Die **„Sammlung Vieweg“** hat sich die Aufgabe gestellt, Wissens- und Forschungsgebiete, Theorien, chemisch-technische Verfahren usw., die im Stadium der Entwicklung stehen, durch zusammenfassende Behandlung unter Beifügung der wichtigsten Literaturangaben weiteren Kreisen bekanntzumachen und ihren **augenblicklichen Entwicklungsstand zu beleuchten.** Sie will dadurch die Orientierung erleichtern und die Richtung zu zeigen suchen, welche die weitere Forschung einzuschlagen hat.

Als Herausgeber der einzelnen Gebiete, auf welche sich die Sammlung Vieweg zunächst erstreckt, sind tätig, und zwar für:

Physik (theoretische und praktische, und mathematische Probleme):
Herr Professor **Dr. Karl Scheel,** Physikal.-Techn. Reichsanstalt, Charlottenburg;

Chemie (Allgemeine, Organische und Anorganische Chemie, Physikal. Chemie, Elektrochemie, Technische Chemie, Chemie in ihrer Anwendung auf Künste und Gewerbe, Photochemie, Metallurgie, Bergbau):
Herr Professor **Dr. B. Neumann,** Techn. Hochschule, Breslau;

Technik (Wasser-, Straßen- und Brückenbau, Maschinen- und Elektrotechnik, Schiffsbau, mechanische, physikalische und wirtschaftliche Probleme der Technik):
Herr Professor **Dr.-Ing. h. c. Fritz Emde,** Techn. Hochschule, Stuttgart.

Bisher erschienene Hefte der „Sammlung Vieweg“.

Heft 1. Dr. Robert Pohl und Dr. P. Pringsheim-Berlin: *Die lichtelektrischen Erscheinungen.* Mit 36 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 2. Dr. C. Freiherr von Girsewald-Berlin-Halensee: *Peroxyde und Persalze.* M. 2,40.

Heft 3. Diplomingenieur Paul Béjeuhr-Charlottenburg: *Der Blériot-Flugapparat und seine Benutzung durch Pégoud vom Standpunkte des Ingenieurs.* Mit 26 Abbildungen. M. 2,—.

Heft 4. Dr. Stanislaw Loria-Krakau: *Die Lichtbrechung in Gasen als physikal. und chem. Problem.* Mit 3 Abbild. und 1 Tafel. M. 3,—.

Heft 5. Professor Dr. A. Gockel-Freiburg i. d. Schweiz: *Die Radioaktivität von Boden und Quellen.* Mit 10 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 6. Ingenieur D. Sidersky-Paris: *Brennereifragen: Kontinuierliche Gärung der Rübensäfte. — Kontinuierliche Destillation und Rektifikation.* Mit 24 Abbildungen. M. 1,60.

Heft 7. Hofrat Professor Dr. Ed. Donath und Dr. A. Gröger-Brünn: *Die flüssigen Brennstoffe, ihre Bedeutung und Beschaffung.* Mit 1 Abbildung. M. 2,—.

Heft 8. Geh. Reg.-Rat Professor Dr. Max B. Weinstein-Berlin: *Kräfte und Spannungen. Das Gravitations- und Strahlenfeld.* M. 2,—.

Heft 9/10. Geh. Reg.-Rat Professor Dr. O. Lummer-Breslau. *Verflüssigung der Kohle und Herstellung der Sonnentemperatur.* Mit 50 Abbildungen. M. 5,—.

Fortsetzung siehe 3. und 4. Umschlagseite.

Denken und Darstellung

Logik und Werte
Dingliches und Menschliches
in Mathematik
und Naturwissenschaften

Von

E. Study

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

ISBN 978-3-322-98357-2 ISBN 978-3-322-99094-5 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-322-99094-5

Ursprünglich erschienen bei Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Germany 1921

HERRN

ALFRED HAMBURGER

IN DANKBARKEIT

UND

FREUNDSCHAFT

Unsere ganze Würde besteht im Denken. Bemühen wir uns also, richtig zu denken. Das ist der Anfang der Moral.

Diese tiefen Worte Blaise Pascals werden in einem kleinen Buche von M. Pasch angeführt, und sie bilden das Thema, das dort in Lehre und Beispiel abgehandelt wird (Mathematik und Logik, Leipzig 1919).

Richtig denken ist nicht ganz dasselbe wie Richtiges denken. Falsch Gedachtes kann zufällig richtig sein, und richtig Gedachtes ist sogar häufig falsch; dann nämlich, wenn der Ausgangspunkt eine unzutreffende Voraussetzung war, wie bei dem indirekten Beweisverfahren der Mathematik. Gemeint ist folgerechtes Denken; von richtigem Denken reden wir, wenn die Regeln der Logik befolgt sind. Wir haben es nötig, wenn wir im Zusammenstoß mit den Dingen der Außenwelt nicht in Gefahr des Schiffbruchs geraten wollen. Handelt es sich um Erkenntnis, so ist folgerechtes Denken eine Forderung der Wahrheitsliebe.

Daß es mit der Folgerichtigkeit oft seine Schwierigkeiten hat, ist gewiß. Wir denken in Begriffen, Begriffe aber sind Abstrakta, deren Bildung und Handhabung um so mehr Aufmerksamkeit erfordert, je weiter wir uns von dem uns allen Vertrauten, von den Gegenständen und Aufgaben des täglichen Lebens entfernen. Mehr als andere Menschen haben die Mathematiker Übung im Umgang mit Abstraktionen, und doch versagen auch sie in diesem Punkte recht häufig. Selbst Forscher ersten Ranges haben es nicht immer fertig gebracht, den Inhalt ihrer Begriffe genau gegenwärtig zu haben, und sie sind durch dieses Versagen ihres Gedächtnisses oder durch Ermüdung ihrer Aufmerksamkeit zu Fehlschlüssen verleitet worden.

Ferner können uns Wünsche den Blick trüben und unsere Gedanken verwirren. Oft müssen wir schnell einen Entschluß fassen, und dann wollen die Gedanken nicht rasch genug ablaufen. So versagt mancher im Augenblick der unerwarteten Gefahr, auch wenn es ihm keineswegs an Mut gebricht; der Schiffsführer gibt einen verkehrten Befehl, der Flieger oder Bergsteiger tut einen falschen Griff oder Tritt.

Hier soll nur vom wissenschaftlichen Denken die Rede sein, das nicht übereilt zu werden braucht, und von dem, was als Anleitung dazu geboten werden kann.

Damit die geistige Arbeit des einzelnen recht fruchtbar werde, ist erforderlich, daß ihm, nach Stoff und Methode, möglichst vieles von dem zugute komme, was seine Vorgänger geleistet haben. Das Gedachte soll treu überliefert werden, Verfehltes soll der Kritik unterliegen, und alles soll, als Vorbild oder Warnung, der Erziehung dienen. Wo z. B. Vortragsformen Verbreitung finden, die ungewollte oder doch nicht ausdrücklich bezeichnete Lücken lassen, da wird die Bedeutung richtigen Denkens nicht gewürdigt. Wer Gefolgschaft erwartet, wird Sorge tragen müssen, daß andere seine Wegweisung verstehen. So hängt denn vieles von der Art der Darstellung ab, und also von der Beschaffenheit der benutzten Zeichen. Denn alle Darstellung bewegt sich notwendigerweise in Zeichen, in Wortzeichen, oder in Zeichen auf dem Papier, die Zeichen von Zeichen oder für Zeichen sind, und vorher durch Wortzeichen erklärt sein müssen. Diese selbst aber lassen sich nicht alle erklären; schon Pascal hat darauf hingewiesen, daß das einen regressus ad infinitum bedeuten würde. Irgendwo müssen wir immer mit etwas anfangen, das wir als gegeben ansehen. Es kann sich ein Widerspruch einstellen. Lag dann nicht ein Denkfehler vor, so haben wir Gewißheit erlangt; allerdings nur die nicht immer willkommene Gewißheit, daß unsere Voraussetzung falsch war. In jedem anderen Falle ergibt sich, streng genommen, nur ein Non liquet. Wir wissen nicht, ob wir weit genug gedacht haben, und ob sich nicht etwa doch noch ein Widerspruch einstellen könnte. Immerhin sind wir überzeugt, daß aus gewissen Voraussetzungen, namentlich aus denen, die dem Rechnen mit den natürlichen Zahlen zugrunde liegen, niemals ein Widerspruch abgeleitet werden kann. Zu einer guten Darstellung gehört jedenfalls, daß die Voraussetzungen, von denen man ausgehen will, ausdrücklich formuliert werden, es sei denn, daß es sich um bekannte und auch allgemein anerkannte Dinge handelt.

An die weitere Darlegung sind dann noch eine Menge von Forderungen zu stellen, wenn sie ihren Zweck, die Verbreitung von Kenntnissen und von Fähigkeiten, genügend erfüllen soll. Nur wenn die übliche Form der Mitteilung den höchsten Ansprüchen genügt, kann echte Wissenschaft Gemeingut vieler werden und dadurch zu hoher Blüte kommen. Es handelt sich also gewiß um wichtige Kulturwerte. Da richtet sich denn unser Blick zunächst auf die Mathematik, als die Wissenschaft, in der Folgerichtigkeit sich noch am leichtesten erreichen läßt, und in der daher auch die Überlieferung des Gedachten zuerst eine sorgsame Pflege erfahren hat und bis auf den heutigen Tag erfährt. Aber worin besteht nun das Wesen der Mathematik, welches ist die genauere Beschaffenheit der Ansprüche, die an ihren Betrieb gestellt werden, oder die doch gestellt werden müssen, wenn ihre Darstellungsform anderen Wissenschaften zum Vorbild dienen soll? Und ist eine gute logische Ordnung der behandelten Gegenstände das einzige, was dann in Betracht kommt? Handelt es sich nicht überall um viel mehr noch als nur um die Entscheidung über Richtig und Falsch? Wer weiß, vielleicht verdient die Mathematik, die wir wirklich haben, gar nicht in allen Stücken das Lob, das ihr von freundlichen Beurteilern, besonders von Philosophen, gespendet zu werden pflegt!

Herr Pasch sucht nun auseinanderzusetzen, wie nach den Eindrücken seiner Studien der Schriften anderer, sowie nach den Erfahrungen seiner Lebensarbeit und Lehrtätigkeit eine mathematische Darstellung beschaffen sein soll; und das wird auch der mit Dank begrüßen, der nicht beizupflichten vermag. In diese Lage dürften wohl manche kommen, die da eine abfällige Kritik ihrer eigenen Betätigung herauslesen werden, sich aber, zu ihrer Verwunderung, nicht etwa darum getadelt finden, weil ihre Leistung (vielleicht nur allzuweit) hinter einer, wie sie geglaubt hatten, vernünftigen Absicht zurückgeblieben ist, sondern sich in ihrem Wollen selbst angegriffen sehen, zugleich aber auch bemerken müssen, daß der Urheber solcher Kritik auf ihre Absichten mit keinem Worte eingeht. Selbst wenn es sich herausstellen sollte, daß der Kritiker recht hat, so wäre doch eine solche Begründung unzureichend. Es geht nicht an, dem Ideal zahlreicher Schriftsteller ohne weiteres ein anderes gegenüberzustellen; es hätten auch die keineswegs verborgenen, vielmehr offen zutage liegenden Argumente mit einiger Vollständigkeit aufgezeigt und gewürdigt werden müssen, die jene Schriftsteller als ausschlaggebend zu betrachten scheinen. Und um so mehr hätten wir das erwarten dürfen, als manches von dem, was hier in Betracht kommt, in einem Werke erörtert worden ist, dessen Verfasser zu den Koryphäen der mathematischen Wissenschaft zählt, und kein geringerer ist als H. Poincaré[1]). Kennt Herr Pasch dieses Buch wirklich nicht, oder hat sein Inhalt einen so schwachen Eindruck auf ihn gemacht, daß ihm eine Auseinandersetzung damit als überflüssig erscheinen konnte? Erst dann jedenfalls, wenn es ihm gelungen wäre, uns die Gewichtslosigkeit aller jener Argumente einleuchtend zu machen, könnten wir sagen, daß Herr Pasch seine These wirklich begründet hat. Er hat aber gar keinen Versuch dazu gemacht. Ein sehr unduldsames Ideal wird uns vor Augen gestellt, das selbst von dem Dasein anderer Ideale kaum Kenntnis nehmen will. Abgesehen von einigen wenigen Äußerungen, die mir mit dem übrigen nicht recht vereinbar zu sein scheinen, bekommen wir überall nur eine Seite von einer Sache zu sehen, die aus mancherlei Gesichtspunkten betrachtet werden sollte.

Wie Herr Pasch, werde auch ich versuchen, noch anderen als nur Mathematikern verständlich zu sein. Überall wird

---

[1]) Science et Méthode. Deutsch unter dem Titel Wissenschaft und Methode, herausgegeben von F. und L. Lindemann. (Leipzig und Berlin 1914.)

sich das freilich nicht erreichen lassen; Beispiele, auf die Bezug genommen werden wird, können nur dem etwas sagen, der sie schon kennt. Indessen wird die Verständlichkeit des Ganzen dadurch wohl nicht sehr beeinträchtigt werden. Ich denke, außer Mathematikern und Philosophen, mir Leser, die irgend eines der naturwissenschaftlichen Fächer betreiben und das Bedürfnis haben, über die Quellen ihrer Erkenntnis und den Sinn ihres Tuns nachzugrübeln. Freilich kommt es mir so vor, als ob manchen das, was ich zu sagen haben werde, als ebenso selbstverständlich erscheinen müßte, wie es mir erschienen ist. Indessen hat nun Herr Pasch mich, und vielleicht auch andere, aus solcher Gemütsruhe aufgestört. Jedenfalls scheint es mir, daß seine Schrift eine Erwiderung sehr wohl verdient — um so mehr, als über das, was von einer brauchbaren Darstellung zu verlangen ist, tatsächlich noch eine große Unsicherheit besteht. Die Form der Polemik war unter diesen Umständen für einen erheblichen Teil des Vorzutragenden nicht wohl zu vermeiden. Sie wird die Lesbarkeit wohl eher fördern als hindern.

Es ist bedauerlich, aber nun einmal nicht zu ändern, daß wir Menschen, nicht Götter sind. Laien übersehen das öfter, wenn sie etwas damit zu sagen meinen, daß die Mathematik „nichts Neues“ hervorbringen kann, da doch alles schon in den Voraussetzungen dieser Wissenschaft steckt. Und auch Mathematikern begegnet gelegentlich etwas Ähnliches. Die vielfach benutzte Fiktion eines denkenden Wesens „mit ewigem Leben und mit unbegrenztem Gedächtnis“ (sowie mit unermeßlicher Geduld!) hat ohne Zweifel ihren Wert, sie hat aber doch immer nur die Bedeutung einer Fiktion. Daraus, daß der nach Art eines Buddha in den Anblick seiner erhabenen Lehre versunkene Mathematiker nur zu leicht sogar die Grenzen des eigenen Daseins vergißt, ist die zu Gauß' Zeiten noch nicht übliche, später aber, ich glaube unter dem Einfluß von Kronecker, sehr in Aufnahme gekommene hohe Wertschätzung sogenannter ausführbarer Operationen[1]) entstanden, die in Wirklichkeit für uns meistens so wenig ausführbar sind als andere von den Mathematikern untersuchte Prozesse.

Eine andere Wirkung desselben Vergessens zeigt sich, wenn auch nur für einen größeren Teil der Mathematik eine Darstellungsform empfohlen wird, die sich wohl in ausgewählten Beispielen verwirklichen läßt, deren Einführung in größerem Maßstab jedoch an der baren Unmöglichkeit solchen Beginnens scheitern muß.

Pasch verlangt grundsätzlich eine restlose Auflösung aller Deduktionen in wohlgegliederte einfache Syllogismen. Sollte diese Vorschrift wörtlich genommen und befolgt werden, so würde aus jeder Abhandlung ein Buch entstehen, manches Buch, besonders auch schon jedes umfangreichere Lehrbuch, müßte sich in eine kleine Bibliothek verwandeln.

Nicht nur die Ausbildungszeit des Jüngers der vornehmsten Denkwissenschaft müßte beträchtlich verlängert werden, sondern die Spanne seines Erdenwandelns selbst[2]).

---

[1]) Rechnungen mit den vier Spezies in endlicher Wiederholung. „Ausführbar" heißt z. B. die Darstellung der Zahl 2^{1000} im dekadischen Zahlensystem, die Aufsuchung der Primteiler noch so großer Zahlen u. a. m. Irrationale Zahlen wie $\sqrt{2}$, die Zahl π, die Basis des natürlichen Logarithmensystems u. a. können nur näherungsweise berechnet werden. (Die Zahlen $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$ sind bekannte Näherungswerte für π). Unendliche Summationen wie

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} + - \ldots,$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \ldots,$$

$$e = 1 + \frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots$$

sind nicht ausführbar. Aber auch mit solchen Summen („unendlicher Reihen") rechnet der Mathematiker mit vollkommener Sicherheit.

[2]) In welchem Umfang Herrn Pasch selbst sein Darstellungsideal als erreichbar erschienen ist, kann man aus seinen mathematischen Werken ersehen. (Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig, 1882; Grundlagen der Analysis, 1909; Veränderliche und Funktion, 1914.) Tatsächlich ist er ziemlich weit gegangen.

Allerdings gibt es Fälle, in denen ein vorsichtiges Fortschreiten in einfachen Syllogismen nicht entbehrt werden kann. Unter den Voraussetzungen von Euklids geometrischem System fand sich eine, deren Daseinsgrund nicht recht verständlich schien, das Parallelenpostulat. Man versuchte ohne sie auszukommen, und nach Überwindung vieler Schwierigkeiten gelang es schließlich, der Sache auf den Grund zu gehen.

Es zeigte sich, daß der unternommene Versuch scheitern mußte, aber man wurde entschädigt durch Entdeckung der Nicht-Euklidischen Geometrie. Wo Zweifel entstehen konnten. ist man auch noch in anderen Fällen so verfahren, und man wird es auch künftig tun müssen. Indessen geht die Meinung der Mehrzahl der Mathematiker dahin, daß eine so schwerfällige Darstellungsform in der Regel nicht nötig ist. Nur für Anfänger sind ausgeführte Muster vollständiger Deduktionen ganz unentbehrlich, da sie eben erst lernen müssen, was ein Beweis ist.

Aber auch für Anfänger wird es sich nicht empfehlen, viele so zergliederte Beweisgänge aneinander zu reihen. Diese Darstellungsform entbehrt allzusehr der Übersichtlichkeit, und außerdem gehört sie entschieden zum genre ennuyeux. In unserer Zeit halten geistig regsame Menschen das erdrückende Einerlei dieser Vortragsart nicht leicht mehr aus. Zum Glück trifft aber auch das gar nicht zu, was Pasch zur Begründung seiner Forderung ausführt. Die Erfahrung anderer Mathematiker bestätigt es keineswegs, daß **nur** eine zu Ende geführte Zergliederung des Beweisganges wahrhaft überzeugend wirken kann.

Pasch beruft sich, unter anderem, auf Aussprüche von Gauß, deren erster sich in dessen Dissertation findet, also schon aus dem Jahre 1799 stammt. An gewissen von großen Mathematikern herrührenden Entwickelungen wird die Form getadelt, „die zwar bei der Auffindung neuer Wahrheiten von großem Nutzen sein kann, aber bei der Veröffentlichung von Beweisen nicht gestattet werden darf“. Ähnliche Äußerungen stammen aus den Jahren 1831 und 1832. Es bedarf „vollständiger Entwickelungen, wenn sie wahrhaft überzeugend sein sollen". „Die meisten Menschen haben gar nicht den rechten Sinn für das, worauf es dabei ankommt, und ich habe nur wenige Menschen gefunden, die das, was ich ihnen mitteilte, mit besonderem Interesse aufnahmen. Um das zu können, muß man erst lebendig gefühlt haben, was eigentlich fehlt, und darüber sind die meisten Menschen ganz unklar."

Muß alles das im Sinne von Pasch gedeutet werden? Wollte der Princeps Mathematicorum wirklich sagen, daß den Lesern mathematischer Schriften jeder kleinste Fortschritt des Gedankens einzeln vor Augen gestellt und sozusagen eingehämmert werden soll? Die Art, wie er selbst zu schreiben pflegte, dürfte einer so buchstäblichen Deutung jener Worte kaum günstig sein. Gauß hatte Schriften im Auge, die nach seiner wohlbegründeten Meinung wesentliche Denklücken enthielten, nämlich solche, die die Verfasser für sich selbst nicht ausgefüllt hatten und die auszufüllen sie also auch ihren Lesern nicht zumuten durften. Die darin angewendete Darstellungsform aber war geeignet, diesen Umstand zu verschleiern. Den meisten von denen, die nicht zu verstehen vermochten, konnte es ja gar nicht in den Sinn kommen, die Schuld daran dem Autor aufzubürden. Sie erhielten die doch versprochene Belehrung nicht, und wurden ohne Not entmutigt noch obendrein. Gewiß war das zu mißbilligen, daß aber dem Leser mathematischer Schriften die Anstrengung zu selbständiger Denkarbeit erspart werden solle, hat Gauß sicherlich nicht sagen wollen. Übrigens besitzen wir dafür auch ein ausdrückliches Zeugnis, und zwar eines, das aus Gauß' späteren Jahren stammt. In einem mir vorliegenden Briefe aus dem Jahre 1849 (von dem das Gauß-Archiv zu Göttingen eine Abschrift besitzt) heißt es nämlich: „Die durchsichtige Klarheit ist ... etwas Relatives, denn man schreibt doch immer für eine bestimmte Klasse von Lesern, bei denen man ein gewisses Maaß von Vorbildung und selbstthätiger Umsicht voraussetzt."

Ähnlich steht es mit Äußerungen eines anderen großen Mathematikers, die Pasch anführt. Gerade im schlimmsten der von Abel getadelten Vorkommnisse, bei dem Rechnen mit divergenten Reihenentwickelungen, hätten sich lückenlose Schlußketten sehr wohl herstellen lassen, es wäre aber dadurch gar nichts gebessert worden. Man hätte nur, nach Art der modernen Axiometiker, die Annahme, daß auch mit solchen Reihen, wie mit wohldefinierten Zahlen, in üblicher Weise gerechnet werden darf, als ein besonderes Postulat hinstellen müssen. Der Widersinn steckte nämlich schon in der Voraussetzung der Argumentation, bei deren Annahme man zu wenig Umsicht entwickelt hatte[1]). Grundsätzlich unzulässig ist es aber nicht, Postulate aufzustellen, von denen es zweifelhaft bleibt, ob sie widerspruchsfrei sind. Tatsächlich lag die Sache ziemlich lange so im Falle der Nicht-Euklidischen Geometrie (bis 1871, nicht 1894, wie Pasch zu glauben scheint). Ob ein Widerspruch an den Tag kommt, der schon in den Voraussetzungen steckt, hängt davon ab, in welcher Richtung man weiterdenkt, und wie weit man dabei geht. Es gibt kein Kriterium, das uns dabei leiten könnte. Mit der Form der Darstellung hat das Übersehen oder die Auffindung von Irrtümern dieser Art gar nichts zu tun.

„Lücken" der Darstellung hängen nicht nur von dem ab, der schreibt, sondern auch von dem, der liest. Der Rückschluß auf Denklücken des Autors ist zuweilen möglich, verlangt aber äußerste Vorsicht. Wer Klarheit vermißt, mag das sagen, er muß aber seinen Tadel spezifizieren, wenn er sich nicht selbst dem Vorwurf der Unklarheit aussetzen will, und nicht immer wird dergleichen leicht so auseinanderzusetzen sein, daß auch der Widerwillige es zugeben muß. Das hat selbst Gauß erfahren: Noch heute figuriert der erst von ihm

---

[1]) $$\begin{aligned} 0 &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots\ldots \quad \text{(ad. inf.)} \\ &= 1-1+1-1+1-1+\ldots\ldots \quad \text{(ad. inf.)} \\ &= 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots\ldots \quad \text{(ad. inf.)} \\ &= 1-0=1, \quad 0=1. \end{aligned}$$

Wegen der interessanten Geschichte dieser Reihe siehe G. Kowalewski, Die klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen (Leipzig 1910) S. 48. Leibniz war noch ganz im unklaren über den wirklichen Sachverhalt.

begründete Fundamentalsatz der Algebra in der französischen Literatur als Theorème de d'Alembert. Nur wenn die Fehler auch in den Ergebnissen zutage treten, wie es zum Glück ja gewöhnlich der Fall ist, gelingt es nicht, den wirklichen Sachverhalt durch Ausflüchte zu verdunkeln.

Entgegen der von Pasch vertretenen Meinung wirkt auf den hinreichend Vorbereiteten und Befähigten schon vollkommen überzeugend eine Darstellung des Beweisgangs, die nur die Hauptwendungen des Gedankens, das eigentlich Neue an der angestellten Überlegung, mit ausreichender Deutlichkeit bezeichnet. Wes Geistesart aber so beschaffen ist, daß ihm nichts überlassen werden darf, der sollte sich lieber von der Mathematik fernhalten. Die moderne Schreibart, die ja gewiß auch ihre Nachteile hat, verdient in den meisten Fällen vor dem starren syllogistischen Schema auch darum den Vorzug, und zwar bei weitem, weil sie dem Leser das demütigende Bewußtsein erspart, am Gängelbande geführt zu werden. Das Wort von der beleidigenden Klarheit hat einen guten Sinn.

Daß mangelhaft vorgebildete und zu wenig begabte Personen durch abkürzende Darstellungsformen zum Irrtum verleitet werden können, und daß auch der Geübte in der Ergänzung ausgelassener Mittelglieder Schwierigkeiten finden kann, ist richtig. Von jedem Gesetzbuch ist ungefähr dasselbe zu sagen. Auch Gesetzbücher sind nicht so abgefaßt und können nicht so abgefaßt werden, daß nirgends ein Zweifel entstehen könnte. In der Mathematik würde das Atomisieren vieler Beweise eine allgemeine Senkung des Niveaus der Produktion und des Unterrichts zur Folge haben müssen. Was Pasch verlangt, läuft im Grunde darauf hinaus, daß die Darstellung in Wort und Schrift auf die ganz Unbefähigten zugeschnitten werden soll. Den einfachen Syllogismus verstehen ja auch diese noch, Schwierigkeiten logischer Natur kommen erst mit den zusammengezogenen Schlußketten. Ob nun aber die, deren Denkkraft nicht über den gewöhnlichen Syllogismus hinausreicht, für die Seligkeiten des reinen Erkennens die rechte Würdigung finden werden?

Könnte man sie notdürftig zu Mathematikern entwickeln, so wäre der Nutzen davon sehr fraglich, ganz gewiß aber ist die Schädigung, die schon der bloße Versuch anderen zufügen muß. Auf einen reichen Geist muß eine solche Unterweisung geradezu abschreckend wirken. Man wird die willigsten und gelehrigsten Schüler nicht immer für die Befähigtsten halten dürfen, gerade die Tüchtigsten finden sich wohl meistens unter denen, die lieber eigene Wege gehen. Was Paschs Ideal wirklich entsprechen würde, wären Lehrbücher „ad usum delphini", und diese verdienen in die Ecke geworfen zu werden. Wassersuppen, auf denen hier und dort ein Fettauge schwimmt, sind keine nahrhafte Kost. Ohnehin bleiben zuviel im Abc stecken. Sie kommen nicht sonderlich weit über das Buchstabieren hinaus, bringen es allenfalls noch „zum Zusammenlesen". Auch das ist ein Ausspruch von Gauß, den Pasch nicht zu kennen scheint. Bei dem empfohlenen Schneckengang würde das Steckenbleiben allgemein werden. Wer große Schritte machen kann, läßt sich nicht die Füße fesseln und zum Trippeln zwingen. Das sollte gar nicht erst versucht werden.

Auch solche, die nicht eben zum Forschen berufen sind, oder die durch ungünstige äußere Umstände daran verhindert werden, sollen einen Einblick erhalten in die Art, wie sich der wissenschaftliche Fortschritt vollzieht. Sie müssen dann die nun einmal üblich gewordene Denkstenographie in gewissem Maße zu beherrschen lernen. Auch wer nur mäßige Fähigkeiten hat, soll sich einigermaßen in der Literatur zurechtfinden können, mag diese Literatur beurteilt werden wie sie will. Wie sie auch beschaffen sein mag, immer ist sie der Ausgangspunkt jedes weiteren Fortschritts. Denken wir uns einen angehenden Mathematiker, der lediglich eine Ausbildung im Sinne von Pasch erhalten hat und zum erstenmal eine wissenschaftliche Zeitschrift in die Hand nimmt! Allenthalben findet er sich dann vor einen Anblick gestellt, der ihn wie Hieroglyphenschrift anmuten muß. Es wird ihm ergehen wie jenem Studierenden einer amerikanischen Universität, dem man (ebenfalls aus tiefgeschöpften Gründen!) die Reihenfolge der Buchstaben des Alphabets nicht beigebracht hatte, und der dann das Lexikon nicht zu brauchen wußte. Oder vielmehr, er wird vor eine ihm ebenso neue, aber sehr viel schwierigere Aufgabe gestellt. Das wäre also eine der zu erwartenden Wirkungen, wenn mit der Durchführung des besprochenen Grundsatzes Ernst gemacht werden sollte.

Ich vermag demnach in den von Pasch beklagten Erscheinungen einen wirklichen Mangel der freien Darstellungsform gar nicht zu erblicken. Mehr fällt ein anderer Umstand ins Gewicht, den Pasch treffend hervorhebt. Werden Abkürzungen einmal zugelassen, so ist es nicht leicht, eine Grenze zu finden, und für den Schriftsteller fällt die Nötigung zur Selbstkontrolle weg. Daher eben rührt der betrübende Zustand, in den gewisse mathematische Disziplinen geraten konnten. Dieses nicht ernst genug zu nehmende Übel dürfte sich aber beseitigen lassen, ohne daß man gleich dazu übergeht, den Autoren eine Zwangsjacke anzulegen. Forscher, die genügende Erfahrung haben, um zu wissen, worauf es ankommt, sollten sich öfter als üblich entschließen, Kritiken zu schreiben, anstatt das Rezensieren Anfängern zu überlassen. Man würde den Autoren, die doch meistens den besten Willen haben, dadurch einen viel größeren Dienst erweisen als durch Aufstellung abstrakter Vorschriften nach Art des Katechismus. Das bloße Moralisieren hilft hier wie überall nur wenig. Würden an die Kritik höhere Ansprüche gestellt, als es leider geschieht, so könnten jene Übelstände zwar nicht ganz beseitigt, aber doch sehr eingeschränkt und nahezu unschädlich gemacht werden, wie es in einigen genügend vor Dilettantismus behüteten Gebieten wirklich zutrifft. Eine umständliche und zeitraubende Analyse längerer Beweisgänge wäre dazu wohl nur selten nötig. In vielen Fällen kann es ja genügen, die Ergebnisse zu kritisieren, da der Rückschluß auf Mängel der Deduktion ganz eindeutig ist. Wer Ansehen hat, darf sich kurz fassen.

Auch im Unterricht dient der Anleitung zu folgerechtem Denken mehr noch als eine Sammlung zergliederter Schlußketten die Vorführung tatsächlich vorgekommener Fehlschlüsse. Solche gibt es von jedem Kaliber, und dazu ein dankbares Publikum. Langweilig ist dieser Stoff nämlich nicht. Gröbere

Verstöße werden dem Anfänger zur Warnung dienen, Irrtümer, die sorgfältig arbeitenden Forschern begegnet sind, dem Fortgeschrittenen lehrreicher sein[1]). Was hat die Wissenschaft nicht alles den Lehren zu verdanken, die aus allerlei Mißgriffen gezogen worden sind! Z. B. kennt man heute eine Menge bizarrer und kurzweiliger Funktionen, die, wenn zu nichts anderem, so doch dazu gut sind, die Fehlerhaftigkeit gewisser Schlußfolgerungen handgreiflich zu machen. Daß aus der Stetigkeit einer Funktion nicht ihre Differentiierbarkeit folgt, kann man durch ganz einfache Beispiele belegen[2]), ebenso daß ältere Kriterien des Maximums ungenügend sind, eine früher übliche Definition des Flächeninhaltes unbrauchbar ist u. a. m.

Daß die Unterweisung in Wort und Schrift dauernd fesseln und anregen soll (wohlgemerkt nicht jeden, aber den genügend Begabten), wird an keiner Stelle in diesem schrecklich nüchternen Programm berührt. Immer handelt es sich da um die Übermittelung eines fertigen und darum toten Stoffes, als methodisches Ziel erscheint so gut wie ausschließlich die Aufgabe, zu überzeugen.

Sehen wir zunächst von anderem ab, so werden wir uns doch der Einsicht nicht verschließen dürfen, daß es verschiedene Arten des Überzeugtwerdens gibt, und daß sie nicht alle gleichwertig sind. Bekanntlich hat Schopenhauer einen Unterschied zwischen Überzeugen und Überführen gemacht. Er sprach von Mausefallenbeweisen. War nun auch sein Beispiel ungeeignet, so gibt es doch Deduktionen, die der Forderung Paschs vollkommen genügen, und dennoch das Gefühl der Unbefriedigung zurücklassen. Das dürfte daran liegen, daß nur eine vereinzelte Einsicht erreicht worden ist, die Kräfte des Lernenden aber dadurch nicht gewachsen sind. Durch so manchen Beweis fühlen wir uns mehr düpiert als belehrt.

[1]) Herr Pasch hat sich das nicht ganz entgehen lassen (Veränderliche und Funktion, S. 122 bis 137), doch ist, was er darüber anführt, meines Erachtens nicht elementar genug.

[2]) Siehe K. Knopp, Archiv der Mathematik und Physik, 3. Reihe, 26. Bd. (1917 ?), S. 103 und 278. Sitzungsber. d. Berl. Mathem. Ges., 16. Jahrg., 1917, S. 97, wo auch noch weitere Literatur angegeben wird.

Als junger Student hörte ich einmal einen langen Vortrag „über Berührungstransformationen", wobei der Redende, ein älterer Studierender, die Tafel mit einem Heer von Formeln überdeckte. Nach Schluß fragte jemand, zu nicht geringer Entrüstung des Vortragenden: „Was sind Berührungstransformationen?" Die kalte Dusche war wohlverdient. Die angewendete Logik mochte ja in Ordnung sein, aber durfte das genügen? Was heißt denn Verstehen? Müssen etwa die Hörer eines Vortrages mit dem zufrieden sein, womit der Vortragende selbst zufrieden ist? „Heißt es, die Beweisführung eines Theorems verstehen, wenn man der Reihe nach jeden der Syllogismen prüft, mit denen die Beweisführung zu tun hat, und bestätigt, daß das Theorem richtig ist . . . Heißt es eine Definition verstehen, wenn man nur erkennt, daß man den Sinn aller angewandten Worte bereits kennt und konstatiert, daß die Definition keinen Widerspruch enthält?" (Poincaré, S. 104.) Die Einsicht, dieses ist richtig, jenes falsch, ist doch gewiß nur ein Anfang, ja sogar, vom pädagogischen Standpunkt aus betrachtet, oft genug nicht einmal ein glücklicher Anfang.

Poincaré hat in ähnlichem Zusammenhang an das Schachspiel erinnert. Wer nur die Spielregeln kennt, wird einer Meisterpartie noch ganz verständnislos gegenüberstehen. Warum wird dieser Zug getan, und jener andere nicht, der doch so viel stärker zu sein scheint? Also kommt es darauf an, nicht dogmatisch vorzugehen, sondern eine motivierte Auswahl zu treffen, und zwar in der Mathematik eine Wahl unter unbegrenzt vielen Möglichkeiten. Das Weiterschließen verlangt einen Willensakt, der zwar nicht immer ins Bewußtsein zu treten braucht, oft genug aber kenntlich ist, z. B. an Ermüdungserscheinungen. Und das Motiv unserer Entscheidung ist immer ein Werturteil. So stehen wir denn, insbesondere in der Mathematik, vor einer der heikelsten Fragen, die es gibt:

Was ist wertvoll?

Nach welchen Grundsätzen also sollen wir unsere Urteilsbildung einrichten? Wie sollen wir uns unsere Ziele stecken?

Ohne Zweifel ist es hoffnungslos, über so etwas zu einer vollkommenen Einigung zu gelangen. Allerdings, daß der Gedankeninhalt der Differential- und Integralrechnung wertvoll ist, wird niemand bezweifeln, der ein Recht zum Mitreden hat. Aber schon wenn es sich um Geometrie oder Mengenlehre handelt, gehen die Urteile der Sachverständigen auseinander. Je origineller zwei Köpfe sind, um so verschiedener werden ihre Erfahrungen sein, und um so verschiedener dann auch ihre Werturteile. Für den Forscher wie für den Lernenden aber handelt es sich zunächst gar nicht einmal um Wertungen, zu deren Begründung auf eine fertig vorliegende wissenschaftliche Erfahrung verwiesen werden kann. Vielmehr ist das abzuschätzen, und in eine Art von wenn auch noch so unvollkommener und subjektiver Rangordnung zu bringen, was für unser Denken erst der Anlage nach da ist, sich sozusagen noch im Embryonalzustande befindet, was eben erst zufolge einer vielleicht umfangreichen Arbeit reifen und zu wirklichem Wissen werden kann. Schlußketten schnell zu durchlaufen, wird dann dem Mathematiker von größtem Nutzen sein, aber es wird bei weitem nicht genügen. Irgendwo muß in der einzelnen Schlußkette auch der Begabteste haltmachen, sie alle zu übersehen aber ist unmöglich. Also muß dem Forscher eine Ahnung dessen, was kommen soll, und zugleich eine Vorstellung von seiner Bedeutung für die fernere Forschung die strenge Logik vertreten: Der Forscher muß in nicht zu geringem Maße das besitzen, was Poincaré Intuition nannte, was wohl auch wissenschaftlicher Instinkt oder besser wissenschaftlicher Takt heißt. Vor allen Dingen muß der Forscher Phantasie haben: Die reine Logik ist unfruchtbar, weil sie sich sofort ins Uferlose verliert. Wie sollte man das auf eine Formel bringen?

Und auch der Lernende mit seinen sehr viel bescheideneren Zielen muß doch immerhin so viel davon haben, daß er auf die Frage: Warum betreibe ich dieses, warum verfahre ich dann so und nicht anders, sich eine Antwort zu geben weiß, die etwas mehr bedeutet als die Verweisung auf die Autorität seines Lehrers oder seines Lehrbuchs. Ohne Zweifel werden solche Antworten sehr verschieden ausfallen, je nach dem Maße von wissenschaftlicher Erfahrung, das dem einzelnen schon geworden ist, je nach der größeren oder geringeren Beweglichkeit seines Geistes, je nach dem Eindruck, den früher gemachte Erfahrungen in seinem Gedächtnis hinterlassen haben. Alles das aber ist höchst persönlicher Natur.

Das beste, was über mathematische und überhaupt wissenschaftliche Werte im allgemeinen sich sagen läßt, dürfte Poincaré gesagt haben, so trivial man seine Erklärung auch finden mag, nachdem sie einmal ausgesprochen ist. Wertvoll ist, was sich häufig wiederholt, und daher viele Anwendungen zuläßt. Darum sucht der Naturforscher Gesetze, darum legt der Mathematiker Wert auf Abstraktion: Beidemal handelt es sich um eine Zusammenfassung von vielem für unser Denken Gleichartigem, und um eine dadurch zu bewirkende Erleichterung des Denkens. „Hier ist Johann ohne Land vorübergegangen" ist für uns ohne Bedeutung, denn es wird nie wieder geschehen, die Tatsache ohne Zusammenhang hilft uns weiter nichts.

Freilich darf das Gesagte nicht so verstanden werden, als ob immer wieder dasselbe wirklich in Erscheinung treten müßte. Benutzen wir Folgerungen aus irgendwelchen Tatsachen, die wir als solche zugeben, so benutzen wir mittelbar auch diese selbst. Also können wir den angeführten Gedanken auch so ausdrücken: Wertvoll ist, was folgenreich, was fruchtbar ist. Es ist vor allem anderen das aufzusuchen, was unsere Kräfte stärkt.

Gehen wir etwas mehr ins einzelne, so ergeben sich noch eine Menge von Fragen, mit denen allen sich der Mathematiker und z. B. auch der Physiker herumschlagen muß.

Soeben war als wertvoll die Abstraktion bezeichnet worden, weil sie durch Zusammenfassung von vielem uns das Denken erleichtern kann. Aber bei weitem nicht jedes Maß von Abstraktion hat diese psychologische Wirkung. Begriffe können so abstrakt sein, daß wir ihren Umfang nicht mehr recht übersehen, sie können dadurch, daß sie außer dem, was wir eigentlich wollen, noch vieles andere umspannen, die Anwendung auf konkretere Dinge eher erschweren als erleichtern. Die Forderung der Ökonomie des Denkens, deren Sinn nicht ist, Anstrengung zu ersparen, sondern Kraftvergeudung zu verhüten, ist dann nicht erfüllt. Zuweilen hat man das Individuelle, das nicht nur (wie behauptet worden ist) in der Geschichte das eigentliche und letzte Ziel der Forschung bildet, sondern auch in Mathematik und Naturwissenschaften, gar zu weit aus den Augen verloren. Manche mathematische Untersuchung, besonders jüngerer Forscher, schreitet sozusagen in den Wolken einher. Nicht um ihrer selbst willen ist die „Verallgemeinerung“ uns wertvoll.

Es handele sich jetzt um einen Beweis. Mehrere Wege führen zum Ziel — sollen sie uns alle gleich lieb sein? Oder warum doch entscheiden wir uns zugunsten dieses einen? Ist immer der kürzeste Weg der beste, oder soll man, z. B. bei Konstruktionsaufgaben der Geometrie, dem längeren und vielleicht aussichtsreicheren Wege den Vorrang einräumen? Was uns als einfach erscheint, hängt offenbar von dem ab, was wir wollen. Es ist ein Unterschied, ob man nur zu diesem oder jenem Lehrsatz gelangen will, oder ob man einen ganzen Komplex von Einsichten, eine Theorie, zu beherrschen wünscht.

Nehmen wir jetzt an, es sei, z. B. in der Theorie der Kurven oder Flächen, nur ein sogenannter allgemeiner Fall behandelt worden: Der Begriff der Kurve, wie der Mathematiker ihn faßt, umspannt vielerlei Gegenstände, unter anderem auch Figuren, die aus Geraden, Kegelschnitten usw. zusammengesetzt sind. War es nun gerechtfertigt, diese und andere besondere Fälle auszuschließen, oder steckten in ihnen vielleicht unbehobene Schwierigkeiten, hatte man sie nicht etwa darum ausgeschlossen, weil die Methode, auf die man einmal eingeschworen war, eben nicht mehr liefern wollte? So oder ähnlich steht es wirklich recht oft um Probleme der Geometrie. Was als Lösung vorgetragen wird, läßt eine Menge ganz naheliegender Fragen unbeantwortet. Man wird sich daher sehr genau überlegen müssen, ob ein vorgefundenes Problem sachgemäß formuliert war, welche Forderungen methodischer Art an seine Lösung gestellt werden sollen[1]). Sind also die Methoden um der Probleme willen da, oder sollen wir ihnen das Recht zuerkennen, eine Art von Sonderdasein zu führen und sich der Probleme zu ihrer eigenen Verherrlichung zu bedienen? (Forderung der Reinheit der Methode.) Ist nicht aber auch daran viel Vernünftiges, werden wir nicht zur Vertiefung gelangen durch das Bemühen, uns die Leistungsfähigkeit einer bestimmten Methode genau klarzumachen? Und wie soll das gelingen, wenn wir sie nicht nach Kräften ausnutzen?

Wie sind sodann die Begriffe zweckmäßig zu umgrenzen, so nämlich, daß man das Darzustellende in der einfachsten und handlichsten Form und ohne Überwindung unnötiger Schwierigkeiten erhält? Es kommt etwas darauf an, daß unsere Aufmerksamkeit nicht dadurch zerstreut werde, daß man in einen Lehrsatz allzu viele Einzelheiten hineinpackt. Nach dem Fundamentalsatze der Algebra hat eine algebraische Gleichung für eine Unbekannte so viele „Wurzeln", als ihr Grad angibt. Das ist eine sehr glückliche Formulierung. Schon im Falle der Gleichungen zweiten Grades leistet sie alles das und mehr, was die elementare Fassung mit ihrer Unterscheidung von drei Möglichkeiten leisten kann, nur muß man, wenn man diese Unterscheidung (zweier Wurzeln, einer, keiner Wurzel) dennoch braucht, sich anders ausdrücken.

So sucht überhaupt der Mathematiker das nur Gedächtnismäßige zugunsten wertvollerer Betätigungen seines Geistes zurückzudrängen, indem er sich bemüht, die als Lehrsätze bezeichneten Ruhepunkte des Gedankens so zu gestalten, daß sie von möglichst wenigen Ausnahmen gestört werden. Verbindet sich aber dieses Streben mit dem anderen, möglichst vieles in einer einzigen Formulierung zu umspannen, so kann

---

[1]) Ich habe das am Beispiel der Apollonischen Berührungsaufgabe ausgeführt, die verlangt, die Kreise zu finden, die drei gegebene Kreise berühren (Math. Ann., Bd. 49, S. 497, 1897). In diesem Falle sind nicht Zirkel und Lineal die angemessensten Hilfsmittel, sondern ein sonst nicht übliches Instrument, das Kreislineal. Außerdem genügen die üblichen Lösungen nicht den Forderungen der Galoisschen Theorie.

es geschehen, daß beide Forderungen in Kollision kommen, und daß die Ökonomie des Denkens wieder in Gefahr gerät. Neue Probleme bieten sich dar, neue Ausnahmen schicken sich an, uns zu verwirren, und vielleicht werden sich diese nicht mehr hinwegdefinieren lassen. (Geometrie im komplexen Gebiet.) Viele werden dann bereit sein, haltzumachen, und dieses Unbequeme einfach zur Seite zu schieben. Andere werden sich die Frage vorlegen, ob es für den ferneren Fortschritt nicht dennoch nötig ist, sich damit zu befassen, und sie werden sie bejahen. Alles das verdient genaueste Überlegung.

Wie steht es ferner mit dem Willkürlichen in unserem Denken, das uns in der Literatur in Gestalt von Koordinaten und sonstigen Baugerüsten auf Schritt und Tritt begegnet, aber auch schon in die Fassung mancher Grundbegriffe einzugehen scheint? Wir haben in der Geometrie den Gegensatz der analytischen und der synthetischen Methode. Die letzte liefert auf wunderbar einfache Weise eine Menge schöner Sätze, sie braucht dazu die Willkür des Koordinatensystems nicht. Verdient sie darum schon den Vorzug? Mancher Anfänger wird so urteilen, indessen kommen wir mit dem anderen Verfahren sehr viel weiter. Aber die Willkür wurde dennoch als störend empfunden, und das wurde der Anlaß zur Ausbildung einer feineren Methode, die der Vorzüge der synthetischen Betrachtungsweise teilhaftig ist (Invariantentheorie, teilweise auch schon „Ausdehnungslehre“ von H. Grassmann).

„Die Definition wird uns als ein allgemein getroffenes Übereinkommen vorgelegt. Die meisten Denker werden sich jedoch dagegen wehren, wenn man ihnen eine Definition als ein willkürliches Übereinkommen aufzwingen will. Sie werden sich erst beruhigen, wenn ihnen auf ihre zahlreichen Fragen die nötigen erläuternden Antworten gegeben sind.“

„Wie von Liard gezeigt worden ist, sind die mathematischen Definitionen meistens förmliche Gebäude, die sich in allen ihren Teilen aus einfacheren Begriffen zusammensetzen. Weshalb aber wurden diese einfachen Elemente gerade in dieser Weise zusammengefügt, während es tausend andere Möglichkeiten für die Art ihrer Zusammenfügung gab? Geschah dies nur aus

Laune? Wenn nicht, weshalb hatte dann diese Zusammensetzung mehr Existenzberechtigung als alle anderen? Welchem Bedürfnis wurde durch sie genügt? Wie konnte man voraussehen, daß ihr in der Entwickelung der Wissenschaft eine wichtige Rolle zukommen werde, daß sie unsere Schlußfolgerungen und Rechnungen abkürzen werde? Gibt es vielleicht in der Natur irgend einen uns vertrauten Gegenstand, der sozusagen ein undeutliches und ungenaues Bild des definierten Begriffs ist?" (Poincaré, S. 118.)

Wieweit ist ferner, im besonderen Falle, irgend eine Willkür unvermeidlich, durch die Natur der Sache gegeben, wieweit ist diese oder jene besondere Willkür nur historischer Zufall, allzu menschlichen Ursprungs? Hatte Leibniz recht, oder wieweit hatte er recht, wenn er meinte, die Formel solle ein „Bild" des Gedankens sein, oder kommt es vielmehr auf die Ergebnisse an, die das Schlußglied unserer Überlegungen bilden? Wie sollen wir uns also zu den vielen modernen Mathematikern stellen, die ihre Leser allenthalben durch ein wildes Formelgestrüpp hindurchzuzwängen lieben? Ist das vielleicht nur ein Sport, der auf beschwerlichen Pfaden vorzeitig erzwingen will, was sich später auf gebahnter Straße ganz von selbst einstellen wird, ist es also Kraftvergeudung, oder handelt es sich vielmehr um wirklich fruchtbringende Pionierarbeit? Was auch dem wissenschaftlichen Menschen natürlich ist, scheint zu sein, weniger das Mühsame und Gequälte zu bewundern, als den glücklichen Einfall, der (sicher nicht ohne vorhergehende ernsthafte Arbeit) das lange verborgen gebliebene Einfache an den Tag bringt (Zeichen der Null im dekadischen Zahlensystem). Aber wie verschieden hiervon gestaltet sich nicht bei vielen die Praxis der wissenschaftlichen Urteilsbildung!

Gleich da weiterschreiten zu wollen, wo unsere Vorgänger stehengeblieben sind, setzt Zufriedenheit mit dem Vorhandenen voraus. Es ist wohl eine psychologische Notwendigkeit, hier oder dort zufrieden zu sein. Irgend einen Ruhepunkt braucht auch der beweglichste Geist. Immer wieder aber werden böse Menschen kommen, die behaupten wollen, Unzufriedenheit sei auch in der Mathematik die Mutter des Fortschritts, und es gebe sehr vielen Anlaß zu solcher Unzufriedenheit. Sie können darauf hinweisen, daß man sich auch früher schon oft genug genötigt gesehen hat, irgendwo wieder von vorn anzufangen. Ein Blick in die historische Rumpelkammer wird dem Jünger der Wissenschaft jedenfalls nicht schaden.

Hier gelangen wir noch zu zwei weiteren schwierigen Fragen: Wie sollen wir uns mit dem Historischen abfinden, und wie sollen wir es mit der Terminologie halten?

Gleich uns haben auch unsere Vorgänger versucht, ihre Begriffe sachgemäß, „zweckmäßig", zu gestalten. Dabei ließen sie sich leiten durch ihre Erfahrung. Wir aber haben eine reichere Erfahrung, neue Begriffe sind eingeführt worden, und zwar oft solche, die sich mit den alten teilweise decken, auch Begriffe in Mehrzahl, die sich untereinander teilweise decken. Nicht immer aber hat man dem neuen Begriff ein neues Wort zugeordnet, sondern man nahm das alte Wort und verband damit den neuen Begriff. Grundsätzlich ist hiergegen nichts einzuwenden, denn Worte sind Zeichen, und Zeichen sind nicht tabu. So wie man Buchstabenzeichen a, b, c ... bald dieses, bald jenes bedeuten lassen kann, so kann man auch mit Wortzeichen bald diesen, bald jenen Begriff verbinden, wenn nur die gehörigen Erklärungen nicht fehlen (Zahl, Funktion, Punkt, Kurve usw.). Allein die Gefahr, daß Verwechselungen entstehen können, liegt auf der Hand. Definitionen bleiben nicht immer in unserem Gedächtnisse haften. Auch gestattet man sich wohl abkürzende Ausdrucksweisen, im Vertrauen darauf, daß der Leser oder Hörer aus dem Zusammenhang das Fehlende ergänzen wird. Man sagt z. B.: „Zwei Punkte bestimmen eine Gerade", wo es nach der heutigen Terminologie eigentlich heißen müßte: „Zwei verschiedene Punkte bestimmen eine Gerade". So schleicht sich der obsolet gewordene Begriff (zwei Punkte = zwei notwendig verschiedene Punkte) dort ein, wohin er nicht mehr paßt. Oder vielleicht war man sich überhaupt nicht klar darüber geworden, daß eine neue Begriffsbildung nötig war. Während manche sich nichts daraus machen, die vorhandene ohnehin umfangreiche Terminologie ohne zureichenden Grund und über alles Maß hinaus zu vermehren (Vektoranalysis), war man in anderen Fällen wieder so zurückhaltend, daß die Sache geschädigt werden mußte — man suchte wohl oder übel mit dem Überlieferten auszukommen. In dem Beispiel einer berühmt gewordenen Theorie (S. Lies Geometrie der Kreise und Kugeln) hat sich zeigen lassen, daß dadurch, allerdings mehr noch durch Beugung der Logik, ein ganzes umfangreiches Lehrgebäude schwer beeinträchtigt worden ist. In minder schlimmen Fällen haben wir doch in der überlieferten Kunstsprache einen Rest von Vorstellungen, die später als irrtümlich erkannt worden sind, und es werden dadurch Mißverständnisse erzeugt. So fährt das Wort imaginär (imaginäre Zahl, imaginärer Punkt usw.) bis auf den heutigen Tag fort, Unfug anzurichten. Z. B. erblickt noch heute der Philosoph Vaihinger im „Imaginären" einen regelrechten Unsinn, wenn auch „nützlichen" Unsinn. Soll man nun solche Worte und die entsprechenden Symbole ($\sqrt{-1}$) einfach über Bord werfen, um eine neue Kunstsprache zu ersinnen, die von der Mehrheit der Forscher mit Sicherheit abgelehnt werden würde? Man wird jeden Fall besonders untersuchen und öfter Kompromisse schließen müssen! Jedenfalls verdient auch die Terminologie große Aufmerksamkeit, und wer in die Mathematik eindringen will, wird solchen Erwägungen nicht fremd bleiben dürfen!

Wir hatten vorhin darauf hingewiesen, daß es öfter nötig wird, Teile des wissenschaftlichen Lehrgebäudes einzureißen und an ihrer Stelle Neues zu errichten. In Wirklichkeit geschieht das aber viel öfter, als es nötig ist, und zwar einfach aus Unkenntnis des Vorhandenen. Wer sich zu wissenschaftlicher Arbeit anschickt, darf sich nicht so benehmen, als ob die Weltgeschichte mit ihm anfinge. Wer andere belehren will, wird bedenken müssen, daß sie vermutlich gewisse Kenntnisse schon haben, und daß er sie nicht durch Ignorieren alles dessen, was schon da war, verärgern darf.

Zu einer guten Darstellung gehört also auch, daß auf schon Vorhandenes billige Rücksicht genommen wird. Enzyklopädische Werke und referierende Zeitschriften sind dazu da, ein solches Bemühen zu unterstützen. Der werdende Mathematiker muß von ihrem Dasein Kenntnis erhalten und ihren Gebrauch erlernen.

Es handele sich z. B. um Zeichen. Was hat es für einen Sinn, neue Zeichen einzuführen, wenn die vorhandenen schon dasselbe leisten oder vielleicht sogar noch mehr? Niemanden darf das Recht zuerkannt werden, seinen Lesern eine unnütze Übersetzungsarbeit aufzubürden!

Wieweit soll überhaupt der mathematische Schriftsteller den Wünschen seiner Leser entgegenkommen? Auch das ist eine Frage, die Nachdenken verdient. Was im Namen der Pädagogik empfohlen wird (besonders von solchen, die ihre Eignung für die Forschung nicht nachgewiesen haben), ist mit großer Vorsicht aufzunehmen. Ist es doch vorgekommen, daß wissentlich Falsches vorgetragen worden ist, weil es vermeintlich das Pädagogisch-Richtige war. Es gibt aber auch berechtigte Wünsche der Leser, auf die der Autor Rücksicht nehmen sollte. Dahin gehört z. B., daß die Formeln tunlichst so gebildet werden, daß sie bequem zu lesen sind, nicht eine besondere Anstrengung zu ihrer Entzifferung verlangen. Oft genug wird gegen diese Regel verstoßen, und zwar nur darum, weil der Autor auf die Gestaltung seiner Formeln gar keine Aufmerksamkeit verwendet hat.

Überhaupt besteht für jeden mathematischen Schriftsteller die Gefahr, daß er die Bedürfnisse seiner Leser — auch der genügend vorbereiteten Leser — nicht kennt. Und je tiefer einer in seinen Stoff eingedrungen ist, um so größer wird diese Gefahr. Das, womit wir uns lange beschäftigt haben, kommt uns schließlich ziemlich selbstverständlich vor, am Ende wissen wir gar nicht mehr, was uns einst aufgehalten hatte. Ich glaube, daß gerade hierin eine der größten Schwierigkeiten für die Leser mathematischer Schriften begründet ist, und ich fürchte, daß unter deren Verfassern mancher sehr wenig tun kann, um dem abzuhelfen. Hier liegt wohl die Hauptursache dafür, daß es manchmal so lange dauert, bis wertvolle Gedanken zur Einwirkung auf weitere

Kreise gelangen. Um so mehr ergibt sich, daß den Lesern mathematischer Schriften wenigstens solche Unbequemlichkeiten erspart werden sollten, die die Verfasser wirklich mühelos abstellen können. Vor allem gehört dahin eine gute Gliederung des Stoffes, Hervorhebung des Wesentlichen auch durch Äußerlichkeiten des Druckes.

Ferner: Gibt es nicht so etwas wie Schönheit der Mathematik, und welchen Wert sollen wir ihr zuerkennen? Sollen wir wirklich sie, die sogenannte Eleganz, wie der Physiker Boltzmann meinte, den Schustern und Schneidern überlassen, oder kommen nicht auch da Gesetzmäßigkeiten zum Ausdruck, die sich nur nicht immer bequem durch Worte ausdrücken lassen? Was nicht in Worte gefaßt ist, ist dennoch da und rächt sich an dem, der keinen Sinn dafür hat.

„Die Mathematik liebt in ihren Methoden und in ihren Resultaten die Eleganz; das ist durchaus kein Dilettantismus. Was verleiht uns nun das Gefühl der Eleganz in einer Lösung oder in einer Beweisführung? Es ist die Harmonie der verschiedenen Teile, ihre Symmetrie, ihr schönes Gleichgewicht; in einem Wort: alles, was Ordnung schafft, alles, was die Teile zur Einheit führt; alles, was uns erlaubt, die Dinge klar zu sehen und sowohl das Ganze wie auch zu gleicher Zeit die Einzelheiten zu überblicken ... Darum ist die ästhetische Befriedigung mit der Ökonomie des Denkens eng verbunden." (Poincaré, S. 20, 21.)

Aber wie weit sind wir nicht, in vielen Teilen der mathematischen Wissenschaft, noch von einem solchen Ideal entfernt!

Immer wieder haben Forscher sich vor diese und ähnliche Fragen gestellt gesehen, und jedem, der mit der Mathematik bekannt wird, drängen sich solche Fragen frühzeitig und dann immer von neuem auf. Ohne Zweifel sind sie mit dem Fortschritt der Wissenschaft aufs engste verknüpft, und oft stecken gerade in ihnen die größten Schwierigkeiten. Diese Schwierigkeiten aber sind nicht logischer, mindestens nicht rein-logischer Natur. Sie können nicht vom bloßen Scharfsinn überwunden werden, der eben längst nicht allein den Mathematiker ausmacht. Wie in den Naturwissenschaften, so handelt es sich auch in der Mathematik im weitesten Umfange um Wertungen, um Werturteile über Logisches und Nicht-Logisches, und dazu gibt die formale Logik gar keine Anhaltspunkte.

Pasch aber drückt sich so aus, als ob es in der Mathematik immer nur auf eine einwandfreie Logik ankäme. Blind wie der Höhlenwanderer am Ariadnefaden wird nach seiner Anweisung der zu Belehrende sicher an allem vorbeigeleitet, was auf Abwege, ja auf vielleicht nur vermeintliche Abwege führen kann. Aber der Faden der Logik ist, wie auch schon Poincaré bemerkt hat, viel zu schwach, um in unserem Gedächtnis einen starken Eindruck zu hinterlassen. Es müssen noch eine Menge von Assoziationen hinzukommen, wenn ein deutliches Bild der Gegend entstehen soll, in der man sich bewegt. Nur dem, der ein solches Bild hat, wird es möglich sein, sich auch ohne Führer zurecht zu finden.

Daß ich Pasch nicht etwa mißverstanden habe, zeigt mit aller Deutlichkeit folgender Ausspruch: „Wenn man ... Mathematik lernt, so wird nichts weiter verlangt, als daß man erstens gewisse Grundwahrheiten — Grundsätze, Axiome — einsieht (zugibt?), und daß man zweitens folgerichtig weiterdenkt ...“ Also kommt es für die Auffassung eines Gedichtes, eines Gemäldes, einer Komposition auch wohl auf nichts weiter an, als daß man zusieht, ob der Urheber des Werkes die Regeln der Grammatik, der Perspektive, der Harmonielehre befolgt hat? Oder, um nochmals ein Gleichnis Poincarés anzuführen: Wir sollen die Arbeit des Maurers bewundern, für die Leistung des Architekten aber keine Augen haben? Daß im Gegenteil noch so viel mehr verlangt werden muß, und daß dieses weitere schon gleich zu Anfang so ungemein schwierig ist, nicht nur für den Schüler, sondern auch für den Lehrer selbst, scheint mir eine Hauptursache des Mißerfolgs zu sein, den der mathematische Schulunterricht gewöhnlich hat, und übrigens auch der Universitätsunterricht nicht selten. Um künftige Lehrer auf ihre Aufgabe vorzubereiten, ist unbedingt erforderlich, daß nicht nur Fertiges vorgetragen werde, oder was man dafür hält: Es ist vielmehr, nach Möglichkeit, das Entstehen mathematischer Gedanken selbst darzustellen, unter Anwendung der nötigen Kritik, und mit Ausblicken auf das, was später zu bringen ist, oder vielleicht sogar erst noch werden soll. Der Lehrer der Mathematik wird also, so gut oder schlecht er es eben vermag, die Probleme zu motivieren, die Methoden zu vergleichen, die Zweckmäßigkeit der Begriffsbildungen zu beurteilen haben, wohlgemerkt nicht mit der Absicht, den Hörer auf seine Worte schwören zu lassen, sondern um ihm zu Gemüte zu führen, über wie vieles der Mathematiker nachdenken muß, das im Deduktionsschema nicht Platz finden kann. Vor allen Dingen wird so, außerhalb des Rahmens der Deduktion, die Anschauung räumlicher Gebilde als wichtigste Quelle der Erfindung in der Geometrie zu würdigen sein. Hierin finde ich mich, zu meiner Freude, mit Herrn Pasch in Übereinstimmung. Daß die Geometrie und ihre Beziehungen zur Wirklichkeit in der Ausbildung des werdenden Mathematikers wie auch in der Forschung einen Platz an der Sonne verdienen, kann ja nicht fraglich sein (vgl. dazu Poincaré, S. 115), wiewohl es nicht wenige einseitige Analysten gibt, die keinen Sinn dafür haben, und wohl gar noch aus ihrer Not eine Tugend zu machen wissen.

Aus alledem ergibt sich noch, daß der Lehrer bedeutend über der Sache stehen muß. Es ergibt sich, daß, im großen und ganzen, die Einrichtung der vom Staate vorgeschriebenen Studien und Prüfungen weise ist, und daß mit Recht vom akademischen Lehrer erwartet wird, daß er sich als Forscher betätigt. Das höchste Ziel des Unterrichts ist, schlummernde Fähigkeiten zu wecken und sie der Forschung dienstbar zu machen. Dazu wird nur der Forscher imstande sein, und zwar nur der, der sich die eigenen Ziele nicht zu niedrig steckt.

Zum Eindringen in das Wesen der Mathematik gehört nach dem Gesagten eine gewisse Kenntnis ihres Werdegangs, und zwar eine nicht allzu oberflächliche Kenntnis. Von der Geschichte der Mathematik gilt sicher nicht, was man sonst von der Geschichte gesagt hat, daß nämlich nichts aus ihr zu lernen sei. Allerdings muß dann das Historische ganz anders behandelt werden als in gewissen Artikeln der mathematischen Enzyklopädie, deren Verfasser mit vollkommenster Unparteilichkeit alles zusammengehäuft haben, was je über einen Gegenstand geschrieben worden ist, um eben dadurch jeden zur Verzweiflung zu bringen, der aus der Geschichte Belehrung schöpfen will. Die mathematische Wissenschaft will durchaus als ein lebendiger und anpassungsfähiger Organismus begriffen werden. Ihre Geschichte ist eine Geschichte von wissenschaftlichen Werten, keine farb- und gestaltlose Chronologie.

An Paschs Programm für den höheren Unterricht, das besonders in einem „Forschen und Darstellen" überschriebenen Abschnitt entwickelt wird, fällt schon äußerlich auf, daß darin vom Forschen so gut wie gar nicht die Rede ist. Mit einem Hinweis auf die Trockenheit dessen, was Pasch als alleinige Aufgabe der mathematischen Wissenschaft hinstellt, könnte man geradezu die verbreitete Meinung stützen, daß die Mathematiker phantasielose Menschen sind. Auch das Publikum meint ja gewöhnlich, daß es nur auf das Weiterschließen ankommt. Gedächtnis und Geduld, an die Pasch sehr hohe Ansprüche stellt, sind gewiß nützliche, ja in gewissem Maße unentbehrliche, Eigenschaften des Forschers, aber sie sind nicht erfinderisch, nirgends sind sie die treibenden Kräfte des Fortschritts. Wo sie schwach entwickelt sind, da kann dieser Mangel durch vermehrte Anstrengung des Willens ausgeglichen werden, Phantasie aber ist durch nichts zu ersetzen.

Abgesehen von der Anleitung zum Zergliedern ist Paschs Erziehungsideal eine Ermutigung zum Selbstdenken nicht zu entnehmen. Andere aber werden mit mir der Ansicht sein, daß dem zu Unterrichtenden, je nach dem Zustande seiner wachsenden Einsicht und persönlichen Reife, mehr und mehr überlassen werden muß. Allerdings, es muß eine Menge Stoff überliefert werden. Aber gerade im mathematischen Unterricht der Universitäten ist das meiste davon nicht um seiner selbst willen da. Unsere Schüler sollen nicht nur — wie Pasch sich ausdrückt — Mathematik oder andere Wissenschaften lernen, sie sollen mehr noch an der Mathematik und sonstigem Unterrichtsstoff lernen. Vor allem sollen sie zu freien Menschen werden, um später einmal zur Entwickelung der Persönlichkeit ihrer eigenen Schüler beitragen zu können. Daß viele Studierende, ja sogar die weitaus meisten, nur an die bevorstehenden Prüfungen denken und von ihren akademischen Lehrern eine bequemere Art der Unterweisung erwarten, weiß ich. Ich verkenne nicht die Schwierigkeit ihrer Lage, auch nicht die Schwierigkeit der Lage, in die der akademische Lehrer dadurch kommt; ich erhebe keine Anklagen. Wir alle bleiben notwendigerweise hinter dem zurück, was wir uns vorgesetzt haben; stecken wir aber unser Ziel von vornherein sehr niedrig, so werden wir gar zu wenig ausrichten.

Daß der Reichtum der modernen Wissenschaft und ihr Fortschritt auf das engste mit einer lebendigen Darstellungsform verknüpft sind, hat sich nun gewiß auch Pasch nicht verhehlt. Nur schätzt er das, nach meiner Meinung, bei weitem nicht so hoch ein, wie es nötig ist. Vereinzelt finden wir das Zugeständnis, der Mathematiker solle wenigstens an sich selbst die Ansprüche stellen, die sich allerdings nicht in aller Darstellung würden verwirklichen lassen. Doch verschwindet in Paschs Auseinandersetzung über die wünschenswerte Gestaltung der mathematischen Wissenschaft diese Äußerung zu sehr unter Aussprüchen entgegengesetzten Inhalts. Tatsächlich glaubt er auch einen anderen Ausweg aus dem Zwiespalt gefunden zu haben, in den ihn der Versuch bringen mußte, seinem weltfremden Ideal nachzuleben. Und merkwürdig genug ist die Einschränkung seines Programms, zu der er sich bewogen findet.

Zweierlei Bestandteile der Mathematik sollen unterschieden werden, für die Pasch die Worte heikle und derbe Mathematik prägt. „Heikle Mathematik" soll heißen, was „mit Grundfragen zusammenhängt", und wobei also „selbst der unscheinbarste Denkfehler sich rächen kann". In der „derben" Mathematik dagegen — die also, nach Pasch, nicht mit Grundfragen zusammenhängt — soll man nur gröberen Denkfehlern ausgesetzt sein(?!). In ihr soll es mehr auf „gebrauchsfertige Ergebnisse" ankommen (Zu welchem Gebrauche fertige Ergebnisse?). Nur für die heikle Mathematik soll die Forderung des Atomisierens der Beweise in vollem Umfange gelten. Die derbe Mathematik dagegen darf im wesentlichen ihrem Schicksal überlassen werden. Ihre Probleme haben für Pasch minderes Interesse, denn sie sind, wie er meint, nicht Probleme der „Denkwissenschaft".

Was Grundfragen sind, erfahren wir nicht, es kann aber kaum ein Zweifel sein, daß es solche sein müssen, von deren Beantwortung vieles abhängt. Es handelt sich wieder um das, was wir zuvor wertvoll genannt hatten. Man darf nicht etwa einschränken wollen: „Vieles von Bedeutung", denn bedeutungsvoll wäre ja dann eben wieder das, was mit Grundfragen zusammenhängt. (Eine Wertschätzung, die lediglich historisch bedingt ist oder auf der praktischen Verwendbarkeit einzelner Ergebnisse der Forschung beruht, scheidet hier selbstverständlich aus.)

Also ist der Umfang des Begriffes „Grundfragen" oder „grundlegender Untersuchungen" oder des „Wertvollen" gar nichts Unabänderlich - Feststehendes. Er hängt von dem Interessenkreise des einzelnen, vom jeweiligen Stande der vorhandenen Kenntnisse und Fähigkeiten ab. Es kann genaueste Sachkenntnis erfordern und auch dann noch recht schwer sein, die Tragweite eines Lehrsatzes zu ermessen oder ferner liegende Wirkungen eines Fehlschlusses zutreffend zu beurteilen. Man denke an die Geschichte der Galoisschen Theorie. In der analytischen Geometrie handelt es sich, wenn sie (wie leider fast immer) als ein Endziel verstanden wird, wohl meistens nicht gerade um Grundfragen. Auf dieser analytischen Geometrie aber bauen sich die höhere algebraische Geometrie, die Differentialgeometrie und die theoretische Physik auf, und in diesen Disziplinen rächen sich dann die unscheinbaren Denkfehler, von denen verbreitete Lehrbücher wimmeln[1]). Alle Denkfehler werden sich früher oder später rächen, und zwar in jedem Gebiete, nicht nur der Mathe-

[1]) Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 17, S. 125, 1908; Bd. 25, S. 96, 1916. Arch. d. Math. u. Phys., 3. Reihe, Bd. 18, S. 169, 1911.

matik, sondern aller Wissenschaft. Bekannt ist der Ausspruch von B. Russell, daß man aus einem einzigen falschen Satz alle übrigen ableiten kann. Die gefährlichsten Irrtümer sind zudem gerade solche, die lange unerkannt bleiben können; grobe Verstöße, die ein leidlich sorgfältiger Leser von selbst finden muß, sind eigentlich nur insofern von größerer Bedeutung, als da, wo sie vorkommen, mit unfehlbarer Sicherheit auf das Dasein jener anderen geschlossen werden kann. Kommen sie schon in den Grundlagen vor, so ist das freilich besonders schlimm. Und auch der Begriff des „unscheinbaren“ Denkfehlers ist fließend. Auch er hängt von dem jeweiligen Zustande der Wissenschaft und von der Beherrschung des Stoffes ab, über die der einzelne verfügt. Was einer älteren Generation noch nicht einmal ein unscheinbarer Denkfehler war, sondern überhaupt keiner, kommt uns, die wir über inzwischen gemachte Erfahrungen verfügen, zuweilen recht grob vor. „Was man früher wußte, das glaubt man heute nicht mehr.“

Es fehlen also für die Unterscheidung, die Pasch treffen will, sachliche Kriterien. Es geht überhaupt nicht an, eine Mathematik erster Klasse und eine Mathematik zweiter Klasse unterscheiden zu wollen, in der dann auf kleine Ungenauigkeiten nicht allzuvieles ankommen soll. Richtig ist ja, und genugsam bekannt, daß es ganze Gebiete gibt, deren Vertreter der Mehrzahl nach, und zeitweise vielleicht sogar alle, nachlässigen Gewohnheiten des Denkens verfallen sind. Das ist aber doch höchst bedauerlich, und muß ernst genommen werden. Wer angesichts solcher Pfuscherei Duldung für angebracht hält, übersieht, auf wie wunderbare und oft überraschende Weise die mathematischen Disziplinen untereinander zusammenhängen. Spezialisten für „Grundfragen“ oder für das, was sie ausschließlich dafür halten, mögen diese Zusammenhänge ja zuweilen kalt lassen, für andere besteht aber gerade in solchen Erscheinungen einer der größten Reize der mathematischen Wissenschaft. Ich erinnere an die Anwendung der Abelschen Funktionen in der Geometrie und an die Forschungen von H. Minkowski über die Verwertung geometrischer Gedanken für Probleme der Zahlentheorie. Es ist gar nicht möglich, zu beurteilen, welchen Schaden der in einem Gebiete begangene Verstoß in anderen noch einmal anrichten mag. Noch liegt allerdings die Sache so, daß man von jedem Mathematiker verlangen kann, daß er alles das gewissenhaft prüft, was er benutzen will, oder daß er sich wenigstens mit Reserve ausdrückt. Tatsächlich aber wird vieles auf irgend eine Autorität hin einfach geglaubt, und wer kann sagen, ob wir Mathematiker nicht eines Tages da ankommen werden, wo die Physiker längst sind, die gar nicht daran denken können, jede Experimentaluntersuchung zu wiederholen!

Obendrein setzt sich Pasch zu eben den Forderungen in Widerspruch, die er zu vertreten gedenkt. Seine derbe Mathematik ist nichts Reinliches, es fehlt ihr die Würde. Wer Herrn Pasch beim Worte nehmen wollte, könnte sogar sagen: Sie ist unmoralisch. De lege ferenda darf nichts derart anerkannt werden. Alle Mathematik und überhaupt alle echte Wissenschaft ist heikel, sehr heikel sogar. Was sich mit gutem Grunde fordern läßt, muß überall gefordert werden, nicht nur für einen schlecht umgrenzten Bruchteil der mathematischen Wissenschaft.

Wie Pasch zu der wunderlichen Begriffsbildung seiner derben Mathematik gekommen ist, liegt klar zutage. Seine Begeisterung für das Atomisieren hat ihn verleitet, die Abstriche, die von seiner überspannten Forderung nun einmal gemacht werden müssen, an falscher Stelle auszuführen. So verlangt er dort zu viel, hier zu wenig. Auch in anderer Beziehung fehlt ihm, wie mir scheint, das rechte Gleichgewicht. Gedächtnis und Geduld werden von ihm zu sehr, die produktiven Geistesfähigkeiten zu wenig in Anspruch genommen. Nach Pasch „lernt" man Mathematik, so wie man etwa Lateinisch lernt, oder z. B. das Kochen (womit ich nichts gegen die höhere Kochkunst gesagt haben will). Die gewiß sehr nötige philosophische Denkart hat in diesem Geiste, wie in so manchem anderen, die Schaffensfreude überwuchert und erstickt. Das Reflektieren über den Erkenntnisprozeß ist ihm zum Verhängnis geworden. So gleicht seine Zergliederungsmathematik mehr einem anatomischen Präparat als einem lebendigen Wesen.

Wir sind nicht sehr begierig, das näher kennen zu lernen, was uns mißfällt. Vorurteile verursachen Mißverständnisse. Auf irgend einem Mißverständnis beruhen wohl einige abfällige Äußerungen über die Begriffe Raum und Dimension (Dimensionenzahl), die Pasch gelegentlich einfließen läßt. Nicht gewürdigt sind jedenfalls hiermit zwei der wichtigsten Begriffe der Geometrie[1]). Paschs Unfähigkeit, sich in eine andere Geistesart hineinzudenken, hat auch ein recht unbilliges Urteil zur Folge gehabt. Nur das Bedürfnis nach „heikler" Mathematik soll dem Drang zum Erkennen entspringen. Andere Untersuchungen, die also in die derbe Mathematik zu verweisen sind, werden angeblich darum (nur darum?) angestellt, weil der Mensch darauf angewiesen ist, sich in der Welt zu behaupten, und weil er also (auch sofern er Wissenschaft treibt) auf „greifbare Ergebnisse" ausgehen muß. Daß der verständliche Wunsch, eine Lebens- und Schaffensmöglichkeit zu haben, auf die wissenschaftliche Pro-

---

[1]) Sie sind sogar Grundbegriffe. Als Punkt kann man definieren ein System von n rationalen oder irrationalen (in gewissem Zusammenhang auch komplexen, nämlich „reellen" oder „imaginären") geordneten Zahlen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Der Inbegriff („die Menge") aller Punkte heißt Raum, die ganze Zahl n $(2n)$ heißt Dimensionenzahl dieses Raumes. Sie ändert sich nicht bei umkehrbaren und stetigen Zuordnungen („Transformationen") der Punkte des betrachteten Raumes zu anderen. Sie ist daher das wichtigste unter den Unterscheidungsmerkmalen der verschiedenen Arten von Geometrie, die von Mathematikern definiert und untersucht worden sind. Z. B. ist in der „ebenen" Geometrie der Schulmathematik $n = 2$, in der Geometrie des „gewöhnlichen" Raumes ist $n = 3$. Die neuere Mathematik bindet sich aber nicht an diese kleinen Zahlen. Sie läßt auch in den genannten einfachsten Fällen in der Deduktion die Verwertung der „Raumvorstellung" oder „Raumanschauung" nicht mehr zu. Man spricht auch von einer „Geometrie" auf Kurven, Flächen usw. (innere Geometrie, geometria intrinseca). Auch dann haben „Dimensionenzahlen", $n = 1, 2$ usf. (oder $2n = 2, 4$ usf.), die Bedeutung von Grundbegriffen, wenn auch ihre Definition, wie die der Begriffe Kurve, Fläche selbst, nicht mehr ganz einfach ist und weitergehende Fachkenntnisse voraussetzt.

duktion, besonders auf die Wahl der Probleme, nicht immer günstig einwirkt, läßt sich natürlich nicht leugnen. Mit Recht werden sich aber durch eine willkürliche Verteilung von Licht und Schatten Forscher verletzt fühlen, die für sich selbst eben die Reinheit der Motive in Anspruch nehmen dürfen, die Pasch nur einer bestimmten Gruppe zubilligen will. Herr Pasch befindet sich auch noch insofern im Irrtum, als er in der Bearbeitung seiner „Grundfragen“ eine besonders entsagungsreiche Tätigkeit erblicken will. Eher trifft das Gegenteil zu. Entsagungsvoll im landläufigen Sinne des Wortes ist alle Beschäftigung mit reiner Mathematik. Sehr allgemein aber ist das Interesse der Mathematiker für Probleme, deren Bedeutung für das Ganze ihrer Wissenschaft schon anerkannt ist, und das sind nicht wenige. Allerdings verlangt man hier wie überall greifbare Ergebnisse. Diese werden sich nämlich ganz von selbst einstellen, wo immer ein Forscher tiefere Einblicke getan hat als seine Vorgänger. Wirklich ist auch daran kein Mangel. Man denke etwa an die Mengenlehre, an neuere Forschungen über konforme Abbildung, über Erweiterungen des Integralbegriffs, über Funktionen von unendlich vielen Veränderlichen usw. Den wohlverdienten Erfolgen gegenüber, die solche Untersuchungen gehabt haben, läßt sich die Meinung nicht aufrecht erhalten, daß die Bearbeitung von Grundfragen an sich schon eine Art von Martyrium darstellt.

Offenbar wäre es unter allen diesen Umständen mißlich gewesen, Bestandteile der mathematischen Wissenschaft namhaft zu machen, die der derben Mathematik angehören sollen. Tatsächlich hat Herr Pasch nichts derart unternommen. Allerdings hätte auf mechanisch auszuführende Rechnungen, numerische und andere, verwiesen werden können, bei denen man wirklich nur groben Denkfehlern ausgesetzt ist. Aber selbst da, wo die Rechnung einen sehr breiten Raum einnimmt, ist sie nicht Selbstzweck. Nicht eine einzige mathematische Disziplin könnte man auf diese Art kennzeichnen.

Ich habe nun versucht, die Gründe zu analysieren, mit denen Pasch seine methodischen Ansichten stützen will, und vorzutragen, was sich etwa dagegen sagen läßt. Diese letzten

Argumente dürften, beiläufig bemerkt, auch gegen die sogenannten Logistiker ins Feld zu führen sein, deren Bestrebungen Pasch merkwürdigerweise nirgends erwähnt, wiewohl sie in eben der von ihm empfohlenen Richtung noch viel weiter gegangen sind. Sie haben aus den besprochenen Prämissen die letzten Konsequenzen gezogen, und damit haben sie, nach meiner Meinung, jene Grundsätze als einseitig und übertrieben bloßgestellt und die Zergliederungsmathematik ad absurdum geführt. Noch mehr als bei Pasch drängt bei ihnen die formale Logik alles andere zurück. Die Formel ist hier wirklich ein „Bild des Gedankens", aber nur ein Bild logischer Gedanken[1]). Sie sieht meistens so aus, daß einem die Augen flimmern und man schon vom bloßen Anblick Kopfschmerzen bekommen kann. Poincaré zitiert die Definition der Zahl Eins nach Burali-Forti,

$$1 = \iota\, T' \{K\, o\, (u, h)\ \varepsilon\ (u\ \varepsilon\ U\, n)\},$$

und er fügt die köstliche Bemerkung hinzu: „Das ist eine Definition, die sich trefflich dazu eignet, Personen, die das Wort Eins noch nie gehört haben, einen Begriff von der Zahl 1 zu geben." Anders als Poincaré habe ich es hier nur mit der Formelsprache zu tun: Eindrucksvoller sind doch die dem Kulturmenschen natürlichen Sprachen; jede Entzifferungsarbeit bedeutet eine Belastung, die nur der gerne auf sich nehmen wird, der den Nutzen davon einsieht. Vor allem aber eignen sich eben nur logische Abhängigkeiten zur Niederlegung in einer Begriffsschrift im Stile von Peano und Russell. Sie eignen sich dazu, weil ihrer so wenige sind. Indem man den Vortrag auf das rein Logische beschränkt, gehen eine Menge von Assoziationen verloren, auf die zu verzichten unvernünftig ist. Das Verständnis wird nicht erleichtert, sondern erschwert. Statt der lebendigen Wissenschaft hat man ein Gerippe vor Augen, aus dem der Geist entflohen ist.

---

[1]) Da das in der mathematischen Literatur übliche Wort Abbilden von Fernerstehenden (Philosophen) mißdeutet worden ist, so wird es nicht überflüssig sein, einmal ausdrücklich zu sagen, daß damit nur eine gegenseitig-eindeutige Beziehung, nicht Ähnlichkeit von Gegenstand und Bild gemeint ist.

Der Geist der Wissenschaft ist unberechenbar in seinen Lebensäußerungen. Er läßt sich nicht in Behälter fassen und durch Röhren leiten.

Was kann nun diese unsere Auseinandersetzung fruchten? Der Ursprung der kritisierten Ansichten (wie auch der entgegengesetzten) sitzt sicherlich sehr tief — dort, wohin Gründe gar nicht dringen können, im Wesen der Persönlichkeit, im Bereiche des Triebhaften. Welche der dennoch vorgeführten Gründe und Gegengründe der einzelne für entscheidend hält, wird dann davon abhängen, wie der Boden beschaffen ist, in dem sie Wurzel schlagen sollen. Z. B. wird ein phantasievoller Mensch anders urteilen als einer, dem es an Einbildungskraft gebricht.

Was Herr Pasch oder andere Freunde der mathematischen Atomistik auf das hier Gesagte etwa entgegnen könnten, davon habe ich nicht die entfernteste Vorstellung. Wir werden es vielleicht auch nie erfahren. Doch betrachte ich es als gewiß, daß er bei seiner Ansicht bleiben wird, und der Fall der Logistiker erscheint mir als nicht minder hoffnungslos.

Daß ein Schriftsteller, der über dem Überzeugenwollen alles andere vergißt, selbst so wenig überzeugend wirkt, darf nicht wundernehmen. Wir befinden uns ja hier überall in dem schwierigen Gebiete der Werturteile. Dieses aber unterscheidet sich von der Logik sehr wesentlich dadurch, daß es in ihm Mittel, die ein Nachgeben des anderen mit einiger Sicherheit herbeiführen könnten, gar nicht gibt. Jenes alte De gustibus non est disputandum ist ein etwas banaler Ausdruck dafür. Aber auch der Geschmack, der wissenschaftliche so gut wie jeder andere, ist der Bildung fähig. Auf jüngere Forscher wenigstens mögen Gründe auch in solchen Dingen noch Eindruck machen — zum Guten wie zum Gegenteil. Und uns allen kann eine Kontroverse von der Art der vorliegenden vielleicht ein wenig dazu helfen, uns auf uns selbst zu besinnen, und unsere Stellung in der wissenschaftlichen Welt besser zu erkennen. Versuchen wir das ernstlich, so werden wir uns eher geneigt finden, der fremden Persönlichkeit und ihren uns fernerliegenden Zielen Anerkennung oder wenigstens Duldung zu gewähren, innerhalb der Grenzen, versteht sich, die eine unbedingte Wahrheitsliebe uns vorschreibt. Es ist doch nur gut, daß wir nicht alle eines Schlages sind. Manche, die Lehrer der Menschheit im allerhöchsten Maße waren, sind erfolgreiche Lehrer in einem landläufigen Sinne — dem, den Pasch uns zu erläutern und zu präzisieren sucht — gar nicht gewesen. Mathematiker wie B. Riemann und H. Poincaré haben sich um jene Vorschriften, die im Grunde für alle Darstellung bindend sein sollen, niemals gekümmert. Was wir diesen Geistern und noch manchen anderen zu verdanken haben, hätten wir nicht erhalten, wenn sie sich hätten die Flügel stutzen lassen. Aber das wäre ja ganz unmöglich gewesen. Wer Bedeutendes zu sagen hat, weiß auch, daß er seinem eigenen Wesen treu bleiben muß.

Trotz interessanter und lehrreicher Einzelheiten ist das keine fröhliche Wissenschaft, was Pasch uns vor Augen stellt. Allzu viele Erdenschwere haftet daran, ungeachtet einer Vortragskunst, die man von dem Vertreter so starrer Ansichten gar nicht erwarten sollte. Herr Pasch wird sich auch wohl selbst nicht darüber täuschen, daß er im großen und ganzen für eine verlorene Sache eintritt. Verloren ist sie nun einmal, denn sie ist ein Anachronismus. Es läßt sich wohl zuweilen gegen den Strom schwimmen, und es ist gut, daß hin und wieder einer es versucht, aber seine Richtung umzukehren, gelingt nicht.

Das besprochene Darstellungsideal ist jetzt mehr als zweitausend Jahre alt. Es ist verkörpert, wenigstens der Tendenz nach, in dem gewaltigen Bau von Euklids Geometrie.

Damals ging aller Fortschritt aus einigen Gelehrtenschulen hervor; nur in diesen scheint es eine Anleitung zum Forschen gegeben zu haben. Dort gab es, aber auch nur dort, lebendige Wissenschaft. Die breite Öffentlichkeit durfte bewundern, teilzunehmen vermochte sie nicht. „Was ihr übergeben wurde, war das fertige Werk, dessen Baugerüste vorher abgebrochen worden waren.“ Alles fehlte da, was helfen konnte, den Außenstehenden zu ähnlichem Wirken zu befähigen — ganz so wie bei Pasch, der bemerkenswerterweise unter dem Namen Geometrie ausschließlich Probleme begreift, die dem Gedanken-kreise von Euklid angehören, und Methoden, die der seinigen nachgebildet sind. Demselben Sprachgebrauch, der die Existenz ganzer großer Disziplinen ignoriert, folgt übrigens die gesamte Gruppe der sogenannten Axiomatiker, zu der Pasch gehört.

Die neue Zeit brachte neue Aufgaben und bediente sich neuer Methoden, und sie fand auch eine neue Darstellungsform, die uns besonders eindrucksvoll in Galileis Discorsi entgegentritt. Allerdings hat es an Rückschlägen nicht gefehlt (Newton), die meisten der Neueren aber wollten denen, die ihre Belehrung empfingen, zugleich auch einen Einblick in das Werden ihrer Gedanken gönnen. Die freie Vortragsform erst, die im engen Kreise auch von den Alten geübt worden sein muß, nun aber allen zugute kam, sie allein hat das Aufblühen und Gedeihen der modernen Wissenschaft möglich gemacht. Dieser Freiheit, die eine gelegentliche Rückkehr zur antiken Darstellungsweise (und meinetwegen auch den Gebrauch einer Begriffschrift) keineswegs ausschließt, wollen wir uns rückhaltslos freuen. Laßt uns versuchen, ihren Mißbrauch einzuschränken, vor allem Selbstkritik zu üben, nicht aber danach trachten, uns selbst und andere des köstlichsten Gutes zu berauben[1]).

Wenden wir uns zum Schluß nun zurück zu der eingangs aufgeworfenen Frage: Inwiefern kann die Mathematik anderen Wissenschaften zum Vorbild dienen?

Sicherlich sind Einschränkungen zu machen. Die Geschichte der Menschen, die es überall mit Individuellem, Einmaligem zu tun hat, scheidet ganz aus. Wie der Historiker Droysen sagte, sucht sie im Gleichen das Verschiedene, während Mathematik und Naturwissenschaft im Verschiedenen das Gleiche suchen müssen. Und auch in anderen Wissensgebieten kommen nur die Teile in Betracht, in denen umfassende Begriffsbildungen

[1]) Wer gleich mir Herrn Pasch nicht beizupflichten vermag, wird sich doch an seiner geschmackvollen Darlegung erfreuen können, die überall das treffende Wort findet und weit entfernt bleibt von der mit leeren Phrasen und Schlagwörtern notdürftig verkleideten Gedankenarmut, die sich in so manchen pädagogischen Schriften breit macht. Möge jeder, den es angeht, das kleine Buch zur Hand nehmen und es unbefangen auf sich wirken lassen!

und das deduktive Denkverfahren Platz finden. Selbstverständlich ist, daß überall, wo die Mathematik unmittelbar zur Anwendung kommt, für die Darstellung dasselbe gelten muß, wie im Falle der reinen Mathematik, wenn anders die Stufe des Handwerksmäßigen überschritten werden soll. Aber überall kommt Neues hinzu, das den einzelnen Wissensgebieten eigentümlich ist und (im Sinne der Aristotelischen Logik) nicht logischen Charakter hat. So in den Naturwissenschaften, auf die wir unsere Betrachtung beschränken wollen, neben den Aufgaben der Beschreibung das Verfahren der Induktion[1]) und mit ihm das Wahrscheinlichkeitsargument, das oft die Stelle eines in aller Strenge erbrachten Beweises vertreten muß, und das daher häufig sogar den Namen Beweis führt[2]).

Den der Beobachtung zu entnehmenden Tatsachen werden Begriffe gegenübergestellt, und wie in der Mathematik müssen diese sachgemäß gebildet, für die Vertiefung unserer Einsicht wertvoll sein. Es kommt immer darauf an, aus der vor unseren Augen ausgebreiteten Mannigfaltigkeit des Gegebenen das herauszufinden, was sich wiederholt, was für unser Denken fruchtbar ist, was unsere Kräfte stärkt.

Zur Deduktion brauchbare Begriffe müssen einen deutlichen Inhalt, zur Anwendung auf Gegebenes brauchbare Begriffe einen nicht minder deutlichen Umfang haben. Das heißt, unsere Begriffe sollen nicht ineinanderfließen, und es soll klar sein, was alles unter jeden einzelnen fällt. Das sind außerordentlich schwer, ja zum Teil vielleicht gar nicht zu erfüllende Forderungen, sobald Begriffe zu bilden sind, die sich auf die wirk-

---

[1]) Der unvollständigen Induktion, im Gegensatz zur vollständigen Induktion der Mathematik, dem Schluß von n auf $n + 1$.

[2]) Über den logischen Charakter und Erkenntniswert verschiedener Überzeugungsmittel scheinen öfter Unklarheiten zu bestehen. Wenn behauptet wird, dieses oder jenes sei „nicht bewiesen", so ist das ja, genau genommen, gewöhnlich richtig. In unzähligen Fällen derart kann aber ein bündiger Beweis überhaupt nicht erbracht werden — so liegt die Sache immer da, wo die Induktion ins Spiel tritt, also bei allen sogenannten Naturgesetzen. Wenn nun ein strenger Beweis nicht zu liefern ist, so hat es keinen Sinn, ihn zu verlangen. Man muß sich anders ausdrücken.

liche Welt beziehen, Begriffe, deren Zweck und einziger Daseinsgrund eben das „Begreifen“ dieser Wirklichkeit ist. Man denke an die Unterscheidung von Tier und Pflanze, an die endlosen Diskussionen, die die Begriffe Gattung, Art, Varietät hervorgerufen haben. Unsere Ideenwelt wird leicht allzu selbständig, und dann stellt sie sich zuweilen der Wirklichkeit feindlich gegenüber; immer wieder sucht in der Natur der Menschengeist, was in ihr nicht zu finden ist; die Idee sucht die Tatsachen zu vergewaltigen. Man wird Geduld haben müssen, wird nicht zuviel auf einmal und vor allem nichts Unmögliches verlangen dürfen.

Besondere Schwierigkeiten bringt in den Naturwissenschaften die Notwendigkeit der Bildung zahlreicher Hypothesen mit sich, während in der Mathematik die Hypothese höchstens eine vorübergehende Bedeutung haben kann. Die Hypothesen, Vermutungen, tastende Versuche des menschlichen Geistes, werden uns aufgedrängt durch die Unmöglichkeit, uns ohne ihre Hilfe in der Fülle des Gegebenen zurechtzufinden.

Hypothesen sollen sich in allen ihren Folgerungen bewähren. Solche Folgerungen müssen also gezogen werden, und man muß dabei so weit gehen, als es nur irgend Erfolg verspricht. So entsteht das, was man eine naturwissenschaftliche Theorie nennt, ein nach den Regeln der Logik herzustellendes Gebäude, von dessen Zinnen wir den Zusammenhang der Erscheinungen besser zu überblicken suchen, das errichtet wird in der Hoffnung, die Lücken des Erfahrungsinhaltes durch Gedanken auszufüllen oder zu überbrücken. Und selbst die entlegensten Ergebnisse dieser Theorie sollen zu der schon vorhandenen oder erst noch zu gewinnenden Erfahrung (zum Experiment, wo es möglich ist), oder vielmehr zum Gedankenbilde der Erfahrung stimmen[1]).

---

[1]) In einem geistvollen Werke hat der Physiker P. Duhem auseinandergesetzt, daß man dann immer nicht sowohl eine einzelne Behauptung, als vielmehr ein ganzes System mehr oder minder provisorischer Erkenntnisse prüft. (Ziel und Struktur der physikalischen Theorien. Deutsch von F. Adler, Leipzig 1908.) Die Quelle eines Widerspruchs kann an einer ganz anderen Stelle zu suchen sein als da, wo man sie zunächst vermutet hat.

Bei dem Fortschritt der Wissenschaft tritt die Theorie mehr und mehr in den Mittelpunkt der Forschung, sie ist das Band, mit dem wir oft weit auseinanderliegende Erscheinungen verknüpfen, das Werkzeug, mit dem wir ihre mannigfachen Überlagerungen und Verknotungen in Gedanken auflösen und entwirren, auf ihr beruht das Urteil über das, was uns wichtig oder *wertvoll* ist oder nicht ist. In der Theorie aber herrscht die Deduktion vor, sie bildet also einen Gedankenkomplex, an den ähnliche Forderungen zu stellen sein werden wie an die reine Mathematik. Hier ist die Mathematik im engeren Sinne ein Vorbild, auch wenn es zurzeit nicht gelingt, vielleicht auch gar nicht möglich sein wird, ihre Kunstsprache in die Theorie hineinzutragen. Wo immer man es mit Theorien zu tun hat, wird eine auf mathematischen Studien beruhende Schulung des Geistes sich als fruchtbringend erweisen, und es wird das in um so höherem Maße zutreffen, je umfangreicher die Theorien sind.

Ein gründliches Studium der Differential- und Integralrechnung von allen zu verlangen, die als Lehrer naturwissenschaftlicher Fächer aufzutreten haben werden, dürfte keine zu weitgehende Forderung sein. Unter einem gründlichen Studium verstehe ich natürlich kein solches, das auf den praktischen Gebrauch von Technikern, Chemikern usw. zugeschnitten ist, und noch weniger das, wozu leider in allerlei Büchern für den Schulunterricht Anleitung gegeben wird. *Es muß zu den Unterrichtszielen gehören, ein Gefühl für die Notwendigkeit genauen Ausdrucks zu erwecken und das Zutrauen in die Zuverlässigkeit längerer Schlußketten zu stärken.* Auch dieses letzte ist sehr vonnöten, denn wir stehen vor der erstaunlichen Erscheinung, daß die sicherste unter allen Methoden, die die Wissenschaft kennt, die Methode, deren sich die Mathematik bedient, einem weitverbreiteten Mißtrauen begegnet. Mit Geringschätzung wird auch von verdienten Forschern „alle Theorie“ und also alle Deduktion behandelt, als „Spekulation“ wird von einigen alles gebrandmarkt, was nicht (wirklich oder vermeintlich) handgreiflich ist und sozusagen auf den Tisch gelegt werden kann.

Folgerungen, deren Prämissen man doch zugibt, werden angezweifelt, ohne daß man sich auch nur die Mühe nähme, die verwendete Logik zu untersuchen. Eben diese Logik, nämlich die Logik anderer, ist ja gerade das, was man verwirft. Im Zusammenhang damit ertönt dann gewöhnlich der Ruf nach Tatsachen — deren Auffassung, wie man weiß, niemals Schwierigkeiten bietet —, man verlangt noch mehr Tatsachen, viel mehr Tatsachen. In der Paläontologie vermißt man, wenn ich nicht irre, das Experiment. Daß diese Art von Kritik unfruchtbar bleiben muß, liegt auf der Hand. Ohne Zweifel beruht das alles auf Mängeln einer Erziehung, in der das rein Beschreibende einen allzu breiten Raum einnimmt, und die daher dem Biologen und Mediziner keine erkenntnistheoretische Einsicht und keinen genügenden Begriff von der Bedeutung exakten Denkens vermittelt. Nicht jeder vermag solche Lücken seiner wissenschaftlichen Bildung später auszufüllen.

Gefährlicher noch ist es, wenn dieselben Mängel sich in entgegengesetzter Richtung geltend machen, wenn sie nämlich zur Aufstellung widerspruchsvoller Theorien führen. Die kaum glaubliche Oberflächlichkeit, mit der man gewisse biologische Lehrmeinungen zu begründen versucht hat, hätte eigentlich ganz unmöglich sein sollen, befremdlicher noch ist aber die weite Verbreitung, die solche Ansichten gefunden haben. Ich habe vor kurzem den hoffentlich schlimmsten Fall eingehend behandelt; hier muß zur Erläuterung des Gesagten eine Verweisung genügen[1]).

Daß die biologischen Disziplinen als beschreibende Naturwissenschaften bezeichnet werden konnten, ist noch nicht sehr lange her. Man wird also über manche Nachwirkungen dieses Zustandes sich nicht wundern dürfen. Es ist aber auch der erfreulichste Fortschritt erkennbar. In einigen Richtungen

---

[1]) Es handelt sich um den sogenannten Lamarckismus und um eine mit Entstellungen arbeitende Kritik der Selektionstheorie. Siehe Naturwissenschaften, 7. Jahrg., S. 371, 392, 406, 1919; 9. Jahrg., S. 252, 1921. Zeitschr. f. induktive Abstammungs- und Vererbungslehre, Bd. 24, S. 33—70, 1920. Siehe ferner F. Lenz, Archiv für Rassen- und Gesellschaftsbiologie, 1920, S. 194—203.

ist man schon so weit gekommen. mathematische Überlegungen mit Erfolg anzuwenden (Physiologie, Erblichkeitslehre). Um so mehr ergibt sich, daß darauf hingewirkt werden sollte, der Gewohnheit exakten Denkens endlich auch unter Biologen eine genügende Verbreitung zu sichern.

Es war schon bei Betrachtung der Mathematik hervorgehoben worden, wie oft ein Fortschritt dadurch eingeleitet wird, daß Mißgriffe begangen und als solche erkannt werden. Dieses wiederholt sich in viel größerem Maßstabe in den Naturwissenschaften. Wo immer es sich um die Deutung eines Erfahrungsinhaltes handelt, können wir ja nie mit Sicherheit sagen: Dieses ist richtig. In unzähligen Fällen aber läßt sich mit aller Bestimmtheit behaupten: Jenes ist falsch. Wir können das behaupten, weil zwischen zwei Folgerungen, die aus denselben Prämissen gezogen worden sind, sich ein Widerspruch herausgestellt hat.

Irrige Vorstellungen können rein persönliche Ursachen haben, oft aber weist ihr Dasein darauf hin, daß in der Sache selbst irgend etwas nicht in Ordnung war. Es ergibt sich daraus, daß auf eine ausdrücklich zu übende Kritik, trotz allem Unerfreulichen, das oft damit verbunden ist, nicht verzichtet werden darf, wenn die Wissenschaft nicht Schaden leiden soll. Durch die Zurückhaltung Darwins, der allem Polemisieren abhold war, ist die Wirkung seiner Gedanken sehr beeinträchtigt worden. Es ist unumgänglich, die immer neu entstehenden Abflüsse, die dem Strome der Wissenschaft zuviel Kraft entziehen, zur rechten Zeit abzudämmen. Auch das ist ja produktive Arbeit, was Kräfte nutzbar macht, die sonst verloren sein würden.

Jedenfalls gibt es Fälle genug, in denen eine Nachprüfung vorhandener Lehren vonnöten ist. Eine Klärung der Begriffe, die Untersuchung ihres Daseinsrechtes im Verhältnis zur Wirklichkeit, die Herbeiführung einer immer besseren logischen Ordnung in der Darstellung sind nicht minder wichtige Aufgaben als die Anstellung immer neuer Beobachtungen. Hier ist das Zergliedern eine wirklich fruchtbringende Arbeit. Man denke etwa an neuere Untersuchungen über die Grundlagen der

Physik. Besondere Aufmerksamkeit wird der Erkenntnistheoretiker und Logiker überall solchen Argumentationen zuwenden müssen, in denen Denklücken mit leeren Worten überkleistert worden sind (Lebenskraft, Entelechie, élan vital usw.).

Gleichwohl ergibt sich auch für die Naturwissenschaften nicht, daß alle Schlußketten in ihre letzten Elemente aufgelöst werden müssen, wenn die Darlegung überzeugend wirken soll. Das zuvor über die mathematische Darstellung Gesagte findet in den Naturwissenschaften sinngemäße Anwendung. Aber lehrreicher als allgemeine Erwägungen ist vielleicht ein Beispiel.

Niemand wird im Ernste bezweifeln, daß die Rückseite des Mondes auf ganz ähnliche Art mit Ringgebirgen bedeckt ist, wie die uns zugewendete Seite unseres Trabanten. Wir alle halten das für richtig (selbst wenn wir es, etwa aus Widerspruchsgeist, nicht würden zugeben wollen), wiewohl es im Grunde doch nur eine Vermutung ist, und wiewohl höchstwahrscheinlich keine Erfahrung es je wird bestätigen können. Das ist erkenntnistheoretisch und psychologisch merkwürdig. Es erhebt sich die Frage, wie wir zu solcher Bestimmtheit unseres Urteils kommen. Gewiß müssen wir imstande sein, uns hiervon Rechenschaft zu geben. Versuchen wir das aber, so werden wir zu der Einsicht gelangen, daß die angeführte Aussage sich denn doch nicht wesentlich von vielen anderen unterscheidet, deren Zusammenfassung und Verkettung das Gewebe unserer naturwissenschaftlichen Erkenntnisse bildet. Was an der Analyse dieses Beispiels zu lernen sein würde, wird auch durch Analyse anderer zu lernen sein, sie alle eingehend zu analysieren, ist aber unmöglich. Muß einmal eine Auswahl getroffen werden, so werden sich uns andere Probleme der Erkenntnis mehr als dieses zur Analyse empfehlen. Z. B.: Wie kommen wir von dem vorwissenschaftlichen Begriff Himmelsgewölbe los, wie begründen wir, ohne Verweisung auf moderne geographische Kenntnisse, die Annahme einer Kugelgestalt unserer Erde? Welches ist der erkenntnistheoretische Charakter der Gründe, die uns zur Annahme der Abstammungslehre bewegen? usw.

Bisher erschienene Hefte der „Sammlung Vieweg".

Heft 11. Dr. E. Przybyllok: *Polhöhen-Schwankungen.* Mit 8 Abbildungen. M. 1,60.

Heft 12. Professor Dr. Albert Oppel-Halle a. S.: *Gewebekulturen und Gewebepflege im Explantat.* Mit 32 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 13. Dr. Wilhelm Foerster-Berlin: *Kalenderwesen und Kalenderreform.* M. 1,60.

Heft 14. Dr. O. Zoth-Graz: *Über die Natur der Mischfarben auf Grund der Undulationshypothese.* Mit 3 Textfig. und 10 Kurventaf. M. 2,80.

Heft 15. Dr. Siegfried Valentiner-Clausthal: *Die Grundlagen der Quantentheorie in elementarer Darstellung.* Mit 8 Abbildungen. 3. erweiterte Auflage. 1920. M. 5,—.

Heft 16. Dr. Siegfried Valentiner-Clausthal: *Anwendung der Quantenhypothese in der kinetischen Theorie der festen Körper und der Gase. In elementarer Darstellung.* 2. erweiterte Auflage. Mit 5 Abbildungen. M. 5,60.

Heft 17. Dr. Hans Witte-Wolfenbüttel: *Raum und Zeit im Lichte der neueren Physik.* Eine allgemeinverständliche Entwicklung des raumzeitlichen Relativitätsgedankens bis zum Relativitätsprinzip der Trägheitssysteme. Mit 18 Abbild. 3. Aufl. 1920. M. 2,80.

Heft 18. Dr. Erich Hupka-Tsingtau: *Die Interferenz der Röntgenstrahlen.* Mit 33 Abbild. und 1 Doppeltafel in Lichtdruck. M. 2,60.

Heft 19. Prof. Dr. Robert Kremann-Graz: *Die elektrolytische Darstellung von Legierungen aus wässerigen Lösungen.* Mit 20 Abbildungen. M. 2,40.

Heft 20. Dr. Erik Liebreich-Berlin: *Rost und Rostschutz.* Mit 22 Abbildungen. M. 3,20.

Heft 21. Prof. Dr. Bruno Glatzel-Berlin: *Elektrische Methoden der Momentphotographie.* Mit dem Bild des Verf. u. 51 Abbild. M. 3,60.

Heft 22. Prof. Dr. med. et phil. Carl Oppenheimer: *Stoffwechselfermente.* M. 2,80.

Heft 23. Dr. Alfred Wegener-Hamburg: *Die Entstehung der Kontinente und Ozeane.* 2. gänzlich umgearbeitete Auflage erschien als Bd. 66 unserer Sammlung „Die Wissenschaft".

Heft 24. Dr. W. Fahrion-Feuerbach-Stuttgart: *Die Härtung der Fette.* 2. vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 5 Abbild. M. 16,—.

Heft 25. Prof. Dr. A. Wassmuth-Graz: *Grundlagen und Anwendungen der statistischen Mechanik.* Mit 4 Abbildungen. M. 2,80.

Heft 26. Dr. A. Lipschütz-Bern: *Zur allgemeinen Physiologie des Hungers.* Mit 39 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 27. Prof. Dr. C. Doelter-Wien: *Die Farben der Mineralien, insbesondere der Edelsteine.* Mit 2 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 28. Dr. W. Fahrion-Feuerbach-Stuttgart: *Neuere Gerbemethoden und Gerbetheorien.* M. 4,—.

Heft 29. Dr. Erik Hägglund-Bergvik (Schweden): *Die Sulfitablauge und ihre Verarbeitung auf Alkohol.* Mit 6 Abbild. und einer Tafel. 2. Auflage. M. 6,—.

Heft 30. Dr. techn. M. Vidmar-Laibach: *Moderne Transformatorenfragen.* Mit 10 Abbildungen. M. 2,80.

Heft 31. Dr. Heinr. Faßbender-Berlin: *Die technischen Grundlagen der Elektromedizin.* Mit 77 Abbildungen. M. 3,20.

Heft 32/33. Prof. Rudolf Richter-Karlsruhe: *Elektrische Maschinen mit Wicklungen aus Aluminium, Zink u. Eisen.* Mit 51 Abbild. M. 6,—.

Heft 34. Obering. Carl Beckmann-Berlin-Lankwitz: *Haus- und Geschäfts-Telephonanlagen.* Mit 78 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 35. Dr. Aloys Müller-Bonn: *Theorie der Gezeitenkräfte.* Mit 17 Abbildungen. M. 2,80.

Wenden!