text{He}^+}{\text{H}^+} = \frac{n_{1,0}^*}{n_1} = \frac{1}{33} \cdot \frac{16}{9} \cdot 10^{-0,22} = \frac{1}{31}. \quad (97,55)$$

¹ Vgl. (48,5).

Da wir später zeigen können, daß in den Protuberanzen He wie H überwiegend einfach ionisiert sind, so gibt diese Zahl zugleich das wahre *Häufigkeitsverhältnis der beiden Elemente*, in guter Übereinstimmung mit der aus den Spektren von B-Sternen bestimmten Größenordnung. Wir bemerken noch, daß auch bei dieser Rechnung nur solche Anregungsverhältnisse benutzt sind, die gegen Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht unempfindlich sind.

Nunmehr wenden wir uns den im vorhergehenden noch nicht verwerteten Intensitätsmessungen zu, die A. PANNEKOEK und N. W. DOORN [1752] bei der Finsternis vom 29. Juni 1927 ausgeführt haben. Wie schon bemerkt, geben diese Autoren direkt die *gesamte Emission E* (nach allen Richtungen) *einer Protuberanz in erg/sek* für verschiedene Linien. Wir könnten nun diese Einheiten leicht auf die SCHWARZSCHILD'schen umrechnen. Statt dessen ziehen wir es vor, an diesem Beispiel den schon in der Anmerkung zu Gl. (97,45) angedeuteten Standpunkt durchzuführen, der die Annahme partiellen thermischen Gleichgewichtes erst an späterer Stelle einführt. Es handelt sich also — soweit gleichartige Messungen herangezogen werden — nicht um etwas prinzipiell Neues, sondern nur um eine andere *Art der Betrachtung*.

Ist N die Anzahl der in der Protuberanz enthaltenen Atome, welche sich im *oberen* Quantenzustand der betreffenden Linie befinden, so ist bei Annahme optisch dünner Schicht deren *Emission* nach Kap. IX (45,2)

$$E = N \cdot A \cdot h \nu \text{ erg/sek,}$$

Tabelle 73. Linienintensitäten usw. in einer Protuberanz („a“) nach A. PANNEKOEK und N. W. DOORN [1752]. Emittierende *Fläche* $\sim 0,53 \cdot 10^{20}$ cm². Emittierendes *Volum* nach E. PETTIT $\sim 3 \cdot 10^{28}$ cm³ (nach PANNEKOEK und DOORN $\sim 58 \cdot 10^{28}$ cm³).

1	2	3	4	5	6	7	8
	λ	Übergang	$A \cdot h \nu$ in erg/sek	g	Emission E in erg/sek	$\log \frac{N}{g}$	$\chi_r - \chi_{r,s}$ Volt
* H_{α} †	6563	2—3	$13,1 \cdot 10^{-5}$	18	$1890 \cdot 10^{22}$	27,904	1,50
H_{β}	4861	2—4	3,36	32	512	27,678	0,846
H_{γ}	4341	2—5	1,15	50	126	27,341	0,542
H_{δ}	4101	2—6	0,445	72	115	27,555	0,376
H_{ζ}	3889	2—8	0,114	128	18,8	27,110	0,211
* HeD ₃	5876	2 ³ P — 3 ³ D	30,0	15	138	26,487	1,51
He	4471	2 ³ P — 4 ³ D	11,5	15	40,4	26,370	0,848
He	4026	2 ³ P — 5 ³ D	5,79	15	7,08	25,911	0,542
HeII	4686	3—4	60,4	32	~ 1 ††	23,714	3,38
SrII	4216	5 ² S — 5 ² P _{1/2}	60,6	6	2,88	9,53	25,419
SrII	4078	5 ² S — 5 ² P _{3/2}			6,65		
CaII†	3968	4 ² S — 4 ² P _{1/2}	70,1	6	3310	6030	28,157
CaII†	3934	4 ² S — 4 ² P _{3/2}			2720		

Spalte 1—3. Bezeichnung und Wellenlänge der Linie.

4. $A \cdot h \nu$ = Emission pro Atom im oberen Quantenzustand in erg/sek.

5. g = Statistisches Gewicht dieses Zustandes.

6. E = Emission der ganzen Protuberanz in erg/sek.

7. N/g = Anzahl der Atome im oberen Quantenzustand pro Quantenzelle vom statischen Gewicht 1.

8. $\chi_r - \chi_{r,s}$ Größe des oberen Termes in Volt.

* Auf panchromatischer Platte (Verhältnis zu den übrigen Zahlen weniger genau).

† Möglicherweise Selbstabsorption; die Atomzahlen usw. sind unter der Annahme optisch dünner Schicht berechnet und daher nur als *untere* Grenzwerte aufzufassen.

†† Durch Vergleich mit SrII 4216 eingestuft nach Schätzung von W. GROTRIAN [1721].

wo A die „spontane“ Übergangswahrscheinlichkeit und $h\nu$ die Energie des emittierten Quants bedeutet

In Tabelle 73 geben wir in den ersten 3 Spalten die *Bezeichnung* der von PANNEKOEK und DOORN gemessenen Linien¹. Dann folgt die *Emission pro Atom im höheren Quantenzustand* $A \cdot h\nu$ in erg/sek. Für die Wasserstofflinien und HeII 4686 wurden diese Zahlen der Tabelle 18 des bekannten Handbuchartikels von H. BETHE [903] entnommen. Bezüglich der He-Linien wurde im Hinblick auf die Wasserstoffähnlichkeit der Terme angenommen, daß die Amplitudenquadrate denen der analogen Übergänge beim Wasserstoff gleich sind. Die $A \cdot h\nu$ können dann aus denen des Wasserstoffes durch Multiplikation mit dem Korrektionsfaktor $(\nu_{\text{He}}/\nu_{\text{H}})^4$ berechnet werden. Für die SrII und CaII-Resonanzlinien endlich hat A wegen des f -Sommensatzes nahezu den klassischen

Wert $0,220/\lambda^2$. Spalte 5 gibt noch — vgl. Tabelle 15 — das *statistische Gewicht des höheren Quantenzustandes* (mit Berücksichtigung des Elektronenspins).

Dann folgt die von PANNEKOEK und DOORN gemessene *Emission E* für ihre Protuberanz „a“ mit einer Fläche (Projektion) von $0,53 \cdot 10^{20} \text{ cm}^2$ und einem Volumen von $\sim 3 \cdot 10^{28} \text{ cm}^3$ (letzteres korrigiert nach E. PETTIT [1763]; PANNEKOEK und DOORN selbst rechnen mit einem 20mal größeren Volumen).

Mit Hilfe von Spalte 4—6 können wir nun nach obiger Gleichung die *Anzahl N der Atome im höheren Quantenzustand* ermitteln. Noch besser rechnen wir gleich pro Quantenzelle (einfacher Quantenzustand) und teilen N durch das angegebene statistische Gewicht g (Spalte 7).

Die Verteilung der Wasserstoff- und Heliumatome auf die fraglichen angeregten Quantenzustände versuchen wir nun (im Sinn unserer Annahme partiellen thermischen Gleichgewichtes) durch eine *BOLTZMANN-Formel* darzustellen. Danach wäre

$$\log_{10} \frac{N}{g} = \text{konst.} - \frac{5040}{T} (\chi_0 - \chi_{0,s}), \quad (97,56)$$

wo $\chi_0 - \chi_{0,s}$ den Abstand des betreffenden Termes von der Ionisationsgrenze (Spalte 8) in Volt bedeutet. Die Punkte in Fig. 136 streuen infolge der geringen Meßgenauigkeit erheblich. Man erhält eine passable Darstellung mit $T = 7200^\circ$; der Unterschied gegenüber dem früher angenommenen theoretischen $T \sim 5000^\circ$ kann jedoch nicht als gesichert betrachtet werden.

Im Limes $\chi_0 - \chi_{0,s} \rightarrow 0$ erhält man pro Quantenzelle $\log \frac{N}{g} \rightarrow 27,06$ H-Atome; pro cm^3 also $\log \frac{n}{g} \rightarrow -1,42$. Daraus können wir nach (97,48) sofort den

¹ Die zur Untersuchung der Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht besonders wichtige Linie HeII $\lambda 4686$ wurde nach den Intensitätsschätzungen von W. GROTRIAN [1721] durch Vergleich mit SrII 4216 eingestuft.

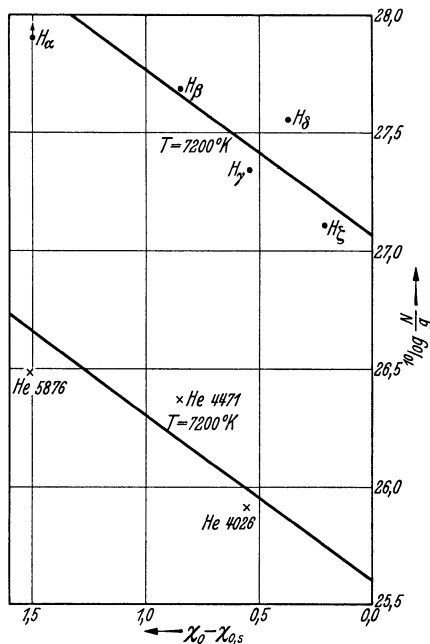


Fig. 136. BALMER-Serie des Wasserstoffs und 2^3P-n^3D -Serie des Heliums in einer Protuberanz („a“) nach Messungen von A. PANNEKOEK und N.W. DOORN [1752]. Abszissen: Termgröße in Volt. Ordinaten: Anzahl der Atome im oberen Quantenzustand geteilt durch dessen statistisches Gewicht. Die eingezeichneten Gradn entsprechen einer BOLTZMANN-Verteilung für $T = 7200^\circ$.

Elektronendruck P_e bestimmen, wenn wir wieder annehmen, daß pro H-Ion etwa 1 Elektron vorhanden ist. Es wird nämlich

$$P_e^2 = 2 \cdot \frac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}} \cdot (kT)^{\frac{7}{2}}}{h^3} \cdot \lim_{\chi_0 - \chi_{0,s} = 0} \frac{n}{g}. \quad (97,57)$$

Dies gibt mit $T = 7200^\circ$ den Elektronendruck $P_e = 0,96 \cdot 10^{-2}$ Bar in guter Übereinstimmung mit dem aus den übrigen Beobachtungen erhaltenen Wert (97,49) von $0,46 \cdot 10^{-2}$ Bar.

Durch Vergleich der $\lim_{\chi_0 - \chi_{0,s} = 0} \frac{N}{g}$ für Helium und Wasserstoff können wir wieder¹ leicht das Verhältnis $\frac{\text{He}^+}{\text{H}^+}$ oder — da beide Elemente fast durchweg einfach ionisiert sind — das Häufigkeitsverhältnis He/H bestimmen. Aus (97,53) erhält man durch Grenzübergang und Division der beiden Gleichungen

$$\frac{\text{He}^+}{\text{H}^+} = \frac{n_{1,0}^*}{n_1} = 2 \cdot \frac{\lim_{\chi_0 - \chi_{0,s} = 0} \frac{N^*}{g}}{\lim_{\chi_0 - \chi_{0,s} = 0} \frac{N}{g}}. \quad (97,58a)$$

An der rechten Skala der Fig. 136 liest man für den \log_{10} des rechtsstehenden Verhältnisses — 1,46 ab und findet so

$$\frac{\text{He}^+}{\text{H}^+} = \frac{1}{14,5}. \quad (97,58b)$$

Bei der großen Streuung der Meßpunkte in Fig. 136 ist die Übereinstimmung mit dem wohl genaueren Wert $1/31$ von (97,55) als ausreichend zu betrachten.

Damit dürfte der Bereich der Schlüsse ziemlich erschöpft sein, die wir aus dem noch sehr kleinen Beobachtungsmaterial durch vorsichtige Anwendung der Annahme partiellen thermischen Gleichgewichtes auf kleine Anregungsunterschiede ziehen können.

Wir versuchen nun einen ersten Einblick zu gewinnen in die *Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht* für große Anregungsdifferenzen, wie sie sich schon qualitativ in der Stärke der He und He⁺-Linien zu erkennen geben: Es wäre für die Untersuchung von größter Wichtigkeit, neben den bis jetzt ausschließlich betrachteten Linien hoher Anregung auch die Bogenlinien, wie NaD, Ca 4227 usw. quantitativ zu erfassen. Da solche Messungen aber noch nicht vorliegen, so wollen wir an Hand der Tabelle 73 wenigstens den Extremfall des Heliums genauer studieren.

Durch Anwendung der SAHA-Gleichung im Limes $\chi_0 - \chi_{0,s} \rightarrow 0$ bestimmen wir aus der Konzentration hochangeregter He-Atome zunächst die Konzentration $n_{1,0}$ der He⁺-Ionen

$$\frac{n_{1,0}}{\lim_{\chi_0 - \chi_{0,s} = 0} \frac{n_{0,s}}{g}} \cdot P_e = 2 \cdot 2 \cdot \frac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}} \cdot (kT)^{\frac{5}{2}}}{h^3}. \quad (97,59)$$

Entsprechend gilt für die nächsthöhere Ionisationsstufe

$$\frac{n_{2,0}}{\lim_{\chi_0 - \chi_{0,s} = 0} \frac{n_{1,s}}{g}} \cdot P_e = 1 \cdot 2 \cdot \frac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}} \cdot (kT)^{\frac{5}{2}}}{h^3}. \quad (97,60)$$

Durch Division erhalten wir das Verhältnis

$$\frac{\text{He}^{++}}{\text{He}^+} = \frac{n_{2,0}}{n_{1,0}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lim_{\chi_0 - \chi_{0,s} = 0} \frac{n_{1,s}}{g}}{\lim_{\chi_0 - \chi_{0,s} = 0} \frac{n_{0,s}}{g}}, \quad (97,61)$$

¹ Man mache sich den Zusammenhang mit den frühen Rechnungen genau klar!

wobei noch statt der n pro cm^3 ebensogut die N — bezogen auf die ganze Protuberanz — gesetzt werden können.

Aus der unteren Geraden von Fig. 136 folgt zunächst

$$\lim_{\chi_0 - \chi_{0,s}} \left\{ \log \frac{N_{0,s}}{g} \right\} = 25,60.$$

Für die HeII-Linie $\lambda 4686$ mit $\chi_1 - \chi_{1,s} = 3,38 \text{ V}$ ist nach Tabelle 73 der $\log \frac{N}{g} \approx 23,71$. Extrapoliert man mit $T = 7200^\circ$ bzw. $\frac{5040}{T} = 0,70$ wie in Fig. 136, so wird

$$\lim_{\chi_1 - \chi_{1,s}} \left\{ \log \frac{N_{1,s}}{g} \right\} = 23,71 - 0,70 \cdot 3,38 = 21,35$$

und schließlich nach (97,61)

$$\log \frac{n_{2,0}}{n_{1,0}} = -4,55. \quad (97,62)$$

Andererseits schreiben wir nun für diese Ionisation direkt die SAHASche Gleichung an. Um aber die Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht anschaulich zum Ausdruck bringen zu können, ersetzen wir das bekannte $\chi \cdot \frac{5040}{T}$ durch $\Phi(\chi)$; d. h.

$$\log \frac{n_{2,0}}{n_{1,0}} = -\Phi(\chi) + \frac{5}{2} \log T - 0,48 - \log P_e. \quad (97,63)$$

Unter dem log kommt es auf den T -Wert nicht genau an; wir nehmen hier $T = 5040^\circ$. Ferner ist nach (97,49) $P_e = 0,46 \cdot 10^{-2}$ und somit

$$\log \frac{n_{2,0}}{n_{1,0}} = -\Phi(54,2 \text{ Volt}) + 11,12.$$

Durch Vergleich mit (97,62) finden wir

$$\Phi(54,2 \text{ Volt}) = 15,67,$$

während bei thermischem Gleichgewicht für 5040° K

$$\Phi_{\text{therm.}}(54,2 \text{ Volt}) = 54,2 \quad (97,64)$$

zu erwarten wäre. Wir haben also einen Ionisationsgrad $\text{He}^{++}/\text{He}^+$ der um etwa 38,5 Zehnerpotenzen (NB!) zu hoch ist. Leider fehlt zur Zeit noch — wie gesagt — das Beobachtungsmaterial, um solche Untersuchungen auf breiterer Basis weiterzuführen, aber schon eine qualitative Betrachtung des Protuberanzspektrums (vgl. W. GROTRIAN [1721]) zeigt, daß die Abweichungen der „Anregungsgröße“ $\Phi(\chi)$ vom Gleichgewichtswert $\chi \cdot \frac{5040}{T}$ für kleine χ ziemlich gering sein und für große χ zu der angegebenen Größe wachsen müssen. Der Verlauf von $\Phi(\chi)$ dürfte daher in den größten Zügen (mit Zehnerpotenzen darf man dabei vorerst nicht kleinlich umgehen!!) etwa der vorstehenden Fig. 137 entsprechen.

G. Die kontinuierlichen Spektren der Protuberanzen. a) BALMER-Kontinuum. An die Grenze der BALMER-Serie $\lambda 3647$ schließt sich im Spektrum der Protuberanzen das schon von den A-Sternen her bekannte Kontinuum an. Da der Absorptionskoeffizient κ_ν in den Seriengrenzkontinua des Wasserstoffes nach der KRAMERSSchen Formel $\sim \nu^{-3}$ geht und die Ausstrahlung in „dünnere Schicht“ erfolgt, so erwartet man eine Intensitätsverteilung

$$I_\nu \sim \kappa_\nu \times \text{KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion} \sim e^{-\frac{h\nu}{kT}}. \quad (97,65)$$

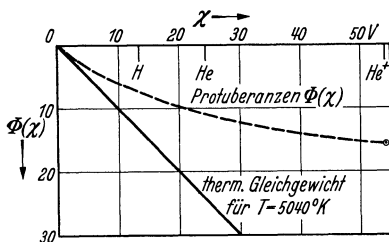


Fig. 137. Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht in Protuberanzen.

Messungen von C. R. DAVIDSON, M. MINNAERT, L. S. ORNSTEIN und F. J. M. STRATTON [1717, Abschn. 6] geben eine größenordnungsmäßige Bestätigung dieser Voraussage. — Es sei noch darauf hingewiesen, daß eine genaue Vermessung der Intensitätsverteilung über einen größeren Frequenzbereich des BALMER-Kontinuums eine direkte Bestimmung der *Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen* ermöglichen würde, da die Emission eines Quants $h\nu$ stets von der Einfangung eines Elektrons der Energie

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu - T_2 \quad (97,66)$$

herrührt, wo T_2 den Termwert des 2. Quantenzustandes in erg bedeutet.

b) *Streuung an freien Elektronen bei λ 5950—6400.* Durch visuelle Beobachtungen, bei denen durch Filter das von starken Linien freie Spektralgebiet λ 5950—6400 abgegrenzt wurde, fand B. LYOT [1733] 1936 ein Kontinuum, dessen Licht \perp zum Sonnenrand stark polarisiert ist. Der *Polarisationsgrad* wurde direkt zu 5,5—8,3% gemessen; nach Korrektur für das unpolarisierte terrestrische Streulicht erhöht sich der Wert nach LYOT auf $\sim 15\%$. Ohne Zweifel rührt dieses Kontinuum zum überwiegenden Teil von *Streuung an freien Elektronen* (Abschn. 42, insbesondere Gl. (42,10)) her. S. BAUMBACH [1708] hat mit Hilfe der in Abschn. 99 (Korona) genauer zu erläuternden Methoden den auf Grund dieser Vorstellung zu erwartenden Polarisationsgrad¹ berechnet.

Da wir die Lage einer Protuberanz nur in der Projektion senkrecht zur Sehlinie erfassen können, so bleibt mit Notwendigkeit eine glücklicherweise nicht erhebliche Unbestimmtheit in den Rechnungen. Bezeichnen wir mit Δ den scheinbaren Abstand der gemessenen Stelle vom Sonnenrand und mit χ den Winkel Sonnenmittelpunkt — Protuberanz — Beobachter, so findet S. BAUMBACH (s. oben) für eine mittlere Wellenlänge λ 6200 folgende Polarisationsgrade

$$\left. \begin{array}{ccc} \Delta = 0,56 & \chi = 90^\circ & \chi = 70^\circ \text{ oder } 110^\circ \\ & 19\% & 16\% \\ \Delta = 1,03 & 24\% & 21\% \end{array} \right\} \quad (97,67)$$

Aus der guten Übereinstimmung der berechneten Werte mit LYOTS Messungen muß man schließen, daß bei λ 6200 Å der überwiegende Teil des Protuberanzenkontinuums tatsächlich durch *Streuung an freien Elektronen* entsteht.

c) *Absorption bzw. thermische Emission und Streuung.* Da im Ultravioletten das BALMER-Kontinuum des Wasserstoffes nachgewiesen ist, so wird man im Sichtbaren neben dem Streukontinuum noch das Kontinuum der PASCHEN-Serie + höherer Wasserstoffserien erwarten. Die unter a) und b) beschriebenen Beobachtungen zeigen nun, daß für $\lambda \sim 3400$ Å das BALMER-Kontinuum \gg Streukontinuum ist, während für $\lambda \sim 6200$ Å das PASCHEN-Kontinuum (die höheren Serien können vorerst vernachlässigt werden) \ll Streukontinuum ist. Daraus können wir einen interessanten Schluß ziehen:

Es sei n_e die Anzahl freier Elektronen pro cm^3 und nach (42,10) der Streukoeffizient — unabhängig von der Wellenlänge pro Elektron:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = 0,66 \cdot 10^{-24}. \quad (97,68)$$

Weiterhin sei $n_{0,s}$ die Anzahl der Wasserstoffatome im s -ten Quantenzustand pro cm^3 und nach (34,3) der Absorptionskoeffizient im entsprechenden Seriengrenzkontinuum bei der Wellenlänge λ pro angeregtes Atom

$$a_s = \frac{64\pi^4}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{m e^{10}}{c^4 h^6} \cdot \frac{\lambda^3}{s^5} = 1,04_3 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{\lambda^3}{s^5}. \quad (97,69)$$

¹ Definiert als $\frac{I_t - I_r}{I_t + I_r}$, wobei sich die Indizes t (angential) und r (adial) auf den elektrischen Vektor des Lichtes beziehen.

Für das BALMER-Kontinuum $s = 2$ wird speziell bei

$$\lambda 3400 \dots a_2 = 1,28 \cdot 10^{-17} \quad (97,70)$$

und für das PASCHEN-Kontinuum bei

$$\lambda 6200 \dots a_3 = 1,07_2 \cdot 10^{-17}. \quad (97,71)$$

Aus den eingangs beschriebenen Beobachtungen folgt nun (wenn wir den geringfügigen Unterschied in der Art des Strahlungsaustausches zwischen Streuung und Absorption bei unserer Abschätzung vernachlässigen)

$$1,28 \cdot 10^{-17} \cdot n_{0,2} > 0,66 \cdot 10^{-24} n_e > 1,07 \cdot 10^{-17} n_{0,3} \quad (97,72)$$

oder — wenn wir $\frac{n_{0,3}}{n_{0,2}} \approx \frac{9}{4} \cdot 10^{-1,88} = 0,030$ wie in thermischem Gleichgewicht setzen —

$$1,9 \cdot 10^7 > \frac{n_e}{n_{0,2}} > 0,049 \cdot 10^7. \quad (97,73)$$

Die Größenordnung $\frac{n_e}{n_{0,2}} \approx 0,3 \cdot 10^7$ (geometr. Mittel der zulässigen Grenzwerte) paßt ausgezeichnet zu der nach (97,45 u. 49) aus *völlig andersartigen Beobachtungen* folgenden:

$$\frac{n_e}{n_{0,2}} = \frac{6,7 \cdot 10^9}{500} = 1,3_4 \cdot 10^7. \quad (97,74)$$

Es kann also kaum in Zweifel gezogen werden, daß die im vorhergehenden entwickelten Vorstellungen über Elektronendruck, Zusammensetzung und Anregungsverhältnisse der Protuberanzen nicht weit vom Richtigen entfernt sind, so daß wir sie wohl als Ausgangspunkt einer Theorie der Protuberanzen benützen können.

H. Theorie der Protuberanzen. Um die *Bewegungen* und *Formen* der Protuberanzen zu erklären, liegt es nahe, den *Strahlungsdruck*¹ heranzuziehen. Wir wollen daher dessen Theorie zunächst in einer ziemlich allgemeinen Form entwickeln:

Der *Strahlungsstrom* für die Frequenz ν , d. h. die pro sek und Frequenzintervall 1 durch 1 cm² strömende Strahlungsenergie sei wieder πF_ν . Dann entspricht diesem nach Kap. I ein *Impulsstrom* $\pi F_\nu/c$. Betrachten wir nun eine Atomart, deren *Absorptionskoeffizient* (unter Berücksichtigung aller Anregungszustände) pro Atom gleich k_ν sei, so wird die vom Strahlungsfeld auf das Atom ausgeübte *Kraft* K_s (= pro sek übertragener Impuls)

$$K_s = \int k_\nu \cdot \frac{\pi F_\nu}{c} d\nu, \quad (97,75)$$

wobei wir angenommen haben, daß die Reemission² isotrop erfolge.

Wird die Strahlungskraft durch Absorption in den vom Grundzustand ausgehenden *Resonanzlinien* eines Atoms hervorgerufen, so dürfen wir demgegenüber die angeregten Zustände ignorieren³. Nehmen wir weiterhin an, daß der

¹ Genauer müssen wir unterscheiden zwischen dem eigentlichen *Strahlungsdruck* (Bar) und der *Strahlungskraft* (Dyn), die proportional dem *Gradienten* des eigentlichen Strahlungsdruckes ist. Leider hat sich bis jetzt kein einheitlicher Sprachgebrauch herausgebildet. Im folgenden kommt es stets auf die zweite Größe an.

² Von den erzwungenen Emissionsprozessen sehen wir hier ab und rechnen dementsprechend auch mit der WIENSchen Strahlungsformel.

³ Die höheren Glieder der Hauptserie haben bei den *Metallen* (z. B. Ca⁺) eine im Vergleich zu den Resonanzlinien sehr kleine Übergangswahrscheinlichkeit; bei *Wasserstoff*, *Helium* und ähnlichen Spektren kann man die ganze Hauptserie (in Gedanken) auf *eine* Linie zusammenschieben. Die Absorption von angeregten Termen aus darf wegen deren (im Verhältnis zum Grundzustand) schwacher Besetzung meist vernachlässigt werden.

Strahlungsstrom πF_ν im Bereich der Absorption frequenzunabhängig sei, so erhalten wir

$$K_s = \frac{\pi F_\nu}{c} \int k_\nu d\nu. \quad (97,76)$$

Nach (40,21) ist weiterhin

$$\int k_\nu d\nu = \frac{\pi e^2}{m c} \cdot f, \quad (97,77)$$

wo f (≈ 1) die *Oszillatorenstärke* der betreffenden Linie bzw. Liniengruppe bedeutet. Andererseits werde der treibende Strahlungsstrom (F_ν = mittlere *Intensität* der Sonnenscheibe) näherungsweise dargestellt durch die Strahlung eines schwarzen Körpers der effektiven Sonnentemperatur $T = T_e$, welche durch die in tieferen Schichten entstandenen Absorptionslinien auf $1/r$ reduziert ist, d. h.

$$F_\nu = \frac{1}{r} \cdot \frac{2 h \nu^3}{c^2} \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}}. \quad (97,78)$$

Vergleichen wir endlich der Anschaulichkeit wegen noch die Strahlungskraft K_s mit der Schwerkraft $K_g = M \cdot g$, wobei die Masse des Atoms $M = m_H \times$ Atomgewicht ist, so erhalten wir schließlich

$$\mu = \frac{\text{Strahlungskraft } K_s}{\text{Schwerkraft } K_g} = \frac{1}{r} \cdot \frac{2 \pi^2 e^2 h \nu^3}{m c^4 \cdot M g} \cdot f \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}}, \quad (97,79)$$

oder¹

$$\mu = \frac{1}{r} \cdot \frac{2 \pi^2 e^2 h}{m c \cdot \lambda^3 \cdot M g} \cdot f \cdot e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}. \quad (97,80)$$

E. A. MILNE [1737] hat nun (1924) in zahlreichen Abhandlungen die Ansicht vertreten, daß in der *Chromosphäre* und den *Protuberanzen* der *Strahlungsdruck auf die Ca⁺-Ionen* (*H-* und *K-Linien*) eine bedeutsame Rolle spiele.

Setzt man in (97,80) $\lambda = 3950 \text{ \AA}$, $f \approx 1$, $M = 40 m_H$ und $T = 5740^\circ$, so erhält man $\mu = 1$, d. h. völlige Kompensation der Schwerkraft, für $r = 17,5$, d. h. eine Restintensität $1/r$ der *H-* und *K-Linien* von 6,3%. Da dieser Betrag von dem beobachteten nicht weit entfernt ist (man muß dabei die Ungenauigkeit von T_e berücksichtigen), so erscheint es zunächst wohl denkbar, daß in der Chromosphäre gerade $\mu \approx 1$ wird, während die Protuberanzen als Störungen des chromosphärischen Gleichgewichtes aufgefaßt werden könnten. Dabei ist aber — dies war zur Zeit der Entstehung der MILNESchen Theorie noch nicht bekannt — übersehen, daß nur etwa 2% der Masse der Protuberanzen aus Kalzium besteht und dieses wahrscheinlich überdies größtenteils in Form von Ca^{++} . Das heißt jedes Ca^+ -Ion hat — da bei der Dichte der Protuberanzen eine merkliche Trennung verschiedener Elemente noch nicht möglich ist — mindestens das 50fache an „fremder“ Masse mitzuschleppen und wir kommen so zu dem Schluß, daß der *Strahlungsdruck auf Ca⁺ für die Chromosphäre und die Protuberanzen insgesamt so gut wie bedeutungslos ist*².

Es erübrigt sich daher, auf die MILNESche Theorie [1737] der Ca^+ -Absorption, welche auf den Flügeln der *H-* und *K-Linien* entflieht, näher einzugehen. Sie wird auch den Beobachtungen über die Bewegungen eruptiver und die Beständigkeit ruhender Protuberanzen in keiner Weise gerecht.

¹ Der „selektive“ Strahlungsdruck ist zuerst von E. A. MILNE (s. oben) auf quantentheoretischer Basis und von W. BAADÉ und W. PAULI im Anschluß an die klassische Elektronentheorie behandelt worden. Der Zusammenhang beider Betrachtungsweisen wird hergestellt durch den f -Sommensatz.

² Es soll nicht in Zweifel gezogen werden, daß die MILNESche Theorie *physikalisch* richtig ist. Aber einen Stern, der nur aus Kalzium besteht, gibt es eben nicht.

Man überzeugt sich leicht, daß auch die Strahlungskraft, welche auf andere Elemente mit hinreichend langwelligen Resonanzlinien, wie Sr^+ und Ba^+ , wirkt, nichts hilft.

Einen Ausweg aus diesen Schwierigkeiten scheint mir folgende *Arbeits-hypothese* zu bieten, die eine ganze Gruppe astrophysikalischer und geophysikalischer Beobachtungen in einheitlicher Weise zusammenfaßt:

Wir nehmen an, daß die in Fig. 137 größenordnungsmäßig dargestellten *Abweichungen der Anregungs- und Ionisationsverhältnisse in Protuberanzen vom thermischen Gleichgewicht zurückzuführen sind auf einen entsprechenden Überschuß an kurzwelliger Strahlung (LYMAN-Gebiet)*.

Damit wird die Möglichkeit gegeben, die Bewegung der Protuberanzen mit der *Strahlungskraft auf Wasserstoff*, das bei weitem häufigste Element, in Zusammenhang zu bringen. Da die Protuberanzen für die LYMAN-Linien des Wasserstoffes als optisch dick zu betrachten sind, so richten wir unser Augenmerk auf das an der Grenze der LYMAN-Serie bei $\lambda 912 \text{ \AA}$ anschließende *Kontinuum*. Für eine rohe Abschätzung können wir dieses auf seinen Schwerpunkt $\lambda \sim 800 \text{ \AA}$ „zusammenschieben“ mit $f \approx 1/2$ als gesamte Oszillatorenstärke. Mit

$r = 1$ und $M = 1,66 \cdot 10^{-24}$ wird in (97,80) der vor dem $e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}$ stehende Faktor gleich $2,34 \cdot 10^7$. Rechnet man mit $T = 5740^\circ$ und $\lambda = 800 \text{ \AA}$, so würde $e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} = 2,82 \cdot 10^{-14}$, d. h. wir erhielten für das Verhältnis von Strahlungskraft : Gravitation auf nichtionisierten Wasserstoff den völlig unzureichenden Wert $\mu \approx 6,6 \cdot 10^{-7}$! Nach Fig. 137 hätten wir aber statt $10^{-13,5}$ für $\lambda 800 \text{ \AA} \sim 15,4 \text{ V}$ zu setzen $10^{-\phi} \approx 10^{-8}$ und damit rückt μ schon in die Größenordnung 1. Der aus dem Anregungs- und Ionisationszustand der Protuberanzen erschlossene Überschuß an kurzwelliger Strahlung reicht also — größenordnungsmäßig — aus, um durch Strahlungsdruck mittels des LYMAN-Kontinuums die Protuberanzen emporzutreiben, wenn man — was plausibel erscheint — annimmt, daß der Ionisationsgrad nicht allzu hoch liegt.

Den unter B. aus den Beobachtungen erschlossenen „*Balanciermechanismus*“, welcher dafür sorgt, daß in den Protuberanzen die Schwerkraft im allgemeinen genau kompensiert wird, kann man nun wohl folgendermaßen deuten:

Da die Strahlungskraft, welche auf die *Wasserstoffatome* wirkt, auch die *Wasserstoffionen* (die ja keine Strahlung mehr absorbieren können) mittragen muß, so wird das *wirksame* Verhältnis von Strahlungskraft : Gravitation

$$\mu_{\text{eff}} = \mu_{\text{atom}} \cdot \frac{n_0}{n_0 + n_1}. \quad (97,81)$$

Wird nun durch Anwachsen der photosphärischen Strahlung bei $\lambda \sim 800 \text{ \AA}$, $\mu_{\text{atom}} > 1$, so beginnt eine nichtionisierte Gasmasse hochzusteigen, sich auszu dehnen und durch Zustrom aus tieferen Schichten anzuwachsen. Infolge der damit verbundenen Druckabnahme wird jedoch Ionisation¹ einsetzen. Außerdem wird der Strahlungsstrom gedrosselt, sobald die optische Dicke der Protuberanz im Hauptteil des LYMAN-Kontinuums $\gg 1$ ist. Dieses Wechselspiel wird erst dann zur Ruhe kommen, wenn $\mu_{\text{eff}} \approx 1$ ist.

Daß tatsächlich die optische Dicke der Protuberanzen für das LYMAN-kontinuum in der Größenordnung 1 liegt, läßt sich folgendermaßen wahrscheinlich machen:

Nach (97,69) ist der Absorptionskoeffizient pro neutrales H-Atom bei $\lambda \sim 800 \text{ \AA}$ $a_1 = 5,3 \cdot 10^{-18}$. Direkt bestimmen können wir leider nur die Anzahl

¹ Im Laufe der weiteren Untersuchungen wird sich herausstellen, daß die Materie in den Protuberanzen tatsächlich zum überwiegenden Teil ionisiert ist.

der H-Atome im 2. Quantenzustand $n_{0,2}$. Im Sinne unserer Fig. 137 rechnen wir auf Atome im Grundzustand um, indem wir schreiben

$$\frac{n_{0,2}}{n_{0,1}} = 4 \cdot 10^{-\Phi(10,2_{\text{volt}})}. \quad (97,82)$$

Die optische Dicke einer $H = 20000 \text{ km} = 2 \cdot 10^9 \text{ cm}$ hohen Protuberanz mit $n_{0,2} = 500$ zweiquantigen H-Atomen pro cm^3 wird also

$$\tau = a_1 \cdot n_{0,1} \cdot H = \frac{10^{-5,9}}{10^{-\Phi(10,2)}}. \quad (97,83)$$

Damit $\tau \sim 1$ wird, muß $\Phi(10,2_{\text{volt}}) \sim 5,9$ sein, in ausreichender Übereinstimmung mit Fig. 137.

Noch nicht ganz klar ist das Zustandekommen der von E. PETTIT gefundenen ruckweisen Beschleunigung der Protuberanzen. Im großen und ganzen aber dürfte ihre Erklärung in folgender Richtung zu suchen sein: Wenn der vom Untergrund ausgehende Strahlungsstrom πF , im LYMAN-Gebiet sich *langsam* ändert, so hat eine Protuberanz Zeit, ihre innere Struktur so zu ändern, daß $\mu \approx 1$ bleibt. Erfolgt jedoch eine Änderung von πF , plötzlich, so wird die Protuberanz solange beschleunigt, bis sie sich den neuen Verhältnissen angepaßt hat.

Die Grundannahme unserer Theorie, daß die Strahlung des Untergrundes einer Protuberanz z. B. bei $\lambda 800 \text{ \AA}$ größenordnungsmäßig das 10⁷fache des für einen schwarzen Körper von 5740° zu erwartenden Betrages sei, erscheint zunächst außerordentlich kühn.

Um so erfreulicher ist es, daß wir seit kurzer Zeit im Besitz *geophysikalischer Beobachtungen* sind, die eine qualitative Bestätigung unserer Anschauungen geben.

Die *erdmagnetischen Stürme* und die *Polarlichter* treten, wie sich seit der Erfindung des *Spektroheliostops* immer deutlicher gezeigt hat — vgl. z. B. G. E. HALE [1642, Nr. III] — durchschnittlich etwa 26 Stunden nach heftigen solaren Eruptionen (plötzliche Bildung sehr heller Wasserstoffloculi) auf. Die Geschwindigkeit des erregenden Agens ist also $\sim 1600 \text{ km/sek}$. Bedenkt man, daß Protuberanzen mit Geschwindigkeiten bis zu 500 km/sek beobachtet worden sind, trotzdem die Wahrscheinlichkeit der Erfassung gerade der schnellsten Objekte sehr klein ist, so kann man kaum bezweifeln, daß Polarlichter und magnetische Stürme durch *Protuberanzen* erregt werden, welche schließlich die Erde erreichen. Die ältere Theorie der Polarlichter (BIRKELAND-STÖRMER) und die magnetischen Stürme operiert zwar mit elektrisch geladenen Partikelströmen, während eine Protuberanz gleichviele Ionen und Elektronen enthält. Aber abgesehen davon, daß die fortwährende Bildung und Existenz von Partikeln eines Vorzeichens den Grundgesetzen der Elektrostatik zuwiderläuft, haben neuere Arbeiten von S. CHAPMAN, K. O. KIEPENHEUER u. a. [1728,2; dort weitere Literaturangaben] einer physikalisch besser fundierten Theorie mit (makroskopisch) neutralen Strömen die Wege geebnet.

Für unser Ausgangsproblem noch wichtiger als diese geophysikalisch hochinteressanten Fragen ist die Beobachtung, von J. H. DELLINGER, M. JOUAUST, H. W. NEWTON [1749], R. S. RICHARDSON [1766—67] u. a., daß *gleichzeitig* mit solaren Eruptionen vielfach kräftige *Radiofadings*, also Veränderungen in der *Heavisideschicht*, einhergehen. Diese Effekte werden, wie die verschwindend kleine Ausbreitungsdauer in Übereinstimmung mit vielen andersartigen Beobachtungen zeigt, durch *kurzwellige Strahlung* hervorgerufen. Da die Fläche der „Wasserstofferuptionen“ größenordnungsmäßig $1/500$ bis $1/100$ der Sonnenscheibe beträgt und ein kräftiges Fading wohl eine Verstärkung der ionisierenden U.V.-Strahlung der Sonne bei $\lambda \sim 1500\text{—}2000 \text{ \AA}$ auf das ~ 10 fache verlangt,

so muß an der emittierenden Stelle selbst die Strahlungsemission auf das 1000—5000fache gestiegen sein¹. Diese Größenordnung paßt ausgezeichnet zu unserer Fig. 137 und wir möchten also annehmen, daß die Extraionisation in den Protuberanzen *und* in der Heavisideschicht auf dieselbe Weise zustande kommt.

Eine große Schwierigkeit scheint unserer Ausgangshypothese zunächst daraus zu erwachsen, daß dem postulierten Anwachsen der kurzwelligen Sonnenstrahlung um viele Zehnerpotenzen *keine merkliche Intensitätsänderung im sichtbaren Spektralgebiet* entspricht. Wir haben aber schon seinerzeit darauf hingewiesen, daß jedenfalls in den *Fackeln* dem Temperaturüberschuß der höchsten Schichten stets eine Temperaturerniedrigung der tieferen Schichten gegenübersteht, so daß in der Mitte der Sonnenscheibe die Strahlungsintensität im *Sichtbaren* etwa konstant bleibt. Für die mit den Fackeln eng verwandten „Wasserstofferuptionsgebiete“, welche jedenfalls häufig als Ursache der Protuberanzen anzusprechen sind, dürfte ähnliches gelten. Im LYMAN-Gebiet dagegen ist der kontinuierliche Absorptionskoeffizient sehr groß, dort kommt daher die Temperatursteigerung der höchsten Atmosphärenschichten voll zur Geltung. (Wie wir in Abschn. 100 sehen werden, ermöglichen uns Spektroheliograph und Spektrohelioskop, diese gesondert zu studieren.) Der thermodynamische Mechanismus der Entstehung der geforderten Abweichungen vom normalen Temperaturgradienten ist uns jedoch — dies soll hier nochmals betont werden — zur Zeit noch völlig verborgen.

98. Chromosphäre.

A. Der Dichtegradient der Chromosphäre. „Höhen“. Auf *Flashspektren* (Fig. 128), welche mit einer gewöhnlichen Objektivprismen- oder Gitterkamera aufgenommen sind, erscheinen die intensiven Linien — wie $\text{Ca}^+ H$ und K , H_α oder HeD_3 — als lange Bögen, die schwachen Linien usw. dagegen nur als kurze Striche. Man pflegt kurz zu sagen: Die H - und K -Linien z. B. reichen bis zu einer „Höhe“ von ~ 12000 km über der Basis² der Chromosphäre, die schwachen Metalllinien dagegen nur bis zu einigen 100 km usw.

Bei Aufnahmen mit *stationärer* Platte (z. B. Fig. 128) wird — wie wir in Abschn. 95 schon bemerkten — die Messung der „Höhen“ stark beeinträchtigt durch Unebenheiten des Mondrandes und durch Protuberanzen. Besser definierte Werte gibt die zeitliche Verfolgung einer bestimmten Stelle des Sonnen- bzw. Mondrandes mit dem „moving-Plate“ — oder „jumping-film“ — Spektrograph nach CAMPBELL und MENZEL.

Die „Höhe“ H , bis zu welcher eine Linie beobachtet wird, ist nun nach D. H. MENZEL [1735] dadurch bestimmt, daß die von allen oberhalb des Niveaus H liegenden Schichten emittierte *Intensität einen bestimmten Grenzwert unterschreitet*, der von der Empfindlichkeitsschwelle der Apparatur abhängt.

Im Hinblick auf die folgenden quantitativen Untersuchungen definieren wir ein rationelles Maß für die Intensität der Chromosphärenlinien³: *Ein Volumenelement der Chromosphäre werde begrenzt durch eine Ebene, welche vom Beobachter tangential an den Mondrand in der Höhe x über der Basis der Chromosphäre gelegt ist, sowie durch zwei Ebenen parallel zur Sehlinie, welche in 1 cm Abstand voneinander senkrecht zur Sonnenoberfläche stehen. Die von einer solchen „Schneise“*

¹ Anm. b. d. Korr.: Vgl. auch M. N. SAHA, Proc. Roy. Soc. Lond. (A) **160**, 155 (1937), sowie D. F. MARTYN, G. H. MUNRO, H. J. HIGGS u. S. E. WILLIAMS, Nature Lond. **140**, 603 1937.

² Der Punkt, wo das FRAUNHOFERSche Spektrum mit *Absorptionslinien* in das *Emissionsspektrum* (Flash) übergeht, ist ziemlich scharf definiert. Vgl. Abschn. 96.

³ Diese Wahl ist bedingt dadurch, daß die meisten Apparaturen keine geometrische Auflösung der nur einige Bogensekunden breiten Chromosphärenbögen erlauben.

in einer Spektrallinie pro Raumwinkelement $d\omega$ emittierte Energie in erg/sek bezeichnen wir als deren gemessene Intensität $I d\omega$.

G. G. CILLIÉ und D. H. MENZEL [1711] beziehen ihre Intensitätsmessungen auf den Raumwinkel 4π statt 1. (Die physikalische Deutung dieser Einheit als „Ausstrahlung nach allen Richtungen“ wird hinfällig, sobald Selbstabsorption einsetzt.)

A. PANNEKOEK und M. MINNAERT [1751] nehmen den Abstand der parallelen Ebenen gleich $1'$ (geozentrisch) oder $4,34 \cdot 10^9$ cm statt 1 cm und messen die Ausstrahlung in Einheiten von 10^{20} erg/sek.

Hätten wir es durchweg mit Emission in optisch dünner Schicht zu tun, so wäre die gemessene Linienintensität einfach proportional der Übergangswahrscheinlichkeit $\dot{U}.W.$ der Linie \times der Zahl $N(x)$ der leuchtenden Atome¹ in dem beschriebenen Volumelement.

In Wirklichkeit müssen wir jedenfalls bei den starken Linien mit Selbstabsorption rechnen. Die gemessenen Intensitäten sind also mit den durch Reduktion auf dünne Schicht erhaltenen „theoretischen Intensitäten“ (d. h. Ausstrahlung ohne Selbstabsorption) durch eine Art Wachstumskurve verknüpft. Wir wollen zunächst annehmen, daß diese für alle Linien dieselbe ist, d. h. die gemessenen Intensitäten sollen eine eindeutige Funktion der theoretischen sein.

Die Bedingung für das Aufhören verschiedener Linien in der Höhe H können wir dann auch dahingehend formulieren, daß die theoretische Intensität, d. h. das Produkt

$$N(H) \times \text{Übergangswahrscheinlichkeit } (\dot{U}.W.)$$

einen für alle Linien gleichen Grenzwert unterschreitet.

Innerhalb eines Multipletts² sind nun die Relativwerte der $\dot{U}.W.$ nach den Intensitätsformeln von Abschn. 50 bekannt. Trägt man (Fig. 138) die von den Linien erreichten Höhen H als Funktion der $\log_{10}(\dot{U}.W.)$ auf, so kann man diese Kurve direkt auch als Schichtungskurve lesen, da $\log N(H) = -\log_{10}(\dot{U}.W.) + \text{konst.}$ ist. Indem man die von zahlreichen Multipletts herrührenden Kurvenstücke durch Aufschieben parallel zur $\log_{10}(\dot{U}.W.)$ -Skala aneinandersetzt, erhält man

$$\log_{10} N \text{ als Funktion von } x. \quad (98,1)$$

Aus $N(x)$ läßt sich nun die wahre Dichteverteilung der Chromosphäre leicht berechnen: Es sei $n(h)$ die Anzahl der Atome einer bestimmten Art pro cm^3 in der Höhe h über der Basis der Chromosphäre. Nehmen wir z. B. Schichtung nach Art einer Barometerformel, so können wir schreiben

$$n(h) = n_0 \cdot e^{-\alpha h}. \quad (98,2)$$

Dann wäre n_0/α die Anzahl der Atome in einer senkrechten Säule über 1 cm der Basis der Chromosphäre. Die Konstante α [cm^{-1}] lassen wir verfügbar. Sollte sich herausstellen, daß eine exponentielle Verteilung den Beobachtungen nicht gerecht wird, so kann man ebenso leicht mehrere derselben mit verschiedenen n_0 und α superponieren.

Greifen wir auf die Bezeichnungen von Fig. 130 zurück, so wird zunächst wieder

$$h = \sqrt{(a+x)^2 + y^2} - a \approx x + \frac{y^2}{2a} + \dots \quad (98,3)$$

¹ Wir beziehen zweckmäßig $N(x)$ jeweils auf den gesamten Atomzustand und nehmen die statistischen Gewichtungsfaktoren mit in die $\dot{U}.W.$ herein.

² Der Grundgedanke einer Kalibrierung mit Hilfe von Multipletts geht auf H. N. RUSSELL, W. S. ADAMS und C. H. MOORE [1340] zurück.

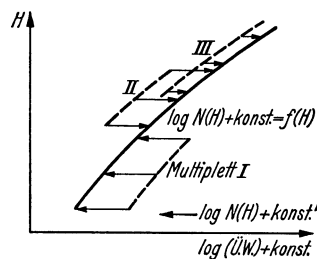


Fig. 138. (Schematisch.) Bestimmung der Anzahl N (bzw. $\log N + \text{konst}$) der Atome in einer 1 cm breiten „Schneise“ durch die Chromosphäre oberhalb des Niveaus H mit Hilfe der „Höhen“ von Multiplettlinien nach D. H. MENZEL [1735].

und wir erhalten für die Anzahl aller Atome in einer 1-cm²-Säule längs der Sehlinie in Höhe x über dem Sonnenrand

$$n'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(h) dy = \sqrt{\frac{2\pi a}{\alpha}} \cdot n_0 e^{-\alpha x}. \quad (98,4)$$

Aus n' geht $N(x)$ hervor, indem man von x bis ∞ integriert, also

$$N(x) = \int_x^{\infty} n'(x) dx = \frac{\sqrt{2\pi a}}{\alpha^{\frac{3}{2}}} n_0 e^{-\alpha x}. \quad (98,5)$$

Der Vergleich von (98,5) mit (98,2) ergibt das meines Wissens zuerst von W. H. McCREA [1712] bemerkte Ergebnis, daß bei exponentieller Dichteabnahme $N(x)$ und $n(h)$ dieselbe relative Verteilung aufweisen. (Bei Superposition mehrerer e -Funktionen ist selbstverständlich auf den Faktor $\alpha^{-\frac{3}{2}}$ zu achten!)

Nach den im vorhergehenden entwickelten Prinzipien¹ haben zuerst D. H. MENZEL [1735] und sodann S. A. MITCHELL und E. T. R. WILLIAMS [1742] die relative Dichteverteilung der Chromosphäre untersucht. Die Unterschiede zwischen den Verteilungen für verschiedene Elemente und Anregungsstufen waren zunächst noch klein gegenüber den sonstigen Fehlerquellen, so daß wir uns mit der Angabe eines Mittelwertes aus je zwei Beobachtungsreihen beider Abhandlungen begnügen können:

Normiert man auf $n_0 = 1$ für $x = 0$, so ergibt sich unter Verwendung eines zweigliedrigen Ansatzes vom Typus (98,2)

$$n(x) = 0,982 e^{-5,9 \cdot 10^{-8} \cdot x} + 0,018 e^{-2,6 \cdot 10^{-8} \cdot x}, \quad (98,6)$$

für $0 < x < 2,6 \cdot 10^8 \text{ cm} = 2600 \text{ km}$. Diese Formel, welche zunächst ja nur als bequeme Interpolationsformel für den Übergang von $N(x)$ auf $n(x)$ zu betrachten ist, kann man auch dahingehend interpretieren, daß der untere Teil der Chromosphäre nach einer Barometerformel mit $\alpha = 5,9 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{-1}$ geschichtet ist, während oberhalb von $\sim 1200 \text{ km}$ Höhe $\alpha \approx 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{-1}$ wird.

Um eine anschauliche Vorstellung von der Größenordnung der beobachteten α zu geben, fügen wir hinzu, daß für eine isotherme Atmosphäre von $T_0 = 4830^\circ$ und Molekulargewicht 1 sich $\alpha = 6,82 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{-1}$ ergeben würde. Solange der Wasserstoff nicht ionisiert ist, würden wir für die Sonnenatmosphäre ein Molekulargewicht $\sim 2,75$ und also $\alpha = 18,8 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{-1}$ zu erwarten haben.

Wir müssen also schließen, daß die Chromosphäre sich *nicht* — nach der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes möchte man dies zunächst erwarten — wie eine isotherme Atmosphäre mit der Grenztemperatur T_0 verhält, sondern wesentlich ausgedehnter ist. Das hiermit angeschnittene Problem der Dynamik der Sonnenchromosphäre wollen wir aber noch zurückstellen und zunächst versuchen, an Hand der Beobachtungen eine breitere Basis zu gewinnen.

Neuerdings haben G. G. CILLÉ und D. H. MENZEL [1711] im Bereich $x = 650$ bis 1500 km für verschiedene Elemente und Anregungsstufen genauere α -Werte (unter Benützung einer eingliedrigen Formel) bestimmt: Auf zwei Aufnahmen, die durch ein genau bestimmtes Zeitintervall (1,2 sek) getrennt sind, werden Linien gleicher (gemessener) Intensität aufgesucht. Ist die eine Linie mit der Überwahrscheinlichkeit $(\dot{U}.W.)_1$ bei der Höhe x_1 des Mondrandes über der Basis der Chromosphäre gleich intensiv wie die andere Linie desselben Multipletts mit $(\dot{U}.W.)_2$ bei der Höhe x_2 , so ist

$$(\dot{U}.W.)_1 e^{-\alpha x_1} = (\dot{U}.W.)_2 e^{-\alpha x_2} \quad (98,7)$$

woraus α leicht berechnet werden kann.

¹ Auf technische Details einzugehen, würde hier zu weit führen.

So ergab sich für

	Neutral	Ionisiert
H	$\alpha = 1,54 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{-1}$	$\alpha = 0,77 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{-1}$
He	0,78	0,30
Mg	2,50	—
Al	2,77	—
Ca	> 2,11	1,51
Sc	—	4,20
Ti	—	3,32
Cr	> 2,07	1,72
Mn	2,95	1,60
Fe	2,48	1,69
Sr	—	1,66

Die „Dichtegradienten“ α der neutralen Elemente sind durchschnittlich größer als die der ionisierten, was man wohl auf das Anwachsen des mittleren Ionisationsgrades mit der Höhe zurückführen darf.

Eine *Aussortierung* der Metalle nach dem Atomgewicht oder auch nach etwaigen Verschiedenheiten des selektiven Strahlungsdruckes findet jedenfalls in den unteren und mittleren Schichten *nicht* statt. Wenn wir die späteren Ergebnisse schon vorwegnehmen, daß an der Basis der Chromosphäre Dichten von $\sim 10^{12}$ Teilchen/cm³ und eine Art „turbulenter“ Strömungsgeschwindigkeiten von ~ 15 km/sek bestehen, so erscheint das Fehlen jeglicher Entmischung in der Chromosphäre nach den Rechnungen von W. H. MCCREA (Abschn. 97,3) fast selbstverständlich.

Die enorme Intensität der Ca⁺ H- und K-Linien und die große Höhe von ~ 12000 km, bis zu der sie in der Chromosphäre verfolgt werden können, haben zu der bis vor wenigen Jahren allgemein akzeptierten Meinung geführt, daß die Sonnenchromosphäre zum überwiegenden Teil aus Ca⁺ bestehe. Wie aus den betrachteten Untersuchungen von MENZEL u. a. hervorgeht, ist diese Ansicht in keiner Weise haltbar: Die Schichtung des Ca⁺ unterscheidet sich nicht wesentlich von der anderer Metallionen und die große Stärke des H + K-Dubletts rührt nur von der großen Oszillatorenstärke dieser Linien und der günstigen Größe der Ionisierungsspannung des Ca⁺ her. Alle übrigen Linien, die ähnlich bevorzugt *wären*, sind — wie man sich leicht klarmacht — infolge der Begrenzung des kurzwelligen Spektralbereiches durch die atmosphärische Extinktion der Beobachtung unzugänglich.

Auffällig ist der geringe Dichtegradient $\alpha = 0,78 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{-1}$ des *Heliums*. A. PANNEKOEK und M. MINNAERT [1751] ziehen aus Messungen der Intensität von He 4471 als Funktion der Zeit bei der Finsternis vom 29. Juni 1927 — unter der Annahme von Selbstabsorptionsfreiheit — den Schluß, daß die Konzentration der angeregten Heliumatome in der Chromosphäre mit der Höhe zunächst *anwachse* und erst in ~ 1000 km Höhe *abzunehmen* beginne. Unabhängige Messungen, die E. J. PERPEL'KIN und O. A. MELNIKOV [1758] an der D₃-Linie $\lambda 5876$ direkt ohne Finsternis unter sorgfältiger Elimination des Einflusses der Luftunruhe usw. ausführten, bestätigen dieses Ergebnis. Das merkwürdige Verhalten der He-Linien steht offenbar in Zusammenhang mit der ebenso unerwarteten Stärke ihrer Anregung.

Wenn man sich auf den in Abschn. 97 vertretenen Standpunkt stellt, daß die Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht durch eine zu starke U.V.-Strahlung mancher Stellen des photosphärischen Untergrundes hervorgerufen werden, so liegt es nahe, das Verhalten der He-Linien dahingehend zu interpretieren, daß die Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht desto größer werden, je mehr die von der Strahlung verursachten Prozesse gegenüber den Stoßprozessen die Oberhand gewinnen. Von einer eigentlichen Theorie dieser Erscheinungen sind wir freilich noch weit entfernt.

B. Konturen chromosphärischer Emissionslinien (1. Teil.) Soweit die *Emissionslinien am Sonnenrand* in optisch dünner Schicht emittiert werden, d. h. solange ihre Intensität hinreichend klein ist, möchte man zunächst erwarten, daß ihre *Konturen* durch den thermischen Dopplereffekt bestimmt seien. Die Halbwertsbreite z. B. der Ca^+ *H*- und *K*-Linien sollte also nach (43,11) $2\Delta\lambda' \approx 0,03 \text{ \AA}$ sein. *Beobachtungen*, die A. UNSÖLD [1776] im Jahre 1928 an Mt. Wilson ausführte, bestätigten diese Vermutung in keiner Weise, sondern ergaben für die höheren Schichten direkt und für die tieferen nach Berücksichtigung der Selbstabsorption (s. u.) eine Wellenlängenabhängigkeit des Absorptions- bzw. Emissionskoeffizienten, die sich zwar gut durch eine GAUSSsche Fehlerkurve darstellen ließ, deren Halbwertsbreite jedoch $0,33 \text{ \AA}$ statt $0,03 \text{ \AA}$ betrug.

Da Druckeffekte in der Chromosphäre ausgeschlossen sind, so bleibt als einzige Erklärungsmöglichkeit die Annahme, daß die ganze *Chromosphäre sich in einer Art turbulenter¹ Bewegung befindet*. Schreiben wir die Intensitätsverteilung einer in dünner Schicht emittierten Linie in der Form

$$I(\Delta\lambda) = \text{konst.} \cdot e^{-\left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_0}\right)^2}, \quad (98,8)$$

so ist das entsprechende Verteilungsgesetz der Geschwindigkeitskomponenten ξ in der Sehlinie analog zu (43,1) gegeben durch

$$\frac{dN}{N} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2} \frac{d\xi}{\xi_0}, \quad (98,9)$$

wo

$$\frac{\xi_0}{c} = \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda}. \quad (98,10)$$

Die mittlere Geschwindigkeit ξ_0 dürfte sich zusammensetzen aus der thermischen Geschwindigkeit $\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$ und der eigentlichen turbulenten Bewegung ξ_i nach (43,5), so daß

$$\xi_0^2 = \frac{2RT}{\mu} + \xi_i^2. \quad (98,11)$$

Der thermische Anteil ist jedoch nur bei den leichtesten Elementen Wasserstoff und Helium ($\mu=1$ bzw. 4) von Bedeutung, bei den schwereren kann man praktisch $\xi_0 \approx \xi_i$ setzen. Die ersten Messungen des Verf. ergaben für die turbulente Geschwindigkeit der Ca^+ -Atome den Wert

$$\xi_i = 15 \text{ km/sek.}$$

Spätere Messungen des Verf. an der HeD_3 -Linie bestätigten die Unabhängigkeit des ξ_i vom Molekulargewicht. Die — von ihren Autoren selbst noch nicht in diesem Sinn gedeuteten — Messungen von A. PANNEKOEK und M. MINNAERT [1751] lassen die nach (98,10) zu erwartende λ -Proportionalität des $\Delta\lambda_0$ gut erkennen. Endlich scheinen die Messungen von D. H. MENZEL [1735, Fig. 3—6] — wenn auch noch nicht mit unbedingter Sicherheit — zu zeigen, daß ξ_i mit der Höhe langsam zunimmt. Eine Nachprüfung dieses Befundes wäre im Hinblick auf das Problem des Überganges der Chromosphäre in die Korona (Abschn. 99) sehr wichtig.

Eine Zusammenstellung der zur Zeit vorliegenden Meßergebnisse der mittleren Turbulenzgeschwindigkeit ξ_i gibt unsere Tabelle 74.

¹ Diese Bezeichnung soll *nicht* irgendwelche tiefere Verwandtschaft zu den aus der Hydrodynamik bekannten Erscheinungen zum Ausdruck bringen.

Tabelle 74. Mittlere Turbulenzgeschwindigkeit $\xi_t = \sqrt{\xi_0^2 - \frac{2RT}{\mu}}$ in der Sonnenchromosphäre (Komponente in der Sehlinie).

Linie	Höhe km	ξ_t $\frac{\text{km}}{\text{sek}}$	Autor
Ca+H und K	~6000	15	A. UNSÖLD [1776]
HeD ₃ (λ 5876)	—	15,5	A. UNSÖLD [1778]
	1—6000	19,2	E. J. PEREPELKIN und O. A. MELNIKOV [1758]
Sr ⁺ 4078	—	11,7	V. P. VIASANIZYN [1779]
H _{δ} und H _{ϵ}	—	11,4	(Möglicherweise Spektrographeneinfluß überkorrigiert.)
Viele Metalllinien	niedrig	16,5	A. PANNEKOEK und M. MINNAERT [1751]
Desgl.	385—600	10,9	D. H. MENZEL [1735, Fig. 3—6]
	1030	12,0	
	1675	14,6	
	2330	18,1	

C. Selbstabsorption in der Chromosphäre. Um aus gemessenen Intensitäten von Chromosphärenlinien Rückschlüsse auf die Konzentration usw. der strahlenden Atome ziehen zu können, müssen wir — soweit es sich um stärkere Linien und tiefere Schichten handelt — die *Selbstabsorption* in Rechnung stellen. Deren Theorie ist für den wichtigsten Spezialfall von A. PANNEKOEK [1753] entwickelt worden. Wir werden uns zunächst dieser Arbeit anschließen und nachträglich auf einige andere Möglichkeiten kurz eingehen.

Wir nehmen an, daß die Emission der Chromosphäre den Charakter *thermischer Emission* trage. Dann beträgt sie pro cm³ für den Kreisfrequenzbereich $\Delta\omega = 1$ in den Raumwinkel 1

$$k \cdot J_\omega, \tag{98,12}$$

wo k den Absorptionskoeffizienten [cm⁻¹] und

$$J_\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\lambda T} - 1} \tag{98,13}$$

die KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion für die Temperatur der Chromosphäre bedeutet. Wenn wir annehmen, daß letztere sich auf die Grenztemperatur $T_0 = 4830^\circ$ einstellt, so bedeutet J_ω gleichzeitig die Intensität pro Kreisfrequenzeinheit im kontinuierlichen Spektrum des Sonnenrandes.

Bezüglich des *Absorptionskoeffizienten* k nehmen wir nach B. zunächst an, daß seine Wellenlängenabhängigkeit durch den *Dopplereffekt* der turbulenten thermischen Bewegung der Teilchen bestimmt sei. Bezeichnen wir wieder mit

$$\Delta\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \Delta\lambda_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \xi_0 \tag{98,14}$$

den Abstand von der Linienmitte, in dem k auf $1/e$ seines Maximalwertes abgenommen hat, so wird der Absorptionskoeffizient pro cm nach Gl. (43,13)

$$k = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}} e^2}{m c} \cdot \frac{n \cdot f}{\Delta\omega_0} e^{-\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0}\right)^2}, \tag{98,15}$$

wo n die Anzahl der Atome (im unteren Quantenzustand der betreffenden Linie) pro cm³ und f die Oszillatorenstärke bedeutet. Ähnlich¹ wie in (44,19) schreiben wir dafür kurz

$$k = n f \cdot k_0 e^{-v^2} \tag{98,16}$$

¹ Dort war der Faktor $n f$ noch in die Definition von k_0 einbezogen. Weiterhin $a = 0$.

mit

$$k_0 = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}} e^2}{m c \cdot \Delta \omega_0} \quad \text{und} \quad v = \frac{\Delta \omega}{\Delta \omega_0} = \frac{\Delta \lambda}{\Delta \lambda_0}. \quad (98,17)$$

Um die Abnahme der n mit der Höhe h über der Basis der Chromosphäre zu beschreiben, benutzen wir wie in (98,2) wieder eine Art Barometerformel

$$n = n_0 e^{-\alpha h}. \quad (98,18)$$

Dann ist die Zahl der Atome in einer 1-cm²-Säule, welche im Abstand x von der Sonnenoberfläche längs der Sechrichtung (y -Richtung in Fig. 130) verläuft, nach (98,4) gleich (a = Sonnenradius):

$$n'(x) = \sqrt{\frac{2\pi a}{\alpha}} \cdot n_0 e^{-\alpha x} \quad (98,19)$$

und die *optische Dicke* τ' dieser Säule für den Frequenzabstand $\Delta \omega = v \cdot \Delta \omega_0$ von der Linienmitte wird also

$$\tau'(x, v) = n_0 f \cdot \sqrt{\frac{2\pi a}{\alpha}} \cdot k_0 \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-v^2}, \quad (98,20)$$

wofür wir kurz schreiben

$$\tau' = \eta(x) e^{-v^2} \quad (98,21)$$

mit

$$\eta = n_0 f \sqrt{\frac{2\pi a}{\alpha}} \cdot k_0 e^{-\alpha x} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\eta}{\eta} = -\alpha dx. \quad (98,22)$$

Die beschriebene Säule von 1 cm² Querschnitt emittiert nun in der y -Richtung die *Intensität* (N.B. Raumwinkel 1!)

$$\int k \cdot J_\omega \cdot e^{-ky} dy = J_\omega \{1 - e^{-\tau'}\} \quad (98,23)$$

oder — über die ganze Linie integriert

$$J_\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \{1 - e^{-\eta(x) \cdot e^{-v^2}}\} \Delta \omega_0 \cdot dv. \quad (98,24)$$

Beziehen wir wie in Abschn. 97 die Intensität wieder auf 1 Kreisfrequenzeinheit bzw. 1 Wellenlängeneinheit des Spektrums J_ω bzw. J_λ des Sonnenrandes, so gilt also für diese *Äquivalentbreiten*

$$\frac{A'_\omega}{2 \Delta \omega_0} = \frac{A'_\lambda}{2 \Delta \lambda_0} = \int_0^\infty \{1 - e^{-\eta(x) \cdot e^{-v^2}}\} dv. \quad (98,25)$$

Das rechts stehende Integral ist uns als Funktion von $\eta(x)$ (d. h. der optischen Dicke der Chromosphäre gemessen tangential zum Sonnenrand und für die Mitte der Spektrallinie) schon aus (44,39) bekannt¹. PANNEKOEK hat sie seinerzeit numerisch berechnet. Wir weisen außerdem nochmals auf die Reihenentwicklungen von Abschn. 44, sowie die Tabellen bei R. LADENBURG [810] und V. D. HELD [808] hin. Mit A. PANNEKOEK führen wir noch die Abkürzung ein

$$f(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \{1 - e^{-\eta \cdot e^{-v^2}}\} dv. \quad (98,26)$$

Um nun vollends die Ausstrahlung der vom Mondrand in der Höhe x abgedeckten Chromosphäre zu bekommen, müssen wir über x von x bis ∞ integrieren und

¹ $\eta(x)$ war dort — als Konstante — mit C bezeichnet. Wir hätten selbstverständlich auch (98,25) *direkt* aus (44,39) durch Anwendung des KIRCHHOFFSchen Satzes auf die *ganze* strahlende Schicht erhalten können.

erhalten mit (98,22) für die entsprechenden Äquivalentbreiten:

$$\frac{A_\omega}{2 \Delta \omega_0} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_x^\infty f(\eta) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \alpha} \int_0^\eta f(\eta) \frac{d\eta}{\eta}. \quad (98,27)$$

Das letztere Integral

$$F_2(\eta) = \int_0^\eta f(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad (98,28)$$

ist von A. PANNEKOEK (ebd.) gleichfalls für $0 < \eta < 200$ numerisch berechnet worden. Im Falle *optisch dünner Schicht* ($\lim \eta \rightarrow 0$) geht nach (98,26) $f(\eta) \rightarrow \eta$ und nach (98,28) zugleich $F_2(\eta) \rightarrow \eta$. Die Funktion $F_2(\eta)/\eta$ gibt also an, in welchem *Verhältnis* die Emission einer Linie durch die Selbstabsorption geschwächt wird. Dabei bedeutet — wie gesagt — η die optische Dicke der Chromosphäre für die Mitte der Spektrallinie, gemessen längs der vom Beobachter aus an den Mondrand gelegten Tangente.

Bei der nicht ganz vermeidbaren Kompliziertheit der angewandten Definitionen erscheint es angebracht, die numerische Anwendung dieser Formeln an zwei Beispielen zu erläutern. Mit A. PANNEKOEK (s. S. 431) betrachten wir zuerst

a) *Die Messungen von A. PANNEKOEK und M. MINNAERT [1751]*. Bezeichnen wir die Intensität einer Chromosphärenlinie in den Einheiten dieser Autoren mit $I_{P.M.}$, so muß zuerst auf einen 1 cm (statt $1'_{\text{geozentrisch}} = 4,34 \cdot 10^9$ cm) breiten Streifen der Chromosphäre und auf 1 erg/sek (statt 10^{20} erg/sek) umgerechnet werden.

$$\frac{I_{P.M.} \cdot 10^{20}}{4,34 \cdot 10^9} \text{ erg/sek}$$

ist also die Energie, welche von dem stets benützten Volumelement pro sek in den Raumwinkel 1 emittiert wird. Um $\frac{A_\omega}{2 \Delta \omega_0} = \frac{A_\lambda}{2 \Delta \lambda_0}$ zu erhalten, müssen wir dies beziehen auf die Emission eines schwarzen Körpers von $T_0 = 4830^\circ$ K im Spektralbereich $2 \Delta \lambda_0$ oder

$$2 \Delta \lambda_0 \cdot \frac{2 h c^2}{\lambda^5} \cdot e^{-\frac{c_2}{\lambda T_0}}.$$

Wegen $\Delta \lambda_0 = \lambda \cdot \frac{\xi_0}{c}$ wird also schließlich

$$\frac{A_\omega}{2 \Delta \omega_0} = I_{P.M.} \cdot \frac{10^{20}}{4,34 \cdot 10^9} \cdot \frac{\lambda^4}{4 h c \cdot \xi_0} \cdot e^{+\frac{c_2}{\lambda T_0}}. \quad (98,29)$$

Nach (98,27 u. 28) erhält man daraus, wenn der „Dichtegradient“ α bekannt ist, sofort $F_2(\eta)$, dann η selbst und den Reduktionsfaktor für dünne Schicht $F_2(\eta)/\eta$.

Für die Mitte des von PANNEKOEK und MINNAERT beobachteten Spektralgebietes setzen wir $\lambda = 4420 \text{ \AA}$; sodann $\xi_0 = 15 \text{ km/sek}$ und $T_0 = 4830^\circ \text{ K}$. Damit wird

$$\frac{A_\omega}{2 \Delta \omega_0} = 6,12 \cdot 10^4 \cdot I_{P.M.} \quad (98,30)$$

Für eine starke Linie mit $I_{P.M.} = 100$ würde man bei einem Dichtegradienten $\alpha = 2 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{-1}$ nach (98,27) also erwarten $F_2(\eta) = \frac{2 \alpha}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{A_\omega}{2 \Delta \omega_0} = 0,14$. Nach der Theorie sollte demnach, wie man PANNEKOEKs Tabellen leicht entnimmt, $F_2(\eta)/\eta = 0,98$, d. h. nur $\sim 2\%$ Abweichung vom Grenzfall dünner Schicht zu erwarten sein.

Demgegenüber findet A. PANNEKOEK (s. S. 431) durch *empirische Konstruktion der Wachstumskurve* nach dem Vorgang von RUSSELL, ADAMS und MOORE [1340] für Chromosphärenlinien der Intensität 100 einen Selbstabsorptionsfaktor von $\sim 8,3$, entsprechend einer etwa 470mal größeren optischen Dicke längs des Sehstrahles an der Basis der beobachteten Schicht.

Ehe wir uns Gedanken über die Erklärung dieser Unstimmigkeit zwischen Theorie und Beobachtung machen, diskutieren wir in entsprechender Weise

b) *Die Messungen von G. G. CILLIÉ und D. H. MENZEL*¹ [1711]. Hier müssen wir zunächst vom Raumwinkel 4π auf 1 umrechnen und schließen dann weiter genau wie unter a). Es wird also

$$\frac{A_\omega}{2\Delta\omega_D} = I_{\text{C.M.}} \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\lambda^4}{4hc \cdot \xi_0} e^{+\frac{c_\lambda}{\lambda T_0}}. \quad (98,31)$$

Für das Mg-Triplett $\lambda 3830$ z. B. erhält man nach Einsetzen der Zahlenwerte

$$\frac{A_\omega}{2\Delta\omega_0} = 3,34 \cdot 10^{-7} \cdot I_{\text{C.M.}} \quad (98,32)$$

Berechnet man die Selbstabsorption einmal aus (98,27 u. 28) mit Hilfe der gemessenen Linienintensitäten $I_{\text{C.M.}}$ und dann aus der *Abhängigkeit der Linienintensität von der Übergangswahrscheinlichkeit in Multipletts* (CILLIÉ-MENZEL, ebd., Fig. 7), so findet man — eine vollständige Bearbeitung der Messungen liegt noch nicht vor — nach der zweiten Methode eine ~ 50 mal größere optische Dicke η .

Die Intensitätsmessungen von PANNEKOEK und MINNAERT einerseits, CILLIÉ und MENZEL andererseits führen also übereinstimmend (wenn auch die Zahlenwerte noch nicht sehr genau sind), zu dem Ergebnis, daß die Selbstabsorption in der Chromosphäre viel stärker ist, als man nach der Theorie zunächst erwarten sollte.

Wie kann diese unerwartete Diskrepanz erklärt werden? Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht können offenbar *nicht* herangezogen werden. Denn sie würden höchstens an die Stelle der KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion eine *größere* Anregungsfunktion setzen. Die zu einem bestimmten $I_{\text{P.M.}}$ bzw. $I_{\text{C.M.}}$ gehörenden $\frac{A_\omega}{2\Delta\omega_0}$ würden also nur *kleiner* werden. Abgesehen davon müßten sich größere Abweichungen der KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion für das direkt beobachtbare Spektralgebiet von dem berechneten Wert durch Emissionslinien auf der Sonnenscheibe verraten.

Wahrscheinlich läßt sich vielmehr die unerwartet starke Selbstabsorption der Chromosphärenlinien auf folgender Basis erklären (die damit zur Sprache kommenden Dinge werden auch in allgemeinerem Zusammenhang wichtig sein):

Direkte Aufnahmen der Chromosphäre bei Finsternissen (z. B. D. H. MENZEL [1735]; Plate IX) zeigen, daß diese nicht eine gleichförmige Gasschicht darstellt; sie besteht vielmehr offensichtlich aus vielen kleinen Protuberanzen², welche insgesamt den Eindruck einer „brennenden Prärie“ hervorrufen. Es erscheint als das natürlichste, anzunehmen, daß die Geschwindigkeitsverteilung der Partikel innerhalb *einer* solchen kleinen Protuberanz ungefähr die MAXWELLSche ist, so daß also z. B. die Fe-Atome sich relativ zu ihrer näheren Umgebung mit Geschwindigkeiten von $\sim 1,2$ km/sek bewegen. Die in B. gefundenen „turbulenten“ Geschwindigkeiten von ~ 15 km/sek möchten wir zurückführen auf die verschiedenartigen Bewegungen der kleinen Protuberanzen, welche während

¹ Deren theoretische Behandlung des Problems bedeutet gegenüber der von den Autoren leider nicht benützten Arbeit PANNEKOEKS nur einen Rückschritt.

² Vgl. hierzu auch E. J. PEREPELKIN [1756].

der Aufnahme auf den Spektrographenspalt abgebildet werden. Dabei bestehen nun zwei — als Extremfälle aufzufassende — Möglichkeiten:

Fall a): Längs einer Sehlinie kommen in jedem Augenblick alle Radialgeschwindigkeiten von $\sim +15$ bis -15 km/sek vor; d. h. man blickt an jeder Stelle und zu jedem Zeitpunkt durch sehr *viele* kleine Protuberanzen. Dann ist bei der Berechnung der optischen Dicke usw. der Dopplereffekt der *turbulenten Bewegung* einzusetzen¹, wie wir dies bis jetzt bei unseren Rechnungen getan haben.

Fall b). Längs einer Sehlinie kommt nur \sim eine Protuberanz vor; die Radialgeschwindigkeit schwankt infolgedessen nur $\pm \sim 1,2$ km/sek (für Metalle) um deren *makroskopische* Geschwindigkeit. Die große Dopplerbreite entsprechend ± 15 km/sek kommt in diesem Fall durch räumliche und zeitliche Mittelung *bei der Aufnahme* zustande. Für die *Selbstabsorption* ist trotzdem die *thermische* Dopplerbreite maßgebend.

Die Annahme b) würde demnach die berechneten optischen Dicken um einen Faktor ~ 12 vergrößern und damit einen entscheidenden Beitrag zur Auflösung unseres Dilemmas liefern. Versuchen wir also, uns noch anderweitig über ihre Wahrscheinlichkeit zu informieren.

Die Emission längs eines bestimmten Sehstrahls entsteht — wie man sich an Hand von (98,2 u. 3) leicht überlegt — im wesentlichen auf einer Strecke der Länge $\sim \sqrt{\frac{2a}{\alpha}} \approx 26000$ km. Nehmen wir an, daß die Flocculi der Spektroheliogramme irgendwie mit unseren kleinen Protuberanzen zusammenhängen, so finden wir für deren gegenseitige Abstände (ähnlich wie für die Elemente der Granulation) die Größenordnung 5000 km. Es erscheint also durchaus möglich, daß Auffassung b) der Wirklichkeit näher kommt² als a). Eine direkte Prüfung würden visuelle Beobachtungen z. B. der HeD_3 -Linie an einem Sonnenteleskop mit großer Auflösung geben: nach Annahme b) müßte die Spektrallinie ständig in Helligkeit *und* vor allem Wellenlänge schwanken, entsprechend dem durch Luftunruhe, Uhrwerkfehler usw. bewirkten ständigen Wechsel der zufällig auf den Spalt fallenden Protuberanzenelemente.

Als Ergänzung zu den bis jetzt ausschließlich benützten Untersuchungen über die Äquivalentbreiten der Chromosphärenlinien betrachten wir nunmehr die wenigen mit großer Dispersion ausgeführten Messungen der *Konturen selbstabsorbierender Chromosphärenlinien*: P. C. KEENAN [1727] hat die *Intensitätsverteilung in H_β* (und zum Teil auch H_α) für Höhen von 0—3600 km gemessen. Die *Maximalintensität* innerhalb der Linie variiert in diesem Bereich sehr wenig (\sim einen Faktor 2, der aber noch zu einem erheblichen Teil durch Meßfehler Streulicht usw. bedingt sein kann). Die (ganze) *Halbwertsbreite* der Linie³ ist von 0—3600 km konstant = $1,0 \text{ \AA}$. Beide Erscheinungen weisen auf starke Selbstabsorption hin. Auch das Verhältnis der Breiten von $H_\alpha : H_\beta$ wird nach KEENAN von der Theorie⁴ befriedigend wiedergegeben.

¹ Vgl. auch Abschn. 70.

² Wenn die Annahme b) sich weiterhin als richtig erweisen sollte, so müßte natürlich für jedes Element eine besondere Wachstumskurve benützt werden, entsprechend der Verschiedenheit der thermischen Dopplereffekte.

Man braucht *nicht* zu befürchten, daß dadurch die in Abschn. 98,1 dargestellten Untersuchungen wesentlich modifiziert werden: Bei der Interpretation der „Höhen“ handelte es sich nur um Linien, deren Intensität so klein ist, daß Selbstabsorption keine erhebliche Rolle spielt. — Bei den α -Bestimmungen von CILLIÉ und MENZEL [1711] ist die Selbstabsorptionskorrektur rein empirisch.

³ Die Halbwertsbreite von H_α nimmt von $1,9 \text{ \AA}$ im Nullniveau auf $\sim 1,2 \text{ \AA}$ in 4500 km Höhe ab.

⁴ Auf die detaillierten Annahmen über Art des Strahlungsaustausches, Dichtegradient usw. kommt es dabei wenig an.

Die Konturen der *H- und K-Linien* sind von A. UNSÖLD [1776] eingehend untersucht worden. Im großen und ganzen zeigt sich hier dasselbe Bild. In theoretischer Hinsicht wird man jedoch an Stelle von thermischer Emission („Absorption“ im Sinne SCHWARZSCHILDs) besser mit *Resonanzstreuung*¹ rechnen. Die KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion ist dann zu ersetzen durch die *Ergiebigkeit*. Im einzelnen hat Verf. [1776] ein Modell durchgerechnet, in dem die Chromosphäre durch eine oder mehrere Kugelschalen konstanter Dichte dargestellt wird. Der rückwärts bestimmte Dichtegradient der Ca^+ -Atome² paßt größenordnungsmäßig gut zu den neueren Messungen von MENZEL. Bei den ganzen Rechnungen hat Verf. sich seinerzeit auf den Standpunkt a) gestellt. Sollte sich später b) endgültig als richtig herausstellen, so wäre selbstverständlich ein Teil der Ergebnisse entsprechend zu korrigieren.

D. Ergebnisse: Druck, Ionisation, Anregung und Zusammensetzung der Chromosphäre. Da das Problem der Selbstabsorption in der Chromosphäre noch nicht vollständig geklärt ist, so sind sichere Rückschlüsse auf den *physikalischen Zustand der Chromosphäre zur Zeit* nur aus den in „dünnere Schicht“ emittierten schwächeren Linien möglich. Die folgenden Angaben verdanken wir wiederum der mehrfach herangezogenen Untersuchung von G. G. CILLIÉ und D. H. MENZEL.

Aus den Intensitäten der höheren Glieder der BALMER-Serie oder des anschließenden Grenzkontinuums errechnet man leicht die Anzahl der Atome in den betreffenden Quantenzuständen und daraus nach (97,46—48) — wieder unter der Annahme, daß der Wasserstoff eines der häufigsten Elemente und nahezu vollständig ionisiert ist — die Zahl der Elektronen pro cm^3 . Für die *Basis der Chromosphäre* finden die genannten Autoren

$$n_e = 4 \cdot 10^{11} \text{ Elektronen/cm}^3, \quad (98,33)$$

was unter der Annahme eine Temperatur von 4830° dem *Elektronendruck*

$$P_e = 0,27 \text{ Bar} \quad (98,34)$$

entspricht. Dieser Zahlenwert³ stimmt ausgezeichnet mit dem in (96,12) für den „Sonnenrand“ berechneten überein, ein Zeichen, daß die in Abschn. 96 entwickelten Vorstellungen im ganzen das Richtige treffen.

Die *Anzahl der 2-quantigen H-Atome* in einer senkrechten Säule über 1 cm^2 der Chromosphärenbasis ergibt sich nach CILLIÉ und MENZEL zu $2 \cdot 10^{12}$, die der Ca^+ -Atome zu $\sim 2 \cdot 10^{16}$. Vergleicht man diese Zahlen mit den seinerzeit vom Verf. abgeleiteten Anzahlen der Atome „über 1 cm^2 der Photosphäre“ = $5 \cdot 10^{15}$ für 2-quantigen Wasserstoff bzw. $2 \cdot 10^{19}$ für Ca^+ , so erkennt man wieder, daß die wirksame Schichtdicke der Chromosphäre etwa $1/1000$ der Dicke der gesamten Sonnenatmosphäre ausmacht.

Auf die Deutung der übrigen Linien möchten wir hier nicht im einzelnen eingehen. Das Hauptergebnis dieses Teils der älteren Arbeit von D. H. MENZEL, seine *quantitative Analyse der Chromosphäre* haben wir schon in Tabelle 66 aufgenommen. Bezüglich des „*Überanregungsphänomens*“ ergibt sich qualitativ dasselbe Bild wie bei den Protuberanzen. Einer quantitativen Erfassung stehen auch hier zur Zeit noch große Schwierigkeiten entgegen.

¹ Nach G. G. CILLIÉ und D. H. MENZEL [1711] machen sich in den tieferen Schichten auch die „Dämpfungsflügel“ zu beiden Seiten des „Dopplerkernes“ der *H- und K-Linien* bemerkbar.

² Seine *Interpretation* nach der MILNESchen Theorie kann heute jedoch nicht mehr als richtig betrachtet werden.

³ Man beachte, daß die untere Chromosphäre — wie zu erwarten — eine Mittelstellung zwischen der Photosphäre (bzw. umkehrenden Schicht) und den Protuberanzen einnimmt.

E. Theorien der Sonnenchromosphäre. Zunächst einige *historische Bemerkungen*: E. A. MILNE [1737] hat 1924 eine *Theorie der Kalziumchromosphäre* entwickelt unter der Annahme, daß die Chromosphäre *nur* aus Ca^+ besteht, daß also andere Ionisationsstufen des Kalziums *und* andere Elemente als nicht vorhanden betrachtet werden können. Die Strahlungskraft soll in den *höchsten* Chromosphärenschichten gerade zur Kompensation der Schwere der Ca^+ -Atome ausreichen („Fully supported chromosphere“). In *tieferen* Schichten der Chromosphäre bewirkt die Rückstrahlung der Ca^+ -Atome eine Abnahme der Strahlungskraft und damit ein Anwachsen des Druckes. Für die Abnahme der Dichte der Ca^+ -Atome mit der Höhe h findet MILNE so ein Gesetz der Form

$$n_{\text{Ca}^+} \sim (h + h_0)^{-2}, \quad (98,35)$$

wo $h_0 \approx 1800$ km ist.

Die Voraussetzungen dieser Theorie entsprechen — wie wir schon mehrfach bemerkt haben — in keiner Weise der Wirklichkeit und es braucht also nicht zu überraschen, daß die Beobachtungen das Verteilungsgesetz (98,35) *nicht* bestätigt haben.

Seit der Entdeckung der *turbulenten Bewegungen* in der Sonnenchromosphäre (1928) hat sich immer mehr der — schon in der Anordnung der Abschn. 97 und 98 zum Ausdruck gebrachte — Gedanke durchgesetzt, daß die *Chromosphäre aufzufassen ist als ein Feld kleiner Protuberanzen*¹.

W. H. MCCREA [1713] hat zuerst versucht, einen Zusammenhang zu finden zwischen der — verglichen mit einer isothermen Atmosphäre von $\sim 4830^\circ$ — zu *großen mittleren Geschwindigkeit* und dem zu *kleinen Dichtegradienten* der Chromosphäre.

Die Abnahme der Dichte ρ mit der Höhe x in einer isothermen Atmosphäre mit der Temperatur T und dem mittleren Molekulargewicht μ erfolgt bekanntlich nach der Barometerformel

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{g h}{RT \mu}}. \quad (98,36)$$

Je größer $\frac{RT}{\mu}$, d. h. das mittlere Geschwindigkeitsquadrat der Teilchen ist, desto mehr wird die Atmosphäre entgegen der Schwere durch die gaskinetischen Stöße „auseinandergehalten“. Kommt nun zu der thermischen Bewegung der Teilchen eine turbulente hinzu mit der Geschwindigkeitsverteilung $\sim e^{-\left(\frac{\xi}{\xi_t}\right)^2}$ (für *eine* Komponente), so ist nach (43,5) die Gl. (98,36) offenbar zu verallgemeinern zu

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{g h}{\frac{RT}{\mu} + \frac{\xi_t^2}{2}}}. \quad (98,37)$$

Setzen wir hierfür wieder kurz $\rho = \rho_0 e^{-\alpha h}$, so wird also der „Dichtegradient“

$$\alpha = g \left\{ \frac{RT}{\mu} + \frac{\xi_t^2}{2} \right\}^{-1}. \quad (98,38)$$

Setzen wir $\mu \approx 1$, $T = 4830^\circ$ und $\xi_t = 15$ km/sek, so erhalten wir (das zweite Glied gibt naturgemäß den Ausschlag!)

$$\alpha = 1,8 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{-1} \quad (98,39)$$

in ausreichender² Übereinstimmung mit den Beobachtungen.

¹ Hierzu auch E. J. PEREPKIN [1756].

² Die empirisch gefundene Abnahme von α mit der Höhe — vgl. (98,6) — könnte man qualitativ mit der entsprechenden Zunahme von ξ_t (Tabelle 74) und der Abnahme von μ infolge steigender Ionisation in Zusammenhang bringen.

Aber hier beginnt nun erst das eigentliche Problem: *Wie kommt die turbulente Bewegung mit ~ 15 km/sek zustande?* Für jeden, der die Chromosphäre einmal wirklich gesehen hat, kann es keinem Zweifel unterliegen, daß die Bewegungen der Chromosphäre und der Protuberanzen dieselbe gemeinsame Ursache haben. Wie wir in Abschn. 97 fanden, ist dies wahrscheinlich der Strahlungsdruck, den einzelne Stellen mit besonders starker U.V.-Emission auf die Wasserstoffatome ausüben.

Wenn wir annehmen dürfen, daß die Beschleunigung der Chromosphären-elemente (wie die der Protuberanz) ruckartig erfolgt, und daß sie ihren Impuls hauptsächlich an einzelnen Stellen der Basis der Chromosphäre¹ bekommen, so erscheint es nachträglich gerechtfertigt, daß wir trotz des Strahlungsdruckes in (98,37) mit der *vollen* Schwerebeschleunigung g gerechnet haben. Wenn dagegen Impulsübertragung auch in höheren Schichten erfolgt, so muß mit einem $g_{\text{eff}} < g$ gerechnet werden.

Die hier entwickelten Vorstellungen haben mancherlei Berührungspunkte mit einer Chromosphärentheorie, welche neuerdings S. CHANDRASEKHAR [1710] entwickelt hat. Es dürfte vielleicht zu Klärung der Lage beitragen, wenn wir diese Theorie mit unseren mathematisch freilich noch lange nicht so durchgeführten Anschauungen vergleichen². S. CHANDRASEKHAR knüpft an MILNES Theorie der Ca^+ -Chromosphäre an und erweitert dessen Bild in folgender Richtung: Der photosphärische Untergrund der Chromosphäre soll Helligkeitsdifferenzen aufweisen, so daß hellere und dunklere Stellen in Abständen von $l \approx 5000$ km (entsprechend den Dimensionen der Granulation) mehr oder weniger regelmäßig aufeinander folgen. Die Ca^+ -Chromosphäre stellt sich nun nach CHANDRASEKHAR so ein, daß sie im Mittel gerade vom Strahlungsdruck getragen wird. In den unteren Teilen entstehen dann infolge des Strahlungsdruckes Bewegungen von den helleren nach den dunkleren Stellen. Da hierbei Beschleunigungen von der Größenordnung g auftreten, so erhält man Geschwindigkeiten der Größenordnung $\sqrt{2gl} \approx 50$ km/sek, was ganz gut zu den Beobachtungen passen würde. Mittelt man über alle möglichen Bahnen der Ca^+ -Teilchen, so bekommt man eine Dichteverteilung, die mit einer $e^{-\alpha h}$ -Verteilung große Ähnlichkeit aufweist.

CHANDRASEKHAR schlägt — wenn wir seine Theorie vom formalen Standpunkt betrachten — einen Mittelweg ein zwischen MILNES Theorie einer *statischen* Chromosphäre, welche vom *Strahlungsdruck* getragen wird und McCREAs Theorie einer *turbulenten* Chromosphäre, auf welche die *volle* Schwerebeschleunigung wirkt.

Aber abgesehen von den allgemeinen Einwänden, welche alle „Kalziumtheorien“ betreffen, scheint dem Verf. die Theorie CHANDRASEKHARS noch einem gewichtigen Einwand ausgesetzt: Sie wird den beobachteten Bewegungsgesetzen der Protuberanzen in keiner Weise gerecht. Und solange deren Theorie nicht besser geklärt ist (vgl. Abschn. 97,8), wird man sich bezüglich der Dynamik der Chromosphäre im wesentlichen³ mit dem von McCREA entdeckten Zusammenhang zwischen Druckgradient und Turbulenz begnügen müssen.

¹ P. C. KEENAN [1727,₃] hat die Idee geäußert, daß die bei gegenseitiger Durchdringung zweier Turbulenzelemente erfolgenden Stöße rascher Teilchen einen Beitrag zur Anregung der He-, He⁺- usw. Linien geben. Ob dieser gegenüber der direkten Anregung durch kurzwellige Strahlung ins Gewicht fällt, ist leider zur Zeit noch kaum zu entscheiden.

² Hierzu auch W. H. McCREA [1714].

³ Vielleicht kann inzwischen wenigstens die noch nicht endgültig entschiedene Frage geklärt werden, ob in (98,38) der volle Wert von $g = 2,74 \cdot 10^4 \text{cmsek}^{-2}$ einzusetzen ist, oder ein durch Strahlungsdruck verkleinerter Effektivwert.

99. Die Sonnenkorona.

Zeigten schon die Protuberanzen und die Chromosphäre in spektroskopischer und dynamischer Hinsicht genug des Rätselhaften, so gilt dies in erhöhtem Maße von der *Korona*. Allgemeine theoretische Spekulationen dürften daher verfrüht sein und wir wenden uns lieber sogleich der schrittweisen Ordnung und Deutung

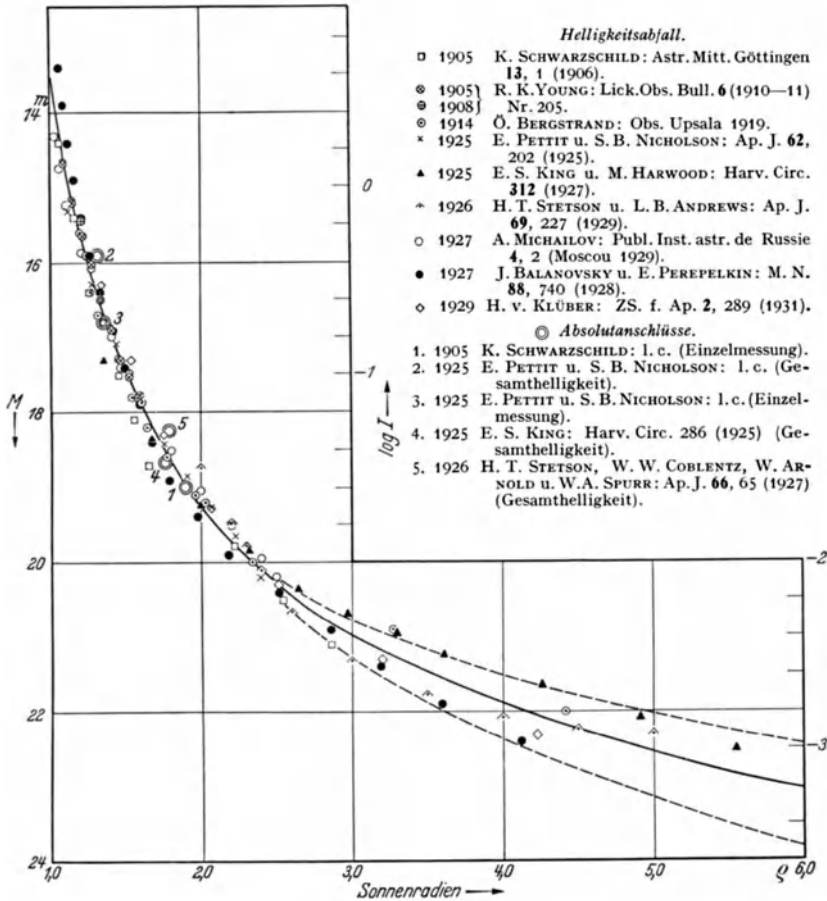


Fig. 139. Helligkeitsverteilung $I(\varrho)$ der Sonnenkorona nach S. BAUMBACH [1708]. (Mitte der Sonnenscheibe = 10° .)

der Beobachtungen zu — nicht zuletzt auch um zu erkennen, wo diese einer Verbesserung und Ergänzung bedürfen.

A. Helligkeitsverteilung und Polarisation der Korona. Die *Helligkeit der Korona* I als Funktion des *Abstandes vom Sonnenmittelpunkt* ϱ (in Einheiten des Sonnenradius gemessen) ist seit der Erfindung der photographischen Photometrie bei zahlreichen Finsternissen gemessen worden. Da die meisten Meßreihen nur ein verhältnismäßig kleines Helligkeitsintervall überdecken, so muß man sie zusammensetzen, indem man für jede einzelne Reihe die $\log I + \text{konst.}$ in Abhängigkeit von ϱ aufträgt und diese Kurvenstücke dann parallel zur $\log I$ -Achse aufschiebt. In dieser Weise hat S. BAUMBACH¹ [1708] das gesamte

¹ Verf. möchte auch an dieser Stelle Herrn Dr. S. BAUMBACH für seine freundliche Mitwirkung bei der Bearbeitung dieses Abschnittes, sowie für die Möglichkeit, seine Arbeit schon vor ihrer Drucklegung benützen zu können, auf das herzlichste danken.

Beobachtungsmaterial unter kritischer Berücksichtigung seiner Genauigkeit¹ bearbeitet und zunächst die *mittlere Koronahelligkeit I* (gemittelt über alle

Tabelle 75. Helligkeitsverteilung $I(\varrho)$, Ergiebigkeit $F(r)$, Strahlungsfunktion $J(r)$ und Elektronendichte $N(r)$ der Korona nach S. BAUMBACH [1708] (Helligkeit der Mitte der Sonnenscheibe = 10^6).

ϱ bzw. r (Sonnen- radien)	h'	$\log I(\varrho)$	$\log F(r)$	$\log J(r) = \int I \frac{d\omega}{4\pi}$	$\log N(r)$
1,00	0,00	0,61	0,75	0,48-1	8,66
1,03	0,48	0,44	0,56	0,40-1	8,49
1,06	0,96	0,29	0,38	0,35-1	8,36
1,10	1,6	0,11	0,16	0,30-1	8,19
1,2	3,2	0,74-1	0,71-1	0,20-1	7,85
1,3	4,8	0,45-1	0,36-1	0,11-1	7,58
1,4	6,4	0,22-1	0,07-1	0,03-1	7,38
1,6	9,6	0,85-2	0,61-2	0,90-2	7,05
1,8	12,8	0,55-2	0,24-2	0,78-2	6,79
2,0	16,0	0,31-2	0,92-3	0,69-2	6,57
2,2	19,2	0,12-2	0,66-3	0,60-2	6,40
2,4	22,4	0,96-3	0,44-3	0,52-2	6,25
2,6	25,6	0,82-3	0,25-3	0,45-2	6,13
2,8	28,8	0,71-3	0,08-3	0,38-2	6,04
3,0	32,0	0,61-3	0,94-4	0,32-2	5,96
3,5	40,0	0,41-3	0,65-4	0,18-2	5,80
4,0	48,0	0,24-3	0,42-4	0,04-2	5,71
5,0	64,0	0,99-4	0,05-4	0,81-3	5,58
6,0	80,0	0,78-4	0,76-5	0,70-3	5,40
8,0	112,0	0,47-4	0,32-5	0,45-3	5,21
10,0	144,0	0,23-4	0,98-6	0,28-3	5,04

Positionswinkel) in willkürlichen Einheiten als Funktion von ϱ bestimmt. Der noch freigebliebene Maßeinheitenfaktor wurde sodann festgelegt durch Zurückgreifen auf die von K. SCHWARZSCHILD [1774] sowie E. PETTIT und S. B. NICHOLSON [1759] ausgeführten *Anschlüsse Sonnenscheibe-Korona* bzw. Messungen der *Gesamthelligkeit der Korona*² von E. S. KING und H. STETSON.

In Fig. 139 und Tabelle 75 geben wir nach S. BAUMBACH die durch kritische Bearbeitung eines umfangreichen Beobachtungsmaterials abgeleitete *mittlere photographische Helligkeit der Korona*

$I(\varrho)$, bezogen auf die Helligkeit der Mitte der Sonnenscheibe = 10^6 , als Funktion des Abstandes vom Sonnenmittelpunkt ϱ bzw. der Höhe h über dem Sonnenrand in Bogenminuten.

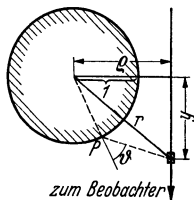


Fig. 140. Zusammenhang der Korona-Helligkeit $I(\varrho)$ mit der Ergiebigkeit $F(r)$ und der Anzahl der Elektronen pro $\text{cm}^3 N(r)$.

Als Vorarbeit zur Deutung der Korona berechnen wir aus der „scheinbaren“ (projizierten) Helligkeitsverteilung $I(\varrho)$ die Strahlungsemission pro cm^3 , d. h. die Ergiebigkeit $F(r)$ der Korona als Funktion des Abstandes r vom Sonnenmittelpunkt. Der Zusammenhang von $I(\varrho)$ mit $F(r)$ tritt nach K. SCHWARZSCHILD [1774] am übersichtlichsten in Erscheinung, wenn wir uns $F(r)$ in eine Potenzreihe (mit ganzen oder gebrochenen Exponenten) nach $1/r$ entwickelt denken.

Der einem Glied $F_n(r) = \frac{1}{r^n}$ (die Konstante setzen wir der Einfachheit wegen = 1) in $F(r)$ entsprechende Anteil $I_n(\varrho)$ der Koronahelligkeit ist dann nach Fig. 140 (dort Erklärung der Bezeichnungen)

¹ Zum Beispiel haben photometrische Messungen bei sehr großen oder sehr kleinen Schwärzungen nur geringes Gewicht. Sodann müssen die meteorologischen Umstände der Beobachtung berücksichtigt werden usw.

² Die *Gesamthelligkeit der Korona* hängt — wegen des steilen Helligkeitsabfalles der inneren Zonen — sehr ab von der relativen Lage des Mondrandes zum Sonnenrand [1759]. Da andererseits der Helligkeitsabfall bei großen ϱ sehr langsam erfolgt, so wird hier die Trennung von Korona und Streulicht schwierig.

Wenn es sich darum handelt, Schwankungen des Absolutwertes der Koronahelligkeit zu erfassen, so wird man also besser sich auf ein bestimmtes ϱ oder eine bestimmte Zone ϱ_1 bis ϱ_2 einigen, als immer wieder die notwendigerweise ziemlich unbestimmte „Gesamthelligkeit“ zu messen.

$$I_n(\varrho) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{r^n}, \quad (99,1)$$

oder mit $r^2 = \varrho^2 + y^2$ und $y = \varrho \cdot \operatorname{tg} \varphi$

$$I_n(\varrho) = \frac{1}{\varrho^{n-1}} \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} \varphi \, d\varphi = \frac{1}{\varrho^{n-1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \quad (99,2)$$

Das heißt jedem Glied $\frac{\text{konst.}}{r^n}$ der Reihe $F(r)$ entspricht wieder ein Glied $\frac{\text{konst.}}{\varrho^{n-1}}$ der Reihe für $I(\varrho)$, so daß man *umgekehrt* aus einer Potenzreihendarstellung von $I(\varrho)$ sofort das $F(r)$ ablesen kann.

Ist n ganzzahlig, so erhält man mit Hilfe der bekannten Ausdrücke für die Gammafunktion leicht

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \begin{cases} \pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (n-2)} & \text{für } n \text{ gerade} \\ 2 \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (n-3)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-2)} & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (99,3)$$

Für nichtganzzahlige n bedient man sich der Tabellen z. B. bei MILNE-THOMSON und COMRIE [6].

Durch Probieren fand nun S. BAUMBACH (s. S. 439), daß sich das gesamte Beobachtungsmaterial innerhalb der Meßgenauigkeit darstellen läßt durch die *Interpolationsformel* ($1 < \varrho < 10$)

$$I(\varrho) = \frac{0,0532}{\varrho^{2,5}} + \frac{1,425}{\varrho^7} + \frac{2,565}{\varrho^{17}} \quad (99,4)$$

(bezogen auf Helligkeit der \odot -Mitte gleich 10^6).

Die 2,5-te Potenz ist dabei erforderlich zur Darstellung des Helligkeitsabfalls der äußersten Korona ($\varrho > 4$). Die 17-te oder jedenfalls eine sehr hohe Potenz braucht man für die innerste Korona. Es ist *nicht* möglich, die ganze Korona mit *einem* Exponenten darzustellen.

Mit Hilfe von (99,2) können wir sofort die zu $I(\varrho)$ gehörige *Ergiebigkeit* $F(r)$ anschreiben:

$$F(r) = \frac{0,0304}{r^{3,5}} + \frac{1,452}{r^8} + \frac{4,157}{r^{18}}. \quad (99,5)$$

Im Hinblick auf die *Polarisation* des Koronalichtes und die große Ähnlichkeit seiner *spektralen Energieverteilung* mit der des photosphärischen Spektrums (s. u.) hat K. SCHWARZSCHILD [1774] die Hypothese aufgestellt, daß die Helligkeit der Korona durch *Streuung des Sonnenlichtes an freien Elektronen* entstehe. Wir werden diese Vorstellung noch in verschiedenen Richtungen prüfen. Zunächst wollen wir sie einmal als erwiesen betrachten und aus der *Ergiebigkeit* $F(r)$ die *Zahl* $N(r)$ *der freien Elektronen pro cm³* als Funktion des Abstandes r vom Sonnenmittelpunkt berechnen.

Mit Rücksicht auf die geometrischen Verhältnisse können wir die Streuung in 1. Näherung als *isotrop* betrachten. Dann ist nach (42,10) der *Streukoeffizient* pro Elektron

$$\sigma_e = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m c^2} \right)^2 = 0,66 \cdot 10^{-24} \quad (99,6)$$

und pro Längeneinheit, d. h. pro Sonnenradius a

$$\sigma(r) = \sigma_e \cdot a \cdot N(r) = 4,59 \cdot 10^{-14} \cdot N(r). \quad (99,7)$$

Die *Ergiebigkeit* $F(r)$ im Abstand r vom Sonnenmittelpunkt ist nun nach der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes — z. B. Gl. (63,1) —

$$F(r) = \sigma(r) \int \frac{J d\omega}{4\pi} = \sigma(r) \cdot J(r), \quad (99,8)$$

wo (vgl. Fig. 140) I die *Intensität* der von der Sonnenoberfläche bei P in Richtung \vec{PE} emittierten Strahlung bedeutet und die Integration über alle *Raumwinkelemente* $d\omega$ bei E zu erstrecken ist, die von der Sonne Strahlung erhalten. Wie üblich schreiben wir I als Funktion des Austrittswinkels ϑ (s. Fig. 140) in der Form

$$I(\vartheta) = I_0 \frac{1 + \beta \cos \vartheta}{1 + \beta}. \quad (99,9)$$

Dabei bedeutet I_0 (in unseren Einheiten = 10^6) die Intensität in der Mitte der Sonnenscheibe. Der Randverdunkelungskoeffizient β ist für photographisches Licht ($\lambda \sim 4330 \text{ \AA}$) nach ABBOTS Messungen gleich $4,0_0$.

Die Integration (99,8) läßt sich (vgl. S. BAUMBACH) elementar ausführen und ergibt

$$J(r) = \frac{\frac{1}{2} I_0}{1 + \beta} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{1}{r}\right)^2} + \frac{\beta}{2} \left[1 - r \left(1 - \left(\frac{1}{r}\right)^2 \right) \ln \sqrt{\frac{r+1}{r-1}} \right] \right\}. \quad (99,10)$$

Ohne Randverdunkelung der Sonnenscheibe ($\beta=0$) erhielte man einfach $J(r) = I_0 \cdot \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - r^{-2}})$, d. h. $I_0/4\pi$ mal dem Raumwinkel, den die Sonne von E aus gesehen erfüllt. Das komplizierter gebaute β -Glied berücksichtigt die Bevorzugung der kleinen Ausstrahlungswinkel ϑ . Für große r (praktisch $r > 1,2$) entwickelt man $J(r)$ zweckmäßig nach $1/r^2$ und erhält so

$$J(r) = \frac{\frac{1}{2} I_0}{1 + \beta} \left\{ \frac{1}{2r^2} + \frac{1}{8r^4} + \dots + \beta \left(\frac{1}{3r^2} + \frac{1}{15r^4} + \dots \right) \right\}.$$

In Tabelle 75 geben wir nun die von S. BAUMBACH (s. S. 439) berechnete *Ergiebigkeit* $F(r)$ nach (99,5), sodann die *Funktion* $J(r)$ und schließlich die *Zahl der freien Elektronen* pro cm^3

$$N(r) = \frac{F(r)}{4,59 \cdot 10^{-14} \cdot J(r)} \quad (99,11)$$

für $r=1$ bis 10 Sonnenradien. Es ist bemerkenswert, daß die für die *innerste Korona* gefundene Elektronendichte nur um einen Faktor ~ 20 unterhalb der in Abschn. 97 für die *Protuberanzen* erhaltenen liegt¹!

Bis jetzt haben wir die *Korona* als ein zentrisch-symmetrisches Gebilde betrachtet. Photometrische Bestimmungen der *Isophoten* direkter Koronaaufnahmen — vgl. z. B. H. v. KLÜBER [1729—30] — zeigen, daß diese Approximation besser ist, als man nach dem Anblick von photographischen Aufnahmen oder gar Zeichnungen erwarten möchte. Darüber hinausgehend aber zeigt die *Form der Korona* — wie schon in Abschn. 89 ausgeführt wurde — eine charakteristische Variation mit der Phase im 11,5-jährigen *Sonnenzyklus*: Beim Fleckenmaximum beobachtet man die rundliche „Maximum-Korona“; beim Fleckenminimum zeigen sich am Sonnenäquator lange „Strahlen“ und in der Nähe der Pole Gebilde, die man etwa mit einer kurzen Bürste vergleichen kann. W. J. S. LOCKYER [1654] hat darauf hingewiesen, daß die heliographischen Breiten, in denen die Korona besonders hoch reicht, in der jeweiligen Phase des Fleckenzyklus auch durch starke Protuberanzenbildung ausgezeichnet sind.

¹ Entgegen einer immer wieder auftauchenden Irrmeinung sind daher die freien Weglängen in der Korona immer noch \ll deren Dimensionen.

Diese Beobachtung deutet einmal darauf hin, daß Korona und Protuberanzen eng verwandte Gebilde sind. Zum anderen aber folgt aus LOCKYERS Entdeckung, daß die Formänderungen der Korona nur eine Äußerung von Veränderungen im photosphärischen Untergrund der betreffenden heliographischen Breiten darstellen.

Die ganze Korona besitzt stets eine *strahlige* Struktur. Da eine Koronaaufnahme als Projektion eines ausgedehnten durchsichtigen Gebildes aufzufassen ist, so erscheint es verständlich, daß ein einzelner Strahl sich nur wenig von seiner Umgebung abhebt. Die Koronastrahlen treten daher auch — wegen der bekannten Kontrastempfindlichkeit des Auges — bei visueller Betrachtung der Aufnahmen deutlicher hervor als bei photometrischer Bestimmung der Isophoten.

Zum Teil erscheinen die Koronastrahlen geradegestreckt in Richtung des Sonnenradius oder schief dazu; häufig sind sie auch äquatorwärts gekrümmt, so daß insbesondere beim Fleckenminimum — die Korona eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Kraft-

linienbild einer magnetisierten Kugel gewinnt.

Diese — meines Erachtens rein äußerliche — Analogie bildet wohl den Ausgangspunkt mehrerer theoretischer Ansätze, deren Verfasser versuchen, die *Form der Koronastrahlen* mit dem Magnetfeld der Sonne in Verbindung zu bringen. Abgesehen davon, daß diese Arbeiten zum

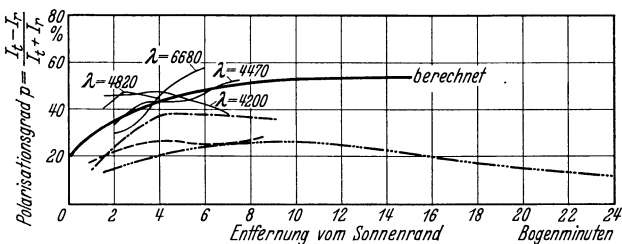


Fig. 141. Polarisationsgrad p der Korona. Nach S. BAUMBACH [1708].

- Beobachtet: {
 - 1905 R. K. YOUNG [1783],
 - 1932 J. DUFAY und H. GROUILLER [1719],
 - - - 1934 J. J. JOHNSON, Publ. A. S. P. 46, 226 (1934),
 - 1934 W. M. COHN, Nature 139, 29 (1937).
- Berechnet: — S. BAUMBACH [1708].

Teil von physikalisch recht unsicheren und zur Zeit kaum prüfbareren Voraussetzungen ausgehen, erscheint es wünschenswert, zunächst einmal das *Zustandekommen* der Korona wenigstens in groben Zügen zu verstehen, ehe man zur Erklärung feiner Details komplizierte Theorien entwickelt. Sowohl die Betrachtung der Struktur der Korona wie auch andere Beobachtungen, auf die wir noch eingehen werden, weisen eindringlich auf die engen Beziehungen der *Korona* zu den *ruhenden Protuberanzen* hin und eine Theorie der Korona¹ darf also auf keinen Fall an den in Abschn. 97 dargestellten Untersuchungen vorbeigehen.

Aus den luftigen Bereichen der Spekulation kehren wir gerne wieder auf den Boden der Beobachtung zurück:

Schon 1860 haben SECCHI und PRAZMOWSKI beobachtet, daß die Strahlung der Korona teilweise polarisiert ist. Genauer gesagt, zeigt sie *partielle lineare Polarisation in radialer Richtung*, d. h. der { magnetische } Vektor des Koronalichtes bevorzugt die { radiale } Schwingungsrichtung. Bezeichnen wir die Intensität der tangentialen (elektrischen) Schwingung mit I_t , die der radialen mit I_r , so wird der *Polarisationsgrad* p

$$p = \frac{I_t - I_r}{I_t + I_r} \quad (99,12)$$

In der obenstehenden Fig. 141 hat S. BAUMBACH [1708] alle einigermaßen vertrauenerweckenden Messungen von p als Funktion der Höhe h über dem

¹ An neueren Arbeiten erwähnen wir: J. WOLTJER [1780], E. V. D. PAHLEN und A. KOHLSCHÜTTER [1750], S. ROSSELAND [1769] und K. O. KIEPENHEUER [1728].

Sonnenrand aufgetragen. Ihre gegenseitige Übereinstimmung ist noch sehr schlecht, da sowohl der steile Helligkeitsabfall der Korona als auch das atmosphärische und instrumentelle Streulicht die Messungen außerordentlich erschweren. Im ganzen dürften die höheren ρ -Werte der Wahrheit am nächsten kommen, da fast alle denkbaren Fehlerquellen eine *Verkleinerung* von ρ vortäuschen.

Der beobachtete Charakter der Polarisation der Korona paßt — zum mindesten in qualitativer Hinsicht — gut zu der Vorstellung, daß es sich um photosphärische Strahlung handelt, die an *freien Elektronen* gestreut wird. Nach Abschn. 42 ergibt sich bei 90° -Streuung an freien Elektronen (und bei RAYLEIGH-Streuung) vollständige lineare Polarisation in der Streuebene; bei größeren und kleineren Streuwinkeln erhält man teilweise linear polarisiertes Licht. Die Durchrechnung der Theorie, deren physikalische Grundlagen wir in Abschn. 42 schon bereitgestellt haben, ist sehr kompliziert, da man über alle vorkommenden Streuwinkel integrieren muß. Dabei ist einmal die *Randverdunkelung* der Sonnenscheibe zu berücksichtigen; je stärker diese ist, desto mehr Streuung unter Winkeln von $\sim 90^\circ$ erhält man und desto größer wird der Polarisationsgrad. Eine noch wichtigere Rolle spielt der *Dichtegradient* der Korona: Ist dieser groß, so erhält man verhältnismäßig viel Streuung um $\sim 90^\circ$ und großes ρ , während bei kleinem Dichtegradienten das Umgekehrte gilt.

Die im vorstehenden skizzierten Rechnungen sind zuerst im Jahre 1879 von A. SCHUSTER [1773] durchgeführt worden. Später haben R. K. YOUNG [1783] und M. MINNAERT [1739] sie in verschiedener Hinsicht verbessert. Da aber in allen diesen Arbeiten noch ziemlich unbefriedigende Ansätze für die *Dichteverteilung der freien Elektronen* $N(r)$ gemacht waren, so hat S. BAUMBACH (s. S. 439) die Rechnungen auf der in Tabelle 75 entwickelten Grundlage wiederholt. Der von ihm *berechnete Polarisationsgrad* ρ ist in Fig. 141 als Funktion von h bzw. ϱ eingetragen. In der Nähe des Sonnenrandes wächst ρ zunächst mit h infolge Verkleinerung des Winkelbereiches der beleuchtenden Sonnenstrahlung. In größerem Abstand wird diese Tendenz von ρ nahezu kompensiert durch die Abnahme des Dichtegradienten der Korona ($N(r) \sim r^{-\frac{3}{2}}$ für große r).

Die Differenzen Beobachtung—Theorie liegen durchaus im Bereich der Beobachtungsfehler. Genauere Polarisationsmessungen würden uns eine sichere Möglichkeit geben zu entscheiden, ob neben der Streuung an freien Elektronen in der Korona evtl. noch thermische Emission (unpolarisiert) oder Streuung an größeren Teilchen (schwach polarisiert) von Bedeutung sind (s. unter B).

B. Das kontinuierliche und das FRAUNHOFER-Spektrum der Korona (Beobachtungen). Bis zu Höhen von $6' - 10'$ über dem Sonnenrand zeigt die Korona ein *völlig kontinuierliches Spektrum*, dem sich die bekannten, zur Zeit noch nicht identifizierten Korona-Emissionslinien überlagern. In größeren Höhen treten erst undeutlich, dann immer klarer, die FRAUNHOFERSchen *Absorptionslinien* des gewöhnlichen Sonnenspektrums auf; wir haben es hier also ohne Zweifel mit gestreutem Sonnenlicht zu tun. Im folgenden werden wir die beiden hiermit unterschiedenen Zonen als die *innere* bzw. *äußere Korona* bezeichnen. Ihre Grenze (die natürlich nicht scharf ist und auch in der Höhe schwankt) liegt wie gesagt bei $\sim 6' - 10'$ Höhe.

Die *Intensitätsverteilung* im Spektrum der Korona ist von H. LUDENDORFF [1732] für das Spektralgebiet $\lambda 3820 - 4840$ und Höhen von $h = 1,7$ bis $22,6$ über dem Sonnenrand sowie von W. GROTRIAN [1722] für das Gebiet $\lambda 3400$ bis 6500 und $h = 1,4$ bis $5,6$ mit der des integrierten Sonnenlichtes (Strahlungsstrom!) verglichen worden. In dem ganzen untersuchten Bereich von Wellenlängen bzw. Höhen ergaben sich nirgends Differenzen über $\pm 0,1 \approx 10\%$. Die spektrale Energieverteilung der inneren und äußeren Korona ist also innerhalb

der Meßfehlergrenzen gleich der des integrierten Sonnenspektrums¹. Wir bemerken in diesem Zusammenhang gleich noch, daß nach Beobachtungen von J. DUFAY und H. GROUILLER [1719] auch der *Polarisationsgrad* p an jeder Stelle der inneren oder äußeren Korona *von der Wellenlänge unabhängig* ist.

W. GROTRIANs Untersuchung (ebd.) der *inneren* Korona (genauer $h = 3,8 - 5'$) im Ultraviolett ergab darüber hinaus noch folgendes bemerkenswerte Ergebnis: Bei $\lambda \sim 3800 \text{ \AA}$ wird die spektrale Energieverteilungskurve der Sonne (Fig. 20b) durch eine zufällige Anhäufung starker FRAUNHOFER-Linien erheblich herabgedrückt. Diese Depression wird vom Spektrum der inneren Korona — trotzdem von den Linien nichts zu erkennen ist — genau dupliziert; nur erscheinen ihre Ränder dort etwas verwaschener. Eine genauere Analyse der Photometerkurven ergibt nach W. GROTRIAN eine „Verwaschungsbreite“ (Definition analog der Dopplerbreite $\Delta\lambda_D$) von größenordnungsmäßig 60 \AA ! Umgekehrt reicht eine derartige Verwaschung des Sonnenspektrums längstst aus, um alle FRAUNHOFER-Linien „auszuglätten“.

Ehe wir uns der Deutung dieser Beobachtungen zuwenden, betrachten wir noch die *äußere Korona*. Nach qualitativen Beobachtungen von H. LUDENDORFF [1732] und photometrischen Messungen von W. GROTRIAN [1724] und J. H. MOORE [1746] sind die *Halbwertsbreiten der FRAUNHOFER-Linien* (gemessen bei der halben Maximaltiefe) in der äußeren Korona ($h \sim 6' - 27'$) praktisch *gleich denen im Sonnenspektrum*. (Genauer gesagt findet W. GROTRIAN *keine* Verbreiterung $> 0,1 \text{ \AA}$; J. H. MOORE eine kleine Verbreiterung von $0,20 \pm 0,05 \text{ \AA}$ für $h = 15' - 27'$ und $0,13 \pm 0,05 \text{ \AA}$ für $h = 6' - 9'$, deren Realität kaum als gesichert betrachtet werden darf.)

Das allmähliche Verschwinden der FRAUNHOFER-Linien bei Annäherung an den Sonnenrand beruht also nicht auf einem Breiterwerden, sondern auf einer *Abnahme der Linientiefe* und der *Gesamtabsorption*.

Nach W. GROTRIAN [1724] kann man die ganzen Verhältnisse am übersichtlichsten darstellen, wenn man annimmt, daß das Gesamtlicht der Korona I_K durch Überlagerung eines völlig kontinuierlichen Spektrums der Intensität I_K mit einem unveränderten FRAUNHOFER-Spektrum der Intensität I_F entsteht². Die beiden Anteile können nun folgendermaßen getrennt werden: Es sei R^* die Tiefe und A_λ^* die Gesamtabsorption einer FRAUNHOFER-Linie im *Korona-spektrum* (letztere also bezogen auf 1 \AA des Koronaspektrums). Die mit demselben Instrument usw. für dieselbe Linie im *Sonnenspektrum* gemessenen Werte seien R und A_λ . Dann gilt offensichtlich

$$R \cdot I_F = R^*(I_F + I_K) \tag{99,13}$$

oder

$$\frac{I_K}{I_F + I_K} = \frac{R - R^*}{R} \quad \text{und entsprechend} = \frac{A_\lambda - A_\lambda^*}{A_\lambda}. \tag{99,14}$$

Aus den von H. LUDENDORFF bei der Finsternis vom 10. Sept. 1923 gewonnenen Spektren hat W. GROTRIAN (s. oben) folgende Prozentwerte (ausgeglichen) des rein kontinuierlichen Anteils am Koronaspektrum ermittelt:

Höhe h	3,2	5'	10'	15'	20'	25'	}	(99,15)	
$\frac{100 I_K}{I_F + I_K}$	{ Ostseite	. . .	85	82	73	60	46			29%
	{ Westseite	. . .	—	89	74	56	38			—%

¹ E. PETTIT und S. B. NICHOLSON [1759—60] konnten zeigen, daß auch das Verhältnis der Spektralgebiete $0,3 - 1,3 \mu$ zu $1,3 - 5,5 \mu$ für Korona und Sonne praktisch dasselbe ist.

² Wir fassen diese Zerlegung zunächst lediglich als eine Beschreibung der Beobachtungen auf. Den Deutungsversuch von W. GROTRIAN, der den Anteil I_K auf Streuung an freien Elektronen, den Anteil I_F dagegen auf Streuung an kosmischem Staub zurückführt, werden wir unter C eingehender betrachten.

Das heißt also erst $\sim 17'$ über dem Sonnenrand ($\varrho = 2,06$) werden der „kontinuierliche“ und der „FRAUNHOFER“-Anteil des Koronaspektrums einander gleich.

C. Deutung des kontinuierlichen und FRAUNHOFER-Spektrums der Korona.

Nachdem wir uns einen Überblick über das zur Zeit vorhandenen Beobachtungsmaterial verschafft haben, wenden wir uns nochmals dem Problem seiner *Deutung* zu. Es sei jedoch schon vorweg bemerkt, daß wir — hauptsächlich infolge der Unsicherheit der Polarisationsmessungen — *nicht* zu einer definitiven Entscheidung gelangen können. Wir müssen uns vielmehr darauf beschränken, die Vor- und Nachteile der physikalisch einigermaßen diskutablen Hypothesen gegeneinander abzuwägen.

Zunächst kehren wir zurück zu der schon eingangs herangezogenen *Hypothese der Streuung an freien Elektronen*. Da nach Abschn. 42 bzw. Gl. (99,6) der Streukoeffizient freier Elektronen von der Wellenlänge unabhängig ist, so erklärt diese Hypothese ohne weiteres die Übereinstimmung der spektralen Energieverteilung von Korona und Sonnenspektrum sowie die Unabhängigkeit des Polarisationsgrades von der Wellenlänge. Der berechnete Betrag des Polarisationsgrades p als Funktion von ϱ kommt dagegen nach S. BAUMBACH (Fig. 141) etwas zu groß heraus. Die Differenzen Beobachtung—Theorie¹ liegen aber — wie wir schon bemerkten — wohl noch im Bereich der Beobachtungsfehler. Insbesondere dürfte die bei mehreren Meßreihen erkennbare Abnahme des p bei großen ϱ unschwer auf terrestrisches Streulicht zurückzuführen sein.

Ernstliche Schwierigkeiten dagegen erwachsen der SCHWARZSCHILDschen Hypothese hinsichtlich der Erklärung des Verhaltens der FRAUNHOFER-Linien im Koronaspektrum: Machen wir zunächst die naheliegende Annahme, daß die *Geschwindigkeitsverteilung* der Elektronen (Atomgewicht $\mu = \frac{1}{1845}$) etwa der Grenztemperatur $T_0 = 4830^\circ$ der Sonne entspreche, so berechnet man ihre Geschwindigkeit ξ_0 nach Gl. (43,4) leicht zu $\xi_0 = 385$ km/sek. Die FRAUNHOFER-Linien des Streulichtes müßten also z. B. bei $\lambda 4000$ eine *Dopplerverbreiterung* mit $\Delta\lambda_D = 5,1 \text{ \AA}$ erfahren. Würde man weiterhin annehmen, daß (vgl. Kap. V) die Temperatur in der Korona proportional der $\sqrt[4]{\text{Gesamtstrahlungsdichte}}$ geht, so würde $\Delta\lambda_D$ proportional $J(r)^{1/8}$ gehen, d. h. vom Sonnenrand $r=1$ bis $r=2$ nach Gl. (99,10) — mit $\beta=1,5$ — nur um einen Faktor 1,27 abnehmen. Diese Berechnungen stimmen nun in keiner Weise mit den Beobachtungen überein: Um das völlige Verschwinden der FRAUNHOFER-Linien in der *inneren Korona* und die Abrundung der Kanten des „Bandes“ bei $\lambda 3800$ zu erklären, muß man nach W. GROTRIAN (s. S. 445) ein $\Delta\lambda_D$ von $\sim 60 \text{ \AA}$ statt $5,1 \text{ \AA}$ annehmen. Andererseits findet nach den Messungen von W. GROTRIAN und J. H. MOORE (s. S. 445) in der *äußeren Korona* sicher *keine* Verbreiterung der FRAUNHOFER-Linien entsprechend einem $\Delta\lambda_D \approx 5,1 \text{ \AA}$ statt, mit den Beobachtungen wäre höchstens ein etwa 10mal kleinerer Wert verträglich.

Will man trotz dieser Schwierigkeiten die Annahme der Streuung an freien Elektronen beibehalten, so muß man sie also durch die Zusatzhypothese² erweitern, daß in der inneren Korona die Elektronen unerwartet hohe³, weiter

¹ Ältere Rechnungen, denen noch keine so genauen Untersuchungen über den Helligkeitsabfall der Korona zugrunde lagen, gaben ein erheblich rascheres Anwachsen der p bei großen ϱ . Die Untersuchung BAUMBACHS hat also die Abweichungen $p_{\text{ber.}} - p_{\text{beob}}$ wesentlich verringert.

Im übrigen wäre es dringend zu wünschen, daß bei einer künftigen Finsternis die Intensitätsverteilung und Polarisation der Korona bis zu möglichst großen ϱ gleichzeitig gemessen würden.

² Hierzu auch H. LUDENDORFF (s. S. 444).

³ Daß die Annahme großer *makroskopischer* Geschwindigkeiten in der inneren Korona nicht möglich ist, wird sich unter E. ergeben.

vom Sonnenrande weg dagegen unerwartet kleine Geschwindigkeiten haben. Die Variation des Verhältnisses $\frac{I_K}{I_F + I_K}$ in (99,15) läßt sich vielleicht so erklären, daß man in einem bestimmten Abstand h' vom Sonnenrand ein Teil der Strahlung mit völlig verwaschenen Linien aus den inneren Teilen der Korona und ein Teil mit scharfen Linien aus den äußeren Zonen der Korona bekommt. Vielleicht muß man aber auch annehmen, daß schon in der inneren Korona neben den sehr raschen Elektronen sehr langsame vorhanden sind, d. h. also, daß die Geschwindigkeitsverteilungskurve der Elektronen viel flacher als die MAXWELLSche verläuft.

Diese Annahmen mögen zunächst den Eindruck des künstlichen erwecken. Erinnert man sich jedoch der enormen Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht in den Protuberanzen und der Chromosphäre, so erscheint es wohl denkbar, daß es zukünftigen Untersuchungen gelingen könnte, die anomale Geschwindigkeitsverteilung der Koronaelektronen dem angedeuteten Problemkreis einzufügen.

Neben den freien Elektronen müssen in der Korona soviel positive Ionen vorhanden sein, daß das ganze Gebilde elektrisch neutral wird. Man kann sich aber leicht überzeugen, daß deren Beitrag zur Lichtstreuung neben dem der Elektronen vernachlässigbar ist:

Die Streuung von *Protonen* kann man berechnen, indem man in (99,6) m durch die 1845mal größere Protonenmasse ersetzt; d. h. das Streuvermögen eines Protons ist $3,4 \cdot 10^6$ mal kleiner als das eines Elektrons.

Das Streuvermögen von Elektronen, die in Ionen oder Atomen gebunden sind, kann man nach Gl. (42,8—12) mit dem freier Elektronen vergleichen. Das erstere ist nämlich einfach um einen Faktor $(\omega/\omega_0)^4$ kleiner, wo ω die Kreisfrequenz der Strahlung und ω_0 eine mittlere Resonanzfrequenz des Ions bzw. Atoms bedeutet. Führen wir die entsprechenden Wellenlängen λ bzw. λ_0 ein so wird z. B. bei Streuung an H-Atomen λ_0 der Schwerpunkt der LYMAN-Serie ≈ 900 Å. Das heißt der Streukoeffizient eines H-Atoms ist z. B. bei λ 4000 etwa 400 mal kleiner als der eines freien Elektrons und für andere Atome und Ionen gilt qualitativ dasselbe.

Zusammenfassend können wir also feststellen, daß neben den Streuprozessen an freien Elektronen die an Protonen, Ionen und Atomen schon durch größenordnungsmäßige Abschätzungen ausgeschlossen sind¹.

Um die — von ihm als reell betrachteten — Differenzen zwischen berechnetem und beobachtetem Polarisationsgrad (Fig. 141) zu erklären, hat M. MINNAERT [1739] insbesondere für die innere Korona noch die Möglichkeit *thermischer Emission* in Betracht gezogen. Es ist jedoch kaum zu verstehen, wie diese Emission mit der von den Messungen geforderten Genauigkeit die spektrale Energieverteilung des Sonnenspektrums nachahmen kann. Insbesondere GROTRIANs Beobachtungen bei λ 3800 können so kaum erklärt werden. Aber auch vom Standpunkt der Theorie aus ist bei den in der Korona herrschenden Elektronendruck zu erwarten, daß der kontinuierliche Absorptionskoeffizient $\kappa \ll$ als der Streukoeffizient σ wird: In $3\frac{1}{2}$ Abstand von Sonnenrand hat man z. B. $\sim 7 \cdot 10^7$ Elektronen/cm³ und $P_e \sim 5 \cdot 10^{-5}$ Bar; für solche Drucke ist aber nach Tabelle 29 längst $\kappa \ll \sigma$.

Außerdem haben wir schon in Abschn. 97 nachgewiesen, daß bereits bei ~ 100 mal größeren Elektronendruck in den *Protuberanzen* die Streuung im Begriff steht, die Absorption zu überflügeln. Aus diesen Gründen möchte Verf. die *Annahme thermischer Emission in der Korona ablehnen*.

¹ Abgesehen davon wäre auch die λ^{-4} -Proportionalität des Streukoeffizienten (RAYLEIGH-BLAU!) von Atomen und Ionen mit den Koronabeobachtungen unverträglich.

Eine andere Möglichkeit der Deutung des Koronaspektrums hat W. GROTRIAN [1724] diskutiert. Den Ausgangspunkt seiner Überlegungen bildet die von ihm angegebene Zerlegung (99,15) in einen „kontinuierlichen“ Anteil I_K und einen fast ohne zusätzliche Verbreiterung gestreuten „FRAUNHOFER“-Anteil I_F . W. GROTRIAN nimmt nun an, daß der erstere Teil — wie schon besprochen — durch Streuung an rasch bewegten Elektronen entstehe, während der zweite durch *Streuung an Staubpartikelchen* zustande kommen soll. Das Fehlen einer Dopplerverbreiterung wird dadurch ohne weiteres verständlich. Um die λ -Unabhängigkeit der Streuung zu erklären, muß man noch voraussetzen, daß dieser kosmische Staub zum überwiegenden Teil aus Partikeln besteht, deren *Durchmesser* $> \lambda$ ist. (Teilchen, deren Durchmesser $\sim \lambda$ ist, streuen bekanntlich viel *stärker* und *wellenlängenabhängig*; so daß z. B. viele kosmische Dunkelwolken im Blau stärker absorbieren als im Rot. Vgl. auch Abschn. 42.) Solche groben Teilchen polarisieren das Streulicht nur noch sehr schwach. Nach GROTRIANS Hypothese müßte man also den in Fig. 141 aufgetragenen *berechneten*¹ Polarisationsgrad p mit $\frac{I_K}{I_F + I_K}$ nach (99,15) multiplizieren und dementsprechend die von manchen Beobachtern gefundene Abnahme des Polarisationsgrades in großen Höhen als reell betrachten. Als weiteres Argument für seine Hypothese führt GROTRIAN an, daß — allerdings mit erheblicher Extrapolation von beiden Seiten — ein Zusammenhang hergestellt werden kann zwischen der Helligkeit der *äußeren Korona* und des *inneren Zodiakallichtes* (nach Beobachtungen von C. HOFFMEISTER).

Auf der anderen Seite ist die Annahme kosmischen Staubes in unmittelbarer Nähe der Sonne nach H. N. RUSSELL [1772] schwerwiegenden physikalischen Bedenken ausgesetzt: Kleine meteoritische Eisenteilchen z. B. würden sich nämlich rasch auf eine Temperatur von $\sim 4000^\circ$ erhitzen und dann rapide verdampfen. GROTRIAN meint zwar, daß so eben die gewünschte feine Zerteilung bewirkt werden könnte, doch erscheint dem Verf. dieses Argument nicht sehr überzeugend.

Das Ergebnis der ganzen vorhergehenden Erörterungen über den Ursprung des *kontinuierlichen und FRAUNHOFER-Spektrums der Korona* können wir wohl dahingehend zusammenfassen, daß eine endgültige Entscheidung zwischen den vorgeschlagenen Theorien infolge der Unsicherheit der Polarisationsmessungen zur Zeit noch nicht möglich ist. Wägt man jedoch die Argumente pro und contra gegeneinander ab, so dürfte die Annahme thermischer Emission sehr unwahrscheinlich und die der Streuung an Meteorstaub nicht gerade überzeugend sein. Als wahrscheinlichste Erklärung bleibt also die SCHWARZSCHILDsche der *Streuung an freien Elektronen* mit den oben erörterten — physikalisch durchaus möglichen — *Zusatzannahmen* über deren Geschwindigkeitsverteilung.

D. Das Linienspektrum der Korona. Seit der Entdeckung der grünen Koronalinie $\lambda 5303$ im Jahre 1869 ist das auch heute noch nicht identifizierte *Linienspektrum der Korona* bei zahlreichen Finsternissen untersucht worden. Eine kritische Bearbeitung gaben 1918 W. W. CAMPBELL und J. H. MOORE [1709]². An neueren Finsternisbeobachtungen nennen wir C. R. DAVIDSON und F. J. M. STRATTON 1926 [1716] und W. GROTRIAN 1929 [1721].

Daneben sind — auch als Kunstwerk astrophysikalischer Beobachtungstechnik — besonders bemerkenswert die außerhalb von Finsternissen mit einem Spektrographen großer Dispersion bis $\lambda 10300$ ausgedehnten Messungen³ von

¹ Genauer müßte man p für die Intensitätsverteilung I_K *allein* berechnen. Die Zahlen würden dann mit h etwas stärker anwachsen, doch dürfte die Differenz nicht erheblich sein.

² Vgl. auch *Rev. Rowland, Table*, S. 226.

³ Auf die Messungen der *Breite* der Koronalinien werden wir unter E. eingehen.

B. LYOT [1734]. Eine Zusammenstellung dieser neueren *Wellenlängenmessungen* gibt die folgende Tabelle 76. Es sei noch erwähnt, daß H. D. und H. W. BABCOCK [1707] die grüne und rote Koronalinie am Tage in verhältnismäßig tiefen Schichten der Sonnenatmosphäre (höhere Chromosphäre bis tiefere Korona) erhielten. Sie messen λ 5503,15 (in guter Übereinstimmung mit älteren Messungen, aber 0,2 Å größer als das Mittel der neueren) und λ 6374,40. Daneben finden sie in den angegebenen Schichten als novum die grüne *Nordlichtlinie* mit λ 5577,37, welche bekanntlich einem verbotenen Übergang im OI-Spektrum entspricht — ein Ergebnis, das für die Deutung der Koronalinie von Bedeutung werden kann.

Brauchbare *photometrische Messungen an den Koronalinien* sind zuerst von W. GROTRIAN [1723] bei der Finsternis vom 9. Mai 1929 ausgeführt worden.

Um eine rationelle Intensitätseinheit zu erhalten, die zugleich praktisch mit genügender Genauigkeit realisierbar ist, geht GROTRIAN folgendermaßen vor (Fig. 142): Neben den Koronalinien beobachtet man ja stets das kontinuierliche Spektrum (FRAUNHOFER-Anteil jetzt inbegriffen). Man kann also die Gesamtintensität der Linie $\int I_{\lambda} d\lambda$ (d. h. die schräg schraffierte Fläche in Fig. 142) vergleichen mit der Intensität pro Ångström des Kontinuums und erhält so eine *Äquivalentbreite* A_{λ} (bei GROTRIAN $\Delta\lambda$ genannt), die man mit den in Abschn. 99A und Kap. II gegebenen Daten leicht in C.G.S.-Einheiten umrechnen kann. W. GROTRIAN (ebd.) konnte zunächst zeigen, daß im allgemeinen für den Bereich $h \approx 0,8$ bis $5'$ über dem Sonnenrand A_{λ} *unabhängig von der Höhe h* ist. Das heißt die Intensität der Koronalinien ändert sich proportional der des kontinuierlichen Spektrums. Nur dort, wo ein *Koronastrahl* den Spektrographenspalt überquert, erscheinen die *Linien* um größenordnungsmäßig 20% *verstärkt*, ohne daß das Kontinuum entsprechend zunimmt.

An Hand von Unterschieden hinsichtlich der Intensitätsabnahme mit wachsendem Abstand vom Sonnenrand sowie hinsichtlich des Verhaltens in Koronastrahlen haben C. R. DAVIDSON und F. J. M. STRATTON [1716], W. GROTRIAN [1723, mit eingehender Berücksichtigung der Literatur] u. a. versucht, die Koronalinien in *Gruppen* einzuteilen. Abgesehen davon, daß diese Versuche

Tabelle 76. Linienspektrum der Korona.

Wellenlänge in int. Å.U. Geschätzte Intensität in ()			Äquivalentbreite in Å nach GROTRIAN 1929
DAVIDSON-STRATTON 1926	GROTRIAN 1929	LYOT ohne Finsternis 1935	
	3328 (8)		0,7
3387,96 (20)	3388 (20)		11,1
3454,13 (5)	3454 (8)		1,4
3600,97 (9)	3601 (12)		1,1
3642,87 (3)	—		—
3800,77 (4)	3801 (1)		—
3986,88 (10)	3987,8 (5)		0,2
4086,29 (8)	4087,4 (6)		0,3
4231,4 (10)	4231,8 (8)		0,8
4311 (2)	4312 (1)		—
4359 (4)	4358,6 (1)		—
4567 (6)	4567,2 (3)		0,3
4586 (4)	—		—
5118 (2)	5116,5 (5)	—	1,2
5302,80 (20)	5302,9 (20)	5302,83 ± 0,02	27,5
5536 (2)	—	—	—
6374,8 (5)	6375,1 (6)	6374,50 ± 0,03	2,8
6703,36*	6704 ± 2 (4)	6701,73 ± 0,05	2,0
—	—	7891,6 ± 0,2	—

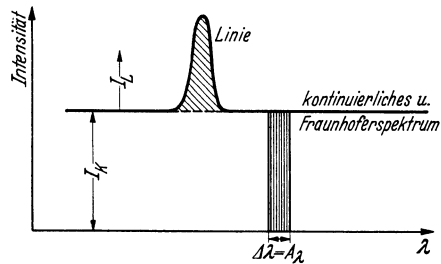


Fig. 142. Definition der Äquivalentbreite der Koronalinien nach W. GROTRIAN [1723].

* Observatory 53, 211 (1930).

bis jetzt zu *keinem* eindeutigen Ergebnis geführt *haben*, könnte man aus einer solchen Zuordnung — wie W. GROTRIAN bemerkt — keine sehr weitgehenden Schlüsse ziehen. Denn die Intensität einer Linie ist ja nicht nur durch die Häufigkeit der betreffenden Ionisationsstufe, sondern auch durch die — noch ziemlich unübersehbaren — Anregungsverhältnisse usw. bedingt.

Die von W. GROTRIAN (s. S. 449; Finsternis vom 9. Mai 1929) gemessenen *Äquivalentbreiten* A_λ der Koronalinien sind in Tabelle 76 mit aufgenommen. Nach Meinung der meisten Finsternisbeobachter variiert übrigens die relative und absolute Intensität der Koronalinien von Finsternis zu Finsternis und Stelle zu Stelle in der Korona. Irgendwelche quantitativen Angaben oder allgemeine Gesetzmäßigkeiten scheinen jedoch nicht vorzuliegen.

Welche Schlüsse dürfen wir nun aus den beschriebenen Beobachtungsergebnissen hinsichtlich des unbekanntes Trägers und Mechanismus der Korona-Linienemission ziehen?

Da die Koronamaterie sicher zum überwiegenden Teil ionisiert und — selbstverständlich — im ganzen elektrisch neutral ist, so dürfen wir aus der Proportionalität von Kontinuum und Linienemission schließen, daß die Linienemission einem Atomzustand zuzuordnen ist, dessen Konzentration *unabhängig* vom Druck in einem festen Verhältnis zu der der Elektronen steht¹. Es muß sich also um einen Ionisationszustand handeln, der in dem fraglichen Druckbereich *nicht* im Begriff steht, in die nächsthöhere oder — tiefere Ionisationsstufe überzugehen. Solche Ionisationsstufen — denen also praktisch *alle* Teilchen des betreffenden Elementes angehören — sind selbstverständlich *immer* relativ die stärksten und es ist also auch nicht verwunderlich, daß die starken Koronalinien einem solchen Ionisationszustand angehören.

Bekanntlich ist es bis jetzt trotz vielfacher Bemühungen nicht gelungen, die Koronalinien im Laboratorium zu erzeugen oder sie auf Grund theoretischer Betrachtungen mit einiger Sicherheit einem bestimmten Element zuzuordnen. Um so wichtiger ist daher, daß es im Oktober 1933 W. S. ADAMS und A. H. JOY [1701—02] gelang, diese Linien im Spektrum des Veränderlichen RS Ophiuchi zu entdecken.

Dieser merkwürdige Stern war im Jahre 1898 als *Nova Ophiuchi* Nr. 3 bis zu einer Helligkeit von 7^m.7 angewachsen und dann rasch auf seine Normalhelligkeit von 10^m.8 bis 11^m.8 zurückgekehrt. Am 15. August 1933 stieg seine Helligkeit abermals von 11^m.0 auf 6^m.4, der Stern gehört also, wie z. B. T Pyxidis, zu der seltenen Klasse der mehrmals aufflammenden Novae. Das Spektrum zeigte zunächst in Emission sehr breite BALMER-Linien, daneben schwach HeII und FeII. Ende August waren die Wasserstofflinien erheblich schwächer geworden; dagegen traten scharfe *Nebellinien* (verbotene Übergänge) auf, die offenbar einer den Stern umgebenden Hülle entstammten. Ungefähr parallelgehend zeigten sich breite (erlaubte) Linien von NII λ 4639 und HeII λ 4686; später auch neutrales He und FeII.

Am 2. Oktober 1933 erkannten nun ADAMS und JOY zum erstenmal die *Koronalinien* λ 5303 und 6374. Bald darauf konnten alle stärkeren Koronalinien des untersuchten Spektralbereiches festgestellt werden, nämlich λ 3987, 4086, 4231 und 6374 vergesellschaftet mit Wasserstoff, HeI und HeII 4686 (was sehr an Chromosphären- bzw. Koronaverhältnisse erinnert!). Die — wohl durch Dopplereffekt verursachte — *Struktur* der Koronalinie λ 5303 ist nach ADAMS und JOY sehr ähnlich der der HeII-Linie λ 4686.

¹ Die Variation der Beleuchtungsfunktion $J(r)$ darf nach (99,10) in dem von GROTRIAN untersuchten Bereich $h \approx 0,8$ bis $5'$ gegenüber der von $N(r)$ vernachlässigt werden. Dasselbe dürfte wohl auch für die — noch unbekannte — Anregungsfunktion der Linien einigermaßen zutreffen.

Als der Stern im April 1934 wieder beobachtet werden konnte, stellten ADAMS und JOY fest, daß die Koronalinien verschwunden waren. Das kontinuierliche Spektrum hatte erheblich an Intensität gewonnen. Ihm überlagerten sich erlaubte und verbotene Emissionslinien von FeII; daneben sehr hell die BALMER-Linien, mäßig stark die He-Linien und ziemlich ausgeprägt HeII 4686. Außerdem zeigten sich die grünen Nebellinien und einige WOLF-RAYET-Bänder.

Blicken wir nochmals auf die gesamten Beobachtungen an RS Ophiuchi und der Sonnenkorona zurück, so erscheint die Annahme plausibel, daß die Koronalinien von Atomzuständen aus emittiert werden, deren *Anregungs + Ionisierungsspannung ungefähr zwischen der der He- und He⁺-Linien liegt*.

Ob es sich um *erlaubte* oder — wie bei den Nebellinien — um *verbotene* Übergänge handelt, ist noch nicht zu entscheiden. Die in der Korona herrschenden Drucke würden für die zweite Annahme kein Hindernis bedeuten. Um die Entvölkerung eines metastabilen Zustandes durch Strahlungsübergänge zu „verhindern“, müßte der betreffende Term jedoch von dem nächsthöheren damit kombinierenden mindestens ~ 4 V entfernt sein. Aus den von W. GROTRIAN (s. S. 449) gemessenen *Absolutintensitäten* der Koronalinien kann man weiterhin schließen, daß diese, *wenn* es sich um verbotene Übergänge handelt, höchstens einige Volt *Anregungsspannung* haben können. (Handelt es sich dagegen um erlaubte Übergänge, so sind höhere Anregungsspannungen anzunehmen.)

Diese Aussagen sind — notgedrungen — noch sehr allgemeiner Art. Auf die in der Literatur aufgetretenen konkreten Vorschläge einzugehen, dürfte jedoch — aus leicht ersichtlichen Gründen — ziemlich überflüssig sein. Vielleicht verlohnte es sich, das von A. H. ROSENTHAL [1768] zur Deutung der Koronalinien herangezogene Spektrum des *doppelt angeregten Heliums* im LYMAN-Gebiet aufzusuchen. Selbst wenn dabei die Terme des Koronaspektrums nicht gefunden werden, so dürfte eine solche Untersuchung doch eine Bereicherung unserer „zoologischen“ Kenntnisse bringen.

E. Bewegungszustand und Dynamik der Sonnenkorona. Bei der Finsternis vom 21. Sept. 1922 hat J. H. MOORE [1744] im Spektrum der äußeren Korona eine *Rotverschiebung der FRAUNHOFER-Linien* beobachtet, die — als *Dopplereffekt* aufgefaßt — in 20' Höhe über dem Sonnenrand + 26 km/sek entsprach. Die Finsternis vom 31. Aug. 1932 brachte [1745] eine Bestätigung dieser Entdeckung: In 10' Höhe ergaben sich + 21,5 km/sek, in 20' der nach MOORE wahrscheinlich durch terrestrisches Streulicht verkleinerte Wert von $\sim + 15$ km/sek.

Da das Spektrum der äußeren Korona aus photosphärischem Licht besteht, das vorwiegend unter $\sim 90^\circ$, teilweise aber auch unter kleineren oder größeren Winkeln gestreut wird, so dürfen wir mit J. H. MOORE seine Beobachtungen dahingehend interpretieren, daß die Materie der Korona in 10—20' Höhe mit ~ 30 km/sek *auswärts strömt*.

Weitere Information über die Bewegungsverhältnisse in der Korona geben uns die von B. LYOT [1734] am hellen Tage mit großer Dispersion ausgeführten Messungen der *Intensitätsverteilung in den Koronalinien* $\lambda\lambda$ 5503, 6374 und 6702. Die von LYOT (ebd.) angegebenen „*Äquivalentbreiten*“ A_λ kennzeichnen¹ die *Breite*, welche ein Spektralstreifen haben müßte, wenn seine Intensität gleich der Maximalintensität in der Linie und seine „*Fläche*“ gleich der Gesamtemission der Linie wäre, d. h. $A_\lambda \cdot I_{\max} = \int I_\lambda d\lambda$. Nehmen wir an, die Intensitätsverteilung in der Linie werde durch eine Fehlerkurve $I_\lambda \sim e^{-\left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_D}\right)^2}$ dargestellt, so wäre also $\Delta\lambda_D = A_\lambda/\sqrt{\pi}$. Da irgendwelche sonstigen Verbreiterungsursachen für die Korona kaum in Frage kommen, so dürfen wir $\Delta\lambda_D$ auf Dopplereffekt zurückführen und erhalten für die mittlere Geschwindigkeitskomponente ξ_0 in der

¹ Eine Verwechslung mit der oben angegebenen Definition von W. GROTRIAN ist kaum zu befürchten.

Sehlinie (definiert im Sinne von Abschn. 43)

$$\xi_0 = c \frac{\Delta \lambda_D}{\lambda} = \frac{c}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{A_\lambda}{\lambda}. \quad (99,16)$$

B. LYOT'S Messungen führen so auf folgende *Geschwindigkeiten* ξ_0 für die *innere Korona*:

Linie:	λ 5303	6374	6702 Å	}	(99,17)
Äquivalentbreite A_λ :	0,80	0,97	1,07 Å		
Geschwindigkeit ξ_0 :	25,5	25,7	23,0 km/sek .		

Über die *makroskopischen Geschwindigkeiten* der Koronastrahlen und ähnlicher markanter Details im Bilde der Korona hat man Aufschluß zu gewinnen versucht durch Vergleich von Aufnahmen, die am Anfang und Ende der Totalitätszone gemacht waren. Da die hierbei verfügbaren Zeitintervalle notgedrungen klein sind, so ließen sich auf diese Weise keine sehr weitgehenden Ergebnisse erzielen.

Die ohne Finsternis ausgeführten *Koronabeobachtungen* von B. LYOT [1657] zeigen mit Sicherheit, daß sowohl die großen Züge des Koronabildes wie auch feinere Details eine *Lebensdauer* in der Größenordnung von *Tagen* haben. Ihre makroskopischen Geschwindigkeiten sind also sicher nicht wesentlich größer als ~ 1 Sonnenradius pro Tag, d. h. $\lesssim 8$ km/sek.

Indem wir uns dem *Problem der physikalischen Deutung der Bewegungen und der Struktur der Korona* zuwenden, möchten wir zunächst nochmals auf die enge Verwandtschaft der Korona mit den sog. *ruhenden Protuberanzen* und den *höheren Chromosphärenschichten* hinweisen.

Schon früher machten wir mit W. J. S. LOCKYER [1654] auf das gleichartige Verhalten von Korona- und Protuberanzenaktivität im *Rahmen des Sonnenfleckenzyklus* aufmerksam.

Sodann erinnert die *faserige Struktur* der inneren Korona sehr an die der Chromosphäre; eine Ähnlichkeit, die noch deutlicher in Erscheinung tritt, wenn man die Höhe der Strukturen in Beziehung setzt zu dem entsprechenden Dichtegradienten.

Weiterhin schließen sich die von B. LYOT gemessenen *Geschwindigkeiten* $\xi_0 \approx 25$ km/sek nach (99,17) stetig an die in Tabelle 74 für die höheren Chromosphärenschichten angegebenen Werte an.

Und endlich liegen die Geschwindigkeiten der makroskopischen Bewegungen und die von MOORE gemessene Auswärtsbewegung der Korona durchaus in der für die „ruhenden“ bis mäßig bewegten Protuberanzen gefundenen Größenordnung.

Nach alledem kann man sich kaum dem Schluß entziehen, daß die *Korona nichts anderes darstellt als eine extreme Ausprägung der schon in der hohen Chromosphäre und bei den ruhenden Protuberanzen angedeuteten Phänomene*.

Aber wie kommt nun die enorme räumliche Ausdehnung der Korona (vgl. Fig. 139) zustande? Jeder Versuch, eine detaillierte Theorie der *Dichteverteilung* in der Korona zu entwerfen, ehe wir über die Dynamik der Protuberanzen genauer informiert sind, erscheint dem Verf. als verfrühte Spekulation.

Dagegen wollen wir im Anschluß an eine Note von A. S. EDDINGTON [1720] wenigstens in groben Zügen überlegen, zu welchen Konsequenzen die naheliegende Hypothese führt, daß die *Korona durch Strahlungsdruck*¹ *getragen* wird:

¹ S. ROSSELAND [1769] hat in einer interessanten Arbeit die Annahme verfolgt, daß die Korona durch einen Strom geladener Partikel getragen werde.

Über 1 cm^2 der Sonnenoberfläche befinden sich — wie man nach Tabelle 75 leicht ausrechnet¹ — in der Korona etwa

$$N^* = \int_{r=1}^{\infty} N(r) dr \approx 4 \cdot 10^{18} \text{ Elektronen.} \quad (99,18)$$

Nehmen wir an, daß zu jedem Elektron eine Masse von ~ 1 Atomgewichtseinheit gehöre, so ist die Wirkung der Schwerkraft auf diese Säule

$$N^* \cdot m_H \cdot g \approx 0,32 \text{ dyn/cm}^2. \quad (99,19)$$

Diese Kraft/cm² soll nun voraussetzungsgemäß kompensiert werden durch den *Strahlungsdruck*. Bezeichnen wir den in der Korona absorbierten Teil des Gesamtstrahlungsstromes mit πF^* , so ist der pro cm² und sek übertragene Impuls und damit die Kraft/cm² bekanntlich gleich $\frac{\pi F^*}{c}$. Setzt man diesen Ausdruck = $0,32 \text{ dyn/cm}^2$, so erhält man

$$\pi F^* \approx 0,96 \cdot 10^{10} \text{ erg/cm}^2 \text{ sek.} \quad (99,20)$$

Dies ist aber 6,4-te *Teil des gesamten Strahlungsstromes* πF der Sonne, der nach (12,4) $6,13 \cdot 10^{10} \text{ erg/cm}^2 \text{ sek}$ beträgt!

Wie könnte nun aber eine so enorme Strahlungsabsorption in der Korona zustande kommen? Eine einfache Überschlagsrechnung zeigt zunächst, daß die Elektronenstreuung in diesem Zusammenhang völlig bedeutungslos ist. Wir müssen vielmehr auf die schon im Zusammenhang mit der Erklärung der Protuberanzen vorgeschlagene Hypothese zurückkommen, daß insbesondere die „aktiven“ Stellen der Sonnenoberfläche im LYMAN-Gebiet eine gewaltige Extramission geben, die dann an irgendwelchen kurzwelligen Seriegrenzkontinua angreifen kann. Nehmen wir an, daß die Energiemenge (99,20) im Spektralgebiet $0-1000 \text{ \AA}$ emittiert werde, so kommen wir auf ein mittleres $F_\lambda = 30 \cdot 10^{13}$ C.G.S.-Einheiten. Die Energieverteilungskurve (Fig. 23) müßte also im LYMAN-Gebiet *wieder erheblich ansteigen* bis zu einer Höhe, die fast dem Maximum bei $\lambda 4300$ entspricht.

Eine derartige Annahme ist nach Meinung des Verf. nicht so phantastisch, wie sie auf den ersten Blick erscheinen mag. Einmal führte uns die Betrachtung der Anregungsfunktion (Fig. 137) für das Protuberanzenspektrum auf Abweichungen von der thermischen Gleichgewichtsstrahlung, die schon in eine ähnliche Größenordnung fallen. Sodann weist — wie wir schon bemerkten — die Korrelation zwischen „Wasserstofferuptionen“ auf der Sonne und Radiofadings, d. h. Ionisationsschwankungen der Heavisideschicht, in dieselbe Richtung. Auf den naheliegenden *Einwand*, daß die angenommenen Stellen mit verstärkter Strahlung im LYMAN-Gebiet sich auch im zugänglichen Spektralbereich bemerkbar machen müßten, sind wir schon am Ende von Abschn. 97 eingegangen und konnten zeigen, daß er nicht unbedingt stichhaltig ist.

Noch nicht endgültig ist — vom Standpunkt der Theorie aus — die Frage zu beantworten, worin nun eigentlich der *Unterschied* zwischen einem *Koronastrahl* und einer *Protuberanz* besteht. Verf. möchte annehmen, daß in der Korona — infolge stärkerer Ionisation — wohl ein kurzwelligeres Seriegrenzkontinuum (evtl. auch mehrere) *die* Rolle übernimmt, die in unserer Theorie der Protuberanzen und der höheren Chromosphärenschichten versuchsweise dem LYMAN-Kontinuum des Wasserstoffes zgedacht war. Die Schichtung höhere Chromosphäre—Korona wäre dann also im Prinzip ähnlich zu verstehen, wie nach I. S. BOWEN die der planetarischen Nebel. Eine einigermaßen sichere Behandlung unserer Frage dürfte aber wohl erst möglich sein, wenn einmal die Deutung des Linienspektrums der Korona gelungen ist.

¹ Für diese Überschlagsrechnung genügt es, unser Problem als *eben* zu betrachten.

100. Interpretation von Spektroheliogrammen.

Nahezu das gesamte *spektroheliographische Beobachtungsmaterial* ist in drei großen Publikationen bequem zugänglich:

Die seit der Erfindung des Spektroheliographen (1889) am Yerkes Observatorium gewonnenen Ergebnisse haben G. E. HALE und F. ELLERMANN [1725] im Jahr 1903 veröffentlicht.

1908 hat dann H. DESLANDRES in Meudon in instrumenteller Hinsicht wesentliche Fortschritte erzielt durch Vergrößerung der Dispersion und Anwendung doppelter spektraler Zerlegung. So konnten engbegrenzte Teile der FRAUNHOFERSCHEN Linien von nur $\sim 0,04 \text{ \AA}$ Breite isoliert werden. Seine mit diesem und anderen Instrumenten angestellten Beobachtungen hat H. DESLANDRES [1718] im Jahre 1910 zusammenfassend dargestellt.

Wenn auch G. E. HALE und H. DESLANDRES aus ihren Beobachtungen, die sich in der Hauptsache auf die *Ca⁺- und Wasserstofflinien* beschränkten, schon viele richtige Schlüsse ziehen konnten, so wurde es in neuerer Zeit doch immer deutlicher, daß ein tieferes Verständnis der Spektroheliogramme noch zweierlei Untersuchungen voraussetzte: Einmal eine Verknüpfung der an verschiedenen Zonen der Linien gewonnenen spektroheliographischen Ergebnisse mit dem Studium ihrer *Konturen* und sodann eine Ausdehnung der Beobachtungen auf *Metallinien* verschiedener Stärke. Beide Aufgaben hat 1930 L. D'AZAMBUJA [1705] mit Hilfe des großen Spektroheliographen der Sternwarte Meudon in hervorragender Weise gelöst.

Auf die Wiedergabe von Spektroheliogrammen möchte Verf. mit Rücksicht auf die Kosten dieses Buches verzichten. Die wichtigsten Typen sind in allen Lehr- und Handbüchern zu finden. Wer tiefer in den Gegenstand eindringen will, möge nicht versäumen, die schönen Reproduktionen bei HALE, DESLANDRES und insbesondere D'AZAMBUJA [1705] einer eingehenden Betrachtung zu unterziehen.

A. Die Ca⁺-Linien H und K; λ 3968/33. In den *H- und K-Linien* des Sonnenspektrums lassen sich bei großer Dispersion (vgl. die schematische Fig. 143)

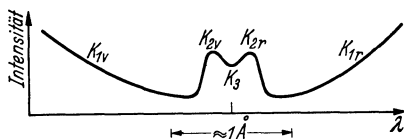


Fig. 143. Intensitätsverteilung im inneren Teil der Ca⁺ K-Linie (schematisch).

folgende für das Verständnis der „Kalzium-Spektroheliogramme“ wichtige Details erkennen: Geht man von den Flügeln der breiten sog. *K₁-Linie*¹ nach der Linienmitte zu, so stößt man zunächst auf zwei *Emissionen* *K_{2v}* bzw. *K_{2r}* (*v* und *r* bezeichnen die violette bzw. rote Seite der Linie). Die Maxima dieser Emissionen erheben sich

im integrierten Sonnenlicht nur um einige Prozent über die sie gegen *K_{1v}* bzw. gegen *K_{1r}* abgrenzenden Minima. Im Lichte der Fackeln z. B. dagegen wächst die Intensität von *K_{2v}* und *K_{2r}* erheblich an. Die beiden Komponenten der *K₂-Emission* werden getrennt durch die sog. *K₃-Absorption* mit $\sim 0,4 \text{ \AA}$ (ganzer) Halbwertsbreite.

Nimmt man *Spektroheliogramme* mit den *äußeren Teilen der K₁-Flügel* auf, so unterscheiden sich diese naturgemäß kaum von gewöhnlichen Sonnenaufnahmen. Man erkennt in erster Linie die Flecken und auf den äußeren Teilen der Sonnenscheibe die Fackeln.

Wird nun der zweite Spalt des Spektroheliographen nach *K₂*, d. h. der Linienmitte hin verschoben, so gehen in den Spektroheliogrammen folgende Veränderungen vor sich: Die hellen Fackelgebiete in der Umgebung der Fleckengruppen erscheinen verstärkt und treten nicht nur am Sonnenrand, sondern auch in der Mitte der Sonnenscheibe auf. Ihre Ausdehnung nimmt allseitig zu, so daß auf den *K₂-Bildern* die Penumbra der Flecke meist überdeckt wird.

¹ Für die *H-Linie* gilt stets entsprechendes.

Weiterhin erscheint auf der ganzen Sonnenscheibe ein Netz ziemlich unregelmäßig verteilter heller Stellen. G. E. HALE nennt alle diese hellen Gebilde (*Kalzium-*) *Flocculi*, während H. DESLANDRES unter „*réseau de flocculi*“ nur die auf der ganzen Sonnenscheibe verstreuten Gebilde versteht und die größeren hellen Flächen in der Umgebung der Flecke entsprechend ihrem Zusammenhang mit den Fackeln als „*Fackelflächen*“ (*plages faculaires*) bezeichnet. Wir werden uns diesen exakteren Definitionen anschließen.

Rückt man endlich den monochromasierenden Spalt des Spektroheliographen in die Mitte der K -Linie, d. h.¹ in K_3 , so erhält man das Netz der *Flocculi* noch ausgeprägter und die Fackelflächen überdecken meist sogar die Umbren der Sonnenflecke. Weiterhin aber erscheinen neu — als ausschließlich dem K_3 -Bild zugehörig — langgestreckte dunkle Gebilde, die sich wie gigantische Würmer über die Sonnenoberfläche ausdehnen. HALE bezeichnete sie zunächst als „dunkle *Flocculi*“, EVERSHERD spricht von „dark markings“, DESLANDRES von „*filaments*“. Am Sonnenrand geben sie, wie schon in Abschn. 97 gezeigt wurde, ihre wahre Natur zu erkennen: Sie sind nichts anderes, als in Absorption beobachtete *Protuberanzen*.

Außer den beschriebenen Gebilden glaubt H. DESLANDRES [1718] auf K_{23} - und noch besser auf reinen K_3 -Aufnahmen ein Netz von sog. „*alignements*“ zu erkennen. Es handelt sich dabei nur um schwache dunkle Linien, die vielfach die Verlängerung eines *Filamentes* bilden, häufig aber auch selbständig auftreten. Sie erstrecken sich oft über die ganze jeweils sichtbare Sonnenhälfte und überziehen diese wie ein Netz. Soweit es sich nicht einfach um schwache *Filamente* handelt, möchte Verf. die *alignements* auf ein *physiologisch-optisches Phänomen* zurückführen, das A. KÜHL [1731] seinerzeit zur Deutung der Marskanäle herangezogen hat: Sind auf einer Fläche helle und dunkle Stellen (*Flocculi*) regellos verteilt, so hat das Auge die Tendenz, diese in Linien zu „ordnen“, die meist an irgendwelche hervorsteckenden Punkte „angeschlossen“ werden. Als solche dienen bei DESLANDRES zum Teil offenbar die *Filamente*, zum Teil auch — wie die l. c. wiedergegebenen Zeichnungen vermuten lassen — helle *plages faculaires*.

Wie sind nun die im vorhergehenden kurz zusammengefaßten Beobachtungsergebnisse zu deuten? Schon zu Beginn ihrer Untersuchungen haben G. E. HALE und H. DESLANDRES richtig bemerkt, daß das K_1 -Bild einer verhältnismäßig tiefen, das K_2 -Bild einer höheren und endlich das K_3 -Bild der höchsten *Schicht der Sonnenatmosphäre* zuzuordnen ist. Dieses Abnehmen der (geometrischen) Dicke der wirksamen Schicht mit Annäherung an die Linienmitte erscheint sofort verständlich, wenn man bedenkt, daß zur Ausstrahlung in einer Frequenz ν nur die Schichten von $\tau_\nu = 0$ bis $\tau_\nu \sim 1$ wesentlich beitragen ($\tau_\nu =$ optische Tiefe für die kontinuierliche und selektive Absorption + Streuung bei der Frequenz ν). Da die Koeffizienten für selektive Absorption und Streuung nach der Linienmitte zu rasch anwachsen, so nimmt die z. B. zu $\tau_\nu = 0,5$ gehörende geometrische Tiefe entsprechend ab und die empirisch gefundene Gesetzmäßigkeit erscheint leicht erklärbar.

HALE und DESLANDRES berufen sich (ebd.) weiterhin auf das Verhalten der H - und K -Linien in der Chromosphäre. Der Zusammenhang zwischen den FRAUNHOFERSchen Absorptionslinien und den chromosphärischen Emissionslinien ist jedoch, wie wir sahen, ein recht verwickelter. Das in der Literatur vielfach übliche, meines Erachtens allzu schematische Operieren mit „*Höhen*“ in der Sonnenatmosphäre muß man also mit der nötigen Kritik betrachten.

Daß die *Protuberanzen* nur im K_3 -Bild und dort in *Absorption* erscheinen, bedarf kaum eines weiteren Kommentars. Die letztere Tatsache erhärtet den schon aus der Wachstumskurve für die Emissionslinien der *Protuberanzen* am \odot -Rand gezogenen Schluß, daß die relative Verteilung der Ca^+ -Atome auf die

¹ Reicht das Auflösungsvermögen des Spektroheliographen nicht aus, um K_2 und K_3 zu trennen, so spricht man nach DESLANDRES von K_{23} -Bildern. Sie vereinigen die Hauptzüge von K_2 mit Andeutungen von K_3 ; z. B. zeigen sie nur die stärkeren *Filamente*.

an der Bildung der H - und K -Linien beteiligten Atomzustände¹ durch eine Temperatur dargestellt wird, welche nicht größer ist, als die Grenztemperatur T_0 der Sonne.

Wie aber sind nun die Charakteristika der K_2 -Bilder zu verstehen? Erinnern wir uns zunächst an die in Abschn. 91 gefundene Temperaturschichtung der Fackelgebiete! Durch die Annahme, daß in den Fackeln die obersten Schichten der Sonne wärmer, die tieferen Schichten dagegen kühler sind, als normalerweise², konnten wir erklären, daß die Fackeln bei Beobachtung im kontinuierlichen Spektrum nur am Sonnenrand deutlich zu erkennen sind, während ihr Kontrast gegen die Umgebung nach der Sonnenmitte zu kleiner wird. Im ersteren Fall nämlich bekommen wir nur die verstärkte Strahlung der höheren Schichten, im letzteren wird diese kompensiert durch das Defizit der tieferen Schichten. Beobachtet man nun im K_2 -Licht, so bekommt man auf der *ganzen* Sonnenscheibe *nur* Strahlung aus der oberen Schicht, so daß die Fackeln auch in der Sonnenmitte zur Geltung kommen. Daß die Fackelflächen wesentlich ausgedehnter sind als die im kontinuierlichen Licht beobachteten Fackeln, läßt sich zwanglos dahingehend interpretieren, daß in K_2 die hohen und heißen Schichten am exklusivsten zur Geltung kommen.

Es dürfte lehrreich sein, dieselbe Überlegung noch vom Standpunkt der *Theorie der Restintensität* aus zu beleuchten. Diese ist nach Kap. XII zunächst proportional der KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion für die Sonnenoberfläche (d. h. $\tau_v < 0,5$) und wir haben bis jetzt nur diesen Faktor beachtet. Daneben wächst die Restintensität aber auch mit dem von κ_v/σ_v in der Linienmitte angenommenen Grenzwert. Dieser wächst nun nach Abschn. 74 seinerseits mit der Zahl der Absorptionsprozesse, welche den höheren Quantenzustand der betrachteten Linien entvölkern, also — grob ausgedrückt — ebenfalls mit der Temperatur. Da dieser „ κ_v/σ_v -Effekt“ stets in derselben Richtung wirkt, wie der zuerst diskutierte, so könnten die beiden nur durch eingehende photometrische Messungen getrennt werden.

Nach der Theorie der Restintensität — Gl. (65,42)— sollte diese für Linien wie H und K , in deren Mitte $\kappa_v/\sigma_v \ll 1$ ist, dem bekannten $1 + \frac{3}{2} \cos \vartheta$ -Randverdunkelungsgesetz folgen. Das heißt die K_2 -Spektroheliogramme müßten eine erheblich schwächere Randverdunkelung zeigen, als Aufnahmen, die mit dem kontinuierlichen Spektrum *neben* der K -Linie gemacht sind. Die Beobachtungen scheinen diese Erwartung qualitativ zu bestätigen; Messungen liegen noch nicht vor.

Die im K_2 -Licht beobachteten *Flocculi* lösen sich bei günstigen Beobachtungsverhältnissen in ein Gewirr feinsten Details ($\sim 1''$) auf. Man darf wohl annehmen, daß diese im wesentlichen ein Bild der — mit der photosphärischen *Granulation* verknüpften — Temperaturschwankungen in der obersten Schicht der Sonne geben. Auf den meisten Aufnahmen scheint zwar das Netz der *Flocculi* viel größer zu sein als man es z. B. nach den JANSSENSchen Granulationsaufnahmen erwarten würde. Aber diese Schwierigkeit läßt sich durch den Hinweis auf eine ganz alltägliche Beobachtung beheben: Betrachtet man z. B. einen grasbewachsenen Platz aus großer Entfernung, so sieht man eine Struktur, die den Dimensionen der einzelnen Grasbüschel entspricht. Tritt man dagegen näher, so drängt sich die durch die einzelnen Halme gegebene Struktur in den Vordergrund.

¹ Dasselbe gilt (s. u.) für die höheren Quantenzustände des Wasserstoffes.

² Wie wir mehrfach bemerkten, ist das *Zustandekommen* dieser Temperaturschichtung in thermodynamischer Hinsicht noch nicht geklärt. In diesem Kapitel können wir sie einfach als gegeben betrachten.

Damit ist das Aussehen der K_2 -Spektroheliogramme in den Grundzügen erklärt. Wie vollzieht sich nun der Übergang durch K_1 zu dem im kontinuierlichen Spektrum beobachteten Bild?

Zunächst einmal macht sich der in K_2 wirksame „Restintensitätseffekt“ noch ein Stück weit in die Linienflügel hinaus geltend. Sodann aber überlagert sich eine zweite Wirkung, die wir als Häufigkeitseffekt bezeichnen wollen: In den Fackeln und in geringem Maß auch in den Fackelflächen und Flocculi wird nämlich infolge der höheren Temperatur der Ionisationszustand des Ca^+ sich ändern. Infolgedessen ändert sich auch die „Anzahl NH der Ca^+ -Atome über 1 cm^2 der Sonnenoberfläche“ und damit die Breite der H - und K -Linien. Wo diese schmaler werden, zeigt nun ein K_1 -Spektroheliogramm Aufhellung, wo sie breiter werden, Dunkelheit. Gerade für die H_1 - und K_1 -Bilder ist zur Zeit mangels der nötigen photometrischen Unterlagen eine *Trennung* des Restintensitäts- vom Häufigkeitseffekt noch nicht möglich. Wir werden aber später sehen, daß sie für die übrigen Metalllinien dank den Untersuchungen von D'AZAMBUJA ziemlich zwangsläufig vorgenommen werden kann.

B. Die Wasserstofflinien H_α , H_β , H_γ , ... Betrachten wir zunächst die H_α -Spektroheliogramme und ihre Veränderungen, wenn wir von der Linienmitte nach außen gehen.

Trotzdem die *Kontur der H_α -Linie* keine Emission erkennen läßt, ist es zweckmäßig, sie — entsprechend dem verschiedenen Aussehen der Spektroheliogramme — in drei Gebiete einzuteilen: Nach L. D'AZAMBUJA (s. S. 454) bezeichnen wir die Mitte als $H_{\alpha 3}$; $\sim 0,25 \text{ \AA}$ nach außen kommen $H_{\alpha 2}$ bzw. γ und in $\sim 0,5 \text{ \AA}$ Abstand von der Linienmitte $H_{\alpha 1}$.

Die $H_{\alpha 3}$ -Spektroheliogramme zeigen wie die K_2 -Bilder auf das schönste die Filamente = Protuberanzen. Die hellen Fackelflächen dagegen sind lange nicht so ausgedehnt, wie auf den Kalziumbildern. Nur deren hellste Teile sind deutlich wiederzuerkennen. Den Untergrund der $H_{\alpha 3}$ -Aufnahmen bildet eine schwache und feine Art von „Granulation“, die sich erst auf den

$H_{\alpha 2}$ -Spektroheliogrammen ($\Delta\lambda = 0,25 \text{ \AA}$) voll entfaltet. In der Umgebung der Flecke zeigen die Elemente dieser Granulation öfters eine wirbelartige Anordnung, die berühmten *Solar Vortices* von G. E. HALE. Wie wir schon bemerkten, läßt sich die ursprüngliche Vermutung einer Verknüpfung dieser Gebilde mit den Magnetfeldern der Flecke sicher nicht aufrecht erhalten. Es handelt sich vielmehr wahrscheinlich um kleine Protuberanzen, die von den Sonnenflecken angezogen werden und — wegen der Corioliskraft — auf gekrümmten Bahnen diesen zuströmen. Die Filamente sind auch auf den $H_{\alpha 2}$ -Bildern noch gut erkennbar und verschwinden mit der Granulation erst auf den

$H_{\alpha 1}$ -Spektroheliogrammen ($\Delta\lambda = 0,5 \text{ \AA}$). Diese bieten dafür ein zunächst sehr überraschendes Bild: Die Flocculi und Fackelflächen, welche sich auf den Kalziumspektroheliogrammen hell vom dunkleren Untergrund abheben, erscheinen nämlich im $H_{\alpha 1}$ -Licht *dunkel* auf hellem Grund.

Geht man zu den *höheren Gliedern der BALMER-Serie* H_β , H_γ , H_δ ... über, so ändert sich vor allem der Charakter der mit den *Mitten der Linien* aufgenommenen Spektroheliogramme. Schon bei H_β treten die hellen Fackelflächen und Flocculi zurück und verschwinden bei H_δ vollständig. Damit parallelgehend erscheinen immer stärker auch im Licht der *Linienmitte* die *dunklen Wasserstoffflocculi*. Die mit den *äußeren* Teilen von H_β ... aufgenommenen Spektroheliogramme unterscheiden sich wenig von den entsprechenden H_α -Bildern. Zusammenfassend kann man also das Verhalten von H_β , H_γ , ... auch dahingehend beschreiben, daß jede Stelle in einer dieser Linien sich analog einer weiter außen belegenen Stelle in H_α verhält.

Die *Randverdunkelung* der Wasserstoffspektroheliogramme nimmt nach D'AZAMBUJA (s. S. 454) wie die der Kalziumbilder ab, wenn man näher an die *Mitte* der betreffenden Linien herangeht. Weiterhin scheint die Randverdunkelung für Linienmitte in der Reihenfolge $H_\alpha, H_\beta \dots$ zuzunehmen. Eine photometrische Untersuchung dieser für die Deutung der Wasserstoffspektroheliogramme wichtigen Effekte wäre sehr zu wünschen.

Nun zur *Deutung der Wasserstoffspektroheliogramme!*

Daß die *Filamente* nicht nur auf den $H_{\alpha 3}$ -Bildern, sondern auch in fast derselben Stärke auf den $H_{\alpha 2}$ -Spektroheliogrammen ($0,25 \text{ \AA}$ von der Linienmitte) zu erkennen sind, erklärt sich in trivialer Weise durch die große *Dopplerbreite* $\Delta\lambda_D \approx 0,2 \text{ \AA}$ der H_α -Linie.

Die hellen Kämme der *Fackelflächen auf den $H_{\alpha 3}$ -Aufnahmen* dürften in derselben Weise zu verstehen sein, wie die der K_2 -Bilder: Infolge der Überhitzung der obersten Atmosphärenschichten steigt die *Restintensität* der Linie. Da in H_α wie wir seinerzeit zeigten, der Limes von κ_ν/σ_ν für die Linienmitte nicht mehr — wie in den H - und K -Linien — $\ll 1$ ist, so wird die Restintensität, nahezu unabhängig von κ_ν/σ_ν und gleich der KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion der höchsten Atmosphärenschichten sein. Wir können also mit ziemlicher Sicherheit sagen, daß das Steigen der Restintensität von H_α in erster Linie durch das Anwachsen der KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion bedingt ist.

Die Tatsache, daß in der Mitte der H_α -Linie κ_ν/σ_ν nicht $\ll 1$ wird, erklärt in Verbindung mit der Theorie der Restintensität auch zwanglos die Abnahme der *Randverdunkelung* in der Reihenfolge $H_{\alpha 1}, H_{\alpha 2}, H_{\alpha 3}$.

Lassen wir sodann die $H_{\alpha 2}$ -Aufnahmen zunächst beiseite und versuchen die Deutung der $H_{\alpha 1}$ -Bilder ($0,5 \text{ \AA}$ von Linienmitte): Schon H. DESLANDRES hat (s. S. 454) beobachtet, daß überall dort in den Fackelflächen und den Flocculi, wo die K_2 -Emission verstärkt erscheint, die H_α -Linie breiter wird. Eine solche Verbreiterung wird nun auf dem Spektroheliogramm als *Helligkeitsabnahme* in Erscheinung treten und zwar cet. par. desto stärker, je steiler die Linienkontur an der benützten Stelle verläuft. Da nach den Messungen von MINNAERT, ALLEN u. a. die steilste Stelle der H_α -Kontur etwa $0,4 \text{ \AA}$ von der Linienmitte entfernt ist, so wird es leicht verständlich, daß in dieser Zone der Linie die *dunklen* Fackelflächen und Flocculi am deutlichsten hervortreten. Daß die H_α -Linie in den Fackelgebieten usw. breiter wird, dürfte durch die verstärkte Anregung (BOLTZMANN-Faktor!) vollständig erklärt sein.

Während die vorstehende Deutung der $H_{\alpha 3}$ - und $H_{\alpha 1}$ -Spektroheliogramme als durchaus gesichert anzusehen ist, konnten wir für die Charakteristika der $H_{\alpha 2}$ -Bilder noch keine ebenso zwingende Erklärung finden. Als Arbeitshypothese möchten wir die folgende vorschlagen: Bekanntlich ist die ganze Sonnenoberfläche „gespickt“ mit *kleinen Protuberanzen*.

Befinden sich diese in *Ruhe*, so werden sie sich ebenso wie die großen Filamente abzeichnen, solange der 2. Spalt des Spektroheliographen von der Linienmitte nicht weiter entfernt ist, als \sim die thermische Dopplerbreite von H_α . Ihre „Sichtbarkeit“ wird beim Übergang $H_{\alpha 3} \rightarrow H_{\alpha 2} \rightarrow H_{\alpha 1}$ erst langsam und dann ziemlich plötzlich abnehmen.

Wie wird dieses Bild nun durch evtl. *Vertikalbewegungen*¹ beeinflusst? Es mögen etwa zwei kleine Protuberanzen nebeneinanderstehen, die sich mit gleicher Geschwindigkeit aufwärts- bzw. abwärts bewegen. Im $H_{\alpha 3}$ -Bild werden sich die beiden nicht unterscheiden. Rückt aber der 2. Spalt in die Nähe des Randes der „Protuberanzenabsorption“ mit der Halbbreite $\sim \Delta\lambda_D$, so genügt

¹ Bei Beobachtung am Rande der Sonnenscheibe müßten wir genauer von *Radialgeschwindigkeiten* sprechen.

schon ein kleiner Dopplereffekt, um erhebliche Intensitätsschwankungen zu verursachen. Wir möchten also die $H_{\alpha 2}$ -Granulation in der Hauptsache als ein Abbild des *Vertikalgeschwindigkeitsfeldes* der Chromosphäre deuten. Wenn es sich dabei vorzugsweise um *makroskopische* Strömungen und entsprechende *Linienverschiebungen* handelt, so müßten nach unserer Arbeitshypothese simultane $H_{\alpha 2r}$ - und $H_{\alpha 2v}$ -Aufnahmen sich wie Negativ und Positiv verhalten. Handelt es sich dagegen um turbulente Strömungen und dementsprechend wechselnde *Verbreiterungen* des innersten Kernes der Linie, so sollten $H_{\alpha 2r}$ bzw. v dasselbe Bild ergeben. Beobachtungen, welche eine Entscheidung zwischen diesen beiden Möglichkeiten zulassen¹, scheinen noch nicht vorzuliegen.

Als Abschluß zur Theorie der Wasserstoffspektroheliogramme fragen wir nach der Ursache der oben beschriebenen *Unterschiede zwischen den H_{α} -, H_{β} -, H_{γ} -... Bildern*. Wir hatten seinerzeit darauf hingewiesen, daß mit wachsender Gliednummer in der BALMER-Serie die Druckverbreiterung zu- und die Oszillatorenstärke abnimmt. Damit parallelgehend wird die wirksame optische Schichtdicke in der Linienmitte immer kleiner, so daß diese etwa von H_{δ} an nicht mehr als „gesättigt“ betrachtet werden darf. Die Helligkeitsschwankungen in der *Mitte* der höheren Glieder der BALMER-Serie folgen daher nicht mehr der üblichen Theorie der Restintensität, sondern schließen sich in ihrem Verhalten den weiter außen in der Linie gelegenen Teilen der H_{α} -Linie mit derselben wirksamen optischen Tiefe an. Es wird so leicht verständlich, daß z. B. die *Mitte* von H_{β} -Bilder liefert, welche die wichtigsten Züge der $H_{\alpha 3}$ -Aufnahmen *und* die dunklen Flocculi zeigten, während die *Mitte* von H_{δ} schon nur noch die letzteren wiedergibt. Auch das Anwachsen der *Randverdunkelung* für die *Mitten* der Linien in der Reihenfolge H_{α} , H_{β} ... läßt sich nun in Verbindung mit der Theorie des Strahlungsgleichgewichtes einfach erklären: Es geht natürlich parallel der Abnahme der wirksamen optischen Dicke der Atmosphäre für Linienabsorption + -streuung.

C. L. D'AZAMBUJA's Untersuchungen an Metallinien. In den Jahren 1926 bis 1928 hat L. D'AZAMBUJA [1705] mit Hilfe des großen Spektroheliographen zu Meudon Sonnenaufnahmen mit nur $\sim 0,04 \text{ \AA}$ breiten Spektralbereichen aus einer großen Anzahl von *Metallinien* gemacht. Die Untersuchungen werden es erlauben, die *Theorie der Spektroheliogramme* auf eine viel breitere Basis zu stellen, als dies bei alleiniger Berücksichtigung der Kalzium- und Wasserstoffbilder möglich war.

Die folgende Tabelle 77 enthält zunächst in ihren drei vordersten Spalten — nach Wellenlängen geordnet — ein Verzeichnis der benützten *Linien*, sowie ihrer Multiplett-klassifikation und ROWLAND-Intensität. Spalte 4 gibt die jeweils benützte Breite des monochromasierenden Spaltes bzw. des isolierten Spektralbereiches in \AA an.

Um die Orientierung in der zunächst verwirrend großen Mannigfaltigkeit der spektroheliographischen Beobachtungen zu erleichtern, fand es D'AZAMBUJA zweckmäßig, in den Metallinien zwei Zonen zu unterscheiden:

Erstens einen „*Linienkern*“ (partie mediane), der sich auf gewöhnlichen Spektrogrammen großer Dispersion als dunkler Streifen abhebt und *zweitens* die sich nach außen anschließenden *Linienflügel*. Die von D'AZAMBUJA unter dem Komparator gemessenen (ganzen) Breiten des „*Linienkernes*“ gibt die Spalte 5 unserer Tabelle.

Ehe wir uns an die Deutung der Spektroheliogramme wagen können, muß nun die wichtige Vor-Frage geklärt sein, was die offenbar verhältnismäßig

¹ Vgl. hierzu auch Abschn. 98.

Tabelle 77. Spektroheliographische Untersuchungen

1	2	3	4	5
λ	Element, Klassifikation	ROWLAND-Intensität	Breite des monochrom. Spaltes in Å (MEUDON)	Gemessene Weite des „Linienkerns“ in Å
3838,304	Mg $3^3P_2^0 - 3^3D$	25	0,05	0,15
4045,827	Fe $a^3F_4 - \gamma^3F_4^0$	30	0,04	0,09
4077,726	SrII $5^2S_{1/2} - 5^2P_{1/2}^0$	8	0,04	0,13
4104,135	Fe —	5	0,03	0,08
4132,069	Fe $a^3F_2 - \gamma^3F_3^0$	10	0,04	0,08
4143,880	Fe $a^3F_3 - \gamma^3F_4^0$	15	0,04	0,08
4202,042	Fe $a^3F_4 - z^3G_4^0$	8	0,05	0,13
4226,742	Ca $4^1S_0 - 4^1P_1^0$	20	0,05	0,13
4383,559	Fe $a^3F_4 - z^5G_5^0$	15	0,04	0,12
5183,621 (b_1)	Mg $3^3P_2^0 - 4^3S_1$	30	0,10	0,15
5889,977 (D_2)	Na $3^2S_{1/2} - 3^2P_{1/2}^0$	30	0,09	0,25

scharfe Abgrenzung der beiden Teile in den Metallinien¹ eigentlich bedeutet. Betrachten wir noch einmal den in Fig. 58 für Sonnentemperatur dargestellten Verlauf des *Absorptionskoeffizienten* k in den NaD-Linien: In einem Abstand $v = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_D} \approx 3$, d. h. $\Delta\lambda = 3\Delta\lambda_D$ von der Linienmitte erfolgt plötzlich der Übergang von der flach verlaufenden Strahlungsdämpfungskurve² $k \sim 1/\Delta\lambda^2$ zu

der steilen Dopplerkurve $k \sim e^{-\left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_D}\right)^2}$. Wenn nun die Anzahl NH der absorbierenden Atome in einer Säule von 1 cm² Querschnitt noch nicht so groß ist, daß für $v \approx 3$ die Intensität in der Linie dem durch κ_p/σ_p bestimmten Grenzwert für $\kappa_p + \sigma_p \rightarrow \infty$, d. h. der „Restintensität“ im engeren Sinne, nahezu gleich wird, so muß also die Linienkontur bei $v \approx 3$ einen ziemlich scharfen *Knick* zeigen. Man überzeugt sich an Hand von Abschn. 44 und Fig. 58 leicht, daß der v -Wert für diesen Knick von der Größe der Dämpfungs- und der Dopplerkonstante der Linie nur wenig abhängt. Die *Theorie* läßt also erwarten, daß in nicht zu starken Linien³ ein *Dopplerkern* der (ganzen) Breite $\sim 6\Delta\lambda_D$ zu erkennen sei. In Spalte 7 haben wir die für 5000° K *berechneten* Zahlenwerte von $6\Delta\lambda_D$ vermerkt und ihre enge Übereinstimmung mit den von D'AZAMBUJA in Spalte 5 *gemessenen* Breiten des „Kernes“ der Linien läßt keinen Zweifel darüber, daß der empirisch gefundene „Linienkern“ (partie mediane), und der von der Theorie geforderte „Dopplerkern“ ein und dasselbe sind.

Die mit Licht aus der *Mitte* der Metallinien aufgenommenen Spektroheliogramme sehen im wesentlichen aus, wie die bekannten K_1 -Bilder: Sie zeigen *helle Fackelflächen und Flocculi*, vermischt mit einer Art von schwacher „Granulation“, die — wie D'AZAMBUJA durch Simultanaufnahmen beweisen konnte — für alle Linien dieselben Formen hat.

Entfernt man sich von der Linienmitte, so nehmen die Fackelflächen an Deutlichkeit ab, die Granulation dagegen zu. Am *Rande des Linienkernes* erreicht die Sichtbarkeit der Fackelflächen ein Minimum, die der Granulation ihr Maximum. Bei den starken Linien erscheint merkwürdigerweise die Granulation

¹ Daß dieses Phänomen bei *Linienkonturenmessungen* nicht früher bemerkt worden ist, dürfte einfach darauf beruhen, daß seine Erfassung ein sehr *hohes Trennungsvermögen* des Spektrographen (nach obigen Angaben $\sim 100\,000$ — $200\,000$) verlangt.

² Kommt Stoßdämpfung hinzu, so ist dieser Kurvenzweig um den Betrag von $\log \frac{\gamma_{\text{Stoß}}}{\gamma_{\text{kl}}}$ nach oben zu verschieben.

³ Praktisch fallen nur die *H*- und *K*-Linien außerhalb des Geltungsbereiches dieser Überlegung.

an Metallinien von L. D'AZAMBUJA [1705].

6 Abstand zwischen den Sichtbarkeits- maxima der Granulation	7 $6 \Delta\lambda_D$ berechn. für $T=5000^\circ$	8 Gesamt- absorption $A\lambda$	9 Abstand $2 \Delta\lambda_m$ zwischen den Sicht- barkeitsmaxima der Fackelflächen	10 $\frac{A\lambda}{2 \Delta\lambda_m}$	11 Restintensität in % nach	
					D'AZAMBUJA	ALLEN „korrigiert“
0,20	0,14	—	0,692	—	13	—
0,12	0,10	1,160	0,350	3,3	19	03
0,14	0,08	0,333	0,124	2,7	26	04
0,08	0,10	—	—	—	41 ?	—
0,12	0,10	0,418	—	—	22 ?	—
0,10	0,10	0,511	0,20	2,6	24 ?	—
0,14	0,10	0,450	0,17	2,6	23	—
0,14	0,12	1,185	0,434	2,7	13	—
0,10	0,11	1,07	0,444	2,4	15	04
0,16	0,19	1,600	0,656	2,4	20	11
0,24	0,22	0,753	0,584 (?)	1,3 (?)	22	06

im violetten Teil der Linie deutlicher, als im roten. Mit abnehmender Linienintensität verschwindet diese Unsymmetrie, um anscheinend für ROWLAND-Intensität ≈ 7 ihr Vorzeichen umzukehren.

Geht man nun in die *Linienflügel* heraus, so verschwindet die Granulation rasch, die Fackelflächen dagegen werden bei den meisten *stärkeren Bogenlinien* wieder heller und erreichen Sichtbarkeitsmaxima, deren Abstand $2 \Delta\lambda$ in Spalte 9 der Tabelle 77 angegeben ist. Ganz anders verhält sich *Sr-Funkenlinie* λ 4078: Außerhalb des Dopplerkernes gibt diese Linie — ähnlich wie die Wasserstofflinien — *dunkle Fackelflächen* und *Flocculi*.

Einen Übergang zwischen dem Verhalten der Mehrzahl der Bogenlinien einerseits und der Sr-Funkenlinie andererseits scheint Fe λ 4202 zu bilden. Ihr kurzwelliger Flügel gibt helle Fackelflächen, während der langwellige dunkle liefert (!).

Als Illustration und Zusammenfassung des vorhergehenden entnehmen wir noch D'AZAMBUJAS Arbeit die für die Fe-Linie λ 4384 gezeichnete Fig. 144.

Zur Erklärung der beobachteten Phänomene stehen uns wieder drei Effekte zur Verfügung:

1. Änderungen der „Restintensität“, d. h. der KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion (Temperatur) der hohen Schichten evtl. in Verbindung mit parallelen Variationen des $\lim_{\nu_p + \sigma_p = \infty} \kappa_\nu / \sigma_\nu$.

2. Änderungen der „Anzahl absorbierender Atome“ NH .

3. *Dopplereffekt* makroskopischer oder turbulenter Strömungen.

Unsere Aufgabe wird also darin bestehen, die gegenseitige Zuordnung der Beobachtung und dieser theoretischen Möglichkeiten zu ermitteln.

Wir knüpfen an die in Abschn. 66 entwickelte Form der *Theorie der Linienkonturen* an. Es bedeute also wieder

I die Intensität in der Linie bei der Frequenz ν , bezogen auf die Intensität des benachbarten kontinuierlichen Spektrums als Einheit.

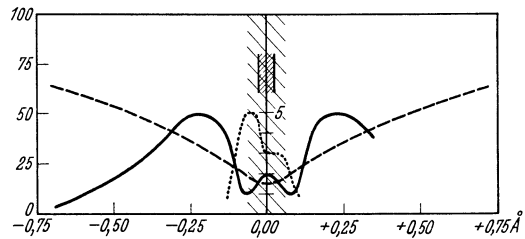


Fig. 144. Sichtbarkeit der Fackelflächen (ausgezogene Kurve) und der Granulation (punktirt) als Funktion des Abstandes von der Mitte der Linie Fe 4383,56 nach L. D'AZAMBUJA [1705, Fig. 22]. Mittlere Ordinatenkala; Sichtbarkeiten in einer 5stufigen Schätzungsskala. Die *gestrichelte Kurve* in Verbindung mit der Ordinatenkala gibt die mit dem Spektroheliographen gemessene Intensitätsverteilung in der Linie. Die *weite Strichelung* in der Mitte gibt die Weite des „mittleren Teils“ der Linie nach direkter Messung auf den Spektrogrammen. Die *dichte Strichelung*, begrenzt durch senkrechte Linien, bezeichnet die Breite des monochromatisierenden Spaltes, umgerechnet auf Ängström-Einheiten im Spektrum.

$R = 1 - I$ die „Tiefe“ der Linie.

R_c die Tiefe der Linienmitte = $1 -$ Restintensität I_c .

x_ν die „wirksame“ optische Dicke der Atmosphäre für selektive Streuung und Absorption bei der Frequenz ν .

Dann gilt nach Gl. (66,7) mit guter Annäherung:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{x_\nu} + \frac{1}{R_c}. \tag{100,1}$$

Um die Wirkung irgendwelcher Änderungen in R_c (Effekt 1) oder x_ν (Effekt 2) auf die Spektroheliogramme übersehen zu können, berechnen wir die entsprechende Änderung dI der Intensität, bezogen auf die normaler Weise bei der betreffenden Frequenz vorhandene Intensität I selbst. Im Hinblick auf die Form der Gl. (100,1) schreiben wir zunächst

$$\frac{dI}{I} = \frac{-dR}{1-R} = \frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{\frac{1}{R} - 1}. \tag{100,2}$$

Dann wird der Einfluß einer Änderung der Restintensität $dI_c = -dR_c$, d. h. Effekt 1, in Abhängigkeit von x_ν dargestellt durch

$$-\frac{dI}{I dR_c} = \frac{x_\nu^2}{(x_\nu + R_c)(x_\nu + R_c - x_\nu R_c)}. \tag{100,3}$$

Ändert sich dagegen die Anzahl absorbierender Atome — Effekt 2 —, so ändert sich zunächst $d x_\nu / x_\nu$ um einen entsprechenden und von der Frequenz unabhängigen Betrag. Die Frequenzabhängigkeit des Effektes 2 wird also erfaßt durch

$$-\frac{dI/I}{d x_\nu / x_\nu} = \frac{R_c^2 x_\nu}{(x_\nu + R_c)(x_\nu + R_c - x_\nu R_c)}. \tag{100,4}$$

Die Wellenlängenabhängigkeit von x_ν ist für die zu betrachtenden starken Linien (abgesehen vom Dopplerkern, auf den wir nachher zu sprechen kommen) durch Dämpfung bestimmt, d. h. es gilt

$$x_\nu = \text{konst.} \frac{NH}{\Delta\lambda^2}, \tag{100,5}$$

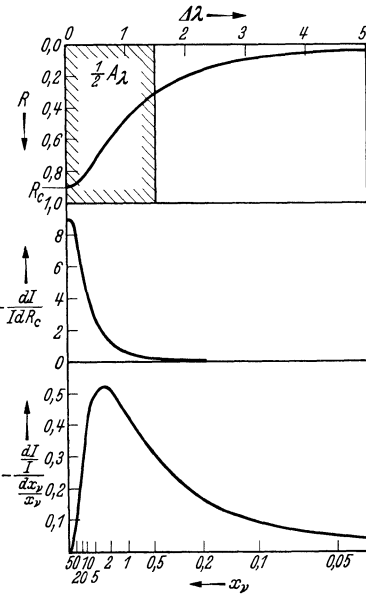


Fig. 145. Oben: *Linienkontur* (mit Gesamtabsorption) nach (Gl. 100, 1 u. 6). Unten: Theoretische *Sichtbarkeitskurven* für „Restintensitätseffekt“ (Gl. 100, 3) und „Anzahleffekt“ (Gl. 100, 4).

wo $\Delta\lambda$ den Abstand von der Linienmitte bedeutet. Indem wir $\Delta\lambda$ in passenden Einheiten rechnen, schreiben wir einfach

$$x_\nu = \frac{1}{\Delta\lambda^2}. \tag{100,6}$$

Die nach (100,6) und (100,1) mit der plausiblen Annahme einer Restintensität von 10%, d. h. $R_c = 0,90$, berechnete *Linienkontur* zeigt der obere Teil unserer Fig. 145. Die obere Abszissenskala gibt $\Delta\lambda$, die untere das zugehörige x_ν . Die *Gesamtabsorption* A_λ dieser Linie wird in der hier gewählten Wellenlängeneinheit

$$A_\lambda = \int R d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(\Delta\lambda)}{\Delta\lambda^2 + \frac{1}{R_c}} = \pi \sqrt{R_c}. \tag{100,7}$$

$\frac{1}{2} A_\lambda$ ist in unserer Figur durch ein schraffiertes Rechteck dargestellt. Die zu unserer „Normallinie“ — aus der die wirklichen Linien durch passende Ver-

änderung des $\Delta\lambda$ -Maßstabes hervorgehen sollen — gehörenden *Sichtbarkeitskurven* für den *Restintensitätseffekt* (Nr. 1) und den *Anzahleffekt* (Nr. 2) sind nach Gl. (100,2) bzw. (100,3) in Fig. 145 mit eingetragenen.

Vergleicht man sie mit den von D'AZAMBUJA beobachteten Sichtbarkeitskurven (z. B. Fig. 144), so kann kaum ein Zweifel darüber bestehen, daß das *innere Sichtbarkeitsmaximum der Fackelflächen* wie bei den Kalzium- und Wasserstoffspektroheliogrammen auf dem *Restintensitätseffekt* beruht, d. h. auf einer Erhöhung der Temperatur und evtl. des Verhältnisses κ_ν/σ_ν in den oberen Atmosphärenschichten.

Das *äußere Maximum der Sichtbarkeitskurve der Fackelflächen* dagegen paßt ausgezeichnet zur theoretischen Kurve für den *Anzahleffekt*.

In den Fackelflächen wird — infolge ihrer hohen Temperatur — die thermische Ionisation und Anregung erhöht. So verstehen wir mit einem Schlage, daß dort die meisten Metalllinien schmaler werden und *helle Flocculi* geben, während die Sr^+ -Linie — ebenso wie die Wasserstofflinien — breiter wird und *dunkle Flocculi* zeigt¹.

Weiterhin lesen wir aus Fig. 145 (unterste Kurve und Rechteck oben) ab, daß nach unserer Theorie für alle Linien gleicher Restintensität der Abstand $2\Delta\lambda_m$ der äußeren Sichtbarkeitsmaxima der Fackelflächen zur Gesamtabsorption A_λ in einem festen Verhältnis stehen sollte. Für den in Fig. 145 angenommenen Zahlenwert der Restintensität von 10% ergibt sich

$$\frac{A_\lambda}{2\Delta\lambda_m} = 2,5. \quad (100,8)$$

Entsprechende Rechnungen mit anderen Annahmen über die Restintensität führen auf nicht sehr verschiedene Verhältnisse. In Spalte 8 und 9 der Tabelle 77 haben wir nun neben den von D'AZAMBUJA (s. S. 454) gefundenen *Abständen* $2\Delta\lambda_m$ die von C. W. ALLEN [1110] gemessenen *Gesamtabsorptionen* A_λ aufgeführt. Die Verhältnisse beider Zahlen (Spalte 10) stimmen gut mit dem berechneten Wert überein.

Unsere Theorie der Sichtbarkeitskurven der Fackelflächen hat nur noch in quantitativer Hinsicht einen Schönheitsfehler: Durch Überlagerung von Kurven der Typen (100,3) und (100,4) kann man nämlich das beobachtete *Minimum* der Sichtbarkeitskurve nicht darstellen. Diese Schwierigkeit dürfte sich aber leicht beseitigen lassen, wenn man die Variation der Temperaturunterschiede: Fackel — Umgebung mit der Tiefe in der Sonnenatmosphäre genauer berücksichtigt: Beschränkt sich nämlich — wie wir dies aus anderen Gründen annehmen mußten, die „Überhitzung“ in den Fackeln usw. auf die höchste Zone der Atmosphäre, so wird in erster Linie die Sichtbarkeitskurve des R_c -Effektes schmaler, als dies unsere etwas schematisierten Ansätze erwarten ließen. Sie schrumpft auf *den* Wellenlängenbereich zusammen, in dem der Absorptions- bzw. Streukoeffizient *sehr* groß wird, d. h. nach Fig. 58 auf den *Dopplerkern* der Linie — in Übereinstimmung mit D'AZAMBUJAS Beobachtungen.

Nachdem wir das Problem der Sichtbarkeitskurven der Fackelflächen in den Grundzügen gelöst haben, fragen wir nach dem Ursprung der von D'AZAMBUJA beobachteten *Granulation*. Die *Maxima ihrer Sichtbarkeit* stimmen — wie schon bemerkt — überein mit den Stellen steilsten Intensitätsabfalles, welche den Dopplerkern (partie médiane) von den Linienflügeln trennen. Die gute Übereinstimmung der Spalten 5, 6 und 7 unserer Tabelle 77 möge diese Gesetzmäßigkeit nochmals erhärten. So werden wir auf folgende Überlegungen gebracht: An den betrachteten Stellen der Linie, d. h. $\Delta\lambda \approx 3\Delta\lambda_D$ wird nach unseren bisherigen Untersuchungen sowohl der Restintensitätseffekt, wie auch der

¹ Das kuriose Verhalten der Fe-Linien 4202 allerdings bedarf noch der Klärung.

Häufigkeitseffekt sehr gering sein. Wird dagegen die Linie durch makroskopische Bewegungen verschoben oder durch Turbulenz verbreitert, so wird gerade an der steilsten Stelle der Linienkontur die größte relative Intensitätsschwankung resultieren. Das heißt: Die „Granulation“ beruht auf Effekt Nr. 3; sie gibt ein qualitatives Bild des *Geschwindigkeitsfeldes* der höheren Atmosphärenschichten.

Diese Erklärung stimmt in den Hauptzügen überein mit der für die $H_{\alpha 2}$ -Bilder gegebenen. Nur in quantitativer Hinsicht besteht ein kleiner Unterschied: Der gegenseitige Abstand der Sichtbarkeitsmaxima der „Granulation“ in H_{α} beträgt nicht wie bei den Metallinien $\sim 6 \Delta \lambda_D$, sondern nur $0,5 \text{ \AA} = 2,5 \Delta \lambda_D$. Dies dürfte darauf zurückzuführen sein¹, daß die wirksame optische Tiefe, welche den Kern von H_{α} bestimmt, kleiner ist als die entsprechende Tiefe für die Metallinien: Einmal ist $\Delta \lambda_D$ für H wesentlich größer und der Absorptionskoeffizient in der Linienmitte geht ja *cet. par.* $\sim 1/\Delta \lambda_D$. Sodann aber ist auch der NHf -Wert für H_{α} erheblich kleiner, als für die betrachteten Metallinien. (Für H_{α} ist $NHf \cdot 10^{-15} \approx 3,2$; dagegen z. B. für Ca 4227 gleich 64; $NaD_2 = 17$ und selbst für SrII 4077 noch 14.) So verschiebt sich naturgemäß das $\Delta \lambda/\Delta \lambda_D$, bei welchem der „Steilabfall“ der Linienkontur liegt, in H_{α} verglichen mit den Metallinien nach *kleineren* Werten.

Überblicken wir zurückschauend noch einmal die Ergebnisse dieses Abschnittes, so dürfen wir feststellen, daß die *Theorie der Spektroheliogramme* nach ihrer *spektroskopischen Seite* hin als grundsätzlich geklärt betrachtet werden kann. Spektralphotometrische Messungen werden es zweifellos im Laufe der Zeit ermöglichen, unsere qualitativen und halbquantitativen Überlegungen noch in quantitativer Hinsicht auszubauen. Aber diese schönen Erfolge der Linienkonturentheorie dürfen uns nicht darüber hinwegtäuschen, daß hier wie in der Theorie der Protuberanzen und der Chromosphäre im Hintergrunde ein und dasselbe noch ungelöste *Problem* der Sonnenphysik steht: Nämlich die Frage nach dem Ursprung der besonders in den Fackeln festgestellten Störung der „normalen“ Temperaturschichtung der Sonnenatmosphäre.

¹ Vielleicht spielen auch — wie unter B angedeutet — Schichtungsfragen herein.

Klassifikation der Linienspektren¹.

1. Atome und Ionen mit einem Leuchtelektron.

Die Energieniveaus eines Atomes oder Ions mit *einem* Leucht- oder Valenzelektron können wir durch folgende vier Quantenzahlen beschreiben:

n die *Hauptquantenzahl*. Bei wasserstoffartigen Bahnen (COULOMB-Feld) ist in der Sprache der BOHRschen Theorie, deren wir uns auch im folgenden bedienen werden, $n^2 \cdot a_0$ die große Halbachse der Bahn; der entsprechende Termwert $R \cdot Z^2/n^2 \text{ cm}^{-1}$. ($a_0 = 0,532 \text{ \AA}$; $R = \text{RYDBERG-Zahl}$.)

l ist der *Drehimpuls der Bahnbewegung* des Elektrons gemessen in der Quanteneinheit $\frac{h}{2\pi}$. l kann die *ganzzahligen* Werte $0, 1, 2, \dots, n-1$ annehmen.

s ist der *Spinimpuls des Elektrons* (Kreiselektron!) in derselben Einheit. Für *ein* Elektron kann s nur die beiden Werte $\pm \frac{1}{2}$ annehmen.

j ist der *Gesamt-Drehimpuls*, wieder in Einheiten von $\frac{h}{2\pi}$. j entsteht durch vektorielle Zusammensetzung von l und s und kann die beiden Werte $l \pm \frac{1}{2}$ annehmen.

Diese vier Quantenzahlen eines Elektrons faßt man symbolisch folgendermaßen zusammen:

$l = 0$	1	2	3	4	5	
gibt ein	s	p	d	f	g	$h \dots$ -Elektron ² .

Vor diesen Buchstaben schreibt man die Hauptquantenzahl n , rechts als Index das j , also z. B.:

$$1s_{\frac{1}{2}}; 2s_{\frac{1}{2}}; 2p_{\frac{1}{2}}; 2p_{\frac{3}{2}}; \dots$$

2. Mehrelektronensysteme. RUSSELL-SAUNDERS-Kopplung.

In Atomen bzw. Ionen mit mehreren Elektronen sind die Drehimpulse, wie H. N. RUSSELL und F. A. SAUNDERS 1925 bei den Erdalkalien fanden, meist (nähere Bedingungen s. u.) folgendermaßen gekoppelt (RUSSELL-SAUNDERS-Kopplung):

Die *Bahndrehimpulse* l addieren sich vektoriell zu einem resultierenden Bahnmoment $L = \Sigma \vec{l}$ (alles in Einheiten von $\frac{h}{2\pi}$). Ebenso bilden die *Spinmomente* s ein resultierendes Spinnmoment $S = \Sigma \vec{s}$.

¹ Diese kurze Zusammenstellung enthält nur die wichtigsten Gesetzmäßigkeiten und die durch internationale Vereinbarung (A, 5) festgelegten Bezeichnungen ohne tiefere Begründung und ohne Anspruch auf Vollständigkeit. Im übrigen verweisen wir auf das Buch von BACHER und GOUDSMIT [401], dem sich unsere Darstellung weitgehend anschließt, sowie die anderen Werke des Literaturverzeichnisses.

² Diese Benennung erfolgte ursprünglich nach den *Serien*, deren oberen Term, den sog. *Lauterm*, das Symbol kennzeichnet:

- $s \dots$ Scharfe Nebenserie (II.N.S.).
- $p \dots$ Prinzipalserie (Hauptserie).
- $d \dots$ Diffuse Nebenserie (I.N.S.).
- $f \dots$ Fundamentalserie (BERGMANN-Serie).

L ist immer ganzzahlig ($L = 0, 1, 2, \dots$).

S ist $\begin{cases} \text{halbzahlig} \\ \text{ganzzahlig} \end{cases}$ für Systeme mit einer $\begin{cases} \text{ungeraden} \\ \text{geraden} \end{cases}$ Anzahl von Elektronen. Dies ergibt sich daraus, daß die s sich nur parallel oder antiparallel ($\uparrow\uparrow$ bzw. $\uparrow\downarrow$) aneinanderlagern können.

Die Vektorsumme von L und S gibt den *Gesamtdrehimpuls* J , wobei also

$$|L - S| \leq J \leq L + S,$$

Wie S ist J $\begin{cases} \text{halbzahlig} \\ \text{ganzzahlig} \end{cases}$ für Atome mit $\begin{cases} \text{ungerader} \\ \text{gerader} \end{cases}$ Elektronenzahl. Ähnlich wie bei den Einelektronensystemen führen wir nun folgende *Symbole* ein:

geben	$L = 0$	1	2	3	4	5	
	S	P	D	F	G	$H \dots$	-Terme.

Zu einem bestimmten Wert der Quantenzahl S (nicht zu verwechseln mit dem Termsymbol S !) gehören bei hinreichend großem L ($L \geq S$) insgesamt $r = 2S + 1$ Terme, die sich nur hinsichtlich der Wechselwirkung zwischen (magnetischem) Bahn- und Spinmoment unterscheiden. Sie liegen daher meist¹ nahe beisammen und bilden ein *Multiplet*. Die Zahl $r = 2S + 1$ bezeichnet man allgemein — auch wenn $L < S$ und daher die volle Vielfachheit des Termes nicht erreicht ist — als die *Multiplizität* und schreibt sie als Index *links oben* an das Termsymbol.

$S = 0$	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$
$r = 1$	2	3	4
	Singulett	Dublett	Triplet
			Quartett

Rechts unten hängt man als Index das J an, um die einzelnen Terme des Multipletts zu charakterisieren.

Außerdem teilen wir die Terme noch in zwei Gruppen ein, die sog. *geraden* bzw. *ungeraden* Terme, je nachdem die *arithmetische* Summe der l gerade oder ungerade ist. Ungerade Terme bezeichnet man durch ein rechts oben angehängtes o (*odd*) und lateinisch gedruckte Termwerte. Die geraden Terme bleiben ohne rechtes oberes Suffix.

${}^3P_1^o$ heißt z. B.: Ungerader Triplet-Term ($S = 1$) mit $L = 1$ und $J = 1$.

${}^2D_{1\frac{1}{2}}$ heißt z. B.: Gerader Dublett-Term ($S = \frac{1}{2}$) mit $L = 2$ und $J = 1\frac{1}{2}$.

Statt der Hauptquantenzahl schreibt man vor das Termsymbol die Symbole der einzelnen Elektronenbahnen, die an der Bildung des Termes beteiligt sind. Die Anzahl der Elektronen jeder Art wird durch Exponenten an dem betreffenden Symbol angegeben. Abgeschlossene Schalen, die spektroskopisch unwesentlich sind, werden meist weggelassen. Ebenso können die Hauptquantenzahlen der einzelnen Bahnen, soweit sie selbstverständlich sind, wegb bleiben.

Zum Beispiel ist der Grundterm des Mg — entsprechend seiner Stellung im periodischen System — in vollständiger Notierung:

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 1S_0 \quad \text{oder kurz} \quad 3s^2 1S_0.$$

Höher angeregte Multipletts dieses Spektrums entstehen z. B. indem eines der $3s$ -Elektronen ($l = 0$) in eine $3p$ -Bahn ($l = 1$) übergeführt wird. $l = 0$ und $l = 1$ geben als Vektorsumme $L = 1$, die arithmetische Summe der l und damit der Charakter der Terme ist *ungerade* (o). Das Gesamtspinmoment S entsteht aus zwei Einzelmomenten $s = \frac{1}{2}$ und kann also die Werte $S = 0$ (Singulett) und

¹ Die wesentlichste Vorbedingung für die Anwendbarkeit des RUSSELL-SAUNDERSSchen Kopplungsschemas ist eben die Kleinheit der Multiplettaufspaltung gegenüber den Abständen der Multipletts voneinander (Spin-Bahn-Wechselwirkung \ll elektrische Wechselwirkung). Für hochangeregte Terme, die dicht beisammen liegen, wird also z. B. das RUSSELL-SAUNDERSSche Schema meist nicht gelten. Bezüglich anderer Kopplungsverhältnisse sei auf die Literatur verwiesen.

$S=1$ (Triplet) annehmen. Wir erhalten also insgesamt die vier Terme:

$$3s3p^3P_{0,1,2}^0 \quad \text{und} \quad 3s3p^1P_1^0.$$

In komplizierten Spektren, wo die Angabe der einzelnen Bahnsymbole oft nicht möglich ist, bezeichnet man den Grundterm und die tiefsten (metastabilen) Terme gleichen Charakters (gerade bzw. ungerade) mit a, b, c, d ; entsprechende höhere mit e, f, \dots . Die Terme entgegengesetzten Charakters nennt man der Reihe nach z, y, x, \dots .

Die *Übergänge* zwischen zwei Termen sind beschränkt durch folgende Auswahlregeln:

1. Es gibt nur Übergänge zwischen geraden und ungeraden Termen.
2. J ändert sich nur um $\Delta J = 0$ oder ± 1 . Übergänge $J = 0 \rightarrow J = 0$ sind verboten.

Für den Fall der RUSSELL-SAUNDERS-Kopplung gelten die weiteren Regeln:

3. $\Delta L = 0, \pm 1$.
4. $\Delta S = 0$. Das heißt Übergänge zwischen Termen verschiedener Multiplizität, sog. Interkombinationen, treten nur auf bei Abweichungen von der R.S.-Kopplung. Die Singulett-Triplett-Übergänge fehlen z. B. bei He, während sie bei Hg (große Multiplettaufspaltung!) sehr stark sind.

Auf die gleichzeitigen Sprünge mehrerer Elektronen in komplizierten Atomen soll hier nicht eingegangen werden. Die obigen Auswahlregeln können unter besonderen Anregungsbedingungen durchbrochen werden. (Verbotene Übergänge; Starkeffekt; planetarische Nebel!) Für die üblichen Lichtquellen (Bogen, Funken usw.) und normale Sternatmosphären geben sie jedenfalls einen deutlichen Hinweis bezüglich der Intensität der betreffenden Linien.

Eine Zusammenstellung astrophysikalisch wichtiger Multipletts gibt CH. E. MOORE [A,10]. Über Multipletts im Sonnenspektrum vgl. D. H. MENZEL [407], C. W. ALLEN [A,7], CH. E. MOORE [A,9] u. a. An Hand unserer Literaturangaben, die nur die wichtigsten Arbeiten aufführen, dürfte das Eindringen in dieses ebenso grundlegende wie weitverzweigte Gebiet keine Schwierigkeit machen.

Anhang B.

Über die Integralexponentialfunktionen¹.

Wir definieren die *Integralexponentialfunktionen* durch

$$\text{oder — mit } xw = u \text{ —} \quad K_n(x) = \int_{w=1}^{\infty} \frac{e^{-xw}}{w^n} dw, \quad (\text{B,1})$$

$$K_n(x) = x^{n-1} \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^n} du. \quad (\text{B,2})$$

Es ist demnach:

$$K_0(x) = \frac{e^{-x}}{x}; \quad K_1(x) = K(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xw}}{w} dw = \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du. \quad (\text{B,3})$$

Die Transzendente² $K_1(x) = K(x)$, wie wir sie kurz bezeichnen wollen, ist vielfach tabuliert worden, vgl. z. B. E. JAHNKE und F. EMDE [B 2]. Wie man aus

¹ Hierzu N. NIELSEN [B,1], E. JAHNKE und F. EMDE [B,2], K. SCHWARZSCHILD [522] und E. HOPF [504, § 8].

² In der Frage der Bezeichnung besteht keine Einheitlichkeit. Bei JAHNKE-EMDE, sowie in der älteren Literatur wird $K(x)$ als $-Ei(-x)$ bezeichnet, in der neueren Literatur öfters als $Ei(x)$. E. HOPF (s. oben) bezeichnet unsere K_n als E_n .

(B, 3) abliest, geht sie bei $x=0$ logarithmisch gegen $+\infty$. Mit wachsendem x fällt sie erst rasch, dann langsamer gegen Null.

Aus (B, 2) gewinnt man durch partielle Integration folgende Rekursionsformel ($n \geq 2$):

$$K_n(x) = -x^{n-1} \int_x^\infty e^{-u} d\left(\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}\right) = -x^{n-1} \left\{ \frac{e^{-u}}{(n-1)u^{n-1}} \Big|_x^\infty + \frac{1}{n-1} \int_x^\infty \frac{e^{-u} du}{u^{n-1}} \right\}, \quad (\text{B,4})$$

oder

$$(n-1) K_n(x) = e^{-x} - x K_{n-1}(x) \quad (\text{B,5})$$

$$K_2(x) = e^{-x} - x K(x) \quad (\text{B,6})$$

$$2 K_3(x) = e^{-x} - x K_2(x) = e^{-x}(1-x) + x^2 K(x) \quad (\text{B,7})$$

$$3 K_4(x) = e^{-x} - x K_3(x) = e^{-x} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\right) - \frac{x^3}{2} K(x). \quad (\text{B,8})$$

Insbesondere ist

$$K_n(0) = \frac{1}{n-1}. \quad (\text{B,9})$$

Sodann einige *Integralformeln*, die uns verschiedentlich von Nutzen sein werden:

$$\int_x^\infty K_n(x) dx = \int_x^\infty \int_{w=1}^\infty \frac{e^{-xw}}{w^n} dw dx = \int_{w=1}^\infty \frac{e^{-xw}}{w^{n-1}} dw = K_{n+1}(x), \quad (\text{B,10})$$

$$\left. \begin{aligned} \int_x^\infty x K_n(x) dx &= \int_x^\infty \int_{w=1}^\infty \frac{x e^{-xw}}{w^n} dw dx = \int_{w=1}^\infty \frac{e^{-xw}(1+xw)}{w^{n+2}} dw \\ &= x K_{n+1}(x) + K_{n+2}(x). \end{aligned} \right\} \quad (\text{B,11})$$

Für $n=1$ wird insbesondere:

$$\int_x^\infty K(x) dx = e^{-x} - x K(x), \quad (\text{B,12})$$

$$\int_x^\infty x K(x) dx = \frac{1+x}{2} e^{-x} - \frac{x^2}{2} K(x). \quad (\text{B,13})$$

Aus (B, 1) oder (B,10) liest man ferner die *Differentiationsformel* ab:

$$\frac{d}{dx} K_n(x) = -K_{n-1}(x) \dots (n \geq 1). \quad (\text{B,14})$$

Endlich einige *Ungleichungen*, die besonders in Abschn. 30 eine wichtige Rolle spielen:

Aus der Definitionsgleichung (B, 1) folgt wegen

$$\frac{1}{w^{n+1}} < \frac{1}{w^n} \quad \text{für } w > 1 \quad \text{und } n \geq 0$$

sofort

$$K_{n+1}(x) < K_n(x) \quad (\text{B,15})$$

speziell

$$K(x) < \frac{e^{-x}}{x}. \quad (\text{B,16})$$

Subtrahiert man von der Rekursionsformel (B, 5) die entsprechende Gleichung mit $n' = n + 1$, so wird zunächst

$$(n-1) K_n(x) - n K_{n+1}(x) = x (K_n(x) - K_{n-1}(x))$$

oder wegen (B, 15)

$$(n-1) K_n(x) \leq n K_{n+1}(x). \quad (\text{B,17})$$

Über Reihenentwicklungen für $K(x)$ vgl. JAHNKE-EMDE oder N. NIELSEN (s. S. 467).

Literaturverzeichnis¹.

Allgemeines.

Als Lehr- und Nachschlagebücher für Astrophysik und theoretische Physik seien besonders empfohlen:

1. RUSSELL, H. N., R. S. DUGAN and J. Q. STEWART: Astronomy, 2 Bände. New York 1926.
2. JOOS, G.: Lehrbuch der theoretischen Physik. Leipzig 1932.
3. ROSSELAND, S.: Astrophysik auf atomtheoretischer Grundlage. Berlin 1931.
4. — *Theoretical Astrophysics*. Atomic Theory and the Analysis of Stellar Atmospheres and Envelopes. Oxford 1936.
5. EDDINGTON, A. S.: Der innere Aufbau der Sterne. (Deutsch von E. v. D. PAHLEN.) Berlin 1928.
Als Hilfsmittel für alle Zahlenrechnungen und als „Formelgedächtnis“ nahezu unentbehrlich ist:
6. MILNE-THOMSON, L. M. and L. J. COMRIE: Standard Four Figure Mathematical Tables. (Ausg. A mit positiven, B mit negativen Charakteristiken der Logarithmen.) London 1931.

Erster Teil.

Die Sternatmosphäre im thermischen Gleichgewicht.

I. Kapitel. Strahlungstheorie.

Klassische Abhandlungen.

101. BOLTZMANN, L.: Ableitung des STEFANSCHEN Gesetzes betreffend die Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur aus der elektromagnetischen Lichttheorie. Ann. Physik u. Chem. **22**, 291 (1884).
102. KIRCHHOFF, G.: Über das Verhältnis zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht. Ann. Chem. u. Physik **109**, 275 (1860).
103. PLANCK, M.: Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum. Verh. dtsh. physik. Ges. **2**, 237 (1900).
104. WIEN, W.: Eine neue Beziehung der Strahlung schwarzer Körper zum zweiten Hauptsatz der Wärmethorie. Berl. Sitzgsber. **1893**, 55.

Lehrbücher².

105. CZERNY, M. u. G. HETTNER: Gesetze der schwarzen Strahlung. (Exp. Teil.) MÜLLER-POUILLET'S Lehrbuch der Physik, Bd. II, 2, Teil 1. Braunschweig 1929.
106. LORENTZ, H. A.: Theorie der Strahlung. Deutsche Ausg. Leipzig 1927.
107. PAULI, W.: Theorie der schwarzen Strahlung. MÜLLER-POUILLET'S Lehrbuch der Physik, Bd. II, 2, Teil 2. Braunschweig 1929.
108. PLANCK, M.: Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung. 5. Aufl. Leipzig 1923. — Einführung in die Theorie der Wärme. Leipzig 1930.
109. WESTPHAL, W.: Wärmestrahlung. Handbuch der Astrophysik, Bd. III, 1, Teil 3. Berlin 1930.
110. WIEN, W. u. C. MÜLLER: Wärmestrahlung. Handbuch der Experimentalphysik, Bd. 9, Teil 1. Leipzig 1929.

II. Kapitel. Anwendung des PLANCKSCHEN Gesetzes auf die Strahlung der Sonne. Strahlungsmessungen.

Lehrbücher und zusammenfassende Darstellungen.

201. ABBOT, C. G.: The Sun, 2. Aufl. New York: Appleton Cie 1929.
202. BRUHAT, G.: Le Soleil. Paris: Librairie Alcan 1931.

¹ Bei der Ausarbeitung jeden Kapitels wurde die zu dem betreffenden Zeitpunkt (Januar 1935 für Kap. I bis Januar 1937 für Kap. XVII) vorliegende Literatur berücksichtigt. Einige später erschienene Arbeiten sind in Anmerkungen im Text erwähnt.

² Da eine Reihe ausgezeichneten Lehrbücher mit reichhaltigen Literaturangaben vorliegen, können wir in diesem Kapitel von einer Zusammenstellung der Einzelliteratur absehen.

203. EMDEN, R.: Die Sonne. MÜLLER-POUILLETS Lehrbuch der Physik, Bd. V, 2. Braunschweig 1928.
204. Handbuch der Astrophysik, Bd. I, Teil 1. Berlin 1933. — BERNHEIMER, W. E.: Apparate und Methoden zur Messung der Gesamtstrahlung der Himmelskörper.
205. Handbuch der Astrophysik, Bd. IV. Berlin 1929.
- 205a. ABETTI, G.: Solar Physics. — b. BERNHEIMER, W. E.: Strahlung und Temperatur der Sonne. — c. MITCHELL, S. A.: Eclipses of the Sun.
206. MITCHELL, S. A.: Eclipses of the Sun. Columbia University Press 1932.

Abhandlungen.

207. ABBOT, C. G, zum Teil mit F. E. FOWLE u. L. B. ALDRICH: *Smithson. Ann.* **2** (1908); **3** (1913); **4** (1922); **5** (1932).
208. ABBOT, C. G. and L. B. ALDRICH: An Improved Water-Flow Pyrheliometer and the Standard Scale of Solar Radiation. *Smithson. Misc. Coll.* **87**, No. 15 (1932).
209. ANGSTRÖM, K.: Eine elektrische Kompensationsmethode zur quantitativen Bestimmung strahlender Wärme. *Nova Acta Reg. Soc. Sci. Upsal.* (3) **16** (1893).
210. BRILL, A.: Das Temperaturproblem in der Astrophysik. *Veröff. Univ.-Sternw. Berlin-Babelsberg* **7**, Heft 6 (1930).
211. EINARSSON, T.: Über die Möglichkeit fortlaufender Koronabeobachtungen. *ZS. f. Ap.* **8**, 208 (1934).
212. FABRY, CH. et H. BUISSON: Sur la courbe de répartition de l'énergie dans la partie ultraviolette du spectre solaire. *C. R. Acad. Sci. Paris* **175**, 156 (1922).
213. GÖTZ, P.: Die kürzeste Wellenlänge des Sonnenlichts. *Strahlentherapie* **40**, 690 (1931).
214. JULIUS, W. H.: A New Method for Determining the Rate of Decrease on the Radiative Power from the Center toward the Limb of the Solar Disk. *Ap. J.* **23**, 312 (1906).
215. JULIUS, W. H.: The Total Solar Radiation during the Annular Eclipse on April 17, 1912. *Ap. J.* **37**, 225 (1913).
216. KIENLE, H.: Über die Beobachtung der Sonne und ihrer Umgebung außerhalb totaler Sonnenfinsternisse. *Göttinger Nachr.* **1928**.
217. LANGLEY, S. P., zum Teil mit C. G. ABBOT: *Smithson. Ann.* **1** (1900).
218. LINDBLAD, B.: Radiative Equilibrium and Solar Temperature. *Nova Acta Reg. Soc. Sci. Upsal.* **IV 6**, 1 (1923).
219. LYOT, B.: Étude de la couronne solaire en dehors des éclipses. *ZS. f. Ap.* **5**, 73 (1932).
220. MARTEN, W.: Zur Frage der absoluten pyrheliometrischen Skala. *Met. ZS.* **39**, 342 (1922).
221. MEYER, EDGAR, M. SCHEIN and B. STOLL: Light of very Short Wave-Length (2100 Å) in the Solar Spectrum. *Nature, Lond.* **134**, 535 (1934).
222. MILNE, E. A.: Radiative Equilibrium: the Relation between the Spectral Energy Curve of a Star and the Law of Darkening of the Disc towards the Limb, with Special Reference to the Effects of Scattering and the Solar Spectrum. *Philos. Trans. Roy. Soc., Lond. (A)* **223**, 201 (1922).
223. MINNAERT, M.: Recent Data on Solar Radiation converted into Absolute Measure. *B. A. N.* **2**, 75 (1924).
224. — The Distribution of Energy near the Limb of the Sun (dort weitere Literaturangaben). *M. N.* **89**, 197 (1929).
225. MOLL, W. J. H., H. C. BURGER and J. v. D. BILT: The Distribution of the Energy over the Sun's Disc. *B. A. N.* **3**, 83 (1925). — Hierzu ABBOT, C. G.: *Ap. J.* **64**, 271 (1926).
226. MÜLLER, G. (unter Mitwirkung von E. KRON): Die Extinktion des Lichtes in der Erdatmosphäre und die Energieverteilung im Sonnenspektrum. *Potsd. Publ.* **22**, Nr 64 (1912).
227. MULDER, G. F. W.: Aequivalente breedten van FRAUNHOFER-Lijnen in het Zonnenspectrum. *Diss. Utrecht* 1934.
228. PETTIT, E.: Measurements of Ultra-Violet Solar Radiation. *Ap. J.* **75**, 185 (1932). (*Mt. Wilson Contr.* 445.)
229. PLASKETT, H. H.: The Wedge Method and its Application to Astronomical Spectrophotometry. Sect. 4: Intensity Distribution in the Continuous Spectrum of the Sun. *Publ. Dom. Astr. Obs.* **2**, 242 (1923).
230. SCHWARZSCHILD, K. and W. VILLIGER: On the Distribution of Brightness of the Ultraviolet Light on the Sun's Disk. *Ap. J.* **23**, 284 (1906).
231. SCHWARZSCHILD, K.: Über die totale Sonnenfinsternis vom 30. August 1905. (Bes. Abschn. V.) *Astr. Mitt. Göttingen* **13**. — *Göttinger Nachr.* **5**, Nr. 2 (1906).
232. TINGWALDT, C.: Ein neues Pyrheliometer für Absolutmessungen. *Z. Instrumentenkde* **51**, 593 (1931).
233. WILSING, I.: Über die Helligkeitsverteilung im Sonnenspektrum nach Messungen an Spektrogrammen. *Potsd. Publ.* **22**, 66 (1913).

234. WILSING, I.: Über die Helligkeitsverteilung im Sonnenspektrum nach bolometrischen Messungen und über die Temperatur der Sonnenphotosphäre. Potsd. Publ. **23**, Nr. 72 (1917).
235. — Untersuchungen über die Extinktion der Strahlung in der Erdatmosphäre nach bolometrischen Messungen im Sonnenspektrum. Potsd. Publ. **25**, Nr. 80 (1924).

III. Kapitel. Die Strahlung der Sterne.

Zur Einführung: RUSSELL, DUGAN, STEWART [1] und

300. BOSLER, J.: L'évolution des étoiles. Paris: Presses Universitaires 1923.

Abhandlungen.

301. ADAMS, W. S. and A. KOHLSCHÜTTER: Some Spectral Criteria for the Determination of Absolute Stellar Magnitudes. *Ap. J.* **40**, 385 (1914).
302. BECKER, W.: Statistische Untersuchungen auf Grund lichtelektrischer Farbenindices von 738 Sternen. *ZS. f. Ap.* **5**, 101 (1932).
303. BOTTLINGER, K. F.: Lichtelektrische Farbenindices von 459 Sternen. Veröff. Univ.-Sternw. Berlin-Babelsberg **3**, 4 (1923).
304. BRILL, A.: Die Strahlung der Sterne. *Erg. exakt. Naturwiss.* **3**, 1 (1924).
305. — Die Strahlung der Sterne. Veröff. Univ.-Sternw. Berlin-Babelsberg **5**, H. 1 (1924).
306. — Temperaturen und scheinbare Halbmesser von 134 Sternen. *A. N.* **223**, 105 (1924).
307. — Die Temperaturstrahlung der Fixsterne. *Z. Physik.* **52**, 767 (1928).
308. BRUGGENCATE, FREUNDLICH, GROTRIAN, KIENLE u. KOPFF: Zur Erforschung des Weltalls. Berlin 1934.
309. DYSON, F.: Observations of Colour Temperatures of Stars Made at the Royal Observatory Greenwich. London 1932. (Zusammenfassung der Arbeiten von GREAVES, DAVIDSON u. MARTIN in *M. N.* **1925—32**.)
310. ELVEY, C. T. and O. STRUVE: A Study of Stellar Hydrogen Lines and their Relation to the Stark Effekt. *Ap. J.* **72**, 277 (1930).
311. GREAVES, DAVIDSON and MARTIN: The Zero Point of the Greenwich Colour Temperature System. *M. N.* **94**, 488 (1934).
312. Handbuch der Astrophysik, Bd. II, Teil 2, 1. Hälfte. Berlin 1929. — BRILL, A.: Spektralphotometrie.
313. Handbuch der Astrophysik, Bd. V, Teil 1, 1. u. 2. Hälfte.
313a. BRILL, A.: Die Temperaturen der Fixsterne. — b. CURTISS, R. H.: Classification and Description of Stellar Spectra. — c. LUNDMARK, K.: Luminosities, Colours, Diameters, Densities, Masses of the Stars.
314. HERTZSPRUNG, E.: Über die optische Stärke der Strahlung des schwarzen Körpers und das minimale Lichtäquivalent. *Z. wiss. Photogr.* **4**, 43 (1906).
315. — Mean Colour Equivalents and Hypothetical Angular Semi-Diameters of 734 Stars brighter than the Fifth Magnitude and within 95° of the North Pole. *Ann. Sterrew. Leiden* **14**, 1 (1922).
316. — Photographic Magnitudes of 658 Stars ... *B.A.N.* **1**, 201 (1923).
317. — The Pleiades. *M. N.* **89**, 660 (1929).
318. JENSEN, H.: Über die Temperaturskalen der Fixsterne. *Astr. Nachr.* **248**, Nr. 5940—41 (1933).
319. KIENLE, H.: Spektralphotometrische Untersuchungen I. Veröff. Univ.-Sternw. Göttingen **2** (1930—32).
320. MAANEN, A. v.: The Nearest Stars. *Publ. Astr. Soc. Pacific* **45**, 247 (1933).
321. MEURERS, I.: Die allgemeinen Beziehungen zwischen der Leuchtkraft, der Masse und der effektiven Temperatur der Sterne. Veröff. Univ.-Sternw. Bonn **1934**, Nr. 28.
322. MORGAN, W. W. and B. A. WOOTEN: Relative Stellar Energy Distribution in the Infra-Red. *Ap. J.* **80**, 229 (1934).
323. NASSAU, I. I. and S. W. McCUSKEY: On the Distribution of Stellar Luminosities Derived from Trigonometric Parallaxes. *M. N.* **94**, 564 (1934).
324. PEASE, F. G.: Interferometer Methods in Astronomy. *Erg. exakt. Naturwiss.* **10**, 84 (1931).
325. PIKE, S. R.: The Physical Conditions in the New Stars. *Proc. Leeds. philos. Soc.* **1**, 232 (1928).
326. PLASKETT, H. H. [229] u. *Publ. Dom. Astr. Obs.* **1**.
327. ROSENBERG, H.: Photographische Untersuchung der Intensitätsverteilung in Sternspektren. *Abh. Leop.-Karol. D. Akad. Naturforsch. (Halle)* **101**, Nr. 2 (1914).
328. RUFUS, W. C.: Typical Stellar Spectra. *Univ. Michigan (Detroit) Obs. Publ.* **3**, 257 (1923).
329. SCHLESINGER, F.: Catalogue of Bright Stars. Yale Univ. Observatory 1930.
330. STICKER, B.: Temperaturen von Riesen- und Zwergsternen. *Z. Physik.* **61**, 557 (1930).

331. — Untersuchungen über Sternfarben. Veröff. Univ.-Sternw. Bonn **23** (1930).
 332. STRASSL, H.: Die Intensitätsverteilung in den Spektren der helleren Plejadensterne. Veröff. Univ.-Sternw. Göttingen, H. 29. ZS. f. Ap. **5**, 205 (1932).
 333. WEMPE, I.: Beiträge zur photographischen Spektralphotometrie. Veröff. Univ.-Sternw. Göttingen, H. 28 = ZS. f. Ap. **5**, 154 (1932).
 334. WESSELINK, A. I.: Note on the Energy Distribution in the Spectra of the Stars. B.A.N. **7**, 239 (1935).
 335. WILSING, I. u. I. SCHEINER: Temperaturbestimmung von 109 helleren Sternen aus spektralphotometrischen Beobachtungen. Potsd. Publ. **19**, Nr. 56 (1909).
 336. — Effektive Temperaturen von 199 helleren Sternen nach spektralphotometrischen Messungen von WILSING, SCHEINER und MÜNCH. Potsd. Publ. **24**, Nr. 74 (1919).
 337. — Messungen der Farben, der Helligkeiten und des Durchmessers der Sterne mit Anwendung der PLANCKSchen Strahlungsgleichung. Potsd. Publ. **24**, Nr 76 (1920).

IV. Kapitel. Thermische Ionisation und Anregung.

Lehrbücher und zusammenfassende Darstellungen.

401. BACHER, R. F. and S. GOUDSMIT: Atomic Energy States. New York 1932.
 402. COURANT, R. u. D. HILBERT: Methoden der mathematischen Physik I. Berlin 1924.
 403. FOWLER, R. H.: Statistische Mechanik. Leipzig 1934.
 404. Handbuch der Astrophysik, Bd. III, 1. Berlin 1930. PANNEKOEK, A.: Die Ionisation in den Atmosphären der Himmelskörper.
 405. JORDAN, P.: Statistische Mechanik auf quantentheoretischer Grundlage. Braunschweig 1933.
 406. LANDOLT-BÖRNSTEIN: Physikalisch-chemische Tabellen, 5. Aufl., Erg.-Bd. 2, Teil 2. Berlin 1931.
 407. MENZEL, D. H.: A Study of the Solar Chromosphere. Publ. Lick Observatory **17** (1931).
 408. PAYNE, C. H.: Stellar Atmospheres (Harvard Monographs I). Cambridge, Mass. 1925.
 409. WERKMEISTER, P.: Das Entwerfen von graphischen Rechentafeln (Nomographie). Berlin 1923.

Abhandlungen.

410. ATKINSON, R. D'E.: Atomic Synthesis and Stellar Energy. Ap. J. **73**, 250 (1931).
 411. BERG, G.: Das Vorkommen der chemischen Elemente auf der Erde (bes. Tabelle 31, Spalte 3). Leipzig 1932.
 412. BIRGE, R. T.: A Note on the Value of the General Constants of the Saha Equation. Ap. J. **77**, 63 (1933).
 413. DARWIN, C. G. and R. H. FOWLER: On the Partition of Energy. Philos. Mag. **44**, 450 (1922).
 414. EGGERT, J.: Über den Dissoziationszustand der Fixsterngase. Physik. Z. **20**, 570 (1919).
 415. ENGEL, A. v. u. M. STEENBECK: Elektrische Gasentladungen. 2 Bände. Berlin 1932 u. 1934.
 416. FOWLER, R. H. and E. A. MILNE: Dissociation Equilibria by the Method of Partitions. Philos. Mag. **45**, 1 (1923).
 417. — — The Intensities of Absorption Lines in Stellar Spectra and the Temperatures and Pressures in the Reversing Layers of Stars. M. N. **83**, 403 (1923).
 418. — — The Maxima of Absorption Lines in Stellar Spectra (2nd paper). M. N. **84**, 499 (1924).
 419. FOWLER, R. H.: Notes on the Theory of Absorption Lines in Stellar Spectra. M. N. **85**, 970 (1925).
 420. — Statistical Equilibrium with Special Reference to the Mechanism of Ionization by Electronic Impacts. Philos. Mag. **47**, 257 (1924).
 421. GERASIMOVIČ, B. P.: On PANNEKOEK'S Ionization Formula. Harv. Bull. **841** (1926) [vgl. auch **857** (1929)].
 422. — Über das Ionisierungsgleichgewicht eines lumineszierenden Atomsystems. Z. Physik **39**, 361 (1926).
 423. — On the Correction to SAHAS Formula for Small Deviations from Thermodynamic Equilibrium. Proc. nat. Acad. Sci. Washington **13**, 180 (1927).
 424. KING, A. S.: Electric Furnace Experiments Involving Ionization Phenomena. Ap. J. **55**, 380 (1922).
 425. MENZEL, D. H.: A Simple Derivation of the Dissoziation Formula. Proc. nat. Acad. Sci. Washington **19**, 40 (1933).
 426. PANNEKOEK, A.: Ionization in Stellar Atmospheres. B.A.N. **1**, 107 (1922).
 427. — The Ionization Formula for Atmospheres not in Thermodynamic Equilibrium. B.A.N. **3**, 207 (1926).
 428. — On the Ionization in Non-Isothermic Atmospheres. B.A.N. **4**, 7 (1927).

429. RUSSELL, H. N.: The Theory of Ionization and the Sunspot Spectrum. Ap. J. **55**, 119 (1922).
430. — Notes on the Ionization in the Solar Atmosphere. Ap. J. **55**, 356 (1922).
431. — Mean Ionization in Stellar Atmospheres. Ap. J. **75**, 337 (1932).
432. — and D. H. MENZEL: The Terrestrial Abundance of the Permanent Gases. Proc. nat. Acad. Sci. Washington **19**, 997 (1933).
433. SAHA, M. N.: Ionization in the Solar Chromosphere. Philos. Mag. **40**, 472 (1920).
434. — Elements in the Sun. Philos. Mag. **40**, 809 (1920).
435. — On a Physical Theory of Stellar Spectra. Proc. Roy. Soc., Lond. (A) **99**, 135 (1921).
436. — Problems of Temperature Radiation of Gases. Philos. Mag. **41**, 267 (1921).
437. — Versuch einer Theorie der physikalischen Erscheinungen bei hohen Temperaturen mit Anwendungen auf die Astrophysik. Z. Physik. **6**, 40 (1921).
438. — and R. K. SWE: Influence of Radiation on Ionization Equilibrium. Nature, Lond. **115**, 377 (1925).
439. SEELIGER, R.: Physik der Gasentladungen. Leipzig 1934.
440. THOMSON, J. J. u. G. P.: Conduction of Electricity through Gases. 2 Bände. Cambridge 1928 u. 1933.
441. UNSÖLD, A.: Zur Theorie der Sternatmosphären. ZS. f. Ap. **8**, 225 (1934).
442. — Nomographische Darstellung der SAHASCHEN Gleichung. Z. techn. Physik **16**, 460 (1935).
443. WOLTJER JR., J.: Influence of Radiation on Ionization Equilibrium. Nature, Lond. **115**, 534 (1925).

Zweiter Teil.

Kontinuierliches Spektrum und Aufbau einer Sternatmosphäre.

V. Kapitel. Strahlungsgleichgewicht und kontinuierliches Spektrum der Sternatmosphären.

Lehrbücher und zusammenfassende Darstellungen.

501. = [5]. EDDINGTON, A. S.: Der innere Aufbau der Sterne. Berlin 1928.
502. EMDEN, R.: Thermodynamik der Himmelskörper. Math. Enzykl. VI **2**, 24 (1926).
503. Handbuch der Astrophysik, Bd. III, Teil 3, 1. Hälfte. Berlin 1930. MILNE, E. A.: Thermodynamics of the Stars.
504. HOPF, E.: Mathematical Problems of Radiative Equilibrium. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics No. 31. Cambridge 1934. (Mit Angaben über die Originalarbeiten des Verf. und weitere mathematische Literatur.)
505. = [3]. ROSSELAND, S.: Astrophysik auf atomtheoretischer Grundlage. Berlin 1931.

Abhandlungen.

506. BRONSTEIN, M.: Über das Verhältnis der effektiven Temperatur der Sterne zur Temperatur ihrer Oberfläche. Z. Physik **59**, 144 (1929). (Vgl. auch E. HOPF [504]).
507. BRÜGGENCATE, P. TEN: Die Entstehung der FRAUNHOFERSCHEN Linien in der Sonnenatmosphäre. ZS. f. Ap. **4**, 159 (1932).
508. EMDEN, R.: Über Strahlungsgleichgewicht und Helligkeitsverteilung der Sonnenphotosphäre. SEELIGER-Festschrift. Berlin 1924.
509. HILBERT, D.: Gesammelte Abhandlungen, Bd. III, S. 217—257. Berlin 1935. — Physik. Z. **13**, 1056; **14**, 592; **15**, 878 (1912/14).
510. HOPF, E.: Zum Problem des Strahlungsgleichgewichts in den äußeren Schichten der Sterne, I u. II. Z. Physik **46**, 374 (1927); **49**, 155 (1928).
511. JAHN, W.: Über die Frequenz- und Richtungsverteilung der Strahlung in der Sonnenatmosphäre. A. N. **253**, Nr. 6067 (1934).
512. LINDBLAD, B.: On the Distribution of Intensity in the Continuous Spectra of the Sun and the Fixed Stars and its Relation to Spectral Type and Luminosity. Uppsala Univ. Årsskr. (Mat. och Nat.) **1** (1920).
513. = [218] — Radiative Equilibrium and Solar Temperature. Nova Acta. Reg. Soc. Sci. Upsal., IV. s. **6**, Nr. 1 (1923).
514. LINDBLAD, R.: On the Radiation and Temperature of the External Photospheric Layers. Ap. J. **58**, 113 (1923).
515. MILNE, E. A.: Radiative Equilibrium in the Outer Layers of a Star. M. N. **81**, 361 (1921).
516. — Radiative Equilibrium and Spectral Distribution. M. N. **81**, 375 (1921).
517. = [222]. — Radiative Equilibrium: the Relation between the Spectral Energy Curve of a Star and the Law of Darkening of the Disc towards the Limb, with Special Reference to the Effects of Scattering and the Solar Spectrum. Philos. Trans. Roy. Soc., Lond. (A) **223**, 201 (1922).

518. SAMPSON, R. A.: On the Rotation and Mechanical State of the Sun. Mem. Roy. Astr. Soc. **51**, 123 (1895).
 519. SCHUSTER, A.: The Influence of Radiation on the Transmission of Heat. Philos. Mag. (6) **5**, 243 (1903).
 520. — Radiation through a Foggy Atmosphere. Ap. J. **21**, 1 (1905).
 521. SCHWARZSCHILD, K.: Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre. Göttinger Nachr. 1906, 41.
 522. — Über Diffusion und Absorption in der Sonnenatmosphäre. Berl. Sitzgsber. 1914, 1183.
 523. UNSÖLD, A. u. A. W. MAUE: Zur Frequenzabhängigkeit des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten der Sonnenatmosphäre. ZS. f. Ap. **5**, 1 (1932).

VI. Kapitel. **Kontinuierlicher Absorptionskoeffizient und Energieverteilung in den kontinuierlichen Spektren der Sterne.**

Lehrbücher.

- [5] EDDINGTON, A. S.: Der innere Aufbau der Sterne. (Kap. 12). Berlin 1928.
 [3] ROSSELAND, S.: Astrophysik auf atomtheoretischer Grundlage. Berlin 1931.

Abhandlungen (Spezialliteratur zu Abschn. 35 am Schluß).

601. BARBIER, D., D. CHALONGE et E. VASSY: Recherches sur le spectre continu de quelques étoiles des premiers types spectraux. J. Physique Radium (VII) **6**, 437 (1935).
 602. BIERMANN, L.: Untersuchungen über Sternatmosphären I—III. Göttinger Nachr. (II) 1933, Nr. 45 u. 49.
 603. CHANDRASEKHAR, S.: The Stellar Coefficients of Absorption and Opacity I u. II. Proc. Roy. Soc., Lond. (A) **133**, 241; **135**, 472 (1931).
 604. — Model Stellar Atmospheres. M. N. **92**, 186 (1932).
 605. McCREA, W. H.: Model Stellar Atmospheres. M. N. **91**, 836 (1931).
 606. EDDINGTON, A. S.: The Absorption of Radiation inside a Star. M. N. **84**, 104 (1924).
 607. GAUNT, J. A.: Continuous Absorption. Proc. Roy. Soc., Lond. (A) **126**, 654 (1930).
 608. = [511]. JAHN, W.: Über die Frequenz- und Richtungsverteilung der Strahlung in der Sonnenatmosphäre. A. N. **253**, 377 (1934).
 609. KARPOV, B. G.: A Study of Hydrogen Emission in Stars of Class Bo-B 5. Lick Obs. Bull. **16**, 159 (1934).
 610. KIENLE, H.: Astronomische Beobachtungen auf der Adlersruhe am Großglockner. Veröff. Göttinger Sternw. **2** (1931).
 611. KRAMERS, H. A.: On the Theory of X-Ray Absorption and of the Continuous X-Ray Spectrum. Philos. Mag. **46**, 836 (1923).
 612. MAUE, A. W.: Das kontinuierliche und das kontinuierlich-diskrete Röntgenspektrum. Ann. Physik **13**, 161 (1932).
 613. = [407]. MENZEL, D. H.: A Study of the Solar Chromosphere. Publ. Lick. Obs. **17** (1931).
 614. MILNE, E. A.: The Stellar Absorption Coefficient. M. N. **85**, 750 (1925).
 615. — Ionization in Stellar Atmospheres. I u. II. M. N. **89**, 17, 157 (1928).
 616. — The Structure and Opacity of a Stellar Atmosphere. Phil. Trans. Roy. Soc., Lond. (A) **228**, 421 (1929).
 617. — and S. CHANDRASEKHAR: Ionization in Stellar Atmospheres III. M. N. **92**, 150 (1932).
 618. ÖHMAN, Y.: Some preliminary Results from a Study of Hydrogen Absorption for Stars in h and γ Persei. Ann. Stockh. Obs. **12**, Nr. 1 (1935).
 619. — and W. IWANOWSKA: Note on the Continuous Hydrogen Absorption of cF-Stars. Stockh. Obs. Medd. **21** (1935). — Ark. mat., astr. o. phys. **25** B, Nr 7.
 620. PANNEKOEK, A.: The Theoretical Contours of Absorption Lines I u. II. M. N. **91**, 139, 519 (1930/31).
 621. — Theoretical Colour Temperatures. M. N. **95**, 529 (1935).
 622. — The Theoretical Intensities of Absorption Lines in Stellar Spectra. Publ. Astr. Inst. Amsterd. 1935, Nr. 4.
 623. ROSSELAND, S.: Note on the Absorption of Radiation within a Star. M. N. **84**, 525 (1924).
 624. RUSSELL, H. N.: Opacity Formulae and Stellar Line Intensities. Ap. J. **78**, 239 (1933).
 625. = [332]. STRASSL, H.: Die Intensitätsverteilung in den Spektren der helleren Plejadensterne. ZS. f. Ap. **5**, 205 (1932).
 626. STRÖMGREN, B.: The Opacity of Stellar Matter and the Hydrogen Content of the Stars ZS. f. Ap. **4**, 118 (1932).

627. SUGIURA, Y.: On the Transition Probability between two States with Positive or Negative Energy in a Central Field due to Nuclear Charge. *Ze. Sci. Pap. Inst. physic. chem. Res., Tokyo* **11**, 1 (1929). (Frühere Arbeiten desselben Verf. ab 1927 sind darin zusammengefaßt.)
628. UNSÖLD, A.: Über den kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten und das Spektrum einer Sternatmosphäre, welche nur aus Wasserstoff besteht. *ZS. f. Ap.* **8**, 32 (1934).
629. = [441]. — Zur Theorie der Sternatmosphären. *ZS. f. Ap.* **8**, 225 (1934).
630. — Theoretical Colour Temperatures. *Observatory* **58**, 247 (1935).
631. WILLIAMS, R. C.: Ultra-Violet Stellar Spectra with Aluminium-Coated Reflectors. II. Energy-Curves from λ 4350 to λ 3000. *Ap. J.* **80**, 7 (1934).
632. WOOLLEY, R. v. D. R.: Stellar Colour Temperatures and the Absorption Coefficient. *M. N.* **94**, 713 (1934).
633. Yŭ, C. S.: A Photometric Study of Stellar Spectra. *Lick Obs. Bull.* **15**, 1 (1930). [Ältere Arbeiten: *Lick Obs. Bull.* **12**, 104, 155 (1926).]

Spezialliteratur zu Abschnitt 35.

634. ANDERSON, J. A.: (zum Teil mit S. SMITH): Über Kondensatorentladungen großer Stromdichte. *Ap. J.* **51**, 37 (1920); **61**, 186 (1925); **75**, 394 (1932) u. a.
635. BRADDICK, H. J. J. and R. W. DITCHBURN: Continuous Absorption of Light in Caesium Vapour. *Proc. Roy. Soc., Lond.* **143**, 472 (1934).
636. — — The Absorption of Light in Caesium Vapour in the Presence of Helium. *Proc. Roy. Soc. Lond.* **150**, 478 (1935).
637. DITCHBURN, R. W.: The Continuous Absorption of Light on Potassium Vapour. *Proc. Roy. Soc., Lond.* **117**, 486 (1927).
638. FINKELNBURG, W.: Kontinuierliche Gasspektren I und II. *Physik. Z.* **31**, 1 (1930); **34**, 529 (1933); Ordnung der älteren Beobachtungen: *Z. Physik* **88**, 297, 763, 768; **93**, 201 (1934). — *Ap. J.* **80**, 313 (1934).
639. HARGREAVES, J.: The Dispersion Electrons of Lithium. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **25**, 75 (1929).
640. KÖRWIEN, H.: Die Dispersion des Heliums im Grundzustand nach der Wellenmechanik. *Z. Physik* **91**, 1 (1934).
641. KREFFT, H.: Über das Wiedervereinigungsspektrum der positiven Säule in Metalldämpfen mit Dublettsreihen. *Z. Physik* **77**, 752 (1932).
642. LAWRENCE, E. O. and N. E. EDLEFSSEN: The Photo-Ionization of Potassium Vapour. *Physic. Rev.* **34**, 1056 (1929).
643. MOHLER, F. L. and C. BOECKNER: Photoionization of some Alkali Vapours. *Bur. Stand. J. Res.* **3**, 303 (1929).
644. PHILLIPS, M.: Photoionization Probabilities of Atomic Potassium. *Physic. Rev.* **39**, 905 (1932).
645. RUARK, A. E. and H. C. UREY: *Atoms, Molecules and Quanta*. New York: McGraw-Hill 1930.
646. SIEGBAHN, M.: *Spektroskopie der Röntgenstrahlen*, 2. Aufl. Berlin 1931.
647. THOMA, A.: Über die kontinuierliche Absorption bei den Alkalien. *Z. Physik* **94**, 621; **95**, 539 (1935).
648. TRUMPY, B.: Die kontinuierliche Absorption im Na-Dampf. *Z. Physik* **47**, 804 (1928).
649. — Übergangswahrscheinlichkeiten im Lithiumatom III. *Z. Physik* **54**, 372 (1929).
650. — Die kontinuierliche Absorption in Lithium- und Natriumdampf. *Z. Physik* **71**, 720 (1931).
651. VINTI, J. P.: The Continuous Absorption Spectrum of Helium. *Physic. Rev.* **44**, 524 (1933).
652. WHEELER, J. A.: Theory of the Dispersion and Absorption of Helium. *Physic. Rev.* **43**, 258 (1933).

VII. Kapitel. Der Aufbau der Sternatmosphären.

Die diesbezügliche Literatur ist im Vorhergehenden schon angeführt. Um die Übersicht zu erleichtern, stellen wir die wichtigsten Arbeiten nochmals kurz zusammen.

701. = [604]. CHANDRASEKHAR, S.: Model Stellar Photospheres. *M. N.* **92**, 186 (1932).
702. = [605]. MCCREA, W. H.: Model Stellar Atmospheres. *M. N.* **91**, 836 (1931).
703. = [616]. MILNE, E. A.: The Structure and Opacity of a Stellar Atmosphere. *Philos. Trans. Roy. Soc., Lond. (A)* **228**, 421 (1929).
704. = [622]. PANNEKOEK, A.: The Theoretical Intensities of Absorption Lines in Stellar Spectra. *Publ. Astr. Inst. Amsterd.* 1935, Nr. 4.
705. = [521]. SCHWARZSCHILD, K.: Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre. *Göttinger Nachr.* 1906, 41.
706. = [629]. UNSÖLD, A.: Zur Theorie der Sternatmosphären. *ZS. f. Ap.* **8**, 225 (1934).

Dritter Teil.

Physikalische Grundlagen der Theorie der FRAUNHOFER-Linien.

VIII. Kapitel. Physikalische Grundlagen der Theorie der FRAUNHOFER-Linien.

I. Teil: Klassische Theorie.

Zusammenfassende Darstellungen (zu Kap. VIII—X)¹.

801. BORN, M.: *Optik* (bes. Kap. 8). Berlin 1933.
 802. MITCHELL, A. and M. ZEMANSKY: *Resonance Radiation and Excited Atoms*. Cambridge Univ. Press 1934.
 803. MÜLLER-POUILLET'S Lehrbuch der Physik, Bd. II, Teil 1, 2. Hälfte, Kap. 28; Teil 2, Kap. 36—40. Braunschweig 1929. MINKOWSKI, R.: *Theorie der Reflexion, Brechung und Dispersion*. — LADENBURG, R.: *Magneto- und elektrooptische Effekte*.
 804. WEISSKOPF, V.: Die Breite der Spektrallinien in Gasen. *Physik. Z.* **34**, 1 (1933).
 805. — The Intensity and Structure of Spectral Lines. *Observatory* **56**, 291 (1933).

Abhandlungen (Kap. VIII).

806. BECKER, W.: Zum Problem der selektiven Absorption im interstellaren Raum. (Mit Literaturangaben.) *Naturwiss.* **22**, 581 (1934).
 807. DEMBER, H.: Über die Bestimmung der LOSCHMIDT'schen Zahl aus Extinktionskoeffizienten des kurzwelligen Sonnenlichts mit Hilfe eines lichtelektrischen Spektralphotometers. *Ann. Physik* **49**, 599 (1916).
 808. HELD, E. F. M. v. D.: Intensität und natürliche Breite von Spektrallinien. *Z. Physik* **70**, 508 (1931).
 809. LADENBURG, R. u. F. REICHE: Über selektive Absorption. *Ann. Physik* **42**, 181 (1913).
 810. — Die Intensität einer Spektrallinie mit Berücksichtigung der Absorption in der leuchtenden Gasschicht. *Z. Physik* **65**, 200 (1930).
 811. LENZ, W.: Einige korrespondenzmäßige Betrachtungen. *Z. Physik* **25**, 299 (1924).
 812. LORENTZ, H. A.: Over de absorptie — en emissiebanden van gasvormige lichamen. I. u. II. *Versl. Amsterd. Akad.* **14**, 518, 577 (1905).
 813. MILLER, W. L. and A. R. GORDON: Numerical Evaluation of Infinite Series and Integrals *J. physic. Chem.* **35**, 2878 (1931).
 814. MINNAERT, M.: The Measurement of Equivalent WIDTHS as a Method for the Investigation of Line Profiles. *Observatory* **57**, 328 (1934).
 815. — and G. F. W. MULDER: Dopplereffekt und Dämpfung bei den FRAUNHOFER'schen Linien. *ZS. f. Ap.* **2**, 165 (1931).
 816. PANNEKOEK, A.: The Theoretical Contours of Absorption Lines. *M. N.* **91**, 139 (1930).
 817. REICHE, F.: Über die Emission, Absorption und Intensitätsverteilung von Spektrallinien. *Verh. dtsh. physik. Ges.* **15**, 3 (1913).
 818. STRUVE, O. and C. T. ELVEY: The Intensities of Stellar Absorption Lines. *Ap. J.* **79**, 409 (1934).
 819. SCHÜTZ, W.: Intensität und natürliche Breite des blauen Cäsiumdubletts I. *Z. Physik* **64**, 682 (1930).
 820. — Die Gesamtabsorption als Maß für die Anzahl der Dispersionselektronen. *ZS. f. Ap.* **1**, 300 (1930).
 821. VOIGT, W.: Über das Gesetz der Intensitätsverteilung innerhalb der Linien eines Gasspektrums. *Münch. Ber.* 1912, 603.
 822. ZEMANSKY, M. W.: Absorption and Collision Broadening of the Mercury Resonance Line. *Physic. Rev.* **36**, 219 (1930).

IX. Kapitel. Physikalische Grundlagen der Theorie der FRAUNHOFER-Linien.

2. Teil: Quantentheorie.

Zusammenfassende Darstellungen (außer den bei Kap. VIII schon genannten).

901. DIRAC, P. A. M.: Die Prinzipien der Quantenmechanik (Kap. XII). Deutsch von W. BLOCH. Leipzig 1930.
 Handbuch der Physik, 2. Aufl., Bd. 24, Teil 1. Berlin 1933:
 902. PAULI, W.: Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik.
 903. BETHE, H.: *Quantenmechanik der Ein- und Zwei-Elektronenprobleme*.
 904. WENTZEL, G.: *Wellenmechanik der Stoß- und Strahlungsvorgänge*.
 905. HEISENBERG, W.: *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie*. Leipzig 1930.

¹ Nachtrag b. d. Korr.: S. A. KORFF u. G. BREIT: Optical Dispersion. *Rev. Mod. Phys.* **4**, 471 (1932). H. MARGENAU u. W. W. WATSON: Pressure Effects on Spectral Lines. *Rev. Mod. Phys.* **8**, 22 u. 398 (1936).

*Abhandlungen*¹.

906. DEBYE, P.: Das molekulare elektrische Feld in Gasen. *Physik. Z.* **20**, 160 (1919).
907. DIRAC, P. A. M.: Note on Exchange Phenomena in the Thomas Atom. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **26**, 376 (1930).
908. EINSTEIN, A.: Zur Quantentheorie der Strahlung. *Physik. Z.* **18**, 121 (1917).
909. FERMI, E.: Eine statistische Methode zur Bestimmung einiger Eigenschaften des Atoms *Z. Physik* **48**, 73 (1928).
910. FOCK, V.: Näherungsmethode zur Lösung des quantenmechanischen Mehrkörperproblems. *Z. Physik* **61**, 126 (1930).
911. FÜCHTBAUER, CHR.: Die Absorption in Spektrallinien im Lichte der Quantentheorie. *Physik. Z.* **21**, 322 (1920).
912. HARTREE, D. R.: The Wave Mechanics of an Atom with Non-Coulomb Central Field. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **24**, 89 (1928).
913. HEISENBERG, W.: Bemerkungen zur Strahlungstheorie. *Ann. Physik* **9**, 338 (1931).
914. HOLTSMARK, J.: Über die Verbreiterung von Spektrallinien. *Ann. Physik* **58**, 577 (1919).
915. — Über die Verbreiterung von Spektrallinien I. u. II. *Physik. Z.* **20**, 162 (1919); **25**, 73 (1924).
916. JENSEN, H.: Über den Austausch im THOMAS-FERMI-Atom. *Z. Physik* **89**, 713 (1934); **93**, 232 (1934).
917. KUHN, H. and F. LONDON: Limitation of the Potential Theory of the Broadening of Spectral Lines. *Philos. Mag.* **18**, 983 (1934).
918. KUHN, H.: Pressure Shift and Broadening of Spectral Lines. *Philos. Mag.* **18**, 987 (1934).
919. LADENBURG, R.: Die quantentheoretische Deutung der Zahl der Disperionselektronen. *Z. Physik* **4**, 451 (1921).
920. LENZ, W.: Einige korrespondenzmäßige Betrachtungen. *Z. Physik* **25**, 299 (1924).
921. — Allgemeine Theorie der Verbreiterung von Spektrallinien. *Z. Physik* **80**, 423 (1933).
922. — Über die Anwendbarkeit der FRANCK-CONDONSchen Regel auf die Linienverbreiterung. *Z. Physik* **83**, 139 (1933).
923. MINNAERT, M.: Ändert sich die Wellenlänge bei der Resonanzstreuung? *ZS. f. Ap.* **4**, 153 (1932).
924. MÜLLER-POUILLETS Lehrbuch der Physik, Bd. II, Teil 2, 2. Hälfte, Kap. 40. Braunschweig 1929. LADENBURG, R.: Einfluß elektrischer Felder auf Spektrallinien (Stark-effekt).
925. PANNEKOEK, A. and S. VERWEY: The Stark Effect of Hydrogen in First Type Stellar Spectra. *Proc. Amsterd. Acad.* **38**, 2 (1935).
926. RUDNICK, P.: Computation of Spectral Intensities for Hydrogen. *Physic. Rev.* **48**, 807 (1935).
927. RUSSELL, H. N. and J. Q. STEWART: Pressures at the Sun's Surface. *Ap. J.* **59**, 197 (1924).
928. SLACK, F. G.: Intensities in the Hydrogen Spectral Lines. *Physic. Rev.* **31**, 527 (1928).
929. STARK, J.: Elektrische Spektralanalyse chemischer Atome. Leipzig 1914.
930. SUGIURA, Y.: [637].
931. WEISSKOPF, V. u. E. WIGNER: Berechnung der natürlichen Linienbreite auf Grund der DIRACschen Lichttheorie. *Z. Physik* **63**, 54 (1930).
932. — Zur Theorie der Resonanzfluoreszenz. *Ann. Physik* **9**, 23 (1931).
933. — Zur Theorie der Kopplungsbreite und der Stoßdämpfung. *Z. Physik* **75**, 287 (1932).
934. — Die Streuung des Lichtes an angeregten Atomen. *Z. Physik* **85**, 451 (1933).

Zu Abschnitt 50: Multipllettintensitäten.

935. BARTLETT, J. H.: The Relative Intensities of Super-Multiplet Lines. *Physic. Rev.* **35**, 229 (1930).
936. BURGER, H. C. u. H. B. DORGELO: Beziehung zwischen inneren Quantenzahlen und Intensitäten von Mehrfachlinien. *Z. Physik* **23**, 258 (1924).
937. DORGELO, H. B.: Die Intensität mehrfacher Spektrallinien. *Z. Physik* **22**, 170 (1924).
938. — Die photographische Spektralphotometrie. *Physik. Z.* **26**, 756 (1925).
939. GOLDBERG, LEO: Relative Multiplet Strengths in LS-Coupling. *Ap. J.* **82**, 1 (1935).
940. Handbuch der Astrophysik, Bd. III, 2. Hälfte. Berlin 1930. LAPORTE, O.: Theorie der Multipllettspektren.
941. Handbuch der Physik, Bd. 21. Berlin 1929. FRERICHs, R.: Intensitätsregeln.

¹ Zu Abschn. 50 (Multipllettintensitäten) am Schluß besondere Zusammenstellung. Literatur über berechnete Oszillatorenstärken bestimmter Linien in Tabelle 42.

942. KRONIG, R. DE L.: Über die Intensität der Mehrfachlinien und ihrer ZEEEMAN-Komponenten. *Z. Physik* **31**, 885 (1925).
943. MOORE, CH. E.: A Multiplet Table of Astrophysical Interest. Princeton Univ. Obs. Contr. 1933.
944. RUSSELL, H. N.: The Intensities of Lines in Multiplets. *Proc. nat. Acad. Sci. Washington* **11**, 314, 322 (1925).
945. SOMMERFELD, A. u. W. HEISENBERG: Die Intensität der Mehrfachlinien und ihrer ZEEEMAN-Komponenten. *Z. Physik* **11**, 131 (1922).
946. — u. H. HÖNL: Über die Intensität der Multiplettlinien. *Berl. Sitzgsber.* **9**, 141 (1925).
947. — Atombau und Spektrallinien, Bd. I. Braunschweig 1931.
948. WHITE, H. E.: and A. Y. ELIASON: Relative Intensity Tables for Spectrum Lines. *Physic. Rev.* **44**, 753 (1933).

X. Kapitel. **Physikalische Grundlagen der Theorie der FRAUNHOFER-Linien. III. Teil: Experimentelle Prüfung der Theorie und Messung von Übergangswahrscheinlichkeiten usw.**

*Literatur über gemessene Übergangswahrscheinlichkeiten in Tabelle 47.
Multiplettintensitäten am Schluß des Abschnittes 57 im Text.*

1001. CHILDS, W. H. J. u. R. MECKE: Intensitätsmessungen in der atmosphärischen Sauerstoffbande λ 7600. *Z. Physik* **68**, 344 (1931).
1002. FÜCHTBAUER, CHR. u. W. HOFMANN: Über Maximalintensität, Dämpfung und wahre Intensitätsverteilung von Serienlinien in Absorption. *Ann. Physik* **43**, 96 (1914).
1003. — G. IOOS u. O. DINKELACKER: Über Intensität, Verbreiterung und Druckverschiebung von Spektrallinien, insbesondere der Absorptionslinie 2537 des Quecksilbers. *Ann. Physik* **71**, 204 (1923).
1004. — u. F. GÖSSLER: Verschiebung und unsymmetrische Verbreiterung von Absorptionslinien durch Fremdgase. *Z. Physik* **87**, 89 (1933) (und weitere Arbeiten in *Z. Physik*).
1005. *Handbuch der Experimentalphysik*, Bd. 14. Leipzig 1927. WIEN, W.: Kanalstrahlen.
1006. HEARD, J. F.: The Contours of the Potassium Resonance Lines in Absorption. *M. N.* **94**, 458 (1934).
1007. HÖRMANN, H.: Temperaturverteilung und Elektronendichte in frei brennenden Lichtbögen. *Z. Physik* **97**, 539 (1935).
1008. HOLTSMARK, J. u. B. TRUMPY: Über die Verbreiterung der Spektrallinien III. *Z. Physik* **31**, 803 (1925).
- 1008a. HULBURT, E. O.: The Distribution of Intensity in the Broadened Balmer Lines of Hydrogen. *Physic. Rev.* **22**, 24 (1923).
1009. KING, R. B. and A. S.: Relative f-Values for Lines of Fe I from Electric-Furnace Absorption Spectra. *Ap. J.* **82**, 377 (1935). Hierzu D. MENZEL u. L. GOLDBERG: *Ap. J.* **85**, 40 (1936).
1010. KLÜBER, H. v.: Photometrische Messungen in der atmosphärischen Sauerstoffbande λ 7600 (A-Gruppe) im Sonnenspektrum. *ZS. f. Ap.* **6**, 161 (1932).
1011. KORFF, S.: Width of the D-Lines of Sodium in Absorption. *Ap. J.* **76**, 124 (1932).
1012. MANNKOPFF, R.: Über die Auslöschung der Resonanzfluoreszenz von Natriumdampf. *Z. Physik* **36**, 315 (1926).
1013. MINKOWSKI, R.: Natürliche Breite und Druckverbreiterung von Spektrallinien. *Z. Physik* **36**, 839 (1926).
1014. — Bemerkungen über den Einfluß der Selbstabsorption auf Intensitätsmessungen von Spektrallinien. *Z. Physik* **63**, 188 (1930).
1015. SCHÜTZ, W.: Über natürliche Breite und Verbreiterung der D-Linien des absorbierenden Natriumdampfes durch Dampfdichte und Druck fremder Gase. *Z. Physik* **45**, 30 (1927) [vgl. auch **38**, 864 (1926)].
1016. — Intensität und natürliche Breite des blauen Cäsiumbletts I. *Z. Physik* **64**, 682 (1930).
1017. — Experimentelle Prüfung der Quantentheorie der natürlichen Linienbreite. *Physik. Z.* **34**, 831 (1933).
1018. — (teilweise mit H. SCHILLBACH): Über die natürliche Breite der Neonlinien im sichtbaren Spektrum usw. *Ann. Physik* **18**, 705, 721, 746 (1933).
1019. WEINGEROFF, M.: Bestimmung der natürlichen Breite der D-Linien von Natrium mittels einer Kompensationsmethode. *Z. Physik* **67**, 679 (1931).
1020. WOOLLEY, R. v. D. R.: A Study of the Widths of the Lines in the B-Band, due to Atmospheric Oxygen, in the Solar Spectrum. *Ap. J.* **73**, 185 (1931).

Vierter Teil.

Messung und Deutung der Intensitätsverteilung in den FRAUNHOFER-Linien.**XI. Kapitel. Messung der Konturen und Gesamtabsorptionen von FRAUNHOFER-Linien.***Lehrbücher und zusammenfassende Darstellungen.*

1101. ANGERER, E. v.: *Wissenschaftliche Photographie*. Leipzig 1931.
 1102. DOBSON, G. M. B., I. O. GRIFFITH and D. N. HARRISON: *Photographic Photometry*. Oxford 1926.
 1103. *Handbuch der Astrophysik*, Bd. II, 2. Hälfte. Berlin 1931. EBERHARD, G.: *Photographische Photometrie*.
 1104. ORNSTEIN, L. S., W. J. M. MOLL u. H. C. BURGER: *Objektive Spektralphotometrie*. Braunschweig 1932.
 1105. ROSS, F. E.: *The Physics of the Developed Photographic Image*. Monogr. Res. Lab. Eastman Kodak, Nr. 5. New York 1924.
 1106. SEWIG, R.: *Objektive Photometrie*. Berlin 1935.

Abhandlungen.

1110. ALLEN, C. W.: The Intensity of FRAUNHOFER Lines in the Region 4036—6000 Å. Mem. Commonwealth Solar Obs. Canberra **1**, Nr. 5 (1934).
 1111. D'AZAMBUJA, L.: Recherches sur la structure de la chromosphère. Ann. Obs. Paris-Meudon **8**, 2 (1930).
 1112. BAADE, W., F. GOOS, P. P. KOCH u. R. MINKOWSKI: Die Intensitätsverteilung in den Spektrallinien des Orionnebels. ZS. f. Ap. **6**, 355 (1933).
 1113. BEALS, C. S.: A Photo-Electric Microphotometer Using Valve Amplification. M. N. **92**, 196 (1932).
 1114. BURGER, H. C. u. P. H. v. CITPERT: Wahre und scheinbare Intensitätsverteilung in Spektrallinien. Z. Physik **79**, 722 (1932); **81**, 428 (1933).
 1115. CARROLL, J. A.: The Intensity of an Absorption Line in a Spectrum Produced by a Grating. M. N. **88**, 154 (1927).
 1116. CHERRINGTON, E.: Photometry of the Magnesium b Group in the Solar Spectrum. Lick Obs. Bull. **477** (1935).
 1117. CITPERT, P. H. VAN: Zum Einfluß der Spaltbreite auf die Intensitätsverteilung in Spektrallinien. Z. Physik **65**, 547 (1930); **69**, 298 (1931).
 1118. — Der Stufenblendenkondensator nach HANSEN. Z. Physik **73**, 249 (1931).
 1119. DAHME, A.: Bolometrische Messung von Linienkonturen im infraroten Sonnenspektrum. ZS. f. Ap. **11**, 93 (1935).
 1120. DUNHAM JR., TH.: A Device for the Reduction of Spectrophotometric Tracings. Publ. Astr. Soc. Pacific **45**, 204 (1933).
 1121. — Photoelectric Measurement of the Shapes of Solar Absorption Lines. Physic. Rev. **44**, 329 (1933).
 1122. EBERHARD, G.: Über die gegenseitige Beeinflussung benachbarter Felder auf einer Bromsilberplatte. Physik. Z. **13**, 288 (1912).
 1123. — Photographisch-Photometrische Untersuchungen. Publ. Astrophys. Obs. Potsd. **26**, Nr. 84, Heft 1 (1926).
 1124. GOOS, FR. u. P. P. KOCH: Über eine Neukonstruktion des registrierenden Mikro-photometers. Z. Physik **44**, 855 (1927).
 1125. HABERL, K.: Eine Vorrichtung zum Umzeichnen von Photogrammen in Intensitätskurven. Physik. Z. **36**, 59 (1935).
 1126. HANSEN, G.: Intensitätsmarken auf photographischen Platten. Z. Physik **29**, 356 (1924).
 1127. HIRSCH, R. v. u. M. SCHÖN: Eine neue Anordnung zum genauen Intensitätsvergleich von Spektrallinien. ZS. f. Ap. **1**, 164 (1930).
 1128. KIENLE, H.: Über das Schwärzungsgesetz der photographischen Platte. Naturwiss. **23**, 762 (1935).
 1129. KLÜBER, H. v.: Quantitative Untersuchungen an Absorptionslinien im Sonnenspektrum. Z. Physik **44**, 481 (1927).
 1130. KOCH, P. P.: Über Methoden der photographischen Spektralphotometrie. Ann. Physik **30**, 841 (1909).
 1131. — Über die Messung der Intensitätsverteilung in Spektrallinien I und II. Ann. Physik **34**, 377 (1911); **42**, 1 (1913).
 1132. — Über ein registrierendes Mikrophotometer. Ann. Physik **39**, 705 (1912).
 1133. KULENKAMPPF, H.: Ein einfaches registrierendes Mikrophotometer. Physik. Z. **36**, 56 (1935).
 1134. MINNAERT, M.: Over Spookbeelden bij Buigingsroosters. Versl. Amsterd. Akad. **30**, 257 (1922).

- 1135a. MINNAERT, M.: Die Intensität innerhalb FRAUNHOFERScher Linien. *Z. Physik* **45**, 610 (1927).
- 1135b. — u. B. v. ASSENBERGH: Intensitätsmessungen an FRAUNHOFERSchen Linien. *Z. Physik* **53**, 248 (1929).
- 1135c. — u. G. F. W. MULDER: Intensitätsmessungen an FRAUNHOFER-Linien im Wellenlängengebiet 5150 bis 5270 Å. E. *ZS. f. Ap.* **1**, 192 (1930).
1136. — Die Profile der äußeren Teile der starken FRAUNHOFERSchen Linien. *ZS. f. Ap.* **10**, 40 (1935).
1137. MOLL, W. J. H.: (Mikrophotometer.) *Proc. physic. Soc. Lond.* **33**, 207 (1921).
1138. MULDER, G. F. W.: Äquivalente breedten van FRAUNHOFER-Lijnen in het Zonnenspectrum. *Diss. Utrecht* 1934.
1139. ÖHMAN, Y.: Spectrophotometric Studies of B, A und F Type Stars. *Nova Acta Reg. Soc. Sci. Upsal.*, IV. s. **7**, 3 (1930).
1140. ÖPIK, E. and M. OLMSTED: The Construction and Use of a Scale of Artificial Spectral Lines, with Application to Absolute Magnitudes of Early Type Stars. *H. C.* **369**, (1931).
1141. ORNSTEIN, L. S. u. M. MINNAERT: Die Intensitätsverteilung in Aufnahmen von Spektrallinien und ihre Anwendung auf photometrische Messungen. *Z. Physik* **43**, 404 (1927).
1142. — — Vergrößerungskamera. *B. A. N.* **5**, 175 (1930).
1143. PLASKETT, H. H.: The Formation of the Magnesium b Lines in the Solar Atmosphere. *M. N.* **91**, 780 (1931).
1144. — A Moll-Type Microphotometer and its Performance. *M. N.* **95**, 160 (1934).
1145. Lord RAYLEIGH: *Sci. Pap.* **1**, 135 (1871).
1146. REDMAN, R. O.: A Determination of the Profile of the Calcium Line λ 4227 in the Solar Spectrum, Using a Prism Spectrograph and Monochromator. *M. N.* **95**, 742 (1935).
1147. SCHACHTSCHABEL, K.: Ein einfaches Verfahren zur Messung der Absorption in großem Spektralbereich nebst Anwendung auf Gläser. *Ann. Physik* **81**, 926 (1926).
1148. SEEMANN, H.: Der Einfluß der photographischen Entwicklungsfehler (SAUM-Effekt) in der Spektrogrammetrie, insbesondere bei Bandkantenmessungen. *Z. Physik* **80**, 506 (1933).
1149. SHANE, C. D.: The Photometry of Lines in the Solar Spektrum. *Lick Obs. Bull.* 1932, Nr. 449.
1150. SHENSTONE, A. G.: Secondary Diffraction Maxima of Spectral Lines. *Physic. Rev.* **34**, 726 (1929).
1151. THACKERAY, A. D.: Observed Central Intensities of FRAUNHOFER Lines. *M. N.* **95**, 293 (1935).
1152. UNSÖLD, A.: On the Contours of NARROW Absorption Lines. *Ap. J.* **75**, 106 (1932).
1153. WALENKOW, N.: Über den EBERHARD-Effekt und seine Bedeutung für die photographische Photometrie. *Z. wiss. Phot.* **27**, 236 (1930).
1154. WEBER, A.: Über die Anwendung des rotierenden Sektors zur photographischen Photometrie. *Ann. Physik* **45**, 801 (1914).
1155. WOOLLEY, R. v. D. R.: Mikrophotometry of the Solar Spektrum from 4040 to 4390 Å. *Ann. Solar Phys. Obs. Cambridge* **3**, 2 (1933).

XII. Kapitel. Strahlungsgleichgewicht und FRAUNHOFER-Linien.

Lehrbücher und zusammenfassende Darstellungen vgl. Kap. V.

1201. ALLEN, C. W. = [1110].
1202. EDDINGTON, A. S.: The Formation of Absorption Lines. *M. N.* **89**, 620 (1929).
1203. MILNE, E. A. = [517]. *Philos. Trans. Roy. Soc. Lond. (A)* **223**, 201 (1922).
1204. — The Theoretical Contours of Absorption Lines in Stellar Atmospheres. *M. N.* **89**, 3 (1928).
1205. — The Structure and Opacity of a Stellar Atmosphere. *Phil. Trans. Roy. Soc., Lond. (A)* **228**, 421 (1929).
1206. MINNAERT, M. u. J. HOUTGAST: Flügelprofile von starken FRAUNHOFERSchen Linien als Funktion des Abstandes vom Zentrum der Sonnenscheibe. *ZS. f. Ap.* **12**, 81 (1936).
1207. PANNEKOEK, A.: The Theoretical Contours of Absorption Lines I und II. *M. N.* **91**, 139, 519 (1930/31).
1208. — The Theoretical Intensities of Absorption Lines in Stellar Spectra. *Publ. Astr. Inst. Univ. Amsterd.* 1935, Nr. 4.
1209. RUSSELL, H. N.: Opacity Formulae and Stellar Line Intensities. *Ap. J.* **78**, 239 (1933).
1210. SCHUSTER, A.: Radiation through a Foggy Atmosphere. *Ap. J.* **21**, 1 (1905).
1211. SCHWARZSCHILD, K.: Über Diffusion und Absorption in der Sonnenatmosphäre. *Berl. Sitzgsber.* **1914**, 1183.
1212. STEWART, J. Q.: The Width of Absorption Lines in a Rarefied Gas. *Ap. J.* **59**, 30 (1924). S. auch [927].

1213. UNSÖLD, A.: Über die Struktur der FRAUNHOFERSchen Linien und die Dynamik der Sonnenchromosphäre. *Z. Physik* **44**, 793 (1927).
 1214. — Über die Struktur der FRAUNHOFERSchen Linien und die quantitative Spektralanalyse der Sonnenatmosphäre. *Z. Physik* **46**, 765 (1928).
 1215. — Zur Deutung der Intensitätsverteilung in den FRAUNHOFERSchen Linien. II. Teil. Die Intensität der Linienflügel. *ZS. f. Ap.* **4**, 339 (1932).
 1216. — Zur Theorie der Sternatmosphären. *Z. f. Ap.* **8**, 225 (1934).

XIII. Kapitel. Die Deutung der FRAUNHOFER-Linien. Beobachtung und Theorie.

- 1301a. ADAMS, W. S.: Some Results of a Study of Spectra of Sirius, Procyon and Arcturus with High Dispersion. *Ap. J.* **33**, 64 (1911).
 1302b. — and E. McCORMACK: Systematic Displacements of Lines in the Spectra of Certain Bright Stars. *Ap. J.* **81**, 119 (1935).
 1302. ANGER, C. J.: A Study of Hydrogen Lines in Two Galactic Clusters. *H. C.* **352** (1930).
 1303. ARNULF, A., D. BARBIER, D. CHALONGE at R. CANAVAGGIA: a) Resultats de l'étude de 48 spectres stellaires faite au Jungfrauoch en 1935. b) Températures de couleur et absorption continue de l'hydrogène pour les étoiles des premiers types spectraux. *C. R. Acad. Sci. Paris* **202**, 1488, 1571 (1936).
 1304. BECKER, R.: Über den STARK-Effekt bei Alkalien. *Z. Physik* **9**, 332 (1922).
 1305. BERMAN, L.: The Spectrum Analysis of the Hot Carbon Star R Coronae Borealis. *Ap. J.* **81**, 369 (1935).
 1306. BIEBERACH, L.: Lehrbuch der Funktionentheorie I. Leipzig u. Berlin 1921.
 1307. DAHME, A.: Bolometrische Messung von Linienkonturen im infraroten Sonnenspektrum. *ZS. f. Ap.* **11**, 93 (1935).
 1308. ELVEY, C. T.: A Note on O. STRUVE's Paper on the Stark Effect in Stellar Spectra. *Ap. J.* **69**, 237 (1929).
 1309. — The Contours of Helium Lines in Stellar Spectra. *Ap. J.* **70**, 141 (1929).
 1310. — The Contours of Hydrogen Lines in Stellar Spectra. *Ap. J.* **71**, 191 (1930).
 1311. — and O. STRUVE: A Study of Stellar Hydrogen Lines and their Relation to the Stark Effect. *Ap. J.* **72**, 277 (1930).
 1312. — and P. C. KEENAN: The Total Absorption of some Hydrogen Lines in Stellar Spectra. *Ap. J.* **74**, 223 (1931).
 1313. EVERSHEED, J.: On the Detection of Small Doppler Shifts in the Spectrum of the Reversing Layer. *M. N.* **94**, 96 (1934).
 1314. FOSTER, J. S.: Application of Quantum Mechanics of the Stark Effekt in Helium. *Proc. Roy. Soc. Lond. (A)* **117**, 137 (1927).
 1315. — and A. V. DOUGLAS: Stellar Stark Line He λ 4470. *Physic. Rev.* **44**, 325 (1933).
 1316. GÜNTHER, S.: Die Absorption der BALMER-Linien in Sternspektren. *ZS. f. Ap.* **7**, 106 (1933).
 1317. JOHN, CH. E. ST. and W. S. ADAMS: Convection Currents in Stellar Atmospheres. *Ap. J.* **60**, 43 (1924).
 1318. KIRKWOOD, J. G.: Erweiterung der Sumpensätze für Alkalien mit einer Anwendung auf den Stark-Effekt. *Physik. Z.* **33**, 521 (1932).
 1319. KUIPER, G. P.: On the Hydrogen Content of Clusters, Binaries and Cepheids. *Harv. Bull.* **903** (1936).
 1320. LADENBURG, R.: Der quadratische elektrische Effekt an den D-Linien des Natriums in Absorption. *Z. Physik* **28**, 51 (1924).
 1321. LINDBLAD, B. and E. STENQUIST: On the Spectrophotometric Criteria of Stellar Luminosity. (Dort weitere Literaturangaben.) *Ann. Stockh. Obs.* **11**, Nr. 12 (1934).
 1322. — Absorption Continuum due to Quasi-Molecules of Calcium in Dwarf Stars of Type M. *Nature, Lond.* **136**, 67 (1935). Vgl. auch *Ann. Stockh. Obs.* **12**, Nr. 2 (1935).
 1323. LINDSAY, E. M.: An Investigation of Hydrogen Lines in Stellar Spectra. *H. C.* **368** (1930).
 1324. MERRILL, P. W. and O. C. WILSON: Comparison of the PASCHEN and the BALMER Series of Hydrogen Lines in Stellar Spectra. *Ap. J.* **80**, 19 (1934).
 1325. MINNAERT, M. and G. F. W. MULDER: DOPPLER-Effekt und Dämpfung bei den FRAUNHOFERSchen Linien. *ZS. f. Ap.* **2**, 165 (1931).
 1326. — u. C. SLOB: Die Totalintensitäten der FRAUNHOFER-Linien. *Proc. Amsterd. Acad.* **34**, Nr. 4 (1931).
 1327. — u. J. GENARD: Intensitätsmessungen an der Serie 2 P-nD des Magnesiums im Sonnenspektrum. *ZS. f. Ap.* **10**, 377 (1935).
 1328. ÖHMAN, Y.: The Intensity of the Hydrogen Lines as Criterion of Luminosity for B, A and F Type Stars. *Medd. Astr. Obs. Uppsala* 1930, Nr. 47.
 1329. — Spectrophotometric Studies of B, A and F Type Stars. *Nova Acta Reg. Soc. Sci. Upsal.* **IV 7**, 3 (1930).

1330. ÖHMAN, Y.: Note on the Spectrum of a Probable White Dwarf in η Persei. *M. N.* **92**, 71 (1931).
1331. — Some Preliminary Results from a Study of Hydrogen Absorption for Stars in η and γ Persei. *Ann. Stockh. Obs.* **12**, Nr. 1 (1935).
1332. — and W. IWANOWSKA: Note on the Continuous Hydrogen Absorption of cF Stars. *Medd. Stockh. Obs.* 1935, Nr. 21.
1333. PANNEKOEK, A.: Critical Remarks on the Central Intensity in FRAUNHOFER Lines. *B.A.N.* **7**, 151 (1933).
1334. — and S. VERWEY: The Stark effect of Hydrogen in First Type Stellar Spectra. *Proc. Amsterd. Acad.* **38**, 479 (1935).
1335. PAUWEN, J.: Contours of Certain Lines in 88γ Pegasi. *Ap. J.* **70**, 263 (1929).
1336. RIGHINI, G.: Die Intensitäten der Natriumlinien im Sonnenspektrum. *ZS. f. Ap.* **10**, 344 (1935).
1337. ROSENTHAL, A. H.: Photographic Intensity Measurements of Lines of the PASCHEN Series of Hydrogen in the Infra-Red Solar Spectrum. *Nature, Lond.* **134**, 533 (1934).
1338. ROSSELAND, S.: On the Origin of Bright Lines in Stellar Spectra. *Ap. J.* **63**, 218 (1926).
1339. RUSSELL, H. N. and J. Q. STEWART: Pressures at the Sun's Surface. *Ap. J.* **59**, 197 (1924).
1340. — W. S. ADAMS and C. E. MOORE: A Calibration of ROWLANDS Scala of Intensities for Solar Lines. *Ap. J.* **68**, 1 (1928).
1341. — and W. S. ADAMS: Preliminary Results of a New Method for the Analysis of Stellar Spectra. *Ap. J.* **68**, 3 (1928).
1342. SOMMERFELD, A.: Zur Elektronentheorie der Metalle. *Z. Physik* **47**, 1 (1928).
1343. STRÖMGREN, B.: The Influence of Electron Captures on the Contours of FRAUNHOFER Lines. *ZS. f. Ap.* **10**, 237 (1935).
1344. STRUVE, O.: The Stark Effekt in Stellar Spectra. *Ap. J.* **69**, 173 (1929).
1345. — Pressure Effects in Stellar Spectra. *Ap. J.* **70**, 85 (1929).
1346. — The STARK Effekt as a Means of Determining Comparative Absolute Magnitudes. *Ap. J.* **70**, 237 (1929).
1347. — A Study of the Spectra of B Stars. *Ap. J.* **74**, 225 (1931).
1348. — The Forbidden Helium Line $\lambda 4470$. *Ap. J.* **80**, 64 (1934).
1349. — Thermal Doppler Effect and Turbulence in Stellar Spectra of Early Class. *Proc. nat. Acad. Sci. Washington* **18**, 585 (1932).
1350. — and C. T. ELVEY: The Intensities of Stellar Absorption Lines. *Ap. J.* **79**, 409 (1934).
1351. — Some New Trends in Stellar Spectroscopy. *Pop. Astr.* **43**, (1935, Okt.-Dez.).
1352. SWINGS, P. and O. STRUVE: A Note on the Formation of Stellar Absorption Lines. *Ap. J.* **83**, 238 (1936).
1353. THACKERAY, A. D.: Anomalous Multiplet Intensities in Stellar Spectra and Sunspots. *M. N.* **94**, 99 (1934).
1354. — Chromospheric Emission in the Wings of H and K. *Ap. J.* **81**, 336 (1935). — *Publ. A. S. P.* **48**, 330 (1936).
1355. THACKERAY, A. D.: The Emission Line $\lambda 4511$ in Late-Type Variables. *Ap. J.* **81**, 467 (1935).
1356. UNSÖLD, A.: Beiträge zur Quantenmechanik der Atome (§ 10). *Ann. Physik* **82**, 355 (1927).
1357. — Über die Struktur der FRAUNHOFERSchen Linien und die quantitative Spektralanalyse der Sonnenatmosphäre. *Z. Physik* **46**, 765 (1928).
1358. — Über den Einfluß von Stößen auf die Struktur der FRAUNHOFERSchen Linien. *SOMMERFELD-Festschrift. Leipzig* 1928.
1359. — Die BALMER-Serie des Wasserstoffs im Sonnenspektrum. *Z. Physik* **59**, 353 (1930).
1360. — Über Abweichungen der Sternatmosphären vom thermischen Gleichgewicht. *ZS. f. Ap.* **1**, 1 (1930).
1361. — O. STRUVE u. C. T. ELVEY: Zur Deutung der interstellaren Calciumlinien. *ZS. f. Ap.* **1**, 314 (1930).
1362. — Astrophysikalische Anwendung und Prüfung der Quantentheorie der natürlichen Linienbreite. *ZS. f. Ap.* **2**, 199 (1931).
1363. — Wasserstoff und Helium in Sternatmosphären. *ZS. f. Ap.* **3**, 81 (1931).
1364. — Über die Gesamtaborption von H_{α} in den Spektren von B- und A-Sternen. *ZS. f. Ap.* **4**, 172 (1932).
1365. — Zur Deutung der Intensitätsverteilung in den FRAUNHOFERSchen Linien. Teil I. Die Intensität der Linienmitte (Restintensität). *ZS. f. Ap.* **4**, 319 (1932).
1366. — Stoßdämpfung in der Sonnenatmosphäre. *ZS. f. Ap.* **12**, 56 (1936).
1367. VERWEY, S.: The STARK Effect of Hydrogen in Stellar Spectra. *Diss. Amsterdam* 1936.
1368. WILLIAMS, E. T. R.: A Spectrophotometric Study of A Stars. *H. C.* **348** (1929).

1369. WILLIAMS, E. G.: Stellar Hydrogen Line Contours and their Variation with Temperature and Surface Gravity. *Ann. Solar Phys. Obs. Cambridge* **2**, 2 (1932).
 1370. WOLF, A.: Theorie des quadratischen Starkeffektes von Dubletts und Tripletts. *Z. Physik* **61**, 619 (1930).
 1371. WOOLLEY, R. v. D. R.: On the Central Intensities of some Absorption Lines in the Solar Spectrum. *M. N.* **90**, 170 (1930).
 1372. — Interlocking of Lines in Absorption Spectra. *M. N.* **90**, 779 (1930).
 1373. — Interlocking of Triplets of Absorption Lines. *M. N.* **91**, 864 (1931).
 1374. — Fluorescence in H_{α} and H_{β} . *M. N.* **94**, 631 (1934).

XIV. Kapitel. Beeinflussung der Linienkonturen durch Rotation und Expansion der Sterne.

1401. BEALS, C. S.: The Contours of Emission Bands in Novae and WOLF-RAYET Stars. *M. N.* **91**, 966 (1931). [Vgl. auch *M. N.* **90**, 202 (1929).]
 1402. CARROLL, J. A.: The Form of an Absorption Line in the Spectrum of a Rotating or Expanding Star. *M. N.* **88**, 548 (1928).
 1403. — The Spectroscopic Determination of Stellar Rotation and its Effects on Line Profiles. *M. N.* **93**, 478 (1933).
 1404. — and L. J. INGRAM: The Rotational Speeds of the Stars. *M. N.* **93**, 508 (1933).
 1405. — On the Effects of Errors of Observation on the Spectroscopic Determination of Stellar Rotation. *M. N.* **93**, 680 (1933).
 1406. CHANDRASEKHAR, S.: On the Hypothesis of the Radial Ejection of High-Speed Atoms for the WOLF-RAYET Stars and the Novae. *M. N.* **94**, 522 (1934).
 1407. ELVEY, C. T.: The Contours of Helium Lines in Stellar Spectra. *Ap. J.* **70**, 141 (1929).
 1408. — The Rotation of Stars and the Contours of Mg^{+} 4481. *Ap. J.* **71**, 221 (1930).
 1409. — Variations in Intensities within a Triplet of Si III in Stellar Spectra. *Ap. J.* **78**, 219 (1933).
 1410. GERASIMOVIC, B. P.: The Contours of Emission Lines in Expanding Nebular Envelopes. *ZS. f. Ap.* **7**, 335 (1933).
 1411. — On the Interpretation of Nova Emission Bands. *ZS. f. Ap.* **10**, 154 (1935).
 1412. McLAUGHLIN: Spectrographic Studies of Eclipsing Binaries. *Publ. Obs. Univ. Michigan* **6**, Nr. 2 (1934).
 1413. SHAPLEY, H. and S. B. NICHOLSON: On the Spectral Lines of a Pulsating Star. *Proc. nat. Acad. Sci. Washington* **5**, 417 (1919).
 1414. SHAJN, G. and O. STRUVE: On the Rotation of the Stars. *M. N.* **89**, 221 (1929).
 1415. STRUVE, O.: On the Axial Rotation of Stars. *Ap. J.* **72**, 1 (1930).
 1416. — and C. T. ELVEY: Intensities in Stellar Spectra of Si III. *Ap. J.* **72**, 267 (1930).
 1417. — — Algol and Stellar Rotation. *M. N.* **91**, 664 (1931).
 1418. WESTGATE, CH.: A Statistical Study of the Rotational Broadening of Stellar Absorption Lines in Classes B and O. *Ap. J.* **77**, 141 (1932).
 1419. — A Statistical Study of the Rotational Broadening of the Absorption Line Mg II λ 4481 in 413 Stars of Class A. *Ap. J.* **78**, 46 (1933).
 1420. — A Statistical Study of Rotational Broadening in 112 Stars of Class F. *Ap. J.* **79**, 357 (1934).
 1421. WILSON, O. C.: The Analysis of Nova Emission Bands. *Ap. J.* **80**, 259 (1934).
 1422. — Absorption Lines due to an Expanding Star. *Ap. J.* **82**, 233 (1935).

Fünfter Teil.

Probleme und Anwendungen der quantitativen Theorie der Sternspektren.

XV. Kapitel. Anwendung der Theorie der FRAUNHOFER-Linien.

1501. ADAMS, W. S. and A. KOHLSCHÜTTER: Some Spectral Criteria for the Determination of Absolute Stellar Magnitudes. *Ap. J.* **40**, 385 (1914).
 1502. — and A. H. JOY: The Luminosities and Parallaxes of Five Hundred Stars. *Ap. J.* **46**, 313 (1917).
 1503. — — G. STRÖMBERG and C. G. BURWELL: The Parallaxes of 1646 Stars Derived by the Spectroscopic Method. *Ap. J.* **53**, 13 (1921).
 1504. — — and M. L. HUMASON: The Absolute Magnitudes and Parallaxes of 410 Stars of Type M. *Ap. J.* **64**, 225 (1926).
 1505. — — and A. M. BRAYTON: The Spectroscopic Absolute Magnitudes and Parallaxes of 4179 Stars. *Ap. J.* **81**, 187 (1935).
 1506. — and H. N. RUSSELL: Preliminary Results of a New Method for the Analysis of Stellar Spectra. *Ap. J.* **68**, 9 (1928).
 1507. ALLEN, C. W.: The Intensity of FRAUNHOFER Lines in the Region 4036—6600 Å. *Mem. Commonwealth Solar Obs. Canberra* **1**, Nr. 5 (1934).
 1508. The HENRY DRAPER Catalogue (A. J. CANNON u. a.). *Ann. Harvard Obs.* **28**, **56**, **91—99**.

1509. EDWARDS, D. L.: Zahlreiche Arbeiten in M. N. 1922 u. f.
 1510. Handbuch der Astrophysik, Bd. V, Teil 1, 1. Hälfte. Berlin 1932. CURTISS, R. H.: Classification and Description of Stellar Spectra.
 1511. HYNEK, J. A.: Quantitative Study of Certain Phases of F-Type Spectra. Ap. J. **82**, 338 (1935).
 1512. — The Classification and Luminosity of the n and s Stars of Type A. Ap. J. **83**, 476 (1936).
 1513. MENZEL, D. H.: A Study of the Solar Chromosphere. Publ. Lick Observatory **17 I** (1931).
 1514. MILNE, E. A.: The Structure and Opacity of a Stellar Atmosphere. Phil. Trans. Roy. Soc., Lond. (A) **228**, 421 (1929).
 1515. MORGAN, W. W.: Some Effects of Changes in Stellar Temperatures and absolute Magnitudes. Ap. J. **77**, 291 (1933).
 1516. — Some Evidence for the Existence of a Peculiar Branch of the Spectral Sequence in the Interval B8-F0. Ap. J. **77**, 332 (1933).
 1517. — A Descriptive Study of the Spectra of the A-Type Stars. Publ. Yerkes Obs. **7 III** (1935).
 1518. PANNEKOEK, A.: The Theoretical Intensities of Absorption Lines in Stellar Spectra. Publ. Astr. Inst. Amsterd. 1935, Nr. 4.
 1519. PAYNE, C. H.: Stellar Atmospheres. Harvard Obs. Mon. Cambridge (Mass.) 1925, Nr. 1.
 1520. — The Stars of High Luminosity. Harvard Obs. Mon. Cambridge (Mass.) 1930, Nr. 3.
 1521. — C. J. ANGER, G. MAULBETSCH and G. W. WHEELWRIGHT: Notes on the Scorpio-Centaurus Cluster III. Line Intensities and the Spectral Classification of B Stars. H. C. **365** (1931).
 1522. Revision of ROWLANDS Preliminary Table of Solar Spectrum Wave-Lengths (ST. JOHN u. a.). Publ. Carnegie Inst. Washington 1928.
 1523. RUDNICK, P.: A Quantitative Investigation of Spectral Line Intensities in O- and B-Type Stars. Ap. J. **83**, 439 (1936).
 1524. RUSSELL, H. N.: On the Composition of the Sun's Atmosphere. Ap. J. **70**, 11 (1929).
 1525. — Opacity Formulae and Stellar Line Intensities. Ap. J. **78**, 239 (1933).
 1526. — Molecules in the Sun and Stars. Ap. J. **79**, 317 (1934).
 1527. — C. H. PAYNE-GAPOSCHKIN and D. H. MENZEL: The Classification of Stellar Spectra. Ap. J. **81**, 107 (1935).
 1528. SHANE, C. D.: The Spectra of a Certain Class in N Stars. Lick Obs. Bull. **10**, 79 (1920).
 1529. STRUVE, O. and C. D. HIGGS: The Stellar Calcium Lines in Spectral Types A and B. Ap. J. **70**, 131 (1929).
 1530. — The Problem of Classifying Stellar Spectra. Ap. J. **78**, 73 (1933).
 1531. — A Test of Thermodynamic Equilibrium in the Atmospheres of Early-Type Stars. Ap. J. **82**, 252 (1935).
 1532. THACKERAY, A. D.: Sodium and Magnesium in Stellar Spectra. M. N. **94**, 538 (1934).
 1533. UNSÖLD, A.: Zur Theorie der Sternatmosphären. ZS. f. Ap. **8**, 225 (1934).
 1534. WILLIAMS, E. G.: The Equivalent Widths of Stellar Calcium Lines. Publ. A. S. P. **48**, 113 (1936).
 1535. — Absorption Line Intensities in B-Type Stars. Ap. J. **83**, 279 (1936).
 1536. — Classification of the B-Type Stars. Ap. J. **83**, 305 (1936).
 1537. YOUNG, R. K. and W. E. HARPER: The Absolute Magnitudes and Parallaxes of 1105 Stars. Publ. Dom. Ap. Obs. **3**, 1 (1924).

XVI. Kapitel. Die Struktur der äußeren Schichten der Sonne.

Lehrbücher.

1601. ABETTI, G.: Solar Physics. Handbuch der Astrophysik, Bd. IV, Kap. 2. Berlin 1929.
 1602. — Il Sole. Milano: U. Hoepli 1936.
 1603. BRUHAT, G.: Le Soleil. Paris: Lib. Alcan 1931.
 1604. RUSSELL, H. N., R. S. DUGAN and J. Q. STEWART: Astronomy (2 Bände). New York: Ginn Cie. 1926/7.

Abhandlungen.

1610. ABBOT, C. G.: Ann. Astr. Obs. Smithson. Inst. **2**, 233 (1908).
 1611. ABETTI, G.: Moti dei vapori metallici nelle macchie del sole. Publ. R. Osserv. Arcetri. **50**, 47 (1932).
 1612. ADAMS, W. S.: Rotation Period of the Sun. Publ. Carnegie Inst. Washington. 1911, Nr. 138. — Trans. Int. Astr. Union **4** (1932).
 1613. Astronomer Royal. Proper Motions in Latitude of Sunspots and Faculae. M. N. **85**, 185 (1925).
 1614. Astronomer Royal. Characteristic Movements of Sunspots. M. N. **85**, 553 (1925).

1615. D'AZAMBUJA, L.: Recherches sur la structure de la chromosphère solaire. *Ann. Obs. Paris-Meudon* **8**, Fasc. 2 (1930).
1616. BARABASCHEFF, N. u. B. SEMEJKIN: Über die Helligkeitsverteilung in den Sonnenflecken und ihre Temperatur. *ZS. f. Ap.* **5**, 54 (1932).
1617. BÉNARD, H.: Les tourbillions cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent. *Ann. Chim. et Physique* (7) **23**, 62 (1901).
1618. BERGSTRAND, Ö.: On the Apparent and the Real Forms of the Solar Corona. *M. N.* **95**, 436 (1935).
1619. BIRGE, R.: The Quantum Theory of Band Spectra and its Application to the Determination of Temperature. *Ap. J.* **55**, 273 (1922).
1620. BJERKNES, V.: Solar Hydrodynamics. *Ap. J.* **64**, 93 (1926).
1621. BOCCHINO, G.: Migrazione delle protuberanze durante il ciclo undecennate dell'attività solare. *Oss. e Mem. R. Observ. Arcetri* **51** (1933).
1622. TEN BRUGGENCATE, P. u. W. GROTRIAN: Die Bestimmung der mittleren Lebensdauer der Granulation. *ZS. f. Ap.* **12**, 323 (1936).
1623. BRUNNER, W.: Gesetzmäßigkeiten in der Anordnung der Sonnenflecken zu Gruppen. *Astr. Mitt. Zürich* 1930, Nr. 124, 67.
1624. CALAMAI, G.: Un metodo per calcolare gli elementi del moto dei vapori nelle macchie solari. *Publ. R. Osserv. Arcetri* **52**, 39 (1934).
1625. CHEVALIER, S.: Etude photographique de la photosphère solaire. *Ann. Obs. ZÔ-Sè.* **8C** (1912).
1626. COWLING, T. G.: The Magnetic Field of Sunspots. *M. N.* **94**, 39 (1933).
1627. — The Structure of Sunspots. *M. N.* **96**, 15 (1935).
1628. DESLANDRES, H.: Recherches sur l'atmosphère solaire etc. *Ann. Obs. Paris-Meudon* **4 I** (1910).
1629. EMDEN, R.: Zum Rotationsgesetz der photosphärischen Schichten. *ZS. f. Ap.* **12**, 233 (1936).
1630. EVERSLED, J.: Radial Movement in Sun-Spots. *M. N.* **69**, 454 (1909); **70**, 217 (1910). — *Kodaikanal Obs. Bull.* **2**, 63 (1909).
1631. — and M. A.: Results of Prominence Observations. *Mem. Kodaikanal Obs.* **1**, p. II (1917).
1632. FENYI, J.: Die Periodizität der Protuberanzen 1886—1917. *Publ. Haynalds Obs. (Kalocza)* 1922.
1633. FOWLER, R. H. and E. A. GUGGENHEIM: Applications of Statistical Mechanics ... Part II. The Adiabatics. *M. N.* **85**, 961 (1925).
1634. FOX, P.: The Rotation Period of the Sun. *Publ. Yerkes Obs.* **3 III** (1920).
1635. HALE, G. E. and F. ELLERMANN: The Rumford Spectroheliograph of the Yerkes Observatory. *Publ. Yerkes Obs.* **3**, 1 (1903).
1636. — On the Probable Existence of a Magnetic Field in Sun-Spots. *Ap. J.* **28**, 315 (1908).
1637. — Preliminary Results of an Attempt to detect the General Magnetic Field of the Sun. *Ap. J.* **38**, 27 (1913).
1638. — F. H. SEARES, A. V. MAANEN and F. ELLERMANN: The General Magnetic Field of the Sun. *Ap. J.* **47**, 1 (1918).
1639. — F. ELLERMANN, S. B. NICHOLSON and A. H. JOY: The Magnetic Polarity of Sun-Spots. *Ap. J.* **49**, 153 (1919).
1640. — A Test of the Electromagnetic Theory of the Hydrogen Vortices Surrounding Sun-Spots. *Proc. nat. Acad. Sci. Washington* **11**, 691 (1925).
1641. — and S. B. NICHOLSON: The Law of Sun-Spot Polarity. *Ap. J.* **62**, 270 (1925).
1642. — The Spectroheliograph and its Work I—IV. *Ap. J.* **70**, 265 (1929); **71**, 73 (1930); **73**, 379 (1931); **74**, 434 (1931).
1643. HANSKY, A.: Photographies de la granulation solaire faites à Pulkovo. *Mitt. Hauptsternw. Pulkowo* **1**, 81 (1905).
1644. — Mouvement des granules sur la surface du soleil. *Mitt. Hauptsternw. Pulkowo* **3**, 1 (1918).
1645. JANSSEN, J.: Etude de la surface solaire par la photographie. *Ann. Obs. Paris-Meudon* **1**, 103 (1896).
1646. JOHN, CH. E. ST.: Radial Motion in Sun-Spots I und II. *Ap. J.* **37**, 322 (1913); **38**, 341 (1913).
1647. — The Present Condition of the Problem of Solar Rotation. *Publ. A. S. P.* **30**, 319 (1918).
1648. — Solar Faculae and Ionization. *Contr. Jeff. Phys. Lab.* **15** (Festschrift Prof. HALL).
1649. KING, R. B.: A preliminary survey of the ZEEMAN effect in the Sun-Spot Spectrum. *Ap. J.* **80**, 136 (1934).
1650. KORN, J.: Über die heliozentrische Breite der Sonnenfackeln. *A. N.* **251**, 55 (1934).

1651. KOSIREV, N.: Note on the Depth of Sunspots. *Poulkowo Obs. Circ.* **6**, 3 (1933).
1652. KREMER, P.: On the Ratio of the Number of Ca^+ -Atoms in the Solar Atmosphere over Faculae and over Corresponding Parts of the Solar Surface near the Limb. *Proc. Amsterd. Acad.* **33**, 379 (1930).
1653. LANGLEY: On the Minute Structure of the Solar Photosphere. *Amer. J. Sci. (III. s.)* **7**, 87 (1874).
1654. LOCKYER, W. J. S.: On the Relationship between Solar Prominences and the Forms of the Corona. *M. N.* **63**, 481 (1903); **82**, 323 (1922) und insbesondere **91**, 797 (1931).
1655. LUDENDORFF, H.: Untersuchungen über die Häufigkeitskurve der Sonnenflecke. *ZS. f. Ap.* **2**, 370 (1931).
1656. — Weitere Untersuchungen über die Änderungen der Form der Sonnenkorona. *Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl.* 1934, 200. (Vgl. auch *Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl.* 1928.)
1657. LYOT, B.: Etude de la couronne solaire en dehors des eclipses. *ZS. f. Ap.* **5**, 73 (1932).
1658. — L'observation directe des protuberances a Meudon. *C. R. Acad. Sci., Paris* **195**, 943 (1932).
1659. — Un monochromateur a grand champ utilisant interférences en lumière polarisée. *C. R. Acad. Sci. Paris* **197**, 1593 (1933).
1660. MASCARI, A.: Sull' andamento dei centri di maggiore attività delle facule solari in rapporto a quello delle macchie e delle protuberanze. *Mem. Spettr. Ital.* **33**, 45 (1904).
1661. MAUNDER, E. W.: The Sun and Sunspots 1820—1920. *M. N.* **82**, 534 (1922).
1662. MILNE, E. A.: Preliminary Note on the Structure of Sunspots. *M. N.* **90**, 487 (1930).
1663. MINNAERT, M.: The Intensities of the Lines in the Cyanogen Band. *B. A. N.* **5**, 176 (1929).
1664. — u. A. J. M. WANDERS: Zur Theorie der Sonnenflecke. *ZS. f. Ap.* **5**, 297 (1932).
1665. MOORE, CH. E.: Some Results from a Study of the Atomic Lines in the Sun-Spot Spectrum. *Ap. J.* **75**, 222, 298 (1932).
1666. NICHOLSON, S. B.: The Life of a Sun-Spot. *Publ. A. S. P.* **38**, 347 (1926).
1667. — The Area of a Sun-Spot and the Intensity of its Magnetic Field. *Publ. A. S. P.* **45**, 51 (1933).
1668. PETRI, R. M.: On the Calculation of the Relative Temperatures and Pressures Existing at the Base of Sunspots. *M. N.* **90**, 480 (1920).
1669. PETTIT, E. and S. B. NICHOLSON: Spectral Energy-Curve of Sun-Spots. *Ap. J.* **71**, 153 (1930).
1670. — and F. SLOCUM: Observations of Solar Prominences with a Lyot Telescope. *Publ. A. S. P.* **45**, 187 (1933).
1671. PLASKETT, H. H.: Solar Granulation. *M. N.* **96**, 402 (1936).
1672. PRANDTL, L.: Meteorologische Anwendung der Strömungslehre. *Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre* **19**, 188 (1932).
1673. RIABOUCHINSKY, D.: Quelques considérations sur l'interprétation hydrodynamique de la périodicité des taches solaires. *C. R. Acad. Sci., Paris* **195**, 574 (1932).
1674. RICCÒ, A.: Distribuzione delle protuberanze sulla superficie del sole. *Mem. Spettr. Ital. (II. s.)* **3**, 17 (1914).
1675. RICHARDSON, R. S.: An Investigation of Molecular Spectra in Sun-Spots. *Ap. J.* **73**, 216 (1931).
1676. — Hydrocarbon Bands in the Solar Spectrum. *Ap. J.* **77**, 195 (1933).
1677. — A Photometric Study of Sunspots and Faculae. *Ap. J.* **78**, 359 (1933).
1678. ROSSELAND, S.: On the Structure and Origin of Solar Magnetic Fields. *Ap. J.* **62**, 387 (1925).
1679. — On the Transmission of Radiation through an Absorbing Medium in Motion, with Applications to the Theory of Sun-Spots and Solar Rotation. *Ap. J.* **63**, 342 (1926).
1680. — On the Theory of Rotating Stars I. *Astrophys. Norv.* **2**, 173 (1936).
1681. RUSSELL, H. N.: A Note on Cooling by Expansion in Sun-Spots. *Ap. J.* **54**, 293 (1921).
1682. SCHWARZSCHILD, K. and W. VILLIGER: Note on the Ultra-Violet Radiation of Sun-Spots and Faculae. *Ap. J.* **23**, 345 (1906).
1683. — Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre. *Göttinger Nachr.* 1906, 41.
1684. SIEDENTOPF, H.: Konvektion in Sternatmosphären I, II und III. *A. N.* **247**, 297 (1933); **249**, 53 (1933); **255**, 157 (1935).
1685. STREBEL, H.: Versuch der Photometrierung eines Sonnenfleckes. *ZS. f. Ap.* **3**, 270 (1931).
1686. — u. B. THÜRING: Untersuchungen zu einer photometrischen Statistik der Granulation der Sonnenoberfläche. *ZS. f. Ap.* **5**, 348 (1932).
1687. THACKERAY, A. D.: A Comparison of Sun-Spot, Limb, and Disc Spectra. *Publ. A. S. P.* **48**, 119 (1936).

1688. UNSÖLD, A.: Konvektion in der Sonnenatmosphäre I und II. *ZS. f. Ap.* **1**, 138; **2**, 209 (1931).
 1689. WALDMEIER, M.: Neue Eigenschaften der Sonnenfleckenkurve. *Astr. Mitt. Zürich* 1935, Nr. 133.
 1690. WANDERS, A. J. M.: Die Reduktion für Einstrahlung bei Intensitätsmessungen an Sonnenflecken. *ZS. f. Ap.* **8**, 108 (1934).
 1691. — Die Änderung der Sonnenfleckenintensität über die Scheibe. *ZS. f. Ap.* **10**, 15 (1935).
 1692. WILSON, W. E.: The Thermal Radiation from Sun-Spots. *M. N.* **55**, 457 (1895).
 1693. Mt. WILSON Ann. Report 1934/5.
 1694. WORMELL, T. W.: Observations on the Intensity of the Total Radiation from Sunspots and Faculae. *M. N.* **96**, 736 (1936).

XVII. Kapitel. **Der Sonnenrand. Protuberanzen, Chromosphäre und Korona. Spektroheliogramme.**

1701. ADAMS, W. S. and A. H. JOY: The Spectrum of RS Ophiuchi (Nova Ophiuchi Nr. 3) *Publ. A. S. P.* **45**, 249 (1933).
 1702. — — Coronal Lines in the Spectrum of RS Ophiuchi. *Publ. A. S. P.* **45**, 301 (1933); **46**, 223 (1934).
 1703. — and C. G. BURWELL: The Flash Spectrum without an Eclipse. Region λ 4800 bis λ 6600. *Ap. J.* **41**, 116 (1915).
 1704. ANDERSON, J. A.: The Use of Long-Focus Gratings at Eclipses. *Publ. A. S. P.* **38**, 239 (1926).
 1705. D'AZAMBUJA, L.: Recherches sur la structure de la chromosphère solaire. *Ann. Obs. Paris-Meudon.* **8** II (1930).
 1706. BABCOCK, H. W.: The PASCHEN Series of Hydrogen Lines in the Spectrum of the Solar Chromosphere. *Publ. A. S. P.* **44**, 323 (1932).
 1707. — H. D. and H. W.: Some New Features of the Solar Spectrum. *Publ. A. S. P.* **46**, 132 (1934).
 1708. BAUMBACH, S.: Strahlung, Ergiebigkeit und Elektronendichte der Sonnenkorona *A. N.* **263**, 121 (1937). Sowie: Die Polarisation der Sonnenkorona. *A. N.* 1938 im Erscheinen.
 1709. CAMPBELL, W. W. and J. H. MOORE: The Spectrum of the Solar Corona. *Lick Obs. Bull.* **10**, 8 (1918).
 1710. CHANDRASEKHAR, S.: The Solar Chromosphere. *M. N.* **94**, 14, 726 (1934).
 1711. CILLIÉ, G. G. and D. H. MENZEL: The Physical State of the Solar Chromosphere. *Harv. Circ.* **410** (1935).
 1712. MCCREA, W. H.: The Hydrogen Chromosphere. *M. N.* **89**, 483 (1929).
 1713. — The Mechanics of the Chromosphere. *M. N.* **89**, 718 (1929).
 1714. — Theories of the Solar Chromosphere. *M. N.* **95**, 80 (1934).
 1715. — Gas Motions in Prominences, WOLF-RAYET Stars and Novae. *M. N.* **95**, 509 (1935).
 1716. DAVIDSON, C. R. and F. J. M. STRATTON: Report on the Total Solar Eclipse of 1926 Jan. 14. *Mem. Roy. Astr. Soc.* **64** IV (1927).
 1717. — M. MINNAERT, L. S. ORNSTEIN and F. J. M. STRATTON: Spectrophotometry of the Chromosphere. *M. N.* **88**, 536 (1928).
 1718. DESLANDRES, H.: Recherches sur l'atmosphère solaire etc. *Ann. Obs. Paris-Meudon* **4** I (1910).
 1719. DUFAY, J. et H. GROULLER: Etude spectrale de la polarisation de la couronne solaire. *C. R. Acad. Sci., Paris* **196**, 1574 (1933).
 1720. EDDINGTON, A. S.: Radiation Pressure in Solar Phenomena. *M. N.* **80**, 723 (1920).
 1721. GROTRIAN, W.: Spektroskopische Untersuchungen an Korona und Protuberanzen. *ZS. f. Ap.* **2**, 106 (1931).
 1722. — Über die Intensitätsverteilung des kontinuierlichen Spektrums der inneren Korona. *ZS. f. Ap.* **3**, 199 (1931).
 1723. — Über den Intensitätsverlauf und das Intensitätsverhältnis der Koronalinien. *ZS. f. Ap.* **7**, 26 (1933).
 1724. — Über das FRAUNHOFERSCHE Spektrum der Sonnenkorona. *ZS. f. Ap.* **8**, 124 (1934).
 1725. HALE, G. E. and F. ELLERMANN: The Rumford Spectroheliograph of the Yerkes Observatory. *Publ. Yerkes Obs.* **3**, 1 (1930).
 1726. HICKOX, J.: The Eruptive Prominence of Oktober 21, 1934. *Publ. A. S. P.* **46**, 355 (1934).
 1727. KEENAN, P. C.: Photometry of H_{β} in the Chromospheric Spectrum outside of Eclipse. *Ap. J.* **75**, 277 (1932). [Auch *Ap. J.* **76**, 134, 139 (1932).]
 1728. KIEPENHEUER, K. O.: Zur Theorie der Sonnenkorona. *ZS. f. Ap.* **10**, 260 (1935). [Auch *ZS. f. Ap.* **10**, 279 (1935).]
 1729. KLÜBER, H. v.: Photographische Photometrie der Sonnenkorona (1929, 9. Mai). *ZS. f. Ap.* **2**, 289 (1931).

1730. KLÜBER, H. v. Über die Sonnenkorona von 1926, 14. Januar. *ZS. f. Ap.* **4**, 1 (1932).
1731. KÜHL, A.: Einzelheiten der Marsoberfläche im Lichte der Kontrasttheorie. *Vjschr. astr. Ges.* **59**, 196 (1924).
1732. LUDENDORFF, H.: Spektralphotometrische Untersuchungen über die Sonnenkorona. *Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Physik-math. Kl.* **5**, 83 (1925).
1733. LYOT, B.: Observations des protubérances solaires faites au Pic du Midi en 1935. *C. R. Acad. Sci., Paris* **202**, 392 (1936).
1734. — La couronne solaire en 1936. *C. R. Acad. Sci., Paris* **202**, 1259 (1936).
1735. MENZEL, D. H.: A Study of the Solar Chromosphere. *Publ. Lick Observatory* **17 I** (1931).
1736. — Pressures at the Base of the Chromosphere: A Critical Study of MILNES Theories. *M. N.* **91**, 628 (1931).
- 1737a. MILNE, E. A.: Arbeiten zur Theorie der Ca^+ -Chromosphäre. *M. N.* **84**, 354 (1924); **85**, 111, 739 (1925); **86**, 8, 578 (1926); **87**, 697 (1927); **88**, 188, 493 (1928).
- 1737b. — On the Possibility of the Emission of Highspeed Atoms from the Sun and Stars. *M. N.* **86**, 459 (1926).
1738. MINNAERT, M. u. C. SLOB: Selbstabsorption in den Sonnenprotuberanzen. *Proc. Amsterd. Acad.* **33**, 65 (1930).
1739. — On the Continuous Spectrum of the Corona and its Polarisation. *ZS. f. Ap.* **1**, 209 (1930).
1740. MITCHELL, S. A.: The Spectrum of the Chromosphere. *Ap. J.* **71**, 1 (1930).
1741. — Heights in the Chromosphere. *Ap. J.* **72**, 146 (1930).
1742. — and E. T. R. Williams: Relative Distribution and Abundance of Elements in the Lower Chromosphere. *Ap. J.* **77**, 197 (1933).
1743. MOORE, J. H.: The Coronal Spectrum of September 21, 1922. *Publ. A. S. P.* **35**, 59 (1923).
1744. — Spectroscopic Evidence of Radial Motion in the Outer Corona. *Publ. A. S. P.* **35**, 333 (1923).
1745. — Spectroscopic Evidence of Radial Motion in the Corona. *Publ. A. S. P.* **45**, 147 (1933).
1746. — The FRAUNHOFER Spectrum of the Solar Corona. *Publ. A. S. P.* **46**, 298 (1934).
1747. NEWTON, H. W.: The Distribution of Radial Velocities of Dark H_α Markings near Sunspots. *M. N.* **94**, 472 (1934).
1748. — Note on Two Allied Types of Chromospheric Eruptions. *M. N.* **95**, 650 (1935).
1749. — Radio Fadings and Bright Solar Eruptions. *Nature, Lond.* **138**, 1017 (1936).
1750. PAHLEN, E. v. D. u. A. KOHLSCHÜTTER: Untersuchungen über die Sonnenkorona. *Veröff. Sternw. Bonn* 1930, Nr. 24.
1751. PANNEKOEK, A. and M. MINNAERT: Photometry of the Flash Spectrum. *Verh. Akad. Wetensch. Amsterd.* (Sect. 1) **13**, Nr. 5 (1928).
1752. — and N. W. DOORN: Photometry of the Chromosphere and the Corona. *Verh. Acad. Wetensch. Amsterd.* **14**, Nr. 2 (1930).
1753. — Intensity and Selfabsorption of Chromospheric Lines. *B.A.N.* **4**, 263 (1928).
1754. PEREPELKIN, E. J.: Die relative Intensität der Spektrallinien H_α (H) und D_3 (He) in verschiedenen Höhen der Protuberanzen. *Z. Physik* **49**, 295 (1928).
1755. — Über die Natur der Sonnenprotuberanzen. *ZS. f. Ap.* **3**, 338 (1931).
1756. — Über die Struktur der Sonnenchromosphäre. *ZS. f. Ap.* **6**, 245 (1933).
- 1757a. — On the Relative Intensity of the H_ϵ and H Lines in the Prominences and on its Variations. *Pulkovo Obs. Circ.* 1933, Nr. 9, 3.
- 1757b. — and V. P. VIASANIZYN: On BALMER Dekrement in the Spectra of Prominences. *Pulkovo Obs. Circ.* **1935**, Nr. 13.
1758. — and O. A. MELNIKOV: Study of Helium D_3 Line in the Spectrum of Chromosphere. *Pulkovo Bull.* **14**, Nr. 122 (1935).
1759. PETTIT, E. and S. B. NICHOLSON: Radiation Measurements of the Solar Corona January 24; 1925. *Ap. J.* **62**, 202 (1925).
1760. — — On the Theory of the Continuous Spectrum of the Corona. *Ap. J.* **64**, 136 (1926).
1761. — The Great Eruptive Prominences of May 29 and July 15, 1919. *Ap. J.* **50**, 206 (1919).
1762. — The Forms and Motions of the Solar Prominences. *Publ. Yerkes Obs.* **3 IV** (1925).
1763. — Characteristic Features of Solar Prominences. *Ap. J.* **76**, 9 (1932).
1764. — The Motions of Prominences of the Eruptive and Sun-Spot Types. *Ap. J.* **84**, 319 (1936).
1765. PIKE, S. R.: The Motion of Gases in the Sun's Atmosphere. *M. N.* **88**, 3 (1927).
1766. RICHARDSON, R. S.: The Bright Eruption and Radio Fade-out of August 25, 1936. *Publ. A. S. P.* **48**, 278 (1936).
1767. — Relation between Bright Chromospheric Eruptions and Fade-Outs of High-Frequency Radio Transmission. *Publ. A. S. P.* **49**, 82 (1937).

1768. ROSENTHAL, A. H.: Über die Deutung des Spektrums der Sonnenkorona. ZS. f. Ap. **1**, 115 (1930).
1769. ROSSELAND, S.: On the Theory of the Chromosphere and the Corona. Publ. Oslo Obs. **1**, Nr. 5 (1933).
1770. ROYDS, T.: A Very High Prominence on 1928, Nov. 19. M. N. **89**, 255 (1929).
1771. — Oxygen in the Sun's Chromosphere. Kodaikanal Obs. Bull. **107** (1935).
1772. RUSSELL, H. N.: On Meteoric Matter near the Stars. Ap. J. **69**, 49 (1929).
1773. SCHUSTER, A.: On the Polarisation of the Solar Corona. M. N. **40**, 35 (1879).
1774. SCHWARZSCHILD, K.: Über die totale Sonnenfinsternis vom 30. Aug. 1905. Astr. Mitt. Göttingen 1906, Teil 13.
1775. UNSÖLD, A.: Über das Emissionsspektrum des Sonnenrandes. Z. Physik **46**, 782 (1928).
1776. — A Spectroscopic Determination of the Pressure in the Calcium Chromosphere. Ap. J. **69**, 209 (1929).
1777. — Über die BALMER-Serie des Wasserstoffs im Sonnenspektrum. Z. Physik **59**, 353 (1930).
1778. — Die Kontur der Heliumlinie λ 5876 (D_3) im Spektrum der Sonnenchromosphäre. ZS. f. Ap. **3**, 77 (1931).
1779. VIASANIZYN, V. P.: On the Width of Sr^+ Lines in the Chromospheric Spectrum. Poulkovo Obs. Circ. **16**, (1935).
1780. WOLTJER JR., J.: Zahlreiche Arbeiten zur Theorie von Chromosphäre und Korona. B.A.N. **3—5** (1926—1930).
1781. WOOLLEY, R. V. D. R. and H. W. NEWTON: Observations of Intensity with a Spectrohelioscope. M. N. **96**, 5 (1935).
1782. — The BALMER Decrement in the Spectra of Prominences. M. N. **96**, 515 (1936).
1783. YOUNG, R. K.: Polarization of the Light in the Solar Corona. Lick Obs. Bull. **6**, 166 (1911).

Anhang A.

Klassifikation der Linienspektren.*Zur Einführung.*

- BACHER, R. F. u. S. GOUDSMIT [401].
 MENZEL, D. H. [407, S. 9—12].

Lehrbücher und zusammenfassende Darstellungen.

- A, 1. GROTRIAN, W.: Graphische Darstellung der Spektren von Atomen und Ionen mit ein, zwei und drei Valenzelektronen. Berlin 1928.
- A, 2. Handbuch der Astrophysik, Bd. III, 2. Berlin 1930. a) GROTRIAN, W.: Gesetzmäßigkeiten in den Serienspektren. b) LAPORTE, O.: Theorie der Multiplettspektren.
- A, 3. HUND, F.: Bericht über die Bezeichnung von Linien und Termen in Atom- und Molekelspektren. ZS. f. Ap. **2**, 217 (1931).
- A, 4. PAULING, L. and S. GOUDSMIT: The Structure of Line Spektren. New York 1930.
- A, 5. RUSSELL, H. N., A. G. SHENSTONE and L. A. TURNER: Report on Notation for Atomic Spectra. Physic. Rev. **33**, 900 (1929).

Multipletts in den Spektren von Sonne und Sternen.

- A, 7. ALLEN, C. W.: FRAUNHOFER Intensity Tables. Mem. Commonwealth Solar Abs. Canberra. **1**, 5 (1934).
- A, 8. DUNHAM JR., TH.: The Spectrum of Alpha Persei. Princeton Univ. Obs. Contr. 1929, Nr. 9.
- A, 9. MOORE, CH. E.: Some Results from a Study of the Atomic Lines in the Sunspot Spectrum. Ap. J. **75**, 222 (1932). — Contr. Mt. Wilson 446.
- A, 10. — A Multiplet Table of Astrophysical Interest. Princeton Univ. Obs. Contr. 1933.

Anhang B.

Über die Integraleponentialfunktionen.

- B, 1. NIELSEN, N.: Theorie des Integrallogarithmus. Leipzig 1906.
- B, 2. JAHNKE, E. u. F. EMDE: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, 2. Aufl. Leipzig 1933.

Dort weitere Literatur an Tafeln und Lehrbüchern. Die Publikation vollständigerer Tafeln, auch der höheren K_n -Funktionen wäre ein sehr verdienstliches Werk. Um — namentlich bei großen Argumenten — die Interpolation zu erleichtern, müßten neben den Funktionswerten selbst auch ihre Logarithmen tabuliert werden, wie schon Nielsen forderte.

Namen- und Sachverzeichnis.

- ABBOT, C. G.**, Pyrheliometer 24—27.
 — Energieverteilung im Sonnenspektrum 27, 32.
 — Solarkonstante 31.
 — Mitte-Rand-Kontrast der Sonne 34, 36.
 — Energieverteilung im Fleckenspektrum 361.
- ABETTI, G.**, Strömungen im Sonnenfleck 370.
 Abklingleuchten 202.
 Abklingzeit angeregter Zustände 171.
 Absolute Helligkeit 55.
 Absorption 169.
 — negative 172.
 „Absorption“ (lokales thermodynamisches Gleichgewicht) 227.
 Absorptionskeil 219.
 Absorptionskoeffizient 4.
 — kontinuierlicher 116—131, 138—140, 143.
 — — für Wasserstoff 117 bis 121.
 — — für Metalle 122—127.
 — in der Umgebung von Spektrallinien (Kap. VIII bis X) 148ff.
 Absorptionsvermögen 5.
 Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht bei Ionisation 84—87.
 — — — in Protuberanzen 419.
- ADAMS, W. S.**, Sonnenrotation 359.
 — u. **C. BURWELL**, Flashspektrum ohne Finsternis 394.
 — **CH. E. ST. JOHN** u. **E. McCORMACK**, Radialgeschwindigkeitsdifferenzen zwischen Bogen- und Funkenlinien 272.
 — u. **A. H. JOY**, Spektroskopische Parallaxen 295.
 — — Koronallinien in RS Ophiuchi 450.
 — u. **A. KOHLSCHÜTTER**, Spektroskopische Parallaxen 58.
 — u. **H. N. RUSSELL**, Anomale Anregungsstärke 297.
 — — Analyse der Sternspektren 343.
- Additionslogarithmen 70.
 Adiabatangleichung ionisierbarer Gase 381.
 Äquivalente Linienbreite 223, 265.
 Äquivalentbreite der Koronallinien 449.
ALDRICH, L. B. 24, 26.
 Alignements 455.
ALLEN, C. W., Quantitative Analyse der Sonnenatmosphäre 349.
ANDERSON, J. A., Flash-Spektrograph 392.
 — u. **S. SMITH**, Kondensatorentladungen 130.
ANGER, C. J., BALMER-Linien 295.
ANGSTRÖM, K., Kompensationspyrheliometer 24.
 Anregung, thermische 62.
 Anzahl der Atome über 1 cm² der Photosphäre 234.
 — wirksamer Atome über 1 cm² der Sternoberfläche 246.
 Anzahleffekt (Spektroheliogramme) 461.
 Apparatefunktion (Spektrograph) 211.
 — empirische Bestimmung 211.
 Atmosphärische Sauerstoffbanden 200.
 Aufbau der Sternatmosphären 141ff.
 Auflösungsvermögen von Prismen- und Gitterspektrograph 209.
 Auslöschung der Resonanzfluoreszenz 179, 202.
 Aussortierung der Elemente in der Chromosphäre 429.
 Austauschgröße 383.
 Austausch im Sonnenfleck 388.
 Austausch-(Resonanz-)effekte 190.
 Auswahlregeln 467.
AZAMBUJA, L. D', Spektroheliogramme 454, 459.
- BAADE, W.** u. **W. PAULI**, Selektiver Strahlungsdruck 423.
BABCOCK, H. D. u. **H. W.**, Koronallinien 449.
- BABCOCK, H. D.** u. **H. W.**, Nordlichtlinie in der Chromosphäre 449.
 Baily-Beads 390.
BALMER-Grenze λ 3647 (Intensitätsprung) 133—136.
BALMER-Kontinuum in Protuberanzen 420.
BALMER-Serie, Oszillatorenstärken 188.
 — Gesamtabsorption der höheren Glieder 289.
BARBIER, D., **D. CHALONGE** u. **E. VASSY**, Intensitätsprung bei λ 3647 135.
BARTKY, W., Gesamtabsorption 167.
BAUMBACH, S., Polarisation des Protuberanzenkontinuums 421.
 — Helligkeitsverteilung, Ergiebigkeit und Elektrodendichte der Korona 439ff.
 — Polarisation der Korona 443.
BEALS, C. S., Rechteckskonstruktionen expandierender Nebelhüllen 328.
BÉNARD, H., Zellenwirbel 385.
BERGSTRAND, Ö., Korona 358.
BETHE, H., Übergangswahrscheinlichkeiten für Wasserstoff 187.
 — Berechnung der v. d. WAALS-Kräfte 282.
 Bewegungsgesetze der Protuberanzen 399.
 Bipolare Fleckengruppe 372.
BIRGE, R., Temperatur aus CN-Banden 368.
BIRKELAND, Polarlicht 425.
BJERKNES, V., Hydrodynamik der Sonne 388f.
 Blanketing effect 109—112.
 Blends 312ff.
BOHR, N. 17, 19.
 Bolometrische Helligkeit 53.
 — Korrektion 54.
BOLTZMANNsche Formel 64.
 Brechungsindex in Umgebung einer Spektrallinie (Dämpfung) 150.
 Breitenverteilung der Sonnenflecke 354.
 — der Fackeln 356.
 — der Protuberanzen 357.

- BRILL, A., Temperaturdefinitionen 33.
 — Farbtemperaturskala 51.
 BRONSTEIN, M., Grenztemperatur (exakter Wert) 103.
 BRUGGENCATE, P. TEN, Modelle von Sternatmosphären 249.
 — u. W. GROTRIAN, Granulation 376f.
 BRUNNER, W., Achsenneigung von Fleckengruppen 373.
 BURGER, H. C., Multiplettintensitäten 193.
 — u. P. H. v. CITTERT, Entzerrungsverfahren 215.
 BURKHARDT, G., Strahlungsstrom 109.
- CALAMAI, G., Strömungen im Sonnenfleck 370.
 CAMPBELL, W. W. u. D. H. MENZEL, Moving-Plate-Spektrograph 392.
 — u. J. H. MOORE, Koronalinien 448.
 CANNON, A. 40.
 CARROLL, J. A., Linienkonturen rotierender Sterne 318.
 — Rotationsgeschwindigkeit von Sternen 320ff.
 CHALONGE, D., D. BARBIER u. E. VASSY, Intensitätssprung bei λ 3647 135.
 — u. A., g -Effekt des BALMER-Kontinuums 294.
 CHANDRASEKHAR, S., Verdunkelungseffekt 328.
 — Bedeckungseffekt 330.
 — Chromosphärentheorie 438.
 CHAPMAN, S., Diffusion 403.
 — Erdmagnetismus, Polarlicht 425.
 CHERRINGTON, E., Mg-Linien 223, 258.
 — Restintensität von Mg-Linien 305, 308.
 CHEVALIER, S., Granulation und Fleckenzzyklus 352.
 — Granulation 376.
 CHILDS, W. H. J. u. R. MECKE, Absorption in O_2 -Bande 200.
 Chromosphäre 426ff.
 — optische Tiefe und Elektronendruck (Theorie) 396.
 — Druck 436.
 — Zusammensetzung 436.
 — Theorien der 437.
 Chromosphärenlinien, Intensität in absoluten Einheiten 433.
- CILLIÉ, G. G. u. D. H. MENZEL, Flashspektrum 392.
 — — Dichtegradient der Chromosphäre 428.
 — — Druck in der Chromosphäre 436.
 CITTERT, P. H. v., Spaltbreite 210.
 — u. H. C. BURGER, Entzerrungsverfahren 215.
 Coronagraph 351.
 COWLING, T. G., Energietransport im Fleck 370.
 — Theorie des solaren Magnetismus 372.
 — Kritik der MILNESchen Fleckentheorie 386.
- Dämpfung 149.
 — und Dopplereffekt 159 bis 169.
 Dämpfungskonstante γ (klassisch) 151ff.
 — (quantentheoretisch) 176.
 — der NaD-Linien 275.
 — der Ca-Linie λ 4227 276.
 — von Multipletts 277.
 — Mittelwert für Sonne 349.
 Dämpfungsverbreiterung von FRAUNHOFER-Linien 273ff.
 DAHME, A., Paschenlinien im Sonnenspektrum 290.
 Dark markings 397.
 DARWIN, C. G. u. R. H. FOWLER, Statistische Methode 65.
 DAVIDSON, C. R., Flashspektrum 391.
 — u. A., Multipletts in Protuberanz 411.
 — BALMER-Kontinuum in Protuberanz 421.
 — u. F. J. M. STRATTON, Koronalinien 448.
 DEBYE, P. Druckverbreiterung 180.
 DELLINGER, J. H., Fadings 425.
 DESLANDRES, H., Spektroheliograph 351.
 — Enrégistreur des vitesses 351.
 — Filamente = Protuberanzen 397.
 — Spektroheliogramme 454.
 Dichtegradient der Chromosphäre 428.
 Dichteverteilung der Chromosphäre 427.
 Dicke der Sternatmosphären 145—147.
 DIRAC, P. A. M., Strahlungstheorie 173.
 Dispersion (Spektrograph) 209.
- Dispersionsmessungen 196.
 DOORN, N. W. u. A. PANNEKOEK, Intensität von Protuberanzlinien 408, 417.
 Dopplereffekt 157.
 — und Dämpfung 159—169.
 — thermischer der He-Linien in B-Sternen 270.
 — und Spektroheliogramme 461.
 Dopplerkern und Spektroheliogramme 460.
 Dopplerverbreiterung 158.
 DORGELO, H. B., Multiplettintensitäten 193, 207.
 Drucke in der Sonnenatmosphäre (RUSSELL) 348.
 Druckverbreiterung 180.
 — der Wasserstofflinien 286ff.
 — der He-Linien 300.
 DUFAY, J. u. H. GROULLER, Polarisation der Korona 445.
 DUNÉR, Spektroskopische Messung der Sonnenrotation 358.
 DUNHAM, TH., Mechanische Reduktion von Photometerkurven 223.
 Durchmesser der Sterne 55, 60.
 — der Granulationselemente 376.
- EBERHARD-Effekt 217.
 ECKARTH, H., Starkeffekt von Mg 280.
 EDDINGTON, A. S., Bolometrische Helligkeit und Korrektion 53—54.
 — Masse-Leuchtkraft-Beziehung 59.
 — Ionisation der interstellaren Materie 85.
 — Näherungsmethode (Strahlungsgleichgewicht) 97.
 — II. Näherung 102.
 — kontinuierlicher Absorptionskoeffizient 123, 138.
 — Näherungsverfahren 239.
 — Modelle von Atmosphären 249.
 — Strahlungsdruck in der Korona 452.
 — u. E. A. MILNE, Modell einer Sternatmosphäre 238.
 Effektive Temperatur 92.
 — — der Sonne 32.
 Eigenbewegungen der Sonnenflecke 373.
 Eigendruckverbreiterung 284.
 Eigenfunktionen, kontinuierliche und diskrete 116.

- EINSTEIN, A., Absorption und Emission der Strahlung 115.
 — Photoelektrische Gleichung 116.
 — Übergangswahrscheinlichkeiten 169.
 Elektronendichte der Korona 441.
 Elektronendruck (Mittelwerte) 264.
 — in Sonnenflecken 367.
 — in Protuberanzen 415.
 Elektronentheorie, klassische 148 ff.
 ELLERMANN, F. u. G. E. HALE, Spektroheliogramme 454.
 ELVEY, C. T., Turbulenz 271.
 — Zwischenmolekularer Starkeffekt 286.
 — BALMER-Linien 295.
 — Druckeffekte und verbotene Linien im He-Spektrum 298 ff.
 — Blends 312 f.
 — Rotation der Sterne 317 ff.
 — Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeit von Sternen 320.
 — u. P. C. KEENAN, Gesamtabsorption von H_{α} 292.
 EMDEN, R., Strahlungsgleichgewicht 97.
 — Rotation der Sonne 359.
 Emission, spontane 169.
 — erzeugene 170.
 Emissionskoeffizient 4.
 Emissionslinien, Intensitätsmessungen 201.
 — Selbstabsorption 202.
 Emissionsprozesse, spontane und erzeugene 115.
 Emissionsvermögen 5.
 Energietransport in Sternatmosphären 88 f.
 — durch Konvektion und Strahlung 370.
 — in Fackeln 376.
 Energieverteilung im Spektrum der Hohlraumstrahlung 18.
 — im Sonnenspektrum 27 bis 33.
 — in Sternspektren 46—48.
 — im Sonnenspektrum 108.
 — in kontinuierlichen Sternspektren (Theorie) 131—138.
 Entropie der Strahlung 8—9.
 Entzerrung von Linienkonturen 212 ff.
 Entzerrungsverfahren 215.
 Erdmagnetismus und Protuberanzen 425.
 Ergiebigkeit 89, 227.
 — der Korona 440.
- EVERSHED, J., Kleine Linienverschiebungen auf der Sonne 272.
 — Linien in H und K 315.
 EVERSHED-Effekt 369.
 — MILNES Theorie 386.
 Expandierende Nebelhüllen 328.
 Expansionskonturen 326.
 Extinktion 22—23.
- f -Summensätze 190 ff.
 FABRY, CH. u. H. BUISSON, Ultraviolettes Sonnenspektrum 30.
 Fackeln 374 ff.
 — und Sonnenaktivität 356.
 Fackelflächen 455.
 Fadings 425.
 Farbtemperatur 47 f.
 — und effektive Temperatur 137.
 Farbenindex 54.
 FAYE, Rotation der Sonne 358, 390.
 FERMI, E. u. L. H. THOMAS, Atom als Gaskugel 189.
 Filamente 455.
 FINKELNBURG, W., Kontinuierliche Spektren 130.
 Finsternisbeobachtungen 390.
 Flächenwachstum der Flecke 374.
 Flash-Spektrum 391 f.
 — ohne Finsternis 393.
 Fleckenzyklus 353.
 Fleckengruppen 372 f.
 Flocculi 455.
 — dunkle Wasserstoff- 397.
 — und Granulation 456.
 FOSTER, J. S., Verbotene He-Linien 300.
 FOWLE, F. E. 24.
 FOWLER, R. H. u. C. G. DARWIN, Statistische Methode 65.
 — u. E. A. GÜGGENHEIM, c_p/c_v und Ionisationsgrad 380.
 — — Konvektion im Sterninneren 389.
 — u. E. A. MILNE, Methode der Maxima 77—80.
 Freie Weglänge der Lichtquanten in Sternatmosphären 272.
 FÜCHTBAUER, CHR., Gesamtabsorption 172.
 — Absorptionsmessungen 197.
 — Druckverbreiterung 203.
- Gasdruck 141 f.
 GAUNT, J. A., Kontinuierliche Absorption 117, 138.
- Geisterkorrektur nach MINNAERT 216.
 GENARD, J. u. H. MINNAERT, Diffuse Nebenserie des Mg 278.
 Generalized ionization theory 261.
 Gerade und ungerade Terme 466.
 Gesamtabsorption (dünne Schicht) 151.
 — reine Dopplerverbreiterung 166.
 — reine Dämpfungsverbreiterung 167.
 — Dopplereffekt und Dämpfung 168.
 — und Oszillatorenstärke 197.
 — Messung der — 223 f.
 — systematische Fehler 226.
 — von FRAUNHOFER-Linien 265.
 Gesamtstrahlung (Definition) 1.
 — der Sonne 24—27.
 — der Flecke 361.
 — der Fackeln 375.
 Gewicht, statistisches 64.
 Gewichtsfunktionen zur Berechnung der Linienflügel 253—256.
 Gittergeister 216.
 GÖTZ, P., Kürzeste Wellenlänge des Sonnenspektrums 30.
 GOLDBERG, L., Multiplettintensitäten 195.
 Goos, F., Rotierender Sektor 220.
 — Mikrophotometer 221.
 Gradient, relativer 48.
 — absoluter 49.
 Gradienten, absolute 136.
 Granulation und Fleckenzyklus 352.
 Granulation 376 ff.
 — künstliche 378.
 — in Flecken und Fackeln 378.
 — Theorie 383.
 — (Spektroheliogramme) 457, 460.
 GREAVES, DAVIDSON u. MARTIN, Farbtemperaturen 47.
 GREENWICH, Fleckenbeobachtung 353.
 Grenztemperatur 92.
 — exakter Wert 103.
 Grenzkontinua 117, 128.
 Größenklassen 52.
 GROTRIAN, W., HeII 4686 in Protuberanz 418.
 — Intensitätsverteilung im Koronaspektrum 444.
 — FRAUNHOFER-Linien im Koronaspektrum 445, 451.

- GROTRIAN, W., Kosmischer Staub in der Korona 448.
 — Koronalinien 448.
 — Intensität der Koronalinien 449.
 — u. P. TEN BRUGGENCATE, Granulation 376f.
 GROUILLER, H. u. J. DUFAY, Polarisierung der Korona 445.
 GÜNTHER, S., Gesamtabsorption von BALMER-Linien 288ff.
 GUGGENHEIM, E. A. u. R. H. FOWLER, c_p/c_v und Ionisationsgrad 380.
 — — Konvektion im Inneren der Sterne 389.
- HABERL, K., Mechanische Reduktion von Photometerkurven 223.
 Häufigkeit der Elemente 81, 346.
 — des Wasserstoffs 82.
 HALE, G. E., Spektroheliograph 351.
 — Spektrohelioskop 351.
 — Magnetfelder in Sonnenflecken 352, 371.
 — Allgemeines Magnetfeld der Sonne 352.
 — Gesetz der magnetischen Polarität der Sonnenflecke 356.
 — solar vortices 369, 457.
 — Magnetische Klassifikation der Sonnenflecke 372.
 — Sonnenflecke als Wirbel 387.
 — „Unsichtbare“ Flecke 387.
 — Filamente = Protuberanzen 397.
 — Spektrohelioskopische Beobachtung von Protuberanzen 398.
 — Protuberanzen und helle Flocculi bzw. Sonnenflecke 401.
 — — magnetische Ströme und Polarlichter 425.
 — u. F. ELLERMANN, Spektroheliogramme 454.
 HAMADA, H., Ca_2 -Molekül 285.
 HANSEN, G., Stufenblende 220.
 — Mikrophotometer 221.
 HANSKY, A., Granulation 376.
 Harmonischer Oszillator 11 bis 13.
 HARTMANN, J., Photographische Photometrie 218.
 HARTREE, D. R., Selfconsistent field 189.
- Harvard-Klassifikation 40, 331.
 Hauptsequenz 57.
 Heavisideschicht 426.
 HEISENBERG, W., Strahlungstheorie 174.
 — Ungenauigkeitsrelation 174.
 — Multiplettintensitäten 194.
 HELD, E. F. M. v. D., Gesamtabsorption für Dopplereffekt und Dämpfung 168.
 Helium, Häufigkeit in B-Sternen 301.
 — in Protuberanzen 416, 419.
 — in der Chromosphäre 429.
 HeII λ 4686 in Protuberanzen 413.
 Heliumlinien, Druckverbreiterung 184.
 — verbotene 299.
 Helligkeit, bolometrische 53.
 — photographische 53.
 — visuelle 53.
 — absolute 55.
 Helligkeitsverteilung der Korona 439.
 HENRY-DRAPER-Katalog 40.
 HERTZ, H., Strahlung eines Oszillators 154, 184.
 HERTZSPRUNG, E., Bolometrische Helligkeit und Korrektionsformel 53—54.
 HERTZSPRUNG-RUSSELL-Diagramm 57.
 HIRSCH, R. v. u. M. SCHÖN, Intensitätsmarken 220.
 Höhen in der Chromosphäre 426.
 HÖRMANN, H., Lichtbogen 204.
 HÖNL, H., Multiplettintensitäten 194.
 Hohlraumstrahlung 4.
 HOLTSMARK, J., Druckverbreiterung 180ff.
 — u. B. TRUMPY, Messungen über Druckeffekte 204.
 HOPF, E., Lösung der Integralgleichung 99ff.
 — Grenztemperatur (exakter Wert) 103.
 HOUTGAST, J. u. M. MINNAERT, Mitte-Rand-Variation von FRAUNHOFER-Linien 244, 259.
 Hydrogen-Vortices 401.
 HYNEK, J. A., Spektralklassifikation rotierender Sterne 334.
- Integraleponentialfunktionen 467.
 Integralgleichung des Strahlungsgleichgewichtes 99, 251.
- Intensität 1.
 — und Ergiebigkeit 93—95.
 — von Protuberanzenlinien 408.
 — von Chromosphärenlinien 426.
 — von Koronalinien 449.
 Intensitätsmarken 218ff.
 Intensitätsverteilung im Koronaspektrum 444.
 Interlocking 310.
 Intermitteffekt 220.
 Interpolationsformel für Linienkonturen 248.
 Ionisation, thermische 62.
 — in Sonnenflecken 75, 366.
 — in der Chromosphäre 76, 436.
 — in Protuberanzen 415.
 — des „Sternngemisches“ 82 bis 84.
 Ionisationsniveau der Sonnenatmosphäre 345.
 Ionisierungsspannungen (Tabelle) 71.
 Isochromatenmethode (c_3) 21.
 Isophoten der Korona 442.
 Isothermenmethode (c_2) 21.
- JANSSEN, J., Sonnenaufnahmen 350.
 — Granulation 376.
 JEANS, J., Rotierende Sterne 389.
 JENSEN, H., Farbtemperaturen 47.
 JOHN, CH. E. ST., Elemente im Sonnenspektrum 344.
 — Strömungen im Sonnenfleck 369.
 — Spektrum der Fackeln 375.
 JOUAUST, M., Fadings 425.
 JOY, A. H., Achsenneigung von Fleckengruppen 373.
 — u. W. S. ADAMS, Spektroskopische Parallaxen 295.
 — — Koronalinien in RS Ophiuchi 450.
- JULIUS, W. H., Randverdunkelung der Sonne 36.
 — Sonnentheorie 232.
 Jumping-Film-Spektrograph 392.
- Kalzium, Häufigkeit 82, 246.
 Kalziumlinien 339.
 Kalziumspektroheliogramme 454.
 KARPOV, B. G., Intensitätssprung bei λ 3647 135.
 KEENAN, P. C., BALMER-Linien der Chromosphäre 435.
 — Überanregung durch Stöße 438.

- KEENAN, P. C. u. C. T. ELVEY, Gesamtabsorption von H_{α} 292.
- KING, A. S., Ionisation im elektrischen Ofen 74.
- KING, E. S., Farbenindizes 54. — Korona 440.
- KING, R. B., ZEEMAN-Effekt im Fleckenspektrum 371. — u. A. S., Gesamtabsorption von Fe-Linien 197, 200.
- KIENLE, H., Farbtemperaturen 48.
- KIEPENHEUER, K. O., Polarlicht 425.
- KIRCHHOFFScher Satz 5.
- KIRKWOOD, J. G. u. E. WIGNER, f -Summensatz 192. — Starkeffekt (Theorie) 281.
- Klassifikation der Sternspektren 40—41. — der Sonnenflecke, magnetische 372. — der Protuberanzen 396f. — der Linienspektren 465.
- KLÜBER, H. v., Absorption in O_2 -Bande 200. — Isophoten der Korona 442.
- KOCH, P. P., Photographische Photometrie 218. — Sektorblende 219. — Rotierender Sektor 220. — Registrierphotometer 221.
- KÖRWIEN, H., Oszillatorenstärken für He 191.
- KOHLSCHÜTTER, A. u. W. S. ADAMS, Spektroskopische Parallaxen 58.
- Kompensationspyrheliometer nach ANGSTRÖM 24.
- Konkavgitter (Flashspektrum) 390.
- Kontinuierliche Spektren der Protuberanzen 420.
- Kontinuierlicher Untergrund 222.
- Kontinuitätsgleichung der Strahlung 90.
- Konturen von FRAUNHOFER-Linien 208ff. — von Protuberanzenlinien 408. — von Chromosphärenlinien 430. — von Koronalinien 451.
- Konvektion in Sternatmosphären 379ff.
- Konvektives Gleichgewicht im Sonnenfleck 363. — und Mitte-Rand-Variation 365.
- Korona und Sonnenaktivität 357. Korona 439ff. — Helligkeitsverteilung 439. — Ergiebigkeit 440.
- Korona, Elektronendichte 441. — Struktur 442. — Polarisation 443. — Theorien 443. — kontinuierliches und FRAUNHOFER-Spektrum 444. — Struktur der FRAUNHOFER-Linien 445f. — thermische Emission 447. — Streuung an Staubteilchen 448. — Linienspektrum 449. — Dopplereffekte und Bewegungen 451. — Strahlungsdruck 451. — und Protuberanzen 452.
- Koronalinien 448. — in RS Ophiuchi 450.
- KRAMERS, H. A., Kontinuierliche Absorption 116, 138.
- KRONIG, R. DE L., Multiplettintensitäten 194. — Supermultipletts 195.
- KÜHL, A., „Marskanal“-Phänomen 455.
- KUHN, W., f -Summensatz 190f.
- KUIPER, G. P., Häufigkeit des Wasserstoffs 296.
- LADENBURG, R., Gesamtabsorption 166. — Dispersionsmessungen 196. — Starkeffekt der D -Linien 281.
- LANGLEY, S. P. 24, 27.
- Lebensdauer angeregter Zustände 171. — der Granulation 377. — der Sonnenflecke 388.
- LENZ, W., Stoßdämpfung 179.
- Leuchtkraft 59.
- LINDBLAD, B., Mitte-Rand-Kontrast 104ff. — Verbreiterung von Ca λ 4227 in roten Zwergsternen 285, 341. — Spektroskopische Parallaxen 295.
- LINDSAY, E. M., BALMER-Linien 297. Line-shifter 398.
- Linienflügel, S.S.-Modell mit Streuung 236. — S.S.-Modell mit Absorption 237. — M.E.-Modell mit Streuung 241, 243. — M.E.-Modell mit Absorption 241, 243. — für beliebig geschichtete Atmosphäre 251.
- Linienintensitäten, näherungsweise Berechnung 259ff.
- Linienintensitäten, Mehrdeutigkeit in der Interpretation 337. — in Protuberanzen 408. — in der Chromosphäre 426. — in der Korona 449.
- Linienkern 459.
- Linienspektren, Klassifikation 465.
- Linientiefe 301ff. — und Trennungsvermögen des Spektrographen 213.
- LOCKYER, N. 46.
- LOCKYER, W. J. S., Der Zyklus der Sonnenaktivität 357. — Koronotypen 442.
- Lokales thermodynamisches Gleichgewicht 227.
- LONDON, F., Berechnung der v. D. WAALS-Kräfte 282.
- LORENTZ, H. A., Elektronentheorie 148. — Strahlungsdämpfung 151. — Stoßdämpfung 152.
- LUDENDORFF, H., Analyse der Sonnenfleckkurve 353. — Korona-Isophoten 358. — Intensitätsverteilung im Koronaspektrum 444. — FRAUNHOFER-Linien im Koronaspektrum 445.
- LUNDBLAD, R., Intensität und Ergiebigkeit 94.
- LYMAN-Gebiet, Sonnenstrahlung im 424, 453.
- LYMAN-Serie, Oszillatorenstärken 188.
- LYOT, B., Korona und Protuberanzen außerhalb von Finsternissen 351. — Protuberanzen in H_{α} - und D_3 -Licht 403, 412. — Polarisation des Protuberanzenkontinuums 421. — Koronalinien 449. — Intensitätsverteilung der Koronalinien 451. — Änderungsgeschwindigkeit der Korona 452.
- MAANEN, A. v., Nächste Sterne 57.
- MCCREA, W. H., BALMER-Linien und -Kontinuum 134. — Model Stellar Atmospheres 139. — Trennung der Elemente in Protuberanzen 402. — Turbulenz und Dichtegradient der Chromosphäre 437.
- McLAUGHLIN, U. B., Rotationseffekt 324.

- Magnetfeld der Sonnenflecke 352, 371.
 — allgemeines, der Sonne 352.
 Magnetorotation 196.
 MANNKOPFF, R., Lichtbogen 206.
 Marskanäle 455.
 MASCARI, A., Polare Fackeln 356.
 Massen der Sterne 59.
 Matricelemente 185.
 MAUE, A. W., Kontinuierliche Absorption 117, 138.
 — u. A. ÜNSÖLD, II. Näherung 101f.
 — — Mitte-Rand-Kontrast 106.
 — — κ_v/κ aus Randverdunkelung 107.
 MAUNDER, E. W., Schmetterlingsdiagramm 355.
 Maxima von Linienintensitäten 77—80.
 M.E.-Modell 238ff.
 M.E.- und S.S.-Modell, Vergleich 246, 248, 250.
 MENZEL, D. H., Wachstumskurve 266.
 — Seltene Erden im Flash-Spektrum 316.
 — Quantitative Analyse des Flash-Spektrums 346, 349.
 — Jumping-Film-Spektrograph 392.
 — Profil des Mondrandes 392.
 — Turbulenz in der Chromosphäre 430.
 — u. W. W. CAMPBELL, Moving-Plate-Spektrograph 392.
 — u. G. G. CILLIÉ, Flash-Spektrum 392.
 — — Dichtegradient der Chromosphäre 428.
 — — Druck in der Chromosphäre 436.
 MERRILL, P. W. u. O. C. WILSON, Wasserstofflinien 290, 303.
 Metallische Protuberanzen 402.
 „Meteorologie“ der Sonnenatmosphäre 350.
 MEYER, EDGAR, M. SCHEIN u. B. STOLL, Sonnenstrahlung bei λ 2100 30.
 Mg-Linie λ 5184; Mitte-Rand-Variation. Theorie 257.
 — Messungen von H. H. PLASKETT 258.
 — — von E. CHERRINGTON 258.
 Mikrophotometer 221.
 MILNE, E. A., Mitte-Rand-Kontrast für Gesamtstrahlung der Sonne 36.
 MILNE, E. A., Strahlungsstrom und Ergiebigkeit 95.
 — Integralgleichung des Strahlungsgleichgewichtes 99.
 — Mitte-Rand-Kontrast 104 bis 112.
 — Blanketing effect (Einfluß der Absorptionslinien auf das kontinuierliche Spektrum) 109.
 — Kontinuierlicher Absorptionskoeffizient 138.
 — Strahlungsgleichgewicht und FRAUNHOFER-Linien 227.
 — (u. A. S. EDDINGTON), Modell einer Sternatmosphäre 238.
 — Wirksame Tiefe τ_0 einer Atmosphäre 247.
 — Generalized ionization theory 261.
 — Theorie der Sonnenflecke 363, 386.
 — Selektiver Strahlungsdruck 423.
 — Protuberanzentheorie 423.
 — Theorie der Kalziumchromosphäre 437.
 — u. R. H. FOWLER, Methode der Maxima 77—80.
 MINKOWSKI, R., Dämpfung und Dopplereffekt 163.
 — Strahlungsdämpfung 198f.
 — Selbstabsorption bei Emissionsmessungen 202.
 — Stoßdämpfung 203.
 MINNAERT, M., Reduktion der Sonnenstrahlungsmessungen 32, 36.
 — Randverdunkelung der Sonne 36.
 — Geisterkorrektur 216.
 — Bestimmung des kontinuierlichen Untergrundes 221.
 — Messung äquivalenter Linienbreiten 223f.
 — Kontur der Ca+K-Linie 244, 304.
 — Linienflügel für beliebig geschichtete Atmosphäre 251.
 — Polarisation der Korona 444.
 — Thermische Emission der Korona 447.
 — u. A., Multipletts in Protuberanz 411.
 — BALMER-Kontinuum in Protuberanz 421.
 — u. J. GENARD, Diffuse Nebenserie des Mg 278.
 MINNAERT, M. u. J. HOUTGAST, Mitte-Rand-Variation von FRAUNHOFER-Linien 244, 259.
 — u. G. F. W. MULDER, Dopplereffekt und Dämpfung 164.
 — — Gesamtabsorption und Wachstumskurve 265.
 — — Dämpfungskonstante der FRAUNHOFER-Linien 276.
 — u. A. PANNEKOEK, Helium in der Chromosphäre 429.
 — u. C. SLOB, Wachstumskurven 265.
 — — H_α und D_3 in Protuberanzen 408f.
 — u. A. J. M. WANDERS, Strahlungsgleichgewicht im Sonnenfleck 360ff.
 Mischungsweg 383.
 MITCHELL, A. C. u. M. ZEMANSKY, Dopplereffekt und Dämpfung 163.
 MITCHELL, S. A., Flash-Spektrum 392.
 — u. E. T. R. WILLIAMS, Dichteverteilung der Chromosphäre 428.
 Mitte-Rand-Kontrast der Sonne; Messung 33 bis 36.
 — — Theorie, Gesamtstrahlung 90.
 — — — II. Näherung 102.
 — — — λ -Abhängigkeit 104 bis 112.
 Mitte-Rand-Variation der Sonnenflecke 362ff.
 — der Fackeln 375.
 Mittelwerte von T , P_e usw. für Sternatmosphären 260 bis 264.
 MOLL, W. J. H., Mikrophotometer 221.
 Monochromatisches Strahlungsgleichgewicht 227.
 Monochromator (Linienkonturen) 217.
 MOORE, CH. E., Multipletts 195.
 — Atomlinien im Fleckenspektrum 365.
 — Analyse des Fleckenspektrums 366.
 MOORE, J. H., FRAUNHOFER-Linien im Koronaspektrum 445, 451.
 — u. W. W. CAMPBELL, Koronalinien 448.
 Moving-Plate-Spektrograph 392.
 MÜLLER, G. u. E. KRON, Energieverteilung im Sonnenspektrum 28.

- MULDERS, G. F. W., „Wahres“ kontinuierliches Sonnenspektrum 37—39.
 — ROWLAND-Intensität und Gesamtabsorption 225f.
 — u. M. MINNAERT, Gesamtabsorption und Wachstumskurve 265.
 Multipletts 264, 466.
 — in Protuberanzen 411.
 — in der Chromosphäre 427.
 Multiplettintensitäten 193ff., 207.
 — Literatur bez. Messungen 207.
- NaD-Linien 342.
 Dämpfungskonstante 343.
 Näherungsmethoden zur Lösung der Differentialgleichung des Strahlungsgleichgewichtes 96ff.
 Näherung, zweite 101.
 NASSAU, J. J. u. McCuskey, RUSSELL-Diagramm 57.
 Nebelhüllen, Rotation und Expansion 327.
 NEWTON, H. W., Klassifikation der dunklen Flocculi 398.
 — Protuberanzen und helle Flocculi bzw. Sonnenflecke 401.
 — Fadings und Wasserstoffereptionen 425.
 NICHOLSON, S. B., Magnetfelder der Sonnenflecke 371.
 — Magnetische Klassifikation der Sonnenflecke 372.
 — Entwicklung bipolarer Fleckengruppen 373.
 — u. E. PETTIT, Energieverteilung im Fleckenspektrum 360ff.
 — — Gesamtstrahlung der Flecke 361.
 — — Korona 440.
 — u. H. SHAPLEY, Linienkonturen pulsierender Sterne 326.
 Nomogramm der SAHASchen Gleichung 66—69.
- Objektivprismenkamera 390.
 ÖHMAN, Y., Linienintensitäten 224.
 — g-Effekt des BALMER-Kontinuums 294.
 — BALMER-Linien 295.
 ÖPIK, E. u. M. OLMSTED, Vergleichsskalen 226.
 OLMSTED, M. u. E. ÖPIK, Vergleichsskalen 226.
 Opazitätskoeffizient $\bar{\kappa}$ (Definition) 113—115.
- Optische Dicke 4.
 — Tiefe 89, 229.
 — — wirksame 247.
- ORNSTEIN, L. S., Multiplettintensitäten 193.
 — u. A., Multipletts in Protuberanz 411.
 — BALMER-Kontinuum in Protuberanz 421.
 Oszillator, harmonischer 11 bis 13, 17, 148f.
 Oszillatorenstärken, Definition 173.
 — Berechnung 185.
 — für Wasserstoff 187—188.
 — für Helium 191.
 — für Li, Na, Ca⁺ 192.
 — gemessene 205f.
- PANNEKOEK, A., Ionisation durch „verdünnte“ Hohlraumstrahlung 86.
 — Kontinuierlicher Absorptionskoeffizient 139.
 — Verbreiterung der Wasserstofflinien 181ff.
 — Numerische Integration der SCHWARZSCHILDschen Gleichung 249.
 — Zwischenmolekularer Starkeffekt 286.
 — g-Effekt der BALMER-Linien 295.
 — Theorie der Restintensität 305, 306.
 — Selbstabsorption in der Chromosphäre 431.
 — u. N. W. DOORN, Intensität von Protuberanzlinien 408, 417.
 — u. M. MINNAERT, Helium in der Chromosphäre 429.
 Parallaxen, spektroskopische 331.
 PASCHEN-Kontinuum in Protuberanzen 422.
 PASCHEN-Serie, Oszillatorenstärken 188.
 PAULI, W. u. W. BAADÉ, Selektiver Strahlungsdruck 423.
 PAUWEN, J., Konturen von He-Linien 299.
 PAYNE, C. H., Linienintensitäten 80.
 — Ionisations-Temperaturskala 81.
 — Häufigkeit der Elemente 81.
 — Spektralklassifikation 332.
 — Zusammensetzung der Sterne 344.
- PEREPELKIN, E. J., Ca+H und H_β in Protuberanzen 412.
 — Radialgeschwindigkeiten in Protuberanzen 403, 413.
- PEREPELKIN, E. J. u. O. A. MELNIKOW, Helium in der Chromosphäre 429.
 — u. V. P. VIASANIZYN, BALMER-Linien in Protuberanzen 414.
- PETRI, R. M., Konvektion im Sonnenfleck 363.
 PETTIT, E., Energieverteilung im Sonnenspektrum 29.
 — Klassifikation der Protuberanzen 396.
 — Dimensionen der Protuberanzen 399.
 — Bewegungsgesetze der Protuberanzen 399f.
 — Verteilung der Elemente in Protuberanzen 402.
 — u. S. B. NICHOLSON, Energieverteilung im Fleckenspektrum 360ff.
 — — Gesamtstrahlung der Flecke 361.
 — — Korona 440.
- Phasenraum 62.
 Phasenstörungstöße 179.
 Photoeffekt 85.
 Photographische Helligkeit 53.
 PICKERING, E. C. 40.
 PIKE, S. R., Bolometrische Korrektur 54.
 PLANCKsche Strahlungsformel 18, 170.
- PLASKETT, H. H., Energieverteilung im Sonnenspektrum 30.
 — Mg-Linien 222, 258.
 — Restintensität von Mg-Linien 304, 308.
 — Granulation 376f.
- Polarisation der Protuberanzen 421.
 — — Korona 443.
 Polariserbarkeit 149.
 Polarität, magnetische der Sonnenflecke im Fleckenzklus 356.
- Polarlichter und Protuberanzen 425.
- POUILLET, S., Aktinometer 24.
 PRANDTL, L., Mischungsweg 383.
- PROKOFJEW, W. K., Oszillatorenstärken 192.
 Protuberanzen 396ff.
 — und Sonnenaktivität 356.
 — Klassifikation 396.
 — Dimensionen 399.
 — Bewegungsgesetze und Geschwindigkeiten 399ff.
 — Verteilung der Elemente 402.
 — Linienintensitäten 408.
 — Dichte, Anregung, Ionisation 413.

- Protuberanzen, Kontinuierliche Spektren 421.
 ψ -Funktion 186.
 PUCCIANTI, L., Dispersionsmessungen 196.
 Pyrheliometer 24—27.
 Pyrheliometerskalen 27.

 Quantenstatistik 15—17.
 Quantentheorie 14, 19.
 Quantenzahlen 465.
 Quantitative Analyse der Sonnenatmosphäre 344ff.

 Radian der Sterne 55, 60.
 Radiofadings 425.
 RAETHJEN, R., Wolken 385.
 Randverdunkelung 91.
 RAYLEIGH, Auflösungsvermögen des Prismenspektrographen 209.
 — Verzerrungsverfahren 318.
 — -JEANSSche Strahlungsformel 13.
 — -Streuung 157.
 REDMAN, R. O., Apparatefunktion 211, 212.
 — Monochromator 217.
 — Restintensität von λ 4227 304.
 Reemission 235.
 Refraktion, anomale (JULIUS) 232.
 REICHE, F., Dopplereffekt und Dämpfung 164.
 Rekombination 85.
 Relativzahlen 352.
 Relaxationszeit in Protuberanzen 407.
 Resonanzfluoreszenz 202.
 Resonanzlinien im Sonnenspektrum 234.
 Resonanzstreuung oder -fluoreszenz (klass. Theorie) 156.
 RESFIGHI, Protuberanzbeobachtungen 356.
 Restintensität 235ff., 243, 301ff.
 — der BALMER-Linien 301 bis 304, 308, 310.
 — von Metalllinien 304ff.
 — Theorie und Beobachtung 308.
 — und Spektroheliogramme 456.
 Restintensitätseffekt (Spektroheliogramme) 461.
 REYNOLDSSche Zahl 383.
 RIABOUCHINSKY, D., Rotationsinstabilität 389.
 RICHARDSON, R. S., Photometrie der Sonnenflecke 362.
 — Banden im Flecken- und Sonnenspektrum 367f.
- RICHARDSON, R. S., Temperatur aus Bandenspektren 368.
 — Photometrie der Fackeln 375.
 — Fadings und Wasserstofferuptionen 425.
 Richtungsverteilung der Kraftlinien im Sonnenfleck 371.
 Riesensterne 58.
 Riesenstern, roter, Druck- und Temperaturschichtung 146.
 RIGHINI, G., Dämpfungskonstante der NaD-Linien 275.
 ROSCHDESTWENSKY, D., Hakenmethode 196.
 ROSENTHAL, A. H., PASCHEN-Linien im Sonnenspektrum 290.
 — Deutungsversuch der Koronalinien 451.
 Ross, F., Trennungvermögen der Platte 217.
 ROSSELAND, S., Opazitätskoeffizient 113—115.
 — Fluoreszenz- und Rekombinationsleuchten 305.
 — Zyklische Quantenübergänge 309.
 — Theorie des solaren Magnetismus 372.
 — Ursache des $2 \times 11,5$ jährigen Zyklus 389.
 — Rotation der Sonne 390.
 — u. O. KLEIN, Stöße II. Art 179.
 Rotation spektroskopischer Doppelsterne 322.
 — von Bedeckungsveränderlichen 324.
 — von Einzelsternen 324.
 — und Spektraltyp 325.
 — ausgedehnter durchsichtiger Nebelhüllen 327.
 — der Sonne 358ff., 390.
 Rotationsgeschwindigkeit von Sternen 320.
 Rotationsinstabilität 389.
 Rotierender Sektor 220.
 ROWLAND-Intensitäten, Kalibrierung 225f.
 ROYDS, T., Eruptive Protuberanz 399.
 RUSSELL, H. N., Multiplettintensitäten 194.
 — Quantitative Analyse der Sonnenatmosphäre 344ff.
 — Abkühlung durch Expansion im Sonnenfleck 360 bis 363.
 — Theorie der Sonnenflecke 386.
 — Kosmischer Staub in Sonnennähe 448.
- RUSSEL, H. N. u. W. S. ADAMS, Anomale Anregungsstärke 297.
 — — Analyse der Sternspektren 343.
 — — u. CH. E. MOORE, Kalibrierung der ROWLAND-Intensitäten 264.
 — u. J. Q. STEWART, Verbreiterung der Wasserstofflinien 181.
 RUSSELL-HERTZSPRUNG-Diagramm 57.
 RUSSELL-SAUNDERS-Kopplung 465.

 SAHA, M. N. 46.
 — Sonnenspektrum im LYMAN-Gebiet 426.
 — u. R. K. SWE, Ionisation durch verdünnte Strahlung 86.
 SAHASche Formel 64, 66.
 Scheinbare Intensitätsverteilung 212.
 SCHEINER, CHR., Sonnenrotation 358.
 Schichtung der Sonnenatmosphäre 144.
 SCHILLBACH, H., Strahlungsdämpfung 199.
 SCHMALJOHANN, P., Verbreiterung der Wasserstofflinien 182.
 Schmetterlingsdiagramm 355.
 SCHMIDTSche Sonnentheorie 394.
 SCHÖN, M. u. R. v. HIRSCH, Intensitätsmarken 220.
 SCHRÖDINGER, E., Intensität von Spektrallinien nach der Quantenmechanik 182.
 — Wellenmechanik 186.
 SCHÜTZ, W., Dämpfung und Dopplereffekt 163.
 — Strahlungsdämpfung 198f.
 SCHUSTER, A., Näherungsmethode (Strahlungsgleichgewicht) 96.
 — Polarisation der Korona 444.
 — (u. K. SCHWARZSCHILD), Modell einer Sternatmosphäre 230.
 SCHWABE, Fleckenzklus 353.
 Schwärzung 218.
 Schwärzungsmarken 218ff.
 SCHWARZSCHILD, K., Scharfer Sonnenrand 35, 394.
 — Strahlungsgleichgewicht 88ff.
 — Integralgleichung des Strahlungsgleichgewichtes 99, 251.

- SCHWARZSCHILD, K., Strahlungsgleichgewicht und FRAUNHOFER-Linien 227 ff., 243.
 — Differentialgleichung des Strahlungsgleichgewichtes (Linien) 228.
 — (u. A. SCHUSTER), Modell einer Sternatmosphäre 230.
 — Konvektionsbedingung 379.
 — Flash-Spektrum 392.
 — Profil des Mondrandes 392.
 — Intensität von Protuberanzenlinien 407, 411.
 — BALMER-Linien in Protuberanzen 414.
 — Helligkeit der Korona 440.
 — Helligkeitsverteilung und Ergiebigkeit der Korona 440.
 — Streuung freier Elektronen in der Korona 441.
 — u. W. VILLIGER, Randverdunkelung der Sonne im U.V. 35.
- SCHWARZSCHILD-Exponent 220.
 Schwerebeschleunigung an der Sternoberfläche 60.
- SECCHI u. PRAZMOWSKI, Polarisation der Korona 443.
- SEEMANN, H., EBERHARD-Effekt 218.
 Sektor, rotierender 220.
 Selbstabsorption von Protuberanzenlinien 409.
 — in der Chromosphäre 431.
 — Turbulenz und Struktur der Chromosphäre 434.
 Selfconsistent field 189.
 Seriengrenzkontinua 117, 128.
 Serienspektren 465.
- SHANE, C. D., Entzerrungsverfahren 215.
 — NaD-Linien von N-Sternen 343.
- SHAPLEY, H. u. S. B. NICHOLSON, Linienkonturen pulsierender Sterne 326.
- SHAJN, G., Rotation der Sterne 317.
- SIEDENTOPF, H., Energie-transport im Fleck 370.
 — Konvektion in Sternatmosphären 382.
 — Energietransport durch Konvektion und Strahlung 383.
 — Energietransport in der Granulation 384.
 — Theorie der Sonnenflecke 387.
- SLOB, C. u. M. MINNAERT, H_{α} und D_3 in Protuberanzen 408 ff.
- SMITH, S. u. J. A. ANDERSON, Kondensatorentladungen 130.
 Solar vortices 369, 457.
 Solarkonstante, Definition 23.
 — Zahlenwert 31.
- SOMMERFELD, A., Quantenbedingung 17.
 — Multiplettintensitäten 194.
 — Gesamtabsorptions-Integral 267.
- Sonne (Masse, Radius usw.) 22.
 Sonnenaktivität, Ursache des Zyklus der 389.
 Sonnenatmosphäre, Druck- und Temperaturschichtung 144.
 Sonnenaufnahmen 350.
 Sonnenflecke 360 ff.
 — als Kältemaschinen 360.
 — Spektrum 365.
 — Theorie der 386.
 Sonnenkorona (s. Korona) 439.
 Sonnenrand, Helligkeitsabfall am äußersten 395.
 Spaltbreite 210.
 Spaltbreitenvariation 219.
 Spaltpektrograph für Flashaufnahmen 393.
 Spektralklassifikation 40, 331 ff.
 — und quantitative Beobachtungen 333.
 — Eindeutigkeit 333.
 — Erweiterung 333.
 — und Rotation der Sterne 334.
 Spektroskopische Parallaxen 331.
 — — mit Wasserstofflinien 295.
 Spektroheliograph 351.
 Spektroheliogramme 454 ff.
 — Kalzium- 454.
 — Wasserstoff- 457.
 — mit Metallinien 459.
 — Theorie 462.
 Spektrohelioskop 351, 398.
 Spektrum der Sonnenflecke 365.
 — der Fackeln 375.
- SPÖRER, G., Heliographische Breiten der Flecke 354.
 S.S.-Modell 230 ff.
 — und M.E.-Modell, Vergleich 246 ff.
- Stabilität der Konvektion in Flecken 387.
 Statistische Gewichte 64.
 — — (Tabellen) 71—73.
- STARK, J., Druckeffekt 180.
 Starkeffekt, zwischenmolekularer 180, 286 ff.
- Starkeffekt von Metallinien 280 ff.
 — zwischenmolekularer 286 ff.
- STEFAN-BOLTZMANN'Sches Gesetz 7.
 Sternspektren (Reproduktionen) 42—45.
- STETSON, H., Korona 440.
- STEWART, J. Q., Deutung der FRAUNHOFER-Linien 232.
- STÖRMER, K., Polarlicht 425.
 Störung zweier Linien (blend) 312 ff.
- Stöße 2. Art 179.
 Stoßdämpfung 152, 179.
 — durch Elektronen und Ionen 279.
 — durch H-Atome 282.
- Stoßionisation 84.
 Strahlungsdämpfung, klassische Theorie 152.
 — Quantentheorie 174 ff.
 — experimenteller Nachweis 198.
 — in H_{α} 292.
- Strahlungsdichte 3.
 Strahlungsdruck 7.
 — und -beschleunigung in Sternatmosphären 141.
 — in Protuberanzen 422.
 — auf Wasserstoff in Protuberanzen 424.
 — in der Korona 452.
- Strahlungsformel von PLANCK 18.
 — von RAYLEIGH-JEANS 13, 19.
 — von WIEN 19.
- Strahlungsgleichgewicht 88 f.
 — im Sonnenfleck 360 ff.
 — und Konvektion (Stabilitätskriterium) 379.
- Strahlungsintensität 1.
 — und -strom (Linien) 229.
 Strahlungskonstanten σ , C_1 und c_2 18—21.
- Strahlungsstrom 2.
 — und Ergiebigkeit 96.
- STRASSL, H., Intensitätssprung bei λ 3647 135.
- STRATTON, F. J. M., Flash-Spektrum 391.
 — u. A., Multipletts in Protuberanz 411.
 — BALMER-Kontinuum in Protuberanz 421.
 — u. C. R. DAVIDSON, Koronalinien 448.
- „Streamer“ der Protuberanzen, beobachtet in verschiedenen Spektrallinien 413.
- STREBEL, H. u. B. THÜRING, Granulation 376.
- Streukoeffizient für Resonanzlinien mit Strahlungsdämpfung 233.

- Streulicht im Spektrographen 216, 219.
 — instrumentelles und atmosphärisches 351.
 — in Sonnenflecken 360.
 Streustrahlung, Richtungsabhängigkeit 155.
 — Polarisation 155.
 Streuung (monochromatisches Strahlungsgleichgewicht) 227.
 Streuung an angeregten Atomen 176f.
 — an freien Elektronen 124, 155.
 — — — in Protuberanzen 421.
 — — — in der Korona 441.
 — an kosmischem Staub 157, 448.
 — an Molekülen 157.
 STRÖMGREN, B., Wasserstoffgehalt der Sterne 82.
 — Kontinuierlicher Absorptionskoeffizient 138.
 — Berechnung der Opazität 119.
 — Theorie der Restintensität 305.
 Strömungen im Sonnenfleck 369.
 Strömungsgleichung der Strahlung 89.
 Struktur der Korona 442.
 STRUVE, O., Thermischer Dopplereffekt 270.
 — Turbulenz 271.
 — Zwischenmolekularer Starkeffekt 286.
 — BALMER-Linien 295.
 — Druckeffekte und verbotene Linien im He-Spektrum 298ff.
 — Blends 312f.
 — Rotation der Sterne 317ff.
 — Rotationseffekte bei spektroskopischen Doppelsternen 322.
 — Spektralklassifikation 332.
 — u. C. T. ELVEY, Rotationseffekte bei Bedeckungsveränderlichen 324.
 — — Rotation einzelner Sterne 324ff.
 — — Turbulenz 335.
 — u. C. D. HIGGS, Gesamtabsorption der K-Linie 340.
 Stufenabschwächer 219.
 SUGIURA, Y., Kontinuierliche Absorption 117, 138.
 — Oszillatorenstärken 192.
 Summenregel (Multipletts) 193.
 SWINGS, P. u. O. STRUVE, Blends 312.
 Temperatur der Sonne 32.
 — der Sonnenflecke 361, 363, 366.
 Temperaturen der Sterne 51, 338.
 Temperaturgradient für konvektives — und Strahlungsgleichgewicht 380.
 Temperaturskala (Sterne) 51.
 Termbezeichnungen 466.
 THACKERAY, A. D., Monochromator (Linienkonturen) 217.
 — Kontur der Ca+K-Linie 244.
 — Restintensität der H- und K-Linien 304.
 — Blends 315.
 — In λ 4511 in M-Sternen 316.
 — Gesamtabsorption der D-Linien 342.
 TAKAMINE u. KOKUBU, Stark-effekt von Mg λ 4352 280.
 Thermische Anregung und Ionisation 62.
 Tiefe der Atmosphären, wirk-same 260.
 — — mittlere 260.
 TINGWALDT, C., Zwillings-Wasserrühr-Pyrheliometer 26.
 THOMAS, L. H. u. E. FERMI, Atom als Gaskugel 189.
 THOMAS u. REICHE, f -Summensatz 190.
 THOMSON-Streuung 124, 155.
 — in Protuberanzen 421.
 — in der Korona 441.
 THÜRING, B. u. H. STREBEL, Granulation 376.
 Trennungsgeschwindigkeit der Elemente in Protuberanzen 407.
 Treppenspalt 220.
 TRUMPY, B., Oszillatorenstärken 192.
 Turbulente Strömungsvorgänge 350.
 Turbulenz (O. STRUVE) 158, 271, 335.
 — (Granulation) 383.
 — der Sonnenchromosphäre 430.
 Übergangswahrscheinlichkeiten 169.
 — (Berechnung) 185.
 — für Wasserstoff 189.
 Umkehrende Schicht 396.
 Ungerade und gerade Terme 466.
 Ungleichungen für die Integral-exponentialfunktionen 468.
 UNSÖLD, A., Nomogramm zur SAHA-Gleichung 66.
 — Kontinuierliche Absorption der Sternmaterie 121, 126.
 — Intensitätsprung bei λ 3647 134.
 — Farbtemperatur und effektive Temperatur 137.
 — Aufbau der Sternatmosphären 144f., 261f.
 — Konturen von FRAUNHOFER-Linien 235, 248.
 — Theorie der Linienflügel 250f.
 — Wachstumskurve von FRAUNHOFER-Linien 266.
 — Strahlungs- und Stoßdämpfung in Sternatmosphären 273ff., 343.
 — BALMER-Linien 289, 292.
 — Theorie der Restintensität 303, 305ff.
 — Wasserstoff-Konvektionszone 381.
 — Selbstabsorption in Protuberanzen 409ff.
 — Abweichungen von thermischem Gleichgewicht 420.
 — Theorie der Protuberanzen 424.
 — Turbulenz der Chromosphäre 430.
 — Theorie der Spektroheliogramme 461.
 — u. A. W. MAUE, II. Näherung 101f.
 — — Mitte-Rand-Kontrast 106.
 — — $\kappa/\bar{\kappa}$ aus Randverdunkelung 107.
 Verbotene Heliumlinien 299.
 Vergrößerungssystem im Spektrographen 217.
 Verkettung mehrerer Linien (Interlocking) 310.
 Verschiebungsgesetz (W. WIEN) 10.
 VERWEY, S., Verbreiterung der Wasserstofflinien 181ff.
 — Zwischenmolekularer Starkeffekt 286ff.
 — g -Effekt der BALMER-Linien 295.
 Verzerrung von Linienkonturen 212.
 VIASANIZYN, V. P. u. E. J. PEREPPEL'KIN, BALMER-Linien in Protuberanzen 414.
 VENTI, J. P., Oszillatorenstärken für He 191.

- Visuelle Helligkeit 53.
 VOGEL, H. C. u. G. MÜLLER, Farbtemperaturen 47.
 VOGT, H., Rotation der Sonne 390.
 VOIGT, W., Dopplereffekt und Dämpfung 164.
- v. D. WAALS-Kräfte 282f.
 Wachstumskurve für exponentielle Absorption 168.
 — für FRAUNHOFER-Linien 265—269.
 — von H_{α} in Protuberanzen 410.
 Wahre Intensitätsverteilung 212.
 Wahres kontinuierliches Sonnenspektrum 37—39.
 WALDMEIER, M., Analyse der Sonnenfleckenkurve 353.
 WALENKOW, N., EBERHARDEFFekt 218.
 WALKER, G. T., Konvektion 385.
 WANDERS, A. J. M., Streulicht im Sonnenfleck 360.
 — Mitte-Rand-Variation der Flecke 362.
 — u. M. MINNAERT, Strahlungsgleichgewicht im Sonnenfleck 360ff.
 Wasserstoff, Häufigkeit 134 bis 136.
 — Oszillatorenstärken 187 bis 188.
 Wasserstofferuptionen 401, 425.
 Wasserstoffocculi 397, 457f.
 Wasserstofflinien, Druckverbreiterung 286ff.
 — in Abhängigkeit von T_e und g 292ff.
 — in Protuberanzen 414.
 — Konturen in Chromosphäre 435.
 Wasserstoffspektroheliogramme 457.
 Wasserstoffzone der Sonnenatmosphäre 380.
 Wasserrührpyrheliometer 25.
 Wasserstrompyrheliometer 25.
- WEINGEROFF, M., Strahlungsdämpfung 198.
 Weiße Zwerge 57.
 WEISSKOPF, V., Streuung an angeregten Atomen 176 bis 178.
 — Quantentheorie der Stoßdämpfung 179f.
 — u. E. WIGNER, Quantentheorie der Strahlungsdämpfung 174ff.
 WESTGATE, CHR., Rotationsgeschwindigkeit und Spekttraltyp 325.
 WHEELER, J. A., Oszillatorenstärken für He 191.
 WHITE, H. E. u. A. Y. ELIASON, Multiplettintensitäten 195.
 WIENSches Verschiebungsgesetz 10.
 WIEN, W., Abklingmessungen 152, 202.
 WIGNER, E. u. J. G. KIRKWOOD, f -Summensatz 192.
 — u. V. WEISSKOPF, Quantentheorie der Strahlungsdämpfung 174ff.
 WILLIAMS, E. G., BALMER-Linien 295, 303.
 — Spektralklassifikation 332.
 — Interstellare Linien 333.
 — Gesamtabsorption der $Ca+K$ - und $Ca\ g$ -Linien 340.
 WILLIAMS, E. T. R., BALMER-Linien 295.
 — u. S. A. MITCHELL, Dichteverteilung der Chromosphäre 428.
 WILSING, J., Energieverteilung im Sonnenspektrum 28.
 — J. SCHEINER u. MÜNCH, Farbtemperaturen 47.
 WILSON-Phänomen 360.
 WILSON, W. E., Gesamtstrahlung der Flecke 361.
 WILSON, O. C., Linienkonturen expandierender Nebelhüllen 329.
 — u. P. W. MERRILL, Wasserstofflinien 290, 303.
- Mt. WILSON, Beobachtung des Magnetfeldes in Sonnenflecken 356.
 — Rotation der Sonne 359.
 Wirksame Dicke der Atmosphären 263.
 — optische Tiefe τ_0 247.
 Wirkungsradien, optische 203.
 WOLF, R., Relativzahlen 352.
 WOOD, R. W., Resonanzfluoreszenz 156.
 — u. A., Auslöschung der Resonanzfluoreszenz 179.
 WOOLLEY, R. v. D. R., Farbtemperatur und effektive Temperatur 140.
 — Theorie der Restintensität 305, 310.
 — Verkettung (Interlocking) 311.
 WORMELL, T. W., Gesamtstrahlung der Flecke 361.
 — Gesamtstrahlung der Fackeln 375.
 WURM, K. u. H. J. MEISTER, Ca-Linie λ 4227 in roten Zwergsternen 285.
 Wurzel-Gesetz der Linienbreiten 235, 273.
- YOUNG, R. K., Polarisation der Korona 444.
 Yü, C. S., Intensitätssprung bei λ 3647 135.
 — Restintensität der BALMER-Linien 302.
- ZEEMAN-Effekt in Sonnenflecken 352.
 Zellenwirbel 385.
 Zürich, Fleckenbeobachtung 353.
 Zusammensetzung der Sternatmosphären 81—82.
 Zustandsumme 16, 64.
 ZWAAN, A., Oszillatorenstärken 192.
 Zwergsterne 58.
 Zyklus der Sonnenaktivität 352.