Fortsetzung siehe 3. und 4. Umschlagseite.

Denken und Darstellung

in Mathematik und Naturwissenschaften

Von

E. Study

Zweite verbesserte und erweiterte Auflage

Mit 10 Abbildungen

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Herausgeber dieses Heftes:
Geh. Reg.-Rat Prof. Dr.-Ing. e. h. Karl Scheel, Berlin

ISBN 978-3-663-00465-3 ISBN 978-3-663-02378-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-663-02378-4

HERRN

ALFRED HAMBURGER

IN DANKBARKEIT UND

FREUNDSCHAFT

Vorwort.

Wissenschaftliche Kritik wird regelmäßig (wenn auch wohl nicht oft genug) in bezug auf ein Richtig oder Falsch geübt; zuweilen betrifft sie auch Methodisches. Eine sehr weitgehende Toleranz gönnt man dagegen Darstellungsformen, wiewohl es vorkommt, daß Autoren ihre Arbeiten in halbfertigem Zustand der Öffentlichkeit übergeben und daß andere oder auch dieselben ganz ungerechtfertigte Ansprüche an die Kenntnisse ihrer Leser stellen.

Alles Denken hilft zum Denken nichts[1]), man muß richtig geboren sein, sagte Goethe. Aber Sprachen und Darstellungsformen lassen sich lernen, bei gutem Willen und mehr oder minder, versteht sich. Ich halte es daher für keinen gesunden Zustand, daß über solche Dinge fast immer geschwiegen wird, und ich befinde mich darin in vollkommener Übereinstimmung mit einem verdienten und verehrten Fachgenossen, Herrn M. Pasch, wenn ich auch die Erfordernisse einer guten Darstellung nicht ebenso umgrenzen kann wie er.

Wie die Schrift von Pasch, so erscheint nun auch die meinige in zweiter Auflage. Hinzugefügt sind mehrere Anhänge. Diese sollen Nichtmathematikern einiges näher bringen, das im Haupttext nur berührt werden konnte.

Überall habe ich mich, nach wie vor, auf die klassische Mathematik wie auf ein Bauwerk von in der Hauptsache solidester Struktur bezogen. Eine Rechtfertigung dieses Tuns werden einige, sogenannte Intuitionisten, für sehr nötig, wo nicht für unmöglich halten. Ich denke die Ansichten dieser Mathematiker zu würdigen, in einer besonderen Schrift, die in Vorbereitung ist.

Bonn, im Oktober 1928.

E. Study.

---

[1]) Gemeint ist wohl die Aristotelische Aufzählung der Schlußformen.

Unsere ganze Würde besteht im Denken. Bemühen wir uns also, richtig zu denken. Das ist der Anfang der Moral.

Diese Worte Blaise Pascals werden in einem kleinen Buche von M. Pasch angeführt, und sie bilden das Thema, das dort in Lehre und Beispiel abgehandelt wird [Mathematik und Logik, Leipzig 1919; zweite Auflage 1924][1]).

Richtig denken ist nicht immer dasselbe wie Richtiges denken. Falsch Gedachtes kann zufällig richtig sein, und richtig Gedachtes ist sogar häufig falsch; dann nämlich, wenn der Ausgangspunkt eine unzutreffende Voraussetzung war, wie bei dem indirekten Beweisverfahren der Mathematik. Gemeint ist folgerechtes Denken; von „richtigem" Denken reden wir, wenn die Regeln der Logik befolgt sind. Wir haben es nötig, wenn wir im Zusammenstoß mit den Dingen der Außenwelt nicht in Gefahr des Schiffbruchs geraten wollen. Vor allen Dingen aber ist folgerechtes Denken eine Forderung der Wahrheitsliebe.

Daß es mit der Folgerichtigkeit oft seine Schwierigkeiten hat, ist gewiß. Wir denken in Begriffen, Begriffe aber sind Abstrakta, deren Bildung und Handhabung um so mehr Aufmerksamkeit erfordert, je weiter wir uns von dem uns allen Vertrauten, von den Gegenständen und Aufgaben des täglichen Lebens entfernen. Mehr als andere Menschen haben die Mathematiker Übung im Umgang mit Abstraktionen, und doch versagen auch sie in diesem Punkte recht häufig. Selbst Forscher ersten Ranges haben es nicht immer fertig gebracht, den Inhalt ihrer Begriffe ganz gegenwärtig zu haben, und sie sind durch dieses Versagen ihres Gedächtnisses oder durch Ermüdung ihrer Aufmerksamkeit zu Fehlschlüssen verleitet worden.

Ferner können uns Wünsche den Blick trüben und unsere Gedanken verwirren. Dieses ist wohl von allen Fehlerquellen die ausgiebigste und wichtigste. Irgendwelche Ansichten haben wir nun einmal.

---

[1]) „Toute notre dignité consiste donc en la pensée. C'est de là qu'il faut nous relever, non de l'espace et de la durée, que nous ne saurions remplir. Travaillons donc à bien penser, voilà le principe de la morale." (Zitiert nach Pasch.)

Vielleicht stammen sie aus unserem Elternhaus, vielleicht haben wir sie aus der Schule mitgebracht, oder aus Versammlungen, in denen wir dem Zauber einzelner Redner, oder, viel häufiger noch, der Massensuggestion unterlegen sind. Viele wollen in solchen „Überzeugungen“ oder „Grundsätzen“ auf keine Weise erschüttert werden. Sie lesen dann nur Zeitungen einer bestimmten Richtung und verschließen die Augen selbst vor Tatsachen. Meldet sich das Gewissen, so finden sich auch Gründe. Diese sind bekanntlich wohlfeil wie Brombeeren. In solchen Fällen handelt es sich um eine zu einseitige Ansicht des zu beurteilenden Stoffes. Die eine oder andere Seite einer Sache erscheint uns als besonders wesentlich, und dann wird der Teil für das Ganze eingesetzt.

Auch der Forscher läßt sich, selbst wenn er Mathematiker ist, häufig durch eine vorgefaßte Meinung irreleiten. Er weiß schon, oder glaubt zu wissen, „was herauskommt“, und dann wird die Argumentation nicht allzu genau angesehen. Es gibt krasse Beispiele derart.

Andere ebenfalls sehr häufige Fehlerquellen sind Mangel an Ruhe oder Mangel an Zeit. Wir brauchen noch nicht einmal sonderlich nervös zu sein: Vorgänge der Umwelt drängen sich dennoch störend in den Ablauf unserer Gedanken ein. Irgend eine Arbeit soll zu gegebener Zeit fertig sein. Oder wir müssen schnell einen Entschluß fassen, und auch dann wollen die Gedanken nicht rasch genug ablaufen. Wir stehen wie gelähmt vor dem Anblick eines unerwarteten Ereignisses. So versagt mancher im Augenblick der Gefahr, auch wenn es ihm keineswegs an Mut gebricht; der Schiffsführer gibt einen verkehrten Befehl, der Flieger oder Bergsteiger tut einen falschen Griff oder Tritt. Der Arzt, der Kaufmann, ja jeder einzelne von uns kommt unzählige Male in die Lage, sich da entscheiden zu müssen, wo die Voraussetzungen zu einer sicheren Urteilsbildung gar nicht gegeben sind. Die fast unvermeidliche psychologische Wirkung hiervon ist die Entstehung von Gewohnheiten des Denkens, die die Wissenschaft nicht brauchen kann. Das wissenschaftliche Denken muß daher besonders erlernt und geübt werden, wiewohl es vom Denken des gemeinen Lebens grundsätzlich gar nicht verschieden ist.

Für den wissenschaftlichen Menschen ist nicht charakteristisch der schnell gefaßte Entschluß, das Ergreifen des Augenblicks, vielmehr — neben anderem — eine gewisse Bedächtigkeit, das gute Funktionieren eines Hemmungsapparates. Er und der Tatmensch stellen entgegengesetzte Pole menschlicher Begabung dar. Ein guter Mathematiker würde schwerlich ein guter General sein können. Auch der

Schachspieler unterscheidet sich dadurch vom Forscher, daß ihm eine eng bemessene Frist zur Entschließung gesetzt ist.

Hier soll nur von dem wissenschaftlichen Denken die Rede sein, das nicht übereilt zu werden braucht, und von dem, was als Anleitung dazu geboten werden kann.

Damit die geistige Arbeit des einzelnen recht fruchtbar werde, ist erforderlich, daß ihm, nach Stoff und Methode, möglichst vieles von dem zugute komme, was seine Vorgänger geleistet haben. Das Gedachte soll treu überliefert werden, Verfehltes soll der Kritik unterliegen, und alles soll, als Vorbild oder Warnung, der Erziehung dienen. Wo z. B. Vortragsformen Verbreitung finden, die ungewollte Lücken lassen, da wird die Bedeutung richtigen Denkens nicht gewürdigt. Wer Gefolgschaft wünscht, wird Sorge tragen müssen, daß andere seine Wegweisung verstehen. So hängt denn vieles von der Art der Darstellung ab, und also von der Beschaffenheit der benutzten Zeichen. Denn alle Darstellung bewegt sich notwendigerweise in Zeichen, in Wortzeichen, in Zeichen auf dem Papier, die Zeichen von Zeichen oder für Zeichen sind und vorher durch Wortzeichen erklärt sein müssen. Diese selbst aber lassen sich nicht alle erklären; schon Pascal hat darauf hingewiesen, daß das einen regressus ad infinitum bedeuten würde. Irgendwo müssen wir immer mit etwas anfangen, das wir als gegeben ansehen. Es kann sich ein Widerspruch einstellen. Lag dann nicht ein Denkfehler vor, so haben wir Gewißheit erlangt; allerdings nur die nicht immer willkommene Gewißheit, daß unsere Voraussetzung falsch war. In jedem anderen Falle ergibt sich, strenggenommen, nur ein Non liquet. Wir wissen nicht, ob wir weit genug gedacht haben, und ob sich nicht etwa doch noch ein Widerspruch einstellen könnte. Immerhin sind wir überzeugt, daß aus gewissen Voraussetzungen, namentlich aus denen, die dem Rechnen mit den natürlichen Zahlen zugrunde liegen, bei folgerechtem Denken niemals ein Widerspruch abgeleitet werden kann. Zu einer guten Darstellung gehört jedenfalls, daß die Voraussetzungen, von denen man ausgehen will, ausdrücklich formuliert werden, es sei denn, daß es sich um bekannte und auch allgemein anerkannte Dinge handelt. Ob dem aber wirklich so ist, darüber kann man sich sehr leicht täuschen. Es ist ein ganz gewöhnlicher Fehler, besonders der Anfänger, vorauszusetzen, daß ihre Leser alles das gelesen haben und wissen, was sie selbst gelesen haben und zu wissen glauben. Kunstausdrücke, die nicht allgemein üblich sind, werden oft selbst dann nicht erklärt, wenn nur wenige Worte dazu nötig wären.

An die Darlegung sind auch noch eine Menge von weiteren Forderungen zu stellen, wenn sie den Zweck der Verbreitung von Kenntnissen und der Entwicklung von Fähigkeiten genügend erfüllen soll. Nur wenn die Form der Mitteilung den höchsten Ansprüchen genügt, kann echte Wissenschaft Gemeingut vieler werden und dadurch zu hoher Blüte kommen. Es handelt sich also gewiß um wichtige Kulturwerte.

Vor allem kommt es an auf Genauigkeit des Ausdrucks. Es genügt nicht, daß der Schriftsteller das Richtige weiß; er muß es auch sagen, wenn er wirklich belehren will. Das liegt auch sehr in seinem eigenen Interesse, denn die Kritik kann und darf sich sogar nur an das halten, was gedruckt vorliegt. Es ist im Grunde unzulässig, zwischen den Zeilen lesen zu wollen.

Die „halbe Wahrheit“, die Paradoxie, enthält eine große Vorführung, denn gerade sie ist geeignet, einen starken Eindruck auf ungeschulte Leser zu machen, ja nicht einmal nur auf solche — auf viele, die derartiges als geistreich einzuschätzen pflegen. Sie ist das Kennzeichen des „journalistischen Stils“, den man leider gar oft auch in wissenschaftlichen Arbeiten findet.

Ich entnehme den Satz „Die Mathematik ist die Lehre vom Unendlichen“ einer philosophischen Abhandlung, die mit eben diesem Satze anfängt. Daß der Verfasser, ein angesehener Mathematiker, diese Definition seiner Wissenschaft für zutreffend halten sollte, ist ausgeschlossen. Aber warum gibt er sie dann?

Oder was sollen wir von folgendem Satze denken, der einen Forscher ersten Ranges zum Urheber hat:

„Geometrie treiben heißt die Eigenschaften unserer Meßwerkzeuge erforschen, die als Grundelemente die festen Körper und den Lichtstrahl haben.“

Die übliche Beurteilung von derartigem ist sehr milde. „Es ist doch etwas Richtiges daran.“ Das Schlimme ist aber gerade, daß nur etwas Richtiges daran ist, und daß man solche Aussprüche in populären Schriften findet. Man überlegt sich auch nicht, daß, wer es über sich gewinnt, so etwas zu schreiben, es mit dem Denken schwerlich sehr genau nehmen wird. Nach allen mir vorliegenden Erfahrungen muß ich glauben, daß solche Vorkommnisse immer als Symptome tiefer liegender Schäden zu deuten sind.

Es gibt auch Autoren, die ihre Gedanken ganz einfach im Zustand des Konzeptes drucken lassen, beispielsweise unverarbeitete Experimente oder gar Literaturauszüge vor die Öffentlichkeit bringen.

Die richtige Antwort der Kritik hierauf würde die ausdrückliche Ablehnung eines Referats sein. Man findet aber höchstens einmal die schüchterne Bemerkung, der Autor sei schwer zu verstehen.

Doch halten wir uns an ernst zu nehmende Schriftsteller, und wenden wir uns nun zur Betrachtung der Mathematik, als der Wissenschaft, in der Folgerichtigkeit sich am leichtesten erreichen läßt, und in der daher auch die Überlieferung des Gedachten zuerst eine sorgsame Pflege erfahren hat und bis auf den heutigen Tag erfährt. Aber worin besteht nun das Wesen der Mathematik, welches ist die genauere Beschaffenheit der Ansprüche, die an ihren Betrieb gestellt werden, oder die doch gestellt werden müssen, wenn ihre Darstellungsform anderen Wissenschaften zum Vorbild dienen soll? Und ist eine gute logische Ordnung der behandelten Gegenstände das einzige, was dann in Betracht kommt? Handelt es sich nicht überall um viel mehr noch als nur um die Entscheidung über Richtig und Falsch? Wer weiß, vielleicht verdient die Mathematik, die wir wirklich haben, gar nicht in allen Stücken das Lob, das ihr von freundlichen Beurteilern, besonders von Philosophen, gespendet zu werden pflegt!

Herr Pasch, zu dem ich nun zurückkomme, hat nur von der logischen Seite der Mathematik gehandelt. Diese aber sollte, so wichtig sie ist, nach meiner Meinung doch nicht aus dem Ganzen der Darstellungsfrage derart herausgelöst werden, daß sie als nahezu allein vorhanden erscheint.

Pasch setzt auseinander, wie er nach den Eindrücken seines Studiums klassischer Schriftsteller, sowie nach den Erfahrungen seiner eigenen, besonders den Grundlagen der mathematischen Wissenschaft gewidmeten Lebensarbeit und Lehrtätigkeit sich eine ideale mathematische Darstellung denkt; und das wird auch der mit Dank begrüßen, der nicht überall beizupflichten vermag. In diese Lage dürften allerdings manche kommen, die aus Paschs Schrift eine abfällige Kritik ihrer eigenen Betätigung herauslesen werden: Zu ihrer Verwunderung finden sie sich nicht etwa darum getadelt, weil ihre Leistung (vielleicht nur allzu weit) hinter ihrer, wie sie geglaubt hatten, vernünftigen Absicht zurückgeblieben ist, sondern sie sehen sich in ihrem Wollen selbst angegriffen. Zugleich aber müssen sie bemerken, daß auf ihre Absichten mit keinem Worte eingegangen wird. Selbst wenn es sich herausstellen sollte, daß Paschs Meinung haltbar ist, so wäre ihre Begründung doch wohl unzureichend. Es geht nicht an, dem Ideal zahlreicher Schriftsteller ohne weiteres ein anderes gegenüberzustellen; es hätten auch die keineswegs verborgenen, vielmehr offen zutage liegenden Argumente mit einiger Vollständigkeit aufgezeigt und gewürdigt werden müssen, die jene Schriftsteller als ausschlaggebend ansehen. Und um so mehr hätten wir das erwarten dürfen, als manches von dem, was hier in Betracht kommt, in einem Werke erörtert worden ist, dessen Verfasser zu den Koryphäen der mathematischen Wissenschaft zählt und kein geringerer ist als H. Poincaré[1]). Erst dann jedenfalls, wenn es Pasch gelungen wäre, uns die Gewichtslosigkeit aller jener Argumente einleuchtend zu machen, könnten wir sagen, daß er seine These wirklich begründet hat. Er hat aber gar keinen Versuch dazu gemacht. Ein etwas unduldsames Ideal wird uns vor Augen gestellt, das selbst von dem Dasein anderer Ideale kaum Kenntnis nehmen will. Abgesehen von einigen wenigen Äußerungen, die mir mit dem übrigen nicht recht vereinbar zu sein scheinen, bekommen wir überall nur eine Seite von einer Sache zu sehen, die aus mancherlei Gesichtspunkten betrachtet werden sollte.

Wie Pasch, so werde auch ich versuchen, wenigstens in der Hauptsache noch anderen als nur Mathematikern verständlich zu sein. Überall wird sich das nicht erreichen lassen; Beispiele, auf die Bezug genommen werden wird, können nur dem etwas sagen, der sie schon kennt. Indessen wird die Verständlichkeit des Ganzen dadurch wohl nicht sehr beeinträchtigt werden. Ich denke mir außer Mathematikern und Philosophen solche Leser, die irgend eines der naturwissenschaftlichen Fächer betreiben und das Bedürfnis haben, über die Quellen ihrer Erkenntnis und den Sinn ihres Tuns nachzugrübeln. Freilich kommt es mir so vor, als ob manchen das, was ich zu sagen haben werde, als ebenso selbstverständlich erscheinen müßte, wie es mir erschienen ist. Indessen hat nun Herr Pasch mich, und vielleicht auch andere, aus solcher Gemütsruhe aufgestört. Jedenfalls scheint es mir, daß seine Schrift eine Erwiderung sehr wohl verdient — um so mehr, als über das, was von einer brauchbaren Darstellung zu verlangen ist, tatsächlich eine große Unsicherheit besteht.

Es ist bedauerlich, aber nun einmal nicht zu ändern, daß wir Menschen, nicht Götter sind. Laien übersehen das öfter, wenn sie etwas damit zu sagen meinen, daß die Mathematik „nichts Neues“ hervorbringen kann, da doch alles schon in den Voraussetzungen dieser

[1]) Science et Méthode. Deutsch unter dem Titel Wissenschaft und Methode, herausgegeben von F. und L. Lindemann. (Leipzig und Berlin 1914.)

Wissenschaft steckt. Und auch Mathematikern begegnet gelegentlich etwas Ähnliches. Die vielfach benutzte Fiktion eines denkenden Wesens mit ewigem Leben und unbegrenztem Gedächtnis, sowie mit unermeßlicher Geduld, hat ohne Zweifel ihren Wert, sie hat aber doch immer nur die Bedeutung einer Fiktion. Daraus, daß der nach Art eines Buddha in den Anblick seiner erhabenen Lehre versunkene Mathematiker nur zu leicht sogar die Grenzen des eigenen Daseins vergißt, ist die zu Gauß' Zeiten noch nicht übliche, später aber, ich glaube unter dem Einfluß von Kronecker, sehr in Aufnahme gekommene übertriebene Wertschätzung sogenannter ausführbarer Operationen entstanden, die in Wirklichkeit für uns meistens so wenig ausführbar sind als andere von den Mathematikern untersuchte Prozesse[1]).

Eine andere Wirkung desselben Vergessens zeigt sich, wenn auch nur für einen größeren Teil der Mathematik eine Darstellungsform empfohlen wird, die sich wohl in ausgewählten Beispielen verwirklichen läßt, deren Einführung in größerem Maßstab jedoch an der baren Unmöglichkeit solchen Beginnens scheitern muß.

Pasch verlangt grundsätzlich eine restlose Auflösung aller Deduktionen in wohlgegliederte einfache Syllogismen[2]).

---

[1]) Ausführbar heißen Rechnungen mit den vier Spezies in endlicher Wiederholung. Z. B. die Darstellung der Zahl 2^{1000} im dekadischen Zahlensystem, die Aufsuchung der Primteiler noch so großer Zahlen u. a. m. Irrationale Zahlen wie $\sqrt{2}$, die Zahl π, die Basis des natürlichen Logarithmensystems u. a. können auch theoretisch nur näherungsweise berechnet werden. (Die Zahlen $\frac{22}{7}, \frac{355}{113}$ sind bekannte Näherungswerte für π.) Unendliche Summationen wie

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} + - \cdots,$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \cdots,$$

$$e = 1 + \frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \cdots$$

sind also nicht „ausführbar". Aber auch mit solchen Summen („unendlicher Reihen") rechnet der Mathematiker mit vollkommener Sicherheit.

[2]) Hierunter sind nicht nur die Schlüsse der aristotelischen Logik zu verstehen, denen in der Mathematik nur eine sehr untergeordnete Bedeutung zukommt (Russell, Hölder), sondern vor allem die der Mathematik eigentümlichen Schlußweisen, die oft ohne Rücksicht auf ihren erkenntnistheoretischen Charakter Anwendung finden. Zum Beispiel: „Wenn in einer mit Hindernissen besteckten Ebene die Punkte p und q durch einen zusammenhängenden Kurvenzug verbunden werden können,

Sollte diese Vorschrift wörtlich genommen und befolgt werden, so würde aus jeder Abhandlung ein Buch entstehen, manches Buch, besonders auch schon jedes umfangreichere Lehrbuch, müßte sich in eine kleine Bibliothek verwandeln. Nicht nur die Ausbildungszeit des Jüngers der vornehmsten Denkwissenschaft müßte beträchtlich verlängert werden, sondern die Spanne seines Erdenwallens selbst.

Und selbst einer an sich vielleicht empfehlenswerten Annäherung an vollständige Schlußketten stellen sich oft unübersteigliche Hindernisse entgegen. Redaktionen dringen auf Kürze, Verleger wollen dicke Bücher nicht drucken, und gerade jüngere Autoren, solche, die am wenigsten wissen, was gesagt werden muß und was allenfalls unterdrückt werden kann, werden davon am meisten betroffen. Mit solchen Tatsachen muß gerechnet werden[1]).

Es handelt sich also, selbstverständlicherweise, nur um ein Ideal; ein Ideal, das freilich nie aus den Augen gelassen werden sollte.

In gewissem Umfange hat ja Pasch sicherlich recht. Es gibt Fälle genug, in denen ein vorsichtiges Fortschreiten in einfachen Syllogismen nicht entbehrt werden kann. Unter den Voraussetzungen von Euklids geometrischem System fand sich eine, deren Daseinsgrund nicht recht

---

der die Hindernisse vermeidet, und die Punkte q und r ebenfalls, so können auch p und r so verbunden werden."

Wenn der Mathematiker aus $a > b > \cdots > m > n$ schließt $a > n$, so würde die vollständige Schlußkette sein:

$$\begin{array}{ll} a > b, & b > c : a > c; \\ a > c, & c > d : a > d; \\ \hline a > m, & m > n : a > n. \end{array}$$

Natürlich ist das Auseinanderlegen zusammengezogener Schlüsse nicht immer so einfach wie in diesem trivialen Beispiel.

[1]) Wie klein die Schritte sind, in die nach Pasch der Fortschritt des Gedankens zerlegt werden soll, mag durch ein Beispiel erläutert werden, das ich Paschs „Grundlagen der Analysis" (1909) entlehne. Es findet sich dort der Grundsatz (Nr. 2):

„Sind Dinge angegeben, so kann nach diesen Angaben ein von diesen Dingen verschiedenes Ding angegeben werden."

Hierauf folgt dann, unter anderem, ein Lehrsatz (Nr. 14):

„Sind Dinge angegeben, so können nach diesen andere Dinge angegeben werden."

Man achte auf die Unterscheidung: Ein Ding — Dinge.

(Als Ding gilt, nach einer vorausgeschickten Erklärung, irgend etwas Wahrgenommenes oder Wahrnehmbares. Die Frage, ob unsere Sinneswahrnehmung etwas mit Mathematik zu tun hat, will ich hier auf sich beruhen lassen.)

verständlich schien, das Parallelenpostulat. Man versuchte ohne sie auszukommen, und nach Überwindung vieler Schwierigkeiten gelang es schließlich, der Sache auf den Grund zu gehen. Es zeigte sich, daß der unternommene Versuch scheitern mußte, aber man wurde entschädigt durch Entdeckung der Nicht-Euklidischen Geometrie. Wo Zweifel entstehen konnten, da ist man auch noch in anderen Fällen so verfahren, und man wird es auch künftig tun müssen[1]). Die Meinung der Mehrzahl der Mathematiker geht indessen dahin, daß eine so schwerfällige Darstellungsform in der Regel nicht nötig ist. Nur für Anfänger sind ausgeführte Muster vollständiger Deduktionen ganz unentbehrlich, da sie eben erst lernen müssen, was ein Beweis ist.

Aber auch für Anfänger wird es sich nicht empfehlen, viele so zergliederte Beweisgänge aneinanderzureihen. Diese Darstellungsform entbehrt allzusehr der Übersichtlichkeit, und außerdem gehört sie entschieden zum genre ennuyeux. Geistig regsame Menschen halten das erdrückende Einerlei dieser Vortragsart nicht aus. Zum Glück trifft aber auch das gar nicht zu, was Pasch zur Begründung seiner Forderung ausführt. Die Erfahrung anderer Mathematiker bestätigt es keineswegs, daß **nur** eine zu Ende geführte Zergliederung des Beweisganges wahrhaft überzeugend wirken kann.

Pasch beruft sich, unter anderem, auf Aussprüche von Gauß, deren erster sich in dessen Dissertation findet, also schon aus dem Jahre 1799 stammt. An gewissen von großen Mathematikern herrührenden Entwicklungen wird die Form getadelt, „die zwar bei der Auffindung neuer Wahrheiten von großem Nutzen sein kann, aber bei der Veröffentlichung von Beweisen nicht gestattet werden darf“. Ähnliche Äußerungen stammen aus den Jahren 1831 und 1832. Es bedarf „vollständiger Entwicklungen, wenn sie wahrhaft überzeugend sein sollen“. „Die meisten Menschen haben gar nicht den rechten Sinn für das, worauf es dabei ankommt, und ich habe nur wenige Menschen gefunden, die das, was ich ihnen mitteilte, mit besonderem Interesse aufnahmen. Um das zu können, muß man erst lebendig gefühlt haben, was eigentlich fehlt, und darüber sind die meisten Menschen ganz unklar.“

Wie ist das nun zu verstehen? Wollte der Princeps Mathematicorum sagen, daß den Lesern mathematischer Schriften jeder kleinste Fortschritt des Gedankens einzeln vor Augen gestellt und sozusagen eingehämmert werden soll? War es seine Meinung, daß

[1]) Ein weiteres Beispiel wird später angegeben.

Schlußketten, die sich hier und dort wiederholen, die der Erfahrene also genugsam kennt, immer wieder von neuem aufgerollt werden sollen? Die Art, wie Gauß selbst zu schreiben pflegte, dürfte einer so buchstäblichen Deutung seiner Worte kaum günstig sein. Gauß hatte Schriften im Auge, die nach seiner wohlbegründeten Meinung wesentliche Denklücken enthielten, nämlich solche, die die Verfasser für sich selbst nicht ausgefüllt hatten und die auszufüllen sie also auch ihren Lesern nicht zumuten durften. Die angewendete Darstellungsform aber war geeignet, diesen Umstand zu verschleiern. Den meisten von denen, die nicht zu verstehen vermochten, konnte es ja gar nicht in den Sinn kommen, die Schuld daran dem Autor aufzubürden. Sie erhielten die doch versprochene Belehrung nicht und wurden entmutigt noch obendrein. Gewiß war das zu mißbilligen, daß aber dem Leser mathematischer Schriften die Anstrengung zu selbständiger Denkarbeit erspart werden solle, hat Gauß sicherlich nicht sagen wollen. Und wir besitzen dafür auch ein ausdrückliches Zeugnis. In einem mir vorliegenden Briefe aus dem Jahre 1849 (von dem das Gauß-Archiv zu Göttingen eine Abschrift besitzt) heißt es nämlich: „Die durchsichtige Klarheit ist ... etwas Relatives, denn man schreibt doch immer für eine bestimmte Klasse von Lesern, bei denen man ein gewisses Maaß von Vorbildung und selbsttätiger Umsicht voraussetzt.“ Diese Äußerung stammt aus Gauß' späteren Jahren, aber zweifellos ist dasselbe auch schon Ansicht des jungen Gauß gewesen.

„Lücken“ der Darstellung hängen nicht immer nur von dem ab, der schreibt, sondern, sehr gewöhnlich sogar, auch von dem, der liest. Der Rückschluß auf Denklücken des Autors ist zuweilen möglich, verlangt aber äußerste Vorsicht. Wer Klarheit vermißt, mag das sagen, er muß aber seinen Tadel spezifizieren, wenn er sich nicht selbst dem Vorwurf der Unklarheit aussetzen will, und nicht immer wird dergleichen leicht so auseinanderzusetzen sein, daß auch der Widerwillige es zugeben muß. Das hat selbst Gauß erfahren. Der sogenannte Fundamentalsatz der Algebra gehört zu einer Klasse mathematischer Lehrsätze, die sehr leicht zu finden, d. h. zu vermuten, aber durchaus nicht ebenso leicht zu beweisen sind, oder die doch zur Zeit ihrer Auffindung nicht leicht ordentlich zu begründen waren. Zu einer Klasse von Sätzen also, bei denen alles auf den Beweis ankommt. Erst Gauß hat die Sachlage richtig erkannt und Beweise geführt (vier Beweise!), gegen die sich begründete Einwände nicht erheben lassen. Aber noch heute figuriert dieser Satz in der französischen Literatur als Theorème de d'Alembert. Nur wenn die Fehler auch in den Ergebnissen zutage treten, wie es zum Glück ja gewöhnlich der Fall ist, gelingt es nicht, den wirklichen Sachverhalt zu verdunkeln, wenigstens nicht auf die Dauer.

Auf Denkfehler der Autoren beziehen sich auch Äußerungen eines anderen großen Mathematikers, die Pasch anführt. Gerade im schlimmsten der von Abel getadelten Vorkommnisse, bei dem Rechnen mit divergenten Reihenentwicklungen, hätten sich ganz lückenlose Schlußketten herstellen lassen, es wäre aber dadurch gar nichts gebessert worden. Man hätte nur, nach Art der modernen Axiomatiker, die Annahme, daß auch mit solchen Reihen, wie mit wohldefinierten Zahlen, in sonst üblicher Weise gerechnet werden darf, als ein besonderes Postulat hinstellen müssen. Der Widersinn steckte nämlich schon in der Voraussetzung der Argumentation, bei deren Annahme man zu wenig Umsicht entwickelt hatte[1]). Grundsätzlich unzulässig ist es aber nicht, Postulate aufzustellen, von denen es zweifelhaft bleibt, ob sie widerspruchsfrei sind. Tatsächlich lag die Sache ziemlich lange so im Falle der Nicht-Euklidischen Geometrie (bis 1871). Ob ein Widerspruch an den Tag kommt, der schon in den Voraussetzungen steckt, hängt dann lediglich davon ab, in welcher Richtung man weiterdenkt, und wie weit man dabei geht. Es gibt kein Kriterium, das uns dabei

---

[1]) Die auf S. 8 angeführten Formeln für $\sqrt{2}$, $\pi/4$ und e sind Beispiele für konvergente „unendliche Reihen" (Summen). Man kann z. B. dem Zahlenwert $\pi/4$ beliebig nahe kommen dadurch, daß man in der Folge der Summen

$$1,\ 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3},\ 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{13}{15},\ 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{76}{105},\cdots$$

weit genug geht. Divergent heißen „unendliche Reihen" $a_0+a_1+a_2+\cdots$ (ad inf.), deren Teilsummen $a_0,\ a_0+a_1,\ a_0+a_1+a_2,\cdots$ sich keiner bestimmten Zahl unbegrenzt nähern. Ein berühmtes Beispiel ist $1-1+1-1+-\cdots$ (ad inf.). Daß hierauf die Regeln des gewöhnlichen Zahlenrechnens nicht angewendet werden dürfen, ist leicht zu sehen:

$$\begin{aligned} 0 &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots\cdots \quad \text{(ad inf.)} \\ &= 1-1+1-1+1-1+\cdots\cdots \quad \text{(ad inf.)} \\ &= 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots \quad \text{(ad inf.)} = 1-0. \end{aligned}$$

Man erhält also den Widerspruch $0=1$. Gerade solche Fehler hatten die von Abel getadelten Mathematiker begangen. Übrigens sind auch auf konvergente Reihen die gewöhnlichen Rechenregeln nicht unbedingt anwendbar. Wegen der interessanten Geschichte der angeführten Reihe siehe G. Kowalewski, Die klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen (Leipzig 1910), S. 48. Leibniz war noch ganz im unklaren über den wirklichen Sachverhalt.

leiten könnte. Mit dem Dasein oder Fehlen von Lücken des Vortrags hat das Übersehen oder die Auffindung von Irrtümern dieser Art gar nichts zu tun.

Ich halte also eine weitgetriebene Atomisierung der Beweisgänge nicht für notwendig, aber auch nicht einmal für erstrebenswert. Auf den hinreichend Vorbereiteten und Befähigten wirkt vollkommen überzeugend schon eine Darstellung des Beweisgangs, die nur die Hauptwendungen des Gedankens, das eigentlich Neue an der angestellten Überlegung, mit ausreichender Deutlichkeit bezeichnet. Wes Geistesart aber so beschaffen ist, daß ihm nichts überlassen werden darf, der sollte sich lieber von der Mathematik fernhalten. Die moderne Schreibart, die ja gewiß auch ihre Nachteile hat, verdient in den meisten Fällen vor dem starren syllogistischen Schema auch darum den Vorzug, und zwar bei weitem, weil sie dem Leser oder Schüler das demütigende Bewußtsein erspart, am Gängelbande geführt zu werden. Das Wort von der beleidigenden Klarheit hat einen guten Sinn.

Daß mangelhaft vorgebildete oder zu wenig begabte Personen durch abkürzende Darstellungsformen zum Irrtum verleitet werden können, und daß auch der Geübte in der Ergänzung ausgelassener Mittelglieder Schwierigkeiten finden kann, ist gewiß richtig. Von jedem Gesetzbuch ist ungefähr dasselbe zu sagen. Auch Gesetzbücher sind nicht so abgefaßt und können nicht so abgefaßt werden, daß nirgends ein Zweifel entstehen könnte. In der Mathematik würde das Atomisieren vieler Beweise eine allgemeine Senkung des Niveaus der Produktion und des Unterrichts zur Folge haben müssen. Was Pasch verlangt, läuft zwar nicht der Absicht nach, wohl aber tatsächlich darauf hinaus, daß die Darstellung in Wort und Schrift auf die ganz Unbefähigten zugeschnitten werden soll. Den einfachen Syllogismus verstehen ja auch diese noch, Schwierigkeiten logischer Natur kommen erst mit den zusammengezogenen Schlußketten. Dann aber fragt es sich, ob die, deren Denkkraft nicht über den gewöhnlichen Syllogismus hinausreicht, für die Seligkeiten des reinen Erkennens die rechte Würdigung finden werden. Könnte man sie notdürftig zu Mathematikern entwickeln, so wäre der Nutzen davon sehr zweifelhaft, ganz gewiß aber ist die Schädigung, die schon der bloße Versuch anderen zufügen muß. Auf einen reichen Geist muß eine solche Unterweisung geradezu abschreckend wirken. Man wird die willigsten und gelehrigsten Schüler nicht immer für die Befähigtsten halten dürfen, gerade die Tüchtigsten finden sich wohl meistens unter denen, die lieber eigene Wege gehen. Die selteneren Anlagen wollen sich nicht durch Vorlesungen bilden lassen, sondern bilden sich selbst (Gauß). Was Paschs Ideal wirklich entsprechen würde, wären Lehrbücher „ad usum delphini". Wassersuppen, auf denen hier und dort ein Fettauge schwimmt, sind keine nahrhafte Kost. Ohnehin bleiben zuviele im ABC stecken. Sie kommen nicht sonderlich weit über das Buchstabieren hinaus, bringen es allenfalls noch „zum Zusammenlesen". Auch das ist ein Ausspruch von Gauß. Bei obligatorischer Einführung des Schneckenganges würde das Steckenbleiben allgemein werden. Wer große Schritte machen kann, läßt sich nicht die Füße fesseln und zum Trippeln zwingen. Das sollte gar nicht erst versucht werden.

Zu alledem kommt noch, daß es letzte (unzerlegbare) Bestandteile „Atome" des Denkens, vielleicht gar nicht gibt. Man würde dann also die vorhandene Unsicherheit nicht aufheben, sondern nur verschieben können, immer wieder verschieben, ohne daß ein Ende davon zu sehen wäre.

Und es kommt auch noch anderes in Betracht, das gegen eine weitgetriebene Zersplitterung mathematischer Gedanken spricht.

Auch solche, die nicht eben zum Forschen berufen sind, oder die durch ungünstige äußere Umstände daran verhindert werden, sollen einen Einblick erhalten in die Art, wie sich der wissenschaftliche Fortschritt vollzieht. Sie müssen dann die nun einmal üblich gewordene Denkstenographie in gewissem Maße zu beherrschen lernen. Auch wer nur mäßige Fähigkeiten hat, soll sich einigermaßen in der Literatur zurechtfinden können, mag diese Literatur beurteilt werden wie sie will. Wie sie auch beschaffen sein mag, immer ist sie der Ausgangspunkt jedes weiteren Fortschritts. Denken wir uns einen angehenden Mathematiker, der lediglich eine Ausbildung im Sinne von Pasch erhalten hat und zum erstenmal eine wissenschaftliche Zeitschrift in die Hand nimmt! Allenthalben findet er sich dann vor einen Anblick gestellt, der ihn wie Hieroglyphenschrift anmuten muß. Es wird ihm ergehen wie jenem Studierenden einer amerikanischen Universität, dem man (ebenfalls aus tiefgeschöpften Gründen!) die Reihenfolge der Buchstaben des Alphabets nicht beigebracht hatte, und der dann das Lexikon nicht zu brauchen wußte. Oder vielmehr, er wird vor eine ihm ebenso neue, aber sehr viel schwierigere Aufgabe gestellt. Das wäre also eine der zu erwartenden Wirkungen, wenn mit der Durchführung des besprochenen Grundsatzes Ernst gemacht werden sollte.

Ich vermag demnach in den von Pasch beklagten Erscheinungen einen ernstlichen Mangel der freien Darstellungsform gar nicht zu erblicken. Mehr fällt ein anderer Umstand ins Gewicht, den Pasch treffend hervorhebt. Werden Abkürzungen einmal zugelassen, so ist es nicht leicht, eine Grenze zu finden, und für den Schriftsteller fällt die Nötigung zur Selbstkontrolle weg. Daher eben rührt der betrübende Zustand, in den gewisse mathematische Disziplinen geraten konnten. Dieses nicht ernst genug zu nehmende Übel dürfte sich aber beseitigen lassen, ohne daß man gleich dazu übergeht, den Autoren eine Zwangsjacke anzulegen. Forscher, die genügende Erfahrung haben, um zu wissen, worauf es ankommt, sollten sich öfter als üblich entschließen, Kritiken zu schreiben, anstatt das Rezensieren Anfängern zu überlassen. Man würde den Autoren, die doch meistens den besten Willen haben, dadurch einen viel größeren Dienst erweisen als durch Aufstellung abstrakter Vorschriften nach Art des Katechismus. Das bloße Moralisieren hilft hier wie überall nur wenig. Würden an die Kritik höhere Ansprüche gestellt, als es leider geschieht, so könnten jene Übelstände zwar nicht ganz beseitigt, aber doch sehr eingeschränkt und nahezu unschädlich gemacht werden, wie es in einigen genügend vor Dilettantismus behüteten Gebieten, namentlich in der Zahlentheorie, wirklich zutrifft. Eine umständliche und zeitraubende Analyse längerer Beweisgänge wäre dazu wohl nur selten nötig. In vielen Fällen kann es ja genügen, die Ergebnisse zu kritisieren, da der Rückschluß auf Mängel der Deduktion ganz eindeutig ist. Wer Ansehen hat, darf sich kurz fassen. Einer von oben herab geübten Kritik, dem Kritisieren ohne Angabe von Gründen, soll damit natürlich nicht das Wort geredet werden.

Auch im Unterricht dient der Anleitung zu folgerechtem Denken mehr noch als eine Sammlung zergliederter Schlußketten die Vorführung tatsächlich vorgekommener Fehlschlüsse. Solche gibt es von jedem Kaliber, und dazu ein dankbares Publikum. Langweilig ist dieser Stoff nämlich nicht. Gröbere Verstöße werden dem Anfänger zur Warnung dienen, Irrtümer, die sorgfältig arbeitenden Forschern begegnet sind, dem Fortgeschrittenen lehrreich sein. Was hat die Wissenschaft nicht alles den Lehren zu verdanken, die aus allerlei Mißgriffen gezogen worden sind! Z. B. kennt man heute eine Menge bizarrer und kurzweiliger Funktionen, die, wenn zu nichts anderem, so doch dazu gut sind, die Fehlerhaftigkeit gewisser Schlußfolgerungen handgreiflich zu machen.

Daß aus der Stetigkeit einer Funktion nicht ihre Differentiierbarkeit folgt, kann man heute durch einfache Beispiele belegen, ebenso daß ältere Kriterien des Maximums ungenügend sind, eine früher übliche Definition des Flächeninhaltes unbrauchbar ist u. a. m.[1]).

Daß die Unterweisung in Wort und Schrift dauernd fesseln und anregen soll (wohlgemerkt nicht jeden, aber den genügend Begabten), wird an keiner Stelle in Paschs Programm berührt. Immer handelt es sich da um die Übermittlung eines fertigen und darum toten Stoffes, als methodisches Ziel erscheint so gut wie ausschließlich die Aufgabe, zu überzeugen.

Sehen wir zunächst von anderem ab, so werden wir uns doch der Einsicht nicht verschließen dürfen, daß es verschiedene Arten des Überzeugtwerdens gibt, und daß sie nicht alle gleichwertig sind. Bekanntlich hat Schopenhauer einen Unterschied zwischen Überzeugen und Überführen gemacht. Er sprach von Mausefallenbeweisen. War nun auch sein Beispiel ungeeignet, so gibt es doch Deduktionen, die der Forderung Paschs vollkommen genügen und dennoch das Gefühl der Unbefriedigung zurücklassen. Das dürfte daran liegen, daß zwar eine vereinzelte Einsicht erreicht worden ist, die Kräfte des Lernenden aber dadurch nicht gewachsen sind. Durch so manchen Beweis fühlen wir uns mehr düpiert als belehrt.

Als junger Student hörte ich einmal einen langen Vortrag „Über Berührungstransformationen", wobei der Redende, ein älterer Studierender, die Tafel mit einem Heer von Formeln bedeckte. Nach Schluß fragte jemand, zu nicht geringer Entrüstung des Vortragenden: „Was sind Berührungstransformationen?" Die kalte Dusche war wohlverdient. Die angewendete Logik mochte ja in Ordnung sein, aber durfte das genügen? Was heißt denn Verstehen? Müssen etwa die Hörer eines Vortrages mit dem zufrieden sein, womit der Vortragende selbst zufrieden ist? „Heißt es die Beweisführung eines Theorems verstehen, wenn man der Reihe nach jeden der Syllogismen prüft, mit denen die Beweisführung zu tun hat, und bestätigt, daß das Theorem richtig ist ... Heißt es eine Definition verstehen, wenn man nur erkennt, daß man den Sinn aller angewandten Worte bereits kennt und konstatiert, daß die Definition keinen Widerspruch enthält?" (Poincaré, S. 104.) Die Einsicht, dieses ist richtig, jenes falsch, ist doch gewiß nur ein Anfang, ja sogar, vom pädagogischen Standpunkt aus betrachtet, oft genug nicht einmal ein glücklicher Anfang.

---

[1]) Siehe die Anhänge II, III, IV.

Poincaré hat in ähnlichem Zusammenhang an das Schachspiel erinnert. Wer nur die Spielregeln kennt, wird einer Meisterpartie noch ganz verständnislos gegenüberstehen. Warum wird dieser Zug getan und jener andere nicht, der doch so viel stärker zu sein scheint? Also kommt es darauf an, nicht dogmatisch vorzugehen, sondern eine motivierte Auswahl zu treffen, und zwar in der Mathematik eine Wahl unter unbegrenzt vielen Möglichkeiten. Das Weiterschließen verlangt einen Willensakt, der zwar nicht immer als solcher ins Bewußtsein zu treten braucht, oft genug aber kenntlich ist, z. B. an Ermüdungserscheinungen. Und das Motiv unserer Entscheidung ist immer ein Werturteil. So stehen wir denn, insbesondere in der Mathematik, vor einer der heikelsten Fragen, die es gibt:

Was ist wertvoll?

Nach welchen Grundsätzen also sollen wir unsere Urteilsbildung einrichten? Wie sollen wir unsere Ziele stecken?

Ohne Zweifel ist es hoffnungslos, über so etwas zu einer vollkommenen Einigung zu gelangen. Denn es ist allzuviel Menschliches im Wertbegriff.

Allerdings, daß der Gedankeninhalt der Differential- und Integralrechnung wertvoll ist, wird niemand bezweifeln, der ein Recht zum Mitreden hat. Aber schon wenn es sich um Geometrie oder Mengenlehre handelt, gehen die Urteile der Sachverständigen auseinander. Je origineller zwei Köpfe sind, um so verschiedener werden ihre Erfahrungen sein, und um so verschiedener dann auch ihre Werturteile. Für den Forscher wie für den Lernenden aber handelt es sich zunächst gar nicht einmal um Wertungen, zu deren Begründung auf eine fertig vorliegende wissenschaftliche Erfahrung verwiesen werden könnte. Vielmehr ist das abzuschätzen und in eine Art von wenn auch noch so unvollkommener und subjektiver Rangordnung zu bringen, was für unser Denken erst der Anlage nach da ist, sich sozusagen noch im Embryonalzustande befindet, was eben erst zufolge einer vielleicht umfangreichen Arbeit reifen und zu wirklichem Wissen werden kann. Schlußketten schnell zu durchlaufen, wird dann dem Mathematiker von größtem Nutzen sein, aber es wird bei weitem nicht genügen. Irgendwo muß in der einzelnen Schlußkette auch der Begabteste haltmachen, sie alle zu übersehen ist unmöglich. Also muß dem Forscher eine Ahnung dessen, was kommen soll, und zugleich eine Vorstellung von seiner Bedeutung für die fernere Forschung die strenge Logik vertreten: Der Forscher muß in nicht zu geringem Maße das besitzen, was Poincaré

Intuition nannte, was wohl auch wissenschaftlicher Instinkt oder besser wissenschaftlicher Takt heißt. Vor allen Dingen muß der Forscher Phantasie haben: Die reine Logik ist unfruchtbar, weil sie sich sofort ins Uferlose verliert. Wie sollte man das auf eine Formel bringen?

Und auch der Lernende mit seinen sehr viel bescheideneren Zielen muß doch immerhin so viel davon haben, daß er auf die Frage: Warum betreibe ich dieses, warum verfahre ich dann so und nicht anders, sich eine Antwort zu geben weiß, die etwas mehr bedeutet als die Verweisung auf die Autorität seines Lehrers oder eines Lehrbuchs. Ohne Zweifel werden solche Antworten sehr verschieden ausfallen, je nach dem Maße von wissenschaftlicher Erfahrung, das dem einzelnen schon geworden ist, je nach der größeren oder geringeren Beweglichkeit seines Geistes, je nach dem Eindruck, den früher gemachte Erfahrungen in seinem Gedächtnis hinterlassen haben. Alles das ist höchst persönlicher Natur.

Das beste, was über mathematische und überhaupt wissenschaftliche Werte im allgemeinen sich sagen läßt, dürfte Poincaré gesagt haben, so trivial man seine Erklärung auch finden mag, nachdem sie einmal ausgesprochen ist. Wertvoll ist, was sich häufig wiederholt und daher viele Anwendungen zuläßt. Darum sucht der Naturforscher Gesetze, darum legt der Mathematiker Wert auf Abstraktion: Beidemal handelt es sich um eine Zusammenfassung von vielem für unser Denken Gleichartigem und um eine dadurch zu bewirkende Erleichterung des Denkens. „Hier ist Johann ohne Land vorübergegangen“ ist für uns ohne Bedeutung, denn es wird nie wieder geschehen, die Kenntnis der Tatsache ohne Zusammenhang fördert uns nicht.

Freilich darf das Gesagte nicht so verstanden werden, als ob immer wieder dasselbe in Erscheinung treten müßte. Aber es mag Ähnliches vorkommen. Benutzen wir Folgerungen aus irgendwelchen Tatsachen, die wir als solche zugeben, so benutzen wir mittelbar auch diese selbst. Also können wir den angeführten Gedanken auch so ausdrücken: Wertvoll ist, was folgenreich, was fruchtbar ist. Es ist vor allem anderen das aufzusuchen, was unsere Kräfte stärkt.

In Urteilsbildungen meiner Fachgenossen vermisse ich nicht selten diesen Gesichtspunkt. Scharfsinn wird mit Recht geschätzt, mit größtem Rechte aber doch wohl dann, wenn er sich auf Probleme richtet, von deren Lösung vieles andere abhängt. Es gibt auch einen talmudistischen, sich in Nichtigkeiten verzettelnden Scharfsinn.

Freilich, eine Kritik der Probleme werden wir in größerem Stile wohl nicht erhalten. Es ist zu schwer, zwischen persönlicher Geschmacksrichtung und Allgemeingültigem die Grenzlinie zu finden. Man fordert vernünftigerweise nicht gerne Diskussionen heraus, von denen sich voraussehen läßt, daß sie im Sande verlaufen müssen. Aber im Unterricht übt dennoch ein jeder solche Kritik. Es ist eben jeder genötigt, gar vieles von dem zur Seite zu schieben, was täglich und von allen Seiten auf uns eindringt, und es läßt sich nicht vermeiden, daß das wenigstens in der von Person zu Person geübten Lehre zum Ausdruck kommt. Ein nicht zu unterschätzender Teil der Gedankenarbeit gerade des produktiven Forschers besteht im Üben dieser Art von Kritik. Und dieses ist einer der Gründe, aus denen, für die meisten, die persönliche Unterweisung nicht durch das Studium von Lehrbüchern ersetzt werden kann.

Gehen wir etwas mehr ins einzelne, so ergeben sich noch eine Menge von Fragen, mit denen allen sich der Mathematiker und z. B. auch der Physiker herumschlagen muß.

Soeben war als wertvoll die Abstraktion bezeichnet worden, weil sie durch Zusammenfassung von vielem uns das Denken erleichtern kann. Aber bei weitem nicht jedes Maß oder jede Art von Abstraktion hat diese psychologische Wirkung. Begriffe können so abstrakt sein, daß wir ihren Umfang nicht mehr recht übersehen, sie können dadurch, daß sie außer dem, was wir eigentlich wollen, noch vieles andere umspannen, die Anwendung auf konkretere Dinge eher erschweren als erleichtern. Die Forderung der Ökonomie des Denkens, deren Sinn nicht ist, Anstrengung zu ersparen, sondern Kraftvergeudung zu verhüten, ist dann nicht erfüllt. Zuweilen hat man das Individuelle, das nicht nur (wie behauptet worden ist) in der Geschichte das eigentliche und letzte Ziel der Forschung bildet, sondern auch in Mathematik und Naturwissenschaften, gar zu weit aus den Augen verloren. Manche mathematische Untersuchung, besonders jüngerer Forscher, schreitet sozusagen in den Wolken einher. Man fragt sich: Wozu das alles? Nicht um ihrer selbst willen ist die „Verallgemeinerung“ uns wertvoll.

Es handele sich jetzt um einen Beweis. Mehrere Wege führen zum Ziel — sollen sie uns alle gleich lieb sein? Oder warum doch entscheiden wir uns zugunsten dieses einen? Von Gauß wird berichtet, daß er eine Stunde lang darüber reden konnte, warum er dieses oder jenes nicht tat! Ist immer der kürzeste Pfad der beste, oder soll man, z. B. bei Konstruktionsaufgaben der Geometrie, dem längeren und vielleicht aussichtsreicheren Wege den Vorrang einräumen? Was uns als einfach erscheint, hängt offenbar von dem ab, was wir wollen. Es ist ein Unterschied, ob man nur zu diesem oder jenem Lehrsatz gelangen will, oder ob man einen ganzen Komplex von Einsichten, eine Theorie, zu beherrschen wünscht.

Nehmen wir an, es sei, z. B. in der Theorie der Kurven oder Flächen, nur ein sogenannter allgemeiner Fall behandelt worden: Der Begriff der Kurve, wie der Mathematiker ihn faßt, umspannt vielerlei Gegenstände, z. B. auch Figuren, die aus Geraden, Kegelschnitten usw. zusammengesetzt sind. War es nun gerechtfertigt, diese und andere besondere Fälle auszuschließen, oder steckten in ihnen vielleicht unbehobene Schwierigkeiten, hatte man sie nicht etwa darum ausgeschlossen, weil die Methode, auf die man einmal eingeschworen war, eben nicht mehr liefern wollte? So oder ähnlich steht es wirklich recht oft um Probleme der Geometrie. Was als Lösung vorgetragen wird, läßt eine Menge ganz naheliegender Fragen unbeantwortet. Man wird sich daher sehr genau überlegen müssen, ob ein vorgefundenes Problem sachgemäß formuliert war, und welche Forderungen methodischer Art an seine Lösung gestellt werden sollen [1]). Sind also die Methoden um der Probleme willen da, oder sollen wir ihnen das Recht zuerkennen, eine Art von Sonderdasein zu führen und sich der Probleme zu ihrer eigenen Verherrlichung zu bedienen? (Forderung der Reinheit der Methode.) Ist nicht aber auch daran viel Vernünftiges, werden wir nicht zur Vertiefung gelangen durch das Bemühen, uns die Leistungsfähigkeit einer bestimmten Methode genau klarzumachen? Und wie soll das gelingen, wenn wir sie nicht nach Kräften ausnutzen?

Wie sind sodann die Begriffe zweckmäßig zu umgrenzen, so nämlich, daß man das Darzustellende in der einfachsten und handlichsten Form und ohne Überwindung unnötiger Schwierigkeiten erhält? Es kommt etwas darauf an, daß unsere Aufmerksamkeit nicht dadurch zerstreut werde, daß man in eine Aussage allzu viele Einzelheiten hineinpackt. Nach dem Fundamentalsatze der Algebra hat eine algebraische Gleichung für eine Unbekannte so viele „Wurzeln", als ihr Grad angibt. Das ist eine sehr glückliche Formulierung. Schon im Falle der Gleichungen zweiten Grades leistet

---

[1]) Ich habe das am Beispiel der Apollonischen Berührungsaufgabe ausgeführt, die verlangt, die Kreise zu finden, die drei gegebene Kreise berühren (Math. Ann., Bd. 49, S. 497, 1897). In diesem Falle sind nicht Zirkel und Lineal die angemessensten Hilfsmittel, sondern ein sonst nicht übliches Instrument, das Kreislineal.

sie alles das und mehr, was die elementare Fassung mit ihrer Unterscheidung von mehreren Möglichkeiten leisten kann, nur muß man, wenn man diese Unterscheidung (zweier Wurzeln, einer, keiner Wurzel) dennoch braucht, sich anders ausdrücken.

So sucht überhaupt der Mathematiker das nur Gedächtnismäßige zugunsten wertvollerer Betätigungen seines Geistes zurückzudrängen, indem er sich bemüht, die als Lehrsätze bezeichneten Ruhepunkte des Gedankens so zu gestalten, daß sie von möglichst wenigen Ausnahmen gestört werden. Ein deutscher Geometer, v. Staudt, hat das wohl zuerst als methodischen Grundsatz formuliert. Verbindet sich aber dieses Streben mit dem anderen, möglichst vieles in einer einzigen Formulierung zu umspannen, so kann es geschehen, daß beide Forderungen in Kollision kommen, und daß die Ökonomie des Denkens wieder in Gefahr gerät. Neue Probleme bieten sich dar, neue Ausnahmen schicken sich an, uns zu verwirren, und vielleicht werden sich diese nicht mehr hinwegdefinieren lassen. (Geometrie im komplexen Gebiet.) Viele werden dann bereit sein, haltzumachen und dieses Unbequeme einfach zur Seite zu schieben. Andere werden sich die Frage vorlegen, ob es für den ferneren Fortschritt nicht dennoch nötig ist, sich damit zu befassen, und sie werden sie vielleicht bejahen. Alles das verdient genaueste Überlegung.

Wie steht es ferner mit dem Willkürlichen in unserem Denken, das uns in der Literatur in Gestalt von Koordinaten und sonstigen Baugerüsten auf Schritt und Tritt begegnet, aber auch schon in die Fassung mancher Grundbegriffe einzugehen scheint? Wir haben in der Geometrie den Gegensatz der analytischen und der synthetischen Methode. Die letzte liefert auf wunderbar-einfache Weise eine Menge schöner Sätze, sie braucht dazu die Willkür des Koordinatensystems nicht. Verdient sie darum schon den Vorzug? Mancher Anfänger wird so urteilen, indessen kommen wir mit dem anderen Verfahren sehr viel weiter. Aber die Willkür wurde dennoch als störend empfunden, und das wurde der Anlaß zur Ausbildung einer feineren analytischen Methode, die der Vorzüge der synthetischen Betrachtungsweise teilhaftig ist (Invariantentheorie, teilweise auch schon „Ausdehnungslehre“ von H. Grassmann).

„Die Definition wird uns als ein allgemein getroffenes Übereinkommen vorgelegt. Die meisten Denker werden sich jedoch dagegen wehren, wenn man ihnen eine Definition als ein willkürliches Übereinkommen aufzwingen will. Sie werden sich erst beruhigen, wenn ihnen auf ihre zahlreichen Fragen die nötigen erläuternden Antworten gegeben sind."

„Wie von Liard gezeigt worden ist, sind die mathematischen Definitionen meistens förmliche Gebäude, die sich in allen ihren Teilen aus einfacheren Begriffen zusammensetzen. Weshalb aber wurden diese einfachen Elemente gerade in dieser Weise zusammengefügt, während es tausend andere Möglichkeiten für die Art ihrer Zusammenfügung gab? Geschah dies nur aus Laune? Wenn nicht, weshalb hatte dann diese Zusammensetzung mehr Existenzberechtigung als alle anderen? Welchem Bedürfnis wurde durch sie genügt? Wie konnte man voraussehen, daß ihr in der Entwicklung der Wissenschaft eine wichtige Rolle zukommen werde, daß sie unsere Schlußfolgerungen und Rechnungen abkürzen werde?" (Poincaré, S. 118.)

Wieweit ist ferner, im besonderen Falle, irgend eine Willkür unvermeidlich, durch die Natur der Sache gegeben, wieweit ist diese oder jene besondere Willkür nur historischer Zufall, allzu menschlichen Ursprungs? Hatte Leibniz recht, oder wieweit hatte er recht, wenn er meinte, die Rechnung solle ein „Bild" des Gedankens sein, oder kommt es vielmehr nur auf die Ergebnisse an, die das Schlußglied unserer Überlegungen bilden? Wie sollen wir uns also zu den vielen modernen Mathematikern stellen, die ihre Leser allenthalben durch ein wildes Formelgestrüpp hindurchzuzwängen lieben? Ist das vielleicht nur ein Sport, der auf beschwerlichen Pfaden vorzeitig erzwingen will, was sich später auf gebahnter Straße ganz von selbst einstellen wird, ist es also Kraftvergeudung, oder handelt es sich vielmehr um wirklich fruchtbringende Pionierarbeit? Wir bewundern weniger das Mühsame und Gequälte als den glücklichen Einfall, der (sicher nicht ohne vorhergehende ernste Arbeit) das lange verborgen gebliebene Einfache an den Tag bringt, und diese Art der Urteilsbildung scheint auch für den wissenschaftlichen Menschen das Natürlichste zu sein. Aber wie verschieden hiervon gestaltet sich nicht bei vielen die Praxis der Urteilsbildung! Ein Teil der modernen mathematischen Produktion gleicht jenen älteren Bemühungen, den Nordpol zu erreichen, da noch der mit unendlicher Selbstaufopferung errungene Fortschritt oft kaum die Größenordnung eines halben Breitengrades hatte. Daneben gibt es Schöpfungen genialer Köpfe, wie z. B. die schon erwähnte „Theorie der Transformationsgruppen" des Norwegers S. Lie, die neue Ziele auf neuen Wegen zu erreichen suchen, sich aber minderer Anerkennung und Nachfolge erfreuen. Blicken wir zurück und fragen wir uns, was in früherer Zeit die Mathematik besonders vorwärts gebracht hat, so können wir zu der Meinung kommen, daß manche heute geltende Werturteile von kommenden Generationen nicht mehr unterschrieben werden dürften.

Was die Wissenschaft stark gefördert hat, ist wohl immer nur das Einfache gewesen, weil eben nur dieses von einer Mehrzahl von Forschern mit Erfolg verwendet werden kann. Das ist es auch wohl, was Laien irgendwie fühlen müssen, die dem Mathematiker die Frage vorlegen, wie denn seine Wissenschaft überhaupt noch fortschreiten kann. Tatsächlich kommen wir überall bald dahin, wo ein Fortschritt nur noch mit unverhältnismäßigem Kraftaufwand zu erreichen ist, dahin, wo die Welt des Mathematikers sozusagen mit Brettern vernagelt ist. Immer wieder aber finden sich auch Gruppen zusammengesetzter Begriffe, die in ihren Wechselbeziehungen dennoch den Charakter der Einfachheit aufweisen; was sich äußerlich darin zeigt, daß sich kurze prägnante Lehrsätze darüber aufstellen lassen, solche, die sich leicht dem Gedächtnis einprägen, und die man daher immer gegenwärtig haben kann. Das ist vielleicht das Geheimnis der dem Nichtfachmann unverständlichen Weiterentwicklung unserer Wissenschaft[1]).

Gleich da weiterschreiten zu wollen, wo unsere Vorgänger stehengeblieben sind, setzt Zufriedenheit mit dem Vorhandenen voraus. Es ist wohl eine psychologische Notwendigkeit, hier oder dort zufrieden zu sein. Irgend einen Ruhepunkt braucht auch der beweglichste Geist. Immer wieder aber werden böse Menschen kommen, die behaupten wollen, Unzufriedenheit sei auch in der Mathematik die Mutter des Fortschritts, und es gebe sehr vielen Anlaß zu solcher Unzufriedenheit. Sie können darauf hinweisen, daß man sich auch früher schon oft genug genötigt gesehen hat, irgendwo wieder von vorn anzufangen. Ein Blick in die historische Rumpelkammer wird dem Jünger der Wissenschaft jedenfalls nicht schaden. Was durch ein Zusammenwirken vieler entstanden ist, wird immer mit Unvollkommenheiten behaftet sein und muß also neu dargestellt werden.

Hier gelangen wir noch zu zwei weiteren schwierigen Fragen: Wie sollen wir uns mit dem Historischen abfinden, und wie sollen wir es mit der Terminologie halten?

---

[1]) Solche Begriffe, die trotz vieler Worte, die man ihrer Erklärung vorausschicken muß, sich als einfach und deshalb zum Weiterbau geeignet erwiesen haben, sind z. B. algebraische Zahl, Stetigkeit, Grenzwert, gleichmäßige Konvergenz, Differentialquotient, Integral, infinitesimale Transformation, analytische Funktion, Riemannsche Fläche.

Gleich uns haben auch unsere Vorgänger versucht, ihre Begriffe sachgemäß, „zweckmäßig“, zu gestalten. Dabei ließen sie sich leiten durch ihre Erfahrung. Aber verschiedene hatten eine verschiedene Erfahrung, und wir haben eine andere und reichere Erfahrung. Neue Begriffe sind eingeführt worden, und zwar oft solche, die sich mit den alten teilweise decken, auch Begriffe in Mehrzahl, die sich untereinander teilweise decken. Nicht immer aber hat man dem neuen Begriff ein neues Wort zugeordnet, sondern man nahm das alte Wort und verband damit den neuen Begriff. Grundsätzlich ist hiergegen nichts einzuwenden, denn Worte sind Zeichen, und Zeichen sind nicht tabu. So wie man Buchstabenzeichen $a, b, c \ldots$ bald dieses, bald jenes bedeuten läßt, so kann man auch mit Wortzeichen bald diesen, bald jenen Begriff verbinden, wenn nur die gehörigen Erklärungen nicht fehlen (Zahl, Funktion, Punkt, Kurve usw.). Allein die Gefahr, daß Verwechslungen entstehen können, liegt auf der Hand. Definitionen bleiben nicht immer in unserem Gedächtnis haften. Auch gestattet man sich wohl abkürzende Ausdrucksweisen, im Vertrauen darauf, daß der Leser oder Hörer aus dem Zusammenhang das Fehlende ergänzen wird. Man sagt z. B.: „Zwei Punkte bestimmen eine Gerade“, wo es nach der heutigen Terminologie eigentlich heißen müßte: „Zwei verschiedene Punkte bestimmen eine Gerade“. So schleicht sich der obsolet gewordene Begriff (zwei Punkte = zwei verschiedene Punkte) dort ein, wohin er nicht mehr paßt. Oder man war sich vielleicht überhaupt nicht klar darüber geworden, daß eine neue Begriffsbildung vorlag. Während manche sich nichts daraus machen, die vorhandene ohnehin umfangreiche Terminologie ohne zureichenden Grund und über alles Maß hinaus zu vermehren (Vektoranalysis), war man in anderen Fällen wieder so zurückhaltend, daß die Sache geschädigt werden mußte — man suchte wohl oder übel mit dem Überlieferten auszukommen. An dem Beispiel einer berühmt gewordenen Theorie (S. Lies Geometrie der Kreise und Kugeln) hat sich zeigen lassen, daß dadurch, allerdings mehr noch durch Beugung der Logik, ein ganzes umfangreiches Lehrgebäude schwer beeinträchtigt worden ist. In minder schlimmen Fällen haben wir doch in der überlieferten Kunstsprache einen Rest von Vorstellungen, die später als irrtümlich erkannt worden sind, und es werden dadurch Mißverständnisse erzeugt. So fährt das Wort imaginär (imaginäre Zahl, imaginärer Punkt usw.) bis auf den heutigen Tag fort, Unfug anzurichten[1]). Z. B. hat der Philosoph Vai-

---

[1]) Siehe Anhang II.

hinger im „Imaginären" einen regelrechten Unsinn, wenn auch „nützlichen" Unsinn erblicken wollen. Soll man nun solche Worte und die entsprechenden Symbole ($\sqrt{-1}$) einfach über Bord werfen, um eine neue Kunstsprache zu ersinnen, die von der Mehrheit der Forscher mit Sicherheit abgelehnt werden würde? Man wird jeden Fall besonders untersuchen und öfter Kompromisse schließen müssen!

Man sei also mit der Einführung neuer Kunstausdrücke sparsam, aber nicht übermäßig sparsam. Man suche sie sprachrichtig zu bilden — werden sie den alten Sprachen entlehnt, unter Zuziehung des Lexikons —, und vor allem sorge man dafür, daß sie sich nicht mehr als nötig vom Gebrauch des gemeinen Lebens entfernen. Wie das entgegengesetzte Verfahren wirkt, dafür hat man in der philosophischen Literatur ein abschreckendes Beispiel. Jedenfalls verdient auch die Terminologie große Aufmerksamkeit, und wer in die Mathematik oder in eine andere Wissenschaft eindringen will, wird solchen Erwägungen nicht fremd bleiben dürfen!

Es war vorhin darauf hingewiesen worden, daß es öfter nötig wird, Teile des wissenschaftlichen Lehrgebäudes einzureißen und an ihrer Stelle Neues zu errichten. In Wirklichkeit geschieht das aber viel öfter, als es nötig ist, und zwar einfach aus *Unkenntnis des Vorhandenen.* Wer sich zu wissenschaftlicher Arbeit anschickt, darf sich nicht so benehmen, als ob die Weltgeschichte mit ihm anfinge. Wer anderen etwas lehren will, wird bedenken müssen, daß sie vermutlich gewisse Kenntnisse schon haben, und daß es unklug ist, sie durch Ignorieren dessen, was schon da war, zu verärgern.

Zu einer guten Darstellung gehört also auch, daß auf Vorhandenes billige Rücksicht genommen wird. Enzyklopädische Werke und referierende Zeitschriften dienen dazu, ein solches Bemühen zu unterstützen. Der werdende Forscher muß von ihrem Dasein Kenntnis erhalten und ihren Gebrauch erlernen. Dazu sind an unseren Hochschulen die Instituts- und Seminarbibliotheken eingerichtet.

Es handele sich z. B. um *Zeichen.* Was hat es für einen Sinn, neue Zeichen einzuführen, wenn die vorhandenen schon dasselbe leisten oder vielleicht sogar noch mehr? Niemand darf das Recht zuerkannt werden, seinen Lesern eine unnütze Übersetzungsarbeit aufzubürden!

Wieweit soll überhaupt der Schriftsteller den Wünschen seiner Leser entgegenkommen? Auch das ist eine Frage, die Nachdenken verdient. Was im Namen der Pädagogik empfohlen wird (besonders von solchen, die ihre Eignung für die

Forschung nicht nachgewiesen haben), ist mit großer Vorsicht aufzunehmen. Ist es doch vorgekommen, daß wissentlich Falsches vorgetragen worden ist, weil es vermeintlich das Pädagogisch-Richtige war. Es gibt aber auch berechtigte Wünsche der Leser, auf die der Autor Rücksicht nehmen sollte. Dahin gehört z. B., daß mathematische Formeln tunlichst so gebildet werden, daß sie bequem zu lesen sind, nicht eine besondere Anstrengung zu ihrer Entzifferung verlangen. Oft genug wird gegen diese Regel verstoßen, und zwar nur darum, weil der Autor auf die Gestaltung seiner Formeln gar keine Aufmerksamkeit verwendet hat.

Überhaupt besteht für jeden Schriftsteller die Gefahr, daß er die Bedürfnisse seiner Leser — auch der genügend vorbereiteten Leser — nicht kennt. Und je tiefer einer in seinen Stoff eingedrungen ist, um so größer wird diese Gefahr. Das, womit wir uns lange beschäftigt haben, kommt uns schließlich ziemlich selbstverständlich vor, am Ende wissen wir gar nicht mehr, was uns einst aufgehalten hatte. Ich glaube, daß gerade hierin eine der größten Schwierigkeiten für die Leser mathematischer Schriften begründet ist, und ich fürchte, daß unter ihren Verfassern mancher auch bei bestem Willen sehr wenig tun kann, um dem abzuhelfen. Hier liegt wohl die Hauptursache dafür, daß es manchmal so lange dauert, bis wertvolle Gedanken zur Einwirkung auf weitere Kreise gelangen. Um so mehr ergibt sich, daß den Lesern wenigstens solche Unbequemlichkeiten erspart werden sollten, die die Verfasser wirklich mühelos abstellen können. Vor allem gehören dahin, bei umfangreicheren Darlegungen, eine gute Gliederung des Stoffes, Hervorhebung des Wesentlichen auch durch Äußerlichkeiten des Druckes, Seitenüberschriften, die besonders in französischen Werken häufig fehlen, und ein vollständiges, zum Nachschlagen brauchbares Inhaltsverzeichnis.

Ferner: Gibt es nicht so etwas wie Schönheit der Mathematik, und welchen Wert sollen wir ihr zuerkennen? Sollen wir wirklich sie, die sogenannte Eleganz, wie einige gemeint haben, den Schustern und Schneidern überlassen, oder kommen nicht auch da Gesetzmäßigkeiten zum Ausdruck, die sich nur nicht immer bequem durch Worte ausdrücken lassen? Was nicht in Worte gefaßt ist, ist dennoch da und rächt sich an dem, der keinen Sinn dafür hat.

„Die Mathematik liebt in ihren Methoden und in ihren Resultaten die Eleganz; das ist durchaus kein Dilettantismus. Was verleiht uns nun das Gefühl der Eleganz in einer Lösung oder in einer Beweisführung?

Es ist die Harmonie der verschiedenen Teile, ihre Symmetrie, ihr schönes Gleichgewicht; in einem Wort: alles, was Ordnung schafft, alles, was die Teile zur Einheit führt; alles, was uns erlaubt, die Dinge klar zu sehen und sowohl das Ganze wie auch zu gleicher Zeit die Einzelheiten zu überblicken ... Darum ist die ästhetische Befriedigung mit der Ökonomie des Denkens eng verbunden.“ (Poincaré, S. 20, 21.)

Aber wie weit sind wir nicht, in vielen Teilen der mathematischen Wissenschaft, noch von einem solchen Ideal entfernt! Ja, wie viele Mathematiker gibt es nicht, die keine Ahnung davon zu haben scheinen, wie sehr die Wirkung auf andere, die doch auch sie wünschen, von einem Mehr oder Minder von Einfachheit und guter Ordnung des Stoffes abhängt?

Hier verlangt es die Billigkeit, einen Unterschied zu machen. Hat einer viel Neues zu sagen (ich nenne etwa Euler, S. Lie, und aus einem anderen Gebiete Darwin), so wird man über allerlei Mängel, nicht nur über solche der Darstellung, gerne hinwegsehen, wenn es sich um die Beurteilung der subjektiven Leistung eines Forschers handelt. Aber ein dauernder Platz darf dem Persönlichen und Historisch-Zufälligen in der Wissenschaft nicht eingeräumt werden. Von zusammenfassenden, lehrbuchmäßigen Darstellungen erwartet man Beseitigung der Mängel, die als solche erkannt sind. Hier ist das zurzeit Beste eben gut genug, und die Herausarbeitung der Schönheit der Mathematik (wie aller echten Wissenschaft) tritt als eine besondere Aufgabe in ihr Recht. Leider genügen viele unserer Lehrbücher selbst weit primitiveren Ansprüchen nicht.

Immer wieder haben Forscher sich vor diese und ähnliche Fragen gestellt gesehen, und jeder, der sich zu eigener Produktion anschickt, wird sich nicht frühzeitig und intensiv genug damit beschäftigen können. Ist ein wirkliches Verstehen die Aufgabe des Lernenden, so dürfen im Unterricht solche Fragen nicht mit Stillschweigen übergangen werden. Ohne Zweifel sind sie mit dem Fortschritt der Wissenschaft aufs engste verknüpft, und oft stecken gerade in ihnen die größten Schwierigkeiten. Diese Schwierigkeiten aber sind nicht logischer, mindestens nicht rein-logischer Natur. Sie können nicht vom bloßen Scharfsinn überwunden werden, der eben längst nicht allein den Mathematiker ausmacht. Wie in den Naturwissenschaften, so handelt es sich auch in der Mathematik im weitesten Umfange um Wertungen, um Werturteile über Logisches und Nicht-Logisches, und zu beiden gibt die Logik selbst gar keine Anhaltspunkte.

Pasch drückt sich so aus, als ob es in der Mathematik nur auf eine einwandfreie Logik ankäme. Wie im Labyrinth am Ariadnefaden wird nach seiner Anweisung der zu Belehrende sicher an allem vorbeigeleitet, was auf Abwege, ja auf vielleicht nur vermeintliche Abwege führen kann. Aber der Faden der Logik ist, wie auch schon Poincaré bemerkt hat, viel zu schwach, um in unserem Gedächtnis einen starken Eindruck zu hinterlassen. Es müssen noch eine Menge von Assoziationen hinzukommen, wenn ein deutliches Bild der Gegend entstehen soll, in der man sich bewegt. Nur dem, der ein solches Bild hat, wird es möglich sein, sich auch ohne Führer zurechtzufinden. Dem Laien, der sich an den einst genossenen Schulunterricht erinnert, liegt dieser Gedanke wohl immer sehr fern, und auch im Unterrichtsprogramm von Pasch scheint er keine Stelle zu haben. Wir erfahren, wie in einem wohlgegründeten Haus die Ziegelsteine gesetzt und durch Mörtel verbunden sein müssen, von der Leistung des Architekten ist nicht die Rede. Und doch steckt eben in dieser der beste Teil vom Bildungswert der Mathematik. Daß im herkömmlichen Schulunterricht und nicht selten auch im Universitätsunterricht so wenig davon zu spüren ist, ist eine der Ursachen des gar oft zu bemerkenden Mißerfolgs der Mathematiklehrer. Es ist unbedingt erforderlich, daß nicht nur Fertiges vorgetragen werde, oder was man dafür hält und ausgibt: Es ist vielmehr, nach Möglichkeit, das Entstehen mathematischer Gedanken selbst darzustellen, unter Anwendung der nötigen Kritik und mit Ausblicken auf das, was später zu bringen ist, oder vielleicht sogar erst noch werden soll[1]). Der Lehrer der Mathematik wird also, so gut oder schlecht er es eben vermag, Probleme zu motivieren, Methoden zu vergleichen, über die Zweckmäßigkeit von Begriffsbildungen zu urteilen haben, wohlgemerkt nicht mit der Absicht, den Hörer auf seine Worte schwören zu lassen, sondern um ihm zu Gemüte zu führen, über wie vieles der Mathematiker nachdenken muß, das im Deduktionsschema nicht Platz finden kann. Vor allen Dingen wird so, außerhalb des Rahmens der Deduktion, die Anschauung räumlicher Gebilde als wichtigste Quelle der Erfindung in der Geometrie zu würdigen sein. Hierin finde ich mich, zu meiner Freude, mit Herrn Pasch in Übereinstimmung. „Den Wert des abstrakten Denkens wird der jugendliche Geist um so eher begreifen, je sparsamer es angewendet wird, und je mehr die Anschauung ihr natürliches Recht behält.“ Daß die Geometrie und ihre Beziehungen

---

[1]) Man findet in Anhang III ein Beispiel.

zur Wirklichkeit in der Ausbildung des werdenden Mathematikers wie auch in der Forschung einen Platz an der Sonne verdienen, kann ja nicht fraglich sein (vgl. dazu Poincaré, S. 115), wiewohl es nicht wenige einseitige Analysten gibt, die keinen Sinn dafür haben und wohl gar noch aus ihrer Not eine Tugend zu machen wissen.

In loserem Zusammenhang mit der Frage der Darstellung steht im Ganzen die Gesamtauffassung des Mathematikers von seiner Wissenschaft. Es ist allerdings auch für die Darstellungsform nicht gleichgültig, ob man, wie z. B. Pasch, in der Mathematik eine Erfahrungswissenschaft sehen will, oder ob man in ihr eine Lehre von „idealen“ Gegenständen erblickt, eine Lehre, die von der Erfahrung, besonders äußerer Dinge, unabhängig ist und nur auf Erfahrungsinhalte angewendet werden kann [1]). Indessen nehmen doch Mathematiker, deren Meinungen in diesem Punkte auseinandergehen, im Unterricht gewöhnlich die Haltung ein, daß sie das Zahlenrechnen (das gewöhnliche Rechnen mit natürlichen Zahlen) als gegeben hinnehmen und weitere Untersuchungen darüber den Philosophen überlassen. Sie erhalten damit, wenigstens für die Praxis des Unterrichts, eine gemeinsame Basis, soweit es sich um Analysis handelt. Anders steht es jedoch um die Geometrie. Das aus dem Altertum überlieferte System der Geometrie paßt nicht ohne weiteres in ein solches Denkschema. Irgendwie wird man sich damit abfinden müssen, und so entsteht eine Menge weiterer Fragen, die hier nicht erörtert werden können, deren Beantwortung aber zu sehr verschiedenen Auffassungen vom Wesen der Geometrie und dem Umfang ihres Begriffs führen kann und tatsächlich geführt hat [2]), und dann natürlich auch von Einfluß sein wird auf die Gestaltung des Vortrags.

Ein weiterer Umstand, der, wenn auch nur mittelbar, auf die Darstellungsform von großem Einfluß sein muß, ist die heute sehr fühlbar gewordene Zersplitterung. Wir leben im Zeitalter eines weitgehenden Spezialistentums. Auch unter Mathematikern gibt es längst keinen mehr, der das ganze Gebiet seiner Wissenschaft beherrschen könnte. Das wird auf keine Weise zu ändern sein, also muß der Lehrer wie der Lernende dazu Stellung nehmen. Ungesund ist vielleicht nur

---

[1]) Siehe Anhang IV.

[2]) Vgl. des Verfassers Schrift Mathematik und Physik (Sammlung Vieweg, Heft 65, 1923); R. Strohal, Die Grundbegriffe der reinen Geometrie in ihrem Verhältnis zur Anschauung (Sammlung Wissenschaft und Hypothese, 1925).

dieses, daß die Interessen der einzelnen sich so viel öfter nach Methoden als nach dem Stoff gliedern.

Nach alledem kann kein Zweifel bestehen, daß der Lehrer, besonders der akademische, bedeutend über der Sache stehen muß. Es ergibt sich, daß, im großen und ganzen, die Einrichtung der vom Staate vorgeschriebenen Studien und Prüfungen weise ist, und daß mit Recht vom akademischen Lehrer erwartet wird, daß er sich als Forscher betätigt. Das höchste Ziel des Unterrichts ist, schlummernde Fähigkeiten zu wecken und sie der Forschung dienstbar zu machen. Dazu wird nur der Forscher imstande sein, und zwar nur der, der sich die eigenen Ziele nicht zu niedrig steckt und sie nicht zu eng begrenzt.

Zum Eindringen in das Wesen der Mathematik gehört nach dem Gesagten eine gewisse Kenntnis ihres Werdegangs, und zwar eine nicht allzu oberflächliche Kenntnis. Von der Geschichte der Mathematik gilt sicher nicht, was man sonst von der Geschichte gesagt hat, daß nämlich nichts aus ihr zu lernen sei. Allerdings muß dann das Historische ganz anders behandelt werden als in gewissen Artikeln der Mathematischen Enzyklopädie, deren Verfasser mit vollkommenster Unparteilichkeit alles zusammengehäuft haben, was je über einen Gegenstand geschrieben worden ist, ja oft weiter nichts gebracht haben als leere Namen, um eben dadurch jeden zur Verzweiflung zu bringen, der bei ihnen Belehrung sucht. Die mathematische Wissenschaft will durchaus als ein lebendiger und anpassungsfähiger Organismus begriffen werden. Ihre Geschichte ist eine Geschichte von wissenschaftlichen Wertungen, nicht eine farb- und gestaltlose Chronologie.

Dies hat schon Leibniz hervorgehoben:

„Or comme il n'y a rien de si important que de voir les origines des inventions qui valent mieux à mon avis que les inventions mêmes, à cause de leur fécondité . . ." [1]).

An Paschs Programm für den höheren Unterricht, das besonders in einem „Forschen und Darstellen" überschriebenen Abschnitt entwickelt wird, fällt schon äußerlich auf, daß darin vom Forschen so gut wie gar nicht die Rede ist. Mit einem Hinweis auf die Trockenheit dessen, was Pasch als alleinige Aufgabe der mathematischen Wissenschaft hinstellt, mindestens hinzustellen scheint, könnte man geradezu die verbreitete Meinung stützen, daß die Mathematiker phantasielose Menschen sind. Auch das Publikum meint ja gewöhnlich, daß es nur

---

[1]) Ges. Werke, 3. Folge, Mathematik, Bd. 5, S. 89 (zitiert nach Hölder).

auf das Weiterschließen ankommt. Gedächtnis und Geduld, an die Pasch sehr hohe Ansprüche stellt, sind gewiß nützliche, ja unentbehrliche Eigenschaften des Forschers, aber sie sind nicht erfinderisch, nirgends sind sie die treibenden Kräfte des Fortschritts. Wo sie schwach entwickelt sind, da kann dieser Mangel durch vermehrte Anstrengung des Willens ausgeglichen werden, Phantasie aber ist durch nichts zu ersetzen. Nichts wäre verkehrter, als in ihr lediglich ein Irrlicht sehen zu wollen, das uns in den Sumpf lockt. Entgleisungen sind nicht auf Rechnung der Phantasie zu setzen, sondern dem Fehlen eines gut funktionierenden Hemmungsapparats zuzuschreiben.

Im ganzen scheint leider die Phantasie von Mathematikern nicht recht gewürdigt zu werden. Wie schon angedeutet, schätzen viele unter uns nur den verwickelten Komplex von Fähigkeiten, den man unter dem Namen Scharfsinn zusammenfaßt. Darin unterscheiden sich also diese Mathematiker von anderen Menschen. So sagt ein berühmter amerikanischer Schriftsteller, O. W. Holmes, der sich, sozusagen berufsmäßig[1]), meist viel stärker ausdrückt als nötig: „I have an immense respect for a man of talents plus the mathematics“ ... — „If a logical mind ever found out anything with its logic? — I should say that its most frequent work was to build a pons asinorum over chasms which shrewd people can bestride without such a structure.“ Ist das auch nur eine der kritisierten Halbwahrheiten, etwas Richtiges und Beherzigenswertes ist doch wohl daran.

Abgesehen von der Anleitung zum Zergliedern ist aus Paschs Erziehungsideal, soweit er es uns in der besprochenen Schrift und auch sonst vor Augen gestellt hat, eine Ermutigung zum Selbstdenken nicht zu entnehmen. Demgegenüber muß Nachdruck darauf gelegt werden, daß dem zu Unterrichtenden, je nach dem Zustande seiner wachsenden Einsicht und persönlichen Reife, mehr und mehr zugemutet werden muß. Allerdings, es muß eine Menge Stoff überliefert werden. Aber gerade im mathematischen Unterricht der Universitäten ist das meiste davon nicht um seiner selbst willen da. Unsere Schüler sollen nicht nur — wie Pasch sich ausdrückt — Mathematik oder andere Wissenschaften lernen, sie sollen mehr noch an der Mathematik und sonstigem Unterrichtsstoff lernen. Vor allem sollen sie zu freien Menschen werden, um später einmal zur Entwicklung der Persönlichkeit ihrer eigenen Schüler beitragen zu können. Daß viele Studierende, ja sogar die weitaus

[1]) Das Buch, dem die im Texte angeführten Stellen entnommen sind, heißt: The Autocrat of the Breakfast Table. (XIXth Century Classics, 1898.)

meisten, nur an die bevorstehenden Prüfungen denken und von ihren akademischen Lehrern eine bequemere Art der Unterweisung erwarten, weiß ich. Ich verkenne nicht die Schwierigkeit ihrer Lage, auch nicht die Schwierigkeit der Lage, in die der akademische Lehrer dadurch kommt; ich erhebe keine Anklagen. Wir alle bleiben notwendigerweise hinter dem zurück, was wir uns vorgesetzt haben; stecken wir aber unser Ziel von vornherein sehr niedrig, so werden wir wenig ausrichten.

Daß der Reichtum der modernen Wissenschaft und ihr Fortschritt auf das engste mit einer lebendigen Darstellungsform verknüpft sind, hat sich gewiß auch Pasch nicht verhehlt. Nur schätzt er das, nach meiner Meinung, bei weitem nicht so hoch ein, wie es nötig ist. Zwar finden wir das Zugeständnis, der Mathematiker solle wenigstens an sich selbst die Ansprüche stellen, die sich allerdings nicht in aller Darstellung würden verwirklichen lassen. Doch verschwindet in Paschs Auseinandersetzung über die wünschenswerte Gestaltung der mathematischen Wissenschaft diese Äußerung zu sehr unter Aussprüchen entgegengesetzten Inhalts, und tatsächlich ist Paschs wissenschaftliche Tätigkeit denn auch weitgehend auf das Zergliedern und die Aufweisung von Syllogismenketten nach dem Muster der Euklidischen Geometrie gerichtet gewesen. Im Zusammenhang steht damit, daß Pasch noch einen anderen Ausweg aus dem Zwiespalt gefunden zu haben glaubt, in den ihn der Versuch bringen mußte, einem weltfremden Ideal nachzuleben. Und merkwürdig genug ist die Einschränkung seines Programms, zu der er sich bewogen findet.

Zweierlei Bestandteile der Mathematik sollen unterschieden werden, für die Pasch die Worte heikle und derbe Mathematik prägt. „Heikle Mathematik" soll heißen, was „Grundfragen zum Gegenstand hat oder mit solchen eng zusammenhängt", und wobei also selbst der unscheinbarste Denkfehler sich rächen kann. In der „derben" Mathematik dagegen — die also, nach Pasch, nicht mit Grundfragen zusammenhängt — soll man es mit zusammengesetzten Gedankengängen zu tun haben, die man beherrscht und nicht mehr zergliedert. In den Grundfragen „kann nur befriedigen, was restlos zu Ende gedacht und aus solchem Denken heraus dargestellt ist." Nur für die heikle Mathematik soll also die Forderung des Atomisierens der Beweise in vollem Umfange gelten.

Was Grundfragen sind, erfahren wir nicht, es kann aber kaum ein Zweifel sein, daß es Fragen sein müssen, von deren Beantwortung vieles abhängt. Es handelt sich wieder um das, oder doch um einen Teil von dem, was wir zuvor wertvoll genannt hatten. Man darf nicht etwa einschränken wollen: „Vieles von Bedeutung", denn bedeutungsvoll wäre ja dann eben wieder das, was mit Grundfragen zusammenhängt. (Eine Wertschätzung, die lediglich historisch bedingt ist oder auf der praktischen Verwendbarkeit einzelner Ergebnisse der Forschung beruht, scheidet hier selbstverständlich aus.) Gemeint sind jedenfalls unter anderem solche Stoffe, die in den einleitenden Abschnitten der Infinitesimalrechnung oder in einer axiomatisch begründeten Geometrie abgehandelt werden, solche, die den Neuling fremdartig anmuten und lange Zeit hindurch den Mathematikern Schwierigkeiten geboten haben oder noch bieten. Gewiß müssen Denkfehler, die schon in den Anfangsgründen der mathematischen Wissenschaft begangen werden, besonders verhängnisvoll sein.

Mag nun dieses oder jenes gemeint sein, jedenfalls kann der Umfang des Begriffs „Grundfragen" oder „Grundlagen" nichts Unabänderlich-Feststehendes sein. Er muß, nach den Interessen des einzelnen, auch nach den angewandten Methoden, von Person zu Person wechseln und außerdem noch vom jeweiligen Stande der vorhandenen Kenntnisse und Fähigkeiten abhängen. Es kann genaueste Sachkenntnis erfordern und auch dann noch recht schwer sein, die Tragweite eines Lehrsatzes zu ermessen oder ferner liegende Wirkungen eines Fehlschlusses zutreffend zu beurteilen. In der analytischen Geometrie handelt es sich, wenn sie (wie leider fast immer) als ein Endziel verstanden wird[1]), wohl meistens nicht gerade um Grundfragen. Auf dieser analytischen Geometrie aber bauen sich die höhere algebraische Geometrie, die Differentialgeometrie und die theoretische Physik auf, und in diesen Disziplinen rächen sich dann die unscheinbaren Denkfehler, von denen verbreitete Lehrbücher wimmeln[2]). Alle Denkfehler werden sich früher oder später rächen, und zwar in jedem Gebiete, nicht nur der Mathematik, sondern aller Wissenschaft, vorausgesetzt natürlich, daß sie von Autoren begangen werden, die Nachfolge finden[3]). Bekannt

[1]) Sie wird meistens viel zu einseitig auf eine Behandlung der Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung hinausgespielt. In England wird sie sogar danach benannt. (Analytical Conic Sections.) "It is as though the great science of Anthropology were named the Study of Noses, owing to the fact that noses are a prominent part of the human body" (Whitehead).

[2]) Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 17, S. 125, 1908; Bd. 25, S. 96, 1916; Arch. d. Math. u. Phys., 3. Reihe, Bd. 18, S. 169, 1911.

[3]) Tatsächlich haben Denkfehler, die sich in philosophischen Schriften über die Grundlagen der Mathematik reichlich finden, auf die Entwickelung der mathematischen Wissenschaft gar keinen Einfluß gehabt.

ist der Ausspruch von B. Russell, daß man aus einem einzigen falschen Satz alle übrigen ableiten kann. Die gefährlichsten Irrtümer sind zudem gerade solche, die lange unerkannt bleiben; grobe Verstöße, die ein leidlich sorgfältiger Leser von selbst finden muß, sind eigentlich nur insofern von größerer Bedeutung, als da, wo sie vorkommen, mit ziemlicher Sicherheit auf das Dasein jener anderen geschlossen werden kann. Kommen sie schon gleich zu Anfang vor, so ist das freilich besonders schlimm. Und auch der Begriff des „unscheinbaren" Denkfehlers ist fließend. Auch er hängt von dem jeweiligen Zustande der Wissenschaft und von der Beherrschung des Stoffes ab, über die der einzelne verfügt. Was einer älteren Generation noch nicht einmal ein unscheinbarer Denkfehler war, sondern überhaupt keiner, kommt uns, die wir über inzwischen gemachte Erfahrungen verfügen, zuweilen recht grob vor. „Was man früher wußte, das glaubt man heut nicht mehr[1])."

Es fehlen also für die Unterscheidung, die Pasch treffen will, dauernd gültige Kriterien. Es ist überhaupt mißlich, eine Mathematik erster Klasse und eine Mathematik zweiter Klasse unterscheiden zu wollen, in der dann auf „kleine" Ungenauigkeiten nicht allzuvieles ankommen soll. Richtig ist ja, und genugsam bekannt, daß es ganze Gebiete gibt, deren Vertreter der Mehrzahl nach, und zeitweise wohl sogar alle, nachlässigen Gewohnheiten des Denkens verfallen sind. Das ist aber höchst bedauerlich und muß sehr ernst genommen werden. Wer angesichts solcher Pfuscherei Duldung für angebracht hält, übersieht, auf wie wunderbare und oft überraschende Weise die mathematischen Disziplinen untereinander zusammenhängen. Spezialisten für „Grundfragen" oder für das, was sie ausschließlich dafür halten, mögen diese Zusammenhänge ja zuweilen kalt lassen, für andere besteht aber gerade in solchen Erscheinungen einer der größten Reize der mathematischen Wissenschaft. Ich erinnere an die Anwendung der Abelschen Funktionen in der Geometrie und an die Forschungen von H. Minkowski über die Verwertung geometrischer Gedanken für Probleme der Zahlentheorie. Es ist gar nicht möglich, zu beurteilen, welchen Schaden der in einem Gebiete begangene Verstoß in anderen noch einmal anrichten mag. Noch liegt allerdings die Sache so, daß man von jedem Mathematiker verlangen kann, daß er alles das gewissenhaft prüft, was er benutzen will, oder daß er sich wenigstens mit Zurückhaltung äußert. Tatsächlich aber wird vieles auf irgend eine Autorität hin einfach geglaubt, und wer kann sagen, ob die Mathe-

[1]) Siehe Anhänge II, III, Seite 47.

matiker nicht eines Tages da ankommen werden, wo die Physiker längst sind, die gar nicht daran denken können, jede Experimentaluntersuchung zu wiederholen!

Obendrein setzt sich Pasch zu eben den Forderungen in Widerspruch, die er zu vertreten gedenkt. Seine derbe Mathematik ist nichts Reinliches, es fehlt ihr die Würde. Wer Herrn Pasch beim Worte nehmen wollte, könnte sogar sagen: Sie ist unmoralisch. De lege ferenda darf nichts derart anerkannt werden. Alle Mathematik und überhaupt alle echte Wissenschaft ist heikel, sehr heikel sogar. Was sich mit gutem Grunde fordern läßt, muß überall gefordert werden, nicht nur für einen Bruchteil der mathematischen Wissenschaft.

Wie Pasch zu der wunderlichen Begriffsbildung seiner derben Mathematik gekommen ist, liegt klar zutage. Seine Begeisterung für das Atomisieren hat ihn verleitet, die Abstriche, die von seiner überspannten Forderung nun einmal gemacht werden müssen, an falscher Stelle auszuführen. So verlangt er dort zu viel, hier zu wenig. Auch in anderer Beziehung fehlt, wie mir scheint, seinem Programm das rechte Gleichgewicht. Gedächtnis und Geduld werden zu sehr, die produktiven Geistesfähigkeiten zu wenig in Anspruch genommen. Nach Pasch „lernt" man Mathematik, so wie man etwa Lateinisch lernt, oder z. B. das Kochen (womit ich nichts gegen die Kochkunst gesagt haben will). Die gewiß sehr nötige philosophische Denkart hat in diesem Geiste, wie in so manchem anderen, die Schaffensfreude, ich meine die Freude am Schaffen von wirklich Neuem, überwuchert und erstickt. Das Reflektieren über den Erkenntnisprozeß ist ihm zum Verhängnis geworden. So gleicht seine Zergliederungsmathematik mehr einem anatomischen Präparat als einem lebendigen Wesen.

Pasch spricht auch davon, daß der Mensch hauptsächlich darauf angewiesen ist, sich in der Welt zu behaupten, und daß dadurch die Richtung der geistigen Arbeit (in seinem Sinne ungünstig) beeinflußt werden muß. Hieran ist gewiß viel Wahres. Man verlangt nämlich überall „greifbare" Ergebnisse, und dabei können Fehlurteile unterlaufen. Wo immer ein Forscher tiefere Einblicke getan hat als seine Vorgänger, wird sich jedoch immer auch „Greifbares" einstellen. Wirklich ist auch daran kein Mangel. (Man denke etwa an die Mengenlehre, an neuere Forschungen über konforme Abbildung, über Erweiterungen des Integralbegriffs, über Funktionen von unendlich vielen Veränderlichen usw.) Demgegenüber läßt sich die Meinung nicht aufrechterhalten, daß die Bearbeitung von Grundfragen in der heutigen Mathematik stark zurücktritt.

Offenbar wäre es unter allen diesen Umständen mißlich gewesen, Bestandteile der mathematischen Wissenschaft namhaft zu machen, die der derben Mathematik angehören sollen. Tatsächlich hat Herr Pasch nichts derart unternommen. Allerdings hätte auf mechanisch auszuführende Rechnungen, numerische und andere, verwiesen werden können, bei denen man wirklich nur groben Denkfehlern ausgesetzt ist. Aber selbst da, wo die Rechnung einen sehr breiten Raum einnimmt, ist sie nicht Selbstzweck. Nicht eine einzige mathematische Disziplin könnte man auf diese Art kennzeichnen.

Ich habe nun versucht, die Gründe zu analysieren, mit denen Pasch seine methodischen Ansichten stützen will, und vorzutragen, was nach meiner Meinung dazu zu sagen ist. Dieselben Argumente dürften, beiläufig bemerkt, auch gegen die sogenannten Logistiker ins Feld zu führen sein, deren Bestrebungen Pasch merkwürdigerweise nirgends erwähnt, wiewohl sie in der von ihm empfohlenen Richtung viel weiter gegangen sind als er selbst. Sie haben aus den besprochenen Prämissen die letzten Konsequenzen gezogen, und damit haben sie, wie mir scheint, jene Grundsätze als einseitig und übertrieben bloßgestellt und die Zergliederungsmathematik ad absurdum geführt. Noch mehr als bei Pasch drängt bei ihnen die formale Logik alles andere zurück. Die Formel ist hier wirklich ein Bild des Gedankens, aber nur Bild logischer Gedanken. Sie sieht meistens so aus, daß einem die Augen flimmern und man schon vom bloßen Anblick Kopfschmerzen bekommen kann. Poincaré zitiert die Definition der Zahl Eins nach Burali-Forti,

$$1 = \iota T' \{Ko\,(u, h)\, \varepsilon\, (u\, \varepsilon\, U\, n)\},$$

und er fügt die köstliche Bemerkung hinzu: „Das ist eine Definition, die sich trefflich dazu eignet, Personen, die das Wort Eins noch nie gehört haben, einen Begriff von der Zahl 1 zu geben.“ Anders als Poincaré habe ich es hier nur mit der Formelsprache zu tun: Eindrucksvoller sind doch die dem Kulturmenschen natürlichen Sprachen; jede Entzifferungsarbeit bedeutet eine Belastung, die nur der gerne auf sich nehmen wird, der den Nutzen davon einsieht. Vor allem aber eignen sich eben nur logische Abhängigkeiten zur Niederlegung in einer Begriffsschrift im Stile von Peano und Russell. Sie eignen sich dazu, weil ihrer so wenige sind. Indem man den Vortrag auf das rein Logische beschränkt, gehen eine Menge von Assoziationen verloren, auf die zu verzichten unvernünftig ist. Das Verständnis wird nicht erleichtert, sondern erschwert. Statt der lebendigen Wissenschaft hat man ein Gerippe vor Augen, aus dem der Geist entflohen ist.

Die Formelsprache der Logistik ist sehr verschieden von den sonst in der Mathematik üblichen Formelsprachen. O. Hölder, der ebenfalls von der Logistik nicht viel hält, hat treffend darauf hingewiesen, daß der Nutzen des Formalisierens meistens da vorhanden ist, wo gleichartige Relationen sich häufen, und infolge davon ihr Zusammentreten übersichtlicher durch Symbole als durch Worte ausgedrückt werden kann. Und er verweist auf eine gleichartige Äußerung von E. Mach [1]).

Der Geist der Wissenschaft ist, gleich dem Geiste der Kunst, unberechenbar in seinen Lebensäußerungen. Er läßt sich nicht in Behälter fassen und durch Röhren leiten.

Die normale Tätigkeit des Mathematikers, und keineswegs die des Mathematikers allein, besteht nicht im Zergliedern, so nötig es zuweilen sein mag, sondern im Aneinanderfügen [2]). In ihren Regeln gleicht die reine Mathematik am meisten der Musik, der Kunst, zu der sich ja auch viele Mathematiker besonders hingezogen fühlen.

Was kann nun diese unsere Auseinandersetzung fruchten? Der Ursprung der kritisierten Ansichten (wie auch der entgegengesetzten) sitzt sicherlich sehr tief — dort, wohin Gründe gar nicht dringen können, im Wesen der Persönlichkeit, im Bereiche des Triebhaften. Dem entsprechend ist mein verehrter Gegner auch in seiner zweiten Auflage auf die Gegengründe zu seinen Argumenten gar nicht eingegangen. Er hat sich darauf beschränkt, Härten zu mildern, im wesentlichen aber hat er an seinen Ansichten festgehalten.

Welche der vorgeführten Gründe oder Gegengründe der einzelne für entscheidend hält, wird wohl davon abhängen müssen, wie der Boden beschaffen ist, in dem sie Wurzel schlagen sollen. Z. B. wird ein phantasievoller Mensch anders urteilen als einer, dem es an Einbildungskraft gebricht, und ein kritischer Kopf anders als einer, dem es an der nötigen Schulung fehlt.

---

[1]) In seinem Werke Die Mathematische Methode, Erkenntnistheoretische Untersuchungen im Gebiete der Mathematik, Mechanik und Physik, 1924 (S. 274), das auch sonst noch vieles für den Erkenntnistheoretiker Beachtenswertes enthält.

[2]) Ganz ebenso äußert sich Hölder, S. 326.

Außerdem ist durch theoretische Ansichten unser praktisches Verhalten ja noch keineswegs gegeben. Ein Sprichwort sagt, der Weg zur Hölle sei mit guten Vorsätzen gepflastert. Z. B. ist es viel leichter, die Notwendigkeit ordentlicher Beweisführungen einzusehen, als sie selbst zu liefern. Und so kann auch wider Willen eine Neigung zum Zergliedern und Logisieren die Richtung der Tätigkeit des einzelnen bestimmen. Naturam expellas furca, tamen usque recurret. Sicherlich kommt sehr viel mehr an auf das, was wir tun, als auf das, was wir meinen.

Daß ein Schriftsteller, der über dem Überzeugenwollen beinahe alles andere vergißt, selbst so wenig überzeugend wirkt, darf nicht wundernehmen. Wir befinden uns ja hier überall im Gebiete der Werturteile. Dieses aber unterscheidet sich von der Logik sehr wesentlich dadurch, daß es in ihm Mittel, die ein Nachgeben des anderen mit einiger Sicherheit herbeiführen könnten, gar nicht gibt. Jenes alte De gustibus non est disputandum ist ein etwas banaler Ausdruck dafür. Aber der Geschmack, der wissenschaftliche so gut wie jeder andere, ist der Bildung fähig. Auf jüngere Forscher wenigstens mögen Gründe auch in solchen Dingen noch Eindruck machen — zum Guten wie zum Gegenteil. Und uns allen kann eine Kontroverse von der Art der vorliegenden vielleicht ein wenig dazu helfen, uns auf uns selbst zu besinnen und unsere Stellung in der wissenschaftlichen Welt besser zu erkennen. Versuchen wir das ernstlich, so werden wir uns eher geneigt finden, der fremden Persönlichkeit und ihren uns ferner liegenden Zielen Anerkennung oder wenigstens Duldung zu gewähren, innerhalb der Grenzen, versteht sich, die eine unbedingte Wahrheitsliebe vorschreibt. Es ist doch nur gut, daß wir nicht alle eines Schlages sind. Manche, die Lehrer der Menschheit im allerhöchsten Maße waren, sind erfolgreiche Lehrer in einem landläufigen Sinne nicht gewesen. Mathematiker wie B. Riemann und H. Poincaré haben sich um jene Vorschriften, die im Grunde für alle Darstellung bindend sein sollen, niemals gekümmert [1]). Was wir diesen Geistern und noch manchen anderen zu verdanken haben, hätten wir nicht erhalten, wenn sie sich hätten die Flügel stutzen lassen. Aber das wäre ja ganz unmöglich gewesen. Wer Bedeutendes zu sagen hat, weiß auch, daß er seinem eigenen Wesen treu bleiben muß.

---

[1]) Gauß scheint in seinen Vorlesungen dem Ideal von Pasch nahe gekommen zu sein. Aber gerade als akademischer Lehrer ist er nicht sehr erfolgreich gewesen.

Trotz interessanter und lehrreicher Einzelheiten ist das keine fröhliche Wissenschaft, was Pasch uns vor Augen stellt. Allzu viele Erdenschwere haftet daran. Herr Pasch wird sich auch wohl selbst nicht darüber täuschen, daß er im großen und ganzen für eine verlorene Sache eintritt. Verloren ist sie nun einmal, denn sie ist ein Anachronismus. Es läßt sich wohl zuweilen gegen den Strom schwimmen, und es ist gut, daß hin und wieder einer es versucht, aber seine Richtung umzukehren, gelingt nicht.

Das besprochene Darstellungsideal ist jetzt mehr als zweitausend Jahre alt. Wie schon gesagt, ist es verkörpert, wenigstens der Tendenz nach, in dem gewaltigen Bau von Euklids Geometrie.

Damals ging aller Fortschritt aus einigen Gelehrtenschulen hervor; nur in diesen scheint es eine Anleitung zum Forschen gegeben zu haben. Dort gab es, aber auch nur dort, lebendige Wissenschaft. Die breite Öffentlichkeit durfte bewundern, teilzunehmen vermochte sie nicht. „Was ihr übergeben wurde, war das fertige Werk, dessen Baugerüste vorher abgebrochen worden waren.“ Alles fehlte da, was helfen konnte, den Außenstehenden zu ähnlichem Wirken zu befähigen — ganz so wie bei Pasch, der bemerkenswerterweise unter dem Namen Geometrie ausschließlich Probleme begreift, die dem Gedankenkreise von Euklid angehören, und Methoden, die der seinigen nachgebildet sind. Demselben Sprachgebrauch, der die Existenz ganzer großer Disziplinen ignoriert, folgt übrigens die gesamte Gruppe der sogenannten Axiomatiker, zu der Pasch gehört[1]).

Die neue Zeit brachte neue Aufgaben und bediente sich neuer Methoden, und sie fand auch eine neue Darstellungsform, die uns eindrucksvoll in Galileis Discorsi entgegentritt, später noch verbessert worden ist und nun schon seit langer Zeit gehandhabt wird (mit besonderer Meisterschaft von französischen Mathematikern). Allerdings hat es an Rückschlägen nicht gefehlt (Newton), die meisten

---

[1]) Ich erinnere an Buchtitel wie Differentialgeometrie, Geometrie der Berührungstransformationen, Geometrie im komplexen Gebiet, Geometrie der Zahlen. Mit der Geometrie der Alten haben solche Disziplinen nur einen losen und keineswegs notwendigen Zusammenhang. Diese Stoffe sind nun einmal da und werden von ihren Vertretern Geometrie genannt. Also sollte man nicht durch Haften an einem längst veralteten Wortsinn Mißverständnisse hervorrufen. (Einem solchen Mißverständnis war ich selbst in der ersten Auflage dieser Schrift zum Opfer gefallen. Wie Herr Pasch mir mitgeteilt hat, versteht er an gewissen Stellen polemischen Inhalts unter „Geometrie“ sogar nur den in Schulbüchern abgehandelten Stoff!)

der Neueren aber wollten denen, die ihre Belehrung empfingen, zugleich auch einen Einblick in das Werden ihrer Gedanken gönnen. Die freie Vortragsform erst, die im engen Kreise auch von den Alten geübt worden sein muß, nun aber allen zugute kam, sie allein hat das Aufblühen und Gedeihen der modernen Wissenschaft möglich gemacht. Dieser Freiheit, die eine gelegentliche Rückkehr zur antiken Darstellungsweise (und meinetwegen auch den Gebrauch einer Begriffschrift) keineswegs ausschließt, wollen wir uns rückhaltslos freuen. Laßt uns versuchen, ihren Mißbrauch einzuschränken, vor allem Selbstkritik zu üben, nicht aber danach trachten, uns selbst und andere eines köstlichen Gutes zu berauben!

Wenn ich mich somit der Kritik widersetzen muß, die Pasch an den in der neueren Mathematik üblich gewordenen Darstellungsformen übt, wenn ich seine Betonung des Logischen für übertrieben halte und auch in manchen Einzelheiten ihm nicht zustimmen kann, so soll mit dem allen doch nicht gesagt sein, daß das von Pasch Vorgetragene nicht alle Beachtung verdiente. Eben deshalb habe ich ja eine Erwiderung für angezeigt gehalten. Jedem, dem Reinlichkeit der Wissenschaft oder, nach Paschs Wort, ihre Würde am Herzen liegt, darf ein Studium von Paschs kleinem Buch empfohlen werden. Es ist die Frucht der Erfahrungen einer von hohem Ernste getragenen Lebensarbeit, und dazu ist es ausgezeichnet durch eine glänzende Stilistik, die weit entfernt bleibt von der mit leeren Phrasen und Schlagwörtern notdürftig verkleideten Gedankenarmut, die sich in so vielen modernen pädagogischen Schriften breitmacht. Möge also Herr Pasch viele, allerdings kritische, aber aufmerksame und für Anregungen dankbare Leser finden[1])!

Inwiefern kann nun Mathematik anderen Wissenschaften zum Vorbild dienen?

Sicherlich sind Einschränkungen zu machen. Zunächst auf Seite der Mathematik selbst. So manches, das sich als Mathematik geberdet, ist mit großen Unvollkommenheiten behaftet, und auch bei Wertvollem ist die Darstellung oft weit entfernt davon, mustergültig zu sein. Anderes, das wirklich als vorbildlich gelten kann, liegt denen zu ferne, die nicht selbst Mathematiker sind. Solchen etwa die Zahlentheorie als Muster

---

[1]) Besonders möchte ich auf den Abschnitt über den Bildungswert der Mathematik hinweisen, der vieles enthält, das mir als wertvoll erscheint, hier aber nicht berührt werden konnte.

hinstellen zu wollen, dürfte ein Versuch am untauglichen Objekt sein. Aber in der Differential- und Integralrechnung handelt es sich um Stoffe, mit denen sich viele ohnehin beschäftigen müssen, und da liegen auch wirklich mustergültige Darstellungen vor.

Einschränkungen sind sodann auch auf der anderen Seite zu machen. Die Geschichte der Menschen, die es überall mit Individuellem, Einmaligem zu tun hat, scheidet ganz aus. Wie der Historiker Droysen sagte, sucht sie im Gleichen das Verschiedene, während Mathematik und Naturwissenschaft im Verschiedenen das Gleiche suchen müssen. Und auch in anderen Wissensgebieten kommen nur die Teile in Betracht, in denen umfassende Begriffsbildungen und das deduktive Denkverfahren Platz finden. Selbstverständlich ist, daß überall, wo Mathematik zur Anwendung kommt, für die Darstellung dasselbe gelten muß wie im Falle der reinen Mathematik, wenn anders die Stufe des Handwerksmäßigen überschritten werden soll. Aber überall kommt Neues hinzu, das den einzelnen Wissensgebieten eigentümlich ist und nicht logischen Charakter hat. So in den Naturwissenschaften, auf die wir unsere Betrachtung beschränken wollen, neben den Aufgaben der Beschreibung das Verfahren der Induktion[1]) und mit ihm das Wahrscheinlichkeitsargument, das oft die Stelle eines in aller Strenge erbrachten Beweises vertreten muß, und das daher häufig sogar den Namen Beweis führt[2]).

Den der Beobachtung zu entnehmenden Tatsachen werden Begriffe gegenübergestellt, und wie in der Mathematik, müssen diese sachgemäß gebildet, für die Vertiefung unserer Einsicht wertvoll sein. Es kommt immer darauf an, aus der vor unseren Augen ausgebreiteten Mannigfaltigkeit des Gegebenen das herauszufinden, was sich wiederholt, was für unser Denken fruchtbar ist, was unsere Kräfte stärkt.

Zur Deduktion brauchbare Begriffe müssen einen deutlichen Inhalt, zur Anwendung auf Gegebenes brauchbare Begriffe womöglich einen

---

[1]) Der unvollständigen Induktion, im Gegensatz zur vollständigen Induktion der Mathematik, dem Schluß von n auf $n + 1$.

[2]) Über den logischen Charakter und Erkenntniswert verschiedener Überzeugungsmittel scheinen öfter Unklarheiten zu bestehen. Wenn behauptet wird, dieses oder jenes sei „nicht bewiesen", so ist das ja, genau genommen, gewöhnlich richtig. In unzähligen Fällen der Art kann aber ein bündiger Beweis überhaupt nicht erbracht werden. So liegt die Sache immer da, wo eine unvollständige Induktion ins Spiel tritt, also bei allen sogenannten Naturgesetzen. Wenn nun ein strenger Beweis nicht zu liefern ist, so hat es keinen Sinn, ihn zu verlangen. Man muß sich anders ausdrücken.

nicht minder deutlichen Umfang haben. Das heißt, unsere Begriffe sollen nicht ineinanderfließen, und außerdem wird man zu wissen wünschen, was alles unter jeden einzelnen fällt. Die zweite Forderung läßt sich aber schon in der Mathematik nicht immer erfüllen (ist π^{π} eine rationale Zahl?), und auch die erste wird nur sehr schwer oder vielleicht gar nicht zu erfüllen sein, sobald Begriffe zu bilden sind, die sich auf die physische Welt beziehen, Begriffe, deren Zweck und einziger Daseinsgrund eben das „Begreifen" dieser Wirklichkeit ist. Man denke an die Unterscheidung von Tier und Pflanze, an die endlosen Diskussionen, die die Begriffe Gattung, Art, Varietät hervorgerufen haben. Unsere Ideenwelt wird leicht allzu selbständig, oft stellt sie sich der Wirklichkeit feindlich gegenüber; immer wieder sucht der Menschengeist in der Natur, was in ihr nicht zu finden ist; die Idee sucht die Tatsachen zu vergewaltigen. Man wird Geduld haben müssen, wird nicht zuviel auf einmal und vor allem nichts Unmögliches verlangen dürfen.

Besondere Schwierigkeiten bringt in den Naturwissenschaften die Notwendigkeit der Bildung zahlreicher Hypothesen mit sich, während in der Mathematik die Hypothese höchstens eine vorübergehende Bedeutung haben kann. Die Hypothesen, Vermutungen, tastende Versuche des menschlichen Geistes, werden uns aufgedrängt durch die Unmöglichkeit, uns ohne ihre Hilfe in der Fülle des Gegebenen zurechtzufinden.

Hypothesen sollen sich in allen ihren Folgerungen bewähren. Solche Folgerungen müssen also gezogen werden, und man muß dabei so weit gehen, als es nur irgend Erfolg verspricht. So entsteht das, was man eine naturwissenschaftliche Theorie nennt, ein nach den Regeln der Logik herzustellendes Gebäude, von dessen Zinnen wir den Zusammenhang der Erscheinungen zu überblicken suchen, das errichtet wird in der Hoffnung, die Lücken des Erfahrungsinhaltes durch Gedanken auszufüllen oder zu überbrücken. Und selbst die entlegensten Ergebnisse dieser Theorie sollen zu der schon vorhandenen oder erst noch zu gewinnenden Erfahrung (zum Experiment, wo es möglich ist), oder vielmehr zum Gedankenbilde unserer Erfahrungen stimmen [1]).

Mit dem Fortschritt der Wissenschaft tritt die Theorie mehr und mehr in den Mittelpunkt der Forschung. Sie ist das Band, mit dem wir oft weit auseinanderliegende Erscheinungen verknüpfen, das Werkzeug, mit dem wir ihre mannigfachen Überlagerungen und Verknotungen

---

[1]) Eine Erörterung der Hypothesen findet man in des Verfassers „Realistischer Weltansicht" (2. Aufl., I. Teil, 1923).

in Gedanken auflösen und entwirren, auf ihr beruht jederzeit unser Urteil über das, was uns wichtig oder wertvoll ist oder nicht ist. In der Theorie aber herrscht die Deduktion vor, sie bildet also einen Gedankenkomplex, an den ähnliche Forderungen zu stellen sein werden wie an die reine Mathematik. Hier ist die Mathematik im engeren Sinne ein Vorbild, auch wenn es zurzeit nicht gelingt, vielleicht auch gar nicht möglich sein wird, ihre Kunstsprache in die Theorie hineinzutragen. Wo immer man es mit Theorien zu tun hat, wird eine auf mathematischen Studien beruhende Schulung des Geistes sich als fruchtbringend erweisen, und es wird das in um so höherem Maße zutreffen, je umfangreicher die Theorien sind.

Ein gründliches Studium der Differential- und Integralrechnung von allen zu verlangen, die später als Lehrer naturwissenschaftlicher Fächer aufzutreten haben, dürfte keine zu weitgehende Forderung sein. Unter einem gründlichen Studium verstehe ich natürlich kein solches, das auf den praktischen Gebrauch von Technikern, Chemikern usw. zugeschnitten ist, und noch weniger das, wozu leider in allerlei Büchern für den Schulunterricht Anleitung gegeben wird. Es muß zu den Unterrichtszielen gehören, ein Gefühl für die Notwendigkeit genauen Ausdrucks zu erwecken und das Zutrauen in die Zuverlässigkeit längerer Schlußketten zu stärken. Auch dieses letzte ist sehr vonnöten, denn wir stehen vor der erstaunlichen Erscheinung, daß die sicherste unter allen Methoden, die die Wissenschaft kennt, die Methode, deren sich die Mathematik bedient, einem weitverbreiteten Mißtrauen begegnet. Mit Geringschätzung wird auch von verdienten Forschern „alle Theorie“ und also alle Deduktion behandelt, als „Spekulation“ wird von einigen alles gebrandmarkt, was (wirklich oder vermeintlich) nicht handgreiflich ist und sozusagen auf den Tisch gelegt werden kann. Folgerungen, deren Prämissen man doch zugibt, werden angezweifelt, ohne daß man sich auch nur die Mühe nähme, die verwendete Logik zu untersuchen. Eben die Logik, nämlich die Logik anderer, ist ja gerade das, was man verwirft. Im Zusammenhang damit ertönt dann gewöhnlich der Ruf nach Tatsachen — deren Auffassung, wie man weiß, niemals Schwierigkeiten bietet —, man verlangt noch mehr Tatsachen, viel mehr Tatsachen. In der Paläontologie vermißt man, wenn ich nicht irre, das Experiment. Die Astronomie ist als „nicht exakt“ bezeichnet worden, weil sie nicht experimentieren kann[1]). Daß diese Art von Kritik unfruchtbar bleiben muß, liegt auf der

[1]) Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, öffentliche Sitzung vom 28. Juni 1923, S. XC.

Hand. Ohne Zweifel beruht das alles auf Mängeln einer Erziehung, in der das rein Beschreibende einen allzu breiten Raum eingenommen hat, und die daher dem Naturforscher und Mediziner keine erkenntnistheoretische Einsicht und keinen genügenden Begriff von der Bedeutung folgerichtigen Denkens zu vermitteln vermochte. Nicht jeder versteht es, solche Lücken seiner Bildung später auszufüllen.

Gefährlicher noch ist es, wenn dieselben Mängel sich in entgegengesetzter Richtung geltend machen, wenn sie nämlich zur Aufstellung widerspruchsvoller Theorien führen. Die kaum glaubliche Oberflächlichkeit, mit der man gewisse biologische Lehrmeinungen zu begründen versucht hat, hätte eigentlich ganz unmöglich sein sollen, befremdlicher noch ist aber die weite Verbreitung, die solche Ansichten gefunden haben. Ich habe einen der schlimmsten Fälle eingehend behandelt; hier muß zur Erläuterung des Gesagten eine Verweisung genügen [1]).

Daß die biologischen Disziplinen als beschreibende Naturwissenschaften bezeichnet werden konnten, ist noch nicht sehr lange her. Man wird also über manche Nachwirkungen dieses Zustandes sich nicht wundern dürfen. Es ist aber auch der erfreulichste Fortschritt erkennbar. In einigen Richtungen ist man schon so weit gekommen, mathematische Überlegungen mit Erfolg anzuwenden (Physiologie, Erblichkeitslehre). Um so mehr ergibt sich, daß darauf hingewirkt werden sollte, der Gewohnheit exakten Denkens endlich auch unter Biologen eine genügende Verbreitung zu sichern.

Es war schon bei Betrachtung der Mathematik hervorgehoben worden, wie oft ein Fortschritt dadurch eingeleitet wird, daß Mißgriffe begangen und als solche erkannt werden. Dieses wiederholt sich in viel größerem Maßstabe in den Naturwissenschaften. Wo immer es sich um die Deutung eines Erfahrungsinhaltes handelt, können wir ja nie mit Sicherheit sagen: Dieses ist richtig. In unzähligen Fällen aber läßt sich mit aller Bestimmtheit behaupten: Jenes ist falsch. Wir können es behaupten, weil zwischen zwei Folgerungen, die aus denselben Prämissen gezogen worden sind, sich ein Widerspruch herausgestellt hat.

---

[1]) Es handelt sich um den sogenannten Lamarckismus und um eine mit Entstellungen arbeitende Kritik der Selektionstheorie. Siehe Naturwissenschaften, 7. Jahrg., S. 371, 392, 406, 1919; 9. Jahrg., S. 252, 1921; Zeitschr. f. induktive Abstammungs- und Vererbungslehre, Bd. 24, S. 33—70, 1920; siehe ferner F. Lenz, Archiv für Rassen- und Gesellschaftsbiologie 1920, S. 194—203. Die in diesen Aufsätzen kritisierten Schriften sind seitdem noch erheblich übertroffen worden. (B. Dürken, Allgemeine Abstammungslehre, 1923.)

Irrige Vorstellungen können rein persönliche Ursachen haben, oft aber weist ihr Dasein darauf hin, daß in der Sache selbst irgend etwas nicht in Ordnung ist. Es ergibt sich daraus, daß auf eine ausdrücklich zu übende Kritik, trotz allem Unerfreulichen, das oft damit verbunden ist, nicht verzichtet werden darf, wenn die Wissenschaft nicht Schaden leiden soll. Es ist durchaus nötig, sich deutlich auszudrücken und die Dinge bei ihrem wirklichen Namen zu nennen. Andeutungen werden häufig nicht recht verstanden. „Jene Art von Entgegenkommen, die im kaufmännischen Leben als Kulanz geschätzt wird, ist im wissenschaftlichen Betrieb nicht an ihrem Platze und eher schädlich." Durch die Zurückhaltung Darwins, der allem Polemisieren abhold war, ist die Wirkung seiner Gedanken sehr beeinträchtigt worden. Es ist unumgänglich, den immer neu entstehenden Abflüssen, die dem Strome der Wissenschaft zuviel Kraft entziehen, zur rechten Zeit Dämme entgegenzustellen. Auch das ist ja produktive Arbeit, was Kräfte nutzbar macht, die sonst verloren sein würden.

Jedenfalls gibt es Fälle genug, in denen eine Nachprüfung vorhandener Lehren vonnöten ist. Eine Klärung der Begriffe, die Untersuchung ihres Daseinsrechtes im Verhältnis zur Wirklichkeit, die Herbeiführung einer immer besseren logischen Ordnung in der Darstellung sind nicht minder wichtige Aufgaben als die Anstellung immer neuer Beobachtungen. Hier ist das Zergliedern eine wirklich fruchtbringende Arbeit. Besondere Aufmerksamkeit wird der Erkenntnistheoretiker und Logiker überall solchen Argumentationen zuwenden müssen, in denen Denklücken mit leeren Worten überkleistert worden sind (Lebenskraft, Entelechie, élan vital usw.).

Gleichwohl ergibt sich auch für die Naturwissenschaften nicht, daß alle Schlußketten in ihre letzten Elemente aufgelöst werden müssen, wenn die Darlegung überzeugend wirken soll. Was über die mathematische Darstellung gesagt wurde, findet in den Naturwissenschaften sinngemäße Anwendung.

Niemand wird im Ernste bezweifeln, daß die Rückseite unseres Mondes auf ganz ähnliche Art mit Ringgebirgen bedeckt ist, wie die uns zugewendete Seite unseres Trabanten. Wir alle halten das für richtig (selbst wenn wir es, etwa aus Widerspruchsgeist, nicht würden zugeben wollen), wiewohl es im Grunde doch nur eine Vermutung ist, und wiewohl höchst wahrscheinlich keine Erfahrung es je wird bestätigen können. Das ist erkenntnistheoretisch und psychologisch merkwürdig. Es erhebt sich die Frage, wie wir zu solcher Bestimmtheit unseres Urteils kommen. Gewiß müssen wir imstande sein, uns hiervon Rechenschaft zu geben. Versuchen wir das aber, so werden wir alsbald zu der Einsicht gelangen, daß die angeführte Aussage sich denn doch nicht wesentlich von vielen anderen unterscheidet, deren Zusammenfassung und Verkettung das Gewebe unserer naturwissenschaftlichen Erkenntnisse bildet. Was an der Analyse dieses Beispiels zu lernen sein würde, wird auch durch Analyse anderer zu lernen sein, sie alle eingehend zu analysieren, ist aber unmöglich. Muß einmal eine Auswahl getroffen werden, so werden sich uns andere Probleme der Erkenntnis mehr als dieses zur Analyse empfehlen. Z. B.: Wie kommen wir von dem vorwissenschaftlichen Begriff Himmelsgewölbe los, wie begründen wir, ohne Verweisung auf moderne geographische Kenntnisse, die Annahme einer Kugelgestalt unserer Erde? Welches ist der erkenntnistheoretische Charakter der Gründe, die uns zur Annahme der Abstammungslehre bewegen[1])? usw.

I. Das dekadische Zahlensystem.

Zu Seite 21. Es kann wohl kaum ein lehrreicheres Beispiel gefunden werden für die Schwierigkeit, die sich manchmal der Auffindung des Einfachen entgegenstellt, als das dekadische Zahlensystem.

„C'est de l'Inde que nous vient l'ingénieuse méthode d'exprimer tous les nombres avec dix caractères, en leur donnant à la fois une valeur absolue et une valeur de position; idée fine et importante, qui nous paraît maintenant si simple, que nous en sentons à peine le mérite. Mais cette simplicité même, et l'extrême facilité qui en résulte pour tous les calculs, placent notre système d'arithmétique au premier rang des inventions utiles; et l'on appréciera la difficulté d'y parvenir, si l'on considère qu'il a échappé au génie d'Archimède et d'Apollonius, deux des plus grands hommes dont l'antiquité s'honore" (Laplace, 1908).

Ich zitiere im Auszug noch einige Stellen aus einem kleinen Buche, An Introduction to Mathematics, von A. N. Whiteheard, (London, ohne Jahreszahl), das nicht nur allen Laien, die sich über das Wesen der Mathematik zu unterrichten wünschen, lebhaft empfohlen werden kann, sondern auch dem Mathematiker vom Fach reiche Anregung bietet:

---

[1]) S. Tschulok, Deszendenzlehre, 1922.

„It is interesting to note how important for the development of science a modest-looking symbol may be ... The Roman notation for numbers had no symbol for zero, and probably most mathematicians of the ancient world would have been horribly puzzled by the idea of the number zero. For, after all, it is a very subtle idea, not at all obvious ... The point about zero is that we do not need to use it in the operations of daily life. No one goes out to buy zero fish ... (But) many important services are rendered by the symbol 0, which standes for the number zero ... Thus the first use of 0 was to make the arabic notation possible — no slight service ... This ... symbolic use is at first sight so absurdly simple that it is difficult to make a beginner realize its importance." „Probable nothing in the modern world would have more astonished a Greek mathematician than to learn that, under the influence of compulsory education, a large proportion of the population of Western Europe could perform the operation of division for the largest numbers. This fact would have seemed to him a sheer impossibility. The consequential extension of the notation to decimal fractions was not accomplished till the seventeenth century. Our modern power of early reckoning with decimal fractions is the almost miraculous result of the gradual dissovery of a perfect notation."

Ganz zutreffend ist die Behauptung, die Griechen hätten unsere Rechnungsart nicht gekannt, freilich wohl nicht. Ich verdanke meinem Kollegen O. Toeplitz einige Mitteilungen darüber.

Wer die Urheber dieser Rechnungsart waren — Inder? Sumerer? — ist unklar. Aber jedenfalls hat sie Ptolemaeus (im zweiten Jahrhundert unserer Zeitrechnung) mit Sicherheit angewendet. Daß er sich, als Astronom, im Zusammenhang mit der noch heute üblichen Art von Einteilung des rechten Winkels, statt des Dezimalsystems der Zahlen eines Sexagesimalsystems bedient hat, wie vor ihm die Babylonier, ist ein offenbar nebensächlicher Umstand. An sich könnte man aus einer solchen Schreibart der Zahlen wohl allerdings noch nicht auf die entsprechende Art des Rechnens schließen (Verschiebung des Kommas bei Multiplikation mit der Grundzahl des Systems — zehn, oder, bei Ptolemäus, sechzig), wohl aber wird dieser Schluß ermöglicht durch die von Ptolemäus veröffentlichten Tafeln, in denen nicht nur Produkte, sondern auch Quadratwurzeln angegeben werden. Er muß auf ähnliche Art gerechnet haben, wie wir es tun. Aber allerdings kann er nicht wohl, auch nicht für seinen Privatgebrauch, sechzig verschiedene Zahlzeichen benutzt haben, ähnlich unseren Zeichen 0 ... 9. Er muß ein gemischtes System verwendet haben, wodurch der Vorteil des sexagesimalen Rechnens teilweise wieder aufgehoben wurde.

II. Über das Imaginäre.

Zu Seite 24. Gauß hat darauf hingewiesen, daß lediglich ein ungeeignetes Wort die Ursache vieler nutzloser Diskussionen geworden ist. Ich zitiere noch eine Stelle aus dem Buche von Whitehead:

„Not only the practical man, but also men of letters and philosophers have expressed their bewilderment at the devotion of mathematicians to mysterious entities which by their very name are confessed to be imaginary. At this point it may be useful to observe that a certain type of intellect is always worrying itself and others by discussion as to the applicability of technical terms. Are the incommensurable numbers properly called numbers? Are the positive and negative numbers really numbers? Are the imaginary numbers imaginary, and are they numbers? — are types of such futile questions. Now, it cannot be too clearly understood that, in science, technical terms are names arbitrarily assigned, like Christian names to children. There can be no question of the names being right or wrong. They may be judicious or injudicious . . .“

Auf die Wichtigkeit der letzten Bemerkung ist schon hingewiesen worden. Kunstausdrücke, die unzutreffende Vorstellungen suggerieren können, soll man nach Möglichkeit zu vermeiden suchen.

III. Beispiele von Fehlschlüssen.

Zu Seite 14. Der Mathematik ferne stehenden Lesern mag es willkommen sein, einige der Fallstricke kennenzulernen, über die selbst bedeutende Mathematiker gestrauchelt sind.

1. Vermeintliche Evidenz.

„Unter allen Verbindungsstrecken zweier Punkte ist die gerade die kürzeste.“

Dieser wichtige Satz ist gar oft als evident hingestellt worden auf Grund des Schlusses: „Irgend eine der möglichen Verbindungslinien muß doch die kürzeste sein“.

Ersetzt man die Worte „die kürzeste“ durch die Worte „die längste“, so sieht man schon, daß in der Logik der angeführten Schlußfolgerung etwas nicht in Ordnung ist. Auch bemerkt man leicht, daß es schon auf einem Kreiszylinder mehrere (zwei) kürzeste Wege zwischen geeignet gewählten Punkten geben kann. Dies tritt nämlich dann ein, wenn die beiden geradlinigen Erzeugenden des Zylinders, die durch die zwei Punkte gehen, einander gegenüberliegen. Und zwischen zwei Punkten einer Kugel kann es unendlich viele kürzeste Wege geben (Nordpol und Südpol der Erdkugel, Meridiane).

Für Mathematiker sei hier hinzugefügt, daß sich (schon in zwei Dimensionen) Arten von „Geometrie" (Maßgeometrie) definieren lassen, in denen die gerade Strecke zwischen zwei Punkten ein Maximum der Länge aufweist. (American Journal of Mathematics, vol. 29, 1906, p. 101—116.) Ein ganz gleichartiges Beispiel bietet die sogenannte spezielle Relativitätstheorie, die eine Art von Geometrie in einem Raume von vier Dimensionen ist, und nicht viel anders verhält sich auch die „allgemeine Relativitätstheorie": In beiden liefern die sogenannten Weltlinien Maxima der Bogenlänge zwischen zweien ihrer Punkte. Die erwähnte Arbeit ist, wie es scheint, ganz unbekannt geblieben, und so ist der genannte Sachverhalt verkannt worden. Weil in geläufigen Beispielen die „geodätischen Linien" kürzeste Linien sind, so schloß man kurzweg, die „Weltlinien" (die eben geodätische Linien sind) müßten ebenfalls „kürzeste" Linien sein. Dieser Schluß findet sich auch noch in Schriften neueren Datums.

Wir haben also hier ein Beispiel für den Fall, daß die Zergliederung einer zusammengesetzten Schlußkette nötig war, aber unterlassen worden ist. (Vgl. S. 7.)

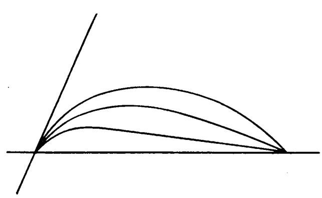

Abb. 1.

Ein anderes Gegenbeispiel ist von Kronecker angegeben worden. Man betrachte wieder Kurvenstücke, die zwei gegebene Punkte verbinden, aber nun in einem von ihnen eine vorgeschriebene Tangente haben sollen. Wenn diese Tangente nicht auch den anderen Punkt enthält, so gibt es unter den Verbindungslinien keine von geringster Bogenlänge: Wenn die Bogenlänge eines solchen Kurvenstücks den Abstand der zwei Punkte übertrifft, so kann man es immer durch ein kürzeres ersetzen, das ebenfalls noch die vorgeschriebene Tangente hat.

Ein Kurvenstück der beschriebenen Art, dessen Bogenlänge gerade gleich dem Abstand der zwei Punkte wäre, gibt es aber überhaupt nicht. Dieses Kurvenstück — das nicht mehr verkürzt werden kann — müßte ja mit der geraden Verbindungsstrecke der zwei Punkte zusammenfallen. Diese aber hat in dem einen Endpunkt nicht die vorgeschriebene Tangente.

Wir lernen an diesem einfachen Beispiel den — im allgemeinen schwierigen — mathematischen Begriff der Grenze kennen. Die gerade Strecke zwischen den zwei Punkten ist Grenze (Grenzlage) von Kurvenstücken der beschriebenen Art. Man kann ihr mit solchen Kurvenstücken so nahe kommen, als man nur will, erreichen aber kann man sie mit Kurvenstücken von dieser Art nicht.

Wir lernen ferner, daß ein scheinbar vernünftiges Problem widersinnig sein kann. Hätten wir die Aufgabe gestellt, die Bogenlänge eines der beschriebenen Kurvenstücke zu einem Minimum zu machen, so hätten wir etwas Unmögliches gefordert. Im vorliegenden Beispiel sieht man das gleich; es gibt aber viele andere, in denen erst eine genauere Untersuchung den Widersinn an den Tag bringt. Mathematische Aufgaben sollen, nach Abel, so abgefaßt werden, daß sie immer eine Lösung zulassen. Die zu stellende Frage muß also so lauten: Gibt es ein Minimum der Bogenlänge?

Lehrreicher noch ist das folgende Beispiel:

Es seien zwei Punkte p, q im Abstande r von einer Geraden g angenommen. Man lasse sie um g rotieren; sie werden dann zwei Kreise erzeugen, auf deren Ebenen die Gerade g in ihren Mittelpunkten senkrecht steht. (Die Abb. 2 zeigt die Schnittpunkte p, p' und q, q' einer Ebene durch g mit den beiden Kreisen.) $2\,d$ sei der Abstand der Ebenen dieser Kreise.

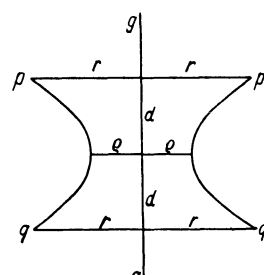

Abb. 2.

Die Punkte p und q mögen nun noch durch ein Kurvenstück verbunden werden, das in der Ebene durch p, q und die Gerade g liegt. Dieses Kurvenstück wird dann eine Umdrehungsfläche erzeugen, deren Achse die Gerade g ist. Gibt es nun unter allen diesen Umdrehungsflächen eine (oder mehrere) von kleinstem Flächeninhalt?

Wäre der eingangs angeführte Schluß richtig, so würde diese Frage unbedingt zu bejahen sein. Tatsächlich aber lautet die Antwort, die nun schon eine nicht mehr elementare Untersuchung verlangt, konditional: Es kommt auf den Wert des Quotienten $r:d$ an. Ist, wie in der Abb. 2, dieser Quotient größer als eine gewisse Zahl k, die nur angenähert berechnet werden kann[1]), $k = 1{,}50888\ldots$, so gibt es wirklich eine solche Umdrehungsfläche (deren Spur in der Zeichnungsebene angedeutet ist). Sie ist ein Stück einer auch sonst interessanten Fläche, eines sogenannten Katenoids, das durch Rotation einer

[1]) k ist die (einzige) positive Lösung der Gleichung $x = \operatorname{ctg} h\, x$.

auch noch bei anderen Problemen auftretenden Kurve, der Kettenlinie, entsteht. In den übrigen Fällen gibt es eine ähnliche Antwort nicht, und man kann sich auch leicht, wenigstens für kleine Werte von k, eine Vorstellung davon bilden, worauf das beruht (s. Abb. 3). Jede die zwei Kreise verbindende Umdrehungsfläche kann dann durch eine solche kleineren Inhalts ersetzt werden, von der dasselbe gilt, usf. ad infinitum. Als Grenze (Grenzlage) aller dieser Flächen stellt sich eine Figur ein, die aus zwei Kreisscheiben und einem geraden Linienstück besteht, das die Mittelpunkte der zwei Kreise verbindet. Diese Figur aber ist nicht mehr ein Flächenstück: Wir haben einen ähnlichen Sachverhalt vor Augen wie im vorigen Beispiel. Das jetzt vorliegende Beispiel aber erhält ein besonderes Interesse dadurch, daß es die mathematische Einkleidung eines berühmten Experimentes darstellt. Taucht man einen aus Drähten passend zusammengestellten Körper in eine genügend konzentrierte, am besten mit Glycerin versetzte Seifenlösung, so bleibt, nach dem Herausziehen, ein Teil dieser Lösung zwischen den Drähten hängen, und zwar, mit großer Annäherung, in Form von Flächenstücken kleinsten Flächeninhaltes, von Stücken sogenannter Minimalflächen (Plateauscher Versuch).

Abb. 3.

Im vorliegenden Falle wird man die benutzte Vorkehrung, in ihrem wesentlichen Bestandteil, aus zwei Drähten, in Wirklichkeit dünnen Kreisringen, bestehen lassen[1]). Stehen diese Drähte nahe genug beieinander, so stellt sich ein zwischen ihnen ausgespanntes Flächenstück her, annähernd ein Stück eines Katenoids (in Wirklichkeit natürlich eine Flächenhaut von endlicher, wenn auch geringer Dicke). Entfernt man sie voneinander, so deformiert sich zunächst dieses Flächenstück, der in der ersten Figur mit 2ϱ bezeichnete Abstand verringert sich. Dann aber zerreißt die Fläche, und man erhält, scheinbar fast unvermittelt, zwei ebene Flächenstücke, jedes bestehend aus einer Kreisscheibe. Der, theoretisch, die Kreismittelpunkte verbindende Faden tritt nicht in Erscheinung. Der Prozeß des Zerreißens und der schließlichen Herstellung der beiden Kreisscheiben aber würde sich mit Hilfe einer kinematographischen Aufnahme, die sich wohl lohnen dürfte, sichtbar machen lassen (Zeitlupe).

[1]) Auch für diesen allgemeinen Fall hat man noch ein entsprechendes Problem formuliert und gelöst. (Mary Sinclair, siehe O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung 1909, S. 447.)

Ich habe dieses Beispiel noch angeführt, wiewohl es schon viel verwickelter ist als das vorige, weil es uns wieder einiges lehrt, das nie übersehen werden sollte. Erstens erläutert es uns die Tatsache, daß mathematische Einkleidungen physikalischer Vorgänge niemals den Reichtum der physischen Wirklichkeit erschöpfen, vielmehr nur eine Seite des wirklichen Vorgangs oder einige Seiten davon annähernd darstellen. Zweitens belehrt es uns über den Wert und Unwert von Zeichnungen und Modellen, die auch schon eine Art physikalischer Experimente sind. Sie haben eine starke suggestive Kraft, es wäre unvernünftig, sie entbehren zu wollen. Bei unvorsichtiger Handhabung können sie uns aber auch Verkehrtes suggerieren. Ganz abgesehen von der Unvollkommenheit, die z. B. einen Punkt durch einen Klecks auf dem Papier wiedergibt, entspricht jede Figur nur einem besonderen Fall des darzustellenden Gedankens. Denkt man nicht an die anderen Möglichkeiten, stellt man sich etwa in unserem Beispiel nur die erste Figur vor Augen, so öffnet man die Tür dem Irrtum. Tatsächlich sind Figuren oft genug mit geringer Umsicht benutzt worden, und besonders elementare Werke über Geometrie leiden auch heute noch an diesem Mangel. Auch die Fehlschlüsse, von denen nunmehr die Rede sein soll, haben einen derartigen Ursprung.

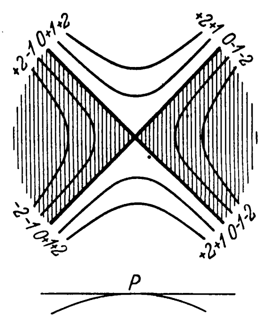

Abb. 4.

2. Ein falsches Kriterium des Maximums.

Die Abb. 4 soll dem Leser die Vorstellung einer sattelförmigen, übrigens mathematisch so einfach wie nur möglich gestalteten Niveaufläche vermitteln. Im schraffierten Teil der Figur soll die Niveaufläche unterhalb der Ebene der Zeichnung gelegen sein.

Man denke sich nun durch den Sattelpunkt Ebenen senkrecht zur Ebene der Zeichnung gelegt und mit der Niveaufläche zum Schnitt gebracht. Gewisse der Schnittkurven werden dann im Sattelpunkt einen Scheitel haben, der seine konvexe Seite nach unten richtet, bei anderen wird sie nach oben gerichtet sein, zwei Schnittkurven aber werden sich anders verhalten: Sie sind Geraden. Hätten wir es statt mit einem Sattelpunkt mit einem Gipfel zu tun gehabt — genauer mit einem Punkt, der, als einziger, über seine Umgebung hervorragt —, so würden wir lauter Schnittkurven mit nach oben gerichteten Scheiteln erhalten haben. Anders ausgedrückt: Geht man von einem Gipfelpunkt aus auf der Niveaufläche in einer Richtung weiter, deren Projektion auf die Horizontalebene eine Gerade ist, so geht man immer, zuerst jedenfalls, nach unten. Und darin eben scheint das Kennzeichen des Gipfels zu liegen, eine Eigenschaft, die zu seiner Definition benutzt werden kann, die ihn vom Sattel trennt, bei dem wir sie nicht gefunden hatten.

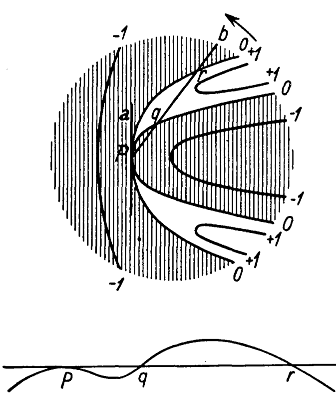

Abb. 5.

Die mathematische Fassung des hiermit vage ausgedrückten Gedankens bietet gar keine Schwierigkeit: Sie liefert anscheinend ein Kriterium des Maximums einer Funktion von zwei Veränderlichen (der Koordinaten eines Punktes in der Projektionsebene).

Tatsächlich hat man ein solches Kriterium formuliert und lange Zeit hindurch für ausreichend gehalten. Es liegt aber hier ein Denkfehler vor, der auch in die mathematische Fassung übergegangen ist. Er besteht darin, daß man sich von den bei Sattelpunkten vorliegenden Möglichkeiten eine zu enge Vorstellung gebildet hatte.

Die Abb. 5 wird die Vorstellung einer anderen Niveaufläche vermitteln, bei der man, von einem bestimmten Punkte aus, ebenfalls immer zuerst nach unten geht, sich aber doch nicht von einem Gipfel aus bewegt.

Man lasse die in die Abb. 5 eingetragene Fortschreitungsrichtung sich im Sinne des Pfeils um den Punkt p drehen; man achte darauf, daß dann die durch die Punkte q und r begrenzte Strecke immer kürzer wird, und schließlich, in der Lage a der Fortschreitungsrichtung, ganz verschwindet[1]).

[1]) Die Gleichung einer Niveaufläche dieser Art ist

$$z = (y^2 - 2\,px)\,(y^2 - 2\,qx) \quad \{p > q > o\}.$$

Der wirkliche Sachverhalt ist erst im Jahre 1884 von dem italienischen Mathematiker G. Peano aufgedeckt worden.

3. Eine Kurve ohne Tangenten und mit unendlicher Bogenlänge.

In der vorausgehenden Darlegung sind Worte wie Kurve und Fläche benutzt worden, ganz so, als ob es sich von selbst verstände, was für Begriffe damit zu verbinden sind. Das konnte gewagt werden, weil die mehr oder minder unbestimmten Vorstellungen, die der auf einer höheren Schule erzogene Laie mit solchen Worten verbindet, immerhin ausreichen, um das deutlich zu machen, worauf es in den angeführten Beispielen allein ankommen sollte. Zufriedenstellend kann aber der Mathematiker ein solches Verfahren nicht finden; er wird darin vielmehr nur eine Etappe auf einem der Wege erblicken können, die den Adepten seiner Wissenschaft zu klaren Begriffsbildungen hinleiten sollen — auf solche wird unter keinen Umständen verzichtet werden dürfen.

Spezielle Begriffsbildungen, die mit Worten wie Kurve und Fläche verbunden wurden, sind ursprünglich aus Erfahrungen des gemeinen Lebens abstrahiert worden. Der älteste Begriff der Fläche ist der einer Oberfläche, der Begrenzung eines physischen Körpers. Hierzu kamen dann Erfahrungen der Physik, besonders der Astronomie, die es angezeigt erscheinen ließen, solche Begriffsbildungen zu Klassen zusammenzufassen, und nun nicht mehr nur einzelne Figuren, sondern gleich auch ganze Klassen von solchen zu behandeln und das ihnen Gemeinsame in den Vordergrund zu stellen. So werden die Begriffe Ellipse, Parabel, Hyperbel von dem des Kegelschnittes umfaßt, und dieser wieder von einem der neueren Mathematik angehörigen Begriff „algebraische Kurve". Wie weit man aber auf dem hiermit beschrittenen Wege der „Verallgemeinerung" gehen soll, und welche Rolle man den Erfahrungen aus der physischen Welt schließlich wird einräumen wollen, das sind nicht leicht zu behandelnde Fragen, und jedenfalls läßt die erste von ihnen gar keine bestimmte (eindeutige) Antwort zu: Sie ist eine der im Texte besprochenen Fragen, von denen gesagt wurde, daß sie nicht rein-logischer Natur sind, eine Frage der Zweckmäßigkeit, deren Beantwortung abhängen muß von dem, was man will. Wie aber auch die Entscheidung ausfallen mag, die der einzelne treffen wird, als wertvoll wird ihm immer das erscheinen, was sich wiederholt, nicht gerade nur im gemeinen Leben oder im Hinblick auf Erfahrungen der Physik, sondern im Erfahrungsinhalt der Mathematik, deren Ziel das Erkennen, nicht irgend ein Nutzen des Erkannten ist, wiewohl auch dieses gewiß nicht ohne großen Einfluß auf unser Werturteil bleiben kann.

Von einem der Kurvenbegriffe, die die neuere Zeit gebildet hat, soll nun hier die Rede sein. Wir wollen ihn aber einführen nicht auf Grund einer Definition, die dem Nichtmathematiker als befremdlich und willkürlich erscheinen müßte, sondern wir wollen ihn motivieren — so gut oder schlecht es auf engem Raume eben gehen will. Dazu betrachten wir zunächst eine der einfachsten gesetzmäßig gebildeten Kurven, die es gibt — eine Kreislinie oder ein Stück einer solchen.

Die Abb. 6 zeigt, wie die Punkte eines Kreisbogens mit Hilfe gerader Linien, die etwa von einem Punkte des zugehörigen Kreises ausgehen, Punkten einer geraden Strecke — eines Durchmessers des Kreises — zugeordnet werden können.

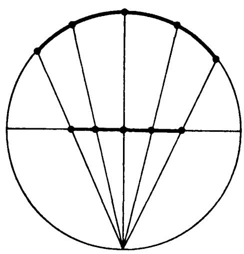

Abb. 6.

Wir bemerken:

1. Die ausgeführte Zuordnung oder Abbildung des Kreisbogens auf die gerade Strecke ist gegenseitig-eindeutig.

2. Sie ist „stetig“, und zwar in beiden Richtungen. Das heißt: Wenn auf dem Kreisbogen ein Punkt x angenommen worden ist, dem auf der geraden Strecke der Punkt x' entspricht, und y, y' ein anderes Paar einander zugeordneter Punkte bedeutet, so kann man den Punkt y' dadurch dem Punkt x' beliebig nahe bringen, daß man den Punkt y dem Punkt x hinreichend nahe bringt; und ebenso kann man auch umgekehrt den Punkt y dem Punkt x beliebig annähern, wenn man den dann als gegeben zu betrachtenden Punkt y' dem Punkt x' nahe genug kommen läßt.

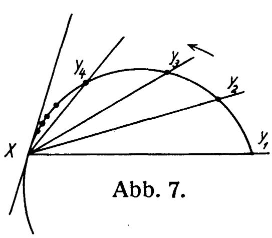

Abb. 7.

3. Der Kreisbogen hat in jedem seiner Punkte eine bestimmte Tangente. Der Begriff der Tangente wird hier, im Hinblick auf eine auszuführende Verallgemeinerung, am besten nicht so erklärt, wie es in Elementarbüchern üblich ist, nämlich nicht als Begriff einer Geraden, die mit dem Kreis nur einen Punkt gemein hat, sondern mit Hilfe des Begriffs Grenzlage. Man halte den Punkt x fest und betrachte den Punkt y als veränderlich. Man lasse dann den Punkt y sich dem Punkte x unbegrenzt nähern. Wir wollen das so ausführen, daß wir eine Folge einzelner Lagen $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ des Punktes y

betrachten, in unendlicher Menge, die sich in der Nähe des Punktes x zusammendrängen, ohne ihn jedoch zu erreichen. Alle Verbindungssehnen xy_1, xy_2, ..., xy_n, ..., ad inf., sind dann völlig bestimmt. Diese Sehnen drängen sich nun in der Nachbarschaft einer bestimmten Geraden zusammen, und zwar ändert sich diese Gerade nicht, wenn man die Punktfolge y_1, y_2, ... durch irgend eine andere z_1, z_2, ... von gleicher Eigenschaft ersetzt. Diese mithin völlig bestimmte Gerade heißt **Tangente** des Kreises im Punkte x. Sie gehört nicht zu den von x ausgehenden Sehnen, aber sie ist Grenzlage solcher Sehnen.

4. Der Kreisbogen hat eine völlig bestimmte endliche Bogenlänge. Bei dieser Behauptung handelt es sich um etwas mehr als um den uns allen aus dem Schulunterricht bekannten, schon im Altertum

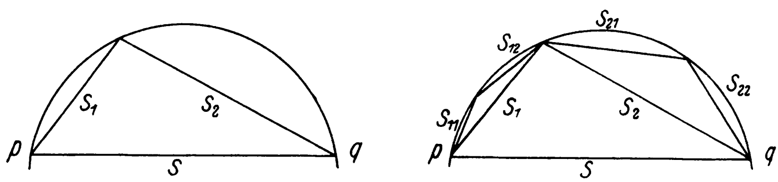

Abb. 8.

festgestellten Sachverhalt, und dieses Mehr bedarf einer sorgfältigen Begründung, die nicht ganz kurz sein kann. Von einer solchen Begründung soll hier abgesehen werden; doch wird der Sinn der Behauptung wohl leicht zu verstehen sein, und daß sie richtig ist, darf wenigstens als plausibel gelten.

Wir spannen in unserem Kreisbogen zwei aneinanderstoßende Sehnen von den Längen s_1 und s_2. Es ist dann, wenn s den Abstand der Endpunkte p, q bedeutet, $s_1 + s_2 > s$. Über jede der zwei Sehnen spannen wir wieder zwei Sehnen, so daß, in der durch die Abb. 8 erläuterten Bezeichnung,

$$s_{11} + s_{12} + s_{21} + s_{22} > s_1 + s_2 > s$$

wird. So fahren wir fort, ad infinitum, und tragen dabei Sorge, daß die nach n Schritten konstruierten $2n$ Sehnen Längen erhalten, die sich mit wachsenden Werten der Zahl n unbegrenzt der Null nähern. Die Summen von 1, 2, 2.2, 2.2.2, ... Größen

$$s,\ s_1 + s_2,\ (s_{11} + s_{12}) + (s_{21} + s_{22}),\ \ldots$$

nähern sich dann immer mehr einer bestimmten (oberen) Grenze S, ganz so, wie die Zahlen $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots$ bei unbegrenzter Fortsetzung ihrer Folge sich der Grenze 1 nähern; und zwar ist die Grenze in unserem Falle unabhängig von der Art, wie die benutzte Dreieckskonstruktion im einzelnen ausgeführt wird; was natürlich alles des Beweises bedarf. Diese Grenzzahl S heißt Länge des Kreisbogens[1]).

5. Statt nun die Längen der aufeinanderfolgenden Systeme von $2n$ Sehnen unseres Kreisbogens zu betrachten, können wir auch diese Systeme selbst, also dem Kreisbogen eingeschriebene Streckenzüge oder Polygone, jedes als Inbegriff aller auf den einzelnen zugehörigen Sehnen gelegenen Punkte betrachten.

Mit wachsenden Werten der Zahl n werden dann alle Punkte eines solchen Polygons Punkten des Kreisbogens immer näher kommen. Wir sagen, der Kreisbogen sei **Grenze** der Polygone der konstruierten Folge. (Wohlgemerkt, wir sagen nicht, der Kreisbogen sei „ein Polygon mit unendlich vielen Seiten", und auch nicht, er könne als ein solches „aufgefaßt werden". Wir sagen das nicht, weil es keinen Sinn hat.) —

Manche der hier betrachteten Eigenschaften eines Kreisbogens werden sich nun auch bei anderen Figuren wiederfinden, die man ebenfalls „Kurven" (oder besser, Stücke von solchen) genannt hat. Es gilt das aber keineswegs von allem Gesagten. Z. B. ist es klar, daß eine Spirale, die sich unendlich oft um einen Punkt herumwindet, weder eine endliche Bogenlänge zu haben braucht, noch in dem genannten Punkte selbst, wenn man ihn zu der „Kurve" rechnen will, eine bestimmte Tangente haben kann. Wir würden also einen zu beschränkten Begriff erhalten, wenn wir alles das, was vom Kreisbogen gesagt worden war, bei den nunmehr zu erklärenden „Kurvenstücken" wiederfinden wollten. Es entsteht somit die Frage, wie denn die am Kreisbogen bemerkten Eigenschaften voneinander abhängig sind.

Wir halten uns an das Nächstliegende, an die Eigenschaften 1 und 2. Wir erklären also einen Begriff Kurvenbogen oder Kurvenstück[2]) wie folgt:

---

[1]) Dieses ist also eine Definition. Sie wird ermöglicht durch den unmittelbar vorausgehenden Lehrsatz.

[2]) Der übliche Ausdruck ist: Jordanscher Kurvenbogen.

„Es soll ein Inbegriff (‚eine Menge‘) von Punkten einer Ebene sein, die eindeutig-umkehrbar und stetig den Punkten einer durch zwei Punkte begrenzten geraden Strecke entsprechen, und zwar (wie im Falle des Kreisbogens) mit Einschluß dieser Grenzen.“

Hiermit haben wir nun schon einen vieles umfassenden Begriff gebildet, dessen Umfang zu übersehen vielleicht gar nicht gelingen kann. Aber das wird uns nicht hindern, uns die Frage vorzulegen, wie vieles von den unter 3, 4, 5 genannten Eigenschaften des Kreisbogens sich unter unseren nunmehrigen Voraussetzungen noch wiederfinden mag. Einige hierin enthaltene Teilfragen sollen uns nunmehr beschäftigen.

Am einfachsten verhält sich in dieser Hinsicht die unter 5 angeführte Eigenschaft des Kreisbogens. Wir bemerken zunächst, daß unter unseren jetzigen Begriff Kurvenstück (entgegen der ursprünglichen Bedeutung des Wortes Kurve, das auf eine krumme Linie verweist) auch der Begriff einer geraden Strecke fällt. Weiterhin wird dazu gehören jeder polygonale Streckenzug, der aus einer endlichen Zahl gerader Strecken gebildet ist, vorausgesetzt nur, daß er keine mehrfachen Punkte, keine Selbstdurchdringung enthält. Man kann dann versuchen, die Zahl solcher Strecken unbegrenzt wachsen zu lassen, indem man gleichzeitig die Längen aller solchen Strecken unbegrenzt abnehmen läßt, und auf diese Art Kurvenstücke allgemeinerer Art als Grenzen polygonaler Streckenzüge zu erzeugen. Das soll alsbald in einem Beispiel ausgeführt werden. Zunächst führe ich das Ergebnis einer Überlegung an, die hier nicht wiedergegeben werden kann:

Jedes beliebige Kurvenstück kann, auf unendlich viele Arten, als Grenze polygonaler Streckenzüge aufgefaßt werden, und zwar genügen dazu solche Streckenzüge, die ihre sämtlichen Ecken auf dem Kurvenstück selbst haben.

Alles verhält sich in diesem Falle, dem der Behauptung 5, noch ganz so wie bei einem Kreisbogen.

Anders aber liegt die Sache bei den unter 3 und 4 angeführten Eigenschaften des Kreisbogens, und zwar hatten, insbesondere in bezug auf die Eigenschaft 3, ältere Mathematiker einen Denkfehler begangen, dessen Aufdeckung erst verhältnismäßig spät gelungen ist, dann aber für die Entwicklung der Mathematik eine große Bedeutung gewonnen hat. Diesen Irrtum, der ungemein lehrreich ist, wollen wir nunmehr kennenlernen.

Zwar konnte es jenen Mathematikern nicht verborgen bleiben, daß ein „Kurvenstück" der beschriebenen Art nicht überall, nicht in jedem seiner Punkte eine eindeutig bestimmte Tangente haben kann. Ganz einfache Beispiele zeigten das Gegenteil (vgl. Abb. 9).

Aber unsere Vorgänger waren der Meinung, daß die vorausgesetzte Stetigkeit der Abbildung auf eine gerade Strecke es verhindern müßte, daß jedem Punkte eines Kurvenstücks eine bestimmte Tangente fehlen könnte. Sie glaubten also nachweisen zu können, daß es Kurvenstücke, die in keinem einzigen ihrer Punkte eine bestimmte Tangente haben, gar nicht gibt. Und es ist wahrscheinlich, daß die Mathematiker, die die vorgebrachten Beweise nicht genügend fanden, doch die Behauptung selbst nicht für unrichtig hielten[1]).

Natürlich werden falsche Behauptungen immer endgültig durch Beispiele widerlegt, und zwar besonders überzeugend durch solche, die auf eine möglichst einfache Art konstruiert sind. Der erste, der ein solches Gegenbeispiel vor die Öffentlichkeit gebracht hat, ist Weierstrass gewesen, dessen Entdeckung dann den Anstoß noch zu manchen wertvollen Untersuchungen anderer gegeben hat. Neuerdings ist dann bekannt geworden, daß schon dreißig Jahre früher der Philosoph und Mathematiker Bernh. Bolzano Ähnliches gefunden hatte. Sein Beispiel war sogar einfacher als das von Weierstrass, und ähnlich dem, das hier vorgeführt werden soll. Dieses selbst verdankt man dem schwedischen Mathematiker H. v. Koch (Acta Mathematica, Bd. 30, S. 149).

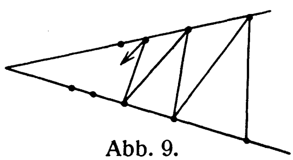

Abb. 9.

Man denke sich eine gerade Strecke, von der Länge Eins, in drei gleiche Teile geteilt und über dem mittleren ein gleichseitiges Dreieck errichtet. Man erhält dann einen polygonalen, aus vier gleich-langen Strecken zusammengesetzten Kurvenzug, der auf eine gerade Strecke von der Länge $\frac{4}{3}$, und folglich auch auf eine solche von der Länge Eins, eindeutig umkehrbar und stetig abgebildet werden kann. Über jeder der vier Strecken konstruiere man dann wieder einen solchen Kurvenzug,

[1]) G. Cantor hat darauf aufmerksam gemacht, daß selbst in den Schriften von Gauß, Abel und Dirichlet sich keine Andeutungen dieser Art finden.

wodurch dann ein aus 16 geraden Strecken zusammengesetzter Kurvenzug entsteht. Die Länge dieses neuen Kurvenzuges ist dann $\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3}$, und auch er kann wieder, eindeutig umkehrbar und stetig, auf eine Strecke von der Länge Eins abgebildet werden (Abb. 10).

Der hier in zwei Stadien beschriebene Prozeß läßt sich nun wiederholen, ad infinitum. Das heißt, man kann sich ihn ins Unendliche fortgesetzt denken — eine entsprechende Zeichnung auf dem Papier herzustellen, oder auch nur sich eine anschauliche Vorstellung von dem Ergebnis einer solchen Operationsfolge zu machen, ist unmöglich. Die Sache liegt aber gerade so wie in dem einfacheren, und darum dem Laien vielleicht weniger befremdlichen Operieren mit Summen unendlich vieler Größen, die sich auch nicht wirklich herstellen oder auch nur vorstellen lassen, und dennoch, wie schon gesagt, von Mathematikern mit vollkommener Sicherheit gehandhabt werden.

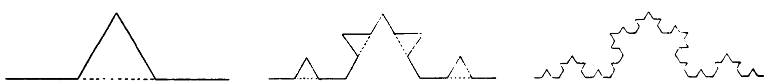

Abb. 10.

Wir erhalten als Grenze aller übereinandergestellten Polygonzüge einen Inbegriff (eine „Menge") von Punkten, die genau der hier gegebenen Definition des Begriffs Kurvenstück entspricht. Die Punkte auch dieses „Kurvenstücks" sind noch eindeutig-umkehrbar und stetig den Punkten einer Strecke von der Länge Eins zugeordnet; eine Selbstdurchsetzung kommt, wie bei den benutzten Polygonzügen, so auch bei deren Grenze nicht vor.

Aber unser Kurvenstück, das Ergebnis unseres unendlichen Konstruktionsprozesses, hat nun eine sehr merkwürdige Eigenschaft, die sich bei den benutzten Polygonen nicht findet: Es läßt in keinem seiner Punkte eine bestimmte Tangente zu.

Daß dem wirklich so ist, kann hier nicht vollständig bewiesen werden. Aber ein Teil vom Inhalt der letzten Behauptung, der auch schon merkwürdig genug ist, kann als fast unmittelbar einleuchtend gelten.

Man betrachte in der ersten unserer drei Figuren einen Endpunkt des Polygonzuges oder eine der drei mittleren Ecken des Polygons. Jeder dieser fünf Punkte erscheint auch in der zweiten Figur als Endpunkt oder Ecke des nunmehr konstruierten Polygons; ebenso auch in der dritten und in allen folgenden. Alle diese Punkte und ebenso auch alle in der zweiten oder dritten oder n-ten Figur neu hinzugekommenen Eckpunkte gehören in gleicher Eigenschaft auch allen folgenden Figuren an, und damit gehören sie von selbst auch zu dem Inbegriff von Punkten, der die Grenze aller unserer Polygonzüge ausmacht. Wir wollen alle diese Punkte Eckpunkte unseres Kurvenzuges nennen.

Von diesen Eckpunkten läßt sich nun zweierlei aussagen:

Erstens kann der Kurvenzug in keinem seiner Eckpunkte eine bestimmte Tangente haben. Schon ein Dreieck hat ja in einem seiner Eckpunkte keine bestimmte (eindeutig bestimmte) Tangente. Zweitens liegen in jeder Nähe eines jeden Punktes des Kurvenzugs Eckpunkte — also Eckpunkte in unendlicher Menge.

Es liegen also auf unserem Kurvenstück solche Punkte, in denen keine bestimmte Tangente vorhanden sein kann, nach der Ausdrucksweise der Mathematiker „überall dicht". Daß es auf diesem Kurvenstück überhaupt keine Punkte mit bestimmter Tangente gibt, ist, wie angedeutet, hiermit noch nicht begründet, läßt sich aber ebenfalls nachweisen[1]).

Überdies sehen wir noch, daß unser Kurvenzug eine unendliche Bogenlänge haben muß. In der Tat, diese als Grenze der Bogenlängen der einzelnen Polygonzüge zu definierende „Bogenlänge" ist gleich der Grenze der Zahlen der Folge

$$\frac{4}{3},\ \left(\frac{4}{3}\right)^2,\ \left(\frac{4}{3}\right)^3,\ \ldots \text{ ad infinitum.}$$

Sie ist also unendlich.

Man kann in dem Aufgeben von Voraussetzungen auch noch weiter gehen als hier geschehen. So kann man zunächst von der Zuordnung zwischen einem Inbegriff von Punkten (einer „Punktmenge") einer Ebene und einer geraden Strecke nur gegenseitige Eindeutigkeit und daneben Stetigkeit in einer Richtung verlangen. Dann erhält man noch nichts wirklich Neues: Es läßt sich zeigen, daß dann auch Stetigkeit in umgekehrtem Sinne vorhanden sein muß. Verlangt man aber Eindeutigkeit und Stetigkeit nur in der Richtung von der Strecke zur ebenen Punktmenge, so erhält man ein paradoxes Ergebnis. Man findet, daß dann die den Punkten der Strecke zugeordneten

---

[1]) F. Apt, Sitzungsber. der Berliner Math. Gesellsch., XIX. Jahrg., 1920; Math. Zeitschr. 1922.

Punkte der Ebene sogar ein ganzes Flächenstück vollständig ausfüllen können[1]).

Hiermit schließe ich diese Betrachtungen, die in einem bloßen Anhang zu einer anderen Zielen gewidmeten Schrift nicht wohl weitergeführt werden können. Doch wird wohl noch darauf hinzuweisen sein, daß der Eindruck, den vielleicht der eine oder andere Leser aus dem Vorgetragenen gewonnen haben mag, daß es sich nämlich nur um (vielleicht interessante) Kuriositäten handelt, nicht dem wirklichen Sachverhalt entspricht. Ein tieferes Eindringen in solche Stoffe würde ein Studium der von Georg Cantor, einem der wohl tiefsten und schöpferischsten Geister aller Zeiten, entworfenen Mengenlehre erfordern, die heute einen weitverzweigten und schwierigen Ideenkomplex darstellt, der noch in Entwicklung begriffen ist und trotz bedeutender Fortschritte, die man schon gemacht hat, einer befriedigenden Darstellung in wesentlichen Punkten noch harrt.

Nachtrag.

Erst nachdem der Druck des Vorhergehenden abgeschlossen war, habe ich den vierten Band von Bolzanos Wissenschaftslehre kennengelernt. Dies rührt daher, daß die im Jahre 1914 von Höfler veranstaltete zweite Ausgabe nur bis zu zwei Bänden gediehen ist, und daß eben diese Bände in früherer Zeit mir, wie ich jetzt bekennen muß, unbegreiflicherweise, keinen sonderlichen Eindruck hinterlassen hatten — vielleicht darum, weil manches darin heute veraltet ist. Ich erkenne und bedaure nunmehr meinen Irrtum, und ich hoffe ihn in der im Vorwort erwähnten Schrift gutmachen zu können. Hier soll wenigstens noch eine nachdrückliche Verweisung auf das Werk des vielleicht größten Erkenntnistheoretikers Platz finden.

Als eine nach ähnlichen Grundsätzen wie die Mathematik aufgebaute Theorie wird vielfach die Philosophie Spinozas hingestellt, was wenigstens insoweit zutrifft, als es Spinozas eigene Meinung wiedergibt. Haltbar ist diese Ansicht indessen wohl nicht. Dagegen hat Bernard Bolzano einen großen Teil der Erkenntnistheorie wirklich, und mit großem Erfolg, nach solchen Grundsätzen gestaltet. Insbesondere bezieht sich der ganze vierte Band seines Hauptwerkes auf das Thema, das in der vorliegenden Gelegenheits-

---

[1]) Peano, 1890, Hilbert, 1891; vgl. F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre 1914, IX, § 2; zweite Auflage 1927, VIII, § 36.

schrift kurz behandelt wird, von Bolzano aber mit einer nicht zu übertreffenden Gründlichkeit und Vielseitigkeit erörtert worden ist — vor nun mehr als neunzig Jahren.

Es wird auseinandergesetzt,

Wie ein Lehrbuch beschaffen sein soll:

Wie der Stoff zu umgrenzen ist; wie ein jedes solches Werk auf eine bestimmte Klasse von Lesern einzustellen und nach ihren vorher zu erforschenden Bedürfnissen einzurichten ist; wie der Inhalt auf zweckmäßigste Art geordnet werden kann; daß an das Gedächtnis der Leser nicht übermäßige Anforderungen gestellt werden sollen und an ihre Vorbereitung keine unvernünftigen; daß nach Möglichkeit alles durch Beispiele erläutert werden soll; daß der Grad der Gewißheit, der in einzelnen Erkenntnissen erreicht wird, vorsichtig abzuschätzen ist; daß und wie Mißverständnisse im voraus abgeschnitten werden sollen; daß der Verfasser sich die Frage vorzulegen habe, warum man dies so und nicht anders tue, und daß er sich auch vor seinen Lesern damit rechtfertigen soll; wie die Überschriften der einzelnen Abschnitte einzurichten sind; welche besondere Sorgfalt der Sprache des Vortrags zuzuwenden ist — dieses und vieles andere, über das ein wohlgegliedertes Inhaltsverzeichnis Auskunft gibt, mit Einschluß der Fehler, die man bei alledem begehen kann, wird in Bolzanos Werk in vorbildlicher Weise erörtert.

Ich muß darauf verzichten, von dem allen einen deutlichen Begriff zu vermitteln; doch wird eine Probe von Bolzanos Ausführungen nützlich sein, zumal sie auch zur Bestätigung und Ergänzung des S. 22 bis 25 Vorgetragenen wird dienen können.

§ 644. Wir dürfen nie zu berechnen vergessen, wie groß der Aufwand an Zeit und Mühe ist, den wir den Lesern und wohl noch anderen Personen verursachen, wenn sie sich die Zeichen und Bedeutungen, die wir in Vorschlag bringen, wirklich aneignen wollen. Wir müssen nicht nur erwägen, wie viele dieser Personen sich vielleicht schon eine andere Bezeichnungsart angewöhnt haben, sondern auch beherzigen, daß es überhaupt ungleich mehr Zeit und Mühe kostet, sich gewisse Zeichen so zu eigen zu machen, daß man sich ihrer selbst zu bedienen vermag, als dazu nötig ist, um einen anderen, der sie gebraucht, zu verstehen.

Wir müssen zweitens bedenken, wie viele Personen die Neuerung, auf die wir antragen, sei es aus Trägheit, Eigensinn oder sonst einem Grunde, nicht annehmen werden, und wieviel Mißverstand und

Verwirrung dann gerade daraus hervorgehen kann, daß ein Teil die von uns vorgeschlagenen, ein anderer wieder andere Bezeichnungen benutzen wird.

Drittens müssen wir erwägen, welche Beschwerlichkeit selbst im günstigsten Falle, d. h. dann, wenn unsere Bezeichnungsart von nun an allgemein befolgt würde, für alle die erwüchse, die Bücher zu Rate ziehen müssen, die noch in der alten Bezeichnungsart abgefaßt sind.

Viertens müssen wir erwägen, wie manche Leser unsere Absicht verkennen und argwöhnen werden, daß uns nur Neuerungssucht oder die eitle Begier, uns durch Einführung einer neuen Sprache berühmt zu machen, zu solchen Schritten verleitet; wie viel wir hierdurch in ihren Augen verlieren, ohne doch etwas Gutes zu erreichen.

Und schließlich wird auch zu bedenken sein, wie nachteilig unser Beispiel auf andere einwirken kann, daß es nämlich auch diese veranlassen mag, Veränderungen in der Bezeichnungsart zu versuchen, die vielleicht noch weit minder notwendig als die unseren sein werden[1]).

In summa: Daß man mit der Einführung neuer Bezeichnungen sparsam sein und daß man sie umsichtig und sorgfältig motivieren soll.

Um wie vieles besser würde heute der Zustand wohl aller Wissenschaften sein, wenn diese Worte bekannt und beherzigt worden wären; wie in einigen Gebieten der Mathematik, ganz besonders aber in der Philosophie, wo die Rücksichtslosigkeit terminologischer Neuerungen und die dadurch verursachte Verwirrung einen unerträglichen Grad erreicht haben!

---

[1]) Nahezu wörtliche Wiedergabe von Bolzanos Text.

Neuere und neueste Hefte der „Sammlung Vieweg"

Heft 45. Prof. Dr. K. Fajans: ***Radioaktivität und die neueste Entwickelung der Lehre von den chemischen Elementen.*** 4. Auflage. Mit 11 Abbildungen und 14 Tabellen. M. 5,—.

Heft 46. Dr. Bruno Alexander-Katz: ***Quarzglas und Quarzgut.*** Mit 43 Abb. M. 2,50.

Heft 47. Prof. Dr. G. Berndt: ***Radioaktive Leuchtfarben.*** Mit 28 Abbildungen im Text und auf einer Lichtdrucktafel. M. 4,—.

Heft 48. Dr. R. Fürth: ***Schwankungserscheinungen in der Physik.*** Mit 5 Abb. M. 3,50.

Heft 49. Dr. Hans Georg Möller: ***Die Elektronenröhren und ihre technischen Anwendungen.*** 2., vollständig umgearbeitete Auflage. Mit 208 Textabbildungen und einer Tafel. M. 7,50.

Heft 50. Prof. Dr. C. Dorno: ***Klimatologie im Dienste der Medizin.*** Mit 11 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 51. Prof. Dr. C. Isenkrahe: ***Zur Elementaranalyse der Relativitätstheorie.*** M. 4,50.

Heft 52. Dr.-Ing. Max Moeller: ***Das Ozon. Eine physikalisch-chemische Einzeldarstellung.*** Mit 32 Textfiguren. M. 6,—.

Heft 53. Dr. V. Geilen: ***Mathematik und Baukunst als Grundlagen abendländischer Kultur. — Wiedergeburt der Mathematik aus dem Geiste Kants.*** M. 3,—.

Heft 54. Dr. H. Heinrich Franck: ***Die Verwertung von synthetischen Fettsäureestern als Kunstspeisefette in wirtschaftlicher, physiologischer und technischer Beziehung.*** Mit 3 Abbildungen. M. 3,25.

Heft 55. Dr. Alfred Wegener: ***Die Entstehung der Mondkrater.*** Mit 9 Abbild. im Text und auf 3 Tafeln. M. 2,25.

Heft 56. Niels Bohr: ***Drei Aufsätze über Spektren und Atombau.*** 2. Auflage. Mit 13 Abbildungen. M. 5,—.

Heft 57. Prof. Dr. Hans Cloos: ***Der Mechanismus tiefvulkanischer Vorgänge.*** Mit 24 Zeichnungen und einer Karte. M. 4,—.

Heft 58. Dr. Walther Gerlach: ***Die experimentellen Grundlagen der Quantentheorie.*** 2. Auflage. Mit 43 Abbildungen.

Heft 59. Prof. Dr. E. Study: ***Denken und Darstellung, Logik und Werte, Dingliches und Menschliches in Mathematik und Naturwissenschaften.*** 2. Auflage. Mit 10 Abbildungen.

Heft 60. Prof. Dr. techn. Milan Vidmar: ***Theorie der Kreiselpumpe.*** Mit 39 Abbildungen. M. 4,75.

Heft 61. Reg.-Rat Dr. W. Meissner: ***Entfernungs- und Höhenmessung in der Luftfahrt.*** Mit 66 Abbildungen. M. 4,—.

Heft 62. Dr. K. Siebel: ***Die Elektrizität in Metallen.*** M. 3,50.

Heft 63. Dr.-Ing. M. Dolch: ***Die rationelle Verwertung der niederwertigen Braunkohlen.*** Mit 7 Abbildungen. M. 3,—.

Heft 64. Dr. A. Goetz: ***Physik und Technik des Hochvakuums.*** Mit 69 Abb. M. 5,—.

Heft 65. E. Study: ***Mathematik und Physik.*** Eine erkenntnistheoretische Untersuchung. M. 1,50.

Heft 66. Dr. Walter Schallreuter: ***Über Schwingungserscheinungen in Entladungsröhren.*** Mit 14 Abbildungen. M. 1,50.

Heft 67. Prof. Dr. Eberhard Buchwald: ***Das Korrespondenzprinzip.*** M. 5,50.

Heft 68. Direktor Dr. Iwan Döry: ***Die Schüttelerscheinungen elektrischer Lokomotiven mit Kurbelantrieb.*** Mit 12 Abbildungen. M. 1,50.

Heft 69. Prof. Dr.-Ing. Fritz Emde: ***Sinusrelief und Tangensrelief in der Elektrotechnik.*** Mit 18 Bildern. M. 4,50.

Heft 70. Laurenz Bock: ***Die Konstitution der Ultramarine.*** Mit 3 Abb. M. 2,40.