ISBN 978-3-7091-3963-9 ISBN 978-3-7091-3962-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-7091-3962-2

Über Mittelpunktseilinien

Von

Rudolf Inzinger (Wien)

(Eingelangt und vorgelegt in der Sitzung am 10. Jänner 1946)

In einer demnächst erscheinenden Note „Über eine Abbildung der Speere einer Ebene" habe ich auf eine ein-eindeutige Abbildung zwischen den *Speeren* T einer Ebene Π und den zu einem *festen Punkt* o *symmetrischen Geradenpaaren* t (t_1, t_2) einer Ebene π hingewiesen. Diese Abbildung $\mathfrak{A}$ besitzt die bemerkenswerte Eigenschaft, jeden *orientierten Kreis* $\mathfrak{K}$ der Ebene Π auf einen *Kegelschnitt* $\mathfrak{k}$ *von* π *mit* o *als Mitte* abzubilden. Darüber hinaus erweisen sich die *Mittelpunktseilinien* $\mathfrak{e}$ *von* π *mit* o *als Mitte* als die Bilder der *Eilinien* $\mathfrak{E}$ von Π, die durch die Eigenschaft der *inversen Konvexität* bezüglich O gekennzeichnet sind. Dabei wird eine Eilinie $\mathfrak{E}$ von Π als *inverskonvex bezüglich* O bezeichnet, wenn sie O umschließt und ihre bezüglich O inverse Kurve gleichfalls konvex ist. Jedem Satz, der eine Beziehung zwischen den Eilinien $\mathfrak{E}$ von Π und den Kreisen $\mathfrak{K}$ von Π beinhaltet, entspricht demnach ein analoger Satz über die Mittelpunktseilinien $\mathfrak{e}$ von π mit o als Mitte und die dazu konzentrischen Kegelschnitte $\mathfrak{k}$ von π.

In der Note „Einige Bemerkungen über Eilinien"[1] habe ich die Abbildung $\mathfrak{A}$ verwendet, um einige Eigenschaften der Ellipsen, die eine Mittelpunktseilinie $\mathfrak{e}$ von π mit o als Mitte in Gegenpunkten oskulieren, als unmittelbare Folge bekannter Eigenschaften der Schmiegkreise der Eilinien $\mathfrak{E}$ von Π herzuleiten. In der vorliegenden Arbeit sollen diese Übertragungen ergänzt und fortgesetzt werden, wobei dem Begriff der *zyklischen Ordnung* einer Eilinie $\mathfrak{E}$ von Π der entsprechende Begriff der *Kegelschnittordnung*

[1] Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften Wien, math.-nat. Kl., Abt. IIa, 147. Bd. (1938).

einer Mittelpunktseilinie $\mathfrak{e}$ von π gegenübergestellt wird. Dabei wird im folgenden unter der Kegelschnittordnung einer Mittelpunktseilinie $\mathfrak{e}$ von π die Maximalzahl der Paare zu o symmetrischer Schnittpunkte verstanden, die $\mathfrak{e}$ mit einem dazu konzentrischen Kegelschnitt besitzen kann.

Jedem Paar bezüglich O inverskonvexer Eilinien der Ebene Π, von denen die eine die andere umschließt, entspricht in der Ebene π ein Paar konzentrischer Mittelpunktseilinien mit der gleichen Eigenschaft. Dem *Umkreis* und dem *Inkreis einer Eilinie* $\mathfrak{E}$ von Π entspricht sodann in der Ebene π die *Umellipse und die Inellipse der entsprechenden Mittelpunktseilinie* $\mathfrak{e}$ von π, während dem *Minimalkreisring* von $\mathfrak{E}$ jener im gewissen Sinne *kleinste Ring konfokaler Ellipsen* entspricht, der $\mathfrak{e}$ enthält.

Es seien H, Φ und h, φ polare Speerkoordinaten in den Ebenen Π, bzw. π. H, bzw. h sind dann die vorzeichenbegabten Abstände der Speere von den Koordinatenanfangspunkten O, bzw. o, während Φ, bzw. φ die modulo 2π bestimmten Winkel derselben gegen die Polarachsen bedeuten.

Die Abbildung $\mathfrak{A}$ ist dann bestimmt durch die Gleichungen

$$H = h^2, \tag{1}$$

$$\Phi = 2\varphi, \tag{2}$$

aus denen man entnimmt, daß jedem Speer T von Π eindeutig und eindeutig umkehrbar vier Speere von π zugeordnet sind, die sich paarweise ergänzen und zwei nicht orientierten Geraden t_1 und t_2 angehören, die zu o symmetrisch sind und dem Speer T von Π in der Abbildung $\mathfrak{A}$ entsprechen.

In den polaren Speerkoordinaten H, Φ ist ein orientierter Kreis $\mathfrak{K}$ von Π festgelegt durch die Gleichung

$$H = R + X \cos \Phi + Y \sin \Phi,$$

worin X, Y die rechtwinkeligen Koordinaten der Kreismitte und R den Kreisradius bedeutet. Vermöge (1) und (2) folgt daraus die Gleichung

$$h^2 = a_{11} \cos^2 \varphi + 2a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi \tag{3}$$

eines Kegelschnittes $\mathfrak{k}$ von π mit o als Mitte, in der

$$a_{11} = R + X, \quad a_{12} = Y, \quad a_{22} = R - X \tag{4}$$

bedeutet. Für die *orthogonalen Invarianten*

$$p = a_{11}\, a_{22} - a_{12}^{\,2}, \tag{5}$$

$$q = a_{11} + a_{22} \tag{6}$$

des Kegelschnittes $\mathfrak{k}$ ergeben sich aus (4) die Gleichungen

$$p = R^2 - X^2 - Y^2 = -P, \tag{7}$$

$$q = 2R, \tag{8}$$

wobei P die Potenz des Ursprungs O bezüglich des Kreises $\mathfrak{K}$ bedeutet. Der Kegelschnitt $\mathfrak{k}$ ist demnach eine *Ellipse (bzw. ein nullteiliger Kegelschnitt) oder eine Hyperbel, je nachdem der Kreis* $\mathfrak{K}$ *den Ursprung* O *umschließt oder nicht.* Geht der Kreis $\mathfrak{K}$ durch O hindurch, dann zerfällt der Kegelschnitt $\mathfrak{k}$ in zwei zu o symmetrische Strahlbüschel. Aus der Gleichung (3) entnimmt man bei Beachtung von (4), daß *konzentrische Kreise von* Π *auf konfokale Kegelschnitte von* π *abgebildet werden.*

Im folgenden werden bloß Ellipsen von π mit o als Mitte betrachtet. Ist $\mathfrak{k}$ eine solche Ellipse und f ihr Flächeninhalt, dann gilt bei Beachtung von (5) und (7)

$$f = \pi \,.\, \sqrt{p} = \pi \sqrt{-P}. \tag{9}$$

Darin bedeutet $\sqrt{-P}$ den Radius jenes Kreises um O, der von dem der Ellipse $\mathfrak{k}$ in der Abbildung $\mathfrak{A}^{-1}$ entsprechenden Kreis $\mathfrak{K}$ von Π in Gegenpunkten geschnitten wird.

Für den Flächeninhalt g des Direktorkreises (orthoptischen Kreises) $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{k}$ gilt bei Beachtung von (6) und (8)

$$g = \pi \,.\, q = 2\pi R. \tag{10}$$

Es stimmt demnach der Flächeninhalt g von $\mathfrak{D}$ überein mit dem Umfang jenes Kreises $\mathfrak{K}$ von Π, der der Ellipse $\mathfrak{k}$ vermöge der Abbildung $\mathfrak{A}^{-1}$ entspricht.

Für die Koeffizienten a_{ik} der Gleichung (3) eines kegelschnittes $\mathfrak{k}$ von π mit o als Mitte folgt aus (3) und den daraus durch zweimalige Ableitung nach φ[1] gewonnenen Gleichungen

[1] Ableitungen nach φ werden durch Striche angezeigt.

$$\begin{aligned} a_{11} &= h^2\cos^2\varphi - 2hh'\cos\varphi\sin\varphi + (h^2+h'^2+hh'')\sin^2\varphi, \\ a_{12} &= hh'\cos^2\varphi - (h'^2+hh')\cos\varphi\sin\varphi - hh'\sin^2\varphi, \\ a_{22} &= (h^2+h'^2+hh'')\cos^2\varphi + 2hh'\cos\varphi\sin\varphi + h^2\sin^2\varphi, \end{aligned}$$

so daß also für die orthogonalen Invarianten (5) und (6) von $\mathfrak{k}$

$$p = h^3(h+h''), \tag{11}$$

$$q = 2h^2+h'^2+hh'' \tag{12}$$

gilt.

Ist eine Mittelpunktseilinie $\mathfrak{e}$ von π mit o als Mitte durch ihre Stützgeradenfunktion $h(\varphi) > O$ mit der Periode π gegeben, dann gilt für den Krümmungsradius r von $\mathfrak{e}$ bekanntlich

$$r = h + h'' > O, \tag{13}$$

während für die orthogonalen Invarianten p und q der $\mathfrak{e}$ in Gegenpunkten oskulierenden Kegelschnitte mit o als Mitte die Gleichungen (11) und (12) gelten. Wegen (13) folgt aus (11) $p > O$ und aus (12) $q > O$, was besagt, daß die $\mathfrak{e}$ in Gegenpunkten oskulierenden Kegelschnitte Ellipsen sind. Weiter folgt aus (7) $P < O$ und aus (8) $R > O$, was zur Folge hat, daß die der Mittelpunktseilinie $\mathfrak{e}$ von π entsprechende Kurve $\mathfrak{E}$ von Π selbst eine Eilinie ist, die O umschließt und deren sämtliche Schmiegkreise O als inneren Punkt enthalten.

Während jeder Mittelpunktseilinie $\mathfrak{e}$ von π mit o als Mitte eine Eilinie $\mathfrak{E}$ von Π entspricht, ist die Umkehrung davon nicht unbedingt richtig. Es ergibt sich vielmehr vermöge der Abbildung $\mathfrak{A}$ in der Ebene π nur dann eine Mittelpunktseilinie $\mathfrak{e}$ als das Bild einer Eilinie $\mathfrak{E}$ von Π, wenn $\mathfrak{E}$ den Ursprung O umschließt und darüber hinaus sämtliche Schmiegkreise von $\mathfrak{E}$ den Punkt O als inneren Punkt enthalten. Durch diese Bedingung wird eine besondere Klasse $\mathfrak{K}$ der Eilinien $\mathfrak{E}$ von Π gekennzeichnet.

Ist die Eilinie $\mathfrak{E}_1$ von Π aus $\mathfrak{K}$ in polaren Punktkoordinaten ρ_1, ω gegeben durch die Gleichung $\rho_1 = \rho_1(\omega) > O$, dann ergibt sich als Bedingung für die Konvexität von $\mathfrak{E}_1$ die Ungleichung[1]

$$\rho_1{}^2 + 2\dot{\rho}_1{}^2 - \rho_1\ddot{\rho}_1 > O \tag{14}$$

[1] Ableitungen nach ω werden durch Punkte angezeigt.

während man leicht nachrechnet, daß

$$\rho_1 + \ddot{\rho}_1 > O \tag{15}$$

die Bedingung dafür ist, daß sämtliche Schmiegkreise von $\mathfrak{E}_1$ den Ursprung O als inneren Punkt enthalten. Wird nun auf die Eilinie $\mathfrak{E}_1$ eine Inversion mit O als Zentrum ausgeübt,

$$\rho_1 = \frac{c}{\rho_2}, \text{ bzw. } \rho_2 = \frac{c}{\rho_1},$$

dann folgt aus (14)

$$\rho_2 + \ddot{\rho}_2 > O \tag{16}$$

und aus (15)

$$\rho_2^2 + 2\dot{\rho}_2^2 - \rho_2\,\ddot{\rho}_2 > O. \tag{17}$$

Die zu $\mathfrak{E}_1$ inverse Kurve $\mathfrak{E}_2$ ist demnach wegen (17) gleichfalls konvex, sie umschließt wegen $\rho_2 = \frac{c}{\rho_1} > O$ den Ursprung O und O liegt wegen (16) überdies im Inneren sämtlicher Schmiegkreise von $\mathfrak{E}_2$. Es gehört also auch die zu $\mathfrak{E}_1$ inverse Eilinie $\mathfrak{E}_2$ der Klasse $\mathfrak{L}$ an. Die Klasse $\mathfrak{L}$ ist daher invariant gegenüber den Inversionen mit O als Zentrum. Sie besteht aus allen Eilinien von Π, deren inverse Kurven bezüglich O ebenfalls konvex sind. Eine Eilinie der Klasse $\mathfrak{L}$ soll demgemäß in der Folge als *inverskonvex bezüglich* O bezeichnet werden. Man kann nunmehr sagen:

Vermöge der Abbildung $\mathfrak{A}$ *werden die bezüglich* O *inverskonvexen Eilinien* $\mathfrak{E}$ *von* Π *ein-eindeutig auf die Mittelpunktseilinien* $\mathfrak{e}$ *von* π *mit* o *als Mitte abgebildet.*

Durch eine Inversion mit O als Zentrum wird der *Innenbereich* $\mathfrak{B}_i(\mathfrak{E}_1)$ einer bezüglich O inverskonvexen Eilinie $\mathfrak{E}_1$ auf den *Außenbereich* $\mathfrak{B}_a(\mathfrak{E}_2)$ der zu $\mathfrak{E}_1$ inversen Eilinie $\mathfrak{E}_2$ und umgekehrt $\mathfrak{B}_a(\mathfrak{E}_1)$ auf $\mathfrak{B}_i(\mathfrak{E}_2)$ abgebildet. Da es durch jeden Punkt P_2 von $\mathfrak{B}_a(\mathfrak{E}_2)$ immer Gerade gibt, die mit $\mathfrak{E}_2$ keinen Punkt gemeinsam haben, so lassen sich daher auch durch jeden Punkt P_1 von $\mathfrak{B}_i(\mathfrak{E}_1)$ Kreise legen, die durch O gehen und ganz in $\mathfrak{B}_i(\mathfrak{E}_1)$ liegen. Insbesondere gibt es daher durch jeden Punkt P_1 von $\mathfrak{B}_i(\mathfrak{E}_1)$ genau zwei Kreise, die durch O gehen, ganz in $\mathfrak{B}_i(\mathfrak{E}_1)$ liegen und mit $\mathfrak{E}_1$ nur je einen Punkt gemeinsam haben. Es sind dies offenbar jene Kreise, die den aus P_2 an $\mathfrak{E}_2$ legbaren Tangenten in der Inversion entsprechen. Die Eigenschaft der *inversen Konvexität* hat demnach für die Eilinien eine Krümmungsbeschränkung zur Folge. Insbesondere erkennt man unmittelbar, daß eine inverskonvexe Eilinie keine Ecken besitzen kann.

Eine Eilinie $\mathfrak{E}$ von Π ist inverskonvex bezüglich aller Punkte O, die im Inneren sämtlicher Schmiegkreise von $\mathfrak{E}$ liegen. Die Menge $\mathfrak{Z}(\mathfrak{E})$ dieser Punkte soll als *Zentralmenge* von $\mathfrak{E}$ bezeichnet werden. Für inverskonvexe Eilinien ist daher $\mathfrak{Z}(\mathfrak{E})$ nicht leer. Zur Bestimmung von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{E})$ genügt es, den Durchschnitt der Schmiegkreisscheiben von $\mathfrak{E}$ in Punkten maximaler Krümmung von $\mathfrak{E}$ zu bilden. Als Durchschnitt konvexer Mengen ist $\mathfrak{Z}(\mathfrak{E})$ selbst konvex.

Es sei $2 . n$ die *zyklische Ordnung* einer bezüglich O inverskonvexen Eilinie $\mathfrak{E}$ von Π, also die Maximalzahl der Schnittpunkte und damit auch die Maximalzahl der gemeinsamen Tangenten, die $\mathfrak{E}$ mit einem Kreis von Π besitzen kann. Aus den Eigenschaften der Abbildung $\mathfrak{A}$ folgt dann, daß die entsprechende Mittelpunktseilinie $\mathfrak{e}$ von π mit o als Mitte mit einem zu $\mathfrak{e}$ konzentrischen Kegelschnitt ebenfalls höchstens $2 . n$ Paare zu o symmetrischer gemeinsamer Tangenten und damit auch höchstens ebenso viele Paare zu o symmetrischer Schnittpunkte besitzen kann. Diese Maximalzahl $2 . n$ wird im folgenden als die *Kegelschnittordnung der Mittelpunktseilinie* $\mathfrak{e}$ von π bezeichnet.

Die zyklische Ordnung einer bezüglich O inverskonvexen Eilinie $\mathfrak{E}$ von Π stimmt daher vermöge der Abbildung $\mathfrak{A}$ mit der Kegelschnittordnung der entsprechenden Mittelpunktseilinie $\mathfrak{e}$ von π überein.

Aus der Definition der Kegelschnittordnung einer Mittelpunktseilinie folgt, daß diese invariant ist gegenüber den Affinitäten von π.

Den Schmiegkreisen der Eilinie $\mathfrak{E}$ von Π entsprechen in π die mit $\mathfrak{e}$ konzentrischen Ellipsen, die $\mathfrak{e}$ in Gegenpunkten oskulieren. Insbesondere entsprechen den Scheitelschmiegkreisen von $\mathfrak{E}$ in π die $\mathfrak{e}$ in Gegenpunkten hyperoskulierenden Ellipsen. Da alle Kegelschnitte, die eine Kurve in einem Punkte hyperoskulieren, ihre Mitten auf der Affinnormalen in diesem Punkte der Kurve besitzen, so erweisen sich demnach die Berührdurchmesser der $\mathfrak{e}$ in Gegenpunkten hyperoskulierenden Ellipsen als die durch die Mitte o von $\mathfrak{e}$ gehenden *Affinnormalen* von $\mathfrak{e}$.

Aus (11) und (12) folgt durch Differentiation nach φ

$$p' = h^2 \, [4 \, h \, h' + 3 \, h' \, h'' + h h'''],$$
$$q' = \quad 4 \, h h' + 3 \, h' \, h'' + h h'''.$$

Werden Ableitungen nach Φ durch Punkte angezeigt, dann folgt aus (8) bei Beachtung von (2)

$$q' = 4 \dot{R}.$$

Es gilt also

$$p' = h^2 . \, q = 4 \, h^2 \dot{R},$$

was zur Folge hat, daß die beiden orthogonalen Invarianten p und q für die $\mathfrak{e}$ in Gegenpunkten hyperoskulierenden Ellipsen Extremwerte annehmen. Wegen (9) und (10) sind daher diese Ellipsen auch durch Extremwerte ihrer Flächeninhalte und der Flächeninhalte ihrer Direktorkreise gekennzeichnet.

Die Anzahl der Scheitel der Eilinie $\mathfrak{E}$ von Π ist bekanntlich mindestens gleich der zyklischen Ordnung von $\mathfrak{E}$. Daraus folgt nunmehr, daß *die Anzahl der Ellipsen, die die Mittelpunktseilinie* $\mathfrak{e}$ *von* π *in Gegenpunkten hyperoskulieren, mindestens gleich ist der Kegelschnittordnung von* $\mathfrak{e}$.

In der demnächst erscheinenden Note „Über die Scheiteltangenten von Eilinien" habe ich gezeigt, daß es keinen Kreis gibt, der sämtliche Scheiteltangenten einer Eilinie berührt. Bezieht man diese Aussage auf eine bezüglich O inverskonvexe Eilinie $\mathfrak{E}$ von Π, dann folgt daraus, daß *es in* π *keine zu* $\mathfrak{e}$ *konzentrische Ellipse gibt, der die Tangenten von* $\mathfrak{e}$ *in den Berührpunkten von* $\mathfrak{e}$ *mit den* $\mathfrak{e}$ *hyperoskulierenden Ellipsen umschrieben sind.*

Man überzeugt sich leicht, daß auch das duale Gegenstück zu dieser Aussage richtig ist. *Es gibt also auch keine zu* $\mathfrak{e}$ *konzentrische Ellipse, die durch alle Berührpunkte von* $\mathfrak{e}$ *mit den* $\mathfrak{e}$ *in Gegenpunkten hyperoskulierenden Ellipsen hindurchgeht.*

Wir verwenden im folgenden die Abbildung $\mathfrak{A}$ dazu, um einige Aussagen, die sich auf Paare von Eilinien der Ebene Π beziehen, auf die konzentrischen Paare von Mittelpunktseilinien der Ebene π zu übertragen.

Berühren sich zwei im positiven Sinne umlaufene, stetig gekrümmte Eilinien $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ der Ebene Π in einem Punkte gleichsinnig und ist in Punkten mit gleichsinnig parallelen Tangenten die Krümmung von $\mathfrak{E}_1$ immer mindestens gleich der Krümmung von $\mathfrak{E}_2$, dann gehört die Eilinie $\mathfrak{E}_1$ ganz dem von der Eilinie $\mathfrak{E}_2$ umgrenzten konvexen Bereich $\mathfrak{B}(\mathfrak{E}_2)$ an.[1]

Wird von den Eilinien $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ vorausgesetzt, daß sie beide bezüglich O inverskonvex sind, dann entsprechen denselben in π die Eilinien $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ mit o als gemeinsamer Mitte, die sich in einem Paar zu o symmetrischer Punkte berühren. Durch die Gleichung (8) werden die Krümmungsradien R_1 und R_2 von $\mathfrak{E}_1$, bzw. $\mathfrak{E}_2$ in Beziehung gesetzt zu den orthogonalen Invarianten q_1 und q_2 der Ellipsen, die die Eilinien $\mathfrak{e}_1$, bzw. $\mathfrak{e}_2$ in Gegenpunkten oskulieren. Für die Eilinien $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ kann demnach der folgende Satz ausgesprochen werden:

Berühren sich zwei konzentrische Mittelpunktseilinien $\mathfrak{e}_1$ *und* $\mathfrak{e}_2$ *und ist in Punkten mit parallelen Tangenten die Invariante* q_1 *der* $\mathfrak{e}_1$ *oskulierenden Ellipse immer höchstens gleich der Invariante* q_2 *der* $\mathfrak{e}_2$ *oskulierenden Ellipse, dann gehört* $\mathfrak{e}_1$ *ganz dem von* $\mathfrak{e}_2$ *umgrenzten konvexen Bereich* $\mathfrak{B}(\mathfrak{e}_2)$ *an.*

Daraus kann sofort gefolgert werden:

Wird die Mittelpunktseilinie $\mathfrak{e}$ *von einer dazu konzentrischen Ellipse* $\mathfrak{k}$ *in Gegenpunkten von innen (außen) berührt, dann umschließt die Eilinie* $\mathfrak{e}$ *(Ellipse* $\mathfrak{k}$*) die Ellipse* $\mathfrak{k}$ *(Eilinie* $\mathfrak{e}$*), wenn in allen zur gemeinsamen Mitte* o *symmetrischen Punktepaaren von* $\mathfrak{e}$ *die Invariante* q *der* $\mathfrak{e}$ *oskulierenden Ellipsen mindestens (höchstens) gleich ist der Invariante* q_k *von* $\mathfrak{k}$.

Im folgenden wird die Abbildung $\mathfrak{A}$ angewendet, um die Begriffsbildungen des *Umkreises*, des *Inkreises* sowie des *Minimal kreisringes* einer Eilinie $\mathfrak{E}$ von Π auf die Mittelpunkseilinien $\mathfrak{e}$ von π mit o als Mitte zu übertragen.[2]

Unter den Kreisen, die eine Eilinie $\mathfrak{E}$ umschließen, gibt es bekanntlich *genau einen* $\mathfrak{K}_u$ *mit minimalem Radius*, der als *Umkreis*

---

[1] Vgl. W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, p. 115.

[2] Hinsichtlich der Literatur zu diesem Fragenkreis vergleiche man die ausführliche Zusammenstellung derselben in T. Bonnesen und W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Berlin 1934, p. 54.

der Eilinie $\mathfrak{E}$ bezeichnet wird. Die Menge $\mathfrak{M}_u$ der Punkte, die $\mathfrak{K}_u$ mit $\mathfrak{E}$ gemeinsam hat, ist auf $\mathfrak{K}_u$ so verteilt, daß die Gesamtkrümmung jedes Bogens von $\mathfrak{K}_u$, der alle Punkte von $\mathfrak{M}_u$ enthält, mindestens gleich π ist. Wird die Eilinie als stetig gekrümmt vorausgesetzt, dann berühren sich $\mathfrak{K}_u$ und $\mathfrak{E}$ in den gemeinsamen Punkten. Es muß daher auch jeder Bogen von $\mathfrak{E}$, der alle Punkte der Menge $\mathfrak{M}_u$ enthält, mindestens die Gesamtkrümmung π besitzen. Für die folgenden Überlegungen ist es zweckmäßig, die Verteilungseigenschaft der Menge $\mathfrak{M}_u$ der gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{K}_u$ und $\mathfrak{E}$ zu kennzeichnen durch die Aussage, daß *jeder Bogen von* $\mathfrak{E}$ *oder* $\mathfrak{K}_u$ *mit der Gesamtkrümmung* π *mindestens einen Punkt der Menge* $\mathfrak{M}_u$ *enthält. Ein Kreis, der die Eilinie* $\mathfrak{E}$ *umschließt und diese Eigenschaft besitzt, ist damit als der Umkreis* $\mathfrak{K}_u$ *von* $\mathfrak{E}$ *gekennzeichnet.*

Wird von der Eilinie $\mathfrak{E}$ von Π vorausgesetzt, daß sie den Ursprung O umschließt, dann trifft dies auch für den Umkreis $\mathfrak{K}_u$ von $\mathfrak{E}$ zu. Ist $\mathfrak{E}$ überdies inverskonvex bezüglich O, dann entspricht ihr in der Ebene π die Mittelpunktseilinie $\mathfrak{e}$ mit o als Mitte, während dem Umkreis $\mathfrak{K}_u$ von $\mathfrak{E}$ in π eine Ellipse $\mathfrak{k}_u$ entspricht, die zu $\mathfrak{e}$ konzentrisch ist und $\mathfrak{e}$ umschließt. *Die Ellipse* $\mathfrak{k}_u$ *soll als die Umellipse der Mittelpunktseilinie* $\mathfrak{e}$ *bezeichnet werden.* Sie ist unter allen zu $\mathfrak{e}$ konzentrischen Ellipsen, die $\mathfrak{e}$ umschließen, durch ein *Minimum der Invariante* q, bzw. durch ein Minimum des Flächeninhaltes ihres Direktorkreises gekennzeichnet. Aus der Eindeutigkeit des Umkreises $\mathfrak{K}_u$ von $\mathfrak{E}$ folgt, daß auch die *Umellipse* $\mathfrak{k}_u$ *von* $\mathfrak{e}$ *eindeutig bestimmt* ist.

Jedem Bogen von $\mathfrak{E}$, bzw. $\mathfrak{K}_u$ mit der Gesamtkrümmung π entspricht vermöge der Abbildung $\mathfrak{A}$ ein Paar zu o symmetrischer Bögen von $\mathfrak{e}$, bzw. $\mathfrak{k}_u$, von denen jeder die Gesamtkrümmung $\frac{\pi}{2}$ besitzt. Aus der Verteilungseigenschaft der Menge $\mathfrak{M}_u$ der gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{K}_u$ folgt nunmehr, daß die entsprechende Menge $\mathfrak{m}_u$ der gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{k}_u$ zu o symmetrisch liegt und auf beiden Kurven so verteilt ist, daß *jeder Bogen von* $\mathfrak{e}$ *oder* $\mathfrak{k}_u$ *mit der Gesamtkrümmung* $\frac{\pi}{2}$ *mindestens einen Punkt der Menge* $\mathfrak{m}_u$ *enthält. Eine mit* $\mathfrak{e}$ *konzentrische Ellipse,* *die die Eilinie $\mathfrak{e}$ umschließt und diese Eigenschaft besitzt, ist damit als die Umellipse $\mathfrak{k}_u$ von $\mathfrak{e}$ gekennzeichnet.*

Dem Begriff des Umkreises $\mathfrak{K}_u$ einer Eilinie $\mathfrak{E}$ von Π kann als Gegenstück der Begriff des *Inkreises* $\mathfrak{K}_i$ von $\mathfrak{E}$ gegenübergestellt werden. Dabei wird bekanntlich unter einem Inkreis einer Eilinie $\mathfrak{E}$ ein *Kreis* $\mathfrak{K}_i$ *von maximalem Radius* verstanden, der ganz dem von der Eilinie $\mathfrak{E}$ umgrenzten konvexen Bereich $\mathfrak{B}(\mathfrak{E})$ angehört. Während der Umkreis $\mathfrak{K}_u$ von $\mathfrak{E}$ eindeutig bestimmt ist, muß dies dagegen für den Inkreis $\mathfrak{K}_i$ von $\mathfrak{E}$ nicht zutreffen. Die Mitten der Inkreise können vielmehr eine Strecke erfüllen, was dann eintritt, wenn $\mathfrak{E}$ parallele Strecken mit gemeinsamen Normalen enthält. Im folgenden soll jedoch dieser Fall ausgeschlossen bleiben. Der Inkreis $\mathfrak{K}_i$ einer Eilinie $\mathfrak{E}$ ist dann unter dieser Voraussetzung ebenfalls eindeutig bestimmt. Er berührt die Eilinie $\mathfrak{E}$ in den gemeinsamen Punkten von $\mathfrak{K}_i$ und $\mathfrak{E}$. Die Menge $\mathfrak{M}_i$ der gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{K}_i$ und $\mathfrak{E}$ besitzt dann die gleiche Verteilungseigenschaft wie die Menge $\mathfrak{M}_u$. *Jeder Bogen von $\mathfrak{K}_i$ oder $\mathfrak{E}$ mit der Gesamtkrümmung π enthält also mindestens einen Punkt aus $\mathfrak{M}_i$. Durch diese Eigenschaft ist der Inkreis $\mathfrak{K}_i$ von $\mathfrak{E}$ unter den ganz in $\mathfrak{B}(\mathfrak{E})$ enthaltenen Kreisen gekennzeichnet.*

Aus der Annahme, daß die Eilinie $\mathfrak{E}$ von Π den Ursprung O umschließt, folgt noch nicht, daß O ein innerer Punkt des Inkreises $\mathfrak{K}_i$ von $\mathfrak{E}$ ist, doch wird dies durch die zusätzliche Forderung der inversen Konvexität von $\mathfrak{E}$ bezüglich O gewährleistet. Der Inkreis $\mathfrak{K}_i$ von $\mathfrak{E}$ hat mit dem Außenbereich $\mathfrak{B}_a(\mathfrak{E})$ von $\mathfrak{E}$ keinen Punkt gemeinsam, dagegen enthält er wegen der Verteilungseigenschaft der Menge $\mathfrak{M}_i$ mindestens zwei Punkte der Eilinie $\mathfrak{E}$. In einer Inversion mit O als Zentrum entspricht nun der Eilinie $\mathfrak{E}$ wegen der inversen Konvexität von $\mathfrak{E}$ bezüglich O eine Eilinie $\mathfrak{E}'$, die O umschließt, während dem Inkreis $\mathfrak{K}_i$ von $\mathfrak{E}$ ein Kreis $\mathfrak{K}_i'$ entspricht, der mit $\mathfrak{E}'$ mindestens zwei Punkte gemeinsam hat, aber zum Innenbereich $\mathfrak{B}_i(\mathfrak{E}')$ von $\mathfrak{E}'$ fremd ist. Der Kreis $\mathfrak{K}_i'$ muß also die Eilinie $\mathfrak{E}'$ und damit den zum Innenbereich $\mathfrak{B}_i(\mathfrak{E}')$ von $\mathfrak{E}'$ gehörigen Ursprung O umschließen, was zur Folge hat, daß auch der Inkreis $\mathfrak{K}_i$ von $\mathfrak{E}$ den Ursprung O umschließt.

Diese Feststellung für den Ursprung O gilt in genau der gleichen Weise für jeden anderen Punkt der Zentralmenge $\mathfrak{Z}(\mathfrak{E})$

der inverskonvexen Eilinie $\mathfrak{E}$. *Es liegt also die Zentralmenge* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{E})$ *einer inverskonvexen Eilinie* $\mathfrak{E}$ *ganz im Inneren des Inkreises* $\mathfrak{K}_i$ *von* $\mathfrak{E}$.

Vermöge der Abbildung $\mathfrak{A}$ entspricht der bezüglich O inverskonvexen Eilinie $\mathfrak{E}$ von Π in der Ebene π die Mittelpunktseilinie $\mathfrak{e}$ mit o als Mitte, während dem Inkreis $\mathfrak{K}_i$ von $\mathfrak{E}$ in π eine Ellipse $\mathfrak{k}_i$ entspricht, die zu $\mathfrak{e}$ konzentrisch ist und ganz dem von $\mathfrak{e}$ begrenzten konvexen Bereich $\mathfrak{B}(\mathfrak{e})$ angehört. *Die Ellipse* $\mathfrak{k}_i$ *soll als die Inellipse der Mittelpunktseilinie* $\mathfrak{e}$ *bezeichnet werden.* Sie ist unter allen zu $\mathfrak{e}$ konzentrischen Ellipsen, die ganz in $\mathfrak{B}(\mathfrak{e})$ liegen, durch ein *Maximum der Invariante* q, bzw. durch ein Maximum des Flächeninhaltes ihres Direktorkreises gekennzeichnet. Aus der Eindeutigkeit des Inkreises $\mathfrak{K}_i$ von $\mathfrak{E}$ folgt, daß auch die *Inellipse* $\mathfrak{k}_i$ *von* $\mathfrak{e}$ *eindeutig bestimmt* ist.

Aus der Verteilungseigenschaft der Menge $\mathfrak{M}_i$ der gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{K}_i$ und $\mathfrak{E}$ folgt, daß die entsprechende Menge $\mathfrak{m}_i$ der gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{k}_i$ und $\mathfrak{e}$ zu o symmetrisch liegt und auf beiden Kurven so verteilt ist, daß *jeder Bogen von* $\mathfrak{k}_i$ *oder* $\mathfrak{e}$ *mit der Gesamtkrümmung* $\frac{\pi}{2}$ *mindestens einen Punkt der Menge* $\mathfrak{m}_i$ *enthält. Eine mit* $\mathfrak{e}$ *konzentrische Ellipse, die ganz dem Bereich* $\mathfrak{B}(\mathfrak{e})$ *angehört und diese Eigenschaft besitzt, ist damit als die Inellipse* $\mathfrak{k}_i$ *von* $\mathfrak{e}$ *gekennzeichnet.*

Die beiden Punktmengen $\mathfrak{M}_u$ und $\mathfrak{M}_i$ sind auf der Eilinie $\mathfrak{E}$ bekanntlich[1] so verteilt, daß $\mathfrak{E}$ in mindestens $2 . m \geqq 4$ Teilbögen zerlegt werden muß, wenn jeder dieser Bogen nur Punkte aus einer der beiden Mengen enthalten soll. Zwischen zwei benachbarten Punkten der Menge $\mathfrak{M}_u$, bzw. $\mathfrak{M}_i$ liegt dann stets mindestens ein Minimum, bzw. ein Maximum der Krümmung von $\mathfrak{E}$. Es besitzt daher $\mathfrak{E}$ mindestens doppelt so viele Scheitel als Berührpunkte mit dem Umkreis $\mathfrak{K}_u$, bzw. mit dem Inkreis $\mathfrak{K}_i$.

Die Übertragung dieser Aussagen auf die Mittelpunktseilinie $\mathfrak{e}$ von π mit o als Mitte ergibt sodann, daß $\mathfrak{e}$ in mindestens $2 . m \geqq 4$ Paare zu o symmetrischer Teilbogen zerlegt werden muß, wenn jeder dieser Bogen nur Punkte der Menge $\mathfrak{m}_u$, bzw. der Menge $\mathfrak{m}_i$ enthalten soll. Zwischen zwei benachbarten

[1] Vergleiche K. Zindler, Über konvexe Gebilde, Monatshefte für Mathematik und Physik, 30 (1920), p. 90 ff.

Punkten der Menge $\mathfrak{m}_u$, bzw. der Menge $\mathfrak{m}_i$ liegt dann stets mindestens ein Punkt von $\mathfrak{e}$, in dem die Invarianten p und q der zu $\mathfrak{e}$ konzentrischen und $\mathfrak{e}$ oskulierenden Ellipsen ein Maximum, bzw. ein Minimum annehmen. Die Anzahl der zur Eilinie $\mathfrak{e}$ konzentrischen, hyperoskulierenden Ellipsen ist daher mindestens doppelt so groß als die Anzahl der zu o symmetrischen Paare der Berührpunkte von $\mathfrak{e}$ mit der Umellipse $\mathfrak{k}_u$, bzw. mit der Inellipse $\mathfrak{k}_i$ von $\mathfrak{e}$.

Unter dem *Minimalkreisring* $(\mathfrak{U}, \mathfrak{J})$ *einer Eilinie* $\mathfrak{E}$ von Π versteht man bekanntlich das eindeutig bestimmte *Paar konzentrischer Kreise* $\mathfrak{U}$ *und* $\mathfrak{J}$ *von minimaler Radiendifferenz,* von denen $\mathfrak{U}$ die Eilinie $\mathfrak{E}$ umschließt, während $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{E}$ umschlossen wird. Jeder der Kreise $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{J}$ berührt die Eilinie $\mathfrak{E}$. Bezeichnet $\mathfrak{N}_u$ und $\mathfrak{N}_i$ die Mengen der gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{U}$, bzw. mit $\mathfrak{J}$, dann haben diese Mengen die folgende Eigenschaft: *Projiziert man* $\mathfrak{N}_u$ *aus der gemeinsamen Mitte* $\mathfrak{M}$ *von* $\mathfrak{U}$ *und* $\mathfrak{J}$ *auf* $\mathfrak{J}$, *so ergibt sich auf* $\mathfrak{J}$ *eine Punktmenge, die sich durch keinen Durchmesser von der Menge* $\mathfrak{N}_i$ *trennen läßt.* Die gleiche Verteilungseigenschaft ergibt sich, wenn $\mathfrak{N}_u$ von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{U}$ projiziert wird. *Diese Verteilungseigenschaften der Mengen* $\mathfrak{N}_u$ *und* $\mathfrak{N}_i$ *sind für den Minimalkreisring* $(\mathfrak{U}, \mathfrak{J})$ *einer Eilinie* $\mathfrak{E}$ *kennzeichnend.*

Wird von der Eilinie $\mathfrak{E}$ von Π vorausgesetzt, daß sie den Ursprung O umschließt, dann trifft dies auch für den Kreis $\mathfrak{U}$ zu. Dagegen folgt aus dieser Annahme noch nicht, daß O ein innerer Punkt des Kreises $\mathfrak{J}$ ist, doch wird dies durch die zusätzliche Forderung der inversen Konvexität von $\mathfrak{E}$ bezüglich O gewährleistet. Besteht die Menge $\mathfrak{N}_i$ aus mindestens zwei Punkten, dann kann der Nachweis dafür, daß O im Inneren von $\mathfrak{J}$ liegt, in ganz genau der gleichen Weise wie für den Inkreis von $\mathfrak{K}_i$ erbracht werden. Die Verteilungseigenschaft dor Mengen $\mathfrak{N}_u$ und $\mathfrak{N}_i$ schließt jedoch den Fall nicht aus, daß $\mathfrak{N}_i$ etwa bloß aus einem Punkt A besteht. Allerdings muß dann $\mathfrak{N}_u$ aus mindestens zwei Punkten B und C bestehen, die die Endpunkte eines Durchmessers von $\mathfrak{J}$ sind. Aus der inversen Konvexität von $\mathfrak{E}$ bezüglich O folgt nunmehr, daß es durch jeden der Punkte A, B und C je einen Kreis a, b und c gibt, der $\mathfrak{E}$ berührt, durch O geht und zum Außenbereich $\mathfrak{B}_a(\mathfrak{E})$ von $\mathfrak{E}$ fremd ist. In einer Inversion mit O als Zentrum entsprechen sodann den Kreisen a, b und c die Tangenten a', b' und c' in den Punkten A', B' und C' an die zu $\mathfrak{E}$ inverse Eilinie $\mathfrak{E}'$, die O umschließt. Der Durchmessergeraden $g = [BC]$ entspricht in dieser Inversion jener Kreis g' durch O, der $\mathfrak{E}'$ in den Punkten B' und C' orthogonal schneidet. g' ist ein gemeinsamer Orthogonalkreis für die Kreise $\mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{J}'$, die den beiden Kreisen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{J}$ des Minimalkreisringes $(\mathfrak{U}, \mathfrak{J})$ von $\mathfrak{E}$ in der Inversion entsprechen. Der Kreis $\mathfrak{J}'$ berührt die Eilinie $\mathfrak{E}'$ im Punkte A', ist zum Innenbereich $\mathfrak{B}_i(\mathfrak{E}')$ von $\mathfrak{E}'$ fremd und schneidet g' orthogonal. Er muß daher die Eilinie $\mathfrak{E}'$ und damit O umschließen, was aber zur Folge hat, daß auch der dazu inverse Kreis $\mathfrak{J}$ den Ursprung O umschließt.

Diese Feststellung für den Ursprung O gilt in genau der gleichen Weise für jeden anderen Punkt der Zentralmenge $\mathfrak{Z}(\mathfrak{E})$ der inverskonvexen Eilinie $\mathfrak{E}$. *Es liegt also die Zentralmenge $\mathfrak{Z}(\mathfrak{E})$ einer inverskonvexen Eilinie $\mathfrak{E}$ ganz im Inneren des inneren Kreises $\mathfrak{J}$ des Minimalkreisringes $(\mathfrak{U}, \mathfrak{J})$ von $\mathfrak{E}$.*

Vermöge der Abbildung $\mathfrak{A}$ entspricht der bezüglich O inverskonvexen Eilinie $\mathfrak{E}$ von Π in der Ebene π die Mittelpunktseilinie $\mathfrak{e}$ mit o als Mitte, während dem Minimalkreisring $(\mathfrak{U}, \mathfrak{J})$ von $\mathfrak{E}$ ein Paar $(\mathfrak{u}, \mathfrak{i})$ konfokaler und zu $\mathfrak{e}$ konzentrischer Ellipsen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{i}$ entspricht, von denen $\mathfrak{u}$ die Eilinie $\mathfrak{e}$ umschließt, während $\mathfrak{i}$ von $\mathfrak{e}$ umschlossen wird. *Der durch $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{i}$ bestimmte Ring konfokaler Ellipsen soll als minimaler Ellipsenring von $\mathfrak{e}$ bezeichnet werden.* Unter allen konfokalen und zu $\mathfrak{e}$ konzentrischen Ellipsenringen, von denen die eine Ellipse $\mathfrak{e}$ umschließt, während die andere von $\mathfrak{e}$ umschlossen wird, ist dieser minimale Ellipsenring durch ein *Minimum der Invariantendifferenz* $q_u - q_i$, bzw. durch ein Minimum der Differenz der Flächeninhalte der Direktorkreise dieser Ellipsen gekennzeichnet. Aus der Eindeutigkeit des Minimalkreisringes $(\mathfrak{U}, \mathfrak{J})$ von $\mathfrak{E}$ folgt, daß auch der *minimale Ellipsenring* $(\mathfrak{u}, \mathfrak{i})$ *von $\mathfrak{e}$ eindeutig bestimmt* ist.

Ist für eine Eilinie $\mathfrak{E}$ von Π der Umkreis $\mathfrak{K}_u$ von $\mathfrak{E}$ mit dem Inkreis $\mathfrak{K}_i$ von $\mathfrak{E}$ konzentrisch, dann stellen diese beiden Kreise den Minimalkreisring $(\mathfrak{U} = \mathfrak{K}_u,\ \mathfrak{J} = \mathfrak{K}_i)$ von $\mathfrak{E}$ dar. Dies ist insbesondere immer dann der Fall, wenn $\mathfrak{E}$ *konstante Breite* besitzt. Die Mengen $\mathfrak{M}_u$ und $\mathfrak{M}_i$ der gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{K}_u$, bzw. $\mathfrak{K}_i$ sind in diesem Falle so verteilt, daß zu jedem Punkt P_u von

$\mathfrak{M}_u$ ein *Gegenpunkt* P_i von $\mathfrak{M}_i$ gehört, in dem die Tangente an $\mathfrak{E}$ gegensinnig parallel ist zur Tangente von $\mathfrak{E}$ in P_u.

Einer bezüglich O inverskonvexen Eilinie $\mathfrak{E}$ der konstanten Breite B von Π entspricht vermöge der Abbildung $\mathfrak{A}$ in der Ebene π eine Mittelspunktseilinie $\mathfrak{e}$ mit o als Mitte, die einen dazu konzentrischen Kreis mit $\sqrt{B}$ als Radius als orthoptische Kurve besitzt.[1] Die Umellipse $\mathfrak{k}_u$ und die Inellipse $\mathfrak{k}_i$ von $\mathfrak{e}$ stellen dann für diese Mittelpunktseilinie den minimalen Ellipsenring ($\mathfrak{u}=\mathfrak{k}_u$, $\mathfrak{i}=\mathfrak{k}_i$) dar. Zu jedem zu o symmetrischen Punktepaar der Menge $\mathfrak{m}_u$ der gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{k}_u$ gibt es dann stets ein zu o symmetrisches Punktepaar der Menge $\mathfrak{m}_i$ der gemeinsamen Punkte von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{k}_i$ derart, daß die Tangenten in diesen Punktepaaren sich in Gegenpunkten des orthoptischen Kreises von $\mathfrak{e}$ orthogonal schneiden.

In der vorliegenden Note wurden den Begriffsbildungen des Umkreises, des Inkreises sowie des Minimalkreisringes einer Eilinie $\mathfrak{E}$ der Ebene Π die entsprechenden Begriffsbildungen hinsichtlich der einer Mittelpunktseilinie $\mathfrak{e}$ der Ebene π um-, bzw. eingeschriebenen und zu $\mathfrak{e}$ konzentrischen Ellipsen gegenübergestellt. Die Ellipsen, die sich dabei ergaben, waren durch Extremwerte der Invariante q, bzw. der Invariantendifferenz $q_u - q_i$ gekennzeichnet. *Man kann nun in völlig analoger Weise die Frage nach der Umellipse, der Inellipse und dem minimalen Ellipsenring einer Mittelpunktseilinie* $\mathfrak{e}$ *stellen, wobei diese Ellipsen aber durch Extremwerte der Invariante* p, *bzw. der Invariantendifferenz* $p_u - p_i$ *gekennzeichnet sind.* Wegen 9 ist dann in diesem Sinne die Umellipse die flächenkleinste zu $\mathfrak{e}$ konzentrische Ellipse, die $\mathfrak{e}$ umschließt, die Inellipse die flächengrößte zu $\mathfrak{e}$ konzentrische Ellipse, die von $\mathfrak{e}$ umschlossen wird, während sich als minimaler Ellipsenring der flächenkleinste Ellipsenring ergibt, der aus ähnlichen und ähnlich liegenden und zu $\mathfrak{e}$ konzentrischen Ellipsen besteht, von denen die eine $\mathfrak{e}$ umschließt, während die andere von $\mathfrak{e}$ umschlossen wird.

Die Beantwortung dieser eben aufgeworfenen Frage gelingt nicht unmittelbar durch die Anwendung einer Abbildung wie in dem vorliegenden Falle, sondern erfordert anders geartete Überlegungen, über die in einer folgenden Note berichtet werden soll.

[1] Vergleiche die in Fußnote 2, p. 8, zitierte Arbeit, p. 242.