

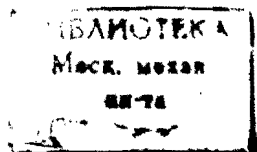
А. А. ЭЙХЕНВАЛЬД

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

★

ЧАСТЬ ШЕСТАЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Допущено Наркомпросом РСФСР
в качестве учебного пособия
для высших учебных заведений



1 9 3 1

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА ★ ЛЕНИНГРАД

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учение об электромагнитном поле обнимает собою почти все естествознание, и потому изложение его естественно занимает большой объем; это подтверждается многотомными изданиями, вышедшими на иностранных языках. Для того чтобы представить это учение как можно рельефнее, не расплываясь в деталях, я постарался выделить в эту небольшую сравнительно книгу только то, что имеет, по моему мнению, наиболее важное, принципиальное значение как с научной, так и с технической точки зрения. Тем не менее я счел необходимым каждый принцип иллюстрировать соответственным примером из практической физики. Исходным пунктом всех теоретических выводов служит *непосредственный опыт* — принцип, которому мы следовали и в других частях настоящего труда. Поэтому мы советуем читателю при чтении этой книги постоянно иметь под рукою общий экспериментальный курс электричества, составленный мною и вышедший шестым изданием в 1929 году. Возможность сослаться при изложении теории на общий курс электричества, где кроме опытов приводится также и теория явлений, только без применения высшей математики, позволила мне значительно сократить изложение некоторых параграфов этой книги. Читатель, имеющий намерение основательно изучить электромагнитные явления, должен при чтении этой книги постоянно сопоставлять теорию с опытом, и это замечание особенно относится к тем лицам, которые собираются применять свои знания к технике.

Вся книга мною разделена на три главы, которые находятся в соответствии с делением на главы в общем курсе электричества. Однако в отличие от общего курса здесь мною исключены явления электролиза, теория электронов и квантов, которые имеют с теорией электромагнитного поля лишь отдаленную связь.

В первой главе излагается теория электростатического поля в применении к проводникам и диэлектрикам. Мы советуем читателю сопоставить эту главу с общей теорией *потенциального* поля, изложенной в первой части Теоретической физики (стр. 58 до 115). Теория магнитного поля приведена нами в полную аналогию с теорией электростатического поля; о более сложных ферромагнитных явлениях упоминается лишь вкратце, и в дальнейшем изложении они совсем не принимаются во внимание. Это сделано главным

образом потому, что изложение ферромагнитных явлений потребовало бы слишком много места. Но кроме того с теоретической точки зрения ферромагнитные явления скорее относятся к молекулярной физике, чем к общей теории электромагнитного поля; ферромагнитные явления имеют большое значение в электротехнике, и в курсах электротехники читатель найдет и опытные данные и теорию ферромагнетизма, поскольку она необходима в технических применениях.

Во второй главе излагаются явления, основанные на связи между электрическим полем и магнитным полем. Мы советуем сравнить эту главу с общей теорией *вихревого* поля, изложенной в первой части Теоретической физики (стр. 115 до 159). В отделе IV этой главы излагаются основы теории Максвелла, а в отделе V — видоизменение теории Максвелла, введенное Лорентцом. При изложении теории Лорентца в применении к *движущимся телам* мною особенно выделена проявляющаяся при этом связь электромагнетизма с общей механикой; впрочем более подробное изложение этой связи я предполагаю сделать в одной из последующих частей этого курса.

Глава третья не содержит в себе каких-либо новых принципов, а посвящена применению основных уравнений Максвелла к *переменным* электромагнитным полям. При изложении теории электрических колебаний я счел необходимым включить теорию катодного генератора электрических колебаний, который в настоящее время получил большое значение на практике. Интересы электротехники приняты мною во внимание также при изложении теории волн вдоль проволок. Отделы III и IV этой главы относятся уже к электромагнитной оптике, которой будет посвящена часть шестая. Отдел V имеет значение для радиотехники.

Для удобства читателя я прибавил к тексту краткую сводку важнейших формул векторного исчисления, однако за более подробными сведениями и справками надлежит обращаться к первой части Теоретической физики.

Из обширной литературы по теории электромагнитного поля мною приведены лишь наиболее распространенные курсы на немецком языке, а затем указаны источники, в которых литература приведена полностью.

Приложенный в конце книги алфавитный указатель может служить некоторым дополнением к подробному оглавлению книги, поставленному перед текстом.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	III
<i>Глава 1.</i>	
<i>ЭЛЕКТРОСТАТИКА И МАГНИТОСТАТИКА.</i>	
I. Основные уравнения	1—17
1. Закон Кулона. 2. Единица количества электричества. 3. Влияние среды на электрические взаимодействия. 4. Напряжение электрического поля. 5. Электростатическая индукция. 6. Линии сил. 7. Поток индукции. 8. Поток индукции, образуемый одним зарядом. 9. Теорема Гаусса. 10. Трубка сил. 11. Единичная трубка сил. 12. Потенциал электростатического поля. 13. Уравнение Лапласа-Пуассона. 14. Физическое значение потенциальной функции. 15. Единица потенциала. 16. Эквипотенциальные поверхности.	
II. Поле данных зарядов	17—37
17. Общее замечание. 18. Равномерно заряженная пластинка. 19. Равномерно заряженная плоскость. 20. Две параллельные плоскости с противоположными зарядами. 21. Двойной слой. 22. Общее свойство заряженных поверхностей. 23. Равномерно заряженный шар. 24. Поле двух заряженных точек. 25. Поле двойного полюса. 26. Поле равномерно заряженного кругового цилиндра. 27. Поле двух параллельных цилиндров.	
III. Проводники	37—47
28. Свойства проводников. 29. Проводник в электрическом поле. 30. Полюс вблизи проводящей плоскости. 31. Емкость проводников. 32. Единица емкости. 33. Емкость плоского конденсатора. 34. Емкость шарового конденсатора. 35. Емкость цилиндрического конденсатора. 36. Емкость двух параллельных круговых цилиндров.	
IV. Диэлектрики	47—62
37. Свойства диэлектриков. 38. Потенциал поляризованного диэлектрика. 39. Поляризация и фиктивные заряды. 40. Соотношение между коэффициентами диэлектрика. 41. Условия на поверхности диэлектриков. 42. Преломление линий сил. 43. Сгущение линий сил. 44. Равномерно поляризованная пластинка. 45. Равномерно полири-	

Стр.

зованный шар. 46. Равномерно поляризованный эллипсоид. 47. Слонистый конденсатор. 48. Шар в однородном электрическом поле. 49. Общая задача электростатики.

V. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ 63—84

50. Работа при движении заряда в поле. 51. Энергия электростатического поля. 52. Теорема Уильяма Томсона-Кельвина. 53. Энергия и силы. 54. Натяжение у поверхности заряженного проводника. 55. Натяжение у поверхности изолятора. 56. Давление у поверхности изолятора. 57. Примечание. 58. Общий случай поверхностных сил. 59. Неоднородный диэлектрик. 60. Действие поля на диполь. 61. Энергия поляризованного тела в электрическом поле. 62. Шар в неоднородном электрическом поле. 63. Объемные и поверхностные силы. 64. Натяжение в электростатическом поле.

VI. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ 84—95

65. Закон Кулона. 66. Различие между электрическими и магнитными полюсами. 67. Единица количества магнетизма. 68. Напряжение и индукция магнитного поля. 69. Поток магнитной индукции. 70. Магнитный потенциал. 71. Магнитное поле диполя. 72. Потенциал двойного магнитного слоя. 73. Магнитно поляризованные тела. 74. Условия на поверхности. 75. Размагничивание. 76. Магнитная энергия. 77. Парамагнетизм и диамагнетизм. 78. Ферромагнетизм. 79. Магнитная энергия ферромагнитного тела. 80. Работа гистерезиса.

Глава II.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ.

I. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА 95—106

81. Сила тока. 82. Единица силы тока. 83. Закон Ома. 84. Единицы сопротивления и электропроводности. 85. Правила Кирхгофа. 86. Закон Джоуля. 87. Единицы работы и эффекта. 88. Закон Ома для плотности тока. 89. Уравнение непрерывности. 90. Закон Джоуля для плотности тока. 91. Условия на границе двух проводников. 92. Два электрода в неограниченном проводнике. 93. Время релаксации.

II. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ 106—130

94. Закон Био-Савара. 95. Закон Ампера. 96. Электромагнитная единица силы тока. 97. Магнитное поле прямого тока. 98. Поле кругового тока. 99. Линии сил замкнутого тока. 100. Замкнутый ток в однородном магнитном поле. 101. Потенциал магнитного поля электрического тока. 102. Магнитодвижущая сила. 103. Отличие поля тока от поля магнитного листка. 104. Магнитное поле внутри проводника. 105. Первое уравнение Максвелла. 106. Вектор-потенциал магнитного поля электрических токов. 107. Вектор-потенциал прямого тока. 108. Энергия магнитного поля электрических токов. 109. Магнитная энергия линейных токов. 110. Энергия и силы.

Стр.

III. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ 130—157

111. Открытие Фарадея. 112. Вывод Гельмгольца. 113. Другое выражение для электромагнитной индукции. 114. Электромагнитная индукция при движении. 115. Второе уравнение Максвелла. 116. Коэффициенты индукции. 117. Единица коэффициентов индукции. 118. Энергия системы линейных токов, выраженная через коэффициенты индукции. 119. Вычисление коэффициента взаимной индукции. 120. Вычисление коэффициента самоиндукции. 121. Самоиндукция электромагнита. 122. Взаимная индукция обмоток трансформатора. 123. Соотношения между коэффициентами индукции. 124. Коэффициент самоиндукции концентрических цилиндров. 125. Два параллельных цилиндра. 126. Коэффициент самоиндукции двух параллельных проводов при поверхностных токах. 127. Экстратоки. 128. Количество индуцируемого электричества. 129. Униполярная индукция. 130. Общее замечание об энергии и силах.

IV. ТЕОРИЯ МАКСВЕЛЛА 157—179

131. Ток смещения. 132. Конвекционный ток. 133. Основные уравнения Максвелла. 134. Единица измерений в уравнениях Максвелла. 135. Теорема Пойнтинга. 136. Пример. 137. Закон Максвелла. 138. Электромагнитная теория света. 139. Давление света. 140. Основные формулы теории Максвелла. 141. Изменение потока вектора при движении. 142. Опытная проверка первого уравнения для движущихся тел. 143. Движущийся конденсатор. 144. Опытная проверка второго уравнения для движущихся тел.

V. ТЕОРИЯ ЛОРЕНЦА 179—213

145. Теория электронов. 146. Уравнения Лоренца. 147. Пример движущегося плоского конденсатора. 148. Поле движущихся зарядов. 149. Энергия движущегося заряженного шара. 150. Катодные и анодные лучи. 151. Определение удельного заряда электронов. 152. Электромагнитный импульс. 153. Электромагнитная механика. 154. Пример. 155. Электромагнитный импульс движущегося заряженного шара. 156. Электромагнитная масса. 157. Момент импульса движущихся зарядов. 158. Опыт Трутона и Нобля. 159. Обобщенный электромагнитный импульс. 160. Соотношение между энергией и массой.

Глава III.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ.

I. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ 213—260

161. Введение. 162. Электрические колебания. 163. Принужденные колебания. 164. Кривые резонанса. 165. Определение коэффициента затухания по резонансной кривой. 166. Колебания энергии. 167. Комплексное сопротивление. 168. Неустойчивые электрические колебания. 169. Трансформатор. 170. Определение коэффициента

Стр.

связи. 171. Резонанс-трансформатор. 172. Индуктивно связанные системы. 173. Пример. 174. Системы, связанные емкостью. 175. Определение коэффициента связи по наблюдаемым частотам. 176. Общий случай. 177. Принужденные колебания связанных систем. 178. Катодный усилитель. 179. Катодный генератор. 180. Распределение переменного тока по сечению проводника.

II. Волны вдоль проволок 260—308

181. Формулы волнообразного движения. 182. Стоячие волны. 183. Затухание волн. 184. Телеграфное уравнение. 185. Интегрирование телеграфного уравнения. 186. Проходящая гармоническая волна. 187. Применение к телефонным проводам. 188. Телеграфный провод. 189. Отражение волн. 190. Отражение от сопротивления. 191. Отражение от конца с изменением фазы. 192. Изменение формы волнообразного движения при отражении. 193. Отражение на границе двух линий. 194. Электрические фильтры. 195. Частные случаи. 196. Собственные электрические волны в проводе. 197. Принужденные электрические волны в проводе. 198. Неустановившиеся движения электричества в линии. 199. Заряжение линии электричеством. 200. Электрический удар в линию.

III. Плоские электромагнитные волны в пространстве 308—322

201. Плоская волна в диэлектрике. 202. Соотношение между электрическим и магнитным полем. 203. Стоячие волны в пространстве. 204. Волны в проводящей среде. 205. Соотношение между электрическим и магнитным полем в полупроводниках. 206. Поглощение энергии. 207. Примеры.

IV. Отражение и преломление плоских волн 322—346

208. Законы отражения и преломления. 209. Формулы Френеля. 210. Закон Брюстера. 211. Нормальное падение. 212. Отражение от металлов. 213. Полное внутреннее отражение. 214. Изменение фазы при полном внутреннем отражении. 215. Параллелепипед Френеля. 216. Движение энергии при полном внутреннем отражении. 217. Объяснение рисунков.

V. Сферические волны 346—361

218. Формула сферической волны. 219. Сферическая электромагнитная волна. 220. Гармонический вибратор Герца. 221. Упрощение расчета. 222. Энергия лучеиспускания. 223. Сопротивление лучеиспускания. 224. Расчет антенны.

ПРИБАВЛЕНИЕ.

Формулы векторного исчисления	362
Литература	366
Алфавитный указатель	367

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ЭЛЕКТРОСТАТИКА И МАГНИТОСТАТИКА.

I. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

1. Закон Кулона. В основу электростатики, т. е. учения о *равновесии* электричества, мы положим закон *Кулона* (С. А. Coulomb). Этот закон был проверен прямыми и косвенными опытами с большою точностью (10^{-9}). Обозначая через e_1 и e_2 величины электрических зарядов и через r



Рис. 1.

расстояние между ними, мы можем закон *Кулона* изобразить формулою (рис. 1):

$$F_2 = K_e \frac{e_1 e_2}{r^2} \Gamma_{1,2}.$$

В этой формуле вектор F_2 означает силу, действующую на заряд e_2 , а $\Gamma_{1,2}$ означает *единичный* вектор, направленный от заряда e_1 к заряду e_2 . Величина K_e есть некоторый коэффициент, значение которого зависит от выбора единиц измерений.

Заметим, что заряды e_1 и e_2 нужно предполагать сосредоточенными в отдельных *точках*, потому что r может означать расстояние только между двумя точками. На самом же деле заряды всегда занимают некоторый объем, а потому на закон *Кулона* нужно смотреть как на *элементарный* закон, применимый к элементарным объемам *do*, ничтожно малым по сравнению с расстоянием r .

Само собою разумеется, что силы *Кулона* подчиняются третьему закону *Ньютона* (действие равно противодействию), а потому сила F_2 , с которой заряд e_1 действует на заряд e_2 , равна и противоположна силе F_1 , с которою заряд e_2 действует на заряд e_1 . Для определения силы, действующей на заряд e_1 , мы должны в выше-написанной формуле заменить $\Gamma_{1,2}$ через $\Gamma_{2,1}$, т. е. переменить знак

вектора Γ , отчего и знак вектора \mathbf{F} тоже изменится на противоположный.

Как известно, электричества бывают положительные и отрицательные; это следует из того обстоятельства, что они могут взаимно уничтожаться. При двух зарядах e_1 и e_2 *одинакового* знака направление вектора \mathbf{F} в написанной выше формуле будет совпадать с направлением вектора \mathbf{r} . Это означает, что заряд e_2 будет под действием силы стремиться отойти от e_1 на большее расстояние: сила будет *отталкивательная*. Наоборот, при электричествах *разного* знака, когда произведение их будет отрицательно, мы получим *притяжение*. Это вполне соответствует тому, что мы наблюдаем в действительности.

Закон *Кулона* для электрических взаимодействий аналогичен закону *Ньютона* для всемирного тяготения масс. Однако между этими двумя законами имеется существенное различие: тяготеющие массы всегда положительны и действие между ними всегда притягательное. Из этого следует, что при тех же обозначениях, как выше, мы должны формулу закона *Ньютона* написать со знаком минус:

$$\mathbf{F}_2 = -K_m \frac{m_1 m_2}{r^2} \Gamma_{1,2}.$$

2. **Единица количества электричества.** Мы можем воспользоваться законом *Кулона* для установления единицы количества электричества. Условимся количества e_1 и e_2 считать равными *единице*, если они действуют друг на друга на расстоянии одного сантиметра с силою в одну дину. При таком выборе единиц коэффициент $K_e = 1$ и закон *Кулона* напишется так:

$$\mathbf{F} = \frac{e_1 e_2}{r^2} \Gamma_{1,2} \text{ dyn.}$$

Выбранная таким образом единица количества электричества называется *абсолютной*, потому что в ее определение входят абсолютные единицы длины *см* и силы — *дина*; но так как кроме того эта единица основана на электростатических взаимодействиях, то необходимо прибавлять „*электростатическая*“. Абсолютные электростатические единицы мы будем обозначать знаком *CGS — E*.

Для практических применений, где приходится иметь дело с большими количествами электричества, установленная выше еди-

ница слишком мала, и на практике гораздо чаще применяют единицу, названную *кулоном*, причем

$$\text{кулон} = 3 \cdot 10^9 \text{ CGS — E.}$$

Прибавка „*электростатическая*“ необходима между прочим и потому, что взаимодействия между электричествами изменяются, когда они находятся в *движении*, т. е. образуют электрические токи и обнаруживают *магнитные* действия. На магнитных взаимодействиях электричеств (законы *Био* и *Савара* и *Ампера*) тоже можно основать единицу количества электричества (см. ниже), которая носит название *абсолютной электромагнитной* единицы количества электричества и которая оказывается в $3 \cdot 10^{10}$ раз большей абсолютной электростатической единицы количества электричества. Мы можем следовательно написать соотношение между различными единицами количества электричества в таком виде:

$$1 \text{ CGS — M} = 10 \text{ кулон} = 3 \cdot 10^{10} \text{ CGS — E.}$$

3. **Влияние среды на электрические взаимодействия.** Опыт показывает, что под действием электрических зарядов тела могут электризоваться *через влияние*. Появившиеся через влияние заряды тоже будут действовать на рассматриваемые нами два заряда e_1 и e_2 , а потому и наблюдаемые нами силы могут измениться. Некоторые случаи таких побочных влияний мы рассмотрим ниже, а теперь примем во внимание только один наиболее важный случай, когда постороннее тело занимает все пространство, окружающее заряды e_1 и e_2 , или, как говорят, образует *среду*, в которую погружены взаимодействующие заряды. Так как заряды, образующиеся путем влияния, всегда противоположны влияющим зарядам, то эта среда всегда будет *уменьшать* силы взаимодействия между e_1 и e_2 , а потому мы введем в закон *Кулона* в знаменателе некоторый коэффициент ϵ и напишем:

$$\mathbf{F}_2 = \frac{e_1 e_2}{\epsilon r^2} \Gamma_{1,2}.$$

Чем сильнее способна среда электризоваться через влияние, тем больше будет коэффициент ϵ и тем меньше будет сила \mathbf{F} взаимодействия между электричествами. Коэффициент ϵ называется *диэлектрической постоянной* среды. Для эфира (пространства, лишенного материи) $\epsilon = 1$; для различных тел, заполняющих пространство между зарядами, этот коэффициент может быть различен, но он

всегда положителен. Величина его зависит и от температуры тела и от его молекулярного состояния и т. п. В кристаллах ϵ зависит от направления, по которому действует электрическое влияние.

4. **Напряжение электрического поля.** Если на рассматриваемый нами заряд e действует не один, а несколько зарядов, распределенных как-нибудь в пространстве, то сила F , действующая на заряд e , будет представлять собой равнодействующую (геометрическую сумму) всех сил, обусловленных всеми зарядами, кроме e , потому что сам заряд на себя действовать не может. Так как все отдельные составляющие силы пропорциональны e , то фактор e мы можем вынести за знак геометрической суммы и написать для результирующей силы:

$$\sum F = e \sum E, \text{ или проще, } F = eE.$$

Величина E очевидно представляет собою *вектор*, потому что она определилась из суммы векторов; этот вектор называется *напряжением поля* в той точке, где помещается заряд e . Из только что сказанного следует, что напряжение поля в какой-либо точке мы можем определить независимо от величины e того заряда, который мы поместим в рассматриваемую точку пространства; этим обстоятельством мы будем часто пользоваться, вычисляя заранее поле вектора E , а потом по вычисленному напряжению будем определять и силы, которые действуют на заряд, помещенный в какую-либо точку поля.

Однако этот способ расчета требует некоторой оговорки. Дело в том, что в тех случаях, когда, кроме данных зарядов e , поблизости находятся еще и посторонние тела, то на этих последних возникнут индуцированные заряды (e'); а когда мы внесем в поле заряд e , то возникнут новые индуцированные заряды (e''). Хотя, как мы сказали, сам заряд e на себя действовать не будет (он не может самого себя сдвинуть с места), тем не менее индуцированные им в других телах заряды (e') могут действовать на e . Поэтому при расчете поля вектора E мы должны принять во внимание не только данные заряды e и индуцированные ими заряды (e'), но также и поле зарядов (e''), индуцированных самим зарядом e . Конечно расчеты в этих случаях могут значительно осложниться. Ниже мы рассмотрим несколько таких случаев.

Предположим однако, что нам удалось определить все поле вектора E . Тогда, умножая E на величину заряда e , получаем ту

силу F , с которой данное поле E будет действовать на заряд e в какой-либо точке поля. Если заряд e положительный, то сила будет одного направления с направлением E ; если же заряд e отрицательный, то сила будет противоположна напряжению поля.

Простой пример электростатического поля мы имеем в случае одного заряда. Напряжение поля в любой точке P будет выражаться формулою:

$$E_P = \frac{e_1}{\epsilon r^2} \Gamma_{1,P}.$$

Умножая это напряжение на заряд e , мы получаем силу по закону *Кулона*.

5. **Электростатическая индукция.** Произведение из напряжения поля и диэлектрической постоянной среды называется индукцией электрического поля:

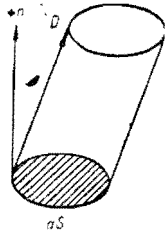
$$D = \epsilon E.$$

Электростатическую индукцию не нужно смешивать с магнитной индукцией и с электромагнитной индукцией — термины, которые нам встретятся впоследствии. Индукция D имеет то же направление, что и напряжение поля E , потому что диэлектрическая постоянная ϵ для всех тел положительна. В чистом эфире, где $\epsilon = 1$, индукция равна напряжению. В кристаллах величина ϵ зависит от направления вектора E относительно осей кристалла; тогда ϵ представляет собою тензор, и векторы D и E могут не совпадать друг с другом, а составлять между собою некоторый угол (см. часть I, глава III).

6. **Линии сил.** В каждой точке поля мы можем провести небольшую длину $d\mathbf{l}_1$ по направлению вектора D в этой точке; от конца вектора $d\mathbf{l}_1$ мы можем провести новый вектор $d\mathbf{l}_2$ и т. д. Все проведенные таким образом векторы образуют ломаную линию, а в пределе, при беспредельном уменьшении $d\mathbf{l}$, мы получим таким образом некоторую, вообще говоря, кривую линию. В каждой точке этой кривой векторы D и E будут направлены по *касательной*. Такие линии часто служат для наглядного графического изображения поля и носят название *линий сил*. При этом на самой линии указывается стрелкой и ее *направление*. Если мы поместим в какую-либо точку линии сил электрический заряд e , то он будет двигаться по линии сил. Мы предполагаем при этом, что масса заряда и скорость его невелики; в противном случае

движущийся заряд будет сходиться с одной линии сил на другую вследствие центробежной силы. Но предположим, что движения медленны и масса заряда ничтожна. Тогда мы можем сказать, что положительные заряды e будут двигаться в поле *вдоль по направлению* линий сил, тогда как отрицательные заряды будут двигаться по направлениям, *противоположным* линиям сил.

7. Поток индукции. Проведем в электрическом поле небольшую площадку (рис. 2) dS , выберем на ней положительную сторону и восставим положительную нормаль. Тогда площадка эта может быть рассматриваема как *вектор*, величина которого равна площади dS , а направление совпадает с направлением положительной нормали $+n$. Составим скалярное произведение из вектора dS и вектора индукции поля D :



$$dN = (D \cdot dS) = D \cdot \cos(Dn) \cdot dS = D_n \cdot dS.$$

Рис. 2. Это произведение носит название *потока индукции* сквозь площадку dS . Название потока взято из гидродинамики, где таким же произведением из вектора скорости жидкости v и площадки dS определяется *объем жидкости*, протекающей сквозь dS каждую секунду (поток жидкости).

Если нам дана поверхность S конечных размеров, то поток индукции сквозь S определится *суммой* всех потоков, протекающих сквозь отдельные площадки dS , из которых можно образовать рассматриваемую поверхность:

$$N = \int (D \cdot dS).$$

При графических изображениях поля часто обозначают величину потока N *числом линий сил*, пронизывающих поверхность S ; поэтому и поток индукции часто называют числом линий сил.

8. Поток индукции, образуемый одним зарядом. Рассмотрим поле одной заряженной точки e и проведем в этом поле элементарную площадку dS (рис. 3). Если расстояние этой площадки от заряда равно r , то индукция в ней будет равна:

$$D = \frac{e}{r^2} r$$

(независимо от диэлектрической постоянной среды ϵ , если среда однородна), а следовательно поток индукции

$$dN = e \frac{dS \cdot \cos(nr)}{r^2}.$$

Замечая, что величина

$$\frac{dS \cdot \cos(nr)}{r^2} = d\omega$$

представляет собою не что иное как величину телесного угла (ч. I, 39), под которым видна отрицательная сторона площадки из точки e , мы можем для потока индукции сквозь dS написать формулу:

$$dN = e \cdot d\omega.$$

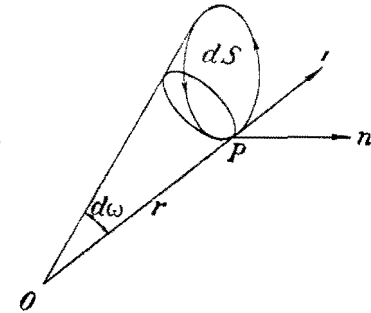


Рис. 3.

Этот поток индукции будет иметь положительное значение при положительном заряде e , когда вектор индукции и нормаль площадки образуют друг с другом острый угол [$\cos(nr) > 0$]; в противном случае поток будет отрицательным.

Проведем вокруг заряда e какую-либо *замкнутую* поверхность (рис. 4) и вычислим полный поток индукции, образуемый зарядом e и пронизывающий эту замкнутую поверхность. Но замкнутая поверхность видна из точки, находящейся внутри этой поверхности под углом 4π ; следовательно полный поток индукции сквозь нее будет равен:

$$N = \oint (D \cdot dS) = 4\pi e.$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что на основании этой формулы мы можем вычислить поток индукции сквозь какую-либо замкнутую поверхность, совершенно не принимая во внимание ни ее размеров ни ее формы; положение заряда внутри поверхности тоже не играет никакой роли. Если внутри поверхности находится несколько зарядов, то полный поток индукции, пронизывающий ее, будет равен 4π , умноженному на сумму всех находящихся внутри зарядов:

$$N = \oint (D \cdot dS) = 4\pi \sum e_i.$$

Знаком e_i мы обозначили заряды, находящиеся *внутри* рассматриваемой замкнутой поверхности. Наружные заряды тоже будут

образовывать потоки сквозь отдельные части поверхности, однако *полный* поток индукции сквозь рассматриваемую замкнутую поверхность будет равен нулю, потому что угол ω для наружных зарядов будет равен нулю. В этом легко убедиться, если представить себе сперва поверхность незамкнутой, а затем постепенно распространять ее, пока она не замкнется. Если при этом поверхность

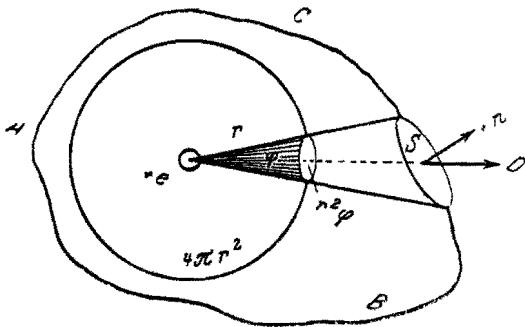


Рис. 4.

будет замыкаться вокруг данного заряда, то угол ω , увеличиваясь, дойдет до своего максимального значения 4π ; если же поверхность будет замыкаться, оставляя заряд e вне себя, то угол ω в конце концов уменьшится до нуля.

Итак при вычислении потока индукции сквозь замкнутую поверхность

все заряды, расположенные во внешнем пространстве, могут быть оставлены без внимания.

9. Теорема Гаусса. Положим, что заряды, заключенные внутри рассматриваемой замкнутой поверхности, не сосредоточены в отдельных точках, а заполняют собою объемы с плотностью ρ . Тогда сумма всех внутренних зарядов изобразится у нас интегралом:

$$\Sigma e_i = \int \rho \cdot d\omega,$$

взятым по всему объему, ограниченному рассматриваемой поверхностью, и мы можем написать:

$$\oint (\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}) = 4\pi \int \rho \cdot d\omega.$$

Если применить эту формулу к бесконечно малому объему $d\omega$, то получим (ч. I, 74):

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho,$$

или в декартовых координатах:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 4\pi\rho.$$

Выражение $\operatorname{div} \mathbf{D}$ называется *расхождением* вектора \mathbf{D} , а написанное нами уравнение называется условием непрерывности. Если принять это во внимание, то можно уравнению потоков придать следующий вид:

$$\oint (\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}) = \int (\operatorname{div} \mathbf{D}) \cdot d\omega.$$

Это равенство представляет собою знаменитую теорему *Гаусса*. Благодаря этой теореме мы можем любой интеграл, представляющий поток какого-либо вектора сквозь замкнутую поверхность, преобразовать в *объемный* интеграл расхождения этого вектора; объемный интеграл нужно распространить на весь объем, заключающийся внутри рассматриваемой поверхности. При этом однако необходимо, чтобы вектор \mathbf{D} был непрерывен (чтобы его можно было дифференцировать по координатам); что же касается до величины $\operatorname{div} \mathbf{D}$, то она может быть распределена в пространстве как угодно и даже прерывным образом. В тех случаях, когда вектор \mathbf{D} не везде непрерывен, поступают следующим образом (ср. ч. I, 100). Все места, где вектор \mathbf{D} прерывен, выделяют из рассматриваемого объема добавочными замкнутыми поверхностями и применяют теорему *Гаусса* к оставшемуся объему; а поверхностный интеграл распространяют не только на данную замкнутую поверхность, но и на все добавочно введенные поверхности.

10. Трубка сил. Представим себе опять небольшую площадку $d\mathbf{S}$, перпендикулярную к линиям сил; все линии сил, проходящие через контур этой площадки, будут образовывать собою трубчатую поверхность (рис. 5), которая называется *трубкой сил*. Проведем в трубке сил два каких-либо нормальных сечения и применим к выделенному между ними объему теорему *Гаусса*. Поток индукции сквозь сечение $d\mathbf{S}_1$ равен $-D_1 d\mathbf{S}_1$ (знак минус взят потому, что положительная нормаль у нас направлена наружу объема). Поток индукции сквозь сечение $d\mathbf{S}_2$ будет равен $+D_2 d\mathbf{S}_2$. Сквозь боковую поверхность трубки потока нет, потому что линии сил ее не пересекают [$\cos(Dn) = 0$]. Так как внутри трубки мы не

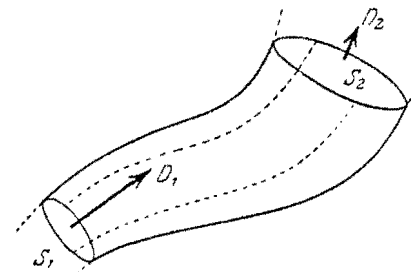


Рис. 5.

имеем зарядов, то полный поток индукции должен быть равен нулю, т. е.:

$$-D_1 dS_1 + D_2 dS_2 = 0; \quad D_1 dS_1 = D_2 dS_2 = \text{const.}$$

Это означает, что поток индукции сквозь все поперечные сечения трубки сил, проходящей в поле вне зарядов, *один и тот же*. Далее из полученного соотношения следует, что в тех местах, где трубка имеет большую площадь сечения, индукция D будет меньше, а там, где трубка сужается, индукция становится больше, и притом так, что произведение $D \cdot dS$ остается постоянным. Эта теорема остается в силе и для трубок конечного сечения. Но так как индукция D может в пределах сечения быть различной, то мы должны написать:

$$\int (\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}) = \text{const.}$$

Доказанная теорема применима и к движению воды в трубе, сечение которой не по всей длине одинаково: где площадь сечения меньше, там скорость течения воды будет больше, и наоборот. Произведение из скорости на площадь поперечного сечения трубы (поток воды) остается по всей длине трубы постоянным (предполагая, что нигде нет ни ответвлений ни утечки).

11. Единичная трубка сил. Мы можем провести в поле такую трубку сил, в которой поток N_1 будет равен единице. Такая трубка называется *единичной трубкой* сил и представляет собою то, что мы прежде называли линией сил. Действительно, если поток N_1 равен единице, то густота линий сил, т. е. число линий сил, пронизывающих один квадратный сантиметр сечения, определится так:

$$\frac{N_1=1}{S_1=1} = D,$$

и будет равна индукции D . Следовательно в каждой единичной трубке сил будет проходить *одна* линия сил. Линии сил удобнее для черчения поля; но зато единичная трубка сил имеет более реальное значение и представляет собою часть пространства, занимаемого полем. Мы можем все электрическое поле представить себе составленным из системы единичных трубок сил. Теореме Гаусса и постоянство потока вдоль каждой трубки мы можем теперь выразить следующими словами: каждый заряд $+e$ испускает из себя $4\pi e$ единичных трубок сил, которые заполняют собою

все поле и идут, не прерываясь, оканчиваясь только в отрицательном заряде $-e$.

12. Потенциал электростатического поля. Закон Кулона и вытекающая из него теорема Гаусса вполне достаточны для расчета электрического поля любых данных зарядов. Но в некоторых случаях расчет можно упростить, введя некоторую вспомогательную функцию, так называемый потенциал V , значение которого определяется уравнением:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V = -\frac{dV}{dn}.$$

Этот символ означает следующее (см. ч. I, 61, 62). Скаляр V есть некоторая функция координат (образует скалярное поле), и производная, взятая от этой функции по любому направлению \mathbf{s} , должна равняться проекции напряжения \mathbf{E} на направление \mathbf{s} в рассматриваемой точке:

$$E_s = -\frac{\partial V}{\partial s} = E \cos(E \cdot s).$$

Если мы возьмем производную по направлению линии сил [по $dn \cos(E \cdot n) = 1$], то она будет иметь наибольшее значение и будет равна E . Взяв производные по направлению осей координат, получим:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Так как производные всегда удовлетворяют условию:

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x},$$

то и в применении к нашему случаю, например к проекциям напряжений на оси координат, мы должны иметь:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0.$$

Эти три уравнения можно соединить в одно векторное уравнение:

$$\text{curl } \mathbf{E} = 0,$$

которое означает, что в рассматриваемом поле нет *вихрей*, что его линии сил не образуют *замкнутых* в себе линий. Поле, удовлетворяющее этому условию, имеет потенциал (ч. I, 68, 67).

Убедимся в том, что электрическое поле удовлетворяет этому условию. Возьмем пример одной заряженной точки, потому что любое другое поле может быть составлено из полей заряженных точек. Для заряда e , находящегося в начале координат, имеем:

$$E_x = E \cos(rx) = \frac{e}{\epsilon r^2} \cdot \frac{x}{r}; \quad E_y = E \cos(ry) = \frac{e}{\epsilon r^2} \cdot \frac{y}{r};$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Составляя производные, получаем действительно:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{e}{\epsilon r^4} \cdot \frac{x}{r} = \frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

Для того чтобы по данному полю напряжений определить поле потенциальной функции, мы можем исходить из общего соотношения

$$E_s = -\frac{\partial V}{\partial s}$$

и проинтегрировать это выражение от точки 0 до точки P:

$$\int_0^P E_s \cdot ds = \int_0^P (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}) = -\int_0^P dV = V_0 - V_P.$$

Как и при всяком интегрировании, мы получаем в результате только *разность* значений функций V в двух точках поля, а не самые эти значения. Но потенциал одной из точек поля должен быть нам дан; по этому исходному потенциалу мы можем вычислить и значения потенциалов в любой точке P поля, интегрируя скалярное произведение $(\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s})$ по какому-либо пути от нулевой точки до этой точки P. Выбор пути интегрирования не имеет значения, потому что результат не зависит от этого пути.

В теоретической физике часто потенциал бесконечно удаленных точек принимают за нулевой потенциал. Тогда потенциал в любой точке поля, лежащей на конечном расстоянии, определится так:

$$V_P = \int_P^\infty (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}).$$

Применим это к полю одной заряженной точки, где

$$E_r = \frac{e}{\epsilon r^2},$$

и будем интегрировать вдоль по радиусу; тогда

$$\int_P^\infty E_r \cdot dr = \int_P^\infty \frac{e}{\epsilon r^2} dr = \left| -\frac{e}{\epsilon r} \right|_P^\infty.$$

Если потенциал бесконечно удаленных точек принять равным нулю, тогда потенциал любой точки поля будет:

$$V = \frac{e}{\epsilon r}.$$

Наоборот, если потенциалы нам даны, то можем определить напряжение поля простым дифференцированием. В случае одной заряженной точки, когда поле имеет шаровую симметрию, дифференцируем по радиусу; получаем:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{e}{\epsilon r^2}.$$

13. Уравнение Лапласа-Пуассона. Подставив в уравнение непрерывности

$$\text{div } \mathbf{D} = \text{div}(\epsilon \cdot \mathbf{E}) = 4\pi\rho$$

на место напряжения поля отрицательно взятый градиент потенциала, получаем:

$$\text{div}(\epsilon \cdot \text{grad } V) = -4\pi\rho.$$

Если диэлектрическая постоянная ϵ во всем поле одинакова, то мы получаем более простое уравнение:

$$\text{div} \cdot \text{grad } V = -4\pi \frac{\rho}{\epsilon},$$

или в декартовых координатах:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi \frac{\rho}{\epsilon}.$$

В тех точках поля, где нет зарядов, мы имеем:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Это последнее уравнение носит название *уравнения Лапласа*, а предыдущее называется *уравнением Пуассона*. Оба уравнения играют большую роль в математике и в теоретической физике (см. ч. I, 78, 76 и далее).

Иногда удобно бывает вместо декартовых координат применять другие системы координат; тогда уравнение *Лапласа-Пуассона* принимает другой вид. Мы ограничимся здесь цилиндрическими и сферическими координатами.

Для *цилиндрических* координат с осью Z при расстоянии точки от *оси*, равном r , и угле φ , образуемом плоскостью (rZ) с начальной плоскостью, мы имеем следующие формулы (см. ч. I, 228, 165).

Элемент объема:

$$do = r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz.$$

Уравнение *Лапласа-Пуассона*:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi \frac{\rho}{\epsilon}.$$

Если поле имеет осевую симметрию, то производные по φ и z пропадают, и уравнение получает простой вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -4\pi \frac{\rho}{\epsilon}.$$

Для *сферических* координат с полярной осью Z при расстоянии точки от начала координат r , при угле ϑ , образуемом радиусом r с осью Z (угол ϑ называется иногда *полюсным расстоянием* он дополняет угол *широты* до 90°) и при угле φ , образуемом плоскостью (rZ) с начальной плоскостью (угол φ называется иногда *долготой*), мы имеем следующие формулы (см. ч. I, 229, 166).

Элемент объема:

$$do = r^2 \cdot \sin \vartheta \cdot dr \cdot d\vartheta \cdot d\varphi.$$

Уравнение *Лапласа-Пуассона*:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = -4\pi \frac{\rho}{\epsilon}.$$

Если поле симметрично относительно начала координат, то производные по ϑ и φ пропадают и остается уравнение:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -4\pi \frac{\rho}{\epsilon},$$

которое можно представить и в таком виде:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rV) = -4\pi \frac{\rho}{\epsilon}.$$

Как применяются эти уравнения, мы покажем при разборе различных частных случаев.

14. Физическое значение потенциальной функции. Мы ввели функцию V для того, чтобы упростить расчеты поля *вектора* \mathbf{E} , сведя их на расчеты *скалярного* поля V . Однако функция V имеет и наглядное физическое значение. Представим себе в какой-либо точке поля P_1 заряд e ; сила \mathbf{F} , с которой поле действует на этот заряд, равна

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}.$$

При перемещении заряда e из точки P_1 в точку P_2 поля на расстояние $d\mathbf{s}$, необходимо затратить некоторую работу

$$dU = -(\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}) = -e(\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}).$$

Знак минус мы поставили потому, что *положительную* работу мы должны будем затратить, если будем двигать заряд e *против* сил поля. Относя величину этой работы к единице заряда (разделяя на e), мы получаем:

$$\frac{dU}{e} = -(\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}) = dV.$$

Если точки P_1 и P_2 отстоят друг от друга на конечном расстоянии, то

$$V_2 - V_1 = \int_1^2 (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}).$$

Итак мы видим, что разность потенциалов между двумя точками электрического поля определяется той работой, которую нужно затратить на перемещение заряда $e=1$ из первой точки поля во вторую.

Если точка движется сама под действием сил поля, то работа получается отрицательная:

$$(\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}) = -dU.$$

Это означает, что мы при этом не только не затрачиваем работы, а, наоборот, получаем энергию за счет энергии электрического поля.

Если например заряд e имеет массу, то работа поля будет превращаться в кинетическую энергию движущейся массы. Если заряд во время движения испытывает сопротивление среды, вроде трения (как в проводниках), то энергия поля будет превращаться в теплоту (джоулево тепло).

Из написанных нами формул и из физического смысла этих формул непосредственно следует, что заряд e , двигаясь под действием электрического поля, т. е. двигаясь *вдоль по линиям сил*, будет переходить к точкам поля с *более низким* потенциалом. Формулу

$$E = \frac{-dV}{dn}$$

мы можем выразить словами так: напряжение поля равно падению потенциала на единицу длины по направлению линии сил в рассматриваемой точке.

15. Единица потенциала. Не нужно однако смешивать потенциал с работой, потому что работа равна произведению потенциала на количество электричества:

$$U = e(V_2 - V_1).$$

Соответственно с этим единица потенциала определяется отношением единицы работы к единице количества электричества. Практическая единица работы называется *джоуль*,

$$\text{джоуль} = 10^7 \text{ эрг},$$

а практическая единица потенциала названа *вольт*. Следовательно

$$\text{вольт} = \frac{\text{джоуль}}{\text{кулон}}; \text{ вольт} \times \text{кулон} = \text{джоуль}.$$

Мы можем на этом основании написать соотношения между различными единицами потенциала:

$$\text{вольт} = \frac{1}{300} \text{ CGS} - E = 10^8 \text{ CGS} - M.$$

Соотношения единиц *CGS-E* и *CGS-M* для потенциалов *обратные* тем, которые мы имели для количеств электричества (2, 2).

16. Эквипотенциальные поверхности. Если потенциалы поля во всех точках пространства нам известны, то мы можем соединить (графически или мысленно) все точки одинаковых потенциалов линиями или поверхностями. Тогда получим в поле целый ряд поверхностей *равных потенциалов*, или *эквипотенциальных* поверхностей. Такое изображение поля бывает очень наглядным и часто употребляется, в особенности в электротехнике. Не трудно доказать, что линии сил поля всегда перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям. Действительно, если мы будем перемещать заряд e по эквипотенциальной поверхности, где все разности потенциалов равны нулю, то и работа, затраченная на это перемещение, тоже будет равна нулю:

$$dU = -F \cdot ds \cos(F \cdot ds) = 0.$$

Но так как при этом ни сила F ни путь перемещения ds , вообще говоря, не будут равны нулю, то заключаем, что

$$\cos(F \cdot ds) = 0,$$

а это означает, что все пути по эквипотенциальной поверхности *перпендикулярны* к напряжению поля, или что линии сил направлены по нормальям к эквипотенциальным поверхностям. Имея это в виду, мы и обозначили выше элемент длины вдоль линии сил знаком dn , указывая таким образом, что это есть элемент нормали к эквипотенциальной поверхности в рассматриваемой точке.

Формы эквипотенциальных поверхностей, так же как и формы линий сил, могут быть в различных случаях весьма различны (см. Общий курс электричества).

II. ПОЛЕ ДАННЫХ ЗАРЯДОВ.

17. Общее замечание. Мы уже видели, что если даны отдельные заряженные точки, то потенциал поля определяется формулой

$$V = \sum \frac{e}{\epsilon r},$$

причем нулевой потенциал принимается в бесконечности. Если электричество распределено в объеме с плотностью ρ , которая может быть в различных точках различной, то потенциал в какой-либо точке поля определяется такою же формулой:

$$V = \frac{1}{\epsilon} \int \frac{1}{r} \rho \cdot do.$$

Потенциал в той точке, где помещается заряд e , получает бесконечное значение; однако на самом деле электричества всегда распределены в *объемах*, а в этом случае потенциал остается конечным и внутри зарядов. Это видно уже из того, что стоящая под интегралом величина *do* третьего порядка малости, а разделенная на r дает бесконечно малую величину второго порядка. Другими словами, плотности электричества, распределенные в непосредственной близости от той точки, для которой мы вычисляем потенциал, к значению потенциала ничего не прибавляют.

Иногда кроме объемной плотности электричества ρ в пространстве задают поверхностную плотность электричества σ на некоторых поверхностях. Но и такое задание мы можем толковать как распределение электричества в некотором *объеме*, причем этот объем имеет вид очень тонкого слоя на данной поверхности.

Общий ход решения задачи — определить поле данных зарядов — будет следовательно такой. Сперва по данным зарядам определяют потенциалы поля, а затем, вычисляя градиент потенциального поля, получают напряжение поля \mathbf{E} , наконец умножением на диэлектрическую постоянную получают и индукцию \mathbf{D} .

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V; \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}.$$

Такой путь вычисления поля выбирают потому, что потенциал представляет собою *скалярную* величину, а со скаларом обращаться проще, чем с вектором. Тем не менее в некоторых частных случаях можно определить непосредственно по данным зарядам поле векторов \mathbf{E} и \mathbf{D} , не прибегая к потенциалам. Если же нас и в этих случаях интересует потенциал, то его можно вычислить по известному уже полю вектора \mathbf{E} , по формуле

$$V_p = \int_p^\infty (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}).$$

18. Равномерно заряженная пластинка. Пусть нам дана пластинка, ограниченная двумя параллельными плоскостями на расстоянии $2a$ друг от друга и заряженная электричеством везде одинаковой плотности ρ . Размеры пластинки в других направлениях бесконечны (рис. 6).

Проведем в пластинке серединную плоскость, от которой обе пограничные плоскости отстоят на расстоянии равном a , и примем

ее за плоскость YZ . Вследствие симметрии расположения зарядов относительно оси X мы получим поле, зависящее только от координаты x , и можем для вектора \mathbf{D} написать уравнение:

$$\text{div } \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} = 4\pi\rho.$$

Отсюда определяем индукцию внутри пластинки:

$$D_x = 4\pi\rho \cdot x.$$

Как видим, индукция в серединной плоскости, где $x=0$, равна нулю, а затем она растет пропорционально расстоянию x от этой серединной плоскости. У пограничной плоскости $x=a$, и мы получаем:

$$D_a = 4\pi\rho \cdot a.$$

В наружном пространстве $\rho=0$, и наше уравнение будет иметь вид:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = 0; \quad D_x = \text{const} = 4\pi\rho \cdot a.$$

Это означает, что снаружи индукция будет везде постоянной и равной D_a . Наш вывод получит большую наглядность, если мы построим $\frac{1}{2}$ плоскости YZ трубку сил с сечением S и ограничим ее двумя поперечными сечениями на расстоянии x в обе стороны от серединной плоскости YZ . Количество электричества, заключающееся внутри этой трубки, будет равно $2\rho Sx$; образуемый этим электричеством поток индукции $4\pi 2\rho Sx$ направится в обе стороны по $+X$ и по $-X$ в равном количестве. Отсюда видим, что индукция D (поток индукции сквозь *единицу* сечения трубки) равна

$$D_x = 4\pi\rho x,$$

как и выше. Если $x=a$ или $x>a$, все равно, количество электричества, заключенное внутри трубки, останется равным $2\rho aS$, потому что снаружи пластинки $\rho=0$. Поэтому и поток индукции и сама индукция в различных сечениях трубки будут одни и те же, а именно: $D_a = D_x = 4\pi\rho a$.

Строго говоря, этот результат касается только случая *однородного* поля пластинки конечной толщины и *бесконечной* площади.

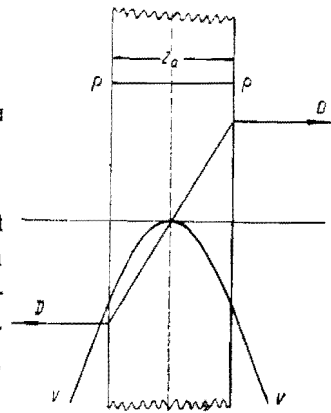


Рис. 6.

Однако полученные формулы можно применять как первое приближение и в тех случаях, когда площадь пластинки ограничена, если только контуры пластинки очень далеки по сравнению с расстоянием рассматриваемой точки поля от серединной плоскости.

По известной индукции мы определяем напряжение поля

$$E_i = \frac{D_i}{\epsilon} = 4\pi \frac{\rho}{\epsilon} x; \quad E_e = E_a = 4\pi \frac{\rho}{\epsilon} a.$$

При определении потенциалов мы тоже можем воспользоваться тем, что поле зависит только от координаты x , и производить интеграцию по пути, параллельному оси X . Обозначив потенциал серединной плоскости через V_0 , получаем потенциалы V_x на расстоянии x от нее (как в положительную, так и в отрицательную стороны):

$$V_x = V_0 - \int_0^x E \cdot dx.$$

Знак минус мы поставили потому, что мы интегрируем по линиям сил, т. е. в ту сторону, куда потенциалы уменьшаются. Подставляя сюда значения напряжения поля внутри пластинки, получаем:

$$V_i = V_0 - \int_0^x 4\pi \frac{\rho}{\epsilon} x \cdot dx = V_0 - 2\pi \frac{\rho}{\epsilon} x^2.$$

На пограничной плоскости имеем ($x = a$):

$$V_a = V_0 - 2\pi \frac{\rho}{\epsilon} a^2.$$

На дальнейшем пути интегрирования *снаружи* пластинки мы берем за исходный потенциал V_a и получаем:

$$V_e = V_a - \int_a^x 4\pi \frac{\rho}{\epsilon} a \cdot dx = V_a - 4\pi \frac{\rho}{\epsilon} (x - a) a.$$

На рис. 6 изображены напряжение поля и потенциалы в зависимости от величины x . Внутри пластинки напряжение поля растет *линейно* (пропорционально x), а потенциалы изменяются *параболически*; снаружи пластинки напряжение остается *постоянным*, а потенциалы изменяются линейно. На пограничной плоскости напряжение поля и потенциал *непрерывны* (без скачка). В потен-

циальной линии параболическая кривая *плавно* переходит в прямую линию (без излома). Так оно и должно быть, потому что напряжение поля, будучи равным отрицательно взятому градиенту потенциала

$$E = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\operatorname{tg} \alpha,$$

равно тангенсу угла наклона касательной к кривой потенциала; а если напряжение поля не имеет скачка, то и касательная к потенциальной кривой не будет иметь излома. Вообще в рассматриваемом поле только плотность электричества распределена прерывным образом. Так как величина

$$\rho = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial x} = \operatorname{tg} \beta,$$

т. е. тоже представляет собою тангенс угла наклона касательной к кривой, изображающей величину E как функцию x , то прерывность ρ влечет за собою *излом* кривой напряжения при $x = \pm a$, что и подтверждается нашими вычислениями.

19. **Равномерно заряженная плоскость.** Предположим, что данная нам пластинка имеет ничтожную толщину. В таких случаях обыкновенно дают не объемную, а *поверхностную* плотность зарядов. Но поверхностная плотность σ , т. е. количество электричества, приходящееся на каждый квадратный сантиметр пластинки, может быть выражена через объемную плотность следующим образом:

$$\sigma = 2a \cdot \rho,$$

где $2a$ — толщина пластинки. На этом основании мы можем применить формулы предыдущего параграфа и к рассматриваемому случаю, написав для *наружного* поля

$$|D_x| = 2\pi\sigma; \quad |E_x| = 2\pi \frac{\sigma}{\epsilon},$$

а для потенциала поля получим:

$$V_x = V_a - 2\pi \frac{\sigma}{\epsilon} |x|.$$

(Здесь символ $|A|$ означает *абсолютное* значение A , независимо от знака.)

Далее, так как толщину пластинки мы приняли бесконечно малой, то те величины, которые у нас прежде изменялись непрерывно, теперь будут иметь перерыв у заряженной плоскости (будут казаться нам прерывными). Так например вектор индукции при переходе сквозь заряженную плоскость сразу меняет свое направление, т. е. меняет свой знак. По одну сторону плоскости индукция направлена по $+X$ и имеет значение $+2\pi\sigma$, тогда как по другую сторону плоскости мы должны приписать этому вектору значение $-2\pi\sigma$. Обозначая через D_+ и D_- значения индукции по обеим сторонам пластинки, мы можем написать:

$$D_+ - D_- = 4\pi\sigma.$$

Следовательно индукция при переходе с одной стороны пластинки на другую образует скачок.

Тем не менее потенциальная функция остается непрерывной. Если принять V_a за нулевой потенциал, то получим:

$$V = -2\pi\frac{\sigma}{\epsilon}|x|.$$

Таким образом потенциалы понижаются по обе стороны заряженной плоскости (растут в отрицательную сторону) пропорционально расстоянию от плоскости. У самой плоскости оба потенциальные линии образуют угол, который соответствует прерывности вектора E (рис. 7).

20. Две параллельные плоскости с противоположными зарядами. Поле двух параллельных плоскостей, заряженных равномерно равными, но противоположными электричествами, мы можем рассчитать на основании результатов предыдущего параграфа. Индукция, обусловленная каждой из этих плоскостей, будет равна

$$D = \pm 2\pi\sigma.$$

В пространстве, заключенном между обеими плоскостями, оба поля будут иметь одно и то же направление и сложатся друг с другом; результирующее поле будет

$$D = 4\pi\sigma.$$

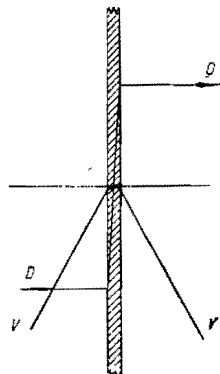


Рис. 7.

Между тем как в наружном пространстве оба поля будут взаимно уничтожаться. Мы получили таким образом между двумя плоскостями однородное электрическое поле, все линии сил которого начинаются у положительно заряженной плоскости и кончаются у отрицательно заряженной плоскости.

Для потенциалов между плоскостями мы получаем (рис. 8):

$$V_x = V_+ - 4\pi\frac{\sigma}{\epsilon}x,$$

где V_+ означает потенциал положительно заряженной плоскости. Полная разность потенциалов между обеими плоскостями при их взаимном расстоянии d равна

$$V_+ - V_- = 4\pi\frac{\sigma}{\epsilon}d.$$

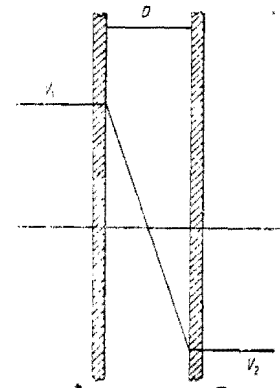


Рис. 8.

21. Двойной слой. Теперь представим себе, что расстояние d между плоскостями уменьшается до ничтожных размеров; тогда мы получим так называемый *двойной электрический слой*. Для двойного электрического слоя обыкновенно дают не поверхностную плотность σ и расстояние d , а произведение σd . Вообще, если мы имеем два равных и противоположных заряда $\pm e$ на расстоянии d , то произведение ed называется электрическим моментом этой пары. Точно так же произведение σd называют электрическим моментом единицы поверхности двойного слоя, или поверхностной плотностью электрических моментов p :

$$p = \sigma d.$$

Электрическое поле снаружи двойного слоя будет равно нулю, как в примере предыдущего параграфа. Тем не менее присутствие такого слоя будет обнаруживаться в том обстоятельстве, что потенциалы V около него делаются прерывными (рис. 9). Действительно на основании формулы предыдущего параграфа мы

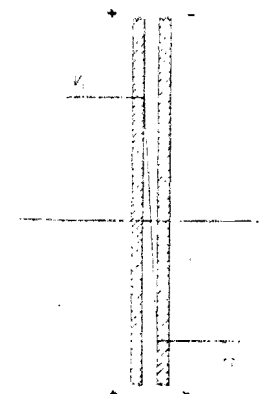


Рис. 9.

получаем разность потенциалов по обе стороны двойного слоя равную

$$V_+ - V_- = 4\pi \frac{\sigma d}{\epsilon} = 4\pi \frac{\rho}{\epsilon}.$$

22. Общее свойство заряженных поверхностей. Результаты предыдущих параграфов дают нам повод сделать *общее* замечание относительно прерывности в электрическом поле.

Если поле образовано зарядами с *объемной* плотностью ρ , то векторы \mathbf{D} и \mathbf{E} и потенциалы V везде непрерывны.

Если имеются *тонкие слои* электричества с поверхностной плотностью σ , то при переходе с одной стороны поверхности на другую нормальная составляющая индукции сразу меняется:

$$D_{+n} - D_{-n} = 4\pi\sigma.$$

Мы применили здесь результат, который получен нами для плоскости; однако в непосредственной близости от поверхности мы можем считать элемент ее dS за плоскость и притом бесконечных размеров по сравнению с толщиной поверхностного слоя электричества.

Если имеется *двойной* электрический слой какой угодно формы, то мы, как и в предыдущем случае, можем элемент поверхности dS считать плоским и написать для разности потенциалов по ту и по другую сторону поверхности формулу:

$$V_{+n} - V_{-n} = \frac{1}{\epsilon} 4\pi \cdot \rho_n.$$

Разница между рассмотренными нами в предыдущих параграфах случаями и нашим теперешним обобщением заключается между прочим в том, что поверхностная плотность электричества σ и поверхностная плотность электрических моментов ρ на данной поверхности может быть в различных точках различной, и формулы, написанные выше, относятся только к рассматриваемому нами элементу поверхности dS . На других элементах той же самой поверхности могут быть даны другие плотности σ и ρ и соответственно с этим мы получим другие значения прерывности функций D_n и V .

Мы предполагали диэлектрическую постоянную во всем поле одинаковой. В тех случаях, когда диэлектрическая постоянная для различных точек поля различна, данные в этом параграфе фор-

мулы несколько изменятся. Об этом мы будем подробнее говорить ниже.

23. Равномерно заряженный шар. Определим поле зарядов, распределенных в шаровом объеме радиуса a с равномерной плотностью ρ (рис. 10).

Проведем внутри данного шара концентрическую шаровую поверхность радиуса r . Количество электричества, заключающееся внутри этой шаровой поверхности, равно:

$$e_r = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho,$$

и число линий сил из него выходящих будет:

$$N = 4\pi e_r = 4\pi \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho.$$

Так как поле, очевидно, будет распределено симметрично вокруг центра шара, то все эти линии сил дадут на поверхности шара везде одинаковую индукцию, которую мы получим, разделив число N на поверхность шара $4\pi r^2$,

$$D_i = \frac{4}{3} \pi \rho r.$$

Следовательно индукция в центре шара будет равна нулю, а затем будет расти пропорционально расстоянию r от центра. На поверхности шара радиуса a мы получим

$$D_a = \frac{4}{3} \pi \rho \cdot a.$$

При дальнейшем увеличении радиуса $r > a$ количество заключенного в нем электричества меняться не будет; оно равно

$$e = \frac{4}{3} \pi a^3 \cdot \rho,$$

но линии сил будут распределяться все на большую и большую поверхность $4\pi r^2$. Следовательно снаружи индукция будет обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра:

$$D_e = \frac{4\pi e}{4\pi r^2} = \frac{e}{r^2}.$$

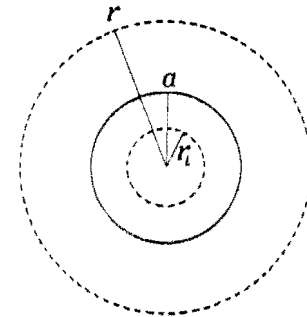


Рис. 10. Вычисление поля заряженного шара.

Легко убедиться в том, что индукция D непрерывна даже у поверхности шара, где плотность ρ прерывна. Действительно, положив $r=a$ в формулах для внутреннего и наружного поля, получаем одну и ту же величину индукции:

$$D_{i,a} = \frac{4}{3} \pi \rho \cdot a = \frac{e}{a^2}.$$

Наружу равномерно заряженный шар будет действовать как заряд e , сосредоточенный в его центре.

Мы воспользуемся этим последним замечанием и начнем вычисление потенциала с наружного поля. Потенциал будет выражаться так же, как в случае одной заряженной точки:

$$V_e = \frac{e}{\epsilon r}; \quad V_\infty = 0.$$

При этом нулевой потенциал нами принят в бесконечности. На наружной поверхности шара $r=a$ мы получим потенциал:

$$V_a = \frac{e}{\epsilon a}.$$

Тот же потенциал мы должны приписать поверхности шара с ее внутренней стороны. Для определения внутренних потенциалов будем интегрировать от поверхности к центру по какому-либо радиусу шара. Подставляя в формулу

$$V_i = V_a - \int_a^r E_i \cdot dr$$

значение E_i , получаем:

$$V_i = V_a - \int_a^r \frac{4}{3} \pi \frac{\rho}{\epsilon} r \cdot dr = V_a - \frac{2}{3} \frac{\pi \rho}{\epsilon} (r^2 - a^2);$$

$$V_i = \frac{1}{2} \frac{e}{\epsilon a} \left(3 - \frac{r^2}{a^2} \right).$$

Из этой формулы следует, что потенциал в центре шара равен:

$$V_1 = \frac{3}{2} \frac{e}{\epsilon a} = \frac{3}{2} V_a.$$

Мы предлагаем читателю рассчитать поле равномерно заряженного шара, пользуясь уравнением Лапласа-Пуассона в сферических координатах при центральной симметрии поля (12, 13):

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -4 \pi \frac{\rho}{\epsilon}; \quad E = - \frac{\partial V}{\partial r}.$$

Далее мы предлагаем рассчитать поле заряженного шара, когда плотность ρ дана в виде какой-либо функции расстояния r .

Если взять шаровой слой, образованный двумя концентрическими шарами a и b , и уменьшать постепенно толщину этого слоя, увеличивая радиус внутреннего шара b , то в пределе получим заряженную шаровую поверхность. Не трудно видеть, что во внутренней плоскости этой поверхности поле равно нулю (потенциал постоянен), а в наружном пространстве шаровой слой или заряженная шаровая поверхность будут действовать так, как будто весь заряд их был сосредоточен в центре.

Наконец, если мы возьмем две концентрические шаровые поверхности с равными и противоположными зарядами $\pm e$, равномерно распределенными, то не только внутреннее поле, но и наружное их поле будет равно нулю (ср. 17, 18). Только в пространстве между обеими шаровыми поверхностями индукция будет иметь значение

$$D_r = \frac{e}{r^2},$$

где $+e$ есть заряд меньшего шара.

24. Поле двух заряженных точек. В этом случае нам выгоднее начать с потенциалов. Обозначим через r_1 и r_2 расстояния рассматриваемой точки поля от зарядов e_1 и e_2 и примем, что $e_1 > e_2$. Диэлектрическую постоянную поля мы примем равной единице, или будем предполагать, что данные нам величины e представляют собою на самом деле $\frac{e}{\epsilon}$. Потенциал в поле одного заряда нам известен:

$$V = \frac{e}{r},$$

причем потенциал в бесконечно удаленных точках нами принят равным нулю. Потенциал двух зарядов будет равен

$$V = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2}.$$

Мы ограничимся рассмотрением случаев, когда данные нам заряды *противоположных* знаков, потому что этот случай имеет большее практическое значение; но результаты, которые мы получим, не трудно будет изменить так, чтобы они могли быть применимы и для зарядов одинакового знака. Обозначим отношение между величинами зарядов через

$$\chi^2 = \frac{e_1}{e_2}.$$

Тогда формулу потенциала можно написать в таком виде:

$$V = e_2 \left(\frac{\chi^2}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Из этой формулы мы заключаем, что потенциал будет равен нулю не только в бесконечно удаленных точках, но также и на эквипотенциальной поверхности, удовлетворяющей условию:

$$\frac{\chi^2}{r_1} - \frac{1}{r_2} = 0; \quad \frac{r_1}{r_2} = \chi^2.$$

Докажем, что это будет поверхность шара. Представим себе шаровую поверхность радиуса R (рис. 11) и на продолжении одного из радиусов возьмем точку A . Далее мы можем найти такую точку B внутри шара, лежащую на том же радиусе, чтобы расстояния a и b точек A и B от центра шара O удовлетворяли условию:

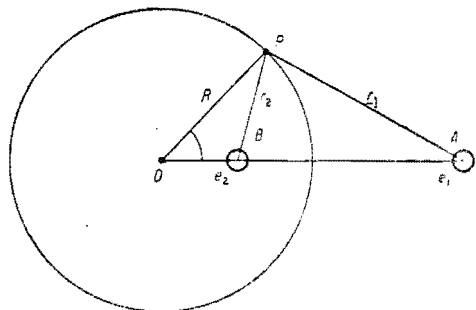


Рис. 11. Электрическое изображение при помощи взаимных радиусов.

$ab = R^2$; $\frac{a}{R} = \frac{R}{b}$.

$$ab = R^2; \quad \frac{a}{R} = \frac{R}{b}.$$

Тогда соединяя любую точку P поверхности шара с центром O и с точками A и B , мы получим подобные треугольники OAP и OPB . Эти треугольники подобны потому, что они имеют общий угол при центре шара и длины прилежащих сторон составляют вышенаписанную пропорцию

$$\frac{OA}{OP} = \frac{a}{R} = \frac{OP}{OB} = \frac{R}{b}.$$

Дополняя эту пропорцию отношением между третьими сторонами треугольников, имеем:

$$\frac{a}{R} = \frac{R}{b} = \frac{r_1}{r_2} = \chi^2.$$

Следовательно точки A и B обладают тем свойством, что расстояния их до любой точки поверхности шара находятся в постоянном для всех точек шара отношении. Точки A и B называются *взаимными* относительно данной шаровой поверхности. Уильям Томсон (лорд Кельвин) назвал точку B электрическим изображением точки A в шаре R ; точно так же и точку A можно назвать изображением точки B , потому что геометрические соотношения здесь *взаимны*. Способ электрических изображений часто облегчает расчет электрических полей, как это мы покажем ниже.

Переходя опять к нашей задаче определения поля двух заряженных точек, мы видим, что в этом поле мы будем иметь шаровую эквипотенциальную поверхность *нулевого* потенциала, относительно которой один из зарядов будет служить электрическим изображением для другого. Определим радиус этой шаровой поверхности и положение ее центра, предполагая, что нам дано отношение χ^2 между зарядами и их расстояние $2d$ друг от друга.

Выражая расстояния a и b через R и χ^2 :

$$a = R\chi^2; \quad b = \frac{R}{\chi^2},$$

подставляем эти величины в уравнение:

$$2d = a - b = R\chi^2 - \frac{R}{\chi^2}.$$

Тогда получаем величину радиуса шара:

$$R = 2d \frac{\chi^2}{\chi^4 - 1}.$$

Для расстояния центра этого шара от середины расстояния $2d$ имеем:

$$c = b + d = a - d = d \frac{\chi^4 + 1}{\chi^4 - 1}.$$

Наоборот, если нам дано отношение $\frac{c}{R}$, то на основании формулы

$$\frac{c}{R} = \frac{1}{2} \frac{\chi^4 + 1}{\chi^2}$$

мы можем определить отношение между зарядами:

$$\chi^4 - 2\delta\chi^2 + 1 = 0,$$

$$\chi^2 = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1}.$$

Мы написали в решении только знак $+$, предполагая, что нам даны $\delta > 1$, $c > R$.

Итак в поле двух зарядов мы всегда получим одну шаровую эквипотенциальную поверхность того же самого потенциала, что и в бесконечно удаленных точках поля. Остальные эквипотенциальные поверхности уже не будут сферическими; доказать это мы предоставляем самому читателю. Из наших формул также следует, что сфера нулевого потенциала будет заключать внутри себя тот из двух зарядов, который меньше. Если оба заряда одинаковы, то радиус R делается бесконечным, сфера обращается в плоскость, которая проходит по середине между зарядами и перпендикулярна к линии их соединяющей. Это и следовало ожидать на основании симметрии поля одинаковых зарядов противоположных знаков.

Из рис. 12 мы видим, что одна часть эквипотенциальных поверхностей обнимает только один из зарядов, другая же часть обнимает оба заряда сразу. Так как мы приняли, что заряд e_1 больше заряда e_2 , то естественно, что только некоторая часть линий сил, исходящих из e_1 , кончается в e_2 ; остальное число линий сил $4\pi(e_1 - e_2)$ уходит к посторонним зарядам, находящимся где-нибудь очень далеко от рассматриваемого места поля (в бесконечности, рис. 12).

Некоторый интерес представляет та точка поля, где индукция равна нулю. Не трудно сообразить, что такая точка может лежать только на линии, соединяющей оба заряда, — вне того отрезка, концами которого они служат; она должна удовлетворять условию

$$D = \frac{e_1}{r_1^2} - \frac{e_2}{r_2^2} = 0; \quad \frac{r_1}{r_2} = \chi.$$

Заметим, что эта точка представляет собою так называемую особую точку поля, в которой общие правила для линий сил и эквипотенциальных поверхностей теряют свою силу; в этой точке

пересекаются и линии сил и эквипотенциальные поверхности. Однако это не может дать повода к неопределенностям, потому что здесь

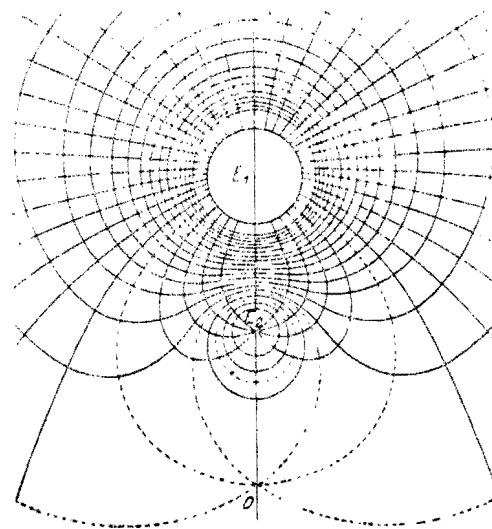


Рис. 12. Поле двух заряженных точек.

индукция и напряжение поля равны нулю. В поле равных противоположных зарядов эта точка находится в бесконечности.

25. Поле двойного полюса. Если мы будем сближать два равных и противоположных заряда $\pm e$ на такое малое расстояние d , что величиною d можно пренебречь по сравнению с расстояниями r в поле, то формулы значительно упрощаются. Если мы напишем потенциал двух равных и противоположных полюсов в таком виде:

$$V = e \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = e \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2},$$

то при малом расстоянии между полюсами мы можем положить (рис. 13, 14)

$$r_2 - r_1 = d \cos \alpha; \quad r_1 r_2 = r^2;$$

где α есть угол, образуемый радиусом-вектором r с направлением сдвига d положительного полюса относительно отрицательного. Обозначая произведение (ed) через p , мы можем для потенциала двойного полюса написать:

$$V = p \frac{\cos \alpha}{r^2}.$$

Величина p называется *электрическим моментом* двойного полюса (*биполя* или *диполя*). Электрический момент биполя есть вектор, имеющий направление вектора сдвига \mathbf{d} ; поэтому произведение

$$p \cdot \cos \alpha = p_x$$

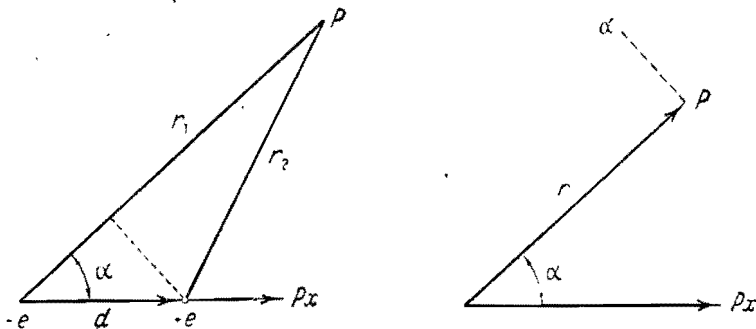


Рис. 13. Две противоположно заряженные точки.

Рис. 14. Вычисление поля биполя.

есть проекция вектора p на направление радиуса-вектора r . Мы можем потенциал биполя представить еще в ином виде. Замечая, что

$$\frac{1}{r^2} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) = -\nabla \frac{1}{r}$$

и что вектор градиента направлен в ту сторону, куда $\frac{1}{r}$ увеличивается, т. е. куда r уменьшается, мы условимся знаком ∇_r обозначать вектор, направленный в противоположную сторону, т. е. по направлению от биполя к рассматриваемой точке поля; тогда получим:

$$-\nabla \frac{1}{r} = \nabla_r \frac{1}{r}$$

и потенциал биполя получит вид:

$$V = \left(p \cdot \nabla_r \frac{1}{r} \right).$$

Эта формула дает нам возможность, зная потенциал поля полюсов, распределенных как угодно в пространстве, вычислить поле биполей такого же распределения и одинакового сдвига \mathbf{d} .

По определенным потенциалам мы можем вычислить составляющие напряжения поля по какому-нибудь направлению s :

$$E_s = -\frac{\partial V}{\partial s}.$$

Определим составляющие напряжения поля биполя вдоль радиуса-вектора r и по направлению, перпендикулярному к радиусу; в этом последнем случае мы будем положительное направление считать в ту сторону, куда растут углы α в тригонометрии (рис. 14). Для этих составляющих мы получаем:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = p \frac{2 \cos \alpha}{r^3},$$

$$E_a = -\frac{\partial V}{r \partial \alpha} = p \frac{\sin \alpha}{r^3}.$$

Величина напряжения определяется формулой

$$E = \frac{p}{r^3} \sqrt{4 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha},$$

а угол наклона напряжения к радиусу-вектору зависит от угла α следующим образом:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{E_a}{E_r} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

На рис. 15 изображено поле биполя линиями сил.

В общем напряжение поля обратно пропорционально *третьей* степени расстояния r от биполя. Вдоль линии биполя напряжение поля *вдвое* сильнее, чем по линии, перпендикулярной этому направлению, при одинаковом расстоянии r .

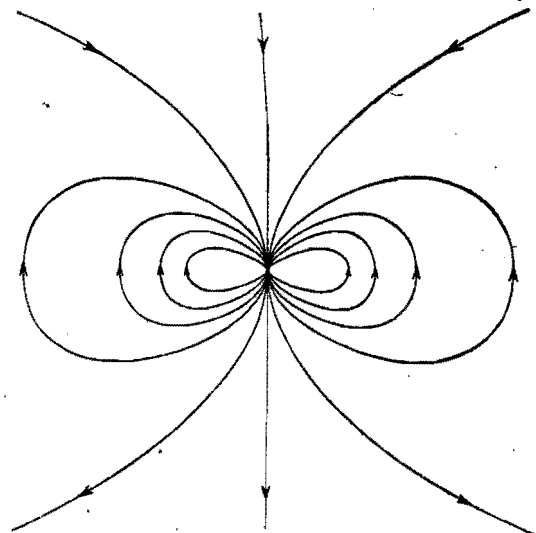


Рис. 15. Линии сил биполя.

26. Поле равномерно заряженного кругового цилиндра. При решении этой задачи мы могли бы поступить как при определении поля заряженной пластинки и заряженного шара, вычисляя потоки индукции сквозь concentрические цилиндры радиуса r . Но мы будем (для разнообразия) исходить из уравнения *Лапласа-Пуассона* в цилиндрических координатах (что по существу своему предста-

влетает то же самое). Так как мы имеем в данном случае дело с полем, обладающим осевой симметрией, то исходное уравнение имеет простой вид (14, 13) ($\epsilon = 1$):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -4\pi\rho; \quad \frac{\partial V}{\partial r} = -E.$$

Для наружных точек поля $\rho = 0$. Первая интеграция этого уравнения дает нам производную потенциала по радиусу, т. е. напряжение поля, которое направлено по радиусам r . Обозначая напряжения для внутренних и для наружных точек через E_i и E_e , имеем:

$$E_i = 2\pi\rho \cdot r; \quad E_e = \frac{C}{r}.$$

Постоянную интеграции C мы должны определить так, чтобы при $r = a$ (радиус цилиндра) обе формулы давали одно и то же значение напряжения:

$$E_{i,a} = 2\pi\rho \cdot a = \frac{C}{a}; \quad C = 2\pi\rho \cdot a^2.$$

Отсюда определяем C и получаем окончательные формулы для напряжения поля внутри и снаружи цилиндра:

$$E_i = 2\pi\rho \cdot r; \quad E_e = 2\pi\rho a^2 \frac{1}{r}.$$

На оси цилиндра поле равно нулю; затем напряжение растет пропорционально расстоянию от оси, а снаружи цилиндра, где нет зарядов, напряжение обратно пропорционально расстоянию от оси.

Для вычисления потенциалов нам нужно проинтегрировать еще раз:

$$V_i = - \int_0^r E_i dr = - 2\pi\rho \int_0^r r \cdot dr = - \pi\rho r^2 + C_1,$$

$$V_e = - \int_a^r E_e dr = - 2\pi a^2 \rho \int_a^r \frac{1}{r} dr = - 2\pi\rho a^2 \cdot \lg r + C.$$

Постоянную C_1 мы определим так, чтобы оба выражения при $r = a$ совпадали:

$$- \pi\rho a^2 + C_1 = - 2\pi\rho a^2 \cdot \lg a + C$$

$$C_1 = - 2\pi\rho a^2 \cdot \lg a + \pi\rho a^2 + C.$$

После этого получаем окончательные выражения для потенциалов внутри и снаружи равномерно заряженного цилиндра:

$$V_i = \pi\rho (a^2 - r^2) - 2\pi\rho a^2 \cdot \lg a + C,$$

$$V_e = - 2\pi\rho a^2 \cdot \lg r + C.$$

Оставшаяся постоянная интеграции C зависит от того, где мы примем потенциал равным нулю. Приняв нулевой потенциал в бесконечности, мы получаем $C = \infty$. Но иметь в формулах бесконечно большие величины неудобно, а потому оставляем значение C неопределенным. Важно только, чтобы это значение оставалось *постоянным* для всех точек поля и не изменялось при внесении в поле новых зарядов.

Заметим, что величина $\pi a^2 \rho$ представляет собою количество электричества, заключающееся в единице длины цилиндра. Обозначая эту величину через τ , получаем потенциал и напряжение поля *снаружи* цилиндра выраженным через τ :

$$E_e = 2\tau \frac{1}{r}; \quad V_e = - 2\tau \cdot \lg r + C.$$

Эти формулы применимы и к цилиндру очень малого поперечного сечения, т. е. к *прямой линии*, заряд которой на каждом погонном сантиметре равен τ .

Мы получили здесь логарифмический потенциал, который мы уже рассматривали в общей теории плоского поля (I, 114).

27. Поле двух параллельных цилиндров. Практический интерес представляет определение потенциала поля, образованного двумя параллельными круговыми цилиндрами бесконечной длины, заряженными равномерно равными и противоположными электричествами. Обозначая через r_1 и r_2 расстояние какой-либо точки поля от осей этих цилиндров, мы можем, основываясь на формулах предыдущего параграфа, написать для потенциалов внутри каждого цилиндра выражения:

$$V_{i,1} = \pi\rho (a^2 - r_1^2) - 2\pi\rho a^2 \cdot \lg \left(\frac{a}{r_2} \right) + C,$$

(заряды $+\rho$)

$$V_{i,2} = - \pi\rho (a^2 - r_2^2) + 2\pi\rho a^2 \cdot \lg \left(\frac{a}{r_1} \right) + C,$$

(заряды $-\rho$)

а для наружного поля получим:

$$V_e = - 2\pi\rho a^2 \lg \left(\frac{r_1}{r_2} \right) + C.$$

Применяя последнюю формулу к бесконечно тонким цилиндрам, т. е. к двум параллельным прямым линиям, на которых распределены заряды противоположного знака, но с одинаковой линейной плотностью τ , мы имеем:

$$V = -2\tau \cdot \lg \left(\frac{r_1}{r_2} \right) + C.$$

Мы видим, что эквипотенциальными поверхностями в этом поле будут служить цилиндры, сечения коих удовлетворяют условию

$$\frac{r_1}{r_2} = \chi^2 = \text{const.}$$

Но из того, что мы выяснили при изучении поля двух заряженных точек (24, 24), мы заключаем, что это должны быть непременно *круговые* цилиндры. Пересечем наше поле плоскостью, перпендикулярною к обеим линиям; обозначим через A и B точки пересечения этих линий с плоскостью и через $2d$ расстояние этих точек друг от друга. Тогда условие

$$V = \text{const}; \quad \frac{r_1}{r_2} = \chi^2 = \text{const}$$

даст нам в этой плоскости целый ряд эквипотенциальных кругов (рис. 16). Для каждого данного нам значения потенциала мы можем определить величину χ^2 , а затем построить соответственный эквипотенциальный круг, вычисляя его радиус R и расстояние C его центра от середины отрезка $2d$ по формулам § 24. Круги эти будут эксцентричны, и центры их будут лежать на линии соединения точек A и B . Для кругов, обнимающих точку A , величина χ^2 будет больше единицы, а для кругов, обнимающих

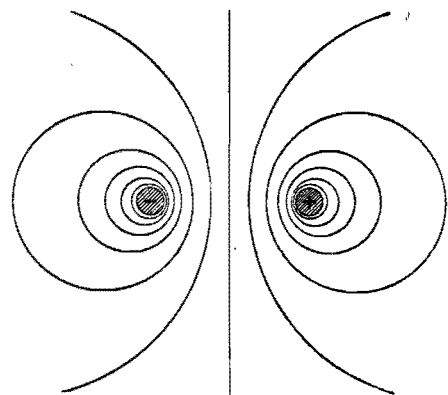


Рис. 16. Эквипотенциальные цилиндры двух заряженных линий.

точку B , величина $\chi^2 < 1$. Круги, расположенные симметрично относительно середины расстояния $2d$, будут одинакового радиуса, а величина χ_1^2 одного из них будет равна $\frac{1}{\chi_2^2}$ другого.

Разность потенциалов между двумя любыми кругами может быть выражена формулой

$$V = 2\tau \cdot \lg \left(\frac{\chi_2}{\chi_1} \right)^2.$$

Не только эквипотенциальные линии будут на нашем чертеже кругами, но также и нормальные к ним линии сил (ср. ч. I, 123). Все линии сил будут представлять собою дуги окружностей, проходящих через точки A и B .

III. ПРОВОДНИКИ.

28. Свойства проводников. Опыт показывает, что в некоторых телах при малейшей разности потенциалов возникают электрические токи. Такие тела называются **проводниками** электричества. Если обозначим через e количество электричества и через v скорость его движения, то произведение

$$i = e(v \cdot S)$$

будет представлять собою *поток* электричества сквозь площадку S , т. е. количество электричества, протекающее сквозь S в единицу времени. Эта величина называется *силою тока*. Сила тока, отнесенная к единице сечения, называется плотностью тока i . По закону, установленному *Омом*, плотность тока определяется напряжением электрического поля в проводнике следующим образом:

$$i = \sigma \cdot E.$$

Коэффициент пропорциональности σ называется *удельною электропроводностью* рассматриваемого тела. Для того, чтобы токов не было, т. е. чтобы электричество находилось в равновесии в проводниках, необходимо, чтобы во всех точках внутри проводника напряжение было равно нулю:

$$E_i = 0; \quad \frac{\partial V_i}{\partial n} = 0; \quad V_i = \text{const.}$$

Это условие можно выразить и так: в электростатике каждый проводник имеет во всех своих точках один и тот же потенциал. Разные проводники, изолированные друг от друга, могут иметь и различные потенциалы.

Далее поверхность проводника, находящегося в электростатическом поле, непременно представляет собою *эквипотенциальную*

поверхность этого поля. Отсюда следует, что линии сил должны быть нормальны к поверхности проводника. Это последнее условие вытекает между прочим и из следующего соображения: если бы линии сил были *не* нормальны к поверхности проводника, а имели бы тангенциальную составляющую (по касательной к поверхности), то получился бы электрический ток вдоль поверхности проводника. Итак условие, которому должно удовлетворять поле у поверхностей проводников, мы можем выразить формулой:

$$E_t = 0.$$

Выделим мысленно на поверхности проводника небольшую площадку dS и пусть она заряжена поверхностной плотностью электричества σ . Поток индукции этого электричества $4\pi\sigma \cdot dS$ будет, как мы выяснили, посылаться по направлению *нормальному* к поверхности проводника и притом *наружу*, в ту сторону, где проводник граничит с диэлектриком. Выражая поток индукции через индукцию и применяя теорему Гаусса, имеем

$$D_n dS = 4\pi\sigma \cdot dS.$$

Откуда получаем для нормальной составляющей индукции (тангенциальная составляющая равна нулю) следующее соотношение:

$$D_n = 4\pi\sigma.$$

29. Проводник в электрическом поле. Задачи, которые мы решали в предыдущем отделе, состояли в том, чтобы по данным зарядам определить поле, которое было безгранично. Теперь нам предстоит рассмотреть более трудные задачи, когда даны непосредственно только *некоторые* заряды и дано расположение проводников в поле. Проводники эти заряжаются через влияние и для определения поля требуется предварительно знать заряды, индуцированные на проводниках.

С математической точки зрения задача представляется в следующем виде. Требуется найти такую функцию (потенциал) V , которая удовлетворяла бы во всех точках поля *вне* проводников уравнению Лапласа-Пуассона:

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho,$$

которая в бесконечности обращалась бы в нуль и на каждой из данных проводящих поверхностей была бы постоянна. При этом может быть дано распределение электричества в пространстве, или

могут быть даны значения потенциальной функции на каждой проводящей поверхности. Точные решения подобных задач, и притом в конечной форме, имеются только для простейших случаев и для поверхностей простейших форм. Но на практике часто встречается расположение проводников, не соответствующее готовым решениям. Тогда приходится довольствоваться приближенным расчетом поля. В некоторых случаях может оказать существенную помощь при расчете следующее замечание. Если мы уже имеем расчет какого-либо электростатического поля и провели в нем эквипотенциальные поверхности, то каждая из этих поверхностей может быть заменена проводящей поверхностью без изменения самого поля. Действительно на каждой такой поверхности потенциал постоянен и линии сил расположены по нормальям; а это и есть то условие, которому должна удовлетворять проводящая поверхность в поле. Примеры подобного решения задач нам встретятся ниже.

30. Полюс вблизи проводящей плоскости. Дан заряд e , помещенный на расстоянии h от проводящей плоскости (рис. 17); требуется определить поле и расположение зарядов, индуцированных на плоскости. Очевидно, что поле будет симметрично расположено относительно оси h . Поэтому мы возьмем эту линию за ось координат Z с началом у основания перпендикуляра, опущенного из e на плоскость. За вторую координату возьмем расстояние r точки P от оси Z .

При решении этой задачи мы можем воспользоваться результатами, которые мы получили, вычисляя поле двух одинаковых противоположных зарядов (27, 24).

Мы видели, что в поле двух одинаковых зарядов противоположных знаков срединная плоскость представляет собою эквипотенциальную поверхность, а потому она может быть заменена проводящей плоскостью без изменения поля.

Итак предположим, что кроме данного заряда e у нас имеется еще второй заряд ($-e$), расположенный по другую сторону проводящей плоскости на

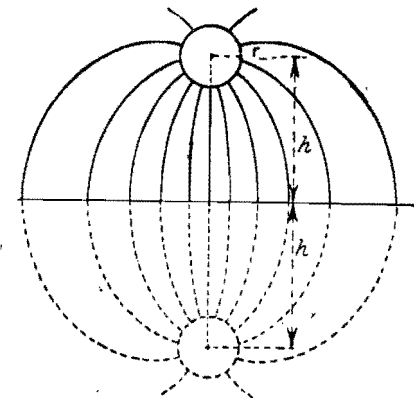


Рис. 17. Заряженная точка вблизи проводящей плоскости.

таком же расстоянии h на оси $-Z$. Этот заряд ($-e$) будет электрическим изображением данного заряда $+e$ относительно данной плоскости. Расстояние какой-либо точки P поля от данного заряда e может быть выражено через координаты r и z следующим образом:

$$r_1 = \sqrt{r^2 + (z - h)^2}.$$

Расстояние той же точки от заряда ($-e$) будет выражаться так:

$$r_2 = \sqrt{r^2 + (z + h)^2}.$$

Потенциал обоих зарядов в точке P будет (при $\epsilon = 1$)

$$V = e \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = e \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + h)^2}} \right).$$

Взяв производные по координатам, получим составляющие напряжения поля около точки P . Но нас интересует расположение индуцированных зарядов на проводящей плоскости, для этого определим составляющую поля по оси z :

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = e \left(\frac{z - h}{[r^2 + (z - h)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{z + h}{[r^2 + (z + h)^2]^{\frac{3}{2}}} \right)$$

и положим здесь $z = 0$. Тогда получим полное напряжение поля у самой проводящей плоскости, потому что здесь тангенциальная составляющая равна нулю. Зная нормальную составляющую напряжения и индукции, можем определить и поверхностную плотность электричества σ (е мы приняли равным 1)

$$E_0 = \frac{-2eh}{(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\sigma = \frac{E}{4\pi} = -\frac{e}{2\pi} \frac{h}{u^3}; \quad u = \sqrt{r^2 + h^2}.$$

В последней формуле u означает расстояние рассматриваемой точки проводящей плоскости от заряда e . Расположение электричества на плоскости показано на рис. 17. Не трудно проверить, что весь заряд, индуцированный на плоскости, равен $-e$. Элемент пло-

скости в полярных координатах при осевой симметрии может быть положен равным $2\pi r \cdot dr$, а потому

$$\begin{aligned} e_0 &= \int_0^\infty \sigma \cdot 2\pi r \cdot dr = - \int_0^\infty \frac{eh}{2\pi} \frac{2\pi r \cdot dr}{(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= -\frac{1}{2} eh \left[(r^2 + h^2)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^\infty = -e. \end{aligned}$$

Все наши расчеты касаются лишь той половины пространства, в которой помещен данный заряд e ; по другую сторону плоскости электрическое поле равно нулю (потенциал будет тот же, что и в проводящей плоскости).

Совершенно таким же образом мы могли бы рассчитать поле заряда, помещенного вблизи проводящего шара. В этом случае электрическое изображение данного заряда относительно проводящего шара нужно расположить соответственно формулам, выведенным нами в § 24. Величина же вспомогательного заряда $-e'$ уже не будет равна данному заряду $+e$. Аналогичным образом мы могли бы решить задачу определения поля и в других случаях, когда форма данного нам проводящего тела вполне (или даже приблизительно) соответствует форме эквипотенциальных поверхностей какого-нибудь нам уже известного случая электрического поля.

Если сам проводник заряжен, то поле его зарядов прибавляется к тому полю, которое мы рассчитали, предполагая проводник незаряженным.

Большое количество примеров определения поля при помощи электрических изображений читатель найдет в указанной нами в конце книги литературе. Мы перейдем теперь к тем случаям, когда заряды не даны, а известно лишь расположение проводников и их потенциалы.

31. Емкость проводников. Положим, что даны два проводника, заряженные равными и противоположными электричествами $\pm e$ с потенциалами V_1 и V_2 . Чем больше будет разность потенциалов этих проводников, тем сильнее будет напряжение и индукция поля между ними, и тем больше будет на проводниках электричества. Так как все эти величины пропорциональны друг другу, то мы можем положить

$$e = C(V_1 - V_2).$$

Коэффициент C называется *емкостью* данных двух проводников. Оба проводника вместе называются, как известно, *конденсатором*, а поверхности проводников, на которых располагается электричество при заряде, называются *обкладками* этого конденсатора.

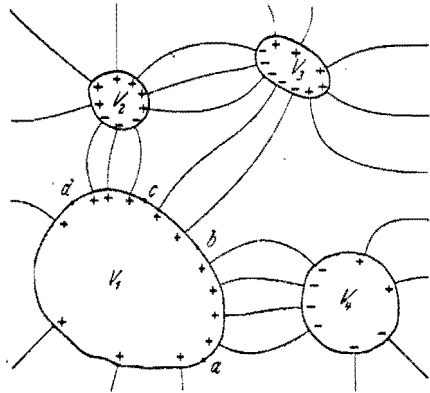


Рис. 18. Система проводников различных потенциалов.

Пример такого конденсатора мы имеем в известных лейденских банках.

В более общем случае, когда мы имеем целую систему проводников (рис. 18) с различными потенциалами, количество электричества, находящегося на одном из них, можно определить следующим образом: мы разделяем всю поверхность рассматриваемого проводника на отдельные площадки так, чтобы с каждой из этих площадок

линии сил шли *только к одному* из всех прочих проводников. Обозначая выделенные нами таким образом емкости через $c_{1,2}$, $c_{1,3}$ и т. д., а потенциалы проводников через V_i , можем написать для количества электричества, находящегося на первом проводнике:

$$e_1 = c_{1,2} (V_1 - V_2) + c_{1,3} (V_1 - V_3) + \dots$$

Для того, чтобы получить более симметричную формулу, примем нулевой потенциал в бесконечности, тогда получим:

$$e_1 = c_{11} V_1 + c_{12} V_2 + c_{13} V_3 + \dots$$

В этой формуле $c_{11} V_1$ представляет собою тот заряд, который остался бы в первом проводнике, если бы мы удалили все остальные проводники. Совершенно такие же формулы мы можем написать и для количества электричества, находящегося на любом другом проводнике рассматриваемой системы. Вообще

$$e_i = c_{i1} V_1 + c_{i2} V_2 + c_{i3} V_3 + \dots = \sum c_{ix} V_x$$

Таких выражений у нас будет столько же, сколько имеется проводников в рассматриваемой системе. Из этих i линейных уравне-

ний мы можем определить величины V_i как линейные функции e_i и опять получим i выражений вида

$$V_i = p_{i1} e_1 + p_{i2} e_2 + p_{i3} e_3 + \dots = \sum p_{ix} V_x,$$

которые тоже будут линейны. Они будут служить для определения потенциалов при данных зарядах на проводниках.

Коэффициенты c_{ix} называются *емкостными* коэффициентами, а p_{ix} называются *потенциальными* коэффициентами данной системы. Все эти коэффициенты будут зависеть от формы, величины и взаимного расположения проводников; кроме того, как увидим ниже, они зависят от диэлектрической постоянной среды, в которой находятся проводники. Значение этих коэффициентов станет более наглядным на примерах.

32. Единицы емкости. Из нашего определения емкости непосредственно следует и та единица, которой мы должны измерять емкость. Так например в электростатических единицах потенциалы выражаются через количества электричества формулами вида $\frac{e}{r}$: количество электричества, деленное на длину; поэтому *емкость*, т. е. отношение количества электричества к потенциалу, должна иметь размер *длины* и измеряться в сантиметрах.

В практических единицах единица емкости называется *фарад* и определяется так:

$$\text{фарад} = \frac{\text{кулон}}{\text{вольт}}$$

Выражая здесь *кулон* и *вольт* в абсолютных электростатических и электромагнитных единицах, получаем соотношения между соответственными единицами емкости:

$$\text{фарад} = 9 \cdot 10^{11} \text{ CGS} - E = 10^{-9} \text{ CGS} - M.$$

33. Емкость плоского конденсатора. Две изолированных друг от друга проводящих плоскости могут быть заряжены противоположными электричествами до некоторой разности потенциалов V . Мы уже знаем, что при этом между плоскостями образуется *однородное* электрическое поле с напряжением

$$E = \frac{V}{d},$$

где d — расстояние между плоскостями, т. е. между обкладками рассматриваемого конденсатора. Плотность электричества на обкладках будет:

$$\pm \sigma = \frac{\epsilon E}{4\pi} = \frac{\epsilon}{4\pi d} V.$$

На одной обкладке эта плотность будет положительна, на другой — отрицательна. Количество электричества на плоскостях, не имеющих пределов, будет бесконечно велико; а если мы ограничим наши плоскости, то у краев их поле уже не будет однородно. Поэтому, оставляя плоскости бесконечными (предполагая, что края находятся очень далеко от рассматриваемой части поля, далеко по сравнению с расстоянием между обкладками), мы вырежем при помощи трубки сил на обеих обкладках *соответственные* площадки S одинакового размера и формы и оставим между вырезанными площадками и остальной частью плоскостей промежуток настолько узкий, чтобы однородность поля не нарушалась заметным образом. Тогда количество электричества на вырезанных частях обкладок будет

$$\pm e = \sigma S,$$

и емкость этих частей определится формулой

$$C = \frac{\sigma S}{V} = \frac{\epsilon}{4\pi d} S.$$

Следовательно емкость плоского конденсатора пропорциональна площади его обкладок, диэлектрической постоянной материала, находящегося между обкладками, и *обратно* пропорциональна расстоянию между обкладками.

Заметим, что аналогичные соотношения мы имеем и в конденсаторах другой формы, только зависимость от размера площади и от расстояния между обкладками не линейная, как в случае плоского конденсатора.

34. Емкость шарового конденсатора. Эквипотенциальные поверхности в виде концентрических шаров мы имели в поле одной заряженной точки и в поле равномерно заряженного шара. Поэтому, если мы имеем конденсатор, состоящий из двух концентрических обкладок, то можем написать для разности потенциалов этих обкладок:

$$V = \frac{e}{r_1} - \frac{e}{r_2},$$

где $\pm e$ есть количество электричества, распределенного на каждой обкладке. Отсюда получаем емкость шарового конденсатора

$$C = \frac{e}{V} = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

Если удалить наружную обкладку (а также и все поблизости находящиеся проводники), то получим емкость шара ($r_2 = \infty$) радиуса r_1 :

$$C = r_1.$$

35. Емкость цилиндрического конденсатора. Систему эквипотенциальных поверхностей в виде концентрических цилиндров мы имели в поле равномерно заряженной линии (35, 26). Разность потенциалов двух таких поверхностей с радиусами r_1 и r_2 равна:

$$V = 2\tau \cdot \lg \left(\frac{r_2}{r_1} \right),$$

где τ — количество электричества, приходящееся на единицу длины заряженной линии. Количество электричества на всей линии бесконечно велико; но мы можем и здесь выделить из поля объем, ограниченный двумя плоскостями, перпендикулярными к заряженной линии и отстоящими друг от друга на расстоянии l . Тогда получаем количество выделенного электричества

$$e = \tau l.$$

Следовательно емкость цилиндрического конденсатора с радиусами обкладок a и b при диэлектрической постоянной среды ϵ может быть вычислена для *каждой единицы длины оси* цилиндров по формуле ($l = 1$):

$$C = \frac{\epsilon}{2 \lg \left(\frac{b}{a} \right)}.$$

При этом мы предполагали, как и в примере шарового конденсатора, что обкладки *концентричны*.

Впрочем концентричность в цилиндрических конденсаторах достигается гораздо легче, чем в шаровых. Перед плоскими конденсаторами цилиндрические имеют то преимущество, что влияние краев в них меньше.

36. Емкость двух параллельных круговых цилиндров. Определенные емкости двух параллельных круговых цилиндров мы можем основать на результатах, полученных нами при расчете поля двух прямых параллельных линий, заряженных противоположными электричествами с линейной плотностью (36, 27). Мы получили там поле, состоящее из целой системы круговых цилиндрических эквипотенциальных поверхностей кругового сечения. Любые два из этих цилиндров мы можем принять за обкладки конденсатора, причем обкладки эти в противоположность случаю предыдущего параграфа будут не концентричны. Если количество электричества на длине l каждой заряженной линии обозначить через e , то имеем:

$$e = l\tau.$$

То же самое количество электричества мы должны принять и на наших двух обкладках. А так как разность потенциалов между двумя цилиндрами выражается формулой (37, 27)

$$V_1 - V_2 = 2\tau \cdot \lg \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2,$$

то емкость конденсатора, из них составленного, при длине оси $l = 1$ будет определяться формулой:

$$\frac{1}{C} = 2 \cdot \lg \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^2.$$

Практически важен тот случай, когда оба цилиндра находятся *вне* друг друга и имеют *одинаковые* радиусы. Тогда величины x у них *обратны* друг другу, и мы получаем для емкости формулу:

$$\frac{1}{C} = 4 \cdot \lg x^2.$$

Подставляя сюда x^2 , выраженное через радиусы цилиндров R и через расстояние между их осями $2c$ (29, 27), получаем:

$$\frac{1}{C} = 4 \lg \left[\frac{c}{R} + \sqrt{\left(\frac{c}{R} \right)^2 - 1} \right].$$

Приняв во внимание, что одна из эквипотенциальных поверхностей представляет собою плоскость, проходящую по середине между обеими линиями, мы можем таким же образом определить емкость цилиндра относительно параллельной ему плоскости. Этот случай мы имеем, например в телеграфной проволоке, протянутой парал-

лельно поверхности земли. В этом случае мы имеем, очевидно, *половину* того поля, которое мы имели при двух одинаковых параллельных цилиндрах. Разность потенциалов между одним из цилиндров и плоскостью будет равна половине разности потенциалов между двумя цилиндрами, и следовательно проволока относительно плоскости будет иметь вдвое большую емкость:

$$\frac{1}{C} = 2 \cdot \lg \left[\frac{c}{R} + \sqrt{\left(\frac{c}{R} \right)^2 - 1} \right].$$

Большую часть расстояние c бывает настолько больше радиуса проволок, что мы можем пренебречь единицу под корнем и упростить формулы следующим образом:

Две проволоки в расстоянии $2c$ друг от друга:

$$\frac{1}{C} = 4 \cdot \lg \left(2 \frac{c}{R} \right).$$

Проволока на высоте h от проводящей плоскости:

$$\frac{1}{C} = 2 \cdot \lg \left(2 \frac{h}{R} \right).$$

IV. ДИЭЛЕКТРИКИ.

37. Свойства диэлектриков. Опыт показывает, что не только проводники, но и диэлектрики электризуются через влияние, но в отличие от проводников на поверхности и внутри диэлектрика, помещенного в электрическом поле, появляются всегда *парные* электрические заряды, не отделяемые друг от друга действием электрического поля. В каждой паре количество положительного электричества равно количеству отрицательного электричества, и действия этих противоположных электричеств взаимно уничтожались бы, если бы они не были сдвинуты друг относительно друга; другими словами, если бы они не образовали *биполей*. Итак мы должны рассматривать диэлектрик в электрическом поле как состоящий из биполей, причем момент каждого биполя равен (31, 25)

$$p = e \cdot d.$$

Если мы выделим в диэлектрике некоторый элементарный объем do и составим (геометрическую) сумму моментов всех биполей, в нем заключающихся, то получим некоторый результирующий момент dp , который можно представить так:

$$dp = P \cdot do.$$

Деля эту величину на объем do , мы получаем электрический момент \mathbf{P} единицы объема диэлектрика. Эта величина называется *степенью поляризации*, или просто *поляризацией* диэлектрика. Как видим, поляризация, так же как и момент, есть *вектор*, имеющий определенную величину и определенное направление.

Далее опыт показывает, что в большинстве случаев можно положить поляризацию \mathbf{P} пропорциональной напряжению электрического поля в рассматриваемой точке

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}.$$

Следовательно оба вектора имеют одно и то же направление. Исключения составляют кристаллические тела, где коэффициент χ зависит от направления (представляет собою симметричный тензор).

38. Потенциал поляризованного диэлектрика. Мы видели, что потенциал биполя с моментом \mathbf{p} выражается формулой (26, 27)

$$V = \left(\mathbf{p} \cdot \nabla_r \frac{1}{r} \right).$$

Соответственно с этим потенциал поляризованного диэлектрика выразится интегралом:

$$V = \int \left(\mathbf{P} \cdot \nabla_r \frac{1}{r} \right) \cdot do,$$

распространенным на весь объем диэлектрика. В различных точках диэлектрика поляризация \mathbf{P} может иметь различную величину и различное направление.

39. Поляризация и фиктивные заряды. Написанный нами объемный интеграл можно, пользуясь теоремой Гаусса, превратить в интеграл, распространенный по поверхности диэлектрика. В нижеследующем выражении:

$$\mathbf{P} \cdot \nabla_r \frac{1}{r} = \nabla \left(\mathbf{P} \cdot \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \nabla \mathbf{P},$$

второй член справа равен нулю, потому что биполи состоят из двух равных и противоположных зарядов и расхождение вектора \mathbf{P} состоит из двух равных и противоположных частей. Приняв это во внимание и обозначая через P_n составляющую поляризации, нормальную к поверхности диэлектрика, получаем:

$$V = \int \left(\mathbf{P} \cdot \nabla_r \frac{1}{r} \right) \cdot do = \int \nabla_r \left(\mathbf{P} \cdot \frac{1}{r} \right) \cdot do = \oint P_n \frac{1}{r} \cdot dS.$$

Этот интеграл имеет вид потенциала электричества, распределенного по поверхности S с поверхностной плотностью

$$\sigma' = P_n.$$

Величина σ' называется плотностью фиктивных зарядов диэлектрика. Словом *фиктивный* желают только обозначить, что эти заряды не могут быть отделены друг от друга, как это можно делать с зарядами в проводниках. На самом же деле это такие же электрические заряды как и в проводниках, только они не свободны, а удерживаются попарно внутри молекул диэлектрика. Когда в большом числе молекул положительные заряды сдвигаются относительно отрицательных, то образуются поляризованные молекулы, и если сдвиги эти произошли в непосредственной близости от поверхности диэлектрика и в одну сторону, то на поверхности получаются заряды одного знака, которые можно обнаружить. Конечно при этом на других частях поверхности того же диэлектрика должны появиться заряды противоположного знака и притом в таком же количестве.

40. Соотношение между коэффициентами диэлектрика. Коэффициент электризации χ , который мы ввели выше, может быть определен из диэлектрической постоянной ϵ диэлектрика; ведь и диэлектрическая постоянная была нами введена потому, что диэлектрик поляризуется и изменяет силы взаимодействия между зарядами (3, 3). Проще всего мы получим соотношение между χ и ϵ , если рассмотрим какой-либо элемент поверхности проводника, граничащий с диэлектриком. Обозначим через σ действительные заряды на поверхности проводника, а через σ' — фиктивные заряды на прилегающем диэлектрике. Оба рода зарядов противоположны по знаку. Напряжение электрического поля должно быть нормально к поверхности проводника и будет обусловлено как действительными, так и фиктивными зарядами, а именно:

$$E_n = 4\pi(\sigma - \sigma').$$

Определяя отсюда σ и подставляя в наше прежнее уравнение для индукции, получаем:

$$D_n = \epsilon E_n = 4\pi\sigma = E_n + 4\pi\sigma'.$$

Но так как

$$\sigma' = P_n = \chi E_n,$$

то получаем:

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi.$$

И для плотности фиктивных зарядов имеем формулу:

$$\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E_n.$$

41. Условия на поверхности диэлектриков. Положим, что два различных диэлектрика с диэлектрическими постоянными ε_1 и ε_2 соприкасаются друг с другом. Выделим где-либо на поверхности соприкосновения диэлектриков элементарную площадку dS и построим на ней очень низенький цилиндр с образующими, нормальными к поверхности. Часть этого цилиндрика пусть будет с одной стороны поверхности, а другая часть — с другой стороны. Применим к объему этого цилиндрика теорему Гаусса, в предположении, что поверхность диэлектрика не несет на себе никаких действительных зарядов. Тогда получаем уравнение потоков:

$$D_{n1} dS - D_{n2} dS = 0.$$

Откуда следует, что

$$D_{n1} = D_{n2}, \quad \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}.$$

Следовательно величина *нормальных* составляющих индукций с обеих сторон пограничной поверхности диэлектриков одна и та же. Отсюда следует, что нормальные составляющие напряжений поля будут для обеих сторон разные:

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Для того, чтобы вывести соотношения между *тангенциальными* составляющими напряжений, мы поступим следующим образом. Пройдем по поверхности раздела обоих диэлектриков внутри *первого* диэлектрика по направлению тангенциальной составляющей напряжения поля E_{t1} ; пройдя путь ds , мы получим падение потенциала $E_{t1} ds$. Затем пройдем сквозь поверхность на другую ее сторону, внутри второго диэлектрика, оставаясь в непосредственной близости от поверхности. Так как путь, по которому мы прошли при этом, бесконечно мал в сравнении с путем ds , то потенциал останется неизменным (потенциал непрерывен, и следовательно один и тот же по обе стороны поверхности). Далее пойдем внутри второго диэлектрика по пути обратному — ds ; падение потенциала окажется равным — $E_{t2} ds$.

Если мы теперь опять пройдем сквозь поверхность, то придем в исходную точку, и полное падение потенциала на нашем замкнутом пути должно равняться нулю (12, 12):

$$E_{t1} ds - E_{t2} ds = 0.$$

Отсюда следует, что

$$E_{t1} = E_{t2},$$

т. е. *тангенциальные* составляющие напряжения поля по обеим сторонам поверхности раздела обоих диэлектриков одинаковы. В таком случае тангенциальные составляющие индукции будут разные

$$\frac{D_{t1}}{D_{t2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

42. Преломление линий сил. Из только что полученных нами условий на поверхности раздела двух диэлектриков следует, что линии сил будут у этой поверхности *сразу* менять свое направление. Обозначим углы, составляемые направлением линий сил с нормалью к поверхности в первом и втором диэлектрике, через α_1 и α_2 ; направление нормали возьмем от первого диэлектрика ко второму (рис. 19). Тогда получаем для нормальных и тангенциальных составляющих поля следующие уравнения:

$$\begin{aligned} D_{n1} = \varepsilon_1 E_{n1} = D_1 \cos \alpha_1; & \quad D_{n2} = \varepsilon_2 E_{n2} = D_2 \cos \alpha_2; \\ D_{t1} = \varepsilon_1 E_{t1} = D_1 \sin \alpha_1; & \quad D_{t2} = \varepsilon_2 E_{t2} = D_2 \sin \alpha_2; \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{E_{t1}}{E_{n1}} = \frac{D_{t1}}{D_{n1}}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{E_{t2}}{E_{n2}} = \frac{D_{t2}}{D_{n2}}.$$

Разделяя первое уравнение на второе, получаем:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Это равенство представляет собою закон преломления линий сил у поверхности раздела двух диэлектриков. Угол α будет в том

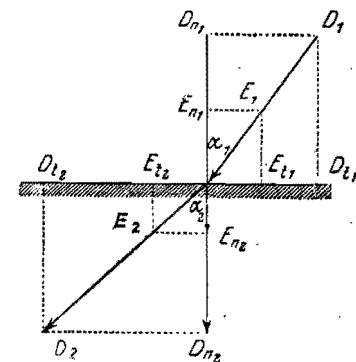


Рис. 19. Преломление линии сил.

диэлектрике больше, который имеет большую диэлектрическую постоянную.

Закон преломления линий сил хотя и напоминает собою закон преломления лучей света, однако там мы имеем отношение синусов а здесь отношение тангенсов. Для лучей возможны случаи полного внутреннего отражения; для линий сил такие случаи невозможны.

43. Сгущение линий сил. Из формул предыдущих параграфов следует, что:

$$D_{n1} = D_{n2}; \quad D_1 \cos \alpha_1 = D_2 \cos \alpha_2.$$

Это означает, что индукция будет в том диэлектрике больше, где $\cos \alpha$ меньше, т. е. где угол α больше, т. е. где диэлектрическая постоянная больше. Значит линии сил при переходе в среду с бóльшей диэлектрической постоянной *сгущаются*. (Ср. рисунки в Общем курсе электричества.) Сгущение зависит и от угла, образуемого линиями сил с нормалью к поверхности. Для нормальных линий никакого сгущения не будет.

Для напряжения поля мы имеем следующие соотношения:

$$E_{t1} = E_{t2}; \quad E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2.$$

Эти соотношения тоже указывают, что в диэлектрике с бóльшей диэлектрической постоянной происходит сгущение линий сил.

44. Равномерно поляризованная пластинка. Мы займемся теперь определением поля равномерно поляризованных диэлектриков и начнем с самого простого случая равномерно поляризованной пластинки. Сперва представим себе пластинку, заполненную положительными и отрицательными зарядами с равномерной плотностью $\pm \rho$. Затем сдвинем все положительные заряды на длину dn по направлению, нормальному к граничным плоскостям пластинки. При таком сдвиге единица объема диэлектрика будет иметь электрический момент $\rho \cdot dn$. Это и будет поляризация пластинки (рис. 20):

$$P = \rho \cdot dn.$$

Рис. 20. Поляризованная пластинка.

Далее при таком сдвиге та плоскость, по направлению к которой мы сдвинули положительное электричество, зарядится положительно, а другая плоскость, от которой отошли положительные

заряды, зарядится отрицательно. Поверхностная плотность фиктивной электризации будет равна:

$$\sigma' = \rho \cdot dn = P_n,$$

т. е. равна нормальной составляющей поляризации, как это мы уже доказали (40, 39) для самого общего случая.

Определим поле полученных фиктивных зарядов. Поле двух заряженных противоположными электричествами плоскостей мы уже определяли раньше (22, 20), а потому можем написать ($\epsilon = 1$):

$$E = -4\pi P.$$

Знак минус у нас поставлен потому, что напряжение внутреннего поля противоположно сдвигу зарядов dn и следовательно противоположно поляризации P .

45. Равномерно поляризованный шар. Опять представим себе шар заполненный равномерно электричеством плотности $\pm \rho$. Количество электричества каждого знака, находящегося в объеме шара радиуса a , равно:

$$\pm e = \frac{4}{3} \pi a^3 \cdot (\pm \rho).$$

Теперь сдвинем положительные заряды относительно отрицательных параллельно оси OX на некоторую длину dl ; мы получим равномерную поляризацию шара (рис. 21):

$$P = \rho \cdot dl,$$

а на поверхности его появятся фиктивные заряды с плотностью:

$$\sigma' = P \cos \alpha = P_n,$$

где α есть угол, образуемый радиусом шара с осью OX .

Электрический момент всего шара будет равен:

$$e \cdot dl = \frac{4}{3} \pi a^3 \cdot P.$$

Мы получили раньше (26, 23) выражение для потенциала равномерно заряженного шара для точек *внутри* него в виде:

$$V_i = \frac{e}{2a} \left(3 - \frac{r^2}{a^2} \right).$$

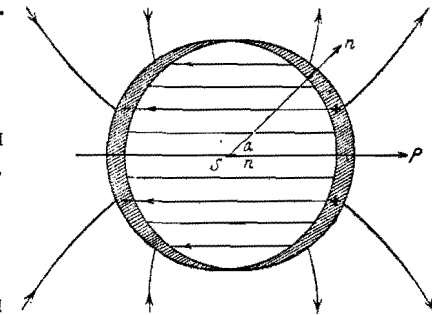


Рис. 21. Поляризованный шар.

Отсюда получаем для потенциала *двух* сдвинутых друг относительно друга шаров с одинаковыми зарядами противоположного знака:

$$V_i = \frac{e}{2a^3} (r_1^2 - r_2^2) = \frac{e}{2a^3} (r_1 + r_2)(r_1 - r_2).$$

При малом сдвиге мы можем положить [как мы делали в случае биполя (25, 25)], $(r_1 + r_2) = 2r$ и $(r_1 - r_2) = dl \cdot \cos \alpha$. А так как $r \cos \alpha = x$, то получаем:

$$V_i = \frac{e \cdot dl}{a^3} x = \frac{4}{3} \pi \rho \cdot dl \cdot x = \frac{4\pi}{3} P \cdot x.$$

Как видим, потенциалы внутри шара растут пропорционально x . Это означает, что напряжение поля тоже направлено по оси OX и равно:

$$E = - \frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{4\pi}{3} P.$$

Таким образом величина напряжения поля во всем шаре одна и та же и направлена противоположно поляризации.

Что касается наружного поля, то, приняв во внимание, что наружное поле каждого шара такое же, как если бы весь заряд его был сосредоточен в центре (21, 23), мы заключаем, что поле обоих шаров эквивалентно полю двойного полюса, помещенного в центре. Следовательно для потенциала наружного поля мы должны написать:

$$V_e = e \cdot dl \frac{\cos \alpha}{r^2} = \frac{4\pi}{3} a^3 P \frac{\cos \alpha}{r^2}.$$

По этому потенциалу можно вычислить все наружное поле.

46. Равномерно поляризованный эллипсоид. Мы не будем здесь приводить довольно сложные формулы, позволяющие вычислять поле равномерно заряженного эллипсоида (читатель может найти их в курсах Теоретической астрономии, а также в части III этого труда, в Механике твердого тела), а ограничимся общим описанием результатов вычислений поля, которые могут иметь и практическое значение.

Прежде всего заметим, что тела эллипсоидальной формы заслуживают особого внимания потому, что под действием *однородного* внешнего поля они поляризуются *равномерно*, т. е. их внутреннее поле остается *однородным*; однако это поле имеет другую величину

и другое направление, чем поле внешнее. Однородность внутреннего поля очень важна, например при опытном исследовании поляризации (электрической, а также и магнитной) тела под действием внешнего однородного поля. Обыкновенно придают телу форму удлинненного эллипсоида вращения; при сравнительно большом удлиннении это будет почти цилиндр с закругленными концами.

Потенциал равномерно заряженного эллипсоида выражается формулой вида:

$$V = \frac{4\pi}{3} abc \rho [D - Ax^2 - By^2 - Cz^2],$$

где a, b, c означают длины полуосей эллипсоида; множитель вне скобок имеет значение объема эллипсоида, умноженного на плотность электричества:

$$\frac{4\pi}{3} abc \cdot \rho = e,$$

и представляет собою весь заряд эллипсоида e . Что же касается коэффициентов D, A, B, C , то они вычисляются при помощи интегралов особого вида, которые мы считаем излишним приводить здесь. Для внешних точек поля значения коэффициентов зависят от положения той точки, для которой мы вычисляем потенциал, между тем как для всех внутренних точек эти коэффициенты одни и те же.

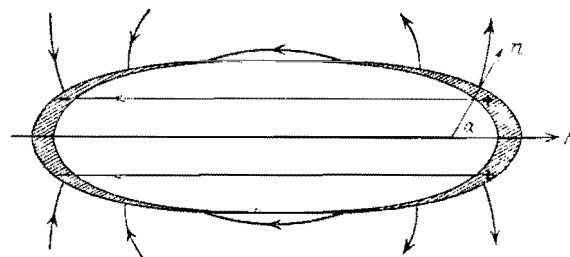


Рис. 22. Поляризованный эллипсоид.

Значение их вполне определяется длинами полуосей эллипсоида; при этом *большой* полуоси соответствует *меньший* коэффициент. Нас будет интересовать потенциал только внутренних точек.

Из потенциала равномерно *заряженного* эллипсоида не трудно получить потенциал равномерно *поляризованного* эллипсоида путем *сдвига* (рис. 22), как это мы делали в предыдущем параграфе в случае шара. Положим, что сдвиг положительных зарядов отно-

сительно отрицательных произошел на некоторую длину dl , проекции коей на оси координат равны соответственно dx , dy , dz . Тогда проекции на эти оси, получившиеся от сдвига поляризации, будут:

$$P_x = \rho \cdot dx; \quad P_y = \rho \cdot dy; \quad P_z = \rho \cdot dz,$$

и следовательно потенциал равномерно поляризованного эллипсоида выразится так:

$$V_l = O [AP_x x + BP_y y + CP_z z],$$

где O — объем эллипсоида.

Для эллипсоида вращения два из этих коэффициентов одинаковы, а для шара мы имеем $a = b = c$, и также

$$A = B = C = \frac{1}{a^3}.$$

На основании выражения для потенциала мы получаем для составляющих напряжения электрического поля выражения:

$$E_x = -O \cdot AP_x; \quad E_y = -O \cdot BP_y; \quad E_z = -O \cdot CP_z,$$

которые показывают, что напряжение поля внутри эллипсоида везде одинаково; мы получили следовательно *однородное* электрическое поле. Составляющая напряжения вдоль той оси, которая длиннее, имеет меньший коэффициент. Этого и следовало ожидать, потому что при более длинной оси поверхностные заряды дальше раздвинуты и поле их естественно будет слабее. Так как коэффициенты для разных осей имеют различное значение, то поле напряжения не будет направлено противоположно полю поляризации, как это мы имели в случае плоскости и в случае шара, а оба однородных поля будут составлять между собою некоторый угол. Этот угол можно определить, составив скалярное произведение векторов \mathbf{P} и \mathbf{E} , а именно:

$$(\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}) = P \cdot E \cos(\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}) = -O \cdot [AP_x^2 + BP_y^2 + CP_z^2].$$

Только в тех случаях, когда поляризация направлена по одной из осей эллипсоида (например когда $P_y = P_z = 0$), напряжение поля имеет направление по той же оси, но в противоположную сторону.

47. Слоистый конденсатор. До сих пор мы определяли поле по *данной* поляризации. Но это служило только подготовкой для ре-

шения задач более общего характера, так как на самом деле поляризация обыкновенно не дана, а ее требуется определить по данному внешнему полю, в которое помещен диэлектрик.

Мы начнем опять с самого простого случая. Пусть расстояние между обкладками конденсатора равно d см, диэлектрик между обкладками состоит из двух слоев толщиной d_1 и d_2 , с диэлектрическими постоянными ϵ_1 и ϵ_2 (рис. 23), причем

$$d_1 + d_2 = d.$$

Каковы бы ни были заряды обкладок, очевидно, что поле получится *однородное* с линиями сил, перпендикулярными и к обкладкам и к поверхностям диэлектриков. Поэтому нам достаточно определить емкость этого слоистого конденсатора. Тогда при любой данной разности потенциалов между обкладками мы можем легко вычислить напряжение поля, индукцию, действительные и фиктивные заряды.

Прежде всего напишем выражение для индукции поля, которая нормальна к поверхности раздела обоих диэлектриков, а потому будет во всем конденсаторе одна и та же:

$$D = \epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2 = 4\pi\sigma,$$

где σ — поверхностная плотность электричества на обкладках; E_1 и E_2 — напряжение поля в том и другом диэлектрике. Для разности потенциалов между обкладками имеем:

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2.$$

Заменяем здесь напряжения через индукцию по вышенаписанному уравнению:

$$V = D \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right) = 4\pi\sigma \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)$$

и получаем для *емкости* каждого *квадратного сантиметра* обкладок конденсатора формулу:

$$\frac{1}{C} = \frac{V}{\sigma} = 4\pi \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right).$$

Если первый диэлектрик занимает все пространство между обкладками, то имеем ($d_1 = d$; $d_2 = 0$):

$$\frac{1}{C} = \frac{4\pi d}{\epsilon}$$

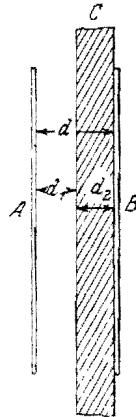


Рис. 23. Слоистый конденсатор.

в согласии с формулой, полученной нами раньше (44, 33).

Не трудно определить и плотность фиктивных зарядов того и другого диэлектрика:

$$\sigma_1 = \chi_1 E_1 = \frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_1} \cdot \frac{D}{4\pi} = \frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_1} \sigma,$$

$$\sigma_2 = \chi_2 E_2 = \frac{\epsilon_2 - 1}{\epsilon_2} \cdot \frac{D}{4\pi} = \frac{\epsilon_2 - 1}{\epsilon_2} \sigma.$$

48. Шар в однородном электрическом поле. Дано однородное электрическое поле напряжения E , образованное далеко отстоящими зарядами; в это поле помещен шар радиуса a с диэлектрической постоянной ϵ_2 , отличной от диэлектрической постоянной ϵ_1 остального пространства. Под влиянием данного внешнего поля E диэлектрический шар поляризуется, и требуется определить его поляризацию. Попробуем задаться решением в виде *однородной* поляризации и посмотрим, можно ли таким решением удовлетворить условиям на границе диэлектриков, о которых мы говорили раньше (50, 41). Мы знаем, что при однородной поляризации напряжение поля внутри шара определяется формулой (54, 45):

$$E_i = -\frac{4\pi}{3} P,$$

в то время как напряжение поля снаружи шара эквивалентно полю двойного полюса с моментом:

$$p = \frac{4\pi}{3} a^3 \cdot P.$$

Поэтому радиальная и нормальная к радиусу-вектору составляющая напряжения поля определяется формулами (33, 25):

$$E'_{er} = \frac{4\pi}{3} a^3 P \frac{2 \cos \alpha}{r^3}; \quad E'_{et} = \frac{4\pi}{3} a^3 P \frac{\sin \alpha}{r^3},$$

где α означает угол, составляемый направлением радиуса-вектора с направлением поляризации. Составляющие данного внешнего поля по тем же направлениям будут:

$$E \cos \alpha; \quad -E \sin \alpha.$$

Таким образом внешнее поле и поле поляризованного шара *вместе* у поверхности шара, где $r = a$, дадут нормальную и тангенциальную составляющую наружного поля:

$$E'_{er} = \left(E + \frac{8\pi}{3} P \right) \cos \alpha; \quad E'_{et} = \left(-E + \frac{4\pi}{3} P \right) \sin \alpha.$$

Внутри шара тоже будут действовать два поля: данное поле E и внутреннее поле E_i поляризованного шара. Составляющие этих полей у поверхности шара будут:

$$E_{ir} = \left(E - \frac{4\pi}{3} P \right) \cos \alpha; \quad E_{et} = \left(-E + \frac{4\pi}{3} P \right) \sin \alpha.$$

Теперь для удовлетворения пограничных условий нам необходимо приравнять нормальные составляющие индукций и тангенциальные составляющие напряжений поля по обеим сторонам (снаружи и внутри) шаровой поверхности диэлектрика. Мы получаем таким образом два уравнения:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \left(E + \frac{8\pi}{3} P \right) &= \epsilon_2 \left(E - \frac{4\pi}{3} P \right); \\ -E + \frac{4\pi}{3} P &= -E + \frac{4\pi}{3} P. \end{aligned}$$

Второе уравнение удовлетворяется само собою и означает только, что наше предположение об однородности поляризации правильно. Первое же уравнение позволяет определить и величину этой поляризации:

$$P = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \cdot E.$$

Плотность фиктивных зарядов на поверхности шара определяется формулой:

$$\sigma' = P_n = P \cos \alpha.$$

Практически имеет интерес величина результирующего поля внутри шара:

$$E_i = E - \frac{4\pi}{3} P = \frac{3\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} E.$$

Таким образом мы получили все желаемые данные, выраженные через величину E напряжения внешнего поля (рис. 24).

Мы можем воспользоваться нашими формулами для вычисления зарядов, получающихся на *проводящем* шаре (рис. 25), помещенном в однородное электрическое поле. Но в проводнике, как мы знаем, не образуется поляризации, и мы должны в наших формулах вместо поляризации P внести величину p , т. е. электрический момент индуцированных на шаре зарядов. Производя эту замену в выше-написанном уравнении тангенциальных составляющих напряжений

у поверхности шара (второе из двух уравнений) и имея в виду, что тангенциальные составляющие на поверхности проводника должны быть равны нулю, получаем:

$$0 = -E + \frac{p}{a^3}; \quad p = Ea^3.$$

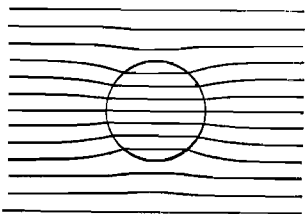


Рис. 24. Диэлектрический шар в однородном поле.

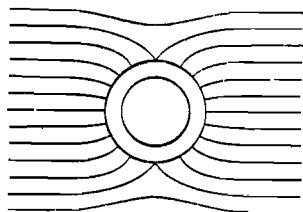


Рис. 25. Проводящий шар в однородном поле.

Нормальная составляющая индукции у поверхности шара (первое из двух уравнений для поверхности) получается равной:

$$D = \epsilon_1 \left(E + \frac{2p}{a^3} \right) \cos \alpha = 3\epsilon_1 E \cos \alpha,$$

и следовательно поверхностная плотность действительных зарядов, образовавшихся на шаре под действием данного поля, равна:

$$\sigma = \frac{3}{4\pi} \epsilon_1 E \cos \alpha.$$

Заметим, что все эти формулы для проводящего шара мы можем получить из формул диэлектрического шара, положив $\epsilon_2 = \infty$.

49. Общая задача электростатики. В заключение этого отдела мы считаем полезным дать некоторое понятие о формулировке задач, встречающихся в электростатике в самом общем виде, хотя должны прибавить, что для решения подобных задач не имеется общих методов, а приходится подбирать подходящие решения.

В большинстве случаев задача состоит в следующем. Дано распределение электричества в пространстве, т. е. дана плотность электричества ρ как функция координат (*поверхностные заряды* мы представляем себе распределенными очень тонким слоем, а *заряженные точки* — небольшими объемами с *объемной* плотностью электричества ρ); кроме того дано распределение проводников и изоляторов, диэлектрические постоянные ϵ последних или их поляризация P . Впрочем в электростатике поляризация редко бывает

дана, ее обыкновенно нужно определить; в магнетизме, где ставятся аналогичные задачи, часто бывает дана и магнитная поляризация, например в *постоянных* магнитах. На основании этих данных требуется определить напряжение поля, индукцию, поляризацию, индуцированные заряды и силы, действующие в различных частях поля.

Математически эта задача ставится так:

Требуется найти такую функцию координат V — *потенциал поля*, которая удовлетворяла бы во всех точках, где имеются заряды, уравнению Пуассона:

$$\Delta^2 V = -4\pi \frac{\rho}{\epsilon},$$

а во всех точках, свободных от зарядов, — уравнению Лапласа:

$$\Delta^2 V = 0.$$

Если эта часть задачи решена, то по известному потенциалу не трудно определить и все другие величины. Но уравнения с частными производными допускают, вообще говоря, бесконечное множество решений, из которых нужно выбрать такие, которые кроме того удовлетворяли бы добавочным *пограничным условиям*. Такие пограничные условия имеются на поверхностях проводников, а именно: во всех точках проводника потенциал должен быть один и тот же; следовательно

$$V_i = \text{const}; \quad E_i = 0; \quad E_t = 0,$$

тогда как у поверхности диэлектриков должны быть соблюдены условия:

$$D_n = \epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}; \quad E_{t1} = E_{t2}.$$

Иногда встречаются поверхности, где потенциал *прерывен*; на этих поверхностях нужно предполагать распределенным *двойной слой* электричества с плотностью моментов (24, 22):

$$p = \frac{\epsilon}{4\pi} (V_+ - V_-).$$

Наконец, если рассматриваемое поле безгранично, то должно быть дано значение потенциала в бесконечно удаленных точках; обыкновенно потенциал в бесконечности принимают равным нулю.

Спросим себя, каким путем можно получить решение поставленной таким образом задачи. Для этой цели можно воспользоваться тем обстоятельством, что основное дифференциальное уравнение

Пуассона-Лапласа линейно; линейные же уравнения обладают тем свойством, что если нам известен целый ряд решений, удовлетворяющих дифференциальному уравнению, то сумма этих решений с произвольными постоянными коэффициентами тоже будет удовлетворять этому уравнению. Мы должны следовательно постараться так составить эту сумму, чтобы она удовлетворяла и пограничным условиям. Для некоторых простых форм проводников и диэлектриков (шар, цилиндр, эллипсоид, тороид и т. д.) математикой разработаны специальные методы, как нужно определять такие суммы, когда условия на поверхностях даны в виде определенных функций координат. В других случаях приходится довольствоваться *приближенными* решениями. Наконец, если все эти способы недостаточны, то лучше всего прибегнуть к *непосредственному опыту* с моделью рассматриваемого поля. Такая модель поля может быть составлена даже из явлений, лежащих вне электростатики, но в которых тоже имеется своя потенциальная функция с аналогичными свойствами.

Самый простой случай мы имеем, когда поле безгранично и когда все заряды, все поляризации и все прерывности поля непосредственно даны. В таких случаях потенциальная функция определяется интегралами (ср. ч. I, 103, 93):

$$V = \int \frac{\rho}{r} d\omega + \int \left(\mathbf{P} \cdot \Delta_r \frac{1}{r} \right) d\omega + \int \frac{\epsilon}{4\pi} (V_+ - V_-) dS.$$

В тех случаях, когда кроме зарядов дано распределение проводников и изоляторов, все безграничное поле разделяется поверхностями этих тел на отдельные ограниченные объемы; обыкновенно рассчитывают поле в каждом из этих объемов *отдельно*. Прежде всего рассчитывают поле местных зарядов, находящихся *внутри* рассматриваемого объема по вышенаписанным формулам, а затем принимают для расчета существование *наружных* зарядов, не тех, которые даны в задаче, а таких, которые вместе с известными нам внутренними зарядами образовали бы поле, удовлетворяющее условиям на границе рассматриваемого объема. Так именно мы и поступали при расчете полей в предыдущих отделах, вводя в расчет электрические изображения (39, 30) и задаваясь моментом биполя внутри диэлектрика и проводника (58, 59, 48) при расчете внешнего поля. Мы должны здесь ограничиться этими общими указаниями; подробности читатель найдет в специальных курсах математики.

V. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ.

50. Работа при движении заряда в поле. Мы знаем, что на заряд e , находящийся в поле напряжения \mathbf{E} , действует электрическая сила

$$\mathbf{F} = e \cdot \mathbf{E}.$$

Если этот заряд e от каких бы то ни было причин переместился в поле на расстояние ds , то работа, затраченная на это перемещение равна:

$$-dU = (\mathbf{E} \cdot ds) e.$$

Знак минус мы поставили потому, что *положительной* $+dU$ мы считаем работу *внешней силы*, которая передвигает заряд *против* действия сил поля. Тогда работу сил *самого поля* мы должны считать отрицательной $-dU$. Каждая работа связана с изменением энергии системы. Когда энергия из какого-либо постороннего источника совершает работу $+dU$, то и приращение энергии рассматриваемого электрического поля будет равно $+dU$. Наоборот, когда само поле, передвигая заряд e , совершает работу $-dU$, то энергия поля *уменьшается*, причем ее уменьшение будет равно $-dU$.

Выражая напряжение поля через потенциал

$$E_s = -\frac{\partial V}{\partial s},$$

мы можем и работу перемещения заряда в поле выразить через потенциалы начальной и конечной точек этого перемещения:

$$U = e \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial s} ds = e(V_2 - V_1).$$

Вычислим *полную энергию поля*, т. е. ту работу, которую нужно было затратить, чтобы получить данное расположение зарядов друг относительно друга. Так как работа в электростатическом поле не зависит от того, по какому пути мы передвигаем электрические заряды, а только от начальной и конечной точек этого пути, то мы можем себе представить данное поле образованным перемещением каждого заряда из бесконечно удаленной точки в ту именно точку, в которой он теперь находится. Но при этом не нужно упускать из вида, что вместе с перенесением зарядов будут изме-

няться и потенциалы. Мы предположим, что перенос электричества совершался такими малыми порциями de , что потенциал V во время такого перенесения можно считать неизменным. В таком случае работа перемещения каждой порции заряда будет равна:

$$dU = V \cdot de.$$

Для определения всей работы, необходимой для образования заряда e в рассматриваемой точке пространства, нужно вычислить интеграл

$$U_1 = \int_0^e V \cdot de.$$

Каково бы ни было распределение зарядов, мы всегда можем положить потенциал пропорциональным заряду (ср. 41, 31):

$$V = p \cdot e,$$

и тогда величина интеграла будет равна:

$$U_1 = p \int_0^e e \cdot de = \frac{1}{2} p e^2.$$

Заменяя здесь коэффициент пропорциональности p его выражением через заряд и потенциал и приняв во внимание, что в исходной точке, т. е. в бесконечности, потенциал равен нулю, получаем для всей работы:

$$U_1 = \frac{1}{2} e V.$$

Такие выражения мы получим для *каждого* заряда, и следовательно энергия всех зарядов вместе будет выражаться суммой:

$$U = \sum \frac{1}{2} e V.$$

Если заряды расположены в поле с объемной плотностью ρ , то мы получим:

$$U = \frac{1}{2} \int V \rho \cdot do.$$

Если мы введем в выражение энергии емкость конденсатора при помощи формулы:

$$e = CV,$$

то получим для энергии заряженного конденсатора формулы:

$$U = \frac{1}{2} e V = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{C}.$$

51. Энергия электростатического поля. Потенциальную энергию электрических зарядов можно представить в другом виде, а именно положив:

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{D}.$$

Мы можем преобразовать интеграл предыдущего параграфа на основании тождества (интегрирование по частям):

$$(\operatorname{div} \mathbf{D}) \cdot V = \operatorname{div} (\mathbf{D} \cdot V) - \mathbf{D} \operatorname{grad} V = \operatorname{div} (\mathbf{D} \cdot V) + (\mathbf{D} \mathbf{E}).$$

Подставляя это выражение в формулу для энергии, получаем:

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \operatorname{div} (\mathbf{D} \cdot V) \cdot do + \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \cdot do.$$

Первый из этих интегралов мы можем на основании теоремы Гаусса преобразовать в поверхностный интеграл:

$$\int \operatorname{div} (V \cdot \mathbf{D}) \cdot do = \int V \cdot \mathbf{D}_n \cdot dS.$$

Предполагая границы поля в бесконечности, где $V=0$ и $\mathbf{D}=0$, мы получаем в результате интегрирования нуль, и следовательно

$$U = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \cdot do.$$

Этот результат мы можем толковать следующим образом: энергия электростатического поля распределена в *пространстве, занятом полем*, с плотностью

$$U_0 = \frac{1}{8\pi} \mathbf{D} \mathbf{E} = \frac{1}{8\pi} \epsilon E^2.$$

Таким образом для энергии электрического поля у нас имеются два выражения:

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \cdot V \cdot do = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \cdot do.$$

Первый интеграл распространен на все объемы, где имеются заряды, тогда как второй интеграл распространен на весь объем самого поля, где зарядов может и не быть. Поэтому естественно за-

даться вопросом, где же на самом деле находится электрическая энергия — в зарядах или в поле. Равенство написанных выше интегралов означает только, что для решения задач *электростатики* безразлично, где мы будем считать помещенную энергию, в зарядах или в поле; однако позднее мы увидим, что в полях *нестатических* электрическое поле может оказаться и без зарядов: линии сил нестатического электрического поля могут образовать *замкнутые* кривые. Так как и эти нестатические поля тоже обладают энергией, хотя они и без зарядов, то мы приходим к заключению, что энергия распределена не в зарядах, а в самом поле. В частном случае, когда поле электростатическое, мы можем вычислять энергию по данным зарядам, потому что эти заряды *вообще* определяют собою поле; в более общем случае одних зарядов недостаточно для определения поля. Таким образом второй из выше-написанных интегралов имеет более общее значение.

Мы можем даже еще обобщить наш результат, написав для плотности энергии:

$$U_0 = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}).$$

Эта формула применима и к тем случаям, когда напряжение и индукция поля имеют неодинаковое направление, как например в кристаллических телах.

52. Теорема Уильяма Томсона (Кельвина). Томсон доказал очень важную теорему, что из всех возможных электрических полей, удовлетворяющих данным пограничным условиям, электростатическое поле имеет *наименьшую* энергию.

Предположим, что нам дано электростатическое поле, в котором индукция связана с плотностью зарядов соотношением:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho.$$

Количество электричества, распределенное на поверхности какого-либо проводника, равно:

$$e_l = \int \rho \cdot dS = \frac{1}{4\pi} \int D_n \cdot dS$$

(буквой *l* мы обозначили номер проводника).

Положим далее, что индукция везде пропорциональна напряжению поля

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}.$$

Так как это поле электростатическое, то оно имеет потенциал, и следовательно можно положить

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V.$$

Потенциал этот для каждого проводника в отдельности постоянен:

$$V_l = \text{const.}$$

Все это условия для *вообще* электростатического поля. Теперь прибавим к этому электростатическому полю некоторое поле напряжения \mathbf{E}' , которое не должно изменять ни пограничные условия и ни расположение зарядов. Тогда для этого добавочного поля мы имеем:

$$\operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{E}') = 0; \quad e'_l = \int (\varepsilon \mathbf{E}'_n) \cdot dS = 0.$$

Прибавочное поле конечно изменит напряжение поля, и мы получим *результатирующее* напряжение, сложив геометрически

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}'.$$

Плотность энергии поля тоже изменится и будет:

$$U_0 = \frac{1}{8\pi} \varepsilon (\mathbf{E} + \mathbf{E}')^2.$$

Следовательно полную энергию поля мы можем теперь выразить так:

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon E^2 \cdot d\omega + \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon (E')^2 \cdot d\omega + \frac{2}{8\pi} \int (\mathbf{E} \cdot \varepsilon \mathbf{E}') \cdot d\omega.$$

Докажем, что последний интеграл равен нулю. Для этого преобразуем его по формуле:

$$(\mathbf{E} \cdot \varepsilon \mathbf{E}') = -(\operatorname{grad} V \cdot \varepsilon \mathbf{E}') = -\operatorname{div} (V \cdot \varepsilon \mathbf{E}') + V \cdot \operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{E}').$$

Но расхождение вектора $\varepsilon \mathbf{E}'$ по условию равно нулю, и у нас остается только первый член правой части равенства, который при подстановке в интеграл даст нам (по теореме Гаусса) интеграл, распространенный по поверхности поля:

$$\int V \cdot \varepsilon \mathbf{E}'_n \cdot dS.$$

Но поверхностью нашего поля служит, во-первых, бесконечно удаленная поверхность, где потенциал равен нулю и нет зарядов; для этой поверхности интеграл будет равен нулю. Кроме того поверхностью поля служат поверхности находящиеся в нем провод-

ников. Для каждого из этих проводников потенциал, несмотря на прибавочное поле, должен по условию остаться постоянным; мы можем следовательно вынести его за знак интеграла:

$$V \int \epsilon E_n' dS = V e_i' = 0.$$

Оставшийся интеграл получает значение количества электричества, обусловленного добавочным полем, а мы предположили, что заряды остаются те же, как и в первоначальном электростатическом поле: $e_i' = 0$. Итак действительно в выражении энергии третий из вышенаписанных интегралов пропадает, и у нас остается:

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \epsilon E^2 \cdot d\omega + \frac{1}{8\pi} \int \epsilon (E')^2 \cdot d\omega.$$

Второй член справа стоящей суммы несомненно положителен, откуда заключаем, что всякое добавочное поле, удовлетворяющее тем же пограничным условиям, всегда будет *увеличивать* энергию. Или, иначе говоря, электростатическое поле из всех возможных при данных пограничных условиях полей обладает *наименьшей энергией*. В этом и заключается теорема *Томсона*.

Из теоремы *Томсона* прежде всего вытекает следующее важное следствие: если нам каким-либо способом (или просто по догадке) удалось определить электростатическое поле, которое удовлетворяет всем условиям задачи, то это решение *единственное*. Всякое другое решение даст большую энергию и будет содержать в себе поле E' , не имеющее потенциала (неэлектростатическое). При решении различных частных случаев мы уже пользовались этим и, найдя какое-либо решение, удовлетворяющее уравнению *Лапласа-Пуассона* и пограничным условиям, мы уже и не искали другого решения, будучи уверены, что найденное нами решение единственно возможное.

53. Энергия и силы. Теорема *Томсона* имеет еще и другое важное значение. Она показывает нам, что с электростатической энергией можно обращаться как со всякой другой *потенциальной* энергией. Мы знаем например из механики, что *устойчивое равновесие* получается при *минимуме* потенциальной энергии; но вблизи минимума вариация энергии при всех возможных перемещениях равна нулю (ч. II, 272, 144). Обозначая виртуальную (возможную) работу через $\delta_0 U$, можем написать:

$$\delta_0 U = 0.$$

Возможными перемещениями по теореме *Томсона* будут например небольшие перемещения зарядов по неподвижным проводникам.

Но представим себе, что мы (мысленно) изменяем немного относительное расположение тел в электростатическом поле. Если на какое-либо тело (или часть тела) действовала сила \mathbf{F} и произошло смещение $d\mathbf{s}$, то поле произвело работу и энергия поля уменьшилась. Мы можем написать:

$$(\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}) = -\delta U.$$

Правда, после такого сдвига, величина и направление которого зависят от нашего выбора, зарядам придется несколько переместиться с их прежнего положения на телах и занять новое положение равновесия. Но так как это перемещение зарядов будет происходить вблизи положения равновесия, где $\delta_0 U = 0$, то оно не изменит энергию поля.

Написанное нами уравнение позволяет нам определять силы (точнее, составляющие сил по направлению сдвига $d\mathbf{l}$), если изменение энергии поля, соответствующее произведенному нами (мысленно) сдвигу $d\mathbf{l}$, нам известно. Примеры применения этого способа определения сил по энергии мы сейчас приведем.

54. Натяжение у поверхности заряженного проводника. Рассмотрим плоский конденсатор с расстояниями между обкладками d . При разности потенциалов между обкладками V мы получим напряжение поля, индукцию и поверхностную плотность электричества по следующим формулам:

$$E = \frac{V}{d}; \quad 4\pi\sigma = \epsilon E = D.$$

Энергия такого конденсатора, считая ее на единицу площади обкладок, будет выражаться формулами:

$$U = \frac{1}{2} V\sigma = \frac{1}{8\pi} \epsilon E^2 \cdot d.$$

Если мы теперь, не изменяя зарядов σ , немного уменьшим расстояние между обкладками, то энергия тоже уменьшится; мы получим:

$$-\delta U = \frac{1}{2} \sigma \cdot \delta V = \frac{1}{8\pi} \epsilon E^2 \cdot \delta d.$$

Деля это на величину смещения δd , получаем силу p , с которой притягивают друг друга противоположно заряженные

Обкладки; сила эта отнесена к *единице* площади обкладок. Но сила, отнесенная к единице площади, называется в механике *напряжением* (механическое напряжение не нужно смешивать с напряжением электрического поля). Механические напряжения бывают двух родов: *растяжение* и *сжатие*. В данном случае мы имеем *натяжение* на поверхности обкладок, направленное внутрь поля:

$$p = \frac{1}{8\pi} \varepsilon E^2 = U_0.$$

Как видим, натяжение это равно плотности электрической энергии в конденсаторе.

Мы можем сейчас же обобщить этот результат на проводники любой формы. Если у поверхности проводника имеется индукция D , связанная с поверхностной плотностью уравнением:

$$4\pi\sigma = D,$$

то натяжение, действующее нормально к поверхности проводника внутрь поля, равно:

$$p = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{8\pi\varepsilon} D^2 = \frac{2\pi}{\varepsilon} \sigma^2.$$

Натяжение это не зависит от направления поля и не зависит от знака заряда.

55. Натяжение у поверхности изолятора. У поверхности проводника электрическое поле всегда *нормально* к поверхности; между тем около поверхности изолятора, граничащего с изолятором, электрическое поле может составлять различные углы с нормалью. Поэтому для большей наглядности наших рассуждений мы разложим данное поле на две составляющие: одну возьмем *нормально* к поверхности, а другую — *касательно* к поверхности. Сперва рассмотрим отдельно первый случай, который можно реализовать следующим образом.

Представим себе плоский конденсатор, одна из обкладок которого погружена в изолирующую жидкость и прикреплена параллельно поверхности жидкости. Другая же обкладка, ей параллельная, помещена над поверхностью жидкости. Мы имеем таким образом слоистый конденсатор, который мы уже рассчитывали раньше (57, 47). Энергия поля в таком конденсаторе, считая на каждый квадратный сантиметр обкладки, выразится формулою:

$$U = \frac{1}{2} V\sigma = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right] D^2.$$

Если теперь, не изменяя зарядов, т. е. не изменяя индукции D , сдвинуть поверхность жидкости вверх, так что толщина слоя с диэлектрической постоянной ε_2 увеличится на δd , то толщина слоя диэлектрической постоянной ε_1 *уменьшится* на δd (обкладки остаются на местах). Изменение энергии, происшедшее при этом сдвиге, выразится так:

$$-\delta U = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right] D^2 \cdot \delta d = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_1} \right] D^2 \cdot \delta d.$$

Множитель при δd представляет собою механическое напряжение, действующее у поверхности диэлектрика:

$$p = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 \varepsilon_1} \right] D^2.$$

Величина p положительна, если $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Это означает, что сила, действующая на границе двух диэлектриков, направлена в ту сторону, где диэлектрическая постоянная меньше.

Если часть поля занята, например керосином ($\varepsilon_2 = 2$), над которым находится воздух ($\varepsilon_1 = 1$), то при заряде конденсатора керосин будет *втягиваться* в конденсатор и стараться заполнить его, вытесняя воздух. Так как механическое напряжение пропорционально квадрату D , то втягивание будет происходить во всяком случае, как бы ни было направлено поле конденсатора.

Полученное выше напряжение мы можем рассматривать как составленное из двух частей:

$$p = \frac{1}{8\pi} D_1 E_1 - \frac{1}{8\pi} D_2 E_2$$

(так как $D_1 = D_2 = \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$), из которых каждая равна плотности энергии электрического поля у поверхности раздела обоих диэлектриков. На этом основании мы можем толковать действие сил на поверхность диэлектрика следующим образом. Электрическое поле в каждом диэлектрике *тянет* поверхность диэлектрика в *свою сторону* (как в случае проводника), и поверхность сдвигается под действием *разности* этих двух сил. Так как *при одинаковой индукции* плотность энергии в том диэлектрике больше, где диэлектрическая постоянная меньше, то пограничная поверхность диэлектриков будет стремиться в ту сторону, где диэлектрическая постоянная меньше.

Из нашего расчета следует, что рассматриваемые силы p действуют *нормально* к поверхности раздела обоих диэлектриков.

56. Давление у поверхности изолятора. Теперь повернем конденсатор на 90° и поставим его обкладки нормально к поверхности жидкости; часть плоскости каждой обкладки будет находиться в жидкости, а другая часть — в воздухе. При этом направление поля будет *тангенциально* к поверхности раздела обоих диэлектриков. В таком случае мы можем рассматривать конденсатор как состоящий из двух частей с площадями обкладок S_1 и S_2 , с диэлектрическими постоянными ϵ_1 и ϵ_2 . Так как разность потенциалов между обкладками будет в обеих частях одинакова, то и *напряжение* поля в них будет одинаково. Это как раз и требуется для тангенциального поля у поверхности раздела диэлектриков (ср. 51, 41). Для количества электричества на обкладках конденсатора мы можем написать формулу:

$$e = \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 = \frac{1}{4\pi} (\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2) E.$$

Отсюда мы можем определить разность потенциалов обкладок:

$$V = Ed = \frac{4\pi e \cdot d}{\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2}$$

и для энергии поля получаем:

$$U = \frac{1}{2} eV = \frac{2\pi e^2 \cdot d}{\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2}.$$

Теперь мы предположим, что поверхность нижнего диэлектрика с диэлектрической постоянной ϵ_2 перемещается вверх на высоту δh . Обозначим через l длину диэлектрика вдоль обкладок; тогда изменение площадей S при перемещении δh выразится так:

$$\delta S_2 = +l \cdot \delta h; \quad \delta S_1 = -l \cdot \delta h,$$

и следовательно изменение энергии *при неизменных зарядах* будет равно:

$$-\delta U = \frac{2\pi e^2 \cdot ld}{(\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2)^2} (\epsilon_2 - \epsilon_1) \cdot \delta h = \frac{1}{8\pi} (\epsilon_2 - \epsilon_1) E^2 (ld) \cdot \delta h.$$

Здесь множитель при δh представляет собою *силу*, действующую на площадь раздела обоих диэлектриков. Следовательно сила, отнесенная к единице площади, или *механическое напряжение*, будет:

$$p = \frac{1}{8\pi} (\epsilon_2 - \epsilon_1) E^2.$$

Мы видим, что и в этом случае напряжение направлено в сторону *меньшей* диэлектрической постоянной. Следовательно керосин опять будет втягиваться в воздушный конденсатор.

Полученное напряжение можно рассматривать как состоящее из двух частей:

$$p = \frac{1}{8\pi} \epsilon_2 E_2^2 - \frac{1}{8\pi} \epsilon_1 E_1^2,$$

из которых каждая равна плотности энергии электрического поля у поверхности раздела обоих диэлектриков, совершенно так же, как и в примере предыдущего параграфа. Однако при *одинаковых напряжениях* электрического поля плотность энергии будет в том диэлектрике больше, где диэлектрическая постоянная *больше*, а потому в этом случае мы должны толковать каждый член этой суммы не как натяжение, а как *давление*. Действительно, предположив, что при тангенциальном направлении поля каждое из полей, находящихся по ту или по другую сторону пограничной поверхности, *давит* на эту поверхность с силою, равною плотности энергии, мы получаем движение поверхности в ту сторону, где плотность энергии *меньше*, т. е. опять где диэлектрическая постоянная меньше.

57. Примечание. В предыдущих двух параграфах мы пользовались уравнением

$$-\delta U = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})$$

для определения сил \mathbf{F} по изменению энергии системы δU . При этом не нужно однако упускать из вида, что уравнение это написано в предположении, что вся работа сил \mathbf{F} производится за счет энергии самой системы, т. е. что система эта изолирована и *количество электричества* на ней остается *постоянным*. Что же касается потенциалов (и напряжения поля), то при совершении работы потенциалы должны уменьшиться. Если бы мы хотели поддерживать потенциалы постоянными, то должны бы были *добавить* некоторое количество электричества. В таком случае энергия системы изменится не только от того, что совершена была некоторая работа сил, но еще и от того, что мы *добавили* энергию *извне*. В этом легко убедиться, например на последнем примере. Если мы напишем выражение работы силы p при перемещении δh , предполагая, что при таком перемещении потенциалы, а следовательно и напряжение E поддерживаются постоянными, то мы получили бы:

$$p \cdot \delta h = \frac{1}{8\pi} (\epsilon_2 - \epsilon_1) E^2 \cdot \delta h = +\delta U,$$

т. е. *увеличение* энергии системы, а не уменьшение ее. Таким образом, поддерживая потенциалы постоянными, мы должны не только совершить работу $p \cdot \delta h$, но еще и увеличить энергию системы на величину δU . Полное количество энергии, которое мы затрачиваем, поддерживая потенциалы постоянными, будет следовательно равно:

$$p \cdot \delta h + \delta U = 2 \cdot \delta U.$$

58. Общий случай поверхностных сил. Из примеров предыдущих трех параграфов мы заключаем, что на поверхность диэлектрика, помещенного в электрическом поле, действуют силы, направленные всегда в сторону *меньшей* диэлектрической постоянной и притом *нормально* к поверхности, независимо от того, каково направление поля у этой поверхности. Что же касается до *величины* этих сил, то они будут зависеть и от направления электрического поля. Выразим величины полученных нами натяжений через напряжение полей в том и другом диэлектрике у пограничной поверхности, обозначая через E_n и E_t нормальную и тангенциальную составляющие напряжения:

$$p_1 = \frac{1}{8\pi} (\epsilon_1 E_{n1}^2 - \epsilon_2 E_{n2}^2) = \frac{1}{8\pi} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} (\epsilon_2 - \epsilon_1) E_{n1}^2,$$

$$p_2 = \frac{1}{8\pi} (\epsilon_2 - \epsilon_1) E_{t1}^2.$$

Если поле образует некоторый угол с нормалью к поверхности, то на эту последнюю будет действовать сумма написанных натяжений

$$p = \frac{1}{8\pi} (\epsilon_2 - \epsilon_1) \left[E_{n1}^2 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_{n1}^2 \right].$$

Эту формулу можно представить в более симметричном виде:

$$p = \frac{1}{8\pi} (\epsilon_2 - \epsilon_1) [E_{n1} E_{n2} + E_{n1} E_{n2}] = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{8\pi} (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2).$$

Отсюда видим, что натяжение p будет наибольшим, когда угол, образуемый напряжениями \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 друг с другом, равен нулю; а это будет только при нормальном и при тангенциальном поле, т. е. в тех случаях, которые мы рассматривали выше.

59. Неоднородный диэлектрик. Рассмотренные нами в предыдущих параграфах силы возникают не только на поверхности раздела двух разных диэлектриков, где диэлектрическая постоянная при переходе из одного тела в другое меняется прерывно, но также

и во всех местах, где диэлектрическая постоянная изменяется, хотя бы и непрерывно. Для расчета сил в этом случае нам нужно только в предыдущих формулах конечную разность диэлектрических постоянных $(\epsilon_2 - \epsilon_1)$ заменить бесконечно малой разницей $-\delta\epsilon$, причем

$$-\delta\epsilon = -\frac{\partial\epsilon}{\partial n} dn = -\text{grad } \epsilon \cdot d\mathbf{n} = -\nabla\epsilon \cdot d\mathbf{n}.$$

При бесконечно малой разности $\delta\epsilon$ разность между напряжениями \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 тоже будет бесконечно мала, и мы можем положить:

$$(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) = E^2.$$

Таким образом, обозначая через dS элемент поверхности, мы можем написать для элементарной силы, действующей в той точке, где диэлектрическая постоянная имеет градиент, выражение:

$$dF = -\frac{1}{8\pi} E^2 \cdot \nabla\epsilon (dS \cdot d\mathbf{n}) = -\frac{1}{8\pi} E^2 \cdot \nabla\epsilon \cdot d\mathbf{o}.$$

Множитель при элементе объема $d\mathbf{o}$ будет представлять собою силу, отнесенную к единице объема диэлектрика. Если мы предположим еще, что в том же объеме находится и электричество с плотностью ρ , то вся сила, отнесенная к единице объема, действующая в рассматриваемой точке диэлектрика, будет равна:

$$\mathbf{F} = \rho\mathbf{E} - \frac{1}{8\pi} E^2 \cdot \nabla\epsilon.$$

Первый вектор этой суммы направлен по напряжению поля \mathbf{E} , тогда как второй вектор имеет направление, противоположное направлению градиента диэлектрической постоянной в рассматриваемой точке, и от направления \mathbf{E} не зависит.

60. Действие поля на диполь. Положим, что двойной полюс $\pm e$ с неизменным расстоянием d между равными и противоположными зарядами помещен в однородном электрическом поле напряжения \mathbf{E} , причем угол, образуемый моментом диполя \mathbf{p} с направлением поля, мы обозначим через α . Из рисунка 26 мы видим, что на полюсы $\pm e$ будут действовать две

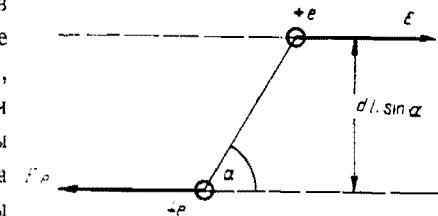


Рис. 26. Действие поля на диполь.

равные и противоположные силы. Следовательно диполь не получит поступательного движения, а будет только стремиться повернуться и стать вдоль поля (как магнитная стрелка). Момент сил действующих на диполь, равен:

$$\mathbf{K} = edl \cdot \mathbf{E} \sin \alpha = [\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}].$$

Вектор момента \mathbf{K} перпендикулярен к векторам \mathbf{p} и \mathbf{E} и образует с ними правовинтовую систему.

Для того чтобы повернуть диполь от положения, в котором он совпадает с полем ($\alpha = 0$), до положения, в котором он образует с полем угол α , необходимо затратить работу (против момента сил поля):

$$U = - \int_0^\alpha p \cdot E \sin \alpha \cdot d\alpha = pE \cos \alpha = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}).$$

Это и будет представлять собою энергию диполя в данном поле. Из этого выражения энергии мы можем по общему принципу, примененному в предыдущих параграфах, определить и силы, действующие на диполь. Если мы будем двигать диполь по какому-либо направлению при постоянном направлении \mathbf{P} , то энергия его в данном поле изменяться не будет; но это означает, что силы, действующие на диполь, имеют равнодействующую, равную нулю, что совершенно очевидно. Если же мы вместо поступательного перемещения сообщим диполю некоторый поворот $\delta\alpha$, т. е. *изменим* угол, составляемый моментом \mathbf{p} с полем \mathbf{E} , то на это потребуется затратить работу, равную моменту приложенных сил, умноженному на угол поворота $\delta\alpha$. Уравнение для изменения энергии в данном случае напишется так:

$$-\delta U = -\delta(p \cdot E \cdot \cos \alpha) = pE \sin \alpha \cdot \delta\alpha,$$

откуда и определяется момент сил

$$\mathbf{K} = [\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}]$$

в согласии с формулой, полученной выше.

Если поле, в которое помещен диполь, *неоднородно*, то даже когда диполь расположен *вдоль* поля, на его два полюса будут действовать *разные* силы, равнодействующая которых будет равна:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}_1 - e\mathbf{E}_2 = e \frac{\partial E}{\partial l} dl = p \cdot \text{grad } E.$$

Эта сила не равна нулю и будет двигать диполь в те места поля, где напряжение поля \mathbf{E} больше. Так ведет себя например магнитная стрелка вблизи магнитного полюса.

61. Энергия поляризованного тела в электрическом поле. Поляризованное тело представляет собою целую систему электрических диполей, момент которых в единице объема равен \mathbf{P} . Однако существенное отличие этого случая от того, который мы рассматривали в предыдущем параграфе, состоит в том, что момент \mathbf{P} не вносится уже *готовым* в электрическое поле, а образуется под действием самого поля. Поэтому и расчет энергии должен быть произведен иначе. Мы предположим, что в первоначальном поле в какой-либо точке его напряжение и индукция были \mathbf{E}_1 и \mathbf{D}_1 ; но вследствие присутствия поляризованного тела эти величины изменились в \mathbf{E}_2 и \mathbf{D}_2 . Произошедшее от этого изменение энергии поля будет равно

$$U = U_2 - U_1 = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}_2 \mathbf{D}_2 - \mathbf{E}_1 \mathbf{D}_1) \cdot d\mathbf{o}.$$

Выражение, стоящее под интегралом в скобках, мы можем заменить другим:

$$\mathbf{E}_2 \mathbf{D}_2 - \mathbf{E}_1 \mathbf{D}_2 = (\epsilon_1 \dots \epsilon_2) (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2),$$

потому что разница между этими двумя выражениями

$$\mathbf{E}_2 (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) - \mathbf{E}_1 (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)$$

при интегрировании по всему объему поля даст в результате нуль. Действительно каждый член этой суммы представляет собою скалярное произведение потенциального вектора \mathbf{E} на другой вектор ($\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1$), который не имеет расхождения:

$$\text{div} (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0; \quad \text{div } \mathbf{D}_1 = \text{div } \mathbf{D}_2 = 4\pi\rho;$$

потому что мы рассматриваем изменение энергии, произведенное только поляризацией тела, при *неизменных зарядах*. Такое произведение потенциального вектора на другой с нулевым расхождением мы уже рассматривали раньше (67, 52) и показали, что оно при интегрировании по объему поля дает нуль. После указанного преобразования выражение для энергии получит вид:

$$U = \frac{1}{8\pi} \int (\epsilon_1 \dots \epsilon_2) (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) \cdot d\mathbf{o}.$$

Это, конечно, не представляет собою *всей* энергии поля, а только *изменение энергии*, произведенное поляризацией тела. Величина U нам позволит, следовательно определить те силы, которые действуют на диэлектрик в данном поле. В следующем параграфе мы приведем пример применения этой формулы, а пока сделаем несколько общих замечаний.

Прежде всего мы видим, что, внося в поле диэлектрик с большой диэлектрической постоянной $\epsilon_2 > \epsilon_1$, мы *уменьшаем* энергию поля. Отсюда следует, что диэлектрик с большей диэлектрической постоянной будет *втягиваться* в поле с меньшей диэлектрической постоянной, и, наоборот, диэлектрик с меньшей диэлектрической постоянной будет *выталкиваться* из поля.

Далее, если $\epsilon_2 > \epsilon_1$, то чем больше напряжение поля E_2 внутри диэлектрика, тем энергия будет *меньше*. Это означает например, что эллипсоид будет устанавливаться в поле своей *длинной* стороной *вдоль* поля, потому что при этом его поляризация меньше и она не так сильно уменьшает внутреннее поле, как в том случае, если бы эллипсоид стал поперек поля. Если же диэлектрическая постоянная эллипсоида *меньше*, чем снаружи ($\epsilon_2 < \epsilon_1$), произойдет обратное явление: эллипсоид станет *поперек* поля.

Повороты эллипсоида в поле будут происходить под действием *моментов сил* поля, а моменты эти мы можем вычислить, пользуясь выражением энергии, потому что это выражение зависит от угла α , составляемого внутренним полем E_2 с данным внешним полем E_1 . По той же самой причине и кристаллические тела, в которых тоже поляризация не совпадает с напряжением действующего поля, будут испытывать в однородном поле некоторый *момент* даже и в том случае, если им придать совершенно симметричный вид шара. Только в тех случаях, когда поляризация тела имеет направление действующего поля ($\alpha = 0$), момент сил будет равен нулю. Такой случай мы всегда имеем в некристаллическом однородном шаре.

62. Шар в неоднородном электрическом поле. Применяя полученную в предыдущем параграфе формулу энергии для случая некристаллического однородного шара, мы сперва подставим в общую формулу величину внутреннего поля E_2 , выраженную через E_1 (59, 48):

$$E_2 = \frac{3\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} E_1.$$

Так как шар поляризуется *однородно*, то все величины кроме объема можно вынести за знак интеграла, а на место интеграла написать объем шара радиуса a :

$$U = \frac{3\epsilon_1}{8\pi} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} E_1^2 \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right) = \frac{\epsilon_1 a^3}{2} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \cdot E_1^2.$$

Это выражение энергии показывает, что однородный диэлектрик в виде шара, поляризуясь под действием однородного поля, не будет ни поворачиваться, ни передвигаться (энергия не зависит от α).

Если же мы поместим такой шар в *неоднородное* поле, то на него будет действовать сила, величина которой равна (в первом приближении)

$$F = \frac{\epsilon_1 a^3}{2} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \cdot \nabla E_1^2.$$

Если диэлектрическая постоянная внутри шара больше, чем снаружи, то шар будет двигаться в те места поля, где напряжение сильнее; если же $\epsilon_2 < \epsilon_1$, то шар будет двигаться в места с меньшим напряжением.

Формулы для шарового *проводника* мы можем получить (ср. 59, 48) положив $\epsilon_2 = \infty$. Тогда получим (при $\epsilon_1 = 1$)

$$F = \frac{a^3}{2} \nabla E^2.$$

В известных опытах *Кулона* измерялись силы, действующие между наэлектризованными проводящими шариками. Как видим по точной теории, сила, действующая на шарик радиуса a в поле напряжения E , равна

$$F = eE \left[\frac{1}{2} a^3 \nabla E^2 \right].$$

Эта сила соответствует формуле *Кулона*

$$F = eE$$

только в том случае, если объем шарика настолько мал, что вторым членом можно пренебречь по сравнению с первым членом. С физической точки зрения это означает, что силы взаимодействия будут точно следовать закону *Кулона*, если тела, участвующие в опыте, а также и тела, находящиеся поблизости, не поляризуются через влияние, или опыт поставлен так, что эта поляризация имеет ничтожное значение.

63. Объемные и поверхностные силы. Мы уже встречали случаи, когда силы, действующие в объеме тела, преобразовывались в поверхностные силы. Имея в виду дальнейшие применения, мы рассмотрим в этом параграфе соотношение между объемными и эквивалентными им поверхностными силами в самом общем виде, независимо от физического значения этих сил.

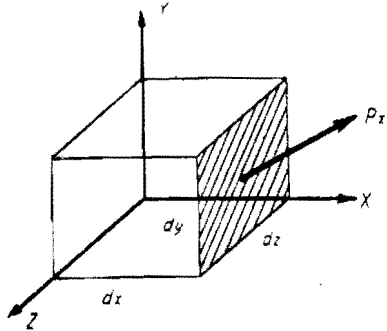


Рис. 27. Поверхностные силы (напряжения и давления).

Представим себе в начале координат элементарный параллелепипед (рис. 27) со сторонами dx, dy, dz , и обозначим через \mathbf{F} силу, действующую на единицу объема этого параллелепипеда. Тогда вся сила, действующая на параллелепипед, будет равна

$$\mathbf{F} \cdot dx \cdot dy \cdot dz.$$

С другой стороны, представим себе, что к граням параллелепипеда приложены поверхностные силы, давления или натяжения (силы, отнесенные к единице поверхности; они измеряются динами на квадратный сантиметр). Обозначим эти напряжения через p ; напряжение, действующее на грань $(dy \cdot dz)$, которая перпендикулярна к оси X , обозначим через p_x , соответственные напряжения на других гранях обозначим через p_y и p_z . Каждая из величин

$$p_x \quad p_y \quad p_z$$

есть вектор и эти векторы могут иметь для различных площадок $(dy \cdot dz)$, $(dz \cdot dx)$, $(dx \cdot dy)$ различную величину и различное направление. Будем обозначать проекции этих векторов на оси координат, приписывая соответствующие индексы. Таким образом мы получим всего 9 проекций, представленных в нижеследующей таблице:

Площадки:	$dy \cdot dz$	$dz \cdot dx$	$dx \cdot dy$
Проекция на ось X . . .	p_{xx}	p_{yx}	p_{zx}
» » » Y . . .	p_{xy}	p_{yy}	p_{zy}
» » » Z . . .	p_{xz}	p_{yz}	p_{zz}

Совокупность этих девяти величин представляет собою тензор напряжений (ср. ч. I, гл. III). Этот тензор симметричен, т. е.

$$p_{ik} = p_{ki},$$

если объемная сила \mathbf{F} не сообщает рассматриваемому параллелепипеду вращательного движения. Действительно в таком случае моменты сил, действующих на грани параллелепипеда, должны равняться нулю. Составим момент, например вокруг ребра OX . Силы, действующие тангенциально на грани $dy \cdot dz$ и $dz \cdot dx$, будут равны соответственно (рис. 27)

$$p_{xy}(dy \cdot dz), \quad p_{yx}(dz \cdot dx);$$

у одной из этих сил будет плечо dx , у другой—плечо dy . Приравняв момент обеих сил нулю, получаем:

$$p_{xy}(dy \cdot dz) \cdot dx - p_{yx}(dz \cdot dx) \cdot dy = 0.$$

Откуда видим, что должно быть соблюдено условие

$$p_{xy} = p_{yx}.$$

Такие же условия мы получим и для остальных проекций напряжений. Следовательно написанный нами тензор симметричен.

Теперь будем составлять проекции на оси координат поверхностных сил.

Эти проекции сил будут для двух противоположных площадок немного отличаться друг от друга, и мы можем например написать для двух площадок $(dy \cdot dz)$, отстоящих друг от друга на расстоянии dx , выражения сил

$$p_{xx}(dy \cdot dz), \quad \left(p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} dx \right) dy \cdot dz.$$

Так как силы эти направлены в противоположные стороны, то на параллелепипед будет действовать разность их

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz.$$

Аналогичные выражения мы получаем для проекций на ось X сил, действующих на площадки $dz \cdot dx$ и $dx \cdot dy$ (см. таблицу):

$$\frac{\partial p_{yx}}{\partial y} dy \cdot dz \cdot dx, \quad \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} dz \cdot dx \cdot dy.$$

Сумма проекций на ось X всех поверхностных сил должна равняться проекции на ту же ось объемной силы \mathbf{F} . Мы получаем следовательно по сокращении на $(dx \cdot dy \cdot dz)$ для оси X

$$F_x = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}$$

и аналогичные уравнения для осей Y и Z :

$$F_y = \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z}$$

$$F_z = \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}$$

Таким образом мы получили уравнения, связывающие *объемные* силы с эквивалентными им *поверхностными* силами.

64. Напряжения в электростатическом поле. Как известно, *Фарадей* представлял себе силы взаимодействий между наэлектризованными телами как результат некоторых *напряжений* в электрическом поле. При этом он принимал, что вдоль каждой трубки сил действует определенное *натяжение*, а соседние трубки производят своими боковыми поверхностями друг на друга некоторое *давление*. При помощи такого воззрения *Фарадею* удавалось определять сравнительно просто силы и в таких случаях, когда непосредственное применение закона *Кулона* требовало сложных вычислений. Кроме того из такого воззрения *Фарадея* непосредственно следует, что электрическая энергия распределена не в зарядах, а в электрическом поле. *Максвелл* поставил себе задачу определить эти *фарадеевские* напряжения (которые мы непосредственно наблюдать не можем) из наблюдаемых нами взаимодействий между наэлектризованными телами. Мы выше представили электростатические силы в форме сил, действующих на *единицу объема* (75, 59)

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{E} - \frac{1}{8\pi} E^2 \nabla \epsilon.$$

Если мы теперь хотим преобразовать это выражение, вводя поверхностные силы, то должны найти такой тензор \mathbf{p} , который бы удовлетворял следующим трем уравнениям (для краткости мы пишем только одно уравнение по оси X):

$$F_x = \rho E_x - \frac{1}{8\pi} E^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}$$

Максвеллу удалось решить эту задачу. Но принимая во внимание, что решение это неоднозначно и что позже были найдены и другие решения, мы не будем здесь следовать вычислениям *Максвелла*, а приведем в готовом виде найденный им результат. Результаты позднейших исследований мы приводить не будем, потому что формулы *Максвелла* отличаются своей простотой и наглядностью, вполне выражают воззрения *Фарадея* и сохранили свою силу до сих пор. Максвелловский тензор механических напряжений в электростатическом поле выражается через электрическое напряжение и индукцию поля следующим образом:

$$8\pi p_{xx} = \epsilon [E_x^2 - E_y^2 - E_z^2] = 2E_x D_x - \epsilon E^2;$$

$$8\pi p_{yy} = \epsilon [E_y^2 - E_x^2 - E_z^2] = 2E_y D_y - \epsilon E^2;$$

$$8\pi p_{zz} = \epsilon [E_z^2 - E_x^2 - E_y^2] = 2E_z D_z - \epsilon E^2;$$

$$8\pi p_{xy} = 8\pi p_{yx} = 2E_x D_y = 2E_y D_x;$$

$$8\pi p_{yz} = 8\pi p_{zy} = 2E_y D_z = 2E_z D_y;$$

$$8\pi p_{zx} = 8\pi p_{xz} = 2E_z D_x = 2E_x D_z.$$

Для того чтобы убедиться в том, что эти выражения удовлетворяют вышенаписанному уравнению, нам достаточно проверить уравнение, относящееся к оси X , потому что остальные уравнения построены аналогично.

$$8\pi \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} = 2E_x \frac{\partial}{\partial x} D_x + 2D_x \frac{\partial}{\partial x} E_x - \epsilon \frac{\partial}{\partial x} E^2 - E^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial x};$$

$$8\pi \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} = 2E_x \frac{\partial}{\partial y} D_y + 2D_y \frac{\partial}{\partial y} E_x;$$

$$8\pi \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} = 2E_x \frac{\partial}{\partial z} D_z + 2D_z \frac{\partial}{\partial z} E_x.$$

Сумма первых членов правых частей этих выражений равна:

$$2E_x \operatorname{div} \mathbf{D} = 8\pi \rho \cdot E_x.$$

Приняв во внимание, что $\operatorname{curl} \mathbf{E} = 0$, мы можем заменить (ср. 11, 12):

$$\frac{\partial}{\partial y} E_x = \frac{\partial}{\partial x} E_y; \quad \frac{\partial}{\partial z} E_x = \frac{\partial}{\partial x} E_z,$$

и тогда сумма вторых членов представится в виде:

$$2\epsilon E_x \frac{\partial}{\partial x} E_x + 2\epsilon E_y \frac{\partial}{\partial x} E_y + 2\epsilon E_z \frac{\partial}{\partial x} E_z = \epsilon \frac{\partial}{\partial x} E^2$$

и уничтожится третьим членом первого выражения. Таким образом у нас остается:

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} = \rho E_x - \frac{1}{8\pi} E^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial x}$$

в полном согласии для проекции объемной силы на ось X .

Формулы значительно упрощаются, если мы направим одну из осей координат по направлению напряжения поля. Положим $E_x = E$, $E_y = E_z = 0$; тогда получаем:

$$p_{xx} = + \frac{1}{8\pi} \epsilon E^2 \quad p_{xy} = p_{yz} = p_{zx} = 0.$$

$$p_{yy} = p_{zz} = - \frac{1}{8\pi} \epsilon E^2$$

Это означает, что вдоль линий сил мы имеем *натяжение*, а перпендикулярно к ним *давление*; и то и другое равно *плотности энергии* в рассматриваемой точке. Это вполне согласуется с воззрениями *Фарадея*.

Те же самые натяжения и давления мы получили при вычислении сил в плоском конденсаторе (ср. §§ 54—58).

VI. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ.

65. Закон Кулона. Магнитные явления во многих отношениях аналогичны явлениям электрическим. Опыт показывает, что магнитные силы обуславливаются некоторыми центрами, которые легко обнаруживаются в так называемых постоянных магнитах и которые названы *полюсами*. Далее опыт показывает, что имеются два рода полюсов. На том же основании, как в случае электрических полюсов, магнитные полюса названы *положительными* и *отрицательными*. В подвешенной на нити магнитной стрелке (*буссоль*) один полюс повертывается к северу, другой — к югу; *северный* полюс принято называть *положительным*, а *южный* — *отрицательным*. Для взаимодействий магнитных полюсов *Кулон* установил путем опыта совершенно такой же закон, как и для взаимодействий электрических полюсов:

$$F_{1,2} = K_m \frac{m_1 m_2}{r^2} \Gamma_{1,2}$$

($\Gamma_{1,2}$ единичный вектор) (ср. 1,1).

Наконец опыт показывает, что тела, помещенные вблизи магнитных полюсов, сами намагничиваются через влияние, аналогично с электризацией, получающейся путем влияния в диэлектриках; другими словами — тела под влиянием магнитного поля сами *поляризуются* магнитно. Поэтому магнитные полюсы, погруженные в магнитно поляризующуюся среду, будут взаимодействовать с другими силами, чем если бы они были помещены в пустоте (в эфире, лишенном материи). Это обстоятельство принимается во внимание введением некоторого коэффициента в формулу *Кулона*

$$F_{1,2} = K_m \frac{m_1 m_2}{\mu r^2} \Gamma_{1,2}$$

Коэффициент μ , аналогичный диэлектрической постоянной ϵ , называется *проницаемостью* среды (слово *диамагнитная* постоянная не употребляется потому, что слово *диамагнитный* уже получило другое значение).

66. Различие между электрическими и магнитными полюсами. Между электрическими и магнитными полюсами имеются и различия не только по существу, но также и по их свойствам. Магнитные полюсы в материальных телах никогда не появляются отдельно, а всегда *парами*, в виде двойных полюсов равной величины и противоположного знака, т. е. в виде *биполей*. Как следствие из этого вытекает то обстоятельство, что в учении о магнетизме нам не встретятся *проводники* магнетизма в том смысле, как это мы имели в электричестве, потому что в проводниках одна часть тела может быть заряжена положительными полюсами, а другая часть — отрицательными полюсами, которые отделимы друг от друга. Более того, в электрически поляризованных телах мы можем, применяя особые воздействия (трение, химические реакции, действие теплоты и света и т. п.), *отделить* одно электричество от другого, отщепляя *электрон* (атом отрицательного электричества) от атома или молекулы. В магнетизме и это невозможно. Причина всех этих отличий магнетизма от электричества заключается в том, что на самом деле магнитных полюсов совсем нет; магнитное поле образовано не магнитными полюсами, а электрическими токами (гипотеза *Ампера*), а мы увидим далее, что магнитное поле электрических токов эквивалентно полю магнитных биполей (теорема *Ампера*).

Это обстоятельство однако несколько не мешает нам строить теорию магнитного поля, исходя из теории поля отдельных

полюсов. Во-первых, это дает нам возможность воспользоваться теми понятиями, которые мы уже ввели в теорию электрического поля и воспользоваться полученными там выводами. Во-вторых, понятие о полюсе элементарнее и нагляднее, чем понятие о биполе. Наконец на понятии о магнитном полюсе построен основной закон магнитных взаимодействий, закон *Кулона*, и это понятие входит в единицы магнитных измерений. Из всего этого мы выводим следующее заключение. Несмотря на то, что отдельных (действительных) магнитных полюсов в природе не существует, и несмотря на то, что можно было бы построить теорию магнитного поля, избегая понятия *полюс*, а вводя только понятие *биполь*, мы тем не менее считаем *магнитный полюс* очень полезным вспомогательным понятием и будем им пользоваться в дальнейшем.

67. Единица количества магнетизма. Совершенно так же, как и в электричестве, за единицу количества магнетизма принимается такое, которое действует на себе равное количество ($m_1 = m_2 = 1$), помещенное в чистом эфире ($\mu = 1$) на расстоянии одного сантиметра ($r = 1 \text{ см}$) с силою, равной одной дине. При таком выборе коэффициент K_m в законе *Кулона* равен единице, и мы имеем

$$F =_{1,2} \frac{m_1 m_2}{\mu r^2} r_{1,2} \text{ дин.}$$

Эта единица называется *абсолютной магнитной* или *электромагнитной* единицей количества магнетизма (*CGS — M*).

68. Напряжение и индукция магнитного поля. Когда на магнитный полюс m действуют одновременно несколько магнитных полюсов, расположенных как угодно в пространстве, то все их силы складываются геометрически, причем результирующая сила F будет пропорциональна m :

$$F = mM.$$

Величина M есть вектор и называется *напряжением* магнитного поля в той точке, где помещен полюс m . Произведение напряжения поля M на коэффициент проницаемости среды μ называется магнитной индукцией поля:

$$B = \mu M.$$

Для случая одного магнитного полюса напряжение магнитного поля и индукция равны соответственно

$$M_r = \frac{m_1}{\mu r^2}; \quad B_r = \frac{m_1}{r^2}.$$

Оба эти вектора направлены радиально от положительного полюса в поле и из поля — к отрицательному полюсу.

69. Поток магнитной индукции. Произведение индукции B на элементарную площадку dS и на косинус угла, образованного индукцией с положительной нормалью этой площадки, называется *поток магнитной индукции* сквозь рассматриваемую площадку:

$$dN = (B \cdot dS).$$

Магнитные силы действуют обратно пропорционально квадрату расстояния и к потоку магнитной индукции может быть применена теорема *Гаусса* (8,9), которую мы выразим так: каждый положительный (северный) полюс m служит *источником* линии сил в числе

$$N = 4\pi m.$$

В отрицательном (южном) полюсе *сходятся* $4\pi m$ линий сил.

Если мы проведем в поле какую-либо *замкнутую* поверхность и вычислим поток магнитной индукции, то получим всегда для полного потока *нуль*

$$\oint (B \cdot dS) = 0,$$

потому что в объеме любого тела всегда находится столько же положительных полюсов, сколько и отрицательных. Применяя это к бесконечно малому объему, мы получаем (ср. 9,9)

$$\operatorname{div} B = 0,$$

между тем как в электрическом поле мы имеем

$$\operatorname{div} D = 4\pi\rho,$$

где ρ могло и не равняться нулю.

70. Магнитный потенциал. Когда магнитный полюс m под действием силы поля F передвигается на длину dL , то поле совершает работу (уменьшает свою энергию):

$$-dU = (F \cdot dL) = e(M \cdot dL).$$

Относя эту работу к единице количества передвигаемого электричества, получаем изменение потенциала поля (или потенциальной энергии поля, отнесенной к единице передвигаемого магнетизма)

$$-dV = (M \cdot dL).$$

Отсюда видим, что напряжение поля равно падению потенциала на единицу длины вдоль линии напряжения:

$$M = - \frac{dV}{dn} = - \operatorname{grad} V.$$

или, выражаясь иначе, напряжение поля равно отрицательному градиенту потенциала. Разность потенциалов между двумя точками поля, находящимися на конечном расстоянии друг от друга, равна

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}.$$

В этой формуле мы предполагаем, что работа, затрачиваемая на передвижение полюса из первой точки поля во вторую, не зависит от того пути, по которому происходило это перемещение. Мы предполагаем следовательно, что потенциал представляет собою *однозначную* функцию положения точки.

В поле, образованном отдельными полюсами, или биполями, потенциал всегда однозначен. Если же магнитное поле образовано электрическими токами, то, как увидим ниже, потенциал делается *многозначным*. Отчего происходит это различие, мы выясним в своем месте.

71. Магнитное поле биполя. По аналогии с формулами, полученными нами в электростатике, мы можем написать для потенциала магнитного биполя (32, 25)

$$V = \left(\mathbf{p} \cdot \nabla_r \frac{1}{r} \right) = p \frac{\cos \alpha}{r^2},$$

где вектор

$$\mathbf{p} = m \cdot d\mathbf{l}$$

называется магнитным моментом биполя, а α означает угол, образуемый моментом с направлением радиуса-вектора, проведенного из биполя в рассматриваемую точку поля, потенциал которой мы вычисляем. Для составляющих магнитного напряжения вдоль по радиусу-вектору \mathbf{r} и по тому направлению, куда увеличиваются углы α , мы имеем:

$$M_r = p \frac{2 \cos \alpha}{r^3}; \quad M_\alpha = p \frac{\sin \alpha}{r^3}.$$

Величина результирующего поля M и угол β , образуемый полем с направлением радиуса-вектора, определяются формулами:

$$M = \frac{p}{r^3} \sqrt{4 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

72. Потенциал двойного магнитного слоя. Потенциал биполя мы можем представить в несколько ином виде. Мы предполагали биполь составленным из двух взаимно противоположных полюсов; теперь представим себе биполь в виде двух элементарных площадок $d\mathbf{S}$, намагниченных равномерно поверхностною плотностью магнетизма σ и расставленных друг от друга на расстояние dn . Момент такого биполя выразится так:

$$\mathbf{p} = \sigma d\mathbf{S} \cdot dn.$$

Обозначим через

$$q = \sigma \cdot dn$$

магнитный момент *единицы площади* биполя и подставим выраженный таким образом момент биполя в выражение для потенциала, получаем:

$$V = q \frac{dS \cos \alpha}{r^2} = q \cdot d\omega.$$

Здесь $d\omega$ означает телесный угол, под которым видна положительно намагниченная площадка dS из рассматриваемой точки поля.

Если мы имеем дело с поляризованной поверхностью конечных размеров, то ее потенциал выразится интегралом:

$$V = \int q \frac{dS \cos \alpha}{r^2} = \int q \cdot d\omega,$$

взятым по всей поверхности. Если поверхность намагничена *равномерно*, т. е. ее магнитный момент \mathbf{q} (отнесенный к единице поверхности) везде одинаковой величины и везде направлен по нормали к поверхности, то ее потенциал для любой точки P пространства будет равен:

$$V = q \cdot \omega.$$

Заметим, что потенциал равномерно поляризованной поверхности совсем не зависит от формы ее, а только от угла ω , под которым виден из точки P ее контур. Следовательно для определения потенциала нам достаточно знать этот контур и плотность моментов q .

Напоминаем читателю, что градиент поля поляризованной поверхности имеет везде конечное значение, за исключением точек самой поверхности, где потенциал делает *скачок*, и следовательно градиент делается равным бесконечности (24, 22).

73. Магнитно поляризованные тела. Обозначив через \mathbf{P} магнитный момент единицы объема тела, получаем для потенциала его (48, 38):

$$V = \int \left(\mathbf{P} \cdot \nabla_r \frac{1}{r} \right) d\omega.$$

Применяя теорему Гаусса, мы можем преобразовать этот объемный интеграл в поверхностный интеграл (ср. 48, 39) плотности фиктивного магнетизма:

$$V = \oint \left(P_n \frac{1}{r} \right) dS.$$

Плотность фиктивного магнетизма на поверхности тела определяется нормальной составляющей поляризации:

$$d' = P_n.$$

74. Условия на поверхности. В слабо магнитных телах мы можем принять поляризацию пропорциональной действующему внутри тела напряжению магнитного поля:

$$P = \chi M_p,$$

т. е. то же соотношение, что мы приняли для электрической поляризации (49, 40).

В таком случае мы можем применять и в магнетизме те соотношения, которые мы имеем в электростатическом поле, а именно коэффициент намагничивания χ будет связан с коэффициентом проницаемости μ следующим образом:

$$B = \mu M = M + 4\pi P = (1 + 4\pi\chi) \cdot M \\ \mu = 1 + 4\pi\chi.$$

На поверхности раздела двух намагниченных тел нормальные составляющие магнитной индукции и тангенциальные составляющие магнитного напряжения непрерывны (50, 41):

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad M_{t1} = M_{t2} \\ \frac{M_{n1}}{M_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Отсюда следует закон преломления линий сил:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

где α означает угол, образуемый линией сил с нормалью к поверхности. Для самой величины индукции и напряжения в обоих соприкасающихся телах имеем:

$$B_1 \cos \alpha_1 = B_2 \cos \alpha_2; \quad M_1 \sin \alpha_1 = M_2 \sin \alpha_2.$$

Следовательно, вообще говоря, линии сил сгущаются при входе в среду с большей проницаемостью.

75. Размагничивание. Уже при изучении электрической поляризации мы обратили внимание на то обстоятельство, что поляризованное тело дает внутри себя поле, направленное *противоположно* поляризации (44, 45, 46). Поэтому, когда мы будем намагничивать какой-нибудь кусок железа, то получившиеся на его поверхности фиктивные магнитные заряды будут ослаблять поле внутри него и противодействовать намагничиванию. Это явление называется *размагничиванием*. Размагничивание будет тем сильнее, чем сильнее внутреннее поле поверхностных полюсов. В некоторых простых случаях влияние размагничивания может быть вычислено. Так например мы видели, что плоскость, шар и эллипсоид под действием однородного внешнего поля поляризуются тоже однородно, причем интересующее нас размагничивающее поле пропорционально поляризации:

$$M_p = -fP.$$

Для плоскости этот коэффициент $f = 4\pi$, для шара $f = \frac{4\pi}{3}$, для

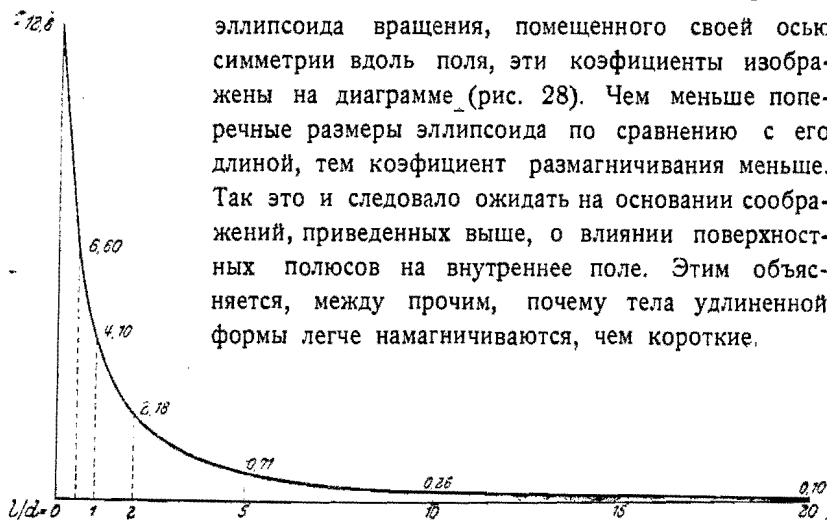


Рис. 28. Коэффициенты размагничивания эллипсоидов вращения.

Поляризация P обусловлена внутренним полем M_p ; обозначая коэффициент магнетизации через χ , можем написать

$$P = \chi M_p.$$

Но, с другой стороны, это же внутреннее поле равно внешнему полю M за вычетом поля полярзации:

$$M_i = M - fP = M - \chi f M_i.$$

Отсюда мы можем определить внутреннее поле, зная поле внешнее и коэффициенты χ и f :

$$M_i = \frac{1}{1 + \chi f} M;$$

чем больше произведение χf , тем слабее получается внутреннее поле.

Если намагничивающее поле неоднородно, или тело не имеет формы эллипсоида, то коэффициент f уже теряет свое простое значение и подсчет намагничивания делается чрезвычайно сложным.

76. Магнитная энергия. Так как действительных полюсов в магнетизме нет, то подсчет энергии мы будем производить по индукции и напряжению поля, причем будем выражать плотность энергии магнитного поля формулой

$$U_0 = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{M}).$$

Полная энергия всего поля будет равна

$$U = \int \frac{1}{8\pi} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{M}) \cdot d\omega.$$

Что касается подсчета сил на основании выражения для энергии, то его мы можем производить на основании тех же самых принципов, которые мы применяли в аналогичных вопросах в электростатике (68, 53), и мы можем здесь не повторять их.

То же самое мы можем сказать о преобразовании *объемных* сил в *поверхностные*. Мы получим формулы для натяжений и давлений в магнитном поле, если в формулах параграфа 64 (83) заменим ϵ буквой μ , D — буквой B и E — буквой M .

77. Парамагнетизм и диамагнетизм. *Фарадей* открыл, что некоторые тела не втягиваются в магнитное поле, а выталкиваются из него; а если придать телам удлиненную форму, то они становятся не вдоль поля (как железная палочка), а поперек поля (как палочка висмута). Для обозначения этого различия *Фарадей* предложил называть первые тела *парамагнитными* телами (*пара* — вдоль), а последние тела — *диамагнитными* (*диа* — поперек). С теоретической точки зрения мы должны парамагнитным телам приписать коэффи-

циент $\chi > 0$ и $\mu > 1$, а для диамагнитных тел мы должны принять $\chi < 0$ и $\mu < 1$, в остальном же все наши теоретические выкладки остаются в силе.

Что касается причины, почему некоторые тела парамагнитны, а другие диамагнитны, то этот вопрос связан с вопросом о строении молекул и атомов, и мы здесь не можем его касаться.

78. Ферромагнетизм. То же самое мы должны сказать и о другом магнитном явлении, которое имеет большое значение в практических применениях. Дело в том, что в сильно-магнитных телах: в железе, кобальте и никеле, поляризация непропорциональна действующему полю; более того, при намагничивании поляризация изменяется не так, как при размагничивании. Поляризация ферромагнитных тел вообще не представляет собою однозначной функции напряжения действующего поля. Если мы будем чертить зависимость индукции B от напряжения M , то, намагничивая тело и размагничивая его опять до первоначального состояния (цикл намагничивания), мы получим на чертеже замкнутые кривые (петли), форма которых зависит от свойств самого тела и от величины предельных намагничиваний. В таких случаях лучше всего пользоваться *графическими* расчетами, которые читатель найдет в экспериментальных и технических курсах по электричеству.

79. Магнитная энергия ферромагнитного тела. Мы указали выше, что магнитная энергия в среде, для которой индукция пропорциональна напряжению, т. е. для которой коэффициенты χ и μ суть *постоянные*, не зависящие ни от величины напряжения, ни от способа намагничивания, может быть вычислена по формуле

$$U = \int \frac{1}{8\pi} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{M}) \cdot d\omega = \int \frac{1}{8\pi} \mu M^2 \cdot d\omega.$$

Для ферромагнитных тел эта формула не подходит, потому что коэффициент изменяется во время намагничивания. Для того чтобы указать путь, каким образом можно вычислить энергию ферромагнитного тела, будем считать индукцию состоящей из двух частей (74)

$$B = M + 4\pi P$$

и соответственно с этим будет рассчитывать энергию эфира и энергию поляризованного тела, помещенного в этом эфире, отдельно.

Плотность магнитной энергии в эфире равна ($\mu = 1$)

$$U_0 = \frac{1}{8\pi} M^2,$$

и изменение этой энергии при небольшом изменении напряжения поля равно:

$$dU_0 = \frac{1}{4\pi} M \cdot dM,$$

С другой стороны, для образования в магнитном поле с напряжением M небольшой поляризации dP необходимо затратить энергию

$$dU_p = M \cdot dP.$$

Следовательно полное изменение плотности энергии в единице объема при изменении напряжения поля на dM и поляризации на dP будет равно

$$dU_{mp} = \frac{1}{4\pi} M \cdot dM + M \cdot dP = \frac{1}{4\pi} M \cdot d(M + 4\pi P) = \frac{1}{4\pi} M \cdot dB.$$

А все изменение плотности энергии при намагничивании от нуля до данного состояния выразится так:

$$U_0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^B M \cdot dB.$$

Распространяя это на весь объем поля, получаем:

$$U_0 = \frac{1}{4\pi} \int d\omega \int_0^B M \cdot dB.$$

Эти интегралы можно вычислить, только зная зависимость B от M .

В неферромагнитных телах B пропорционально M ; тогда коэффициент пропорциональности μ можно вынести за знак внутреннего интеграла и проинтегрировать; мы получаем опять прежнюю формулу для энергии магнитного поля:

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \mu M^2 \cdot d\omega.$$

80. Работа гистерезиса. Мы только что показали, что для намагничивания единицы объема ферромагнитного тела с переменной проницаемостью нам необходимо затратить работу

$$U_0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^B M \cdot dB$$

на каждый кубический сантиметр тела. Но работа ($M \cdot dB$) изображится на диаграмме зависимости B от M (рис. 29 а) тонкою полоскою $B_1 A_1 A_2 B_2$. При размагничивании dB будет отрицательно и

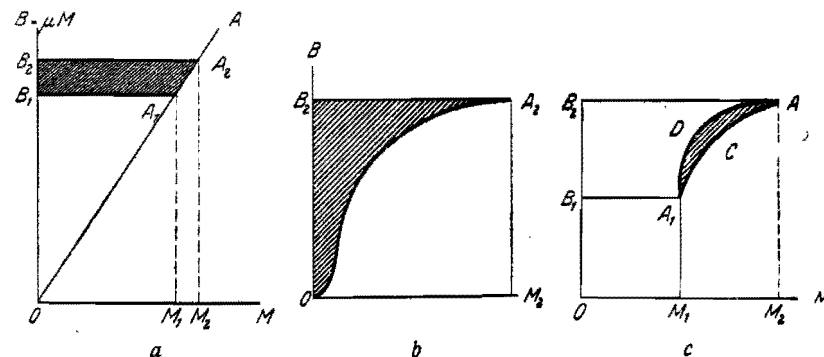


Рис. 29. Вычисление работы намагничивания.

соответствующие площади работ мы тоже должны считать отрицательными. Если диаграмма (BM) не имеет петли (нет гистерезиса) (рис. 29 б), то при намагничивании и размагничивании до начального состояния мы получим на диаграмме работ *равные и противоположные* по знаку площади, вследствие чего полная работа, произведенная за весь цикл, будет равна нулю. Но если характеристика (BM) при циклическом намагничивании образует петлю, то площади уже не будут равными; при намагничивании будет истрачено больше работы, чем получено обратно при размагничивании. В результате часть работы будет потеряна. Варбург показал, что железо при таком циклическом намагничивании нагревается и что потерянная работа превращается в теплоту. Для вычисления теплоты гистерезиса имеются эмпирические формулы.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

I. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

31. Сила тока. Электрический ток образуется движением электричества. Движение электричества мы можем наблюдать непосредственно только в тех случаях, когда оно движется вместе с несущей его материей (электрическая конвекция), в большинстве же случаев мы судим о передвижении электричества по различным побочным признакам (изменение поля, магнитное действие, электролиз, ионизация). Однако в этой части мы не будем изучать движение отдельных зарядов, а введем понятие об *эквивалентном электрическом токе*.

Обозначим через ρ плотность электричества и через v скорость его движения. Тогда вектор i будет представлять плотность электрического тока:

$$i = \rho v.$$

Плотность тока означает количество электричества, протекающее каждую секунду сквозь один квадратный сантиметр площади, поставленной нормально к скорости. Плотность тока может образовывать векторное поле любой формы. Проведем в этом поле элементарную площадку dS и напишем поток вектора i сквозь эту площадку:

$$dJ = (i \cdot dS).$$

Эта величина называется электрическим током сквозь площадку dS . Проведя в поле поверхность S любой формы и величины, мы можем вычислить электрический ток, проходящий сквозь эту поверхность:

$$J = \int (i \cdot dS).$$

Сила тока J представляет собою количество электричества, протекающее сквозь рассматриваемую поверхность в каждую секунду. При этом величины ρ и v , а следовательно и вектор плотности тока i могут иметь для различных точек поверхности различную величину и различное направление. Кроме того они могут меняться со временем.

Составленные нами формулы могут быть применимы не только к электричеству, но также и к *материи* плотности ρ и вообще к любому скалару, который меняет свое место в пространстве. Однако для электричества нам необходимо сделать некоторое добавление. Дело в том, что в природе существуют два различных электричества, противоположных по знаку, и увеличение количества электричества одного знака вполне эквивалентно уменьшению количества электричества другого знака. Соответственно с этим и движение положительного электричества в одну сторону вполне эквивалентно движению отрицательного электричества в сторону противоположную. Обозначим через e_1 и $-e_2$ количества положительного и отрицательного электричества и через u и $-v$ их скорости; тогда на основании только что сделанного замечания мы должны для электрического тока написать:

$$J = e_1 u + (-e_2)(-v) = e_1 u + e_2 v.$$

Электрический ток может проходить так, что заряды всех проводников останутся неизменными. Для этого необходимо, чтобы количество электричества, приходящего к проводнику в элемент времени, равнялось количеству электричества, уходящего из проводника за то же время.

82. Единица силы тока. За единицу силы тока принимают электрический ток, при котором каждую секунду сквозь рассматриваемую поверхность протекает единица количества электричества

$$(J = 1) = \frac{(e = 1)}{\text{sec}}.$$

Практическая единица силы тока называется *ампером*. Мы имеем следовательно следующие соотношения единиц для силы тока:

$$\text{ампер} = \frac{\text{кулон}}{\text{сек}} = 3 \cdot 10^9 \text{ CGS} - E = 0,1 \text{ CGS} - M.$$

83. Закон Ома. Электричество при своем движении внутри проводников испытывает сопротивление, которое аналогично

сопротивлению, испытываемому материальными телами при движении их внутри вязкой жидкости. Однако законы движения электричества в проводниках значительно проще, в особенности, если мы будем рассматривать *постоянные* токи (потом мы перейдем к переменным токам). *Ом* показал на многочисленных и точных опытах, что сила тока в линейном проводнике может быть выражена через падение потенциала вдоль проводника формулою:

$$J = \frac{-V}{R} = -KV; \quad \frac{1}{R} = K,$$

где R и K суть коэффициенты пропорциональности, не зависящие от J и V , но обусловленные размерами и материалом проводника. Обозначая через l длину проволоки и через S площадь ее поперечного сечения (поперечным сечением называется сечение, перпендикулярное к длине проводника и следовательно перпендикулярное к вектору силы тока), мы можем результаты опытов *Ома* изобразить формулами:

$$R = \rho \frac{l}{S}; \quad K = \sigma \frac{S}{l}; \quad \frac{1}{\rho} = \sigma.$$

Коэффициенты ρ и σ зависят от материала проводника, ρ называется *удельным сопротивлением*, а σ — *удельною электропроводностью* проводника. Коэффициенты эти для одного и того же материала могут изменяться в зависимости от температуры, давления, посторонних примесей или растворенных тел, от способа обработки, молекулярного состояния тела и т. п. (см. Курс электричества).

84. Единицы сопротивления и электропроводности. Исходя из закона *Ома*, можно установить единицу сопротивления при разности потенциалов, равной единице, единица сопротивления должна пропускать постоянный ток, равный единице. Практическая единица сопротивления называется *ом*:

$$\text{ом} = \frac{\text{вольт}}{\text{ампер}} = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \text{ CGS} = E = 10^9 \text{ CGS} = M.$$

Для удельного сопротивления мы имеем формулу:

$$\rho = R \frac{S}{l}.$$

Поэтому, если мы возьмем кубик со сторонами в один сантиметр, то его сопротивление будет равно удельному сопротивлению материала, из которого сделан кубик.

Из формулы видно, что для получения величины удельного сопротивления необходимо умножить сопротивление на площадь и разделить на длину. Откуда заключаем, что удельное сопротивление будет выражаться в практических единицах в *омо-сантиметрах*. Удельная же электропроводность будет иметь единицей обратную величину, т. е. *единица, деленная на омо-сантиметр*.

В таблицах обыкновенно дают удельное сопротивление в практических единицах — *омо-сантиметрах*. Иногда дают сопротивление проволоки длиной в метр и поперечного сечения в один квадратный миллиметр; для того чтобы эти последние данные перевести в *омо-сантиметры*, нужно их умножить на 10^{-4} .

Для перевода удельного сопротивления, выраженного в практических единицах — *омо-сантиметрах*, в электростатические единицы необходимо его разделить на $9 \cdot 10^{11}$, а для перевода в электромагнитные единицы нужно умножить на 10^9 . Для перевода удельной электропроводности служат обратные множители.

85. Правила Кирхгофа. Мы не будем здесь разбирать различные способы соединения линейных проводников, потому что все связанные с этим вопросы можно найти в общих курсах электричества и электротехники. Мы считаем поэтому достаточным напомнить читателю общие правила *Кирхгофа*.

Первое правило касается точки *разветвления* проводников. При стационарных (постоянных) токах количество электричества в точке разветвления (и вообще во всех точках проводника) должно оставаться постоянным. Это возможно только при условии, что количество электричества, притекающее к разветвлению в каждую секунду, равно электричеству, утекающему от разветвления в то же самое время. Обозначая притекание и утеkanie противоположными знаками, мы можем написать первое правило *Кирхгофа* для каждого разветвления так:

$$\sum J = 0.$$

Второе правило *Кирхгофа* основывается на том, что потенциал представляет собою *однозначную* функцию. Поэтому, если мы обойдем какой-нибудь *замкнутый* контур, выделенный мысленно в цепи проводников, то, придя в исходную точку, мы должны получить опять тот же самый потенциал. Но на таком пути мы будем наблюдать *падение* потенциала, по закону *Ома* равное RJ , и подъем потенциала \mathcal{E} в каждом источнике электрической энергии (гальванические элементы, динамомашинны). Для того чтобы при

возвращении в исходную точку мы получили тот же потенциал, суммы всех встреченных нами на пути электродвижущих сил (подъемов потенциала) за вычетом всех пройденных нами падений потенциала должны равняться нулю

$$\Sigma(\mathcal{E} - RJ) = 0.$$

Как бы ни была сложна цепь проводников, оба правила *Кирхгофа* всегда позволят нам написать целый ряд линейных уравнений, вполне достаточных для определения сил токов в отдельных проводниках, если даны их сопротивления и величины размещенных в сети электродвижущих сил. Примеры применения правил *Кирхгофа* и закона *Ома* читатель найдет в Общем курсе электричества.

86. Закон Джоуля. Мы знаем, что при передвижении электричества e в электрическом поле от одной точки до другой, с разностью потенциалов V , тратится работа

$$U = eV.$$

В электрическом токе электричество постоянно движется от высшего потенциала к низшему, а потому в электрическом токе постоянно должна тратиться энергия. Разделяя вышенаписанное равенство на элемент времени t и приняв во внимание, что количество электричества, протекающее в единицу времени, есть не что иное, как сила тока J , а энергия U , отнесенная к единице времени, представляет собою мощность, или эффект W , мы можем написать

$$W = JV.$$

Применяя закон *Ома*, мы можем представить эту формулу в следующих видах:

$$W = JV = J^2 R = \frac{V^2}{R}.$$

Джоуль показал на опытах, что вся энергия электрического тока постоянно превращается в теплоту, нагревая проводник.

87. Единицы работы и эффекта. За практическую единицу работы принимают

$$\text{джоуль} = \text{вольт} \cdot \text{кулон} = 10^7 \text{ эрг},$$

и соответствующая единица эффекта носит название *ватт*.

$$\text{Ватт} = \frac{\text{джоуль}}{\text{сек}} = \text{вольт} \cdot \text{ампер} = 10^7 \frac{\text{эрг}}{\text{сек}}.$$

88. Закон Ома для плотности тока. Имея в виду применять все вышеприведенные законы постоянного тока и к *нелинейным* проводникам, мы придадим им несколько иной вид. Если формулу *Ома*:

$$J = \frac{-V}{R} = \sigma \cdot \frac{-V}{l} S$$

разделить на величину поперечного сечения проводника, то получим *плотность* тока i в проводнике. Кроме того падение потенциала на единицу длины:

$$\frac{-V}{l} = E$$

представляет собою *напряжение* электрического поля внутри проводника. Мы получаем таким образом:

$$i = \sigma E.$$

Применяя эту формулу, не нужно смешивать различные единицы. Если напряжение E выражено [в *электростатических* единицах, а σ дано в таблицах в практических единицах, то для перехода к электростатическим единицам нужно σ умножить на $9 \cdot 10^{11}$. Произведение σE , т. е. плотность тока, будет тогда представлено тоже в электростатических единицах.

89. Уравнение непрерывности. Проведем в проводнике (мысленно) замкнутую поверхность S . Поток электричества сквозь эту поверхность будет равен:

$$J = \oint (i dS).$$

Если мы наружную нормаль поверхности будем считать положительной, то этот интеграл будет нам давать количество электричества, *вытекающее* каждую секунду из объема, обнимаемого проведенной нами поверхностью. Но вытекание электричества будет сопровождаться уменьшением количества электричества в этом объеме. Следовательно, если ρ — плотность электричества, то

$$e = \int \rho \cdot d\omega$$

$$\oint (i \cdot dS) = - \frac{d}{dt} \int \rho \cdot d\omega.$$

Применяя это к бесконечно малому объему, получаем:

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = -\frac{dq}{dt} = -\dot{\rho}.$$

Для случая стационарных токов, при которых количество электричества не меняется со временем, мы имеем:

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = \frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} + \frac{\partial i_z}{\partial z} = 0.$$

Этому последнему уравнению и соответствует приведенное выше первое правило *Кирхгофа*. Что же касается второго правила, то его можно выразить формулами, которые мы имели в электростатике и которые и здесь сохраняют свою силу, а именно

$$\oint (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}) = 0, \quad \operatorname{curl} \mathbf{E} = 0.$$

90. Закон Джоуля для плотности тока. Мы можем и закон *Джоуля* обобщить на нелинейные проводники, применив формулу:

$$W = J \cdot V$$

к единице объема, т. е. разделяя на Sl . Получаем:

$$W_0 = iE = \sigma E^2.$$

Эта формула выражает следовательно количество теплоты, выделяющееся в каждом кубическом сантиметре проводника в секунду.

91. Условия на границе двух проводников. Предположим, что мы имеем стационарное распределение токов в проводящем теле, которое состоит из двух соприкасающихся проводников различной электропроводности σ_1 и σ_2 . Если применить уравнение:

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = 0$$

к поверхности раздела обоих проводников (ср. аналогичные рассуждения для потока индукции двух соприкасающихся диэлектриков: 50, 41), то получим для нормальных составляющих плотностей токов в том и другом проводнике:

$$i_{n1} = i_{n2}.$$

Выраженное словами, это означает: сколько из одного проводника вытекает (сквозь квадратный сантиметр в секунду) электричества, столько же в другой проводник втекает. Что касается *напряжений* электрического поля, то мы знаем, что танген-

циальные составляющие этих напряжений должны быть одинаковы с обеих сторон поверхности раздела, потому что

$$E_{n1} = E_{n2}.$$

Применив закон *Ома*, получаем:

$$\frac{i_{n1}}{\sigma_1} = \frac{i_{n2}}{\sigma_2}.$$

Из полученных нами уравнений (аналогично с условиями на поверхности соприкасающихся диэлектриков: 51, 42) следует, что линии токов будут преломляться у поверхности проводников различной электропроводности:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

Это заключение можно демонстрировать и на опыте.

Для примера возьмем медную проволоку, погруженную в 10%-ный раствор поваренной соли. Отношение удельных электропроводностей этих тел равно:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{0,6 \cdot 10^6}{0,1} = 6 \cdot 10^6 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2}.$$

Откуда видим, что в то время как внутри медной проволоки линии токов будут направлены почти *вдоль* поверхности, снаружи в растворе поваренной соли они будут почти *перпендикулярны* к поверхности.

92. Два электрода в неограниченном проводнике. Предположим, что два небольших электрода погружены в проводник значительных размеров (например в землю, как это делается часто в телеграфных линиях). Требуется определить сопротивление среды между электродами.

Для простоты и большей наглядности расчета мы предположим, что электроды представляют собою небольшие шаровые поверхности радиусов a и b и что они заряжены до разности потенциалов $V_a - V_b$. Так как потенциалы поля при шаровых проводниках обратно пропорциональны расстоянию от центра, то можно для первого электрода написать:

$$V_r : V_a = \frac{1}{r} : \frac{1}{a}; \quad V_r = \frac{a}{r} V_a.$$

Такое же соотношение мы получим и для потенциалов, обусловленных присутствием второго электрода. Таким образом распределение потенциалов в рассматриваемом неограниченном проводнике будет выражаться формулой:

$$V = \frac{a}{r_1} V_a - \frac{b}{r_2} V_b.$$

У самой поверхности первого электрода мы получим напряжение поля ($r_1 = a$):

$$E_a = -\frac{\partial V}{\partial r} = \left(\text{при } r_1 = a\right) = \frac{1}{a} V_a - \frac{b}{r_2^2} V_b.$$

Но так как расстояние между электродами мы предполагаем очень большим по сравнению с радиусом электрода a , то второй член мы можем опустить и написать для плотности тока у первого электрода:

$$i_a = \sigma E_a = \frac{\sigma}{a} V_a.$$

А сила тока будет равна этой плотности умноженной на поверхность электрода:

$$J = \frac{\sigma}{a} V_a S_a = 4\pi\sigma \cdot a V_a.$$

Такой же силы ток мы получим и у второго электрода:

$$J = -\frac{\sigma}{b} V_b S_b = -4\pi\sigma b V_b.$$

Деля разность потенциалов между электродами на силу тока, получаем сопротивление проводника:

$$R = \frac{V_a - V_b}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

В том случае, когда электроды не погружены в проводник, а приложены к поверхности проводника (этот случай ближе подходит к электродам, опущенным в землю), т. е. проводник безграничен только в одну сторону, мы получим очевидно *двойное* сопротивление.

Во всяком случае, как видим, сопротивление совсем не зависит от расстояния между электродами, а только от их размеров. Чем меньше размеры электродов, тем больше получается сопроти-

вление той среды, в которую они погружены. Это обстоятельство было замечено на опыте раньше, чем была установлена теория, и это дало повод к различным недоразумениям. А между тем это явление объясняется просто тем, что с увеличением расстояния между электродами расширяется и площадь, пронизываемая токами, а потому сопротивление остается неизменным.

93. Время релаксации. До сих пор мы рассматривали только установившиеся электрические токи, потому что, строго говоря, закон *Ома* приложим только к постоянным токам. Тем не менее полезно рассмотреть один случай неустановившегося движения электричества, в предположении, что закон *Ома* остается в силе и для этого случая, по крайней мере в первом приближении. Впоследствии мы увидим, что это первое приближение означает, что мы пренебрегли влиянием магнитного поля тока.

Предположим, что в полупроводнике с диэлектрической постоянной ϵ и с электропроводностью σ распределены электрические заряды с плотностью ρ . Вследствие электропроводности тела эти заряды не останутся на месте, а будут образовывать электрические токи и взаимно уничтожаться. Как будет происходить этот процесс?

Для решения этого вопроса напомним уравнение непрерывности электричества (102, 89):

$$\operatorname{div} i = -\dot{\rho}.$$

Плотность тока i мы можем выразить через напряжение поля по закону *Ома*, а напряжение поля можем выразить через электростатическую индукцию:

$$i = \sigma E = \frac{\sigma}{\epsilon} D.$$

Принимая во внимание, что:

$$\operatorname{div} D = 4\pi\rho,$$

получаем:

$$\dot{\rho} = -\frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \rho.$$

Это дифференциальное уравнение решается так:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad \tau = \frac{\epsilon}{4\pi\sigma}.$$

Здесь ρ_0 означает плотность электричества в некоторый момент времени $t=0$. Этот результат показывает нам, что если в каком-либо полупроводнике с диэлектрической постоянной ϵ и с элект-

тропроводностью σ в какой-нибудь момент времени будут размещены заряды ρ , то эти заряды будут взаимно уничтожаться со временем. Через некоторое время

$$t = \tau = \frac{\epsilon}{4\pi\sigma}$$

количество электричества уменьшится в e ($e = 2,718...$) раз. Это время τ пропорционально диэлектрической постоянной и обратно пропорционально электропроводности; оно называется временем *релаксации* полупроводника. Само собою разумеется, что вместе с уничтожением электричества будет уничтожаться и электрическое поле и притом с тою же быстротою.

Для примера возьмем дистиллированную воду с диэлектрической постоянной $\epsilon = 80$ и очень слабую электропроводностью $\sigma = 10^{-6}$ (омо-сантиметр) $^{-1}$.

Переводя электропроводность в электростатические единицы, имеем:

$$\tau = \frac{80}{4\pi \cdot 10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^{11}} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ сек.}$$

Мы видим, что даже в чистой воде электрическое поле уничтожается чрезвычайно быстро. В металлических проводниках оно будет уничтожаться еще в миллионы раз быстрее.

II. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.

94. Закон Био и Савара. Эрстедт сделал открытие, что электрический ток действует на магнитную стрелку, или, по нашей терминологии, образует около себя магнитное поле. Последующие исследования *Био* и *Савара* установили *количественное* соотношение между силой тока и образуемым им магнитным полем. *Лаплас* показал, что действия электрического тока на магнитный полюс в опытах *Био* и *Савара* можно свести на элементарные действия, исходящие из каждого элемента длины dl проводника, по которому идет ток. Эти элементарные действия пропорциональны длине элемента dl , силе тока J и силе магнитного полюса m и обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними. Таким образом мы получаем нечто аналогичное закону *Кулона* для электрических и магнитных взаимодействий. Однако существенная разница между этими законами состоит в том, что сила, открытая *Эрстедтом*, зависит от относительного направления элемента dl и радиуса-вектора r , проведенного из элемента тока dl к полюсу m . Обозначая угол

между этими двумя направлениями через α , мы должны прибавить, что сила эта пропорциональна $\sin \alpha$. Но это еще не все; оказывается, что сила эта не притягательная и не отталкивательная, т. е. направлена не по радиусу-вектору r , а перпендикулярно к плоскости, проведенной через элемент тока dl и радиус-вектор r .

Приняв все это во внимание, мы можем представить закон *Био* и *Савара* в следующей форме:

$$dF_B = \frac{m \cdot dl}{r^2} [l \cdot r_{im}] = \frac{mI}{r^2} [dl \cdot r_{im}].$$

Здесь r_{im} означает *единичный* вектор, направленный от элемента тока dl к полюсу m . Все три вектора F , dl , r составляют

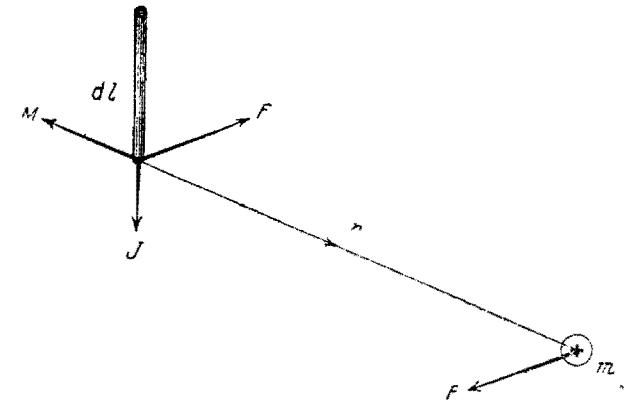


Рис. 30. Действие элемента тока на магнитном полюсе.

правовинтовую систему (рис. 30). Относя силу к единице полюса, получаем *напряженность* магнитного поля, обусловленное рассматриваемым элементом тока $J \cdot dl$:

$$dM = \frac{1}{r^2} [Jdl \cdot r_{im}].$$

При вычислении магнитного поля всего тока, идущего по проводнику конечной длины, все элементарные действия, обусловленные каждым элементом тока, нужно сложить вместе (сложение векторов, конечно геометрическое). Это мы можем изобразить интегралом:

$$M = \oint \frac{1}{r^2} [Idl \cdot r_{im}],$$

распространенным на всю длину проводника, по которому идет ток. Большею частью это будет интеграл по замкнутой линии.

95. Закон Ампера. Одновременно с действием электрического тока на магнитный полюс мы имеем и действие магнитного полюса на ток, причем действие равно противодействию, хотя силы и не направлены по линии, соединяющей оба взаимодействующих тела, а перпендикулярны к ней. Следовательно обе силы образуют вместе некоторый *момент сил*. Ампер показал на опыте, что два электрических тока тоже взаимодействуют своими магнитными полями; в этом последнем случае действие и противодействие направлены по линии соединения двух элементов токов.

При формулировке законов Ампера мы можем исходить из закона Био и Савара, написав:

$$dF_A = -dF_B = \frac{m}{r^2} [I \cdot dl \cdot r_{ml}]$$

Здесь, как и раньше, r_{lm} означает единичный вектор, направленный от элемента тока к полюсу, а r_{ml} означает единичный вектор обратного направления (рис. 31).

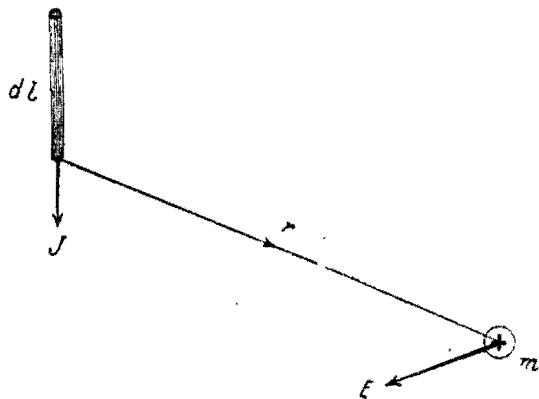


Рис. 31. Взаимодействие электрического тока и магнитного полюса.

Один из множителей в вышенаписанной формуле, а именно

$\frac{m}{r^2} r_{ml} = \mathbf{B}$ представляет собою величину магнитной индукции, образу-

емой полюсом m в той точке, где находится элемент тока dl . Поэтому мы можем написать:

$$dF_A = [I \cdot dl \cdot \mathbf{B}]$$

В эту формулу уже не входит магнитный полюс, и она применима и к тем случаям, когда индукция \mathbf{B} обусловлена не магнит-

ными полюсами, а электрическими токами. Следовательно эта формула описывает открытие Ампера в полном объеме.

При вычислении действия поля на электрический ток (или проводник, по которому идет электрический ток) конечных размеров (большую часть ток представляет собою *замкнутую* линию) мы должны все элементарные действия сложить вместе, тогда получим некоторую равнодействующую силу

$$F = \int [I \cdot dl \cdot \mathbf{B}]$$

и кроме того, как увидим ниже, может получиться и некоторый *момент сил*. Наконец, если рассматриваемый проводник гибкий, или упругий, то, так как силы, действующие на отдельные части проводника, могут иметь различную величину и различное направление, проводник может подвергнуться *деформации* под действием сил магнитного поля.

В тех случаях, когда магнитное поле обусловлено электрическими токами, нужно сперва определить его по формуле Био и Савара, умножить напряжение поля на μ и полученное \mathbf{B} подставить в формулу Ампера; тогда получим силу F_A .

96. Электромагнитная единица силы тока. На основании формул Био и Савара и формулы Ампера мы можем, пользуясь уже введенной нами единицей для магнитного полюса или единицами для напряжения и индукции магнитного поля, ввести единицу для силы тока. Обыкновенно для наглядности берут для этого круговой ток радиуса, равного одному сантиметру, и помещают в его центре (мысленно) магнитный полюс, равный единице. При таком расположении радиус-вектор будет образовывать с током везде прямой угол и $\sin \alpha = 1$. Если мы подберем силу тока в круговом проводнике так, чтобы каждый сантиметр его длины действовал на полюс $m = 1$, помещенный в центре (т. е. на расстоянии одного сантиметра от тока) с силою в одну дину, то будем считать этот ток равным единице:

$$F_B = \frac{(m = 1)(l = cm)(\sin \alpha = 1)}{(r = cm)^2} (J = 1) = \text{дин.}$$

При выборе единицы силы тока у нас сохраняется единица для количества магнетизма, и законы Био и Савара и Ампера не требуют никаких дополнительных коэффициентов. Так как эта единица основана на *магнитных* действиях тока, то она носит название магнитной или *электромагнитной* единицы силы тока.

Мы имели раньше *практическую* и *электростатическую* единицу для силы тока. Единицы, основанные на разных физических законах, могут и не быть одинаковыми. Опыт показывает, что электромагнитная единица силы тока в $3 \cdot 10^{10}$ раз больше электростатической единицы, и мы имеем соотношение:

$$\text{ампер} = 0,1 \text{ CGS-M} = 3 \cdot 10^9 \text{ CGS-E.}$$

97. Магнитное поле прямого тока. Самый простой случай магнитного поля мы получаем, когда электрический ток идет по прямому проводнику *бесконечной* длины. Обозначим расстояние рассматриваемой точки поля от линии тока через r_0 . Тогда для различных радиусов-векторов r , проведенных к рассматриваемой точке из различных элементов тока dl , мы можем написать соотношения (рис. 32):

$$\sin(lr) = \cos(rr_0) = \cos \alpha, \\ r \cos \alpha = r_0; \quad dl \cos \alpha = r d\alpha,$$

и формула *Био* и *Савара* примет вид:

$$dM = J \frac{\cos^2 \alpha \cdot r_0 \cdot d\alpha}{r_0^2 \cos \alpha} = \frac{J}{r_0} \cos \alpha \cdot d\alpha.$$

Интегрируя это по всей длине проводника, т. е. от $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ до $\alpha = +\frac{\pi}{2}$,

$$M = \frac{J}{r_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \cdot d\alpha = \frac{J}{r_0} \left| \sin \alpha \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{2J}{r_0}.$$

Эту именно формулу и подтвердили *Био* и *Савар* на основании опытов с прямым проводником очень большой длины по сравнению с расстоянием r_0 .

Поле прямого проводника зависит только от расстояния r_0 , и следовательно расположено совершенно симметрично вокруг оси проводника.

Если мы имеем два параллельных линейных проводника, по которым идут токи J_1 и J_2 , то каждый из этих токов образует в точках другого проводника напряжение поля:

$$M = \frac{2J}{r_0}.$$

Умножая на μ , чтобы получить *индукцию*, и подставляя в формулу *Ампера*, получаем силу действия одного из токов на *каждую единицу* длины другого тока:

$$F = \mu \frac{2}{r_0} J_1 J_2.$$

Сила эта пропорциональна произведению сил токов. Она будет притягательная, если токи одного направления, и отталкивательная при токах противоположного направления (см. Общий курс электричества).

Для примера возьмем оба тока одинаковой силы в 10 ампер ($= 1 \text{ CGS-M}$). Тогда каждый сантиметр длины каждого тока будет испытывать в воздухе электромагнитную силу, равную:

$$F = \frac{2}{r_0} \text{ dyn.}$$

98. Поле кругового тока. Мы ограничимся вычислением напряжения магнитного поля кругового тока на его центральной оси, перпендикулярной к его плоскости; величина магнитного напряжения в других точках поля не может быть выражена в конечной форме при помощи элементарных функций.

Для какой-либо точки, лежащей на центральной оси, все расстояния r элементов тока будут одинаковы (рис. 33):

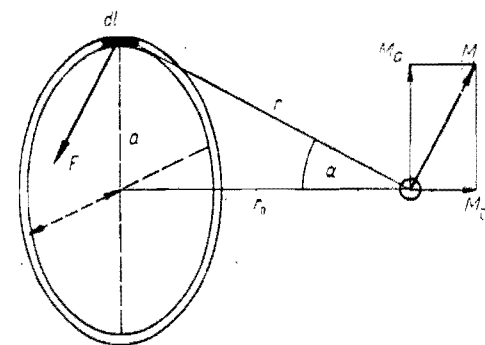


Рис. 33. Вычисление магнитного поля кругового тока.

$$r = \frac{r_0}{\cos \alpha} = \sqrt{a^2 + r_0^2} = a \sqrt{1 + \left(\frac{r_0}{a}\right)^2},$$

где a означает радиус круга, r_0 означает расстояние от центра и α —угол, образуемый радиусом r с центральной осью. Все эти величины для всех точек кругового проводника одинаковы. Таким образом все элементарные силы *Био* и *Савара* в этом случае будут одинаковы, но направления у них разные, потому что каждая элементарная сила перпендикулярна и к элементу тока dl и к радиусу-

вектору \mathbf{r} . При геометрическом сложении этих сил мы поступим следующим образом. Мы разложим каждую элементарную силу на две составляющие: одну возьмем вдоль центральной оси, а другую перпендикулярно к этому направлению:

$$dM = \frac{J}{r^2} dl.$$

$$dM_0 = \frac{J \cdot dl}{r_0^2} \cos^2 \alpha \sin \alpha; \quad dM_a = \frac{J \cdot dl}{r_0^2} \cos^3 \alpha.$$

Но все составляющие силы, перпендикулярные к оси, взаимно уничтожаются, потому что они направлены во все стороны от оси равномерно. Сумма составляющих вдоль оси определится интегрированием по всей окружности тока:

$$M_0 = \frac{I}{r_0^2} \int_0^{2\pi a} \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha \cdot dl = I \frac{2\pi}{a \left[1 + \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Чем ближе рассматриваемая точка поля к плоскости кругового тока, тем напряжение поля сильнее; в центре круга $r_0 = 0$, и мы получаем:

$$M_0 = J \frac{2\pi}{a}.$$

Если мы будем, оставаясь в плоскости круга, идти от центра к периферии, то магнитное поле будет увеличиваться. Самое сильное поле мы получим у поверхности проводника и здесь мы можем рассчитывать напряжение поля так, как будто проводник прямой. Обозначая радиус проволоки через b , мы можем с большим приближением положить

$$M_b = J \frac{2}{b}.$$

Силу, с которой круговой ток действует на магнитный полюс m , мы получим, умножая вычисленное выше напряжение магнитного поля на m .

Представим себе, что мы поместили в центре кругового тока один из полюсов длинного магнита; пусть магнит будет такой длины, что действием другого полюса на круговой ток можно пренебречь (если другой полюс помещен тоже на оси, то это действие

мы можем в случае надобности и рассчитать). При таком расположении опыта круговой ток будет действовать на полюс с силой

$$F = m J \frac{2\pi}{a}.$$

С такою же силой будет действовать и полюс m на весь круговой ток. Полюс и ток будут притягиваться или отталкиваться, смотря по направлению тока и по знаку полюса. В этом случае действие и противодействие направлены по одной и той же линии.

Пока полюс находился в центре круга, составляющие сил dM_a , нормальные к оси, были равны нулю. Если мы теперь будем отходить полюсом от плоскости круга, то кроме осевых сил появятся и силы, перпендикулярные к оси. У самого полюса эти последние силы будут, как мы уже сказали, взаимно уничтожаться, и соответствующие им силы *Ампера*, действующие на круговой ток, тоже будут иметь равнодействующую, равную нулю, т. е. не будут стремиться сдвинуть круговой ток в его плоскости ни в какую сторону тем не менее эти силы будут проявляться в том, что они или будут *растягивать*, или *сжимать* окружность круга, смотря по направлению тока и по знаку полюса. Если полюс притягивается током, то круг будет стремиться расшириться, и, наоборот, при взаимном отталкивании полюса и тока, окружность, по которой идет ток, будет стремиться сжаться. Советуем читателю проверить это утверждение по чертежу.

99. Линии сил замкнутого тока. На рис. 34 изображены линии

сил магнитного поля кругового тока. Эти линии уже не будут кругами, как в случае прямых токов, но все они будут *замкнутыми* и будут огибать проводник, по которому идет ток. Каждая линия сил связана с контуром тока, как два звена в цепи. Если бы эти магнитные линии были материальными, как линия тока, то их нельзя было бы снять с тока, не разорвав самой линии или не прервав контур тока.

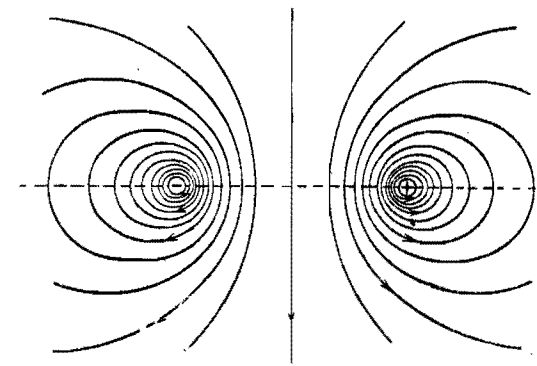


Рис. 34. Магнитные линии сил кругового тока.

Направление магнитного поля замкнутого тока определяется по направлению тока известным правилом *буравчика* или другими аналогичными правилами. Проведем через замкнутый ток какую-либо поверхность; при этом проводник будет служить *контуром*, или *границей*, этой поверхности. Та сторона поверхности тока, из которой выходят магнитные линии сил, называется *положительной* стороной, или *северной* стороной; противоположная сторона, в которую магнитные линии сил входят, называется *отрицательной*, или *южной*. Мы всегда будем восстанавливать положительную нормаль поверхности с ее северной стороны.

100. Замкнутый ток в однородном магнитном поле. Представим себе замкнутый проводник (рис. 35), лежащий всеми своими точками в одной плоскости.

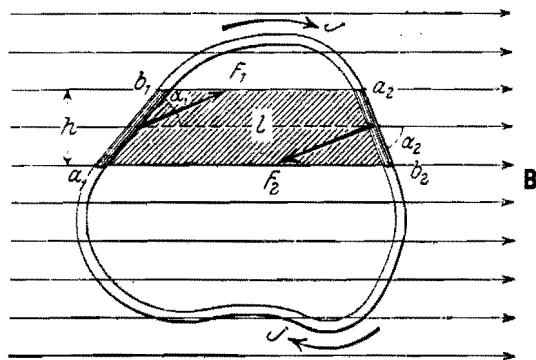


Рис. 35. Замкнутый ток, плоскость которого параллельна магнитному полю.

$$dF = JB \cdot dl \sin (dl \cdot B).$$

Для того, чтобы просуммировать это выражение по всей длине тока, мы можем воспользоваться тем, что произведение $dl \sin (dl \cdot B)$ представляет собою проекцию элемента dl на линию yy , перпендикулярную к направлению поля (рис. 35):

$$dF = JB \cdot dy.$$

Таким образом каждой элементарной силе, действующей в правой части проводника, будет соответствовать ей *равная* сила в левой части чертежа. Кроме того две такие равные силы будут *противоположно* направлены. Действительно в правой части чертежа, где ток идет вниз, силы *Ампера* будут направлены перпендикулярно к чертежу на нас, тогда как в левой части чертежа, где ток идет

вверх, силы будут направлены от нас к чертежу. Отсюда мы заключаем, что эти силы будут поворачивать замкнутый проводник вокруг оси, перпендикулярной к полю. Для того, чтобы вычислить *момент* всех этих сил, мы умножим каждую силу, составляющую с соответствующей ей силой другой стороны проводника *пару сил*, на плечо этой пары x и сложим все моменты вместе. Тогда получим момент всех сил:

$$K = JB \int x \cdot dy = JB \int dS = JBS,$$

где S очевидно представляет собою площадь, обтекаемую замкнутым током.

Величина $p = JS$ называется *магнитным моментом* замкнутого тока. Направление этого момента мы будем считать перпендикулярным к плоскости тока и направленным в ту сторону, куда *выходят* магнитные линии сил самого замкнутого тока.

Что касается направления момента сил, которое мы определили, то не трудно видеть из чертежа, что векторы H , p , B образуют праввинтовую систему, и мы можем написать:

$$K = [p \cdot B].$$

Это соотношение легко запомнить, если обратить внимание на аналогию с моментом сил, испытываемым магнитной стрелкой в магнитном поле. Как магнитная стрелка, так и электрический ток стремятся повернуться так, чтобы их магнитный момент был направлен в ту же сторону, как и внешнее магнитное поле. В случае электрического тока мы можем это выразить и так: замкнутый электрический ток стремится под действием внешнего поля повернуться так, чтобы его собственно внутреннее магнитное поле было направлено в ту же сторону, как и внешнее.

Если плоскость проводника перпендикулярна (рис. 36) к полю, то все элементарные силы *Ампера* будут лежать в плоскости тока и опять будут попарно равны и противоположны; действие этих сил будет обнаруживаться в том, что отдельные части проводника будут растягиваться или сжиматься, вообще *деформироваться*, аналогично тому, что мы имели при рассмотрении действия полюса на круговой ток.

В более общем случае, когда внешнее магнитное поле составляет с нормалью к плоскости тока некоторый угол α , мы можем разложить его на две составляющие: одну взять в плоскости тока

($B \sin \alpha$) и другую — перпендикулярно к этой плоскости ($B \cos \alpha$). Последняя составляющая будет только деформировать ток, между

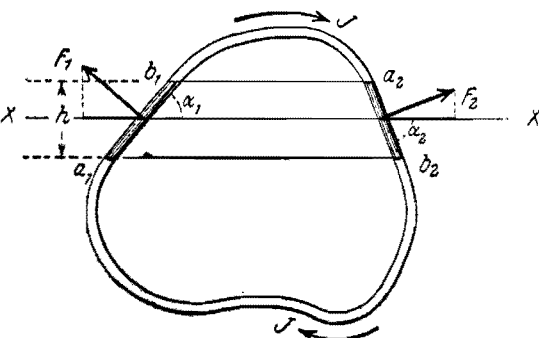


Рис. 36. Замкнутый ток, плоскость которого перпендикулярна к магнитному полю.

Наконец предположим, что данный нам замкнутый ток не лежит в одной плоскости, а представляет собою какую угодно замкнутую линию в пространстве и что данное нам внешнее магнитное поле неоднородно. В таком случае можно для расчета сил, действующих на проводник, применить основную формулу Ампера, интегрируя ее по всей длине замкнутого тока. Но можно поступить еще следующим образом. Мы проводим через контур тока какую-либо поверхность и дополняем данный нам ток целой сетью равных и противоположных токов, обтекающих малые площадки dS ; от этой прибавки искомые силы измениться не могут, потому что все прибавочные силы в каждой точке сети равны и противоположны. Но таким образом мы получаем целую систему элементарных *плоских* замкнутых токов, из которых каждый лежит в однородном поле, и мы можем применить к каждому из этих токов только что полученные нами формулы. С математической точки зрения оба способа расчета отличаются друг от друга тем, что в первом случае мы вычисляем *линейный* интеграл, а во втором случае — интеграл *поверхностный*; но мы знаем, что один можно преобразовать в другой по теореме Стокса. Мы вернемся к этому вопросу ниже при вычислениях, касающихся энергии магнитного поля токов.

101. Потенциал магнитного поля электрического тока. Рассмотрим опять взаимодействие элемента тока и полюса:

$$dF = \frac{m}{r^2} [J \cdot dl \cdot r_{im}]$$

тем как первая составляющая, имеющая величину $B \sin \alpha$, будет повертывать ток, образуя момент сил:

$$K = BIS \sin \alpha;$$

$$K = [pB].$$

Эта формула отличается от той, которую мы получили выше, только тем, что теперь $\sin \alpha$ не равен единице.

и предположим, что или полюс передвигается в поле тока на длину ds , или элемент тока dl передвигается в противоположную сторону на $-ds$. Как в том, так и в другом случае на такое передвижение потребуется затратить работу, величина которой определяется, как всегда, скалярным произведением силы на величину перемещения. Мы получаем следовательно:

$$dU = (dF_B \cdot ds) = \frac{mJ}{r^2} [dl \cdot r_{im}] \cdot ds.$$

Разделим эту работу на количество передвигаемого магнетизма, т. е. предположим, что передвигаемый нами полюс $m=1$, и по аналогии с понятием, введенным нами в магнитостатике, назовем полученную величину *потенциалом* магнитного поля, образованного электрическим током:

$$dV = \frac{J}{r^2} [dl \cdot r_{im}] ds.$$

Это выражение мы можем значительно упростить. Переставив множители в произведении трех векторов, имеем:

$$[dl \cdot r_{im}] \cdot ds = [ds \cdot dl] r_{im} = dS \cdot \cos(r \cdot dS),$$

где вектор dS представляет собою площадь, описанную элементом тока dl при передвижении по пути ds (рис. 37). Далее величина

$$\frac{dS \cdot \cos(r \cdot dS)}{r^2} = d\omega$$

есть не что иное, как телесный угол $(7, 8)$, под которым видна площадь dS из той точки поля, для которой мы вычисляем потенциал V . Таким образом имеем:

$$dV = J d\omega.$$

Теперь представим себе, что полюс $m=1$ перемещается из бесконечно удаленной точки, где потенциал мы принимаем равным нулю, до рассматриваемой нами точки P ; или, наоборот, мы можем представить себе, что весь замкнутый ток I перенесен из бесконечности и принял данное нам расположение относительно полюса

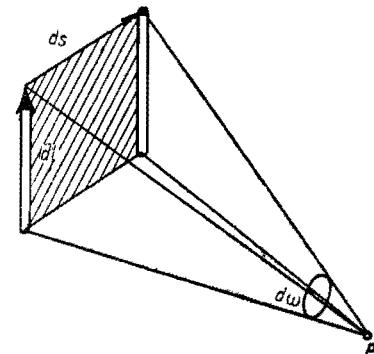


Рис. 37. Сдвиг элемента тока в магнитном поле.

$m = 1$. При бесконечном расстоянии тока и полюса друг от друга телесный угол $d\omega$ будет равен нулю. Следовательно вся работа, затраченная на указанное перемещение, будет равна:

$$V = J \cdot \omega.$$

Сравнивая это с формулой, которую мы получили для потенциала магнитного листка, равномерно покрытого нормальными к его поверхности биполями с плотностью p (89, 72)

$$V = p \cdot \omega,$$

мы видим, что магнитное поле замкнутого тока одинаково с полем магнитного листка, если их контуры одинаковы и поверхностная плотность биполей p равна силе тока I .

Мы можем сейчас же, пользуясь принципом равенства действия и противодействия, сказать, что и действие внешнего магнитного поля на электрический ток одинаково с действием его на магнитный листок при вышеуказанных условиях. Эквивалентность тока и магнитного листка представляет собою знаменитую теорему *Ампера*.

102. Магнитодвижущая сила. Если мы будем переходить от одной точки поля электрического тока к другой, то угол ω будет меняться, и разность потенциалов в двух точках P_2 и P_1 определится так:

$$V_2 - V_1 = J(\omega_2 - \omega_1).$$

Однако эта разность будет в некоторых случаях зависеть от того пути, по которому мы передвигали полюс $m = 1$ из первой точки во вторую. Представим себе, что мы ведем полюс $m = 1$ по замкнутому пути; тогда, вернувшись снова в исходную точку, мы должны получить опять тот же самый потенциал. Так оно и будет во всех случаях, в которых наш замкнутый путь не огибает электрического тока (рис. 38). Если же мы сперва войдем внутрь площади (рис. 39), обтекаемой током, то угол ω возрастет до 2π ; затем при дальнейшем обходе он будет расти дальше до величины 4π , и наконец, когда мы опять дойдем до исходной точки, его значение будет $\omega + 4\pi$. Таким образом, обойдя замкнутый путь, мы не получаем опять того же значения потенциала, а получаем разность телесных углов:

$$(\omega + 4\pi) - \omega = 4\pi.$$

Если мы обойдем контур тока n раз все в одну и ту же сторону, то получим потенциал:

$$V = n \cdot 4\pi J.$$

Итак потенциал магнитного поля электрического тока представляет собою *многозначную* функцию; эта функция остается однозначною, пока мы не огибаем контура тока, т. е. пока наш замкнутый путь и контур замкнутого тока не образуют друг с другом двух *сцепленных* звеньев.

Нечто аналогичное мы имеем в жидкости, вращающейся вокруг оси (вокруг вихря). Если мы будем все время идти *вдоль* движения жидкости и будем суммировать произведение скорости на пройденный путь ($v \cdot ds$), то у нас будут получаться все *положительные* произведения, и сумма их при обходе оси вращения тоже будет положительна:

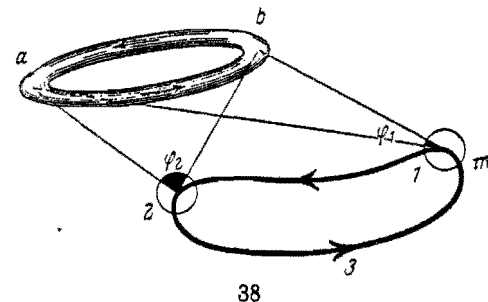
$$\oint (v \cdot ds) = C.$$

Если мы пойдем по обратному пути, то получим ту же величину, но противоположного знака. Эта величина называется в гидродинамике *циркуляцией*.

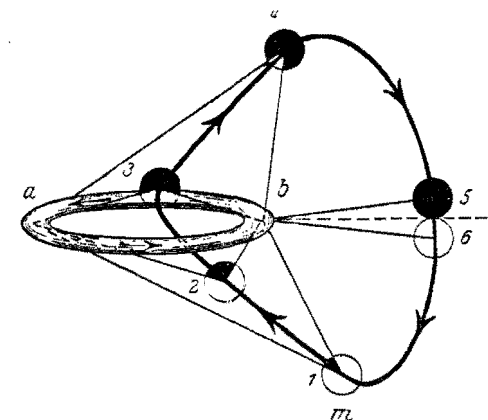
В рассматриваемом нами магнитном поле электрического тока мы будем называть интеграл, взятый по замкнутому пути, огибающему контур тока,

$$\oint (M \cdot ds) = \mathcal{E}_m$$

магнитодвижущей силой, по аналогии с электродвижущей силой,



38



39

Рис. 38, 39 — движение полюса по замкнутому пути.

действующей в замкнутом проводнике и выражающейся интегралом:

$$\oint (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}) = \mathcal{E}.$$

Если тот путь, по которому мы ведем полюс $m = 1$, не обходит контура тока, то мы получаем разность магнитных потенциалов двух точек:

$$V_2 - V_1 = \int_1^2 (\mathbf{M} \cdot d\mathbf{s}).$$

Точно так же и в проводнике величина интеграла

$$V_2 - V_1 = \int_1^2 (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}),$$

взятого между двумя точками проводника, называется разностью электрических потенциалов этих точек.

Полученный нами интеграл, выражающий магнитодвижущую силу замкнутого электрического тока, часто употребляется в электротехнике при расчетах электромагнитов (см. Общий курс электричества: формула Гопкинсона).

103. Отличие поля тока от поля магнитного листка. По теореме Ампера магнитное поле электрического тока эквивалентно полю магнитного листка (118, 101). Однако между ними имеется то различие, что потенциал магнитного листка представляет собою *однозначную* функцию положения точки, тогда как потенциал тока многозначен. Но дело в том, что потенциал магнитного листка при проходе сквозь листок претерпевает скачок (*прерывен*). Если мы будем вести полюс $m = 1$, начиная от положительной стороны листка, где потенциал равен $2\pi r$, и обойдя листок кругом, придем к той же точке, но с отрицательной стороны листка, то у этой отрицательной стороны потенциал будет равен $-2\pi r$. Вся разность потенциалов, пройденная нами, будет следовательно:

$$-2\pi r - (+2\pi r) = -4\pi r.$$

Это вполне соответствует магнитодвижущей силе электрического тока. Но затем, когда мы будем проходить сквозь поверхность листка, чтобы вернуться на положительную его сторону, откуда мы начали свой путь, то потенциал сразу повысится на величину $4\pi r$ (24, 22), и вся разность потенциалов в пройденном нами замкну-

том пути будет равна нулю: потенциал окажется однозначным. В поле электрического тока нет такой поверхности, где бы потенциал был прерывен, поэтому он и оказывается многозначным.

Из всего вышесказанного мы заключаем, что понятие потенциала может быть применимо и к магнитному полю электрического тока, только не нужно забывать его многозначность с периодом $4\pi J$.

104. Магнитное поле внутри проводника. Выведенная нами формула для магнитодвижущей силы, как мы сказали, применяется в различных технических расчетах. Не желая однако увеличивать объем книги, мы должны опустить подобные расчеты и ограничиться рассмотрением одного простого, но принципиально важного случая.

Положим, что по прямому проводнику кругового сечения (радиус сечения a) течет ток, плотность которого i представляет собою некоторую функцию расстояния r точки от оси цилиндра (от центра круга). В этом случае и распределение токов и распределение его магнитного поля будут иметь *осевую симметрию*. Все магнитные линии будут кругами с центром на оси цилиндра. Обозначая через M напряжение магнитного поля и обходя полюсом $m = 1$ один из этих кругов радиуса r , мы получаем магнитодвижущую силу:

$$2\pi r \cdot M.$$

При этом мы обошли те электрические токи, которые протекают внутри круга радиуса r , а потому мы можем написать:

$$2\pi r M = 4\pi J_r = 4\pi \int_0^r i \cdot 2\pi r \cdot dr.$$

Если плотность тока везде одинакова, то получаем для напряжения магнитного поля внутри проводника:

$$M = 2\pi r \cdot i.$$

Напряжение поля равно нулю на оси проводника ($r = 0$); затем оно растет пропорционально радиусу и достигает на поверхности проводника ($r = a$) величины:

$$M_a = 2\pi a \cdot i = \frac{2J}{a}; \quad J = \pi a^2 \cdot i.$$

При дальнейшем увеличении радиуса $r > a$ сила того тока J , который мы обходим, уже не будет зависеть от r , и уравнение магнитодвижущей силы дает:

$$2\pi r \cdot M = 4\pi J,$$

откуда напряжение поля:

$$M = \frac{2J}{r}.$$

Напряжение это обратно пропорционально расстоянию от оси проводника. Эту последнюю формулу мы уже получили раньше, применяя непосредственно закон *Био и Савара* (110, 97).

При $r = a$ напряжения внутреннего и наружного магнитного поля непрерывно переходят одно в другое.

105. Первое уравнение Максвелла. Нам необходимо теперь обобщить наши формулы, полученные из опытов с *линейными* проводниками и на те случаи, когда токи распределены в пространстве каким угодно образом. Напишем формулу магнитодвижущей силы, введя в нее плотность тока:

$$\oint (\mathbf{M} \cdot d\mathbf{s}) = 4\pi \int (\mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}).$$

Вспоминая теорему *Стокса* (ч. I, 117, 98) о преобразовании линейного интеграла в поверхностный:

$$\oint (\mathbf{M} \cdot d\mathbf{s}) = \int (\text{curl } \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}),$$

мы видим, что

$$\text{curl } \mathbf{M} = 4\pi \mathbf{i}.$$

Это означает, что электрические токи представляют собою своего рода вихри магнитного поля; сравнение, которым мы уже пользовались выше.

В декартовых координатах это уравнение напишется так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} &= 4\pi i_x; \\ \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} &= 4\pi i_y; \\ \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} &= 4\pi i_z. \end{aligned}$$

Эти три уравнения мы будем называть *первым уравнением Максвелла* и впоследствии мы их дополним обобщением, касающимся диэлектриков.

106. Вектор - потенциал магнитного поля электрических токов. Мы обратимся теперь к решению общей задачи: дано распределе-

ние электрических токов в пространстве и требуется определить их магнитное поле. Это означает, что требуется определить \mathbf{M} из уравнения:

$$\text{curl } \mathbf{M} = 4\pi \mathbf{i}.$$

С этой целью мы введем вспомогательную функцию, некоторый вектор \mathbf{A} , который удовлетворял бы следующим двум условиям:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{M} = \text{curl } (\mu \mathbf{A}); \quad \text{div } (\mu \mathbf{A}) = 0.$$

Заметим прежде всего, что первое из этих условий дает:

$$\text{div } \mathbf{B} = \text{div } \cdot \text{curl } (\mu \mathbf{A}) = 0,$$

а это необходимо, потому что все линии магнитной индукции \mathbf{B} должны быть замкнуты (действительных магнитных полюсов не существует). Далее второе поставленное нами условие для вектора \mathbf{A} необходимо для того, чтобы эта величина была *вполне определена*. Если бы этого второго условия не было, и мы нашли бы какое-нибудь значение \mathbf{A} , которое удовлетворяет одному первому условию, то можно было бы к этому значению прибавить любой вектор \mathbf{A}_1 , для которого $\text{curl } (\mu \mathbf{A}_1) = 0$, т. е. который не образует вихрей; тогда сумма $(\mathbf{A} + \mathbf{A}_1)$ тоже удовлетворяла бы условию:

$$\mathbf{B} = \text{curl } (\mu \mathbf{A} + \mu \mathbf{A}_1).$$

Но если мы найдем вектор \mathbf{A} удовлетворяющим *обоим* выше-написанным уравнениям, то прибавленный вектор \mathbf{A}_1 должен будет удовлетворять условиям:

$$\text{curl } (\mu \mathbf{A}_1) = 0; \quad \text{div } (\mu \mathbf{A}_1) = 0.$$

Но первое уравнение означает, что вектор $\mu \mathbf{A}_1$ не образует замкнутых линий и что поле вектора $\mu \mathbf{A}_1$ имеет потенциал, а второе уравнение требует, чтобы поле вектора $\mu \mathbf{A}_1$ было без источников. Но потенциальное поле без источников равно нулю. Отсюда следует, что вектор $\mu \mathbf{A}$ определяется *двумя* выше-написанными уравнениями *полностью*.

Для упрощения дальнейших выкладок мы ограничимся исследованием таких случаев, когда коэффициент проницаемости μ во всем поле один и тот же. Полученное нами при таком предположении решение мы затем можем обобщить и на случай, когда коэффициент μ в различных областях поля различный.

Если коэффициент μ везде одинаков, то мы можем в обоих уравнениях его сократить и написать условия для вектора \mathbf{A} в такой форме:

$$\mathbf{M} = \text{curl } \mathbf{A}; \quad \text{div } \mathbf{A} = 0.$$

Взяв curl от первого уравнения, получаем (см. ч. I, стр. 57, 59):

$$\text{curl } \mathbf{M} = \text{curl } \text{curl } \mathbf{A} = \text{grad. div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A},$$

а приняв во внимание и второе условие, имеем:

$$\text{curl } \mathbf{M} = -\nabla^2 \mathbf{A}.$$

Введя это в первое уравнение *Максвелла*, получаем:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{i}.$$

В декартовых координатах это векторное уравнение превратится в три скалярных уравнения, соответствующие трем проекциям векторов \mathbf{A} и \mathbf{i} на оси координат. Так например для оси Ox мы получим:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -4\pi i_x.$$

Каждое из этих трех уравнений имеем тот же вид, как полученное нами раньше (13, 13) уравнение *Лапласа-Пуассона* для потенциала V электростатического поля. Вследствие этой аналогии со скалярным потенциалом V величина \mathbf{A} называется *вектор-потенциалом* магнитного поля. Таким образом в магнитном поле мы имеем два потенциала; один скалярный, который служил нам для вычисления магнитодвижущей силы (119, 102), и другой — вектор-потенциал, только что нами введенный.

Мы уже знаем из электростатики, что при беспредельном поле и без добавочных пограничных условий три уравнения:

$$\nabla^2 A_x = -4\pi i_x; \quad \nabla^2 A_y = -4\pi i_y; \quad \nabla^2 A_z = -4\pi i_z,$$

решаются вполне формулами:

$$A_x = \int \frac{i_x}{r} d\omega; \quad A_y = \int \frac{i_y}{r} d\omega; \quad A_z = \int \frac{i_z}{r} d\omega,$$

причем значение \mathbf{A} в бесконечно удаленных точках нами принято равным нулю.

Определив таким образом вектор \mathbf{A} , мы получаем для напряжения магнитного поля данных токов уравнения:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\ \mathbf{M} = \text{curl } \mathbf{A}: \quad M_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \\ M_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \end{aligned}$$

Между тем как для определения магнитного поля по скалярному потенциалу мы имеем уравнения:

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{\partial V}{\partial x}, \\ \mathbf{M} = -\text{grad } V: \quad M_y &= -\frac{\partial V}{\partial y}, \\ M_z &= -\frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned}$$

Если в поле имеются магнито-поляризующиеся тела, то кроме этих основных уравнений мы будем иметь еще добавочные условия на границах поляризующихся тел (90, 74). Вообще дальнейший ход решения задачи будет аналогичен задачам, встречающимся в электростатике. Существенным осложнением в магнитостатике является то обстоятельство, что коэффициенты μ и χ непостоянны и что в ферромагнитных телах мы имеем явление гистерезиса.

Мы указали здесь общий ход решения и сейчас приведем один пример его применения, но должны прибавить, что в электротехнике при вычислении электромагнитов большею частью обходятся без введения вектор-потенциала, применяя непосредственно уравнение магнитодвижущей силы.

107. Вектор-потенциал прямого тока. Покажем применение вектор-потенциала к расчету магнитного поля в случае прямого проводника кругового сечения, в котором плотность тока по всему сечению одинакова. Если ось OZ мы направим по оси проводника, то составляющие вектор-потенциала будут:

$$A_x = 0; \quad A_y = 0; \quad A_z = \int \frac{i_z}{r} d\omega.$$

При вычислении последнего интеграла мы можем воспользоваться результатами, которые мы получили при расчете скалярного потенциала равномерно заряженного прямого цилиндра (35, 26). Обозначая потенциалы внутри и снаружи проводника знаками A_i и A_e , имеем:

$$\begin{aligned} A_i &= \pi i (a^2 - r^2) - 2\pi i a^2 \cdot \lg a + C, \\ A_e &= -2\pi i a^2 \cdot \lg r + C. \end{aligned}$$

Отсюда получаем для составляющих напряжения поля:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y}, & M_y &= -\frac{\partial A_z}{\partial x}, \\ M_{xi} &= -2\pi i r \frac{y}{r}, & M_{yi} &= +2\pi i r \frac{x}{r}, \\ M_{xe} &= -2\pi i a^2 \frac{y}{r^2}, & M_{ye} &= +2\pi i a^2 \frac{x}{r^2}. \end{aligned}$$

Нетрудно доказать, что результирующая M будет направлена по окружности радиуса r . Величина этой результирующей будет внутри и снаружи цилиндра выражаться формулами:

$$M_i = 2\pi i \cdot r; \quad M_e = 2\pi i a^2 \cdot \frac{1}{r} = \frac{2J}{r},$$

в согласии с нашим прежним результатом (122, 104).

Мы прибавим к этому следующие замечания. Так как в данном случае вектор-потенциал должен удовлетворять уравнению:

$$\text{curl } M = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} = -\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}\right),$$

то мы имеем случай плоского поля (ч. I, 115), в котором линии одинакового *вектор-потенциала* будут круги с центром в начале координат (на оси цилиндрического проводника); по тем же кругам будут расположены и линии сил магнитного поля, между тем как линии *скалярного* потенциала магнитного поля будут радиусы, перпендикулярные к этим кругам. В электростатическом поле заряженного цилиндра мы имели как раз обратное этому: линии скалярного потенциала были кругами, а линии сил были радиальны.

108. Энергия магнитного поля электрических токов. Так как магнитные линии электрических токов всегда *замкнуты* и не имеют *полюсов*, то мы должны исходить из выражения энергии не через

полюсы и потенциалы, а через напряжение и индукцию поля. В таком случае энергия поля у нас определится так:

$$T = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{B} \cdot \mathbf{M}) \, d\omega.$$

Подставим сюда вектор-потенциал поля по формуле:

$$\mathbf{M} = \text{curl } \mathbf{A}$$

и преобразуем выражение:

$$\mathbf{B} \text{ curl } \mathbf{A} = \text{div} [\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}] + \mathbf{A} \text{ curl } \mathbf{B}.$$

Первый член правой части этого равенства при интегрировании по объему можно преобразовать в интегрирование по бесконечно удаленной поверхности, где индукция и вектор-потенциал равны нулю; поэтому и интеграл будет равен нулю. Второй же член можно выразить через плотность токов по уравнению:

$$\text{curl } \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{i}.$$

Мы получаем таким образом для магнитной энергии электрических токов следующие два выражения:

$$T = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{B} \cdot \mathbf{M}) \, d\omega = \frac{1}{2} \int (\mathbf{i} \cdot \mu \mathbf{A}) \cdot d\omega.$$

Эти формулы дают нам возможность вычислять энергию магнитного поля или по индукции и напряжению поля, или же по плотностям токов и их вектор-потенциалам. В последнем случае интеграл распространяется только на те объемы поля, где протекают токи.

109. Магнитная энергия линейных токов. В тех случаях, когда поперечные размеры проводников очень малы и когда магнитной энергией внутри проводников, по которым протекают токи, можно пренебречь, вычисление энергии поля значительно упрощается.

Прежде всего мы преобразуем выражение для вектор-потенциалов, положив

$$\mathbf{i} \cdot d\omega = (\mathbf{i} \cdot d\mathbf{S}) \cdot d\mathbf{l} = J \cdot d\mathbf{l},$$

где $d\mathbf{S}$ — поперечное сечение проводника, а J — сила тока. Но сила тока по всей длине проводника одна и та же, и эту величину можно вынести за знак интеграла. Тогда для вектор-потенциала линейного тока мы получаем:

$$A_x = J \int \frac{dx}{r}; \quad A_y = J \int \frac{dy}{r}; \quad A_z = J \int \frac{dz}{r}.$$

Энергия магнитного поля будет в этом случае выражаться так:

$$T = \frac{1}{2} J \oint (\mu A \cdot dl).$$

Написанный здесь линейный интеграл, распространенный по замкнутой линии тока, мы можем, по теореме *Стокса*, преобразовать в интеграл, распространенный по поверхности, для которой линия тока служит контуром. Форма этой поверхности не имеет значения для определения интеграла, потому что все поверхности с одинаковым контуром дают одно и то же значение этого интеграла. Преобразуя линейный интеграл в поверхностный, мы должны заменить вектор μA его вихрем $\text{curl}(\mu A)$. Но этот последний вектор представляет собою не что иное, как индукцию магнитного поля B .

Итак мы получаем:

$$T = \frac{1}{2} J \int (B \cdot dS).$$

Теперь интеграл получил значение *потока* магнитной индукции, пронизывающего площадь, обтекаемую током. Обозначая число линий сил, охватываемых током через N , получаем для магнитной энергии замкнутого линейного тока:

$$T = \frac{1}{2} JN.$$

В случае нескольких токов магнитная энергия будет равна сумме энергий отдельных токов:

$$T = \sum \frac{1}{2} JN.$$

Эта формула имеет большое применение в технических расчетах, и она нам встретится в следующем отделе.

110. Энергия и силы. Если мы разберем отдельные случаи электромагнитных взаимодействий, то увидим, что направление сил всегда таково, что их действие *увеличивает* энергию магнитного поля. Так, например, если мы имеем круговой ток с направлением по часовой стрелке и его внутреннее поле направлено от нас внутрь площади тока (правило буравчика), то северный магнитный полюс будет втягиваться внутрь круга. Но при этом поток индукции, исходящий из полюса и пронизывающий площадь тока, будет *увеличиваться*, а следовательно и энергия тока в поле этого

полюса тоже увеличится. Точно так же, если мы повесим круговой ток в однородном поле, то поле будет действовать на него с моментом сил (115, 100)

$$K = [p \cdot B]$$

и будет повертывать его так, чтобы внутреннее поле тока стало по направлению данного внешнего поля; от этого поток индукции N и энергия магнитного поля должны увеличиться. Таким образом, несмотря на то, что при всех этих движениях совершается некоторая работа, энергия магнитного поля не уменьшается а, наоборот, *увеличивается*. Из этого мы заключаем, что необходимая для рассматриваемых передвижений энергия получается *не из магнитного поля*, а из самих взаимодействующих электрических токов. И действительно мы увидим в следующей главе, что при движении под действием электромагнитных сил сила взаимодействующих токов *ослабляется* вследствие появления противоположных им индукционных токов (закон *Ленца*).

В заключение этого отдела мы считаем нелишним напомнить читателю, что написанная нами формула для величины энергии:

$$F = \frac{1}{2} JN$$

выведена в предположении, что электрические токи перенесены из бесконечности в данное положение друг относительно друга, причем токи оставались *постоянными*, а потоки N , как и все магнитное поле, *образовались* вследствие перенесения токов. Если же нам дано *постоянное* магнитное поле, а мы переносим замкнутый постоянный электрический ток из одного положения, где его пронизывает поток индукции N_1 , в другое положение относительно *того же* поля, где его пронизывает поток индукции N_2 , то работа, затраченная на такое перенесение, будет равна:

$$T = J(N_2 - N_1).$$

Точно так же и работа при перенесении тока J из бесконечности в данное положение в данном *постоянном* магнитном поле будет равна:

$$T = JN,$$

а не половине этой величины.

Совершенно такие же соотношения мы имели и в электростатическом поле. Энергия заряда в поле выражалась формулой (64, 50):

$$U = \frac{1}{2} eV,$$

если потенциалы V образовывались самими зарядами e . Между тем как при перенесении заряда e из одного места данного *постоянного* поля потенциалов V в другое место работа равна:

$$U = e(V_2 - V_1).$$

III. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ.

111. **Открытие Фарадея.** *Фарадей* открыл, что при изменении магнитного поля вблизи проводника в этом последнем индуцируется электрический ток; это означает, что переменное магнитное поле образует электрическое поле. Чем быстрее изменяется магнитное поле, тем сильнее получается поле электрическое. Изменение магнитного поля вблизи проводника может быть произведено изменением силы токов в других проводниках или даже изменением силы (взаимная индукция и самоиндукция); кроме того изменение магнитного поля может происходить от движения магнитов и токов друг относительно друга. *Фарадей* объяснял все электромагнитные явления, пользуясь понятием о линиях сил, и формулировал свое открытие следующим образом: *при перерезывании проводником магнитных сил (или линиями сил — проводника) возбуждается электродвижущая сила, равная числу перерезываемых линий сил в секунду.*

Если мы рассмотрим *замкнутый* проводник, то при движении линии сил или будут выходить из площади, ограниченной контуром проводника, или будут входить в эту площадь; как в том, так и в другом случае число линий сил, пронизывающих эту площадь, т. е. поток магнитной индукции N , будет меняться. Поэтому мы можем формулировать открытие *Фарадея* в применении к замкнутому проводнику таким образом: *электродвижущая сила индукции равна скорости уменьшения потока индукции, охватываемого проводником:*

$$\mathcal{E} = - \frac{dN}{dt} = - \dot{N}.$$

Знак минус показывает направление электродвижущей силы относительно потока индукции N , а именно, если мы будем смотреть вдоль магнитных линий сил и поток индукции увеличивается, то в проводнике возбуждается электродвижущая сила противоположно правилу буравчика, т. е. возбуждается электрический ток, коего внутреннее магнитное поле направлено противоположно внешнему. При уменьшении потока индукции (\dot{N} отрицательно) возбуждаемое магнитное поле одного направления с возбуждающим. Эта формулировка соответствует известному правилу *Ленца*.

Заметим однако, что написанное нами уравнение электродвижущей силы индукции менее обще, чем формулировка самого *Фарадея*, и неприменимо к тем случаям, когда проводник состоит из отдельных частей, соединенных скользящими контактами; эти случаи мы будем разбирать отдельно.

112. **Вывод Гельмгольца.** *Гельмгольц* показал, что величину электродвижущей силы индукции можно вывести из закона сохранения энергии. Для того, чтобы значение вывода *Гельмгольца* выступило нагляднее, мы начнем с более простого случая, когда магнитный поток N остается постоянным. Положим, что электрический ток J в каком-либо замкнутом проводнике поддерживается постоянным некоторою электродвижущею силою \mathcal{E}_0 . Опыт показывает, что для этого необходимо вводить в проводник каждую секунду количество энергии $J\mathcal{E}_0$. Все это количество энергии каждую секунду превращается в теплоту по закону *Джоуля*, и если мы обозначим сопротивление проводника через R , то можем написать:

$$J\mathcal{E}_0 = RJ^2.$$

Из этого мы заключаем, что

$$J = \frac{\mathcal{E}_0}{R}.$$

Таким образом мы из закона сохранения энергии вывели закон *Ома*. Однако одного закона сохранения энергии для этого вывода было бы недостаточно, и мы прибавили к закону сохранения энергии еще данные опытов *Джоуля*, что *вся* энергия постоянного тока превращается в теплоту и никуда больше не тратится.

Если же магнитное поле, в котором помещается рассматриваемый проводник, не остается постоянным, то кроме превращения энергии в теплоту у нас получится еще изменение энергии электрического тока относительно внешнего поля. Величина этой

энергии, как мы вывели раньше, равна $J\dot{N}$. Следовательно при переменном магнитном поле мы должны закон сохранения энергии написать в следующем виде:

$$J\mathcal{E}_0 = RJ^2 + J\dot{N}$$

и теперь вместо закона Ома мы получаем:

$$J = \frac{\mathcal{E}_0 - \dot{N}}{R}$$

Эта формула показывает, что кроме действующей в проводнике электродвижущей силы \mathcal{E}_0 (элементы, динамомашинны) в нем возникает еще добавочная электродвижущая сила индукции

$$\mathcal{E} = -\dot{N},$$

обусловленная изменением потока индукции, пронизывающего площадь, для которой рассматриваемый проводник служит контуром. Формула, полученная Гельмгольцем, вполне согласуется с формулировкой предыдущего параграфа, но она основана не только на законе сохранения энергии, но еще на выражении энергии тока J в поле N .

113. Другое выражение для электромагнитной индукции. Электродвижущую силу, действующую в замкнутом проводнике, мы можем выразить через напряжение поля:

$$\mathcal{E} = \oint (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}),$$

а поток индукции мы можем выразить через вектор-потенциал (123, 106):

$$N = \oint (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) = \oint (\text{curl } \mu\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}) = \oint (\mu\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}).$$

Подставляя эти выражения в закон электромагнитной индукции, получаем:

$$\mathcal{E} = \oint (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = -\frac{d}{dt} \oint (\mu\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}).$$

Отсюда мы видим, что напряжение электрического поля внутри проводника (при неизменном μ) обусловлено изменением вектор-потенциала со временем:

$$\mathbf{E} = -\mu \dot{\mathbf{A}}.$$

Если мы прибавим к этому электрическое поле, обусловленное зарядами (или элементами и динамомашиннами) и имеющее в рассматриваемой точке проводника потенциал V , то получим полное электрическое поле, происходящее от обеих причин:

$$\mathbf{E} = -\mu \dot{\mathbf{A}} - \text{grad } V.$$

114. Электромагнитная индукция при движении. Во всех вышеприведенных формулах мы обозначали точкой над буквой ($\dot{\mathbf{B}}$, $\dot{\mathbf{A}}$) полную производную рассматриваемой величины по времени, от каких бы причин ни происходило это изменение. Теперь мы рассмотрим отдельно тот случай, когда магнитное поле \mathbf{B} постоянно, а проводник движется в поле и таким образом происходит изменение потока магнитной индукции сквозь ту площадь, для которой проводник служит контуром. При своем передвижении проводник может и деформироваться. Поэтому мы выделим в рассматриваемом проводнике некоторую элементарную длину $d\mathbf{l}$ и представим себе, что она переместилась в пространстве по какому-либо направлению на длину $d\mathbf{s}$. При таком перемещении элемент длины проводника опишет площадь (рис. 37)

$$d\mathbf{S} = [d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{l}]$$

и пересечет при своем движении число магнитных линий сил:

$$dN = \mathbf{B} [d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{l}] = [\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}] \cdot d\mathbf{l}.$$

Относя эту величину к единице времени, т. е. деля на dt и замечая, что

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{v}$$

представляет собою скорость движения, получаем для быстроты изменения потока индукции со временем:

$$\dot{N} = [\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}] \cdot d\mathbf{l}.$$

Для определения электродвижущей силы индукции при движении всего контура необходимо проинтегрировать это выражение по всему замкнутому контуру проводника:

$$\mathcal{E} = -\oint [\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}] \cdot d\mathbf{l}.$$

Примеры применения этой формулы читатель может найти в Общем курсе электричества и в электротехнике. Все динамомашинны основаны на этом принципе, а именно на электромагнитной индукции, получающейся при движении проводника в постоянном магнитном поле.

115. Второе уравнение Максвелла. Мы вывели выше (122, 105) уравнение *Максвелла*, вытекающее из законов *Био* и *Савара* и из законов *Ампера*, и назвали это уравнение:

$$\operatorname{curl} \mathbf{M} = 4\pi \mathbf{i}$$

первым уравнением *Максвелла*. Теперь мы выведем *второе* уравнение *Максвелла*, выражающее закон электромагнитной индукции и имеющее аналогичный вид.

Для получения второго уравнения *Максвелла* нам нужно только уравнение электромагнитной индукции, написанное в интегральной форме (132, 113):

$$\mathcal{E} = \oint (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}) = - \frac{d}{dt} \int (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S})$$

переписать в дифференциальной форме, т. е. применить к замкнутому контуру бесконечно малой площади $d\mathbf{S}$. Преобразуем первый интеграл по теореме *Стокса*:

$$\oint (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}) = \int (\operatorname{curl} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S})$$

и применяем все уравнения к *единице* площадки $d\mathbf{S}$. Получаем:

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} = - \dot{\mathbf{B}}.$$

В декартовых координатах это уравнение представится в виде трех скалярных уравнений (ср. 122, 105):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= - \frac{\partial B_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= - \frac{\partial B_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= - \frac{\partial B_z}{\partial t}. \end{aligned}$$

116. Коэффициент индукции. При вычислениях индукционных токов удобно вводить так называемые *коэффициенты индукции*, кото-

рые не зависят ни от силы токов, ни от их магнитного поля, а только от расположения проводников друг относительно друга. Эти коэффициенты, как сейчас увидим, имеют некоторую аналогию с коэффициентами емкости, которые мы ввели в электростатике.

Для наглядности мы рассмотрим *два* замкнутых проводника (рис. 40) (два отдельных витка проволоки). Пусть в первом из этих проводников циркулирует ток J_1 . Поток магнитной индукции, пронизывающий площадь второго проводника, будет во всяком случае пропорционален J_1 , и мы можем написать:

$$N_{12} = L_{12} J_1.$$

Коэффициент L_{12} называется коэффициентом индукции первого проводника на второй. Если сила тока в первом проводнике будет изменяться со временем, то, зная коэффициент L_{12} , мы легко можем определить электродвижущую силу, возбуждаемую при этом во втором проводнике, а именно:

$$\mathcal{E}_2 = - \dot{N}_{12} = - L_{12} \dot{J}_1.$$

Точно так же мы можем выразить поток индукции, пронизывающий площадь, обтекаемую первым проводником, и обусловленный током J_2 второго проводника формулой:

$$N_{21} = L_{21} J_2.$$

Кроме того площадь каждого проводника пронизывается и собственным магнитным полем, поэтому для потоков индукций, обусловленных собственными полями, мы можем написать формулы:

$$\begin{aligned} N_{11} &= L_{11} J_1; \\ N_{22} &= L_{22} J_2. \end{aligned}$$

Коэффициенты L_{11} и L_{22} носят название коэффициентов *самоиндукции* этих проводников. Эти коэффициенты служат для вычисления электродвижущих сил, возбуждаемых в каждом проводнике при изменении его собственного поля, т. е. при изменении идущего в нем тока. Например

$$\mathcal{E}_1 = - \dot{N}_{11} = - L_{11} \dot{J}_1.$$

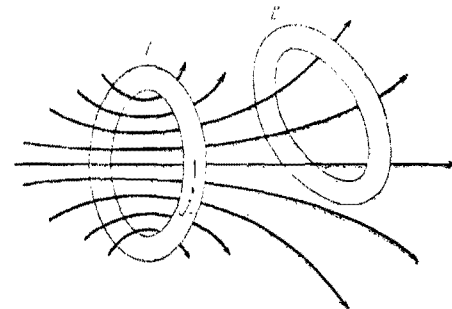


Рис. 40. Магнитная связь двух проводников.

Если измерять, с одной стороны, силы токов J_1 , J_2 , а, с другой стороны, — возбуждаемые ими электродвижущие силы, то на основании приведенных соотношений можно определить коэффициенты индукции. Но в некоторых случаях не трудно вычислить величину этих коэффициентов по данному расположению проводников друг относительно друга.

117. Единица коэффициентов индукции. Из приведенных формул, определяющих значение коэффициентов индукций, непосредственно вытекает и единица, служащая для их измерений. Если мы напомним эти формулы в виде:

$$L = \frac{\mathcal{E} \cdot t}{J}$$

и подставим для электродвижущей силы \mathcal{E} , для силы тока J и для времени t практические единицы — *вольт, ампер, секунда*, то получим для коэффициента индукции практическую единицу, которая называется *генри*. Итак

$$\text{генри} = \frac{\text{вольт} \cdot \text{секунда}}{\text{ампер}}$$

Отсюда следует, что для перевода *генри* в электростатические или в электромагнитные абсолютные единицы мы должны пользоваться соотношениями:

$$\text{генри} = \frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \text{CGS} - E = 10^9 \text{CGS} - M.$$

118. Энергия системы линейных токов, выраженная через коэффициенты индукции. Для магнитной энергии системы токов мы имели выражение (128, 109):

$$T = \sum \frac{1}{2} JN.$$

Для большей наглядности мы пока ограничимся случаем двух токов:

$$T = \frac{1}{2} J_1 N_1 + \frac{1}{2} J_2 N_2.$$

Мы можем поток индукции N_1 , пронизывающий площадь первого тока J_1 , считать составленным из двух частей. Во-первых, обр-

значим через N_{11} поток индукции, обусловленный самим током J_1 ; его величина на основании параграфа 116 напишется так:

$$N_{11} = L_{11} J_1.$$

Кроме того площадь первого тока будет пронизывать поток индукции:

$$N_{21} = L_{21} J_2,$$

обусловленный вторым током. Таким образом вместо N_1 мы должны поставить:

$$N_1 = L_{11} J_1 + L_{21} J_2.$$

На основании таких же соображений мы вместо N_2 можем поставить:

$$N_2 = L_{22} J_2 + L_{12} J_1$$

и тогда для магнитной энергии обоих токов получим:

$$T = \frac{1}{2} L_{11} J_1^2 + \frac{1}{2} (L_{12} + L_{21}) J_1 J_2 + \frac{1}{2} L_{22} J_2^2.$$

В этой сумме два средних члена равны друг другу. Действительно величина $\frac{1}{2} L_{12} J_1 J_2$ представляет собою ту работу, которую нужно было затратить, чтобы первый ток перенести из бесконечности в данное положение относительно второго тока, тогда как величина $\frac{1}{2} L_{21} J_2 J_1$ означает работу, которую нужно было затратить для перенесения второго тока из бесконечности в данное положение относительно первого тока. Так как энергия зависит только от относительного положения обоих токов независимо от того, как оно было получено, то

$$\frac{1}{2} L_{12} J_1 J_2 = \frac{1}{2} L_{21} J_2 J_1.$$

Откуда видим, что

$$L_{12} = L_{21}.$$

Оттого и называют эти коэффициенты *взаимными*.

После этого энергия магнитного поля двух токов выразится у нас формулою:

$$T = \frac{1}{2} L_{11} J_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} J_2^2 + L_{12} J_1 J_2.$$

Первые два члена этой суммы представляют *собственную* энергию токов, в то время как последний член представляет собою *взаимную* энергию обоих токов.

Не трудно обобщить полученный нами результат на случай скольких угодно проводников. Поток индукции, пронизывающий площадь i -того тока и обусловленный всеми токами, будет равен

$$N = \sum L_{ik} I_k,$$

а энергия этих токов может быть выражена формулой

$$T = \frac{1}{2} \sum L_{ik} I_i I_k.$$

Тот член, где $i = k$, представляет собою *собственную* энергию тока, а там, где $i \neq k$, мы имеем *взаимную* энергию двух токов.

В тех случаях, когда проводники нелинейны, то, строго говоря, понятие о потоке индукции, пронизывающем их площади, делается неприменимым. Тем не менее понятие о коэффициентах индукции остается в силе; это будут те коэффициенты, которые входят в выражение магнитной энергии токов при квадратах и при произведениях сил токов. Те же самые коэффициенты будут служить для определения электродвижущих сил индукции. Однако в еще более общих случаях, когда токи распределены *неравномерно* и по сечению проводника и вдоль проводника, все эти коэффициенты теряют свое значение, потому что они делаются зависимыми не только от относительного расположения проводников, но и от распределения токов в этих проводниках.

119. Вычисление коэффициента взаимной индукции. Пусть нам даны два проводника, по которым идут токи силой J_1 и J_2 . Поток индукции N_{12} , пронизывающий площадь, обтекаемую первым током, и обусловленный вторым током, можно выразить через вектор-потенциал второго тока (128, 109)

$$N_{12} = \oint (\mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_1) = \oint (\mu \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l}_1).$$

Но вектор-потенциал \mathbf{A}_2 выражается формулой:

$$\mathbf{A}_2 = J_2 \oint \frac{d\mathbf{l}_2}{r}.$$

Подставляя это в предыдущую формулу, получаем:

$$N_{12} = \mu J_2 \oint \oint \frac{(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)}{r}.$$

Множитель, стоящий при J_2 , и будет представлять собою коэффициент индукции:

$$L_{12} = \mu \oint \oint \frac{(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)}{r}.$$

Рассуждая совершенно так же относительно потока, пронизывающего площадь второго тока:

$$N_{21} = \oint (\mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2) = \oint (\mu \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)$$

и обусловленного магнитным полем первого тока:

$$\mathbf{A}_1 = J_1 \oint \frac{d\mathbf{l}_1}{r},$$

мы получаем:

$$N_{21} = \mu J_1 \oint \oint \frac{(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)}{r}$$

и коэффициент индукции:

$$L_{21} = \mu \oint \oint \frac{(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)}{r}.$$

Мы видим, что оба коэффициента индукции действительно одинаковы. Это видно уже из того обстоятельства, что формула симметрично построена относительно обеих элементарных длин проводников:

$$(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) = d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 \cos(\angle d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2).$$

120. Вычисление коэффициента самоиндукции. Если мы совершенно таким же образом захотели бы вычислить коэффициент самоиндукции, то у нас встретилось бы затруднение. Действительно под интегралом мы получили бы между прочим два *соседних* элемента длины $d\mathbf{l}_1$ и $d\mathbf{l}_2$, расстояние между которыми было бы бесконечно мало, и это дало бы в вычисляемой сумме члены бесконечно большой величины. Это затруднение произошло от того, что переходя к линейным проводникам, мы считали поперечные размеры проводника ничтожными по сравнению с входящими в наши формулы расстояниями r ; для двух *смежных* сечений проводника это предположение уже не будет верным. Для того, чтобы обойти это затруднение, мы можем исходить из формулы для энергии магнитного поля (127, 108):

$$T = \frac{1}{2} \oint (i \cdot \mu \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{q}.$$

Подставим в эту формулу значение вектор-потенциала:

$$A = \oint \frac{i'}{r} do',$$

тогда получим магнитную энергию проводника, выраженную через плотности токов:

$$T = \frac{1}{2} \mu \oint \oint \frac{(i \cdot i')}{r} do \cdot do'.$$

В этой формуле расстояние между объемами do и do' может быть как угодно малым, и тем не менее подинтегральная величина не будет бесконечна.

Если ток замкнутый и сила тока по всей длине проводника одна и та же, то мы можем энергию представить и в таком виде:

$$T = \frac{1}{2} L_{11} J^2.$$

При этом коэффициент самоиндукции L_{11} будет выражаться формулой:

$$L_{11} = \mu \oint \oint \frac{1}{r} \left(\frac{i}{J} \cdot \frac{i'}{J} \right) do \cdot do'.$$

Здесь i и i' означают плотности токов в двух различных элементарных объемах проводника, и нужно взять сумму (интеграл) по каждой паре таких объемов.

Аналогичной формулой можно выразить и коэффициент взаимной индукции.

Необходимо к этому прибавить, что вычисление коэффициентов индукции в большинстве случаев представляет большие математические трудности. Дело осложняется еще более при переходе к переменным токам и к электрическим колебаниям и волнам, когда распределение токов зависит от быстроты перемен. Еще большие осложнения вносит изменчивость проницаемости μ . Поэтому в таких сложных случаях проще всего прибегать к непосредственному опыту.

121. Самоиндукция электромагнита. Рассмотрим следующий простой случай. Дан замкнутый соленоид, состоящий из n_1 оборотов проволоки. Требуется вычислить его самоиндукцию. Мы сделаем это вычисление при следующих допущениях. Во-первых, мы примем, что длина замкнутого соленоида велика по сравнению с его

поперечным сечением и что магнитное поле в нем однородно. Для вычисления магнитного поля применим формулу магнитодвижущей силы. Обойдем внутри соленоида замкнутый путь полюсом $m = 1$. Работу на этом пути

$$M \cdot l$$

мы должны приравнять $4\pi n_1 J$. Откуда напряжение поля внутри соленоида определится в

$$M = \frac{n_1}{l} 4\pi J$$

и поток индукции будет:

$$N = \mu M S = \mu \frac{n_1}{l} 4\pi J \cdot S.$$

При изменении силы тока в каждой витке соленоида возбуждается электродвижущая сила:

$$\mathcal{E}_0 = -\dot{N} = -\mu \frac{n_1}{l} 4\pi S \cdot \dot{J},$$

а во всех n_1 витках мы получим:

$$E = -\mu \frac{n_1^2}{l} S \cdot 4\pi \dot{J}.$$

Из этой формулы мы видим, что коэффициент самоиндукции соленоида равен:

$$L_{11} = \mu \frac{n_1^2}{l} S 4\pi.$$

Но мы можем вести наши вычисления и иначе. На основании выражения для напряжения магнитного поля внутри соленоида мы можем написать величину плотности магнитной энергии:

$$T_0 = \frac{1}{8\pi} \mu M^2 = \frac{1}{8\pi} \mu \frac{n_1^2}{l^2} (4\pi)^2 J^2$$

и умножить ее на весь объем соленоида lS . Тогда получим магнитную энергию внутри соленоида:

$$T = \frac{1}{2} \mu \frac{n_1^2}{l} 4\pi S \cdot J^2 = \frac{1}{2} L_{11} J^2.$$

Откуда видим, что коэффициент самоиндукции равен:

$$L_{11} = \mu \frac{n_1^2}{l} S \cdot 4\pi$$

то же самое, что получили по первому расчету.

Как видим, коэффициент L_{11} пропорционален *квадрату* числа витков в соленоиде. Мы можем ввести в формулу величину

$$n_{01} = \frac{n_1}{l},$$

представляющую число витков, приходящееся на единицу длины соленоида (густота обмотки). Тогда получим:

$$L_{11} = 4\pi\mu (n_{01})^2 \cdot Q; \\ Q = lS,$$

где Q означает объем магнитного поля соленоида. Следовательно коэффициент самоиндукции соленоида пропорционален квадрату плотности обмотки и объему соленоида; кроме того коэффициент самоиндукции пропорционален проницаемости материала сердечника соленоида.

122. Взаимная индукция обмоток трансформатора. Совершенно таким же образом мы можем вычислить и коэффициент *взаимной* индукции двух соленоидов, намотанных на одном и том же сердечнике. Поток индукции, образуемый первым соленоидом, может быть выражен той же формулой, как и выше:

$$N_1 = 4\pi\mu \frac{n_1}{l} J_1 S,$$

и мы предположим, что этот поток пронизывает все n_2 витков второго соленоида (без утечки). Тогда при изменении силы тока в первом соленоиде во вторичной обмотке будет возбуждаться электродвижущая сила:

$$\mathcal{E}_2 = -n_2 \dot{N} = -4\pi\mu \frac{n_1 n_2}{l} J_1 S.$$

Откуда получаем для взаимной индукции соленоидов:

$$L_{12} = 4\pi\mu \frac{n_1 n_2}{l} S.$$

Тот же результат мы получим, если начнем рассуждения со второго соленоида, причем опять получим, что

$$L_{12} = L_{21}.$$

Если ввести и в эту формулу плотности обмоток, положив

$$n_1 = n_{01} l; \quad n_2 = n_{02} l; \quad lS = Q,$$

то получим:

$$L_{12} = 4\pi\mu (n_{10} n_{20}) \cdot Q.$$

123. Соотношения между коэффициентами индукции. Сравнивая коэффициент самоиндукции каждой из обмоток с коэффициентом их взаимной индукции, мы видим, что

$$L_{12} = \frac{n_2}{n_1} L_{11} = \frac{n_1}{n_2} L_{22}.$$

Если поток первого соленоида только *частью* пронизывает вторичную обмотку, то их взаимная индукция уменьшится. Это можно выразить некоторым коэффициентом γ_1 , меньшим единицы

$$L_{12} = \gamma_1 \frac{n_2}{n_1} L_{11}.$$

Аналогичную формулу мы можем написать и для вторичной обмотки:

$$L_{21} = \gamma_2 \frac{n_1}{n_2} L_{22}.$$

Но так как оба коэффициента взаимной индукции одинаковы (*взаимны*), то получаем следующие два соотношения:

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \frac{L_{11}}{L_{22}}; \\ \gamma_1 \gamma_2 = \frac{(L_{12})^2}{L_{11} L_{22}}.$$

Первая из этих двух формул показывает, что отношение коэффициентов γ не зависит от расположения обеих обмоток друг относительно друга (от их взаимной индукции), а зависит только от числа витков и самоиндукций каждой обмотки в отдельности. Произведение же $\gamma_1 \gamma_2$ зависит и от величины взаимной индукции. Величину

$$\gamma = \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}$$

называют *коэффициентом связи* обеих обмоток. Зная коэффициент связи и коэффициенты самоиндукций двух обмоток, мы можем вычислить и их взаимную индукцию

$$L_{12} = \gamma \sqrt{L_{11} L_{22}}.$$

124. Коэффициент самоиндукции концентрических цилиндров. Даны два круговых концентрических цилиндра радиусов a и b . По обоим цилиндрам текут электрические токи J одинаковой силы, но

противоположного направления. Оба цилиндра могут представить собою прямой и обратный провод какой-либо линии. Далее мы предположим, что стенки цилиндров так тонки, что внутренним магнитным полем их можно пренебречь. Тогда получаем следующее. Внутри малого цилиндра и снаружи большого цилиндра магнитное поле будет равно нулю, в чем легко убедиться, применяя уравнение магнитодвижущей силы. Остается рассчитать магнитное поле в промежутке между цилиндрами. Напряжение магнитного поля мы получаем непосредственно из формулы для цилиндрического проводника (122, 104), причем мы должны принять во внимание только силу тока, идущего по внутреннему цилиндру, потому что наружный цилиндр внутри себя никакого поля не дает. Следовательно для напряжения поля между цилиндрами мы имеем:

$$M = \frac{2J}{r}.$$

Выделим из рассматриваемого двойного провода некоторую длину l , считая ее по оси цилиндра (только в одну сторону). Тогда произведение $(l \cdot dr)$ будет представлять собою элементарную площадку, поставленную перпендикулярно к магнитному полю. Поток индукции сквозь эту площадку будет равен:

$$\mu M (l \cdot dr) = \mu l \frac{2J}{r} dr.$$

Полный поток индукции, проходящий между цилиндрами на длине l , будет равен

$$N = 2J\mu l \int_a^b \frac{1}{r} dr = 2J\mu l \cdot \lg \left(\frac{b}{a} \right).$$

Для вычисления энергии магнитного поля нужно эту величину умножить на половину силы тока:

$$T = \frac{1}{2} JN = J^2 \mu l \cdot \lg \left(\frac{b}{a} \right).$$

Мы могли бы и здесь вычислять энергию непосредственно по плотности энергии, а именно,

$$\frac{1}{8\pi} \mu M^2 = \frac{1}{2\pi} \mu \frac{J^2}{r^2},$$

интегрируя это выражение по всему объему, заключающемуся между цилиндрами на длине l , получаем:

$$T = \frac{1}{2\pi} \mu J^2 l \int_a^b \frac{1}{r^2} 2\pi r \cdot dr = J^2 \mu l \cdot \lg \left(\frac{b}{a} \right).$$

Как та, так и другая формула дают нам для коэффициента самоиндукции линии

$$L_{11} = 2\mu l \cdot \lg \left(\frac{b}{a} \right).$$

Коэффициент самоиндукции единицы длины будет равен

$$L_{11} = 2\mu \cdot \lg \left(\frac{b}{a} \right).$$

Сравнивая это с коэффициентом емкости двух концентрических цилиндров (45, 35)

$$C = \frac{\varepsilon}{2 \lg \left(\frac{b}{a} \right)}$$

мы видим, что

$$CL = \varepsilon \mu.$$

Это соотношение между коэффициентами емкости и самоиндукции линии получается только в том случае, если магнитным полем *внутри* обоих проводников можно пренебречь.

125. Два параллельных цилиндра. Требуется рассчитать коэффициент самоиндукции линии, состоящей из двух параллельных проводов кругового сечения с радиусами a и b , при расстоянии между осями их равном d . Мы будем исходить из выражения энергии магнитного поля в форме (127, 108)

$$T = \frac{1}{2} \int (i \cdot \mu \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{o}.$$

Здесь \mathbf{A} означает вектор-потенциал магнитного поля, причем для вычисления энергии нам необходимо иметь значение потенциала \mathbf{A} только для тех точек поля, где протекают токи i , т. е. внутри проводников.

Формулы для вектор-потенциала прямых токов мы уже получили раньше (126, 107). Значение вектор-потенциала внутри первого

провода будет состоять из двух частей: из вектор-потенциала его собственных токов:

$$A_{1l} = \pi i_1 (a^2 - r^2) - 2\pi i_1 a^2 \lg a + C$$

и из вектор-потенциала, обусловленного вторым током i_2 в тех точках поля, где протекает первый ток:

$$A_{2l} = -2\pi i_2 b^2 \lg r_2 + C.$$

Мы будем считать, что оба рассматриваемых нами цилиндрических проводника представляют собою прямой и обратный провод одной и той же линии, а потому будем считать их токи J равными, но противоположными по направлению. Это дает нам право написать:

$$J = \pi a^2 i_1 = -\pi b^2 i_2 = -J_2.$$

Так как мы будем производить расчет *единицы длины* линии, то вместо элемента объема провода мы можем написать элемент площади его сечения dS :

$$do = 2\pi r \cdot dr (l = 1) = dS.$$

Умножая вектор-потенциал на $\frac{1}{2} \mu i_1$ и интегрируя по всему сечению первого проводника от $r=0$ до $r=a$, мы получим величину магнитной энергии, обусловленной первым током: аналогичное выражение мы можем написать и для той части энергии, которая обусловлена вторым током: сложив оба выражения вместе, мы получим *полную* магнитную энергию обоих токов вместе.

Для наглядности мы будем вычислять интеграл каждого члена отдельно.

Первый член вектор-потенциала A_{1l} дает:

$$\frac{\mu}{2} \int_0^a \pi i_1^2 (a^2 - r^2) 2\pi r \cdot dr = \frac{\mu}{2} \pi^2 i_1^2 \left[a^2 r^2 - \frac{1}{2} r^4 \right]_0^a = \frac{\mu}{4} J^2.$$

Второй член дает;

$$\mu \pi i_2^2 a^2 \lg a \int_0^a 2\pi r \cdot dr = \mu \lg a \cdot J^2.$$

Что же касается третьего члена A_{2l} , то он дает нам:

$$-\mu \pi i_2 b^2 \int_0^a i_2 \lg r_2 \cdot dS = + \frac{\mu}{2} J \int_0^a 2i_2 \lg r_2 \cdot dS.$$

Мы можем вычислить входящий в это выражение интеграл на основании следующих соображений. Мы можем рассматривать $i_2 dS$ как линейный ток; а мы знаем, что подобный ток образует в пространстве на расстоянии r_2 , т. е. на оси второго тока, вектор-потенциал магнитного поля:

$$dA_{1e} = -2i_2 \lg r_2 dS.$$

С другой стороны, мы знаем, что для проводника *кругового* сечения вследствие осевой симметрии токов вектор-потенциал в наружном поле будет такой же, как если бы весь его ток протекал по оси цилиндра, и мы можем написать

$$A_{1e} = -2J \cdot \lg d.$$

Из сравнения обеих формул мы заключаем, что

$$\int_0^a 2i_2 \lg r_2 \cdot dS = 2J \lg d.$$

Складывая все полученные нами результаты вместе, имеем для энергии магнитного поля, обусловленной первым проводом, выражение:

$$T_a = \frac{\mu}{2} J^2 \left[\frac{1}{2} - 2 \lg a + 2 \lg d \right].$$

Такое же выражение мы имеем для энергии, определяемой вторым проводником:

$$T_b = \frac{\mu}{2} J^2 \left[\frac{1}{2} - 2 \lg b + 2 \lg d \right].$$

¹⁾ Примечание. Этот результат верен только для проводов *кругового* сечения. Тем не менее и для проводов другой формы сечения мы можем всегда найти такое расстояние D , чтобы удовлетворялось соотношение:

$$\frac{1}{S} \int \lg r \cdot dS = \lg D.$$

Величина D называется *средним геометрическим расстоянием* сечения S от рассматриваемой точки плоскости. Для кругового сечения $D = d$, т. е. равно расстоянию *центра круга* от рассматриваемой точки. Среднее геометрическое расстояние D было введено впервые *Максвеллом* и служит нередко для расчетов коэффициентов самондукции системы проводов; но мы не можем здесь на этом останавливаться.

Следовательно *полная* энергия магнитного поля, приходящаяся на единицу длины обоих проводов (прямого и обратного) вместе, равна:

$$T = \frac{1}{2} J^2 \cdot \mu \left[1 + 2 \lg \left(\frac{d^2}{ab} \right) \right].$$

Откуда заключаем, что коэффициент самоиндукции единицы длины линии равен:

$$L_{11} = \mu \left[1 + 2 \lg \left(\frac{d^2}{ab} \right) \right].$$

126. Коэффициент самоиндукции двух параллельных проводов при поверхностных токах. Мы предполагали в предыдущем параграфе *равномерное* распределение плотности тока по всему сечению проводника. Однако при переменных токах, как увидим ниже, распределение плотности зависит от быстроты перемен тока. С увеличением быстроты перемен тока, плотность его у *краев* сечения делается все *больше* и больше за счет плотности тока вблизи оси сечения. При быстрых электрических колебаниях токи распределяются у краев сечения таким тонким слоем, что при вычислении коэффициента самоиндукции мы можем принять внутреннее магнитное поле токов равным нулю. На основании этого замечания мы можем вычислить коэффициент самоиндукции двух параллельных проводов кругового сечения при *поверхностных* (например быстропеременных) токах, исходя из полученного нами в предыдущем параграфе выражения для магнитной энергии, если предварительно вычтем из нее энергию магнитного поля, образуемого каждым током внутри того проводника, по которому он течет.

Мы знаем, что напряжение магнитного поля внутри цилиндрического проводника кругового сечения определяется формулой (126, 107)

$$M = 2\pi ir,$$

и следовательно плотность магнитной энергии равна:

$$T_0 = \frac{\mu}{8\pi} M^2 = \frac{\mu}{2} \pi i^2 r^2.$$

Умножая эту величину на элемент объема $do = 2\pi r \cdot dr$ (при $l = 1$) и интегрируя по всему сечению

$$T_a = \frac{\mu}{2} \pi^2 i^2 \int_0^a 2r^3 \cdot dr = \frac{\mu}{4} (\pi a^2 i)^2 = \frac{\mu}{4} J^2.$$

То же получаем и для второго сечения. Вычитая это из выражения энергии, полученной нами в предыдущем параграфе, имеем:

$$T = \frac{\mu}{2} J^2 \cdot 2 \lg \left(\frac{d^2}{ab} \right).$$

Следовательно коэффициент самоиндукции в этом случае равен:

$$L_{11} = \mu 2 \lg \left(\frac{d^2}{ab} \right).$$

Большую частью оба провода имеют одинаковые радиусы $a = b$ и тогда

$$L_{11} = \mu 4 \lg \left(\frac{d}{a} \right).$$

Если мы сравним эту формулу с полученной нами раньше формулой для *емкости* двух параллельных проводов кругового сечения (47, 36):

$$C = \frac{\epsilon}{4 \lg \left(\frac{d}{a} \right)},$$

то опять можем написать соотношение (ср. 145, 124):

$$CL = \epsilon \mu,$$

которое мы получили для концентрических цилиндров. Однако теперь наши расчеты прямо показывают, что это соотношение верно только для *поверхностных* токов и при сравнительно далеком расстоянии проводников друг от друга.

Приведенные примеры с достаточной ясностью показывают, что коэффициент самоиндукции зависит не только от формы и относительного положения проводников, но также и от распределения токов внутри этих проводников. Кроме того коэффициент самоиндукции будет зависеть и от проницаемости μ материала проводников, по той простой причине, что магнитное поле распределяется не только снаружи, но и внутри проводников. Поэтому самоиндукция железных проволок в воздухе будет больше, чем медных. Но все эти осложнения отпадают в тех случаях, когда сечения проводников малы по сравнению с их расстоянием друг от друга.

Мы предлагаем читателю повторить расчет, приведенный в предыдущем параграфе, для железных проволок, протянутых в воздухе.

127. **Экстратоки.** Влияние самоиндукции проявляется в так называемых *экстратоках*, наблюдаемых при замыкании и размыкании цепи, когда движение электричества еще не установилось. Рассмотрим например цепь, состоящую из сопротивления R и самоиндукции L , в которой действует какая-нибудь электродвижущая сила \mathcal{E} (например гальванический элемент). Для такой цепи мы имеем уравнение (ср. 132, 112)

$$I = \frac{\mathcal{E} - LJ}{R} = J_0 - \frac{L}{R} \dot{J},$$

где J_0 — сила тока, соответствующая установившемуся движению электричества, т. е. известному закону *Ома*. Преобразуя это уравнение

$$\frac{d(J - J_0)}{J - J_0} = -\frac{R}{L} dt = -\chi dt,$$

мы можем написать интеграл его в виде

$$\lg(J - J_0) - \lg C = -\chi t; \quad J - J_0 = Ce^{-\chi t},$$

где C — постоянная интегрирования, соответствующая $t = 0$.

Положим, что сила тока J вначале при $t = 0$ была равна нулю, и мы включили электродвижущую силу \mathcal{E} . Тогда, положив в нашем уравнении $J = 0$, $t = 0$, мы получаем $C = -J_0$, и следовательно

$$J = J_0(1 - e^{-\chi t}).$$

Это означает, что сила тока, начиная с нулевого значения (при $t = 0$), будет постепенно увеличиваться, асимптотически приближаясь к своему значению J_0 .

Теперь предположим, что сила тока вначале была равна J_0 , а мы *выключили* электродвижущую силу \mathcal{E} , оставив цепь замкнутой. Тогда дифференциальное уравнение движения электричества будет иметь вид ($\mathcal{E} = 0$)

$$\dot{J} = -\chi J,$$

и решается интегралом

$$J = J_0 e^{-\chi t}.$$

Эта формула показывает, что сила тока, начав со значения J_0 , будет постепенно уменьшаться, асимптотически приближаясь к нулю.

Как в том, так и в другом случае величина

$$J_{ex} = \mp J_0 e^{-\chi t}, \quad \chi = \frac{R}{L}$$

называется *экстратокком*. Экстратоки замыкания и размыкания одинаковы, но противоположно направлены.

128. **Количество индуцируемого электричества.** Вычислим количество электричества, которое проходит в цепи при экстратоке. Этот вопрос решается интегрированием выражения

$$e = \int_0^{\infty} J_{ex} \cdot dt,$$

распространенным на все время действия экстратока, т. е. от $t = 0$ до $t = \infty$. Мы получаем

$$e = \mp J_0 \int_0^{\infty} e^{-\chi t} \cdot dt = \pm \frac{J_0}{\chi} \left| e^{-\chi t} \right|_0^{\infty} = \mp \frac{J_0 L}{R}.$$

Но стоящее в числителе произведение $J_0 L$ представляет собою поток магнитной индукции, который пронизывал самоиндукцию проводника в тот момент, когда сила тока была равна J_0 . Поэтому мы можем написать

$$e = \mp \frac{N}{R}.$$

Нетрудно доказать, что эта формула верна и для общего случая, а не только для экстратокков. Если в какой-либо цепи действует одна только электродвижущая сила индукции, то мы можем написать основной закон электромагнитной индукции так:

$$J = \frac{-\dot{N}}{R}.$$

Для вычисления количества электричества, протекающего в цепи вплоть до исчезновения потока N , мы должны взять интеграл

$$e = \int J dt = \int_N^0 \frac{-dN}{R} = \frac{N}{R},$$

т. е. тот же результат, что мы получили в случае экстратокков. Этим уравнением пользуются между прочим при измерениях магнитного поля. Для этого помещают в исследуемое магнитное поле небольшую катушку с известной площадью S и с известным числом витков n проволоки. Если ось катушки направлена по магнитному

полю, то полный поток индукции сквозь все ее витки будет равен BSn . При быстром удалении катушки из поля (или при выключении поля) в катушке возбуждается индукционный ток. Но вследствие кратковременности этого тока гальванометр, с которым соединена катушка, не будет успевать следовать за изменениями силы тока, а получит только некоторый импульс (или момент импульса), пропорциональный $\int J \cdot dt$, т. е. пропорциональный количеству протекающего электричества. Наблюдая отклонение гальванометра и зная постоянные катушки, мы можем определить B . Этот способ (и самый гальванометр), в котором наблюдается отклонение, причиненное толчком, называется *баллистическим*.

129. Униполярная индукция. Исходя из своей теории о перерезывании линий сил, *Фарадей* произвел следующий опыт. Медный диск

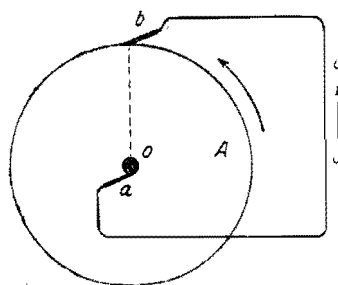


Рис. 41. Динамомашинка Фарадея.

OA (рис. 41) вращался в магнитном поле постоянного магнита NS . К оси O и периферии A диска были приложены скользящие пружинки (как щетки в современных динамомашинках). Во время вращения диск будет постоянно перерезывать магнитные линии сил и в цепи abc должна, по теории *Фарадея*, возбуждаться электродвижущая сила индукции. Опыт вполне подтвердил ожидание *Фарадея*, и в цепи abc у него получился индукционный ток. Для подсчета электродвижущей силы, обусловленной движением диска, мы можем воспользоваться общим уравнением (133, 114):

$$\mathcal{E} = \oint [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{l}.$$

Скорость \mathbf{v} для различных точек диска различна; но мы введем сюда угловую скорость вращения диска по формуле

$$v = 2\pi nr,$$

где n означает число оборотов диска в секунду. Далее мы примем, что магнитная индукция по всей площади диска одна и та же. Так как скорость \mathbf{v} перпендикулярна к индукции \mathbf{B} , то векторное произведение равно скалярному произведению их абсолютных величин. Так как движется только диск, в то время как остальная часть

цепи остается в покое, то нам достаточно распространить интеграцию только вдоль радиуса диска, — того радиуса, конец которого в данный момент касается щетки b . Приняв все это во внимание, мы можем написать

$$\mathcal{E} = nB \int_0^r 2\pi r \cdot dr = nB\pi r^2.$$

Этот результат мы могли бы получить и непосредственно из следующих соображений. При каждом обороте каждый радиус диска перерезывает все линии сил, пронизывающие площадь диска; но площадь диска равна πr^2 и число пронизывающих его линий сил равно $B\pi r^2$; следовательно число линий сил, перерезываемых каждым радиусом диска *ежесекундно*, равно $nB\pi r^2$. Эта величина должна по *Фарадею* равняться электродвижущей силе индукции, как у нас и написано.

Хотя на практике описанная динамомашинка *Фарадея* и не употребляется, потому что ее электродвижущая сила слишком мала, тем не менее опыт *Фарадея* имеет большое научное значение. При равномерном вращении мы получаем здесь *постоянный* индукционный ток, между тем как в других динамомашинках мы получаем *переменную* электродвижущую силу, и для получения постоянного тока должны устраивать коммутаторы (выпрямители).

В связи с опытом *Фарадея* возникли в физической литературе некоторые недоразумения, которые мы считаем не лишним разобрать здесь кратко.

Само собою разумеется, что о перерезывании линий сил можно говорить только при *относительном* движении диска и линий сил. В опыте *Фарадея* диск вращался, а линии сил неподвижного магнита оставались в покое; а что будет, если сделать обратный опыт и вращать линии сил, оставляя диск в покое? — Но каким образом мы можем привести линии сил во вращение? — Положим, что магнит NS и его поле имеют осевую симметрию, и мы вращаем магнит вокруг этой оси; при таком вращении магнитное поле снаружи магнита останется везде *неизменным*, и является вопрос, вращаются ли линии сил вместе с магнитом или они остаются в покое? — Казалось бы, что на этот вопрос может ответить опыт с электромагнитной индукцией; но это и есть то недоразумение, о котором мы хотели сказать здесь несколько слов. Если в приборе *Фарадея*

мы оставим диск в покое, а будем вращать магнит, то мы никакой индукции не получим; и это легко объяснить даже в предположении, что линии сил вращаются вместе с магнитом. Действительно, если диск в покое, то его скользящие контакты будут в бездействии, мы будем иметь дело с *цельным, замкнутым в себе* проводником. При вращении магнита вместе с линиями сил одни линии сил будут входить внутрь площади, ограниченной этим проводником, и в то же время другие линии сил будут выходить из этой площади наружу. Перерезывание проводника будет происходить в его частях *ab* и *bca* в противоположных направлениях и результирующая электродвижущая сила будет равна нулю, как будто линии сил остаются в покое. Для того чтобы обойти это затруднение, мы можем несколько изменить прибор *Фарадея*, введя в цепь часть магнита и устроив на периферии магнита скользящий контакт, как это показано на рис. 42. Теперь мы можем вращать часть проводника *ABC* вокруг неподвижного магнита или вращать магнит *SNA* с такою же скоростью в обратную сторону при неподвижном проводнике *ABC*; как в том, так и в другом случае опыт даст нам одну и ту же электродвижущую силу индукции. Тем не менее это не доказывает вращение линий сил вместе с магнитом. Действительно мы можем принять, что линии сил и во втором опыте остаются в покое, но тогда они перерезываются вращающимся магнитом. При этом в части *NA* замкнутой цепи возникает электродвижущая сила индукции, той же самой величины, какая прежде возникала в части *ABC*, если угловая скорость вращения была в обоих опытах одна и та же. Из этого мы заключаем, что гипотеза о вращении линий сил вместе с вращающимся магнитом нам совершенно излишня.

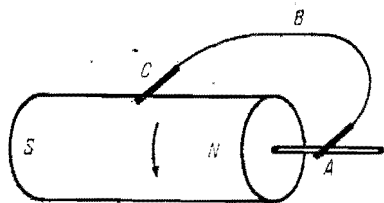


Рис. 42. Униполярная индукция.

Если мы будем вращать магнит без всяких проводящих соединений, то при его вращении в собственном поле, между его осью и его периферией, возникает разность потенциалов и магнит зарядится электричеством, что можно подтвердить на опыте.

130. Общее замечание об энергии и силах. В электростатике (69, 53) мы пользовались теоремой *Томсона*, для того чтобы на основании выражения электростатической энергии определять

силы взаимодействия наэлектризованных и поляризованных тел. То же самое мы могли бы сделать и при вычислении сил взаимодействия намагниченных тел. Как в том, так и в другом случае *при постоянной величине зарядов* работа сил взаимодействия производится за счет электрического или магнитного поля, а потому энергия поля при производстве этой работы должна *уменьшаться*. С другой стороны, мы заметили (128, 110), что передвижение электрических токов под действием электромагнитных сил происходит так, что энергия поля при этом *увеличивается*. Мы покажем сейчас, что это различие между электростатической и электромагнитной энергией обусловлено побочными условиями, а не особыми свойствами той или иной энергии.

Рассмотрим для этого электростатическую энергию заряженного конденсатора емкости *C*. Для этой энергии мы имеем два выражения (64, 50):

$$U = \frac{1}{2} \frac{e^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2.$$

Взаимодействие зарядов происходит всегда так, что емкость *C* увеличивается. Если величина зарядов остается неизменной, то при небольшом сдвиге их под действием электростатических сил получится изменение энергии

$$\delta U_e = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{C^2} \delta C.$$

Это величина отрицательная; энергия системы *уменьшилась*, потому что была совершена механическая работа передвижения зарядов. Если же мы дадим зарядам свободно двигаться, поддерживая потенциалы постоянными, то получим (на основании второго выражения для энергии) работу

$$\delta U_v = \frac{1}{2} V^2 \delta C.$$

Это величина положительная; энергия системы *увеличилась*, несмотря на то, что была произведена работа передвижения зарядов. Отсюда мы видим, что, поддерживая потенциалы постоянными, мы должны были не только пополнить убыль энергии поля, происшедшую от движения, но кроме того еще и ввести лишнюю энергию, которая пошла на увеличение энергии поля.

Оставим ли мы систему изолированной, т. е. при неизменных зарядах, или мы будем поддерживать потенциалы постоянными, — это несколько не изменит величину сил взаимодействия (закон Кулона). А между тем при вычислении сил на основании изменения энергии, как это мы неоднократно делали (ср. 54—57), у нас во втором случае получились бы для сил те же величины, но с противоположным знаком.

Совершенно то же самое мы имеем при взаимодействии электрических токов. Для взаимной энергии двух линейных токов мы можем написать тоже два выражения (137, 118):

$$T = \frac{N_{12} \cdot N_{21}}{L_{12}} = L_{12} \cdot J_1 J_2.$$

Если при передвижении под действием электромагнитных сил потоки N будут оставаться постоянными, тогда (по первому выражению) мы имеем

$$\delta T = - \frac{N_{12} \cdot N_{21}}{L_{12}^2} \delta L_{12}.$$

Эта величина отрицательна; работа передвижения будет совершаться за счет магнитного поля. Наоборот, если мы будем поддерживать электрические токи J постоянными, то получим (по второму выражению):

$$\delta T = J_1 J_2 \delta L_{12}.$$

Эта величина положительна; энергия системы увеличилась, несмотря на то, что была совершена работа передвижения токов. Следовательно, поддерживая токи постоянными, мы должны были не только пополнить убыль энергии поля, но еще и увеличить эту энергию так, чтобы она соответствовала новому положению неизменных токов.

Как и в электростатическом случае, силы взаимодействия электрических токов (законы Ампера) не зависят от того, поддерживаем ли мы токи постоянными или нет; силы эти зависят только от взаимного расположения этих токов. Однако если бы мы определяли величину этих сил по наблюдаемому изменению энергии магнитного поля, то у нас в том и другом случае получились бы величины для сил равные, но противоположные по знаку.

На основании гипотезы Ампера магнитные полюса намагниченных тел образованы молекулярными электрическими токами, и есте-

ственно спросить себя, откуда берется энергия при взаимодействии магнитных полюсов друг с другом. Ответ на этот вопрос может дать только опыт, а опыт показывает, что в постоянных магнитах количество магнетизма, а следовательно и число линий сил N , остается постоянным, и следовательно работа передвижения при их взаимодействии берется из самого магнитного поля, как в электростатике при постоянных зарядах. Правда при передвижении магнитов в их молекулах появляются тоже и индукционные токи (см. „Теорию диамагнетизма“ в общем курсе электричества), но действие этих токов сравнительно ничтожно.

IV. ТЕОРИЯ МАКСВЕЛЛА.

131. Ток смещения. Мы уже вывели раньше (122, 105, 134, 115) два уравнения Максвелла, исходя из опытов, произведенных с электрическими токами в проводниках;

теперь нам предстоит расширить эти уравнения и на диэлектрики, введя так называемые токи смещения. Для большей наглядности мы рассмотрим следующий опыт (рис. 43). Обкладки плоского конденсатора AB соединены проводником BCA . Само собою разумеется, что при таком расположении опыта конденсатор не может быть заряжен надолго. Но представим себе, что в некоторый момент времени количество электричества на обкладках конденсатора было равно e , и следовательно между обкладками действовали напряжение электрического поля E и индукция D , связанные уравнением:

$$e = \frac{\epsilon E}{4\pi} S = \frac{D}{4\pi} S,$$

где S — площадь обкладки.

Но в тот же момент времени по проводнику потечет электрический ток, причем сила этого тока будет равна убыли электричества в конденсаторе в единицу времени:

$$J = -\dot{e}; \quad J + \dot{e} = J + \frac{\dot{D}}{4\pi} S = 0.$$

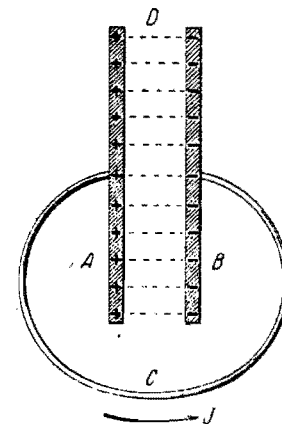


Рис. 43. Ток смещения.

Первый член в этом уравнении мы будем называть гальваническим током, а второй член представляет собою то, что *Максвелл* назвал *током смещения*. Написанное нами уравнение выражает непрерывность течения электричества и в то же время показывает, что в разомкнутых проводниках гальванический ток J вместе с током смещения образуют *замкнутую линию*.

Мы рассмотрели сейчас линейный проводник и конденсатор, соединенные последовательно, но в полупроводниках, обладающих и некоторою электропроводностью σ и диэлектрическою постоянною ϵ , как гальванический ток, так и максвелловский ток смещения могут находиться одновременно в одном и том же объеме полупроводника. Тем не менее сумма этих двух токов всегда образует *замкнутую линию*, между тем как гальванический ток в отдельности и ток смещения в отдельности могут и не образовать замкнутой цепи, как это мы и видели выше в примере разряжающегося конденсатора.

Для того чтобы выразить это формулою, удобнее перейти к плотности токов и написать, что расхождение их равно нулю:

$$\operatorname{div} \left(i + \frac{1}{4\pi} \dot{D} \right) = 0.$$

Это уравнение и означает, что сумма обоих токов образует в электромагнитном поле *замкнутые линии*.

132. Конвекционный ток. Если мы зарядим какое-либо тело и будем двигать его вместе с находящимися на нем зарядами, то мы тоже получим электрический ток, который, в отличие от только что рассмотренных нами гальванических токов и токов смещения, получил название *конвекционного тока*. Обозначая через ρ плотность электричества и через v — скорость его движения, мы можем для *плотности* конвекционного тока написать формулу:

$$\rho v.$$

Необходимо однако заметить, что гальванический ток в электролитах, где перенос электрических зарядов производится ионами, т. е. заряженными и движущимися молекулами и атомами, по существу своему тоже представляет собою конвекционный ток. Точно так же в газовых разрядах мы имеем движение ионов, причем отрицательным ионом служит большей частью *электрон*, т. е. атом электричества. Наконец и в металлических проводниках, как пока-

зали опыты *Толмана*, электрический ток обусловлен движением электронов. Таким образом все гальванические токи представляют собою на самом деле конвекционные токи. Тем не менее мы будем делать различие между гальваническими токами и *явно* конвекционными токами, подразумевая под гальваническими токами движение электричества в проводящей среде, где этому движению оказывается некоторое сопротивление (например по закону *Ома*), тогда как электрическая конвекция может происходить и без всякого сопротивления (например при движении электронов в пустоте, или при движении заряженных тел, где внешние сопротивления чисто механического, а не электрического характера). На основании этих соображений мы напишем для плотности *полного* тока i_{tot} выражение:

$$i_{tot} = i + \frac{1}{4\pi} \dot{D} + \rho v.$$

Так как по *Максвеллу* этот полный ток всегда образует *замкнутые линии* в поле, то мы можем это условие выразить уравнением:

$$\operatorname{div} i_{tot} = \operatorname{div} \left(i + \frac{1}{4\pi} \dot{D} + \rho v \right) = 0.$$

133. Основные уравнения Максвелла. Одно из самых важных обобщений, введенных *Максвеллом* в электромагнитную теорию, состоит в предложенной им гипотезе, что магнитные действия обуславливаются не только одними гальваническими токами, но также и токами смещения и конвекционными токами.

На основании этой гипотезы мы должны в первом уравнении *Максвелла* прибавить к гальваническим токам токи смещения и конвекционные токи. Тогда получаем

$$\operatorname{curl} M = 4\pi i + \dot{D} + 4\pi \rho v.$$

Это уравнение было полностью подтверждено на опыте. Магнитное действие токов смещения обуславливает распространение электромагнитных волн, реализованных на опыте *Герццом* и примененных теперь к беспроволочной телеграфии, а магнитное действие токов движущихся заряженных тел было доказано на опыте *Роуландом* и подробно исследовано *А. Эйхенвальдом*.

Написанное уравнение имеет еще и другое значение. Если мы произведем над ним операцию div , то слева получим нуль, потому

что для всякого вектора $\operatorname{div} \operatorname{curl} \mathbf{A} = 0$. Но в таком случае и расхождение вектора правой части тоже должно равняться нулю:

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{i} + \frac{1}{4\pi} \dot{\mathbf{D}} + \rho \mathbf{v} \right) = 0,$$

а это означает, что сумма этих токов всегда образует *замкнутые* линии в поле, в согласии с тем, что мы говорили в предыдущем параграфе. Если бы не было добавки *Максвелла*: тока смещения и конвекционного тока, то из написанного выше уравнения следовало бы, что

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = 0,$$

т. е. что гальванические токи должны быть замкнуты. Другими словами, это означало бы, что написанное уравнение к разомкнутым токам неприменимо, и мы не могли бы рассчитывать по нем магнитное поле в случае разомкнутых токов, например в случае разряжающегося конденсатора. Добавка *Максвелла* расширяет применимость этого уравнения.

Второе уравнение *Максвелла*, выведенное из законов электромагнитной индукции для проводников, сохраняет свой вид и для диэлектриков

$$-\operatorname{curl} \mathbf{E} = \dot{\mathbf{B}},$$

однако оно получает новое содержание. Это уравнение по *Максвеллу* нужно понимать в том смысле, что при изменении магнитного поля со временем всегда возбуждается электрическое поле \mathbf{E} , независимо от того, имеем ли мы дело с проводником или с диэлектриком. Разница состоит только в том, что в проводнике это электрическое поле возбуждает гальванический ток, тогда как в изоляторе получается вместо этого ток смещения. Это следствие тоже подтверждается на опытах с электромагнитными волнами.

134. Единицы измерений в уравнениях Максвелла. Во всех формулах, которые мы выводили выше, мы предполагали, что входящие в каждую формулу величины выражены в одних и тех же единицах. Но иногда бывает удобнее отступить от этого общего правила, вводя соответствующие коэффициенты. Это замечание в частности касается уравнений *Максвелла*. Дело в том, что коэффициенты ϵ и μ представляют собою отвлеченные числа только в той системе мер, в которой они были введены впервые. Так например коэффициент ϵ

был нами введен в закон *Кулона*, написанный в абсолютных электростатических единицах:

$$F_e = \frac{e_1 e_2}{\epsilon r^2} \text{ дин.}$$

Если бы мы желали выразить количества электричества не в электростатических, а в электромагнитных единицах, то нам пришлось бы ввести при каждом e коэффициент $c = 3 \cdot 10^{10}$, и написать закон *Кулона* так (2, 2):

$$F_e = \frac{c^2 e_1 e_2}{\epsilon r^2} \text{ дин.}$$

Точно так же мы имели для силы взаимодействия двух прямых параллельных токов (111, 97):

$$F_m = 2\mu \frac{I_1 I_2}{r}.$$

Здесь силы токов выражены в электромагнитных единицах, и если бы мы пожелали выразить их в электростатических единицах, то для получения той же силы F_m (выраженной в динах) нам пришлось бы ввести делитель c^2 :

$$F_m = 2 \frac{\mu}{c^2} \frac{I_1 I_2}{r}.$$

Как видим, при переходе от одной системы к другой коэффициенты ϵ и μ должны быть разделены на c^2 . Поэтому, если мы будем писать оба уравнения *Максвелла* в одинаковых мерах, то нам придется в том или другом уравнении ввести делитель c^2 . Однако обыкновенно для сохранения симметрии поступают иначе, а именно выражают входящие в уравнения электрические величины $\dot{\mathbf{D}}$, \mathbf{E} , \mathbf{i} , ϵ в электростатических единицах, тогда как магнитные величины $\dot{\mathbf{B}}$, \mathbf{M} , μ выражают в электромагнитных единицах. При таком выборе единиц диэлектрическая постоянная ϵ и проницаемость μ сохраняют свое основное значение, оставаясь отвлеченными числами, но каждое уравнение *Максвелла* получает в правой своей части делитель $c = 3 \cdot 10^{10}$.

Появление делителя c в этих уравнениях можно уяснить себе следующим образом. Электростатическая индукция $\dot{\mathbf{D}}$ связана с плотностью электричества соотношением

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho.$$

Поэтому, если индукция $\dot{\mathbf{D}}$ выражена в электростатических единицах, то для согласования с левой частью уравнения, где \mathbf{M} выражено в электромагнитных единицах, мы должны поступить так же, как и с количеством электричества, т. е. *разделить* на c (2, 2) и написать первое уравнение *Максвелла* так:

$$\text{curl } \mathbf{M} = \frac{1}{c} [4\pi \dot{\mathbf{i}} + \dot{\mathbf{D}} + 4\pi \rho \mathbf{v}].$$

Напротив, напряжение электрического поля связано с потенциалом

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V,$$

а потому при переходе от электростатических единиц к электромагнитным мы должны величину напряжения \mathbf{E} *умножить* на c (16, 15). Вместо того чтобы умножать левую часть уравнения *Максвелла* на c , мы разделим его правую часть на c , и тогда получаем аналогично с первым уравнением:

$$-\text{curl } \mathbf{E} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}.$$

Что переводные множители для индукции \mathbf{D} и напряжения поля \mathbf{E} должны быть обратны друг другу, следует непосредственно и из выражения для плотности электростатической энергии:

$$U_0 = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}.$$

Плотность энергии во всех абсолютных единицах имеет одну и ту же единицу, а именно $\text{эрг}/\text{см}^3$; поэтому если при перемене единицы мы \mathbf{D} делим на c , то должны \mathbf{E} умножить на c , чтобы для U_0 получить то же самое значение.

Мы написали только что два уравнения *Максвелла* в дифференциальной форме, но иногда удобнее исходить из уравнений в интегральной форме. Тогда в выбранных нами единицах они напишутся так (122, 105, 134, 115):

$$\oint (\mathbf{M} \cdot d\mathbf{s}) = \frac{1}{c} \int (4\pi \dot{\mathbf{i}} + \dot{\mathbf{D}} + 4\pi \rho \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{s};$$

$$-\oint (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}) = \frac{1}{c} \int (\dot{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{s}).$$

Наконец, если мы обозначим через \mathcal{E}_m и \mathcal{E}_e магнитодвижущие и электродвижущие силы, а через N_e и N_m — электрические и маг-

нитные потоки индукции, пронизывающие те площади, вдоль контуров которых мы вычисляем \mathcal{E}_m и \mathcal{E}_e , то уравнения Максвелла примут вид:

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{c} (4\pi J + \dot{N}_e + 4\pi e v),$$

$$-\mathcal{E}_e = \frac{1}{c} \dot{N}_m.$$

135. **Теорема Пойнтинга.** Напишем уравнения *Максвелла*, но без конвекционных токов:

$$\text{curl } \mathbf{M} = \frac{\epsilon}{c} \dot{\mathbf{E}} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}; \quad \mathbf{i} = \sigma \mathbf{E};$$

$$-\text{curl } \mathbf{E} = \frac{\mu}{c} \dot{\mathbf{M}}.$$

Умножим первое уравнение скалярно на вектор \mathbf{E} , а второе уравнение, тоже скалярно, на вектор \mathbf{M} и сложим оба уравнения вместе. При этом первые члены правых частей дадут в сумме

$$\frac{1}{c} (\epsilon \mathbf{E} \dot{\mathbf{E}} + \mu \dot{\mathbf{M}} \mathbf{M}) = \frac{4\pi}{c} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{8\pi} (\dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{8\pi} (\dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{M}) \right] = \frac{4\pi}{c} \frac{d}{dt} [U_{em}].$$

Мы получили справа производную по времени от плотности электромагнитной энергии U_{em} . Далее мы получаем справа выражение

$$\frac{4\pi}{c} (\sigma E^2) = \frac{4\pi}{c} \omega,$$

где ω представляет собою количество энергии, превращаемое каждую секунду в каждом кубическом сантиметре в теплоту (закон *Джоуля*, 102, 90).

В то же самое время левые части уравнений *Максвелла* дают нам (примененное здесь преобразование выводится в векторном исчислении, ч. I, 56):

$$\mathbf{E} \cdot \text{curl } \mathbf{M} - \mathbf{M} \cdot \text{curl } \mathbf{E} = -\text{div} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{M}].$$

Умножим обе части уравнения на $\frac{c}{4\pi} d\omega$ и возьмем интеграл по некоторому объему, выделенному нами (мысленно) в электромагнитном поле. Тогда левая часть уравнения может быть преобразована в поверхностный интеграл по теореме *Гаусса*:

$$-\int \text{div} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{M}] \cdot d\omega = -\oint \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{M}]_n \cdot d\mathbf{s} = -\oint P_n \cdot d\mathbf{s},$$

где P_n означает нормальную составляющую некоторого вектора, определяемого напряжениями электрического и магнитного поля в рассматриваемой точке поля:

$$P = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{M}].$$

Этот вектор называется *вектором Пойнтинга*, а написанный нами поверхностный интеграл представляет собою *поток* вектора *Пойнтинга* сквозь поверхность, ограничивающую выделенный нами объем поля. Знак *минус* означает, что поток этот направлен *снаружи внутрь* этой поверхности.

Если мы теперь напишем результат наших преобразований в виде

$$-\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \int U_{em} d\omega + \int \omega \cdot d\omega,$$

то можем истолковать полученное уравнение следующим образом. Сквозь поверхность выделенного нами объема поля мы имеем *поток энергии*, причем в каждую секунду сквозь каждый квадратный сантиметр поверхности втекает внутрь рассматриваемого объема количество энергии, равное P . Эта энергия, входя внутрь рассматриваемого объема поля, частью повышает электромагнитную энергию этого объема (первый член правой части), а частью превращается в теплоту (второй член правой части).

Таким образом преобразование *Пойнтинга* выражает не что иное, как закон сохранения энергии; но кроме того это преобразование указывает нам, какими путями движется эта энергия в пространстве. По *Пойнтингу* энергия электромагнитного поля движется по направлению вектора

$$\mathbf{P} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{M}],$$

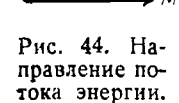


Рис. 44. Направление потока энергии.

который, как показывает эта формула, всегда перпендикулярен к направлениям напряжений \mathbf{E} и \mathbf{M} электрического и магнитного поля в каждой точке электромагнитного поля. Направления векторов \mathbf{P} , \mathbf{E} , \mathbf{M} образуют правовинтовую систему (рис. 44).

136. Пример. Когда мы перейдем к изучению электромагнитных волн, то будем иметь случай неоднократно применять теорему *Пойн-*

тинга; а пока мы ограничимся рассмотрением одного простого случая, а именно случая постоянного электрического тока в проводнике. Положим, что проводник имеет форму кругового цилиндра (провода) радиуса a , и мы выделяем из поля объем единицы длины этого проводника:

$$O = \pi a^2 (l = 1).$$

Мы знаем, что на поверхности такого проводника напряжение магнитного поля равно (121, 104):

$$M = 2\pi a i = 2\pi a \sigma E.$$

Это напряжение направлено по кругам радиуса a с центром на оси цилиндрического проводника. Напряжение же электрического поля в проводнике имеет направление, параллельное оси. Составляя векторное произведение обоих векторов [$\sin(\mathbf{E} \cdot \mathbf{M}) = 1$], мы получаем вектор *Пойнтинга*

$$P = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{M} = \frac{c}{2} a \sigma E^2.$$

Нетрудно видеть по рис. 45, что этот вектор направлен *внутри* проводника. Умножая вектор *Пойнтинга* на наружную поверхность проводника $2\pi a$ (при длине $l = 1$), мы получаем количество энергии, втекающее в эту поверхность ежесекундно:

$$P \cdot 2\pi a = c \cdot \pi a^2 \cdot \sigma E^2.$$



Рис. 45. Движение энергии снаружи внутрь проводника.

С другой стороны, по закону *Джоуля*, при постоянном токе $i = \sigma E$ внутри проводника ежесекундно выделяется количество теплоты, определяемое формулой

$$W = \pi a^2 (l = 1) \cdot c \sigma E^2.$$

А это вполне согласуется с результатом, полученным нами на основании выражения потока энергии по *Пойнтингу*.

Напомним читателю, что закон *Джоуля* был нами выведен на основании закона сохранения энергии, причем нам было достаточно знать, что энергия никогда не уничтожается, а только может превращаться в различные формы, и что в рассматриваемом нами случае вся энергия тока превращается в теплоту. Теорема *Пойнтинга* дает нам больше: она показывает, что энергия эта

движется не *вдоль оси проводника*, как это могло бы показаться, а входит в проводник снаружи, и притом *нормально* к его поверхности, т. е. *перпендикулярно* к оси проводника.

Подобным же образом мы могли бы выяснить направление движения энергии и в других электромагнитных явлениях. Введенное *Пойнтингом* понятие о движении энергии обладает большою наглядностью и имеет громадное принципиальное значение. Однако не надо упускать из виду, что в некоторых частных случаях вектор *Пойнтинга* дает нам движения энергии, которые опытом не обнаруживаются. Так например если мы поместим электрический заряд вблизи магнита, то получим электромагнитное поле, в котором имеются напряжения \mathbf{E} и \mathbf{M} , и мы можем провести в каждой точке поля направление, перпендикулярное к плоскости $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{M})$, соответствующее вектору *Пойнтинга* \mathbf{P} . А между тем в таком *статическом* поле опыт не обнаруживает никакого движения энергии. Если же мы проследим за направлениями векторных линий \mathbf{P} , то легко найдем, что все они *замкнуты*. Это означает, что если в таком статическом электромагнитном поле и происходит движение энергии, то движение это совершается по *замкнутым* в себе линиям и потому ничем наружу не проявляется.

137. Закон Максвелла. Напишем уравнения *Максвелла* для диэлектриков, положив гальванический ток \mathbf{i} равным нулю:

$$\text{curl } \mathbf{M} = \frac{\varepsilon}{c} \dot{\mathbf{E}},$$

$$-\text{curl } \mathbf{E} = \frac{\mu}{c} \dot{\mathbf{M}}.$$

Мы можем исключить из этих уравнений либо \mathbf{E} , либо \mathbf{M} . Для этой цели произведем операцию *curl* над первым уравнением. На основании известного правила векторного исчисления (ч. I, 57, 59) мы имеем:

$$\text{curl} \cdot \text{curl } \mathbf{M} = \text{grad} \cdot \text{div } \mathbf{M} - \nabla^2 \mathbf{M},$$

и если проницаемость μ во всем поле одна и та же, то

$$\text{div } \mathbf{B} = \mu \text{div } \mathbf{M} = 0,$$

и у нас остается вместо первого уравнения

$$-\nabla^2 \mathbf{M} = \frac{\varepsilon}{c} \text{curl } \dot{\mathbf{E}}.$$

Если мы сопоставим это со вторым уравнением *Максвелла*, продифференцированным по t , то можем написать:

$$-\text{curl } \dot{\mathbf{E}} = \frac{\mu}{c} \ddot{\mathbf{M}},$$

$$\nabla^2 \mathbf{M} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \ddot{\mathbf{M}}.$$

Если мы сделаем операцию *curl* над *вторым* уравнением, а операцию $\frac{d}{dt}$ над первым уравнением, то получим:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \ddot{\mathbf{E}}.$$

Итак для каждого из векторов \mathbf{E} и \mathbf{M} и для каждой проекции этих векторов на оси координат мы получаем уравнение вида

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

или, если написать его в декартовых координатах:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Мы получили таким образом известное уравнение распространения волн (ч. I, 164, 127), причем коэффициент, стоящий при второй производной по времени, представляет собою обратную величину квадрата скорости распространения волн. Об электромагнитных волнах мы будем говорить подробнее в одной из следующих глав, а пока отметим, что из обоих уравнений *Максвелла* непосредственно следует, что электрическое и магнитное поле распространяются в диэлектриках с одинаковою скоростью, величина которой равна

$$c_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}.$$

Это соотношение называется *законом Максвелла*.

138. Электромагнитная теория света. Если применить закон *Максвелла* к среде, лишенной материи (мировой эфир), в которой $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$, то скорость распространения электромагнитных волн окажется равною

$$c_1 = c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec},$$

т. е. равною скорости света в пустоте. Это совпадение объясняется по *Максвеллу* тем, что свет представляет собою один из частных случаев распространения электромагнитного поля. Таким образом возникла электромагнитная теория света *Максвелла*.

Это открытие *Максвелла* по своей важности для всего последующего развития естествознания может быть поставлено наряду с открытием всемирного тяготения *Ньютоном*.

Из уравнений *Максвелла* непосредственно следует, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{M} перпендикулярны к скорости распространения электромагнитного поля c_1 . Мы убедимся в этом, когда будем рассматривать плоскую электромагнитную волну, в которой это обстоятельство выступает нагляднее. Но если это так, то электромагнитные волны нужно считать поперечными. С другой стороны, мы знаем, что вектор \mathbf{P} *Пойнтинга* (164, 135) всегда перпендикулярен к векторам \mathbf{E} и \mathbf{M} , и следовательно его направление совпадает с направлением скорости c_1 . Но вектор *Пойнтинга* представляет собою поток энергии, и в данном случае эта электромагнитная энергия распространяется со скоростью света, что вполне совпадает с нашим представлением о распространении световой энергии. Если мы обозначим плотность световой энергии через U , то можем для потока световой энергии написать:

$$P = Uc_1 \text{ erg/cm}^2 \cdot \text{sec.}$$

В прежней теории света мы отличали две плоскости, проведенные через луч: одну из этих плоскостей мы называли плоскостью колебаний света, а другую называли плоскостью поляризации света. При ближайшем сравнении оптических явлений с электрическими явлениями (см. например фотоэлектричество, или фотохимические действия) оказалось, что та плоскость, которую мы прежде называли плоскостью колебаний света, не определяя точнее, что именно здесь колеблется, совпадает с плоскостью электрического поля световой электромагнитной волны; следовательно прежний термин световые колебания теперь получает у нас значение колебаний величины электрического поля. Точно так же прежняя плоскость поляризации теперь означает плоскость, проведенную через луч и магнитное поле луча. Наконец вектор *Пойнтинга* совпадает с направлением луча.

Энергия светового луча по электромагнитной теории состоит из двух частей: из энергии его электрического и магнитного поля.

Электрическая энергия соответствует прежней потенциальной энергии световых колебаний, тогда как магнитная энергия представляет собою прежнюю кинетическую энергию световых колебаний. Из общей теории волнообразных движений известно, что кинетическая энергия волны равна потенциальной энергии. Поэтому, если нам известна полная энергия электромагнитной волны, то мы можем очень просто вычислить величину ее электрического и магнитного поля.

Так например измерения световой энергии, посылаемой нам Солнцем, показали, что у поверхности Земли мы получаем на каждый квадратный сантиметр поверхности, поставленной перпендикулярно к солнечному лучу, 3 калории в минуту. Переводя это в абсолютные единицы, получаем для потока энергии

$$P = 3 \text{ cal}/60 \text{ sec} = \frac{3 \cdot 4,2 \cdot 10^7}{60} = 2,1 \cdot 10^6 \text{ erg/cm}^2 \cdot \text{sec.}$$

а следовательно для плотности энергии светового луча имеем

$$U = \frac{P}{c} = 0,7 \cdot 10^{-4} \text{ erg/cm}^3.$$

Половина этой энергии электрическая, а другая половина — магнитная. Основываясь на этом, мы получаем для напряжения магнитного поля в световом луче:

$$\frac{1}{8\pi} M^2 = 0,35 \cdot 10^{-4} \text{ erg/cm}^3:$$

$$M = 0,03 \text{ гаусс,}$$

т. е. приблизительно в 15 раз меньше, чем напряжение земного магнитного поля в средних широтах.

139. Давление света. Из представления об электромагнитной природе света *Максвелл* сделал заключение, что свет должен оказывать давление на тела, поставленные на его пути. Действительно если например свет падает нормально на какую-либо пластинку, то электрические и магнитные линии сил световой волны будут направлены (перпендикулярно к лучу) вдоль поверхности этой пластинки, а мы знаем, что по воззрениям *Фарадея* и *Максвелла* эти линии сил оказывают давление (83, 64), величина которого равна плотности энергии у рассматриваемой поверхности. Плотность энергии солнечного луча у поверхности Земли мы уже вычисляли в предыдущем параграфе, а потому можем для давления солнечного луча написать:

$$p = 0,7 \cdot 10^{-4} \text{ dyn/cm}^2.$$

Этот результат верен только в предположении, что свет падает на пластинку совершенно черную, которая *поглощает* все лучи без заметного отражения. Если же пластинка имеет коэффициент отражения χ , т. е. если энергия отраженного луча равна χU , то при вычислении величины давления мы должны и эту энергию тоже принять во внимание; тогда получим для величины давления:

$$p = (1 + \chi)U.$$

Как падающий луч, так и отраженный оказывают давление на отражающую пластинку. Если пластинка вполне отражает лучи ($\chi = 1$), то давление света будет *вдвое* больше, чем на вполне поглощающую свет пластинку.

Если пластинка прозрачна, то для вычисления давления лучей на каждую ее поверхность нужно принять во внимание разность энергий лучей с обеих сторон этих поверхностей (ср. 55, 56 и сл.).

Давление света на поглощающие и отражающие пластинки было обнаружено впервые *П. Н. Лебедевым* (1900) в Москве и найдено им вполне согласным с вычислениями *Максвелла*.

140. Основные формулы теории Максвелла. Для большей наглядности полезно будет сопоставить все формулы, служащие для расчета электромагнитного поля вместе. Во-первых, мы имеем два основных уравнения *Максвелла*:

$$\operatorname{curl} \mathbf{M} = \frac{\varepsilon}{c} \dot{\mathbf{E}} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E},$$

$$-\operatorname{curl} \mathbf{E} = \frac{\mu}{c} \dot{\mathbf{M}},$$

причем в первом из них мы откинули конвекционные токи, имея в виду исследовать их особо. Кроме того мы воспользовались законом *Ома* и написали для плотности гальванического тока его зависимость от напряжения электрического поля (101, 88):

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}.$$

В этой формуле не только напряжение поля \mathbf{E} , но и коэффициент σ удельной электропроводности должны быть выражены в *электростатических* единицах. К этим основным уравнениям мы присоединяем еще два:

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 4\pi\rho; \quad \operatorname{div}(\mu \mathbf{M}) = 0.$$

Первое из этих уравнений определяет плотность электричества, находящегося в поле, а второе говорит, что действительного магнетизма нет.

Далее плотность электромагнитной энергии определяется формулой:

$$U + T = \frac{1}{8\pi} (\dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{8\pi} (\dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{M}).$$

Наконец, если в рассматриваемом поле находятся поляризованные тела с различными коэффициентами ε и μ , то на поверхности этих тел должны быть соблюдены условия, о которых мы подробно говорили раньше (38, 28; 50, 41; 90, 74) и которых мы можем не приводить здесь.

Герц показал, что на уравнения *Максвелла* можно смотреть как на *основную гипотезу* электромагнетизма и что из этой основной гипотезы можно вывести все явления, которые мы рассматривали раньше, исходя из отдельных опытов. Хотя принцип, которого мы держались в этой книге, отличен от метода *Герца*, тем не менее выводы *Герца* могут быть нам полезными в смысле повторения пройденного.

Итак будем применять написанные выше уравнения к частным случаям и начнем с того, что предположим поле *стационарным*, т. е. положим все производные по времени равными нулю. Тогда получаем из второго уравнения:

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} = 0.$$

Это означает, что поле \mathbf{E} не имеет замкнутых в себе линий и следовательно имеет потенциал (11, 12). Мы можем следовательно положить

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V; \quad \mathbf{E}_s = -\frac{\partial V}{\partial s}$$

и подставить это в уравнение для плотности электричества. Как результат этой подстановки мы получаем уравнение *Лапласа-Пуассона* и формулу для потенциалов (13, 13):

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho; \quad V = \int \frac{\rho \cdot do}{r}.$$

Таким образом мы получили основные уравнения электростатики.

В то же самое время первое уравнение *Максвелла* дает нам для стационарных токов:

$$\operatorname{curl} \mathbf{M} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}.$$

Это уравнение выражает законы *Био-Савара* и *Ампера*. Если распределение токов дано, то это уравнение решается при помощи вспомогательной функции — так называемого *вектор-потенциала*. Мы уже получили это решение для случая, когда коэффициент μ во всем поле одинаков (124, 106). Теперь мы можем обобщить наш вывод и на те случаи, когда в поле находятся тела с различными коэффициентами проницаемости. Будем искать такую функцию \mathbf{A} , которая удовлетворяла бы условиям:

$$\mathbf{B} = \operatorname{curl} \mathbf{A}, \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

Если мы теперь (как это мы делали и раньше) возьмем вихрь первого уравнения, то получаем (ч. I, стр. 54, 54) слева:

$$\operatorname{curl} (\mu \mathbf{M}) = \mu \cdot \operatorname{curl} \mathbf{M} + [\nabla \mu \cdot \mathbf{M}],$$

а в правой части:

$$\operatorname{curl} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \cdot \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

Приняв во внимание второе уравнение для вектора \mathbf{A} и основное уравнение для \mathbf{i} , можем написать:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -4\pi \left[\frac{1}{c} \mu \mathbf{i} + \frac{1}{4\pi} [\nabla \mu \cdot \mathbf{M}] \right].$$

Это уравнение аналогично уравнению *Лапласа-Пуассона* и решается так:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mu \mathbf{i}}{r} d\omega + \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} [\nabla \mu \cdot \mathbf{M}] \cdot d\omega.$$

Так как \mathbf{A} есть вектор, то мы имеем для расчета *три* таких скалярных уравнения, для каждой составляющей вектора \mathbf{A} по трем осям координат отдельно. Определив таким образом вектор-потенциал магнитного поля \mathbf{A} , мы по нем вычисляем и индукцию поля \mathbf{B} по вышенаписанному уравнению:

$$\mathbf{B} = \operatorname{curl} \mathbf{A}.$$

Заметим, что из этого уравнения следует, что

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{A} = 0,$$

т. е. что все линии магнитной индукции замкнуты, между тем как для напряжения магнитного поля $\operatorname{div} \mathbf{M}$ не будет равно нулю. Действительно из преобразования (вывод см. ч. I, стр. 54, 54)

$$\operatorname{div} (\mu \cdot \mathbf{M}) = \mu \cdot \operatorname{div} \mathbf{M} + \operatorname{grad} (\mu \cdot \mathbf{M}) = 0$$

следует, что

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = -\frac{1}{\mu} \operatorname{grad} (\mu \cdot \mathbf{M}).$$

Это означает, что в тех точках однородного поля \mathbf{M} , где μ растет, мы имеем отрицательные магнитные полюса, а где μ уменьшается — мы получаем положительные магнитные полюса. Это есть не что иное, как знакомое нам явление индуцированного магнетизма (90, 73). Если μ во всем поле одинаково, то

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = 0,$$

как это мы и принимали при наших прежних исследованиях (124, 106).

Таким образом из первого уравнения *Максвелла* мы вывели все свойства магнитного поля электрических токов, а пользуясь гипотезой *Ампера*, по которой в намагниченных телах тоже циркулируют электрические токи, мы можем применять эти уравнения и к магнитам.

Мы рассматривали пока только стационарные явления, при которых производные по времени равны нулю. Для нестационарных явлений второе уравнение *Максвелла*, в которое входит производная по времени от *магнитной* индукции, дает нам законы электромагнитной индукции, открытой *Фарадеем*, тогда как первое уравнение, в которое входит производная по времени от *электрической* индукции, показывает, что кроме электромагнитной индукции, открытой *Фарадеем*, существует еще и магнито-электрическая индукция, т. е. образование магнитного поля переменным электрическим полем. Из обеих указанных индукций вместе следует, что электромагнитное поле распространяется в пустоте со скоростью света (закон *Максвелла*).

Мы показали в этом параграфе, что основные уравнения *Максвелла* могут служить *исходною гипотезою* для количественного описания всех электромагнитных явлений, и в этом заключается их громадное значение. Необходимо однако заметить, что опыт обнаруживает целый ряд явлений, для объяснения которых уравнения *Максвелла* оказываются *недостаточными*; более того: в применении

к движущимся телам уравнения Максвелла и выводы, сделанные из них Герццем, приводят к следствиям, которые противоречат опыту.

141. Изменение потока вектора при движении. Перед тем как перейти к рассмотрению опытов с движущимися телами, нам необходимо несколько подготовить наши формулы. Дело в том, что в обоих уравнениях Максвелла мы имеем в правых частях изменение потока индукции со временем. Изменение потока какого-либо вектора

$$N = \int (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S})$$

сквозь какую-либо поверхность может происходить от трех причин, которые мы рассмотрим отдельно.

Во-первых, само векторное поле \mathbf{A} может изменяться со временем. Изменение потока, происходящее от этой причины, мы можем выразить так:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \int \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

Затем поток может изменяться и в постоянном поле \mathbf{A} , если рассматриваемая нами поверхность движется, причем и контур этой поверхности может изменяться. Происходящее от этого изменение потока мы уже вычисляли раньше (изменение потока магнитной индукции: 133, 114), и мы можем воспользоваться полученными нами там формулами и для этого более общего случая, написав:

$$\left| d\dot{N}_1 = [\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}] \cdot d\mathbf{l} \right.$$

Здесь $d\mathbf{l}$ означает элемент длины контура поверхности, а \mathbf{v} — его скорость. Для того чтобы вычислить изменение потока при движении или деформации всего контура, мы должны проинтегрировать это выражение по всему движущемуся контуру рассматриваемой поверхности. Но мы можем воспользоваться теоремой Стокса и превратить линейный интеграл в поверхностный. Тогда получим:

$$\dot{N}_1 = \oint [\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}] \cdot d\mathbf{l} = \int \text{curl} [\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}] \cdot d\mathbf{S}.$$

Если рассматриваемое векторное поле имеет источники, плотность которых ρ , как известно, определяется выражением

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \text{div} \mathbf{A},$$

то поверхность при своем движении может перейти через некоторые из этих источников. Во время такого перехода источник, находившийся с одной стороны поверхности, окажется через некоторый момент времени с другой стороны этой поверхности, отчего согласно теореме Гаусса поток индукции изменится на величину

$$4\pi \rho \cdot do = 4\pi \rho \cdot d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{S},$$

а если та точка поверхности, которая переходит через источник, имеет относительно источника скорость $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{s}}{dt}$ (или сам источник движется сквозь поверхность с этой скоростью), то быстрота изменения потока индукции будет равна:

$$d\dot{N}_2 = 4\pi \rho \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \text{div} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}.$$

Суммируя все разобранные изменения вместе, мы получаем полное изменение потока со временем (полную производную по времени):

$$\frac{dN}{dt} = \dot{N} = \int \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{curl} [\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}] + \text{div} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \right] \cdot d\mathbf{S}.$$

(Это выражение мы уже имели в ч. I, стр. 175, 133.)

В применении к первому уравнению Максвелла, в котором мы имеем изменение потока электростатической индукции \mathbf{D} , последний член даст нам конвекционный ток

$$\text{div} \mathbf{D} \cdot \mathbf{v} = 4\pi \rho \cdot \mathbf{v},$$

который мы ввели независимо от приведенных соображений, между тем как для второго уравнения Максвелла

$$\text{div} \mathbf{B} = 0.$$

142. Опытная проверка первого уравнения для движущихся тел. Применяя преобразования, указанные в предыдущем параграфе, к первому уравнению Максвелла, получаем для движущихся тел следующее:

$$\text{curl} \mathbf{M} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{i} + \text{curl} [\mathbf{D} \cdot \mathbf{v}] + 4\pi \rho \cdot \mathbf{v} \right).$$

Что касается последнего члена правой части, т. е. конвекционного тока, то опыты, произведенные Роулэндом и многими другими исследователями, вполне подтвердили теорию и показали,

что по своим магнитным действиям конвекционные токи $\rho \mathbf{v}$ вполне эквивалентны гальваническим токам \mathbf{i} . Магнитное действие токов смещения (первый член справа) подтверждается опытами *Герца* с электромагнитными волнами. Нам остается рассмотреть только третий член, который мы для наглядности переносим в левую часть, и получаем там:

$$\text{curl} \left(\mathbf{M} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{D}] \right).$$

Это означает, что кроме обычного магнитного поля, обусловленного различными токами и магнитами, мы получаем еще магнитное поле, обусловленное движением диэлектриков; напряжение этого последнего поля равно:

$$\mathbf{M}' = \frac{1}{c} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{D}].$$

Магнитное поле движущихся диэлектриков было действительно обнаружено на опыте *Рентгеном*; однако опыты *Рентгена* носили лишь качественный характер и не были настолько точны, чтобы установить величину напряжения магнитного поля. Позднейшие опыты *А. Эйхенвальда* показали однако, что полученная из теории *Максвелла* формула *Герца* не верна и что ее нужно заменить формулой:

$$\mathbf{M}' = \frac{1}{c} [\mathbf{v} (\mathbf{D} - \mathbf{E})].$$

Эта последняя формула следует из теории *Лорентца*, о которой мы будем говорить подробнее ниже. Но принципиальная разница между этими двумя теориями уже ясна и из приведенных формул. Действительно индукция \mathbf{D} представляет собою густоту линий сил в диэлектрике и состоит из двух частей: часть $(\epsilon - 1)\mathbf{E}$ обусловлена поляризацией молекул диэлектрика, другая же часть линий сил \mathbf{E} проходит помимо молекул, в чистом эфире. При движении диэлектрика движутся только его молекулы, тогда как линии сил в чистом эфире остаются в покое и никакого магнитного поля не производят.

Таким образом опыты *Эйхенвальда* показывают, что пространство, лишенное материи, которое мы привыкли называть эфиром, нужно считать неподвижным даже внутри движущихся тел.

143. Движущийся конденсатор. Для того чтобы получить еще большую уверенность в том, что уравнения *Максвелла* для движущихся тел должны быть заменены уравнениями *Лорентца*, *А. Эйхенвальд* произвел следующий опыт. Плоский конденсатор в виде круглого диска (с охранительным кольцом) мог вращаться вокруг оси, проходящей через его центр, перпендикулярно к его плоскости. Заряжая такой конденсатор электричеством и приведя его в быстрое вращение, мы получаем на его обкладках конвекционный ток, величина которого пропорциональна плотности действительного электричества на обкладках:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \epsilon E.$$

Но так как вместе с обкладками вращается и диэлектрик, то на поверхности этого диэлектрика мы получаем фиктивный конвекционный ток, пропорциональный плотности фиктивных зарядов (50, 40):

$$\sigma' = -\frac{1}{4\pi} (\epsilon - 1) E.$$

Оба эти тока обнаруживают магнитное действие. Но сложив плотности действительных и фиктивных зарядов, мы получаем так называемые свободные заряды

$$\sigma + \sigma' = \frac{1}{4\pi} E,$$

откуда заключаем, что магнитные действия движущегося конденсатора не должны зависеть от диэлектрической постоянной находящегося между его обкладками диэлектрика. Это заключение и было подтверждено на опыте *А. Эйхенвальдом*.

Если бы мы следовали теории *Максвелла-Герца*, то для расчета магнитного действия движущегося диэлектрика мы должны были бы взять вместо σ' величину

$$-\frac{1}{4\pi} D = -\frac{1}{4\pi} \epsilon E,$$

которая при сложении с плотностью действительных зарядов σ дала бы в сумме нуль.

Таким образом по теории *Максвелла-Герца* заряженный конденсатор, в котором обкладки движутся вместе с диэлектриком, никакого магнитного поля образовать не должен, между тем как по

V. ТЕОРИЯ ЛОРЕНЦА.

145. Теория электронов. Теория электронов была основана *Гельмгольцем* и развита в особенности *Лорентцом* (H. V. Helmholtz, 1880; H. A. Lorentz, 1895). В основе этой теории лежит представление о том, что материальные атомы состоят из мельчайших частичек, заряженных положительным и отрицательным электричеством. В настоящее время это воззрение подтверждается на многочисленных опытах: в явлении электролиза, при разрядах в газах, в радиоактивных телах и в спектрах лучеиспускания. При этом оказалось, что частички, заряженные отрицательным электричеством, во всех телах одинаковы, они получили название *электронов* и представляют собою *атомы* электричества. Что же касается положительных частичек, то они бывают разные и составляют *ядро* атомов химических элементов, вокруг которого электроны вращаются, как планеты вокруг солнца. Кроме того можно с большой вероятностью утверждать, что ядра атомов всех химических элементов состоят из ядер водорода; поэтому ядро атома водорода, заряженное положительным электричеством, получило название *протона* (первичная материя). По теории *Гельмгольца-Лорентца* все электрические и магнитные силы, которые мы наблюдаем, действуют только на протоны и электроны, между тем как пространство, *лишенное* протонов и электронов, а также и пространство *между* электронами и протонами внутри материальных тел, т. е. то, что мы привыкли называть *чистым мировым эфиром*, никаким силам не подвержено и потому всегда остается в *покое*.

Исходя из этого воззрения, *Гельмгольц* основал теорию дисперсии света, а *Лорентц* ввел поправку в уравнения *Максвелла-Герца*, которая была подтверждена на опытах *Эйхенвальда* и *Уильсона*. О теории дисперсии мы будем говорить особо; что же касается поправки, введенной *Лорентцом* в уравнения *Максвелла-Герца*, то ее мы можем получить на основании следующих простых соображений. В уравнениях *Максвелла-Герца* мы имеем в последнем члене правой части выражения

$$\frac{1}{c} \operatorname{curl} [\mathbf{D} \cdot \mathbf{v}]; \quad \frac{1}{c} \operatorname{curl} [\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}],$$

которые означают индукционное действие движущихся со скоростью \mathbf{v} электрических и магнитных линий сил \mathbf{D} и \mathbf{B} . Но по воззрениям электронной теории каждая из этих индукций составлена из двух

теории *Лорентца* должно возбуждаться магнитное поле вышеуказанного напряжения. Опыт *Эйхенвальда* подтверждает теорию *Лорентца*.

К этому необходимо прибавить, что с экспериментальной точки зрения опыт с движущимся конденсатором гораздо *определеннее*, чем с движением одного диэлектрика, потому что в последнем случае между диэлектриком и обкладками образуются воздушные течения, которые трудно ввести в расчеты, а между тем их действия имеют по обеим теориям различное значение.

144. Опытная проверка второго уравнения для движущихся тел. Применяя то же самое преобразование ко второму уравнению, получаем для движущихся тел

$$-\operatorname{curl} \mathbf{E} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{curl} [\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}] \right).$$

Нас интересует здесь второй член правой части. Переносим его в левую часть, получаем:

$$-\operatorname{curl} \left(\mathbf{E} - \frac{1}{c} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}] \right).$$

Это означает, что кроме напряжения \mathbf{E} , происходящего от других уже изученных нами причин, появляется добавочное напряжение.

$$\mathbf{E}' = -\frac{1}{c} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}],$$

обусловленное движением диэлектрика в магнитном поле.

Для проверки этого уравнения (*Уильсон*, Wilson) поместил между полюсами электромагнита небольшой цилиндрический конденсатор так, что его ось была параллельна магнитному полю. При вращении конденсатора вокруг его оси в нем возбуждалось радиальное электрическое поле, которое можно было смерить, соединив наружную обкладку и внутреннюю обкладку (т. е. ось вращения) конденсатора при помощи скользящих контактов с электрометром. Как видим, этот опыт *Уильсона* вполне аналогичен опыту *Фарадея* (152, 129) с медным диском, вращающимся в магнитном поле. Не приводя расчета самого опыта, мы скажем только, что и опыт *Уильсона* потребовал изменения вышенаписанной формулы и замены ее формулой следующего вида:

$$\mathbf{E}' = -\frac{1}{c} [\mathbf{v} \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{M})]$$

в согласии с теорией *Лорентца*.

частей: из напряжений поля \mathbf{E} и \mathbf{M} , действующих в чистом эфире, и дополнительного поля, образуемого электронами, т. е. дополнительного поля электрической и магнитной поляризации \mathbf{P}_e и \mathbf{P}_m . Мы должны следовательно написать (49, 40) (90, 74):

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}_e \quad \mathbf{B} = \mathbf{M} + 4\pi \mathbf{P}_m.$$

При движении материи движутся только находящиеся в ней протоны и электроны, между тем как эфир остается в покое. Это означает, что первые члены написанных сумм в движении не участвуют и никакого индукционного действия произвести не могут, а потому вышенаписанные выражения должны быть заменены следующими:

$$\frac{1}{c} \operatorname{curl} [(\mathbf{D} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{v}], \quad \frac{1}{c} \operatorname{curl} [(\mathbf{B} - \mathbf{M}) \cdot \mathbf{v}],$$

что и подтверждается опытами *Эйхенвальда* и *Уильсона*.

Исходя из той или иной гипотезы о расположении и о движении протонов и электронов внутри атомов материальных тел, можно построить теорию поляризации тел и найти связь между коэффициентами ϵ и μ и молекулярным строением тел, их зависимость от температуры, давления и т. д. Однако подобные вопросы завлекли бы нас слишком далеко от нашей главной задачи изучения свойств электромагнитного поля, а кроме того все эти вопросы скорее относятся к молекулярной физике. Поэтому мы ограничимся здесь выводами *Лорентца*, относящимися к электромагнитному полю.

146. Уравнения Лорентца. Проще всего и нагляднее будет, если мы будем исходить из основных законов, установленных опытом, а именно из закона *Био-Савара* (107, 94):

$$\mathbf{F}_m = \frac{m}{r^2} [J \cdot d\mathbf{l} \cdot \mathbf{r}_{lm}].$$

Силу тока J мы выразим через плотность тока \mathbf{i} , а плотность тока, как мы знаем, равна плотности электричества ρ , умноженной на скорость движения \mathbf{v} . Поэтому мы можем написать:

$$J \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{i} (d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{l}) = \rho \cdot d\mathbf{o} \cdot \mathbf{v} = e \mathbf{v},$$

где e — количество электричества, движущегося со скоростью \mathbf{v} . Если это количество электричества выражено в электростатических единицах, то при вычислении магнитного поля нам следовало бы разделить его на c . Но так как отношение скорости движения \mathbf{v} к ско-

рости света c будет у нас в дальнейшем часто встречаться, то мы условимся величину c считать за единицу скоростей (так называемая *астрономическая единица*), и тогда делителя c можно в формулах не писать. После всех этих замечаний мы напишем формулу *Био-Савара* в следующем виде:

$$\mathbf{F}_m = \frac{me}{r^2} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_{em}].$$

Но величина $\frac{e}{r^2}$ (при $\epsilon = 1$) представляет собою напряжение электрического поля \mathbf{E} ; кроме того, разделив силу \mathbf{F}_m на величину полюса m , мы получим напряжение магнитного поля

$$\mathbf{M}_1 = [\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_2].$$

Мы поставили при \mathbf{M} значок (1), желая указать, что \mathbf{M}_1 означает напряжение магнитного поля в неподвижном пространстве, относительно которого заряд e и его поле \mathbf{E} движутся со скоростью \mathbf{v} .

Далее мы знаем, что закону *Био-Савара* соответствует закон *Ампера*, т. е. действие магнитного полюса, или вообще магнитного поля на электрический ток силою, равною и противоположно направленною. Поэтому при переходе от формулы *Био-Савара* к формуле *Ампера* нам нужно только заменить \mathbf{r}_{em} через \mathbf{r}_{me} :

$$\mathbf{F}_e = \frac{em}{r^2} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_{me}].$$

Мы обозначим эту силу \mathbf{F}_e , потому что теперь мы имеем дело с электрической силой, действующей на электрический заряд e , находящийся в движении. Заменяя в этой формуле $\frac{m}{r^2}$ (при $\mu = 1$) через \mathbf{M} и разделяя на e , мы получаем силу, отнесенную к единице заряда, т. е. напряжение поля

$$\mathbf{E}_2 = [\mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_1].$$

Здесь мы поставили при \mathbf{E} значок (2), потому что \mathbf{E}_2 означает напряжение поля у движущегося заряда, тогда как \mathbf{M}_1 представляет собою напряжение магнитного поля в неподвижном пространстве.

Заметим, что эту последнюю формулу мы могли бы получить, исходя из закона электромагнитной индукции *Фарадея*, как это

легко видеть, сравнив ее с формулой примененной нами при расчете униполярной индукции (152, 120):

$$\mathcal{E} = \oint (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}) = \int [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{s}.$$

Таким образом в теории Лорентца законы Ампера и Фарадея соединяются в одной и той же формуле.

На основании всех этих соображений мы получаем для электромагнитной силы, с которой напряжения \mathbf{E} и \mathbf{M} действуют на движущийся заряд e , формулу:

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{M}]).$$

Теперь представим себе две системы электронов S_1 и S_2 , из которых *вторая* система движется относительно первой системы со скоростью \mathbf{v} . Само собою разумеется, что при этом первая система движется относительно второй со скоростью $-\mathbf{v}$; это прямо следует из общего понятия *относительных* движений. Обозначим через \mathbf{E}_1 и \mathbf{M}_1 напряжения полей в первой системе и через \mathbf{E}_2 и \mathbf{M}_2 напряжения полей во второй системе. Тогда мы получим следующее.

В системе S_1 магнитное поле будет образовано из двух частей: во-первых, в ней будет проявляться магнитное поле второй системы \mathbf{M}_2 и кроме того в ней появится магнитное поле движущихся вместе с системой S_2 электрических зарядов e :

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2 + [\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_2].$$

Точно так же и электрическое поле системы S_1 будет состоять из двух частей; мы заметим электрическое поле второй системы \mathbf{E}_2 и *индуцированное* электрическое поле, получающееся от движения первой системы относительно второй со скоростью $-\mathbf{v}$. На основании приведенных выше законов Ампера и Фарадея мы должны для этого индуцированного поля написать $[\mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_2]$. Таким образом для результирующего напряжения электрического поля в первой системе получаем

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 - [\mathbf{v}\mathbf{M}_2].$$

Основываясь на аналогичных соображениях, мы можем составить выражения для напряжений поля *второй* системы. Однако, если мы сопоставим все полученные таким образом формулы вместе:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{E}_2 - [\mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_2], & \mathbf{E}_2 &= \mathbf{E}_1 + [\mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_1], \\ \mathbf{M}_1 &= \mathbf{M}_2 + [\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_2], & \mathbf{M}_2 &= \mathbf{M}_1 - [\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_1], \end{aligned}$$

то заметим, что они противоречат друг другу. Действительно, например из первой формулы первой системы следует, что

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 + [\mathbf{v} \cdot \mathbf{M}_2],$$

а это не сходится с первой формулой второй системы. Правда, разница между \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 зависит лишь от v^2 , а так как v , т. е. *отношение* скорости движения к скорости света, обычно не превышает 10^{-4} , то в большинстве случаев различием в этих формулах можно пренебречь. Так например в опытах Роулэнда, Эйхенвальда и Уильсона скорости были около 150 м в секунду, скорость пули и боевых снарядов не превышает 1000 м в секунду, скорость движения Земли на ее орбите — около 30 км в секунду; с другой стороны, скорости движения ионов при газовых разрядах бывают величиною до 0,1 скорости света, а скорости электронов, выбрасываемых радием, достигают величины 0,99 скорости света. В особенности последние из перечисленных явлений требуют от теории большей точности. Лорентц показал, что можно устранить указанное несоответствие в формулах, введя некоторый множитель (здесь v выражено в обычных абсолютных единицах, как и ρ):

$$\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

и при том следующим образом. Если мы направим ось Ox декартовых координат параллельно скорости v системы S_2 относительно системы S_1 , то получим исправленные уравнения Лорентца в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_{x1} &= E_{x2}, & M_{x1} &= M_{x2}, \\ \alpha E_{y1} &= E_{y2} + v_x M_{z2}, & \alpha M_{y1} &= M_{y2} - v_x E_{z2}, \\ \alpha E_{z1} &= E_{z2} - v_x M_{y2}, & \alpha M_{z1} &= M_{z2} + v_x E_{y2}. \end{aligned}$$

Во всех этих уравнениях v_x означает *отношение* скорости движения к скорости света c в пустоте.

Если мы из этих уравнений определим напряжения во *второй* системе, выразив их через напряжения *первой* системы, то получим

$$\begin{aligned} E_{x2} &= E_{x1}, & M_{x2} &= M_{x1}, \\ \alpha E_{y2} &= E_{y1} - v_x M_{z1}, & \alpha M_{y2} &= M_{y1} + v_x E_{z1}, \\ \alpha E_{z2} &= E_{z1} + v_x M_{y1}, & \alpha M_{z2} &= M_{z1} - v_x E_{y1}. \end{aligned}$$

Эти уравнения отличаются от первых только перестановкой знаков и изменением знака у скорости v_x в полном согласии с принципом относительных движений.

147. Пример движущегося плоского конденсатора. Представим себе, что на Земле установлен заряженный конденсатор. Опыт показывает, что как бы мы ни ориентировали электрическое поле конденсатора относительно направления движения Земли, мы не можем обнаружить образуемое им магнитное поле, хотя оно несомненно существует, как это следует из опытов *Эйхенвальда*; только для его наблюдения магнетометр (магнитная стрелка) не должен участвовать в движении Земли. Магнитное поле движущихся зарядов представляет собою *относительное* явление; наблюдатель, движущийся вместе с зарядами, увидит только электрическое поле этих зарядов, а для наблюдения магнитного поля ему надо оставаться в покое или в более общем случае находиться в движении *относительно* зарядов.

Применяя к этому случаю уравнения *Лорентца* и рассматривая движущуюся Землю вместе с заряженным конденсатором и наблюдателем как *вторую* систему, мы должны положить в вышенаписанных уравнениях $M_2 = 0$. Приняв, что электрическое поле направлено по оси y , мы имеем из последнего уравнения:

$$0 = \kappa M_{z2} = M_{z1} - v_x E_{y1};$$

$$M_{z1} = v_x E_{y1}.$$

Последнее равенство есть не что иное, как закон *Био-Савара* для движущихся зарядов. Далее, если мы в первых трех уравнениях положим $M_{y2} = M_{z2} = 0$, то получим:

$$E_{x1} = E_{x2}; \quad \kappa E_{y1} = E_{y2}; \quad \kappa E_{z1} = E_{z2}.$$

Это означает, что электрические поля в первой и второй системе будут отличаться друг от друга. Если наблюдатель, находящийся на Земле, определит в конденсаторе напряжение поля E_{y2} , то с точки зрения покоящегося наблюдателя *то же самое поле* даст напряжение

$$E_{y1} = \frac{1}{\kappa} E_{y2},$$

которое немного больше, чем E_{y2} . Так как скорость движения Земли равна 30 км в секунду, то

$$v_x = \frac{v}{c} = 10^{-4}; \quad \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 10^{-8}; \quad \kappa = \sqrt{1 - 10^{-8}}.$$

Мы видим, что даже при такой большой скорости, как скорость движения Земли вокруг Солнца (в 100 раз больше, чем скорость звука в воздухе при обычных условиях), разница между напряжениями электрических полей E_1 и E_2 лежит на границе наших самых точных измерений.

Полезно заметить себе, что явления, зависящие от первой степени $\frac{v}{c}$, носят название электромагнитных явлений *первого порядка*; сюда относятся магнитные поля движущихся зарядов и электрические поля при движении в магнитном поле (индукция *Фарадея*). Теория этих явлений постоянно применяется в электротехнике и подтверждается на опыте. Что же касается явлений, зависящих от второй степени $\left(\frac{v}{c}\right)^2$, которые носят название электромагнитных явлений *второго порядка*, то они могут быть наблюдаемы только при очень больших скоростях движущихся электронов, выбрасываемых радиоактивными телами, и для электротехники они пока не имеют значения. Для явлений второго порядка было предложено несколько теорий; однако опыты с быстро движущимися электронами дали результаты, ближе всего подходящие к теории *Лорентца*, которой мы и будем держаться в дальнейшем.

148. Поле движущихся зарядов. Разберем теперь более общий случай, когда нам дана система S_2 , в которой распределены электрические заряды, образующие в этой системе *электростатическое* поле. Это означает, что все электроны (или вообще электрические заряды) находятся в относительном покое и никакого магнитного поля в этой системе не образуют. Пусть вся эта система целиком как твердое (неизменяемое) тело движется равномерно по оси Ox со скоростью v . Тогда на основании уравнений *Лорентца* мы получим в неподвижном пространстве *электрическое* и *магнитное* поле; напряжения этого поля могут быть выражены через напряжения электрического поля в движущейся системе формулами (скорость v — в абсолютных единицах):

$$E_{x1} = E_{x2}, \quad M_{x1} = 0,$$

$$E_{y1} = \frac{1}{\kappa} E_{y2}, \quad M_{y1} = -\frac{v}{c} \frac{1}{\kappa} E_{z2},$$

$$E_{z1} = \frac{1}{\kappa} E_{z2}, \quad M_{z1} = +\frac{v}{c} \frac{1}{\kappa} E_{y2},$$

$$\kappa = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Что касается магнитного поля \mathbf{M}_1 , то оно может быть определено непосредственно по электрическому полю \mathbf{E}_1 по формуле (рис. 46):

$$\mathbf{M}_1 = \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{E}_1].$$

Но если мы будем сравнивать электрические поля в движущейся и неподвижной системе, то увидим, что тут соотношения несколько сложнее. Продольная составляющая электрического поля в обеих системах одинакова, тогда как поперечные составляющие E_y и E_z для неподвижного наблюдателя больше, чем для наблюдателя, движущегося вместе с зарядами. Следовательно неподвижному наблюдателю электрическое поле покажется *деформированным*, и нетрудно выяснить, какова эта деформация. Определим для этого наклонение электрических линий сил к направлению движения. Обозначая угол наклонения линий сил к оси OX через α_1 , мы можем написать:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{\sqrt{E_{y1}^2 + E_{z1}^2}}{E_{x1}} = \frac{1}{\kappa} \frac{\sqrt{E_{y2}^2 + E_{z2}^2}}{E_{x2}} = \\ &= \frac{1}{\kappa} \operatorname{tg} \alpha_2. \end{aligned}$$

Рис. 46. Движущийся заряд: его электрическое и магнитное поле.

Эта формула показывает, что все линии сил во время движения отклоняются от своего нормального направления и *увеличивают* угол, образуемый ими с направлением движения, потому что $\kappa < 1$. Не нужно однако забывать, что это отклонение только *кажущееся*; оно представляется тому наблюдателю, относительно которого вся электростатическая система находится в движении; если же двигаться вместе с зарядами, то мы увидим нормальное недеформированное *электростатическое* поле.

Полученная нами кажущаяся деформация поля может быть описана геометрически очень просто; для этого достаточно представить себе, что все поле сжимается по оси OX , т. е. по направлению скорости движения, и что при этом относительное уменьшение продольных размеров поля равно κ . Действительно, если мы возьмем

какой-либо вектор dr , с проекциями на оси координат dx , dy , dz , то угол наклонения α к оси OX определится формулой:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{(dy)^2 + (dz)^2}}{dx}.$$

Если же мы уменьшим все координаты x , оставляя y и z неизменными, т. е. положим

$$dx' = \kappa \cdot dx,$$

то получим в деформированном поле:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\sqrt{(dy')^2 + (dz')^2}}{dx'} = \frac{1}{\kappa} \operatorname{tg} \alpha.$$

Это и есть то соотношение, которое мы получили выше для вектора \mathbf{E} . Рис. 47 изображает симметричное поле шарового заряда, а рис. 48 представляет то же самое поле в деформированном виде,

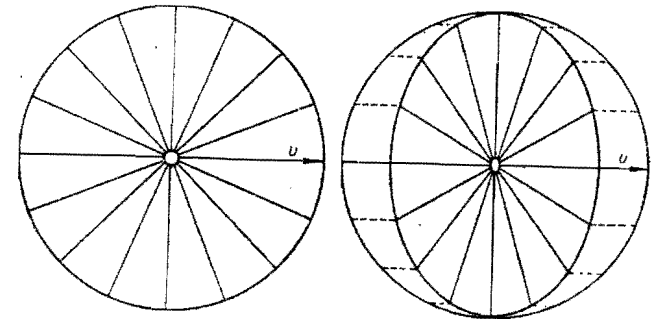


Рис. 47. Электрическое поле неподвижного заряда.

Рис. 48. Электрическое поле движущегося заряда.

как оно представляется неподвижному наблюдателю, относительно которого заряженный шар движется со скоростью $0,7c$.

Указанная здесь деформация будет нам служить в дальнейшем для упрощения вычислений поля движущихся зарядов. Для этого мы вычислим сперва поле неподвижных зарядов, а затем произведем вышеуказанную деформацию и получим таким образом все величины электромагнитного поля в случае движения.

Однако нетрудно видеть, что эта деформация касается не только направления электрических и магнитных сил поля, но также и распределения зарядов в нем. Проще всего убедиться в этом, если

написать уравнение расхождения векторного поля \mathbf{E}_1 . Для неподвижного наблюдателя мы имеем ($\epsilon = 1$):

$$\frac{\partial E_{x1}}{\partial x_1} + \frac{\partial E_{y1}}{\partial y_1} + \frac{\partial E_{z1}}{\partial z_1} = 4\pi\rho_1.$$

Если мы выразим напряжение \mathbf{E}_1 через напряжения \mathbf{E}_2 по формулам *Лорентца*, то получим

$$\frac{\partial E_{x2}}{\partial x_1} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial E_{y2}}{\partial y_1} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial E_{z2}}{\partial z_1} = 4\pi\rho_1.$$

Сравнив это с тем уравнением, которое имеет место для электростатического поля (для наблюдателя, движущегося вместе с зарядами):

$$\frac{\partial E_{x2}}{\partial x_2} + \frac{\partial E_{y2}}{\partial y_2} + \frac{\partial E_{z2}}{\partial z_2} = 4\pi\rho_2,$$

мы видим, что, производя деформацию, т. е. положив

$$dx_1 = \kappa \cdot dx_2,$$

мы должны одновременно с этим положить:

$$\rho_1 = \frac{1}{\kappa} \rho_2.$$

Таким образом плотность электричества, с точки зрения неподвижного наблюдателя и с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с зарядами, будет иметь различное значение. Тем не менее величина заряда e для обоих наблюдателей будет одна и та же, потому что плотность увеличилась только потому, что мы объем уменьшили введенной нами деформацией:

$$do_1 = dx_1 dy_1 dz_1 = \kappa dx_2 dy_2 dz_2 = \kappa \cdot do_2;$$

$$de_1 = \rho_1 do_1 = \frac{1}{\kappa} \rho_2 \kappa \cdot do_2 = de_2.$$

Но если напряжения полей изменяются при переходе от системы S_2 к системе S_1 , а величины зарядов остаются неизменными, то электрические силы (произведения зарядов на соответственные напряжения) будут изменяться по формулам (ср. 182, 146):

$$\begin{aligned} F_{x1} &= eE_{x1} = eE_{x2} = F_{x2}, \\ F_{y1} &= eE_{y1} - ev_x M_{z1} = \kappa \cdot eE_{y2} = \kappa F_{y2}, \\ F_{z1} &= eE_{z1} + ev_x M_{y1} = \kappa \cdot eE_{z2} = \kappa F_{z2}. \end{aligned}$$

Рассмотренный нами переход от системы S_2 к системе S_1 и обратно называется вообще *преобразованием*. Это преобразование нами выбрано таким образом, чтобы в каждой из этих двух систем формулы электромагнитного поля

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{M} = 0, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} V, \\ \mathbf{F} &= e(\mathbf{E} + [\mathbf{v} \cdot \mathbf{M}]) \end{aligned}$$

оставались неизменными. Это означает, что в каждой системе в отдельности соблюдаются известные нам законы *Кулона*, *Ампера*, *Фарадея*, а наши формулы показывают, каким образом расчет, произведенный для системы зарядов S_2 в предположении, что эта система находится в *покое*, нужно изменить, чтобы получить поле, наблюдаемое в системе S_1 , относительно которой система S_2 движется с равномерной скоростью v_x . При таком преобразовании все величины немного изменяются, кроме количества электричества e , которое остается *неизменным*. Величины, остающиеся неизменными, называются *инвариантами* преобразования.

149. Энергия движущегося заряженного шара. Воспользуемся указанным в предыдущем параграфе преобразованием для расчета энергии движущегося заряженного шара. Обозначим радиус шара через a и его заряд через e ; мы предположим, что этот заряд распределен по поверхности шара и что следовательно внутри шара электрическое поле равно нулю.

Для наблюдателя, относительно которого шар находится в покое, поле будет электростатическое и напряжение поля в наружном пространстве будет такое же, как будто весь заряд e был сосредоточен в центре шара (22) ($\epsilon = 1$):

$$E_r = \frac{e}{r^2}.$$

Для вычисления электростатической энергии мы должны плотность энергии

$$U_0 = \frac{1}{8\pi} E_r^2 = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{e^2}{r^4}$$

умножить на элемент объема do_2 и проинтегрировать по всему объему поля *снаружи* шара. За элемент объема мы можем принять объем, заключающийся между двумя концентрическими шаровыми поверхностями с радиусами r и $(r + dr)$

$$do_2 = 4\pi r^2 \cdot dr.$$

Тогда получаем:

$$U_2 = \frac{e^2}{2} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{e^2}{2} \left| -\frac{1}{r} \right|_a^\infty = \frac{e^2}{2a}.$$

Тот же результат мы могли бы получить, взяв половину произведения заряда e на его потенциал $V = \frac{e}{a}$:

$$U_2 = \frac{1}{2} eV = \frac{1}{2} e \frac{e}{a} = \frac{e^2}{2a}.$$

Но мы предпочли исходить из формулы для *плотности* энергии, имея в виду дальнейшие применения этих формул. С той же целью мы разложим энергию на две части, а именно:

$$U_2 = \frac{1}{8\pi} \int E_{x2}^2 \cdot d\omega_2 + \frac{1}{8\pi} \int (E_{y2}^2 + E_{z2}^2) \cdot d\omega_2.$$

Первый интеграл мы будем называть *продольной* составляющей энергии, тогда как второй интеграл мы назовем *поперечной* составляющей энергии; термины *продольный* и *поперечный* имеют отношение к направлению OX — скорости движения шара. Вследствие полной симметрии электростатического поля относительно центра шара продольная составляющая энергии будет представлять одну треть всей энергии, а поперечная составляющая — две трети этой энергии:

$$U_{2\text{ long}} = \frac{1}{3} U_2; \quad U_{2\text{ trans}} = \frac{2}{3} U_2.$$

Теперь предположим, что шар движется равномерно по оси OX со скоростью v . Тогда неподвижный наблюдатель увидит уже другое поле, и притом не только электрическое, но также и магнитное поле движущихся относительно него зарядов. Вычислим энергию этих полей. Формула для вычисления электрической энергии остается та же самая, как и прежде:

$$U_1 = \frac{1}{8\pi} \int E_{x1}^2 \cdot d\omega_1 + \frac{1}{8\pi} \int (E_{y1}^2 + E_{z1}^2) \cdot d\omega_1,$$

Выражая напряжения E_1 через напряжения E_2 по формулам *Лоренца* и припомнив, что элемент объема $d\omega_1$ нужно брать при расчете в деформированном виде, подставляем сюда:

$$E_{x1} = E_{x2}, \quad E_{y1} = \frac{1}{\chi} E_{y2}, \quad E_{z1} = \frac{1}{\chi} E_{z2}, \quad d\omega_1 = \chi d\omega.$$

Тогда имеем:

$$U_1 = \frac{\chi}{8\pi} \int E_{x2}^2 \cdot d\omega_2 + \frac{1}{\chi} \frac{1}{8\pi} \int (E_{y2}^2 + E_{z2}^2) d\omega_2.$$

Но первый интеграл представляет собою продольную энергию рассчитанного нами раньше электростатического поля, а второй интеграл равен поперечной энергии. Поэтому мы можем выразить энергию электрического поля в *неподвижном* пространстве через энергию *электростатического поля* заряженного шара:

$$U_1 = \left(\frac{1}{3} \chi + \frac{2}{3} \frac{1}{\chi} \right) U_2 = \frac{\chi^2 + 2}{3\chi} U_2 = \frac{1}{\chi} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right] U_2.$$

Аналогичным способом мы вычисляем магнитную энергию. Магнитное поле в неподвижном пространстве мы выражаем через электрическое поле движущегося шара по формулам *Лоренца*:

$$M_{x1} = 0, \quad M_{y1} = -\frac{v}{c} \frac{1}{\chi} E_{z2}, \quad M_{z1} = +\frac{v}{c} \frac{1}{\chi} E_{y2}.$$

Квадрат напряжения магнитного поля будет

$$M_1^2 = \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{\chi^2} (E_{y2}^2 + E_{z2}^2).$$

Подставляя это в формулу для магнитной энергии, получаем:

$$T_1 = \frac{1}{8\pi} \int M_1^2 \cdot d\omega_1 = \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{\chi} \frac{1}{8\pi} \int (E_{y2}^2 + E_{z2}^2) d\omega_2.$$

Интеграл, входящий здесь, равен поперечной электростатической энергии, и следовательно:

$$T_1 = \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{\chi} \frac{2}{3} U_2.$$

Таким образом полная электромагнитная энергия движущегося заряженного шара равна:

$$U_1 + T_1 = \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right] \frac{1}{\chi} U_2.$$

Заметим, что все полученные нами формулы остаются в силе для любого распределения зарядов в движущемся теле, лишь бы это распределение было симметрично относительно центра. Но величина U_2 будет для различных распределений иметь, вообще

говоря, различное значение. Мы видели выше, что для заряда e , распределенного равномерно по *поверхности* шара,

$$U_2 = \frac{e^2}{2a}.$$

Если тот же заряд распределен равномерно во всем *объеме* шара, то

$$U_2 = \frac{6}{5} \frac{e^2}{2a},$$

и соответственно с этим изменится энергия при движении.

150. Катодные и анодные лучи. При электрических разрядах в газах получаются так называемые *анодные* и *катодные лучи*; первые представляют собою *положительно* заряженные атомы (*ионы*) различных тел, тогда как вторые суть не что иное, как атомы *отрицательного* электричества, или *электроны*. При исследовании свойств этих лучей их подвергают действию электрического или магнитного поля и наблюдают изменение их пути. Если обозначить через e заряд движущихся ионов или электронов, то электрическое поле будет действовать на заряд e с силою $e\mathbf{E}$, а так как заряды эти находятся в движении, то магнитное поле будет действовать на них с силою $e[\mathbf{v}\cdot\mathbf{M}]$. В общем случае мы должны следовательно применить здесь формулу *Лорентца*:

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + [\mathbf{v}\cdot\mathbf{M}]).$$

С другой стороны, как ионы, так и электроны обладают некоторою массою, и на основании второго закона механики *Ньютона* мы должны силу \mathbf{F} приравнять к быстроте изменения импульса $m\mathbf{v}$ этих частиц:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}).$$

Как увидим ниже, масса m оказывается зависящей от скорости движения. Однако мы предположим, что скорость v не настолько близко подходит к скорости света c , чтобы необходимо было принимать во внимание изменимость массы со скоростью, и примем m *неизменной*, как в обычной механике. Впоследствии мы выясним, как изменяется масса со скоростью. Итак положим

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \dot{\mathbf{v}}.$$

Тогда получаем уравнение движения иона или электрона в электромагнитном поле:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}(\mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{M}]).$$

Если действует одно только электрическое и притом однородное поле, то мы имеем:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\mathbf{E}.$$

Уравнение выражает равноускоренное движение по направлению поля \mathbf{E} . При этом конечно все скорости, которые ион имел по направлениям, перпендикулярным к \mathbf{E} , остаются неизменными.

Если в начале движения (например электрон у отрицательного электрода, или у катода) скорость была равна нулю, то уравнение энергии дает нам

$$\frac{1}{2}mv^2 = -eEs = eV.$$

Здесь V есть разность потенциалов между рассматриваемой точкой пути и источником ионов (для электронов это может быть *катод*). Для всех электронов величина отношения $\frac{e}{m}$ одна и та же, а потому скорость электрона и разность потенциалов пройденного им пути под действием поля E связаны соотношением:

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m}V}.$$

Если электрическое поле направлено *перпендикулярно* к движению, то (как легко сообразить по аналогии с движением горизонтально брошенного тела) траектория заряда e будет парабола. Пусть первоначальное движение со скоростью v происходило по оси OX , а электрическое поле действует по оси OY . Тогда траектория заряда e определится уравнениями:

$$x = vt, \quad y = \frac{e}{m}E \frac{1}{2}t^2.$$

Теперь предположим, что на заряд e действует только магнитное поле напряжения M и пусть это поле всюду однородно и направлено перпендикулярно к движению заряда. Так как электромагнитная

сила имеет всегда направление, перпендикулярное и к направлению движения и к направлению магнитного поля (по самому смыслу векторного произведения двух векторов \mathbf{v} и \mathbf{M}), то электрон будет двигаться по окружности, радиус r которой определится из условия, чтобы центробежная сила $m \frac{v^2}{r}$ во все время движения уравновешивалась электромагнитной силой:

$$m \frac{v^2}{r} = e \frac{v}{c} M,$$

$$v = \frac{1}{c} \frac{e}{m} Mr.$$

По этой формуле, если нам известна скорость электрона, мы можем определить радиус r его траектории, или, наоборот, по наблюдаемому радиусу можем вычислить скорость.

Если первоначальная скорость электрона составляла с направлением магнитного поля некоторый угол α , то, как мы уже указали, продольная скорость электрона остается $v \cdot \cos \alpha$ без изменения, а поперечная скорость $v \sin \alpha$ определит радиус r . В результате электрон будет двигаться по *винтовой линии*, причем радиус винта будет равен:

$$r = \frac{m c v \sin \alpha}{e M}.$$

Ход винта можно определить из следующих простых соображений. Время полного оборота электрона вокруг оси винта равно:

$$t = \frac{2 \pi r}{v \cdot \sin \alpha} = \frac{2 \pi c m}{M e}$$

и за это время электрон успеет пройти *вдоль* оси винта путь

$$s = v \cdot \cos \alpha \cdot t = \frac{2 \pi c m}{M e} v \cos \alpha.$$

Это и будет ход винта.

Если данные нам электрическое и магнитное поля неоднородны, то вычисления становятся гораздо сложнее. Тем не менее *Штёрмеру* удалось путем последовательных приближений вычислить пути электронов, выбрасываемых Солнцем и попадающих под влияние магнитного поля Земли, и таким образом выяснить многие явления северных сияний.

151. Определение удельного заряда электронов. Заметим, что во всех вышеприведенных уравнениях движения электронов заряд e и масса m входят только в комбинации $\frac{e}{m}$. Поэтому как бы мы ни поставили опыты с действием электрического и магнитного поля на движущиеся электроны, нам удастся определить из них только *отношение* $\frac{e}{m}$, а не величины e и m в отдельности. Кроме того в уравнения вместе с величиной *удельного заряда* $\frac{e}{m}$ входит еще и скорость v движения электрона и для определения этих *двух* неизвестных нам необходимо иметь *два* уравнения. Этого можно достичь, наблюдая отклонение движущегося электрона одновременно и в электрическом и в магнитном поле (см. Общий курс электричества). Таким образом и были в действительности определены обе эти величины. Опыты дали для скорости электронов, смотря по обстоятельствам, весьма различные величины, как это и следовало ожидать. Что же касается удельного заряда электронов $\frac{e}{m}$, то оказалось, что эта величина *для всех электронов одна и та же*, а именно

$$\frac{e}{m} = 1,776 \cdot 10^7 \text{ CGS} - M.$$

Так как величина заряда электрона e может быть определена из совершенно других опытов и по наиболее точным опытам *Милликена* оказалась равной

$$e = 1,592 \cdot 10^{-20} \text{ CGS} - M,$$

то мы получаем для массы электрона

$$m = 9,02 \cdot 10^{-28} \text{ gr.}$$

Эта величина в 1835 раз меньше массы атома водорода, как ее определяют опыты, основанные на кинетической теории газов.

По известному отношению $\frac{e}{m}$ мы можем теперь выразить скорость электрона через разность потенциалов его пути (предполагая начальную скорость равную нулю):

$$v = 5,68 \cdot 10^7 \sqrt{V} \text{ cm/sec.}$$

Здесь разность потенциалов уже *выражена в вольтах*. Пользуясь этим соотношением, очень часто вместо скорости электрона v указывают разность потенциалов V в вольтах. При разности потенциалов в 10 000 вольт скорость получается около 0,2 скорости света. Впрочем эта формула применима только к электронам сравнительно небольшой скорости, потому что при скоростях, близких к скорости света, величина $\frac{e}{m}$ быстро уменьшается, что указывает на увеличение массы электрона, как это мы выясним ниже.

152. Электромагнитный импульс. Напишем опять основные уравнения электронной теории:

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{M} &= \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} 4 \pi \rho \cdot \mathbf{v}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4 \pi \rho, \\ -\operatorname{curl} \mathbf{E} &= \frac{1}{c} \dot{\mathbf{M}}, & \operatorname{div} \mathbf{M} &= 0, \\ \mathbf{F} &= \int \rho \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{M}] \right) \cdot d\mathbf{o} \end{aligned}$$

и преобразуем последнее уравнение, пользуясь предыдущими уравнениями. Подставляя сюда ρ и $\rho \mathbf{v}$, выраженные через напряжения полей, получаем:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4 \pi} \int \left\{ (\operatorname{div} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + [\operatorname{curl} \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}] - \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{M}] \right\} d\mathbf{o}.$$

Последний член, стоящий под интегралом, мы можем выразить через известный нам вектор *Пойнтинга* \mathbf{P} (164, 135) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4 \pi c} [\dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{M}] &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{4 \pi c} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{M}] \right) - \frac{1}{4 \pi c} [\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{M}}] = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{c^2} \mathbf{P} \right) + \frac{1}{4 \pi} [\operatorname{curl} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}]. \end{aligned}$$

Подставив это выражение для силы \mathbf{F} , мы увидим, что эту силу можно рассматривать как состоящую из трех частей, имеющих различное значение:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \frac{1}{4 \pi} \int \{ (\operatorname{div} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + [\operatorname{curl} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}] \} d\mathbf{o}, \\ \mathbf{F}_2 &= \frac{1}{4 \pi} \int \{ (\operatorname{div} \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}) + [\operatorname{curl} \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}] \} d\mathbf{o}, \\ \mathbf{F}_3 &= - \int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{c^2} \mathbf{P} \right) d\mathbf{o}. \end{aligned}$$

Для того чтобы выяснить значение этих выражений, возьмем проекцию на ось OX от первой силы; тогда получим под интегралом множитель при $d\mathbf{o}$, т. е. получим проекцию на ось OX силы, отнесенной к *единице объема*, в таком виде:

$$\begin{aligned} f_{1x} &= \frac{1}{4 \pi} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) E_x + \\ &+ \frac{1}{4 \pi} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) E_z - \frac{1}{4 \pi} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) E_y = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{8 \pi} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{8 \pi} (2E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{8 \pi} (2E_z E_x). \end{aligned}$$

Если мы сравним это выражение с тем, что мы получили раньше при преобразовании объемных сил в поверхностные (83, 64), то увидим, что выражения, стоящие в скобках за знаком дифференцирования по координатам, представляют собою не что иное как *максвелловы* напряжения в *электростатическом* поле.

Так как вторая часть силы \mathbf{F}_2 представлена совершенно таким же выражением с заменю \mathbf{E} через \mathbf{M} , то эта часть объемной силы может быть выражена через поверхностные напряжения *Максвелла* в *магнитном* поле (92, 76). Если мы соединим эти напряжения в *один тензор* \mathbf{T} , то сумму первых двух частей объемных сил мы можем выразить через поверхностные напряжения так:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}, & T_{xy} &= T_{yx}, \\ f_y &= \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z}, & T_{yz} &= T_{zy}, \\ f_z &= \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}, & T_{zx} &= T_{xz}. \end{aligned}$$

Обозначим силу, действующую на единицу объема, через \mathbf{f} , а правые части сокращенно обозначим как расхождение некоторого симметричного тензора напряжений \mathbf{T} ; при таком обозначении мы можем все три уравнения представить в одном уравнении:

$$\mathbf{f} = \operatorname{div} \mathbf{T}.$$

Наконец рассмотрим последнюю часть силы \mathbf{F} ; она представлена в виде производной по времени от некоторой величины:

$$\mathbf{G} = \int \frac{1}{c^2} \mathbf{P} d\mathbf{o}.$$

Но на основании второго закона механики *Ньютона* мы знаем, что сила равна производной по времени от величины, называемой *импульсом*; поэтому и величину \mathbf{G} называют *электромагнитным импульсом* поля, а величина

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{P}}$$

представляет собою импульс, заключающийся в *единице объема* электромагнитного поля, или *плотность электромагнитного импульса*.

Итак полную силу, действующую на единицу объема, в котором заключаются заряды, мы можем выразить формулой:

$$\mathbf{f} = \text{div } \mathbf{T} - \dot{\mathbf{g}}.$$

Умножая это на элемент объема do и интегрируя по всему рассматриваемому объему конечной величины, мы получаем всю силу:

$$\mathbf{F} = \int \text{div } \mathbf{T} \cdot do - \int \dot{\mathbf{g}} \cdot do.$$

Первый член правой части на основании теоремы *Гаусса* может быть выражен интегралом, распространенным на *поверхность* рассматриваемого объема, причем под интегралом будут тогда входить нормальные составляющие напряжений:

$$\mathbf{F} = \oint \mathbf{T}_n \cdot d\mathbf{S} - \dot{\mathbf{G}}.$$

153. Электромагнитная механика. Полученная нами формула имеет громадное значение; она позволит нам установить непрерывный переход от законов электромагнетизма к законам ньютоновской механики.

Рассмотрим некоторый объем электромагнитного поля, на поверхности которого величины \mathbf{E} и \mathbf{M} ничтожны. Этот объем может быть и бесконечно большого размера. Мы таким образом выделяем некоторую *изолированную* от остальных тел систему. Для такой изолированной системы поверхностный интеграл обращается в нуль и у нас остается:

$$\mathbf{F} = -\dot{\mathbf{G}}.$$

Но с другой стороны, силы \mathbf{F} , действующие на заряды, или на материальные тела, которые по электронной теории состоят из зарядов, должны подчиняться законам обычной механики; поэтому,

обозначая через \mathbf{G}_m *механический* импульс материальных тел рассматриваемой системы, мы можем написать:

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}_m,$$

и следовательно

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{G}}_m + \dot{\mathbf{G}} &= 0 \\ \mathbf{G}_m + \mathbf{G} &= \text{const.} \end{aligned}$$

Следовательно (геометрическая) сумма из материального и электромагнитного импульса остается постоянной. Это вполне соответствует известной теореме механики, по которой общий импульс системы материальных тел при отсутствии внешних воздействий остается постоянным и по величине и по направлению. Мы видим, что если в рассматриваемом объеме находятся не одни только материальные тела, но кроме того и электромагнитное поле, то при расчете общего импульса системы мы должны принять во внимание также импульс электромагнитного поля. Это не что иное, как первый закон механики *Ньютона*, примененный к системе тел.

В более общем случае, когда имеются и внешние воздействия, мы должны написать уравнение в таком виде:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{G}_m + \mathbf{G}) = \oint \mathbf{T}_n \cdot d\mathbf{S},$$

которое показывает, что силы, действующие на поверхность рассматриваемого объема, изменяют полный импульс системы, состоящей из материальных тел и из электромагнитного поля. Это и есть второй закон механики *Ньютона*.

Таким образом *электромагнитное поле* ведет себя с *механической* точки зрения совершенно так же, как *материальное тело*.

154. Пример. Самый простой пример применения понятия об электромагнитном импульсе мы получим при рассмотрении явления светового давления. Величину светового давления мы уже выводили раньше (169, 139), пользуясь воззрениями *Фарадея* и *Максвелла* о давлениях, которые оказывают электрические и магнитные линии сил перпендикулярно к своему направлению. Эти давления представлены у нас теперь тензором \mathbf{T} . Мы пришли к заключению, что давление это равно плотности энергии U электромагнитного поля у той поверхности, на которую падает свет:

$$\mathbf{T}_n = U.$$

Теперь мы можем получить тот же результат, пользуясь понятием об импульсе световой волны. Обозначая плотность световой энергии луча через U и скорость света через c , имеем для потока световой энергии сквозь квадратный сантиметр, поставленный перпендикулярно к лучу:

$$P = Uc.$$

Следовательно электромагнитный импульс световой волны в каждом кубическом сантиметре, или плотность импульса, выразится так:

$$g = \frac{P}{c^2} = \frac{U}{c} c_1,$$

где c_1 означает единичный вектор по направлению луча света.

Положим, что рассматриваемая пластинка целиком поглощает падающий на нее свет (абсолютно черная пластинка). Если мы построим на одном квадратном сантиметре поверхности пластинки цилиндр высотой, равной скорости света c , то очевидно пластинка будет каждую секунду поглощать все, что движется к ней в объеме этого цилиндра. Следовательно каждую секунду пластинка будет поглощать энергию в количестве:

$$W = Uc,$$

и ежесекундное поглощение импульса будет равно:

$$gc = U.$$

Но ежесекундное поглощение импульса — это все равно, что изменение величины импульса в единицу времени; а по второму закону механики это изменение должно сопровождаться силой. Мы получаем следовательно на поверхности пластинки *давление*, величина которого равна:

$$T = U.$$

Если пластинка совсем не поглощает света, а отражает его целиком по тому же направлению обратно (полированное зеркало), тогда *величина* импульса останется неизменной, но его *направление* изменится на противоположное. В этом случае ежесекундное изменение импульса определится на основании следующего соображения. Если падающий на пластинку импульс равен gc , то отраженный импульс будет равен $-gc$; разность между этими двумя величинами и будет равна изменению импульса в секунду:

$$gc - (-gc) = 2gc = 2U.$$

Следовательно давление света на отражающую пластинку будет вдвое больше, чем на поглощающую. Все эти следствия вполне согласуются с тем, что мы получили раньше.

Наконец, если пластинка сама лучеиспускает свет, т. е. посылает ежесекундно количество импульса gc , то она будет тоже испытывать давление, равное U . Пластинка и испускаемое ею электромагнитное поле с импульсом gc представляют собою совершенно такую же механическую систему, как например орудие и выбрасываемый орудием снаряд. Сообщая снаряду некоторый импульс, само орудие испытывает силу (или импульс), равную и противоположную (так называемая *отдача*, проявляющаяся при стрельбе).

В обычной механике *импульс*, или *количество движения* материального тела, выражается произведением массы на скорость тела. Основываясь на этом, мы можем электромагнитный импульс света разделить на скорость c и получить таким образом *электромагнитную массу* светового луча. Удобнее будет произвести этот расчет для *единицы* объема и, разделив плотность импульса g на c , получить массу в единице объема, или *электромагнитную плотность* светового луча:

$$g_{\text{м}} = \frac{g}{c} = \frac{U}{c^2}.$$

Мы видим, что электромагнитная масса луча равна его энергии, деленной на квадрат скорости света.

На вопросе об определении понятия электромагнитной массы мы остановимся подробнее в одном из последующих параграфов.

155. Электромагнитный импульс движущегося заряженного шара. Вычислим величину электромагнитного импульса, движущегося с постоянной скоростью v_x заряда, обладающего шаровой симметрией. Соотношения между напряжениями полей неподвижного и движущегося заряда мы уже получили выше (189, 149), а потому мы можем все напряжения полей, наблюдаемые в неподвижном пространстве, выразить через напряжение *электростатического поля* заряда, как если бы он находился в покое.

Для плотности электромагнитного импульса мы имеем:

$$g = \frac{1}{c^2} P = \frac{1}{4\pi c} [E \cdot M],$$

и проекции этого вектора на оси координат будут равны:

$$g_x = \frac{1}{4\pi c} [E_{y_1} M_{z_1} - E_{z_1} M_{y_1}] = \frac{v}{4\pi c^2} \frac{1}{\chi^2} (E_{y_1}^2 + E_{z_1}^2),$$

$$g_y = \frac{1}{4\pi c} [-E_{x_1} M_{z_1}] = -\frac{v}{4\pi c^2} \frac{1}{\chi} (E_{x_1} E_{y_1}),$$

$$g_z = \frac{1}{4\pi c} [E_{x_1} M_{y_1}] = -\frac{v}{4\pi c^2} \frac{1}{\chi} (E_{x_1} E_{y_1})$$

Для определения всего импульса мы должны проинтегрировать эти выражения по всему объему поля, причем элементы объема должны брать в деформированном виде (умножая на χ). Тогда для проекции импульса на ось OX получаем:

$$G_x = \frac{2v}{c^2 \chi} \cdot \frac{1}{8\pi} \int (E_{y_1}^2 + E_{z_1}^2) d\omega_2.$$

Интеграл, стоящий здесь, представляет собою то, что мы раньше (190, 149) называли поперечной электростатической энергией шара; он равен $\frac{2}{3}$ всей электростатической энергии. Поэтому для импульса движущегося заряженного шара мы получаем выражение:

$$G_x = \frac{4}{3} \frac{1}{\chi} \frac{U_2}{c^2} v_x,$$

причем в случае поверхностного распределения заряда

$$U_2 = \frac{e^2}{2a}.$$

Что же касается составляющих импульса по осям OY и OZ , то нетрудно сообразить, что они будут равны нулю. Действительно при интегрировании произведений $E_{x_1} E_{y_1}$ и $E_{x_1} E_{z_1}$ по всему объему поля при шаровой симметрии поля мы всегда будем иметь два элементарных объема $d\omega_2$, для которых E_{y_1} будут одного знака, а E_{z_1} будут противоположного знака; поэтому элементы интеграции $\pm E_{x_1} E_{y_1} d\omega_2$ будут попарно взаимно уничтожать друг друга; то же самое можно сказать о произведении $E_{x_1} E_{z_1}$.

Итак импульс движущихся зарядов с шаровой симметрией имеет то же направление, что и скорость движения, как это имеет место и в обычной механике. Однако такой результат получается только в том случае, если заряды расположены *симметрично* относительно оси движения. При отсутствии этой симметрии электромагнитный

импульс \mathbf{G} будет, вообще говоря, составлять некоторый угол с направлением скорости движения \mathbf{v} . Ниже мы разберем один из таких случаев.

Теперь же обратим внимание на другое отличие электромагнитного импульса от обычного механического импульса. Механический импульс пропорционален скорости движения

$$\mathbf{G}_m = m\mathbf{v}$$

и коэффициент пропорциональности представляет собою *массу* движущегося тела, которую в обычной механике принимают за *постоянную*. Между тем в выражении электромагнитного импульса скорость \mathbf{v} входит не только множителем, но еще и в знаменателе, в коэффициенте:

$$\chi = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Поэтому если мы, основываясь на электромагнитном импульсе, будем определять величину электромагнитной массы (как это мы делали выше для луча света), то получим электромагнитную массу движущегося заряда, зависящую от скорости движения:

$$m_{em} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\chi} \frac{U}{c^2}.$$

Обратим внимание на то, что в луче света мы получили электромагнитную массу простым делением энергии на квадрат скорости света. В случае движущихся зарядов это соотношение оказывается гораздо сложнее.

При малых скоростях можно положить $\chi = 1$, и электромагнитная масса делается независимой от скорости.

156. Электромагнитная масса. В обычной механике понятие *масса* вводится одновременно с понятием *сила*, причем в выражении для силы масса входит в виде множителя при ускорении движения. Но ускорения движения бывают двух родов: ускорение *вдоль* движения и ускорение, направленное *перпендикулярно* к скорости движения, или так называемое *центростремительное* ускорение. Разлагая вектор силы \mathbf{F} на две составляющие — продольную по отношению к скорости движения и поперечную, мы получаем уравнение *Ньютона* (ср. ч. I, 42, 44; ч. II, 11):

$$\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} = s_1 m\dot{v} + R_1 m \frac{v^2}{r}.$$

В электромагнитной механике, в которой, как мы видели, зависимость импульса от скорости более сложная, чем в обычной механике, понятие *электромагнитная масса* тоже осложняется. Если мы и в электромагнитной механике сохраним понятие о силе как о производной по времени от вектора импульса \mathbf{g} , то должны для продольной и поперечной составляющих силы написать уравнение:

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}} + \mathbf{s}_1 \dot{G} + \mathbf{R}_1 G \frac{v}{r}.$$

Здесь \mathbf{s}_1 означает единичный вектор по направлению траектории движения, а множитель при нем представляет изменение *величины* вектора G в единицу времени; далее \mathbf{R}_1 означает единичный вектор по направлению радиуса кривизны r траектории, а множитель $G \frac{v}{r}$ представляет изменение *направления* вектора \mathbf{G} в единицу времени. Если мы представим это уравнение в такой же форме, как вышенаписанное уравнение обычной механики, а именно:

$$\mathbf{F} = \mathbf{s}_1 \frac{\partial G}{\partial v} \dot{v} + \mathbf{R}_1 \frac{G}{v} \frac{v^2}{r},$$

то увидим, что коэффициенты при продольном и поперечном ускорении оказываются разными. Поэтому в электромагнитной механике мы должны различать две электромагнитных массы, а именно продольную массу:

$$m_{\text{long}} = \frac{\partial G}{\partial v}$$

и поперечную массу:

$$m_{\text{trans}} = \frac{G}{v}.$$

Применяя эти формулы к движущемуся заряженному шару, мы получаем для его продольной электромагнитной массы выражение:

$$m_{\text{long}} = \frac{4}{3} \frac{U_2}{c^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v}{\chi} \right) = \frac{4}{3} \frac{U_2}{c^2} \left(\frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi^3} \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{4}{3} \frac{U_2}{c^2} \frac{1}{\chi^3}$$

и для поперечной массы:

$$m_{\text{trans}} = \frac{4}{3} \frac{U_2}{c^2} \cdot \frac{1}{\chi}.$$

Для скоростей, величина которых гораздо меньше скорости света, коэффициент χ можно принять равным единице, и тогда обе массы делаются одинаковыми, как и в обычной механике.

Впрочем гораздо рациональнее строить понятие *массы* не на обычном понятии *сила*, а на понятии *количество движения*, или *импульс*, как это уже мы делали выше (200, 154, 155). Поэтому условимся называть электромагнитной массой не коэффициенты при ускорениях в выражении для силы, а множитель при скорости в выражении для электромагнитного импульса. Тогда получим величину:

$$m = \frac{G}{v},$$

которая аналогична массе в механике *Ньютона* и которая совпадает с тем, что мы выше обозначили поперечной массой. При таком определении массы мы имеем прежнее выражение для силы:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} (m \cdot \mathbf{v}).$$

157. Момент импульса движущихся зарядов. Моментом вектора вокруг какой-либо точки пространства O называется векторное произведение этого вектора на радиус-вектор, проведенный в эту точку. Так например момент силы \mathbf{F} , как известно (ч. I, 25, 27; ч. II, 18), выражается формулой:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}].$$

Точно так же и момент вектора импульса выражается формулой:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{r} \cdot \mathbf{G}].$$

Если точка, вокруг которой мы составляем момент импульса, сама движется, то величина момента будет изменяться со временем, даже если сам импульс останется постоянным. Для изменения момента импульса в единицу времени в этом случае мы можем написать:

$$\dot{\mathbf{K}} = [\mathbf{v} \cdot \mathbf{G}]; \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}.$$

Но из механики известно, что изменение момента импульса в единицу времени равно моменту действующих сил:

$$\mathbf{N} = \dot{\mathbf{K}} = [\mathbf{v} \cdot \mathbf{G}].$$

Из этого мы заключаем, что при постоянном импульсе момент сил будет равен нулю только в том случае, если скорость \mathbf{v} будет иметь то же направление, что и импульс ($\sin(\mathbf{v}'\mathbf{G}) = 0$).

Мы видели выше, что при симметричном относительно оси движения распределении зарядов их электромагнитный импульс направлен параллельно скорости движения, и следовательно в этом случае никакого момента сил возникнуть не может; заряженный шар может совершать поступательное движение в любом направлении *без вращения*.

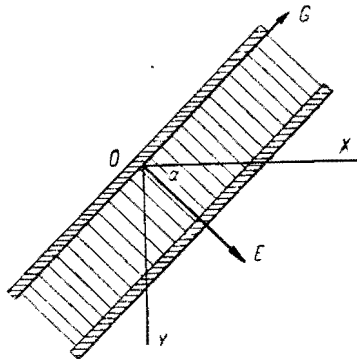


Рис. 49. Движущийся конденсатор.

Тогда проекции напряжения на оси координат можно выразить формулами:

$$E_x = E \cos \alpha, \quad E_y = E \sin \alpha, \quad E_z = 0.$$

При движении этого конденсатора мы получаем в неподвижном пространстве поле:

$$\begin{aligned} E_{x_1} &= E \cos \alpha, & E_{y_1} &= \frac{1}{\gamma} E \sin \alpha, & E_{z_1} &= 0, \\ M_{x_1} &= 0, & M_{y_1} &= 0, & M_{z_1} &= \frac{v}{c} \frac{1}{\gamma} E \sin \alpha, \end{aligned}$$

и следовательно плотность электромагнитного импульса будет иметь составляющие по осям координат:

$$\begin{aligned} G_x &= \frac{1}{4\pi c} E_{y_1} M_{z_1} = \frac{v}{4\pi c^2} \cdot \frac{1}{\gamma^2} E^2 \sin^2 \alpha, \\ G_y &= -\frac{1}{4\pi c} E_{x_1} M_{z_1} = -\frac{v}{4\pi c^2} \cdot \frac{1}{\gamma^2} E^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Продольная составляющая импульса, как мы выяснили, не может дать момента сил, между тем как поперечная составляющая импульса даст нам момент, равный:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{v} \cdot \mathbf{G}] = v_x G_y = N_z = -\left(\frac{v}{c}\right)^2 U_2 \sin 2\alpha.$$

Но мы уже указали (199, 153), что при вычислении сил мы должны обращаться с электромагнитным полем, как с материальным телом, принадлежащим к рассматриваемой системе. У нас система состоит из материального тела — конденсатора и электромагнитного поля его зарядов. Так как система эта изолированная (без внешних воздействий), то сумма моментов всех сил должна оставаться равной нулю, и если в электромагнитном поле возникает при движении момент импульса \mathbf{N} , то на материал конденсатора должен одновременно действовать момент равный и противоположный, а именно:

$$N_z = \left(\frac{v}{c}\right)^2 U_2 \sin 2\alpha.$$

Отсюда мы можем заключить, что заряженный конденсатор при движении будет стремиться повернуться так, чтобы электрическое поле стало перпендикулярно к направлению движения ($\sin(2 \cdot 90^\circ) = 0$). При $\alpha = 0$ равновесие будет неустойчивое.

158. Опыт Трутона и Нобля. Для проверки этого следствия электромагнитной теории Трутон и Нобль (Fz. T. Trouton, H. R. Noble, 1903) произвели следующий опыт. Плоский конденсатор был подвешен так, чтобы он легко мог поворачиваться вокруг вертикальной оси. Этот конденсатор находился в движении вместе с Землей, а потому при зарядке он должен был бы поворачиваться, направляя свое электрическое поле перпендикулярно к направлению движения Земли. Между тем, несмотря на значительную чувствительность подвеса, Трутон и Нобль не могли заметить ни малейшей тенденции конденсатора к повороту; ориентировка плоскостей конденсатора при любом направлении оставалась неизменной. Позднейшие, еще более точные опыты подтвердили первоначальные опыты Трутона и Нобля.

С одной стороны, мы должны были ожидать этого результата, потому что наблюдатель, движущийся вместе с заряженным конденсатором, имеет перед собою обыкновенное электростатическое поле, которое стремится сблизить обкладки конденсатора, но никакого момента сил дать не может. Но, с другой стороны, приведенные выше расчеты указывают на существование сил взаимодействия между движущимся заряженным конденсатором и образуемым им при движении электромагнитным полем. Этот опыт отчасти напоминает собою опыт с диском, движущимся в жидкости; при этом диск стремится повернуться и стать перпендикулярно к относительному

движению диска и жидкости. Однако опыт показывает, что эта аналогия к электромагнитному полю неприменима. Каким же образом объяснить расхождение опыта с теорией? Остается только сделать предположение, что в наших расчетах не приняты во внимание еще какие-либо неизвестные нам электромагнитные поля, возникающие при движении заряженного конденсатора. Обыкновенно при этом делают гипотезу, что те *упругие напряжения*, которые возникают при заряде в материале конденсатора, — в его обкладках и в его диэлектрике, — что эти упругие напряжения тоже имеют *электромагнитную* природу. Когда конденсатор приходит в движение, то электромагнитные поля этих упругих напряжений изменяются и образуют момент импульса, противоположный тому моменту, который образует движущееся электростатическое поле по нашим расчетам. Эту гипотезу можно даже подкрепить расчетом, приняв, что упругие силы в материале конденсатора преобразуются так же, как и электрические силы (ср. 159, 148). Однако мы не будем на этом останавливаться, а примем во внимание результат опытов *Трутона* и *Нобля*, *обобщив* наши расчеты так, чтобы в них вошли не только непосредственно наблюдаемые нами электрические поля, но другие электромагнитные поля, *скрытые* внутри самой материи.

159. *Обобщенный электромагнитный импульс.* Обозначим через H полную энергию системы, находящейся в движении с равномерной скоростью v . Под H мы будем следовательно подразумевать не только электростатическую энергию *явных* зарядов, но также и зарядов (ионов и электронов), находящихся внутри материальных тел и даже внутри их молекул и атомов: сюда же включена будет и энергия тех упругих напряжений в заряженной материи, о которых мы говорили в предыдущем параграфе. Полный поток всей этой энергии выразится формулой: }

$$P = Hv,$$

и соответствующий этому потоку электромагнитный импульс будет равен:

$$G = \frac{1}{c^2} P = \frac{1}{c^2} Hv.$$

Теперь импульс имеет направление скорости движения v , а потому никакого момента сил при движении возникать не будет в согласии с опытами *Трутона* и *Нобля*.

Далее при таком обобщении электромагнитная масса системы будет равна:

$$m = \frac{1}{c^2} H.$$

Это выражение совпадает с тем, что мы получили для массы светового луча (201, 154). Но в световом луче величина U означала его полную электромагнитную энергию, потому что никакой другой энергии в нем не имеется. Нечто иное мы имеем в движущихся зарядах: там всегда кроме видимого электрического поля должны находиться внутри, в скрытом виде, и другие формы энергии. Уже одно то обстоятельство, что одноименные заряды должны отталкиваться друг от друга, а между тем они каким-то образом держатся внутри ионов и электронов, указывает на существование внутренней энергии. Поэтому вычисленные нами импульсы движущихся зарядов (202, 155) не представляют собою полных импульсов, а только ту часть их, которая обусловлена внешним полем. Основываясь на этом, мы можем, не впадая в противоречие с нашими прежними расчетами, предположить, что электромагнитный импульс и масса *любого* заряженного, или даже (наружно) не заряженного, материального тела могут быть выражены формулами:

$$G = \frac{1}{c^2} Hv, \quad m = \frac{1}{c^2} H.$$

К этому мы должны еще добавить, что хотя H представляет собою *полную* энергию рассматриваемого тела, но мы не можем указать заранее, какая часть ее представляет *потенциальную* энергию внутренних сил тела и какая часть ее представляет *кинетическую* энергию внутренних (например тепловых) движений молекул тела.

160. *Соотношение между энергией и массой.* На основании сделанных нами предположений о внутренней энергии материального тела мы можем, как это показал *Абрагам* (Abraham), найти соотношение между энергией покоящегося тела и энергией тела, движущегося равномерно со скоростью v . Однако при такой общей постановке задачи мы должны прибегнуть к обобщенным уравнениям механики, а именно к уравнениям *Лагранжа* и *Гамильтона*.

Обозначим через L функцию *Лагранжа* в самом общем ее значении (ч. II, 289, 151) (напомним читателю, что функция

Лагранжа L представляет собою разность кинетической и потенциальной энергии системы, тогда как функция *Гамильтона* H представляет собою сумму этих энергий). Тогда импульс системы определится выражением:

$$G = \frac{\partial L}{\partial v}.$$

Но на основании принятого нами выше соотношения между импульсом и полной энергией H мы можем написать:

$$H = \frac{c^2}{v} G = \frac{c^2}{v} \frac{\partial L}{\partial v}.$$

Далее между функциями *Лагранжа* и *Гамильтона* имеется связь в виде (ср. ч. II, 301, 158):

$$L = v \frac{\partial L}{\partial v} - H.$$

Подставляя сюда значение H , получаем для L дифференциальное уравнение:

$$-vL = (c^2 - v^2) \frac{\partial L}{\partial v},$$

которое можно переписать в такой форме:

$$\frac{dL}{L} = \frac{1}{2} \frac{d(c^2 - v^2)}{c^2 - v^2},$$

$$\lg L = \frac{1}{2} \lg (c^2 - v^2).$$

При интегрировании мы с обеих сторон получаем логарифмические функции, а потому, откинув знаки логарифмов и обозначая через L_0 значение функции *Лагранжа* при $v = 0$, получаем:

$$L = L_0 \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2}} = L_0 \chi.$$

Но при $v = 0$, как это прямо видно из вышенаписанного соотношения между L и H , функция *Лагранжа* равна и противоположна энергии системы, когда она находится в покое:

$$L_0 = -H_0.$$

Следовательно

$$L = -\chi H_0.$$

Взяв от этого выражения частную производную по скорости v , получаем для импульса:

$$G = \frac{\partial L}{\partial v} = -H_0 \frac{\partial \chi}{\partial v} = \frac{H_0}{c^2} \cdot \frac{1}{\chi} v.$$

Отсюда видим, что масса системы во время ее движения отличается от массы, которую имела система во время покоя:

$$m = \frac{H_0}{c^2} \cdot \frac{1}{\chi} = \frac{m_0}{\chi}.$$

Выразим теперь полную энергию системы H через ее импульс:

$$H = \frac{c^2}{v} G = \frac{H_0}{\chi}.$$

Мы получили таким образом между энергиями движущейся и покоящейся системы соотношение совершенно такой же формы, как и для масс m и m_0 . Наконец, если мы выразим энергии через массы, то получаем:

$$H = mc^2, \quad H_0 = m_0 c^2.$$

Следовательно энергия любой системы, покоящейся или находящейся в движении, пропорциональна ее массе и коэффициент пропорциональности c^2 для всех систем один и тот же. Мы можем сделать и обратное заключение: масса любой материальной или электромагнитной системы, умноженная на c^2 , дает нам количество заключающейся в этой массе энергии: каждый грамм содержит в себе $9 \cdot 10^{20}$ эргов. Определенное нами количество энергии, заключенное в материальном теле, как видим, громадно. Но это не должно нас удивлять, так как кроме тепловой и упругой энергии каждое материальное тело содержит в своих атомах электрические и магнитные поля, а плотность энергии этих полей в миллионы раз превосходит плотность электромагнитных энергий наших современных электротехнических машин.

Зависимость массы тела (а также и его энергии) от скорости:

$$m = \frac{m_0}{\chi}, \quad \chi = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

показывает нам, что материальное тело ни при каких условиях не может двигаться со скоростью света c ; для этого потребовалась бы

бесконечно большая энергия. В том случае, когда первоначальная (покоящаяся) масса m_0 равна нулю (и $H_0 = 0$), написанные нами формулы принимают неопределенный вид $\left(m = \frac{0}{0}\right)$, но основное соотношение между массой и энергией остается в силе:

$$m = \frac{H}{c^2}.$$

Это и есть то самое соотношение, которое мы нашли для световой волны (201, 154), скорость которой и равна c . Следовательно для световой волны мы должны принять $m_0 = 0$.

Все найденные нами соотношения вытекают также из более общего принципа относительности А. Эйнштейна.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

161. Введение. В этой главе нам часто будут встречаться периодически изменяющиеся величины, вроде:

$$x = A \cos \omega t, \quad y = A \sin \omega t.$$

Здесь A означает *амплитуду* колебания, а величина ωt называется *фазой* колебания. Множитель при времени t можно пред ставить подробнее:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu,$$

где T есть *период* колебаний, а ν — их *частота*. Величина ω носит название *циклической* частоты, но мы ее для краткости тоже иногда будем называть частотой.

Приведенные гармонические функции представляют собою решения дифференциального уравнения второго порядка и *первой* степени $m\ddot{x} + bx = 0$. Следовательно любая линейная комбинация обоих этих решений тоже будет представлять собою решение означенного уравнения; это есть основное свойство *линейных* дифференциальных уравнений. Основываясь на этом, мы можем написать *общий* интеграл уравнения в форме:

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

причем A и B будут представлять собою постоянные интегрирования определяемые по начальным условиям задачи (см. ч. II, глава V и VI). Если мы представим эту сумму в таком виде:

$$x = C \cos(\omega t + \varphi),$$

где

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A},$$

то теперь C и φ будут представлять постоянные интеграции.

Мы можем взять линейную комбинацию тех же функций и в комплексной форме:

$$x = \cos \omega t + j \cdot \sin \omega t, \quad j = \sqrt{-1},$$

и величина

$$x = e^{j \cdot \omega t}$$

тоже будет удовлетворять тому же дифференциальному уравнению. Так как производить вычисления с экспоненциальными функциями гораздо удобнее, чем с круговыми функциями, то вместо того, чтобы задаваться решениями в форме $A \cos \omega t$ или $A \sin \omega t$, задаются решением в виде

$$x = Ae^{j \cdot \omega t}.$$

В результате подстановки этой величины в дифференциальное уравнение более сложной формы, чем вышеприведенное, может оказаться, что величины A и ω *комплексны*, и нужно уметь истолковывать эти комплексные решения с физической точки зрения, так как комплексные величины сами по себе физического смысла иметь не могут.

Итак предположим, что данное нам дифференциальное уравнение удовлетворяется решением в виде:

$$x = Ae^{j \cdot \omega t},$$

но величина ω_1 оказалась комплексной:

$$\omega + jk.$$

Это означает, что уравнение решается функцией вида:

$$x = Ae^{j \cdot \omega t} e^{-kt} = Ae^{-kt} (\cos \omega t + j \cdot \sin \omega t),$$

причем как действительная, так и мнимая часть этой функции удовлетворяет данному уравнению. С физической точки зрения это означает, что рассматриваемая величина x может быть выражена формулами:

$$x_1 = Ae^{-kt} \cos \omega t, \quad x_2 = Ae^{-kt} \sin \omega t$$

и представляет собою гармоническое колебание с затуханием. Если k окажется равным нулю, то колебания будут без затуха-

ния, если же ω окажется равным нулю, то мы имеем дело с *апериодическим* затуханием.

Амплитуда A тоже может оказаться комплексной:

$$A + jB.$$

Но тогда мы можем представить эту амплитуду в форме:

$$Ce^{j \cdot \varphi} = \sqrt{A^2 + B^2} e^{j \cdot \varphi},$$

причем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A},$$

и наше решение получит вид:

$$x = Ce^{j(\omega t + \varphi)} = C [\cos(\omega t + \varphi) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi)].$$

Следовательно комплексная амплитуда означает изменение фазы колебания на величину φ .

Таким образом мы можем заметить себе, что комплексная частота означает затухание колебаний, а комплексная амплитуда означает измененную фазу.

Остается еще выяснить вопрос о постоянных интеграциях при комплексной форме решений. Но нетрудно видеть, что если данное дифференциальное уравнение *второго* порядка, то при подстановке в него экспоненциальной функции мы получаем для экспонента уравнение *второй* степени, которое, вообще говоря, имеет *два* решения. Любая линейная комбинация из этих двух решений и будет представлять собою *полный* интеграл дифференциального уравнения второго порядка с *двумя* произвольными постоянными, как это представлено у нас в начале этого параграфа. Если квадратное уравнение имеет двойной корень, тогда для получения второго интеграла нужно искать *особого* решения (ср. ч. II, 75, 79).

Мы уже пользовались методом комплексных решений во второй части (ч. II, 98, 99), и применение этого метода к электрическим колебаниям выяснится лучше всего на примерах.

162. Электрические колебания. Представим себе цепь, составленную из самоиндукции L , сопротивления R и емкости C , соединенных последовательно (рис. 50). Если в такой цепи возникнет электриче-

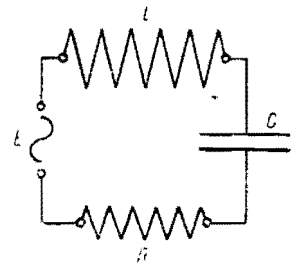


Рис. 50. Электрический резонатор.

ский ток (этот ток не может быть постоянным, потому что диэлектрик емкости C есть изолятор; но электрический ток может длиться некоторое время, пока конденсатор заряжается или разряжается), то, как мы знаем, на концах каждой из этих частей цепи получится разность потенциалов следующей величины:

$$V_1 = LJ, \quad V_2 = RJ, \quad V_3 = \frac{e}{C}.$$

Если в цепи нет никаких посторонних электродвижущих сил, то сумма этих величин должна (по закону Кирхгофа) равняться нулю, и мы получаем уравнение:

$$LJ + RJ + \frac{e}{C} = 0.$$

Силу тока J мы можем выразить через количество электричества e , находящееся в рассматриваемый момент на каждой из обкладок конденсатора:

$$J = \frac{de}{dt} = \dot{e},$$

и тогда получаем для величины e дифференциальное уравнение второго порядка и первой степени:

$$L\ddot{e} + R\dot{e} + \frac{1}{C}e = 0.$$

Задаемся решением в экспоненциальной форме¹

$$\begin{aligned} e &= Ae^{j\omega_1 t}, \\ \dot{e} &= Aj\omega_1 e^{j\omega_1 t}, \\ \ddot{e} &= -A\omega_1^2 e^{j\omega_1 t}. \end{aligned}$$

Подставляя это в дифференциальное уравнение и сокращая на $Ae^{j\omega_1 t}$, получаем уравнение второй степени для ω_1 :

$$-L\omega_1^2 + jR\omega_1 + \frac{1}{C} = 0,$$

¹ Буквой e мы обозначаем количество электричества и основание натуральных логарифмов ($e = 2.7183$). Но мы надеемся, что это не поведет к недоразумениям: основание — логарифм e у нас всегда имеет какой-либо показатель, составленный из букв, тогда как количество электричества e с такими показателями не встречается.

откуда и определяется частота колебаний ω_1 , но в комплексной форме:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \frac{R}{L} j \pm \sqrt{-\frac{1}{4} \left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}.$$

Это комплексное решение означает, как мы это выяснили в предыдущем параграфе, колебания с затуханием:

$$e = Ae^{-kt} \cos(\omega t + \varphi),$$

причем A и φ — две постоянных интегриации, зависящие от начальных условий. *Логарифмический декремент* затухания равен:

$$k = \frac{1}{2} \frac{R}{L},$$

а циклическая частота колебаний равна:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4} \left(\frac{R}{L}\right)^2}.$$

Если мы введем сюда частоту колебаний, которая имела бы место при ничтожном сопротивлении ($R=0$):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

то получим:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}.$$

При сравнительно большом сопротивлении цепи, когда

$$\frac{1}{LC} < \frac{1}{4} \left(\frac{R}{L}\right)^2, \quad R > 2\sqrt{\frac{L}{C}},$$

подкоренное количество делается отрицательным, второй член в выражении для частоты делается мнимым, и вместо затухающих колебаний мы получаем аperiodическое затухание, т. е. постепенное уничтожение зарядов цепи:

$$e = Ae^{-k_1 t}.$$

Логарифмический декремент затухания будет тогда равен:

$$k_1 = k \pm \sqrt{k^2 - \omega_0^2}.$$

То же самое мы получаем, если в цепи нет самоиндукции ($L=0$) или не включена емкость ($C=\infty$). В последнем случае полученное нами решение дает непосредственно:

$$jk_1 = \frac{1}{2} \frac{R}{L} j + \frac{1}{2} \frac{R}{L} j = \frac{R}{L} j$$

и следовательно решение уравнения будет иметь вид:

$$e = e_0 e^{-\frac{R}{L} t}, \quad J = J_0 e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Этот случай мы уже решали, изучая экстратоки (150, 127).

Различные частные случаи решения вышеполученного уравнения мы рассматривали во второй части, в главе V и VI. Все, что мы говорили там о механических колебаниях, применимо и к изучаемым нами теперь электрическим колебаниям.

163. Принужденные колебания. Теперь предположим, что в рассматриваемой нами цепи, составленной из самоиндукции L , сопротивления R и емкости C , действует какая-нибудь посторонняя электродвижущая сила, которая изменяется со временем гармонически и притом с постоянной амплитудой (рис. 50):

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t.$$

Этот случай мы имеем при всяком присоединении какого-либо прибора к городской цепи переменного тока; но электродвижущая сила \mathcal{E} может появиться и посредством индукции, как это имеет место в аппаратах беспроволочной телеграфии. Желая применить здесь метод комплексных решений, мы выразим и данную нам электродвижущую силу \mathcal{E} тоже в комплексной форме, написав:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{j \cdot \omega t}.$$

Это нужно понимать так: на самом деле

$$e^{j \cdot \omega t} = \cos \omega t + j \cdot \sin \omega t,$$

и мы одновременно решаем две задачи как для того случая, когда электродвижущая сила изменяется пропорционально $\cos \omega t$, так и для того случая, когда она изменяется пропорционально $\sin \omega t$; благодаря *линейности* дифференциального уравнения мы можем обе задачи решать одновременно, если возьмем сумму обеих электродвижущих сил, умножив при этом вторую электродвижущую силу на $j = \sqrt{-1}$.

Итак мы имеем для решения следующее дифференциальное уравнение:

$$L\ddot{e} + R\dot{e} + \frac{1}{C} e = \mathcal{E}_0 e^{j \cdot \omega t}.$$

Задаемся опять решением вида:

$$e = A e^{j \cdot \omega t}.$$

После подстановки и сокращения (как и прежде) получаем:

$$A \left(-L\omega^2 + \frac{1}{C} + j \cdot \omega R \right) = \mathcal{E}_0.$$

Как видим, искомая амплитуда A получилась у нас в комплексной форме, и мы уже знаем, что это означает существование некоторой *разности фаз* между искомыми колебаниями электричества e и колебаниями данной нам электродвижущей силы \mathcal{E} . Обыкновенно интересуются не величиной e , а силой тока J в цепи; поэтому введем амплитуду силы тока по формуле:

$$j = \dot{e} = A j \cdot \omega e^{j \cdot \omega t} = J_0 e^{j \cdot \omega t}.$$

Тогда получаем (умножив и разделив левую часть уравнения на $j\omega$):

$$J_0 \left[R + j \cdot \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] = \mathcal{E}_0.$$

Отсюда определяем соотношение между *абсолютными* значениями амплитуд J_0 и \mathcal{E}_0 :

$$J_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{R_0}$$

$$R_0 = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}.$$

Величина R_0 называется *кажущимся* сопротивлением цепи. Кажущееся сопротивление, как видим, зависит не только от состава цепи, но и от частоты ω данной электродвижущей силы. Кажущееся сопротивление получается наименьшим, когда

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \omega_0.$$

т. е. когда данная нам частота совпадает с частотой собственных колебаний цепи при отсутствии сопротивления (ср. предыдущий параграф). При этом сила тока получается наибольшею, и это явление носит название *электрического резонанса* (ср. „Общий курс электричества“, а также „Теорию механических колебаний“, ч. II, 78).

Для того чтобы выяснить соотношение между *фазами* колебаний электродвижущей силы и силы тока, мы введем некоторый угол φ , положив:

$$\frac{R}{R_0} = \cos \varphi, \quad \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) : R_0 = \sin \varphi,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}.$$

Подставляя это в наше уравнение, имеем:

$$J_0 R_0 [\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi] = J_0 R_0 e^{j\varphi},$$

и следовательно

$$J_0 R_0 e^{j\varphi} = \mathcal{E}_0, \quad J_0 R_0 = \mathcal{E}_0 e^{-j\varphi}.$$

Это означает, что электродвижущая сила *опережает* силу тока по фазе на угол φ или, что то же самое, сила тока *отстает* от электродвижущей силы в своей фазе на угол φ . Мы следовательно можем написать полученные решения в действительной форме таким образом:

$$\text{Если } \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t, \text{ то } J = J_0 \cos(\omega t - \varphi).$$

$$\text{Если } \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t, \text{ то } J = J_0 \sin(\omega t - \varphi).$$

Наконец, если бы при данной нам электродвижущей силе $\mathcal{E}_0 \cos \omega t$ мы задались решением $J = J_0 \sin(\omega t - \varphi_1)$, как это иногда делается в электротехнике, то получили бы для угла φ_1 формулу:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{R}{L\omega - \frac{1}{C\omega}} = \operatorname{cotg} \varphi.$$

Определив таким образом силу тока в системе, мы можем вычислить и количество электричества, собирающееся на обкладках конденсатора, по формуле:

$$e = Ae^{j\omega t} = \frac{J_0}{j\omega} e^{j\omega t} = -j \frac{J_0}{\omega} e^{j\omega t}.$$

Выраженное в действительной форме это означает при

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t:$$

$$e = \frac{\mathcal{E}_0 \sin(\omega t - \varphi)}{\omega R_0} = \frac{\mathcal{E}_0 \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 \omega^2 + L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}}.$$

Наконец, если нас интересует разность потенциалов V_m на концах самоиндукции, V_r на концах сопротивления и V_e между обкладками конденсатора, то мы должны применить формулы:

$$V_m = Lj = -\frac{L\omega}{R_0} \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - \varphi),$$

$$V_r = Rj = \frac{R}{R_0} \mathcal{E}_0 \cos(\omega t - \varphi),$$

$$V_e = \frac{1}{C} e = \frac{1}{C\omega R_0} \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - \varphi).$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что при сравнительно малом сопротивлении разности потенциалов на концах самоиндукции и на обкладках емкости могут оказаться значительно выше разности потенциалов всей цепи. Это надо иметь в виду при устройстве изоляции цепи.

164. Кривые резонанса. Каждая из вычисленных нами в предыдущем параграфе величин зависит между прочим и от частоты ω внешней электродвижущей силы. Для большей наглядности обыкновенно изображают эту зависимость *графически*, откладывая по горизонтальной оси прямоугольных прямых координат

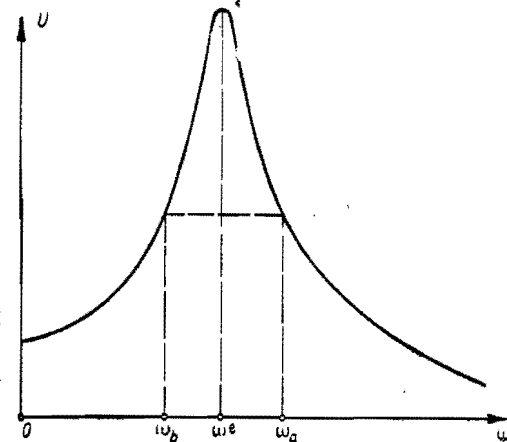


Рис. 51. Определение затухания по резонансной кривой.

в подходящем масштабе величины ω (или величины $z = \frac{\omega}{\omega_0}$), а по вертикальной оси — одну из интересующих нас величин J , e , V и т. п. Полученные таким образом *кривые* (или характеристики)

резонанса имеют несколько различную форму, но все они имеют более или менее резко выраженное возвышение (рис. 51), указывающее на то, что рассматриваемая величина имеет *максимум* (резонанс) при определенном значении частоты ω . Чем меньше сопротивление системы R , тем *круче* кривая поднимается к этому максимуму, и если бы сопротивление равнялось нулю, то этот максимум был бы равен бесконечности.

Нетрудно убедиться в том, что максимумы для различных величин соответствуют различным значениям частоты ω .

Проще всего определение максимума для силы тока J при данном \mathcal{E}_0 :

$$J = \frac{\mathcal{E}_0 \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

Из этой формулы прямо видно, что наибольшую силу тока мы получим при

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0, \quad \omega^2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2,$$

т. е. в том случае, когда период внешней силы совпадает с периодом собственных колебаний системы при отсутствии сопротивления ($R=0$). При таком значении частоты ($\omega = \omega_0$) мы получаем для амплитуды силы тока

$$J_{\max} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}.$$

Найдя на кривой резонанса J максимум и соответствующую ему частоту ω_0 , мы можем по известному сопротивлению R и по самоиндукции L вычислить затухание k , а затем и период собственных колебаний системы, когда включено и сопротивление (217, 162)

$$k = \frac{1}{2} \frac{R}{Z}, \quad \omega_1^2 = \omega_0^2 - k^2.$$

Для колебаний электричества мы должны нарисовать кривую резонанса по формуле:

$$e = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2\omega^2 + L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2}}.$$

Для определения максимума e мы можем искать минимум подкоренной величины. Возьмем производную этого выражения по частоте:

$$R^2 \cdot 2\omega + 2L^2(\omega^2 - \omega_0^2) \cdot 2\omega = 0,$$

$$\omega_e^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{L^2}.$$

Выразив сопротивление через коэффициент затухания k , получаем

$$\omega_e^2 = \omega_0^2 - 2k^2 = \omega_1^2 - k^2.$$

Подставляем это значение ω_e в выражение для e и получаем:

$$e_{\max} = \frac{\mathcal{E}_0}{R\omega_1}.$$

Наконец нарисуем резонансную кривую для величины J , которая входит в величину разности потенциалов на концах самоиндукции; мы имеем для амплитуды этой величины:

$$j_0 = - \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2\omega^{-2} + L^2(1 - \omega_0^2\omega^{-2})^2}}.$$

Опять берем производную от подкоренного количества по ω :

$$-2R^2\omega^{-3} + 2L^2(1 - \omega_0^2\omega^{-2})\omega_0^2 \cdot 2\omega^{-3} = 0,$$

$$(1 - \omega_0^2\omega^{-2})\omega_0^2 = \frac{1}{2} \frac{R^2}{L^2} = 2k^2,$$

$$\omega_0^4\omega_m^{-2} = \omega_0^2 - 2k^2 = \omega_e^2.$$

Из последнего уравнения мы получаем соотношение между частотами, при которых наступает максимум силы тока ω_0 , максимум разности потенциалов на обкладках конденсатора ω_e и максимум разности потенциалов на концах самоиндукции ω_m :

$$\omega_0^2 = \omega_e \omega_m.$$

При малом k величины эти очень мало отличаются друг от друга.

Величина максимума для J после некоторых преобразований выразится так:

$$j_{\max} = - \frac{\mathcal{E}_0}{R\omega_1} \omega_0^2.$$

165. Определения коэффициента затухания по резонансной кривой. Мы уже сказали, что все кривые поднимаются к своему

максимуму тем круче, чем сопротивление системы меньше, или чем коэффициент затухания k собственных колебаний системы меньше. Это дает возможность определить величину k по форме кривой резонанса. Удобнее всего воспользоваться для этого резонансной кривой величины e^2 или V^2 или наконец величины энергии в конденсаторе:

$$U = \frac{1}{2} V e = \frac{1}{2} \frac{e^2}{C}.$$

Напишем отношение максимального значения этой энергии (на основании e_{\max}) к U :

$$\frac{U_{\max}}{U} = \frac{R^2 \omega^2 + L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}{R^2 \omega_1^2}, \quad R^2 = 4k^2 L^2.$$

В числителе этой дроби мы введем на место ω_0^2 величину ω_e^2 по формуле:

$$\omega_0^2 = \omega_e^2 + 2k^2,$$

тогда получаем:

$$\begin{aligned} L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 &= L^2 (\omega^2 - \omega_e^2)^2 + L^2 4k^4 - 4k^2 L^2 \omega^2 + 4k^2 L^2 \omega_e^2; \\ R^2 \omega^2 + L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 &= L^2 (\omega^2 - \omega_e^2)^2 + 4k^2 L^2 (k^2 + \omega_e^2) = \\ &= L^2 (\omega^2 - \omega_e^2)^2 + 4k^2 L^2 \omega_1^2. \end{aligned}$$

После этого преобразования вышенаписанное отношение представится в виде:

$$\frac{U_{\max}}{U} = \frac{1}{4k^2} \cdot \frac{(\omega^2 - \omega_e^2)^2}{\omega_1^2} + 1.$$

Теперь предположим, что изменение энергии в рассматриваемой системе при различных частотах ω дали нам резонансную кривую для U . На этой кривой мы можем определить графически, во-первых, положение ω_e для максимума U_{\max} и, во-вторых, частоты ω_a и ω_b , соответствующие половине максимальной энергии (рис. 51).

Подставив в вышенаписанную формулу найденные ω_a и ω_b и положив соответственно $U_{\max} : U = 2$, получаем две формулы для k :

$$k = \pm \frac{1}{2} \frac{\omega_a^2 - \omega_e^2}{\omega_1}, \quad k = - \frac{1}{2} \frac{\omega_b^2 - \omega_e^2}{\omega_1}.$$

Знаки \pm у нас выбраны так, чтобы величина k была в обоих случаях положительная. Каждая из этих формул позволяет вычи-

слить k , но гораздо лучше избежать определения частоты ω_e и, взяв сумму обеих формул, написать:

$$k = \frac{1}{2} \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{\omega_1}.$$

В затухающих колебаниях часто интересуются не логарифмическим декрементом k (отнесенным к единице времени), а логарифмическим декрементом за время одного полупериода. Другими словами, заменяют

$$e^{-kt} = e^{-k \frac{T}{2}} = e^{-\delta}$$

и следовательно интересуются величиной

$$\delta = \frac{\pi}{\omega_1} k, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T}.$$

Эта величина, т. е. логарифмический декремент за полпериода собственных колебаний (в присутствии сопротивления R), определяется у нас так:

$$\delta = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{\omega_1^2}.$$

Если затухание невелико, то можно положить:

$$\omega_a + \omega_b = 2\omega_1,$$

и тогда

$$\delta = \pi \frac{\omega_a - \omega_b}{\omega_1}.$$

Мы исходили из резонансной кривой для энергии в конденсаторе, или для величины e^2 , потому что большую часть таким именно образом и производят измерения; но если у нас имеется резонансная кривая для e и мы определим графически (проведя горизонтальную касательную) максимум e_{\max} , а затем проведем горизонтальную линию на высоте

$$e_1 = \frac{e_{\max}}{\sqrt{2}},$$

то опять получим $e_{\max}^2 : e_1^2 = 2$, и соответствующие частоты ω_a и ω_b опять дадут нам возможность вычислить δ .

166. Колебание энергии. Если мы имеем систему, состоящую из самоиндукции и емкости, но без значительного сопротивления, то,

как мы выяснили, период собственных колебаний этой системы определяется формулой Томсона:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{2\pi}{T}, \quad T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Колебание электричества в такой системе будет происходить по формуле:

$$e = A \cos \omega_0 t,$$

и сила тока будет равна:

$$J = e = -A\omega_0 \sin \omega_0 t.$$

Пользуясь этими формулами, составим выражения для магнитной энергии, обусловленной самоиндукцией L , и электростатической энергии в конденсаторе C . Для этого у нас имеются общие формулы:

$$T_m = \frac{1}{2} L J^2 = \frac{1}{2} L \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t,$$

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{e^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{1}{C} A^2 \cos^2 \omega_0 t.$$

Сравнивая эти формулы, мы видим, что энергия попеременно то сосредоточивается в магнитном поле самоиндукции, то превращается в электрическую энергию конденсатора. Максимальные величины (или амплитуды) этих двух энергий одинаковы, потому что

$$L\omega_0^2 = \frac{1}{C}.$$

Мы можем следовательно описывать это явление как *колебания энергии* между конденсатором и самоиндукцией, причем колебания эти происходят с частотой вдвое большею, чем частота колебаний электричества. Это следует из того, что

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha), \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha).$$

В случае *принужденных* колебаний мы тоже имеем колебания энергии и не только в самой системе (L , R , C), но также и между рассматриваемой системой и источником энергии. Напишем выражение мощности, т. е. энергии, затрачиваемой в секунду на поддержание колебаний (100, 86):

$$W = \mathcal{E}I = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \cdot J_0 \cos (\omega t - \varphi).$$

Мы можем представить эту формулу в следующих видах:

$$\begin{aligned} W &= \mathcal{E}_0 J_0 \cos^2 \omega t \cdot \cos \varphi + \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 J_0 \sin 2\omega t \cdot \sin \varphi = \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 J_0 \cos \varphi + \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 J_0 \cdot \cos (2\omega t - \varphi). \end{aligned}$$

Последний член этой формулы и представляет собою *колебание энергии*; в те промежутки времени, когда этот член положителен, энергия из источника течет в систему проводников, а в то время, когда он отрицателен, энергия течет из рассматриваемой системы обратно к источнику энергии. Что же касается первого члена, то он от времени совсем не зависит и всегда положителен. Этот член представляет собою величину *постоянного потока* энергии из источника в рассматриваемую систему. Нетрудно убедиться в том, что это есть не что иное, как энергия, затрачиваемая на джоулеву теплоту в сопротивлении R . Действительно, если заменить в нем (ср. 220, 163)

$$\mathcal{E}_0 = I_0 R_0, \quad \cos \varphi = \frac{R}{R_0},$$

то получим формулу *Джоуля*:

$$W = \frac{1}{2} R I_0^2,$$

только в отличие от постоянного тока здесь появился множитель $\frac{1}{2}$, потому что средняя величина квадрата косинуса равна половине:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t \cdot dt = \frac{1}{2T\omega} \left[\omega t + \sin 2\omega t \right]_0^T = \frac{1}{2}.$$

В электротехнике чаще вместо максимальных значений гармонически изменяющихся величин в формулы вводят так называемые *эффективные* значения (средние из квадратов; см. „Общий курс электричества“), которые определяются так:

$$\mathcal{E}_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{E}_0, \quad J_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} J_0.$$

При этих обозначениях средняя мощность (количество ежесекундной энергии, доставляемой источником в сеть) гармонически изменяющегося электрического тока равна:

$$W = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 J_0 \cos \varphi = \mathcal{E}_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos \varphi.$$

Если в цепи нет ни самоиндукции, ни емкости, или если мы имеем случай резонанса, когда действие самоиндукции компенсируется действием емкости:

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0, \quad \omega = \omega_0,$$

тогда $\sin \varphi = 0$ и энергия, идущая в цепь, получает наибольшее значение:

$$W_{\max} = \mathcal{E}_{\text{eff}} J_{\text{eff}}$$

Наоборот, если сопротивление цепи ничтожно, то $\cos \varphi = 0$; $\varphi = 90$, и мы получаем в среднем мощность, равную нулю, хотя ни электродвижущая сила, ни сила тока в цепи сами по себе не равны нулю; при этом энергия колеблется между источником и цепью с двойною частотою:

$$W = \mathcal{E}_0 I_0 \cos \omega t \cdot \sin \omega t = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 I_0 \sin 2\omega t.$$

167. **Комплексное сопротивление.** Входящая у нас в уравнении (220, 163) величина

$$R_1 = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

называется *оператором сопротивления*, и многие предпочитают производить расчеты электротехнических установок, оставляя величину R_j в комплексной форме. Тогда закон *Ома* сохраняет свою форму и для переменных токов:

$$J_j = \frac{\mathcal{E}_j}{R_j} = G_j \mathcal{E}_j,$$

где значки j означают, что эти величины выражены в комплексной форме (G_j означает электропроводность); иногда это упрощает расчеты. Так например если мы имеем разветвление переменного тока, то можем написать по аналогии с законами постоянного тока:

$$J_{j1} : J_{j2} = R_{j2} : R_{j1}.$$

Так как при делении одной комплексной величины на другую их абсолютные величины тоже делятся друг на друга, тогда как фазы вычитаются друг из друга (ср. ч. I, стр. 150, 117), то мы можем из последнего равенства определить *отношение* между амплитудами и *разность* сил токов в двух фаз параллельно соединенных проводниках.

В известной комбинации проводников, которая носит название *мостика Уитстона* (рис. 52), мы можем достигнуть отсутствие тока в среднем проводе, если сопротивления четырех проводов составляют пропорцию (см. „Общий курс электричества“):

$$R_1 : R_2 = R_3 : R_4.$$

Если в таком мостике действует гармонически изменяющаяся электродвижущая сила и отдельные ветви мостика содержат в себе не только сопротивления, но емкости и самоиндукции, то мы можем написать условие для того, чтобы в среднем проводе сила тока равнялась нулю, в комплексной форме:

$$R_{j1} : R_{j2} = R_{j3} : R_{j4}.$$

Но не нужно забывать, что это условие содержит в себе одновременно *два условия*. Во-первых, абсолютные величины этих операторов R_0 (то, что мы выше назвали кажущимся сопротивлением) должны составлять пропорцию:

$$R_{01} : R_{02} = R_{03} : R_{04},$$

и, во-вторых, *фазы* токов в среднем проводе, где поставлен измерительный прибор, должны быть одинаковы (и противоположны). При различных фазах два переменных тока не могут взаимно уничтожаться, хоть бы их амплитуды и были одинаковы.

Для большей наглядности мы рассмотрим частный случай, когда влиянием емкостей можно пренебречь, а самоиндукции L содержатся только в двух ветвях мостика. Такое расположение употребляется при сравнении двух самоиндукций. Для этого случая мы имеем условие:

$$(R_1 + j \cdot \omega L_1) : (R_2 + j \cdot \omega L_2) = R_3 : R_4.$$

Отделяя действительные и мнимые части, т. е. составляя условие для амплитуд и для фаз, получаем два условия:

$$R_1 : R_2 = R_3 : R_4 = L_1 : L_2,$$

которые должны быть удовлетворены для отсутствия тока в гальванометре.

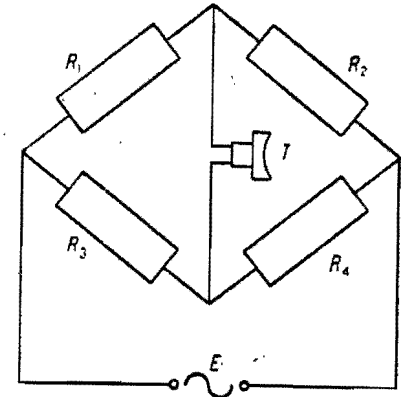


Рис. 52. Мостик Уитстона для переменного тока.

Если все четыре ветви содержат самоиндукции, то мы имеем:

$$(R_1 + j \cdot \omega L_1) : (R_2 + j \cdot \omega L_2) = (R_3 + j \cdot \omega L_3) : (R_4 + j \cdot \omega L_4),$$

откуда получаем:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} + \omega^2 \frac{L_1 L_4 - L_2 L_3}{R_3 R_4},$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{R_3}{R_4} + \frac{1}{\omega} \frac{R_1 L_4 - R_2 L_3}{L_3 L_4}.$$

Если L_3 и L_4 можно положить равными нулю, то у нас остаются уравнения, полученные нами в предыдущем случае.

Наконец, если кроме самоиндукций в отдельных ветвях имеются и емкости, включенные последовательно, то в наших уравнениях войдут вместо величин ωL величины

$$\left(\omega L - \frac{1}{C\omega} \right).$$

Очень часто при измерениях мостиком нужно принимать во внимание емкости, соединенные *параллельно* с самоиндукцией. Тогда написанные нами условия соответственно изменятся, и мы предоставим читателю разобрать эти случаи самому.

Во всяком случае мы видим, что перед тем, как приступить к измерениям *переменным* током, необходимо установить требуемое соотношение между действительными сопротивлениями четырех ветвей мостика при помощи *постоянного* тока, при котором величины самоиндукций не играют никакой роли.

Другой крайний случай мы имеем при измерении емкостей, причем можно устроить соединения так, чтобы сопротивлениями в двух ветвях, где находятся емкости, можно было пренебречь. Для этого случая соотношения между операторами сопротивлений четырех ветвей мостика дают нам:

$$\left(j \cdot \frac{1}{C_1 \omega} \right) : \left(j \cdot \frac{1}{C_2 \omega} \right) = R_3 : R_4.$$

Откуда получаем:

$$C_1 : C_2 = R_4 : R_3.$$

Более подробные сведения читатель найдет в курсах по электрическим измерениям.

168. Неустановившиеся электрические колебания. Полный интеграл дифференциального уравнения

$$L\ddot{e} + R\dot{e} + \frac{1}{C}e = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$$

состоит, как это доказывается в анализе, из *двух* частей: из полного интеграла уравнения, в котором справа вместо данной функции времени $\mathcal{E}_0 \cos \omega t$ стоит нуль, и из частного интеграла полного уравнения с *последним членом*. С физической точки зрения это означает, что рассматриваемая система из самоиндукции, сопротивления и емкости может, *независимо* от действия внешней силы, совершать одновременно и *собственные* колебания с периодом, зависящим от состава системы по формуле:

$$e = Ae^{-kt} \cos(\omega_1 t + \varphi_1); \quad k = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{L}; \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}.$$

Эти колебания при сравнительно большом сопротивлении могут перейти в *апериодические* движения. Но кроме того система будет совершать колебания с периодом ω , равным периоду внешней силы по формуле:

$$e = B \cos(\omega t + \varphi).$$

В этой последней формуле величины B и φ определяются составом цепи, тогда как в формуле собственных колебаний величины A и φ_1 зависят от начальных условий задачи.

В большинстве случаев сопротивление системы будет обуславливать более или менее быстрое *затухание* собственных ее колебаний и останутся одни принужденные колебания, или, как говорят, движение делается *установившимся*. Тем не менее в начале движения, в особенности при небольших значениях сопротивления, мы будем иметь *совокупность* собственных и принужденных колебаний системы. При небольшой разности между частотами собственных и принужденных колебаний можно иногда наблюдать явления *биений* (см. ч. II, 68). Кроме того при известных начальных условиях, во время неустановившихся начальных движений, сумма *обоих* колебаний может дать силы токов и напряжения, значительно превосходящие обычные напряжения сети. Поэтому при всяком включении и выключении аппаратов необходимо принимать меры предосторожности, чтобы избежать слишком большой перегрузки сети. Подробности

об этих мерах предосторожности читатель может найти в „Общем курсе электричества“.

Итак мы имеем общую формулу для неустановившихся колебаний:

$$e = Ae^{-kt} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B \cos(\omega t + \varphi).$$

Величина ω_1 может быть и мнимой; тогда рассматриваемая система аperiodична (см. ч. II, главу V).

169. Трансформатор. Явлением электромагнитной индукции часто пользуются для превращения электрических токов малого напряжения (разности потенциалов) в токи более высокого напряжения, и обратно. Служащий для этого прибор — *трансформатор* — состоит

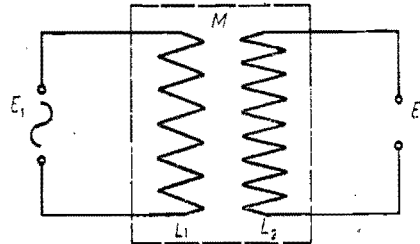


Рис. 53. Схема трансформатора.

из двух катушек (рис. 53), надетых на один общий сердечник из железа; одна из катушек питается электрическим током, доставляемым каким-либо источником электрической энергии, тогда как другая катушка снабжает ток какой-либо прибор потребителя электрической энергии.

Впрочем теория, которую мы изложим в этом параграфе, имеет гораздо более общее значение; мы будем иметь в виду электромагнитное взаимодействие вообще двух любых катушек, причем величина переменной электродвижущей силы одной из них нам известна, а силы токов первой и второй (первичной и вторичной) катушки нам требуется определить. Несмотря на такую более общую постановку вопроса, мы однако органичиваем наше рассмотрение только такими случаями, когда промежуточная между обеими катушками среда не обладает ферромагнитными свойствами и свободна от гистерезиса.

Обозначим через L_1 и L_2 самоиндукции катушек и через M коэффициент их взаимной индукции; R_1 и R_2 пусть будут их сопротивления, а влиянием емкостей мы пока пренебрегаем.

Если в первичной катушке действует гармонически переменная электродвижущая сила, а вторая замкнута в себе, то для обеих катушек мы должны написать следующие два уравнения:

$$R_1 J_1 + L_1 \dot{J}_1 + M \dot{J}_2 = \mathcal{E} e^{j\omega t}$$

$$R_2 J_2 + L_2 \dot{J}_2 + M \dot{J}_1 = 0.$$

При решении этих уравнений мы применим способ комплексных решений. Зададимся для сил токов в первичной и вторичной катушках решениями:

$$J_1 = J_{01} e^{j\omega t}; \quad J_2 = J_{02} e^{j\omega t}.$$

Подставляя это в наши уравнения, получаем:

$$(R_1 + j\omega L_1) J_{01} + j\omega M J_{02} = \mathcal{E}_0$$

$$(R_2 + j\omega L_2) J_{02} + j\omega M J_{01} = 0.$$

Последнее уравнение дает нам непосредственно отношение между силами токов, но в комплексной форме:

$$\frac{J_{02}}{J_{01}} = -\frac{j\omega M}{R_2 + j\omega L_2}.$$

Умножаем числитель и знаменатель этой дроби на $(R_2 - j\omega L_2)$:

$$\frac{J_{02}}{J_{01}} = -\frac{\omega M(\omega L_2 + jR_2)}{R_2^2 + (L_2\omega)^2} = -Ne^{j\delta},$$

откуда заключаем, что отношение между амплитудами обоих токов равно:

$$N = \frac{\omega M}{\sqrt{R_2^2 + (L_2\omega)^2}},$$

а разность фаз между ними определяется формулой:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{R_2}{\omega L_2}.$$

Пользуясь полученным соотношением между токами, мы можем величину J_2 исключить из первого уравнения и получить таким образом соотношение между силой тока и электродвижущей силой в *первичной* катушке:

$$J_{01}[R_1 + N^2 R_2 + j\omega(L_1 - N^2 L_2)] = \mathcal{E}_0.$$

Это уравнение позволяет определить амплитуду и фазу силы тока первичной катушки совершенно тем же способом, как мы это делали для ординарной цепи. Но если бы вторичной катушки не было (или если вторичная катушка разомкнута, т. е. имеет бесконечно большое сопротивление), то мы имели бы (ср. 219, 163)

$$J_{01}[R_1 + j\omega L_1] = \mathcal{E}_0.$$

Отсюда мы заключаем, что, включая вторичную катушку, мы как бы *увеличиваем* кажущееся сопротивление и *уменьшаем* кажущуюся самоиндукцию системы. Отставание силы тока от электродвижущей силы в первичной катушке определяется так:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega(L_1 - N^2 L_2)}{R_1 + N^2 R_2}.$$

Угол φ при замыкании делается меньше, а сила тока увеличивается. От обеих причин мощность, поглощаемая системой,

$$W = \frac{1}{2} J_{01} \mathcal{E}_{01} \cos \varphi_1$$

увеличивается.

Если сопротивление вторичной катушки очень мало, то

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{R_2}{\omega L_2} = 0; \quad J_{02} = -N J_{01},$$

разность фаз приближается к нулю и токи обеих катушек делают *противоположного* направления. Следовательно обе катушки будут при этом сильнее всего отталкивать друг друга (см. опыты *Элиу Томсона* в „Общем курсе электричества“).

Если коэффициент связи обеих катушек (143, 123) равен единице, т. е. если катушки настолько близки друг к другу, что все магнитные линии первичной катушки пронизывают все витки вторичной катушки, то

$$M = \sqrt{L_1 L_2}.$$

Для приблизительного подсчета мы можем не принимать во внимание сопротивления R_2 во второй катушке по сравнению с большой ее самоиндукцией L_2 и написать для отношения сил токов обеих катушек:

$$N = \frac{M}{L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}.$$

Так как коэффициенты самоиндукции пропорциональны квадратам числа витков n , а электродвижущие силы, возникающие в катушках, пропорциональны первой степени числа витков, то мы можем это уравнение переписать в такой форме:

$$\frac{J_{02}}{J_{01}} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2}.$$

Мы получили известное соотношение между электродвижущими силами и силами токов в трансформаторе, как оно представляется при элементарном расчете. Но здесь мы видим, что соотношение это верно только при совершенной связи и при ничтожном сопротивлении катушек.

Соотношения, полученные нами здесь аналитически методом комплексных решений, можно получить, пользуясь и векторной диаграммой (см. „Общий курс электричества“ и специальные книги по переменным токам).

170. Определение коэффициента связи. Положим, что нам даны две катушки, имеющие ничтожные сопротивления, и требуется определить их коэффициент связи. Для этого можно поступить следующим образом. Наблюдаем силу тока в первичной катушке, когда вторичная разомкнута; в этом случае мы имеем:

$$J_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L_1}.$$

Теперь замыкаем вторичную катушку коротко и опять наблюдаем силу тока в первичной катушке; для этого случая наши формулы дают ($R_2 = 0$):

$$J'_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega(L_1 - N^2 L_2)}.$$

Приняв во внимание соотношение между коэффициентами индукций

$$M = \kappa \sqrt{L_1 L_2},$$

можем написать:

$$N^2 = \frac{M^2}{L_2^2} = \kappa^2 \frac{L_1}{L_2},$$

и следовательно

$$J'_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L_1} \cdot \frac{1}{1 - \kappa^2}.$$

Отношение наблюдаемых токов J_1 и J'_1 дает возможность вычислить коэффициент связи κ данных двух катушек.

171. Резонанс-трансформатор. Трансформатор, содержащий во вторичной катушке некоторую емкость, называется *резонанс-трансформатором* (рис. 54). При этом электродвижущая сила вторичной катушки может значительно повыситься не только от того, что число витков в ней больше, чем в первичной катушке, но также и

от того, что период колебания источника окажется близок к периоду собственных колебаний вторичной системы, а это и называется явлением резонанса.

Уравнение для первичной системы остается такое же, как и в простом трансформаторе;

$$R_1 J_1 + L_1 \dot{J}_1 + M \dot{J}_2 = \mathcal{E} e^{j \cdot \omega t},$$

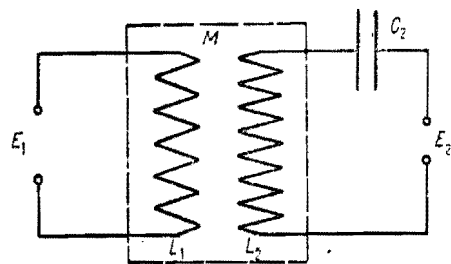


Рис. 54. Схема резонанс-трансформатора.

но в уравнение для вторичной системы нужно добавить разность потенциалов в конденсаторе, а именно:

$$V = \frac{e}{C_2} = \frac{1}{C_2} \int_0^t J_2 \cdot dt.$$

П и подстановке в уравнение

$$J_2 = J_{02} e^{j \cdot \omega t}$$

мы получим добавочный член

$$V = \frac{1}{C_2} \int J_{02} e^{j \cdot \omega t} \cdot dt = \frac{J_{02}}{C_2} \cdot \frac{1}{j \omega} e^{j \cdot \omega t} = -J_{02} \frac{j}{C_2 \omega} e^{j \cdot \omega t},$$

и следовательно второе уравнение даст нам:

$$\left[R_2 + j \left(L_2 \omega - \frac{1}{C_2 \omega} \right) \right] J_{02} + j \cdot \omega M \cdot J_{01} = 0.$$

Из этого мы видим, что добавление емкости во вторичную катушку равносильно уменьшению ее самоиндукции. Мы можем даже довести влияние самоиндукции до нуля, т. е. компенсировать ее добавочной емкостью C_2 , подобрав ее так, чтобы

$$L_2 \omega - \frac{1}{C_2 \omega} = 0; \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}.$$

Того же результата мы можем достичь и при данной нам емкости, подобрав соответственным образом частоту колебания источника ω .

Из второго уравнения мы получаем в случае резонанса отношение сил токов вторичной и первичной системы:

$$\frac{J_{02}}{J_{01}} = -\frac{j \cdot \omega M}{R_2}.$$

Множитель j указывает, что между вторичным и первичным током имеется разность фаз в 90° , потому что

$$\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi = e^{j \cdot \varphi} \quad (\text{при } \varphi = 90^\circ) = j.$$

Тот же результат мы получили бы, если бы в формуле предыдущего параграфа для $\operatorname{tg} \delta$ приняли $L_2 = 0$.

Если мы воспользуемся этим последним замечанием, то можем легко перейти от формул предыдущего параграфа к случаю резонанс-трансформатора при наступлении резонанса. Мы получим (233, 169, положив $L_2 = 0$):

$$N = \frac{\omega M}{R_2}$$

$$J_{01} \left[R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2} + j \cdot \omega L_1 \right] = \mathcal{E}_0.$$

Из последней формулы определяется сила тока в первичной катушке и его фаза относительно данной электродвижущей силы \mathcal{E} . Затем по уже известному отношению между силами токов определяем силу тока и его фазу для вторичной катушки.

172. Индуктивно-связанные системы. Мы можем еще более обобщить задачу, прибавив емкости и в первичную и во вторичную системы трансформатора

(рис. 55); при этом мы считаем особенно важным остановить внимание читателя на исследовании *собственных* колебаний двух индуктивно связанных систем и, чтобы сохранить наглядность формул, мы примем, что сопротивлениями систем можно пренебречь.

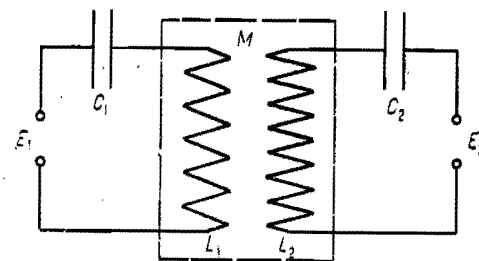


Рис. 55. Две системы, связанные индуктивно.

Тогда на основании таких же соображений, как и в предыдущих параграфах, получаем для обеих связанных систем следующие уравнения:

$$L_1 \dot{J}_1 + M \dot{J}_2 + \frac{1}{C_1} e = 0$$

$$j = \ddot{e}.$$

$$L_2 \dot{J}_2 + M \dot{J}_1 + \frac{1}{C_2} e = 0.$$

Зададимся решениями:

$$e_1 = A_1 e^{j\omega t}; \quad e_2 = A_2 e^{j\omega t}.$$

Подстановка в вышенаписанные уравнения дает (после разделения на L_1 и L_2):

$$A_1(-\omega^2 + \omega_1^2) = +A_2 \frac{M}{L_1} \omega^2; \quad \omega_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1};$$

$$A_2(-\omega^2 + \omega_2^2) = +A_1 \frac{M}{L_2} \omega^2; \quad \omega_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2}.$$

Введенные нами величины ω_1 и ω_2 суть не что иное, как циклические частоты колебаний каждой системы в отдельности.

Разделяя одно уравнение на другое, получаем отношение между амплитудами колебаний:

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 = \frac{L_2}{L_1} \frac{\omega_2^2 - \omega^2}{\omega_1^2 - \omega^2}.$$

Так как силы токов тоже пропорциональны амплитудам A_1 и A_2 , а именно:

$$J_1 = A_1 j \cdot \omega \cdot e^{j\omega t}; \quad J_2 = A_2 j \cdot \omega \cdot e^{j\omega t},$$

то мы и для амплитуд сил токов получим то же самое соотношение.

Для определения периода колебаний системы перемножаем оба уравнения, причем амплитуды сокращаются, и мы получаем:

$$(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2) = \chi^2 \omega^4; \quad \chi^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2};$$

$$\omega^4(1 - \chi^2) - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0.$$

Здесь χ — коэффициент связи, который мы уже встречали раньше (143, 123).

Это биквадратное уравнение дает для квадрата частоты ω^2 два решения:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{1}{2} \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{1 - \chi^2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4(1 - \chi^2)\omega_1^2 \omega_2^2}{4(1 - \chi^2)^2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \chi^2} \left[(\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\chi^2 \omega_1^2 \omega_2^2} \right]. \end{aligned}$$

Но частота ω существенно положительная величина, а потому мы и для ω получаем два решения: ω_a и ω_b .

Так как мы любую из двух рассматриваемых систем можем считать за первую систему, то мы можем без ограничения общности принять, что $\omega_1 > \omega_2$. Докажем, что получившаяся после связи большая частота ω_a (когда при корне мы возьмем *плюс*) превышает большую частоту ω_1 , а получившаяся при связи меньшая частота ω_b (когда при корне стоит *минус*) меньше ω_2 . Таким образом под влиянием связи разница между частотами делается больше, чем она была в независимых друг от друга системах. Для большей наглядности доказательства предположим, что разность $(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2$ велика по сравнению с $4\chi^2 \omega_1^2 \omega_2^2$ и что можно представить наше решение в такой приближенной форме:

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \chi^2} \left[(\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm (\omega_1^2 - \omega_2^2) \left(1 + \frac{2\chi^2 \omega_1^2 \omega_2^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} \right) \right].$$

Тогда для большей частоты мы получаем:

$$\omega_a^2 = \frac{\omega_1^2}{1 - \chi^2} \left[1 + \chi^2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right],$$

откуда непосредственно видно, что

$$\omega_a > \omega_1.$$

Для меньшей частоты мы имеем:

$$\omega_b^2 = \frac{\omega_2^2}{1 - \chi^2} \left[1 - \chi^2 \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right].$$

Но здесь множитель при χ^2 больше, единицы и следовательно множитель при ω_2^2 меньше, чем $(1 - \chi^2)$; следовательно

$$\omega_b < \omega_2.$$

Интересно рассмотреть до некоторой степени противоположный случай, когда разность частот $(\omega_1 - \omega_2)$ ничтожна, например когда обе системы совершенно одинаковы. Для этого случая решение упрощается (при $\omega_1 = \omega_2 = \omega$):

$$\omega_{ab}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \chi^2} \left[2\omega^2 \pm 2\chi\omega^2 \right] = \omega^2 \frac{1 \pm \chi}{1 - \chi^2} = \omega^2 \frac{1}{1 \mp \chi}.$$

Следовательно и в этом случае, при одинаковых системах, когда $\omega_1 = \omega_2$, после связи появляются *две разные частоты*, из которых одна больше, а другая меньше той частоты, которую имела каждая система в отдельности.

Приняв во внимание, что у нас получились *две различных* частоты колебаний, мы должны и для отношения амплитуд написать *два* различных уравнения:

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 = \frac{L_2}{L_1} \frac{\omega_2^2 - \omega_a^2}{\omega_1^2 - \omega_a^2} = a^2; \quad \left(\frac{B_1}{B_2}\right)^2 = \frac{L_2}{L_1} \frac{\omega_2^2 - \omega_b^2}{\omega_1^2 - \omega_b^2} = b^2.$$

Правые части обоих уравнений *положительны*; следовательно амплитуды действительны, и остается выяснить их знаки, которые в написанных соотношениях остаются неопределенными. Для этой цели необходимо возвратиться к исходным уравнениям, подставив в них частоты ω_a и ω_b :

$$A_1(-\omega_a^2 + \omega_1^2) = A_2 \frac{M}{L_1} \omega_a^2; \quad B_1(-\omega_b^2 + \omega_1^2) = B_2 \frac{M}{L_1} \omega_b^2;$$

$$A_2(-\omega_a^2 + \omega_2^2) = A_1 \frac{M}{L_2} \omega_a^2; \quad B_2(-\omega_b^2 + \omega_2^2) = B_1 \frac{M}{L_2} \omega_b^2.$$

Теперь мы видим, что для большей частоты ω_a амплитуды A_1 и A_2 нужно брать *противоположных* знаков, тогда как для меньшей частоты ω_b амплитуды B_1 и B_2 *одинаковых* знаков. После всех этих соображений мы можем представить результаты наших вычислений для электрических колебаний двух индуктивно связанных систем в следующем виде:

$$e_1 = A_1 \cos(\omega_a t + \alpha) + B_1 \cos(\omega_b t + \beta);$$

$$e_2 = -a A_1 \cos(\omega_a t + \alpha) + b B_1 \cos(\omega_b t + \beta).$$

Принимая во внимание вышенаписанные соотношения между амплитудами, мы видим, что у нас остаются всего *четыре* независимых друг от друга постоянных интегриации: A_1 , B_1 , α , β , которые определяются добавочными *начальными* условиями.

Заметим, что в *каждой* из двух связанных систем мы получаем одновременно *два* колебания с различными частотами. В результате мы можем иногда заметить *биения* (см. „Общий курс электричества“: колебания связанных маятников) колебаний.

173. Пример. Предположим, что для двух индуктивно связанных систем нам даны следующие начальные условия. При $t=0$ конденсатор первой системы был заряжен количеством электричества e_{01} , а сила тока была равна нулю: в то же самое время вторая система была в покое, т. е. $e_{02} = 0$. Если при таких условиях первая сис-

тема начинает свои колебания, то мы можем положить $\alpha = \beta = 0$. Итак при $t=0$:

$$e_{01} = A_1 + B_1;$$

$$e_{02} = -a A_1 + b B_1 = 0.$$

Отсюда определяются A_1 и B_1 :

$$B_1 = \frac{a}{b} A_1; \quad e_{01} = A_1 \left(1 + \frac{a}{b}\right);$$

и формулы колебаний электричества принимают вид:

$$e_1 = A_1 \left[\cos(\omega_a t) + \frac{a}{b} \cos(\omega_b t) \right],$$

$$e_2 = -a A_1 [\cos(\omega_a t) - \cos(\omega_b t)].$$

Исходя из этих формул, мы можем определить силу токов, разности потенциалов и т. д. для каждой из рассматриваемых систем. Если обе системы одинаковы, то $a = b = 1$ и мы получаем:

$$e_1 = A_1 [\cos(\omega_a t) + \cos(\omega_b t)]; \quad \omega_a = \frac{\omega}{\sqrt{1-\gamma}};$$

$$e_2 = -A_1 [\cos(\omega_a t) - \cos(\omega_b t)]; \quad \omega_b = \frac{\omega}{\sqrt{1+\gamma}}.$$

В этом случае, когда обе системы одинаковы, мы получаем и амплитуды их колебаний тоже *одинаковыми*, но фазы колебаний различны. В те моменты, когда косинусы, стоящие в формулах, равны $+1$, мы получаем наибольший заряд $e_1 = 2A_1$ и наибольшую разность потенциалов в конденсаторе *первой* системы, тогда как во второй системе $e_2 = 0$. Это будет, во-первых, при $t=0$, а затем это будет периодически повторяться в те моменты, когда более медленное колебание ω_b отстанет от более быстрого ω_a как раз на 360° и оба колебания станут опять *однофазными*. Наоборот в те моменты, когда косинусы будут равны $+1$ и -1 , мы получим наибольший заряд и наибольшую разность потенциалов (а также и наибольшую силу тока) во второй системе: $e_2 = -2A_1$, тогда как первая система окажется в покое. Это будет происходить в те моменты, когда фазы обоих колебаний A и B будут *противоположными*. Если мы будем следить за *энергиями* обеих систем, то увидим, что энергия эта колеблется, переходя из одной системы в другую и обратно. Период колебаний энергии будет вполне соответствовать периоду *биений*, которые образуются в каждой из этих

двух систем. Для того, чтобы вычислить период биений, нам нужно найти такой промежуток времени, чтобы разность фаз обоих колебаний равнялась 2π . Мы получаем:

$$\omega_a t_1 - \omega_b t_1 = 2\pi; \quad t_1 = \frac{2\pi}{\omega_a - \omega_b}$$

Чем больше разность обеих частот, т. е. чем сильнее связь систем, тем быстрее будут происходить биения; наоборот, чем слабее связь, тем медленнее будут биения и тем медленнее будет переходить энергия из одной системы в другую и обратно.

Аналогичные явления будут происходить и в том случае, когда рассматриваемые две системы не одинаковы; различие будет состоять в том, что амплитуды колебаний, а потому и переход энергии из одной системы в другую не будет происходить *полностью*, а только *частью*; биения не будут доходить до нуля.

Все эти явления хорошо видны при колебаниях связанных маятников.

174. Системы, связанные емкостью. Если две системы влияют друг на друга не своими магнитными полями (индуктивно), а своими электрическими полями, то уравнения их колебаний напишутся в следующей форме:

$$L_1 \ddot{e}_1 + \frac{1}{C_1} e_1 + \frac{1}{C} e_2 = 0; \quad e_1 = A_1 e^{j\omega t}$$

$$L_2 \ddot{e}_2 + \frac{1}{C_2} e_2 + \frac{1}{C} e_1 = 0; \quad e_2 = A_2 e^{j\omega t}$$

Здесь C_1 и C_2 означают емкости каждой системы в отдельности, а C означает их взаимную емкость (рис. 56). Подставляя в эти уравнения их решения e_1 и e_2 в комплексной форме, получаем (как и при индуктивной связи) соотношения между амплитудами колебаний:

$$(-\omega^2 + \omega_1^2) A_1 = -\frac{1}{L_1 C} A_2; \quad \omega_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1}$$

$$(-\omega^2 + \omega_2^2) A_2 = -\frac{1}{L_2 C} A_1; \quad \omega_2^2 = \frac{1}{L_2 C_2}$$

причем ω_1 и ω_2 суть частоты собственных колебаний каждой системы в отдельности. Для того, чтобы исключить амплитуды колеба-

ний, мы перемножаем оба эти уравнения и вводим в произведения правых частей коэффициент:

$$\vartheta^2 = \frac{C_1 C_2}{C^2}$$

Этот коэффициент ϑ играет при емкостной связи такую же роль, как у нас раньше играл коэффициент χ при связи индуктивной. Результат перемножения дает нам искомое уравнение для частоты:

$$\omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2) \omega^2 + (1 - \vartheta^2) \omega_1^2 \omega_2^2 = 0.$$

Это биквадратное уравнение решается так:

$$\omega_{ab}^2 = \frac{1}{2} \left[(\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4(1 - \vartheta^2) \omega_1^2 \omega_2^2} \right].$$

Значение этой формулы вполне аналогично той, которую мы получили при индуктивной связи, а потому мы можем не повторять здесь наших прежних рассуждений и ограничиться частным случаем, когда частоты обеих систем одинаковы. В этом случае мы имеем (при $\omega_1 = \omega_2 = \omega$):

$$\omega_{ab}^2 = \omega^2 (1 \pm \vartheta).$$

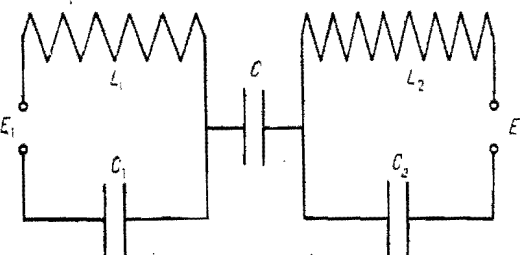


Рис. 56. Две системы, связанные емкостью.

Таким образом как при индуктивной связи, так и при емкостной связи мы получаем в *каждой* из двух систем *два* различных колебания с различными частотами, даже и в том случае, когда частоты до связи были одинаковы. Чем сильнее связь, тем больше обе полученные частоты отходят друг от друга.

175. Определение коэффициента связи по наблюдаемым частотам. Если мы определим частоты колебаний данных нам связанных систем, то на основании полученных выше формул мы можем вычислить и коэффициенты связей: χ и ϑ .

При *индуктивной* связи мы имеем:

$$\omega_a = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \chi}}; \quad \omega_b = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \chi}}$$

откуда следует, что

$$\chi = \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{1}{\omega_a^2} - \frac{1}{\omega_b^2} \right).$$

При емкостной связи мы имеем:

$$\omega_a = \omega \sqrt{1 + \delta}; \quad \omega_b = \omega \sqrt{1 - \delta};$$

откуда следует, что

$$\delta = \frac{1}{2\omega^2} (\omega_a^2 - \omega_b^2).$$

176. Общий случай. В более общем случае две системы могут быть связаны друг с другом и магнитными и электрическими полями одновременно. Тогда уравнения электрических колебаний в этих системах напишутся так:

$$L_1 J_1 + M J_2 + \frac{1}{C_1} e_1 + \frac{1}{C} e_2 = 0;$$

$$L_2 J_2 + M J_1 + \frac{1}{C_2} e_2 + \frac{1}{C} e_1 = 0.$$

Эти уравнения решаются совершенно тем же способом, как и в частных случаях индуктивной или емкостной связи. Мы ограничимся приведением результата вычисления для наиболее важного случая, когда обе связанные системы одинаковы. Тогда результирующие частоты колебаний определяются формулой:

$$\omega_{ab}^2 = \omega^2 \frac{1 \pm \delta}{1 \mp \gamma}.$$

Во всех наших вычислениях мы принимали, что влиянием сопротивлений R_1 и R_2 включенных в каждую систему, можно пренебречь. Если же этого сделать нельзя, то в вышенаписанные уравнения войдут еще члены вида $R_1 J_1$ и $R_2 J_2$; кроме того сама связь между системами может быть устроена не только при помощи взаимной индукции и взаимной емкости, но также и при помощи некоторого общего обеим системам сопротивления. Тогда в уравнениях появятся еще члены вида $R J_2$ и $R J_1$. Введение этих членов в уравнения электрических колебаний значительно осложняет их решение. Уже одно то обстоятельство, что у нас вместо биквадратного уравнения для частоты ω получится, как это легко видеть, уравнение четвертой степени, содержащее и третью степень ω^3 , представляет большое осложнение. Мы считаем излишним приводить здесь эти вычисления, так как они не дадут нам ничего принципиально нового. Мы знаем, что наличие сопротивления обуславливает поглощение энергии и затухание колебаний. Поэтому каждая система

в отдельности будет обладать теперь двумя характеризующими ее данными: частотой колебаний ω_1 и ω_2 и логарифмическим декрементом затухания k_1 и k_2 (217, 162). Если мы свяжем эти две системы, то в каждой из них вместо одного колебания появятся два различных колебания с частотами ω_a и ω_b и затуханиями k_a и k_b . Как и в частных случаях без сопротивления, полученные при связи частоты отличаются друг от друга больше, чем до связи; даже при двух одинаковых системах результирующее колебание оказывается с двумя разными частотами. Получившаяся при связи разница между частотами отчасти зависит и от первоначальных величин ω_1 и ω_2 , а также, но в меньшей степени, зависит и от первоначальных коэффициентов затухания каждой системы в отдельности. Напоминаем читателю, что и сами частоты ω_1 и ω_2 тоже зависят от k_1 и k_2 (217, 162). Далее результирующие затухания связанных колебаний тоже будут отличаться от первоначальных затуханий, причем колебание с большей частотой ω_a обладает обыкновенно и большим затуханием. Таким образом электрические колебания в каждой системе будут происходить по формулам:

$$e_1 = A_1 e^{-k_a t} \cos(\omega_a t + \alpha_1) + B_1 e^{-k_b t} \cos(\omega_b t + \beta_1),$$

$$e_2 = A_2 e^{-k_a t} \cos(\omega_a t + \alpha_2) + B_2 e^{-k_b t} \cos(\omega_b t + \beta_2),$$

где величины ω_a , ω_b , k_a , k_b зависят от состава первоначальных систем и от рода их связи. Отношения между амплитудами тоже определяются теми же данными, но абсолютные значения амплитуд и фаз определяются начальными условиями, в которых находились данные системы, например при $t=0$ (ср. 240, 172, 173).

177. Принужденные колебания связанных систем. Если в одной из систем действует какая-нибудь данная гармонически переменная электродвижущая сила, то уравнение двух связанных индуктивно систем напишется так:

$$L_1 J_1 + M J_2 + \frac{1}{C_1} e_1 = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$$

$$L_2 J_2 + M J_1 + \frac{1}{C_2} e_2 = 0.$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям резонанс-трансформатора (236, 171) с тем однако отличием, что не только вторичная катушка, но и первичная катушка содержит в себе некоторую емкость C_1 . Расчет подобной системы мало отличается от расчета резонанс-трансфор-

матора и мы его здесь производить не будем, предоставив это самому читателю. Однако существенное отличие этого случая состоит в том, что мы получаем *не один, а два резонанса*. Это есть общее свойство резонирующих систем, как бы сложны они ни были. Если система обладает не одним, а целым рядом собственных колебаний с частотами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, то каждый раз, как частота внешней силы ω подходит близко к частоте одного из собственных колебаний системы, мы получаем *максимум* амплитуды колебаний, т. е. *явление резонанса*; этот максимум выражен тем более резко, чем затухания собственных колебаний системы меньше. Таким образом в связанных системах при изменении частоты внешней силы ω мы получим резонансные кривые, состоящие из целой системы максимумов. Этими кривыми пользуются для определения частот ω_n и затуханий системы совершенно так же, как и в случае резонанса одной изолированной системы (224, 165).

178. Катодный усилитель. В следующем параграфе мы разберем действие так называемых *катодных генераторов* электрических колебаний, а перед тем мы должны, хотя бы вкратце, ознакомиться с одной из частей этого прибора, а именно с катодной лампой (или трубкой). На рис. 57 схематически представлена запаянная с обоих концов стеклянная трубка (включенная в контур), из которой тщательно выкачан воздух. В труб-

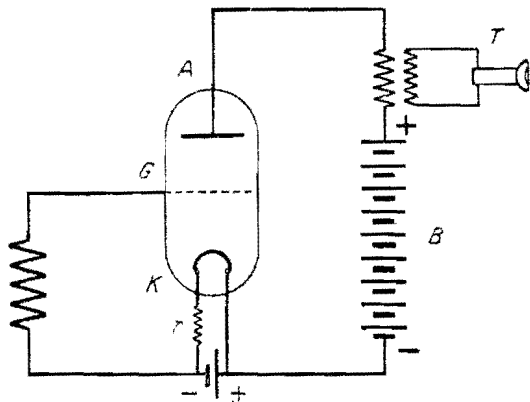


Рис. 57. Схема катодного усилителя.

ку впаяны пластинка А, служащая *анодом* при пропускании электрического тока, и проволочка К, служащая *катодом*. Между обоими этими электродами помещен еще третий электрод в виде металлической сетки G. Обыкновенно анод А и сетка G имеют форму концентрических цилиндров, а проволочка К протянута по оси этих цилиндров; однако мы для большей наглядности будем изучать действие прибора на схематическом рис. 57. Разрежение воздуха в трубке так сильно, что мы можем считать его электропроводность равной нулю. Тем же

менее мы можем пропустить через такую трубку электрический ток силой в несколько миллиампер, если будем поддерживать проволочку К в *раскаленном* состоянии; образующиеся около раскаленной проволоочки электроны направляются под действием электрического поля к сетке G и к анодной пластинке А и своими зарядами образуют *конвекционный* электрический ток. Однако для того, чтобы электроны направлялись от проволочки к сетке и к пластинке, эти последние должны быть заряжены *положительно*, т. е. иметь потенциалы более высокие, чем проволочка; если мы переключим внешний источник электрического тока и зарядим проволочку положительно, а сетку и пластинку отрицательно, то образовавшиеся у проволочки электроны не пойдут к противостоящим электродам, а будут вгоняться обратно в проволочку, и мы никакого электрического тока сквозь трубку не получим.

Подсчитаем действие этого прибора.

Из сказанного прежде всего вытекает, что электроны, появившиеся около раскаленной проволочки, будут образовывать два электрических тока: один поток электронов J_g будет направлен к сетке G, а другой J_a к анодной пластинке А. Полное количество электронов, ежесекундно уходящих от проволочки, или полная сила тока J_s будет равна:

$$J_s = J_g + J_a.$$

Этот электрический ток будет образовываться от двух причин: во-первых, от действия электрического поля сетки и, во-вторых, от действия некоторой *части* поля анода, потому что часть поля анода отрезана телом сетки, находящейся между обоими электродами А и К. Поэтому если мы обозначим разность потенциалов между сеткой и раскаленной проволочкой через E_g , а разность потенциалов между анодной пластинкой и проволочкой через E_a , то можем действие обоих электрических полей на электроны проволочки выразить суммой:

$$E_s = E_g + DE_a,$$

где коэффициент D будет меньше единицы. Опыт показывает, что величины J_s и E_s не пропорциональны друг другу, а зависимость между ними выражается некоторою кривою линией (характеристикой трубки), форма которой зависит от конструкции трубки и ее электродов. По опытам и теории *Лэнгмюра* сила тока J_s

пропорциональна разности потенциалов E_s в степени $3/2$. Но нам нет надобности входить в эти подробности и достаточно написать, что сила тока J_s есть некоторая функция f от разности потенциалов E_s . Заметим, что коэффициент D тоже зависит от конструкции трубки, но он так мало изменяется при изменении разности потенциалов, что мы можем его считать для данной трубки постоянным. Итак мы имеем:

$$J_s = J_g + J_a = f(E_g + DE_a).$$

При обычных условиях действия этого прибора сила тока J_g сетки значительно меньше силы тока в пластинке, а потому мы без значительной погрешности можем упростить формулу, написав:

$$J_a = f(E_g + DE_a).$$

Кривые зависимости силы тока J_a от потенциала сетки E_g имеют вид, представленный на рис. 58. Если мы, не изменяя потенциала анода E_a , будем изменять потенциал сетки, т. е. будем идти по одной из кривых, изображенных на рис. 58, то получим для угла наклона касательной к этой кривой:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial J_a}{\partial E_g} = S.$$

Эта величина называется *крутизной* характеристики. Если же мы, не изменяя потенциала сетки, будем изменять потенциал анода, то получим:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\partial J_a}{\partial E_a} = DS.$$

В этом случае крутизна подъема будет меньше, потому что коэффициент D меньше единицы¹⁾.

¹⁾ Эти обозначения вошли в настоящее время во всеобщее употребление и взяты с немецких слов S — Steilheit и D — Durchgriff. Обе величины зависят от конструкции трубки и от формы расположения ее электродов.

Приняв это во внимание, мы можем написать для полного дифференциала силы тока:

$$dJ_a = \frac{\partial J_a}{\partial E_g} dE_g + \frac{\partial J_a}{\partial E_a} dE_a = S \cdot dE_g + DS \cdot dE_a.$$

Ту же самую формулу мы примем и для небольших изменений силы тока:

$$\Delta J_a = S \cdot \Delta E_g + DS \cdot \Delta E_a.$$

Это означает, что рассматриваемое нами изменение Δ настолько мало, что в его пределах мы можем характеристику трубки считать за отрезок *прямой* линии.

Теперь предположим, что в анодной цепи имеется некоторое сопротивление R_a , и следовательно мы при прохождении электрического тока J_a получаем падение потенциала:

$$-\Delta E_a = R_a \Delta J_a.$$

Подставляя это выражение в вышенаписанную формулу, мы определяем:

$$\Delta J_a = \frac{S}{1 + DSR_a} \Delta E_g.$$

Эта формула показывает, что небольшие изменения потенциала сетки ΔE_g могут повлечь за собою значительные изменения силы тока в анодной цепи, если крутизна S характеристики трубки значительна. На этом основании катодные трубки с большой крутизной характеристики S и служат как *усилители*. Из той же формулы видно, что усиление будет больше, если коэффициент D меньше.

Заметим, что входящее в формулу произведение DS очевидно имеет измерение, *обратное* сопротивлению (как электропроводность). Потому часто величину:

$$R_1 = \frac{1}{DS}$$

называют *внутренним сопротивлением* рассматриваемой катодной трубки. Это внутреннее сопротивление бывает обыкновенно очень большим в несколько сот тысяч омов. Коэффициент D имеет обыкновенно величину около 0,1, а крутизна S бывает равна около 0,1 мА на 1 В.

179. Катодный генератор. Если включить в цепь сетки катодного усилителя систему, состоящую из самоиндукции и емкости (рис. 59), т. е. систему, способную совершать гармонические колебания с некоторым собственным периодом

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

и связать анодную цепь с цепью сетки индуктивно (при помощи трансформатора M), то мы получим приспособление, которое позволяет превращать постоянную электродвижущую силу аккумуляторов, установленных в анодной цепи (рис. 59), в переменную электродвижущую силу системы (L, R, C), т. е. позволяет получать незатухающие электрические колебания. Этот так называемый *катодный генератор* электрических колебаний имеет в настоящее время большое и разностороннее применение в радиотехнике и в лабораториях.

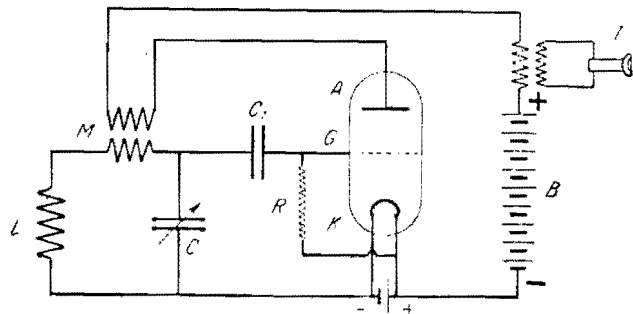


Рис. 59. Схема катодного генератора электрических колебаний.

Для выяснения принципа, на котором основано действие этого генератора, мы рассмотрим схему рис. 59 и напишем ряд уравнений, вытекающих из этой схемы. При этом чтобы излишне не загромождать формул, мы пока знаки Δ при всех величинах будем опускать и введем их снова по окончании выкладок.

Для выяснения принципа, на котором основано действие этого генератора, мы рассмотрим схему рис. 59 и напишем ряд уравнений, вытекающих из этой схемы. При этом чтобы излишне не загромождать формул, мы пока знаки Δ при всех величинах будем опускать и введем их снова по окончании выкладок.

1) Для силы тока в трубке мы уже имеем уравнение:

$$J_a = SE_g + DSE_a.$$

2) Для системы (L, R, C) мы должны написать такое же уравнение, какое мы уже писали раньше для подобных систем (216, 162) с той однако разницей, что теперь система имеет ответвление между самоиндукцией и емкостью, а потому силы токов J_1 и J_2 в

самоиндукции и в емкости могут быть различными. Приняв это во внимание, мы напишем теперь:

$$LJ_1 + RJ_1 + \frac{1}{C} e_2 = 0; \quad J_2 = \dot{e}_2.$$

3) Разница в силах токов обеих половин системы (L, R, C) должна равняться силе тока, уходящего в ответвление, т. е. к анодной пластинке (первое правило Кирхгофа):

$$J_a = J_1 - J_2.$$

4) Применяя второе правило Кирхгофа к контуру анодной цепи и обходя этот контур через конденсатор, получаем:

$$E_a + R_a J_a - \frac{1}{C} e_2 = 0.$$

5) Поступая таким же образом с контуром цепи сетки, в которой имеется только одна электродвижущая сила индукции в трансформаторе M , имеем:

$$E_g = MJ_1.$$

Заметим, что во втором уравнении мы не приняли во внимание электродвижущую силу трансформатора, потому что сила тока в цепи сетки настолько мала, что она не может оказывать заметного влияния на систему (L, R, C).

Из вышенаписанных пяти уравнений мы можем определить пять неизвестных:

$$J_1; J_2; J_a; E_a; E_g.$$

Но нас интересует главным образом сила тока J_1 . По известному уже J_1 мы можем затем, если это необходимо, определить и все остальные величины.

Для определения величины J_1 мы можем поступить следующим образом. Сложим второе уравнение с четвертым и исключим таким образом e_2 :

$$E_a + R_a J_a + LJ_1 + RJ_1 = 0.$$

Это уравнение мы могли бы получить и непосредственно, применяя второе правило Кирхгофа к контуру анодной цепи, но обходя этот контур не через конденсатор, как это мы делали, составляя четвертое уравнение, а через самоиндукцию L и сопротивление R ,

Из полученного уравнения определяем E_a , а из пятого уравнения определяем E_g и подставляем обе величины в первое уравнение:

$$J_a = (SM - DSL)J_1 - DSRJ_1 - DSR_a J_a.$$

Величину J_a мы можем на основании третьего уравнения выразить через J_1 и J_2 и написать:

$$(1 + DSR_a)J_2 = -(SM - DSL)J_1 + (1 + DSR_a + DSR)J_1.$$

Приписав к этому второе уравнение, продифференцированное по времени:

$$-J_2 = CL\dot{J}_1 + RCJ_1,$$

мы имеем возможность исключить J_2 (умножив последнее уравнение на $(1 + DSR_a)$ и сложив оба уравнения вместе), и у нас остается дифференциальное уравнение для J_1 :

$$CL(1 + DSR_a)\dot{J}_1 + (RC + RCDSR_a + DSL - SM)J_1 + (1 + DSR_a + DSR)J_1 = 0.$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и мы уже знаем (ср. 216,162), что оно решается при помощи гармонических функций с затухающей амплитудой. Напоминаем читателю, что при наших вычислениях мы опускали значки Δ ; теперь мы снова введем этот знак и напишем наше решение в виде:

$$\Delta J_1 = Ae^{-kt} \cos(\omega t + \varphi).$$

Это означает, что сила тока в системе (L, R, C) будет совершать гармонические колебания с затуханием около некоторого среднего значения J_0 ; амплитуду A этих колебаний мы предполагаем настолько малой, что участок характеристики (рис. 58) в пределах изменения ΔJ_1 мы можем считать за отрезок прямой линии.

Что касается величин ω и k , то мы можем определить их непосредственно из коэффициентов уравнений, пользуясь результатами § 162.

Если написать наше уравнение с сокращенными обозначениями коэффициентов

$$l\dot{J}_1 + rJ_1 + \frac{1}{c}J_1 = 0,$$

то имеем:

$$k = \frac{1}{2} \frac{r}{l};$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{lc};$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - k^2.$$

Здесь ω_0 означает частоту колебаний при отсутствии затухания, т. е. в том случае, если бы коэффициент при первой производной J_1 был бы равен нулю.

Если мы теперь от сокращенных обозначений перейдем к их значениям в вышенписанном дифференциальном уравнении, то получим для частоты:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \left[1 + \frac{DSR}{1 + DSR_a} \right].$$

Как видим, частота эта несколько больше той, которая получается в изолированной системе (L, R, C). Для логарифмического декремента затухания имеем:

$$k = \frac{1}{2} \frac{R}{L} \left[1 + \frac{DSL - SM}{CR(1 + DSR_a)} \right].$$

Логарифмический декремент тоже получается несколько больше, чем в изолированной системе. Но зато теперь мы можем изменять затухание k , не изменяя самой системы (L, R, C), а изменяя только ее связь с цепью решетки, т. е. изменяя величину M . Соответственным выбором связи M мы можем получить, несмотря на наличие сопротивления R и R_a , электрические колебания с очень слабым затуханием. Но система с слабым затуханием собственных колебаний может служить очень чувствительным *резонатором* с ярко выраженным резонансом. Подобные резонансные усилители с так называемой *обратной связью* M часто употребляются в радиотехнике.

Заметим, что уменьшение коэффициента затухания соответственным подбором величины M возможно только в том случае, когда катушки трансформатора имеют относительное расположение, которое мы приняли при расчете. Если же мы переключим одну из катушек трансформатора, то в пятом уравнении у нас будет стоять знак минус, а в выражении для величины k произведение SM получится со знаком плюс. При таких условиях мы никогда не достигнем уменьшения затухания ниже нормального. Впрочем правильная установка катушек трансформатора легко находится непосредственным опытом.

Теперь предположим, что нам удалось подобрать такую связь, что затухание собственных колебаний системы оказалось *равным нулю*. Теоретически для этого необходимо, чтобы коэффициент при

первой производной J_1 в дифференциальном уравнении был равен нулю, т. е. чтобы

$$M = DL + \left(\frac{1}{S} + DR_a \right) CR.$$

При этом условии наша система будет давать незатухающие электрические колебания с частотой ω_0 . Подобное расположение приборов часто употребляется в радиотехнике и называется *катодным генератором* электрических колебаний.

Само собою разумеется, что энергия получаемых таким образом электрических колебаний берется из анодной батареи аккумуляторов.

Более подробные сведения об этом приборе, имеющие практическое значение, читатель может найти в специальных книгах по радиотехнике.

180. Распределение переменного тока по сечению проводника.

Если нам дан однородный проводник кругового сечения (проводка) и мы включим его в цепь постоянной электродвижущей силы (аккумуляторы), то мы получим постоянный ток, который будет распределен *равномерно* по всему значению проводника, т. е. плотность тока i будет во всех точках кругового сечения *одинакова*. Нечто иное мы получим, если включим тот же проводник в цепь переменного тока; при переменном токе плотность тока у краев сечения окажется больше, чем посередине, и чем больше частота переменного тока, тем это неравномерное распределение плотности тока по сечению оказывается сильнее. При обычном переменном токе в 50 периодов в секунду указанное явление мало заметно, но при быстро-переменных токах радиотехники неравномерное распределение тока по сечению настолько сильно, что осевые части проводников почти совсем не участвуют в электропроводности, а весь ток занимает только поверхностный слой проводника толщиной в несколько тысячных миллиметра (это явление часто обозначается английским словом *Skin effect*; *skin* — означает *кожа*, или *поверхностный слой*). Это явление обнаруживается между прочим в том обстоятельстве, что сопротивление проводника кажется больше, чем для постоянного тока. Так как осевые части проводника не участвуют в проведении тока, то ради экономии в материале иногда применяются проводники трубчатые или употребляют более дешевую железную проволоку, покрывая ее снаружи тонким слоем электролитической меди.

Причина этого явления заключается в индукционном действии быстро-переменных токов. Можно до некоторой степени уяснить себе это и без расчета, если представить себе данный проводник составленным из целой системы тонких проволок одинакового сечения. Сопротивление этих проволок будет одинаковое и они окажутся в проводнике соединенными как бы параллельно. Ясно, что при постоянном токе в каждой из n проволок будет идти $\frac{1}{n}$ всего электрического тока проводника. Однако при переменном токе сила тока обуславливается не только омовским сопротивлением, а так называемым *кажущимся* сопротивлением, т. е. самоиндукцией и взаимной индукцией проводников. При переменном токе проявляется индуцирующее действие переменного магнитного поля; чем больше число перемен в секунду, тем это влияние магнитного поля будет больше. Если мы применим это к тем n проволочкам, из которых мы представили себе составленный проводник, то должны принять во внимание, что поток магнитной индукции, охватывающий осевую часть проводника, всегда будет больше, чем поток индукции для крайних проволок, так как магнитное поле частью расположено внутри провода. Поэтому кажущееся сопротивление центральной части должно быть больше, а сила тока в осевой части должна быть меньше, чем в краевых частях проводника; а это и означает, что распределение тока по сечению проводника должно быть неравномерное и неравномерность эта должна расти вместе с частотой переменного тока.

При теоретическом подсчете этого явления мы будем исходить из двух основных уравнений *Максвелла*, написав их в общей интегральной форме, независимой от выбора системы координат:

$$\oint (\mathbf{M} \cdot d\mathbf{s}) = 4\pi \int (i \cdot d\mathbf{s}).$$

$$\oint (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}) = - \frac{d}{dt} \int (\mu \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s}).$$

Заметим, что при круговом сечении проводника и полной однородности его материала как магнитное поле, так и распределение плотности тока будет иметь *осевую симметрию*. Поэтому, применяя первую формулу, удобнее всего произвести линейную интеграцию $\mathbf{M} \cdot d\mathbf{s}$, обходя круговой контур радиуса r с центром на оси сечения (рис. 60); на всем этом контуре величина \mathbf{M} будет одна и та же

и направлена она будет вдоль окружности. Обходя всю окружность, мы получаем для линейного интеграла $M \cdot 2\pi r$. В то же время справа мы можем за элемент площади взять тонкую кольцеобразную полосу радиуса r и ширины dr . Тогда получим первое уравнение в виде:

$$M \cdot 2\pi r = 4\pi \int_0^r i \cdot 2\pi r \cdot dr.$$

Написав это уравнение для окружностей радиусов r и $(r + dr)$ и вычтя одно уравнение из другого, получаем:

$$(M \cdot r)_{r+dr} - (M \cdot r)_r = 4\pi i r \cdot dr.$$

Но разность, стоящую в левой части, можно представить так:

$$\frac{\partial}{\partial r} (M \cdot r) \cdot dr.$$

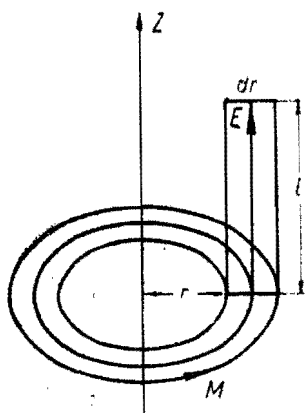


Рис. 60. Расчет цилиндрического поля.

а потому первое уравнение Максвелла представится следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial r} (M \cdot r) = 4\pi i r.$$

Это уравнение мы могли бы получить и непосредственно, если бы применили выражение для $\text{curl} M$ в цилиндрических координатах и ввели бы осевую симметрию, т. е. предположили бы, что все величины зависят только от расстояния r , от оси поля (предлагаем читателю сделать это, исходя из общих формул части I, стр. 228, 164).

Теперь применим второе уравнение Максвелла к контуру, составленному из двух прямых линий l (рис. 60), параллельных оси поля и лежащих на расстоянии dr друг от друга в радиальной (меридиональной) плоскости. Так как напряжение электрического поля направлено вдоль l , то мы получаем для линейного интеграла по замкнутому контуру:

$$(E \cdot l)_{r+dr} - (E \cdot l)_r = \frac{\partial E}{\partial r} l \cdot dr.$$

С другой стороны, поток магнитной индукции сквозь площадку $l \cdot dr$ равен (для определения знака ср. рис. 60):

$$-dN = \mu M l \cdot dr,$$

а потому второе уравнение Максвелла дает нам:

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \mu \dot{M}.$$

Здесь мы можем выразить напряжение поля E через силу тока и удельную электропроводность σ по общему закону Ома:

$$i = \sigma E.$$

Итак мы получили два уравнения:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (Mr)}{\partial r} = 4\pi i; \quad \frac{\partial i}{\partial r} = \mu \sigma \dot{M}.$$

Взяв от первого уравнения производную по r , можем исключить i :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (M \cdot r)}{\partial r} \right] = 4\pi \mu \sigma \dot{M}.$$

Но мы можем также взять от первого уравнения производную по t и подставить в него \dot{M} из второго уравнения; тогда получаем дифференциальное уравнение для плотности тока:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial i}{\partial r} r \right) = 4\pi \mu \sigma \frac{\partial i}{\partial t}.$$

Теперь мы предположим, что сила тока меняется со временем гармонически и, применяя метод комплексных решений, положим

$$i = i_r e^{j\omega t}.$$

Здесь i_r — амплитуда плотности тока — зависит только от r , потому что все поле имеет осевую симметрию. Подставляя это в полученное уравнение, имеем:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial i_r}{\partial r} r \right) - j \cdot 4\pi \mu \sigma \omega \cdot i_r = 0.$$

Разделим это уравнение на коэффициент при i_r и введем сокращенное обозначение:

$$4\pi \mu \sigma \omega = m; \\ r \sqrt{-j \cdot m} = x.$$

Тогда наше уравнение принимает вид:

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial i_r}{\partial x} x \right) + i_r = 0.$$

Это уравнение представляет собою один из частных случаев уравнений Бесселя и решается при помощи особых, так называемых бесселевых функций (первого рода и нулевого порядка). Для рассматриваемого уравнения функция Бесселя представится в виде бесконечного ряда так:

$$i_r = i_0 J_0(x) = i_0 \left[1 - \frac{x^2}{(2)^2} + \frac{x^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \dots \right]$$

Но так как величина x у нас мнимая, то ряд этот распадается на два ряда:

$$i_r = i_0 \left[\left(1 - \frac{m^2 r^4}{(2 \cdot 4)^2} + \dots \right) + j \cdot \left(\frac{mr^2}{(2)^2} - \frac{m^3 r^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \dots \right) \right]$$

Таким образом мы получили для амплитуды плотности тока комплексное выражение вида:

$$i_r = i_0 (a + bj),$$

причем величины a и b зависят от m и r , т. е. от материала проволоки (μ, σ), от частоты переменного тока ω и от расстояния r рассматриваемой точки от оси проводника. Из формул видно, что величина i_0 представляет собою амплитуду плотности тока на самой оси ($r=0$). Комплексное выражение для амплитуды означает, что между токами на оси и токами на расстоянии r от оси имеется разность фаз, определяемая формулой:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$

Абсолютная же величина амплитуды равна:

$$i_r = i_0 \sqrt{a^2 + b^2} = i_0 c.$$

Для всех этих величин: a, b, c имеются таблицы, которые дают возможность начертить кривую распределения плотности тока в зависимости от расстояния r от оси проводника (рис. 61).

В нашу формулу входит величина плотности тока i_0 на оси проводника. Эта величина в большинстве случаев не дается непосредственно; но если мы путем измерения определили среднюю силу тока всего сечения i_m , то можем по ней вычислить и i_0 . Это можно сделать аналитически, но гораздо проще произвести этот расчет графически. Если материальные постоянные проводника $\mu\sigma$ нам известны и частота ω дана, то мы можем начертить кривую i_r рас-

пределения плотности тока в каком-либо масштабе при $i_0 = 1$, и по этой кривой (при помощи например планиметра) определить отношение $i_m : i_0$. Разделяя амплитуду внешней электродвижущей силы на амплитуду средней плотности тока и на величину сечения проводника S , получаем кажущееся сопротивление проводника для переменного тока данной частоты:

$$R_0 = \frac{E_0}{i_m S}; \quad J_m = i_m S.$$

Часто интересуются не кажущимся сопротивлением, а так называемым *эффективным сопротивлением*, определяемым не по закону Ома, а по закону Джоуля. Если написать выражение для количества выделяемой переменным током теплоты в форме

$$R_e J_e^2 = W,$$

то множитель при квадрате эффективной силы тока J_e и будет называться эффективным сопротивлением. Эта формула верна конечно и для постоянного тока, тем не менее величины R_e для постоянного и переменного токов различны. Так например для медной проволоки: $\mu = 1; \sigma = 0,0006$; мы имеем при радиусе проволоки равным 1 сантиметру следующие соотношения:

Частота переменного тока	50.	800.
Отношение плотностей тока на оси и на периферии	0,93.	0,087.
Отношение эффективных сопротивлений	1,03.	2,39.

Неравномерное распределение тока по сечению оказывает влияние не только на величину кажущегося и эффективного сопротивления, но также и на величину самоиндукции проводника. Действительно, если токи расходятся от оси к периферии, то магнитное поле внутри проводника должно уменьшиться. Обыкновенно под эффективной величиной коэффициента самоиндукции понимают коэффициент при квадрате силы тока в выражении для магнитной энергии:

$$\frac{1}{2} L_e J_e^2 = T_m.$$

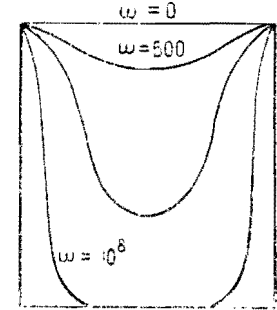


Рис. 61. Неравномерное распределение тока по сечению цилиндрического проводника.

Это определение совпадает с определением L для постоянного тока, но величины L_e и L оказываются по вышеуказанной причине различными. Для того же примера, как и выше, мы имеем на сантиметры длины:

частота переменного тока	50.	800.
разность самоиндукций $L - L_e$	0,0063.	0,267.

Для того чтобы уменьшить по возможности влияние неравномерного распределения тока по сечению, часто употребляют провода, составленные из тонких изолированных (эмалированных) проволок, сплетенных друг с другом так, чтобы одна и та же проволочка проходила в разных местах провода на различных расстояниях от оси.

Если проволока наматывается в виде катушки, то распределение тока по сечению проводника делается несимметричным; большая плотность тока получается в тех местах сечения, которые ближе к оси катушки (там, где магнитное поле сильнее). В этом случае избегают нежелательного влияния неравномерного распределения тока по сечению, производя обмотку то по внутренним слоям катушки, то по наружным слоям.

В заключение прибавим, что при быстро-переменных токах распределение заряда на обкладках конденсаторов тоже делается неравномерным. Однако это явление в большинстве случаев имеет второстепенное значение.

При большой частоте, как мы уже сказали, ток распределяется главным образом вблизи поверхности проводника. Этот случай мы уже имели в виду, когда вычисляли коэффициент самоиндукции при поверхностных токах (124, 125). Кроме того при очень тонком слое электрических токов мы можем пренебречь кривизною проводника и рассматривать его поверхность как плоскую. Этот случай мы рассмотрим подробно при исследовании волн в проводниках (205, 207).

II. ВОЛНЫ ВДОЛЬ ПРОВОЛОК

181. **Формулы волнообразного движения.** За основную форму колебательных движений мы приняли гармоническое колебание, выражаемое формулами:

$$A \cos(\omega t); \quad B \sin(\omega t).$$

Все остальные периодические движения любой формы мы можем себе представить составленными из гармонических колебаний; в этом и заключается знаменитая теорема *Фурье* (ч. II, 150, 85). Аналогичным образом мы примем теперь за основную форму волнообразного движения *гармоническую волну*, формулу для которой мы можем получить, исходя из следующих простых соображений.

Положим, что в какой-либо точке O линии OX происходит гармоническое колебание. Под колебанием мы будем понимать не только периодические перемещения материальной точки, но вообще изменение со временем какой-либо скалярной или векторной величины; это могут быть изменения потенциала, напряжения поля и т. п. Это колебание может распространяться по линии OX , и в какой-либо другой точке P , отстоящей от точки O на расстоянии x , мы получим опять гармонические колебания, только *несколько позже*. Если обозначить время запаздывания через t' , то колебания в точке P будут выражаться формулою:

$$y = A \cos \omega(t - t').$$

Время запаздывания мы можем выразить через расстояние x и скорость c распространения колебаний вдоль OX :

$$t' = \frac{x}{c}.$$

Тогда для колебания в точке P мы получим формулу:

$$y = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

Эта формула применима к любой точке P и называется *формулой гармонической волны*. Если возьмем какой-либо момент времени t_1 , то состояние *всех точек* линии может быть выражено формулою:

$$y_1 = A \cos \omega \left(t_1 - \frac{x}{c} \right).$$

Эта формула дает нам зависимость y_1 от x и изображает *формулу волны* в рассматриваемый момент времени. Для какого-нибудь другого момента времени t_2 мы получим:

$$y_2 = A \cos \omega \left(t_2 - \frac{x}{c} \right).$$

Сравнивая обе эти формулы, мы видим, что форма волны не изменилась, но вся волна без изменения своей формы передвинута по оси OX на расстояние

$$x' = (t_2 - t_1)c.$$

Действительно, если мы в выражение для y_2 подставим вместо x новое его значение $x + x'$, то получим:

$$y_2 = A \cos \omega \left[t_2 - \frac{x}{c} - (t_2 - t_1) \right] = A \cos \omega \left(t_1 - \frac{x}{c} \right) = y_1.$$

Таким образом рассматриваемая нами волна распространяется вдоль OX , сохраняя свою форму. Нужно однако заметить, что это не всегда так бывает. Про гармонические волны мы можем сказать, что форма волны сохраняется во всех случаях, в которых скорость распространения c не зависит от величины y , а так как мы только такие случаи и будем рассматривать здесь, то мы можем сказать, что гармонические волны распространяются с сохранением формы. Однако если скорость распространения c зависит от частоты колебания ω , то для гармонических волн различной частоты мы можем получить и скорости распространения различные; поэтому если рассматриваемая нами волна более общего характера составлена (по Фурье) из нескольких гармонических волн различной частоты, то хотя каждая гармоническая волна в отдельности и сохраняет свою форму, тем не менее волны различной частоты, распространяясь с различными скоростями, в сумме своей составят волну изменяющейся формы. Такие случаи действительно наблюдаются в длинных телеграфных линиях.

Из вышесказанных формул мы видим, что амплитуда и частота колебаний всех точек линии OX одна и та же; только колебания их отличаются по фазе, и разность фаз колебаний двух точек, отстоящих друг от друга на расстоянии x' , равна

$$\varphi = \omega \frac{x'}{c}.$$

Расстояние между точками, для которых разность фаз колебаний равна 2π , называется длиной волны и обозначается обыкновенно через λ . Если мы примем во внимание соотношение между частотой колебаний ω и периодом колебаний τ , то найдем соотношения:

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}; \quad 2\pi = \omega \frac{\lambda}{c} = \frac{2\pi}{\tau} \frac{\lambda}{c}; \quad \lambda = c\tau.$$

Итак длина волны представляет собою то расстояние, пройдя которое мы опять встречаем те же значения y (это есть период функции по отношению к переменной x , подобно тому как τ есть период той же функции по отношению к переменной t); в то же самое время длину волны можно определить как расстояние, пройденное волною за полный период колебаний τ .

Мы введем еще обозначение:

$$m = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Эта величина имеет некоторую аналогию с величиною

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}.$$

Частота ω равна числу периодов, заключающихся во времени 2π секунд, тогда как величина m равна числу волн, укладываемых на длине в 2π сантиметров. Отношение между этими двумя величинами равно скорости распространения волн:

$$\frac{\omega}{m} = \frac{\lambda}{\tau} = c.$$

Введя это обозначение, мы получаем для формулы волны:

$$y = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) = A \cos (\omega t - mx).$$

182. Стоячие волны. Рассмотрим две гармонических волны одинаковой амплитуды и частоты, но распространяющиеся в противоположные стороны. Одна из волн распространяется вдоль оси $+OX$, имеет скорость $+c$ и будет изображаться формулою:

$$y_+ = A \cos (\omega t - mx),$$

тогда как другая распространяется по направлению $-OX$, имеет скорость $-c$ и будет выражаться формулою:

$$y_- = A \cos (\omega t + mx).$$

Обе волны вместе дают колебания, выражающиеся суммой:

$$y = A \cos (\omega t - mx) + A \cos (\omega t + mx) = 2A \cos (mx) \cdot \cos (\omega t).$$

В результате мы получили во всех точках линии OX гармонические колебания одного и того же периода и одинаковой фазы,

но амплитуда колебаний в различных точках различна. В некоторых точках, для которых

$$\cos(mx) = 1,$$

мы получаем наибольшую амплитуду $2A$, между тем как для точек, где

$$\cos(mx) = 0,$$

эта амплитуда равна нулю. Первые точки называются *пучностями*, а вторые называются *узлами* волны. Узлы отстоят друг от друга на *полволны* и пучности тоже расположены друг от друга на расстоянии *полуволны*, между тем как каждый узел отстоит от ближайших пучностей на расстоянии, равном одной *четверти* волны.

Узлы и пучности остаются все время на своих местах, а потому и все это явление в отличие от *проходящей волны*, рассмотренной нами в предыдущем параграфе, называется *стоячей волной*. Явления проходящих и стоячих волн хорошо известны из общего курса физики, а потому мы можем не останавливаться на нем дольше.

183. Затухание волн. Нам уже неоднократно встречались гармонические колебания с постепенно убывающей амплитудой и мы считали достаточным изучить более подробно свойства колебаний, убывающих во времени по экспоненциальному закону:

$$y = Ae^{-kt} \cos(\omega t).$$

Аналогично с этим нам встретятся в дальнейшем и волны, амплитуда которых убывает со временем по тому же закону. Формула подобных гармонических волн будет иметь вид:

$$y = Ae^{-kt} \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

В этой формуле затухание изображено как функция времени. Но мы можем заменить

$$t = \frac{x}{c}$$

и тогда получим затухание как функцию пройденного пути x .

Часто явление затухания волн, т. е. уменьшение их амплитуды, вследствие того, что волны теряют часть своей энергии *в пути*,

называется *поглощением волн*, а коэффициент при x в степени e называют *декрементом поглощения*. Соотношение между декрементом во времени и декрементом в пути выразится так:

$$e^{-kt} = e^{-bx}; \quad b = \frac{k}{c}.$$

Впрочем не надо упускать из виду, что *затухание во времени* может происходить от двух совершенно разных причин. Во-первых, данное нам колебание может быть уже затухающим во времени; а когда это затухающее само по себе колебание распространяется в виде волны, то оно может кроме того терять свою энергию и на своем пути вследствие поглощения энергии, превращения ее в теплоту и т. п. В настоящее время, когда мы имеем возможность получать незатухающие электрические колебания, нам уже нет необходимости осложнять нашу теорию и рассматривать распространение колебаний с *данным затуханием*, и мы можем ограничить наше исследование теми случаями, когда уменьшение амплитуды электрических волн происходит только вследствие поглощения их энергии *на пути*, в самых проволоках, по которым распространяются волны. Тем не менее иногда бывает удобно и это поглощение волн в пути выражать как функцию времени.

Само собою разумеется, что не только проходящие, но также и стоячие волны могут затухать со временем, потому что стоячая волна представляет собою сумму двух проходящих волн, распространяющихся в противоположные стороны.

184. Телеграфное уравнение. Мы представим себе телеграфную линию схематически в виде двух параллельных проводов (рис. 62) и рассмотрим элемент длины этой линии dx . Обозначим сопротивление *единицы длины* (двойного) провода через R , а силу тока в нем через J ; тогда падение потенциала на сопротивление будет равно $RJ \cdot dx$. Кроме того при переменном токе нужно принять во внимание разность потенциалов, обусловленную самоиндукцией провода. Обозначим коэффициент самоиндукции *единицы длины* провода через L ; тогда падение потенциала на длине dx , обусловленное явлением самоиндукции, будет равно $LJ \cdot dx$. Таким образом полное падение потенциала V на длине dx провода выразится формулою:

$$-dV = (RJ + LJ) \cdot dx.$$

Далее на длине dx будет уменьшаться не только потенциал V , но также и сила тока J и притом от двух причин: во-первых

может происходить *утечка* вследствие несовершенной изоляции между проводами и кроме того при переменном токе часть электричества будет уходить на зарядку и разрядку проводов. Обозначив через G электропроводность среды между проводами на единицу длины провода, мы можем утечку выразить формулой $GV \cdot dx$. Заряды на поверхности проводов при их взаимной емкости (тоже на единицу длины) C будут равны $CV \cdot dx$, а сила тока, ответвляющаяся от проводов и идущая на эту зарядку, будет выражаться формулой $CV \cdot dx$. Итак полное ответвление тока на длине dx двойного провода будет равно:

$$-dJ = (GV + CV) \cdot dx.$$

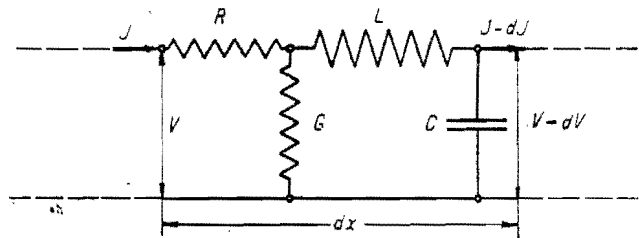


Рис. 62. Схема провода с самоиндукцией, сопротивлением, емкостью и утечкой.

Мы получили таким образом два уравнения:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = RJ + LJ; \quad -\frac{\partial J}{\partial x} = GV + CV,$$

из которых мы можем исключить либо J либо V . Если мы первое уравнение продифференцируем по x и подставим в него J из второго уравнения, то получим для потенциалов дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = GRV + (GL + CR) \dot{V} + CL\ddot{V}.$$

Но мы можем продифференцировать второе уравнение по x и подставить в него V из первого уравнения, тогда получаем для силы тока уравнение:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = GRI + (GL + CR)J + CL\dot{I}.$$

Оба полученных уравнения имеют одну и ту же форму и решаются одинаковыми функциями. В математике уравнения такого

вида носят название *телеграфных уравнений*, потому что решение их получило большое практическое значение в телеграфии.

185. Интегрирование телеграфного уравнения. Мы не будем излагать здесь способы интегрирования телеграфного уравнения в общей форме, а выделим только те случаи, которые имеют наибольшее значение для практики. Прежде всего мы можем несколько упростить это уравнение, приняв во внимание, что утечка между проводами бывает обыкновенно ничтожна и можем положить $G = 0$. Тогда мы получим:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = RJ + LJ; \quad -\frac{\partial J}{\partial x} = C \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Последнее из этих уравнений дает нам возможность положить

$$V = + \frac{\partial W}{\partial x}; \quad J = -C \frac{\partial W}{\partial t}$$

и таким образом свести задачу к определению одной только функции W , по которой мы затем простым дифференцированием можем получить и V и J . Для этой функции W мы получаем опять телеграфное уравнение:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = RC\dot{W} + LC\ddot{W}.$$

Имея в виду, что вследствие сопротивления R волны вдоль провода должны со временем *затухать* (ср. 217, 162), мы зададимся для решения этого уравнения функцией вида:

$$W = Ue^{-kt}; \quad k = \frac{1}{2} \frac{R}{L}.$$

Однако в рассматриваемом случае величина U уже не будет функцией одного только времени, как это было у нас при исследовании затухающих колебаний, а будет также зависеть и от x . Составив производные по времени:

$$\dot{W} = -kUe^{-kt} + \dot{U}e^{-kt},$$

$$\ddot{W} = +k^2Ue^{-kt} - 2k\dot{U}e^{-kt} + \ddot{U}e^{-kt},$$

подставляем это в телеграфное уравнение и получаем уравнение для U :

$$\frac{1}{LC} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -k^2U + \ddot{U}.$$

Мы предположим, что U есть гармоническая функция времени и зададимся решением:

$$U = A' \cos(\omega t + \varphi) \cdot U_x,$$

в котором U_x зависит только от x . Тогда для функции U_x у нас получится уравнение [после подстановки и сокращения на

$$A' \cos(\omega t + \varphi): \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -LC(k^2 + \omega^2) \cdot U_x = -m^2 U_x.$$

Подобное дифференциальное уравнение нам уже неоднократно встречалось при изучении колебаний, с тою только разницей, что там мы имели функции времени, а здесь имеем функцию координаты x . Мы можем следовательно написать решение этого уравнения в виде:

$$U_x = B' \cos(mx + a).$$

Итак на основании всех предыдущих вычислений мы можем представить один из частных интегралов телеграфного уравнения в виде:

$$W = e^{-kt} A' \cos(\omega t + \varphi) \cdot B' \cos(mx + a)$$

или, введя другие постоянные интегрирования, можем написать:

$$W = e^{-kt} [A'' \cos(\omega t) + B'' \sin(\omega t)] [a \cos(mx) + b \sin(mx)].$$

Наконец, приняв во внимание, что наше уравнение линейное, мы можем написать общий интеграл нашего уравнения в виде суммы подобных частных интегралов:

$$\bar{W} = \sum W(A'', B'', a, b),$$

причем входящие в эту сумму постоянные интегрирования определяются добавочными данными: начальными значениями функций при $t=0$ и значениями их на границах провода. Как известно, дифференциальные уравнения с частными производными, к которым принадлежит и телеграфное уравнение, в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений допускают начальные и граничные условия с бесконечным числом постоянных A, B, a, b .

Нетрудно заметить, что полученный нами интеграл телеграфного уравнения имеет форму, представляющую собою целую систему

стоячих волн. Но всякое произведение косинусов и синусов например:

$$\begin{aligned} 2A \cos(\omega t) \cdot \cos(mx) &= A \cos(\omega t - mx) + A \cos(\omega t + mx), \\ 2A \sin(\omega t) \cdot \sin(mx) &= A \cos(\omega t - mx) - A \cos(\omega t + mx), \\ 2A \sin(\omega t) \cdot \cos(mx) &= A \sin(\omega t - mx) + A \sin(\omega t + mx), \\ -2A \cos(\omega t) \cdot \sin(mx) &= A \sin(\omega t - mx) - A \sin(\omega t + mx), \end{aligned}$$

мы можем представить в виде двух *проходящих* волн, распространяющихся в противоположные стороны. Пользуясь этим замечанием, мы можем представить функцию W таким образом:

$$W = e^{-kt} [A \cos(\omega t - mx + \alpha) + B \cos(\omega t + mx + \beta)],$$

где A, B, α, β служат постоянными интегрированиями.

В соответствии с этим и общий интеграл будет представлять собою не систему стоячих волн, а систему проходящих волн. Иногда такая форма удобнее.

Приведенные в этом параграфе общие рассуждения сделаются гораздо нагляднее в приложениях к различным частным случаям.

186. Проходящая гармоническая волна. В предыдущем параграфе (стр. 265) мы получили (после исключения фактора затухания волн) следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = (-k^2 U + \ddot{U}) LC.$$

Положим, что в начале рассматриваемой линии действует гармонически переменная электродвижущая сила (динамомашинка, телефон). Если линия очень длинна и отражения волн от ее конца уже настолько затухли, что их можно не принимать во внимание, то мы получим волну, распространяющуюся *только в одну сторону*, и можем принять решение в форме одной *проходящей волны*:

$$U = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c_1} \right).$$

Возьмем вторые производные от этого выражения по координате x и по времени t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= -\frac{\omega^2}{c_1^2} A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c_1} \right) = -\frac{\omega^2}{c_1^2} U, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= -\omega^2 A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c_1} \right) = -\omega^2 U. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение и сокращая на U , получаем:

$$\frac{\omega^2}{c_1^2} = (k^2 + \omega^2) LC,$$

откуда можем определить скорость распространения волн:

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \left(\frac{k^2}{\omega^2} + 1 \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Заметим, что при составлении основного телеграфного уравнения мы предполагали, что все величины, в него входящие, выражены в одних и тех же единицах. Если же мы будем выражать самоиндукцию L в электромагнитных единицах, а емкость C — в электростатических единицах [как это мы делали при составлении основных уравнений *Максвелла* (161, 134)], то у нас под корнем появится множитель

$$c^2 = (3 \cdot 10^{10})^2,$$

и тогда для скорости распространения волн мы должны будем написать:

$$c_1 = \frac{c}{\sqrt{LC}} \left(\frac{k^2}{\omega^2} + 1 \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Мы видим из этого, что скорость распространения волн вдоль проволок зависит от частоты ω этих волн. Но если сопротивление проволок настолько мало, что можно пренебречь величиною k^2 по сравнению с ω^2 , то скорость распространения c_1 делается независимой от частоты и равной

$$c_1 = \frac{c}{\sqrt{LC}}.$$

Напоминаем читателю, что для тех случаев, когда магнитным полем внутри проводника можно пренебречь, мы получили соотношение (145, 124; 149, 126):

$$LC = \epsilon \mu,$$

а в таком случае скорость распространения волн вдоль проволок оказывается равной

$$c_1 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}},$$

т. е. равной скорости распространения электромагнитных волн в среде (без проволок) с диэлектрической постоянной ϵ и с маг-

нитной постоянной μ . Мы получили таким образом уже известный нам закон *Максвелла* (167, 137). Этот результат показывает нам, что в тех случаях, когда энергия поля *внутри* проводов ничтожна по сравнению с наружной энергией, скорость распространения волн можно считать независимой от свойств самих проводов. Провода в этих случаях оказывают только *направляющее действие* на распространение электромагнитного поля (провода играют роль рельс, по которым катится энергия).

Это замечание позволяет нам в некоторых случаях упростить расчеты. Так например при исследовании электромагнитных свойств жидкостей часто погружают в них проволоки и исследуют распространение волн вдоль этих проволок. Таким путем реализуются условия *плоских* волн, т. е. электромагнитных волн простейшей формы; без направляющего действия проволок волна получилась бы расходящаяся. Эти случаи можно рассчитывать по формулам плоской волны в пространстве (см. ниже). Если среда, в которую погружены проволоки, обладает заметною электропроводностью, то в составленных нами уравнениях уже нельзя пренебречь величиною G (266, 184); зато в большинстве случаев можно пренебречь величиною R по сравнению с G , и у нас получится затухание волн не потому, что проволоки, вдоль которых они распространяются, обладают сопротивлением R , а по той причине, что *среда*, окружающая проволоки, обладает заметною электропроводностью. Мы предлагаем читателю самому распространить вычисления, приведенные в параграфе 184, и на те случаи, когда имеют значения оба коэффициента R и G , а при изучении распространения волн в пространстве (без проволок или когда проволоки оказывают только направляющее действие) мы вернемся к тому случаю, когда пространство или среда, в которой распространяются волны, обладает заметной электропроводностью. Как увидим, электропроводность среды обуславливает *поглощение* волн и отчасти оказывает влияние на *скорость* их распространения. аналогично с тем, что мы получили в этом параграфе.

187. Применение к телефонным проводам. При передаче звуков и речи по телефонным проводам мы имеем один из случаев распространения электрических волн вдоль проволок. Микрофон, на пластинку которого попадают звуки, превращает звуковые колебания в электрические колебания; эти электрические колебания распространяются в виде электромагнитных волн по проволокам и в приемном телефоне снова превращаются в звуковые колебания.

Но звуки нашей речи состоят из колебаний весьма различных частот, причем каждая гласная характеризуется определенным соотношением между амплитудами содержащихся в ней колебаний; если это соотношение при передаче изменится, то и характер самой гласной (тембр) может измениться настолько, что речь делается неясной. Мы предположим, что микрофон и телефон уже так устроены, что они почти не искажают речи, и наша задача состоит только в том, чтобы выяснить условия, которые должны быть соблюдены в проводах между микрофоном и телефоном, чтобы соотношения между амплитудами колебаний различных частот оставались неизменными.

Для исследования этого вопроса мы должны обратить внимание на тот фактор в решении телеграфного уравнения, который определяет изменение амплитуды колебаний или их затухание. У нас это затухание представлено как функция времени e^{-kt} , но мы можем представить его и как функцию пройденного волною пути x , приняв во внимание скорость распространения волны:

$$c_1 = \frac{c}{\sqrt{LC}} \left(\frac{k^2}{\omega^2} + 1 \right)^{-\frac{1}{2}}; \quad k = \frac{1}{2} \frac{R}{L}$$

Подставляя это в показатель фактора затухания kt , мы получаем

$$k \cdot t = k \frac{x}{c_1} = \frac{R}{2c} \sqrt{\frac{C}{L}} \left(\frac{k^2}{\omega^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot x.$$

Из этой формулы мы видим, что для передачи речи без искажения необходимо, чтобы поглощение не зависело от частоты, т. е. чтобы величина

$$\frac{k}{\omega} = \frac{1}{2} \frac{R}{L\omega}$$

была мала по сравнению с единицей. Это условие не трудно соблюсти, потому что частота ω звуковых колебаний человеческой речи довольно велика.

Опыты показали, что для ясной передачи речи в особенности важны частоты от 800 до 1200 колебаний в секунду; что соответствует циклической частоте ω от 5000 до 7500; кроме того и сопротивление проводов R обыкновенно незначительно — около 0,0001 ома на сантиметр длины провода. Если же мы можем пре-

небречь величиною $\left(\frac{k}{\omega} \right)^2$ по сравнению с единицей, то у нас и скорость распространения волн и затухание их делаются независимыми от частоты колебаний:

$$c_1 = \frac{c}{\sqrt{LC}}; \quad kt = \frac{R}{2c} \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot x.$$

Но одного этого условия еще не достаточно для того, чтобы можно было передавать разговорную речь на большие расстояния; желательно вообще уменьшить по возможности затухание, и наша формула показывает, что если нельзя уменьшить сопротивление провода R (это удорожит провод) и нельзя уменьшить емкость (емкость по необходимости велика в телефонных кабелях), то надо увеличить самоиндукцию L провода. На это обстоятельство впервые указал Гевисайд (O. Heaviside), а технически это было реализовано впервые Пупином (Т. М. Pupin, 1900). Для увеличения самоиндукции провода Пупин включил в провод целый ряд катушек самоиндукции, расположенных на известном расстоянии друг от друга; такое расположение заменяет собою равномерное распределение самоиндукции по всему проводу. Введение самоиндукции по способу Пупина действительно увеличило расстояние, на которое оказалась возможною телефонная передача, во много раз. Несколько позже Краруп предложил другой способ увеличения самоиндукции линии, а именно — покрытием каждого провода железным слоем. Часто телефонные линии с искусственно увеличенною самоиндукцией называются *пупинизированными*.

188. Телеграфный провод. Работа телеграфного провода отличается от телефонного тем, что при телеграфировании употребляются не синусообразные волны, а резко ограниченные электромагнитные толчки, и для успешного и возможно быстрого телеграфирования необходимо, чтобы резкость этих толчков сохранялась по всей длине линии. К сожалению размеры этой книги не позволяют нам изложить здесь теорию распространения по проволокам электромагнитных толчков, и мы принуждены ограничиться сообщением результатов этой теории. Теория и опыт в согласии друг с другом показывают, что электромагнитные толчки распространяются по проводам со скоростью, которая в первом приближении тоже может быть выражена формулою:

$$c_1 = \frac{c}{\sqrt{LC}}$$

Амплитуда толчка по мере его распространения вдоль линии уменьшается, и это уменьшение можно в первом приближении выразить множителем:

$$e^{-bx}, \text{ где } b = \frac{R}{2c} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Однако обе эти формулы применимы только в первом приближении, потому что отдельные части электромагнитного толчка имеют *различные скорости и различное затухание*, в результате чего резкий в начале линии толчок при дальнейшем движении по проводу *расплывается* (рис. 63), и у него образуется сзади все более и более удлиняющийся хвост. Это явление было замечено уже давно при телеграфировании по подводным телеграфным кабелям. Уильям Томсон дал первую теорию этого явления и показал, что



Рис. 63. Деформация волны при движении по проводу.

толчки расплываются тем больше, чем больше сопротивление и емкость *всего* употребляемого для телеграфирования кабеля. Чем больше расплывание толчков в кабеле, тем реже приходится пускать эти толчки друг за другом, чтобы соседние толчки не сливались друг с другом у приемного аппарата. Конечно при этом скорость передачи депеши уменьшается.

189. Отражение волн. Теперь мы рассмотрим более общий случай, когда по проводу идут в противоположных направлениях две гармонических волны одинаковой частоты ω , но различных амплитуд. Для большей наглядности рассуждений мы пока оставим фактор затухания e^{-kt} без внимания и напишем интеграл телеграфного уравнения в виде:

$$W = A \cos(\omega t - mx) + B \cos(\omega t + mx).$$

Соответственно с этим потенциал V и сила тока J будут выражаться так:

$$V = \frac{\partial W}{\partial x} = Am \sin(\omega t - mx) - Bm \sin(\omega t + mx),$$

$$J = -C \frac{\partial W}{\partial t} = CA\omega \sin(\omega t - mx) + CB\omega \sin(\omega t + mx).$$

Применим эти формулы к различным случаям.

1) Если отражения не происходит (или оно незаметно), то мы можем положить $B=0$ и получаем:

$$V = Am \sin(\omega t - mx),$$

$$J = CA\omega \sin(\omega t - mx).$$

Это — случай *проходящих* волн, уже рассмотренный нами в параграфе 186. Здесь мы добавим только замечание, что разность потенциалов V и сила тока J имеют *одинаковые фазы*, а отношение между их амплитудами равно:

$$V_0 : J_0 = \frac{m}{\omega} \frac{1}{C} = \frac{1}{c_1 C} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

2) Положим, что конец P провода изолирован; это означает, что для наших расчетов мы имеем добавочное (так называемое пограничное) условие $J_P = 0$. Для упрощения формул мы можем перенести начало координат в эту точку и, положив $x=0$, написать для V_P и J_P формулы:

$$V_P = Am \sin(\omega t) - Bm \sin(\omega t),$$

$$J_P = CA\omega \sin(\omega t) + CB\omega \sin(\omega t) = 0.$$

Из последнего уравнения вытекает, что амплитуды силы тока в волне, приходящей к точке P , и в отраженной волне равны и противоположны $B = -A$. В то же самое время разность потенциалов между проводами V колеблется с двойной амплитудой $2Am$. Если мы подставим полученные из этого условия соотношения между амплитудами в формулы для потенциалов и для сил токов в проводах, то получим:

$$V = Am [\sin(\omega t - mx) + \sin(\omega t + mx)] = 2Am \sin(\omega t) \cos(mx),$$

$$J = CA\omega [\sin(\omega t - mx) - \sin(\omega t + mx)] = 2CA\omega \cos(\omega t) \sin(mx).$$

Эти формулы означают, что вдоль проволок образовались стоячие волны. Разность *потенциалов* имеет на конце ($x=0$) *пучность*, а *сила тока* имеет на конце *узел*, а затем узлы следуют через каждые полволны. Наблюдая потенциалы или силы токов каким-либо измерительным прибором в различных точках провода, мы можем определить длину волны λ исследуемых электромагнитных колебаний. Если затухание волн не велико, а скорость распространения волн нам известна или вычислена по формуле

$$c_1 = \frac{c}{\sqrt{LC}}; \quad \lambda = c_1 T = c_1 \frac{2\pi}{\omega},$$

го по измеренной длине волн мы можем вычислить и частоты ω электрических колебаний.

3) Если концы обеих проволок (мы всегда предполагаем, что провод состоит из *двух* одинаковых проволок. В лабораторных опытах обе проволоки натягивают параллельно друг другу) соединены друг с другом *коротко* (мостиком малого сопротивления), то мы имеем другое добавочное условие:

$$V_P = 0,$$

и рассуждения, совершенно аналогичные предыдущим, дают нам в этом случае для амплитуд падающей и отраженной волны соотношение $B = -A$. Как и в предыдущем случае, мы получаем стоячие волны

$$V = 2Am \cdot \cos(\omega t) \cdot \sin(mx),$$

$$J = 2CA\omega \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(mx),$$

с тем однако различием, что у коротко замкнутого конца линии ($x = 0$) мы имеем теперь *узел* для потенциалов V и *пучность* для силы тока J .

Полезно заметить себе, что в проходящей волне фазы потенциалов V и силы тока J одинаковы; мы можем сказать, что волны потенциалов и силы тока идут все время *вместе*. Между тем в стоячих волнах потенциалы и силы токов имеют разность фаз в 90° ; если где-нибудь потенциал имеет максимум, то в той же точке и в тот же момент времени сила тока равна нулю, и наоборот, где сила тока имеет максимум, там разность потенциалов равна нулю.

Разность потенциалов между обоими проводами находится в непосредственной связи с зарядами на поверхности проводов и с электрическим полем, образуемым этими зарядами; с другой стороны, электрические токи образуют вокруг себя и главным образом в пространстве между проводами магнитное поле. Отсюда следует, что приведенное замечание о распределении фаз потенциалов и сил токов остается в силе и для электрических зарядов и электрических полей, с одной стороны, и для магнитных полей, с другой стороны.

Мы увидим в дальнейшем, что те же правила останутся в силе и для электромагнитных полей, распространяющихся без проволок.

190. Отражение от сопротивления. Положим, что к какой-либо точке оба провода — прямой и обратный — соединены друг с другом при посредстве сопротивления R_1 (рис. 64), но без заметной

самоиндукции и емкости (лампочка накаливания). Тогда для этой точки P мы должны иметь добавочное условие:

$$V_P = R_1 J_P.$$

Если мы введем это условие в наши уравнения (274, 189) для V и J , положив $x = 0$ и сократив на $\sin(\omega t)$, то получим:

$$V_P = (A - B) m \sin(\omega t),$$

$$J_P = (A + B) C\omega \cdot \sin(\omega t),$$

$$(A - B) m = (A + B) C\omega \cdot R_1,$$

откуда имеем соотношение между амплитудами: B — отраженной волны и A — проходящей к рассматриваемой точке волны

$$B = \frac{n - 1}{n + 1} A,$$

где n означает (ср. 275, 189):

$$n = \frac{m}{C\omega R_1} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{R_1}.$$

Если подобрать сопротивление так, чтобы $n = 1$, то никакой отраженной волны не будет; проходящие волны будут целиком поглощаться сопротивлением. Так например для провода с самоиндукцией $L = 0,0022$ генри и емкостью $C = 0,005$ микрофард на сантиметр длины, сопротивление, поглощающее волны, равно $R_1 = 660$ ом.

191. Отражение от конца с изменением фазы. В более общем случае в конце провода может находиться соединение, содержащее кроме сопротивления также и самоиндукцию и емкость. Не входя в подробности устройства этого соединения, мы можем тем не менее написать соотношение между разностью потенциалов V и силой тока J в рассматриваемой точке (ср. 221, 163):

$$V = R_0 J e^{i\varphi},$$

где R_0 будет представлять собою *кажущееся* сопротивление, а φ — разность фаз между потенциалом и силой тока; обе величины R_0 и φ могут быть легко определены, если состав соединения нам известен. Для определения коэффициента отражения волн от рассматриваемой точки мы можем применить метод комплексного

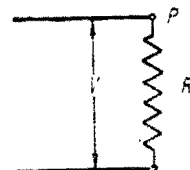


Рис. 64. Сопротивление в конце провода.

сопротивления. При этом формулы предыдущего параграфа теперь переписутся так:

$$n = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{L}{C} \cdot \frac{1}{R_0} e^{-j\varphi}} = a + bj, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$

Соотношение между амплитудами примет теперь комплексную форму:

$$B = \frac{n-1}{n+1} A = \frac{(a-1) + bj}{(a+1) + bj} A.$$

Для того, чтобы перейти к действительным величинам, мы можем применить различные способы. Проще всего исходить из теоремы о *делении* комплексных величин; при этом абсолютные значения комплексных величин делятся друг на друга, а аргументы их вычитаются друг из друга (ч. I, стр. 150, 117). Основываясь на этом, мы получаем для отношения r между амплитудами падающей и отраженной волны формулу:

$$B = \sqrt{\frac{(a-1)^2 + b^2}{(a+1)^2 + b^2}} A = r \cdot A.$$

Для разности фаз между ними получаем:

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{b}{a-1} - \frac{b}{a+1}}{1 + \frac{b^2}{a^2-1}} = \frac{2b}{a^2 + b^2 - 1}.$$

Часто интересуются коэффициентом отражения *для энергии*, т. е. для квадрата амплитуды. Этот коэффициент мы можем получить непосредственно, умножая комплексный коэффициент отражения для амплитуд на величину, ему сопряженную, т. е. на то же самое выражение с заменой $+j$ через $-j$. Тогда получаем:

$$\frac{[(a-1) + bj][(a-1) - bj]}{[(a+1) + bj][(a+1) - bj]} = \frac{(a-1)^2 + b^2}{(a+1)^2 + b^2} = r^2.$$

Приняв все это во внимание, мы можем написать для волнообразного движения электричества по проволокам при отражении от конца, где оба провода соединены сопротивлением, самоиндукцией и емкостью, следующую общую формулу:

$$V = Am [\sin(\omega t - mx) - r \cdot \sin(\omega t + mx + \delta)]; \\ J = CA\omega [\sin(\omega t - mx - \varphi) + r \cdot \sin(\omega t + mx - \varphi + \delta)].$$

В частном случае, когда на конце имеется только сопротивление, мы имеем:

$$R_0 = R_1; \quad \varphi = 0; \quad b = 0; \quad \delta = 0; \quad a = n$$

и для коэффициента отражения получаем формулу предыдущего параграфа

$$r = \frac{n-1}{n+1}.$$

Другой крайний случай мы получим, установив на конце самоиндукцию или емкость при незначительном сопротивлении: тогда

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}; \quad a = 0; \quad r = 1,$$

и коэффициент отражения равен единице.

192. Изменение формы волнообразного движения при отражении. Рассматривая явление отражения волн от конца линии, мы получили в общем случае отраженную волну, отличающуюся от падающей волны и по амплитуде и по фазе. Нам необходимо иметь наглядное представление о том, какой формы получится в таком случае результирующее электрическое колебание.

Сперва рассмотрим случай, когда фазы одинаковы, а амплитуды различны; это мы имели при поставленном на конце сопротивлении R_1 . В этом случае мы можем рассматривать сумму (или разность)

$$S = A \sin(\omega t - mx) - B \sin(\omega t + mx)$$

как состоящую из проходящей волны амплитуды $(A - B)$ и стоячей волны амплитуды $2B$

$$S = (A - B) \sin(\omega t - mx) + 2B \cos(\omega t) \cdot \sin(mx).$$

Теперь предположим, что падающая и отраженная волны имеют одинаковую амплитуду, но различные фазы; сумма этих волн будет иметь вид:

$$S = A \sin(\omega t - mx) - A \sin(\omega t - mx + \delta).$$

Нетрудно доказать, что мы получим и в этом случае *стоячие волны*, только узлы и пучности будут сдвинуты относительно тех мест, в которых они получались при отражении *без* изменения

фазы. Действительно, если мы возьмем новое начало координат положив

$$x = x_1 - \frac{1}{2} \delta,$$

то получим

$$S = A \sin \left(\omega t - mx_1 - \frac{1}{2} \delta \right) - A \sin \left(\omega t + mx_1 + \frac{1}{2} \delta \right),$$

которая эквивалентна формуле стоячих волн

$$S = 2A \cdot \cos \left(\omega t + \frac{1}{2} \delta \right) \sin \left(mx + \frac{1}{2} \delta \right).$$

Однако эта стоячая волна отличается от прежде полученной стоячей волны

$$2A \cdot \cos(\omega t) \cdot \sin(mx)$$

тем, что узлы и пучности ее сдвинуты вдоль линии на величину $\frac{1}{2} \frac{\delta}{m}$. Этот результат очень нагляден и позволяет нам для общих соображений, а также и при расчетах заменять данную нам линию со включенными на конце сопротивлением, самоиндукцией и емкостью другою линией, более длинной, концы которой просто изолированы.

Итак в более общем случае распространения волн вдоль проволок и отражения их от конца линии, где включены сопротивление, самоиндукции и емкость, мы получаем на линии *стоячую волну*, как и в случае изолированных концов, но со сдвинутыми узлами и пучностями; на эту стоячую волну налагается *проходящая волна*, остающаяся без отражения и поглощаемая сопротивлением конца. Кроме этого как стоячая, так и проходящая волна затухают со временем вследствие поглощения энергии самой линией.

К этому необходимо еще прибавить, что коэффициент отражения r и потеря фазы δ , вообще говоря, будут зависеть и от частоты гармонических колебаний рассматриваемой волны (потому что R_0 и φ зависят от ω). Это последнее обстоятельство влечет за собою важное следствие. Если по линии идет волна какой-либо не гармонической формы, то мы можем по способу *Фурье* представить ее составленной из целого ряда гармонических волн; когда эти гармонические волны отразятся от конца и притом с разными коэффициентами r и разными фазами, то результирующая отраженная

волна будет отличаться по своей форме от данной нам падающей волны. Мы получим следовательно *искажение* волн не только в пути (ср. 274, 188), но также и при отражении от конца.

193. **Отражение на границе двух линий.** Отражение волн происходит не только от конца линии, но вообще от всякой точки P линии, где условия распространения волн меняются. Так например линия может состоять из двух частей, в которых величины сопротивления R , самоиндукции L или емкости C на единицу длины различные. Этот случай мы имеем, когда кабель переходит в воздушную линию или наоборот; погонная емкость кабеля почти в 10 раз больше емкости воздушной линии. При подсчете коэффициента отражения мы опять пренебрежем влиянием затухания волн, а будем считать, что две части линии, соприкасающиеся в какой-либо точке $x=0$, охарактеризованы различною величиною c_1 , т. е. скоростью распространения по ним электромагнитных волн. Если скорости c_1 обеих линий разные, то при неизменной частоте волн ω величины m в этих линиях тоже будут различны, потому что

$$m = \frac{\omega}{c_1}.$$

Итак мы предположим, что в первой части линии, где нам дана падающая волна и образуется отраженная волна, мы имеем потенциалы и силы тока, выраженные формулами:

$$\begin{aligned} V_1 &= Am_1 \sin(\omega t - m_1 x) - Bm_1 \sin(\omega t + m_1 x); \\ J_1 &= C_1 A \omega \sin(\omega t - m_1 x) + C_1 B \omega \sin(\omega t + m_1 x), \end{aligned}$$

тогда как во второй части линии, которую мы предположим для простоты бесконечной, распространяются волны только в одну сторону

$$\begin{aligned} V_2 &= Dm_2 \sin(\omega t - m_2 x); \\ J_2 &= C_2 D \omega \sin(\omega t - m_2 x). \end{aligned}$$

На границе обеих частей линии (при $x=0$) потенциалы и силы токов обеих линий должны быть одинаковы, и следовательно

$$A - B = \frac{m_2}{m_1} D = nD;$$

$$A + B = \frac{C_2}{C_1} D = pD.$$

Отсюда следуют соотношения между амплитудами:

$$B = \frac{p-n}{p+n} A; \quad D = \frac{2}{p+n} A.$$

Из этих уравнений следует, что

$$A^2 - B^2 = \frac{m_2 C_2}{m_1 C_1} D^2.$$

Мы предоставляем читателю доказать, что это соотношение представляет собою закон сохранения энергии волны: энергия, приносимая *ежесекундно* падающей волной к точке P линии, частью отражается и частью переходит через рассматриваемую точку на вторую линию.

194. Электрические фильтры. Явление отражения электромагнитных волн получило интересное приложение в так называемых электрических фильтрах, применяемых в электротехнике быстропеременных токов. Электрический фильтр состоит из целого ряда одинаковых систем (сопротивление, самоиндукция и емкость), соединенных друг к другу и образующих таким образом как бы *звенья* электрической цепи. Каждое такое звено частью отражает и частью пропускает приходящие к нему электромагнитные волны, причем вследствие многократного отражения волны, идущие по такой цепи, делаются все слабее и слабее; однако это ослабление для волн различной частоты может быть, вообще говоря, различно, и можно так подобрать состав звеньев, что электромагнитные волны некоторых частот совсем не будут проходить сквозь цепь, а отражаться от нее, между тем как волны других частот будут проходить сквозь цепь, почти не ослабляясь. Таким путем получается возможность отфильтровывать электромагнитные волны желаемой частоты.

Мы сперва составим уравнение распространения волн в подобных фильтрах в самом общем виде, а затем рассмотрим наиболее важные частные случаи. На рис. 65 изображена схема подобной цепи, причем системы R включены непосредственно в провод (в какой из двух проводов они включены, это безразлично) тогда как системы G соединяют оба провода друг с другом. Каждая из этих систем R и G состоит из сопротивления, самоиндукции и емкости, соединенных каким-либо образом, причем все системы R одинаковы друг с другом, и также все системы G тоже одинаковы

по своему составу. Выделим в цепи одно звено (на рис. 65 это показано пунктиром). Падение потенциала вдоль линии в пределах n -го звена мы можем выразить через кажущееся сопротивление R (ср. 228, 167):

$$V_n - V_{n+1} = R J_n.$$

Так как в n -ой точке цепи мы имеем ответвление, то силы токов в проводе n -го и $(n+1)$ -го звена будут разные и разность $J_n - J_{n+1}$ будет равна силе тока, идущего по соединению. Обозначим электропроводность соединения через G ; тогда мы можем ответвление тока выразить формулой:

$$J_n - J_{n+1} = G \cdot V_{n+1}.$$

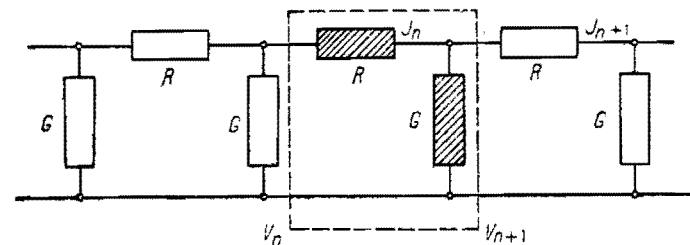


Рис. 65. Схема электрического фильтра.

Заметим, что обе введенные нами величины — сопротивление R и электропроводность G — представляют собою *обобщенные понятия* и могут входить в уравнение в *комплексной* форме, если системы содержат в себе кроме обычного (действительного) сопротивления также и самоиндукцию и емкость.

Таких уравнений при числе звеньев p мы получим числом $2p$.

Теперь предположим, что по рассматриваемой цепи идет электромагнитная волна гармонической формы с частотой ω . Электрические колебания в n -ом звене цепи мы можем символически представить в комплексной форме:

$$A = A_n e^{j \cdot \omega t}.$$

Что касается амплитуды A_n колебания, то она для звеньев различных номеров n будет различна. Мы выразим это различие некоторым множителем e^{an} , причем значение a у нас определится при решении вышенаписанных уравнений. В общем случае величина a может оказаться комплексной, например:

$$a = -k - m \cdot j,$$

и нам необходимо выяснить, какое это имеет физическое значение. Если напишем формулу для колебаний какой-нибудь величины соответственно со сделанными нами предположениями, то получим:

$$A = A_0 e^{-kn} e^{j(\omega t - mn)}$$

Теперь мы видим, что k представляет собою *логарифмический декремент* колебания при переходе его от одного звена к следующему (номером выше), а m представляет собою потерю в фазе колебаний при таком переходе. Если бы мы задались

$$\alpha = k + mj,$$

то получили бы декремент и потерю фазы при переходе колебаний от $(n+1)$ -го к n -му звену.

Если мы сравним эти формулы с теми, которые мы писали для падающих и отраженных волн вдоль линии, где сопротивление, самоиндукция и емкость распределены не отдельными звеньями, а *непрерывно*, то увидим, что по своему физическому смыслу формулы эти сходны; стоит только в формулах этого параграфа заменить n через x (т. е. ряд целых чисел заменить непрерывным рядом значений координаты x), как получим формулы, которые мы применяли в предыдущих параграфах для распространения волн вдоль проволок

$$A = A_0 e^{-kx} e^{j(\omega t - mx)}$$

Итак подставим решения

$$V_n = V_0 e^{an} e^{j\omega t}; \quad J_n = J_0 e^{an} e^{j\omega t}$$

в вышенаписанные уравнения; мы получаем:

$$\begin{aligned} V_0 e^{an} (1 - e^{\alpha}) &= J_0 e^{an} R; \\ J_0 e^{an} (1 - e^{\alpha}) &= V_0 e^{an} G \cdot e^{\alpha}. \end{aligned}$$

Разделяя одно уравнение на другое, получаем соотношение между разностью потенциалов и силой тока:

$$Z = \frac{V_0}{J_0} = e^{-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{R}{G}}$$

Эта величина называется *кажущимся сопротивлением звена*.

Перемножая оба уравнения (для исключения V_0 и J_0), получаем уравнение для определения величины α :

$$\begin{aligned} (1 - e^{\alpha})^2 &= RGe^{\alpha}, \\ \left(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}} \right)^2 &= 4 \sinh^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = RG. \end{aligned}$$

Здесь нам удобно ввести так называемые *гиперболические функции* (прибавленная буква h должна означать *hyperbolicus*). Так как эти функции встречаются сравнительно реже круговых функций, то мы напоминаем читателю их значение:

$$\sinh(\alpha) = \frac{1}{2}(e^{+\alpha} - e^{-\alpha}); \quad \cosh(\alpha) = \frac{1}{2}(e^{+\alpha} + e^{-\alpha}).$$

При действительных значениях α первая из этих функций может принимать любые значения, тогда как вторая функция всегда положительна и больше единицы. При *мнимых* значениях аргумента эти функции переходят в обыкновенные круговые функции:

$$\sinh(j\alpha) = \frac{1}{2}(e^{+j\alpha} - e^{-j\alpha}) = j \cdot \sin(\alpha);$$

$$\cosh(j\alpha) = \frac{1}{2}(e^{+j\alpha} + e^{-j\alpha}) = \cos(\alpha).$$

Точно так же и обратно: при мнимых значениях аргумента круговые функции переходят в гиперболические:

$$\sin(j\alpha) = j \cdot \sinh(\alpha); \quad \cos(j\alpha) = \cosh(\alpha).$$

На основании этих формул мы легко находим соотношения:

$$2 \sinh^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \cosh(\alpha) - 1,$$

$$\cosh(\alpha) = \cos(j\alpha) = \cos(jk - m) = \cosh(k) \cdot \cos(m) + j \cdot \sinh(k) \cdot \sin(m).$$

Если мы примем все это во внимание, то можем представить наше уравнение для α в таком виде:

$$\cosh(k) \cdot \cos(m) + j \cdot \sinh(k) \cdot \sin(m) = 1 + \frac{1}{2} RG.$$

Так как произведение RG в общем случае может быть комплексным, то, приравнявая отдельно действительные и мнимые части этого уравнения, мы получим *два* уравнения для определения двух неизвестных k и m , и таким образом решаем задачу.

Эти величины, т. е. затухание и потеря фазы, будут зависеть от величин R и G , и следовательно от частоты колебаний ω . По вычисленным k и m мы определяем кажущееся сопротивление Z и разность фаз между потенциалом и силой тока n -го звена.

Наконец, если разность потенциалов проводов V_0 в начале цепи нам дана, то мы можем вычислить потенциалы и силы токов в любом звене цепи.

195. Частные случаи. Мы остановимся здесь только на трех типичных формах электрических фильтров, причем будем считать сопротивление ничтожным.

Во-первых мы предположим, что аппарат R содержит только самоиндукцию, тогда как аппарат G состоит только из емкости (рис. 66). Это расположение напоминает пупинизированную телефонную линию (273, 187). Соотношение между разностью потенциалов и силой тока в самоиндукции выражается формулой

$$V_n = RJ_n = j\omega L \cdot J_n.$$

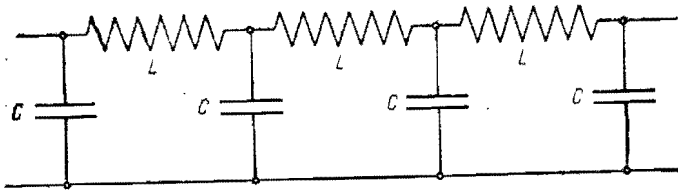


Рис. 66. Цепь самоиндукций.

Между тем как для емкости мы имеем

$$J_n = GV_n = j\omega C \cdot V_n.$$

Множитель j в обеих формулах показывает, что в самоиндукции сила тока отстает от разности потенциалов по фазе на 90° , между тем как в емкости сила тока опережает разность потенциалов на 90° . Приняв это во внимание, мы получаем для произведения RG выражение

$$RG = -\omega^2 LC = -\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = -z^2; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Здесь ω_0 означает частоту собственных колебаний одного звена цепи, а z означает отношение частот колебаний принужденных и собственных (ср. 219, 163). Мы видим, что в рассматриваемом случае произведение RG имеет действительное значение, и следовательно второй член в уравнении для α предыдущего параграфа, который имеет множитель j , должен равняться нулю

$$\sinh(k) \cdot \sin(m) = 0.$$

Для удовлетворения этому условию достаточно, чтобы один из множителей равнялся нулю. Предположим сперва, что первый множитель равняется нулю. Тогда мы имеем:

$$\sinh(k) = 0; \quad k = 0; \quad \cosh(k) = 1,$$

и наше уравнение принимает вид

$$\cos(m) = 1 - \frac{1}{2} z^2.$$

Это уравнение может быть удовлетворено любым значением z (величина z по смыслу своему всегда положительна), начиная от нуля до $z = 2$; в последнем случае $\cos(m)$ принимает свое наименьшее значение -1 .

Второе предположение, которое можно сделать при действительном значении произведения RG , состоит в том, что

$$\sin(m) = 0; \quad m = 0; \quad \cos(m) = \pm 1.$$

Тогда наше уравнение принимает вид

$$\cosh(k) = \pm \left(1 - \frac{1}{2} z^2\right).$$

Но, как мы уже сказали выше, $\cosh(k)$ всегда больше единицы, а потому физическое значение имеет только нижний знак. Это уравнение может быть удовлетворено любым значением z , которое больше 2. Чем больше z , тем больше получится величина k .

Итак исследование уравнения для величины α приводит нас к следующему заключению. Все волны, частоты которых $\omega < 2\omega_0$, пропускаются цепью без ослабления, причем фазовая скорость распространения волны вдоль цепи определяется уравнениями

$$\cos(m) = 1 - \frac{1}{2} z^2; \quad c_1 = \frac{\omega}{m}.$$

Все волны, частоты которых $\omega > 2\omega_0$, имеют такой большой декремент затухания, что практически не пропускаются цепью (рис. 67).

Если мы изменим рассмотренную цепь, поставив на место самоиндукций емкости, а на место емкостей самоиндукции (рис. 68), то получим соотношения между потенциалами и силами токов обратные предыдущим:

$$V_n = RJ_n = \frac{1}{j\omega C} J_n; \quad J_n = GV_n = \frac{1}{j\omega L} V_n.$$

вместе с этим и величина RG получит обратное значение, и в наши уравнения вместо z^2 войдет величина z^{-2} . Тогда мы получим цепь, которая *пропускает* все волны с частотами, большими кри-

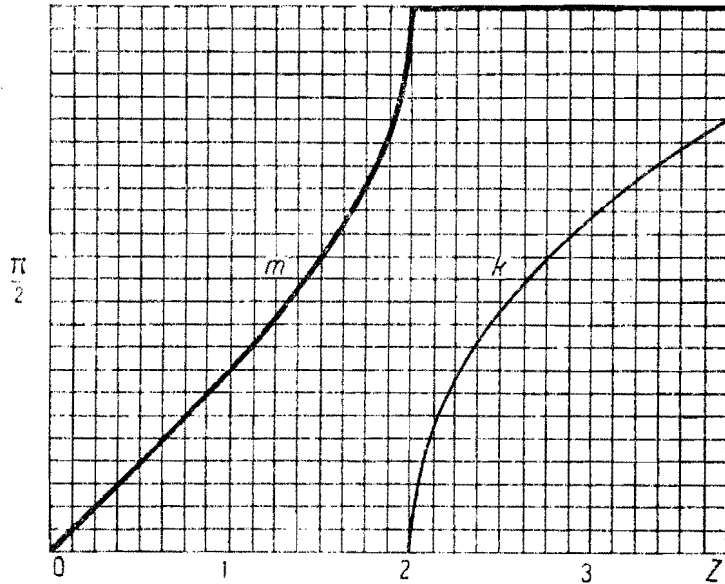


Рис. 67. Зависимость от частоты для цепи самоиндукций.

тической частоты $\omega > \frac{1}{2} \omega_0$, и задерживает все волны с частотами ниже $\frac{1}{2} \omega_0$ (рис. 69).

Наконец можно устроить комбинацию из обеих рассмотренных нами цепей с собственными частотами ω_1 и ω_2 (например изобра-

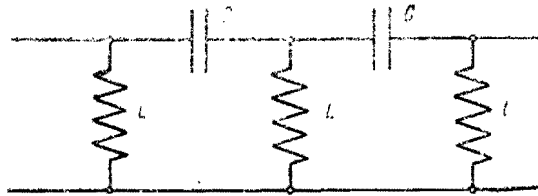


Рис. 68. Цепь емкостей.

женную на рис. 70), тогда такая цепь будет пропускать волны с частотами, лежащими в пределах

$$Z > \omega_1, Z < \omega_2$$

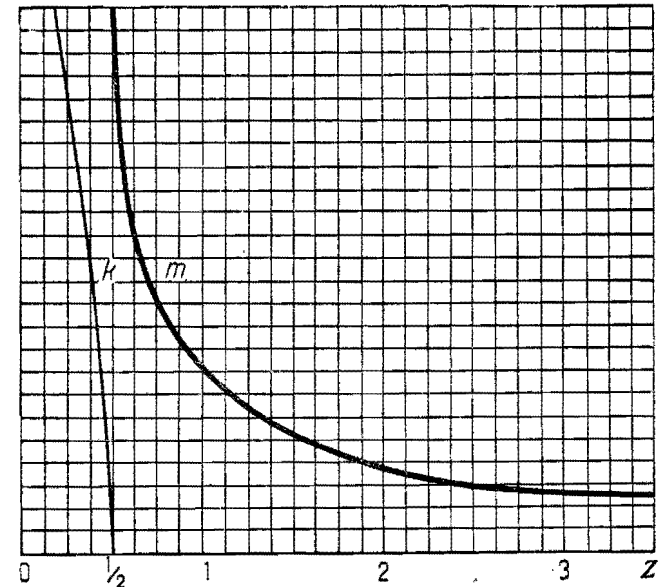


Рис. 69. Зависимость k и m от частоты для цепи емкостей.

и не будет пропускать волны с частотами, лежащими вне этих пределов. Мы получили таким образом *электрический фильтр*. На рис. 71 показаны кривые зависимости величин k и m от величины z для подобного фильтра.

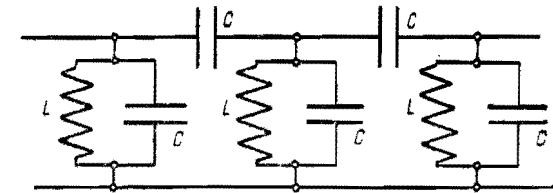


Рис. 70. Электрический фильтр.

196. Собственные электрические волны в проводе. Мы вернемся опять к рассмотрению электрических волн в двойном проводе, свободном от всяких добавочных соединений, в котором отражения волн могут происходить только на его концах. Влиянием затухания волн мы пока пренебрежем. Для потенциалов и для силы тока мы получили общие формулы (268, 185; 274, 189):

$$V = m [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \cdot [b \cos(mx) - a \sin(mx)];$$

$$J = C\omega [A \sin(\omega t) - B \cos(\omega t)] \cdot [b \sin(mx) + a \cos(mx)].$$

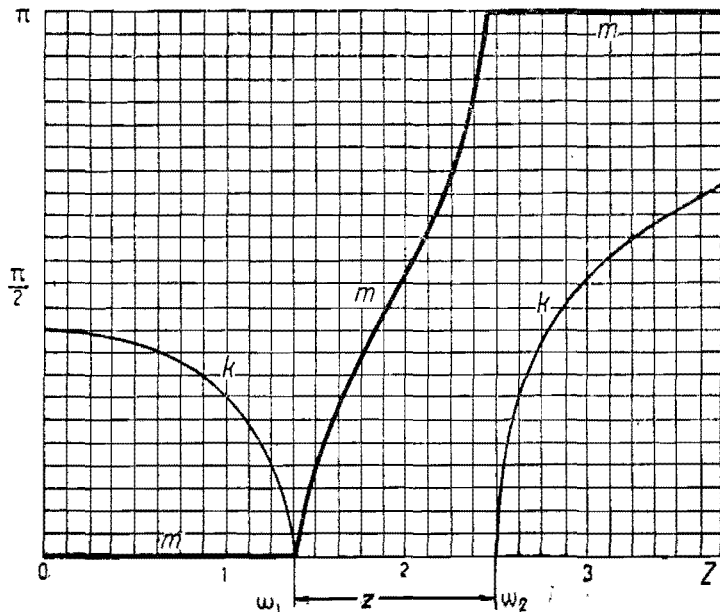


Рис. 71. Зависимость скорости и затухания от частоты в электрическом фильтре.

Эти формулы мы должны приспособить к *начальным* условиям (при $t=0$) и к *пограничным* условиям (при $x=0$ и при $x=l$, где l — длина всей линии). Мы предположим, что при $t=0$ сила тока равнялась нулю; откуда следует, что мы должны положить $B=0$. Далее положим, что начало линии изолировано; следовательно при $x=0$ сила тока *все время* должна равняться нулю. Тогда очевидно мы должны положить $a=0$. После этого наши формулы принимают следующий вид:

$$V = V_0 \cos(mx) \cdot \cos(\omega t);$$

$$J = J_0 \sin(mx) \cdot \sin(\omega t);$$

$$J_0 = \sqrt{\frac{C}{L}} V_0;$$

если все входящие в формулу величины выражены в технической системе единиц.

Через V_0 мы обозначили амплитуду потенциала в начале линии.

Мы получили около *начала* линии *стоячие волны* с узлами и пучностями, о которых мы уже говорили раньше (275, 189).

Теперь прибавим еще одно пограничное условие, предположив, что конец линии тоже изолирован, и следовательно для $x=l$ сила тока должна все время равняться нулю. Это условие требует, чтобы

$$\sin(ml) = 0,$$

т. е. чтобы величина m удовлетворяла условию (через n обозначаем целое число):

$$ml = \frac{2\pi}{\lambda} l = n\pi,$$

откуда

$$l: \frac{\lambda}{2} = n; \text{ или } l: \frac{\lambda}{4} = 2n.$$

Но это означает, что на всей линии должно укладываться *целое* число полуволн, или *четное* число четвертей длины волны. При этом на обоих концах линии мы будем иметь пучности потенциалов и узлы силы тока (рис. 72).

Заметим, что, пока мы удовлетворяли начальному условию времени и пограничному условию одного из концов линии, величина m оставалась произвольной; но второе пограничное условие привело к тому, что величина m хотя и не определяется вполне, но может принимать только ряд *определенных значений*, при которых на всей длине линии укладывается целое число полуволн.

Если пренебречь влиянием затухания, то скорость распространения волн делается независимой от частоты (270, 186); а в таком случае частоты ω стоячих волн будут обратно пропорциональны длинам волн.

$$\lambda = c_1 T = \frac{c_1}{\nu}.$$

Так как длины волн, возможных на рассматриваемой линии (рис. 72), будут относиться как

$$1: \frac{1}{2}: \frac{1}{3}: \frac{1}{4}: \dots,$$

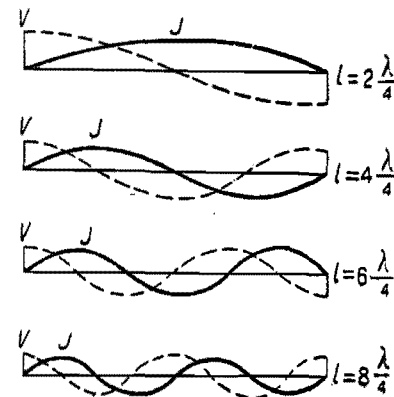


Рис. 72. Стоячие волны с четными обертонами.

то частоты их будут относиться как

$$1:2:3:4.$$

Наименьшая частота определяется тем, что длина наибольшей волны равна удвоенной длине линии

$$\lambda_0 = 2l.$$

Мы имеем здесь условия, вполне аналогичные условиям колебаний струн; на одной и той же струне кроме основного звука (когда длина волны равна двойной длине струны) могут быть воспроизведены и более высокие звуки *кратных* частот; это так называемые *обертон*ы. Исходя из этой аналогии, иногда и электрические колебания провода высших частот тоже называются обертонами.

Мы предполагали, что оба конца линии изолированы. Если нам дана линия, один конец которой изолирован, а другой замкнут коротко, то у нас получатся при этих пограничных условиях несколько иные колебания. Нетрудно видеть, что формулы

$$V = V_0 \sin(mx) \cdot \cos(\omega t);$$

$$J = J_0 \cos(mx) \cdot \sin(\omega t)$$

изображают стоячие волны, в которых в начале линии при $x = 0$ имеется короткое замыкание и потенциал равен нулю, тогда как сила тока имеет здесь пучность. Но так как конец линии изолирован, то мы имеем добавочное условие

$$\cos(ml) = 0,$$

и следовательно величина m должна удовлетворять условию:

$$ml = (2n + 1) \frac{\pi}{2}; \quad l: \frac{\lambda}{4} = (2n + 1).$$

Это означает, что и в данном случае возможны стоячие волны различной длины, но только такие, четверть длины волны которых укладывается на всей длине линии *нечетное* число раз (рис. 73).

Аналогичное условие мы имеем для колебаний воздуха в акустической (органный) трубе, один конец которой открыт, а другой закрыт. В закрытом конце скорость движения воздуха равна нулю (узел), тогда как давление воздуха имеет здесь пучность. Движение воздуха аналогично движению электричества, т. е. силе тока, а давление аналогично потенциалу.

В этом случае мы тоже получаем целый ряд возможных колебаний с кратными частотами, целый ряд обертонов; однако теперь возможны обертоны только нечетного порядка с частотами

$$1:3:5:7 \dots$$

Примеры стоячих волн мы можем найти в радиотехнике. Так например *незаземленные* антенны представляют пример колебаний,

рассмотренных нами в начале этого параграфа, между тем как *заземленные* полуантенны соответствуют пограничным условиям второго примера. В лаборатории часто употребляется метод *Лехера* (см. общий курс „Электричество“) для наблюдения и измерения электрических волн вдоль проволок. В этих опытах легко реализуются пограничные условия и первого и второго примера.

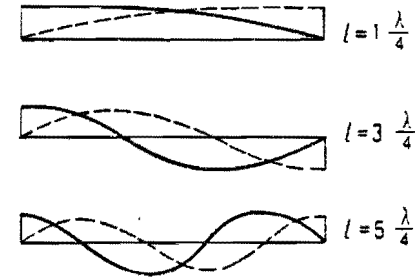


Рис. 73. Стоячие волны с нечетными обертонами.

На рис. 74 изображена стоячая волна при отражении от концов с потерей фазы (278, 191) и притом для обоих концов потери фазы различны.

Мы пренебрегли влиянием затухания волн. Между тем поглощение волн влечет за собою два последствия. Во-первых, амплитуда собственных колебаний постепенно уменьшается и в конце концов колебания совсем исчезают, что понятно само собою. Но кроме

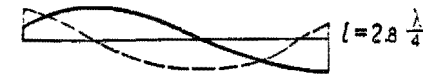


Рис. 74. Стоячая волна при отражении с потерей фазы.

того явление поглощения волн влияет на скорость их распространения (270, 186). Поэтому хотя волны и будут укладываться вдоль линии по тому же

закону, как мы выяснили выше, но эти волны уже не будут соответствовать кратным частотам, потому что в формуле

$$\lambda = c_1 T = \frac{c}{\sqrt{LC}} \left(\frac{k^2}{\omega^2} + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} T$$

величина c_1 для каждой частоты будет другая.

Мы рассматривали здесь только два рода пограничных условий: изолированный конец и конец, замкнутый коротко. Если же какой-либо из концов линии замкнут системой проводников, состоящей

из сопротивления, самоиндукции и емкости, то, как мы знаем (279, 192), при отражении получается потеря в фазе, которая равносильна увеличению длины линии. Потеря в фазе может быть для различных частот различна, а потому и эквивалентное удлинение линии тоже будет для различных частот различно. Вследствие этого возможные в данной линии стоячие волны уже не будут кратными друг к другу и обертоны уже не будут относиться, как *целые* числа. Такие обертоны встречаются и в акустике и носят название *негармонических* обертонов.

Вычисление длин волн и частот негармонических обертонов, получающихся при отражении с потерей фазы, вполне возможно, но гораздо сложнее, чем для гармонических обертонов; изложение этого вопроса заняло бы слишком много места, а потому мы принуждены его опустить.

197. **Принужденные электрические волны в проводе.** При изучении электрических колебаний в системе проводов, содержащих сопротивление, самоиндукцию и емкость (219, 163), мы различали *собственные* колебания системы, частота которых обусловлена составом самой системы, и *принужденные* колебания, частота которых равна частоте внешней действующей силы. В первом случае, когда система дана, нашему определению подлежит частота ω_0 собственных колебаний и декремент затухания k электрических колебаний. Во втором случае частота ω , а иногда и декремент k колебаний даны, и определению подлежат амплитуда и фаза колебаний. Нечто аналогичное мы имеем и для волн, образующихся в линейном проводе: частоты и декремент *собственных* электрических волн обусловлены составом самого провода, и мы их рассматривали в предыдущих параграфах; теперь нам предстоит перейти к изучению *принужденных* волн, частота которых уже определена частотою внешней действующей силы, а требуется определить амплитуды и фазы электрических волн, образующихся при этом на линии. Различие между задачей электрических колебаний и электрических волн заключается только в том, что электрическую систему, составленную из сопротивления, самоиндукции и емкости, мы принимали настолько *короткою*, что потенциалы и силы токов можно было для *всей* системы принимать одинаковыми, между тем как в длинном проводе разница между потенциалами и силами токов в *различных точках* провода может быть настолько заметной, что ее приходится принимать в расчет. Этим обстоятельством

и обусловливается большая сложность теории волн по сравнению с теорией колебаний. В теории электрических колебаний мы имели простые дифференциальные уравнения, между тем как в теории волн мы имеем дифференциальные уравнения с частными производными.

Итак пусть нам дан провод, в начале которого действует некоторая гармонически переменная электродвижущая сила

$$V_a = A_a \sin(\omega t).$$

Мы предположим, что сопротивление провода ничтожно и что он не имеет никаких ответвлений; другими словами, мы предположим, что провод не поглощает энергии. При таких условиях сила тока J_a должна разниться от потенциала V_a по фазе на 90° (среднее значение произведения $J_a V_a$ должно равняться нулю (227, 166). Следовательно для силы тока в начале провода мы должны написать:

$$J_a = A_a \sqrt{\frac{C}{L}} \cos(\omega t).$$

Так как конец провода изолирован, то мы имеем на конце:

$$V_e = A_e \sin(\omega t); J_e = 0.$$

Мы уже знаем, что около изолированного конца провода будут образовываться стоячие волны; на конце будет пучность потенциалов и узел силы тока. Мы можем применить здесь формулы стр. 275, 189. Но в тех формулах мы принимали начало координат $x=0$ в конце линии; если мы теперь перенесем начало координат в *начало* провода, а всю длину провода обозначим через l , то должны будем в прежних формулах заменить x через $l-x$ и написать:

$$V = A \sin(\omega t) \cdot \cos m(l-x);$$

$$J = A \sqrt{\frac{C}{L}} \cos(\omega t) \cdot \sin m(l-x).$$

Применяя эти формулы к началу провода ($x=0$), мы должны получить потенциал и силу тока, данные нам в начале. Тогда получаем формулы для определения амплитуды A по данной нам амплитуде A_a

$$V_a = A_a \sin(\omega t) = A \sin(\omega t) \cdot \cos(ml).$$

Для потенциала в конце провода мы получаем (при $x=l$)

$$V_e = A \sin(\omega t) = \frac{1}{\cos(ml)} V_a.$$

Из этого мы видим, что разность потенциалов на конце провода будет почти всегда больше, чем разность потенциалов в начале. Это явление уже давно было замечено в проводах переменного тока и носит название явления *Ферранти*. В частном случае, когда $\cos(ml) = 0$, амплитуда потенциалов делается бесконечной; мы имеем здесь типичное явление резонанса без поглощения энергии. И действительно условие

$$\cos(ml) = 0$$

соответствует собственным волнам провода (292, 196). В отличие от колебаний короткой системы, мы получаем в длинном проводе *многократный* резонанс, так как в проводе возможен целый ряд кратных друг другу частот собственных колебаний.

Однако на самом деле амплитуда принужденных колебаний даже при резонансе не будет бесконечна, потому что в каждом проводе всегда происходит поглощение энергии, которое в наших расчетах не принято во внимание. Мы можем однако и без расчета, по аналогии с электрическими колебаниями, указать, какое влияние окажет поглощение энергии на резонанс волнообразных движений в проводе. Во-первых, при постепенном изменении частоты действующей силы мы будем наблюдать *максимумы* амплитуд потенциалов и сил токов в проводе каждый раз, как частота внешней силы близко подойдет к одной из частот собственных колебаний провода. Эти максимумы будут тем больше и тем *резче* выражены, чем меньше поглощение энергии. Кроме того разность фаз между потенциалом и силой тока уже не будет равна 90° , а будет тем меньше, чем больше энергии поглощается в проводе.

Заметим, что наименьшая частота ν , при которой может наступить явление резонанса, определяется формулой

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2l}.$$

Но так как скорость волн c вдоль проволок близка к скорости света, то для реализации резонанса в проводе обычной длины необходима очень большая частота волн.

198. Неустановившиеся движения электричества в линии. То, что мы говорили о неустановившихся колебаниях (231, 168), мы можем повторить теперь и для неустановившихся волн. Расчет, приведенный в предыдущем параграфе, касается уже *установившихся* принужденных волн. Однако при всяком включении или выключении линии, и вообще при всяком переходе от одних условий к другим, в проводе должны возникнуть *собственные* колебания. Эти собственные колебания, или волны, постепенно будут затухать вследствие поглощения энергии, и через некоторое время останутся одни только *принужденные, установившиеся* волны. Тем не менее в период *неустановившегося* движения в проводе могут возникнуть опасные для изоляции провода *перенапряжения* и теории ставится задача определить характер и величину этих перенапряжений; а тогда можно будет подыскать и соответственные средства для предупреждения этих перенапряжений или для уменьшения их вредного действия.

Расчет неустановившихся волн гораздо сложнее, чем установившихся, но мы можем значительно упростить задачу, если примем сопротивление провода ничтожным; в таком случае телеграфное уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2},$$

где c означает скорость распространения волн вдоль провода.

Это уравнение имеет совершенно такую же форму, как и уравнение колебания струны, и мы можем воспользоваться решением, данным *Даламбером* (d'Alembert, 1747), в следующей форме:

$$W = F(x \mp ct).$$

Здесь F означает *произвольную* функцию переменных x и t с тем однако условием, что переменные эти входят в функцию только в указанных двух комбинациях: $(x \mp ct)$. Нетрудно проверить это решение: продифференцировав эту функцию два раза по x и t , мы действительно получим то соотношение между вторыми производными, которое написано выше. Если мы продифференцируем наше дифференциальное уравнение по x и по t , то на основании соотношений (267, 185)

$$V = + \frac{\partial W}{\partial x}; \quad J = - C \frac{\partial W}{\partial t}$$

получим и для потенциалов и для силы тока такие же дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 J}{\partial t^2};$$

и следовательно к ним опять применимо решение *Даламбера*. Физический смысл решения *Даламбера* очень прост и нагляден. Так например формула

$$F(x - ct)$$

означает, что если в какой-либо момент времени t_1 потенциалы были распределены на проводе согласно значениям функции $F(x_1)$, то в некоторый более поздний момент времени t_2 мы найдем совершенно такое же распределение потенциалов, только в другом месте провода, для которого

$$x_2 - ct_2 = x_1 - ct_1.$$

Но это означает, что распределение потенциалов $F(x_1)$ движется вдоль провода с постоянной скоростью

$$c = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1},$$

не изменяя своей формы. Одновременно с этим движением возможно и движение в противоположную сторону, для которого скорость имеет противоположный знак; это движение выразится формулой

$$F(x + ct).$$

Так как скорость распространения c постоянна, т. е. не зависит от x и t , то решения *Даламбера* мы можем написать и в такой форме:

$$F\left(t \mp \frac{x}{c}\right).$$

В частном случае, когда распределение потенциалов образует гармоническую волну, мы получаем ту форму решения, которую мы применяли выше и которая была дана *Даниилом Бернулли* (D. Bernoulli, 1753):

$$\cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right) - \cos \omega \left(t + \frac{x}{c}\right) = 2 \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega x).$$

Решение *Даламбера* имеет настолько общую форму, что позволяет удовлетворить любым начальным условиям задачи. Так например положим, что в момент времени $t=0$ сила тока во всем проводе была равна нулю, между тем как распределение потенциалов могло быть изображено некоторою функцией

$$V(x, 0) = F(x).$$

Тогда в любой следующий момент времени потенциалы будут распределены в проводе по формуле

$$V(x, t) = \frac{1}{2} [F(x - ct) + F(x + ct)],$$

которая удовлетворяет вышенеписанному дифференциальному уравнению и кроме того при $t=0$ обращается в данную нам $F(x)$.

Если кроме начальных условий требуется удовлетворить еще и пограничным условиям, то мы можем воспользоваться способом *Фурье* и представить функцию $F(x)$ в виде суммы гармонических функций, как это мы делали раньше; но для этого необходимо, чтобы функция $F(x)$ была периодическая (ср. ч. II, 150, 85). Этого всегда можно достичь, приняв, что данная нам в пределах длины провода (т. е. между $x=0$ и $x=l$) функция $F(x)$ опять повторяется и за этими пределами; для того, чтобы это было яснее, рассмотрим случай провода длиной l , концы которого изолированы.

Пограничные условия здесь состоят в том, что сила тока при $x=0$ и $x=l$ должна равняться нулю. Этим пограничным условиям должна конечно удовлетворять и данная нам функция начального распределения токов при $t=0$, т. е. $F(x)$. Продолжим мысленно эту функцию за пределы провода и притом так, чтобы

$$F(x) = F(x + 2l) = F(x + 3l) = \dots$$

$$F(-x) = -F(+x).$$

Это означает, что продолженная нами функция периодическая с периодом $2l$ и притом *нечетная* (см. ч. II, 153, 85) и может быть представлена в виде суммы синусов кратных дуг.

Предоставляем читателю доказать, что в случае провода, один конец которого изолирован, а другой заземлен, период продолженной функции будет равен $4l$. Все это вполне соответствует тем решениям, которыми мы пользовались раньше.

После этих предварительных замечаний мы можем перейти к более конкретному случаю. Предположим, что в рассматриваемом нами проводе имело место некоторое движение электричества, причем потенциалы и силы токов могли быть выражены как функции координаты x и времени t формулами

$$V_1(x, t); \quad J_1(x, t).$$

В некоторый момент времени (мы можем его принять за $t=0$) наступает внезапное изменение условий распространения волн по проводу: может измениться действие внешней силы, или могут измениться пограничные условия. Положим далее, что мы, приняв во внимание новые условия, вычислили распределение потенциалов и силы тока и получили формулы новых *установившихся* движений

$$V_2(x, t); \quad J_2(x, t).$$

В момент $t=0$ эти новые функции должны принимать те же значения, что и прежние, т. е. должны быть удовлетворены равенства

$$V_1(x, 0) = V_2(x, 0);$$

$$J_1(x, 0) = J_2(x, 0).$$

Между тем в большинстве случаев этого не будет, так как первоначальные и новые условия могут быть весьма разнообразны. Поэтому для согласования новых функций с прежними при $t=0$ мы должны будем к нашему новому решению прибавить еще некоторые функции V_3 и J_3 , подобранные таким образом, чтобы имели место уравнения

$$V_1(x, 0) - V_2(x, 0) = V_3(x, 0);$$

$$J_1(x, 0) - J_2(x, 0) = J_3(x, 0).$$

Само собою разумеется, что эти добавочные функции V_3 и J_3 должны удовлетворять новым пограничным условиям и быть независимыми от внешней силы, действие которой мы уже приняли во внимание при вычислении функций V_2 и J_2 . Из этого ясно, что добавочные функции V_3 и J_3 будут представлять собою не что иное, как *собственные колебания* провода, появившиеся в момент изменения условий. Формулы для собственных колебаний провода при разных пограничных условиях мы уже получили в виде суммы целого ряда гармонических стоячих волн. Частоты этих волн определялись пограничными условиями, но амплитуды и фазы их

оставались неопределенными; теперь мы можем выбрать эти амплитуды и фазы так, чтобы удовлетворить также и вышенаписанному условию при $t=0$. Другими словами, мы должны функции

$$[V_1(x, 0) - V_2(x, 0)];$$

$$[J_1(x, 0) - J_2(x, 0)]$$

разложить в ряды *Фурье* и каждый член этого ряда считать за амплитуду возникших собственных колебаний провода.

Итак общий ход решения задачи, определить неустановившееся движение электричества в проводе, будет следующий. Сперва составляют формулы движения электричества *до* изменения условий и *после* этих изменений, берут их разность и полагают в этой разности $t=0$. Полученную таким образом функцию от x разлагают в ряд *Фурье* и получают таким образом амплитуды и фазы тех собственных колебаний в проводе, которые возникли при изменении условий. Эти собственные колебания нужно затем прибавить к установившимся колебаниям новых условий, чтобы получить формулы движения электричества тотчас после наступления изменения условий, т. е. при $t=0$. В большинстве случаев важно бывает знать амплитуды и фазы колебаний, близких к $t=0$, т. е. в самом начале неустановившихся движений, потому что затем собственные колебания провода будут постепенно ослабевать и останутся только принужденные колебания при новых условиях.

Приведенные общие указания мы поясним сейчас на простом примере.

199. Заряджение линии электричеством. Применим рассуждения предыдущего параграфа к следующему случаю. Первоначально провод, изолированный на обоих концах, был свободен и от электрических зарядов и от электрических токов. Эти условия мы выразим уравнениями:

$$V_1(x, t) = 0; \quad J_1(x, t) = 0.$$

Затем в некоторый момент времени $t=0$ начало провода приключается к источнику электричества постоянного потенциала, например к аккумуляторной батарее с разностью потенциалов E . Эти новые условия выразятся уравнениями:

$$V_2(x, t) = E; \quad J_2(x, t) = 0.$$

При переходе от первоначальных условий к новым условиям в проводе должны возникнуть собственные электрические колебания, т. е. стоячие волны, для которых мы напишем выражения:

$$V_{1,2} = - \sum A_n \sin(m_n x) \cos(\omega_n t),$$

$$J_{1,2} = - \sqrt{\frac{C}{L}} \sum A_n \cos(m_n x) \cdot \sin(\omega_n t).$$

Мы выбрали эту форму стоячих волн, имея в виду удовлетворить пограничным условиям задачи, а также и условию, чтобы при $t=0$ могли быть удовлетворены уравнения:

$$V_1(x, 0) = 0 = E + V_{1,2};$$

$$J_1(x, 0) = J_2(x, 0) = J_{1,2}(x, 0) = 0.$$

Действительно, для того, чтобы при $t=0$ сила тока во всем проводе равнялась нулю, мы поставили во всех членах множитель $\sin(\omega_n t)$. Далее, так как при отсутствии поглощения энергии потенциалы и силы токов должны различаться по фазе на 90° (ср. 294, 197), то в потенциалах мы должны были поставить множитель $\cos(\omega_n t)$. Между тем зависимость потенциалов от координаты x мы выразили множителем $\sin(m_n x)$ для того, чтобы при $x=0$, т. е. в начале линии, разность потенциалов *все время* оставалась равной разности потенциалов аккумуляторной батареи E . Что же касается силы тока, то она при $x=0$ не должна равняться нулю, потому что при зарядке линии электрический ток идет из батареи в линию. Наоборот, на изолированном конце провода сила тока должна все время равняться нулю и это влечет за собою условие

$$\cos(m_n l) = 0; \quad \sin(m_n l) = \pm 1,$$

которое, как мы знаем (291, 196), определяет основную частоту стоячих волн и требует, чтобы в написанной нами сумме стоячих волн встречались только нечетные обертоны:

$$l: \frac{\lambda_n}{4} = (2n + 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Все эти условия вместе позволяют нам очень просто определить коэффициенты A_n в вышенаписанных суммах. Для этого перепишем уравнение для потенциалов, положив в нем $t=0$

$$E = \sum A_n \sin(m_n x),$$

$$m_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{\pi}{2l} (2n + 1).$$

Этот ряд *Фурье* мы уже рассматривали во второй части теоретической физики (ч. II, 155, 86, рис. 54—57); он представляет собою функцию, график которой состоит из участков прямых линий, параллельных оси времен и лежащих попеременно то сверху, то снизу этой оси. Длина каждого участка прямых линий равна $2l$, а длина полного периода функции равна $4l$. Коэффициенты при отдельных членах этого ряда равны обратным величинам нечетных чисел, и следовательно весь ряд изобразится в следующем виде:

$$\sin(mx) + \frac{1}{3} \sin(3mx) + \frac{1}{5} \sin(5mx) \dots$$

Те же коэффициенты ряда мы получим для силы тока, но вместо синусов будут стоять косинусы: весь график для силы тока будет сдвинут по оси Ox на величину, равную четверти длины основной волны. Выяснив таким образом зависимость искомых функций от x , мы можем написать окончательное решение для *неустановившегося* движения электричества в проводе в таком виде:

$$V_2 = E \left[1 - \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{2n+1} \sin(m_n x) \cdot \cos(\omega_n t) \right];$$

$$J_2 = -E \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{2n+1} \cos(m_n x) \cdot \sin(\omega_n t).$$

Мы советуем читателю проверить, что это решение действительно удовлетворяет всем пограничным и начальным условиям задачи.

Если нас интересует наибольшая разность потенциалов, возникающая в проводе при таком движении, то мы должны прежде всего положить $\cos(\omega_n t) = 1$. Затем мы видим, что наибольшая разность потенциалов будет там, где все $\sin(m_n x) = -1$, т. е. на изолированном конце провода. Мы получаем там:

$$V_e = E \left[1 + \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots \right) \right].$$

Сумма членов ряда, стоящих в скобках, равна $\frac{\pi}{4}$, и следовательно:

$$V_e = 2E.$$

Для определения максимальной силы тока мы должны положить $\sin(\omega_n t) = \pm 1$ и $\cos(m_n x) = 1$; это последнее условие означает,

что наибольшая сила тока получится в начале провода и значение этого максимума будет:

$$J_{\max} = \pm \sqrt{\frac{C}{L}} E.$$

Мы можем придать нашему решению более наглядную форму, если представим стоячие волны в виде двух проходящих волн, движущихся вдоль провода в противоположные стороны. Тогда решение напишется так:

$$V_2 = E \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \sum \frac{1}{2n+1} [\sin(\omega_n t - m_n x) - \sin(\omega_n t + m_n x)] \right\};$$

$$J_2 = -E \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \frac{2}{\pi} \sum \frac{1}{2n+1} [\sin(\omega_n t - m_n x) + \sin(\omega_n t + m_n x)].$$

На рис. 75 волна, идущая в положительную сторону (вправо), изображена пунктиром, а волна, отраженная от конца и идущая влево, изображена тонкой линией. Результирующая стоячая волна изображена жирной сплошной линией. Каждая часть рисунка изображает положение волн в моменты времени, следующие друг за другом через $\frac{1}{8}$ периода основного колебания. Мы советуем читателю сравнить полученные здесь стоячие волны с теми, которые получаются при строго гармонических колебаниях, т. е. при одном первом члене ряда (ср. общий курс „Электричество“).

Если мы прибавим к этим стоячим волнам напряжение батареи, т. е. если мы опустим ось времен на величину E , то получим изображение неустановившегося движения электричества в проводе во время зарядки. Это сделано на рис. 76. Из этих рисунков мы видим, что тотчас же после момента присоединения провода к батарее аккумуляторов, от начала провода идет волна положительных потенциалов (рис. 76; $\frac{1}{8} T$); у конца провода (рис. 76; $\frac{3}{8} T$) эта волна отражается и вместе с падающей волной повышает потенциал конца до двойной величины. Отраженная волна, дойдя до середины линии, уничтожается отрицательной частью падающей волны и у начала провода остается только напряжение батареи (рис. 76; $\frac{8}{8} T$). При дальнейшем ходе отраженной волны (влево) ее отрицательная часть складывается с отрицательной частью падающей волны

и обе волны вместе аннулируют заряды линии; только начало линии, соединенное с батареей, имеет разность потенциалов E . Таким образом мы получили то же самое состояние провода, что и

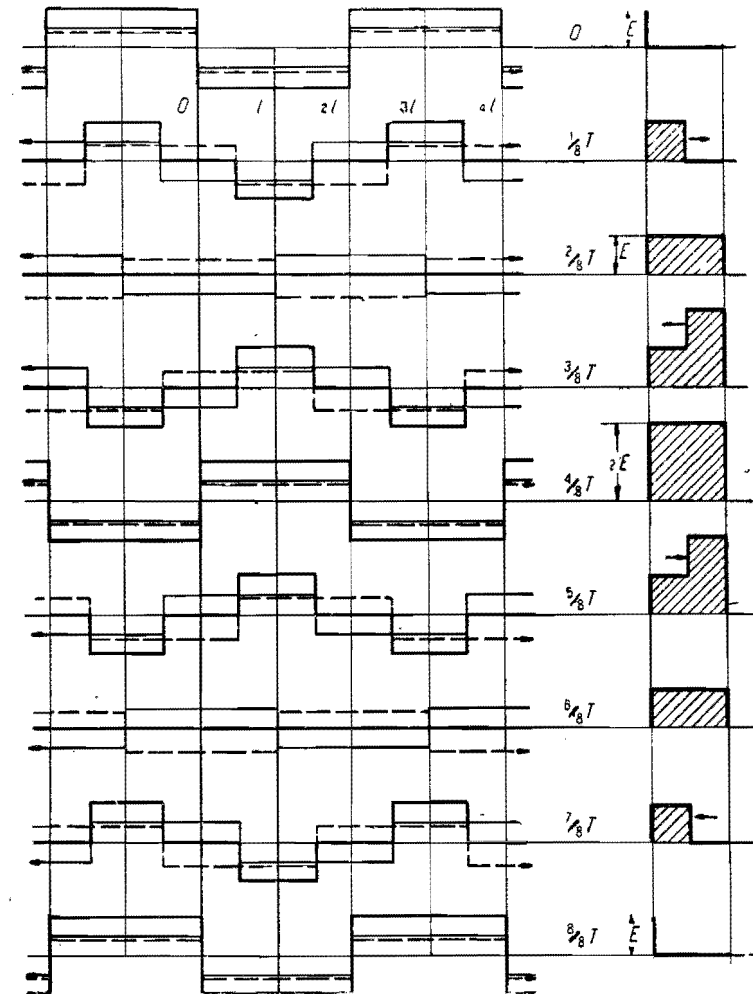


Рис. 75. Сложение двух волн, движущихся в противоположные стороны.

Рис. 76. Результирующее колебание потенциалов на линии.

в первый момент его включения, и все рассмотренное нами движение волн должно снова повториться. Но так как в каждом проводе неизбежно поглощение энергии, то волны, возникшие в момент включения, будут постепенно затухать и в результате на всей длине

провода останется постоянная разность потенциалов E , а сила тока везде будет равна нулю. Мы получим установившееся равновесие электричества, соответствующее новым условиям, наложенным в момент зарядки.

Совершенно аналогичным образом решаются и другие задачи неустановившегося движения волн в проводе, хотя вычисления получаются несколько сложнее, чем в рассмотренном нами примере.

200. Электрический удар в линию. Рассмотрим еще случай неустановившегося движения электричества, который получается в проводе после того, как в каком-либо месте (около $x = a$) произошло внезапное повышение потенциала (удар атмосферного электричества). Если мы для первого приближения пренебрежем сопротивлением провода, то будем иметь для скорости распространения волн и для соотношения между потенциалом и силой тока формулы:

$$c_1 = \frac{c}{\sqrt{LC}};$$

$$J = \sqrt{\frac{C}{L}} V$$

и решение Даламбера может быть написано в виде:

$$V = \frac{1}{2} [F(x - ct) + F(x + ct)],$$

$$J = \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{1}{2} [F(x - ct) - F(x + ct)].$$

В последней формуле мы написали разность двух функций, потому что при движении волны потенциалов по направлению $-OX$ сила тока отрицательна. Кроме того написанные решения вполне удовлетворяют начальным данным: при $t = 0$ мы имеем

$$V(x, 0) = F(x); \quad J(x, 0) = 0.$$

Написанное нами решение изображено графически на рис. 77 и 78 для различных моментов времени.

Рис. 77 представляет распределение потенциалов в момент $t = 0$, причем $F(x)$ у нас представлена в виде суммы двух одинаковых функций. В то же самое время на рис. 78 изображена сила тока, которая в момент $t = 0$ равнялась нулю; сила тока изображена в виде разности двух одинаковых функций. В последующие

моменты времени как потенциалы, так и сила тока распространяются в обе стороны от места удара с одинаковыми скоростями и с сохранением формы волны.

Рассмотрим распространение потенциалов. У нас точка удара $x = a$ взята ближе к началу линии, чем к концу, а потому волна,

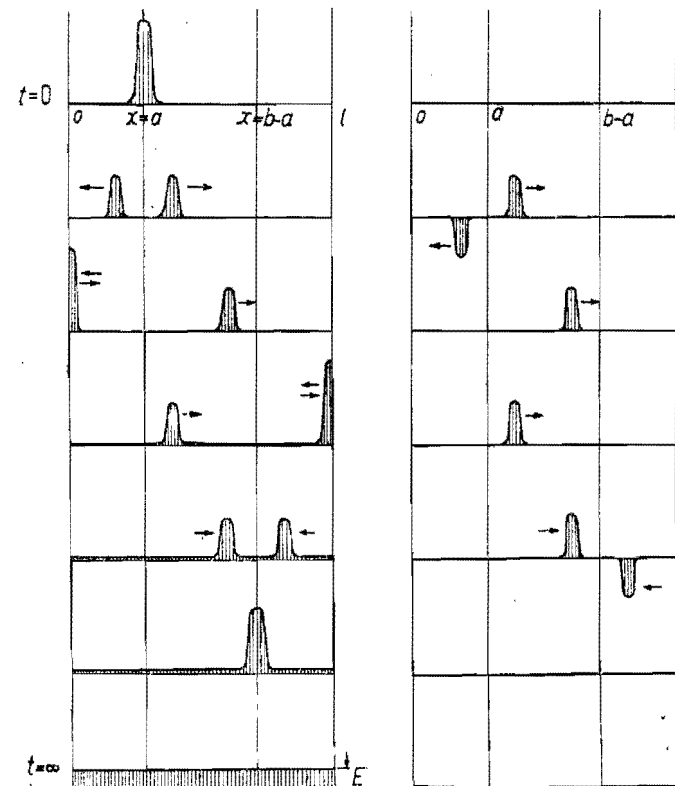


Рис. 77.

Рис. 78.

Движение потенциалов (77) и распределение сил тока (78) после электрического удара в изолированную линию.

идущая влево по $-OX$ $\left(\frac{1}{2} F(x + ct)\right)$, дойдет до изолированного конца раньше, чем волна, идущая вправо по $+OX$ (волне $\frac{1}{2} F(x - ct)$). Мы получим у начала провода отражение при удвоенной амплитуде потенциала, после чего отраженная волна побегит

вправо. Другая волна, распространявшаяся от места удара вправо, в свою очередь дойдет до изолированного конца линии и, отразившись от него, побежит влево, навстречу первой волне. Обе волны встретятся в некоторой точке $x = b$, которая, как легко сообразить, будет расположена симметрично с точкою удара $x = a$ по отношению середины провода $x = c$. При встрече потенциалы дадут такое же напряжение в точке $x = b$, какое было в момент удара в точке $x = a$. Затем мы получим повторение тех же явлений: волны будут отражаться от концов и встречаться попеременно то в точке $x = a$, то в точке $x = b$. Впрочем вследствие потери энергии обе волны будут постепенно уменьшаться и расплываться вдоль линии, и в конце концов потенциал расплывется по всей длине провода: мы получим равномерное распределение электричества по проводу по законам электростатики.

Волны силы тока будут двигаться вместе с потенциалами. Но при отражении от изолированных концов электричество должно изменить направление своего движения, т. е. сила тока будет менять свой знак; сумма силы токов падающей и отраженной волны будет равна нулю. То же самое произойдет и при встрече двух волн в одной из точек $x = a$ или $x = b$: токи взаимно уничтожатся. По мере затухания потенциалов будут уменьшаться и силы токов; но потенциалы будут приближаться к некоторой предельной величине, обусловленной первоначальным зарядом и емкостью линии, между тем как сила тока будет асимптотически приближаться к нулю.

III. ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

201. Плоская волна в диэлектрике. Напишем уравнения *Максвелла* для диэлектриков, лишенных действительных зарядов:

$$\text{curl } \mathbf{M} = \frac{\varepsilon}{c} \dot{\mathbf{E}}; \quad \text{div } \varepsilon \mathbf{E} = 0;$$

$$-\text{curl } \mathbf{E} = \frac{\mu}{c} \dot{\mathbf{M}}; \quad \text{div } \mu \mathbf{M} = 0.$$

Мы уже знаем, что из этих уравнений следует закон *Максвелла* о скорости распространения волн (167, 137) и теорема *Пойнтинга* о движении энергии (163, 135):

$$c_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}; \quad \mathbf{P} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{M}].$$

Возьмем прямоугольные прямолинейные оси координат и рассмотрим частный случай распространения электромагнитных волн, когда напряжения \mathbf{E} и \mathbf{M} лежат в плоскостях, параллельных плоскости XU и имеют величину, независимую от координат x и y . Тогда мы должны все производные от напряжений поля \mathbf{E} и \mathbf{M} по координатам x и y положить равными нулю, и получаем следующие уравнения *Максвелла* (производные в скобках равны нулю):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial M_z}{\partial y}\right) - \frac{\partial M_y}{\partial z} &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}; & \left(-\frac{\partial E_z}{\partial y}\right) + \frac{\partial E_y}{\partial z} &= \frac{\mu}{c} \frac{\partial M_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial M_x}{\partial z} - \left(\frac{\partial M_z}{\partial x}\right) &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}; & -\frac{\partial E_x}{\partial z} + \left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) &= \frac{\mu}{c} \frac{\partial M_y}{\partial t}; \\ \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t}\right); & & \left(-\frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\mu}{c} \frac{\partial M_z}{\partial t}\right). \end{aligned}$$

Последние уравнения удовлетворяются сами собою, потому что производные по x и y равны нулю, а E_z и M_z сами равны нулю. Первые четыре уравнения распадаются на две пары уравнений, независимых друг от друга; в одной паре входят только составляющие напряжений E_x и M_y :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial M_y}{\partial z} &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}; \\ -\frac{\partial E_x}{\partial z} &= \frac{\mu}{c} \frac{\partial M_y}{\partial t}, \end{aligned}$$

тогда как в другой паре входят только составляющие E_y и M_x :

$$\begin{aligned} +\frac{\partial M_x}{\partial z} &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}; \\ +\frac{\partial E_y}{\partial z} &= \frac{\mu}{c} \frac{\partial M_x}{\partial t}. \end{aligned}$$

На этом основании мы можем вместо одной плоской волны рассматривать две *независимых* друг от друга волны. причем в каждой из них напряжения \mathbf{E} и \mathbf{M} перпендикулярны друг к другу. Различие уравнений по отношению к знаку производных по координате z указывает только, что направления \mathbf{E} , \mathbf{M} , \mathbf{Z} образуют *правовинтовую* систему. Физически это распадение уравнений означает следующее: любую плоскую электромагнитную волну мы можем рассматривать как составленную из двух плоских волн одинакового

направления, но *поляризованных* перпендикулярно друг к другу (ср. 168, 138). Плоскость колебания одной из волн параллельна оси OX (E_x) и плоскость поляризации (M_y) параллельна оси OY . В другой волне плоскость колебания параллельна оси OY (E_y), а плоскость поляризации (M_x) параллельна оси OX . Направление лучей (вектор *Пойнтинга*) обеих волн параллельно оси OZ . То, что математически выражается распадением уравнений на две независимые пары, реализуется физически при помощи какого-либо поляризационного аппарата, например *николя*.

Мы можем теперь опустить индексы и рассматривать *плоскую поляризованную волну*, написав уравнения:

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t}; \quad \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\mu}{c} \frac{\partial M}{\partial t};$$

продифференцировав первое уравнение по t , а второе по z , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial M}{\partial z} &= \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} &= \frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial M}{\partial t}; \\ \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} &= \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Наоборот, продифференцировав первое уравнение по z , а второе по t , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} &= \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial E}{\partial t}; \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E}{\partial z} &= \frac{\mu}{c} \frac{\partial^2 M}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} &= \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 M}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Мы получили таким образом и для электрического и для магнитного поля уже известные нам уравнения волн, распространяющихся вдоль оси OZ (297, 198), и можем написать для них решения *Даламбера* в форме:

$$F(z \mp ct)$$

или

$$F\left(t \mp \frac{z}{c}\right).$$

202. Соотношение между электрическим и магнитным полем. Мы получили в предыдущем параграфе дифференциальное уравнение для электрического и магнитного поля плоской волны, которые по форме совершенно одинаковы. Применяя к ним решение *Даламбера* и рассматривая только ту часть волны, которая распространяется по положительной оси $+OZ$, мы можем написать:

$$E = F_e(s); \quad M = F_m(s); \quad s = t - \frac{z}{c_1},$$

где F_e и F_m суть произвольные функции.

Подставим эти выражения в уравнения *Максвелла* и обозначим производные по s значком F' ; получаем:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c_1} F'_m(s) &= \frac{\epsilon}{c} F'_e(s); \\ -\frac{1}{c_1} F'_e(s) &= \frac{\mu}{c} F'_m(s). \end{aligned}$$

Умножая одно уравнение на другое, получаем величину скорости распространения

$$c_1 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}},$$

т. е. уже известный нам закон *Максвелла*. Разделяя одно уравнение на другое, получаем:

$$\frac{F'_m(s)}{F'_e(s)} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}.$$

Это уравнение означает, что обе функции F_e и F_m одинаковы по форме и отличаются друг от друга только постоянным множителем $\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$. Мы можем поэтому написать решение в такой форме:

$$\sqrt{\epsilon} E = \sqrt{\mu} M = F\left(t - \frac{z}{c_1}\right).$$

Далее, так как плотность энергии электрического и магнитного поля вычисляется по формулам:

$$U_e = \frac{1}{8\pi} \epsilon E^2; \quad T_m = \frac{1}{8\pi} \mu M^2,$$

то мы заключаем, что в рассматриваемой нами плоской волне плотности энергии электрического и магнитного полей *одинаковы*.

Советуем читателю сравнить эти формулы с формулами распространения волн вдоль проволок (268, 185). Мы уже указывали, что, при ничтожном сопротивлении, проволоки служат только *направляющими* для движения волн, тогда как все электромагнитные явления происходят в окружающем проволоки диэлектрике (271, 186). В проволоках мы тоже имеем *плоскую* волну, распространяющуюся с той же скоростью c , по закону *Максвелла*, но форма линий сил электрического и магнитного поля в проволоках была иная; она зависела от взаимного расположения проволок, тогда как в этом параграфе мы рассматривали *однородные* электрические и магнитные поля.

203. Стоячие волны в пространстве. Представим себе, что вдоль оси OZ идут навстречу друг другу две *гармонические* плоские волны одинаковой амплитуды. Этот случай можно реализовать при помощи отражения (см. ниже). Одну из этих волн мы будем называть *падающей*, а другую — *отраженной* волной.

Для падающей волны, распространяющейся по направлению положительной оси $+OZ$, мы должны написать напряжения электрического и магнитного поля в форме:

$$E_1 = A \cos(\omega t - mz); \quad M_1 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} A \cos(\omega t - mz).$$

Тогда как для отраженной волны знаки E_2 и M_2 будут противоположны:

$$E_2 = A \cos(\omega t + mz); \quad M_2 = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} A \cos(\omega t + mz).$$

Мы предлагаем читателю проверить это по уравнениям *Максвелла*. Таким образом, если даже электрические поля будут направлены в падающей и отраженной волне одинаково, тем не менее магнитные поля будут направлены противоположно (рис. 79, 80, 81). Это впрочем следует также из формулы *Пойнтинга*:

$$P = \frac{c}{4\pi} [E \cdot M].$$

Так как векторы E , M , P должны образовывать праввинтовую систему, то при перемене знака одного из них должен изменить свое направление один из двух других векторов. В данном случае,

т. е. при отражении, меняет свое направление вектор P (направление потока энергии, направление электрического луча, направление положительной нормали плоской волны); поэтому, если мы оста-

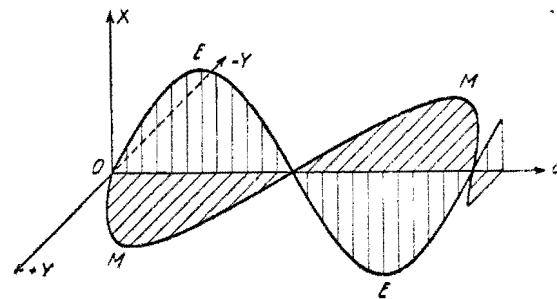


Рис. 79. Основная волна.

вили направления электрического поля без изменения знака, то должны изменить знак магнитного поля; наоборот, если бы мы изменили знак у электрического поля, то должны были бы написать формулу для магнитного поля, поставив тот же знак, как и в падающей волне.

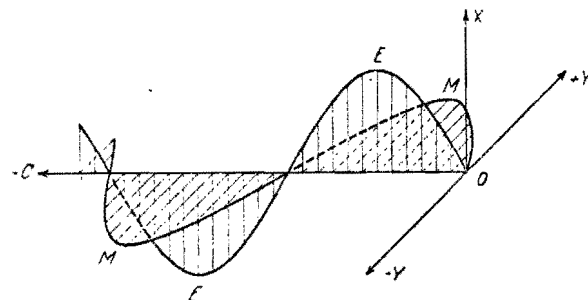


Рис. 80. Отраженная волна.

Обе волны вместе, падающая и отраженная, дадут в сумме электромагнитное поле по следующим формулам:

$$E = A [\cos(\omega t - mz) + \cos(\omega t + mz)] = 2A \cdot \cos(mz) \cdot \cos(\omega t);$$

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} A [\cos(\omega t - mz) - \cos(\omega t + mz)] = \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} 2A \sin(mz) \cdot \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Как видим, каждое из двух полей, электрическое и магнитное, образует вдоль оси OZ стоячие волны с узлами и пучностями (ср. 263, 182); при этом электрические и магнитные стоячие волны сдвинуты друг относительно друга на четверть волны, а колебания их разнятся по фазе на четверть периода.

Стоячие электромагнитные волны в пространстве были впервые реализованы Г. Герцем.

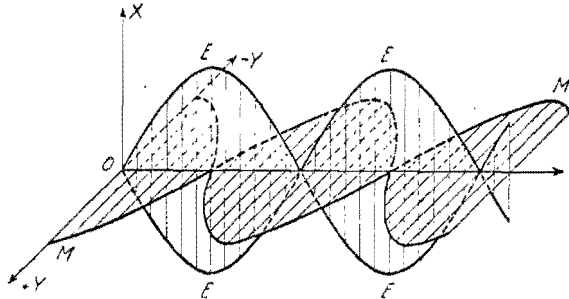


Рис. 81. Стоячая волна.

204. Волны в проводящей среде. Для однородной среды, обладающей не только диэлектрическими свойствами, но также и некоторой удельной электропроводностью, мы имеем уравнения Максвелла (176, 140):

$$\text{curl } \mathbf{M} = \frac{\varepsilon}{c} \dot{\mathbf{E}} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}; \quad \text{div } \varepsilon \mathbf{E} = 0;$$

$$-\text{curl } \mathbf{E} = \frac{\mu}{c} \dot{\mathbf{M}}; \quad \text{div } \mu \mathbf{M} = 0.$$

При помощи тех же приемов, как и прежде (166, 137), мы можем получить из них уравнения, содержащие только напряжения электрического поля или только напряжения магнитного поля:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \dot{\mathbf{E}};$$

$$\nabla^2 \mathbf{M} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \ddot{\mathbf{M}} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \dot{\mathbf{M}}.$$

Если мы имеем дело с плоской волной, распространяющейся по направлению оси OZ , в которой напряжения не зависят от x и y

(производные по x и y равны нулю), то уравнение для напряжения электрического поля принимает вид:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \ddot{E} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \dot{E},$$

и такое же уравнение мы получаем для напряжения магнитного поля. Форма этого уравнения совпадает с формой уже известного нам телеграфного уравнения (266, 184), и мы могли бы воспользоваться формулами прежнего решения. Мы предпочтем однако решать это уравнение независимо, введя обозначения, принятые в электромагнитной оптике.

Зададимся решением в гармонической форме и применим метод комплексных решений, положив:

$$E = A e^{j \cdot \omega \left(t - \frac{z}{c_1} \right)}; \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau}.$$

Эта форма решения означает, что гармонические волны имеют частоту ω , период колебания τ и распространяются параллельно оси $+OZ$ с некоторой скоростью c_1 . Обозначим через p отношение скорости распространения электромагнитных волн в пустоте c к скорости c_1 ; эта величина, как известно, называется в оптике показателем преломления

$$p = \frac{c}{c_1}.$$

Мы уже знаем (по аналогии с телеграфным уравнением), что электромагнитные волны в проводящей среде будут поглощаться, т. е. амплитуда их с увеличением z будет уменьшаться. Мы можем это выразить в нашем решении тем, что представим показатель преломления в комплексной форме. Действительно, если положить

$$p = n - j \cdot k,$$

то показатель степени e примет форму:

$$j \cdot \omega \left(t - \frac{n - j \cdot k}{c} z \right) = -\frac{\omega}{c} k z + j \cdot \omega \left(t - \frac{n}{c} z \right).$$

Первый член справа можно представить так:

$$\frac{\omega}{c} k z = \frac{2\pi}{\tau c} z = \frac{2\pi}{\lambda} z = m_0 z,$$

где λ — длина волны при распространении гармонических колебаний частоты ω и периода τ в пустоте. При этих новых обозначениях решение наше принимает вид:

$$E = A e^{-m_0 k z} e^{j \omega \left(t - \frac{n}{c} z \right)},$$

из которого мы видим, что теперь n означает показатель преломления, а k называется показателем затухания (или поглощения) волн. Физическое значение k таково: при прохождении волнами пути $z = \lambda$ амплитуда их уменьшается в отношении $e^{-2\pi k}$. Для того чтобы определить неизвестные пока величины n и k , составим производные написанного решения:

$$\dot{E} = j \cdot \omega E; \quad \ddot{E} = -\omega^2 E; \quad \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -\omega^2 \frac{p^2}{c^2}$$

и подставим их в дифференциальное уравнение. Тогда получаем:

$$p^2 = (n - j \cdot k)^2 = \epsilon \mu - \frac{4\pi \sigma \mu}{\omega} j = \epsilon \mu - 2 \sigma \mu \tau \cdot j.$$

Приравнявая отдельно действительные и мнимые части уравнения, получаем два уравнения:

$$n^2 - k^2 = \epsilon \mu; \quad nk = \sigma \mu \tau,$$

из которых определяются:

$$n^2 = \frac{\mu}{2} [\sqrt{\epsilon^2 + (2\sigma\tau)^2} + \epsilon],$$

$$k^2 = \frac{\mu}{2} [\sqrt{\epsilon^2 + (2\sigma\tau)^2} - \epsilon].$$

Величина первоначальной амплитуды (при $z = 0$) остается произвольной и в эти формулы не входит. Эти формулы показывают нам, что показатель преломления (следовательно и скорость распространения) волн и показатель затухания волн зависят не только от свойств среды, выраженных коэффициентами ϵ , μ , σ , но также и от периода колебаний τ ; обе величины растут вместе с периодом колебаний τ . Для очень больших частот, т. е. для бесконечно малого периода τ , мы получаем:

$$n^2 = \epsilon \mu; \quad k^2 = 0.$$

Следовательно волны больших частот могут свободно проникать в полупроводник так, как будто его электропроводность равна

нулю. К этому необходимо однако добавить, что при очень больших частотах сами коэффициенты ϵ и μ приближаются к единице, и тогда электромагнитные волны распространяются в среде без поглощения и со скоростью света в пустоте. Примером этого могут служить лучи Рентгена и γ -лучи радиоактивных тел, которые проходят сквозь все тела без преломления и почти без поглощения.

Те же формулы показывают, что степень влияния диэлектрических свойств среды и ее электропроводных свойств на скорость распространения и поглощение электромагнитных волн зависит от соотношения между величинами ϵ и $2\sigma\tau$. Так например, если диэлектрическая постоянная среды настолько мала по сравнению с произведением $2\sigma\tau$, что ею можно пренебречь, то для показателей преломления и поглощения мы получаем:

$$n = k = \sqrt{\mu \sigma \tau}.$$

Эта формула нам пригодится ниже при оценке отражения ультракоротких волн от металлов (опыты Гагена и Рубенса).

205. Соотношение между электрическим и магнитным полем в полупроводниках. Мы уже не раз указывали, что при поглощении волн между магнитным и электрическим полем должна появиться некоторая разность фаз (294, 197). Это подтверждается и в рассматриваемом случае распространения волн в проводящей среде. Для доказательства достаточно воспользоваться одним из уравнений Максвелла, где входят напряжения электрического и магнитного поля вместе, например (309, 201):

$$-\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\mu}{c} \frac{\partial M_y}{\partial t}.$$

Задавшись решениями

$$E_x = A e^{j \omega \left(t - \frac{p}{c} z \right)};$$

$$M_y = B e^{j \omega \left(t - \frac{p}{c} z \right)}$$

и подставляя их в уравнение, получаем:

$$A p = A (n - j \cdot k) = B \mu; \quad B = \frac{n - j k}{\mu} A.$$

Комплексное отношение между амплитудами означает, что их действительные значения относятся, как

$$B_0 : A_0 = \frac{\sqrt{n^2 + k^2}}{\mu} = \sqrt{\frac{\epsilon^2 + (2\sigma\tau)^2}{\mu^2}}$$

и что кроме того между колебаниями электрического и магнитного поля образуется разность фаз:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{k}{n}.$$

Следовательно колебания магнитного поля *отстают* от колебаний электрического поля на фазу φ . Если электропроводность среды ничтожна ($\sigma = 0$), то мы получаем:

$$B_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} A_0; \quad \varphi = 0,$$

т. е. те же формулы, которые мы получили для диэлектриков (311, 202).

206. Поглощение энергии. Напишем формулы для напряжений электрического и магнитного поля плоской волны, распространяющейся в проводящей среде, перейдя от комплексной формы предыдущего параграфа к действительной форме:

$$E = A e^{-m_0 k z} \cos(\omega t - m z); \quad m_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0};$$

$$M = A \frac{\sqrt{n^2 + k^2}}{\mu} e^{-m_0 k z} \cos(\omega t - m z - \varphi); \quad m = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Для потока энергии (сквозь квадратный сантиметр в секунду) мы имеем формулу *Пойнтинга* (здесь E перпендикулярно к M):

$$p = \frac{c}{4\pi} [E \cdot M] = \\ = \frac{c}{4\pi} A^2 \frac{\sqrt{n^2 + k^2}}{\mu} e^{-2m_0 k z} \cos(\omega t - m z) \cdot \cos(\omega t - m z - \varphi).$$

Средний поток энергии в секунду мы получим, заменив произведение косинусов через $\frac{1}{2} \cos \varphi$ (226, 166). Но из формул предыдущего параграфа следует, что

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + k^2}}.$$

Поэтому *средний* поток энергии на некотором расстоянии z от нулевой точки волны будет выражаться формулою:

$$P_{\text{сред}} = \frac{c}{4\pi} A^2 \frac{n}{2\mu} e^{-2m_0 k z}.$$

Мы видим, что коэффициент затухания энергии вдвое больше, чем коэффициент затухания амплитуд, как и следовало ожидать.

Иногда величину

$$q = 2m_0 k = \frac{4\pi}{\lambda_0} k = \frac{4\pi}{c\tau} k$$

называют *коэффициентом поглощения энергии* волн. Введем эту величину в наши формулы:

$$P_{\text{сред}} = \frac{c}{4\pi} A^2 \frac{n}{2\mu} e^{-qz}.$$

Если волны прошли путь dz , то количество энергии, потерянной ими на этом пути, будет равно:

$$\frac{\partial P}{\partial z} dz = \frac{c}{4\pi} A^2 \frac{nk}{2\mu} \cdot \frac{4\pi}{c\tau} e^{-qz} \cdot dz = \frac{1}{2} \sigma A^2 e^{-qz} \cdot dz.$$

С другой стороны, мы знаем, что потеря энергии происходит от превращения электрической энергии в теплоту по закону *Джоуля*. В объеме цилиндра, имеющего площадь основания в один квадратный сантиметр и высоту dz , ежесекундно будет поглощаться количество энергии

$$U = \sigma E^2 \cdot dz; \quad U_{\text{сред}} = \frac{1}{2} \sigma A^2 e^{-qz} \cdot dz.$$

Мы получили ту же величину, что и выше из формулы *Пойнтинга*, и таким образом проверили закон сохранения энергии.

207. Примеры. Первые непосредственные опыты для проверки законов поглощения энергии электромагнитных волн в полупроводниках были сделаны *А. Эйхенвальдом*. Электромагнитные волны направлялись вдоль проволок в водяные растворы (поваренной соли, серной кислоты), и энергия этих волн измерялась при помощи термоэлемента и болометра в различных расстояниях от места входа волн в раствор. Опыты показали, что энергия волн по мере их углубления в раствор постепенно уменьшается и притом по экспоненциальному закону, как того требует теория, и что коэффициент поглощения энергии q определяется величиною диэлектрической постоянной ε и электропроводностью σ раствора в полном согласии с теорией *Максвелла*. Необходимо однако добавить, что впоследствии были найдены некоторые жидкости (растворы сахара, глицерина), поглощение которых сильнее, чем того требует теория *Максвелла*, и зависимость поглощения от частоты колебаний

(длины волн) совсем иная. Подобные явления, на которые мы указывали и раньше (173, 140), не укладываются в рамки теории *Максвелла* и требуют для своего объяснения новых гипотез, основанных на молекулярном строении тел (электронные теории и теория квант).

При подсчете коэффициента поглощения электромагнитных волн по выведенным нами формулам не нужно забывать, что электропроводность σ выражена у нас в *электростатических* единицах. При переходе от удельного сопротивления ρ , выраженного в оми-сантиметрах, к электростатическим единицам удельного сопротивления нужно ρ разделить на $9 \cdot 10^{11}$; взяв обратную величину полученного результата, мы получим величину удельной электропроводности σ , тоже в электростатических единицах. Так например удельное сопротивление 10^0 раствора серной кислоты равно 2,5 оми-сантиметрам, удельная электропроводность ее в электростатических единицах равна:

$$\sigma = \frac{9 \cdot 10^{11}}{2,5} = 0,36 \cdot 10^{12}.$$

А. Эйхенвальд измерял поглощение электромагнитных волн длиной около 1 м ($\tau = 33 \cdot 10^{-10}$) в водных растворах серной кислоты (концентрация 0,1%) и поваренной соли (концентрация 1%), удельная электропроводность которых σ равнялась от $0,4 \cdot 10^{11}$ до $1,2 \cdot 10^{10}$ CGS — E. Таким образом произведение $2\sigma\tau$ имело значение от 25 до 80, тогда как диэлектрическая постоянная воды равнялась 81. Следовательно в этих опытах на величину поглощения волн оказывали влияние и диэлектрические и электропроводные свойства среды одновременно.

Если же мы возьмем вместо раствора дистиллированную воду, удельная электропроводность которой в миллион раз меньше, то произведением $2\sigma\tau$ для волн такой длины, как выше, можно пренебречь: волны будут распространяться в чистой воде, как в изоляторе.

Другой крайний случай мы имеем в хороших проводниках. Так например удельное сопротивление меди и железа равно соответственно $1,7 \cdot 10^{-6}$ и $8,6 \cdot 10^{-6}$ оми-сантиметрам, а электропроводность их в электростатических единицах выражается числами: $5 \cdot 10^{17}$ и $1 \cdot 10^{17}$. Поэтому электропроводность металлов будет иметь преобладающее значение даже для очень малых τ , вплоть до периода колебания лучей желтого цвета ($\tau = 10^{-14}$).

Поглощение электромагнитных волн около метра длиной в металлах измерял *Бьеркнес*, но косвенным образом, наблюдая затухание электрических колебаний в проволоках. При этом оказалось, что достаточно покрыть железную проволоку тонким слоем электролитически осажденной меди, чтобы значительно понизить затухание колебаний. Это означает, что электрические колебания или волны, попадая на металл, проникают в него только на незначительную глубину. Подсчитаем, на какой глубине электромагнитные волны длиной около метра ($\tau = 10^{-8}$), проникая в медь, уменьшают свою энергию в 100 раз. Логарифмический декремент поглощения энергии определится из формулы:

$$q = \frac{4\pi}{\lambda_0} k = \frac{4\pi}{\lambda_0} \sqrt{\mu\sigma}.$$

Положив

$$\lambda_0 = 100 \text{ см}; \quad \mu = 1; \quad \sigma = 5 \cdot 10^{17}; \quad \tau = 10^{-8};$$

$$q = \frac{4\pi}{100} \sqrt{5 \cdot 10^{10}} = 8800,$$

получаем глубину z , на которой энергия уменьшается в 100 раз, очень малую величину:

$$e^{-qz} = \frac{1}{100}; \quad z = \frac{\lg 100}{q} = \frac{4,6}{8800} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ см}.$$

Этим и объясняются опыты *Бьеркнеса*.

Явление, наблюдаемое *Бьеркнесом*, т. е. поглощение электромагнитных волн в металлах на небольшой глубине от их поверхности, по существу своему одинаково с явлением неравномерного распределения быстро-переменных токов по сечению проволоки, которое мы рассматривали раньше (254, 180). Но раньше мы имели дело с электромагнитным полем с цилиндрической симметрией вокруг оси проводника и для выражения его нам потребовались так называемые *цилиндрические (бесселевы)* функции, тогда как теперь при плоской волне у нас входят *показательные* функции; при больших радиусах цилиндра бесселевы функции переходят в показательные функции.

Впрочем и независимо от формальных соображений нетрудно увидеть сходство обоих явлений, если стать на точку зрения воззрений *Пойнтинга* о движении энергии в электромагнитном поле. Уже при рассмотрении движения энергии при постоянном токе

(165, 136) мы выяснили, что электромагнитная энергия движется вдоль проволок, в *наружном* пространстве, перпендикулярно к электрическому и магнитному полю и входит в проволоку через ее наружную поверхность, чтобы затем превратиться в теплоту по закону *Джоуля*. То же самое мы имеем и при быстрых электрических колебаниях. Но при колебаниях энергия движется в форме электромагнитных волн; волны эти входят в проводник *снаружи* сквозь его поверхность, и если эта поверхность цилиндрическая (проволока), то волны направляются радиально со всех сторон по направлению к оси проводника. При движении внутри проводника волны должны поглощаться, их энергия превращается в теплоту по закону *Джоуля*. Амплитуда волн, а следовательно и амплитуда их электрических токов должна уменьшаться по мере того, как волны удаляются от поверхности и приближаются к оси проводника; отсюда ясно, что электрические токи в наружных слоях проволоки должны быть сильнее, чем около оси ее.

Неравномерное распределение токов в проволоке мы объясняли индукционными действиями быстро-переменных токов; теперь мы объясняем это законами распространения электромагнитных волн. Но ведь сами электромагнитные волны обязаны своим происхождением тем же самым индукционным действиям, теория которых лежит в основе уравнений *Максвелла*; а из уравнений *Максвелла* следуют законы распространения электромагнитных волн в проводниках.

IV. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН

208. Законы отражения и преломления. Положим, что нам дана плоская граница между двумя изоляторами с диэлектрическими постоянными ϵ_1 и ϵ_2 и с магнитными постоянными μ_1 и μ_2 . Проведем оси координат так, чтобы плоскость XY легла на пограничную плоскость этих изоляторов, а ось $+OZ$ была направлена от первой среды во вторую (рис. 82). Предположим далее, что на пограничную плоскость падает электромагнитная волна, плоскости *одинаковых фаз* которой перпендикулярны к плоскости ZX (к плоскости чертежа) и нормаль которой составляет с осью $+OZ$ некоторый угол φ . Если волна гармоническая, то наши формулы будут содержать множитель $\cos \alpha$ или $\sin \alpha$, причем:

$$\alpha = \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{\sin \varphi \cdot x + \cos \varphi \cdot z}{c_n} \right).$$

Действительно одинаковые фазы в такой волне будут располагаться по поверхностям, для которых:

$$\frac{\sin \varphi \cdot x + \cos \varphi \cdot z}{c_n} = t_1 (= \text{const}).$$

Но это суть плоскости, параллельные оси y . Расстояние каждой такой плоскости от начала координат равно:

$$\sin \varphi \cdot x + \cos \varphi \cdot z = c_n t_1 = p.$$

Это уравнение можно толковать, как уравнение *движения* фазовой плоскости от начала координат до данного положения в течение времени t_1 со скоростью c_n . В течение времени T (полный период колебания) фазовая плоскость пройдет по направлению своей нормали путь, равный длине волны:

$$p = c_n T = \lambda.$$

Уравнения *Максвелла* в применении к данному случаю упрощаются, потому что все величины будут зависеть только от координат x, z и от времени t ; и все производные по y будут равны нулю (ср. 309, 201):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial M_y}{\partial z} &= \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}; & \frac{\partial E_y}{\partial z} &= \frac{\mu}{c} \frac{\partial M_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial M_y}{\partial x} &= \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t}; & \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial M_z}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial M_y}{\partial t}; & \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} &= \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}. \end{aligned}$$

Уравнения *Максвелла* и в этом случае распадаются на две независимые друг от друга серии. Левые три уравнения содержат в себе только E_x, E_z, M_y ; они представляют собою электромагнитные волны, электрические колебания которых параллельны плоскости ZX , т. е. плоскости падения электрического луча. В оптике такой луч называется *поляризованным перпендикулярно к плоскости падения*. Между тем как правые три уравнения содержат только величины E_y, M_x, M_z ; они представляют собою луч, *поляризованный в плоскости падения*.

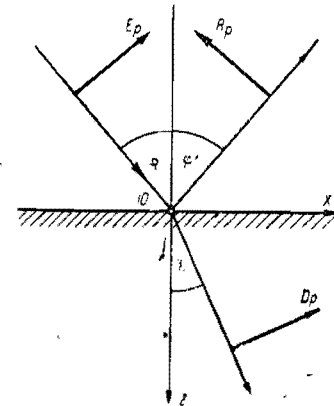


Рис. 82. Падающий, отраженный и преломленный лучи.

Зададимся следующим решением этих уравнений:

$$E_x = Ae^{j\alpha}; \quad M_x = Le^{j\alpha};$$

$$E_z = Ce^{j\alpha}; \quad M_z = Ne^{j\alpha};$$

$$M_y = Me^{j\alpha}; \quad E_y = Be^{j\alpha};$$

$$\alpha = \omega \left(t - \frac{\sin \varphi \cdot x + \cos \varphi \cdot z}{c_n} \right) = \omega (t - ax - bz).$$

Подстановка этих решений в уравнения Максвелла дает нам:

$$Mb = \frac{\epsilon}{c} A; \quad Bb = -\frac{\mu}{c} L;$$

$$-Ma = \frac{\epsilon}{c} C; \quad Ba = \frac{\mu}{c} N;$$

$$Ab - Ca = \frac{\mu}{c} M; \quad -Lb + Na = \frac{\epsilon}{c} B.$$

Если исключим амплитуды A, C, M из левых трех уравнений, или амплитуды B, L, N из правых трех уравнений, то получим:

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{\sin \varphi}{c_n} \right)^2 + \left(\frac{\cos \varphi}{c_n} \right)^2 = \frac{1}{c_n^2} = \frac{\epsilon \mu}{c^2};$$

$$c_n = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}.$$

Это — уже известный нам закон Максвелла. Кроме того эти уравнения определяют отношения между амплитудами напряжений:

$$C = -\frac{a}{b} A = -A \operatorname{tg} \varphi; \quad L = -\frac{c}{\mu} Bb = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} B \cos \varphi;$$

$$M = \frac{\epsilon}{c} \frac{1}{b} A = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{\cos \varphi} A; \quad N = +\frac{c}{\mu} Ba = +\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} B \sin \varphi.$$

Мы возьмем за основные амплитуды следующие: амплитуду колебаний электрического поля в плоскости ZX и назовем ее E_p и амплитуду колебаний электрического поля, параллельного оси Y , и назовем ее через E_s (рис. 82).

Тогда

$$A = E_p \cos \varphi; \quad B = E_s,$$

и решения наши представляются в следующем виде:

$$E_x = E_p \cos \varphi \cdot \cos \alpha; \quad M_x = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_s \cos \varphi \cdot \cos \alpha;$$

$$E_z = -E_p \sin \varphi \cdot \cos \alpha; \quad M_z = +\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_s \sin \varphi \cdot \cos \alpha;$$

$$M_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_p \cdot \cos \alpha; \quad E_y = E_s \cos \alpha.$$

Эти решения мы могли впрочем получить и непосредственно из чертежа, взяв проекции амплитуд E_p и E_s на оси координат и приняв во внимание соотношение между магнитным и электрическим полем для каждой из поляризованных волн (311, 202):

$$\sqrt{\epsilon} E = \sqrt{\mu} M.$$

Мы выбрали однако более формальный (аналитический) путь, имея в виду дальнейшие применения наших формул.

Мы будем рассматривать три электромагнитных волны, или три электрических луча: падающий, отраженный и преломленный. Направления всех трех лучей мы примем параллельными плоскости падения, а углы, составляемые ими с осью $+OZ$, обозначим через φ, φ', χ . Падающий и отраженный лучи идут в первой среде, и следовательно для них мы должны писать:

$$\alpha = \omega \left(t - \frac{\sin \varphi \cdot x + \cos \varphi \cdot z}{c_1} \right),$$

$$\alpha' = \omega \left(t - \frac{\sin \varphi' \cdot x + \cos \varphi' \cdot z}{c_1} \right).$$

Между тем как преломленный луч во второй среде будет иметь аргумент:

$$\beta = \omega \left(t - \frac{\sin \chi \cdot x + \cos \chi \cdot z}{c_2} \right).$$

Амплитуды падающего луча мы будем обозначать буквами E_p и E_s , амплитуды отраженного и преломленного луча — буквами R_p и R_s , и соответственно D_p и D_s . Наконец для упрощения формул мы примем магнитные постоянные обоих тел μ_1 и μ_2 равными единице; в действительности большинство изоляторов не магнитно. Если читатель пожелает обобщить наши вычисления и для тел, для которых μ не равно единице, то он не встретит особых затруднений.

У пограничной плоскости должны быть соблюдены общие условия электромагнитного поля (50, 41; 90, 74), а именно: нормальные составляющие индукций и тангенциальные составляющие напряжений должны быть одинаковы по обеим сторонам пограничной плоскости. Нам достаточно написать условия для тангенциальных составляющих напряжений, так как условия для индукций нам не дадут ничего нового.* Но понятно в первой среде мы должны принять во внимание результирующее поле падающего и отраженного лучей, тогда как во второй среде проходит только один преломленный луч. Условия на границе дадут нам следующие уравнения (мы составляем проекции полей на оси OX и OY согласно рис. 82):

$$E_x = E_p \cos \varphi \cdot \cos \alpha - R_p \cos \varphi' \cdot \cos \alpha' = D_p \cos \chi \cdot \cos \beta;$$

$$M_y = \sqrt{\epsilon_1} E_p \cos \alpha + \sqrt{\epsilon_1} R_p \cdot \cos \alpha' = \sqrt{\epsilon_2} D_p \cdot \cos \beta;$$

$$E_y = E_s \cdot \cos \alpha + R_s \cdot \cos \alpha' = D_s \cdot \cos \beta;$$

$$M_x = \sqrt{\epsilon_1} E_s \cos \varphi \cdot \cos \alpha - \sqrt{\epsilon_1} R_s \cos \varphi' \cdot \cos \alpha' = \sqrt{\epsilon_2} D_s \cos \chi \cdot \cos \beta.$$

Для того чтобы эти условия удовлетворялись в *любой* момент времени, т. е. были независимы от времени, необходимо прежде всего, чтобы при $z=0$ имели место равенства:

$$\alpha = \alpha' = \beta,$$

и следовательно:

$$\frac{\sin \varphi}{c_1} = \frac{\sin \varphi'}{c_1} = \frac{\sin \chi}{c_2}.$$

Отсюда определяются направления лучей. Заметим, что φ' не может равняться φ ; это означало бы, что оба луча совпадают. Поэтому:

$$\varphi' = 180 - \varphi; \quad \frac{\sin \varphi}{c_1} = \frac{\sin \chi}{c_2}.$$

Первое условие обыкновенно выражают правилом: угол падения равен углу отражения. Второе условие представляет собою известный закон преломления лучей (или волн).

209. Формулы Френеля. Приняв во внимание закон Максвелла:

$$c_1 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}; \quad c_2 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}},$$

выразим отношение между диэлектрическими постоянными обоих тел через показатель преломления n второй среды относительно первой ($\mu_1 = \mu_2$):

$$\frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = n = \frac{\sin \varphi}{\sin \chi}.$$

Тогда условия на границе принимают более простой вид: сперва рассмотрим первые два уравнения для луча, поляризованного *перпендикулярно* к плоскости падения:

$$E_p - R_p = D_p \frac{\cos \chi}{\cos \varphi},$$

$$E_p + R_p = D_p \frac{\sin \varphi}{\sin \chi}.$$

Разделяя каждое уравнение на коэффициент при D_p и вычитая одно уравнение из другого, мы исключаем D_p и получаем:

$$E_p \left[\frac{\cos \chi}{\cos \varphi} - \frac{\sin \varphi}{\sin \chi} \right] = R_p \left[\frac{\cos \varphi}{\cos \chi} + \frac{\sin \chi}{\sin \varphi} \right],$$

откуда определяется амплитуда отраженного луча:

$$R_p = E_p \frac{\sin 2\varphi - \sin 2\chi}{\sin 2\varphi + \sin 2\chi} = E_p \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \chi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \chi)}.$$

С другой стороны, сумма обоих уравнений дает нам непосредственно амплитуду преломленного луча:

$$D_p = E_p \frac{4 \sin \chi \cdot \cos \varphi}{\sin 2\varphi + \sin 2\chi} = E_p \frac{2 \sin \chi \cdot \cos \varphi}{\sin(\varphi + \chi) \cdot \cos(\varphi - \chi)}.$$

Для лучей, поляризованных в *плоскости падения*, мы имеем уравнения:

$$E_s + R_s = D_s;$$

$$E_s - R_s = D_s \frac{\sin \varphi}{\sin \chi} \cdot \frac{\cos \chi}{\cos \varphi}.$$

Опять разделяя на коэффициент при D_s , получаем:

$$E_s \left[\frac{\cos \varphi \cdot \sin \chi}{\cos \chi \cdot \sin \varphi} - 1 \right] = R_s \left[\frac{\cos \varphi \cdot \sin \chi}{\cos \chi \cdot \sin \varphi} + 1 \right],$$

откуда определяется амплитуда отраженного луча:

$$R_s = E_s \frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin(\varphi + \chi)},$$

между тем как сумма обоих уравнений позволяет определить амплитуду преломленного луча:

$$D_s = E_s \frac{2 \sin \chi \cdot \cos \varphi}{\sin(\varphi + \chi)}.$$

Таким образом, хотя законы для углов падения, отражения и преломления и не зависят от направления электрических и магнитных полей относительно плоскости падения луча, тем не менее соотношения между амплитудами для лучей, поляризованных параллельно и перпендикулярно к плоскости падения, оказываются разные.

Формулы этого параграфа были получены впервые Френелем (А. Fresnel, 1820) на основании общей гипотезы о волнообразном движении в световых лучах и задолго до появления электромагнитной теории. Теория Френеля вполне подтверждается на опыте.

210. Закон Брюстера. Если мы сопоставим формулы Френеля для амплитуд отраженных лучей:

$$R_p = E_p \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \chi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \chi)}, \quad R_s = E_s \frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin(\varphi + \chi)},$$

то заметим, что R_p может равняться нулю, если:

$$\operatorname{tg}(\varphi + \chi) = \infty; \quad \varphi + \chi = 90^\circ.$$

Это означает, что при таких условиях луч, в котором электрическое поле параллельно плоскости падения (луч, поляризованный перпендикулярно к плоскости падения), совсем не отразится, а, преломившись, целиком пройдет во вторую среду. Для луча, поляризованного в плоскости падения, такого случая быть не может, потому что $\sin(\varphi + \chi)$ не может равняться бесконечности.

Из вышесказанного условия, необходимого для того, чтобы R_p равнялось нулю, следуют соотношения:

$$\sin \chi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos \varphi,$$

$$n = \frac{\sin \varphi}{\sin \chi} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Это и есть известный закон Брюстера, найденный им из опыта.

Для обыкновенного стекла показатель преломления n равен приблизительно 1,5 и следовательно $\varphi_0 = 56,5^\circ$. Если мы направим луч света на стеклянную пластинку под этим углом, то отразится от пластинки только та часть света, которая поляризована в плоскости падения. Этим обстоятельством часто пользуются для получения поляризованного луча из обыкновенного, неполяризованного луча. Поэтому и угол φ_0 носит название угла полной поляризации. Угол этот конечно для различных веществ будет различный.

Мы предположили, что оба граничащих друг с другом диэлектрика — идеальные изоляторы (не поглощают электромагнитных лучей); если это условие не реализовано вполне, то и поляризация волн будет несовершенная.

211. Нормальное падение. При нормальном падении электромагнитных волн на плоскость раздела двух диэлектриков ($\varphi = \chi = 0$) формулы Френеля дают выражения неопределенного вида, а потому лучше решать этот случай, исходя непосредственно из пограничных условий, которые в этом случае принимают вид:

$$E_p - R_p = D_p;$$

$$E_p + R_p = D_p n;$$

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}};$$

$$E_s + R_s = D_s;$$

$$E_s - R_s = D_s n.$$

Из этих уравнений мы получаем для луча, электрическое поле которого параллельно плоскости падения, формулы:

$$2R_p = D_p(n - 1); \quad R_p = + \frac{n - 1}{n + 1} E_p;$$

$$2E_p = D_p(n + 1); \quad D_p = + \frac{2}{n + 1} E_p.$$

Точно так же для луча, электрическое поле которого перпендикулярно к плоскости падения, мы получаем:

$$-2R_s = D_s(n - 1); \quad R_s = - \frac{n - 1}{n + 1} E_s;$$

$$2E_s = D_s(n + 1); \quad D_s = + \frac{2}{n + 1} E_s.$$

Таким образом при нормальном падении, формулы для обоих лучей делаются одинаковыми. Разница в знаке R_p и R_s произошла от нашего выбора положительных направлений для этих величин. Это делается ясным из следующего примера. Положим, что $n > 1$; тогда R_s и E_s — противоположных знаков и имеют противоположные направления; но в то же самое время R_p и E_p , будучи оба положительны, на самом деле имеют направления также взаимно противоположные, как это видно из рис. 82 (323, 208).

Одинаковость формул для обоих лучей мы могли ожидать и на основании общих соображений. Действительно при нормальном падении луча направление плоскости падения (плоскости, проведенной через луч и нормаль к плоскости раздела диэлектриков) делается неопределенным, и коэффициент отражения не может зависеть от относительного положения электрического поля и этой плоскости.

Обращаем внимание читателя на сравнительно большой коэффициент отражения воды для волн, употребляемых в радиотехнике. Показатель преломления для этих волн равен $n = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{81} = 9$, и следовательно коэффициенты отражения для амплитуд и для энергии электромагнитных волн будут:

$$\frac{R}{E} = 0,8; \quad \left(\frac{R}{E}\right)^2 = 0,64.$$

212. Отражение от металлов. В предыдущих параграфах мы излагали теорию отражения и преломления электромагнитных волн у границы двух *изоляторов*. Если одно или оба граничащих друг с другом тела обладают некоторой электропроводностью, то формулы делаются гораздо сложнее. Мы могли бы сделать переход от изоляторов к проводникам, воспользовавшись замечанием, которое мы сделали на стр. 316, 204, и считать показатель преломления n , входящий в пограничные условия и в формулы *Френеля* (в формулы *Френеля* показатель преломления n входит в виде отношения синусов $n = \frac{\sin \varphi}{\sin \chi}$), не действительной, а комплексной величиной:

$$n = j \cdot k,$$

причем величины n и k определяются из диэлектрических и электропроводных свойств каждого из тел по формулам, введенным нами в § 204. При комплексном показателе преломления у нас получатся и соотношения между амплитудами E , R , D тоже комплексные, и мы уже знаем, что физически это означает некоторую вполне определенную *разность фаз* между колебаниями падающего, отраженного и преломленного лучей. Таким образом ход расчета явления отражения и преломления электромагнитных волн на границе двух полупроводников вполне ясен и не представляет особых математических затруднений. Мы считаем излишним приводить его здесь в общей форме и ограничимся частным случаем *нормального* падения лучей, — случаем, который имеет наибольшее практическое значение.

Итак предположим, что электромагнитная волна, движущаяся в изоляторе (в воздухе), падает нормально на полупроводник; амплитуду электрического поля падающей волны мы примем равной единице ($E = 1$) и предположим, что волна гармонического типа. Тогда амплитуда отраженной волны и амплитуда волны, проникающей в полупроводник у пограничной плоскости, будут определяться формулами:

$$R = \frac{n - j \cdot k - 1}{n - j \cdot k + 1}; \quad D = \frac{2}{n - j \cdot k + 1}.$$

Мы будем интересоваться коэффициентом для *энергии* отраженной волны, а энергия волн пропорциональна *квадрату* амплитуды. Но квадрат абсолютного значения комплексной величины мы можем получить очень просто, умножая ее на сопряженную ей величину (на величину, в которой $+j$ заменено через $-j$). Пользуясь этим замечанием, мы получаем для коэффициента отражения энергии:

$$r = \frac{(n - 1)^2 + k^2}{(n + 1)^2 + k^2}.$$

Для металлов мы можем положить (316, 204):

$$n = k = \sqrt{\sigma \tau}$$

и написать:

$$r = \frac{(\sqrt{\sigma \tau} - 1)^2 + \sigma \tau}{(\sqrt{\sigma \tau} + 1)^2 + \sigma \tau} = \frac{2\sigma \tau - 2\sqrt{\sigma \tau} + 1}{2\sigma \tau + 2\sqrt{\sigma \tau} + 1}.$$

Эта формула была подтверждена *Гагеном* и *Рубенсом* (E. Hagen & H. Rubens; 1903) на опыте, произведенным ими с ультракрасными лучами света при отражении их от металлических зеркал. Длина волн в этом опыте была равна:

$$\lambda = 12\mu = 12 \cdot 10^{-4} \text{ см.}$$

и следовательно период колебаний

$$\tau = \frac{\lambda}{c} = 4 \cdot 10^{-14} \text{ sec.}$$

Для медного зеркала мы имеем (ср. 321, 207):

$$\sigma = 5 \cdot 10^{17}.$$

Произведение $\sigma \tau$ здесь так велико, что по сравнению с ним мы можем пренебречь единицей, стоящей в числителе и знаменателе, и написать:

$$1 - r = \frac{2}{\sqrt{\sigma \tau}} = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot 10^4}} = 1.4 \cdot 10^{-2}.$$

Непосредственный опыт дал:

$$1 - r = 1,6 \cdot 10^{-2}.$$

Этот опыт Гагена и Рубенса имеет большое значение не только потому, что он подтверждает теорию отражения, но еще и потому, что он доказывает значение электропроводности тел для чисто оптических явлений и тем связывает оптику с электромагнетизмом. Впрочем для более коротких световых и ультрафиолетовых волн поглощение и отражение не определяются тем значением удельной электропроводности σ , которое определяется для постоянного или переменного электрического тока. Так например голубые лучи света сравнительно мало поглощаются тонкой серебряной пластинкой, несмотря на большую электропроводность серебра. При таких больших частотах, уже близких к частотам *собственных колебаний* электронов в атомах, теория Максвелла оказывается недостаточной, и ее необходимо дополнить новыми гипотезами, лежащими в основе теории электронов и теории квант.

213. Полное внутреннее отражение. Из закона преломления электромагнитных волн:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \chi} = \frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = n$$

следует, что тот из двух углов φ и χ будет больше, который образуется в среде с *большой* скоростью распространения c_1 . Почти во всех телах скорость c_1 меньше, чем в пустоте (или в воздухе), и луч при выходе из тела на воздух образует больший угол с нормалью, чем внутри тела. Можно направить падающий внутри тела луч так, чтобы выходящий луч образовал с нормалью *прямой угол*, т. е. шел вдоль плоскости раздела обеих сред. Для этого необходимо, чтобы

$$\sin \chi = 1; \quad \sin \varphi = n; \quad (n < 1).$$

При еще большем угле падения вышенаписанный закон преломления совсем не может быть соблюден, потому что из него следовало бы, что

$$\sin \chi = \frac{\sin \varphi}{n} > 1,$$

а это невозможно. Отсюда обычно делают такое заключение: так как нельзя подыскать такого угла χ , который удовлетворял бы закону преломления, то преломленный луч образоваться не может, и

волна целиком отражается от пограничной плоскости внутрь тела. Это явление и получило название *полного внутреннего отражения*. Следовательно при полном внутреннем отражении мы имеем:

$$R = E; \quad D = 0.$$

Хотя опыт повидимому подтверждает это заключение, тем не менее такой вывод нужно считать недостаточным для описания всего явления; во всяком случае D нельзя считать равным нулю, как это мы сейчас увидим. Дело в том, что электромагнитные лучи состоят из электрического и магнитного поля, и если луч претерпевает полное внутреннее отражение, не входя во вторую среду, то и его электрическое и магнитное поле не должно входить во вторую среду. Между тем этому противоречит закон преломления линий сил как электрических, так и магнитных (51, 42):

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}; \quad \frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \beta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Из этих формул следует, что при любом угле α_1 или β_1 мы всегда получим и во второй среде им соответствующие углы α_2 и β_2 , а полного внутреннего отражения полей наступить не может. Для того чтобы выяснить это противоречие, мы должны рассмотреть явление полного внутреннего отражения несколько подробнее. Прежде всего выясним геометрическое значение величин, входящих в формулу гармонических волн второй среды (322, 208):

$$a = \omega \left(t - \frac{\sin \chi}{c_2} x - \frac{\cos \chi}{c_2} z \right) = \omega (t - ax - bz).$$

На рис. 83 линия AB изображает плоскость волны, т. е. плоскость, где колебания имеют одинаковую фазу. Эта плоскость отсекает на осях OX и OZ точки A и B , расстояния которых от начал координат выражаются формулами:

$$ON = OA \cdot \sin \chi = OB \cdot \cos \chi.$$

В то время как волна прошла по направлению своей нормали n расстояние ON , точки ее пересечения с осями OX и OZ пройдут

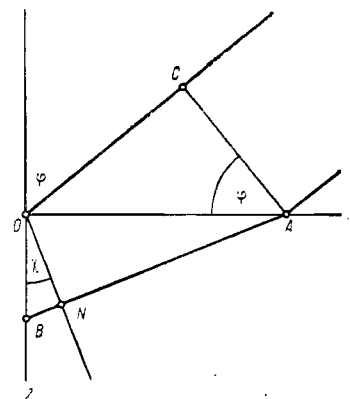


Рис. 83. Плоскости волн — падающей и преломленной.

расстояния OA и OB . Поэтому, если скорость распространения фаз во второй среде равна c_2 , то скорости движения тех же фаз вдоль осей OX и OZ будут равны соответственно:

$$v_x = \frac{c_2}{\sin \chi} = \frac{1}{a}; \quad v_z = \frac{c_2}{\cos \chi} = \frac{1}{b}.$$

Соотношение между этими тремя скоростями таково:

$$\left(\frac{1}{v_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{v_z}\right)^2 = a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{c_2}\right)^2.$$

Заметим, что это соотношение остается в силе не только для прямых лучей, но и для лучей, направление которых χ в различных точках различно (кривой луч); оно остается в силе и для лучей *переменного* направления, когда угол χ меняется со временем, причем он может изменяться в различных местах поля различным образом. Если в какой-нибудь точке поля нам дано направление луча (угол χ), то тем самым определяются и фазовые скорости v_x и v_y чисто геометрическим путем.

Но дело в том, что угол χ нам непосредственно не дается, а дается угол φ падающего луча и его фазовая скорость вдоль оси OX :

$$v'_x = \frac{c_1}{\sin \varphi}.$$

Для того чтобы пограничные условия могли быть исполнены в любой момент и в любой точке пограничной плоскости, необходимо, чтобы фазовые скорости падающего, отраженного и преломленного лучей вдоль оси OX (при $z=0$) были одинаковы. Если бы этого не было, то пограничные условия, удовлетворенные в одной какой-либо точке оси OX , уже были бы нарушены в другой точке на той же оси OX , где фазовые скорости волн первой и второй среды отстают друг от друга или опережают друг друга. Итак напишем условие, чтобы фазовые скорости всех трех лучей вдоль оси OX были одинаковы:

$$v_x = \frac{c_1}{\sin \varphi} = \frac{c_1}{\sin \varphi'} = \frac{c_2}{\sin \chi}.$$

Это условие тождественно с тем, которое мы установили раньше, и дает известные законы отражения и преломления лучей; но теперь оно получило определенный геометрический смысл.

Введем фазовые скорости в формулу волны, распространяющейся во второй среде, написав:

$$\beta = \omega \left(t - \frac{x}{v_x} - \frac{z}{v_z} \right).$$

В этом выражении $\frac{1}{v_x}$ определяется направлением падающего луча

$$\frac{1}{v_x} = \frac{\sin \varphi}{c_1},$$

тогда как $\frac{1}{v_z}$ определяется из уравнения:

$$\left(\frac{1}{v_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{v_z}\right)^2 = \left(\frac{1}{c_2}\right)^2.$$

В тех случаях, когда мы наблюдаем преломленный луч определенного направления χ , мы получаем для $\frac{1}{v_z}$ *действительную* величину:

$$\frac{1}{v_z} = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{c_1}\right)^2 - \left(\frac{1}{v_x}\right)^2} = \frac{\cos \chi}{c_2}.$$

Но в тех случаях, когда фазовая скорость вдоль оси OX делается *меньше* скорости волн c_2 во второй среде:

$$\left(\frac{\sin \varphi}{c_1} = \frac{1}{v_x}\right) > \frac{1}{c_2},$$

подкоренная величина делается отрицательной и корень приобретает мнимое значение, а вместе с тем и фазовая скорость преломленного луча вдоль оси OZ делается *мнимой*. Мнимую скорость распространения лучей мы уже встречали при исследовании распространения волн в поглощающей среде (315, 204), и мы выяснили, что это не означает вовсе, что распространение волн делается невозможным, а означает только, что амплитуда волн убывает по мере их углубления в среду. Хотя рассматриваемая нами теперь среда и не поглощает волны, но значение мнимой скорости распространения остается такое же. Поэтому положим:

$$\frac{1}{v_z} = -j \cdot k = -j \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{c_1}\right)^2 - \left(\frac{1}{c_2}\right)^2}$$

(мы взяли при корне знак *минус*, потому что знак плюс дал бы нам не убывание, а возрастание амплитуды до бесконечности, что физически неприемлемо). Мы получаем:

$$\beta = \omega \left(t - \frac{x}{v_x} \right) + \omega k \cdot jz$$

и вместо $\cos \beta$ мы должны взять

$$e^{-\omega k z} \cos \omega \left(t - \frac{x}{v_x} \right),$$

причем

$$v_x = \frac{c_1}{\sin \varphi}; \quad k = \sqrt{\left(\frac{\sin \varphi}{c_1} \right)^2 - \left(\frac{1}{c_2} \right)^2} = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{c_1}.$$

Итак, пока фазовая скорость падающего луча вдоль границы обеих сред (вдоль оси OX) *больше* скорости распространения волн во второй среде, мы получаем в этой последней обыкновенный преломленный луч; но если угол падения луча так велик, что фазовая скорость вдоль оси OX делается *меньше* скорости распространения волн во второй среде, то преломленный луч, входя во вторую среду, быстро затухает и может быть обнаружен только на небольшой глубине от поверхности раздела двух диэлектриков. При этом амплитуда отраженного луча делается равной амплитуде падающего луча, и мы получаем так называемое полное внутреннее отражение.

214. Изменение фазы при полном внутреннем отражении. Во всякой затухающей волне, от каких бы причин это затухание ни происходило, непременно должна образоваться разность фаз между электрическими и магнитными колебаниями. Мы только что выяснили, что при полном внутреннем отражении волнообразное движение во второй среде должно выражаться формулами с множителем:

$$\cos \beta = \cos \omega \left(t - \frac{x}{v_x} + j \cdot kz \right).$$

Если мы примем это во внимание, то должны в наших прежних формулах плоской волны (324, 208) заменить b через $-jk$. Тогда получаем для определения соотношений между амплитудами переменных напряжений уравнения:

$$C = -\frac{a}{b} A = -\frac{a}{k} A \cdot j; \quad L = -\frac{c}{\mu} Bb = \frac{c}{\mu} kB \cdot j;$$

$$M = \frac{\epsilon}{c} \frac{1}{b} A = \frac{\epsilon}{c} \frac{1}{k} A \cdot j; \quad N = +\frac{c}{\mu} Ba.$$

Мнимые амплитуды означают изменение фазы на 90° , потому что

$$\pm j = e^{\pm j \cdot \frac{\pi}{2}}.$$

Следовательно для напряжения электрического и магнитного поля во второй среде мы должны теперь написать формулы (вместо прежних, стр. 325):

$$E_x = + A e^{-\omega k z} \cos \beta; \quad M_x = -\frac{ck}{\mu} B e^{-\omega k z} \sin \beta;$$

$$E_z = + \frac{a}{k} A e^{-\omega k z} \sin \beta; \quad M_z = + \frac{ca}{\mu} B e^{-\omega k z} \cos \beta;$$

$$M_y = -\frac{\epsilon}{ck} A e^{-\omega k z} \sin \beta; \quad E_y = + B e^{-\omega k z} \cos \beta;$$

$$k = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{c_1}; \quad \beta = \omega \left(t - \frac{\sin \varphi}{c_1} x \right).$$

Одновременно с разностью фаз колебаний во *второй* среде возникнут у пограничной плоскости разности фаз колебаний и в *первой* среде: этого требуют пограничные условия. Проще всего можно получить сюда относящиеся формулы, если воспользоваться уже полученными нами раньше (327, 209) формулами *Френеля*, положив в них:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \chi} = n; \quad \cos \chi = bc_2 = -j \cdot kc_2.$$

Тогда мы получаем для луча, поляризованного перпендикулярно к плоскости падения, отношение между амплитудами падающего и отраженного луча:

$$E_p \left[\frac{\cos \varphi}{-j \cdot kc_2} - \frac{1}{n} \right] = R_p \left[\frac{\cos \varphi}{-j \cdot kc_2} + \frac{1}{n} \right];$$

умножая это уравнение на $-j$, можем написать:

$$E_p \left[\frac{\cos \varphi}{kc_2} + \frac{1}{n} j \right] = R_p \left[\frac{\cos \varphi}{kc_2} - \frac{1}{n} j \right].$$

Из этого уравнения непосредственно следует, что *абсолютные* значения амплитуд обоих лучей одинаковы:

$$E_p = R_p,$$

тогда как аргументы их равны и противоположны. Если обозначить аргумент левой части уравнения через α , то аргумент правой части

будет — α . При делении комплексных величин их аргументы вычитаются; поэтому разность фаз между колебаниями отраженного и падающего луча у *пограничной плоскости* равна:

$$\delta_p = \alpha - (-\alpha) = 2\alpha$$

и следовательно:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta_p = \frac{kc_2}{n \cdot \cos \varphi} = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{n^2 \cdot \cos \varphi}.$$

Совершенно таким же образом мы поступаем с формулами *Френеля* для лучей, поляризованных в плоскости падения. Пограничные условия дают:

$$E_s \left[\frac{\cos \varphi}{-j \cdot kc_2} \cdot \frac{1}{n} - 1 \right] = R_s \left[\frac{\cos \varphi}{-j \cdot kc_2} \cdot \frac{1}{n} + 1 \right]$$

или, умножая на $-j$:

$$E_s \left[\frac{\cos \varphi}{kc_2 n} + j \right] = R_s \left[\frac{\cos \varphi}{kc_2 n} - j \right].$$

Отсюда опять заключаем, что амплитуды падающего и отраженного луча равны друг другу:

$$E_s = R_s$$

и что разность фаз между ними δ_s определяется формулой:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta_s = \frac{kc_2 n}{\cos \varphi} = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\cos \varphi}.$$

215. Параллелепипед Френеля. *Френель* воспользовался разностью фаз, получающейся при полном внутреннем отражении, для устройства прибора, превращающего обычно поляризованный луч (плоскополяризованный), в котором колебания электрического и магнитного поля происходят в определенных плоскостях, в луч, поляризованный по кругу, в котором плоскость поляризации вращается. Для этого необходимо иметь два луча с разностью фаз в 90° и поляризованных перпендикулярно друг к другу. Геометрически такое сложение двух лучей вполне аналогично сложению двух колебаний одинаковой частоты и одинаковой амплитуды, направления которых перпендикулярны друг другу и разность фаз которых равна 90° (ср. ч. II, Общая механика, стр. 166, а также Общий курс электричества; вращающееся магнитное поле).

Из формул предыдущего параграфа следует, что для двух лучей, поляризованных перпендикулярно к плоскости падения и параллельно

этой плоскости, при полном внутреннем отражении получается разность фаз δ , определяемая из формулы:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\delta_p - \delta_s) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\cos \varphi \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

Эта формула показывает, что δ равна нулю, во-первых, при $\sin \varphi = n$, т. е. при переходе от преломления к полному внутреннему отражению, когда преломленный луч скользит по поверхности раздела обоих тел; кроме того разность фаз равна нулю, когда $\operatorname{tg} \varphi = \infty$; $\varphi = 90^\circ$, т. е. когда падающий луч скользит по поверхности раздела обоих тел. Между этими двумя предельными положениями должен существовать некоторый угол падения φ , при котором величина δ имеет максимум.

Для определения этого максимума необходимо (как обычно) производную от вышенписанного выражения по φ приравнять нулю:

$$\frac{1}{2 \cos^2 \delta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\delta_p - \delta_s) = \frac{2n^2 - (1 + n^2) \sin^2 \varphi}{\sin^3 \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}} = 0.$$

Отсюда получаем для искомого угла φ_1 уравнение:

$$\sin^2 \varphi_1 = \frac{2n^2}{1 + n^2},$$

а для максимального значения разности фаз выражение:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta_{\max} = \frac{1 - n^2}{2n}.$$

Если луч претерпевает полное внутреннее отражение на границе стекло воздух (для обыкновенного стекла можно принять $n = 1,5$), то мы получаем:

$$\varphi_1 = 51^\circ 20'; \quad \delta_{\max} = 45^\circ 36'.$$

Следовательно в стекле мы не можем получить разности фаз в 90° . Но можно заставить луч отразиться внутри стекла *два раза*, подобрав угол падения φ_1 так, чтобы при каждом полном внутреннем отражении разность фаз получалась в 45° . Задавись

$$\delta = 45^\circ,$$

получаем из вышенписанного уравнения для угла падения φ два значения:

$$\varphi_1 = 48^\circ 37'; \quad \varphi_2 = 54^\circ 37'.$$

Основываясь на этих соображениях, Френель велел отшлифовать из стекла параллелепипед, основания которого составляли с долевыми гранями угол $\varphi_2 = 54^\circ 37'$ (рис. 84). Луч света, падая на одно из оснований нормально, дважды отражался от боковых граней и выходил наружу нормально к противоположному основанию параллелепипеда. Если плоскость поляризации луча при входе составляет с плоскостью падения угол в 45° , то луч можно рассмотреть как составленный из двух лучей, поляризованных перпендикулярно к плоскости

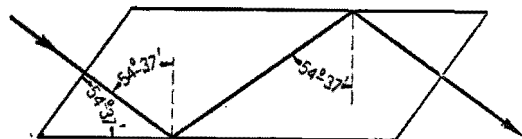


Рис. 84. Параллелепипед Френеля.

дифференциально к плоскости падения и параллельно этой плоскости; оба луча получают при двукратном полном внутреннем отражении разность фаз в 90° и выходящий луч оказывается поляризованным по кругу. Смотря по тому, составляла ли плоскость поляризации первоначального луча с плоскостью падения угол $+45^\circ$ или -45° , мы получим правую или левую круговую поляризацию.

Аналогичным путем можно получить луч с эллиптической поляризацией. Тем же способом можно превратить круговую или эллиптическую поляризацию опять в прямолинейную (см. оптику).

216. Движение энергии при полном внутреннем отражении. В тех формулах, которые мы получили для электромагнитного поля во второй среде при полном внутреннем отражении (337, 214), у нас стоят множители:

$$\cos \omega \left(t - \frac{x}{v_x} \right); \quad \sin \omega \left(t - \frac{x}{v_x} \right).$$

Это дало повод некоторым авторам рассматривать все явление как волнообразное распространение электромагнитного поля вдоль оси OX со скоростью v_x . И действительно написанные формулы имеют вид, как будто мы имеем дело с лучом, скользящим вдоль поверхности раздела обоих тел. Между тем этот луч не имеет той скорости распространения c_2 , которую он должен был бы иметь во второй среде; кроме того, хотя плоскости одинаковых фаз и перпендикулярны к линии распространения волн OX , но напряжения электрического и магнитного поля имеют составляющие вдоль той же оси OX (E_x, M_x), следовательно колебания не поперечны. А. Эйнвальд разъяснил это недоразумение, показав, что при полном

внутреннем отражении мы имеем дело с электромагнитными волнами особого типа, образующими кривые лучи переменного направления, в которых однако электрические и магнитные колебания строго поперечны.

Для того чтобы определить направление луча во второй среде, т. е. направление потока энергии (вектора Пойнтинга), определим сперва направления линий сил. Обозначив через α и β углы наклона электрического и магнитного поля к оси z , мы можем на основании формул (стр. 337, 214), написать:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_x}{E_z} = \frac{k}{a} \operatorname{ctg} \omega \left(t - \frac{x}{v_x} \right);$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{M_x}{M_z} = \frac{k}{a} \operatorname{ctg} \omega \left(t - \frac{x}{v_x} \right).$$

Как видим, направление линий сил рассматриваемого поля меняется со временем, и изменение это для различных точек вдоль оси OX имеет различную фазу. От координаты z эти направления совсем не зависят. Кроме того, если в какой-либо точке с координатой x_1 и в некоторое время t_1 линии сил составляли с осью OZ угол α (или β), то тот же самый угол α мы получим в некоторой другой точке с координатой x_2 и в некоторое другое время t_2 , которые определяются условием, чтобы:

$$t_1 - \frac{x_1}{v_x} = t_2 - \frac{x_2}{v_x};$$

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = v_x.$$

Но это означает, что все электромагнитное поле движется параллельно оси OX со скоростью v_x , не изменяя своей формы. Имея это в виду, нам достаточно определить форму линий сил для одного какого-либо момента времени, например для $t=0$. Приравнявая тангенсы углов наклона линий сил производной $\frac{dx}{dz}$, мы получаем дифференциальное уравнение линий сил в форме (при $t=0$):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dx}{dz} = -\frac{k}{a} \operatorname{ctg} \left(\frac{2\pi}{\lambda_x} \cdot x \right); \quad \frac{2\pi}{\lambda_x} = \frac{\omega}{v_x},$$

которое при интегрировании дает:

$$\int_0^z dz = -\frac{k}{a} \int_{x_1}^x \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{\lambda_x} x \right) \cdot dx,$$

$$z = \frac{k}{a} \frac{\lambda_x}{2\pi} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda_x} x.$$

Форма этих линий сил (электрических или магнитных) изображена на рис. 87 пунктиром (кривые линии ниже OX).

Поток энергии определяется формулой:

$$P = \frac{c}{4\pi} [E \cdot M].$$

В луче, электрические колебания которого параллельны плоскости падения, мы имеем напряжения полей:

$$E_x, E_z, M_y.$$

В луче, электрические колебания которого перпендикулярны к плоскости падения, мы имеем напряжения полей:

$$M_x, M_z, E_y.$$

Так как вектор *Пойнтинга* должен быть в первом случае перпендикулярен к M_y , а во втором случае перпендикулярен E_y , то в обоих случаях он будет параллелен плоскости падения. Кроме того он должен быть перпендикулярен к линиям сил, общее уравнение которых мы уже нашли выше. Нам остается только составить уравнение линий, перпендикулярных к линиям сил (ортогональных траекторий), положив для них:

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{dx}{dz} = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Это приводит нас к дифференциальному уравнению:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{a}{k} \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{\lambda_x} x \right),$$

которое интегрируется так же легко, как и уравнение линий сил, а именно:

$$\int_0^z dz = \frac{a}{k} \int_{x_1}^x \operatorname{ctg} \left(\frac{2\pi}{\lambda_x} x \right) \cdot dx,$$

$$z = \frac{a}{k} \frac{\lambda_x}{2\pi} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda_x} x.$$

Форма этих линий, по которым движется электромагнитная энергия (т. е. форма электромагнитных лучей) изображена тоже на рис. 87 сплошными жирными линиями (кривые ниже линии OX).

К этому мы можем добавить, что падающий и отраженный лучи в *первой* среде дают результирующее поле, тоже состоящее из кривых линий сил и кривых лучей, но форму их мы определять не будем. Читатель может при желании это сделать сам. Все эти линии изображены на рис. 87. Этот рисунок, как мы сказали выше, нужно себе представлять движущимся вдоль оси OX , без изменения своей формы, со скоростью v_x . В конце этого параграфа мы разберем подробные значения этих рисунков, а теперь обратимся к *величине* потока энергии у пограничной плоскости.

Нам достаточно вычислить поток энергии одного из лучей. Мы имеем:

$$P_z = \frac{c}{4\pi} [E_x M_y] = -A^2 \frac{\varepsilon}{4\pi k} e^{-2\omega k z} \cos \beta \cdot \sin \beta =$$

$$= -A^2 \frac{\varepsilon}{8\pi k} e^{-2\omega k z} \sin 2\omega \left(t - \frac{x}{v_x} \right);$$

$$P_x = \frac{c}{4\pi} [E_z M_y] = A^2 \frac{\varepsilon a}{4\pi k^2} e^{-2\omega k z} \sin^2 \beta =$$

$$= A^2 \frac{\varepsilon a}{8\pi k^2} e^{-2\omega k z} \left[1 - \cos 2\omega \left(t - \frac{x}{v_x} \right) \right].$$

Из этих формул следует, что параллельно оси OZ энергия совершает гармонические колебания с частотой, вдвое больше частоты ω . Колебания эти симметричны.

Сколько энергии входит из первой среды во вторую, столько же и выходит обратно из второй среды в первую; таким образом энергия падающего луча целиком передается отраженному лучу.

В то же самое время параллельно оси OX энергия имеет периодическое поступательное движение, тоже с частотой вдвое больше, чем частота колебаний поля самой волны; но колебания энергии в этом направлении не симметричны, и в среднем мы имеем движение энергии вдоль поверхности раздела обоих тел, плотность потока которой выражается формулой:

$$\text{Средн. } P_x = A^2 \frac{za}{8\pi k^2} e^{-2\omega kz}.$$

217. Объяснение рисунков. Для того чтобы как можно яснее представить себе явления отражения и преломления электромагнитных волн, мы считаем полезным привести здесь рисунки, составленные *А. Эйхенвальдом*, частью графическим путем, частью на основании вышеприведенных формул.

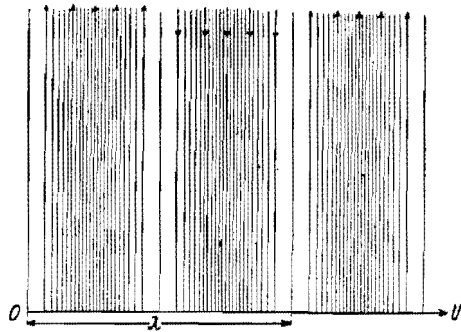


Рис. 85. Линии сил плоской волны.

колебаниям электрического и магнитного поля.

На рис. 86 изображены линии сил (пунктиром) и перпендикулярные к ним линии движения энергии (жирными линиями) при падении и отражении электромагнитной волны на границе двух диэлектриков. В первой среде мы имеем результирующее поле падающего и отраженного луча, тогда как во вторую среду проникает (под углом γ) преломленный луч, поле которого аналогично тому полю, которое изображено на рис. 85.

Рис. 87 изображает полное внутреннее отражение. Поле в первой среде (угол падения 45°) вполне симметрично, потому что $R = E$. Параллельно оси OZ мы имеем колебание энергии (см. стрелки у жирных линий), тогда как параллельно оси OX энергия движется поступательно, но не равномерно, а периодически. Во второй среде мы имеем линии, густота которых убывает с возрастанием Z (поле ослабляется) и перпендикулярные к ним линии энергии (кривые лучи), образующие ряд гирлянд. На рисунке мы видим, что энергия,

входящая в каком-либо месте из первой среды во вторую, описывает во второй среде *кривой* путь, чтобы возвратиться снова в первую среду и образовать явление полного внутреннего отражения.

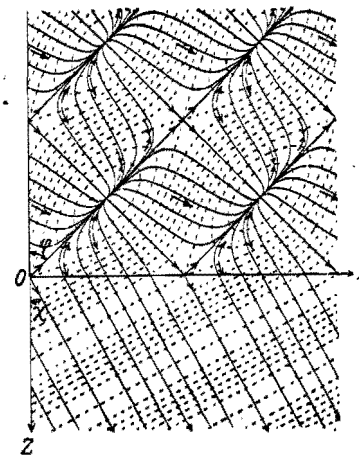


Рис. 86. Линии сил падающей, отраженной и преломленной волн.

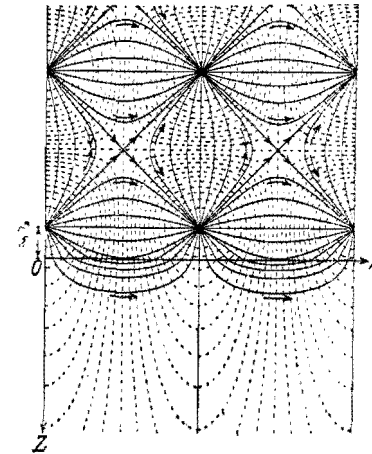


Рис. 87. Движение энергии при полном внутреннем отражении.

Однако вход энергии во вторую среду и выход из нее происходят в *разных* точках пограничной поверхности и притом в *различное* время.

Наконец рис. 88 изображает явление отражения от *полупроводника*. Это явление несколько похоже на предыдущее, потому что и здесь энергия входит во вторую среду (жирные линии) и описывает в ней кривые линии, но она возвращается в первую среду *не полностью*; часть энергии поглощается во второй среде по закону *Джоуля*. Таким образом отражение здесь неполное.

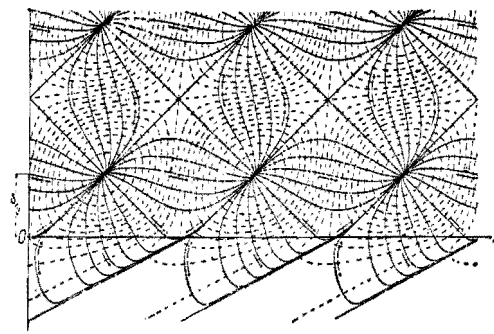


Рис. 88. Движение энергии при отражении от полупроводника.

На последних двух рисунках (рис. 87 и 88) можно заметить, что падающий и отраженный лучи имеют разность фаз δ .

Это обстоятельство выразилось на рисунках тем, что узлы стоячих волн первой среды приподняты над поверхностью раздела обоих тел на расстояние, соответствующее половине разности фаз δ .

V. СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

218. Формула сферической волны. До сих пор мы изучали *плоские* волны, одинаковые фазы которых располагались в параллельных друг другу плоскостях и лучи которых (направление движения энергии) образовали систему параллельных линий. Если обозначить направление лучей через s , то плоская волна характеризуется дифференциальным уравнением:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

которое решается функциями любой формы, но переменные s и t должны входить в комбинации $\left(t \mp \frac{s}{c}\right)$. Это мы будем обозначать так:

$$\varphi = F\left(t \mp \frac{s}{c}\right).$$

Теперь нам предстоит изучить *сферические* волны, одинаковые фазы которых располагаются концентрическими шаровыми поверхностями и лучи которых направлены из центра этих поверхностей во все стороны. Докажем, что формула сферической волны имеет вид:

$$\varphi = \frac{1}{r} F\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

(величина φ может быть скаларом или вектором).

Нетрудно видеть, что при такой форме одинаковым значениям r соответствуют одинаковые фазы, следовательно волна действительно имеет сферическую форму. Но кроме этого мы ввели делитель r , т. е. предположили, что *амплитуда* волн не постоянна, как это было у нас в плоских волнах, а убывает по мере увеличения расстояния от центра. Знак $-$ означает волны, расходящиеся из центра во все стороны, и в центре мы должны предположить *источник* энергии волн. Если амплитуда волны обратно пропорциональна расстоянию r , то очевидно плотность энергии волны будет обратно пропорциональна *квадрату* этого расстояния. Так это и должно быть, если поток энергии расходится радиально и равномерно во все стороны.

Функция $\varphi = \frac{1}{r} F\left(t + \frac{r}{c}\right)$ означала бы волны, сходящиеся со всех сторон к центру; однако мы таких волн здесь рассматривать не будем.

Остается еще доказать, что выбранная нами функция удовлетворяет общему дифференциальному уравнению волн:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Для доказательства составим сперва первые и вторые производные по x :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{x}{r};$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \cdot \frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{x^2}{r^3}.$$

Составив такие же производные по y и z и, сложив все вторые производные по координатам вместе, получаем:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r \varphi).$$

С другой стороны вторая производная по времени равна:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r \varphi),$$

и следовательно:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \varphi) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r \varphi),$$

откуда видим, что выбранная нами формула сферической волны действительно удовлетворяет общему дифференциальному уравнению волн.

Заметим при этом, что для волн с радиальной симметрией мы могли бы прямо написать дифференциальное уравнение волн в виде (ср. ч. I, стр. 164 (127):

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \varphi) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r \varphi)$$

и его решение (*Даламбер*) в виде:

$$r \varphi = F\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Впрочем выбранное нами решение представляет собою только простейшее решение, но возможны и другие решения волнового дифференциального уравнения. Так например легко видеть, что производные от выбранной нами функции по x, y, z, t любого порядка тоже удовлетворяют волновому уравнению, а так как это уравнение линейное, то и сумма полученных таким образом решений с любыми постоянными коэффициентами тоже будет удовлетворять волновому уравнению. Этим обстоятельством пользуются для удовлетворения пограничным условиям задачи.

219. Сферическая электромагнитная волна. После этих предварительных замечаний мы можем перейти к рассмотрению сферических электромагнитных волн. Напишем уравнения *Максвелла* для среды, в которой $\epsilon = \mu = 1$:

$$\begin{aligned} c \cdot \text{curl } \mathbf{M} &= \dot{\mathbf{E}}; & \text{div } \mathbf{E} &= 0; \\ c \cdot \text{curl } \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{M}}; & \text{div } \mathbf{M} &= 0. \end{aligned}$$

В начале координат мы предположим источник электромагнитных волн в виде вибратора *Герца* небольших размеров. Написанные уравнения должны удовлетворяться во всех точках окружающего пространства за исключением самого вибратора (где $r=0$), потому что в вибраторе колеблются электрические заряды и следовательно ρ не равно нулю.

Напомним читателю, как мы решали эти уравнения раньше (170, 140).

Мы вводили вспомогательные функции: во-первых, скалярный потенциал φ электрических зарядов, определяя его уравнениями:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi; \quad \varphi = \int \frac{\rho}{r} do,$$

и во-вторых, вектор-потенциал электрических токов, определяя его уравнениями:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{c} \text{curl } \mathbf{A}; \quad \mathbf{A} = \int \frac{\mathbf{i}}{r} do.$$

Вводя вектор-потенциал в первое уравнение *Максвелла*, мы получили:

$$\dot{\mathbf{E}} = \text{curl} \cdot \text{curl } \mathbf{A} = \text{grad} \cdot \text{div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

Первый член правой части этого уравнения у нас пропал, потому что для вектор-потенциала электрических токов мы ставили еще добавочное условие:

$$\text{div } \mathbf{A} = 0.$$

Но это условие было возможно для *замкнутых* токов, для которых

$$\text{div } \mathbf{i} = 0.$$

Между тем электрические токи вибратора не замкнуты, так как при электрических колебаниях на концах вибратора появляются заряды. Таким образом в уравнении для $\dot{\mathbf{E}}$ у нас должны остаться оба члена. Зато второй член мы можем преобразовать, приняв во внимание, что как электромагнитные волны, так и потенциалы этих волн должны, по *Максвеллу*, распространяться в пространстве со скоростью c и должны удовлетворять волновому дифференциальному уравнению:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}}.$$

Но это уравнение решается не при помощи потенциала вида

$$\mathbf{A} = \int \frac{\mathbf{i}}{r} do,$$

а при помощи так называемого запаздывающего потенциала (ч. I, 165, 128):

$$\mathbf{A} = \int \frac{\mathbf{i} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r} do.$$

Символ $\mathbf{i} \left(t - \frac{r}{c} \right)$ означает (как и раньше), что если в самом вибраторе плотность тока дана как функция времени $\mathbf{i}(t)$, то для вычисления потенциалов на расстоянии r от вибратора мы должны взять функцию $\mathbf{i} \left(t - \frac{r}{c} \right)$.

Что выражение, стоящее под интегралом (а следовательно и сам интеграл) действительно удовлетворяет волновому уравнению и притом представляет собою сферические волны, — это мы видели в предыдущем параграфе.

При таком значении вектор-потенциала мы можем для определения $\dot{\mathbf{E}}$ и \mathbf{M} в сферической волне пользоваться формулами:

$$\dot{\mathbf{E}} = \text{grad} \cdot \text{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A};$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{c} \text{curl} \mathbf{A}.$$

Герц предложил вместо вектор-потенциала \mathbf{A} пользоваться в таких случаях другою функцией \mathbf{H} , производная по времени которой равна вектор-потенциалу (мы обозначили этот вектор *Герца* через \mathbf{H} по первой букве фамилии Hertz). Если положить

$$\mathbf{A} = \dot{\mathbf{H}},$$

то первое из вышенаписанных уравнений можно проинтегрировать по времени и, положив интеграционную постоянную равной нулю, написать:

$$\mathbf{E} = \text{grad} \cdot \text{div} \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{H}};$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{c} \text{curl} \dot{\mathbf{H}}.$$

Вектор *Герца* \mathbf{H} (совершенно так же, как и вектор-потенциал \mathbf{A}) мы можем представить в виде интеграла, распространенного по объему вибратора. Представим себе в начале координат электрический диполь (21, 25) с зарядами $\pm e$ на расстоянии d друг от друга. Момент этого диполя $d\mathbf{P}$ можно выразить через его поляризацию \mathbf{P} (момент в единице объема) (47, 37):

$$d\mathbf{P} = e \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{o}.$$

Если этот диполь, сохраняя свое направление, изменяет свою величину со временем, то мы можем выразить это изменение через силу тока в вибраторе (взяв производную по времени от написанной формулы):

$$\dot{e} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = \dot{\mathbf{P}} \cdot d\mathbf{o}.$$

Далее силу тока мы можем выразить через плотность тока:

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot d\mathbf{o} = \mathbf{i} (d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{l}) = \mathbf{i} \cdot d\mathbf{o}.$$

Подставив эту формулу в выражение для вектор-потенциала, имеем:

$$\mathbf{A} = \int \frac{1}{r} \dot{\mathbf{P}} \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot d\mathbf{o}$$

и следовательно вектор *Герца* определяется по данной нам поляризации вибратора \mathbf{P} при помощи интегрирования по всему объему вибратора:

$$\mathbf{H} = \int \frac{1}{r} \mathbf{P} \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot d\mathbf{o}^*.$$

Этот вектор *Герца* (так же, как и вектор-потенциал \mathbf{A}) в различных точках пространства, окружающего вибратор, должен удовлетворять уравнению сферических волн

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{H}}$$

и будет иметь в различных точках пространства, окружающего вибратор, различную фазу, тогда как амплитуда его будет обратно пропорциональна расстоянию рассматриваемой точки поля от вибратора.

220. Гармонический вибратор Герца. Как известно, основным типом всех периодических движений служит *гармоническое* колебание. Поэтому рассмотрим вибратор *Герца*, в котором поляризация изменяется со временем по закону

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 \cos(\omega t).$$

В векторе *Герца* эти гармонические колебания войдут в виде гармонических волн, и следовательно для вектора *Герца* мы должны написать:

$$\mathbf{H} = \int \frac{1}{r} \mathbf{P}_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot d\mathbf{o}$$

или, принимая объем вибратора ничтожным по сравнению с расстоянием, мы можем написать:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{r} \mathbf{P}_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) = \frac{1}{r} \mathbf{P}.$$

Это значение \mathbf{H} мы должны теперь подставить в формулы напряжений электромагнитного поля

$$\mathbf{E} = \text{grad} \cdot \text{div} \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{H}};$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{c} \text{curl} \dot{\mathbf{H}}$$

* Символ $\mathbf{P} \left(t - \frac{r}{c} \right)$ означает, что для вычисления значения \mathbf{H} в момент t необходимо брать значения \mathbf{P} в момент $\left(t - \frac{r}{c} \right)$.

и таким образом можем вычислить все поле вибратора. Мы предлагаем сделать эти вычисления самому читателю, а здесь ограничимся исследованием свойств этого поля, во-первых, в непосредственной близости около вибратора и, во-вторых, на очень большом расстоянии от него. Это исследование очень поучительно и имеет большое практическое значение.

Мы можем значительно упростить нашу задачу, если воспользуемся следующим замечанием. Если производить дифференцирование вектора \mathbf{H} по какой-либо координате, то мы получаем (например по x):

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{H} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \mathbf{P} - \frac{1}{r} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\partial r}{\partial x} \mathbf{P}'; \quad \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Символ \mathbf{P}' означает производную от \mathbf{P} по аргументу

$$a = \omega \left(t - \frac{r}{c} \right).$$

Соотношение величин двух членов, составляющих эту сумму, определяется отношением между величинами

$$\frac{1}{r} \text{ и } \frac{1}{\lambda}.$$

Поэтому для расстояний r *малых* по сравнению с длиной волны λ мы можем при вычислении ограничиться одним первым членом суммы, т. е. считать \mathbf{P} независимым от расстояния r :

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{H} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \mathbf{P}.$$

Наоборот, для очень больших расстояний r мы можем пренебречь первым членом суммы (как будто $\frac{1}{r}$ не дифференцируется) и написать:

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{H} = -\frac{1}{r} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\partial r}{\partial x} \mathbf{P}'.$$

Это замечание распространяется и на вторые производные. Тогда мы получаем следующее:

а) Вблизи вибратора:

Вычисляем электрическое поле. Для этого нам надо знать расхождение вектора \mathbf{H} ; но при дифференцировании по x , y , z мы можем считать \mathbf{P} независимым от координат и получаем:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \left(\mathbf{P} \cdot \nabla \frac{1}{r} \right).$$

Вторая производная по времени будет равна:

$$\frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{H}} = \frac{1}{r} \frac{1}{c^2} \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^2 \mathbf{P}'' = \frac{1}{r} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \mathbf{P}''.$$

Так как по предположению λ значительно больше r , то этой величиной мы можем пренебречь и написать:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \left(\mathbf{P} \cdot \nabla \frac{1}{r} \right).$$

Но мы знаем, что это выражение представляет собою напряжение электрического поля биполя с моментом \mathbf{P} (32, 25). Следовательно и, в случае биполя, быстро меняющего свою величину со временем, мы можем рассчитывать электрическое поле по законам электростатики, но только в таких расстояниях от биполя, которые малы по сравнению с длиной волны его колебаний.

Для магнитного поля мы получаем:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{c} \operatorname{curl} \dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{c} \frac{1}{r} \operatorname{curl} \dot{\mathbf{P}} + \frac{1}{c} \left[\nabla \frac{1}{r} \cdot \dot{\mathbf{P}} \right].$$

(О применении операции curl к произведению скалара $\frac{1}{r}$ на вектор $\dot{\mathbf{P}}$ читатель может справиться в конце книги, или ч. I, стр. 54, 54. Но написанную формулу легко и проверить, предположив, что \mathbf{H} и \mathbf{P} направлены параллельно оси OZ). При малых r второй член будет значительно больше первого, потому что

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \mathbf{r}_1.$$

Поэтому мы можем для напряжения магнитного поля написать:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{cr^2} [\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{r}_1] = \frac{J}{cr^2} [d \mathbf{l} \cdot \mathbf{r}_1].$$

Но это есть не что иное как закон *Био-Савара* (107, 94). Следовательно вблизи вибратора мы можем рассчитывать магнитное поле, как для постоянного тока. Но для каждого момента времени и сила тока и магнитное поле вибратора будут различны.

В обоих случаях, как для электрического, так и для магнитного поля, мы могли бы получить тот же результат, положив скорость c бесконечности и написав t вместо $\left(t - \frac{r}{c} \right)$, т. е. исходя из формул гармонических колебаний, а не из формул гармонических волн.

б) Электромагнитное поле вдали от вибратора. При больших расстояниях r мы можем дифференцировать вектор *Гертца* по координатам, рассматривая множитель $\frac{1}{r}$ как постоянное. При этом мы будем пользоваться формулами:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left[\mathbf{P}_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] &= -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}'); \\ \operatorname{curl} \left[\mathbf{P}_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] &= -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{r} [\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}']; \end{aligned} \quad \mathbf{P}' = -\mathbf{P}_0 \cdot \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right);$$

которые читатель может сам проверить без особых затруднений. Мы получаем:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \operatorname{div} \mathbf{H} &= \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{r^3} \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}''); \quad \mathbf{P}'' = -\mathbf{P}_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) = -\mathbf{P}; \\ \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{H}} &= \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{r} \mathbf{P}'' = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{r^3} \mathbf{P}'' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}); \\ \mathbf{E} &= \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{r^3} [\mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}'') - \mathbf{P}'' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})] = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{r^3} [\mathbf{r} [\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}'']]. \end{aligned}$$

Последнее преобразование читатель найдет в ч. I, стр. 29, 31. Для напряжения магнитного поля получаем:

$$\mathbf{M} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{r^2} [\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}''] = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{r^2} [\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}],$$

откуда видим, что

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{r} [\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}].$$

Из последней формулы мы заключаем, что электрическое поле \mathbf{E} перпендикулярно и к радиусу-вектору \mathbf{r} и к направлению магнитного поля \mathbf{M} ; а предпоследняя формула показывает, что и магнитное поле \mathbf{M} тоже перпендикулярно к радиусу-вектору, т. е. к направлению распространения волн. Но если

$$\sin (\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}) = 1,$$

то из формулы следует, что

$$E = M.$$

Следовательно численное значение напряжений электрического и магнитного поля одинаково. Все эти свойства поля (вдали от вибратора) напоминают нам свойства плоских волн. Тем не менее

между плоской волной и рассматриваемой нами здесь сферической волной имеются и различия. Если мы напишем формулы для численных значений напряжений

$$E = M = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{r} p \cdot \sin (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}),$$

то заметим, что в отличие от плоской волны амплитуда здесь непостоянна, а убывает с расстоянием (обратно пропорционально расстоянию r). Мы указывали на это и выше, как на общее свойство сферических волн. Кроме того рассматриваемая нами волна *не однородна*; амплитуда ее в пределах каждой сферы (при данном r) зависит от угла, образуемого радиусом-вектором \mathbf{r} с направлением момента \mathbf{p} биполя. В направлении момента биполя $[\sin (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) = 0]$, амплитуда равна нулю, тогда как в плоскости, проходящей через источник волн и перпендикулярно к моменту биполя $[\sin (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) = 1]$, амплитуда волны наибольшая. Это последнее свойство волны обуславливается *поперечностью* колебаний электромагнитных волн (оба вектора \mathbf{E} и \mathbf{M} перпендикулярны к \mathbf{r}). При продольных колебаниях (например пульсирующий шар в воздухе) образуются *продольные однородные* волны. Впрочем и электромагнитные сферические волны могут быть однородными, если они испускаются не одним колеблющимся биполем, а целой системой колеблющихся биполей, постоянно и беспорядочно меняющих свое направление. Таким именно образом образуется однородная световая волна, испускаемая атомами светящегося тела. Как известно, по классической теории, атомы всех материальных тел содержат в себе электроны, колебания которых и образуют вибраторы *Гертца*. Что же касается вибраторов, употребляемых в радиотехнике (антенны), то они испускают *неоднородные* волны рассмотренного нами в этом параграфе типа.

221. Упрощение расчета. Мы произвели расчет электромагнитного поля вибратора *Гертца* в довольно общей форме, имея в виду его различные применения. Но так как этот расчет имеет большое практическое значение в радиотехнике, то мы считаем полезным повторить его в упрощенной форме и сделать его более наглядным, в особенности для тех читателей, которые не вполне владеют всеми приемами векторного исчисления.

Первое упрощение, которое мы введем, заключается в том, что мы направим ось $\perp OZ$ вдоль момента биполя:

$$\mathbf{p}_z = p_0 \cos (\omega t);$$

тогда и вектор *Гертца* **H** и вектор-потенциал **A** будут везде направлены параллельно оси *OZ*. Для гармонически колеблющегося биполя мы имеем:

$$H_z = \frac{1}{r} p_0 \cdot \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right);$$

$$A_z = \dot{H}_z = -\frac{1}{r} \frac{2\pi}{\tau} p_0 \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right).$$

Напряжение магнитного поля определится по вектор-потенциалу, как обычно:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{c} \text{curl } \mathbf{A};$$

$$M_x = \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial y}; \quad M_y = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial x}; \quad M_z = 0.$$

Следовательно магнитное поле везде перпендикулярно к направлению биполя, т. е. лежит в плоскостях, параллельных плоскости *XY*. Дальнейший расчет мы будем производить для точек, *далеко отстоящих* от вибратора, т. е. при дифференцировании по координатам будем считать множитель $\frac{1}{r}$ постоянным. Кроме того заметим себе формулы:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r};$$

После этого нам нетрудно! написать формулы для напряжения магнитного поля:

$$M_x = \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{1}{r} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 p_0 \cdot \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot \frac{y}{r};$$

$$M_y = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{1}{r} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 p_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot \frac{x}{r}.$$

Формулы показывают, что магнитное поле перпендикулярно к радиусу-вектору **r**. Действительно косинус угла наклона вектора **M** к вектору **r** определяется формулой:

$$\cos(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}) = M_x x + M_y y + M_z z = 0.$$

Но если напряжение магнитного поля перпендикулярно к полярной оси *Z* и к радиусу-вектору **r**, то все магнитные линии обра-

зуют круги с центром на оси *Z*. Это напоминает магнитное поле прямого тока, идущего вдоль оси *OZ*.

Численная величина определяется по его проекциям на оси координат:

$$M = \frac{1}{r} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 p_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot \sin \vartheta; \quad \sin \vartheta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r},$$

где ϑ означает угол, образуемый радиусом-вектором с осью *Z*.

Величину и направление напряжения *электрического* поля мы можем определить, пользуясь первым уравнением *Максвелла*:

$$\dot{\mathbf{E}} = c \cdot \text{curl } \mathbf{M}.$$

Подставляя сюда уже вычисленные нами напряжения магнитного поля, получаем:

$$\dot{E}_x = -c \frac{\partial M_y}{\partial z} = + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (A_z);$$

$$\dot{E}_y = +c \frac{\partial M_x}{\partial z} = + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (A_z);$$

$$\dot{E}_z = c \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (A_z).$$

Обратим прежде всего внимание на то, что составляющие этих напряжений по осям \dot{E}_x , \dot{E}_y , \dot{E}_z отличаются только множителями

$$zx; \quad zy; \quad -(x^2 + y^2),$$

между тем как магнитные поля имели множители:

$$y \quad -x \quad 0.$$

Поэтому, составляя скалярное произведение обоих векторов, мы получим в результате нуль. Это означает, что

$$\cos(\mathbf{E} \cdot \mathbf{M}) = 0; \quad \mathbf{E} \text{ перпендикулярно к } \mathbf{M},$$

т. е. что электрическое и магнитное поле перпендикулярны друг к другу. Далее, составляя скалярное произведение векторов $\dot{\mathbf{E}}$ и **r** (умножая \dot{E}_x , \dot{E}_y , \dot{E}_z на *x*, *y*, *z* и складывая), мы опять получаем нуль. Это означает, что электрическое поле тоже перпендикулярно к радиусу-вектору, т. е. лежит на поверхности сферической волны.

Если мы назовем направление биполя **p** (ось *Z*) *полярной осью*, то можем сказать, что магнитные линии образуют *параллели*

сферической волны, тогда как электрические линии сил идут по *меридианом* (рис. 89).

Наконец из написанных выше формул прямо видно, что численные значения напряжений \mathbf{E} и \mathbf{M} одинаковы (это видно уже из того, что при вычислении магнитного и электрического поля вектор *Гертца* дифференцируется два раза).

Мы ограничились определением поля *вдали* от вибратора, но исходные формулы этого параграфа позволяют вычислить все поле вибратора на любых расстояниях r и для любых изменений момента биполя со временем, при одном только условии, что момент биполя сохраняет свое направление по оси Z .

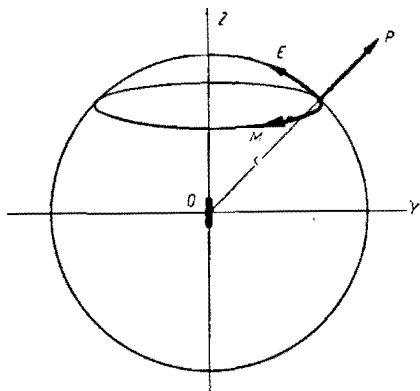


Рис. 89. Движение энергии в сферической волне (вдали от вибратора).

222. Энергия лучеиспускания. Для определения энергии, теряемой вибратором каждую секунду, составим выражение для *потока энергии*, т. е. вектора *Пойнтинга*, на поверхности сферы *большого* радиуса с центром в вибраторе. Мы можем при этом воспользоваться формулами предыдущего параграфа и написать:

$$\mathbf{P} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{M}] = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 \frac{1}{r^2} p_0^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot \sin^2 \vartheta.$$

Поток энергии, будучи перпендикулярен к векторам \mathbf{E} и \mathbf{M} (по правилу правого винта), будет везде направлен по радиусам *наружу* сферической волны. Это последнее замечание касается только тех

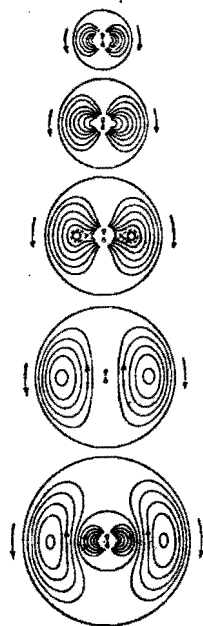


Рис. 90. Различные фазы лучеиспускания вблизи вибратора Гертца.

точек поля, которые отстоят далеко от вибратора (по сравнению с длиной его волны); вблизи вибратора энергия будет иметь более сложное движение: часть ее будет периодически двигаться наружу, другая же часть будет совершать колебания вдоль радиуса-вектора, двигаясь от вибратора наружу и возвращаясь *обратно к вибратору*. Это можно заключить и на основании вышеприведенных формул, а также и по известным (см. Общий курс электричества) рисункам (рис. 90) *Гертца*. Нас интересует главным образом та часть энергии, которая теряется вибратором безвозвратно. При вычислении средних величин во времени мы должны положить:

$$\text{средн.} \left[\cos^2 \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] = \frac{1}{2}.$$

За элемент поверхности волны мы возьмем узкую зону параллельного круга, длина окружности которого равна $2\pi r \sin \vartheta$, а толщина $r \cdot d\vartheta$:

$$dS = 2\pi r^2 \sin \vartheta \cdot d\vartheta.$$

Умножая вектор *Пойнтинга* на эту площадь и интегрируя по всей поверхности сферической волны, мы получаем ежесекундную потерю энергии

$$W = \oint P \cdot dS = \frac{c}{4} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 p_0^2 \int_0^\pi \sin^3 \vartheta \cdot d\vartheta.$$

Для удобства интегрирования мы введем новую переменную:

$$\cos \vartheta = u; \quad -\sin \vartheta \cdot d\vartheta = du; \quad \sin^2 \vartheta = 1 - u^2;$$

$$\int_0^\pi \sin^3 \vartheta \cdot d\vartheta = \int_{-1}^{+1} (u^2 - 1) du = \left[\frac{u^3}{3} - u \right]_{-1}^{+1} = \frac{4}{3}.$$

Таким образом ежесекундная потеря энергии вибратора определяется формулой:

$$W = \frac{c}{3} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 p_0^2 \frac{\text{erg}}{\text{sec}},$$

которая показывает, что при одинаковых амплитудах момента p_0 вибратора ежесекундная потеря энергии обратно пропорциональна четвертой степени длины волны, испускаемой вибратором.

223. Сопротивление лучеиспускания. В радиотехнике принято выражать потерю энергии на лучеиспускание особого рода сопротивлением R_λ , основываясь на формуле *Джоуля*:

$$W = RJ^2.$$

Для того чтобы перейти к этой технической формуле, нам нужно выразить амплитуду переменного момента биполя p_0 через амплитуду силы тока в этом биполе J_0 . Соотношение между силой тока и электрическим моментом вибратора мы уже описали выше (350, 219):

$$J \cdot l = \dot{p} = -p_0 \frac{2\pi}{\tau} \sin(\omega t) = -J_0 l \sin(\omega t),$$

где l означает длину короткого вибратора. Отсюда определяем амплитуду момента:

$$p_0 = J_0 l \left(\frac{\tau}{2\pi} \right) = \frac{1}{c} J_0 l \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)$$

и подставляем в формулу лучеиспускания энергии:

$$W = \frac{1}{3c} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 l^2 J_0^2 \frac{\text{erg}}{\text{sec}}$$

Коэффициент при J_0^2 и будет представлять собою сопротивление лучеиспускания. В нашей формуле энергия выражена в эргах в секунду, а сила тока — в электростатических единицах, поэтому и сопротивление R_λ выражено тоже в электростатических единицах. Если мы хотим ввести сюда *практические* единицы, т. е. выразить силу тока в *амперах*, а энергию, испускаемую ежесекундно, — в *ваттах*, то сопротивление R_λ должно быть выражено в *омах*. Переход от электростатических единиц сопротивления к *омам* совершается умножением на $9 \cdot 10^{11}$, и следовательно:

$$R_\lambda = 40 \pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \text{ ом.}$$

Наконец если мы вместо амплитуды силы тока J_0 желаем ввести *эффективное* значение силы переменного тока, как это делается в технике (эффективное значение силы переменного тока отсчитывается и на измерительных приборах), то должны будем воспользоваться соотношением:

$$J_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2} J_0^2,$$

и получаем энергию (эффект) лучеиспускания вибратора:

$$W = 80 \pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \cdot J_{\text{eff}}^2 \text{ ватт.}$$

224. Расчет антенны. Точный расчет лучеиспускания антенны представляет значительные математические трудности, и вполне строгое

решение этой задачи возможно только для простейших форм (шар, удлинённый эллипсоид) и то при упрощённых предположениях о возбуждении электрических колебаний в антенне. Но в действительности антенны состоят из целой системы проволок, и можно произвести расчет с достаточной для практики точностью приблизительно следующим образом. Сперва рассчитывают силу тока в различных частях антенны, применяя формулы распространения волн вдоль проволок (глава третья II). При этом однако кроме обычного сопротивления проволок R необходимо принять во внимание и сопротивление лучеиспускания R_λ . Величина этого последнего сопротивления вводится сперва приблизительно, основываясь на практических данных, а затем она может быть исправлена повторными расчетами, как это нередко практикуется при различных технических расчетах. После того как распределение силы тока по всем проволокам антенны будет определено, разделяют антенну на отдельные элементарные длины l и считают каждую такую длину за отдельный вибратор *Герца*, формула лучеиспускания которого нам известна. Следовательно каждую антенну мы можем считать составленной из целой системы вибраторов *Герца*, которые не только будут иметь электрические колебания различной амплитуды и фазы, но кроме того могут иметь и различное направление в пространстве. Из этого мы видим, что даже при таком упрощённом способе расчета он может потребовать довольно кропотливой работы, и от искусства и опытности радиоинженера зависит расположить ход расчета так, чтобы он соответствовал требуемой точности.

К этому необходимо прибавить, что для антенн, расположенных вблизи поверхности земли, необходимо принять во внимание отражение волн от этой поверхности. Проще всего производится расчет в том случае, когда грунт вблизи антенны можно считать за *хороший* проводник (иногда это условие стараются достичь искусственно, укладывая в грунт проволочную сеть). Но дело в том, что направляющее действие антенн *Маркони* (в форме буквы Г) как раз обусловлено *плохой* электропроводностью грунта. Впрочем в настоящее время, когда радиотехника переходит к коротким волнам и к применению зеркал, направляющих электромагнитные лучи в желаемую сторону, расчет лучеиспускания значительно упрощается и очень близко подходит к *оптическим расчетам*, которые мы предполагаем изложить в следующей части этого труда.

ФОРМУЛЫ ВЕКТОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Мы помещаем здесь главнейшие формулы векторного исчисления встречающиеся в этой книге, чтобы напомнить их читателю. Более подробное изложение правил векторного исчисления и их *геометрическое* толкование читатель найдет в первой части „Теоретической физики“, глава I и II.

Векторная алгебра

Векторы, т. е. величины, имеющие определенное направление в пространстве и складывающиеся геометрически, обозначаются у нас жирным, прямым шрифтом: \mathbf{A} , \mathbf{F} , \mathbf{M} , \mathbf{A}_1 . Индекс 1 означает, что величина вектора равна единице (*единичный* вектор). Проекции на оси координат какого-либо вектора \mathbf{A} обозначаются индексами: A_x , A_y , A_z .

Векторное (*геометрическое*) сложение и вычитание обозначается так же, как и скалярное:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{D}.$$

С векторными суммами можно обращаться, как с алгебраическими суммами, например

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{D} - \mathbf{C}.$$

Отрицательный знак при векторе означает вектор той же величины, но противоположного направления. Уравнение

$$\mathbf{A} - \mathbf{A} = 0$$

означает, что мы перешли от начала вектора \mathbf{A} к его концу, а затем пошли по противоположному направлению и пришли в исходную точку.

Из двух векторов можно составить два рода произведений: *скалярное* и *векторное*.

Скалярное произведение двух векторов \mathbf{F} и \mathbf{s} (работа силы \mathbf{F} на пути \mathbf{s}) равно $F \cdot s \cdot \cos(F \cdot s)$ и обозначается так:

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}) = F \cdot s \cdot \cos(F \cdot s).$$

В декартовых координатах мы имеем:

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}) = F_x s_x + F_y s_y + F_z s_z.$$

Векторное произведение двух векторов \mathbf{r} и \mathbf{F} (момент силы \mathbf{F} вокруг точки, расстояние коей от точки приложения силы равно \mathbf{r}) равно по величине:

$$M = r \cdot F \cdot \sin(r \cdot F)$$

и обозначается так

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}].$$

Оно равно площади параллелограмма, построенного на обоих векторах \mathbf{r} и \mathbf{F} и имеет направление положительной нормали этой площади. Положительное направление нормали определяется по правилу правого винта так, чтобы векторы \mathbf{r} , \mathbf{F} , \mathbf{M} были расположены друг относительно друга так же, как *правовинтовая* система координат X , Y , Z .

Проекции векторного произведения на оси координат выражаются через проекции векторных множителей следующим образом:

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y, \\ M_y &= zF_x - xF_z, \\ M_z &= xF_y - yF_x. \end{aligned}$$

Произведение двух векторов может равняться нулю, хотя бы сами векторы и не равнялись нулю. Скалярное произведение равно нулю, когда векторы перпендикулярны друг к другу: $\cos(F \cdot s) = 0$; векторное произведение равно нулю для параллельных векторов: $\sin(r \cdot F) = 0$.

При перестановке множителей скалярное произведение не меняется, тогда как векторное произведение меняет свой знак, потому что

$$\cos(F \cdot s) = \cos(s \cdot F); \quad \sin(r \cdot F) = -\sin(F \cdot r).$$

Если умножить векторное произведение \mathbf{M} скалярно на какой-либо третий вектор, то произведение

$$Q = (\mathbf{u} [\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}])$$

будет равно объему параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{u} , \mathbf{r} , \mathbf{F} . Так как любая грань этого параллелепипеда может служить основанием при вычислении объема, то мы можем вычислить объем тремя способами:

$$Q = (\mathbf{u} [\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}]) = (\mathbf{F} [\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}]) = (\mathbf{r} [\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}]).$$

Это означает, что в этом произведении можно переставлять множители без изменения значения произведения, соблюдая однако их круговой порядок. В декартовых координатах объем параллелепипеда выражается детерминантом:

$$Q = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Довольно часто встречается и *векторное* произведение трех векторов:

$$[\mathbf{A} [\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}]] = \mathbf{B} (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

Формула показывает, что это произведение разлагается на два вектора, параллельных векторам, стоящим во внутренних скобках.

Теория поля

Если нам дано скалярное поле φ (потенциал), то мы можем провести в нем эквипотенциальные поверхности

$$\varphi = \text{const.}$$

Производные скалара φ , взятые по направлению *нормалей* этих поверхностей, называются градиентом поля (градиент означает повышение):

$$\frac{d\varphi}{dn} = \text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \mathbf{G}.$$

Градиент поля есть вектор, коего проекции на оси координат равны:

$$g_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad g_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad g_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Обыкновенно напряжение поля направлено *противоположно* градиенту. Например для электростатического поля мы имеем:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Расхождением вектора в поле называется выражение

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Если вектор \mathbf{E} имеет скалярный потенциал φ , то расхождение его может быть выражено так:

$$-\text{div } \mathbf{E} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi.$$

Подобные выражения встречаются в уравнении *Лапласа-Пуассона* и в уравнении волнообразного движения.

В потенциальном векторном поле мы можем по данному векторному полю определить и его потенциальное поле, идя обратным порядком, т. е. вместо дифференцирования производя интегрирование. Для этого мы должны вычислить линейный интеграл:

$$d\varphi = (\mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}); \quad \varphi - \varphi_0 = \int_0^p (\mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}).$$

Для того чтобы этот интеграл имел вполне *определенное* значение, нам должно быть дано значение потенциала φ_0 в *исходной* точке и кроме того результат интегрирования должен быть *независим от пути*, по которому мы производим интеграцию. Это последнее требование эквивалентно следующему:

$$\oint (\mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}) = 0.$$

Это означает, что линейный интеграл по *замкнутому* пути должен равняться нулю. Другими словами: обойдя какой-либо замкнутый контур и произведя линейную интеграцию, мы должны в исходной точке получить опять то же значение φ_0 , с которого мы начали.

Если контур, который мы обходим, бесконечно мал, то линейное интегрирование дает нам вихрь вектора (ч. I, 117, 98):

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{G} = \mathbf{w} \quad w_x &= \frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}, \\ w_y &= \frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x}, \\ w_z &= \frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y}. \end{aligned}$$

В потенциальном поле вихрь должен равняться нулю.

Если же в данном нам векторном поле вихрь *не равен нулю*, то мы можем вместо скалярного потенциала φ ввести вектор-потенциал \mathbf{A} , положив

$$\mathbf{G} = \text{curl } \mathbf{A}.$$

Тогда

$$\mathbf{w} = \text{curl} \cdot \text{curl } \mathbf{A}.$$

Это последнее выражение можно представить в виде (ч. I, 57, 59):

$$\mathbf{w} = \text{curl} \cdot \text{curl } \mathbf{A} = \text{grad} \cdot \text{div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

(Читатель легко проверит это, вычислив проекцию вектора \mathbf{w} например на ось OX .) Если можно положить

$$\text{div } \mathbf{A} = 0,$$

то последнее уравнение распадается на три уравнения *Лапласа-Пуассона*:

$$-\omega_x = \nabla^2 A_x; \quad -\omega_y = \nabla^2 A_y; \quad -\omega_z = \nabla^2 A_z.$$

Таким образом все векторные поля, как потенциальные, так и вихревые, приводятся к решению уравнения *Лапласа-Пуассона*.

Заметим, что символы

$$\text{grad}, \quad \text{div}, \quad \text{curl}, \quad \nabla, \quad \nabla^2$$

имеют определенное геометрическое значение независимо от выбора той или другой системы координат. Мы выбрали здесь их выражения в *декартовых* координатах, как наиболее употребительные, но в первой части читатель найдет выражения для этих символов в общей форме для любых криволинейных ортогональных координат (ч. I, 226, 164).

Полезно заметить, что символ div аналогичен *скалярному произведению*, а curl аналогичен *векторному произведению*. Если ввести *символически* вектор ∇ с проекциями на оси координат:

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}; \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}; \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z},$$

то можно написать:

$$\text{div } \mathbf{A} = (\nabla \cdot \mathbf{A}); \quad \text{curl } \mathbf{A} = [\nabla \cdot \mathbf{A}].$$

Впрочем чисто формальное обращение с этими символами требует особой осторожности, и мы этим формализмом здесь не пользуемся, а рассматриваем его только как мнемоническое правило для более легкого запоминания формул (ср. ч. I. стр. 52—57, 52—59).

ЛИТЕРАТУРА

- J. C. Maxwell*. A. Treatise of Electricity and Magnetism. Oxford, 1873.
Немецкий перевод: В. Weinstein. Berlin. J. Springer. 1893.
M. Abraham. Theorie der Elektrizität. I, II. Leipzig. Teubner. 1921.
E. Cohn. Das elektromagnetische Feld. Berlin. J. Springer. 1927.
P. Drude-W. König. Physik des Aethers. Stuttgart. Enke. 1912.
E. Arnold. Die Wechselstromtechnik. Band I. J. Springer. 1920.
F. Ollendorf. Die Grundlagen der Hochfrequenztechnik. J. Springer. 1926.
И. Тамм. Основы теории электричества, т. I, Гиз, М.—Л. 1929.
А. Френкель. Теория переменных токов, пер. под ред. проф. Я. Н. Шпильрейна, Гиз, М.—Л., 1928.

Подробные литературные указания можно найти в следующих справочных изданиях:

- Handbuch der Physik. *H. Geiger & K. Scheel*. J. Springer. Band XII—XVII. 1926—1928. Handbuch der Experimentalphysik. *W. Wien & F. Harms*. Akad. Verlag. Band X—XVI. 1927. Handbuch der Elektrizität. *L. Graetz*. J. A. Barth. Band I—V. 1927.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

(цифры указывают номера страниц).

- Ампера закон 108.
Антенны расчет 361.
Био-Савара закон 106.
Брюстера закон 328.
Бьеркнеса опыты 321.
Вектор-потенциал 122.
Волн уравнение 167.
Волны в диэлектрике 308.
— вдоль проволок 260.
— в полупроводниках 314.
— неустановившиеся 297.
— плоские 308.
— стоячие 263, 312.
— сферические 346.
Время релаксации 105.
Гагена и Рубенса опыт 331.
Гаусса теорема 8.
Гельмгольца вывод 131.
Герца вектор 350.
— вибратор 351.
— теория 171.
Гистерезиса работа 95.
Давление света 169.
Даламбера решение 297.
Двойной полюс 31, 88.
— слой 21.
Джоуля закон 100, 102.
Диамagnetизм 92.
Диэлектрическая постоянная 3.
Единицы емкости 43.
— количества магнетизма 86.
— — электричества 2.
— коэффициентов индукции 196
— потенциала 16.
— работы и эффекта 100.
Единицы силы тока 97, 109.
— сопротивления 98.
Затухание (поглощение) волн 264, 318.
— колебаний 214, 217.
Импульс электромагнитный 196, 201.
Индукции коэффициенты 135.
— поток 6, 87.
Индукция магнитная 87.
— униполярная 152.
— электромагнитная 130.
— электростатическая 5.
Катодный генератор 250.
— усилитель 246.
Кирхгофа правило 99.
Колебания неустановившиеся 231.
— принужденные 218.
— собственные 216.
— электрические 215.
Кулона закон 1, 84.
Лапласа-Пуассона уравнение 13.
Линии сил 5, 87.
— — преломления 50, 90, 345.
Лорентца теория 179.
— уравнение 180.
Лучеиспускание вибратора 358.
Лучи анодные и катодные 192.
Магнитодвижущая сила 118.
Максвелла закон 166.
— уравнения 122, 134, 162, 170.
Масса электромагнитная 201, 203, 209.

- Напряжение поля 4, 286.
 Натяжения и давления в электромагнитном поле 199.
 Натяжения в электростатическом поле 82.
 Ома закон 97, 101.
 Отражение и преломление 322.
 — металлическое 330.
 Пойнтинга теорема 163.
 Полное внутреннее отражение 332.
 Поляризация магнитная 89.
 — света 168, 310.
 — электрическая 48.
 Потенциал магнитный 87.
 — электрический 11.
 Преломление линий сил 50, 90, 345.
 — лучей 326.
 Пулина изобретение 273. .
 Размагничивания коэффициент 91.
 Резонанс 221. .
 Резонанс-трансформатор 235.
 Рентгена опыт 176.
 Роулэнда опыт 159.
 Связанные системы 232—254.
 Связи коэффициент 143.
 Силы поверхностные и объемные 80.
 Сопротивление комплексное 228.
 — лучейспускания 359.
 — проводников 99.
 — удельное 98.
 Телеграфное уравнение 265.
 Телефонный провод 277.
 Токи конвекционные 158.
 — смещения 157.
 Томсона теорема 66.
 Трансформатор 232.
 Трубка сил 9.
 Трутон и Нобль, опыт 207.
 Уильсона опыт 178.
 Фарадея открытие 130.
 Фиктивные заряды 48.
 Фильтры электрические 289.
 Френеля параллелепипед 340.
 — формулы 326.
 Частота циклическая 213.
 Эквипотенциальные поверхности 17.
 Экстратоки 150.
 Электродвижущая сила 132.
 — индукция 130.
 Эйхенвальд, движение энергии при полном внутреннем отражении 340, 345.
 — опыты с движущимся конденсатором 177.
 — опыты с поглощением электромагнитных волн 320.
 — опыты с электрической конвекцией 176.
 Электромагнитная масса 201, 203, 209.
 Электромагнитное давление света 169.
 Электромагнитный импульс 196, 201.
 — электрон 192.
 Энергия магнитная 92.
 Электрическая 65.