

Lehrbuch der  
**Technischen Mechanik**

Von  
Th. Pöschl

Zweite Auflage

# Lehrbuch der Technischen Mechanik

für Ingenieure und Physiker

Zum Gebrauche bei Vorlesungen  
und zum Selbststudium

von

**Dr.-Ing. Theodor Pöschl**

o. Professor an der Technischen Hochschule  
in Karlsruhe

Zweite  
vollständig umgearbeitete Auflage

Mit 249 Textabbildungen



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH  
1930

ISBN 978-3-662-37131-2      ISBN 978-3-662-37844-1 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-662-37844-1

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung  
in fremde Sprachen, vorbehalten.

Copyright 1930 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg  
Originally published by Julius Springer in Berlin in 1930.  
Softcover reprint of the hardcover 2nd edition 1930

## Aus dem Vorwort zur ersten Auflage.

Die Mechanik nimmt im technischen Unterrichte eine Mittelstellung ein zwischen den vorbereitenden Gegenständen — Mathematik, darstellender Geometrie und Physik — und den eigentlich technischen, den verschiedenen Ausgangsfächern. Ihr Studium bereitet erfahrungsgemäß dem Anfänger gewisse Schwierigkeiten, die sich insbesondere dann einstellen, wenn der Studierende in die Lage kommt, selbständig mechanische Aufgaben von der Art, wie sie die technische Praxis stellt, lösen zu müssen. Und gerade hierbei kann sich erst erweisen, ob die Lehren der Mechanik in ihrer ganzen Bedeutung erfaßt worden sind oder nicht. Mit der Aneignung und Wiedergabe der allgemeinen Sätze ist es nicht getan; so einfach diese Sätze auch scheinen mögen, so schwierig ist es für den Anfänger, ihre Tragweite zu erfassen und sie auf die mannigfachen Fragen, die die Natur und die technische Praxis stellt, richtig anwenden zu lernen; wenn irgendwo, so gilt hier das alte Leibnizsche Wort, daß die Natur zwar einfach in ihren Prinzipien, aber unermesslich reich in deren Anwendung ist.

Zur Überwindung der hierbei auftauchenden Schwierigkeiten soll das vorliegende Buch einen Weg weisen. Es will in knapper Form unter Vermeidung alles irgend Entbehrlichen und unter fortgesetzter Bezugnahme auf die Anwendungen die einfachsten und wichtigsten Lehren der Mechanik in einem Umfange darbieten, wie sie (ungefähr) von den Studierenden unserer technischen Hochschulen verlangt werden. Auf die axiomatische Begründung des Gegenstandes ist dabei bewußt vollständig verzichtet worden. Zur weiteren Pflege der Anwendungen und zur Einübung des Lehrstoffes möchte ich hier auch auf die im gleichen Verlage erschienenen „Aufgaben aus der technischen Mechanik“ (drei Bände) von F. Wittenbauer hinweisen. Eine Übersicht über die Literatur, die eine ausführlichere Behandlung der in diesem Buche oft nur in knappen Worten gestreiften Einzelfragen enthält, ist am Schlusse zusammengestellt.

Große Sorgfalt wurde auf die genaue Formulierung der Lehrensätze und Angabe ihrer Geltungsbereiche angewendet. Um die Brücken zu den Anwendungen zu schlagen, sind vielfach, meist unter Anführung der verschiedenen auftretenden Möglichkeiten, Hinweise für den Ansatz von einfachen Aufgaben eingeschaltet worden. Ich habe mich nicht gescheut, bei solchen Angaben auch scheinbar selbstverständliche Dinge auszusprechen, wenn dadurch eine Förderung des Verständnisses für die Anwendbarkeit der entwickelten Lehren erwartet werden konnte. Was der Ingenieur von einer „Mechanik“, die ihm von Nutzen sein soll, verlangt, sind Regeln und Anweisungen,



die ihm zeigen, wie er im einzelnen Falle vorzugehen hat; mit solchen ist in diesem Buche nicht gespart worden.

In dem ganzen Buche sind ferner die rechnerischen und zeichnerischen Methoden — alle sind praktischen Bedürfnissen entsprungen — unter Angabe ihrer Anwendungsbereiche nebeneinander behandelt worden. Das Verständnis der sachlichen Gleichwertigkeit der Aussagen in beiden Darstellungsarten zu erreichen, ist eine für den Unterricht in der Mechanik wichtige Frage.

Die Bezeichnung für die heute in dieser Wissenschaft verwendeten Begriffe ist keineswegs einheitlich — die hier verwendeten sind im Einklang mit den auch sonst meist in Gebrauch stehenden und wenigstens bis zu einem gewissen Grade eingebürgerten gewählt worden.

Die Lehren der Mechanik können am einfachsten und natürlichsten in die Gesamtheit unseres Wissens eingeordnet werden, wenn man sich auf den Boden einer vernünftigen realistischen Weltansicht stellt, die im Grunde, ob ausgesprochen oder nicht, die ganze Naturwissenschaft beherrscht und besonders für die Technik als unentbehrlich bezeichnet werden darf. Trotz aller begründeten erkenntnistheoretischen Bedenken und Einwände halte ich es für ausgeschlossen, die einführende Vorlesung aus der technischen Mechanik auf Grund eines anderen Standpunktes praktisch erfolgreich zu entwickeln.

Was die Gliederung des Stoffes anlangt, so wurde insbesondere im Hinblick auf die Bedürfnisse unserer technischen Hochschulen die althergebrachte Einteilung in Statik, Kinematik und Dynamik beibehalten. Für die Auswahl und die Art der Darstellung war — unter Ausschaltung aller persönlichen Ansprüche — vorwiegend der eine Gesichtspunkt maßgebend, unserer studierenden Jugend nützlich zu sein, für die dieses Buch als Ergänzung der an der Hochschule gehörten Vorlesungen und Übungen in erster Linie bestimmt ist. Wegen des überwiegend praktischen Inhaltes wendet es sich jedoch auch an die fertigen Ingenieure, denen es für eine Reihe von Fragen, die sich mit den einfachen Mitteln der „starrten“ Mechanik lösen lassen, die hierzu notwendigen Lehrsätze und Methoden in gedrängter Kürze darbieten will.

Prag, am 16. November 1922.

**Th. Pöschl.**

## Vorwort zur zweiten Auflage.

Die günstige Aufnahme, die das „Lehrbuch der Technischen Mechanik“ bei seinem ersten Erscheinen gefunden hat, ließ erkennen, daß seine Herausgabe die Anforderungen und Bedürfnisse des Mechanikunterrichtes an den technischen Hochschulen im wesentlichen zutreffend beurteilt hat. Die zweite Auflage ist vollständig umgearbeitet und durch Ausschaltung manches Unzureichenden und durch mancherlei Ergänzungen — wie ich annehmen darf — auch verbessert worden.

Von dem Hilfsmittel der Vektorrechnung ist jetzt in stärkerem Maße Gebrauch gemacht als bei der ersten Auflage. Einige Abschnitte sind neu geschrieben worden, wie die über Kinematik der ebenen Bewegung, und einige sind ganz neu hinzugekommen, wie die über die Mayor-Misessche Abbildung und ihre Anwendung in der Raumstatik, über Schwingungen und Stabilität und über dynamische Kräftepläne. Diese Dinge haben übrigens auch bei der Bearbeitung der inzwischen im gleichen Verlage erschienenen sechsten Auflage der „Aufgaben aus der Technischen Mechanik“ Bd. I von F. Wittenbauer, auf die schon im Vorwort zur ersten Auflage als ergänzenden Übungsbehef hingewiesen wurde, entsprechende Berücksichtigung erfahren.

Den vielen Kollegen und Fachgenossen, die mich für diese Neuauflage auf wünschenswerte Ergänzungen und Verbesserungen aufmerksam gemacht haben, sage ich auch an dieser Stelle aufrichtigen Dank. Auch aus den Kreisen der jungen Kommilitonen, für die dieses Buch in erster Linie bestimmt ist, ist mir eine Reihe von Äußerungen und Wünschen zugegangen, die ebenfalls, soweit dies irgend möglich war, Berücksichtigung fanden.

Die unausgesetzt fortschreitende Entwicklung unseres technischen Hochschulwesens enthält als einmütige Forderung die weitere Ausgestaltung und Vertiefung des Unterrichtes in der technischen Mechanik als der für die gesamte Technik grundlegenden Wissenschaft. Möge das vorliegende Werk in seiner neuen Auflage dieser Forderung für den Bereich, den es zu erfassen sucht, gerecht werden und den Studierenden und Ingenieuren bei der Erlernung der grundlegenden Probleme und Methoden ein zuverlässiger Führer sein!

Karlsruhe, Neujahr 1930.

Th. Pöschl.

# Inhaltsverzeichnis.

<b>Einleitung.</b>		Seite
I. Allgemeines und Grundbegriffe . . . . .		1
1. Mechanik als Naturwissenschaft S. 1. — 2. Bewegung, Bezugssystem, Koordinaten S. 1. — 3. Aufgabe der Mechanik S. 2. — 4. Einteilung der Mechanik S. 3. — 5. Grundeinheiten, Dimensionen, Maßsysteme S. 4. — 6. Das technische Maßsystem, Kilogramm als Kräfteinheit S. 5. — 7. Das dynamische Grundgesetz, Masse, Gewicht S. 6. — 8. Das physikalische Maßsystem, Kilogramm als Masseneinheit S. 9. — 9. Über das Messen von Massen und Kräften S. 10. — 10. Zusammenstellung der Dimensionen und Einheiten im technischen und physikalischen Maßsystem S. 11. — 11. Trägheitsgesetz, Inertialsysteme S. 11. — 12. Arten der Kräfte, Wechselwirkung S. 13. — 13. Bemerkung über die Beschaffenheit der Aufgaben der Mechanik und ihrer Behandlung S. 15.		
II. Vektoralgebra . . . . .		16
14. Skalare, Vektoren, Beiwerte S. 16. — 15. Addition und Subtraktion von Vektoren, Zerlegung S. 17. — 16. Projektionssatz S. 19. — 17. Multiplikation von Vektoren, Arbeits- und Momentenprodukt S. 21. — 18. Anwendungen S. 24. — 19. Produkte von drei Vektoren S. 27.		
<b>Erster Teil.</b>		
<b>Statik der starren Körper.</b>		
I. Kräftegruppe durch einen Punkt . . . . .		29
20. Mittelkraft und Gleichgewicht, Auflagerkraft S. 29. — 21. Seileck als Gleichgewichtsfigur S. 33. — 22. Parabolische Kettenlinie S. 35. — 23. Gemeine Kettenlinie S. 37. — 24. Beispiele S. 39.		
II. Ebene Kräftegruppen . . . . .		41
25. Summe einer ebenen Kräftegruppe S. 41. — 26. Methode des Seilecks S. 42. — 27. Kräftepaar und Moment S. 43. — 28. Zeichnerische Bedingungen für Gleichgewicht S. 44. — 29. Mannigfaltigkeit der Seilecke für eine bestimmte Kräftegruppe S. 45. — 30. Seileck durch drei Punkte S. 46. — 31. Rechnerische Bedingungen für das Gleichgewicht einer ebenen Kräftegruppe S. 48. — 32. Eindeutige Zerlegungsaufgaben S. 49. — 33. Auflagerkräfte, Formen der Auflager S. 51. — 34. Beispiele S. 52. — 35. Biegemoment und Querkraft S. 54. — 36. Mehrere Körper S. 59.		
III. Ebene Fachwerke . . . . .		62
37. Bedingungen für die Starrheit eines Fachwerkes. Cremonaplan S. 62. — 38. Einfache Fachwerke S. 65. — 39. Rittersche Schnittmethode S. 69. — 40. Fachwerke mit belasteten Innenknoten. S. 69. — 41. Zusammengesetzte Fachwerke S. 71. — 42. Stabvertauschung S. 73. — 43. Wackelige Fachwerke S. 74.		
IV. Räumliche Kräftegruppen . . . . .		75
44. Summe einer räumlichen Kräftegruppe S. 75. — 45. Gleichgewicht einer räumlichen Kräftegruppe S. 77. — 46. Arten der Stützungen, Beispiele S. 78. — 47. Eindeutige Zerlegungsaufgaben S. 80. — 48. Abbildung räumlicher Kräftegruppen auf die Ebene S. 83. — 49. Anwendungen S. 85. — 50. Bemerkungen über Raumbachwerke S. 87.		

	Seite
V. Massenmittelpunkt . . . . .	88
51. Mittelpunkt paralleler Kräfte S. 88. — 52. Hilfssätze S. 90. — 53. Mittelpunkt von Linien S. 92. — 54. Mittelpunkt von Flächen S. 93. — 55. Mittelpunkt von Körpern S. 98.	
VI. Theorie der Reibung. . . . .	99
56. Einführung der Reibungskraft S. 99. — 57. Hauptergebnisse der Versuche über die Reibung S. 105. — 58. Einige technische Reibungsprobleme S. 109. — 59. Roll- und Bohrreibung S. 117.	
VII. Das Prinzip der virtuellen Arbeiten . . . . .	118
60. Aussage des Prinzips für die Kräftegruppe durch einen Punkt S. 118. — 61. Begründung des Prinzips für starre Körper S. 120. — 62. Form des Prinzips für Gewichte als eingeprägte Kräfte S. 123. — 63. Anwendungen S. 123.	

Zweiter Teil.

**Kinematik der starren Körper.**

I. Bewegung des Punktes . . . . .	128
64. Geschwindigkeit in Cartesischen Koordinaten, Geschwindigkeitsplan S. 128. — 65. Beschleunigung S. 130. — 66. Die Bewegungsgleichungen der Punktmechanik S. 131. — 67. Geradlinige Bewegung des Punktes S. 133. — 68. Weitere integrable Bewegungsaufgaben S. 143. — 69. Krummlinige Bewegung in der Ebene in Cartesischen Koordinaten S. 148. — 70. Natürliche Zerlegung: Tangential- und Normalbeschleunigung S. 149. — 71. Geschwindigkeit und Beschleunigung in Polarkoordinaten, Flächengeschwindigkeit S. 152. — 72. Zusammenstellung der bisher erhaltenen Formeln S. 154. — 73. Zentralbewegung, die Keplerschen Gesetze S. 154. — 74. Anwendungen S. 158. — 75. Gezwungene oder geführte Bewegung des Punktes S. 160. — 76. Anwendungen S. 162.	
II. Ebene Bewegung. . . . .	165
77. Schiebung und Drehung S. 166. — 78. Geschwindigkeitszustand der Scheibe, Geschwindigkeitsplan S. 168. — 79. Beschleunigungszustand der Scheibe, Beschleunigungsplan S. 170. — 80. Rechnerische Herleitung der Ergebnisse von 78 und 79 S. 174. — 81. Arten der zwangläufigen Führungen S. 176. — 82. Polkurven, Umkehrung der Bewegung S. 177. — 83. Beispiele und Anwendungen S. 179.	
III. Bewegung des Körpers im Raume . . . . .	187
84. Bewegung einer Körpers um einen festen Punkt S. 187. — 85. Schraubenbewegung S. 189.	
IV. Zusammensetzung von Bewegungen. . . . .	191
86. Zusammensetzung von Schiebungen S. 191. — 87. Zusammensetzung von Drehungen S. 192. — 88. Die Eulerschen Winkel und die Eulerschen kinematischen Gleichungen S. 196. — 88a. Die Zusammensetzung von Schraubungen S. 198.	
V. Relative Bewegung . . . . .	199
89. Kennzeichnung der Probleme S. 199. — 90. Freie Relativbewegung S. 201. — 91. Ableitung der Gleichung für die Relativbeschleunigung in vektorieller Darstellung S. 206. — 92. Anwendungen auf die Getriebelehre S. 207. — 93. Gezwungene Relativbewegung S. 212. — 94. Beispiele und Anwendungen S. 213. — 95. Die relative Bewegung von Körpern S. 216.	

Dritter Teil.

**Dynamik der starren Körper.**

I. Arbeit, Leistung, Wucht . . . . .	218
96. Arbeit S. 218. — 97. Leistung, Wirkungsgrad S. 220. — 98. Die kinetische Energie S. 224. — 99. Der Energiesatz für den einzelnen Massenpunkt S. 224.	

	Seite
II. Trägheitsmomente . . . . .	228
100. Allgemeine Sätze über Trägheitsmomente S. 228. — 101. Rechnerische Ermittlung von Trägheitsmomenten S. 233. — 102. Zeichnerische Ermittlung von Trägheits- und Deviationsmomenten ebener Flächen S. 235.	
III. Das Prinzip d'Alemberts. . . . .	239
103. Allgemeine Aussage des Prinzips S. 239.	
IV. Schwingungen von Systemen mit einem und zwei Freiheitsgraden. Stabilität . . . . .	243
104. Ansatz der Bewegungsgleichungen, Eigenschwingungen S. 243. — 105. Anwendungen S. 246. — 106. Stabilität eines Gleichgewichtszustandes S. 248. — 107. Stabilität eines stationären Bewegungszustandes S. 250.	
V. Dynamik der ebenen Bewegung des Körpers . . . . .	252
108. Bewegungsgleichungen S. 252. — 109. Energieintegral S. 255. — 110. Impuls und Drall S. 257. — 111. Drehung um eine feste Achse S. 259. — 112. Anwendungen S. 260. — 113. Zwangsläufige Bewegung des einzelnen Körpers S. 265.	
VI. Zwangsläufige Bewegung verbundener Systeme, Schwungradberechnung . . . . .	266
114. Aufgabe dieses Kapitels S. 266. — 115. Die Lagrangesche Form der Bewegungsgleichung S. 267. — 116. Die Bewegungsgleichung für Maschinen mit Schubkurbelgetriebe S. 270. — 117. Die Reduktion der Massen und Kräfte S. 273. — 118. Die Arbeits-Massen-Linie S. 277. — 119. Dynamische Schwungradberechnung S. 278. — 120. Angenäherte Schwungradberechnung S. 280. — 121. Dynamische Kräftepläne S. 282.	
VII. Schwerpunktsatz und Flächensatz . . . . .	285
122. Formulierung des d'Alembertschen Prinzips mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeiten S. 285. — 123. Der Satz von der Bewegung des Massenmittelpunkts für einen Punkthaufen S. 286. — 124. Flächensatz oder Satz von der Erhaltung des Dralles S. 289.	
VIII. Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt. Kreisel. . . . .	291
125. Die Eulerschen Bewegungsgleichungen S. 291. — 126. Die kräftefreie Bewegung um den festen Punkt S. 294. — 127. Moment der Kreiselwirkung S. 296.	
IX. Stoß fester Körper . . . . .	298
128. Hilfsannahme zur Behandlung des Stoßvorganges S. 298. — 129. Stoß auf freie Körper von endlicher Ausdehnung S. 301. — 130. Stoß auf geführte Körper S. 305.	
X. Mechanische Ähnlichkeit . . . . .	307
131. Dimensionsbetrachtungen S. 307. — 132. Beispiele und Anwendungen S. 309.	
<b>Literaturübersicht. . . . .</b>	<b>312</b>
<b>Namen- und Sachverzeichnis . . . . .</b>	<b>315</b>

# Einleitung.

## I. Allgemeines und Grundbegriffe.

**1. Mechanik als Naturwissenschaft.** Die Hauptaufgabe der theoretischen Naturwissenschaften, zu denen die Mechanik in ihrem vollen Umfange gehört, besteht darin, den Zustand, in dem sich die Körper unserer Außenwelt befinden, und die Veränderungen, die diese Körper erleiden, übersichtlich und gesetzmäßig zu ordnen und durch Maß und Zahl zu beschreiben. Voraussetzung für die Erfüllbarkeit dieser Aufgabe ist die aus einer jahrhundertelangen Entwicklung stammende Erfahrung, daß es solche Gesetze gibt, denen gemäß diese Veränderungen verlaufen, und daß es möglich ist, alle Erscheinungen, die wir in der Natur beobachten, aus solchen Gesetzen zu verstehen und zu „erklären“. Die Lösung der angegebenen Aufgabe hat zur Ausbildung eines Systems von Begriffen geführt, die in den Naturgesetzen in bestimmter Weise miteinander verknüpft werden und die diese Erscheinungen mit den Hilfsmitteln der mathematischen Analyse zu verfolgen gestatten.

Die einfachsten dieser Veränderungen sind jene, bei denen die Körper ihrer geometrischen und physikalischen Beschaffenheit nach gleich bleiben und nur ihren Bewegungszustand im Raume verändern. Zu ihrer Kennzeichnung in dem angedeuteten Sinne wurde schon frühzeitig der Begriff der Kraft eingeführt, ein Begriff, der in der Folge in mannigfacher Weise ausgestaltet und auf alle Erscheinungen erweitert wurde, in denen es auf die Untersuchung der Bewegungen von Körpern oder ihrer Teile u. dgl. ankommt; auf diesem Begriff und einer Reihe daraus abgeleiteter Begriffe hat sich die Wissenschaft der Mechanik als besonderer Zweig der Physik entwickelt. Zur vorläufigen Kennzeichnung des Gegenstandes, die es weiterhin mit dem eigentlichen Inhalt zu erfüllen gilt, können wir also sagen:

Die Mechanik ist also die Lehre von den Bewegungen der Körper und von den Kräften.

**2. Bewegung. Bezugssystem. Koordinaten.** Für die Untersuchung der Bewegungen der Körper ist es zunächst erforderlich, daß wir Mittel besitzen, um uns im Raume zurechtzufinden, d. h. die Lage der Körper in irgendeiner Weise zu kennzeichnen. Diese Kennzeichnung ist stets nur in bezug auf einen oder mehrere andere Körper — die Bezugskörper — möglich und geschieht durch Angabe einer geeigneten Anzahl von Bestimmungsstücken; um sie praktisch auszuführen, denken wir uns mit diesen Bezugskörpern — dem sog. Bezugssystem — etwa ein System von rechtwinkligen Koordinatenachsen fest verbunden und



haben dann die Aufgabe, die Lage des Körpers gegen dieses Koordinatensystem, und zwar durch Angabe von passend gewählten Bestimmungsstücken (Strecken, Winkeln u. dgl.) festzulegen; diese Bestimmungsstücke heißen dann die Koordinaten des betreffenden Körpers. Für die Messung der Längen dienen Maßstäbe, und von diesen setzen wir voraus, daß sie in allen Koordinatensystemen — gleichgültig, wie diese zueinander auch bewegt sein mögen — und nach allen Richtungen eine feste Länge beibehalten sollen.

Die Koordinaten sind bei einer Bewegung veränderliche Größen. Von der Beschreibung einer Bewegung im Sinne der Mechanik spricht man erst dann, wenn die Koordinaten für alle Werte der Zeit für ein gewisses Zeitintervall durch irgendeine Vorschrift festgelegt sind, wenn also eine Verknüpfung der Koordinaten mit der Zeit hergestellt ist, oder anders ausgedrückt, wenn sich die Koordinaten als Funktionen der Zeit angeben lassen.

Die Zeit wird dabei — für die Zwecke dieses Buches — als eine unabhängig und stetig veränderliche Größe eingeführt, von der die Änderungen anderer Größen, insbesondere der oben erwähnten Koordinaten, abhängig gemacht werden können.

Die beiden Grundbegriffe jeder exakten Wissenschaft, Raum und Zeit, erscheinen somit naturgemäß auch als die obersten Grundbegriffe der Mechanik: die Erscheinungen, mit denen sich diese beschäftigt, vollziehen sich im Raum und in der Zeit. Wie wenig die obigen Festsetzungen über diese beiden „Kategorien unseres Denkens“ Naturnotwendigkeiten, geschweige denn Denknöthigkeiten sind, zeigt die neueste Entwicklung des allgemeinsten Zweiges der theoretischen Physik, der Relativitätstheorie, auf Grund welcher sie als weitgehende Einschränkungen erscheinen, die im Wesen der Dinge in keiner Weise begründet sind. Diese Theorie hat auch für die gewöhnliche (Galilei-Newtonsche) Mechanik, wie wir sie hier treiben, wichtige grundlegende Einsichten geliefert. — Bei der Darlegung der Lehren der Mechanik tritt deutlich der eigentümliche Zirkel zutage, in dem sich jeder befindet, der sie zu lehren oder zu lernen unternimmt und der darin liegt, daß man eigentlich schon die ganze Mechanik kennen müßte, um ihre Grundlagen zu entwickeln. Man denke etwa an die Messung der Zeit, die recht verwickelte Instrumente — die Uhren — erfordert, zu deren Aufbau und Regulierung mannigfache Kenntnisse aus der Mechanik nötig sind, und ähnlich, wenn auch viel einfacher, liegen die Verhältnisse bei der Längenmessung. — Im folgenden wird daher vieles als bekannt angenommen — aus dem täglichen Leben oder aus der Schule — was eigentlich noch ausführlicher Erörterung bedürfte.

**3. Aufgabe der Mechanik.** Die Aufgabe der Mechanik ist jedoch mit einer solchen „Beschreibung“, die auch auf mannigfache andere Art (z. B. etwa kinematographisch) erfolgen könnte, keineswegs erschöpft, diese Aufgabe besteht vielmehr darin, die Gesamtheit der Bewegungen gesetzmäßig zu erfassen und zu ordnen; das Streben nach logischer Ordnung ihres Tatsachenmaterials hat die Mechanik mit anderen Wissenschaften durchaus gemeinsam. In der Mechanik geschieht diese Ordnung durch Angabe des Kraftgesetzes, das der betreffenden Bewegung (oder, wie wir sehen werden, einer Klasse von Bewegungen) zugehört. Der Kraftbegriff selbst gründet sich auf die Tatsache, daß die Körper der Außenwelt Wirkungen auf-

einander ausüben, die von verschiedenen Umständen, von Bedingungen physikalischer oder chemischer Natur u. dgl. abhängen und weiter darauf, daß diese Wirkungen gemessen und zahlenmäßig als Funktionen der Koordinaten, der Zeit und anderer aus diesen abgeleiteten Größen (z. B. der Geschwindigkeit) dargestellt werden können.

Die Vorstellung einer Kraft wird erleichtert durch Anknüpfung an gewisse mit eigenen Empfindungen verbundene Erfahrungen des täglichen Lebens (Tragen eines Gewichtes, Überwindung eines Widerstandes oder dgl.), für die man passend das Wort „Kraftsinn“ geprägt hat. Mit dem Begriffe Kraft verbinden wir stets die Vorstellung einer Tendenz, die einen Körper in Bewegung zu setzen oder seine Bewegung abzuändern strebt. Dieser Kraftsinn wird — in richtiger Weise ausgebildet — dem Ingenieur in vielen Fällen das „Einfühlen“ in das betreffende Problem erleichtern; doch empfiehlt es sich, die einzelnen Probleme stets im Zusammenhange mit den allgemeinen Regeln und Gesetzen zu betrachten, die in der Mechanik aufgestellt werden.

Die Aufgabe der Mechanik besteht also darin, einerseits die Hilfsmittel anzugeben, die man für die Beschreibung der Bewegungen im oben angedeuteten Sinne verwendet, und andererseits Regeln und Anweisungen zu schaffen, um die Bewegungen im Zusammenhange mit dem jeweils zugehörigen Kraftgesetz zu studieren. Dabei ergeben sich von selbst zwei verschiedene Arten von Problemen: entweder es ist die Bewegung (durch Beobachtungen oder dgl.) gegeben und das Kraftgesetz zu ermitteln, oder es ist umgekehrt das Kraftgesetz bekannt und die Bewegungen zu bestimmen, die diesem zugehören.

Die Lehre von den Kräften wird uns zunächst mit deren zweckmäßiger zeichnerischer und rechnerischer Darstellung bekannt machen und auf die Frage der Zusammensetzung von Kräften führen, wobei sich als für die Anwendung in der Technik wichtigster Sonderfall der des Gleichgewichtes ergeben wird. Diese Fragen machen den Inhalt der Statik aus. Wir wollen sie den weiteren Entwicklungen voranstellen.

Durch die Einführung des Kraftbegriffes finden gleichzeitig auch die Forderungen der Einfachheit und der Zweckmäßigkeit, die bei der Ordnung eines Tatsachenmaterials für alle Begriffsbestimmungen und Methoden an die Spitze zu stellen sind, ihre Erfüllung.

**4. Einteilung der Mechanik.** Die Einteilung der Mechanik ist nach verschiedenen Gesichtspunkten möglich, und zwar:

a) Nach der Beschaffenheit der Körper. In der „Mechanik der starren Körper“ oder der „Stereomechanik“ werden die Körper (mit gewissen Ausnahmen) als starr, d. h. die Entfernungen ihrer Teile voneinander als unveränderlich angenommen. Der starre Körper erweist sich deshalb als verhältnismäßig einfach, weil zur Kennzeichnung seiner Lage eine endliche, und zwar kleine Zahl von Koordinaten erforderlich ist. Mit diesem Teil beschäftigt sich das vorliegende Lehrbuch.

Für andere Arten von Aufgaben ist es notwendig, von diesem Bilde des starren Körpers abzugehen, es zu erweitern; dies führt dann zur Elastizitäts- und Festigkeitslehre (d. i. die Mechanik der



im gewöhnlichen Sinne festen Körper) einerseits und zur Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper (Hydro- und Aeromechanik) andererseits.

Die Gültigkeit der mechanischen Grundgesetze, die wir im folgenden aufstellen werden, wird durch die Art des Mediums, auf das wir sie anwenden, nicht beeinflusst, lediglich die Form ihrer Anwendung ist für verschieden beschaffene Medien verschieden.

b) Nach der Beschaffenheit der Probleme unterscheiden wir in der Mechanik der starren Körper:

I. Die Statik, d. i. die Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte und vom Gleichgewichte (2). Bei den meisten Aufgaben treten die Kräfte als unveränderliche Größen auf; unter Umständen werden sie auch als veränderlich betrachtet, in der Statik sind sie dann aber nur Funktionen der Koordinaten allein. Eine Abhängigkeit von der Zeit tritt dabei nicht auf.

II. Die Bewegungslehre oder Kinematik befaßt sich mit den geometrischen Hilfsmitteln (Wahl geeigneter Koordinaten u. dgl.), die für die Beschreibung der Bewegungen nötig sind. Dabei begegnen wir den beiden wichtigen Begriffen Geschwindigkeit und Beschleunigung. Genauer gesagt, handelt es sich in der Bewegungslehre um die Beschreibung der Bewegung ohne Rücksicht auf die einwirkenden Kräfte, und zwar entweder für einen bestimmten Zeitpunkt oder für ein bestimmtes Zeitintervall.

III. Die Dynamik behandelt die allgemeine Aufgabe der Mechanik, die Bewegung der Körper unter der Wirkung der Kräfte zu untersuchen, d. h. die Bestimmung der Koordinaten als Funktionen der Zeit, wie sie durch die auf die Körper einwirkenden Kräfte bedingt sind.

Ähnliche Unterscheidungen gelten natürlich auch für die Mechanik der elastischen, flüssigen und gasförmigen Körper.

**5. Grundeinheiten, Dimensionen, Maßsysteme.** Der Forderung, für alle Erscheinungen, die gesetzmäßig zu erfassen Aufgabe der Mechanik ist, zahlenmäßige Beziehungen anzugeben, können wir nur genügen, indem wir für alle eingeführten Größen gewisse Einheiten festlegen, in denen wir sie messen wollen; denn jedes Messen ist nur ein Vergleichen mit gewissen als Einheiten gewählten Dingen gleicher Art. Diese Einheiten sind im Grunde vollkommen willkürlich; sie müssen nur so beschaffen sein, daß wir sie stets mit entsprechender Genauigkeit herstellen können und daß sie — soweit menschliche Einsicht nur irgend beurteilen kann und physikalische Messungen irgendwelcher Art dies bestätigen — ihre Größe beibehalten. Die verschiedenen Begriffe, die wir in der Mechanik anwenden, machen die Einführung verschiedener Einheiten notwendig, da sie Dinge verschiedener Art sind; man sagt, sie haben verschiedene Dimensionen. In der Physik wird jedoch (nach C.F. Gauß, 1777—1855, und W. Weber, 1804—1890) gezeigt, daß sich alle vorkommenden Größen durch drei von ihnen ausdrücken lassen, für welche die Einheiten, die sog. Grundeinheiten, willkürlich gewählt werden können. Für welche Größen man die Einheiten als Grundeinheiten einführen soll, wird wieder nur

durch die Forderungen der Einfachheit und Zweckmäßigkeit entschieden; sie müssen selbstverständlich voneinander unabhängig sein. Die Einheiten für alle anderen Größen werden dann als (aus diesen Grundeinheiten) abgeleitete Einheiten bezeichnet.

Da wir Raum und Zeit als grundlegende Begriffe eingeführt haben, werden wir die für sie geltenden Einheiten auf jeden Fall als zwei der Grundeinheiten festsetzen. Als Längeneinheit dient das Meter [m], während die Flächen- und Raumeinheit daraus abgeleitet sind: das Quadratmeter [m<sup>2</sup>] und Kubikmeter [m<sup>3</sup>] und ihre Vielfachen nach unten und oben, die jedem aus dem täglichen Leben wohl vertraut sind. Als Zeiteinheit dient die Sekunde mittlerer Sonnenzeit [s], d. i. der  $24 \times 60 \times 60$ ste Teil des mittleren Sonnentages, und ihre Vielfachen nach oben, die Minute [min], Stunde [h], Tag und Jahr.

Wenn es nur auf ihre Sonderart ankommt, wird die Dimension einer Größe nur durch Einschließung eines sie kennzeichnenden Buchstabens in eckige Klammern angedeutet, also etwa für die Länge [L], für die Zeit [T]; es ist notwendig, die Dimension bei allen physikalischen und mechanischen Rechnungen, und zwar gleich in den verwendeten Einheiten hinzuschreiben. Die Umrechnung in die Vielfachen oder Teile der Einheiten derselben Größen (z. B. von m in km bei Längen, von s in h bei Zeiten) geschieht dann durch Division bzw. Multiplikation mit dem betreffenden Zahlenfaktor.

Es ist klar, daß in jeder Gleichung zu beiden Seiten nur Größen gleicher Art stehen können; daher gibt die Beachtung der Dimension sofort ein erstes Kennzeichen — eine erste Kontrolle — für die Richtigkeit eines Ansatzes: die in einer Gleichung additiv nebeneinander stehenden Größen müssen gleiche Dimension haben. Der Wert dieser Auffassung reicht jedoch noch viel weiter; in vielen Fällen gelingt es, die Form physikalischer Gesetze ohne Rechnung durch bloße „Dimensionsbetrachtungen“ anzugeben.

Nicht so unmittelbar naheliegend wie bei Raum und Zeit ist es, für welche mechanische Größe man die Einheit als dritte Grundeinheit einführen soll.

**6. Das technische Maßsystem. Kilogramm als Kräfteinheit.** Der Begriff der Kraft ist, wie schon erwähnt, aus dem Gefühle der Anstrengung hervorgegangen, die wir beim Heben einer Last oder der Überwindung irgendeines Widerstandes fühlen; die Stärke dieser Empfindung kann als das erste, allerdings noch wenig exakte Maß der Kraft dienen. Aus diesem unbestimmten Maße, das uns unser Muskelgefühl gibt, konnte erst dadurch die Grundlage für ein exaktes, wissenschaftlich brauchbares Maß geschaffen werden, daß man für die zu hebende Last das Gewicht des betreffenden Körpers setzte und erkannte, daß sich andere Dinge gleicher Art (wie der Zug einer Feder, der Druck eines Gases oder Dampfes auf einen Kolben oder die bei der Berührung zweier Körper auftretenden Kräfte u. dgl.) mit Hilfe der Waage (und zwar der gewöhnlichen Hebelwaage) mit solchen Gewichten vergleichen ließen.

In der Technik wird (wie im täglichen Leben) als dritte Grundeinheit die Einheit für die Kraft gewählt, und zwar das Kilogramm [kg], d. i. das Gewicht eines Metallstückes (Prototyps) von bestimmter Größe an einem bestimmten Orte unter der Wirkung einer „normalen“ Schwerebeschleunigung ( $g = 9,80665 \text{ ms}^{-2}$ ), das in Paris aufbewahrt wird und von dem alle Staaten getreue Kopien besitzen. Ursprünglich war 1 kg definiert als Gewicht der Masse von  $1 \text{ dm}^3$  reinen Wassers von  $4^\circ \text{ C}$  unter der Wirkung der normalen Schwerebeschleunigung. Das Dimensionszeichen für die Kraft sei [K]. Die Größe des Gewichtes jedes Körpers ändert sich (wegen der Änderung der Schwerebeschleunigung) mit dem Orte auf der Erde — da diese Änderung aber nur gering ist, so wird in der Technik darauf keine Rücksicht genommen.

In der Technik ist für das Kilogramm als Krafteinheit auch die Bezeichnung „Kil“ vorgeschlagen worden, um sie von dem Kilogramm als Masseneinheit zu unterscheiden; doch hat sich diese bisher noch nicht einzubürgern vermocht.

Außer dem kg haben noch Teile und Vielfache davon besondere Namen und Bezeichnungen erhalten, so z. B.

$$\begin{aligned} 0,001 \text{ kg} &= 1 \text{ Gramm} = 1 \text{ g}, \\ 0,01 \text{ kg} &= 1 \text{ Dekagramm} = 1 \text{ dkg}, \\ 1000 \text{ kg} &= 1 \text{ Tonne} = 1 \text{ t}, \\ 10000 \text{ kg} &= 1 \text{ Waggon} = 1 \text{ W} = 10 \text{ t}. \end{aligned}$$

Die Einheit für die Kraft ist die dritte Einheit des technischen Maßsystems, dessen zwei erste Glieder die Einheiten für die Länge und Zeit sind. Aus diesen Grundeinheiten können, wie oben gesagt, die Einheiten für alle anderen Größen abgeleitet werden (abgeleitete Einheiten).

**7. Das dynamische Grundgesetz. Masse. Gewicht.** Der heutigen technischen Mechanik liegt das Galilei-Newtonsche System zugrunde; dieses ist auf einer Anzahl von Grundsätzen axiomatischen Charakters aufgebaut, die zum ersten Male von J. Newton (1643—1727) formuliert wurden, ihre heutige Bedeutung aber erst viel später erhalten haben. Die Newtonsche Auffassungsweise wurde indessen schon durch G. Galilei (1564—1642) vorbereitet, von dem wir umfangreiche Erörterungen über die Grundbegriffe der Mechanik besitzen.

Die im Abschnitt 6 erwähnte Bestimmung der Größe einer Kraft mittels der Waage gibt nämlich noch keinerlei Aufschluß darüber, welche Wirkung eine solche Kraft (Anziehung, Feder, Gasdruck) an einem Körper, der sich bewegen kann, hervorbringt. Die Erfahrung zeigt zunächst nur, daß jede derartige Einwirkung von dem Körper selbst abhängt und von einer Änderung des Bewegungszustandes des Körpers begleitet ist; wir haben vorerst zu erklären, was darunter zu verstehen ist.

Die einfachste Bewegungsform, die man sich vorstellen kann, ist die, bei der sich alle Punkte des Körpers in parallelen (kongruenten) Bahnen bewegen und in gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegen; eine solche Bewegung nennt man eine gleichförmige und den Weg in

1 s nennt man die Geschwindigkeit (Bezeichnung  $c, v$ ). Unter Bewegungszustand (Geschwindigkeitszustand) versteht man den Inbegriff der für jeden Zeitpunkt definierten Geschwindigkeiten aller seiner Punkte. Von einer Änderung des Bewegungszustandes eines Körperpunktes spricht man, wenn sich seine Geschwindigkeit nach Größe oder Richtung ändert; das Maß für die Änderung der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit nennt man Beschleunigung (Bezeichnung  $b$ ). Beide können, wie wir später sehen werden, gemessen und durch Längen und Zeiten dargestellt werden; ihre Einheiten sind daher aus den Längen- und Zeiteinheiten ableitbar und haben folgende Dimensionen:

$$[v] \equiv [\text{Geschwindigkeit}] = [LT^{-1}], \quad [b] \equiv [\text{Beschleunigung}] = [LT^{-2}].$$

Die Größe der Bewegungsänderung, also der Beschleunigung (die z. B. eine Feder an einem Körper hervorbringt), ist nun erfahrungsgemäß durch die Größe der Federkraft (Ausreckung der Feder, Anspannung) bedingt, und zwar ist sie dieser Kraft  $K$  [kg] direkt proportional. Dies wird durch einen Versuch bestätigt, bei dem man die Feder (unter möglichster Ausschaltung aller Widerstände) auf den Körper wirken läßt und die entsprechende Beschleunigung mißt; bringt man dann auf den gleichen Körper 2, 3 . . . solcher Federn an, so beobachtet man, daß die entsprechenden Beschleunigungen 2-, 3- . . . mal so groß wie die zuerst erhaltenen sind. Nun ändern wir den Versuch in der Weise ab, daß wir ein und dieselbe Feder nehmen, aber die Stoffmenge des Körpers (z. B. die Eisenmenge) verändern. Man beobachtet dann, daß mit zunehmender Menge die entstehende Beschleunigung abnimmt, und zwar ist die Beschleunigung der Stoffmenge verkehrt proportional.

Aus beiden Versuchen folgt unmittelbar die Beziehung

$$\boxed{K = mb \quad \text{oder} \quad b = K/m,} \quad (1)$$

wobei  $m$  eine Größe ist, die der Stoffmenge des Körpers, also natürlich auch dessen Gewicht proportional ist, aber doch nicht mit dem Gewicht identisch sein kann; es hätte sonst diese Gleichung gar keinen Sinn, da eine Kraft  $[K]$  nicht dem Produkt einer Kraft (Gewicht) und einer Beschleunigung gleich sein kann. Die Größe  $m$  wird die Masse des Körpers genannt; sie ist eine dem betreffenden Körper eigentümliche Größe, deren Dimension (im technischen Maßsystem) aus (1) unmittelbar folgt, da

$$\boxed{m = K/b,} \quad (2)$$

also ist

$$[m] \equiv \text{Masse} = \frac{[\text{Kraft}]}{[\text{Beschleunigung}]} = \left[ \frac{K}{LT^{-2}} \right] = [KL^{-1} T^2].$$

Die Masse ist also im technischen Maßsystem aus den anderen Größen abgeleitet (ähnlich wie z. B. Geschwindigkeit aus Weg und Zeit usw.).

Was den Zusammenhang der Masse  $m$  mit dem Gewicht  $G$  des Körpers betrifft, so erinnern wir an die Beobachtungstatsache, daß die „Schwerkraft“, d. i. ja das Gewicht, allen Körpern (an einem bestimmten Punkt der Erdoberfläche) die gleiche Beschleunigung (und zwar etwa  $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ ) erteilt; wir erhalten daher die Beziehung:

$$G = m g. \quad (3)$$

Als Einheit der Masse werden wir folgerichtig jene Stoffmenge ansprechen, die durch die Kraft von 1 kg die Beschleunigung  $1 \text{ ms}^{-2}$  erhält. Da das Gewicht  $G$  dem Körper nicht die Beschleunigung 1, sondern  $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$  erteilt, so hat ein 9,81 kg schwerer Körper die Masse 1 [ $\text{kgm}^{-1} \text{ s}^2$ ]; denn nach Gl. (3) ist  $m = 1$  für  $G = 9,81 \text{ kg}$  und  $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ ; ein Körper, der 1 kg schwer ist, hat die Masse  $\frac{1}{9,81} \approx \frac{1}{10} \text{ kgm}^{-1} \text{ s}^2$ .

Die Gl. (1) ist das sog. dynamische Grundgesetz (II. Newtonsches Gesetz, 1686); es bildet die Grundlage der ganzen Entwicklung der Dynamik und besagt: Durch die Größe der einwirkenden Kraft und die Masse des Körpers, auf den sie wirkt, ist dessen Beschleunigung völlig bestimmt; die Beschleunigung ist proportional der Kraft und verkehrt proportional der Masse und erfolgt [wie bei der später folgenden Erweiterung der Gl. (1) auf Vektorform noch genauer erklärt werden wird] in der Richtung der einwirkenden Kraft.

Dieses Gesetz gilt zunächst nur für Körper, deren Ausdehnungen klein sind, also für Punktkörper, oder, anders ausgedrückt, wenn Drehbewegungen keine Rolle spielen. Über seine Erweiterung für endliche Körper siehe III. Teil: Dynamik.

Von der Tatsache, daß die Masse einen vom Gewichte völlig verschiedenen physikalischen Begriff darstellt, kann man sich durch folgende (von E. Mach, 1838—1916, angegebene) einfache Versuche unmittelbar überzeugen:

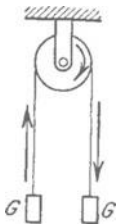


Abb. 1.

Zum Heben zweier gleicher Lasten  $G$ ,  $G$  muß ihr Gewicht überwunden werden, was wir durch die Muskelanstrengung wahrnehmen können. Knüpft man beide Gewichte an die Enden einer Schnur und führt diese um eine Rolle (Abb. 1), so widerstehen sie jeder Bewegungsänderung (Beschleunigung) nur durch ihre Masse. Wollen wir beide Massen z. B. im Sinne des Pfeiles in Bewegung setzen, so empfinden wir deutlich die Kraft, die wir dazu aufwenden müssen, und die



Abb. 2.

Anstrengung wird um so größer sein, je größer die Massen der Körper sind und je rascher wir die Körper in Bewegung setzen wollen. — Oder: ein großes Gewicht, an einem Faden als Pendel (Abb. 2) aufgehängt, kann mit geringer Mühe in einer kleinen Fadenablenkung neben der Gleichgewichtslage erhalten werden; die Kraft, die (bei kleiner Ablenkung) das Pendel in die Gleichgewichtslage zurückzieht, ist sehr



gering; trotzdem empfinden wir einen bedeutenden Widerstand, wenn wir das Gewicht rasch seitlich bewegen oder in seiner Bewegung anhalten wollen.

Die Masse ist also, obwohl dem Gewichte proportional, doch ein vom Gewichte verschiedenes bewegungsbestimmendes Merkmal; sie hängt von der stofflichen Beschaffenheit des Körpers ab und ist eine jedem Körper eigentümliche feste Größe.

Jede in Bewegung befindliche oder in Bewegung zu setzende Masse beeinflußt diese Bewegung vor allem durch ihre Trägheit; außerdem ist jede Masse schwer, d. h. Angriffstelle von Anziehungskräften aller anderen Massen. (Für einen Körper in der Nähe der Erde kommt nur die Anziehung der Erde selbst in Frage, die wir eben als das Gewicht bezeichnen.) Beide Eigenschaften, d. h. Trägheit und Schwere sind immer vorhanden, und nur unter bestimmten Voraussetzungen und für bestimmte Zwecke kann von der einen oder anderen — in gewissen Fällen auch von beiden — abgesehen werden.

Der Übergang von der statischen Methode der Kraftmessung, die sich auf den Vergleich von Kräften mit Hilfe der Waage gründet, zur dynamischen oder kinetischen, für die das dynamische Grundgesetz den Ausgangspunkt bildet und die die entstehenden Beschleunigungen zur Messung heranzieht, ist für die gesamte Entwicklung der Mechanik von grundsätzlicher Bedeutung geworden (9).

**8. Das physikalische Maßsystem. Kilogramm als Masseneinheit.** Die Beschleunigung der Schwere  $g$  hängt erfahrungsgemäß von dem Ort auf der Erdoberfläche und von der Höhe über dieser ab, es muß daher in Gl. (3) mindestens einer der Größen  $G$  oder  $m$  dieselbe Veränderlichkeit zugeschrieben werden. Im Hinblick auf das dynamische Grundgesetz (1), das dieselbe Beziehung für beliebige Kräfte, Massen und Beschleunigungen ausdrückt, wird in der Mechanik der Faktor  $m$  als konstant und das Gewicht  $G$  zufolge der Gl. (3) als mit  $g$  veränderlich angenommen.

Die Masse wird als eine jedem Körper eigentümliche Konstante eingeführt, die sein Verhalten gegenüber Kräften, die auf Änderung seines Bewegungszustandes hinführen, kennzeichnet.

Ähnlich wie für Längen und Zeiten ist die Konstanz der Masse als eine Näherung anzusehen, die bei einer allgemeineren Auffassung der Naturerscheinungen (Relativitätstheorie) nicht aufrechterhalten werden kann.

Bei Körpern von endlichen Abmessungen sind, wie im III. Teil näher ausgeführt wird, außer der Masse noch andere Größen als bestimmend für ihr dynamisches Verhalten einzuführen (Trägheitsmomente, Zentrifugalmomente).

Dieser Festsetzung der Unveränderlichkeit der Masse gegenüber ist es nicht folgerichtig, wenn im technischen Maßsystem als dritte Grundeinheit die Einheit für die Kraft und nicht die für die Masse genommen wird. Ein gewichtiger Grund hierfür liegt in der besonderen Rolle, die die Statik in der gesamten Technik und in ihren geschicht-

lichen Anfängen spielt, die sich nur mit Kräften befaßten und die Bewegungserscheinungen gänzlich außer acht ließ. Im Gegensatz hierzu trägt das physikalische Maßsystem dieser Konstanz der Masse dadurch Rechnung, daß es als dritte Grundeinheit die Masse des in 6 beschriebenen Prototyps als Masseneinheit einführt. Unglücklicherweise wird aber die Einheit der Kraft im technischen und die Einheit der Masse im physikalischen System durch dasselbe Wort — Kilogramm — bezeichnet, und dies ist einer der Hauptgründe für die Verwirrung, die vielfach noch immer in dieser grundsätzlichen Frage herrscht.

**9. Über das Messen von Massen und Kräften.** In 6 wurde schon auf den Vergleich von Kräften (insbesondere von Gewichten) mit Hilfe der gewöhnlichen Hebelwaage hingewiesen; wir sprechen in diesem Falle von der statischen Methode der Kraftmessung. Da die Massen der Körper ihren Gewichten proportional sind, so kann für einen bestimmten Ort der Erde die Hebelwaage ebensowohl zum Messen — d. h. Vergleichen — von Gewichten wie auch von Massen dienen: nimmt man das als Einheit gewählte Vergleichstück als Masse, so vergleicht man Massen miteinander, nimmt man es als Gewicht, so handelt es sich um den Vergleich von Gewichten.

Ein anderes Hilfsmittel zur statischen Messung von Kräften ist die Federwaage; bei dieser wird die Zusammendrückung oder Ausreckung einer Feder als Maß für die Größe der einwirkenden Kraft genommen; die Federwaage wird durch die als Einheit angenommene Kraft — 1 kg Gewicht — „geeicht“. Nur wird dieses Gewicht, das wir an einem Orte der Normalschwere als 1 kg bezeichnen, an einem anderen Ort mit anderem  $g$  eine andere Zusammendrückung ergeben, also ein anderes Gewicht zeigen. An Orten mit größerem  $g$  (in tiefen Schächten oder am Pol) wird die Zusammendrückung größer sein als an Orten mit kleinerem  $g$  (auf Bergspitzen oder am Äquator).

Man beachte jedoch: wenn man die wegen des veränderlichen Wertes von  $g$  erforderlichen Korrekturen kennen würde, so könnte man die Federwaage ebensowohl zur Messung von Massen verwenden, wie auch die Hebelwaage zur Messung von Gewichten — und zwar auch an verschiedenen Punkten der Erde. (Dies ist nicht wesentlich anders als etwa die Temperaturkorrekturen an Maßstäben und Uhren für genaue Längen- und Zeitmessungen.)

Von dieser statischen Meßmethode ist die dynamische zu unterscheiden, bei der die Masse des gewählten Normalkörpers als Masseneinheit und jene Kraft als Krafteinheit genommen wird, die jenem Körper die Beschleunigung  $1 \text{ ms}^{-2}$  erteilt. Die Masse irgend welcher anderer Körper bestimmt man dann, indem man diese Krafteinheit auf sie wirken läßt und die entstehende Beschleunigung  $b$  mißt; wegen der Gl. (2) ist dann der Kehrwert  $1/b$  die gesuchte Masse. — Ebenso wird die Kraft an irgendeiner Stelle eines Kraftfeldes (das von anziehenden Massen herrührt) oder einer Feder oder eines gespannten Fadens dadurch gemessen, daß man die gewählte Masseneinheit an die betreffende Stelle des Feldes bringt oder auf sie die Feder oder den

gespannten Faden wirken läßt, und wieder die entstehende Beschleunigung  $b$  (aus Längen- und Zeitmessungen) ermittelt; diese ist dann wegen der Gl. (1) gleich der dort wirkenden Kraft. Wenn dann die Kraft an jeder Stelle des Feldes bestimmt ist, dann läßt sich, wie im II. Teil näher erläutert wird, aus der Gl. (1) die endliche Bewegung des Körpers durch Integration, die analytisch oder numerisch oder zeichnerisch geleistet werden kann, ermitteln.

Die Hauptsache ist nun die Aussage, daß die nach diesen beiden Methoden gefundenen Größen — die nach der statischen Methode mittels der Waage gefundene (oder durch Fallversuche festgestellte) schwere Masse — und die nach der dynamischen Methode gefundene träge Masse — tatsächlich dieselben Größen sind und vollständig miteinander übereinstimmen. Diese Aussage ist gar nicht selbstverständlich, sie ist vielmehr in ihrer vollen Bedeutung für die hier nur skizzierte Grundlegung der Mechanik erst vor ganz kurzer Zeit, und zwar durch die Entwicklung der allgemeinen Relativitätstheorie hervorgetreten.

**10. Zusammenstellung der Dimensionen und Einheiten im technischen und physikalischen Maßsystem.** Die folgende Tafel enthält eine Übersicht über die wichtigsten in der Mechanik auftretenden Größen mit ihren Dimensionen und Einheiten. Den meisten von ihnen werden wir erst im Laufe der späteren Betrachtungen begegnen. Die Unterscheidung in der Reihe mit der Bezeichnung „Art“ — Skalar oder Vektor — kommt in Kapitel II zur Sprache.

Von den zwischen den gleichartigen Größen bestehenden Beziehungen, die sich unmittelbar aus den getroffenen Festsetzungen ergeben, merken wir hier noch die folgenden an:

Kraft . . . . .	1 kg = 9,81 · 10 <sup>5</sup> Dyn,
Arbeit . . . . .	1 kgm = 9,81 · 10 <sup>7</sup> Erg = 9,81 Joule,
Leistung . . . . .	1 kgms <sup>-1</sup> = 9,81 Watt = $\frac{1}{75}$ PS, 1 PS = 736 Watt.

**11. Trägheitsgesetz. Inertialsysteme.** Das dynamische Grundgesetz (1) zeigt nun (da sicher  $m \neq 0$ ), daß die Aussage  $K = 0$  notwendig mit  $b = 0$  verknüpft ist; d. h. bei fehlenden Kräften bewegt sich der Körper gleichförmig in gerader Bahn. Diese Aussage ist das Trägheitsgesetz der Newtonschen Mechanik (I. Newtonsches Gesetz); die Bahn eines solchen, von äußeren Kräften freien Körpers nennt man eine Trägheitsbahn.

Dabei tritt nun folgende grundsätzliche Schwierigkeit auf. Die Aussage, daß sich ein Körper gleichförmig in einer Geraden bewegt, hat naturgemäß — wie jede derartige Aussage — nur dann einen Sinn, wenn man sie auf ein bestimmtes Koordinatensystem bezieht. Jede solche Trägheitsbahn wird, von einem anderen Koordinatensystem aus betrachtet, irgendwie gekrümmt oder mit veränderten Geschwindigkeiten durchlaufen erscheinen; wenn das Trägheitsgesetz im ersten System erfüllt war, braucht dies im zweiten nicht mehr der Fall zu sein. Nur in Koordinatensystemen, die sich gegeneinander geradlinig und gleichförmig bewegen, werden Trägheitsbahnen immer wieder als solche (allerdings jedesmal mit veränderter Geschwindigkeit durchlaufen) erscheinen.



Dimensionen und Einheiten im technischen und physikalischen Maßsystem.

Größe	Art	Technisches Maßsystem		Physikalisches Maßsystem	
		Dimension	Einheit	Dimension	Einheit
		Länge . . . . .	Vektor	L	l m
Zeit . . . . .	Skalar	T	l s	T	l s
Geschwindigkeit . . . . .	Vektor	LT <sup>-1</sup>	l ms <sup>-1</sup>	LT <sup>-1</sup>	l cms <sup>-1</sup>
Beschleunigung . . . . .	„	LT <sup>-2</sup>	l ms <sup>-2</sup>	LT <sup>-2</sup>	l cms <sup>-2</sup>
Flächengeschwindigkeit . . . . .	„	L <sup>2</sup> T <sup>-1</sup>	l m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>	L <sup>2</sup> T <sup>-1</sup>	l cm <sup>2</sup> s <sup>-1</sup>
Winkelgeschwindigkeit . . . . .	„	T <sup>-1</sup>	l s <sup>-1</sup>	T <sup>-1</sup>	l s <sup>-1</sup>
Winkelbeschleunigung . . . . .	„	T <sup>-2</sup>	l s <sup>-2</sup>	T <sup>-2</sup>	l s <sup>-2</sup>
Kraft . . . . .	„	K	l kg	MLT <sup>-2</sup>	l g cms <sup>-2</sup> = l Dyn
Masse . . . . .	Skalar	KL <sup>-1</sup> T <sup>2</sup>	l kgm <sup>-1</sup> s <sup>2</sup>	M	l g
Drehmoment einer Kraft . . . . .	Vektor	KL	l kgm	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>	l Dyn cm
Statisches Moment einer Masse . . . . .	„	KT <sup>2</sup>	l kgs <sup>2</sup>	ML	l g cm
Trägheits- und Zentrifugalmoment . . . . .	(Tensor)	KLT <sup>2</sup>	l kgms <sup>2</sup>	ML <sup>2</sup>	l g cm <sup>2</sup>
Impuls, Bewegungsgröße . . . . .	Vektor	KT	l kgs	MLT <sup>-1</sup>	l Dyn s
Einheitsgewicht (spezifisches Gewicht) . . . . .	Vektor (meist als Skalar gebraucht)	KL <sup>-3</sup>	l kgm <sup>-3</sup>	ML <sup>-2</sup> T <sup>-2</sup>	l gcm <sup>-2</sup> s <sup>-2</sup>
Dichte (spezifische Masse) . . . . .	Skalar	KL <sup>-4</sup> T <sup>2</sup>	l kgm <sup>-4</sup> s <sup>2</sup>	ML <sup>-3</sup>	l g cm <sup>-3</sup>
Arbeit, Wucht, Potential, Energie . . . . .	„	KL	l kgm	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>	l Dyn cm = l Erg (10 <sup>7</sup> Erg = l Joule)
Leistung, Effekt . . . . .	„	KLT <sup>-1</sup>	l kgms <sup>-1</sup>	ML <sup>2</sup> T <sup>-3</sup>	l Erg s <sup>-1</sup> (10 <sup>7</sup> Erg s <sup>-1</sup> = l Watt)
Wirkung (= Arbeit × Zeit) . . . . .	„	KLT	l kgms	ML <sup>2</sup> T <sup>-1</sup>	l Erg s

Dieser Sachverhalt scheint darauf hinzudeuten, daß in der Natur bestimmte Koordinatensysteme ausgezeichnet sind, in denen das Trägheitsgesetz gilt, gegenüber anderen, denen diese Eigenschaft nicht zukommt. Die Frage ist nun, wie haben wir ein Koordinatensystem anzunehmen, und welche Gewähr haben wir dafür, daß ein solches ausgezeichnetes System ein Inertialsystem (inertia = Trägheit) ist? Newton hat diese Frage damit beantwortet, daß er das Vorhandensein eines absoluten Raumes angenommen hat, in dem das Trägheitsgesetz gelten soll. Heute müssen wir sagen, daß es kein physikalisches Hilfsmittel, keine Beobachtung und keinen Versuch gibt, der dazu dienen könnte, die Entscheidung zugunsten irgendeines besonderen Systems zu treffen, das dann als Trägheitssystem zu gelten hätte. Wenn wir trotzdem für die Zwecke der rechnerischen Beherrschung der Bewegung der Himmelskörper ein mit dem Fixsternhimmel verbundenes Koordinatensystem als Inertialsystem einführen, so geschieht dies nur aus Gründen der Einfachheit und Zweckmäßigkeit, eine darüber hinausgehende Behauptung hat man in dieser Annahme nicht zu erblicken. Der günstige Erfolg dieser Einführung liegt in dem Umstande, daß die Masse des Fixsternsystems ungeheuer groß gegen die Massen der Himmelskörper (Planeten, Monde, Kometen) ist, deren Bewegungen unserer Beobachtung und Rechnung zugänglich sind.

Aus den gleichen Gründen wird für die Bewegung der Körper auf der Oberfläche der Erde, soweit sie sich nur über kleine Räume und Zeiten erstrecken und kleine Werte der Geschwindigkeiten enthalten, mit hinreichender Genauigkeit die Erde selbst als solches Trägheitssystem (Inertialsystem) eingeführt.

**12. Arten der Kräfte. Wechselwirkung.** Die Kräfte, mit denen wir es in der Mechanik zu tun haben, können nach verschiedenen Gesichtspunkten voneinander unterschieden werden.

a) Je nach der Art und Weise, wie die Wirkungen der Körper aufeinander, die wir unter dem Bilde von Kräften auffassen, verteilt sind, unterscheiden wir Massenkräfte oder Raumkräfte, die über die ganze Ausdehnung der Körper, also räumlich verteilt, anzunehmen sind (Anziehungskräfte, Gravitation, Fliehkraft) und Flächenkräfte, die nur bei unmittelbarer Berührung der Körper zustande kommen und ihren Sitz an den Grenzflächen des Körpers haben (Drücke der Körper aufeinander bei Berührung, Auflager- und Stützkkräfte, Reibung, Dampfdruck usw.) oder als innere Kräfte (Spannungen) an den Grenzflächen jedes Raumteiles im Innern der Körper auftreten und deren Zusammenhang zu einem Ganzen herstellen. Die Erkenntnis der gemeinsamen Natur dieser aus ganz verschiedenen Erscheinungen hergeleiteten Einflüsse hat erst die Ausdehnung der Mechanik auf die „gestützten“ und „geführten“ Systeme ermöglicht, die den Gegenstand der technischen Anwendungen bilden.

Zur Vereinfachung gewisser Betrachtungen werden gelegentlich auch Einzelkräfte, die in einzelnen Punkten der Oberfläche auf die Körper einwirken, als Oberflächenkräfte eingeführt, doch muß man sich darüber klar sein, daß gerade diese in der elementaren Mechanik

am meisten verbreitete Annahme die weitestgehende Idealisierung darstellt.

b) Eine weitere wichtige Unterscheidung ist die zwischen eingepägten und Auflagerkräften (Reaktionskräften). Zu den ersteren rechnen wir die unmittelbar vorgegebenen, in all ihren Bestimmungsstücken bekannten Kräfte, wie Gewichte, die Lasten unserer Bauwerke, Federkräfte, Treibkräfte der Maschinen (Dampfdruck) u. dgl. Nun kommen aber in der Technik und in der Natur niemals einzelne Körper mit eingepägten Kräften allein vor, sondern stets nur in Verbindung oder Berührung mit anderen, auf die sie sich stützen; es ist ein wichtiger, für die Behandlung der geführten und gestützten Systeme grundlegender Gedanke, jeden derartigen Einfluß, der geometrisch als gewisse Bedingung erscheint, stets wieder als Kraft [und zwar als Flächenkraft im Sinne der Unterscheidung a)] einzuführen, und zwar so, wie es durch die besondere Art der Stützung gekennzeichnet ist (wörüber in 33 genauere Angaben folgen).

Eine besondere Stellung nimmt bei dieser Unterscheidung die Reibung ein, die als eine in die Richtung der gemeinsamen Berührungsebene fallende Flächenkraft eingeführt wird. Bei relativer Ruhe der sich stützenden Körper spricht man von Haftreibung, sonst von Bewegungsreibung. Die Haftreibung, die i. a. nach Größe, Richtung und Sinn als Unbekannte eingeführt werden muß, ist eine Auflagerkraft, während die Bewegungsreibung bis zu einem gewissen Grade bestimmt ist, nämlich stets der Richtung der Bewegung entgegenwirkt, und den eingepägten Kräften zugezählt wird.

Ein wichtiger Grundsatz, der in den Anwendungen immer wieder zur Verwendung kommt, ist das sogenannte Wechselwirkungsprinzip oder der Satz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung (III. Newtonsches Gesetz). Er besagt, daß die Kräfte in der Natur nur paarweise auftreten, daß also mit jeder Kraft, die auf einen Körper einwirkt, notwendig eine gleich große und entgegengesetzt gerichtete Kraft auf einen andern verknüpft ist (z. B. die Anziehung der Sonne auf die Erde ist gleich und entgegengesetzt der der Erde auf die Sonne, ebenso der Druck eines Körpers auf den Tisch dem des Tisches auf den Körper usw.). Die eigentliche Bedeutung dieses Prinzipes kann erst vollständig erklärt werden, wenn die Begriffe „Reaktionskraft“ und „Trägheitskraft“ eingeführt sind.

Dieser Satz von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung gilt nicht nur für Kräfte, sondern — nach Einführung des Begriffes des starren Körpers — auch für Kraftpaare oder Momente: Jedem auf einen Körper einwirkenden Moment entspricht ein gleich großes und entgegengesetztes auf einen zweiten Körper: z. B. ist in einem Flugzeug das auf die Luftschraube ausgeübte Drehmoment gleich groß und entgegengesetzt dem auf den Flugdrachen wirkenden.

Das Wechselwirkungsprinzip gestattet auch, wie E. Mach gezeigt hat und wie hier im Anschluß an 9 noch bemerkt werden mag, eine von der Kraft selbst unabhängige Definition des Massenbegriffs. Man denke sich zwei Körper von allen übrigen Wirkungen isoliert und nur ihrer gegenseitigen Anziehung ausgesetzt, also etwa an zwei sehr langen Fäden nebeneinander aufgehängt und durch gespannte Gummischnüre miteinander verbunden. Die Massen der beiden Körper verhalten sich

dann umgekehrt wie die Beschleunigungen, die sie sich bei Loslassung erteilen. Wenn eine der Massen als Einheit genommen wird, so kann auf diese Weise jede andere bestimmt werden.

**13. Bemerkungen über die Beschaffenheit der Aufgaben der Mechanik und ihrer Behandlung.** Um irgendeine Erscheinung der Natur — wozu wir auch die der Technik rechnen — im Hinblick auf die dabei auftretenden mechanischen (oder physikalischen) Vorgänge theoretisch zu untersuchen, ist stets eine geeignete Idealisierung erforderlich; man versteht darunter die Erfassung der charakteristischen Merkmale und Eigenschaften und die Abstreifung alles Unwesentlichen und Zufälligen. Diese Unterscheidung ist dabei keineswegs immer eindeutig möglich und hat auch, wie die Geschichte der Wissenschaft lehrt, im Laufe der Zeit vielfache Änderungen erfahren. Der Zweck der Idealisierung ist der, ein Bild der Wirklichkeit herzustellen, das einerseits einfach genug ist, um die Anwendung der Methoden der Mathematik zur Festlegung zahlenmäßiger Beziehungen zu ermöglichen und andererseits doch so weitreichend ist, daß die charakteristischen Züge der Erscheinung getreu wiedergegeben werden. Der Ausbau hinsichtlich der behandelten Probleme, sowie auch die Erweiterung hinsichtlich des Ausmaßes der in Betracht gezogenen Umstände macht den Fortschritt der Wissenschaft aus.

Die Notwendigkeit der Idealisierung bringt es mit sich; daß über das Verhalten der betrachteten Körper und über die zu erfassenden Umstände in jedem einzelnen Falle (bzw. für jede Klasse von Erscheinungen) gewisse Annahmen gemacht werden müssen. Es liegt nicht nur im Sinne der Wissenschaftlichkeit, sondern ist auch für die Übersicht und für die Beurteilung des gesamten Tatsachenmaterials wichtig, daß diese Annahmen als solche hervorgehoben und womöglich an die Spitze gestellt werden; dabei ist es günstig, sich klarzumachen, wie weit sie im einzelnen der Wirklichkeit entsprechen. Ob die Annahmen für die Darstellung einer Erscheinung ausreichen, wird nachträglich durch Vergleich des Ergebnisses mit den dieselbe Erscheinung betreffenden Beobachtungstatsachen entschieden.

Bei der Behandlung irgendeines mechanischen Problems können wir demgemäß folgende drei Schritte unterscheiden:

Der Ansatz, d. i. die Aufstellung der für ein Problem geltenden Gleichungen, ist der erste Schritt. Diese Gleichungen (auch Ungleichungen in gewissen Fällen) sind in der Statik der starren Körper gewöhnliche lineare Gleichungen in den Kräftekomponenten, in der Statik nichtstarrer (z. B. Fäden, Seile, Stäbe, Platten usw.) und in der Dynamik Differentialgleichungen; ihre Auflösung, die — je nach der Aufgabe —, in verschiedener Weise, analytisch, graphisch oder numerisch erfolgen kann, bildet den zweiten Schritt. Jedes Resultat ist endlich noch zu diskutieren — dritter Schritt; für das volle Verständnis einer Lösung ist es wichtig, sich klarzumachen, wie sie sich für besondere (z. B. extreme) Werte der gegebenen Größen (Längen, Kräfte, Reibungszahlen usw.) verhält. Diese Diskussion wird natürlich bei den Aufgaben, mit denen wir uns beschäftigen werden, stets ganz einfach

ausfallen, kann aber doch schon hier als Vorbereitung für die Behandlung verwickelterer Fälle von Nutzen sein.

Was nun die Quellen betrifft, aus denen die Mechanik ihre Ansätze und Ergebnisse gewinnt, so zeigt ihre Entwicklung, daß dabei sowohl aprioristische als auch empirische Elemente in Frage kommen. Schon der Ansatz eines dynamischen Problems läßt dies deutlich erkennen, wie sich z. B. aus dem Inhalt des dynamischen Grundgesetzes  $m \cdot b = K$  ergibt. Der Begriff der Beschleunigung ist aus einer Verknüpfung der Begriffe Raum und Zeit hervorgegangen und gehört gewiß der reinen Mathematik an. Auf der rechten Seite steht die gesamte einwirkende Kraft, und diese wird sich als bestimmte Funktion von anderen physikalischen, bei der Bewegung auftretenden Größen, wie z. B. von der Zeit, von Längen, Geschwindigkeiten, Dichten usw. darstellen; die Ausdrücke für diese Kräfte sind teilweise unmittelbar durch physikalische Messungen gewonnen (Fallgesetze, Reibungs-, Widerstandsgesetze usw.), teilweise mittelbar aus Beobachtungen erschlossen worden (Gravitationsgesetz usw.); die Form dieser Funktionen ist also — wenigstens zum Teil — empirischer Natur. Gerade in dieser, im dynamischen Grundgesetz enthaltenen eigentümlichen Verknüpfung kommt der zweifache Charakter der Begriffsbildungen der Mechanik deutlich zum Ausdruck. Die (durch Auflösung bzw. Integration) gewonnenen Ergebnisse, die mit Hilfe solcher „Ansätze“ abgeleitet werden, müssen natürlich der nachträglichen Prüfung durch die Erfahrung Stich halten. Sobald also Merkmale physikalisch gegebener Körper in Betracht kommen — und mit solchen hat sich die Technik zu beschäftigen —, sind die betreffenden Ansätze und Aussagen sicher unter Mitwirkung der Erfahrung gewonnen. — Für das Verständnis der Mechanik, die sich (teilweise schon in ihren Grundlagen) als eine eigentümliche Verbindung von mathematischen Begriffsbildungen und aus der Erfahrung gewonnenen Aussagen darstellt, ist die Auffassung des Unterschiedes der Herkunft ihrer Ansätze und Ergebnisse äußerst förderlich.

## II. Vektoralgebra.

**14. Skalare, Vektoren, Beiwerte.** Nur jene Dinge können zum Gegenstande einer exakten Wissenschaft gemacht werden, die gemessen und zahlenmäßig ausgedrückt werden können, also im Sinne der Mathematik Größen sind. In der Mechanik (und Physik) haben wir es mit drei Arten von solchen Größen zu tun, die voneinander wohl zu unterscheiden sind:

a) Skalare sind solche, die durch einen in bestimmten Maßeinheiten (Dimensionen) ausgedrückten Zahlenwert vollständig gekennzeichnet sind. Hierzu gehören z. B. Masse, Arbeit, Leistung (auch die Temperatur gehört hierher), ihre Einheiten wurden schon in 10 angegeben. Für Skalare gelten dieselben Rechengesetze wie für alle übrigen „benannten“ Zahlen.

b) Vektoren, d. s. solche, denen außer der (in einem bestimmten Maßstabe ausgedrückten) Größe noch eine Richtung im Raume (Orientierung) zukommt. Für sie sind auch die Bezeichnungen gerichtete Größen, Strecken, Segmente (auch „Stäbe“) in Gebrauch. Beispiele sind: Kraft, Kräftepaar, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Bewegungsgröße (Impuls), Winkelgeschwindigkeit, Moment der Bewegungsgröße (Drall, Impulsmoment), Winkelbeschleunigung, Gradient, Wirbel u. dgl.

Für Vektoren sind die folgenden Merkmale wesentlich: 1. eine bestimmte Richtung, 2. ein bestimmter Sinn in dieser Richtung, der

am einfachsten durch einen angesetzten Pfeil angedeutet wird, und 3. eine bestimmte Größe, die der Betrag des Vektors heißt.

Ein Vektor wird geometrisch durch das von einem Anfangspunkt  $A$  zu einem Endpunkt  $B$  reichende Stück einer geraden Linie dargestellt, die Gerade selbst ist jedoch innerhalb des zugehörigen Parallelenbündels unwesentlich, und ebenso kann auch der Anfangspunkt auf jeder Geraden beliebig verschoben werden (Abb. 3).

Dieser allgemeine Vektorbegriff muß zur Darstellung der im Folgenden zu behandelnden Beziehungen gewisse Einschränkungen erfahren, die von Fall zu Fall angegeben werden.

Was die Bezeichnung anlangt, so werden Vektoren gewöhnlich durch einen einzigen Buchstaben bezeichnet und zwar entweder durch  $\overline{K}$ ,  $\overline{v}$  (lateinische Buchstaben, überstrichen, mit der Aussage  $K$ -Vektor!) oder durch  $\mathfrak{K}$ ,  $\mathfrak{v}$  (gotische Buchstaben, ohne Strich). Der Betrag wird in beiden Fällen durch die zugehörigen lateinischen Buchstaben allein, also durch  $K$ ,  $v$  . . . dargestellt. Im folgenden wird die erste dieser Bezeichnungsweisen verwendet.

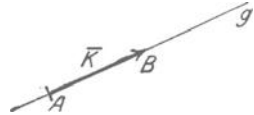


Abb. 3.

Die Ausdrucksweise „die Kraft ist ein Vektor“ will nur besagen, daß die Kraft die genannten Kennzeichen eines Vektors besitzt und ihr daher das Bild eines Vektors zugeordnet werden kann. Der Wert dieser Zuordnung, die durchaus nicht die einzig mögliche ist, erweist sich mit all ihren Folgerungen einerseits durch die Übereinstimmung dieser Folgerungen mit den Erfahrungen, andererseits wieder durch ihre besondere Zweckmäßigkeit und Einfachheit.

c) Als Beiwerte (Koeffizienten, Ziffern, Zahlen) bezeichnet man unbenannte (dimensionslose skalare) Größen, die bei verschiedenen Anlässen eingeführt und passend benannt werden (z. B. Reibungszahl, Stoßzahl, Ausflußzahl, Einschnürungszahl, Beiwert des Auftriebs und des Luftwiderstandes u. dgl.).

Nicht alle in der Mechanik betrachteten Eigenschaften der Körper können durch diese Größen allein dargestellt werden, gewisse Begriffsbildungen verlangen die Einführung von Vektorgrößen höherer Art, der sog. Tensoren (Tensoren 2. Stufe, Dyaden), z. B. führt das Studium der Trägheits- und Elastizitätseigenschaften der Körper auf solche Größen. Für die Zwecke des vorliegenden Buches kann jedoch auf ihre explizite Einführung verzichtet werden.

Wir gehen nun dazu über, die einfachsten Rechenregeln für Vektoren (Vektoralgebra) kennen zu lernen, die für die folgenden Entwicklungen von grundlegender Bedeutung sind.

**15. Addition und Subtraktion von Vektoren. Zerlegung.** Für die Addition von Vektoren gilt das Parallelogrammgesetz:

Je zwei Vektoren  $\overline{K}_1$  und  $\overline{K}_2$  bestimmen eindeutig einen Vektor  $\overline{K}$ , ihre Summe, auch resultierender Vektor, Summenvektor oder Mittelvektor genannt, die durch die Diagonale des über  $\overline{K}_1$  und  $\overline{K}_2$  errichteten Parallelogramms gegeben ist. In Zeichen

$$\boxed{\overline{K}_1 + \overline{K}_2 = \overline{K}.} \quad (4)$$



Dieser „geometrischen Addition“ (Abb. 4) kommen folgende Eigenschaften zu:

1. Die Summe  $\bar{K}$  ist unabhängig von der Reihenfolge, in der man die Einzelvektoren  $\bar{K}_1$  und  $\bar{K}_2$  aneinanderfügt

$$\bar{K} = \bar{K}_1 + \bar{K}_2 = \bar{K}_2 + \bar{K}_1.$$

(Vertauschbarkeitsatz, kommutatives Gesetz der Addition.) Sind die Vektoren parallel, so geht die geometrische Addition in die algebraische über.

2. Die Addition der Summe von  $\bar{K}_1$  und  $\bar{K}_2$  zu  $\bar{K}_3$  gibt dasselbe Ergebnis wie die Addition von  $\bar{K}_1$  zur Summe von  $\bar{K}_2$  und  $\bar{K}_3$ , also

$$(\bar{K}_1 + \bar{K}_2) + \bar{K}_3 = \bar{K}_1 + (\bar{K}_2 + \bar{K}_3)$$

(assoziatives Gesetz der Addition).

Die Summe von drei Vektoren, die nicht in einer Ebene liegen, ist die Diagonale des über ihnen errichteten Parallelepipeds (Abb. 5). Allgemein schreiben wir für die Summe von  $n$  beliebigen Vektoren

$$\bar{K}_1 + \bar{K}_2 + \dots + \bar{K}_n = \sum_{i=1}^n \bar{K}_i = \bar{K}. \quad (5)$$

Diese Summe  $\bar{K}$  ergibt sich, da zur Ermittlung der Summe von zwei Vektoren offenbar die Zeichnung eines Dreieckes genügt, als Schlußlinie des Streckenzuges, den man durch Aneinanderreihung dieser

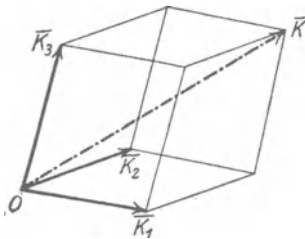


Abb. 5.

Vektoren in beliebiger Folge erhält; sie ist vom Anfangspunkt des ersten zum Endpunkt des letzten hin gerichtet. Fällt das Ende des letzten mit dem Anfang des ersten Vektors zusammen, dann ist die Summe Null. Der Vektor Null ist also jener, bei dem der Endpunkt mit dem Anfangspunkt zusammenfällt.

Der Betrag der Summe ist stets kleiner als die Summe der Beträge der Komponenten oder höchstens gleich dieser, also

$$K \leq K_1 + K_2 + \dots + K_n \equiv \sum_{i=1}^n K_i, \quad (6)$$

und das Gleichheitszeichen gilt offenbar nur, wenn alle Vektoren zueinander parallel sind.

Subtraktion. Sind umgekehrt  $\bar{K}$  und  $\bar{K}_1$  gegeben, so gibt es einen Vektor  $\bar{x}$ , für den  $\bar{K}_1 + \bar{x} = \bar{K}$ , also  $\bar{x} = \bar{K} - \bar{K}_1 = \bar{K} + (-\bar{K}_1) \equiv \bar{K}_2$ , und dieser heißt die (geometrische) Differenz von  $\bar{K}$  und  $\bar{K}_1$ .

Der Vektor  $-\bar{K}_1$  bedeutet dabei dasselbe wie  $\bar{K}_1$  mit entgegengesetztem Pfeil.

Für beliebig viele Vektoren der angegebenen Art (z. B. von Kräften durch einen Punkt) sind in dem Parallelogrammgesetz und seinen Folgerungen alle Aussagen enthalten, die die Zusammensetzung und Zerlegung betreffen. Für Größen jedoch, die nicht die Beschaffenheit von Vektoren dieser Art haben, z. B. für die auf einen starren Körper wirkenden Kräfte, die zueinander parallel oder beliebig im Raume verteilt sind, sind für die Ausführung einer derartigen „Addition“ noch weitere Festsetzungen notwendig, insbesondere muß der Begriff des starren Körpers eingeführt werden, auf dem sich dann die „starre“ Mechanik aufbaut (vgl. I. Teil).

Zerlegung. Umgekehrt ergibt sich nach Abb. 4 und 5 unmittelbar, daß jeder Vektor  $\bar{K}$  eindeutig in folgender Weise zerlegt werden kann: a) in zwei Teilvektoren  $\bar{K}_1$  und  $\bar{K}_2$  nach beliebigen, mit  $\bar{K}$  in einer Ebene liegenden Richtungen (Abb. 4), b) in drei Teilvektoren  $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \bar{K}_3$  nach drei gegebenen, voneinander und von  $\bar{K}$  unabhängigen Richtungen im Raume (Abb. 5). Diese Teilvektoren heißen auch Komponenten des gegebenen Vektors. Die Zerlegung ergibt sich durch Zeichnung des Parallelogramms bzw. Parallelepipeds nach den gegebenen Richtungen.

Damit sind die Fälle eindeutiger Zerlegung eines Vektors in Vektoren, die alle durch denselben Punkt gehen, erschöpft. Wird Zerlegung nach mehr als zwei bzw. drei Richtungen durch einen Punkt verlangt, so kommen Unbestimmtheiten ins Spiel, die durch besondere Festsetzungen behoben werden müssen.

**16. Projektionssatz.** Unter der Projektion eines Vektors  $\bar{K}$  auf eine Achse  $x$  versteht man das auf  $x$  gemessene Stück  $X$  zwischen den Fußpunkten der Senkrechten, die vom Anfangs- und Endpunkt von  $\bar{K}$  auf  $x$  gefällt werden, also wenn  $\sphericalangle (K, x) = \alpha$ , so ist (Abb. 6)

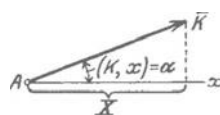


Abb. 6.

$$\boxed{X = K \cos \alpha.} \quad (7)$$

Für  $\alpha = 0$  ist  $X = K$ , für  $\alpha = \pi/2$  ist  $X = 0$ .

Werden also die Winkel von  $\bar{K}$  gegen die zueinander rechtwinkligen  $(x, y, z)$ -Achsen bzw. mit  $(\alpha, \beta, \gamma)$  bezeichnet, so sind die Projektionen von  $\bar{K}$  gegeben durch

$$X = K \cos \alpha, \quad Y = K \cos \beta, \quad Z = K \cos \gamma, \quad (8)$$

und da  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ , so ist

$$K = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (9)$$

Man beachte, daß nur im Falle rechtwinkliger Achsen die Projektionen auf diese Achsen mit den Komponenten nach ihnen zusammenfallen.



Für die Projektion von  $\bar{K}$  auf eine Gerade  $g$ , die durch ihre Richtungswinkel  $(\lambda, \mu, \nu)$  gegen die Achsen  $(x, y, z)$  gegeben ist (Abb. 7), also für  $K \cos \vartheta$ , erhalten wir folgenden Ausdruck: Der Winkel  $\vartheta$  der beiden Geraden  $g(\lambda, \mu, \nu)$  und  $\bar{K}(\alpha, \beta, \gamma)$  ist nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie gegeben durch

$$\cos \vartheta = \cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu, \quad (10)$$

woraus sich durch Multiplikation mit  $K$  und Benützung der Gln. (8) der folgende Ausdruck für die Projektion von  $\bar{K}$  auf  $g$  ergibt

$$K' = K \cos \vartheta = X \cos \lambda + Y \cos \mu + Z \cos \nu. \quad (11)$$

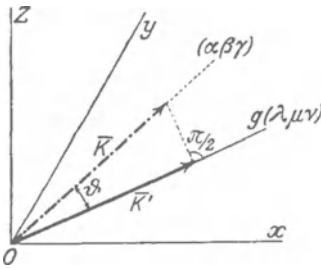


Abb. 7.

Durch Verwendung des Projektionsbegriffes kann das Gesetz der Addition von Vektoren in eine Form gebracht werden, die bei allen rechnerischen Anwendungen benützt wird, aber dasselbe bedeutet wie das ohne Beziehung auf ein Koordinatensystem gegebene Parallelogrammgesetz. Aus Abb. 4 ist nämlich unmittelbar zu sehen, daß für jede beliebige Richtung  $x$  die Gl. (4) der folgenden Aussage gleichwertig ist

$$X_1 + X_2 = X;$$

oder allgemein für  $n$  Vektoren  $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_n$ , deren Projektionen auf  $x$  mit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  bezeichnet werden

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \equiv \sum_{i=1}^n X_i = X; \quad (12)$$

diese Gleichung macht den Inhalt des Projektionssatzes für die Achse  $x$  aus und da diese vollständig willkürlich ist, so können wir diesem die Form geben:

Die Projektion  $X$  der Summe  $\bar{K}$  von  $n$  Vektoren  $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_n$  auf irgendeine Richtung  $x$  im Raume ist gleich der Summe der Projektionen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  der Einzelvektoren auf diese Richtung.

Ein Vektor wird in der Ebene durch zwei, im Raume durch drei Bestimmungsstücke festgelegt; als solche können seine Projektionen nach ebensoviel Achsen eines beliebigen Koordinatensystems dienen. In Übereinstimmung damit ist die Vektorgleichung (5) in der Ebene zwei, im Raume drei Gleichungen vom Typus (12) für ebenso viele Achsenrichtungen gleichwertig, die dann lauten

$$\sum_{i=1}^n X_i = X, \quad \sum_{i=1}^n Y_i = Y, \quad \sum_{i=1}^n Z_i = Z, \quad (13)$$

wenn in leichtverständlicher Ausdrucksweise die Projektionen von  $\bar{K}$  auf die Achsen  $(x, y, z)$  mit  $(X_i, Y_i, Z_i)$  bezeichnet werden.

Die Richtung der Summe  $K$  ist durch die drei Gleichungen gegeben

$$\cos \alpha = X/K, \quad \cos \beta = Y/K, \quad \cos \gamma = Z/K, \quad (14)$$

wobei  $K = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$  ist.

Die Aussage, daß ein Vektor durch zwei oder drei Bestimmungstücke gegeben ist, kann auch so gedeutet werden, daß die Einführung des Vektorbegriffes nur eine kurze Ausdrucksweise für solche, durch zwei oder drei solche Bestimmungstücke gegebene Größen ist. In dieser Zuordnung sind auch analytisch die oben angeführten Kennzeichen für Vektoren enthalten.

Der Betrag der Summe  $K$  von nur zwei Vektoren  $\bar{K}_1$  und  $\bar{K}_2$  und ihre Lage gegen  $\bar{K}_1$  und  $\bar{K}_2$  ergibt sich auch unmittelbar (d. h. ohne Bezugnahme auf ein Achsensystem) durch die aus der Trigonometrie als Kosinus- und Sinussatz bekannten und im folgenden oft benutzten Beziehungen (Abb. 4):

$$K^2 = K_1^2 + K_2^2 + 2 K_1 K_2 \cos \alpha, \quad (15)$$

$$K_1 : K_2 : K = \sin \alpha_2 : \sin \alpha_1 : \sin \alpha; \quad (16)$$

ferner gibt der Projektionsatz für die Richtung von  $K$  unmittelbar

$$K = K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2. \quad (17)$$

### 17. Multiplikation von Vektoren. Arbeits- und Momentenprodukt.

Während die geometrische Addition zweier Vektoren nur auf eine Weise ausführbar ist, kennen wir zwei Arten von Produkten, die beide für die Mechanik von Wichtigkeit sind: a) das skalare, innere oder Arbeitsprodukt und b) das vektorielle, äußere oder Momentenprodukt. Wir geben die Erklärungen wieder sogleich in der Form, wie sie später wiederholt gebraucht werden.

a) Das Arbeitsprodukt  $A$  zweier Vektoren  $\bar{K}(X, Y, Z)$  und  $\bar{s}(x, y, z)$  ist gegeben durch das Produkt der Beträge der beiden Vektoren<sup>1</sup> in den Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels  $\vartheta$ , also durch  $K s \cos \vartheta$ . Das innere Produkt der beiden Vektoren  $\bar{K}$  und  $\bar{s}$  bezeichnen wir durch einfaches Nebeneinanderschreiben  $\bar{K} \bar{s}$ , ohne Punkt dazwischen. Klammern sollen (wie auch beim äußeren Produkt) nicht zum Produktsymbol selbst gehören, sondern werden nur bei mehreren Faktoren zur Zusammenfassung verwendet.

Für das innere Produkt gilt das kommutative Gesetz:  $\bar{K} \bar{s} = \bar{s} \bar{K}$ .

Durch Heranziehung der oben benützten Gl. (10), in der wir

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{X}{K}, & \cos \beta &= \frac{Y}{K}, & \cos \gamma &= \frac{Z}{K}, \\ \cos \lambda &= \frac{x}{s}, & \cos \mu &= \frac{y}{s}, & \cos \nu &= \frac{z}{s} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Die Bezeichnungen sind im Hinblick auf die später zu gebenden Anwendungen gewählt. — Skalare Größen wie das Arbeitsprodukt werden weiterhin mit stärkeren geraden Lettern bezeichnet, z. B.  $A$ . Für die Masse wird jedoch außer  $M$  auch das kleine  $m$  verwendet.

zu setzen haben, ergibt sich

$$A = \bar{K} \bar{s} = K s \cos \vartheta = X x + Y y + Z z. \quad (18)$$

Dieses Produkt ist eine von den Vektoren und ihrer Lage gegeneinander allein abhängige skalare Größe, es kann auch als Produkt jedes Vektors mit der Projektion des andern auf ihn erklärt werden. Für  $\vartheta = \pi/2$  ist  $A = 0$ , d. h. die beiden Vektoren  $\bar{K}$ ,  $\bar{s}$  stehen aufeinander senkrecht, wenn

$$\bar{K} \bar{s} = X x + Y y + Z z = 0. \quad (19)$$

Für das innere Produkt gilt das „distributive Gesetz“

$$(\bar{K}_1 + \bar{K}_2) \bar{s} = \bar{K}_1 \bar{s} + \bar{K}_2 \bar{s}. \quad (20)$$

Bezeichnen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha$  die Winkel von  $K_1, K_2$  und  $\bar{K}$  gegen  $\bar{s}$ , so folgt nach der Definition des inneren Produktes für die rechte Seite der Gl. (20)

$$\bar{K}_1 \bar{s} + \bar{K}_2 \bar{s} = K_1 \cos \alpha_1 s + K_2 \cos \alpha_2 s = K \cos \alpha s = (\bar{K}_1 + \bar{K}_2) \bar{s}.$$

Bei der wichtigsten Anwendung dieses Satzes bedeuten  $\bar{K}_1, \bar{K}_2$  Kräfte und  $\bar{s}$  eine Verschiebung; der Satz besagt dann, daß die Arbeit der Summe einer Kräftegruppe gleich der Summe der Arbeiten der Einzelkräfte bei jeder Verschiebung des gemeinsamen Angriffspunktes ist.

b) Unter dem Momentenprodukt (auch äußeres oder vektorielles Produkt genannt) zweier von  $O$  ausgehender Vektoren\*  $\bar{r}$  und  $\bar{K}$ , die den Winkel  $\vartheta$  miteinander einschließen, verstehen wir einen Vektor  $\bar{M}$ , der auf der Ebene von  $\bar{r}$  und  $\bar{K}$  senkrecht steht und dessen Betrag gleich der Fläche des von  $\bar{r}$  und  $\bar{K}$  als Seiten gebildeten Parallelogramms ist

$$M = r K \sin \vartheta, \quad (21)$$

in Zeichen

$$\bar{M} = \bar{r} \times \bar{K} \quad (22)$$

Es ist also  $\bar{M} = 0$ , wenn  $\bar{r} = 0$ , oder  $\bar{K} = 0$ , oder  $\sin \vartheta = 0$  oder  $\pi$ , d. h. wenn einer der Vektoren  $\bar{r}$  und  $\bar{K}$  verschwindet oder diese gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben.

Eine besondere Festsetzung ist nötig über die Richtung, in der  $\bar{M}$  — senkrecht zur Ebene von  $\bar{r}$  und  $\bar{K}$  — aufzutragen ist. Für diese Festsetzung ist eine bestimmte Zuordnung dreier im Raume aufeinander senkrechter Richtungen erforderlich. Wir treffen hier die Verabredung,  $\bar{M}$  nach jener Seite der Ebene von  $\bar{r}$  und  $\bar{K}$  aufzutragen, von der aus gesehen  $\bar{r}$  auf kürzestem Wege durch Drehung im Gegensinn des Uhrzeigers mit  $\bar{K}$  zur Deckung gebracht werden kann, und

\* Die Bezeichnungen sind wieder im Hinblick auf die später zu gebenden Anwendungen gewählt.

haben damit ein sog. „Rechtssystem“ gewählt. In Übereinstimmung damit wählen wir auch das Cartesische Koordinatensystem  $(x, y, z)$ , wo es gebraucht wird, als Rechtssystem.

Diese Bezeichnung rührt davon her, daß die Richtung des ersten und zweiten Faktors  $\vec{r}$  und  $\vec{K}$  in Gl. (22) und des Produktvektors  $\vec{M}$  in dieselbe gegenseitige Lage gebracht werden wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand in gespreizter Haltung. Der Name Rechtssystem ist auch gewählt worden im Anschluß an den Begriff der rechtsgängigen Schraube, bei der die Drehung in der Ebene senkrecht zur Schraubennachse dem Übergang des ersten Vektors in den zweiten auf kürzestem Wege und die Bewegung längs dieser Schraubennachse der Richtung des Produktes zugeordnet ist. Im Gegensatz hierzu kennzeichnen Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der linken Hand und eine Linksschraube ein sog. Linkssystem.

Das Vektorprodukt ist daher nicht kommutativ, es kommt auf die Anordnung an, in der die beiden Faktoren  $\vec{r}, \vec{K}$  aufeinanderfolgen, und zwar ist

$$(\vec{r} \times \vec{K}) = -(\vec{K} \times \vec{r}). \tag{23}$$

Wenn in irgend einem Cartesischen Koordinatensystem die Vektoren  $\vec{r}$  und  $\vec{K}$  die Komponenten  $(x, y, z)$  und  $(X, Y, Z)$  haben, dann ergibt sich für den Betrag von  $\vec{M}$

$$\begin{aligned} M &= rK \sin \vartheta = rK \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta} \\ &= \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) - (xX + yY + zZ)^2} \\ &= \sqrt{(yZ - zY)^2 + (zX - xZ)^2 + (xY - yX)^2} \end{aligned}$$

Als die Komponenten von  $\vec{M}$  nach den Achsen bezeichnen wir die Ausdrücke

$$\boxed{M_x = yZ - zY, \quad M_y = zX - xZ, \quad M_z = xY - yX,} \tag{24}$$

da sofort erkennbar ist, daß der Vektor mit diesen Komponenten auf  $\vec{r}$  und  $\vec{K}$  senkrecht steht, denn es ist  $\vec{r} \vec{M} = 0$  und  $\vec{K} \vec{M} = 0$ . — In Übereinstimmung mit dem früheren tragen wir  $\vec{M}$  senkrecht zur Ebene  $\vec{r}, \vec{K}$  so auf, daß die drei Vektoren  $\vec{r}, \vec{K}, \vec{M}$  (in dieser Folge!) ebenso zueinander liegen wie die positiven Richtungen  $x, y, z$  des gewählten Achsensystems (Abb. 8). (Man beachte, daß diese Festsetzung ganz unabhängig ist von der Art des gewählten Achsensystems.)

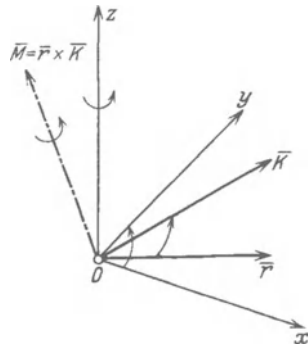


Abb. 8.

Auch für das Momentenprodukt gilt das „distributive Gesetz“

$$\vec{r} \times (\vec{K}_1 + \vec{K}_2) = (\vec{r} \times \vec{K}_1) + (\vec{r} \times \vec{K}_2), \tag{25}$$

dessen geometrische Bedeutung ähnlich wie die des entsprechenden bei der skalaren Multiplikation leicht einzusehen ist. Wir legen hierzu am einfachsten den Vektor  $\bar{r}$  senkrecht zur Zeichenebene und beachten, daß die Beträge der Vektoren  $\bar{r} \times \bar{K}_1$  und  $\bar{r} \times \bar{K}_2$  durch die Flächen dargestellt sind, die durch  $\bar{r}$  und  $\bar{K}_1$  und  $\bar{r}$  und  $\bar{K}_2$  gebildet werden (Abb. 9); von ihrer Summe ist zu zeigen, daß ihr Betrag der Fläche über  $\bar{r}$  und  $\bar{K}_1 + \bar{K}_2$  gleich ist. Verwandeln wir nämlich die Parallelogramme über  $\bar{r}$ ,  $\bar{K}_1$  und  $\bar{r}$ ,  $\bar{K}_2$  durch Projektion der Endpunkte

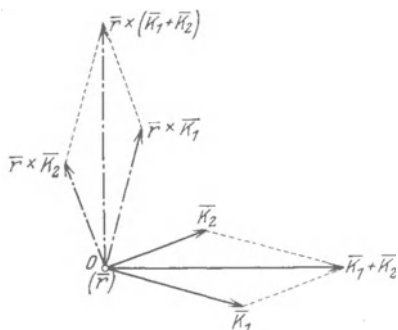


Abb. 9.

von  $\bar{K}_1$  und  $\bar{K}_2$  auf die Zeichenebene in flächengleiche Rechtecke, dann sind die Vektoren  $\bar{r} \times \bar{K}_1$  und  $\bar{r} \times \bar{K}_2$  den Projektionen von  $\bar{K}_1$  und  $\bar{K}_2$  proportional, und daher ist auch ihre Summe dem Produkte  $\bar{r} \times (\bar{K}_1 + \bar{K}_2)$  proportional.

Die wichtigste Anwendung dieses Satzes liegt in dem sog. Momentensatz, der besagt, daß das Moment einer Summe von Vektoren in bezug auf einen Punkt gleich ist der Summe der Momente der einzelnen Vektoren (18).

**18. Anwendungen.** a) Moment eines Vektors  $\bar{K}$  in Bezug auf eine Achse und in bezug auf einen Punkt. Bisher haben wir

angenommen, daß die Vektoren sämtlich durch denselben Punkt hindurchgehen. Wenn dies jedoch nicht der Fall ist, so brauchen wir ein Mittel, das uns gestattet, einen beliebig gegebenen Vektor in Bezug auf ein Achsen-system festzulegen. Das einfachste derartige Hilfsmittel wird gerade durch das Momentenprodukt oder kurz Moment gegeben, das z. B. für eine

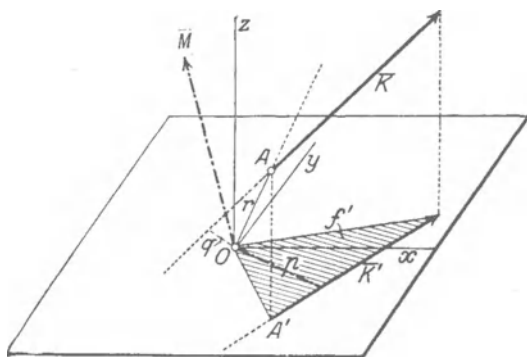


Abb. 10.

Kraft das Maß der Drehwirkung um eine Achse oder um einen Punkt darstellt.

Wir wollen zunächst erklären, was unter dem Moment  $M_z$  eines Vektors  $\bar{K}$ , der durch den Punkt  $A$  geht, in Bezug auf eine Achse  $z$  zu verstehen ist (Abb. 10). Wir projizieren  $\bar{K}$  auf eine Ebene  $(O, x, y)$ , die zur  $z$ -Achse senkrecht steht, erhalten  $\bar{K}'$  und fällen auf  $\bar{K}'$  von  $O$  das Lot, dessen Länge  $p$  sei; dann verstehen wir unter dem Moment

von  $\vec{K}$  um die  $z$ -Achse den Ausdruck

$$M_z = K' p = 2 f', \tag{26}$$

wenn  $f'$  die Fläche des schraffierten Dreiecks in der  $x$ - $y$ -Ebene bedeutet. Sind wieder  $(X, Y, Z)$  die Komponenten von  $\vec{K}$  nach den Achsen,  $\vec{OA} = \vec{r}$  der Ortsvektor von  $A$  mit den Koordinaten  $(x, y, z)$ , so folgt durch Betrachtung der in Abb. 11 gezeichneten Umlegung

$$\frac{1}{2} M_z = f' = \frac{1}{2} (x + X) (y + Y) - \frac{1}{2} xy - \frac{1}{2} XY - yX = \frac{1}{2} (xY - yX).$$

Fügen wir noch die Momente von  $\vec{K}$  um die  $x$ - und  $y$ -Achsen hinzu, so erhalten wir für die Momente von  $\vec{K}$  um die Achsen  $x, y, z$  gerade die drei symmetrisch gebauten Ausdrücke (24).

Da  $r \sin \vartheta = q$ , dem Abstand des Vektors  $\vec{K}$  von  $O$  gesetzt werden kann, so erhält man

$$M = r K \sin \vartheta = K q, \tag{27}$$

und man bezeichnet  $\vec{M}$  als das Moment von  $\vec{K}$  um den Punkt  $O$ . Der Vektor  $\vec{M}$  steht auf der durch  $\vec{r}$  und  $\vec{K}$  bestimmten Ebene senkrecht, sein Betrag ist gleich dem Produkte aus  $\vec{K}$  und dem von  $O$  auf  $\vec{K}$  gefällten Lot  $q$ . Die Projektion von  $\vec{M}$  auf irgendeine Achse durch  $O$  ist gleich dem Momente von  $\vec{K}$  um diese Achse.

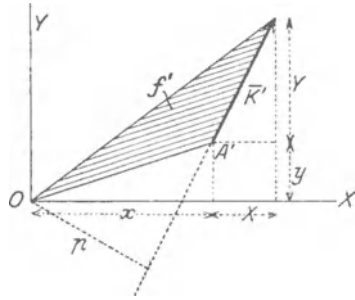


Abb. 11.

Über die Richtung, nach der  $\vec{M}$  aufzutragen ist, gelten die in 17b) getroffenen Festsetzungen:  $\vec{M}$  liegt also so zu  $\vec{r}$  und  $\vec{K}$  wie die Achse  $Oz$  zu  $Ox$  und  $Oy$ . Für den hier gewählten Drehsinn, bei dem — von  $Oz$  aus gesehen —  $y$  zur Linken von  $x$  liegt, erscheint ein Moment dann als positiv, wenn es im Gegensinn des Uhrzeigers, und als negativ, wenn es in dessen Sinn dreht.

Wichtig ist die Umkehrung dieser Zuordnung, daß nämlich durch  $\vec{K}$  (der ohne nähere Bestimmung als ein Vektor durch  $O$  angenommen werden müßte) und  $\vec{M}$  auch die Lage von  $\vec{K}$  im Raume (d. h. seine Wirkungslinie) festgelegt ist.

b) Momentensatz. Der Umstand, daß die Ausdrücke (27) für die Komponenten des Momentes in den Kräftekomponenten  $(X, Y, Z)$  linear sind, und daß sich nach dem Projektionsatz die Komponenten der Summe  $\vec{K}$  einer beliebigen Anzahl von Vektoren  $\vec{K}_1, \vec{K}_2, \dots, \vec{K}_n$  gleichfalls linear zusammensetzen, führt auf einen einfachen Zusammenhang des Momentes von  $\vec{K}$  um irgendeine Achse des Raumes mit den Momenten der Einzelvektoren um dieselbe Achse, wenn diese Einzelvektoren durch denselben Punkt  $A$  hindurchgehen. Mit der bisher verwendeten Bezeichnung der Komponenten von  $\vec{K}_1 (X_1, Y_1, Z_1)$  usw. und

von  $(M_{1x}, M_{1y}, M_{1z})$  für die Komponenten von  $\bar{M}_1$  usw. und  $(x, y, z)$  als Koordinaten von  $A$  folgt z. B. für das Moment von  $\bar{K}_1$  um die  $x$ -Achse

$$M_{1z} = xY_1 - yX_1,$$

ebenso für das Moment von  $\bar{K}_2$  um diese Achse

$$M_{2z} = xY_2 - yX_2$$

usw. für alle vorhandenen Vektoren. Da nach dem Projektionssatze (12)  $\sum X_i = X$ ,  $\sum Y_i = Y$ ,  $\sum Z_i = Z$  die Komponenten der Summe  $\bar{K} = \sum \bar{K}_i$  nach den Achsen sind, so folgt durch Addition

$$\begin{aligned} M_{1z} + M_{2z} + \cdots &= \sum_{i=1}^n M_{iz} = x(Y_1 + Y_2 + \cdots) - y(X_1 + X_2 + \cdots) \\ &= xY - yX = M_z, \end{aligned} \quad (28)$$

dem Momente der Summe  $\bar{K}$  um die  $z$ -Achse.

Da die Lage der  $z$ -Achse in keiner Weise bevorzugt ist, so folgt der Momentensatz mit folgendem Wortlaut:

Das Moment der Summe  $\bar{K}$  einer beliebigen Anzahl von Vektoren  $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_n$ , die durch denselben Punkt  $A$  gehen, um jede beliebige Achse des Raumes, ist gleich der Summe der Momente der Einzelvektoren um diese Achse.

Werden also für einen beliebigen Punkt  $O$  des Raumes für die durch einen Punkt  $A$  hindurchgehenden  $n$  Vektoren  $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_n$  die Momentenvektoren  $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$  gezeichnet, so stellt deren Summe

$$\boxed{\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \cdots + \bar{M}_n \equiv \sum_{i=1}^n \bar{M}_i = \bar{M}}, \quad (29)$$

d. h. die Schlußlinie des Polygons der Momentenvektoren  $\bar{M}_1, \dots, \bar{M}_n$  das Moment des Vektors  $\bar{K} (= \sum_{i=1}^n \bar{K}_i)$  um  $O$  dar. Der Momentensatz bringt, wie ersichtlich, nichts anderes als das distributive Gesetz des Vektorproduktes zum Ausdruck (s. 17b).

Ein Sonderfall des Momentensatzes ist folgende Aussage: Wenn die gegebene Achse  $a$  den Summenvektor  $\bar{K}$  schneidet (das Moment von  $\bar{K}$  um  $a$  also Null ist), so ist auch die Summe der Momente der Teilvektoren um  $a$  gleich Null.

Der Momentensatz gilt auch noch, wie sich später ergeben wird, wenn der gemeinsame Punkt  $A$  im Unendlichen liegt, die Kräfte also alle zueinander parallel sind.

c) Geschwindigkeit bei der Drehbewegung eines Körpers um eine Achse. Wenn sich ein Körper mit der Winkelgeschwindig-



keit  $\bar{\omega}$  um eine Achse  $a$  dreht (Abb. 12), so steht der Vektor der Geschwindigkeit  $\bar{v}$  eines beliebigen Punktes  $A$  auf der Ebene durch  $\bar{r}$  und  $\bar{\omega}$  senkrecht und ist vom Betrage  $r\omega \sin \vartheta$ . Wir schreiben daher, indem wir die Zuordnung wie zuvor festsetzen

$$\boxed{\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}.} \quad (30)$$

**19. Produkte von drei Vektoren.** Von Produktbildungen von drei Vektoren sind die wichtigsten die beiden folgenden:

a) Der Ausdruck  $\bar{K}_1(\bar{K}_2 \times \bar{K}_3)$  bedeutet, wie man sofort erkennt, den Rauminhalt des von den drei Vektoren  $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \bar{K}_3$  gebildeten Parallelepipedes. Das Vektorprodukt  $\bar{K}_2 \times \bar{K}_3$  ist gleich der Größe der von  $\bar{K}_2$  und  $\bar{K}_3$  gebildeten Fläche, und das skalare Produkt des zugehörigen Vektors mit  $\bar{K}_1$  bedeutet das Produkt aus jener Fläche und der Höhe des genannten Parallelepipedes. Aus dieser Bedeutung ergibt sich unmittelbar die Richtigkeit der folgenden zyklischen Vertauschungen

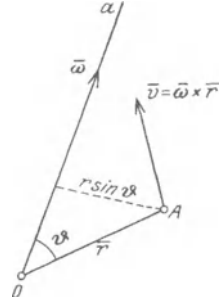


Abb. 12.

$$\bar{K}_1(\bar{K}_2 \times \bar{K}_3) = \bar{K}_2(\bar{K}_3 \times \bar{K}_1) = \bar{K}_3(\bar{K}_1 \times \bar{K}_2). \quad (31)$$

Bezeichnen  $(X_i, Y_i, Z_i)$  die Komponenten von  $\bar{K}_i$  (für  $i = 1, 2, 3$ ), so erhalten wir auch

$$\bar{K}_1(\bar{K}_2 \times \bar{K}_3) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \quad (32)$$

Man beachte, daß bei dieser Deutung der Rauminhalt des Parallelepipedes mit einem Vorzeichen behaftet erscheint; es ist dabei

$$\bar{K}_1(\bar{K}_2 \times \bar{K}_3) = -\bar{K}_1(\bar{K}_3 \times \bar{K}_2), \text{ usw.}$$

b) Als zweites Beispiel diene der sog. Entwicklungssatz:

$$\bar{K}_1 \times (\bar{K}_2 \times \bar{K}_3) = \bar{K}_2(\bar{K}_3 \bar{K}_1) - \bar{K}_3(\bar{K}_1 \bar{K}_2). \quad (33)$$

Da der Vektor  $(\bar{K}_2 \times \bar{K}_3)$  sowohl auf  $\bar{K}_2$  als auch auf  $\bar{K}_3$  senkrecht steht, so liegt der Vektor  $\bar{K}_1 \times (\bar{K}_2 \times \bar{K}_3)$  in der Ebene von  $\bar{K}_2$  und  $\bar{K}_3$ , läßt sich also jedenfalls durch  $\bar{K}_2$  und  $\bar{K}_3$  darstellen, indem diese Vektoren mit passenden skalaren Faktoren multipliziert und addiert werden. Daß diese Faktoren gerade die in der Gl. (29) angegebenen Werte  $(\bar{K}_3 \bar{K}_1)$  und  $-(\bar{K}_1 \bar{K}_2)$  haben, ergibt sich am einfachsten durch Ausrechnung der Komponente des linksstehenden Produktvektors etwa nach der  $x$ -Richtung des Achsensystems; diese Komponente



hat den Betrag

$$Y_1(X_2 Y_3 - X_3 Y_2) - Z_1(Z_2 X_3 - Z_3 X_2).$$

Erweitern wir diesen Ausdruck durch die beiden sich aufhebenden Glieder  $X_1 X_2 X_3 - X_1 X_2 X_3$ , so folgt

$$\begin{aligned} X_2(X_3 X_1 + Y_3 Y_1 + Z_3 Z_1) - X_3(X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2) \\ = X_2(\bar{K}_3 \bar{K}_1) - X_3(\bar{K}_1 \bar{K}_2). \end{aligned}$$

Da dies für jede beliebige Richtung gilt, so ist dadurch die Richtigkeit der Gl. (33) erwiesen.

Weitere Entwicklungen über Vektoren folgen in jenen Abschnitten, in welchen sie besondere Verwendung finden.

Erster Teil.

## Statik der starren Körper.

Dieser Teil behandelt die rechnerischen und zeichnerischen Methoden für die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften und das Gleichgewicht an starren Körpern, ferner die Theorie der Stützung, der Fachwerke und der Reibung fester Körper, sowie einiges aus der Theorie der Seil- und Stützlinien.

### I. Kräftegruppe durch einen Punkt.

**20. Mittelkraft und Gleichgewicht. Auflagerkraft.** In der technischen Mechanik und allen ihren Anwendungen hat es sich als vorteilhaft erwiesen, die Kräfte als wirklich bestehende Dinge anzusehen und den Umstand unmittelbar zu verwerten, daß sie gerade jene Kennzeichen besitzen, die wir oben als den Vektoren eigentümlich erkannt haben: Größe, Richtung, Sinn. Nachdem die Zulässigkeit dieser Zuordnung Kraft  $\rightarrow$  Vektor und die Richtigkeit aller daraus ableitbaren und für die Beurteilung des „Kräftespiels“ in unseren Bauwerken und Maschinen wichtigen Folgerungen festgestellt ist, laufen alle hierher gehörigen Entwicklungen auf die Anwendung der in 15 bis 19 gegebenen Aussagen hinaus. Die Summe einer beliebigen Anzahl von Kräften einer Kräftegruppe durch einen Punkt  $A$  oder die Mittelkraft ist durch die Schlußlinie des Streckenzuges gegeben, der durch Aneinanderreihung der gegebenen Kräfte in beliebiger Folge entsteht; diesen Streckenzug bezeichnet man als Krafteck. Hat diese Schlußlinie die Länge Null, fällt also der Endpunkt der letzten mit dem Anfangspunkt der ersten Kraft zusammen, dann sprechen wir von Gleichgewicht.

Für das Gleichgewicht zweier Kräfte (wie wir in der Folge kurz statt Gleichgewicht eines Körpers unter dem Einflusse zweier Kräfte sagen wollen) ist sonach notwendig und hinreichend, daß diese gleich groß und entgegengesetzt sind. Drei Kräfte im Gleichgewicht müssen, aneinandergefügt, ein geschlossenes Dreieck bilden usw. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Gleichgewicht einer räumlichen Kräftegruppe  $\bar{K}_i (X_i, Y_i, Z_i)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) durch einen Punkt lauten daher

$$\boxed{X = \sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad Z = \sum_{i=1}^n Z_i = 0,} \quad (34)$$

und im besonderen für die ebene Kräftegruppe durch einen Punkt

$$\boxed{X = \sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i = 0.} \quad (35)$$

Bei den Anwendungen liegt die Fragestellung nun fast immer so, daß nicht alle einwirkenden Kräfte als „eingepägt“ (im Sinne der Erklärung in 12b) gegeben sind, und daß die betrachteten Körper nicht unter dem Einflusse dieser eingepägten Kräfte (Gewichte, Lasten der Bauwerke, Winddruck, Federkräfte, Seilkräfte usw.) für sich allein im Gleichgewichte sind. Dagegen kommt andererseits hinzu, daß die Lage des gemeinsamen Angriffspunktes aller Kräfte und späterhin die Lage der betrachteten Körper, die wir als Angriffsobjekte der eingepägten Kräfte zu betrachten haben, nicht völlig frei sind, sondern daß immer der Angriffspunkt  $A$  und diese Körper in gewisser Weise unterstützt oder geführt sind, da sie stets mit anderen in Berührung sind, wodurch die Gesamtheit der möglichen Lagen für das Gleichgewicht gewisse Einschränkungen erleidet. Um den Einfluß dieser Unterstützungen bzw. Führungen auf die möglichen Gleichgewichtslagen oder auf die für eine bestimmte Gleichgewichtslage erforderlichen eingepägten Kräfte zu berücksichtigen, dient die auch für alles Folgende wichtige Bemerkung, daß alle derartigen Einflüsse stets wieder unter dem Bilde von Kräften in Rechnung gestellt werden. Für glatte Berührungsflächen, die wir zunächst zu betrachten haben, ist der Einfluß zweier Körper aufeinander lediglich als eine in der Richtung der Normalen zur gemeinsamen Berührungsebene der Körper liegende Kraft anzusehen, da doch in diese Ebene selbst, wegen der vorausgesetzten Glattheit der Berührungsflächen, kein Teil dieser Kraft fallen kann. Diese in der Richtung der Normalen liegende Kraft nennt man die Auflagerkraft  $N$  oder Auflagerreaktion oder Führungskraft; ihre Größe ist zunächst unbekannt und wird erst durch die Gln. (34) oder (35) für die unter Hinzunahme von  $N$  zu den eingepägten Kräften ergänzte Kräftegruppe bestimmt.

Für ebene Kräftegruppen können dann nur die folgenden zwei Fälle eintreten. a) Eine Bedingung, d. h. für die Lage von  $A$  ist eine Kurve  $C$  vorgeschrieben. Da zur Angabe von  $A$  auf der Kurve eine Koordinate etwa der Abstand von einem festen Punkt der Kurve oder dgl. ausreicht, und in (35) zwei Gleichungen zur Verfügung stehen, erkennt man unmittelbar, daß durch diese Gleichungen sowohl die Lage von  $A$  als auch die Größe der unbekanntenen Auflagerkraft  $N$  der Führungskurve  $C$  bestimmt sind. Ist dagegen die Gleichgewichtsstelle vorgeschrieben, so liefern die Gln. (35) die unbekanntene Auflagerkraft  $N$  und die zur Herstellung des Gleichgewichts zu der gegebenen hinzuzufügende Kraft.

Diese „Abzählung“ der Unbekannten und der verfügbaren Gleichungen gibt unmittelbar Aufschluß über die eindeutige Lösbarkeit jeder Aufgabe, und hat in jedem Falle, wo diese Lösbarkeit zweifelhaft

ist, der eigentlichen Lösung voranzugehen. In der Statik spricht man von statischer Bestimmtheit, wenn die Anzahl der Unbekannten gleich der der verfügbaren Gleichgewichtsbedingungen ist, sonst von statischer Unbestimmtheit.

In den beiden vorhin genannten Formen treten die Gleichgewichtsaufgaben in der Statik auf: bei der ersten handelt es sich um die Aufsuchung von Gleichgewichtstellungen — man nennt sie Stellungsaufgaben —, bei der zweiten ist die Gleichgewichtstellung von vornherein gegeben und es sind die Kräfte zu bestimmen, die Gleichgewicht herstellen.

In den folgenden Anwendungen ist bei den Kräften der die vektorielle Beschaffenheit kennzeichnende Querstrich der Einfachheit halber meist fortgelassen. Von den beiden folgenden Beispielen ist das erste eines der ersten, das zweite eines der zweiten Art.

Beispiel 1. Über zwei glatte Stifte  $A$  und  $B$  läuft ein Faden, der an den Enden mit den Gewichten  $P$  und  $Q$  und dazwischen mit  $G$  belastet ist. Man bestimme die Gleichgewichtslage der Schnur und gebe die Bedingungen dafür an, daß Gleichgewicht möglich ist.

Der Punkt  $O$  ist unter dem Einflusse der drei Kräfte  $P, Q, G$  im Gleichgewichte, die daher ein geschlossenes Dreieck bilden müssen; dadurch ist die Lage der Schnur und die von  $O$  bestimmt. — Mit den Bezeichnungen der Abb. 13 ist  $p = h \operatorname{tg} \alpha$ ,  $q = h \operatorname{tg} \beta$ , daher aus dem Kräftedreieck

$$\frac{p}{q} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta \cos \alpha} = \frac{G^2 + Q^2 - P^2}{G^2 + P^2 - Q^2}.$$

Gleichgewicht ist nur möglich, sobald  $\cos \alpha > 0$  und  $\cos \beta > 0$ , d. h. es müssen Zähler und Nenner des Bruches positiv sein.

Beispiel 2. Schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel  $\alpha$ , auf ihr ein kleiner Körper vom Gewichte  $G$ , das wir als eine lotrecht nach unten gerichtete Kraft

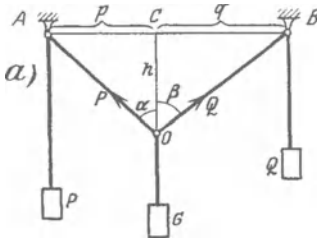


Abb. 13.

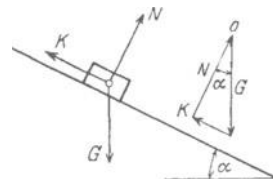
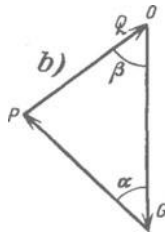


Abb. 14.

ansehen können. Die Gln. (35) geben für die Kraft  $K$  zur Herstellung des Gleichgewichts und für die Normalkraft  $N$

$$K = G \sin \alpha, \quad N = G \cos \alpha, \quad (36)$$

die man auch unmittelbar aus dem zugehörigen Kräftedreieck abliest (Abb. 14).

b) Zwei Bedingungen. Da durch zwei Bedingungen, also durch zwei Kurven die Lage eines Punktes in der Ebene schon vollständig gegeben ist (und zwar durch ihren Schnittpunkt oder ihre Schnittpunkte), so bleiben nur die beiden Auflagerkräfte als Unbekannte übrig, zu deren Bestimmung die zwei Gln. (35) tatsächlich ausreichen. Derartige Probleme treten dann auf, wenn an den Körper zwei gewichtslose Fäden oder Stäbe angeheftet oder angelenkt sind, deren

andere Enden festliegen. Die Auflagerkräfte werden in diesem Falle durch Kräfte gegeben sein, die in der Richtung der betreffenden Fäden (oder Stäbe) anzunehmen sind; wir nennen sie die Seilkräfte oder Stabkräfte und sprechen von Zugkräften, wenn sie das betreffende Seilstück zu verlängern, von Druckkräften, wenn sie es zu verkürzen streben.

Das zeichnerische Kennzeichen für den einen oder andern Fall bekommen wir, wenn wir die unbekanntnen Seilkräfte durch Pfeile darstellen, die wir immer vom Angriffspunkte weggerichtet eintragen und das zugehörige Krätedreieck mit jenem Umlaufsinn versehen, den die eingeprägte Kraft vorschreibt: stimmen dann für eine Seilkraft die beiden so zusammengehörigen Pfeile überein, dann haben wir Zug, im anderen Falle Druck. Die drei möglichen Fälle, die dabei auftreten können, sind in Abb. 15a), b), c) dargestellt.  $S_1$  in a),  $S_2$  in a) und c) sind Zugkräfte,  $S_1$  in b) und c),  $S_2$  in b) Druckkräfte (diese sind im Krätedreieck gestrichelt angegeben).

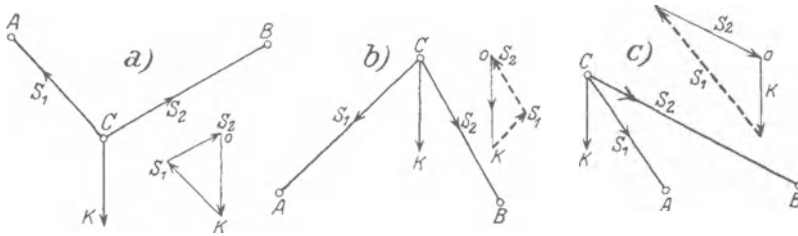


Abb. 15.

Selbstverständlich kann bei Auftreten von Zugkräften der betreffende Bauteil ein Seil oder ein Stab sein, während bei Druckkräften ein steifer Stab erforderlich ist.

Kräfte von der Art, wie die hier in Seilen oder Stäben durch äußere, eingeprägte Kräfte hervorgerufenen „inneren Kräfte“ oder „Spannungen“ sind maßgebend für den inneren molekularen Zusammenhang der Körper. Daß für vollkommen biegsame Seile oder in den Gelenken reibungslos aneinandergefügte Stäbe die inneren Kräfte in die Richtung der Stabachsen fallen, erkennt man, wenn man die Kraft ermittelt, die an einem abgeschnittenen Stück zur Herstellung des Gleichgewichtes anzubringen ist, und von den Voraussetzungen der vollständigen Biegsamkeit usw. Gebrauch macht.

Werden diese Überlegungen für mehrere Punkte durchgeführt, die durch (gewichtlos) gedachte Seile oder Stäbe miteinander verbunden sind, dann werden die zugehörigen Kräftecke vorteilhaft gleich so angeordnet, daß sie längs der Kräfte in diesen Verbindungstücken aneinanderliegen, so daß jede solche Kraft in diesem „Kräfteplan“ nur einmal vorkommt. Die weitere Anwendung dieses Vorganges führt auf eine Figur, die unter der Bezeichnung Seileck bekannt ist und für die sog. ebenen Kräftegruppen besondere Wichtigkeit besitzt (s. II. Kapitel).

Beispiel 3. Zwei Gewichte  $K_1$  und  $K_2$  sind durch zwei Fäden  $\overline{AO}$ ,  $\overline{BO}$  an einem Punkt  $O$  aufgehängt, zwischen  $A$  und  $B$  wird ein leichter Stab  $\overline{AB}$

ingelegt; man finde die Gleichgewichtslage des Stabes und die Kräfte  $T_1$  und  $T_2$  in den Fäden und  $T$  im Stab (Abb. 16).

Sei  $S$  der Punkt, der in der Gleichgewichtslage lotrecht unter  $O$  liegt, dann folgt aus der Ähnlichkeit der Kräftedreiecke (rechts) mit den im „Lageplan“ (links) auftretenden Dreiecken

$$K_1 = \frac{l}{a_1}, \quad \frac{K_2}{T} = \frac{l}{a_2},$$

also

$$K_1 a_1 = K_2 a_2;$$

diese Gleichung bestimmt die Gleichgewichtslage des Stabes. Aus den ersten zwei Gln. folgt auch

$$T = K_1 \frac{a_1}{l} = K_2 \frac{a_2}{l} = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \frac{a_1 + a_2}{l} = (K_1 + K_2) \frac{a_1 a_2}{l(a_1 + a_2)};$$

und ähnlich  $T_1$  und  $T_2$ .

**21. Seileck als Gleichgewichtsfigur.** Durch die im vorigen Abschnitt erhaltenen Ergebnisse können die Kräfte, die in jedem Stücke

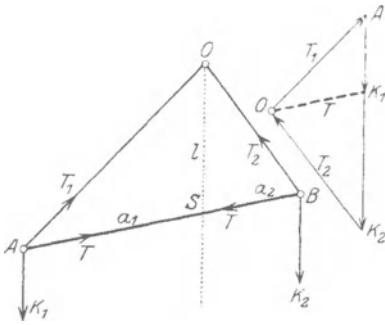


Abb. 16.

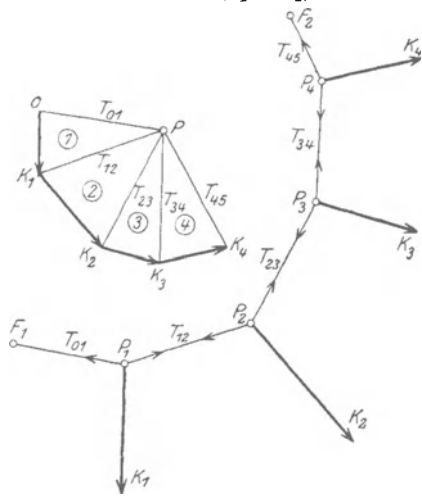


Abb. 17.

eines unter eingepägten Kräften im Gleichgewichte befindlichen Seiles auftreten, dessen Gestalt bekannt ist, durch Zeichnung von Kräftedreiecken ermittelt werden. Das Seil wird nach Anbringung der Kräfte so behandelt, als ob es starr wäre (Erstarrungsprinzip).

Für jeden Kraftangriffspunkt  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) muß sich das aus den drei Kräften gebildete Dreieck schließen, deren Wirkungslinien durch ihn hindurchlaufen (Abb. 17); diese Kräfte sind die eingepägten  $\bar{K}_i$  und die Seilkräfte in den Stücken, die  $P_i$  mit den Nachbarpunkten verbinden. Da die Seilkräfte, die durch ein Seilstück auf die beiden Punkte übertragen werden, die dieses verbindet, gleich groß und entgegengesetzt sein müssen, wird man die Kräftedreiecke für alle Punkte  $P_i$  so zusammenlegen (wie auch schon in 20 geschehen), daß im Kräfteplan jede Seilkraft nur einmal vorkommt. Bezeichnen wir mit  $T_{12}$  die Kraft auf  $P_i$  in Richtung  $\overline{P_1 P_2}$  usw., dann ist  $T_{12} = -T_{21}$ ,  $T_{23} = -T_{32}$  usw.

Aus der Betrachtung der Abb. 17 ergibt sich unmittelbar, daß nur

die Größe einer Kraft  $\bar{K}_i$  vorgegeben werden kann, sobald die Form des Seileckes und die Richtungen der Kräfte  $\bar{K}_i$  bekannt sind — die Größen der anderen Kräfte und auch die der Seilkräfte sind dann festgelegt. Wenn dagegen die Größen und Richtungen aller  $\bar{K}_i$  und die Richtung einer Seileckseite bekannt sind, so sind dadurch die Form des ganzen Seileckes und die Seilkräfte bestimmt.

Das in 20 angegebene Kennzeichen liefert in Abb. 17 Zug für alle Teile des Seiles. Würde in der gezeichneten Lage z. B.  $\bar{K}_3$  in umgekehrter Richtung wirken, dann müßten die Seilkräfte  $T_{32}, T_{34}$  Druck ergeben, während  $T_{23}$  ein Zug bleiben müßte, das Gleichgewicht in der gezeichneten Form der Seillinie wäre daher unmöglich. Werden jedoch alle Kräfte  $\bar{K}_1 \dots \bar{K}_4$  in ihrer Richtung umgekehrt, dann haben wir in allen Seilstücken Druck und Gleichgewicht kann wieder stattfinden; man spricht in diesem letzteren Falle von einer Drucklinie oder Stützlinie.

Sind die Endstücke frei, so müssen in ihnen die Kräfte  $T_{01}$  bzw.  $T_{54}$  wirken, damit das ganze betrachtete Seil im Gleichgewicht sein kann; sind sie an zwei Punkten  $F_1, F_2$  befestigt, dann sind die Auflagerkräfte in diesen Punkten gerade durch die im ersten und letzten Stück wirkenden Seilkräfte gegeben.

Für ein geschlossenes Seileck führt die Anwendung dieser Sätze auf gewisse (notwendige und hinreichende) Bedingungen, die die eingepprägten Kräfte und die Gestalt des Seiles im Falle des Gleichgewichtes zu erfüllen haben, und die aus der Betrachtung der Abb. 18, die ein geschlossenes Seilviereck darstellt, unmittelbar abzulesen sind:

a) Das Krafteck der eingepprägten Kräfte muß geschlossen sein.

b) Es muß ein Punkt  $P$  existieren, so daß jede Seite des Seilecks  $\bar{P}_i \bar{P}_{i+1}$  zur Verbindungslinie  $\bar{P}Q_i$  von  $P$  mit jenem Punkte  $Q_i$  parallel ist, in dem  $K_i$  und  $K_{i+1}$  aneinanderstoßen.

Dadurch haben wir ein Verfahren gewonnen, dessen Wirksamkeit weit über das Gebiet der

Gleichgewichtsfiguren von Seilen hinausreicht, und das das wesentliche Hilfsmittel für die graphische (geometrische) Theorie

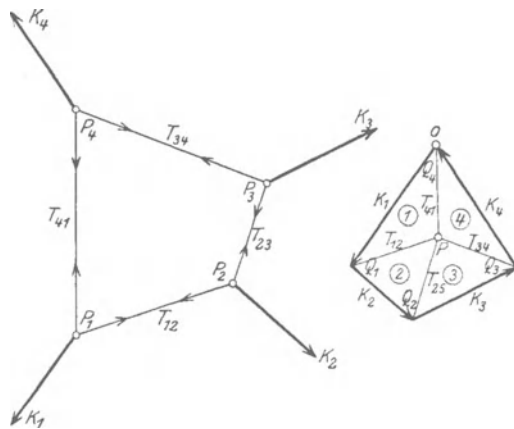


Abb. 18.

der ebenen Kräftegruppen darstellt (s. 25 bis 30).

Eine ähnliche Darstellung von Vektoren (durch Ansetzen an einen Punkt  $P$ ) werden wir später bei den Geschwindigkeits- und Beschleunigungsplänen wiederfinden (s. II. Teil).

Bei den Anwendungen sind die Kräfte  $\bar{K}_i$  in den meisten Fällen Gewichte, also parallel zueinander und im Kräfteplan daher in eine



Gerade zusammenfallend. Mittels des Projektionsatzes für die Senkrechte zu dieser Geraden folgt sofort:

Wenn die auf ein (unausdehnbares und vollkommen biegsames) Seil wirkenden Kräfte parallel sind, so sind die Projektionen der Seilkräfte auf die zu diesen Kräften senkrechte Richtung überall gleich. Überdies liegt in diesem Falle die Gleichgewichtslinie des Seiles in einer Ebene.

Die beiden für die Praxis wichtigsten Fälle, die hierbei auftreten können, sind durch die beiden folgenden Beispiele gekennzeichnet.

**22. Parabolische Kettenlinie.** Das Seil einer gleichförmigen Hängebrücke sei in gleichen wagerechten Zwischenräumen  $a$  [m]

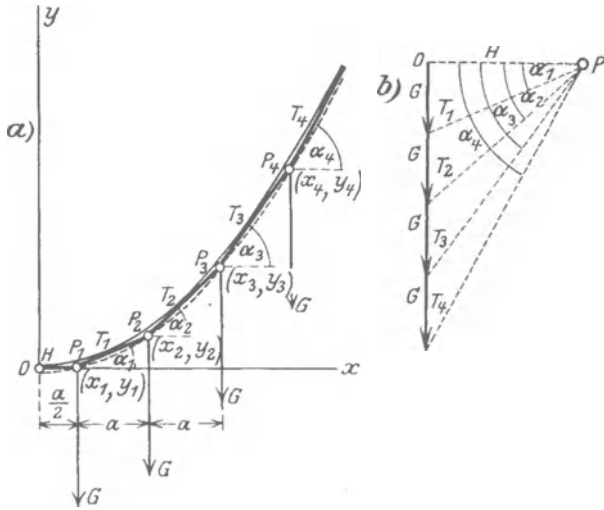


Abb. 19.

mit gleichen Gewichten  $G$  [kg] belastet; man ermittle die Gleichgewichtsform. Das Mittelstück  $OP_1$  sei wagerecht angenommen, die  $x$ -Achse damit zusammenfallend, dann sind nach den Bezeichnungen der Abb. 19 die Koordinaten der einzelnen Lastpunkte

$$P_1 \begin{cases} x_1 = a/2, \\ y_1 = 0, \end{cases} \quad P_2 \begin{cases} x_2 = a/2 + a = 3a/2, \\ y_2 = a \operatorname{tg} \alpha_1, \end{cases}$$

$$P_3 \begin{cases} x_3 = 5a/2 \\ y_3 = a(\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2) \end{cases} \quad \text{usw.}$$

und demgemäß für den  $n$ -ten Punkt

$$P_n \begin{cases} x_n = (2n - 1) a/2, \\ y_n = a(\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2 + \dots + \operatorname{tg} \alpha_{n-1}). \end{cases}$$

Aus dem zugehörigen Kräfteplan folgt, wenn  $H, T_1 \dots T_n$  die Kräfte

in den einzelnen Seilstücken sind

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{G}{H}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{2G}{H}, \quad \dots \quad \operatorname{tg} \alpha_{n-1} = \frac{(n-1)G}{H};$$

daher sind die Koordinaten des  $n$ -ten Punktes [da  $1 + 2 + \dots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ ]

$$P_n \left\{ \begin{array}{l} x_n = (2n-1)a/2, \\ y_n = a \frac{G}{H} (1 + 2 + \dots + n - 1) = a \frac{G}{H} \frac{n(n-1)}{2} \end{array} \right\} \quad (37)$$

durch Ausscheidung von  $n$  folgt daraus

$$y_n = a \frac{G}{2H} \frac{x_n + a/2}{a} \frac{x_n - a/2}{a} = \frac{G}{H} \frac{x_n^2 - (a/2)^2}{2a}. \quad (38)$$

Die Punkte  $P_n$  liegen sonach auf einer Parabel (in Abb. 19 punktiert).

Die Konstante  $H$  wird dadurch bestimmt, daß die Lage irgend-eines Punktes  $P$  des Parabelastes vorgeschrieben wird, z. B. für  $P_n$  selbst:  $x_n = b$ ,  $y_n = f$ , dann ist

$$H = G \frac{b^2 - (a/2)^2}{2af}. \quad (39)$$

Die Seilkraft im  $n$ -ten Stück ergibt sich unmittelbar aus dem Kräfteplan

$$T_n = \sqrt{H^2 + n^2 G^2}. \quad (40)$$

Läßt man die Lastpunkte  $P_n$  immer näher aneinanderrücken, also  $a$  fortgesetzt abnehmen, und verkleinert hierbei auch den Wert von  $G$ , so daß jedoch  $G/a = p$  kg/m (das als Belastung auf 1 m der wagrechten Projektion — also längs einer Strecke verteilt — gedeutet werden kann), endlich bleibt, so folgt für  $\lim a \rightarrow 0$  aus Gl. (38), wenn wir die Zeiger weglassen, für die Seilkurve die Parabelgleichung in der gewöhnlichen Form

$$y = \frac{p}{2H} x^2, \quad \text{wobei} \quad H = \frac{p b^2}{2f}. \quad (41)$$

(Diese Parabel ist in Abb. 19 voll ausgezogen.)

Aus Gl. (37) folgt auch, wie man durch Ausrechnung leicht bestätigt

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = \frac{Ga}{H}, \quad (42)$$

wo links nach Division durch  $a^2$  der „zweite Differenzenquotient“ steht; für  $\lim a \rightarrow 0$  und  $G/a \rightarrow p$  geht diese Gleichung in die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = \frac{p}{H} \quad (43)$$

über, deren Integral für  $p/H = \text{konst.}$  (unter den zugehörigen Randbedingungen  $y = 0$  und  $y' = 0$  für  $x = 0$ ) die Gl. (41) gibt.

Die Seilkraft an irgendeiner Stelle  $x$  der parabolischen Kettenlinie ist [entweder aus dem Kräfteplan oder durch den Grenzübergang  $\lim a \rightarrow 0$  aus Gl. (40)] gegeben durch

$$T = \sqrt{H^2 + p^2 x^2} = \sqrt{\frac{p^2 b^4}{4f^2} + p^2 x^2} = \frac{p}{2f} \sqrt{b^4 + 4f^2 x^2}. \quad (44)$$

Beispiel 4. Man ermittle den Durchhang  $f$  und die Scheitelkraft  $H$  einer flachen Kettenlinie von der Länge  $2l$ , die gleichförmig mit  $p$  kg/m auf die wagrechte Projektion belastet und zwischen zwei gleich hoch liegenden Punkten  $A, B$  in der Entfernung  $2b$  ausgespannt ist (Abb. 20).

Die Länge des Parabelbogens  $OA$  ist

$$l = \int_0^b \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^b \sqrt{1 + \left(\frac{px}{H}\right)^2} dx;$$

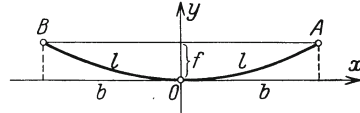


Abb. 20.

wenn wir annehmen, daß der größte Wert des neben 1 stehenden Gliedes  $pb/H$  gegen 1 klein ist, so können wir die Quadratwurzel in eine Taylorsche Reihe entwickeln und beim zweiten Gliede abbrechen; wir erhalten dann angenähert

$$l \approx \int_0^b \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{px}{H} \right)^2 \right] dx = \left[ x + \frac{p^2}{2H^2} \frac{x^3}{3} \right]_0^b = b + \frac{p^2}{2H^2} \frac{b^3}{3}.$$

Daraus rechnen wir

$$H = pb \sqrt{\frac{b}{6(l-b)}} \quad (45)$$

und aus der Parabelgleichung (41)

$$f = \frac{pb^2}{2H} = \frac{1}{2} \sqrt{6b(l-b)}. \quad (46)$$

Die Seilkraft an einer beliebigen Stelle  $x$  ergibt sich mit derselben Annäherung nach Gl. (44)

$$T = H \sqrt{1 + \frac{p^2 x^2}{H^2}} \approx H \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{p^2 x^2}{H^2} \right];$$

ihr größter Wert tritt an den Enden  $A, B$  für  $x = \pm b$  auf.

**23.** Bei der **gemeinen Kettenlinie** wird das Seil in gleichen Abständen  $c$  längs seiner eigenen Länge mit gleichen Gewichten  $G$  belastet. Ganz ebenso wie im vorigen Beispiel erhält man die Gleichgewichtsform des Seiles durch Zeichnung der aufeinanderfolgenden Kräftedreiecke im Kräfteplan, wobei aber jetzt längs der einzelnen Seilstücke die Länge  $c$  aufzutragen ist, um jeweils zum nächsten Lastpunkt zu kommen. Dabei ist die Kraft im tiefsten Seilstücke  $H$  zunächst wieder unbekannt, zu ihrer Festlegung ist eine weitere Bedingung (Festlegung des Endpunktes oder dgl.) erforderlich.

Wollte man zur Aufsuchung der Gleichung der Seilkurve wie zuvor vorgehen, so käme man zu unbequemen Summationen, die man vermeidet, wenn man sogleich eine längs der ganzen Seillänge gleichförmig verteilte Last voraussetzt, wie sie dem gleichförmigen schweren Seil zukommt:  $q$  kg/m sei der auf den laufenden Meter der Seillänge entfallende Betrag. Die Gesamtbelastung auf dem Stücke  $s = P_0 P$  bis zum Punkte  $P$ , in dem die Seilkraft  $T$  heißen möge,

ist daher  $qs$ , und aus dem in Abb. 21 gezeichneten Kräftedreieck lesen wir unmittelbar ab

$$T \cos \varphi = H, \quad T \sin \varphi = qs. \quad (47)$$

Da die Seilkraft  $T$  die Richtung der Tangente zur Seilkurve hat, so erhalten wir durch Division unmittelbar die „Differentialgleichung der Seilkurve“

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{qs}{H} = \frac{dy}{dx} \quad \text{oder} \quad y' = \frac{s}{a}, \quad (48)$$

wenn  $H/q = a$  gesetzt wird. Durch diese Eigenschaft, daß die Ableitung

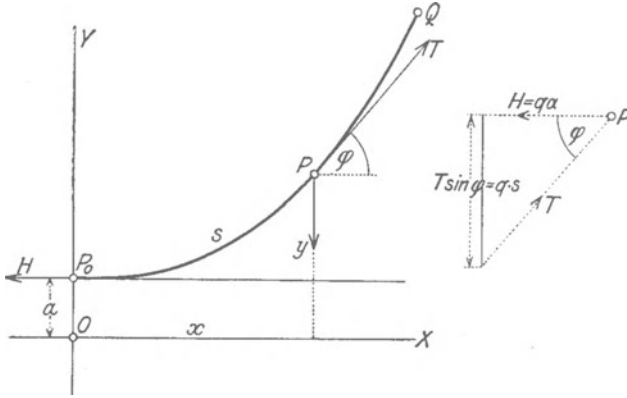


Abb. 21.

an jeder Stelle proportional der Bogenlänge ist, ist die gemeine Kettenlinie gekennzeichnet. Die Integration liefert

$$y = a \operatorname{Cof} \frac{x}{a}. \quad (49)$$

Es ist nämlich

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = y' = \operatorname{Sin} \frac{x}{a}, \quad 1 + y'^2 = 1 + \operatorname{Sin}^2 \frac{x}{a} = \operatorname{Cof}^2 \frac{x}{a},$$

und die Bogenlänge vom Scheitel  $P_0$  an gerechnet

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^x \operatorname{Cof} \frac{x}{a} dx = a \operatorname{Sin} \frac{x}{a}. \quad (50)$$

Die Gl. (48) ist somit identisch befriedigt. Die  $x$ -Achse liegt um die Strecke  $a$  unter  $P_0$  ( $x = 0$ ,  $y = a$ ). Aus diesen Gleichungen fließt auch die Beziehung  $s^2 + a^2 = y^2$ , und da nach dem Kräfteplan

$$q^2 s^2 + H^2 = T^2, \quad \text{also} \quad s^2 + a^2 = (T/q)^2 = y^2 \quad (51)$$

ist, so folgt

$$T = qy, \quad (52)$$

d. h. die Seilkraft in jedem Punkte  $P$  ist durch das Gewicht eines bis zur  $x$ -Achse reichenden, frei herabhängenden Seilstückes gegeben.

Die Seilkraft  $H$  im tiefsten Punkte ist, wie gesagt, wieder durch die Angabe der Koordinaten eines Punktes  $Q(x = b, y = h)$  festgelegt, durch den die Kettenlinie hindurchgehen soll, und folgt durch Auflösung der für  $Q$  geltenden Gl. (47):  $h = \mathfrak{C} \circ \int b/a$  nach  $a$ .

Aus Gl. (48) folgt auch

$$y'' = \frac{q}{H} \frac{ds}{dx} = \frac{q}{H \cos \varphi}. \quad (53)$$

**24. Beispiele.** Beispiel 5. Ein gleichförmiges Seil von gegebener Länge  $2l = 120$  m ist zwischen zwei in derselben Wagrechten liegenden Punkten  $A$  und  $B$ , die in der Entfernung  $2b = 100$  m voneinander liegen, ausgespannt. Man ermittle den Parameter der Kettenlinie, in der das Seil durchhängt, und die Seilkraft im Scheitel.

Schreibt man in der Gleichung für die Länge der Kettenlinie für den Punkt  $A$

$$l = a \mathfrak{C} \sin b/a$$

$b/a = u$ , also  $a = b/u$ , so erhält man

$$\frac{\mathfrak{C} \sin u}{u} = \frac{l}{b}.$$

Da  $l$  und  $b$  gegeben sind, so hat man jenen Wert zu suchen, der dieser Gleichung genügt, was am einfachsten (angenähert) durch Benutzung der Tafeln<sup>1</sup> für die Funktion  $\mathfrak{C} \sin u$  und Aufzeichnung eines Schaubildes geschehen kann. Hat man den Wert gefunden, der dieser Gleichung genügt — er sei  $u_1$  —, so ist der gesuchte Parameter

$$a = b/u_1 \quad \text{und weiter ist} \quad H = a q.$$

Für die angegebenen Zahlenwerte ist  $l/b = 1,2$ , und man findet  $u_1 = 1,065$ , also

$$a = \frac{50 \text{ m}}{1,065} \approx 47 \text{ m}.$$

Die Höhe der Aufhängepunkte über der Leitlinie ergibt sich zu

$$h = \sqrt{a^2 + l^2} \approx 76,2 \text{ m}$$

und daher ist der Durchhang in der Mitte

$$f = h - a = 29,2 \text{ m}.$$

Beispiel 6. Bestimme den Durchhang  $f$  und die Scheitelkraft  $H$  einer flachen Kettenlinie, die die Länge  $2l$  und die Entfernung der Aufhängepunkte  $2b$  hat und mit  $q$  kg/m belastet ist.

Man beachte, daß der Parameter  $a$  durch Verkürzung der Länge der Kettenlinie immer größer wird. Nimmt man daher in der Gleichung der Kettenlinie  $a$  gegenüber dem größten vorkommenden Werte von  $x$  sehr groß an, und setzt demgemäß

$$y' = \mathfrak{C} \sin \frac{x}{a} \approx \frac{x}{a},$$

so wird ähnlich wie in Beispiel 4 die Länge angenähert gegeben durch

$$l = \int_0^b \sqrt{1 + y'^2} dx \approx \int_0^b \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{a^2} \right] dx = b + \frac{b^3}{6a};$$

<sup>1</sup> S. das „Taschenbuch für Bauingenieure“, „Taschenbuch für Maschinenbau“, „Hütte“ u. dgl.

daraus ergibt sich

$$a = b \sqrt{\frac{b}{6(l-b)}} \quad \text{und} \quad H = qa = qb \sqrt{\frac{b}{6(l-b)}}.$$

Sodann folgt aus der Gleichung für die Kettenlinie  $y = a \text{Cot}(x/a)$ , indem man nur die quadratischen Glieder in der Entwicklung beibehält

$$l = a \left( 1 + \frac{b^2}{2a^2} \right)$$

und daher ist der Durchhang

$$f = h - a = \frac{b^2}{2a} = \frac{1}{2} \sqrt{6b(l-b)};$$

$f$  ist also durch denselben Ausdruck (46) gegeben wie bei der parabolischen Kettenlinie, was deshalb klar ist, weil durch die angegebene Vernachlässigung die gemeine Kettenlinie gerade durch eine Parabel ersetzt wird.

Beispiel 7. Die Gleichungen der Seilkurve in natürlicher Darstellung. Als natürlich mit einer ebenen Kurve verbundene Richtungen bezeichnet man die der Tangente  $\bar{t}$  und der Normalen  $\bar{n}$ . Das Wort „natürlich“ soll heißen: der Kurve selbst eigentümlich, frei von jeder Bezugnahme auf ein Achsensystem.

Betrachtet man in Abb. 22 ein Stück einer Seillinie und sind  $\bar{T}$  und  $\bar{T} + d\bar{T}$  die Seilkräfte an den Enden eines Teilchens von der Länge  $ds$ ,  $\bar{q}ds$  die eingeprägte

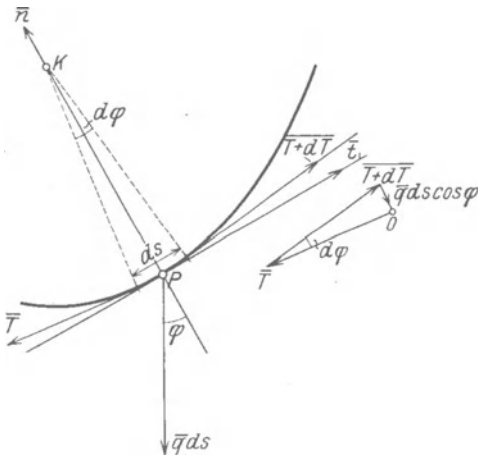


Abb. 22.

Kraft auf dieses Stück,  $\varphi$  der Winkel gegen die Normale  $\bar{n}$ , so lauten die Gleichgewichtsbedingungen für die Richtungen  $\bar{t}$  und  $-\bar{n}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= q \sin \varphi, \\ T \frac{d\varphi}{ds} &= q \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Die erste besagt, daß die Komponente  $q ds \sin \varphi$  einer Zunahme  $dT$  der Seilkraft entsprechen muß, die zweite, daß die Komponente  $q ds \cos \varphi$  durch den in Richtung  $\bar{n}$  entfallenden Betrag der Seilkräfte aufgenommen werden muß.

Die Division der beiden Gleichungen liefert

$$\frac{dT}{T d\varphi} = \text{tg } \varphi$$

und gibt integriert, wenn für  $\varphi = 0$ ,  $T = H$  sein soll:

$$\ln T = -\ln \cos \varphi + \ln H \quad \text{oder} \quad T = H/\cos \varphi \quad (55)$$

ganz unabhängig von  $q$ . — Sodann folgt aus der zweiten der Gln. (54)

$$ds = \frac{T d\varphi}{q \cos \varphi} = \frac{H}{q} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

und integriert, wenn für  $s = 0$ ,  $\varphi = 0$  ist

$$s = \frac{H}{q} \text{tg } \varphi = a \text{tg } \varphi, \quad (56)$$

eine Eigenschaft der gemeinen Kettenlinie, die nach den früher gegebenen Gln. (48), (49) und (50) unmittelbar bestätigt werden kann.

Beispiel 8. Der Kreisbogen als Seillinie. Die eben gefundenen Beziehungen gestatten unmittelbar die Beantwortung der Frage, nach welchem Gesetz die Belastung einer Kurve verteilt sein muß, damit diese nach einem Kreise durchhängt.

Gemäß der Definition für den Krümmungshalbmesser  $r$  einer Kurve erhalten wir mittels der Gln. (54) und (55)

$$r = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{T}{q \cos \varphi} = \frac{H}{q \cos^2 \varphi} = \text{konst.},$$

und daher ist

$$q = \frac{H}{r} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \tag{57}$$

das gesuchte Verteilungsgesetz. Man beachte, daß für  $\varphi = \pi/2$  die Belastung  $q = \infty$  wird. Die Konstante  $H$  ist durch den Wert  $q_0$  von  $q$  im tiefsten Punkte ( $\varphi = 0$ ) bestimmt:  $H = q_0 r$ .

## II. Ebene Kräftegruppen.

25. **Summe einer ebenen Kräftegruppe.** Für die Mechanik ausgedehnter Körper, wie sie in der Technik zur Behandlung kommen, erweist es sich als notwendig, über die bisherige Annahme „punktförmiger“ Kräftegruppen hinauszugehen und allgemeinere Verteilungen der Kräfte zu betrachten. Um zunächst für eine „ebene Kräftegruppe“, d. i. eine solche, bei der die Wirkungslinien der Kräfte nicht durch einen Punkt gehen, sondern irgendwie in der Ebene verteilt sind, zu dem Begriff ihrer „Summe“ zu gelangen, ist eine Festsetzung über die Beschaffenheit des Körpers notwendig, der ihr als Träger dient. Die einfachste Annahme ist die des starren Körpers; d. h. alle Teile sollen unveränderliche Entfernung voneinander haben und diese auch bei Einwirkung beliebig großer Kräfte unverändert behalten. Annähernd sind solche Körper durch die im gewöhnlichen Sinne festen Körper verwirklicht.

Diese Annahme führt zu zwei wichtigen Folgerungen (von denen die erste nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten oder sonstwie bewiesen werden kann): 1. Die Unwesentlichkeit des sog. Angriffspunktes einer Kraft, d. h. zwei gleich große und gleich gerichtete Kräfte auf derselben Wirkungslinie sind gleichwertig, und 2. Je zwei Kräfte können summiert werden, und zwar wenn sich die Wirkungslinien im Endlichen schneiden nach dem Parallelogrammgesetz (15), wenn sie sich im Unendlichen schneiden (d. h. parallel sind) durch einen sogleich anzugebenden Kunstgriff. Schneiden sie sich im Endlichen, so werden

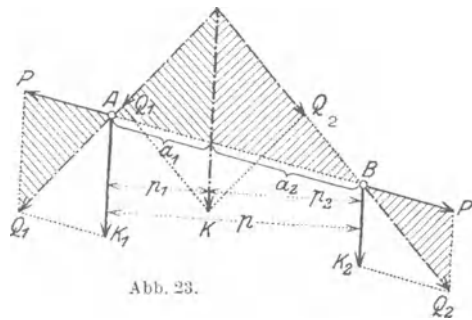


Abb. 23.

beide Kräfte an den gemeinsamen Schnittpunkt (gleichgültig ob dieser dem Körper angehört oder nicht) verschoben und wie üblich summiert. Sind sie parallel, wie  $\vec{K}_1$  und  $\vec{K}_2$  in Abb. 23, so füge man zwei beliebige



gleich große und entgegengesetzt gerichtete Kräfte  $\bar{P}$ ,  $-\bar{P}$  in einer beliebigen Transversalen hinzu und bilde die Summen  $\bar{Q}_1 = \bar{K}_1 + \bar{P}$ ,  $\bar{Q}_2 = \bar{K}_2 - \bar{P}$ , dann ist

$$\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 \equiv \bar{K}_1 + \bar{K}_2 = \bar{K}, \quad \text{und} \quad \boxed{K_1 + K_2 = K}, \quad (58)$$

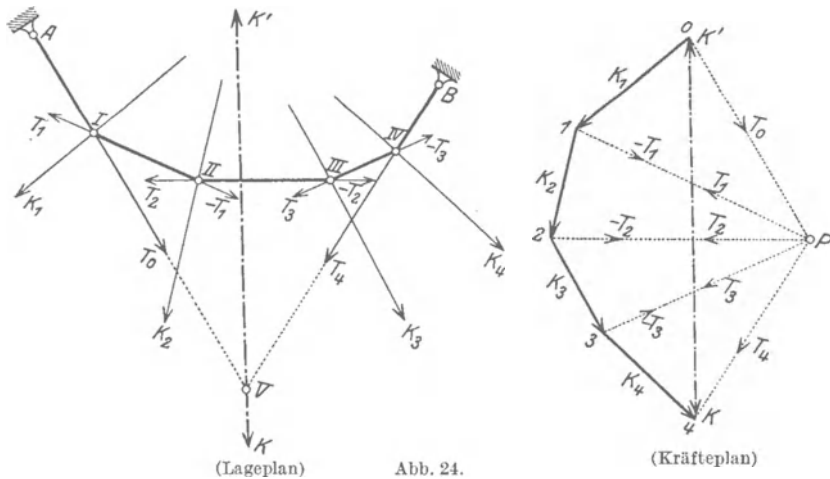
wodurch die Größe von  $\bar{K}$  als algebraische Summe von  $K_1$  und  $K_2$  gegeben ist. Die Ähnlichkeit der beiden in Abb. 23 gleichmäßig schraffierten Dreieckspaare liefert sogleich die Beziehung

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{p_2}{p_1}, \quad \text{oder} \quad \boxed{K_1 p_1 = K_2 p_2}, \quad (59)$$

was nichts anderes ist als der Momentensatz für irgendeinen Punkt von  $K$ . Durch (58) und (59) sind Größe und Ort der Summe  $\bar{K}$  der beiden parallelen Kräfte  $\bar{K}_1$  und  $\bar{K}_2$  gegeben.

Während also die Zeichnung des Krätedreiecks für parallele Kräfte unmöglich wird, behalten der Projektions- und der Momentensatz auch in diesem Falle unverändert ihre Geltung, worauf ihr großer Wert für die Statik der ebenen Kräftegruppen beruht.

**26. Methode des Seilecks.** Das eben beschriebene Verfahren würde bei einer größeren Anzahl von Kräften unübersichtlich werden, und



wird daher praktisch durch das folgende ersetzt, wobei die schon in 21 besprochene Seileckfigur herangezogen wird. Das Verfahren ist durch Abb. 24 gegeben. Größe und Richtung der Summe  $\bar{K}$  einer Anzahl von Kräften ist, wie man unmittelbar durch Zeichnung der aufeinanderfolgenden Krätedreiecke erkennt, durch die Schlußlinie des Kräftecks gegeben, das seitlich als eine besondere Figur — Kräfteplan — angelegt wird; es gibt also für  $n$  Kräfte jedenfalls für die Größe und

Richtung der Summe die Vektorgleichung

$$\boxed{\bar{K} = \bar{K}_1 + \bar{K}_2 + \dots + \bar{K}_n = \sum_{i=1}^n \bar{K}_i}. \quad (60)$$

Zur Festlegung der Lage von  $\bar{K}$  im Lageplan (links) ist die Kenntnis eines Punktes der Wirkungslinie von  $\bar{K}$  notwendig, der sich in folgender Weise ergibt. Man wähle im Kräfteplan einen Punkt  $P$  als Pol und zerlege jede Kraft  $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots$  usw. in zwei Teilkraften, die nach den Verbindungslinien der Eckpunkte  $0, 1, 2, \dots$  mit  $P$  wirken, also nach den Bezeichnungen der Abb. 24

$$\begin{aligned} \bar{K}_1 &= \bar{T}_0 + \bar{T}_1, & \bar{K}_2 &= -\bar{T}_1 + \bar{T}_2, & \bar{K}_3 &= -\bar{T}_2 + \bar{T}_3, \\ & & \bar{K}_4 &= -\bar{T}_3 + \bar{T}_4; \end{aligned}$$

dann folgt zunächst

$$\bar{K} = \bar{K}_1 + \bar{K}_2 + \bar{K}_3 + \bar{K}_4 = \bar{T}_0 + \bar{T}_4. \quad (61)$$

Soll jede Kraft  $\bar{K}_i$  durch je zwei solche Teilkraften  $-\bar{T}_{i-1}, \bar{T}_i$  tatsächlich ersetzt werden, so müssen sich diese im Lageplan auf  $\bar{K}_i$  schneiden und zu den bez. Kräften des Kräfteplans parallel sein. Man wähle daher auf  $\bar{K}_1$  einen beliebigen Punkt  $I$  und ziehe nacheinander die Parallelen zu den Strahlen des Kraftecks, wodurch man das „Seileck“  $I, II, III, IV$  und im Schnitt von  $\bar{T}_0$  und  $\bar{T}_4$  einen Punkt der Summe  $\bar{K}$  erhält, da sich die anderen Teilkraften paarweise tilgen. Man erkennt unmittelbar, daß der in Abb. 24 stark gezogene Linienzug die Gleichgewichtsfigur eines Seiles darstellt, das in den Punkten  $I, II, III, IV$  durch die Kräfte  $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \bar{K}_3, \bar{K}_4$  belastet ist und dessen Endstrahlen in irgendwelchen Punkten  $A$  und  $B$  befestigt sind.

Dieses Verfahren bleibt auch für parallele Kräfte unverändert in Geltung, nur fällt für solche das Krafteck  $0, 1, 2, \dots$  in eine einzige Gerade zusammen.

Ein besonderes Seileck ergibt sich, wenn man den Pol  $P$ , dessen Lage ja vollständig willkürlich ist, mit dem Anfangspunkt  $0$  des Kräfteplans zusammenfallen läßt. Die einzelnen Seilstrahlen  $01, 02, 03, \dots$  geben dann offenbar die Teilsummen  $\bar{K}_1, \bar{K}_1 + \bar{K}_2, \bar{K}_1 + \bar{K}_2 + \bar{K}_3, \dots$  an, und das zugehörige Seileck enthält in seinen Seilstrahlen gerade die Wirkungslinien dieser Teilsummen. Solche Seilecke werden als Mittelkraftlinien bezeichnet und in der Baumechanik verwendet.

**27. Kräftepaar und Moment.** Die einzige Ausnahme, bei der das Verfahren des Seilecks nicht zu einer bestimmten Summe führt, tritt ein, wenn zwei gleich große, entgegengerichtete Kräfte zusammengesetzt sind, die ein sogenanntes ebenes Kräftepaar bilden (Abb. 25). Das Krafteck für solche Kräfte ist zwar geschlossen, die ersten und letzten Strahlen des Seilecks für irgendeinen Pol  $P$  sind aber parallel zueinander. Also wird das gegebene Kräftepaar  $\bar{K}, -\bar{K}$  mit Hilfe der Seileck-Konstruktion durch zwei andere Kräfte  $\bar{T}_0, -\bar{T}_0$  ersetzt, die

wieder ein ebenes Kräftepaar bilden, das dem ursprünglichen gleichwertig ist. Die Ähnlichkeit der beiden schraffierten Dreiecke in Abb. 25 liefert sofort die Gleichung

$$\boxed{Ka = T_0 b = M}. \quad (62)$$

Das Produkt  $Ka$  wird als das Moment  $M$  des Kräftepaares bezeichnet; bildet man die Summe der Momente der beiden Kräfte  $\bar{K}$ ,  $-\bar{K}$  dieses Paares für irgendeinen Punkt der Ebene, so erhält man immer diesen Wert. Wir zählen dieses Moment positiv, wenn sein Drehsinn der positive ist (wie in Abb. 25), sonst negativ. Aus der Gl. (62) können wir daher schließen, daß aus dem gegebenen Kräftepaar (je nach der Wahl der Punkte  $P$  und  $I$ )  $\infty^3$  weitere Kräftepaare abgeleitet werden können, die alle mit den gegebenen gleichwertig sind, wofür lediglich die Gleichheit der Momente (einschließlich des Vorzeichens!) maßgebend ist.

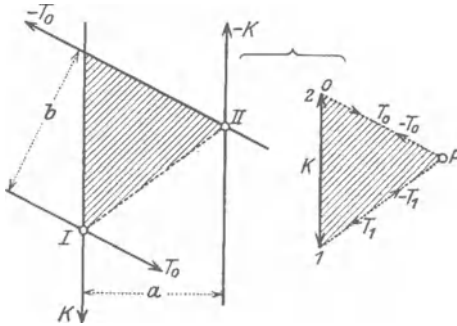


Abb. 25.

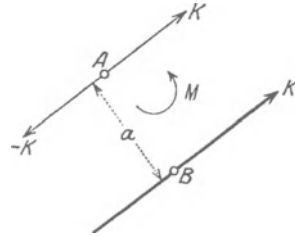


Abb. 26.

Hat man die Summe aus einer Kraft  $\bar{K}$  und einem Kräftepaar vom Momente  $M$  zu bilden (Abb. 26), so genügt es,  $M$  durch zwei Kräfte  $\bar{K}$ ,  $-\bar{K}$  darzustellen, so daß  $M = Ka$ , also  $a = M/K$  wird. Durch Verdrehung dieses Kräftepaares in die Lage nach Abb. 26 ergibt sich mittelbar, daß das Hinzutreten des Kräftepaares eine Parallelverschiebung von  $\bar{K}$  um den Abstand  $a = M/K$  mit sich bringt, und zwar — im Sinne von  $\bar{K}$  gesehen — nach rechts, wenn  $M$  positiv ist.

Ferner folgt unmittelbar: Beliebige viele Kräftepaare in der Ebene geben wieder ein Kräftepaar, dessen Moment der algebraischen Summe der Momente der gegebenen Kräftepaare gleich ist.

**28. Zeichnerische Bedingungen für Gleichgewicht.** Wenn zu den vier Kräften der Abb. 24 eine Kraft  $\bar{K}'$  hinzugefügt wird, die ihre Summe  $\bar{K}$  aufhebt, so sind offenbar die fünf Kräfte  $\bar{K}_1, \dots, \bar{K}_4, \bar{K}'$  im Gleichgewichte. Aus dem Kräfteplan ergibt sich, daß die Kräfte, mit ihren Pfeilen aneinandergesetzt, ein geschlossenes Kräfteck bilden, während das Seileck so beschaffen ist, daß — für alle Kräfte — je zwei Seilstrahlen sich auf der zugehörigen Kraftwirkungslinie schneiden, das Seileck also selbst ebenfalls eine geschlossene

Figur bildet (21). Durch Erweiterung auf eine beliebige (endliche) Zahl von Kräften ergibt sich unmittelbar die Aussage:

Eine ebene Kräftegruppe ist im Gleichgewichte, wenn sowohl das zugehörige Krafteck als auch das zugehörige Seileck für irgendeinen und daher für jeden beliebigen Pol  $P$  geschlossene Figuren sind.

Das Schließen des Kraftecks bedeutet das Nullwerden der Summe der Kräfte, das Schließen des Seilecks das Verschwinden der Momente; für Gleichgewicht muß beides erfüllt sein.

### 29. Mannigfaltigkeit der Seilecke für eine bestimmte Kräftegruppe.

Ist das Krafteck für eine bestimmte Kräftegruppe mit einer bestimmten Reihenfolge der Kräfte festgelegt, so gibt es noch  $\infty^3$  Seilecke, die dazu gezeichnet werden können und die, wie leicht einzusehen, alle auf dieselbe Mittelkraft führen müssen. Denn es kann einerseits der Pol  $P$  des Seilecks jede beliebige der  $\infty^2$  Lagen in der Ebene einnehmen, andererseits (wenn der Pol festliegt) noch ein beliebiger Seilstrahl des Seilecks auf  $\infty^1$  Arten gewählt werden. Erst dann sind alle anderen Seilstrahlen bestimmt.

a) Seilecke für denselben Pol. Die eben erwähnte, in der Wahl der ersten (oder irgendeiner anderen) Seileckseite liegende Willkür führt zu  $\infty^1$  verschiedenen Seilecken, deren entsprechende Seiten paarweise parallel sind. Die Schnittpunkte des ersten und letzten Seilstrahls liegen für alle Seilecke auf der Wirkungslinie der Summe  $\bar{K}$  der Kräftegruppe.

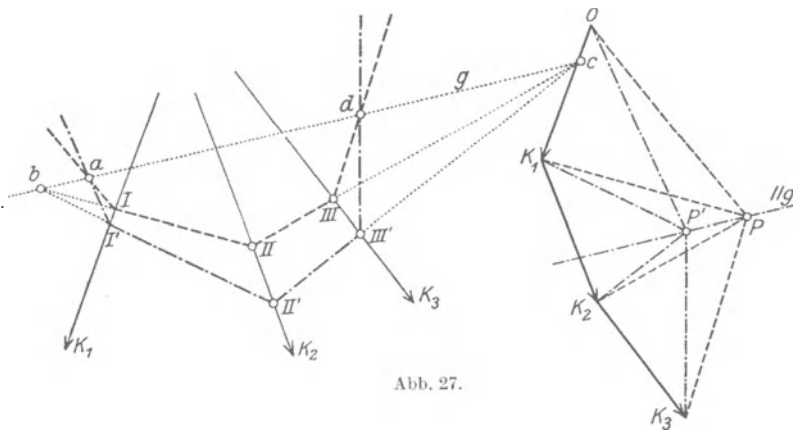


Abb. 27.

b) Für Seilecke, die für verschiedene Pole gezeichnet werden können, gilt der folgende Satz: Entsprechende Seiten zweier Seilecke, die zwei beliebigen Polen  $P, P'$  des Kraftecks (Abb. 27) zugehören, schneiden sich in Punkten  $a, b, c$  usw., die auf einer zu  $\overline{PP'}$  parallelen Geraden  $g$  liegen; diese nennt man die zu  $P, P'$  gehörige Polare (oder Culmannsche Gerade).



3. Durch  $A$  und  $B$  wird eine zweite Polare  $g_2$  gelegt und ein drittes Seileck so gezeichnet, daß dessen letzter Seilstrahl durch  $C$  und den Schnittpunkt  $s$  des entsprechenden Strahles des zweiten Seileckes mit  $g_2$  geht, die zugehörige Polverschiebung ist  $\overline{P'P''} \parallel g_2$ . Das Seileck  $III', II', I'$  (in dieser Folge zu zeichnen!) ist das gesuchte und  $P''$  der zugehörige Pol.

Andere Lösung:  
Sind zunächst nur zwei Kräfte  $\overline{K}_1, \overline{K}_2$  vorgegeben, so zeichnen wir ihre Summe  $\overline{K}$ , und es läuft die Aufgabe, das Seileck durch die drei Punkte  $A, B, C$  zu legen, auf die folgende elementargeometrische Frage hinaus (Abb. 29): Gegeben drei Gerade  $\overline{K}_1, \overline{K}_2, \overline{K}$ , die sich in einem Punkte  $O$  schneiden, und drei Punkte  $A, B, C$ ; es ist ein Dreieck zu zeichnen, dessen Seiten durch je einen Punkt  $A, B, C$  hindurchgehen und sich paarweise auf den gegebenen Geraden  $\overline{K}_1, \overline{K}_2, \overline{K}$  schneiden.

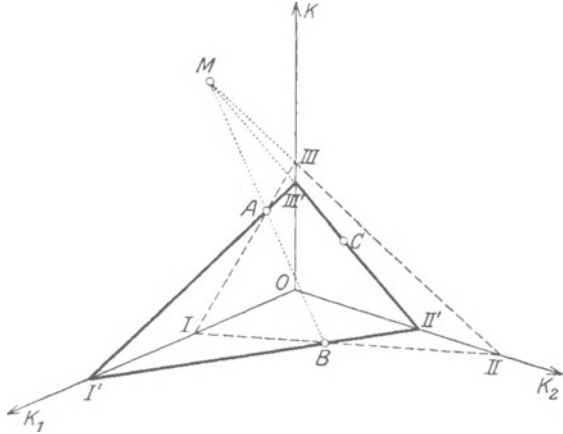


Abb. 29.

Die in Abb. 29 dargestellte Lösung ergibt sich am einfachsten durch die folgende räumliche Deutung:  $\overline{K}_1 \overline{K}_2 \overline{K}$  seien die drei Achsen eines Dreikants und  $A, B, C$  drei Punkte in den Ebenen dieses Dreikants in axonometrischer Projektion. Die Spuren der durch  $A, B, C$  gelegten Ebene bilden das gesuchte Seileck. Man lege zuerst durch  $A$  und  $B$  eine beliebige Ebene und zeichne ihre Spuren  $III-I, I-II, II-III$ . Die Spur  $II-III$  schneidet die Gerade  $AB$  in einem Punkte  $M$ , und  $M$  mit  $C$  verbunden gibt den durch  $C$  gehenden Strahl  $II'-III'$  des gesuchten Seilecks. Die anderen Strahlen  $II'-B$  und  $III'-A$  müssen sich auf  $\overline{K}_1$  (in  $I$ ) schneiden.

In Abb. 30 ist diese Konstruktion für die Kräfte  $\overline{K}_1, \overline{K}_2$  unter Anwendung derselben Bezeichnungen wie in Abb. 29 wiederholt.

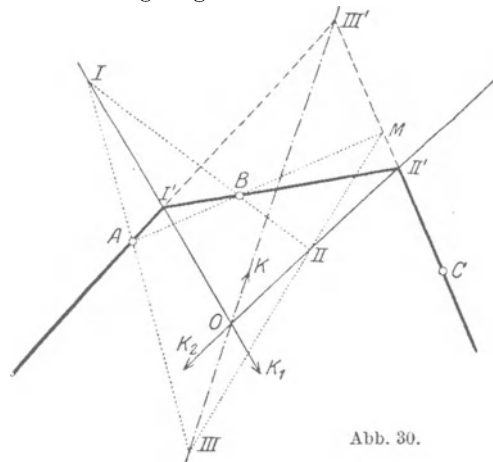


Abb. 30.

Bezüglich der Anwendungen dieser Konstruktionen, die leicht für eine beliebige Anzahl von Kräften erweitert werden können, insbesondere für das Dreigelenk vgl. 36, Beispiel 18.

**31. Rechnerische Bedingungen für das Gleichgewicht einer ebenen Kräftegruppe.** Die rechnerische Ermittlung der Summe einer Gruppe von  $n$  Kräften  $\bar{K}_1, \dots, \bar{K}_n$  in der Ebene erfordert die Einführung eines Bezugssystems  $O, x, y$ . Seien  $(X_i, Y_i)$  die Komponenten von  $\bar{K}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) nach diesen Achsen und  $x_i, y_i$  die Koordinaten eines beliebigen Punktes von  $K_i$ , dann ist

$$x_i Y_i - y_i X_i = M_i \quad (63)$$

das Moment von  $K_i$  in Bezug auf  $O$  (oder in Bezug auf die  $z$ -Achse). Die Größen  $X_i, Y_i, M_i$  können unmittelbar als die „Koordinaten des Kraftvektors  $\bar{K}_i$ “ betrachtet werden. Durch Angabe des Momentes  $M_i$  und der Komponenten  $X_i, Y_i$  ist die „Wirkungslinie“ der Kraft  $\bar{K}_1$  festgelegt. Fügt man in  $O$  je zwei Kräfte  $-\bar{K}_i, \bar{K}_i$  hinzu, dann erhält man  $n$  Kräfte  $\bar{K}_1, \dots, \bar{K}_n$  in  $O$  und  $n$  Momente  $M_1, \dots, M_n$  um  $O$ ; die Addition der Kräfte in  $O$  liefert eine Kraft  $\sum \bar{K}_i = \bar{K}$  und die der Momente ein Moment  $\sum M_i = M$ .

Die vektorielle Addition der Kräfte  $\bar{K}_i$ , die früher im Kräfteplan geleistet wurde, ist gleichwertig mit der Addition der Komponenten nach  $x$  und  $y$ ; es ist also  $\sum X_i = X, \sum Y_i = Y$ . Die Gleichung der Wirkungslinie der Summe der gegebenen Kräftegruppe lautet

$$x Y - y X = M,$$

sie liegt zur Kräftesumme  $\bar{K}$  in  $O$  parallel, im Abstände  $M/K$  von ihr entfernt, und zwar rechts von  $\bar{K}$ , wenn  $M$  positiv ist (27).

Wenn insbesondere  $\bar{K} \neq 0, M = 0$  ist, so ist  $K$  in  $O$  bereits die Summe der gegebenen Kräfte; dies tritt offenbar für alle Koordinatensysteme ein, deren Anfangspunkte  $O$  auf  $K$  liegen. — Ist  $\bar{K} = 0, M \neq 0$ , so ist die gegebene Kräftegruppe einem Kräftepaare vom Momente  $M$  gleichwertig.

Wenn endlich  $\bar{K} = 0$  und  $M = 0$ , so haben wir Gleichgewicht und erhalten den Satz:

Eine ebene Kräftegruppe ist im Gleichgewichte, wenn die Summen der Komponenten der Kräfte nach zwei beliebigen Richtungen und die Summe der Momente um irgendeinen Punkt  $O$  der Ebene verschwinden. In Zeichen:

$$\boxed{\begin{aligned} X &\equiv \sum_{i=1}^n X_i = 0, & Y &\equiv \sum_{i=1}^n Y_i = 0, \\ M &\equiv \sum_{i=1}^n M_i \equiv \sum_{i=1}^n (x_i Y_i - y_i X_i) = 0. \end{aligned}} \quad (64)$$

Wenn nämlich die Bedingungen  $X = 0, Y = 0$  für irgendein Paar von Achsen in der Ebene erfüllt sind, so besteht die gleiche Bedingung



auch für jede andere Gerade der Ebene als Achse, wie man durch Projektion auf diese Gerade leicht feststellt. Und wenn  $M$  die Summe der Momente für den Punkt  $O$  ist, dann ist sie für einen Punkt  $O'$  mit den Koordinaten  $(a, b)$

$$M' = M + bX - aY, \tag{65}$$

wenn daher die Gln. (64) erfüllt sind, so ist auch  $M' = 0$  für jeden anderen Punkt  $O'$  der Ebene.

Die drei „Gleichgewichtsbedingungen“ (64) gestatten, drei unbekannte Größen zu bestimmen. Sind bei einer vorgegebenen Aufgabe ebenso viele Unbekannte vorhanden, so reichen die Gln. (64) aus, und wir haben ein „statisch bestimmtes“ System vor uns. Ist die Zahl der Unbekannten größer als die Zahl der zur Verfügung stehenden Gleichungen, so spricht man von „statisch unbestimmten“ Systemen. Zu deren Behandlung reicht die Statik der starren Körper nicht aus, es müssen weiter reichende Hilfsmittel, und zwar die der Elastizitätstheorie herangezogen werden. — Die Unbekannten selbst sind entweder, und zwar dann, wenn die Gleichgewichtstellung nicht bekannt ist, Lagenkoordinaten des Körpers (Längen, Koordinaten, Winkel u. dgl.) oder Auflagerkräfte, die der Art der Auflagerung entsprechend einzuführen sind. Bei statisch bestimmten Systemen können Auflagerkräfte nur bei Vorhandensein von eingepprägten Kräften auftreten.

**32. Eindeutige Zerlegungsaufgaben.** Die Zerlegung einer Kraft  $\bar{K}$  in Teilkräfte ist nur in den folgenden Fällen eindeutig bestimmt.

a) Zerlegung in zwei Teilkräfte, deren Richtungen gegeben sind und sich auf  $\bar{K}$  schneiden. Liegt der Schnittpunkt der zwei Kräfte, in die  $\bar{K}$  zerlegt werden soll, im Endlichen, so ergeben sich die Teilkräfte durch Zeichnung des Kräfte-dreiecks nach Abb. 4. Wenn jedoch der Schnittpunkt ins Unendliche fällt, die zu suchenden Teilkräfte also zur gegebenen Summe parallel sind, dann versagt diese einfache Zerlegung, und es müssen diese Teilkräfte auf andere Weise, etwa mit Hilfe des Seilecks durch Umkehrung der in 26 gegebenen Konstruktion oder durch Rechnung gefunden werden. Hierzu nehme man in Abb. 31

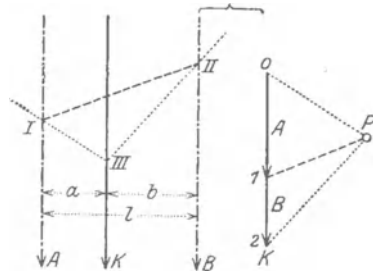


Abb. 31.

$\overline{O2} = \bar{K}$  und ziehe mit Hilfe eines beliebig gewählten Poles  $P$  die Parallelen zu den Strahlen  $\overline{P0}$  und  $\overline{P2}$  durch einen auf  $\bar{K}$  willkürlich gewählten Punkt  $III$ . Diese treffen die gegebenen Wirkungslinien in  $I$  und  $II$ , und die Parallele zu  $I-II$  durch  $P$  schneidet auf  $\overline{O2}$  die Teilkräfte  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  aus. Und zwar ist im Kräfteplan  $\bar{A}$  jene Strecke auf  $K$ , für welche die Parallelen zu den Verbindungsstrahlen der Endpunkte mit  $P$  sich im Lageplan auf der Wirkungslinie  $A$  schneiden, es ist also  $\overline{O1} = \bar{A}$ . Ebenso ist  $\overline{12} = \bar{B}$ . Diese Methode ist auch

dann ohne weiteres anwendbar, wenn die Summe einer Gruppe von Parallelkräften  $\bar{K}_i$  in zwei parallele Teilkräfte  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  zu zerlegen ist.

Ein Weg, diese Zerlegung ohne Seileck zeichnerisch durchzuführen, ist in Abb. 32 dargestellt. Man trage  $\bar{K}$  auf der eigenen Wirkungslinie (in einem passend gewählten Maßstabe) auf und ziehe durch die Endpunkte zwei beliebige Parallele. Jede Diagonale in dem so entstehenden Parallelogramm schneidet auf  $\bar{K}$  die Teilkräfte  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  aus; die Verwertung der Ähnlichkeit der entstehenden Dreiecke führt unmittelbar zum Beweis für die Richtigkeit dieser Konstruktion, und zwar auf den Momentensatz für einen auf  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  gelegenen Momentenpunkt.

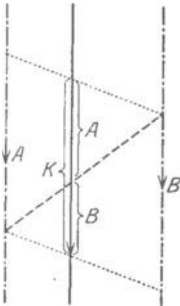


Abb. 32.

Mit Hilfe dieses Momentensatzes für einen Punkt auf  $\bar{B}$  oder  $\bar{A}$  ergeben sich nach den Bezeichnungen der Abb. 31 die Teilkräfte aus der Forderung der Gleichwertigkeit (Äquivalenz) durch Rechnung in der Form

$$A = K \frac{a}{l}, \quad B = K \frac{b}{l}, \quad A + B = K. \quad (66)$$

b) Zerlegung in drei Teilkräfte nach drei Wirkungslinien, die nicht durch einen (im Endlichen oder Unendlichen liegenden) Punkt gehen.

Sind  $g_1, g_2, g_3$  in Abb. 33a) die gegebenen Geraden, nach denen die gegebene Kraft  $\bar{K}$  zu zerlegen ist, und bezeichnet man die gesuchten

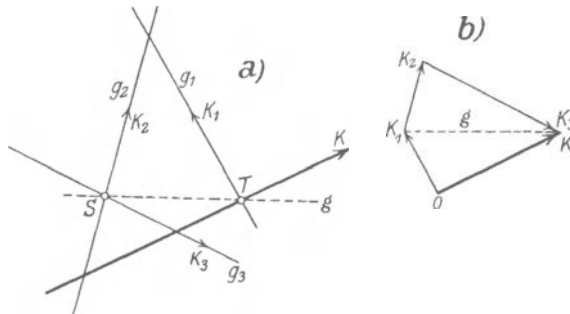


Abb. 33.

Kräfte in diesen Linien mit  $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \bar{K}_3$ , so hat man nur zu beachten, daß die Summe  $\bar{K}_{23} \equiv \bar{K}_2 + \bar{K}_3$  durch den Schnitt  $S$  von  $g_2$  und  $g_3$  hindurchgehen muß. Da aber  $\bar{K}_{23} + \bar{K}_1 = \bar{K}$  sein soll, hat man  $\bar{K}$  nach  $g_1$  und der Verbindungslinie  $g$  von  $T$  (Schnitt von  $\bar{K}$  und  $g_1$ ) und  $S$  zu zerlegen, um zunächst  $\bar{K}_1$  und  $\bar{K}_{23}$  und durch weitere Zerlegung von  $\bar{K}_{23}$  nach den Richtungen  $g_2$  und  $g_3$  auch  $\bar{K}_2$  und  $\bar{K}_3$  selbst zu erhalten.

Jede Zerlegung in mehr als drei Teilkräfte ist unbestimmt und erfordert jeweils weitere Festsetzungen.

Beispiel 9. Man zeige, daß die Zerlegung b) auf dreifache Weise ausführbar ist und daß sich dabei immer dieselben Werte für  $\bar{K}_1$ ,  $\bar{K}_2$  und  $\bar{K}_3$  ergeben.

**33. Auflagerkräfte. Formen der Auflager.** Für die in der technischen Mechanik vorkommenden Probleme, die stets gestützte bzw. geführte Körper betreffen, handelt es sich nicht nur um die Auffindung der Gleichgewichtslagen, sondern außerdem noch um die Ermittlung der auftretenden Auflagerkräfte, die durch gegebene eingeprägte Kräfte (Lasten) hervorgerufen werden. In vielen Fällen ist die Gleichgewichtslage von vornherein gegeben, und es handelt sich dann nur um die Bestimmung von Auflagerkräften. Für jede Auflagerstelle ist zur Kennzeichnung der an ihr entstehenden Auflagerkraft  $\bar{D}$  im allgemeinen die Angabe von drei Größen ( $X$ ,  $Y$ ,  $M$ ) erforderlich, in den für die Anwendung wichtigen Fällen erniedrigt sich jedoch diese Anzahl auf eins oder zwei. In Abb. 34 1) bis 22) ist eine

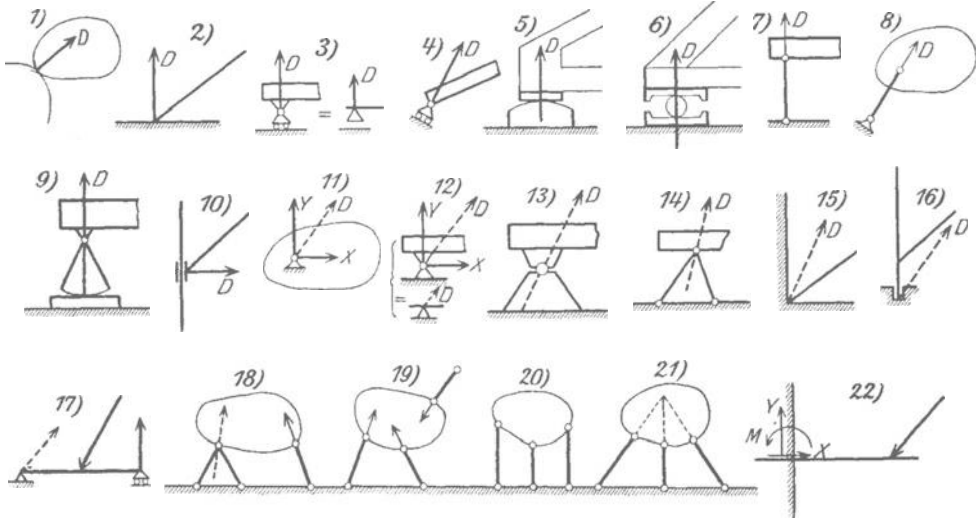


Abb. 34.

Übersicht über die auftretenden Möglichkeiten gegeben; es sind dies im wesentlichen die folgenden Fälle:

I.  $\bar{D}$  durch eine Größe gegeben.

a) Bewegliche Auflagerung. Die Abb. 34 1) bis 4) gelten für die Stützungen (Berührungen) glatter Körper, die dadurch gekennzeichnet sind, daß in der Richtung der gemeinsamen Berührungsebene keinerlei Kräfte auftreten können:  $\bar{D}$  ist also in allen diesen Fällen senkrecht zur gemeinsamen Berührungsebene anzusetzen. 5) und 6) geben solche Formen dieser Auflagerung, wie sie technischen Ausführungen entsprechen, und zwar nennt man 5) ein Gleitlager, 6) ein Rollenlager.

b) Pendelstütze nach 7) und 8), technische Ausführung nach 9):  $\bar{D}$  ist in der Richtung der Stütze anzunehmen.

c) Gleithülse (Ringlager, Halslager) nach 10):  $D$  fällt in die Normale zur Verschiebungsrichtung der Hülse.

II.  $\bar{D}$  durch zwei Größen gegeben.

d) Gelenk nach 11) und 12), technische Ausführung nach 13). Der Gelenkdruck wird durch zwei Teilkräfte, etwa nach der Wagrechten und Lotrechten ( $X$ ,  $Y$ ), angegeben.

e) Die Doppelstütze nach 14), die

f) Eckenstützung nach 15) und

g) die Stützung in einem Zapfen (Fußlager) nach 16) verhalten sich statisch wie Gelenke.

III. Feste Stützungen. Da die Zahl der Gleichgewichtsbedingungen drei beträgt, so bedeutet das Hinzutreten einer dritten Auflagerbedingung bereits die vollkommene Festlegung des Körpers.

h) Ein Gelenk und ein bewegliches Auflager nach 17).

i) Dreifache Pendelstützung nach 18) und 19); die Zerlegung einer Kraft nach diesen drei Stützen ist möglich, wenn die Richtungen dieser drei Stützen nicht durch einen Punkt hindurchgehen. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so erhalten wir eine „wackelige“ (labile) Stützung nach 20) und 21), die bei technischen Ausführungen zu vermeiden ist (vgl. 43).

k) Die Einspannung nach 22) kann als Grenzfall von 17) für ineinanderrückende Stützpunkte angesehen werden und wird statisch durch die drei Größen  $X$ ,  $Y$ ,  $M$ , d. h. zwei Komponenten und ein Moment gekennzeichnet.

Die Einführung jeder weiteren Auflagerbedingung bringt für den einzelnen Körper bereits eine „statische Unbestimmtheit“ mit sich, und zwar spricht man von äußerer statischer Unbestimmtheit, wenn diese von überzähligen Auflagerbedingungen herrührt; von innerer statischer Unbestimmtheit jedoch dann, wenn diese Unbestimmtheit schon bei der Tragkonstruktion „ohne Auflager“ besteht, was z. B. bei Fachwerken (III. Kap., 37) dann eintritt, wenn die Zahl der Stäbe größer ist, als zur Verbindung der Knoten zu einem starren Ganzen unbedingt erforderlich wäre.

Sind die Auflagerkräfte mit einer der Art der einzelnen Auflager entsprechenden Zahl von Unbekannten eingeführt, so folgt deren Bestimmung durch die Forderung, daß diese Unbekannten zusammen mit den eingepägten Kräften (Lasten) eine Gleichgewichtsgruppe bilden. Dabei kommen rechnerisch die Gleichgewichtsbedingungen (64), zeichnerisch die in 28 gegebenen Verfahren zur Anwendung. Ist die Gleichgewichtstellung unbekannt, so kommt i. a. für die Lösung nur die Rechnung, bei bekannter Gleichgewichtstellung dagegen kommen beide Methoden in Frage.

**34. Beispiele.** In Beispiel 3 ergibt der Momentensatz für  $O$  unmittelbar die Bedingung  $K_1 a_1 = K_2 a_2$  für das Gleichgewicht des Stabes. Ebenso kann man die Beziehungen  $T \bar{l} = K_1 a_1 = K_2 a_2$  aus dem Momentensatz für die in  $A$  bzw.  $B$  angreifenden Kräfte um  $O$  ablesen.

Beispiel 10. Ein Stab  $\overline{AB}$  stützt sich auf zwei unter  $\alpha, \beta$  geneigte glatte Ebenen (Abb. 35); gegeben ist ferner  $\overline{AS} = a, \overline{SB} = b$ . Man ermittle den Winkel  $\varphi$  für Gleichgewicht.

Eingeprägt ist hier nur das im Schwerpunkte  $S$  angreifende Gewicht  $\overline{G}$ . Die Auflagerkräfte  $\overline{D}_1, \overline{D}_2$  stehen zu den Ebenen senkrecht, die Gleichgewichtstellung ist durch die Bedingung gekennzeichnet, daß  $\overline{G}$  durch deren Schnittpunkt  $O$  hindurchgeht. Aus

$$\overline{OS} = \frac{a \sin(\varphi - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{b \sin(\varphi + \beta)}{\sin \beta}$$

folgt dann unmittelbar

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{a \operatorname{ctg} \alpha - b \operatorname{ctg} \beta}{a + b},$$

und aus dem Kräfte Dreieck

$$D_1 = G \sin \beta / \sin(\alpha + \beta),$$

$$D_2 = G \sin \alpha / \sin(\alpha + \beta).$$

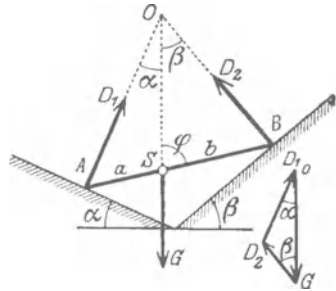


Abb. 35.

Beispiel 11. Freiauflegender Träger mit  $K_1, \dots, K_n$  belastet, wie z. B. Abb. 38a für drei Kräfte. Die Auflagerkräfte  $\overline{A}, \overline{B}$ , die beide lotrecht gerichtet sind, ergeben sich rechnerisch mit Hilfe des Momentensatzes für die Punkte  $B$  und  $A$

$$A = \frac{1}{l} \sum_1^n K_i a_i, \quad B = \frac{1}{l} \sum_1^n K_i (l - a_i); \quad (67)$$

zeichnerisch durch Ermittlung der Summe mit Hilfe des Seilecks und Zerlegung nach 32. Bezüglich der Bedeutung des Seilecks als Momentenlinie s. 35.

Beispiel 12. Als Zweigelenk bezeichnet man einen in zwei Gelenken  $A, B$  gestützten Körper (Abb. 36); es ist das einfachste Beispiel eines einfach (äußerlich) statisch unbestimmt gestützten Körpers. Die Gelenkkräfte in  $A$  und  $B$  sind durch vier Komponenten  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$  dargestellt. Die drei Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum X_i = X_1 + X_2 + K \cos \alpha = 0,$$

$$\sum Y_i = Y_1 + Y_2 + K \sin \alpha = 0,$$

$$\sum M_i = K a + Y_2 l = 0$$

geben

$$Y_2 = -K a / l,$$

$$Y_1 = -K \sin \alpha + K a / l,$$

aber nur

$$X_1 + X_2 = -K \cos \alpha;$$

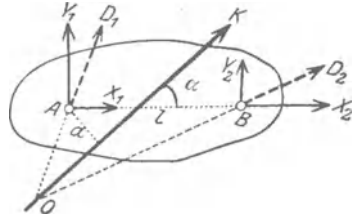


Abb. 36.

sie reichen daher nicht aus, um alle vier Komponenten der Gelenkkräfte zu bestimmen. Für die in der Verbindungslinie  $\overline{AB}$  liegenden Komponenten erhalten wir nur den Wert ihrer Summe, aber nicht die einzelnen Summanden. Geometrisch zeigt sich diese Unbestimmtheit darin, daß die Zerlegung von  $\overline{K}$  in zwei Teilkkräfte, die durch  $A$  und  $B$  laufen, für alle möglichen Zerlegungen (je nach Wahl von  $O$  auf  $\overline{K}$  auf dieselben Werte von  $X_1 + X_2, Y_1, Y_2$  führt; diese Größen  $(X_1 + X_2, Y_1, Y_2)$  nennt man Invarianten in bezug auf alle diese möglichen Zerlegungen.

Beispiel 13. Das Gerüst des in Abb. 37 gezeichneten fahrbaren Krans ist um eine Säule drehbar, an welche es sich in dem Zapfen  $B$  und dem lotrechten Halslager  $A$  stützt; der Kran ist mit der Nutzlast  $\overline{Q}$  und dem Gegengewicht  $\overline{G}$

belastet. Die Säule ist auf einen Wagen aufgesetzt, der auf einer Schiene läuft, während das Gerüst oben mittels einer Rolle zwischen zwei  $\square$ -Trägern geführt wird.

Steht der Kran parallel den Schienen, Abb. 37a, dann sind die auf das Gerüst wirkenden Kräfte so zu bestimmen, daß  $\bar{K} = \bar{Q} + \bar{G}$ ,  $\bar{H}$  in  $A$  und  $\bar{D}$  in  $B$  sich in einem Punkte schneiden und ein geschlossenes Dreieck bilden. — Wird der Kran um  $\pi/2$  herausgeschwenkt (Abb. 37b), dann hat man zunächst die Auflagerkräfte in den Schienen: unten  $H'$ ,  $V$  und oben  $H'$  unter der Wirkung der Belastung  $\bar{K} = \bar{Q} + \bar{G}$  zu ermitteln, wobei

$$V = K = Q + G, \quad H'h = Ka, \quad \text{also } H' = Ka/h;$$

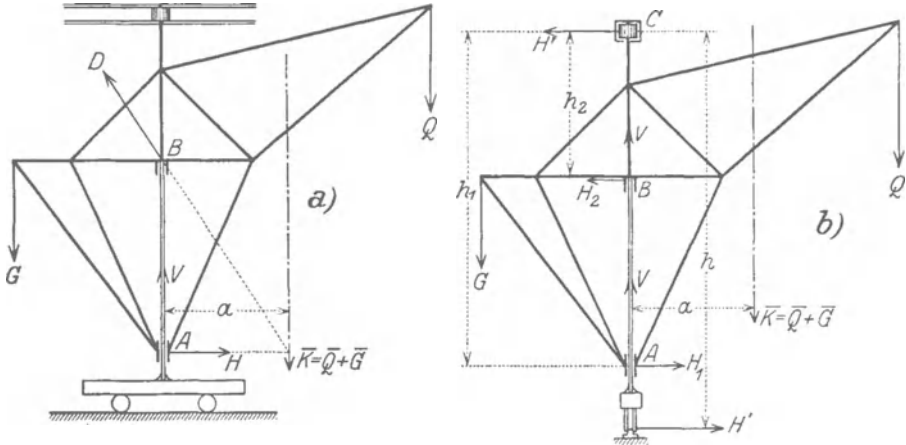


Abb. 37.

sodann hat man das Gleichgewicht des Auslegers für sich zu betrachten, der in  $A$  und  $B$  gestützt und außer durch  $\bar{K}$  noch durch  $\bar{H}'$  in  $C$  belastet anzusehen ist. Der Projektionsatz für die Wagerechte und der Momentensatz für  $C$  geben die Gln.

$$H_1 h_1 - H_2 h_2 = Ka, \quad H_1 - H_2 = H' = Ka/h.$$

Ihre Auflösung nach  $H_1, H_2$  liefert

$$H_1 = \frac{h - h_2}{h_1 - h_2} \frac{a}{h} K \quad \text{und} \quad H_2 = \frac{h - h_1}{h_1 - h_2} \frac{a}{h} K.$$

Die Auflagerkräfte auf das Krangerüst sind dann  $-\bar{H}_1$  in  $A$  und  $-\bar{H}_2 - \bar{V}$  in  $B$ . Beachte, daß dann auch der Wagen unter der Wirkung der wagerechten Kräfte  $-\bar{H}_2$  in  $B$   $-\bar{H}_1$  in  $A$  und  $\bar{H}'$  an der unteren Schiene und der lotrechten Kräfte  $-\bar{V}$  in  $B$  und  $\bar{V}$  an der unteren Schiene im Gleichgewichte ist.

**35. Biegemoment und Querkraft.** Die Bestimmung der Auflagerkräfte führt zunächst zur Kenntnis jener Kräfte, mit welchen die belastete Tragkonstruktion auf die sie unterstützenden Körper wirkt; sie ist aber auch notwendig, um die Inanspruchnahme des „Trägers“ selbst in allen seinen Teilen zu untersuchen. Jede Tragkonstruktion, die in der Technik Verwendung findet, sei es ein Dachstuhl, eine Brücke, ein Kran, Fahrzeug u. dgl. m., muß so durchgebildet werden, daß der innere Zusammenhang der einzelnen Teile bei allen auftretenden Belastungen gesichert ist, oder mit anderen Worten, daß an keiner Stelle der Tragkonstruktion die Festigkeit des Materials überschritten



wird. Zur Entscheidung dieser Frage ist vor allem notwendig, die Kräfte zu kennen, mit denen irgend ein Teil der Konstruktion „beansprucht“ ist. In welcher Art diese Belastung durch die „inneren Kräfte“ (Spannungen) des Materials aufgenommen wird, können wir hier nicht erörtern; das hängt vor allem von der Form und Art des Körpers, von der Art der Belastung und der Auflagerung ab. Wir müssen uns vielmehr auf die Aufgabe der Statik beschränken, für gerade stabförmige Körper oder einfache Träger die äußeren Kräfte anzugeben, mit denen ein beliebiger Querschnitt eines solchen Trägers „belastet“ ist.

Der Gedanke, der zur Beantwortung dieser Frage führt, ist ganz ähnlich dem zur Bestimmung der Auflagerkräfte verwendeten. Wir

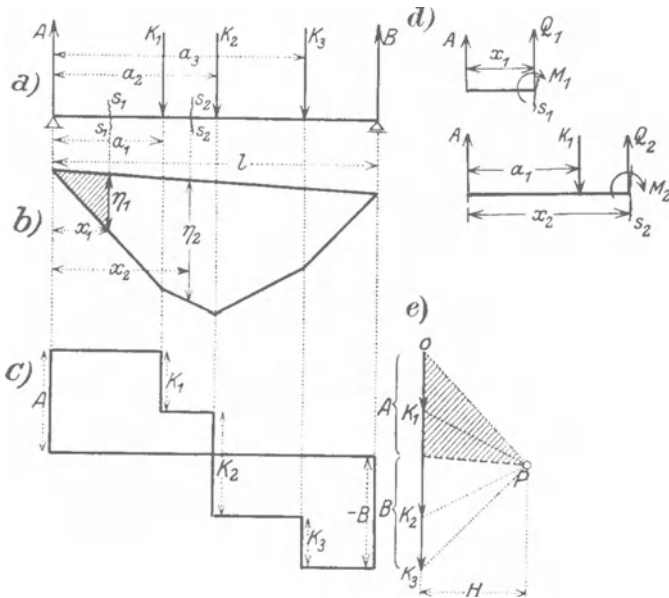


Abb. 38.

erhalten die auf einen Querschnitt  $s_1$  (Abb. 38a) eines stabförmigen Körpers oder „Trägers“ wirkenden Kräfte, wenn wir uns etwa den rechten Teil abgetrennt denken und die Summe der auf den Querschnitt wirkenden inneren Kräfte durch die Festsetzung bestimmen, daß diese zusammen mit den eingepägten Kräften eine Gleichgewichtsgruppe bilden.

Für den lotrecht belasteten und wagrecht gelagerten Träger nach Abb. 38a ist die in der Stabachse liegende „Normalkraft“ Null, auf den Querschnitt „wirkt“ nur eine Querkraft  $Q$ , die gleich ist der Summe der auf einer Seite, z. B. links vom Querschnitt liegenden Kräfte, und ein Biegemoment  $M$ , das gleich dem Momente der ebenfalls links von  $s_1$  wirkenden Kräfte um die Querschnittsmitte. Dabei sind zunächst die Auflagerkräfte  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  in der gewöhnlichen Weise (zeichnerisch mittels des Seileckes, rechnerisch durch den



Momentensatz) zu bestimmen und weiterhin wie eingeprägte Kräfte — wie die Lasten  $K_i$  selbst — zu behandeln. Damit ergibt sich für den durch die Einzelkräfte  $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \bar{K}_3$  belasteten Träger für den

Schnitt  $s_1$ : die Querkraft  $Q_1 = A$ , und das Biegemoment  $M_1 = A x_1$ ,  
 „  $s_2$ : „ „ „  $Q_2 = A - K_1$  und das Biegemoment  
 $M_2 = A x_2 - K_1 (x_2 - a_1)$

(die Belastung dieser Schnitte ist in Abb. 38d herausgezeichnet) und für den Schnitt  $s_n$  durch das „ $n$ -te Feld“

$$Q_n = A - \sum_{i=1}^{n-1} K_i, \quad (68)$$

$$M_n = A x_n - \sum_{i=1}^{n-1} K_i (x_n - a_i) = Q_n x_n + \sum_{i=1}^{n-1} K_i a_i. \quad (69)$$

In der Baumechanik, wo diese Begriffe gerade von diesem einfachen Belastungsfall ausgehend entwickelt worden sind, wird dabei das Biegemoment dann als positiv bezeichnet, wenn es im Sinne des Uhrzeigers wirkt; dieser Festsetzung sind wir auch hier gefolgt.

Die Aufzeichnung von  $Q_n$  als Funktion von  $x_n$  liefert die Querkraftlinie, „Q-Linie“, nach Abb. 38c, die für den Fall von Einzellasten eine unstetige, treppenartige Kurve ist, deren Ordinate an jeder Laststelle um den Betrag der betreffenden Kraft „springt“; man kann daher für den Fall der Belastung durch Einzelkräfte eigentlich nur von einer Querkraft „knapp links“ oder „knapp rechts“ von der Last sprechen.

Die Verteilung des Momentes, die „Momentenlinie“, „M-Linie“, ergibt sich in einfacher Weise aus dem Seileck, das zur Ermittlung von  $A, B$  gedient hat. Die Ähnlichkeit der schraffierten Dreiecke in Abb. 38b und c liefert in der Tat unmittelbar, wenn die „Polweite“, d. i. die Entfernung des Poles  $P$  von der Lotrechten, in der alle Kräfte  $\bar{K}_i$  im Kräfteplan liegen, mit  $H$  bezeichnet wird ( $H$  hat die Dimensionen einer Kraft!)

$$A : H = \eta_1 : x_1, \quad \text{daher} \quad A x_1 = M_1 = H \eta_1. \quad (70)$$

Die Strecke  $\eta_1$  im Seileck ist daher für alle Werte von  $x$  ein Maß für das Biegemoment an dieser Stelle. Für den Schnitt  $s_2$  folgt ganz ähnlich

$$M_2 = A x_2 - K_1 (x_2 - a_1) = H \eta_2, \quad (71)$$

wobei  $\eta_2$  als Differenz zweier Strecken erscheint, die einzeln das Moment von  $A$  und  $K_1$  um den Querschnitt  $s_2$  angeben, usw.

Die Fläche zwischen den einzelnen Seilstrahlen und dem Schlußstrahle, die Momentenlinie (in Abb. 38b stark umrandet), gibt mithin sofort die ganze Verteilung der Biegemomente an. Der größte Wert von  $\eta$  entspricht dem größten auftretenden Biegemomente, das also bei Einzellasten in der Regel unter einer Last auftritt (es kann auch vorkommen, daß ein Strahl des Seilecks zur Schlußlinie parallel läuft, dann ist in dem betreffenden

Felde das Biegemoment konstant). Die Kenntnis dieses größten Wertes ist wichtig für die Bestimmung der Abmessungen des Trägers; die Stelle, an der er auftritt, nennt man den Bruchquerschnitt und das größte Moment das Bruchmoment. —

Diese Begriffe übertragen sich unmittelbar auf den Fall beliebiger (stetiger oder unstetiger) Belastung  $q = q(\xi)$  längs des Trägers, etwa nach Abb. 39. Durch Teilung der ganzen Trägerlänge in schmale Streifen und Vereinigung der in den einzelnen Streifen wirkenden, ausgebreiteten Lasten zu Einzellasten, die in den Mittelpunkten (Schwerpunkten) der einzelnen Lastenstreifen angreifen, kann man begrifflich sogleich den eben besprochenen Fall wieder herstellen und erhält dadurch Querkraft- und Momentenlinie durch Ausführung der betreffenden Summationen, die dabei in Integrationen übergehen.

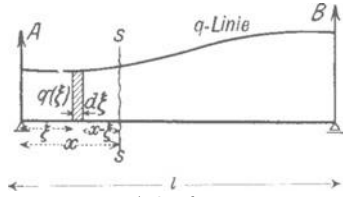


Abb. 39.

Die Querkraft an der Stelle  $x$  ist demnach, wenn wir die Integrationsvariable mit  $\xi$  bezeichnen, eine Funktion von  $x$ , und zwar

$$Q = A - \int_0^x q(\xi) d\xi = -[B - \int_x^l q(\xi) d\xi] \quad (72)$$

und das Biegemoment an dieser Stelle  $x$  ergibt sich ebenfalls als eine Funktion von  $x$ , und zwar ist

$$M = Ax - \int_0^x q(\xi)(x - \xi) d\xi = Qx + \int_0^x q(\xi)\xi d\xi. \quad (73)$$

Zwischen Querkraft und Biegemoment besteht nun ein wichtiger Zusammenhang, der sich durch Differentiation der Gl. (73) nach  $x$  ergibt. Es folgt nämlich nach der bekannten Regel für die Differentiation eines Integrals nach der oberen Grenze und mit Rücksicht auf (72)

$$\frac{dM}{dx} = Q + \frac{dQ}{dx}x + q(x)x = Q - q(x)x + q(x)x,$$

daher

$$\boxed{\frac{dM}{dx} = Q}, \quad (74)$$

d. h. die Ableitung des Momentes nach  $x$  ist gleich der Querkraft an der betreffenden Stelle.

Da die Querkraft für Einzellasten unter den Lasten unstetig ist, folgt daraus in Übereinstimmung mit dem früher Bemerkten, daß die Momentenlinie unter den Einzellasten als Funktion von  $x$  zwar stetig ist, aber einen Knick (unstetige Änderung des Differentialquotienten) erfährt, und zwar ist die Größe des Knickes ein Maß für den Sprung in der Querkraft, d. h. für die betreffende Einzellast. Der größte Wert von  $M$  ergibt sich dort, wo  $Q$  durch Null geht, d. i. also für Einzel-

lasten z. B. in Abb. 38 jedenfalls unter einer Last oder auf der Strecke zwischen zwei benachbarten Lasten.

Aus den Gln. (72) und (74) ergibt sich durch nochmalige Differentiation

$$\frac{dQ}{dx} = -q, \quad \text{und somit} \quad \boxed{\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = -q}. \quad (75)$$

Umgekehrt erhält man daraus durch Integration

$$M = - \int_0^x \int_0^x q(x) dx dx + Cx + C', \quad (76)$$

wobei  $C$  und  $C'$  Integrationskonstante sind; d. h. der Übergang von der gegebenen „Belastungskurve“  $q(x)$  zur  $M$ -Linie mittels des Seilecks (wie er etwa in Abb. 38 für Einzelkräfte ausgeführt ist), kommt auf die Ausführung einer zweifachen Integration hinaus; umgekehrt erhält man die  $q$ -Linie aus der  $M$ -Linie durch zweimalige Differentiation.

Da der zweite Differentialquotient im wesentlichen die Krümmung der Kurve  $M$  angibt, so besagt die Gl. (75) wegen des negativen Vorzeichens von  $q$ , daß die  $M$ -Linie für positive (d. h. nach unten gerichtete) Belastungen  $q$  gegen die  $x$ -Achse konkav, für negative  $q$  konvex gekrümmt ist.

Von praktischer Wichtigkeit ist insbesondere der Fall  $q = \text{konst.}$ , d. h. die gleichförmige Belastung über ein Stück oder den ganzen Träger; aus den Gln. (72) und (73) folgt, daß hierfür die Querkraft

geradlinig und das Biegemoment in Form einer Parabel verläuft.

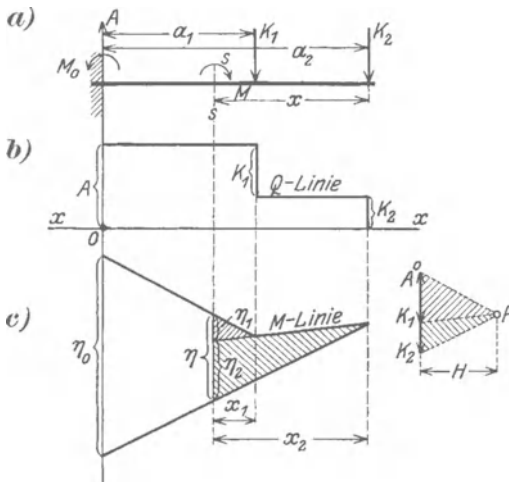


Abb. 40.

Von den Gln. (74) und (75) wird in der Festigkeitslehre bei der Berechnung der Durchbiegungen der Träger eine weitreichende Anwendung gemacht (Mohr'scher Satz).

Beispiel 14. Einseitig eingespannter Träger, durch Kräfte  $K_i$  belastet, Abb. 40. Die Einspannung wird durch Anbringung einer Auflagerkraft  $A$  und eines Einspannmomentes  $M_0$  verwirklicht. Aus den Gleichgewichtsbedingungen ergibt sich mit den Bezeichnungen der Abb. 40 a

$$A = K_1 + K_2 + \dots = \sum_{i=1}^n K_i, \quad M_0 = \sum_{i=1}^n K_i a_i. \quad (77)$$

Die  $Q$ -Linie und die  $M$ -Linie sind in b) und c) eingetragen. Die  $M$ -Linie erhält man wieder unmittelbar durch das Seileck für einen beliebigen Punkt  $P$  als Pol, und beweist ganz so wie früher, daß die lotrechten Ordinaten der Seileckfläche

den Biegemomenten an der betreffenden Stelle proportional sind. So ergibt sich für den Schnitt  $s - s$  aus den beiden Paaren von ähnlichen Dreiecken, die in der Abb. gleichsinnig schraffiert sind, für zwei Kräfte  $K_1, K_2$

$$M = K_1 x_1 + K_2 x_2 = H (\eta_1 + \eta_2) = H \eta, \quad (78)$$

insbesondere ist  $M_0 = H \eta_0$ .

Beispiel 15. Der Träger von der Länge  $l$  sei von  $x = a$  bis  $x = a + 2b$  mit  $q \text{ kg/m}$  belastet (Abb. 41). Die Auflagerkräfte werden mittels des Seilecks gefunden, wobei die gleichförmig verteilte Last durch ihre Summe  $2bq$  im Mittelpunkte der gleichförmigen Last ersetzt werden kann. Durch Rechnung finden wir

$$A = 2bq(l - a - b)/l,$$

$$B = 2bq(a + b)/l.$$

Ferner erhalten wir nach den Gln. (68) und (69)

von  $x = 0$  bis  $x = a$ :

$$Q_1 = A, \quad M_1 = Ax,$$

von  $x = a$  bis  $x = a + 2b$ :

$$Q_2 = A - q(x - a),$$

$$M_2 = Ax - q(x - a)^2/2,$$

von  $x = b$  bis  $x = l$ :

$$Q_3 = A - 2bq = -B,$$

$$M_3 = -B(l - x).$$

Die  $Q$ -Linie ist hier stetig, da keine Einzellasten vorkommen; daher berührt auch hier die Linie des Biegemomentes, die unter der gleichförmigen Last ein Parabelstück ist, und außerhalb davon aus Stücken von geraden Linien besteht, die beiden Seilstrahlen, die zur Bestimmung von  $A$  und  $B$  gedient haben.

Wenn längs des Trägers außer Einzelkräften auch Biegemomente einwirken würden, so würde die  $M$ -Linie entsprechende Unstetigkeiten aufweisen. Dieser Fall ist aber praktisch nicht von Wichtigkeit.

**36. Mehrere Körper.** Dieselben Sätze, die wir im vorhergehenden für den einzelnen Körper gefunden haben, finden sinngemäße Anwendung, wenn es sich um das Gleichgewicht mehrerer, sich aufeinander stützender Körper handelt. Außer den eingepprägten Kräften sind an allen Stützpunkten entsprechend der Art der Stützung die Auflagerkräfte anzubringen, und zwar immer paarweise nach dem Wechselwirkungssatze. Sind  $n$  Körper vorhanden, dann gibt es  $3n$  Gleichgewichtsbedingungen, durch die  $3n$  unbekannte Größen (Lagenkoordinaten und Stützkräfte) bestimmt werden können. Wenn die Lagen aller Körper von vornherein bekannt sind, kann zur Ermittlung der Auflagerkräfte entweder die rechnerische oder auch — was meist vorteilhafter ist — die zeichnerische Methode angewendet werden; bei unbekanntem Lagen führt in der Regel nur die Rechnung zum Ziele.

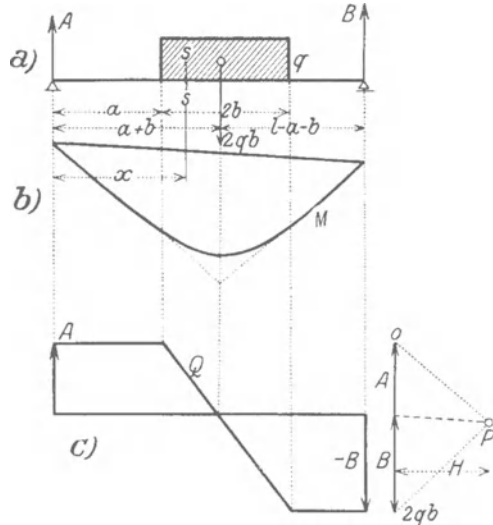


Abb. 41.

Beispiel 16. Die Achse einer Walze ist durch ein Seil mit einem festen Punkte  $O$  verbunden, auf die Walze stützt sich ein Brett  $OB$  vom Gewicht  $\bar{G}$ , Abb. 42.

Die Auflagerkräfte  $\bar{D}_1$  und  $\bar{D}_2$  und die Seilkraft  $\bar{T}$  ergeben sich unmittelbar durch Zeichnung der Kräfte Dreiecke für die beiden im Gleichgewicht befindlichen

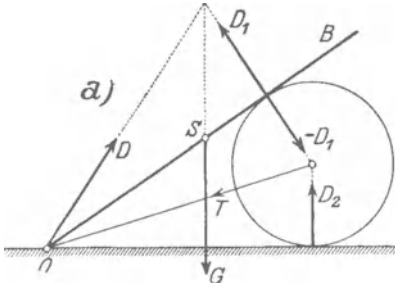
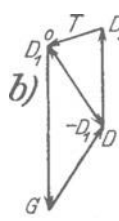


Abb. 42.



Kräftegruppen  $(\bar{G}, \bar{D}, \bar{D}_1)$  und  $(-\bar{D}_1, \bar{D}_2, \bar{T})$ .

Beispiel 17. Vier gleiche ge-

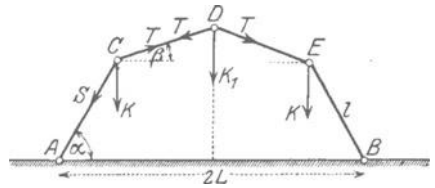


Abb. 43.

lenkig verbundene Stäbe von der Länge  $l$  sind nach Abb. 43 in  $A$  und  $B$  gelenkig gelagert ( $\overline{AB} = 2L$ ) und in  $C, D, E$  mit den Kräften  $K, K_1, K$  symmetrisch belastet. Man ermittle die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  für Gleichgewicht.

Die Kräfte in den Stäben sind als Unbekannte  $S, T$  einzuführen, dann liefern die Gleichgewichtsbedingungen für die Punkte  $D$  und  $C$

$$D) \quad 2T \sin \beta = -K_1, \quad \text{also} \quad T = -K_1/2 \sin \beta \quad (\text{Druck})$$

$$C) \quad \begin{cases} S \cos \alpha = T \cos \beta, & \text{,,} \quad S = -K_1 \cos \beta / 2 \sin \beta \cos \alpha \quad (\text{Druck}) \\ T \sin \beta - S \sin \alpha = K. \end{cases}$$

Durch Einsetzen von  $T$  und  $S$  in die letzte Gleichung folgt als Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{2K + K_1}{K_1}.$$

Zur Berechnung der Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  selbst ist diese Gleichung mit der geometrischen Gleichung für die Spannweite  $L = l(\cos \alpha + \cos \beta)$  zu verbinden.

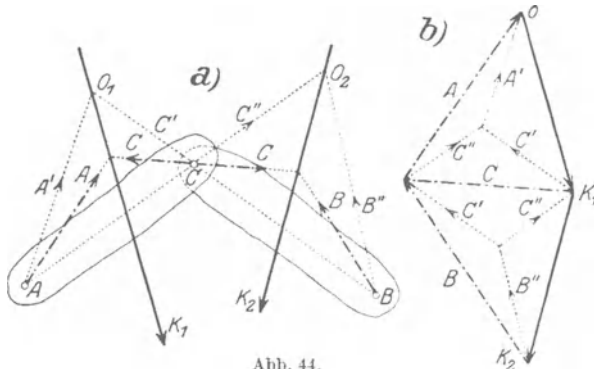


Abb. 44.

Beispiel 18. Das Dreigelenk besteht aus zwei Körpern 1, 2, die miteinander durch ein Gelenk  $C$  verbunden sind, und von denen jeder außerdem durch ein weiteres Gelenk  $A$  und  $B$  fest gelagert ist. Die Summen der Kräfte  $\bar{K}_1$  und  $\bar{K}_2$ , die auf die beiden Körper 1 und 2 wirken, sind gegeben, man ermittle die Gelenkkräfte  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ , Abb. 44.

Den  $2 \times 3 = 6$  unbekanntenen Komponenten der Gelenkkräfte entsprechen ebenso viele Gleichgewichtsbedingungen, die Aufgabe ist daher (im allgemeinen) statisch bestimmt. Ihre Lösung kann auf verschiedene Arten erhalten werden.

a) Zeichnerisch durch Bestimmung der Auflagerkräfte, die jede Kraft  $\bar{K}_1$  und  $\bar{K}_2$  für sich allein hervorrufen würden. Wäre z. B.  $\bar{K}_1$  allein da, so würden in den Gelenken  $B$  und  $C$  nur Kräfte in der Richtung  $\bar{BC}$  auftreten können, wodurch mittels des Schnittpunktes  $O_1$  auch die Richtung und Größe der Komponente  $\bar{A}'$  von  $\bar{A}$  und des entsprechenden Teiles  $\bar{C}'$  von  $\bar{C}$  bestimmt sind. Dasselbe gilt für das alleinige Vorhandensein von  $\bar{K}_2$ , das die Komponenten  $\bar{B}''$  und  $\bar{C}''$  liefern würde. Die gesamten Gelenkdrücke  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  sind durch die vektoriellen Summen der entsprechenden Komponenten gegeben,  $\bar{A} = \bar{A}' + \bar{C}''$ ,  $\bar{B} = \bar{C}' + \bar{B}''$  Abb. 44b.

b) Eine zweite Methode besteht in der Anwendung des in 30 angegebenen Verfahrens, das zu  $\bar{K}_1$  und  $\bar{K}_2$  gehörige Seileck zu zeichnen, welches durch die drei Punkte  $A, B, C$  hindurchgeht. Die Richtungen der Seilstrahlen und die in ihnen wirkenden Kräfte geben die gesuchten Gelenkkräfte.

c) Rechnerisch werden die Gelenkkräfte durch die Gleichgewichtsbedingungen der beiden Körper für ein System zueinander rechtwinkliger Achsen gefunden.

Sind beide Körper des Dreigelenks belastet, dann geht man so vor, daß man für jede Kraft einzeln die in den Gelenken auftretenden Kräfte bestimmt; die gesamten Gelenkkräfte ergeben sich dann wegen des linearen Charakters der Gleichgewichtsbedingungen durch Addition.

Wenn die Belastung nur aus lotrechten Kräften besteht (wie in Abb. 45), so erhält man für die links wirkende Last  $K$  zunächst die lotrechten Komponenten der Gelenkkräfte (hier mit  $A, B$  bezeichnet) durch Zerlegung

$$A = K(l - p)/l, \quad B = K p/l = V, \quad (79)$$

während der Momentensatz für den Punkt  $C$ , auf den rechten Körper angewendet, unmittelbar die Beziehung liefert

$$H h = B b, \quad \text{also} \quad H = B b/h = K p b/l h, \quad (80)$$

durch die auch die wagrechten Komponenten bestimmt sind.

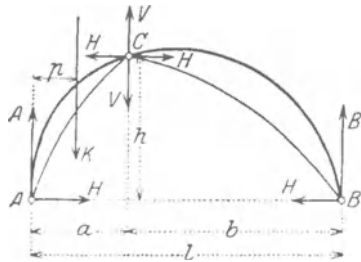


Abb. 45.

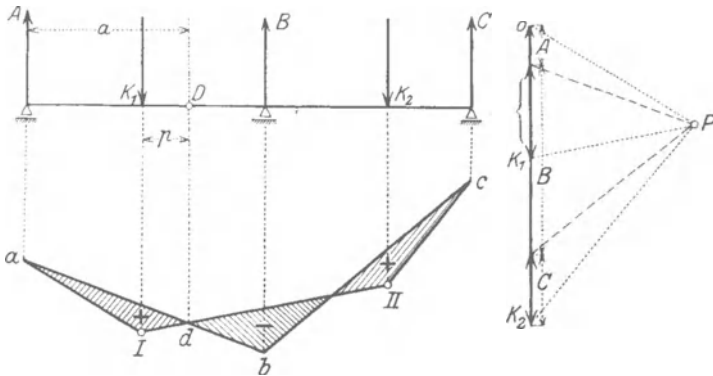


Abb. 46.

Beispiel 19. Gerber-Träger. Ein auf drei Auflagern  $A, B, C$  ruhender „durchlaufender“ oder „kontinuierlicher“ Träger wäre äußerlich statisch un-



bestimmt, da die Auflagerkräfte durch die Gleichgewichtsbedingungen allein nicht bestimmbar sind. Wenn ein solcher Träger jedoch (Abb. 46) durch ein Gelenk  $D$  in zwei Körper geteilt wird, so kommt die Bedingung hinzu, daß in  $D$  kein Biegemoment auftreten kann; der Momentensatz für den linken Träger um  $D$  gibt dann unmittelbar  $A = K_1 p/a$ , wodurch dann auch  $B$  und  $C$  vollständig bestimmt sind.

Zeichnerisch geschieht die Bestimmung der Auflagerkräfte in der Weise, daß zunächst mit dem willkürlich gewählten Pol  $P$  ein Seileck  $a, I, II, c$  gezeichnet, sodann  $D$  auf diesen Linienzug nach  $d$  hinunterprojiziert und  $d$  mit  $a$  verbunden, bis  $b$  unter  $B$  verlängert und von da der Strahl  $bc$  gezogen wird. Die Parallelen durch  $P$  zu  $ab$  und  $bc$  liefern dann im Kräfteplan auf der Lotrechten die Stützkräfte  $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ . Die Momentenfläche ist in Abb. 46 schraffiert und mit den Vorzeichen versehen, die jeweils den Drehsinn der Momente angeben.

Beachte, daß die Differenzen  $K_1 - A$  und  $B + C - K_2$  gleich groß sind und die in  $D$  auftretende, lotrecht gerichtete Gelenkkraft bedeuten.

### III. Ebene Fachwerke.

#### 37. Bedingungen für die Starrheit eines Fachwerkes. Cremonaplan.

Unter einem Fachwerk versteht man ein aus starren „Stäben“ oder „Gliedern“ bestehendes Gebilde, bei dem diese Stäbe in den „Knoten“ durch reibungslose Gelenke miteinander verbunden sind. Wenn ein derartiges Gebilde als Schema für ein technisch verwendbares Bauwerk dienen soll, so muß dieses zunächst in sich die erforderliche Starrheit (Stabilität) besitzen und für die aufzubringenden Belastungen eine entsprechend einfache Berechnung zulassen. Für die Berechnungsweise, mit der wir uns hier beschäftigen, erweist es sich als zweckmäßig, die Lasten entweder von vornherein in den Knotenpunkten anzunehmen oder sie jeweils nach statischen Gesetzen auf die beiden der Laststelle zunächst liegenden Knoten zu verteilen. Als Lasten kommen in Betracht: Nutzlast, Eigengewicht, Schnee- und Winddruck. Jeder einzelne Knoten wird dann unter dem Einflusse der auf ihn wirkenden „Last“ und jener Stabkräfte im Gleichgewicht gehalten, die in den Richtungen der in ihm zusammentreffenden Stäbe übertragen werden. Die Ermittlung dieser Stabkräfte ist für die „Dimensionierung“ der Stäbe notwendig, und ist das Problem, das wir hier zu behandeln haben.

Das einfachste Fachwerk, das möglich ist, erhalten wir, wenn wir etwa eine der Abb. 15 durch Hinzunahme eines dritten Stabes  $\overline{AB}$  ergänzen, und beliebige Kräfte  $K_1, K_2, K_3$  in den drei Knotenpunkten  $I, II, III$  wirken lassen (Abb. 47); diese Kräfte sollen nur der einen Bedingung genügen, eine Gleichgewichtsgruppe zu bilden (wenn eine davon eine „Last“ ist, dann sind die beiden andern die nach den bekannten Regeln zu bestimmenden Auflagerkräfte). Um die Stabkräfte zu ermitteln, zeichnen wir für jeden Knoten  $I, II, III$  das Kräftedreieck, das jedesmal die in dem betreffenden Knoten zusammentreffenden Stabkräfte (2, 3 in  $I$ ; 3, 1 in  $II$ ; 1, 2 in  $III$ ) liefert<sup>1</sup>. Die drei Kräfte-

<sup>1</sup> Der Kürze halber werden im folgenden die Stabkräfte einfach durch die Nummer des betreffenden Stabes bezeichnet.



dreiecke können sodann aneinander geschoben und zu einem „Cremonaschen Kräfteplan“ (nach L. Cremona, 1830—1903) vereinigt werden (wie es in Abb. 47b geschehen ist), der schon alle Kennzeichen aufweist, die wir späterhin für solche Kräftepläne wiederfinden werden;

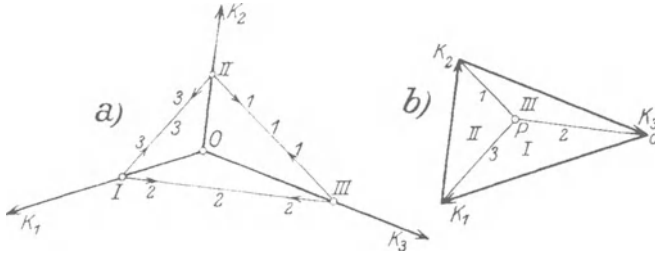


Abb. 47.

wir heben zunächst davon hervor, daß sich die beiden Figuren a und b durch Parallelismus zusammengehöriger Linien entsprechen, und zwar derart, daß je drei durch einen Punkt gehenden Linien links ein Dreieck rechts entspricht und umgekehrt, ferner daß jede Kraft  $K_i$  und jede Stabkraft 1, 2, 3 im Kräfteplan nur einmal vorkommt. Die linke Figur, welche die geometrische Gestalt des Fachwerks gibt, nennt man den Lageplan.

Auf Grund dieser Beziehung wird die Kraft in einem Stabe des Lageplans durch die dazu parallele Strecke des Kräfteplans gegeben. Diese Beziehung ist aber nicht vollständig umkehrbar, wie etwa aus dem unten folgenden Beisp. 21 mit Abb. 52 zu entnehmen ist, da den Endpunkten der Kräfte  $K_1, K_2, \dots$  in b) keine geschlossenen Polygone in a) entsprechen würden. Man kann die Figuren jedoch zu solchen mit einer für alle Punkte und Linien geltenden „Reziprozität“ ausgestalten, wenn man in dem Kräfteplan einen Pol  $P$  und ein zugehöriges Seileck hinzunimmt; auf diese Weise erhält man die sog. reziproken Kräftepläne. — Es läßt sich ferner zeigen, daß eine notwendige Bedingung dafür, daß eine Figur von Punkten und diese verbindenden Geraden eine reziproke besitzt, ist, daß die Figur die Orthogonalprojektion eines ebenen Vielflachs ist. Auf die interessanten geometrischen Entwicklungen, die sich hier anschließen, können wir nicht eingehen.

Die einfachste Bildungsweise eines Fachwerkes besteht darin, von einem Dreieck  $I, II, III$  auszugehen und das Fachwerk durch Hinzunahme von je zwei weiteren Stäben für jeden weiteren Knoten „aufzubauen“. Zur gegenseitigen Festlegung der Lagen dieser drei Punkte  $I, II, III$  sind drei Stäbe erforderlich. Vier Knoten würden dann fünf Stäbe erfordern, und allgemein wäre die kleinste notwendige Stabzahl für  $n$  Knoten

$$s = 2n - 3 . \tag{81}$$

Auf diese Beziehung wird man auch durch Abzählung der Koordinaten der einzelnen Punkte geführt. Die Festlegung von  $n$  Punkten in der Ebene würde  $2n$  „Bedingungen“ erfordern; soll das entstehende Gebilde aber nur in sich starr sein — ohne gleichzeitig mit der Bezugsebene fest verbunden zu sein —, so muß es die Freiheiten einer starren

Scheibe haben, das sind drei (zwei Verschiebungen nach zwei Richtungen in der Ebene und eine Drehung um eine dazu senkrechte Achse). Wenn daher zwischen den  $2n$  Koordinaten der  $n$  Punkte  $2n - 3$  geeignete Bedingungen eingeführt werden, so besitzt das Punktsystem die Beweglichkeit einer starren Scheibe. Gl. (81) gibt also auch nach dieser Abzählung die Zahl der notwendigen Stäbe.

Das Gleichgewicht dieser  $n$  Punkte würde das Bestehen von  $2n$  Bedingungen verlangen; da die eingepprägten Kräfte, die eine ebene Kräftegruppe darstellen, aber für sich im Gleichgewichte sind, was drei Gleichungen erfordert, so bleiben  $2n - 3$  unabhängige Gleichungen zur Bestimmung von ebensoviel Stabkräften übrig. Daraus sieht man, daß jedenfalls zunächst für Fachwerke von der angegebenen einfachen Art die statische Bestimmtheit mit der kinematischen zusammenfällt. Solche Fachwerke bezeichnen wir als einfache Fachwerke, sie sind also durch die Eigenschaft gekennzeichnet, „aus Dreiecken aufbaubar und abbaubar“ zu sein. Fachwerke, die diese Eigenschaft nicht besitzen, nennt man zusammengesetzt<sup>1</sup>.

Wenn  $s > 2n - 3$ , so hat man es mit einem innerlich statisch unbestimmten System zu tun. Ein einfaches Beispiel hierfür ist in Abb. 48 dargestellt.

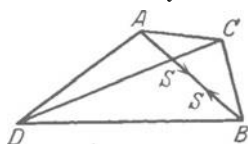


Abb. 48.

Das Viereck mit beiden Diagonalen enthält offenbar einen „überzähligen Stab“ ( $s = 6, n = 4$ ). Wir würden statische Bestimmtheit erhalten, wenn wir irgendeinen Stab, etwa den Stab  $AB$  weglassen würden; wenn die Länge dieses Stabes (zwischen den Mittelpunkten der Gelenke) nicht genau gleich der Entfernung dieser beiden Punkte wäre, so müßten durch ihn (auch bei fehlenden Lasten) in allen Stäben Kräfte auftreten, entsprechend dem Umstande, daß der Stab entweder verkürzt oder verlängert werden müßte, um zwischen  $A$  und  $B$  Platz zu finden. Ist er zu kurz, so wird er die Punkte  $A, B$  zusammenziehen, und zwar mit Kräften  $S, -S$ , die durch seine elastischen Eigenschaften bedingt sind; die dadurch in allen Stäben hervorgerufenen Stabkräfte werden  $S$  proportional sein. Daß ein solcher Stab die Verteilung der Stabkräfte auch im belasteten Zustande beeinflussen wird, liegt auf der Hand. Wenn ein solches überbestimmtes Fachwerk ursprünglich von inneren Spannungen frei wäre, würden auch durch ungleichmäßige Erwärmung solche Spannungen entstehen. Auf die weitere Behandlung solcher Systeme, die Hilfsmittel aus der Elastizitätslehre verlangt, können wir hier nicht eingehen.

Ein Fachwerk, bei dem die Gl. (81) erfüllt ist und das in sich starr ist, wird durch drei Auflagerbedingungen mit einer festen Ebene verkettet, so daß also zur völligen Festlegung der  $n$  Knoten tatsächlich  $2n - 3 + 3 = 2n$  Bedingungen erforderlich sind. Es werden jedoch manchmal auch Tragkonstruktionen verwendet, die für sich (ohne Auf-

<sup>1</sup> Die Bezeichnung in der Literatur ist nicht einheitlich. Im folgenden werden die Dreiecksfachwerke als einfach, die Fachwerke mit Grundfigur als zusammengesetzt bezeichnet. Eine Unterscheidung dieser beiden Arten ist nützlich und könnte auch durch die Bezeichnung erster und zweiter Art geschehen. Manchmal werden alle statisch bestimmten Fachwerke als einfach, die statisch unbestimmten als zusammengesetzt bezeichnet u. dgl. mehr.

lager) nicht starr sind, und es ist klar, daß für jeden Stab, der dem Fachwerk zur Starrheit in sich fehlt, eine weitere Auflagerbedingung hinzukommen muß. Derartige Konstruktionen sind also nichtstarre Fachwerke, die erst durch die Auflagerung starr werden.

Beispiel 20, Abb. 49 liefert ein hierher gehöriges Beispiel. Für die Tragkonstruktion allein ist  $n = 10$ ,  $s = 15$ , jedoch sind 5 Auflagerbedingungen (ein Gelenk  $A$ , ein verschiebliches Auflager  $B$ , zwei Stäbe  $C, D$ ) vorhanden, so daß wieder  $15 + 5 = 20 = 2n$ , wodurch die zur Festlegung notwendige Zahl erreicht ist.

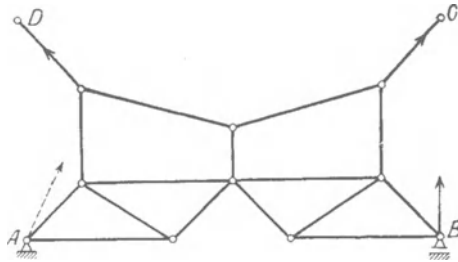


Abb. 49.

### 38. Einfache Fachwerke.

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir erkannt, daß die Gl. (81) jedenfalls eine notwendige Bedingung für statisch bestimmte Fachwerke darstellt. Für einfache Dreiecksfachwerke ist diese Bedingung für die kinematische und statische Bestimmtheit auch hinreichend.

Zu jedem Knoten eines einfachen Fachwerkes denken wir uns das zugehörige Kräfteck gezeichnet; wegen der Bildungsweise des Fachwerkes gibt es wenigstens einen Knoten (tatsächlich muß es immer wenigstens zwei solche geben), von dem nur zwei Stäbe ausgehen wie

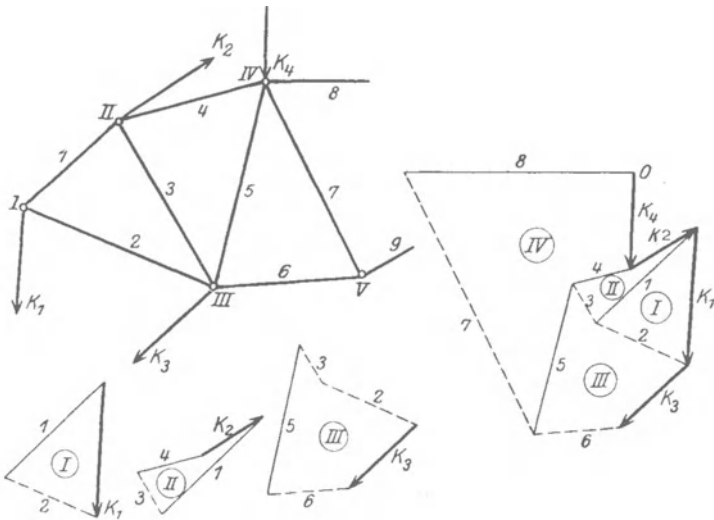


Abb. 50.

etwa  $I$  in Abb. 50. Durch die Aufbauordnung (oder wie man auch sagen kann: Abbauordnung) ist in der Regel eine bestimmte Reihenfolge der Knoten gegeben, in der man vorzugehen hat. In Abb. 50 ist  $I, II, III, IV \dots$  diese Reihenfolge. Jeder Knoten wird nun durch einen

Schnitt abgetrennt, isoliert und für ihn das Krafteck gezeichnet; dies ist, wie nochmals hervorgehoben werden möge, bei Dreieckfachwerken immer möglich, da jeder Schnitt nur immer zwei neue unbekannte Stabkräfte hinzubringt. Die so erhaltenen Kraftecke sind in der Abb. 50 zunächst einzeln gezeichnet, wobei dieselbe Vorzeichenregel für die Stabkräfte zu beachten ist, die schon in 20 aufgetreten ist. Ursprünglich werden die Pfeile für alle Stabkräfte von den Knoten weggerichtet eingezeichnet; der durch die eingeprägte Kraft in dem Krafteck des betreffenden Knotens festgelegte Umlaufungssinn entscheidet sodann über das Vorzeichen der betreffenden Stabkraft: Übereinstimmung der Pfeile bedeutet Zug, Nichtübereinstimmung Druck. Die Druckkräfte sind in den Kräfteplänen der Abbildungen durch gestrichelte Linien gekennzeichnet.

Nun kommt der für die Anlage des Kräfteplans entscheidende Schritt. Die auf die oben beschriebene Weise erhaltenen Kräftedreiecke können so aneinandergeschoben werden, daß die paarweise auftretenden Stabkräfte übereinander zu liegen kommen, so daß tatsächlich jede Stabkraft nur einmal gezeichnet zu werden braucht. Die Bedingung, daß die eingepprägten Kräfte mit den Auflagerkräften für sich (ohne Stabkräfte) eine Gleichgewichtsgruppe bilden müssen, führt dann von selbst, wenn dieses Verfahren bis zum letzten Knoten fortgeführt wird, zu einer geschlossenen Figur. Die Seiten des Kräftedreieckes für den letzten Knoten — der wieder ein zweifacher ist — sind übrigens nach „Auflösung“ der vorherigen im Kräfteplan schon vorhanden und geben, da sie ein geschlossenes Dreieck bilden müssen, eine Kontrolle für die Richtigkeit der Zeichnung.

Es läßt sich demnach unmittelbar einsehen, daß jedenfalls für jedes einfache Fachwerk ein solcher „Cremonaplan“ gezeichnet werden kann. Hierzu ist die Einhaltung gewisser Regeln notwendig, die hier sogleich im Zusammenhange mit einigen die praktische Ausführung betreffenden Bemerkungen angegeben werden:

1. Die eingepprägten Kräfte (Nutzlasten, Gewichte, Winddruck usw.) sind zusammen mit den Auflagerdrücken so anzubringen, daß sie eine Gleichgewichtsgruppe bilden.

Jedes Fachwerk dient in der Technik als Tragkonstruktion, ist daher in bestimmten Punkten aufzulagern; die Auflagerung geschieht in einzelnen Knoten des Fachwerkes, und für die Bestimmung der an ihnen auftretenden Stützkräfte wird unter Beachtung der in 33 gegebenen Möglichkeiten die ganze Fachwerkfigur als starre Scheibe betrachtet. Weiterhin werden die Auflagerkräfte und Lasten vollkommen gleichartig behandelt.

2. Im Kräfteplan sind die sämtlichen äußeren Kräfte (also Lasten und Auflagerkräfte!) in der Reihenfolge aneinanderzufügen, wie die Knoten, an denen die Kräfte angreifen, am Umfange der Fachwerkfigur aufeinanderfolgen.

Diese Regel läßt sich bei den meisten der praktisch verwendeten Fachwerke unmittelbar einhalten, denn diese bestehen aus einem Obergurt, einem Untergurt und aus Diagonalen, die diese verbinden, und die Kräfte greifen nur an außen liegenden Knoten an. In jenen Fällen, wo eine eingepprägte Kraft an einem

Gelenk im Innern der Fachwerkfigur angreift, lassen sich die Stabkräfte ebenfalls zeichnerisch ermitteln, nur muß dann auf die (unten folgende) Forderung 5. verzichtet werden<sup>1</sup>.

3. Die Ermittlung der Stabkräfte hat an einem der (bei Dreiecksfachwerken stets vorhandenen) Knotenpunkte zu beginnen, von denen nur zwei unbekannte Stabkräfte ausgehen, und ist der Abbauordnung entsprechend fortzusetzen.

4. Die Kraft in einem Stabe, der zwei am Umfange aufeinanderfolgende Knoten verbindet, ist im Kräfteplan durch jenen Punkt zu zeichnen, in dem die an jenen Knoten angreifenden Kräfte aneinander angesetzt sind.

5. Jede äußere Kraft und jede Stabkraft darf im Kräfteplan nur einmal vorkommen (nur bei Dreiecksfachwerken erfüllbar!).

6. Die sämtlichen Kräfte, die im Lageplan durch einen Punkt gehen, bilden im Kräfteplan ein geschlossenes Vieleck, und

7. die Kräfte in den Stäben, die im Fachwerk ein Dreieck bilden, gehen im Kräfteplan durch einen Punkt.

8. Die Reihenfolge, in der die Kräfte in den Kraftecken aufeinanderfolgen, entspricht dem Sinne beim Umlaufen um den betreffenden Knoten. Dabei ist die Wirkungslinie für jede an einem Umfangsknoten angreifende Kraft von der Fachwerkfigur nach außen gerichtet oder von außen einwirkend anzunehmen.

Z. B. ist in Abb. 51 die Kraft  $\bar{K}$  nicht nach a), sondern nach b) einzuführen.

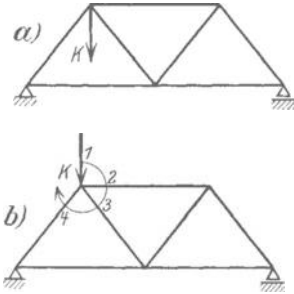


Abb. 51.

9. Einer symmetrischen Fachwerkfigur und Belastung entspricht ein symmetrischer Kräfteplan, wobei die Symmetrieachsen um  $\pi/2$  gegeneinander verdreht sind.

Für die Anwendung dieser Regeln mögen die beiden folgenden einfachen Beispiele dienen (in den Kräfteplänen sind, wie bisher, Zugkräfte durch volle Linien, Druckkräfte gestrichelt angedeutet).

Beispiel 21. Der Brückenträger nach Abb. 52a ist in *II* und *IV* mit den Kräften  $\bar{K}_1$ ,  $\bar{K}_2$  belastet, in *I* wagrecht beweglich und in *VI* gelenkig gelagert. — Wir haben es mit einem einfachen Fachwerk zu tun ( $s = 9$ ,  $n = 6$ ); nach Ermittlung der Auflagerdrücke *A*, *B* entsteht durch Zeichnen der Kräftedreiecke für die Knoten in der durch *I*, *II*, ..., *V* gegebenen Reihenfolge der Kräfteplan Abb. 52b.

Beispiel 22. Das Krangerüst mit den Abmessungen nach Abb. 53a ist bei *A* in fester Einspannung gelagert (wobei nur Drehungen um wagrechte Achsen, nicht um die Lotrechte behindert sein sollen), rechts an einem Ausleger mit der (größten) Nutzlast  $Q = 6$  t, links mit dem Gegengewichte  $G = 5,273$  t belastet. Die Größe des Gegengewichtes wird dabei etwa durch die Forderung bestimmt, daß das größte auftretende Biegemoment an der Einspannung der Kransäule für den belasteten und unbelasteten Kran gleich groß (und entgegengesetzt gerichtet) ausfällt. Diese Forderung führt hier auf  $Q \cdot 5,8 - G \cdot 3,3 = G \cdot 3,3$  und damit auf den angegebenen Wert von *G*.

<sup>1</sup> Dies folgt auch aus der allgemeinen Theorie der reziproken Figuren, die hier nicht entwickelt werden kann.

Die Bestimmung der Auflagerkräfte des belasteten Krans liefert  $V = 11,27$  t,  $M = 17,4$  tm nach links herum für den belasteten, nach rechts für den unbelasteten Kran.

Da die Kräfte  $Q, G$  und das Moment  $M$  zunächst nicht an Knoten angreifen, müssen sie erst durch solche Kräfte ersetzt werden, die dies tun; dies geschieht,

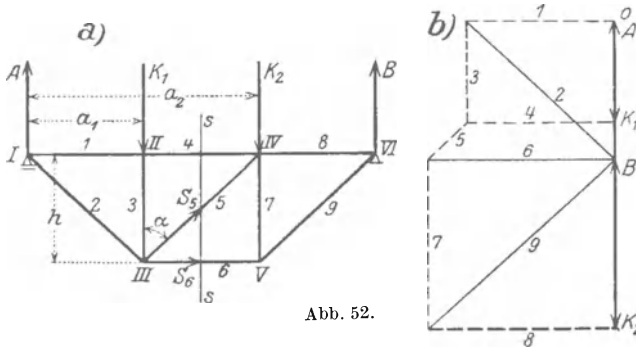


Abb. 52.

wie schon erwähnt, für jede Kraft durch Aufteilung auf jene beiden Knoten, die der betreffenden Kraft zunächst liegen. Dieser Vorgang liefert an Stelle von

- $Q$  die Kräfte  $K_1 = 7,11$  t in  $I$ ,  $K_2 = 1,11$  t in  $III$ ,
- $G$  „ „  $K_4 = 6,57$  t „  $VII$ ,  $K_5 = 1,29$  t „  $VIII$ ,
- $M$  „ „  $K_3 = 3,96$  t „  $V$ ,  $K_6 = -K_3$  „  $VIII$

in den gezeichneten Richtungen.

(Inwieweit die von diesen „Ersatzlasten“ hervorgerufenen Stabkräfte mit den von den ursprünglichen erzeugten übereinstimmen, muß durch eine besondere

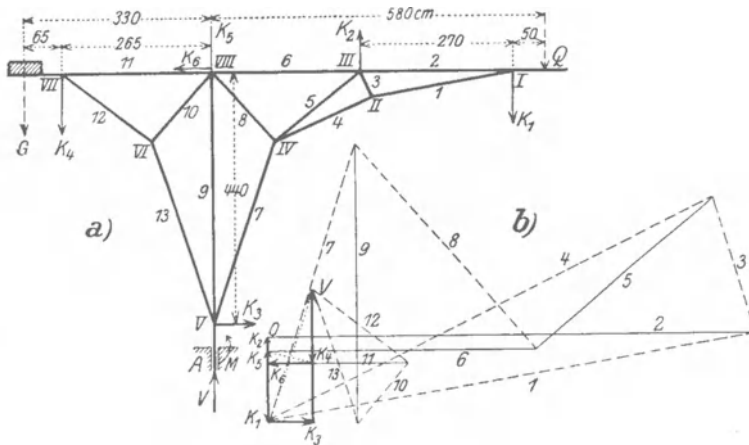


Abb. 53.

Untersuchung entschieden werden; in erster Näherung darf jedenfalls angenommen werden, daß — von den Biegungen abgesehen — die Zug- und Druckkräfte in den Stäben in beiden Fällen nicht merklich voneinander abweichen werden.)

Für diese so gefundenen Kräfte  $K_1, K_2, \dots, K_6$  wird das Kräfteck gezeichnet, und die Stabkräfte werden durch „Auflösung“ der Knoten in der durch  $I, II, III, \dots, VIII$  gegebenen Reihenfolge ermittelt.

Über die Abänderung obiger Regeln für belastete Innenknoten s. 40.



**39. Rittersche Schnittmethode.** Zur rechnerischen Ermittlung der Stabkräfte denken wir uns von einem Fachwerk irgendein zusammenhängendes Stück durch einen die Knoten vermeidenden „Schnitt“ abgetrennt und an den Schnittstellen der getroffenen Stäbe die Stabkräfte als äußere Kräfte angebracht; dann erhält man durch Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen für die auf das abgetrennte Fachwerkstück einwirkende Kräftegruppe, welche aus den äußeren Kräften und den Stabkräften in den geschnittenen Stäben besteht, für jeden solchen Schnitt drei Gleichungen, aus denen ebenso viele unbekannte Stabkräfte ermittelt werden können. Um eine bestimmte Stabkraft zu finden, braucht man den Schnitt nur so zu führen, daß der betreffende Stab durch den Schnitt getroffen wird, und wenn außer diesem nur zwei weitere Stäbe mitgeschnitten werden, so gibt der Momentensatz für den Schnittpunkt dieser letzteren sofort eine Gleichung, aus der die gesuchte Stabkraft folgt; für die Diagonale zwischen parallelen Gurten ist an Stelle des Momentensatzes der Projektionsatz für die zu den Gurten senkrechte Richtung zu verwenden. Während also bei der zeichnerischen Methode alle vorhergehenden Knoten gelöst werden müssen, um zu einer bestimmten Stabkraft zu gelangen, liefert die Rechnung (in der Regel) die Kraft in jedem Stabe durch eine einzige Gleichung.

Dieses Verfahren werden wir auch für zusammengesetzte Fachwerke anzuwenden haben, für welche der Dreieckabbau unmöglich ist, sowie auch für Fachwerke mit belasteten inneren Knotenpunkten.

Beispiel 23. Für das Fachwerk Abb. 52 ergibt sich für den Schnitt  $s-s$  gemäß der Gleichgewichtsbedingung für die auf den linken Teil wirkenden Kräfte nach der Lotrechten

$$A - K_1 + S_5 \cos \alpha = 0, \quad S_5 = -(A - K_1) / \cos \alpha, \quad (\text{Druck})$$

ferner der Momentensatz für den Punkt  $IV$

$$A a_2 - K_1 (a_1 - a_2) - S_6 h = 0, \quad \text{und daraus } S_6 = [A a_2 - K_1 (a_1 - a_2)] / h \quad (\text{Zug})$$

usw.

**40. Fachwerke mit belasteten Innenknoten.** Die in 38 gegebenen Regeln müssen teilweise abgeändert und erweitert werden, wenn es sich um Fachwerke handelt, die belastete innere Knoten enthalten, wie dies z. B. bei den Anwendungen im Kranbau vorkommt. Dieser Fall läßt sich jedoch auf den früheren zurückführen durch Einführung idealer Stäbe und idealer Gelenke. Dabei ist folgender Weg einzuschlagen: Von dem belasteten Innenknoten wird in der Richtung der betreffenden Knotenlast  $\bar{K}$  ein idealer Stab  $i$  gezogen, der von dem Knoten bis zum Umfang der Fachwerkfigur reicht, und wird dort in einem idealen Knoten an den Fachwerkstab angeschlossen, den er trifft; an diesem idealen Knoten wird die Last in der ursprünglichen Größe und Richtung als neue Kraft  $\bar{K}' (= \bar{K})$  angesetzt, während die Innenkraft  $\bar{K}$  entfernt wird. Diese Kraft  $\bar{K}'$  wird gerade so behandelt wie die schon ursprünglich am Fachwerkumfang wirkenden, wogegen die Belastung des inneren Knotens durch die Kraft in dem hinzu-



gefügteten idealen Stab ersetzt wird. Dadurch wird neuerdings eine bestimmte Ordnung für die äußeren Kräfte geschaffen, die durch die Innenlast zunächst verloren schien. Die Kraft in dem Stabe, in dem das ideale Gelenk eingesetzt wird, kommt dann im Kräfteplan zweimal (natürlich von gleicher Größe!) vor, hierzu kommt noch die Kraft im idealen Stab und die zusätzliche Knotenlast. Die Ausführung dieses Gedankens möge an Hand der beiden folgenden Beispiele verfolgt werden.

Beispiel 24. Fachwerk nach Abb. 54 in den Innenknoten *II*, *III* mit den Kräften  $K$ ,  $K$  belastet. Die Auflagerkräfte in *I*, *IV* sind  $A = B = K$ . Die idealen

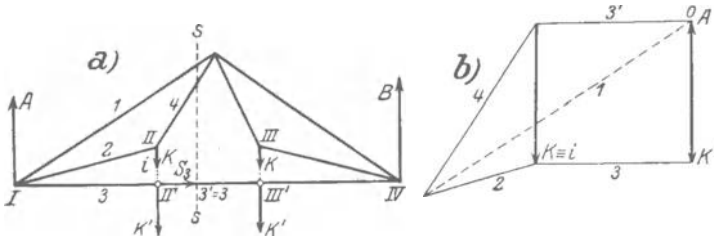


Abb. 54.

Stäbe *II III'*, *III III'* führen zu den idealen Knoten *II' III'*, an denen die Lasten  $K'$ ,  $K'$  angebracht werden. Der Schnitt *s-s* führt sofort zur Kenntnis der Stabkräfte in *1*, *4*, *3'*. Die Zeichnung des Kräfteplanes mittels der Kräfte  $K'$ ,  $K'$ ,  $B$ ,  $A$  und der Knoten in der Reihenfolge *I*, *II*, *III* geschieht nun ganz so wie früher. Wegen der Symmetrie genügt die Aufzeichnung einer Hälfte, Abb. 54 b).

Beispiel 25. Das Krangerüst nach Abb. 55 ist im Knoten *VII* mit der Last  $Q = 4t$  und in *I* mit dem Gegengewicht  $G = 3t$  belastet, ferner an dem innen-

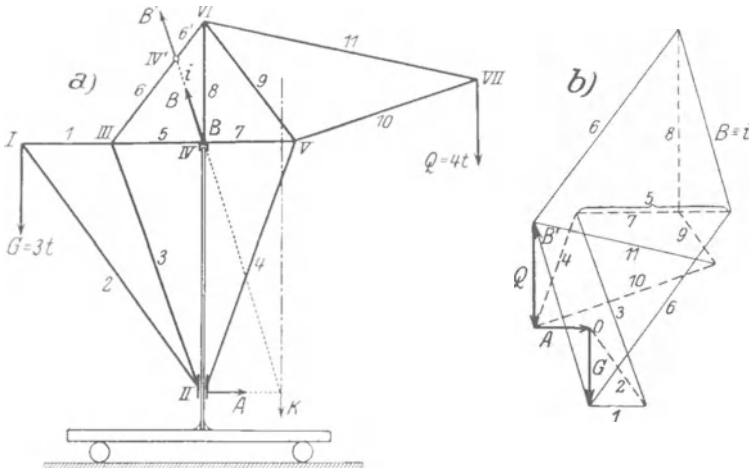


Abb. 55.

liegenden Zapfen  $B \equiv IV$  und an dem die Kransäule umschließenden Halslager *A* gestützt. Nach Bestimmung der Auflagerdrücke  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  wird  $\bar{B}$  bis zum Umriß verlängert, der ideale Stab  $i \equiv \bar{B} B'$  eingesetzt und in *VI'* die neue Kraft  $\bar{B}'$  ( $= \bar{B}$ ) angebracht. Durch diesen idealen Stab *i* wird die Fachwerkfigur ergänzt

und der Kräfteplan für die Kräfte  $\bar{G}, \bar{B}', \bar{Q}, \bar{A}$  genau nach den früheren Regeln gezeichnet. Die Knoten sind wieder in der Folge beziffert, in der das Fachwerk aufgelöst wird. Die Stabkräfte  $\bar{b}$  und  $B \equiv i$  kommen im Kräfteplan je zweimal vor.

**41. Zusammengesetzte Fachwerke.** Während bei Dreieckfachwerken die Frage nach der Starrheit unmittelbar beantwortet werden kann, verlangt deren Erledigung bei nicht einfachen Fachwerken eine besondere Untersuchung. Daß außer den Dreieckfachwerken andere stabile Fachwerke überhaupt möglich sind, zeigt z. B. der in Abb. 56 dargestellte Brückenträger, für den  $n = 12, s = 21$  und die Gl. (81) mithin erfüllt ist. Trotzdem ist der Dreieckabbau nur bis zu der stark ausgezogenen Figur fortsetzbar; diese läßt eine weitere Auflösung auf dieselbe Art nicht zu, da von jedem ihrer Knoten drei Stäbe ausgehen. Eine solche Figur, die von einem Fachwerke übrig bleibt, wenn man alle ihre „zweiständigen Knoten“ wegnimmt, für die also nach dem Dreieckschema keine weitere Vereinfachung mehr möglich ist, nennt man die Grundfigur des Fachwerks. In dem Beispiel der Abb. 56

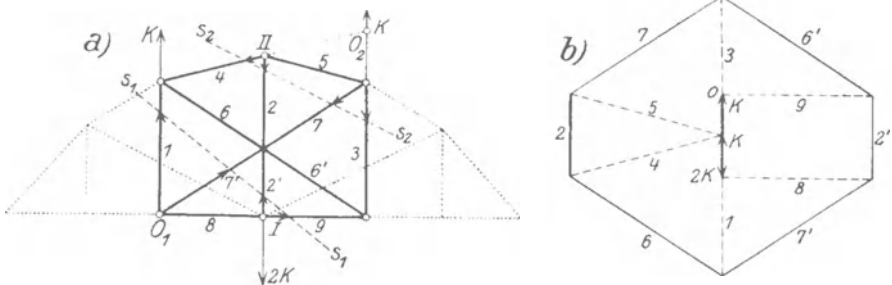


Abb. 56.

ist für diese Grundfigur  $n = 9, s = 6$ ; sie enthält also jedenfalls keine überzähligen Stäbe.

Wenn eine solche Figur als Bestandteil einer Tragkonstruktion in Betracht kommen soll, so muß sie a) in sich starr (stabil) sein und muß b) die Ermittlung der Stabkräfte aus den Knotenlasten zulassen. Beide Forderungen stehen in engstem Zusammenhange miteinander, wie durch Heranziehung kinematischer Betrachtungen gezeigt werden kann, worauf wir indessen hier nicht eingehen können.

Will man die Stabkräfte in der gezeichneten sechseckigen Grundfigur berechnen, an deren Knoten irgendwelche Kräfte angreifen mögen, so geht dies, wie man sogleich sieht, durch einen Schnitt nicht, wohl aber durch zwei Schnitte, von denen jeder dieselben zwei Stäbe  $i, k$  und außerdem nur noch je zwei andere Stäbe trifft. Durch Bildung der Momente um die Schnittpunkte dieser letzteren Paare erhält man zwei Gleichungen, aus denen die zwei Stabkräfte in  $i$  und  $k$  gerechnet werden können.

Beispiel 26. Die Grundfigur der Abb. 56a sei durch die drei Kräfte  $\bar{K}, \bar{K}, 2\bar{K}$  belastet; führt man die beiden Schnitte  $s_1-s_1$  und  $s_2-s_2$  und nimmt die

Momente um  $O_1$  bzw.  $O_2$ , so erhält man

$$S_2 l = S_7 a, \quad S_7 = S_6 = S_2 l/a = 2 K l/a \quad (\text{Zug}).$$

(Bei der vorausgesetzten Form sind übrigens die beiden Schnitte unnötig, da sich  $S_2 = 2 K$  für den Knoten  $I$  unmittelbar ablesen läßt, weil die Stäbe  $8$  und  $9$  auf der Kraft  $2 K$  senkrecht stehen.) Damit können auch alle anderen Stabkräfte gerechnet oder gezeichnet werden; sie lassen sich zu dem in Abb. 55b gegebenen Kräfteplan zusammenschließen, in dem allerdings die Stabkräfte in den sich übergreifenden Stäben zweimal vorkommen, wie  $S_2 = S'_2$ ,  $S_6 = S'_6$ ,  $S_7 = S'_7$ . Durch Zerlegung von  $S_2$  ergibt sich  $S_4$  und  $S_5$  usw., womit der Kräfteplan gegeben ist. Dem „idealen Gelenk“ im Innern der Grundfigur entspricht das Umfangsechseck des Kräfteplans.

Beispiel 27. In dem Fachwerk nach Abb. 57 mit den drei parallelen Stäben  $1, 2, 3$  führt ein lotrecht geführter Schnitt  $s-s$  zur Kenntnis der Stabkraft  $S_4$  im Stab 4; damit wird die Zeichnung des Kräfteplans möglich.

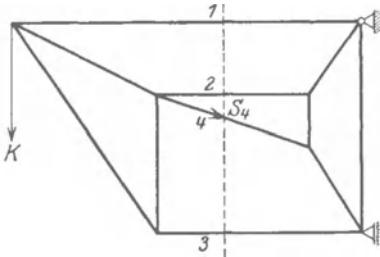


Abb. 57.

Beispiel 28. Bei dem Fachwerk Abb. 58a gelingt es durch einen ringförmigen Schnitt  $s$  einen Teil des Fachwerks herauszuschälen, der nur drei (nicht durch einen Punkt gehende) Stäbe  $1, 2, 3$  trifft. Ist die Summe der auf den herausgetrennten Teil wirkenden Kräfte  $\bar{K}$  gegeben, dann ergeben sich durch Zerlegung von  $\bar{K}$  nach diesen drei Stäben (nach 32b) die darin auftretenden Stabkräfte.

Der Kräfteplan ist in Abb. 58b gegeben. Die punktierten Linien dienen nur zur Bestimmung der Stabkräfte  $1, 2, 3$  mittels des Schnittes  $s$ . Sodann kann ausgehend von  $O$  für den Knoten  $I$  das Kräftedreieck und weiter der ganze Kräfteplan gezeichnet werden.

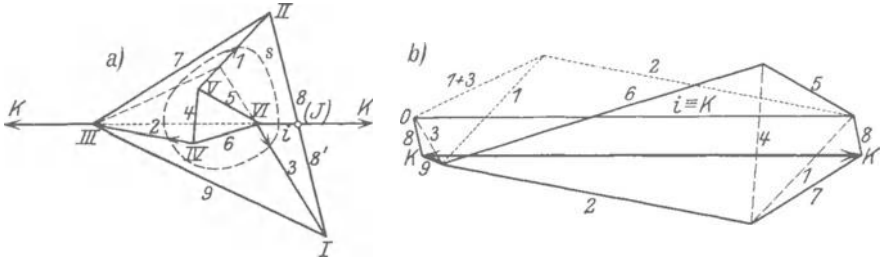


Abb. 58.

Aufgaben von dieser Art können auch nach der „Methode des unbestimmten Maßstabes“ gelöst werden. Man zeichnet für irgendeinen dreiständigen Knoten, etwa  $V$  in Abb. 58, das Kräfteck in beliebiger Größe und ergänzt den Kräfteplan für die übrigen Knoten, wodurch man die anderen Kräfte durch bestimmte Strecken dargestellt erhält; da  $\bar{K}$  bekannt ist, ist damit der Maßstab für den ganzen Kräfteplan nachträglich festgelegt.

Beispiel 29. Der zusammengesetzte Polonceau-Dachstuhl besitzt eine Grundfigur, die in Abb. 59 durch stärkere Linien hervorgehoben ist. Für den aus abnehmbaren Dreiecken bestehenden Teil, d. i. für die Stäbe  $1$  bis  $6$  läßt sich der Kräfteplan in gewöhnlicher Weise zeichnen. Für die Grundfigur wird mit Hilfe des Schnittes  $s-s$  etwa die Kraft im Stab  $14$  durch Rechnung bestimmt, indem man die Momente um den Knoten  $VIII$  nimmt; man findet mit

den in der Abbildung gegebenen Abmessungen und Lastwerten

$$S_{14} t \cdot 3,3 m = 3,5 t \cdot 5,7 m - 1 t \cdot \{4,3 + 2,9 + 1,4\} m, \quad S_{14} = 3,44 t \quad (\text{Zug}).$$

Wird diese Stabkraft maßstäblich in den Kräfteplan (Abb. 59b) eingetragen, dann kann dieser in der durch die Zahlen IV...VIII gegebenen Folge ohne weiteres vervollständigt werden.

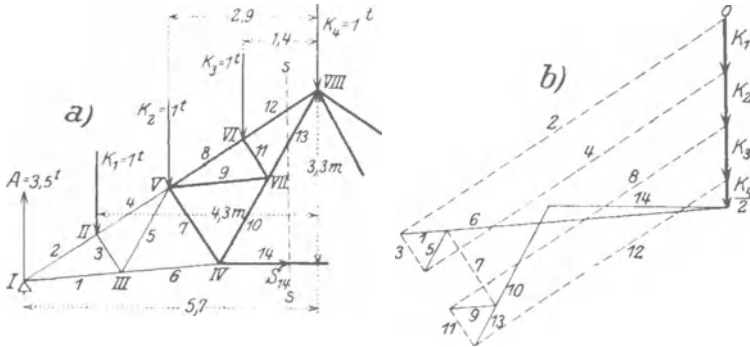


Abb. 59.

**42. Stabvertauschung.** Eine andere Methode für die Berechnung von zusammengesetzten Fachwerken (insb. ihrer Grundfiguren), die manchmal in einfacher Weise zum Ziele führt, ist die (von L. Henneberg herrührende) Stabvertauschung. Wenn es gelingt, ein solches zusammengesetztes Fachwerk mit der Stabzahl  $s = 2n - 3$  dadurch auf ein einfaches zurückzuführen, daß man einen Stab  $p$  herausnimmt und dafür zwischen zwei anderen Knoten einen neuen Stab  $q$  einsetzt, ohne die sonstige Gestalt des Fachwerks zu verändern und ohne daß das Fachwerk seine Starrheit verliert, dann wende man zur Ermittlung der Stabkräfte folgende Schritte an:

a) Nach vollzogener Vertauschung ermittle man die Stabkräfte in allen Stäben unter den gegebenen Lasten, sie seien

$$S'_p = 0 \text{ in } p, \quad S'_q \text{ in } q, \quad S'_i \text{ in den übrigen Stäben } i.$$

b) Auf das „vertauschte“ Fachwerk lasse man an den Endpunkten des Stabes  $p$  in der Richtung von  $p$  zwei gleich große und entgegengesetzte Zugkräfte von der Größe 1 wirken, denke sich die früheren Lasten entfernt und berechne abermals die Stabkräfte; es möge sich ergeben

$$1 \text{ in } p, \quad S''_q \text{ in } q, \quad S''_i \text{ in den } i,$$

oder wenn man längs  $p$  statt der Kraft 1 die Kraft  $\lambda$  kg wirken läßt,

$$\lambda \text{ in } p, \quad \lambda S''_q \text{ in } q, \quad \lambda S''_i \text{ in den } i,$$

wobei dann  $S''_q, S''_i$  reine Zahlenfaktoren sind.

c) Läßt man nun beide Belastungen gleichzeitig wirken, so addieren sich wegen der linearen Beschaffenheit der Gleichgewichtsbedingungen die Stabkräfte in allen Stäben, und diese werden

$$\lambda \text{ in } p, \quad S'_q + \lambda S''_q \text{ in } q, \quad S'_i + \lambda S''_i \text{ in den } i.$$

d) Die Entfernung des hinzugefügten Stabes  $q$  geschieht nun durch die Forderung,  $\lambda$  so zu bestimmen, daß die Kraft im Stabe  $q$  verschwindet, also

$$S'_q + \lambda S''_q = 0, \quad \text{oder} \quad \lambda = -S'_q/S''_q,$$

so daß die gesuchten Stabkräfte sind

$$-S'_q/S''_q \text{ in } p, \quad 0 \text{ in } q, \quad \begin{vmatrix} S'_i & S''_i \\ S'_q & S''_q \end{vmatrix} : S''_q \text{ in den übrigen Stäben } i,$$

wodurch die Kräfte in allen Stäben gefunden sind.

**43. Wackelige Fachwerke.** Eine Tragkonstruktion oder Stützung bezeichnet man als wackelig, wenn sie in sich oder in ihrer Verbindung mit den Auflagern kleine Bewegungen ohne Änderung der Stablängen zuläßt, genauer gesagt, wenn Bewegungen möglich sind, bei denen sich die Stablängen nur um Größen höherer Ordnung im Vergleich zu den Wegstrecken ändern. Ein einfaches Beispiel für ein solches Fachwerk ist ein Dreieck, dessen Seiten in eine Gerade zusammenfallen; auch die labilen Stütungen 20 und 21 in Abb. 34 gehören hierher. Daß eine solche „infinitesimale“ Beweglichkeit (wie natürlich auch eine endliche) zu vermeiden ist, erhellt daraus, daß bei Belastung solcher beweglicher Knoten sehr große (theoretisch unendlich große) Kräfte in den angrenzenden Stäben auftreten müßten; so kann in dem

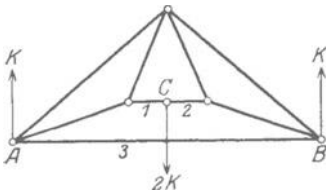


Abb. 60.

Fachwerk der Abb. 60 die Belastung von  $C$  durch die Stäbe 1, 2 nur dadurch aufgenommen werden, daß in diesen sehr große Kräfte auftreten. In anderer Form kann man dieses Vorkommnis auch dadurch ausdrücken, daß man beachtet, daß infinitesimale Beweglichkeit auftritt, wenn die Länge eines Stabes einen kleinsten oder größten Wert annimmt, der

unter den gegebenen Umständen möglich ist (für die gestreckte Lage der Stäbe 1 und 2 in Abb. 60 erhält die Länge von 3 einen größten Wert).

Für das Vorhandensein infinitesimaler Beweglichkeit kann man auch ein analytisches Kriterium in Form des Verschwindens einer gewissen Determinante angeben, in der die Stablängen als Funktionen der Koordinaten der Knoten vorkommen, was hier nur erwähnt bleiben möge (A. Föppl).

Wir können nunmehr die Entwicklungen dieses Kapitels in folgende Aussage zusammenfassen:

Von dem Ausnahmefalle der Wackeligkeit abgesehen, sind Dreiecksfachwerke mit  $s=2n-3$  Stäben stets stabil und statisch bestimmt. Für zusammengesetzte Fachwerke, bei denen diese Bedingung ebenfalls erfüllt ist, verlangt die Entscheidung der Frage der Starrheit und der statischen Bestimmtheit eine besondere Untersuchung. Im ersten

Fall läßt sich die ganze graphische Berechnung des Fachwerkes auf die Auflösung zweistabiger Knoten zurückführen. Im zweiten ist meist der rechnerische Weg einzuschlagen, der auf der Verwendung eines oder mehrerer Ritterscher Schnitte beruht, während der zeichnerische nur in gewissen Sonderfällen gangbar ist.

### IV. Räumliche Kräftegruppen.

**44. Summe einer räumlichen Kräftegruppe.** Für die Zusammensetzung von Kräften, die im Raume beliebig verteilt sind, ist, wie auch in der Ebene, die Vorstellung des verbindenden starren Körpers wesentlich. Die einfachste Form, in der man die Summe einer räumlichen Kräftegruppe darstellen kann, erhält man auf folgende Weise:

Von den gegebenen Kräften sei  $\vec{K}_i$  an  $A_i$  (Abb. 61) als Vertreter ausgewählt. Man wähle irgendeinen Punkt  $O$  des Raumes als Bezugspunkt und „verlege“ oder „reduziere“  $\vec{K}_i$  nach  $O$  hin; dies geschieht dadurch, daß in  $O$  zwei gleich große und entgegengesetzt gerichtete Kräfte  $\vec{K}_i, -\vec{K}_i$  angesetzt werden, die für sich die Summe Null geben und daher nicht stören, die jedoch mit der gegebenen Kraft  $\vec{K}_i$  in  $A_i$  zu der Kraft  $\vec{K}_i$  in  $O$  und dem Kräftepaare vom Momente  $\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{K}_i$  zusammengefaßt werden können;  $\vec{r}_i$  bedeutet dabei den Ortsvektor  $\vec{OA}_i$ .

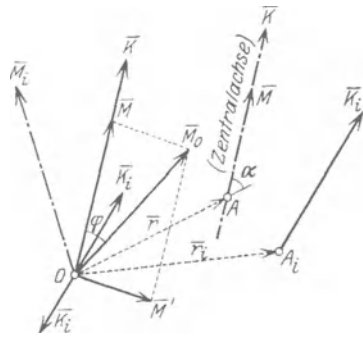


Abb. 61.

Der Vektor  $\vec{M}_i$  wird nach den in 17 und 18 getroffenen Festsetzungen mit dem Pfeil nach jener Seite hin aufgetragen, daß für eine gegen den Pfeil von  $\vec{M}_i$  blickende Person das zugehörige Kräftepaar im positiven Sinn (d. i. im Gegensinn des Uhrzeigers) dreht.

Nachdem diese Verlegung nach  $O$  hin für alle Kräfte  $\vec{K}_i$  ausgeführt ist, stellt sich die Aufgabe ein, alle  $\vec{K}_i$  in  $O$  und alle  $\vec{M}_i$  in  $O$  zusammenzusetzen. Da die  $\vec{K}_i$  alle durch einen Punkt ( $O$ ) gehen, ist ihre geometrische Addition nach dem Parallelogrammgesetz unmittelbar erlaubt und führt auf einen Vektor  $\vec{K}$ , der durch die Gleichung bestimmt ist

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^n \vec{K}_i. \tag{82}$$

Ebenso führt eine geometrische Addition aller  $\vec{M}_i$  zu einem Vektor  $\vec{M}_0$  in Zeichen

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i \equiv \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{K}_i), \tag{83}$$

dessen Richtung im allgemeinen nicht mit der von  $\vec{K}$  übereinstimmen



wird; der Winkel zwischen beiden sei  $\varphi$ . Dabei beachte man, daß  $\bar{K}$  von der Wahl des Bezugspunktes  $O$  unabhängig,  $\bar{M}$  dagegen von  $O$  abhängig ist, was durch den angesetzten Zeiger  $0$  zum Ausdruck gebracht ist.

Daß die Vektoren  $\bar{M}_i$  durch geometrische Addition zusammengesetzt werden können, kann man sich auch klar machen, indem man zwei Kräftepaare in geeigneten oder parallelen Ebenen annimmt und zeigt, daß ihre Zusammensetzung durch die der zugeordneten Vektoren ersetzt werden kann.

Wir können also sagen: Kräftepaare werden summiert, indem man die ihnen zugeordneten Vektoren im Raume geometrisch addiert. Umgekehrt kann jeder Momentenvektor in beliebig viele Teilvektoren zerlegt werden, die selbst Kräftepaare mit den entsprechenden Freiheiten (Willkürlichkeit der Größe von Kraft und Abstand bei Erhaltung des Produktes — einschließlich des Vorzeichens!) darstellen.

Zur weiteren Zusammensetzung von  $\bar{K}$  und  $\bar{M}_0$  wird  $\bar{M}_0$  in zwei Teile  $\bar{M}$ ,  $\bar{M}'$  zerlegt, so daß also  $\bar{M}_0 = \bar{M} + \bar{M}'$  gesetzt werden kann, wobei  $\bar{M} \parallel \bar{K}$ ,  $\bar{M}' \perp \bar{K}$  liegt, dann kann (umgekehrt wie früher bei der Reduktion)  $\bar{M}'$  in zwei Kräfte  $\bar{K}$ ,  $-\bar{K}$  zerlegt und zu einer Parallelverschiebung von  $\bar{K}$  verbraucht werden.

Hierfür rechne man aus  $M' = K a$  die Größe dieser Parallelverschiebung  $a$  aus:  $a = M'/K$  und erhält dann durch Zusammenfassung von  $\bar{M}'$  und  $\bar{K}$  in  $O$  eine Verschiebung von  $\bar{K}$  in einer senkrecht zu  $\bar{M}'$  durch  $\bar{K}$  gelegten Ebene; dies führt auf die Kraft  $\bar{K}$  in  $A$ ; in diese Gerade kann auch  $\bar{M}$  als freier, zu  $\bar{K}$  paralleler Vektor hineingelegt<sup>1</sup> werden.

Ein solches Gebilde, das aus einer Einzelkraft  $\bar{K}$  und einem parallel dazu liegenden Momente  $\bar{M}$  besteht, nennt man eine **Dyname** und die auf die angegebene Art gefundene Wirkungslinie von  $\bar{K}$  die **Zentralachse der Kräftegruppe**.

Die Summe einer räumlichen Kräftegruppe führt daher auf eine **Dyname** ( $\bar{K}$ ,  $\bar{M}$ ).

Durch Rechnung können die die Dyname bestimmenden Größen in folgender Weise ermittelt werden: Wir denken uns die Reduktion für den Punkt  $O$  ausgeführt und erhalten dadurch die folgenden Werte für die Komponenten der Kraft  $\bar{K}$  und des Momentes  $\bar{M}_0$

$$\bar{K} \begin{cases} X = \sum X_i, \\ Y = \sum Y_i, \\ Z = \sum Z_i, \end{cases} \quad \bar{M}_0 \begin{cases} M_x = \sum (y_i Z_i - z_i Y_i), \\ M_y = \sum (z_i X_i - x_i Z_i), \\ M_z = \sum (x_i Y_i - y_i X_i). \end{cases} \quad (84)$$

Dann ist zunächst

$$K = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (85)$$

Um die Gleichung der Zentralachse zu erhalten, beachten wir, daß diese



durch die Bedingung bestimmt ist, daß für jeden ihrer Punkte  $\bar{K}$  und  $\bar{M}$  in eine Gerade fallen. Wenn daher  $\xi, \eta, \zeta$  die laufenden Koordinaten eines Punktes  $A$  der Zentralachse sind, so haben die Komponenten des Momentenvektors  $\bar{M}'$  für ihn die Werte [vgl. Gl. (63)]

$$\left. \begin{aligned} M'_x &= M_x + \zeta Y - \eta Z, \\ M'_y &= M_y + \xi Z - \zeta X, \\ M'_z &= M_z + \eta X - \xi Y. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Sollen die Vektoren  $\bar{M}'$  und  $\bar{K}$  parallel sein, so müssen nach Einführung eines Proportionalitätsfaktors  $\lambda$  die Gleichungen bestehen

$$M'_x = \lambda X, \quad M'_y = \lambda Y, \quad M'_z = \lambda Z,$$

woraus nach Entfernung von  $\lambda$  die Gleichungen der Zentralachse in den laufenden Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  hervorgehen

$$\frac{M_x + \zeta Y - \eta Z}{X} = \frac{M_y + \xi Z - \zeta X}{Y} = \frac{M_z + \eta X - \xi Y}{Z}. \quad (87)$$

Der Betrag von  $\bar{M}$  folgt durch Projektion von  $\bar{M}_0$  auf die Richtung  $\bar{K}$

$$M = M_0 \cos \varphi = \frac{X M_x + Y M_y + Z M_z}{\bar{K}}. \quad (88)$$

**45. Gleichgewicht einer räumlichen Kräftegruppe.** Wie zuvor werden wir eine räumliche Kräftegruppe als im Gleichgewichte befindlich bezeichnen, wenn für jeden Reduktionspunkt  $O$  sowohl  $\bar{K} = 0$  als auch  $\bar{M}_0 = 0$  wird; da bei der oben besprochenen Zurückführung einer räumlichen Kräftegruppe auf eine Dynamie die Kraft  $\bar{K}$  offenbar für alle Reduktionspunkte  $O$  den gleichen Wert erhält und  $\bar{M}$  die Projektion von  $\bar{M}_0$  auf  $\bar{K}$  darstellt, so folgt, daß, wenn die Bedingungen  $\bar{K} = 0, \bar{M}_0 = 0$  für einen Reduktionspunkt  $O$  im Raume erfüllt sind, sie von selbst und identisch auch für jeden anderen bestehen müssen. In rechtwinkligen Koordinaten geschrieben lauten diese Gleichgewichtsbedingungen

$$\bar{K} = 0 \left\{ \begin{aligned} X &\equiv \sum X_i = 0, \\ Y &\equiv \sum Y_i = 0, \\ Z &\equiv \sum Z_i = 0, \end{aligned} \right. \quad \bar{M}_0 = 0 \left\{ \begin{aligned} M_x &\equiv \sum (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0, \\ M_y &\equiv \sum (z_i X_i - x_i Z_i) = 0, \\ M_z &\equiv \sum (x_i Y_i - y_i X_i) = 0, \end{aligned} \right. \quad (89)$$

wenn  $(X_i, Y_i, Z_i)$  die Teilkräfte von  $\bar{K}_i$  nach den Achsen  $x, y, z$  und  $(x_i, y_i, z_i)$  die Koordinaten eines Punktes  $A_i$  auf  $\bar{K}_i$  sind.

Beispiel 30. Für ein sog. Kraftkreuz, d. i. für zwei windschiefe Kräfte  $\bar{K}_1, \bar{K}_2$  mit dem kürzesten Abstand  $a = \overline{A_1 A_2}$  läßt sich die gleichwertige Dynamie — ihre Summe — unmittelbar angeben. Man zeichne in Abb. 62 von irgend-einem Punkte  $O$ :  $\bar{K}_1 + \bar{K}_2 = \bar{K}$  und zerlege  $\bar{K}_1$  in  $A_1$  und  $\bar{K}_2$  in  $A_2$  je in zwei Komponenten parallel und senkrecht zu  $\bar{K}$ ; die zu  $\bar{K}$  parallelen Teile  $K_1 \cos \alpha_1$  und

$K_2 \cos \alpha_2$  fassen wir zur Summe  $\bar{K}$  zusammen, welche  $a$  im Verhältnis teilt [Gl. (59)]

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{K_2 \cos \alpha_2}{K_1 \cos \alpha_1} = \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_2}{\sin \alpha_2 \cos \alpha_1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2}, \quad a_1 + a_2 = a,$$

wenn dabei auch der Sinussatz [Gl. (16)] benutzt wird. Die beiden anderen Komponenten  $K_1 \sin \alpha_1$  und  $K_2 \sin \alpha_2$  geben ein Kräftepaar, da wieder nach den Kräfte dreiecken  $K_1 \sin \alpha_1 = K_2 \sin \alpha_2$  ist. Der diesem Kräftepaar zugeordnete Momentenvektor  $\bar{M}$  ist parallel zu  $\bar{K}$  gerichtet, und sein Betrag ergibt sich (wobei abermals der Sinussatz benutzt wird) zu

$$M = K_1 a \sin \alpha_1 = K_1 a \frac{K_2 \sin \alpha}{K} = \frac{K_1 K_2}{K} a \sin \alpha. \quad (90)$$

Durch  $\bar{K}$  und  $\bar{M}$  ist die mit  $\bar{K}_1, \bar{K}_2$  gleichwertige Dynamie gegeben.

Umgekehrt lassen sich mehrfach unendlich viele solche Kraftkreuze  $\bar{K}_1, \bar{K}_2$  angeben, die zur selben Dynamie  $(\bar{K}, \bar{M})$  führen, oder, mit anderen Worten, die Dynamie  $(\bar{K}, \bar{M})$  läßt sich in mannigfacher Weise in die zwei Kräfte eines Kraftkreuzes zerlegen: Durch Wahl von  $\bar{K}_1$  ist das zugehörige  $\bar{K}_2$  bestimmt. Man

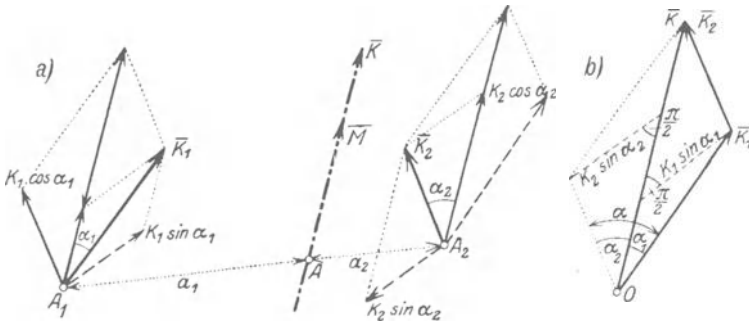


Abb. 62.

braucht nur die obige Konstruktion in umgekehrter Reihenfolge auszuführen. Rechnet man Rauminhalt  $V$  des Parallelepipedes, das durch die Kanten  $\bar{K}_1, \bar{a}, \bar{K}_2$  bestimmt ist, so folgt

$$V = K_1 K_2 a \sin \alpha = M K, \quad (91)$$

d. h. der Rauminhalt aller so erhaltenen Parallelepipede, die allen möglichen Zerlegungen entsprechen, ist eine Invariante. Der Rauminhalt des durch  $\bar{K}_1, \bar{a}, \bar{K}_2$  bestimmten Tetraeders (Vierflachs) beträgt  $\frac{1}{6} V$ .

Die Wahl von  $\bar{K}_1$  ist ganz frei — bis auf die Einschränkung, daß  $\bar{K}_1$  die Zentralachse  $g$  nicht schneiden darf, da dann die Zerlegung unbestimmt würde. Diese für die Zerlegung ausgeschlossenen Linien nennt man Nulllinien und ihre Gesamtheit ein Nullsystem, und versteht darunter den Inbegriff aller eine Gerade  $g$  schneidenden Geraden. Auf die interessanten geometrischen Eigenschaften dieses Gebildes und ihren weiteren Nutzen für die Theorie der räumlichen Kräftegruppen und darüber hinaus können wir hier nicht eingehen.

Wir können also sagen: für sämtliche Kraftkreuze, die einer gegebenen Dynamie gleichwertig sind, ist der Rauminhalt des durch sie bestimmten Tetraeders eine feste Zahl, die nur von  $\bar{K}$  und  $\bar{M}$  abhängt.

**46. Arten der Stützungen. Beispiele.** Die Probleme der Raumstatik sind ganz ähnlich denjenigen, die in der Ebene auftraten, nur ist zu beachten, daß alles entsprechend der höheren Dimensionenzahl ver-

wickelter wird; der Zahl drei der Gleichgewichtsbedingungen in der Ebene entspricht im Raum die Zahl sechs usw. Für die Einsicht in die auftretenden Beziehungen ist es sehr förderlich, sich zu jedem Problem der Ebene das zugehörige im Raum zu suchen, eine Aufgabe, die sich durchführen läßt und den Inhalt der folgenden Betrachtungen bilden wird, die jedoch diese Aufgabe keineswegs vollständig erledigen sollen.

Wie in der Ebene haben auch im Raume nur gestützte Körper technische Bedeutung. Bezüglich der Arten der Stützungen gelten ganz ähnliche Angaben, wie sie in 33 gemacht wurden, die nur wegen ihrer Geltung für den Raum sinngemäß erweitert werden müssen. Einige der dabei zu unterscheidenden Fälle enthält Abb. 63.

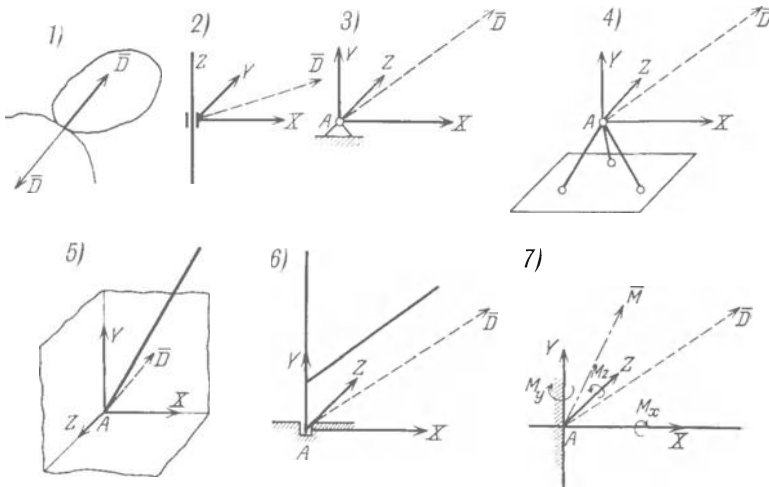


Abb. 63.

I.  $\bar{D}$  durch eine Größe gegeben. Dieser Fall tritt auf bei der Berührung zweier glatter Körper nach 1., bei beweglicher Auflagerung u. dgl. wie bei ebenen Stützungen.

II.  $\bar{D}$  durch zwei Größen gegeben. Beispiel: das Halslager nach 2.

III.  $D$  durch drei Größen gegeben. Beispiele: 3. das räumliche Gelenk (Kugelgelenk, Kugellager), 4. die gelenkige Stützung durch drei Stäbe, 5. die Eckenstützung, 6. das Fußlager.

IV. Von festen Stützungen ist in 7. die räumliche Einspannung angedeutet, die den Körper unverschieblich festlegt und in statischer Hinsicht durch sechs Größen ( $X, Y, Z; M_x, M_y, M_z$ ) gekennzeichnet ist.

Zur Lösung der Gleichgewichtsaufgaben werden für jede einzelne Stützung die zugehörigen Auflagerkräfte je nach der Art der Stützung angebracht und für sie im Verein mit den eingepprägten Kräften (den Lasten) die sechs Gleichgewichtsbedingungen in der Form (89) angesetzt; aus diesen können sechs unbekannte Größen (Lagenkoordinaten und Auflagerkräfte) ermittelt werden; ist die Stützung so be-

schaffen, daß mehr als sechs Unbekannte auftreten, so erhält man ein räumlich-statisch-unbestimmtes System.

Beispiel 31. Ein Türflügel vom Gewichte  $\bar{G}$ , dessen Achse unter dem Winkel  $\alpha$  gegen die Lotrechte geneigt ist (Abb. 64), wird durch eine senkrecht zu ihrer Ebene in  $A$  angreifende Kraft  $\bar{K}$  aus der lotrechten Ebene um einen Winkel  $\varphi$  herausgedreht. Man suche die Beziehung zwischen  $K$  und  $\varphi$ , und die in den beiden als Gelenke anzusehenden Türangeln auftretenden Auflagerkräfte. Gegeben sind ferner  $OA = a$ ,  $OS = l$ ,  $OB_1 = OB_2 = b$ .

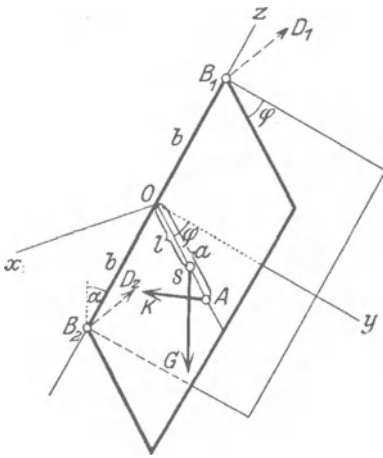


Abb. 64.

Da die Gelenkkräfte durch  $B_1$  und  $B_2$  laufen, liefert die Momentengleichung um die  $Z$ -Achse unmittelbar die gesuchte Beziehung zwischen  $K$  und  $\varphi$ ; die Teilkräfte von  $\bar{K}$  und  $\bar{G}$  nach den Achsen  $x, y, z$  sind (beachte, daß die  $x$ -Achse wagrecht ist)

$$\bar{K} (K \cos \varphi, -K \sin \varphi, 0),$$

$$\bar{G} (0, G \sin \alpha, -G \cos \alpha)$$

mit den Angriffspunkten  $A (a \sin \varphi, a \cos \varphi, 0)$  und  $S (l \sin \varphi, l \cos \varphi, 0)$ . Die letzte der Gln. (89) gibt dann

$$K a = G l \sin \alpha \sin \varphi.$$

Werden noch die Komponenten der Gelenkkräfte in  $B_1$  und  $B_2$ , nämlich  $\bar{D}_1 (X_1, Y_1, Z_1)$  und  $\bar{D}_2 (X_2, Y_2, Z_2)$  und die Koordinaten ihrer Angriffspunkte  $B_1 (0, 0, b)$ ,  $B_2 (0, 0, -b)$  eingeführt, so liefern die übrigen Bedingungen (89) fünf Gleichungen zur Bestimmung der sechs Unbekannten.  $Z_1$  und  $Z_2$  bleiben einzeln unbestimmt, es ergibt sich nur ihre Summe  $Z_1 + Z_2 = G \cos \alpha$ , ähnlich wie beim ebenen Zweigelenk in 34, Beispiel 12.

**47. Eindeutige Zerlegungsaufgaben.** Wie in der Ebene, gibt es auch im Raume im wesentlichen nur zwei Fälle, in denen die Zerlegung einer Kraft  $\bar{K}$  in Komponenten in eindeutiger (statisch bestimmter) Weise möglich ist.

a) Die Zerlegung von  $\bar{K}$  in drei Komponenten, die durch einen Punkt  $A$  auf  $\bar{K}$  gehen und nicht in einer Ebene liegen: die Komponenten sind durch die Kanten des Parallelepipedes gegeben, das über  $\bar{K}$  nach diesen Richtungen gezeichnet werden kann (wie in Abb. 5).

Die zeichnerische Ausführung erfordert die Anwendung eines Abbildungsverfahrens der gegebenen Raumfigur; das bekannteste ist die Orthogonalprojektion auf zwei Ebenen mit darauffolgender Umlegung in die Zeichenebene. Für die Anwendbarkeit dieses Verfahrens in der Statik ist das entscheidende, daß dabei die vektorielle Addition der Kräfte im Raum ersetzt wird durch die vektorielle Addition ihrer bezüglichen Projektionen auf zwei Projektionsebenen.

Beispiel 32. Auf diese Weise können z. B. die Stabkräfte in einem aus drei Stäben 1, 2, 3 gebildeten Gerüste (Abb. 65) bestimmt werden, das durch  $\bar{K}$

belastet ist. Im Aufriß ergibt sich unmittelbar:  $\bar{K}'' = \bar{K}_1'' + \bar{L}_1''$ , daraus durch das Herabloten auf die Mittellinie zwischen  $2''$  und  $3''$ :  $L_1''$  und weiter  $\bar{L}_1 = \bar{K}_2' + \bar{K}_3'$ . Aus zwei Projektionen sind die wahren Größen der Kräfte leicht erhältlich.

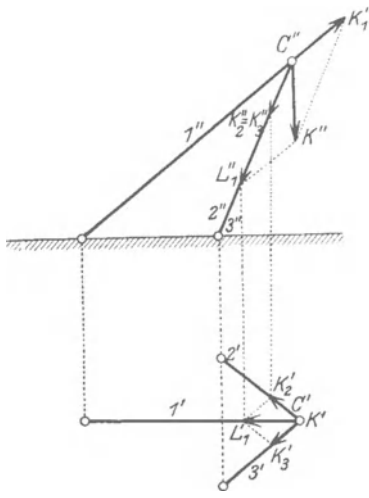


Abb. 65.

Beispiel 33. Einen ähnlichen Aufbau zeigt auch das in Abb. 66 dargestellte Stabgerüst, bei dem durch Zerlegung von  $\bar{K}$  zuerst die Stabkräfte in 1, 2, 3, sodann weiter durch Zerlegung der Stabkraft in 3 die Stabkräfte in 4, 5, 6 folgen.

Die Ausführung dieser Zerlegung ist auch bei beliebigen Richtungen der Kräfte ohne weiteres möglich; selbstverständlich

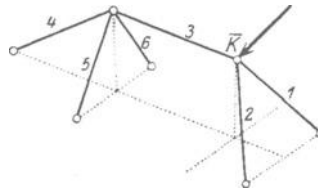


Abb. 66.

wird man sich in allen Fällen die Vorteile besonderer Lagen zunutze machen.

Diese Eindeutigkeit bleibt auch bestehen, wenn der gemeinsame Schnittpunkt ins Unendliche rückt,  $\bar{K}$  also in drei zu  $\bar{K}$  parallele Komponenten zerlegt werden soll, die natürlich nicht in einer Ebene liegen dürfen.

Beispiel 34. Eine dreieckige Platte vom Gewichte  $\bar{G}$  hängt wagrecht an drei lotrechten Schnüren, die an den Ecken  $A, B, C$  befestigt sind; wie groß sind die in diesen wirkenden Kräfte  $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \bar{K}_3$ ? Mit den Bezeichnungen der Abb. 67 ergibt sich durch Zerlegung

$$K_1 = G b / (a + b),$$

$$K_2 + K_3 = G a / (a + b)$$

und durch abermalige Zerlegung des zweiten Teiles

$$K_2 = G a q / (a + b) (p + q),$$

$$K_3 = G a p / (a + b) (p + q).$$

$S$  kann als der „Mittelpunkt“ dreier Massen betrachtet werden, die in den Ecken der Dreiecksplatte angebracht und bzw.  $K_1, K_2, K_3$  proportional sind.

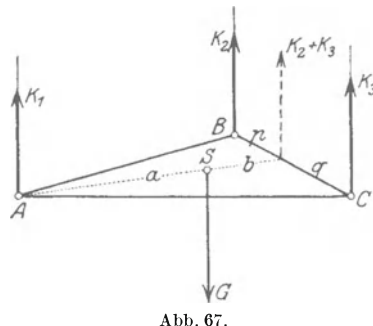


Abb. 67.

b) Die Zerlegung von  $\bar{K}$  in sechs Teilkräfte  $\bar{K}_1 \dots \bar{K}_6$ , von deren Wirkungslinien nicht mehr als drei in einer Ebene liegen und nicht mehr als drei durch einen Punkt gehen.

Für den einfachsten Fall, wo drei von den sechs gegebenen Linien durch einen Punkt  $A$  gehen und die anderen drei in einer Ebene  $\varepsilon$  liegen, ist die Lösung sehr einfach. Man suche den Schnitt  $S$  von  $\bar{K}$  mit der Ebene  $\varepsilon$  und zerlege  $\bar{K}$  in zwei Teilkräfte, von denen die eine  $\bar{K}_1$  in der Richtung  $\overline{SA}$  läuft, die andere  $\bar{K}_2$  in  $\varepsilon$  liegt. Die Zerlegung von  $\bar{K}_1$  nach den drei Linien durch  $A$  und von  $\bar{K}_2$  nach den drei Linien in  $\varepsilon$  (nach 32b) liefert die gesuchten sechs Kräfte.

Daß diese Zerlegungsaufgabe auch bei allgemeiner Lage der sechs Linien bestimmt ist, erkennt man durch folgende einfache Abzählung. Die Bedingungen, daß die Summe der sechs gesuchten Kräfte  $\bar{K}_1, \dots, \bar{K}_6$  mit der gegebenen Kraft  $\bar{K}$  gleichwertig ist, werden durch die Gleichheit der Projektion von  $\bar{K}$  mit der Summe der Projektionen von  $\bar{K}_1, \dots, \bar{K}_6$  nach drei Achsen, und durch die Gleichheit der Momente von  $\bar{K}$  mit der Summe der Momente von  $\bar{K}_1, \dots, \bar{K}_6$  um drei Achsen des Raumes ausgedrückt. Dies sind zusammen sechs Gleichungen für die sechs Unbekannten  $\bar{K}_1, \dots, \bar{K}_6$ . Diese Methode macht somit die Auflösung von sechs linearen Gleichungen mit sechs Unbekannten notwendig, was im allgemeinen (unter den gemachten Voraussetzungen) eine bestimmte Lösung liefert, wenn auch die wirkliche Auflösung dieser Gleichungen eine beschwerliche Aufgabe sein mag.

Vereinfacht wird die Ausführung der Zerlegung durch passende Wahl der Achsen, um die man die Gleichheit der Momente ansetzt. Wenn es eine Gerade gibt, die fünf der gegebenen Linien schneidet, so liefert die Gleichheit der Momente für diese Gerade als Achse die sechste Kraft  $\bar{K}_6$  durch eine Gleichung mit  $\bar{K}_6$  als einziger Unbekannten. Es ist jedoch im allgemeinen nicht möglich, eine solche Gerade zu ziehen. Indessen gibt es immer zwei Gerade, die vier gegebene Linien im Raume schneiden. Durch drei beliebige, sich nicht schneidende Gerade ist nämlich eine Regelschar zweiten Grades bestimmt: jede vierte Linie schneidet diese Fläche in zwei Punkten (die auch imaginär sein können), durch die zwei Strahlen der konjugierten Schar hindurchgehen; diese zwei Strahlen schneiden auch die drei Linien, von denen wir ausgingen, schneiden somit vier der gegebenen Linien. Die Momentengleichungen für diese beiden geben zwei lineare nicht-homogene Gleichungen für die übrig bleibenden zwei Kräfte. Die zeichnerische Durchführung dieses einfachen Gedankenganges ist im allgemeinen recht umständlich, doch treten manchmal leicht ersichtliche Vereinfachungen ein. So lassen sich im folgenden Beispiele die beiden Schnittgeraden, von denen jede dieselben vier von den gegebenen Linien trifft, unmittelbar angeben, wodurch eine wesentliche Vereinfachung der Lösung gewonnen ist.

Bezüglich der Anwendungen beschränken wir uns auf den Fall, in dem die Festlegung eines Körpers durch sechs Stäbe geschieht, durch die dieser mit dem festen Bezugssystem verbunden ist. Die in diesen Stäben auftretenden Kräfte sind dann die Unbekannten, die es zu



bestimmen gilt. Ähnlich wie in der Ebene ist auch im Raum die eindeutige Lösung der Zerlegungsaufgabe mit der unverschieblichen Festlegung (und zwar unverschieblich auch im infinitesimalen Sinne!) des betrachteten Körpers verknüpft.

Es möge nur noch bemerkt werden, daß ähnliche Zerlegungen wie a) und b) auch für ein gegebenes Kräftepaar  $\bar{M}$  möglich sind.

Beispiel 35. Die Platte in Abb. 68 ist durch sechs Stäbe 1...6 gestützt und durch die Kraft  $\bar{K}$  belastet. Die beiden Geraden, die vier von den sechs Stäben, und zwar 1, 2, 3, 4 schneiden, lassen sich unmittelbar angeben: sie sind  $g_1$  und  $g_2$ . Setzt man um sie die Gleichheit der Momente für  $K$  einerseits, für die Stabkräfte 5 und 6 andererseits an, so erhält man zwei lineare Gleichungen, aus denen  $S_5$  und  $S_6$  berechnet werden können.

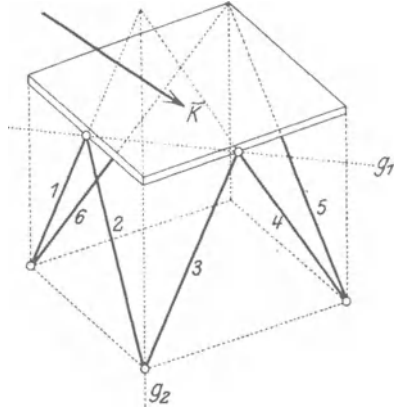


Abb. 68.

**48. Abbildung räumlicher Kräftegruppen auf die Ebene.**

Die bisher für die Statik der räumlichen Kräftegruppen angegebenen zeichnerischen Verfahren erfordern die Heranziehung der Methoden der darstellenden Geometrie, insbesondere die der orthogonalen Projektion. Diese Methoden zeichnen sich durch ihre Anschaulichkeit aus und lassen sich über ihren sonstigen Verwendungsbereich unschwer auf die Fragen übertragen, die in der Raumstatik hinsichtlich der auftretenden Kräfte zu behandeln sind. Neben diesen — und ihnen in mancher Hinsicht überlegen — ist in den letzten Jahren durch B. Mayor, R. v. Mises, K. Federhofer u. a. ein Abbildungsverfahren angegeben worden, das sich in Ingenieurkreisen zunehmender Beliebtheit erfreut und von dem hier wenigstens die grundlegenden Konstruktionen dargestellt werden sollen.

Bei diesem Verfahren werden die  $\infty^3$  Vektoren  $\bar{K}$  durch einen Punkt  $O$  des Raumes auf die  $\infty^2$  „gebundenen“ Vektoren  $\bar{K}^*$  (d. s. Vektoren in vorgeschriebenen Wirkungslinien, wie die Kräfte) in der Ebene abgebildet. Sind  $(X, Y, Z)$  die Komponenten der Vektoren  $\bar{K}$  im Raume und  $(X^*, Y^*, M^*)$  die Koordinaten der Kräfte  $\bar{K}^*$  in der Ebene (nach 31), so erfolgt die Abbildung gemäß den Gleichungen

$$(\bar{K} \rightarrow \bar{K}^*) \quad \boxed{X^* = X, \quad Y^* = Y, \quad M^* = cZ}. \quad (92)$$

Den so dem gegebenen Vektor  $\bar{K}$  in der Ebene zugeordneten, gebundenen Vektor  $\bar{K}^*$  nennen wir den Bildvektor oder kurz das Bild des gegebenen.

Die  $x$ - und  $y$ -Komponenten des gegebenen und des Bildvektors stimmen also überein, und weiter ist das Moment des Bildvektors pro-



portional der  $z$ -Komponente des gegebenen. Die Konstante  $c (\neq 0)$  muß zur Herstellung der richtigen Dimensionen in der dritten der Gln. (92) eingeführt werden, sie wird als Abbildungskonstante bezeichnet.

Um für einen Vektor  $\bar{K}$  sein Bild  $\bar{K}^*$  zu erhalten, denken wir uns  $\bar{K}$  durch seinen Grundriß  $K'$  und seinen Aufriß  $K''$  gegeben (Abb. 69) und beachten, daß die Komponenten von  $K'$  nach den zwei Richtungen  $x$  und  $y$  der Ebene die Beträge  $X$  und  $Y$ , und die Projektion  $K'$  auf die lotrechte Achse  $z$  den Betrag  $Z$  besitzt. Der Bildvektor  $\bar{K}^*$  von  $\bar{K}$  ergibt sich dann durch folgende Konstruktion: Man mache  $\overline{O^*f} = c$  parallel zu  $x$ , ziehe  $\overline{fT} \parallel K''$  und durch  $T$  die Parallele zu  $K'$ . Diese Parallele ist der Träger des Bildvektors  $\bar{K}^*$ , und sein Betrag ist  $K'$ .

Um zu beweisen, daß der so gefundene Bildvektor  $\bar{K}^*$  dem gegebenen  $\bar{K}$  tatsächlich durch die Gln. (92) zugeordnet ist, nennen wir  $p$  den senkrechten Abstand des Bildvektors  $\bar{K}^*$  vom Anfangspunkt des Achsenkreuzes  $x^*, y^*$  der Bildebene,  $\varphi$  den Neigungswinkel von  $K$  gegen die Grundrißebene,  $\alpha$  und  $\beta$  die Neigungswinkel von  $K'$  und  $K''$  gegen die  $x$ -Achse (Abb. 69d). Dann ist zunächst

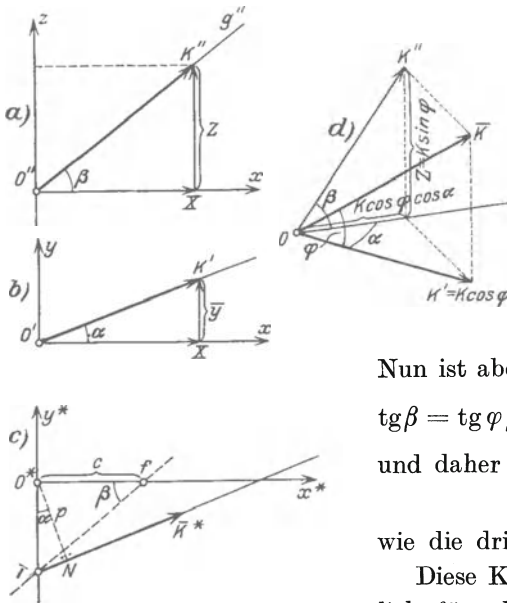


Abb. 69.

$$K' = K \cos \varphi = Z \operatorname{ctg} \varphi,$$

und da

$$\overline{O^*T} = c \operatorname{tg} \beta,$$

$$p = \overline{O^*T} \cdot \cos \alpha = c \operatorname{tg} \beta \cos \alpha,$$

so finden wir für das Moment von  $\bar{K}^*$  um  $O^*$

$$\begin{aligned} M^* &= p K' = p Z \operatorname{ctg} \varphi \\ &= c Z \operatorname{tg} \beta \cos \alpha \operatorname{ctg} \varphi. \end{aligned}$$

Nun ist aber nach Abb. 69d

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \varphi / \cos \alpha \text{ oder } \operatorname{tg} \beta \cos \alpha \operatorname{ctg} \varphi = 1$$

und daher

$$M^* = c Z,$$

wie die dritte Gl. (92) verlangt.

Diese Konstruktion wird nur unmöglich für alle  $\bar{K}$ , die auf der Grundrißebene senkrecht stehen; nach den Gln. (92)

werden diese Vektoren auf die  $\infty^1$  Kräftepaare der Ebene abgebildet.

Aus der angegebenen Konstruktion folgt unmittelbar, daß die Bilder aller Vektoren, die in einer Geraden  $g$  liegen, in dieselbe Wirkungs-

linie  $g^*$  fallen; denn  $g^*$  hängt nur von den Richtungen der Projektionen  $g'$  und  $g''$ , nicht aber vom Betrage  $K$  ab.

Ist das Bild  $\bar{K}^*$  eines Vektors gegeben, so erhält man die beiden Projektionen  $K'$  und  $K''$  durch Umkehrung der angegebenen Konstruktion.

Bei der Anwendung dieser Abbildung werden insbesondere die in den folgenden Beispielen entwickelten Eigenschaften benutzt, auf die wir uns hier beschränken müssen.

**49. Anwendungen.** Beispiel 36. Um eine Kraft  $\bar{K}$  (wie in Abb. 5) nach drei Richtungen  $g_1, g_2, g_3$  im Raume zu zerlegen, die sich auf  $\bar{K}$  schneiden, zeichnen wir die Bilder  $\bar{K}^*$  und  $g_1^*, g_2^*, g_3^*$  und zerlegen  $\bar{K}^*$  nach diesen drei Geraden in der Ebene wie in 32 b. Die Zerlegung im Raume ist damit auf diese bekannte Zerlegungsaufgabe in der Ebene zurückgeführt.

Beispiel 37. Die Bilder aller Vektoren  $\bar{K}$ , die einer Ebene  $\varepsilon$  parallel sind, gehen durch einen Punkt  $E$ , der der „Bildpunkt“ der Ebene genannt wird.

Dieser Bildpunkt  $E$  der Ebene  $\varepsilon$  wird erhalten, indem man die Bilder  $\bar{K}_1^*, \bar{K}_2^*$  von zwei beliebigen, in ihr gelegenen liegenden Vektoren  $\bar{K}_1, \bar{K}_2$  aufsucht und zum Schnitt  $E$  bringt. Da sich jeder andere Vektor  $\bar{K}$  der Ebene in der Form

$$\bar{K} = \lambda \bar{K}_1 + \mu \bar{K}_2$$

darstellen läßt, so gelten auch die Gleichungen

$$X^* = \lambda X_1 + \mu X_2, \quad Y^* = \lambda Y_1 + \mu Y_2, \quad M^* = c(\lambda Z_1 + \mu Z_2),$$

und diese besagen, daß die Bilder aller dieser Vektoren durch einen Punkt ( $E$ ) hindurchgehen.

Beispiel 38. Die Bilder  $\bar{K}_1^*, \bar{K}_2^*$  zweier Vektoren  $\bar{K}_1, \bar{K}_2$ , die aufeinander senkrecht stehen, sind durch die Eigenschaft verknüpft, daß das Bild des einen durch den „Antipol“ des anderen mit Bezug auf den Grundkreis von Halbmesser  $c$  hindurchgeht.

Der „Antipol“ einer Geraden  $g^*$  mit Bezug auf den Kreis  $c$  liegt auf der Normalen zu  $g^*$  durch den Mittelpunkt  $O^*$  des Kreises, jenseits von  $O$ , und sein Abstand  $q$  von  $O$  ist mit dem Abstand  $p$  der Geraden  $g^*$  von  $O^*$  durch die Bedingung verknüpft:  $p q = c^2$ .

Sind  $(X_1, Y_1, Z_1)$  und  $(X_2, Y_2, Z_2)$  die Komponenten von  $\bar{K}_1$  und  $\bar{K}_2$ , so lautet die Bedingung des Senkrechtstehens

$$K_1 K_2 = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0$$

oder in den Bildkoordinaten geschrieben

$$X_1^* X_2^* + Y_1^* Y_2^* + \frac{M_1^* M_2^*}{c^2} = 0. \quad (93)$$

Die Gleichung von  $\bar{K}_1^*$  in den laufenden Koordinaten  $x, y$  lautet

$$x Y_1^* - y X_1^* = M_1^*,$$

daraus ergeben sich zunächst die Koordinaten des Fußpunktes des von  $O$  auf  $\bar{K}_1^*$  gefällten Lotes

$$(\text{Fußpunkt}) \quad x_1 = \frac{Y_1^* M_1^*}{X_1^{*2} + Y_1^{*2}}, \quad y_1 = -\frac{X_1^* M_1^*}{X_1^{*2} + Y_1^{*2}},$$

und weiter die des Antipols (nach der obigen Erklärung)

$$(\text{Antipol von } \bar{K}_1^*) \quad \xi_1 = -x_1 \frac{c^2}{p^2} = -\frac{c^2 Y_1^*}{M_1^*}, \quad \eta_1 = -y_1 \frac{c^2}{p^2} = \frac{c^2 X_1^*}{M_1^*}.$$

Setzt man diese Werte für  $x, y$  in die Gleichung von  $K_2^*$  ein, die so lautet

$$x Y_2^* - y X_2^* = M_2^*,$$

so findet man, daß diese zufolge der Bedingung des Senkrechtstehens Gl. (93) identisch erfüllt ist.  $\bar{K}_2^*$  geht daher durch den Antipol von  $\bar{K}_1^*$ , und ebenso geht  $\bar{K}_1^*$  durch den Antipol von  $\bar{K}_2^*$ .

Beispiel 39. Um einen Vektor  $\bar{K}$  im Raume abzubilden, ist nach 18a außer der Angabe von  $\bar{K}$  noch die Angabe des Momentenvektors von  $\bar{K}$  um  $O$ , also von  $\bar{M} = \bar{r} \times \bar{K}$  erforderlich. Zur Abbildung von  $\bar{K}$  im Raume brauchen wir daher außer dem Bilde  $\bar{K}^*$  von  $\bar{K}$  auch das Bild  $\bar{M}^*$  von  $\bar{M}$ . Nach dem früheren werden wir — mit Berücksichtigung der Dimension — dem Bilde des Vektors  $\bar{M}$  die folgenden Koordinaten zuordnen

$$X^* = \frac{M_x}{c}, \quad Y^* = \frac{M_y}{c}, \quad M^* = M_z. \quad (94)$$

Um  $\bar{M}^*$  zu erhalten, haben wir daher so vorzugehen: Wir brauchen den Ortsvektor eines beliebigen Punktes  $A$  von  $\bar{K}$  und wählen hierfür am einfachsten den Spurpunkt  $g_k$  von  $\bar{K}$  in der Grundrißebene (Abb. 70). Der Einfachheit halber lassen wir ferner — wie bisher — die Bildebene mit der Grundrißebene zusammenfallen. Das Bild des Vektors  $\overline{Og_k}$  fällt dann mit seinem Grundriß zusammen.

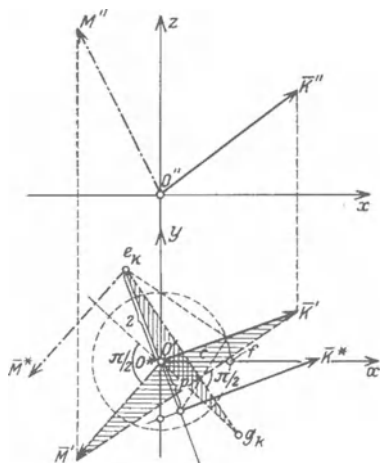


Abb. 70.

Zeichnet man außerdem das Bild  $\bar{K}^*$  von  $\bar{K}$ , und berücksichtigt man, daß  $\bar{M}$  sowohl auf  $\bar{K}$  wie auf  $\overline{Og_k}$  senkrecht steht, so muß nach Beisp. 38 das Bild  $\bar{M}^*$  von  $\bar{M}$  sowohl durch den Antipol  $e_k$  von  $\bar{K}$  als auch durch den Antipol von  $\overline{Og_k}$  mit Bezug auf den Kreis  $c$  gehen; d. h.  $\bar{M}^*$  geht durch  $e_k$  und steht auf  $\overline{Og_k}$  senkrecht.

Nun handelt es sich noch darum, den Betrag von  $\bar{M}^*$  anzugeben. Dazu berechnen wir den Betrag der in die Bildebene fallenden Komponente  $\bar{M}'$  von  $\bar{M}$  und erhalten mittels der Gl. (92) und wegen  $p \cdot \overline{O'e_k} = c^2$

$$M' = \sqrt{X^{*2} + Y^{*2}} = \frac{Z \cdot \overline{O'g_k}}{c} = \frac{p K' \cdot \overline{O'g_k}}{c} = \frac{K' \cdot \overline{O'g_k}}{\overline{O'e_k}}. \quad (95)$$

Zieht man daher in Abb. 70 die Geraden  $\overline{O'M'} \perp \overline{O'g_k}$  und  $\overline{K'M'} \perp \overline{g_k e_k}$ , so ist  $\triangle O'K'M' \sim \triangle O'e_k g_k$  (in der Abb. 70 schraffiert), und aus dieser Ähnlichkeit folgt

$$M' : K' = \overline{O'g_k} : \overline{O'e_k}.$$

Durch die angegebenen Senkrechten ist daher  $M'$  und damit das Bild  $\bar{M}^*$  von  $\bar{M}$  vollständig bestimmt.

Eine Kraft im Raume (oder irgend ein Raumvektor) wird daher durch zwei Vektoren der Bildebene abgebildet. — Die Summe einer Kräftegruppe im Raume wird erhalten, indem die Bilder  $\bar{K}_i^*$  und  $\bar{M}_i^*$  aller Kräfte je für sich summiert werden, wofür je ein gewöhnliches Seileck in der Ebene dient. Bei diesem Ab-

bildungsverfahren verlangt daher die Summation einer räumlichen Kräftegruppe die Zeichnung zweier Seilecke, also ganz elementare Hilfsmittel, wie sie aus der Statik der ebenen Kräftegruppen bekannt sind. Zu bemerken ist jedoch, daß bei dieser Abbildung die Anschaulichkeit der Raumfiguren, die bei der orthogonalen Projektion noch zum größten Teil erhalten bleibt, verloren geht.

**50. Bemerkungen über Raumbachwerke.** Wenn schon für ebene Fachwerke — wie im III. Kapitel an mehreren Beispielen erläutert, allerdings nicht in allen Einzelheiten dargelegt wurde — verschiedene Arten („Strukturen“) von Fachwerken möglich sind, so kann es nicht überraschen, daß die möglichen Gestalten für Raumbachwerke noch weit mannigfaltiger ausfallen werden. Diesen vermehrten Mannigfaltigkeiten gegenüber müssen wir uns hier auf ganz wenige Bemerkungen beschränken.

Die kleinste Stabzahl  $s$ , die für die starre Verbindung von  $n$  Knotenpunkten erforderlich ist, ergibt sich durch eine Abzählung, ähnlich wie in der Ebene. Zur gegenseitigen Festlegung von drei Knoten braucht man drei Stäbe, und jeder folgende Knoten wird durch drei weitere Stäbe an die vorhandenen angeschlossen. Zur gegenseitigen starren Verbindung von  $n$  Knoten brauchen wir daher mindestens Stäbe in der Anzahl

$$s = 3n - 6. \quad (96)$$

Die einfachste Bildungsweise des Raumbachwerkes besteht gerade in dem Aufbau aus lauter solchen „dreiständigen“ Knoten. Ähnlich wie in der Ebene ist für derartige Fachwerke (wenn von dem Ausnahmefall der „Wackeligkeit“ abgesehen wird) von vornherein mit ihrer Starrheit auch über ihre statische Bestimmtheit entschieden, da für ihre Berechnung kein anderer Vorgang in Betracht kommt als die fortgesetzte Anwendung der in 47a) gegebenen Zerlegung einer Kraft nach drei Richtungen des Raumes. Solche Fachwerke müssen sinngemäß als Vierflach-(Tetraeder-)Fachwerke bezeichnet werden.

Raumbachwerke dieser Art kommen jedoch nur selten zur Anwendung. Die meisten der in Kuppeln, Türmen usw. verwendeten Fachwerke sind Flechtwerke und Netzwerke, das sind Dreiecknetze, die über einen ringförmigen Teil einer Fläche (Kugel, Zylinder u. dgl.) ausgebreitet sind. Sofern diese als Ganzes nicht schon an sich starr sind, müssen sie erst durch entsprechende Versteifungen oder Vermehrung der Auflagerbedingungen zu stabilen Konstruktionen gemacht werden. Für die statische Berechnung stehen die Gleichgewichtsbedingungen (89) und die in 47 gegebenen Zerlegungssätze zur Verfügung, wobei man sich wieder die Vorteile zunutze machen wird, die aus besonderen Lagen entspringen. Zur graphischen Berechnung solcher Raumbachwerke kann auch das in 48 und 49 angegebene Abbildungsverfahren mit großem Vorteil herangezogen werden. Auf Einzelheiten dieses umfangreichen Gebietes kann hier nicht eingegangen werden.

## V. Massenmittelpunkt.

**51. Mittelpunkt paralleler Kräfte.** Für die hier zu gebenden Entwicklungen ist eine weitere Einschränkung des bisher benutzten Vektorbegriffes erforderlich, die darin besteht, daß die Vektoren nunmehr an bestimmte Punkte des Raumes oder eines Raumstückes gebunden anzunehmen sind. Wir sprechen dann von angehefteten oder Feldvektoren. Das wichtigste Beispiel dieser Art von Vektoren tritt auf, wenn es sich um Kräfte handelt, die an bestimmten Punkten ihrer Wirkungslinien „angeheftet“ sind; dies ist bei den Massenkräften der Fall, wozu auch die Gewichte gehören; das sind die Anziehungskräfte der Erde auf die von Materie erfüllten Raumelemente. Kennzeichnend für Kräfte dieser Art ist gerade ihre „raumhafte“ Verteilung.

Die Gewichte der einzelnen Teile des betrachteten Körpers setzen wir als zueinander parallel und alle lotrecht nach abwärts gerichtet voraus. Die Existenz des Mittelpunktes dieser parallelen Kräfte folgt dann aus folgendem Satze:

Die Summe  $\bar{K}$  von beliebig vielen parallelen Kräften  $\bar{K}_i$  mit festgegebenen Angriffspunkten  $A_i$  im Raume geht ( $\bar{K} \neq 0$  vorausgesetzt) bei beliebigen Richtungen dieser Kräfte durch einen festen Punkt  $S$  hindurch, der durch die  $\bar{K}_i$  und die Koordinaten der  $A_i (x_i, y_i, z_i)$  bestimmt ist.  $S$  nennt man den Mittelpunkt der gegebenen Kräfte.

Einen solchen Mittelpunkt kann es nur für solche Kräftegruppen geben, die eine Einzelkraft als Summe besitzen, also außer bei parallelen nur noch für ebene Kräftegruppen, die nicht einem Kräftepaare gleichwertig sind; doch hat er nur im ersteren Falle weiterreichende Bedeutung.

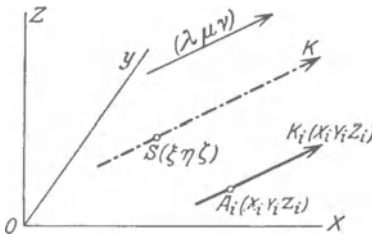


Abb. 71.

Nach dem Wortlaut des obigen Satzes wird die Addition der lotrechten Kräfte bei beliebiger Lage des Punkthaufens  $A_i$  ersetzt durch die Addition der entsprechend gedrehten Kräfte bei fester Lage des Körpers; beides kommt offenbar auf dasselbe hinaus, die letztere Auffassung vereinfacht aber nicht nur den Beweis des Satzes, sondern wird auch bei der zeichnerischen Aufsuchung von Mittelpunkten, wie wir sie alsbald kennen lernen werden, tatsächlich immer in Anwendung gebracht.

Die Größe der Summe der parallelen Kräfte ist dann für alle Richtungen dieser Kräfte die gleiche:  $\bar{K} = \sum_{i=1}^n \bar{K}_i$ . Bezeichnet man die gemeinsamen Richtungskosinus für eine beliebige Richtung der Kräfte (Abb. 71) mit  $(\lambda, \mu, \nu)$ , dann sind für diese Richtung die Komponenten von

$$\bar{K}_i \quad (X_i = \lambda K_i, \quad Y_i = \mu K_i, \quad Z_i = \nu K_i)$$

und die ihrer Summe

$$\bar{K} \quad (X = \lambda K, \quad Y = \mu K, \quad Z = \nu K).$$

Sei also zunächst  $(\xi, \eta, \zeta)$  ein beliebiger Punkt auf  $\bar{K}$ , dann folgt aus der Gleichheit der Momente von  $\bar{K}$  und der Summe aller  $\bar{K}_i$  etwa um die  $z$ -Achse

$$M_z = \sum (x_i Y_i - y_i X_i) = \xi Y - \eta X,$$

also

$$\mu \sum K_i x_i - \lambda \sum K_i y_i = \mu K \xi - \lambda K \eta$$

und daraus

$$K \frac{\xi - \sum K_i x_i}{\lambda} = \frac{K \eta - \sum K_i y_i}{\mu} = \frac{K \zeta - \sum K_i z_i}{\nu}, \quad (97)$$

indem wir sogleich den dritten Ausdruck anfügen, der durch Bildung der Momente um die  $x$ - oder  $y$ -Achse noch hinzutritt: es sind dies die Gleichungen der Wirkungslinie von  $\bar{K}$ . Für jede andere Richtung  $(\lambda', \mu', \nu')$  würde sich eine analoge Kette von Ausdrücken (97), mit  $(\lambda', \mu', \nu')$  in den Nennern ergeben. Für einen Punkt  $S(\xi, \eta, \zeta)$ , der die Zähler dieser Gleichungen zu Null macht, bestehen die Gl. (97) offenbar für beliebige  $(\lambda, \mu, \nu)$ , dieser Punkt gibt also den gemeinsamen Schnittpunkt der  $\bar{K}$  für alle Richtungen  $(\lambda, \mu, \nu)$ . Es ist dies der gesuchte Mittelpunkt  $S$ , und seine Koordinaten sind

$$\xi = \sum K_i x_i / K, \quad \eta = \sum K_i y_i / K, \quad \zeta = \sum K_i z_i / K. \quad (98)$$

Aus dieser Betrachtung sieht man, daß der Punkt  $S$  gar nicht von der Orientierung des Körpers im Schwerfeld abhängt; für seine Bestimmung ist der Richtungscharakter der  $\bar{K}_i$  ganz unwesentlich, und es kann jedes  $\bar{K}$  durch irgend eine skalare Größe ersetzt werden, die  $\bar{K}_i$  proportional ist. Sind  $\bar{K}$  Gewichte, so sind solche skalare Größen gerade die Massen  $m_i$  zufolge des dynamischen Grundgesetzes Gl. (1) oder (3). Setzen wir daher  $\bar{K}_i = m_i \bar{g}$ ,  $\bar{K} = M \bar{g}$ , wobei  $M = \sum m_i$  ist, dann gehen dadurch die Gln. (98) in die folgenden über

$$\xi = \sum m_i x_i / M, \quad \eta = \sum m_i y_i / M, \quad \zeta = \sum m_i z_i / M. \quad (99)$$

Demgemäß bezeichnet man  $S$  auch als Massenmittelpunkt. Der Zugrundelegung des technischen Maßsystems mit der Kraft als der gegebenen und der Masse als der abgeleiteten Größe entspricht seine Einführung in der eben dargelegten Weise. Ein von der Richtung befreiter Ausdruck wie  $m_i x_i$  wird auch als statisches Moment der Masse  $m_i$  bezüglich der  $y$ - $z$ -Ebene (bei ebenen Massenverteilungen bezüglich der  $y$ -Achse) bezeichnet.

Der Punkt  $S$ , der auch kurz als Schwerpunkt bezeichnet wird, ist vom gewählten Koordinatensystem  $(O, x, y, z)$  unabhängig, d. h. man gelangt immer zu demselben Punkt, wie dieses auch gewählt wird. Diese Unabhängigkeit wird dazu benützt, um die Wahl der Achsen für eine gegebene „Massengruppe“ so anzuordnen, daß die Ausführung der Summation in den Gln. (99) so einfach als irgend möglich wird.

Den Gln. (99) liegt die Annahme einzelner — diskreter — Massen zugrunde. Für eine kontinuierliche Massenverteilung treten an Stelle der Massen  $m_i$  die Massenelemente  $dm$  und an Stelle der Summe das über die gegebenen Massen erstreckte bestimmte Integral. Wird auch jetzt wieder  $\int dm = M$  gesetzt, so folgt

$$\xi = \int x dm/M, \quad \eta = \int y dm/M, \quad \zeta = \int z dm/M. \quad (100)$$

Für ebene Massenbelegungen ist  $S$  schon durch zwei Koordinaten ( $\xi, \eta$ ) allein bestimmt.

**52. Hilfssätze.** Für die Ermittlung des Schwerpunktes von gegebenen Linien, Flächen oder Körpern erweisen sich die folgenden einfachen Hilfssätze als nützlich:

a) Gruppensatz: Der Mittelpunkt eines Systems von Kräften (Massen, Linien, Flächen, Räumen) kann auch so gefunden werden, daß man eine beliebige Anzahl der Kräfte (Massen usw.) zu Gruppen zusammenfaßt, von jeder solchen Gruppe einzeln den Mittelpunkt sucht und von allen diesen den Gesamt-Mittelpunkt bestimmt.

Auf diesem Satze beruht die Anwendbarkeit der zeichnerischen Methoden z. B. für die aus einzelnen Teilflächen zusammengesetzte Fläche, wobei die Teilflächen so gewählt werden, daß ihre Schwerpunkte von vornherein angegeben werden können.

Der Beweis für diesen Satz folgt einfach aus dem linearen Charakter der Gln. (99). Bezeichnet man die einzelnen Gruppen mit  $1, 2, \dots$ , also mit  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$  die über die einzelnen Gruppen erstreckten Summen, mit  $\xi_1, \xi_2, \dots$  die  $x$ -Koordinaten der Einzelmittelpunkte usw., so kann man die erste dieser Gleichungen auch so schreiben

$$M\xi = \Sigma m_i x_i = \Sigma_1 m_i x_i + \Sigma_2 m_i x_i + \dots$$

und dies ist auch

$$= (\Sigma_1 m_i) \xi_1 + (\Sigma_2 m_i) \xi_2 + \dots$$

und ebenso für  $\eta, \zeta$ , womit der Beweis erbracht ist.

b) Symmetrialsatz. Besitzt eine Belegung (Linie, Fläche oder Körper) eine Symmetrieebene bzw. Symmetrielinie, so liegt der Schwerpunkt auf dieser.

Ist z. B. die  $yz$ -Ebene eine Symmetrieebene, so bedeutet dies, daß jedem  $m_i$  in  $A_i(x_i, y_i, z_i)$  ein gleiches  $m_i$  in dem zu dieser Ebene symmetrisch gelegenen Punkte  $A'_i(-x_i, y_i, z_i)$  entspricht, es ist daher

$$M\xi = \Sigma m_i x_i = 0, \quad \text{also} \quad \xi = 0,$$

d. h.  $S$  liegt in der  $yz$ -Ebene.

Eine durch  $S$  gehende Ebene (oder Gerade) nennt man eine Schwer ebene (oder Schwerlinie). Werden die normal zu einer Schwerebene (bzw. Geraden) gemessenen Abstände mit  $p_i$  bezeichnet, so ist also das



Kennzeichen für eine Schwerebene (Schwerlinie)

$$\sum m_i p_i = 0. \quad (101)$$

Selbstverständlich ist nicht jede Schwerebene (oder -Linie) notwendig eine Symmetrieebene (oder -Linie).

Für räumhafte Massenverteilungen mit drei Symmetrieebenen und ebene Massenverteilungen mit zwei Symmetrielinien liegt der Schwerpunkt in deren Schnittpunkt; für solche Flächen und Körper ist also der Schwerpunkt als bekannt anzusehen.

c) Einen Anhaltspunkt für die Lage des Schwerpunktes liefert die folgende Betrachtung: Man denke sich den Körper (oder die Fläche oder Linie), dessen Schwerpunkt man bestimmen will, so durch eine um ihn berührend herumgelegte Ebene umhüllt, daß er immer auf einer Seite dieser Ebene bleibt; auf diese Weise entsteht der „kleinste konvexe (besser gesagt: nirgends konkave) Körper“, der den gegebenen Körper umschließt; ebenso erhält man für eine „ebene Massenverteilung“ die kleinste konvexe Fläche durch Herumführung einer Geraden. (Sie ist z. B. für das Profil in Abb. 72 durch Punktierung angedeutet.) Dann gilt der Satz:

Der Schwerpunkt irgendeiner Massenbelegung liegt innerhalb des kleinsten konvexen Körpers, der um die Belegung herumgelegt werden kann.

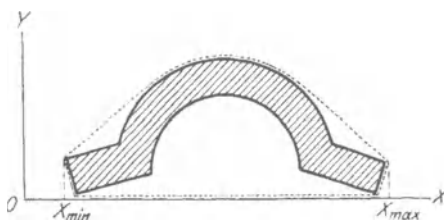


Abb. 72.

Setzt man nämlich etwa in der ersten der Gln. (99)

$M \xi = \sum m_i x_i$  auf der rechten

Seite an Stelle aller  $x_i$  einmal das größte auftretende  $x_i$ , also  $x_{\max}$ , dann wird die rechte Seite offenbar vergrößert, und das andere Mal für alle  $x_i$  das kleinste,  $x_{\min}$ , so wird sie verkleinert; daher ist

$$M x_{\min} < M \xi < M x_{\max},$$

also

$$x_{\min} < \xi < x_{\max};$$

da dies für jede Richtung  $Ox$  gilt, so liegt in dieser Gleichung der Beweis für den oben ausgesprochenen Satz. —

d) Die Gln. (99) und (100) bestimmen auch dann einen bestimmten Punkt  $S$ , wenn die Massen  $m_i$  ihre Lagen zueinander im Laufe der Zeit ändern; die Bedeutung des so definierten „Massenmittelpunktes“ wird erst in der Dynamik (III. Teil) hervortreten. Man sieht sogleich aus der Gestalt dieser Gleichungen, daß  $S$  nur für einen starren Körper ein in diesem fester Punkt ist. —

e) Gleichförmige Verteilungen. Wir wollen nunmehr die Gln. (100) für die Ermittlung des Schwerpunktes für einzelne vorgegebene Linien, Flächen und Körper ansetzen; dabei machen wir die Annahme gleichförmiger (homogener) Verteilungen, d. h. die Linien- ( $\mu_1$ ), Flächen- ( $\mu_2$ ), oder Raumdichte ( $\mu_3$ ) soll jeweils eine Konstante sein. Aus den Gln. (100) fällt dann jedesmal diese Dichte heraus, da

wir setzen können

$$\text{a) für Linien: } dm = \mu_1 dl; \quad M = \mu_1 \int dl = \mu_1 l,$$

$$\text{b) für Flächen: } dm = \mu_2 dF; \quad M = \mu_2 \int dF = \mu_2 F,$$

$$\text{c) für Räume: } dm = \mu_3 dV; \quad M = \mu_3 \int dV = \mu_3 V,$$

indem wir mit  $l$  die Länge der gegebenen Linie, mit  $F$  die Fläche, mit  $V$  den Rauminhalt bezeichnen. Dadurch wird auch noch das Merkmal der Dichte von den Gln. (100) abgestreift und der Schwerpunkt mit dem (geometrischen) Mittelpunkt der betreffenden Figuren identisch. Die Gln. (100) nehmen in den drei angeführten Fällen die Formen an

$$\text{a) für Linien: } \xi = \int x dl/l, \quad \eta = \int y dl/l, \quad \zeta = \int z dl/l, \quad (102)$$

$$\text{b) für Flächen: } \xi = \int x dF/F, \quad \eta = \int y dF/F, \quad \zeta = \int z dF/F, \quad (103)$$

$$\text{c) für Räume: } \xi = \int x dV/V, \quad \eta = \int y dV/V, \quad \zeta = \int z dV/V. \quad (104)$$

Bei ebenen Linienzügen und Flächen ist in den Gln. (102) und (103) eine der drei Gleichungen entbehrlich.

**53. Mittelpunkt von Linien.** a) Für einen gleichförmigen Linienzug, der sich aus geraden Stücken zusammensetzt, liegen die Teilschwerpunkte für alle Stücke in deren Mitten, und ihr Gesamtschwerpunkt ist identisch mit dem Schwerpunkt des Linienzuges. Auf diese Weise ist das Problem für den kontinuierlichen Linienzug zurückgeführt auf die Bestimmung des Schwerpunktes einzelner Punkte (Gruppensatz). Die zeichnerische Durchführung geschieht nach dem in 54e gegebenen Verfahren.

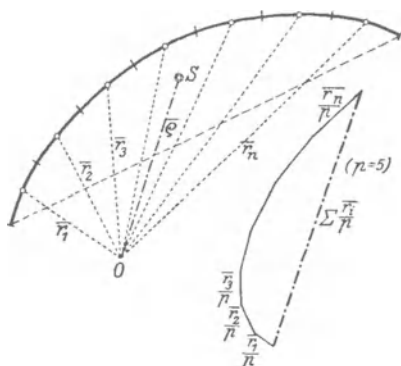


Abb. 73.

b) Für eine ebene krumme Linie, die etwa wie in Abb. 73 vor-gezeichnet gegeben ist, ist es praktisch, den Vorgang zur Ermittlung des Schwerpunktes in folgender Weise abzuändern: Die Gln. (99)

lassen sich, wenn  $\bar{\xi} + \bar{\eta} = \bar{\rho}$ ,  $\bar{x}_i + \bar{y}_i = \bar{r}_i$  gesetzt wird, für jede beliebige krumme Linie in die eine Vektorgleichung zusammenfassen

$$\bar{\rho} = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{r}_i l_i}{l}. \quad (105)$$

Teilt man die ganze krumme Linie in  $n$  gleiche Stücke  $l_i = l/n$  und denkt sich die Länge  $l_i$  jedes Stückes in dessen Mittelpunkt vereinigt, dann können wir schreiben

$$\bar{\rho} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{r}_i = \frac{p}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\bar{r}_i}{p}, \quad (106)$$

wobei  $p$  eine passend gewählte Zahl ( $> 1$ ) ist, die eingeführt wird, um nicht die geometrische Addition mit den Strecken  $\bar{r}_i$  selbst ausführen zu müssen (was einen sehr großen Zeichenraum einnehmen würde), sondern nur mit gewissen Bruchteilen von  $\bar{r}_i$ . Setzen wir insbesondere  $p = n$ , machen also die Anzahl der Teile  $n$  gleich der „Verjüngungszahl“  $p$ , dann folgt wieder

$$\bar{\varrho} = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{r}_i}{n}. \quad (107)$$

Die geometrische Addition der Strecken  $\bar{r}_i/n$  führt also unmittelbar zu  $\bar{\varrho} = \overline{OS}$  und damit zu dem gesuchten Schwerpunkt.

Wenn jedoch die Gestalt der krummen Linie durch eine Gleichung in einfacher Form angebar ist, ist der rechnerische Weg vorzuziehen.

c) Kreisbogen vom Halbmesser  $r$  und dem Zentriwinkel  $2\hat{\alpha}$  (Abb. 74). Wegen der Symmetrie reicht eine der Gl. (102) zur Angabe von  $S(\xi, 0)$  hin. Aus der Ähnlichkeit der in Abb. 74 schraffierten Dreiecke folgt  $dl:dy = r:x$ , also

$$\xi = \frac{1}{l} \int x dl = \frac{1}{l} \int r dy = \frac{rb}{l} = \frac{r \sin \alpha}{\hat{\alpha}}, \quad (108)$$

wenn  $b = 2r \sin \alpha$  die Sehne und  $l = 2r\hat{\alpha}$  die Länge des Kreisbogens bedeuten. Für die Halbkreislinie ( $\hat{\alpha} = \pi/2$ ) ist insbesondere

$$\xi = \frac{2r}{\pi} \approx 0,6366 r. \quad (109)$$

Für einen flachen Kreisbogen mit der „Pfeilhöhe“  $h$  erhält man daraus durch Entwicklung von  $\sin \alpha$  nach Potenzen von  $\alpha$ , da  $r - h = r \cos \alpha$ ,  $h = r(1 - \cos \alpha) \approx r\alpha^2/2$ ,

$$\xi \approx \frac{r(\alpha - \alpha^3/6)}{\alpha} = r \left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right),$$

oder

$$r - \xi \approx \frac{r\alpha^2}{6} = \frac{h}{3}. \quad (110)$$

d. h. der Schwerpunkt  $S$  liegt (etwa) um  $h/3$  vom Scheitel  $A$  entfernt.

**54. Mittelpunkt von Flächen.** I. Ebene Flächen. a) Dreieck. Der Schwerpunkt  $S(\xi, \eta)$  liegt im Schnitt der drei „Mittellinien“, die Schwerlinien sind, auf jeder im ersten Höhendrittel von der Basis gemessen. Sind die Koordinaten der Eckpunkte in bezug auf irgendein Achsensystem in der Ebene  $(x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3)$ , so ist auch

$$\xi = (x_1 + x_2 + x_3)/3, \quad \eta = (y_1 + y_2 + y_3)/3. \quad (111)$$

b) Trapez (Abb. 75). Die Verbindungslinie der Mittelpunkte  $\overline{MN}$  der parallelen Seiten ist eine Schwerlinie. Zur Bestimmung von  $S(\xi, \eta)$

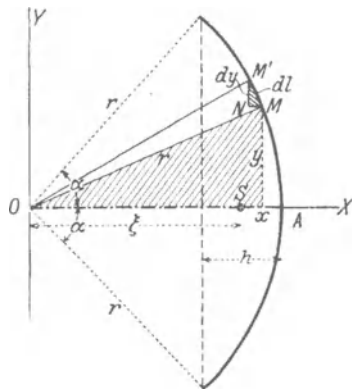


Abb. 74.

auf dieser Linie zieht man eine Diagonale, etwa  $\overline{AC}$ , dann erhält man die Ordinate  $\eta$  aus den Ordinaten der Schwerpunkte  $S_1, S_2$  der beiden so entstehenden Dreiecke (Gruppensatz)

$$\frac{a+b}{2} h \eta = \frac{a h}{2} \frac{h}{3} + \frac{b h}{2} \frac{2 h}{3}, \quad \eta = \frac{h}{3} \frac{a+2b}{a+b}, \quad \eta' = h - \eta,$$

daher

$$\eta/\eta' = (a+2b)/(2a+b); \tag{112}$$

daraus folgt die in Abb. 75 angegebene Konstruktion durch Auftragen

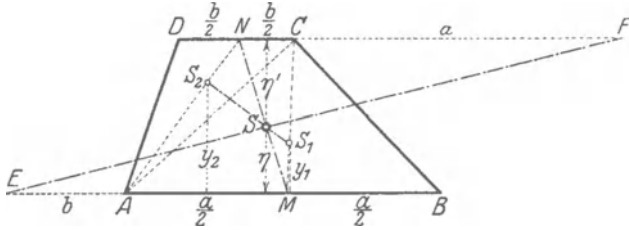


Abb. 75.

von  $b$  und  $a$  auf den Verlängerungen der beiden parallelen Seiten: Man macht  $\overline{AE} = b, \overline{CF} = a$ , dann schneidet die Verbindungslinie  $\overline{EF}$  die Schwerlinie  $\overline{MN}$  im gesuchten Schwerpunkte  $S$ .

Die Konstruktion benötigt einen Raum, der über die Fläche hinausreicht. Will man innerhalb der Fläche bleiben, so ziehe man nach Abb. 76a die Parallelen in den Höhen  $h/3$  und  $2h/3$  und die Linien  $\overline{BD}$  und  $\overline{GH}$ , dann liefert ihr Schnittpunkt  $s$  die Höhenlage von  $S$ .

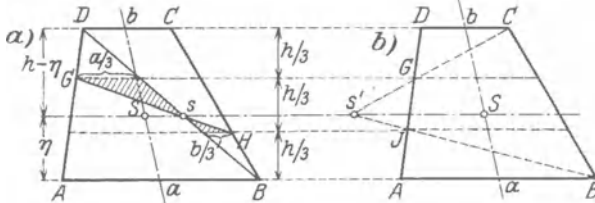


Abb. 76.

Aus der Ähnlichkeit der beiden schraffierten Dreiecke folgt nämlich

$$\frac{\eta - h/3}{b/3} = \frac{h - \eta - h/3}{a/3}$$

und daraus

$$\eta = \frac{h}{3} \frac{a+2b}{a+b},$$

wie verlangt.

Oder man ziehe (Abb. 76b) die Linien  $\overline{CG}$  und  $\overline{BJ}$ , dann gibt deren Schnittpunkt  $s'$  ebenfalls die Höhenlage des Schwerpunktes  $S$  der Trapezfläche an.

c) Für das (allgemeine) Viereck  $ABCD$  sind mehrere Konstruktionen des Schwerpunktes bekannt. Man erhält ihn entweder durch

Zerlegung in zwei Paare von Dreiecken mit Hilfe der beiden Diagonalen oder nach der in Abb. 77 (ohne Beweis) gegebenen Konstruktion, die nur das Ziehen von Parallelen und keine Teilung verlangt. Durch die Parallelen zu den Diagonalen entsteht ein Parallelogramm  $EFGH$ , dessen Ecken mit dem Diagonalenschnittpunkt  $M$  verbunden werden. Die Schnittpunkte  $J, K, L, N$  dieser Linien mit den Seiten des Vierecks mit den gegenüberliegenden Ecken  $E, F, G, H$  verbunden, geben vier Schwerlinien; ebenso ist die Verbindungslinie  $\overline{MP}$  der Diagonalenschnittpunkte der beiden benutzten Vierecke eine Schwerlinie.

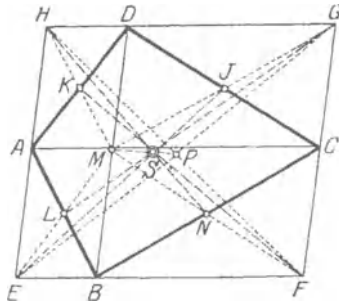


Abb. 77.

d) Für ein beliebiges Vieleck liefert die Zerlegung in Dreiecke den Schwerpunkt  $S$  als Mittelpunkt der Schwerpunkte dieser Dreiecke (Gruppensatz).

e) Zusammengesetzte (Träger-) Querschnitte werden durch passend geführte Schnitte in Teile zerlegt, deren Schwerpunkte unmittelbar angebar sind. Der gesuchte Schwerpunkt ergibt sich entweder rechnerisch nach den Gln. (103) oder zeichnerisch nach der Methode des Seilecks.

Beispiel 40. Die Fläche in Abb. 78 wird durch die beiden Schnitte  $a-b$  und  $c-d$  in drei Rechtecke zerlegt, deren Flächen  $F_1, F_2, F_3$  auf parallelen Vektoren an den bezüglichen Mittelpunkten angesetzt werden. Hierzu ist ein bestimmter Flächenmaßstab  $b$  zu wählen (etwa  $10 \text{ cm}^2 \rightarrow 1 \text{ cm}$ ) und die Summe jener Vektoren mittels des Seilecks zu bestimmen.

Für jede Richtung dieser Kräfte gibt die Wirkungslinie ihrer Summe eine Schwerlinie an. Es genügt daher, diese Summe für zwei Richtungen zu bilden, der Schnitt der Wirkungslinien der Summen ist der gesuchte Schwerpunkt. In der Regel werden behufs einfacher Zeichnung der Seilecke die beiden Richtungen unter  $\pi/2$  zueinander gewählt, doch ist manchmal (etwa wenn die Teilschwerpunkte nahezu in einer Geraden liegen) ein anderer Winkel ( $\pi/4$  oder  $\pi/6$ ) aus zeichnerischen Gründen vorzuziehen.

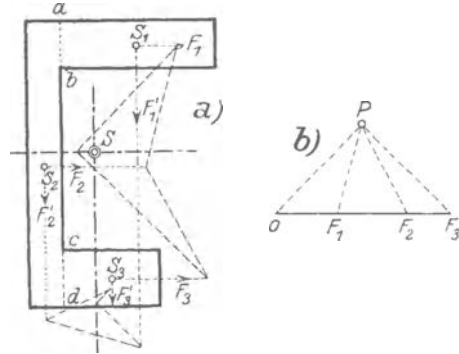


Abb. 78.

Dasselbe Verfahren wird auch angewendet, wenn es sich um die angenäherte Bestimmung des Schwerpunktes einer beliebigen krummlinig begrenzten Fläche handelt, deren Umriß analytisch nicht in einfacher geschlossener Form darstellbar ist. Man zerlegt dann die ebene Fläche (Abb. 79) durch parallele, am besten gleichweit entfernte Schnitte in Teilflächen, die man angenähert als Rechtecke oder Trapeze auffassen und durch Kräfte in den Teilschwerpunkten

$s_1 \dots s_n$  ersetzen kann. Die Summe dieser Kräfte, die wieder durch ein Seileck erhalten werden kann, liefert wie früher für jede gemeinsame Richtung der Kräfte eine Schwerlinie.

Für Flächen und Begrenzungen, die nach einfachen analytischen Gesetzen verlaufen, ist auch hier die Rechnung vorzuziehen.

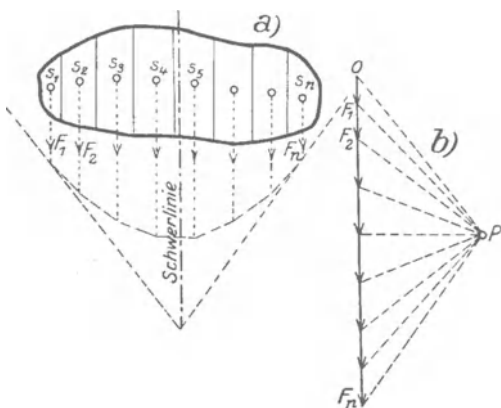


Abb. 79.

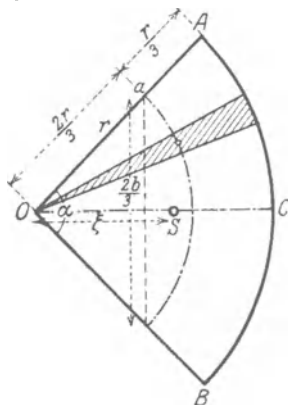


Abb. 80.

f) Kreissektor (Abb. 80). Durch Zerlegung in lauter kleine gleiche Dreiecke ergibt sich sein Schwerpunkt als identisch mit dem Gesamtschwerpunkt der Schwerpunkte dieser Dreiecke. Die letzten erfüllen aber gleichförmig einen Kreisbogen vom Halbmesser  $2r/3$ , der Sehne  $2b/3$  und der Länge  $2l/3$ , daher können wir nach Gl. (108) unmittelbar schreiben

$$\xi = \frac{2r}{3} \frac{b}{l} = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\hat{\alpha}}. \quad (113)$$

Für die Halbkreisfläche ist  $\hat{\alpha} = \pi/2$  und daher

$$\xi = \frac{4r}{3\pi} \approx 0,4244 r. \quad (114)$$

g) Flächen mit Ausnehmungen werden so behandelt, daß der Schwerpunkt  $S_1(x_1, y_1)$  der vollen Fläche  $F_1$  und der Schwerpunkt  $S_2(x_2, y_2)$  des „Loches“  $F_2$  ermittelt wird. Der Schwerpunkt der Differenzfläche  $F = F_1 - F_2$  ergibt sich sodann durch die Gln.

$$\xi = \frac{F_1 x_1 - F_2 x_2}{F_1 - F_2}, \quad \eta = \frac{F_1 y_1 - F_2 y_2}{F_1 - F_2}, \quad (115)$$

die aus den Gln. (99) dadurch hervorgehen, daß die nicht vorhandene Fläche mit negativem Vorzeichen genommen wird. Die zeichnerische Ermittlung benutzt dieselbe Tatsache, indem sie die Kraft, die der nicht vorhandenen Fläche entspricht, in entgegengesetzter Richtung einführt. In Abb. 81 ist dies für die Fläche eines Vollkreises durchgeführt, die mit einem rechteckigen Loche versehen ist. Da die Verbindungslinie von  $S_1$  und  $S_2$  eine Schwerlinie ist, so folgt der gesuchte Schwerpunkt  $S$ , wie in Abb. 81 angedeutet, durch ein Seileck (I, II, III).

Beispiel 41. Guldinsche Regel. Die Kenntnis des Schwerpunktes einer ebenen Kurve oder Fläche kann dazu dienen, die Oberfläche und den Rauminhalt der Drehfläche bzw. des Drehkörpers zu ermitteln, die von der betreffenden Kurve oder Fläche als Meridian erzeugt wird. Die Oberfläche des Teiles

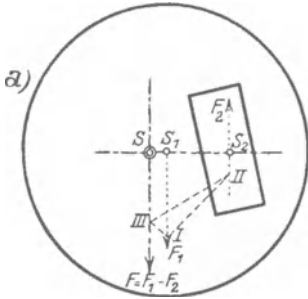


Abb. 81.

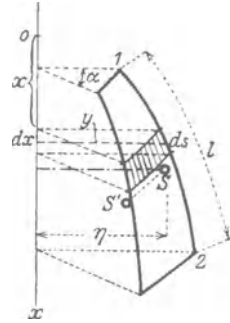
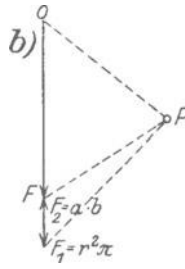


Abb. 82.

der Drehfläche, die durch Drehung einer Kurve  $y = y(x)$  um die  $x$ -Achse durch den Winkel  $\tilde{\alpha}$  entsteht (Abb. 82), ist gegeben durch

$$O = \tilde{\alpha} \int_{(1)}^{(2)} y ds = \tilde{\alpha} \eta l, \quad (116)$$

wenn  $\eta$  den Abstand des Schwerpunktes der gegebenen Kurve von der Drehachse,  $l$  die Länge der Kurve bedeutet und die Integrationsgrenzen die Endpunkte (1) und (2) der gegebenen Meridiankurve sind. Für den Rauminhalt des Drehkörpers erhält man analog (Abb. 83)

$$V = \tilde{\alpha} \int_{(1)}^{(2)} y dF = \tilde{\alpha} \eta' F, \quad (117)$$

wenn  $\eta'$  der Abstand des Schwerpunktes der Fläche  $F$  von der Drehachse ist, die von der Meridiankurve, der Achse und den Endordinaten durch (1) und (2) eingeschlossen wird. Für die volle Umdrehung ist  $\tilde{\alpha} = 2\pi$  zu setzen. Im besonderen folgt nach den Gln. (109) und (116) für die Oberfläche einer Vollkugel der bekannte Wert

$$O = 2\pi \frac{2r}{\pi} r\pi = 4r^2\pi,$$

und ebenso nach (114) und (117) für den Rauminhalt einer Vollkugel

$$V = 2\pi \frac{4r}{3\pi} \frac{r^2\pi}{2} = \frac{4}{3} r^3\pi.$$

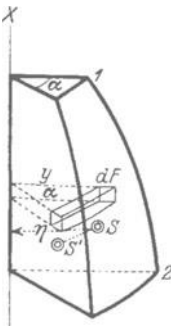


Abb. 83.

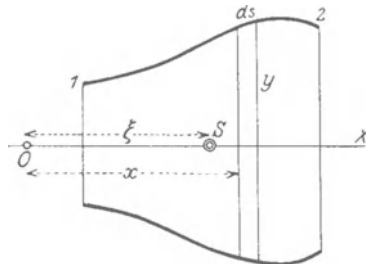


Abb. 84.

II. Drehflächen. Von räumlichen Flächen beschränken wir uns hier auf die Schwerpunktbestimmung von Drehflächen; da der Schwerpunkt aus Symmetriegründen auf der Drehachse liegt, genügt zu seiner Bestimmung die Angabe der Entfernung  $\overline{OS} = \xi$  von einem festen Punkte  $O$  der Achse. Sei  $ds$  das Bogenelement des Meridians (Abb. 84), so ist das Element der Oberfläche  $dF = 2\pi y ds$ , und nach



Gl. (103) folgt

$$\xi = \frac{\int x dF}{\int dF} = \frac{\int_{(1)}^{(2)} x y ds}{\int_{(1)}^{(2)} y ds} \tag{118}$$

Beispiel 42. Für die Oberfläche der Kugelzone verwendet man am besten Polarkoordinaten  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $ds = r d\varphi$  und erhält (Abb. 85)

$$\begin{aligned} \xi &= r \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi d\varphi} = \frac{r}{2} \frac{\cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2} = \frac{r}{2} (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) \\ &= \frac{a_1 + a_2}{2} \end{aligned} \tag{119}$$

Der Schwerpunkt der Oberfläche der Kugelzone und auch der Kugelkappe ( $a_1 = r$ ) liegt also in der Mitte ihrer Höhe.

Beispiel 43. Der Schwerpunkt eines geraden Kegel- oder Pyramidenmantels

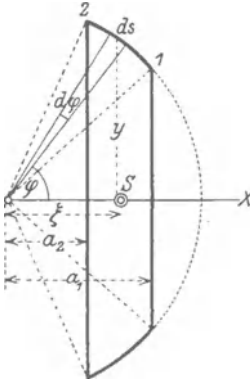


Abb. 85.

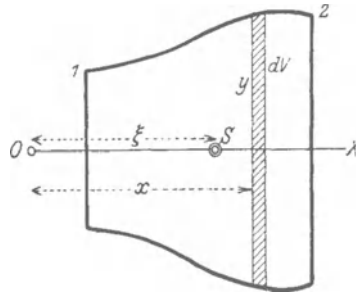


Abb. 86.

liegt auf der Achse im ersten Höhendrittel (von der Basis gerechnet); der Kegelmantel kann nämlich aus lauter kleinen Dreiecken gebildet angesehen werden, und für alle Dreiecke liegen die Schwerpunkte in dieser Höhe.

**55. Mittelpunkt von Körpern.** a) Für Pyramide und Kegel mit beliebiger Grundfläche liegt der Schwerpunkt im ersten Viertel der Höhe, von der Grundfläche aus gerechnet. Die Verbindungslinie der Spitze mit dem Mittelpunkte der Grundfläche (der nach 54d zu bestimmen ist) ist eine Schwerlinie.

b) Für Drehkörper ist der Schwerpunkt  $S$  durch seine Entfernung  $OS = \xi$  (Abb. 86) von einem festen Punkte  $O$  der Achse gegeben. Nach Gl. (104) ist dann, da  $dV = y^2 \pi dx$ ,

$$\xi = \frac{\int_{(1)}^{(2)} x dV}{\int_{(1)}^{(2)} dV} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x y^2 dx}{\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx} \tag{120}$$

Beispiel 44. Für den Rauminhalt einer Kugelzone (Abb. 87) zwischen den Parallelkreisen in den Abständen  $a_1$  und  $a_2$  von  $O$  ist zu setzen:  $x^2 + y^2 = r^2$ , nach Ausführung der Integration in Gl. (120) folgt

$$\xi = \frac{3}{4} \frac{(a_1 + a_2) (2r^2 - a_1^2 - a_2^2)}{3r^2 - (a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2)}. \quad (121)$$

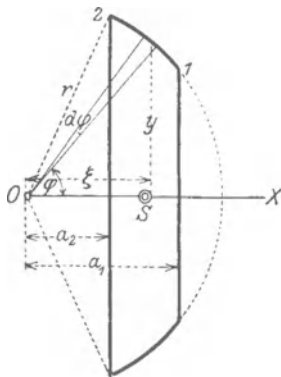


Abb. 87.

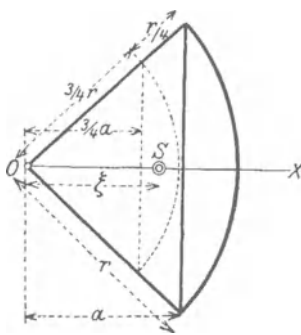


Abb. 88.

Für den Rauminhalt der Kugelkappe ist  $a_1 = r$ , daher

$$\xi = \frac{3}{4} \frac{(r + a_2)^2}{2r + a_2}. \quad (122)$$

Beispiel 45. Den Kugelausschnitt (Abb. 88) vom Halbmesser  $r$  und der Entfernung  $a$  des größten Kreises von  $O$  denken wir uns in lauter kleine Kegel zerlegt, deren Schwerpunkte alle die Entfernung  $3r/4$  von  $O$  haben. Der Schwerpunkt des Kugelausschnittes ist dann identisch mit dem der Oberfläche dieses „Kugelabschnittes“ und daher nach Gl. (119)

$$\xi = \frac{1}{2} \left( \frac{3a}{4} + \frac{3r}{4} \right) = \frac{3}{8} (r + a). \quad (123)$$

## VI. Theorie der Reibung.

**56. Einführung der Reibungskraft.** A. Haftreibung. Auf Grund der bisher getroffenen Annahmen war die gegenseitige Einwirkung der Körper bei Berührung als eine in der Richtung der Normalen wirkende Kraft anzusehen. Für eine Reihe von Problemen erweist sich diese Annahme als ausreichend, während sie zahlreichen anderen Tatsachen gegenüber zu Widersprüchen führt. So bleibt z. B. ein auf einer Ebene liegender schwerer Körper auch im Gleichgewichte, wenn man diese Ebene neigt, sofern diese Neigung nur eine gewisse Grenze nicht überschreitet, und dergleichen mehr. Tatsachen dieser Art (von technischen Erscheinungen sei vor allen auf die Widerstände bei der Bewegung der Zapfen in den Lagern der Maschinen und bei der Rollbewegung der Fahrzeuge hingewiesen) lassen sich durch Einführung von Normalkräften allein nicht erklären und führen mit Notwendigkeit dazu, außer dem normalen auch noch einen tangentialen, d. h. in der gemeinsamen Tangentialebene liegenden Teil für die gegenseitige Einwirkung der Körper aufeinander anzunehmen. Diesen tangentialen Teil der

gegenseitigen Einwirkung der Körper aufeinander bezeichnet man als Reibungskraft oder kurz als Reibung, und spricht von Haftreibung bei relativer Ruhe, und von Bewegungsreibung bei Vorhandensein einer relativen Bewegung der Körper gegeneinander. Reibung tritt immer auf, wenn sich Körper unter Druck berühren. Die Haftreibung ist als Teil der unbekanntem Auflager-(Reaktions-)kraft selbst eine solche, während die Bewegungsreibung wegen ihrer teilweisen Bestimmtheit — sie wirkt offenbar immer der relativen Bewegung entgegen — und weil sie bei der Bewegung Arbeit verbraucht, als eingeprägte Kraft anzusehen ist. Nach der Art dieser Bewegung unterscheidet man eine gleitende, rollende und bohrende Reibung. Ferner spricht man je nach der Beschaffenheit der Körper von Reibung fester, flüssiger und gasförmiger Körper; zwischen „trockener Reibung“ (d. i. Reibung fester Körper ohne Zwischentreten einer Flüssigkeitsschicht) einerseits und „Flüssigkeits- und Gasreibung“ andererseits bestehen wesentliche Unterschiede, die sich auch in den Gesetzen äußern, die für sie Geltung haben.

Als Ursache dieser Reibungskraft ist in allen Fällen die physikalische Beschaffenheit der berührenden Flächen anzusehen (die wie gesagt, stets durch irgendwelche eingeprägte Kräfte gegeneinander gepreßt angenommen werden), und zwar ist naturgemäß die Rauigkeit dieser Flächen für die gesamten Reibungserscheinungen bestimmend. Der Umstand, daß wir kein geeignetes Mittel besitzen, den „Grad der Rauigkeit“ mit hinreichender Schärfe zu kennzeichnen, und zwar so zu kennzeichnen, daß die Wiederherstellung derselben Flächenbeschaffenheit auch nur mit einiger Bestimmtheit möglich ist, ist die Ursache für die große Unsicherheit, die sämtlichen Zahlenangaben, die sich auf die Reibung beziehen, heute noch anhaftet.

Die oben erwähnte Beobachtung an der schiefen Ebene enthält trotz ihrer Einfachheit schon die wesentlichen Eigenschaften dieser Erscheinung und führt auf eine einfache Aussage über die Größe der Reibungskraft, die ungeachtet ihrer Mängel für das ganze Gebiet der trockenen Reibung die allein maßgebende geblieben ist.

Bezeichnet man mit  $R$  die auf den Körper vom Gewicht  $G$  parallel zur schiefen Ebene nach oben wirkende, durch Reibung entstehende Kraft (die in derselben Weise wirkt wie  $K$  in Abb. 14) und  $N$  die Normalkraft, so liefern die Gleichgewichtsbedingungen (ähnlich wie in Beispiel 2)

$$R = G \sin \alpha, \quad N = G \cos \alpha,$$

und daraus folgt für jedes  $\alpha$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{N}. \quad (124)$$

Nun lehren die Beobachtungen, wie oben gesagt, daß Gleichgewicht immer möglich ist, sobald der Winkel  $\alpha$  der schiefen Ebene gegen die Wagrechte kleiner bleibt als ein bestimmter Grenzwinkel  $\varrho_0$ , oder  $\operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} \varrho_0 \equiv f_0$ , indem wir für die Tangente dieses Grenzwinkels  $\varrho_0$

das Zeichen  $f_0$  einführen; daraus folgt mit Benutzung der zuvor erhaltenen Gleichung unmittelbar

$$\boxed{|R| \leq f_0 N.} \quad (125)$$

Die Zahl  $f_0 \equiv \operatorname{tg} \varrho_0$  bezeichnet man als die Reibungszahl für die Haftreibung und  $\varrho_0$  als den zugehörigen Reibungswinkel, beide hängen von der Beschaffenheit der in Berührung befindlichen Körper ab. Die Reibung vermag mithin den Eintritt des Gleitens der Körper nach unten zu verhindern, solange ihr Betrag nicht größer zu sein braucht als das  $f_0$ -fache der betreffenden Normalkraft  $N$ . Wenn jedoch zur Herstellung des Gleichgewichtes ein größerer Betrag als  $f_0 N$  erforderlich wäre, so tritt Abwärtsbewegung ein. Im vorliegenden Falle ist die Richtung der auftretenden Reibung bestimmt, doch lassen sich leicht Fälle angeben (Beispiel 46), wo die Richtung zunächst unbestimmt bleibt und erst durch die eingepprägten Kräfte festgelegt wird, d. h. der Ausdruck (125) bezieht sich nur auf den absoluten Betrag und gibt keine Aussage über die Richtung der Haftreibung in der gemeinsamen Berührungsebene (was durch die Doppelstriche bei  $R$  in Gl. (125) angedeutet ist). Genau der gleiche Sachverhalt gilt nun überhaupt für alle Fälle, in denen Haftreibung ins Spiel tritt, so daß wir zu den folgenden Aussagen geführt werden:

I. Die Haftreibung tritt immer gerade in solcher Größe auf, als erforderlich ist, um ein Gleiten der Körper gegeneinander zu verhüten, kann aber nicht über einen gewissen Grenzbetrag hinaus anwachsen. Wenn also ohne Überschreitung dieses Grenzbetrages das Gleichgewicht der Körper durch Anbringung der Reibungskräfte hergestellt werden kann, so tritt es auch tatsächlich ein.

II. Die absolute Größe dieses Grenzbetrages hängt von der Beschaffenheit der Körper ( $\varrho_0$ ) und von der Größe der auftretenden Normalkraft  $N$  ab und ist durch Gl. (125) (mit dem Gleichheitszeichen!) gegeben.

Als Hauptunterschied gegen die bisher erhaltenen Ergebnisse tritt dabei folgende Besonderheit auf. Bei fehlender Reibung ergeben sich für Gleichgewicht immer ganz bestimmte Werte (für jede Kraft einer oder höchstens endlich viele) für die Kräfte, bzw. für die Lagenkoordinaten der Körper. Bei Vorhandensein von Reibung sind es dagegen immer ganze Bereiche für die möglichen Gleichgewichtslagen, oder für die eingepprägten Kräfte, die Gleichgewicht herzustellen vermögen. Dies kommt daher, weil die Größe der auftretenden Reibung nicht durch eine Gleichung, sondern durch eine Ungleichung (125) geregelt wird.

Der Reibungswinkel  $\varrho_0$  hat übrigens eine unmittelbar anschauliche Bedeutung. Denkt man sich um die Normale zweier in Berührung befindlicher rauher Körper einen Drehkegel mit dem halben Öffnungswinkel  $\varrho_0$  gelegt, so geben die Erzeugenden dieses Kegels die Grenzlagen für die eingepprägten Kräfte an, für die Gleichgewicht der Körper ein-

treten kann. Liegt die eingeprägte Kraft außerhalb dieses „Reibungskegels“, dann ist Gleichgewicht nicht möglich. Die Verwendung für die Lösung von Reibungsaufgaben wollen wir sogleich an einfachen Beispielen erläutern, bei denen stets  $f_0$  als bekannt vorausgesetzt wird.

Beispiel 46. Auf einer rauhen schiefen Ebene ( $\alpha > \varrho_0$ ) liegt der Körper vom Gewichte  $G$ , man bestimme die Kraft  $K$  parallel zu ihr für Gleichgewicht (Abb. 89). Ohne Inanspruchnahme der Reibung war die notwendige Kraft  $K_0 = G \sin \alpha$ . Macht man  $K < K_0$ , so wird der Körper nicht sofort abzurutschen beginnen, sondern es wirkt diesem Sinken nach der Aussage I die Reibung  $R_1$  — aufwärts gerichtet — entgegen und ist in dem Maße, von  $K_0$  den Betrag  $R_1 = f_0 N = G \operatorname{tg} \varrho_0 \cos \alpha$  zu übernehmen — mehr nicht. Für die Grenze sei  $K = K_1$ , und es ist dann

$$K_1 + R_1 = G \sin \alpha = K_1 + G \operatorname{tg} \varrho_0 \cos \alpha,$$

daher

$$K_1 = G \frac{\sin(\alpha - \varrho_0)}{\cos \varrho_0}.$$

Umgekehrt hört das Gleichgewicht auch nicht sofort auf, wenn man  $K$  von  $K_0$  aus zunehmen läßt, es kommt dann vielmehr von selbst die Reibung  $R_2$  — nach unten gerichtet — zur Wirkung, und führt in der Grenze  $K = K_2$  zu der Gleichung

$$K_2 - R_2 = G \sin \alpha = K_2 - G \operatorname{tg} \varrho_0 \cos \alpha, \quad \text{also} \quad K_2 = G \cdot \frac{\sin(\alpha + \varrho_0)}{\cos \varrho_0}.$$

Bezeichnet daher  $K$  irgendeinen zwischen  $K_1$  und  $K_2$  liegenden Wert, so ist stets Gleichgewicht möglich, sobald

$$\frac{G \sin(\alpha - \varrho_0)}{\cos \varrho_0} \leq K \leq G \frac{\sin(\alpha + \varrho_0)}{\cos \varrho_0}. \quad (126)$$

Für die Kraft  $K$  im Gleichgewichtsfall ergibt sich also ein endlicher Bereich von Werten, nicht eine einzige Lösung — als Folge der Ungleichung (125). Der zugehörige Kräfteplan ist in Abb. 89 b) angefügt — aus ihm ergeben sich dieselben Ausdrücke für  $K_1$  und  $K_2$ . Die Grenzwerte der Summe der eingepägten Kräfte  $\bar{G} + \bar{K}_1$  und  $\bar{G} + \bar{K}_2$  fallen in die Erzeugenden des Reibungskegels.

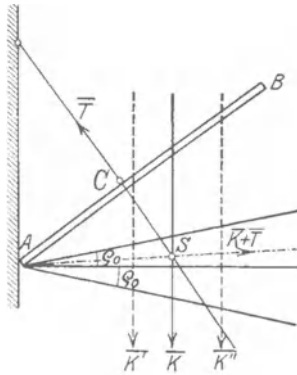


Abb. 89.

Beispiel 47. Der Stab  $AB$  (Abb. 90) wird in  $C$  durch das Seil  $T$  gehalten und stützt sich bei  $A$  an eine rauhe Wand ( $\varrho_0$ ). Für die Belastung  $\bar{K}$  des Stabes fällt der Schnitt  $S$  von  $K$  und der Seilkraft  $\bar{T}$  innerhalb des Reibungskegels und macht eine solche Zerlegung möglich, daß die Summe  $K + \bar{T}$  selbst innerhalb des Reibungskegels liegt. Für  $\bar{K}$  tritt also Gleichgewicht tatsächlich ein —, dagegen wäre für  $\bar{K}'$  und  $\bar{K}''$  kein Gleichgewicht möglich.

Abb. 90

Beispiel 48. Die Leiter  $AB$  (Abb. 91) stützt sich auf einen rauhen Boden und an eine rauhe Wand, man ermittle die Belastungen, für die Gleichgewicht besteht. Maßgebend ist hier der gemeinsame (schraffierte) Teil der beiden Reibungskegel für die Berührungsstellen  $A$  und  $B$ . Für die Kraft  $\bar{K}$  ist hier nicht nur eine, sondern es sind unendlich viele Zerlegungen möglich — entsprechend

den sämtlichen Punkten der Strecke  $\overline{ab}$ ; welche davon tatsächlich eintritt, läßt sich rein statisch nicht entscheiden.  $\overline{K'}$  ist die Grenzlage, für die die Reibungen an Boden und Wand die größtmöglichen Werte haben, also beide voll ausgenützt werden, und  $\overline{K''}$  liegt sicher außerhalb des Gleichgewichtsbereiches.

Beispiel 49. Die Führungsleiste in Abb. 92, die längs der Schiene  $s$  durch die lotrechte Kraft  $\overline{K}$  bewegt werden soll, wird sich jedenfalls bei Einwirkung von  $\overline{K}$  an den Stellen  $A$  und  $B$  an die Schienen anlegen und dort Reibung erzeugen.

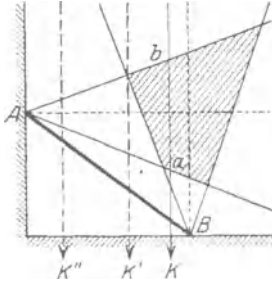


Abb. 91.

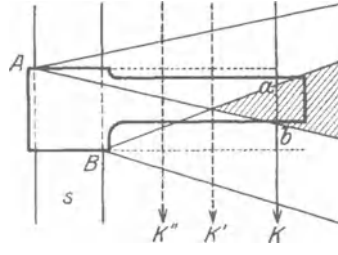


Abb. 92.

Zeichnet man die Reibungskegel, so gibt der gemeinsame Teil den Bereich, für den ein „Klemmen“ eintritt, mit welchem Worte hier das Gleichgewicht bezeichnet wird. Für  $\overline{K}$  ist mithin Gleichgewicht möglich,  $\overline{K'}$  ist die Grenzlage und  $\overline{K''}$  würde die Leiste bewegen.

Bei Aufgaben, in denen die Gleichgewichtstellung rauher Körper gesucht wird, sind zu den Auflagerkräften an allen Berührungstellen die Reibungen in den bezüglichen Tangentialebenen hinzuzunehmen und für die so erweiterte Kräftegruppe die Gleichgewichtsbedingungen anzusetzen. — Die Grenzlagen ergeben sich durch Verwendung des Gleichheitszeichens in Gl. (125):  $R = f_0 N$ .

Beispiel 50. Ein gleichförmiger Stab  $\overline{AB}$  von der Länge  $2l$  (Abb. 93) und dem Gewichte  $\overline{G}$  ist in  $A$  in einem reibungslosen Gelenk gehalten und stützt sich bei  $B$  an eine lotrechte rauhe ( $f_0$ ) Wand  $\epsilon$ . Wie groß ist der größte Winkel  $\Theta$  für Gleichgewicht? — Die Momente um die Lotrechte  $z$  durch  $A$  geben, wenn  $\overline{OB} = r$ ,  $\overline{OA} = a$  gesetzt wird

$$Nr \sin \Theta = f_0 N \cos \Theta a$$

und daraus folgt

$$\operatorname{tg} \Theta = f_0 a / r = f_0 \operatorname{ctg} \alpha .$$

Die Grenzlagen des Gleichgewichtes sind unabhängig von  $G$ . Die anderen fünf Gleichgewichtsbedingungen geben die fünf Größen  $\overline{D}(X, Y, Z)$ ,  $N$ ,  $R$  für jede Lage des Stabes innerhalb des Gleichgewichtsbereiches  $B, B'$ , entsprechend  $\pm \Theta$ . In den Grenzlagen  $B, B'$ , für die nur vier Unbekannte vorhanden sind, nämlich  $X, Y, Z, N$  — die Reibung erreicht ihren Grenzwert  $f_0 N$  — zeigt man leicht, daß die beiden Momenten-

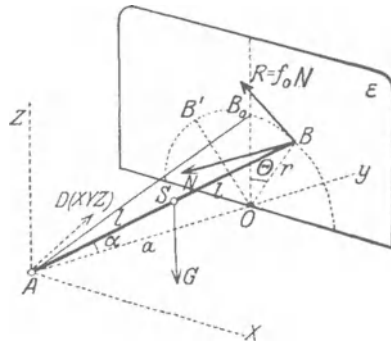


Abb. 93.



gleichungen für die  $x$ - und  $y$ -Achse auf dieselbe Gleichung für die Normalkraft  $N$

$$N = \frac{aG}{2\sqrt{r^2 + f_0^2 a^2}}$$

führen, während die Projektionsgleichungen nach den drei Achsen die Komponenten  $X, Y, Z$  der Gelenkkraft  $D$  liefern.

B. Bewegungsreibung. Während die Haftreibung in der Regel zunächst nach Größe und Richtung unbestimmt ist — für ihre Größe ist nur ein Grenzwert festgelegt —, ist die Bewegungsreibung eine Kraft, die naturgemäß stets der Bewegung entgegenwirkt; ihre Größe wird an jeder Stelle der an der Reibungstelle herrschenden Normalkraft proportional gesetzt, wobei sich der Proportionalitätsfaktor  $f$ , die Reibungszahl für Bewegung, kleiner herausstellt, als die der größten Haftreibung für dieselben Stoffe; dies ist auch sehr verständlich, weil bei der Bewegung das Ineinandergreifen der Flächenrauheiten der Körper behindert wird. Wir erhalten damit die folgende Aussage:

III. Die Bewegungsreibung ist immer eine der Bewegung entgegengerichtete Kraft; ihre Größe hängt außer von dem Material der Körper vor allem von der Größe der Normalkraft  $N$  zwischen den Körpern ab und steigt (etwa) proportional mit dieser

$$\boxed{R = fN} \quad \text{wobei } (f < f_0). \quad (127)$$

Beispiel 51. Die Verschiedenheit der Aussagen für Haft- und Bewegungsreibung läßt sich durch folgenden Versuch deutlich machen, der von E. Meyer angegeben wurde. An einem Körper, der auf einer rauhen Ebene ruht, denken wir uns einen zur Ebene parallelen schwachen Gummifaden befestigt, der für sich nicht stark genug sein soll, die zur Überwindung der Haftreibung notwendige Kraft auf den Körper zu übertragen, durch den allein es also nicht möglich ist, den Körper in Bewegung zu setzen. Wird jedoch der Körper längs der Ebene in einer Richtung senkrecht zum Faden bewegt, so ist an Stelle der Haftreibung die Bewegungsreibung getreten, die entgegen der Bewegung gerichtet ist und es gelingt mittels des Gummifadens leicht, und zwar durch eine beliebig kleine Kraft, den Körper aus seiner Bahn seitlich abzulenken. Die Summe aus der bewegenden Kraft und der kleinen seitlichen Fadenkraft ist gegen die erstere etwas geneigt und in der Richtung dieser Summe wird fernerhin das Gleiten eintreten; ist diese Summe wieder konstant und gleich  $fN$ , so erfolgt auch das Gleiten in der abgelenkten Richtung gleichförmig. — Aus einem ähnlichen Grunde kann ein Kraftwagen bei Beschleunigung oder beim Bremsen leichter seitlich ausgleiten als bei gleichmäßiger Fahrt, weil dann auch in der Fahrtrichtung ein Gleiten vorhanden ist.

Will man mit diesem Ansatz (127) rechnen, so kommt es wieder wesentlich auf die Kenntnis von  $f$  an. Dabei tritt nun folgender Sachverhalt zutage. Für „trockene Reibung“ führt dieser Ansatz zu Ergebnissen, die die Beobachtungen recht gut wiedergeben; es ist jedoch wegen der Einwirkung der Körper aufeinander infolge der Zerstörung der Berührungsflächen praktisch unmöglich, für irgendeine kontinuierliche Bewegung trockene Reibung zuzulassen. Man ist vielmehr genötigt,



zur Verminderung der Reibung und zur Vermeidung der abschleifenden Wirkungen auf die Oberflächen Schmiermittel zu verwenden; dann tritt aber an die Stelle der trockenen Reibung die Schmiermittelreibung, und diese ist nicht ein Problem der „starren“ Mechanik, sondern der Hydromechanik. Dort wird gezeigt (was hier nur ohne Beweis angegeben werden kann), daß bei großer Geschwindigkeit und kleinen Drucken die Reibung, die bei der Bewegung zweier Körper mit der relativen Geschwindigkeit  $U$  gegeneinander auftritt, dieser Geschwindigkeit und der Größe der benetzten Fläche  $F$  direkt und der Dicke  $h$  der Flüssigkeitsschicht verkehrt proportional gesetzt werden kann, also

$$\boxed{R = \varkappa F U / h} \quad (128)$$

$\varkappa$  bedeutet das „Zähigkeitsmaß“ oder die „Reibungszahl“ der Flüssigkeit. Der Ansatz, den man für den „Widerstand“ gefunden hat, der sich der Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit oder einem Gas entgegensetzt, ist von ähnlicher Art, nur kommt bei größerer Geschwindigkeit  $U$  nicht in der ersten, sondern einer höheren Potenz ( $\approx 2$ ) vor<sup>1</sup>.

Wir müssen uns hier darauf beschränken, auf die Unterschiede hinzuweisen, die in den Ansätzen für die trockene Reibung einerseits und der Flüssigkeitsreibung andererseits bestehen, und zwar soll diese Gegenüberstellung im Zusammenhange mit einer kurzen Übersicht über die Ergebnisse geschehen, die in der Reibungsfrage, insbesondere bezüglich der Gleitreibung über die Ansätze (125) und (127) hinaus vorliegen; wegen ihrer Einfachheit werden diese heute nahezu allein verwendet, sind aber genaueren Versuchen gegenüber nur als erste Annäherungen an die wirklich beobachteten Verhältnisse zu betrachten.

**57. Hauptergebnisse der Versuche über die Reibung.** Nach den Gln. (125) und (127) werden die Reibungszahlen ( $f_0$  und  $f$ ) nur abhängig gemacht vom Material (mit eingeschlossen von der Beschaffenheit der Oberflächen), und die Reibung selbst außerdem noch lediglich von der Normalkraft, mit der die Körper aufeinander gepreßt werden; nach diesem Ansatz wird die Reibung insbesondere unabhängig vorausgesetzt von der Größe der Berührungsflächen und von der Geschwindigkeit.

a) Die Größe von  $f_0$  und  $f$  kann nur durch unmittelbare physikalische Messung bestimmt werden, wobei als mißlich der schon erwähnte Umstand auftritt, daß wir nur in ganz unvollkommener Weise imstande sind, die Oberflächenbeschaffenheit zu beschreiben. Die Worte „trocken“ und „geschmiert“ erweisen sich für eine solche Kennzeichnung als viel zu ungenau und verursachen die großen Spielräume in den Angaben der folgenden Zahlentafel, die nur als ungefähre Anhaltspunkte aufzufassen sind:

<sup>1</sup> Siehe des Verfassers „Lehrbuch der Hydraulik“. Berlin: Julius Springer 1923.

## Reibungszahlen.

Stoffpaar	$f_0$ (Haftreibung)			$f$ (Bewegungsreibung)		
	trocken	ge-schmiert	mit Wasser	trocken	ge-schmiert	mit Wasser
Stahl auf Eisen . .	0,15	0,1	—	0,10	0,009	—
Flußeisen auf Gußeisen oder Bronze	0,18	0,1	—	0,16	0,01	—
Flußeisen auf Schweiß Eisen . .	0,5	0,13	0,65	0,44	—	0,22
Metall auf Holz . .	0,6—0,5	0,1	—	0,5—0,2	0,08—0,02	0,26—0,22
Holz auf Holz . .	0,65	0,2	0,7	0,4—0,2	0,16—0,04	0,25
Leder auf Metall (Dichtungen) . .	0,6	0,25	0,62	0,25	0,12	0,36
Holz auf Stein . .	bis 0,7	0,4	—	0,3	—	—
Stahl auf Eis . . .	0,027	—	—	0,014	—	—

Aus den Versuchen hat sich u. a. auch ergeben, daß Körper aus gleichem Material größere Reibungszahlen ergeben, als solche aus verschiedenem. Die Versuche wurden früher durch Verwendung einer schiefen Ebene oder eines belasteten Schlittens ausgeführt, wobei die Ingangsetzung und die gleichförmige Bewegung beobachtet wurden. Vertauschung des Materials der Unterlage und des Gleitkörpers ändert die Verhältnisse wesentlich.

b) Diese Zahlentafel soll auch den Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit zum Ausdruck bringen. Zunächst haben sorgfältige Versuche gezeigt, daß die Reibungserscheinung bei sorgfältiger Glättung, Reinigung und Trocknung für eine Reihe von Stoffen (z. B. Messing) nahezu vollständig verschwindet, insofern, als sich eine untere Grenze des zum Eintritt der Bewegung nötigen Neigungswinkels der Versuchsebene nicht angeben läßt. Ferner ist darauf hinzuweisen, daß bei Verwendung von Schmiermitteln die Reibungszahlen für alle Stoffe merklich gleich werden, weil dann eben die Reibung des Schmiermittels seinerseits die ganze Erscheinung beherrscht. Die Schmiermittel wirken reibungsvermeidend in folgender Reihe: Talg, trockene Seife, Schweinefett, Olivenöl.

Weiter entnimmt man aus den Zahlenwerten, daß die Verwendung von Wasser (in der Regel) eine Vergrößerung der Reibung mit sich bringt, weshalb Wasser nach diesen Versuchen als Gegen-Schmiermittel anzusprechen ist. Man hat demnach vorgeschlagen, die Flüssigkeiten hinsichtlich der Reibung in zwei Klassen zu teilen: in aktive, die eine Verminderung der Reibung herbeiführen können (wozu die Fette und Öle gehören) und in inaktive (dazu gehören Benzin, Ammoniak, Terpentin), die diese Eigenschaft nicht besitzen; das Wasser vermag aktiven Flüssigkeiten die Eigenschaft der Aktivität zu nehmen.

Feinere Untersuchungen haben auch ergeben, daß schon ganz dünne Flüssigkeitsschichten (Flüssigkeitsfilme), Häute oder Tröpfchen, die sich um Staubpartikel bilden, die Größe der Reibung von Grund aus verändern können.

Obwohl es, wie gesagt, nicht möglich ist, an dieser Stelle in eine Begründung der Gesetze einzugehen, soll das Verhalten der trockenen

und Flüssigkeitsreibung durch eine Gegenüberstellung der Hauptmerkmale deutlich gemacht werden.

Gemäß den allgemeinen theoretischen Ansätzen ergibt sich die Reibungskraft pro Flächeneinheit bei:

<p>trockener Reibung</p> <p>proportional der Normalkraft, unabhängig von der Geschwindigkeit, abhängig von der Rauigkeit der Gleitflächen, größer für den Anfang der Bewegung.</p>	<p>Flüssigkeitsreibung</p> <p>unabhängig von der Normalkraft, proportional der Geschwindigkeit, unabhängig von der Rauigkeit der benetzten Flächen, gleich Null für den Anfang der Bewegung.</p>
--	--

Daraus ist zu verstehen, daß sich Widersprüche gegen die Beobachtungen ergeben müssen, wenn die Ansätze der trockenen Reibung für die Erscheinungen der Schmiermittelreibung verwendet werden; trotzdem geschieht dies heute bei technischen Rechnungen noch nahezu ausschließlich.

c) Abhängigkeit des  $f$  von der Geschwindigkeit. Die älteren Versuche, die nur kleinere Geschwindigkeiten betrafen, zeigten entweder vollständige Unabhängigkeit von der Geschwindigkeit (wie es der elementaren Theorie entspricht) oder erst ein mäßiges Ansteigen bis zu einem Höchstwert und darauf folgenden Abfall. Für größere Geschwindigkeiten wurden umfangreiche Versuche insbesondere im Interesse der Eisenbahntechnik ausgeführt; als Ergebnis dieser Versuche wurde für die Reibung zwischen dem umlaufenden Rad und dem Bremsklotz oder zwischen dem festgebremsten Rad und der Schiene (durch Poirée und Bochet) für Geschwindigkeiten  $V = 14$  bis  $80$  km/h eine Formel aufgestellt, die vom Verein deutscher Eisenbahnverwaltungen auf Grund der Versuche von Wichert bis  $V = 90$  km/h in der folgenden Form zur Annahme gelangte

$$f = f_0 \frac{1 + 0,0112 V}{1 + 0,06 V}, \tag{129}$$

mit  $f_0 = 0,45$  für trockene und  $f_0 = 0,25$  für nasse Reibungsflächen.

Diese Gleichung gibt eine nach Abb. 94 verlaufende Kurve. (Diese Zahlen lassen die oben für Wasser erwähnte Eigenschaft, die Reibung unter gewissen Verhältnissen zu vergrößern, nicht erkennen.) In besonders großem Maßstabe wurden derartige Versuche auch in England (durch Galton) ausgeführt.

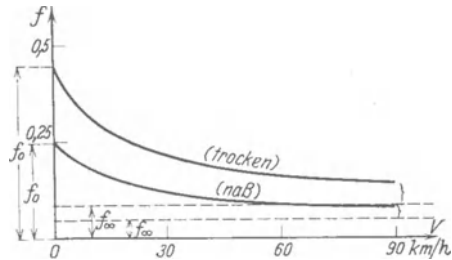


Abb. 94.

Die Abnahme von  $f$  mit zunehmender Geschwindigkeit ist leicht zu verstehen, da die Oberflächen, deren Beschaffenheit durch die Reibungszahl beschrieben werden soll, um so rascher abgeschliffen und geglättet werden, je größer  $V$  ist. Doch kommen auch Fälle vor, in denen  $f$  mit wachsender Geschwindig-

keit zunimmt, z. B. für Leder auf Eisen, ein Fall, der in der Maschinentechnik wegen seiner Anwendung auf Riemenscheiben und Dichtungen von Wichtigkeit ist.

d) Sonstige Einflüsse. Des weiteren zeigt sich die Reibungszahl abhängig von der Struktur des Materials (Faserrichtung von Holz,

Walzrichtung bei Walzeisen), von der Berührungsdauer, da eine gewisse Zeit notwendig ist, bis die Unebenheiten ineinander eindringen; von dem Druck auf die Flächeneinheit der berührenden Flächen, was auch leicht verständlich ist, da bei großen Drucken die Körper Formänderungen erleiden.

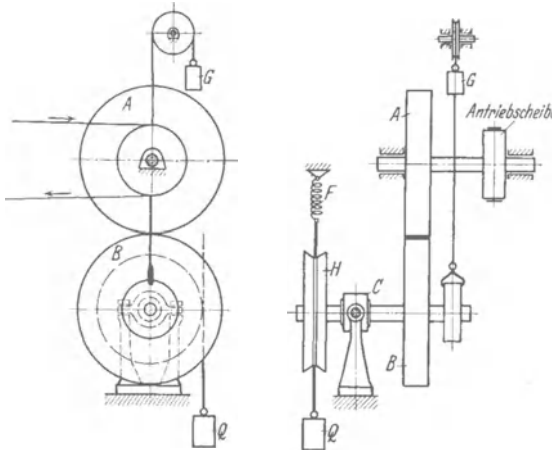


Abb. 95.

Reibräder benutzt, und zwar entweder Kegelräder (H. Bonte 1915) oder Stirnräder (G. Sachs 1924). Die von G. Sachs verwendete Anordnung ist in Abb. 95 schematisch wiedergegeben. Die Versuchsräder A und B bestehen aus dem zu untersuchenden Stoffpaar. Das Rad A wird angetrieben, und das Rad B, dessen Achse in einer

e) Bei den neueren Versuchen zur Ermittlung der Reibungsgesetze wurden meistens

Gabel C drehbar gelagert, wird unter einer veränderlichen, durch das Gewicht G bewirkten Kraft N gegen A gedrückt. Die von A auf B übertragene Reibungskraft R wird als Umfangskraft am Rade H, über das ein Seil herumgelegt ist, dynamometrisch gemessen, und zwar als Differenz

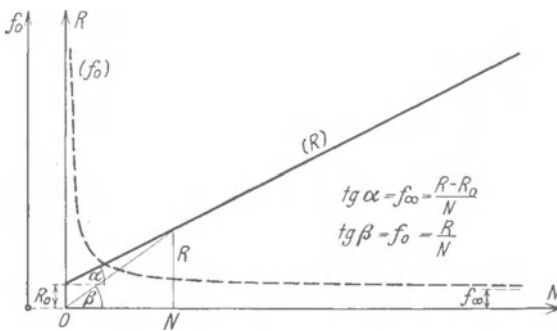


Abb. 96.

zwischen den Kräften am Ende des Seils, d. i. dem Gewicht G und der Federkraft F. Abb. 96 zeigt das wichtigste Ergebnis dieser Versuche, das darin besteht, daß die Reibungskraft nicht mehr durch den Coulombschen, sondern durch den erweiterten Ansatz

$$R = R_0 + f_\infty N \tag{130}$$

dargestellt werden muß, der als Schaulinie eine nicht durch O gehende

[in der Abb. mit ( $R$ ) bezeichnete] gerade Linie ergibt. Wird daher die Reibungszahl wie beim Coulombschen Ansatz  $R = f_0 N$  definiert, so ergibt sich  $f_0$  nicht mehr unabhängig von  $N$ , sondern in der Form

$$f_0 = f_x + \frac{R_0}{N}, \quad (131)$$

nimmt also einen hyperbolischen Verlauf (in Abb. 96 gestrichelt eingetragen), der auch schon von H. Bonte festgestellt wurde.

Diesem verwickelten Sachverhalt gegenüber steht die heutige Theorie der Reibung, die eines der wichtigsten Fragengebiete der gesamten Technik betrifft, jedenfalls auf einer sehr elementaren Stufe. Es ist nur in den großen inneren Schwierigkeiten des Problems begründet, daß man mit den einfachen Ansätzen durchkommen mußte und mit einem Zahlenmaterial, das zwar vielfach aus sorgfältigen Versuchen hervorgegangen ist, das aber — der fehlenden Reproduzierbarkeit der Versuchsbedingungen halber — doch als unzureichend anzusehen ist.

**58. Einige technische Reibungsprobleme.** a) Zapfen. Für ruhende zylindrische Zapfen, die mit dem umgebenden Lager in enger Berührung sind (Abb. 97), könnte man die Reibung durch Addition der Teilreibungen  $dR$  auf die einzelnen Flächenelemente berechnen, wenn die Verteilung der Kräfte  $dN$  längs des Zapfenumfangs bekannt wäre. Wird die Reibungszahl als konstant angenommen, so kann das zur Überwindung der sämtlichen am Umfange des Zapfens vom Halbmesser  $r$  auftretenden Haftreibungen  $dR = f_0 dN$  notwendige Zapfenreibungsmoment allgemein in der Form ange-  
 setzt werden

$$M_1 = \int r dR = f_0 r \int dN;$$

dabei ist das Integral als gewöhnliche (nicht-vektorielle) Summe aller dieser Teilkräfte  $dN$  aufzufassen. Solange man die Kräfteverteilung nicht anzugeben vermag, kann von dieser Summe nur gesagt werden, daß sie größer als die Gesamtbelastung  $Q$  des Zapfens sein muß, da die Summe der Seiten für ein Krafteck immer größer (genau gesagt: niemals kleiner) ist als die Länge der Schlußlinie. Setzt man daher

$$\int dN = \alpha Q, \quad \text{wobei } \alpha > 1, \quad \text{und } \alpha f_0 = f_1,$$

wobei  $f_1$  die Zapfenreibungszahl heißt, so folgt

$$\boxed{M_1 = f_1 r Q.} \quad (132)$$

Wenn das Lager sehr spannt, der Zapfen also von dem Lager eng umschlossen wird, so kann das zur Drehung erforderliche Moment sehr groß werden, wobei  $Q$  selbst beliebig klein sein kann.

Auch beim „leichtlaufenden“ Zapfen (mit trockener Reibung) ergibt sich eine Gleichung von derselben Form dadurch, daß man eine Be-

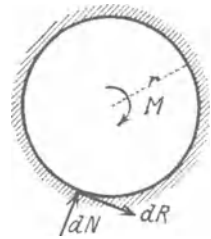


Abb. 97.

rührung zwischen Zapfen und Lager längs einer Erzeugenden annimmt (Abb. 98). In diesem Falle hat man Normalkraft und Reibung nur an einer Stelle und findet für die Gleichgewichtstellung ein „Auflaufen“ des Zapfens im Gegensinn der Drehung des Zapfens; die Gleichgewichtsbedingung nach der Lotrechten gibt

$$\bar{N} + \bar{R} = \bar{Q},$$

und das Zapfenreibungsmoment wird

$$M_1 = Q r \sin \varrho = f_1 r Q = r_1 Q,$$

wobei jetzt  $\sin \varrho = f_1$  gesetzt wurde.  $Q$  wird also in der Gleichgewichtslage einen Kreis vom Halbmesser  $r_1 = r \sin \varrho = f_1 r$  berühren — den sog. Reibungskreis. Für Haftreibung (also relative Ruhe des Zapfens gegen das Lager) wäre  $M_1 < r_1 Q$ , und die an der Berührungsstelle auftretende Kraft  $Q$  schneidet den Reibungskreis.

In der Technik wird die Gleichung (132) auch zur Berechnung der „geschmierten“ Zapfenreibung verwendet, obwohl dabei, wie schon hervorgehoben, ganz andere Verhältnisse herrschen und die Gleichung durch einen Ausdruck von der Form (128) ersetzt werden müßte; und zwar kann für große Geschwindigkeiten und kleine Drücke für das Reibungsmoment bei einem Zapfen von der Länge  $l$  und der benetzten Mantelfläche  $F = 2 \pi r l$ , wenn noch  $h$  die mittlere Dicke der Flüssigkeitsschicht bedeutet,

$$M_1 = \kappa 2 \pi r^2 l U / h \quad (133)$$

gesetzt werden; für kleine Geschwindigkeiten und große Drücke ergeben sich verwickeltere Ausdrücke. Die Summe der auf den Zapfen wirkenden Kräfte und Reibungen muß für die Gleichgewichtstellung des Zapfens eine der Belastung  $Q$  entgegengesetzt gleiche Kraft lotrecht nach oben ergeben, die ebenfalls von der Zähigkeit  $\kappa$  des Schmiermittels und der Umfangsgeschwindigkeit  $U$  abhängen wird. Die weitere Ausführung dieses Ansatzes ergibt in besserer Übereinstimmung mit den Beobachtungen (auch bezüglich der Stellen größter Abnutzung in den Lagern) eine Verschiebung des Zapfens gegen das Lager im Sinne des Wellenumlaufs. Durch Ausscheidung von  $\kappa U / h$  aus den Gleichungen für  $M_1$  und  $Q$  folgt ein Ausdruck, der zwar wieder in der Form (132) angesetzt werden kann, in dem aber  $f_1$  keine Konstante mehr ist, sondern abhängig gefunden wird 1. von der „mittleren Lagerbelastung auf die Flächeneinheit“, d. i. bei Tragzapfen (Belastung senkrecht zur Zapfenachse) von der Größe  $p = Q / 2rl$ , bei Stützzapfen (Belastung parallel zur Zapfenachse) von der Größe  $p = Q / r^2 \pi$ ; 2. von der Umfangsgeschwindigkeit  $U$  des Zapfens; 3. von der Art und dem Material des Lagers und des Zapfens. Einen Überblick über den Verlauf von  $f_1$  für die „Beharrungstemperaturen“ des Lagers von 20° Außentemperatur gibt Abb. 99. Als Abszissen sind die Umfangsgeschwindigkeiten  $U$ , als Ordinaten die Reibungszahlen  $f$  aufgetragen. Die Kurven

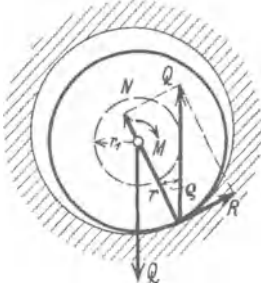


Abb. 98.



beziehen sich auf konstante Belastung für die Flächeneinheit der Projektion der Lagerfläche, und zwar für  $Q/ld = 1, 3$  und  $5 \text{ kg/cm}^2$ . An einzelnen Punkten sind die Werte der entsprechenden Beharrungstemperaturen hinzugeschrieben. Bei den Versuchen von Stribeck, die für diese technisch außerordentlich wichtige Frage von größtem Werte sind und denen auch die Abb. 90 entnommen ist, hat sich übrigens auch ergeben, daß sich für den Grenzfall  $U = 0$  die „Reibungszahl der Ruhe“ unabhängig von der Pressung und nahezu unabhängig von

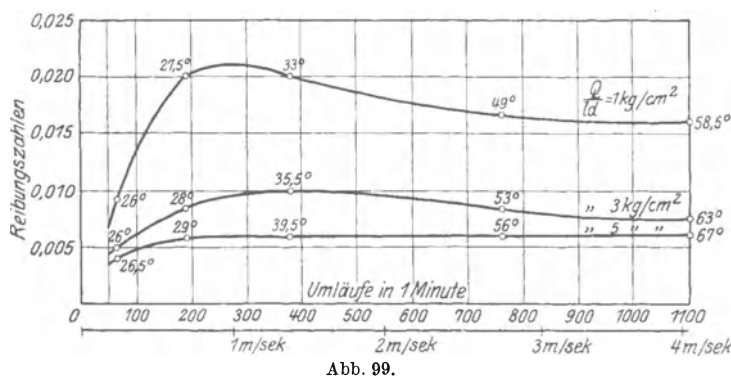


Abb. 99.

der Temperatur herausstellt (und zwar  $\sim 0,14$ ). In der Nähe von  $U = 0$  erfolgt also ein starker Anstieg von  $f_1$  (dieser Teil der Kurven ist in der Abbildung nicht eingetragen). Als Anhaltspunkte können bei ununterbrochener Schmierung für Stahl auf Weißmetall die Zahlenwerte gelten:  $f_1 = 0,01$  bis  $0,04$ .

Eine ausführlichere Behandlung dieser Frage an der Hand des vorliegenden Versuchsmaterials gibt die Hydrodynamik.

b) Riemen und Seil. Eine andere wichtige Anwendung der Reibung betrifft die Bewegungsübertragung durch Riemen- und Seilscheiben. Um in die hier bestehenden Verhältnisse Einblick zu gewinnen, sehen wir zunächst von einer Bewegung vollständig ab und betrachten die Reibung eines eine feststehende Trommel oder Walze längs eines endlichen Stückes umschließenden Riemens oder Seiles (Abb. 100). Hierbei muß wegen der Reibung die Kraft im Seile von der Auflaufstelle  $A$  an der Lastseite ( $Q$ ) bis zur Ablaufstelle  $B$  an der Kraftseite ( $K$ ) kontinuierlich zunehmen. Das Gesetz für diese Zunahme bekommen wir, wenn wir beachten, daß nach den Gleichgewichtsbedingungen der Unterschied der Seilkräfte  $dS$  an den Enden eines Elementes gerade gleich sein muß der längs dieses Elementes auftretenden Reibung

$$dS = dR = f_0 dN,$$

während sich für die Richtung senkrecht zum Seil ergibt

$$dN = 2S \sin \frac{d\varphi}{2} \approx S d\varphi;$$

es ist also

$$dS = S f_0 d\varphi, \quad \text{und daraus} \quad S = C e^{f_0 \varphi},$$



wenn  $C$  eine Integrationskonstante ist. Wenn diese Gleichung für die Stelle  $A$  angewendet wird, so ist zu setzen  $\varphi = 0$ ,  $C = Q$ , und sie ergibt dann für die Ablaufstelle  $B$  ( $\varphi = \alpha$ )

$$K = Q e^{f_0 \alpha}, \tag{134}$$

während die gesamte am Umfang auftretende Reibung die Größe hat

$$R = K - Q = Q (e^{f_0 \alpha} - 1) = K (e^{f_0 \alpha} - 1) / e^{f_0 \alpha}. \tag{135}$$

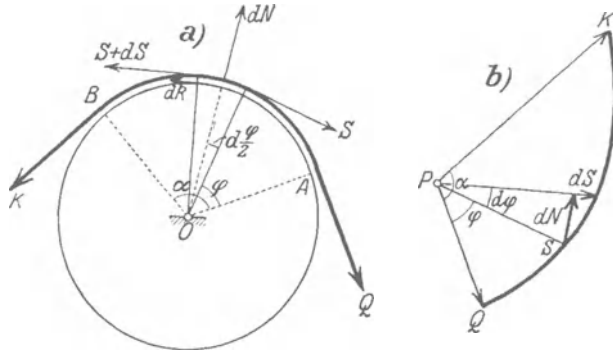


Abb. 100.

Durch Auftragen von  $S$  für jeden Winkel  $\varphi$  von einem festen Punkte  $P$  aus erhält man als „Kräfteplan“ eine logarithmische Spirale (Abb. 100b), aus der man für jeden Winkel  $\varphi$  die zugehörige Seilkraft  $S$  ablesen kann.

Beispiel 52. Bei einem Riemen- oder Seiltrieb wird die Haftreibung zwischen Riemen oder Seil und Scheibe dazu benutzt, um auf der Achse der Scheibe vom Halbmesser  $r$  ein Drehmoment zu übertragen, das zum Heben eines Gewichtes  $G$ , zum Antrieb einer Arbeitsmaschine u. dgl. dienen kann. Soll dies erreicht werden, so muß das Moment der am Umfang der Scheibe (Abb. 101) auftretenden Reibung  $R$  dem belastenden Moment  $G r_1$  mindestens gleich sein; aus

$$R r \geq G r_1$$

folgt nach Gl. (135)

$$Q = \frac{R}{e^{f_0 \alpha} - 1} \geq G \frac{r_1}{r} \frac{1}{e^{f_0 \alpha} - 1},$$

$$K = \frac{R e^{f_0 \alpha}}{e^{f_0 \alpha} - 1} \geq G \frac{r_1}{r} \frac{e^{f_0 \alpha}}{e^{f_0 \alpha} - 1}.$$

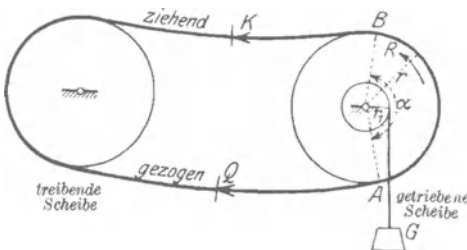


Abb. 101.

Damit also eine Bewegungsübertragung stattfinden kann, ist mindestens die Kraft  $Q$  im ge-

zogenen und mindestens die Kraft  $K$  im ziehenden Riemenstück notwendig.

Beispiel 53. Ähnliche Beziehungen gelten für die Bandbremse, wie sie bei Kraftwagen, Fördermaschinen usw. angewendet wird. Auch hier wird die Größe der am Umfang aufzubringenden und hier als vorgegeben zu betrachtenden Reibung  $R$  durch besondere Forderungen bestimmt, wie durch die Länge des Auslaufweges u. dgl. Das Band wird an die Scheibe mittels eines Hebels nach

Abb. 102 gepreßt; in den Bezeichnungen dieser Abb., die eine Differentialbremse darstellt, folgt die notwendige Kraft  $H$  am Handhebel aus dem Momentensatze für den Drehpunkt  $O$  des Hebels:

$$H h = K k - Q q$$

und nach Gl. (135)

$$H = R \frac{k e^{f_0 \alpha} - q}{h (e^{f_0 \alpha} - 1)} .$$

c) Keil. Die Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte am Keil ergeben sich aus den bekannten Gleichungen für die schiefe Ebene, wobei wir die Kraft  $K$  wagrecht annehmen wollen. Aus Abb. 103 finden wir die notwendige Kraft für das „Anheben“ des Keiles mit  $f_0 = \operatorname{tg} \varrho_0$

$$K \cos \alpha = Q \sin \alpha + f_0 N = Q \sin \alpha + \operatorname{tg} \varrho_0 (K \sin \alpha + Q \cos \alpha)$$

und daraus

$$K = Q \frac{\sin (\alpha + \varrho_0)}{\cos (\alpha + \varrho_0)} = Q \operatorname{tg} (\alpha + \varrho_0) . \quad (136)$$

Wenn es sich nicht darum handelt, die Last zu heben, sondern nur auf der schiefen Ebene im Gleichgewichte zu „halten“, so kann hierzu die Haftreibung nach dem früher Gesagten ausgenützt werden; diese ist dann nach oben gerichtet anzunehmen, wodurch im Ergebnis  $-\varrho_0$  statt  $+\varrho_0$  zu stehen kommt. Es ist daher die „Kraft zum Halten“

$$K' = Q \operatorname{tg} (\alpha - \varrho_0) . \quad (137)$$

Für  $\alpha < \varrho_0$  wird  $K' < 0$ , d. h. es wäre eine nach rechts, also im Sinne der Abwärtsbewegung des Körpers gerichtete Kraft nötig, um die Haftreibung zu überwinden. Diese Eigenschaft bezeichnet man als Selbstsperrung oder Selbsthemmung.

Beispiel 54. Bei den Anwendungen des Keiles wird die Anordnung so abgeändert, wie es Abb. 104 zeigt. Die schiefe Ebene 1 wird beweglich angeordnet und soll dazu dienen, durch eine auf sie wirkende Kraft  $K$  den auf ihr liegenden, mit  $Q$  belasteten Körper 2, der selbst in lotrechter Richtung geführt wird, anzuheben.

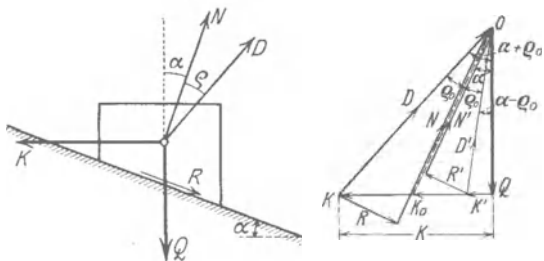


Abb. 103.

An allen Berührungsstellen treten Reibungen auf, die alle der relativen Bewegungsrichtung entgegen wirken, für das „Anheben“ mithin die aus der Abb. zu entnehmenden Richtungen haben. Mit Hilfe der Definitionsgleichungen für die Reibungen an den Stützflächen:  $R = N \operatorname{tg} \varrho_0$ ,

$R_1 = N_1 \operatorname{tg} \varrho_1$ ,  $R_2 = N_2 \operatorname{tg} \varrho_2$  entnimmt man dem Kräfteplan Abb. 104b (oder direkt aus den Gleichgewichtsbedingungen) die Gleichungen

$$N_1 = N \cos \alpha - R \sin \alpha = N \frac{\cos(\alpha + \varrho)}{\cos \varrho},$$

$$N_2 = N \sin \alpha + R \cos \alpha = N \frac{\sin(\alpha + \varrho)}{\cos \varrho},$$

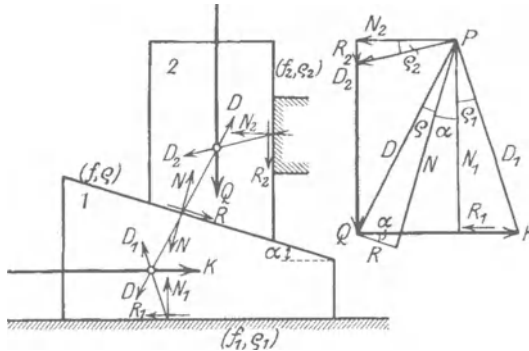


Abb. 104.

ferner für das Gleichgewicht beider Körper zusammen

$$K = N_2 + R_1 = N \frac{\sin(\alpha + \varrho)}{\cos \varrho} + N \frac{\cos(\alpha + \varrho)}{\cos \varrho} \operatorname{tg} \varrho_1 = N \frac{\sin(\alpha + \varrho + \varrho_1)}{\cos \varrho \cos \varrho_1},$$

$$Q = N_1 - R_2 = N \frac{\cos(\alpha + \varrho + \varrho_2)}{\cos \varrho \cos \varrho_2}$$

und daraus endlich

$$K = Q \frac{\sin(\alpha + \varrho + \varrho_1)}{\cos(\alpha + \varrho + \varrho_2)} \frac{\cos \varrho_2}{\cos \varrho_1}. \quad (138)$$

Um die zum „Halten der Last“  $Q$  nötige Kraft  $K'$  zu bekommen, sind die Reibungen, oder was auf dasselbe hinauskommt, die Vorzeichen der  $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$  umzukehren, so daß man findet

$$K' = Q \frac{\sin(\alpha - \varrho - \varrho_1)}{\cos(\alpha - \varrho - \varrho_2)} \frac{\cos \varrho_2}{\cos \varrho_1},$$

und die Bedingung für Selbstperrung  $K' < 0$  ergibt hier

$$\alpha < \varrho + \varrho_1. \quad (139)$$

Insbesondere folgt für  $\varrho = \varrho_1 = \varrho_2$ :

$$K = Q \operatorname{tg}(\alpha + 2\varrho),$$

$$K' = Q \operatorname{tg}(\alpha - 2\varrho). \quad (140)$$

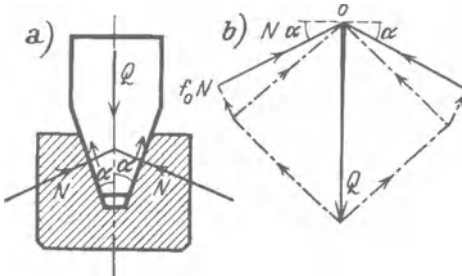


Abb. 105.

den Körpern, einer Keilnut. Sei (Abb. 105) der Neigungswinkel der Keilebenen  $2\alpha$  und die Belastung  $Q$ , dann sind die Kräfte  $N$  auf die Seitenflächen des

Keiles gegeben durch

$$Q = 2 N (\sin \alpha + f_0 \cos \alpha), \quad \text{also} \quad N = Q/2 (\sin \alpha + f_0 \cos \alpha),$$

mithin ist die zur Überwindung der Reibung notwendige Kraft (senkrecht zur Zeichenebene gerichtet):

$$K = 2 f_0 N = Q f_0 / (\sin \alpha + f_0 \cos \alpha) = f' Q, \quad f' = f_0 / (\sin \alpha + f_0 \cos \alpha), \quad (141)$$

und für kleine  $\alpha$  ist  $f' > f_0$ . Durch die Anbringung einer Keilnut wird die Reibungszahl von  $f_0$  auf  $f_0 / (\sin \alpha + f_0 \cos \alpha)$  erhöht, z. B. für  $\alpha = 15^\circ, f_0 = 0,1$  folgt  $f' = 0,384$ .

Beispiel 56. Gewölbe als Keilsystem. Für das statische Verhalten eines Gewölbes ist die Mitwirkung der Reibung in sämtlichen Trennungsfugen wesentlich. Denken wir uns ein Keilsystem etwa von der in Abb. 106 gezeichneten Anordnung, durch die eingepprägten Kräfte  $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots$  belastet, so müssen für Gleichgewicht die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

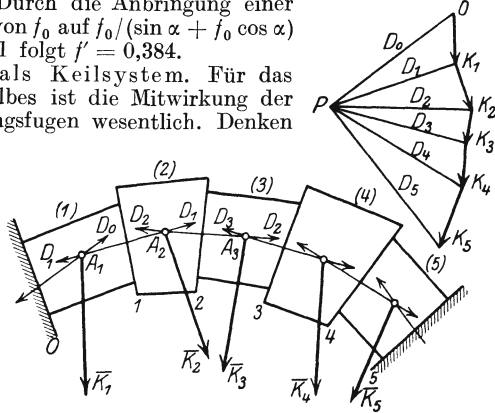


Abb. 106.

1. Je drei Kräfte  $\bar{K}_i, \bar{D}_{i-1}, \bar{D}_i$  müssen im Gleichgewichte sein, d. h. durch einen Punkt gehen und ein geschlossenes Dreieck bilden.

2. Die Normalkräfte zwischen den Körpern müssen wirkliche Druckkräfte (und nicht Zugkräfte) sein, die die Berührungsflächen im Innern durchsetzen.

3. Die gesamten Berührungskräfte  $\bar{D}_0, \bar{D}_1, \dots$  dürfen von den bezüglichen Normalen auf die Trennungsflächen um nicht mehr als den Reibungswinkel abweichen.

Es muß sich also zu dem Kräfteck der Lasten  $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots$  ein Pol  $P$  so finden lassen, daß das zugehörige Seileck, welches durch die Kräfte  $\bar{D}_0, \bar{D}_1, \dots$  gebildet wird — das man auch als Stützlinie des Gewölbes bezeichnet — die Bedingungen 1., 2., 3. erfüllt. —

d) Schraube. Die für die schiefe Ebene erhaltene Gl. (136) gibt auch das Gesetz für das Gleichgewicht an der Schraube an. Wir setzen dabei eine flachgängige oder Bewegungsschraube voraus, und für sie eine gleichförmige Verteilung der Belastung  $Q$  auf die sämtlichen mit dem Muttergewinde in Berührung stehenden Schraubengänge. Der Kraft  $H$  am Arme  $h$  (Abb. 107) entspricht eine Kraft  $K$  am Umfang des Schraubenkörpers, beide sind durch den

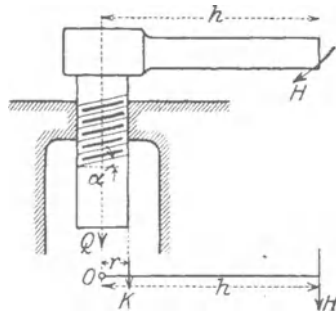


Abb. 107.

Momentensatz um die Schraubenachse miteinander verknüpft:  $H h = K r$ . Wenn wir nun die Schraube auf die Ebene abgewickelt denken, so erhalten wir eine Reihe von schiefen Ebenen übereinander, auf denen gleichförmig verteilt, wie wir annehmen wollen, die lotrechte Last  $Q$  ruht. Die Gl. (136) liefert daher unmittelbar die Schraubengleichung

$$H = K r / h = Q \operatorname{tg} (\alpha + \varrho_0) r / h. \quad (142)$$

Flachgängige Schrauben werden erzeugt durch Herumführen eines Rechteckes längs einer Schraubenlinie. Nimmt man an Stelle des Rechteckes ein Dreieck, so erhält man die scharfgängigen Schrauben, die wegen der dabei auftretenden größeren Reibung als Befestigungsschrauben Verwendung finden.

e) Seilsteiheit. Schiefe Ebene, Keil und Schraube bezeichnet man als einfache Maschinen und rechnet zu diesen auch den Hebel, die Rolle und das Wellrad. Die Gleichgewichtsbedingungen für diese letzteren werden einfach durch den Momentensatz geliefert, wie ja gerade der Hebel in der Geschichte der Mechanik den Ausgangspunkt für den Begriff des Momentes gebildet hat. Die Rollen werden oft nicht einzeln verwendet, sondern zu mehreren Stücken in Flaschenzügen vereinigt.

Für die Seilsteiheit, d. i. den Widerstand des Seiles bei Rolle und Wellrad, sind empirische Formeln angegeben worden. Die Seilsteiheit ist nicht eine Erscheinung der Reibung in dem Sinne, wie wir diesen Begriff bisher verwendet haben, sie rührt vielmehr von der unvollkommenen Biegsamkeit des Seiles, die eine Folge der inneren, molekularen Spannungen und der Reibung zwischen den einzelnen Drähten und Litzen ist, aus denen das Seil besteht.

Um diese unvollkommene Biegsamkeit ohne Inanspruchnahme der Elastizitätslehre zahlenmäßig einzuschätzen, sucht man einen Ansatz für die Differenz der Seilspannungen an den beiden Enden eines um eine Rolle herumgelegten Seiles zu gewinnen. Der Widerstand, den das steife Seil der Biegung entgegensetzt, kann so erklärt werden, daß bei dem Herumführen des Seiles um die Rolle vom Halbmesser  $r_1$  der Kraftarm auf  $r_1 - \xi$  verkleinert und der Lastarm auf  $r_1 + \xi$  vergrößert angesetzt wird; der Momentensatz liefert dann

$$K(r_1 - \xi) = Q(r_1 + \xi), \quad \text{daher} \quad K = Q \left(1 + \frac{2\xi}{r_1}\right) \quad (143)$$

wenn  $\xi$  als klein betrachtet wird. Der Teil  $2Q\xi/r_1$  gibt dann ein Maß für die Größe der Seilsteiheit.

Für Hanfseile rechnet man mit  $2\xi = 0,03d^2$  bis  $0,06d^2$ , für Drahtseile (wofür weniger Versuche vorliegen) mit etwa  $2\xi = 0,06d^2$  bis  $0,09d^2$ , je nach der Herstellungsart und dem Stoff der Seile. In Gl. (143) und in diese Angaben sind  $d$  und  $r$  in cm einzusetzen.

Wird auch die Zapfenreibung an der Rolle berücksichtigt, so kommt ihr Moment lastvergrößernd hinzu, und da dieses Moment nach Gl. (132) einer Umfangskraft  $M/r_1 = 2f_1 Q r/r_1$  (die Belastung des Zapfens kann bei parallelen Seilen  $\approx 2Q$  gesetzt werden) entspricht, so erhalten wir

$$K = Q \left(1 + \frac{2\xi}{r_1} + 2f_1 \frac{r}{r_1}\right) = \zeta Q \quad (\zeta > 1), \quad (144)$$

wobei  $\zeta = 1 + \frac{2\xi}{r_1} + 2f_1 \frac{r}{r_1}$  als Rollenziffer bezeichnet wird.

Beispiel 57. Bei dem gemeinen oder Produkt-Flaschenzug nach Abb. 108 werden je  $n$  Rollen in einer „Flasche“ untereinander oder nebeneinander

angeordnet, die obere Flasche wird befestigt, an der unteren hängt die Last  $Q$ . Ein Seil ist in der gezeichneten Weise um die Rollen herumgeführt, ein Ende ist an der oberen Flasche angeheftet, auf das andere wirkt die Kraft  $K$  ein.

Bei fehlenden Widerständen ( $\zeta = 1$ ) ist die Spannung  $S$  im Seile überall gleich, d. h.  $S = K$ , und da die Last an  $2n$  Seilen hängt, so folgt für Gleichgewicht  $2n S = Q = 2n K$ , also

$$K = Q/2n. \quad (145)$$

Mit Berücksichtigung der Widerstände (Seilsteifheit und Zapfenreibung) wäre für  $n = 2$  nach Abb. 108 zu setzen

$$K = \zeta S_4, \quad S_4 = \zeta S_3, \quad S_3 = \zeta S_2, \quad S_2 = \zeta S_1$$

und daher

$$Q = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = (1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3) S_1, \quad K = \zeta^4 S_1,$$

woraus durch Ausscheidung von  $S_1$  folgt

$$K = \frac{\zeta^4 (\zeta - 1)}{\zeta^4 - 1} Q;$$

und ähnlich für  $2n$  Rollen

$$K = \frac{\zeta^{2n} (\zeta - 1)}{\zeta^{2n} - 1} Q. \quad (146)$$

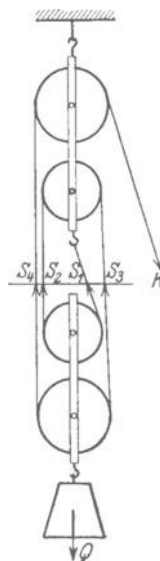


Abb. 108.

**59. Roll- und Bohrreibung.** a) Auch bei der Rollreibung gehen wir von der Erfahrungstatsache aus, daß — abgesehen vom Luftwiderstand — eine gewisse Kraft notwendig ist, um die Bewegung eines Rades oder einer Walze über eine wagrechte Unterlage zu bewirken (beim Rad erfolgt die Belastung mittels einer Achse, bei der Walze liegt sie unmittelbar auf dem Körper der Walze auf); diese Kraft ist durch die auftretende Rollreibung bedingt, und diese rührt davon her, daß sich das Rad an der jeweiligen Berührungstelle ein wenig abplattet, in diesem Zustande in die Unterlage einsinkt, und aus der so entstehenden Vertiefung während der Bewegung gewissermaßen fortwährend wieder herausgehoben wird, und die Einsenkung entgegen der Festigkeit des Materials fortgesetzt neu hervorgerufen werden muß. Die erzeugten Vertiefungen werden allerdings zum Teil wieder zurückgehen, aber wegen der bleibenden Formänderungen des Materials erfolgt diese Rückbildung mit geringeren Druckkräften, und daher bleibt als Überschuß ein Moment übrig ( $M$  in Abb. 109), das der Drehung um den momentanen Berührungspunkt entgegenwirkt; dieses wird als Rollreibungsmoment bezeichnet. Natürlich wird dieses Moment um so kleiner sein, je weniger stark die Formänderungen (insbesondere die bleibenden) der Körper sein werden, d. h. aus je härterem Stoff die Körper bestehen.

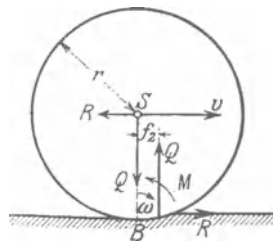


Abb. 109.

Die Größe dieses Rollreibungsmomentes wird außer von den Stoffen, aus denen Rad und Unterlage bestehen, im wesentlichen von der Belastung  $Q$  des Rades abhängen. Die im Momentenprodukt vorkommende



Länge kann dann als jene Strecke gedeutet werden, um die die Auflagerkraft der Schiene gegen den Berührungspunkt  $B$  nach vorwärts (im Sinne der Bewegungsrichtung) verschoben ist (Abb. 109). Die Länge dieser Strecke  $f_2$  nennt man die Rollreibungszahl und schreibt

$$\boxed{M_2 = f_2 Q.} \quad (147)$$

$f_2$  hat im Gegensatz zu den anderen Reibungszahlen die Dimensionen einer Länge. Wird dieses Moment durch 2 Kräfte  $R$  am Arme  $r$  ( $r$  = Halbmesser des Rades) dargestellt, so kann man schreiben  $M_2 = R r$  und erhält

$$R = Q f_2 / r, \quad (148)$$

und man kann auch sagen, daß die zur Bewegung eines Rades notwendige Kraft der Belastung direkt und dem Halbmesser des Rades verkehrt proportional ist. Rollen tritt nur ein, wenn dieses  $R$  unterhalb des größten Wertes der an der Berührungstelle möglichen Haftreibung liegt, also wenn  $R \leq f_0 Q$ , oder  $f_2 / r < f_0$ .

Für die Größe von  $f_2$  mögen die folgenden Zahlenangaben dienen:

Eisenbahnräder auf Schienen	$f_2 = 0,05$ cm,
Pockholz auf Pockholz	= 0,05 „
Ulmenholz auf Pockholz	= 0,08 „
Gummiräder auf Wiesengrund	= 1 bis 1,5 cm.

Der Umstand, daß die Rollreibung wesentlich kleiner ausfällt als die Gleitreibung, wird bei den Kugellagern verwertet; neuere Versuche haben gezeigt, daß  $f_2$  dabei nicht als konstant zu betrachten ist, sondern mit zunehmender Belastung abnimmt, dagegen von der Geschwindigkeit in weiten Grenzen unabhängig ist.

b) Bohrreibung tritt bei der Berührung rauher Körper auf, die sich um ihre gemeinsame Normale drehen können oder gedreht werden. Die unter Druck einander berührenden Körper werden sich tatsächlich etwas abplatteln und sich nicht in einem Punkte, sondern in einer kreisförmigen Fläche berühren. Den bei der Drehung um die Normale auftretenden Widerstand kann man wieder als der Bewegung entgegenwirkendes Moment  $M_3$  in der Form ansetzen

$$\boxed{M_3 = f_3 Q,} \quad (149)$$

wenn  $f_3$  die Bohrreibungszahl bedeutet, die vom Material und vom mittleren Radius der Berührungsfläche abhängt und wieder die Dimension eine Länge hat.

## VII. Das Prinzip der virtuellen Arbeiten.

**60. Aussage des Prinzips für die Kräftegruppe durch einen Punkt.** Das Prinzip der virtuellen Arbeiten oder Prinzip der virtuellen Verschiebungen ist ein aus den Gesetzen für die Addition von Kräften am starren Körper gewonnener allgemeiner Ansatz, der (ähnlich wie das d'Alembertsche Prinzip, davon aber ganz unabhängig)

in den einfacheren Fällen wohl auf Grund jener Entwicklungen ableitbar, in seinem weitesten Umfange jedoch nicht vollständig beweisbar ist. Diesem Sachverhalt wird durch die Bezeichnung „Prinzip“ Rechnung getragen, die hier andeuten soll, daß es über das unmittelbar Bewiesene hinaus als richtig anzusehen ist und sich in allen seinen Folgerungen restlos bewährt hat. Dieses Prinzip ist zugleich eines der schönsten und bedeutungsvollsten Ergebnisse der Mechanik und hat nicht nur für die Statik der starren, sondern auch der elastischen Körper, insbesondere in der Statik der Baukonstruktionen (bei denen die elastischen Formänderungen als virtuelle Verschiebungen betrachtet werden) und auch für die Formulierung der Gleichungen der Dynamik der Systeme große Bedeutung erlangt.

Um zu einem analytischen Ausdruck für dieses Prinzip zu gelangen, betrachten wir zunächst eine Kraft  $\bar{K}$  mit den Komponenten  $(X, Y, Z)$  und eine kleine Verschiebung  $\bar{\delta s}$  eines auf ihr liegenden Punktes  $A$ , die nach den drei Richtungen eines rechtwinkligen Achsenkreuzes die Komponenten  $(\delta x, \delta y, \delta z)$  haben soll. Als Arbeit von  $\bar{K}$  bei dieser Verschiebung  $\bar{\delta s}$  bezeichnen wir nach der Definitionsgleichung (18) des Arbeitsproduktes den Ausdruck

$$\delta A \equiv \bar{K} \bar{\delta s} \equiv K \delta s \cos \vartheta \equiv X \delta x + Y \delta y + Z \delta z. \quad (150)$$

Verschiebungen dieser Art, wie wir sie hier betrachten, sind also nicht etwa Wirkungen oder Folgen der einwirkenden Kräftegruppe, sondern nur gedachte Lagenänderungen der Punkte und Körper, die nur so beschaffen sein müssen, daß sie die geometrischen oder physikalischen Bedingungen der Führungen und Auflagerungen nicht verletzen. Derartige Verschiebungen werden daher als virtuell (virtus = Fähigkeit, Möglichkeit) bezeichnet.

Das Beiwort virtuell ist im Hinblick auf die weitreichende Bedeutung des Prinzips eigentlich zu eng gefaßt. Es sollte nämlich damit, wie gesagt, zum Ausdruck gebracht werden, daß nur Verschiebungen zugelassen werden, bei denen die einzelnen Körper ihren geometrischen Zusammenhang und die Auflagerbedingungen (Verbindungen, Berührungen usw.) bewahren. Wir werden sehen, daß Verschiebungen dieser besonderen Art einzuführen sind, wenn die Gleichgewichtsstellung gefunden werden soll. Für die Aufsuchung der Auflagerkräfte können jedoch die Verschiebungen ganz beliebig erfolgen, gegebenenfalls auch die Unterstützungen oder Führungen durchdringend.

Aus der Form der Gl. (150) folgt sofort die Richtigkeit des folgenden (übrigens schon in 17 ausgesprochenen) Hilfsatzes: Wenn die  $n$  Kräfte  $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_n$  durch einen Punkt  $O$  hindurchgehen (Kraftbündel) und  $\bar{K} = \sum \bar{K}_i$  ihre Summe ist, so ist für jede Verschiebung  $\bar{\delta s}$  von  $O$  die Arbeit von  $\bar{K}$  gleich der Summe der Arbeiten der  $\bar{K}_i$ . Denn es ist die Arbeit von  $\bar{K}$ , wenn  $\vartheta = \sphericalangle(\bar{K}, \bar{\delta s})$ , weil  $X = \sum X_i$  usw.

$$\left. \begin{aligned} \delta A \equiv \bar{K} \bar{\delta s} &= K \delta s \cos \vartheta = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z \\ &= (\sum X_i) \delta x + (\sum Y_i) \delta y + (\sum Z_i) \delta z = \sum \delta A_i. \end{aligned} \right\} \quad (151)$$

Daraus folgt weiter: Wenn die Kräfte  $\bar{K}_i$  eine Gleichgewichtsgruppe bilden, also  $\bar{K} = 0$  ist, so ist die Summe der von den  $\bar{K}_i$  bei jeder beliebigen Verschiebung  $\bar{\delta s}$  von  $O$  geleisteten Arbeit gleich Null.

Dies ist der Ausdruck des „Prinzips“ für den Fall des „Kräftebündels“; für dieses ist es also eine unmittelbare Folge der gewöhnlichen Gleichgewichtsbedingungen der Statik. Für das Kräftebündel besteht daher das Prinzip nur in einer veränderten Formulierung des Satzes über die geometrische Addition der Kräfte und bringt daher keinen unmittelbaren Gewinn. Da die  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  willkürlich sind, so folgt aus  $\delta A = 0$  unmittelbar  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = 0$ , d. h. die Gleichgewichtsbedingungen in der gewöhnlichen Form.

**61. Begründung des Prinzips für starre Körper.** Die eigentliche Bedeutung des Prinzips beruht darauf, daß es auch für beliebige ebene und räumliche Gleichgewichtsgruppen gilt, d. h. für ausgedehnte starre Körper (und nach angemessener Erweiterung auch für nicht-starre, worauf wir hier aber nicht eingehen). Für den einzelnen starren Körper können wir es in folgender Form aussprechen:

Wenn ein starrer Körper im Gleichgewichte ist, so ist die Summe der Arbeiten der eingepprägten Kräfte bei jeder virtuellen Verschiebung des Körpers gleich Null.

Das Wort virtuell soll jetzt lediglich andeuten, daß es sich um eine mögliche, mit der Starrheit des Körpers verträgliche Verschiebung handelt, i. a. also um eine solche, bei der der Körper als Ganzes beliebig verschoben und verdreht wird.

Um durch Verwendung dieses Prinzips die Gleichgewichtsbedingungen des starren Körpers zu erhalten, werden wir in ähnlicher Weise

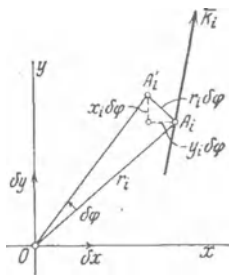


Abb. 110.

vorgehen wie bei der Kräftegruppe des Punktes und zuerst eine beliebige Bewegung einer ebenen Scheibe voraussetzen, die als Träger der Kräftegruppe dient. Es ist leicht einzusehen und wird in der Bewegungslehre ausführlicher dargelegt, daß jede ebene Bewegung durch die Schiebungen (Translationen)  $\delta x$ ,  $\delta y$  irgend eines Punktes  $O$  des Körpers parallel zu zwei zueinander senkrechten Richtungen  $x$ ,  $y$  in Verbindung mit einer Drehung  $\delta\varphi$  um den Anfangspunkt des Koordinatensystems  $O$  dargestellt werden kann, welche Größen wir sämtlich als beliebig klein

ansehen können. Die Verschiebungen eines Punktes  $A_i(x_i, y_i)$  sind dann (Abb. 110)

$$\left. \begin{aligned} \delta u_i &= \delta x - y_i \delta\varphi, \\ \delta v_i &= \delta y + x_i \delta\varphi; \end{aligned} \right\} \quad (152)$$

die Arbeit der Kraft, deren Wirkungslinie durch  $A_i$  hindurchgeht, ist

$$\delta A_i \equiv X_i \delta u_i + Y_i \delta v_i = X_i \delta x + Y_i \delta y + (x_i Y_i - y_i X_i) \delta\varphi, \quad (153)$$

daher ist die Summe der Arbeiten aller Kräfte, da  $\delta x$ ,  $\delta y$  und  $\delta \varphi$  für alle Kräfte dieselben sind

$$\sum \delta A_i \equiv (\sum X_i) \delta x + (\sum Y_i) \delta y + [\sum (x_i Y_i - y_i X_i)] \delta \varphi.$$

Für eine Gleichgewichtsgruppe, für die also

$$X = \sum X_i = 0, \quad Y = \sum Y_i = 0, \quad M = \sum (x_i Y_i - y_i X_i) = 0 \quad (154)$$

ist, folgt also für beliebige Werte der  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta \varphi$

$$\boxed{\sum \delta A_i \equiv X \delta x + Y \delta y + M \delta \varphi = 0.} \quad (155)$$

Umgekehrt liefert das Bestehen dieser Gleichung für willkürliche Werte von  $\delta x$ ,  $\delta y$  und  $\delta \varphi$  die bekannten Gleichgewichtsbedingungen (154).

Dasselbe Verfahren würde für den Fall des im Raume frei beweglichen starren Körpers die Darstellung der Verschiebungen  $\delta u_i$ ,  $\delta v_i$ ,  $\delta w_i$  eines Kraftangriffspunktes  $A_i$  nach drei Achsen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  mittels der drei Schiebungen  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  längs  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und der drei Drehungen  $\delta \varphi$ ,  $\delta \chi$ ,  $\delta \psi$  um  $x$ ,  $y$ ,  $z$  in der Form ergeben

$$\left. \begin{aligned} \delta u_i &= \delta x + z_i \delta \chi - y_i \delta \varphi \\ \delta v_i &= \delta y + x_i \delta \varphi - z_i \delta \psi \\ \delta w_i &= \delta z + y_i \delta \psi - x_i \delta \chi \end{aligned} \right\}. \quad (156)$$

Bilden wir nun die Arbeit  $A_i$  der Kraft  $\bar{K}_i(X_i, Y_i, Z_i)$  und addieren über alle Kräfte  $K_i$ , so erhalten wir den Ausdruck

$$\delta A \equiv \sum \delta A_i = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z + M_x \delta \varphi + M_y \delta \chi + M_z \delta \psi, \quad (157)$$

wobei

$$X = \sum X_i, \dots \quad M_x = \sum (y_i Z_i - z_i Y_i), \dots$$

und  $\sum \delta A_i$  ist vermöge der bekannten Gleichgewichtsbedingungen ( $X = 0$  usw.) für alle virtuellen Bewegungen des starren Körpers gleich Null; und umgekehrt, wenn  $\delta A = 0$ , so folgen daraus die Gleichgewichtsbedingungen des starren Körpers.

Aus diesen Betrachtungen tritt die Richtigkeit des folgenden Satzes hervor, der die Einsicht in die Natur der hier auftretenden Beziehungen wesentlich zu fördern geeignet ist: Die Anzahl der Bewegungsmöglichkeiten (oder Freiheitsgrade) ist identisch mit der Anzahl der notwendigen Gleichgewichtsbedingungen; diese können auch als Bedingungen gegen Verschiebung und gegen Drehung bezeichnet werden. —

Um das Prinzip zu beweisen, kann man auch unmittelbar das für den einzelnen Punkt erhaltene Ergebnis heranziehen und auf den Körper übertragen, der dann als ein Punkthaufen zu betrachten ist. Wie auch die inneren Kräfte beschaffen sein mögen, so muß man doch annehmen, daß sie im Körper stets paarweise von gleicher Größe und entgegengesetzter Richtung auftreten; sie bilden also jedenfalls für den ganzen Körper genommen eine Gleichgewichtsgruppe, und wir

können zeigen, daß für je zwei paarweise gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte  $\bar{J}$ ,  $-\bar{J}$  die Arbeit bei jeder virtuellen Verschiebung verschwindet. Für eine Schiebung  $\delta x$  ist das Verschwinden der virtuellen Arbeiten evident. Für eine Drehung  $\delta\varphi$  um die  $z$ -Achse, die wir durch den Vektor  $\overline{\delta\varphi}$  darstellen können, sind die Verschiebungen der Angriffspunkte  $A_1, A_2$ , denen nach Abb. 111 die Ortsvektoren  $\bar{r}_1, \bar{r}_2$  entsprechen sollen, nach Gl. (30)

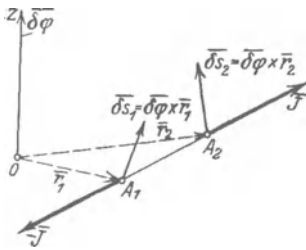


Abb. 111.

$$\overline{\delta s_1} = \overline{\delta\varphi} \times \bar{r}_1, \quad \overline{\delta s_2} = \overline{\delta\varphi} \times \bar{r}_2.$$

Mithin ist die Summe der Arbeiten der beiden Kräfte  $\bar{J}$  und  $-\bar{J}$

$$\bar{J} \overline{\delta s_1} - \bar{J} \overline{\delta s_2} = \bar{J} [\overline{\delta\varphi} \times \bar{r}_1] - \bar{J} [\overline{\delta\varphi} \times \bar{r}_2]$$

und nach Gl. (31):

$$\overline{\delta\varphi} \{[\bar{r}_1 \times \bar{J}] - [\bar{r}_2 \times \bar{J}]\},$$

und dies ist offenbar gleich Null, weil die beiden Produkte die Momente von  $\bar{J}$  und  $-\bar{J}$  um die  $z$ -Achse darstellen.

Durch diese Betrachtung wird es verständlich, daß die Arbeit der äußeren Kräfte von der der inneren vollständig getrennt werden kann und im Gleichgewichtsfalle jede für sich verschwindet. Man kann auch sagen, das Prinzip der virtuellen Arbeiten für starre Körper besteht gerade in der Aussage, daß die Summe der Arbeiten der inneren Kräfte für sich allein verschwindet, woraus auch das Verschwinden der Arbeiten der äußeren Kräfte folgt.

Um die Aussage des Prinzips auf einen gestützten Körper und sodann auch auf mehrere sich gegenseitig stützende Körper zu übertragen, haben wir an jedem Körper 1. die eingepprägten Kräfte und 2. die Auflagerkräfte zwischen ihm und den festen Auflagern (Gelenken usw.) und zwischen den Körpern untereinander anzubringen. Wenn wir dem System aller dieser Körper, als Ganzes betrachtet, eine solche Verschiebung erteilen, daß die Auflager nicht verlassen werden (die Auflagerkräfte also keine Arbeit leisten, und wenn Reibungen vorhanden sind, kein Gleiten parallel zu den Stützflächen zugelassen wird), so werden dabei die unter 2. genannten Auflagerkräfte die Arbeit Null leisten. Wir können daher das Prinzip so aussprechen:

Erteilt man einem im Gleichgewicht befindlichen System von Körpern, die sich gegenseitig stützen, solche Verschiebungen, daß die gegenseitigen Berührungen erhalten bleiben (und daß bei Auftreten von Reibungen keine Arbeiten der Reibungskräfte auftreten), so ist die Summe der Arbeiten der eingepprägten Kräfte für sich gleich Null.

Wir fügen noch hinzu, daß das Verschwinden der virtuellen Arbeiten auch eine hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht einer Kräftegruppe darstellt, so daß auch die Umkehrung gilt: Wenn die Summe der Arbeiten einer Kräftegruppe bei jeder virtuellen

Verschiebung der Körper verschwindet, so ist die Kräftegruppe im Gleichgewicht.

**62. Die Form des Prinzips für Gewichte als eingeprägte Kräfte.** Für den technisch wichtigsten Fall sind die eingeprägten Kräfte die Gewichte der einzelnen Körper und lotrecht gerichtete Lasten; nehmen wir die gemeinsame Richtung der Kräfte als  $z$ -Achse, dann haben wir zu setzen:  $X_i = 0$ ,  $Y_i = 0$ ,  $Z_i = G_i$ , und in dem Ausdruck für das Prinzip der virtuellen Arbeiten treten nur die Verschiebungen  $\delta z_i$  ein; es kommt also

$$\sum \delta A_i = \sum G_i \delta z_i = 0; \quad (158)$$

da die Höhenlage des Schwerpunktes des ganzen Systems durch Gl. (98) gegeben ist

$$\zeta = \frac{\sum G_i z_i}{\sum G_i}, \quad \text{so ist} \quad \delta \zeta = \frac{\sum G_i \delta z_i}{\sum G_i}, \quad (159)$$

und der Ausdruck des Prinzips reduziert sich auf die Aussage

$$\boxed{\delta \zeta = 0 \quad \text{oder} \quad \sum G_i \delta z_i = 0.} \quad (160)$$

In diesem besonderen Fall besagt also das Prinzip: Ein System von sich stützenden Körpern, die lediglich unter dem Einfluß von Gewichten stehen, ist im Gleichgewichte, wenn sich bei irgendeiner virtuellen Verschiebung die Höhenlage des Schwerpunktes nicht ändert. Wenn sich der Schwerpunkt bei der Verschiebung überhaupt bewegt, so kann er sich nur in wagrechter Richtung bewegen.

Die Gl. (160) kann auch in integrierter Form geschrieben werden:

$$\sum G_i z_i = \text{konst.} \quad (161)$$

Die Größe  $G_i z_i$  bezeichnet man auch als die zugehörige potentielle Energie oder Energie der Lage: Für Gleichgewicht ist daher die potentielle Energie konstant, d. h. sie ändert sich bei einer virtuellen Verschiebung der Körper nicht.

Die Verbindungen der Körper untereinander können dabei ganz beliebige sein, nur dürfen sie bei der Verschiebung nicht gelöst werden.

**63. Anwendungen.** Für den freien Körper gibt das Prinzip ebenso viele voneinander unabhängige Gleichungen, als der Körper Freiheitsgrade besitzt; aus diesen Gleichungen können — je nach der Frage — entweder die Gleichgewichtstellung oder die für Gleichgewicht notwendigen Kräfte ermittelt werden. Für einen gestützten Körper scheiden ebenso viele Freiheitsgrade aus, als Auflagerbedingungen hinzutreten, und die virtuellen Verschiebungen, die diese Auflagerbedingungen nicht verletzen, geben stets ebenso viele Gleichungen, als unbekannte Koordinaten oder unbekannte Kräfte übrigbleiben. Wird die Anzahl der Auflagerbedingungen größer als die Anzahl der Freiheitsgrade, so erhält man ein statisch-unbestimmtes System, wie wir schon in **33** durch eine andere Art der Abzählung festgestellt haben.



Bei verbundenen Systemen mit einem Freiheitsgrad und bei mehreren symmetrisch angeordneten Körpern, die sich wie solche mit einem Freiheitsgrad verhalten (Beispiel 64), reicht die einmalige Anwendung des Prinzips zusammen mit den „geometrischen Bedingungen“ des Problems hin, um die Gleichgewichtstellung oder die zur Herstellung des Gleichgewichts notwendige Kraft zu ermitteln. — Die geometrischen Bedingungen bestehen etwa in der konstanten Länge eines die Körper verbindenden Fadens, eines Stabes u. dgl.; derartige Verbindungen werden durch die Koordinaten ihrer Endpunkte ausgedrückt und geben differenziert die Bedingungen, die zwischen den Änderungen der Koordinaten — d. h. eben den virtuellen Verschiebungen — bestehen.

Das Prinzip kann jedoch auch dazu dienen, die Auflagerkräfte, und zwar jede einzelne Komponente der Auflagerkräfte, für sich zu bestimmen. Hierzu denke man sich zunächst die Gleichgewichtstellung in der vorhin dargelegten Weise gefunden und verschiebe den Körper oder das System von Körpern neuerlich in der Weise, daß alle Auflagerbedingungen erfüllt bleiben bis auf die eine, für welche die Auflagerkraft ermittelt werden soll. Die Anwendung des Prinzips für diese Verschiebung gibt eine Gleichung, in der die betreffende Auflagerkraft als einzige Unbekannte auftritt und daher errechnet werden kann. Eine Gelenkkraft oder die in einer Eckenstützung (33) auftretende Kraft wird in der Ebene durch zwei Komponenten bestimmt und verlangt die zweimalige Anwendung des Prinzips für zwei Verschiebungen, da jede Komponente für sich ermittelt werden muß.

Zur Kennzeichnung der Art und Weise, wie das Prinzip anzuwenden ist, mögen die folgenden einfachen Beispiele dienen. Die ersten von ihnen betreffen die sog. einfachen Maschinen, an denen das Prinzip zuerst — allerdings in ganz spezieller Form — erkannt wurde.

Beispiel 58. Hebel. Die Drehung  $\delta\varphi$  um den Drehpunkt  $O$  des Hebels  $AOB$  liefert für Gleichgewicht die Gleichung (Abb. 112)

$$K a \delta\varphi \cos \alpha + Q b \delta\varphi \cos \beta = 0, \quad \text{d. h.} \quad \boxed{K k = Q q}, \quad (162)$$

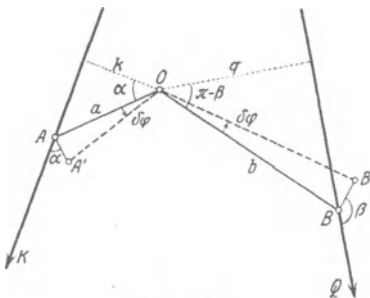


Abb. 112.

wenn mit  $k$  und  $q$  die Lote von  $O$  auf die Wirkungslinien von  $\bar{K}$  und  $\bar{Q}$  bezeichnet werden.

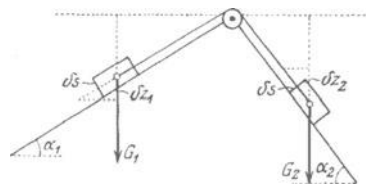


Abb. 113.

Beispiel 59. Schiefe Ebene nach Abb. 113. Die Verschiebung der beiden Gewichte  $G_1$  und  $G_2$  um  $\delta z_1$  und  $\delta z_2$  in lotrechter Richtung liefert die Gl. (160)

$$G_1 \delta z_1 + G_2 \delta z_2 = 0,$$

und da  $\delta z_1 = \delta s \sin \alpha_1$ ,  $\delta z_2 = -\delta s \sin \alpha_2$ , so folgt

$$G_1 \sin \alpha_1 = G_2 \sin \alpha_2 .$$

Beispiel 60. Für die Robervalsche Waage nach Abb. 114 gilt die Beziehung  $Pa = Qb$  unabhängig von den Stellen, an denen die Gewichte hängen.

Bezeichnen  $\delta z_1$ ,  $\delta z_2$  die lotrechten Verschiebungen der Waagebalken bei einer virtuellen Drehung  $\delta \varphi$ , bei der die um  $O, O_1$  drehbaren Hebel mit den Verbindungstäben ein Gelenkparallelogramm bilden und die Waagetische wagrecht bleiben, so erhält man nach dem Prinzip die Gleichung

$$P \delta z_1 + Q \delta z_2 = 0 ,$$

die wegen  $\delta z_1 = a \delta \varphi$ ,  $\delta z_2 = -b \delta \varphi$  unmittelbar auf die Beziehung  $Pa = Qb$  führt.

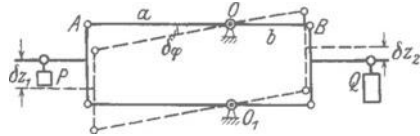


Abb. 114.

Beispiel 61. Flaschenzüge. a) Bei dem im Beispiel 57 besprochenen gemeinen Flaschenzug bringt die Verschiebung der Kraft  $K$  um das Stück  $\delta s$  eine Verschiebung der Last  $Q$  um das Stück  $\delta s/2n$  hervor, wenn  $n$  die Anzahl der Rollen in einer Flasche ist; das Prinzip liefert daher (für  $\zeta = 1$ ) unmittelbar die (ohne Berücksichtigung der Widerstände geltende) Gl. (145):  $K = Q/2n$ .

b) Für den Potenzflaschenzug nach Abb. 115 bringt die Verschiebung von  $K$  um  $\delta s$  eine Verschiebung von  $A_1$  um  $\delta s/2$ , von  $A_2$  um  $\delta s/4$  usw. hervor, so daß bei  $n$  „beweglichen“ Rollen (ohne Widerstände) die Gleichung folgt

$$K = Q/2^n .$$

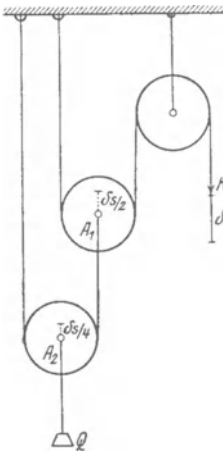


Abb. 115.

Beispiel 62. Gleichgewicht zweier Körper mit den Gewichten  $G_1, G_2$ , von denen nach Abb. 116  $G_2$  in einer lotrechten Führung beweglich und durch ein dünnes Seil über eine Rolle mit  $G_1$  verbunden ist. In der durch das Prinzip gelieferten Gleichung  $G_1 \delta z_1 + G_2 \delta z_2 = 0$  besteht zwischen  $z_1$  und  $z_2$ , also auch zwischen  $\delta z_1$  und  $\delta z_2$  ein geometrisch bedingter Zusammenhang, der durch die konstante Länge  $l$  des Fadens gegeben ist; es ist

$$z_2^2 + a^2 = (l - z_1)^2$$

und daraus durch Differentiation

$$\begin{aligned} z_2 \delta z_2 &= -(l - z_1) \delta z_1 \\ &= -\sqrt{z_2^2 + a^2} \delta z_1 . \end{aligned}$$

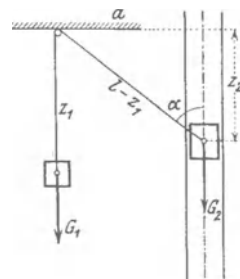


Abb. 116.

Durch Ausschcheidung von  $\delta z_1$  und  $\delta z_2$  aus den beiden Gleichungen

folgt  $G_1 z_2 = G_2 \sqrt{z_2^2 + a^2}$  oder  $G_1 \cos \alpha = G_2$ , welche Gleichung sich auch unmittelbar hätte anschreiben lassen. Daraus folgt für die Gleichgewichtstellung

$$z_2 = G_2 a / \sqrt{G_1^2 - G_2^2}, \quad l - z_1 = G_1 a / \sqrt{G_1^2 - G_2^2} .$$

Damit eine reelle Gleichgewichtstellung existiert, muß  $G_1 > G_2$ ,  $l > a$  sein.

Beispiel 63. Gewichtsausgleichung. Eine Kurve  $C$  von der Form  $r = r(\varphi)$  ist so zu bestimmen, daß ein auf ihr verschiebares Gewicht  $G_1$  den damit durch eine Schnur von der Länge  $l$  verbundenen, um eine wagrechte Achse drehbaren Stab von der Länge  $AB = a$  vom Gewichte  $G_2$  ( $AS = s$ ) in jeder Lage im Gleichgewichte hält (Abb. 117). — Das Prinzip liefert sofort

$$G_1 \delta z_1 + G_2 \delta z_2 = 0 \quad \text{oder integriert:} \quad G_1 z_1 + G_2 z_2 = \text{konst.}$$

Nach den Bezeichnungen der Abb. 117 ist

$$z_1 = r \cos \varphi, \quad z_2 = h - s \cos \vartheta = h - s \frac{a^2 + h^2 - (l-r)^2}{2ah}.$$

Setzt man dies ein, so erhält man, wenn der Punkt  $C$  ( $r = 0$ ) auf der gesuchten Kurve liegen soll

$$G_1 r \cos \varphi + G_2 \left[ h - s \frac{a^2 + h^2 - (l-r)^2}{2ah} \right] = G_2 \left[ h - s \frac{a^2 + h^2 - l^2}{2ah} \right],$$

und daraus folgt die Gleichung der gesuchten Kurve

$$r = 2l \frac{G_1}{G_2} \frac{2ah}{s} \cos \varphi.$$

Diese Kurve läßt sich übrigens auch unmittelbar durch Benützung der Gleichung  $G_1 z_1 + G_2 z_2 = \text{konst.}$  punktweise konstruieren.

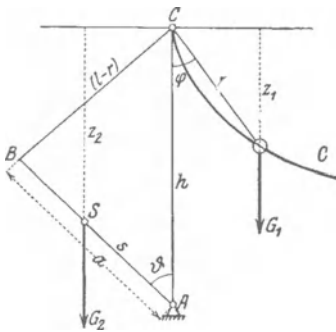


Abb. 117.

Beispiel 64. Stabverbindung des Beispiels 17. Werden die Entfernungen der Punkte  $C, D, E$  in Abb. 43 von der Wagrechten durch die Punkte  $A, B$  mit  $z, z_1, z'$  bezeichnet, so liefert das Prinzip für die Hebung von  $D$  in lotrechter Richtung um  $\delta z_1$  und von  $C, E$  um  $\delta z$  die Gleichung

$$2K \delta z + K_1 \delta z_1 = 0.$$

Wenn ferner  $a$  die Länge der Stäbe und  $\overline{AB} = 2L$  ist, so folgt

$$z = a \sin \alpha, \quad z_1 = a (\sin \alpha + \sin \beta),$$

daher

$$\delta z = a \cos \alpha \delta \alpha, \quad \delta z_1 = a (\cos \alpha \delta \alpha + \cos \beta \delta \beta),$$

und die vorhergehende Gleichung nimmt die Form an:

$$(2K + K_1) \cos \alpha \delta \alpha + K_1 \cos \beta \delta \beta = 0.$$

Ferner folgt aus  $\overline{AB} = 2L = 2a (\cos \alpha + \cos \beta)$  durch Differentiation

$$\sin \alpha \delta \alpha + \sin \beta \delta \beta = 0;$$

wenn man aus beiden die von Null verschiedenen Größen  $\delta \alpha, \delta \beta$  ausscheidet, erhält man dieselbe Gleichung wie in Beispiel 17

$$\frac{\text{tg} \alpha}{\text{tg} \beta} = \frac{2K + K_1}{K_1}.$$

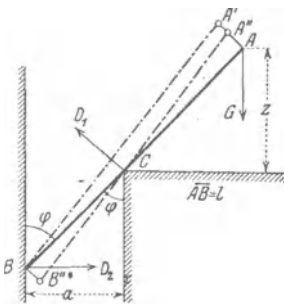


Abb. 118.

Beispiel 65. Für das Gleichgewicht eines an eine Wand und eine Mauerecke gestützten Stabes  $\overline{AB} = l$ , der nach Abb. 118 bei  $A$  mit  $\overline{G}$  belastet ist, folgt für die Gleichgewichtstellung, wenn  $z$  die Höhe von  $A$  über der festen Wagrechten durch  $C$  bezeichnet:  $\delta z = 0$ . Da  $z = l \cos \varphi - a \text{ctg} \varphi$ , also  $\delta z = [-l \sin \varphi + a/\sin^2 \varphi] \delta \varphi = 0$ , so erhält man daraus (da  $\delta \varphi \neq 0$ )

$$\sin \varphi = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}.$$

Um die Kraft  $D_1$  in  $C$  zu berechnen, betrachten wir die Drehung des Stabes um den Winkel  $\delta \varphi$  von  $\overline{BA}$  nach  $\overline{BA'}$  aus dieser nunmehr bekannten Gleich-

gewichtstellung heraus, dann ist die Summe der Arbeiten der Kräfte bei dieser Verschiebung

$$D_1 \frac{a}{\sin \varphi} \delta \varphi - Gl \delta \varphi \sin \varphi = 0$$

und daraus

$$D_1 = G \frac{l}{a} \sin^2 \varphi = \frac{G}{\sin \varphi} = G \sqrt[3]{\frac{l}{a}}.$$

Ebenso ergibt sich durch Ansatz der Arbeiten bei der Drehung des Stabes durch den Winkel  $\delta \varphi$  von  $\overline{AB}$  nach  $\overline{A''B''}$  um  $C$

$$D_2 \frac{a}{\sin \varphi} \delta \varphi \cos \varphi - G \left( l - \frac{a}{\sin \varphi} \right) \delta \varphi \sin \varphi = 0,$$

woraus

$$D_2 = G \operatorname{ctg} \varphi.$$

## Zweiter Teil.

# Kinematik der starren Körper.

Dieser Teil behandelt die Grundbegriffe der Bewegungslehre: Geschwindigkeit und Beschleunigung, die zunächst für den einzelnen Punkt definiert und in verschiedenen Koordinaten ausgedrückt werden. Im Anschlusse daran folgen die elementaren Hilfsmittel für die Darstellung der Bewegung des starren Körpers, wobei als technisch wichtigster Sonderfall die ebene Bewegung des einzelnen Körpers (der Scheibe) und mehrerer verbundener Körper mit einem Freiheitsgrad (die in vielen technischen Anwendungen bei den zwangsläufigen Getrieben vorkommt) besonders hervortritt.

## I. Bewegung des Punktes.

**64. Geschwindigkeit in Cartesischen Koordinaten. Geschwindigkeitsplan.** Es wurde schon in der Einleitung hervorgehoben, daß die gleichförmige Bewegung eines Körpers in gerader Linie in bezug auf ein „Trägheitssystem“ — d. i. also eine „Trägheitsbewegung“ — dadurch gekennzeichnet ist, daß auf den Körper keinerlei Kräfte wirken; die nicht-gleichförmigen Bewegungen werden dagegen mit Kräften in Zusammenhang gebracht, die die Abweichungen von den Trägheitsbewegungen hervorrufen. Zur anschaulichen Kennzeichnung des Bewegungszustandes dienen die Begriffe Geschwindigkeit und Beschleunigung, die nur Beziehungen zwischen Raum- und Zeitgrößen sind, jedoch keinerlei Abhängigkeit von der Beschaffenheit des bewegten Körpers selbst (insbesondere von seiner Masse) aufweisen.

Zunächst beschränken wir uns auf den Fall, daß der bewegte Körper entweder kleine Abmessungen hat und von vornherein als Punkt betrachtet werden kann, oder sich so bewegt, daß alle seine Punkte kongruente Bahnen beschreiben; man erkennt unmittelbar, daß dieser Fall vorliegt, sobald der Körper zu sich selbst parallel bleibt, also Drehbewegungen des Körpers um im Endlichen liegende Achsen ausgeschlossen sind. Für einen so bewegten Körper ist durch die Bewegung eines einzelnen Punktes auch die Bewegung jedes anderen festgelegt. So kann z. B. die Bewegung eines Eisenbahnzuges für gewisse Betrachtungen unter dem Bilde der Bewegung eines einzelnen Punktes dargestellt werden, wobei freilich von der Bewegung der Räder und von dem veränderlichen Einfluß der Drehung der Wagen in den Gleiskrümmungen vorerst abgesehen werden muß; diese „sekundären“ Erscheinungen müssen sodann besonders untersucht werden.

Die Bewegung eines Punktes wird erst dann im Sinne der Mechanik als beschrieben angesehen, wenn nicht nur die Bahnkurve festgelegt ist, sondern wenn zu jedem Punkt dieser Bahnkurve auch noch die Zeit gegeben ist, zu der er von dem Körperpunkte gedeckt wird; in der Sprache der Mathematik heißt dies, daß etwa die drei Cartesischen Koordinaten  $x, y, z$  eines solchen Punktes für alle Werte der Zeit eines bestimmten Intervalls durch Gleichungen von der Form gegeben sind

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t); \quad (163)$$

diese Gleichungen bezeichnet man als die Bewegungsgleichungen in integrierter Form, oder kurz als die endlichen Bewegungsgleichungen des Punktes; sie können als die Parameterdarstellung der Bahnkurve angesehen werden, wobei das Besondere darin besteht, daß die Zeit selbst der Parameter ist; sie können auch in die ihnen gleichwertige Vektorgleichung zusammengefaßt werden

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}). \quad (164)$$

Die Geschwindigkeit  $\bar{v}$  gibt das Maß der Änderung dieser Koordinaten  $x, y, z$  mit der Zeit an. Sie ist selbst ein Vektor,  $\bar{v}$ , und ihre Komponenten  $v_x, v_y, v_z$  nach den Achsen sind durch die ersten Ableitungen der drei Funktionen (163) nach der Zeit gegeben

$$v_x = \dot{x} = \dot{x}(t), \quad v_y = \dot{y} = \dot{y}(t), \quad v_z = \dot{z} = \dot{z}(t), \quad (165)$$

wobei wir von der Bezeichnung der Zeitableitungen durch über die Funktionszeichen gesetzte Punkte Gebrauch machen; genauer können die Gln. (165) in der Form geschrieben werden

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \quad \text{usw.}; \quad (166)$$

wir sprechen von Geschwindigkeiten als Zeitableitungen der Koordinaten dann, wenn diese Grenzwerte bestehen. In eine Vektorgleichung zusammengefaßt lauten die Gln. (165)

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}(t), \quad (v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}). \quad (167)$$

Der Vektor  $\bar{v}$  hat an jeder Stelle eine Richtung, die durch die Verhältnisse  $dx:dy:dz$  gegeben ist, also mit der Tangente zur Bahnkurve übereinstimmt (Abb. 119).

Wenn wir die Vektoren  $\bar{v}$  für alle Punkte der Bahn von einem festen Punkte,  $P$ , aus auftragen, so erhalten wir eine Kurve, die man als Geschwindigkeitsplan,  $\bar{v}$ -Plan (Hodograph der Geschwindigkeit) für die betrachtete Bewegung bezeichnet, und die einen Überblick über den Verlauf der Geschwindigkeit während der ganzen Bewegung gibt.  $P$  heißt der Pol des Geschwindigkeitsplanes. Für Bewegungen in gerader Linie würde der  $\bar{v}$ -Plan in eine Gerade durch  $P$  ausarten;



bei diesen empfiehlt es sich daher, die Geschwindigkeiten als Funktion des längs der Bahn zurückgelegten Weges aufzutragen.

Die Dimension der Geschwindigkeit ist  $[LT^{-1}]$ , ihre Einheit im technischen Maßsystem: 1 m/s; sie ist aus der Längen- und Zeiteinheit abgeleitet. Im physikalischen Maßsystem ist ihre Einheit 1 cm/s.

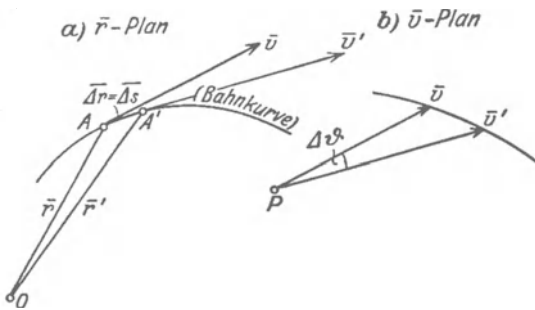


Abb. 119.

Durch das Hereinspielen der Zeitabhängigkeit findet auch der gerade für viele Aufgaben der Technik besonders hervortretende wirtschaftliche Gesichtspunkt eine angemessene Berücksichtigung, was späterhin in der Dynamik noch deutlicher hervortreten wird (97).

**65. Beschleunigung.**

Ganz ähnlich wie die Geschwindigkeit  $\bar{v}$  als

Grenzwert der vektoriellen Änderung von  $\bar{r}$  eingeführt wurde, definieren wir die Beschleunigung  $\bar{b}$  als Grenzwert des Quotienten aus der vektoriellen Änderung  $\Delta v$  von  $\bar{v}$  und der Zeit  $\Delta t$ , in der diese Änderung erfolgt; wenn wir noch die Definition für  $\bar{v}$  nach Gl. (167) verwenden, können wir also schreiben

$$b = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \dot{v}(t) = \ddot{r}(t). \tag{168}$$

$\bar{b}$  ist also ein Vektor mit den Komponenten

$$b_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x, \text{ usw.},$$

also

$$\boxed{b_x = \dot{v}_x(t) = \ddot{x}(t), \quad b_y = \dot{v}_y(t) = \ddot{y}(t), \quad b_z = \dot{v}_z(t) = \ddot{z}(t),} \tag{169}$$

und es ist

$$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}.$$

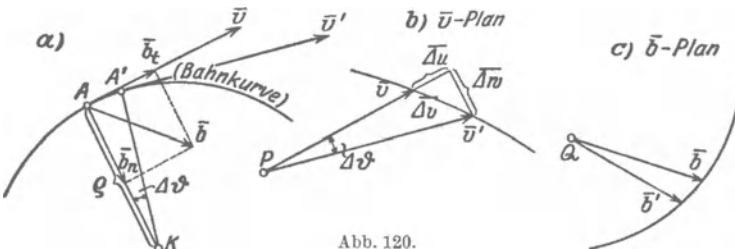


Abb. 120.

Wenn  $\bar{v}$  die Geschwindigkeit in  $A$  (Abb. 120) ist, so ist die Geschwindigkeit  $\bar{v}'$  nach der Zeit  $\Delta t$ , also in  $A'$ , durch die Gleichung gegeben

$$\bar{v}' = \bar{v} + \overline{\Delta v}; \tag{170}$$

daher liegt der Vektor  $\overline{\Delta v}$ , sowie auch  $\overline{\Delta v}/\Delta t$  in der Grenze für  $\Delta t \rightarrow 0$  in der Ebene, die durch zwei benachbarte Bahntangenten bestimmt ist;  $\bar{b}$  liegt also in der Schmiegungeebene des betreffenden Punktes der Bahnkurve (d. i. die Grenzlage der Ebene zweier benachbarter Tangenten) und ist stets nach der hohlen Seite dieser Bahnkurve gerichtet, kann aber im übrigen jede beliebige Größe und Richtung haben.

Die hier gegebene Definition der Beschleunigung  $\bar{b}$  ist ganz analog der in 64 gegebenen Definition der Geschwindigkeit  $\bar{v}$ : derselbe Schritt, der von  $\bar{r}$  zu  $\bar{v}$  führte, führt von  $\bar{v}$  zu  $\bar{b}$ . Daraus ergibt sich sofort der Satz:

Die Geschwindigkeit, mit der der Geschwindigkeitsplan (Hodograph) für irgendeine Bewegung eines Punktes durchlaufen wird, ist gleich der Beschleunigung der Bewegung.

Trägt man den Beschleunigungsvektor  $\bar{b}$  von einem festen Punkte  $Q$  aus auf, so erhält man den Beschleunigungsplan,  $\bar{b}$ -Plan (zweiter Hodograph),  $Q$  nennt man den Pol des  $\bar{b}$ -Planes.

Wir werden diese Sätze, die besonders für die ebene Bewegung von Wichtigkeit sind, bei den Anwendungen unmittelbar verwenden.

Die Dimension der Beschleunigung ist  $[LT^{-2}]$ , ihre Einheit im technischen Maßsystem  $1 \text{ m/s}^2$  und im physikalischen  $1 \text{ cm/s}^2$ .

**66. Die Bewegungsgleichungen der Punktmechanik.** Ehe wir dazu übergehen, diese Begriffe auf besondere Bewegungen anzuwenden, ist es am Platze, eine Bemerkung über die Form und den Ansatz der Bewegungsgleichungen der Punktmechanik einzuschalten. Unter „Punkten“ verstehen wir hier, wie schon früher erwähnt, solche Körper, deren Bewegung unter dem Bilde eines einzelnen Punktes dargestellt werden kann; diese Körper sind dann entweder an sich klein oder so bewegt, daß Drehungen keine Rolle spielen. Exakter gesprochen handelt es sich dabei, wie später noch bewiesen werden wird, einfach um die Bewegung des Schwerpunktes der betreffenden Körper.

Da bei derartigen Bewegungen der bewegte Körper selbst nur durch seine Masse ( $m$ ) wirkt, die als skalarer Faktor in der Bewegungsgleichung erscheint, so kommt es auf dasselbe hinaus, ob wir von Beschleunigung oder Kraft bzw. von Kinematik oder Dynamik reden. Wesentlich ist nur die Deutung der beiden Glieder der Bewegungsgleichung, die erklärender Bemerkungen bedarf.

Zunächst ist zu sagen, daß die Gültigkeit der Newtonschen Bewegungsgleichung, die uns schon in Gl. (1) für die lineare Bewegung begegnet ist, wesentlich weiter reicht, als dort angegeben ist. Sie erstreckt sich nämlich auch auf die zugehörige Aussage in Vektorform

$$\boxed{\bar{b} \equiv \dot{\bar{v}} = \bar{K}/m \equiv \bar{b}_e,} \quad (171)$$

die die Grundlage aller folgenden Betrachtungen ausmacht. Diese Gleichung besagt also, daß die vektorielle Änderung des Geschwindigkeitsvektors  $\bar{v}$  in der Zeiteinheit in der Richtung der eingepprägten Kraft  $\bar{K}$  (oder Beschleunigung  $\bar{b}_e$ ) erfolgt und dieser Kraft proportional (bzw. mit der eingepprägten Beschleunigung identisch) ist. In dieser Gleichung bedeutet die linke Seite  $\dot{\bar{b}}$  die zweite Ableitung des Ortsvektors  $\bar{r}$  nach der Zeit  $t$ , ist also ein durch eine ganz bestimmte Operation aus  $\bar{r}$  abgeleiteter Ausdruck, den wir genauer als die kinematisch definierte Beschleunigung bezeichnen wollen. Die rechte Seite  $\bar{b}_e$ , die wir die eingepprägte Beschleunigung nennen, enthält die anderen bei der Bewegung auftretenden veränderlichen Größen  $\bar{r}$ ,  $\bar{v}$  und  $t$  und außerdem gewisse Konstante, die bei jedem besonderen Problem bestimmte Zahlenwerte besitzen. Die obige Gleichung stellt sich also im allgemeinen in der vektoriellen Form dar

$$\dot{\bar{b}} \equiv \dot{\bar{v}} \equiv \ddot{\bar{r}} = \bar{b}_e(\bar{r}, \bar{v}, t) \quad (172)$$

oder in Komponenten geschrieben, für den *Raum*

$$b_x \equiv \dot{v}_x \equiv \ddot{x} = b_{ex}(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t), \text{ usw.} \quad (173)$$

und für die *Ebene*

$$b_x \equiv \dot{v}_x \equiv \ddot{x} = b_{ex}(x, y, v_x, v_y, t), \text{ usw.} \quad (174)$$

Die Gl. (171) ist keineswegs eine nichtssagende Identität; sie bietet uns vielmehr die Möglichkeit, alle vorkommenden Bewegungen aus gewissen eingepprägten Beschleunigungen  $\bar{b}_e$  zu bestimmen und hinsichtlich des jeder von ihnen eigentümlichen Ausdrucks für diese Beschleunigung  $\bar{b}_e$  zu unterscheiden und in eine gewisse Ordnung zu bringen. Hierzu bemerken wir vor allem, daß sich viele Bewegungen, und zwar gerade jene, die uns am meisten vertraut sind, durch einfache Ausdrücke für die zweiten Differentialquotienten der Koordinaten nach der Zeit — also eben der Beschleunigungen  $\bar{b}$  — darstellen lassen. Zu diesen Bewegungen gehören z. B. die Bewegungen im Schwerfeld der Erde und die Zentralbewegungen der Planeten um die Sonne; für jene kann (in erster Näherung) ein nach Größe und Richtung konstant bleibender Wert der Beschleunigung angesetzt werden; diese erfolgen nach dem Newtonschen Anziehungsgesetze, das besagt, daß die anziehende Beschleunigung proportional dem Kehrwert des Quadrates der Entfernung der Planeten von der Sonne ist. Aus diesen Aussagen kann — zusammen mit gewissen Festsetzungen über einen Anfangszustand — der ganze Verlauf der Bewegung durch den Prozeß der Integration abgeleitet werden.

Diese Auffassung, deren Ursprung auf die klassischen Fallversuche von Galilei zurückgeht, soll weiterhin für alle Bewegungen maßgebend sein: Der Ausdruck der Beschleunigung in Abhängigkeit von den anderen bei der Bewegung auftretenden veränderlichen Größen  $(\bar{r}, \bar{v}, t)$  kennzeichnet die Art der betrach-

teten Bewegung. (Wenn kein Irrtum möglich, verwenden wir weiterhin auch für die eingeprägte Beschleunigung einfach den Buchstaben  $b$ .)

Der einfachste Fall, der uns dabei zunächst entgegentritt, ist der, daß die Beschleunigung  $\bar{b}$  (oder ihre Komponenten  $b_x, b_y, b_z$ ) als Funktion der Zeit  $t$  allein bekannt ist. Gemäß der Definition von  $\bar{b}$  ergeben sich Geschwindigkeit und Koordinaten — indem wir den früheren Gedankengang umkehren — durch zweimalige Integration (Quadratur). Dieser Fall tritt aber praktisch selten auf; bei den meisten Anwendungen hängt  $\bar{b}$  von den anderen Veränderlichen  $\bar{r}$  und  $\bar{v}$  (entweder einzeln oder von beiden) ab. Und zwar ist diese Abhängigkeit derart, daß sie sich zumeist als eine Summe von einzelnen Gliedern anschreiben läßt, deren jedes eine bestimmte äußere (oder eingeprägte) Einwirkung wiedergibt. Dieser Summe, die physikalisch die gemeinsame Wirkung aller dieser Einflüsse bedeutet, entspricht geometrisch die vektorielle Addition; die gesamte eingeprägte Beschleunigung erscheint somit als Summe einzelner Ausdrücke, von denen jedem eine ganz bestimmte Bedeutung zukommt, ein Vorgang, den man passend als „Zerschneiden der Natur und nachherige Zusammenfügung“ bezeichnet hat.

So ordnet sich einerseits begrifflich die Addition der eingepägten Beschleunigungen den schon früher aufgestellten Gesetzen der vektoriellen Addition der Kräfte unter, andererseits gewinnen wir physikalisch die Möglichkeit, jedes Bewegungsproblem zu verstehen als eine Summenwirkung von einzelnen eingepägten Beschleunigungen, von denen jede ihr Entstehen gewissen physikalischen oder geometrischen Bedingungen verdankt. Gerade dieser Vorgang wird in den folgenden einfachen Beispielen deutlich hervortreten.

Bei der Integration der Bewegungsgleichungen treten Integrationskonstante auf, und zwar zwei für jede Koordinate. Diese Konstanten sind durch Anfangs- oder Randbedingungen zu bestimmen, denen die Integrale zu genügen haben und anzupassen sind. Die tatsächlich eintretende Bewegung wird also bedingt durch die eingepägten Beschleunigungen und durch die Festsetzung eines gewissen Anfangszustandes.

**67. Geradlinige Bewegung des Punktes.** Für die geradlinige Punkt-bewegung genügt die Angabe einer Koordinate, man sagt, die Bewegung hat einen Freiheitsgrad; wir legen die gerade Bahnkurve in eine Koordinatenachse und lassen die Zeiger der Einfachheit halber fort.

a) Die gleichförmige Bewegung ist gekennzeichnet durch den Ansatz:  $b \equiv \dot{v} = 0$ . Es folgt  $\bar{v} = \text{konst.} = c$  und  $x = ct$ , wenn  $c$  den konstanten Wert der Geschwindigkeit bedeutet und etwa für  $t = 0$  auch  $x = 0$  sein soll. Zur anschaulichen Darstellung werden diese Gleichungen  $v = c$  und  $x = ct$  als Geschwindigkeit-Zeit- ( $v-t$ ) und Weg-Zeit- ( $x-t$ ) Linie dargestellt (Abb. 121); die Neigung der letzteren ist ein Maß für die Geschwindigkeit  $\text{tg } \alpha = x/t = \text{konst.} = c$ .

Beispiel 66. Die gleichförmige Geschwindigkeit eines Körpers ist  $c$  m/s, wie groß ist die Geschwindigkeit  $C$  in km/h? Es ist

$$C \text{ km/h} = c \cdot 60 \cdot 60 / 1000 = 3,6 \cdot c \quad (c \text{ in m/s}). \quad (175)$$

Für einen D-Zug mit  $C = 108$  km/h ist  $c = 30$  m/s.

Beispiel 67. Die im Eisenbahnbetriebe verwendeten graphischen Fahrpläne enthalten die Weg-Zeit-Linien für die einzelnen Züge, deren wirkliche Bewegung dabei durch ihre mittlere ersetzt wird, die von Station zu Station als gleichförmig behandelt wird. Die Neigung der einzelnen Linien ist jeweils ein Maß für diese mittlere Geschwindigkeit. Den Aufenthalt in den Stationen entsprechen zur  $t$ -Achse parallele Linienstriche. — Man entwerfe einen solchen Fahrplan für irgendeine Strecke eines Kursbuches.

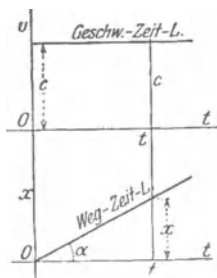


Abb. 121.

von Station zu Station als gleichförmig behandelt wird. Die Neigung der einzelnen Linien ist jeweils ein Maß für diese mittlere Geschwindigkeit. Den Aufenthalt in den Stationen entsprechen zur  $t$ -Achse parallele Linienstriche. — Man entwerfe einen solchen Fahrplan für irgendeine Strecke eines Kursbuches.

b) Gleichförmig beschleunigte Bewegung:  $b = \dot{v} = \text{konst.}$  Wird für  $t = 0$  etwa  $v = v_0$  und  $x = 0$

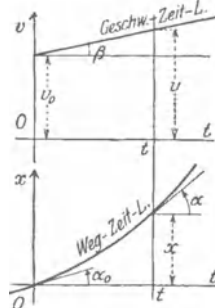


Abb. 122.

vorgeschrieben, so liefert die zweimalige Integration der Gleichung  $\dot{v} = b = \text{konst.}$ :

$$v = v_0 + b t, \quad x = v_0 t + \frac{1}{2} b t^2 = (v_0 + v) t / 2. \quad (176)$$

Die Schaulinien sind in Abb. 122 gegeben. Die Geschwindigkeit-Zeit-Linie ist eine Gerade, die Weg-Zeit-Linie eine Parabel, wobei

$$\text{tg } \beta = (v - v_0) / t = b, \quad \text{tg } \alpha_0 = v_0, \quad \text{tg } \alpha = v.$$

Aus den Gln. (176) folgt durch Ausscheidung von  $t$

$$v^2 = v_0^2 + 2 b x. \quad (177)$$

Für  $b = g = 9,81$  m/s<sup>2</sup> ergeben sich daraus die Gesetze des freien Falles (ohne Widerstände).

Beispiel 68. Wurf nach aufwärts: Wenn die Richtungen von  $v$  und  $b = \text{konst.}$  einander entgegengesetzt sind, so erhält man eine gleichförmig verzögerte Bewegung; die hierfür geltenden Gleichungen folgen aus (176), wenn das Vorzeichen von  $b$  umgekehrt wird. Insbesondere folgen für  $b = -g$  die Gesetze für den „Wurf nach aufwärts“

$$v = v_0 - g t, \quad x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad v^2 = v_0^2 - 2 g x. \quad (178)$$

Die zur Erreichung des höchsten Punktes erforderliche Steigzeit  $T$  und die Steighöhe  $H$  erhält man hieraus für  $v = 0$

$$T = v_0 / g, \quad H = v_0^2 / 2 g. \quad (179)$$

$H$  wird auch als Geschwindigkeitshöhe bezeichnet. Nach Erreichen der höchsten Stelle seiner Bahn fällt der Körper wieder gleichförmig beschleunigt nach abwärts.

Diese beiden Fälle a) und b) sind Sonderfälle des folgenden:

c)  $b$  ist eine Funktion von  $x$  allein:  $b = b(x)$ . In diesem Falle liegt es nahe, auch  $v$  als Funktion von  $x$  anzusehen; da  $x$  selbst wieder eine Funktion von  $t$  ist, so hat man

$$\frac{dv}{dt} \equiv \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} \equiv v \frac{dv}{dx} \equiv \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dx} = b(x),$$

und daraus folgt, wenn für  $x = 0$ :  $v = v_0$  sein soll, durch Integration

$$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2 \int_0^x b(x) dx.} \tag{180}$$

Wenn wir also von der Beschleunigung wissen, daß sie von der Koordinate (dem „Wege“)  $x$  allein abhängt, so läßt sich ein Integral der Bewegungsgleichung  $\ddot{x} = b(x)$  allgemein [d. h. für beliebige Funktionen  $b(x)$ ] angeben, und zwar ist durch Gl. (180) die Geschwindigkeit  $v$  als Funktion des Weges bestimmt:  $v = v(x)$ . Aus dieser Gleichung folgt durch Multiplikation mit  $m/2$  das sog. Energieintegral der Bewegung des Massenpunktes; den links auftretenden Ausdruck  $mv^2/2$  bezeichnet man als kinetische Energie  $T$ , den rechtsstehenden  $\int_0^x m b(x) dx = \int_0^x K(x) dx$  als mechanische Arbeit  $A$ , und nennt  $-A = U$  die potentielle Energie. Wird die Konstante  $m v_0^2/2 = T_0 = h$  gesetzt, so ist die Gl. (180) mit einer der folgenden Formen gleichwertig

$$\boxed{T - T_0 = A \quad \text{oder} \quad T + U = h.} \tag{181}$$

Die Bedeutung des Energieintegrals wird in der Dynamik noch stärker hervortreten (III. Teil).

Setzt man weiterhin  $v = v(x) = dx/dt$ , so kann die Gl. (180) abermals durch Trennung der Veränderlichen integriert werden und gibt

$$dt = \frac{dx}{v(x)}, \quad \text{also} \quad \boxed{t = \int_0^x \frac{dx}{v(x)} = t(x)}, \tag{182}$$

wenn für  $t = 0$ :  $x = 0$  verlangt wird; durch Auflösung dieser Gleichung nach  $x$  ergibt sich dann  $x = x(t)$ , wodurch die Integration vollendet ist.

Beispiel 69. Freier Fall aus großer Höhe. Die Fallbewegung eines Körpers aus großer Höhe gegen die Erde erfolgt nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze, das aussagt, daß sich irgend zwei Körper gegenseitig mit einer Kraft anziehen, die ihren Massen direkt, dem Quadrat der Entfernung ihrer Mittelpunkte  $x$  umgekehrt proportional und nach der Verbindungslinie dieser Mittelpunkte gerichtet ist; die hierbei als Proportionalitätsfaktor auftretende Gravitationskonstante hat für das verwendete Maßsystem einen bestimmten Zahlenwert und eine leicht angebbare Dimension. Wenn wir zum Ausdruck bringen, daß die Beschleunigung an der Erdoberfläche (d. h. für  $x = R$ )  $g$  ist, so können wir zur Ausschaltung der Massen und der Gravitationskonstante die Proportion ansetzen

$$b : g = 1/x^2 : 1/R^2, \quad \text{also} \quad b = gR^2/x^2.$$



Sei  $a$  die Entfernung des Ausgangspunktes vom Erdmittelpunkt und  $v_0 = 0$ , dann ist die Geschwindigkeit  $v$  an der Stelle  $x$  nach Gl. (180) gegeben, wobei  $\vec{b} = -g R^2/x^2$  (weil  $\vec{b}$  nach den abnehmenden  $x$  zu gerichtet ist), und die Grenzen gleich  $a$  und  $x$  zu setzen sind

$$v^2 = 2gR^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right).$$

Daraus folgt weiter

$$v \equiv \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2gR^2}{a}} \sqrt{\frac{a-x}{x}}$$

und nach Gl. (182)

$$t = \int_a^x \frac{dx}{v(x)} = -\sqrt{\frac{a}{2gR^2}} \int_a^x \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx;$$

dabei ist wieder berücksichtigt, daß  $x$  mit wachsendem  $t$  kleiner wird,  $dx$  also negativ sein muß. Durch die Substitution  $x = a \cos^2 \varphi$  folgt endlich

$$\sqrt{\frac{2gR^2}{a^3}} t = \arccos \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{x}{a}} \left( 1 - \frac{x}{a} \right). \tag{183}$$

Diese Gleichung ist nicht nach  $x$  auflösbar. Um ein Bild über den Verlauf der Bewegung zu erhalten, ist in Abb. 123 die  $t$ - $x$ -Linie aufgezeichnet, und diese gibt, von der  $t$ -Linie aus gesehen, auch unmittelbar die  $x$ - $t$ -Linie. Beachte die Zunahme der Geschwindigkeit (oder von  $\tan \alpha$ ) vom Anfang  $A$  bis zum Ende  $E$  der Bewegung!

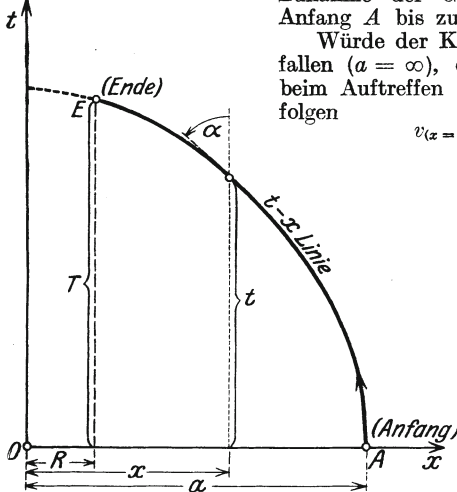


Abb. 123.

Würde der Körper aus dem Unendlichen zur Erde fallen ( $a = \infty$ ), dann würde für die Geschwindigkeit beim Auftreffen auf die Erde für  $x = R = 6,37 \cdot 10^6$  m folgen

$$v_{(x=R)} = \sqrt{2gR} \approx 11180 \text{ m/s.}$$

Für ein aus dem Weltraum zur Erde fallendes Meteor wird allerdings die Geschwindigkeit durch die Lufthülle der Erde erheblich abgebremst, bleibt aber gleichwohl außerordentlich groß, woraus sich die beobachteten großen Eindringtiefen der Meteore erklären.

Beispiel 70. Einfache harmonische Schwingung. Die auf den Körper  $A$  wirkende Beschleunigung  $b$  sei stets gegen einen festen Punkt  $O$  gerichtet (Abb. 124a) und der Entfernung  $\overline{OA} = x$  direkt proportional

$$b = -\omega^2 x \tag{184}$$

(das negative Vorzeichen wieder deshalb, weil  $b$  im Sinne der abnehmenden  $x$  gerichtet ist); die Beschleunigung entspricht also einer Kraft nach Art eines elastischen Fadens oder einer Feder, die allerdings bei der Länge Null die Federkraft Null ergeben sollen. Wenn etwa für  $x = a$ ,  $v_0 = 0$  sein soll, so liefert Gl. (180)

$$v^2 = -2\omega^2 \int_a^x x dx = \omega^2 (a^2 - x^2),$$

also

$$v = \pm \omega \sqrt{a^2 - x^2},$$



wobei das  $+$ -Zeichen für die Bewegung nach rechts, das  $-$ -Zeichen für die Bewegung nach links Geltung hat. Aus  $v = dx/dt$  folgt dann, wenn für  $t = 0$ ,  $x = a$  sein soll,

$$t = -\frac{1}{\omega} \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{x}{a},$$

also

$$\boxed{x = a \cos \omega t, \quad v = -a \omega \sin \omega t, \quad b = -a \omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x.} \quad (185)$$

Eine solche Bewegung nennt man eine einfache harmonische Schwingung. Die durch diese Gleichungen gegebenen Kurven, nämlich die  $x$ - $t$ -Linie,  $v$ - $t$ -Linie und  $b$ - $t$ -Linie sind in Abb. 124 b eingetragen.

Aus der Form dieser Ausdrücke ersieht man, daß immer nach Ablauf der Zeit

$$\boxed{T = 2\pi/\omega} \quad (186)$$

dieselben Werte von  $x$ ,  $v$ ,  $b$  wiederkehren. Diese Zeit nennt man die periodische Zeit oder kurz die Periode oder auch aus einem später noch deutlicher hervortretenden Grunde die Dauer der Eigenschwingung; sie ist vom Ausschlag  $a$  unabhängig und allein durch die Konstante  $\omega$  bestimmt, die in dem Ausdruck für die Beschleunigung (als  $\omega^2$ ) vorkommt. — Unter der Frequenz (Häufigkeit)  $p$  versteht man die Schwingungszahl in 1 s, und da also  $pT = 1$ , so ist

$$\boxed{p = 1/T = \omega/2\pi.} \quad (187)$$

Unter der Kreisfrequenz eines Schwingungsvorganges versteht man die Anzahl der Schwingungen in  $2\pi$  Sekunden. Nach Gl. (187) ist diese gegeben durch

$$\boxed{\omega = 2\pi p = 2\pi/T;} \quad (188)$$

die in der Bewegungsgleichung auftretende Konstante  $\omega$  stellt also unmittelbar die Kreisfrequenz dar. In Beispiel 78 wird gezeigt, daß diese Kreisfrequenz nichts anderes ist als die Winkelgeschwindigkeit eines auf einem Kreise vom Durchmesser  $2a$  umlaufenden Punktes, dessen Projektion auf einen Durchmesser gerade diese einfache harmonische Schwingung ergibt.

Viele von den in der Technik betrachteten Schwingungsvorgängen von Systemen mit einem Freiheitsgrad sind von dieser einfachen Art und zeigen dieselben Eigenschaften.

Beispiel 71. Wenn die Beschleunigung als Funktion des Weges nicht durch einen analytischen Ausdruck, sondern (wie man sagt) empirisch gegeben ist, wie z. B. die Dampfkraft durch das „Indikatordiagramm“ als Funktion des Kolbenweges oder die der sog. Tangentialkraft einer Dampfmaschine entsprechende Beschleunigung als Funktion des Kurbelweges  $r\varphi$ , so empfiehlt es

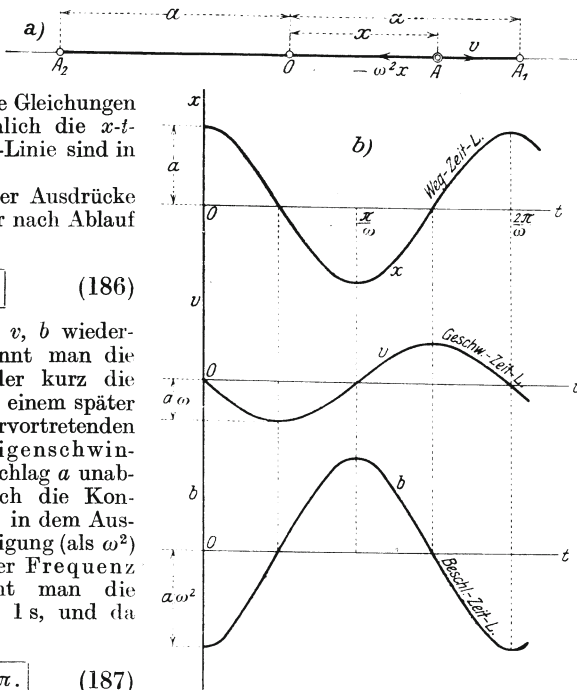


Abb. 124.

sich, die durch die Gln. (180) und (182) gegebenen Operationen, die die endliche Bewegungsgleichung  $x = x(t)$  liefern, zeichnerisch auszuführen; dies ist in Abb. 125 für eine periodische Bewegung von der eben angedeuteten Art ausgeführt, die im Maschinenbetriebe vorkommt: Die Kurve  $b(x)$  ist gegen die  $x_0$ -Achse so angenommen, wie sie etwa der Tangentialkraft (oder Drehkraft) einer einfachwirkenden Dampfmaschine entspricht. Damit die Bewegung periodisch wird, also nach Zurücklegung eines bestimmten Weges (etwa einer Kurbelumdrehung) die Geschwindigkeit den gleichen Wert erreicht wie zuvor, muß  $b$  selbst diese Periode haben, und überdies muß das in Gl. (180) auftretende Integral, über diese Wegperiode erstreckt, Null geben; d. h. die  $x$ -Achse ist so zu verlegen, daß die Flächenstücke der  $b$ -Linie über und unter der  $x$ -Achse gleich groß ausfallen. Die Kon-

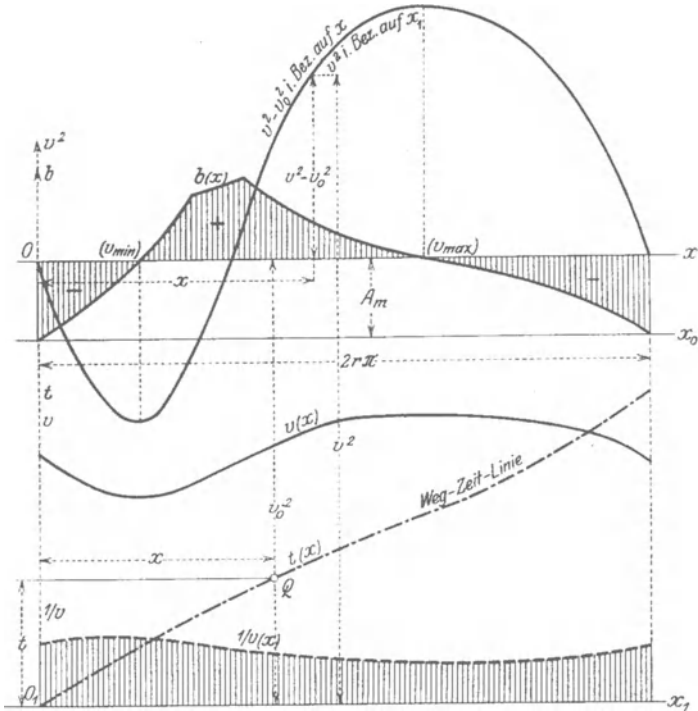


Abb. 125.

stante  $v_0$  ist den Anfangsbedingungen entsprechend zu wählen (wir werden in der Dynamik der Maschine sehen, daß hierbei eine eigentümliche Schwierigkeit vorliegt), dann liefert die Ausführung der Integration nach Gl. (180)  $v^2$  als Funktion von  $x$ , wodurch auch  $v(x)$  und  $1/v(x)$  gegeben sind. Die Fläche dieser letzteren Kurve, vom Anfangspunkt gemessen, liefert nach Gl. (182)  $t = t(x)$  und damit auch  $x = x(t)$ , wobei die Wegachse wagrecht gerichtet ist. Bei Ausführung dieser Konstruktion ist darauf zu achten, daß für alle vorkommenden Größen verschiedener Art ( $b$ ,  $v^2$ ,  $v$ ,  $1/v$ ,  $t$ ) passende Maßstäbe gewählt werden, die von der angestrebten Genauigkeit abhängen und eine angemessene Unterbringung auf der verfügbaren Zeichenfläche zulassen.

**Bemerkung über die graphische Integration.** Für die hier und in allen ähnlichen Fällen notwendige Ermittlung der Fläche, die zwischen einer empirisch gegebenen Kurve, der  $x$ -Achse und

zwei begrenzenden Ordinaten eingeschlossen wird, sind verschiedene Verfahren im Gebrauch: entweder man benutzt hierfür einen der dazu geeigneten Apparate, ein Planimeter, einen Integraphen, oder man zeichnet die Kurve auf ein Millimeterpapier und erhält die Fläche durch Abzählung der Quadrate zwischen je zwei entsprechende nahe gewählten Ordinaten. Eine einfache und sehr verwendbare Methode zur angenäherten Ermittlung der Integralkurve  $K$  einer gegebenen Kurve  $k$  besteht in der graphischen Integration, die in Abb. 126a und b in zwei Anwendungsformen dargestellt ist. Die Integralkurve  $K$  einer gegebenen Kurve  $k$  ist definitionsgemäß gegeben durch

$$Y = \int_0^x y dx, \text{ d. h. } dY = y dx, \text{ oder } \frac{dY}{dx} = y.$$

Die Ordinate  $y$  der gegebenen Kurve  $k$  gibt daher im wesentlichen die Tangentensteigung von  $K$  an der betreffenden Stelle  $x$ .

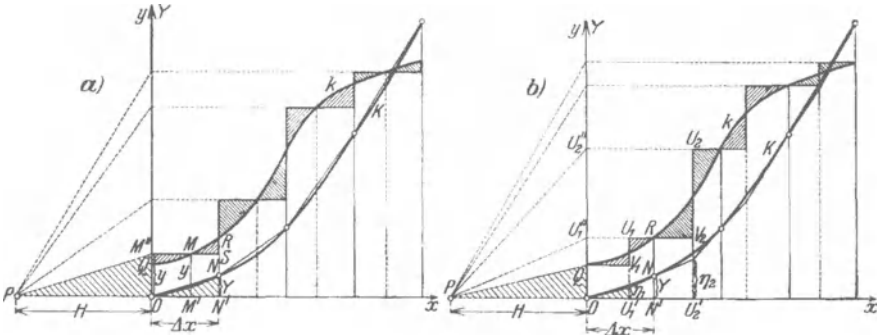


Abb. 126.

Um diesen Zusammenhang zeichnerisch zu verwerten, teilt man die Fläche zwischen  $k$  und der  $x$ -Achse in eine entsprechende Anzahl von Streifen (nicht notwendig von derselben Breite) parallel zur  $y$ -Achse. Bei schwach gekrümmten Kurven wird man die Streifen breit, bei stärker gekrümmten schmaler wählen; die Randordinaten lege man stets durch die Maxima und Minima von  $k$ . Sodann zieht man nach Abb. 126a in jedem Streifen eine „Mittelordinate“  $y = \overline{MM'}$ , so daß  $y \Delta x$  (nach guter Schätzung) die Fläche des betreffenden Streifens darstellt. (In Abb. 125a sind die schraffierten Flächen paarweise gleich gemacht.) Dann wählt man einen „Pol“  $P$  auf der  $x$ -Achse ( $\overline{OP} = H \equiv$  Polweite), projiziert  $M$  nach  $M''$ , verbindet  $P$  mit  $M'$  und zieht  $\overline{ON} \parallel \overline{PM''}$ ; dann setzt man  $\overline{N'N} = \Delta Y$  und findet aus der Ähnlichkeit von  $\triangle ON'N$  und  $\triangle POM''$  die Beziehung

$$\Delta Y : \Delta x = y : H, \quad y \Delta x = H \Delta Y$$

und

$$\boxed{f = \sum y \Delta x = H \sum \Delta Y = HY,} \quad (189)$$

d. h. die Ordinate  $Y$  der so stückweise entstehenden Kurve  $K$  gibt, mit  $H$  multipliziert, für jede Stelle  $x$  die Fläche der Kurve  $k$ . (In den Abb. 126a und b ist an Stelle von  $\Delta Y$  nur  $Y$  geschrieben.)

Bei dieser Art der graphischen Integration, die man „Integration durch mittlere Ordinaten“ nennt, wird die gegebene Kurve durch eine Stufenkurve ersetzt, die mit ihr an jeder einzelnen Streifengrenze gleichen Inhalt hat; an den Streifengrenzen sind aber die Ordinaten der gegebenen ( $k$ ) und der Stufenkurve verschieden. Die durch Zeichnung gefundene Integralkurve  $K$  und die genaue Integralkurve, die gesucht wird, haben daher an den Streifengrenzen gleiche Ordinaten (weil die Flächen selbst richtig erfaßt sind), aber nicht die gleiche Neigung (weil die durch Zeichnung gefundene Integralkurve  $K$  in jedem Streifen eine Neigung hat, die der mittleren Ordinate entspricht, während die Neigung der richtigen Integralkurve an der Streifengrenze durch die Endordinate gegeben ist). Die durch dieses Verfahren gefundene Integralkurve  $K$  ist ein Sehnepolygon der richtigen. Wenn es nur auf den gesamten Inhalt eines Flächenstückes ankommt, ist dieses Verfahren zu empfehlen.

Wenn aber die Integralkurve in ihrem ganzen Verlauf ermittelt werden soll, so ist die „Integration durch mittlere Abszissen“ vorzuziehen, die in Abb. 126b dargestellt ist. Bei dieser wird in jedem der Streifen, in welche die Fläche der gegebenen Kurve  $k$  geteilt wurde, eine „mittlere Abszisse“ so eingepaßt, daß die gleichsinnig schraffierten Dreieckspaare  $QV_1M$  und  $MU_1R$  inhaltsgleich sind. Die gegebene Kurve  $k$  wird auf diese Weise durch eine Stufenkurve ersetzt, die in jedem Streifen zwei Stufen zeigt, wobei die Endstufe auf gleicher Höhe liegt wie die Anfangstufe im folgenden. Die Stufenkurve hat daher mit der gegebenen  $k$  an jeder Streifengrenze gleichen Inhalt und gleiche Ordinate, daher hat die durch den gleichen Zeichnungsvorgang wie zuvor gefundene Integralkurve  $K$  mit der richtigen an jeder Streifengrenze sowohl gleiche Ordinaten (weil die Flächen von  $k$  und der Stufenkurve gleich sind) als auch gleiche Neigung (weil an den Streifengrenzen auch die Ordinaten von  $k$  und der Stufenkurve übereinstimmen). Die nach diesem Verfahren gefundene Integralkurve  $K$  ist ein Tangentenpolygon zu der richtigen, wobei überdies die Berührungspunkte auf den Grenzordinaten liegen und durch das Verfahren exakt geliefert werden. In dieses Tangentenpolygon läßt sich die richtige Integralkurve mit viel größerer Genauigkeit einzeichnen als um das Sehnepolygon in Abb. 126a.

d)  $b$  ist eine Funktion von  $v$  allein:  $b \equiv b(v) = \frac{dv}{dt}$ . In diesem Falle folgt durch Trennung der Veränderlichen (wenn für  $t = 0$ ,  $v = v_0$  verlangt wird)

$$t = \int_{v_0}^v \frac{dv}{b(v)} = t(v) \quad (190)$$

und durch Umkehrung  $v = v(t) = \frac{dx}{dt}$ , woraus sich (wenn für  $t = 0$ ,  $x = 0$  sein soll) unmittelbar

$$x = \int_0^t v(t) dt \quad (191)$$

als die Gleichung für die Bewegung in endlicher Form ergibt.

Man kann auch (ähnlich wie in Fall c)  $v$  als Funktion von  $x$  erhalten, indem man ansetzt

$$\frac{dv}{dt} \equiv v \frac{dv}{dx} = b(v);$$

daraus folgt, wenn für  $x = 0$ ,  $v = v_0$  sein soll

$$x = \int_{v_0}^v \frac{v \, dv}{b(v)} = x(v) \quad (192)$$

und daraus durch Umkehrung  $v = v(x)$ .

Die Abhängigkeit der Beschleunigung (oder Kraft) von der Geschwindigkeit kommt vor bei der Bewegung von Körpern unter dem Einfluß des Widerstandes des umgebenden Mittels (Luft oder Wasser). Wie jeder Körper, der mit anderen in Berührung ist, von diesen an den Berührungsstellen Druck- und Reibungskräfte erfährt, so wird auch ein in Luft oder Wasser bewegter Körper durch die umgebende Flüssigkeit solche Druck- und Reibungskräfte erfahren, die teils die Bewegung unserer Fahrzeuge hindernd beeinflussen, teils zu Nutzzwecken dienen, wie der „Auftrieb“ bei den Flugzeugen. Sehen wir von dieser nützlichen Verwertung ab, so haben wir uns im wesentlichen auf die Erfahrung zu stützen, daß man zur gleichförmigen Bewegung eines Körpers in Luft oder Wasser dauernd eine Kraft nach vorwärts aufwenden muß, und dies deutet darauf hin, daß die Summe der Druck- und Reibungskräfte auf den bewegten Körper im wesentlichen eine Kraft im Gegensinne zur Bewegungsrichtung ergibt; von diesem Widerstand zeigen die Messungen, daß er außer von der Dichte und Zähigkeit des Mittels und der Größe und Form des Körpers im wesentlichen — und darauf kommt es hier allein an — von der Geschwindigkeit abhängt, und zwar hat sich ergeben, daß die Beobachtungen in den meisten Fällen befriedigend dargestellt werden können, wenn der Widerstand mit dem Quadrat der Geschwindigkeit wachsend angenommen wird. Wir können dann für die diesem Widerstande entsprechende Beschleunigung setzen:  $b_w = -k v^2$ , wobei  $k$  die erstgenannten Eigenschaften (Dichte und Zähigkeit des Mittels, Größe und Form des Körpers) in sich enthält (Näheres hierüber siehe Hydraulik). Dieser Ansatz wird meist verwendet, wenn es sich um die Berücksichtigung des Widerstandes des umgebenden Mittels handelt; bei kleinen Geschwindigkeiten begnügt man sich jedoch mit dem linearen Ansatz für die Geschwindigkeit:  $b_w = -k v$ , weil dies eine große Vereinfachung der Rechnung bedeutet, und in vielen Fällen ausreichende Ergebnisse liefert.

Beispiel 72. Der Widerstand, den ein Körper bei seiner Bewegung erfährt, ist der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional angenommen,  $b_w = -k v$ ; man bestimme die Bewegung, wenn die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  gegeben ist. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{dv}{dt} = b_w = -k v,$$

daraus folgt  $\frac{dv}{v} = -k dt$ , also durch Integration  $v = v_0 e^{-kt} = \frac{dx}{dt}$  und weiter als endliche Bewegungsgleichung

$$x = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}).$$

Beispiel 73. Freier Fall mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes. Wenn außer der Beschleunigung  $g$  der Schwere noch der Luftwiderstand mit der Beschleunigung  $b_w = -k v^2$  wirkt, so haben wir unter Berücksichtigung des in 66 Gesagten zu setzen

$$b \equiv \frac{dv}{dt} = g - b_w = g - k v^2 \quad (193)$$

und erhalten mit der abkürzenden Bezeichnung  $k/g = 1/c^2$

$$dt = \frac{dv}{g - k v^2} = \frac{1}{g} \frac{dv}{1 - (v/c)^2} = -\frac{ic}{g} \frac{du}{1 + u^2},$$

indem wir weiter  $v/c = -i u$ ,  $dv = -i c du$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) einführen. Daher ist (wenn für  $t = 0$ ,  $v = 0$ ,  $u = 0$  ist)

$$t = -\frac{ic}{g} \operatorname{arc} \operatorname{tg} u, \quad u = \operatorname{tg} \frac{igt}{c} = \frac{iv}{c};$$

daraus folgt

$$v = \frac{c}{i} \operatorname{tg} \frac{igt}{c} = c \operatorname{Eg} \frac{gt}{c} = c \frac{\operatorname{Sin} gt/c}{\operatorname{Cos} gt/c} \quad (194)$$

und aus  $v = dx/dt$  endlich (wenn für  $t = 0$ ,  $x = 0$  sein soll)

$$x = \frac{c^2}{g} \log \operatorname{Cos} \frac{gt}{c}. \quad (195)$$

Aus Gl. (192) ergibt sich auch direkt  $v = v(x)$ ; denn es ist

$$x = \int_0^v \frac{v dx}{g - k v^2} = -\frac{1}{2k} \ln \left( \frac{g - k v^2}{g} \right) = -\frac{1}{2k} \ln \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

und daraus durch Umkehrung

$$v = c [1 - e^{-2g x / c^2}]^{1/2} \quad (196)$$

eine Gleichung, die sich auch aus den vorhergehenden durch Elimination von  $t$  ergibt. Für  $t \rightarrow \infty$  wird  $v = c = \sqrt{g/k}$ , d. h. nach theoretisch unendlich langer (praktisch oft jedoch nur wenige Sekunden betragender) Zeit nähert sich  $v$  dem konstanten

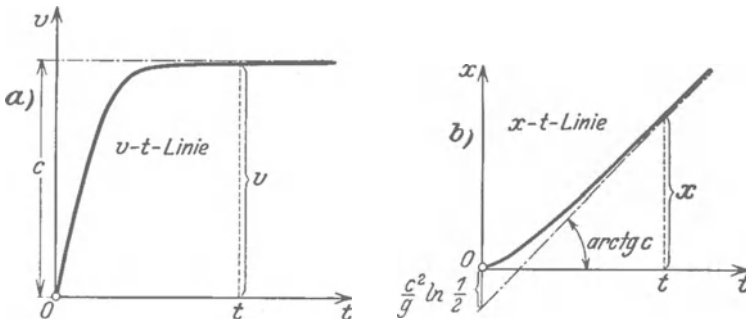


Abb. 127.

Wert  $c$ , der im wesentlichen durch den Beiwert  $k$  in dem Ansatz für den Luftwiderstand bedingt ist; die Bewegung nähert sich demnach asymptotisch, d. h. für  $t \rightarrow \infty$ , einer gleichförmigen Bewegung mit dieser Grenzgcschwindigkeit  $c$ .

Um dies auch aus den Gleichungen abzuleiten, rechnen wir zunächst aus Gl. (194)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v = \lim_{t \rightarrow \infty} c \frac{e^{\sigma t/c} - e^{-\sigma t/c}}{e^{\sigma t/c} + e^{-\sigma t/c}} = c \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2\sigma t/c}}{1 + e^{-2\sigma t/c}} = c$$

und ebenso folgt aus Gl. (195)

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x &= \frac{c^2}{g} \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{2} (e^{\sigma t/c} + e^{-\sigma t/c}) \approx \frac{c^2}{g} \left[ \ln \frac{1}{2} + \ln e^{\sigma t/c} \right] \\ &\approx \frac{c^2}{g} \ln \frac{1}{2} + \frac{c^2}{g} \frac{g t}{c} = \frac{c^2}{g} \ln \frac{1}{2} + c t. \end{aligned}$$

Daher ergibt sich auch für den Weg asymptotisch — d. h. für große  $t$  — die für die gleichförmige Bewegung geltende Gleichung  $x_0 + ct$ . In Abb. 127 a, b ist die  $v$ - $t$ -Linie und die  $x$ - $t$ -Linie für diese Bewegung eingetragen.

**68. Weitere integrierbare Bewegungsaufgaben.** Wenn  $b$  eine beliebige Funktion der drei Argumente  $x, v, t$  ist, so läßt sich die Integration der Bewegungsgleichungen nicht allgemein durchführen. Es gibt jedoch noch einige Fälle, die praktisch wichtige Bewegungsformen betreffen und die vollständig gelöst werden können; mit ihnen befassen sich die folgenden Beispiele.

**Beispiel 74. Gedämpfte harmonische Schwingung.** Wenn außer der „Federkraft“ —  $\omega^2 x$  (wie in Beispiel 70) noch ein der Bewegung entgegen gerichteter Widerstand — eine Dämpfung — vorhanden ist, die hier (wenn es sich um kleine Geschwindigkeiten handelt, nach 67d) der Geschwindigkeit  $v \equiv \dot{x}$  proportional und in der Form  $b_w = -2\lambda v$  angenommen werden soll, so lautet die Bewegungsgleichung

$$b = -\omega^2 x - 2\lambda v, \quad \text{oder} \quad \ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (197)$$

$2\lambda$  nennt man die Dämpfungskonstante. Die Integration wird geleistet durch den Ansatz:  $x = A e^{pt}$  und liefert für  $p$  die quadratische Gleichung

$$p^2 + 2\lambda p + \omega^2 = 0, \quad \text{deren Wurzeln sind:} \quad p_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}.$$

Die vollständige Lösung lautet daher

$$x = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

worin  $A_1$  und  $A_2$  die Integrationskonstanten bedeuten. Für die Art der eintretenden Bewegung sind die Zahlenwerte von  $\lambda$  und  $\omega$  maßgebend; hierbei sind folgende Fälle zu unterscheiden:

a) Schwache Dämpfung  $\lambda < \omega$ ; wir setzen  $\sqrt{\lambda^2 - \omega^2} = i\nu$  und erhalten

$$e^{p_{1,2} t} = e^{-\lambda t} e^{\pm i\nu t} = e^{-\lambda t} (\cos \nu t \pm i \sin \nu t),$$

so daß

$$x = e^{-\lambda t} [(A_1 + A_2) \cos \nu t + i(A_1 - A_2) \sin \nu t].$$

Um die Lösung in reeller Form zu erhalten, müssen wir  $A_1$  und  $A_2$ , die willkürlich sind, als konjugiert-komplexe Größen annehmen und setzen

$$A_1 = \frac{1}{2}(a_1 - a_2 i), \quad A_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 i),$$

wobei  $a_1$  und  $a_2$  reell sind. Führen wir zwei weitere Konstante  $a, \varepsilon$  mittels der Gleichungen ein

$$A_1 + A_2 = a_1 = a \sin \varepsilon, \quad i(A_1 - A_2) = a_2 = a \cos \varepsilon,$$

so erhält man als endliche Bewegungsgleichung

$$\boxed{x = a e^{-\lambda t} \sin(\nu t + \varepsilon)}, \quad (198)$$

wobei  $a$  und  $\varepsilon$  die Integrationskonstanten sind.



Da der Sinus zuerst nach der Zeit  $t = -\varepsilon/\nu$  und sodann nach jeder Halbperiode

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\nu} = \frac{\pi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}} \tag{199}$$

die Grenzen  $\pm 1$  annimmt und dazwischen je einmal verschwindet, so verläuft  $x$  zwischen den beiden durch die Gleichungen  $x = \pm a e^{-\lambda t}$  gegebenen Kurven (Abb. 128).  $e^{-\lambda t}$  nennt man den Dämpfungsfaktor.

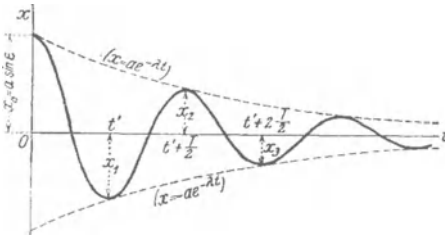


Abb. 128.

Die Periode  $T$  erscheint im Vergleich zur ungedämpften Schwingung mit demselben Werte von  $\omega$  vergrößert, d. h. die Schwingungen verlaufen bei der gedämpften Schwingung langsamer. Die aufeinanderfolgenden Maxima und Minima treten ein, sobald

$$\dot{x} = a e^{-\lambda t} [-\lambda \sin(\nu t + \varepsilon) + \nu \cos(\nu t + \varepsilon)] = 0,$$

d. h. für alle  $t$ , für die

$$\operatorname{tg}(\nu t + \varepsilon) = \nu/\lambda$$

ist. Wenn diese Gleichung etwa für  $t = t'$  befriedigt ist, so trifft dasselbe zu für die Werte

$$t', \quad t' + \frac{T}{2}, \quad t' + 2 \frac{T}{2}, \quad t' + 3 \frac{T}{2}, \dots$$

Die diesen Zeiten entsprechenden Wege sind

$$x_1 = a e^{-\lambda t'} \sin(\nu t' + \varepsilon), \quad x_2 = -a e^{-\lambda t' - \lambda T/2} \sin(\nu t' + \varepsilon) \text{ usw.},$$

und es folgt für das Verhältnis je zweier aufeinanderfolgender Ausschläge (abgesehen vom Vorzeichen)

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \dots = \text{konst.} = e^{\lambda T/2}; \tag{200}$$

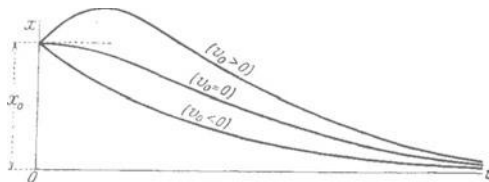


Abb. 129.

dies nennt man das Dämpfungsverhältnis und den natürlichen Logarithmus davon, also  $\ln x_1 - \ln x_2 = \lambda T/2$  (nach Gauß) das logarithmische Dekrement; wir erhalten also das Ergebnis, daß die logarithmische „Abnahme“ der Schwingungsweg eine längs des ganzen Schwingungsverlaufes konstante Größe besitzt.

b) Starke Dämpfung  $\lambda > \omega$ ,  $\sqrt{\lambda^2 - \omega^2} > 0$ . Die Weg-Zeit-Linie wird dargestellt durch

$$x = A_1 e^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2})t} + A_2 e^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2})t}. \tag{201}$$

Da beide Exponenten der  $e$ -Funktionen reell sind und  $\lim_{t \rightarrow \infty} x \rightarrow 0$ , so verläuft die Bewegung ohne Schwingungen asymptotisch gegen die Lage  $x = 0$ . Die besondere Form der  $x$ - $t$ -Linie hängt von dem Werte der Geschwindigkeit  $v_0$  für  $t = 0$  ab; je nachdem  $v_0 \gtrless 0$  ist, erhält man die drei in Abb. 129 gegebenen Formen.

c) Für den Übergangsfall  $\lambda = \omega$  erhält man die vollständige Lösung durch eine Grenzbetrachtung in der Form

$$x = (A + Bt)e^{-\lambda t}, \quad (202)$$

$x$  verläuft hier ebenfalls ohne Schwingungen gegen Null.

Die hier und in Beispiel 70 betrachteten Fälle bezeichnet man auch als „freie“ Schwingungen des Punktes.

**Beispiel 75. Erzwungene Schwingung. Resonanz.** Wir wollen annehmen, daß außer der „Federkraft“  $-\omega^2 x$  und der „Dämpfungskraft“  $-2\lambda v$  noch eine mit der Zeit periodisch veränderliche eingeprägte Kraft vorhanden sei, die also in einem bestimmten „Rhythmus“ auf den schwingungsfähigen Punkt-körper einwirkt. Derartige periodische Kräfte spielen nicht nur im Gebiete der technischen Mechanik eine große Rolle (man denke an die Bewegungen, die durch die periodisch verlaufenden Massenkräfte von Maschinen in diesen selbst und in Gebäuden oder Fahrzeugen aller Art auftreten, in denen Maschinen eingebaut sind), sie sind auch für alle anderen Zweige der Physik, wie Akustik, Elektrizitätslehre (Radiotechnik), Optik usw. von außerordentlicher Bedeutung.

Den einfachsten Fall erhalten wir, wenn wir die periodische Kraft als mit der Zeit sinusförmig veränderlich annehmen, also für die Beschleunigung etwa  $R \sin \nu t$  setzen, so daß die Bewegungsgleichung die Form annimmt

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega^2 x = R \sin \nu t. \quad (203)$$

Dieser Ansatz rechtfertigt sich dadurch, daß man jede beliebige periodisch veränderliche Kraft in eine nach trigonometrischen Funktionen der Vielfachen von  $\nu t$  fortschreitende Reihe entwickeln und den Einfluß jedes einzelnen Gliedes dieser Reihe untersuchen kann. Das von  $t$  abhängige Glied in der Bewegungsgleichung (203) nennt man Störungs-glied, und  $\nu$  ist die Kreisfrequenz der Störung.

Wenn in einem Kraftwagen der Motor läuft, nehmen wir Erschütterungen wahr, die im „Tempo“ der Motorbewegung erfolgen. Aus allen derartigen Erscheinungen schließen wir, daß die eintretende Bewegung ebenfalls eine mit  $t$  periodisch veränderliche sein wird, und zwar von derselben Kreisfrequenz  $\nu$  wie die der „erregenden“ oder „eingepprägten“ Kraft; wir setzen daher, indem wir die „Phasenlage“ dieser erzeugten Schwingung gegen die erregende Beschleunigung offen lassen

$$x = x_1 = C \sin(\nu t - \alpha), \quad (204)$$

wobei  $C$  und  $\alpha$  jedoch nicht willkürliche Integrationskonstante, sondern durch die Differentialgl. (203) selbst bestimmt sind. Soll der Ansatz (204) die Gl. (203) identisch erfüllen, so müssen die Koeffizienten von  $\sin(\nu t - \alpha)$  und  $\cos(\nu t - \alpha)$  zu beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen; hierzu setzen wir in Gl. (203) rechts  $\nu t = (\nu t - \alpha) + \alpha$  und erhalten:

$$\begin{aligned} -\nu^2 C \sin(\nu t - \alpha) + 2\lambda \nu C \cos(\nu t - \alpha) + \omega^2 C \sin(\nu t - \alpha) \\ = R [\sin(\nu t - \alpha) \cos \alpha + \cos(\nu t - \alpha) \sin \alpha], \end{aligned}$$

daraus fließen durch Vergleich der Koeffizienten von  $\sin(\nu t - \alpha)$  und  $\cos(\nu t - \alpha)$  die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} (\omega^2 - \nu^2) C &= R \cos \alpha \\ 2\lambda \nu C &= R \sin \alpha \end{aligned} \right\}$$

oder endlich

$$C = \frac{R}{\sqrt{(\omega^2 - \nu^2)^2 + 4\lambda^2 \nu^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\lambda \nu}{\omega^2 - \nu^2}. \quad (205)$$

Es ergibt sich für  $x_1 = x_1(t)$  tatsächlich eine einfache harmonische Schwingung von derselben Kreisfrequenz  $\nu$ , wie sie die „erregende“ Schwingung hat; diese beiden durchschreiten aber ihre Nullwerte nicht gleichzeitig; vielmehr tut dies für  $\omega > \nu$  die eintretende Schwingung immer später als die erregende ( $\alpha > 0!$ ), sie ist, wie man sagt, „in der Phase gegen die erregende Schwingung zurück“.

Zu dieser „partikulären“ Lösung nach Gl. (204), die keine willkürliche Konstante enthält, ist noch die Lösung (196) der zugehörigen „homogenen“ Gl. (195) hinzuzufügen, mittels welcher die zwei Anfangsbedingungen, die der Aufgabe zugehören, erfüllt werden können. Diese „überlagerte freie Schwingung“ klingt aber rasch ab, und im weiteren Verlaufe bleibt nur die erzwungene Schwingung (204) im Tempo der erregenden Schwingung übrig.

Diskussion der erhaltenen Lösung. Betrachten wir erregende Schwingungen mit verschiedenen Kreisfrequenzen  $\nu$ , d. h. lassen wir  $\nu$  etwa von 0 bis  $\infty$  wachsen, so zeigt Gl. (205), daß  $C$  bei gegebenen  $R, \omega, \lambda$  am größten wird, wenn der Nenner seinen kleinsten Wert annimmt, d. h. für  $\nu^2 = \omega^2 - 2\lambda^2$ . Nicht für diesen Wert von  $\nu$ , sondern für  $\nu = \omega$ , wenn also die erregende Schwingung im selben Rhythmus erfolgt wie die ungedämpfte harmonische Schwingung, spricht man von Resonanz; für  $\lambda = 0$ , und  $\nu = \omega$  wird sogar  $C = \infty$ , was ein übermäßiges Anwachsen der Schwingungen anzeigt. Die Abhängigkeit des Wertes  $C$  von  $\nu$  ist in Abb. 130a dargestellt; für  $\nu = \omega$  ist  $C_{(\nu=\omega)} = R/2\lambda\omega$ , für  $\nu = \sqrt{\omega^2 - 2\lambda^2} < \omega$  erhält man den größten Wert von  $C$ , und es ist, wie man durch Einsetzen dieses Wertes aus (205) unmittelbar abliest,

$$C_{\max} = \frac{R}{2\lambda\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}} = \frac{R}{2\lambda\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} > C_{(\nu=\omega)}.$$

Die Abhängigkeit des Winkels  $\alpha$  von  $\nu$  ist durch Abb. 130b gegeben, die die bildliche Darstellung der zweiten Gl. (205) ist; für  $\nu = 0$  ist  $\alpha = 0$ , für  $\nu = \omega$ :  $\alpha = \pi/2$ ; für  $\nu = \infty$ :  $\alpha = \pi$ .

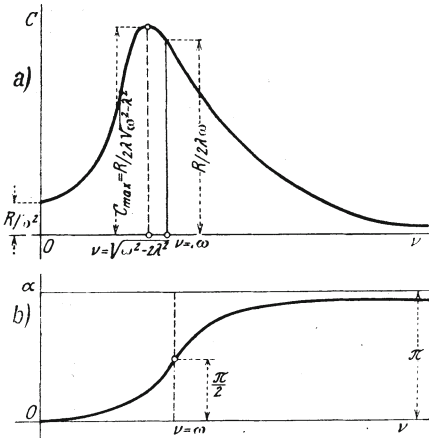


Abb. 130.

Aus diesen Ergebnissen müssen wir schließen, daß jedes „schwingungsfähige System“ sehr stark durch periodische Kräfte beeinflussbar ist, deren Periode mit seiner Schwingungszahl übereinstimmen, oder dieser nahe kommen. So können Brücken unter dem Gleichtritt taktmäßig marschierender Truppenkörper gefährdet werden, wenn das Marschtempo mit der Schwingungszahl der elastischen Hauptschwingung der Brücke übereinstimmt. Ebenso können Wellenbrüche bei Maschinen auftreten — und sind tatsächlich beobachtet worden —, wenn ihre Drehzahl mit der eigenen Schwingungszahl der Welle übereinstimmt.

Man erkennt daraus, wie wichtig es ist, die Schwingungszahlen der Bauwerke, Decken, Maschinenwellen, Gestelle u. dgl. zu kennen, und in der Tat sind besondere Verfahren zu ihrer Bestimmung bekannt (s. Dynamische Festigkeitslehre). Diese Schwingungszahlen der eigenen elastischen Schwingungen bezeichnet man als Eigenschwingungszahlen oder als Eigenwerte der zugehörigen Bewegungsgleichung.

Ein Beispiel, bei dem diese Erscheinung in größtem Ausmaße zur Anwendung kommt, ist die drahtlose Telegraphie und Telephonie, bei der die Resonanz zwischen einer erregenden elektrischen Schwingung und der „elektrischen“ Eigenschwingung eines „Schwingungskreises“ verwertet wird. Eines der interessantesten Resonanzprobleme bietet übrigens auch die Stimme des Menschen und der Tiere dar.

Beispiel 76. Schwingungen nach dem quadratischen Widerstandsgesetz<sup>1</sup>. In der Bewegungsgleichung des Beispiels 73 ist das Widerstandsglied  $-2\lambda v$  wegen der auftretenden ersten Potenz der Geschwindigkeit so beschaffen, daß es die Richtung des Widerstandes von selbst entgegengesetzt

<sup>1</sup> Vgl. Phys. Z. Bd. 29, S. 938. 1928.

von  $v$  einführt, d. h. diese Bewegungsgleichung gilt unmittelbar für den Hin- und Rückgang der Schwingung.

Wenn dagegen — außer der elastischen Kraft — ein Widerstand einwirkt, dessen Größe an jeder Stelle dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist, so muß man die Umkehrung der Richtung des Widerstandes bei Umkehrung der Bewegungsrichtung, also bei Umkehrung des Vorzeichens von  $v$ , besonders zum Ausdruck bringen. Die Bewegungsgleichung ist demgemäß in der Form anzuschreiben (die Konstanten sind mit Rücksicht auf die folgenden Rechnungen gewählt)

$$b \ddot{x} = -2 \alpha^2 x \pm k v^2, \tag{206}$$

wobei das obere Vorzeichen für den Rückgang (d. i. gegen die Stelle  $x = 0$  hin), das untere Vorzeichen für den Hingang (d. i. von der Stelle  $x = 0$  weg) gelten soll. In diesem Fall liegt es (ähnlich wie in 67 c) nahe, auch die Geschwindigkeit als Funktion von  $x$  zu betrachten und demgemäß die Bewegungsgleichung in der Form anzuschreiben

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dx} \mp 2 k v^2 = -2 \alpha^2 x. \tag{207}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung in  $v^2$ , und ihr Integral läßt sich, wenn für  $x = x_0, v = 0$  sein soll, für den Rückgang in der Form anschreiben:

$$v = -\frac{\alpha}{k} \left\{ 1 + 2 k x - (1 + 2 k x_0) e^{-2k(x_0-x)} \right\}. \tag{208}$$

Die Stellen  $v = 0$  geben die  $x$ -Koordinaten der auftretenden Umkehrpunkte  $x_1, x_2, x_3$  usw. an. Diese Bedingung ( $v = 0$ ) läßt sich auch in der Form schreiben

$$\frac{e^{2kx_0}}{1 + 2kx_0} = \frac{e^{2kx_1}}{1 + 2kx_1} = \dots$$

Zeichnet man daher (Abb. 131) die Kurve

$$y = 2 k x - \ln(1 + 2 k x), \tag{209}$$

indem man als Abszisse die Größe  $k x$  aufträgt, so sind je zwei aufeinanderfolgende Werte von  $x$  die Abszissen, die zu den gleichen Werten von  $y$  gehören. Aus dieser Kurve sind daher, sobald der Anfangswert  $x_0$  gegeben ist, die für die aufeinanderfolgenden Umkehrpunkte geltenden Werte  $k x_0, k x_1$  usw. unmittelbar in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise zu entnehmen.

Zur angenäherten Berechnung der Umkehrpunkte entwickle man die in  $v$  auftretende Exponentialfunktion für  $x = x_0$  nach Potenzen von  $x_0 - x$  und setze darin  $x = x_1$ ; dann erhält man, wenn man in der Klammer als erste Näherung nur die Glieder zweiter Ordnung berücksichtigt, nach einigen leichten Kürzungen  $x_1 = -x_0$ . Geht man mit dieser Näherung in die Glieder dritter Ordnung in der letzten Gleichung, so erhält man als zweite Näherung den Ausdruck

$$x_1 = -x_0 \frac{1 - \frac{2}{3} k x_0}{1 + \frac{2}{3} k x_0}, \text{ usw.} \tag{210}$$

der auch für die folgenden Umkehrpunkte gilt und diese für nicht zu große  $k$  mit ausreichender Näherung zu berechnen gestattet.

Die Dauer der aufeinanderfolgenden Schwingungen läßt sich nur angenähert berechnen; als  $x$ - $t$ -Linie (bzw.  $kx$ - $at$ -Linie) ergibt sich die in Abb. 132 ge-

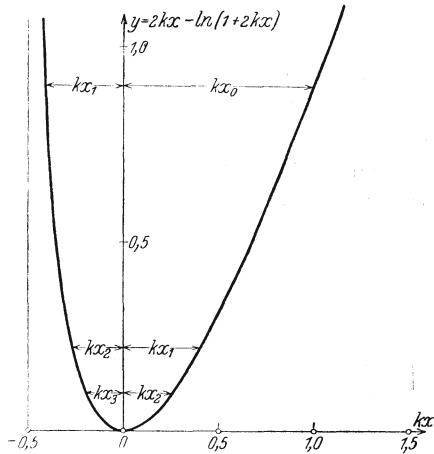


Abb. 131.

gezeichnete Kurve. Wir erhalten also wieder einen schwingungsähnlichen Verlauf, nur sind die aufeinanderfolgenden Schwingungsdauern  $T_0, T_1, T_2, \dots$  nicht gleich, sondern nehmen zu, und auch das Gesetz über die Konstanz des logarithmischen Dekrements der Schwingungen behält seine Gültigkeit nicht mehr.

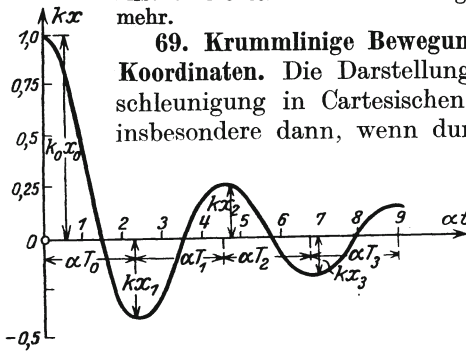


Abb. 132.

**69. Krummlinige Bewegung in der Ebene in Cartesischen Koordinaten.** Die Darstellung der Geschwindigkeit und Beschleunigung in Cartesischen Koordinaten  $x, y$  eignet sich insbesondere dann, wenn durch die Beschaffenheit des vorgelegten Problems eine Bevorzugung bestimmter fester Richtungen im Raume gegeben erscheint. Bei den Bewegungen im Schwerfeld der Erde in der Nähe der Erdkruste, das angenähert „gleichförmig“ (homogen) ist, und an allen Stellen lotrechte

Richtung der Beschleunigung ergibt, wird die Wahl dieser Koordinaten nahe gelegt. In allen Fällen zeigt sich, daß durch Verwendung der dem Problem sich anschmiegenden oder diesem „angepaßten“ Koordinaten die rechnerische Behandlung wesentlich erleichtert, in manchen Fällen praktisch überhaupt erst ermöglicht wird. — Der Ansatz des Problems geschieht immer in der Weise, daß die raum-zeitlichen Ausdrücke für die Beschleunigung  $\bar{b}$  in diesen Koordinaten den gegebenen — „eingepprägten“ — Komponenten der Beschleunigung (als Funktionen von  $x, y, v_x, v_y, t$ ) gleichgesetzt werden.

Beispiel 77. Schiefer Wurf im luftleeren Raume. Da der Beschleunigungsvektor  $\bar{g}$  der Schwere in allen Punkten  $A$  der Bahn lotrecht nach abwärts gerichtet ist, legen wir etwa die  $y$ -Achse ebenfalls lotrecht, und zwar nach aufwärts, die  $x$ -Achse waagrecht (Abb. 133a). Die Beschleunigungen nach der  $x$ - und  $y$ -Achse sind dann

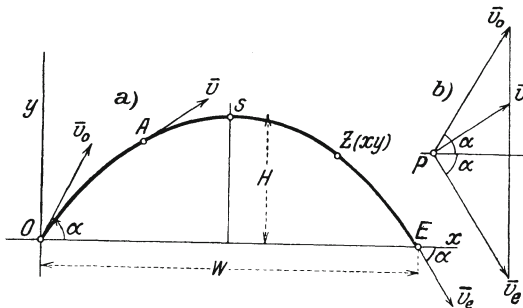


Abb. 133.

und  $y$ -Achse sind dann

$$b_x \equiv \dot{v}_x = 0, \\ b_y \equiv \dot{v}_y = -g, \quad (211)$$

und daraus

$$v_x = \text{konst.} = v_0 \cos \alpha = \dot{x}, \\ v_y = \text{konst.} - gt = v_0 \sin \alpha - gt = \dot{y}, \quad (212)$$

indem wir die Geschwindigkeit in  $O$  für  $t = 0$  von der Größe  $v_0$  und unter dem Winkel  $\alpha$  gegen die Wagrechte geneigt annehmen. Die Koordinaten  $x, y$  sind (wenn für  $t = 0, x = 0, y = 0$  sein soll)

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \quad (213)$$

Die Bahn ist eine Parabel, wie sich durch Ausscheidung von  $t$  aus diesen Gleichungen ergibt. Für ihren höchsten Punkt  $S$  ist  $v_y = 0$ , also die „Steigzeit“

bis dahin nach Gl. (212):  $T = v_0 \sin \alpha / g$ , die „Wurfhöhe“  $H$  und die „Wurfweite“  $W$  nach Gl. (213):

$$H = y_{(t=T)} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \quad W = 2x_{(t=T)} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (214)$$

Der Geschwindigkeitsplan (Abb. 133 b) ist das Stück einer lotrechten Linie in Verbindung mit dem „Pole“  $P$ . Es ist für jede Stelle  $\overline{Pv} = \bar{v}$ . Die Größe der Geschwindigkeit ist nach Gl. (212) und Benutzung von Gl. (213)

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 - 2gy$$

ist also nur abhängig von der Höhe  $y$  über der Wagrechten.

Als Anwendung dieser einfachen Formeln beantworten wir noch die Frage nach jenem Winkel  $\alpha$ , unter dem mit einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  geworfen oder geschossen werden muß, um ein bestimmtes Ziel  $Z(x, y)$  zu erreichen. Hierzu benutzen wir die durch Elimination von  $t$  aus den Gln. (213) hervorgehende Parabelgleichung in der Form

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) x^2 / 4h, \quad \text{worin} \quad h = v_0^2 / 2g$$

gesetzt ist; dies ist eine quadratische Gleichung für  $\operatorname{tg} \alpha$  und liefert die Wurzeln

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{x} [2h \pm \sqrt{4h^2 - 4hy - x^2}]. \quad (215)$$

Man erhält also im allgemeinen zwei Werte, einen Flachwurf oder Flachschuß (Kanone) und einen Steilwurf oder Steilschuß (Haubitze oder Mörser); nur wenn die Quadratwurzel imaginär wird, wenn also  $4h^2 - 4hy - x^2 < 0$ , kann das gegebene Ziel  $(x, y)$  mit gegebenem  $v_0$  (oder  $h$ ) nicht erreicht werden. Für die Punkte der „Grenzparabel“  $4h^2 - 4hy - x^2 = 0$ , deren Lage leicht eingezeichnet werden kann, fallen die beiden möglichen Wurfparabeln zusammen, diese Punkte können daher nur durch eine einzige Flugbahn erreicht werden.

**70. Natürliche Zerlegung: Tangential- und Normalbeschleunigung.** Zu jeder (ebenen) Kurve gibt es zwei mit ihr „natürlich“ (d. h. ohne Beziehung auf ein von der Kurve unabhängiges Achsenkreuz) verbundene Richtungen: die Tangente und Normale. Die Zerlegung von  $\bar{b}$  nach diesen liefert die Tangentialbeschleunigung  $\bar{b}_t$  und Normalbeschleunigung  $\bar{b}_n$ . Ähnlich wie bei rechtwinkligen Koordinaten, bei denen die Komponenten von  $\bar{b}$  durch die ersten Ableitungen der Geschwindigkeiten oder durch die zweiten der Koordinaten definiert sind, lassen sich auch  $b_t$  und  $b_n$  durch einfache Ausdrücke definieren, die wir am besten direkt an Hand der Abb. 120 berechnen. Hierzu drücken wir den vektoriellen Zuwachs  $\overline{\Delta v}$  von  $\bar{v}$  durch die Komponenten nach der Tangente  $\overline{\Delta u}$  und Normale  $\overline{\Delta w}$  zur Bahn aus,

$$\overline{\Delta v} = \overline{\Delta u} + \overline{\Delta w},$$

dividieren durch  $\Delta t$  und machen  $\Delta t \rightarrow 0$ , dann folgt

$$\bar{b} = \bar{b}_t + \bar{b}_n. \quad (216)$$

Nun ist, wenn  $\Delta \vartheta$  der sog. Kontingenzwinkel, d. h. der Winkel der Tangenten an die Bahnkurve in aufeinanderfolgenden Punkten ist,

$$b_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v' \cos \Delta \vartheta - v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v' - v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$



und

$$b_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v' \sin \Delta \vartheta}{\Delta t} = v \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \vartheta}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = v^2 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vartheta}{\Delta s} = \frac{v^2}{\rho},$$

wenn  $\rho = \overline{AK}$  den Krümmungshalbmesser und  $ds$  das Bogenelement bedeutet, da  $ds/dt = v$ . Die Größe

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t} = \frac{d\vartheta}{dt} = \omega \quad (217)$$

bezeichnet man als Winkelgeschwindigkeit, d. i. das Maß der Änderung des Winkels  $\vartheta$  der Tangente (oder Normale) gegen eine feste Richtung in der Ebene in der Zeiteinheit. Wir können daher auch  $v = \rho \omega$  setzen und erhalten

$$b_t = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds}, \quad b_n = \frac{v^2}{\rho} = \rho \omega^2 = v \omega. \quad (218)$$

Wir können daher die vektorielle Änderung von  $\bar{v}$ , d. i. eben die Beschleunigung  $\bar{b}$ , darstellen durch einen „tangential gerichteten“ Teil  $b_t$ , der nur die Änderung der Größe von  $v$  angibt und einen „normal gerichteten“ Teil  $b_n = v\omega$ , der dadurch entsteht, daß  $\bar{v}$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gedreht wird: die Richtung von  $b_n$  ist zu  $\bar{v}$  senkrecht, und zwar in der Drehrichtung der Tangente um  $\pi/2$  gegen  $\bar{v}$  verdreht. Von besonderer Wichtigkeit ist, daß  $b_n$  durch die Geschwindigkeit  $v$  und den Krümmungshalbmesser  $\rho$  der Bahn allein bestimmt ist und mit seinem Pfeil nach dem Krümmungsmittelpunkt  $K$  hin gerichtet ist, während  $b_t$  jeden beliebigen positiven oder negativen Wert annehmen kann.

Die Dimension von  $\omega$  ist  $[1/T]$ , ihre Einheit  $1/s$ .

Durch einen ähnlichen Schritt, wie aus der Geschwindigkeit die Beschleunigung, erhalten wir aus der Winkelgeschwindigkeit die Winkelbeschleunigung  $\lambda$ , die von 0 verschieden ist, wenn  $\omega$  veränderlich ist

$$\lambda = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \equiv \dot{\omega} = \frac{d^2\vartheta}{dt^2} \equiv \ddot{\vartheta}; \quad (219)$$

ihre Dimension ist  $[1/T^2]$ , ihre Einheit  $1/s^2$ . Bei der Drehung um einen festen Punkt ist insbesondere

$$b_t = \dot{v} = r \dot{\omega} = r \ddot{\vartheta} = r \lambda, \quad b_n = \frac{v^2}{r} = r \omega^2 = v \omega. \quad (220)$$

Beispiel 78. Für die gleichförmige Bewegung im Kreise vom Halbmesser  $r$  mit der Geschwindigkeit  $v = \text{konst.}$  ist  $ds = r d\vartheta$ , daher (Abb. 134)

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\vartheta}{dt} = r \omega = \text{konst.}, \quad \text{also auch } \omega = \text{konst.}$$



Die Umlaufzeit  $T$  folgt aus

$$2\pi r = vT, \quad T = \frac{2r\pi}{v} = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (221)$$

Statt der Winkelgeschwindigkeit verwendet man in der Praxis gewöhnlich die Drehzahl  $n$  und versteht darunter die Umlaufzahl in 1 min; sie folgt durch Berechnung des Weges in 1 s: Der Weg in 1 min ist  $2r\pi n$ , daher in 1 s:  $2r\pi n/60 = v = r\omega$ , und

$$\omega = \frac{\pi n}{30}, \quad \text{oder} \quad n = \frac{30\omega}{\pi}. \quad (222)$$

Für eine Umdrehung in 1 s, oder eine volle Schwingung (oder einen anderen periodischen Vorgang) in 1 s wird auch die Bezeichnung 1 Hertz verwendet.

Die Beschleunigung ist gegeben durch

$$b_t = 0, \quad b_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = v\omega,$$

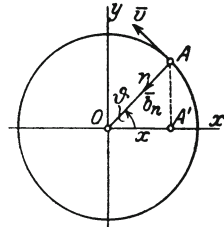


Abb. 134.

ist also stets nach dem Mittelpunkte gerichtet, und muß natürlich auf irgendeine Weise auf den bewegten Punkt übertragen werden.

Die Projektion dieser Beschleunigung auf irgendeinen Durchmesser, z. B.  $Ox$ , ist gegeben durch  $b_x = b_n \cos \vartheta = -r\omega^2 \cos \vartheta = -\omega^2 x$ , und dies ist das für die harmonische Schwingung kennzeichnende Gesetz: Die Projektion  $A'$  des gleichförmig im Kreis bewegten Punktes  $A$  auf irgendeine Gerade führt daher eine einfache Schwingung aus, deren Periode nach Beisp. 70 gleich  $2\pi/\omega$ , also gleich der Umlaufzeit der Kreisbewegung ist.

Beispiel 79. Schiefer Wurf mit Luftwiderstand (ballistisches Problem). Nimmt man zur Beschleunigung  $\vec{g}$  des Schwerfeldes den „Luftwiderstand“ als eine Beschleunigung von der Größe  $-k v^2$  hinzu, in jedem Punkte tangential zur Bahn und zu  $\vec{v}$  entgegengesetzt gerichtet, so erhält man die endlichen Gleichungen für die Bewegung am einfachsten, wenn man die beiden Zerlegungsarten kombiniert, die wir bis jetzt kennen gelernt haben; dies entspricht auch ganz natürlich der Kombination des lotrechten (von der Bahnkurve unabhängigen) Schwerfeldes mit dem Luftwiderstand, der in jedem Punkte in der Tangente wirkt, die der Kurve selbst angehört. Setzen wir die Projektionsgleichungen für die Beschleunigungen nach  $x$  und nach  $n$  (Abb. 135) an, so erhalten wir

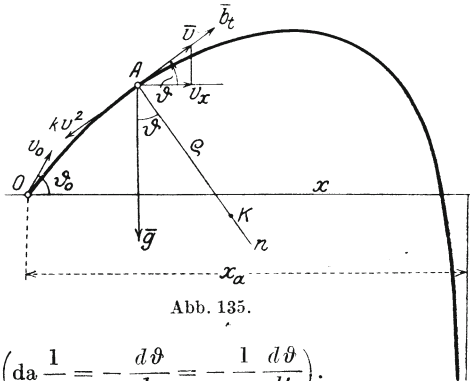


Abb. 135.

$$\left\{ \begin{aligned} b_x = \dot{v}_x = \frac{dv_x}{dt} = -k v^2 \cos \vartheta, \\ b_n = \frac{v^2}{\rho} = -v \frac{d\vartheta}{dt} = g \cos \vartheta \quad \left( \text{da } \frac{1}{\rho} = -\frac{d\vartheta}{ds} = -\frac{1}{v} \frac{d\vartheta}{dt} \right). \end{aligned} \right.$$

Dividiert man beide Gleichungen durcheinander und setzt  $v = v_x / \cos \vartheta$ , so folgt

$$-\frac{dv_x}{v_x^2} + \frac{k}{g} \frac{d\vartheta}{\cos^3 \vartheta} = 0,$$

eine Gleichung, die unmittelbar integriert werden kann und

$$\frac{1}{v_x^2} + \frac{2k}{g} \int \frac{d\vartheta}{\cos^3 \vartheta} = \text{konst.}$$

liefert, wobei die Konstante durch  $v_x = v_{x_0} = v_0 \cos \vartheta_0$  für  $\vartheta = \vartheta_0$  bestimmt ist. Aus dieser Gleichung ist  $v_x$  als Funktion von  $\vartheta$  bestimmt:  $v_x = v_x(\vartheta)$ , daher kennt man auch

$$v = v_x(\vartheta) / \cos \vartheta \equiv v(\vartheta);$$

aus der Gleichung für  $b_n$

$$v(\vartheta) \frac{d\vartheta}{dt} = -g \cos \vartheta,$$

ergibt sich

$$dt = -\frac{1}{g} \frac{v(\vartheta)}{\cos \vartheta} d\vartheta,$$

und daraus

$$t = -\frac{1}{g} \int \frac{v(\vartheta)}{\cos \vartheta} d\vartheta,$$

also  $t = t(\vartheta)$  und durch Umkehrung  $\vartheta = \vartheta(t)$ . Weiter folgt aus  $\dot{x} = v \cos \vartheta$ ,  $\dot{y} = v \sin \vartheta$

$$dx = v(\vartheta) \cos \vartheta dt = -\frac{1}{g} v^2(\vartheta) d\vartheta, \quad dy = -\frac{1}{g} v^2(\vartheta) \operatorname{tg} \vartheta d\vartheta,$$

also

$$x = -\frac{1}{g} \int v^2(\vartheta) d\vartheta + \text{konst.}, \quad y = -\frac{1}{g} \int v^2(\vartheta) \operatorname{tg} \vartheta d\vartheta + \text{konst.}, \quad (223)$$

wodurch  $x = x(\vartheta)$ ,  $y = y(\vartheta)$  und wegen  $\vartheta = \vartheta(t)$  auch  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , also die endlichen Bewegungsgleichungen bekannt sind. Da sich die Integrale in endlicher Form nicht auswerten lassen, empfiehlt sich die Anwendung der graphischen Integration wie in Beispiel 71. Eine genauere Betrachtung der Formeln zeigt, daß die Bahn für einen endlichen Wert  $x = x_a$  eine lotrechte Asymptote hat und die Geschwindigkeit sich für  $t \rightarrow \infty$  der Grenzggeschwindigkeit  $|g/k$  nähert.

**71. Geschwindigkeit und Beschleunigung in Polarkoordinaten. Flächengeschwindigkeit.** Wenn die Polarkoordinaten eines bewegten Punktes  $r$  und  $\varphi$  sind, so zerlegen wir die Komponenten der Geschwindigkeit  $\bar{v}$  wieder nach den Richtungen, die diesen Koordinaten entsprechen, d. i. die Richtung des positiven Fahrstrahls und die Richtung des zunehmenden Polarwinkels; man beachte, daß diese Richtungen bei der Bewegung veränderlich sind. Die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten seien  $\bar{v}_r$  und  $\bar{v}_\varphi$ . Da die Komponenten des Bogenelementes  $ds$  nach diesen beiden Richtungen  $dr$  und  $r d\varphi$  sind, so ist unmittelbar zu setzen

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_\varphi, \quad v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r \dot{\varphi} = r \omega. \quad (224)$$

Dieselben Ausdrücke erhält man auch, wenn man die Geschwindigkeitskomponenten  $v_x, v_y$  in Cartesischen Koordinaten auf die Richtungen  $r$  und senkrecht zu  $r$  projiziert und die Polarkoordinaten einführt.  $\bar{v}_r(\parallel \bar{r})$  gibt die Änderung der Größe von  $\bar{r}$ ,  $\bar{v}_\varphi(\perp \bar{r})$  entspringt aus dem Umstande, daß  $\bar{r}$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gedreht wird, und gibt die Änderung der Richtung von  $\bar{r}$  (Abb. 136).

Wir erhalten damit die im folgenden oft zur Anwendung gelangende Regel: Die vektorielle Zeitableitung  $\frac{d\bar{r}}{dt} \equiv \dot{\bar{r}}$  eines be-

liebigen Vektors  $\bar{r}$  besteht aus 2 Teilen: dem Teil  $\dot{r}$  in Richtung von  $\bar{r}$ , der von der Größenänderung von  $r$  herrührt, und dem Teil  $r\omega = r\dot{\varphi}$  senkrecht zu  $\bar{r}$ , dessen Richtung sich aus  $r$  durch Drehung um  $\pi/2$  im Sinn von  $\omega$  ergibt und der davon herrührt, daß  $\bar{r}$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \dot{\varphi}$  gedreht wird.

Diese Regel, auf den Geschwindigkeitsvektor  $\bar{v}$  angewendet, führt gerade auf die in 70 abgeleiteten Beschleunigungskomponenten  $b_t$  und  $b_n$ .

Ebenso führt die zweimalige Differentiation von  $x = r \cos \varphi$  und  $y = r \sin \varphi$  und Projektion von  $\ddot{x}$  und  $\ddot{y}$  auf die Richtungen parallel und senkrecht zu  $\bar{r}$  auf die folgenden Ausdrücke für die Beschleunigung

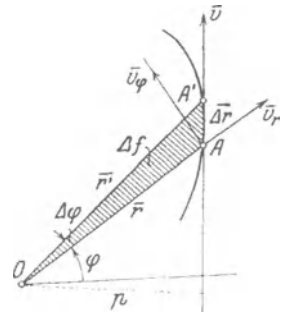


Abb. 136.

$$\bar{b} = \bar{b}_r + \bar{b}_\varphi, \quad \begin{cases} b_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \\ b_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}). \end{cases} \quad (225)$$

Denn es ist

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi}, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi},$$

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r} \sin \varphi \dot{\varphi} - r \sin \varphi \ddot{\varphi} - r \cos \varphi \dot{\varphi}^2$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r} \cos \varphi \dot{\varphi} + r \cos \varphi \ddot{\varphi} - r \sin \varphi \dot{\varphi}^2$$

und  $b_r = \ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi, \quad b_\varphi = -\ddot{x} \sin \varphi + \ddot{y} \cos \varphi,$

und diese stimmen, wie leicht zu sehen, mit den Gln. (225) überein.

Diese Gleichungen können aber auch unmittelbar durch Anwendung der Regel für die Änderung der Vektoren  $\bar{v}_r$  und  $\bar{v}_\varphi$  gewonnen werden: In die Richtung  $\bar{r}$  fällt die Änderung der Größe von  $\bar{v}_r$ , also

$$\dot{v}_r = \frac{dv_r}{dt} = \ddot{r}, \text{ außerdem der Teil, der durch Drehung des Vektors } \bar{v}_\varphi$$

im positiven Sinne von  $\omega$  entsteht:  $v_\varphi \omega = r\dot{\varphi}^2$ , aber mit dem Minuszeichen, da die Richtung des so gedrehten Vektors  $\bar{v}_\varphi$  von  $A$  gegen  $O$  hin,

also im Sinne der negativen  $\bar{r}$  weist. Ebenso senkrecht zu  $\bar{r}$ :  $\dot{v}_\varphi = \frac{dv_\varphi}{dt}$

$$= \frac{d(r\dot{\varphi})}{dt} = r\ddot{\varphi} + \dot{r}\dot{\varphi} \text{ von der Größenänderung von } \bar{v}_\varphi, \text{ und } v_r \omega = \dot{r}\dot{\varphi}$$

von der Richtungsänderung von  $\bar{v}_r$  herrührend, also  $b_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$  wie zuvor.

Als Flächengeschwindigkeit  $\eta$  bezeichnet man die in der Zeiteinheit vom Fahrstrahl  $\bar{r}$  überstrichene Fläche. Da die zwischen zwei Fahrstrahlen  $\bar{r}$  und  $\bar{r}' = \bar{r} + \Delta r$  liegende Fläche  $\Delta f$  (bis auf kleine Größen zweiter Ordnung, die vernachlässigt werden

können) durch  $\Delta f = \frac{1}{2} r \Delta \varphi r = \frac{1}{2} r^2 \Delta \varphi$  gegeben ist, so folgt

$$\eta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{1}{2} r v_{\varphi}. \quad (226)$$

Die Flächengeschwindigkeit (bezüglich  $O$ ) ist daher durch das halbe Moment der Geschwindigkeit um  $O$  gegeben.

In rechtwinkligen Koordinaten würde unmittelbar folgen  $\eta = \frac{1}{2} (x \dot{y} - y \dot{x})$ , und in „natürlichen“  $\eta = \frac{1}{2} v p$ , wenn  $p$  die Länge des von  $O$  auf  $v$  gefällten Lotes bedeutet.

## 72. Zusammenstellung der bisher erhaltenen Formeln:

Ebene Bewegung	Bezeichnung	Cartesische Koordinaten ( $x, y$ )	Natürliche Koordinaten ( $s, \varrho$ )	Polarkoordinaten ( $r, \varphi$ )
Geschwindigkeit	$\bar{v}$	$\begin{cases} v_x = \dot{x} = v \cos \alpha \\ v_y = \dot{y} = v \sin \alpha \\ (\alpha = \sphericalangle(v, x)) \end{cases}$	$v = \frac{ds}{dt}$ (i. d. Tangente der Bahn)	$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_{\varphi} = r \dot{\varphi} \end{cases}$
Beschleunigung	$\bar{b}$	$\begin{cases} b_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = b \cos \beta \\ b_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = b \sin \beta \\ (\beta = \sphericalangle(\bar{b}, x)) \end{cases}$	$\begin{cases} b_t = \dot{v} = \dot{s} = v \frac{dv}{ds} \\ b_n = \frac{v^2}{\varrho} \end{cases}$ <p>(<math>\varrho =</math> Krümmungshalbmesser)</p>	$\begin{cases} b_r = \dot{v}_r - r \dot{\varphi}^2 \\ b_{\varphi} = r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi} \\ = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) \\ = \frac{2}{r} \frac{d\eta}{dt} \end{cases}$
Flächengeschwindigkeit (= $\frac{1}{2}$ Moment der Geschw.)	$\eta$	$\eta = \frac{1}{2} (x \dot{y} - y \dot{x})$	$\eta = \frac{1}{2} v p$ ( $p =$ Lot von $O$ auf $\bar{v}$ )	$\eta = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}$

**73. Zentralbewegung. Die Keplerschen Gesetze.** Der Wert der „angepaßten Koordinaten“ für die rechnerische Behandlung eines Problems tritt besonders deutlich bei der Verwendung von Polarkoordinaten für die Zentralbewegungen hervor. Die Zentralbewegungen sind dadurch gekennzeichnet, daß für sie die Beschleunigung stets durch einen festen Punkt  $F$  hindurchgeht. Da die durch die Zentralbeschleunigung veränderte Geschwindigkeit immer in der durch die anfängliche Geschwindigkeit und  $O$  bestimmten Ebene liegt, so folgt sofort, daß die Bahnen bei den Zentralbewegungen ebene Kurven sind. Die Bewegungen der Planeten um die (ruhend gedachte) Sonne und die Bewegungen der Elektronen um die Atomkerne sind Beispiele solcher Bewegungen.

Ist die Zentralbeschleunigung anziehend, so ist die hohle (konkave) Seite der Bahn dem Zentralkörper zugewendet, sonst die erhabene (konvexe).

Da nach der Definition die ganze Beschleunigung  $\bar{b}$  in die Richtung von  $\bar{r}$  fällt, so ist  $b_{\varphi} = 0$ , daher  $\eta = \text{konst.} = C/2$ , und es folgt unmittelbar der Satz:

Bei allen Zentralbewegungen (wie auch das Gesetz für die Beschleunigung im übrigen beschaffen ist) ist die Flächengeschwindigkeit konstant, d. h. der Fahrstrahl  $\bar{r}$  überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Auch die Umkehrung dieses Satzes ist richtig: Wenn wir von einer Bewegung wissen, daß sie mit konstanter Flächengeschwindigkeit erfolgt, so ist sie eine Zentralbewegung.

Die Zentralbewegungen besitzen besondere Bedeutung für die Geschichte der Mechanik und Astronomie, da an sie anschließend die mannigfaltigen Methoden ausgebildet wurden, die das große Gebäude der modernen analytischen Mechanik ausmachen. Insbesondere haben sie auch in der neuzeitlichen Atomphysik eine ungeahnte Anwendung gefunden. J. Kepler (1571—1630) hat auf Grund des ihm vorliegenden Beobachtungsmaterials von Tycho de Brahe (1546—1601) im Jahre 1609 und 1619 die heute nach ihm benannten Gesetze der Planetenbewegungen ausgesprochen. Diese Keplerschen Gesetze lauten:

1. Die Bahnkurven der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Die Fahrstrahlen, die die Sonne mit den einzelnen Planeten verbinden, überstreichen in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume (d. h. die Flächengeschwindigkeit ist eine — für jeden Planeten andere — Konstante).

3. Der Quotient des Kubus der großen Achse der Ellipse zum Quadrat der zugehörigen Umlaufzeit hat für alle Planeten den gleichen Wert.

An der Hand dieser Gesetze ist dann I. Newton (1642—1727) zu dem Begriff der universellen Gravitation geführt worden, der mit zu den größten naturwissenschaftlichen Entdeckungen der Neuzeit gehört. Die wesentlichsten Schritte dieser Entdeckung können wir mit den bisher entwickelten Hilfsmitteln durch einfache Rechnungen wiedergeben.

Zunächst folgt aus dem 2. Keplerschen Gesetze bereits, daß  $b_\varphi = 0$ , daß also die ganze Beschleunigung in der Richtung der Verbindungslinie Sonne-Planet, also des Vektors  $\bar{r}$  liegt. Sei  $C/2$  die „Flächenkonstante“, d. i. die konstante Flächengeschwindigkeit:

$$\eta = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{1}{2} C, \quad \text{also} \quad \dot{\varphi} \equiv \frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2}, \quad (227)$$

so können wir mit Hilfe dieser Gleichung den Ausdruck für  $b_r$  umformen, indem wir  $r$  als Funktion von  $\varphi$  ansehen und  $dt$  eliminieren. Wir schreiben

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -C \frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}, \quad (228)$$

dann ist zunächst

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = C^2 \left[ \left( \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right]. \quad (229)$$

Ferner ist

$$\ddot{r} = -C \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2}$$

und damit folgt die sog. Binetsche Gleichung für die Beschleunigung

$$b_r \equiv \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 = -\frac{C^2}{r^2} \left[ \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} \right]. \quad (230)$$

Nach dem 1. Keplerschen Gesetze sind  $r$  und  $\varphi$  durch die Ellipsengleichung verbunden, denn die Bahnen sollen Ellipsen sein; ihre Gleichung lautet in Polarkoordinaten, wenn  $p$  den Parameter (= Ordinate im Brennpunkte) und  $\varepsilon = e/a$  ( $< 1$ ) die numerische Exzentrizität ( $e =$  lineare Exzentrizität = halbe Entfernung der Brennpunkte,  $a =$  halbe große Achse) bedeutet

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon \cos \varphi}{p};$$

gehen wir damit in die Binetsche Gl. (230), so kommt

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p}$$

und daher

$$b_r = -\frac{C^2}{p} \frac{1}{r^2}. \quad (231)$$

Werden also die beiden ersten Keplerschen Gesetze — aus den Beobachtungen erschlossen — als richtig angenommen, so folgt daraus schon, daß die auf die Planeten (die dabei stets als Punkte betrachtet werden) wirkende Beschleunigung eine anziehende und rein-radiale ist, und daß ihre Größe dem Quadrat der Entfernung Sonne-Planet umgekehrt proportional ist.

Aus dem dritten Gesetz folgt endlich, daß  $C^2/p$  für alle Planeten denselben Wert hat, die Beschleunigung  $b_r$  also das universelle, d. i. für alle Planeten gültige Gesetz (231), in dem  $C^2/p = \text{konst.}$  ist, befolgt.

Die Umlaufzeit  $T$  rechnen wir uns aus der Formel für die Flächengeschwindigkeit  $\frac{df}{dt} = \eta = \frac{C}{2}$ , woraus

$$dt = \frac{2}{C} df; \quad \text{also} \quad T = \int dt = \frac{2}{C} \int df = \frac{2}{C} F,$$

wobei die Integration über die ganze Ellipse zu erstrecken ist und  $F = a b \pi$  ihre Fläche bedeutet.

Nun ist nach Abb. 137a

$$2a = r_1 + r_2 = r_{(\varphi=0)} + r_{(\varphi=\pi)} = \frac{p}{1 + \varepsilon} + \frac{p}{1 - \varepsilon} = \frac{2p}{1 - \varepsilon^2}, \quad a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}.$$



Ferner ist

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = a \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}},$$

daher die Umlaufzeit

$$T = \frac{2}{C} F = \frac{2}{C} a b \pi = \frac{2\pi}{C} \frac{p^2}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}. \quad (232)$$

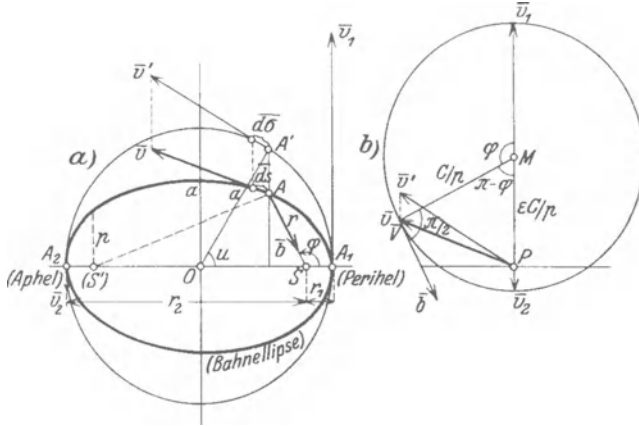


Abb. 137.

Bilden wir daher nach dem Wortlaut des 3. Gesetzes

$$k = \frac{a^3}{T^2} = \frac{C^2}{4\pi^2 p} = \text{konst.}, \text{ und setzen } \frac{C^2}{p} = 4\pi^2 k = \lambda,$$

so erhalten wir endlich

$$\boxed{b_r = -\frac{\lambda}{r^2}}, \quad (233)$$

worin  $\lambda$  für alle Planeten denselben Wert hat.

Nimmt man umgekehrt das Newtonsche Gesetz (233) als gegeben an, so folgen daraus die Keplerschen durch Umkehrung dieser Betrachtungen. Zunächst ist nach den Gln. (231) und (230)  $r = r(\varphi)$  durch die Differentialgleichung gegeben

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} = \frac{\lambda}{C^2} = \frac{1}{p}, \quad (234)$$

indem wir  $\lambda/C^2 = 1/p$  einführen; von dieser Gleichung ist  $1/p$  eine Partikularlösung und

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p} \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (235)$$

die allgemeine Lösung mit  $\varepsilon$  und  $\varphi_0$  als Integrationskonstanten; für  $\varepsilon < 1$  ergeben sich Ellipsen (für  $\varepsilon = 0$  Kreise), für  $\varepsilon = 1$  Parabeln, für  $\varepsilon > 1$  Hyperbeln als Bahnkurven. Wird der Polarwinkel vom

Perihel gezählt, dann ist  $\varphi_0 = 0$  zu setzen. Durch ähnliche Schlüsse wie zuvor folgen auch die übrigen Aussagen der Keplerschen Gesetze.

**74. Anwendungen.** Beispiel 80. Der Geschwindigkeitsplan der Planetenbewegung ist ein Kreis, bezogen auf einen exzentrisch liegenden Punkt  $P$  als Pol.

Bilden wir die Ableitung der Ellipsengleichung in Polarkoordinaten nach  $\varphi$ , also von

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon \cos \varphi}{p}, \quad \text{so folgt} \quad \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi} = -\frac{\varepsilon \sin \varphi}{p};$$

setzen wir dann diese Ausdrücke in die Gl. (229), so ergibt sich die Abhängigkeit der Geschwindigkeit  $v$  von  $\varphi$  in der Form

$$v^2 = \frac{C^2}{p^2} [1 + \varepsilon^2 + 2 \varepsilon \cos \varphi]. \quad (236)$$

Diese Gleichung hat die Form des Kosinussatzes. Trägt man in Abb. 137b vom Pole  $P$  des Geschwindigkeitsplanes die Strecke  $\varepsilon C/p = \overline{PM}$  senkrecht zur großen Achse der Ellipse auf, legt um  $M$  einen Kreis mit dem Halbmesser  $C/p$  und zieht von  $M$  eine Senkrechte zu  $\overline{AS}$ , so erhält man das Dreieck  $PMV$ , das bei  $M$  den Winkel  $\pi - \varphi$  einschließt. Mit Hilfe des Kosinussatzes ergibt sich für die Seite  $\overline{PV}$  gerade der in Gl. (236) gefundene Ausdruck, wodurch die Kreisform des Geschwindigkeitsplanes erwiesen ist.

Drücken wir noch in Gl. (236) das Glied  $\varepsilon \cos \varphi/p$  mittels der Ellipsengleichung durch  $r$  aus, setzen also

$$\frac{\varepsilon \cos \varphi}{p} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p},$$

so erhalten wir schließlich

$$v^2 = \frac{C^2}{p} \left[ \frac{1 + \varepsilon^2}{p} + \frac{2}{r} - \frac{2}{p} \right] = \frac{C^2}{p} \left[ \frac{2}{r} - \frac{1 - \varepsilon^2}{p} \right] = \lambda \left[ \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right], \quad (237)$$

d. h. die Geschwindigkeit  $v$  an jeder Stelle der Bahn hängt in dieser Weise von der Länge des Fahrstrahls  $r$  ab; diese Gleichung ist, wie wir später noch sehen werden, die Energiegleichung für die elliptische Bewegung.

Aus dem Flächensatz folgt übrigens unmittelbar die Gleichung

$$v_1 r_1 = v_2 r_2, \quad \text{oder} \quad v_1/v_2 = r_2/r_1,$$

d. h. der Pol  $P$  teilt den Durchmesser des Kreises, der den Geschwindigkeitsplan darstellt, im umgekehrten Verhältnisse, wie  $S$  die große Achse der Bahnellipse.

Beispiel 81. Unter welchen Bedingungen ist die Bahnkurve eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel?

Wie schon hervorgehoben, stellt die Gleichung  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon \cos \varphi}{p}$  für  $\varepsilon < 1$  Ellipsen, für  $\varepsilon = 1$  Parabeln und für  $\varepsilon > 1$  Hyperbeln dar, und es entsteht die Frage, unter welchen Bedingungen sich jede dieser Kurven als Bahnkurve herausstellt. Wir wollen diese Frage insofern vereinfachen, als wir zeigen, daß die Geschwindigkeit  $v_1$  im Perihel für die Art der entstehenden Bahnkurve maßgebend ist. Da für  $\varphi = 0$ ,  $1/r_1 = (1 + \varepsilon)/p$ , erhalten wir für  $r = r_1$  nach Gl. (237)

$$v_1^2 = \lambda \left[ \frac{2}{r_1} - \frac{1}{a} \right] = \lambda \left[ \frac{2}{r_1} - \frac{1 - \varepsilon^2}{p} \right] = \lambda \left[ \frac{2}{r_1} - \frac{1 - \varepsilon}{r_1} \right] = \lambda \frac{1 + \varepsilon}{r_1}.$$

Wir erhalten daher

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ellipsen} \\ \text{Parabeln} \\ \text{Hyperbeln} \end{array} \right\} \text{ wenn } \varepsilon \leq 1, \quad \text{d. h. wenn} \quad v_1 \leq \sqrt{\frac{2\lambda}{r_1}} \text{ ist.}$$

Wenden wir dieses Ergebnis auf die Erde als Anziehungszentrum und einen Punkt nahe ihrer Oberfläche an, so können wir für ihn  $\bar{b} = g = \lambda/R^2$  setzen, also  $\lambda = g R^2$ , und finden

$$\sqrt{\frac{2\lambda}{r_1}} = \sqrt{2gR} \approx 11180 \text{ m/s.}$$

Je nachdem die Geschwindigkeit  $v_1$ , die der Punkt parallel zur Erdoberfläche besitzt, kleiner, gleich oder größer als dieser Wert ist, entsteht eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Für  $\varepsilon = 0$  ergibt sich ein Kreis als Bahn; die zugehörige Geschwindigkeit wäre  $v_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{r_1}} = \sqrt{gR} \approx 8000 \text{ m/s.}$

**Beispiel 82.** Bestimmung des Bahnkegelschnitts aus Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit. Wenn in einem Punkte  $A$  die Geschwindigkeit  $\bar{v}$  und außerdem die Anziehungsbeschleunigung  $\bar{b}$  bekannt sind, so ist damit der zugehörige Bahnkegelschnitt festgelegt. Um ihn zu erhalten, beachten wir, daß die Normalbeschleunigung  $b_n$  nur von  $v$  und dem Krümmungshalbmesser  $\varrho$  in  $A$  abhängt,  $b_n = v^2/\varrho$ , woraus

$$\varrho = v^2/b_n. \tag{238}$$

Durch das bei  $V$  rechtwinkelige Dreieck  $BVC$  in Abb. 138 ist daher  $\varrho = \overline{CA} = \overline{AK}$  bestimmt. Wendet man ferner die bekannte Konstruktion für den Krümmungsmittelpunkt  $K$  für die Ellipse in umgekehrter Folge an, zieht also  $\overline{KD} \perp \overline{SA}$ ,  $\overline{DE} \perp \overline{AK}$ , dann ist  $E$  der Schnittpunkt der Normalen mit der großen Achse; die Verbindungslinie  $\overline{SE}$  gibt ihre Lage, und die Übertragung des Winkels  $\alpha$  auch den anderen Brennpunkt  $S'$ ; schließlich ist die Summe  $\overline{SA} + \overline{AS'} = 2a$ , die große Achse der Ellipse.

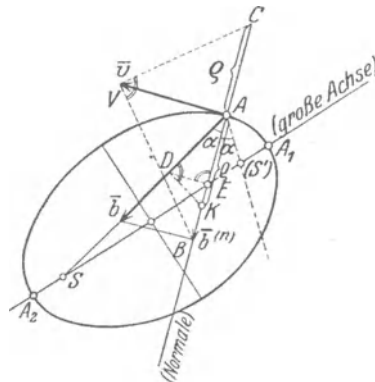


Abb. 138.

**Beispiel 83.** Die Keplersche Gleichung. Zur Ableitung der endlichen Gleichung für die Zeitabhängigkeit der Bewegung, die als Keplersche Gleichung bezeichnet wird, betrachten wir außer der „wirklichen Bewegung“ in der Bahnellipse auch die Bewegung eines ideellen, „begleitenden Punktes“  $A'$  auf dem Umfange des über der großen Achse beschriebenen Kreises (Abb. 137a), der mit  $A$  auf derselben Normalen zu dieser liegt. Den bei  $O$  auftretenden „exzentrischen Winkel“ bezeichnen wir mit  $u$ , und setzen das Bogenelement des Kreises in der Form an  $d\sigma = a du$ . Die Projektionen der Geschwindigkeiten,  $v$  und  $v'$ , mit denen sich  $A$  auf der Ellipse und  $A'$  am Kreise bewegen, auf die große Achse sind gleich groß; es ist also auch (nach Abb. 137b)

$$v' \sin u = \frac{C}{p} \sin \varphi, \quad \text{oder} \quad v' = \frac{C \sin \varphi}{p \sin u}.$$

Aus den Definitionsgleichungen  $v = ds/dt$ ,  $v' = d\sigma/dt$  entnehmen wir

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{d\sigma}{v'} = \frac{a du}{v'}$$

und erhalten mittels der vorhergehenden Gleichung

$$dt = \frac{ap}{c} \frac{\sin u}{\sin \varphi} du.$$

Weiter erhält man aus dem Umstande, daß der Umkreis der Ellipse im Verhältnis  $a/b$  ähnlich ist,

$$r \sin \varphi a/b = a \sin u,$$

also

$$r \sin \varphi = b \sin u$$

und weiter (Abb. 137)

$$r \cos \varphi = a (\cos u - \varepsilon).$$

Daraus rechnen wir, da  $b = a \sqrt{1 - \varepsilon^2}$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin u}{\cos u - \varepsilon}$$

und finden nach einer leichten Umrechnung,

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin u}{\sqrt{(\cos u - \varepsilon)^2 + (1 - \varepsilon^2) \sin^2 u}} = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin u}{1 - \varepsilon \cos u}.$$

Damit wird

$$dt = \frac{a p}{C \sqrt{1 - \varepsilon^2}} (1 - \varepsilon \cos u) du.$$

Führt man darin noch  $a = p/(1 - \varepsilon)$  ein und setzt

$$C \sqrt{1 - \varepsilon^2}^3 / p^2 = n,$$

so erhält man

$$n dt = (1 - \varepsilon \cos u) du$$

und daraus durch Integration mit der Anfangsbedingung  $u = 0$  für  $t = 0$ ,

$$\boxed{n t = u - \varepsilon \sin u} \quad (239)$$

als die gesuchte Gleichung. Da  $u$  (ebenso wie  $\varphi$ ) die Lage des bewegten Planeten auf der Ellipse kennzeichnet, so ist durch diese Gleichung auch die „wirkliche Bewegung“ dargestellt.

Integriert man die Gl. (239) über einen ganzen Umlauf und bezeichnet die Umlaufzeit mit  $T$ , so folgt

$$n T = 2\pi \quad \text{oder} \quad n = 2\pi/T.$$

$n$  bezeichnet die sog. „mittlere Bewegung“ oder die Anzahl der Umläufe in  $2\pi$  s.

**75. Gezwungene oder geführte Bewegung des Punktes.** Wie wir in der Statik im wesentlichen nur das Gleichgewicht gestützter Körper betrachteten, so kommt es in der Bewegungslehre bei den technischen Anwendungen nur auf Untersuchung von geführten oder gezwungenen Bewegungen an. Bei der Bewegung des Punktes liegt dann der Fall so, daß dieser „gezwungen“ wird, sich auf einer Leitkurve oder Leitfläche zu bewegen; um zu den Bewegungsgleichungen zu gelangen, haben wir eine ganz ähnlich geartete Erweiterung vorzunehmen wie in der Statik: Der Einfluß einer glatten Leitkurve oder Leitfläche) wird durch eine „Zwangskraft“ bzw. eine „Zwangsbeschleunigung“  $\bar{b}_z$  in Rechnung gesetzt, die zur Tangente der Leitkurve oder Tangentialebene der Leitfläche) senkrecht steht; bei rauher Leitkurve oder Leitfläche) kommt noch die Reibungskraft bzw. Reibungsbeschleunigung  $b_R$  hinzu, die nach den Aussagen von 48B in der Form  $b_R = f|b_z|$  anzusetzen ist, und stets entgegen der Richtung der Bewegung (also entgegengesetzt zu  $\bar{v}$ ) wirkt. Da jetzt

nicht mehr — wie bei der freien Bewegung — die wirkliche Beschleunigung  $\bar{b}$  mit der gegebenen, eingepprägten übereinstimmt, so empfiehlt es sich, für diese ein eigenes Zeichen,  $\bar{b}_e$  einzuführen. Die wirkliche Beschleunigung  $\bar{b}$  ist dann bei glatter Führung durch die Summe von  $\bar{b}_e$  und  $\bar{b}_z$ , bei rauher Führung außerdem noch durch  $\bar{b}_R$  gegeben. Wir erhalten daher in natürlicher Darstellung für glatte ebene Leitkurven (Abb. 139)

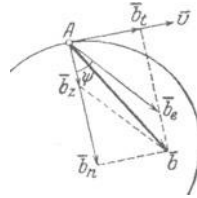


Abb. 139.

$$\bar{b} = \bar{b}_e + \bar{b}_z, \text{ d. h. } \begin{cases} b_t \equiv \frac{dv}{dt} \equiv v \frac{dv}{ds} = b_e \sin \psi, \\ b_n \equiv \frac{v^2}{\rho} = b_e \cos \psi + b_z, \end{cases} \quad (240)$$

und für rauhe Leitkurven (Abb. 140) mit  $b_R = f|b_z|$

$$\bar{b} = \bar{b}_e + \bar{b}_z + \bar{b}_R, \text{ d. h. } \begin{cases} b_t \equiv \frac{dv}{dt} = b_e \sin \psi - b_R, \\ b_n \equiv \frac{v^2}{\rho} = b_e \cos \psi + b_z; \end{cases} \quad (241)$$

dabei ist  $\bar{b}_z$  in der Richtung der positiven Normalen positiv zu zählen; wenn  $\rho = \infty$ , ist auf der Normalen willkürlich eine Richtung als die positive festzulegen.

In diesen Gleichungen tritt die Zwangsbeschleunigung  $\bar{b}_z$  (bzw. die Zwangskraft oder der Druck der Führung  $\bar{D} = M \bar{b}_z$ ) als neue Unbekannte auf, ganz so wie in der Statik die Auflagerkraft; demgegenüber ist zu beachten, daß die Gestalt der Kurve vorgegeben ist, so daß die Aufgabe allgemein lösbar bleibt, und zwar kommt hier von den die Gestalt der Kurve kennzeichnenden Größen nur der Krümmungshalbmesser  $\rho$  in Betracht. Die erste Gl. (240) gibt das eigentliche Bewegungsgesetz  $v = v(t)$  oder  $v = v(s)$  usw., während die zweite  $b_z$  liefert

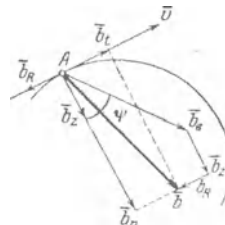


Abb. 140.

$$b_z = \frac{v^2}{\rho} - b_e \cos \psi. \quad (242)$$

Die Stellen, wo die Leitkurve keinen Einfluß auf die Bewegung des Punktes ausübt, sind durch  $b_z = 0$  gekennzeichnet. Wenn die Leitkurve eine einseitige Führung darstellt (wenn etwa der Punkt an einem Faden aufgehängt ist oder sich in einer Rinne bewegt), dann sind durch  $b_z = 0$  die Stellen bezeichnet, in denen der Punkt die Bahn verlassen kann; bei allseitigem Zwang (Perle an einer starren Stange

oder in einem Rohr) sind durch die Stellen  $b_z = 0$  die Punkte gekennzeichnet, in denen ein Druckwechsel eintritt, sobald der Punkt diese Stelle durchläuft.

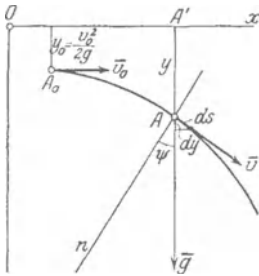


Abb. 141.

Für die Bewegung des Punktes auf einer beliebig gestalteten glatten Kurve im Schwerfeld läßt sich die erste der Gln. (240) allgemein (d. h. bei beliebiger Form der Leitkurve) integrieren. Es ist nämlich mit  $\bar{b}_e = \bar{g}$  nach Abb. 141:

$$b_t = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{ds} = g \sin \psi,$$

$$\frac{1}{2} d(v^2) = g \sin \psi ds = g dy,$$

so daß

$$v^2 = 2gy + C, \quad \text{oder} \quad v^2 - v_0^2 = 2g(y - y_0), \quad (243)$$

wenn wir  $v = v_0$  für  $y = y_0$  vorschreiben; d. h. die Geschwindigkeit an irgendeiner Stelle ist durch  $y$  allein bestimmt und von der Form der Bahn ganz unabhängig; an allen Stellen, die in derselben Wagerechten liegen ( $y = \text{konst.}$ ), ist die Bahngeschwindigkeit  $v$  gleich groß. Legt man die  $x$ -Achse in der Höhe  $y_0 = v_0^2/2g$  über die Ausgangslage, dann gilt einfach

$$v^2 = 2gy, \quad (244)$$

d. h. der Betrag von  $v$  ist an jeder Stelle gleich der Geschwindigkeit, die beim freien Fall durch die Höhe  $y$  erreicht wird.

**76. Anwendungen.** Beispiel 84. Fall auf einer rauhen Ebene unter dem Winkel  $\alpha$  gegen den Horizont (Abb. 142).

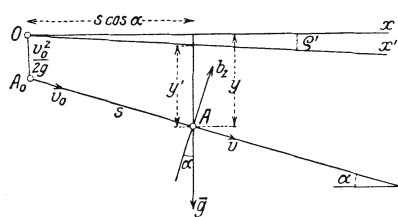


Abb. 142.

Nach den Gln. (240) folgt  $b_z = g \cos \alpha$  und

$$b_t = v \frac{dv}{ds} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha),$$

wenn daher für  $s = 0$ :  $v = v_0$  ist, so kommt

$$v^2 = v_0^2 + 2g(\sin \alpha - f \cos \alpha) s.$$

Zieht man durch  $O$  über  $A_0$ , wobei  $A_0O = v_0^2/2g$ , eine Gerade, die unter dem Reibungswinkel  $\rho'$  ( $f = \text{tg } \rho'$ ) gegen die Wagrechte geneigt ist, so ergibt die vorhergehende Gleichung

$$v^2 = 2g \left[ \frac{v_0^2}{2g} + s \sin \alpha - \text{tg } \rho' s \cos \alpha \right] = 2gy',$$

d. h. die Geschwindigkeit  $v$  in  $A$  ist gleich der Fallgeschwindigkeit durch die Höhe  $y'$  lotrecht über  $A$  bis zur  $x'$ -Achse.

Beispiel 85. Für die Fallbewegung auf der glatten schiefen Ebene gelten die Gleichungen des vorhergehenden Beispiels mit  $f = 0$

$$v = v_0 + gt \sin \alpha, \quad s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha, \quad v^2 = v_0^2 + 2gs \sin \alpha. \quad (245)$$

Beispiel 86. Bewegung auf lotrechttem Kreise vom Halbmesser  $l$ . Die Lage des Punktes  $A$  wird durch den Winkel  $\varphi$  angegeben (Abb. 143) und es sei  $v = v_0$  für  $\varphi = \varphi_0$  vorgeschrieben. Gl. (243) lautet dann, wenn wir die Lage der  $x$ -Achse zunächst unbestimmt lassen:

$$v^2 = v_0^2 + 2g(y - y_0) = v_0^2 + 2gl(\cos \varphi - \cos \varphi_0). \quad (246)$$

Wenn es kein (reelles)  $\varphi$  gibt, für welches  $v = 0$  wird, dann macht der Punkt volle Umläufe; dies tritt ein, wenn

$$v_0^2 > 2gl(1 + \cos \varphi_0).$$

Ist dagegen

$$v_0^2 < 2gl(1 + \cos \varphi_0),$$

dann gibt es zwei Stellen  $\varphi$  und  $-\varphi$ , zwischen denen der Punkt hin und her schwingt (Pendel); im Grenzfall

$$v_0^2 = 2gl(1 + \cos \varphi_0)$$

kommt der Punkt im höchsten Punkte des Kreises (für  $\widehat{\varphi} = \pi$ ) asymptotisch (d. h. für  $t = \infty$ ) zur Ruhe. (Für jeden Wert von  $\varphi_0$  denkt man sich  $2gl(1 + \cos \varphi_0)$  ausgerechnet; je nachdem  $v_0^2$  größer, gleich

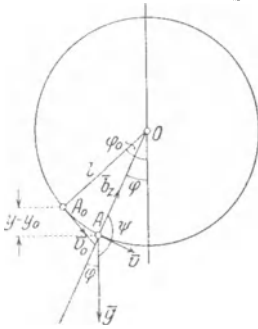


Abb. 143.

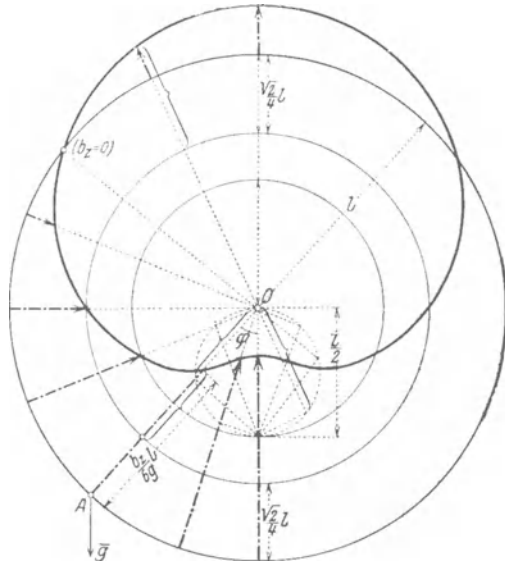


Abb. 144.

oder kleiner als dieser Wert ist, erhält man volle Umläufe, den Grenzfall asymptotischer Erreichung des höchsten Punktes oder Schwingungen.)

Die Zwangsbeschleunigung  $b_z$  (von der Leitkurve oder vom verbindenden Faden auf den Punkt ausgeübt) ist nach Gl. (242)

$$b_z = \frac{v^2}{l} - g \cos \psi = \frac{v^2}{l} + g \cos \varphi$$

und für  $v^2$  den Wert aus Gl. (246) eingesetzt,

$$b_z = \frac{v_0^2}{l} + g(3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0). \quad (247)$$

Die Verteilung von  $b_z$  als Funktion von  $\varphi$  ist durch Pascalsche Schneckenlinien gegeben. In Abb. 144 ist diese Verteilung für den besonderen Fall dargestellt, daß  $b_z = 0$  (der Druckwechsel) für  $\widehat{\varphi} = 3\pi/4$ ,  $\cos \varphi = -\sqrt{2}/2$  eintritt. Es ist dann  $v_0$  für jedes zugehörige  $\varphi_0$  durch die Gleichung bestimmt

$$b_z = 0 = \frac{v_0^2}{l} + g\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2 \cos \varphi_0\right), \quad \text{also} \quad \frac{v_0^2}{l} - 2g \cos \varphi_0 = \frac{3g}{2}\sqrt{2},$$



und dies in Gl. (247) eingeführt, gibt

$$b_z = \frac{3g}{2} \sqrt{2} + 3g \cos \varphi, \quad \text{oder:} \quad \frac{b_z}{6g} l = \left( \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \cos \varphi \right) l; \quad (248)$$

in dieser Form wird die Zwangsbeschleunigung  $b_z$  durch die Pendellänge  $l$  dargestellt, wodurch die Wahl eines besonderen Maßstabes erspart wird.

Beispiel 87. Schwingungsdauer des Pendels. Sei insbesondere in Abb. 143 in  $A_0$  für  $\varphi = \varphi_0$ :  $v_0 = 0$ , dann folgt aus Gl. (246), da  $ds = -l d\varphi$ ,

$$v = \sqrt{2gl(\cos \varphi - \cos \varphi_0)} = \frac{ds}{dt} = -l \frac{d\varphi}{dt},$$

und daraus für die Zeitdauer der Bewegung von  $\varphi_0$  bis  $\varphi$

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}$$

und für die Dauer einer „Viertelschwingung“  $T/4$  von  $\varphi_0$  bis 0

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}, \quad (249)$$

wodurch die Schwingungsdauer  $T$  als elliptisches Integral gegeben ist, auf dessen weitere Behandlung hier nicht eingegangen werden kann.

Den angenäherten Wert der Schwingungsdauer für kleine Ausschläge erhält man am einfachsten, indem man die erste Gl. (240) für kleine Ausschläge anschreibt. Man kann nämlich angenähert setzen

$$b_t \equiv \frac{dv}{dt} \equiv \frac{d^2s}{dt^2} \equiv -l \frac{d^2\varphi}{dt^2} = g \sin \varphi = g\varphi \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\varphi,$$

und erhält dadurch die Differentialgleichung einer einfachen harmonischen Schwingung nach Beispiel 70, wobei als Koordinate jetzt der Winkel  $\varphi$  auftritt; ihre Schwingungsdauer ist nach Gl. (186) gegeben durch

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (250)$$

Beispiel 88. Schwerer Punkt auf rauher Kreisbahn. Für eine rauhe Bahn gelten die Gln. (241), die mit den in Abb. 143 verwendeten Bezeichnungen die folgende Form annehmen: Zunächst ist wie zuvor

$$b_z = \frac{v^2}{l} + g \cos \varphi,$$

und damit wird die Bewegungsgleichung in Richtung der Bahn, da  $ds = -l d\varphi$ ,

$$b_t \equiv \frac{dv}{dt} \equiv v \frac{dv}{ds} \equiv -\frac{v}{l} \frac{dv}{d\varphi} = g \sin \varphi - fb_z$$

oder

$$\frac{1}{2l} \frac{dv^2}{d\varphi} = -g \sin \varphi + f \left( \frac{v^2}{l} + g \cos \varphi \right)$$

oder

$$\frac{dv^2}{d\varphi} - 2fv^2 = -2gl(\sin \varphi - f \cos \varphi). \quad (251)$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung in  $v^2$ ; ihre Integration liefert, wenn für  $\varphi = \varphi_0$ ,  $v = 0$  sein soll,

$$v^2 = 2gl \frac{(1 - 2f^2) \cos \varphi + 3f \sin \varphi}{1 + 4f^2} - 2gl \frac{(1 - 2f^2) \cos \varphi_0 + 3f \sin \varphi_0}{1 + 4f^2} e^{2f(\varphi - \varphi_0)}. \quad (252)$$

Um zu berechnen, wie weit der Punkt auf der rechten Seite wieder ansteigt, müssen wir beachten, daß die Gl. (252) nur bis zur Erreichung des tiefsten Punktes  $A_1$ , also bis  $\varphi = 0$  gilt; die in diesem Punkte erreichte Geschwindigkeit hat die Größe

$$v_1^2 = 2gl \frac{1 - 2f^2}{1 + 4f^2} - V_0^2 e^{-2f\varphi_0},$$

wobei  $-V_0^2$  den Faktor vor der  $e$ -Funktion in der vorhergehenden Gl. (252) für  $\varphi = 0$  bezeichnet. Von da an hat die Bewegungsgleichung die Form

$$\frac{dv^2}{d\varphi} + 2fv^2 = -2gl(\sin \varphi + f \cos \varphi), \quad (253)$$

die sich aus Gl. (251) dadurch ergibt, daß  $f$  durch  $-f$  ersetzt wird. Für die Stelle des nächsten Umkehrpunktes  $\varphi_1$  läßt sich zeigen, daß  $\varphi_1 < \varphi_0$ ; d. h. die Schwingungen verlaufen mit abnehmender Amplitude, wie es eben durch den Einfluß der Reibung bedingt ist.

Beispiel 89. Zyklode als Kurve gleicher Fallzeiten. Durch Zerlegung von  $\vec{g}$  in der Richtung der Tangente zur Zyklode erhalten wir (Abb. 145)

$$\ddot{s} = -g \sin \varphi,$$

worin  $s$  der Bogen  $\widehat{A_0 A}$  sein soll, und  $\varphi = \sphericalangle Q Q' A$  ist. Nun gilt für die Zyklode die Beziehung  $s = 4a \sin \varphi$ , wenn  $a$  der Halbmesser des erzeugenden Kreises ist; daraus folgt

$$\ddot{s} = -\frac{g}{4a} s, \quad (254)$$

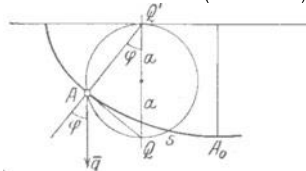


Abb. 145.

und dies ist die Bewegungsgleichung für eine einfache harmonische Schwingung mit der Periode

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4a}{g}}; \quad (255)$$

$T$  ist auch für endliche Ausweichungen völlig unabhängig von der anfänglichen Ausweichung, die man dem Punkt gegeben hat. Diese Eigenschaft bezeichnet man als Tautochronismus der Zyklode.

Beispiel 90. Zyklode als Kurve kürzester Fallzeit. Gegeben seien zwei (nicht in derselben Lotrechten liegende) Punkte  $A$  und  $B$ ; man ermittle jene Kurve, längs welcher ein Punkt von  $A$  nach  $B$  fallend in  $B$  in der kürzesten Zeit ankommt. Nach Gl. (243) ist (wenn  $v_0 = 0$ )

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(y - y_0)}, \quad \text{also} \quad \sqrt{2g}t = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{y - y_0}} = \int_0^x \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y - y_0}} dx, \quad (256)$$

da  $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ ,  $y' = dy/dx$ . Die Aufgabe kommt also auf die Bestimmung jener Funktion  $y = y(x)$  hinaus, die dem bestimmten Integral (256), dessen Integrand eine gegebene Funktion der Größen  $y'$  und  $y$  ist, einen kleinsten Wert erteilt. Dieses Problem hat den Ausgangspunkt eines der wichtigsten und allgemeinsten Zweige der modernen Mathematik gebildet, der auch für die Mechanik und Physik außerordentliche Bedeutung besitzt: der Variationsrechnung.

Nach den darin entwickelten Methoden, auf die hier nicht eingegangen werden kann, findet man, daß die Kurve mit der verlangten Eigenschaft die Zykloide ist, die also auch die Eigenschaft besitzt, die Brachistochrone (Linie kürzester Fallzeit) zu sein.

**Beispiel 91. Kegelpendel.** Ein Punkt  $A$  sei an einem festen Punkt  $O$  aufgehängt und nach allen Seiten frei beweglich. Fragen wir, unter welchen Bedingungen eine Bewegung auf einem wagrechten Kreise möglich ist (Abb. 146).

Außer dem lotrecht nach abwärts gerichteten  $\bar{g}$  wirkt  $\bar{b}_z$  in der Richtung des Fadens; für die Bewegung im wagrechten Kreise muß die Summe  $\bar{g} + \bar{b}_z$  gleich der Normalbeschleunigung  $-\bar{r} \omega_0^2$  sein. Daraus folgt unmittelbar

$$r \omega_0^2 = g \operatorname{tg} \alpha,$$

und mit  $r = l \sin \alpha$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{1}{\sqrt{\cos \alpha}}$$

$$\text{und die Umlaufzeit } T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (257)$$

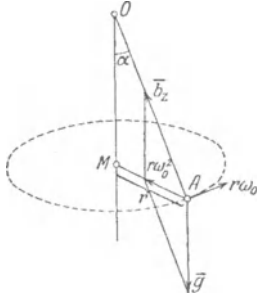


Abb. 146.

Die Zwangsbeschleunigung ist

$$b_z = g / \cos \alpha = l \omega^2$$

und die im Faden auftretende Kraft  $m b_z$ .

Jedem Winkel  $\alpha$  entspricht eine ganz bestimmte Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$ , für die die gleichförmige Bewegung auf dem Kreise möglich ist. Ist  $\omega \geq \omega_0$ , dann muß man die Bewegung auf der Kugelfläche unter Einführung von zwei Koordinaten studieren, was viel verwickelter ausfällt.

## II. Ebene Bewegung.

**77. Schiebung (Translation) und Drehung (Rotation).** Von der Bewegung eines einzelnen Punktes kann sich jedermann von vornherein eine klare Vorstellung machen, wenigstens solange es sich um die Bewegung gegen ein festes Bezugssystem handelt (genauer gesagt, gegen ein solches, dessen Eigenbewegung nicht berücksichtigt zu werden braucht). Es ist auch unmittelbar klar, daß ein auf einer Kurve beweglicher Punkt einen, ein in der Ebene frei beweglicher Punkt zwei, im Raum drei Freiheitsgrade hat, d. h. es sind 1, 2 oder 3 Bestimmungstücke (Koordinaten, Parameter) notwendig, um in diesen Fällen die Lage des Punktes anzugeben; die Mechanik lehrt, wie man die entsprechende Anzahl von Bewegungsgleichungen aufzustellen hat. Demgegenüber bedarf es besonderer Überlegungen, um die Bewegungen zu überblicken, die ein ausgedehnter starrer Körper (d. i. ein System von beliebig vielen Punkten, die in unveränderlichen Entfernungen miteinander verbunden sind) in der Ebene oder im Raume ausführen kann; mit dem ersten Falle wollen wir uns zunächst beschäftigen.

Hierzu denken wir uns dieses System von Punkten als eine „bewegte Ebene“ von beliebiger Ausdehnung, oder wie man auch sagt, eine Scheibe (ihre besondere Gestalt spielt keine Rolle) über eine feste (Bezugs-)Ebene so hinweg bewegt, daß die Bewegungsrichtungen aller Punkte stets der festen Ebene parallel sind. Die Anzahl der „Frei-

heitsgrade“ für die frei bewegte Scheibe in der Ebene ist drei; die Kennzeichnung der Lage der Scheibe gegen die feste Ebene geschieht nämlich etwa durch Angabe der zwei Koordinaten  $x, y$  eines Scheibenpunktes  $A$  und des Winkels  $\varphi$  zwischen einer in der bewegten Ebene liegenden  $\xi$ -Achse (d. h. einer Geraden mit „Pfeil“) und einer in der festen Ebene liegenden  $x$ -Achse. Dieser Winkel ist natürlich nur bis auf Vielfache von  $2\pi$  bestimmt. Statt dieser Bestimmungsstücke kann man auch die Koordinaten von zwei Punkten der bewegten Ebene  $A$  und  $B$  angeben, was ebenfalls drei Freiheitsgraden entspricht, da die unveränderliche Entfernung der beiden Punkte deren vier Freiheitsgrade um einen erniedrigt.

Für jede ebene Bewegung gilt nun der Satz:

Jede Bewegung aus einer Lage der Scheibe in eine zweite läßt sich als Drehung um einen endlich oder unendlich weit entfernten Punkt  $\Omega$  auffassen. Diesen Punkt  $\Omega$  nennt man den Drehpunkt oder Drehpol oder kurz Pol der betreffenden Bewegung.

In Abb. 147 sind zwei beliebige Lagen der bewegten Scheibe auf die oben angedeutete Art durch  $(A, \xi)$  und  $(A', \xi')$  gekennzeichnet. Der Drehpol  $\Omega$  ergibt sich da-

durch, daß man auf  $\xi$  und  $\xi'$  zwei Punkte  $B$  und  $B'$  annimmt, und zwar so, daß  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$  und die Symmetralen der Strecken  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$  zieht: in ihrem Schnittpunkt liegt schon der Drehpol  $\Omega$ . Aus  $\overline{\Omega A} = \overline{\Omega A'}$ ,  $\overline{\Omega B} = \overline{\Omega B'}$ ,  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$

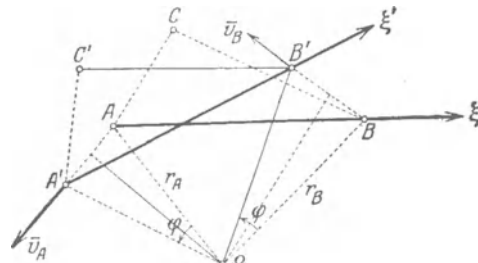


Abb. 147.

folgt nämlich  $\triangle A\Omega B \cong \triangle A'\Omega B'$ , d. h.  $\Omega$  ist der „Doppelpunkt“ der beiden Ebenen, und dieser ist mit dem Drehpol identisch. Die Lage  $C'$ , die irgendeinem anderen Punkte  $C$  entspricht, ist durch die Bedingung  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$  bestimmt. Aus der Kongruenz dieser Dreiecke folgt noch unmittelbar

$$\sphericalangle A\Omega A' = \sphericalangle B\Omega B' = \sphericalangle C\Omega C' = \dots = \varphi,$$

und dies ist der Winkel, um den die bewegte Ebene gedreht werden muß, um sie aus der Lage  $(A, \xi)$  in die Lage  $(A', \xi')$  überzuführen. Wir wollen  $\varphi$  dann positiv rechnen, wenn die Drehung im Gegensinn des Uhrzeigers erfolgt.

Eine solche Bewegung nennt man daher eine Drehung (oder Rotation); sie ist bestimmt durch die Lage des Drehpols  $\Omega$  und die Größe des Drehwinkels  $\varphi$ .

Wenn  $\xi$  parallel zu  $\xi'$  ist (Abb. 148), dann fällt  $\Omega$  ins Unendliche, und zwar in der Richtung senkrecht zu  $\overline{AA'}$ . Die Verschiebung aller Punkte der Scheibe ist dann gleich dem durch  $\overline{AA'}$  gegebenen Vektor. Wir nennen eine solche Bewegung eine Schiebung (oder

Translation), sie ist durch den Vektor  $\bar{v} \equiv \overline{AA'}$  bestimmt. Die Schiebung ist sonach als Sonderfall der Drehung aufzufassen; sie ist eine Drehung mit unendlich fernem Drehpol.

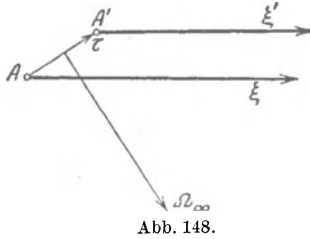


Abb. 148.

Von einer „ebenen Bewegung“ sprechen wir übrigens auch dann, wenn es sich nicht nur um die Bewegung einer Scheibe, sondern eines beliebig geformten Körpers handelt, dessen sämtliche Punkte zu einer Ebene parallele (ebene) Kurven beschreiben. Statt vom Drehpol spricht man dann auch von der (zur Ebene senkrechten) Drehachse.

**78. Geschwindigkeitszustand der Scheibe. Geschwindigkeitsplan.** So wie wir bei der Bewegung des Punktes zum Begriffe der Geschwindigkeit durch Betrachtung zweier benachbarter Lagen gelangt sind, so kommen wir zur Kennzeichnung des Geschwindigkeitszustandes der Scheibe durch Betrachtung zweier benachbarter Lagen der Scheibe. Für jeden Scheibenpunkt ergibt sich auf diese Weise eine bestimmte Geschwindigkeit, aber die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte der Scheibe sind wegen des starren Zusammenhanges der Scheibe in bestimmter Weise voneinander abhängig, die wir jetzt aufdecken wollen.

Durch denselben Vorgang wie für zwei endlich voneinander entfernte Lagen ergibt sich zunächst auch für zwei nahe benachbarte Lagen (durch einen passenden Grenzübergang) der Drehpol  $\Omega$  — jetzt auch Momentanpol genannt —, um den die augenblickliche (momentane) Drehung angenommen werden kann.

Während die endliche Bewegung der Scheibe nicht notwendig so verläuft wie diese Ersatzdrehung um  $\Omega$ , fällt bei der augenblicklichen Drehung dieser Unterschied weg. Die augenblickliche Bewegung kann immer als Drehung um den Punkt  $\Omega$  (der im Endlichen oder Unendlichen liegen kann) aufgefaßt werden.

Die Richtungen  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$ , ... gehen in die augenblicklichen Bewegungsrichtungen der genannten Punkte  $A, B, \dots$  über, in welche auch die Geschwindigkeitsvektoren dieser Punkte hineinfallen; diese stehen auf den Verbindungslinien  $\overline{\Omega A}$ ,  $\overline{\Omega B}$ , ... senkrecht. Sei  $\Delta\varphi$  der zu  $\Delta t$  gehörige kleine Drehwinkel der starren Scheibe, so haben wir zu setzen

$$\overline{AA'} = \overline{\Omega A} \cdot \Delta\varphi, \quad \overline{BB'} = \overline{\Omega B} \cdot \Delta\varphi, \quad \text{und da } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \equiv \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \omega,$$

die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe wird, so folgt für die Geschwindigkeit  $\bar{v}_A$  irgendeines Punktes  $A$  der Scheibe, wenn  $\overline{\Omega A} = \bar{r}_A$  gesetzt wird,

$$\boxed{v_A = r_A \omega, \quad \bar{v}_A \perp \bar{r}_A.} \quad (258)$$

Wieder wird  $\omega$  positiv gerechnet, wenn die Drehung im betrachteten Augenblicke im Gegensinne des Uhrzeigers erfolgt.

Die Geschwindigkeiten aller Punkte der Scheibe sind daher durch Angabe des Drehpols  $\Omega$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  bestimmt; für die Kennzeichnung des Drehpols genügt die Angabe der Bewegungsrichtungen zweier Punkte (Näheres über die dabei auftretenden Möglichkeiten in 81).

Hat man  $\bar{v}_A$  und  $\omega$  gegeben, so erhält man daraus den Drehpol  $\Omega$  durch Auftragen der „Länge“  $v_A/\omega$  auf der gegen  $v_A$  im Sinne von  $\omega$  um  $\pi/2$  gedrehten Normalen.

Wenn die Geschwindigkeit  $\bar{v}_A$  eines Punktes  $A$  einer sich augenblicklich oder dauernd um einen Punkt  $\Omega$  drehenden Scheibe bekannt ist, so kann die Geschwindigkeit jedes anderen Punktes unmittelbar durch Verwertung der in Gl. (258) gegebenen Proportionalität von  $v$  und  $r$  (die für alle Scheibenpunkte gilt) am einfachsten mit Hilfe der „gedrehten Geschwindigkeiten“ gewonnen werden.

Hierzu wird der Geschwindigkeitsvektor  $\bar{v}_A$  von  $A$  im Sinne von  $\omega$  (oder auch im Gegensinne) um  $\pi/2$  gedreht, nach  $(v_A)$  in Abb. 149a, dann wird die gedrehte Geschwindigkeit  $(v_B)$  des Punktes  $B$  durch die Parallele zu  $\bar{v}_A$  auf  $B\Omega$  ausgeschnitten; aus  $(v_B)$  geht  $\bar{v}_B$  durch Drehung um  $\pi/2$  im Gegensinne zur früheren Drehung hervor. Wählt man den „Geschwindigkeitsmaßstab“ im betrachteten Zeitpunkte so, daß  $\overline{A\Omega} = v_A$ , dann sind durch die Strecken  $\overline{A\Omega}$ ,  $\overline{B\Omega}$ , ... unmittelbar die „gedrehten“ Geschwindigkeiten der Punkte  $A, B, \dots$  gegeben.

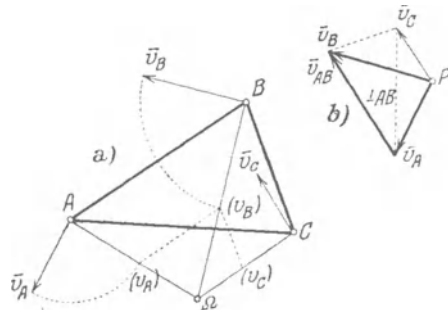


Abb. 149.

Diesem einfachen Vorgange ist aber — aus methodischen Gründen — die Verwendung eines Geschwindigkeitsplanes vorzuziehen, weil dadurch der Vektorcharakter der Geschwindigkeit gewahrt wird und diese Methode auch auf die Beschleunigungen übertragen werden kann. Einen solchen Geschwindigkeitsplan erhält man dadurch, daß die Geschwindigkeitsvektoren aller Punkte der bewegten Scheibe von einem festen Punkt  $P$ , dem „Pole des Geschwindigkeitsplans“, aufgetragen werden, Abb. 149b. Da die Strecke  $\overline{AB}$  eine feste Länge hat, so müssen die Projektionen der Geschwindigkeiten  $\bar{v}_A$  und  $\bar{v}_B$  in der Richtung  $\overline{AB}$  gleich groß sein, d. h. die Verbindungsstrecke der Endpunkte von  $Pv_A$  und  $Pv_B$  muß zu  $\overline{AB}$  senkrecht sein. Nehmen wir noch einen dritten Punkt  $C$  hinzu, so folgt aus dem soeben Erkannten und aus der Proportionalität von  $v_A, v_B, v_C$  zu  $r_A, r_B, r_C$ , daß die Endpunkte der an  $P$  angesetzten Geschwindigkeiten  $v_A, v_B, v_C$  ein Dreieck bilden, das zu  $\triangle ABC$  ähnlich und um  $\pi/2$  im Sinn der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Scheibe gegen den „Lageplan“  $ABC$  verdreht ist (Abb. 149a,b). Wir erhalten den (von R. Mehmke herrührenden) Satz:



Der Geschwindigkeitsplan für die Punkte einer starren Scheibe ist der Figur dieser Punkte ähnlich und erscheint um  $\pi/2$  im Sinn der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Scheibe verdreht. — Im Fall der Schiebung reduziert sich der Geschwindigkeitsplan auf einen Punkt, da die Geschwindigkeiten aller Punkte gleich groß und parallel sind.

Ebenso kann leicht gezeigt werden, daß auch die Endpunkte der Geschwindigkeitsvektoren, wenn sie an den einzelnen Punkten  $A, B, C, \dots$  der starren Scheibe selbst angesetzt werden, eine diesen Punkten ähnliche Figur ergeben; und das gleiche gilt auch für die Endpunkte der Beschleunigungsvektoren (Sätze von L. Burmester).

Auch wenn es sich darum handelt, den Verlauf der Geschwindigkeit einzelner Punkte der Scheibe während eines endlichen Zeitraums zu verfolgen, können beide Darstellungsarten verwendet werden. Wenn die Bewegung eines Punktes geradlinig ist, gibt für ihn nur die erstgenannte Art — mit den gedrehten Geschwindigkeiten — unmittelbar einen Überblick über den Geschwindigkeitsverlauf, während bei der zweiten die sämtlichen Geschwindigkeitsvektoren in eine Gerade zusammenfallen würden.

Aus dem Vorstehenden ist ersichtlich, daß die Bezeichnung Geschwindigkeitsplan hier in zweierlei Sinn verwendet wird: einmal bei der Darlegung des augenblicklichen Geschwindigkeitszustandes einer Scheibe und das andre Mal bei der Darstellung des Geschwindigkeitsverlaufes einzelner Punkte der Scheibe (wie im I. Kap.) während eines endlichen Zeitraumes.

Das aus den Vektoren  $\vec{v}_A, \vec{v}_B$  gebildete Dreieck in Abb. 149b läßt nun auch folgende Deutung zu: bezeichnen wir die dritte Seite, vom Endpunkte  $\vec{v}_A$  nach dem von  $\vec{v}_B$  gerichtet, mit  $\vec{v}_{AB}$ , so ist

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB};$$

$\vec{v}_{AB}$  bezeichnen wir als die relative Geschwindigkeit von  $B$  gegen  $A$ : in der Tat, wenn wir allen Punkten der Scheibe die Geschwindigkeit  $-\vec{v}_A$  erteilen, so kommt  $A$  selbst zur Ruhe, und  $B$  besitzt die Geschwindigkeit  $\vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{v}_{AB}$ , ist also die Geschwindigkeit gegen den zur Ruhe gebrachten Punkt  $A$ . Diese relative Bewegung von  $B$  gegen  $A$  ist offenbar eine Drehung um  $A$  und erfolgt im betrachteten Augenblick so, als ob  $A$  fest wäre. Ist daher  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe, so ist

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}, \quad v_{AB} = \overline{AB} \cdot \omega. \quad (259)$$

Diese einfache Beziehung erweist sich bei den Anwendungen von außerordentlicher Wichtigkeit.

**79. Beschleunigungszustand der Scheibe. Beschleunigungsplan.** Um den Beschleunigungszustand der Scheibe zu kennzeichnen, kommt es wieder — ganz ähnlich wie beim einzelnen Punkte — darauf an, den Zusammenhang der Änderungen der Geschwindigkeiten für die einzelnen Scheibenpunkte zu verfolgen.

a) Gehen wir hierbei von der Betrachtung der Drehung um einen festen Punkt  $\Omega$  aus, so beschreiben alle Punkte Kreise mit  $\Omega$  als Mittel-



punkt, Abb. 150. Die Geschwindigkeit irgendeines Punktes  $A$  ist  $v_A = r_A \omega$ , und seine Beschleunigung kann, wie die Beschleunigung jedes Punktes in natürlicher Zerlegung [Gl. (220) in 70] in die zwei Komponenten: normal und parallel zu  $v_A$  zerlegt werden,

$$\boxed{b_{\Omega A}^{(n)} = \overline{\Omega A} \cdot \omega^2, \quad b_{\Omega A}^{(t)} = \overline{\Omega A} \cdot \dot{\omega}, \quad \bar{b}_{\Omega A} = \bar{b}_{\Omega A}^{(n)} + \bar{b}_{\Omega A}^{(t)},} \quad (260)$$

indem wir die Richtungszeiger  $n$  und  $t$  bei  $b$  jetzt oben ansetzen und die unteren Zeiger für die Punkte verwenden, um deren relative Bewegung es sich handelt. Die Größe  $\dot{\omega}$  ist die Winkelbeschleunigung der Scheibe.  $b_{\Omega A}^{(n)}$  ist immer von  $A$  zu  $\Omega$  hin gerichtet,  $b_{\Omega A}^{(t)}$  dreht bei positivem  $\dot{\omega}$  im Gegensinne des Uhrzeigers um  $\Omega$ , wenn also bei einer Drehung der Scheibe im gleichen Sinne eine Zunahme von  $\omega$  erfolgt.

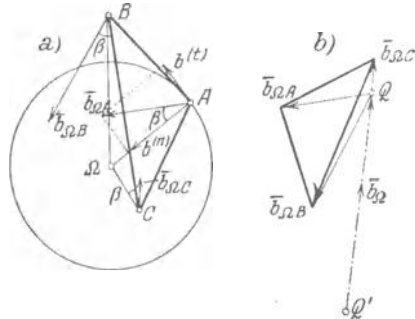


Abb. 150.

Die Beschleunigung  $\bar{b}_{\Omega A}$  des Punktes  $A$  ist also ein Vektor, der unter dem Winkel  $\beta$  gegen die Normale geneigt ist, wobei (Abb. 150a)

$$\text{tg } \beta = \dot{\omega} / \omega^2; \quad (261)$$

$\beta$  hat also für alle Scheibenpunkte den gleichen Wert. Die Größe der Beschleunigung ist

$$\boxed{b_{\Omega A} = \sqrt{b_{\Omega A}^{(t)2} + b_{\Omega A}^{(n)2}} = \overline{\Omega A} \cdot \sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2} = r_A \sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2},} \quad (262)$$

ist also dem Abstände  $\overline{\Omega A} = r_A$  proportional. Für den Drehpunkt  $\Omega$  ist die Beschleunigung gleich Null. Demgemäß ist die Verteilung der Beschleunigung für alle Punkte der Scheibe leicht zu überblicken.

Trägt man die Beschleunigungsvektoren  $\bar{b}_{\Omega A}$  für alle Punkte  $A$  von einem festen Punkte  $Q$  dem „Pole des Beschleunigungsplanes“ auf, so erhält man den Beschleunigungsplan der Scheibe (Abb. 150b). Aus der Proportionalität von  $b_{\Omega A}$  mit dem Abstände des betreffenden Punktes von  $\Omega$ :  $r_A = \overline{\Omega A}$  nach Gl. (260) und aus dem Umstande, daß die Beschleunigungen aller Punkte gegen die Verbindungsstrahlen mit  $\Omega$  den gleichen Winkel  $\beta$  einschließen, folgt durch einfache Ähnlichkeitsbetrachtungen der (ebenfalls von R. Mehmke herrührende) Satz:

Die Endpunkte der von einem festen Punkte  $Q$  aufgetragenen Beschleunigungsvektoren für die Punkte einer bewegten (starrten) Scheibe bilden eine Figur, die zu der Figur der Scheibenpunkte selbst (also zum „Lageplan“) ähnlich, jedoch um den Winkel  $\pi - \beta$  gegen diese im Sinne von  $\dot{\omega}$

verdreht ist. [In Abb. 150a, b ist  $\triangle ABC \sim \triangle b_{\Omega A} b_{\Omega B} b_{\Omega C}$ , wobei der Einfachheit halber die Endpunkte der Vektoren  $b_{\Omega A} \dots$  ebenfalls mit  $b_{\Omega A} \dots$  bezeichnet sind.]

b) Dieselbe Verteilung der Beschleunigungen erhalten wir, wenn  $\Omega$  nicht fest, sondern irgendwie gleichförmig bewegt ist, also selbst die Beschleunigung Null hat. Auf die Beschleunigungen hat eine derartige gleichförmige Schiebung keinen Einfluß — im Einklange mit der Tatsache der Unabhängigkeit der Beschleunigungen (und Kräfte) von einer gleichförmigen Bewegung des Bezugssystems (5).

c) Den allgemeinen Fall der beliebigen Bewegung der Scheibe erhalten wir sodann aus dem besonderen der Drehung um einen festen oder gleichförmig bewegten Punkt  $\Omega$ , indem wir annehmen, daß  $\Omega$  selbst eine Beschleunigung  $\bar{b}_\Omega$  besitzt. Aus dem Vektorcharakter der Beschleunigung und der Starrheit der Scheibe folgt dann sofort, daß die wirklichen oder absoluten Beschleunigungen  $\bar{b}_A, \bar{b}_B, \bar{b}_C \dots$  der einzelnen Punkte  $A, B, C \dots$  der Scheibe durch die Summen von  $\bar{b}_\Omega$  und den relativen Beschleunigungen von  $A, B, C$  gegen  $\Omega$  gegeben sind. (In diesem Falle handelt es sich also nicht mehr um eine Drehung um einen festen Punkt.) Bezeichnen wir die relativen Beschleunigungen von  $A, B, C \dots$  gegen  $\Omega$  wie bisher durch zwei Zeiger:  $\bar{b}_{\Omega A} \dots$  usw. und mit  $\bar{b}_\Omega$ , die Beschleunigung von  $\Omega$  gegen ein festes Bezugssystem, so gelten die Gleichungen

$$\bar{b}_A = \bar{b}_\Omega + \bar{b}_{\Omega A}, \quad \bar{b}_B = \bar{b}_\Omega + \bar{b}_{\Omega B}, \quad \text{usw.} \quad (263)$$

und wenn  $\bar{b}_{\Omega A} \dots$  wieder in die normalen und tangentialen Teile zerlegt werden

$$\bar{b}_{\Omega A} = \bar{b}_{\Omega A}^{(n)} + \bar{b}_{\Omega A}^{(t)}, \quad b_{\Omega A}^{(n)} = \overline{\Omega A} \cdot \omega^2, \quad b_{\Omega A}^{(t)} = \overline{\Omega A} \cdot \dot{\omega}. \quad (264)$$

Von diesen Gleichungen wird bei der Untersuchung einfacher Getriebe, wie sie im Maschinenbau vorkommen, vielfach Anwendung gemacht (83).

Aus Gl. (263) können wir unmittelbar entnehmen, daß es im allgemeinen einen und nur einen Punkt  $G$  gibt, dessen Beschleunigung verschwindet: denn unter den Beschleunigungen  $\bar{b}_{\Omega A}$  aller Scheibenpunkte kommen alle ( $\infty^2$ ) Vektoren, die überhaupt möglich sind, und zwar jeder gerade einmal vor. Es gibt daher nur einen Punkt  $G$ , dessen Relativbeschleunigung  $\bar{b}_{\Omega G}$  mit  $\bar{b}_\Omega$  summiert, Null ergibt. Diesen Punkt nennt man Beschleunigungspol, und seine Koordinaten  $\xi_g, \eta_g$  in bezug auf irgendein Achsensystem  $(\Omega, \xi, \eta)$  ergeben sich durch Projektion der Summe von  $\bar{b}_\Omega$  (deren Komponenten nach den Achsen  $\xi, \eta$  durch  $b_{0\xi}, b_{0\eta}$  bezeichnet seien) und von  $\bar{b}_{\Omega G}$  (deren Komponenten nach Normale und Tangente  $r_g \omega^2, r_g \dot{\omega}$ , also nach den Achsen  $\xi$  und  $\eta$ :  $-\xi_g \omega^2, -\eta_g \omega^2$  und  $-\eta_g \dot{\omega}, +\xi_g \dot{\omega}$  sind)

aus den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} b_{0\xi} - \xi_g \omega^2 - \eta_g \dot{\omega} &= 0 \\ b_{0\eta} - \eta_g \omega^2 + \xi_g \dot{\omega} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (265)$$

(Abb. 151) durch Auflösung in der Form

$$\xi_g = \frac{b_{0\xi} \omega^2 - b_{0\eta} \dot{\omega}}{\omega^4 + \dot{\omega}^2}, \quad \eta_g = \frac{b_{0\eta} \omega^2 + b_{0\xi} \dot{\omega}}{\omega^4 + \dot{\omega}^2}. \quad (266)$$

Der Beschleunigungsplan für diesen neuen Beschleunigungszustand ist unmittelbar anzugeben. Das Hinzutreten von  $\bar{b}_\Omega$  zu jeder Relativbeschleunigung  $\bar{b}_{\Omega A}$  wird im Beschleunigungsplan (s. Abb. 150b) dadurch ausgeführt, daß die Strecke  $Q'Q = \bar{b}_\Omega$  an  $Q$  in der gezeichneten Weise angesetzt wird; dann ist  $Q'$  der Pol für den neuen Beschleunigungsplan, und die Strecken  $Q'\bar{b}_{\Omega A}$ ,  $Q'\bar{b}_{\Omega B}$ , ... geben die Größen der Beschleunigungen der Punkte  $A, B, \dots$

Es läßt sich leicht zeigen, daß sich die auf diese Weise gefundenen Beschleunigungen um den zugehörigen neuen Beschleunigungspol  $G$  geradeso anordnen wie die  $\bar{b}_{A\Omega} \dots$  um  $\Omega$  (Abb. 150).

Wie findet man geometrisch den Beschleunigungspol  $G$  für diesen neuen Beschleunigungszustand, der sich durch Zusammensetzung des ursprünglichen mit einer Beschleunigung  $\bar{b}_\Omega$  ergibt, die allen Punkten der Scheibe in gleicher Größe und Richtung erteilt wird? — Offenbar entspricht der Punkt  $G$ , der doch die Beschleunigung Null hat, dem Pole  $Q'$ . Man suche daher einen Punkt  $G$  so, daß  $\triangle ABG \sim \triangle b_{\Omega A} b_{\Omega B} Q'$  ist (wobei  $b_{\Omega A}$  den Endpunkt des früheren Beschleunigungsvektors  $\bar{b}_{\Omega A}$  bedeutet) dann entspricht  $G$  dem neuen Pole  $Q'$ , ist also der neue Beschleunigungspol. Zu seiner Auffindung werden nur ähnliche Dreiecke verwendet.

Wir sehen auch aus den obigen Gleichungen, daß bei bekannter Drehgeschwindigkeit  $\omega$  der Scheibe (die Lage des Drehpols ist dabei gleichgültig!) der Beschleunigungszustand durch die drei Größen  $b_{0\xi}, b_{0\eta}, \dot{\omega}$  bestimmt ist. Sollen diese drei Größen in ihrer Abhängigkeit von den Kräften und Massen der Scheibe bestimmt werden, so sind hierzu drei Bewegungsgleichungen notwendig. Da die Zahl der Freiheitsgrade der Scheibe ebenfalls drei beträgt, so brauchen wir für jeden Freiheitsgrad eine Bewegungsgleichung. Ihre Aufstellung ist Sache der Dynamik und wird im III. Teil gegeben.

Wir sehen auch aus den obigen Gleichungen, daß bei bekannter Drehgeschwindigkeit  $\omega$  der Scheibe (die Lage des Drehpols ist dabei gleichgültig!) der Beschleunigungszustand durch die drei Größen  $b_{0\xi}, b_{0\eta}, \dot{\omega}$  bestimmt ist. Sollen diese drei Größen in ihrer Abhängigkeit von den Kräften und Massen der Scheibe bestimmt werden, so sind hierzu drei Bewegungsgleichungen notwendig. Da die Zahl der Freiheitsgrade der Scheibe ebenfalls drei beträgt, so brauchen wir für jeden Freiheitsgrad eine Bewegungsgleichung. Ihre Aufstellung ist Sache der Dynamik und wird im III. Teil gegeben.

Beispiel 89. Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand einer Strecke  $AB$  (Abb. 152). Da die beiden Punkte eine unveränderliche Entfernung voneinander haben, so dürfen ihre Geschwindigkeiten nicht völlig will-

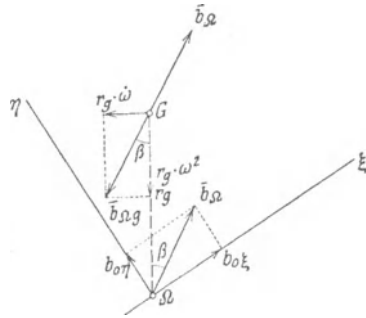


Abb. 151.

kürlich angenommen werden; sie müssen vielmehr die Bedingung erfüllen, daß ihre Komponenten in der Richtung  $\overline{AB}$  gleich groß ausfallen.

Auch für die Beschleunigungen der Punkte  $A$  und  $B$  dürfen — entsprechend den drei Freiheitsgraden — nur drei Komponenten willkürlich angenommen werden, während die vierte durch diese drei bestimmt ist. Die Vektorgleichung (263) für  $A$  als Drehpunkt:  $\vec{b}_B = \vec{b}_A + \vec{b}_{BA}$ , für die Richtungen parallel und senkrecht zu  $\overline{AB}$  angeschrieben, gibt nämlich die Gleichungen

$$b_{B\xi} = b_{A\xi} - r\omega^2, \quad b_{B\eta} = b_{A\eta} + r\dot{\omega},$$

so daß also für ein gegebenes  $\omega$  die Komponente  $b_{B\xi}$  durch  $b_{A\xi}$  unmittelbar ausdrückbar ist, während die Winkelbeschleunigung  $\dot{\omega}$  erst durch  $b_{A\eta}$  und  $b_{B\eta}$  bestimmt wird. Nimmt man umgekehrt alle vier Komponenten der Beschleunigungen von  $A$  und  $B$  willkürlich an, so ist dadurch sowohl  $\omega$  wie  $\dot{\omega}$  gegeben, denn es ist

$$\omega^2 = \frac{b_{A\xi} - b_{B\xi}}{r}, \quad \dot{\omega} = -\frac{b_{A\eta} - b_{B\eta}}{r}.$$

Der Beschleunigungspol  $G$  der mit  $\overline{AB}$  verbundenen Scheibe ist durch die folgenden zwei Bedingungen bestimmt: 1. es müssen die Verbindungslinien von  $G$  mit  $A$  und  $B$  mit  $b_A$  bzw.  $b_B$  gleiche Winkel  $\beta$  einschließen und 2. müssen die Strecken  $\overline{GA}$  und  $\overline{GB}$  im selben Verhältnis stehen wie  $b_A$  und  $b_B$ . Durch die erste Forderung ist  $G$  sofort an den Kreis gebannt, der über  $A, B$  und den Schnitt  $N$  von  $b_A$  und  $b_B$  geschlagen werden kann (Abb. 152); und überdies ist (auch mit Rücksicht auf das Vorzeichen):  $tg \beta = \dot{\omega}/\omega^2$ .

**80. Rechnerische Herleitung der Ergebnisse von 78 und 79.** a) Die

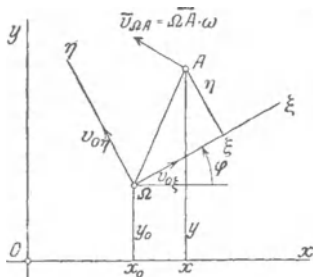


Abb. 153.

analytische Darstellung des Geschwindigkeitszustandes einer Scheibe geschieht am einfachsten in bezug auf ein Achsensystem  $(\Omega, \xi, \eta)$ , das fest mit der Scheibe verbunden ist und deren Bewegung mitmacht (Abb. 153). Seien  $v_{0\xi}, v_{0\eta}$ , die Komponenten der Geschwindigkeit  $\vec{v}_\Omega$  nach diesen Achsen  $\xi$  und  $\eta$ , dann sind die Komponenten der Geschwindigkeiten  $v_{A\xi}, v_{A\eta}$  irgendeines Punktes  $A(\xi, \eta)$  nach diesen Achsen zufolge Gl. (259)

$$v_{A\xi} = v_{0\xi} - \eta\omega, \quad v_{A\eta} = v_{0\xi} + \xi\omega, \tag{267}$$

daher sind die Koordinaten des Drehpols  $\xi_1, \eta_1$  gegeben durch

$$0 = v_{0\xi} - \eta_1\omega, \quad 0 = v_{0\eta} + \xi_1\omega,$$

Also durch die Gleichungen

$$\xi_1 = -v_{0\eta}/\omega, \quad \eta_1 = v_{0\xi}/\omega. \tag{268}$$

Damit können die Gln. (267) auch geschrieben werden

$$v_{A\eta} = +(\eta_1 - \eta)\omega, \quad v_{A\xi} = -(\xi_1 - \xi)\omega. \tag{269}$$

Dieselben Gleichungen findet man natürlich auch, wenn man die Formeln für die Koordinatentransformation  $(\xi, \eta) \rightarrow (x, y)$  benutzt

$$x = x_0 + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \quad y = y_0 + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi,$$

und diese nach  $t$  differenziert (wobei  $\xi$  und  $\eta$  feste Werte haben, daher  $\dot{\xi} = 0, \dot{\eta} = 0$  zu setzen ist)

$$\dot{x} = \dot{x}_0 - \xi \sin \varphi \dot{\varphi} - \eta \cos \varphi \dot{\varphi}, \quad \dot{y} = \dot{y}_0 + \xi \cos \varphi \dot{\varphi} - \eta \sin \varphi \dot{\varphi}, \quad (270)$$

und die Komponenten der Geschwindigkeit nach den Richtungen  $\xi, \eta$  aufsucht; es folgt, da  $\dot{\varphi} = \omega$

$$\begin{cases} v_{A\xi} = \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi = \dot{x}_0 \cos \varphi + \dot{y}_0 \sin \varphi - \eta \dot{\varphi} = v_{0\xi} - \eta \omega \\ v_{A\eta} = -\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi = -\dot{x}_0 \sin \varphi + \dot{y}_0 \cos \varphi + \xi \dot{\varphi} = v_{0\eta} + \xi \omega. \end{cases}$$

Genauer gesagt, werden dabei stets die Geschwindigkeitskomponenten nach festen Achsen betrachtet, deren Richtungen in jedem Augenblicke mit denen der bewegten zusammenfallen.

Diese Gleichungen sind gleichwertig mit der Vektorgleichung

$$\boxed{\bar{v}_A = \bar{v}_\Omega + \bar{v}_{\Omega A}}, \quad (271)$$

die wir auch vorhin benutzt haben.

b) Für die Ermittlung der Komponenten der Beschleunigung in Richtung der  $\xi$ - und  $\eta$ -Achsen haben wir zunächst die Gln. (270) nochmals nach  $t$  zu differenzieren, wodurch wir erhalten

$$\begin{cases} \ddot{x} = \ddot{x}_0 - \xi \sin \varphi \dot{\omega} - \xi \cos \varphi \omega^2 - \eta \cos \varphi \dot{\omega} + \eta \sin \varphi \omega^2 \\ \ddot{y} = \ddot{y}_0 + \xi \cos \varphi \dot{\omega} - \xi \sin \varphi \omega^2 - \eta \sin \varphi \dot{\omega} - \eta \cos \varphi \omega^2, \end{cases}$$

und die Summen der Projektionen von  $\ddot{x}$  und  $\ddot{y}$  nach  $\xi$  bzw.  $\eta$  zu nehmen; dann ergibt sich

$$\boxed{\begin{aligned} b_{A\xi} &= \ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi = b_{0\xi} - \xi \omega^2 - \eta \omega \\ b_{A\eta} &= -\ddot{x} \sin \varphi + \ddot{y} \cos \varphi = b_{0\eta} - \eta \omega^2 + \xi \dot{\omega}, \end{aligned}} \quad (272)$$

wobei  $b_{0\xi}$  und  $b_{0\eta}$  die Komponenten der Beschleunigung des Punktes  $\Omega$  nach  $\xi$  und  $\eta$  bedeuten. Diese Gleichungen sind gleichwertig mit den Vektorgleichungen (263) und (264) für den Punkt  $A$

$$\boxed{\bar{b}_A = \bar{b}_\Omega + \bar{b}_{\Omega A} = \bar{b}_\Omega + \bar{b}_{\Omega A}^{(n)} + \bar{b}_{\Omega A}^{(t)}} \quad (273)$$

Denn  $-\xi \omega^2, -\eta \omega^2$  sind die Komponenten der Normalbeschleunigung von  $A$  und  $-\eta \dot{\omega}, +\xi \dot{\omega}$  die der Tangentialbeschleunigung von  $A$  bei der Drehung um  $\Omega$ . Für den Beschleunigungspol  $G$  sind die linken Seiten der Gln. (272) Null, und wir finden die Gln. (265) wieder. Diese Gleichung (273) besagt also dasselbe, was wir in 79 gefunden haben:

Die Beschleunigung  $\bar{b}_A$  jedes Punktes  $A$  der bewegten Scheibe ergibt sich als Summe der Beschleunigung  $\bar{b}_\Omega$

irgendeines anderen Punktes  $\Omega$  und der Relativbeschleunigung  $\bar{b}_{\Omega A}$  von  $A$  gegen  $\Omega$ ;  $\bar{b}_{\Omega A}$  kann man zerlegen in die Normalbeschleunigung  $b_{\Omega A}^{(n)} = \overline{\Omega A} \cdot \omega^2$  in Richtung  $\overline{A\Omega}$ , von  $A$  gegen  $\overline{\Omega}$  gerichtet, und in die Tangentialbeschleunigung  $b_{\Omega A}^{(t)} = \overline{\Omega A} \cdot \dot{\omega}$  senkrecht zu  $\overline{A\Omega}$ , im Sinne  $\dot{\omega}$  drehend.

**81. Arten der zwangläufigen Führungen.** Die Lage des Drehpols  $\Omega$  für die augenblickliche Bewegung einer Scheibe ist durch Angabe der Bewegungsrichtungen zweier Punkte  $A, B$  der Scheibe bestimmt; für den Geschwindigkeitszustand ist außerdem die Kenntnis der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Scheibe oder der Geschwindigkeit irgendeines Scheibenpunktes notwendig. Die wichtigsten Anwendungen betreffen gerade solche Bewegungen von Scheiben, für die die Bewegungsrichtungen zweier Punkte — für die ganze Bewegung — gegeben sind, wodurch dann auch, wie wir wissen, die Bewegungsrichtungen aller Punkte festgelegt sind. Man spricht in diesem Falle von zwangläufiger Bewegung oder kurz von Zwanglauf. Wir können also auch sagen, für zwangläufige Bewegungen ist die Lage des Drehpols  $\Omega$  in jedem Augenblicke vollkommen bestimmt. Oder auch: bei zwangläufiger Bewegung ist jeder Punkt der Scheibe an eine ganz bestimmte Bahnkurve gebunden.

Die wichtigsten Fälle, die bei den zwangläufigen Bewegungen einer Scheibe auftreten können, sind in Abb. 154 zusammengestellt, in die auch jeweils die zugehörigen Drehpole eingezeichnet sind. Wir unterscheiden:

1. Zweipunktführung: Die Bahnkurven  $c_1, c_2$  zweier Punkte  $A, B$  der Scheibe sind vorgegeben. Sonderfälle:

a) Schubkurbel, wenn  $c_1$  ein Kreis,  $c_2$  eine Gerade ist; geht diese Gerade durch den Mittelpunkt  $M$  des Kreises, so spricht man von der gewöhnlichen, sonst von der geschränkten Schubkurbel. Im Maschinenbau wird diese Art der Führung in Verbindung mit der Kurbel  $\overline{MA} (= r)$  und der Kolbenstange  $\overline{AB}$  bei allen Kolbenmaschinen, bei Steuerungen und Getriebemaschinen verwendet;  $\overline{AB} (= l)$  wird als Schubstange (oder Pleuelstange) bezeichnet.

Eine solche Verbindung mehrerer Scheiben, von denen jede einzelne eine zwangläufige Bewegung macht, nennt man eine zwangläufige kinematische Kette, und jede als Bestandteil der Kette dienende Scheibe nennt man ein Glied der Kette. Bei Festhaltung einer Scheibe der Kette entsteht daraus ein Getriebe.

- b) Kreuzschieber, wenn  $c_1$  und  $c_2$  Gerade sind.  
 c) Kurbelviereck, wenn  $c_1$  und  $c_2$  Kreisbogen sind.

2. Punkt- und Kurvenführung: Ein Punkt  $A$  der bewegten Scheibe wird auf einer festen Kurve  $c_1$  geführt, während sich gleichzeitig eine Kurve  $\gamma$  der Scheibe auf einer festen Kurve  $c$  mit Gleitung abwälzt. Sonderfälle:

- a) Kurbelschleife:  $c_1$  ein Kreis,  $\gamma$  eine Gerade,  $c$  ein Punkt,



durch den die Kurve  $\gamma$  schleift und der als Drehzapfen mit Gleithülse ausgebildet wird.

b) Wälzhebel (bei Steuerungen angewendet):  $c_1$  eine Gerade (oder auch ein Kreis),  $\gamma$  und  $c$  entsprechend gewählte Kurven, um mittels einer Exzenterstange  $s_1$  eine passende Bewegung der Steuerstange  $s_2$  hervorzubringen.

c) Unrunde Scheibe (umlaufend oder hin- und hergehend als „Steuernocke“ ebenfalls bei Steuerungen angewendet):  $c_1$  die „unrunde Scheibe“, deren Form („Profil“) den besonderen Bedürfnissen entsprechend angenommen wird,  $\gamma$  eine Gerade,  $c$  ein Punkt.

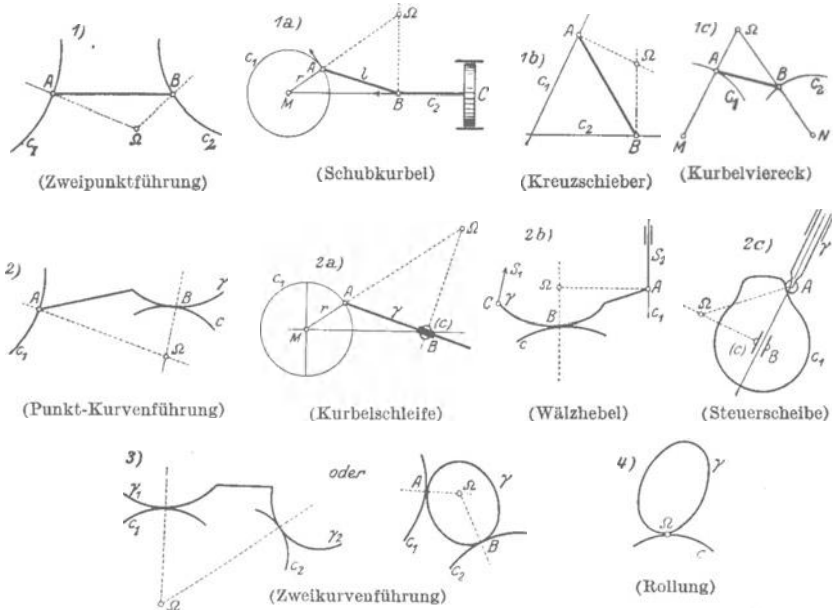


Abb. 154.

3. Zweikurvenführung. Zwei Kurven  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  (oder eine Kurve  $\gamma$ ) der Scheibe gleiten (oder gleitet) längs zweier fester Kurven  $c_1$  und  $c_2$ .

4. Rollführung, Rollung (ohne Gleitung). Eine Kurve  $\gamma$  der Scheibe „rollt“ auf einer festen Kurve  $c$ . Jede ebene Bewegung kann als Rollung dieser Art (ohne Gleitung) dargestellt werden (82).

Durch besondere Wahl der Kurven  $\gamma \dots$  auf der bewegten Scheibe und der Kurven  $c \dots$  in der festen Ebene können die einzelnen der hier genannten Führungen noch mannigfaltige Formen annehmen.

**82. Polkurven. Umkehrung der Bewegung.** Durch Angabe des Drehpols  $\Omega$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  einer Scheibe ist die augenblickliche Bewegung jedes Systems gekennzeichnet. Wenn man von dem Sonderfall der dauernden Drehung um einen festen Punkt absieht, so tritt für jede Lage der Scheibe beim Ablauf der Bewegung ein anderer Punkt der festen Ebene als Drehpol der Scheibe auf. Die Aufeinander-



folge dieser Drehpole gibt eine bestimmte Kurve, die aus einem sogleich ersichtlichen Grunde als feste Polkurve (auch Polkurve schlechthin) bezeichnet wird. Zeichnet man ferner in einer beliebigen Lage der bewegten Scheibe alle jene Punkte ein, die im Laufe der Bewegung zu Drehpolen werden, so erhält man die (mit der Scheibe fest verbundene und ihre Bewegung mitmachende) bewegte Polkurve (die auch Polbahn genannt wird). Beide Kurven werden zusammen auch als Rollkurven bezeichnet.

Es ist nun leicht einzusehen, daß in jener Lage der Scheibe, in der die bewegte Polkurve eingezeichnet ist, die beiden Rollkurven einander berühren müssen. Denn wenn die aufeinanderfolgenden benachbarten Drehpole in der festen Ebene etwa  $\Omega, \Omega_1, \Omega_2 \dots$ , und in der bewegten Scheibe

$$A (\equiv \Omega), A_1, A_2, \dots$$

sind, so wird  $A_1$  durch die zugehörige kleine Drehung  $\Delta\varphi$  um  $\Omega$  nach  $\Omega_1$ , übergeführt, weiter ebenso  $A_2$  in  $\Omega_2$  usw. (Abb. 155). In der Grenze wird  $\Delta\varphi \rightarrow 0$ , d. h. die beiden Rollkurven berühren sich im Punkte  $\Omega (\equiv A)$ , für den die bewegte Rollkurve eingezeichnet wurde.

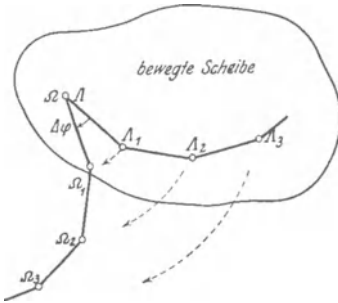


Abb. 155.

Jede ebene Bewegung kann daher dargestellt werden durch das Abrollen der bewegten Polkurve auf der festen (ohne Gleitung), die eben deshalb auch als Rollkurven bezeichnet werden.

Bezüglich der Konstruktion der bewegten Rollkurve sei folgende Bemerkung eingeschaltet: Wenn die Bewegung der Scheibe durch die Bewegung der Punkte  $A, B$  (oder auf irgendeine andere der in 81 aufgezählten Arten) gegeben ist, und wenn der Drehpol, der der Lage  $A_1, B_1$  zugehört,  $\Omega_1$  ist, so mache man  $\triangle A_1 B_1 \Omega_1 \cong A B A_1$ , wodurch  $A_1$  bestimmt ist, ebenso gibt  $\triangle A_2 B_2 \Omega_2 \cong A B A_2$  den Punkt  $A_2$  usw.

In manchen Fällen wird der Überblick über den Verlauf der Bewegung erleichtert und die Ermittlung der die Bewegung kennzeichnenden Größen (Geschwindigkeit und Beschleunigung) vereinfacht, wenn man die Umkehrung der Bewegung betrachtet; man erhält sie dadurch, daß man die früher bewegte Scheibe festhält und die früher feste Ebene mittels der vorgegebenen Bedingungen zwangsläufig bewegt. An der Relativität der Bewegung wird dadurch nichts geändert. Die Betrachtung der „umgekehrten“ Bewegung empfiehlt sich z. B. bei der unrundern Steuerscheibe (Abb. 154, 2c), die (in den meisten Fällen) ein bewegter Maschinenteil ist, während die Gerade  $\gamma$  (die Ventilstange) nur in sich verschoben wird; da diese unrundern Scheiben oft sehr komplizierte Formen haben, so würde die Untersuchung ihrer endlichen Bewegung die wiederholte Aufzeichnung ihres „Profils“ erfordern,

was gerade durch die Umkehrung vermieden wird; denn bei der umgekehrten Bewegung wird die Scheibe festgehalten und die Gerade  $\gamma$ , die in sich verschiebbar ist, in der entgegengesetzten Richtung um die Scheibe herumgeführt.

Bei der Umkehrung der Bewegung tauschen die beiden Rollkurven ihre Bedeutung: die früher feste Rollkurve wird bei der Umkehrung die bewegte, die früher bewegte wird die feste Rollkurve.

Die Rollkurven geben aber kein übersichtliches Bild der Bewegung, so daß ihre Verzeichnung nur in seltenen Fällen von Wert ist.

Beispiel 90. Der rechtwinkelige Kreuzschieber nach Abb. 156 gibt als feste Rollkurve den Kreis  $c$ , als bewegte den halb so großen Kreis  $\gamma$ . Die Bewegung des Kreuzschiebers kann durch das Abrollen (ohne Gleiten) dieser beiden Cardanischen Kreise dargestellt werden. Die bewegte Rollkurve  $\gamma$  wird punktwise gefunden durch die Kongruenz:  $\triangle A_1 B_1 \Omega_1 \cong \triangle A B A_1$  usw.

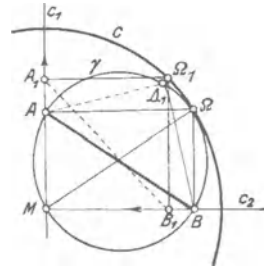


Abb. 156.

**83. Beispiele und Anwendungen.** Die zwangläufig bewegten Scheiben und kinematischen Ketten besitzen einen Freiheitsgrad; durch die Geschwindigkeit und Beschleunigung irgendeines Punktes sind die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen aller anderen Punkte gegeben. Es kommt immer darauf an, aus der Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Punktes die aller anderen zu ermitteln. Wenn die Aufgabe für einen zweiten Punkt gelöst ist, so ist sie zufolge der Ähnlichkeitsätze (78, 79) für alle Punkte gelöst. Als zweiter Punkt wird dabei womöglich ein solcher verwendet, dessen Bahnkurve besonders einfach ist (Gerade oder Kreis), ihre Normale und ihr Krümmungshalbmesser in den betrachteten Lagen müssen jedenfalls bekannt sein.

Die rechnerische Ermittlung auf Grund der besonderen Bedingungen der Aufgabe ist meist eine langwierige und zeitraubende Angelegenheit; man wird vielmehr, wenn irgend tunlich, vorziehen, die Geschwindigkeit und Beschleunigung zeichnerisch zu bestimmen und ihren Verlauf in dem in Betracht kommenden Bereich unmittelbar übersichtlich darzustellen suchen. Für die Geschwindigkeiten verwendet man die „gedrehten Geschwindigkeiten“ oder den „Geschwindigkeitsplan“, für die Beschleunigungen kommen im wesentlichen die Gl. (263) und (264) in Frage, deren Anwendung sogleich an Hand einiger Beispiele, die in der Technik von Bedeutung sind, verdeutlicht werden soll.

Beispiel 91. Kurbelviereck, Abb. 157. Gegeben ist die Geschwindigkeit  $\bar{v}_A$  und die Beschleunigung  $\bar{b}_A$  des Kurbelzapfens  $A$ , man ermittle die entsprechenden Größen  $\bar{v}_B$  und  $b_B$  des Kurbelzapfens  $B$ .

Der Drehpol  $\Omega$  ist der Schnitt der Kurbeln  $\overline{O_1 A}$  und  $\overline{O_2 B}$ . Die Geschwindigkeit  $\bar{v}_B$  erhält man mittels der senkrechten Geschwindigkeiten oder eines Geschwindigkeitsplans nach Abb. 157b, gemäß der Gleichung  $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{AB}$ .

Zur Ermittlung der Beschleunigung  $\bar{b}_B$  ziehen wir die Gl. (273) heran

$$\bar{b}_B = \bar{b}_A + \bar{b}_{AB}^{(n)} + \bar{b}_{AB}^{(t)}.$$



Wenn der Verlauf von  $\bar{v}_A$  und  $\bar{b}_A$  über einen endlichen Bereich der Bewegung gegeben ist, so läßt sich durch diese Konstruktion auch der Verlauf von  $\bar{v}_B$  und  $\bar{b}_B$  über den zugeordneten Bereich ermitteln. In den meisten Fällen wird das Getriebe gleichförmig angetrieben, also  $v_A = \text{konst.}$  angenommen, dann ist der Verlauf der Bewegung für  $B$  und wegen der Ähnlichkeitssätze auch für jeden anderen Punkt der Scheibe auf diese gleichförmige Antriebbewegung von  $A$  bezogen.

Die Bedeutung dieser Konstruktion liegt vor allem darin, daß sie immer angewendet werden kann, wenn man zwei Punkte mit den Krümmungsmittelpunkten  $O_1$  und  $O_2$  ihrer Bahnen kennt, ein Fall, der bei den Anwendungen häufig auftritt. Es wird an Stelle eines gegebenen Getriebes ein solches Kurbelviereck als „Ersatzgetriebe“ eingeführt, das mit dem gegebenen dieselben Geschwindigkeiten und Beschleunigungen hat; dafür ist nur die geometrische Konfiguration, und zwar sind die Tangentenrichtungen und Krümmungsmittelpunkte maßgebend. Die Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Beschleunigung ist dann sowohl für das Ersatzgetriebe, als auch — damit übereinstimmend — für das gegebene Getriebe durch die angegebene Konstruktion festgelegt.

Beispiel 92. Schubkurbelgetriebe, Abb. 158. Die Geschwindigkeit  $\bar{v}_A$  und Beschleunigung  $\bar{b}_A$  des „Kurbelzapfens“  $A$  sind gegeben,  $\bar{v}_B$  und  $\bar{b}_B$  des „Kreuzkopfes“  $B$  sind zu bestimmen.

Man beachte, daß  $\bar{v}_A$  und  $\bar{b}_A$  nicht voneinander unabhängig sind; es ist vielmehr  $b_A^{(n)} = v_A^2/r = r\omega_1^2$ , wenn mit  $\omega_1 = v_A/r$  die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel bezeichnet wird.

Die Geschwindigkeit  $v_B$  erhält man entweder durch einen  $v$ -Plan (Abb. 158b) oder, was hier noch einfacher ist, durch die gedrehten Geschwindigkeiten, wobei in beiden Fällen der geeignete Maßstab  $v_A \rightarrow r$  ist. Die Geschwindigkeit von  $B$  ist dann  $v_1$  für die Lage  $I$  usw.  $v_1$  ist übrigens auch durch die Strecke  $\bar{O}\alpha$  dargestellt (wenn  $\bar{O}\alpha$  senkrecht zur Bewegungsrichtung von  $B$  ist).

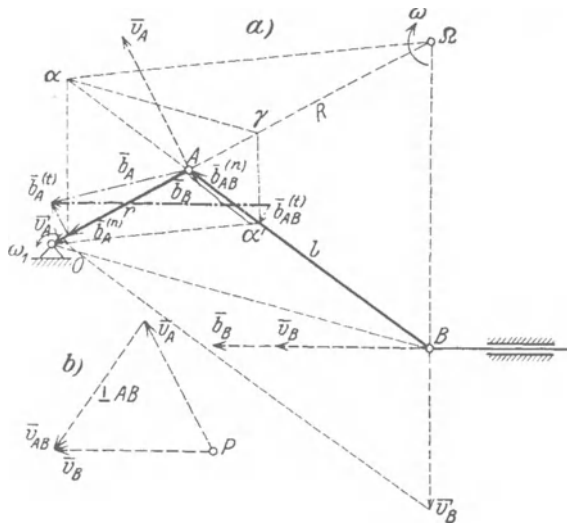


Abb. 158.

Die Beschleunigung  $\bar{b}_B$  von  $B$  ist wieder durch Gl. (273) bestimmt:

$$\bar{b}_B = \bar{b}_A + \bar{b}_{AB}^{(n)} + \bar{b}_{AB}^{(t)}, \quad \text{wobei } \bar{b}_{AB}^{(n)} = l\omega^2, \quad \bar{b}_{AB}^{(t)} = l\dot{\omega};$$

$\omega$  und  $\dot{\omega}$  beziehen sich auf die mit  $\overline{AB}$  verbundene Scheibe, die als „Schubstange“ (oder Pleuelstange) bezeichnet wird. Die Richtung von  $\bar{b}_B$  ist bekannt, es ist die Wagrechte, daher genügt es, die Summe  $\bar{b}_A + \bar{b}_{AB}^{(n)}$  zu bilden, die Senkrechte im Anfangspunkt von  $\bar{b}_{AB}^{(n)}$  auf  $\bar{b}_{AB}^{(n)}$  schneidet dann auf der Wagrechten durch  $\bar{b}_A$  die Beschleunigung  $\bar{b}_B$  ab.

Wir kennen  $b_A^{(n)} = r\omega_1^2$  und wollen  $b_{AB}^{(n)} = l\omega^2$  ermitteln. Die Beziehung zwischen  $\omega_1$  und  $\omega$  erhalten wir, indem wir  $v_A$  wieder auf zweierlei Weise ausdrücken; einmal fassen wir  $A$  als Punkt der Kurbel, das andere Mal als Punkt der Schubstange auf; dann folgt

$$v_A = r\omega_1 = R\omega, \quad (R = \overline{A\Omega}),$$

es ist also

$$\omega = \frac{r}{R} \omega_1,$$

und

$$b_{AB}^{(n)} = l \omega^2 = l \frac{r^2}{R^2} \omega_1^2 = \frac{l}{R} \frac{r}{R} r \omega_1^2 = \frac{r}{R} \frac{l}{R} b_A^{(n)};$$

es kann also  $b_{AB}^{(n)}$  aus  $b_A^{(n)}$  konstruiert werden. Hierzu ziehe ganz wie im vorigen Beispiel  $\overline{b_A^{(n)}} \alpha \parallel \overline{B\Omega}$ ,  $\overline{O\alpha'} \parallel \overline{\alpha\Omega}$ , dann ist  $\triangle \alpha A b_A^{(n)} \sim \triangle BA\Omega$  und daher

$$\overline{A\alpha} : b_A^{(n)} = l : R, \quad \text{also} \quad \overline{A\alpha} = \frac{l}{R} b_A^{(n)}.$$

Ferner ist  $\triangle \alpha A \Omega \sim \triangle \alpha' A O$ , und daraus

$$\overline{\alpha'A} : \overline{A\alpha} = r : R, \quad \overline{\alpha'A} = \frac{r}{R} \overline{A\alpha} = \frac{r}{R} \frac{l}{R} b_A^{(n)} = b_{AB}^{(n)}. \quad (275)$$

Durch die Strecke  $\overline{\alpha'A}$  wird also  $b_{AB}^{(n)}$  im selben „Beschleunigungsmaßstabe“ gefunden, in dem  $b_A^{(n)}$  aufgetragen wurde. Da  $\overline{b_{AB}^{(n)}}$  an  $b_A^{(n)}$  angesetzt erscheint, errichtet man in  $\alpha'$  zu  $AB$  die Senkrechte und erhält so  $\overline{b_B}$ ; dieser Beschleunigungsplan, aus dem dann auch  $b_{AB}^{(n)} = l \omega$  abzulesen ist, wurde in Abb. 158a eingetragen. Wir sehen also:

Die relative Normalbeschleunigung  $\overline{b_{AB}^{(n)}}$  ergibt sich also durch folgende Linien:  $\overline{b_A^{(n)}} \alpha \parallel \overline{B\Omega}$ ,  $\overline{O\alpha'} \parallel \overline{\alpha\Omega}$ , dann ist  $\overline{A\alpha'} = \overline{b_{AB}^{(n)}}$  im selben Maßstabe, in dem  $b_A^{(n)}$  und  $\overline{b_A}$  aufgetragen wurde.

Ähnlich wie beim Kurbelviereck kann die Konstruktion auch in folgender Art abgeändert werden, wobei der Drehpol nicht benutzt wird: man ziehe die Linien  $\overline{b_A^{(n)}} \alpha \parallel \overline{B\Omega}$ ,  $\overline{\alpha\gamma} \parallel \overline{OB}$ ,  $\overline{\gamma\alpha'} \parallel \overline{\Omega B}$ , und gelangt so zu demselben Punkte  $\alpha'$ .

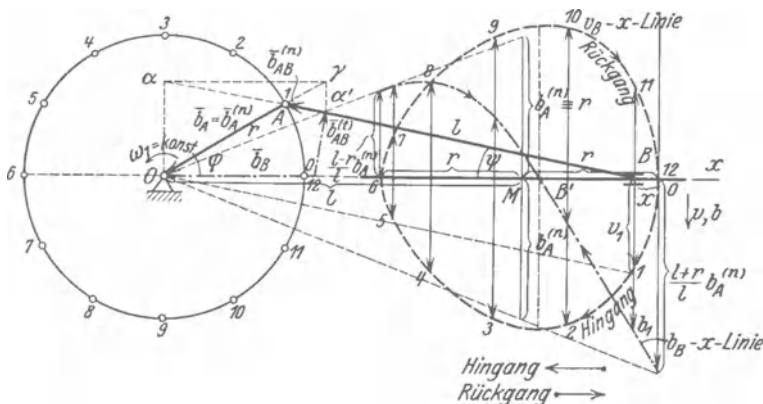


Abb. 159.

In dieser Form ist sie als „Mohrsche Konstruktion“ für die Beschleunigung des Kreuzkopfes bekannt.

Für eine gleichförmige Bewegung von  $A$ , also für  $v_A = \text{konst}$  empfiehlt es sich, den Beschleunigungsmaßstab so zu wählen, daß  $b_A^{(n)}$  durch  $r$  dargestellt wird; dann fällt der Endpunkt von  $b_A^{(n)}$  nach  $O$ .

In Abb. 159 ist der Verlauf von  $v_B$  und  $b_B$  für eine ganze Umdrehung einer gewöhnlichen Schubkurbel unter der Voraussetzung  $v_A = \text{konst}$  aufgetragen und gibt die als  $v_B$ - $x$ -Linie und  $b_B$ - $x$ -Linie bezeichneten Kurven.

Für die „Totlagen“ des Getriebes 0 und 6 versagt die Konstruktion, aber die Gl. (273), die zu ihr geführt hat, behält ihre Gültigkeit. Im „äußeren Totpunkte“ 0 ist  $v_A = r \omega_1 = l \omega$ , daher  $\omega = \frac{r}{l} \omega_1$  und

$$b_{AB}^{(n)} = l \omega^2 = l \frac{r^2}{l^2} \omega_1^2 = \frac{r}{l} r \omega_1^2 = \frac{r}{l} b_A^{(n)}$$

und daher

$$\left. \begin{aligned} b_{B_0}^{(n)} &= b_{A_0}^{(n)} + b_{A_0 B_0}^{(n)} = \left(1 + \frac{r}{l}\right) b_A^{(n)}, \\ \text{entsprechend im „inneren Totpunkte“ 6} \\ b_{B_6}^{(n)} &= \left(1 - \frac{r}{l}\right) b_A^{(n)}. \end{aligned} \right\} \quad (276)$$

Diese Ausdrücke lassen sich ohne Schwierigkeit konstruieren. Man mache in Abb. 159  $\overline{OM} = l$ , trage von  $M$  lotrecht nach oben und unten die Strecke  $r \equiv b_A^{(n)}$  auf und verbinde die so erhaltenen Endpunkte mit  $O$ ; dann werden auf den Senkrechten in  $B_0$  und  $B_6$  die gesuchten Strecken  $\frac{l+r}{l} r$  und  $\frac{l-r}{l} r$  abgeschnitten.

Diese  $b_B$ -Linien werden für die angenäherte Schwungradberechnung verwendet, um den Einfluß der hin- und hergehenden Massen zu berücksichtigen (die angenähert!) nach dem Gesetze dieser Kurven während der Bewegung des Kreuzkopfes beim Hingang von  $B_0$  bis  $B'$  beschleunigt und von  $B'$  bis  $B_6$  wieder verzögert werden müssen; beim Rückgang erfolgt die Beschleunigung von  $B_6$  bis  $B'$  die Verzögerung von  $B'$  bis  $B_0$ , wobei zu bemerken ist, daß die  $b_B$ -Linie gegen den Mittelpunkt von  $B_0 B_1$  um so unsymmetrischer ausfällt, je größer das Verhältnis  $r/l$  ist. Wird  $v_B$  und ebenso  $b_B$  — wenn es positiv ist — für den Hingang nach unten, für den Rückgang nach aufwärts aufgetragen, so erhält man nur eine  $b_B$ - $x$ -Linie, die unter den angegebenen Festsetzungen für Hin- und Rückgang gültig ist.

(Näheres über die Schwungradberechnung s. III. Teil.)

Beispiel 93. Berechnung von  $v_B$  und  $b_B$ . Um die Überlegenheit der zeichnerischen Methode für derartige Fragen zu zeigen, wollen wir noch  $v_B$  und  $b_B$  rechnerisch ermitteln. Hierzu hat man zunächst einen Ausdruck für den Weg  $\overline{B_0 B} = x$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  aufzustellen, diesen zweimal nach  $t$  zu differenzieren und  $\varphi = \omega_1 t$ ,  $\omega_1 = 0$  einzusetzen; man findet mit den Bezeichnungen der Abb. 159

$$x = r(1 - \cos \varphi) + l(1 - \cos \psi),$$

wobei

$$l \sin \psi = r \sin \varphi, \quad \cos \psi = \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}, \quad \text{wenn } r/l = \varepsilon$$

gesetzt wird, so daß

$$x = r \left[ 1 - \cos \varphi + \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}{\varepsilon} \right];$$

nach Entwicklung der Quadratwurzel nach dem binomischen Lehrsatz erhalten wir angenähert (da die genauen Formeln sehr umständlich ausfallen), wenn nur die Glieder mit  $\varepsilon$  beibehalten und alle mit höheren Potenzen von  $\varepsilon$  unterdrückt werden

$$x = r \left[ 1 - \cos \varphi + \frac{\varepsilon}{2} \sin^2 \varphi \right]. \quad (277)$$

Daraus folgt

$$\left. \begin{aligned} v_B = \dot{x} &= v_A \left[ \sin \varphi + \frac{\varepsilon}{2} \sin 2\varphi \right] \\ b_B = \dot{v}_B &= b_A^{(n)} [\cos \varphi + \varepsilon \cos 2\varphi], \end{aligned} \right\} \quad (278)$$

wenn  $r \dot{\varphi} = v_A$ ,  $r \dot{\varphi}^2 = b_A^{(n)}$  gesetzt wird. Für den Rückgang gelten dieselben For-



meln mit  $-\varepsilon$  statt  $+\varepsilon$ . Diese Formeln geben (ebenfalls angenähert!) die in Abb. 159 eingezeichneten Kurven.

Zum Schlusse sei noch der Ausdruck für die mittlere Kolbengeschwindigkeit  $v_m$  angemerkt, den wir später bei der Leistungsberechnung brauchen; es ist

$$v_m = \frac{2 \cdot 2 r \cdot n}{60} = \frac{4 r n}{60},$$

und da die gleichförmige Kurbelgeschwindigkeit

$$v_A = \frac{2 r \pi n}{60} \text{ ist, so ist } v_m = \frac{2}{\pi} v_A = 0,637 v_A.$$

Beispiel 94. Unrunde Steuerscheibe. Das zum Antrieb einer „Steuering“ durch eine unrunde Steuerscheibe dienende Getriebe ist schematisch schon in Abb. 159 2c) angegeben worden. Durch eine solche sog. „Nockenscheibe“ wird eine Ventilstange angehoben, die in ihrer eigenen Richtung verschiebbar ist und durch einen Zwischenhebel etwa das Einlaßventil einer Verbrennungskraftmaschine betätigt. Die Übertragung der Bewegung von der Scheibe auf die Ventilstange erfolgt in der Regel — wegen der Reibung — durch eine am Stangenende gelagerte Rolle. Der Mittelpunkt  $M$  dieser Rolle beschreibt dann eine Parallelkurve zum „Profil“ der Steuerscheibe; diese Parallelkurve betrachten wir weiterhin als Umriß der Steuerscheibe selbst und untersuchen den Anhub der Ventilstange bei dieser punktförmigen Berührung.

Es gibt verschiedene Methoden zur Ermittlung der Geschwindigkeit und Beschleunigung, mit der die Bewegung der Ventilstange in ihrer eigenen Richtung erfolgt. Die einfachste ist die der Verwendung eines „Ersatzgetriebes“, auf die wir oben schon hingewiesen haben. Und zwar sieht man leicht, daß das Ersatzgetriebe für dieses Steuerungsgetriebe ein gewöhnliches Schubkurbelgetriebe ist.

Für die Ausführung der Konstruktion (Abb. 160) empfiehlt es sich, die Ventilstange in den verschiedenen Lagen  $0, 1, 2, 3, 4$  einzuzuzeichnen, und die Strecken  $\overline{OM}_1, \dots, \overline{OM}_4$ , die die Bewegung der Ventilstange in ihrer eigenen Richtung angeben, in die Anfangslage  $0$  zurückzudrehen; man erhält dann die ebenfalls mit  $0, \dots, 4$  bezeichneten Punkte auf der  $x$ -Achse, an die die zugehörigen Werte der Geschwindigkeit und Beschleunigung angesetzt werden.

Ist  $K_1$  der Krümmungsmittelpunkt der Profilkurve an der Stelle  $M_1$ , so besteht das Ersatzgetriebe aus der (mit der Scheibe verbundenen) Strecke  $\overline{OK}_1$  als Kurbel, aus der Strecke  $\overline{K}_1 M_1$  als Schubstange und  $\overline{M}_1 I$  als Kolbenstange. Denkt man sich nämlich die Steuerscheibe aus der Stellung  $I$  herausgedreht und dabei die Gerade  $\overline{M}_1 I$  in ihrer eigenen Richtung verschoben, so rückt der Punkt  $M_1$  dabei auf dem Profil vor. Da für die Geschwindigkeit und Beschleunigung nur das Bogenelement und die Krümmung maßgebend sind, so erkennt man, daß das angegebene Ersatzgetriebe in beiden Elementen mit dem gegebenen übereinstimmt, so daß die gesuchten Größen als Geschwindigkeit und Beschleunigung des Kreuzkopfes des Schubkurbelgetriebes erscheinen.

Bei gleichförmiger Drehung der Scheibe kann die Strecke  $\overline{OK}_1$  unmittelbar als Maß für die Geschwindigkeit von  $K_1$  genommen werden, und dann ist die Strecke  $\overline{OK}_1 = \overline{v_{M_1}}$  — senkrecht zur Richtung  $\overline{OI}$  durch  $O$  bis zur Schubstange gezogen — die gesuchte (gedrehte) Geschwindigkeit. Ferner erhält man, ausgehend von  $\overline{v_{K_1}}$  (in der Abb. 160 gleich  $r_1/2$  gewählt), durch den Linienzug  $\alpha \gamma \alpha'$  die gesuchte Beschleunigung  $\overline{b_{M_1}}$  wie bei der gewöhnlichen Schubkurbel.

Das in Abb. 160 gezeichnete Profil setzt sich aus zwei Kreisbögen mit den Krümmungsmittelpunkten  $K_1$  und  $K_2$  zusammen. An der Stelle  $2$ , wo die Krümmung unstetig ist, der Krümmungsmittelpunkt also von  $K_1$  nach  $K_2$  (genauer gesagt: der Krümmungshalbmesser von einem Wert  $> a$  zu einem Wert  $< a$ ) springt, erhalten wir auch zwei verschiedene Werte der Beschleunigung, und zwar springt diese von einem positiven zu einem negativen Wert. Dieser Unstetigkeit würde natürlich auch eine plötzliche Änderung der Kraft entsprechen, die die



Ventilstange an die Scheibe drückt, und diese Unstetigkeit wird sich im Betriebe als Schlag (aber nicht als Stoß im gewöhnlichen Sinne!) bemerkbar machen.

Dieses Verfahren mit Hilfe eines Ersatzgetriebes versagt nur, wenn die Begrenzung des Profils das Stück einer geraden Linie bildet, wie in Abb. 161 von 0 bis 2. In diesem Falle ist die Angabe eines Ersatzgetriebes, das sich an das gegebene anschmiegt, unmöglich. Wir werden später ein anderes Verfahren kennen lernen, das sich in beiden Fällen gültig erweist, schlagen aber hier, um die bisher zur Verfügung stehenden Hilfsmittel nicht zu überschreiten, den Weg der Rechnung ein.

Wir denken uns in Abb. 161 die Ventilstange  $\overline{OM}$  um den Punkt  $O$  gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gedreht. Sei dann die Strecke  $\overline{OM}_0 = a$ ,

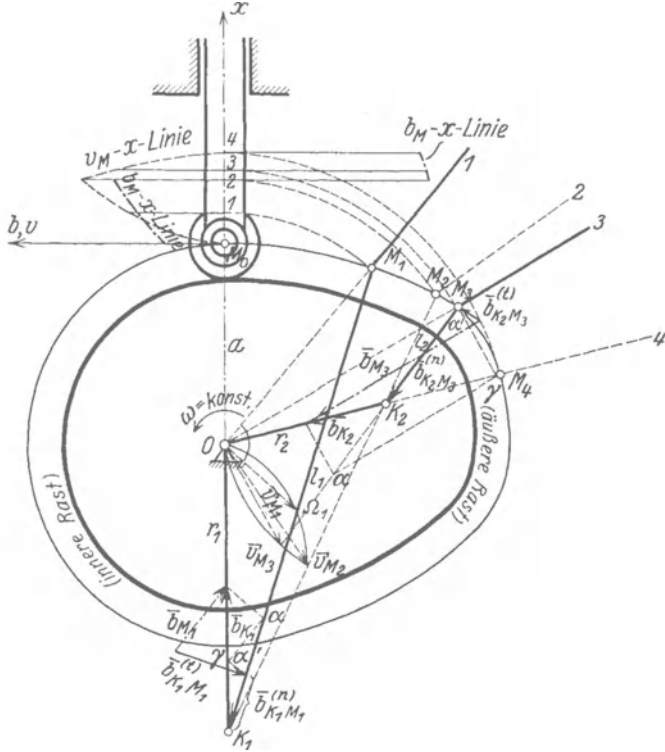


Abb. 160.

$\overline{OM} = x$ , dann ist die gesuchte Geschwindigkeit  $v_M = \dot{x}$ , und die Beschleunigung  $b_M = \ddot{x}$ . Um diese Größen mit  $\omega$  in Verbindung zu bringen, berechnen wir aus dem Dreieck  $OM_0M$  die Strecke  $x$ ,

$$x = a/\cos \varphi$$

und erhalten daraus durch Differentiation mit  $\dot{\varphi} = \omega = \text{konst}$

$$v_M = \dot{x} = \frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \omega = x \omega \operatorname{tg} \varphi,$$

Es ist daher

$$\frac{v_M}{\omega} = \frac{\dot{x}}{\omega} = x \operatorname{tg} \varphi = \overline{O\Omega}, \tag{279}$$

so daß  $\overline{O\Omega}$  ein Maß für die gesuchte Geschwindigkeit von  $M$  ist. Der Punkt  $\Omega$  kann übrigens auch als Drehpol der mit der Ventilstange verbundenen Ebene

gedeutet werden, da der Punkt  $M$  längs des Profils wandert und der mit  $O$  zusammenfallende Punkt durch  $O$  gleitet, die Senkrechten zu diesen Bewegungsrichtungen sich daher in  $\Omega$  schneiden; auch aus diesem Grunde ist die Geschwindigkeit der Ventilstange in ihrer eigenen Richtung  $v_M = O\Omega \cdot \omega$ .

Die Beschleunigung ergibt sich durch nochmalige Differentiation nach  $t$  in der Form

$$b_M \equiv \dot{v}_M \equiv \ddot{x} = a \omega^2 \left[ \frac{1}{\cos \varphi} + \frac{2 \sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi} \right] = x \omega^2 \left[ \frac{2}{\cos^2 \varphi} - 1 \right]$$

oder

$$\frac{b_M}{\omega^2} = x \left[ \frac{2}{\cos^2 \varphi} - 1 \right]. \tag{280}$$

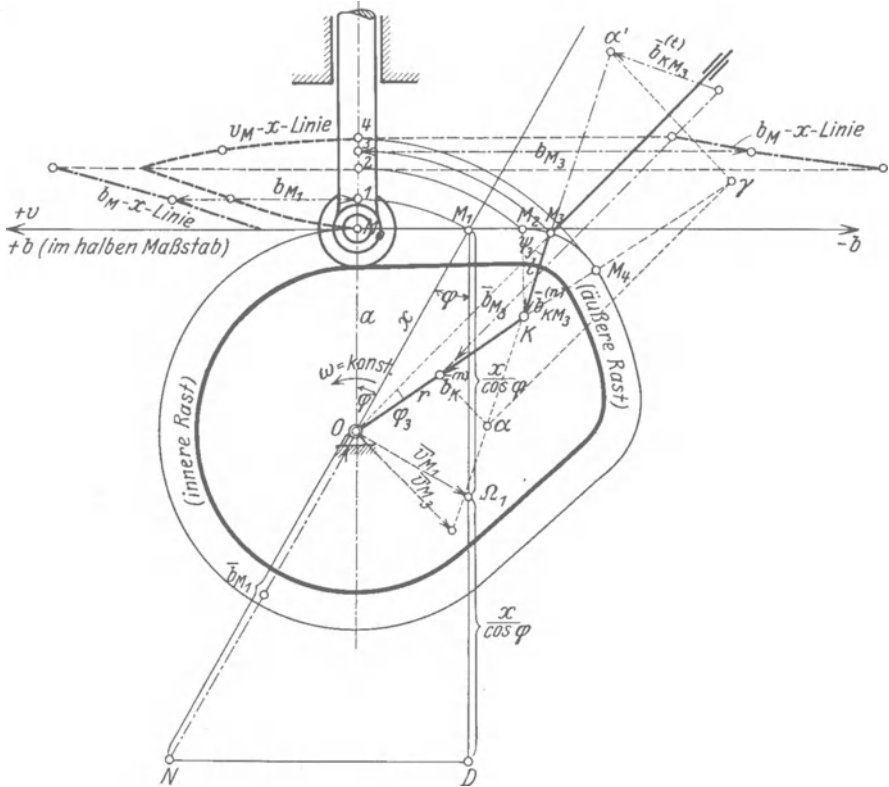


Abb. 161.

Macht man daher in der Abb. 161  $\overline{\Omega D} = \overline{M_1 \Omega}$ ,  $\overline{DN} \perp \overline{M_1 D}$ , so ist

$$\overline{DM_1} = 2 \overline{\Omega M_1} = \frac{2x}{\cos \varphi}, \quad \overline{NM_1} = \frac{\overline{DM_1}}{\cos \varphi} = \frac{2x}{\cos^2 \varphi},$$

und daher

$$\overline{NO} = \overline{NM_1} - \overline{OM_1} = \frac{2x}{\cos^2 \varphi} - x = \frac{b_M}{\omega^2}.$$

Der Verlauf von  $v_M$  und  $b_M$  ist wie früher in die Anfangstellung übertragen; für den kreisförmigen Übergang in die obere Rast sind die Beschleunigungen wieder nach der früheren Methode bestimmt worden.

Daß das Schubkurbelgetriebe  $OKM$  wirklich das zugehörige Ersatzgetriebe darstellt, erkennt man auch, wenn man die Geschwindigkeit und Beschleunigung auch für den kreisförmigen Anhub durch Rechnung ermitteln würde. Man hätte dann wieder  $\overline{OM}_3 = x$  durch den Winkel  $\varphi$  auszudrücken, müßte (ähnlich wie in Beispiel 92) die Winkel  $\varphi_3$  und  $\psi_3$  einführen, da der Punkt  $K$  als Punkt der Scheibe in unveränderlicher Entfernung von  $O$  bleibt und auch die Strecke  $\overline{KM}$  als Krümmungshalbmesser denselben Wert behält. Man sieht daraus, daß das Schubkurbelgetriebe für die Stücke mit gekrümmtem Anhub tatsächlich als Ersatzgetriebe dienen kann.

### III. Bewegung des Körpers im Raume.

**84. Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt.** Der nächste Fall, der in physikalischer und technischer Hinsicht von Wichtigkeit ist, ist die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt  $O$ . Bei dieser Bewegung verschieben sich die um  $O$  herumgelegten Kugelflächen in sich, ganz so, wie sich bei der ebenen Bewegung die parallelen Ebenen in sich verschoben; beide Bewegungen haben auch noch andere Ähnlichkeiten miteinander, die wir sogleich hervorheben wollen.

Zunächst hat auch der um einen festen Punkt  $O$  drehbare Körper drei Freiheitsgrade; denn seine Lage ist durch die zwei Koordinaten eines beliebigen in dem Körper liegenden Punktes  $A$  auf einer

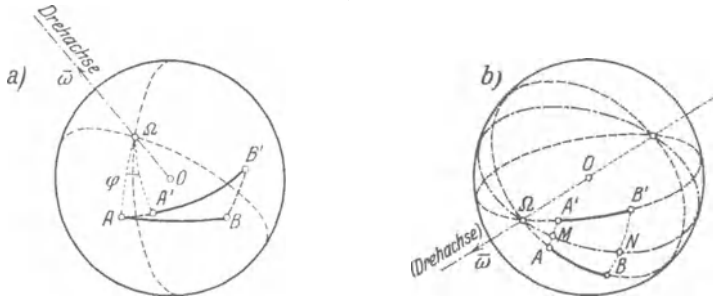


Abb. 162.

um  $O$  herumgelegten Kugel, und durch den Winkel einer im Körper festen Ebene gegen eine im Raume feste Ebene bestimmt, die wir uns beide etwa (für die Zwecke dieser Koordinatenzählung) durch die Gerade  $OA$  hindurchgehend denken können. Wir können aber auch die Lage des Körpers durch Angabe der Koordinaten zweier Punkte  $A$  und  $B$  auf derselben Kugelfläche (was keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet) festlegen, die wieder drei Koordinaten ergeben, da die Lage jedes Punktes auf seiner Kugelfläche durch zwei Koordinaten festgelegt ist und die beiden Punkte voneinander eine unveränderliche Entfernung besitzen.

Wir nehmen nun irgend zwei Lagen des Körpers, oder, was auf dasselbe hinauskommt, zwei Lagen des Punktpaares an, also etwa  $A, B$  und  $A', B'$  in Abb. 162a, ziehen die Symmetrieebenen der Großkreisbögen  $\widehat{AA'}$  und  $\widehat{BB'}$ , und bestimmen deren Schnittlinie  $O\Omega$ , die — zum Unterschiede gegen die ebene Bewegung — immer im Endlichen

liegt; diese Schnittlinie ist die Drehachse für die Drehung um den Winkel  $\varphi$ , durch die der Körper aus der Lage  $OAB$  in die Lage  $OA'B'$  übergeführt werden kann. — In dem besonderen Fall, daß diese beiden Symmetrieebenen zusammenfallen, ist die Drehachse  $O\Omega$  die Schnittlinie der beiden Ebenen  $OAB$  und  $OA'B'$  (Abb. 162 b).

Nimmt man die beiden Lagen  $\widehat{AB}$  und  $\widehat{A'B'}$  sehr nahe aneinander, so kommt dies darauf hinaus, daß man die Richtungen der Bewegungen von  $A$  und  $B$  vorgibt; dann fallen die Halbierungsebenen von  $\widehat{AA'}$  und  $\widehat{BB'}$  in der Grenze mit den Normalebenebenen zu diesen Bewegungsrichtungen zusammen, und ihr Schnitt wird die Momentanachse der betreffenden Bewegung. Wir erhalten daher den Satz:

Jede endliche oder unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt kann als Drehung um eine durch diesen Punkt gehende Achse dargestellt werden.

Die Festlegung der Größe der augenblicklichen Drehung um diese Achse geschieht natürlich wieder durch Angabe der Geschwindigkeit irgendeines Punktes  $A$

$$\bar{v}_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{AA'}}{\Delta t}$$

und diese Geschwindigkeit ist das Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit  $\omega \equiv \dot{\varphi}$  dieser Drehung und dem senkrechten Abstand des Punktes  $A$  von der Drehachse, oder

$$\boxed{\bar{v}_A = \bar{\omega} \times \bar{r}_A.} \quad (281)$$

Bezeichnet  $\alpha$  den Winkel zwischen den Vektoren  $\bar{r}_A$  und  $\bar{\omega}$ , so hat  $\bar{v}_A$  den Betrag  $v_A = r_A \omega \sin \alpha$ .

Zur Kennzeichnung der augenblicklichen Drehung des Körpers um  $O$  können nämlich beide Merkmale: Drehachse und Winkelgeschwindigkeit (mit Vorzeichen!) vereinigt werden durch Angabe eines Vektors  $\bar{\omega}$  von der Länge  $\omega$ , der in der Drehachse liegt, wodurch alle drei Kennzeichen der Drehung: Achse, Größe und Sinn festgehalten werden. Diese Zuordnung Winkelgeschwindigkeit  $\rightarrow$  Vektor  $\bar{\omega}$  erweist sich in allen ihren Folgerungen als zutreffend und ermöglicht eine große Vereinfachung der Darstellung.

Wenn nun die Drehung nicht dauernd um dieselbe Achse erfolgt, so wird im Verlaufe einer endlichen Bewegung die Lage der Drehachse sowohl im Raum wie auch im Körper wechseln — ganz so wie es bei der ebenen Bewegung die Drehpole getan haben. Der Vektor  $\bar{\omega}$  wird daher sowohl im Raume wie auch im bewegten Körper je eine Kegelfläche beschreiben, die durch den Ort der Endpunkte von  $\bar{\omega}$ , d. h. also durch je eine Kurve begrenzt sind; wir erhalten daher den Satz:

Jede endliche Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt kann durch das Abrollen eines beweglichen Achsenkegels auf einem festen Achsenkegel dargestellt werden,

die sich in der augenblicklichen Drehachse berühren. Trägt man auf ihr die jeweilige Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}$  auf, so können die Achsenkegel auch zur Darstellung des Verlaufes der Winkelgeschwindigkeit für die endliche Bewegung des Körpers benutzt werden.

Sind im besonderen beide Kegel Kreiskegel, so nennt man die durch das Abrollen beider Kegel aufeinander dargestellte Bewegung eine Präzessionsbewegung. Eine solche Bewegung findet sich bei der Bewegung der Erde verwirklicht, die tatsächlich nicht um eine in der Erde festliegende Achse erfolgt; die Drehachse der Erde ist vielmehr in jedem Augenblicke die Berührungserzeugende zweier Achsenkegel, von denen der „feste“ einen Öffnungswinkel von  $23\frac{1}{2}^\circ$  hat, während der bewegliche so klein ist, daß er an den Erdpolen Kreise von nur 27 cm Halbmesser ausschneidet; dementsprechend ist seine Umlaufzeit auf dem festen Kegel sehr groß und beträgt etwa 26000 Jahre (= 1 Platonisches Jahr).

Es möge hier nur noch bemerkt werden, daß als Koordinaten, zur Bestimmung der Lage des Körpers, am einfachsten gewisse Winkel (z. B. die sog. Eulerschen Winkel) gewählt werden, welche die gegenseitige Lage eines im Körper festen gegen ein im Raum festes Koordinatensystem, die den Anfangspunkt gemeinsam haben, angeben (88).

**85. Schraubenbewegung.** Der freie starre Körper im Raume besitzt sechs Freiheitsgrade, zu seiner Festlegung sind daher sechs Koordinaten notwendig: drei dienen zur Festlegung der Lage irgendeines Punktes des Körpers und drei zur Festlegung der Lage des Körpers um diesen Punkt wie in 84. Die Kennzeichnung der Lage des Körpers kann auch durch Angabe der Lage von drei (nicht in einer Geraden liegenden) Punkten  $A, B, C$  geschehen; diese besitzen wegen der vorausgesetzten Starrheit unveränderliche Entfernungen voneinander und erfordern daher zu ihrer Festlegung im Raume  $3 \text{ mal } 3 - 3 = 6$  Koordinaten.

Um einen Körper aus einer Lage  $A, B, C$  in eine zweite  $A' B' C'$  ( $\triangle ABC \cong \triangle A' B' C'$ ) überzuführen, kann man so vorgehen: man erteilt dem Körper eine räumliche Schiebung  $\overline{AA'}$  und bringt dadurch den Punkt  $A$  mit  $A'$  zur Deckung; dann gibt es eine darauffolgende Drehung um  $A'$ , die auch  $B$  in  $B'$  und  $C$  in  $C'$  überführt. Jede beliebige Bewegung kann also jedenfalls dargestellt werden durch den Schiebungsvektor  $\overline{AA'} = \bar{\tau}$  und durch eine Drehung um eine Achse durch  $A'$  um den Winkel  $\varphi$ ; statt des Punktpaares  $A, A'$  kann natürlich jeder andere, mit  $ABC$  starr verbundene Punkt  $P$  und sein entsprechender  $P'$  in der gleichen Weise verwendet werden. Schiebungsvektor und Drehachse werden im allgemeinen geneigt zueinander ausfallen; man kann jedoch die Schiebung  $\bar{\tau}$  und Drehung  $\varphi$  immer so anordnen, daß die Schiebungsrichtung zur Drehachse parallel verläuft: eine solche Bewegung nennt man eine Schraubenbewegung oder kurz Schraubung und wir erhalten den Satz:

Jede beliebige Bewegung eines starren Körpers läßt

sich als eine Schraubung darstellen; eine Schraubung ist durch ihre Achse, die Schiebungsgröße  $\bar{\tau}$  parallel zu ihr und den Drehwinkel  $\varphi$  um die Achse bestimmt.

Beispiel 95. Um die Schraubung zu finden, die den Körper aus der Lage  $ABC$  nach  $A'B'C'$  (Abb. 163) überführt, ziehe man von einem beliebigen Punkt  $P$  des Raumes die Vektoren:

$$\overline{Pa} = \overline{AA'}, \quad \overline{Pb} = \overline{BB'}, \quad \overline{Pc} = \overline{CC'},$$

fälle von  $P$  das Lot  $\overline{Pp}$  auf die durch die drei Punkte  $abc$  bestimmte Ebene  $\varepsilon$  und zerlege

$$\overline{Pa} = \overline{Pp} + \overline{pa}, \quad \overline{Pb} = \overline{Pp} + \overline{pb}, \quad \overline{Pc} = \overline{Pp} + \overline{pc};$$

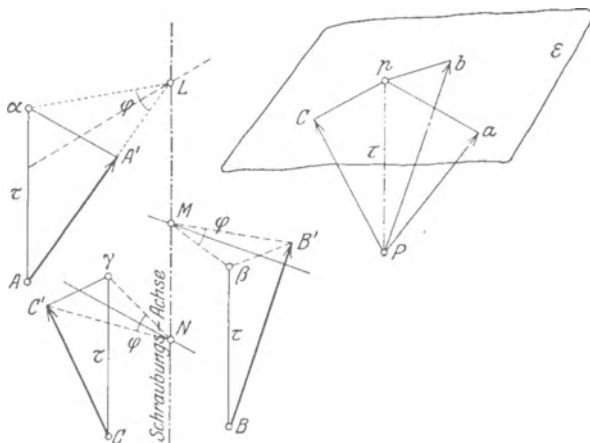


Abb. 163.

die dadurch bestimmten Dreiecke überträgt man an die Strecken  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$ ,  $\overline{CC'}$  und erhält

$$\overline{AA'} = \overline{A\alpha} + \overline{\alpha A'}, \quad \overline{BB'} = \overline{B\beta} + \overline{\beta B'}, \quad \overline{CC'} = \overline{C\gamma} + \overline{\gamma C'}.$$

dann ist

$$\overline{A\alpha} = \overline{B\beta} = \overline{C\gamma} = \overline{Pp} = \text{dem Schiebungsvektor } \bar{\tau} \text{ für die Schraubung.}$$

Legt man ferner die Symmetrieebenen der Strecken  $\overline{A'\alpha}$ ,  $\overline{B'\beta}$  und  $\overline{C'\gamma}$ , so schneiden sich diese wegen der Starrheit des Körpers in einer Geraden, und diese ist die Schraubungsachse; der zugehörige Drehwinkel ist

$$\sphericalangle A' L \alpha = \sphericalangle B' M \beta = \sphericalangle C' N \gamma = \varphi,$$

wenn  $L, M, N$  die Fußpunkte der von den Punkten  $A', \alpha, B', \beta, C', \gamma$  auf die Schraubungsachse gefällten Lote sind.

Für irgendeine kontinuierliche endliche Bewegung wird sich die Lage der Schraubungsachse sowohl im Raume wie auch im Körper ändern, und die Schar der Geraden, die im Raume und im Körper nacheinander zu Schraubungsachsen werden, wird im Raume wie auch im Körper je eine Regelfläche erfüllen, die man Achsenflächen nennt und die sich längs der augenblicklichen Schraubungsachse berühren. Die wirkliche Bewegung der Körper kann durch Abschrotung



dieser Flächen aufeinander dargestellt werden, worunter man die Rollung um sie und die gleichzeitige Verschiebung längs der augenblicklichen Berührungserzeugenden versteht.

Zur Darstellung des Geschwindigkeitszustandes betrachtet man die Schiebung  $\overline{\Delta s}$  und Drehung  $\Delta \varphi$  als kleine Größen und operiert nicht mit  $\overline{\Delta s}$  und  $\Delta \varphi$  selbst, sondern mit den Grenzwerten der Quotienten dieser Größen durch  $\Delta t$  für  $\Delta t \rightarrow 0$ , also mit

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta s}}{\Delta t} = \frac{\overline{ds}}{dt} = \bar{v} \quad \text{und} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega. \quad (282)$$

#### IV. Zusammensetzung von Bewegungen.

**86. Zusammensetzung von Schiebungen.** Von der Zusammensetzung und Zerlegung von Geschwindigkeiten haben wir bei Betrachtung der Punktbewegungen wiederholt Gebrauch gemacht; bestimmend hierfür war der vektorielle Charakter der Geschwindigkeit, der unmittelbar die hierbei zur Anwendung kommenden Regeln lieferte.

In diesem Kapitel handelt es sich um die Aufstellung entsprechender Regeln für ausgedehnte Körper und demgemäß haben wir die Zusammensetzung jener Bewegungen vor uns, die wir zuvor einzeln besprochen haben: Schiebungen, Drehungen und Schraubungen. Die Anordnung für die Zusammensetzung können wir uns derart ausgeführt denken, daß jede einzelne Bewegung durch eine Führung in dem darauf folgenden System verwirklicht sei, welches System selbst wieder entsprechend geführt zu denken ist.

Die Ausführung der Zusammensetzung geschieht mit Hilfe des folgenden Satzes, dessen Richtigkeit wegen der Vektoreigenschaft der Geschwindigkeit ohne weiteres einleuchtet:

Die Geschwindigkeit, die ein beliebiger Punkt des Körpers annimmt, der eine Anzahl von beliebigen (übereinandergelagerten) Bewegungen (Schiebungen, Drehungen, Schraubungen) gleichzeitig ausführen soll, ist die vektorielle Summe der Geschwindigkeiten, die der Punkt durch die einzelnen Bewegungen erhält.

Daraus folgt unmittelbar, daß die Zusammensetzung von Schiebungen (Translationen) mit den Geschwindigkeiten  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$  stets wieder eine Schiebung ist, deren Geschwindigkeit  $\bar{v}$  durch die Gleichung bestimmt ist, die für jeden einzelnen Punkt des Systems gilt, welches alle Einzelbewegungen mitmacht

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \dots + \bar{v}_n = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i. \quad (283)$$

Mit Hilfe desselben Satzes ist auch die Zerlegung einer Schiebung in beliebig viele Komponenten ausführbar.

Beispiel 96. Bestimmung der Eigengeschwindigkeit eines Flugzeuges im Winde. In diesem Fall wird das Flugzeug durch den „Windkörper“



fortgetragen, in dem es sich befindet und der die Rolle des Bezugssystems vertritt; die Geschwindigkeit des Windkörpers sei  $\bar{w}$ . Kennzeichnend für die Beschaffenheit des Flugzeuges ist nur seine Eigengeschwindigkeit  $\bar{v}$ , d. i. die Geschwindigkeit in bezug auf den umgebenden Luftkörper, nicht seine „absolute“ Geschwindigkeit in bezug auf die Erde.  $\bar{v}$  kann auf folgende Arten bestimmt werden:

a) Durch Flüge in der Windrichtung. In der Windrichtung wird eine „Stoppstrecke“ von bekannter Länge  $l$  (in m) abgesteckt, durch gut sichtbare Objekte bezeichnet und hin und zurück abgeflogen; die hierfür notwendigen Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  (in s) werden „abgestoppt“. Dann ist die Geschwindigkeit in Bezug auf die Erde für den

$$\text{Hinflug: } v_1 = v + w = l/t_1,$$

$$\text{Rückflug: } v_2 = v - w = l/t_2,$$

daraus folgt durch Addition die Eigengeschwindigkeit

$$v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = \frac{l}{2} \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right) \text{ m/s} = 1,8 l \left( \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right) \text{ km/h}$$

und durch Subtraktion die Windgeschwindigkeit

$$w = \frac{1}{2}(v_1 - v_2) = \frac{l}{2} \left( \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right) \text{ m/s.}$$

b) Durch Überfliegen eines Stoppdreieckes (Abb. 164a) und Bestimmung der absoluten Geschwindigkeiten in Richtung der drei Seiten durch Ab-

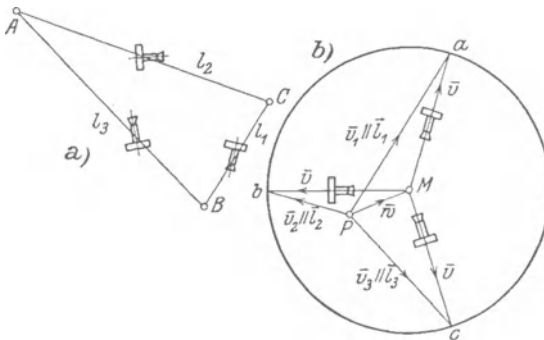


Abb. 164.

stopfung der zum Überfliegen der Stoppstrecken erforderlichen Zeiten; sind die Seitenlängen  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ , die zugehörigen Zeiten  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ , so sind die (absoluten) Geschwindigkeiten in Bezug auf die Erde

$$v_1 = l_1/t_1, \quad v_2 = l_2/t_2,$$

$$v_3 = l_3/t_3.$$

Jedes  $\bar{v}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ist die Summe aus der unbekannteren Eigengeschwindigkeit  $\bar{v}$  und der unbekannteren Windgeschwindigkeit  $\bar{w}$ .

Denkt man sich für den Flug längs jeder Dreiecksseite das zugehörige Geschwindigkeitsdreieck gezeichnet, so erhält man durch Aneinanderlegung dieser drei Dreiecke längs der gemeinsamen Windgeschwindigkeit  $\bar{w}$  nach Abb. 164b wegen des gemeinsamen Wertes der Eigengeschwindigkeit  $v$  die folgende Konstruktion zu ihrer Ermittlung:

Man zeichne von einem willkürlich gewählten Pol  $P$  einen Geschwindigkeitsplan durch Auftragen der Geschwindigkeiten  $\bar{v}_1$ ,  $\bar{v}_2$ ,  $\bar{v}_3$  in Richtung der drei Dreiecksseiten und schlage durch die Endpunkte dieser Strecken  $\bar{v}_1$ ,  $\bar{v}_2$ ,  $\bar{v}_3$  einen Kreis; dann gibt der Halbmesser dieses Kreises  $\bar{M}a = \bar{M}b = \bar{M}c = \bar{v}$  die Größe der unbekannteren Eigengeschwindigkeit, und  $\bar{P}\bar{M} = \bar{w}$  gibt den Vektor der unbekannteren Windgeschwindigkeit. In der Abb. 164a sind die Stellungen des Flugzeuges beim Fluge längs der drei Seiten angedeutet.

**87. Zusammensetzung von Drehungen.** Wie sich Schiebungen auf Grund des Additionsgesetzes für Vektoren gerade so zusammensetzen wie Momente, so erfolgt die Addition von gleichzeitig stattfindenden Drehungen eines starren Körpers genau in derselben Weise wie die

von Kräften am starren Körper. Jedem Satz aus der Statik der räumlichen Kräftegruppen läßt sich ein Satz aus der Theorie der Bewegungen gegenüberstellen. Wir werden auch hier dieselben Fälle zu unterscheiden haben, wie sie schon bei den Kräften am starren Körper vorkamen.

Man beachte, daß diese Zuordnung

Kräfte → Drehungen,  
 Momente → Schiebungen

nur formal ist und keineswegs etwa einen kausalen Zusammenhang zwischen den Kraftgrößen (links) und den von ihnen irgendwie „erzeugten“ Bewegungen (rechts) zum Ausdruck bringt.

a) Drehungen um sich schneidende Achsen sind immer gleichwertig mit einer Drehung um eine Achse durch ihren Schnittpunkt, die nach dem Parallelogrammgesetz aus den gegebenen Drehungen gefunden wird (Abb. 165).

Für zwei Drehungen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  um die Achsen  $A_1$  und  $A_2$  ergibt sich die Summe  $\bar{\omega}$  und die resultierende Drehachse  $A$  mittels der den Gln. (15) bis (17) vollkommen entsprechenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \alpha \\ \omega_1 : \omega_2 : \omega &= \sin \alpha_2 : \sin \alpha_1 : \sin \alpha \end{aligned} \right\} \bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2. \quad (284)$$

$$\omega = \omega_1 \cos \alpha_1 + \omega_2 \cos \alpha_2$$

Denn jeder Punkt der Achse  $A$  erhält nach dem in 86 gegebenen Satze die Geschwindigkeit

$$a_1 \omega_1 - a_2 \omega_2 = \overline{OM} \cdot (\omega_1 \sin \alpha_1 - \omega_2 \sin \alpha_2) = 0$$

und dies gibt den einen Teil der zweiten der Gln. (284) und ähnlich kann man auch das Bestehen der anderen

zeigen, obwohl ihre Richtigkeit schon durch die Auffassung des Vektorcharakters der Drehungen  $\bar{\omega}$  einleuchtet.

Fallen die gegebenen Drehachsen, also auch die Vektoren der Drehungen  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2 \dots$  zusammen, dann wird aus der geometrischen

Addition die algebraische und es ist  $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i$ .

b) Drehungen um parallele Achsen werden nach denselben Gesetzen zusammengefügt wie parallele Kräfte.

Um die Bewegung anzugeben, welche der Summe der Drehungen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  um die Achsen  $A_1$  und  $A_2$  entspricht, suchen wir einen Punkt oder eine Gerade  $A$  zu bestimmen, die durch das Zusammenwirken beider Drehungen zur Ruhe kommen; da die Geschwindigkeiten von  $A$  zufolge der beiden Einzeldrehungen gleich groß und entgegengesetzt sein müssen, so folgt, daß  $A$  bei gleichem Sinn von  $\omega_1$  und  $\omega_2$  zwischen  $A_1$  und  $A_2$  liegen und daß wegen der Gleichheit der Geschwindigkeiten  $a_1 \omega_1 = a_2 \omega_2$  sein muß; es ist also (Abb. 166)

$$a_1 : a_2 = \omega_2 : \omega_1. \quad (285)$$

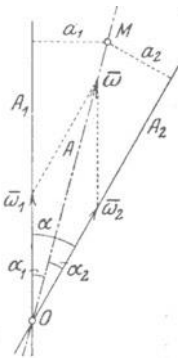


Abb. 165.

Weiter folgt durch Betrachtung der Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes, wofür der Einfachheit halber etwa  $B$  gewählt werden möge,

$$v_B = r_1 \omega_1 + r_2 \omega_2 = (r + a_1) \omega_1 + (r - a_2) \omega_2 = r (\omega_1 + \omega_2) = r \omega$$

und die Größe der resultierenden Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \omega_1 + \omega_2. \tag{286}$$

Bei entgegengesetztem Vorzeichen von  $\omega_1$  und  $\omega_2$  liegt  $A$  außerhalb der Strecke  $A_1 A_2$ , und zwar auf der Seite der größeren Winkelgeschwindigkeit, und es ist  $\omega = \omega_1 - \omega_2$ .

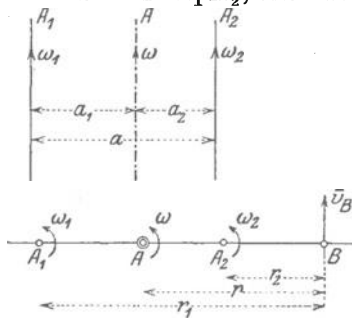


Abb. 166.

Wir können diesen Sachverhalt sogleich für beliebig viele Drehungen verallgemeinern und so aussprechen:

Beliebig viele Drehungen  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_n$  um parallele Achsen  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sind stets gleichwertig mit einer Drehung um eine Achse  $A$ , die durch den Schwerpunkt der gegebenen Achsen geht, wenn in ihnen die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  als Gewichte wirken (wobei entsprechend den negativen Winkelgeschwindigkeiten auch „negative Gewichte“ zuzulassen sind).

Für die zeichnerische Ausführung dieser Zusammensetzung können dieselben Methoden herangezogen werden, wie sie aus der Statik für die Zusammensetzung paralleler Kräfte bekannt sind (I. Teil, II.).

Mit den unter a) und b) genannten sind jene Fälle erschöpft, bei denen durch Zusammensetzung von Drehungen wieder eine Drehung herauskommt.

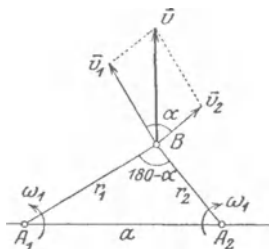


Abb. 167.

c) Sonderfall: Drehungspaar. Wenn insbesondere  $\omega_1 = -\omega_2$  ist, so erleidet der in b) ausgesprochene Satz eine Ausnahme; die Ausführung der in den Gln. (285) und (286) gegebenen Vorschriften würde  $a_1 = a_2 = \infty$  und  $\omega = 0$  ergeben, was auf die Singularität dieses Falles hindeutet.

Die Bedeutung eines solchen Drehungspaares ersehen wir, wenn wir auf den Hilfsatz in 86 zurückgehen und die Geschwindigkeit  $\bar{v}$  ausrechnen, die irgendein Punkt  $B$  (Abb. 167) infolge der beiden Drehungen empfängt. Der von  $A_1$  herrührende Anteil ist

$$v_1 = r_1 \omega_1,$$

der von  $A_2$  herrührende

$$v_2 = r_2 \omega_1$$

in den in die Abbildungen eingetragenen Richtungen. Die Summe

dieser beiden Geschwindigkeiten ist dann gegeben durch

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos \alpha$$

$$= \omega_1^2 [r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos (180 - \alpha)] = \omega_1^2 a^2,$$

daher

$$v = \omega_1 a, \tag{287}$$

d. h. die Geschwindigkeit  $v$  ist für alle Punkte gleich groß, und, wie sich ebenfalls unmittelbar ergibt, senkrecht zur Ebene durch die Achsen  $A_1$  und  $A_2$  gerichtet. Dies ist aber das Kennzeichen einer Schiebung und wir erhalten den Satz:

Zwei Drehungen um parallele Achsen in der Entfernung  $a$  mit gleichgroßen und entgegengesetzten Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1 = -\omega_2$  sind gleichwertig mit einer Schiebung vom Betrage  $\omega_1 a$ , senkrecht zur Ebene der beiden Achsen.

Umgekehrt kann jede Schiebung  $\bar{v}$  in ein Drehungspaar  $\bar{\omega}_1, -\bar{\omega}_1$  aufgelöst oder zerlegt werden, dessen Achsenebene senkrecht zu  $\bar{v}$  ist, und für welches die Gl. (287):  $v = \omega_1 a$  erfüllt ist. Im übrigen sind die Achsen vollständig willkürlich.

Beispiel 97. Das Hinzutreten einer Schiebung  $\bar{v}$  zu einer Drehung  $\bar{\omega}$  um eine Achse  $A$  bedeutet eine Drehung um eine Achse  $A'$  (parallel zu  $A$ ) in einer Entfernung  $a = v/\omega$  von  $A$ , die senkrecht zur Richtung der Schiebung gegen  $A$  gelegen ist (Abb. 168).

Denn die Auflösung der Schiebung  $\bar{v}$  in ein Drehungspaar kann so ausgeführt werden, daß die Winkelgeschwindigkeiten dieses Paares  $\omega, -\omega$  sind und ihr Abstand durch  $a = v/\omega$  bestimmt ist; die Achse für  $-\omega$  läßt man mit der gegebenen Achse für  $\omega$  zusammenfallen, wodurch eine Drehung um die Achse  $A'$  in der bezeichneten Lage übrig bleibt.

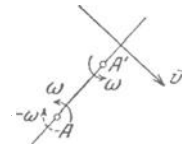


Abb. 168.

Die Richtung dieser Verschiebung läßt sich bei gegebenen  $v$  und  $\omega$  leicht feststellen.

Umgekehrt kann eine Drehung  $\bar{\omega}$  um die Achse  $A$  in eine Drehung vom gleichen Betrage und gleichem Sinn um eine parallel zu  $A$  liegende Achse  $A'$  verschoben, oder nach einem beliebigen Punkt  $P$  hin „reduziert“ werden, wenn zu  $\bar{\omega}$  in der neuen Lage noch eine Schiebung  $\bar{v}$  vom Betrage  $v = \omega a$  hinzugenommen wird, worin  $a$  den Abstand von  $A$  und  $A'$  bedeutet und die Richtung von  $\bar{v}$  zur Ebene von  $A$  und  $A'$  senkrecht steht. Die Ausführung dieser „Reduktion“ geschieht demgemäß in der Weise, daß in  $P$  zwei gleiche und entgegengesetzte Drehungen  $\bar{\omega}, -\bar{\omega}$  um eine Achse  $A'$  parallel  $A$  angenommen und  $\bar{\omega}$  um  $A$  und  $-\bar{\omega}$  um  $A'$  zur Schiebung  $v = \omega a$  vereinigt werden.

d) Die Zusammensetzung von Drehungen um kreuzende (windschiefe) Achsen führt auf eine Schraubung. Das zu ihrer Auffindung anzuwendende Verfahren stimmt mit dem in 44 dargestellten überein.

Beispiel 98. Die Schraubung, die den Drehungen  $\bar{\omega}_1$  und  $\bar{\omega}_2$  um zwei kreuzende Achsen  $A_1$  und  $A_2$  gleichwertig ist, läßt sich unmittelbar angeben (Abb. 169). Man zeichne den kürzesten Abstand  $\overline{F_1 F_2} = a$  und von einem beliebigen Punkt  $P$  das Dreieck der Winkelgeschwindigkeiten:  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ ; dann ist

$$\omega_1 : \omega_2 : \omega = \sin \alpha_2 : \sin \alpha_1 : \sin \alpha, \quad \text{also insbesondere} \quad \omega_1 \sin \alpha_1 = \omega_2 \sin \alpha_2.$$

Ferner zerlegt man  $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}'_1 + \bar{\omega}''_1$ ,  $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}'_2 + \bar{\omega}''_2$ , worin  $\bar{\omega}'_1$  und  $\bar{\omega}'_2 \perp \bar{\omega}$  und  $\bar{\omega}''_1$  und  $\bar{\omega}''_2 \parallel \bar{\omega}$ , so daß  $\omega'_1 = \omega_1 \sin \alpha_1$ ,  $\omega'_2 = \omega_2 \sin \alpha_2$ , daher ist  $\omega'_1 = \omega'_2$ ; diese beiden bilden daher ein Drehungspaar, dem eine Schiebung vom Betrage  $\omega'_1 a$  entspricht, senkrecht zur Ebene  $\omega'_1, \omega'_2$ , d. h. parallel zu  $\bar{\omega}$ . Diese Schiebung hat nach Gl. (287) die Größe:

$$v = \omega'_1 a = \omega_1 a \sin \alpha_1, \quad \text{und da} \quad \sin \alpha_1 = \frac{\omega_2}{\omega} \sin \alpha,$$

so folgt

$$v = \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega} a \sin \alpha. \quad (288)$$

Die beiden anderen Teile  $\omega''_1$  und  $\omega''_2$  geben zusammengefügt nach b) eine Drehung um eine Achse  $A \parallel \omega''_1 \parallel \omega''_2$  von der Größe

$$\omega = \omega''_1 + \omega''_2 = \omega_1 \cos \alpha_1 + \omega_2 \cos \alpha_2, \quad (289)$$

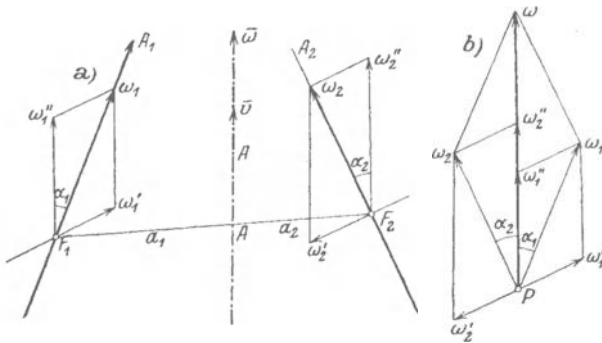


Abb. 169.

deren Achse den Abstand  $a$  in dem Verhältnis teilt (Gl. 285):

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\omega''_2}{\omega''_1} = \frac{\omega_2 \cos \alpha_2}{\omega_1 \cos \alpha_1} = \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_2}{\sin \alpha_2 \cos \alpha_1},$$

daher

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2}, \quad a_1 + a_2 = a, \quad (290)$$

Da  $\bar{v} \parallel \bar{\omega}$ , erhalten wir unmittelbar eine Schraubung, welche durch diese Gleichungen vollständig gekennzeichnet ist.

Umgekehrt kann — wieder ganz ähnlich wie in der Statik — jede Schraubung in ein „räumliches Drehungspaar“  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$  (d. s. zwei Drehungen um kreuzende Achsen) zerlegt werden; der Inhalt des durch die beiden Vektoren  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$  bestimmten Parallelepipedes hat für alle Zerlegungen dieselbe Größe (ist eine Invariante).

**88. Die Eulerschen Winkel und die Eulerschen kinematischen Gleichungen.** Ein um einen festen Punkt (Kugelgelenk) drehbarer starrer Körper besitzt drei Freiheitsgrade, zur Festlegung seiner Lage sind daher drei Koordinaten erforderlich. Als solche Koordinaten kann man die Winkel eines „körperfesten“ Achsenkreuzes ( $O, \xi, \eta, \xi$ ) gegenüber einem „raumfesten“ Achsenkreuz ( $O, x, y, z$ ) nehmen; dies sind neun Größen, zwischen denen aber sechs Gleichungen bestehen, so daß nur drei unabhängige Größen übrig bleiben.

An Stelle dieser Winkel, die recht verwickelte Rechnungen verursachen würden, werden besser die sog. Eulerschen Winkel  $\psi, \vartheta, \varphi$  eingeführt, die so definiert sind (Abb. 170): Wir bezeichnen die Schnittlinie  $\overline{OK}$  der  $x-y$ - und der  $\xi-\eta$ -Ebene als Knotenachse und die in der  $\xi-\eta$ -Ebene zu ihr senkrecht stehende Gerade als Querachse. Die Eulerschen Winkel sind dann

$$\sphericalangle xOK = \psi, \quad \sphericalangle ZO\zeta = \vartheta, \quad \sphericalangle KO\xi = \varphi.$$

Man macht sich leicht klar, wie man bei gegebenen Werten von  $\psi, \vartheta, \varphi$  vom raumfesten Achsenkreuz  $(O, x, y, z)$  ausgehend zum körperfesten  $(O, \xi, \eta, \zeta)$  gelangt.

Um die Vektoren der diesen Winkeln entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}$  einzutragen, betrachten wir solche Bewegungen des Körpers, bei denen nur je einer von diesen Winkeln verändert wird, während die zwei anderen unverändert bleiben. Man erkennt dann, daß  $\dot{\psi}$  in der  $z$ -Achse,  $\dot{\vartheta}$  in der Knotenachse und  $\dot{\varphi}$  in der  $\zeta$ -Achse liegt. Wir berechnen nun die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}$  des Körpers nach den Achsen  $\xi, \eta, \zeta$ , indem wir die nach diesen Richtungen fallenden Teile von  $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}$  zusammensetzen. Hierzu machen wir die Zerlegungen:

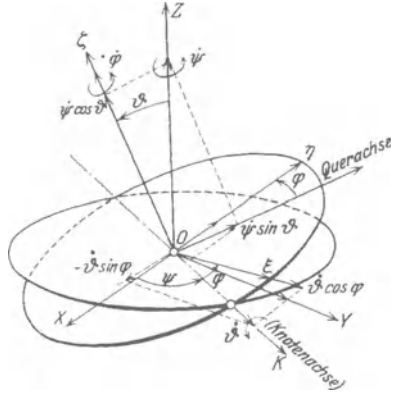


Abb. 170.

$$\dot{\psi} \text{ in } [\dot{\psi} \sin \vartheta \parallel \text{Querachse}, \\ \dot{\psi} \cos \vartheta \parallel O\zeta]$$

und weiter

$$\dot{\vartheta} \text{ in } [\dot{\vartheta} \sin \varphi \parallel O\xi, \quad \dot{\vartheta} \cos \varphi \parallel O\eta, \quad 0 \parallel O\zeta], \\ \dot{\varphi} \text{ in } [0, \quad 0, \quad \dot{\varphi} \parallel O\zeta].$$

Sammeln wir nun die in die Richtungen  $\xi, \eta, \zeta$  fallenden Teile, so erhalten wir die Komponenten von  $\bar{\omega}$  nach diesen Richtungen, die wir mit  $p, q, r$  bezeichnen, in der Form

$$\boxed{\begin{aligned} p &= \dot{\vartheta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi, \\ q &= -\dot{\vartheta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi, \\ r &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta, \end{aligned}} \quad (291)$$

und dies sind die Eulerschen kinematischen Gleichungen, die insbesondere für die Theorie des Kreisels hervorragende Wichtigkeit besitzen.



Man beachte, daß sich  $p, q, r$ , obwohl sie Winkelgeschwindigkeiten bedeuten, nicht als Ableitungen von geometrisch definierten Winkeln nach  $t$  schreiben lassen; sie entsprechen sog. nicht-holonomen Koordinaten, denen keine anschauliche geometrische Bedeutung zukommt.

88. Die Zusammensetzung von Schraubungen (insbesondere von Drehungen) läßt sich nach demselben Schema durchführen wie die Zusammensetzung von Dynamen und führt stets wieder auf eine Schraubung.

a) Bevor wir den Vorgang auseinandersetzen können, nach dem diese Schraubung zu bestimmen ist, müssen wir noch die Voraufgabe lösen: die Zusammensetzung einer Drehung  $\bar{\omega}$  und einer hierzu unter  $(\alpha \neq \pi/2)$  geneigten Schiebung  $\bar{v}$  (Abb. 171); es ist klar, daß das Ergebnis hiervon eine Schraubung sein wird, und daß für die Aufsuchung dieser Schraubung die Beziehung verwendet wird, die nach 87c) zwischen der Schiebung und dem Drehungspaar besteht. Wir zerlegen  $\bar{v}$  nach Abb. 171 in zwei Teile

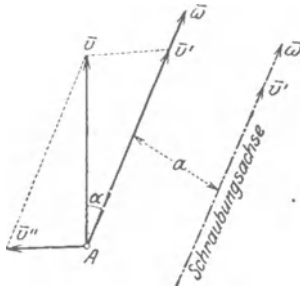


Abb. 171.

$$\bar{v} = \bar{v}' + \bar{v}'', \quad \text{wobei} \quad \bar{v}' \parallel \bar{\omega}, \quad \bar{v}'' \perp \bar{\omega}$$

ist, und lösen den zu  $\bar{\omega}$  senkrechten Teil  $\bar{v}'' = v \sin \alpha$  in ein Drehungspaar auf, indem wir  $\bar{v}'' = v \sin \alpha = \omega a$  setzen und daraus  $a = \bar{v}''/\omega$  ausrechnen. Das Hinzutreten von  $\bar{v}'$  zu  $\bar{\omega}$  bedeutet nach 87c), Beispiel 97, eine Parallelverschiebung von  $\bar{\omega}$  um das Stück  $a = \bar{v}''/\omega$  in einer durch  $\bar{\omega}$  senkrecht zu  $\bar{v}''$  gelegten Ebene; dieses neue  $\bar{\omega}$  gibt mit  $\bar{v}'$  zusammen die gesuchte Schraubung  $(\bar{v}', \bar{\omega})$ , wobei  $\bar{v}' = v \cos \alpha$  ist, die den gegebenen  $\bar{v}$  und  $\bar{\omega}$  gleichwertig ist.

b) Die Zusammensetzung von beliebig vielen Schraubungen  $(\bar{v}_1, \bar{\omega}_1)$  um  $A_1, (\bar{v}_2, \bar{\omega}_2)$  um  $A_2, \dots, (\bar{v}, \bar{\omega}_n)$  um  $A_n$  zu einer einzigen Schraubung geschieht nun in folgender Weise: Man wählt einen beliebigen Punkt  $P$  und „reduziert“ alle Drehungen  $\bar{\omega}_1 \dots \bar{\omega}_n$  an diesen Punkt; dies geschieht dadurch, daß man nach Beispiel 97 in  $P$  je zwei gleich große und entgegengesetzte Drehungen  $\bar{\omega}_i, -\bar{\omega}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) anbringt, und jedes  $\bar{\omega}_i$  um die Achse  $A_i$  ersetzt durch eine Drehung  $\bar{\omega}_i$  um  $A'_i$  (parallel zu  $A_i$ ) durch  $P$  und eine Schiebung (d. i. ein Drehungspaar)  $\bar{w}_i = \bar{\omega}_i \times \bar{a}_i$ , wobei  $a_i$  der Abstand der beiden Achsen  $A_i$  und  $A'_i$  ist. Da alle Drehungen jetzt den gemeinsamen Punkt  $P$  besitzen, bildet man nach 87a) und der eben besprochenen Voraufgabe

$$\sum_{i=1}^n \bar{\omega}_i = \bar{\omega}, \quad \sum_{i=1}^n \bar{v}_i + \sum_{i=1}^n \bar{w}_i = \bar{v} = \bar{v}' + \bar{v}'', \quad \text{wobei} \quad \bar{v}' \parallel \bar{\omega}, \quad \bar{v}'' \perp \bar{\omega}.$$

Aus  $\bar{\omega}, \bar{v}'$  und  $\bar{v}''$  kann dann (wie zuvor in a) die gesuchte Schraubung gefunden werden, die den gegebenen Schraubungen gleichwertig ist.

Alle diese Verfahren verlaufen, wie bereits hervorgehoben, in vollständiger Analogie mit den in der Raumstatik gefundenen Konstruktionen.



## V. Relative Bewegung.

**89. Kennzeichnung der Probleme.** Wir wissen, daß von einer Bewegung im physikalischen Sinne nur gesprochen werden kann, wenn sich Bezugskörper angeben lassen, gegen die sie erkennbar ist: insofern gibt es nur relative Bewegungen. In diesem Kapitel bezeichnen wir jedoch damit insbesondere solche Probleme der Bewegung der Körper, bei denen es erforderlich ist, außer dem eigentlichen Bezugssystem  $(O, x, y)$ , das wir als Trägheitssystem auffassen und als ruhend annehmen, noch ein zweites, bewegtes Achsensystem  $(\Omega, \xi, \eta)$  hinzuzunehmen. Betrachten wir zunächst nur die Bewegung von Punktkörpern, so wird dabei als gegeben angesehen: 1. die auf den Punkt wirkenden „absoluten“ oder „eingepprägten“ Beschleunigungen  $\bar{b}_e$  (das sind Gewichte u. dgl.), auf das ruhende oder absolute System  $(O, x, y)$  bezogen, 2. die Eigenbewegung des bewegten Systems  $(\Omega, \xi, \eta)$  gegen das ruhende. Gesucht ist die „relative Bewegung“, das ist die Bewegung in bezug auf das bewegte Achsensystem, also vor allem die „relative Geschwindigkeit und Beschleunigung“ (d. h. die erste und zweite Zeitableitung der „relativen“ Koordinaten in bezug auf das bewegte Achsensystem); aus dieser ist sodann die „relative Bewegung“ nach den gewöhnlichen Methoden der Punktmechanik abzuleiten.

Manchmal handelt es sich um das umgekehrte Problem, nämlich um die Bestimmung der absoluten Bewegung aus der relativen und der Eigenbewegung des Systems; für die Lösung beider Probleme gelten dieselben Formeln, in denen einmal die relative, das andere Mal die absolute Beschleunigung als Unbekannte auftritt.

Dabei unterscheiden wir die freie und gezwungene Relativbewegung. Zu der ersten gehören jene Probleme, bei der die Bewegung eines freien Punktes in bezug auf  $(O, x, y)$  gegeben und die Bewegung dieses selben Punktes in bezug auf ein in vorgeschriebener Bewegung befindliches System  $(\Omega, \xi, \eta)$  zu ermitteln ist, ohne daß irgendein materieller Zusammenhang der beiden Systeme vorhanden ist. Von einer gezwungenen Relativbewegung sprechen wir dagegen dann, wenn die Bahn des Punktes im System  $(\Omega, \xi, \eta)$  — als Führung — materiell vorgeschrieben ist und diese Bahn sich selbst in bekannter Weise bewegt: der Punkt bewegt sich also in einer Führung, deren Eigenbewegung als bekannt anzusehen ist.

Was die Art der Bewegung des „bewegten“ Systems  $(\Omega, \xi, \eta)$  anlangt, so betrachten wir hier nur die einfachsten und auch praktisch wichtigsten Fälle, in denen es entweder 1. eine Schiebung (Translation) oder 2. eine gleichförmige Drehung (Rotation) um einen festen Punkt  $O$  ausführt; im übrigen beschränken wir uns vorwiegend auf ebene Bewegungen (was schon durch die Bezeichnung der Achsensysteme angedeutet ist) und behandeln außerdem nur ein besonderes Problem der Punktbewegung im Raume, das sich ohne wesentliche Erweiterung der für das ebene Problem verwendeten Hilfsmittel erledigen läßt. Außerdem wird noch die relative Bewegung von Körpern gegeneinander hinsichtlich ihres Geschwindigkeitszustandes

betrachtet, und zwar im Hinblick auf ihre Bedeutung für die Theorie der Zahnräder.

Als praktische Beispiele für Probleme, bei denen relative Bewegungen in dem dargelegten Sinne eine Rolle spielen, seien genannt: die Bewegung eines Punktes gegen die sich drehende Erde, das Foucaultsche Pendel, die Bewegung des Wassers in den Laufrädern der Turbinen, der sog. Trägheitsregulator u. dgl. mehr. Weiter werden einige Anwendungen der Sätze über relative Bewegung auf die Getriebelehre besprochen. — Übrigens haben wir schon in 78, 79 und 80 von relativen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen Gebrauch gemacht, freilich hat es sich dabei immer um Punkte des bewegten Systems selbst gehandelt, nicht um einen außerhalb des bewegten Systems liegenden freien oder durch dieses irgendwie geführten Punkt; wir betrachteten dabei die Projektionen der absoluten Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Systempunkte in Bezug auf Achsen, die mit dem bewegten System fest verbunden, also tatsächlich bewegt sind. Von solchen „bewegten Achsen“ wird auch in der „Theorie des Kreisels“, d. i. im wesentlichen die Theorie der Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt, ausgiebig und mit großem Vorteil Gebrauch gemacht.

Wenn sich das bewegte System  $(\Omega, \xi, \eta)$  gegen das feste  $(O, x, y)$  geradlinig und gleichförmig bewegt, so kann dies auf die Bewegungsgleichungen eines Körpers — nach dem Trägheitsgesetze — keinen Einfluß haben: sie lauten für beide Systeme völlig gleich (Relativitätsprinzip der Newton-Galileischen Mechanik). Ruhe und gleichförmige Bewegung sind für die Begriffsbildungen der Mechanik nicht zu unterscheiden; für ein gegen  $(O, x, y)$  gleichförmig und geradlinig bewegtes Bezugssystem werden wir daher auch keine neuen grundsätzlichen Aussagen erwarten dürfen. Die Fragestellung bekommt erst dann ihren eigentlichen Sinn, wenn wir Beschleunigungen des bewegten Systems zulassen, was wir in den oben genannten Sonderfällen der Schiebung und gleichförmigen Drehung nunmehr ausführen wollen.

In unmittelbarer Erweiterung der bisher verwendeten führen wir hierbei die im folgenden stets in diesem Sinne verwendeten Bezeichnungen ein: wir nennen für den bewegten Punkt  $P$

$$\begin{array}{ll} x, y & \text{die absoluten Koordinaten,} \\ \left. \begin{array}{l} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \end{array} \right\} \bar{v}_a = \bar{v}_x + \bar{v}_y & \text{,, ,, Geschwindigkeiten,} \\ \left. \begin{array}{l} b_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \\ b_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \end{array} \right\} \bar{b}_a = \bar{b}_x + \bar{b}_y & \text{,, ,, Beschleunigungen,} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ll} \xi, \eta & \text{,, relativen Koordinaten,} \\ \left. \begin{array}{l} v_\xi = \dot{\xi} \\ v_\eta = \dot{\eta} \end{array} \right\} \bar{v}_e = \bar{v}_\xi + \bar{v}_\eta & \text{,, ,, Geschwindigkeiten,} \\ \left. \begin{array}{l} b_\xi = \dot{v}_\xi = \ddot{\xi} \\ b_\eta = \dot{v}_\eta = \ddot{\eta} \end{array} \right\} \bar{b}_e = \bar{b}_\xi + \bar{b}_\eta & \text{,, ,, Beschleunigungen.} \end{array}$$

Die Verbindung dieser Größenpaare gleicher Art hängt von der Art der Bewegung des bewegten Systems gegen das feste ab und wird durch die gewöhnlichen Formeln für die Koordinatentransformationen hergestellt.

**90. Freie Relativbewegung.** a) Das bewegte System in Schiebung. Wir nennen noch  $x_s, y_s$  die Koordinaten des Koordinatenanfangspunktes des bewegten Systems  $\Omega$  im ruhenden (absoluten) System  $O, x, y$ , ferner

$$\left. \begin{aligned} v_{sx} &= \dot{x}_s \\ v_{sy} &= \dot{y}_s \end{aligned} \right\} \bar{v}_s = \bar{v}_{sx} + \bar{v}_{sy}$$

die als bekannt angenommenen Geschwindigkeiten von  $\Omega$  und aller anderen Punkte der bewegten Scheibe im System  $(O, x, y)$ , die Systemgeschwindigkeit, und endlich

$$\left. \begin{aligned} b_{sx} &= \dot{v}_{sx} = \ddot{x}_s \\ b_{sy} &= \dot{v}_{sy} = \ddot{y}_s \end{aligned} \right\} \bar{b}_s = \bar{b}_{sx} + \bar{b}_{sy}$$

die ebenfalls als bekannt angenommenen Beschleunigungen von  $\Omega$  usw. im System  $O, x, y$ , die Systembeschleunigung. Dann gelten für die Koordinatenpaare die Gleichungen (Abb. 172)

$$x = \xi + x_s, \quad y = \eta + y_s, \quad (292)$$

und wenn für die Bewegung alle diese Größen stetig differenzierbar von der Zeit abhängen, so folgt durch Ableitung nach  $t$ :

$$\dot{x} = \dot{\xi} + \dot{x}_s, \quad \dot{y} = \dot{\eta} + \dot{y}_s$$

oder in eine Vektorgleichung zusammengefaßt

$$\boxed{\bar{v}_a = \bar{v}_\rho + \bar{v}_s, \quad \bar{v}_\rho = \bar{v}_a - \bar{v}_s.} \quad (293)$$

Da das bewegte System hier eine Schiebung ausführt, so haben alle Punkte die gleiche Geschwindigkeit  $\bar{v}_s$  und Beschleunigung  $\bar{b}_s$ , die wir daher als „Geschwindigkeit und Beschleunigung des bewegten Systems“ schlechthin bezeichnen können. Gl. (293) liefert daher den Satz:

Die relative Geschwindigkeit  $\bar{v}_\rho$  ist die Differenz aus der aboluten  $\bar{v}_a$  und der Systemgeschwindigkeit  $\bar{v}_s$ .

Ebenso liefert die Differentiation der Gln. (292) nach  $t$  die Beziehungen:

$$\ddot{x} = \ddot{\xi} + \ddot{x}_s, \quad \ddot{y} = \ddot{\eta} + \ddot{y}_s, \quad (294)$$

d. h.

$$\boxed{\bar{b}_a = \bar{b}_\rho + \bar{b}_s, \quad \bar{b}_\rho = \bar{b}_a - \bar{b}_s.} \quad (295)$$

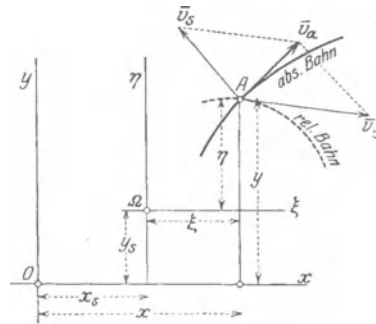


Abb. 172.

Die relative Beschleunigung  $\bar{b}_e$  ist die Differenz aus der absoluten  $\bar{b}_a$  und der Systembeschleunigung  $\bar{b}_s$ .

Die Gln. (293) oder (295) lassen sich übrigens auch unmittelbar aus dem Vektorcharakter der Geschwindigkeit und Beschleunigung aufschreiben. Bezeichnet man in Abb. 172 die Vektoren

$$\overline{OA} = \bar{r}_a \text{ als absoluten Ortsvektor,}$$

$$\overline{QA} = \bar{r}_e \text{ ,, relativen ,,}$$

$$\overline{OQ} = \bar{r}_s \text{ ,, Systemvektor,}$$

so gilt die Vektorgleichung

$$\bar{r}_a = \bar{r}_e + \bar{r}_s, \tag{296}$$

und die Gln. (293) und (295) ergeben sich auch unmittelbar durch zweimalige Differentiation dieser Gleichung nach  $t$ .

Die Gln. (295) oder (294) dienen dazu, aus der absoluten Beschleunigung  $\bar{b}_a$  bei bekanntem  $\bar{b}_s$  die relative Beschleunigung  $\bar{b}_e$  zu bestimmen. Ist insbesondere  $\bar{b}_s = 0$ , so ist  $\bar{b}_a = \bar{b}_e$ , d. h. durch den Übergang vom System  $(O, x, y)$  zu dem in bezug auf dieses gleichförmig bewegte System  $(\Omega, \xi, \eta)$  werden die Beschleunigungen des Punktes nicht verändert. Die Bahnkurven sind natürlich in beiden Systemen verschieden.

Bei der Integration der Gleichungen für die relative Bewegung ist folgendes zu beachten: Die Integrationskonstanten bedeuten relative Geschwindigkeiten oder relative Koordinaten; um die Integrale einem vorgegebenen Problem anzupassen, ist für die Festlegung dieser Konstanten die Anwendung der Gln. (293) oder (297) für einen bestimmten Augenblick (z. B. für  $t = 0$ ) erforderlich.

Den Gln. (291) hätte man der Vollständigkeit halber noch die dritte Gleichung:  $t = \tau$  hinzuzufügen, die besagt, daß in beiden Systemen das gleiche Zeitmaß verwendet wird; nach der schon in der Einleitung getroffenen Festsetzung bezüglich der Zeit ist diese Aussage trivial und wird daher in der gewöhnlichen Mechanik weggelassen. Dies ist auch ein Punkt, in dem sich die neuere relativistische Mechanik von der klassischen in charakteristischer Weise unterscheidet. — In der sog. speziellen Relativitätstheorie gilt an Stelle der Gl. (293) das folgende Additionsgesetz für die Geschwindigkeiten

$$v_a = \frac{v_s + v_e}{1 + v_s v_e / c^2}.$$

Nimmt man  $v_e = c$ , der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, so folgt auch  $v_a = c$ , und dies ist das Gesetz der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in gleichförmig (mit  $v_s$ ) gegeneinander bewegten Systemen, ein Grundpostulat dieser Theorie.

Beispiel 99. Freier Fall eines Punktes vom gleichförmig fahrenden Zuge aus betrachtet (Abb. 173). Gegeben ist  $\bar{b}_a = \bar{g}$ ,  $\bar{b}_s = 0$ ,  $v_{sx} = \dot{x}_s = c = \text{konst}$ , daher (für  $x_s = 0$  bei  $t = 0$ ):  $x_s = ct$ , und  $v_{sy} = 0$ . Aus der Gl. (295) folgt  $\bar{b}_e = g$ , d. h.  $\ddot{\xi} = 0$ ,  $\ddot{\eta} = g$  und mit Benutzung der Gln. (293) (wenn  $C_1, C_2$  Integrationskonstante sind),

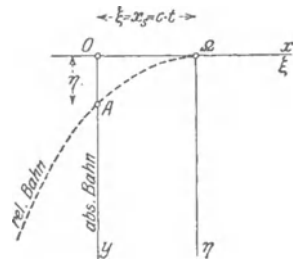


Abb. 173.

$$\begin{cases} \dot{\xi} = C_1 = (\dot{x})_{t=0} - (\dot{x}_s)_{t=0} = -c, \\ \dot{\eta} = g t + C_2 = g t + (\dot{y})_{t=0} = g t + (\dot{y})_{t=0} - (\dot{y}_s)_{t=0} = g t, \end{cases} \quad \text{daher} \quad \begin{cases} \xi = -c t, \\ \eta = \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

Die relative Bahn ist daher eine Parabel.

Wenn der Punkt dagegen im fahrenden Zuge losgelassen wird, so daß er die Eigengeschwindigkeit des Zuges besitzt, so ist die relative Bahn die Lotrechte und die absolute eine Parabel.

b) System in gleichförmiger Drehung. Zusatzbeschleunigung. Sei  $\omega$  die konstante Winkelgeschwindigkeit der Drehung, so ist (für  $\varphi = 0$  bei  $t = 0$ ):  $\varphi = \omega t$  und die Gleichungen, welche die relativen mit den absoluten Koordinaten verbinden, haben nach Abb. 174 die Form

$$\xi = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad \eta = -x \sin \varphi + y \cos \varphi. \quad (297)$$

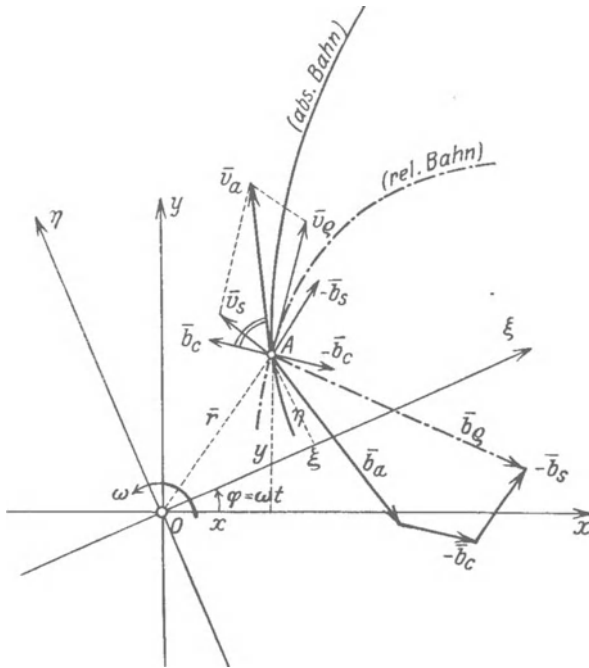


Abb. 174.

Da nun (zum Unterschiede gegen 80) auch  $\xi$  und  $\eta$  als veränderlich zu betrachten sind, so folgt durch Differentiation nach  $t$  mit den in 89 eingeführten Bezeichnungen

$$\vec{v}_e: \left\{ \begin{array}{l} v_\xi \equiv \dot{\xi} = \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi + (-x \sin \varphi + y \cos \varphi) \omega \\ \quad = \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi + \eta \omega, \\ v_\eta \equiv \dot{\eta} = -\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi - \xi \omega. \end{array} \right. \quad (298)$$

Die Größen  $\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi$ ,  $-\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi$  sind die Komponenten der absoluten Geschwindigkeit nach den bewegten Achsen  $\xi$ ,  $\eta$ ,

—  $\eta \omega$  und  $\xi \omega$  die Komponenten der Geschwindigkeit jenes Systempunktes, der im betrachteten Augenblick mit  $A$  zusammenfällt; die beiden Gleichungen können daher in die Vektorgleichung zusammengefaßt werden

$$\boxed{\bar{v}_e = \bar{v}_a - \bar{v}_s, \quad \bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_s,} \quad (299)$$

die denselben Sachverhalt zum Ausdruck bringt wie Gl. (293), nur ist bei dem sich drehenden Bezugssystem  $\bar{v}_s$  für alle Punkte der Scheibe verschieden.

Die nochmalige Differentiation der Gln. (298) nach  $t$  liefert

$$b_{\xi} \equiv \ddot{\xi} = \ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi + (-\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi) \omega + \dot{\eta} \omega,$$

woraus durch Einsetzen von  $(-\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi)$  aus der zweiten der Gln. (298) folgt

$$\left. \begin{aligned} b_{\xi} &= \ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi + \xi \omega^2 + 2 \dot{\eta} \omega, \\ \text{und ebenso erhält man} \\ b_{\eta} &= -\ddot{x} \sin \varphi + \ddot{y} \cos \varphi + \eta \omega^2 - 2 \dot{\xi} \omega. \end{aligned} \right\} \quad (300)$$

In diesen Gleichungen bedeuten die beiden ersten Gliederpaare rechts die Komponenten der absoluten Beschleunigung  $\bar{b}_a$  nach den bewegten Achsen  $\xi, \eta$ , das dritte Paar die negative Beschleunigung  $-\bar{b}_s$  des mit  $A$  zusammenfallenden Systempunktes (er führt eine gleichförmige Drehung aus und besitzt daher nur eine Normalbeschleunigung von der Größe  $\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \omega^2$ ); man nennt auch diese kurz die Systembeschleunigung, beachte aber, daß diese von Punkt zu Punkt verschieden ist. Schließlich bedeuten die letzten Glieder  $-2 \dot{\eta} \omega, 2 \dot{\xi} \omega$  die Teile einer Beschleunigung  $\bar{b}_c$ , die die Größe besitzt

$$b_c = 2 \omega \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2} = 2 v_e \omega, \quad (301)$$

und da ihre Richtungstangente gegen die  $\xi$ -Achse durch  $-\dot{\eta}/\dot{\xi}$  gegeben ist, so steht sie auf  $\bar{v}_e$  senkrecht, und zwar liegt sie im Sinne von  $\omega$  um  $\pi/2$  gegen  $\bar{v}_e$  verdreht, Abb. 174; dieser Teil der Beschleunigung wird als Zusatz- oder Coriolisbeschleunigung bezeichnet. Die Gln. (300) sind zusammen gleichwertig mit der Vektorgleichung:

$$\boxed{\bar{b}_e = \bar{b}_a - \bar{b}_s - \bar{b}_c, \quad \bar{b}_a = \bar{b}_e + \bar{b}_s + \bar{b}_c,} \quad (302)$$

die den folgenden Satz enthält:

Die relative Beschleunigung  $\bar{b}_e$  ist die Summe aus der absoluten,  $\bar{b}_a$ , der negativen Systembeschleunigung,  $-\bar{b}_s$ , und der negativen Zusatz- oder Coriolisbeschleunigung,  $-\bar{b}_c$ ;  $\bar{b}_c$  hat die Größe  $2 v_e \omega$  und liegt gegen  $\bar{v}_e$  um  $\pi/2$  im Sinne von  $\omega$  verdreht.

Die beiden letzten Teile sind die Veranlassung von Zusatzkräften, die beim Übergang vom ruhenden zum gedrehten Koordinatensystem



hinzutreten, denen aber im gedrehten System gleichwohl physikalische Realität zukommt; sie sind zwar — naturgemäß — nicht bei der freien, wohl aber bei der gezwungenen Relativbewegung mittelbar durch die Zwangskräfte, die auch von ihnen abhängen, objektiv feststellbar und meßbar.

Um daher die Gleichungen für die Bewegung eines Punktes in bezug auf ein in gleichförmiger Drehung befindliches Achsensystem zu erhalten, hat man die Gl. (302) für zwei Richtungen der bewegten Ebene anzusetzen; die dadurch entstehenden Gleichungen sind Differentialgleichungen 2. Ordnung für die Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  des bewegten Punktes, die sodann in der gewöhnlichen Weise zu integrieren sind; bezüglich der Integrationskonstanten gilt das unter a) Gesagte. Für den Ansatz auf Grund der Gln. (302) eignen sich übrigens manchmal Polarkoordinaten  $r, \varphi$  besser als die bei der Ableitung benutzten Cartesischen; in diesem Falle sind für die Teile von  $\vec{b}_e$  parallel und senkrecht zu  $r$  die Ausdrücke (225) zu benutzen.

Nimmt man  $\omega$  in Gl. (298) als veränderlich, so erhält man die Beziehung von  $b_a$  und  $b_e$  für ein Bezugssystem, das eine ungleichförmige Drehbewegung ausführt. Die Ausführung der Differentiation ergibt, daß die Gl. (302) in derselben Form bestehen bleibt, nur besteht dann  $b_s$  selbst aus den beiden Komponenten:  $-r\omega^2$  parallel und  $r\dot{\omega}$  senkrecht zu  $\vec{r}$ .

Beispiel 100. Trägheitsbewegung, von einer gleichförmig gedrehten Scheibe aus betrachtet. Der Punkt  $A$  bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit  $c$  in gerader Linie (Abb. 175) und darunter wird eine Scheibe mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gleichförmig herumdreht; man bestimme die relative Bewegung von  $A$  in bezug auf diese Scheibe.

Wenn für  $t = 0$  etwa  $r = 0$  und  $\varphi = 0$  vorgeschrieben ist, dann sind aus Abb. 175 die beiden folgenden Gleichungen unmittelbar abzulesen

$$r = ct, \quad \varphi = \omega t,$$

und daher gibt

$$r = c \varphi / \omega$$

die Gleichung der relativen Bahn in Polarkoordinaten  $r, \varphi$ ; sie ist eine gewöhnliche Archimedische Spirale. Die relative Geschwindigkeit  $\vec{v}_e$  ist, wenn  $\vec{\omega}$  der senkrecht zur Zeichenebene gerichtete Drehvektor ist,

$$\vec{v}_e = \vec{c} - (\vec{\omega} \times \vec{r}), \quad \text{also} \quad v_e = \sqrt{c^2 + r^2 \omega^2}.$$

Es ist lehrreich, die Ermittlung der relativen Bahn aus dem Ansatz (302) durchzuführen; die Komponenten von  $\vec{b}_e$  sind in Polarkoordinaten durch die Gln. (225) gegeben. Es gilt die Gleichung

$$\vec{b}_e = -\vec{b}_s - \vec{b}_c,$$

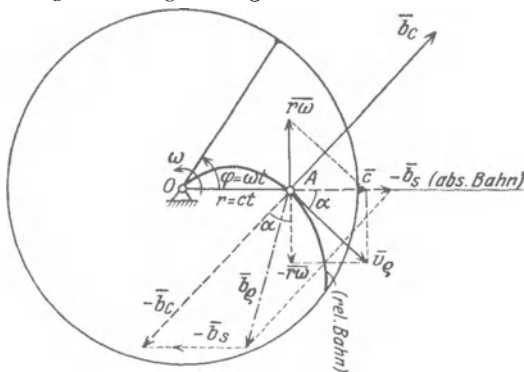


Abb. 175.

also

$$(\parallel \bar{r}:) \quad b_r \equiv \ddot{r} - r \omega^2 = r \omega^2 - 2 v_\rho \omega \sin \alpha,$$

daraus

$$\ddot{r} = 2 r \omega^2 - 2 v_\rho \omega r \omega / v_\rho = 0 \quad (\text{also } b_\rho = 2 b_s!)$$

und

$$(\perp \bar{r}:) \quad b_\varphi \equiv \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = 2 v_\rho \omega \cos \alpha = 2 v_\rho \omega c / v_\rho = 2 c \omega;$$

diese Gleichung ist durch  $r = ct$ ,  $\dot{\varphi} = \omega = \text{konst.}$  identisch erfüllt.

c) Räumliche Relativbewegung eines Punktes in bezug auf ein um eine feste Achse sich gleichförmig drehendes Bezugssystem. Wir können die Gültigkeit der in b) erhaltenen Gl. (302) ohne weiteres verallgemeinern auf den Fall, daß es sich um die Bewegung eines Punktes im Raum handelt, die auf ein System  $O, \xi, \eta, \zeta$  bezogen wird, dessen  $\zeta$ -Achse beständig mit der  $z$ -Achse des ruhenden Systems zusammenfallen möge. Die relative Geschwindigkeit  $\bar{v}_\rho$  von  $A$  kann in zwei Komponenten zerlegt werden, etwa  $v \sin \beta \perp \bar{O}z$  und  $v \cos \beta \parallel \bar{O}z$ , wenn  $\sphericalangle \beta = \sphericalangle (\bar{v}_\rho, z)$  ist. Die Gleichung für die Bewegung parallel zur  $z$ -Achse wird durch die Drehung des Systems in keiner Weise beeinflusst. Für die Bewegung in der zur  $z$ -Achse senkrechten Ebene  $O, \xi, \eta$  gilt die Gl. (302), wofern darin nur gesetzt wird

$$b_c = 2 v_\rho \omega \sin \beta, \quad (303)$$

da der in der  $\xi, \eta$ -Ebene liegende Teil von  $\bar{v}_\rho$  jetzt  $v_\rho \sin \beta$  ist. Bezüglich der Richtung von  $\bar{b}_c$  in bezug auf  $v_\rho \sin \beta$  gilt dasselbe wie in b). Sind also  $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$  die Komponenten von  $\bar{v}_\rho$  nach den Achsen  $\xi, \eta, \zeta$ , so sind die von  $\bar{b}_c (-2 \dot{\xi} \omega, 2 \dot{\eta} \omega, 0)$ . In vektorieller Schreibweise ist in allen Fällen:

$$\boxed{\bar{b}_c = 2 (\bar{\omega} \times \bar{v}_\rho)}. \quad (304)$$

**91. Ableitung der Gleichung für die Relativbeschleunigung in vektorieller Darstellung.** In 90b wurde die vektorielle Beziehung zwischen der absoluten und relativen Beschleunigung durch Verwendung Cartesischer Koordinaten erhalten. Dieser Vorgang ist jedoch ein Umweg, und wir gewinnen eine bessere Einsicht in die Bedeutung dieser Beziehung, wenn wir sie unmittelbar, d. h. ohne jede Bezugnahme auf Koordinaten herleiten.

Hierzu gehen wir von der Gleichung aus, die zwischen der absoluten, der relativen und der Systemgeschwindigkeit eines Punktes besteht, und die durch die schon früher verwendete Vektorgl. (299) gegeben ist

$$\bar{v}_a = \bar{v}_\rho + \bar{v}_s.$$

Es sei wieder  $\bar{r} = \overline{OA}$  der Ortsvektor des bewegten Punktes, dann müssen wir beachten, daß die Zeitableitung dieses Vektors mit Bezug auf das ruhende System eine andere ist als mit Bezug auf das bewegte; um beide voneinander zu unterscheiden, möge  $d\bar{r}/dt$  diese Ableitung mit Bezug auf das ruhende und  $d'\bar{r}/dt$  in bezug auf das bewegte System

bedeuten; dann läßt sich die vorhergehende Gleichung auch in der Form schreiben

$$\boxed{\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d'\bar{r}}{dt} + (\bar{\omega} \times \bar{r})}. \quad (305)$$

Es sei sogleich bemerkt, daß eine Gleichung von dieser Form auch für die Zeitableitungen eines beliebigen Vektors (nicht nur für den Ortsvektor  $\bar{r}$ ) besteht.

Die für die Beschleunigung geltende Gleichung folgt aus dieser durch nochmalige Ableitung nach  $t$ , wobei wieder diese Verschiedenheit der Zeitableitungen im ruhenden und bewegten System zu berücksichtigen ist. Wir erhalten zunächst

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d'\bar{r}}{dt} \right) + \frac{d}{dt} (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d}{dt} \left( \frac{d'\bar{r}}{dt} \right) + \left( \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} \right) + \left( \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} \right).$$

Wird im ersten Gliede rechts die Ableitung nach  $t$  der vorhergehenden Gl. (305) für den Vektor  $d'\bar{r}/dt$  benützt und im letzten diese Gleichung selbst, so folgt

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d'^2\bar{r}}{dt'^2} + \left( \bar{\omega} \times \frac{d'\bar{r}}{dt} \right) + \left( \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} \right) + \left( \bar{\omega} \times \frac{d'\bar{r}}{dt} \right) + [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})].$$

Da weiter  $[\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})] = -\bar{r} \omega^2$ , so nimmt diese Gleichung die Form an

$$\boxed{\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d'^2\bar{r}}{dt'^2} + (\bar{\omega} \times \bar{r}) - \bar{r} \omega^2 + 2 \left( \bar{\omega} \times \frac{d'\bar{r}}{dt} \right)}, \quad (306)$$

in der sie sich mit der früher erhaltenen Beziehung

$$\bar{b}_a = \bar{b}_e + \bar{b}_s + \bar{b}_c$$

identisch erweist. Dabei ist eine beliebige ungleichförmige Drehung des Bezugssystems vorausgesetzt worden. Die Richtung von  $\bar{b}_c$  ist durch die für das Vektorprodukt angegebene Regel bestimmt: um  $\pi/2$  gegen  $\bar{v}_e$  im Sinn von  $\omega$  verdreht.

**92. Anwendungen auf die Getriebelehre.** Zu den Aufgaben der Getriebelehre, die sich mittels der Sätze der relativen Bewegung einfach und anschaulich lösen lassen, gehören die folgenden: Es sind die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen von einzelnen Getriebepunkten zu ermitteln, die geometrisch als Schnittpunkte von zwei Kurven erscheinen, von denen die eine einem festen, die andere einem bewegten System angehört. Die feste Kurve ist die absolute, die bewegte die relative Bahn. Die Bewegung des Schnittpunktes auf jeder Kurve ist durch Normal- und Tangentialbeschleunigung nach 70, und die Beziehungen zwischen den absoluten und relativen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sind durch die in 90, 91 abgeleiteten Gleichungen gegeben, die für die hier zu gebenden Anwendungen eine rein geometrische oder, besser gesagt, rein kinematische Bedeutung haben. — Ihre Verwendung erläutern wir sofort an der Hand einfacher, typischer Beispiele.

Beispiel 101. Ein durch die Gerade  $g$  begrenztes Gleitstück bewegt sich parallel zu sich selbst mit der Geschwindigkeit  $\bar{v}_s$  und der Beschleunigung  $\bar{b}_s$  und bewegt eine Stange  $AB$ , die sich in einer geraden Führung  $h$  verschieben kann. Man bestimme die Geschwindigkeit und Beschleunigung, mit der diese Verschiebung erfolgt (Abb. 176).

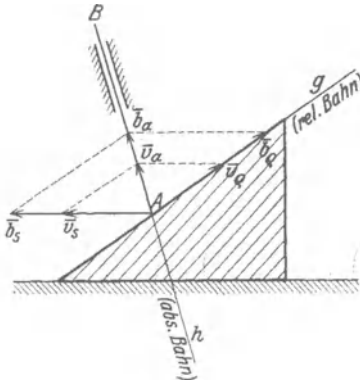


Abb. 176.

Die Bewegung längs  $g$  ist die absolute, die längs  $h$  die relative, die des Gleitstücks selbst die Systembewegung. Da  $\bar{v}_s$  und  $\bar{b}_s$  gegeben sind, so werden die gesuchten Größen durch die Gleichungen

$$\bar{v}_a = \bar{v}_q + \bar{v}_s, \quad \bar{b}_a = \bar{b}_q + \bar{b}_s$$

bestimmt, deren geometrische Bilder unmittelbar die gesuchten Größen  $\bar{v}_a, \bar{v}_q$  und  $\bar{b}_a, \bar{b}_q$  durch die zugehörigen Vektorendreiecke liefern.

Beispiel 102. Bewegung einer Steuerstange mittels eines von einer Kurve  $k$  begrenzten Gleitstückes (Abb. 177), das (ähnlich wie im vorhergehenden Beispiel) geradlinig verschoben wird. Die Kurve  $k$  wird mit ihrer Evolute (Ort der Krümmungsmittelpunkte  $K$ ) als bekannt angenommen. Das Gleitstück denken wir uns in wagrechter Richtung mit  $\bar{v}_s = \text{konst.}$  bewegt. Längs  $k$  gleitet (etwa mittels einer Rolle wie bei der Steuerscheibe) der Endpunkt  $A$

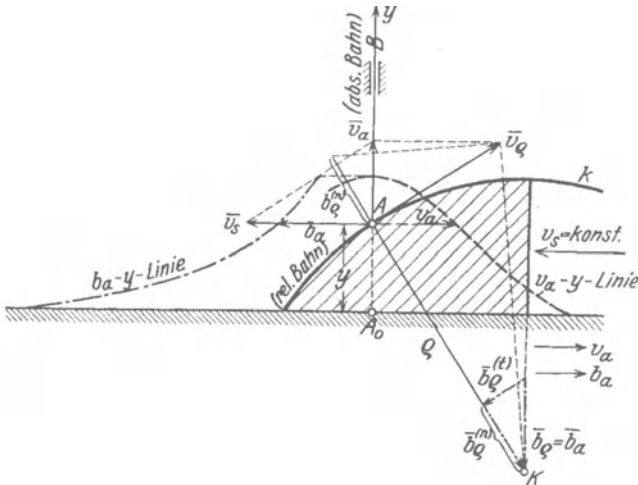


Abb. 177.

einer Stange  $AB$ , die in einer lotrechten Führung verschieblich ist. Man ermittle die Geschwindigkeit  $\bar{v}_a$  und die Beschleunigung  $\bar{b}_a$  der Bewegung der Stange in ihrer Führung.

Wie früher ist die Bewegung des Gleitstücks die System- oder Führungsbewegung, die des Punktes  $A$  längs  $k$  ist die relative, die von  $A$  in Richtung der Stange die absolute Bewegung. Da das System eine Schiebung ausführt, so gelten wieder die Gleichungen

$$\bar{v}_a = \bar{v}_q + \bar{v}_s, \quad \bar{b}_a = \bar{b}_q + \bar{b}_s,$$

und da überdies  $b_s = 0$ , so ist insbesondere

$$\bar{b}_a = \bar{b}_e.$$

Das Geschwindigkeitsdreieck liefert  $\bar{v}_a$  und  $\bar{v}_e$ . Da die relative Normalbeschleunigung  $b_e^{(n)} = v_e^2/\rho$  mit  $v_e$  und  $\rho$  ebenfalls bekannt ist, und  $\bar{b}_a$  die Richtung der Stange hat, so wird durch die Senkrechte zur Kurvennormalen im Endpunkte von  $b_e^{(n)}$  die relative Tangentialbeschleunigung  $b_e^{(t)}$  und auf der Lotrechten durch  $K$  auch  $\bar{b}_a$  selbst abgeschnitten.

In der Abb. 177 sind die so erhaltenen Werte von  $v_a$  und  $b_a$  in Abhängigkeit von  $y$  (und zwar senkrecht zu  $y$ ) aufgetragen.

Beispiel 104. Schema für die Steuerscheibe mit geradem Anhub. Eine Gerade  $g$  wird mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um einen festen Punkt  $O$  gedreht und schneidet dabei eine zweite, feste Gerade  $h$ . Mit welchen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen rückt der Schnittpunkt  $M$  auf  $g$  und auf  $h$  fort? (Abb. 178 a).

Die Bewegung von  $M$  auf  $g$  ist als die relative, die von  $M$  auf  $h$  als die absolute aufzufassen. Da das bewegte System (d. i. die mit  $g$  verbundene Ebene) eine Drehung ausführt, so sind die Gleichungen zu verwenden

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_s,$$

$$\bar{b}_a = \bar{b}_e + \bar{b}_s + \bar{b}_c.$$

Die Systemgeschwindigkeit  $\bar{v}_s = \bar{\omega} \times \bar{r}$  und die Richtungen von  $\bar{v}_e$  und  $\bar{v}_a$  sind bekannt, also können auch deren Größen aus dem Geschwindigkeitsdreieck abgelesen werden.

Vom Beschleunigungsplan ist die Systembeschleunigung  $\bar{b}_s = -\bar{r} \omega^2$  bekannt, ihre Größe stellen wir durch die Strecke  $\bar{M}\bar{O}$  dar, so daß  $\bar{M}\bar{O} = b_s = r \omega^2 = v_s \omega$ . Zieht man  $\bar{M}\bar{\Omega} \perp \bar{O}\bar{M}$ , so sind die beiden in der Abbildung schraffierten Dreiecke ähnlich, und daher ist (da  $b_c = 2 v_e \omega$ )

$$\bar{O}\bar{\Omega} = v_e \omega = b_c/2.$$

Tragen wir daher die Strecke  $\bar{O}\bar{\Omega}$  noch einmal in ihrer eigenen Richtung auf, so

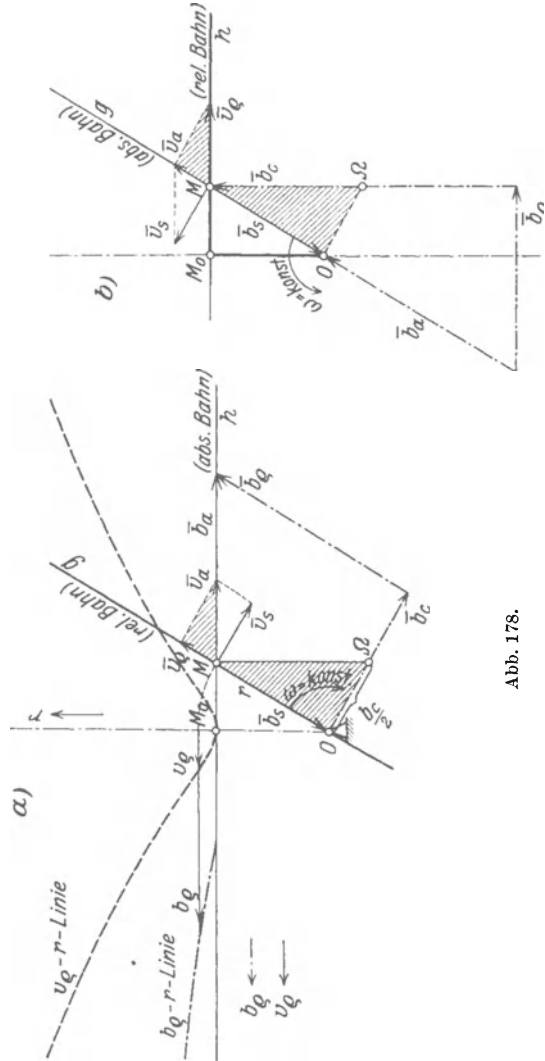
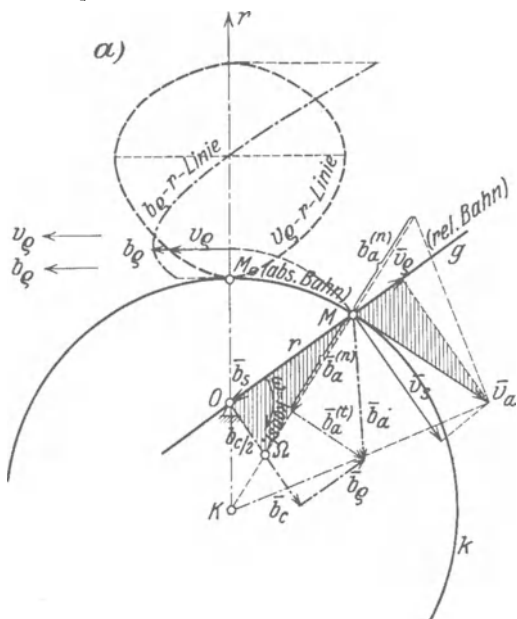


Abb. 178.

erhalten wir  $\bar{b}_c$  (auch mit dem richtigen Pfeil) und können den Beschleunigungsplan ergänzen, da  $\bar{b}_a$  und  $\bar{b}_e$  in die Geraden  $h$  und  $g$  — beide entsprechen ja geradlinigen Bewegungen — hineinfallen. In der Abbildung ist auch der Verlauf von  $v_e$  und  $b_e$  in Abhängigkeit von  $r$  für ein Stück der Bewegung von  $M$  eingetragen.

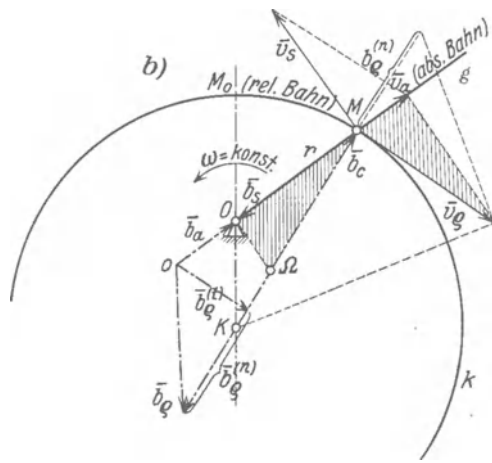


Diese Größen können auch durch Betrachtung der Umkehrung der Bewegung erhalten werden. Hierzu denke man sich etwa die mit  $h$  verbundene Ebene um  $O$  nach der entgegengesetzten Seite mit  $\omega$  gedreht und dabei  $g$  in sich selbst verschoben (Abb. 178b); dann ist die Bewegung längs  $h$  die relative, die längs  $g$  die absolute. Aus  $\bar{v}_s$  findet man mittels des Geschwindigkeitsplanes  $\bar{v}_a$  und  $\bar{v}_e$ . Wenn sodann wieder  $b_s = r\omega^2 = v_s\omega = \overline{MO}$  gewählt wird, dann ist  $\overline{OM}$  in dem Dreieck  $O\Omega M$  jetzt  $v_e\omega$  und daher

$$b_c = 2v_e\omega = 2\overline{OM},$$

und der Beschleunigungsplan wie zuvor zu vervollständigen. In Abb. 178a und b haben die absoluten und relativen Größen ihre Rollen vertauscht.

Beispiel 105. Schema für das Steuerungsgetriebe mit gekrümmtem Anhub. Die Gerade  $g$  wird wieder mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um  $O$  gedreht und schneidet einen Kreis  $k$ , dessen Mittelpunkt  $K$  ist. Man bestimme die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, mit denen der Schnittpunkt  $M$  auf  $g$  und auf  $k$  fortrückt.



In Abb. 179a ist die Bewegung längs  $g$  als die relative, die längs  $k$  als die absolute aufgefaßt. Durch  $\bar{v}_s = \bar{\omega} \times \bar{r}$  ist, da die Richtungen von  $\bar{v}_a$  und  $\bar{v}_e$  bekannt sind, das Geschwindigkeitsdreieck festgelegt. Ferner folgt aus der Ähnlichkeit der schraffierten Dreiecke wie im vorhergehenden Beispiel

Abb. 179.

$$\overline{O\Omega} = v_e\omega = b_c/2,$$

und damit ist  $\bar{b}_c$  gegeben. Von der absoluten Bewegung von  $M$  längs  $k$  ist die Normalbeschleunigung  $b_c^{(n)} = v_a^2/\rho$ , mit  $\rho = \overline{KM}$  konstruierbar und durch Vervollständigung des Beschleunigungsplanes erhalten wir auch  $\bar{b}_c^{(n)}$  und damit auch  $\bar{b}_c$ .



Der Verlauf von  $v_e$  und  $b_e$  in Abhängigkeit von  $r$  ist in der Abb. 179a eingetragen. Auch durch Betrachtung der Umkehrung der Bewegung kann man die Geschwindigkeit der Geraden  $g$  in ihrer eigenen Richtung erhalten. Die Konstruktion ist in Abb. 179b ausgeführt und dürfte nach dem Vorhergehenden ohne weitere Erläuterung verständlich sein.

Beispiel 106. Die Kurbelschleife (Abb. 180). Die Kurbel  $\overline{OA}$  wird mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  gedreht, an den Kurbelzapfen  $A$  ist die Stange  $g$  gelenkig angeschlossen, die durch eine um  $B$  drehbare Hülse gleitet. Man bestimme die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Punkte von  $g$ , insbesondere des mit  $B$  zusammenfallenden Punktes von  $g$ .

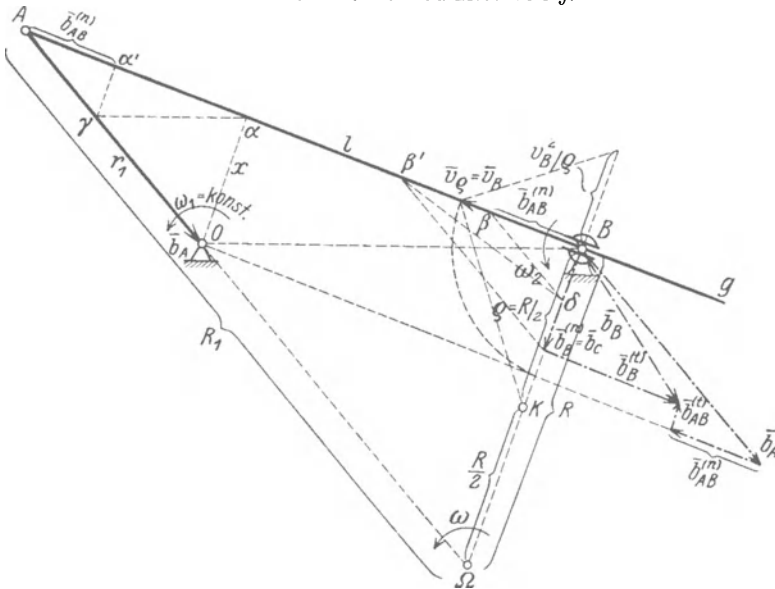


Abb. 180.

Wir betrachten die um  $B$  drehbare Ebene als bewegtes System und  $g$  als die relative Bahn des Punktes  $B$ . Da der mit  $B$  zusammenfallende Punkt des bewegten Systems in Ruhe ist, so ist  $v_s = 0$ , und daher stimmen die absolute und relative Geschwindigkeit von  $B$  überein,

$$\bar{v}_a = \bar{v}_e = \bar{v}_B.$$

Da ferner auch die Systembeschleunigung von  $B$  null ist, so erhalten wir in diesem Falle die Beschleunigungsgleichung in der einfacheren Form

$$\bar{b}_a = \bar{b}_e + \bar{b}_c.$$

Darin hat  $\bar{b}_e$  die Richtung von  $g$ , und  $\bar{b}_c$  ist um  $\pi/2$  im Sinn von  $\omega$  gegen  $\bar{v}_e$  verdreht. Betrachtet man die in die Richtung der Normalen zu  $g$  fallenden Komponenten, so muß nach dieser Gleichung die Normalkomponente von  $\bar{b}_a$  mit  $\bar{b}_c$  identisch sein. Und da  $b_a^{(n)} = v_a^2/\rho$ , so erhalten wir die Gleichung

$$b_c = 2 v_e \omega = v_e^2/\rho;$$

daraus folgt der Krümmungshalbmesser  $\rho$  der Bahnkurve von  $B$

$$\rho = \frac{v_e}{2\omega} = \frac{\overline{\Omega B}}{2}.$$



Der Krümmungsmittelpunkt  $K$  halbiert daher die Strecke  $\overline{QB}$ . Man beachte, daß diese Betrachtung ganz unabhängig davon ist, welche Bewegung für  $A$  vorausgesetzt wurde.

Nach den in §3 erhaltenen Sätzen ist nunmehr das Kurbelviereck  $OABK$  das in der gezeichneten Stellung geltende „Ersatzgetriebe“; die Beschleunigung von  $B$  kann daher nach den früher entwickelten Methoden unmittelbar gefunden werden, was in der Abb. 180 vollständig ausgeführt wird und keiner weiteren Erklärung bedarf.

**93. Gezwungene Relativbewegung.** Den Ansatz für die gezwungene Relativbewegung erhalten wir wieder durch Anwendung des Gedankens, der für die Behandlung aller gestützten und geführten Systeme maßgebend ist: der Einfluß einer glatten Führung wird an jeder Stelle durch eine senkrecht zur Führung liegende Zwangskraft oder Zwangsbeschleunigung  $\bar{b}_z$ , bei rauher Führung außerdem durch eine entgegen der Bewegungsrichtung wirkende Reibungsbeschleunigung  $\bar{b}_R$  vom Betrage  $b_R = f|b_z|$  dargestellt; werden diese beiden Teile zu  $\bar{b}_a$  (d. i. der absoluten oder eingepprägten Beschleunigung) hinzugefügt, so erhält man für die gezwungene Bewegung die folgenden Gleichungen.

a) System in Schiebungsbewegung.

α) Bei glatter Führung

$$\boxed{\bar{b}_e = \bar{b}_a + \bar{b}_z - \bar{b}_s.} \quad (307)$$

β) Bei rauher Führung

$$\boxed{\bar{b}_e = \bar{b}_a + \bar{b}_z + \bar{b}_R - \bar{b}_s.} \quad (308)$$

Der Ansatz dieser Gleichungen für zwei Richtungen der bewegten Ebene bringt zwar eine neue Unbekannte  $\bar{b}_z$  ins Spiel, dafür ist durch die Führung des Punktes ein Freiheitsgrad aufgehoben worden, seine Bewegung ist zwangsläufig, ist also durch einen Parameter, und dieser durch eine Gleichung bestimmt; die Führung ist selbst die relative Bahn. Die Gln. (307) und (308) reichen daher zur Bestimmung der relativen Bewegung und zur Ermittlung von  $\bar{b}_z$  und des Führungsdruckes  $\bar{D} = m \bar{b}_z$  aus.

b) System in gleichförmiger Drehung.

Es gilt die Gl. (302), wenn darin  $\bar{b}_a$  durch  $\bar{b}_a + \bar{b}_z$  oder durch  $\bar{b}_a + \bar{b}_z + \bar{b}_R$  ersetzt wird; dann ist  $b_R = f|b_z|$  zu setzen und in einer zu  $\bar{v}_e$  entgegengesetzten Richtung einzuführen. Wir erhalten demnach

α) bei glatter Führung

$$\boxed{\bar{b}_e = \bar{b}_a + \bar{b}_z - \bar{b}_s - \bar{b}_c,} \quad (309)$$

β) bei rauher Führung

$$\vec{b}_e = \vec{b}_a + \vec{b}_z + \vec{b}_R - \vec{b}_s - \vec{b}_c. \tag{310}$$

**94. Beispiele und Anwendungen.**

Beispiel 107. Ruhendes Pendel auf der rotierenden Erde. Für eine auf der Erde ruhende Punktmasse *A* gibt die Gl. (309) mit  $\vec{b}_e = 0$ ,  $\vec{b}_a = \vec{g}$ ,  $\vec{b}_s = -\varrho \omega^2$ ,  $\vec{b}_c = 0$  und den Bezeichnungen der Abb. 181

$$0 = \vec{g} + \vec{b}_z + \varrho \omega^2.$$

$\vec{b}_z$  gibt die auf den Punkt wirkende Zwangsbeschleunigung, oder die Richtung der Lotlinie, in die sich ein gegen die Erde ruhendes Pendel einstellt. An Stelle der Beschleunigung  $\vec{g}$ , die für die ruhende, als Kugel angenommene Erde aus Symmetriegründen nach dem Erdmittelpunkt gerichtet ist, tritt eine Beschleunigung  $\vec{g}' = g + \varrho \omega^2$ , und wenn  $\varphi$  die geographische Breite des Ortes ist, so ist

$$g'^2 = g^2 + \varrho^2 \omega^4 - 2g\varrho\omega^2 \cos \varphi;$$

wenn das Glied mit  $\omega^4$  als klein vernachlässigt und  $\varrho = R \cos \varphi$  gesetzt wird, so folgt angenähert, da  $R\omega^2/g \approx 1/289$  ist,

$$g' = g \left[ 1 - \frac{\cos^2 \varphi}{289} \right]. \tag{311}$$

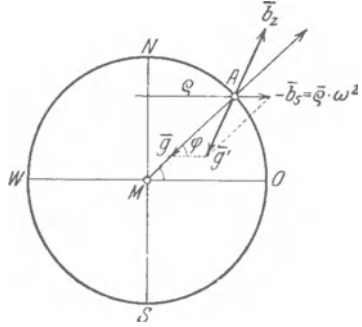


Abb. 181.

Beispiel 108. Freier Fall mit Berücksichtigung der Erddrehung. Ein Punktkörper wird in der Nähe der Erdoberfläche frei fallen gelassen. Man ermittle seine Bewegung in bezug auf die rotierende Erde.

Wir wählen als bewegtes (mit der Erde fest verbundenes) Achsensystem das folgende (Abb. 182): als  $\zeta$ -Achse die von der Ausgangslage *A* gegen den Erdmittelpunkt weisende Normale, als  $\xi$ -Achse die Tangente zum Breitenkreis, positiv nach Osten, als  $\eta$ -Achse die Tangente zum Meridian, positiv nach Norden gerichtet. Die geographische Breite sei  $\varphi$ , der Halbmesser des Breitenkreises  $\varrho$ .

In Gl. (302) ist zunächst zu setzen

$$\vec{b}_a = \vec{g}, \quad \vec{b}_s = -\varrho \omega^2.$$

Was die Coriolisbeschleunigung anlangt, so können wir in Gl. (304) — in erster Näherung

— für die relative Geschwindigkeit  $\vec{v}_e = \dot{\xi}$  setzen, die sich ergeben würde, wenn die relative Bewegung der freie Fall in der Lotrechten zur Erde selbst wäre. Von dieser Geschwindigkeit ist nur die Projektion auf die zur Erdachse senkrechte Ebene maßgebend. Die Coriolisbeschleunigung hat daher den Betrag

$$b_c = 2v_e \omega \cos \varphi$$

und hat die Richtung der negativen  $\xi$ -Achse, wirkt also nach Westen. Wegen des kleinen Wertes von  $\omega$  erhalten wir dadurch eine ausreichende Näherung.

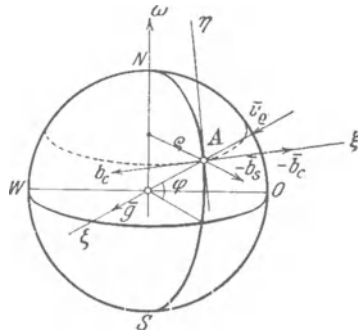


Abb. 182.

Die Bewegungsgleichungen nehmen damit die Form an

$$\bar{b}_\varrho \begin{cases} \ddot{\xi} = 2 v_\varrho \omega \cos \varphi, \\ \ddot{\eta} = -\varrho \omega^2 \sin \varphi, \\ \dot{\xi} = g - \varrho \omega^2 \cos \varphi. \end{cases} \quad (312)$$

Wenn wir darin auch die Glieder mit  $\omega^2$  vernachlässigen und (wie schon gesagt)  $v_\varrho \equiv \dot{\xi} = g t$  setzen, so folgt

$$\ddot{\xi} = 2 g t \omega \cos \varphi$$

und weiter, wenn  $\varphi$  und  $g$  als konstant angesehen werden können

$$\xi = \frac{g t^3}{3} \omega \cos \varphi. \quad (313)$$

Für eine Fallhöhe von  $h = 500$  m ist  $t = \sqrt{2h/g} \approx 10$  s und weiter für  $\varphi = 45^\circ$ :  $\xi \approx 17$  cm. Ein auf die Erde oder in einen Schacht fallender Körper erleidet daher (da  $\xi$  positiv ausfällt!) relativ zur Erde eine Abweichung nach Osten.

Da die Erddrehung von West nach Ost erfolgt und die Erde unter dem frei fallenden Körper hinweggeht, so könnte man meinen, daß sich eine Abweichung von der Lotlinie nach Westen ergeben müßte. Indessen ist zu beachten, daß der Körper im Augenblicke des Fallenlassens die seiner Entfernung von der Erdachse entsprechende, und zwar nach Osten gerichtete Geschwindigkeit besitzt und beim Falle in Gebiete mit kleineren Geschwindigkeiten kommt; er bewegt sich also in der Richtung nach Osten schneller als sein Auftreffpunkt, wodurch das zunächst befremdliche Ergebnis qualitativ verständlich wird.

Beispiel 109. Massenpunkt in einer rotierenden Röhre. Der Punkt habe anfangs, d. h. zur Zeit  $t = 0$  den Abstand  $a$  von der Achse und dort die relative Geschwindigkeit null; die konstante Winkelgeschwindigkeit der Röhre sei  $\omega$ , eingeprägte Kräfte seien nicht vorhanden. Man bestimme die Bewegung des Punktes  $\alpha$ ) bei glatter,  $\beta$ ) bei rauher Führung (Abb. 183).

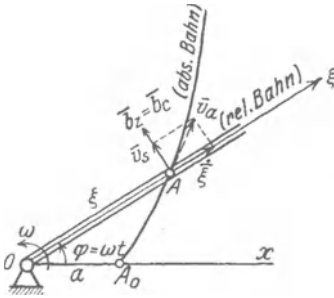


Abb. 183.

$\alpha$ ) Wir nehmen die Rohrachse, die die relative Bahn darstellt, zur  $\xi$ -Achse, dann lauten die Bewegungsgleichungen für glatte Führung nach Gl. (309)

$$\bar{b}_\varrho \begin{cases} b_\xi \equiv \ddot{\xi} = \xi \omega^2 \\ b_\eta \equiv 0 = b_z - b_c. \end{cases}$$

Die erste Gleichung gibt integriert mit den angegebenen Anfangsbedingungen  $\xi = a$ ,  $v_\xi = \dot{\xi} = 0$  für  $t = 0$

$$\xi = \frac{a}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = a \mathfrak{C}0 \int \omega t$$

und die zweite liefert

$$b_z = b_c = 2 v_\varrho \omega = 2 \dot{\xi} \omega = a \omega^2 (e^{\omega t} - e^{-\omega t}).$$

Die Gleichung der absoluten Bahn erhält man durch Elimination von  $t$  aus der Gleichung für  $\xi$  und  $\varphi = \omega t$ ; sie lautet

$$\xi = \frac{a}{2} (e^\varphi + e^{-\varphi}) = a \mathfrak{C}0 \int \varphi; \quad (314)$$

die absolute Bahn hat die Form einer Spirale.

$\beta$ ) Für rauhe Führung liefert die Gl. (310)

$$\bar{b}_\varrho \begin{cases} b_\xi \equiv \ddot{\xi} = \xi \omega^2 - f b_z \\ b_\eta \equiv 0 = b_z - b_c, \quad b_z = 2 \dot{\xi} \omega, \end{cases}$$

woraus durch Elimination von  $b_z$  die Gleichung folgt

$$\ddot{\xi} + 2 f \omega \dot{\xi} - \omega^2 \xi = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung lautet mit denselben Anfangsbedingungen wie zuvor, wenn noch durch  $f = \operatorname{tg} \varrho$  der der Reibungszahl  $f$  entsprechende Reibungswinkel  $\varrho$  eingeführt wird

$$\xi = \frac{a}{2} \left[ (1 + \sin \varrho) e^{\frac{1 - \sin \varrho}{\cos \varrho} \omega t} + (1 - \sin \varrho) e^{-\frac{1 + \sin \varrho}{\cos \varrho} \omega t} \right], \quad (315)$$

während die Führungskraft wieder durch  $D = m b_z = 2 m \dot{\xi} \omega$  gegeben ist.

[Die Integration der linearen!) Differentialgleichung für  $\xi$  geschieht durch den „e-Ansatz“:  $\xi = e^{pt}$ , der für  $p$  die quadratische Gleichung  $p^2 + 2 f \omega p - \omega^2 = 0$  liefert, deren Wurzeln  $p_{1,2} = (-f \pm \sqrt{f^2 + 1}) \omega$  sind. Die Bestimmung der Integrationskonstanten in  $\xi = A e^{p_1 t} + B e^{p_2 t}$  erfolgt sodann durch die gegebenen Anfangsbedingungen].

Beispiel 110. Schwerer Punkt in einer zur Erdachse unter dem Winkel  $\beta (\neq \pi/2)$  geneigten Röhre, die in einer Meridianebene liegt.

Für den Ansatz brauchen die Achsen nicht unbedingt gerade so gelegt zu werden, wie es in 90c) angegeben wurde, sie sind vielmehr stets den besonderen Bedingungen der Aufgabe anzupassen, wie dies auch schon in Beisp. 108 geschehen ist. Es ist nur darauf zu achten, daß die Beschleunigungen in den richtigen Richtungen eingeführt werden.

In dem vorliegenden Beispiel nach Abb. 184 wählen wir die  $\xi$ -Achse in der Richtung der Röhre, die  $\eta$ -Achse dazu senkrecht in der Meridianebene und die  $\zeta$ -Achse senkrecht zu beiden, also wagrecht. In diesem Achsensystem haben die nach Gl. (309) einzuführenden fünf Beschleunigungen die Komponenten

$$\begin{aligned} \bar{b}_\varrho (\ddot{\xi}, 0, 0), \quad \bar{b}_a (-g \cos \beta, g \sin \beta, 0), \quad \bar{b}_z (0, b_{z\eta}, b_{z\zeta}), \\ \bar{b}_s (-\xi \omega^2 \sin^2 \beta, -\xi \omega^2 \sin \beta \cos \beta, 0), \\ \bar{b}_e (0, 0, 2 \dot{\xi} \omega \sin \beta), \end{aligned}$$

die Gl. (309) ist dann den drei Gleichungen gleichwertig

$$\bar{b}_\varrho \begin{cases} \ddot{\xi} = -g \cos \beta + \xi \omega^2 \sin^2 \beta, \\ 0 = g \sin \beta + b_{z\eta} + \xi \omega^2 \sin \beta \cos \beta, \\ 0 = b_{z\zeta} - 2 \dot{\xi} \omega \sin \beta. \end{cases}$$

Die erste Gleichung gibt, integriert, die eigentliche Bewegungsgleichung in der Form

$$\xi = \frac{g}{\omega^2} \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} + A e^{\omega \sin \beta t} + B e^{-\omega \sin \beta t}; \quad (316)$$

die Integrationskonstanten  $A, B$  können wieder geeignet vorgeschriebenen Anfangsbedingungen angepaßt werden.

Für eine Lage relativen Gleichgewichtes in der Röhre ergibt sich aus der Bedingung  $\dot{\xi} = 0$  die Lösung

$$\xi_0 = \frac{g}{\omega^2} \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta}.$$

Die beiden anderen Gleichungen liefern die Komponenten der Führungsbeschleunigung  $b_{z\eta}$  und  $b_{z\zeta}$  nach den Achsen  $\eta$  und  $\zeta$ .

Beispiel 111. Eisenbahnzug längs eines Meridians auf der Erdoberfläche. Nehmen wir die Bewegungsrichtung des auf der nördlichen Halbkugel fahrenden Zuges von Nord nach Süd, so erhalten wir, da die Bewegung der Erde von West nach Ost erfolgt, für die geographische Breite  $\beta$  die Coriolisbeschleunigung

$$b_c = 2 v_\varrho \omega \sin \beta = b_z,$$

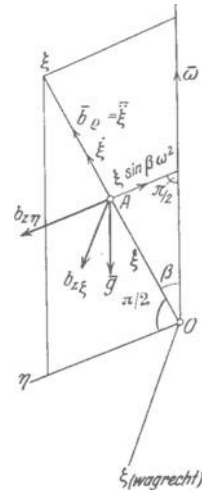


Abb. 184.

sie geht von der westlichen Schiene aus und wirkt auf den Zug in der Richtung nach Osten. Der Druck auf die Schienen ist nach Westen gerichtet und hat für einen Zug vom Gewichte  $G = 100 \text{ t}$ , also der Masse  $m = G/g \approx 10 \text{ tm}^{-1} \text{ s}^2$ , und bei  $v_e = 20 \text{ m/s}$  für  $\beta = 45^\circ$  n. Br. die Größe

$$D = m b_z = 10000 \cdot 2 \cdot 20 \cdot \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \cdot \sin 45^\circ \approx 20,5 \text{ kg.}$$

Daher kommt es, daß auf der nördlichen Halbkugel bei Geleisen, die vorwiegend in der Richtung Nord—Süd durchfahren werden, sich die rechte (westliche) Schiene stärker abnützt als die linke (östliche). Ebenso unterspülen auf der nördlichen Halbkugel die größeren Ströme in Europa und Asien in ihren in der Richtung Süd—Nord liegenden Flußläufen das rechte (östliche) Ufer stärker als das linke (westliche).

**95. Die relative Bewegung von Körpern** wollen wir nur hinsichtlich ihres Geschwindigkeitszustandes betrachten und dabei voraussetzen, daß die Körper jene einfachen Bewegungen ausführen, die bei der Übertragung durch Zahnräder verschiedener Art vorkommen.

Da an der relativen Bewegung der Körper gegeneinander nichts geändert wird, wenn man dem aus beiden Körpern bestehenden System irgendeine Zusatzbewegung erteilt, so erkennt man unmittelbar die Richtigkeit des folgenden Satzes, von dem wir übrigens schon früher Gebrauch machten:

Um die relative Bewegung eines Körpers 2 gegen einen anderen 1 zu bestimmen, erteilt man **beiden** Körpern eine solche Zusatzbewegung, zufolge welcher 1 zur Ruhe kommt; die Summe aus der Eigenbewegung von 2 und jener Zusatzbewegung ist dann die relative Bewegung von 2 gegen 1. Die relative Bewegung von 1 gegen 2 ist offenbar die umgekehrte (inverse) zu der von 2 gegen 1.

Bezüglich der Anwendung dieser Regel seien hier folgende technisch wichtige Fälle genannt:

a) Stirnräder. Die beiden Körper 1 und 2 führen Drehungen um parallele Achsen  $A_1$  und  $A_2$  mit den Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$  und  $\omega_2$  aus. Nach dem eben ausgesprochenen Satze ist die relative Bewegung von 2 gegen 1 die Summe aus  $\bar{\omega}_2$  um  $A_2$  und  $-\bar{\omega}_1$  um  $A_1$ ; sie ist nach 87b) eine Drehung um eine Achse  $A$ , die in der Ebene  $A_1, A_2$  liegt und deren Abstand  $a$  im Verhältnis teilt

$$a_1 : a_2 = \omega_2 : \omega_1;$$

wenn  $\omega_1$  und  $\omega_2$  entgegengesetztes Vorzeichen haben, so liegt  $A$  zwischen  $A_1$  und  $A_2$ , sonst außerhalb, auf der Seite der größeren Winkelgeschwindigkeit; die relative Winkelgeschwindigkeit hat im ersten Fall den Betrag  $\omega_o = \omega_2 + \omega_1$ , im zweiten  $\omega_2 - \omega_1$  (Abb. 185).

Um eine dauernde Übertragung der Bewegung von  $A_1$  auf  $A_2$  mit gleichbleibendem Werte des Übersetzungsverhältnisses

$$\varepsilon = \omega_1 / \omega_2 = n_1 / n_2 = a_2 / a_1 = d_2 / d_1 \quad (317)$$

( $n_1, n_2$  sind die Drehzahlen der Räder um  $A_1$  und  $A_2$ ) zu erhalten, hat man die beiden Körper so zu verbinden, daß die Achse  $A$  der Relativdrehung stets an derselben Stelle bleibt, daß also die Achsenflächen

Kreiszyylinder um  $A_1, A_2$  als Achsen sind. Um diese Übertragung zwangsläufig zu gestalten, wird eine Verzahnung längs dieser Achsenflächen angeordnet, deren ebene Schnitte die Teilkreise heißen. Wenn  $\omega_1$  und  $\omega_2$  verschiedenen Sinn haben, entsteht eine Außen-, haben sie denselben Sinn, eine Innenverzahnung.

Die Zahnteilung  $\tau$  cm wird vorteilhaft in der Form angesetzt

$$\tau = \nu \pi, \quad \text{wobei} \quad \nu = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, 1, 2, 3 \dots \text{ cm},$$

also  $\nu$  (in cm) einen echten Bruch oder eine ganze Zahl bedeutet, der als Modul der Zahnteilung bezeichnet wird. Daraus folgt mit  $d_1 \pi = \tau z = \nu_1 \pi z_1$ ,  $d_1 = \nu z_1$ ,  $d_2 = \nu z_2$ , und es ist auch

$$\varepsilon = d_2/d_1 = z_2/z_1. \quad (318)$$

Beispiel 112. Lage der relativen Drehpole dreier Scheiben. Betrachtet man in Abb. 185 die feste Ebene als Scheibe 3, so ist in leicht verständlicher Bezeichnungsweise

$A_1 \equiv (1, 3) \equiv (3, 1)$  der Drehpol von 1 gegen 3; ebenso  $A_2 \equiv (2, 3)$ , und  $A \equiv (1, 2)$ , und wir haben in der Lage dieser drei Pole den Sonderfall eines allgemeinen Satzes gewonnen, der in der Theorie der kinematischen Ketten und Getriebe (wie auch in der kinematischen Theorie der Fachwerke) häufig verwendet wird:

Die relativen Drehpole  $(2, 3), (3, 1), (1, 2)$  dreier bewegter Scheiben liegen stets in einer Geraden (kollineare Lage der relativen Drehpole dreier Scheiben).

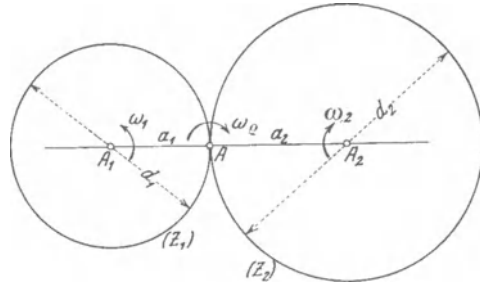


Abb. 185.

b) Kegelräder. Dieselben Betrachtungen, auf die Relativbewegung zweier Körper, die sich um schneidende Achsen drehen, angewendet, führen nach 87a) auf ganz ähnliche Aussagen für die Kegelräder, in denen alle Begriffe wiederkehren, die wir eben genannt haben; die Achsenflächen werden für ein gleichbleibendes Übersetzungsverhältnis Kreiskegel, und auf Stücken von diesen wird die Verzahnung angeordnet.

c) Hyperbelräder. Die relative Bewegung von zwei Drehungen um kreuzende Achsen bei konstantem Übersetzungsverhältnis  $\varepsilon = \omega_1/\omega_2$  führt auf Hyperbelräder; die relative Bewegung ist eine Schraubenschiebung, deren Achse  $A$ , Schiebengeschwindigkeit  $v$  und Drehungsgeschwindigkeit  $\omega$  nach 87, Beispiel 98 gefunden werden; bei  $\varepsilon = \text{konst.}$  sind sowohl  $a_1, a_2$ , wie auch  $v$  und  $\omega$  konstante Größen und die Achsenflächen sind einschalige Drehhyperboloide, die mit konstanten Werten von  $v$  und  $\omega$  aufeinander abschrotten; die Begrenzungen der Zähne (die „Zahnflanken“) bestehen aus Stücken von Schraubenflächen.



### Dritter Teil.

## Dynamik der starren Körper.

Dieser Teil enthält im wesentlichen eine Vereinigung der Hauptprobleme der beiden vorangehenden: die Untersuchung der Bewegung starrer Körper mit Rücksicht auf die einwirkenden Kräfte. Nach einer kurzen Erklärung der Begriffe Arbeit, Leistung, Wucht (kinetische Energie) und Trägheitsmoment folgen Erläuterungen über die grundlegenden Prinzipien der Mechanik und deren Anwendung für die Formulierung und Lösung einfacher Aufgaben, wobei wieder der ebenen Bewegung besondere Bedeutung zukommt. Den Schluß bilden die wichtigsten Ansätze aus der Lehre vom Stoß und Bemerkungen über mechanische Ähnlichkeit.

### I. Arbeit, Leistung, Wucht.

**96. Arbeit.** Wird in dem durch Gl. (18) gegebenen „inneren Produkt“ für den Vektor  $\bar{K}$  eine Kraft  $\bar{K}(X, Y, Z)$  und für  $\bar{s}$  ein Weg-element  $\bar{ds}(dx, dy, dz)$  gewählt und wird wie dort  $\sphericalangle(\bar{K}, \bar{ds}) = \vartheta$  gesetzt, so erhält man die als mechanische Arbeit oder kurz Arbeit  $dA$  von  $\bar{K}$  längs  $\bar{ds}$  bezeichnete skalare Größe

$$dA = \bar{K} \bar{ds} = K ds \cos \vartheta = X dx + Y dy + Z dz. \quad (319)$$

$dA$  ist also durch das Produkt von  $K$  mit dem Wege in der Kraft-richtung  $ds \cos \vartheta$ , oder von  $ds$  mit der Kraft in der Wegrichtung  $K \cos \vartheta$  gegeben; daher ist  $dA = 0$ , wenn  $K = 0$ , oder wenn  $ds = 0$ , oder endlich wenn  $\sphericalangle \vartheta = \pi/2$ , die Kraft also auf der Wegrichtung senkrecht steht. Auf Grund dieser Gleichung wird eine Arbeit als positiv bezeichnet, wenn  $\sphericalangle \vartheta < 90^\circ$ , und als negativ, wenn  $\sphericalangle \vartheta > 90^\circ$  ist.

Hierbei bemerken wir, daß der Arbeitsbegriff in der Mechanik keineswegs mit dem „physiologischen“ Arbeitsbegriff übereinstimmt, den wir in der Sprache des täglichen Lebens benützen. In der Mechanik ist zur Verschiebung eines Gewichtes in wagrechter Richtung die Arbeit Null erforderlich, was wir z. B. für die mit dem Tragen einer Last auf wagrechter Straße verbundene „Muskelarbeit“ keineswegs behaupten können.

Unter der Arbeit einer Kraft  $\bar{K}$  längs eines endlichen Weges, oder längs einer Kurve  $c$  versteht man das längs  $c$  erstreckte bestimmte Integral

$$A = \int_{(c)} \bar{K} \cos \vartheta ds = \int_{(c)} (X dx + Y dy + Z dz). \quad (320)$$



Da die Arbeit eine skalare Größe ist, addieren sich die Teilarbeiten längs der einzelnen Wegelemente wie richtungslose Größen.

Das Integral ist nur dann eine reine Funktion des Ortes, wenn es vom Wege unabhängig, oder  $dA$  ein vollständiges Differential ist, d. h. wenn

$$\boxed{X = \frac{\partial A}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial A}{\partial z}.} \quad (321)$$

Wir sehen daraus: damit eine Arbeitsfunktion oder ein Potential  $A$  existiert, ist notwendig und hinreichend, daß die Teile  $X, Y, Z$  der gegebenen Kraft als Funktionen der Koordinaten  $x, y, z$  die folgenden Gleichungen erfüllen

$$\boxed{\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}.} \quad (322)$$

Die Funktion  $-A = U$  nennt man auch die potentielle Energie und schreibt auch  $X = -\partial U/\partial x$ , usw.,  $A$  und  $U$  werden meistens nur bis auf eine willkürliche Konstante bestimmt angesehen, indem das in Gl. (320) enthaltene Integral unbestimmt gelassen wird; diese Konstante wird dann durch Anfangsbedingungen bestimmt. Kräfte, deren Komponenten  $X, Y, Z$  die Gln. (322) erfüllen, nennt man aus einem bald auftauchenden Grunde konservative (oder energieerhaltende) Kräfte (99). Das wichtigste Beispiel für diese besondere Art bietet der Fall konstanter Kräfte, wozu auch die Kraft in dem als homogen angenommenen Schwerfeld in der Nähe eines bestimmten Punktes der Erdkruste gehört. Wird die positive  $z$ -Achse lotrecht nach aufwärts genommen, so ist  $X = 0, Y = 0, Z = -mg$ , daher  $A = -mgz$  und

$$\boxed{U = -A = mgz.} \quad (323)$$

So wie von der Arbeit einer Kraft gesprochen wird, wenn eine Verschiebung ihres Angriffspunktes (der übrigens willkürlich auf der Wirkungslinie gewählt werden kann) auftritt, so erhalten wir als Arbeit  $dA$  eines Drehmomentes  $M$  bei einer Winkeldrehung  $d\varphi$  des Körpers, auf den es wirkt, den Ausdruck

$$dA = M d\varphi,$$

und bei der Drehung von  $\varphi_0$  bis  $\varphi$

$$\boxed{A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M d\varphi.} \quad (324)$$

Man braucht hier nur  $M$  in ein Kräftepaar aufzulösen, also  $M = Ka$  zu setzen, und eine von den beiden Kräften durch den Drehpol gehen zu lassen, so folgt für die Arbeit der anderen bei der Drehung um  $d\varphi$  und Addition der eben angegebene Ausdruck.

Wird für irgendeine Bewegung die in die Wegrichtung fallende Komponente der Kraft als Funktion des Weges in einer Kraft-Weg-Linie aufgetragen, so wird nach Gl. (320) die Arbeit zwischen zwei Punkten durch die Fläche dieser Kurve zwischen den betreffenden Ordinaten und der Weg-Achse gegeben; ebenso bedeutet nach Gl. (324) die Fläche der Moment-Drehwinkel-Linie die von dem Momente  $M$  geleistete Arbeit.

Die Dimension von  $A$  und  $U$  ist gemäß der Definition [KL], ihre Einheit im technischen Maßsystem 1 kgm (Kilogrammmeter oder Meterkilogramm). Die Dimension ist die gleiche wie die eines Momentes  $M$ , beide sind aber Dinge verschiedener Art, da  $M$  ein Vektor und  $A$  ein Skalar ist.

Beispiel 113. Für die anziehende Zentralkraft von der Größe  $K = m \frac{\lambda}{r^2}$  ist die Arbeit  $dA$  längs  $ds$  (Abb. 186), da  $\cos \vartheta = -dr/ds$ ,

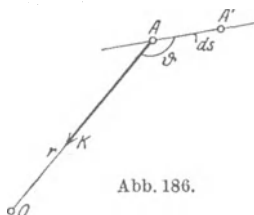


Abb. 186.

$$dA = K ds \cos \vartheta = -m \frac{\lambda}{r^2} ds \frac{dr}{ds} = -m \lambda \frac{dr}{r^2},$$

also

$$U = -A = m \lambda \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = -m \frac{\lambda}{r},$$

wodurch der Wert der Arbeitsfunktion  $A$  im „Aufpunkte“  $A$  auch als jene Arbeit definiert ist, die von der Kraft  $\bar{K}$  auf einem beliebigen Wege geleistet wird, der vom Unendlichen (wo der Wert von  $A$  Null ist) nach  $A$  führt.

Beispiel 114. Die Arbeit einer konstanten Tangentialkraft  $K$  längs des Umfanges eines Kreises vom Halbmesser  $r$  ist  $A = K 2 r \pi$ .

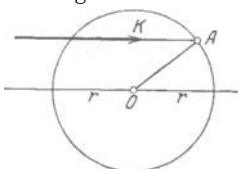


Abb. 187.

Wirkt dagegen die Kraft parallel zu einem Durchmesser, und zwar stets in der Bewegungsrichtung des Kolbens, welche Anordnung einem Kurbelgetriebe mit unendlich langer Schubstange entspricht (Abb. 187), so ist (für  $K = \text{konst}$ ) die Arbeit beim Hingang  $K 2 r$  und beim Rückgang ebenso groß, daher zusammen  $A_1 = K 4 r$ . Es ist mithin bei gleichem Werte von  $K$

$$A : A_1 = 2\pi : 4 = \pi : 2.$$

**97. Leistung. Wirkungsgrad.** Dem Begriff der Arbeit fehlt jede Bezugnahme auf die Zeit und damit auch ein wichtiges Merkmal für die wirtschaftliche Bewertung. Wir erhalten die in dieser Hinsicht notwendige Ergänzung, wenn wir nicht nach der Arbeit schlechthin, sondern nach der Arbeit in 1 s fragen. Die Arbeit einer Kraft in der Zeiteinheit nennt man die Leistung  $E$  der Kraft. Wenn zum Durchlaufen der Strecke  $ds$  die Zeit  $dt$  erforderlich ist, dann ist die in 1 s geleistete Arbeit

$$E = \frac{dA}{dt} = \bar{K} \bar{v} = K v \cos \vartheta = X v_x + Y v_y + Z v_z = X \dot{x} + Y \dot{y} + Z \dot{z}. \quad (325)$$

Für eine Verschiebung in der Kraftrichtung mit der Geschwindigkeit  $v$  ist die Leistung einfach  $E = K v$ .

Ebenso verstehen wir unter Leistung eines Drehmomentes die auf 1 s bezogene Arbeit; da nach Gl. (222)  $\varphi = \omega = \pi n/30$  ist, so folgt

$$E = \frac{dA}{dt} = M \dot{\varphi} = M \omega = M \frac{\pi n}{30}; \quad (326)$$

diese Gleichung dient oft auch umgekehrt zur Definition des Drehmomentes irgendeiner Maschine mit rotierenden Teilen bei bekanntem  $E$  und  $n$ .

Die Dimension der Leistung ist  $[KLT^{-1}]$ , ihre Einheit 1 kgm/s; in der Technik ist es üblich, das 75fache dieser Leistung als Einheit zu nehmen und diese als eine Pferdestärke: 1 PS zu bezeichnen,

$$1 \text{ PS} = 75 \text{ kgm/s}. \quad (327)$$

Zwischen  $E$  (Leistung in kgm/s) und  $N$  (dieselbe Leistung in PS) besteht daher die Beziehung

$$E = 75 N. \quad (328)$$

In der Elektrotechnik wird sämtlichen Maßen das physikalische Maßsystem zugrunde gelegt, das auf der Wahl der Masseneinheit als der dritten Grundeinheit beruht (4). Die Arbeitseinheit, die sich dabei ergibt, ist 1 Watt und es ist

$$1 \text{ PS} = 736 \text{ Watt}.$$

Beispiel 115. Leistung einer Kolbenmaschine in PS. Gegeben sei der „Kolbendurchmesser“  $D$  in cm, der „Hub“  $2r$  in m, die „Drehzahl“  $n$  in 1 min, die „Anzahl der Zylinder“  $z$  und der „Mitteldruck“  $p_m$  in  $\text{kg/cm}^2$  ( $1 \text{ kg/cm}^2 = 1 \text{ at}$ ).

a) Im Zylinder einer doppelwirkenden Dampfmaschine bleibt der Dampfdruck  $p$   $\text{kg/cm}^2$  längs des Hubes nicht konstant, sondern verläuft (aus wirtschaftlichen und betriebstechnischen Gründen) für jeden Hub etwa nach Abb. 188, wobei die obere Linie der Einströmung und Ausdehnung (Expansion) des Dampfes auf der einen, die untere der gleichzeitig auf der anderen Kolbenseite stattfindenden Ausströmung und Verdichtung entspricht. Die Fläche  $f$  dieses „Indikatordiagramms“, wie die Kraft-Weg-Linie für  $1 \text{ cm}^2$  Kolbenfläche bei Kolbenmaschinen bezeichnet wird, bedeutet die Arbeit des Dampfdruckes bei einem Hub für  $1 \text{ cm}^2$  Kolbenfläche, und zwar ist  $f = f_1 - f_2$ , da  $f_2$  nicht nützlich geleistet, sondern verbraucht wird. Als Mitteldruck bezeichnet man die Größe  $p_m = f/2r$ , d. h.  $p_m$  ist jener ideale Druck, der, längs des ganzen Kolbenhubes mit gleichbleibender Stärke wirkend, dieselbe Arbeit für  $1 \text{ cm}^2$  Kolbenfläche ergeben würde, wie der tatsächlich veränderlich verlaufende Druck. (Für Dampfmaschinen liegt in der Regel  $p_m$  zwischen 2 und 6  $\text{kg/cm}^2$ .) Daher ist die mittlere Kolbenkraft in kg

$$K_m = \frac{\pi D^2}{4} p_m;$$

die Arbeit in kgm in 1 min ist

$$K_m 2r 2n$$

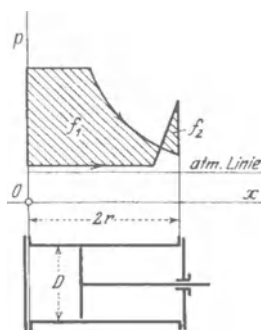


Abb. 188.

und somit ist (da  $60 \cdot 75 = 4500$ ) die Arbeit in 1 s, d. i. die Leistung in PS für einen Zylinder der

doppeltwirkenden  
Dampfmaschine:

$$N \text{ (PS)} = \frac{1}{4500} \frac{\pi D^2}{4} p_m 4 r n. \quad (329)$$

Das mittlere Drehmoment der Maschine folgt aus Gl. (326), da  $E = 75 \text{ N}$ ,

$$M = \frac{30 E}{\pi n} = \frac{30 \cdot 75 \text{ N}}{\pi n} = 716,2 \frac{\text{N}}{n} \quad (330)$$

und daraus umgekehrt

$$N \text{ (PS)} = \frac{\pi}{30 \cdot 75} M n = 0,0014 M n. \quad (331)$$

Für eine Einzylindermaschine mit  $D = 40 \text{ cm}$ ,  $2 r = 0,6 \text{ m}$ ,  $n = 200$ ,  $p_m = 3 \text{ at}$  wird  $N = 201 \text{ PS}$  und  $M = 719,5 \text{ kgm}$ .

b) Für einen Verpuffungsmotor, der einfach und im Viertakt wirkt (d. h. es erfolgt in 2 Umdrehungen nur ein „Arbeitshub“), ist der rechtsstehende Ausdruck in Gl. (329) durch 4 zu dividieren; der auf einen Hub eines Taktes bezogene Mitteldruck  $p_m$  beträgt für Benzinmotoren etwa 5 bis 8 at. Wir erhalten daher für  $z$  Zylinder beim

einfachwirkenden  
Viertaktmotor:

$$N \text{ (PS)} = \frac{1}{9000} \frac{\pi D^2}{4} p_m 2 r n z. \quad (332)$$

Für einen 6-Zylinder-Daimler-Flugmotor mit  $D = 14 \text{ cm}$ ,  $2 r = 0,18 \text{ m}$ ,  $n = 1400$ ,  $p_m = 7 \text{ at}$  folgt  $N = 181 \text{ PS}$ ,  $M = 92,6 \text{ kgm}$ .

Beispiel 116. Leistung einer einfachwirkenden Kolbenpumpe. Sei  $Q$  l (Liter) der Inhalt des Pumpenzylinders, also  $Q \text{ kg}$  das geförderte Gewicht für 1 Hub,  $h \text{ m}$  die Förderhöhe und  $n$  die Drehzahl der die Pumpe antreibenden Welle in 1 min, so ist die Leistung bei der

einfachwirkenden  
Kolbenpumpe:

$$N \text{ (PS)} = \frac{Q h n}{4500}. \quad (333)$$

Für  $Q = 15 \text{ l}$ ,  $h = 20 \text{ m}$ ,  $n = 24$  folgt  $N = 1,6 \text{ PS}$ .

Beispiel 117. Leistung der Gefällstufe eines Flußlaufes. Wenn  $Q \text{ m}^3/\text{s}$  die Durchflußmenge in 1 s (der „Durchfluß“),  $h$  die Höhe der Gefällstufe in m, so ist die in dieser Gefällstufe verfügbare Leistung vom Betrage

$$N \text{ (PS)} = \frac{1000 Q h}{75}. \quad (334)$$

Für  $Q = 10 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $h = 3 \text{ m}$  ist  $N = 400 \text{ PS}$ .

Die in einer Maschine auftretenden Verluste werden für Überschlagsrechnungen in ihrer Gesamtheit durch Angabe des Verhältnisses zwischen abgegebener und zugeführter Leistung in Rechnung gestellt: dieses Verhältnis nennt man den Wirkungsgrad  $\eta$ . Die Angabe  $\eta = 0,8$  (oder 80 vH) bedeutet also z. B., daß von je 100 PS der Maschine zugeführter Leistung 80 PS nutzbar abgegeben werden, der Rest ist durch die Widerstände (Reibung, Luftwiderstand) für die mechanische Verwertung verloren, d. h. in Wärme übergegangen.

Beispiel 118. Ein Kran soll 20 t in 3 min = 3·60 s auf 6 m Höhe heben; wie groß ist (ohne Rücksicht auf An- und Auslauf) die Leistung  $N$  des Antriebsmotors in PS, wenn der Wirkungsgrad  $\eta = 0,75$  beträgt?

Die abgegebene Leistung ist

$$\frac{20000 \cdot 6}{3 \cdot 60 \cdot 75} = \frac{667}{75} = 8,9 \text{ PS}$$

und die vom Antriebsmotor zuzuführende daher

$$N = \frac{8,9}{0,75} = 11,9 \text{ PS.}$$

Beispiel 119. Abbremsen der Motoren. Um die Leistung einer fertigen Maschine zu messen, verwendet man sog. Dynamometer, von denen das einfachste und bekannteste der Pronysche Zaum ist (Abb. 189), mittels welchem das Drehmoment des Motors

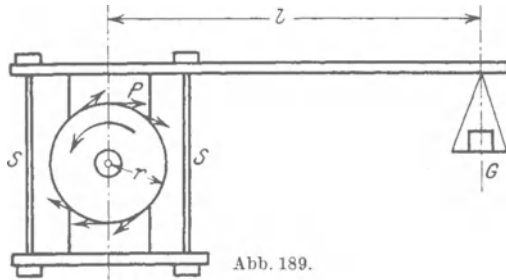


Abb. 189.

direkt abgewogen werden kann. Auf die Motorwelle wird eine Bremscheibe aufgesetzt, auf welche die Bremsklötze  $P$  einer Backenbremse durch Anziehen oder Nachlassen der Schrauben  $S$  passend angepreßt werden können. Das Drehmoment ist durch das Produkt aus dem aufgelegten Gewicht  $G$ , das für Gleichgewicht der Bremse auf der Wagschale anzubringen ist, und dem Abstand  $l$  der Wagschale von der Wellenmitte gegeben

$$M = Gl, \quad (335)$$

denn dieses ist gleich dem durch Reibung von der Bremscheibe auf der Bremse übertragenen Drehmoment. (Die Bremsvorrichtung wird für sich „ausgeglichen“.)

Die Drehzahl  $n$  wird auf einem Drehzeiger abgelesen; die gesuchte Motorleistung ist dann nach Gl. (331)

$$N(\text{PS}) = 0,0014 Gl n. \quad (336)$$

Bei kleineren Motoren, z. B. Automobil- und Flugzeugmotoren, ist es noch einfacher, das Drehmoment dadurch zu messen, daß das Gehäuse des Motors in einem Pendelrahmen befestigt wird, der um eine wagrechte Achse drehbar aufgehängt wird (Abb. 190). Das Gewicht des Motors samt Luftschaube wird — bei ruhendem Motor — durch ein „Gegengewicht“ ausgeglichen, so daß sich der ganze pendelnde Teil im indifferenten Gleichgewichte befindet. Mit dem Pendel ist ein Hebel  $H$  starr verbunden, längs welchem das Laufgewicht  $G$  verschoben werden kann.

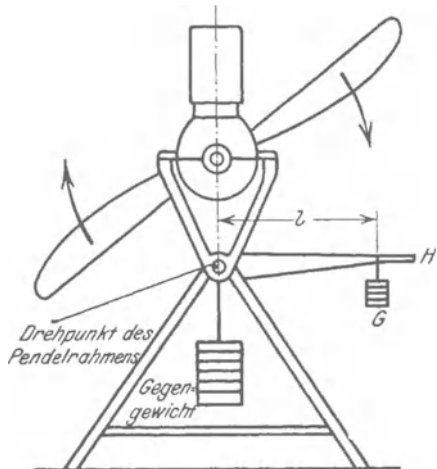


Abb. 190.

Das auf die Luftschaube abgegebene Drehmoment wird auch hier durch das Produkt aus dem Gewicht  $G$  und dem Abstand  $l$  von der Drehachse angegeben, die Leistung somit ebenfalls durch Gl. (336).

**98. Die kinetische Energie,** Wucht oder lebendige Kraft eines Punktes von der Masse  $m$  und der Geschwindigkeit  $v$  ist das halbe Produkt aus der Masse und dem Quadrat der Geschwindigkeit

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2);} \quad (337)$$

sie ist ein Skalar wie die Arbeit und hat dieselbe Dimension, ist also von gleicher Art wie diese.

Die kinetische Energie eines ausgedehnten Körpers, der sich um eine Achse  $a$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  dreht, ist gegeben durch die Summe der über alle Massenteile des Körpers erstreckten kinetischen Energien, für die weiterhin das Zeichen  $S$  verwendet wird; sie ist also, da  $v = r\omega$  die Geschwindigkeit des Teilchens  $m$  im Abstände  $r$  von der Drehachse  $a$  ist,

$$T = \frac{1}{2} S m v^2 = \frac{1}{2} S m r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 S m r^2.$$

Wir setzen nun

$$\boxed{S m r^2 = J,} \quad (338)$$

und nennen diese Größe das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf diese Achse  $a$ ; es ist also

$$\boxed{T = \frac{1}{2} J \omega^2.} \quad (339)$$

Die kinetische Energie eines um eine Achse sich drehenden Körpers ist das halbe Produkt aus dem Trägheitsmoment des Körpers um diese Achse und dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit um sie.

Ebenso erhält man für die kinetische Energie eines Körpers, der eine Schraubenbewegung  $(v, \omega)$  um eine durch den Schwerpunkt gehende Achse  $a$  ausführt, da die Geschwindigkeit eines Körperelementes  $m$  durch  $V^2 = v^2 + r^2 \omega^2$  gegeben ist, wenn  $r$  den Abstand des Elementes  $m$  von der Schraubenachse  $a$  bedeutet,

$$T = \frac{1}{2} S m V^2 = \frac{1}{2} S m (v^2 + r^2 \omega^2),$$

und wenn die ganze Masse des Körpers  $S m = M$  gesetzt wird, und wieder  $J = S m r^2$  das Trägheitsmoment des Körpers um die Schraubenachse  $a$  bezeichnet, so folgt

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2.} \quad (340)$$

**99. Der Energiesatz für den einzelnen Massenpunkt** stellt ein bemerkenswertes Integral der Bewegungsgleichungen dar und ist uns schon in einigen Sonderfällen begegnet. Man erhält ihn allgemein durch folgenden Vorgang: die Bewegungsgleichung eines freien Punktes von der Masse  $m$  unter der Einwirkung einer Kraft  $\vec{K}(X, Y, Z)$  lautet:  $m \vec{b} = \vec{K}$ , oder in Komponenten angeschrieben

$$\boxed{m \ddot{x} = X, \quad m \ddot{y} = Y, \quad m \ddot{z} = Z.} \quad (341)$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen mit  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  und addieren sie, so folgt

$$m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z};$$

mit Benutzung von Gl. (337) und (325) kann diese Gleichung auch so geschrieben werden

$$\frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \equiv \frac{dT}{dt} = \frac{dA}{dt} \equiv - \frac{dU}{dt},$$

d. h. es ist

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0 \quad \text{und integriert} \quad \boxed{T + U = h}, \quad (342)$$

worin  $h$  eine Integrationskonstante ist, die als Energiekonstante bezeichnet wird. Diese Gleichung enthält den Energiesatz, dessen Inhalt wir so aussprechen können:

Wenn die eingepprägten Kräfte so beschaffen sind, daß eine Arbeitsfunktion  $A$  oder eine potentielle Energie  $U$  existiert, dann ist die Summe aus der kinetischen Energie und potentiellen Energie  $U$  für die ganze Dauer der Bewegung eine Konstante. Die so erhaltene sog. Energiegleichung ist ein erstes Integral der Bewegungsgleichungen, das nur die Geschwindigkeiten und Koordinaten enthält. Dieses Integral wird auch als Energieintegral oder Wuchtintegral bezeichnet.

Die Konstante  $h$  ist durch die Anfangsbedingungen gegeben. Werden zu Anfang die Werte von  $T$  und  $U$  mit  $T_0$  und  $U_0$  bezeichnet, so gilt auch  $T_0 + U_0 = h$ , und da  $U_0 - U = A$  die längs des Übergangs von dem „Zustande“  $T_0, U_0$  in den Zustand  $T, U$  geleistete Arbeit ist, so kann Gl. (342) auch in der Form geschrieben werden

$$\boxed{T - T_0 = A}, \quad (343)$$

d. h. die Änderung der kinetischen Energie zwischen irgend zwei Stellen der Bahn ist gleich der Arbeit, die längs des betreffenden Weges von den eingepprägten Kräften geleistet wird.

Aus dieser Form des Prinzips folgt unmittelbar, daß es auch für gezwungene Bewegungen bei glatten Führungen unverändert in Geltung bleibt, denn die senkrecht zu diesen liegenden Führungskräfte leisten die Arbeit Null. — Und da das Prinzip für konstante Kräfte irgendwelcher Art gilt, so gilt es auch für konstante Reibungen.

Beispiel 120. Für die ebene — freie oder ohne Reibung gezwungene — Bewegung eines Punktes im Schwerfeld ist, wenn die  $z$ -Achse lotrecht nach abwärts angenommen wird, nach Gl. (323)  $U = -mgz$  und nach Gl. (342) daher

$$\frac{1}{2} m v^2 - mgz = h;$$



ist für  $z = z_0$ ,  $v = v_0$  vorgeschrieben, dann folgt  $h = \frac{1}{2} m v_0^2 - m g z_0$ , also

$$v^2 = v_0^2 + 2 g (z - z_0),$$

welche mit Gl. (243) übereinstimmt.

Beispiel 121. Ein Schlitten vom Gewichte  $G$  auf einer wagrechten Ebene mit der Reibungszahl  $f$  und der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  kommt nach einem Wege  $x$  zur Ruhe, der durch die Gl. (343) bestimmt ist, die hier, da die Reibungskraft  $fG$  der Bewegung entgegenwirkt, die Form annimmt

$$0 - \frac{1}{2} \frac{G}{g} v_0^2 = -f G x, \quad \text{daher} \quad x = v_0^2 / 2 f g.$$

Die Bewegung ist gleichförmig verzögert; die Größe der Verzögerung ist  $f g$  und die Zeit bis zum Stillstande

$$t = v_0 / f g.$$

Beispiel 122. Für die Zentralbewegung unter dem Einfluß des Newtonschen Gravitationsgesetzes ist zu setzen  $T = \frac{1}{2} m v^2$  und nach Beispiel 113:

$U = -m \frac{\lambda}{r}$ , daher gibt die Energiegl. (342)

$$v^2 = \frac{2 \lambda}{r} + h',$$

wenn hier  $h'$  statt  $2h/m$  geschrieben wird. Diese Gleichung liefert für das Perihel, da (Abb. 137)  $v = v_1$ ,  $r = \overline{FP} = a(1 - \varepsilon)$  ist, den Wert von  $h'$  zu

$$h' = v_1^2 - \frac{2 \lambda}{a(1 - \varepsilon)}.$$

Da ferner im Perihel die Normalbeschleunigung gleich der Anziehung ist und der Krümmungshalbmesser dort die Größe  $\varrho = \frac{b^2}{a} = a(1 - \varepsilon^2)$  besitzt, so folgt

$$\frac{v_1^2}{\varrho} = \frac{\lambda}{F P^2}, \quad \text{also} \quad v_1^2 = \lambda \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{a^2(1 - \varepsilon)^2} = \frac{\lambda}{a} \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon},$$

und daher wird

$$h' = \frac{\lambda}{a} \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} - \frac{\lambda}{a} \frac{2}{1 - \varepsilon} = -\frac{\lambda}{a};$$

damit erhalten wir schließlich die Energiegleichung in der schon im Beispiel 80 gefundenen Form

$$v^2 = \lambda \left[ \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right].$$

Als Folgerung ergibt sich unmittelbar, daß der Energiesatz in derselben Form

$$T + U = h$$

auch seine Gültigkeit für ein System von Massenpunkten behält, die durch Fäden von unveränderlicher Länge miteinander verbunden sind, wobei nur für  $T$  und  $U$  die kinetische und potentielle Energie aller Massenpunkte zu setzen ist. Für Systeme mit einem Freiheitsgrad ist durch die Energiegleichung die ganze Bewegung dargestellt.

Die Begründung dieser Erweiterung liegt darin, daß die inneren Kräfte immer paarweise von gleicher Größe und entgegengesetzter Richtung auftreten und ihre Arbeit bei unveränderlicher Länge der Fäden für jede beliebige virtuelle (d. h. im Einklang mit den geometrischen

Bedingungen stehende) Verschiebung null ist. Der rechnerische Nachweis verläuft ganz so wie beim Prinzip der virtuellen Arbeiten in der Statik. Der Leser mache sich dies auch an den Beispielen klar, bei denen die Fäden, die die Verbindung der Massenpunkte herstellen, um Stifte herumgelegt werden.

Beispiel 123. Ein Massenpunkt  $m$  ist mit zwei anderen  $m'$  durch Fäden verbunden, die über leichte, in derselben Wagrechten in der Entfernung  $2a$  liegende Rollen  $A, B$  laufen, und ist anfangs in der Mitte zwischen den Rollen in Ruhe; bei welcher Tiefe  $z_0$  kommt  $m$  wieder zur Ruhe, wenn er losgelassen wird? (Abb. 191.)

Da die kinetische Energie zu Anfang und zu Ende null ist, muß auch die Summe der von den Gewichten  $mg$  und  $2m'g$  geleisteten Arbeiten null sein. Man erhält so die Gleichung

$$mgz_0 - 2m'g[\sqrt{a^2 + z_0^2} - a] = 0$$

und daraus durch Auflösung nach  $z_0$ ,

$$z_0 = \frac{4m m' a}{4m'^2 - m^2}.$$

Damit ein solches  $z_0$  existiert, muß  $m < 2m'$  sein. Nach Erreichung dieses tiefsten Punktes wird  $m$  seine Bewegung umkehren, in die Anfangslage zurückgehen und weiter zwischen beiden Punkten Schwingungen (aber nicht harmonische!) ausführen.

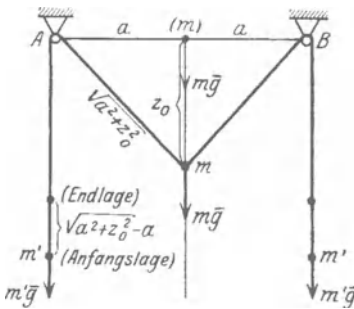


Abb. 191.

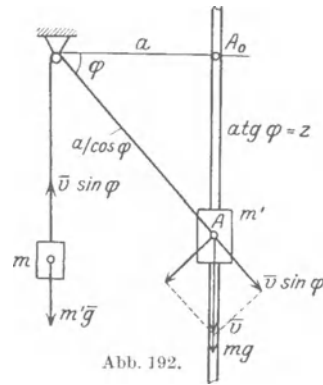


Abb. 192.

Beispiel 124. An den Enden eines dünnen, über eine kleine Rolle laufenden Seiles sind zwei Massen  $m$  und  $m'$  befestigt, von denen  $m$  frei herabhängt und  $m'$  längs einer glatten, lotrechten Führung verschiebbar ist. Die Masse  $m'$  wird von  $A_0$  ohne Anfangsgeschwindigkeit fallen gelassen. Man berechne die Geschwindigkeit  $v$  von  $m'$  in Abhängigkeit von  $z$  (Abb. 192).

Mit den Bezeichnungen der Abbildung ergibt sich die Energiegleichung in der Form

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m' v^2 \sin^2 \varphi = m g a \operatorname{tg} \varphi - m' g \left[ \frac{a}{\cos \varphi} - a \right];$$

daraus finden wir

$$v^2 = 2 g a \frac{m \operatorname{tg} \varphi - m' [1 / \cos \varphi - 1]}{m + m' \sin^2 \varphi},$$

und mit  $z = a \operatorname{tg} \varphi$ ,

$$v^2 = 2 g \frac{m z - m' [\sqrt{a^2 + z^2} - a]}{m + m' z^2 / (z^2 + a^2)}.$$

## II. Trägheitsmomente.

**100. Allgemeine Sätze über Trägheitsmomente.** Nach Gl. (338) ist das dynamische Trägheitsmoment (abgekürzt TM)  $J_a$  eines Körpers in bezug auf eine Achse  $a$  durch folgende Gleichung definiert

$$J_a = S m r_a^2, \quad (344)$$

wenn  $r_a$  den Abstand des Massenteilchens  $m$  von der Achse bedeutet und die Summe über alle Massenteilchen erstreckt wird.

Die Dimension für das dynamische TM ist  $[ML^2]$ , also im technischen Maßsystem  $[KLT^2]$ .

In der technischen Praxis ist es gebräuchlich, statt der Größe  $J$  die Größe  $gJ$  anzugeben, welche die einfachere Dimension  $KL^2$  hat, also durch das Produkt einer Kraft, etwa eines Gewichtes, und dem Quadrat einer Länge gegeben wird. So spricht man z. B. bei einem Schwungrad von einem „ $GD^2$ “, indem das Produkt aus dem Gewichte seiner an den Umfang „reduzierten Masse“ (s. u.) und dem Quadrat seines Durchmessers als Maß für sein TM angegeben wird.

Für gleichförmige (homogene) Massenverteilungen kann  $m = \mu v$  ( $v =$  Rauminhalt des Teilchens  $m$ ) gesetzt und die gleichbleibende „Raumdichte“  $\mu$  vor das Summenzeichen gezogen werden

$$J_a = \mu S v r_a^2;$$

man setzt nun  $J_a = \mu J'_a$  und bezeichnet die Größe

$$J'_a = S v r_a^2 \quad (345)$$

als das geometrische Trägheitsmoment des Körpers. Seine Dimension ist  $[L^5]$ . Für „ebene“ Massen setzen wir  $m = \mu_1 f$ , bezeichnen  $\mu_1$  als die „Flächendichte“ und erhalten für das geometrische Trägheitsmoment der Fläche den analogen Ausdruck

$$J'_a = S f r_a^2. \quad (346)$$

mit der Dimension  $[L^4]$ . Dieser Ausdruck kommt auch in der technischen Elastizitätslehre, in der Lehre von der Biegung, und zwar als reine Rechengröße, unabhängig von seiner dynamischen Bedeutung vor. — Ein ähnlicher Ausdruck läßt sich auch für das TM eines Linienstückes bei Einführung einer konstanten „Liniendichte“  $\mu_2$  aufstellen.

Ein Moment wie  $J_a$  wird auch als ein „quadratisches Moment“ bezeichnet, zum Unterschiede von dem „linearen“ oder „statischen“, in dem die Abstände  $r_a$  von einer Achse nur in der ersten Potenz vorkommen, und das in der Lehre vom Massenmittelpunkte eine Rolle spielt. Beziehen wir den Körper auf ein cartesisches Koordinatensystem  $O, x, y, z$ , und bezeichnen die Koordinaten des Teilchens  $m$  durch  $x, y, z$ , so sind die TM in bezug auf diese Achsen durch die Ausdrücke gegeben

$$J_x = S m (y^2 + z^2), \quad J_y = S m (z^2 + x^2), \quad J_z = S m (x^2 + y^2). \quad (347)$$

Außer diesen kommen noch Momente zur Betrachtung, die die Produkte je zweier Koordinaten enthalten; sie werden als Deviations- oder Zentrifugalmomente bezeichnet und durch die Ausdrücke definiert

$$D_{yz} = \sum m y z, \quad D_{zx} = \sum m z x, \quad D_{xy} = \sum m x y. \quad (348)$$

In diesen Gleichungen sind überall statt der Summen Integrale zu schreiben, wenn es sich um eine kontinuierliche Massenverteilung handelt; die Integrale sind dann über alle „Massenelemente“  $dm$  zu erstrecken.

Für „ebene“ Massen in der  $x$ - $y$ -Ebene, also Scheiben, erhalten wir mit  $z = 0$  aus diesen Gleichungen

$$J_x = \sum m y^2, \quad J_y = \sum m x^2, \quad J_z = \sum m (x^2 + y^2) = J_x + J_y. \quad (349)$$

$J_z$  wird in diesem Falle auch als das polare Trägheitsmoment der Scheibe bezeichnet.

Aus der Form dieser Gleichungen ist zu ersehen, daß im allgemeinen die TM für verschiedene Achsen verschiedene Werte haben; dabei erhebt sich naturgemäß die Frage nach den Beziehungen, die zwischen den TM für verschiedene Achsen bestehen und nach der kleinsten Zahl von Bestimmungstücken, die notwendig sind, um die TM für alle Geraden des Raumes als Achsen zu erhalten.

Zur Lösung dieser Fragen dienen die beiden folgenden Sätze, von denen der erste sich auf TM um „parallele Achsen“, der zweite auf die Verteilung der TM um die sich in einem Punkte „schneidenden Achsen“ bezieht.

1. Trägheitsmomente für parallele Achsen. Sei in Abb. 193  $a$  die gegebene Achse im Abstände  $a$  vom Schwerpunkte  $S$  und eine hierzu parallele Achse durch  $S$ , dann ist nach den Bezeichnungen dieser Abbildung

$$r_a^2 = r_s^2 + a^2 - 2 a r_s \cos \alpha,$$

und sei etwa

$$r_s \cos \alpha = x,$$

so wird

$$J_a \equiv \sum m r_a^2 = \sum m r_s^2 + a^2 \sum m - 2 a \sum m x,$$

da aber  $S$  der Schwerpunkt ist, so ist  $\sum m x = 0$ , und wenn  $\sum m r_s^2 = J_s$  und  $\sum m = M$  gesetzt wird, so folgt

$$J_a = J_s + M a^2. \quad (350)$$

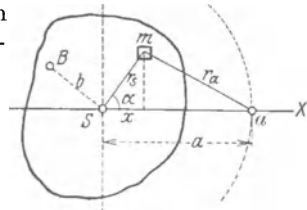


Abb. 193.

Für alle Achsen  $a$ , die die Erzeugenden eines Kreiszyinders sind, dessen Drehachse durch  $S$  geht, hat daher das TM den gleichen Wert. Ferner kommt unter allen parallelen Achsen  $a$  der durch den Schwerpunkt gehenden das kleinste TM zu. Diese Gleichung gestattet, das TM in

bezug auf irgendeine Achse  $a$  zu berechnen, sobald das TM um eine dazu parallele Achse  $b$  und die (wieder mit den gleichen Buchstaben bezeichneten) Abstände  $a, b$  dieser Achsen von  $S$  bekannt sind. Denn es ist

$$J_b = J_s + M b^2 \quad \text{und daher} \quad J_a = J_b + M(a^2 - b^2).$$

Unter dem Trägheitshalbmesser versteht man die durch die Gleichung

$$J_a = M k_a^2 \quad (351)$$

definierte Länge  $k_a$ ; sie ist durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß die Masse  $M$ , in der Entfernung  $k_a$  von der Achse  $a$  in einem Punkte konzentriert angebracht, dasselbe TM besitzt wie der gegebene ausgedehnte Körper. Setzt man ebenso  $J_s = M k_s^2$ , so kann Gl. (350) auch geschrieben werden

$$k_a^2 = k_s^2 + a^2, \quad (352)$$

d. h.  $k_a$  ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Seiten  $k_s$  und  $a$ .

Als reduzierte Masse  $M'$  des Körpers in einem Punkte  $P$  in der Entfernung  $\varrho$  von der Achse  $a$  bezeichnet man die durch die Gleichung  $J_a = M' \varrho^2$  bestimmte Masse also

$$M' = J_a / \varrho^2. \quad (353)$$

2. Verteilung der Trägheitsmomente für alle Achsen durch einen Punkt  $O$ . Das TM in bezug auf eine beliebige Achse  $a$  durch  $O$  ist durch die Gl. (344) gegeben. Die Achse  $a$  sei durch die Richtungskosinuse  $(\lambda, \mu, \nu)$  bezüglich der Achsen  $O, x, y, z$  festgelegt; dann ist nach Abb. 194

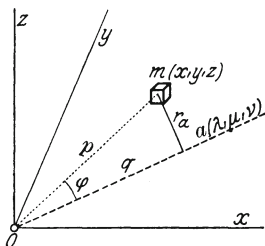


Abb. 194.

$$\begin{aligned} r_a^2 &= p^2 - q^2. \\ p^2 &= x^2 + y^2 + z^2. \\ q &= p \cos \varphi = \lambda x + \mu y + \nu z, \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 &= 1, \end{aligned}$$

damit folgt

$$\begin{aligned} J_a &= S m r_a^2 = S m (p^2 - q^2) \\ &= S m [(x^2 + y^2 + z^2) (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - (\lambda x + \mu y + \nu z)^2] \\ &= \lambda^2 S m (y^2 + z^2) + \mu^2 S m (z^2 + x^2) + \nu^2 S m (x^2 + y^2) \\ &\quad - 2 \mu \nu S m y z - 2 \nu \lambda S m z x - 2 \lambda \mu S m x y, \end{aligned}$$

und mit Benutzung der in (347) und (348) eingeführten Größen läßt sich dies in der Form schreiben

$$J_a = \lambda^2 J_x + \mu^2 J_y + \nu^2 J_z - 2 \mu \nu D_{yz} - 2 \nu \lambda D_{zx} - 2 \lambda \mu D_{xy}. \quad (354)$$

Das Trägheitsmoment für irgend eine Achse  $a$  ist somit bestimmt, wenn man die 6 Größen ( $J_x, J_y, J_z, D_{yz}, D_{zx}, D_{xy}$ ) für irgend ein Achsensystem  $O, x, y, z$  und die Richtungskosinusse ( $\lambda, \mu, \nu$ ) der Achse  $a$  kennt.

Trägt man auf jeder Achse  $a$  eine Länge  $\overline{OE} = \bar{\rho}(X, Y, Z)$  auf, die gegeben ist durch

$$\boxed{\rho = c/\sqrt{J_a},} \quad (355)$$

so daß also  $J_a = c^2/\rho^2$  und  $X = \rho\lambda = c\lambda/\sqrt{J_a}$ , usw., wobei  $c$  ein Faktor ist, der aus Dimensionsgründen eingeführt wird, dann wird Gl. (354)

$$\boxed{J_x X^2 + J_y Y^2 + J_z Z^2 - 2D_{yz} YZ - 2D_{zx} ZX - 2D_{xy} XY = c^2.} \quad (356)$$

Die Endpunkte von  $\rho$  erfüllen eine Fläche zweiten Grades, die als das (Cauchy'sche) Trägheitsellipsoid für den Punkt  $O$  bezeichnet wird. Seine Gleichung vereinfacht sich wesentlich, wenn man sie auf Hauptachsen des Ellipsoides  $O, \xi, \eta, \zeta$  bezieht; dann verschwinden nämlich die Glieder mit den Produkten der Koordinaten, und wenn die Hauptträgheitsmomente, d. s. die TM um diese Hauptachsen des Ellipsoides, mit  $J_1, J_2, J_3$  bezeichnet werden, so lautet die Gleichung des Trägheitsellipsoides auf diese Hauptachsen bezogen

$$\boxed{J_1 \xi^2 + J_2 \eta^2 + J_3 \zeta^2 = c^2.} \quad (357)$$

Das TM um eine Achse  $a$ , deren Richtungskosinusse in bezug auf die Hauptachsen  $\xi, \eta, \zeta$  wieder mit  $\lambda, \mu, \nu$  bezeichnet werden, ist dann durch den einfacheren Ausdruck gegeben

$$\boxed{J_a = \lambda^2 J_1 + \mu^2 J_2 + \nu^2 J_3.} \quad (358)$$

Das Trägheitsellipsoid für den Schwerpunkt nennt man Zentral-ellipsoid und seine Hauptachsen die Hauptzentralachsen.

Da die Länge  $\rho$ , die durch das Ellipsoid (357) auf jedem Strahle abgeschnitten wird, nach Gl. (355) der Quadratwurzel des TM um diese Achse umgekehrt proportional ist, so ersieht man, daß sich das Trägheitsellipsoid der allgemeinen Gestalt des Körpers ungefähr anschmiegt, insofern als es ein großes  $\rho$  nach jenen Richtungen zeigt, nach denen der Körper weiter ausladet, ohne natürlich die kleinen Unregelmäßigkeiten der Körperbegrenzung erkennen zu lassen.

Für die Ermittlung der Hauptträgheitsachsen ist somit die Transformation der Fläche (356) auf die Hauptachsen erforderlich; in vielen Fällen wird aber die Aufsuchung der Hauptachsen erleichtert durch Benutzung des folgenden Hilfssatzes:

Hat ein Körper eine Symmetrieebene  $E$ , dann ist das Deviationsmoment in bezug auf je zwei Achsen, von denen die eine, etwa  $z$ , zu  $E$  senkrecht steht, die andere in  $E$  liegt, gleich Null; die Ebene  $E$  ist eine Hauptebene und enthält zwei Hauptträgheitsachsen. Wir können auch sagen,

die Normale zu einer Symmetrieebene  $E$  des Körpers ist eine Hauptachse für ihren Schnittpunkt  $O$  mit  $E$ .

Die Symmetrieeigenschaft besagt nämlich, daß jedem Teilchen  $m$  in einem Punkte mit den Koordinaten  $(x, y, +z)$  ein gleich großes Teilchen in  $(x, y, -z)$  entspricht, also ist die Summe der Deviationsmomente dieser beiden Teilchen  $m x (z - z) = 0$  und daher für den ganzen Körper  $D_{xz} = 0$ , und ebenso  $D_{yz} = 0$ . Umgekehrt kann das Verschwinden des Deviationsmomentes für die Ermittlung der Hauptachsen verwertet werden.

Beispiel 128. Für Deviationsmomente in bezug auf parallele Achsenpaare gilt ein zu Gl. (350) analoger Satz, der sich nach Abb. 195 unmittelbar in folgender Form ergibt:

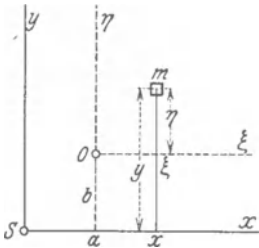


Abb. 195.

Seien  $x, y$  zu den gegebenen  $\xi, \eta$  parallele Schwerpunktsachsen und  $a, b$  die Koordinaten von  $O$  im System  $S, x, y$ , so ist

$$\xi = x - a, \quad \eta = y - b$$

und

$$D_{\xi\eta} \equiv \sum m \xi \eta = \sum m (x - a) (y - b) \\ = \sum m x y - a \sum m y - b \sum m x + ab \sum m,$$

und da  $\sum m x = 0, \sum m y = 0$ , so folgt

$$D_{\xi\eta} = D_{xy} + M a b. \tag{359}$$

Ebenso läßt sich durch Benutzung der Formeln für die Drehung des Koordinatensystems das Deviationsmoment  $D_{\xi\eta}$  für irgendein Paar von Achsen in der Ebene durch  $O$  mit Hilfe der Größen  $J_x, J_y, D_{xy}$  ausdrücken. Ähnliche Entwicklungen gelten auch für den Raum.

Beispiel 126. Die Transformation auf die Hauptachsen für ebene Körper geschieht durch Aufsuchung jenes Achsenpaares  $\xi, \eta$ , für welches das zugehörige  $D_{\xi\eta}$  verschwindet. Für den Übergang vom System  $(O, x, y)$  zu dem System  $(O, \xi, \eta)$  gelten nach Abb. 196 für die Koordinaten die folgenden Transformationsgleichungen

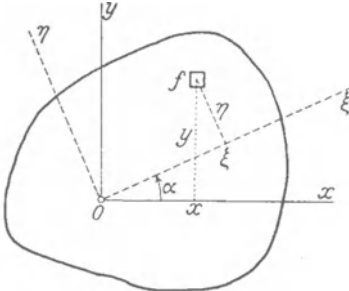


Abb. 196.

$$\xi = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ \eta = -x \sin \alpha + y \cos \alpha;$$

wenn wir uns sogleich auf die geometrischen TM der Scheibe beschränken, und dabei die Striche der Einfachheit halber weglassen, so wird

$$J_x = S f y^2, \quad J_y = S f x^2, \\ D_{xy} = S f x y;$$

durch Einsetzen von  $\xi$  und  $\eta$  folgen die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} J_{\xi} &= S f \eta^2 = J_y \sin^2 \alpha + J_x \cos^2 \alpha - 2 D_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \\ J_{\eta} &= S f \xi^2 = J_y \cos^2 \alpha + J_x \sin^2 \alpha + 2 D_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \\ D_{\xi\eta} &= S f \xi \eta = \frac{1}{2} (J_x - J_y) \sin 2 \alpha + D_{xy} \cos 2 \alpha. \end{aligned} \right\} \tag{360}$$

Der Winkel  $\alpha$ , der  $D_{\xi\eta} = 0$  macht, ist gegeben durch

$$\operatorname{tg} 2 \alpha = \frac{2 D_{xy}}{J_y - J_x}; \tag{361}$$



durch  $\tilde{\alpha}$  und  $\tilde{\alpha} + \pi/2$  sind die Neigungen der Hauptachsen  $\xi, \eta$  gegen  $x, y$  bestimmt.

Mittels der Gln. (360) bestätigt man durch Ausrechnung leicht das Bestehen der Beziehungen

$$J_\xi + J_\eta = J_x + J_y \quad \text{und} \quad J_\xi J_\eta - D_{\xi\eta}^2 = J_x J_y - D_{xy}^2; \quad (362)$$

diese Ausdrücke, die ihre Werte für alle Achsenpaare beibehalten, werden als Invarianten bezeichnet. Für die Hauptachsen ist, wie gesagt,  $D_{\xi\eta} = 0$ , und die vereinfachten Gln. (362) können unmittelbar für die Berechnung der Haupt-TM  $J_1$  und  $J_2$  verwendet werden. Die Gleichungen lauten dann

$$J_1 + J_2 = J_x + J_y, \quad J_1 J_2 = J_x J_y - D_{xy}^2,$$

wodurch  $J_1, J_2$  bestimmt sind.

Insbesondere merken wir noch an, daß das TM für eine unter  $\alpha = 45^\circ$  geneigte Achse

$$J_{45} = \frac{1}{2}(J_x + J_y) - D_{xy}, \quad \text{also} \quad D_{xy} = \frac{1}{2}(J_x + J_y) - J_{45}, \quad (363)$$

ist; diese Gleichung kann zur Ermittlung des Deviationsmomentes  $D_{xy}$  aus den drei TM  $J_x, J_y$  und  $J_{45}$  dienen.

Beispiel 127. Die Ausgleichsgerade durch eine Anzahl von Punkten  $A, B, \dots$  in der Ebene ist (nach der Methode der kleinsten Quadrate) dadurch bestimmt, daß die Summe der Quadrate der Abstände der einzelnen Punkte von dieser Geraden ein Minimum wird. Nach den eben erhaltenen Ergebnissen geht diese Gerade durch den geometrischen Mittelpunkt  $S$  dieser Punkte und ist nichts anderes als die Achse des kleinsten TM für diesen Punkt; denn dies ist jene Gerade, für welche die Summe der Quadrate der Abstände einen kleinsten Wert annimmt (Abb. 197).

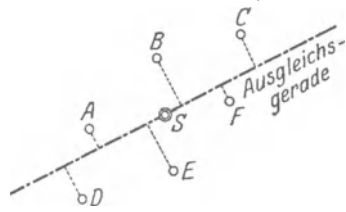


Abb. 197.

Wenn einzelne Punkte (deren Festlegung etwa mit größerer Genauigkeit erfolgt ist)

höher bewertet werden sollen als andere, so kann dies dadurch erfolgen, daß ihnen diese höhere Bewertung als größere „Masse“ (in irgendeinem Maßstabe gemessen) zugeteilt wird; die Ausgleichsgerade fällt auch dann mit der Achse des kleinsten TM zusammen.

Ganz Ähnliches gilt für die Ausgleichsgerade und auch für die Ausgleichsebene für eine Anzahl von Punkten im Raume.

**101. Rechnerische Ermittlung von Trägheitsmomenten.** A) Für Flächen beschränken wir uns auf die Angabe von geometrischen Trägheitsmomenten; die dynamischen folgen aus diesen durch Multiplikation mit der Flächendichte nach der Gleichung  $J_x = \mu_1 J'_x$  usw.

1. Rechteck  $b, h$ . Die Hauptachsen sind die Mittellinien  $x, y$ , und die Hauptträgheitsmomente sind daher nach Abb. 198

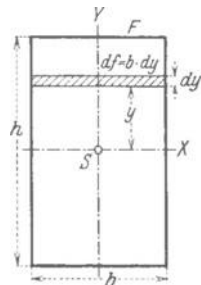


Abb. 198.

$$J'_x = \int f y^2 = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 df = 2b \int_0^{h/2} y^2 dy = \frac{b h^3}{12},$$

und wenn  $b h = F$  gesetzt wird,

$$J'_x = \frac{b h^3}{12} = \frac{F h^2}{12}, \quad J'_y = \frac{b^3 h}{12} = \frac{F b^2}{12}, \quad J'_0 = J'_x + J'_y = \frac{F}{12}(b^2 + h^2). \quad (364)$$

2. Kreis vom Halbmesser  $R$ . Da das Trägheitsmoment um alle Durchmesser gleich ist, so folgt, wenn man als Flächenelement ein Ringelement  $df = 2\pi r dr$  nimmt (Abb. 199)

$$J'_0 = J'_x + J'_y = 2 J'_x = \int_0^R r^2 df = 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{R^4 \pi}{2}$$

und daher

$$J'_x = \frac{R^4 \pi}{4} = \frac{D^4 \pi}{64} = \frac{F R^2}{4}, \quad J'_0 = \frac{R^4 \pi}{2} = \frac{F R^2}{2}. \quad (365)$$

B) Körper. 3. Prismatischer Körper von beliebigem Querschnitt, Abb. 200. Eine „Faser“  $dm = \mu l df$  parallel zur Achse liefert das Trägheitsmoment  $dm r^2$ , daher ist das dynamische TM des ganzen Körpers in bezug auf die Achse  $x$

$$J_x = \int r^2 dm = \mu l \int r^2 df = \mu l J'_0,$$

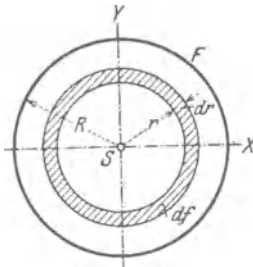


Abb. 199.

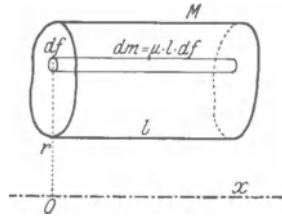


Abb. 200.

wenn  $J'_0 = \int r^2 df$  das geometrische polare TM der Querschnittsfläche des Körpers mit Bezug auf den Schnittpunkt  $O$  mit der Achse bedeutet. Da ferner die Masse des Körpers  $M = \mu F l$  ist, so folgt

$$J_x = \frac{M J'_0}{F}. \quad (366)$$

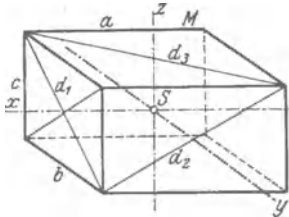


Abb. 201.

Beispiel 128. Für das Parallelepipid mit den Kanten  $a, b, c$  nach Abb. 201 ist

$$J'_0 = \frac{F}{12} (b^2 + c^2) = \frac{F d_1^2}{12},$$

also wenn auch die TM für die  $y$ - und  $z$ -Achse hinzugenommen werden,

$$J_x = \frac{M d_1^2}{12}, \quad J_y = \frac{M d_2^2}{12}, \quad J_z = \frac{M d_3^2}{12}. \quad (367)$$

Für den Würfel von der Seite  $a$  ist

$$d_1^2 = d_2^2 = d_3^2 = 2 a^2,$$

daher für alle Achsen durch den Mittelpunkt

$$J = \frac{M a^2}{6}. \quad (368)$$

Beispiel 129. Für den Drehzylinder, Abb. 202, ist nach Gl. (365)  $J_0 = F r^2/2$ , daher

$$J_x = \frac{1}{2} M r^2. \quad (369)$$

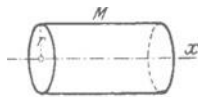


Abb. 202.

4. Für einen beliebigen Drehkörper erhält man das TM durch Zerschneidung senkrecht zur Achse in dünne Scheiben mit der Masse  $dm$ , Abb. 203; da man jede solche Scheibe als Zylinder auffassen kann, dessen TM um die Achse nach Gl. (369) gegeben ist durch

$dJ = \frac{1}{2} dm y^2 = \frac{1}{2} \mu y^2 \pi dx y^2$  und  $M = \int dm = \mu \pi \int y^2 dx$  ist, so folgt

$$J_x = \frac{M \int y^4 dx}{2 \int y^2 dx}. \quad (370)$$

Beispiel 130. Kugel vom Halbmesser  $R$  und der Masse  $M$ . In Gl. (370) ist zu setzen  $y^2 = R^2 - x^2$  und die Integration von  $-R$  bis  $+R$  auszuführen. Man findet

$$J_x = \frac{2}{5} M R^2. \quad (371)$$

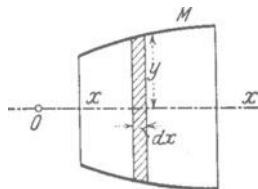


Abb. 203.

Die gleiche Formel gilt auch für das TM einer Halbkugel in bezug auf ihre Symmetrieachsen, wenn  $M$  die Masse der Halbkugel bedeutet.

5. Dünner, gerader Stab von der Länge  $l$ , in bezug auf eine Querachse, Abb. 204. Es ergibt sich durch direkte Integration, wenn  $\mu$  die Masse der Längeneinheit des Stabes bedeutet,

$$J_\xi = \int_0^l \mu y^2 dy = \frac{\mu l^3}{3} = \frac{M l^2}{3}, \quad \text{und} \quad J_x = \frac{M l^2}{12}. \quad (372)$$

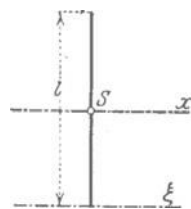


Abb. 204.

**102. Zeichnerische Ermittlung von Trägheits- und Deviationsmomenten ebener Flächen.** a) Ermittlung des Trägheitsmomentes

mit Hilfe des Seilecks (Verfahren von Mohr). Um das TM einer durch Zeichnung vorgegebenen Fläche  $F$  in bezug auf eine Schwerpunktsachse  $x$  zu erhalten, teilt man (Abb. 205)  $F$  durch parallel zu  $x$  gelegte Schnitte in eine Anzahl von Streifen, deren Größen  $F_1 \dots F_4$  und Schwerpunkte  $I \dots IV$  leicht angebbar sind. Mit diesen Flächen als „Kräften“ zeichnet man ein Seileck, indem man sie zunächst (nach Wahl eines passenden Flächenmaßstabes, etwa  $10 \text{ cm}^2 \rightarrow 1 \text{ cm}$ ) in einem Kraft-

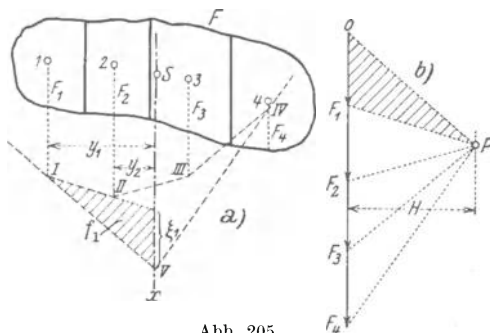


Abb. 205.

ecck (b) aneinanderreicht und das Seileck  $I \dots IV$  nach Annahme des

Poles  $P$  in der Polweite  $H$  entwirft; durch den Schnittpunkt  $V$  der äußeren Seilstrahlen geht die Schwerachse  $x$ . Das TM ist definitionsgemäß gegeben durch

$$J'_x = S F_i y_i^2.$$

Nun folgt aus den Paaren von ähnlichen Dreiecken, von denen das erste in der Abbildung schraffiert ist

$$F_1 : H = \xi_1 : y_1, \quad F_1 y_1 = H \xi_1,$$

daher

$$F_1 y_1^2 = H \xi_1 y_1 = 2 H f_1,$$

wobei  $2 f_1 = y_1 \xi_1$  die doppelte Fläche des Dreiecks bedeutet, das zwischen den beiden Seilstrahlen durch den Punkt  $I$  und der Achse  $x$  liegt. Daraus ergibt sich

$$J'_x = 2 H S f_i = 2 H f, \quad (373)$$

worin  $f$  die ganze Fläche des Seilecks  $I \dots V$  bezeichnet. In dieser Gleichung hat  $H$  die Dimension  $[L^2]$ , ebenso  $f, J'_x$  daher  $[L^4]$ , wie es sein muß.

Es ist sofort einleuchtend, daß das gleiche Verfahren auch unmittelbar für irgendeine andere, nicht durch  $S$  gehende Achse anwendbar ist.

b) Die zeichnerische Ermittlung des Deviationsmoments  $D_{xy}$  einer ebenen Fläche für zwei zueinander senkrecht stehende Achsen  $x$  und  $y$  mit dem beliebigen Anfangspunkt  $O$  erfolgt auf ganz analoge Weise. Man teilt die gegebene Fläche (Abb. 206a) durch Gerade parallel zu einer Achse, z. B. zu  $x$ , in die Teilflächen  $F_1, F_2 \dots F_5$ , deren Schwerpunkte 1, 2... 5 die Koordinaten  $x_1, y_1; x_2, y_2 \dots x_5, y_5$  haben mögen. Dann ist nach Gl. (359)

$$D_{xy} = S (D_{xy}^0 + F_i x_i y_i),$$

wobei  $D_{xy}^0$  das Deviationsmoment der Teilfläche  $F_i$  in bezug auf die zu  $x$  und  $y$  parallelen Schwerachsen dieser Teilfläche bezeichnet. Wenn die Flächenstreifen schmal sind, so sind diese  $D_{xy}^0$  sehr klein und können vernachlässigt werden; es ist also angenähert

$$D_{xy} = S F_i x_i y_i.$$

Mit den Flächen  $F_1 \dots F_5$  als „Kräften“ zeichnet man ein Krafteck  $0 \dots 5$  und mit dem Pol  $P$  und der Polweite  $H$  (Abb. 206b) ein Seileck  $I \dots V$ . Die Seiten dieses Seilecks mögen auf der  $x$ -Achse die Längen  $\xi_1 \dots \xi_5$  herauschneiden. Wie früher ist aus Ähnlichkeitsgründen  $F_1 : H = \xi_1 : y_1$ , und daher wird das auf die  $x$ -Achse bezogene „statische Moment“  $F_1 y_1$  von  $F_1$  zufolge der Gleichung

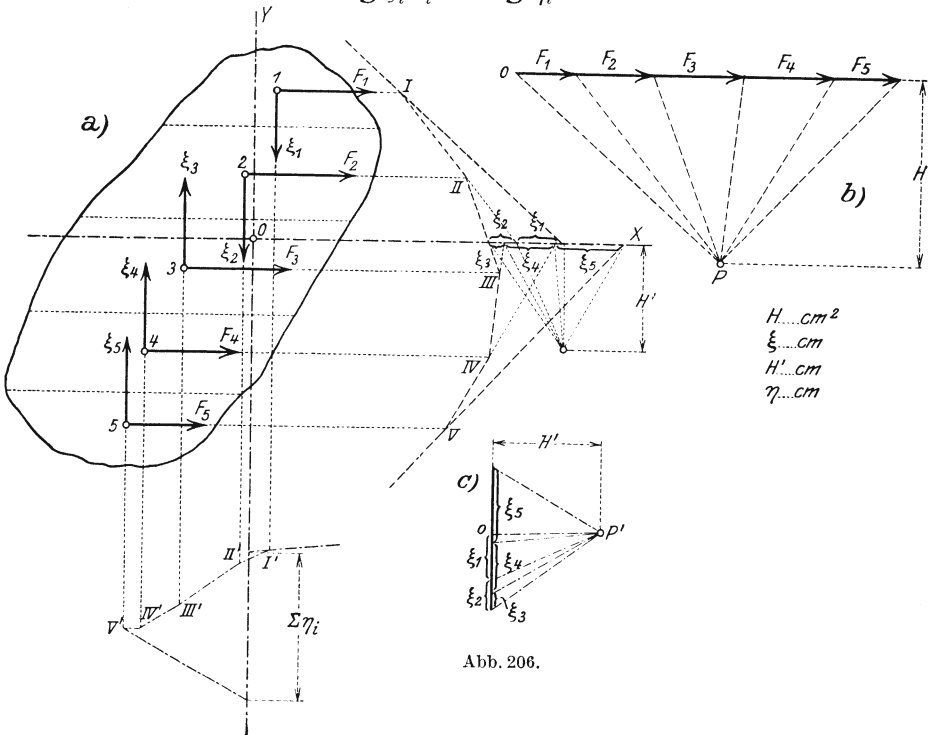
$$F_1 y_1 = H \xi_1$$

durch die Strecke  $\xi_1$  gemessen; ebenso gilt  $F_2 y_2 = H \xi_2$  usw. Für die ganze Fläche ist daher

$$D_{xy} = S F_i x_i y_i = H S \xi_i x_i.$$

Dieser Ausdruck kann zeichnerisch erhalten werden aus den auf die  $y$ -Achse bezogenen „statischen Momenten“  $S \xi_i x_i$ , der in den Teilschwerpunkten 1... 5 parallel zur  $y$ -Achse wirkend gedachten „Kräfte“  $\xi_i$ . Zeichnet man nämlich für diese Kräfte  $\xi_i$  mit einer Polweite  $H'$  ein zweites Krafteck (Abb. 206c) und ein zugehöriges Seileck  $I' \dots V'$ , so schneiden dessen äußerste Seiten auf der  $y$ -Achse eine Länge  $S \eta_i$  heraus, und es ist

$$S \xi_i x_i = H' S \eta_i.$$



$H \dots \text{cm}^2$   
 $\xi \dots \text{cm}$   
 $H' \dots \text{cm}$   
 $\eta \dots \text{cm}$

Abb. 206.

Daraus folgt schließlich

$$D_{xy} = H H' S \eta_i.$$

(374)

Darin hat  $H$  wie die  $F_i$  die Dimension  $[L^2]$ ,  $H'$  wie die  $\xi_i$  und die  $\eta_i$  die Dimension  $[L]$ ,  $D_{xy}$  also die richtige Dimension  $[L^4]$ .

c) Das Verfahren von Nehls ergibt das TM eines beliebigen Querschnittes ohne Verwendung eines Seilecks, und ist in Abb. 207 an dem Beispiel eines Schienenprofils erläutert. Das gegebene Profil wird parallel zur  $x$ -Achse, bezüglich welcher das TM zu bestimmen ist, in Teilflächen  $dF = x dy$  zerschnitten, außerdem wird in einer passenden Entfernung  $a$  zu  $x$  eine Parallele geführt. Ferner ziehe man nun zu jedem Randpunkt  $B$  die Gerade  $\overline{BC} \parallel y$ , und die Linie  $OCB'$  bis  $B'$ , dann ist  $\triangle OAB' \sim CBB'$  und daher

$$\overline{AB'} = x' = x \frac{y}{a}.$$

Das statische Moment der ganzen Fläche in bezug auf  $x$  ist daher

$$S_x = \int y dF = \int x y dy = a \int x' dy,$$

und wird also durch die von  $B'$  berandete Fläche dargestellt.

Die Wiederholung dieses Verfahrens durch Ziehen von  $\overline{B'D} \parallel y$  und der Linie  $ODB''$  liefert  $\triangle OAB'' \sim \triangle DB'B''$ , also ist

$$\overline{AB''} = x'' = x' \frac{y}{a} = x \frac{y^2}{a^2},$$

und somit ist das gesuchte TM in der Form

$$J_x = \int y^2 dF = \int y^2 x dy = a^2 \int x'' dy, \quad (375)$$

$J_x$  wird also durch die Größe der Fläche dargestellt, die von  $B''$  umrandet wird.

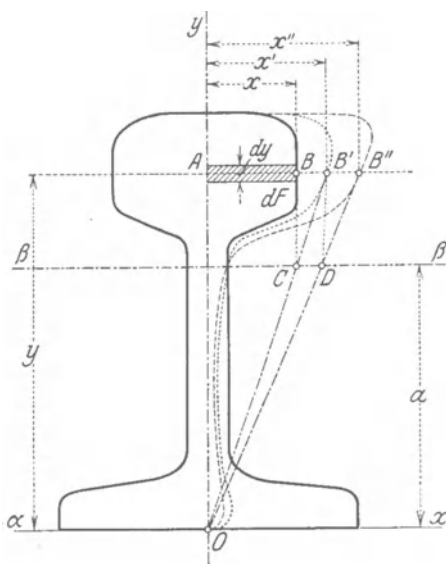


Abb. 207.

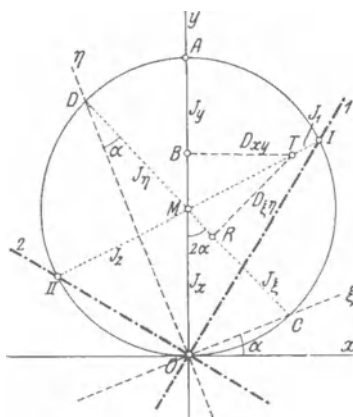


Abb. 208.

d) Trägheitskreis (von Mohr und Land). Die graphische Darstellung der TM und Deviationsmomente für alle Achsenpaare geschieht am übersichtlichsten auf folgende Weise, sobald  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $D_{xy}$  für irgendein Achsenpaar entweder rechnerisch oder zeichnerisch bestimmt sind:

Man mache in Abb. 208 in einem passenden Maßstabe  $\overline{OB} = J_x$ ,  $\overline{BA} = J_y$ ,  $\overline{BT} = D_{xy}$ , dadurch erhält man den „Trägheitspunkt“  $T$ ; über  $\overline{OA}$  als Durchmesser schlage man einen Kreis. Das Achsenpaar  $\xi, \eta$  möge diesen Kreis in  $C, D$  schneiden, und der Fußpunkt des Lotes von  $T$  auf  $\overline{CD}$  sei  $R$ . Dann ist

$$\overline{CM} = \overline{MD} = \frac{1}{2} (J_x + J_y), \quad \overline{MB} = \frac{1}{2} (J_x - J_y).$$

Durch Projektion des Linienzuges  $\overline{CMBT}$  auf  $\overline{CD}$  und senkrecht zu  $\overline{CD}$  und Vergleich mit den Gln. (360) findet man unmittelbar

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{CR} = \overline{CM} + \overline{MB} \cos 2\alpha - \overline{BT} \sin 2\alpha \\ \quad = \frac{1}{2} (J_x + J_y) + \frac{1}{2} (J_x - J_y) \cos 2\alpha - D_{xy} \sin 2\alpha = J_\xi, \\ \overline{RT} = \overline{MB} \sin 2\alpha + \overline{BT} \cos 2\alpha \\ \quad = \frac{1}{2} (J_x - J_y) \sin 2\alpha + D_{xy} \cos 2\alpha = D_{\xi\eta}. \end{array} \right.$$

Wegen der Gl.  $J_\xi + J_\eta = J_x + J_y$  ist schließlich  $\overline{RD} = J_\eta$ .

Da die Hauptträgheitsachsen durch  $D_{\xi\eta} = 0$  gekennzeichnet sind, erhält man sie, indem man die Gerade  $\overline{TM}$  zieht und deren Schnittpunkte  $I, II$  mit dem Kreise  $O$  verbindet; dann ist überdies  $\overline{TI} = J_1$ ,  $\overline{TI} = J_2$ .

An diese einfache und schöne Figur sei noch folgende Bemerkung angeschlossen: Wenn man von einem anderen Achsensystem, etwa von  $O, \xi, \eta$  ausgehend, dieselbe Konstruktion ausführen würde, würde man einen andern „Trägheitspunkt“  $T$  erhalten, d. h. die Lage von  $T$  hängt von dem Achsensystem ab, von dem man ausgeht, sie ist nicht invariant mit der gegebenen Scheibe verbunden. Gibt es eine Darstellung, die von diesem Mangel frei ist?

### III. Das Prinzip d'Alemberts.

**103. Allgemeine Aussage des Prinzips.** In der Statik wurden die mit der Zusammensetzung von Kräften in der Ebene und im Raum in Verbindung stehenden Fragen und in der Kinematik die einfachsten Hilfsmittel besprochen, die zur Kennzeichnung des Ortes und Bewegungszustandes von Körpern notwendig sind. Die Verbindung beider Gebiete ist Aufgabe der Dynamik; diese besteht darin, aus den einem beweglichen Körper eingepprägten Kräften und einem bestimmten Anfangszustande die Bewegung zu bestimmen. Die Lage jedes starren Körper ist, wie wir wissen, durch eine endliche Anzahl von ortsbestimmenden Parametern — den Koordinaten — gekennzeichnet, und es kommt zunächst darauf an, die Bewegungsgleichungen aufzustellen, welche im wesentlichen die Form haben, daß sie die zweiten Ableitungen dieser Koordinaten — die Beschleunigungen — nach der Zeit in ihrer Abhängigkeit von den eingepprägten Kräften angeben. Zur allgemeinen Lösung der Frage nach der Aufstellung der Bewegungsgleichungen dient das Prinzip d'Alemberts (1743), das in allen Fällen den Ansatz des dynamischen Problems (13) liefert, und die aus der Statik bekannten Regeln durch Hinzunahme gewisser Ergänzungskräfte zu den eingepprägten nutzbar macht. Aus diesem Prinzip werden wir sodann andere Sätze gewinnen, die für einzelne Anwendungen besondere Vorteile bieten.

Für den freien Massenpunkt hatten wir das dynamische Grundgesetz kennen gelernt, das wir jetzt in der Form schreiben

$$\boxed{\overline{K} - m \overline{b} = 0,} \quad (376)$$



wenn  $\bar{K}$  die Summe der eingepprägten Kräfte,  $\bar{b}$  die dadurch bedingte Beschleunigung ist; für den einzelnen Punkt wird daher die eingepprägte Kraft  $\bar{K}$  und die „Massenkraft“ oder „Beschleunigungskraft“  $m \bar{b}$  durch denselben Vektor dargestellt<sup>1</sup>; oder, wenn wir  $-m \bar{b}$  als „Trägheitskraft“ bezeichnen, so können wir sagen: die Summe aus der eingepprägten und der Trägheitskraft bildet eine Gleichgewichtsgruppe. Wenn der Punkt einem ausgedehnten Körper angehört und durch diesen behindert wird, der an ihm angreifenden

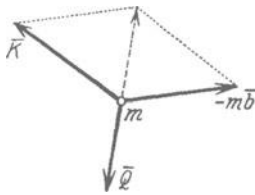


Abb. 209.

Kraft frei zu folgen, so kommt für das Aufbringen der Beschleunigungskraft  $m \bar{b}$  außer  $\bar{K}$  noch eine Kraft  $\bar{Q}$  zur Wirkung, die den Einfluß des Körperganzen auf den betrachteten Punkt  $m$  vorstellt. Demgemäß können wir für jeden Punkt des Körpers schreiben (Abb. 209)

$$\bar{K} + \bar{Q} - m \bar{b} = 0. \quad (377)$$

Wenn wir nun die so entstehenden Gleichungen, in denen das erste Glied nur vorkommt, wenn der betreffende Punkt gerade Angriffspunkt einer Kraft ist, für alle Körperpunkte addieren, so folgt

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \bar{K} + S \bar{Q} - S m \bar{b} &= 0 \\ \text{und} \quad \Sigma (\bar{r} \times \bar{K}) + S (\bar{r} \times \bar{Q}) - S m (\bar{r} \times \bar{b}) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

wenn  $\bar{r}$  den Ortsvektor von  $m$ , von irgend einem festen Anfangspunkt an gerechnet, bedeutet; dabei sind die ersten Summen über alle eingepprägten Kräfte  $\bar{K}$ , die beiden anderen über alle Punkte zu erstrecken, die zu dem Körper gehören. Durch welche Kräfte nun auch die Wirkung des Körperganzen auf jeden seiner Punkte dargestellt wird, immer treten diese inneren Kräfte, die durch den Zusammenhang des Körpers bedingt sind, paarweise auf, so daß ihre Summe und die Summe ihrer Momente für sich (was schon beim Prinzip der virtuellen Arbeiten erkannt wurde) Null sein muß. Wir können daher setzen

$$S \bar{Q} = 0, \quad S (\bar{r} \times \bar{Q}) = 0,$$

und demnach bleibt nur übrig

$$\boxed{\Sigma \bar{K} - S m \bar{b} = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma (\bar{r} \times \bar{K}) - S m (\bar{r} \times \bar{b}) = 0,} \quad (378)$$

wobei die erste Summe über alle Kräfte, die zweite über alle Massenpunkte zu erstrecken ist (ganz ähnlich sind auch die weiterhin noch auftretenden Summenzeichen zu verstehen). In Komponenten

<sup>1</sup> Diese Übereinstimmung und der Umstand, daß das dynamische Grundgesetz zunächst nur für freie Bewegungen von Punktkörpern einen Sinn hat, haben dazu geführt, den Kraftbegriff aus der Mechanik überhaupt fortzuschaffen, ein Standpunkt, der sich jedoch nicht als glücklich erwiesen hat und für die technischen Anwendungen jedenfalls nicht in Betracht kommt.

geschrieben nehmen diese Vektorgleichungen die folgende Form an

$$\begin{array}{l} X \equiv \sum X_i = S m b_x, \quad M_x \equiv \sum M_{ix} = S m (y b_z - z b_y) \\ Y \equiv \sum Y_i = S m b_y, \quad M_y \equiv \sum M_{iy} = S m (z b_x - x b_z) \\ Z \equiv \sum Z_i = S m b_z, \quad M_z \equiv \sum M_{iz} = S m (x b_y - y b_x) \end{array} \quad (379)$$

und insb. für die Bewegung eines Körpers (Scheibe) in der Ebene

$$\begin{array}{l} X \equiv \sum X_i = S m b_x, \quad Y \equiv \sum Y_i = S m b_y, \\ M \equiv \sum M_i = S m (x b_y - y b_x). \end{array} \quad (380)$$

In diesen Gleichungen liegt der wesentliche Inhalt des Prinzips von d'Alembert, das wir in folgender Form aussprechen können:

Wenn man für einen starren Körper zu der Gruppe der eingepägten Kräfte die jedem Teilchen zukommende Trägheitskraft hinzunimmt, erhält man eine Gleichgewichtsgruppe.

Die Aussage  $S\bar{Q} = 0$ , die den eigentlichen Kern des Prinzips bedeutet, ist an sich plausibel und durch Einführung entsprechender „Gerüste“, die den inneren Aufbau des Körpers darzustellen geeignet sind, bis zu einem gewissen Grade auch zu begründen. Das Prinzip stellt die strenge Gültigkeit fest — ein ähnlicher Schritt, wie er beim Prinzip der virtuellen Arbeiten vorkam — und greift damit über das vollständig Beweisbare hinaus. — Man kann auch sagen: Von der Kraft  $\bar{K}$  geht ein Teil  $-\bar{Q}$  für die Erzeugung der Beschleunigung des Teilchens  $m$  „verloren“, und das d'Alembertsche Prinzip sagt dann aus, daß diese „verlorenen Kräfte“ zusammen eine Gleichgewichtsgruppe bilden.

In dieser Form gilt das Prinzip nicht nur für den einzelnen starren Körper, sondern auch für beliebig viele starre Körper, die irgendwie durch Seile, Gelenke u. dgl. miteinander verbunden sind, — also für eine sog. Körperkette; die in den Verbindungen wirkenden inneren Kräfte sind dann für die Gesamtheit der Körper außer Betracht zu lassen. Die so entstehenden Gleichungen stellen den Schwerpunktsatz und Momentensatz dar, die später noch ausführlicher besprochen werden (Kap. VII).

Das Prinzip gilt aber auch für jeden einzelnen starren Körper der Körperkette, nur sind dann die in den Verbindungen wirkenden Kräfte zu den auf den betreffenden Einzelkörper wirkenden eingepägten Kräften hinzuzunehmen; die dadurch entstehenden Gleichungen dienen dann gerade zur Bestimmung jener inneren Verbindungskräfte in den Gelenken, Seilen u. dgl. Das Prinzip bleibt demnach auch anwendbar, wenn einzelne Punkte der Körper auf irgend welchen glatten oder rauhen Kurven geführt werden, wofern nur die Führungskräfte nach den in 33 enthaltenen Angaben hinzugenommen und bei der Bildung der Summen für die Kräfte und Momente in den vorstehenden Gln. (379) und (380) berücksichtigt werden.

Für die Punktdynamik ist die Heranziehung des d'Alembertschen Prinzips nicht unbedingt erforderlich. Seine volle Bedeutung gewinnt dieses Prinzip erst in der Dynamik der Körper von endlicher Ausdehnung, von denen hier nur die „starren“ behandelt werden (Kap. V u. f.).

Wenn die eingepägten Kräfte, wie es bei dem Auftreten des Eigengewichtes als „treibendes Agens“ der Fall ist, Gewichte  $G$  sind, so ist es auch in der technischen Dynamik vorteilhaft,  $G = mg$  zu setzen und  $m$  statt  $G$  beizubehalten, was auch in den folgenden Beispielen geschehen ist.

Beispiel 131. Für die gezwungene Bewegung eines Punktes auf einer glatten Leitkurve ist (wie in 75) die Führungskraft  $\bar{D}$  senkrecht zur Kurve anzusetzen, so daß die Gleichung folgt

$$\bar{K} + \bar{D} - m\bar{b} = 0, \tag{381}$$

für welche unmittelbar die Komponentengleichungen angeschrieben werden können, die (da  $\bar{K} = m\bar{b}_s$ ,  $\bar{D} = m\bar{b}_n$ ) mit den Gln. (240) in 75 übereinstimmen (Abb. 139)

$$K \sin \psi = m \frac{dv}{dt}, \quad K \cos \psi + D = m \frac{v^2}{\rho}. \tag{382}$$

Beispiel 132. Auflagerkraft eines Körpers in einem bewegten Aufzug. Bei mit  $b$  beschleunigter Abwärtsbewegung ist die Trägheitskraft  $mb$  nach aufwärts gerichtet, außerdem wirkt auf den Körper eingepägt sein Gewicht  $G$  nach abwärts. Daraus folgt die Gleichung

$$D + mb = G = mg \quad \text{und} \quad D = m(g - b).$$

Wenn sich der Aufzug beschleunigt nach abwärts bewegt, ist  $b > 0$ , und solange  $b < g$ , wird  $D > 0$ ; für  $b = g$  wird  $D = 0$ , und wenn  $b > g$ , wird sogar  $D < 0$ , was Loslösung von der Unterlage bedeutet, wenn der Körper nicht an dieser festgehalten wird. Für Bewegung nach aufwärts wird  $b \leq 0$ , daher stets  $D > mg$ .

Beispiel 133. Bewegung zweier durch ein Seil verbundener Punktmassen

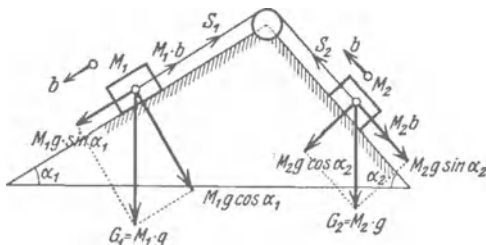


Abb. 210.

$M_1$  und  $M_2$  auf zwei unter  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  geneigten Ebenen (Bremsberg, Abb. 210). Die gesuchte Beschleunigung sei  $b$ , positiv gerechnet, wenn  $M_1$  nach abwärts geht.

Bei fehlender Reibung geben die Momente der in den Seilrichtungen wirkenden eingepägten und Trägheitskräfte um den Mittelpunkt der Rolle unmittelbar die Gleichung

$$M_1 g \sin \alpha_1 - M_1 b = M_2 g \sin \alpha_2 + M_2 b,$$

aus der für  $b$  der Ausdruck folgt

$$b = \frac{M_1 \sin \alpha_1 - M_2 \sin \alpha_2}{M_1 + M_2} g = \text{konst.} \tag{383}$$

Dabei beachte man, daß die Normalkomponenten  $M_1 g \cos \alpha_1$  und  $M_2 g \cos \alpha_2$  durch die Führungskräfte der schieben Ebenen aufgehoben werden.

Bei Vorhandensein von Reibung mit der Reibungszahl  $f$  ist zu setzen

$$M_1 g \sin \alpha_1 - M_1 b - f M_1 g \cos \alpha_1 = M_2 g \sin \alpha_2 + M_2 b + f M_2 g \cos \alpha_2,$$

woraus

$$b = \frac{M_1 \sin \alpha_1 - M_2 \sin \alpha_2 - f(M_1 \cos \alpha_1 + M_2 \cos \alpha_2)}{M_1 + M_2} g = \text{konst.} \tag{384}$$

Wenn der Zähler verschwindet, haben wir  $b = 0$ , d. h. bei vorhandener Anfangsbewegung gleichförmige Abwärtsbewegung, sonst Ruhe gegen die Unterlage.

#### IV. Schwingungen von Systemen mit einem und zwei Freiheitsgraden. Stabilität.

**104. Ansatz der Bewegungsgleichungen. Eigenschwingungen.** Bei vielen Anwendungen der Mechanik spielt die Frage nach den sog. Eigenschwingungen und nach den Schwingungszeiten und Frequenzen, die diesen zugehören, eine hervorragende Rolle. Als Eigenschwingungen bezeichnet man solche, die ohne Hinzutreten periodisch wirkender eingepprägter Kräfte in einem System bestehen können. Die in Rede stehenden Anwendungen betreffen einerseits Schwingungen um eine Gleichgewichtslage und andererseits Schwingungen um einen sog. „stationären Bewegungszustand“. Als einfaches Beispiel hierfür sei etwa das gleichförmig umlaufende Kegelpendel genannt; der gleichförmige Umlauf einer Maschine mit Regulator ist ein wichtiges Beispiel für diese Bewegungsform aus den technischen Anwendungen.

Zunächst ist die folgende Bemerkung unmittelbar einzusehen.

Damit in einem System überhaupt Schwingungen auftreten können, müssen — etwa bei Störungen aus der Gleichgewichtslage heraus — durch das System selbst und ohne weitere äußere Einwirkungen solche Kräfte ins Spiel treten, die das System wieder in die Gleichgewichtslage zurückzuziehen streben.

Im folgenden ist eine Anzahl von typischen Fällen zusammengestellt, die sich auf Systeme von einem oder zwei Freiheitsgraden beziehen; diese zeigen bereits die wesentlichen Eigentümlichkeiten, die auch bei Systemen mit beliebig vielen Freiheitsgraden auftreten. Bezüglich der Schwingungen mit einem Freiheitsgrad sei auch auf die Abschnitte 67 und 68 verwiesen.

Die Frage nach der Beschaffenheit der in einem dynamischen System möglichen Schwingungen ist aufs engste verknüpft mit der Frage nach der Stabilität eines Gleichgewichts- oder Bewegungszustandes, worüber weiter unten das Wichtigste gesagt werden wird.

Um die Schwingungszeiten in einem System von Punkten (oder Körpern) zu ermitteln, werden die Bewegungsgleichungen für kleine Ausweichungen aus der Gleichgewichtslage (oder aus einem stationären Bewegungszustande) angesetzt und Lösungen von der Form von cos- oder sin-Schwingungen gesucht; und zwar sollen diese Lösungen so beschaffen sein, daß sie für alle Koordinaten dieselben Funktionen der Zeit enthalten.

Für einen Freiheitsgrad lautet die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -ax \quad \text{oder} \quad m\ddot{x} + ax = 0,$$

aus der sich die Schwingungsdauer  $T$  — ganz ähnlich wie z. B. beim einfachen Pendel — durch  $T = 2\pi/\sqrt{m/a}$  berechnen läßt.

Für Systeme mit zwei Freiheitsgraden ( $x, y$ ) nehmen wir die Bewegungsgleichungen für kleine Abweichungen von der Gleichgewichtslage in der besonderen Form an

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -ax - by, \\ m'\ddot{y} &= -bx - cy, \end{aligned} \right\} \quad (385)$$

die dadurch gekennzeichnet ist, daß der Koeffizient von  $y$  in der ersten mit dem von  $x$  in der zweiten Gleichung übereinstimmt, und  $a$  und  $c$ , sowie auch  $a c - b^2$  positiv sein sollen. Dadurch, daß in der Gleichung für  $x$  auch das  $y$  und in der für  $y$  auch das  $x$  vorkommt, sind die beiden Freiheitsgrade nicht voneinander unabhängig, sondern miteinander gekoppelt.

Die Gln. (385) lassen sich auch in der Form schreiben

$$m \ddot{x} = - \frac{\partial U}{\partial x}, \quad m' \ddot{y} = - \frac{\partial U}{\partial y},$$

wenn

$$U = \frac{1}{2} (a x^2 + 2 b x y + c y^2)$$

die potentielle Energie des Systems bedeutet. Die Bedingung  $a c - b^2 > 0$  besagt dann, daß die Funktion  $U(x, y)$  für reelle  $x, y$  nur positiver Werte fähig ist, und nur für  $x = 0, y = 0$  Null werden kann. Eine solche Funktion oder „Form“ nennt man dann positiv definit.

Um die in diesem System möglichen Schwingungszeiten zu ermitteln, suchen wir solche Lösungen dieser Gleichungen, bei denen alle Koordinaten mit derselben Periode und Phase veränderlich sind, d. h. wir suchen diesen Gleichungen zu genügen durch einen Ansatz von der Form

$$x = A \cos(\lambda t + \alpha), \quad y = B \cos(\lambda t + \alpha), \quad (386)$$

gehen mit diesen in die Bewegungsgleichungen hinein und erhalten nach Weglassung des gemeinsamen Faktors  $\cos(\lambda t + \alpha)$  die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} (-m \lambda^2 + a) A + b B &= 0, \\ b A + (-m' \lambda^2 + c) B &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (387)$$

Dieselben Gleichungen würden sich auch ergeben haben, wenn man im Ansatz die Funktion  $\sin$  statt des  $\cos$  genommen hätte.

Damit diese Gleichungen von Null verschiedene Lösungen  $A, B$  haben, ist notwendig, daß die Determinante ihrer Koeffizienten verschwindet; diese bezeichnen wir (nach Division durch  $m m'$ ) mit  $\Delta(\lambda^2)$  und erhalten

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda^2) &\equiv \left(\lambda^2 - \frac{a}{m}\right) \left(\lambda^2 - \frac{c}{m'}\right) - \frac{b^2}{m m'} \\ &= \lambda^4 - \left(\frac{a}{m} + \frac{c}{m'}\right) \lambda^2 + \frac{a c - b^2}{m m'} = 0. \end{aligned} \quad (388)$$

Dieselbe Gleichung ergibt sich durch Gleichsetzung der Verhältnisse  $A/B$ , die aus den beiden Gleichungen (387) gerechnet werden können.

Die Wurzeln dieser sog. charakteristischen oder der Säkulargleichung sind die Eigenschwingungszahlen, die in dem gegebenen System möglich sind. Und zwar findet man i. a. zwei verschiedene Wurzeln  $\lambda_1^2$  und  $\lambda_2^2$  mit den zugehörigen Schwingungszeiten  $T_1 = 2\pi/\lambda_1$  und  $T_2 = 2\pi/\lambda_2$ . Wenn man beachtet, daß für

$$\lambda = \frac{a}{m} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{c}{m'}, \quad \Delta(\lambda^2) = - \frac{b^2}{m m'},$$

und für

$$\lambda = 0 \quad \text{und} \quad \lambda = \left( \frac{a}{m} + \frac{c}{m'} \right), \quad \Delta(\lambda^2) = \frac{ac - b^2}{m m'} (> 0!)$$

ist, so findet man für  $\Delta(\lambda^2)$  in Abhängigkeit von  $\lambda^2$  die in Abb. 211 eingezeichnete Parabel, deren Schnittpunkte mit der  $\lambda^2$ -Achse die Quadrate der gesuchten Eigenschwingungszahlen  $\lambda_1^2$  und  $\lambda_2^2$  sind.

Aus der Abbildung ersieht man, daß die Wurzeln  $\lambda_1^2$  und  $\lambda_2^2$  beide positiv sind, und daß die Bedingung  $ac - b^2 > 0$  hierfür wesentlich ist. Man sieht auch, daß die kleinere Wurzel  $\lambda_1^2$  kleiner als  $a/m$ , die größere  $\lambda_2^2$  größer als  $c/m'$  ist, wobei  $a/m$  und  $c/m'$  die Quadrate der Kreisfrequenzen der nicht gekoppelten Schwingungen sind.

Da die Bewegungsgleichungen linear sind, so können die beiden, den Wurzeln  $\lambda_1^2$  und  $\lambda_2^2$  entsprechenden Lösungen überlagert werden, so daß wir in den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x &= A_1 \cos(\lambda_1 t + \alpha_1) + A_2 \cos(\lambda_2 t + \alpha_2) \\ y &= B_1 \cos(\lambda_1 t + \alpha_1) + B_2 \cos(\lambda_2 t + \alpha_2) \end{aligned} \right\} \quad (389)$$

die allgemeine Lösung des Problems vor uns haben. Dabei ist jedoch zu beachten, daß die Konstanten  $A, B$  nicht voneinander unabhängig, sondern durch die Gln. (387) miteinander verbunden sind, und zwar ist

$$\frac{A_1}{B_1} = -\frac{b}{a - m\lambda_1^2}, \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{b}{m\lambda_2^2 - a}. \quad (390)$$

Bei negativen Werten von  $b$  — dieser Fall wird in den unten folgenden Beispielen auftreten — sind daher  $B_1$  und  $A_1$  von gleichem,  $B_2$  und  $A_2$  von verschiedenem Vorzeichen; dies äußert sich dadurch, daß die Schwingungsform für den kleineren Wert  $\lambda_1^2$  knotenpunktsfrei, die für den größeren Wert  $\lambda_2^2$  mit einem Knotenpunkt verläuft — ein Sonderfall eines allgemeinen Theorems, das auch bei allgemeineren Schwingungsvorgängen in entsprechender Weise wiederkehrt.

Der hier entwickelte Vorgang zur Ermittlung der Eigenschwingungszahlen bleibt auch für Systeme mit mehr als zwei — aber mit einer

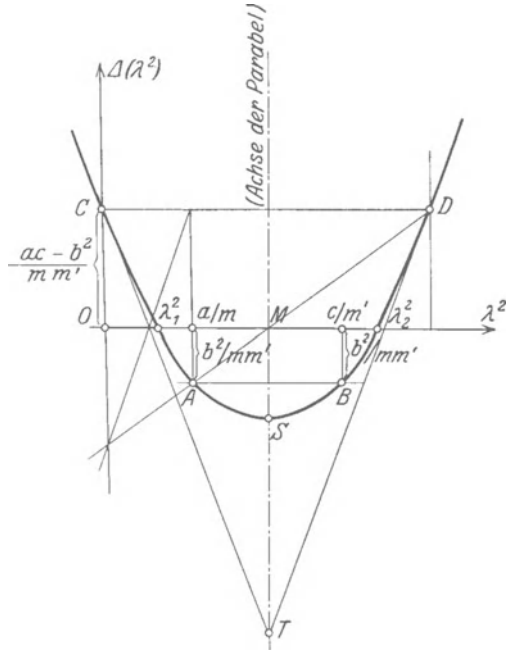


Abb. 211.



endlichen Anzahl — Freiheitsgraden unverändert in Geltung. Für ein System mit  $n$  Freiheitsgraden wird die Determinantengleichung  $\Delta(\lambda^2)$  von der Ordnung  $2n$  und ihre Wurzeln  $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$  stellen die Quadrate der Eigenschwingungszahlen des Systems dar.

**105. Anwendungen.** Beispiel 134. Ein Massenpunkt  $m$  ist an einem masselosen Draht befestigt, der zwischen zwei Punkten mit einer Spannkraft  $S$  aus-  
gespannt ist;  $l, l'$  seien die Entfernungen von den beiden Enden. Man bestimme die Eigenschwingungsdauer  $T$  (Abb. 212).

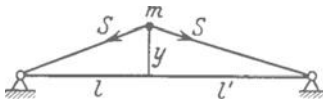


Abb. 212.

Wird der Punkt um eine kleine Strecke  $y$  aus seiner Ruhelage herausgebracht, so wird dadurch (in erster Annäherung!)  $S$  nicht geändert und die Bewegungsgleichung lautet

$$m \ddot{y} = -S \frac{y}{l} - S \frac{y}{l'} = -S \frac{l+l'}{ll'} y;$$

daher ist

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{S} \frac{ll'}{l+l'}}. \tag{391}$$

**Beispiel 135.** Eine Masse  $m$  ist in der Mitte eines frei aufliegenden Trägers von der Länge  $l$  befestigt, dessen Masse außer Betracht gelassen wird. Wie groß ist seine Eigenschwingungsdauer  $T$ ? (Abb. 213.)

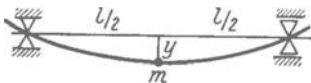


Abb. 213.

Wird  $m$  um die kleine Strecke  $y$  aus seiner Ruhelage herausgebracht, so hängt diese Durchbiegung mit der Kraft, die sie hervorbringt, durch die Gleichung zusammen ( $E$  = Elastizitätsmaß,  $J$  = TM des Trägerquerschnitts in bezug

auf eine Querachse durch dessen Schwerpunkt)

$$y = \frac{K}{EJ} \frac{l^3}{48} \quad \text{und daraus ist} \quad K = \frac{48 EJ}{l^3} y.$$

Auf  $m$  wirkt daher in der durchgebogenen Stellung diese Kraft (die „Federkraft“), und zwar in die Gleichgewichtslage zurückführend; daher lautet die Bewegungsgleichung

$$m \ddot{y} = -\frac{48 EJ}{l^3} y,$$

und somit ist die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m l^3}{48 EJ}}. \tag{392}$$

Für andere Einspannungsbedingungen ändert sich nur der unter der Wurzel auftretende Zahlenfaktor.

**Beispiel 136.** Drehschwingungen eines auf einen Rundstab von der Länge  $l$  aufgesetzten Körpers. Das TM des Körpers in bezug auf die Drehachse sei  $M k^2$ , das polare (geometrische) TM des Drahtquerschnitts  $J_p'$  und die Schubzahl  $G$  (Abb. 214). Dann ist bei einer Verdrehung  $\varphi$  das zurückführende Drehmoment  $-G J_p' \varphi/l$  und die Bewegungsgleichung lautet

$$M k^2 \ddot{\varphi} = -\frac{G J_p'}{l} \varphi;$$

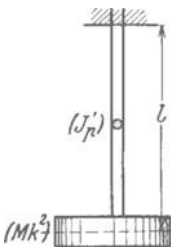


Abb. 214.

daher ist die gesuchte Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M k^2 l}{G J_p'}}. \tag{393}$$

(Die in den Beispielen 135 und 136 verwendeten Begriffe werden in der Elastizitätslehre erklärt.)



Beispiel 137. Eigenschwingungen zweier gleicher Massen  $m$ ,  $m$  auf einem mit  $S$  gespannten Drahte nach Abb. 215a. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x} &= -S \frac{x}{l} + S \frac{y-x}{2l'} = -S \left( \frac{1}{l} + \frac{1}{2l'} \right) x + \frac{S}{2l'} y, \\ m \ddot{y} &= -S \frac{y}{l} - S \frac{y-x}{2l'} = \frac{S}{2l'} x - S \left( \frac{1}{l} + \frac{1}{2l'} \right) y, \end{aligned} \right\}$$

die Determinantengleichung wird in diesem Falle

$$\Delta(\lambda^2) \equiv \lambda^4 - 2 \frac{S}{m} \left( \frac{1}{l} + \frac{1}{2l'} \right) \lambda^2 + \frac{S^2}{m^2} \left( \frac{1}{l} + \frac{1}{2l'} \right)^2 - \frac{S^2}{4m^2 l'^2} = 0.$$

Diese Gleichung ist ein vollständiges Quadrat; es ist daher

$$\lambda^2 = \frac{S}{m} \frac{l + 2l'}{2ll'} \pm \frac{S}{2ml'}.$$

und die Wurzeln sind

$$\lambda_1^2 = \frac{S}{ml}, \quad \lambda_2^2 = \frac{S}{m} \frac{l+l'}{ll'}.$$

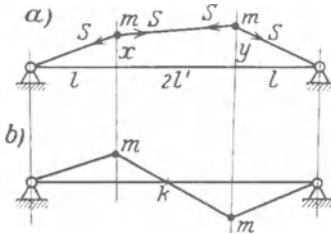


Abb. 215.

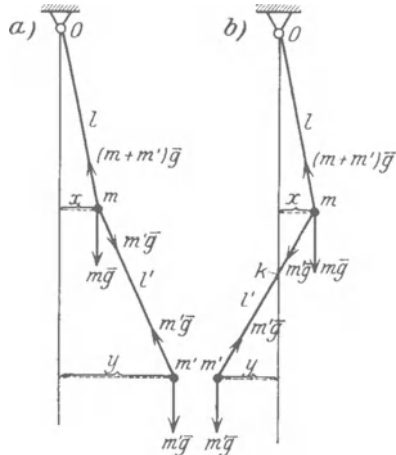


Abb. 216 a.

Abb. 216 b.

In diesem Falle zerfällt die Parabel  $\Delta(\lambda^2) = 0$  in ein Geradenpaar. Die beiden Formen der Eigenschwingungen sind durch Abb. 215a und b dargestellt: die erste ist knotenpunktsfrei, die zweite besitzt einen Knotenpunkt  $k$ .

Beispiel 138. Das Doppelpendel. Von einem festen Punkte  $O$  hängt an einem Faden von der Länge  $l$  eine Masse  $m$  und an dieser an einem Faden von der Länge  $l'$  eine zweite Masse  $m'$ . Man ermittle die Eigenschwingungen unter der Voraussetzung, daß die ganze Bewegung in einer lotrechten Ebene verläuft.

Da die Fadenspannung im unteren Faden sehr nahe gleich  $mg$  und im oberen  $(m+m')g$  gesetzt werden kann, so lauten nach Abb. 216a die Gleichungen für kleine Bewegungen einfach

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x} &= -(m+m')g \frac{x}{l} + m'g \frac{y-x}{l'} = - \left[ (m+m') \frac{g}{l} + m' \frac{g}{l'} \right] x + \frac{m'g}{l'} y, \\ m' \ddot{y} &= -m'g \frac{y-x}{l'} = \frac{m'g}{l'} x - \frac{m'g}{l'} y. \end{aligned} \right\}$$

Die Determinantengleichung  $\Delta(\lambda^2) = 0$  nimmt daher, wenn  $m'/m = p$  gesetzt wird, die Form an

$$\Delta(\lambda^2) \equiv \begin{vmatrix} \lambda^2 - \frac{(1+p)g}{l} - \frac{pg}{l'}, & \frac{pg}{l'} \\ \frac{g}{l'}, & \lambda^2 - \frac{g}{l'} \end{vmatrix} = 0,$$

und ausgeschrieben

$$\Delta(\lambda^2) \equiv \lambda^4 - (1+p)g\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l'}\right)\lambda^2 + (1+p)\frac{g^2}{ll'} = 0.$$

Die beiden möglichen Eigenschwingungsformen sind in Abb. 216a und b dargestellt; aus diesen setzen sich alle möglichen Schwingungen durch lineare Über-einanderlagerung zusammen.

**106. Stabilität eines Gleichgewichtszustandes.** Durch die eben erklärte Methode zur Ermittlung der „kleinen Schwingungen“ eines Systems ist, wie schon erwähnt, ein Verfahren gewonnen, das dazu dienen kann, einen Gleichgewichts- oder Bewegungszustand auf seine Stabilität hin zu untersuchen. Dabei verstehen wir unter Stabilität das folgende Verhalten: Wir denken uns die Gleichgewichtslage ermittelt und das System in eine zu dieser benachbarte Lage gebracht, die im Einklang mit den geometrischen Bedingungen der Aufgabe gewählt wird. In dieser Nachbarlage wird das System frei gelassen und die darauf folgende Bewegung bestimmt, die es unter der Einwirkung der in der Nachbarlage wirkenden Kräfte auszuführen beginnt. Wenn nun das System durch diese Kräfte entweder ohne Schwingungen in seine Gleichgewichtslage zurückgebracht wird, oder wenn es weiterhin Schwingungen mit abnehmender oder wenigstens nicht zunehmender Amplitude ausführt, so nennt man die Gleichgewichtslage stabil. Beispiel: Schwerer Massenpunkt im tiefsten Punkt einer Kugelschale. — Wird dagegen das System durch die in der Nachbarlage auftretenden Kräfte entweder noch weiter aus seiner Gleichgewichtslage entfernt, oder wird es zwar in diese zurückgebracht, führt aber weiterhin Schwingungen mit zunehmender Amplitude aus, so nennt man die Gleichgewichtslage instabil. Beispiel: Schwerer Massenpunkt im höchsten Punkt einer Kugel. — Im Grenzfall kann es vorkommen, daß in der Nachbarlage gar keine Tendenz vorhanden ist, das System nach der einen oder anderen Seite zu bewegen, so daß also die Summe der einwirkenden Kräfte auch in der Nachbarlage Null ist; in diesem Falle bezeichnet man die Gleichgewichtslage als indifferent. Beispiel: Schwerer Massenpunkt auf einer wagrechten Ebene.

Halten wir diese Definition mit den Entwicklungen der letzten Abschnitte zusammen, so erkennen wir unmittelbar, daß die Kriterien, die das Auftreten von Schwingungen sicherstellen, von selbst auch für die Stabilität entscheidend sind. Es kommt alles auf die Beschaffenheit der potentiellen Energie  $U$  in der Nähe der Gleichgewichtstellung an. Diese ist für Systeme mit einem Freiheitsgrad von der Form

$$U = \frac{1}{2} a x^2$$

und Stabilität in der Lage  $x = 0$  ist demnach vorhanden, sobald

$$a \equiv \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{x=0} > 0. \quad (394)$$

Für Systeme mit zwei Freiheitsgraden ist

$$U = \frac{1}{2} (a x + 2 b x y + c y)$$

und die Bedingungen für Stabilität lauten

$$a > 0, \quad ac - b^2 > 0 \quad (395)$$

Offenbar ist mit diesen beiden auch von selbst die früher genannte dritte Bedingung  $c > 0$  erfüllt.

Treten an die Stelle der Zeichen  $>$  die Zeichen  $<$ , so hat man Instabilität, sind Gleichheitszeichen in Geltung, so liegt indifferentes Gleichgewicht vor.

Stabilität ist also vorhanden, sobald die potentielle Energie  $U$  in der Gleichgewichtslage ein wirkliches Minimum hat. Daß die angegebenen Gln. (395) tatsächlich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Minimum von  $U$  sind, erkennt man auch durch Betrachtung der folgenden Identität

$$U = \frac{1}{2} (ax^2 + 2bxy + cy^2) \equiv \frac{1}{2a} [(ax + by)^2 + (ac - b^2)y^2]$$

Damit dieser Ausdruck für alle  $x, y$  in der Umgebung der Gleichgewichtslage positiv ausfällt, ist notwendig und hinreichend, daß  $a > 0$ , was durch Betrachtung der Stellen  $y = 0$  hervorgeht, und  $ac - b^2 > 0$ , was durch Betrachtung der Punkte auf der Geraden  $ax + by = 0$ , also  $y/x = -a/b$  folgt.

Ähnliche Bedingungen gelten auch für Systeme mit mehr als zwei (aber endlich vielen!) Freiheitsgraden, auf deren Ableitung hier aber nicht eingegangen werden kann.

Beispiel 139. Stabilität des Gleichgewichts zweier Gewichte  $P, Q$ , von denen nach Abb. 217  $Q$  am Ende eines Fadens bei  $D$  und  $P$  an einem Ringe bei  $C$  befestigt ist.

Als Koordinate wählen wir den Winkel  $\alpha$ ; dann ist die potentielle Energie, da die Höhenlage von  $P$  durch die Strecke  $\overline{CM} = c \operatorname{ctg} \alpha$  und die von  $Q$  durch die Summe  $\overline{AC} + \overline{CB} = 2c/\sin \alpha$  gegeben ist,

$$U = -Pc \operatorname{ctg} \alpha + 2Q \frac{c}{\sin \alpha}.$$

Daher gibt die Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = Pc \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 2Q \frac{c \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = 0$$

oder  $P = 2Q \cos \alpha$

die Gleichgewichtslage; für diese ist sodann

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = -Pc \frac{2 \cos \alpha}{\sin^3 \alpha} + 2Qc \frac{\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{\sin^3 \alpha} = \frac{2Qc}{\sin \alpha} > 0.$$

Es ist daher Stabilität vorhanden.

Beispiel 140. Ein Stab  $\overline{AB} = l$  stützt sich nach Abb. 118 bei  $A$  an eine glatte Wand, und ist bei  $B$  mit  $G$  belastet. Ist die Gleichgewichtslage stabil oder instabil?

Nimmt man  $\varphi$  als Koordinate, dann ist die potentielle Energie von  $G$  durch  $U = Gy$  gegeben, wobei  $y$  die Höhe von  $B$  über der Wagrechten durch  $C$  bedeutet. Durch  $\varphi$  ausgedrückt erhält man

$$U = Gy = G(l \cos \varphi - a \operatorname{ctg} \varphi).$$

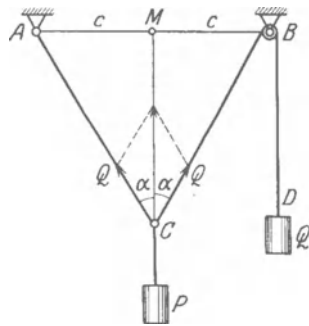


Abb. 217.

Die Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = G \left( -l \sin \varphi + \frac{a}{\sin^2 \varphi} \right) = 0 \quad \text{oder} \quad \sin \varphi = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}$$

gibt die Gleichgewichtslage, und für diese folgt

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = G \left( -l \cos \varphi - \frac{2a \cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \right) = -3Gl \cos \varphi < 0.$$

Die Gleichgewichtslage ist daher instabil. In der Tat entspricht diese einem höchsten Punkte der Bahn von  $B$ , bei einer kleinen Störung wird daher  $G$  noch weiter aus seiner Gleichgewichtslage entfernt — das Kennzeichen der Instabilität.

**107. Stabilität eines stationären Bewegungszustandes.** Eine stationäre Bewegung ist durch das Auftreten des folgenden Sachverhaltes gekennzeichnet.

Wir betrachten die Bewegung irgend eines mechanischen Systems von wenigstens zwei Freiheitsgraden unter dem Einfluß konservativer Kräfte und berechnen die gesamte Energie, also den Ausdruck

$$T + U.$$

In gewissen Fällen kommt es vor, daß in  $T$  nicht alle Koordinaten tatsächlich vorkommen, sondern einige von diesen nur durch ihre Ableitungen nach der Zeit (Geschwindigkeiten) in Erscheinung treten. In diesen Fällen kann man zeigen, daß immer je ein Integral der Bewegungsgleichungen angegeben werden kann, das jeder solchen fehlenden Koordinate entspricht. Ein wichtiges Beispiel hierfür ist uns schon begegnet: bei der Zentralbewegung. Da traten von den Koordinaten  $r, \varphi$  wohl das  $r$ , nicht aber das  $\varphi$  selbst auf. Die Folge davon ist das Auftreten des sog. Flächenintegrals  $r^2 \dot{\varphi} = C$ , das die Konstanz des Momentes der Bewegungsgröße in bezug auf das Anziehungszentrum zum Ausdruck bringt. Die dieser Koordinate  $\varphi$  entsprechende Geschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  kann dann — wie dies auch in 73 gesehen ist — mit Hilfe dieses Flächenintegrals herausgeschafft werden, so daß von den Geschwindigkeiten nur  $\dot{r}$  zurückbleibt. Die Energie kann dann so geschrieben werden

$$T + U = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right) + U.$$

Eine solche Koordinate wie  $\varphi$  in dem angegebenen Beispiel, die also selbst in  $T$  nicht vorkommt, bezeichnet man als ignorable oder ausscheidbar.

Stationäre Bewegungen sind nun solche, bei denen ausscheidbare Koordinaten vorkommen und bei denen die Geschwindigkeiten der nicht-ausscheidbaren (oder nicht-ignorable) Koordinaten verschwinden. Was dann von  $T$  übrig bleibt, hängt nur von den Koordinaten selbst ab und hat die Beschaffenheit einer potentiellen Energie. Dieser Teil wird mit der von den eingepägten Kräften herrührenden potentiellen Energie  $U$  zu einer „modifizierten potentiellen Energie“  $U^*$  zusammengenommen und diese Summe für die stationäre Bewegung geradeso behandelt wie

früher  $U$ , die für die Frage der Stabilität einer Gleichgewichtslage maßgebende potentielle Energie.

Durch die Form von  $U^*$  ist übrigens — sofern die Bedingungen des Minimums erfüllt sind und tatsächlich Schwingungen entstehen — auch der Wert der zugehörigen Schwingungsperioden gegeben.

Einige einfache Beispiele werden diesen Vorgang zu verdeutlichen vermögen.

Beispiel 141. Stabilität der Kreisbewegung unter dem Einfluß einer anziehenden Zentralkraft von der Form  $\gamma r^n$ .

Dieser Kraft entspricht die potentielle Energie  $U = \frac{\gamma r^{n+1}}{n+1}$ , und daher ist die Gesamtenergie

$$T + U = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \gamma \frac{r^{n+1}}{n+1}.$$

Die Koordinate  $\varphi$  ist ausscheidbar, ihr entspricht das Flächenintegral  $r^2 \dot{\varphi} = C$ . Für die stationäre Bewegung ist  $\dot{r} = 0$ , und wir erhalten als modifizierte potentielle Energie

$$U^* = \frac{m C^2}{2} \frac{1}{r^2} + \gamma \frac{r^{n+1}}{n+1}.$$

Nun setzt man

$$\frac{\partial U^*}{\partial r} = -\frac{m C^2}{r^3} + \gamma r^n = 0$$

und erhält dadurch die „Gleichgewichtslage“, d. i. den Wert von  $r$  für die stationäre Bewegung. Und weiter folgt mit Berücksichtigung dieser Gleichung

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial r^2} = \frac{3 m C^2}{r^4} + \gamma n r^{n-1} = \gamma (n+3) r^{n-1}.$$

Stabilität ist daher vorhanden, sobald

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial r^2} > 0, \text{ d. h. für } n+3 > 0 \text{ oder } n > -3.$$

Beispiel 142. Stabilität des Kegelpendels. Sei  $l$  die Pendellänge,  $\vartheta$  der Winkel gegen die Lotrechte,  $\varphi$  der Winkel der Pendelebene gegen eine feste lotrechte Ebene (Azimuth) dann ist die Energie

$$T + U = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - m g l \cos \vartheta.$$

Hierin ist wieder  $\varphi$  eine ausscheidbare Koordinate; ihr entspricht das Integral

$$m l^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = C,$$

das besagt, daß das Moment der Bewegungsgröße des Massenpunktes  $m$  um die Lotrechte konstant ist, da dieses Moment durch die eingepprägten Kräfte nicht verändert wird. Wird  $\dot{\varphi}$  mit Hilfe dieses Integrals ausgeschieden und die der nicht-ausscheidbaren Koordinate  $\vartheta$  entsprechende Geschwindigkeit  $\dot{\vartheta} = 0$  gesetzt, so erhält man die modifizierte potentielle Energie  $U^*$  in der Form

$$U^* = \frac{C^2}{2 m l^2} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} - m g l \cos \vartheta.$$

Die Ableitung von  $U^*$  nach  $\vartheta$  gibt die Gleichung

$$\frac{\partial U^*}{\partial \vartheta} = -\frac{C^2}{m l^2} \frac{\cos \vartheta}{\sin^3 \vartheta} + m g l \sin \vartheta,$$

aus der sich der Winkel  $\vartheta$  für die Gleichgewichtslage  $\vartheta = \alpha$  des Pendels berechnen

läßt; und zwar ist, wenn die zugehörige Umlaufgeschwindigkeit  $\dot{\varphi} = \omega_0$  gesetzt wird,

$$\frac{C^2}{m l^2} = \frac{m g l \sin^4 \alpha}{\cos \alpha}$$

und daraus

$$\cos \alpha = g/l\omega_0^2 \quad (\text{und} \quad \sin \alpha = 0)$$

wie in 76. Dabei ist in der Gleichung für  $C \sin \vartheta = \alpha$ ,  $\dot{\varphi} = \omega_0$  gesetzt. Geht man mit diesem Wert  $\alpha$  von  $\vartheta$  in die Gleichung für die zweite Ableitung nach  $\vartheta$ , so erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial \vartheta^2} = \frac{C^2}{m l^2} \left[ \frac{\sin \vartheta}{\sin^3 \vartheta} + \frac{3 \cos^2 \vartheta}{\sin^4 \vartheta} \right] + m g l \cos \vartheta = m g l \frac{1 + 3 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} > 0;$$

daher ist die stationäre Bewegung des Pendels um die Lotrechte stabil. Die Gleichgewichtslagen  $\alpha = 0$  und  $\alpha = \pi$  (entsprechend  $\sin \alpha = 0$ ) müssen besonders untersucht werden.

Beispiel 143. Schwerer Punkt auf einer Kegelfläche mit lot-rechter Achse, der einen wagrechten Kreis mit gleichförmiger Geschwindigkeit beschreibt (Abb. 218).

Sei  $\alpha$  der halbe Öffnungswinkel und  $s$  die Entfernung von der Spitze  $O$ , so ist die Energie

$$T + U = \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + s^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2) + m g s \cos \alpha.$$

Der Flächensatz liefert das Integral

$$s^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi} = C.$$

Setzt man dann  $\dot{s} = 0$ , so erhält man die modifizierte potentielle Energie

$$U^* = \frac{1}{2} \frac{m C^2}{s^2 \sin^2 \alpha} + m g s \cos \alpha.$$

Die erste Ableitung

$$\frac{\partial U^*}{\partial s} = -\frac{m C^2}{\sin^2 \alpha} \frac{1}{s^3} + m g \cos \alpha = 0$$

gibt für die Gleichgewichtslage die Bedingung

$$a \omega^2 = g \operatorname{ctg} \alpha,$$

wobei  $a = s \sin \alpha$  ist, und die zweite Ableitung liefert

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial s^2} = \frac{m C^2}{\sin^2 \alpha} \frac{3}{s^4} = 3 m \omega^2 \sin^2 \alpha > 0.$$

Die Bewegung ist daher stabil.

## V. Dynamik der ebenen Bewegung des Körpers.

108. **Bewegungsgleichungen.** Eine freibewegliche Scheibe in der Ebene besitzt drei Freiheitsgrade, d. h. ihre Lage wird durch drei Koordinaten festgelegt; als solche Koordinaten nehmen wir (aus alsbald hervortretenden Gründen) die Koordinaten  $\xi, \eta$  ihres Schwerpunktes  $S$  und den Winkel  $\varphi$  einer auf der Scheibe festen, etwa durch  $S$  gehenden Geraden (z. B. der  $\xi$ -Achse) gegen eine in der Bezugsebene feste Gerade, etwa  $x$ .

Da die Koordinaten  $\xi, \eta$  des Schwerpunktes  $S$  einer Scheibe mit der Masse  $M$  durch die Gleichungen bestimmt sind

$$M \xi = S m x, \quad M \eta = S m y, \tag{396}$$

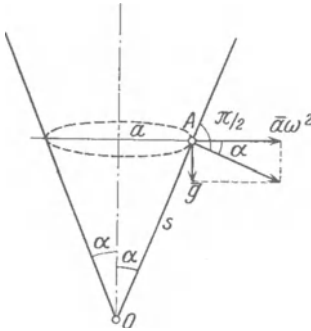


Abb. 218.

so sind die zweiten Ableitungen dieser Koordinaten durch Gleichungen von derselben Art miteinander verknüpft

$$M \ddot{\xi} = \sum m \ddot{x}, \quad M \ddot{\eta} = \sum m \ddot{y},$$

Die Ausdrücke rechts stimmen aber gerade mit den in den beiden ersten Gln. (380) vorkommenden überein; wir erhalten daher zunächst die Gleichungen

$$M \ddot{\xi} = X = \sum X_i, \quad M \ddot{\eta} = Y = \sum Y_i, \quad (397)$$

und diese besagen, daß sich der Schwerpunkt  $S$  gerade so bewegt, wie eine Punktmasse  $M$ , an der alle auf die Scheibe wirkenden Kräfte angreifen. Dies ist der Satz von der Bewegung des Schwerpunktes, die sich mithin von der übrigen Bewegung der Scheibe vollständig abtrennen läßt. Dieser Satz gilt für beliebige ebene und räumliche Systeme.

Auch die in der letzten Gl. (380) auftretende Summe läßt sich für die Scheibe allgemein ausführen und in einfacher Weise ausdrücken. Hierzu benützen wir die Darstellung der Beschleunigung  $\bar{b}_A$  eines Scheibenteilchens  $A$  (mit der Masse  $m$ ) als Summe aus der Beschleunigung  $\bar{b}_S$  ( $\ddot{\xi}, \ddot{\eta}$ ) von  $S$  und der relativen Beschleunigung  $\bar{b}_{SA}$  von  $A$  gegen  $S$ , die schon in 79 und 80 benützt wurde. Für die Komponenten von  $b_A$  nach den Achsen  $S\xi$  und  $S\eta$  gelten die Gln. (272), in denen  $b_{0\xi} \equiv b_{S\xi} = \ddot{\xi}$ ,  $b_{0\eta} \equiv b_{S\eta} = \ddot{\eta}$  und statt  $\xi, \eta$  die „relativen Koordinaten“  $x', y'$  des Scheibenpunktes  $A$  in bezug auf ein mit der Scheibe verbundenes Achsensystem  $(x', y')$  durch  $S$  einzusetzen sind; sie lauten somit (in der jetzt verwendeten Bezeichnungsweise)

$$\begin{cases} b_{Ax'} = \ddot{\xi} - x' \omega^2 - y' \dot{\omega}, \\ b_{Ay'} = \ddot{\eta} - y' \omega^2 + x' \dot{\omega}. \end{cases}$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit  $m$  und summiert über alle Massenteilchen  $m$  der Scheibe, wie es die beiden ersten Gln. (380) verlangen, so erhält man, da als Bezugspunkt  $S$  der Schwerpunkt genommen wurde, für den  $\sum m x' = 0$ ,  $\sum m y' = 0$  ist und mit  $\sum m = M$  unmittelbar die Gln. (397) wieder.

Ferner liefert die Bildung der Momente der Beschleunigungskräfte um  $S$ , die wir nach Gl. (380) der Summe der Momente  $M$  der eingepprägten Kräfte um  $S$  gleichzusetzen haben, wieder wegen  $\sum m x' = 0$ ,  $\sum m y' = 0$ ,

$$\begin{aligned} M_s &= \sum m [x' (\ddot{\eta} - y' \omega^2 + x' \dot{\omega}) - y' (\ddot{\xi} - x' \omega^2 - y' \dot{\omega})] \\ &= \dot{\omega} \sum m (x'^2 + y'^2) \end{aligned}$$

und da  $\sum m (x'^2 + y'^2) = M k^2$  das polare TM der Scheibe in bezug auf  $S$  darstellt, so erhalten wir schließlich die Bewegungsgleichungen der Scheibe in der einfachen Form

$$\boxed{M \ddot{\xi} = X, \quad M \ddot{\eta} = Y, \quad M k^2 \dot{\omega} = M.} \quad (398)$$



Durch diese Gleichungen sind die zweiten Ableitungen der „Scheibenkoordinaten“  $\xi, \eta, \varphi$  ( $\dot{\omega} \equiv \ddot{\varphi}$ ) durch die auf die Scheibe wirkenden Kräfte und Momente ausgedrückt. Wir bezeichnen sie als die „Bewegungsgleichungen der Scheibe“. Aus ihnen geht hervor, daß die dynamischen Merkmale, die die Beschaffenheit der Scheibe kennzeichnen, nur ihre Masse und ihr TM sind; alle übrigen Eigenschaften, wie Form, Größe usw. sind dynamisch gleichgültig und kommen nur bei geführten Bewegungen der Scheibe als geometrische Bedingungen in Betracht.

Die Beschleunigungskräfte einer Scheibe können also dargestellt werden durch die Beschleunigungskraft des Schwerpunktes  $S$  mit den Komponenten  $M\ddot{\xi}, M\ddot{\eta}$  und durch ihr Moment um  $S$  vom Betrage  $Mk^2\dot{\omega} \equiv J_s\dot{\varphi}$ .

Nach der wiederholt benützten Überlegung kann nun die Gültigkeit der Gln. (398) unmittelbar auf geführte Systeme erweitert werden, sobald der Einfluß der Führungen durch Kräfte dargestellt wird, die zu den eingepägten Kräften und Momenten in den Gln. (398) als Unbekannte hinzugenommen werden. Jeder „Bedingung“ entspricht auf diese Weise eine Führungskraft, dafür wird aber durch jede solche Bedingung, die nichts anderes als die Einführung einer geometrischen Beziehung zwischen den Scheibenkoordinaten  $\xi, \eta, \varphi$  bedeutet, gerade ein Freiheitsgrad aufgehoben, so daß die Bewegung selbst und die unbekannte Führungskraft bestimmbar bleiben.

Die Einführung einer Bedingung (etwa in der Form: ein Punkt der Scheibe soll eine feste Kurve beschreiben od. dgl.) bringt eine unbekannte Führungskraft mit sich; bei zwei solchen Bedingungen haben wir Zwanglauf, drei voneinander unabhängigen Bedingungen würden den Körper vollkommen festlegen, d. h. jede Beweglichkeit ausschalten. Die Annahme von drei voneinander abhängigen Bedingungen würde jedoch Zwanglauf mit drei unbekanntenen Führungskräften bedeuten, zu deren Bestimmung die drei Bewegungsgln. (398) nicht mehr ausreichen würden; man gelangt auf diese Weise zur Betrachtung von dynamisch-unbestimmten Systemen, die aber für die Anwendungen geringe Bedeutung haben.

Beispiel 144. Freie Bewegung der Scheibe. Wenn eingepägte Kräfte nicht vorhanden sind, also  $X = 0, Y = 0, M_s = 0$ , dann besagen die drei Gln. (398)

$$\ddot{\xi} = 0, \quad \ddot{\eta} = 0, \quad \ddot{\varphi} = 0,$$

d. h.

$$\dot{\xi} = a, \quad \dot{\eta} = b, \quad \dot{\varphi} = c,$$

und  $\xi = at + a_1, \quad \eta = bt + b_1, \quad \varphi = ct + c_1,$

worin  $a, b, c, a_1, b_1, c_1$  Konstante sind; d. h. der Schwerpunkt bewegt sich in gerader Linie mit konstanter Geschwindigkeit und die Scheibe führt um ihn eine gleichförmige Drehbewegung aus.

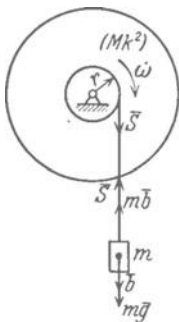


Abb. 219.

Beispiel 145. Eine Schwungscheibe mit  $Mk^2$  als TM, die sich frei um eine wagrechte Achse drehen kann, trägt eine Masse  $m$  an einem Seil, das um eine Trommel vom Halbmesser  $r$  geschlungen ist. Das System wird aus der Ruhelage losgelassen. Man bestimme die Bewegung und die Seilkraft (Abb. 219).

Bezeichnet  $S$  die Seilkraft,  $\dot{\omega}$  die Winkelbeschleunigung der Scheibe,  $b = r\dot{\omega}$  die Beschleunigung von  $m$ , so gibt die Momentengleichung für den Mittelpunkt

der Scheibe

$$M k^2 \dot{\omega} = S r = m (g - b) r = m (g - r \dot{\omega}) r ;$$

daraus erhält man

$$\dot{\omega} = \frac{m g r}{M k^2 + m r^2}$$

und die Seilkraft

$$S = \frac{M k^2 \dot{\omega}}{r} = \frac{M k^2}{M k^2 + m r^2} m g .$$

Wieder hätte man die Momentengleichung ohne Einführung der Seilkraft  $S$  anschreiben können.

Beispiel 146. Ersatzpunkte. a) Die Beschleunigungskräfte einer Scheibe können vollständig durch die zweier Punkte dargestellt werden; wenn die Massen dieser Punkte  $m_1, m_2$  die Scheibe hinsichtlich der Masse, der Schwerpunktslage und des Trägheitsmomentes vollständig ersetzen sollen, so müssen die Bedingungen bestehen (Abb. 220)

$$m_1 + m_2 = M, \quad m_1 a = m_2 c, \\ m_1 a^2 + m_2 c^2 = M k^2 .$$

Die Auflösung dieser Gleichungen liefert

$$a c = k^2, \quad \left. \begin{array}{l} m_1 = M k^2 / l a, \\ m_2 = M k^2 / l c. \end{array} \right\} \quad (399)$$

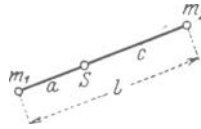


Abb. 220.

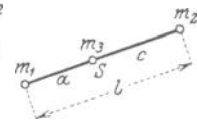


Abb. 221.

Ist also ein Abstand  $a$  willkürlich gewählt worden, dann sind  $c, m_1, m_2$  bestimmt.

b) Ersatz durch drei Punkte  $m_1, m_2, m_3$  in gerader Linie durch  $S$ , wobei  $m_3$  in  $S$  liegt (Abb. 221). Dieselben Bedingungen wie früher liefern hier

$$m_1 + m_2 + m_3 = M, \quad m_1 a = m_2 c, \quad m_1 a^2 + m_2 c^2 = M k^2$$

und die Auflösung dieser Gleichungen ergibt

$$m_1 = M k^2 / l a, \quad m_2 = M k^2 / l c, \quad m_3 = M (1 - k^2 / a c) . \quad (400)$$

Es können also  $a$  und  $c$  ganz willkürlich auf einer Geraden durch  $S$  gewählt werden, dann sind durch  $M$  und  $k^2$  die drei Ersatzmassen nach diesen Gleichungen gegeben.

**109. Energieintegral.** Da die Geschwindigkeitskomponenten des Scheibenpunktes  $A$  in bezug auf die Achsen  $x, y$  durch  $S$  durch die Gleichungen

$$v_x = \dot{\xi} - y' \omega, \quad v_y = \dot{\eta} + x' \omega$$

gegeben sind, so erhält man für die kinetische Energie der Scheibe den Ausdruck

$$T = \frac{1}{2} S m [(\dot{\xi} - y' \omega)^2 + (\dot{\eta} + x' \omega)^2],$$

der mit Benützung der Schwerpunkts-eigenschaft des Bezugspunktes  $S$ , d. h. der Gleichungen  $S m x' = 0, S m y' = 0$  und von

$$S m = M, \quad S m (x'^2 + y'^2) = M k^2$$

die einfachere Form annimmt

$$T = \frac{1}{2} M (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + k^2 \omega^2) . \quad (401)$$

Auf die vollständige Ableitung dieses Ausdruckes nach  $t$  wird man geführt, wenn man die Bewegungsgln. (398) der Reihe nach mit  $\dot{\xi}$ ,

$\dot{\eta}$ ,  $\dot{\varphi}$  multipliziert und addiert; dann erhält man nämlich (da  $\omega = \dot{\varphi}$ ,  $\dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ )

$$M(\dot{\xi}\ddot{\xi} + \dot{\eta}\ddot{\eta} + k^2\omega\dot{\omega}) = \frac{dT}{dt} = X\dot{\xi} + Y\dot{\eta} + M\dot{\varphi}. \quad (402)$$

Ähnlich wie bei der Punktdynamik bringt jener Sonderfall eine besondere Vereinfachung mit sich, in welchem  $X$ ,  $Y$ ,  $M$  als partielle Ableitungen einer potentiellen Energie  $U$  oder einer Arbeitsfunktion  $A$  darstellbar sind, wenn also

$$-dU \equiv dA = Xd\xi + Yd\eta + Md\varphi,$$

$$\text{oder} \quad X = -\frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad M = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}. \quad (403)$$

Die rechte Seite der Gl. (402) ist dann  $-dU/dt$  und die Gl. (402) selbst nimmt die einfache Form an

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0, \quad \text{oder integriert} \quad \boxed{T + U = h}, \quad (404)$$

wobei  $h$  wieder die Energiekonstante ist; diese Gleichung entspricht der Gl. (342) in der Punktdynamik und verlangt nur die sinngemäße Auffassung der Größen  $T$  und  $U$ , die in den Gln. (401) und (403) zum Ausdruck kommt.

Bezüglich der Anwendung dieses Prinzips ist hervorzuheben, daß es für freie und geführte Systeme gilt, und zwar treten bei den letzten bei glatten Führungen die Führungskräfte überhaupt nicht ein, da sie dann auf diesen Führungen senkrecht stehen und die Arbeit Null ergeben. Bei glatten Führungen braucht man also auf diese keinerlei Rücksicht zu nehmen und hat nur die kinetische Energie  $T$  des Körpers und die potentielle Energie  $U$  für eine beliebige Lage des Körpers (während seiner Bewegung) anzusetzen; ihre Summe ist nach Gl. (404) konstant, und so groß wie in der Anfangslage.

Außerdem ist das Prinzip ohne weiteres anwendbar, wenn der Körper eine reine Rollung (ohne Gleitung) ausführt. Die Kraft, die das Rollen bewirkt, ist durch die Rauigkeit der Unterlage bedingt, leistet aber die Arbeit Null, da der Berührungspunkt, der ja der Angriffspunkt der Reibung ist, in jedem Augenblicke Drehpol ist und daher die Geschwindigkeit Null hat.

Beispiel 147. Ein Stab  $\overline{AB} = 2a$ , der sich anfänglich unter einem Winkel  $\alpha$  gegen eine glatte wagrechte Ebene stützt, wird losgelassen (Abb. 222); man bestimme seine Bewegung.

Das Gewicht sei  $G = Mg$ , die Normalkraft der Ebene  $D$ . Die Lage des Stabes sei durch die Koordinaten seines Schwerpunktes  $S$  ( $\xi$ ,  $\eta$ ) und den Winkel  $\varphi$  gegen die Ebene gekennzeichnet. Dann lauten die Bewegungsgln. (398)

$$M\ddot{\xi} = 0, \quad M\ddot{\eta} = D - Mg,$$

$$M\frac{a^2}{3}\ddot{\varphi} = -Da\cos\varphi.$$

Zwischen den Koordinaten  $\eta$ ,  $\varphi$  besteht hier die geometrische Beziehung

$$\eta = a\sin\varphi$$

und diese vier Gleichungen ermöglichen die Lösung der Bewegungsaufgabe einschließlich der Bestimmung von  $D$ . Zunächst liefert die Elimination von  $D$  und  $\eta$ , da

$$\dot{\eta} = a \cos \varphi \dot{\varphi}, \quad \ddot{\eta} = a \cos \varphi \ddot{\varphi} - a \sin \varphi \dot{\varphi}^2,$$

nach Division durch  $M$ ,

$$a \cos \varphi \ddot{\varphi} - a \sin \varphi \dot{\varphi}^2 = -\frac{a}{3 \cos \varphi} \ddot{\varphi} - g;$$

diese Gleichung läßt sich nach Multiplikation mit  $\dot{\varphi}$  in der Form schreiben

$$(\cos^2 \varphi + \frac{1}{3}) \dot{\varphi} \ddot{\varphi} - \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^3 = -\frac{g}{a} \cos \varphi \dot{\varphi},$$

die unmittelbar integriert werden kann; da in der Anfangslage  $\varphi = \alpha$ ,  $\dot{\varphi} = 0$  vorgeschrieben sind, so lautet das Integral

$$\frac{1}{2} (\cos^2 \varphi + \frac{1}{3}) \dot{\varphi}^2 = \frac{g}{a} (\sin \alpha - \sin \varphi). \quad (405)$$

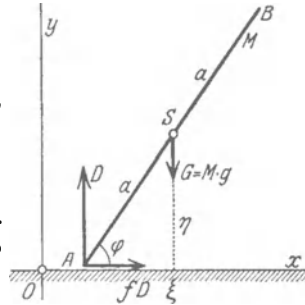


Abb. 222.

Diese Gleichung ist nichts anderes als das Energieintegral  $T + U = h$  und kann auch unmittelbar hingeschrieben werden, da ( $\xi = 0$ )

$$T = \frac{1}{2} M \left( \dot{\eta}^2 + \frac{a^2}{3} \dot{\varphi}^2 \right) = \frac{1}{2} M a^2 (\cos^2 \varphi + \frac{1}{3}) \dot{\varphi}^2 \quad \text{und} \quad U = M g \eta = M g a \sin \varphi$$

ist, unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen  $\dot{\varphi} = 0$  ( $\dot{\eta} = 0$ ) für  $\varphi = \alpha$ .

Die Auftreffgeschwindigkeit am Boden erhält man durch Einsetzen von  $\varphi = 0$ . Wenn  $S$  anfänglich keine wagrechte Geschwindigkeit hat, so bewegt sich der Punkt  $S$  in jener Lotrechten nach abwärts, in der er sich anfänglich befindet.

Wenn die Unterlage rauh ist, so ist die Reibungskraft  $R = f D$  ( $f = \text{tg } \varrho$ ) hinzuzunehmen, wodurch die Bewegungsgleichungen die folgende Form erhalten

$$M \ddot{\xi} = f D, \quad M \ddot{\eta} = D - G, \quad M \frac{a^2}{3} \ddot{\varphi} = D a (f \sin \varphi - \cos \varphi).$$

Die Integration ist jetzt nicht in der einfachen Weise möglich wie zuvor. Wir wollen hier nur die Führungskraft  $D_0$  berechnen, die zu Beginn die Bewegung, also für  $\varphi = \alpha$ ,  $\dot{\varphi} = 0$  vorhanden ist, wobei wir die Werte aller Größen für diesen Zeitpunkt mit dem Zeiger 0 versehen. Zunächst gilt die Gleichung für  $\ddot{\eta}$

$$\ddot{\eta}_0 = a \cos \alpha \ddot{\varphi}_0,$$

und wir erhalten durch Ausscheidung von  $\ddot{\varphi}_0$  aus der zweiten und dritten Bewegungsgleichung

$$\frac{D_0 - G}{\cos \alpha} = 3 D_0 (f \sin \alpha - \cos \alpha) \quad \text{und daraus} \quad D_0 = \frac{G \cos \varrho}{\cos \varrho + 3 \cos \alpha \cos (\alpha + \varrho)}.$$

**110. Impuls und Drall.** Die Bewegungsgleichungen einer Scheibe lassen sich auch unmittelbar in vektorieller Form aussprechen, die den Vorteil größerer Anschaulichkeit hat. Hierzu führen wir außer dem Vektor  $\vec{v}_A$  der Geschwindigkeit des Punktes  $A$  noch einen Vektor ein, in derselben Richtung wie  $\vec{v}_A$ , aber vom Betrage  $m \vec{v}_A$ ;  $m$  ist dabei die Punktmasse in  $A$ . Man bezeichnet diesen Vektor  $m \vec{v}_A$  als Impuls oder Bewegungsgröße von  $m$ , manchmal auch als Schwung. Die Dimension dieser Größe ist  $[KT]$  im technischen und  $[MLT^{-1}]$  im physikalischen Maßsystem, die Einheit 1 kg im technischen und 1 g cms<sup>-1</sup> im physikalischen Maßsystem.

Durch die Geschwindigkeit  $\bar{v}_S$  des Schwerpunkts  $S$  und den Vektor  $\bar{r} = \overline{SA}$  ausgedrückt, ist

$$m \bar{v}_A = m [\bar{v}_S + (\bar{\omega} \times \bar{r})]$$

oder in Komponenten geschrieben

$$m v_x = m (\dot{\xi} - y' \omega), \quad m v_y = m (\dot{\eta} + x' \omega),$$

wenn  $\dot{\xi}, \dot{\eta}$  die Komponenten von  $\bar{v}_S$  und  $x', y'$  die von  $\bar{r}$  sind.

Für die vektorielle Summe der Impulse  $m \bar{v}_A$  aller Massenteilchen ergibt sich, wenn  $\sum m = M$  ist, die Bewegungsgröße der in  $S$  vereinigten Masse  $M$ , wegen  $\sum m \bar{r} = 0$ , zu

$$\sum m \bar{v}_A = \sum m [\bar{v}_S + (\bar{\omega} \times \bar{r})] = \sum m \bar{v}_S = M \bar{v}_S = \bar{B}, \quad (406)$$

so daß die zwei ersten der Gln. (398) in die Form zusammengefaßt werden können

$$\frac{d(M \bar{v}_S)}{dt} = \frac{d\bar{B}}{dt} = \bar{K}; \quad (407)$$

d. h. die zeitliche Änderung des Impulses der in  $S$  vereinigten Masse ist gleich der Summe der eingepägten Kräfte.

Bildet man weiter die Summe der Momente der Impulse der einzelnen Massenteilchen  $m$  um  $S$ , so erhält man das Moment der Bewegungsgröße oder den Drall der Scheibe in bezug auf  $S$ . Wir bezeichnen diese Größe mit  $\bar{H}_S$  und finden, da wieder  $\sum m \bar{r} = 0$ ,  $\sum m r^2 = J_S$ , nach Anwendung der Gl. (33)

$$\bar{H}_S = \sum m (\bar{r} \times \bar{v}_A) = \sum m [\bar{r} \times (\bar{v}_S + (\bar{\omega} \times \bar{r}))] = \bar{\omega} \sum m r^2 = J_S \bar{\omega}. \quad (408)$$

und die dritte der Bewegungsgln. (398) nimmt die Form an

$$\frac{d\bar{H}_S}{dt} = \bar{M}_S, \quad (409)$$

d. h. die Ableitung des Dralles der Scheibe um  $S$  nach  $t$  ist gleich der Summe der Momente der eingepägten Kräfte um  $S$  (Drallsatz).

Wenn die auf den Körper einwirkende Kraft  $\bar{K}$  konstant oder eine reine Funktion von  $t$  ist, dann liefert die Integration der Gln. (407) unmittelbar die Geschwindigkeiten in den Richtungen der Koordinatenachsen. Wird z. B. für eine geradlinige Bewegung die Geschwindigkeit zu Beginn und Ende der Zeit  $t$  mit  $v_0$  und  $v$  bezeichnet, so erhält man

$$M(v - v_0) = \int_0^t K dt. \quad (410)$$

Eine ähnliche Gleichung ergibt sich auch für die krummlinige Bewegung, wenn  $v_0$  und  $v$  die Geschwindigkeiten sind, die von selbst in die Richtung der Bahn fallen, und für  $K$  die Summe der Tangentialkomponenten der Kräfte eingesetzt wird.

Beispiel 148. Auslauf eines Flugzeuges. Ein landendes Flugzeug von  $G = 1000$  kg Gewicht wird mit der Landungsgeschwindigkeit  $v_0 = 30$  m/s auf den Boden aufgesetzt und erfährt von da an einen (hier konstant angenommenen Luftwiderstand von  $W = 50$  kg und einen Rollwiderstand, der nach Gl. (148) mit  $r = 25$  cm und (für Wiesengrund)  $f_2 = 1$  cm:  $R = \frac{1}{25} 1000 = 40$  kg beträgt. Die Auslaufzeit ist sodann durch die Gl. (410) in der Form gegeben ( $g \approx 10$  m/s<sup>2</sup> gesetzt)

$$-\frac{1000}{10} \cdot 30 = -(50 + 40) t, \text{ daraus } t = 33,3 \text{ s,}$$

und der Auslaufweg beträgt

$$s = \frac{v_0}{2} t = 499,6 \text{ m.}$$

**111. Drehung um eine feste Achse.**

Bei der bisher durchgeführten Reduktion der Beschleunigungskräfte ist der Schwerpunkt als bevorzugter Reduktionspunkt hervorgetreten. Wenn sich jedoch der Körper um eine feste Achse dreht, so ist es unnötig, die Reduktion an den Schwerpunkt vorzunehmen, es genügt vielmehr, die feste Achse als Reduktionsachse zu nehmen.

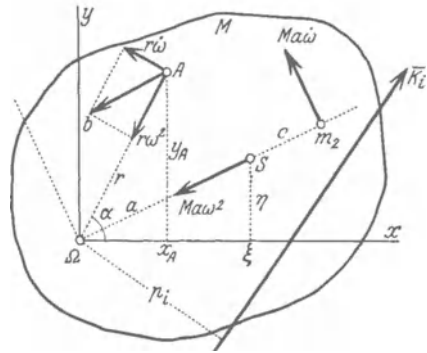


Abb. 223.

Für die Bewegung der in Abb. 223 dargestellten Scheibe um den Drehpunkt  $\Omega$  gibt die Beschleunigung  $\vec{b}$  des Teilchens  $m$  nach den Achsen  $x, y$  die Komponenten

$$\left. \begin{aligned} b_x &= -r \omega^2 \cos \alpha - r \dot{\omega} \sin \alpha = -x \omega^2 - y \dot{\omega}, \\ b_y &= -r \omega^2 \sin \alpha + r \dot{\omega} \cos \alpha = -y \omega^2 + x \dot{\omega}. \end{aligned} \right\}$$

Die Summe der Beschleunigungskräfte  $b$  aller Scheibenpunkte gibt (da  $\sum m x = M \xi$ ,  $\sum m y = M \eta$ ,  $\sum m = M$ ) eine Kraft  $M \bar{a} \omega^2$  (mit den Komponenten  $M \xi \omega^2$ ,  $M \eta \omega^2$ ) in  $S$  angreifend und nach  $\vec{S}\Omega$  gerichtet, und eine Kraft  $M \bar{a} \dot{\omega}$  mit den Komponenten  $(-M \eta \dot{\omega}$ ,  $M \xi \dot{\omega})$  senkrecht zu  $\Omega S$  und um  $\Omega$  im Sinne von  $\dot{\omega}$  drehend; außerdem ein Moment von der Größe

$$\sum m (x b_y - y b_x) = \dot{\omega} \sum m (x^2 + y^2) = J_\Omega \dot{\omega} = M k_\Omega^2 \dot{\omega}.$$

Wenn daher die eingepprägten Kräfte mit  $\vec{K}_i (X_i, Y_i)$  und die Komponenten der Gelenkkraft in  $\Omega$  nach den Achsen mit  $A$  und  $B$  bezeichnet werden, so lauten die Gln. (398)

$$\boxed{\begin{aligned} \sum X_i + A + M \xi \omega^2 + M \eta \dot{\omega} &= 0, \\ \sum Y_i + B + M \eta \omega^2 - M \xi \dot{\omega} &= 0, \\ M_\Omega \equiv \sum K_i p_i &= J_\Omega \dot{\omega} \equiv M k_\Omega^2 \dot{\omega}. \end{aligned}} \quad (411)$$

Die letzte Gleichung liefert die Winkelbeschleunigung der Scheibe

$$\dot{\omega} = \ddot{\varphi} = \frac{M\Omega}{J_\Omega} = \frac{\text{Drehmoment der Kräfte um } \Omega}{\text{Trägheitsmoment bez. } \Omega}. \quad (412)$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der dritten Gl. (398), so erkennt man, daß für die Bewegung um eine feste Achse dieselbe Gleichung gilt, wie für die Bewegung um eine sich stets parallel bleibende Schwerachse.

Die beiden anderen Gln. (411) dienen zur Bestimmung der Komponenten  $A$  und  $B$  der Gelenkkraft, die hier natürlich Funktionen von  $\varphi$  oder von  $t$  werden.

**112. Anwendungen.** Beispiel 149. Körperpendel. Abb. 224. Wenn die einzige eingeprägte Kraft das im Schwerpunkt angreifende Gewicht  $G = Mg$  ist, so liefert die Gl. (412) die Winkelbeschleunigung der Linie  $\overline{\Omega S}$  gegen die Lotrechte für kleine Werte der Neigung  $\varphi$

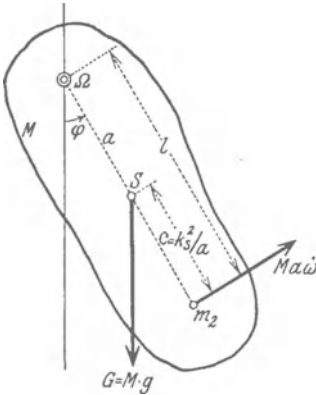


Abb. 224.

$$\dot{\omega} \equiv \ddot{\varphi} = -\frac{Mga}{Mk_\Omega^2} \sin \varphi \approx -\frac{ga}{k_\Omega^2} \varphi$$

(angenähert), und dies ist die Gleichung einer einfachen harmonischen Schwingung mit der Periode

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k_\Omega^2}{ga}}. \quad (413)$$

Der Vergleich mit Gl. (250) zeigt, daß dieses  $T$  gleich ist der Schwingungsdauer eines Punktpendels von der Länge  $l = \frac{k_\Omega^2}{a} = \frac{a^2 + k_S^2}{a} = a + \frac{k_S^2}{a}$ , das man das gleichwertige Punktpendel nennt.

Durch das Hinzutreten des Momentes der Beschleunigungskräfte  $Mk_\Omega^2 \dot{\omega}$  wird die zu  $\overline{\Omega S}$  normale Komponente  $Ma\dot{\omega}$  der Beschleunigungskräfte um ein Stück

$$\overline{\Omega m_2} = \frac{Mk_\Omega^2 \dot{\omega}}{Ma\dot{\omega}} = \frac{k_\Omega^2}{a} = \frac{a^2 + k_S^2}{a} = a + \frac{k_S^2}{a} = l \quad (414)$$

parallel verschoben. Ersetzt man daher das Pendel durch zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$ , von denen  $m_1$  in  $\Omega$  und  $m_2$  auf  $\overline{\Omega S}$  in einer Entfernung  $c = \overline{Sm_2} = \frac{k_S^2}{a} = l - a$  liegen möge (was nach Beispiel 146a möglich ist, da  $ac = k^2$ ), dann muß sich  $m_2$  als Punktpendel gerade so bewegen wie als Punkt des Körperpendels, und man erhält auf diese Weise die Länge des gleichwertigen Pendels wie zuvor. Den Punkt  $m_2$  nennt man den Schwingungsmittelpunkt bezüglich der Achse  $\Omega$ .

Beispiel 150. Experimentelle Bestimmung von Trägheitsmomenten. a) Durch Messung der Schwingungsdauer  $T$  ist nach Gl. (413) umgekehrt das TM bestimmt, sobald die Entfernung  $a$  der Schwingungsachse von  $S$  bekannt ist; es folgt

$$J_\Omega = Mk_\Omega^2 = Mga \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2. \quad (415)$$



Will man die unbequeme Ermittlung von  $a$  umgehen, so kann man so verfahren, daß man den Körper um zwei parallele Achsen  $A, B$  schwingen läßt, die mit  $S$  in derselben Ebene liegen und deren Abstand  $l$  bekannt ist. Seien die Abstände der Achsen von  $S$ :  $\overline{AS} = a$ ,  $\overline{BS} = c$  und die beobachteten Schwingungsdauern  $T$  und  $T_1$ , so sind aus den drei Gleichungen, von denen die beiden ersten wie (415) gebildet sind,

$$M(a^2 + k_S^2) = Mga \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2, \quad M(c^2 + k_S^2) = Mgc \left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2, \quad a + c = l, \quad (416)$$

die drei Größen  $k_S^2$ ,  $a$ ,  $c$  durch eine einfache Rechnung bestimmt.

b) Eine andere Methode, bei der die Kenntnis von  $a$  vermieden wird, besteht darin, daß man zuerst den Körper allein um eine Achse schwingen läßt (Schwingungsdauer  $T$ ), ihn sodann mit einem zweiten starr verbindet, dessen Schwerpunktslage und Trägheitsmoment  $J_1$  bekannt sind, und beide so verbundenen Körper vereinigt um dieselbe Achse schwingen läßt (Schwingungsdauer  $T'$ ); sei noch  $M_1$  die Masse des Zusatzkörpers und  $a_1$  sein Schwerpunktsabstand von der Achse, so hat man die Gleichungen

$$Mk_{\Omega}^2 = Mga \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2, \quad Mk_{\Omega}^2 + J_1 = (Ma + M_1a_1)g \left(\frac{T'}{2\pi}\right)^2, \quad (417)$$

aus denen  $k_{\Omega}^2$  und  $a$  bestimmbar sind.

Beispiel 151. Hauptträgheitsachsen als freie Achsen. Bei der Drehung eines beliebig gestalteten Körpers um irgendeine Achse des Raumes (z. B. die  $z$ -Achse in Abb. 225) sind die Trägheitskräfte für jedes Teilchen  $m$  einzuführen; und zwar sind dies

- a) die Fliehkraft  $m\bar{r}\omega^2$   
(//  $r$ , nach außen gerichtet),
- b) die Tangentialkraft  $m\bar{r}\dot{\omega}$   
( $\perp r$ , entgegen zu  $\dot{\omega}$  gerichtet).

Werden die Koordinaten des Massmittelpunktes  $S$  in bezug auf die in Abb. 225 angegebenen Achsen mit  $(\xi, \eta, \xi)$  bezeichnet, so besteht die Summe dieser Trägheitskräfte und ihrer Momente nach diesen Achsen aus folgenden Komponenten:

$$\left. \begin{aligned} Smx\omega^2 + Sm y \dot{\omega} &\equiv \omega^2 M \xi + \dot{\omega} M \eta, \\ Sm y \omega^2 - Sm x \dot{\omega} &\equiv \omega^2 M \eta - \dot{\omega} M \xi, \\ 0 & \\ -\omega^2 Sm yz + \dot{\omega} Sm yz &\equiv -\omega^2 D_{yz} + \dot{\omega} D_{zz}, \\ \omega^2 Sm xz + \dot{\omega} Sm yz &\equiv \omega^2 D_{xz} + \dot{\omega} D_{yz}, \\ -\dot{\omega} Sm(x^2 + y^2) &\equiv -\dot{\omega} J_z. \end{aligned} \right\}$$

Wenn die Achse an zwei Stellen  $A_1(0, 0, c_1)$  und  $A_2(0, 0, c_2)$  gelagert ist, und die Lagerdrücke durch  $\bar{D}_1(X_1, Y_1, Z_1)$  und  $\bar{D}_2(X_2, Y_2, Z_2)$ , ferner die Komponenten der eingepprägten Kräfte und Momente nach den Achsen mit  $(X, Y, Z, M_x, M_y, M_z)$  bezeichnet werden, so gibt das d'Alembertsche Prinzip zur Bestimmung von

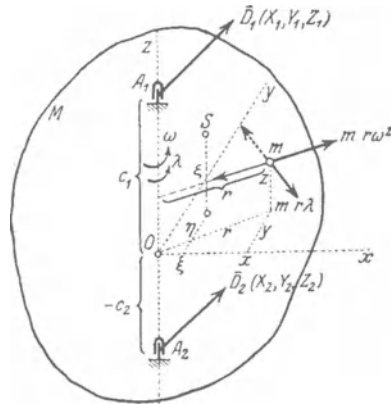


Abb. 225.

$\bar{D}_1, \bar{D}_2$  und  $\dot{\omega}$  die 6 Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} X + X_1 + X_2 + \omega^2 M \xi + \dot{\omega} M \eta &= 0, \\ Y + Y_1 + Y_2 + \omega^2 M \eta - \dot{\omega} M \xi &= 0, \\ Z + Z_1 + Z_2 &= 0, \\ M_x - c_1 Y_1 - c_2 Y_2 - \omega^2 D_{yz} + \dot{\omega} D_{xz} &= 0, \\ M_y + c_1 X_1 + c_2 X_2 + \omega^2 D_{xz} + \dot{\omega} D_{yz} &= 0, \\ M_z & - \dot{\omega} J_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (418)$$

Die letzte Gleichung dient zur Bestimmung von  $\dot{\omega}$  und stimmt mit der Gl. (412) in 111 vollkommen überein. Ihre Integration liefert:  $\omega = \omega(t) = \dot{\varphi}$  und  $\varphi = \varphi(t)$ . Die anderen 5 Gleichungen liefern die Größen  $X_1, X_2, Y_1, Y_2$  dagegen nur  $Z_1 + Z_2 = -Z$ , ähnlich wie im Falle des Zweigelenks.

Für die kräftefreie Drehung ist

$$X = Y = Z = M_x = M_y = M_z = 0$$

zu setzen, woraus  $\dot{\omega} = 0$ ,  $\omega = \text{konst}$  folgt. Aus der Form der Gln. (418) folgt sofort, daß die Auflagerkräfte  $\bar{D}_1$  und  $\bar{D}_2$  dann und nur dann verschwinden, wenn

1.  $\xi = 0, \eta = 0$ , d. h.  $S$  in der Drehachse liegt,
2.  $D_{xz} = 0, D_{yz} = 0$ , d. h. die Drehachse  $z$  eine Hauptträgheitsachse ist.

Eine kräftefreie gleichförmige Drehung eines Körpers um eine Achse (d. i. ohne Auflagerkräfte in den Lagern) ist also nur möglich, wenn die Drehachse eine Hauptzentralachse (100) ist. Solche Achsen werden als „freie“ Achsen bezeichnet. Die drei Hauptzentralachsen sind daher die einzigen freien Achsen des Körpers.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so spricht man von einem Massenausgleich des sich drehenden Körpers.

Über den Massenausgleich für verbundene Körper (Getriebe von mehrzylindrigen Kolbenmaschinen) vgl. die in 123, 124 gegebenen Bemerkungen.

Beispiel 152. Schwerer Stab um eine lotrechte Achse gleichförmig rotierend. Für die gleichförmige Drehung eines Stabes mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine lotrechte Achse geben die Trägheitskräfte nach Abb. 226, wenn  $\mu = \gamma/g$  die Liniendichte, d. i. die Masse

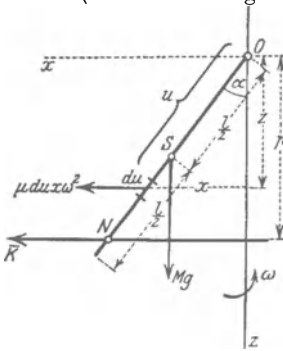


Abb. 226.

des Stabes für 1 m Länge und  $\mu l = M$  seine ganze Masse bezeichnet, als Summe in der  $x$ -Richtung, da  $x = u \sin \alpha$

$$\int_0^l \mu du x \omega^2 = \mu \omega^2 \sin \alpha \int_0^l u du = \mu \omega^2 \sin \alpha \frac{l^2}{2} = \frac{1}{2} M l \omega^2 \sin \alpha,$$

und als Summe der Momente um  $O$ , da  $z = u \cos \alpha$ ,

$$\int_0^l \mu du x z \omega^2 = \mu \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \int_0^l u^2 du = \mu \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} M l^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Dieser Wert ist nichts anderes als  $D_{xz} \omega^2$  für den unter dem Winkel  $\alpha$  gegen die Lotrechte geneigten Stab. Die Trägheitskräfte können daher durch eine Einzelkraft  $\bar{K}$  in der  $x$ -Richtung dargestellt werden, die in einem Abstände  $p$  von  $O$  angreift, der durch den Quotienten des eben berechneten Moments und der Einzelkraft gegeben ist

$$p = \frac{2}{3} l \cos \alpha.$$

Für einen schweren Stab liefert der Momentensatz um  $O$  die Gleichgewichtstellung  $\alpha$  des Stabes aus der Gleichung

$$M g \frac{l}{2} \sin \alpha = D_{xz} \omega^2 = \frac{1}{3} M l^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

es folgt also (außer  $\sin \alpha = 0, \alpha = 0$ )

$$\cos \alpha = \frac{3}{2} \frac{g}{l \omega^2} \tag{419}$$

Wenn an einem Ende eines solchen Stabes eine Schwungmasse (etwa in Form einer Kugel) angebracht ist, so entsteht ein Teil eines Fliehkraftreglers, dessen Gleichgewichtstellung auf dieselbe Weise berechnet wird. Die durch eine Belastungsänderung hervorgerufene Änderung von  $\omega$  bringt auch eine Änderung von  $\alpha$  mit sich, und diese Verstellung wird durch ein passend angeordnetes Gestänge so auf ein Regulierorgan (Ventil, Schieber, Hahn, Drosselklappe) übertragen, daß diese Änderung wieder rückgängig gemacht oder ein neuer Beharrungszustand der Maschine erzielt wird.

Für Körper, die zu einer Ebene symmetrisch sind, und die um eine zu dieser Ebene senkrechte Achse  $A$  mit  $\omega$  rotieren, ist die Summe der Fliehkraft  $\bar{F}$  eine durch  $S$  gehende Einzelkraft  $M \bar{r} \omega^2$ , wobei  $\bar{r} = \bar{A}S$ . Denn es ist nach den Gln. (99)

$$\bar{F} = S m \bar{r} \omega^2 = \omega^2 S m \bar{r}, \text{ also } \boxed{\bar{F} = \omega^2 M \bar{r}}. \tag{420}$$

$\bar{F}$  liegt in der Symmetrieebene, schneidet  $A$  senkrecht und geht durch  $S$  hindurch. — Dies ist auch der Fall, wenn die beiden Haupt-TM eines in bezug auf die Meridianebene symmetrischen Pendels gleich sind.

Beispiel 153. Gleichgewicht eines Flachreglers. Ein Flachregler nach Abb. 227 kann als ein mittels zweier Gelenke  $A, D$  auf eine Scheibe aufgesetztes Kurbelviereck  $A, B, C, D$  angesehen werden, das mit dieser Scheibe in Drehung gesetzt wird und gewöhnlich mit einem zweiten,  $D, C_1, B_1, A_1$  nach der in der Abbildung ersichtlichen Weise gekoppelt ist. Die Verstellung des Kurbelvierecks bei veränderlichem  $\omega$  wird wieder durch ein Gestänge auf ein Regulierorgan übertragen. Auf die drei Glieder des Kurbelvierecks wirken die Fliehkkräfte, deren Größe für jedes Glied nach Gl. (420) zu berechnen ist. Die zu lösende Aufgabe besteht nun darin, die Größe der Federkraft  $\bar{K}$  zu ermitteln, die für eine bestimmte Stellung und für ein bestimmtes  $\omega$  zur Herstellung des Gleichgewichtes des Kurbelvierecks notwendig ist, wobei die Richtung von  $\bar{K}$  gegeben ist.

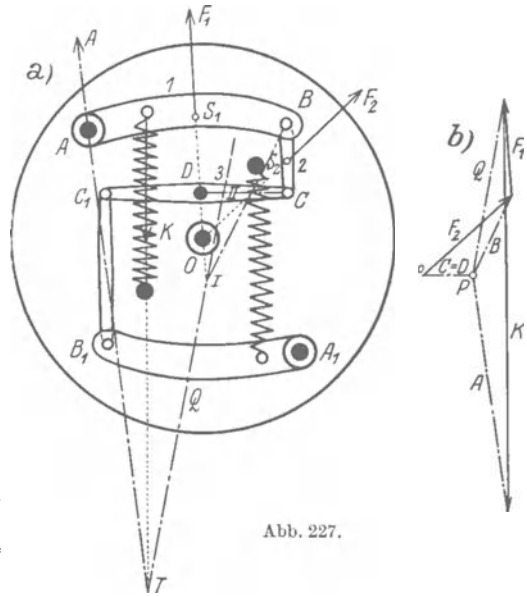


Abb. 227.

Die Ausführung der Konstruktion zur Bestimmung von  $\bar{K}$  sei zunächst an Hand der schematischen Figur Abb. 228a erklärt. Die Belastung der drei Glieder besteht aus den Fliehkräften

$$\bar{F}_1 = M_1 \omega^2 \bar{r}_1, \quad \bar{F}_2 = M_2 \omega^2 \bar{r}_2, \quad \bar{F}_3 = M_3 \omega^2 \bar{r}_3,$$

wenn  $M_1, M_2, M_3$  die Massen der drei Glieder sind. Die Glieder 2 und 3 bilden für sich ein „Dreigelenk“, deren Gelenkkräfte  $B, C, D$  nach Beispiel 18 in **36** zu ermitteln sind. Das Glied 1 ist dann im Gleichgewichte unter den Kräften  $\bar{F}_1$ , der Federkraft  $\bar{K}, \bar{A}$  und  $\bar{B}$ ; die Summe  $\bar{Q}$  von  $\bar{F}_1$  und  $\bar{B}$  ist in zwei Komponenten zu zerlegen, von denen die eine in die gegebene Richtung von  $\bar{K}$  fällt, die andere durch  $A$  hindurchgeht; der Schnittpunkt  $T$  von  $\bar{Q}$  und  $\bar{K}$  gibt, mit  $A$  verbunden, die Richtung der Gelenkkraft  $\bar{A}$ , während die Größen von  $\bar{A}$  und  $\bar{K}$  durch den Kräfteplan in Abb. 228b geliefert werden.

Der Flachregler Abb. 227 ist ein Sonderfall dieser Anordnung, bei dem die

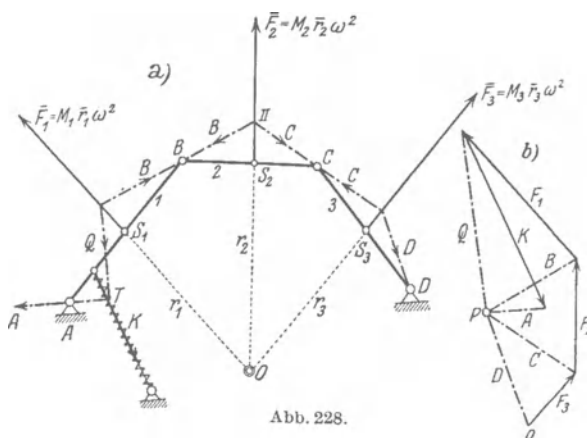


Abb. 228.

Fliehkraft  $\bar{F}_3$  auf 3 nicht berücksichtigt zu werden braucht, so daß 3 einfach als „Pendelstütze“ wirkt, die nur eine Stützkraft in ihrer eigenen Richtung empfangen und ausüben kann; den zugehörigen Kräfteplan zeigt Abb. 227b.

Das d'Alembertsche Prinzip kann auch dazu dienen, die Festigkeitsberechnung bewegter Körper bei Vorhandensein von

Beschleunigungen auszuführen, die sich in neuerer Zeit mit Rücksicht auf die verwendeten großen Geschwindigkeiten und die erhöhten Anforderungen an die Regulier- und Steuerfähigkeit der Maschinen als unabweisbar herausgestellt und allmählich zum Ausbau einer „dynamischen Festigkeitslehre“ geführt hat. Der hierfür maßgebende Gedanke ist der, daß zu den eingepägten Kräften die Trägheitskräfte als Belastungen hinzuzunehmen sind, um die gesamten einwirkenden „Lasten“ zu erhalten. Für jeden beliebigen Teil des Körpers bilden die auf diese Weise ergänzten Lasten zusammen mit den an den Schnittstellen übertragenen „inneren“ Kräften — den Spannungen — eine Gleichgewichtsgruppe. — Aus dieser Aussage ist auch ersichtlich, daß gleichförmige Bewegung keinerlei Spannungen im Innern des Körpers verursachen kann.

Beispiel 154. Beanspruchung eines gleichförmig rotierenden Stabes. Die Trägheitskräfte sind nichts anderes als die Fliehkräfte. Für einen Querschnitt im Abstände  $x$  vom Ende hat die Normalkraft  $S$ , die für die Herstellung des Gleichgewichts des abgeschnittenen Teiles nötig ist, die Größe

$$S = \mu \int_0^x (l - x) \omega^2 dx = \frac{\mu \omega^2}{2} x \left( l - \frac{x}{2} \right);$$

der größte Wert von  $S$  tritt für  $x = l$ , also an der Achse, auf und hat, wenn der Stab die Länge  $l$  hat, um eine Achse durch seinen Endpunkt senkrecht zu seiner Längsachse rotiert und  $\mu l = M$  gesetzt wird, den Wert

$$S_{\max} = \frac{\mu \omega^2 l^2}{2} = \frac{1}{2} M l \omega^2,$$

d. i. der Wert der Fliehkraft der im Schwerpunkt vereinigten Stabmasse. Für ungleichförmige Drehung sind für die Herstellung des Gleichgewichtes auch im Querschnitt liegende, sog. Schubkräfte anzubringen, die von der Winkelbeschleunigung in jedem Augenblicke abhängen.

**113. Zwangläufige Bewegung des einzelnen Körpers.** Die zwangläufige Bewegung einer einzelnen Scheibe verlangt zu ihrer Kennzeichnung nur die Angabe einer Koordinate; da beim Zwanglauf die Führung in zwei Punkten erfolgt, treten an diesen zwei unbekannte Führungskräfte auf und die drei Bewegungsgleichungen sind daher zur Bestimmung der Bewegung und dieser Führungskräfte ausreichend. Zu den zwangläufigen Bewegungen gehört auch die reine Rollung, bei der die beiden geführten Punkte zusammenfallend angenommen werden können; für die Rollung ist die im Berührungspunkte auftretende Kraft durch zwei Komponenten bestimmt, und die in der Richtung der Berührungsebene liegende Reibungskraft als eine Haftreibung aufzufassen; für sie kann nur eine obere Grenze  $|R| \leq f_0 D$  angegeben werden, wobei nur dann wirkliches Rollen und kein Gleiten eintritt, wenn diese obere Grenze nicht erreicht wird. Diese zwei Komponenten sind wieder durch die Bewegungsgleichungen zu bestimmen. Ebenso fallen die beiden geführten Punkte bei der Drehung um einen festen Punkt zusammen.

Beispiel 155. Stab längs Wand und Boden fallend. Mit den Bezeichnungen der Abb. 229 lauten die Bewegungsgleichungen bei glatten Führungen

$$M \ddot{\xi} = B, \quad M \ddot{\eta} = A - M g,$$

$$M k^2 \ddot{\varphi} = B b \sin \varphi - A a \cos \varphi$$

und die geometrischen Beziehungen

$$\xi = b \cos \varphi, \quad \eta = a \sin \varphi.$$

Nach Ausscheidung von  $A, B, \xi, \eta$  aus diesen fünf Gleichungen ergibt sich durch Multiplikation mit  $\dot{\varphi}$  die Gleichung

$$\{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + (b^2 - a^2) \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^3 + k^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi}\} = -g a \cos \varphi \dot{\varphi},$$

die unmittelbar integriert werden kann und die Energiegleichung  $T + U = h$  liefert,

$$\frac{1}{2} [(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) \dot{\varphi}^2 + g a \sin \varphi] = h/M,$$

die natürlich auch unmittelbar hingeschrieben werden könnte. Aus ihr ergibt sich durch Auflösung  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(\varphi)$ ; durch Einsetzen in die Bewegungsgleichungen erhält man  $A$  und  $B$  für jedes  $\varphi$  während der Bewegung.

Beispiel 156. Rollende Bewegung eines Drehkörpers längs einer schiefen Ebene, Abb. 230. Auch in diesem Falle findet das Energieintegral (109), da der Angriffspunkt der unbekanntenen Reibung  $R$  die Geschwindigkeit null hat, ohne weiteres Anwendung und liefert, wenn in der Anfangslage  $v = v_0$  sein soll:  $T - T_0 = A$ , und, da  $\dot{\varphi} = v/a, \dot{\varphi}_0 = v_0/a$

$$\frac{1}{2} M (k^2 + a^2) \frac{v^2 - v_0^2}{a^2} = M g h, \quad (h = s \sin \alpha)$$

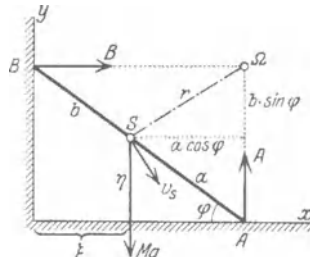


Abb. 229.

und wenn für  $M k^2$  die auf den Umfang  $a$  reduzierte Masse  $M' = M k^2/a^2$  eingeführt wird

$$\frac{1}{2} (M + M') (v^2 - v_0^2) = M g h \quad \text{oder} \quad v^2 = v_0^2 + \frac{2 g h}{1 + M'/M}.$$

Insbesondere erhält man für den Kreiszyylinder

$$\left. \begin{aligned} M k^2 = \frac{1}{2} M a^2 = M' a^2, \quad M' = \frac{1}{2} M \quad \text{und} \quad v^2 = v_0^2 + \frac{2}{3} 2 g h \\ \text{und für die Kugel} \\ M k^2 = \frac{2}{5} M a^2 = M' a^2, \quad M' = \frac{2}{5} M \quad \text{und} \quad v^2 = v_0^2 + \frac{2}{7} 2 g h. \end{aligned} \right\} (421)$$

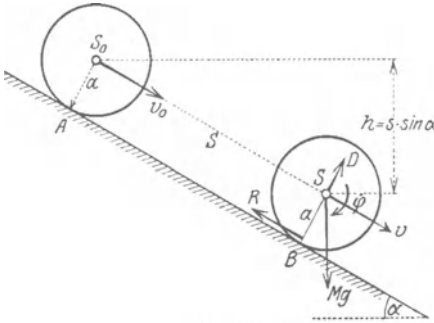


Abb. 230.

Für die Aufstellung der Bewegungsgln. (398) sind die Normalkraft  $D$  und die Reibung  $R$  im Berührungspunkte als Unbekannte einzuführen; die Bewegungsgleichungen lauten

$$\left\{ \begin{aligned} M \ddot{\xi} &= M g \sin \alpha - R, \\ M \ddot{\eta} &= D - M g, \\ M k^2 \ddot{\omega} &= R a. \end{aligned} \right.$$

Da  $\eta = a$ , folgt aus der zweiten Gleichung  $D = M g \cos \alpha$ , und aus den beiden anderen Gleichungen und  $\dot{\xi} = v = a \omega$ ,  $\dot{\xi} = \dot{v} = a \dot{\omega}$  können  $R$

und  $\dot{\omega}$  entfernt werden; man erhält

$$M \dot{v} = M g \sin \alpha - M k^2 \dot{v}/a^2,$$

und da  $\dot{v} = v dv/ds = \frac{1}{2} dv^2/ds$

$$\frac{1}{2} M \frac{k^2 + a^2}{a^2} dv^2 = M g \sin \alpha ds = M g dh,$$

eine Gleichung, die integriert die frühere Energiegleichung gibt.

Der Schwerpunkt des auf der schiefen Ebene rollenden Zylinders bewegt sich daher gerade so wie ein gleitender Körper von der gleichen Masse, dessen Gewicht nur  $\frac{M}{M + M'} G = \frac{2}{3} G$  betragen würde, d. h. so, als ob das Schwerfeld die konstante Beschleunigung  $\frac{2}{3} g$  hätte. Für die Kugel würde für diese Beschleunigung  $\frac{5}{7} g$  zu setzen sein.

Aus den Bewegungsgleichungen kann sodann auch  $R$  ermittelt werden.

## VI. Zwangläufige Bewegung verbundener Systeme. Schwungradberechnung.

**114. Aufgabe dieses Kapitels.** Die zwangläufige Bewegung einer Scheibe ist, wie schon mehrfach hervorgehoben wurde, dadurch gekennzeichnet, daß zur Angabe ihrer Lage in jedem Augenblicke die Angabe einer Koordinate (einer Strecke oder eines Winkels) genügt. Wenn an der Scheibe weitere Scheiben (oder Glieder) gelenkig angeschlossen sind, die ihrerseits zwangläufig geführt sind, so ist auch die Lage aller dieser Scheiben durch jene einzige Koordinate festgelegt. Eine solche zwangläufige Anordnung mehrerer verbundener Scheiben bezeichnet man als eine Körperkette oder als ein Getriebe. Das wich-



tigste Beispiel ist das Schubkurbelgetriebe, Abb. 158, das aus Kurbel, Schubstange, Kreuzkopf und Kolbenstange mit Kolben besteht. In allen diesen Fällen muß es eine einzige Bewegungsgleichung geben, welche die Beschleunigung in der einzigen wesentlichen Koordinate, nennen wir sie etwa  $u$ , durch die einwirkenden Kräfte ausdrückt und es entsteht die Aufgabe, diese Gleichung aufzustellen. Dabei handelt es sich also zunächst nur um die Bewegung selbst und vorläufig nicht um die Ermittlung der Führungs- und Gelenkkräfte.

Die exakte Behandlung der auf diese Weise erhaltenen Gleichung ist insbesondere bei einem verwickelteren Verlauf der eingepprägten Kraft während der Bewegung recht umständlich — wenn nicht unmöglich —, und deshalb begnügt man sich für gewisse praktisch wichtige Fragen, die mit der Dynamik der Getriebe zusammenhängen, meist mit vereinfachenden Näherungen; hierher gehört insbesondere die Aufgabe der Schwungradberechnung, für die im folgenden die hauptsächlichsten Schritte angegeben werden.

**115. Die Lagrangesche Form der Bewegungsgleichung.** Wenn es sich um die Bewegung eines Körpers (oder einer Körperkette) mit einem Freiheitsgrad, d. h. um die Beschleunigung der einen Zwanglaufkoordinate,  $u$ , mittels der diese Bewegung beschrieben werden soll (etwa  $\varphi$  in Beisp. 147, oder  $s$  in Beisp. 156), in ihrer Abhängigkeit von den eingepprägten Kräften handelt, dann ist es doch ein Umweg, wenn man zuerst die drei Bewegungsgleichungen der Scheibe mittels der Führungskräfte aufstellt und dann mit gleichzeitiger Benützung der geometrischen Bedingungen zwei dieser Koordinaten und die Führungskräfte wieder herauschafft; durch diesen Vorgang erhält man jedoch tatsächlich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche die zur Darstellung des Zwanglaufes allein notwendige Koordinate  $u$  nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung und sonst weder die übrigen (etwa vorübergehend noch eingeführten und wieder eliminierten) Koordinaten, noch auch die Führungskräfte enthält.

Für diese Zwanglaufkoordinate  $u$  kann etwa eine Strecke oder ein Winkel genommen werden (wenn eine Kreisbewegung vorkommt, wird am besten ihr Drehwinkel gewählt). Beim Zwanglauf sind dann die Koordinaten  $\xi, \eta$  des Schwerpunktes  $S$  und der Drehwinkel  $\varphi$  der Scheibe mittels geometrischer Gleichungen durch  $u$  ausdrückbar (z. B. kann für  $u$  der Drehwinkel  $\varphi$  selbst gewählt werden). Die Definitionsgl. (401) für  $T$  erscheint dann als homogene quadratische Funktion von  $\dot{u}$ , und ihr Koeffizient wird  $u$  selbst enthalten (s. etwa den Ausdruck für  $T$  im Beisp. 147). Die potentielle Energie  $U$  wird eine Funktion von  $u$  allein,  $\dot{u}$  kommt darin nicht vor.

Es entsteht nunmehr die Aufgabe, die Bewegungsgleichung für diese Zwanglaufkoordinate und für das ganze Getriebe unmittelbar aufzustellen, ohne für jedes System einzeln auf die gewöhnlichen Bewegungsgln. (398) zurückgreifen zu müssen. Da die Energiegleichung  $T + U = h$  bei konservativen Kräften unmittelbar hingeschrieben werden kann, aber nur  $\dot{u}$  (nicht  $\ddot{u}$ ) enthält, und die Bewegung in ähnlicher Weise bestimmen muß wie die Bewegungsgleichung für  $u$  selbst,



so kann sie bei Aufgaben der bezeichneten Art nichts anderes sein, als ein Integral dieser gesuchten Bewegungsgleichung für  $u$ .

Wenn man daher die Energiegleichung  $T + U = h$ , total nach der Zeit  $t$  differenziert, muß offenbar die gesuchte Bewegungsgleichung herauskommen. Man erhält zunächst wieder

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0$$

und ausgeführt, da  $T$  eine Funktion von  $u$  und  $\dot{u}$  und  $U$  eine Funktion von  $u$  allein ist

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \ddot{u} + \frac{\partial T}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial U}{\partial u} \dot{u} = 0. \quad (422)$$

Diese Gleichung kann nun auf eine Form gebracht werden, die als Lagrangesche Bewegungsgleichung bekannt ist und für die Entwicklung der analytischen Mechanik die denkbar größte Bedeutung erlangt hat. Hierzu schreiben wir die letzte Gleichung in der Form

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \frac{d\dot{u}}{dt} + \frac{\partial T}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial U}{\partial u} \dot{u} = 0, \quad (423)$$

und wenden in diesem Ausdruck auf das erste Glied die Regel der Differentiation eines Produkts an, d. h. wir schreiben

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \frac{d\dot{u}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \dot{u} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) - \dot{u} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}}.$$

Nun ist  $T$  von der Form  $\frac{1}{2}a(u)\dot{u}^2$ , d. h. es enthält nur  $\dot{u}^2$  und einen Koeffizienten, in dem nur  $u$  vorkommt; daher ist  $\dot{u} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = 2T = 2(h - U)$ , und

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \frac{d\dot{u}}{dt} = -2 \frac{\partial U}{\partial u} \dot{u} - \dot{u} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}},$$

so daß wir die Bewegungsgl. (423), da (wir  $\dot{u} \neq 0$  annehmen können), auch schreiben können

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial T}{\partial u} = - \frac{\partial U}{\partial u}.} \quad (424)$$

Hat man also ein zwangläufiges System, so genügt es, eine Koordinate  $u$  auszuwählen, die kinetische Energie  $T$  durch  $\dot{u}$  und  $u$ , die potentielle Energie  $U$  durch  $u$  für eine allgemeine Lage der Scheibe auszudrücken und die in der Gl. (424) vorkommenden Differentiationsvorschriften auszuführen; dann erhält man die Bewegungsgleichung für  $u$ . Voraussetzung für die Anwendbarkeit dieser Gleichung ist das Vorhandensein konservativer Kräfte; gleitende Reibungen sind ausgeschlossen und gestatten nicht die unmittelbare Anwendung dieser Methode.

Ist nun z. B.  $u$  eine Länge  $x$ , dann bedeutet  $-\partial U/\partial x$  die „auf  $x$  wirkende Kraft“, ist  $u$  ein Winkel  $\varphi$ , dann ist  $-\partial U/\partial \varphi$  das „auf  $\varphi$  wirkende Moment“.

Die große Bedeutung dieser Form der Bewegungsgleichungen beruht darauf, daß sie keine Vektoren mehr enthält, sondern nur die skalaren Größen  $T$  und  $U$ . Sie gestattet unmittelbar die Anwendung auf Getriebe, da die Lagen aller ihrer Glieder von der Zwanglaufkoordinate  $u$  allein, daher die Geschwindigkeiten von  $\dot{u}$  und  $u$  abhängen. Für irgendein Getriebe hat man daher nur die kinetische Energie  $T$  für alle Glieder, durch  $u$  und  $\dot{u}$  ausgedrückt, zu addieren, ferner ebenso die potentiellen Energien  $U$  aller Kräfte, die auf die Getriebeglieder einwirken, durch  $u$  auszudrücken und zu addieren. Mittels der so erhaltenen Ausdrücke für  $T$  und  $U$  ist dann durch Gl. (424) die Bewegungsgleichung gegeben.

Weiterhin sei (ohne Nachweis) bemerkt, daß für beliebige Systeme mit mehreren ( $n$ ) Freiheitsgraden, deren Lage also durch ebenso viele ( $n$ ) Koordinaten  $u, v, w, \dots$  gekennzeichnet ist, sich ein ganz entsprechendes Ergebnis herausstellt: Man drücke die kinetische Energie  $T$  in diesen  $n$  Koordinaten und deren Ableitungen, die potentielle Energie in diesen Koordinaten allein aus, dann gilt für jede dieser Koordinaten eine Gleichung von der Form (424), die also dann zusammen die  $n$  Bewegungsgleichungen des Systems bilden.

Auf den allgemeinen Beweis für diesen Satz wollen wir hier nicht eingehen. Man kann sich seine Richtigkeit nach der eben für eine Koordinate gegebenen Ableitung etwa klarmachen, wenn man die vollständige Differentiation nach der Zeit auf alle eingeführten voneinander unabhängigen Koordinaten  $u, v, w$  erstreckt; die dabei der Gl. (423) entsprechende Gleichung enthält dann  $n$  solche Klammerausdrücke, die mit  $du/dt, dv/dt, \dots$  multipliziert sind. Denkt man sich statt dieser Faktoren die virtuellen Verschiebungen  $\delta u, \delta v, \delta w, \dots$  geschrieben und setzt man diese sämtlich voneinander unabhängig voraus, so müssen nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen die Klammerausdrücke verschwinden, die dann durch dieselbe Umformung wie oben die Bewegungsgleichungen ergeben.

Die folgenden Beispiele betreffen die Anwendung der Lagrange'schen Gleichung für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen in verschiedenen einfachen Fällen.

Beispiel 157. Punkt in der Ebene. a) Auf Cartesische Koordinaten  $x, y$  bezogen: Es ist  $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ ,  $U = U(x, y)$  daher die Bewegungsgleichungen in der wiederholt benützten Form:

$$m\ddot{x} = -\partial U/\partial x = X, \quad m\ddot{y} = -\partial U/\partial y = Y.$$

b) Auf Polarkoordinaten bezogen:  $T = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\varphi^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$ ; für eine Zentralbewegung ist  $U = U(r)$ , also  $U$  von  $\varphi$  unabhängig, daher lauten die Bewegungsgln. (424)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = m b_r = -\partial U/\partial r, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = m \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0. \end{cases}$$

Die weitere Behandlung dieser Gleichungen ist dieselbe wie in 73.

Beispiel 158. Freie Bewegung der Scheibe in der Ebene. Gl. (401) gibt  $T = \frac{1}{2}M(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + k^2\dot{\varphi}^2)$  und wenn  $U = U(\xi, \eta, \varphi)$  die potentielle Energie

ist, so stimmen die Bewegungsgln. (424) mit den Gln. (398) vollständig überein  
 $M\ddot{\xi} = -\partial U/\partial \xi = X, \quad M\ddot{\eta} = -\partial U/\partial \eta = Y, \quad Mk^2\ddot{\varphi} = -\partial U/\partial \varphi = M.$

Beispiel 159. Bewegung des fallenden Stabes, nach Beisp. 155, Abb. 229. Die kinetische Energie wird immer berechnet aus der kinetischen Energie der Bewegung von  $S$ , vermehrt um die der Drehung um  $S$ . Wählt man  $\varphi$  als Zwanglaufkoordinate, so ist  $r^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi$ ,  $v^2 = r^2 \omega^2$  und

$$T = \frac{M}{2} [a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + k^2] \dot{\varphi}^2, \quad \text{ferner} \quad U = Mgy = Mga \sin \varphi,$$

daraus folgt durch Ausführung der in Gl. (424) enthaltenen Differentiationen unmittelbar die auch in Beisp. 155 erhaltene Bewegungsgleichung für die Koordinate  $\varphi$

$$(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) \ddot{\varphi} + (b^2 - a^2) \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2 + k^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} = -ga \cos \varphi.$$

**116. Die Bewegungsgleichung für Maschinen mit Schubkurbelgetrieben.** Wenn die Bewegung mehrerer, miteinander verbundener Systeme, also etwa eines Getriebes, mit Berücksichtigung der Massen der einzelnen Glieder und unter der Annahme irgendwelcher eingepprägter Kräfte zu bestimmen ist, so kann man zunächst immer jenes Verfahren anwenden, das auch beim einzelnen Körper das naheliegende war: jeder Körper wird durch Anbringung der auf ihn wirkenden Führungs- und Gelenkkräfte von den Nachbarkörpern, mit denen er durch Gelenke, Schieber u. dgl. verbunden ist, losgelöst, und für jeden Körper werden nach Gln. (398) seine drei Bewegungsgleichungen angeschrieben. Für jede Gelenkkraft sind bei ebenen Getrieben zwei unbekannte Komponenten, für jede Kraft an einer (reibungslösen) Führung ist eine unbekannte Kraft senkrecht zur Führungsrichtung anzusetzen; diese Gelenk- und Führungskräfte sind nach dem Wechselwirkungsprinzip paarweise an jenen beiden Körpern anzubringen, zwischen denen die betreffende Verbindung besteht. Aus den so erhaltenen Bewegungsgleichungen werden nun die sämtlichen Führungs- und Gelenkkräfte eliminiert, und bei dieser Elimination auch die geometrischen Gleichungen berücksichtigt, durch die die Schwerpunktskoordinaten und Drehwinkel der einzelnen Getriebeglieder in ihrer Abhängigkeit von einer passend gewählten Zwanglaufkoordinate  $u$  ausgedrückt werden. Dann bleibt bei zwangläufigen Systemen gerade eine Gleichung übrig und die ist nichts anderes als die Bewegungsgleichung für die gewählte Zwanglaufkoordinate.

Bei diesem Verfahren werden also die Führungskräfte zuerst eingeführt und sodann wieder eliminiert; wie schon in 115 hervorgehoben, stellt dieses Verfahren einen Umweg dar und ist daher unzweckmäßig, sobald es sich nur darum handelt, die Bewegungsgleichung für sich allein aufzustellen. Diese Aufstellung der Bewegungsgleichung für die Zwanglaufkoordinate leistet gerade die Lagrangesche Methode. Die Anwendung dieser Methode geschieht nach den Bemerkungen in 115 auf die folgende Weise, die wir gleich im Hinblick auf das Bewegungsproblem der Dampfmaschinen aussprechen wollen.

Nach Wahl einer passenden „Zwanglaufkoordinate“ — wofür am besten der Drehwinkel  $\varphi$  der Kurbel genommen wird — wird die

kinetische Energie  $T$  aller Getriebeglieder durch  $\varphi$  und seine Zeitableitung  $\dot{\varphi}$  ausgedrückt; daß dies immer möglich ist, liegt gerade im Wesen des Zwanglaufs. Ferner wird die potentielle Energie  $U$  durch die Koordinate  $\varphi$  allein ausgedrückt, was wieder dann ausführbar ist, wenn die einwirkenden Kräfte von  $\varphi$  allein abhängen. Dieser Fall trifft bei den Dampfmaschinen zu, da bei diesen die auf den Kolben wirkenden Dampfdrücke durch das „Indikatordiagramm“ als Funktion des Kurbelwinkels  $\varphi$  oder der Stellung des mit der Kurbel zusammenhängenden Kolbens, und zwar durch eine zeichnerisch dargestellte Funktion gegeben sind; es ist also  $U = U(\varphi)$ .

Sobald diese Ausdrücke  $T$  und  $U$  für irgendeine Lage des Getriebes bestimmt sind, ist die Bewegungsgleichung für die Zwanglaufkoordinate  $\varphi$  durch die Gl. (424) gegeben.

Für zwangläufige Systeme gibt jedoch die Energiegleichung  $T + U = h$  unmittelbar ein erstes Integral dieser Bewegungsgleichung und daher braucht nicht auf die Bewegungsgleichung selbst gegriffen zu werden; zur weiteren Untersuchung der Bewegung reicht die Energiegleichung vollkommen aus. Die Lösung der Bewegungsaufgabe verlangt also nur, die Ausdrücke von  $T$  und  $U$  für das Getriebe aufzustellen. Wir wollen nun zeigen, in welcher Weise  $T$  von der Zwanglaufkoordinate  $\varphi$  und deren Ableitung  $\dot{\varphi}$ , und  $U$  von  $\varphi$  allein abhängt.

Die Massen des Schubkurbelgetriebes (nach Abb. 159) einer Dampfmaschine bestehen aus folgenden Teilen (wobei wir uns auf eine Einzylindermaschine beschränken):

1. Aus den rotierenden Massen: Kurbel, Kurbelwelle und Schwungrad; ihre kinetische Energie  $T_1$  ist durch die Gl. (339) gegeben, in der  $J$  das TM dieser Teile um diese Hauptwelle bedeutet. Dieses ist bei reiner Drehung eine von  $\varphi$  unabhängige Größe, die wir jetzt für Kurbel, Kurbelwelle und Schwungrad zusammen etwa mit  $J_1$  bezeichnen wollen; es ist also

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}^2.$$

Das TM des Schwungrades, das mit in  $J_1$  enthalten ist, wollen wir zunächst als bekannt annehmen; späterhin wird es gerade der Zweck dieser Untersuchung sein, seine Größe aus gewissen vorgeschriebenen Bedingungen zu bestimmen.

2. Aus der Schubstange; ihre kinetische Energie  $T_2$  ist nach Gl. (401) durch die kinetische Energie der Bewegung des Schwerpunktes  $\xi_2$ ,  $\eta_2$ , vermehrt um die kinetische Energie der Bewegung um den Schwerpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\psi}$  darzustellen. Da  $\xi_2$ ,  $\eta_2$  und  $\psi$  zufolge des Zwanglaufs ganz bestimmte Funktionen von  $\varphi$  sind, so ist  $T_2$  eine ganz bestimmte Funktion von  $\varphi$  und  $\dot{\varphi}$ , und zwar enthält sie  $\dot{\varphi}$  nur als Faktor in der Form  $\dot{\varphi}^2$ , so daß wir setzen können

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2(\varphi) \dot{\varphi}^2.$$

Diese Gleichung kommt auf folgende Art zustande: Die kinetische Energie der Schubstange ist nach den verwendeten Beziehungen

$$T_2 = \frac{1}{2} M_2 (\dot{\xi}_2^2 + \dot{\eta}_2^2) + \frac{1}{2} M_2 k^2 \dot{\psi}^2.$$

Nun ist

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= r \cos \varphi + \frac{l}{2} \cos \psi \\ \eta_2 &= r \sin \varphi - \frac{l}{2} \sin \psi \end{aligned} \right\} \text{ also } \begin{aligned} \dot{\xi}_2 &= -r \sin \varphi \dot{\varphi} - \frac{l}{2} \sin \psi \dot{\psi}, \\ \dot{\eta}_2 &= r \cos \varphi \dot{\varphi} - \frac{l}{2} \cos \psi \dot{\psi}. \end{aligned}$$

Zwischen  $\varphi$  und  $\psi$  gilt die geometrische Beziehung

$$r \sin \varphi = l \sin \psi, \quad \text{also} \quad r \cos \varphi \dot{\varphi} = l \cos \psi \dot{\psi}.$$

Setzt man dies alles in  $T_2$  ein, so erhält man einen Ausdruck von der angegebenen Form. Man beachte, daß  $J_2(\varphi)$  wohl die Dimension eines TM hat, aber nicht unmittelbar als TM angesehen werden kann.

3. Aus den hin- und hergehenden Massen  $M_3$  des Kreuzkopfes, der Kolbenstange und des Kolbens; ihre kinetische Energie  $T_3$  ist ebenfalls aus den Bedingungen des Zwanglaufs durch einen Ausdruck von derselben Form wie  $T_2$  darstellbar

$$T_3 = \frac{1}{2} J_3(\varphi) \dot{\varphi}^2.$$

Es ist somit die gesamte kinetische Energie des Schubkurbelgetriebes (da die kinetischen Energien als skalare Größen unmittelbar addiert werden können)

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} [J_1 + J_2(\varphi) + J_3(\varphi)] \dot{\varphi}^2, \quad (425)$$

und wenn wir jetzt  $J_2 + J_3 = J(\varphi)$  setzen, so schreibt sich die Energiegleichung in der Form

$$\frac{1}{2} [J_1 + J(\varphi)] \dot{\varphi}^2 + U(\varphi) = h,$$

wobei  $h$  die Summe der Werte von  $T + U$  für irgendeine Stelle der Kurbel bedeutet und  $J_1$  eine Konstante ist; aus dieser Gleichung kann jetzt  $\omega = \dot{\varphi}$  für jede Kurbelstellung  $\varphi$  gerechnet werden; dies ergibt

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2(h - U(\varphi))}{J_1 + J(\varphi)}} \quad (426)$$

und daraus endlich

$$t = \int_0^\varphi \sqrt{\frac{J_1 + J(\varphi)}{2h - 2U(\varphi)}} d\varphi = t(\varphi) \quad (427)$$

Für eine fertig vorgegebene Maschine wäre durch diese Gleichung  $t = t(\varphi)$  und umgekehrt das Bewegungsgesetz  $\varphi = \varphi(t)$  gegeben. Die Konstante  $h$  erhält man, indem man die Integration über eine ganze Kurbelumdrehung erstreckt, wobei dann links die hierfür notwendige Umlaufzeit  $T$  auftritt. In der so entstehenden Gleichung

$$T = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{J_1 + J(\varphi)}{2h - 2U(\varphi)}} d\varphi \quad (428)$$

ist  $h$  die einzige Unbekannte und kann daraus gerechnet werden.

**117. Die Reduktion der Massen und Kräfte.** Da die Bewegung durch  $T$  und  $U$  allein gegeben ist, so sind zwei mechanische Systeme jedenfalls dann als gleichwertig<sup>1</sup> zu bezeichnen, wenn die Ausdrücke von  $T$  und  $U$  in beiden Systemen als Funktion von  $\varphi$  und  $\dot{\varphi}$  übereinstimmen. In dem vorliegenden Fall können wir diese Übereinstimmung dadurch zum Ausdruck bringen, daß wir an den Kurbelzapfen  $A$  eine veränderliche Masse  $M$  anbringen, die an jeder Stelle  $\varphi$  dieselbe kinetische Energie gibt, wie die des ganzen Getriebes; dieser Punkt  $A$  mit der Masse  $M$  soll dieselbe Bewegung machen wie zuvor als Punkt des Getriebes. Wir müssen also setzen

$$T = \frac{1}{2} M r^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} [J_1 + J(\varphi)] \dot{\varphi}^2$$

und erhalten

$$\boxed{M = \frac{1}{r^2} [J_1 + J(\varphi)]}. \quad (429)$$

Es ergibt sich also, daß sich die an dem Kurbelzapfen anzubringende ideelle oder reduzierte Ersatzmasse als eine mit  $\varphi$  veränderliche Größe herausstellt, oder daß die mit der Kurbel verbundenen Getriebeteile auf die Bewegung einen veränderlichen Einfluß ausüben.

Weiter müssen wir an diesem Punkt Kräfte von solcher Größe wirken lassen, daß die zugehörige Funktion  $U$  oder  $-U = A$  für die gegebenen und Ersatzkräfte gleich groß ausfällt. Die Ausführung dieser Überlegung bezeichnet man als Reduktion der Massen und Kräfte an den Kurbelzapfen  $A$ .

A. Reduktion der Massen. a) Rotierende Teile: Die Größe der in  $A$  anzubringenden Ersatzmasse  $M'_1$ , die um die Achse  $O_1$  dasselbe TM ergibt wie die rotierenden Teile des Getriebes, also auch der Kurbel und der Kurbelwelle — jetzt ohne Schwungrad! —, erhält man nach Gl. (353)

$$J_1 = M'_1 r^2, \quad M'_1 = J_1 / r^2 = \text{konst.} \quad (430)$$

b) Schubstange: In Beispiel 146 b wurde gezeigt, daß sich eine ebene Scheibe mit der Masse  $M_2$  hinsichtlich ihrer Masse, Schwerpunktslage und TM durch drei Punktmassen  $m_1, m_2, m_3$  ersetzen läßt, die mit dem Schwerpunkt  $S$  in einer geraden Linie liegen und durch die folgenden Größen gegeben sind

$$m_1 = M_2 k^2 / l a, \quad m_2 = M_2 k^2 / l c, \quad m_3 = M_2 (1 - k^2 / a c).$$

Nehmen wir an, daß der Schwerpunkt  $S_2$  der Schubstange auf der Verbindungslinie  $AB$  liegt und  $AS_2 = a, S_2B = c$  ist, dann können wir diese drei Massen in die Punkte  $A, S_2$  und  $B$  legen und die Reduk-

<sup>1</sup> Im weiteren Sinne kann man zwei Systeme als dynamisch gleichwertig bezeichnen, wenn für sie  $T$  und  $U$  durch irgendeine Substitution  $\varphi = f(\varphi')$  ineinander überführbar sind. Für das vorliegende Problem kommt nur der im Texte gegebene einfachste Fall der dynamischen Gleichwertigkeit (Äquivalenz) in Betracht.

tion der Masse der Schubstange besteht dann einfach in der Reduktion der Massen dieser drei Punkte.

Die Masse  $m_1$  kann unmittelbar zu den reduzierten rotierenden Massen hinzugenommen werden.

Die Gleichheit der kinetischen Energien gibt ferner für die Reduktion von  $m_3$  in  $S_2$  nach  $A$  unmittelbar die folgende Gleichung

$$\frac{1}{2} m_3 v_s^2 = \frac{1}{2} m'_3 v_A^2,$$

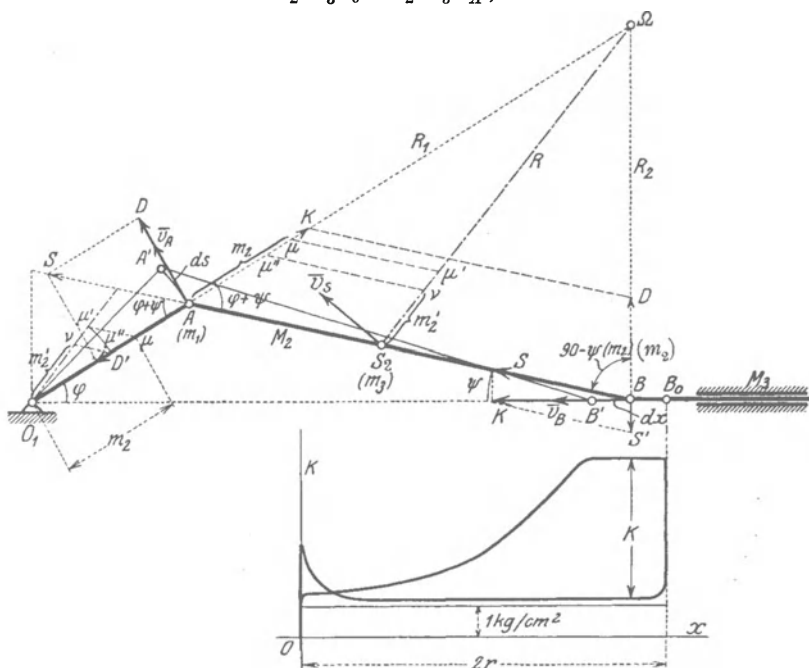


Abb. 231.

aus der sich die nach  $A$  reduzierte Masse  $m_3$  berechnen läßt (Abb. 231)

$$m'_3 = m_3 \left( \frac{v_s}{v_A} \right)^2 = m_3 \frac{R^2}{R_1^2}. \quad (431)$$

Ebenso ergibt die Reduktion der Masse von  $m_2$ , mit der unmittelbar die Masse  $M_3$  von Pleuelstange und Pleuelstange vereinigt werden kann, die Gleichung

$$\frac{1}{2} (m_2 + M_3) v_B^2 = \frac{1}{2} (m'_2 + M'_3) v_A^2$$

und daraus

$$m'_2 + M'_3 = (m_2 + M_3) \frac{v_B^2}{v_A^2} = (m_2 + M_3) \frac{R_2^2}{R_1^2}. \quad (432)$$

Die Ausführung der in den Gl. (431) und (432) gegebenen Operationen kann auch zeichnerisch durch Verwendung ähnlicher Dreiecke ausgeführt werden.



Man mache in Abb. 231:  $\overline{A\mu} = m_2$ ,  $\overline{\mu\mu'} \parallel \overline{AB}$ ,  $\overline{A\mu''} = \overline{S_2\mu'}$ ,  $\overline{\mu''v} \parallel \overline{AB}$  dann ist  $S_2v = m_2'$ ; dieselbe Konstruktion ist auch mit denselben Beziehungen an den durch  $O_1$  zu  $R$  und  $R_1$  gezogenen Parallelen in die Abb. 231 eingetragen und kann auch an dieser Stelle durchgeführt werden. In ähnlicher Weise erfolgt die Reduktion von  $m_3$  und  $M_3$  in  $B$  nach  $A$ .

Die in  $A$  anzubringende Ersatzmasse der Schubstange ist daher

$$M'_2 = m_1 + m_2 \frac{R_3^2}{R_1^2} + m_3 \frac{R^2}{R_1^2}, \tag{433}$$

und die von Kolbenstange und Kolben

$$M'_3 = M_3 \frac{R_2^2}{R_1^2}. \tag{434}$$

Da  $R$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  von  $\varphi$  abhängen, so sind mithin auch  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  sowie auch ihre Summe, d. i. die nach  $A$  reduzierte Gesamtmasse

$$M' = M'_1 + M'_2 + M'_3 \tag{435}$$

eine Funktion von  $\varphi$ .

Beispiel 160. Die Reduktion der Masse der Schubstange durch Gleichsetzung der kinetischen Energien kann auch auf einmal dadurch erfolgen, daß die Momentanbewegung der Schubstange als Drehung um  $\Omega$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $v_A/R_1$  in Betracht gezogen wird. Es ist dann  $M_2(k^2 + R^2)$  das TM der Schubstange um  $\Omega$  und daher

$$\frac{1}{2} M'_2 v_A^2 = \frac{1}{2} M_2 (k^2 + R^2) \frac{v_A^2}{R_1^2}, \quad \text{d. h.} \quad M'_2 = M_2 \frac{k^2 + R^2}{R_1^2};$$

dieser Ausdruck kann auch aus  $M_2$  auf zeichnerischem Wege erhalten werden. Setzt man in Gl. (433) die Werte für  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  ein, so folgt mit Benützung des Kosinussatzes für die Dreiecke  $AS_2\Omega$  und  $BS_2\Omega$

$$\begin{aligned} M'_2 &= M_2 \left[ \frac{k^2}{a^2} + \frac{k^2 R_2^2}{b^2 R_1^2} + \left( 1 - \frac{k^2}{ab} \right) \frac{R^2}{R_1^2} \right] = M_2 \left[ \frac{k^2}{R_1^2} \left( \frac{R_1^2}{a^2} + \frac{R_2^2}{b^2} - \frac{R_1^2}{ab} \right) + \frac{R^2}{R_1^2} \right] \\ &= M_2 \left[ \frac{k^2}{R_1^2} \left( \frac{R^2 + a^2 - 2Ra \cos \alpha}{a^2} + \frac{R^2 + b^2 + 2Rb \cos \alpha}{b^2} - \frac{R^2}{ab} \right) + \frac{R^2}{R_1^2} \right] = M_2 \frac{k^2 + R^2}{R_1^2} \end{aligned}$$

wie zuvor.

**B. Reduktion der Kräfte.** Bezeichnet man den zu dem Kurbelweg  $\overline{AA'} = ds = r d\varphi$  gehörigen Weg des Kreuzkopfes mit  $\overline{BB'} = dx$ , die Kolbenkraft an dieser Stelle mit  $K$  und die gleichwertige Umfangskraft an der Kurbel  $A$ , die Drehkraft (Tangentialkraft) mit  $D$ , so gibt die Gleichheit der Arbeiten für die zusammengehörigen Weg-elemente

$$K dx = D r d\varphi$$

und daraus

$$D = K \frac{dx}{r d\varphi} = K \frac{v_B}{v_A} = K \frac{R_2}{R_1}. \tag{436}$$

Trägt man daher in Abb. 231  $K$  auf  $R_1$  ab, so schneidet die durch dessen Endpunkt zu  $\overline{AB}$  gezogene Parallele auf  $R_2$  die zugehörige Drehkraft  $D$  ab. Diese Drehkräfte werden für eine Anzahl von Kurbel-

stellungen unter Zugrundelegung eines Indikatordiagramms ermittelt, das die gleichzeitig geltende Verteilung der Dampfkräfte auf beiden Kolbenseiten angibt, und längs des auf eine Gerade abgewickelten Kurbelkreises aufgetragen; dadurch erhält man die Drehkraft-Kurbelweg-Linie ( $D$ - $s$ -Linie in Abb. 232a). Ihre Integralkurve ist die Arbeits-Weg-Linie ( $A$ - $s$ -Linie in Abb. 232b).

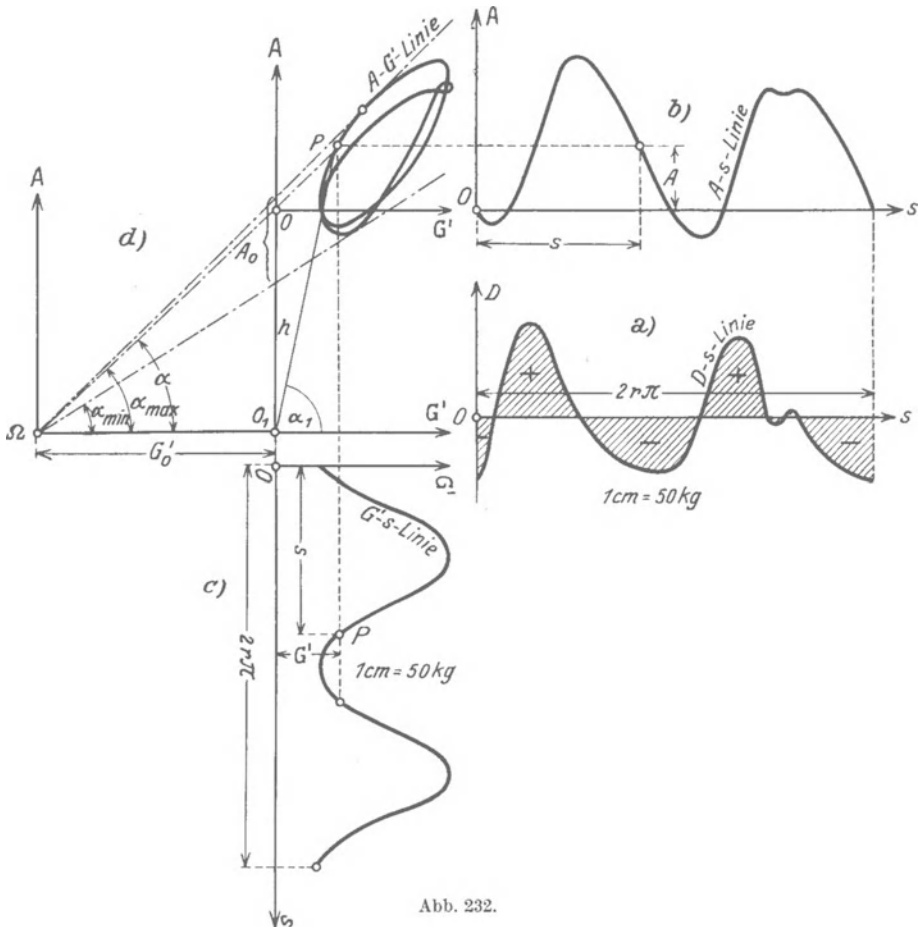


Abb. 232.

Für den Beharrungszustand muß den Kolbenkräften ein Widerstand von solcher Größe entgegenwirken, daß die Summe der Arbeiten der Kolbenkräfte für eine ganze Kurbelumdrehung gleich wird der Arbeit des Widerstandes — nur dann ist die Änderung der kinetischen Energie für eine volle Umdrehung gleich Null und nur dann ist die Geschwindigkeit des Reduktionspunktes (wie auch die Geschwindigkeit aller anderen Punkte) nach jeder Umdrehung auf ihren ursprünglichen Wert zurückgekehrt.

Wenn dieser Widerstand als gleichbleibend angesehen werden darf, so haben wir (ähnlich wie im Beispiel 71, Abb. 125) die  $D$ - $s$ -Linie in ein Rechteck zu verwandeln; die Höhe dieses Rechteckes ist dann  $W$ . Nimmt man als neue  $s$ -Achse eine um  $W$  nach oben verschobene Linie, so hat die Integralkurve der auf diese Linie bezogenen Fläche die Eigenschaft, mit  $2r\pi$  periodisch zu sein, d. h. nach Ablauf dieses Weges immer ihren ursprünglichen Wert Null wieder anzunehmen; die gesamte Arbeit bei einer Kurbelumdrehung ist dann Null und die Geschwindigkeit des Reduktionspunktes hat ihren ursprünglichen Wert wieder angenommen. In Abb. 232 a ist die  $Os$ -Achse schon so eingezeichnet, daß die mit  $+$  bezeichneten den mit  $-$  bezeichneten Flächen gleich sind, die ganze Arbeit, über den Weg  $2r\pi$  erstreckt, also Null ist. Im Beharrungszustand nimmt übrigens nach jeder Kurbelumdrehung  $2r\pi$  auch die Drehkraft  $D$  selbst ihren ursprünglichen Wert wieder an.

Beispiel 161. Die Reduktion von  $K$  nach  $A$  kann auch durch Zerlegung erfolgen. Man zerlege in Abb. 231 zunächst  $K$  in  $S \parallel l$  und in  $S' \perp \bar{v}_B$ , ferner  $S$  in  $D \parallel \bar{v}_A$  und in  $D' \perp \bar{v}_A$ ; dann ist

$$S = \frac{K}{\cos \psi} \quad \text{und} \quad D = S \sin(\varphi + \psi) = K \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos \psi} = K \frac{R_2}{R_1}$$

wie in Gl. (436).

**118. Die Arbeits-Massen-Linie.** Längs des abgewickelten Kurbelweges wollen wir auch die reduzierte Masse  $M'$  als Funktion von  $r\hat{\varphi} = s$  eintragen; da die reduzierte Masse eine periodische Funktion der Kurbelstellung  $\hat{\varphi}$  ist, so gibt diese Massen-Kurbelweg-Linie eine Kurve, die wegen des vorausgesetzten Zwanglaufs ebenfalls nach Ablauf des Kurbelweges  $2r\pi$  ihren ursprünglichen Wert wieder annimmt.

Aus der  $A$ - $s$ -Linie und der  $M'$ - $s$ -Linie kann man nun durch Ausschaltung von  $s$  eine neue Kurve gewinnen: die Arbeits-Massen-Linie ( $A$ - $M'$ -Linie), die als eine „Zustandskurve“, für das betreffende dynamische System (für die „Maschine“) aufzufassen ist; diese  $A$ - $M'$ -Linie ist für eine Maschine im Beharrungszustand eine geschlossene Kurve, da die beiden Linien  $A$ - $s$  und  $M'$ - $s$ , aus denen sie hervorgeht, für Zwanglauf jede für sich periodisch sind. Es wird jedoch nicht diese  $A$ - $M'$ -Linie unmittelbar verwendet, sondern eine damit in engem Zusammenhang stehende, die wir auf folgende Weise gewinnen:

Die Energiegleichung  $T = A + h$  kann nach Ausführung der Massenreduktion in der Form geschrieben werden

$$\frac{1}{2} M' v^2 = A + h, \quad (437)$$

wobei  $v$  die Geschwindigkeit des Reduktionspunktes  $A$  ist und  $h$  die vorläufig noch unbekannte Energiekonstante ist.

Führen wir statt  $M'$  als Rechengröße das „reduzierte Gewicht“  $G' = M'g$  ein, ferner statt  $v$  entsprechende „Geschwindigkeitshöhe“, setzen also  $\frac{v^2}{2g} = H$ , so schreibt sich die vorhergehende Gl. (437)

$$G' H = A + h. \quad (438)$$

$G'$  als Funktion von  $s$  aufgetragen, gibt dann die Gewichtskurbelweg-Linie ( $G'$ - $s$ -Linie) in Abb. 232c. Die Größe von  $h$ , das ist die Verschiebung des Koordinatenanfangspunktes in Richtung der  $A$ -Achse, ist dabei zunächst noch unbestimmt gelassen.

In der Arbeits-Gewichts-Linie ( $A$ - $G'$ -Linie, Abb. 232d), die durch Ausschaltung von  $s$  aus der  $A$ - $s$ -Linie und  $G'$ - $s$ -Linie nach der aus der Abb. 232 ersichtlichen Art entstanden gedacht werden kann, ist die Neigung  $\alpha_1$  der Verbindungslinie von  $O_1$  nach einem „Zustandspunkt“  $P$  zufolge der Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{A + h}{G'} = H \quad (439)$$

ein Maß für die Geschwindigkeitshöhe an dieser Stelle. Diese Gleichung ergibt sich durch Auflösung von Gl. (438) nach  $H$ .

Die äußersten, von  $O_1$  an die  $A$ - $G'$ -Linie gezogenen Tangenten entsprechen dem größten und kleinsten Wert der bei der Bewegung vorkommenden Geschwindigkeitshöhen, also auch der Geschwindigkeiten selbst. Man sieht unmittelbar, daß man diese Neigungen und damit auch die Schwankungen in den Geschwindigkeiten vermindern kann, wenn man  $O_1$  nach rechts in einen neuen Anfangspunkt  $\Omega$  verlegt; und dies bedeutet die Vermehrung des reduzierten Gewichtes  $G'$  um einen konstanten Betrag  $G'_0$ . Diese Vermehrung wird gerade durch Anbringung einer nur rotierenden Masse, also eines Schwungrades bewirkt. Die nach der Verschiebung auftretenden Neigungen sind  $\alpha_{\min}$  und  $\alpha_{\max}$  und ihnen entsprechen die Geschwindigkeitshöhen

$$H_{\max} = \frac{v_{\max}^2}{2g} = \operatorname{tg} \alpha_{\max}, \quad H_{\min} = \frac{v_{\min}^2}{2g} = \operatorname{tg} \alpha_{\min}. \quad (440)$$

Diese Eigenschaften machen die  $A$ - $G'$ -Linie für die Ausführung der „dynamischen Schwungradberechnung“ besonders geeignet.

**119. Dynamische Schwungradberechnung.** In der Dynamik der Maschinen tritt als eines der wichtigsten das Problem auf, die Größe des auf der Maschinenwelle aufzukeilenden Schwungrades so zu bestimmen, daß die Schwankungen der Drehgeschwindigkeit der Welle ein vorgegebenes Maß nicht überschreiten.

Da das TM des sich auf der Achse drehenden Schwungrades konstanten Einfluß auf die Bewegung hat, so kann aus der Betrachtung der  $A$ - $G'$ -Linie unmittelbar ausgesagt werden, daß diese Schwankungen jedenfalls um so kleiner ausfallen werden, je größer das TM des Schwungrades wird, und je rascher die Maschine läuft. Durch beide Erhöhungen wird der Punkt  $O_1$  von der  $A$ - $G'$ -Linie nach links abgerückt und dadurch wird die Schwankung des Winkels  $\alpha$ , der ein Maß für die Geschwindigkeit darstellt, verkleinert.

Beiden Erhöhungen ist aber aus herstellungs- und betriebstechnischen Gründen bald eine Grenze gesetzt und es erhebt sich die Frage nach dem Zusammenhang dieser Schwankungen mit dem TM des Schwungrades.

Die Lösung des Bewegungsproblems läßt sich nach dem in 116 gegebenen Vorgange zwar nicht in Formeln, sicher aber durch graphische Integration ausführen und gibt in Gl. (426)  $\omega = \omega(\varphi)$  und in Gl. (427)  $\varphi = \varphi(t)$  also auch  $\omega = \omega(t)$ . Daraus ließe sich ohne weiteres auch die „mittlere Winkelgeschwindigkeit“

$$\omega_m = \frac{1}{T} \int_0^T \omega(t) dt, \quad (441)$$

d. i. der zeitliche Mittelwert und damit auch die Schwankungen um diesen Mittelwert ableiten. Die in der Gleichung auftretende Konstante  $h$  ist dann so festzulegen, daß das gerechnete  $\omega_m$  der vorgeschriebenen Drehzahl der Maschine entspricht, wodurch die Konstante  $h$  vollständig bestimmt ist.

An Stelle dieses etwas umständlichen Vorganges hat sich in der Praxis ein Näherungsverfahren eingebürgert, das wesentlich einfacher ist und auf den folgenden Annahmen beruht:

1. Die „mittlere Geschwindigkeit“ der Kurbel wird der halben Summe aus der größten und kleinsten gleich gesetzt

$$v_m = \frac{v_{\max} + v_{\min}}{2}. \quad (442)$$

2. Das Verhältnis der Schwankung  $v_{\max} - v_{\min}$  zu  $v_m$  wird als Ungleichförmigkeitsgrad  $\varepsilon$  vorgegeben

$$\frac{v_{\max} - v_{\min}}{v_m} = \varepsilon. \quad (443)$$

Je nach dem Zweck der betreffenden Maschine wird  $\varepsilon$  zwischen  $1/10$  und  $1/300$  gewählt. Dann folgt aus diesen Gleichungen

$$v_{\max} = v_m \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad v_{\min} = v_m \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad (444)$$

wenn noch  $H_m = v_m^2/2g$  als mittlere Geschwindigkeitshöhe eingeführt wird,

$$\left. \begin{aligned} H_{\max} &= H_m \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \approx H_m (1 + \varepsilon) = \operatorname{tg} \alpha_{\max}, \\ H_{\min} &= H_m \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \approx H_m (1 - \varepsilon) = \operatorname{tg} \alpha_{\min}. \end{aligned} \right\} \quad (445)$$

Zieht man daher in Abb. 232 unter den Winkeln  $\alpha_{\max}$  und  $\alpha_{\min}$  die äußersten Tangenten an die A-G'-Linie, so schneiden sich diese in dem Koordinatenanfangspunkt  $\Omega$  eines neuen Achsenkreuzes und geben in der Strecke  $\overline{\Omega O'} = G'_0$  parallel zur G'-Achse den gesuchten Wert des reduzierten Schwungradgewichts

$$G'_0 = M'_0 g = \frac{J_0}{r^2} g. \quad (446)$$

Daraus ergibt sich das kleinste notwendige TM  $J_0$  des Schwungrades in der Form

$$\boxed{J_0 = \frac{G'_0 r^2}{g}} \quad (447)$$

Da der Schnitt der unter den Winkeln  $\alpha_{\max}$  und  $\alpha_{\min}$  gezogenen Tangenten meist sehr flach ausfallen wird, empfiehlt sich für die wirkliche Ausführung der folgende Vorgang: Wir fragen nach jenem Wert  $A_0$  der Arbeit, der den Schwankungen der kinetischen Energie des Schwungrades allein zwischen den größten und kleinsten Werten der Geschwindigkeit entspricht, und erhalten mit Benützung der Gln. (440) aus Abb. 232d

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= G'_0 (H_{\max} - H_{\min}) = G'_0 (\operatorname{tg} \alpha_{\max} - \operatorname{tg} \alpha_{\min}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{J_0}{r^2} (v_{\max}^2 - v_{\min}^2) = \frac{J_0}{r^2} v_m^2 \varepsilon = J_0 \omega_m^2 \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (448)$$

wenn  $\omega_m$  die mittlere Winkelgeschwindigkeit ist; dabei ist auch verwendet, daß nach den Gln. (442) und (443)

$$v_{\max}^2 - v_{\min}^2 = 2 v_m^2 \varepsilon$$

ist.

Die unter  $\alpha_{\max}$  und  $\alpha_{\min}$  gezogenen Tangenten schneiden daher auf der A'-Achse eine Strecke  $A_0$  (im Arbeitsmaßstabe) aus (Abb. 232d), aus der das gesuchte TM des Schwungrades durch die vorhergehende Gleichung in der Form bestimmt ist

$$\boxed{J_0 = \frac{A_0}{\varepsilon \omega_m^2}} \quad (449)$$

Für die zeichnerische Ausführung dieser Methode ist für jede Größe ein passender Maßstab zu wählen und bei den einzelnen durchgeführten Konstruktionen zu berücksichtigen.

**120. Angenäherte Schwungradberechnung.** Für die praktische Schwungradberechnung wird das in 119 entwickelte dynamische Verfahren meist noch weiter vereinfacht.

a) Der einfachste Vorgang wäre der, den veränderlichen Einfluß der Masse von Schubstange, Kreuzkopf, Kolben und Kolbenstange überhaupt zu vernachlässigen und die Arbeitsgleichung für das sich ungleichförmig drehende Schwungrad in der einfachen Form anzusetzen

$$\frac{1}{2} J_0 \omega_{\max}^2 - \frac{1}{2} J_0 \omega_{\min}^2 = A_0, \quad (450)$$

wobei  $\omega_{\max}$  und  $\omega_{\min}$  den größten und kleinsten Wert der Winkelgeschwindigkeit und  $A_0$  den zwischen diesen geltenden Arbeitswert (den „größten auftretenden Arbeitsüberschuß“) bezeichnen. Durch Festlegung von  $\varepsilon$  und  $\omega_m$  ergibt sich  $J_0$  nach Gl. (449) wie zuvor. (Siehe hierzu auch Beispiel 71 in 67.)

Beispiel 162. Wenn für die  $D$ - $s$ -Linie längs jeder Halbumdrehung ein sinusförmiger Verlauf vorausgesetzt wird, und wenn  $D_0$  den größten Wert von  $D$  bezeichnet, dann ist nach Abb. 233 zu setzen

$$D = D_0 \sin \varphi;$$

der durch die Gleichheit der Arbeiten längs einer Halbumdrehung bestimmte, konstant angenommene Widerstand  $W$  ist dann der Mittelwert dieser „Sinuslinie“

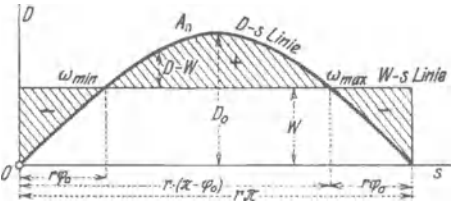


Abb. 233.

$$W r \pi = \int_0^\pi D r d\varphi = D_0 r \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi,$$

und also

$$W = \frac{2 D_0}{\pi} \quad \text{oder} \quad D_0 = \frac{\pi}{2} W.$$

Die Stellen  $\varphi_0$  und  $\pi - \varphi_0$  der kleinsten und größten Winkelgeschwindigkeit,  $\omega_{min}$  und  $\omega_{max}$ , sind gegeben durch die Gleichsetzung von  $D$  und  $W$

$$D = W = \frac{\pi}{2} W \sin \varphi_0,$$

und daraus folgt

$$\sin \varphi_0 = \frac{2}{\pi} = 0,636, \quad \varphi_0 = 0,690 \text{ (Bogenmaß);}$$

dieser Bogen entspricht dem Winkel von  $39^\circ 30'$ . Der auftretende Arbeitsüberschuß ist daher

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_{\varphi_0}^{\pi - \varphi_0} (D - W) r d\varphi = W r \int_{\varphi_0}^{\pi - \varphi_0} \left( \frac{\pi}{2} \sin \varphi - 1 \right) d\varphi = W r \left[ -\frac{\pi}{2} \cos \varphi - \varphi \right]_{\varphi_0}^{\pi - \varphi_0} \\ &= W r [\pi \cos \varphi_0 + 2 \varphi_0 - \pi] = 0,664 W r = J_0 \varepsilon \omega_m^2. \end{aligned}$$

Nach Gl. (330) ist das Drehmoment der Maschine, wenn  $N$  ihre Leistung in PS und  $n$  die Drehzahl in 1 min bedeutet

$$W r = 716,2 \frac{N}{n},$$

und damit folgt durch Einsetzen in die vorhergehende Gleichung, aus der  $J_0$  gerechnet wird, da  $\omega_m = \frac{\pi n}{30}$  das TM  $J_0$  in kgms<sup>2</sup>

$$J_0 = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{30}{\pi n} \right)^2 0,664 \cdot 716,2 \frac{N}{n} = \frac{43400 N}{\varepsilon n^3}, \quad (451)$$

Diese Gleichung kann als erster Anhaltspunkt für die Schwungradberechnung einer Einzylindermaschine dienen.

b) Das Verfahren von Radinger sucht die Massen des Schubkurbelgetriebes in der Art zu berücksichtigen, daß wohl der Einfluß der hin- und hergehenden Massen von Kreuzkopf, Kolbenstange und Kolben, nicht aber der der besonderen schwingenden Bewegung der Schubstange in Rechnung gezogen wird. Von der Masse der Schubstange wird  $\frac{2}{3}$  als rotierend der Masse der Kurbel,  $\frac{1}{3}$  als hin- und hergehend den Massen von Kolbenstange und Kolben zugeschlagen. Die zur Beschleunigung und Verzögerung dieser Massen aufzuwendenden Beschleunigungskräfte werden durch das Produkt aus der Masse dieser



Teile und den (wie in Beispiel 92 bestimmten) Beschleunigungen für annähernd gleichförmigen Kurbelumlauf ausgerechnet und im beschleunigten Teil der Bewegung von den Kolbenkräften  $K$  in Abzug gebracht, im verzögerten Teil diesen additiv hinzugefügt. Der übrige Vorgang ist wie vorher: mit den so veränderten Kolbenkräften wird die  $D$ - $s$ -Linie, daraus durch Integration die  $A$ - $s$ -Linie und aus dieser der größte auftretende Arbeitsüberschuß  $A_0$  für gleichbleibenden (oder sonst irgendwie veränderlichen) Widerstand  $W$  ermittelt; die Gl. (449) gibt das erforderliche Trägheitsmoment des Schwungrades. Dieses Verfahren gilt, entsprechend erweitert, natürlich auch für Mehrzylindermaschinen und steht heute noch in weitem Maße in Verwendung.

**121. Dynamische Kräftepläne.** Mit der Bestimmung der Bewegung eines Getriebes ist erst ein Teil der Aufgabe der technischen Mechanik erledigt. Wie bei allen derartigen Fragestellungen erhebt sich außerdem noch die Frage nach den Gelenk- und Führungskräften längs des ganzen Verlaufes der Bewegung, die sich naturgemäß auf die nach den auftretenden größten Werten zuspitzt. Wir unterscheiden auch hier die rechnerische und die zeichnerische Methode und geben für beide unter Benutzung der bisher gefundenen Ergebnisse einige wesentliche Hinweise.

a) Die rechnerische Methode geht von den Bewegungsgleichungen für jede einzelne Scheibe des Getriebes aus; sie haben die Form der Gln. (398), sofern zu den eingepprägten Kräften auch die auftretenden Gelenk- und Führungskräfte hinzugenommen werden. Für das Schubkurbelgetriebe setzen wir als eingepprägt nur die in der Kolbenstange wirkende Kolbenkraft  $\bar{K}$  und den auf den Kurbelzapfen  $A$  wirkenden Widerstand  $\bar{W}$  voraus. Die Gelenkkräfte  $\bar{O}$ ,  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  an den drei Gelenken  $O$ ,  $A$ ,  $B$ , sind dann nach Abb. 234 durch je zwei Komponenten ( $X_1, Y_1$ ;  $X_2, Y_2$ ;  $X_3, Y_3$ ) festgelegt, die für die einzelnen Scheiben nach dem Wechselwirkungsgesetze einzuführen sind. Die an der Kreuzkopfführung auftretende Führungskraft sei  $\bar{D}$ .

Die Bewegungsgleichungen für die drei Scheiben, aus denen das Schubkurbelgetriebe besteht, lauten dann nach dem d'Alembertschen Prinzip

$$\left. \begin{array}{l} \text{Scheibe 1: } \left\{ \begin{array}{l} X_1 - X_2 - m_1 b_{1x} = 0 \\ Y_1 - Y_2 - m_1 b_{1y} = 0 \\ X_2 r \sin \varphi - Y_2 r \cos \varphi - J_1 \ddot{\varphi} = 0 \end{array} \right. \\ \text{Scheibe 2: } \left\{ \begin{array}{l} X_2 - X_3 - m_2 b_{2x} = 0 \\ Y_2 - Y_3 - m_2 b_{2y} = 0 \\ (X_2 a + X_3 c) \sin \psi + (Y_2 a + Y_3 c) \sin \psi - J_2 \ddot{\psi} = 0 \end{array} \right. \\ \text{Scheibe 3: } \left\{ \begin{array}{l} X_3 - K + m_3 b_3 = 0 \\ Y_3 + D = 0. \end{array} \right. \end{array} \right\} (452)$$

Wegen der geometrischen Bedingungen des Zwanglaufes sind die Größen  $b_{1x}$ ,  $b_{1y}$ ,  $b_{2x}$ ,  $b_{2y}$ ,  $b_3$ ,  $\psi$  und  $\varphi$  durch  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $\ddot{\varphi}$  ausdrückbar. Durch

Auflösung dieser acht Gleichungen ergeben sich die sieben Komponenten der Gelenkkräfte  $X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3$  in  $O, A, B$  und die unbekannte Führungskraft  $D$  des Kreuzkopfes für jede Stellung des Getriebes, und außerdem die eigentliche Bewegungsgleichung. Die

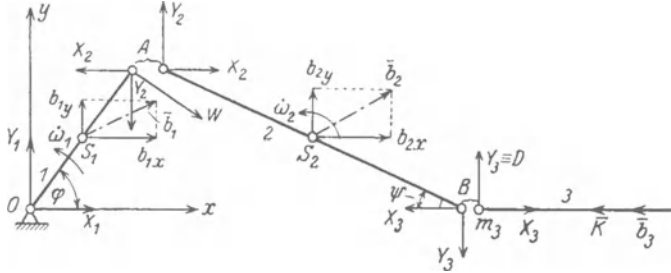


Abb. 234.

wirkliche Durchführung dieses einfachen Ansatzes erweist sich jedoch als recht umständlich, weshalb auch hier mit Vorteil die zeichnerische Methode gewählt wird.

b) Auch bei der zeichnerischen Methode kommt es auf die Anwendung des d'Alembertschen Prinzipes für geführte Systeme an, nach dessen Wortlaut jede Scheibe für sich unter dem Einfluß der auf sie wirkenden eingepägten Kräfte, der Gelenk- und Führungskräfte und der Trägheitskräfte im Gleichgewichte ist.

Die Trägheitskräfte einer ebenen Scheibe sind einer im Schwerpunkt wirkenden Einzelkraft  $-m\bar{b}$  zusammen mit einem Moment  $-mk^2\dot{\omega}$  gleichwertig. Zur Einführung dieser Größen in die Zeichnung ist es am einfachsten, die Trägheitseigenschaften jeder Scheibe durch zwei Ersatzmassen  $m', m''$  darzustellen, die in den Gelenken liegen, durch die die betreffende Scheibe mit den anderen in Verbindung steht. Nach 108, Beispiel 146a ist dies immer möglich, sobald der Schwerpunkt  $S$  der betreffenden Scheibe auf der Verbindungslinie dieser Gelenkpunkte liegt. Die Ersatzmassen haben dann die Größen

$$m' = m \frac{c}{l}, \quad m'' = m \frac{a}{l}. \quad (453)$$

Die Beschleunigungskräfte dieser beiden Ersatzmassen liefern dann, da die Beschleunigungen der Punkte einer starren Stange  $AB$  eine zu dieser ähnliche Punktreihe geben (Abb. 235)

$$m' \bar{b}_A + m'' \bar{b}_B = m \frac{c}{l} \bar{b}_A + m \frac{a}{l} \bar{b}_B = m \bar{b}_s, \quad (454)$$

d. h. ihre Summe stellt tatsächlich die Beschleunigungskraft  $m\bar{b}_s$  der in  $S$  vereinigten Scheibenmasse  $m$  dar. Das Moment der Beschleunigungskräfte von  $m'$  und  $m''$  würde jedoch wegen  $a + c = l$  ergeben

$$(m' a^2 + m'' c^2) \dot{\omega} = \left( m \frac{c}{l} a^2 + m \frac{a}{l} c^2 \right) \dot{\omega} = m a c \dot{\omega}.$$

Da das Moment der Massenkräfte der Scheibe aber  $mk^2\dot{\omega}$  sein soll, so hat man außer dem Moment der Beschleunigungskräfte der beiden Ersatzmassen  $m'$ ,  $m''$  noch ein zusätzliches Moment von der Größe  $m(k^2 - ac)\dot{\omega}$  im Sinn von  $\dot{\omega}$ , also für die Trägheitskräfte ein Moment

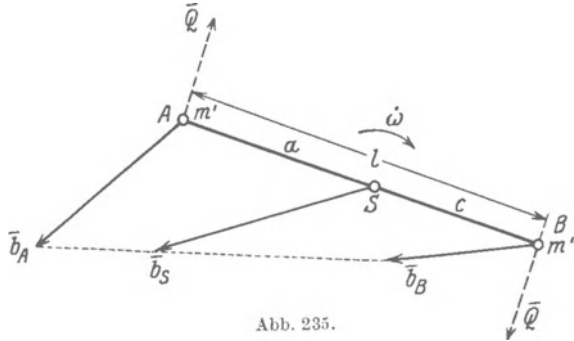


Abb. 235.

von der Größe  $m(ac - k^2)\dot{\omega}$  im Sinn von  $\dot{\omega}$  anzubringen, um das wirkliche Moment der Trägheitskräfte der Scheibe vom Betrage  $-mk^2\dot{\omega}$  zu erhalten. Wir lösen nun dieses Moment gemäß der Gleichung

$$m(ac - k^2)\dot{\omega} = Ql$$

in ein Kräftepaar auf, wobei wir diese beiden Kräfte  $Q$ ,  $-Q$  in den Anschlußgelenken der betrachteten Scheibe ansetzen.

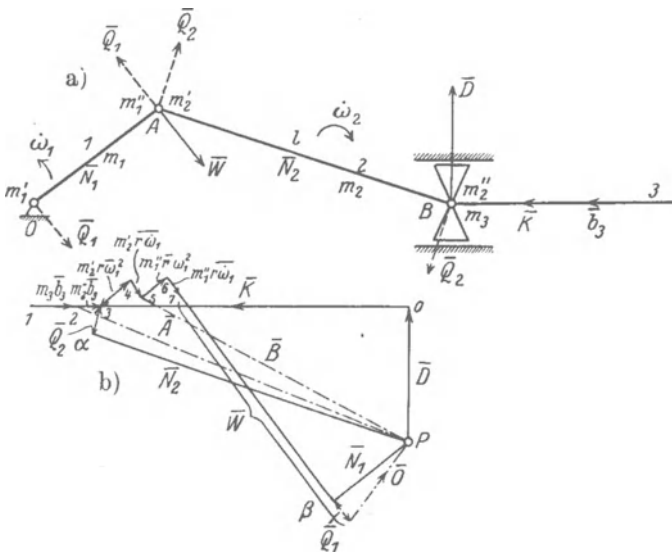


Abb. 236.

Für die drei Scheiben 1, 2, 3 des Schubkurbelgetriebes sind die auf diese Weise anzubringenden Kräfte in Abb. 236a kenntlich gemacht und in dem „dynamischen Kräfteplan“ b) zusammengesetzt. Die Gleich-

gewichtgruppen sind dann, für die<sup>1</sup>

Scheibe 3:  $(\bar{D}, \bar{K}, -m_3 \bar{b}_3, \bar{B})$ ,

„ 2:  $(-\bar{B}, -m_2'' \bar{b}_3, \bar{Q}_2, -\bar{Q}_2, -m_2' \bar{r} \omega_1^2, -m_2' r \bar{\omega}_1, \bar{A})$

„ 1:  $(\bar{A}, -m_1'' \bar{r} \omega_1^2, -m_1' \bar{r} \bar{\omega}_1, \bar{W}, \bar{Q}_1, -\bar{Q}_1, \bar{Q})$ .

Die aus diesen Kräften bestehenden Kraftecke sind geschlossen.

Für die Auffindung des Poles  $P$  des Kräfteplans wird (außer den Massen und Trägheitsmomenten) der Bewegungszustand des Getriebes in der betrachteten Stellung, also die Größen  $b_3, \omega_1, \dot{\omega}_1$  als bekannt angenommen, und zuerst die Kräfte

$$\begin{aligned} \bar{K}, -m_3 \bar{b}_3, -m_2'' \bar{b}_3, \bar{Q}_2, -\bar{Q}_2, -m_2' \bar{r} \omega_1^2, -m_2' r \bar{\omega}_1, \\ -m_1'' \bar{r} \omega^2, -m_1' \bar{r} \bar{\omega}_1, \bar{W}, \bar{Q}_1, -\bar{Q}_1 \end{aligned}$$

aufgetragen. Dann werden an den Endpunkten der Zusatzkräfte  $\bar{Q}_2$  und  $\bar{Q}_1$ , die Parallelen zu den „Stangenkräften“  $N_2$  und  $N_1$  gezogen; diese schneiden sich in dem gesuchten Pole  $P$  des Kräfteplans, der lotrecht unter dem Anfangspunkt 0 von  $\bar{K}$  liegen muß, was eine Kontrolle für die Richtigkeit der Zeichnung abgeben kann.

Die so gefundenen Vektoren  $N_1, N_2$  bedeuten natürlich nur die „Stangenkräfte“ für das Ersatzsystem der nach den Gelenkpunkten reduzierten Massen; die wirklichen Stangenkräfte müßten daraus erst ermittelt werden.

## VII. Schwerpunktsatz und Flächensatz.

**122. Formulierung des d'Alembertschen Prinzips mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeiten.** Nach der Aussage des d'Alembertschen Prinzips entsteht für irgendeinen bewegten Körper oder ein System von Körpern eine Gleichgewichtsgruppe, wenn zu den eingepprägten Kräften noch die Trägheitskräfte hinzugenommen werden. Dabei ist wichtig, von vornherein festzulegen, welche Körper zu dem System zu wählen sind; das System kann entweder ein Punkthaufen sein oder aus starren Körpern bestehen. An den Stellen, wo diese Körper mit anderen — nicht zu dem System gehörigen — verbunden oder längs diesen geführt sind, sind (nach der Formulierung, die wir bisher kennen gelernt haben) die Auflager- und Führungskräfte anzubringen und zu den eingepprägten hinzuzunehmen. Die eingepprägte Kraft für das Teilchen  $m_i$  sei durch  $\bar{K}_i (X_i, Y_i, Z_i)$  gegeben. Ferner sei durch die Kraft  $\bar{J}_i (J_{ix}, J_{iy}, J_{iz})$  der Einfluß des übrigen Systems auf das Teilchen  $m_i$ , also die auf  $m_i$  wirkende „innere Kraft“ gegeben. Die Bewegungsgleichungen für  $m_i$  lauten daher

$$m_i \ddot{x}_i = X_i + J_{ix}, \quad m_i \ddot{y}_i = Y_i + J_{iy}, \quad m_i \ddot{z}_i = Z_i + J_{iz}.$$

<sup>1</sup> Es bedeutet hier  $r \bar{\omega}$  einen Vektor vom Betrage  $r \omega$ , in der Richtung senkrecht zu  $\bar{r}$ , gegen  $\bar{r}$  um  $\pi/2$  im Sinne von  $\dot{\omega}$  gedreht.

Multipliziert man diese Gleichungen mit  $\delta x_i$ ,  $\delta y_i$ ,  $\delta z_i$ , die die Komponenten irgendeines „virtuellen“ Weges  $\bar{\delta s}_i$  bezeichnen und addiert sie für alle Teilchen  $m_i$ , so verlangt das d'Alembertsche Prinzip, da die inneren Kräfte nur von der gegenseitigen Wirkung der Teilchen aufeinander herrühren, daß diese inneren Kräfte zusammen für sich im Gleichgewicht sind

$$S(J_{ix} \delta x_i + J_{iy} \delta y_i + J_{iz} \delta z_i) = 0$$

und es folgt daher

$$S m_i (\ddot{x}_i \delta x_i + \ddot{y}_i \delta y_i + \ddot{z}_i \delta z_i) = \sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i), \quad (455)$$

wobei die linke Summe über alle vorhandenen Massen, die rechte bei glatten Führungen nur über alle vorhandenen eingepprägten Kräfte zu erstrecken ist.

Die virtuellen Verschiebungen sind ja gerade dadurch definiert, daß sie mit den geometrischen Bedingungen der Aufgabe im Einklang stehen; die Arbeiten der Führungskräfte bei diesen Verschiebungen sind Null, weil diese zu den Kräften senkrecht stehen. Dasselbe gilt von den auftretenden Haftreibungen, weil die zugehörige virtuelle Verschiebung selbst Null ist.

Es liegt nun nahe, den Wirkungsbereich dieser Formulierung des Prinzips dadurch zu erweitern, daß bei den Verschiebungen jedesmal eine Auflagerbedingung freigegeben und die Arbeit der dann tatsächlich Arbeit leistenden Auflagerkraft in Rechnung gestellt wird. Dann kann das Prinzip auch zur Bestimmung der Führungs- und Auflagerkräfte selbst dienen, wobei aber zu beachten ist, daß die Verschiebungen nicht mehr „virtuelle“ sind.

Bei rauen Führungen sind jedoch die Reibungskräfte zu den eingepprägten hinzuzunehmen und ihre Arbeiten in die Rechnung einzusetzen. Bewegungsreibungen sind also wie eingepprägte Kräfte zu behandeln, wie dies auch schon in 12b zum Ausdruck gelangt ist.

Wenn das gegebene System aus einem starren Körper besteht und wenn man für die Verschiebungen  $\delta x_i$ ,  $\delta y_i$ ,  $\delta z_i$  die Ausdrücke (156) in 61 wählt, wie sie den Verschiebungen eines starren Körpers entsprechen, dann erhält man unmittelbar die Bewegungsgleichungen in der Form (379) wieder, und als besonderen Fall auch die Gleichungen (398) der starren Scheibe.

**123. Der Satz von der Bewegung des Massenmittelpunkts für einen Punkthaufen.** Wenn man die virtuellen Verschiebungen parallel zur  $x$ -Achse, und zwar so vornimmt, daß das System als Ganzes um  $\delta x$  verschoben wird, also für alle Teilchen  $\delta x_i = \delta x$ ,  $\delta y_i = 0$ ,  $\delta z_i = 0$  setzt, so folgt die Gleichung

$$S m_i \ddot{x}_i = \sum X_i,$$

wobei die rechte Summe bei einem freien System nur aus dem eingepprägten, bei einem geführten aus den eingepprägten und den Führungskräften in der  $x$ -Richtung besteht. Nehmen wir nun auch die beiden

anderen ähnlich gebauten Gleichungen für die  $y$ - und  $z$ -Achse hinzu und führen die Koordinaten  $(\xi, \eta, \zeta)$  des Massenmittelpunktes  $S$  durch die Gln. (99) ein

$$S m_i x_i = M \xi, \quad S m_i y_i = M \eta, \quad S m_i z_i = M \zeta,$$

so erhalten wir, wenn wir diese Gleichungen zweimal nach  $t$  differenzieren und zu einer Vektorgleichung vereinigen

$$\boxed{M \ddot{\vec{r}} = \sum \overline{K}_i}, \quad (456)$$

d. h. der Massenmittelpunkt  $S$  des Punkthaufens oder des gegebenen Massensystems bewegt sich gerade so, als ob alle Kräfte ohne Änderung ihrer Größen und Richtungen an der in  $S$  vereinigten Masse  $M$  des ganzen Systems angriffen würden.

Wenn insbesondere eingeprägte und Führungskräfte nicht vorhanden sind, dann folgt aus den Gln. (456) für  $\sum \overline{K}_i = 0$

$$\ddot{\vec{r}} = 0$$

oder integriert

$$\dot{\vec{r}} = \vec{a}. \quad (457)$$

und nochmals integriert

$$\vec{r} = \vec{a}t + \vec{b}, \quad (458)$$

wobei  $\vec{a} (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{b} (b_1, b_2, b_3)$  Integrationskonstanten sind. Bei fehlenden äußeren Kräften bewegt sich daher der Schwerpunkt gleichförmig in gerader Bahn, wie auch sonst die Bewegung der einzelnen Körper des Systems und deren gegenseitige Einwirkungen beschaffen sein mögen. Die Gl. (456) kann dann allgemein integriert und in der Form geschrieben werden

$$\vec{B} = S m \dot{\vec{r}} = M \dot{\vec{r}} = M \vec{a} \quad (459)$$

und diese besagt, daß die Summe der Bewegungsgrößen der zum System gehörigen Massen konstant und gleich der Bewegungsgröße der im Schwerpunkt vereinigten Gesamtmasse ist.

Die Bewegungsgl. (456) des Schwerpunktes  $S$  des ganzen Systems kann auch in der Form geschrieben werden

$$\boxed{\frac{d\vec{B}}{dt} = \sum \overline{K}_i}. \quad (460)$$

Beispiel 163. Anwendungen: Aus diesem Prinzip folgt, daß die Bewegung des Schwerpunktes  $S$  eines Systems durch innere Kräfte allein nicht beeinflußt werden kann; auch Kräftepaare sind auf seine Bewegung ohne Einfluß. Die Bewegung des Schwerpunktes eines beliebig gestalteten Körpers erfolgt überdies ganz unabhängig von allen Veränderungen der Gestalt und Struktur, die durch innere Kräfte allein an dem Körper hervorgerufen werden. So kann ein Turner nach dem Absprung vom Boden die Bewegung seines Schwerpunktes nicht mehr beeinflussen. Der Schwerpunkt eines explodierenden Geschosses bewegt sich (wenn vom Luftwiderstand abgesehen wird) in einer Bahn, die durch die Explosion nicht geändert wird. Aus dem Satze folgt auch, daß der Schwer-



punkt unseres Sonnensystems, auf das nur die Anziehungskräfte zwischen den einzelnen Himmelskörpern wirken, entweder ruht, oder sich gegen den Fixsternhimmel geradlinig und mit gleichbleibender Geschwindigkeit bewegt. Weiter folgt daraus, daß jede Vorwärtsbewegung auf einem absolut glatten Boden ausgeschloßen ist, auch die Erscheinung des Rückstoßes der Geschütze gehört hierher. Endlich liegt in diesem Satze der Grund für die Unmöglichkeit, ein Luftschiff ohne Eigenbewegung (Freiballon) durch Anbringung von Steuerflächen lenkbar zu machen. Eine wichtige Anwendung findet er schließlich auch in der Theorie des Stoßes (IX).

Beispiel 164. Massenausgleich hinsichtlich der Bewegungsgrößen der bewegten Maschinenteile. In Beispiel 151 wurde gezeigt, daß ein einzelner, sich um eine Achse drehender Körper dann und nur dann keine Unterstützungskräfte in den Lagern verursacht, wenn 1. sein Schwerpunkt  $S$  in der Drehachse liegt, und 2. diese Drehachse eine Hauptträgheitsachse ist.

Aus der Gl. (460) gewinnen wir nunmehr die Bedingung dafür, daß irgendein System von miteinander verbundenen Körpern, die ihre gegenseitigen Lagen bei der Bewegung verändern, auf die Führungen und Auflager keine Kräfte ausübt. Diese Bedingung lautet:  $\bar{B} = M \bar{v}_s = \sum m_i \bar{v}_i = \text{konst.}$ , und im besonderen  $\bar{B} = 0$ , wenn zu irgendeiner Zeit  $t$ :  $\bar{v}_s = 0$  war; d. h. die Bewegung der Massen muß so verlaufen, daß der Gesamtschwerpunkt des Systems entweder in Ruhe bleibt, oder sich gleichförmig und geradlinig bewegt. (1. Bedingung für den Massenausgleich.) Wenn auf diese Bedingung nicht Rücksicht genommen würde, so würden durch die hin- und hergehenden Massen der Kolbenmaschinen in den Fahrzeugen und Gebäuden, in denen solche Maschinen eingebaut sind (Lokomotiven, Kraftwagen, Flugzeuge, Fabrikgebäude) im Takte der Motorbewegung verlaufende Erschütterungen entstehen, die aus verschiedenen Gründen vermieden werden müssen. Jede Verlagerung der Massen würde nämlich wie eine eingeprägte periodische Kraft wirken und eine erzwungene Schwingung des Maschinenfundamentes (bei Loko-

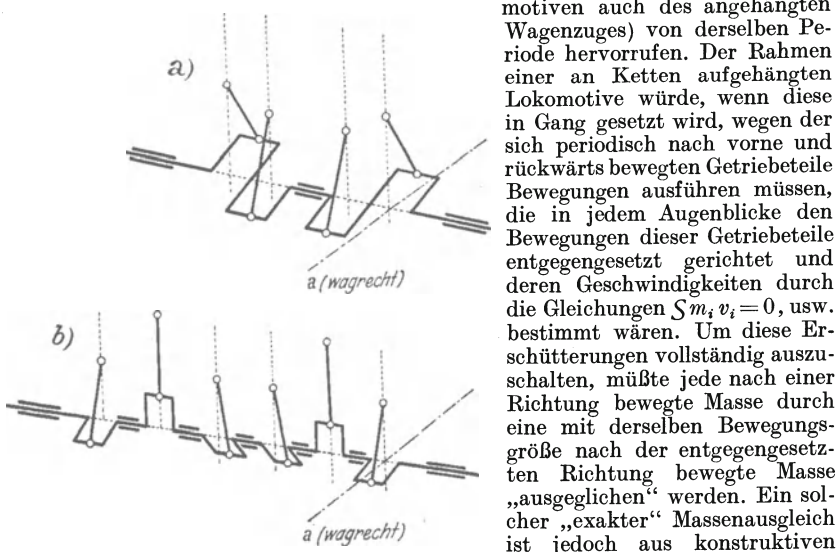


Abb. 237.

motiven auch des angehängten Wagenzuges) von derselben Periode hervorrufen. Der Rahmen einer an Ketten aufgehängten Lokomotive würde, wenn diese in Gang gesetzt wird, wegen der sich periodisch nach vorne und rückwärts bewegten Getriebeteile Bewegungen ausführen müssen, die in jedem Augenblicke den Bewegungen dieser Getriebeteile entgegengesetzt gerichtet und deren Geschwindigkeiten durch die Gleichungen  $\sum m_i v_i = 0$ , usw. bestimmt wären. Um diese Erschütterungen vollständig auszuschalten, müßte jede nach einer Richtung bewegte Masse durch eine mit derselben Bewegungsgröße nach der entgegengesetzten Richtung bewegte Masse „ausgeglichen“ werden. Ein solcher „exakter“ Massenausgleich ist jedoch aus konstruktiven Gründen undurchführbar. Auch die Verwendung von Mehr-

zylindermaschinen mit gleichgroßen Zylindern und symmetrischer Anordnung der Pleueln nach Abb. 237 a) für Vierzylindermaschinen mit einem Pleuelwinkel von  $180^\circ$  und b) für die Sechszylindermaschinen mit einem Pleuelwinkel von  $120^\circ$  bringt keinen vollständigen Massenausgleich, weil die



Geschwindigkeitsverteilung der hin- und hergehenden Massen der Schubstangen und Kolben usw. für Hin- und Rückgang nicht symmetrisch ist (s. Beispiel 92) und daher die Bewegungsgrößen der (hier als gleichgroß angenommenen) hin- und hergehenden Massen nicht in jedem Augenblicke genau die Summe Null ergeben. Bei Lokomotiven wird der Massenausgleich der Getriebmassen durch Gegenmassen angestrebt, die im Innern der Radkränze der Treibräder angebracht werden. Solche Gegenmassen können natürlich nur zur Ausgleichung von rotierenden Massen dienen, deren Schwerpunkte nicht in den Radachsen liegen; auch jene Teile der Schubstangenmassen, die konstanten Einfluß auf die Bewegung haben (wie  $m_1$  in 117 A, b), können auf diese Weise ausgeglichen werden; dagegen ist die Ausgleichung der hin- und hergehenden Massen von Kolben und Kolbenstange und der „schwingenden“ Masse  $m_3$  der Schubstange durch solche rotierende Massen nicht möglich und wird praktisch durch Anwendung mehrerer Zylinder mit verstellten Kurbeln angenähert erzielt.

**124. Flächensatz oder Satz von der Erhaltung des Dralles.** Wenn in Gl. (455) die virtuellen Verschiebungen  $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$  in der Form (156) angesetzt werden, wie sie einer Drehung des ganzen in irgendeinem Augenblicke als starr betrachteten Punkthaufens um die Koordinaten entsprechen, so erhält man durch Nullsetzen der Koeffizienten der Drehwinkel unmittelbar die Momentengleichung, die man in folgender Weise umformen kann

$$\begin{aligned}\bar{M} &\equiv \sum (\bar{r}_i \times \bar{K}_i) = S m_i (\bar{r}_i \times \bar{b}_i) \equiv S m_i (\bar{r} \times \bar{v}_i) \\ &\equiv \frac{d}{dt} S m_i (\bar{r}_i \times \bar{v}_i) = \frac{d}{dt} M (\bar{r}_s \times \bar{v}_s) = \frac{d}{dt} (\bar{r}_s \times \bar{B}) = \frac{d\bar{H}}{dt}.\end{aligned}$$

Diese Gleichung

$$\boxed{\bar{M} = \frac{d\bar{H}}{dt}} \quad (461)$$

besagt, daß die zeitliche Änderung des Dralles  $\bar{H}$  gleich ist dem Moment der eingepprägten Kräfte in bezug auf den Punkt  $O$ . Dieser Satz gilt sowohl für den Punkthaufen wie für starre Körper, wenn nur die inneren Kräfte von der oben angegebenen Art sind.

Wenn  $\bar{M} = 0$ , so folgt  $\bar{H} = \text{konst.}$ , d. h. der Drall des Systems ist nach Größe und Richtung im Raume konstant. (Satz von der Erhaltung des Dralles oder Flächensatz, (wie er wegen der Beziehung zur Flächengeschwindigkeit als halbes Moment der Bewegungsgröße auch genannt wird).

Der Drall eines Punkthaufens hat im allgemeinen für jeden Punkt  $O$  des Raumes als Reduktionspunkt einen anderen Wert  $\bar{H}_O$ .

Dieser Wert  $\bar{H}_O$  kann durch den Drall  $\bar{H}_S$  um den Schwerpunkt  $S$  des Punkthaufens in folgender Weise ausgedrückt werden, indem nach Abb. 238  $\bar{r}_i = \bar{q}_i + \bar{p}$  gesetzt wird

$$\begin{aligned}\bar{H}_O &= S m_i (\bar{r}_i \times \bar{v}_i) = S m_i [(\bar{q}_i + \bar{p}) \times \bar{v}_i] \\ &= S m_i (\bar{q}_i \times \bar{v}_i) + (\bar{p} \times S m_i \bar{v}_i) \\ &= \bar{H}_S + (\bar{p} \times \bar{B}_S).\end{aligned} \quad (462)$$

Im besonderen gilt nun der Satz: Wenn der Schwerpunkt des Systems ruht, so ist  $\bar{H}_O$  unabhängig von der Wahl des Bezugspunktes.

In der Tat findet man den Drall für den Bezugspunkt  $O'$ , wenn wieder die Bezeichnungen der Abb. 238 verwendet werden,

$$r'_i = \bar{a} + \bar{r}_i,$$

und demnach, da  $\sum m \bar{v}_i = M \bar{v}_S = 0$  sein soll,

$$\begin{aligned} \bar{H}_{O'} &= \sum m_i (\bar{r}'_i \times \bar{v}_i) = \sum m_i [(\bar{a} + \bar{r}_i) \times \bar{v}_i] \\ &= [\bar{a} \times \sum m_i \bar{v}_i] + \sum m_i (\bar{r}_i \times \bar{v}_i) = \bar{H}_O = \bar{H}_S. \end{aligned} \quad (463)$$

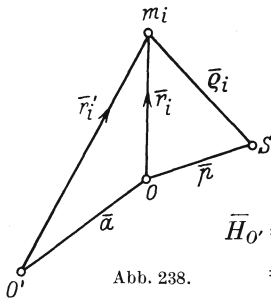


Abb. 238.

Beispiel 165. Anwendungen. Aus der großen Zahl der Anwendungen des Satzes von der Erhaltung des Dralls seien hier nur die folgenden hervorgehoben: Der Drall  $\bar{H}$  des Planetensystems, welches nur den zwischen den Planeten wirkenden Anziehungen ausgesetzt ist, ist nach Größe und Richtung im Raume konstant. Die durch den Schwerpunkt der Sonne senkrecht zu  $\bar{H}$  gelegte (oder irgendeine andere hierzu parallele) unveränderliche Ebene besitzt also für den ganzen Verlauf der Bewegungen der Planeten gegen den Fixsternhimmel eine unveränderliche Lage; daher kann sie als Bezugsebene für die genauere Untersuchung der Bahnkurven der Planeten genommen werden, bei der die gegenseitigen „Wirkungen“ der Planeten aufeinander — die „Störungen“ — berücksichtigt werden. — Ein Turner vermag den „Drall“, den er sich beim Absprung vom Boden beibringt, nach dem Absprung in keiner Weise zu ändern, er kann jedoch durch Einziehen der Arme und Beine sein TM in bezug auf seine Drehachse verkleinern, also seine Winkelgeschwindigkeit erhöhen und deshalb die Umdrehungszeit um seine eigene Achse erniedrigen; eine volle Umdrehung in der Luft (salto mortale) kann dadurch in der kurzen Zeit ausgeführt werden, die sein Schwerpunkt für das Herabfallen bis in die Nähe des Bodens braucht. — Zur Veranschaulichung des Satzes von der Erhaltung des Dralls kann der Drehschemel dienen, der aus einer um eine lotrechte Achse leicht beweglichen Platte besteht. Wenn eine auf diesem Drehschemel stehende Person eine Stange oder den Arm in einer wagrechten Ebene um den Kopf herumschwingt, so bewegt sich der übrige Körper nach der entgegengesetzten Richtung mit einer solchen Winkelgeschwindigkeit, daß der Drall der nach einer Richtung bewegten Stange und der Drall des nach der andern Richtung bewegten Körpers derselbe ist; bei Aufhören der Bewegung des Armes kommt auch die Bewegung des Körpers sofort zur Ruhe.

Der Drall der Luftschraube eines Flugzeuges und der damit gleichsinnig rotierenden Motorteile würde seinen Gegenwert in einem Drall gleicher Größe finden, der das ganze Flugzeug im entgegengesetzten Sinne um die Längsachse des Flugzeuges herumdrehen würde. Dies wird durch den großen Widerstand behindert, den die Flügel einer solchen Bewegung entgegensetzen, muß aber doch durch eine unsymmetrische Einstellung der Flügel unwirksam gemacht werden. Bei Flugzeugen, die mit gegenläufigen Luftschrauben von gleichem Drall ausgerüstet sind, fällt diese Wirkung weg.

Eine wichtige Anwendung findet endlich dieser Satz in der Theorie der Turbinen (s. Hydraulik).

Während nun eine Vorwärtsbewegung ohne Inanspruchnahme der Reibung der Unterlage angeschlossen ist, ist eine Drehung auf glatter Unterlage um jeden beliebigen Winkel möglich; man braucht hierzu nur kreisende Arm- oder Beinbewegungen von der oben beschriebenen Art auszuführen, so dreht sich der übrige Körper um einen nach dem Drallsatz zugeordneten Winkel im entgegengesetzten Sinne. Ohne hier weiter auf die Sache einzugehen, sei nur erwähnt, daß der innere Grund für diesen wesentlichen Unterschied darin liegt,

daß die Gleichung  $B_x = \sum m_i \dot{x}_i = 0$  integrierbar ist, während die Gleichung  $H_x = \sum m_x (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) = 0$  dies nicht ist, und daher wohl eine Bedingung für die infinitesimalen, nicht aber für die endlichen Lagenänderungen der einzelnen Teile des Systems darstellt.

Beispiel 166. Massenausgleich hinsichtlich der Momente der Bewegungsgrößen der bewegten Maschinenteile. Zur Ausschaltung von Kraftwirkungen auf das Fundament müssen die hin- und hergehenden Massen der Maschinen, wie in Beispiel 164 gezeigt wurde, jedenfalls so angeordnet werden, daß die Summe der Bewegungsgrößen in Richtung der Zylinderachsen (und auch in jeder anderen Richtung) dauernd verschwindet, oder, was auf dasselbe hinaus kommt, daß der Schwerpunkt aller bewegten Massen dauernd in Ruhe bleibt.

Aus dem Satz von der Erhaltung des Dralls folgt nun weiter, daß es für die Ausschaltung von Kraftwirkungen auf das Maschinenfundament außerdem auch notwendig ist, daß der gesamte Drall oder die Summe der Momente der Bewegungsgrößen der bewegten Massen um jede Achse des Raumes verschwindet. (2. Bedingung für den Massenausgleich.) Für Kolbenmaschinen, deren Zylinderachsen alle in einer Ebene liegen, kommen dabei einzig und allein nur die Achsen in Frage, die zu dieser Ebene senkrecht stehen, wie *a* in Abb. 237a) und b). Durch die um die Mittelebene symmetrische Anordnung der Zylinder, wie sie in diesen Abbildungen gezeigt ist, ist der Massenausgleich hinsichtlich der Momente der Bewegungsgrößen erreicht — freilich wegen der Unsymmetrie der Geschwindigkeiten für Hin- und Rückgang wieder nur angenähert.

Bei mehrzylindrigen Schiffsmaschinen mit verschiedenen großen Zylindern und daher mit Getrieben mit verschiedenen großen Massen (wie dies bei mehrstufiger Expansion aus wirtschaftlichen und betriebstechnischen Gründen notwendig ist) kann der Massenausgleich dadurch erzielt werden, daß für die Winkel zwischen den einzelnen Kurbeln (auch die Entfernungen der Zylinderachsen) nicht von vornherein bestimmte Größen ( $180^\circ$  oder  $120^\circ$  etwa) gewählt werden, sondern diese Winkel zunächst unbestimmt gelassen und erst aus den beiden „Bedingungen für den Massenausgleich“ ermittelt werden (Schlickscher Massenausgleich). Wenn die Schubstangen sämtlich unendlich lang genommen, also in Beispiel 93:  $\lambda = r/l \sim 0$  und  $v \sim r\omega \cos \varphi$  gesetzt und mit diesen vereinfachten Werten der Geschwindigkeiten die beiden Bedingungen für den Massenausgleich, d. h. der Schwerpunkts- und Flächensatz, angesetzt werden, so spricht man von Massenausgleich 1. Ordnung; es ist jedoch auch ein Massenausgleich 2. Ordnung möglich, bei dem in den Ausdrücken für diese Geschwindigkeiten auch die Glieder mit  $\lambda$  beibehalten werden.

## VIII. Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt. Kreisel.

125. Die Eulerschen Bewegungsgleichungen. Nach den Ergebnissen der vorhergehenden Abschnitte wird die Bewegung eines beliebigen Systems von Körpern im Raume dadurch beschrieben, daß zunächst die Bewegung des Schwerpunktes *S* und sodann die Bewegung des Systems um diesen Schwerpunkt angegeben wird. Jene wird durch den Schwerpunktsatz, diese durch den Flächensatz beherrscht. Für den einzelnen starren Körper, der im Raume ein Gebilde mit sechs Freiheitsgraden darstellt, erhält man aus beiden die nötige Anzahl (sechs) von Gleichungen, um seine Bewegung vollständig zu bestimmen. Als Beispiele für solche räumliche Bewegungen eines Körpers seien genannt: die Bewegung eines Flugzeuges oder eines Geschosses gegen die Erde, oder die eines Planeten gegen den Fixsternhimmel.

Die in 124 gegebene Gl. (461) kann auch unmittelbar als die Bewegungsgleichung eines starren Körpers um einen festen Punkt  $O$  betrachtet werden. In jedem Zeitelemente  $dt$  tritt zu dem zur Zeit  $t$  vorhandenen Drall  $\bar{H}$  der zusätzliche Drall  $d\bar{H} = \bar{M} dt$  in Richtung von  $\bar{M}$  hinzu, die Summe  $\bar{H} + d\bar{H}$  gibt den Drall zur Zeit  $t + dt$ .

Legt man die im Raume festen Achsen  $x, y, z$  durch  $O$  hindurch, dann kommen in  $\bar{M}$  nur die Momente der eingepprägten Kräfte (Gewicht usw.) vor, während die Auflagerkraft  $\bar{O}$  des festen Punktes zu  $\bar{M}$  keinen Beitrag gibt. Wenn man nun die Komponenten des Dralls nach diesen Achsen  $x, y, z$  bildet, so stellt sich der Übelstand ein, daß die nach der Gl.  $\bar{H} = \sum m_i (\bar{r}_i \times \bar{v}_i)$  usw. auszuführende Summation für jede Lage des Körpers andere Werte geben würde, deren Zusammenhang schwer zu überblicken ist.

Die Betrachtung wird wesentlich vereinfacht, wenn an Stelle dieser festen Achsen bewegte, und zwar körperfeste Achsen  $O, \xi, \eta, \zeta$  verwendet werden, und der Drall  $\bar{H}$  in bezug auf diese gebildet wird. Wenn  $\bar{\omega}$  die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit ist, dann ist die Geschwindigkeit  $\bar{v}$  eines Teilchens  $m_i$  in  $A$  in bezug auf diese Achsen  $O, \xi, \eta, \zeta$  in der Form anzusetzen (Abb. 239)

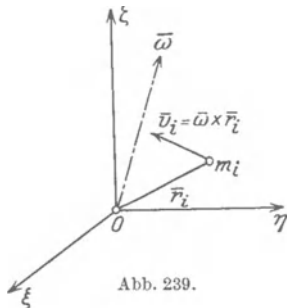


Abb. 239.

$$\bar{v}_i = \bar{\omega} \times \bar{r}_i; \tag{466}$$

dann folgt

$$\bar{H} = \sum m_i (\bar{r}_i \times \bar{v}_i) = \sum m_i [\bar{r}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_i)]$$

und nach dem Entwicklungssatz Gl. (33) ergibt sich weiter

$$\bar{H} = \bar{\omega} \sum m_i r_i^2 - \sum m_i \bar{r}_i (\bar{\omega} \bar{r}_i). \tag{464}$$

Um die Bedeutung dieser Gleichung zu erkennen, gehen wir zu den Komponenten nach den körperfesten Achsen  $O, \xi, \eta, \zeta$  über und erhalten für  $H_\xi$

$$\begin{aligned} H_\xi &= \omega_\xi \sum m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) - \sum m_i \xi_i (\xi_i \omega_\xi + \eta_i \omega_\eta + \zeta_i \omega_\zeta) \\ &= \omega_\xi \sum m_i (\eta_i^2 + \xi_i^2) - \omega_\eta \sum m_i \xi_i \eta_i - \omega_\zeta \sum m_i \xi_i \zeta_i; \end{aligned}$$

nach den Definitionsgln. (347) und (348) für die Trägheits- und Deviationsmomente folgt sodann

$$H_\xi = J_\xi \omega_\xi - D_{\xi\eta} \omega_\eta - D_{\xi\zeta} \omega_\zeta. \tag{465}$$

Die entsprechenden Ausdrücke für  $H_\eta$  und  $H_\zeta$  ergeben sich durch zyklische Vertauschung.

Aus der Form dieser Gleichungen erhellt unmittelbar, daß sich die Komponenten von  $\bar{H}$  ganz besonders einfach darstellen lassen, wenn als körperfeste Achsen  $O, \xi, \eta, \zeta$  die Hauptträgheitsachsen

des Körpers gewählt werden; für diese verschwinden nämlich die Deviationsmomente, und die Komponenten von  $\overline{H}$  werden einfach

$$\boxed{H_\xi = J_\xi \omega_\xi, \quad H_\eta = J_\eta \omega_\eta, \quad H_\zeta = J_\zeta \omega_\zeta} \quad (466)$$

worin nunmehr  $J_\xi, J_\eta, J_\zeta$  konstant sind.

Da sich diese Zerlegung auf körperfeste und nicht auf raumfeste Achsen bezieht, so wäre es nun freilich fehlerhaft, wenn man die Zeitableitungen dieser Komponenten den Momenten  $M_\xi, M_\eta, M_\zeta$  der eingepägten Kräfte um die entsprechenden Achsen, unmittelbar gleich setzen würde. Man muß vielmehr stets die Komponenten des Dralls nach raumfesten Achsen  $O, x, y, z$  bilden und diese nach  $t$  differenzieren. Wegen der einfachen Form der Größen  $H_\xi, H_\eta, H_\zeta$  empfiehlt es sich jedoch, diese Größen beizubehalten und die absoluten Änderungen des Dralls durch sie auszudrücken.

Die Komponenten  $H_\xi, H_\eta, H_\zeta$  können als relativen die Koordinaten des Endpunktes von  $\overline{H}$  in bezug auf die bewegten Achsen und die Ableitungen  $\frac{dH_\xi}{dt}$  also als die relativen Geschwindigkeiten dieses Endpunktes von  $\overline{H}$  in bezug auf diese Achsen aufgefaßt werden. Aus ihnen erhält man die absoluten Geschwindigkeiten, wenn man nach der aus 89 bekannten Beziehung  $\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_s$  die absolute Geschwindigkeit des Endpunktes von  $H$  ausrechnet. An die Stelle der Komponenten von  $\bar{v}_s$  treten dann die drei Größen

$$H_\zeta \omega_\eta - H_\eta \omega_\zeta, \quad H_\xi \omega_\zeta - H_\zeta \omega_\xi, \quad H_\eta \omega_\xi - H_\xi \omega_\eta.$$

Daher schreibt sich die „absolute Änderung“ von  $\overline{H}$  in Richtung der  $\xi$ -Achse in der Form (die übrigens genau der Gl. (305) in 91 entspricht)

$$\frac{dH_\xi}{dt} + H_\zeta \omega_\eta - H_\eta \omega_\zeta,$$

und somit erhalten wir die Bewegungsgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} J_\xi \dot{\omega}_\xi - (J_\eta - J_\zeta) \omega_\eta \omega_\zeta &= M_\xi, \\ J_\eta \dot{\omega}_\eta - (J_\zeta - J_\xi) \omega_\zeta \omega_\xi &= M_\eta, \\ J_\zeta \dot{\omega}_\zeta - (J_\xi - J_\eta) \omega_\xi \omega_\eta &= M_\zeta. \end{aligned}} \quad (467)$$

Die linken Seiten sind als die Komponenten von  $\dot{\overline{H}}$  nach raumfesten Achsen ( $O, x, y, z$ ) aufzufassen, die in jedem Augenblicke mit den bewegten Achsen ( $O, \xi, \eta, \zeta$ ) zusammenfallen. Die Gln. (467) sind die berühmten Eulerschen „dynamischen Gleichungen“ für die Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt, die auch in die eine Vektorgleichung zusammengefaßt werden können

$$\boxed{\dot{\overline{H}} + (\overline{\omega} \times \overline{H}) = \overline{M}.} \quad (468)$$

**126. Die kräftefreie Bewegung um den festen Punkt** erhält man, wenn der Schwerpunkt  $S$  des Körpers mit dem festen Punkt zusammenfällt und außer dem Eigengewicht keine eingepprägten Kräfte vorhanden sind. In den Gln. (471) ist für kräftefreie Bewegungen  $\bar{M} = 0$  zu setzen.

a) Drehungen um die Hauptträgheitsachsen  $O, \xi, \eta, \zeta$ . Die Gln. (467) werden für beliebige Werte der  $J_\xi, J_\eta, J_\zeta$  durch die Werte befriedigt

$$\omega_\xi = 0, \quad \omega_\eta = 0, \quad \omega_\zeta = c = \text{konst.}, \quad (469)$$

d. h. die dauernde Drehung um die Hauptträgheitsachse  $O\zeta$  (und ebenso um die beiden anderen  $O\xi, O\eta$ ) ist eine „mögliche“ Bewegungsform — ein Ergebnis, das schon in 112, Beispiel 151, auf andere Weise erhalten wurde. Und zwar zeigt eine genauere Untersuchung, daß die Drehungen um die Achse des größten und kleinsten TM stabil, die um die Achse des mittleren TM aber labil sind.

b) Für  $J_\xi = J_\eta = J_\zeta$  ergibt sich aus den Gln. (467)

$$\omega_\xi = \omega_\eta = \omega_\zeta = \text{konst.}, \quad (470)$$

d. h. wenn das Trägheitseilipsoid des Körpers eine Kugel ist, so ist der Drehvektor  $\bar{\omega}$  unveränderlich im Körper und daher auch im Raume; dies ist der Fall des sog. Kugelkreisels, der eine Dauerdrehung um jede beliebige Achse durch  $O$  ausführen kann.

c) Wenn  $J_\xi = J_\eta \neq J_\zeta$ , so erhält man die Bewegungsgleichungen des symmetrischen, kräftefreien Kreisels. Unter Kiesel versteht man einen starren Rotationskörper, bei dem irgendein Punkt

seiner Rotationsachse, die man auch als „Figurenachse“ bezeichnet, festgehalten und um diese in Drehung gesetzt wird. Aus der dritten der Gln. (467) folgt für

$$J_\xi = J_\eta \neq J_\zeta: \quad \omega_\zeta = c = \text{konst.},$$

d. h. die Projektion von  $\bar{\omega}$  auf die  $\zeta$ -Achse ist konstant; die beiden ersten Gleichungen geben dann

$$\left. \begin{aligned} J_\xi \dot{\omega}_\xi - (J_\xi - J_\zeta) c \omega_\eta &= 0 \\ J_\xi \dot{\omega}_\eta + (J_\xi - J_\zeta) c \omega_\xi &= 0. \end{aligned} \right\} (471)$$

Die Multiplikation mit  $\omega_\xi$  und  $\omega_\eta$  und Addition liefert

$$\omega_\xi \dot{\omega}_\xi + \omega_\eta \dot{\omega}_\eta = 0,$$

daher

$$\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 = a^2 = \text{konst.}, \quad (472)$$

daher ist auch  $\omega^2 = \omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2 = a^2 + c^2 = \text{konst.}$  und  $\bar{\omega}$  liegt auf einem Drehkegel mit der Öffnung  $\text{tg } \alpha = a/c$  um die  $\zeta$ -Achse, Abb. 240. Aus den Gln. (471) folgt durch Ausscheidung von  $\omega_\xi$  oder  $\omega_\eta$  (durch Differentiation je einer dieser Gleichungen), daß  $\omega_\xi$  und  $\omega_\eta$

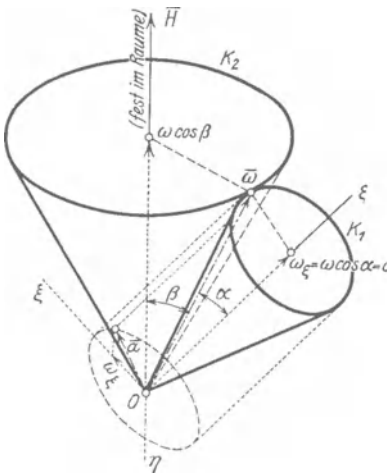


Abb. 240.



derselben Differentialgleichung 2. Ordnung genügen

$$\ddot{\omega}_\xi + \left(\frac{J_\xi - J_\zeta}{J_\zeta}\right)^2 c^2 \omega_\xi = 0 \tag{473}$$

und diese besagt, daß die Projektionen von  $\omega$  auf  $\xi$  und  $\eta$  einfache harmonische Schwingungen ausführen, so daß  $\bar{\omega}$  gleichförmig um die  $\zeta$ -Achse herumwandert.

Bildet man nun die Projektion von  $\bar{\omega}$  auf den Drallvektor  $\bar{H}$  ( $H_\xi = J_\xi \omega_\xi$ ,  $H_\eta = J_\eta \omega_\eta$ ,  $H_\zeta = J_\zeta c = \text{konst.}$ ), so folgt für diese nach Gl. (11) in 16

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega \cos \beta = \omega_\xi \frac{H_\xi}{H} + \omega_\eta \frac{H_\eta}{H} + \omega_\zeta \frac{H_\zeta}{H} \\ &= \frac{J_\xi \omega_\xi^2 + J_\eta \omega_\eta^2 + J_\zeta \omega_\zeta^2}{H} = \frac{2\top}{H} = \text{konst.}, \end{aligned} \tag{474}$$

d. h. die Projektion  $\omega'$  von  $\bar{\omega}$  auf  $\bar{H}$  ist ebenfalls konstant, und daher ist auch  $\cos \beta = \text{konst.}$  Überdies liegen die beiden Vektoren  $\bar{\omega}$  ( $\omega_\xi$ ,  $\omega_\eta$ ,  $\omega_\zeta$ ) und  $\bar{H}$  ( $J_\xi \omega_\xi$ ,  $J_\eta \omega_\eta$ ,  $J_\zeta c$ ) in einer Ebene. Daher bewegt sich der Vektor  $\bar{\omega}$  einerseits auf einem im Körper festen Drehkegel um  $\zeta$ , andererseits auf einem raumfesten Drehkegel um  $\bar{H}$ ; die Bewegung des Körpers ist also so darzustellen, daß ein körperfester Drehkegel  $K_1$  (Polodiekegel) auf einem raumfesten Drehkegel  $K_2$  (dem Herpolodiekegel) ohne Gleitung abrollt (vgl. hierzu 84). [Bezüglich der Bedeutung von  $\top$  siehe d.]

Eine solche Bewegung nennt man eine (reguläre) Präzession. Liegt  $K_2$  außerhalb von  $K_1$ , so erfolgt das Herumwandern von  $K_1$  um  $K_2$  im gleichen Sinne wie die Drehung des Kreisels um  $\zeta$  und man nennt Präzession gleichsinnig (oder vorschreitend, progressiv); liegt  $K_2$  innerhalb  $K_1$ , so erfolgen diese Drehungen entgegengesetzt zueinander und man bezeichnet auch die Präzession als gegensinnig (oder rück-schreitend, retrograd).

d) Für  $J_\xi \neq J_\eta \neq J_\zeta$  gelangt man auf folgende Weise zu der von Poinsoth herrührenden anschaulichen Darstellung des Verlaufes der Bewegung. Man multipliziert die drei Gln. (467) zunächst mit  $\omega_\xi$ ,  $\omega_\eta$ ,  $\omega_\zeta$  und addiert, so erhält man (da  $\bar{M} = 0$ )

$$J_\xi \omega_\xi \dot{\omega}_\xi + J_\eta \omega_\eta \dot{\omega}_\eta + J_\zeta \omega_\zeta \dot{\omega}_\zeta = 0.$$

Diese Gleichung gibt integriert die „Energiegleichung“ (das Energieintegral) des bewegten Körpers

$$\top \equiv \frac{1}{2} (J_\xi \omega_\xi^2 + J_\eta \omega_\eta^2 + J_\zeta \omega_\zeta^2) = \text{konst.} \tag{475}$$

Bei fehlenden Kräften ist die kinetische Energie des Körpers, die sich skalar aus den kinetischen Energien der Drehungen um die drei Achsen zusammensetzt, eine Konstante. Ebenso folgt durch Multiplikation derselben Gln. (467) mit  $J_\xi \omega_\xi$ ,  $J_\eta \omega_\eta$ ,  $J_\zeta \omega_\zeta$  und Addition

$$J_\xi^2 \omega_\xi \dot{\omega}_\xi + J_\eta^2 \omega_\eta \dot{\omega}_\eta + J_\zeta^2 \omega_\zeta \dot{\omega}_\zeta = 0$$



eine Gleichung, die ebenfalls integrabel ist und die Gleichung liefert

$$H^2 = J_\xi^2 \omega_\xi^2 + J_\eta^2 \omega_\eta^2 + J_\zeta^2 \omega_\zeta^2 = \text{konst.}; \quad (476)$$

diese Gleichung drückt die Konstanz des Drallvektors  $\bar{H}$  in bezug auf das körperfeste System  $(O, \xi, \eta, \zeta)$  aus.

Auch hier ist die Projektion  $\omega'$  von  $\bar{\omega}$  auf  $\bar{H}$  eine Konstante. Denn es ist wie zuvor in c)

$$\omega' = \omega \cos \alpha = \omega_\xi \frac{H_\xi}{H} + \omega_\eta \frac{H_\eta}{H} + \omega_\zeta \frac{H_\zeta}{H} = \text{konst.} \quad (477)$$

$\omega$  selbst ist in diesem allgemeinen Falle nicht mehr konstant.

Die Ebene, die durch den Endpunkt von  $\bar{\omega}(\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta)$  senkrecht zu  $\bar{H}(H_\xi, H_\eta, H_\zeta)$  gelegt werden kann, hat die Gleichung

$$J_\xi \omega_\xi (X - \omega_\xi) + J_\eta \omega_\eta (Y - \omega_\eta) + J_\zeta \omega_\zeta (Z - \omega_\zeta) = 0, \quad (478)$$

worin  $X, Y, Z$  die laufenden Koordinaten bezeichnen. Diese Ebene berührt das durch den Endpunkt von  $\bar{\omega}$  gelegte Trägheitsellipsoid für den festen Punkt  $O$  als Mittelpunkt, denn die Gleichung dieses Trägheitsellipsoids lautet

$$J_\xi X^2 + J_\eta Y^2 + J_\zeta Z^2 = J_\xi \omega_\xi^2 + J_\eta \omega_\eta^2 + J_\zeta \omega_\zeta^2 = 2T \quad (479)$$

und die Richtungskosinusse der Normalen seiner Berührungsebene im Punkte  $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$  sind verhältnismäßig zu  $J_\xi \omega_\xi, J_\eta \omega_\eta, J_\zeta \omega_\zeta$ . Die Berührungsebene hat daher die Gl. (478).

Nun hat  $\bar{H}$  eine feste Lage im Raume (Satz von der Erhaltung des Dralls) und da  $\omega' = \text{konst.}$ , so hat auch die Ebene (478) eine feste Lage im Raume; sie ist in der Tat eine „unveränderliche Ebene“ im Sinn von Beispiel 165 in 124.

Diese Ebene berührt in jedem Augenblick das Ellipsoid (479) und daher kann die Bewegung dargestellt werden durch das Abrollen ohne Gleitung des Ellipsoides (479) auf dieser „unveränderlichen“ Ebene. Der Vektor von  $O$  bis zum Berührungspunkte gibt die Lage der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}$  und ist ihrer Größe proportional.

**127. Moment der Kreiselwirkung.** (Deviationswiderstand.) Bei den technischen Anwendungen der Eigenschaften der um eine Achse rotierenden Körper handelt es sich in vielen Fällen um folgende Aufgabe: Ein Drehkörper dreht sich mit sehr großer Winkelgeschwindigkeit um seine Achse (Figurenachse), die ihrerseits in bestimmter Weise bewegt, also „geführt“ wird; welche Kraftwirkungen treten bei dieser Veränderung der Lage der Achse auf?

Als Beispiele für derartige Probleme denke man an die Bewegung des Motors mit Luftschraube in einem Flugzeuge und an die Erscheinungen, die bei einer Änderung der Flugzeugachse durch Steuerung auftreten. Ferner an die Wirkung der um parallele Achsen im gleichen Sinne rotierenden Radsätze eines Eisenbahnzuges bei Gleiskrümmungen und Schienenüberhöhungen und an die Wirkung des rotierenden Teiles

einer Dampfturbine in einer Dampfturbinenlokomotive oder in einem Schiffe, oder eines Motors in einer Elektrolokomotive u. dgl.

Wir betrachten einen Drehkörper von beliebiger Form, z. B. den in Abb. 241 dargestellten Schwungring; die Winkelgeschwindigkeit um die etwa wagrecht gestellte Figurenachse  $Oz$  sei  $\omega$ , das TM  $J$ , also der Drall  $J\omega$ . Diese Figurenachse denken wir uns in der wagrechten Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\psi}$  um die lotrechte  $y$ -Achse, also in der Zeit  $dt$  durch den Winkel  $d\psi = \dot{\psi} dt$  gedreht; wie groß ist das Moment, das diese Veränderung hervorbringt, und wie ist es gerichtet?

Zur Lösung dieser Frage dient die Bewegungsgleichung (461), die wir sogleich in dieser vektoriellen Form verwenden. Durch die Drehung der Figurenachse wird der Schwung  $\vec{H} = J\vec{\omega}$  ohne Änderung seines Betrages um ein Stück

$$dH = H d\psi = J\omega \dot{\psi} dt$$

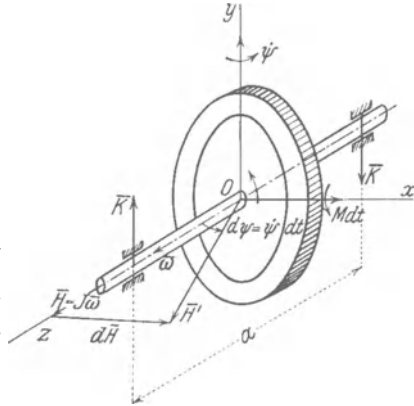


Abb. 241.

verändert und die Richtung dieses Stückes ist, wie die Abbildung zeigt, parallel zur  $x$ -Achse. Die Veränderung der mit der Figurenachse zusammenfallenden Drallachse in der angenommenen Art wird daher durch ein in der  $x$ -Achse liegendes Moment  $M dt$  bewirkt, dessen Größe demnach den Wert hat

$$M = J\omega \dot{\psi}. \tag{480}$$

Diesem Momente gleich, aber entgegengesetzt gerichtet, ist das Moment, mit dem der Kreisel der angegebenen Veränderung seines Dralles widersteht, diese letztere Moment nennt man das Moment der Kreiselwirkung. Den Sinn dieses Momentes können wir dadurch kennzeichnen, daß sich bei einer Änderung seiner Drallachse der Kreisel aufzurichten, genauer gesagt, der Achse der Drehung  $\dot{\psi}$  parallel zu stellen strebt, und zwar so, daß durch diese Aufrichtung der Sinn der Eigendrehung des Kreisels  $\bar{\omega}$  mit dem Sinn der Winkeldrehung  $\dot{\psi}$  übereinstimmt; dies ist der Satz vom gleichsinnigen Parallelismus der Drehachsen (Poinsot).

Beispiel 167. Das TM des Laufrades einer mit ihrer Achse senkrecht zur Fahrtrichtung in eine Lokomotive eingebauten und mit den Rädern im gleichen Sinne umlaufenden Dampfturbine um die Drehachse sei  $J = 140 \text{ kgms}^2$ , die Drehzahl um diese Achse  $n = 955$ , daher  $\omega = \frac{\pi n}{30} = 100/\text{s}$ . Wie groß ist die beim Durchfahren einer Gleiskrümmung mit dem Halbmesser  $\rho = 200 \text{ m}$  bei einer Fahrtgeschwindigkeit von  $v = 20 \text{ m/s}$  auftretende Kreiselwirkung? Die Winkelgeschwindigkeit in der Krümmung ist

$$\dot{\psi} = \frac{v}{\rho} = \frac{1}{10} \text{ s}$$

und daher das Kreiselmoment nach Gl. (480)

$$M = J \omega \dot{\psi} = 140 \cdot 100 \cdot \frac{1}{10} = 1400 \text{ kgm} = K a = K \text{ kg} \cdot 1,4 \text{ m}.$$

Stellt man nämlich dieses Moment durch ein Kräftepaar  $K a$  dar, dessen Arm  $a$  der Schienenabstand, also (rund)  $a = 1,4 \text{ m}$  ist, so folgt

$$K = 1000 \text{ kg},$$

d. h. bei einer Linkskurve in Richtung der Fahrt und bei einer Drehung des Laufrades im Sinne der Drehung der Räder würde der gesamte Raddruck auf die linke Schiene um diesen Betrag vermindert und auf die rechte Schiene um den gleichen Betrag vermehrt.

Wenn der Drall eines Kreisels um seine Figurenachse sehr groß ist, so wird die Lage des Drallvektors  $\vec{H}$  durch kleine störende Momente nur wenig geändert. Diese Eigenschaft hat dazu geführt, die Verwendung des Kreisels als „Stabilisator“ vorzuschlagen, und in einer Reihe von Fällen ist es auch gelungen, die dadurch gestellten Probleme in konstruktiver Hinsicht vollständig zu lösen, wie z. B. beim Schiffskreisel, bei der Einschienebahn, beim Geradlaufapparat der Torpedos. Ebenso gelang auch die Verwendung des Kreisels als Richtungsweiser für Schifffahrtzwecke (Schiffs- und Flugzeugkompaß). Ohne daß es hier möglich wäre, auf dieses überaus interessante Gebiet einzugehen, möge nur darauf hingewiesen werden, daß es verfehlt wäre, von einem Kreisel mit festgelagerter Achse eine „Stabilisierung“,

d. h. eine Kleinhaltung oder Vermeidung auftretender Störungswirkungen zu erwarten. Die Achse des Kreisels muß vielmehr in einer solchen Aufhängung gelagert werden, die ihr bei einer beliebigen Bewegung des Fahrzeuges, in das er eingebaut ist, alle Lagen im Raume anzunehmen gestattet, wie etwa in einer Cardanischen Aufhängung nach Abb. 242.

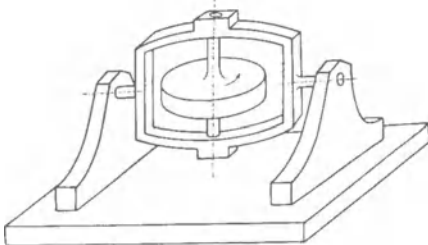


Abb. 242.

Ebenso kann hier auch auf andere solche Kreiselercheinungen, die in der Technik vorkommen, wie bei den rasch rotierenden Laufachsen der Dampfturbinen, bei Kollermühlen, beim Fahrrad u. dgl. nur hingewiesen werden.

## IX. Stoß fester Körper.

**128. Hilfsannahme zur Behandlung des Stoßvorganges.** Von einem Stoß spricht man immer dann, wenn es sich um die Wirkung einer sehr großen Kraft durch eine sehr kleine Zeit handelt, und zwar derart, daß das Produkt dieser beiden Größen endlich bleibt. Diesem Grenzwerte (Kraft  $\times$  Zeit) kann unmittelbar eine physikalische Realität zugesprochen werden, insofern als während der Wirkung einer sehr großen Kraft durch eine sehr kurze Zeit wohl endliche Änderungen der Geschwindigkeiten, aber nur vernachlässigbare Änderungen der Lagen der Körper eintreten.

Schreibt man die dynamische Grundgleichung  $Mb = K$  für irgendeine Richtung in der Form

$$M dv = K dt \tag{481}$$

und integriert sie über eine kleine Zeit  $\tau$ , während welcher die Lage des Körpers sich nur sehr wenig ändert, so folgt

$$M V - M v = \int_0^\tau K dt = B, \tag{482}$$

wenn  $v$  und  $V$  die Geschwindigkeiten vor und nach Ablauf dieses Stoßes sind.

Wir denken uns dabei  $K$  so groß, daß das „Zeitintegral der Kraft“ einen endlichen Wert  $B$  erhält, den wir als den „Betrag des Stoßes“ bezeichnen. Durch die Einwirkung von  $B$  wird die Bewegungsgröße in der kleinen Zeit  $\tau$  von  $m v$  auf  $m V$  geändert, oder dem anfänglich ruhenden Körper ( $v = 0$ ) die Bewegungsgröße  $M V = B$  erteilt. Durch solche Impulse werden demnach „plötzliche“ Geschwindigkeitsänderungen hervorgerufen, genauer gesagt, die Geschwindigkeitsänderungen durch Stoß erfolgen in einer so kurzen Zeit, daß die während dieser Zeit zurückgelegten Wege selbst als sehr klein, und zwar praktisch als Null angesehen werden können. Durch einen Einfluß dieser Art wird daher auch die beim Stoß zweier Körper aufeinander auftretenden „plötzlichen“ Geschwindigkeitsänderung der beiden Körper dargestellt werden können.

Bei der Behandlung des Stoßvorganges in der „starken Mechanik“ betrachten wir nur die Geschwindigkeitsänderungen der Körper durch den Stoß, kümmern uns aber natürlich nicht um die Deformationen und sonstigen Veränderungen, die die Körper durch einen solchen Stoß erleiden.

Die Dimension von  $B$  ist selbstverständlich die einer Bewegungsgröße.

Denken wir uns die beiden Körper mit den Massen  $M_1, M_2$  zunächst etwa als kugelförmig (Abb. 243) und ihre Mittelpunkte in der Richtung der Verbindungslinie gegeneinander bewegt; ihre Geschwindigkeiten vor dem Zusammentreffen seien  $v_1$  und  $v_2$ , und es sei  $v_1 > v_2$ , so daß  $M_2$  durch  $M_1$  eingeholt wird. Im Augenblicke des Zusammentreffens, das man in diesem Fall als geraden zentralen Stoß bezeichnet, tritt zwischen den Körpern ein Impuls von unbekanntem Betrage  $B$  auf, durch den die Geschwindigkeiten auf  $V_1$  und  $V_2$  verändert werden. Für die Bewegung der beiden Körper ist jedenfalls  $B$  als „innere Kraft“ aufzufassen, und nach dem Schwerpunktsatz 123 wird die Bewegungsgröße des aus beiden Körpern bestehenden Systems durch diese nicht geändert; daher ist

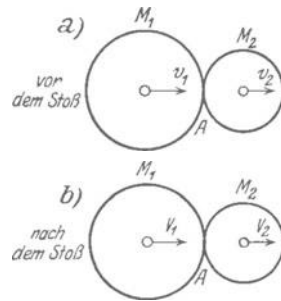


Abb. 243.

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 V_1 + M_2 V_2. \tag{483}$$

Diese einzige Gleichung reicht jedoch zur Berechnung der beiden Geschwindigkeiten  $V_1$  und  $V_2$  nach dem Stoße nicht aus. Zur Bestimmung der Geschwindigkeiten nach dem Stoß dient die folgende Hilfsannahme, die als ein Ergebnis von Versuchen anzusehen ist:

Das Verhältnis der relativen Geschwindigkeiten der beiden Körper unmittelbar vor und unmittelbar nach dem Stoße ist eine Konstante, die nur vom Material abhängt, aus dem die beiden Körper bestehen. Wir setzen

$$\frac{v_1 - v_2}{V_1 - V_2} = -\frac{1}{e}, \quad \text{also} \quad e = \frac{V_2 - V_1}{v_1 - v_2} \quad (484)$$

und nennen  $e$  die Stoßzahl der beiden Körper. Aus dieser Gleichung erhalten wir sofort die beiden wichtigen Sonderfälle:

a) Wenn  $V_1 = V_2$ , so wird  $e = 0$  und wir erhalten den vollkommen unelastischen oder plastischen Stoß; er ist dadurch gekennzeichnet, daß eine vollständige Ausgleichung der Geschwindigkeiten eintritt, derart, daß sich nach dem Stoße beide Körper mit derselben Geschwindigkeit weiterbewegen.

b) Wenn  $V_2 - V_1 = v_1 - v_2$ , so wird  $e = 1$ ; der Betrag der relativen Geschwindigkeit der beiden Körper wird durch den Stoß nicht geändert. Dies ist der Fall des vollkommen elastischen Stoßes, der von einem Austausch der Geschwindigkeiten begleitet ist.

Diese beiden sind die Grenzfälle der auftretenden Möglichkeiten. Für irgendwelche physikalisch vorgegebene Körper werden wir daher stets  $e$  zwischen 0 und 1 anzunehmen haben:  $0 < e < 1$ .

Wenn wir daher  $e$  für irgendein Paar von Körpern als bekannt ansehen können, so reichen sodann die beiden Gln. (483) und (484) tatsächlich aus, die Geschwindigkeiten  $V_1$  und  $V_2$  nach dem Stoß durch die Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  vor dem Stoß (oder umgekehrt) auszudrücken. Es folgt durch Auflösung dieser beiden in  $V_1$  und  $V_2$  linearen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{(M_1 - M_2 e) v_1 + M_2 (1 + e) v_2}{M_1 + M_2} = v_1 - \frac{(v_1 - v_2) (1 + e)}{1 + M_1/M_2}, \\ V_2 &= \frac{M_1 (1 + e) v_1 + (M_2 - M_1 e) v_2}{M_1 + M_2} = v_2 + \frac{(v_1 - v_2) (1 + e)}{1 + M_2/M_1}. \end{aligned} \right\} (485)$$

Da  $v_1 > v_2$ , so folgt  $V_1 < v_1$ ,  $V_2 > v_2$ , d. h. die Geschwindigkeit des vor dem Stoße schneller bewegten Körpers wird stets durch den Stoß verkleinert, die des langsameren vergrößert.

Wichtig ist nun der Wert des beim Stoße auftretenden Verlustes an Wucht oder kinetischer Energie  $\Delta T$ , der durch die Differenz aus den kinetischen Energien vor und nach dem Stoß gegeben ist

$$\Delta T = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 - \frac{1}{2} M_1 V_1^2 - \frac{1}{2} M_2 V_2^2. \quad (486)$$

Nach Verwendung der vorherigen Gleichungen folgt nun

$$\begin{aligned} 2 \Delta T &= M_1 (v_1^2 - V_1^2) - M_2 (V_2^2 - v_2^2) \\ &= M_1 (v_1 - V_1) (v_1 + V_1) - M_2 (V_2 - v_2) (V_2 + v_2) \\ &= \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (v_1 - v_2) (1 + e) [v_1 + V_1 - v_2 - V_2]; \end{aligned}$$

da  $V_2 - V_1 = e (v_1 - v_2)$ , so wird die eckige Klammer  $(v_1 - v_2)(1 - e)$  und daraus folgt

$$\Delta T = \frac{1}{2} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (1 - e^2) (v_1 - v_2)^2. \quad (487)$$

Um diesen Betrag ist die lebendige Kraft nach dem Stoß geringer als vor dem Stoß; der Unterschied geht in die beim Stoß auftretende Wärme und in Schall über.

Für die beiden obengenannten Sonderfälle ergibt sich daher:

a) Unelastischer Stoß ( $e = 0$ )

$$V_1 = V_2 = \frac{M_1 v_1 + M_2 v_2}{M_1 + M_2}, \quad \Delta T = \frac{1}{2} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (v_1 - v_2)^2. \quad (488)$$

b) Vollkommen elastischer Stoß ( $e = 1$ )

$$V_1 = v_1 - \frac{2 M_2}{M_1 + M_2} (v_1 - v_2), \quad V_2 = v_2 + \frac{2 M_1}{M_1 + M_2} (v_1 - v_2). \quad (489)$$

$$\Delta T = 0.$$

Beispiel 168. Stoß auf einen ruhenden Körper. Wenn ein Körper von der Masse  $M_1$  mit der Geschwindigkeit  $v_1$  auf eine ruhende Masse  $M_2$  auftrifft, so ist in den vorhergehenden Gleichungen  $v_2 = 0$  zu setzen und man erhält nach den Gln. (485)

$$V_1 = v_1 - \frac{v_1 (1 + e)}{1 + M_1/M_2}, \quad V_2 = \frac{v_1 (1 + e)}{1 + M_2/M_1},$$

und wenn überdies  $M_2$  sehr groß ist gegen  $M_1$  (also  $M_2 = \infty$ ), so folgt

$$V_1 = -e v_1, \quad V_2 = 0.$$

Läßt man daher  $M_1$  durch eine Höhe  $H$  frei auf  $M_2$  fallen, so ist (unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes):  $v_1 = \sqrt{2gH}$ ; wenn man ferner die Sprunghöhe  $h$  nach dem Stoß beobachtet, so können wir  $V_1 = \sqrt{2gh}$  setzen und erhalten nach der vorhergehenden Gleichung  $V_1 = -e v_1$  und daraus den Betrag von  $e$  in der Form

$$e = \frac{V_1}{v_1} = \sqrt{\frac{h}{H}} < 1;$$

diese Gleichung kann zur Bestimmung von  $e$  dienen. Es ergibt sich für zwei Körper aus gleichem Stoff aus Glas  $e = 15/16$ , aus Stahl oder Kork  $e = 5/9$ , Holz  $e = 1/2$ .

**129. Stoß auf freie Körper von endlicher Ausdehnung.** Dieselbe Umformung, die in 128 an der Bewegungsgleichung  $m \dot{b} = K$  vorgenommen wurde, kann auch an der Momentengleichung  $M k^2 \dot{\omega} = M$  ausgeführt werden; wir multiplizieren mit  $dt$  und erhalten durch Integration über eine kleine Zeit

$$M k^2 \Omega - M k^2 \omega = \int_0^{\tau} M dt = H \quad (490)$$



wenn  $\omega$  und  $\Omega$  die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers vor und nach dem Stoß bedeuten und wieder  $M$  so groß angenommen wird, daß der Wert des Integrals,  $H$ , endlich wird; man bezeichnet ihn als Drehstoß oder Drehimpuls. Wird ein Körper von einem Stoß  $\bar{B}$  seitlich des Schwerpunktes  $S$  getroffen, so kann  $\bar{B}$  nach  $S$  „reduziert“ werden, und gibt demnach den geraden Stoß  $\bar{B}$  in  $S$  zusammen mit dem Drehstoße vom Betrage  $H = Ba$ , wenn  $a$  den Abstand der Wirkungslinie des Stoßes  $\bar{B}$  von  $S$  bedeutet. Durch Einwirkung eines Drehstoßes  $H$  wird eine „plötzliche“ Änderung des Dralles des Körpers vom Betrage  $M k^2 \omega$  auf den Betrag  $M k^2 \Omega$  hervorgebracht.

Die Gleichungen für die Bewegungsänderung, die eine Scheibe durch einen Stoß  $B$  im Abstände  $a$  von  $S$  erfährt, lauten daher

$$M(U_x - u_x) = B_x, \quad M(U_y - u_y) = B_y, \quad M k^2(\Omega - \omega) = Ba, \quad (491)$$

wobei die Gl. (482) für zwei Richtungen der Ebene und außerdem die Gl. (490) herangezogen wurden. In diesen Gleichungen sind wieder  $U_x, U_y, \Omega$  die Werte der Geschwindigkeiten des Schwerpunktes  $S$  und der Winkelgeschwindigkeit nach dem Stoß, sowie der Betrag des Impulses  $B$  als Unbekannte anzusehen. Ferner sind  $u_x, u_y, \omega$  die entsprechenden Größen vor dem Stoß.

Wenn es sich daher um den Zusammenstoß zweier, hier als ebene Scheiben zu betrachtender Körper 1 und 2 handelt, die sich in beliebiger

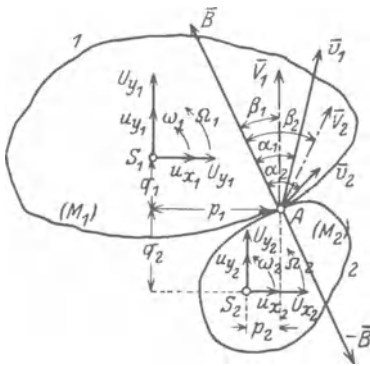


Abb. 244.

Weise bewegen und die an irgendwelchen Punkten  $A$  ihrer Ränder aufeinandertreffen (Abb. 244), so erhält man für jeden Körper drei Bewegungsgleichungen von der Form (491), zusammen also sechs, in denen die Geschwindigkeiten von  $S$  und die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Körper nach dem Stoße, also die Größen  $U_{x1}, U_{y1}, \Omega_1; U_{x2}, U_{y2}, \Omega_2$  sechs Unbekannte ausmachen; die Zeiger 1 und 2 sollen andeuten, daß sie sich auf die beiden Körper 1 und 2 beziehen. Zu diesen tritt der Wert von  $B$  als siebente Unbekannte

hinzu. Dabei ist schon die Annahme gemacht, daß die Richtung des Stoßes  $B$  senkrecht zur gemeinsamen Berührungsebene an der Stoßstelle wirkt, also durch eine einzige Unbekannte gekennzeichnet werden kann, was bei glatten Rändern jedenfalls zutreffen wird.

Bei rauhen Rändern müßte auch noch eine in der Richtung der Tangente liegende Komponente, ein Reibungsstoß  $\int_0^T R dt$  eingeführt werden, der dem Einfluß der Reibung Rechnung trägt.



Zur vollständigen Lösung der vorliegenden Aufgabe brauchen wir daher eine siebente Gleichung und diese wird durch eine Festsetzung gewonnen, die eine bloße Verallgemeinerung der in 128 benützten Definition der Stoßzahl in Form der Gl. (484) ist, die zu den sechs Bewegungsgleichungen hinzutritt. Diese Festsetzung ist wieder als Ergebnis physikalischer Versuche zu betrachten. Wir drücken sie in der Form aus:

Das Verhältnis der Projektionen der relativen Geschwindigkeit der beiden an der Stoßstelle zusammenstreichenden Körperpunkte auf die gemeinsame Normale an der Stoßstelle **nach** dem Stoße zu den Projektionen der relativen Geschwindigkeit derselben Punkte **vor** dem Stoße, ist eine Konstante, die nur vom Material der beiden Körper abhängt, als Stoßzahl bezeichnet und als bekannt angesehen wird.

Nach den Bezeichnungen der Abb. 244, in die die Geschwindigkeiten der beiden zusammenstreichenden Körperpunkte  $A$  vor dem Stoße durch  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  und nach dem Stoße durch  $\bar{V}_1, \bar{V}_2$  und die Winkel gegen die Normale mit  $\alpha_1, \alpha_2$  und  $\beta_1, \beta_2$  bezeichnet sind, haben wir daher zu setzen:

$$e = \frac{V_2 \cos \beta_2 - V_1 \cos \beta_1}{v_1 \cos \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_2}. \quad (492)$$

Die früher benutzte Gl. (484) ist offenbar nur ein Sonderfall dieser Gleichung für  $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ . In dieser Gleichung müssen die Geschwindigkeiten  $\bar{v}$  und  $\bar{V}$  vor und nach dem Stoße durch die auf die Bewegung von  $S$  und die Drehung um  $S$  bezogenen Größen  $u_x, u_y, \omega$  und  $U_x, U_y, \Omega$  mit Hilfe der Formeln  $v_x = u_x - q\omega$ ,  $v_y = u_y + p\omega$  und  $V_x = U_x - q\Omega$ ,  $V_y = U_y + p\Omega$  ausgedrückt werden; sie gibt dann die notwendige siebente Gleichung. In diesen letzten Angaben, die für beide Körper 1 und 2 anzuschreiben sind, bedeuten dann  $p_1, q_1$  und  $p_2, q_2$  die Koordinaten des Stoßpunktes  $A$  in bezug auf die beiden Koordinatensysteme durch  $S_1$  und  $S_2$ .

Wie früher entspricht  $e = 0$  also  $V_2 \cos \beta_2 = V_1 \cos \beta_1$  dem vollkommen unelastischen und

$$e = 1 \quad \text{oder} \quad V_2 \cos \beta_2 - V_1 \cos \beta_1 = v_1 \cos \alpha_1 - v_2 \cos \alpha_2$$

dem vollkommen elastischen Stoße.

Der Unterschied gegen die Definition von  $e$  in 128 ist also lediglich der, daß es sich hier um die relativen „Geschwindigkeiten in Richtung der gemeinsamen Stoßnormalen“ handelt, während dort, dem Wesen der Sache nach, von den relativen Geschwindigkeiten schlechthin die Rede war.

Der beim Stoß der beiden Körper entstehende Energieverlust ist sodann

$$\Delta T = \frac{1}{2} M_1 (u_1^2 - U_1^2) + \frac{1}{2} M_1 k_1^2 (\omega_1^2 - \Omega_1^2) + \frac{1}{2} M_2 (u_2^2 - U_2^2) + \frac{1}{2} M_2 k_2^2 (\omega_2^2 - \Omega_2^2). \quad (493)$$

Beispiel 169. Kupplung zweier Scheiben. Werden zwei Scheiben, deren TM  $M_1 k_1^2$  und  $M_2 k_2^2$  sind, und die lose um ihre gemeinsame Achse mit den Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$  und  $\omega_2$  rotieren, durch eine Kupplung plötzlich miteinander verbunden, so ist die Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  der verbundenen Scheiben nach dem Satze von der Erhaltung des Dralls durch die Gleichung bestimmt

$$M_1 k_1^2 \omega_1 + M_2 k_2^2 \omega_2 = (M_1 k_1^2 + M_2 k_2^2) \Omega .$$

Der hierbei auftretende Drehstoß ist

$$H = M_1 k_1^2 (\Omega - \omega_1) = - M_2 k_2^2 (\Omega - \omega_2) .$$

Beispiel 170. Anfangsbewegung einer Scheibe. Eine ruhende Scheibe von der Masse  $M$ , Abb. 245, wird von einem Stoße  $\bar{B}$  im Abstände  $a$  von  $S$  getroffen; um welchen Punkt und mit welcher Winkelgeschwindigkeit wird sie sich zu drehen beginnen?

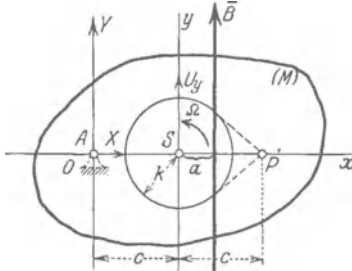


Abb. 245.

Wir legen die  $y$ -Achse parallel zu  $B$ , dann geben die Gln. (491), in denen  $u_x = u_y = \omega = 0$ ,  $\bar{B}_y = B$  zu setzen ist

$$U_x = 0, \quad U_y = B/M, \quad \Omega = B a/M k^2 .$$

Der Drehpol  $O$ , um den die Scheibe ihre Bewegung beginnt, liegt daher in einem Abstände  $c$  von  $S$  jenseits  $S$ , derart, daß

$$c = \frac{U_y}{\Omega} = \frac{k^2}{a}, \quad \text{oder} \quad \boxed{c a = k^2} . \quad (494)$$

Legt man daher um  $S$  einen Kreis mit dem Halbmesser  $k$ , so ist unabhängig von der Größe von  $B$  der Drehpol  $O$  der „Antipol“ der Wirkungslinie  $\bar{B}$  in bezug auf den Kreis; d. h. wenn  $P$  der Pol von  $\bar{B}$  bezüglich des Kreises ist, so ist  $\overline{PS} = \overline{SO} = c$ .

Beispiel 171. Auf einen ruhenden freien Stab von der Masse  $M_1$  trifft im Abstände  $a$  von  $S$  eine kleine (als Punktmasse zu behandelnde) Kugel von der Masse  $M_2$  mit der Geschwindigkeit  $v_2$  auf (Abb. 246). Die Oberflächen der stoßenden Körper sind glatt, die Stoßziffer ist  $e$ . Wie groß sind die Geschwindigkeiten der Kugel und des Stabes nach dem Stoße und wie groß ist der Betrag des Stoßes  $B$ ?

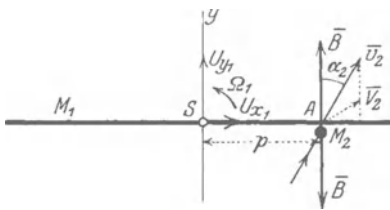


Abb. 246.

Die Bewegungsgleichungen lauten

für den Stab:

$$U_{x_1} = 0, \quad M_1 U_{y_1} = B, \quad M_1 k_1^2 \Omega_1 = B p ,$$

für die Kugel:

$$M_2 (V_{x_2} - v_2 \sin \alpha_2) = 0,$$

$$M_2 (V_{y_2} - v_2 \cos \alpha_2) = - B .$$

Hierzu tritt die Definitionsgleichung für die Stoßzahl

$$e = \frac{U_{y_2} - (U_{y_1} + p \Omega_1)}{-v_2 \cos \alpha_2} .$$

Dies sind zusammen sechs lineare Gleichungen zur Bestimmung der sechs Unbekannten  $U_{x_1}$ ,  $U_{y_1}$ ,  $\Omega_1$ ,  $V_{x_2}$ ,  $V_{y_2}$ ,  $B$ . (Da die Kugel punktförmig ist, haben wir für sie nur zwei Gleichungen anzusetzen.) Durch Auflösung folgt, wenn zur

Abkürzung  $1 + \frac{M_2}{M_1} \frac{p^2 + k_1^2}{k_1^2} = N$  eingeführt wird:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{x_1} = 0, \\ V_{x_2} = v_2 \sin \alpha_2, \\ U_{y_1} = \frac{M_2}{M_1} \frac{1+e}{N} v_2 \cos \alpha_2, \\ V_{y_2} = \frac{N-1-e}{N} v_2 \cos \alpha_2, \\ \Omega_1 = \frac{M_2 p}{M_1 k_1^2} \frac{1+e}{N} v_2 \cos \alpha_2, \\ J = M_2 \frac{1+e}{N} v_2 \cos \alpha_2. \end{array} \right.$$

Aus diesen Gleichungen sieht man, daß  $U_{y_1}$  jedenfalls positiv ist, also in Richtung der Normalkomponente des Stoßes erfolgt, ebenso  $\Omega_1$  sicher positiv ist, d. h. der Stab beginnt seine Drehung im Gegensinne des Uhrzeigers. Dagegen kann  $V_{y_2}$  je nach dem Größenverhältnis von  $N$  und  $e$  sowohl positiv wie negativ ausfallen: ist  $N > 1 + e$ , dann ist  $V_{y_2} > 0$ , d. h. die Kugel wird in der Richtung der Normalen nur gebremst; wenn  $N < 1 + e$ , also  $V_{y_2} < 0$  wird sie nach dem Stoß vom Stabe zurückspringen.

**130. Stoß auf geführte Körper.** Die Übertragung der Bewegungsgln. (491) von 129 auf gelenkig gelagerte oder geführte Körper bietet nach den allgemeinen Regeln, nach denen sowohl in der Statik wie in der Dynamik die Lagerungen und Führungen behandelt werden, keine Schwierigkeit. Durch die einwirkenden Stöße werden an den Auflagerpunkten Reaktionen geweckt, die jetzt natürlich nicht Kräfte, sondern Stöße, also Führungs- und Auflagerstöße sein müssen; diese treten als Unbekannte zu den an den Stoßstellen auftretenden — den eingepprägten — Stößen hinzu. Für glatte Führungen wird dieser Führungstoß durch eine Unbekannte senkrecht zur Führungsrichtung, für ein Gelenk durch zwei unbekannte Stoßkomponenten dargestellt. Um diese Zahl der so hinzutretenden unbekanntten Führungstöße vermindert sich die Anzahl der Freiheitsgrade und damit auch der unbekanntten Teilgeschwindigkeiten nach dem Stoße; die Bewegungsgln. (491), für beide Körper angeschrieben, zusammen mit der Gl. (492) für  $e$  reichen somit bei „dynamisch-bestimmten“ Stoßvorgängen stets aus, um die Geschwindigkeiten nach dem Stoß und die Führungstöße zu berechnen.

**Beispiel 172. Ballistisches Pendel.** Die Geschwindigkeit eines Geschosses kann dadurch bestimmt werden, daß es in einen mit Sand oder Lehm gefüllten Kasten hineingeschossen wird, der an einer wagrechten Achse drehbar aufgehängt ist (Abb. 247). Durch die Füllmasse wird das Geschoß auf kurzem Wege abgebremst und der dabei auftretende unelastische Stoß auf den Kasten übertragen. Dadurch entsteht ein Ausschlag  $\alpha$  des Kastens, der abgelesen werden kann und der ein Maß für die Geschwindigkeit ist.

Dem auftretenden Geschoß mit der Masse  $M_2$  entspricht ein Stoß  $B = M_2 v_2$ , der im Abstand  $l_2$  auf das Pendel einwirkt. Nehmen wir daher die Momente um  $O$ , so fallen die Stoßdrücke in  $O$  weg und wir erhalten, wenn das Pendel das TM  $M_1 k_1^2$  besitzt und durch den Stoß die Winkelgeschwindigkeit  $\Omega_1$  erhält [nach der dritten der Gln. (491)]

$$(M_1 k_1^2 + M_2 l_2^2) \Omega_1 = M_2 v_2 l_2,$$

und daraus

$$v_2 = \frac{M_1 k_1^2 + M_2 l_2^2}{M_2 l_2} \Omega_1 \tag{495}$$

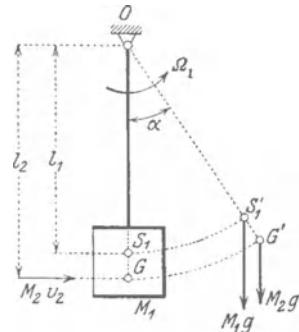


Abb. 247.

Wenn die durch das Geschoß auf das Pendel übertragene kinetische Energie den Ausschlag  $\alpha$  des Kastens hervorbringt, so gibt die Energiegleichung, wenn wir annehmen, daß das Geschoß (nahe) in der Verlängerung von  $O S_1$  stecken bleibt

$$\frac{1}{2} (M_1 k_1^2 + M_2 l_2^2) \Omega_1^2 = (M_1 l_1 + M_2 l_2) (1 - \cos \alpha),$$

aus  $\alpha$  kann daher  $\Omega_1$  und aus  $\Omega_1$  nach der vorhergehenden Gleichung die gesuchte Geschwindigkeit  $v_2$  gefunden werden.

Beispiel 173. Stoßmittelpunkt. Ein um eine feste Achse  $A$  drehbarer, ursprünglich ruhender Körper soll so gestoßen werden, daß seine Achse keine Stoßkraft erfährt. Zunächst ist klar, daß der Stoß  $B$  senkrecht zur Verbindungslinie der Achse  $A$  mit  $S$  erfolgen muß, denn es ist für einen solchen Stoß  $B$  nach Abb. 245, wenn mit  $(X, Y)$  die Teile des Gelenkstoßes in  $A$  bezeichnet werden:  $U_x = 0$ , daher auch  $X = 0$ . Ferner geben die beiden anderen Bewegungsgleichungen (491) der Scheibe

$$M U_y = B + Y, \quad M k^2 \Omega = B a - Y c.$$

Setzen wir daher auch  $Y = 0$ , so folgt  $U_y = B/M$ ,  $\Omega = B a/M k^2$  wie in Beispiel 170, d. h. der Körper muß in jenem Punkt  $A \equiv O$  gelagert werden, um den er sich durch den Stoß  $B$  zu drehen beginnen würde, wenn er frei wäre. Dieser Punkt, der durch die Gleichung  $a c = k^2$  bestimmt ist, nennt man den Stoßmittelpunkt.

Jeder Arbeiter, der mit Schlagwerkzeugen zu tun hat, weiß, daß es eine Stelle des Hammerstieles gibt, wo dieser angefaßt werden muß, damit der Schlag nicht unangenehme Stoßempfindungen hervorruft.

Beispiel 174. Stöße rotierender Körper aufeinander. Wenn zwei Körper 1 und 2, die sich um Achsen  $O_1$  und  $O_2$  drehen, an irgendwelchen Punkten  $A$  ihrer Oberflächen zum Stoß gelangen, dann geben die Momentengleichungen für diese Achsen und die Gleichung für die Stoßzahl  $e$  zusammen drei Gleichungen, aus denen die Winkelgeschwindigkeiten nach dem Stoße und der Betrag des Stoßes  $B$  gerechnet werden können. In dieser Art können z. B. die bei Zahnrädern oder an Daumenwellen auftretenden Stöße berechnet werden.

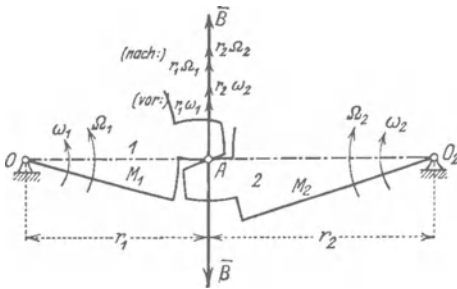


Abb. 248.

Unter Verwendung der Bezeichnungen der Abb. 248 lauten diese Momentengleichungen

$$\left. \begin{aligned} M_1 k_1^2 (\Omega_1 - \omega_1) &= B r_1, \\ M_2 k_2^2 (\Omega_2 - \omega_2) &= -B r_2, \end{aligned} \right\}$$

Nimmt man hierzu die Stoßgleichung für glatte Flächen

$$e = \frac{r_2 \Omega_2 - r_1 \Omega_1}{r_1 \omega_1 - r_2 \omega_2},$$

so können aus diesen drei Gleichungen  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  und  $B$  gerechnet werden.

Für unelastischen Stoß ist  $e = 0$ , also  $r_1 \Omega_1 = r_2 \Omega_2$  und aus den Bewegungsgleichungen folgt dann durch Ausscheidung von  $B$  und  $\Omega_2$

$$\frac{M_1 k_1^2}{r_1} (\Omega_1 - \omega_1) + \frac{M_2 k_2^2}{r_2} \left( \frac{r_1 \Omega_1}{r_2} - \omega_2 \right) = 0.$$

Werden daher die an die Stoßstellen reduzierten Massen  $M'_1 = M_1 k_1^2/r_1^2$ ,  $M'_2 = M_2 k_2^2/r_2^2$  eingeführt, so erhält man die Winkelgeschwindigkeiten  $\Omega_1, \Omega_2$  nach dem Stoß aus den Gln.

$$r_1 \Omega_1 = r_2 \Omega_2 = \frac{M'_1 r_1 \omega_1 + M'_2 r_2 \omega_2}{M'_1 + M'_2};$$

die Geschwindigkeiten werden daher gerade so berechnet, als ob es sich um einen Stoß punktförmiger Körper mit den „reduzierten“ Massen  $M'_1, M'_2$  mit den Geschwindigkeiten der Stoßstelle  $A$  handeln würde.

Beispiel 175. Stoß eines rotierenden Körpers 1 gegen einen gerade geführten Körper 2 nach Abb. 249. Die Momentengleichung für den Körper 1 bezüglich  $O_1$  lautet

$$M_1 k_1^2 (\Omega_1 - \omega_1) = -B r_1 \cos \beta_1,$$

ferner die Gleichung des Stoßes in Richtung der Führung des Körpers 2

$$M_2 V_2 = B \cos \beta_2.$$

Hierzu tritt endlich die Gleichung für die Stoßzahl

$$e = \frac{V_2 \cos \beta_2 - r_1 \Omega_1 \cos \beta_1}{r_1 \omega_1 \cos \beta_1}.$$

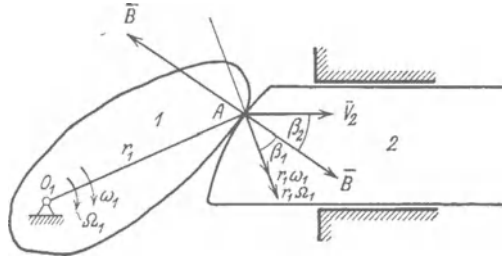


Abb. 249.

Aus diesen drei Gleichungen, die in  $\Omega_1$ ,  $V_2$  und  $B$  linear sind, sind sodann diese drei Größen zu bestimmen.

## X. Mechanische Ähnlichkeit.

**131. Dimensionsbetrachtungen.** Schon in 5 wurde auf die selbstverständliche Forderung hingewiesen, daß die einzelnen Glieder, die in den Ansatzgleichungen eines mechanischen Problems additiv nebeneinander zu stehen kommen, alle dieselbe Dimension haben müssen. Diese Bemerkung ist zunächst deshalb wichtig, weil sie die Möglichkeit einer ersten Kontrolle jeder Rechnung gegen grobe Versehen liefert. Ihre wesentliche Bedeutung liegt jedoch — darüber hinausgehend — darin, daß sie ermöglicht, die Form der Ergebnisse für viele der im vorhergehenden behandelten Einzelprobleme von vornherein und ohne alle Rechnung anzugeben. Es ist dazu nur notwendig, sich zu überlegen, welche mechanischen Größen auf die gerade vorliegende Aufgabe Einfluß haben, und wie man diese — mit Rücksicht auf die Dimension jeder einzelnen — zusammenfassen muß, um die gesuchte Größe zu erhalten.

Wenn man z. B. von der Normalbeschleunigung bei der krummlinigen Bewegung eines Punktes nur weiß, daß sie von der Geschwindigkeit  $v$  und dem Krümmungshalbmesser  $\rho$  abhängt, so muß sie die Form  $v^2/\rho$  haben, weil nur diese Verbindung von  $v$  und  $\rho$  die Dimension einer Beschleunigung hat. Oder: sobald man erkannt hat, daß die Schwingungsdauer  $T$  eines Punktpendels von seiner Länge  $l$  und der Beschleunigung des Schwerfeldes  $g$  abhängt, in dem es sich befindet, so muß  $T$  die Form: konst.  $\sqrt{l/g}$  haben [s. Gl. (250)], weil die beiden Größen  $l$  und  $g$  nur in dieser Zusammensetzung eine Zeit ergeben. Ferner: von der in den Beispielen 73 und 79 gefundenen Grenzgeschwindigkeit kann von vornherein gesagt werden, daß sie von der Beschleunigung  $g$  des Schwerfeldes und von der Form und Größe des Körpers abhängen muß, deren Einfluß durch die Konstante  $k$  dargestellt ist; nun ist die Dimension von  $k$ :  $[k] = \frac{[C]}{[v^2]} = \frac{1}{[L]}$ . Aus  $g$  und  $k$  kommt eine Geschwindigkeit nur durch  $\sqrt{g/k}$  heraus und dies ist der Ausdruck für die gesuchte Grenzgeschwindigkeit. Oder: Da das TM des Schwung-

rades einer Maschine von  $N$  und  $n$  abhängt, so muß es durch die Form: konst.  $N/n^3$  gegeben sein, wie Gl. (451) anzeigt. Die in den Formeln auftretenden Zahlenfaktoren [wie  $2\pi$  in  $T$  nach Gl. (250)] werden natürlich durch derartige „Dimensionsbetrachtungen“ nicht geliefert.

Die große praktische Wichtigkeit derartiger Betrachtungen tritt insbesondere dann zutage, wenn es sich darum handelt, die Ergebnisse von im Kleinen ausgeführten oder sogenannten Modellversuchen für die Vorgänge im Großen zu verwerten. Um die dabei auftretenden Verhältnisse zu übersehen, denke man sich etwa eine Dampfmaschine nach denselben Konstruktionszeichnungen zweimal ausgeführt, einmal in jenen Abmessungen, in denen sie in allen Einzelteilen durchgerechnet wurde, und das andere Mal etwa in doppelter Vergrößerung aller Einzelabmessungen. Welchen Dampfdruck muß man für diese zweite Maschine anwenden und mit welcher Geschwindigkeit muß man sie laufen lassen, damit sie mit Rücksicht auf die auftretenden Kräfte und Beanspruchungen der einzelnen Teile überhaupt brauchbar sein kann?

Wenn man (wie in diesem Beispiel) die für irgendein Problem erhaltenen Ergebnisse auf andere, damit verwandte Probleme übertragen will, so muß man von der geometrischen Ähnlichkeit zu einer mechanischen Ähnlichkeit übergehen. Diese ergibt sich, wenn man den Ansatz (13) des betreffenden Problems aufschreibt und zusieht, in welcher Weise die einzelnen mechanischen Größen, die auf das Problem Einfluß haben, in die Gleichungen dieses Ansatzes eingehen. Denn wenn die einzelnen in den Ansatzgleichungen auftretenden Größen (Längen, Zeiten, Massen, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen usw.) durch Multiplikation mit entsprechenden Zahlenfaktoren so verändert werden, daß die Gleichungen ihre ursprüngliche Form mit den gleichen Werten der Koeffizienten vollständig beibehalten, so wird sich auch die Beschaffenheit der Lösung nicht geändert haben. Wenn man sodann sämtliche Glieder der Ansatzgleichung durch die bei irgend einem Glied auftretenden Vergrößerungszahlen dividiert, ergeben sich bei den anderen Gliedern gewisse Quotienten, deren Zahlenwerte die Beschaffenheit der Lösung bestimmen.

Diese charakteristischen Quotienten, die sich bei jedem mechanischen Problem angeben lassen, und die jeweils die Beschaffenheit einer ganzen Problemklasse bedingen, nennt man die Kennzahlen der betreffenden Problemklasse. Aus der Lösung des Problems für irgendwelche besondere Werte der einzelnen in das Problem eingehenden Größen sind die Zahlenwerte für diese Problemklasse bestimmt und wir können sagen:

Zwei mechanische Probleme sind ähnlich, wenn sie geometrisch ähnlich sind und wenn ihre Kennzahlen gleiche Zusammensetzung und gleiche Zahlenwerte besitzen.

Wesentlich ist also, daß die einzelnen in den Kennzahlen auftretenden Größen, nicht jede für sich, sondern nur in der zur Kennzahl zusammengesetzten Form konstante Werte haben müssen. — Jede



einzelne Kraft geht in die Ansatzgleichung durch einen bestimmten Ausdruck ein, der von anderen Größen, wie Längen, Geschwindigkeiten, Dichten, Zähigkeit usw. abhängt. Durch die Art dieser Abhängigkeit ist die Zusammensetzung der Kennzahlen bestimmt, wie nunmehr an einigen einfachen Beispielen gezeigt werden soll.

**132. Beispiele und Anwendungen.** Beispiel 176. Betrachten wir die Bewegung zweier voneinander vollständig isolierter Punkte und fragen wir, in welcher Beziehung die die Bewegung kennzeichnenden Größen zueinander stehen müssen, damit die Punkte geometrisch ähnliche Bahnkurven beschreiben. Wenn etwa die beiden Punkte geradlinige Bahnen durchlaufen, so lauten ihre Bewegungsgleichungen  $M_1 b_1 = K_1$ ,  $M_2 b_2 = K_2$  und die Bedingung der Ähnlichkeit ist offenbar erfüllt, wenn in jedem Augenblick

$$\frac{M_1 b_1 / K_1}{M_2 b_2 / K_2} = 1.$$

Wenn wir etwa die Beziehung einführen

$$\frac{M_1}{M_2} = \mu, \quad \frac{b_1}{b_2} = \beta, \quad \frac{K_1}{K_2} = \kappa,$$

so lautet diese Gleichung, wenn die Bezeichnung  $A$  eingeführt wird,

$$A \equiv \frac{\mu \beta}{\kappa} = 1. \tag{497}$$

Die Form von  $A$  kann aus der Bewegungsgleichung des Punktes unmittelbar angeschrieben werden, was im folgenden auch immer geschehen soll.

Führen wir noch die Definitionsgleichung für die Beschleunigung ein,

$$b_1 = \frac{d^2 x_1}{dt^2}, \quad b_2 = \frac{d^2 x_2}{dt^2}$$

und setzen  $\frac{x_1}{x_2} = \lambda$ ,  $\frac{t_1}{t_2} = \tau$ , so wird  $\beta = \lambda / \tau^2$  und es schreibt sich die Gl. (497) so

$$A \equiv \frac{\mu \lambda}{\kappa \tau^2} = 1. \tag{498}$$

Alle Bewegungen, für die  $A$  den Wert 1 hat, sind zueinander ähnlich. Würde eine dieser vier Zahlen  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $\kappa$ ,  $\tau$  geändert werden, während die anderen fest bleiben, so könnte  $A$  nicht konstant bleiben. Dagegen ist es sehr wohl möglich, daß bei festem  $A = 1$  zwei von ihnen geändert werden, und zwar so, daß ihr Produkt oder Quotient je nach der Art, wie sie in Gl. (498) vorkommen (also etwa  $\mu \lambda$ ,  $\mu / \kappa$  oder  $\lambda / \tau^2$ ), konstant bleibt; dann bleibt die Ähnlichkeit im mechanischen Sinne auch weiterhin erhalten.

Wenn also verlangt wird, daß die beiden Körper geometrisch ähnliche Wege durchlaufen, also  $\lambda = \text{konst.}$  ist, so heißt dies, daß in jedem Augenblicke  $\tau^2 \frac{\kappa}{\mu} = \text{konst.}$  ist; d. h. es verhalten sich die zum Durchlaufen entsprechender Wege notwendigen Zeiten wie die reziproken Quadratwurzeln aus den Beschleunigungen. Wenn also  $\kappa / \mu = \text{konst.}$ , so ist auch  $\tau = \text{konst.}$ ; gleichförmig beschleunigte Bewegungen sind immer miteinander ähnlich.

Beispiel 177. Die Bewegungsgleichung eines Punktes, der von einem festen Zentrum  $O$  proportional der Entfernung angezogen wird, lautet

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -c x,$$

wobei  $c$  die Anziehungskonstante ist. Die Kennzahl lautet hier

$$A \equiv c \frac{\tau^2}{\mu} = 1, \tag{499}$$



ist also unabhängig von  $\lambda$ ; für gleiche  $c$  und  $\mu$  sind daher die zum Durchlaufen entsprechender Strecken notwendigen Zeiten gleich groß. Daher brauchen (bei gleichen Werten von  $c/\mu$ ) Punkte in verschiedenen Entfernungen von  $O$  stets dieselbe Zeit, um nach  $O$  zu gelangen. Die Anfangsgeschwindigkeiten sind entweder beide gleich Null oder sie sind im Verhältnis von  $\lambda$  zueinander stehend anzunehmen, da die Zeiten jeweils übereinstimmen.

Das gleiche Ergebnis, das auch durch Ausrechnung bestätigt wird, würde man erhalten, wenn man statt der Bewegungsgleichung die zugehörige Energiegleichung verwenden würde.

Beispiel 178. Für das Problem der Anziehung nach dem Newtonschen Gesetz lautet die Differentialgleichung

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -M \frac{c}{x^2}$$

und die Kennzahl lautet

$$A \equiv c \frac{\tau^2}{\lambda^3} = 1. \quad (500)$$

Bei gleicher Masse und gleichem  $c$  wird  $\tau^2 = \text{konst. } \lambda^3$ , d. h. entsprechende Längen, deren Verhältnis  $\lambda$  ist, werden in Zeiten durchlaufen, die sich wie  $\lambda^{2/3}$  verhalten.

Dieselbe Form der Kennzahl ergibt sich auch für die Zentralbewegung unter der Annahme des Newtonschen Anziehungsgesetzes: für konstantes  $c$  ist in ähnlichen Bahnen  $\tau^2/\lambda^3 = \text{konst.}$  und dies gibt unmittelbar das dritte Keplersche Gesetz. —

Beispiel 179. Modell der Dampfmaschine. Bezeichnet man durch  $G \sim \lambda^3$  und  $M \sim \lambda^3$  die Tatsache, daß die Gewichte und Massen wie die Rauminhalte, d. h. wie die Kuben der Längen variieren, so folgt auch

$$G = M b \approx M \frac{L}{T^2} \approx \lambda^3 \frac{\lambda}{\tau^2} \approx \lambda^3$$

und daher ist

$$\tau \approx \sqrt{\lambda}$$

und

$$v \approx \frac{L}{T} \approx \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} \approx \sqrt{\lambda},$$

d. h. die Geschwindigkeiten des Modells und der ausgeführten Maschine müssen den Quadratwurzeln aus den linearen Abmessungen proportional sein.

Auch alle Kräfte am Modell und an der Ausführung im großen müssen im Verhältnis  $\lambda^3$  (nämlich wie die Gewichte) zueinander stehen. Insbesondere folgt für die Kolbenkraft

$$K = p F \approx p \lambda^2 \approx \lambda^3, \quad \text{d. h. } p \approx \lambda;$$

d. h. die Dampfdrücke im Modell und in der Ausführung müssen daher ebenfalls im Verhältnis der linearen Abmessungen stehen. Auch alle Führungskräfte und Reibungen stehen dann von selbst im richtigen Verhältnis  $\lambda^3$ . Damit dies auch die inneren Kräfte, d. h. die Spannungen tun, müßte auch für diese das Gesetz

$$\text{Kraft} = \text{Spannung} \cdot \text{Fläche} \approx \sigma \lambda^2 \approx \lambda^3, \quad \text{d. h. } \sigma \approx \lambda$$

gelten, d. h. die Spannungen auf die Flächeneinheit müßten sich wie die linearen Abmessungen verhalten, d. h. es müßten sich die Festigkeiten und (bei gleichen Sicherheiten) auch die zulässigen Spannungen wie die Abmessungen verhalten. Bei gleichen Baustoffen von Modell und Wirklichkeit ist dies offenbar nicht der Fall und daher ist in dieser Hinsicht die ähnliche Vergrößerung eines Modells undurchführbar.

Beispiel 180. Ein besonderes und praktisch auch wichtiges Beispiel für den Nutzen solcher Dimensionsbetrachtungen kommt in der Hydraulik zur Sprache, wenn es sich um die für die sogenannte turbulenten Flüssigkeitsbewegung geltenden Gesetze handelt. Dort liegt die Sache insofern besonders

verwickelt, weil die Erscheinung an sich — rein physikalisch genommen — wenig geklärt ist; überdies ist die mathematische Lösung dieses Problems ganz unbekannt. Trotzdem zeigt es sich, daß man mit Hilfe von Dimensionsbetrachtungen — auch ohne die Lösung zu kennen — doch gewisse Schlüsse über die Form der Gesetze ziehen kann, die für dieses Problem gelten. Der dabei erzielte Erfolg hat den Wert derartiger Betrachtungen als Hilfsmittel der Theorie unzweifelhaft hervortreten lassen.

Beispiel 181. Reduzierte Drehzahl einer Kolben-Dampfmaschine. Wenn ähnliche Dampfmaschinen mit gleichen Dampfdrücken  $p$  betrieben werden, so ändert sich die Leistung bei linearer Vergrößerung der Abmessungen im Verhältnis  $\lambda$  nach Gl. (329)

$$N \sim n \lambda^3.$$

Wird außerdem verlangt, daß die Strömungswiderstände in der Maschine gleich bleiben, so heißt dies, da diese im wesentlichen von den Geschwindigkeiten abhängen, daß auch die Geschwindigkeiten  $v$  gleichbleiben sollen; da  $v = r\omega = \frac{r\pi n}{30}$ , so folgt

$$n \approx \frac{1}{\lambda}$$

und aus dem vorigen Ansatz

$$N \approx \lambda^2.$$

Daher bleibt  $n\sqrt{N}$  unter den genannten Voraussetzungen ungeändert; dieser Ausdruck wird als Modelldrehzahl  $n_m$  bezeichnet,

$$n_m = n\sqrt{N} \tag{501}$$

und ist als die „Kennzahl“ für die betreffende Maschinenklasse (mit Bezug auf die angegebenen Bedingungen) anzusehen. (Kutzbach.)

Diese „reduzierten Drehzahlen“ gestatten die gemeinsamen mechanischen Eigenschaften der betreffenden Maschinenklasse zu erfassen.

# Literaturübersicht.

## I. Sammel- und Nachschlagwerke über das Gesamtgebiet der Mechanik.

- Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. IV, Mechanik. Leipzig: Teubner (fast vollständig erschienen), 1901 bis 1923.  
Handbuch der Physik. Bd. V, VI, VII. Berlin: Julius Springer 1926 bis 1928.  
Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik. 7 Bde. Leipzig: Joh. Ambr. Barth 1927 bis 1930.

## II. Geschichte der Mechanik.

- Duhem, P.: Les origines de la Statique, 2 tomes. Paris: Hermann 1905/6.  
Mach, E.: Die Mechanik in ihrer Entwicklung, 6. Aufl. Leipzig: Brockhaus 1922.

## III. Lehrbücher.

### A. Originalwerke in deutscher Sprache.

- Autenrieth, Ed.: Technische Mechanik. Berlin: Julius Springer, 3. Aufl. 1923.  
Boltzmann, L.: Vorlesungen über die Prinzipie der Mechanik, 2 Bde. Leipzig: Barth 1897, 1904.  
Budde, E.: Allgemeine Mechanik der Punkte und starrer Systeme, 2 Bde. Berlin: Reimer 1890/91.  
Föppl, A.: Vorlesungen über technische Mechanik, 6 Bde. Leipzig: Teubner, zahlreiche Auflagen von 1898 bis 1923.  
Grübler, M.: Lehrbuch der technischen Mechanik, 3 Bde. Berlin: Julius Springer 1918 bis 1923.  
Hamel, G.: Elementare Mechanik. Leipzig: Teubner, 2. Aufl. 1922.  
— Mechanik I, Grundbegriffe der Mechanik. Aus Natur u. Geisteswelt Nr. 684. Leipzig: Teubner 1921.  
Hertz, H.: Prinzipien der Mechanik. Leipzig: Barth 1894.  
Hort, W.: Technische Schwingungslehre, 2. Aufl. Berlin: Julius Springer 1922.  
Jaumann, G.: Die Grundlagen der Bewegungslehre. Leipzig: Barth 1905.  
Kirchhoff, G.: Vorlesungen über analytische Mechanik. Leipzig: Teubner 1897.  
Kriemler, C. J.: Technische Mechanik. Stuttgart: Wittwer, 2. Aufl. 1920.  
Lorenz, H.: Lehrbuch der technischen Physik, 4 Bde. München: Oldenbourg 1919. 2. Aufl. Berlin: Julius Springer. 1. Bd. 1924—1926.  
Mohr, O.: Abhandlungen auf dem Gebiete der technischen Mechanik. 3. Aufl. Berlin 1928.  
Müller, C. H. u. G. Prange: Allgemeine Mechanik. Hannover: Hellwing 1923.  
Schaefer, Cl.: Theoretische Physik. Bd. 1., 2. Aufl. Leipzig 1922.  
Stephan, P.: Die technische Mechanik des Maschineningenieurs. 4 Bde. Berlin 1921 bis 1922.  
Schell, W.: Theorie der Bewegung und der Kräfte. 2 Bde. Leipzig: Teubner, 2. Aufl. 1879/80.

### B. In deutscher Sprache erschienene Übersetzungen.

- Love, A. E. H.: Theoretische Mechanik, deutsch von H. Polster. Berlin: Julius Springer 1920.  
Routh, E. J.: Die Dynamik der Systeme starrer Körper, deutsch von A. Schapp, 2 Bde. Leipzig: Teubner 1898.  
Thomson-Tait: Handbuch der theoretischen Physik, deutsch von H. Helmholz. Braunschweig: Vieweg 1871.  
Whittaker, E. T.: Analytische Dynamik, deutsch von F. u. K. Mittelstentscheid, Berlin: Julius Springer 1924.

## C. Fremdsprachige Werke.

- Appell, D.: *Traité de Mécanique rationelle*, 4 tomes. Paris: Gauthier-Villars. 1902 bis 1921.  
 — et Dautheville: *Précis de Mécanique rationelle*. Ebenda 1910.  
 Lamb, H.: *Statics* 1912, *Dynamics* 1914, *Higher Mechanics* 1920. Cambridge.  
 Loney, S. L.: *Dynamics of a particle and of rigid bodies*. Cambridge 1927.  
 Routh, E. J.: *Dynamics of a particle*. Cambridge 1898; *Statics*, 2 vols. Cambridge 1896, 1902.  
 Webster, A. G.: *Dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies*. 2nd Ed. Leipzig: Teubner 1912.

## IV. Aufgabensammlungen.

- Seeliger, R., Henning, F. u. v. Mises, R.: *Aufgaben aus der theoretischen Physik*. Braunschweig: Vieweg 1921.  
 Wittenbauer, F.: *Aufgaben aus der technischen Mechanik*, 3 Bde. Berlin: Julius Springer, mehrere Auflagen von 1907 an.

## V. Lehrbücher über einzelne Sondergebiete.

## A. Statik.

- Mehrtens, Chr.: *Statik und Festigkeitslehre*, 3 Bde. Leipzig: Engelmann 1909 bis 1912.  
 Müller-Breslau, H.: *Die graphische Statik der Baukonstruktionen*. 2 Bde. in 3 Teilen. Leipzig: A. Kröner, 4. und 5. Aufl., 1907 bis 1912.  
 Schlink, W.: *Statik der Raumbauwerke*. Leipzig: Teubner 1907.  
 Schur, F.: *Vorlesungen über graphische Statik*. Leipzig: Veit 1915.

## B. Kinematik.

- Burmester, L.: *Lehrbuch der Kinematik*. Bd. 1, Text und Tafeln. Leipzig: A. Felix 1888.  
 Christman-Baer: *Grundzüge der Kinematik*. Berlin: Julius Springer, 2. Aufl. 1923.  
 Grübler, M.: *Getriebelehre*. Berlin: Julius Springer 1921.  
 Heun, K.: *Lehrbuch der Mechanik*. Bd. 1, Sammlung Schubert. Leipzig 1906.  
 Koenigs, G.: *Leçons de Cinématique*. Paris: A. Hermann 1905.  
 Krause, M.: *Analysis der ebenen Bewegung*. Berlin u. Leipzig 1920.  
 Polster, H.: *Kinematik*, Sammlung Göschen. Leipzig 1908.

## C. Dynamik.

- Cranz, C.: *Lehrbuch der Ballistik*, 4 Bde. Leipzig: Teubner 1912 bis 1918.  
 Grammel, R.: *Der Kreisel*. Braunschweig: Vieweg 1920.  
 Heun, K.: *Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik*. Leipzig: Teubner 1909.  
 Hort, W.: *Technische Schwingungslehre*. Berlin: Julius Springer, 2. Aufl. 1922.  
 Klein, F. u. Sommerfeld, A.: *Über die Theorie des Kreisels*, 4 Bde. Leipzig: Teubner 1897 bis 1910.  
 Lorenz, H.: *Die Dynamik der Kurbelgetriebe*. Leipzig: Teubner 1901.  
 Radinger, J.: *Über Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit*. Wien: Gerold, 3. Aufl. 1892.  
 Routh, E. J.: *Stability of a given state of motion*. London 1877.  
 Schubert, H.: *Theorie des Schlickschen Massenausgleiches bei mehrkurbeligen Dampfmaschinen*. Leipzig: Göschen 1901.  
 Tolle, M.: *Die Regelung der Kraftmaschinen*. Berlin: Julius Springer, 3. Aufl. 1922.  
 Wittenbauer, F.: *Graphische Dynamik*. Berlin: Julius Springer 1923.

**VI. Einige Abhandlungen über besondere Gegenstände.****A. Fachwerke.**

Schur, F.: Über einfache Fachwerke. *Math. Ann.* 48, S. 142. 1897.

**B. Reibung.**

Discussion on Lubrication. *Proc. Lond. Phys. Soc.* 1920.

Hardy, W. B. and S. K.: On Static Friction and on the Lubricating Properties of Certain Chemical Substances. *Phil. Mag.* 38, S. 32. 1919.

Lasche, O.: Die Reibungsverhältnisse in Lagern mit hoher Umfangsgeschwindigkeit. *Z. V. d. I.* 1902, S. 1881, 1932, 1961, und *Forsch.-Arb. Ing. H.* 9. 1903.

Sachs, G.: Versuche über die Reibung fester Körper. *Z. ang. Math. Mech.* Bd. 4, S. 1. 1924,

Sommerfeld, A.: Zur Theorie der Schmiermittelreibung. *Z. techn. Phys.* 2, S. 58 und 89. 1921.

Stribeck, R.: Die wesentlichen Eigenschaften der Gleit- und Rollenlager. *Z. V. d. I.* 1902, S. 1341, 1432, 1463, *Forsch.-Arb. Ing. H.* 7. 1903.

**C. Schwungradberechnung.**

v. Mises, R.: Die Ermittlung der Schwungmassen im Schubkurbelgetriebe. *Z. öst. Ing.-V.* 1906.

Wittenbauer, F.: Graphische Dynamik der Getriebe. *Z. Math. Phys.* 50, 1904, und Die graphische Ermittlung des Schwungradgewichtes. *Z. V. d. I.* 49. 1905.

**D. Mechanische Ähnlichkeit.**

Hopf, L.: Über Modellregeln und Dimensionsbetrachtungen. *Naturwissensch.* 8, S. 81. 1920.

Kutzbach, K.: Fortschritte und Probleme der mechanischen Energieumformung. *Z. V. d. I.* 65, S. 1301/2. 1921.

**E. Stoß.**

Pöschl, Th.: Der Stoß. *Handb. d. Phys.* Bd. 6. Berlin: Julius Springer 1928.

## Namenverzeichnis.

D'Alembert 118, 239, 285.	Euler 196, 291. Federhofer 83. Foucault 200. Galilei 6, 200. Galton 107. Gauß 4, 144. Gerber 61. Guldin 97. Hertz 151. Kepler 154, 159. Kutzbach 311.	Lagrange 267. Land 238. Mach 8, 14. Mayor 83. Meyer 104. v. Mises 83. Mohr 235, 238. Nehls 237. Newton 6, 13, 14, 131, 155, 157, 200, 226.	Poinsot 297. Poirée 107. Polonceau 72. Prony 223. Radinger 281. Ritter 69. Sachs 108. Schlick 291. Stribeck 111. Weber 4. Wichert 107.
------------------------------	---	--	--

## Sachverzeichnis.

Abbremsen von Motoren 223.	Bewegungsgleichung 131, 166, 173, 267.
Absoluter Raum 13.	Bewegungsgröße 267.
Achsen, körperfeste 292.	Bewegungsreibung 104.
— raumfeste 293.	Bezugskörper 1, 199.
Ähnlichkeit 308.	Biegemoment 54.
Äquivalenz 273.	Bohrreibung 117, 118.
D'Alembertsches Prinzip 118, 239, 285.	Brachystochrone 166.
Anfangsbedingungen 133.	Bruchmoment 57.
Arbeit einer Kraft 218.	Bruchquerschnitt 57.
— eines Drehmomentes 219.	Cardanische Aufhängung 298.
Arbeitsfunktion 219.	Cartesische Koordinaten 128.
Arbeitsprodukt 21.	Cauchysches Trägheitsellipsoid 234.
Arbeits-Gewichts-Linie 278.	Coriolisbeschleunigung 204.
Arbeits-Massen-Linie 277.	Coulombsches Reibungsgesetz 101.
Auflager, Formen der 51.	Cremonaplan 64, 66.
— bewegliche 51.	Dampfmaschinenmodelle 311.
Auflagerkraft 14, 30, 51, 124.	Dämpfungsfaktor 143.
Aufpunkt 220.	Dämpfungskonstante 144.
Auslauf eines Flugzeuges 259.	Dekrement, log. 144.
Ballistisches Pendel 305.	Deviationsmoment 229.
— Problem 151.	— zeichnerische Ermittlung 236.
Beharrungstemperatur bei Reibung 110.	Deviationswiderstand 296.
Beiwert 16.	Differentialbremse 113.
Beschleunigung 7, 128, 130, 149.	Dimension 4.
— einer Ventilstange 184.	Dimensionsbetrachtungen 5, 307.
— tang. u. norm. 149.	Doppelpendel 247.
— relative 204, 206.	Doppelstütze 52.
Beschleunigungsplan 131, 170.	Drall 257.
Beschleunigungspol 172.	Drehflächen 97.
Bestimmtheit, statische 31.	Drehhyperboloid 217.
Bewegung, gleichförmige 133.	Drehimpuls 302.
— — im Kreis 150.	Drehkörper 98.
— gezwungene 160.	Drehpol 167.
— gleichförmig beschleunigte 134.	Drehschemel 290.
— krummlinige 148.	Drehstoß 302.
— mittlere 160.	Drehung 166, 294.
— um einen festen Punkt 187.	Drehung um eine feste Achse 259.
— freie relative 201.	Drehwinkel 167.
— gewz. relative 212.	Drehzahl 151.
— räumliche 187.	— reduzierte 311.
— zwangsläufige 265, 267.	Dreigelenk 46, 60.

- Druck 32.  
 Drucklinie 34.  
 Dynamie 76.  
 Dynamometer 223.  
  
 Ebene Kräftegruppe 34, 41.  
 Eckenstütze 54, 87.  
 Eigenschwingung 243.  
 Einheiten 4.  
 Einschienenbahn 298.  
 Einspannung 52.  
 Energie, Erhaltung der 225.  
 — kinetische 135, 224.  
 — potentielle 135.  
 Energieintegral 135, 224, 255.  
 Entwicklungssatz 27.  
 Ergänzungskräfte 239.  
 Ersatzlasten 68.  
 Ersatzmasse 273.  
 Ersatzpunkte 255.  
 Erstarrungsprinzip 33.  
 Erzwungene Schwingung 145.  
 Eulersche Bewegungsgleichungen 291.  
 — Winkel 196.  
  
 Fachwerke, ebene 62.  
 — räumliche 87.  
 — wackelige 74.  
 — zusammengesetzte 71.  
 Fall, freier 134.  
 — aus großer Höhe 135.  
 — mit Luftwiderstand 142.  
 — mit Rücksicht auf Erddrehung 213.  
 Fallbewegung auf einer Ebene 162.  
 Feldvektoren 88.  
 Fixsternhimmel 13, 290.  
 Flächenbestimmung 138.  
 Flächengeschwindigkeit 152.  
 Flächensatz 289.  
 Flachregler 263.  
 Flaschenzug 116, 117, 125.  
 Flechtwerke 87.  
 Flugzeug, Eigengeschw. des 191, 192.  
 Foucaultsches Pendel 200.  
 Freiaufliegender Träger 53.  
 Freiheitsgrad 166.  
 Freie Achsen 261.  
 Frequenz 243.  
 Führungen 176.  
 Führungsstoß 305.  
  
 Geführte Systeme 256.  
 Gelenk 52.  
 Gemeine Kettenlinie 37.  
 Geradelaufapparat d. Torpedos 298.  
 Gerberträger 61.  
 Geschwindigkeit 128, 152.  
 — gedrehte 169.  
 Geschwindigkeit, mittlere 279.  
 — relative 170, 201.  
 Geschwindigkeitshöhe 134, 278.  
  
 Geschwindigkeitsplan 128, 168.  
 Getriebe 266.  
 Gewicht 8.  
 Gewichtsausgleichung 125.  
 Gewichts-Kurbelweg-Linie 278.  
 Gewölbe 115.  
 Gleichgewicht 27.  
 — rechnerische Bed. 48.  
 — zeichnerische Bed. 44.  
 Gleichwertigkeit 273.  
 Gleithülse 52.  
 Gleitlager 51.  
 Gravitation, universelle 155.  
 Gravitationskonstante 135.  
 Grundeinheiten 4, 5.  
 Grundfigur eines Fachwerkes 71.  
 Guldinsche Regel 97.  
  
 Haftreibung 99.  
 Hängebrücke 35.  
 Harmonische Schwingung, einfache 136, 243.  
 — erzwungene 145.  
 — gedämpfte 143.  
 Hauptachse 231.  
 Hauptträgheitsmoment 231.  
 Hauptzentralachsen 231, 261.  
 Hebel 116, 124.  
 Herpolodiekegel 295.  
 Hodograph 129.  
 Hyperbelräder 217.  
  
 Ideale Gelenke, Knoten 69.  
 Impuls 257, 288.  
 Indikator diagramm 137, 221.  
 Innenknoten, belastete 69.  
 Innere Kräfte 13, 121, 240, 285, 287.  
 Inertialsystem 11.  
 Integration, graphische 138.  
 Integalkurven 139.  
 Integraph 139.  
  
 Kegelpendel 166.  
 Kegelräder 217.  
 Keil 113.  
 Keilnut 114.  
 Kennzahlen 308.  
 Keplersche Gesetze 155.  
 — Gleichung 159.  
 Kettenlinie, parabolische 35.  
 — gemeine 37.  
 Kinematik 128.  
 Knotenpunkt 245.  
 Koordinaten 1.  
 Kraft 1, 5, 10, 13.  
 — lebendige 224.  
 Kraftbegriff 8.  
 Krafteck 29, 42.  
 Kräfte, konservative 219.  
 — eingeprägte 14.



- Kräftegruppe, eines Punktes 29.  
 —, ebene 41.  
 —, räumliche 75.  
 Kräftepaar 43.  
 Kraftkreuz 77.  
 Kraftreduktion 273, 275.  
 Körperpendel 260.  
 Kreisel 291.  
 — kräftefreier 294.  
 Kreiselmoment 296.  
 Kreisfrequenz 137.  
 Kreuzschieber 176.  
 — rechtwinkliger 179.  
 Krummlinige Bewegung 148.  
 Kugelkreisel 294.  
 Kugellager 118.  
 Kurbelschleife 176, 211.  
 Kurbelviereck 176, 179.  
  
**Lageplan** 42, 63.  
 Lagrangesche Bew. Gl. 267.  
 Leistung 220.  
 — einer Kolbenmaschine 221.  
 Leitfläche 160.  
 Leitkurve 160.  
 Linkssystem 23.  
  
**Masse** 6, 10.  
 —, reduzierte 230.  
 Massenausgleich 262, 288, 291.  
 Massenkkräfte 13, 88.  
 Massenmittelpunkt 88.  
 — Erhaltung d. Bewegung des 286.  
 Massenreduktion 230, 273.  
 Maßstab 2.  
 Maßsysteme 4.  
 Mechanische Ähnlichkeit 310.  
 Mittelkraft 29.  
 Mittelkraftlinien 43.  
 Mittelpunkt von Flächen 93.  
 — von Linien 92.  
 — von Körpern 98.  
 Mittlere Geschwindigkeit 279.  
 Modellversuche 308.  
 Moment 43.  
 — eines Vektors 24.  
 — der Bewegungsgröße 258.  
 Momentanpol 167.  
 Momentenlinie 56.  
 Momentenprodukt 21, 22.  
 Momentensatz 25.  
  
**Netzwerk** 87.  
 Newtonsches Gesetz 8, 11, 14.  
 Nockensteuerung 184.  
 Normalbeschleunigung 149.  
  
**Oberflächenkräfte** 13.  
  
**Parabolische Kettenlinie** 35.  
 Parallelogrammgesetz 17.  
 Parameterdarst. d. Bahnkurve 129.  
  
 Pendel 164.  
 — Foucaultsches 200.  
 —, körperliches 260.  
 Pendelstütze 52.  
 Planetenbewegung 155, 158.  
 Planimeter 139.  
 Polare 46.  
 Polares Trägheitsmoment 229.  
 Polarkoordinaten 152.  
 Polkurven 177.  
 Polodiekegel 295.  
 Polonceau-Dachstuhl 72.  
 Potential 219.  
 Potenzflaschenzug 125.  
 Präzessionsbewegung 189, 295.  
 Prinzip der virtuellen Arbeiten od.  
 Verschiebungen 118.  
 — D'Alemberts 239.  
 — der Wechselwirkung 13.  
 Projektionssatz 19.  
 Pronyscher Zaum 223.  
 Punkt- und Kurvenführung 177.  
  
**Quellen der Mechanik** 16.  
 Querkraft 54.  
 Querkraftlinie 56.  
  
**Randbedingungen d. Bew.** 133.  
 Rauigkeit 100.  
 Raumbachwerke 87.  
 Raumkräfte 13.  
 Rechtssystem 23.  
 Reduktion d. Massen u. Kräfte 273.  
 Reduzierte Drehzahl 311.  
 — Masse 230.  
 Reibräder 108.  
 Reibung 99.  
 — Flüssigkeits- 107.  
 — trockene 107.  
 Reibungsbeschleunigung 160.  
 Reibungskraft 99.  
 Reibungskreis 110.  
 Reibungsstoß 302.  
 Reibungsversuchsergebnisse 106, 108.  
 Reibungswinkel 101.  
 Reibungszahl 101.  
 Riementrieb 111, 112.  
 Relativitätsprinzip 2, 200.  
 Relative Bewegung 199, 207.  
 Relativistische Mechanik 202.  
 Resonanz 145.  
 Rittersche Schnittmethode 69.  
 Rolle 116.  
 Rollenlager 51.  
 Rollenziffer 116.  
 Rollführung 177.  
 Rollreibung 117.  
 Rollreibungsmoment 117.  
 Rollreibungszahl 118.  
 Rotation 166.

- Säkulargleichung 244.  
 Scheibe, Geschw.-Zustand d. 168.  
 Schiebung 166.  
 Schiefe Ebene 31, 113, 124.  
 Schiefer Wurf 148, 151.  
 Schiffskreisel 298.  
 Schlußlinie 29.  
 Schmiermittel 105.  
 Schraube 115.  
 Schraubenbewegung 189.  
 Schraubungsachse 190.  
 Schubkurbel 181, 270.  
 Schwerpunkt 89.  
 Schwingung, einfache harmonische 136, 243.  
 — erzwungene 145.  
 — gedämpfte 143, 146.  
 Schwingungsmittelpunkt 260.  
 Schwingungszahl 243.  
 Schwung 257, 286.  
 Schwungradberechnung 266.  
 — angenäherte 280.  
 — dynamische 278.  
 Seileck 33.  
 — Mannigfaltigkeit der 45.  
 Seilkräfte 33.  
 Seilsteifheit 116.  
 Seiltrieb 112.  
 Selbsthemmung, -sperrung 113.  
 Skalar 16.  
 Stabilität 243, 248, 250.  
 Stabkräfte 32.  
 Stabvertauschung 73.  
 Starrer Körper 3, 41.  
 Statik 29.  
 Steighöhe 134.  
 Steigzeit 134.  
 Steuerscheibe, unrunde 184, 209, 210.  
 Stoß 298.  
 Stoßmittelpunkt 306.  
 Stoßzahl 300, 303.  
 Stützlinie 34.  
 — eines Gewölbes 115.  
 Stützungen 52, 78.  
  
 Tangentialbeschleunigung 149.  
 Tangentialkraft 137.  
 Tautochronismus 165.  
 Tensoren 17.  
 Trägheitsbahn 11.  
 Trägheitsellipsoid 234.  
 Trägheitsgesetz 11.  
 Trägheitshalbmesser 230.  
 Trägheitskreis 238.  
  
 Trägheitsmoment ebener Flächen 233.  
 — experim. Best. 260.  
 — geometrisches 228.  
 — polares 229.  
 — rechner. Best. 233.  
 — für parallele Achsen 229.  
 Trägheitssystem 199.  
 Translation 166.  
 Übersetzungsverhältnis 216.  
 Umkehrung der Bewegung 177.  
 Umlaufzahl, -zeit 151.  
 Unbestimmtheit, statische 31.  
 — dynamische 254.  
 Unbestimmter Maßstab 72.  
 Ungleichförmigkeitsgrad 279.  
 Unrunde Scheibe 177, 184.  
  
 Variationsrechnung 165.  
 Vektorrechnung 16.  
 Velozipedkran 53.  
 Vierflach-Fachwerke 87.  
 Ventilstange 184, 208.  
 Verzahnung 216.  
 Virtuelle Arbeit 118.  
  
 Wälzhebel 177.  
 Wechselwirkung von Kräften 13, 14.  
 Wellrad 116.  
 Winkelbeschleunigung 150.  
 Winkelgeschwindigkeit 150.  
 Wirkungsgrad 220, 222.  
 Wucht 224.  
 Wuchtintegral 225.  
 Wurf, nach aufwärts 134.  
 — schiefer 148, 151.  
  
 Zahnräder 200, 216.  
 Zapfen 52.  
 Zapfenreibung 109.  
 Zentralachse 76, 231.  
 Zentralbeschleunigung 154.  
 Zentralbewegung 154, 226.  
 Zentrallipsoid 231.  
 Zentrifugalmoment 229.  
 Zerlegung von Kräften 49, 80.  
 Zerlegungsaufgaben, räumliche 80, 85.  
 Zug 32.  
 Zusatzbeschleunigung 204.  
 Zustandskurve 277.  
 Zwanglauf 176, 179, 254, 267.  
 Zwangsbeschleunigung 160.  
 Zwangskraft 160.  
 Zweigelenk 53.  
 Zweikurvenführung 177.  
 Zweipunktführung 176.  
 Zykloide 165.

**Lehrbuch der Hydraulik** für Ingenieure und Physiker. Zum Gebrauch bei Vorlesungen und zum Selbststudium. Von Dr.-Ing. Theodor Pöschl, o. Professor an der Technischen Hochschule in Karlsruhe. Mit 148 Abbildungen. VI, 192 Seiten. 1924. RM 8.40; gebunden RM 9.90

---

**Einführung in die Mechanik** mit einfachen Beispielen aus der Flugtechnik. Von Dr.-Ing. Theodor Pöschl, o. Professor an der Technischen Hochschule in Karlsruhe. Mit 102 Textabbildungen. VII, 132 Seiten. 1917. RM 3.75

---

**Autenrieth-Ensslin, Technische Mechanik.** Ein Lehrbuch der Statik und Dynamik für Ingenieure. Neu bearbeitet von Dr.-Ing. Max Ensslin, Eßlingen. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 295 Textabbildungen. XVI, 564 Seiten. 1922. Gebunden RM 15.—

---

**Lehrbuch der technischen Mechanik.** Von Professor Martin Grübler, Dresden.  
Erster Band: Bewegungslehre. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 144 Textfiguren. VII, 143 Seiten. 1921. RM 4.20  
Zweiter Band: Statik der starren Körper. Zweite, berichtigte Auflage. (Neudruck.) Mit 222 Textfiguren. X, 280 Seiten. 1922. RM 7.50  
Dritter Band: Dynamik starrer Körper. Mit 77 Textfiguren. VI, 157 Seiten. 1921. RM 4.20

---

**Die technische Mechanik des Maschineningenieurs** mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. Von Professor Dipl.-Ing. P. Stephan, Reg.-Baumeister.  
Erster Band: Allgemeine Statik. Mit 300 Textfiguren. VI, 160 Seiten. 1921. Gebunden RM 6.—  
Zweiter Band: Die Statik der Maschinenteile. Mit 276 Textfiguren. IV, 268 Seiten. 1921. Gebunden RM 9.—  
Dritter Band: Bewegungslehre und Dynamik fester Körper. Mit 264 Textfiguren. VI, 252 Seiten. 1922. Gebunden RM 9.—  
Vierter Band: Die Elastizität gerader Stäbe. Mit 255 Textfiguren. IV, 250 Seiten. 1922. Gebunden RM 9.—  
Fünfter Band: Die Statik der Fachwerke. Mit 198 Textfiguren. IV, 140 Seiten. 1926. Gebunden RM 8.40

---

**Aufgaben aus der Technischen Mechanik.** Von Professor Ferdinand Wittenbauer †, Graz.  
Erster Band: Allgemeiner Teil. 896 Aufgaben nebst Lösungen. Sechste, vollständig umgearbeitete Auflage herausgegeben von Dr.-Ing. Theodor Pöschl, o. Professor an der Technischen Hochschule in Karlsruhe. Mit 601 Textabbildungen. VIII, 356 Seiten. 1929. RM 14.20; gebunden RM 15.60  
Zweiter Band: Festigkeitslehre. 611 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Dritte, verbesserte Auflage. Mit 505 Textfiguren. VIII, 400 Seiten. 1918. Unveränderter Neudruck 1922. Gebunden RM 8.—  
Dritter Band: Flüssigkeiten und Gase. 634 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 433 Textfiguren. VIII, 390 Seiten. 1921. Unveränderter Neudruck 1922. Gebunden RM 8.—

---

**Graphische Dynamik.** Ein Lehrbuch für Studierende und Ingenieure. Mit zahlreichen Anwendungen und Aufgaben. Von Professor Ferdinand Wittenbauer †, Graz. Mit 745 Textfiguren. XVI, 797 Seiten. 1923. Gebunden RM 30.—

**Ingenieur-Mechanik.** Lehrbuch der technischen Mechanik in vorwiegend graphischer Behandlung. Von Dr.-Ing. Dr. phil. Heinz Egerer, Dipl.-Ingenieur, vorm. Professor für Ingenieur-Mechanik und Materialprüfung an der Technischen Hochschule Drontheim.

Erster Band: Graphische Statik starrer Körper. Mit 624 Textabbildungen, sowie 238 Beispielen und 145 vollständig gelösten Aufgaben. VIII, 380 Seiten. 1919. Unveränderter Neudruck 1923. Gebunden RM 11.—

---

**Grundzüge der technischen Mechanik des Maschineningenieurs.** Ein Leitfaden für den Unterricht an maschinentechnischen Lehranstalten. Von Professor Dipl.-Ing. P. Stephan, Regierungsbaumeister. Mit 283 Textabbildungen. VI, 160 Seiten. 1923. RM 2.50

---

**Leitfaden der Mechanik für Maschinenbauer.** Mit zahlreichen Beispielen für den Selbstunterricht. Von Professor Dr.-Ing. Karl Laudien, Stettin.

Erstes Heft: Statik und Dynamik. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 246 Textabbildungen. VI, 179 Seiten. 1927. RM 5.50

Zweites Heft: Hydraulik. Mit 82 Textabbildungen. IV, 46 Seiten. 1928. RM 2.50

---

**Theoretische Mechanik.** Eine einleitende Abhandlung über die Prinzipien der Mechanik. Mit erläuternden Beispielen und zahlreichen Übungsaufgaben. Von Professor A. E. H. Love, Oxford. Autorisierte deutsche Übersetzung der zweiten Auflage von Dr.-Ing. Hans Polster. Mit 88 Textfiguren. XIV, 424 Seiten. 1920. RM 12.—; gebunden RM 14.—

---

**Lehrbuch der technischen Physik.** Von Professor Dr. Dr.-Ing. Hans Lorenz, Geh. Regierungsrat, Danzig. Zweite, neubearbeitete Auflage.

Erster Band: Technische Mechanik starrer Gebilde. Zweite, vollständig neubearbeitete Auflage der „Technischen Mechanik starrer Systeme“.

Erster Teil: Mechanik ebener Gebilde. Mit 295 Textabbildungen. VIII, 390 Seiten. 1924. Gebunden RM 18.—

Zweiter Teil: Mechanik räumlicher Gebilde. Mit 144 Textabbildungen. VIII, 294 Seiten. 1926. Gebunden RM 21.—

---

**Technische Schwingungslehre.** Ein Handbuch für Ingenieure, Physiker und Mathematiker bei der Untersuchung der in der Technik angewendeten periodischen Vorgänge. Von Professor Dr. Wilhelm Hort, Diplom-Ingenieur, Oberingenieur bei der Turbinenfabrik der AEG, Berlin. Zweite, völlig umgearbeitete Auflage. Mit 423 Textfiguren. VIII, 828 Seiten. 1922. Gebunden RM 24.—

---

**Die Differentialgleichungen des Ingenieurs.** Darstellung der für Ingenieure und Physiker wichtigsten gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen einschließlich der Näherungsverfahren und mechanischen Hilfsmittel. Mit besonderen Abschnitten über Variationsrechnung und Integralgleichungen. Von Professor Dr. Wilhelm Hort, Diplom-Ingenieur, Oberingenieur der AEG Turbinenfabrik, Berlin. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage unter Mitwirkung von Dr. phil. W. Birnbaum und Dr.-Ing. K. Lachmann. Mit 308 Abbildungen im Text und auf 2 Tafeln. XII, 700 Seiten. 1925. Gebunden RM 25.50

### Druckfehlerberichtigungen.

Seite 273, Zeile	6	von oben	lies:	dem statt den.
„ 277, „	3	„ unten	„	die entsprechende.
„ 285, „	10	„ oben	„	$m'_2$ statt $m_2$ , $\dot{\omega}_1$ statt $\dot{\omega}$ .
„ 286, „	3	„ unten	„	den statt dem.
„ 290, „	6	„ „	„	ausgeschlossen.
„ 293, „	14	„ oben	„	die relativen.
„ 295, „	17	„ unten	„	die Präzession.
„ 297, „	16	„ „	„	dieses statt diese.
„ 299, „	20	„ oben	„	Geschwindigkeitsänderungen.