

Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern

III. Band

Zweites Heft (abgeschlossen am 16. April 1924)

Mit 97 Textabbildungen, 1 Bildnis und 4 Tafeln

Unter Mitwirkung von

Geheimrat Professor Dr. K. A. Hofmann-Berlin, Professor Dr. Ernst Wilke-Dörfurt-Stuttgart,
Dr. Hermann Backhaus, Dr. Otto Berg, Heinrich von Buol, Dr. Emil Duhme, Dr. Robert
Fellinger, Dr. Bruno Fetkenheuer, Dr. Dr.-Ing. e. h. Adolf Franke, Professor Rob. M. Friese,
Professor Dr. Hans Gerdien, Dr. Carl Haase, Willy Hinze, Dr. Robert Jaeger, Dr.-Ing.
e. h. Carl Köttgen, Dr. Arthur Konarsky, Karl Küpfmüller, Martin Lebegott, Fritz
Lüschen, Dr. Georg Masing, Dr. Werner Nagel, Geheimrat Professor Dr. Dr.-Ing. e. h. Walter
Reichel, Dr. Hans Riegger, August Roth, Professor Dr. Dr.-Ing. e. h. Reinhold Rüdenberg,
Dr. Werner Schwerdtfeger, Dr. Felix Strecker, Dr. Rudolf Thaller,
Dr. Ferdinand Trendelenburg

herausgegeben von

Professor Dr. phil. und Dr.-Ing. e. h. Carl Dietrich Harries †

Geheimer Regierungsrat



Berlin

Verlag von Julius Springer

1924

ISBN-13: 978-3-642-98554-6

E-ISBN-13: 978-3-642-99369-5

DOI: 10.1007/978-3-642-99369-5

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.

Copyright 1924 by Julius Springer in Berlin.

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1924

Vorwort.

Das vorliegende Heft steht unter dem Zeichen eines schweren Verlustes, den der Siemens-Konzern, und insbesondere die Schriftleitung unserer Zeitschrift, zu beklagen hat: Am 3. November 1923 wurde uns Herr Geheimrat Prof. Dr. C. D. Harries durch den Tod entrissen. Er hatte die „Wissenschaftlichen Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern“ im Jahre 1920 ins Leben gerufen und sich ihrer Herausgabe mit der ihm eigenen Hingebung auf dem Gebiete jeglicher Förderung der Wissenschaft angenommen. Unter seiner Leitung sind fünf Hefte unserer Zeitschrift herausgegeben worden. Während der Vorbereitung des vorliegenden Heftes wurde er aus dem Leben abgerufen. Einige Tage, bevor er sich in die Klinik begab, um sich einem chirurgischen Eingriff zu unterziehen, hat er dem Unterzeichneten seine letzte fertiggestellte Arbeit „Zur Aufklärung der Harznatur des Schellacks. Versuch einer Partialsynthese“, die er mit seinem Mitarbeiter, Dr. Werner Nagel, ausgeführt hatte, übergeben. Die Arbeit ist in diesem Heft niedergelegt.

Besonders zu danken haben wir an dieser Stelle Herrn Geheimrat Prof. Dr. K. A. Hofmann, der unserer Bitte um einen Nachruf auf den Dahingegangenen in treuer Freundschaft für ihn Folge leistete.

Ferner hat Herr Professor Dr. Ernst Wilke - Dörfurt, Stuttgart, den wir in den Jahren 1913—1921 zu den Mitgliedern unseres Forschungslaboratoriums zählen durften, es sich nicht nehmen lassen, das Andenken des Verstorbenen durch einen Beitrag zu ehren. Auch ihm sprechen wir unseren herzlichen Dank aus.

Im übrigen bewegt sich der Inhalt des Heftes in den gewohnten Bahnen, wie sie von dem Begründer unserer Zeitschrift vorgezeichnet worden sind.

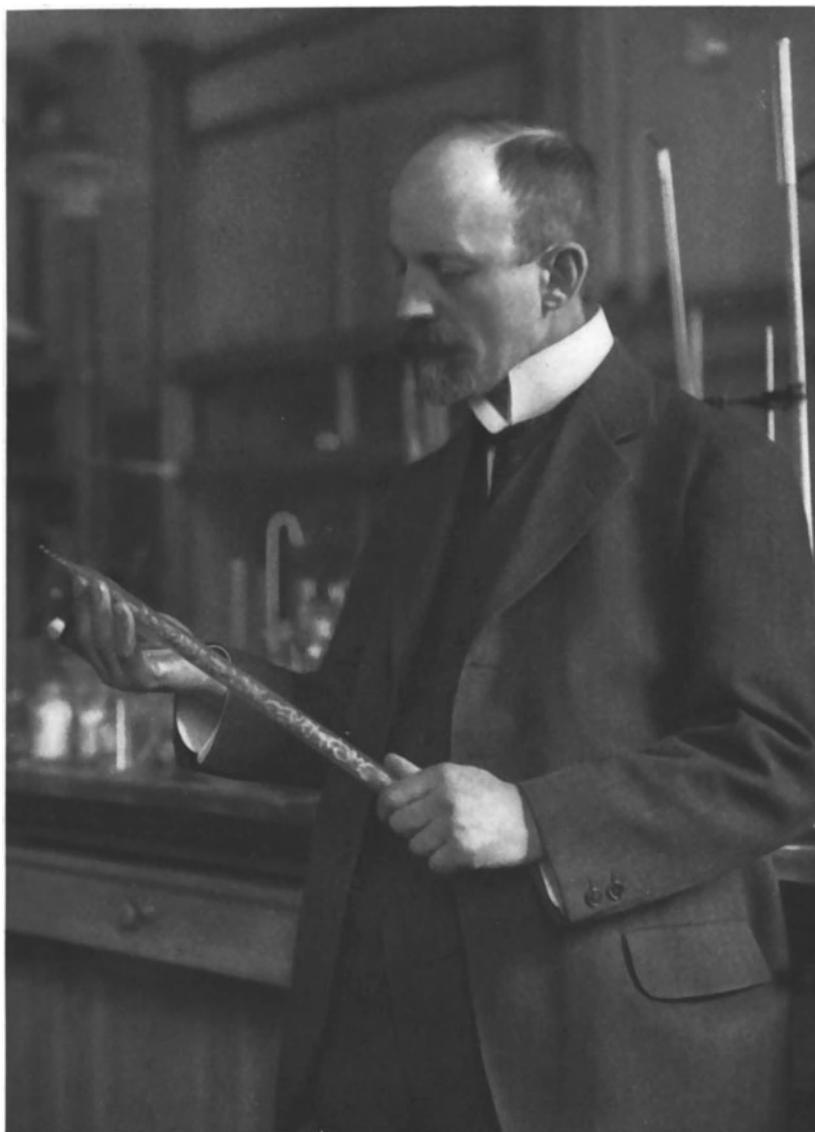
Berlin-Siemensstadt, April 1924.

Dr. Robert Fellingner.

Inhaltsübersicht.

	Seite
Nachruf auf Carl Dietrich Harries. Von Geheimrat Prof. Dr. K. A. Hofmann	1
I. E. Wilke-Dörfurt: Über die Fällung des Magnesiums mit Phosphat aus tartrathaltiger Lösung in Gegenwart von Aluminium	9
II. Aus dem Forschungslaboratorium des Siemens-Konzerns zu Siemensstadt. C. Harries † und W. Nagel: Zur Aufklärung der Harznatur des Schellacks. Ver- such einer Partialsynthese	12
B. Fetkenheuer und A. Konarsky: Über die Bestimmung von Magnesium in Aluminium-, Zink- und Bleilegierungen	19
Gg. Masing und C. Haase: Innere Spannungen im Messing und ihre Beseitigung .	22
E. Duhme: Über die elektrolytische Darstellung reinsten Eisens	39
F. Trendelenburg: Objektive Klangaufzeichnung mittels des Kondensatormikrophons	43
H. Riegger: Zur Theorie des Lautsprechers	67
H. Backhaus: Über Siebketten und deren Anschluß an Leitungen	101
III. Aus dem Zentrallaboratorium des Wernerwerkes der Siemens & Halske A.-G. zu Siemensstadt. K. Küpfmüller: Vergleichende Geräuschmessung	153
IV. Aus dem physikalischen Laboratorium des Wernerwerkes M der Siemens & Halske A.-G. zu Siemensstadt. O. Berg, W. Schwerdtfeger u. R. Thaller: Ein Normal-Meßgerät für Röntgen- strahlen	162
R. Jaeger u. W. Hinze: Methoden zur Messung hochohmiger Widerstände	177
V. Aus der Patentabteilung des Wernerwerkes der Siemens & Halske A.-G. zu Siemensstadt. F. Strecker: Über die Erweiterung der perspektivischen Skalen zu Rechentafeln. .	184
VI. Aus dem Dynamowerk der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H. zu Siemensstadt. R. Rüdtenberg: Über die Vorausbestimmung des Dauerkurzschlußstromes von Wechselstrom-Generatoren	197

Anfragen, die den Inhalt dieses Heftes betreffen, sind zu richten an die Zentralstelle für wissenschaftlich-technische Forschungsarbeiten des Siemens-Konzerns, Siemensstadt bei Berlin, Verwaltungsgebäude.



Verlag von Julius Springer, Berlin

Hel. u. Impr. Meisenbach Riffarth & Co. A. G., Berlin

Charries

Carl Dietrich Harries.

Nachruf von **K. A. Hofmann.**

Der Lebensgang, die äußere Persönlichkeit des Verstorbenen und seine Stellung im Siemens-Konzern sind bereits an anderer Stelle¹⁾ trefflicher Weise geschildert worden. Es bleibt noch übrig, ein Bild zu entwerfen von Harries als Menschen und Forscher, so wie er dem Freunde und Fachgenossen erschien.

Es sind alte deutsche Worte: Nie dienest wart so guot, den ein friunt friunde so nach tode tuot — und es ist eine verdienstliche Aufgabe, den Freund nach dem Tode zu ehren; doch wird sie in dem Maße schwieriger, als man sich bemüht, das innere Wesen des Mannes zu schauen und zu zeichnen, damit seine echte Art vor dem stäubigen Tode der Vergessenheit bewahrt bleibe.

Nur wenige hervorragende Menschen sind von außen her dem prüfenden Blick durchdringbar. Erziehung durch Eltern, Geschwister, Kameraden und Lehrer sowie die Eindrücke des Lebens ändern, von Schicht zu Schicht tiefer dringend, die persönliche Erscheinungsform, und von dem ursprünglichen Werk der Natur ist äußerlich nichts mehr wahrzunehmen. Um von solchen Kulturmenschen das Anerzogene, Angelernte, Angewöhnte zu entfernen und den oft nur dürftigen Rest wahrer Natur zu finden, bedarf es mühsamer analytischer Arbeit, die der Tätigkeit des Paläontologen gleicht, der mit Meißel und Stichel die Überreste ehemaliger Lebewesen vom einschließenden Gestein befreit.

Anders bei solchen Menschen, denen die Natur ein starkes Ich gab, das sich in und trotz der Umgebung ungetüncht und ungeschminkt erhält, so, wie der Diamant die erdigen Teile seiner Umgebung nicht annimmt. Hier ist es leicht, das wahre Wesen zu schauen, es prägt sich in den äußeren Formen, Ecken und Kanten und im natureigenen Farbenglanz aus.

Solcher Art war Carl Dietrich Harries; er gab uns den erfreulichen Beweis, daß eine starke Persönlichkeit ihr ursprüngliches Wesen behauptet, auch wenn das Kulturleben bald in gebieterischer, bald in verlockender Form herantritt, um das Original zu verwischen. Doppelt erfreulich ist solches Beispiel in unserer Zeit, die das Einzelwesen der breiten Masse anzugleichen und damit zu verschmelzen trachtet.

Es ist nicht schwer, Harries richtig zu zeichnen, wenn man zunächst nur auf den Grund seines Wesens eingeht. Er war ein offener, treuer Charakter, der von Jugend an nach dem Wahlspruche seiner Korporation: *Semper idem!* Sei treu! handelte und seine Gedanken frei zum Ausdruck brachte. Sein starkes Ich trieb ihn zu wirksamer Betätigung seiner Kraft, und sein tiefes Empfinden für Recht und Wahrheit ließ ihn oft unerwartet jäh hervortreten. Wie eilig lief er doch auf den Plan, um einem Freunde beizustehen oder um die Freiheit der Wissenschaft,

¹⁾ Siemens-Zeitschrift 1924, Januar-Heft, Carl Dietrich Harries Nachruf von Robert Fellingner.

sein höchstes Ideal, zu verteidigen. Er konnte scharfe Hiebe schlagen als freier deutscher Mann — nicht ohne Grund haben ihn seine Kameraden zum Fechtwart erkoren —, und manchem seiner Gegner erschien er als einer, „der ze sinen ekken harte vreislichen sneit“.

Die kampflustige süddeutsche Art schätzte er, auch an seinen Freunden, sie lag ihm näher als das mehr besonnene norddeutsche Wesen seiner beruflichen Umgebung. Doch hat er nicht den Streit um des Streites willen gesucht, und wenn er unnötigerweise verletzte, lag dies an seinem leicht erregbaren Temperament und noch mehr an mangelndem Sprachgefühl.

Dieser feine Sinn, der vorausfühlen läßt, welche Empfindungen die Worte in Schrift und Rede bei Leser und Hörer auslösen werden, kann selbst durch sorgfältige Erziehung nicht ersetzt werden, und auch die redliche Selbstkritik, die Harries übte, ließ ihn nur den Mangel erkennen, ohne ihn zu beheben. Oft klagte er darüber, daß es ihm so schwer falle, seinen Gedanken und Gefühlen den richtigen Ausdruck zu verleihen. Seltsam, dieser nach Gemüt und Verstand tief angelegte und reichbegabte Mann, dem auch das Reich der Töne offenstand, mußte sich in seinen Schriftsätzen Wort für Wort mühsam abringen.

Lebhaftes Temperament und schnelles Auffassungsvermögen machten es Harries leicht, sich auch in weiteren Kreisen zurechtzufinden und Anschluß zu gewinnen; aber seine stets rege Kritik und sein empfindsames Gemüt hinderten ihn, sich leicht hin an andere enger anzuschließen; doch suchte und fand er wahre Freundschaft. Auch vielen seiner Schüler war er ein hilfreicher Freund, und als das allgemeine Elend über unser Vaterland hereinbrach, hat er sich an den Organisationen zur Linderung der Not der deutschen Hochschulen und der studierenden Jugend mit Rat und Tat wirksam beteiligt. Wertvolle Gaben hat er wissenschaftlichen Instituten zugewiesen, ohne dabei auf öffentlich lautwerdenden Dank zu rechnen.

Aber er übte auch hier wie bei der Wahl seiner Freunde kluge Sichtung und ließ sich nicht nahekomen, wenn er dabei eine versteckte Absicht vermutete. Harries liebte die Wahrheit, und nur wer offen zu ihm trat, dem war er zugänglich. Wer ihm aber freundschaftlich wirklich nahegekommen war, der konnte sich auf ihn verlassen, und es trat nicht leicht eine Entfremdung ein; denn er vertrug offene Worte von befreundeter Seite, ohne sie übelzunehmen, aus demselben Grunde, der ihm selbst eine offene Sprache verlieh, nämlich aus dem Willen zur Wahrheit.

Die Wahrheit zu suchen und den Schein zu vermeiden, war sein ernstes Streben im Dienste des Lebens und der Wissenschaft. Streberei, Eitelkeit und selbst Ehrgeiz waren ihm zuwider. Seine Beziehungen zu hohen und höchsten Kreisen pflegte er nicht, um in fremdem Licht zu glänzen und sich mit Auszeichnungen schmücken zu lassen. Wohl aber trachtete er danach, Einfluß und Macht zu gewinnen, um selbst Großes leisten zu können in Wissenschaft und Technik, und mehr noch strebte er danach, anderen helfen zu können, die er nach reiflicher Prüfung für förderungswert hielt. Es befriedigte ihn, als Gönner aufzutreten für die, die seiner Hilfe bedurften, und solcher Taten rühmte er sich gern.

Er selbst nahm nur an, was ihm auf geradem Weg und in echter Gesinnung geboten wurde. Solche Gaben verpflichteten ihn zu lebenslänglichem Dank, und er vergaß nicht, was er von anderen an sachlicher und geistiger Förderung empfangen hatte. Stets empfand es Harries als besondere Gunst des Schicksals, daß ihm eine geistig ebenbürtige Lebensgefährtin beschieden war, die nicht nur Freud und Leid

mit ihm teilte, sondern ihm auch auf den Höhen seines Wirkens als Ratgeberin zur Seite stand.

Als vielseitig begabtes, lebhaftes und empfindsames Kind empfand Carl Dietrich die Schule als Zwang, und da ihm das Erlernen der Sprachen, insbesondere der lateinischen, ohnehin Schwierigkeiten machte, hat ihm das Gymnasium zu Jena wohl manche trübe Stunde bereitet; doch hat er später den Bildungswert des humanistischen Gymnasiums dankbar anerkannt und diese Stätte der Geistesschulung gegenüber den Angriffen der realistischen Zeitströmung in Wort und Schrift verteidigt.

Heitere Lebenslust ließ ihn die akademische Freiheit in Jena, München und in Berlin genießen, wo er als Mitglied des akademischen Turnvereins sich durch jugendlichen Frohsinn hervortat und gern zu Scherz und lustigen Streichen bereit war. Obwohl er fleißig studierte, fand er doch Zeit zu geselliger Unterhaltung. In der Künstlerkneipe „Zum schwarzen Ferkel“, wo auch Strindberg verkehrte, und selbst in Artistenkreisen, die abenteuerlich erscheinen konnten, war Harries wohlbekannt; denn es machte alles auf ihn besonderen Eindruck, was sich durch geistige oder körperliche Leistungen hervortat und außergewöhnlich erschien.

Er maß nicht sorglich den Becher, bevor er ihn leerte, und dann mochte seine Umgebung nicht selten daran erinnert werden, daß zuviel Wahrheit ein fataler Genuß sein kann.

Seine von Hause knapp bemessenen Mittel mußte er durch Privatstunden aufbessern; doch brauchte er nicht viel, um froh zu leben, denn er besaß eine vorzügliche Fähigkeit, das, was er hatte, zweckdienlich zu verwenden.

Harries besaß eine auffallende, überlegende Begabung für die richtige Verwendung des Geldes. Als er durch den Verkauf seiner Euphthalminpatente an die Scheringsche Fabrik 1896 als 30-jähriger Mann einige tausend Mark erhielt, vermochte er damit nicht nur seine Lebenshaltung zu verbessern und seine Existenz für die Privatdozentenjahre zu sichern, sondern er behielt davon noch übrig, um später seiner Braut ein wertvolles Angebinde überreichen zu können. Auch nachdem seine äußeren Verhältnisse sich glänzend gestaltet hatten, verlor er den Sinn für die Bedeutung des Geldes nicht. Frei von Geiz und Habsucht rechnete er mit Pfennigen und spendete viele Tausende von Mark, wenn er zweckmäßiger Verwendung sicher war, oder wenn seine Repräsentationspflichten ihm dies nahelegten. Sorgfältig genau im Einzelnen, war er großzügig im Ganzen, und Harries wäre ein vorzüglicher Finanzminister geworden, wenn ihn das Schicksal an die Spitze der Staatsverwaltung gestellt hätte.

Trotz seiner heiteren Lebenslust hielt sich Harries stets frei von zeit- und kraftraubender Genußsucht; er widerstand auch den verführerischen Lockungen des Reichtums. Sein starkes Streben nach immer vollkommener Betätigung seiner schaffenden Kraft hielt ihn stets in aufwärtsgerichteter Bahn. Wer zudem auf die Stimme der Natur hört, den hält sie in Schranken, und Harries kannte diese Stimme, die aus seinem innersten Wesen kam. Fühlte er sich doch von frühester Jugend an als Teil der gesunden, lebendigen Natur, wenn er als Knabe mit seinen Kameraden die heimatliche Umgebung durchstreifte, um Vögel und Schmetterlinge zu fangen, oder wenn er später auszog, um das Wild zu jagen. Als Jäger und als Naturfreund von der Art unseres unvergeßlichen Hermann Loens besuchte er seine ausgedehnten Jagdgebiete im norddeutschen Tieflande und im Hochgebirge.

Mit besonderer, vom Vater überkommener Vorliebe folgten seine für Form und Farbe empfänglichen Augen den bunten, kunstvoll gestalteten Kindern des Sommers. Nicht aus Sammlertrieb, sondern zur freundlichen Erinnerung an seinen Verkehr mit der freien Natur pflegte er eine Schmetterlingssammlung, in die er nur selbstgefangene oder von nahen Freunden geschenkte Stücke aufnahm. Die Kunst und Sorgfalt, mit der er diese zarten Gebilde spannte und ordnete, entsprach treulich seinem eigensten Wesen, sich zu führen und zu halten. Peinlich genau bestimmte er Art und Abart nach dem neuesten Stand der Systematik. Sein Ordnungssinn und seine Gründlichkeit mußten sich auch hier geltend machen.

Auffallend war, daß Harries bei seinem weitumspannenden, offenen Blick für die Natur doch mit unverkennbarer Einseitigkeit unter den Schmetterlingen eine bestimmte Familie, die Lycaeniden (Bläulinge), bevorzugte. Sollte wirklich, wie manche meinen, ein tieferer Zusammenhang zwischen auswählendem Farbensinn und Charakter bestehen? Ich möchte in dieser Auswahl bei seiner Liebhaberei einen Ausdruck der strengen Selbstdisziplin erblicken, die Harries stets übte. Seine reiche Begabung und sein für äußere Eindrücke leicht empfänglicher Sinn bargen in sich die Gefahr der Zersplitterung, und dagegen kämpfte er zeitlebens. Er strebte stets danach, das, was er angefangen hatte, gründlich durchzuführen, und wie er sich bei seinen Arbeiten eine kritische Beschränkung aufzwang, so verfuhr er auch bei seiner Beschäftigung in den Mußestunden. Was Goethe von einem Zeitgenossen sagte: „Er wußte sich nicht zu zähmen, darum zerrann ihm sein Leben wie sein Dichten“, das vermied Harries ängstlich in stetem Ringen mit der Vielseitigkeit seiner Anlagen. So wurde aus dem von Verwandten und Bekannten bestaunten Wunderkind ein Großes schaffender Mann.

Auf der Universität Jena folgte unser Harries zunächst seiner Jugendneigung, indem er sich dem Studium der Zoologie widmete. Sein großer Lehrer Ernst Haeckel erkannte aber bald, daß der junge Student in den beschreibenden Naturwissenschaften keine dauernde Befriedigung seines tiefgehenden Strebens finden werde, und riet ihm, sich der Chemie zuzuwenden, von der man damals meinte, daß sie alsbald die tiefen biologischen Rätsel lösen werde.

So kam Harries im Sommer 1888 zu Adolf von Baeyer nach München und 1889 zu A. W. von Hofmann nach Berlin; doch blieb er seiner Neigung treu, indem er als Wahlfach für das Doktorexamen Zoologie nahm, nicht ohne den lebhaften Widerspruch seines Chemielehrers.

Nicht für jeden ist es ein Glück, den führenden Größen der Wissenschaft nahe-zukommen und in ihren geistigen Bannkreis zu geraten; gar mancher wird so zum Trabanten eines übermächtigen Gestirnes und wandelt alsdann zeitlebens auf fremder, erzwungener Bahn. Leicht verkümmert die Selbständigkeit und Freiheit des Denkens und Wollens im Schatten von Titanen.

Harries lernte unter den größten Meistern der damaligen Chemie: Adolf von Baeyer, A. W. von Hofmann und Emil Fischer die Kunst des wissenschaftlichen Forschens, aber er bewahrte seine Eigenart und sein starkes Selbstbewußtsein. So wurde er nicht zum Jünger der Meister, sondern zum ebenbürtigen Nachfolger. Manche Verstimmung zwischen ihm und seinen Vorgesetzten erklärt sich letzten Endes aus dem berechtigten Streben, das eigene Ich zu bewahren und nicht ins Schlepptau des augenblicklich Stärkeren zu geraten.

Es ist nach dem Vorausgehenden verständlich, daß Harries in der Chemie nicht sowohl als Gelehrter, sondern vielmehr als freier, unabhängiger Forscher hervortrat. Sein starker, sich selbst bestimmender Geist ließ ihn die Erfahrungen und das Wissen anderer nicht widerstandslos leichthin aufnehmen und sammeln; er zwang ihn, kritisch zu prüfen und nur das zu behalten, was er für beachtenswert hielt. Scharfe Kritik übte er an fremden wie eigenen Arbeiten, und seltener als manch anderer großer Forscher hat er sich geirrt.

Zwar ist der prüfende, abwägende Verstand ein unentbehrlicher, treuer Berater des echten Forschers und bewahrt ihn vor Irrtümern und Irrwegen, aber er kann in den Naturwissenschaften, zumal in der Chemie, nicht erfinderisch schaffend wirken. Dies vermag nur die Phantasie, und dieser Hauch des lebendigen Odems war Harries in reichem Maße zuteil geworden. War doch sein Großvater Heinrich Harries der Dichter der Hymne „Heil dir im Siegerkranz“. Von väterlicher Seite hatte er die Phantasie geerbt, deren sprühende Funken als Witz und Scherz nach außen sprangen. Von seiner Urgroßmutter, einer französischen Emigrantin, stammte sein beweglicher, lebhafter, für äußere Eindrücke empfänglicher Sinn und die Fähigkeit zum schnellen Erfassen der Umgebung. Als Kind ließ er seine Spiele von der Phantasie lenken; sie machte ihn erfinderisch; sie ließ ihn als Knaben im Elternhause nach Abenteuern fahnden, und sie zauberte ihm damals eine taten- und farbenreiche Zukunft in fernen Ländern vor.

Für die Kunst und für die Forschung ist die Phantasie gleichermaßen ziel- und formgebend; deshalb fühlte sich Harries artverwandt mit den Schöpfern in Malerei und Plastik. Er schmückte sein Heim mit den Werken seiner Zeitgenossen und pflegte den Verkehr mit den großen Meistern der Plastik, wie Adolf Hildebrand und insbesondere August Gaul, dessen Genie die großen Schöpfungsgedanken der Natur erfaßte.

Künstlerisch empfunden und trotz dem Mangel an sprachlicher Ausdrucksfähigkeit im Sinne der Realistik gut durchgeführt sind die von Harries verfaßten Schriften zum Gedächtnis verstorbener Freunde, wie Eduard Buchner (1917), Oskar Piloty (1920), Wilhelm von Siemens (1920), Paul Jacobson (1923). Künstlerisch erfaßte er die Persönlichkeit und hielt mit scharfen, bisweilen derben Strichen fest, was er für überlieferungswert erkannte. Auch bei der Würdigung des großen Meisters Emil Fischer (1919) verfiel er nicht in matte Anbetung und machte nicht halt vor der ernüchternden Wirklichkeit. Wegen ihrer inneren Wahrheit werden diese Zeitbilder von besonderem Werte für die Zukunft sein, zumal da sie alle von einer herzlichen Teilnahme an den Geschicken und Werken der Gefeierten durchtönt sind. Aus allen spricht der Drang, die Wahrheit zu sagen, die der Freund dem Freunde schuldig ist.

Künstlerisch empfangen und vollendet durchgeführt sind alle Arbeiten, die Harries auf seinem besonderen Gebiet der organischen Chemie veröffentlicht hat. Hier sind erfassende Phantasie, kritischer Verstand und scharfe Beobachtungsgabe zu glücklicher Harmonie vereinigt. Es ist hier nicht der Ort, die zahlreichen Ergebnisse seiner um 1890 beginnenden Forschertätigkeit im einzelnen darzulegen; es kann nur ein im großen und ganzen zutreffendes Bild von der gewaltigen Lebensarbeit unseres Freundes entworfen werden.

In seinen Lehr- und Wanderjahren 1890 bis etwa 1902 beschäftigte sich Harries mit verschiedenen, damals zeitgemäßen Aufgaben. Wie hätte auch ein so reger,

stark eindrucksfähiger Geist unbeeinflusst bleiben können von den mächtigen Strömungen der ihn umgebenden wissenschaftlichen Welt. Niemand kann Großes allein aus sich selbst nehmen, und im Anfang einer wissenschaftlichen Laufbahn muß fremdes Licht die Pfade beleuchten. So auch bei Harries, doch zeigt sich schon in den ersten Arbeiten der Drang zum selbständigen Erfassen und Gestalten — *tamquam ex ungue leonem* —.

Das Phenylhydrazin $C_6H_5NH \cdot NH_2$ von Emil Fischer und das Hydrazin selbst $NH_2 \cdot NH_2$ von Theodor Curtius standen Anfang der 90er Jahre des vergangenen Jahrhunderts im Vordergrund des Interesses, und Harries lieferte schöne Beiträge zur Substituierbarkeit und zur Beteiligung dieser Stoffe an heterozyklischen Gebilden, von denen damals das Antipyrin von Ludwig Knorr als hervorragendes Antipyretikum allgemeines Aufsehen erregte. Man glaubte, durch die Produkte der organischen Synthese die natürlichen Heilmittel, insbesondere die Alkaloide, ersetzen zu können, und gleich vielen Zeitgenossen beteiligte sich auch Harries an diesem tastenden Suchen. Daher stammen seine Arbeiten über die Stereochemie der Piperidinreihe, über die Diaminopentane und über Tropeine der Triazonaminreihe. Hier hatte er mit dem zur Azetonalkaminreihe gehörenden „Euphthalmin“ auch einen für seine damaligen Verhältnisse wichtigen praktischen Erfolg, indem dieser alkaloidähnliche Stoff in der Augenheilkunde als Mydriatikum Verwendung fand.

Seit seiner unter Ferdinand Tiemann gefertigten Doktorarbeit (1889/90) über neue Abkömmlinge des Salizylaldehyds hat Harries auch das weite Gebiet der Aldehyde und Ketone eifrig bearbeitet, insbesondere Mesityloxyd $CH_3 \cdot CO \cdot CH : C(CH_3)_2$, Phoron $(CH_3)_2C : CH \cdot CO \cdot CH : C(CH_3)_2$, der Dialdehyd der Bernsteinsäure $HOC \cdot CH_2 \cdot CH_2 \cdot COH$ fesselten ihn längere Zeit und leiteten über in das Gebiet der hydroaromatischen Reihe, die damals durch Wallach, Tiemann und von Baeyer der wissenschaftlichen Erkenntnis erschlossen wurde. Harries' Arbeiten über Zyklohexanon, Pulegon, Karvon, Kampferphoron, Zitronellal bewegten sich in diesem Gebiet der Terpene und Kampferarten und boten ihm die durch selbständige Forschung geschaffene Grundlage zu seiner zusammenfassenden Abhandlung: Über einkernige hydroaromatische Verbindungen einschließlich der Terpene und Kampfer, die im Jahre 1902 als Teil des 2. Bandes von Meyer - Jacobson erschien. Abgesehen von Untersuchungen über Angehörige der Zuckergruppe, wie Trimethyltriöse, und über das Glyoxal, das Harries zuerst in der gelben, monomolekularen Form $HOC \cdot COH$ auffand, sowie über die physiologisch wichtigen Kaseine und Hydantoine folgen seit 1901 vorwiegend Arbeiten über die mehrfachen Doppelbindungen, die auch den Terpenen ihr charakteristisches Verhalten aufprägen.

Die neue Darstellungsmethode zweifach ungesättigter Kohlenwasserstoffe (1901) führte in einfacher Weise zu Dihydrotoluol und Methylisopren. Im Isopren selbst $CH_2 : C(CH_3) \cdot CH : CH_2$ vermutete man seit längerer Zeit die Grundlage der Terpene und des Kautschuks; aber während erstere als destillierbare und in ihren Abkömmlingen krystallisierbare Stoffe den wissenschaftlichen Arbeitsmethoden der Chemie zugänglich waren, erschien die Natur des amorphen Kautschuks als unlösbares Rätsel. Doch Harries hatte den Wagemut, vorzudringen. Als wirksames Reagens schien ihm zuerst die den Kautschuk schnell angreifende salpetrige Säure geeignet; dann besann er sich auf das Ozon, dessen zweckmäßige Darstellung sein großer Verwandter Werner von Siemens im Jahre 1858 gefunden hatte.

Nun gelang die übersichtliche Aufspaltung des Kautschuks in Lävulinsäurealdehyd $\text{CH}_3 \cdot \text{CO} \cdot \text{CH}_2 \cdot \text{CH}_2 \cdot \text{CHO}$ und dessen Peroxyd (1903), woraus Harries schließlich die wohlbegründete Folgerung zog, daß im Kautschukmolekül etwa 5 Isoprenreste $\dots \text{CH}_2 \cdot \text{C}(\text{CH}_3) : \text{CH} \cdot \text{CH}_2 \dots$ zu einem großen, vielleicht 20gliedrigen Ringe nach der Natur der einzelnen Sorten symmetrisch oder asymmetrisch vereinigt seien. Der Aufbau eines dem natürlichen Kautschuk verwandten Produktes aus Isopren gelang Harries durch die Einwirkung von heißem Eisessig. Zwar hat Fritz Hofmann von den Elberfelder Farbwerken die zweckmäßigere Polymerisation des Isoprens durch längeres Erwärmen gefunden und es haben die genannten Werke vom Azetylen ausgehend über das Azeton und Methylisopren hinweg den Methylkautschuk während des Krieges auch in größerem Maßstabe auf Grund selbständiger Arbeiten dargestellt; aber Harries gebührt das Verdienst der ersten, wissenschaftlich erfolgreichen Inangriffnahme des schwierigen Problems.

Wohl kann der synthetische Kautschuk, zumal wegen der hohen Darstellungskosten, zunächst nicht mit dem natürlichen, insbesondere mit dem Plantagenkautschuk ernstlich technisch konkurrieren, denn hier läßt sich die üppig schaffende Natur der tropischen Pflanzen von der Kunst des Chemikers nicht überbieten, aber die Kenntnis vom chemischen Aufbau des Kautschukmoleküls, die wir Harries verdanken, zeigt Mittel und Wege zur sinngemäßen Behandlung des natürlichen Rohproduktes für die Technik.

Mit der Einführung des Ozons als spezifisches Reagens auf Doppelbindungen hat Harries die Hilfsmittel der organisch-chemischen Forschung sehr wesentlich bereichert. Die größtenteils von ihm selbst dargestellten Ozonide vom Typus

$$\begin{array}{c} > \text{C} & \text{---} & \text{C} < \\ | & & | \\ \text{O} & \cdot & \text{O} & \cdot & \text{O} \end{array}$$

Spaltbarkeit in einfachere Aldehyde aus; sie bilden ein wichtiges Kapitel der organischen Experimentalchemie. Außer zahlreichen Mitteilungen in den Berichten der deutschen chemischen Gesellschaft hat Harries seine „Untersuchungen über das Ozon und seine Einwirkung auf organische Verbindungen“ in einem bei Julius Springer erschienenen Buch zusammengefaßt (1916).

Durch die einfachen Beziehungen der Ozonide zwischen den ungesättigten Kohlenwasserstoffen einerseits und den Aldehyden andererseits schließen sich harmonisch die Forschungen von Harries seit 1891 bis 1916 zu einem großen Ganzen zusammen. Die mannigfachen Beziehungen zur Technik und die Not der Zeit wiesen Harries (1917) auch auf eine besondere Verwendungsweise des Ozons, nämlich der Aufarbeitung von Braunkohlenölen zu seifenbildenden Fettsäuren; doch ist das Ozon trotz der von den Siemens-Werken mit großem Erfolg verbesserten Darstellungsweisen zu teuer, um als Oxydationsmittel für chemische Zwecke im größten Maßstabe dienen zu können.

Neben zahlreichen praktischen Winken für seine Fachgenossen hat Harries seit 1922 Untersuchungen über die Natur des Schellacks veröffentlicht und mit gewohnter Meisterschaft hat er als einheitliche Harzsäuren die Aleuritinsäure, eine Trioxypalmitinsäure, und die Schellolsäure, eine hydroaromatische Dioxydicarbonsäure, isoliert. Wieviel hätte doch die Wissenschaft und auch die Technik noch auf diesem Gebiet von ihm lernen können! Doch der Tod hat ihn zu früh aus seinem schaffensfreudigen, erfolgreichen Wirken herausgerissen.

Überblickt man das Lebenswerk von Carl Dietrich Harries, so wird man ihn zunächst als selbständigen, erfolgreichen Forscher auf dem Gebiete der wissenschaftlichen organischen Chemie finden, sodann als berufenen Vermittler zwischen Wissenschaft und Technik. So nahe ihm auch die unmittelbaren Forderungen der Technik durch seine Stellung im Siemens-Konzern gerückt waren, sein Auge blieb nicht am Nächstliegenden haften, sondern suchte die großen Aufgaben zu erfassen und zu durchdringen. Er war ein großer schöpferischer Geist, der nur sich selbst gehorchte und freiwillig dieses Selbst in den Dienst von Wissenschaft und Technik stellte.

Harries brachte großzügige Ordnung und höheren Schwung in die wissenschaftlichen Bestrebungen seiner technischen Mitarbeiter, indem er 1919 die Zentralstelle für wissenschaftlich-technische Forschungsarbeiten des Siemens-Konzerns ins Leben rief. Es ist sein besonderes Verdienst, daß er durch eine seit 1920 erscheinende Zeitschrift manches wertvolle Ergebnis dieser Arbeiten für die Wissenschaft zugänglich machte, während sonst die Industrie ihre reichen Erfahrungen oft ängstlich zurückhält.

In seinem Leben und Schaffen bietet Carl Dietrich Harries ein schönes Bild der Harmonie, zu der sich reiche und vielseitige Begabung, lebhaftes Empfinden, rege Phantasie und warmes Temperament vereinigen können, wenn ein willensstarker Charakter diese vielfach auseinanderstrebenden Kräfte zusammenhält und in stetige Richtung zwingt.

Dieses Bild möge fort dauern im Gedächtnis seiner Arbeitsgenossen, sein Name wird glänzen im Reiche der Wissenschaft.

Über die Fällung des Magnesiums mit Phosphat aus tartrathaltiger Lösung in Gegenwart von Aluminium.

Von **Ernst Wilke-Dörfurt**.

Eingegangen am 14. März 1924.

In einer früheren Mitteilung¹⁾ war eine Anweisung gegeben worden, Zink-Aluminium-Magnesiumlegierungen mit kleinem Magnesiumgehalt zu analysieren. Das Verfahren bestand darin, das Zink und das Aluminium mit weinsaurem Salz komplex in Lösung zu halten und das Magnesium mit Natriumphosphat direkt auszufällen und als Magnesiumpyrophosphat zu wägen. Es war gesagt worden, daß, während bei vorheriger Ausfällung von Aluminium und Zink mit Schwefelammonium Magnesium in diesem Niederschlag verbleibt, so daß z. B. zwischen einer 6- und einer 3proz. Magnesiumlegierung nicht unterschieden werden kann, die beschriebene Arbeitsweise in sehr einfacher Weise schnell und unmittelbar zu einem genauen Magnesiumwert führe.

Gegen die Genauigkeit dieses Verfahrens sind nun Bedenken erhoben worden²⁾, und seine Benutzung hatte in anderen Händen unbefriedigende Werte ergeben (briefliche Mitteilung von Wilhelm Biltz). Demzufolge war eine Nachprüfung wünschenswert. Es wurde dazu zunächst die Bestimmbarkeit des Magnesiums aus aluminiumhaltiger Lösung in Gegenwart von weinsaurem Salz genauer studiert. Die Untersuchung wurde gemeinsam mit dem Verf. von Herrn Dipl.-Ing. Dr.-Ing. Walter Combe im Laboratorium für anorganische Chemie und anorganisch-chemische Technologie der Technischen Hochschule Stuttgart im Jahre 1923 ausgeführt.

Verwendet wurden Lösungen von Magnesiumsulfat und Ammoniakalaun. Die Handelssalze wurden durch mehrfaches Umkristallisieren gereinigt, und in den eingestellten Lösungen ermittelte man nach verschiedenen Methoden ihren Gehalt an Magnesium bzw. an Aluminium, auf Metall berechnet, genau. Auch die Reinheit der Weinsäure sowie die der sonstigen während der Arbeit verwendeten Reagenzien wurde mit Sorgfalt überwacht.

Aus dem Inhalt der erhobenen Einwendungen war nicht zu ersehen, wie bei dem Versuch, das Verfahren zu benutzen, die Fällung des Magnesiums vorgenommen wurde. Es ist aber, wie sich im Verlaufe der Nachprüfung herausgestellt hat, durchaus nicht gleichgültig, ob das Magnesiumammoniumphosphat in der Hitze nach Schmitz, Z. anal. Chem. Bd. 45, S. 512. 1906, oder in der früher üblichen Weise bei Zimmertemperatur gefällt und dann erst nach 12stündigem Stehen weiter verarbeitet wird. Eine Übersicht gibt Tabelle 1.

¹⁾ Ernst Wilke - Dörfurt: Über die Bestimmung des Magnesiums in Legierungen. Diese Veröff. Bd. 1, H. 2, S. 85. 1921.

²⁾ F. Hahn: Chem.-Zg. 1922, S. 536.

Tabelle 1.

Wirklicher Gehalt % Mg	Gefunden % Mg		Abweichung	
	heiß gefällt	kalt gefällt	heiß	kalt
50,71	50,90	50,79	+ 0,19	+ 0,08
33,96	34,18	34,06	+ 0,22	+ 0,10
10,26	10,75	10,43	+ 0,49	+ 0,17

Bei Gegenwart von Aluminium werden also die Magnesiumwerte erheblich zu hoch, wenn die Ausfällung des Magnesiums in der Hitze nach Schmitz vorgenommen wird.

Aber auch beim Arbeiten bei Zimmer-temperatur erhält man positive Fehler.

Bei den Konzentrationen der Tabelle 1 sind sie noch erträglich. Bei höheren Aluminium- und kleineren Magnesiumwerten indessen müssen sie beachtet werden. Darin ist den Einwendungen gegen das beschriebene Verfahren recht zu geben. Darum braucht aber diese Methode der direkten Bestimmung des Magnesiums in aluminiumhaltiger Lösung nicht völlig verworfen zu werden. Es wird zu erörtern sein, was sie im praktischen Fall leisten kann.

Wie mit wachsendem Aluminium- und sinkendem Magnesiumgehalt die Fehler der Magnesiumwerte größer werden, wurde nunmehr genauer untersucht. Der Weinsäurezusatz war dabei stets so, daß er das 25fache der im Trennungsgemisch vorhandenen Aluminiummenge (als Metall berechnet) betrug. Die Versuchsbedingungen wurden insofern noch variiert, als man das Aluminium in einigen Versuchen statt in Gestalt von Ammoniakalaun in Form seines Chlorids und in anderen als Nitrat anwesend sein ließ. Es haben sich dabei wesentliche, in diesem Zusammenhange nicht zu erörternde Einflüsse des Säurerestes ergeben. Eine Zusammenstellung der erhaltenen Resultate findet sich in Tabelle 2.

Tabelle 2.

Nr.	Zusammensetzung des Gemisches Al + Mg = 100		Gefunden nach der früher mit- geteilten Vorschrift % Mg	Abweichung in %	
	% Al	% Mg		des Gemisches	der Mg-Werte
1	48,66	51,34	51,41 ²⁾	+ 0,07	+ 0,14
2	49,29	50,71	50,79 ¹⁾	+ 0,08	+ 0,16
3	50,92	49,08	49,26 ³⁾	+ 0,18	+ 0,37
4	66,04	33,96	34,06 ¹⁾	+ 0,10	+ 0,31
5	67,48	32,52	32,80 ³⁾	+ 0,28	+ 0,86
6	89,24	10,76	11,40 ³⁾	+ 0,64	+ 5,9
7	89,51	10,49	10,91 ²⁾	+ 0,42	+ 4,0
8	89,74	10,26	10,43 ¹⁾	+ 0,17	+ 1,7
9	94,31	5,69	6,16 ³⁾	+ 0,47	+ 8,2
10	94,86	5,14	5,47 ¹⁾	+ 0,33	+ 6,4
11	97,41	2,59	2,82 ¹⁾	+ 0,23	+ 8,9
12	99,00	1,00	1,01 ³⁾	+ 0,10	+ 10,0

¹⁾ Aluminium als Sulfat, ²⁾ als Nitrat, ³⁾ als Chlorid vorhanden.

Bis auf die Versuche Nr. 6, 7, 9 gehen die Irrtümer im Befund der prozentischen Zusammensetzung des Gemisches nicht über $\frac{1}{3}\%$ hinaus. Die Fehler in Prozenten des Magnesiumwertes steigen allerdings bei der Zusammensetzung 99%Al + 1%Mg bis zu 10% an. Bei derartigen Mischungsverhältnissen spielt aber diese hohe Ungenauigkeit des Wertes für viele praktische Zwecke eine ganz untergeordnete Rolle. Denn wenn in Versuch 12 statt theoretisch 1,00% Mg 1,10% gefunden wird, so ist die Mischung als 1proz. Mg-Mischung analytisch völlig ausreichend charakterisiert, und die Extrapolation auf noch kleinere Magnesiumwerte ergibt bei ihnen ein gleiches: wäre bei theoretisch 0,1% Mg die Methode selbst mit einem Fehler

von + 20% behaftet, so ergäbe der Befund 0,12% statt 0,10% Mg, ließe sie also unterscheiden beispielsweise von 0,05-, 0,5- und 1proz. Mischungen. Das aber ist die praktische Aufgabe gewesen, zu deren Lösung das Verfahren seinerzeit vorgeschlagen worden ist, und die nur mit großen Umständlichkeiten bzw. nur sehr unbefriedigend von anderen Analysermethoden gelöst werden kann. Dies hat ganz begreiflicherweise seinen Grund darin, daß sie alle darauf hinauslaufen müssen, z. B. in dem oben erwähnten Mischungsverhältnis die 99% des Aluminiums hinauszuschaffen und dann das 1% Magnesium zu bestimmen.

Für die Einschätzung der mit dem vorgeschlagenen Verfahren erzielbaren Werte ist natürlich noch von Wichtigkeit, daß seine Fehler stets positiv sind. Es wurde im weiteren Verlauf der Untersuchung festgestellt, daß der Fehler, wie von vornherein anzunehmen war, auf ein Mitfällen von Aluminium, und zwar annähernd quantitativ, zurückzuführen ist. Dazu wurden 7 aus einer (der Konzentration des Versuchs 8, Tabelle 2 entsprechenden) Mischungslösung analytisch gewonnene Niederschläge von Magnesiumpyrophosphat gemeinsam auf Aluminiumoxyd verarbeitet. Die Menge des schließlich isolierten Aluminiumoxyds entsprach dann 98% derjenigen Menge Aluminiumphosphat, die in allen 7 Niederschlägen ihr Mehrgewicht über das theoretische Gewicht reinen Magnesiumpyrophosphats ausgemacht hatte.

Angesichts der im vorstehenden mitgeteilten Versuchsergebnisse kann also dem auf S. 9 in der Fußnote 2 genannten Autor nicht recht gegeben werden, wenn er a. a. O. sagt, daß das Verfahren „bei 3% Magnesium sehr unsichere Werte“ gäbe, daß es bei 1% „völlig versage“, und vollends gar nicht, wenn er behauptet, daß in Gegenwart von viel Aluminium Weinsäure die Fällung des Magnesiums als Magnesiumammoniumphosphat völlig verhindere. Die Fällung tritt zwar mit einer charakteristischen Verzögerung, dann aber sehr regelmäßig ablaufend ganz präzise ein.

Es bedeutet, das Wesen ganz bestimmter praktisch analytischer Probleme verkennen, wenn man an ein Bestimmungsverfahren für einen Mischungskleinbestandteil dieselben Anforderungen bezüglich Genauigkeit in Prozenten des Werts stellt wie an ein solches für einen Hauptbestandteil. Wenn in der Mischung 99% Al + 1% Mg eine Aluminiumbestimmung mit einem positiven Fehler von 1% vom Wert verwendet würde, so wäre sie mit einem Ergebnis von 99,99% Al zur Charakterisierung des Materials unbrauchbar. Wenn die Magnesiumbestimmung aber mit demselben Fehler von 1% behaftet wäre, so ergäbe sie 1,01% statt 1,00% Mg, ein Ergebnis, das völlig einwandfrei ist. Aber auch dann, wenn der Fehler der Magnesiumbestimmung ganze 10% beträgt, ist die Zusammensetzung der Mischung mit 99,0% Al + 1,1% Mg = 100,1% für die meisten praktischen Zwecke noch innerhalb der Fehlergrenze ermittelt.

Zusammenfassung. In Gemischen von Aluminium- und Magnesiumsalz läßt sich das Aluminium durch Zusatz von weinsaurem Salz komplex in Lösung halten und dann das Magnesium direkt mit Phosphat ausfällen. Die Genauigkeit der Trennung ist einwandfrei, wenn beide Metalle zu etwa gleichen Teilen in Sulfatlösung vorhanden sind und wenn kalt gefällt wird. Bei Mischungen mit überwiegendem Aluminiumgehalt werden die Magnesiumwerte durch Mitfällen von Aluminium zu hoch. Gleichwohl kann durch dies Verfahren, besonders in Gemischen von sehr viel Aluminium und sehr wenig Magnesium, der Magnesiumwert mit einer für die meisten praktischen Zwecke hinreichenden Genauigkeit bestimmt werden.

Zur Aufklärung der Harznatur des Schellacks. Versuch einer Partialsynthese¹⁾.

Von C. Harries † und Werner Nagel.

Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium Siemensstadt.

Eingegangen am 1. September 1923.

Der Schellack ist, wie alle Naturharze, ein Gemisch verschiedener Stoffe. Es gelang, den Träger der charakteristischen und wertvollen Eigenschaften, das Reinharz, auf Grund seiner Unlöslichkeit in Äther in verhältnismäßig recht reiner Form zu isolieren; ganz wurde dieses Ziel bisher nicht erreicht, da einerseits das beste Reinigungsmittel der präparativen Chemie: das Umkristallisieren, hier naturgemäß fortfällt und andererseits das Produkt eine starke Adsorptionsfähigkeit besitzt.

Durch hydrolytische Spaltung konnten bisher 2 Substanzen aus dem Reinharz gewonnen und dem Typus nach identifiziert werden: die Aleuritinsäure, eine Trioxy-palmitinsäure, die sich zu 30% im Reinharz findet, und die Schellolsäure, eine hydroaromatische Dioxydikarbonsäure, deren Menge bisher 8 bis 10% beträgt. Weitere hydrolytische Spaltprodukte, deren Anteil etwa 30% ausmacht, konnten zwar nicht kristallisiert erhalten und so als einheitliche Substanzen erkannt werden, jedoch steht außer Frage, daß es sich um Oxy Säuren von einem der Schellolsäure nahe verwandten Typ handelt. Der Rest von 30% enthält die Verunreinigungen, färbende Bestandteile und ähnliche, über die bisher wenig ausgesagt werden kann; ferner sind auf ihn die vermutlich nicht unbedeutenden Arbeitsverluste anzurechnen, die während der eine ganze Reihe von Prozeduren erfordernden Isolierungsmethode eintreten.

Dieser experimentelle Befund erlaubte eine Hypothese über das Zustandekommen des Harzcharakters aufzustellen. Es war wahrscheinlich, daß durch Wasserabspaltung zwischen den Molekülen gleichartiger oder verschiedener Oxy Säuren Laktone oder Laktide entstanden, die nach unserer Kenntnis derartiger Substanzen Harzcharakter tragen konnten.

Die Richtigkeit der vorgetragenen Ansicht ließ sich auf dem bisher verfolgten analytischen Wege nicht nachweisen, es mußte der synthetische eingeschlagen werden. Es mußte versucht werden, ob man durch Laktonisierung der bisher isolierten Komponenten zu Harzen gelangte, die auf Grund ihrer Eigenschaften als schellackähnlich angesprochen werden durften.

¹⁾ Vgl. C. Harries und W. Nagel: Zur Kenntnis der Aleuritinsäure. *Wissensch. Veröffentl. a. d. Siemens-Konzern* Bd. 1, S. 178. — C. Harries und W. Nagel: Untersuchungen über die Natur des Schellacks; über die Schellolsäure. *Ber. d. deutsch. chem. Ges.* Bd. 55, S. 3833. — C. Harries und W. Nagel: Über verschiedene Modifikationen des Schellackreinharzes. *Wissensch. Veröffentl. a. d. Siemens-Konzern* Bd. 3, S. 253.

Die entstehenden Produkte mußten mit dem Schellackharz verglichen werden. Es handelte sich also um Versuche, die eine Partialsynthese des Schellackharzes darstellen. Sie gaben Veranlassung zu einigen prinzipiellen Erwägungen über die Synthese von Naturharzen, die sich auf das Ziel und das Resultat, das man erlangen kann, beziehen. Da sie mutatis mutandis auch bei der Synthese anderer Harze Geltung haben werden, mögen sie hier Platz finden.

Das Naturprodukt selbst herzustellen kann nicht Ziel einer Synthese sein; es ist ein oft stark verunreinigtes Gemenge, wobei als Verunreinigungen alle die Substanzen anzusehen sind, deren Fehlen keine Verschlechterungen der Harzeigenschaften bedingt. Durch Entfernung dieser Verunreinigungen gelangt man zum Reinharz, das allein für die Darstellung in Frage kommt.

Das Reinharz kann ein Gemisch sein, dessen Eigenschaften durch das Zusammenreffen der verschiedenen Gemengteile bedingt sind. Es kann z. B., um einen konkreten Fall anzuführen, der Harzcharakter erst dadurch zustande kommen, daß ein an und für sich gut kristallisierender Gemengteil in fester Lösung in einem anderen vorliegt oder durch die Beimengung eines anderen am Kristallisieren verhindert ist, wie dies bei der an und für sich gut kristallisierenden Abietinsäure im Kolophonium wahrscheinlich ist. Die Harzsynthese würde in diesem Falle sich nicht nur auf die Gemengteile erstrecken, sondern auf das Gemisch als solches abzielen.

Der einfachste Fall wäre der, daß es sich um einen einheitlichen Harzkörper handelt, der auf Grund seiner chemischen Konstitution, seiner Molekulargröße oder ähnlicher Ursachen in der amorphen Form, eben der Harzform, existiert.

Die Synthese muß nun zu demselben Produkt führen.

Die Identität beider Körper wird durch völlige Kongruenz der Eigenschaften bewiesen. Um diese Kongruenz der Eigenschaften festzustellen, müssen letztere genau zu präzisieren sein; der Schmelzpunkt muß also innerhalb von 1 oder 2° genau sein, der Mischschmelzpunkt muß bei derselben Temperatur liegen, die chemische Analyse muß innerhalb der durch die Apparatur und Methode bedingten Fehlergrenzen übereinstimmen; von anderen Konstanten, z. B. der Dichte, dem Brechungsvermögen, der Löslichkeit usw. wird dasselbe verlangt.

Man sieht, daß das bei dem heutigen Stande der experimentellen Forschung ausgeschlossen ist. Bei den Harzen fehlen uns die Methoden, um die zu vergleichenden Produkte so weit zu reinigen, daß eine solche Präzisierung und Übereinstimmung erreicht werden könnte. Und wenn sie wirklich erzielt wäre, so würde der an den Lehren der klassischen, der Kristalloidchemie geschulte Chemiker sich immer noch der Möglichkeit ausgesetzt sehen, unangenehme Überraschungen zu erleben. Amorphe Stoffe geben eben keine völlige Gewähr für ihre Reinheit.

Im allgemeinen wird nur Übereinstimmung zwischen relativ weiten Grenzen möglich sein. Eine Harzsynthese kann demgemäß auch nicht wie bei Kristalloiden zu einem unbedingt sicheren Resultat führen, sondern nur zu einem mehr oder minder wahrscheinlichen.

Der Grad der Wahrscheinlichkeit richtet sich ganz nach der Untersuchung. Er wächst mit der Anzahl der Eigenschaften, die untersucht worden sind, und dem Maß ihrer Übereinstimmung. Faktisch gelten diese Bedingungen ja auch für Kristalloide, jedoch ist hier eine solche Präzisierung der Eigenschaften möglich, daß eine Übereinstimmung der charakteristischsten schon einen so hohen Grad von Wahrscheinlichkeit für die Identität beider Substanzen gewährleistet, daß man ihn als Gewißheit

ansprechen kann. Man wird also bei Harzen möglichst viele Eigenschaften untersuchen müssen und diese möglichst scharf zu umgrenzen versuchen. Eine mühselige Aufgabe, deren Resultat trotzdem nie mehr sein kann als wie ein größerer oder geringerer Grad von Wahrscheinlichkeit.

Doch noch auf einen anderen Punkt sei hingewiesen, der bei Harzsynthesen große Bedeutung haben dürfte. Es muß in Rechnung gezogen werden, daß man es mit Kolloiden zu tun hat, die in verschiedenen Modifikationen vorliegen können. Es kann das bei Harzen zu einer so großen Divergenz der Eigenschaften führen, daß man die Abstammung von demselben Grundkörper, die doch tatsächlich vorliegt, nicht oder nur sehr schwer erkennen kann. Das Reinharz des Schellacks z. B. ist spielend in Alkohol löslich, schmilzt bei etwa 90° und läßt sich durch Kalilauge leicht hydrolysieren. Durch Behandeln mit wenig Salzsäure in Äther geht es jedoch in eine Modifikation über, die sich selbst beim Kochen mit viel Alkohol nicht löst, bis 240° noch nicht geschmolzen ist und sich nur spurenweise und äußerst langsam hydrolysieren läßt. Und doch ist es nur kolloidchemisch von der ersteren Modifikation verschieden, denn durch Lösen in Ameisensäure und Ausfällen mit Wasser resultiert wieder die alte Form.

Man wird also zu bedenken haben, daß für die Eigenschaften eines Harzes nicht nur sein chemischer, sondern auch sein kolloidchemischer Charakter maßgebend ist.

Aus vorstehendem ergibt sich, daß die Synthese eines Harzes nur möglich ist, wenn seine Eigenschaften zu charakterisieren und zu präzisieren sind. Ist dieses nur innerhalb weiter Grenzen möglich, so wird der Begriff Kongruenz der Eigenschaften sinnlos, es kann die Grundbedingung einer wahren Synthese nicht erfüllt werden. Nach unserer augenblicklichen Kenntnis der Naturharze dürften nur einige wenige den Versuch einer Synthese und den Nachweis einer solchen gestatten.

Beim Reinharz des Schellacks sind rund 70% der hydrolytischen Spaltprodukte charakterisiert worden; es liegen schätzungsweise 15% undefinierbarer Stoffe vor, die möglicherweise Verunreinigungen im oben festgelegten Sinne sind, es aber nicht zu sein brauchen. Möglicherweise bedingen gerade sie die Harznatur des Schellacks. Da es bisher trotz vieler Mühe nicht gelang, sie ohne chemischen Eingriff zu entfernen, mußte diese Frage bisher unbeantwortet bleiben.

Das Vorhandensein dieser undefinierbaren Stoffe erschwert nun die Charakterisierung und Präzisierung der Eigenschaften des Reinharzes in hohem Maße bzw. macht sie in manchen Fällen unmöglich. Nach der Hydrolyse erhält man sie als braune, zähflüssige Masse, die zudem augenscheinlich leicht veränderlich ist.

Sie haben sauren Charakter und machen demnach eine genauere Bestimmung der Basizität des Reinharzes unmöglich. Ebenso werden die für die Identifizierung der Harze so wichtigen Farbenreaktionen durch das Vorhandensein dieser Stoffe ausgeschaltet. Ferner muß angenommen werden, daß sie der Menge nach schwanken, vermutlich also in keinem stöchiometrischen Verhältnis zu den charakterisierten Stoffen stehen; einer Elementaranalyse des Reinharzes und allen anderen zahlenmäßig festgelegten Konstanten ist deshalb nicht die Bedeutung beizumessen wie gewöhnlich.

Nun ist aber das Reinharz des Schellacks durch eine Reihe anderer Eigenschaften charakterisiert, bei denen die akzessorischen Bestandteile nicht stören, vor allem durch seine eigenartigen Löslichkeitsverhältnisse. Es ist sehr leicht löslich in Alkohol, Essigsäure und Ameisensäure, in allen anderen gebräuchlichen organischen Solventien

dagegen unlöslich. Schwache Alkalien, wie Ammoniak, Soda und Borax, lösen es ebenfalls. Bisher schrieb man diese Eigenschaft allein dem sauren Charakter des Harzes zu und konnte allerdings nicht erklären, weshalb in Soda die Kohlensäureentwicklung ausblieb. H. Wolff scheint mit seiner Theorie das Richtigere getroffen zu haben; er behauptet, daß in erster Linie eine Peptisation des Harzes vorliege. Es war demnach zu erwarten, daß diese auch von anderen Salzen einer starken Base mit einer schwachen Säure zu bewirken sei, z. B. durch Natronwasserglas; eine Annahme, die sich bestätigte; das Reinharz ist bei gelindem Erwärmen auch in Wasserglas vollkommen klar löslich.

Durch Kali- oder Natronlauge wird es beim Stehen bei gewöhnlicher Temperatur hydrolysiert, wobei sich, wenn man 5fach normale Kalilauge anwendet, der größte Teil der einen Komponente, der Aleuritinsäure, in körnigen Kristallen als Kalisalz abscheidet.

Ebenso charakteristisch ist das Verhalten des Reinharzes beim Erhitzen. Bei etwa 90° beginnt es unter starkem Aufblähen zu schmelzen. Es handelt sich jedoch nicht um eine Zersetzung, sondern um eine kontinuierliche Wasserabspaltung. Gegen 200° verliert das Produkt plötzlich seine flüssige Konsistenz und geht in eine sehr zähe Masse über, die beim Erkalten steinhart ist. Sie ist bis 300° nicht schmelzbar, sondern wird nur etwas weicher und elastischer. Lösungsmittel, von denen eine große Zahl untersucht wurde, bleiben ohne Einfluß. Sie ist nicht mehr hydrolysierbar.

Es mußte das Ziel synthetischer Versuche sein, aus identifizierten Schellackbestandteilen ein Produkt zu erzielen, das diese feststellbaren Eigenschaften des Reinharzes besaß. Gelang dieses, so war wenigstens das harzbildende Prinzip des Schellacks mit großer Wahrscheinlichkeit gefunden, und die Frage, ob den akzessorischen Bestandteilen Bedeutung zukommt, konnte vorläufig aufgeschoben werden.

Es wurde daher versucht, die Säuren des Reinharzes laktidartig miteinander zu verkuppeln, und zwar, um die Verhältnisse möglichst eindeutig zu gestalten, zunächst nur die reinen kristallisierten Säuren, Aleuritinsäure und Schellolsäure. Eine Reihe orientierender Versuche, bei denen dies durch die Einwirkung einer starken Säure auf die Lösung der Komponenten in einem indifferenten Medium erstrebt wurde, führte nur zu sirupösen Produkten. Zwar ließen sich auch aus ihnen die Ursprungssubstanzen nicht mehr ohne weiteres isolieren, jedoch trugen sie noch stark sauren Charakter, es waren also entweder nicht genügend viele Säuremoleküle aneinandergelagert, oder die Absättigung der Karboxylgruppen war nicht im wünschenswerten Umfange erfolgt. Harzartige Produkte wurden erst erzielt, wenn die Säuren zusammengeschmolzen wurden.

Daß es sich hierbei um eine Reaktion der beiden Komponenten und nicht um eine Mischung oder Lösung handelte, erhellt ohne weiteres aus der Beschreibung eines derartigen Versuches sowie aus der Untersuchung des resultierenden Produktes.

Äquimolekulare Mengen Aleuritinsäure und Schellolsäure wurden innig gemischt und im Glyzerinbad unter vermindertem Druck langsam erhitzt. Bei 100° , dem Schmelzpunkt der Aleuritinsäure, wurde die Masse teilweise flüssig. Dann traten langsam Blasen von Wasserdampf auf. Bei 150 bis 160° wurde die Abspaltung von Wasser sehr lebhaft, und die Schellolsäurekristalle lösten sich langsam in der trüben Schmelze auf. Die Temperatur wurde etwa 1 Stunde auf dieser Höhe gehalten. Mit dem völligen Verschwinden der Schellolsäure ließ auch die Dampfentwicklung sehr stark nach. Man erhielt so eine gelbliche, völlig klare Schmelze, die nach dem Erkalten als sprödes Harz vorlag.

Erhitzte man höher als 200° , so trat bei dieser Temperatur etwa ein plötzliches starkes Aufblähen ein, und man kam zu einem Produkt, das völlig andere Eigenschaften zeigte.

Die Untersuchung der so dargestellten Harze, die an Hand der Kenntnis der Eigenschaften beider Säuren recht genau durchgeführt werden konnte, ergab, daß es weder durch Extraktion noch auf dem Umweg über die Salze möglich war, eine Zerlegung vorzunehmen. Es durfte demnach angenommen werden, daß die beiden Komponenten miteinander verkettet waren. Diese Verkettung mußte als laktidartig angesprochen werden, da Kalilauge hydrolytisch wirkte und die einzelnen Komponenten in Form ihrer Kalisalze wieder isoliert werden konnten.

Die mannigfachen Versuche, bei denen die beiden Säuren in verschiedenen stöchiometrischen Verhältnissen zur Reaktion gebracht wurden, zeigten alle das oben beschriebene Bild. Allgemein läßt sich sagen: Erhitzt man nur so weit, bis die Wasserdampfentwicklung anfängt lebhaft zu werden, und hält die Temperatur auf dieser Höhe, bis die Schmelze homogen geworden ist, so gelangt man zu einem Produkt, das, wenn es überhaupt fest ist, einen verhältnismäßig tiefen Schmelzpunkt besitzt, in verschiedenen charakteristischen Solventien leicht löslich und peptisierbar ist und durch 4fach normale Alkalilauge leicht hydrolysiert wird. Diese Form wird als A-Form bezeichnet.

Bei steigender Temperatur ändert sich die Löslichkeit, bis endlich bei etwa 200° ein stark aufgeblähtes Produkt erhalten wird, die X-Form, die unlöslich ist, gewöhnlich nicht mehr hydrolysiert werden kann, und deren Schmelzpunkt, wenn er überhaupt ermittelt werden konnte, viel höher liegt als der der A-Form.

Gewöhnlich wird die X-Form bei hoher Temperatur nur weich-elastisch.

Da allem Anschein nach der Übergang der A-Form in die X-Form nicht reversibel ist, kann nicht angenommen werden, daß es sich um eine Modifikationsänderung handelt, es liegt wahrscheinlich eine Strukturänderung vor. Entweder tritt Wasserabspaltung zwischen bisher noch freigebiebenen Karboxyl- und Hydroxylgruppen ein, oder das Molekül wird dadurch, daß niedrig-molekulare Laktide miteinander reagieren, vergrößert.

Die Lösungsmittel, deren Einwirkung auf die Harze untersucht wurde, wurden auf Grund von Erfahrungen ausgewählt, die beim Studium des Schellackharzes gesammelt worden waren. Alkohol als gutes Lösungsmittel für Schellack und alkoholische Salzsäure für kolloidchemisch verschiedene Modifikationen des Harzes. Essigsäure und Ameisensäure als beste Solventien, die auch bei in siedendem Alkohol unlöslichen Formen nicht versagen. Äther, Petroläther, Essigäther, Benzol, Dekalin und Chloroform, in denen das Schellackharz unlöslich ist, der für die Identifizierung wichtigen Vollständigkeit halber. Ammoniak, Soda, Borax, Wasserglas und einfach normale Kalilauge wegen der schon erwähnten eigentümlichen Peptisationswirkung.

Die nach diesen Gesichtspunkten angestellte Untersuchung ergab folgendes Bild:

Reine Aleuritinsäure allein. Die A-Form der reinen Aleuritinsäure wurde durch Erhitzen auf 170° erhalten. Sie ist weich, fast ganz undurchsichtig und schmilzt bei 35 bis 45° . Im Gegensatz zum Schellackharz löst sie sich in Chloroform und etwas in Essigäther. Ammoniak und die Kalisalze bewirken eine trübe kolloide Lösung. Konzentrierte Kalilauge spaltet hydrolytisch unter Abscheidung von kristallinischem Kalisalz.

Die X-Form ist gallertartig, elastisch und klar durchsichtig, sie ist unlöslich und geht von 220° ab in eine viskose Flüssigkeit über. Sie ist nicht hydrolysiert.

Zwei Mol Aleuritinsäure und ein Mol Schellolsäure. Die A-Form bildet sich bei 155 bis 165° . Sie ist eine sehr zähe, sirupöse Masse. Die Löslichkeit ist die des vorher beschriebenen Produktes.

Die X-Form ist zelluloidartig, völlig durchsichtig und homogen. Bei 200° wird sie etwas weicher, schmilzt jedoch bis 250° nicht. Ihre sonstigen Eigenschaften sind die allgemein beobachteten.

Ein Mol Aleuritinsäure und ein Mol Schellolsäure. Bildungstemperatur der A-Form 165 bis 175° . Festes, klares, gelbliches Harz, das aber in gepulvertem Zustande beim Stehen leimig wird. Es schmilzt bei 50 bis 60° . Die Löslichkeit ist die des Schellackreinharzes. Beim Behandeln mit Soda konnte keine Kohlensäureentwicklung wahrgenommen werden. Chloroform bewirkt Quellung. Die Hydrolyse mit 4,5fach normaler Kalilauge erfolgt leicht.

Die X-Form hat das Aussehen der vorigen, ist aber noch härter und zäher.

Ein Mol Aleuritinsäure und zwei Mol Schellolsäure. Das der A-Form entsprechende gelblichweiße Harz zeigt in allen hier untersuchten Eigenschaften völlige Analogie zum Schellackreinharz. Der Schmelzpunkt liegt bei 95 bis 105° . Es bleibt auch in gepulvertem Zustande unverändert.

Die X-Form ähnelt den beiden vorhergehenden.

Reine Schellolsäure allein. Die A-Form entsteht durch Erhitzen bei 202 bis 210° . Das gelbliche, außerordentlich spröde Harz schmilzt bei 170 bis 175° . Es löst sich wieder ebensogut in Chloroform wie das reine Aleuritinsäureharz. Die sonstigen Eigenschaften finden sich wieder.

Die X-Form war nicht in der bisherigen einwandfreien Form zu erhalten, da bei höherem Erhitzen der Säure sich nicht nur Wasser, sondern auch Kohlensäure abspaltete und das Produkt sich stark verfärbte.

Weitere Eigenschaften konnten bisher nicht auf ihre Übereinstimmung untersucht werden.

Nachdem der Verlauf der Reaktion bei kristallisierten Körpern klargelegt worden war, wurden der Vollständigkeit halber noch die amorphen Schellackharzsäuren in den Kreis der Untersuchungen einbezogen. Auch hier tritt Kondensation ein, und die Beobachtungen, die in den vorher beschriebenen Fällen gemacht wurden, finden sich wieder. Man erhält ebenfalls wieder die A- und die X-Form, von denen die eine sich bei niedrigerer Temperatur, 140 bis 160° , die andere bei 200 bis 240° bildet. Die A-Form ist ein gelbes, homogenes Harz, das je nach dem Prozentsatz Aleuritinsäure in verschiedenen Härtegraden erhalten werden kann, während durch den Gehalt an Schellolsäure oder amorphen Harzsäuren auch noch die Sprödigkeit bedingt wird. Die Löslichkeit der A-Form ist die bereits beschriebene.

Die X-Form wird als aufgeblähte unlösliche und unschmelzbare Masse erhalten. Während aber die aus den kristallinen Säuren hergestellten Produkte einen zelluloidartigen Charakter tragen, sind die, bei deren Herstellung die amorphen Säuren als Zusatzstoffe verwendet wurden, spröde und stehen also der X-Form des Schellacks näher. Es wurde so dargestellt: das Kondensationsprodukt aus reinen amorphen Säuren, das als A- und X-Form hart und sehr spröde ist; das aus gleichen Gewichtsteilen Aleuritinsäure und amorphen Säuren, das eine weiche, knetbare Masse bildet, und ein Harz, das gewichtsmäßig die Säuren in Mengen enthält, wie

sie im Schellackreinharz vorliegen: 2 Teile Schellolsäure, 5 Teile Aleuritinsäure und 7 Teile amorphe Säure. Auch dieses Produkt zeigt die zu erwartenden Eigenschaften in bezug auf Härte, Löslichkeit, hydrolytische Spaltbarkeit, Verhalten beim Erhitzen usw. Nur ist zu bemerken, daß der Schmelzpunkt schon bei etwa 60° liegt, während der des Reinharzes um etwa 30° höher ist.

Diese Gegenüberstellung der untersuchten Produkte erlaubt mit hoher Wahrscheinlichkeit folgende Schlüsse zu ziehen:

Die Harznatur des Schellackreinharzes wird durch den laktidartigen Zusammenschluß von Oxysäuren erklärt. Die bisher aus dem Reinharz nicht abtrennbaren Bestandteile sind für das Zustandekommen der Harznatur nicht erforderlich.

Das Schellackharz liegt in der A-Form vor, da es die erwartete Löslichkeit besitzt, bei relativ niedriger Temperatur schmilzt und leicht hydrolysiert werden kann. Ferner geht es durch Erhitzen in die X-Form über, die ebenfalls die erwarteten Eigenschaften zeigt.

Ob eines der dargestellten Laktide im Schellackharz in Substanz vorliegt, läßt sich noch nicht entscheiden. Laktide je einer einheitlichen Säure kommen wohl nicht vor, da diese bei der Aleuritinsäure wachsig und undurchsichtig, bei der Schellolsäure zersetzlich sind. Das Reinharz des Schellacks zeigt beide Eigenschaften nicht.

Die Anwendung dieser Erkenntnis auf einfachere Fälle, die praktische Verwendbarkeit beansprucht, wurde von uns zum Patent angemeldet.

Nachtrag.

Nach der Drucklegung des Manuskripts erhalte ich durch die liebenswürdige Vermittlung des Herrn Professors A. Tschirch, Bern, Kenntnis von einer im Oktober vorigen Jahres in den *Helvetica chimica acta* von ihm veröffentlichten Arbeit über den Stocklack. Tschirch greift zurück auf die von ihm mit Farner im Jahre 1899 durchgeführte Untersuchung. Nunmehr gelingt es ihm, eine weitgehende Trennung der einzelnen Gemengteile des Harzes zu bewerkstelligen. Die wasser- und ätherlöslichen Anteile ebenso wie das Wachs und die Farbstoffe untersucht er genau; teilweise kann er chemische Individuen isolieren, teilweise vermag er bestimmte Typenzugehörigkeit nachzuweisen. Das den früheren und der vorliegenden Arbeit von uns zugrunde liegende Reinharz beschäftigt ihn nicht. Jedoch ist darauf hinzuweisen daß seine Untersuchung den noch ausstehenden exakten Nachweis erbringt, daß außer dem Reinharz nennenswerte Mengen eines in einem der anderen zur Extraktion verwendeten Medien, etwa Äther, löslichen Harzes nicht vorhanden sind. Die Harzeigenschaften des Stocklacks hängen also allein von dem Reinharz ab. Im übrigen schließt auch er sich der Ansicht an, daß der Harzkörper als ein Polylaktid anzusprechen ist.

W. Nagel.

Über die Bestimmung von Magnesium in Aluminium-, Zink- und Bleilegierungen.

Von Bruno Fetkenheuer und Arthur Konarsky.

Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium Siemensstadt.

Eingegangen am 4. März 1924.

Die genaue Bestimmung des Magnesiums in Legierungen gewinnt ständig größere Bedeutung, seitdem man die vergütenden Eigenschaften dieses Metalles erkannt hat. Während nun Magnesiummengen von mehr als 1% ohne nennenswerte Schwierigkeiten ermittelt werden können, scheinen die Methoden zur Bestimmung geringer Prozentgehalte, etwa von 1 bis 0,01%, nicht in allen Fällen der Kritik standzuhalten. Da sich auch in unserem Laboratorium die Notwendigkeit ergab, kleine Magnesiummengen exakt zu bestimmen, so benutzten wir diese Gelegenheit, um uns mit den vorliegenden Methoden bzw. mit den gegen dieselben gemachten Einwänden zu beschäftigen.

Ein neuerdings beschriebenes Verfahren von Jander und Weber¹⁾, das auf der Entfernung des Aluminiums als Chlorid im Salzsäurestrom bei 200° beruht, scheint für eine fortlaufende technische Materialkontrolle deswegen nicht geeignet zu sein, weil es das peinlich genaue Einhalten gewisser Versuchsbedingungen, außerdem mehrfaches Resublimieren des gebildeten AlCl_3 verlangt. Fresenius²⁾, Czochralski³⁾, Withey⁴⁾ und Wilke-Dörfurt⁵⁾ schlagen vor, zur Trennung von Aluminium und Magnesium das Magnesium bei Anwesenheit von Weinsäure als Phosphat zu fällen⁶⁾. Das Verfahren liefert nach Jander und Weber zwar gute Werte, was auch wir bestätigen können, ist aber sehr zeitraubend, da bei Anwesenheit von Weinsäure die quantitative Abscheidung geringer Magnesiummengen erst nach 3 bis 4 Tagen beendet ist⁷⁾. Außerdem wäre bei fortlaufenden analytischen Arbeiten der Preis der Weinsäure nicht mehr zu vernachlässigen, da besonders bei magnesiumarmen Legierungen jedesmal 10 bis 20 g Aluminium in Lösung zu halten sind. Das einfachste Verfahren, Magnesium mit so viel Kalilauge zu fällen, daß Aluminium in Lösung bleibt⁸⁾, scheint durch eine Beobachtung von Wilke-Dörfurt⁹⁾ in Mißkredit geraten zu sein. Da wir dieses Verfahren stets mit Vorteil angewandt haben, ohne auf die von Herrn Wilke-Dörfurt angegebenen Schwierigkeiten zu stoßen, so untersuchten wir die Fällbarkeit des Magnesiums unter den bei der Analyse

¹⁾ Jander und Weber: Z. angew. Chem. Bd. 36, S. 588. 1923.

²⁾ Fresenius: Quantitative Analyse Bd. 1, S. 562. 1910.

³⁾ Z. angew. Chem. Bd. 26, S. 501. 1913. ⁴⁾ J. Inst. Metals 1916, S. 207.

⁵⁾ Diese Zeitschr. Bd. 1, S. 84. 1921. ⁶⁾ Vgl. Metal Ind. (London) Bd. 21, S. 27. 1922.

⁷⁾ Vgl. E. Mendes Da Costa: Vet. Chem. Weekblad Bd. 19, S. 249/51. 1922.

⁸⁾ Vgl. Fresenius: Z. angew. Chem. Bd. 35, S. 299. 1922.

⁹⁾ Diese Zeitschr. Bd. 1, S. 84. 1921.

vorliegenden Bedingungen an reinen MgCl_2 -Lösungen bekannten Gehaltes. Zu diesem Zwecke wurden zwei MgCl_2 -Lösungen hergestellt, deren Konzentration sich um eine Zehnerpotenz unterschied und deren Gehalt auf die übliche Weise nach Schmitz bestimmt war. Es enthielt

Lösung 1: 0,8664 g Mg in 1000 cm^3
 „ 2: 0,0863 „ „ „ 1000 „

Je 100 cm^3 dieser beiden Lösungen wurden nun mit 124 g Kaliumhydroxyd in 500 cm^3 Wasser versetzt, nämlich so viel, als nötig gewesen wäre, um bei einer Einwage von 20 g einer 0,1- bzw. 0,01proz. Aluminium-Magnesiumlegierung das Aluminium in Form der Verbindung Al(OK)_3 in Lösung zu halten. Um auch noch den Einfluß der Temperatur auf die Fällbarkeit des Mg(OH)_2 kennenzulernen, wurde die Lösung zum Sieden erhitzt, auf das 5fache Volumen verdünnt und kalt filtriert. Der Rückstand von Mg(OH)_2 wurde darauf in Salzsäure gelöst, zur Entfernung evtl. noch vorhandener Verunreinigungen mit $(\text{NH}_4)_2\text{S}$ und NH_4Cl versetzt, das zuletzt erhaltene Filtrat auf 100 bis 150 cm^3 eingengt und Magnesium nach Schmitz als Phosphat bestimmt. Es wurden so gefunden in

Lösung 1: 0,0875 g Mg in 100 cm^3 statt 0,0866
 „ 2: 0,0087 „ „ „ 100 „ „ 0,0086

Wird die Analysenprobe nicht in Kalilauge gelöst, was beim Aluminium große Vorteile bietet und leicht auszuführen ist¹⁾, bei Zink- und Bleilegierungen aber nicht angeht, so entstehen durch Umsetzung der Kalilauge mit den beim Lösen gebildeten Chloriden, Nitraten usw. große Salz mengen. Um auch deren Einfluß auf die Fällbarkeit des Magnesiums zu untersuchen, wurden je 100 cm^3 der zu dem ersten Versuch verwandten beiden Standardlösungen von MgCl_2 mit 124 g Kaliumhydroxyd und 165 g Kaliumchlorid in 1 l Wasser versetzt. Die zugegebenen Mengen Kaliumhydroxyd und Kaliumchlorid entsprachen wiederum der Annahme, daß 20 g einer 0,1- bzw. 0,01proz. Aluminiumlegierung in Salzsäure gelöst und mit Kaliumhydroxyd bis zur Bildung des Aluminates Al(OK)_3 umgesetzt wurden. Nach dem Aufkochen, Verdünnen mit 500 cm^3 Wasser wurde das Mg(OH)_2 abfiltriert und, wie oben angegeben, weiterbehandelt. Hierbei ergab

Lösung 1: 0,0856 g Mg in 100 cm^3 statt 0,0866
 „ 2: 0,0087 „ „ „ 100 „ „ 0,0086

Diese Versuche beweisen also die Brauchbarkeit dieses Verfahrens, das auch bei Anwesenheit großer Salz mengen und weitgehenden Verdünnungen bzw. sehr geringen Magnesiumkonzentrationen gute Werte liefert.

Zur Kontrolle dieser Ergebnisse wurden eine Anzahl Mg-Al-, Mg-Zn- und Mg-Pb-Legierungen²⁾ analysiert, die so gewonnen waren, daß die Legierung mit höherem Magnesiumgehalt jeweils als Vorlegierung für die folgende mit geringerem Magnesiumgehalt diente. Die Aluminiumlegierungen wurden direkt in so viel 50proz. Kalilauge gelöst³⁾, als zur Bildung der Verbindung Al(OK)_3 nötig war. Nach dem Ver-

¹⁾ Aluminiumlegierungen mit mehr als 20% Magnesium lösen sich allerdings nur noch äußerst schwierig in Kalilauge.

²⁾ Ein Teil der Beleganalysen wurde von Herrn Dr. Walter Vorwerk ausgeführt, die Herstellung der Legierungen verdanken wir Herrn Dr. Georg Hohorst.

³⁾ Vgl. Collit und Regan: J. Soc. Chem. Ind. 1918, S. 91, T.

dünnen auf das 5fache Volumen ließen sich diese Aluminat- sowie die später zu erwähnenden Zinkat- und Plumbatlösungen leicht durch Blaubandfilter von Schleicher u. Schüll filtrieren, ohne daß die Filtrate, wie Herr Wilke-Dörfurt beobachtete, durch Einwirkung der Luftkohlenensäure getrübt wurden. Die erhaltenen $\text{Mg}(\text{OH})_2$ -Niederschläge wurden nach dem Lösen in Salzsäure mit Schwefelammonium unter Zusatz von 3 g Ammoniumchlorid auf je 0,05 g Magnesium in 100 cm³ umgefällt. Obwohl die Bedeutung der richtigen Dosierung dieses Zusatzes lange bekannt ist, so findet sich derselbe in der Literatur vielfach nur durch ganz ungenügende Bezeichnungen wie „reichlich“ oder „überschüssig“ angedeutet. Sowohl beim Aluminium wie beim Zink und Blei genügt bis zu Konzentrationen von 1% Magnesium in der Legierung einmaliges Umfällen, das allerdings bei 10% Magnesium vorsichtshalber 3 mal wiederholt wurde. Ein nennenswerter Zeitverlust entsteht durch das Umfällen nicht. Die Analyse der Zink- und Bleilegierungen geschah im übrigen in analoger Weise, nur mit dem Unterschiede, daß Zink in Salz- und Blei in Salpetersäure gelöst wurde. Beim Zink genügen ebenfalls die zur Bildung des Zinkats erforderlichen Mengen von Kalilauge, während beim Blei etwa das Doppelte der zur Plumbatbildung nötigen Kaliumhydroxydmenge angewendet werden muß. Ferner darf die alkalische Bleilösung bei der Fällung die Temperatur von 25% nicht überschreiten, da sich sonst leicht Bleioxyde abscheiden. Im folgenden sind die Ergebnisse der Analysen einiger Al-Mg-, Zn-Mg- und Pb-Mg-Legierungen zusammengestellt.

Al-Mg-Legierungen	Zn-Mg-Legierungen	Pb-Mg-Legierungen
1. 10 proz.: Mg = 10,01 %	10 proz.: Mg = 10,04 %	10 proz.: Mg = 10,02 %
2. 0,5 proz.: Mg = 0,51 %	1 proz.: Mg = 0,93 %	1 proz.: Mg = 1,01 %
3. 0,1 proz.: Mg = 0,11 %	0,1 proz.: Mg = 0,11 %	0,1 proz.: Mg = 0,10 %
4. 0,01 proz.: Mg = 0,012%	0,01 proz.: Mg = 0,011%	0,01 proz.: Mg = 0,009%

Wenngleich das genannte Verfahren bei der Untersuchung von Aluminium- und Zinklegierungen des Magnesiums unzweifelhafte Vorteile bietet, so scheint doch die bisher für das Blei angewandte Trennung mit Schwefelsäure in der Ausführung einfacher zu sein. Das Bleiplumbat besitzt nämlich keine erhebliche Wasserlöslichkeit, und man ist infolgedessen gezwungen, unbequem große Flüssigkeitsmengen zu bewältigen, die bei einer Einwage von 3 g allerdings nur ca. 250 cm³ betragen, bei 50 g Einwage dagegen schon ca. 5 l.

Die Versuche wurden im Winter 1923/24 ausgeführt.

Innere Spannungen im Messing und ihre Beseitigung.

Von Georg Masing und Carl Haase.

Mit 12 Textabbildungen.

Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium Siemensstadt.

Eingegangen am 15. Januar 1924.

1.

Es ist allgemein bekannt, daß kaltgeformtes (gewalztes, gezogenes usw.) Messing zum Aufreißen neigt. Dieses Aufreißen erfolgt unter dem Einfluß geringerer äußerer Kräfte oder nach kürzerem oder längerem Lagern oder Gebrauch spontan, ohne eine ersichtliche äußere Ursache. Es ist offensichtlich, daß hierbei im Messing Spannungen ausgelöst werden, denn die Form der

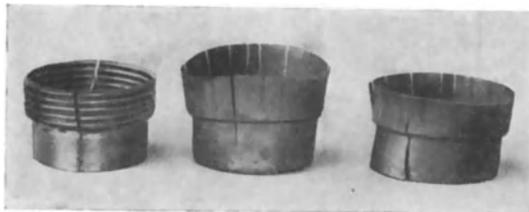


Abb. 1.

Gegenstände verändert sich beim Aufreißen, sie verziehen oder verkrümmen sich (Abb. 1). Heyn und Bauer¹⁾ haben auf eine sehr scharfsinnige Weise die Existenz von inneren Spannungen in kaltgereckten Metallkörpern nachgewiesen und gemessen, indem sie die Länge eines kaltgereckten Metallzylinders

bestimmten, wiederholt dünne Außenschichten abdrehten und jeweils wieder die Länge des Reststückes maßen. Aus den Unterschieden der gemessenen Längen kann die Verteilung der Längsspannungen im Zylinder berechnet werden. Damit war die Basis für die wissenschaftliche Behandlung des Problems des Aufreißen des Messings und ähnlicher Legierungen geschaffen, denn der Prozeß der Formgebung war als Quelle der das Aufreißen veranlassenden Spannungen erwiesen, und man konnte auch hoffen, die Wege zu ihrer Beseitigung zu finden.

Heyn und Bauer konnten bereits zeigen, daß die inneren Spannungen auf einen sehr geringen Betrag zurückgehen, wenn der kaltgereckte Gegenstand geglüht wird. Der praktische Wert dieser Maßnahme wurde bis zu einem gewissen Grade dadurch beeinträchtigt, daß hierbei die durch das Kaltrecken hervorgerufene Verfestigung teilweise oder ganz wieder verloren ging.

Auf der so geschaffenen prinzipiellen Grundlage ist das Aufreißen des Messings weiter erforscht worden, besonders eingehend in mehreren systematischen Arbeiten von Moore und Beckinsale²⁾. Diese Forscher stellten aus geglühtem Messingblech von der Stärke 0,09 mm durch Ziehen Schalen von der in Abb. 2 wieder-

¹⁾ E. Heyn und O. Bauer: Internat. Zeitschr. f. Metallographie Bd. 1, S. 16. 1911.

²⁾ H. Moore und S. Beckinsale: Engg. 1920, 1, S. 393; 1921, 1, S. 300; 1922, 1, S. 337. H. Moore, S. Beckinsale und C. E. Mallison: Engg. 1921, 2, S. 262.

gegebenen Form her. Diese Schalen wurden gruppenweise auf höhere Temperaturen erhitzt, und nach der Erhitzung die Neigung zum Aufreißen verfolgt. Als Kriterium hierfür diente das Auftreten von Rissen beim Eintauchen in Quecksilbersalzlösungen. (Die Verwendung von Quecksilber und Quecksilbersalzlösungen zum Nachweis von Spannungen im Messing ist allgemein bekannt.) Trat bei den Versuchen nach einer Behandlung mit einer solchen Lösung nach mehreren Tagen oder Wochen kein Aufreißen der Schalen auf, so wurde geschlossen, daß innere Spannungen in einem gefährlichen Maße nicht mehr vorhanden sind.

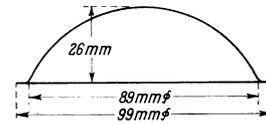


Abb. 2.

Durch eine ausgedehnte Reihe von Versuchen mit sehr reinem Messing von der Zusammensetzung: 70,4% Cu, 29,5% Zn, Gesamtverunreinigungen 0,1% wurde festgestellt, daß bei diesem Messing eine Erhitzung auf die in der Tabelle 1 angegebenen Temperaturen während der angegebenen Zeiten ausreicht, um die gefährlichen Spannungen zu beseitigen.

Tabelle 1.

Erhitzungszeit zur Beseitigung der Gefahr des Aufreißen bei einem 70er Messing.

Nach Moore und Beckinsale.

Temperatur	Zeit
200°	96 St.
225°	48 „
250°	5 „
275°	1 „
300°	20 Min.
325°	5 „

Tabelle 2.

Rückgang der Härte beim Anlassen von 70er Messing.

Nach Moore und Beckinsale.

Temperatur	Ausgangshärte			
	200	165	120	90
200°	keine Abnahme der Härte			
225°				
250°	2 St.	2 St.		
275°	20 Min.			
300°	5 „	20 Min.		

Um die Frage zu entscheiden, ob und in welchem Umfange hierbei bereits eine Erweichung des Messings eintritt, haben die Forscher folgenden Umweg gewählt: An einigen der in Abb. 2 dargestellten Schalen wurde festgestellt, daß die Härte nach Brinell an keiner Stelle derselben 150 übersteigt. Durch geeignete mechanische Behandlung (verschiedene Walzgrade) wurden andererseits aus demselben Messing Bleche von verschiedener Härte hergestellt und die Änderung der Härte durch Erhitzen auf verschiedene Temperaturen festgestellt. Die Temperatur- und Zeitgrenzen, oberhalb derer die Härte merklich sinkt, sind zusammenfassend in Tabelle 2 dargestellt.

Man ersieht aus ihr, daß der Härteabfall, also der Verlust der Verfestigung, bei um so tieferer Temperatur beginnt, je höher die Härte vor der Erhitzung war. Das ist ein jedem Metallographen geläufiges Resultat, denn man weiß, daß die Härte eines Metalles mit zunehmendem Kaltreckungsgrade zunimmt und die Temperatur, bei der die Rekristallisation einsetzt und die Härte wieder fällt, zugleich sinkt [s. z. B. Körber¹⁾].

Um die Resultate der Härtemessungen mit den Beobachtungen des Aufreißen an den Schalen zu verknüpfen, mußte ferner eine Annahme über die Abhängigkeit der Temperaturen, bei denen die Spannungen verschwinden, von dem ursprünglichen Absolutwert und der Verteilung dieser Spannungen gemacht werden. Moore und

¹⁾ z. B. F. Körber und W. Wieland: Mitt. Eisenforsch. Bd. 3, Heft 1, S. 57.

Beckinsale vermeiden eine direkte eingehende Prüfung dieser Abhängigkeit, indem sie angeben, daß die inneren Spannungen in den von ihnen hergestellten Schalen sehr groß waren, und daß nach ihren Erfahrungen bei keinem anderen technisch hergestellten Messinggegenstand höhere Spannungen zu erwarten wären. Den Versuchen an den Schalen käme also eine praktisch ausreichende Allgemeingültigkeit zu. — Derselbe Schluß könnte in allgemeinerer Form auf Grund folgender plausiblen Auffassung gezogen werden. Die inneren Spannungen werden durch eine Art von Reibungskräften gehalten; bei einer Temperaturerhöhung werden diese Kräfte durch die erhöhte Molekularbeweglichkeit überwunden, es treten Verschiebungen zwischen den einzelnen Teilen des Metallkörpers ein, und die inneren Spannungen gehen dadurch zurück. Nach dieser Auffassung ist also das Maß der Spannung, die sich bei einer gewissen erhöhten Temperatur noch maximal halten kann, lediglich von der molekularen Temperaturbeweglichkeit abhängig und nicht von den im Körper

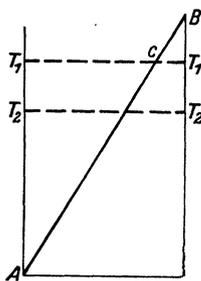


Abb. 3.

ursprünglich aufgespeichert gewesenen inneren Spannungen, wenn auch die Temperaturen, bei denen die inneren Spannungen zu sinken beginnen, hierbei verschieden sein können. Der sich hieraus ergebende Verlauf der Spannungen in Abhängigkeit von der Temperatur ist schematisch in Abb. 3 dargestellt.

Wenn die Gerade AB die Gesamtheit aller bei gewöhnlicher Temperatur möglichen Spannungen darstellt, so werden sich nach einer Erhitzung auf eine höhere Temperatur T_1 nur die Spannungen halten können, die unterhalb einer für diese Temperatur (und für das Material) charakteristischen Höchstgrenze AT_1 liegen. Diejenigen Spannungen, die vorher höher waren, werden jetzt auf den Betrag AT_1 herabgesunken sein. Für die Gesamtheit der Spannungen bei derselben Reihe von Objekten, für welche die Gerade AB galt, erhält man jetzt die gebrochene Linie ACT_1 . Bei höherer Erhitzungstemperatur gehen die möglichen Restspannungen weiter zurück (AT_2). Durch Erhitzung auf höhere Temperaturen findet ein Ausgleich der vorher verschieden gewesenen Höchstspannungen statt. Unter dieser Annahme könnte man also die Beobachtungsergebnisse an den Schalen verallgemeinern und sagen: Wie hoch der in einem Gegenstand ursprünglich aufgespeicherte Betrag an inneren Spannungen auch sei, nach einer Erhitzung auf 300° während 20 Min. werden diese, genau wie bei den untersuchten Schalen, auf einen praktisch ungefährlichen Restbetrag heruntersinken, während sie vor Erreichung dieser Temperaturgrenzen noch gefährlich groß sein können. Die Größe der in einem Messinggegenstand nach einer bestimmten Erhitzung maximal verbleibenden inneren Spannungen wäre hiernach eine von der Vorbehandlungsweise des Materials unabhängige Temperaturfunktion.

Wenn die Tabelle 1 allgemein gilt, ersah man durch Vergleich mit Tabelle 2, daß bei einer Härte unterhalb etwa 160 die Spannungen ohne Erniedrigung der Härte durch Erhitzung auf 275 bis 300° beseitigt werden können, während bei höheren ursprünglichen Härten bereits bei tieferen Temperaturen eine Erweichung des Materials eintreten muß. In einer Reihe von späteren Arbeiten haben dieselben Forscher gezeigt, daß etwa dieselbe Erhitzung auch bei technischem Messing mit 70% Cu und mit den üblichen Verunreinigungen und beim „Admiralitätsmetall“ (Messing mit 70% Cu, 29% Zn und 1% Sn) zur Beseitigung der Gefahr des Aufreißen führt. Ferner wurde beim Messing mit 60% Cu gefunden, daß diese Gefahr bereits bei

tieferen Temperaturen, bei 225 bis 250°, verschwindet. Bei allen diesen an Schalen von der oben angegebenen Form durchgeführten Versuchen ergab sich keine Veranlassung, an der Allgemeingültigkeit der gefundenen Gesetzmäßigkeiten zu zweifeln. Die Temperatur, bei der die Spannungen beseitigt werden, konnte als eine praktisch eindeutige Materialkonstante betrachtet werden, und Moore und Beckinsale sprechen deshalb auch sehr bestimmt von den „allgemeingültigen“ Bedingungen zur Beseitigung der Spannungen.

2.

Als die Verfasser der vorliegenden Arbeit vor die Aufgabe gestellt wurden, die Bedingungen, unter denen die Spannungen in technischen Messinggegenständen beseitigt werden können, zu studieren, glaubten sie, auf den Arbeiten von Moore und Beckinsale fußen zu können. Das Gebiet schien prinzipiell geklärt zu sein. Man brauchte nur für jede in Betracht kommende Messingsorte die Temperatur zu bestimmen, bei der die gefährlichen Spannungen verschwinden, indem man auf irgendwelche Weise nachweisbare Spannungen erzeugte und ihre Abhängigkeit von der Temperatur verfolgte. Für die Grenzfälle des 60er und des 70er Messings war das bereits von Moore und Beckinsale getan worden. Es handelte sich nun darum, das für die hauptsächlich in Frage kommenden, dazwischenliegenden Konzentrationen zu tun, wobei gewisse Sonderbestandteile speziell zu berücksichtigen waren.

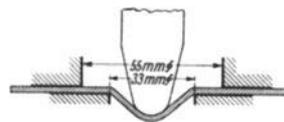


Abb. 4.

Zum Nachweis von Spannungen wurde nach einer Angabe von Moore und Beckinsale eine 1proz. Merkurinitratlösung mit Zusatz von 1% Salpetersäure (Dichte 1,4) benutzt. Diese Lösung hat sich gut bewährt. Durch häufiges Erneuern muß man dafür sorgen, daß keine zu große Verarmung an Quecksilber eintritt.

Um die Spannungen sicher zu erzeugen, wurde zunächst versucht, den Vorgang der Kaltreckung selbst zu benutzen. Kaltgewalztes Messingblech wurde der Einwirkung der Quecksilberlösung unterworfen. Es zeigte sich jedoch, daß die Resultate sehr unregelmäßig waren. Die Bleche rissen in der Lösung bald auf, bald nicht. Auch die Erzeugung von Spannungen durch elastisches Biegen von hartgewalzten Blechen in Anlehnung an weitere Versuche von Moore und Beckinsale¹⁾ führte nicht zum Ziel. Die gebogenen Bleche rissen in der Quecksilberlösung meistens nicht auf. Es wurde deshalb nach einer Behandlung gesucht, die der Herstellung der Schalen nach Moore und Beckinsale ähnlich war. Eine solche bot sich in der Erichsen-Ziehprobe. Dieses Prüfungsverfahren für Bleche besteht bekanntlich darin, daß das Blech durch einen flachen Ring mit einem Durchmesser von 33 mm und einem zweiten von 55 mm festgehalten und im Innern des Ringes durch einen Konus mit halbkugelförmigem Ende durchgedrückt wird (siehe Abb. 4).

Auf diese Weise entstehen konische, abgerundete schalenförmige Tiefungen. Bei der technischen Anwendung der Erichsen-Probe zur Prüfung des Bleches wird so verfahren, daß die Tiefung festgestellt wird, bei der das Blech einreißt. Für unsere Zwecke wurde eine Tiefung gewählt, bei der das Blech mit Sicherheit noch nicht einriß. Zur Untersuchung gelangte zunächst Messing von der Zusammensetzung: 64,72% Cu, 0,30% Pb, 0,11% Fe, Rest Zn. Das Messing wurde in Gestalt eines 2 mm starken Bleches bezogen. Es wurde bei 600° während einer Stunde ausgeglüht,

¹⁾ Siehe weiter unten.

auf verschiedene Stärken vorgewalzt, wieder bei 600° ausgeglüht und bis auf 0,6 mm Stärke kaltgewalzt. Auf diese Weise wurde es bei derselben Stärke in verschiedenen Kaltreckungsgraden erhalten. In Tabelle 3 sind die Härten einiger so hergestellter Bleche und ihre Änderungen bei der nachfolgenden Erhitzung wiedergegeben.

Tabelle 3.

Ausgeglüht bei einer Dicke von mm	Walzgrad	Härte bei einer Dicke von 0,6 mm nach einer Erhitzung während 30' auf								
		—	175°	200°	225°	250°	275°	300°	325°	350°
1,5	60%	162	162	158	162	158	120	111	94	95
1,0	40%	138	138	150	150	141	124	120	101	92
0,8	25%	118	120	125	127	128	—	125	121	106
0,6	0%	69	—	—	—	—	—	—	—	—

An Stichproben von Blechen jedes Walzgrades wurde die maximale Erichsen-Tiefung festgestellt, die das Blech noch vertragen konnte, ohne aufzureißen. Diese Tiefungen sind in Tabelle 4, 2. Spalte angegeben. Die Bleche wurden alle bis zur entsprechenden maximalen Tiefung durchgebogen, auf verschiedene Temperaturen während je 30 Min. erhitzt und der Prüfung mit Quecksilbernitratlösung unterworfen. In Tabelle 4 sind die Zeiten angegeben, nach der die Bleche nach den verschiedenen Vorbehandlungen gerissen sind:

Tabelle 4.

Walzgrad in %	Tiefung mm	Aufreißzeit in HgNO ₃ nach einer Erhitzung während 30' auf							
		—	175°	185°	200°	210°	225°		
60	4,1	2 Min. 2,5Min.	—	—	—	—	—	—	—
50	4,3	1 „ 1 „	1 Min. 1 Min.	1,3Min. 1,3Min.	8 Min. —	24Min. 26Min.	11Min. —	—	—
40	6	1,3 „ 1,3 „	1 „ 1 „	1,3 „ 1,3 „	3 St. 3,5 St.	24 „ —	—	—	—
25	7,1	1,3 „ 1,3 „	1,3 „ 1,3 „	1 „ 1,5 „	2 „ 2,5 „	4,5 „ —	—	—	—
0	12,5	—	—	—	—	—	—	—	—

— bedeutet, daß das Stück in 2 Tagen nicht aufgerissen ist.

Aus Tabelle 4 ersieht man zunächst, daß eine Erhitzung auf 225 bis 250° während 30 Min. ausreicht, um die durch Herstellung von Erichsen-Tiefungen in dem Messing der angegebenen Zusammensetzung herbeigeführte Gefahr des Aufreißens zu beseitigen. Hierbei tritt noch keine nennenswerte Erniedrigung der Härte ein (Tabelle 3). Ferner sieht man, daß bei weichem Blech der Erichsen-Eindruck überhaupt kein Aufreißen herbeizuführen vermag. Die durch ihn hervorgebrachten Spannungen sind in diesem Falle zu gering.

Auffallenderweise zeigt sich jedoch außerdem, daß beim härtesten Blech die Gefahr des Aufreißens geringer ist und durch Erhitzung auf niedrigere Temperatur verschwindet, als bei den Blechen mittlerer Härte. Das erstere Resultat entspricht auch den Erfahrungen von Moore und Beckinsale, das letztere widersprach den Erwartungen, denn es war nicht einzusehen, warum der durch das Aufreißen angezeigte Spannungsbetrag in den härteren Blechen, bei denen also von vornherein die höchsten Eigenspannungen zu erwarten sind, bei tieferen Temperaturen zum Verschwinden gebracht werden konnte als bei den weicheren Blechen. Um zu entscheiden, ob dieser

Effekt auf die Härte des Bleches oder auf die geringere Tiefe des Erichsen-Eindruckes zurückzuführen ist, wurde mit demselben Messingmaterial eine Versuchsreihe angesetzt, bei der außer der Härte der Bleche auch die Eindringtiefe systematisch verändert wurde. Die Härten der verwendeten Bleche sind in Tabelle 5 wiedergegeben.

Tabelle 5.

Herstellung	Walzgrad %	Härte
kaltgewalzt von 1,2 mm auf 0,6 mm	50	150
„ „ 1,0 „ „ 0,6 „	40	138
„ „ 0,8 „ „ 0,6 „	25	118

Die Resultate der Prüfung mit Quecksilbernitrat finden sich in Tabelle 6.

Tabelle 6.

Walzgrad %	Härte	Tiefung mm	Aufreißzeit in HgNO ₃ nach einer Erhitzung während 30' auf						
			—	185°	200°	210°	225°	250°	
50	150		5 Min. 8 Min.	5 Min. 8 Min.	8 Min. 8 Min.	—	—	—	—
40	138	2	4 „ 10 „	1,3 „ 4 „	2,3 „ —	—	—	—	—
25	118		7 „ 8 „	—	—	—	—	—	—
50			7 „ 4 „	4 „ 6 „	2,5 „ 6 „	20 St. —	—	—	—
40		3	4 „ 4 „	1 „ 2 „	0,8 „ 2 „	2,5Min. 9 Min.	20 St.	20 St.	—
25			5 „ 5 „	2 „ 2,3 „	3 „ 3 „	4 „ 7 „	20 „ 20 „	—	—
50			2 „ 3 „	3,5 „ 4 „	2,5 „ 5 „	5 „ 6 „	20 „ 20 „	—	—
40		4	2 „ 3 „	0,8 „ 0,8 „	0,5 „ 0,5 „	1,5 „ 1,5 „	20 „ 20 „	—	—
25			1 „ 3 „	2 „ 2 „	2,5 „ 3 „	3 „ 3 „	10 Min. 20 „	—	20 St.
50			2 „ 3 „	2,5 „ 4 „	2 „ 2,8 „	5,5 „ 7 „	20 St. 20 „	—	—
40		5	1,5 „ 2 „	0,8 „ 0,8 „	0,5 „ 0,5 „	0,8 „ 0,8 „	3,5Min. 10Min.	20 St. 20 „	—
25			2 „ 2,3 „	1 „ 1 „	2 „ 2 „	0,8 „ 0,8 „	18 „ —	—	—
40 ¹⁾		6	2 „ 2 „	0,5 „ 0,5 „	0,5 „ 0,5 „	0,8 „ 0,8 „	2 „ 4,5 „	20 „ 20 „	—
25			1 „ 0,8 „	0,8 „ 0,8 „	1 „ 2 „	0,8 „ 0,8 „	3 „ 3,5 „	20 „ 20 „	—

Man sieht ganz deutlich, daß die Zerreißgefahr bei den tiefer eingedrückten Blechen bei höheren Temperaturen verschwindet als bei den weniger tief gedrückten.

Es erschien wünschenswert, dieses Resultat mit anderem Ausgangsmaterial an einer größeren Versuchsserie zu prüfen. Das verwendete Messing hatte die Zusammensetzung: 63,49% Cu, 36,15% Zn, 0,37% Pb, Spur Fe. Es wurde wieder in Gestalt eines Bleches von 2 mm

Tabelle 7.

Herstellung	Härte	Walzgrad in %
kalt gewalzt von 2 mm auf 0,6 mm	164	70
„ „ „ 1,5 „ „ 0,6 „	147	60
„ „ „ 1,2 „ „ 0,6 „	139	50
„ „ „ 1,0 „ „ 0,6 „	132	40
„ „ „ 0,8 „ „ 0,6 „	121	25
„ „ „ 0,75 „ „ 0,6 „	116	20
„ „ „ 0,70 „ „ 0,6 „	94	14
ausgeglüht bei 0,6 „	60	0

Dicke bezogen und wie bei den bisherigen Versuchen weiterbehandelt. In Tabelle 7 sind die Härten des verschieden weit gewalzten Materials angegeben.

1) Beim härtesten Material ließ sich eine Tiefung von 6 mm nicht erreichen.

Tabelle 8.

Ein- druck- tiefe	Walz- grad %	Erhitzungstemperatur:											
		180°		200°		220°		240°					
2 mm	70	5 St. 35 St.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	60	15 Min. 22 Min. 22 St.	—	22 St. 48 St. 33 Min.	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	50	2,5 " 3,5 "	7 Min. 2 Min.	2,8 Min. 2,5 Min. 4,5 St. 4 Min.	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	40	2,5 " 3 " 3 " 5 "	—	2 " 2 " 2,5 Min.	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	25	20	14	nicht festgestellt									
3 mm	70	2,5 Min. 5 Min. 5,5 Min. 7 Min.	10 Min. 24 Min. 20 St.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	60	3 " 2,5 " 4 " 2 "	2 " 2,3 Min. 9 Min.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	50	1 " 2 " 2,3 " 1 "	1,3 " 1,5 " 2,3 " 4 "	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	40	1 " 2 " 2,3 " 1,8 "	1,5 " 1,3 " 1 " 1,8 "	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	25	1,5 " 1,8 " 2 " 2 "	1,8 " 2,8 " 2,3 " 2 "	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	20	2 " 5 " 5 " 5 "	3 " 6 " 7 " 5 "	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	14	4 " 8 " 2 " 10 "	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	4 mm	50 ¹⁾	1,5 Min. 1 Min. 2 Min. 2 Min.	0,5 Min. 1,5 Min. 1,5 Min. 0,8 Min.	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	40	1,5 " 1,5 " 1 " 2 "	1 " 1 " 1 " 1,3 "	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	25	30 Sek. 40 Sek. 60 Sek. 50 Sek.	40 Sek. 50 Sek. 60 Sek. 40 Sek.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
20	2 Min. 2,5 Min. 3,8 Min. 2 Min.	2,5 Min. 2,3 Min. 3,5 Min. 3 Min.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
14	3 " 5 " 4 " 8 "	1 St.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
5 mm	40 ¹⁾	1 Min. 1,3 Min. 1 Min. 1 Min.	1 Min. 1 Min. 1,8 Min. 2 Min.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	25	50 Sek. 40 Sek. 40 Sek. 40 Sek.	50 Sek. 60 Sek. 40 Sek. 60 Sek.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	20	2 Min. 3 Min. 3,5 Min. 3 Min.	2,3 Min. 3 Min. 4 Min. 2 Min.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	14	4 " 4 " 7 " 7,5 "	3 " 5 " 10 "	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6 mm	25 ¹⁾	30 Sek. 35 Sek. 40 Sek. 40 Sek.	30 Sek. 40 Sek. 40 Sek. 45 Sek.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	20	2 Min. 1 Min. 1,8 Min. 1,5 Min.	2,5 Min. 1,5 Min. 2 Min. 2 Min.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	14	3 " 3,53 " 4 " 3 "	3 " 5,5 " 3,5 " 4 "	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

¹⁾ Bei den höheren Walzgraden ließ sich diese Tiefung nicht erzeugen.

Die Resultate der Versuche mit Quecksilbernitratlösung nach verschiedener thermischer Behandlung sind in Tabelle 8 zusammengestellt. Die Resultate der Tabelle 6 werden durchaus bestätigt und ergänzt, so daß wir im weiteren beide gemeinsam besprechen können.

3.

Die Abhängigkeit der Zerreißgefahr von der Tiefung zeigt sich in der Weise, daß die Zerreißgefahr mit steigender Tiefung durchweg zunimmt. Das gilt nicht nur für die Gegenstände, die nach der Herstellung der Erichsen-Tiefung nicht erhitzt worden sind, sondern auch für die danach erhitzten Stücke, und führt dazu, daß die Gefahr des Aufreißens bei um so tieferer Temperatur beseitigt wird, je geringer die Tiefung war. Ein Blick auf die Tabellen 6 und 8 zeigt die allgemeine Gesetzmäßigkeit, daß mit steigender Tiefung die Erhitzungstemperatur, die erforderlich ist,

um die Gefahr des Aufreißens zu beseitigen, höher wird. Zur größeren Anschaulichkeit sind die Resultate in Abb. 5 und 6 graphisch dargestellt. Der halbe Log-

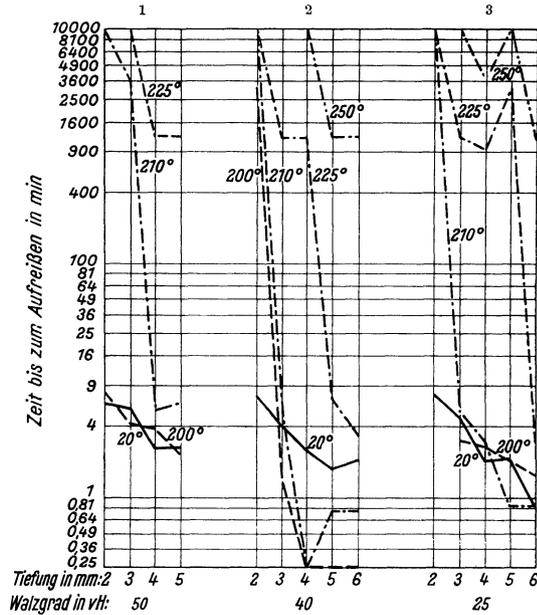


Abb. 5.

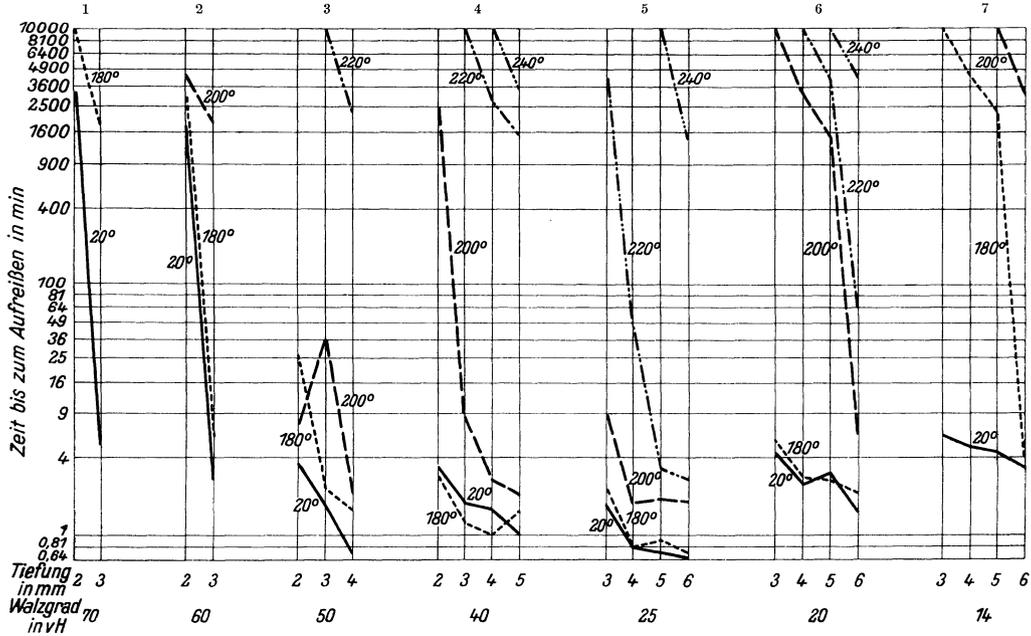


Abb. 6.

arithmus des Mittelwertes der Aufreißzeit ist hierbei als Ordinate aufgetragen, um die Gesamtheit der Resultate übersichtlich darzustellen. In den Fällen, in welchen ein Aufreißen in 3 Tagen nicht festgestellt wurde, ist die Aufreißzeit zum Zwecke

Man sieht, daß die Gefahr des Aufreißens bei den Sockeln größer ist und erst nach Erhitzung auf eine höhere Temperatur verschwindet als bei den Bechern. Bei beiden ist die Temperatur, die zur Beseitigung der Aufreißgefahr nötig ist, höher als bei den Erichsen-Proben. Während bei diesen nach einer Erhitzung auf 265° kein Aufreißen mehr beobachtet werden konnte, war bei den Sockeln hierzu eine Erhitzung auf mehr als 300° erforderlich.

Außer der Formgebung ist auch der Walzgrad des Ausgangsmaterials, wie man aus den Tabellen und aus Abb. 8 ersieht, von größerem Einfluß auf die Gefahr des Aufreißens. Bei einem Blech mit dem Walzgrad 14% und weniger kann durch einen Erichsen-Eindruck überhaupt kein Aufreißen herbeigeführt werden. Mit zunehmendem Walzgrad nimmt die Zerreißgefahr zunächst zu, erreicht bei den Walzgraden 30 bis 50% ein Maximum und nimmt dann auffallenderweise wieder ab. Auch hier findet sich die Erscheinung wieder, daß die Unterschiede nach einer Erhitzung auf mittlere Temperatur (ca. 200°) größer werden, um sich erst bei höherer Temperatur auszugleichen.

Auch Moore und Beckinsale haben einen Einfluß des Walzgrades auf die Zerreißgefahr studiert, jedoch unter anderen Bedingungen. Sie setzten Zerreißstücke der Einwirkung von Quecksilbernitrat resp. von Ammoniak (das ähnlich wirkt) aus und führten mit diesem Zerreißversuche aus. In Tabelle 10 sind einige ihrer Versuchsergebnisse zu-

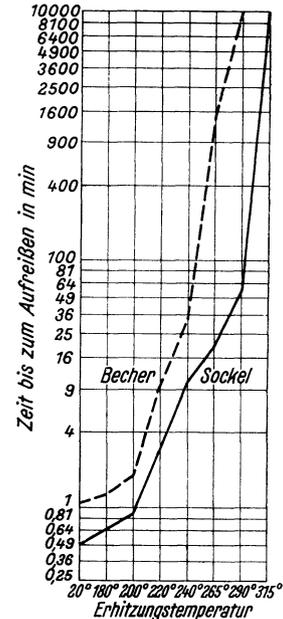


Abb. 7.

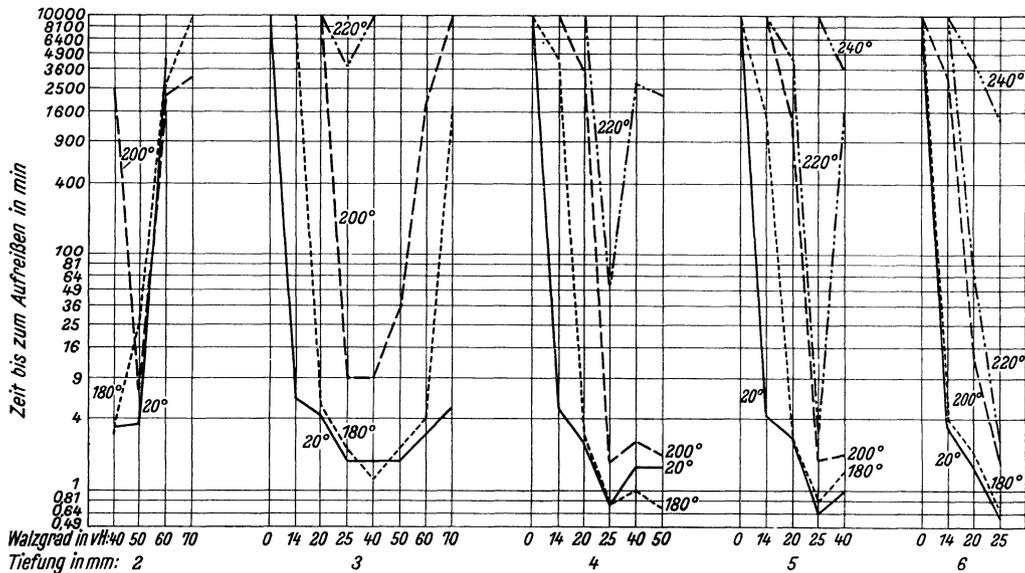


Abb. 8.

sammengestellt. Zur Kennzeichnung des Kaltreckungszustandes der Bleche benutzten Moore und Beckinsale die hierbei erreichte Härte.

Man sieht sehr deutlich, daß die Festigkeit durch $Hg(NO_3)_2$ und durch NH_3 um so mehr herabgesetzt wird, je weicher das Material ursprünglich gewesen ist. Hieraus

Tabelle 10.

Härte	Nicht mit $\text{Hg}(\text{NO}_3)_2$ behandelt		Mit $\text{Hg}(\text{NO}_3)_2$ behandelt				Mit NH_3 behandelt während	
			sofort nach Behandlung		nach 24stünd. Behandlg.		24 St.	14 Tage
	σ_B	δ	σ_B	δ	σ_B	δ	σ_B	σ_B
62	20,4	81%	8,7	11	8,0	14	13,9	7,6
101	25,1	52%	16,0	8	16,8	8	19,1	15,7
147	36,5	21%	36,9	5	36,6	6	25,4	28,9
183	46,9	7%	44,5	11	45,5	8	44,4	45,8

σ_B bedeutet die Zerreißfestigkeit, δ die Zerreidehnung.

darf man jedoch noch keine Schlüsse auf die Gefahr des Aufreißens ziehen. Denn diese wird nicht nur bestimmt durch die Höhe der Spannungen, die das Material ohne Loslösung des Zusammenhanges noch maximal zu halten vermag, sondern in erster Linie auch durch die Höhe der in dem Werkstück überhaupt vorhandenen inneren Spannungen. Wenn diese die maximale Grenze berschreiten, tritt ein Aufreißen ein. Allerdings muß man bei den größten Härten 147 und 183, bei welchen überhaupt kaum ein Einfluß des Quecksilbernitrats und Ammoniaks auf die Zerreißfestigkeit zu beobachten ist, auch auf Grund dieser Tabelle auf eine stark verringerte Zerreißgefahr schließen, in Übereinstimmung mit unseren Beobachtungen. Für die mittleren Härten (90 bis 130) lassen sich aus dieser Tabelle jedoch keine sicheren Schlußfolgerungen über die Zerreißgefahr ziehen. So ist auch die Feststellung von Moore und Beckinsale, daß die Gefahr des Aufreißens mit steigendem Kaltreckungsgrade abnimmt, in dieser Allgemeinheit unzutreffend. Es ist dahingegen wahrscheinlich, daß das von uns gefundene Maximum der Gefahr des Aufreißens bei mittleren Walzgraden nicht nur für das Recken durch Walzen gilt, sondern eine allgemeine Bedeutung hat. Auch gilt es höchstwahrscheinlich unabhängig von der speziellen Art der Erzeugung der inneren Spannungen durch die Erichsen-Probe.

Moore und Beckinsale erklären den Einfluß der Härte (des Kaltreckungsgrades) auf das Aufreißen folgendermaßen: Nach ihren Untersuchungen erfolgt das Aufreißen bei Stcken, deren Struktur eine Untersuchung gestattet, stets intergranular, längs Schichten, die eine von der übrigen Legierung abweichende Zusammensetzung oder Beschaffenheit haben. Durch das Kaltrecken wird die Struktur verwirrt und die Herstellung von kohärenten, durch die Grenzen gehenden Rissen schwieriger, vielleicht ändert sich hierbei auch das Verhalten der Grenzschichten an und für sich. Diese Auffassung verträgt sich auch mit unseren Versuchsergebnissen. Das Maximum der Gefahr des Aufreißens bei mittlerem Walzgrad erklärt sich durch die Wechselwirkung zweier Faktoren, der mit zunehmendem Kaltreckungsgrade steigenden inneren Spannungen und der dabei abnehmenden Neigung zur Bildung von intergranularen Rissen.

Das Ergebnis, daß die Gefahr des Aufreißens mit zunehmender Kaltbearbeitung zunächst wächst, hat eine gewisse technische Bedeutung. Einerseits liegt das Gefahrmaximum bei Reckungsgraden, die in der Technik noch oft erreicht werden. Andererseits ist die Erhöhung der Härte des Ausgangsmaterials in technisch zulässigem Maße als Mittel, die Gefahr des Aufreißens zu beseitigen, wie es durch die Versuche von Moore und Beckinsale nahegelegt wird, gänzlich verfehlt. So entsprach der maximale Walzgrad, bei dem Moore und Beckinsale die eingangs beschriebenen Schalen noch

herstellen konnten, der Härte von ca. 130. Nach unseren Versuchen liegt aber gerade bei etwa diesen Walzgraden das Maximum der Aufreißgefahr. Auch Moore und Beckinsale warnen davor, härteres Messing zu verwenden.

4.

Es ist im obigen vermieden worden, unmittelbar von dem Einfluß der Härte auf das Aufreißen des Messings zu sprechen. Bei dem Aufreißen kommt es nicht auf die Härte, sondern in erster Linie auf die inneren Spannungen des Materials an. Die Härte ist ein sehr mangelhaftes Maß für diese, wie sich schon daraus ergibt, daß die Gefahr des Aufreißen oft ohne Änderung der Härte durch Erhitzung beseitigt werden kann. Das wird durch einen Versuch der Verfasser bestätigt, bei dem das Messingblech von 2 mm auf 0,6 mm kaltgewalzt worden war und durch vorsichtiges Anlassen die Härte so weit herabgesetzt wurde, daß sie etwa dieselben Werte erhielt, wie bei den oben beschriebenen Versuchen. Nach der Herstellung der Erichsen-Proben stellte es sich heraus, daß die Bleche in Quecksilbernitrat überhaupt nicht aufrissen. Entsprechend ist auch anzunehmen, daß bei verschiedenen Arten der Kaltreckung die hierbei erreichte Härte ganz verschiedenen Spannungszuständen entspricht. Um den Zustand des Bleches zu kennzeichnen, ist deshalb vorgezogen worden, unmittelbar den Grad des Kaltwalzens anzugeben. Auch dieser ist kein ganz eindeutiger Maßstab für die inneren Spannungen, wenn er auch viel sicherer als die Härte ist. Auch hierbei macht sich der Umstand unangenehm bemerkbar, daß wir den Zustand eines kaltgereckten Metalles allgemein nicht eindeutig charakterisieren können¹⁾.

Es ist ferner vermieden worden, statt vom Aufreißen von den inneren Spannungen zu sprechen und diese mit den übrigen das Verhalten des Materials bestimmenden Faktoren zu verknüpfen. Das Aufreißen, wie es im Quecksilbernitrat erfolgt, ist ein physikalisch schlecht definierter Vorgang, und es ist das Bestreben verständlich, auf seine inneren Ursachen zurückzugehen und diese mit den äußeren Faktoren in Beziehung zu setzen. Es ist jedoch unzulässig, statt des Vorgangs des Aufreißen eine seiner Ursachen, in diesem Falle die inneren Spannungen, zu setzen. Außer diesen wird nämlich das Aufreißen auch durch andere Faktoren, in erster Linie durch die Möglichkeit der Entstehung von Haarrissen durch Reaktion mit Quecksilbernitrat bestimmt, wie oben erwähnt. Dafür, daß das Aufreißen nicht ohne weiteres durch die Größe der inneren Spannungen bestimmt wird, spricht das Verhalten von gebogenen Blechen, deren Spannungen sich berechnen lassen (siehe weiter unten!). Über die Beziehung der inneren Spannungen zum Aufreißen läßt sich vorderhand nur das eine sagen, daß sie eine *conditio sine qua non* für das Aufreißen sind. Daher ist ihre völlige Beseitigung auch das sicherste Verfahren zur Beseitigung der Gefahr des Aufreißen.

Wenn der Quecksilberversuch jedoch über die inneren Ursachen des Aufreißen nur wenig aussagt, so ist er sicher ein praktisch sehr brauchbares Kriterium der Gefahr des Aufreißen. Die Untersuchungen von Moore und Beckinsale haben gezeigt, daß das Aufreißen von Messinggegenständen praktisch immer durch äußere chemische Einflüsse eingeleitet wird, in erster Linie durch Spuren von Ammoniak und Ammoniumsalzen. Alles spricht dafür, daß der Vorgang des Aufreißen sich hierbei genau so vollzieht wie bei der Einwirkung von Quecksilbersalzen. Die Be-

¹⁾ G. Masing und M. Polanyi: Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften Bd. 2, S. 177. 1923.

handlung mit diesen ist deshalb eine gute Nachahmung der in der Praxis herrschenden Verhältnisse, und die diesbezüglichen Versuche lassen gesicherte praktische Folgerungen zu.

Da die große Bedeutung der inneren Spannungen für das Aufreißen über jeden Zweifel erhaben ist, war es wünschenswert, sie auf eine einfache Art zu erzeugen und zu studieren. Zu diesem Zwecke haben Moore und Beckinsale durch elastisches Aufspannen von Messingbändern auf Ringe von bekanntem Radius meßbare Biege-
spannungen erzeugt. Nach der thermischen Behandlung der angespannten Bänder wurden dieselben von der Unterlage gelöst und der bleibende Krümmungsradius gemessen (Abb. 9). Auf diese Weise konnte das Maß der nach der Behandlung verbliebenen elastischen Biegung berechnet werden. Hierbei berücksichtigt man nur die äußerste Schicht des Bandes, weil nur die obere Grenze der Spannungen von Interesse ist, die sich in dieser Schicht konzentriert.

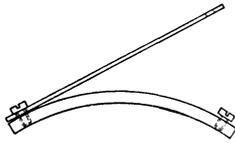


Abb. 9.

Solange die Biegungen rein elastisch sind, ist die Rechnung sehr einfach¹⁾. Ist r_0 der Krümmungsradius des Bandes ohne äußere Anspannung und r sein Radius im angeschraubten Zustande, so ist die spezifische elastische Dehnung ε (Längenzunahme pro Längeneinheit) der äußersten Faser des Bandes von der Dicke d gleich

$$\varepsilon = \pm \frac{r_0 - r}{Rr} \cdot \frac{d}{2}. \quad (1)$$

Das Pluszeichen gilt für die äußere, gedehnte Faser, das Minuszeichen für die innere, kontrahierte. Wenn man annimmt, daß die Spannungen proportional den elastischen Dehnungen sind, so kann man hieraus die Spannungen berechnen. Moore und Beckinsale haben die Formel (1) benutzt und unter anderem festgestellt, daß der Restbetrag

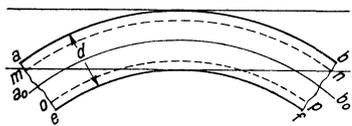


Abb. 10.

der im gebogenen Messingband nach der Erhitzung auf eine bestimmte Temperatur verbliebenen Spannung um so größer ist, je stärker das Band ursprünglich gebogen worden war.

Indessen ist die von Moore und Beckinsale durchgeführte Rechnung in diesem Falle nicht korrekt, und zwar weil die Biegung keine rein elastische ist. Betrachten wir ein Band $abef$, das durch Biegung die in Abb. 10 dargestellte Form erhalten hat.

a_0b_0 ist die neutrale Faser, deren Länge bei der Biegung keine Veränderung erlitten hat. Mit zunehmendem Abstand von a_0b_0 nimmt die Längenänderung ε zu und erreicht bei mn und bei op den der Elastizitätsgrenze entsprechenden maximalen Wert der elastischen Dehnung ε_m . In den Teilen $abmn$ und $opef$ haben bereits plastische Längenveränderungen stattgefunden. Infolge dieser entstehen in dem Blech nach der Entspannung bleibende innere Spannungen, der plastisch gedehnt gewesene Teil $abmn$ steht unter einer Kontraktionsspannung, die von einer Dehnungsspannung des Teiles mnb_0a_0 gehalten wird, und das umgekehrte Bild gilt für den Teil a_0b_0fe . Dadurch wird der Krümmungsradius des gesamten Bleches im entspannten Zustand größer als der Lage entspricht, bei der die Spannung der äußeren Faser Null ist, und die aus diesem Krümmungsradius für diese Faser berechnete Spannung ist größer, als die im gespannten Zustand wirklich vorhanden gewesene. Es ist also

¹⁾ H. Moore und S. Beckinsale: Engg. Bd. 1, S. 665. 1921.

nicht ausgeschlossen, daß der gefundene höhere Restbetrag der Spannungen in vorher stärker gespannt gewesenen Bändern hierdurch vorgetäuscht wurde. Da diese Frage uns im Zusammenhang mit unseren von Moore und Beckinsale abweichenden Resultaten besonders interessant erschien, so haben wir die Biegeversuche von Moore und Beckinsale wiederholt und versucht, der angegebenen Fehlerquelle Rechnung zu tragen. Es ist nämlich leicht, eine obere Grenze für diesen Fehler zu berechnen, wenn wir annehmen, daß in den Schichten *abnm* und *opfe* (Abb. 10) während der plastischen Deformation keine Verfestigung stattgefunden hat, das Material also seine ursprüngliche Elastizitätsgrenze und Grenzdehnung ε_m behalten hat. In Wirklichkeit trifft das sicher nicht zu. Die Elastizitätsgrenze der plastisch deformierten Schicht ist gestiegen, ebenso wie auch ihre elastische Dehnung. In Wirklichkeit nähert sich also die gesamte Deformation mehr einer rein elastischen als bei dieser vereinfachten Annahme, und der durch Nichtberücksichtigung der plastischen Formänderung begangene Fehler ist sicher geringer als der berechnete.

Der Krümmungsradius im gespannten Zustande sei wieder r , der im spannungsfreien Zustand r_0 , auch sonst sollen die Bezeichnungen der Formel (1) gelten. Wir betrachten den gedehnten Teil des Bandes oberhalb der neutralen Faser a_0b_0 . Die Betrachtung des gestauchten (unteren) Teiles würde dieselben Resultate mit umgekehrten Vorzeichen der Spannungen ergeben.

Der elastisch deformierte Teil a_0b_0nm hat die elastischen Dehnungen

$$\frac{a}{r}, \quad (2)$$

wo a der Abstand von der Achse a_0b_0 ist. Die elastische Dehnung im gesamten plastischen Teil ist gleich ε_m der elastischen Grenzdehnung. Wenn der Krümmungsradius des Körpers bei der Entspannung von r auf r_0 ansteigt, so entstehen hierbei zusätzliche Dehnungen

$$\frac{r - r_0}{r r_0} a. \quad (3)$$

Die entspannte Ruhelage ist dadurch gekennzeichnet, daß in ihr das Integral der Spannungsmomente auf die neutrale Faser a_0b_0 sowohl oberhalb als auch unterhalb dieser gleich Null sein muß. Unter Annahme der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes ergibt sich dann:

$$\int_0^{a_m} \frac{a^2}{r} \cdot da + \int_{a_m}^{\frac{d}{2}} \varepsilon_m a da + \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{r - r_0}{r \cdot r_0} a^2 da = 0. \quad (4)$$

Hier ist a_m der der maximalen elastischen Dehnung ε_m entsprechende Abstand von der Achse a_0b_0 ; es ist also

$$a_m = \varepsilon_m \cdot r.$$

Wir erhalten somit

$$\frac{\varepsilon_m^3 r^2}{3} + \frac{\varepsilon_m d^2}{8} - \frac{\varepsilon_m^3 r^2}{2} + \frac{r - r_0}{r \cdot r_0} \cdot \frac{d^3}{24} = 0 \quad (5)$$

oder

$$4 \varepsilon_m^3 r^3 r_0 - 3 \varepsilon_m r \cdot r_0 d^2 + (r_0 - r) d^3 = 0. \quad (6)$$

Für vorgeschriebene numerische Werte von $r r_0$ und d läßt sich Gleichung (6) leicht graphisch nach ε_m auflösen.

Die Versuche wurden mit Bändern von der Dicke 0,2 mm, die von 0,6 mm herunter kalt gewalzt worden waren, ausgeführt. Abweichend von Moore und Beckinsale überstiegen die Biegungen meistens die Elastizitätsgrenze des Metalles. Das Material war dasselbe, welches zu den Quecksilberversuchen (Tabelle 8) gedient hatte. Die Erhitzung wurde jeweils während je 30 Min. bei jeder Temperatur durchgeführt.

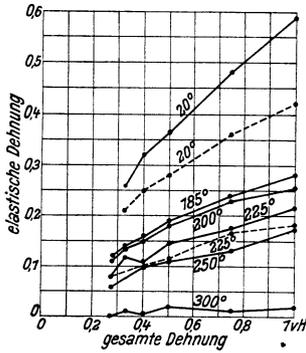


Abb. 11.

In Tabelle 11 und Abb. 11 ist die Abhängigkeit der elastischen von den gesamten, während der Biegung erfolgten Dehnungen für verschiedene Temperaturen aufgetragen, und zwar sind die ausgezogenen Kurven nach der Formel (3) berechnet. Für zwei Temperaturen, 20° und 185°, sind außerdem die auf Grund der Gleichung (6) korrigierten Werte berechnet worden (punktirierte Kurven). Die Werte der elastischen Dehnungen steigen bei allen Temperaturen mit dem Grade der Gesamtdeformation, und zwar die auf beide Arten berechneten. Das Resultat von Moore und Beckinsale, daß die elastischen Dehnungen auch bei höheren Temperaturen um so größer sind, je größer die ursprüngliche Biegeformung gewesen ist, ist also völlig gesichert. Da der allgemeine Charakter im Verlauf der Kurven bei beiden Berechnungsarten derselbe ist, so ist die Rechnung nach (6) für die übrigen Kurven unterlassen worden.

Die auf den ersten Blick befremdende Tatsache, daß die von einem Metallstück gehaltenen Spannungen nicht nur eine Funktion der Erhitzungstemperatur, sondern auch der mechanischen Vorbehandlung sind, wird verständlich, wenn man berücksichtigt, daß das betrachtete Temperaturintervall weit unterhalb der Rekristalli-

Tabelle 11.

Erhitzungs- temperatur		1	2	3	4	5	6
—	ε_g	1	0,75	0,50	0,40	0,33	0,28
	r	10	15	20	25	30	37,5
	d	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21	0,206
—	r_0	23	47	73,5	105	123	∞
	ε	0,59	0,48	0,366	0,32	0,26	—
	ε_m	0,42	0,36	0,28	0,25	0,21	—
185° 157° 1 St.	r_0	13,5	22,7	31,8	39,8	50,4	66
	ε	0,28	0,24	0,19	0,157	0,141	0,12
	ε_m	0,18	0,16	0,137	0,115	0,10	0,08
200° 1 St.	r_0	13,3	22,5	31,3	39,2	49,3	63
	ε	0,255	0,23	0,18	0,15	0,137	0,111
225° 1 St.	r_0	12,6	20	28,2	34,1	45,3	53
	ε	0,22	0,175	0,146	0,11	0,12	0,08
250° 1 St.	r_0	12	18,7	25,8	32,5	38,8	48,3
	ε	0,175	0,13	0,11	0,097	0,076	0,06
300° 1 St.	r_0	10,2	15,2	21	25,3	31,1	37,6
	ε	0,02	0,01	0,02	0,005	0,01	0,001

ε_g = Gesamtdehnung in %, ε = elastische Dehnung nach Formel (3), ε_m nach Formel (6), d = Dicke des Bandes in mm, r = Krümmungsradius des gespannten, r_0 des entspannten Bandes in mm.

sationsgrenze liegt, und daß demnach in diesem Intervall eine Verfestigung im Metall bestehen kann. Diese Verfestigung äußert sich in einer Erhöhung der Elastizitätsgrenze bei den betreffenden Temperaturen und damit der zurückbleibenden inneren Spannung. Die Frage, wie das möglich ist, ist identisch mit der Frage über die Entstehung der Verfestigung überhaupt. Es ist angenommen worden¹⁾, daß allgemein in einem verfestigten Metall ein System von inneren Spannungen besteht, die sich durch innere Verschiebungen nicht ausgleichen können. Aus den Versuchen mit der Quecksilbernitratlösung ersieht man, daß diese Spannungen so groß und so verteilt sein können, daß ein Aufreißen des Stückes erfolgen kann. Diese Frage hat ein allgemeineres Interesse im Zusammenhang mit den „verborgenen elastischen“ Spannungen, auf die Heyn und später mit gewissen Abänderungen auch Masing und Polanyi¹⁾ die Verfestigung zurückführten. Heyn²⁾ hat scharf zwischen den „inneren“ Spannungen im üblichen Sinne, die sich gegenseitig das Gleichgewicht halten und z. B. nach der obenerwähnten Methode von ihm gemeinsam mit Bauer³⁾ gemessen worden sind, und den die eigentliche Verfestigung erzeugenden „verborgenen-elastischen“ Spannungen unterschieden. Diese Unterscheidung schien in den Ergeb-

Tabelle 12.

Erhitzungs- temperatur		1	2	3	4
	ε_g	1,0	0,75	0,5	0,28
	r	10	15	20	37,5
	d	0,212	0,21	0,207	0,20
—	r_0	25,5	46	73,5	∞
	ε	0,64	0,47	0,38	0,28
50° 1 St.	r_0	22,5	41,5	64,5	ca. 210
	ε	0,59	0,44	0,36	0,22
75° 1 St.	r_0	20,5	36,5	55,2	150
	ε	0,54	0,41	0,33	0,20
100° 1 St.	r_0	18,2	33,5	48,2	117
	ε	0,47	0,38	0,30	0,18
125° 1 St.	r_0	16,7	29,2	43	105
	ε	0,43	0,34	0,28	0,17
150° 1 St.	r_0	15,7	26,7	39	85
	ε	0,38	0,31	0,25	0,15
175° 1 St.	r_0	14,2	23,7	33,7	75
	ε	0,31	0,28	0,19	0,13
200° 1 St.	r_0	13,1	21,5	30	62,5
	ε	0,25	0,21	0,17	0,11
235° 1 St.	r_0	12	18,7	25,5	51,5
	ε	0,17	0,14	0,11	0,074
300° 1 St.	r_0	10	15,2	20,5	38,5
	ε	0	0,007	0,012	0,007

ε_g = Gesamtausdehnung in %, ε = elastische Dehnung nach Formel (3) in %, d = Dicke des Bandes in mm, r = Krümmungsradius des gespannten Bandes in mm, r_0 = Krümmungsradius des entspannten Bandes in mm.

¹⁾ G. Masing und M. Polanyi l. c. ²⁾ E. Heyn und O. Bauer l. c. ³⁾ l. c.

nissen von Moore und Beckinsale, daß man die inneren Spannungen ohne Entfestigung weitgehend beseitigen kann, eine Stütze zu finden. Nachdem jedoch gezeigt worden ist, daß auch innere Spannungen, mit allen Kennzeichen dieses engeren

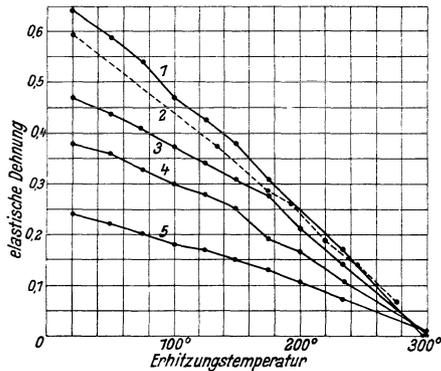


Abb. 12.

linear sinken und etwa bei 300° dem Werte Null zustreben. Der Abfall beginnt bereits nach geringer Erhitzung. Ein Temperaturgebiet, in dem die Spannungen unverändert bleiben, besteht nicht. Hier darf kein Widerspruch gegen die Ergebnisse der Versuche an den Erichsen-Eindrücken erblickt werden, da die zum Aufreißen erforderliche Zeit zwar in einer eindeutigen, aber nicht einfachen Beziehung zur Größe der Spannungen und zu ihrer Verteilung steht.

Zusammenfassung.

Die zur Beseitigung der Aufreißgefahr im Messing erforderliche Erhitzungstemperatur ist keine Materialkonstante. Sie nimmt mit der Größe der formgebenden Deformation zu und überschreitet beim Messing mit 63% Cu oft erheblich die Rekristallisationsgrenze.

Die Gefahr des Aufreißen und die zu ihrer Beseitigung erforderliche Erhitzungstemperatur nimmt mit dem Kaltreckungsgrade (Walzgrade) des verwendeten Material erst zu und dann ab.

Auch die Größe der im Messing nach einer Erhitzung verbleibenden Biegespannungen nimmt mit zunehmender Biegung zu. — Während ein Einfluß der Erhitzung auf die Gefahr des Aufreißen erst bei ca. 180° bemerkbar wird, nimmt die Biegespannung von der geringsten Erhitzungstemperatur an geradlinig ab. Bei ca. 300° sinken die Biegespannungen auf einen unmerklichen Betrag herab.

1) G. Masing: Wissenschaftl. Veröffentl. a. d. Siemens-Konzern Bd. 3, Heft 1, S. 231. 1923.

Über die elektrolytische Darstellung reinsten Eisens.

Von Emil Duhme.

Mit 3 Textabbildungen.

Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium Siemensstadt.

Eingegangen am 22. Februar 1924.

In der Metallurgie des Eisens gibt es zahlreiche Verfahren, um aus technischem Rohmaterial ein sehr reines Eisen zu gewinnen. Die elektrolytische Darstellung reinen Eisens aus wässrigen Lösungen kommt in der Technik nur dann in Frage, wenn es sich um Reinheitsgrade handelt, die auf keinem anderen Wege erzielt werden können. Gelingt es, aus Anoden technischen Eisens Elektrolyteisen in glatten Niederschlägen beliebiger Stärke zu erzeugen, so kann ein solches Verfahren mit Rücksicht auf die hervorragenden Eigenschaften reinsten Eisens Bedeutung beanspruchen. Ungeglühtes Elektrolyteisen besitzt infolge seines Wasserstoffgehaltes einen hohen Härtegrad und findet überall dort Verwendung, wo es sich darum handelt, ein weiches Material (z. B. Kupferdruckplatten) vor schneller Abnutzung zu schützen. Glüht man Elektrolyteisen im Vakuum und entfernt auf diese Weise den Wasserstoff, so erhält man ein Eisen von sehr viel größerer Permeabilität und viel geringerer Koerzitivkraft als das reinste, auf anderem Wege bereitete. In ähnlicher Weise behandelt, zeichnet es sich durch große Geschmeidigkeit aus und bietet in manchen Fällen geeigneten Ersatz für das sehr viel teure Kupfer. Auch in Vakuumröhren findet Elektrolyteisen als Draht und Elektrodenmaterial Verwendung.

Die elektrolytische Darstellung reinen Eisens bietet indes Schwierigkeiten, weil die Abscheidungsbedingungen der Metalle der Eisengruppe und besonders die des Eisens recht ungünstige sind.

Ganz allgemein sind bei der elektrolytischen Metallabscheidung aus wässrigen Lösungen als Kationen neben den Ionen des betreffenden Metalles stets auch diejenigen des Wasserstoffes vorhanden. Liegt das zur Abscheidung des Metalles erforderliche Potential niedriger als das zur Entladung des Wasserstoffes erforderliche, so gelingt Metallabscheidung ohne Wasserstoffentwicklung quantitativ. Das zur Entladung des Wasserstoffes notwendige Potential hängt außer von dem Potential des Wasserstoffes gegen den betreffenden Elektrolyten auch von dessen Überspannung an dem auf der Kathode befindlichen Metall ab, und diese Überspannung wiederum von der sich während der Elektrolyse dauernd ändernden Oberflächenbeschaffenheit des schon niedergeschlagenen Metalles. Liegt beispielsweise ein Fall derart, daß das Ruhepotential des Metalles niedriger ist als das des Wasserstoffes, die Mehrspannung zu seiner Abscheidung aber oberhalb des Entladungspotentials des Wasserstoffes, so kann neben Metallabscheidung auch gleichzeitig Wasserstoffentwicklung auftreten. Jede Wasserstoffentwicklung an der Kathode setzt aber die Stromausbeute herab,

verursacht ferner, und das besonders bei den Eisenmetallen, Härtung des niedergeschlagenen Metalles durch Wasserstoffaufnahme und Spannungen innerhalb desselben, so daß die Niederschläge nach kurzer Zeit von der Kathode abplatzen.

Eine weitere Erscheinung, die besonders bei Nickel, Kobalt und Eisen auftritt, ist die sog. chemische Polarisierung (Passivitätserscheinungen), unter der man Reaktionswiderstände zu verstehen hat, die unmittelbar an den Elektroden auftreten. Um derartige Reaktionswiderstände zu überwinden, bedarf es meistens eines so hohen Potentials, daß dabei wiederum Wasserstoffentladung und die damit verbundenen ungünstigen Wirkungen auf die Beschaffenheit des Kathodenmaterials eintreten. Man kann derartige Reaktionswiderstände durch Temperaturerhöhung des Elektrolyten herabsetzen und erhält ein weniger wasserstoffhaltiges, duktiles Elektrolyteisen, nimmt allerdings bei Temperaturen dicht unterhalb des Siedepunktes gleichzeitig einige Übelstände mit in Kauf (starke Verdampfung des Elektrolyten,

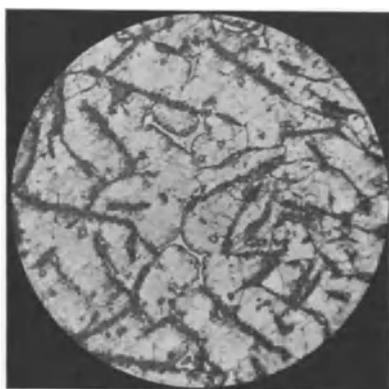


Abb. 1.

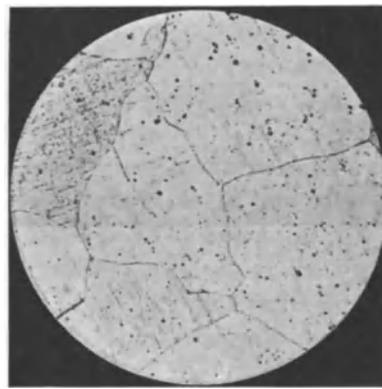


Abb. 2.

die durch Zusatz hygroskopischer Salze möglichst verringert wird, chemischer Angriff der Anoden durch erhöhte Reaktionsgeschwindigkeit der freien Salzsäure, Ausfallen von Eisenhydroxyd).

Diese für die Abscheidung des Eisens geltenden Gesichtspunkte erfordern bei der Durchführung der Elektrolyse die Einhaltung bestimmter Versuchsbedingungen, unter denen in erster Linie Eisenkonzentration, Azidität und Temperatur des Elektrolyten, ferner die kathodische Stromdichte in Frage kommen. Eine bei gewöhnlicher Temperatur gesättigte, Magnesiumchlorid enthaltende Eisenchlorürlösung, die nicht mehr als 0,01-n-sauer sein soll, stellt bei Temperaturen dicht unterhalb des Siedepunktes einen geeigneten Elektrolyten dar, aus dem sich gut haftende, feinkristalline Niederschläge bei verhältnismäßig großen Stromdichten erzeugen lassen. Die Stromausbeute beträgt dann bei Stromdichten bis zu 0,1 Amp. pro Quadratcentimeter 92%.

Verwendet man als Anoden wenig verunreinigtes Eisen unter gleichzeitiger Benutzung von Diaphragmen, so gelingt es, bei nicht allzu hohen Stromdichten ein Eisen sehr großer Reinheit zu erzeugen. Geht man jedoch zu größeren Stromdichten über, so erweisen sich sämtliche bisher benutzten Diaphragmen als nicht widerstandsfähig gegen heiße salzsaure Lösungen. Es tritt nach einiger Zeit Erweiterung der Poren ein, so daß Verunreinigungen vom Anodenraum zur Kathode gelangen können. Außerdem stellen derartige Diaphragmen einen verhältnismäßig hohen elektrischen Widerstand dar, erhöhen also den Energieaufwand nicht un-

wesentlich. — Bei der Auswahl des Anodenmaterials hat sich nun herausgestellt, daß bei Verwendung eines sehr kohlenstoff- und siliziumhaltigen Eisens diese Verunreinigungen ohne Diaphragma nicht mit überführt werden, wenn die anodischen Verunreinigungen an Kohlenstoff mehr als 3% und an Silizium mehr als 1% betragen. In diesem Falle bleibt der Kohlenstoff und das Silizium als Skelett fest mit der Anode verwachsen stehen, es stellt ein aus den sonst unliebsamen Verunreinigungen bestehendes Diaphragma dar, das den Austritt kleiner, aus der Anode herausbröckelnder Kohlenstoffteilchen verhindert. Bei nicht zu hoher anodischer Stromdichte (man wählt das Oberflächenverhältnis zwischen Anode und Kathode zweckmäßig 4 : 1) und geringer Azidität des Elektrolyten kann man solche Kohlenstoff-Siliziumskelette bis zu 2 mm Stärke wachsen lassen, bevor eine Reinigung der Anoden erforderlich wird. Gelangen trotzdem kleine Kohlenstoffflitterchen in den Elektrolyten, so besteht die Möglichkeit, dieselben von der Kathode fernzuhalten, weil sie infolge ihres guten Leitvermögens innerhalb des stromdurchflossenen Teiles des Bades einen Zwischenleiter bilden, an dessen der Anode zugewandten Seite Eisen abgeschieden wird. Kommen solche Elektrolyteisen enthaltende Kohlenstoffteilchen in die Nähe der Kathode, so bleiben sie infolge ihres remanenten Magnetismus magnetisch haften und geben sofort Anlaß zu Warzen, die dann schnell zu langen Ästen aus der Kathodenoberfläche herauswachsen. Es konnte experimentell nachgewiesen werden, daß die auf der Oberfläche im Entstehen begriffenen Auswüchse restlos kleine Kohlenstoffpartikelchen enthielten. Bringt man innerhalb des Bades starke Magnetfelder an, so gelingt es auf einfachste Weise, derart störende Suspensionen abzufangen.

Unter den im Anodeneisen neben Kohlenstoff (Graphit) und Silizium vorhandenen Beimengungen erweist sich der Phosphor als unangenehmste Verunreinigung. Es gelingt ohne besondere Hilfsmittel nicht, aus phosphorhaltigem Anodenmaterial ein phosphorfrees Elektrolyteisen zu erzeugen. — Macht man die Annahme, daß der als Phosphorsäure in den Elektrolyten gelangende Phosphor des Anodeneisens in einfachster Weise in Wasserstoff- und Phosphorsäureionen dissoziierte, so müßte nach unseren heutigen Kenntnissen der

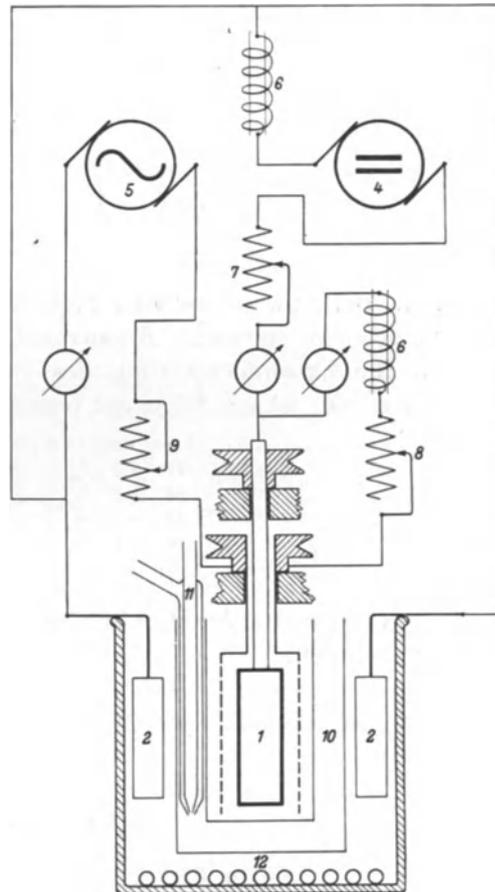


Abb. 3.

- 1 Rotierende Kathode.
- 2 Anoden.
- 3 Rotierende Hilfskathode.
- 4 Gleichstromquelle.
- 5 Wechselstromquelle.
- 6 Drosselpulen.
- 7 bis 9 Regulierwiderstände.
- 10 U-Rohr aus salzsäurebeständigem Material.
- 11 Gebläse.
- 12 In Glasröhren eingeschmolzene Magnetstäbe.

Phosphor im Anion sein, könnte also nicht zur Kathode wandern. Bekanntlich ist Phosphorsäure elektrolytisch reduzierbar. Es spricht also nichts gegen die Annahme, daß der kathodisch naszierende Wasserstoff den im Bade enthaltenden Phosphor reduziert. Mögen die voraussichtlich äußerst komplizierten Vorgänge liegen wie sie wollen, eine sehr einfache Überlegung führt zum Resultat eines phosphorfreien Eisens. — Es wird zwischen Anode und Kathode eine wechselstromüberlagerte Hilfskathode, d. h. eine Zwischenelektrode, geschaltet, auf der gegen die Anode ein derart verlagerter Wechselstrom fließt, daß sein negativer arithmetischer Mittelwert stets größer ist als sein positiver. Werden nun in der positiven Phase die unmittelbar in der Nähe befindlichen Phosphorsäureionen an der Zwischenelektrode konzentriert, so tritt in der darauffolgenden negativen Phase Reduktion und chemische Bindung zu Eisenphosphid ein. Mit Hilfe solcher wechselstromüberlagerter Zwischenkathoden gelingt es, den sonst im Elektrolyteisen (bei Verwendung stark phosphorhaltigen Anodenmaterials) bis zu 0,5% vorhandenen Phosphor auf 0,0001% herabzusetzen. Bei Anwendung aller vorhergehend angeführten Überlegungen ist es gelungen, aus sehr unreinem Anodenmaterial ein sehr reines Elektrolyteisen zu erhalten. Die Zusammensetzung des verwendeten Anodeneisens und des erzielten Elektrolyteisens ist aus folgender Gegenüberstellung zu entnehmen:

Anodeneisen	Elektrolyteisen
C 3,2 %	0,002 %
Si 1,1 %	0,001 %
Mn 0,05 %	0,002 %
P 0,4 %	0,0001%
Cu 0,02 %	—

Das Gefüge des Anodeneisens und des Elektrolyteisens wird aus den Abb. 1 und 2 ersichtlich.

Abb. 3 zeigt eine Ausführungsform einer Elektrolyse mit rotierender Kathode und wechselstromüberlagerter Hilfskathode bei gleichzeitiger magnetischer Reinigung des Elektrolyten.

Zusammenfassung.

1. Es ist gelungen, bei Verwendung eines Anodeneisens mit mehr als 3% Kohlenstoff und mehr als 1% Silizium und gleichzeitiger magnetischer Reinigung des Elektrolyten ein sehr kohlenstoffarmes Elektrolyteisen in glatten Niederschlägen zu gewinnen.

2. Unter Zwischenschaltung einer wechselstromüberlagerter Hilfskathode wurde erreicht, aus phosphorhaltigen Anoden ein fast phosphorfreies Elektrolyteisen zu erhalten.

Objektive Klängaufzeichnung mittels des Kondensatormikrophons.

Von **Ferdinand Trendelenburg.**

Mit 6 Textabbildungen und 4 Tafeln.

Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium Siemensstadt.

Eingegangen am 27. Februar 1924.

Neben dem wissenschaftlichen Interesse, welches die Erforschung der Klänge der menschlichen Sprache für die Physik und die Physiologie bietet, haben diese Untersuchungen eine wachsende technische Bedeutung gewonnen. Wollen wir die Klänge durch Leitungen oder drahtlos in die Ferne übertragen, oder wollen wir sie zwecks späterer Reproduktion aufzeichnen, so müssen wir den physikalischen Inhalt dieser akustischen Vorgänge beherrschen, um die Übertragungsanlagen oder die Wiedergabeapparate richtig zu bemessen. Man stellt immer größere Anforderungen an die naturgetreue Wiedergabe; ein objektives Urteil über die Güte der Reproduktion können wir nur gewinnen, wenn wir es lernen, den physikalischen Inhalt der Sprachklänge bis in die feinste persönliche Struktur aufzuschließen und mit dem physikalischen Klangbild des natürlichen Klanges das Bild des künstlichen — durch den Wiedergabeapparat erzeugten Klanges — zu vergleichen. Es ist die Aufgabe dieser Arbeit, eine neue Methode zur Klangforschung zu entwickeln, und die Leistungsfähigkeit der Methode durch Untersuchung der Feinstruktur der Hauptvokale der menschlichen Stimme zu zeigen.

1. Das physikalische Bild eines Klanges und die Methoden der experimentellen Klangforschung.

Als das physikalische Bild eines Klanges wollen wir hier diejenige Funktion definieren, welche den Verlauf des Druckes an einer Stelle des Schallfeldes in Abhängigkeit von der Zeit darstellt. Diese Funktion läßt sich bekanntlich für periodische Vorgänge, und diese wollen wir hier zunächst betrachten, nach Fourier darstellen:

$$P = P_0 + \sum_1^n P_n \sin(n\omega t + \varphi_n). \quad (1)$$

Die Koeffizienten der Glieder dieser Reihe sind die Druckamplituden jedes Teiltones, aus ihnen läßt sich nach einer bekannten, von Lord Rayleigh aufgestellten Beziehung die physikalische Schallintensität S bestimmen zu

$$S = \frac{P_n^2}{2\varrho \cdot u},$$

wobei u die Schallgeschwindigkeit und ϱ die Luftdichte ist. Es ist also aus dem Ansatz 1 der Klang in seiner physikalischen Wirkung eindeutig definiert.

Wir wollen uns nun einen Überblick über die bislang verwendeten Methoden der Klangforschung verschaffen, um diese meinem Verfahren kritisch gegenüberstellen zu können.

Die experimentelle Klangforschung beschreitet meistens einen der 3 folgenden Wege:

1. Verwendung von Resonatoren, mit deren Hilfe das Ohr subjektiv das mehr oder minder starke Auftreten eines Teiltones wahrnehmen kann.

2. Subjektive Beobachtung der Veränderungen, welche die Klangfarbe eines Klanges bei Auslöschung bestimmter Teiltöne durch geeignete Interferenzsysteme erfährt.

Ich will als hervorragende Vertreter dieser Richtungen nur die Namen Helmholtz¹⁾ und Stumpf²⁾ nennen, auf deren Forschungsergebnisse ich weiter unten bei Besprechung meiner Untersuchungen kommen werde, und mich hier im wesentlichen auf den 3. Weg beschränken:

3. Objektive Aufzeichnung des Klangbildes mittels eines geeigneten Schallempfängers.

Als erste Arbeiten auf diesem Gebiet sind wohl die Untersuchungen zu nennen, welche Hensen³⁾, Wendeler⁴⁾ und Pipping⁵⁾ mit dem Sprachzeichner anstellten. Dieser von dem erstgenannten angegebene Sprachzeichner besteht aus einer Membran von Goldschlägerhaut, welche in geeigneter Weise mit einer Schreibspitze, meist einer Diamantspitze, verbunden ist. An der Spitze wird eine berußte Glasplatte entlanggezogen, auf welcher so die Schwingungen der Membran registriert werden. Da die Abstimmung der Membran bei etwa 650 sec^{-1} liegt, ist es nicht möglich, die Feinheiten des Klangbildes aufzuzeichnen, die Membran spricht auf die schnelleren Schwingungen nicht mehr an.

Mit ähnlichen experimentellen Mitteln ging Hermann⁶⁾ vor, zu seinen phonographischen Untersuchungen benutzt er Eisen-, Glimmer-, Holz- oder Papierplatten, auch gespannte Membranen aus diesen Stoffen, gegen die er ein sehr leichtes Spiegelchen lehnt. Der Spiegel lenkt bei Schwingungen der Platten oder Membranen einen Lichtzeiger ab, die Bewegungen des Zeigers werden photographisch registriert. In späteren Arbeiten verwendet er ein zweites Verfahren: er zeichnet die Schall-schwingungen auf einem Phonographen auf und kann so die Treue der Aufzeichnung subjektiv prüfen, indem er das Phonogramm akustisch reproduziert. Die optische Umsetzung von der Phonographenwalze auf das Papier bewerkstelligt er wieder mit Hilfe von Spiegel und Lichtzeiger, eine am Spiegel befestigte Nadel schleift auf der in die Walze eingegrabenen Spur.

Es gelang Hermann, mit Hilfe der eben beschriebenen Anordnungen weitgehende Aufschlüsse über die Struktur der menschlichen Sprache zu erzielen, er zeichnete die charakteristischen Klangbilder der einzelnen Laute auf. Aber gegen seine Methode bleibt ein gleicher Einwand wie gegen den Hensenschen Sprachzeichner bestehen: die Aufnahmevorrichtung besitzt eine zu tiefe Eigenschwingung und ist zu schwach gedämpft, so daß die aufgenommenen Klangbilder Verzerrungen aufweisen.

Auf die Wichtigkeit einer hohen Eigenschwingung bei ausreichender Dämpfung wurde von Hermann⁷⁾ selbst und besonders auch von O. Frank⁸⁾ hingewiesen, es gelang aber nicht, die genannten Methoden so empfindlich zu gestalten, daß man

¹⁾ Die Zahlen beziehen sich auf das am Schluß stehende Literaturverzeichnis.

auch mit einer oberhalb des Sprachgebietes liegenden Eigenfrequenz noch brauchbare Amplituden erhielt.

Einen Schritt weiter kam hier Weiss⁹⁾, dieser verwendete als Membran eine Seifenblase, gegen die er ein sehr leichtes Hebelsystem mit einem Spiegelchen lehnte. Vervollkommenet wurde diese Methode in dem Seifenblasenschallschreiber von Garten¹⁰⁾. Es gelang Garten, den Hebelmechanismus dadurch zu umgehen, daß er in der Mitte der Seifenblasenmembran ein sehr feines Eisenfeilspänchen im Felde eines starken Elektromagneten in der Schwebe hielt, die Bewegungen dieses Spänchens wurden im Mikroskop photographiert. Die höchste erreichbare Eigenfrequenz des Seifenschallschreibers nach Garten liegt etwa bei 2000 sec^{-1} , so daß sie immerhin schon in die Gegend der höheren Teiltöne der Sprachlaute rückt.

Von Garten stammt auch eine andere objektive Methode¹¹⁾. Er schaltet in den Schallweg zwischen Schallquelle und Schallschreiber einen Resonator ein, welcher innerhalb kurzer Zeit seine Abstimmung zwischen etwa 100 sec^{-1} und 1000 sec^{-1} stetig ändert. Trifft auf den Resonator der Klang z. B. eines gesungenen Vokales und fällt dieser nach Passieren des Resonators auf den Schallschreiber, so wird innerhalb der Zeit, in welcher der Resonator seine Abstimmung ändert, die jeder Abstimmung entsprechende Schwingungsamplitude aufgezeichnet. Das so erhaltene Diagramm zeigt also die Intensitätsverteilung des Klanges in Abhängigkeit von der Frequenz und kann zur Klanganalyse verwendet werden. Das Verfahren leidet unter dem Nachteil, daß man nur Teilschwingungen bis etwa 1000 sec^{-1} erfassen kann, diese Grenze liegt, wie ich zeigen werde, für die feinere Struktur viel zu niedrig.

Alle bisher beschriebenen Anordnungen sind in ihrer Auflösungsfähigkeit und der Treue ihrer Wiedergabe durch die Eigenschwingung des Empfangsystems beschränkt, ich möchte hier noch eine Methode erwähnen, welche Raps¹²⁾ entwickelt hat; er verwendet die Interferenzerscheinungen zweier Lichtstrahlen, von denen der eine unmittelbar läuft, der andere jedoch eine vom Schalldruck in ihren optischen Eigenschaften beeinflusste Bahn durchschreiten muß. Er kann dann die Klangbilder aus den Interferenzbildern dieser Strahlen gewinnen. Die Methode ist aber zu unempfindlich, um feinere Aufschlüsse zu ermöglichen. Eine andere Methode, welche ebenfalls theoretisch frei von störenden Eigenschwingungen ist, beschreibt K. Gehlhoff¹³⁾. Er läßt kleine Öltröpfchen von einer Düse herabsinken. Die Bahn der Öltröpfchen wird durch die Schallschwingungen beeinflusst, sie wird im Mikroskop photographiert. Die von Gehlhoff aufgenommenen Klangbilder zeigen keine feinere Struktur, die Tröpfchen sind zu träge, um die schnellsten Schwingungen mitzumachen.

Es liegt nahe, zur Klangaufzeichnung Effekte zu verwenden, welche es gestatten, die akustischen Schwingungen in elektrische Wechselströme umzusetzen und das Bild dieser Ströme im Oszillographen zu untersuchen. In ähnlicher Weise nahm z. B. schon Hermann¹⁴⁾ Klangbilder mittels eines Kohlenkörnermikrophones auf; er fand die mit seinen beiden anderen Methoden gewonnenen charakteristischen Eigenschaften der Klänge im allgemeinen erneut bestätigt, aber die durch die Eigenschwingung der Membran und durch die Schwellenwertseigenschaften des Mikrophones bedingten Fehler beeinträchtigten bei diesen Versuchen besonders die Treue der Abbildung.

Wir kennen elektrische Schallempfänger, deren Eigenresonanz weit oberhalb des Sprachgebietes liegt, z. B. das Kondensatormikrophon nach Wente¹⁵⁾; wir

kennen auch resonanzfreie Aufnahmeapparate, z. B. das Thermomikrophon (die Umkehrung des Thermophoneffektes) oder eine Ionisierungsstrecke, welche durch den auftreffenden Schall in ihrer Leitfähigkeit beeinflußt wird, alle diese Anordnungen sind aber zu unempfindlich, um ohne Niederfrequenzverstärkung die zum Aussteuern einer hoch abgestimmten Oszillographenschleife benötigte Leistung aufzubringen. Die störenden Eigenschaften der Niederfrequenzverstärkung und namentlich der Niederfrequenztransformatoren sind bekannt — man muß die Niederfrequenzverstärkung umgehen, wenn man objektiv einwandfreie Resultate erzielen will. Ich habe aus diesem Grunde zur Klangaufzeichnung eine Anordnung gewählt, welche die Niederfrequenzverstärker und die Niederfrequenztransformatoren völlig vermeidet, ich habe die akustischen Schwingungen einer Hochfrequenzwelle in Form von Frequenzmodulationen aufgeprägt, diese Frequenzmodulationen mit Hilfe einer Schwebungsmethode vergrößert und mittels einer Hochfrequenzverstärkerschaltung zum Steuern eines Oszillographen benutzt.

2. Die Aufnahmevorrichtung.

Zum Hervorbringen der Frequenzmodulationen verwendete ich ein Kondensatormikrophon*), das aber von dem oben erwähnten Kondensatormikrophon nach Wente in seiner Bauart und seiner Verwendungsweise völlig abweicht. Das von mir benutzte Kondensatormikrophon ergab subjektiv vorzügliche Klangreinheit. Das Grundprinzip seiner Konstruktion ist folgendes:

Eine Aluminiumfolie A von $0,5 \mu$ Stärke wird zwischen zwei sehr dünnen Seidenmembranen in $\frac{1}{10}$ mm Abstand von einer mit Schlitzen versehenen Metallplatte P gehalten, 2 mm hinter der Folie ist eine starre Rückwand, welche den Empfänger abschließt. Trifft durch die Schlitze der Platte Schall auf die Folie, so folgt diese den Schallschwingungen. Die Amplitude der Metallfolie ist — wie ich später ausführlich zeigen werde — im Sprachgebiet proportional der Druckamplitude P des auftreffenden Schalles. Man benutzt nun A als die eine Belegung eines Plattenkondensators, P als die andere. Schaltet man das kapazitive Mikrophon als Kondensator in einen Hochfrequenzsendekreis, so wird sich die Wellenlänge der ausgesandten Hochfrequenzschwingung mit der Größe der Kapazität ändern und damit Modulationen durch den auf das kapazitive Mikrophon fallenden Schall aufweisen.

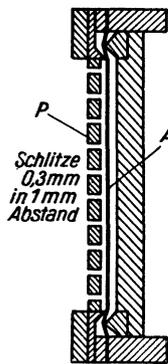


Abb. 1.

Die Aufgabe ist nun, diese niederfrequenten Modulationen der Hochfrequenzwelle nachzuweisen und in der Kurvenform dieser Modulationen einen Oszillographen oder ein ähnliches registrierendes Meßinstrument ohne Anwendung der grundsätzlich abzulehnenden Niederfrequenzverstärker und Niederfrequenztransformatoren zu steuern.

Zur Lösung der Aufgabe habe ich folgenden Weg eingeschlagen:

3. Prinzip der Verstärkerschaltung.

Zwei Senderohrkreise A und B (Abb. 2) von möglichst kurzer Wellenlänge (ca. 50 m) sind so gegeneinander verstimmt, daß ihre Schwebungswelle weit oberhalb des akustischen Bereiches im Hochfrequenzgebiet liegt (Frequenz $60\,000 \text{ sec}^{-1}$).

*) Das Kondensatormikrophon wurde von H. Riegger im Forschungslaboratorium konstruiert und entwickelt.

Die von A und B in der Spule C erregten Schwebungen werden von dem Gleichrichter G_1 gleichgerichtet, die Schwebungswelle selbst wird vom Schwingungskreis S herausgesiebt und dem Hochfrequenzverstärker H zugeführt. Nach genügender Verstärkung wird sie im Gleichrichter G_2 , in dessen Anodenkreis der Oszillograph O liegt, gleichgerichtet.

Man stimmt den Schwingungskreis S so ab, daß man sich auf halber Höhe der Resonanzkurve befindet.

Treffen nun Schallwellen auf das kapazitive Mikrophon M , so wird die Frequenz der Ausgangsschwingung B und damit entsprechend stärker die Frequenz der Schwebungen zwischen A und B moduliert.

Einer Frequenzänderung der Schwebungsfrequenz ω (Abb. 3) um den Betrag $\Delta\omega$ entspricht eine Änderung des Stromes i im Resonanzkreis S , um den Betrag Δi . Läßt man den im Resonanzkreis fließenden Strom $i + \Delta i$ — wobei Δi den Sprachmodulationen in der beschriebenen

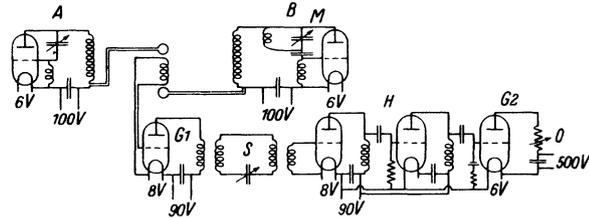


Abb. 2.

Weise folgt — auf den Hochfrequenzverstärker H wirken und richtet am Ausgang erneut gleich, so erhält man hochfrequente Gleichstrompulsationen, deren Amplitude in der Kurve des auftreffenden Schalles moduliert ist.

Die hochfrequenten Gleichstrompulsationen im Anodenkreis des Gleichrichters G_2 werden durch den Oszillograph geleitet. Die Oszillographenschleife folgt wegen ihrer Trägheit nicht der hohen Frequenz der Schwebungswellen ($60\,000\text{ sec}^{-1}$); im Oszillogramm wird nur die Sprachfrequenzmodulation abgebildet.

Diese graphische Aufzeichnung der Sprachmodulation ist ein kurvengetreues Abbild des zeitlichen Verlaufes des Schalldruckes. Entwickeln wir diese Funktion in eine Fourierreihe [vgl. Gl. (1)], so werden die Koeffizienten der innerhalb des Sprachgebietes liegenden Harmonischen im Oszillogramm in derselben relativen Amplitude zu der Amplitude des Grundtones wiedergegeben wie im ursprünglichen „Klangbild“. Auch die Phasenwinkel, welche übrigens bekanntlich für die Klangforschung belanglos sind, bleiben hinreichend gewahrt.

Im folgenden soll die Frage der kurvengetreuen Abbildung für die einzelnen Teile der Anordnung nachgewiesen werden.

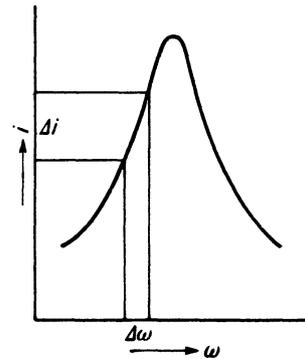


Abb. 3.

4. Kurvengetreue Abbildung.

Der Vorgang bei der Schallaufnahme, insbesondere die Abhängigkeit der Amplitude des Kondensatormikrophons von den Schallfeldfunktionen, läßt sich in folgender Weise theoretisch erfassen:

Die Bewegungsgleichung der Membran wird durch den Ausdruck dargestellt:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + R \frac{dx}{dt} + \frac{1}{C} x = K. \quad (2)$$

Die Koeffizienten der Gleichung sind folgende:

Die gesamte schwingende Masse M

$$M = M_m + M_s, \quad (2a)$$

wobei M_m die Masse des Membransystems und M_s die mitschwingende Luftmasse ist.

M_m beträgt bei dem kapazitiven Mikrophon 0,073 g.

M_s berechnet sich nach der Formel

$$M_s = \frac{8r^3 \varrho}{3 \cdot \sqrt{2}} = 0,038 \text{ g.} \quad \left\{ \begin{array}{l} r \text{ ist der Membranradius,} \\ \varrho \text{ die Dichte der Luft.} \end{array} \right.$$

Hieraus folgt:

$$m = 0,111 \text{ g.}$$

Das Dämpfungsglied R

$$R = R_s + R_r, \quad (2b)$$

wobei R_s der Strahlungswiderstand und R_r der Reibungswiderstand ist.

Der erstere beträgt

$$R_s = \frac{\pi^3 \cdot u \varrho \cdot r^4}{\lambda_0^2}. \quad (2c)$$

Hierbei ist λ_0 die Wellenlänge der Eigenfrequenz ω_0 in Luft.

Das zweite Glied R_r werden wir für Betrachtung der Eigenfrequenz vernachlässigen, es spielt eine untergeordnete Rolle.

Die rückwirkende Kraft $\frac{1}{C}$ setzt sich aus der Eigenspannung der Membran und den von der Kompression des Luftpolsters, welches zwischen der Folie und der starren Rückwand liegt, herrührenden Kräften additiv zusammen. Wir können — wie ich später zeigen werde — die Eigenspannung der Membran gegenüber diesen äußeren Direktionskräften vernachlässigen und $\frac{1}{C}$ wie folgt berechnen:

Nehmen wir an, daß die Zustandsänderungen des Volumens v_0 adiabatisch erfolgen, so ist

$$p \cdot v^k = p_0 v_0^k, \quad k = \frac{c_p}{c_v} = 1,4. \quad (3)$$

Aus dieser Beziehung läßt sich unter der Voraussetzung, daß die Membran wie eine Kolbenmembran arbeitet (und dies ist bei den geringen Amplituden und der zu vernachlässigenden Eigenspannung sicher der Fall), die rückwirkende Kraft berechnen, welche von dem hinter dem Membransystem liegenden Luftpolster herührt.

Es ergibt sich die rückwirkende Kraft pro Längeneinheit

$$\frac{1}{C} = - \frac{k F^2 p_0}{v_0}.$$

Setzt man die Daten des kapazitiven Mikrophones ein

$$F = 19,6 \text{ cm}^2$$

$$v_0 = 3,92 \text{ cm}^3$$

$$p_0 = 1 \text{ Atm.},$$

so erhält man

$$\frac{1}{C} = 1,39 \cdot 10^8.$$

Aus den Koeffizienten M und $\frac{1}{C}$ läßt sich nun die Eigenfrequenz des Systems berechnen zu:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{C \cdot M}} = 3,6 \cdot 10^4,$$

$$n_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 5750 \text{ sec}^{-1}.$$

Hieraus folgt die Wellenlänge $\lambda_0 = 5,8$ cm und nach Einsetzen dieses Wertes in (2c) R_s zu $1,57 \cdot 10^3$.

Aus der bekannten Beziehung $\delta_s = \frac{\pi R_s}{M \cdot \omega_0}$ ergibt sich*) das Strahlungsdekrement

$$\delta_s = 1,23. \quad (4)$$

Aus Gleichung (2) folgt als Amplitude der Membran

$$A_0 = \frac{K_0}{M} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}$$

oder außerhalb der Resonanz

$$A_0 = \frac{K_0}{M(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad \text{oder: wenn ich } \frac{\omega}{\omega_0} = n \quad \text{setze,}$$

$$A_0 = \frac{K_0}{M\omega_0^2(1 - n^2)} \quad \text{und für } n \ll 1$$

$$A_0 = \frac{K_0}{M\omega_0^2} = \frac{F \cdot P_n}{M \cdot \omega_0^2}. \quad (5)$$

Nach den bisherigen Betrachtungen steht demnach fest, daß die Membranamplitude bis etwa 5000 sec^{-1} , also bis zur oberen Grenze des Sprachgebietes, der Amplitude der Druckschwankungen des auftretenden Schalles proportional ist.

Die tatsächliche Eigenfrequenz, welche störend wirken könnte, liegt noch höher. Wir haben bei der Berechnung diejenigen rückwirkenden Kräfte unberücksichtigt gelassen, welche von dem Luftvolumen herrühren, das von dem Membransystem und der geschlitzten Metallplatte P begrenzt ist. Die Druckschwankungen dieses Volumens üben zusätzliche Direktionskräfte aus, welche die Eigenfrequenz des Systems höher hinaufsetzen. Dieser Einfluß macht sich aber erst dann deutlich bemerkbar, wenn man den Abstand Folie—geschlitzte Metallplatte noch kleiner wählt. Die Berechnung der Eigenfrequenzen des Membransystems für die später zu besprechenden Oszylogramme I bis IV erfolgte ohne Berücksichtigung dieser zusätzlichen Kräfte, die rechnerischen Ergebnisse stimmen gut mit dem experimentellen Befund überein.

Man kann zusammenfassend sagen, daß die Eigenfrequenz weit oberhalb des Sprachgebietes liegt und daher die Gleichung (4) ohne Einschränkung gilt.

Ich will hier noch eine kurze Gegenüberstellung mit dem Kondensatormikrophon nach Wente einfügen.

Wente verwendet eine starkgespannte Stahlmembran (0,007 cm stark, Fläche 15 cm^2 , Gewicht dementsprechend 0,8 g). Diese Stahlmembran besitzt im freien Raum

*) Die Berechnung der Dämpfung ist ein Überschlag, Gleichung (2c) gilt für die sehr kurzen Wellen ($\lambda_0 = 5,8$ cm) nur näherungsweise. Es handelt sich hier nur darum, eine untere Grenze für die Dämpfung nachzuweisen, die zusätzliche Dämpfung durch Reibung — und besonders auch durch Wirbelbildung an den Luftschlitzen — ist sehr groß, die Dämpfung wird aperiodisch, die Eigenschwingung machte sich nirgends störend bemerkbar.

eine Eigenfrequenz von 6500 sec^{-1} , durch Anbringung eines Luftpolsters gelingt es, sie bis etwa $20\,000 \text{ sec}^{-1}$ heraufzusetzen.

Das schwingende System des Kondensatormikrophones nach Riegger hat eine Masse von nur 0,1 g, bei gleicher Abstimmung beider Mikrophone wäre demnach die Dämpfung des schwingenden Systems in der Konstruktion von Wente gemäß Gleichung (4) 8 mal so klein als in der Konstruktion von Riegger. Diese schwache Dämpfung zwingt, die Eigenfrequenz des Kondensatormikrophons von Wente bis weit oberhalb des Sprachgebietes hinauf zu verlegen, da sonst bei Annäherung an die Eigenfrequenz die Schwingungsamplitude beträchtlich aufgeschaukelt wird. Dieses Heraufsetzen der Eigenfrequenz ist aber notwendigerweise mit einem Herabsetzen der Empfindlichkeit verknüpft, dies macht sich um so störender bemerkbar, als die Empfindlichkeit bereits bei gleicher Abstimmung für die Frequenzen unterhalb der Resonanzlage wegen der größeren Masse für die Konstruktion nach Wente geringer ist als für die Konstruktion nach Riegger.

Die größere Dämpfung des von mir benutzten Membransystems gestattet eine Annäherung an die obere Grenze des Sprachgebietes, ohne störende Abhängigkeit der Amplitude von der Frequenz zu ergeben. Die Änderung der Phase — welche sich bei stärkerer Dämpfung schon in größerem Abstand von der Eigenfrequenz bemerkbar macht — spielt für die Klangforschung keine Rolle.

Ich möchte hier noch darauf hinweisen, daß die zwischen den Seidenmembranen liegende Metallfolie keine Eigenspannung besitzt und daher auch nicht, wie bei Wente, durch radiale Zugspannungen beansprucht wird. Die Beanspruchung ist im Gegenteil eine reine Druckbeanspruchung. Man kann das schwingende System so auffassen, daß die gesamte Direktionskraft und der eine Teil der schwingenden Masse in dem Luftpolster sitzt, der zweite Teil der schwingenden Masse befindet sich in dem Membransystem. Die Folie ist gewissermaßen nur eine physikalische Verkörperung der Begrenzungsfläche — Luftpolster — freier Außenraum.

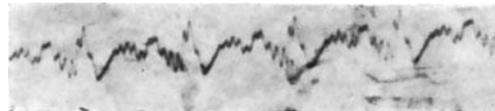
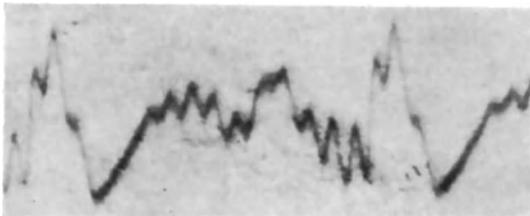
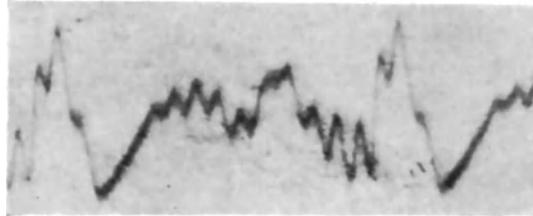
Der Beweis für die Richtigkeit dieser Anschauung liegt auch darin, daß die Folie Risse aufweisen kann, ohne in ihrer Eigenschaft als Schallempfänger beeinträchtigt zu werden. Das Klangbild einer zerrissenen Folie bleibt einschließlich der kleinsten Struktur des aufgenommenen Klanges unverändert, die Luft hinter der Folie hat für die schnellen akustischen Schwingungszahlen keine Zeit, durch die Risse auszuweichen. Sie wirkt unverändert als Luftpolster; der äußerst geringe Einfluß der unmittelbar unter dem Riß liegenden Luftstrecke ist nicht bemerkbar. Für stationären Druckausgleich ist das System auch ohne Risse luftdurchlässig.

Wie bildet sich nun die Kurvenform der Membranbewegung in unserem Oszillographen ab?

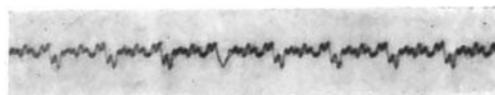
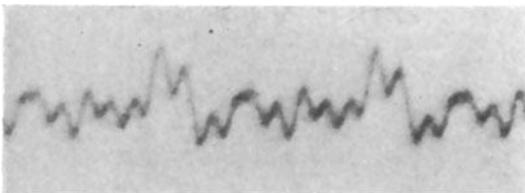
Die Sprachfrequenzmodulation der 50-m-Welle erfolgt kurvengetreu, da die Änderungen der Kapazität des Kondensatormikrophones klein sind gegen die mittlere Kapazität der Anordnung (100 cm) und die benutzte Hochfrequenzwelle eine sekundliche Schwingungszahl von $6 \cdot 10^6$ besitzt, während die höchste in Betracht kommende Modulationsfrequenz weniger als $1/1000$ hiervon, nämlich etwa 5×10^3 beträgt.

Aus der kurvengetreuen Modulation der Ausgangswelle folgt ohne weiteres die ebenfalls kurvengetreue Modulation der Schwebungswelle, welche auf den Resonanzkreis S wirkt. Der Strom in diesem Resonanzkreis soll nun in seiner Amplitude ohne Verzerrung den Wellenlängenmodulationen folgen. Dies ist nur dann der Fall, wenn

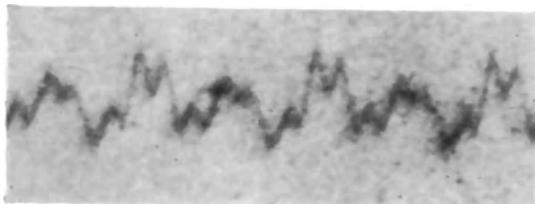
Vokal A



Nr. 4. Vokal A, Männerstimme.
Grundton 204 sec^{-1} .

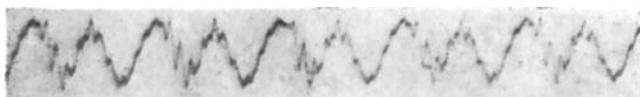


Nr. 9. Vokal A, Frauenstimme.
Grundton 398 sec^{-1} .



Nr. 10. Vokal A, Frauenstimme.
Grundton 441 sec^{-1} .
Vokalcharakter stark betont.

Vokal E



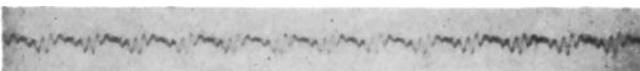
Nr. 12. Vokal E, Männerstimme.
Grundton 197 sec^{-1} .



Nr. 13. Vokal E, Männerstimme.
Grundton 201 sec^{-1} .



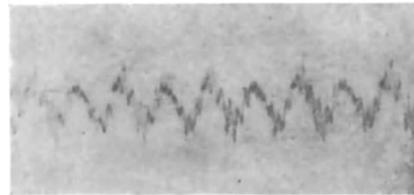
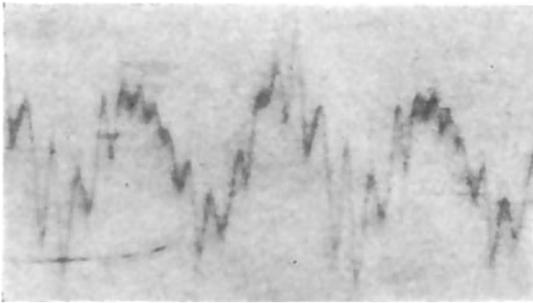
Nr. 14. Vokal E, Männerstimme.
Grundton 217 sec^{-1} .



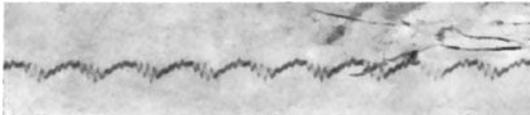
Nr. 17. Vokal E, Frauenstimme.
Grundton 441 sec^{-1} .

Bemerkungen: Der zeitliche Anfang aller Klangbilder befindet sich rechts, das Ende links.
Die Bezifferung der Klangbilder bezieht sich auf die Tabellen der Klangaufnahmen im Text S. 57 u. ff.

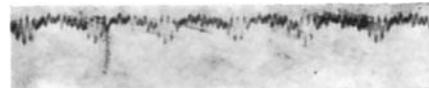
Vokal J



Nr. 18. Vokal J, Männerstimme.
Grundton 165 sec^{-1} .

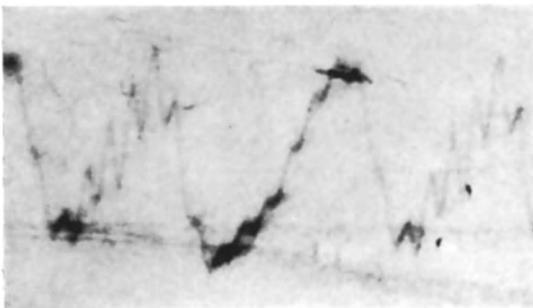


Nr. 22. Vokal J, Frauenstimme.
Grundton 351 sec^{-1} .



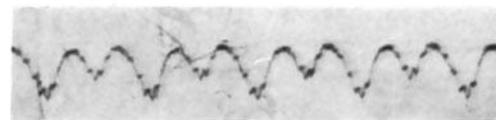
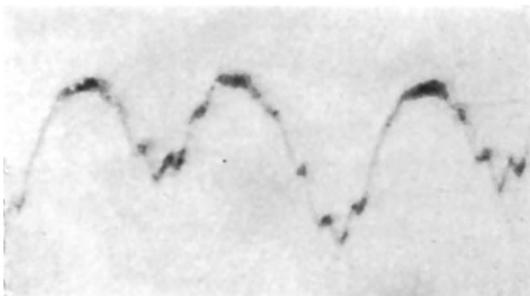
Nr. 21. Vokal J, Männerstimme.
Grundton 293 sec^{-1} .

Vokal O

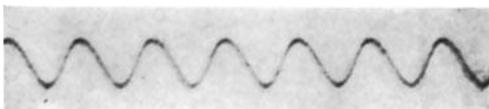


Nr. 23. Vokal O, Männerstimme.
Grundton 200 sec^{-1} .

Vokal U



Nr. 28. Vokal U, Männerstimme.
Grundton 198 sec^{-1} .

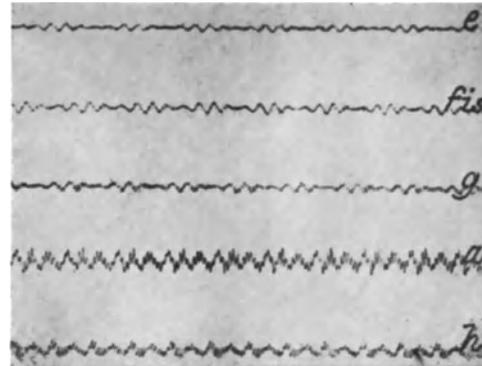


Nr. 29. Vokal U, Männerstimme,
dumpher Klangcharakter. Grundton 291 sec^{-1} .

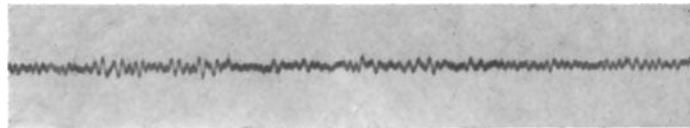
Klangbilder nach Hermann



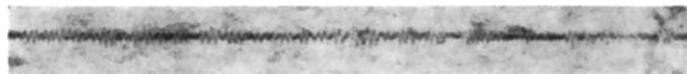
Vokal A



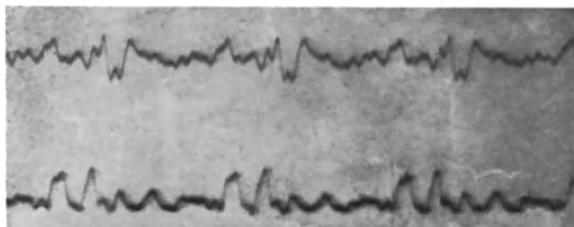
Vokal O



Nr. 32. Zischlaut Sch, sehr scharf, mittlere Frequenz 4500 sec^{-1} .



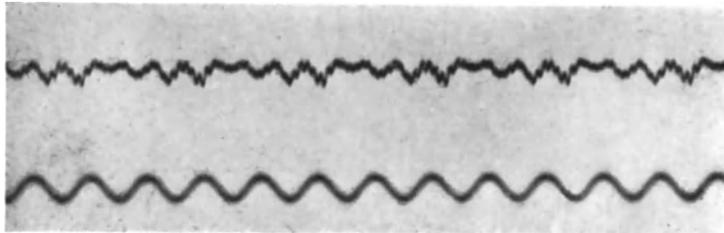
Nr. 33. Zischlaut Ch, mittlere Frequenz 4000 sec^{-1} .



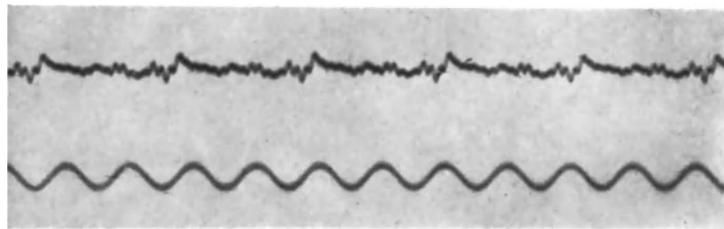
Kondensatormikrophon

Postmikrophon

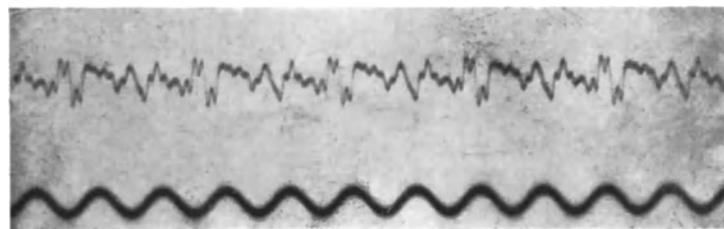
Nr. 35.



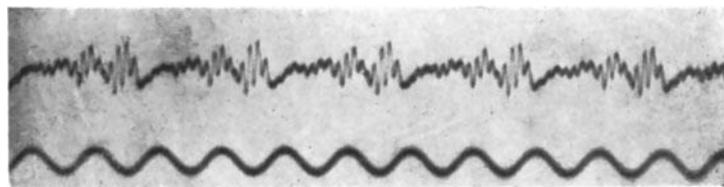
Nr. I a. Abstimmung $n_0 = 5750 \text{ sec}^{-1}$, Grundton 190 sec^{-1} .



Nr. I b. Abstimmung $n_0 = 5750 \text{ sec}^{-1}$, Grundton 192 sec^{-1} .



Nr. II. Abstimmung $n_0 = 4400 \text{ sec}^{-1}$, Grundton 193 sec^{-1} .



Nr. III. Abstimmung $n_0 = 3300 \text{ sec}^{-1}$, Grundton 191 sec^{-1} .



Nr. IV. Abstimmung $n_0 = 2200 \text{ sec}^{-1}$,
Grundton 191 sec^{-1} .

man einerseits mit der Frequenzmodulation in so engen Grenzen bleibt, daß der geradlinige Teil der Resonanzkurve nicht überschritten wird und andererseits für genügende Dämpfung sorgt, damit die Stromamplitude ohne Verzerrung auch den höchsten akustischen Frequenzen folgen kann. Für meine Versuchsanordnung betrug das Dekrement des Resonanzkreises 0,52. Die Frequenz der Schwebungswelle war rund $60\,000\text{ sec}^{-1}$, also etwa das 12fache der höchsten in Betracht kommenden Modulationsfrequenz. Bei einem Dekrement von 0,52 ist aber die Amplitude bereits nach etwa 5 Schwingungen auf den 10. Teil gesunken, so daß auch hier keine merkbare Kurvenverzerrung auftritt*).

Die durch Einschaltung des Resonanzkreises in ihrer Amplitude modulierte Hochfrequenzschwingung tritt nun in den Hochfrequenzverstärker ein, dieser ist aperiodisch und kann daher keinen Einfluß auf die Kurvenform der Niederfrequenz ausüben. Am Ausgang des Verstärkers liegt der Detektor. Man muß den mittleren Arbeitspunkt so wählen, daß man bei dem Auf- und Abwandern auf der Resonanzkurve stets innerhalb des linearen Teiles der Detektorcharakteristik bleibt. Das Zusammenwirken der genannten Eigenschaften des Detektors mit denen des Resonanzkreises zeigt Abb. 4, die aufgenommene Kurve ist zwischen $n = 61\,000$ und $n = 57\,500$ einerseits und $56\,500$ und $51\,500$ andererseits nahezu geradlinig, eignet sich also für die Verwendung einer Schwebungswelle einer mittleren Schwingungszahl von $59\,500\text{ sec}^{-1}$ bzw. $54\,000\text{ sec}^{-1}$.

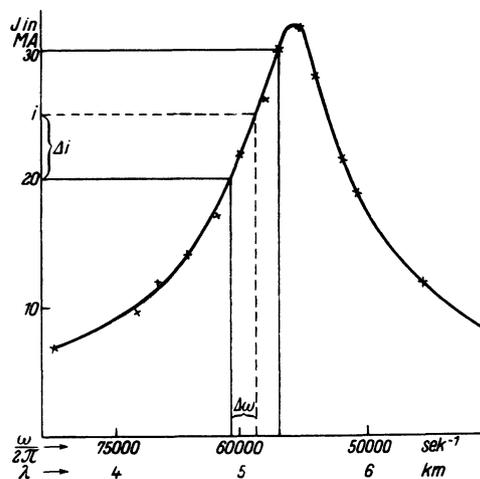


Abb. 4.

Die Eigenfrequenzen (in Luft) der zu Aufzeichnungen benutzten Oszillographenschleifen lagen bei 7000 sec^{-1} ; die Systeme waren jedoch ölgedämpft, die Schleifen sind im Gebiet bis etwa 4000 sec^{-1} von ausreichend gleicher Empfindlichkeit, die größte Abweichung für die hohen Frequenzen betrug etwa 10%; oberhalb 4000 beginnt die Empfindlichkeit nachzulassen.

Wir wollen nun die Frage erörtern, welche Membranamplitude einem bestimmten Ausschlag des Oszillographen entspricht. Aus Kurve 4 können wir die Abhängigkeit des Detektorstromes von der Frequenz der Schwebungswelle entnehmen.

Nehmen wir an, daß wir den ganzen geradlinigen Ast der Kurve zwischen $n_1 = 61\,500$ und $n_2 = 57\,500$ aussteuern. Dann ist $n_1 - n_2 = \Delta n = 4000$ gleich der doppelten Amplitude der Frequenzmodulation durch die akustische Welle. Unsere Ausgangswelle hatte eine Länge von ca. 50 m , also eine Frequenz von $6 \times 10^6\text{ sec}$. Hieraus folgt die prozentuelle Verstimmung $\frac{\Delta n}{n} = 6,67 \cdot 10^{-4}$. Dieser Frequenzänderung entspricht eine prozentuelle Kapazitätsänderung um den doppelten Betrag $\frac{\Delta C}{C} = 1,34 \cdot 10^{-3}$.

*) Ich habe zur Kontrolle eine größere Anzahl Aufnahmen mit einer Schwebungsfrequenz von etwa $100\,000$ gemacht, das Kurvenbild war das gleiche wie bei $60\,000$, die Empfindlichkeit aber selbstverständlich geringer.

Faßt man die Membran als Kolbenmembran auf, so entspricht dieser Kapazitätsänderung eine Verschiebung der Membran um $0,134\mu$ oder eine Schwingungsamplitude der Membran von $0,0667\mu$ *).

Man sieht, daß eine Amplitude der Metallfolie von weniger als $\frac{1}{10}\mu$ genügt, um die Resonanzkurve der Schwebungswelle auszusteuern. Dieser Amplitude entspricht eine Wechselstromamplitude von 5 Milliamp. im Oszillographen und eine Kurvenamplitude von etwa 11 mm auf dem photographischen Papier. Unter Berücksichtigung der eben durchgeführten Rechnung läßt sich mit Hilfe von Gleichung (5) die Amplitude des Schalldruckes P in absolutem Maß bestimmen.

5. Röhrentypen und einzelne Kunstgriffe der Schaltung.

Eine sorgfältige Sichtung des zur Verfügung stehenden Röhrenmaterials war notwendig, um die genaue Konstanz der beiden Ausgangswellen von je ca. 50 m Wellenlänge sicherzustellen. Zunächst wurden die — wegen der geringen Anodenspannung günstig erscheinenden — 110er Rohre mit Raumladenetz verwendet. Diese erwiesen sich jedoch als unzulänglich, da der dünne Heizfaden sehr kleine Wärmekapazität besitzt und damit bei geringen Schwankungen der Heizstromstärke momentan beträchtliche Temperaturschwankungen auftreten. Diese Temperaturschwankungen bewirken Emissionsänderungen und damit Änderungen der Eigenkapazität der Röhre.

Zwei mit 110er Rohren betriebene Schwingungskreise von je 100 m Wellenlänge wurden so verstimmt, daß ihre Schwebungswelle im niederfrequenten Gebiet lag. Die Schwebungswelle wurde direkt durch den Oszillographen geleitet.

Die Auswertung der Oszillogramme zeigte, daß innerhalb $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{4}$ Sekunde Schwankungen der Eigenwelle um mehr als $1 : 10^4$ auftraten, die offenbar auf den mit der Temperatur schwankenden Emissionsstrom zurückzuführen waren.

Besser bereits eigneten sich R.S.V.-Rohre (dickerer Heizfaden), aber wirklich einwandfrei arbeiteten nur die B.O.-Rohre; die dicke Oxydkathode besitzt beträchtliche Wärmekapazität. Die Emissionscharakteristik hat bei der Arbeitstemperatur einen flacheren Verlauf, der Emissionsstrom schwankt daher bei Heizstromänderungen viel weniger, die Eigenkapazität ist konstant.

Die Schwebungswelle zweier Ausgangswellen von je 50 m Länge wurde oszillographisch registriert. Ein länger ausgedehnter Versuch ergab:

um	9^{58}	1430	Schwebungen	sec^{-1}
„	10^{00}	1320	„	„
„	10^{10}	1440	„	„
„	10^{14}	1300	„	„

Die momentanen Schwankungen, die bei den 110er Rohren beobachtet wurden, treten bei diesen Rohren in keinem Falle auf, die Oszillogramme zeigen einen völlig gleichmäßigen Kurvenverlauf. Die größte Abweichung liegt bei $1 : 4 \times 10^4$ und bleibt für die Zeitdauer einer Aufnahme unterhalb $1 : 10^6$.

Als Gleichrichter G_1 wird ein R.-Rohr verwendet, dieselbe Röhrentype ist in den Hochfrequenzverstärker H eingebaut. Das 2. Rohr des Verstärkers arbeitet auf ein Aggregat von 8 parallel geschalteten B.O.-Rohren**) mit 500 Volt Anoden-

*) Bei dieser Berechnung wurde die Eigenkapazität der Röhre und der Zuleitungen vernachlässigt, der hierdurch bedingte Fehler beträgt aber nur wenige Prozent.

**) In Abb. 2 ist zur Vereinfachung nur eins dieser 8 Rohre gezeichnet.

spannung. So gelingt es, ohne Niederfrequenzverstärkung und ohne Niederfrequenztransformator, die zum Steuern der Oszillographenschleife notwendige Wechselstromamplitude von 5 Milliamp. aufzubringen.

Der Einwurf liegt nahe, daß man auch mit weniger Rohren auskommen kann, da bereits in den beiden durch B.O.-Rohre gespeisten Ausgangskreisen beträchtliche Energien schwingen. Demgegenüber ist zu bemerken, daß dieser Röhrenersparnis zwei Gründe entgegentreten, nämlich erstens die sehr lose Koppelung der Kreise *A* und *B* mit der Spule *C* und zweitens die beträchtliche Dämpfung des Resonanzkreises *S*.

Koppelt man *A* und *B* mit dem Detektor *C* zu fest, so erlöschen die Schwebungen. Der eine Kreis zieht den anderen zu genau gleicher Schwingungszahl mit.

Wählt man die Dämpfung des Kreises *S* zu gering, um hierdurch zu größeren Spannungen aufzuschaukeln, so bleibt — wie oben ausgeführt — die kurvengetreue Abbildung nicht gewahrt.

Man könnte daran denken, von einer Ausgangswelle hoher Frequenz unmittelbar auf einen Resonanzkreis zu wirken und das Schwebungsverfahren wegzulassen. Die Ausführung stößt jedoch auf große Schwierigkeiten, da sich einerseits die Verwendung eines Senders mit einer Wellenlänge unter etwa 300 m wegen der kaum möglichen Verstärkung solch kurzer Wellen bis zu der zum Aussteuern des Detektors benötigten Spannung verbietet, andererseits zur Erreichung gleicher Empfindlichkeit geringere Dämpfung nötig wäre, welche kurvenverzerrend wirkt, so daß eine in der ange deuteten Weise vereinfachte Methode nur für solche Probleme angewendet werden kann, welche geringere Anforderungen an die objektive Treue der Wiedergabe stellen.

Auf eine Schwierigkeit soll noch hingewiesen werden: Führte man den beiden Belegen des Kondensatormikrophons unmittelbar die Anodengleichspannung von 100 Volt zu, so kam es zu häufigen Durchschlägen der Seide und zu Verbrennungen der Folie. Es wurde deshalb im Schwingungskreis *B* parallel zum Kondensatormikrophon eine Induktivität und in Serie eine große Kapazität gelegt, wie Abb. 2 es andeutet.

Sämtliche Elemente der Schaltung sind für sich in blechbeschlagenen Kästen eingebaut, um statische Einwirkungen zu verhindern, die Induktivitäten der Kreise *A* und *B* sind in Toroidform ausgeführt, um magnetische Streuung auszuschließen. Es ist aus jedem Kasten nur eine Windung zur Koppelung herausgeführt.

Bevor ich die aufgenommenen Klangbilder bespreche, muß ich zunächst noch kurz die Grundzüge der über die Vokalklänge aufgestellten Theorien skizzieren, da nur so ein Verständnis der Struktur der Klangbilder möglich ist.

6. Die Vokaltheorien.

Der Ausgangspunkt aller Theorien ist der folgende Satz, welcher bereits von Helmholtz aufgestellt wurde und allgemeine Gültigkeit besitzt: Jedem Vokalklang entspricht ein enger, für den betreffenden Vokal charakteristischer und in seiner Höhe absolut fester Tonbereich. Der in diesen Bereich fallende Teilton der Klangentwicklung charakterisiert seinen Klang, er bewirkt, daß das menschliche Ohr den Klang als den betreffenden Vokal empfindet.

Erläutern wir diesen Satz an einem Beispiel:

Wir fordern von einem Sänger den Vokal *A* auf die Tonhöhe g (192 sec^{-1}), das Klangbild des von dem Sänger hervorgebrachten Vokales *A* wird dann den Ton

192 sec⁻¹ als Grundton aufweisen — beherrschend wird jedoch der 4. Partialton gleich $4 \times 192 = 768$ sec⁻¹ auftreten, dieser wird den Vokal zu einem A stampeln, denn das charakteristische Gebiet des A liegt zwischen ca. 650 und 800 sec⁻¹. In ähnlicher Weise wird uns der Vokal E auf der Tonhöhe g durch die 14. Oberschwingung charakterisiert, das betreffende Gebiet des E liegt nämlich etwa bei 2500 sec⁻¹.

Würden wir mit dem Grundton höher rücken, z. B. von dem Sänger ein g¹ fordern (384 sec⁻¹), so würde wieder der Grundton des Klangbildes der geforderten musikalischen Tonhöhe entsprechen. Im Falle des Vokales A würde jedoch jetzt nicht der 4., sondern der 2. Partialton überwiegend vertreten sein, im Falle des E würde der 7. und nicht der 14. verstärkt erscheinen, denn so ist die absolute Tonhöhe des charakteristischen Tones gewahrt. In ähnlicher Weise bestehen für alle Vokalklänge charakteristische Gebiete; ich werde dies später an einer Zusammenstellung zeigen.

Wie ist nun die Lehre von der absoluten Tonhöhe der Vokalklänge zu erklären?

Der Grund für diese Eigenschaften der Sprachklänge liegt in der physikalischen Wechselwirkung zwischen Kehlkopf und Mundhöhle. Es gibt zwei Anschauungen, diese Vorgänge zu deuten. Die erste von Helmholtz aufgestellte Theorie lautet: Das Stimmband erzeugt einen Klang, dessen Grundton die musikalisch definierte Tonhöhe ist. Dieser Klang ist reich an Obertönen; die dem Kehlkopf vorgelagerte Mundhöhle greift diejenigen Obertöne verstärkt heraus, welche ihrer Eigenresonanz am nächsten liegen und gibt sie besonders kräftig an die Umgebung ab. Für jeden Vokal bildet man eine bestimmte Mundstellung und daher eine genau definierte Resonanzlage der Mundhöhle, der dieser Mundresonanz entsprechende Teiltonbereich charakterisiert dann den Vokal.

Die andere Anschauung stammt von Hermann. Er nimmt an, daß im Tempo des gesungenen Tones, des Kehltones, einzelne Luftstöße auf die Mundhöhle treffen und diese zu Eigenschwingungen anregen. Das Klangbild würde also einzelne Wellenzüge aufweisen, welche einander in der Periode des gesungenen Tones folgen und in der Eigenperiode der Mundhöhle abklingen. Den Eigenton der Mundhöhle nennt Hermann den Formanten. Wir wollen diesen Ausdruck allgemein für das charakteristische Gebiet eines Vokales gebrauchen.

Nun ergaben sämtliche bisher aufgenommenen Klangbilder die genaue Periodizität der Kurven in der Periode des Grundtones. Die von mir aufgezeichneten Klangbilder bestätigen dies aufs neue, eine Periode ist der anderen selbst in ihrer kleinsten Struktur völlig identisch. Wollten wir dies im Sinne Hermanns erklären, so müssen wir zu der Annahme der Stoßerregung noch die Annahme hinzunehmen, daß alle Stoßimpulse identisch gleich sind und überdies genau periodisch wiederkehren. Dies würde aber gerade bedeuten, daß die Stöße als eine Fourier-Reihe streng darstellbar sind, für diese Fourier-Entwicklung könnten wir alsdann nach der Helmholtzschen Lehre verfahren, wir könnten die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung für die Mundhöhle als Resonanzsystem ansetzen und so das Klangbild des aus der Mundhöhle tretenden Klanges berechnen.

Man kann daher sagen: Die Helmholtzsche Anschauung ist richtig und allgemein gültig; Hermann macht für bestimmte Fälle außerdem die Annahme, daß der Kehlkopfklang einen impulsähnlichen Charakter aufweist, er ist hierdurch imstande, besondere Eigentümlichkeiten der Klangbilder, wie sie z. B. beim „A“ auftreten — abklingende Wellenzüge —, zu deuten. Aus dem eben Gesagten folgt notwendiger-

weise: Unharmonische Teiltöne können in keinem Fall auftreten, die erwähnten abklingenden Wellenzüge sind in Wirklichkeit nur das Abklingen der in dem ursprünglichen Kehlkopfklang bereits enthaltenen, dem Eigenton der Mundhöhle benachbarten und daher besonders verstärkten Teiltöne.

Ein Gegensatz zwischen der Theorie von Helmholtz und der von Hermann könnte nur dann bestehen, wenn die einzelnen Impulse nicht streng periodisch identisch wären, was aber — wie betont — wegen der Regelmäßigkeit aller Vokalcurven ausgeschlossen ist.

Zu beiden Anschauungen bleibt aber noch zu bemerken, daß die physikalischen Vorgänge der Klangerzeugung in Wirklichkeit noch komplizierter sein müssen. Die erzwungene Schwingung eines einfachen Systemes wird zur Deutung nicht ausreichen, man muß annehmen, daß die Vokale Schwingungen mehrerer, eng gekoppelter Systeme (Kehlkopf — Rachen — Mundhöhle) sind.

Wir wollen uns jetzt einen Überblick über die Lage der Formanten der Hauptvokale der menschlichen Stimme verschaffen. Ich werde ein Bild bringen, welches sich im wesentlichen an eine Darstellung bei Stumpf anlehnt, ich möchte allerdings die Klänge durchweg auf die sekundliche Schwingungszahl und nicht auf die musikalische Tonhöhe beziehen, da diese Bezeichnungsart für die technischen Probleme übersichtlicher ist. Eine Tabelle der physikalischen Schwingungszahlen der Töne will ich zur Vereinfachung der Umrechnung einfügen.

Natürliche C-Dur-Tonskala in physikalischer Stimmung.

Oktave	c	d	e	f	g	a	h
kleine	128	144	160	$170\frac{2}{3}$	192	$213\frac{1}{3}$	240
1 gestr.	256	288	320	$341\frac{1}{3}$	384	$426\frac{2}{3}$	480
2 gestr.	512	576	640	$682\frac{2}{3}$	768	$853\frac{1}{3}$	960
3 gestr.	1024	1152	1280	$1365\frac{1}{3}$	1536	$1706\frac{2}{3}$	1920
4 gestr.	2048	2304	2560	$2730\frac{2}{3}$	3072	$3413\frac{1}{3}$	3840
5 gestr.	4096	4608	5120	5461	6144	$6826\frac{2}{3}$	7680

Abb. 5. Die Formanten der Vokale.

Die Betrachtung der Formantentabelle lehrt folgendes:

Der charakteristische Tonbereich der dumpfen Vokale U und O liegt am tiefsten. Er kann auch noch unter die Grenze von ca. 400 sec^{-1} nach unten verschoben sein, dies drücken die Pfeile aus. So wird z. B. ein reiner Sinuston, dessen Frequenz unterhalb 400, aber noch im akustischen Bereich liegt, als dumpfes U empfunden. O und U sind sehr ähnlich, im allgemeinen pflegt das U mit einem Teilton in Gegend 800 ein wenig aufgehellt zu sein, während das O noch weiter hinaufreicht und sogar noch bei 3000 einen beträchtlichen Zusatz enthält. Ich werde hierauf noch zu sprechen kommen.

Der Formantenbereich des A liegt zwischen etwa 650 und 800 sec^{-1} und tritt besonders stark

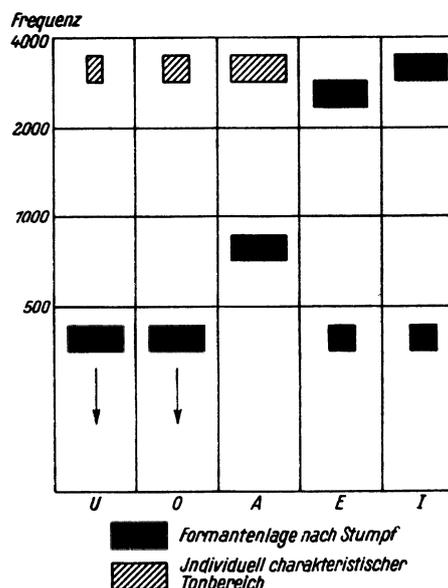


Abb. 5.

hervor; die in diesen Bereich fallenden Teiltöne treten meist mit einer Amplitude auf, welche größer ist als die des Grundtones.

Die Vokale E und I weisen je zwei Formantenbereiche auf, der niedere liegt für beide ebenfalls bei 400 sec^{-1} , der höhere, besonders charakteristische, befindet sich für den Vokal E bei 2500, während er für das I im Gebiet von 3000 bis 3500 liegt.

Die Formantengebiete sind individuell innerhalb enger Grenzen verschieden, für das Einzelindividuum aber völlig fest und charakteristisch.

Die eben beschriebene Formantlage wurde durch alle Forschungen seit Hermann bestätigt. Auch meine Aufnahmen gliedern sich in diesen Rahmen ein. Darüber hinaus fand ich hohe charakteristische Teiltöne für A, O und U in Gegend 3000 sec^{-1} , ich habe diese in der oben gebrachten Tabelle mit eingezeichnet und durch Schraffur gekennzeichnet. Dieser Zusatz ist für A besonders ausgesprochen, weniger für O und für U nur sehr schwach bemerkbar. Ich habe diese Intensitätsverhältnisse durch die Breite der Rechtecke angedeutet.

Wir werden uns jetzt hauptsächlich mit dieser Feinstruktur zu beschäftigen haben und wollen zu diesem Zweck die Klangbilder der einzelnen Vokale ausführlich diskutieren.

7. Allgemeine Bemerkungen zu den Klangaufnahmen.

Die Schwierigkeiten der photographischen Aufnahme waren sehr bedeutend, wenn man Schwingungen bis zu 5000 sec^{-1} und von beträchtlicher Amplitude registriert, wird die Winkelgeschwindigkeit des Lichtzeigers außerordentlich groß. Die geringste Veränderung am Lichtbogen der Bogenlampe genügt, um die Aufnahme mißlingen zu lassen. Die Oszillogramme wurden auf höchstempfindlichen Film gezeichnet, die Geschwindigkeit des Filmstreifens betrug 3 bis 4 m/sec^{-1} .

Ich werde hier nur den kleinen Teil der Aufnahmen reproduzieren, welche sich auf Grund ihrer Belichtungsverhältnisse hierzu eignen, eine große Anzahl anderer Aufnahmen eignet sich zwar zu subjektiver Betrachtung, lohnt aber nicht die Vielfältigung.

Der Mund der Versuchsperson befand sich für die Vokalaufnahmen in etwa 30 cm Entfernung von dem Kondensatormikrophon, gesungen wurde in mittlerer Lautstärke, ein Schalltrichter wurde in keinem Fall verwendet.

Es ist ferner zu bemerken, daß die singende Person den Charakter des betreffenden geforderten Vokales möglichst deutlich zu betonen hatte, namentlich dann, wenn die betreffende Person gesanglich geschult war. Die Schulung hat im allgemeinen zur Folge, daß der Klang einen weicheren und volleren Charakter erhält, dies äußert sich physikalisch in einer Betonung des Grundtones und der ersten Obertöne. Hierdurch macht es häufig große Schwierigkeiten, bei Aufnahmen bei gesanglich geschulten Versuchspersonen die charakteristischen Formantengebiete zu finden. Es ist ja auch bekannt, wie schwierig es oft — namentlich in den hohen Lagen weiblicher Stimmen — ist, Gesangstexte zu verstehen, trotzdem hier als erleichternd noch die Kombination zu einem fortlaufenden Sprachklang hinzukommt.

Über die Schwierigkeit, gesanglich geschulte Stimmen richtig zu verstehen, hat Stumpf²⁾ eine Reihe von Versuchen angestellt.

Gleichzeitig mit dem Klangbild habe ich mit einer zweiten Meßschleife das Strombild einer Franke-Maschine aufgenommen; die Frequenz dieser Wechselstrommaschine wurde bei der Aufnahme am Frequenzmesser abgelesen und die

Schwingungszahl des gesungenen Tones durch Vergleich mit der Frequenz der Franke-Maschine nach dem Entwickeln ermittelt, die Angaben der Tonhöhe sind daher auf etwa 1 bis 2% richtig. Diese Vergleichskurven sind auf den Oszillogrammen I bis IV abgebildet, bei den übrigen Bildern zur Platzersparnis fortgelassen.

Die aufgenommenen Kurven wurden zunächst überschlägig so ausgewertet, daß die charakteristischen Obertöne durch Auszählen bestimmt wurden, dies Verfahren ist, namentlich für die hohen Obertöne, leicht durchzuführen und gibt ein gutes Bild von der Höhe des am stärksten vertretenen Teiltones.

Darüber hinaus wurden für einzelne Bilder analytisch die Koeffizienten der Fourier-Reihen des betreffenden Klangbildes berechnet. Ich habe hierzu das Verfahren von Zipperer¹⁶⁾ verwendet, welches 24 Ordinaten benutzt. Das Verfahren ähnelt der von Hermann angegebenen Methode, es arbeitet sehr schnell und ist für die vorliegenden Zwecke hinreichend genau. Es ist selbstverständlich, daß die Klangaufnahmen der tiefen Stimmlagen zur Erfassung aller Feinheiten ein noch weitergehendes Verfahren erfordern, die Rechenarbeit wächst aber bei Hinzunahme von noch mehr Gliedern außerordentlich rasch an. Die Mehrarbeit lohnt sich für unsere Zwecke nicht, da die Kurvenbilder alles Wichtige, insbesondere die hohe Feinstruktur, auch ohne Analyse augenfällig zeigen.

In den ermittelten Fourier-Reihen sind die Phasen fortgelassen, sie sind für die Klangforschung belanglos. Die Amplituden sind in Prozenten der größten Teiltonamplitude angegeben.

8. Die Klangbilder der Vokale.

Von dem Vokal A habe ich eine größere Reihe von Bildern aufgenommen, da ich an ihm die Konstanz der Tonhöhe des Formanten prüfen wollte. Die Ergebnisse zeigt folgende Tabelle:

Lfd. Nr.	Schwingungszahl des Grundtones	Ordnungszahl und Frequenz der charakteristischen Teiltöne		Versuchspersonen	
1	100	7	700	30 3000	Männerstimme A
2	181	4	724	16 2896	„ B
3	190	4	760	16 3040	„ B
4	204	3	612		
		4	816	14 2856	„ A
5	236	3	708	13 3086	„ B
6	271	3	813	12 3252	„ B
7	290	2	580	11 3190	„ B
		3	870		
8	386	2	772	8 3088	Frauenstimme C
9	398	2	796	8 3184	„ D*)
		3	1194		
10	441	2	882	7 3087	„ D**)
				6 2646	

*) Schulmäßig.

***) Vokalcharakter, stark betont, s. u.

Man ersieht aus dieser Tabelle, daß neben dem charakteristischen Formanten-gebiet in Gegend 800 noch ein zweites in Gegend 3000 auftritt. Die Amplitudenverhältnisse Grundton erster Formant zweiter Formant sind etwa 30% 100% 30%.

Dieser hohe Formant wurde bei allen Versuchspersonen und allen A-Aufnahmen gefunden, er ist bislang nicht objektiv erkannt worden, wohl aber von Stumpf subjektiv festgestellt. Meine objektiven Klangbilder geben eine Bestätigung dieser subjektiv gewonnenen Ergebnisse, wie die Betrachtung der Meßreihen lehrt, welche Stumpf für den Vokal aufnahm.

Ton der Resonanzgabel	Subjektiv beobachtete Intensitäten der betr. Resonanzgabel				
	I	II	III	IV	V
e ⁵		3			
h ⁴		4			
b ⁴		4			
a ⁴		8			
g ⁴ 3072	1	10	1	1	
fis ⁴ 2845	4	14	4		
f ⁴				1	
e ⁴	4	8	4		
d ⁴	4	6	4		
c ⁴		3			
h ³				4	
g ³	5	10	5	5	5
fis ³	5				
e ³	6	12	6		
d ³	7			6	
c ³	7	12	7		8
b ²	7				
g ² 786	10	20	10	10	
e ²	5				
c ²	3	12	4		7
g ¹	3			4	
c ¹	1	12	0		
c	0				
Grundton des geforderten Vokales	c 128 sec ⁻¹	c ¹ 256 sec ⁻¹	c ¹ 256 sec ⁻¹	g ¹ 384 sec ⁻¹	c ² 512 sec ⁻¹

Man sieht, daß für die Spalten I, II und III die hohen charakteristischen Gebiete zwischen 2800 und 3200 stark vertreten sind. Diese sind auch bei meinen Aufnahmen durchweg gefunden worden — neben dem in der Tabelle S. 57 aufgeführten ausgezählten Teilton würde die genaue Analyse auch die benachbarten als stark vertreten ergeben, dies zeigen auch tatsächlich diejenigen Fourier-Reihen hoher Stimm-lagen, bei welchen die betreffenden Teiltöne noch rechnerisch erfaßt werden konnten (vgl. Analyse lfd. Nr. 9, 10, 13, 16, 21).

Für Spalte III und IV traten die hohen Formanten nicht in Erscheinung, dies kann entweder an der individuellen Klangfarbe *) gelegen haben oder dadurch bedingt sein, daß die Gebiete überhaupt subjektiv schwer herauszuhören sind. Stumpf betont, daß die hohen Teiltöne nur in unmittelbarer Nähe des Singenden durch die Resonanzgabeln analysiert werden konnten.

*) Anmerkung bei der Korrektur: Neuere Klंगाufnahmen beweisen die Richtigkeit dieser Anschauung, Klangbilder des Vokales A einer weichen Männerstimme zeigen die Feinstruktur nur eben angedeutet.

Die Fourier - Koeffizienten der analysierten A - Kurven.

Lfd. Nr.		Ordnungszahl des Partialtones										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	Frequenz	190	380	570	760	950	1140	1330	1520	1710	1900	2090 *)
	Amplitude	33,0	39,9	45,9	100,0	36,4	54,7	30,4	30,6	1,27	2,53	2,65
4	Frequenz	204	408	612	816	1020	1124	1428	1652	1836	2040	2244 **)
	Amplitude	32,2	33,7	100,0	35,7	39,7	18,8	21,8	11,9	43,4	15,7	6,88
10	Frequenz	441	882	1323	1764	2205	2646	3087	3528	3969	4410	4850
	Amplitude	28,0	100,0	0,9	19,2	24,7	47,2	39,2	16,1	0,3	7,9	8,9
9	Frequenz	398	796	1194	1592	1990	2388	2786	3184	3582	3980	4378
	Amplitude	82,7	100,0	95,0	36,0	10,1	5,1	51,0	63,0	61,5	23,8	2,5

*) Außerdem 16 = 3040 etwa 30% } ausgezählt und geschätzt.
 **) Außerdem 14 = 2856 etwa 25% }

Interessant an den Tabellen sind namentlich die beiden untersten Analysen (lfd. Nr. 10 und 9): Das scharfe Hervortreten des A-Formanten für den ersten Klang und die nahezu gleiche Intensität der tieferen Teiltöne bei dem zweiten Klang; im ersten Fall wurde von der Sängerin ein scharf betontes A verlangt, während der zweite Klang der gesanglichen Schulung der betreffenden Sängerin entsprach. Auch das höhere Formantengebiet ist in diesem letzten Falle in ziemlich breiter Intensitätsverteilung vertreten.

Die Vokale E und I bieten gegenüber den bisher bekannten Untersuchungen nichts wesentlich Neues.

Die Hauptmerkmale einer Reihe von E-Kurven sind folgende:

Lfd. Nr.	Schwingungszahl des Grundtones	Ordnungszahl und Frequenz der charakteristischen Teiltöne			Versuchspersonen
11	190	2 380	14 2660		Männerstimme B
12	197	2 384	13 2561		„ A
13	201	2 402	13 2613		„ A
14	217	2 434	10 2170		„ E
15	294	2 588	10 2940		„ B
16	348	1 348	8 2784		Frauenstimme C
17	441	1 441	6 2646		„ D

Die Hauptformanten liegen also etwa bei 2500 bis 2600. Auffallend ist eine besonders tiefe Formantlage — 2170 — und eine sehr hohe — 2940 —. Für beide Versuchspersonen tritt beim Vokal „I“ der gleiche Effekt ein, die Formanten liegen tiefer bzw. höher, als im allgemeinen üblich. Subjektiv ist zu beobachten, daß bei der Versuchsperson E. der Vokal I dem E sehr ähnelt, während der Klangcharakter der zweiten Versuchsperson B. auffallend hell ist.

Analysiert habe ich die beiden folgenden E-Bilder:

Lfd. Nr.		Ordnungszahl des Partialtones										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
14	Frequenz . .	217	434	651	868	1065	1302	1519	1736	1913	2170	2387
	Amplitude .	29,1	90,2	42,2	16,3	30,3	16,3	26,8	100,0	33,4	73,7	43,1
17	Frequenz . .	441	882	1323	1744	2205	2646	3087	3528	3963	4410	4851
	Amplitude .	100,0	21,1	15,4	10,5	8,0	61,7	25,5	6,6	4,5	11,3	23,6

Die Formanten des I fand ich wie folgt:

Lfd. Nr.	Schwingungszahl des Grundtones	Ordnungszahl und Frequenz der charakteristischen Teiltöne		Versuchspersonen
18	165	2 330	14 2310	Männerstimme E
19	200	2 400	19 3800	„ B
20	225	2 450	13 2926	„ A
21	293	1 293	13 3809	„ B
22	351	1 351	10 3510	Frauenstimme C

Auf die tiefe Formantlage der Versuchsperson E. und den hellen Klangcharakter der Versuchsperson B. hatte ich schon hingewiesen.

Die Fourier-Koeffizienten habe ich bei folgendem Klangbild bestimmt:

Lfd. Nr.		Ordnungszahl des Partialtones										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
22	Frequenz . .	351	702	1053	1404	1755	2106	2457	2808	3159	3510	3861
	Amplitude . .	100,0	10,0	8,4	4,3	6,9	13,8	18,2	50,8	25,1	51,7	5,5

Die Vokale O und U weisen gegenüber dem bisher bekannten wesentlich Neues auf. Sowohl O wie U zeigen eine Feinstruktur in Gegend 3000 sec⁻¹. Die Feinstruktur ist nicht so scharf ausgeprägt wie beim A, aber namentlich beim O noch gut zu erkennen, bei dem Vokal U ist sie sehr schwach und kann nahezu völlig verschwinden.

Die Klangbilder des O haben folgende hervortretende Teiltöne:

Lfd. Nr.	Schwingungszahl des Grundtones	Ordnungszahl und Frequenz der charakteristischen Formanten		Versuchspersonen
23	190	2 380	17 3230	Männerstimme B
24	200	2 400	15 3000	„ A
25	215	2 430	15 3225	„ B
26	352	1 352	9 3168	Frauenstimme C
27	416	1 416	7 2912	„ D

Auch beim O liegt die Feinstruktur für die Versuchsperson B. am höchsten. Eine Fourier-Entwicklung folge:

Lfd. Nr.		Ordnungszahl des Partialtones										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
24	Frequenz . .	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	2200
	Amplitude . .	17,5	100,0	20,6	31,6	30,3	4,2	18,7	10,3	20,9	9,45	8,02

Für den Vokal U wurden folgende Bilder aufgenommen:

Lfd. Nr.	Schwingungszahl des Grundtones	Ordnungszahl und Frequenz der charakteristischen Teiltöne		Versuchspersonen
28	198	2 396	15 2970 sehr schwach	Männerstimme A
29	291	1 291	nicht genau zu ermitteln	„ B
30	355	1 355	9 3195	Frauenstimme C

Eine Fourier-Entwicklung ist die folgende:

Lfd. Nr.		Ordnungszahl des Partialtones										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
28	Frequenz . .	198	396	594	752	990	1188	1386	1584	1782	1980	2178
	Amplitude . .	50,9	100,0	8,4	11,0	8,3	2,6	10,0	6,1	14,4	4,6	12,0

Wir können über die Klangbilder der Vokale zusammenfassend aussagen:

Die bereits bekannten Formantengebiete der 5 Hauptvokale wurden an den Stellen bestätigt, an denen sie bei Stumpf angegeben sind. Das von Stumpf subjektiv mittels Resonanzgabeln gefundene charakteristische Gebiet des A bei 3000 sec^{-1} wird zum erstenmal objektiv aufgeschlossen, darüber hinaus werden auch bei O — bei diesem in geringerem Maße als bei A — und in ganz schwacher Amplitude auch für U Teiltöne in diesem Gebiet beobachtet. Diese hohen Teiltöne sind — wie ich gleich zeigen werde — nicht unbedingt notwendig, um den Vokal für das Ohr als solchen zu charakterisieren, aber sie bedingen in hohem Maße die persönliche Klangfarbe. Kräftig vertretene hohe Teiltöne beweisen, daß der betreffende Klang einen metallisch hellen Charakter annimmt.

Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt aus einem Versuch, welcher gleichzeitig den Einwurf entkräftet, daß die von mir beobachteten hohen Teiltöne keine reelle Existenz besitzen, sondern durch irgendwelche Resonanzen vorgetäuscht sind.

Ich habe folgenden Versuch durchgeführt:

Der auf die gleiche Tonhöhe gesungene Vokal „A“ wurde nacheinander mit verschiedener Abstimmung des Membransystems aufgenommen; zu diesem Zweck wurde das Volumen des Luftpolsters vergrößert. Die unter solchen Bedingungen gewonnenen Klangbilder zeigen die Aufnahmen I bis IV, die rechnerisch ermittelte Abstimmung betrug zunächst 5750 (Ia, Ib), dann 4400 (II), später 3300 (IIIa, IIIb) und zuletzt 2200 (IV).

Gesungen wurde der Vokal A auf die Tonhöhe g (192 sec^{-1}), die Entfernung des Singenden vom Aufnahmesystem wurde etwas größer als gewöhnlich gewählt, um ein Übersteuern der Anordnung für die tieferen Abstimmungen (größere Empfindlichkeit) zu verhindern. Dementsprechend wurde die Amplitude für die Bilder Ia und Ib geringer als für die bisherigen Aufnahmen.

Man sieht, wie mit sinkender Abstimmung die Amplitude der Feinstruktur zunächst wächst, um für $n_0 = 3300$ ihr Maximum zu erreichen und dann rasch abzunehmen, für $n_0 = 2200$ ist sie noch eben erkennbar.

Die Frequenz der Feinstruktur ist aber auf allen Bildern die gleiche, die Auszählung ergibt statt den 16. bzw. 17. Oberton, je nachdem die Tonhöhe des Grundtones ein wenig höher oder tiefer liegt.

Die Aufnahmen beweisen objektiv, daß die Feinstruktur im Schallfeld vorhanden ist und nicht durch Eigenschwingungen der Membran vorgetäuscht wurde, man hat es in der Hand, die Amplitude durch geeignete Abstimmung zu beeinflussen, nicht aber die Frequenz zu ändern.

Neben diesen objektiven Feststellungen wurde gleichzeitig subjektiv in einem guten Telephon die Veränderung beobachtet, welche die Klangfarbe der Sprache durch diese Änderungen der Eigenfrequenz des Empfängers erfuhr. Die Sprache blieb deutlich verständlich, doch nahm sie einen dumpferen Charakter an, auch

hallten einzelne Klänge, z. B. das A, stark nach, die persönliche Klangfarbe, welche für die hohe Abstimmung, wie sie für die Aufnahmen verwendet wurde, ganz vorzüglich war, ging verloren.

Neben der Bestätigung des reellen Vorhandenseins der hohen Teiltöne in dem ursprünglichen Klang folgt aus diesen Versuchen die große Wichtigkeit dieser Teiltöne für die persönliche Klangfarbe.

Eine physiologische Erklärung für das Auftreten dieser hohen Teiltöne zu finden, war mir nicht möglich, es muß sich aber wohl um Resonanzen verhältnismäßig starrer und daher wenig gedämpfter Hohlräume handeln, da sonst ein Aufschaukeln von Partialtönen derartig hoher Ordnungszahl zu so großer Amplitude kaum denkbar ist.

Ein zweiter Beweis für die Richtigkeit meiner Klangkurven liegt in Bildern, die schon Hermann aufgenommen hat, er hat die damals beobachteten Erscheinungen aber falsch gedeutet, und sie wurden daher nicht weiter untersucht. Die betreffenden Kurven sind in den phonographischen Untersuchungen III abgebildet⁶⁾, sie wurden von Hermann mit sehr hoch abgestimmten Glimmermembranen gewonnen. Ich bringe eine photographische Reproduktion dieser Klangbilder, die Ähnlichkeit mit den von mir aufgenommenen Bildern ist augenfällig.

Hermann sagt darüber (a. a. O. S. 367):

„Ferner zeigt die Kurve von A, O und U mit gewissen, und zwar gerade sehr steifen Membranen zuweilen außer ihrer schon angegebenen Charakteristik noch eine sehr große Anzahl aufgesetzter, sehr feiner Zacken, deren Auszählung einen sehr hohen Partialton zwischen f_{is}^4 und h^4 ergibt. Da aber diese Erscheinung meistens fehlt, so vermute ich, daß es sich um Eigenschwingungen der Membranen handelt.“

Die eben beschriebenen Hermannschen Klangbilder, die subjektiv durchgeführten Messungen von Stumpf und meine Klangbilder decken sich in ihren Ergebnissen.

Neben der Untersuchung der Vokalklänge habe ich noch mehrere Aufnahmen von Zischlauten vorgenommen, da über die charakteristischen Schwingungszahlen der Zischlaute noch große Meinungsverschiedenheiten bestehen.

9. Zischlaute.

Die geringere Intensität der Zischlaute fordert ein näheres Herangehen der Versuchsperson an das Kondensatormikrophon, der Mund wurde dem Empfänger auf etwa 10 cm genähert.

Der Charakter der Zischlaute ist ein völlig anderer, von einer Periodizität der Schwingungen ist keine Rede, einzelne abklingende Wellenzüge folgen einander in ziemlich unregelmäßigen Abständen. Hier kann man also schon eher im Sinne

Lfd. Nr.	Zischlaut	Mittlere Frequenz sec^{-1}
31	Sch scharf	3500
32	Sch sehr scharf	4500
33	Ch	4000
34	S	4500

Hermanns von einer Stoßerregung eines gedämpften Schwingungsgebildes sprechen. Die in der nebenstehenden Tabelle angegebenen Schwingungszahlen sind die mittlere Frequenz dieser abklingenden Schwingungszüge.

Stumpf¹⁷⁾ hat mit der Methode des sukzessiven Auf- und Abbaues der Klänge mittels Interferenzröhren untersucht, welche Frequenzgebiete für die Zischlaute charakteristisch sind.

Er fand für Sch f^3 bis e^4 ,
 Ch (palatale) e^4 bis de^5 ,
 S de^4 bis e^5 , in Einzelfällen bis d^6 .

Diese Angaben stimmen bis auf die über das Sch mit meinen Versuchsergebnissen gut überein und sind auch für letzteres durch die verschiedene Schärfe, mit der man einen Zischlaut hervorbringen kann, leicht zu erklären.

Nach Besprechung der Klangbilder der Vokale und der Zischlaute wollen wir die Bedeutung der Ergebnisse für technische Probleme besprechen.

10. Die technische Bedeutung der Versuchsergebnisse.

Die technischen Probleme, für welche die Klangforschung eine grundlegende Rolle spielt, sind die Fernübertragung der natürlichen Klänge und die Klangaufzeichnung zwecks späterer Reproduktion. Ich hatte in dem bisher Gesagten eine Methode entwickelt, die Klänge aufzuzeichnen und hatte eine Reihe von Klängen analysiert. Wollen wir sehen, welche neuen Gesichtspunkte wir für die technische Akustik auf Grund der Ergebnisse dieser Arbeit gewinnen können, so müssen wir zunächst kurz entwickeln, welches Gesetz die subjektive Empfindung des Ohres mit dem von uns aufgezeichneten physikalischen Klangbild verbindet.

Das Gesetz, welches diese Umsetzung vermittelt, ist das Weber-Fechnersche psychophysische Gesetz.

Ich habe es in Abb. 6 schematisch dargestellt. Hier ist als Abszisse die physikalische Intensität J_{phys} und als Ordinate die subjektive Empfindungsstärke E_{subj} aufgetragen.

Das Gesetz lautet in Worten: Die Stärke der Empfindung ist proportional dem Logarithmus des auftreffenden Reizes. Lassen wir also die Schallintensität von sehr kleinen Werten aus allmählich ansteigen, so empfindet unser Ohr zunächst nichts, bis der Schwellenwert erreicht wird ($J = 1$, $\log J = E = 0$), hier setzt die Empfindung plötzlich ein und steigt zunächst mit wachsendem Reiz stark an, um dann entsprechend dem Verlauf der logarithmischen Funktion bei weiterer Steigerung der Schallintensität nur noch langsam zuzunehmen.

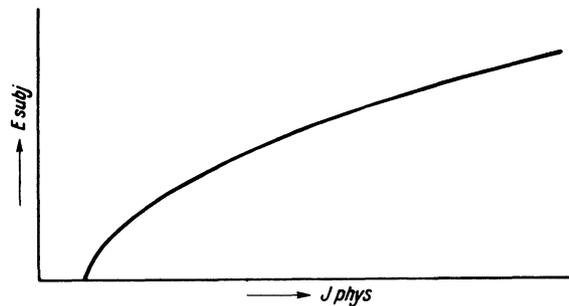


Abb. 6.

Die theoretischen Grundlagen des Gesetzes können wir hier nicht besprechen, es sei nur betont, daß es auch experimentell mit guter Annäherung bestätigt wurde.

Wir haben nun die Möglichkeit, eine naheliegende und technisch wichtige Frage zu klären: Wie ist es überhaupt möglich, daß das Ohr zwei so grundverschiedene Klangkurven — wie sie z. B. durch ein Kondensatormikrophon und durch ein Kohlenkörnermikrophon aufgenommen werden — als denselben Klang empfindet?

Um zu zeigen, wie verschieden derartige Aufnahmen ausfallen können, habe ich auf demselben Oszillogramm (Nr. 35) den Vokal A (Grundton g 192 sec^{-1}) zu gleicher Zeit mittels Kondensatormikrophons und Postmikrophons aufgenommen.

Die Feinstruktur ist bei dem Postmikrophon fast völlig verschwunden, während Teiltöne des Bereiches zwischen etwa 700 und 1200 sec^{-1} stark vertreten sind.

Die Tatsache, daß das Ohr auch diesen Klang als A hört, liegt erstens in der Richtigkeit der Formantentheorie: Der Formant des A ist auch in der Klangkurve des Postmikrophons am stärksten vertreten und stempelt diesen Klang zu einem „A“, und zweitens in der Gültigkeit des Weber-Fechnerschen Gesetzes: verhältnismäßig große Amplitudenverzerrungen kommen dem Ohr subjektiv nur wenig zur Empfindung. Wichtig ist aber, daß wir beim Postmikrophon mit der Amplitude der höheren Teiltöne teilweise unter den Schwellenwert des Ohres heruntersinken, dadurch fällt der betreffende Teilton subjektiv ganz aus, und falls dieser ein Formant war, ist der Klang entstellt. In diesem Falle würde also die persönliche Klangfarbe, die in den hohen Frequenzgebieten liegt, unterdrückt sein.

Das eben Gesagte beweist auch die große Wichtigkeit der Forderung schwellenwertsfreier Empfänger und solcher Empfänger, die eine einigermaßen lineare Charakteristik besitzen.

Die erste Forderung ist nach dem Gesagten ohne weiteres klar: Wie wenig sie z. B. für viele Mikrophone erfüllt ist, zeigt folgende, leicht zu gewinnende Beobachtung:

Das Aufnahmемikrophon befindet sich in einem Zimmer, in welchem entfernt vom Mikrophon gesprochen wird.

Man hört dann im Telephon zwar deutlich, daß gesprochen wird, ist aber nicht imstande, auch nur einen Satz zu verstehen: Zahlreiche Formanten sind in ihrer Amplitude zu klein, um den Schwellenwert des Mikrophones zu überschreiten, sie fallen in dem sekundären Klangbild am Empfangsort ganz aus, die Sprache wird unverständlich.

Die Wichtigkeit linearer Empfängercharakteristik liegt in dem Umstand, daß z. B. bei quadratischer Charakteristik neben den ursprünglichen Teiltönen solche von doppelter Frequenz auftreten, so daß Formanten vorgetäuscht werden, die gar nicht vorhanden sind und mithin ein fremder Klangcharakter entsteht.

Die guten Eigenschaften schwellenwertsfreier Empfänger sind bekannt — geringe Abweichungen von der linearen Charakteristik können in Kauf genommen werden, sogar eine Resonanzstelle kann vorhanden sein, wenn nur die Dämpfung so stark ist, daß die Resonanzkurve einigermaßen flach wird. Zenneck¹⁸⁾ hat hierüber durch Verwendung eines Telephons als Schallempfänger Versuche angestellt, deren günstiger Ausfall sich durch das vorher Gesagte erklären läßt.

Die Technik stellt für Nachrichtenübermittlung im allgemeinen die Forderung, daß der Frequenzbereich zwischen ca. 700 und 2100 sec⁻¹ einigermaßen gleichmäßig übertragen und wiedergegeben wird, obwohl bekannt ist, daß wichtige Formantengebiete außerhalb dieser Schwingungszahlen liegen. In diesen Fällen verhilft uns Übung, Phantasie und Kombinationsgabe zum Verständnis einer in ihrem Klang derartig eingeengten Sprache.

Die langjährige Erfahrung im Gebrauch des Fernsprechers läßt uns diese Klangeinengung gar nicht mehr bemerken. Wie weitgehend die Entstellungen sind, mögen zwei Bemerkungen zeigen: Zunächst möchte ich auf die große Schwierigkeit fremdsprachlichen Fernsprechverkehrs hinweisen, selbst bei ausgezeichnete Beherrschung der Sprache ist uns ihr eingeengter Telephonklang nicht gewohnt — wir haben keine Kombinationsmöglichkeiten und verstehen außerordentlich schwer.

Die zweite Bemerkung ist folgende: Wir werden angerufen und verstehen den Namen des Anrufenden nicht, wir stehen dem Inhalt des Gespräches zunächst verständnislos gegenüber, bis uns ein verstandenes, für den Zusammenhang wichtiges

Wort zeigt, um was sich das Gespräch handelt und wir so auf die Person des Anrufenden schließen können, mit diesem Augenblick haben wir den Übersetzungsschlüssel: Telephonklangfarbe—persönliche Klangfarbe gewonnen und können mühelos den Sprachinhalt erfassen.

Ich habe die Gründe gezeigt, welche es ermöglichen, für die gewöhnlichen Zwecke der Fernmeldetechnik mit einem engen Klangbereich auszukommen.

Für die Zwecke einer naturgetreuen Klangübertragung müssen wir aber die scharfe Forderung stellen: Die Übertragungsanlagen und die Wiedergabeapparate müssen entweder den Frequenzbereich zwischen etwa 50 sec^{-1} und 5000 sec^{-1} völlig gleichmäßig behandeln oder sie müssen so gegeneinander auskompensiert sein, daß das sekundäre Klangbild dem primären in der Amplitudenverteilung der Partialtöne identisch gleicht, denn nur so kann das Ohr subjektiv die Empfindung einer naturgetreuen Wiedergabe haben.

Es ist nach den Versuchsergebnissen klar, daß das Kondensatormikrophon einen vorzüglichen Schallempfänger für alle Zwecke der Klangübertragung und Klangaufzeichnung darstellt und insbesondere für den Lautsprecher geeignet ist.

Außerdem dient es als Aufnahmevorrichtung für alle Fragen der Klangforschung, man kann mit der Anordnung auch ein objektives Urteil über die Güte der Lautwiedergabe fällen, indem man das Klangbild des natürlichen und das des künstlichen Klanges gleichzeitig aufnimmt und dann analysierend vergleicht.

Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Anordnung beschrieben, die es gestattet, Klangbilder aufzunehmen und die Feinstruktur dieser Klänge objektiv aufzulösen.

Über die Ergebnisse der Arbeit habe ich am 22. Februar 1924 in der Deutschen Gesellschaft für technische Physik und am 27. Februar 1924 in der Deutschen Physiologischen Gesellschaft vorgetragen. Während der Drucklegung der Arbeit hat K. W. Wagner am 22. März 1924 im Elektrotechnischen Verein einen Vortrag über den Frequenzbereich von Sprache und Musik gehalten *). Der Vortrag enthielt im wesentlichen eine von praktischen Demonstrationen begleitete Anwendung der von Stumpf gefundenen Ergebnisse auf die Fernmeldetechnik, die Folgerungen decken sich im allgemeinen mit den von mir aufgestellten Prinzipien.

Den objektiven, bisher noch nicht erbrachten Beweis der Richtigkeit dieser Anschauungen enthält unter anderem die vorliegende Arbeit.

Nach einer Zusammenstellung der bisher in der experimentellen Klangforschung verwendeten Methoden wird die Anordnung beschrieben:

Ein Kondensatormikrophon nach H. Riegger verwandelt die akustischen Schwingungen in Frequenzmodulationen einer Hochfrequenzwelle. Die Modulationen werden mit Hilfe einer Schwebungsmethode vergrößert und mittels einer Hochfrequenzverstärkerschaltung zum Steuern einer hochabgestimmten Oszillographenschleife benutzt, ohne kurvenverzerrende Niederfrequenzverstärker oder Niederfrequenztransformatoren zu verwenden.

Es werden Klangbilder der fünf Hauptvokale und der Zischlaute aufgenommen und besprochen. Die Kurven werden im Rahmen der Klangtheorie gedeutet, neben den bereits bekannten und objektiv bestätigten charakteristischen Gebieten der Vokale

*) Vgl. ETZ 1924, S. 451.

wird erstmalig ein hohes charakteristisches Gebiet des A, welches bei 3000 sec^{-1} liegt, objektiv aufgezeichnet, neue Gebiete für O und U in derselben Gegend werden gefunden.

Es wird gezeigt, daß diese hohen Partialtöne für die individuelle Klangfarbe entscheidend sind. Es werden Zischlaute aufgenommen, für diese liegen die mittleren Schwingungszahlen zwischen 3500 und 5000 sec^{-1} .

Die Bedeutung der gewonnenen Resultate für die technische Akustik wird besprochen, insbesondere betont, daß für naturgetreue Wiedergabe der Sprache eine gleichmäßige Empfindlichkeit für Schwingungen zwischen 50 sec^{-1} und 5000 sec^{-1} gefordert werden muß. Die Anordnung gestattet, durch Vergleich des vom natürlichen Klang gelieferten Klangbildes mit dem Klangbild des künstlichen ein objektives Urteil über die Güte der Sprachaufzeichnung oder Wiedergabe zu fällen.

Literaturverzeichnis.

1. H. v. Helmholtz: Tonempfindungen.
2. C. Stumpf: Struktur der Vokale. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. Bd. 17. 1918.
3. V. Hensen: Über die Schrift von Schallbewegungen. Z. Biol. 1887.
4. P. Wendeler: Ein Versuch, die Schallbewegung einiger Konsonanten und anderer Geräusche mit dem Hensenschen Sprachzeichner graphisch darzustellen. Diss. Kiel 1886. Verlag von R. Oldenburg in München.
5. H. Pipping: Zur Klangfarbe der gesungenen Vokale. Z. Biol. Bd. 27. 1890. — Nachtrag zur Klangfarbe der gesungenen Vokale. Z. Biol. Bd. 27. 1890. — Zur Lehre von den Vokalklängen. Z. Biol. Bd. 31. 1895. — E. Lindelöff und H. Pipping: Über die Berechnung der Beobachtungsfehler bei der Ausmessung von Klangkurven. Arch. ges. Physiol. Bd. 85. 1901.
6. L. Hermann: Phonographische Untersuchungen I. Arch. ges. Physiol. Bd. 45. 1889. — Desgl. II, III. Bd. 47. 1890. — Desgl. IV. Bd. 53. 1892. — Desgl. V, VI. Bd. 58. 1894.
7. L. Hermann: Die theoretischen Grundlagen für die Registrierung akustischer Schwingungen. Arch. ges. Physiol. Bd. 150. 1913.
8. O. Frank: Die Membran als Registriersystem. Z. Biol. Bd. 60. 1913.
9. O. Weiss: Die photographische Registrierung der geflüsterten Vokale und der Konsonanten S und Sch. Physiolog. Zentralblatt Bd. 21. 1907.
10. S. Garten: Ein Schallschreiber mit sehr kleiner Seifenmembran. Ann. Physik Bd. 48. 1915.
11. S. Garten: Beiträge zur Vokallehre. Abhandl. d. mathemat.-phys. Klasse d. Sächs. Akad. d. Wissensch. Bd. 7, 8, 9. Leipzig 1921.
12. A. Raps: Über Luftschwingungen. Wiedemanns Ann. Bd. 50. 1893.
13. K. Gehlhoff: Über die Aufnahme von Schallkurven ohne Membran. Z. Phys. Bd. 3. 1920.
14. L. Hermann: Neue Beiträge zur Lehre von den Vokalen und ihre Entstehung. Arch. ges. Physiol. Bd. 141. 1911.
15. E. C. Wente: A condenser transmitter as a uniformly sensitive instrument for the absolute measurement of sound intensity. Phys. Rev. Bd. 10. 1917. — Vgl. auch J. B. Crandall: Phys. Rev. Bd. 11. 1918.
16. L. Zipperer: Tafel zur harmonischen Analyse. Berlin: Julius Springer 1922. — Vgl. auch W. Hort: Technische Schwingungslehre. S. 136.
17. C. Stumpf: Über die Tonlage der Konsonanten und die für das Sprachverständnis entscheidende Gegend des Tonbereiches. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. Bd. 49. 1921.
18. J. Zenneck: Die Verwendung des Telephons als Geber in der drahtlosen Telephonie. Jahrb. drahtl. Telegr. u. Telef. Bd. 19. 1922.

An einschlägiger Literatur ist außerdem zu erwähnen:

- Ph. Broemser: Die Bedeutung der Lehre von der erzwungenen Schwingung in der Physiologie. Habilitationsschrift München 1918. Verlag Kastner & Callwey.
- V. Hensen: Harmonie in den Vokalen. Z. Biol. Bd. 28. 1891.
- L. Hermann: Fortgesetzte Untersuchungen über die Konsonanten. Arch. ges. Physiol. Bd. 83. 1900. Weitere Untersuchungen über das Wesen der Vokale. Arch. ges. Physiol. Bd. 61. 1895. Einfluß der Drehgeschwindigkeit bei der Reproduktion am Edison-Phonographen. Arch. ges. Physiol. Bd. 139. 1911.
- M. Wien: Über die Empfindlichkeit des menschlichen Ohres für Töne verschiedener Höhe. Arch. ges. Physiol. Bd. 97. 1903.
- A. Samojloff: Zur Vokalfrage. Arch. ges. Physiol. Bd. 78. 1899.
- E. Th. v. Brücke und S. Garten: Über die Deformation von Vokalkurven. Arch. ges. Physiol. Bd. 167. 1917.
- K. W. Wagner: Über die Frequenz der Fernsprechströme. Phys. Z. Bd. 11. 1910.

Zur Theorie des Lautsprechers.

Von **Hans Riegger**.

Mit 9 Textabbildungen.

Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium Siemensstadt.

Eingegangen am 17. März 1924.

Einleitung.

Wenn man mit Hilfe einer Membran Schall erzeugt oder empfängt, kann man meistens bei der Behandlung der akustischen Seite des Problems ausgehen von der Rayleighschen Formel¹⁾ für die Kolbenmembran, die in einer unendlich ausgedehnten starren Wand schwingt.

Die Rückwirkung des Mediums auf die Schwingungen der Membran beruht auf einem Glied, das proportional zur Beschleunigung, und einem, das proportional zur Geschwindigkeit ist. Das erste Glied stellt eine vom Medium herrührende zusätzliche Masse, das zweite eine zusätzliche Dämpfung dar. Dagegen fehlt in der Rückwirkung das Glied, welches einen Beitrag zur Direktionskraft liefert.

Wenn die Membran mit dem Radius r_0 so klein ist, daß für alle vorkommenden Wellenlängen λ die Bedingung erfüllt ist:

$$\frac{2\pi r_0}{\lambda} = \frac{r_0}{u} \omega < 1, \quad (1)$$

u = Schallgeschwindigkeit, ω = Kreisfrequenz,

werden die Ausdrücke für die mitschwingende Mediummasse und den Strahlungswiderstand sehr einfach.

Dieser Fall ist von den Herren Hahnemann und Hecht²⁾, desgleichen für den Empfänger von Herrn Lichte³⁾ eingehend diskutiert worden. Während nun für die Unterwasserschalltechnik die Bedingung 1 meistens erfüllt ist, trifft dies bei vielen Problemen der Schallerzeugung in Luft nicht mehr zu. Da in Luft die Wellenlänge bei gleicher Frequenz nur etwa der 4. Teil wie in Wasser ist, und da bei klanggetreuer Übertragung, etwa der Musik oder der menschlichen Sprache, Frequenzen bis zu 5000 vorkommen, ist die Bedingung 1 bei den meisten Lautsprechern nicht für alle Wellen erfüllt.

In der folgenden Untersuchung soll daher die allgemeine Rayleighsche Formel für die Kolbenmembran verwandt und zum Zwecke bequemer Benutzung die beiden Rayleighschen Funktionen $K_1(y)$ und $J_1(y)$ ausgewertet und in Form von Kurven dargestellt werden. Das Rayleighsche z ist hier durch y ersetzt.

¹⁾ Lord Rayleigh: Theorie des Schalles (deutsche Übersetzung von Neesen) Bd. II, S. 203.

²⁾ W. Hahnemann und H. Hecht: Phys. Z. 1916, S. 601 u. 1917, S. 261.

³⁾ H. Lichte: Phys. Z. 1917, S. 393.

Diese Kurven werden dann für die Berechnung des elektrodynamischen und elektrostatischen Telefons verwandt im Zusammenhang mit folgender Aufgabe. Wenn in einem primären Schallfeld die Frequenzen in den Grenzen 100 bis 5000 bei konstantem p_{10} verändert werden, sollen die in einem sekundären Schallfeld erzeugten Drucke p_{20} ebenfalls von der Frequenz unabhängig sein.

I. Allgemeine Behandlung der Rayleighschen Kolbenmembran.

A. Kreisförmige Membran.

Eine kreisförmige Membran vom Radius r_0 befinde sich in einer unendlich ausgedehnten starren Wand. Auf ihrer Rückseite sei sie durch ein Gehäuse abgeschlossen, dessen Tiefendimensionen klein seien gegen die vorkommenden Wellenlängen, so daß störende Resonanzen vermieden werden. Die angreifenden Kräfte seien gleichmäßig über die Membran verteilt bzw. die Membranbewegung sei an allen Stellen dieselbe. Dann gilt für die Bewegung der Membran die Differentialgleichung: .

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + \frac{1}{c} x = k . \tag{2}$$

Darin ist:

$$\left. \begin{aligned} m &= m_m + m_s, & m_m &= \text{Membranmasse,} \\ r &= r_v + r_s, & m_s &= \text{mitschwingende Mediummasse,} \\ \frac{1}{c} &= \text{Richtkraft,} & r_v &= \text{Reibungswiderstand,} \\ k &= \text{erregende Kraft,} & r_s &= \text{Strahlungswiderstand.} \end{aligned} \right\} \tag{2a}$$

Für die Größen m_s und r_s gilt nach Rayleigh:

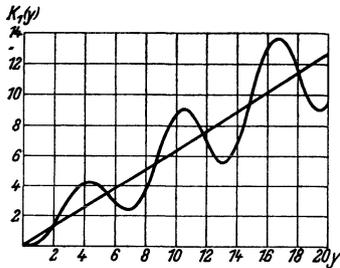


Abb. 1.

$$\left. \begin{aligned} m_s &= \frac{8}{3} \rho r_0^3 \cdot g(y), \\ r_s &= u \rho \pi r_0^2 \cdot h(y), \\ g(y) &= \frac{3 \pi}{2} \cdot \frac{K_1(y)}{y^3}, \\ h(y) &= 1 - 2 \frac{J_1(y)}{y}, \\ y &= 2 \cdot \frac{2 \pi r_0}{\lambda} = 2 \cdot \frac{r_0}{u} \cdot \omega, \\ \rho &= \text{Dichte.} \end{aligned} \right\} \tag{2b}$$

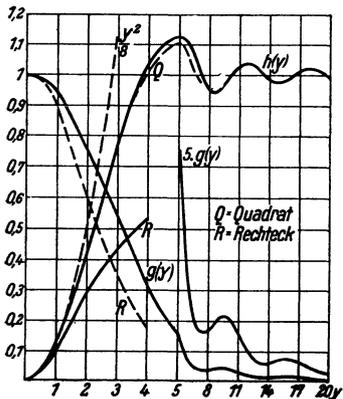


Abb. 2.

Die beiden Funktionen K_1 und J_1 sind durch Reihenentwicklung von Rayleigh dargestellt. $J_1(y)$ ist die Besselsche Funktion erster Ordnung, daher jedem größeren mathematischen Tabellenwerk, z. B. Jahnke - Emden, zu entnehmen. Die Funktion $K_1(y)$ habe ich selbst numerisch berechnet, und zwar bis zu $y = 20$ (Abb. 1). Es ist eine periodische Funktion, deren Werte um die Gerade $K = \frac{2}{\pi} y$ schwanken. Dabei wird die relative Abweichung von der Geraden mit steigendem y immer kleiner, während der Absolutwert der Abweichung größer wird. Mit Hilfe dieser Werte von $K_1(y)$ und den der Tabelle entnommenen für $J_1(y)$ berechnen sich die beiden Kurven für $g(y)$ und $h(y)$. Sie sind dargestellt in Abb. 2.

m_s und r_s sind aus diesen Kurven durch Multiplikation mit nach (2b) gegebenen Konstanten für jedes y zu erhalten. Aus der Kurve für $g(y)$ geht hervor, daß für kleine Werte von y die Funktion $g(y)$ sich dem Wert 1 nähert. Es ist dann m_s unabhängig von ω und:

$$m_s = \frac{5}{3} \rho \cdot r_0^3. \quad (3)$$

Von $y = 2$ bis $y = 6$ fällt $g(y)$ nahezu linear mit zunehmendem y ab, wird dann periodisch mit abnehmender Amplitude, wobei der Mittelwert mit $\frac{1}{y^2}$ bei steigendem y abfällt.

Für die praktische Akustik sind die genauen Werte für m_s bei größerem y ziemlich belanglos, da sie dann so klein sind, daß sie gegen die Membranmasse verschwinden.

Die Kurve $h(y)$ und damit der Strahlungswiderstand steigt zunächst quadratisch mit wachsendem y an. Von $y = 2$ an jedoch langsamer, um für $y = 5$ ein Maximum zu erlangen. Sie schwankt dann periodisch mit abnehmender Amplitude um den Wert 1.

Für kleine Werte von y wird:

$$h(y) = \frac{y^2}{8}, \quad (4a)$$

$$r_s = u \rho \pi r_0^2 \cdot \frac{y^2}{8}. \quad (4)$$

Nach dem Ausdruck (4a) ist die gestrichelte Kurve gezeichnet. Sie stimmt bis etwa zum Wert $y = 2$ mit der tatsächlichen überein, steigt aber dann sehr viel rascher. Da der Grenzwert für große y für die Funktion $h(y)$ zu 1 wird, gilt für r_s bei große m y :

$$r_s = u \rho \pi r_0^2. \quad (5)$$

Wenn v_0 die Geschwindigkeitsamplitude in einer ungestörten ebenen Welle ist, geht durch die Flächeneinheit die Energie $W = \frac{u \rho v_0^2}{2}$. Diesem Wert entspricht der Ausdruck des Strahlungswiderstandes nach (5) für die Kreisfläche der Kolbenmembran. Er wird bereits für den Wert $y = 4$ erreicht, und man wird praktisch von den kleinen Schwankungen um diesen Wert absehen können und von $y = 4$ an mit ihm rechnen. Die Strahlung selber wird dann allmählich den Charakter einer Kugelwelle verlieren und in eine ebene Welle mit bei sehr großem y geringer Streuung übergehen. In der folgenden ganzen Arbeit werden wir von diesem Übergang zur ebenen Welle ganz absehen und uns immer nur für die gesamte gestrahlte Energie interessieren.

Die Werte 3 und 4 für die mitschwingende Mediummasse und den Strahlungswiderstand sind diejenigen, auf denen die Arbeiten von Hahnemann-Hecht und Lichte fußen.

Wenn die Membran nach beiden Seiten der starren Wand strahlt, also auf der Rückseite nicht durch eine Kapsel verschlossen ist, sind die angegebenen Werte für m_s und r_s zu verdoppeln.

Beim gewöhnlichen Strahler 0^{ter} Ordnung, also einer Membran, die durch eine Kapsel auf der Rückseite abgeschlossen ist und bei der die starre Wand fehlt, ist nach Hahnemann und Hecht m_s mit $\frac{1}{2}$ und r_s mit 2 zu dividieren, gültig für Wellen, die die Bedingung 1 erfüllen.

Demnach gibt eine in einer starren Wand befindliche, nach beiden Seiten strahlende Membran im ganzen bei gleicher Amplitude die vierfache Energie an Strahlung ab wie eine gewöhnliche Membran 0^{ter} Ordnung.

Wegen dieser relativ großen Gesamtstrahlung einer nach beiden Seiten einer starren Wand strahlenden Membran und der Möglichkeit, zu sehr tiefer Eigenfrequenz zu kommen, wollen wir diese Form des Strahlers bei später folgenden Beispielen zugrunde legen. Wenn die starre Wand nicht unendlich groß ist, werden lange Wellen gegenüber kurzen und den Rechnungsergebnissen etwas benachteiligt. Praktisch wird eine Wand von 1—2 m Durchmesser genügen, um auch für die längsten vorkommenden Wellen die Ergebnisse der Rechnung anzuwenden.

B. Rechteckiger Querschnitt.

Bei manchen ausgeführten Formen von Lautsprechern ist die Membran nicht kreisförmig, sondern rechteckig. Es sei die große Seite des Rechteckes a , die kleine b , also die Fläche: $f = a \cdot b$. Diese rechteckige Form der strahlenden Fläche läßt sich für zwei Grenzfälle mit derjenigen einer gleich großen Kreisfläche identifizieren, und zwar einmal für sehr lange und dann für sehr kurze Wellen.

Als ungefähre Grenze für die Gültigkeit dieser beiden Zonen können wir auf Grund der bisherigen Kenntnisse angeben:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{a}{2} < 1,$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{b}{2} > 3.$$

Während man nun für das Verhalten einer quadratischen Fläche auch im Zwischenraum eine größere Abweichung vom flächengleichen Kreis nicht erwarten kann, sind einigermaßen quantitative Angaben bei einem langgestreckten Rechteck nicht ohne genauere Berechnung zu erzielen.

Zu diesem Zwecke ist die Doppelsumme:

$$\sum \sum \frac{e^{-j\kappa r}}{r} \cdot dS \cdot dS',$$

wo dS und dS' Flächenelemente, r deren gegenseitiger Abstand und $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$ ist, welche Rayleigh für den Kreis ausgerechnet hat, jetzt für das Rechteck zu bilden. Es ist fraglich, ob sich die Summe wieder in brauchbaren Reihen darstellen wird. Herrn Dr. Backhaus, der auf meine Anregung hin die Integration durchführte, ist es gelungen, brauchbare Reihen anzugeben. Er hat seine Resultate für das Quadrat und das Rechteck mit dem Seitenverhältnis 7:1 auch numerisch ausgewertet. Ich möchte im folgenden die Ergebnisse seiner numerischen Berechnung mitteilen.

Für das Quadrat und Rechteck sind die Kurven für $g(y)$ und $h(y)$ in die Abb. 2 aufgenommen. y ist aber jetzt zu bestimmen aus:

$$y = 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{a}{\sqrt{\pi}} = 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r_0 \quad \text{für das Quadrat,}$$

$$y = 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{a}{\sqrt{7\pi}} = 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r_0 \quad \text{für das Rechteck,}$$

wo r_0 der Radius des flächengleichen Kreises ist¹⁾.

¹⁾ $g(y)$ für das Rechteck wurde nicht von Backhaus berechnet, sondern nach einem anderen Annäherungsverfahren bestimmt.

Wie vermutet, ist der Unterschied gegenüber der Kreisfläche beim Quadrat nur geringfügig.

Für das Rechteck mit dem Seitenverhältnis $a : b = 7 : 1$ ist zwar für sehr lange Wellen die Strahlung ebenfalls identisch mit derjenigen des flächengleichen Kreises. Größere Abweichungen jedoch beginnen, wenn die Bedingung 1 für einen Kreis mit dem Radius $r_0 = \frac{a}{2}$ nicht mehr erfüllt ist. Die Kurve steigt dann langsamer. Der berechnete Bereich reicht für praktische Zwecke aus. Für größere y wird die Rechenarbeit zu groß.

II. Formeln für elektrodynamisches und elektrostatisches Telephon.

Das elektrodynamische Telephon.

A. Als Sender.

Allgemeine Behandlung. Das Telephon oder der „Haller“ mit dem Ohmschen Widerstand R_t liege in einem Stromkreis, in dem sich außer einer EMK noch eine Selbstinduktion L_1 und ein Ohmscher Widerstand R_n befindet. Der komplexe Widerstand des Telephonkreises ist dann¹⁾:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_1 &= R_1 + j\omega L_1 = \sqrt{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} \cdot e^{j\zeta_1} = Z_1 \cdot e^{j\zeta_1}, \\ R_1 &= R_n + R_t, \quad Z_1 = \sqrt{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}, \quad \operatorname{tg} \zeta_1 = \frac{\omega L_1}{R_1}. \end{aligned}$$

Die Länge des Leiters im Magnetfeld \mathfrak{S} sei l . Wir erhalten dann für die Kraft k in der Bewegungsgleichung (2) den Ausdruck:

$$k = \frac{\mathfrak{S} \cdot l \cdot J}{10}.$$

Schreiben wir die in der Bewegungsgleichung vorkommenden Größen mit dem Index 1, so erhalten wir:

$$m_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + r_1 \frac{dx}{dt} + \frac{1}{c_1} x = k_1 \quad (6)$$

und nennen 6 die erste Bewegungsgleichung der Membran. Sie liefert uns die Bewegungsvorgänge abhängig von der Stromstärke im Telephon.

Es ist also darin:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= m_m + m_s, \\ r_1 &= r_v + r_s, \\ \frac{1}{c_1} &= \text{Richtkraft}, \\ k_1 &= \frac{\mathfrak{S} \cdot l \cdot J}{10}. \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

Wenn wir die Stromstärke J ersetzen durch die in dem Stromkreise vorhandene EMK, erhalten wir die zweite Bewegungsgleichung der Membran. Sie liefert uns dann die Bewegungsvorgänge abhängig von der EMK. Es gilt:

$$J = \frac{E - E_r}{\mathfrak{Z}_1}. \quad (7)$$

E_r ist die infolge der Bewegung des Leiters im Magnetfeld erzeugte EMK. Es ist:

$$E_r = \mathfrak{S} \cdot l \cdot 10^{-8} \cdot \frac{dx}{dt} \text{ Volt.}$$

¹⁾ Für die elektrischen Größen benutzen wir große, für die mechanischen kleine Buchstaben.

Also:

$$k_1 = \frac{\xi \cdot l}{10} \cdot \frac{E}{\mathfrak{B}_1} - \frac{\xi^2 l^2 \cdot 10^{-9}}{\mathfrak{B}_1} \frac{dx}{dt}.$$

Wir bringen den zweiten Teil auf die linke Seite der Bewegungsgleichung und erhalten:

$$m_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + \left(r_1 + \frac{\xi^2 l^2 \cdot 10^{-9}}{\mathfrak{B}_1} \right) \frac{dx}{dt} + \frac{1}{c_1} x = \frac{\xi \cdot l}{10} \cdot \frac{E}{\mathfrak{B}_1}. \quad (8)$$

Gleichung (8) stellt die zweite Bewegungsgleichung dar. Wir wollen diese noch umformen. Bei sinusförmiger EMK können wir schreiben:

$$\frac{\xi^2 l^2 \cdot 10^{-9}}{\mathfrak{B}_1} \cdot \frac{dx}{dt} = r' \frac{dx}{dt} + \frac{1}{c'} x, \quad (9)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} r' &= \xi^2 l^2 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{R_1}{Z_1^2} \\ \frac{1}{c'} &= \xi^2 l^2 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{\omega^2 L_1}{Z_1^2} \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

ist und erhalten als zweite Bewegungsgleichung:

$$m_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + r_2 \frac{dx}{dt} + \frac{1}{c_2} x = k_2. \quad (10)$$

Hierin ist:

$$\left. \begin{aligned} m_2 &= m_1 = m_m + m_s, \\ r_2 &= r_1 + r' = r_s + r_v + r', \\ \frac{1}{c_2} &= \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c'}, \\ k_2 &= \frac{\xi \cdot l}{10} \cdot \frac{E}{\mathfrak{B}_1}. \end{aligned} \right\} \quad (10a)$$

Setzen wir in der ersten Bewegungsgleichung $J = J_0 e^{j\omega t}$ und in der zweiten $E = E_0 e^{j\omega t}$, so können wir jedesmal für den Weg x ansetzen:

$$x = \xi \cdot e^{j\omega t}, \quad \text{wo} \quad \xi = x_0 e^{j\xi}.$$

Wenn wir dann diesen Wert von x in die Bewegungsgleichung einführen, erhalten wir aus derselben ξ und beim Übergang zu reeller Form die reelle Amplitude x_0 und die Phase ξ . Für die Geschwindigkeit gilt:

$$v = j\omega \xi \quad \text{und} \quad v_0 = \omega x_0$$

und für die Beschleunigung:

$$b = -\omega^2 \xi \quad \text{und} \quad b_0 = \omega^2 x_0,$$

wobei also die Phase von v um 90° , diejenige von b um 180° derjenigen von ξ vorausseilt.

Wir führen folgende Schreibweise ein:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{z}_1 &= r_1 + j \left(\omega m_1 - \frac{1}{\omega c_1} \right) = r_1 + j s_1 = \sqrt{r_1^2 + s_1^2} e^{j\psi_1} = z_1 e^{j\psi_1}, \\ \mathfrak{z}_2 &= \mathfrak{z}_1 + \frac{\xi^2 l^2 \cdot 10^{-9}}{\mathfrak{B}_1} = r_2 + j \left(\omega m_2 - \frac{1}{\omega c_2} \right) = r_2 + j s_2 = z_2 \cdot e^{j\psi_2}, \end{aligned} \right\} \quad (12a)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{Z}_1 &= R_1 + j\omega L_1 = R_1 + jS_1 = Z_1 \cdot e^{j\zeta_1}, \\ \mathfrak{Z}_2 &= \mathfrak{Z}_1 + \frac{\xi^2 l^2 \cdot 10^{-9}}{\mathfrak{z}_1} = R_2 + jS_2 = Z_2 e^{j\zeta_2}, \\ R_2 &= R_1 + \xi^2 l^2 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{r_1}{z_1^2} \quad \text{und} \quad S_2 = \omega L_1 - \xi^2 l^2 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{s_1}{z_1^2}, \end{aligned} \right\} \quad (12b)$$

also:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{Z}_2 \cdot \mathfrak{z}_1 &= \mathfrak{Z}_1 \cdot \mathfrak{z}_2, \\ Z_2 \cdot z_1 &= Z_1 \cdot z_2, \end{aligned} \right\} \quad (12c)$$

und erhalten aus der ersten Bewegungsgleichung:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\mathfrak{S}_2 \cdot l}{10} \cdot \frac{J_0}{j \omega \mathfrak{z}_1} = \frac{k_{10}}{j \omega \mathfrak{z}_1}, \\ v_1 &= \frac{k_{10}}{\mathfrak{z}_1}, \\ \mathfrak{E}_1 &= \mathfrak{Z}_2 \cdot J_0 \end{aligned} \right\} \quad (13a)$$

und aus der zweiten:

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= \frac{k_{20}}{j \omega \mathfrak{z}_2} = \frac{\mathfrak{S}_2 \cdot l}{10 j \omega \mathfrak{z}_2} \cdot \frac{E_0}{\mathfrak{Z}_1}, \\ v_2 &= \frac{k_2}{\mathfrak{z}_2}, \\ \mathfrak{Z}_2 &= \frac{E_0}{\mathfrak{Z}_1}. \end{aligned} \right\} \quad (14a)$$

Aus (13) und (14) sind ohne weiteres die reellen Amplituden und Phasen hinzuschreiben. Es wird:

$$\left. \begin{aligned} x_{10} &= \frac{\mathfrak{S}_2 \cdot l}{10 \omega z_1} \cdot J_0 \\ E_{10} &= Z_2 \cdot J_0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \xi_1 &= -(90^\circ + \psi_1) \\ \varphi_1 &= \zeta_1 + \psi_2 - \psi_1 \end{aligned} \right\} \quad (13b)$$

$$\left. \begin{aligned} x_{20} &= \frac{\mathfrak{S}_2 \cdot l}{10 \omega z_2} \cdot \frac{E_0}{Z_1} = \frac{\mathfrak{S}_2 \cdot l}{10 \omega z_1} \cdot \frac{E_0}{Z_2} \\ J_{20} &= \frac{E_0}{Z_2} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \xi_2 &= -(90^\circ + \psi_2 + \zeta_1) \\ \varphi_2 &= -\varphi_1 \end{aligned} \right\} \quad (14b)$$

x_{10} wird ein Maximum, wenn $s_1 = 0$, also für die Eigenfrequenz

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{m_1 c_1}},$$

x_{20} aber, wenn $s_2 = 0$, also für:

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{m_2 c_2}}.$$

Für die Zwecke der naturgetreuen Lautwiedergabe sind selektive Stellen zu vermeiden. Man muß daher die Eigenfrequenzen entweder höher oder tiefer, als der wiederzugebende Frequenzbereich ist, legen, oder man muß dem Sender so viele Eigenfrequenzen geben, daß deren Wirkung gleichmäßig den ganzen Bereich überdeckt. Der letztere Fall ist theoretisch kaum zu behandeln und praktisch schwer zu verwirklichen. Wegen den bei größerer Strahlungsleistung erforderlichen großen Amplituden kommt für den Lautsprecher nur eine Lage der Eigenfrequenz unterhalb oder an der unteren Grenze des Übertragungsbereiches in Betracht. Diesen Fall für den Lautsprecher werden wir im folgenden fast ausschließlich behandeln. Für den Aufnahmeapparat allerdings kann eine Eigenfrequenz über dem Übertragungsgebiet Vorteile bieten.

Die Energieverhältnisse.

Die gesamte von der EMK gelieferte Energie bekommen wir, wenn wir etwa den Ausdruck berechnen:

$$W = \frac{J_{20} \cdot E_0}{2} \cos \varphi_2.$$

Setzen wir E_0 aus (14a) ein, so wird:

$$W = \frac{J_{20}^2}{2} \cdot R_2,$$

wo:

$$R_2 = R_1 + \xi^2 l^2 \cdot 10^{-9} \frac{r_1}{Z_1^2}$$

ist, also:

$$W = \frac{J_{20}^2}{2} R_1 + \frac{J_{20}^2}{2} \cdot \xi^2 l^2 \cdot 10^{-9} \frac{r_1}{Z_1^2}, \quad (15)$$

davon ist:

$$W_R = \frac{J_{20}^2}{2} \cdot R_1 \quad (15a)$$

der in den elektrischen Widerständen verbrauchte Ohmsche Verlust,

$$W_m = \frac{J_{20}^2}{2} \xi^2 l^2 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{r_1}{z_1^2} \quad (15b)$$

der Verbrauch des mechanischen Systems, beides in Watt.

Denselben Ausdruck für die Energie W erhält man auch, wenn man bildet:

$$\frac{J_0 E_{10}}{2} \cos \varphi_1,$$

nur daß jetzt J_0 an Stelle von J_{20} steht.

Den rein mechanischen Verbrauch W_m kann man auch berechnen aus: $\frac{v_{20}^2}{2} \cdot r_1$ oder $k_{20} \cdot v_{20} \cos(k_2, v_2) \frac{r_1}{r_2}$ in Erg.

Aus (15b) findet man die durch Strahlung verbrauchte Energie

$$W_s = \frac{J_{20}^2}{2} \cdot \xi^2 l^2 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{r_s}{z_1^2}. \quad (15c)$$

Aus (15c) berechnet sich die Druckamplitude p_{20} eines sekundären Schallfeldes in größerer Entfernung vom Lautsprecher bei Annahme kugelförmiger Ausbreitung für alle Wellen zu:

$$p_{20} = q \sqrt{W_s}, \quad (16)$$

wo q eine Konstante ist.

Wir benutzen diese Formel auch für große Membranflächen und kurze Wellen, wo nach dem früheren bereits ein Übergang zur ebenen Welle vorhanden ist, unter der Voraussetzung, daß es das wesentlichste ist, die Energie aus der Membran in das Schallfeld herauszubekommen. Im Bedarfsfalle gibt es Mittel genug, die ebene Welle divergent zu machen. Der Übergang zur ebenen Welle vollzieht sich überdies langsamer als die Annäherung der Funktion $h(y)$ an den Grenzwert 1.

Es wird also:

$$p_{20} = q \cdot \frac{J_{20}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\xi \cdot l}{10} \cdot \frac{\sqrt{r_s}}{z_1}, \quad (16a)$$

wenn W_s in Erg genommen wird.

Die im Haller selber durch Ohmschen Verlust verbrauchte Energie ist:

$$W_t = \frac{J_{20}^2}{2} \cdot R_t.$$

Es wird dann der Wirkungsgrad η des Telephons, d. h. das Verhältnis der Strahlung zur gesamten, dem Telephon selbst zugeführten Energie:

$$\eta = \frac{W_s}{W_s + W_t}. \quad (17)$$

Wenn man nur die Verhältnisse des Hallers für sich studieren will, etwa unter Vernachlässigung von r_v , so ist es am bequemsten, wenn man in den bisherigen allgemeinen Formeln setzt:

$$L_1 = 0, \quad R_n = 0, \quad r_v = 0.$$

Für einen Haller mit tiefer Eigenfrequenz, also wenn das Glied mit $\frac{1}{c_1}$ vernachlässigt werden kann, wird:

$$\mathfrak{Z}_1 = Z_1 = R_t, \quad r' = \frac{\xi^2 l^2 \cdot 10^{-9}}{R_t}, \quad \frac{1}{c'} = 0,$$

$$m_2 = m_1, \quad s_1 = s_2 = \omega m_1,$$

$$r_1 = r_s, \quad r_2 = r_s + r',$$

$$z_1 = \sqrt{r_s^2 + \omega^2 m_1^2}, \quad z_2 = \sqrt{r_2^2 + \omega^2 m_1^2},$$

also:

$$W = \frac{J_{20}^2}{2} \cdot R_t \frac{r_s r_2 + \omega^2 m_1^2}{r_s^2 + \omega^2 m_1^2}, \quad (15d)$$

$$W_s = \frac{J_{20}^2}{2} \cdot R_t \frac{r' \cdot r_s}{r_s^2 + \omega^2 m_1^2} \quad (15e)$$

und der Nutzeffekt:

$$\eta = \frac{r' \cdot r_s}{r_s r_2 + \omega^2 m_1^2}. \quad (17a)$$

Bei Berechnung von Beispielen zeigt sich, daß vielfach gilt:

$$r_s r_2 \ll \omega^2 m_1^2.$$

Wenn dann außerdem die Bedingung 1 erfüllt ist, der Strahlungswiderstand also proportional zu ω^2 ist, wird der Nutzeffekt:

$$\eta = \frac{\rho \pi \xi^2 l^2 \cdot 10^{-9} r_0^4}{2 u \cdot R_t \cdot m_1^2}. \quad (17b)$$

Bei konstantem J_{20} ist jetzt die Strahlung unabhängig von der Frequenz.

B. Als Empfänger oder „Loser“.

Die zu empfangende Welle sei eine ebene Welle, die senkrecht auf die Membran auffällt. Um die Differentialgleichung für die Membran zu erhalten, brauchen wir nur in der zweiten Bewegungsgleichung (10) an Stelle von $k_2 = \frac{\xi l}{10} \cdot \frac{E}{\mathfrak{Z}_1}$ jetzt zu setzen:

$$k_2 = 2f \cdot p_1. \quad (18)$$

Darin ist f die Membranfläche, $p_1 = p_{10} e^{j\omega t}$ der Druck des Schalles in der ebenen, ungestörten Welle. Der Faktor 2 rührt von der Reflexion der Welle an der starren Wand her.

Die Stromstärke J_2 wird: $J_2 = -\frac{E_r}{\mathfrak{Z}_1}$,

und man erhält:

$$x_{20} = \frac{2f \cdot p_{10}}{\omega z_2},$$

$$J_{20} = \frac{\xi \cdot l \cdot 10^{-8} \cdot 2f \cdot p_{10}}{Z_1 \cdot z_2} \text{ Amp.} \quad (19)$$

Unser Interesse gilt natürlich hauptsächlich der Stromstärke:

a) Resonanz. Der Strom wird ein Maximum, wenn $s_2 = 0$ ist, also für die Frequenz ω_2 . Machen wir zunächst eine rein energetische Betrachtung, obwohl

uns diese bei der vorliegenden Aufgabe weniger zum Ziele führt als der später zu behandelnde richtige Anschluß des Empfängers an einen Verstärker über einen Transformator.

Die aufgenommene elektrische Energie W_R wird bei Resonanz, wenn: $L_1 = 0$ und $r_v = 0$ ist:

$$W_R = \frac{J_{20}^2}{2} \cdot R_1 = \frac{\mathfrak{S}^2 l^2 \cdot 10^{-16} \cdot 2 f^2 \cdot p_{10}^2}{R_1 \cdot r_s^2} = 2 f^2 \cdot p_{10}^2 \frac{r'}{(r_s + r')^2} \cdot 10^{-7} \text{ Watt.} \quad (20)$$

Dies wird ein Maximum, wenn man macht $r' = r_s$, also:

$$W_{R_{\max}} = \frac{f^2 \cdot p_{10}^2}{2 r_s} \text{ Erg.} \quad (20 a)$$

Setzen wir für r_s bei Wellen, welche die Bedingung 1 erfüllen, aus (4) den Wert in (20 a) ein, so erhalten wir:

$$W_{R_{\max}} = Q \cdot \frac{\lambda^2}{2\pi}, \quad \text{wo} \quad Q = \frac{p_{10}^2}{2 u \varrho} = \frac{u \varrho}{2} \cdot v_{10}^2 \quad (20 b)$$

ist. Es ist dies derselbe Wert, den Herr Lichte l. c. angibt.

Für den Strahler 0^{ter} Ordnung, bei dem die erregende Kraft nur $f \cdot p$ und r_s halb so groß ist, wird $W_{R_{\max}}$ nur die Hälfte. Ebenfalls nur die Hälfte bekommt man, wenn die Membran nach beiden Seiten strahlt. Die erregende Kraft bleibt dann gleich, r_s aber verdoppelt sich. Für sehr große y wird: $r_s = u \varrho \pi r_0^2$, also:

$$W_{R_{\max}} = f \cdot \frac{p_{10}^2}{2 u \varrho} = f \cdot Q. \quad (20 c)$$

Es wird dann soviel Energie elektrisch verbraucht, wie auf die Fläche auffällt.

Wie früher soll Resonanz innerhalb des Übertragungsbereiches ausgeschlossen werden. Wir legen also die Eigenfrequenz des Empfängers tiefer oder höher als den Übertragungsbereich.

b) Tiefe Eigenfrequenz. $\frac{1}{c_2} = 0$, $s_2 = \omega m_2$:

$$J_{20} = \frac{\mathfrak{S} \cdot l \cdot 10^{-8} \cdot 2 f \cdot p_{10}}{Z_1 \cdot \sqrt{r_s^2 + \omega^2 m_2^2}}. \quad (21)$$

Wenn $r_s^2 \gg \omega^2 m_2^2$ ist, gilt für die maximale Energieaufnahme wieder dasselbe wie unter a). Da aber meist umgekehrt $\omega^2 m_2^2 \gg r_s^2$ ist, wird dann:

$$J_{20} = \frac{\mathfrak{S} \cdot l \cdot 10^{-8} \cdot 2 f \cdot p_{10}}{Z_1 \cdot \omega m_2}. \quad (21 a)$$

c) Hohe Eigenfrequenz. $(\omega m_2)^2 \ll \left(\frac{1}{\omega c_2}\right)^2$, $s_2 = -\frac{1}{\omega c_2}$:

$$J_{20} = \frac{\mathfrak{S} \cdot l \cdot 10^{-8} \cdot 2 f \cdot p_{10}}{Z_1 \cdot \sqrt{r_s^2 + \frac{1}{\omega^2 c_2^2}}}. \quad (22)$$

Da wohl immer gilt: $r_s^2 \ll \frac{1}{\omega^2 c_2^2}$, wird:

$$J_{20} = \frac{\mathfrak{S} \cdot l \cdot 10^{-8} \cdot 2 f \cdot p_{10} \cdot \omega c_2}{Z_1}. \quad (22 a)$$

Die aufgenommene Energie wird jetzt immer viel kleiner als die maximal mögliche.

C. Anschluß des elektrodynamischen Telephons an Übertrager.

a) Empfangsseite.

Beim elektrodynamischen Telephon ist es notwendig, um zu günstiger Energieausnützung zu gelangen, den Telephonstrom auf große Spannung zu transformieren. Da es fast immer nur im Zusammenhang mit einem Verstärker gebraucht wird, besteht die Aufgabe, mit Hilfe des Telephonstromes eine möglichst hohe Gitterspannung E_{g0} am ersten Gitter des Verstärkers zu erzeugen. Um Selektivitäten durch den Transformator zu vermeiden, sei die Eigenfrequenz des Transformators zusammen mit der kleinen angeschlossenen Kapazität wesentlich über dem Empfangsbereich. Der Eingangstransformator, in dessen Primärspule das Telephon sich befindet, ist dann sekundär schwach kapazitiv belastet. Diese Vorschrift bedeutet einen bewußten Verzicht auf möglichst weitgehende Energieausnützung zugunsten klanggetreuer Übertragung. Für den Transformator setzen wir geringsten Eigenverlust voraus. Außerdem kann es nur vorteilhaft sein, wenn seine Streuung möglichst klein ist. Unter diesen Bedingungen ist der Strom auf der Primärseite des Transformators, in welcher das Telephon liegt, gegeben durch die Gleichung (21). Darin ist dann L_1 die Selbstinduktion auf der Primärseite des Transformators, wenn sekundär offen, $R_1 = R_n + R_t$ der Ohmsche Widerstand.

Die Spannungsamplitude E_{g0} am ersten Gitter des Verstärkers wird nunmehr:

$$E_{g0} = J_{20} \cdot \omega L_{12}, \quad (23)$$

wo L_{12} die gegenseitige Selbstinduktion zwischen Primär- und Sekundärseite ist. Für den streuungslosen Transformator gilt, wenn L_g die sekundäre Selbstinduktion ist und n das Übersetzungsverhältnis: $L_{12} = nL_1$, $L_g = n^2L_1$.

b) Sendeseite.

Im Ausgangstransformator liegt die Primärseite des Transformators im Anodenkreis der letzten Verstärkerröhre. Sie hat große Windungszahl. Ihre Selbstinduktion bei offener Sekundärseite sei L_{a1} , der Ohmsche Widerstand zusammen mit dem Röhrenwiderstand R_{a1} . Die Sekundärseite mit der Selbstinduktion L_1 und dem Ohmschen Widerstand $R_1 = R_n + R_t$ ist über den Lautsprecher geschlossen. Der komplexe Widerstand der Sekundärseite wird dann nach Formel (12):

$$\mathfrak{Z}_2 = \frac{\mathfrak{z}_2}{\mathfrak{z}_1} \cdot \mathfrak{Z}_1 = R_2 + jS_2.$$

Sei wieder L_{12} die gegenseitige Selbstinduktion und sei $E_{a0} = \frac{E_{ga0}}{D}$, wo E_{ga0} die Gitterspannung und D der Durchgriff ist, die Amplitude der Ersatz-EMK der letzten Röhre des Verstärkers, so gilt für die Stromamplitude J_{a0} auf der Primärseite des Ausgangstransformators, also im Anodenkreise, nach der gewöhnlichen Transformatorgleichung:

$$J_{a0} = \frac{E_{a0}}{Z_{a2}}, \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_{a2} &= \sqrt{R_{a2}^2 + S_{a2}^2}, \\ R_{a2} &= R_{a1} + a_{12}^2 R_2, \\ S_{a2} &= \omega L_{a1} - a_{12}^2 \cdot S_2, \\ a_{12}^2 &= \frac{\omega^2 L_{12}^2}{Z_2^2}. \end{aligned} \right\} \quad (24a)$$

Für die Stromamplitude J_{20} im Lautsprecher erhalten wir dann

$$J_{20} = \frac{J_{a0} \omega L_{12}}{Z_2}. \quad (25)$$

An Stelle von E_0 in (14b) steht jetzt der Ausdruck $J_{a0} \cdot \omega L_{12}$. Für einen streuungslosen Transformator gilt wieder das Frühere. L_{a2} ist immer kleiner als L_{a1} und kann unter Umständen verschwinden.

c) Eingang und Ausgang zusammen.

Wenn der Verstärkungsgrad nicht unabhängig von der Frequenz ist, wollen wir die Beziehung zwischen der Spannung E_{g0} am ersten Gitter und E_{a0} durch eine Funktion $f(\omega)$ ausdrücken, die man als empirisch bekannt annehmen darf. Es wird dann:

$$E_{a0} = E_{g0} \cdot f(\omega).$$

Die Beziehung zwischen der Schallamplitude p_{20} eines sekundären Schallfeldes zu derjenigen p_{10} eines primären ergibt sich durch Anwendung von Formel (16a). Das darin vorkommende J_{20} ist aus Gleichung (25) einzusetzen.

Wenn wir alles, was zur Empfangsseite gehört, mit $f_1(\omega)$, was zur Sendeseite gehört, mit $f_2(\omega)$ bezeichnen, wird:

$$p_{20} = q \cdot p_{10} \cdot f_1(\omega) \cdot f(\omega) \cdot f_2(\omega), \quad (27)$$

$$f_1(\omega) = 2 f \cdot \xi \cdot l \cdot 10^{-8} \frac{\omega L_{12}}{Z_1 \cdot z_2}, \quad (27a)$$

$$f_2(\omega) = \frac{\xi \cdot l}{10 \sqrt{2}} \frac{\sqrt{r_s}}{z_2} \cdot \frac{\omega L_{12}}{Z_1 \cdot Z_{a2}}. \quad (27b)$$

Damit ein primäres Schallfeld klanggetreu sekundär abgebildet wird, muß das Produkt der 3 Funktionen:

$$f_1(\omega) \cdot f(\omega) \cdot f_2(\omega)$$

von ω unabhängig sein.

Die nähere Diskussion dieser Formel und die Möglichkeiten, das Ziel zu erreichen, werden wir erst später im III. Teil im Zusammenhang mit praktischen Beispielen behandeln.

Das elektrostatische Telephon.

A. Als Sender.

Allgemeine Lösung.

Es sei die Schaltung der Abb. 3 vorausgesetzt. Die Membran von der Fläche f befindet sich zwischen durchlöcherten Kondensatorplatten, in gleichem Abstand a . Einer konstanten Gleichspannung V_0 werde die Wechselspannung $\pm E$ überlagert. In jedem der beiden Stromkreise ist eine Selbstinduktion L_1 und ein Ohmscher Widerstand R_1 eingeschaltet.

Es sei $E = E_0 e^{j\omega t}$, dann läßt sich die elektrische Spannung zwischen der Membran und den beiden Kondensatorplatten ausdrücken durch:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 + V_t, \\ V_2 &= V_0 - V_t, \end{aligned}$$

wo $V_t = \mathfrak{R}_t e^{j\omega t}$ ist.

Die Kraft k_1 , mit welcher die Membran nach der einen Seite gezogen wird, ist:

$$k_1 = \frac{f \cdot V_1^2}{8 \pi (a - x)^2},$$

die nach der anderen Seite:

$$k_2 = \frac{f \cdot V_2^2}{8 \pi (a + x)^2}.$$

Es sei:

$$x^2 \ll a^2 \quad \text{und} \quad V_t^2 \ll V_0^2,$$

dann wird:

$$k_1 = \frac{f}{8 \pi a^2} \left(1 + 2 \frac{x}{a}\right) (V_0 + V_t)^2,$$

$$k_2 = \frac{f}{8 \pi a^2} \left(1 - 2 \frac{x}{a}\right) (V_0 - V_t)^2.$$

Wenn wir schreiben $C_1 = \frac{f}{4 \pi a}$, wird die Kraft, welche für die Bewegung der Membran in Betracht kommt:

$$k = k_1 - k_2 = 2 C_1 \frac{V_0}{a} \cdot V_t + 2 C_1 \frac{V_0^2}{a^2} x. \quad (28)$$

Es gilt nun, die Spannungsschwankungen V_t am Telefon zu bestimmen.

Es sei:

$$\mathfrak{Z}_l = R_1 + j \omega L_1 = Z_l \cdot e^{j \zeta_l},$$

so wird:

$$J \mathfrak{Z}_l + V_t = E,$$

$$J = \frac{E - V_t}{\mathfrak{Z}_l}. \quad (29)$$

Andererseits gilt:

$$J = C \frac{dV_1}{dt} + V_1 \frac{dC}{dt}. \quad (30)$$

Unter den gemachten Voraussetzungen wird dies:

$$J = j \omega C_1 \left(V_t + \frac{V_0}{a} x \right). \quad (30 a)$$

Dies formt sich unter Verwendung von Gleichung (29), wenn wir schreiben:

$$\mathfrak{Z}_1 = R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) = R_1 + j S_1 = \sqrt{R_1^2 + S_1^2} e^{j \zeta_1} = Z_1 e^{j \zeta_1}, \quad (31)$$

um zu:

$$V_t = \frac{E}{j \omega C_1 \mathfrak{Z}_1} - \frac{\mathfrak{Z}_l}{\mathfrak{Z}_1} \cdot \frac{V_0}{a} x \quad (32)$$

und damit wird:

$$k_1 = 2 \frac{V_0}{a j \omega} \cdot \frac{E}{\mathfrak{Z}_1} + 2 \frac{V_0^2}{a^2 j \omega \mathfrak{Z}_1} x. \quad (28 a)$$

Setzen wir dies in die erste Bewegungsgleichung (6) ein und bringen das Glied mit x nach der linken Seite, so erhalten wir als zweite Bewegungsgleichung für die elektrostatische Telefonmembran:

$$m_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + r_1 \frac{dx}{dt} + \left(\frac{1}{c_1} - 2 \frac{V_0^2}{a^2 j \omega \mathfrak{Z}_1} \right) x = 2 \frac{V_0}{a j \omega} \cdot \frac{E}{\mathfrak{Z}_1} \quad (33 a)$$

und wenn wir die imaginären Koeffizienten wie früher wegschaffen:

$$m_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + r_2 \frac{dx}{dt} + \frac{1}{c_2} x = k_2, \quad (33 b)$$

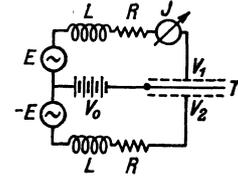


Abb. 3.

wo

$$\left. \begin{aligned} m_2 &= m_1 = m_m + m_s, \\ r_2 &= r_1 + r' = r_s + r_v + r', \\ \frac{1}{c_2} &= \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c'}, \\ k_2 &= 2 \frac{V_0}{a j \omega} \cdot \frac{E}{\mathfrak{Z}_1}, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} r' &= 2 \frac{V_0^2}{a^2 \omega^2} \cdot \frac{R_1}{Z_1^2}, \\ \frac{1}{c'} &= 2 \frac{V_0^2}{a^2 \omega} \cdot \frac{S_1}{Z_1^2}. \end{aligned} \quad (33 c)$$

Die elektrische Rückwirkung auf die Membran besteht hier außer in der Zunahme des Widerstandes, da S_1 meistens negativ ist, in einer Verkleinerung der Direktionskraft. Diese kann sogar negativ werden. Die Membran legt sich dann an eine der beiden Kondensatorplatten an.

Die allgemeine Lösung für ξ bzw. x_0 usw. ist nach dem Früheren gegeben.

Wir benutzen wieder folgende Bezeichnungen:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= r_1 + j \left(\omega m_1 - \frac{1}{\omega c_1} \right) = r_1 + j s_1 = z_1 e^{j \psi_1}, \\ \delta_2 &= \delta_1 + 2 \frac{V_0^2}{a^2 \omega^2 \mathfrak{Z}_1} = r_2 + j \left(\omega m_2 - \frac{1}{\omega c_2} \right) = r_2 + j s_2 = z_2 e^{j \psi_2}, \end{aligned} \right\} \quad (34 a)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{Z}_1 &= R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) = R_1 + j S_1 = Z_1 e^{j \zeta_1}, \\ \mathfrak{Z}_2 &= \mathfrak{Z}_1 + 2 \frac{V_0^2}{a^2 \omega^2 \delta_1} = R_2 + j S_2 = Z_2 e^{j \zeta_2}, \\ R_2 &= R_1 + 2 \frac{V_0^2}{a^2 \omega^2} \cdot \frac{r_1}{z_1^2} \quad \text{und} \quad S_2 = S_1 - 2 \frac{V_0^2}{a^2 \omega^2} \cdot \frac{s_1}{z_1^2}, \end{aligned} \right\} \quad (34 b)$$

also:

$$\mathfrak{Z}_2 \delta_1 = \mathfrak{Z}_1 \delta_2 \quad \text{und} \quad Z_2 z_1 = Z_1 z_2,$$

ferner:

$$\mathfrak{Z}_{II} = \mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_1 = \frac{1}{j \omega C_1} + 2 \frac{V_0^2}{a^2 \omega^2 \delta_1} = R_{II} + j S_{II} = Z_{II} e^{j \zeta_{II}}. \quad (34 c)$$

Damit bringen wir die Lösung der zweiten Schwingungsgleichung auf folgende Form:

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= -2 \frac{V_0}{a \omega^2 \delta_2} \cdot \frac{E_0}{\mathfrak{Z}_1} = -2 \frac{V_0}{a \omega^2 \delta_1} \cdot \frac{E_0}{\mathfrak{Z}_2}, \\ J_2 &= \frac{E_0}{\mathfrak{Z}_2}, \\ \mathfrak{Z}_t &= \frac{\mathfrak{Z}_{II}}{\mathfrak{Z}_2} \cdot E_0. \end{aligned} \right\} \quad (35 a)$$

Für die reellen Amplituden erhalten wir daher:

$$\left. \begin{aligned} x_{20} &= 2 \frac{V_0}{a \omega^2 z_2} \cdot \frac{E_0}{Z_1} = 2 \frac{V_0}{a \omega^2 z_1} \cdot \frac{E_0}{Z_2}, \\ J_{20} &= \frac{E_0}{Z_2}, \\ V_{t0} &= \frac{Z_{II}}{Z_2} \cdot E_0 \end{aligned} \right\} \quad (35 b)$$

und für die Energie, die beide EMK liefern:

$$W = J_{20}^2 \cdot R_2 = J_{20}^2 \left(R_1 + 2 \frac{V_0^2}{a^2 \omega^2} \cdot \frac{r_1}{z_1^2} \right). \quad (35 c)$$

Die Strahlung ist dann:

$$W_s = 2 \frac{V_0^2}{a^2 \omega^2} \cdot \frac{r_s}{z_1^2} \cdot J_{z_1}^2 = 2 \frac{V_0^2}{a^2 \omega^2} \cdot \frac{r_s}{z_1^2} \frac{E_0^2}{Z_2^2} = 2 \frac{V_0^2}{a^2 \omega^2} \cdot \frac{r_s}{z_1^2} \cdot \frac{V_{t0}^2}{Z_{II}^2} = 2 C_1^2 \frac{V_0^2 r_s}{a^2 z_{II}^2} \cdot V_{t0}^2. \quad (35 d)$$

Es ist dies natürlich derselbe Ausdruck, den wir auch nach der Formel $W_s = \frac{v_{z0}^2}{2} \cdot r_s$ usw. erhalten können.

B. Anschluß des elektrostatischen Telefons an den Verstärker.

Es soll hier gleich der Anschluß des Telefons an den Verstärker behandelt werden. Der Anschluß erfolge einmal mittels eines Transformators in der Schaltung der Abb. 4. Die Formeln lauten wieder so wie beim elektrodynamischen Telefon, nur daß jetzt Z_2 einen anderen Wert hat. Es wird:

$$J_{a0} = \frac{E_{a0}}{Z_{a2}}, \quad (36 a)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_{a2} &= \sqrt{R_{a2}^2 + S_{a2}^2}, \\ R_{a2} &= R_{a1} + a_{12}^2 R_2, \\ S_{a2} &= \omega L_{a1} - a_{12}^2 \cdot S_2, \\ a_{12}^2 &= \frac{\omega^2 L_{12}^2}{Z_2^2}. \end{aligned} \right\} \quad (36 b)$$

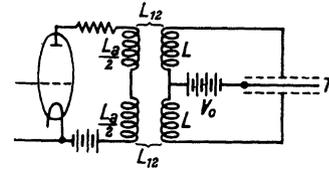


Abb. 4. Anschluß an den Verstärker.

Ferner:

$$E_0 = \omega L_{12} J_{a0}$$

und

$$W_s = 2 \frac{V_0^2}{a^2 \omega^2} \cdot \frac{r_s}{z_1^2} \cdot \frac{\omega^2 L_{12}^2}{Z_2^2} \cdot \frac{E_{a0}^2}{Z_{a2}^2}. \quad (37 a)$$

Wie früher die Funktion $f_2(\omega)$, führen wir jetzt die Hallerfunktion $\varphi_2(\omega)$ ein. Sie wird:

$$\varphi_2(\omega) = \sqrt{2} \cdot \frac{V_0}{a \omega} \cdot \frac{\sqrt{r_s}}{z_1} \cdot \frac{\omega L_{12}}{Z_2 \cdot Z_{a2}} \quad (37 b)$$

und wir können, etwa zusammen mit einem elektrodynamischen Empfänger, erhalten:

$$p_{20} = q \cdot p_{10} \cdot f_1(\omega) f(\omega) \cdot \varphi_2(\omega).$$

Nunmehr muß das Produkt $f_1(\omega) \cdot f(\omega) \cdot \varphi_2(\omega)$ von ω unabhängig sein.

Eine zweite Anschlußmöglichkeit zeigt Abb. 5. Die vorige Schaltung soll Stromschaltung, die jetzige Spannungsschaltung genannt werden.

In der Abb. 5 sind R_a und R Ohmsche Widerstände, C_s Sperrkondensatoren. Es sei R sehr groß gegen R_a . Für die Spannung V_{t0} am Telefon ergibt dies:

$$V_{t0} = \frac{Z_{II}}{Z_3} \cdot E_{a0}. \quad (38)$$

Z_{II} ist identisch mit demjenigen von Gleichung (34a). Man erhält es aus der allgemeinen Gleichung Z_2 , wenn man darin L_1 und R_1 gleich 0 setzt.

Ferner:

$$\left. \begin{aligned} Z_3 &= R_3 + j S_3 = Z_3 e^{j \delta_3}, \\ R_3 &= R_i + 2 R_{II} \left(1 + \frac{R_i}{R_a}\right), \\ S_3 &= 2 S_{II} \left(1 + \frac{R_i}{R_a}\right). \end{aligned} \right\} \quad (38 a)$$

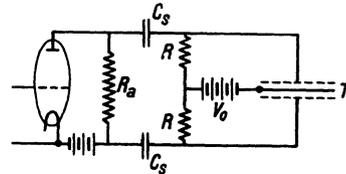


Abb. 5. Elektrostatisches Telefon, Spannungsschaltung.

Aus V_{t0} ergibt sich nach Gleichung (34c):

$$W_s = 2 \frac{V_0^2}{a^2 \omega^2} \cdot \frac{r_s}{z_1^2} \cdot \frac{E_{a0}^2}{Z_3^2}$$

und für die Hallerfunktion $\varphi_{II}(\omega)$

$$\varphi_{II}(\omega) = \sqrt{2} \cdot \frac{V_0}{a \omega} \cdot \frac{\sqrt{r_s}}{z_1} \cdot \frac{1}{Z_3}. \quad (39)$$

C. Das elektrostatische Telefon als Loser.

Die allgemeine Differentialgleichung für den Empfänger ist dieselbe wie Gleichung (33). Es ist darin nur zu setzen:

$$k_2 = 2f \cdot p_1.$$

Wir erhalten daher:

$$x_{20} = \frac{2f p_{10}}{\omega z_2},$$

$$J_{20} = \frac{2f p_{10}}{a \omega z_2} \cdot \frac{V_0}{Z_1} = \frac{2f p_{10}}{a \omega z_1} \cdot \frac{V_0}{Z_2}.$$

Bestimmen wir zunächst wieder die maximal mögliche Energie, die elektrisch aufgenommen werden kann, so finden wir, wenn: $s_2 = 0$, $S = 0$, $r_v = 0$ ist:

$$J_{20} = \frac{2f p_{10}}{a \omega (r_s + r')} \cdot \frac{V_0}{R_1}$$

$$W_R = J_{20}^2 \cdot R_1 = \frac{2f^2 p_{10}^2}{(r_s + r')^2} \cdot \frac{2V_0^2}{a^2 \omega^2 R_1} = \frac{2f^2 \cdot p_{10}^2 \cdot r'}{(r_s + r')^2}$$

und für $r_s = r'$:

$$W_{R \max} = \frac{f^2 \cdot p_{10}^2}{2r_s}$$

in Übereinstimmung mit (20a).

Auf diese maximal mögliche Energieausbeute müssen wir wieder verzichten, da Selektivitäten zu vermeiden sind.

Der Anschluß des elektrostatischen Losers an das Gitter der ersten Verstärkeröhre kann wieder in Strom- oder Spannungsschaltung erfolgen.

I. Stromschaltung.

Wir benutzen die Schaltung der Abb. 4 und brauchen nur die Verbindung, die in Abb. 4 zur Anode geht, unter Weglassung der Anodenbatterie zum Gitter der ersten Röhre zu führen.

Die elektrische Eigenfrequenz, die durch die Kapazität des Telefons und die Selbstinduktion des Transformators gegeben ist, liege wieder oberhalb des Übertragungsbereiches. Dann wird in Gleichung (40b): $Z_1 = \frac{1}{\omega C_1}$ und daher meist nahezu: $z_2 = z_1$, also:

$$J_{20} = C_1 \frac{V_0}{a} \frac{2f \cdot p_{10}}{z_2}. \quad (41)$$

Die Spannung E_{g0} am Gitter wird:

$$E_{g0} = p_{10} \cdot \varphi_1(\omega),$$

$$\varphi_1(\omega) = 2C_1 \frac{V_0}{a} \cdot 2f \frac{\omega L_{12}}{z_2}. \quad (42)$$

Wir können das elektrostatische Telephon als Empfänger mit einem elektrodynamischen oder elektrostatischen Lautsprecher kombinieren und erhalten als Bedingung klanggetreuer Wiedergabe die Frequenzunabhängigkeit der Ausdrücke:

$$\varphi_1(\omega) \cdot f(\omega) f_2(\omega) \quad \text{und} \quad \varphi_1(\omega) \cdot f(\omega) \cdot \varphi_2(\omega).$$

In der Gleichung (42) ist für die Aufnahmemembran noch allgemein $Z_2 = \sqrt{r_2^2 + s_2^2}$ geschrieben worden. Wir wollen nun die Abstimmung einmal unterhalb, dann über den Empfangsbereich legen.

a) Niedere Eigenfrequenz.

Es wird in (42): $s_2 = \omega m_2$,

$$\text{also} \quad \varphi_1(\omega) = 2 C_1 \frac{V_0}{a} \cdot 2f \frac{\omega L_{12}}{\sqrt{r_2^2 + \omega^2 m_2^2}}, \quad (42a)$$

wenn $r_2^2 \ll \omega^2 m_2^2$, wird $\varphi_1(\omega)$ unabhängig von ω .

b) Hohe Eigenfrequenz.

Es wird $z_2 = \frac{1}{\omega c_2}$,

$$\varphi_1(\omega) = 2 C_1 \frac{V_0}{a} \cdot 2f \cdot L_{12} \cdot c_2 \cdot \omega^2, \quad (42b)$$

also proportional zum Quadrat von ω .

II. Spannungsschaltung.

Für die Spannungsschaltung des Empfängers gilt wieder Abb. 5 mit Vertauschung von Anode und Gitter. Die Spannungsschwankungen am Telephon werden jetzt dem Gitter direkt zugeführt. Sie sind doppelt so groß wie auf jeder Telephoneseite. R_a muß entsprechend groß genommen werden.

Die Theorie für diese Schaltung ist sehr einfach. Da wegen der hohen Widerstände R der Strom zu Null wird, folgt aus (30a):

$$V_t = -\frac{V_0}{a} \cdot x.$$

Setzt man dies in (28) ein, so wird: $k = 0$.

Die elektrische Rückwirkung auf die Bewegung der Membran verschwindet also, und wir kommen mit der ersten Bewegungsgleichung aus, in der $k_1 = 2f p_1$.

a) Niedere Eigenfrequenz.

$$\text{Es wird:} \quad x_{10} = \frac{2f \cdot p_{10}}{\omega z_1}. \quad (43)$$

$$E_{g0} = p_{10} \cdot \varphi_1(\omega) \quad \text{und} \quad \varphi_1(\omega) = 2 \frac{V_0}{a} \cdot \frac{2f}{\omega \sqrt{r_1^2 + \omega^2 m_1^2}}. \quad (43a)$$

Lange Wellen werden stark bevorzugt.

b) Hohe Eigenfrequenz.

$$\text{Es wird:} \quad x_{10} = 2f p_{10} \cdot c_1, \quad (44)$$

$$E_{g0} = p_{10} \varphi_1(\omega) \quad \text{und} \quad \varphi_1(\omega) = 2 \frac{V_0}{a} \cdot 2f \cdot c_1, \quad (44a)$$

also unabhängig von ω .

Es sei bemerkt, daß die hohe Eigenfrequenz solcher Membranen am bequemsten durch entsprechend kleines Luftkissen erreicht wird.

Das elektrostatische Telephon mit Modulationen einer Trägerfrequenz.

Sei:

$$V_1 = V_0(1 + B \cos \omega t) \cos \nu t,$$

$$V_2 = V_0(1 - B \cos \omega t) \cos \nu t,$$

so erhalten wir, ähnlich wie früher:

$$k = k_1 - k_2 = C_1 \frac{V_0}{a} \cdot V_t + C_1 \frac{V_0^2}{a^2} \cdot x,$$

$$V_t = V_0 B e^{j\omega t},$$

also:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + r_1 \frac{dx}{dt} + \left(\frac{1}{c_1} - C_1 \frac{V_0^2}{a^2} \right) x = C_1 \frac{V_0}{a} \cdot V_t$$

und die bisherigen Resultate über den elektrostatischen Lautsprecher gelten unverändert, wenn wir die Spannungen jetzt um $\sqrt{2}$ -mal größer machen.

Die Methode hat gewisse Vorteile in bezug auf die Möglichkeit klanggetreuer Wiedergabe, braucht aber ganz erheblich mehr Energieaufwand als die frühere.

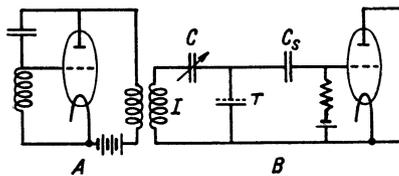


Abb. 6.

Zur Herstellung der vorausgesetzten Spannungen V_1 und V_2 können Schaltungen wie die der Abb. 6 verwandt werden.

A ist ein Röhrengenerator, B der Eingang eines Verstärkers, I ein Schwingungskreis, in dem die eine Hälfte des elektrostatischen Empfängstelephons liegt in Serie mit einem Abstimmungskondensator C .

I ist etwas verstimmt gegen die Sendefrequenz von A , so daß diese etwa an der steilsten Stelle der Resonanzkurve arbeitet. Die Spannungsschwankungen am Gitter der ersten Verstärkerröhre erfolgen dann in der modulierten Hochfrequenz und liefern die Spannung V_1 . Symmetrisch zu B kann die zweite Seite des Telephons verwandt werden und liefert die Spannung V_2 .

Die Empfindlichkeit des gezeichneten Teiles der Schaltung kommt, wenn in A ein Siemenssches 110er Rohr verwandt wird, etwa der eines Mikrophons gleich.

Eine andere Schaltung zur Erzielung der beiden Spannungen bietet die Frequenzmodulation, die im folgenden behandelt wird.

Empfänger mit Frequenzmodulation.

Drahtlose Telephonie mit Frequenzmodulation statt Modulation der Amplitude, findet sich zwar häufig in der Patentliteratur, scheint aber in der Praxis keinen Eingang gefunden zu haben. Ganz mit Unrecht. Denn sie bietet gegenüber der Modulation der Amplitude mancherlei Vorzüge. Wir behandeln sie hier nur im Zusammenhang mit dem Aufnahmeapparat für den Lautsprecher.

Von den vielen Schaltungsmöglichkeiten wollen wir eine der einfachsten behandeln. Ein elektrostatisches Telephon als Empfänger liege als Kapazität in einem Schwingungskreise, etwa dem Steuerkreis einer Röhre in Selbsterregung. Bei auffallenden akustischen Wellen ändert sich dann die Wellenlänge der Schwingungen proportional zu den Amplituden der Empfängermembran, solange diese Amplituden klein genug sind. Wenn man diese modulierte Hochfrequenzwelle auf einen Resonanzkreis an der steilsten Stelle der Resonanzkurve wirken läßt, erhält man in diesem Amplituden, die im Tempo der Schallwellen moduliert sind. Ein Gleichrichter liefert wieder die Sprachfrequenz. An welcher Stelle der Resonanzkreis sitzt, ist gleich-

gültig. Man kann die ganze Verstärkung in der frequenzmodulierten Hochfrequenz vornehmen und erst etwa vor der letzten Röhre, die als Gleichrichter verwandt wird, den Schwingungskreis einschalten¹⁾. Die Verstärkung ist dann vollständig unabhängig von der Sprachfrequenz.

Benutzt man zwei Kreise, den einen an der aufsteigenden, den anderen am absteigenden Ast der Resonanzkurve, so erhalten wir die beiden Spannungen V_1 und V_2 des vorigen Paragraphen.

Die elektrische Spannung, die in der angegebenen Schaltung am Telephon liegt, braucht nur von der Größenordnung 20 Volt zu sein (110er Rohr). Die elektrostatischen Kräfte haben dann keinen Einfluß auf die Membranbewegung, da sie zu klein sind. Es gelten daher für die Membranamplitude A_{10} die Ausdrücke (43) und (44), je nachdem wir tiefe oder hohe Eigenfrequenz benutzen. In Betracht kommt fast nur hohe Eigenfrequenz, also Gleichung (44).

Sei ν die Kreisfrequenz des Trägerstromes, ω die Kreisfrequenz der Niederfrequenz, so wird die Theorie einfach, wenn ν sehr groß gegen ω ist.

Sie sei hier in Kürze gegeben.

Es sei $C = C_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right)$ die Kapazität des elektrostatischen Telephons bei den Membranbewegungen x ; dann wird die Frequenz ν :

$$\nu = \left(1 + \frac{x}{2a}\right) \nu_0,$$

wenn ν_0 die Ruhfrequenz ist.

Also wenn:
wird:

$$x = A_{10} \cos \omega t,$$

$$\nu = (1 + B \cos \omega t) \nu_0,$$

$$B = \frac{A_{10}}{2a}.$$

Die auf den Resonanzkreis wirkende EMK wird:

$$E = E_0 \cos (1 + B \cos \omega t) \nu_0 t.$$

Wenn ν_0 sehr groß gegen ω ist, können wir für die Zeiten, in denen nahezu $\cos \omega t = \pm 1$ ist, ν während einer großen Anzahl von Perioden als konstant betrachten; es wird dann für diese Zeit: $\nu = (1 \pm B) \nu_0$.

Der Resonanzkreis hat während dieser Anzahl Perioden, falls seine Dämpfung nicht zu klein ist, Zeit, sich auf die zu den Wellen $\nu = (1 \pm B) \nu_0$ gehörigen stationären Werte einzustellen. Während einer Periode von ω pendelt der Strom von diesen Werten hin und her.

Sei J_0 die Stromamplitude des Resonanzkreises, so lautet die Formel für die stationäre Resonanzkurve:

$$J_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(\nu L - \frac{1}{\nu C}\right)^2}} = \frac{E_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + U^2}}, \quad (45)$$

wo

$$U = \left(\nu L - \frac{1}{\nu C}\right) \frac{1}{R} = \left(\frac{\nu}{\nu_r} - \frac{\nu_r}{\nu}\right) \frac{1}{D} = \frac{2\pi x}{D},$$

$$\nu_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad D = \frac{R}{\nu_r L}, \quad x = \frac{\nu - \nu_r}{\nu_r}$$

¹⁾ Das Gitter des Gleichrichters muß dabei durch die unmodulierte Welle so weit angesteuert werden, daß man etwa in halber Höhe der Kennlinie arbeitet; nur dies verbürgt amplitudentreue Gleichrichtung. Dieser Umstand wird bei Rundfunkapparaten viel zu wenig beachtet.

ist. Bei Erregung mit einer EMK von der Form:

$$E = E_0 \cos(1 + B \cos \omega t) \nu_0 t$$

erhalten wir unter den gemachten Voraussetzungen die modulierte Resonanzkurve:

$$J_{(0\nu)} = \frac{E_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + (U_0 + \beta \cos \omega t)^2}}, \quad (45a)$$

wo

$$\beta = 2 \frac{B}{D} = \frac{A_{10}}{a \cdot D}$$

ist. Für die Amplitude der Niederfrequenz $J_{(0\omega)}$ ergibt sich:

$$J_{(0\omega)} = k \frac{E_0}{R} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + (U_0 - \beta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + (U_0 + \beta)^2}} \right\}. \quad (46)$$

U_0 gibt den Punkt der Resonanzkurve für den Ruhestrom an. Über seinen günstigsten Wert orientiert die Kurve des Differentialquotienten der Resonanzkurve nach U .

Diese wird:

$$\frac{U}{(1 + U)^{\frac{3}{2}}}.$$

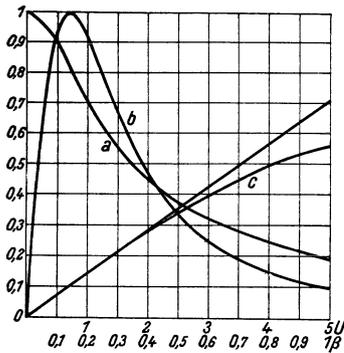


Abb. 7. Zur Modulation der Frequenz.

Sie ist in Abb. 7 *b* zusammen mit der zugehörigen Resonanzkurve *a* gezeichnet (die andere Hälfte links vom Nullpunkt ist spiegelbildlich). Die Höhe im Maximum ist auch für die Kurve des Differentialquotienten gleich 1 gesetzt. Es muß beachtet werden, daß letztere bei großer Verstimmung wie ein zweifaches System abfällt.

Für die Differenzkurve mit endlicher Größe von β und damit für die Amplitude der Niederfrequenz ist am günstigsten der Ruhepunkt:

$$U_0 = 1.$$

Für diesen Ruhepunkt bleibt die Differenzkurve nämlich am längsten linear. Für ihn ist nach der Gleichung (46) die Kurve *C* (Abb. 7) berechnet, deren Abszissen die β -Werte sind. Es ist demnach fast für den ganzen Bereich von $\beta = 0$ bis $\beta = 1$ die Linearität annähernd gewahrt. Größere Amplituden, als dem Wert $\beta = 1$ entsprechen, sind unzulässig. Es besteht dann auch die Gefahr der Verdoppelung der Niederfrequenz.

Für den Wert $\beta = 1$ schwankt die Energie der Hochfrequenz zwischen 0,2 und 1 im Tempo der Sprache, so daß eine noch weitere Aussteuerung keinen Sinn mehr hat. Man erreicht mit Hilfe des Resonanzkreises für die größte akustisch zulässige Amplitude eine genügende Ausnutzung der Hochfrequenzenergie.

Es ist namentlich bei einem hochabgestimmten kapazitiven Loser häufig schwer, bei geringer akustischer Lautstärke eine genügende Größe der Modulationsamplitude zu erreichen. Es lassen sich jedoch hierfür Anordnungen angeben, bei welchen auch für kleine akustische Energie die Modulationsamplitude praktisch groß genug wird. Die einfachste Schaltung, die dies erreichen läßt, ist eine sog. Nullkoppelung. Wenn in der Übertragsleitung eine Koppelung, bestehend aus Kapazität und Selbstinduktion in Serie, eingeschaltet ist, so wird diese Koppelung Null für die Eigenfrequenz des Koppelungsgliedes. Macht man nun das kapazitive Telephon etwa zur Kapazität des Koppelungsgliedes und stellt die Verhältnisse so ein, daß noch eine sehr kleine

Koppelung übrig bleibt, so genügen auch sehr geringe Bewegungen der Membran, um prozentuell große Änderungen der Koppelung, also abhängig von der auffallenden akustischen Welle, zu erzielen.

III. Teil.

Auf Grund der in den beiden ersten Teilen entwickelten Formeln werden 3 Typen von Lautsprechern berechnet, deren Dimensionen fertiggebauten Modellen entnommen sind.

1. Eine sehr leichte, quadratische Membran von 400 cm² Fläche dient als Träger eines Leiters, der in ein Magnetfeld taucht. Der Leiter ist dabei möglichst gleichmäßig über die Membran verteilt, so daß die an der Membran angreifenden Kräfte gleichmäßig über dieselbe verteilt sind. Wir nennen diesen Haller „elektrodynamisches Blatt“.

2. Ein stromdurchflossenes „Bändchen“ (Wernerwerk), das in einem Magnetfeld schwingt, dient selber als Membran.

3. Zwischen durchlöcherten Kondensatorplatten von 400 cm² Fläche befindet sich eine sehr leichte, leitende Membran, getragen von faserigen Stoffen. Die Membran ist in einzelne Längsbänder unterteilt. „Elektrodynamisches Blatt“.

Es wird bei der Berechnung vorausgesetzt, daß die Telephone nach beiden Seiten der starren Wand strahlen. Für Dichte und Schallgeschwindigkeit sind die Werte benutzt:

$$\rho = 1,2 \cdot 10^{-3},$$

$$u = 3,4 \cdot 10^4 \text{ cm.}$$

1. Das elektrodynamische Blatt.

Die der Berechnung zugrunde gelegten Größen sind folgende:

$f = 400 \text{ cm}^2$	Gesamtfläche,
$r_0 = 11,3 \text{ cm}$	Radius des flächengleichen Kreises,
$l = 160 \text{ cm}$	Länge des Leiters im Magnetfeld,
$\xi = 10000$	Gauß,
$R_t = 0,04 \text{ Ohm}$	Ohmscher Widerstand des Telephons,
$m_m = 20 \text{ gr}$	Masse der Membran und des von ihr getragenen Leiters,
also: $m_s = 9,2 \cdot g(y)$	mitschwingende Luftmasse,
$r_s = 32,6 \cdot 10^3 h(y)$	Strahlungswiderstand.

Wenn wir $g(y)$ und $h(y)$ aus Abb. 2 einsetzen, erhalten wir die Tabelle 1 für m_s und r_s .

Tabelle 1.

N	ω	λ cm	y	r_s	m_s	m_t
				10^3		
16	100	2130	0,0666	0,018	9,2	29,2
32	200	1065	0,1333	0,072	9,2	29,2
40	250	852	0,1666	0,1125	9,2	29,2
48	300	710	0,2	0,162	9,2	29,2
80	500	426	0,333	0,45	9,2	29,2
160	1 000	213	0,666	1,8	9	29
320	2 000	107	1,333	6,7	8,1	28,1
480	3 000	71	2	13,7	6,9	26,9
960	6 000	35,5	4	33,6	2,9	22,9
1920	12 000	17,8	8	30,7	0,3	20,3
3840	24 000	8,9	16	32,6	0,13	20,2

Obwohl uns für die Schallübertragung nur der Bereich über $\omega = 500$ interessiert, sind noch einige Werte unterhalb dieser Frequenz in die Tabelle aufgenommen. Es wird nämlich im folgenden als Eigenfrequenz der Membran $\omega = 250$ angenommen. Das Verhalten des Hallers in der Nähe seiner Eigenfrequenz hat eine gewisse Bedeutung.

Die Größen der ersten Bewegungsgleichung.

Wir setzen den Verlustwiderstand $r_v = 0$. Es wird also $r_1 = r_s$. Wenn der Verlustwiderstand nicht zu groß sein würde, er kann immerhin größer als r_s sein, spielt diese Vernachlässigung gar keine Rolle, da wir immer außerhalb der Eigenfrequenz ω_1 arbeiten. Es wird ohnedies für die Eigenfrequenz ω_2 , die innerhalb des Wiedergabebereiches liegen kann, die Dämpfung sehr groß.

Für die Eigenfrequenz ω_1 wird angenommen:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{m_1 c_1}} = 250, \quad \text{also} \quad \frac{1}{c_1} = 1,82 \cdot 10^6.$$

Die Dämpfung ist dann $D_1 = \frac{\omega_1 m_1}{r_s} = 0,0154$, also recht klein, so daß nach der ersten Bewegungsgleichung eine scharf ausgeprägte Resonanz für $\omega = \omega_1$ vorhanden ist.

Die Werte, die sich aus der ersten Bewegungsgleichung in Abhängigkeit von ω ergeben, sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

Über $\omega = 500$ ist z_1 fast nahezu gleich ωm_1 , also proportional zu ω . Der Winkel ψ_1 ist dann im ganzen Übertragungsbereich sehr groß. An der Resonanzstelle geht er naturgemäß durch Null hindurch.

Tabelle 2.

ω	r_1	s_1	z_1	z_{10} cm	W_s Watt	η %
	10^3	10^3	10^3	10^{-3}	10^{-3}	
100	0,018	— 15,3	15,3	104	0,1	0,5
200	0,072	— 3,28	3,28	244	8,6	30
250	0,1125	0	0	3560	11 400	100
300	0,162	+ 2,68	2,68	199	29	59
500	0,45	10,55	10,56	30,3	5,2	20,6
1 000	1,8	27,2	27,26	5,88	3,1	13,4
2 000	6,7	55,3	55,6	1,44	2,76	12,1
3 000	13,7	80,1	81,1	0,658	2,66	11,75
6 000	33,6	137,1	141	0,19	2,17	9,8
12 000	30,7	243,4	246	0,0545	0,652	3,15
24 000	32,6	485	486	0,0137	0,172	0,88

Aus den Größen der ersten Bewegungsgleichung berechnen wir nach Formel (13b) und (15c) die Amplitude und Strahlung in Abhängigkeit von der durch das Telefon fließenden tatsächlichen Stromstärke. Sie sind in Tabelle 2 enthalten und gelten für eine Stromstärke von 1 Amp. Die Strahlung für 1 Amp. ist im mittleren Teil des Übertragungsbereiches von der Größenordnung einiger Milliwatt.

Der Wirkungsgrad, der natürlich unabhängig von der Stromstärke ist, wird an der Resonanzstelle nahezu gleich 1, er fällt innerhalb des Übertragungsbereiches von 20% bis 1%, ist aber im größten Teil desselben ungefähr 10%.

Die Größe der Amplitude bei niederen Frequenzen setzt der maximal möglichen Leistung bei langer Welle eine Grenze. Die Amplitude wird für $\omega = 500$ und 1 Amp. zu 0,3 mm. Setzen wir als maximal zulässige Amplitude den Wert 1 mm, so würden wir immerhin noch eine Strahlungsleistung von 60 Milliwatt als obere Grenze für die Frequenz $\omega = 500$ erhalten.

Die große Amplitude bei Resonanz würde für das Telephon eine Gefahr bedeuten. Indes ist an dieser Stelle, wie aus späterem hervorgeht, der elektrische Widerstand so groß, daß die Stromstärke von 1 Amp. praktisch nie erreicht wird.

Die Größen der zweiten Bewegungsgleichung.

Der rein mechanische Teil.

Die Beziehung zwischen der Geschwindigkeit v der Membran und einer an ihr angreifenden Kraft k ist nach Gleichung (13 a) gegeben durch:

$$v \cdot \mathfrak{z}_1 = k,$$

wenn wir etwa das Magnetfeld ausgeschaltet haben. Die Gleichung (13 a) ist vollständig analog derjenigen eines elektrischen Stromkreises $J \cdot \mathfrak{Z} = E$, und wir können daher \mathfrak{z}_1 als komplexen mechanischen Widerstand bezeichnen. Schalten wir nun das Magnetfeld ein, so wird das mechanische System in seinen Bewegungseigenschaften verändert, und wir erhalten jetzt als Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Kraft:

$$v \cdot \mathfrak{z}_2 = k.$$

Die Koppelung des mechanischen Systems mit dem elektrischen bewirkt also eine Änderung des komplexen mechanischen Widerstandes. Für diesen gilt jetzt nach Formel 12 a:

$$\mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}_1 + \frac{\mathfrak{S}^2 l^2 \cdot 10^{-9}}{\mathfrak{Z}_1}.$$

Man könnte das mechanische System auch rein mechanisch so verändern, daß dieser Widerstand herauskäme. Da man aber in mechanischen Bildern weniger zu denken gewohnt ist, wollen wir umgekehrt fragen, wie müßte man einen elektrischen Stromkreis ändern, damit sein komplexer Widerstand von \mathfrak{z}_1 in \mathfrak{z}_2 übergeht. Die Antwort wäre, man müßte eine Kapazität mit parallelgeschaltetem Ohmschen Widerstand in den Stromkreis einschalten. Dies würde eine Änderung des ursprünglichen Ohmschen Widerstandes und eine Änderung der Kapazität bedeuten, aber keine Änderung der Selbstinduktion. Analog betrachten wir die beiden zu \mathfrak{z}_1 hinzukommenden Glieder:

$$r' = \mathfrak{S}^2 l^2 \cdot 10^{-9} \frac{R_1}{Z_1^2} \quad \text{und} \quad -\frac{j}{c'},$$

wo

$$\frac{1}{c'} = \mathfrak{S}^2 l^2 \cdot 10^{-9} \frac{\omega L_1}{Z_1^2}.$$

Das erste als zusätzlichen mechanischen Widerstand, das zweite als zusätzliche Direktionskraft, und zwar im ganzen Wellengebiet. Für solche Wellen, für welche $R_1^2 \gg \omega^2 L_1^2$ ist, ändert sich $\frac{1}{c'}$ proportional mit ω , und man könnte vielleicht geneigt sein, das Glied als negative Masse anzusehen. Rein rechnerisch ist dies bedeutungslos, da der komplexe Widerstand derselbe wäre.

Die hinzukommenden zwei Glieder ändern die Verhältnisse ganz beträchtlich. Nicht nur die Dämpfung des Systems erfährt eine starke Zunahme, auch die Eigen-

frequenz ω_2 kann sehr viel höher liegen als ω_1 und daher in das Übertragungsgebiet hineinfallen.

Tabelle 3 gilt für $R_1 = R_t = 0,04$, $L_1 = 0$, also wenn das Telephon allein in den Stromkreis eingeschaltet ist. (Den Index schreiben wir in diesem Fall immer mit römisch *II*.)

Tabelle 3.

ω	r_{II}	$s_{II}=s_1$	z_{II}	r_2	s_2	z_2
	10^3	10^3	10^3	10^3	10^3	10^3
100	64	-15,3	65,8	41,5	-22,2	47
200	64,07	- 3,28	64,1	38,5	-16,1	42
250	64,1	0	64,1	36,2	-15	39
300	64,16	+ 2,68	64,2	34,4	-14,4	37
500	64,45	10,55	65,3	25,6	-10,4	27,7
1 000	65,8	27,2	71,2	13,1	+ 8,4	15,5
2 000	70,7	55,3	89,7	10,3	+43,5	44,7
3 000	77,7	80,1	111,5	15,3	71,9	73,5
6 000	97,6	137,1	168	34	133	137
12 000	94,7	243,4	261,5	30,8	241,3	243
24 000	96,6	485	494	32,6	484	486

Die Eigenfrequenz hat sich nicht verändert, d. h. der imaginäre Teil von s_{II} verschwindet wieder für $\omega = \omega_1$, die zusätzliche Direktionskraft ist Null.

Die Dämpfung ist aber jetzt außerordentlich groß. Es wird:

$$D_{II} = \frac{r_{II}}{\omega_1 m_1} = 8,78.$$

Daher tritt in z_{II} auch die Stelle der Eigenfrequenz kaum mehr selektiv hervor.

Der reelle Teil r_{II} ist im ganzen Gebiet nur wenig veränderlich und überwiegt für alle Wellen unterhalb $\omega = 3000$ die Größe s_{II} .

Man könnte daher ruhig die Eigenfrequenz höher legen, etwa auf die untere Grenze des Übertragungsbereiches, ohne dadurch eine zu starke Selektivität an dieser Stelle befürchten zu müssen.

Wenn noch äußerer Ohmscher Widerstand und Selbstinduktion in den Telephonkreis eingeschaltet werden, wie es praktisch ja notwendig ist, nimmt die Dämpfung allerdings ab, bleibt aber immer noch sehr hoch. Die Tabelle 3 (letzte 3 Spalten) ist berechnet für:

$$R_1 = 0,06, \quad L_1 = 10^{-4} \text{ Henry,}$$

Werte, die wir weiter unten für die Sekundärseite des Transformators, in welche das Telephon geschaltet ist, zugrunde legen.

Die zusätzliche Direktionskraft ist jetzt so groß, daß die Eigenfrequenz ω_2 ungefähr bei $\omega = 700$ liegt.

Die Dämpfung $D_2 = \frac{r_2}{\omega_2 m_2}$ wird nahezu gleich 1, ist also kleiner als vorher, aber noch immer groß genug, um eine starke Selektivität zu vermeiden.

z_2 hat ein wenig ausgesprochenes Minimum.

Der elektrische Teil.

Die Rückwirkung des mechanischen Systems auf das elektrische ist vollständig enthalten in dem Ausdruck für den komplexen Widerstand \mathfrak{Z}_2 . Dieser ist nach Formel (12b):

$$\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z}_1 + \frac{\xi^2 l^2 \cdot 10^{-9}}{\mathfrak{Z}_1}.$$

Für Wellen, welche die Bedingung 1 erfüllen, schreiben wir:

$$r_s = q \cdot \omega^2$$

und bekommen:

$$\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z}_1 + \frac{1}{\frac{q}{\xi^2 l^2 \cdot 10^{-9}} \omega^2 + \frac{1}{j \omega c_1 \xi^2 l^2 \cdot 10^{-9}} + j \omega m_1 \frac{1}{\xi^2 l^2 \cdot 10^{-9}}}.$$

Für einen rein elektrischen Stromkreis, bei welchem wir in Serie zu \mathfrak{Z}_1 noch eine Selbstinduktion L_e und parallel zu dieser eine Kapazität C_e , mit Ohmschem Widerstand R_e in Serie, schalten, erhalten wir den Ausdruck:

$$\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z}_1 + \frac{1}{R_e C_e^2 \omega^2 + \frac{1}{j \omega L_e} + j \omega C_e},$$

falls $R_e^2 \ll \frac{1}{\omega^2 C_e^2}$ erfüllt ist.

Man kann demnach das Telephon vollständig ersetzen durch eine Kapazität und parallelgeschaltete Selbstinduktion, wobei auf der Kapazitätsseite noch ein Ohmscher Widerstand eingeschaltet ist, wenn man macht:

$$L_e = c_1 \cdot \xi^2 l^2 \cdot 10^{-9},$$

$$C_e = \frac{m_1}{\xi^2 l^2 \cdot 10^{-9}},$$

$$R_e = q \cdot \frac{\xi^2 l^2 \cdot 10^{-9}}{m_1^2} = \frac{q}{m_1 C_e}$$

und also:

$$\frac{1}{L_e C_e} = \frac{1}{m_1 c_1} = \omega_1^2.$$

Aus Tabelle 1 erkennt man, daß:

$$\left(\frac{R_e}{\frac{1}{\omega C_e}} \right)^2 = \left(\frac{r_s}{\omega m_1} \right)^2 \ll 1$$

in dem betrachteten Bereich erfüllt ist.

Für kurze Wellen ist dieser Ersatz nicht mehr so vollständig, da sich dabei r_s und m_s kompliziert ändern.

Für Wellen unterhalb der Eigenfrequenz des Telephons wirkt daher das Telephon wie eine in den Stromkreis geschaltete Selbstinduktion, über der Eigenfrequenz wie eine Kapazität.

Die Verhältnisse liegen so, wie sie im wesentlichen aus der Theorie des gewöhnlichen Telephons bekannt sind.

Was uns nun hier interessiert, sind die zahlenmäßigen Werte, welche sich für unser sprechendes Blatt ergeben. Es wird:

$$L_e = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ Henry,}$$

$$C_e = 1,09 \cdot 10^{-2} \text{ Farad,}$$

$$R_e = 0,057 \text{ Ohm.}$$

Beachtenswert ist die außerordentlich große Kapazität von 10^4 MF. Für manche Zwecke, wo man solche große Kapazitäten brauchen kann, würde es sich daher empfehlen, sie durch Koppelung eines elektrischen Kreises mit einem mechanischen System herzustellen.

Wir berechnen die nächste Tabelle 4. Die ersten 3 Spalten gelten für $L_1 = 0$ und $R_1 = R_t = 0,04$, also wenn das Telephon allein in dem Stromkreis liegt. Sie entsprechen den ersten 3 Spalten der Tabelle 3 des mechanischen Systems. Die Phase geht wieder für $\omega = \omega_1$ durch Null hindurch, aber der rein Ohmsche Widerstand ist an dieser Stelle sehr groß, wie es bei parallelgeschalteter Spule und Kapazität bekannt ist.

Tabelle 4.

ω	R_{II}	S_{II}	Z_{II}	R_2	S_2	Z_2
100	0,042	0,167	0,172	0,060	0,177	0,187
200	0,0566	0,782	0,79	0,0766	0,80	0,806
250	22,84	0	22,84	22,8	+0,025	22,8
300	0,0978	-0,95	0,96	0,118	-0,92	0,93
500	0,0503	-0,244	0,25	0,070	-0,194	0,21
1000	0,0466	-0,094	0,105	0,066	+0,006	0,66
2000	0,0455	-0,0456	0,0644	0,0655	+0,154	0,167
3000	0,0453	-0,031	0,0548	0,065	0,269	0,227
6000	0,0443	-0,0176	0,0476	0,064	0,582	0,586
12000	0,0413	-0,0103	0,0428	0,061	1,19	1,2
24000	0,0403	-0,0053	0,0406	0,060	2,395	2,4

Das System ist ein entartetes zweifaches System mit einer Eigenfrequenz bei $\omega = 0$ und $\omega = \infty$. Der zweite Teil der Tabelle gilt für die Werte $R_1 = 0,06$ und $L_1 = 10^{-4}$ Henry und entspricht also auch dem zweiten Teil der Tabelle 3 des mechanischen Systems.

Der reelle Teil R_2 und mit ihm Z_2 hat wieder ein Maximum für $\omega = \omega_1$. R_2 ist innerhalb des Übertragungsbereiches nahezu konstant.

Der imaginäre Teil wird an zwei Stellen zu 0, nämlich ungefähr für $\omega = \omega_1$ und etwas unterhalb $\omega = 1000$. Der letztere Wert entspricht einer stark gedämpften Resonanzstelle.

Das Telephon in einem Transformatorkreis.

Die Sekundärseite des Transformators, in welche das Telephon eingeschaltet ist, habe bei offener Primärseite und ausgeschaltetem Magnetfeld einschließlich des Telephonwiderstandes die soeben benutzten Werte:

$$R_1 = 0,06 \quad \text{und} \quad L_1 = 10^{-4}.$$

Es gelten also dann bei eingeschaltetem Magnetfeld die in Tabelle 4 berechneten Werte für R_2 und S_2 .

Die Primärseite, die im Anodenkreis der Röhre liegt, habe einschließlich des inneren Röhrenwiderstandes einen Ohmschen Widerstand von:

$$R_{a1} = 4000 \Omega$$

und bei offener Sekundärspule eine Selbstinduktion von $L_{a1} = 10$ Henry. Der Transformator sei als streuungslos vorausgesetzt, was sich praktisch mit hinreichender Genauigkeit erreichen läßt. Es ist also $n^2 = 10^5$.

Wir erhalten dann nach Formel (24a) für R_{a2} und S_{a2} die Tabelle 5.

Tabelle 5.

ω	R_{a2}	S_{a2}	Z_{a2}	$f_1(\omega)$	$f_2(\omega)$	$f_{ab}(\omega)$	$f_{ab}(\omega) \cdot f_2(\omega)$
				10^{-2}			
500	4 416	+ 6140	7 560	9,3	2,29	0,457	1,05
1 000	18 950	+ 8640	20 800	22,3	4,02	0,31	1,24
2 000	13 400	- 2150	13 500	8,72	4,66	0,23	1,075
3 000	11 660	- 2000	11 800	5,4	4,7	0,225	1,06
6 000	10 700	- 800	10 800	2,93	4,44	0,27	1,20
12 000	10 100	+ 500	10 100	1,65	2,52	0,42	1,06
24 000	10 000	+ 500	10 000	0,83	1,32	0,67	0,90

Das Bild sieht jetzt wieder etwas anders aus. Die erste Nullstelle des imaginären Teils liegt etwas über $\omega = 1000$. Die zweite, die einer Resonanzstelle entspricht, etwas über $\omega = 6000$. Die Resonanzwirkung kommt jedoch nicht zur Geltung, da der reelle Teil hier zu hohe Werte hat.

Der Gesamtwiderstand Z_{a_2} ist im ganzen Gebiet nur wenig verschieden vom reellen Teil.

R_{a_2} selber ist im Übertragungsgebiet ungefähr 2—3 mal größer als der innere Widerstand der Röhre, so daß der äußere Widerstand der Röhre ungefähr das $1\frac{1}{2}$ fache des inneren ist. Die Verhältnisse sind daher so gestaltet, daß fast im ganzen Übertragungsbereich die Röhre in bezug auf den von ihr gelieferten Wechselstrom optimal geschaltet ist. Da nun der Ohmsche Widerstand der Primärseite des Transformators klein gemacht werden kann gegen R_i , kommt die ganze von der Röhre nach außen gelieferte Wechselstromenergie der Sekundärseite zugute. Entsprechend dem Nutzeffekt des Telephons beträgt dann die Ausnutzung der Röhre für die Strahlung ungefähr 7% in der Mitte des Bereiches gegenüber derjenigen Energie, die die Röhre an Wechselstrom überhaupt nach außen abgeben kann.

Die Funktionen $f_1(\omega)$ und $f_2(\omega)$.

In den vorangehend behandelten Tabellen sind alle Werte zur Berechnung von $f_1(\omega)$ und $f_2(\omega)$ enthalten. Es ist nach Formel (27):

$$f_1(\omega) = 2f \cdot \xi \cdot l \cdot 10^{-8} \cdot \frac{\omega L_{12}}{Z_2 z_1}$$

und

$$f_2(\omega) = \frac{\xi \cdot l}{10\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{r_s} \omega L_{12}}{z_1 Z_2 \cdot Z_{a_2}}$$

Wir wollen einmal das Telephon mit dem Transformator des vorigen Paragraphen als Empfänger verwenden für Wellen, die senkrecht auf das Telephon auffallen. Wir erhalten dann für $f_1(\omega)$ die Werte der Tabelle 5. Für das Telephon als Lautsprecher ergeben sich die Werte $f_2(\omega)$ der Tabelle.

Dieselbe Anordnung gibt demnach verschiedenen Verlauf der Loser- und Hallerfunktion.

Es ist nun leicht, die Empfängeranordnung so zu bauen, daß die Empfängerfunktion von ω unabhängig wird. Zunächst wird man im Empfänger so stark in die Höhe transformieren, wie es die Anordnung zuläßt, ohne mit der Eigenfrequenz des Transformators ins Übertragungsgebiet hineinzukommen. Dies bringt noch keine Änderung des Verlaufs von $f_1(\omega)$. Nun ist aber nach Tabelle 2 z_1 bereits im ganzen Übertragungsbereich mit genügender Annäherung proportional zu ω . Man braucht also die Verhältnisse nur so zu gestalten, daß im ganzen Bereich Z_2 konstant wird. Man erreicht dies allerdings auf Kosten der Empfindlichkeit, z. B. durch Einschalten von Ohmschem Widerstand in den Telephonkreis oder durch Verkleinerung des Magnetfeldes. L_1 soll dann nur so groß sein, daß im ganzen Bereich R_1 größer als ωL_1 ist. Die geringere Empfindlichkeit, die ja die Folge jeder Korrektur ist, kann durch eine Verstärkerstufe wieder gutgemacht werden.

Die Funktion $f_2(\omega)$ erfüllt die Forderung der Frequenzunabhängigkeit im Gebiet von $\omega = 1000$ bis $\omega = 12\,000$ in befriedigender Weise. Für die beiden Grenzen sind etwas größere Abweichungen vorhanden. Man kann nun durch anderen Bau des Transformators, allerdings auf Kosten der Energieausnutzung der letzten Röhre, die Verhältnisse verbessern, so daß man sich mit dem Resultat zufrieden geben

könnte. Tatsächlich ist nach Versuchen die Wiedergabe auch bereits ausgezeichnet.

Für die obere Grenze kann man noch eine Verbesserung dadurch erreichen, daß man den Eingangstransformator bei starker Dämpfung in der Nähe der oberen Übertragungsgrenze abstimmt. Es würde dies eine Änderung von $f_1(\omega)$ bedeuten.

Es soll nun im folgenden Paragraphen gezeigt werden, wie man durch Änderung der Verstärkerfunktion $f(\omega)$ das erstrebte Ziel vollkommen erreichen kann.

Beeinflussung der Funktion $f(\omega)$.

Die Beeinflussung der Verstärkerfunktion in dem Sinne, daß an den beiden Grenzen des Übertragungsbereiches die Verstärkung etwas größer wie in der Mitte ist, darf als bekannt vorausgesetzt werden. Es soll aber hier im Zusammenhang mit dem ganzen vorliegenden Problem doch auf einige der einfachsten hierzu geeigneten Mittel hingewiesen werden.

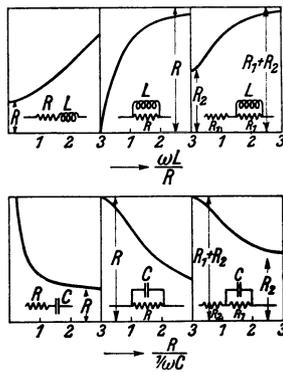


Abb. 8.

Als Korrekturalemente kommen in Betracht: Selbstinduktion und Ohmscher Widerstand in Serie oder parallel, Kondensator und Ohmscher Widerstand in Serie oder parallel.

Die Wirkung dieser Korrekturalemente ist in Abb. 8 wiedergegeben.

Werden diese Elemente nicht in den Zug der Leitung selber eingeschaltet, sondern als Verbindung zwischen den Leitungen, d. h. als Ableitung, so ist ihre Wirkung die reziproke. Bei der Kombination dieser Korrekturalemente muß man sehr vorsichtig sein, daß keine unerwünschten Eigenfrequenzen hereinkommen, was nicht immer in genügender Weise beachtet wird.

Es ist sehr ratsam, zwischen je 2 Verstärkerröhren entweder nur Kombinationen aus Spule und Ohmschem Widerstand oder nur aus Kondensator und Ohmschem Widerstand zu verwenden, falls die Korrektur zwischen 2 Verstärkerstufen eingeschaltet wird.

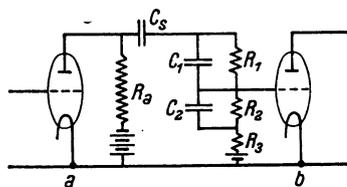


Abb. 9.

Es ist sehr ratsam, zwischen je 2 Verstärkerröhren entweder nur Kombinationen aus Spule und Ohmschem Widerstand oder nur aus Kondensator und Ohmschem Widerstand zu verwenden, falls die Korrektur zwischen 2 Verstärkerstufen eingeschaltet wird.

Als Beispiel einer solchen Korrektur ist diejenige der Abb. 9 berechnet.

Am Gitter der Röhre *a* sollen Spannungen erzeugt werden, die unabhängig von der Frequenz sind. Die Spannungen am Gitter der Röhre *b* sind dann in relativem Maße, da wir den Durchgriff der Röhre *a* frei lassen wollen, durch die Werte $f_{ab}(\omega)$

der Tabelle 5 wiedergegeben. Wenn die sonstigen Teile der Verstärkeranordnung eine von der akustischen Frequenz unabhängige Verstärkung liefern, wird $f(\omega) = q \cdot f_{ab}(\omega)$, wo q eine Konstante ist.

Die letzte Spalte der Tabelle 5 zeigt nun das Produkt von $f_{ab}(\omega) \cdot f_2(\omega)$.

Man sieht, daß die Strahlung fast im ganzen Bereich gleich groß ist. Die Unterschiede sind nur noch Prozente, Unterschiede, die das Ohr bei der logarithmischen Abhängigkeit der Empfindlichkeit vom Reiz kaum mehr wahrnimmt.

Es ist natürlich, daß durch die Korrektur und auch sonstwie Phasenverschiebungen hereinkommen. Die ganze Rechnung gilt überhaupt nur für Amplituden. Es ist bekannt, daß das Ohr auf solche Phasenverschiebungen nicht reagiert. Bei Verschiedenheit der Frequenzen sind ja die Phasenunterschiede sowieso schnellem Wechsel unterworfen.

2. Der Bändchenlautsprecher.

Nachdem wir den Blatthaller sehr eingehend besprochen haben, können wir uns beim Bändchenlautsprecher auf die Wiedergabe der wichtigsten Tabellen beschränken. Die Ausgangsdaten zur Berechnung desselben sind:

$$a = 7 \text{ cm}, \quad b = 1 \text{ cm}, \quad f = 7 \text{ cm}^2, \quad r_0 = 1,5 \text{ cm}, \quad \xi = 10000, \\ R_t = 0,08 \Omega, \quad m_m = 34,7 \cdot 10^{-3} \text{ gr}, \quad m_s = 21,6 \cdot 10^{-3} \text{ g}(y), \quad r_s = 577 h(y).$$

Zu m_m gehört einmal die Eigenmasse des Bändchens, dazu noch eine gewisse Luftmasse, die zwangsweise mit dem Bändchen schwingt, aber von der Masse m_s zu trennen ist. Das Bändchen muß in einem möglichst homogenen Magnetfeld sein. Es ist daher notwendig, daß es zwischen zwei parallelen Wänden schwingt. Die ganze Luftmasse zwischen diesen parallelen Wänden ist dann wie starr mit dem Bändchen verbunden. Zur Berechnung dieser notwendigen Ballastmasse wurde die parallele Wand 1,5 cm tief auf jeder Seite des Bändchens angenommen.

Wir erhalten so folgende Tabelle für das Bändchen:

Tabelle 6.

ω	y	m_s	$r_1 = r_s$	$\omega m_1 = s_1 = s_{II}$	z_1	r_{II}	z_{II}	$x_{10} \text{ cm}$	$\frac{W_s}{\text{Watt}}$	$\eta \%$	$i_s(\omega)$
		10^{-3}							10^{-3}		
500	0,044	21,6	0,14	28	28	61,4	67,5	0,5	0,43	1,07	1,05
1 000	0,088	21,6	0,56	56,3	56,3	61,8	83,6	0,125	0,43	1,07	1,38
2 000	0,177	21,6	2,25	112,6	112,6	63,5	129	0,031	0,43	1,07	1,44
3 000	0,265	21,6	5,07	169	169	66,3	181,5	0,0148	0,43	1,07	1,46
6 000	0,53	21,3	20,2	336	337	81,5	346	0,0035	0,43	1,07	1,47
12 000	1,06	18,2	63,5	635	638	124,8	646	0,00091	0,38	0,95	1,37
24 000	2,12	12,5	179	1144	1160	240	1170	0,00025	0,33	0,81	1,27

Aus den Werten für m_s und r_s ist zu ersehen, daß nur für die höchste Frequenz eine größere Abweichung von den Werten vorhanden ist, die man nach den Formeln (3) und (4) für Wellen, welche die Bedingung 1 erfüllen, berechnet. Die Eigenfrequenz ist so tief liegend vorausgesetzt, daß im ganzen Bereich gilt $s_1 = \omega m_1$. r_s ist für alle Wellen wesentlich kleiner als s_1 , so daß z_1 nahezu vollständig mit s_1 zusammenfällt und demnach proportional zu ω ist. Die Werte r_{II} und z_{II} der Tabelle 6 gelten für

$$R_1 = R_t = 0,08 \quad \text{und} \quad L_1 = 0.$$

Die Dämpfung ist auch hier so groß, daß für kleine Werte von ω der reelle Teil r_{II} den imaginären $s_{II} = s_1$ überwiegt, so daß für $\omega = 500$ z. B. die Stromstärke bei gleicher EMK nur 0,4 von derjenigen bei hohen Frequenzen ist.

In die Tabelle 6 ist auch die Amplitude in Abhängigkeit von der Stromstärke und der Wirkungsgrad aufgenommen. Die Stromstärke ist wieder gleich 1 Amp. gesetzt.

Die maximal mögliche Energie, welche für niedrigere Frequenzen gestrahlt werden kann, ist durch die große Amplitude stark beschränkt. Nehmen wir als Grenze für die Amplitude 2,5 mm, so würde diese bereits bei $\frac{1}{2}$ Amp. erreicht sein für $\omega = 500$ und nur eine Strahlung von $\frac{1}{10}$ Milliwatt ergeben. Die maximal mögliche Leistung bleibt demnach wesentlich hinter derjenigen des Blatthallers zurück.

Der Nutzeffekt ist nahezu über den ganzen Bereich konstant gleich 1% und erreicht demnach denjenigen des Baltthallers nicht.

Günstig ist die Kurve für $f_2(\omega)$. Sie kann ohne Korrektur im ganzen Bereich als ausreichend angesehen werden. $f_2(\omega)$ der Tabelle 6 ist berechnet für:

$$R_1 = 0,12 \Omega, \quad L_1 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Henry}, \quad n^2 = \frac{10^5}{2} R_{a1} = 4000.$$

also für dieselbe Röhre wie beim Blatthaller.

Die Ausnutzung der Röhrenenergie für die Strahlung ist jetzt nur 0,7%.

3. Der elektrostatische Haller.

Für den elektrostatischen Lautsprecher seien die Dimensionen folgende:

$$f = 400 \text{ cm}^2, \quad r_0 = 11,3 \text{ cm}, \quad a = 0,05 \text{ cm}, \quad C_1 = 640 \text{ cm},$$

$$V_0 = 1000 \text{ Volt}, \quad m_m = 2 \text{ gr}, \quad r_s \text{ und } m_s \text{ wie elektrodynamisches Blatt } \frac{1}{c_1} = 6,4 \cdot 10^6.$$

Wir erhalten für die Größen der ersten Bewegungsgleichung Tabelle 7.

Tabelle 7.

ω	m_1	$r_1 = r_s$	s_1	z_1	s_{II}	z_{II}	W_s Watt	x_{30} cm
		10^3	10^3	10^3	10^3	10^3	10^{-3}	10^{-3}
250	11,2	0,1125	- 22,8	22,8	0	0,1125	300	1000
500	11,2	0,45	- 7,2	7,21	4,2	4,23	1,01	13,4
1 000	11	1,8	+ 4,6	4,9	10,3	10,5	0,665	2,7
2 000	10,1	6,7	17	1,82	20	21	0,614	0,62
3 000	8,9	13,7	24,6	28	25,5	29	0,66	0,33
6 000	4,9	33,6	28,3	44	29,3	44,6	0,68	0,106
12 000	2,3	30,7	27,1	41	27,5	41	0,72	0,57
24 000	2,13	32,6	51	60,4	51,2	61	0,36	0,2

Bei niederen Frequenzen ist die mitschwingende Luftmasse die Hauptmasse, so daß für höhere Frequenzen die Masse auf $\frac{1}{5}$ der ursprünglichen abnimmt.

$\frac{1}{c_1}$ wurde so groß angenommen, daß die Eigenfrequenz ω_1 bei etwa 780 liegt. Die Dämpfung an dieser Stelle, wenn ausschließlich Strahlungsdämpfung in Betracht kommt, ist ungefähr $\frac{1}{9}$ und würde eine deutlich ausgeprägte Resonanz ergeben.

Der mechanische Teil.

Der mechanische komplexe Widerstand \mathfrak{z}_2 berechnet sich aus \mathfrak{z}_1 nach Formel (34a):

$$\mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}_1 + 2 \frac{V_0^2}{a^2 \omega^2 \mathfrak{z}_1}.$$

Wir wenden diese Formel zunächst an für $R_1 = 0$ und $L_1 = 0$ und erhalten:

$$\mathfrak{z}_{II} = \mathfrak{z}_1 + j \cdot 2 C_1 \frac{V_0^2}{a^2 \omega}$$

und berechnen danach Tabelle 7. Da das Dämpfungsglied sich nicht ändert, ist $r_{II} = r_1 = r_s$. s_{II} ist jetzt im ganzen in der Tabelle dargestellten Bereiche positiv. Es wird bei $\omega = 250$ zu 0, d. h. die Frequenz ω_2 liegt bei 250.

Der Unterschied zwischen z_1 und z_{II} ist natürlich nur bei niederen Frequenzen groß. Die ursprüngliche Resonanzstelle ω_1 ist jetzt in keiner Weise mehr ausgezeichnet.

Wir berechnen aus diesen Werten für z_{II} die Strahlung W_s als Funktion der Wechselspannungsamplitude am Telephon nach der Formel (35d):

$$W_s = 2 C_1^2 \frac{V_0^2}{a^2} \cdot \frac{r_s}{z_{II}^2} \cdot V_{t_0}^2 \cdot 10^7 \text{ Watt.}$$

(C_1 in Farad, V_0 in Volt.)

Es ist natürlicher, daß wir hier beim elektrostatischen Telephon die Strahlung als Funktion von V_{t_0} angeben statt von der Stromstärke. Als Funktion der Stromstärke würde die Strahlung wie beim elektrodynamischen Telephon durch die Größe z_1 der ersten Bewegungsgleichung zu rechnen sein. Die in der Tabelle 7 dargestellten Werte von W_s gelten für eine Spannung $V_{t_0} = 100$ Volt.

Die Strahlung weist im ganzen Übertragungsbereich keine großen Unterschiede auf. Es ist dies eine Folge der abnehmenden Masse m_s mit höherer Frequenz.

Die Strahlung für 100 Volt ist ungefähr dieselbe wie beim Bändchen bei 1 Amp.

In der letzten Spalte ist die zu $V_{t_0} = 100$ Volt gehörige Amplitude enthalten. Da diese bei $\omega = 500$ bereits etwa $1/10$ mm wird, ist für niedere Frequenzen mit 100 Volt Spannungsschwankung bereits die Grenze der Belastbarkeit erreicht.

An der Resonanzstelle $\omega_2 = 250$ ist diese bei 100 Volt sogar schon längst überschritten. Die Dämpfung an dieser Stelle ist 0,04, und die Membran kann sich stark aufpendeln, so daß sie bei 100 Volt den unmöglichen Wert von 1 cm annehmen würde.

Da wir $R_1 = 0$ gesetzt haben, ist außer der Strahlung bisher kein energieverbrauchendes Element eingeschaltet, und man könnte vermuten, daß man durch ein passendes R_1 die Membran an ihrer Eigenfrequenzstelle $\omega_2 = 250$ so stark dämpfen kann, wie das beim elektrodynamischen Telephon ja der Fall war. Es zeigt sich später, daß dies kaum erreichbar ist. Um eine Störung an der Resonanzstelle zu vermeiden, ist es daher notwendig, die Verlustdämpfung so groß zu machen, daß die Membran an der Resonanzstelle sich nicht zu weit aufpendelt. Wir erreichen dies durch Verwendung faseriger Stoffe im Zusammenhang mit der Membran.

Die Tabelle 8 zeigt nun für:

$$R = 10\,000 \, \Omega, \quad L = 100 \text{ Henry,}$$

die wir später dem zu benutzenden Transformator zugrunde legen, die Werte für z_2 .

Tabelle 8.

ω	r_2	s_2	z_2	R_2	S_2	Z_2	R_{a_2}	S_{a_2}	Z_{a_2}	$q_2(\omega)$	$q_{II}(\omega)$
	10^3	10^3	10^3	10^3	10^3	10^3	10^3	10^3	10^3		
250	0,152	0	0,152	38	0	38	5,33	2	5,7	12,2	7,9
500	0,49	+4,5	4,52	287	+1680	1700	4,02	3,88	5,6	1,75	0,67
1 000	1,85	10,75	11	603	-2800	2880	4,06	8,27	9,2	1,83	0,54
2 000	6,8	21	22	50	- 600	605	4,44	21,3	21,7	1,92	0,52
3 000	14	25	29	25	- 195	197	8,69	60	61,4	1,95	0,54
3 740	78	26	82	21	- 14	25	373	+282	473	2,05	0,54
6 000	33,6	27,7	44	14	+ 363	364	7,03	- 31,2	32,3	2,01	0,55
12 000	30,7	27	41	11	1080	1080	5,09	- 10,8	11,9	1,89	0,55
24 000	32,6	51	60	10	2300	2300	4,86	- 5,6	7,4	1	0,39

Sowohl die Werte für r_2 wie für s_2 unterscheiden sich von denen der Tabelle 7 nur wenig. Die Zunahme des Widerstandes r_2 an der Resonanzstelle ist unbedeutend. Um an dieser Stelle eine genügende Dämpfung zu erhalten, müßte man R_1 so groß machen, daß dann die Lautstärke bei hohen Frequenzen leiden würde.

Die Selbstinduktion zusammen mit der Kapazität des Telephons gibt eine Resonanz bei $\omega = 3740$. An dieser Stelle überwiegt r_2 das imaginäre Glied s_2 . Als Empfänger würde die Membran für diese Frequenz zwar ein schwaches Minimum in der Amplitude ergeben, aber ein Maximum in der Umwandlung der akustischen Energie in elektrische.

Diese Resonanzstelle des elektrischen Systems wird uns später nicht stören, da durch die Wirkung der Primärspule des Transformators die Selbstinduktion wieder so stark verkleinert wird, daß die Eigenfrequenz über den Hörbereich fällt.

Der elektrische Teil.

Für den elektrischen Widerstand des Telephonkreises gilt wieder die Formel:

$$\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z}_1 + 2 \frac{V_0^2}{a^2 \omega^2 z_1}.$$

Wir können den komplexen Widerstand \mathfrak{Z}_2 auch rein elektrisch herstellen, und zwar auf sehr verschiedene Weise. \mathfrak{Z}_2 hat die Form eines zweifachen kapazitiv gekoppelten Systems. Am einfachsten werden die Verhältnisse des Ersatzsystems, wenn wir die Telephonkapazität auch als Koppelungskapazität verwenden. Die Rückwirkung der Telephonmembran auf das elektrische System läßt sich dann dadurch ersetzen, daß man parallel zum Telephon, aber unter sich in Serie, Ohmschen Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität schaltet, und zwar von der Größe:

$$\begin{aligned} R_e &= \frac{a^2}{2V_0^2 C_1^2} \cdot r_s = 2,47 \cdot 10^2 \cdot r_s \text{ Ohm,} \\ L_e &= \frac{a^2}{2V_0^2 C_1^2} \cdot m_1 = 2,47 \cdot 10^2 \cdot m_s \text{ Henry,} \\ C_e &= \frac{2V_0^2 C_1^2}{a^2} \cdot \frac{c_1}{\left(1 - 2 \frac{V_0^2}{a^2} \cdot C_1 c_1\right)} = 5130 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Zunächst sieht man, daß die beiden gekoppelten Systeme, jedes für sich gedacht, voneinander verschiedene Eigenfrequenzen haben. Die Eigenfrequenz des ersten ist identisch mit der Eigenfrequenz des elektrischen Kreises bei festgehaltener Membran, die des zweiten ist gleich der Eigenfrequenz ω_1 der Membran.

Wir berechnen nun für \mathfrak{Z}_2 die Tabelle 8, wenn:

$$R_1 = 10\,000, \quad L_1 = 100 \text{ Henry,}$$

nach der Formel:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_2 &= R_2 + jS_2, \\ R_2 &= R_1 + 2 \frac{V_0^2}{a^2 \omega^2} \cdot \frac{r_1}{z_1^2}, \\ S_2 &= S - 2 \frac{V_0^2}{a^2 \omega^2} \cdot \frac{s_1}{z_1^2}. \end{aligned}$$

S_2 hat 3 Nullstellen. Die beiden bei $\omega = 250$ und $\omega = 4000$ entsprechen Resonanzlagen, die dritte bei etwa $\omega = 700$ entspricht einem Minimum.

Das untere Maximum ist schärfer ausgeprägt als das obere. Beide sind infolge der engen Koppelung trotz der starken Verstimmung gegenüber der Lage der Eigenfrequenz der ungekoppelten Systeme auseinandergedrängt.

Anschluß des Telephons an den Verstärker.

1. Stromschaltung.

Wir setzen dieselbe Röhrentype voraus, die beim elektrodynamischen Telephon benutzt wurde, also $R_i = 4000$. Es sei $L_{a1} = 8$ Henry. Wir erhalten dann die Werte für R_{a2} und S_{a2} nach der Formel (36b) unter Benutzung von R_2 und S_2 der Tabelle 8. S_{a2} hat nur eine einzige Nullstelle, etwas über $\omega = 4000$. Es ist dies aber keine Resonanzstelle, sondern ein Sattel. Die Resonanz liegt bei streuungslosem Transformator im Unendlichen. Berechnen wir nun $\varphi_2(\omega)$, so zeigt es sich, daß dasselbe bereits ohne Korrektur genügend gleichmäßigen Verlauf hat. Es ist gleichwertig demjenigen des Bändchenhällers; die Werte sind etwas größer. Hinsichtlich der Ausnutzung der Röhrenenergie liegt demnach das elektrostatische Telephon in der berechneten Schaltung zwischen Bändchen und Blatt. Durch Veränderung der Übersetzung erreichen wir sogar den Nutzeffekt des Blattes, aber der Verlauf wird dann auch etwas ungünstiger.

Wenn wir L_1 größer machen, können wir den Nutzeffekt des Blatthällers sogar bei gleichbleibender Güte des Kurvenverlaufes von $\varphi_2(\omega)$ noch übertreffen. Die Anforderungen an den Transformator sind dann aber praktisch schwer zu erfüllen. Im letzteren Falle wird auch die Dämpfung an der Stelle ω_2 größer, so daß wir schließlich ohne besondere Verlustdämpfung die Gefahr, die dem Telephon an dieser Stelle droht, beseitigen könnten.

2. Spannungsschaltung.

In der Spannungsschaltung muß man, um günstige Energieausbeute der Röhre zu bekommen, eine Röhre mit hohem inneren Widerstand und kleiner Stromstärke (etwa Doppelgitterröhre mit Anodenschutznetz) verwenden, da man die Spannung nicht in die Höhe transformieren kann. Es ist nicht mehr nötig, diesen Fall ausführlich zu behandeln. Es ist in der letzten Spalte der Tabelle 8 die Funktion $\varphi_{II}(\omega)$ wiedergegeben, die man erhält, wenn ist:

$$R_i = 50\,000 \, \Omega, \quad R_a = 100\,000 \, \Omega, \quad R = 1\,000\,000 \, \Omega.$$

Der Verlauf von $\varphi_{II}(\omega)$ ist wieder ohne Korrektur ausreichend. Die Absolutwerte desselben dürfen wir nicht ohne weiteres mit denen bei Stromschaltung vergleichen, da wir eine andere Röhrentype verwandten. Von der Energie, die mit Hilfe dieser Röhrentype an Wechselstrom nach außen abgegeben werden kann, ist bei dem berechneten Beispiel der Umsatz in Strahlung 1%.

Nehmen wir eine Röhre mit größerem inneren Widerstand, so wird die Energieausnutzung günstiger, aber der Verlauf der Funktion $\varphi_{II}(\omega)$ verschlechtert sich wieder für hohe Frequenzen.

Es ist im vorangehenden an 3 Typen von Lautsprechern gezeigt worden, wie sich die gestellte Aufgabe, Halleranordnungen mit gleichmäßigem Wiedergabebereich zwischen $\omega = 500$ und $\omega = 24\,000$, lösen läßt. Ich möchte bemerken, daß auch die empirischen Erfahrungen das Resultat bestätigen.

Das Trichterproblem haben wir ganz außer acht gelassen. Um wieviel man die Strahlung durch geeignete Trichter statt der starren Wand vermehren kann, ist eine Frage, die sich leichter empirisch als rechnerisch klären läßt. Die Bedingung, daß sich die Kurve für $f_2(\omega)$ nicht wesentlich verschlechtern darf, beeinträchtigt die Möglichkeiten zur Steigerung der Strahlung auf diesem Wege ganz beträchtlich. Nach meinen Erfahrungen darf man eine Vermehrung der Schallamplitude bei nicht zu großem Trichter statt der starren Wand etwa auf das Doppelte, höchstens Dreifache veranschlagen. Allerdings würde dies ausreichen, um etwa für das elektrodynamische Blatt den Nutzeffekt auf 30—40% zu bringen.

Die Abweichung der Schwingungsform der Membran von der Kolbenmembran bleibt ebenfalls unberücksichtigt. Da bei den berechneten Telephonen die angreifenden Kräfte gleichmäßig über die Membran verteilt sind und die Eigenfrequenz der Membran als Ganzes sehr tief liegt, ist die Bewegungsform der Membran derjenigen der Kolbenmembran am nächsten.

Zusammenfassung.

Es wird die Rayleighsche Theorie der Kolbenmembran bei größerer Membranfläche auf eine für den praktischen Gebrauch geeignete Form gebracht.

Sie wird dann angewandt, um in ganz allgemeiner Weise die Strahlungsfunktion des elektrodynamischen und elektrostatischen Hallers zu berechnen.

Es werden genaue Bauvorschriften gegeben für eine lautgetreue Schallübertragungsanlage.

Es wird an 3 Beispielen von Hallern die Theorie erläutert.

Über Siebketten und deren Anschluß an Leitungen¹⁾.

Von Hermann Backhaus.

Mit 32 Textabbildungen.

Mitteilungen aus dem Forschungslaboratorium Siemensstadt.

Eingegangen am 15. Januar 1924.

I. Einleitung.

Bei der Verwendung schwingungsfähiger Systeme für Siebzwecke sind zwei Forderungen zu erfüllen: Einmal ist der Anschluß dieser Systeme an die Stromquelle oder an die Leitung, die von der Stromquelle kommt, derart zu bewerkstelligen, daß die dem Verbraucher zugeführte Energie möglichst groß wird; zweitens soll das Gebilde für einen bestimmt gewählten engen Frequenzbereich gleichmäßig durchlässig sein, Ströme von Frequenzen, die außerhalb dieses Bereiches liegen, dagegen sehr stark dämpfen.

Die erste dieser Forderungen hat heutzutage an Bedeutung insofern etwas eingebüßt, als es jetzt immer möglich ist, das, was an Energie zu wenig übertragen wird, durch geeignete Verstärkung zu ersetzen. Immerhin dürfte es auch heute noch wünschenswert sein, Verstärker zu ersparen, wo man dies durch richtige Bemessung der Übertragungselemente erreichen kann. Die zweite Forderung ist jedoch nach wie vor von gleicher Bedeutung: Man will sich durch Heraussieben eines bestimmten endlichen Frequenzbereiches vor den Störungen durch fremde Stationen schützen. Die Durchlässigkeit im zugelassenen Frequenzbereich bei Verwendung von Kettenleitern sowohl in der drahtlosen Telegraphie als auch bei Mehrfachtelegraphie und -telephonie mit Trägerfrequenzen soll möglichst gleichmäßig sein. In allen Fällen kann man jedoch im Durchlässigkeitsbereich Amplitudenänderungen bis zu 10% unbedenklich zulassen. Änderungen von 20% dürften sich schon störend bemerkbar machen. Man muß hierbei nämlich berücksichtigen, daß der Röhrendetektor, der fast ausschließlich zum Empfang verwendet wird, die Resonanzkurve verzerrt und dadurch Verschiedenheiten der Amplituden im Durchlässigkeitsbereich meist vergrößert. Man wird also ganz allgemein die Ketten so bauen müssen, daß ihre Resonanzkurven im Durchlässigkeitsbereich keine Minima haben, die tiefer sind als 90% der Maximalamplitude.

Diese Forderung ist offenbar gleichbedeutend mit der Forderung nach einer Resonanzkurve von annähernd rechteckiger Form. Hat die Resonanzkurve nicht eine solche annähernd rechteckige Form, so kann von einer gleichmäßigen Durchlässigkeit nicht die Rede sein.

Die von K. W. Wagner²⁾ angegebene Theorie der Kettenleiter erhebt den Anspruch, die beiden genannten Forderungen zu erfüllen. Die Kettenleiter werden

¹⁾ Jenaer Dissertation.

²⁾ K. W. Wagner: Arch. Elektrot. Bd. 3, S. 315. 1915; Bd. 8, S. 61. 1919.

hierin behandelt wie homogene Leitungen mit dem Unterschiede, daß statt der Differentialgleichungen, der Inhomogenität der Kettenleiter entsprechend, Differenzgleichungen zur Anwendung kommen. Wellenwiderstand und Fortpflanzungskonstante werden in gleicher Weise wie in der Theorie der homogenen Leitungen eingeführt, und zwar werden sie aus den Bestimmungsstücken der einzelnen Leiterelemente, der Kettenglieder, definiert. Die Diskussion für unendlich lange Kettenleiter ergibt dann, daß bei Spulenleitungen alle Wechselströme mit niedrigerer Frequenz als der Eigenfrequenz des Kettengliedes gleichmäßig durchgelassen werden, Ströme höherer Frequenzen dagegen abgedrosselt werden. Die Kondensatorleitungen verhalten sich genau umgekehrt. Durch Kombination dieser beiden Arten von Leitungen lassen sich dann Systeme bilden, sog. Siebketten, die Frequenzen innerhalb eines bestimmten Bereiches gleichmäßig durchlassen, alle anderen aber stark dämpfen. Die Grenzen des Durchlässigkeitsbereiches, die Lochgrenzen, ergeben sich als zwei gewisse Eigenfrequenzen des Kettengliedes, die durch bestimmte Kombinationen der Induktivitäten und Kapazitäten des Kettengliedes gebildet werden. Innerhalb dieser Lochgrenzen soll der Kettenleiter für alle Frequenzen gleichmäßig durchlässig sein, d. h. die Resonanzkurve soll eine annähernd rechteckige Form haben.

Zur Erzielung der günstigsten Energieübertragung ergibt sich entsprechend der Herleitung aus der Theorie homogener Leitungen ohne weiteres folgende Vorschrift: Der Verbraucherwiderstand und, im Falle des Anschlusses an eine Leitung, die Leitungscharakteristik sollen gleich dem Wellenwiderstand des Kettenleiters sein.

Die der Diskussion der mathematisch gewonnenen Ergebnisse zugrunde liegende Annahme eines unendlich langen Kettenleiters, d. h. eines solchen, bei dem eine Rückwirkung des letzten Gliedes auf das erste nicht mehr stattfindet, schließt in sich die Annahme einer sehr hohen Gliederzahl; denn um eine verbreiterte Resonanzkurve zu erhalten, muß man mit den Koppelungen zwischen den einzelnen Gliedern immer über einen bestimmten Wert hinausgehen. Bei den in der Technik vorkommenden Ketten mit geringer Gliederzahl wird man daher die Rückwirkung nicht vernachlässigen dürfen. Die Voraussetzungen für die Ergebnisse dieser Theorie treffen dann nicht mehr zu; die Ergebnisse werden deshalb im allgemeinen nur eine grobe Annäherung an die Wirklichkeit darstellen. Wenn es daher auf größere Genauigkeit ankommt, wird man nach anderen Methoden verfahren müssen.

Hierfür hat H. Riegger¹⁾ den Weg gewiesen, indem er das Problem vom Standpunkt der Schwingungstheorie aus behandelte. Er gibt Methoden zur strengen Berechnung des Stromverlaufes und somit der Resonanzkurve für jeden beliebigen Kettenleiter und zeigt allgemein den Weg zur Erzielung annähernd rechteckiger Resonanzkurven. Bezüglich des Anschlusses von Kettenleitern an Leitungen wird auf Grund eines Analogieschlusses mit Tatsachen aus dem Gebiet der drahtlosen Telegraphie der Satz aufgestellt, daß, um maximale Energieübertragung zu ergeben, die Koppelung zwischen Leitung und Schwingungskreis so bemessen sein muß, daß die Vermehrung des Dekrementes des Schwingungskreises, die durch die Koppelung zustande kommt, gleich ist der Summe von Nutzdekrement und Verlustdekrement. Die hier gewählte Art der Behandlung hat den Vorteil, eine Lösung ohne erhebliche Komplikationen auch bei ganz allgemeiner Problemstellung zu gestatten. Es ist daher möglich, auf diesem Wege der Wirklichkeit näherzukommen als mit den

¹⁾ H. Riegger: *Wissensch. Veröffentl. a. d. Siemens-Konzern* Bd. 1, H. 3, S. 126; Bd. 3, H. 1, S. 190.

Methoden der Leitungstheorie, bei denen eine einfache Diskussion nur unter bestimmten beschränkenden Voraussetzungen in übersichtlicher Weise möglich ist.

Im folgenden sollen die Methoden der Schwingungstheorie auf einige Kettenleiter von der Art, wie sie die Leitungstheorie angibt, angewandt werden. Wir werden sehen, daß die Methoden der Leitungstheorie zwar in vielen Fällen, selbst bei vielgliedrigen Kettenleitern, nur eine rohe Annäherung darstellen, daß ihnen aber ein bedeutender heuristischer Wert insofern zukommt, als sie bestimmte Arten von Kettenleitern ergeben, die unter Umständen Resonanzkurven von sehr günstiger Form haben können. Es soll ferner in allen Fällen untersucht werden, nach welchen Gesichtspunkten der Anschluß von Kettenleitern an homogene lange Leitungen zu bewerkstelligen ist. Wir werden sehen, daß diese Frage von der Behandlung der Kettenleiterformen der Leitungstheorie gar nicht zu trennen ist. Es soll zunächst gezeigt werden, wie durch die Koppelung verschiedener Arten von einfachen Schwingungskreisen und einzelnen Kettengliedern mit langen Leitungen die Dekremente bzw. die Resonanzkurven dieser Systeme beeinflußt werden. Es wird sich zeigen, daß man alle Formen von Resonanzkurven erhalten kann, die für einfache bzw. zweifache Schwingungssysteme bekannt sind, andere Formen jedoch nicht. Der von H. Riegger aufgestellte Satz über die optimale Koppelung zwischen Leitungen und schwingungsfähigen Gebilden wird auf Grund der Schwingungstheorie bewiesen werden und weiter gezeigt werden, wie die Koppelung zu bemessen ist, um günstigste Energieübertragungen zu ergeben. Es wird sich hierbei zeigen, daß die sich aus der Leitungstheorie ergebenden Bauvorschriften die günstigste Energieübertragung ermöglichen, daß sie sich jedoch als spezielle Fälle einer allgemeineren Regel über die Bemessung der optimalen Koppelung unterordnen lassen. Weiterhin sollen einige zwei- und dreigliedrige Kettenleiter hinsichtlich ihrer Eignung für Siebzwecke untersucht werden. Es wird sich ergeben, daß die Befolgung der Bauvorschriften der Leitungstheorie hierfür keineswegs genügt, daß man auf diesem Wege vielmehr Resonanzkurven erhalten kann, bei denen von einer nahezu gleichbleibenden Durchlässigkeit innerhalb der Lochgrenzen keine Rede sein kann. Um zu dem gewünschten Ziele zu gelangen, ist vielmehr eine eingehende Betrachtung der Dekremente und Koppelungen der einzelnen Schwingungskreise erforderlich. Schließlich sollen die Ergebnisse einiger Versuche mitgeteilt werden, die unternommen wurden, um die theoretisch gefundenen Ergebnisse experimentell zu verifizieren.

II. Allgemeine Grundlagen.

§ 1. Die Grundlagen aus der Leitungstheorie¹⁾.

Es sollen einige Formeln aus der Theorie homogener Leitungen zusammengestellt werden, auf die wir im folgenden wiederholt werden zurückgreifen müssen.

Es sei eine Leitung gegeben von der Länge l km. Auf die Längeneinheit bezogen, für die wir hier das Kilometer zugrunde legen wollen, betrage der Ohmsche Widerstand R Ohm, die Induktivität L Henry, die Ableitung A Siemens, die Kapazität C Farad. Dann ist bekanntlich die Charakteristik der Leitung:

$$\mathfrak{B} = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{A + i\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{1 - i\frac{R}{\omega L}}{1 - i\frac{A}{\omega C}}}. \quad (1)$$

¹⁾ F. Breisig: Theoret. Telegr. S. 191, 195.

Bei Freileitungen sind $\frac{R}{L}$ und $\frac{A}{C}$ etwa von der Größenordnung 10^{+3} . Man kann also bei höheren Frequenzen die Quadrate von $\frac{R}{\omega L}$ und $\frac{A}{\omega C}$ gegen 1 vernachlässigen und hat dann:

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{L}{C}} \left[1 - \frac{i}{2\omega} \left(\frac{R}{L} - \frac{A}{C} \right) \right] = z - \frac{i}{\omega C_z} = z + iz'. \quad (2)$$

z' ist im allgemeinen kleiner als Null und besonders bei höheren Frequenzen dem Betrage nach klein gegen z . Es spielt, da es umgekehrt proportional ω ist, die Rolle einer Kapazität. Wird $\frac{R}{L} = \frac{A}{C}$, also $z' = 0$, so heißt die Leitung verzerrungsfrei.

In dem schmalen Frequenzbereich, der für eine brauchbare Resonanzkurve in Frage kommt, kann man \mathfrak{Z} als konstant annehmen. Wir werden daher in diesen Bereichen z stets als frequenzunabhängig behandeln.

Bei Kabeln darf man nicht in der angegebenen Weise verfahren, denn hier ist, bis zu sehr hohen Frequenzen, $R \gg \omega L$. In den folgenden Betrachtungen werden wir uns jedoch auf die Behandlung von Freileitungen beschränken.

Es seien \mathfrak{B}_a und \mathfrak{J}_a Spannung bzw. Stromstärke am Anfang, \mathfrak{B}_e und \mathfrak{J}_e Spannung bzw. Stromstärke am Ende, \mathfrak{B}_x und \mathfrak{J}_x Spannung und Stromstärke an dem Punkt x der Leitung. Dann gelten die Gleichungen:

$$\mathfrak{B}_e = \mathfrak{B}_a \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} - \mathfrak{Z} \mathfrak{J}_a \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2}, \quad \mathfrak{J}_e = \mathfrak{J}_a \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} - \frac{\mathfrak{B}_a}{\mathfrak{Z}} \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2}; \quad (3)$$

$$\mathfrak{B}_a = \mathfrak{B}_x \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} + \mathfrak{Z} \mathfrak{J}_x \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}, \quad \mathfrak{J}_a = \mathfrak{J}_x \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} + \frac{\mathfrak{B}_x}{\mathfrak{Z}} \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}. \quad (4)$$

Hierin ist: $\gamma = \sqrt{(R + i\omega L)(A + i\omega C)} = i\omega \sqrt{LC} \sqrt{\left(1 - i\frac{R}{\omega L}\right)\left(1 - i\frac{A}{\omega C}\right)}$ und wenn wir wiederum die Quadrate von $\frac{R}{\omega L}$ und $\frac{A}{\omega C}$ gegen 1 vernachlässigen:

$$\gamma = i\omega \sqrt{LC} \sqrt{1 - i\left(\frac{R}{\omega L} + \frac{A}{\omega C}\right)} = i\omega \sqrt{LC} \left[1 - \frac{i}{2} \left(\frac{R}{\omega L} + \frac{A}{\omega C} \right) \right] = \alpha i + \beta,$$

worin:

$$\alpha = \omega \sqrt{LC}, \quad \beta = \frac{\sqrt{LC}}{2} \left(\frac{R}{L} + \frac{A}{C} \right) = \frac{1}{2} \left(R \sqrt{\frac{C}{L}} + A \sqrt{\frac{L}{C}} \right). \quad (5)$$

Setzen wir in den Gleichungen (3):

$$\left. \begin{aligned} \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} &= \mathfrak{A} \\ \mathfrak{Z} \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} &= \mathfrak{B} \\ \frac{1}{\mathfrak{Z}} \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} &= \mathfrak{C} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

und demnach:

$$\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}\mathfrak{C} = 1, \quad (7)$$

so wird aus den Gleichungen (3):

$$\mathfrak{B}_e = \mathfrak{A} \mathfrak{B}_a - \mathfrak{B} \mathfrak{J}_a \quad \mathfrak{J}_e = \mathfrak{A} \mathfrak{J}_a - \mathfrak{C} \mathfrak{B}_a \quad (8)$$

oder unter Berücksichtigung der Gleichung (7):

$$\mathfrak{B}_a = \mathfrak{A} \mathfrak{B}_e + \mathfrak{B} \mathfrak{J}_e \quad \mathfrak{J}_a = \mathfrak{A} \mathfrak{J}_e + \mathfrak{C} \mathfrak{B}_e. \quad (9)$$

Die Leitung sei an eine Stromquelle mit der konstanten EMK \mathfrak{E} angeschlossen. Wenn wir dann den inneren Widerstand dieser Stromquelle vernachlässigen, so wird aus der ersten der Gleichungen (9):

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{B}_e \mathfrak{A} + \mathfrak{Z}_e \mathfrak{B}. \quad (10)$$

Wenn man bei einer Leitung in den Gleichungen (6) $e^{-\gamma l}$ gegen $e^{+\gamma l}$ vernachlässigen kann, so wollen wir diese Leitung als „lang“ bezeichnen. Es wird dann nach (6):

$$\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}} = \mathfrak{E}' = \mathfrak{B}_e + \mathfrak{Z}_e \mathfrak{B}. \quad (11)$$

Schließen wir eine solche „lange“ Leitung über den komplexen Widerstand \mathfrak{R} , so ist $\mathfrak{B}_e = \mathfrak{Z}_e \cdot \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{E} = \mathfrak{Z}_e \frac{e^{\gamma l}}{2} (\mathfrak{R} + \mathfrak{Z})$ und nach der zweiten Gleichung (9):

$$\mathfrak{Z}_a = \mathfrak{Z}_e \frac{e^{\gamma l}}{2} \left(1 + \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{Z}} \right), \quad (12)$$

also folgt: $\mathfrak{Z} \mathfrak{Z}_a = \mathfrak{E}$.

Da \mathfrak{Z} und \mathfrak{E} von dem angeschlossenen Widerstand unabhängig sind, so ist gleichfalls \mathfrak{Z}_a hiervon unabhängig. Also sehen wir, daß bei einer „langen“ Leitung die der Stromquelle entnommene Energie unabhängig ist von den angeschlossenen Widerständen.

Wir wollen die Betrachtungen in der vorliegenden Arbeit auf solche „langen“ Leitungen beschränken.

\mathfrak{A} können wir dem absoluten Betrage nach als frequenzunabhängig betrachten, denn es ist: $|\mathfrak{A}| = \left| \frac{e^{i\alpha l} \cdot e^{\beta l}}{2} \right| = \frac{e^{\beta l}}{2}$, und β ist, wie wir unter (5) gesehen haben, im allgemeinen als frequenzunabhängig zu betrachten.

§ 2. Maximale Energieübertragung einer Leitung.

Es sei eine lange Leitung gegeben mit den Konstanten \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{E} und der Charakteristik \mathfrak{Z} . Die Leitung sei über einen komplexen Widerstand von der Form $\mathfrak{R} = r + i r'$ geschlossen. Dann ist: $\mathfrak{B}_e = \mathfrak{Z}_e \cdot \mathfrak{R}$, und nach (11):

$$\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}} = \mathfrak{E}' = \mathfrak{Z}_e (\mathfrak{R} + \mathfrak{Z}). \quad (13)$$

Hieraus finden wir:

$$\mathfrak{Z}_e = \frac{\mathfrak{E}'}{\mathfrak{R} + \mathfrak{Z}}$$

oder in reeller Form:

$$J_c = \frac{E'}{\sqrt{(r+z)^2 + (r'+z')^2}} \quad (14)$$

und die im Widerstande r verbrauchte Energie:

$$W = \frac{E'^2 \cdot r}{2[(r+z)^2 + (r'+z')^2]}. \quad (15)$$

Wir wollen nun bestimmen, welchen Wert dieser Ausdruck bei beliebig veränderlichen r und r' im Maximum annehmen kann. Die Bedingungen hierfür sind:

$$z^2 + r'^2 + 2z'r' + z'^2 = r^2 \quad \text{und} \quad r(2r' + 2z') = 0,$$

also: $r' + z' = 0$, $z' = -r'$, $z^2 = r^2$, $z = r$.

Setzt man jetzt in (15) ein, so wird:

$$W_{\max} = \frac{E'^2}{8z}. \quad (16)$$

Da der Widerstand \Re ganz beliebig gewählt ist, gilt diese Ableitung auch dann, wenn \Re den Kombinationswert des komplexen Widerstandes irgendeines komplizierten Systems von Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten, z. B. eines Kettenleiters, bedeutet. Es ist also unter keinen Umständen möglich, eine größere als die durch (16) angegebene Energie aus der Leitung zu entnehmen.

Bei der Anpassung von Verbrauchern an Leitungen pflegt man in der Weise zu schließen, daß die vom Verbraucher aufgenommene Energie dann am größten wird, wenn an der Übergangsstelle zwischen Leitung und Verbraucher keine Wellenreflexion stattfindet. Die Bedingung hierfür ist bekanntlich: $\Im = \Re$, also: $z = r$, $z' = r'$. Wir haben hier für die „lange“ Leitung die abweichende Bedingung gefunden: $z' = -r'$. Unsere Bedingung maximaler Energieübertragung stimmt also nicht mit der Bedingung überein, daß keine Wellenreflexion an der Übergangsstelle auftritt.

Um über diesen scheinbaren Widerspruch Klarheit zu gewinnen, wählen wir auf der Leitung einen Punkt x derart, daß er von Anfang und Ende so weit entfernt ist, daß die beiden durch den Punkt x getrennten Stücke der Leitung als „lang“ zu betrachten sind. An dieser Stelle findet offenbar keine Wellenreflexion statt. Wir können die Sachlage so auffassen, daß wir das durch den Punkt x abgetrennte Stück der Leitung als Verbraucher ansehen; dieser Verbraucher ist dann so angeglichen, daß keine Wellenreflexion erfolgt. Denken wir uns nun im Punkt x ein Wattmeter eingeschaltet und die übertragene Leistung gemessen. Wir finden dann leicht, ebenso wie (12): $\Re_x = \Im_x \cdot \Im$, und mit leicht verständlicher Abkürzung entsprechend (6): $\frac{\mathcal{G}}{\mathfrak{U}_x} = \mathcal{G}'_x = \Re_x + \Im_x \Im = 2 \Im_x \Im$. Also ist:

$$\Re_x = \frac{\mathcal{G}'_x}{2} = \frac{\mathcal{G}}{2 \mathfrak{U}_x}, \quad \Im_x = \frac{\mathcal{G}'_x}{2 \Im} = \frac{\mathcal{G}}{2 \mathfrak{U}_x \Im}. \quad (17)$$

Die Leistung berechnet man nun aus den komplexen Werten von Spannung und Stromstärke bekanntlich in der Weise, daß man die Stromstärke mit dem konjugiert-komplexen Wert der Spannung multipliziert oder umgekehrt. Der reelle Teil dieses Produktes ist dann die doppelte Leistung. Es sei:

$$\Re_x = V_x \cdot e^{i\varphi}, \quad \Im_x = J_x \cdot e^{i\psi}, \quad \Im = Z \cdot e^{i\chi}.$$

Dann wird:

$$V_x \cdot e^{-i\varphi} \cdot J_x \cdot e^{i\psi} = \frac{4E^2}{4Z} e^{+i\alpha x - \beta x} \cdot e^{-i\alpha x - \beta x - i\chi} = \frac{E^2}{Z} e^{-2\beta x} \cdot e^{-i\chi}.$$

Sondern wir hieraus den reellen Teil aus, so ergibt sich:

$$2W_x = \frac{E^2 \cdot e^{-2\beta x}}{Z} \cdot \frac{z}{Z}.$$

Nach (17) ist:

$$\mathcal{G} = E = \frac{E'_x \cdot e^{\beta x}}{2}.$$

Also wird schließlich:

$$W_x = \frac{E_x'^2}{8} \cdot \frac{z}{z^2 + z'^2} \quad (18)$$

die von dem Wattmeter angezeigte Leistung.

Nunmehr denken wir uns die Leitung an der Stelle x über den Widerstand $\Re = z - iz'$ geschlossen. Dann ist, wie wir gesehen haben, die in diesem Widerstande verbrauchte Leistung: $W_R = \frac{E_x'^2}{8z}$, also größer als W_x nach (18). Es sei nun W_l die auf der

Leitung verbrauchte Energie im ersten Fall, wenn nämlich die Leitung über x hinausgeht, W'_l die auf der Leitung verbrauchte Energie, wenn die Leitung in x über \Re geschlossen ist. Dann ist, wie wir gesehen haben, die gesamte der Leitung zugeführte Leistung in beiden Fällen dieselbe, also: $W'_l + W_R = W_l + W_x$. Nun ist $W_x < W_R$; also folgt: $W'_l > W_l$, d. h. die auf der Leitung verbrauchte Energie wird dadurch geringer, daß die Leitung an Stelle einer Fortsetzung über einen Widerstand $\Re = z - iz'$ geschlossen wird. Am Anfang der Leitung macht sich wegen deren vorausgesetzten Länge diese Verminderung des Energieverbrauches nicht bemerkbar, sie wird um so größer, je mehr man sich dem Ende der Leitung nähert. Die Einschaltung des abgeglichenen Widerstandes \Re an der Stelle x an Stelle einer Fortsetzung der Leitung wirkt also auf die Leitung so, daß dadurch der Energieverbrauch gegen das Ende der Leitung zu gegenüber dem vorigen Zustand vermindert wird.

§ 3. Aus der Theorie ein- und zweiwelliger Gebilde.

Wenn man an eine konstante EMK \mathcal{E} einen komplexen Widerstand $\Re = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ anschließt, so hat man bekanntlich nach dem Ohmschen Gesetz für Wechselstrom:

$$\mathcal{E} = \Im \cdot \Re = \Im \left[R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] = \Im (R + iS). \quad (19)$$

Also:

$$\Im = \frac{\mathcal{E}}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\mathcal{E}}{R + iS}$$

oder für die Amplitude in reeller Form:

$$J = \frac{E}{\sqrt{R^2 + S^2}}. \quad (20)$$

Dies ist die charakteristische Gleichung der Resonanzkurve eines einfachen, schwingungsfähigen Systems. Wenn wir also ähnlich gebauten Gleichungen wie (19) und (20) in Zukunft begegnen werden, so haben wir die gleichen Resonanzkurven wie für ein einfaches schwingungsfähiges System zu erwarten; andere Kurvenformen können dagegen nicht auftreten.

Die durch (20) gegebene Kurve hat, in Abhängigkeit von ω aufgetragen, ein Maximum für $S = 0$, also für:

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (21)$$

Als Maß für die Breite der Resonanzkurve dient dann bekanntlich das logarithmische Dekrement des Schwingungskreises:

$$d = \frac{R\pi}{\omega_0 L}.$$

Wir werden im folgenden, um uns von dem Faktor π zu befreien, die Größe

$$D = \frac{R}{\omega_0 L} \quad (22)$$

betrachten, die wir kurzweg als „Dämpfung“ bezeichnen wollen.

Wir wollen die Gleichung (20) nach dem Vorgange von H. Riegger noch etwas umformen. Wir bekommen hierdurch in vielen Fällen übersichtlichere Formen,

und vor allen Dingen wird sich die Berechnung der Resonanzkurve leichter durchführen lassen. Hierzu dividieren wir in (20) Zähler und Nenner durch R und nennen

$$\frac{S}{R} = U. \quad (23)$$

Dann ist:

$$J = \frac{E}{R} \frac{1}{\sqrt{1+U^2}}. \quad (24)$$

Für U finden wir: $U = \frac{\omega L}{R} - \frac{1}{R\omega C}$. Nach (21) und (22) ist: $R = \omega_0 L \cdot D = \frac{D}{\omega_0 C}$
also: $U = \frac{1}{D} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$. Oder wenn wir das Frequenzverhältnis $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$ definieren:

$$U = \frac{1}{D} \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right) = \frac{X}{D}. \quad (25)$$

Um aus (24) die Resonanzkurve zu berechnen, brauchen wir nur den Bruch $\frac{1}{\sqrt{1+U^2}}$ zu betrachten, da $\frac{E}{R}$ von der Frequenz unabhängig ist. Die einfachsten Verhältnisse und zugleich die größte Allgemeinheit erreichen wir, wenn wir die Resonanzkurve in Abhängigkeit von U auftragen. Die Kurven für verschiedene Dämpfungen unterscheiden sich dann nur dem Abszissenmaßstab nach. Man erkennt daraus deutlich, daß D ein Maß für die Breite der Resonanzkurve ist. Aus diesen Kurven kann man dann Kurven, die in anderen Maßstäben aufgetragen sind, in einfacher Weise ableiten. Zunächst ergibt sich:

$$X = D \cdot U. \quad (26)$$

Weiter ergibt sich:

$$X = \eta - \frac{1}{\eta} = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \omega_0} = \frac{(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)}{\omega \omega_0}.$$

Bei der geringen Breite der in Betracht kommenden Frequenzbereiche kann man setzen: $\omega + \omega_0 = 2\omega$. Dann wird:

$$X = \eta - \frac{1}{\eta} = 2 \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = 2(\eta - 1) = 2x.$$

Also:

$$x = \frac{X}{2} = \frac{UD}{2}, \quad \eta = 1 + \frac{X}{2} = 1 + \frac{UD}{2}. \quad (27)$$

Wir betrachten nun die Schaltung nach Abb. 1 bzw. 1a:

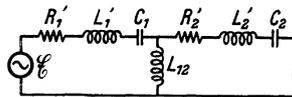


Abb. 1.

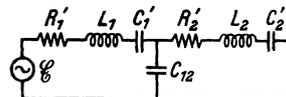


Abb. 1a.

Das sind 2 Schwingungskreise, die induktiv bzw. kapazitiv miteinander gekoppelt sind. Es sei bei induktiver Koppelung:

$$\mathfrak{R}_1 = R_1' + i \left(\omega L_1' + \omega L_{12} - \frac{1}{\omega C_1} \right) = R_1' + i \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) = R_1 + i S_1,$$

$$\mathfrak{R}_2 = R_2' + i \left(\omega L_2' + \omega L_{12} - \frac{1}{\omega C_2} \right) = R_2' + i \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) = R_2 + i S_2$$

bzw. bei kapazitiver Koppelung:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_1 &= R'_1 + i \left(\omega L'_1 - \frac{1}{\omega C'_1} - \frac{1}{\omega C_{12}} \right) = R'_1 + i \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) = R_1 + i S_1, \\ \mathfrak{R}_2 &= R'_2 + i \left(\omega L'_2 - \frac{1}{\omega C'_2} - \frac{1}{\omega C_{12}} \right) = R'_2 + i \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) = R_2 + i S_2.\end{aligned}$$

Man hat nach dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz für beide Kreise:

$$\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{I}_1 \mathfrak{R}_1 - \mathfrak{I}_2 \mathfrak{R}_{12}, \quad 0 = \mathfrak{I}_1 \mathfrak{R}_{12} - \mathfrak{I}_2 \mathfrak{R}_2.$$

Daraus ergibt sich:

$$\mathfrak{I}_2 = \frac{\mathfrak{E}_0 \mathfrak{R}_{12}}{\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_{12}^2}$$

oder, in reeller Form bei induktiver Koppelung:

$$\left. \begin{aligned} J_2 &= E_0 \frac{\omega L_{12}}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \\ \text{wo:} \quad A_2 &= R_1 R_2 - S_1 S_2 + \omega^2 L_{12}^2, \quad B_2 = R_1 S_2 + R_2 S_1, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

bei kapazitiver Koppelung:

$$\left. \begin{aligned} J_2 &= E_0 \frac{1}{\omega C_{12} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \\ \text{wo:} \quad A_2 &= R_1 R_2 - S_1 S_2 + \frac{1}{\omega^2 C_{12}^2}, \quad B_2 = R_1 S_2 + R_2 S_1. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Die Gleichungen (28) bzw. (29) sind die charakteristischen Gleichungen der Resonanzkurve eines zweiwelligen Gebildes.

Wir wollen diese Gleichungen wieder nach dem Vorgange von H. Riegger umformen. Wenn wir Zähler und Nenner durch $R_1 \cdot R_2$ dividieren, erhalten wir für induktive Koppelung:

$$J_2 = \frac{E_0 \frac{\omega L_{12}}{\sqrt{R_1 R_2}}}{\sqrt{R_1 R_2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (30)$$

Hierin ist der Zähler:

$$\sqrt{\frac{\omega^2 L_{12}^2}{R_1 R_2}} = \sqrt{\frac{\omega^2 L_{12}^2}{\omega_0^2 L_1 L_2 D_1 D_2}} = \eta \sqrt{\frac{K_1 K_2}{D_1 D_2}} = \eta \sqrt{m_1 m_2},$$

wenn man die Koppelungskoeffizienten der beiden Kreise: $K_1 = \frac{L_{12}}{L_1}$, $K_2 = \frac{L_{12}}{L_2}$

und die Verhältnisse von Koppelung zu Dämpfung: $\frac{K_1}{D_1} = m_1$ bzw. $\frac{K_2}{D_2} = m_2$

setzt und annimmt, daß die beiden Kreise auf die gleiche Eigenfrequenz abgestimmt sind. Im Nenner von (30) ist dann:

$$A_2^2 = 1 - U_1 U_2 + \eta^2 m_1 m_2, \quad B_2^2 = U_1 + U_2. \quad (31)$$

Für kapazitive Koppelung erhalten wir ebenso für den Zähler:

$$\frac{1}{\omega C_{12} \sqrt{R_1 R_2}} = \sqrt{\frac{\omega_0^2 C_1 C_2}{\omega^2 C_{12} D_1 D_2}} = \frac{1}{\eta} \sqrt{\frac{K_1 K_2}{D_1 D_2}} = \frac{1}{\eta} \sqrt{m_1 m_2}.$$

Hierin ist jetzt:

$$K_1 = \frac{C_1}{C_{12}}, \quad K_2 = \frac{C_2}{C_{12}}.$$

und im Nenner wird:

$$A_2^2 = 1 - U_1 U_2 + \frac{1}{\eta^2} m_1 m_2, \quad B_2^2 = U_1 + U_2. \quad (32)$$

Für U_1 bzw. U_2 haben wir wie oben: $U_1 = \frac{1}{D_1} \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right)$, $U_2 = \frac{1}{D_2} \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right)$ (33)

und demnach:

$$U_1 = U_2 \frac{D_2}{D_1}. \quad (34)$$

Also ist schließlich bei induktiver Koppelung:

$$\left. \begin{aligned} J_2 &= E_0 \sqrt{\frac{m_1 m_2}{R_1 R_2}} \frac{\eta}{\sqrt{A_2'^2 + B_2'^2}}, \\ \text{wo:} \quad A_2' &= 1 - U_2^2 \frac{D_2}{D_1} + \eta^2 m_1 m_2, \quad B_2' = U_2 \frac{D_1 + D_2}{D_1}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Bei kapazitiver Koppelung:

$$\left. \begin{aligned} J_2 &= E_0 \sqrt{\frac{m_1 m_2}{R_1 R_2}} \frac{\frac{1}{\eta}}{\sqrt{A_2'^2 + B_2'^2}}, \\ \text{wo:} \quad A_2' &= 1 - U_2^2 \frac{D_2}{D_1} + \frac{1}{\eta^2} m_1 m_2, \quad B_2' = U_2 \frac{D_1 + D_2}{D_1}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Sind also in beiden Fällen sowohl bei kapazitiver wie bei induktiver Koppelung die Koppelungen K_1 und K_2 zahlenmäßig gleich, so gehen die Gleichungen der Resonanzkurven für induktive und für kapazitive Koppelung ineinander über, wenn man η durch $\frac{1}{\eta}$ ersetzt. Die Resonanzkurven sind also identisch für beide Fälle, wenn man zueinander reziproke Abszissen verwendet.

Um die Lage der Maxima der Resonanzkurve annähernd zu berechnen, können wir η bzw. $\frac{1}{\eta}$ im Zähler von (35) bzw. (36) und in A_2' in Anbetracht der geringen Breite unserer Resonanzkurven, wo η nur um wenige Prozent von 1 abweicht, als konstant und gleich 1 setzen und nur nach den Extremwerten von $A_2'^2 + B_2'^2$ in Abhängigkeit von U_2 fragen. Wir haben dann die Bedingung:

$$A_2' \frac{\partial A_2'}{\partial U_2} + B_2' \frac{\partial B_2'}{\partial U_2} = 0, \quad \text{also: } -2 A_2' U_2 \frac{D_2}{D_1} + B_2' \frac{D_1 + D_2}{D_1} = 0$$

oder, durch Einsetzen von A_2' und B_2' :

$$-U_2 \cdot 2 D_1 D_2 + U_2 \cdot 2 U_2^2 \cdot D_2^2 - U_2 \cdot 2 m_1 m_2 D_1 D_2 + U_2 (D_1^2 + 2 D_1 D_2 + D_2^2) = 0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist offenbar: $U_2 = 0$. Scheiden wir diesen Fall aus und dividieren durch U_2 , so folgt:

$$2 U_2^2 D_2^2 = 2 K_1 K_2 - (D_1^2 + D_2^2).$$

Setzt man die Koppelung der beiden Kreise:

$$K = \sqrt{K_1 K_2},$$

so wird schließlich:

$$U_2 = \pm \frac{1}{D_2} \sqrt{K^2 - \frac{D_1^2 + D_2^2}{2}}. \quad (37)$$

Wir erkennen hieraus, daß unter der gemachten Voraussetzung gleicher Abstimmung der beiden Kreise die Maxima gleich hoch sind, denn in (35) bzw. (36) tritt U_2 nur quadratisch auf; J_2 nimmt also für beide Wurzeln U_2 denselben Wert ein.

Ist in (37) der Radikand negativ, also: $K < \sqrt{\frac{D_1^2 + D_2^2}{2}}$, so werden die beiden letzten Wurzeln U_2 imaginär, die Resonanzkurve hat also nur ein Maximum für

$U_2 = 0$. Ist jedoch $K > \sqrt{\frac{D_1^2 + D_2^2}{2}}$, so hat man 3 verschiedene reelle Wurzeln; davon bedeutet $U_2 = 0$ ein Minimum, die beiden anderen Wurzeln 2 Maxima zu beiden Seiten des Minimums. Der Abstand der beiden Maxima voneinander ist um so größer, je größer K^2 im Vergleich zu $\frac{D_1^2 + D_2^2}{2}$ ist, also je enger die Koppelung ist. Für $K = \sqrt{\frac{D_1^2 + D_2^2}{2}}$ endlich fallen alle 3 Wurzeln zusammen; die Resonanzkurve hat gerade noch ein Maximum. Wir haben hier die Grenze zwischen Ein- und Zweiwelligkeit.

Sind bei beiden Kreisen die Dämpfungen und die Koppelungskoeffizienten einander gleich, sind also die Kreise gleichgebaut, so kann man die Indizes 1 und 2 fortlassen. Die Formeln vereinfachen sich dann wesentlich. Als Bedingung für die Grenzkoppelung haben wir dann:

$$m = 1. \quad (38)$$

Die Gleichungen (28) bzw. (29) sind die charakteristischen Gleichungen der Resonanzkurven für ein zweiwelliges System. Wenn wir Gleichungen erhalten, die ebenso gebaut sind, so müssen wir daraus den Schluß ziehen, daß die Resonanzkurve eine der hier genannten Formen erhält.

§ 4. Einschalten eines einfachen Schwingungskreises in die Leitung.

Die lange Leitung mit den Konstanten \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{Z} sei über den Widerstand $\mathfrak{R} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ geschlossen. Wir fragen erstens, für welchen Wert dieses Widerstandes wir ein Maximum an Energie im Nutzwiderstande R erhalten, zweitens nach der Form der möglichen Resonanzkurven.

Die erste Frage ist nach unseren Betrachtungen in § 2 sofort zu beantworten. Es muß offenbar sein:

$$R = z, \quad \omega L - \frac{1}{\omega C} - \frac{1}{\omega C_z} = 0.$$

Für die Stromstärke finden wir dann:

$$J_e = \frac{E'}{\sqrt{(R+z)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} - \frac{1}{\omega C_z}\right)^2}}$$

und für die Energie

$$2W = J_e^2 \cdot R = \frac{E'^2 \cdot R}{(R+z)^2}, \quad \text{also: } W_{\max} = \frac{E'^2}{8z}.$$

Die Gleichung der Resonanzkurve hat die gleiche Form wie die Gleichung (20), die für den einfachen Schwingungskreis gilt; wir können also auch nur Resonanzkurven von der gleichen Gestalt wie beim einfachen Schwingungskreis erwarten.

Für die Dämpfung erhalten wir: $D = \frac{R+z}{\omega_0 L}$ und für den Fall maximaler Energieübertragung: $D = \frac{2z}{\omega_0 L}$.

Bei den gebräuchlichen Leitungen sind etwa: $z = 500$ Ohm, $z' = -100$ Ohm. Man kann der Resonanzkurve hiernach jede beliebige Gestalt geben, die man von einem einwelligen Gebilde erwarten darf, wenn man nur D entsprechend wählt und hiernach die Konstanten des Schwingungskreises berechnet. Es sei z. B.: $\mathfrak{b} = 0,1$, demnach etwa $D = 0,03$, $\omega_0 = 6000$. Dann findet man angenähert: $L_1 = 5$ Henry, $C_1 = 0,005 \mu F$.

III. Einfache Schwingungskreise.

§ 5. Koppelung eines gewöhnlichen Schwingungskreises mit einer Leitung.

An die Leitung mit den Konstanten \mathfrak{A}_0 , \mathfrak{B}_0 , \mathfrak{C}_0 und der Charakteristik \mathfrak{Z}_0 sei ein Schwingungskreis nach Abb. 2 angeschlossen.

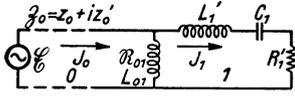


Abb. 2.

Wir wollen die Konstanten der Leitung sowie R_1 , $L_1 = L_{01} + L_1'$ und C_1 als konstant betrachten und uns fragen, bei welchem Wert von L_{01} die in den Schwingungskreis übertragene Energie ein Maximum wird. Wenn wir also L_{01} variieren, so wird gleichzeitig L_1' mitvariiert, und zwar derart, daß L_1 konstant bleibt. Physikalisch kann man das in der Weise realisieren, daß man die Gesamtinduktivität L_1 des Schwingungskreises in eine Spule legt und diese zur Koppelung mit der Leitung an verschiedenen Stellen anzapft.

Wir wollen zunächst zeigen, daß trotz Koppelung mit der Leitung das System einwillig bleibt. Zu diesem Zwecke werden wir den Ausdruck für die Stromamplituden auf die Form: $J_I = \frac{E_I}{R}$ bringen und zeigen, daß hierin mit genügender Annäherung E_I frequenzunabhängig ist, und daß R von der Form ist: $R = \sqrt{R_I^2 + \left(\omega L_I - \frac{1}{\omega C_I}\right)^2}$, worin wiederum R_I , L_I und C_I mit genügender Annäherung als frequenzunabhängig angesehen werden können.

$$\text{Es ist:} \quad \mathfrak{B}_e = \mathfrak{I}_0 \mathfrak{R}_{01} - \mathfrak{I}_1 \mathfrak{R}_{01}.$$

Eingesetzt in (11) ergibt dies:

$$\mathfrak{C}'_0 = \mathfrak{I}_0 (\mathfrak{R}_{01} + \mathfrak{Z}_0) - \mathfrak{I}_1 \mathfrak{R}_{01}.$$

Im Schwingungskreise ist:

$$\mathfrak{I}_0 \mathfrak{R}_{01} - \mathfrak{I}_1 (\mathfrak{R}_{01} + \mathfrak{R}_1) = 0.$$

Setzt man:

$$\mathfrak{R}_{01} + \mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{R}_0, \quad \mathfrak{R}_{01} + \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_1, \quad (39)$$

so wird:

$$\mathfrak{I}_0 \mathfrak{R}_0 - \mathfrak{I}_1 \mathfrak{R}_{01} = \mathfrak{C}'_0, \quad \mathfrak{I}_0 \mathfrak{R}_{01} - \mathfrak{I}_1 \mathfrak{R}_1 = 0. \quad (40)$$

Daraus folgt:

$$\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{C}'_0 \frac{\mathfrak{R}_{01}}{\mathfrak{R}_0 \mathfrak{R}_1 - \mathfrak{R}_{01}^2} \quad (41)$$

oder

$$\mathfrak{I}_1 \left(\mathfrak{R}_1 - \frac{\mathfrak{R}_{01}^2}{\mathfrak{R}_0} \right) = \mathfrak{C}'_0 \frac{\mathfrak{R}_{01}}{\mathfrak{R}_0} = \mathfrak{C}''_0. \quad (42)$$

Es ist nach (39):

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{R}_0 &= z_0 + i(z_0' + \omega L_{01}) = R_0 + iS_0, \\ \mathfrak{R}_1 &= R_1 + i\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) = R_1 + iS_1. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Setzt man dies in (42) ein, so folgt:

$$\mathfrak{I}_1 \left[R_1 + z_0 \frac{\omega^2 L_{01}^2}{z_0^2 + S_0^2} + i\left(\omega L_1 - \omega L_{01} \frac{\omega^2 L_{01}^2}{z_0^2 + S_0^2} - \frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_1} \frac{\omega^2 L_{01}^2}{z_0^2 + S_0^2}\right) \right] = \mathfrak{C}'_0 \frac{i\omega L_{01}}{z_0 + iS_0} \quad (44)$$

oder, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\frac{\omega^2 L_{01}^2}{z_0^2 + (z_0' + \omega L_{01})^2} = a_{01}^2 \quad (45)$$

und zu reellen Werten übergeht:

$$J_1 = \frac{E'_0 a_{01}}{\sqrt{(R'_1 + z_0 a_{01}^2)^2 + \left[\omega (L_1 - L_{01} a_{01}^2) - \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{C_1} - \frac{a_{01}^2}{C_z} \right) \right]^2}}. \quad (46)$$

Diese Gleichung hat die charakteristische Form der für ein einwelliges Gebilde gültigen Gleichung (20), wenn man a_{01}^2 als frequenzunabhängig annehmen darf. Dies ist nun, wie wir leicht sehen, für die kleinen Frequenzbereiche, die für eine Resonanzkurve in Frage kommen, wirklich der Fall. $z'_0 = -\frac{1}{\omega C_z}$ ist erheblich kleiner als z_0 . a_{01}^2 kann nur wenig größer als 1 werden. Ist ωL_{01} sehr groß gegen z_0 , so kann man a_{01}^2 mit großer Annäherung gleich 1 setzen. Wird ωL_{01} kleiner, so nimmt die Abhängigkeit von ω zu, wird aber selbst bei kleinsten Werten von ωL_{01} , wo der Nenner als konstant angesehen werden kann, niemals stärker als quadratisch. Also können wir a_{01}^2 für die Betrachtung der Resonanzkurve unbedenklich als konstant ansehen. Um zu zeigen, wie unerhebliche Abweichungen die Berücksichtigung der Veränderlichkeit von a_{01}^2 an der Resonanzkurve hervorbringt, sind nach Gleichung (46) 2 Resonanzkurven unter Zugrundelegung folgender Verhältnisse berechnet und in die Abb. 3 eingetragen:

$$\begin{aligned} z_0 &= 500 \text{ Ohm}, & z'_0 &= -100 \text{ Ohm}, \\ R_1 &= 100 \text{ Ohm}, & L_1 &= 1,675 \text{ Henry}, \\ L_{01} &= 0,05775 \text{ Henry}, & C_1 &= 0,0375 \mu\text{F}. \end{aligned}$$

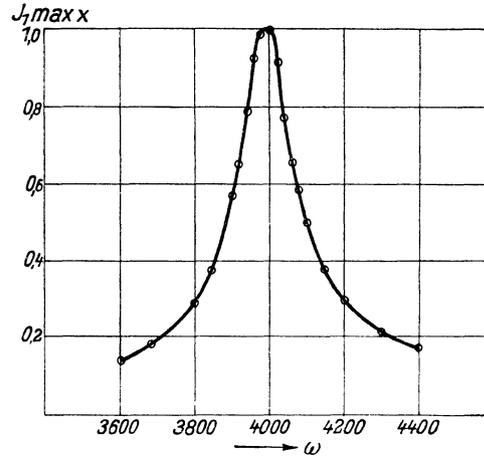


Abb. 3.

Die streng berechnete Kurve und die unter Zugrundelegung eines konstanten a_{01}^2 berechnete Kurve weichen so wenig voneinander ab, daß diese Abweichungen bei dem gewählten Maßstab innerhalb der Grenzen der Zeichengenauigkeit nicht mehr darstellbar sind. Wie man sieht, wird jedenfalls der Charakter der Kurve, insbesondere insofern, als sie ein Bild der Durchlässigkeit für verschiedene Frequenzen gibt, durchaus nicht geändert.

Wir können also das ganze System als einen einzigen Schwingungskreis auffassen und die Gleichung (46) demgemäß einfacher schreiben. Wir wollen jetzt und in Zukunft die auf solche kombinierten Schwingungskreise bezüglichen Größen mit den Indizes römisch *I* usw. bezeichnen. Wir erhalten dann für (46):

$$J_I = \frac{E_I}{\sqrt{R_I^2 + \left(\omega L_I - \frac{1}{\omega C_I} \right)^2}}. \quad (47)$$

Hierin ist:

$$\left. \begin{aligned} E_I &= E'_0 a_{01}, & R_I &= R'_1 + z_0 a_{01}^2, \\ L_I &= L_1 - L_{01} a_{01}^2, & C_I &= C_1 \frac{C_z}{C_z - C_1 a_{01}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Wir erkennen also, daß durch die Koppelung mit der Leitung der Ohmsche Widerstand um $z_0 a_{01}^2$ vergrößert, die Induktivität um $L_{01} a_{01}^2$ verkleinert und die Kapazität im Verhältnis $\frac{C_z}{C_z - C_1 a_{01}^2}$ vergrößert wird.

Wenn wir nach Abb. 2 a statt der induktiven Koppelung kapazitive Koppelung annehmen, so haben wir in (42) $\Re_{01} = -\frac{i}{\omega C_{01}}$ zu setzen. Wir erhalten dann die gleichen Formeln, wenn wir nur überall ωL_{01} durch $-\frac{1}{\omega C_{01}}$ ersetzen. Wir setzen wieder zur Abkürzung:

$$a'_{01}{}^2 = \frac{1}{z_0^2 + \left(z_0' - \frac{1}{\omega C_{01}}\right)^2} \quad (49)$$

Abb. 2 a.

und erhalten dann:

$$\Im_1 \left[R_1' + z_0 a'_{01}{}^2 + i \left\{ \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} + \frac{a'_{01}{}^2}{\omega} \left(\frac{1}{C_{01}} + \frac{1}{C_2} \right) \right\} \right] = \mathfrak{E}'_0 \frac{-\frac{i}{\omega C_{01}}}{z_0 + i \left(z_0' - \frac{1}{\omega C_{01}} \right)} \quad (50)$$

oder, wenn wir zu reellen Werten übergehen:

$$J_1 = \frac{E_0 a'_{01}}{\sqrt{(R_1' + z_0 a'_{01}{}^2)^2 + \left[\omega L_1 - \frac{1}{\omega} \left\{ \frac{1}{C_1} - a'_{01}{}^2 \left(\frac{1}{C_{01}} + \frac{1}{C_2} \right) \right\} \right]^2}}. \quad (51)$$

Es gelten hier genau die gleichen Überlegungen wie oben. Wir können das ganze Gebilde wieder als einen einzigen Schwingungskreis auffassen und schreiben:

$$J_I = \frac{E_I}{\sqrt{R_I^2 + \left(\omega L_I - \frac{1}{\omega C_I} \right)^2}}.$$

Hierin ist:

$$\left. \begin{aligned} E_I &= E'_0 a'_{01}, & R_I &= R_1' + z_0 a'_{01}{}^2, \\ L_I &= L_1, & \frac{1}{C_I} &= \frac{1}{C_1} - a'_{01}{}^2 \left(\frac{1}{C_{01}} + \frac{1}{C_2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Jetzt erscheint also infolge der kapazitiven Koppelung mit der Leitung der Ohmsche Widerstand wieder um $z_0 a'_{01}{}^2$ vergrößert, doch bleibt jetzt die Induktivität unverändert, während die Kapazität vergrößert wird.

Zur Berechnung der optimalen induktiven Koppelung wollen wir uns nun einer anderen Schreibweise bedienen. Es folgt aus (41):

$$J_1 = E'_0 \frac{\omega L_{01}}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}. \quad (53)$$

Hierin ist:

$$\begin{aligned} A_1 &= R_0 R_1 - S_0 S_1 + \omega^2 L_{01}^2 = z_0 R_1' - (z_0' + \omega L_{01}) S_1 + \omega^2 L_{01}^2, \\ B_1 &= R_0 S_1 + R_1 S_0 = z_0 S_1 + (z_0' + \omega L_{01}) R_1'. \end{aligned} \quad (54)$$

Wir werden die im Nutzwiderstand R_1' verbrauchte Energie W in Abhängigkeit von ωL_{01} ausdrücken und das totale Maximum von W bei Variation von ω und von L_{01} aufsuchen. Zu diesem Zweck bilden wir die Bedingungsgleichungen für die partiellen Maxima von W in bezug auf ω und L_{01} . Aus diesen beiden Gleichungen werden wir dann die Bedingungen für ω und L_{01} ableiten, die ein Maximum an Energie im Nutzwiderstande R_1' ergeben.

Die Energie des Schwingungskreises wird nach (53):

$$W = \frac{1}{2} J_1^2 \cdot R_1' = \frac{E_0'^2}{2} \frac{\omega^2 L_{01}^2 \cdot R_1'}{A_1^2 + B_1^2}. \quad (55)$$

Als Bedingungen für das totale Maximum dieses Ausdrucks in Abhängigkeit von L_{01} und ω finden wir:

$$\left. \begin{aligned} A_1^2 + B_1^2 - L_{01} \left(A_1 \frac{\partial A_1}{\partial L_{01}} + B_1 \frac{\partial B_1}{\partial L_{01}} \right) &= 0, \\ A_1^2 + B_1^2 - \omega \left(A_1 \frac{\partial A_1}{\partial \omega} + B_1 \frac{\partial B_1}{\partial \omega} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

oder in anderer Form:

$$\left. \begin{aligned} A_1 \left(A_1 - L_{01} \frac{\partial A_1}{\partial L_{01}} \right) + B_1 \left(B_1 - L_{01} \frac{\partial B_1}{\partial L_{01}} \right) &= 0 \\ A_1 \left(A_1 - \omega \frac{\partial A_1}{\partial \omega} \right) + B_1 \left(B_1 - \omega \frac{\partial B_1}{\partial \omega} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Wir finden nach (43):

$$L_{01} \frac{\partial A_1}{\partial L_{01}} = -\omega L_{01} S_1 + 2\omega^2 L_{01}^2, \quad L_{01} \frac{\partial B_1}{\partial L_{01}} = \omega L_{01} R'_1, \quad (58)$$

$$\omega \frac{\partial A_1}{\partial \omega} = -\omega L_{01} S_1 - (z'_0 + \omega L_{01}) \omega \frac{\partial S_1}{\partial \omega} + 2\omega^2 L_{01}^2, \quad \omega \frac{\partial B_1}{\partial \omega} = z_0 \omega \frac{\partial S_1}{\partial \omega} + \omega L_{01} R'_1. \quad (59)$$

Setzen wir dies in die Gleichungen (56) ein und setzen die beiden linken Seiten der Gleichungen (56) einander gleich, so folgt:

$$A_1(z'_0 + \omega L_{01}) \omega \frac{\partial S_1}{\partial \omega} - B_1 z_0 \omega \frac{\partial S_1}{\partial \omega} = 0$$

oder

$$A_1(z'_0 + \omega L_{01}) = B_1 z_0, \quad A_1 S_0 = B_1 z_0, \quad B_1 = \frac{A_1 S_0}{z_0}. \quad (60)$$

Also ist nach (54):

$$z_0 R'_1 S_0 + S_0^2 S_1 + S_1 \omega^2 L_{01}^2 = z_0^2 S_1 + z_0 R'_1 S_0.$$

Daraus folgt:

$$S_1 = S_0 \frac{\omega^2 L_{01}^2}{z_0^2 + S_0^2}. \quad (61)$$

Wird dies in (54) eingesetzt, so ergibt sich:

$$A_1 = z_0 R'_1 + z_0^2 \frac{\omega^2 L_{01}^2}{z_0^2 + S_0^2}, \quad B_1 = z_0 S_0 \frac{\omega^2 L_{01}^2}{z_0^2 + S_0^2} + R'_1 S_0. \quad (62)$$

Aus den Gleichungen (58) wird dann:

$$\left. \begin{aligned} L_{01} \frac{\partial A_1}{\partial L_{01}} &= -S_0 \omega L_{01} \frac{\omega^2 L_{01}^2}{z_0^2 + S_0^2} + 2\omega^2 L_{01}^2, \\ L_{01} \frac{\partial B_1}{\partial L_{01}} &= \omega L_{01} R'_1. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Setzen wir (62) und (63) in die erste der Gleichungen (57) ein, so kommt:

$$A_1 \left(z_0 R'_1 - \frac{z_0^2 \omega^2 L_{01}^2 - S_0 \omega^3 L_{01}^3 + 2S_0^2 \omega^2 L_{01}^2}{z_0^2 + S_0^2} \right) + B_1 \left(R'_1 S_0 - \omega L_{01} R'_1 + \frac{z_0 S_0 \omega^2 L_{01}^2}{z_0^2 + S_0^2} \right) = 0$$

oder, unter Berücksichtigung von (60), wenn man außerdem beiderseits durch z_0 dividiert:

$$\frac{\omega^2 L_{01}^2}{z_0^2 + S_0^2} \left(z_0^2 + \frac{S_0^2}{z_0} - \frac{S_0 \omega L_{01}}{z_0} \right) - \frac{R'_1}{z_0} \left(z_0^2 + \frac{S_0^2}{z_0} - \frac{S_0 \omega L_{01}}{z_0} \right) = 0. \quad (64)$$

Hiernach ist entweder:

$$\frac{\omega^2 L_{01}^2}{z_0^2 + S_0^2} = a_{01}^2 = \frac{R_1'}{z_0} \quad (65)$$

oder:

$$z_0^2 + S_0^2 - S_0 \omega L_{01} = 0. \quad (66)$$

Setzen wir zunächst (65) in (62) und (55) ein, so erhalten wir:

$$W_1 = \frac{J_1^2 \cdot R_1'}{2} = \frac{E_0'^2}{2} \frac{\omega^2 L_{01}^2 \cdot R_1'}{4 R_1'^2 z_0^2 + 4 R_1'^2 S_0^2} = \frac{E_0'^2}{8 R_1'} \frac{\omega^2 L_{01}^2}{z_0^2 + S_0^2} = \frac{E_0'^2}{8 z_0}.$$

Die Gleichungen (65) und (61) sind also die Bedingungsgleichungen für das gesuchte totale Maximum. Aus den beiden Gleichungen folgt:

$$S_1 = \frac{S_0 R_1'}{z_0} \quad (67)$$

und nach (43):

$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = S_0 \frac{R_1'}{z_0}. \quad (68)$$

Die Bedingung (66) ergibt ein physikalisch bedeutungsloses flaches Minimum bei engerer Koppelung (s. Abb. 4).

Die Gleichung (65) hat für ωL_{01} keine reelle Lösung mehr, sobald $R_1' > \frac{z_0^2 + z_0'^2}{z_0}$, also bei Vernachlässigung von z_0' : $R_1' > z_0$ wird. Das optimale ωL_{01} aus Gleichung (65) wird mit wachsendem R_1' immer größer, um schließlich für $R_1' = \frac{z_0^2 + z_0'^2}{z_0}$ unendlich zu werden. Mit der besprochenen Art der Koppelung erreichen wir also die Höchstleistung nur dann, wenn $R_1' < \frac{z_0^2 + z_0'^2}{z_0}$, also kleiner als z_0 bleibt. Die nachstehende

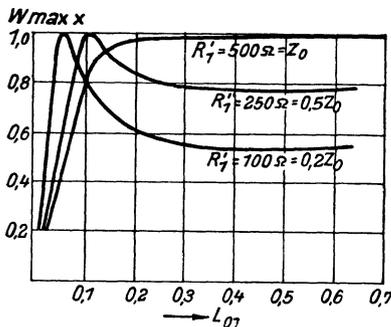


Abb. 4.

Abb. 4 gibt ein Bild über diese Verhältnisse. Es sind hier für jeden Wert von L_{01} die hiermit erreichten Höchstenergien aufgetragen, und zwar für verschiedene Werte von R_1' . Es ist angenommen: $z_0 = 500$ Ohm, $z_0' = -100$ Ohm, $L_1 = 1$ Henry, $C_1 = 0,067 \mu\text{F}$. Man sieht, daß jedem Werte von R_1' ein bestimmter optimaler Wert von L_{01} entspricht, bei dem die Höchstenergie erreicht wird. Dieser optimale Wert steigt immer mehr, das Maximum wird immer flacher, je größer R_1' ist. Wenn sich R_1' dem Werte z_0 nähert, so rückt das Maximum ins Unendliche; in diesem Falle steigt die Kurve mit wachsendem L_{01} zunächst schnell an und nähert sich dann asymptotisch dem Höchstbetrage.

Aus der Gleichung (68) kann man bei gegebenen L_1 , C_1 und L_{01} die Resonanzfrequenz ω_0 berechnen. Wir erhalten, wenn wir z_0' gegen ωL_{01} vernachlässigen:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(L_1 - L_{01} \frac{R_1'}{z_0}\right) C_1}}. \quad (69)$$

Hieraus folgt, daß infolge der Koppelung mit der Leitung der Resonanzpunkt von der Eigenfrequenz des Kreises aus stets nach höheren Frequenzen hin verschoben wird, und zwar um so mehr, je enger die Koppelung ist und je größer R_1' im Vergleich zu z_0 wird.

Die soeben gefundenen Lösungen beweisen die Zulässigkeit der oben gemachten Vernachlässigung, indem a_{01}^2 als frequenzunabhängig angenommen wurde, aufs neue. Denn man kann die Gleichung (46) nach (43) auch in der Form schreiben:

$$\Im_1 \Re = \Im_1 [R_0 a_{01}^2 + R_1 + i(S_1 - S_0 a_{01}^2)] = \mathfrak{E}_0''.$$

Also: $\Im_1 = \mathfrak{E}_0'' \frac{1}{R_0 a_{01}^2 + R_1 + i(S_1 - S_0 a_{01}^2)}$ oder in reeller Schreibweise:

$$J_1 = E_0' \frac{a_{01}}{\sqrt{(R_0 a_{01}^2 + R_1)^2 + (S_1 - S_0 a_{01}^2)^2}}. \quad (70)$$

Unsere Maximumbedingungen (61) und (65) sagen nun weiter nichts, als daß in \Re der imaginäre Bestandteil verschwinden muß, der reelle Teil dagegen doppelt so groß werden muß wie der Ohmsche Widerstand R_1 des einfachen Schwingungskreises. Das sind dieselben Bedingungen, wie wir sie in § 2 für den einfachen komplexen Widerstand gefunden haben. Wenn wir nun in (70) a_{01} als von der Frequenz unabhängig annehmen, so erhalten wir, weil nunmehr allein S_0 und S_1 von ω abhängig sind, sofort die Bedingung (61). Dann folgt aus der Variation von L_{01} oder, was dasselbe ist, von a_{01} die Bedingung (65). Es ist bemerkenswert, daß sich mit der Vernachlässigung $\frac{\partial a_{01}}{\partial \omega} = 0$ dieselben streng gefundenen Maximumbedingungen (61) und (65) ergeben.

Aus diesen letzten Erörterungen ergibt sich sofort, daß unsere Betrachtung nicht auf den Fall induktiver Koppelung beschränkt ist, sondern auch für kapazitive Koppelung Gültigkeit hat. Wir erhalten dann wieder die Gleichung (70). Nur ist jetzt:

$$S_0 = z_0' - \frac{1}{\omega C_{01}}, \quad a_{01}'^2 = \frac{1}{z_0^2 + \left(z_0' - \frac{1}{\omega C_{01}}\right)^2}. \quad (71)$$

Die Maximumbedingungen:

$$S_1 - S_0 a_{01}'^2 = 0, \quad R_1 = z_0 a_{01}'^2 \quad (72)$$

gelten auch jetzt noch, wie man ohne weiteres sieht. Es ergibt sich nämlich:

$$W = \frac{J_1^2 \cdot R_1}{2} = \frac{E_0'^2 \cdot a_{01}'^2 \cdot R_1}{8 z_0^2 \cdot a_{01}'^4} = \frac{E_0'^2 \cdot z_0 \cdot a_{01}'^4}{8 z_0^2 \cdot a_{01}'^4} = \frac{E_0'^2}{8 z_0}.$$

Aus den beiden Maximumbedingungen erhalten wir für die Resonanzfrequenz, wenn wir z_0' gegen $\frac{1}{\omega C_{01}}$ vernachlässigen:

$$\omega_0 L_1 - \frac{1}{\omega_0 C_1} + \frac{1}{\omega_0 C_{01}} \frac{R_1}{z_0} = 0.$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1 \frac{1}{1 - \frac{C_1 R_1}{C_{01} z_0}}}}.$$

Wir erkennen daraus, daß infolge kapazitiver Koppelung mit der Leitung der Resonanzpunkt von der Eigenfrequenz des Kreises nach niederen Frequenzen hin verschoben wird.

Da wir nach dem Vorhergehenden berechtigt sind, das ganze System als einen einzigen Schwingungskreis anzusehen, so können wir auch die bei einfachen Schwingungskreisen gebräuchlichen Überlegungen auf das ganze System anwenden. Wir erhalten also für die Dämpfung des ganzen Systems bei induktiver Koppelung nach (48):

$$D_I = \frac{R_I}{\omega_0 L_I} = \frac{R'_1 + z_0 a_{01}^2}{\omega_0 (L_1 - L_{01} a_{01}^2)}, \quad (73)$$

bei kapazitiver Koppelung nach (52):

$$D_I = \frac{R_I}{\omega_0 L_I} = \frac{R'_1 + z_0 a_{01}^2}{\omega_0 L_1}. \quad (74)$$

Durch den Wert, den D_I annimmt, ist dann genau wie beim einfachen Schwingungskreis die Gestalt der Resonanzkurve bestimmt. Hieraus folgt ohne weiteres der Weg, den man gehen muß, um die Elemente des Schwingungskreises so zu bestimmen, daß man die günstigsten Verhältnisse erreicht: nämlich bestmögliche Energieübertragung und eine günstige Form der Resonanzkurve. Im allgemeinen wird man von vornherein eine bestimmte Resonanzkurve zugrunde legen und damit eine bestimmte Dämpfung, die der Schwingungskreis nach der Koppelung mit der Leitung haben soll, also die Größe D_I . Wenn wir die Koppelung nach den entwickelten Grundsätzen vorgenommen haben, also derart, daß der Gleichung (65) genügt ist, so wird nach (73) und (74):

Bei induktiver Koppelung:
$$D_I = \frac{2 R'_1}{\omega_0 \left(L_1 - L_{01} \frac{R'_1}{z_0} \right)}, \quad (75)$$

bei kapazitiver Koppelung:
$$D_I = \frac{2 R'_1}{\omega_0 L_1}. \quad (76)$$

Vernachlässigt man in (68) z'_0 gegen ωL_{01} , so erhält man durch Einsetzen in (75):

$$D_I = 2 R'_1 \omega_0 C_1. \quad (77)$$

Durch die Gleichungen (76) und (77) ist der von H. Riegger ausgesprochene, eingangs erwähnte Satz bewiesen: Bei optimaler Koppelung ist das Nutzdekrement des Kreises gleich dem Dekrement, das der Kreis durch die Koppelung mit der Leitung erhält, welches man auch als Strahlungsdekrement bezeichnen kann.

Darüber hinaus gestatten unsere Gleichungen aber auch die Berechnung dieser Koppelung selbst: Wenn wir einen Schwingungskreis mit einer Leitung zu koppeln haben, so werden uns im allgemeinen gegeben sein: die Konstanten der Leitung, die erforderliche Resonanzfrequenz, die gewünschte Dämpfung D_I und der Nutzwiderstand R'_1 . Bei induktiver Koppelung können wir aus (77) C_1 berechnen; aus (65) folgt dann $\omega_0 L_{01}$ und somit L_{01} , und schließlich aus (68) L_1 . Bei kapazitiver Koppelung findet man aus (76) L_1 , dann aus der zweiten Gleichung (72) $\frac{1}{\omega_0 C_{01}}$ und damit C_{01} , und endlich aus der ersten Gleichung (72) C_1 .

Wir haben also einen Weg gefunden, wie man am günstigsten mittels induktiver und kapazitiver Koppelung Energie aus einer Leitung in einen Schwingungskreis übertragen kann. Es sei besonders betont, daß dies nicht in der Weise geschieht, daß für den Verbraucherwiderstand ein bestimmter Wert vorgeschrieben wird. Es ist vielmehr für jeden Wert des Verbraucherwiderstandes möglich, das Koppelungsglied so zu bestimmen, daß die Höchstenergie übertragen wird, mit der einzigen

Einschränkung, daß der Verbraucherwiderstand nicht größer sein darf als der reelle Teil der Charakteristik der Leitung.

Von dieser einschränkenden Bedingung können wir uns nun bei induktiver Koppelung dadurch befreien, daß wir die Koppelung nicht wie bisher in Spannungsteilerschaltung nach Abb. 2, sondern rein magnetisch nach Abb. 5 gestalten.

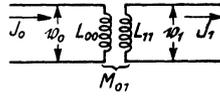


Abb. 5.

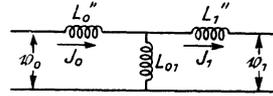


Abb. 6.

Diese Art der Koppelung können wir in folgender bekannter Weise auf den vorher behandelten Fall zurückführen:

Nach Abb. 5 ist:

$$\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{J}_0 \omega L_{00} - \mathfrak{J}_1 \omega M_{01}, \quad \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{J}_1 \omega L_{11} - \mathfrak{J}_0 \omega M_{01}.$$

Nach Abb. 6 ist:

$$\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{J}_0 \omega (L_0'' + L_{01}) - \mathfrak{J}_1 \omega L_{01}, \quad \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{J}_1 \omega (L_1'' + L_{01}) - \mathfrak{J}_0 \omega L_{01}.$$

Wenn also beide Koppelungsarten äquivalent sein sollen, so muß sein:

$$\text{so muß sein: } L_{00} = L_0'' + L_{01}, \quad L_{11} = L_1'' + L_{01}, \quad M_{01} = L_{01}. \quad (78)$$

Wir erhalten also statt (39):

$$\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}_{01} + \mathfrak{R}_0'' + \mathfrak{J}_0, \quad \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_{01} + \mathfrak{R}_1'' + \mathfrak{R}_1 \quad (79)$$

und statt (43):

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{R}_0 &= z_0 + i(\omega L_{01} + \omega L_0'' + z_0') = R_0 + iS_0, \\ \mathfrak{R}_1 &= R_1' + i\left(\omega L_{01} + \omega L_1'' + \omega L_1' - \frac{1}{\omega C_1'}\right) = R_1 + iS_1. \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

$$\text{Hierin ist: } L_{01} + L_0'' = L_{00} = L_0, \quad L_{01} + L_1'' + L_1' = L_{11} + L_1' = L_1. \quad (81)$$

Es ist hier, was besonders betont werden möge, sehr wohl möglich, daß bei entsprechend fester Koppelung L_{00} und L_{11} kleiner als L_{01} werden. L_0'' und L_1'' sind dann negativ. Praktisch ist dann natürlich eine Ersetzung der Koppelung nach Abb. 5 durch eine solche nach Abb. 6 nicht möglich. Bei der Betrachtung der rein induktiven Koppelung nach Abb. 5 können wir jedoch solche negativen Induktivitäten als Rechengrößen verwenden.

Wir zeigen zunächst wieder, daß auch bei dieser Art der Koppelung das System einwellig bleibt.

Hierzu setzen wir (80) in (42) ein und erhalten:

$$\mathfrak{J}_1 \left[R_1' + z_0 \frac{\omega^2 L_{01}^2}{z_0^2 + \left(\omega L_{00} - \frac{1}{\omega C_z}\right)^2} + i \left(\omega L_1 - \omega L_{00} \frac{\omega^2 L_{01}^2}{z_0^2 + \left(\omega L_{00} - \frac{1}{\omega C_z}\right)^2} - \frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_z} \frac{\omega^2 L_{01}^2}{z_0^2 + \left(\omega L_{00} - \frac{1}{\omega C_z}\right)^2} \right) \right] = \mathfrak{E}_0''.$$

$$\text{Setzen wir: } \frac{\omega^2 L_{01}^2}{z_0^2 + \left(\omega L_{00} - \frac{1}{\omega C_z}\right)^2} = a_{01}^2$$

und gehen zu reellen Werten über, so ergibt sich:

$$J_1 = \frac{E'_0 a_{01}}{\sqrt{(R'_1 + z_0 a_{01}^2)^2 + \left[\omega (L_1 - L_{00} a_{01}^2) - \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{C_1} - \frac{a_{01}^2}{C_2} \right) \right]^2}}.$$

Dies ist wieder die gleiche Form der charakteristischen Gleichung für ein einwelliges Gebilde wie Gleichung (46), nur hat a_{01} hier eine etwas veränderte Bedeutung, insofern als im Nenner jetzt L_{00} statt L_{01} erscheint. Da $L_{01} > L_{00}$ werden kann, ist a_{01}^2 hier offenbar nicht auf den Wertebereich kleiner als 1 beschränkt, sondern kann theoretisch jeden beliebigen Wert annehmen. Doch wird sich a_{01}^2 niemals stärker als quadratisch mit ω ändern, und wir werden, wie oben, nur einen sehr kleinen Fehler begehen, wenn wir in den schmalen Frequenzbereichen, die für unsere Resonanzkurven in Frage kommen, a_{01} als konstant annehmen. Es gelten genau die gleichen Überlegungen, die oben zur Gleichung (46) angestellt wurden, und wir können die Behandlung zur Vermeidung von Wiederholungen an den erstbehandelten Fall anlehnen. Wir können also wieder schreiben:

$$J_I = \frac{E_I}{\sqrt{R_I^2 + \left(\omega L_I - \frac{1}{\omega C_I} \right)^2}},$$

$$\text{worin: } E_I = E'_0 a_{01}, \quad R_I = R'_1 + z_0 a_{01}^2, \quad L_I = L_1 - L_{00} a_{01}^2, \quad \frac{1}{C_I} = \frac{1}{C_1} - \frac{a_{01}^2}{C_2}.$$

Die strenge Berechnung der Bedingungen für das totale Maximum der Energie in Abhängigkeit von ω und L_{01} ergibt mathematische Schwierigkeiten. Wir wollen daher die einschränkende Voraussetzung machen, daß die Dämpfung des Schwingungskreises kleiner als 0,1 bleibt. Andere Schwingungskreise kommen für unsere Betrachtung ohnehin nicht in Frage.

$$\text{Es sei also:} \quad D_1 = \frac{R_1}{\omega L_1} < 0,1. \quad (82)$$

$$\text{Also:} \quad \frac{\omega L_1}{R_1} = \frac{1}{R_1 \omega C_1} > 10, \quad \omega \frac{\partial S_1}{\partial \omega} = \omega L_1 + \frac{1}{\omega C_1} > 20 R_1. \quad (83)$$

Statt (58) und (59) erhalten wir dann, wenn wir berücksichtigen, daß jetzt S_0 und S_1 nach (78) bei Veränderung von L_{01} konstant bleiben:

$$\left. \begin{aligned} L_{01} \frac{\partial A_1}{\partial L_{01}} &= 2 \omega^2 L_{01}^2, & L_{01} \frac{\partial B_1}{\partial L_{01}} &= 0, \\ \omega \frac{\partial A_1}{\partial \omega} &= -S_1 \omega \frac{\partial S_0}{\partial \omega} - S_0 \omega \frac{\partial S_1}{\partial \omega} + 2 \omega^2 L_{01}^2, & \omega \frac{\partial B_1}{\partial \omega} &= z_0 \omega \frac{\partial S_1}{\partial \omega} + R_1 \omega \frac{\partial S_0}{\partial \omega}. \end{aligned} \right\} (84)$$

Wir erkennen nach (82), daß wir hierin die Glieder mit $\omega \frac{\partial S_0}{\partial \omega} = \omega L_{00}$ gegen die Glieder mit $\omega \frac{\partial S_1}{\partial \omega}$ vernachlässigen können. Das kommt darauf hinaus, daß wir S_0 gegen S_1 als konstant betrachten dürfen. Wir erhalten also aus (56):

$$A_1 S_0 \omega \frac{\partial S_1}{\partial \omega} - B_1 z_0 \omega \frac{\partial S_1}{\partial \omega} = 0, \quad A_1 S_0 = B_1 z_0. \quad (85)$$

$$\text{Daraus folgt dann wie oben:} \quad S_1 = S_0 \frac{\omega^2 L_{01}^2}{z_0^2 + S_0^2} \quad (86)$$

und ebenso:

$$\frac{\omega^2 L_{01}^2}{z_0^2 + \left(\omega L_{00} - \frac{1}{\omega C_2} \right)^2} = \frac{R'_1}{z_0} = a_{01}^2. \quad (87)$$

Man sieht hieraus, daß bei der behandelten Koppelungsart zur Erreichung der günstigsten Energieübertragung $\frac{R'_1}{z_0}$ nicht auf den Wertebereich kleiner als 1 beschränkt ist. R'_1 kann vielmehr jeden beliebigen Wert annehmen. L_{00} ist nur bei großen Werten von R'_1 entsprechend klein zu wählen. Das heißt mit anderen Worten: Wenn der Widerstand im Sekundärkreis groß ist, so muß, um günstige Energieübertragung zu erzielen, die Spannung entsprechend in die Höhe transformiert werden.

Im übrigen erhalten wir wie oben für die Dämpfung nach der Koppelung:

$$D_I = \frac{2 R'_1}{\omega_0 \left(L_1 - L_{00} \frac{R'_1}{z_0} \right)} = 2 R'_1 \omega_0 C_1, \quad (88)$$

wenn z'_0 gegen ωL_{00} vernachlässigt werden kann, und für die optimale Energie:

$$W_{\max} = \frac{E_0^2}{8 z_0}. \quad (89)$$

In diesem Falle ist man bei der Lösung des Problems noch weniger gebunden als vorher. Denn, wenn D_I , R'_1 , ω gegeben sind, so ergibt sich aus (88) zunächst C_1 ; dann kann man aber in (87) $\omega_0 L_{01}$ beliebig wählen, wenn man nur $\omega_0 L_{00}$ in geeigneter Weise bestimmt.

Zusammenfassend sei bemerkt, daß man nach den bisherigen Überlegungen Schwingungskreise, auch mit beliebigem Verbraucherwiderstand, immer so an eine Leitung anschließen kann, daß man die günstigste Energieübertragung erhält und eine geeignete, beliebig zu wählende Resonanzkurve.

§ 6. Das Kettenglied erster Art.

Die Schaltung sei durch das Schema in der Abb. 7 gegeben. Ein Schwingungskreis in ähnlicher Bauart wie das Kettenglied erster Art der Leitungstheorie ist hierin an eine Leitung mit der Charakteristik: $\mathfrak{Z}_0 = z_0 + i z'_0$ angeschlossen.

Es sei vorausgesetzt, daß r'_2 erheblich kleiner ist als r_2 und für schmale Bereiche als frequenzunabhängig betrachtet werden darf. Wir wollen r'_2 als kapazitiven Widerstand betrachten und gleich $-\frac{1}{\omega C_r}$ setzen.

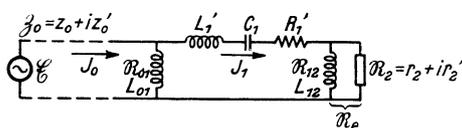


Abb. 7.

Wir werden zunächst wieder zeigen, daß das ganze System mit genügender Annäherung durch einen einfachen Schwingungskreis ersetzt werden kann und folglich auch die Eigenschaften eines solchen hat. Hierzu bilden wir wieder die Gleichung:

$$J_1 = \frac{E_1}{R}.$$

Es sei \mathfrak{R}_e der Kombinationswiderstand der beiden Zweige \mathfrak{R}_{12} und \mathfrak{R}_2 . Hierfür finden wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathfrak{R}_e} &= \frac{1}{\mathfrak{R}_{12}} + \frac{1}{\mathfrak{R}_2} = \frac{1}{i\omega L_{12}} + \frac{1}{r_2 + ir'_2} = \frac{r_2 + i(r'_2 + \omega L_{12})}{-r'_2\omega L_{12} + ir_2\omega L_{12}} \\ \mathfrak{R}_e &= \frac{(-r'_2\omega L_{12} + ir_2\omega L_{12})[r_2 - i(r'_2 + \omega L_{12})]}{r_2^2 + (r'_2 + \omega L_{12})^2}, \\ \mathfrak{R}_e &= r_2 \frac{\omega^2 L_{12}^2}{r_2^2 + (r'_2 + \omega L_{12})^2} + i\omega L_{12} \frac{r_2^2 + r_2'2 + r_2'\omega L_{12}}{r_2^2 + (r'_2 + \omega L_{12})^2} = R_e + iS_e, \end{aligned} \quad (90)$$

und wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega^2 L_{12}^2}{r_2^2 + (r'_2 + \omega L_{12})^2} &= a_{12}^2, & \frac{\omega^2 L_{01}^2}{z_0^2 + (z'_0 + \omega L_{01})^2} &= a_{01}^2, \\ \frac{r_2^2 + r_2'2 + r_2'\omega L_{12}}{r_2^2 + (r'_2 + \omega L_{12})^2} &= 1 - a_{12}^2 \left(1 + \frac{r'_2}{\omega L_{12}}\right) &= b_{12}^2 \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

$$\mathfrak{R}_e = r_2 a_{12}^2 + i\omega L_{12} b_{12}^2 = r_2 a_{12}^2 + i(\omega L_{12} - \omega L_{12} a_{12}^2 - r_2' a_{12}^2) = R_e + iS_e. \quad (92)$$

Wir haben dann wie früher die Gleichungen (40):

$$\mathfrak{S}_0 \mathfrak{R}_0 - \mathfrak{S}_1 \mathfrak{R}_{01} = \mathfrak{C}'_0, \quad \mathfrak{S}_0 \mathfrak{R}_{01} - \mathfrak{S}_1 \mathfrak{R}_1 = 0, \quad (93)$$

worin jetzt:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{R}_0 &= z_0 + i(z'_0 + \omega L_{01}) = R_0 + iS_0, \\ \mathfrak{R}_1 &= R'_1 + R_e + i\left[\omega(L_{01} + L'_1) - \frac{1}{\omega C_1} + S_e\right], \\ &= R'_1 + r_2 a_{12}^2 + i\left[\omega(L_{01} + L'_1 + L_{12}) - \omega L_{12} a_{12}^2 - \frac{1}{\omega C_1} + \frac{a_{12}^2}{\omega C_r}\right], \\ &= R_1 + iS_1. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Aus den Gleichungen (93) ergibt sich wie oben:

$$\mathfrak{S}_1 \left(\mathfrak{R}_1 - \frac{\mathfrak{R}_{01}^2}{\mathfrak{R}_0} \right) = \mathfrak{C}'_0 \frac{\mathfrak{R}_{01}}{\mathfrak{R}_0} = \mathfrak{C}''_0.$$

Wenn wir hierin die Werte aus (91), (93) und (94) einsetzen, so wird:

$$\mathfrak{S}_1 \left\{ R'_1 + r_2 a_{12}^2 + z_0 a_{01}^2 + \left[\omega(L_{01} + L'_1 + L_{12}) - a_{01}^2 L_{01} - a_{12}^2 L_{12} \right] - \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{C_1} - \frac{a_{01}^2}{C_z} - \frac{a_{12}^2}{C_r} \right) \right\} = \mathfrak{C}''_0 \quad (95)$$

oder, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\left. \begin{aligned} R'_1 + r_2 a_{12}^2 + z_0 a_{01}^2 &= R_I, \\ L_{01} + L'_1 + L_{12} - a_{01}^2 L_{01} - a_{12}^2 L_{12} &= L_I - a_{01}^2 L_{01} - a_{12}^2 L_{12} = L_I, \\ \frac{1}{C_1} - \frac{a_{01}^2}{C_z} - \frac{a_{12}^2}{C_r} &= \frac{1}{C_I} \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

und zu reellen Werten übergehen:

$$J_I = E'_0 \frac{a_{01}}{\sqrt{R_I^2 + \left(\omega L_I - \frac{1}{\omega C_I}\right)^2}} = \frac{E_I}{\sqrt{R_I^2 + \left(\omega L_I - \frac{1}{\omega C_I}\right)^2}}. \quad (97)$$

Wir haben also wieder die charakteristische Gleichung des einwelligen Systems, denn die Größen a_{01}^2 und a_{12}^2 sind ebenso gebaut wie die Größe a_{01}^2 in dem vorher betrachteten Fall, und wir haben gesehen, daß es in dem Bereich unserer Resonanzkurven mit hinreichender Genauigkeit zulässig ist, diese Größen als konstant zu

betrachten. Daraus folgt aber, daß wir keine anderen Resonanzkurven erhalten können, als wie beim einfachen Schwingungskreis zu erwarten sind. Annähernd rechteckige Formen der Resonanzkurven sind daher in diesem Falle ausgeschlossen.

Da hiernach das Problem auf den oben betrachteten Fall zurückgeführt ist, können wir die dort erhaltenen Resultate einfach hier einsetzen. Es ist also in (93) auf der linken Seite in der Klammer der reelle Teil gleich dem doppelten Ohmschen Widerstand des Schwingungskreises und der imaginäre Teil gleich Null zu setzen. Das ergibt:

$$R'_1 + r_2 a_{12}^2 = z_0 a_{01}^2, \quad \omega(L_1 - a_{01}^2 L_{01} - a_{12}^2 L_{12}) = \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{C_1} - \frac{a_{01}^2}{C_z} - \frac{a_{12}^2}{C_r} \right). \quad (98)$$

Hierdurch wird nach (97):

$$J_1 = E'_0 \frac{1}{2 z_0 a_{01}}. \quad (99)$$

Für den Strom \mathfrak{J}_2 im Nutzwiderstand \mathfrak{R}_2 finden wir aus den Gleichungen: $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_{12} + \mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_{12} \cdot \mathfrak{R}_{12} = \mathfrak{J}_2 \cdot \mathfrak{R}_2$:

$$\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_1 \frac{\mathfrak{R}_{12}}{\mathfrak{R}_{12} + \mathfrak{R}_2} \quad (100)$$

oder in reeller Form:

$$J_2 = J_1 \frac{\omega L_{12}}{\sqrt{r_2^2 + (r'_2 + \omega L_{12})^2}} = J_1 a_{12}. \quad (101)$$

Also kommt für die Nutzleistung: $2W = J_2^2 \cdot r_2 = J_1^2 \cdot a_{12}^2 \cdot r_2$. Vernachlässigen wir R'_1 gegen $r_2 a_{12}^2$, was den praktisch anzustrebenden Verhältnissen entspricht, so ist nach (98):

$$a_{01}^2 = a_{12}^2 \cdot \frac{r_2}{z_0}. \quad (102)$$

Also:

$$2W = \frac{E_0'^2 \cdot z_0 \cdot a_{12}^2 \cdot r_2}{4 z_0^2 \cdot a_{12}^2 \cdot r_2} = \frac{E_0'^2}{4 z_0} \quad \text{und} \quad W = \frac{E_0'^2}{8 z_0}.$$

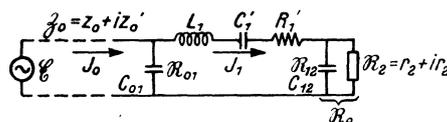


Abb. 7 a.

Durch die Bedingungen (98) wird also die optimale Koppelung bestimmt.

Für kapazitive Koppelung, Abb. 7 a, wenn also $\mathfrak{R}_{01} = -\frac{i}{\omega C_{01}}$, $\mathfrak{R}_{12} = -\frac{i}{\omega C_{12}}$ ist, finden wir für den Kombinationswiderstand \mathfrak{R}_e :

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_e &= r_2 \frac{\frac{1}{\omega^2 C_{12}^2}}{r_2^2 + \left(r'_2 - \frac{1}{\omega C_{12}} \right)^2} - \frac{i}{\omega C_{12}} \frac{r_2^2 + r_2'^2 - \frac{r_2'}{\omega C_{12}}}{r_2^2 + \left(r'_2 - \frac{1}{\omega C_{12}} \right)^2} = r_2 a_{12}^2 - \frac{i}{\omega C_{12}} b_{12}^2 \\ &= r_2 a_{12}^2 - i \left(\frac{1}{\omega C_{12}} - \frac{a_{12}^2}{\omega C_{12}} - \frac{a_{12}^2}{\omega C_r} \right) = R_e + i S_e. \end{aligned}$$

Ferner ist:

$$\mathfrak{R}_0 = z_0 - i \left(\frac{1}{\omega C_{01}} + \frac{1}{\omega C_z} \right) = R_0 + i S_0.$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1 &= R'_1 + R_e + i \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C'_1} - \frac{1}{\omega C_{01}} + S_e \right) \\ &= R'_1 + r_2 a_{12}^2 + i \left[\omega L_1 - \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{C_{01}} + \frac{1}{C'_1} + \frac{1}{C_{12}} - \frac{a_{12}^2}{C_{12}} - \frac{a_{12}^2}{C_r} \right) \right] \\ &= R'_1 + r_2 a_{12}^2 + i \left[\omega L_1 - \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{C_1} - \frac{a_{12}^2}{C_{12}} - \frac{a_{12}^2}{C_r} \right) \right] \\ &= R_1 + i S_1. \end{aligned}$$

Es ergibt sich dann entsprechend wie für induktive Koppelung:

$$J_I = E'_0 \frac{a'_{01}}{\sqrt{R_I^2 + \left(\omega L_I - \frac{1}{\omega C_I}\right)^2}} = \frac{E_I}{\sqrt{R_I^2 + \left(\omega L_I - \frac{1}{\omega C_I}\right)^2}},$$

worin: $R'_1 + r_2 a_{12}^2 + z_0 a_{01}^2 = R_I$, $L'_1 = L_1 = L_I$,

$$\frac{1}{C_{01}} + \frac{1}{C'_1} + \frac{1}{C_{12}} - \frac{a_{01}^2}{C_{01}} - \frac{a_{12}^2}{C_{12}} - \frac{a_{01}^2}{C_z} - \frac{a_{12}^2}{C_r} = \frac{1}{C_1} - \frac{a_{01}^2}{C_{01}} - \frac{a_{12}^2}{C_{12}} - \frac{a_{01}^2}{C_z} - \frac{a_{12}^2}{C_r} = \frac{1}{C_I}.$$

Die Bedingungen für optimale Koppelung sind dann:

$$\left. \begin{aligned} R'_1 + r_2 a_{12}^2 &= z_0 a_{01}^2, \\ \omega L_1 &= \frac{1}{\omega} \left[\frac{1}{C_1} - a_{01}^2 \left(\frac{1}{C_{01}} + \frac{1}{C_z} \right) - a_{12}^2 \left(\frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_r} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

Für die Nutzleistung erhalten wir dann wieder bei Vernachlässigung von R'_1 gegenüber $r_2 a_{12}^2$:

$$W_{\max} = \frac{E_0'^2}{8 z_0}.$$

Für die Dämpfung finden wir bei induktiver Koppelung aus (97):

$$D_I = \frac{R'_1 + z_0 a_{01}^2 + r_2 a_{12}^2}{\omega_0 (L_1 - a_{01}^2 L_{01} - a_{12}^2 L_{12})}$$

oder bei Vernachlässigung von R'_1 und Berücksichtigung der Bedingungen (98):

$$D_I = \frac{2 z_0 a_{01}^2}{\omega_0 \left(L_1 - a_{01}^2 L_{01} - \frac{z_0}{r_2} a_{01}^2 L_{12} \right)} \quad (104)$$

und wenn wir z'_0 und r'_2 gegen $\frac{1}{\omega_0 C_1}$ vernachlässigen:

$$D_I = 2 z_0 a_{01}^2 \omega_0 C_1 = 2 r_2 a_{12}^2 \omega_0 C_1. \quad (105)$$

Bei kapazitiver Koppelung ergibt sich:

$$D_I = \frac{R'_1 + z_0 a_{01}^2 + r_2 a_{12}^2}{\omega_0 L_1} \quad (106)$$

und wenn man R'_1 vernachlässigt und die Maximumbedingungen (103) berücksichtigt:

$$D_I = \frac{2 z_0 a_{01}^2}{\omega_0 L_1} = \frac{2 r_2 a_{12}^2}{\omega_0 L_1}. \quad (107)$$

Wenn also außer der Leitung \mathfrak{R}_{12} , \mathfrak{R}_2 und ω_0 gegeben sind und weiter D_I angenommen wird, um eine bestimmte Breite der Resonanzkurve zu erhalten, so findet man wie früher für induktive Koppelung aus (105) C_1 , dann aus (102) a_{01} und daraus L_{01} und schließlich aus der zweiten Gleichung (98) L_1 .

Bei kapazitiver Koppelung ergibt sich analog aus (107) L_1 , dann aus (102) a_{01}^2 und daraus C_{01} und schließlich aus der zweiten Gleichung (103) C_1 .

Man kann also auch in diesem Fall unter Zugrundelegung einer bestimmten Resonanzkurve bei jedem beliebigen Nutzwiderstand \mathfrak{R}_2 den Schwingungskreis und die Koppelung so bestimmen, daß man optimale Energieübertragung erhält. Es ist durchaus nicht nötig, daß $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{Z}_0$ wird, auch dann nicht, wenn $L_{01} = L_{12}$

bzw. $C_{01} = C_{12}$ gesetzt wird. In diesem Falle erhält die erste Bedingung (98) bzw. (103) die Form:

$$\frac{r_2}{z_0} = \frac{r_2^2 + (r_2' + \omega L_{01})^2}{z_0^2 + (z_0' + \omega L_{01})^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{r_2}{z_0} = \frac{r_2^2 + \left(r_2' - \frac{1}{\omega C_{01}}\right)^2}{z_0^2 + \left(z_0' - \frac{1}{\omega C_{01}}\right)^2}.$$

Wir haben dann das Kettenglied erster Art der Leitungstheorie vor uns. Auf dem angegebenen Wege können wir also die günstigste Energie über dieses Kettenglied übertragen, auch ohne den Verbraucherwiderstand der Charakteristik anzugleichen. Man kann auf diese Weise jede gewünschte Resonanzkurve erhalten, nur muß man nach (108) das Koppelungsglied in richtiger Weise bemessen. Wird der Verbraucherwiderstand der Charakteristik angeglichen, so ist, wie man sieht, die Bedingung (108) für optimale Energieübertragung für jeden Wert von L_{01} bzw. C_{01} identisch erfüllt.

Um zu prüfen, inwieweit die Resultate der Leitungstheorie mit unseren hier abgeleiteten Formeln übereinstimmen, wollen wir nunmehr das Kettenleiterglied nach den Methoden der Leitungstheorie betrachten und die entsprechenden Bezeichnungen anwenden.

Um die Betrachtung zu vereinfachen, wollen wir $z_0' = 0$ und demnach $r_2' = 0$ setzen. Wir haben dann durch Vergleichung der Abb. 7 und 7b:

$$\Re = i \left(\omega L_1' - \frac{1}{\omega C_1} \right), \quad \frac{1}{2} \Im = \frac{1}{i \omega L_{01}}, \quad \Im = \frac{2}{i \omega L_{01}}. \quad (109)$$

Für die Fortpflanzungskonstante ergibt sich:

$$\cos \gamma = 1 + \frac{\Re \Im}{2} = A + iB = 1 + \frac{\omega L_1' - \frac{1}{\omega C_1}}{\omega L_{01}} = A. \quad (110)$$

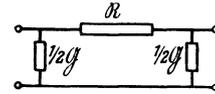


Abb. 7 b.

Die Lochgrenzen werden gegeben durch die Bedingungen: $A = 1$ und $A = -1$. Wir erhalten daher:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 L_1' - \frac{1}{\omega_1 C_1} &= 0, & \omega_1 &= \frac{1}{\sqrt{L_1' C_1}}, \\ \omega_2 L_1' - \frac{1}{\omega_2 C_1} &= -2 \omega_2 L_{01}, & \omega_2 &= \frac{1}{\sqrt{(2 L_{01} + L_1') C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_1' C_1}}. \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

Daraus ergibt sich: $\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} = \frac{L_1'}{2 L_{01} + L_1'} = \frac{1}{1 + 2 K'}$, wenn $K' = \frac{L_{01}}{L_1'}$ ist, und

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = 1 + 2 K', \quad \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_2^2} = 2 K'. \quad (112)$$

Wir können diesen Ausdruck noch vereinfachen, wenn $\omega_1 - \omega_2$ klein gegen ω_1 bleibt.

Es wird nämlich: $\frac{(\omega_1 + \omega_2)(\omega_1 - \omega_2)}{\omega_2^2} = 2 K'$. Setzen wir hierin: $\omega_1 + \omega_2 = 2 \omega_2$,

so wird:

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2} = K' = \frac{L_{01}}{L_1'}. \quad (113)$$

Für den Wellenwiderstand \mathfrak{W} findet man:

$$\mathfrak{W} = \sqrt{\frac{\Re}{\Im}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} \Re \Im}} = \sqrt{\frac{-\omega^2 L_{01}^2 \left(\omega L_1' - \frac{1}{\omega C_1} \right)}{2 \omega L_{01} + \omega L_1' - \frac{1}{\omega C_1}}}. \quad (114)$$

Setzen wir hierin die abgeleiteten Werte für ω_1 und ω_2 an den Lochgrenzen aus (111) ein, so ergibt sich unter Berücksichtigung, daß ω_1 größer als ω_2 ist: $\mathfrak{B}_1 = 0$, $\mathfrak{B}_2 = \infty$. Wir haben also hier den Fall, daß innerhalb des Loches der Wellenwiderstand jede Größe zwischen Null und Unendlich annehmen kann.

Wir wollen nun voraussetzen, daß die Koppelung irgendwie beliebig gewählt ist, was, wie wir gesehen haben, zulässig ist, sobald der Verbraucherwiderstand der Charakteristik angeglichen ist. Wir finden dann aus unseren Gleichungen (98):

$$\omega_0 L_1 - \frac{1}{\omega_0 C_1} = 2 a_{01}^2 \omega_0 L_{01}, \quad \frac{1}{\omega_0 C_1} = \omega_0 L_1' + 2 \omega_0 L_{01} - 2 a_{01}^2 \omega_0 L_{01}. \quad (115)$$

Setzen wir dies in (114) ein, so wird:

$$\frac{\mathfrak{B}^2}{\omega_0^2 L_{01}^2} = - \frac{\omega_0 L_1 - \omega_0 L_1' - 2 \omega_0 L_{01} + 2 a_{01}^2 \omega_0 L_{01}}{2 \omega_0 L_{01} + \omega_0 L_1' - \omega_0 L_1 - 2 \omega_0 L_{01} + 2 a_{01}^2 \omega_0 L_{01}} = \frac{1 - a_{01}^2}{a_{01}^2} = \frac{z_0^2}{\omega_0^2 L_{01}^2},$$

$$\mathfrak{B} = z_0.$$

Das gleiche Resultat gewinnen wir für kapazitive Koppelung folgendermaßen:

$$\Re = i \left(\omega L_1' - \frac{1}{\omega C_1'} \right), \quad \frac{1}{2} \mathfrak{G} = i \omega C_{01}, \quad \mathfrak{G} = 2 i \omega C_{01},$$

$$\operatorname{Cot} \gamma = 1 + \frac{\Re \mathfrak{G}}{2} = A + i B = 1 - \omega^2 L_1' C_{01} + \frac{\omega C_{01}}{\omega C_1'} = A.$$

Für $A = 1$ und $A = -1$ folgt dann für die Lochgrenzen:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 L_1' - \frac{1}{\omega_1 C_1'} &= 0, & \omega_1 &= \frac{1}{\sqrt{L_1' C_1'}}, \\ \omega_2 L_1' - \frac{1}{\omega_2 C_1'} &= \frac{2}{\omega_2 C_{01}}, & \omega_2 &= \frac{1}{\sqrt{L_1' C_1' \frac{C_{01}}{C_{01} + 2 C_1'}}}. \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

Für die Lochbreite finden wir: $\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_1^2} = 2 K' = 2 \frac{C_1'}{C_{01}}$ und, da $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1$ ist:

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} = K' = \frac{C_1'}{C_{01}}. \quad (117)$$

Schließlich für den Wellenwiderstand:

$$\mathfrak{B} = \sqrt{\frac{\frac{1}{\omega^2 C_{01}^2} \left(\omega L_1' - \frac{1}{\omega C_1'} \right)}{\frac{2}{\omega C_{01}} - \omega L_1' + \frac{1}{\omega C_1'}}}.$$

Auch hier ist:

$$\mathfrak{B}_1 = 0, \quad \mathfrak{B}_2 = \infty.$$

In ganz analoger Weise wie bei induktiver Koppelung finden wir dann, wenn wir C_{01} beliebig wählen:

$$\mathfrak{B} = z_0.$$

Es ist also bei einer derartigen Übertragung, sobald man die beiden Koppelungsglieder einander gleich macht und den Verbraucherwiderstand der Charakteristik angleicht, der Wellenwiderstand an der Resonanzstelle für jedes beliebige Koppelungsglied automatisch gleich der Leitungscharakteristik.

Wenden wir uns nunmehr wieder zu den Methoden der Schwingungstheorie und betrachten die Resonanzkurve des Schwingungskreises. Sie ist bestimmt durch

die Dämpfung, die der Schwingungskreis nach der Koppelung mit der Leitung hat. Für die Dämpfung ergibt sich aus (104) und (107), wenn wir $\Re_{01} = \Re_{12}$ und $\Im_0 = \Re_2$ annehmen: bei induktiver Koppelung:

$$D_I = \frac{2z_0 a_{01}^2}{\omega_0 (L_1 - 2a_{01}^2 L_{01})} = \frac{2z_0 \frac{\omega_0^2 L_{01}^2}{z_0^2 + S_0^2}}{\omega_0 \left(L_1 - 2L_{01} \frac{\omega_0^2 L_{01}^2}{z_0^2 + S_0^2} \right)}, \quad (118)$$

bei kapazitiver Koppelung:

$$D_I = \frac{2z_0 a_{01}^2}{\omega_0 L_1'} = \frac{1}{\omega_0 L_1'} \frac{\omega_0^2 C_{01}^2}{z_0^2 + S_0^2}. \quad (119)$$

Aus der Betrachtung dieser Formeln ergeben sich bereits einige Widersprüche zu den Ergebnissen der Leitungstheorie. Ändern wir nämlich L_{01} bzw. $\frac{1}{C_{01}}$, so wird, wenn $\omega_0 L_{01}$ bzw. $\frac{1}{\omega_0 C_{01}}$ klein gegen z_0 ist und, bei induktiver Koppelung, solange L_{01} klein gegen L_1 bleibt, der Zähler in (118) bzw. (119) proportional mit $\omega_0^2 L_{01}^2$ bzw. mit $\frac{1}{\omega_0^2 C_{01}^2}$, während der Nenner als konstant betrachtet werden kann. Die Dämpfung und somit die Breite der Resonanzkurve wächst also dann proportional zu dem Quadrat des Wechselstromwiderstandes des Koppelungsgliedes. Die Lochbreite steigt dagegen nach (113) bzw. (117) nur unmittelbar proportional zu diesem Wechselstromwiderstand.

Wird dagegen L_{01} bzw. $\frac{1}{C_{01}}$ sehr groß, so nähert sich D_I offenbar in beiden Fällen dem Wert:

$$D_I = \frac{2z_0}{\omega_0 L_1'}. \quad (120)$$

Wir erhalten also eine bestimmte Resonanzkurve von endlicher Breite, nämlich bei L_{01} bzw. $\frac{1}{C_{01}} = \infty$, diejenige des die Leitung schließenden komplexen Widerstandes $\Re = r_2 + i \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} + r_2' \right)$. Nach der Leitungstheorie müßten wir dagegen nach (111) erwarten, daß die Lochbreite von Null bis ω_1 reicht. In Wirklichkeit erhalten wir dagegen, wie wir in § 4 gesehen haben, eine bestimmte Resonanzkurve von endlicher Breite.

Diese Überlegung gilt auch in dem Falle, daß beliebig viele Kettenglieder erster Art hintereinandergeschaltet sind. Wir können dann den ganzen Kettenleiter als einen einzigen Schwingungskreis betrachten, dessen Induktivität, aus den hintereinandergeschalteten Einzelinduktivitäten bestehend, mit wachsender Gliederzahl sehr groß, dessen Kapazität entsprechend sehr klein sein wird. Wir erhalten also im Gegensatz zu den Ergebnissen der Leitungstheorie eine sehr spitze Resonanzkurve, weil $D = \frac{R}{\omega L}$ sehr klein wird.

Betrachten wir nun den Fall induktiver Koppelung und halten L_1 fest, lassen aber L_{01} wachsen, bis $2L_{01} = L_1$ wird, d. h. bis L_1' verschwindet, und betrachten einen Wellenbereich, wo $\omega_0^2 L_{01}^2$ nicht groß gegenüber z_0 wird, so nähern sich Zähler und Nenner in (118) einem bestimmten endlichen Grenzwert. Wir erhalten dann ein Glied der sogenannten Kondensator-kette. Nach (113) ist unendlich große

Lochbreite zu erwarten, und nach der Leitungstheorie ist ja auch die Kondensatorkette dadurch gekennzeichnet, daß sie für alle Frequenzen oberhalb einer gewissen Grenze gleichmäßig durchlässig ist. Die Gleichung (118) wird in diesem Falle: $D_I = \frac{2z_0 a_{01}^2}{2\omega_0 L_{01}(1 - a_{01}^2)}$. a_{01}^2 kann beliebig klein gemacht werden, D_1 kann demnach jeden gewünschten Wert erhalten. Mit anderen Worten: Die Resonanzkurve kann jede Form erhalten, die man ihr zu geben wünscht. Bei sehr hohen Frequenzen wird der kapazitive Widerstand sehr klein und verschwindet schließlich gegen den Ohmschen Widerstand; der Strom erreicht dann dieselbe Höhe wie im Maximum der Resonanzkurve. Trägt man also die Stromstärke in Abhängigkeit von der Frequenz auf, so gewinnt man folgendes Bild: Man erhält zunächst bei einer endlichen Frequenz eine Resonanzkurve von gewöhnlicher Form, je nach der Größe der Dämpfung. Die Kurve steigt dann langsam wieder an, um bei der Frequenz „Unendlich“ denselben Wert zu erreichen, den sie im Maximum der Resonanzkurve hatte.

Eine analoge Betrachtung führt in dem Fall kapazitiver Koppelung zur sogenannten Spulenkette. Es ergeben sich die gleichen Resultate, wenn man nur in beiden Fällen reziproke Abszissen verwendet.

Es sei hier verwiesen auf die Berechnung der wirklichen Resonanzkurve einer Kondensatorkette bzw. Spulenkette, deren Resultat H. Riegger in der zweiten der obengenannten Veröffentlichungen mitgeteilt hat.

Wir erkennen aus diesem Beispiel, daß es praktische Fälle gibt, in denen die Betrachtung der Lochbreite zu ganz falschen Anschauungen über die Gestalt der Resonanzkurve und damit über die Durchlässigkeit bei verschiedenen Frequenzen führen kann. In diesen Fällen kommt also dem Begriff der Lochbreite keinerlei physikalische Realität zu.

IV. Zweifache Schwingungssysteme.

§ 7. Das Kettenglied zweiter Art.

Für die Schaltung gelte das Schema der Abb. 8 bzw. 8 a.

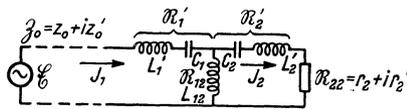


Abb. 8.

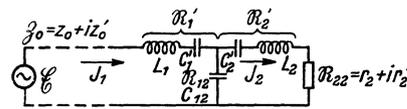


Abb. 8 a.

Wir finden hier wieder die Gleichungen:

$$\Im_1 \Re_1 - \Im_2 \Re_{12} = \mathfrak{G}', \quad \Im_1 \Re_{12} - \Im_2 \Re_2 = 0 \quad (121)$$

und daraus:

$$\Im_2 = \mathfrak{G}' \frac{\Re_{12}}{\Re_1 \Re_2 - \Re_{12}^2}. \quad (122)$$

Zur Vereinfachung wollen wir den Ohmschen Widerstand von \Re_1 gegen z_0 und den von \Re_2 gegen r_2 vernachlässigen. Außerdem wollen wir den imaginären Teil r_2' des Nutzwiderstandes \Re_{22} zu \Re_2 schlagen und gleich z_0' setzen, eine Annahme, die an der Allgemeinheit des Resultates wenig ändert, da z_0' fast immer klein ist

gegen die imaginären Anteile der übrigen komplexen Widerstände. Wir haben dann:

$$\left. \begin{aligned} R_1 = z_0, \quad S_1 = \omega(L_{12} + L'_1) - \frac{1}{\omega C_1} + z'_0 \\ R_2 = r_2, \quad S_2 = \omega(L_{12} + L'_2) - \frac{1}{\omega C_2} + z'_0. \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

Es ist in diesem Falle nicht mehr möglich, Gleichungen von der Form (19) und (20) zu erhalten, denn der Ausdruck $\frac{\Re_{12}}{\Re_1}$ kann jetzt nicht mehr als nahezu konstant betrachtet werden. Das Gebilde ist vielmehr zweiwellig, und wir erhalten aus (122) in reeller Form wie (28):

$$\left. \begin{aligned} J_2 = E'_0 \frac{\omega L_{12}}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \\ \text{wo} \quad A_2 = R_1 R_2 - S_1 S_2 + \omega^2 L_{12}^2, \quad B_2 = R_1 S_2 + R_2 S_1. \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

Setzen wir $L'_1 = L'_2$, $C_1 = C_2$, so ist $S_1 = S_2$, und wir erhalten:

$$A_2 = z_0 r_2 - S_2^2 + \omega^2 L_{12}^2, \quad B_2 = S_2 (r_2 + z_0). \quad (125)$$

Wir können dann dieselbe Maximumbetrachtung anstellen wie oben zur Gleichung (53). Zur Bildung der Gleichungen (56) finden wir dann:

$$\left. \begin{aligned} L_{12} \frac{\partial A_2}{\partial L_{12}} = 2 \omega^2 L_{12}^2, \quad L_{12} \frac{\partial B_2}{\partial L_{12}} = 0, \\ \omega \frac{\partial A_2}{\partial \omega} = -2 S_2 \omega \frac{\partial S_2}{\partial \omega} + 2 \omega^2 L_{12}^2, \quad \omega \frac{\partial B_2}{\partial \omega} = (r_2 + z_0) \omega \frac{\partial S_2}{\partial \omega}, \end{aligned} \right\} \quad (126)$$

wenn wir wieder berücksichtigen, daß $\frac{\partial S_2}{\partial L_{12}} = 0$ sein muß, da $L_{12} + L'_2 = L_2$ bei Veränderung von L_{12} der Voraussetzung nach konstant bleiben soll. Es wird dann durch Einsetzen in (56): $A_2 \cdot 2 S_2 \omega \frac{\partial S_2}{\partial \omega} - B_2 (r_2 + z_0) \omega \frac{\partial S_2}{\partial \omega} = 0$, also nach (125):

$$2(z_0 r_2 - S_2^2 + \omega^2 L_{12}^2) S_2 - (r_2 + z_0) S_2 = 0. \quad (127)$$

Dies ist eine Gleichung dritten Grades für S_2 , die, wie man leicht sieht, die drei Wurzeln hat:

$$S_2 = 0, \quad S_2 = \pm \sqrt{\omega^2 L_{12}^2 - \frac{z_0^2 + r_2^2}{2}}. \quad (128)$$

Das bedeutet: Bei loser Koppelung bis zu $\omega^2 L_{12}^2 = \frac{z_0^2 + r_2^2}{2}$ hat die Resonanzkurve nur ein Maximum bei $S_2 = 0$. Bei festerer Koppelung, wenn $\omega^2 L_{12}^2 > \frac{z_0^2 + r_2^2}{2}$ wird, hat die Resonanzkurve bei $S_2 = 0$ ein Minimum und zu beiden Seiten davon in den Punkten $S_2 = \pm \sqrt{\omega^2 L_{12}^2 - \frac{z_0^2 + r_2^2}{2}}$ je ein Maximum.

$$\text{Die Koppelung ist: } K = \frac{L_{12}}{L_1} = \frac{L_{12}}{L'_1 + L_{12}} = \frac{L_{12}}{L_2} = \frac{L_{12}}{L'_2 + L_{12}}. \quad (129)$$

Für die Dämpfungen der Kreise finden wir:

$$D_1 = \frac{z_0}{\omega L_1}, \quad D_2 = \frac{r_2}{\omega L_2}. \quad (130)$$

Aus (129) ergibt sich: $\frac{1}{\omega L_1} = \frac{K}{\omega L_{12}}$, $\frac{1}{\omega L_2} = \frac{K}{\omega L_{12}}$. Setzen wir dies in (130) ein, so

folgt: $z_0 = D_1 \frac{\omega L_{12}}{K}$, $r_2 = D_2 \frac{\omega L_{12}}{K}$. Also wird die Grenze für die Zweiwelligkeit nach der zweiten der Gleichungen (128): $\frac{\omega^2 L_{12}^2}{K^2} \frac{D_1^2 + D_2^2}{2} = \omega^2 L_{12}^2$

$$\text{oder} \quad K^2 = \frac{D_1^2 + D_2^2}{2}. \quad K = \sqrt{\frac{D_1^2 + D_2^2}{2}}. \quad (131)$$

Ist $r_2 = z_0$, so geht die letzte Gleichung (131) über in $K = D$. Das ist die Bedingung für diejenige Koppelung, für die gerade noch Einwelligkeit vorhanden ist. Wird K größer als der durch die Gleichungen (131) bestimmte Wert, so ist das System zweiwellig.

Wir erkennen, daß dies dieselben Ergebnisse sind, die wir in § 2 mit der Vernachlässigung $\eta = 1$ gefunden haben. Wir können daher die abgeleiteten Resultate unmittelbar auf den Fall kapazitiver Koppelung nach Abb. 8a übertragen, wenn wir überall anstatt ωL_{12} jetzt $-\frac{1}{\omega C_{12}}$ schreiben.

Es handelt sich nun darum, das Koppelungsglied so zu bestimmen, daß die Ordinaten der Maxima die größtmöglichen Werte erhalten. Die weitere Betrachtung ist also auf die Größe der Ordinaten der Resonanzmaxima beschränkt.

Setzen wir $S_2 = 0$ in die Gleichungen (125) ein, so folgt: $A_2 = z_0 r_2 + \omega^2 L_{12}^2$, $B_2 = 0$, und es wird:

$$J_2 = E'_0 \frac{\omega L_{12}}{z_0 r_2 + \omega^2 L_{12}^2}.$$

Die Maximumbedingung für J_2 lautet dann:

$$z_0 r_2 = \omega^2 L_{12}^2, \quad (132)$$

und die Energie wird in diesem Fall: $W = \frac{E'_0{}^2 z_0 r_2^2}{8 z_0^2 r_2^2} = \frac{E'_0{}^2}{8 z_0}$.

Setzen wir jetzt die zweite der Gleichungen (128) in (125) ein, so ist: $A_2 = z_0 r_2 + \frac{1}{2}(r_2^2 + z_0^2)$, $B_2 = \sqrt{\omega^2 L_{12}^2 - \frac{1}{2}(z_0^2 + r_2^2)} \cdot (z_0 + r_2)$. Es wird dann:

$$2W = \frac{E'_0{}^2 \omega^2 L_{12}^2 \cdot r_2^2}{z_0^2 r_2^2 - \frac{1}{4}(z_0^2 + r_2^2)^2 + \omega^2 L_{12}^2 (z_0 + r_2)^2}. \quad (133)$$

Wir können nach der Gleichung (132) die günstigste Energieübertragung für jeden Widerstand r_2 bestimmen. Da jedoch $\frac{z_0^2 + r_2^2}{2} - z_0 r_2 = \frac{(z_0 - r_2)^2}{2}$ stets positiv ist, so ist $z_0 \cdot r_2$ immer kleiner als $\frac{z_0^2 + r_2^2}{2}$; also führt die aus der Gleichung (132) bestimmte Koppelung immer auf eine einwellige Resonanzkurve. Andererseits erkennt man aus der Gleichung (133), daß bei engerer Koppelung die Höchstenergie nur dann erreichbar ist, wenn $r_2 = z_0$ ist. Aus der Gleichung (133) sieht man leicht, daß W kein Maximum für L_{12} mehr hat. Andererseits erkennt man aus der Gleichung (133) zugrunde liegenden Bedingung: $\omega^2 L_{12}^2 > \frac{1}{2}(z_0^2 + r_2^2)$, daß das Glied mit $\omega^2 L_{12}^2$ im Nenner sehr bald überwiegt. Die Ordinaten der Maxima der Resonanzkurven von W werden also für engere Koppelung als durch (131) definiert mit wachsendem ωL_{12} schnell kleiner und nähern sich dem Grenzwert:

$$W = \frac{E'_0{}^2 \cdot r_2}{2(z_0 + r_2)^2}. \quad (134)$$

Dieser Wert ist, wie man sieht, immer kleiner als $\frac{E'_0{}^2}{8 z_0}$. Nur für $r_2 = z_0$ erreicht W diesen Höchstwert.

Trägt man also ebenso wie in Abb. 4 die übertragene Energie an den Resonanzpunkten in Abhängigkeit von L_{12} mit r_2 als Parameter auf, so bekommt man auch ein ganz ähnliches Bild wie Abb. 4. Bei $r_2 < z_0$ erhalten wir ein Maximum, das den größtmöglichen Wert der Energie erreicht. Mit zunehmender Koppelung sinkt dann die Energie und nähert sich asymptotisch dem Grenzwert (134). Wenn $r_2 = z_0$ ist, fällt die Bedingung günstigster Koppelung (132) mit der Bedingung für die Grenze der Zweiwelligkeit der Resonanzkurve zusammen. Die Energiekurve in Abhängigkeit von L_{12} steigt dann zunächst schnell bis zum Höchstwert an und verläuft mit wachsender Koppelung weiter in derselben Höhe.

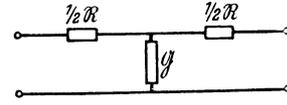


Abb. 8b.

Betrachten wir den vorliegenden Fall wieder vom Gesichtspunkte der Leitungstheorie aus, so haben wir durch Vergleichung der für das Kettenleitglied zweiter Art geltenden Abb. 8 b mit den Abb. 8 und 8 a:

$$\Re = 2i \left(\omega L_1' - \frac{1}{\omega C_1} \right), \quad \Im = \frac{1}{i \omega L_{12}}, \quad (135)$$

$$\Im \Re \gamma = 1 + \frac{\Re \Im}{2} = A + iB = 1 + \frac{\omega L_1' - \frac{1}{\omega C_1}}{\omega L_{12}} = A. \quad (136)$$

Setzen wir zur Bestimmung der Lochgrenzen wieder $A = 1$ und $A = -1$, so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 L_1' - \frac{1}{\omega_1 C_1} &= 0, & \omega_1 &= \frac{1}{\sqrt{L_1' C_1}}. \\ \omega_2 L_1' - \frac{1}{\omega_2 C_1} &= -2 \omega_2 L_{12}. & \omega_2 &= \frac{1}{\sqrt{(L_1' + 2 L_{12}) C_1}} = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_{12}) C_1}}. \end{aligned} \right\} (137)$$

Für die Lochbreite ergibt sich wieder wie oben:

$$\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_2^2} = 2 \frac{L_{12}}{L_1'} = 2k'. \quad (138)$$

Der Wellenwiderstand ist:

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{\Re}{\Im}} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \Re \Im} = \sqrt{- \left(\omega L_1' - \frac{1}{\omega C_1} \right) \left[\omega (L_1' + 2 L_{12}) - \frac{1}{\omega C_1} \right]}. \quad (139)$$

\mathfrak{Z} ist innerhalb des Loches immer reell, denn, weil $\omega_2 < \omega_1$ ist, so ist $\omega L_1' - \frac{1}{\omega C_1}$ innerhalb des Loches stets negativ. Weiter sieht man sofort, daß der Wellenwiderstand an beiden Lochgrenzen verschwindet.

Wir hatten oben als erste Maximumbedingung gefunden:

$$S_2 = z_0' + \omega_0 L_{12} + \omega_0 L_1' - \frac{1}{\omega_0 C_1} = 0. \quad (140)$$

Da der Wellenwiderstand rein reell ist, wollen wir, um die von der Leitungstheorie geforderte Angleichung an die Charakteristik zu ermöglichen, $z_0' = 0$ annehmen. Dann folgt:

$$\omega_0 L_1' - \frac{1}{\omega_0 C_1} = -\omega_0 L_{12}.$$

Setzen wir dies in (139) ein, so erhalten wir:

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\omega_0 L_{12} (-\omega_0 L_{12} + 2 \omega_0 L_{12})}$$

und nach (132), und weil der Nutzwiderstand gleichfalls der Charakteristik angeglichen sein muß, also $r_2 = z_0$ sein muß:

$$\Re = z_0.$$

Setzen wir die zweite der Bedingungen (128) in (139) ein, so finden wir zunächst:

$$S_2 = \omega L_{12} + \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = \pm \sqrt{\omega^2 L_{12}^2 - z_0^2}.$$

Daraus folgt:

$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = -\omega L_{12} \pm \sqrt{\omega^2 L_{12}^2 - z_0^2}.$$

Dann wird nach (139):

$$\begin{aligned} \Re^2 &= -\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} + 2\omega L_{12}\right) \\ &= (\omega L_{12} \mp \sqrt{\omega^2 L_{12}^2 - z_0^2})(\omega L_{12} \pm \sqrt{\omega^2 L_{12}^2 - z_0^2}) = z_0^2, \\ \Re &= z_0. \end{aligned}$$

Für kapazitive Koppelung erhalten wir in der gleichen Weise:

$$\begin{aligned} \Re &= 2i\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right), & \Im &= i\omega C_{12}, \\ \cos \gamma &= 1 - \omega C_{12}\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) = A, \\ \omega_1 L_1 - \frac{1}{\omega_1 C_1} &= 0, & \omega_1 &= \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \\ \omega_2 L_1 - \frac{1}{\omega_2 C_1} &= \frac{2}{\omega_2 C_{12}}, & \omega_2 &= \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1 \frac{C_{12}}{C_{12} + 2C_1}}}, \\ \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_1^2} &= 2K' = 2\frac{C_{12}}{C_1}, \\ \Re &= \sqrt{\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)\left[\frac{2}{\omega C_{12}} - \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)\right]}. \end{aligned}$$

Nehmen wir wieder Grenzkoppelung oder engere Koppelung an, und setzen die hierfür geltenden Maximumbedingungen:

$$S_2 = \omega_0 L_1 - \frac{1}{\omega_0 C_1} - \frac{1}{\omega_0 C_{12}} = 0$$

und

$$S_2 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} - \frac{1}{\omega C_{12}} = \pm \sqrt{\frac{1}{\omega^2 C_{12}^2} - z_0^2}$$

in \Re ein, so erhalten wir in beiden Fällen: $\Re = z_0$.

Es ergibt sich also: Über die Koppelung ist durch die von der Leitungstheorie vorgeschriebenen Bedingungen nichts weiter ausgesagt, als daß sie gleich oder enger sein muß als die Grenzkoppelung zwischen Ein- und Zweiwelligkeit. Man kann also hiernach jede Resonanzkurve eines zweiwelligen Systems erhalten, die aus einer Koppelung gleich oder größer als die Grenzkoppelung hervorgeht.

Wenn man den Wellenwiderstand und den Verbraucherwiderstand an die Charakteristik der Leitung angleicht, so erhält man für die Koppelung, die durch die erste der Gleichungen (128) definiert ist, eine Resonanzkurve, die sich an der Grenze zwischen Ein- und Zweiwelligkeit befindet, also gerade noch ein Maximum hat. An dieser Maximumstelle haben wir dann die günstigste Energieübertragung. Wird

jetzt die Koppelung enger, gilt also die zweite der Gleichungen (128), so bekommt die Resonanzkurve zwei Maxima. An den Stellen dieser Maxima haben wir dann wieder die günstigste Energieübertragung; dazwischen ist das aber nicht der Fall, und zwar um so weniger, je enger die Koppelung ist, je tiefer also die Resonanzkurve zwischen den beiden Maximis fällt. Von gleichmäßiger Durchlässigkeit kann dann aber im allgemeinen keine Rede sein. Wohl ist es möglich, daß man bei einer Koppelung, die sehr wenig über der Grenzkoppelung liegt, eine Resonanzkurve erhält, bei der sich die Zweiwelligkeit nur durch eine geringe Verbreiterung an der Spitze äußert. Doch kann man diesen Fall durch eine Bestimmung der Lochbreite allein nur durch Zufall erreichen. Die Lochgrenzen liegen beim Auftreten von Koppelungsmaxima nicht an deren Ort selbst, also nicht da, wo der Wellenwiderstand gleich der Charakteristik ist, sondern da, wo der Wellenwiderstand verschwindet. Die Lochgrenzen werden offenbar um so weiter von den Koppelungsmaximis entfernt sein, je größer die Dämpfung jedes der beiden Schwingungssysteme ist. Es ist also, wenn man einen bestimmten Durchlässigkeitsbereich erhalten will, eine Betrachtung des Dekrementes und der Resonanzkurve unbedingt erforderlich.

§ 8. Theorie des zweigliedrigen Kettenleiters erster Art.

Nach den bisher abgeleiteten Formeln kann man in sehr einfacher Weise einen zweigliedrigen Kettenleiter erster Art, der an eine Leitung angeschlossen ist, behandeln. Das System werde dargestellt durch das Schema der Abb. 9 bzw. 9a.

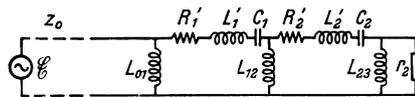


Abb. 9.

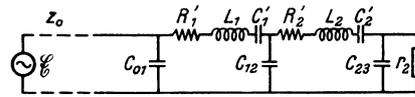


Abb. 9a.

Wir werden die Rechnung im folgenden für den Fall induktiver Koppelung durchführen. Die Ergebnisse gelten dann in gleicher Weise für kapazitive Koppelung, wenn man überall ωL_{01} durch $-\frac{1}{\omega C_{01}}$, η durch $\frac{1}{\eta}$ ersetzt.

Setzen wir, wie es nach der Leitungstheorie sein muß, $z_0 = r_2$ und zur Vereinfachung: $z'_0 = r'_2 = 0$, außerdem: $R'_1 = R'_2$, $L'_1 = L'_2$, $C_1 = C_2$, $L_{01} = L_{23} = 2L_{12}$, so haben wir zwei vollkommen symmetrische einwellige Systeme vor uns, die über L_{12} gekoppelt sind. Wir wollen diese beiden Systeme mit den Indizes *I* und *II* bezeichnen. Es ist:

$$L_1 = L_2 = L_{01} + L'_1 + \frac{1}{2}L_{01} = L'_1 + \frac{3}{2}L_{01},$$

$$R_I = z_0 a_{01}^2 + R'_1, \quad L_I = L_1 - L_{01} a_{01}^2, \quad C_I = C_1.$$

Wenn wir die beiden Systeme als einfache Schwingungskreise betrachten, so haben wir, wie wir in § 4 zu Gleichung (46) gesehen haben, für die EMK statt E'_0 jetzt $E'_0 \cdot a_{01}$ zu setzen. Wir haben dann nach (35):

$$J_{II} = \frac{E'_0 a_{01} \sqrt{m_I m_{II}}}{\sqrt{R_I} R_{II}} \frac{\eta}{\sqrt{A'^2_{II} + B'^2_{II}}}, \quad (141)$$

worin: $A'_{II} = 1 - U_I U_{II} + \eta^2 m_I m_{II}, \quad B'_{II} = U_I + U_{II}.$

Daraus wird, wenn die beiden Kreise *I* und *II* einander gleich sind, was wir annehmen wollen:

$$J_{II} = \frac{E'_0 a_{01} m_I}{R_I} \frac{\eta}{\sqrt{(1 - U_I^2 + \eta^2 m_I^2)^2 + 4 U_I^2}}. \quad (142)$$

Hierin ist:

$$U_I = \frac{1}{D_I} \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right), \quad (143)$$

$$D_I = \frac{R_I}{\omega_0 L_I} = \frac{z_0 a_{01}^2 + R'_1}{\omega_0 (L_1 - L_{01} a_{01}^2)} \quad (144)$$

oder, wenn wir zunächst annehmen, daß wir R'_1 gegen $z_0 a_{01}^2$ vernachlässigen dürfen:

$$D_I = \frac{z_0 a_{01}^2}{\omega_0 (L_1 - L_{01} a_{01}^2)}; \quad (145)$$

dann ist:

$$m_I = \frac{K_I}{D_I} = \frac{L_{01}}{2L_I} \cdot \frac{z_0 a_{01}^2}{\omega_0 L_I} = \frac{\omega_0 L_{01}}{2z_0 a_{01}^2}. \quad (146)$$

Für die Grenze der Zweiwelligkeit hatten wir unter (38) gefunden: $m_I = 1$, also $K_I = D_I$.

Für den Strom J_2 im Nutzwiderstand r_2 finden wir entsprechend (100):

$$J_2 = J_{II} \cdot a_{01}.$$

Für die Nutzleistung haben wir dann:

$$2W = J_2^2 \cdot z_0 = J_{II}^2 \cdot z_0 \cdot a_{01}^2 = \frac{E_0'^2 \cdot a_{01}^2 \cdot m_I^2 \cdot a_{01}^2 \cdot z_0}{z_0^2 a_{01}^4 [(1 - U_I^2 + \eta^2 m_I^2)^2 + 4U_I^2]},$$

$$2W = \frac{E_0'^2 m_I^2}{z_0 [(1 - U_I^2 + \eta^2 m_I^2)^2 + 4U_I^2]}. \quad (147)$$

Wie wir gesehen haben, liegen die Maxima der Resonanzkurve für $m_I = 1$: bei $U_I = 0$ oder für $m_I > 1$ bei $U_I = \pm \sqrt{m_I^2 - 1}$, wenn wir im zweiten Fall η annäherungsweise als konstant gleich 1 ansehen. Setzen wir die beiden Werte für m_I in (147) ein, so finden wir in beiden Fällen: $W = \frac{E_0'^2}{8z_0}$, also die größtmögliche Energie.

Wir erhalten also auch bei dieser Form des Kettenleiters erster Art durch Angleichung des Nutzwiderstandes an die Charakteristik die günstigste Energieübertragung, unabhängig von der Wahl von a_{01}^2 , also des Koppelungsgliedes. Das stimmt mit dem früher für das einfache Kettenglied erster Art gefundenen Resultat überein. Der innere Grund hierfür ist der, daß der Wellenwiderstand dieses Kettenleiters innerhalb der Lochbreite jeden beliebigen positiven Wert annehmen kann.

Wir wollen nun die Größe m_I betrachten, durch deren Wert, wie wir gesehen haben, die Form der Resonanzkurve wesentlich bestimmt wird. Wir haben nach (146):

$$m_I = \frac{\omega_0 L_{01}}{2z_0} \frac{z_0^2 + \omega_0^2 L_{01}^2}{\omega_0^2 L_{01}^2}.$$

Wir wollen in dem zweiten Bruch Zähler und Nenner durch z_0^2 dividieren und dann $\frac{\omega_0 L_{01}}{z_0}$ gleich q setzen. Dann wird:

$$m_I = \frac{1 + q^2}{2q}. \quad (148)$$

Hierin kann q jeden positiven Wert annehmen.

Wir erkennen leicht, daß der Ausdruck (148) niemals kleiner als 1 werden kann, und daß er für $q = 1$ ein flaches Minimum $m_I = 1$ hat. Der Verlauf der Funktion $\frac{1 + q^2}{2q}$ ist in der Abb. 10 in Abhängigkeit von q durch die gestrichelte Kurve dargestellt.

Für unseren Kettenleiter folgt also: Ist $\omega_0 L_{01} = z_0$, so ist die Resonanzkurve einwellig, und zwar ist sie an der Grenze von Ein- und Zweiwelligkeit. Für jeden anderen Wert von $\omega_0 L_{01}$ ist die Resonanzkurve zweiwellig.

Gehen wir von dem Punkte $q = 1$, $m_I = 1$ aus, so sehen wir, daß die Kurve für kleinere Werte von q sehr schnell steigt. Die Zweiwelligkeit nimmt dann also mit fallendem L_{01} sehr schnell zu. Für die Lage der beiden Koppelungsmaxima hatten wir gefunden: $U_{I_{\max}} = \pm \sqrt{m_I^2 - 1}$, also: $U_{I_{\max}}^2 = m_I^2 - 1$

$$\left(\eta_{\max} - \frac{1}{\eta_{\max}} \right)^2 = D_I^2 (m_I^2 - 1)$$

und, wenn wir nach (27) die prozentuelle Verstimmung einführen:

$$x_{\max} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{K_I^2 - D_I^2}. \quad (149)$$

Nun fällt für Werte von $\omega_0 L_{01}$, die klein gegen z_0 und $\omega_0 L_I$ sind, D_I , wie aus (145) hervorgeht, quadratisch mit $\omega_0 L_{01}$, während K_I proportional zu $\omega_0 L_{01}$ ist. Die Entfernung der beiden Koppelungsmaxima voneinander wird also in diesen Gebieten mit Verkleinerung des Koppelungsgliedes abnehmen. Gleichzeitig wird hiermit jedoch die Zweiwelligkeit immer ausgeprägter, d. h. das Minimum

zwischen den Koppelungsmaxima immer tiefer.

Wenn man beim Bau eines solchen Kettenleiters allein nach den Vorschriften der Leitungstheorie verfährt, so kann man sehr leicht, ohne daß die Leitungstheorie hierüber Rechenschaft gibt, die soeben geschilderten Verhältnisse herstellen. Man wird dann, weil die Gleichmäßigkeit der Durchlässigkeit innerhalb des Loches natürlich sehr unbefriedigend ausfallen wird, dies durch Verkleinerung des Koppelungsgliedes, also durch Verkleinerung der Lochbreite, zu verbessern suchen. Wie wir gesehen haben, wird man jedoch diese Verbesserung nicht erreichen; außerdem aber verkleinert man dann sehr leicht das Dekrement so stark, daß das System sich zu langsam aufschwingt. Dieser Schwierigkeit begegnet man bei Kettenleitern häufig. Es ist auch hier, um einen Einblick in die tatsächlichen Verhältnisse zu bekommen, unbedingt notwendig, die Dekremente der Schwingungskreise zu untersuchen.

In den Abb. 11 und 12 ist für die vorstehend geschilderten Verhältnisse als Beispiel die Resonanzkurve für verschiedene Koppelungen berechnet. Es ist hierin angenommen: $\omega_0 = 5000$, $z_0 = r_2 = 500$ Ohm, $L_1 = L_2 = 0,1$ H, $C_1 = C_2 = 0,4 \cdot 10^{-6}$ F. Die Kurven sind berechnet in Abb. 11 für $L_{01} = 0,018$ Henry und in Abb. 12 für $L_{01} = 0,01$ Henry. Man sieht, daß bei loserer Koppelung die beiden Maxima sich einander nähern, daß aber das Minimum dazwischen immer tiefer wird.

In den Abbildungen sind durch gestrichelte Linien die nach der Leitungstheorie berechneten Lochgrenzen eingezeichnet. Man sieht, daß von gleichförmiger Durchlässigkeit innerhalb dieser Grenzen nicht die Rede sein kann, die Ungleichmäßigkeit der Durchlässigkeit ist sogar sehr erheblich. In diesem Falle hat es demnach gar keinen Sinn, von einem Durchlässigkeitsbereich zu sprechen.

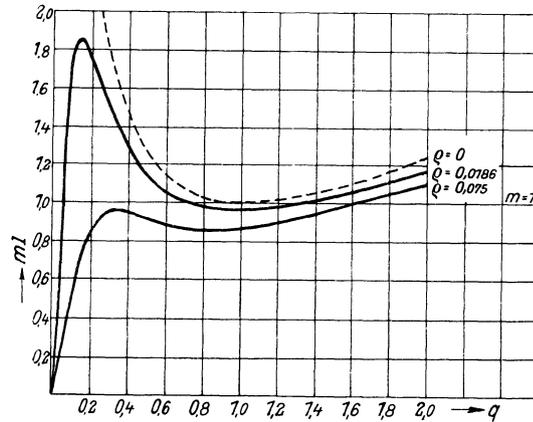


Abb. 10.

Weiter ist zu den Abb. 11 und 12 zu bemerken, daß die Resonanzkurven nicht symmetrisch zu den Lochgrenzen liegen, sondern nach der Richtung der unteren Lochgrenze zu verschoben erscheinen. Das erklärt sich folgendermaßen: Wenn die Resonanzkurve symmetrisch zu den Lochgrenzen liegen soll, so muß die Eigenfrequenz $\omega_I = \frac{1}{\sqrt{L_I C_1}}$ in der Mitte zwischen den beiden Lochgrenzen liegen, also nach (111) etwa bei:

$$\omega_I = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_{01}) C_1}}$$

Es müßte also sein: $L_I = L_1 + L_{01}$. Dies ist jedoch nur der Fall, wenn $a_{01}^2 = 0,5$ ist. Dann wird nämlich:

$$L_I = L_1 + \frac{3}{2} L_{01} - a_{01}^2 L_{01} = L_1 + L_{01}.$$

Ist dagegen $a_{01}^2 < 0,5$, wie im Fall der Abb. 11 und 12, so wird offenbar: $L_I > L_1 + L_{01}$, und die Eigenfrequenz ω_I verschiebt sich nach der unteren Lochgrenze zu.

Etwas ganz Analoges gilt für kapazitive Koppelung. Nach (116) müßte bei symmetrischer Lage der Resonanzkurve

$$\omega_I = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1 \frac{C_{01}}{C_{01} + C_1}}}$$

sein. Dies trifft, wie man leicht sieht, zu für $a_{01}^2 = 0,5$. Für $a_{01}^2 < 0,5$ wird:

$$\frac{1}{C_I} > \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{01}}, \quad \text{also} \quad C_I < C_1 \frac{C_{01}}{C_1 + C_{01}},$$

und die Eigenfrequenz ω_I verschiebt sich nunmehr nach der oberen Lochgrenze hin.

Lassen wir nun in (148) von dem Minimum $q = 1$, $m_I = 1$ aus q , also damit L_{01} , wachsen, so wächst gleichzeitig m_I ; wir erhalten also Resonanzkurven, die zunächst schwach zweiwellig sind. Wenn die Zweiwelligkeit so wenig ausgeprägt ist, daß das Minimum in der Mitte nur wenige Prozent unter dem Maximum liegt, so können wir die Resonanzkurve als annähernd rechteckig betrachten, und wir haben dann tatsächlich annähernd gleichbleibende Durchlässigkeit in einem gewissen Frequenzbereich erreicht. Dazu können wir nun auf dem bezeichneten Wege in der Tat gelangen. Zunächst sehen wir, daß m_I in der Nähe von $q = 1$ nur so wenig mit q veränderlich ist, daß man es bis etwa $q = 1,2$ als konstant betrachten kann. Die Zweiwelligkeit wird also wenig ausgeprägt, das Minimum in der Mitte der Resonanzkurve sehr flach sein. Weiter erkennt man aus (145), daß die Dämpfung sich in dem Gebiet, wo $\omega_0 L_{01}$ von der gleichen Größenordnung wie z_0 , aber immer noch klein gegen $\omega_0 L_1$ ist, proportional mit $\omega_0 L_{01}$ ändert. Der Nenner in (145) kann nämlich als konstant angenommen werden; der Zähler dagegen ist:

$$z_0 a_{01}^2 = z_0 \frac{q^2}{1 + q^2},$$

wo $q = \frac{\omega_0 L_{01}}{z_0}$ ist; a_{01}^2 ist unter den gemachten Voraussetzungen, wenn nämlich q

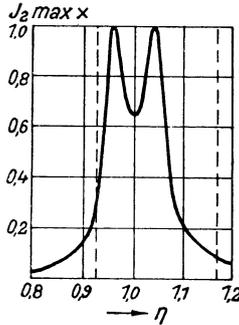


Abb. 11.

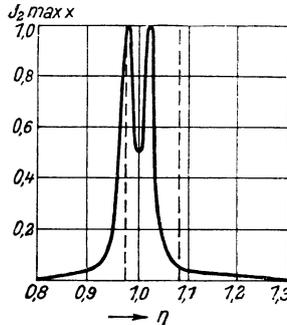


Abb. 12.

wenig von 1 abweicht, proportional zu $\omega_0 L_{01}$, wie man leicht in folgender Weise sieht:

$$a_{01}^2 + \Delta(a_{01}^2) = \frac{(1 + \Delta q)^2}{1 + (1 + \Delta q)^2} = \frac{1 + 2\Delta q}{2 + 2\Delta q} = \frac{1}{2}(1 + 2\Delta q)(1 - \Delta q) = \frac{1}{2}(1 + \Delta q),$$

$$\Delta(a_{01}^2) = \frac{1}{2} \Delta q.$$

Diese Beziehungen werden durch die Abb. 13 veranschaulicht. Dort ist einmal a_{01}^2 und zweitens $\frac{q}{2}$ in Abhängigkeit von q aufgetragen. Man sieht, daß die beiden Kurven von $q = 0,8$ bis $q = 1,2$ nahezu zusammenfallen.

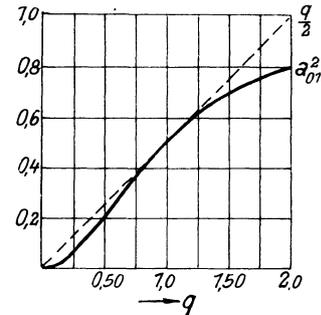


Abb. 13.

Demnach wird auch die Entfernung der Koppelungsmaxima voneinander, d. h. die Breite des Durchlässigkeitsbereiches, wie aus der Gleichung (149) folgt, proportional mit L_{01} zunehmen.

Als Beispiel für diesen Fall sind die Kurven der Abb. 14 berechnet. Hier ist angenommen: $z_0 = 500$, $\omega_0 = 12\,500$, $L_1 = 1$ und für:

Kurve	L_{01} Henry	C_1 Farad	$\omega_0 L_{01}$ Ohm	a_{01}^2	L_I Henry	D_I	K_I	m_I
I	0,045	$0,0066 \cdot 10^{-6}$	562	0,528	0,976	0,0216	0,023	1,07
II	0,06	$0,0067 \cdot 10^{-6}$	750	0,692	0,959	0,0289	0,0314	1,08
III	0,08	$0,0068 \cdot 10^{-6}$	1000	0,8	0,936	0,0341	0,0427	1,25

Man sieht, daß selbst die Kurve III mit m_I gleich 1,25 noch eine recht befriedigende Gleichmäßigkeit der Durchlässigkeit zeigt.

Für die Kurve III ist die nach der Leitungstheorie berechnete Lochbreite eingezeichnet. Wie man sieht, zeigt diese auch hier mit dem wirklich vorhandenen Bereich annähernd gleichmäßiger Durchlässigkeit keine sehr befriedigende Übereinstimmung.

Um zu diesem Resultat zu gelangen, sind, wie wir gesehen haben, die Vorschriften der Leitungstheorie nicht hinreichend. Es ist vielmehr nötig, diese noch durch die

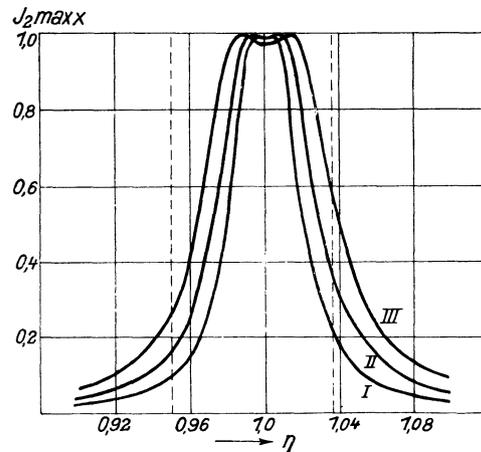


Abb. 14.

weitere Vorschrift zu ergänzen, daß der induktive Widerstand des Koppelungsgliedes größer sein muß als die Charakteristik der Leitung. Je größer man diesen induktiven Widerstand wählt, um so breiter wird der Durchlässigkeitsbereich, um so mehr wird sich aber auch schließlich das Minimum in der Mitte der Resonanzkurve ausprägen. Außerdem wächst gleichzeitig die Dämpfung und somit die Breite der Resonanzkurve an ihrem Fußpunkt. Man wird also, wenn größere Selektivität verlangt wird, auf diesem Wege nicht immer zum Ziele gelangen. Es wird sich dann die Notwendigkeit ergeben, eine dreigliedrige Kette zu verwenden.

Bei den bisherigen Betrachtungen hatten wir vorausgesetzt, daß man den Ohmschen Widerstand der eigentlichen Schwingungskreise vernachlässigen kann. Man wird nun allerdings bestrebt sein, diesen Widerstand möglichst klein zu machen, weil er reiner Verlustwiderstand ist. Doch wird man in praktischen Fällen oft frühzeitig eine untere Grenze für diese Widerstände erreichen. Dazu kommt noch folgendes: Bei Hochfrequenzkreisen muß man, wie sich gezeigt hat, die Verwendung von Solenoidspulen vermeiden, weil man sonst, ganz besonders bei kapazitiver Koppelung, unerwünschte Koppelungen erhält. Man muß dann Toroidspulen verwenden, und diese haben bei gegebener Induktivität immer einen etwas höheren Ohmschen Widerstand als Solenoidspulen. Zu diesen Ohmschen Widerständen kommen dann noch Verluste durch Wirbelströme. Wir wollen daher unsere Betrachtungen auch auf den Fall ausdehnen, daß der Ohmsche Widerstand R'_1 jedes Schwingungskreises nicht zu vernachlässigen ist. Dann ist die Dämpfung:

$$D_I = \frac{z_0 a_{01}^2 + R'_1}{\omega_0 L_I}$$

und:

$$m_I = \frac{\omega_0 L_{01}}{2z_0 a_{01}^2 + 2R'_1} \quad (150)$$

oder:

$$m_I = \frac{1 + q^2}{2q + 2\varrho \frac{1 + q^2}{q}},$$

wo $\varrho = \frac{R'_1}{z_0}$ eine kleine Zahl ist. Die Kurve in Abb. 10 verläuft dann nicht asymptotisch zur Ordinatenachse, sondern hat für q ein Maximum und geht durch den Anfangspunkt. Als Bedingung für dies Maximum finden wir:

$$q^4 + \frac{2\varrho - 1}{1 + \varrho} q^2 + \frac{1}{1 + \varrho} = 0.$$

$$q^2 = \frac{1 - 2\varrho \pm (1 - 4\varrho)}{2(1 + \varrho)},$$

also:

$$q^2 = \frac{1 - 3\varrho}{1 + \varrho} \quad \text{oder} \quad q^2 = \frac{\varrho}{1 + \varrho}.$$

Der erste Wert gibt das Minimum in der Nähe von $q = 1$, der zweite das besprochene Maximum an. Ist z. B. $z_0 = 500$, $R'_1 = 10$, also $\varrho = 0,02$, so liegt das Maximum bei $q = 0,14$, und es wird hier $m_I = 1,8$. Für $0,14 < q < 1$ liegen dann die geschilderten ungünstigen Verhältnisse vor, d. h. mit Verkleinerung des Koppelungsgliedes wird die Resonanzkurve immer stärker zweiwellig. Wird $q < 0,14$, so wird die Zweiwelligkeit mit abnehmender Koppelung geringer und schließlich wird die Resonanzkurve für sehr lose Koppelung sogar einwellig, sobald nämlich $m_I < 1$ wird.

Wir können die zweite Bedingung (151) noch etwas umformen, wenn wir für q und ϱ ihre Werte einsetzen. Es wird dann:

$$\frac{\omega_0^2 L_{01}^2}{z_0^2} = \frac{R'_1}{z_0 + R'_1} \quad \text{oder} \quad \frac{z_0^2}{\omega_0^2 L_{01}^2} = \infty \frac{z_0}{R'_1}, \quad \frac{z_0^2 + \omega_0^2 L_{01}^2}{\omega_0^2 L_{01}^2} = \frac{z_0 + R'_1}{R'_1},$$

$$a_{01}^2 = \infty \frac{R'_1}{z_0}, \quad z_0 a_{01}^2 = R'_1.$$

Wenn also in D_I die beiden Summanden im Zähler gleich sind, haben wir das Maximum für m_I ; das Minimum in der Mitte der Resonanzkurve ist dann am tiefsten.

In Abb. 10 sind in den ausgezogenen Kurven Beispiele für die soeben geschilderten Verhältnisse gegeben, und zwar für: $\varrho = 0,0186$ und $\varrho = 0,075$. Die gestrichelte Kurve entspricht dem Wert $\varrho = 0$. Die beiden anderen Kurven zeigen, daß mit wachsendem ϱ die Kurve immer flacher wird; das Maximum sinkt schließlich unter den Wert 1 herab, so daß man Zweiwelligkeit erst bei sehr enger Koppelung erreichen kann. Eine so enge Koppelung kann man häufig nicht verwenden, weil sonst die Dämpfung zu groß wird. Wenn man hier einfach nach den Vorschriften der Leitungstheorie verfährt, so wird man im allgemeinen zu lose koppeln und so eine einwellige Resonanzkurve erhalten.

Um unter solchen Umständen trotzdem einen Bereich annähernd gleichbleibender Durchlässigkeit zu erhalten, kann man in folgender Weise verfahren: Man geht von den Bauvorschriften der Leitungstheorie ab und macht L_{12} nicht mehr gleich $0,5 L_{01}$, sondern wählt an Stelle von 0,5 einen geeigneteren Faktor. Aus (180) erkennen wir, daß m_I diesem Faktor direkt proportional ist. An der Kurve für m_I wird daher durch Änderung dieses Faktors nur der Maßstab der Ordinaten geändert.

Man kann also dadurch, daß man das Verhältnis $\frac{L_{12}}{L_{01}} > 0,5$ wählt, die Kurve für m_I beliebig so verschieben, daß man den gewünschten Grad von Zweiwelligkeit erreicht. Da die Kurve sehr flach verläuft, hat also die Resonanzkurve für einen weiten Bereich von q , also der Koppelung, dieselbe Form, abgesehen von der Breite, die mit wachsender Koppelung zunimmt.

§ 9. Experimentelle Untersuchung eines zweigliedrigen Kettenleiters erster Art.

Um die theoretisch gefundenen Resultate zu verifizieren, wurden zwei Reihen von Versuchen veranstaltet. Es wurden Ketten gebaut nach Abb. 9 a, also mit kapazitiver Koppelung. Als Stromquelle diente ein Röhrensender mit einem B0-Rohr der Firma Siemens & Halske. Es wurde gearbeitet mit etwa 10 km Wellenlänge, also etwa mit einem $\omega = 2 \cdot 10^5$. Zum Empfang wurde ein Dreifach-Hochfrequenzverstärker und ein Röhrendetektor, beide mit Röhren Type 110, benutzt. Ein Schema der Versuchsanordnung zeigt die Abb. 15¹⁾.

Hierin bedeutet: S den Sender, $H.V.$ den Hochfrequenzverstärker, D den Detektor, G ein Gleichstrom-Milliamperemeter mit Parallelwiderstand. Zur Koppelung mit dem Sender diente die zweilagige kleine Koppelungsspule K_2 . Eine gleiche Spule K_3 war im letzten Kreise eingeschaltet, einmal um die Symmetrie der ganzen Anordnung zu wahren, und andererseits, um zwecks genauer Abstimmung den zweiten Kreis auch allein erregen zu können. Die Spulen K_2 und K_3 waren so bemessen, daß ihr Wechselstromwiderstand gegen z_0 zu vernachlässigen war.

Da die Annahme einer quadratischen Beziehung zwischen Hochfrequenzamplitude und Detektorausschlag keine befriedigenden Resultate ergab, so wurde der Detektor mittels der Frankeschen Maschine in der Weise geeicht, daß nacheinander die Windungen des oberen Ankers in Serienschaltung an das Steuergitter des Detektors

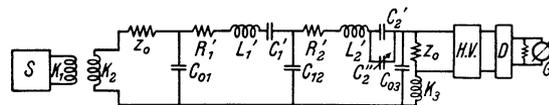


Abb. 15.

¹⁾ In Wirklichkeit würde man natürlich den Hochfrequenzverstärker nicht parallel zu z_0 , sondern parallel zu C_2' schalten. Man würde dann mit geringerer Verstärkung die gleichen Resultate erhalten. Es sollten hier jedoch genau die von der Leitungstheorie vorgeschriebenen Verhältnisse hergestellt werden.

gelegt wurden. Auf diese Weise wurde eine Eichkurve aufgenommen, die in Abb. 16 wiedergegeben ist. Hierin sind die Ordinaten Ausschläge des Gleichstrominstrumentes, während die Abszissen die Anzahl der hintereinandergeschalteten Windungen des Ankers der Frankeschen Maschine angeben, also mit der angelegten Spannung proportional sind.

Der Verlauf der Kurve bestätigt, daß sie nicht mit genügender Annäherung als quadratisch betrachtet werden kann. Eine wesentlich bessere Annäherung würde,

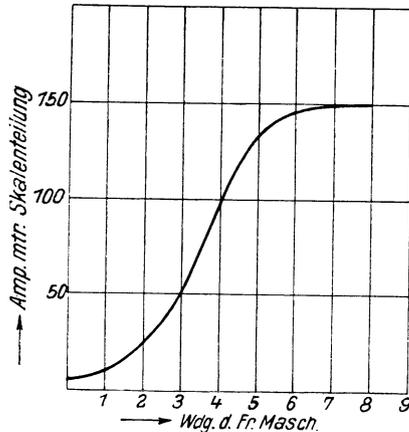


Abb. 16.

wenn es nur auf den mittleren Teil der Kurve ankäme, eine lineare Beziehung ergeben.

Der Parallelwiderstand zum Gleichstrominstrument wurde so eingestellt, daß der Sättigungsstrom gerade noch durch das Instrument angezeigt wurde.

Für die Kette wurden verwendet: Für z_0 Widerstände aus Konstantendraht von 0,03 mm Stärke von je 700 Ohm. Die Spulen L_1 und L_2 waren Kreisringspulen mit zwei getrennten Wicklungen von je etwa 700 Windungen, die bei der ersten Versuchsreihe parallel, bei der zweiten Reihe hintereinander geschaltet wurden. Die Drahtstärke betrug 0,4 mm. Die Induktivität der beiden Spulen wurde mit der

Frankeschen Maschine durch Phasenkompensation gemessen. Es ergab sich bei Parallelschaltung der beiden Wicklungen: $L_1 = 0,00405$ H, $L_2 = 0,00407$ H, bei Hintereinanderschaltung der beiden Wicklungen: $L_1 = 0,0161$ H, $L_2 = 0,0162$ H. Um den wirksamen Ohmschen Widerstand bei der gewählten Frequenz $\omega = 2 \cdot 10^5$ zu bestimmen, wurden in beiden Schaltungsarten mit den genannten Spulen Schwingungskreise mit der Eigenfrequenz von etwa $\omega = 2 \cdot 10^5$ gebaut, durch Aufnahme der Resonanzkurven die Dekremente¹⁾ bestimmt und hieraus die wirksamen Widerstände berechnet. Es ergab sich bei parallelgeschalteten Windungen: $R_1' = R_2' = 13$ Ohm, bei hintereinandergeschalteten Windungen: $R_1' = R_2' = 52,3$ Ohm. Die entsprechenden Widerstände mit Gleichstrom gemessen waren: $R_1 = 7$ Ohm bzw. $R_1 = 31$ Ohm. Man erkennt daraus, daß die Wirbelstromverluste trotz einlagiger Wicklung und trotz der geringen Drahtstärke nicht unbedeutend sind.

Als Kapazitäten wurden Glimmer-Stöpselkondensatoren verwandt. Um bei der geringen Verschiedenheit der beiden Spulen eine genaue Abstimmung zu ermöglichen, war parallel zu dem Kondensator C_2' ein Luftdrehkondensator C_2'' geschaltet. Die Feinabstimmung der beiden Kreise wurde dann in der Weise vorgenommen, daß zunächst der Kreis I bis einschließlich C_{12} über die Spulen K_1 und K_2 mit dem Sender gekoppelt wurde. Der Senderkondensator wurde dann auf Resonanz eingestellt. Dann wurde der Kreis II bis einschließlich C_{12} über die Spulen K_1 und K_3 mit dem Sender gekoppelt und bei der soeben ermittelten Stellung des Senderkondensators die Abstimmung mit dem Luftkondensator C_2'' bewirkt. In beiden Fällen war der Hochfrequenzverstärker parallel zu C_{12} geschaltet.

¹⁾ Die Resonanzkurven wurden nach der Eichkurve Abb. 16 umgerechnet. Die aus diesen Kurven in 30—90% Höhe ermittelten Dekremente zeigten sehr befriedigende Übereinstimmung untereinander und ergaben dadurch eine Bestätigung der Detektor-Eichkurve.

Es erwies sich als notwendig, die ganze Anordnung durch Einbau in gut geerdeten Metall- oder Drahtkästen statisch zu schützen und durch sorgfältige Leitungsführung das Zustandekommen von unerwünschten Koppelungen zu verhindern.

Die erste Versuchsreihe sollte zur Darstellung von ähnlichen Verhältnissen dienen, wie sie in Abb. 11 und 12 dargestellt waren. Es wurde hierzu gemacht:

$z_0 = 700 \text{ Ohm}$, $L_1 = L_2 = 0,0041 \text{ Henry}$, $R_1 = R_2 = 13 \text{ Ohm}$, $C_1 = 0,008 \cdot 10^{-6} \text{ Farad}$.

C_{01} und gleichzeitig damit $C_{12} = 2C_{01}$ und $C_{23} = C_{01}$ wurden verändert. Die Abb. 17a bis f zeigen die aufgenommenen Resonanzkurven. Als Abszissenmaßstab dienen hier die Skalenteile des Senderkondensators. Die Abszissen sind also proportional

zu $\frac{1}{\eta^2}$.

In den Abbildungen fällt zunächst auf, daß die Höhe der Maxima etwas verschieden ist, und zwar ist stets das Maximum bei kürzerer Wellenlänge niedriger. Diese Verschiedenheit erklärt sich folgendermaßen: Wir erinnern uns, daß wir in

(141) an Stelle der konstanten EMK E_0' die variable EMK $E_0' \cdot a_{01}$ setzen mußten, so daß J_{II} proportional zu a_{01} wird. Nun haben wir gesehen, daß die Annahme eines konstanten a_{01}^2 an der allgemeinen Gestalt der Resonanzkurve zwar nichts zu ändern vermag, wohl aber können solche Feinheiten wie die genaue Höhe der Maxima davon beeinflußt werden. Mit wachsendem ω nimmt a_{01} bei kapazitiver Koppelung in dem hier in Frage kommenden Bereich ab. Dem entspricht die beobachtete geringe Verschiedenheit in der Höhe der beiden Maxima.

Die Kurven sind mit Ausnahme der Abb. 17d nach der Detektorreichkurve umgerechnet, so daß die Ordinaten den wirklichen Stromamplituden proportional sind. In Abb. 17d dagegen ist für dieselben Verhältnisse wie für 17c die Resonanzkurve, wie sie mit dem Detektor aufgenommen wurde, ohne Umrechnung wiedergegeben. Die erheblichen Verzerrungen gegenüber Abb. 17c erklären sich durch die Form der Charakteristik des Detektors Abb. 16: Der mittlere Teil der Resonanzkurve wird nämlich auf dem steil ansteigenden Teil der Charakteristik aufgenommen. Es entsprechen also sehr kleinen Stromänderungen schon erhebliche Unterschiede in den Instrumentausschlägen. Man erkennt hieraus, daß eine solche Kette wie die vorliegende für Siebzwecke durchaus ungeeignet ist. Zwar werden die in Abb. 11 und 12 dargestellten starken Ungleichmäßigkeiten in der Durchlässigkeit durch die

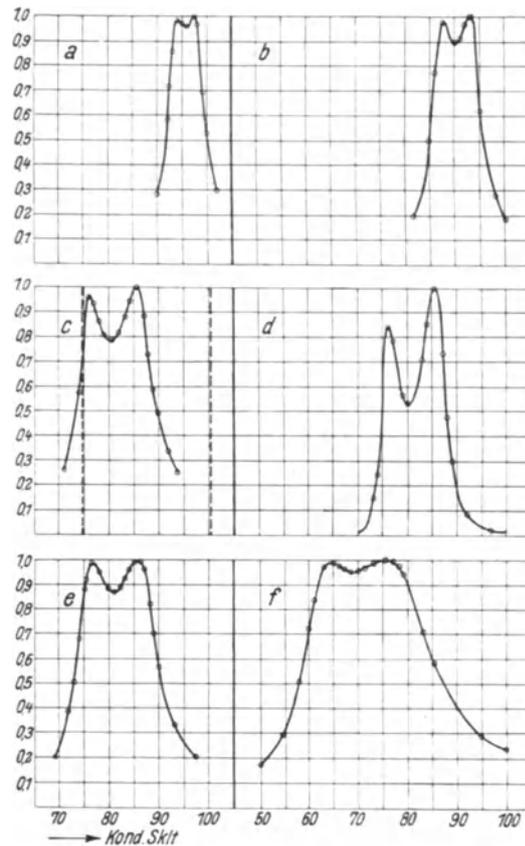


Abb. 17.

Wirkung der unvermeidlichen Verlustwiderstände R'_1 und R'_2 etwas gemildert. Sie werden jedoch andererseits durch den Röhrendetektor, den man ja fast immer zum Empfang verwenden wird, wieder verstärkt. Man wird also bei so loser Kopplung nicht zum Ziele kommen.

Tabelle 1.

Abb. 17	q	C_{01} μF	D_I	K_I	m_I	Minimum		Abstand der Maxima	
						berechn.	beobacht.	berechn.	beobacht.
						$J_{max}x$		% Verstimmung	
<i>a</i>	0,0526	0,15	0,02	0,0247	1,23	0,98	0,96	1,45	1,82
<i>b</i>	0,0774	0,1	0,0227	0,0357	1,57	0,91	0,89	2,76	3,05
<i>c</i>	0,142	0,053	0,036	0,066	1,83	0,82	0,775	5,55	5,09
<i>e</i>	0,152	0,05	0,0382	0,069	1,8	0,855	0,86	5,74	5,8
<i>f</i>	0,288	0,025	0,084	0,123	1,47	0,933	0,94	8,28	7,85

In der vorstehenden Tabelle 1 sind für die Abb. 17*a, b, c, e, f* die Resultate der Rechnung und der Beobachtung einander gegenübergestellt. Es ergibt sich,

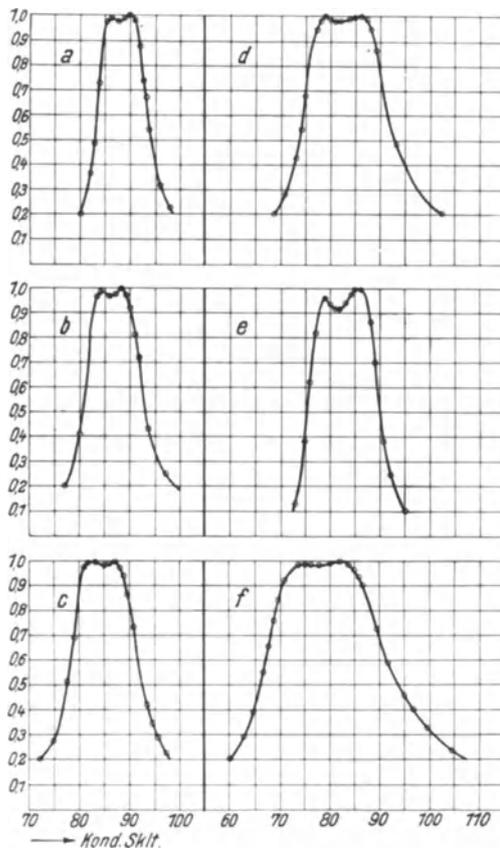


Abb. 18.

vergrößert werden. Es wurden also die beiden Spulenwindungen der Kreisringspulen hintereinander geschaltet. Es ergab sich dann rechnerisch für den Verlauf von m_I

wie man sieht, eine unter Berücksichtigung der unvermeidlichen Beobachtungs- und Ablesungsfehler befriedigende Übereinstimmung. Zum Vergleich kann die Kurve $q = 0,0186$ der Abb. 10 dienen, die dem hier behandelten Fall entspricht.

In Abb. 17*c* sind die nach der Leitungstheorie berechneten Lochgrenzen eingetragen. Hierdurch werden die Bemerkungen zu den theoretisch ermittelten Abb. 11 und 12 bestätigt, wonach die Resonanzkurven innerhalb des Loches nach kleineren Wellenlängen zu verschoben sein müssen.

Die Form der Kurven ist günstiger als die der Abb. 11 und 12. Das liegt an der ungünstig hohen Eigendämpfung der verwendeten Spulen. In der Praxis müßte man natürlich Spulen mit geringerer Eigendämpfung verwenden.

Die zweite Versuchsreihe wurde unternommen, um Resonanzkurven von annähernd rechteckiger Form zu erhalten. Es mußte also zu wesentlich engerer Kopplung gegangen werden. Um andererseits nicht zu große Dämpfung, also zu breite Resonanzkurven, zu erhalten, mußte L'_1

in Abhängigkeit von der Koppelung die Kurve $q = 0,075$ der Abb. 10. Es lag also der obenbesprochene Fall vor, wo von den Bauvorschriften der Leitungstheorie abgewichen werden mußte. Es wurde daher $C_{12} = 1,5 C_{01} = 1,5 C_{23}$ gewählt. Außerdem wurde gemacht:

$$z_0 = 700 \text{ Ohm}, L'_1 = L'_2 = 0,0161 \text{ Henry}, R'_1 = R'_2 = 52,3 \text{ Ohm}, C'_1 = 0,002 \cdot 10^{-6} \text{ Farad.}$$

Die aufgenommenen Resonanzkurven sind in den Abb. 18a bis f wiedergegeben. Hierin sind wieder die Kurven *a, b, c, d, f* unter Berücksichtigung der Detektor-eichkurve Abb. 16 umgerechnet. Die Abb. 18e gilt für dieselben Verhältnisse wie die Abb. 18d, zeigt aber die am Detektor aufgenommene Kurve ohne Umrechnung. Man erkennt hier wieder die vom Detektor herrührende Verzerrung, doch ist sie wesentlich weniger erheblich als im Beispiel der Abb. 17d. Die Kurven 18 zeigen überall den erwünschten, annähernd rechteckigen Verlauf. Man kann das durch geeignete Wahl des Verhältnisses $\frac{C_{01}}{C_{12}}$ noch weiter verbessern. Für die Versuche wurde für dieses Verhältnis der Wert 1,5 gewählt, um die Veränderlichkeit der Ordinate des Minimums entsprechend der Abb. 10 zu zeigen. Hierüber gibt die Tabelle 2 ein Bild. Wie man sieht, befinden sich auch hier die berechneten mit den beobachteten Werten in befriedigender Übereinstimmung.

Tabelle 2.

Abb. 18	q	C_{01} μF	D_I	K_I	m_I	Minimum		Abstand der Maxima	
						berechn.	beobacht.	berechn.	beobacht.
						$J_{\max x}$		% Verstimung	
<i>a</i>	0,216	0,036	0,031	0,034	1,1	0,99	0,98	1,4	2
<i>b</i>	0,257	0,03	0,0323	0,04	1,24	0,975	0,968	2,3	2,3
<i>c</i>	0,318	0,024	0,0389	0,049	1,26	0,97	0,985	2,9	2,9
<i>d</i>	0,417	0,018	0,051	0,0641	1,255	0,972	0,975	3,9	4,2
<i>f</i>	0,61	0,012	0,076	0,0896	1,18	0,982	0,986	4,8	5

V. Die Theorie dreifacher Schwingungssysteme.

§ 10. Allgemeines.

Hierher gehören von den von uns zu betrachtenden Gebilden der Leitungstheorie: Der zweigliedrige Kettenleiter zweiter Art und der dreigliedrige Kettenleiter erster Art.

Eine allgemeine Theorie drei- und mehrfacher Schwingungssysteme stößt bei unserer bisherigen Betrachtungsweise bald auf die Schwierigkeit, daß sich Gleichungen höheren Grades ergeben, die sich im allgemeinen nicht durch Ausdrücke mit Wurzelzeichen auflösen lassen. Für dreigliedrige Systeme lassen sich jedoch allgemeine Lösungen noch angeben, wenn man annimmt, daß man die Eigendämpfungen der einzelnen Kettenglieder vernachlässigen kann. Auf dieser Vernachlässigung beruht auch die Diskussion der Resultate der Leitungstheorie. Unter diesen Umständen ergeben sich nämlich in manchen Fällen symmetrische Gleichungsformen, die eine allgemeine Lösung zulassen, und was die Resonanzkurve anbetrifft,

gleiche Höhe der verschiedenen Maxima. Inwieweit man sich der Annahme vernachlässigbarer Eigendämpfung praktisch annähern kann, haben wir im vorigen Kapitel gesehen: Es hängt dies davon ab, bis zu welchem Maß man die Ohmschen und Wirbelstromverluste der verwendeten Spulen herunterdrücken kann.

Es soll im folgenden eine Theorie der obengenannten Kettenleiter unter dieser Voraussetzung vernachlässigbarer Eigendämpfung der Kettenglieder abgeleitet werden. Die erhaltenen Resultate werden dann in praktischen Fällen ähnliche Modifikationen erfahren, wie wir sie im vorigen Kapitel kennengelernt haben. Außerdem werden die Maxima dann nicht mehr gleich hoch sein. Es ergibt sich damit für solche Kettenleiter die Forderung, die Eigendämpfungen der einzelnen Schwingungskreise möglichst gering zu machen. Hierzu sind einmal Kettenleiterformen zu verwenden, die möglichst wenig Verlustwiderstände enthalten, also solche mit kapazitiver Koppelung. Weiter sind die zur Verwendung kommenden Spulen sorgfältig so zu bemessen, daß sie bei gegebener Induktivität möglichst geringe Verluste durch Ohmschen Widerstand und Wirbelströme haben.

§ 11. Der zweigliedrige Kettenleiter zweiter Art.

Es werde ein System nach dem Schaltschema der Abb. 19 betrachtet.

Das Gebilde ist ein zweigliedriger Kettenleiter zweiter Art, der an eine Leitung angeschlossen ist.

Man sieht zunächst, daß die drei Schwingungskreise aufeinander abgestimmt sind, denn es ist:

$$\omega_I^2 = \omega_{III}^2 = \frac{1}{(L'_1 + L_{01})C_1} = \omega_{II}^2 = \frac{1}{(2L'_1 + 2L_{01})\frac{C_1}{2}}.$$

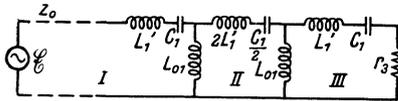


Abb. 19.

Wir haben nach dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz in den drei Kreisen:

$$\begin{aligned} \Im_I \Re_I - \Im_{II} \Re_{01} &= \mathcal{E}'_0, \\ \Im_I \Re_{01} - \Im_{II} \Re_{II} + \Im_{III} \Re_{01} &= 0, \\ \Im_{II} \Re_{01} - \Im_{III} \Re_{III} &= 0. \end{aligned}$$

Wir finden also für \Im_{III} :

$$\Im_{III} = \frac{\begin{vmatrix} \Re_I & -\Re_{01} & \mathcal{E}'_0 \\ \Re_{01} & -\Re_{II} & 0 \\ 0 & \Re_{01} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Re_I & -\Re_{01} & 0 \\ \Re_{01} & -\Re_{II} & \Re_{01} \\ 0 & \Re_{01} & -\Re_{III} \end{vmatrix}} = \frac{\mathcal{E}'_0 \Re_{01}^2}{\Re_I \Re_{II} \Re_{III} - \Re_{01}^2 (\Re_I + \Re_{III})}. \quad (151)$$

Es ist hier: $\Re_{01} = i\omega L_{01}$

$$\left. \begin{aligned} \Re_I &= z_0 + i\left(\omega L'_1 + \omega L_{01} - \frac{1}{\omega C_1}\right) = R_I + iS_I, \\ \Re_{II} &= i\left(2\omega L'_1 + 2\omega L_{01} - \frac{2}{\omega C_1}\right) = 2iS_I, \\ \Re_{III} &= r_3 + i\left(\omega L'_1 + \omega L_{01} - \frac{1}{\omega C_1}\right) = R_{III} + iS_{III} = R_{III} + iS_I. \end{aligned} \right\} \quad (152)$$

Der Nenner in (151) ist:

$$\begin{aligned} & (R_I + i S_I)(R_{III} + i S_I) \cdot 2 i S_I + \omega^2 L_{01}^2 (R_I + R_{III} + 2 i S_I) \\ & = (R_I + R_{III}) \omega^2 L_{01}^2 - 2 S_I^2 (R_I + R_{III}) + i (2 R_I R_{III} S_I - 2 S_I^3 + 2 S_I \omega^2 L_{01}^2). \end{aligned}$$

Also wird aus (151) beim Übergang zu reellen Werten:

$$\left. \begin{aligned} J_{III} &= \frac{E'_0 \omega^2 L_{01}^2}{\sqrt{A_3'^2 + B_3'^2}}, \\ \text{wo: } A_3 &= (R_I + R_{III}) (\omega^2 L_{01}^2 - 2 S_I^2), \quad B_3 = 2 S_I (R_I R_{III} - S_I^2 + \omega^2 L_{01}^2). \end{aligned} \right\} \quad (153)$$

$$\text{Setzen wir: } \quad D_I = \frac{z_0}{\omega_0 L_I}, \quad D_{III} = \frac{r_3}{\omega_0 L_I} = D_I \frac{r_3}{z_0}, \quad (154)$$

$$U_I = \frac{1}{D_I} \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right), \quad U_{III} = \frac{1}{D_{III}} \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right) = \frac{z_0}{r_3} U_I, \quad (155)$$

$$m_I = \frac{K_I}{D_I}, \quad m_{III} = \frac{K_{III}}{D_{III}} = \frac{K_I z_0}{D_I r_3} = m_I \frac{z_0}{r_3} \quad (156)$$

und dividieren in (153) Zähler und Nenner durch $R_I^2 \cdot R_{III}$, so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} J_{III} &= \frac{E'_0 m_I^2}{r_3} \frac{\eta}{\sqrt{A_3'^2 + B_3'^2}}, \\ \text{wo: } A_3' &= \left(\frac{z_0}{r_3} + 1 \right) (\eta^2 m_I^2 - 2 U_I^2), \quad B_3' = 2 U_I \left(1 - U_I^2 \frac{z_0}{r_3} + \eta^2 m_I^2 \frac{z_0}{r_3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (157)$$

Wir wollen wieder in Anbetracht der geringen Breite unserer Resonanzkurven η im Zähler und Nenner von (157) = 1 annehmen. Wir brauchen dann bloß den Ausdruck $A_3'^2 + B_3'^2$ zu betrachten und haben als Maximumbedingung:

$$A_3' \frac{\partial A_3'}{\partial U_I} + B_3' \frac{\partial B_3'}{\partial U_I} = 0$$

oder

$$-A_3' 4 U_I \left(\frac{z_0}{r_3} + 1 \right) + 4 U_I \left(1 - U_I^2 \frac{z_0}{r_3} + m_I^2 \frac{z_0}{r_3} \right)^2 + 2 U_I \left(-2 U_I \frac{z_0}{r_3} \right) B_3' = 0.$$

Diese Gleichung hat, wie man sieht, eine Wurzel $U_I = 0$. Scheiden wir diesen Fall aus und dividieren durch $4 U_I$, so ergibt sich:

$$-A_3' \left(\frac{z_0}{r_3} + 1 \right) + \left(1 - U_I^2 \frac{z_0}{r_3} + m_I^2 \frac{z_0}{r_3} \right)^2 - U_I \frac{z_0}{r_3} B_3' = 0$$

oder, durch Einsetzen aus (157) und nach einfacher Umrechnung:

$$U_I^4 + U_I^2 \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{r_3^2}{z_0^2} - 2 m_I^2 \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{r_3^2}{z_0^2} - m_I^2 \frac{r_3^2}{z_0^2} - m_I^2 + m_I^4 \right) = 0.$$

Also ist:

$$U_I^2 = \frac{1}{3} \left(2 m_I^2 - \frac{r_3^2}{z_0^2} - 1 \right) \pm \frac{1}{3} \sqrt{1 - \frac{r_3^2}{z_0^2} + \frac{r_3^4}{z_0^4} + m_I^2 \left(m_I^2 - \frac{r_3^2}{z_0^2} - 1 \right)}. \quad (158)$$

Hieraus ergeben sich die übrigen 4 Wurzeln U_I .

Man sieht, daß die Wurzeln symmetrisch in bezug auf $U_I = 0$ liegen. Wenn also alle Wurzeln reell sind, so hat man zu beiden Seiten des Maximums $U_I = 0$

je ein Minimum und dann weiter noch je ein Maximum. Da U_I in die Gleichung (157) nur quadratisch eingeht, so erkennt man, daß die bezüglichen Maxima bzw. Minima zu beiden Seiten von $U_I = 0$ von gleicher Höhe sind. Die Resonanzkurve ist also völlig symmetrisch.

Wir wollen nun zunächst annehmen, daß der Verbraucherwiderstand der Charakteristik angeglichen sei. Kreis I und III sind dann gleich stark gedämpft, und es ist: $\frac{r_3}{z_0} = 1$. Setzen wir dies in (158) ein, so vereinfacht sich diese Gleichung zu:

$$U_I^2 = \frac{1}{3}(2m_I^2 - 2) \pm \frac{1}{3}(m_I^2 - 1).$$

Wir haben also für die Maxima: $U_I = \pm \sqrt{m_I^2 - 1}$, (159)

für die Minima: $U_I = \pm \sqrt{\frac{1}{3}(m_I^2 - 1)}$. (160)

Um Mehrwelligkeit zu erhalten, muß also sein:

$$m_I > 1.$$

Nach (154) und (156) ist:

$$m_I = \frac{K_I}{D_I} = \frac{L_{01}}{L_I} \frac{\omega_0 L_I}{z_0} = \frac{\omega_0 L_{01}}{z_0}. \quad (161)$$

Also muß, wenn man eine mehrwellige Resonanzkurve erhalten will, in diesem Falle:

$$\omega_0 L_{01} > z_0 \quad (162)$$

sein. Dies ist die gleiche Bedingung, die wir vorher für das einfache Kettenglied zweiter Art gefunden haben. Sie verlangt unter Umständen eine nicht unbedeutende Größe der Koppelungsinduktivität. Es sind dann auch, um geeignete Werte für Koppelung und Dämpfung zu ergeben, häufig unvorteilhaft große Leitungsinduktivitäten L_I erforderlich. Die praktische Herstellung solcher Kettenleiter wird daher vielfach Schwierigkeiten machen. In vielen Fällen kann man sich dann dadurch helfen, daß man die Kettenglieder kapazitiv koppelt.

Um die Höhe der Maxima zu ermitteln, setzen wir $U_I = 0$ und (159) in (157) ein und erhalten:

für $U_I = 0$:

$$A'_3 = 2m_I^2, \quad B'_3 = 0, \quad J_{III} = \frac{E'_0 m_I^2}{z_0 \cdot 2m_I^2} = \frac{E'_0}{2z_0}.$$

Für $U_I = \pm \sqrt{m_I^2 - 1}$:

$$\begin{aligned} A'_3 &= 2(m_I^2 - 2m_I^2 + 2) = 2(2 - m_I^2), \\ B'_3 &= 2\sqrt{m_I^2 - 1}(1 - m_I^2 + 1 + m_I^2) = 4\sqrt{m_I^2 - 1}, \\ A_3'^2 + B_3'^2 &= 4m_I^4, \\ J_{III} &= \frac{E'_0 m_I^2}{z_0 \cdot 2m_I^2} = \frac{E'_0}{2z_0}. \end{aligned}$$

Sämtliche Maxima sind also gleich hoch. Der Fall ist demnach sehr geeignet, um eine annähernd rechteckige Resonanzkurve zu erhalten. Man muß nur m_I so wählen, daß die Minima nicht zu tief werden.

Als Beispiele hierfür sind die Kurven der Abb. 20 und 21 berechnet. Es ist hierin angenommen: $z_0 = r_3 = 500$, und in Abb. 20: $D_I = 0,0341$, $K_I = 0,0247$, $m_I = 1,25$, in Abb. 21: $D_I = 0,0341$, $K_I = 0,0682$, $m_I = 2,0$.

Die Größe des Bereiches gleichbleibender Durchlässigkeit ist, wenn wir U_I als Abszissenmaßstab wählen, durch die Größe: $Q = 2\sqrt{m_I^2 - 1}$ gegeben. m_I ist nach (161) proportional zu $\omega_0 L_{01}$, aber Q ist für Werte von m_I , die wenig größer als 1 sind, keineswegs proportional zu m_I . In der Nähe von $m_I = 1$ fällt nämlich Q stärker als proportional zu m_I und wird für $m_I = 1$ gleich Null. Unterhalb $m_I = 1$ ist die Resonanzkurve einwellig; von einem eigentlichen Durchlässigkeitsbereich kann dann keine Rede sein.

Kehren wir nun zu der allgemeinen Gleichung (158) zurück und nehmen jetzt an, daß $z_0 \neq r_3$ ist. Dieser Fall ist dann wichtig, wenn der Kettenleiter nicht an eine

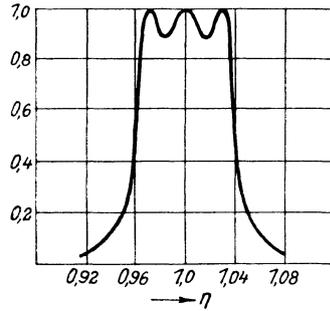


Abb. 20.

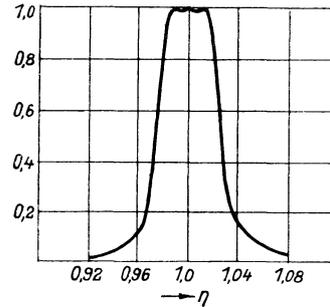


Abb. 21.

Leitung angeschlossen ist, sondern unmittelbar an eine Stromquelle, deren innerer Widerstand im allgemeinen kleiner sein wird als der Verbraucherwiderstand. In diesem Fall ist das Gebilde nicht mehr symmetrisch, weil die Dämpfung im Endglied und im Anfangsglied verschieden ist. Die Resonanzkurve wird, wie wir gesehen haben, auch in diesem Falle symmetrisch sein, es fragt sich nur, wie die Höhen der drei Maxima sich zueinander verhalten.

Betrachten wir, um hierüber Klarheit zu gewinnen, zunächst den Ausdruck unter der Wurzel, in (158). Im Falle $m_I = 1$ wird dieser Radikand gleich $\left(1 - \frac{r_3^2}{z_0^2}\right)^2$, also positiv. Wir wollen untersuchen, ob der Ausdruck verschwinden kann. Lösen wir nach m_I auf, so haben wir:

$$\left. \begin{aligned} m_I^4 - m_I^2 \left(1 + \frac{r_3^2}{z_0^2}\right) + 1 - \frac{r_3^2}{z_0^2} + \frac{r_3^4}{z_0^4} &= 0, \\ m_I^2 &= \frac{z_0^2 + r_3^2}{2z_0^2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4} \frac{r_3^4}{z_0^4} + \frac{3}{2} \frac{r_3^2}{z_0^2} - \frac{3}{4}}. \end{aligned} \right\} \quad (163)$$

Hier ist der Ausdruck unter der Wurzel sowohl für große wie für kleine Werte von $\frac{r_3^2}{z_0^2}$ negativ. Den Wert Null erreicht der Radikand nur, wenn $\frac{r_3^2}{z_0^2} = 1$ ist. Die Gleichung (163) hat also, abgesehen von diesem Fall, der bereits erledigt ist, keine reellen Wurzeln, und folglich ist der Radikand in (158) immer positiv, die Wurzel immer reell.

Fragen wir nun nach den Grenzbedingungen für das Auftreten reeller Werte von U_I in Gleichung (158), so ergeben sich die Bedingungen:

$$m_I = 1, \quad m_I = \frac{r_3}{z_0}, \quad (164)$$

wie man leicht durch Einsetzen in (158) verifizieren kann. Für kleine Werte von m_I wird also die Resonanzkurve nur ein Maximum haben. Wächst dann m_I und überschreitet den kleineren der beiden Grenzwerte (164), so treten zunächst nur zwei Maxima auf, während sich in der Mitte ein Minimum ergibt. Wächst m_I dann weiter über den größeren der beiden Grenzwerte (164) hinaus, so bildet sich wieder in der Mitte ein Maximum aus, das von den beiden seitlichen Maxima durch zwei Minima getrennt ist. Das Maximum in der Mitte wird also bei dieser unsymmetrischen Anordnung, wenn es überhaupt vorhanden ist, niedriger sein als die beiden anderen Maxima.

Um brauchbare Kurvenformen zu erhalten, wird man also in diesem Falle mit m_I nicht weit über den kleineren der beiden Grenzwerte (164) hinausgehen dürfen, d. h.

$$\begin{array}{ll} \text{bei } r_3 > z_0 & \text{über } m_I = 1, \\ \text{bei } r_3 < z_0 & \text{über } m_I = \frac{r_3}{z_0}. \end{array}$$

Man wird dann ähnliche Resonanzkurven wie in Abb. 14 erhalten; man begibt sich dann aber des Vorteils, den man bezüglich der gleichmäßigen Durchlässigkeit bei diesem dreifachen System durch das Maximum in der Mitte erhalten kann. Es ist also unter diesen Umständen immer zweckmäßig, durch Einschalten von Ohmschen Widerständen die Dämpfungen von Anfangs- und Endkreis gleichzumachen.

Es ist, um zu den erwünschten Resonanzkurvenformen zu gelangen, bei den von der Leitungstheorie angegebenen Kettenleiterformen überhaupt notwendig, Anfangs- und Endglied gleich stark zu dämpfen. Im Falle des Anschlusses an eine Leitung gibt die Leitungstheorie selbst hierzu die richtige Anleitung. Wird der Kettenleiter jedoch nicht an eine Leitung angeschlossen, so muß man dem ersten Glied die fehlende Dämpfung durch Einschalten eines passenden Widerstandes geben, also die Leitung ersetzen. Wir sehen also, daß, wie bereits eingangs erwähnt, die Behandlung der Kettenleiter der Leitungstheorie, losgelöst von der Frage des Anschlusses an eine Leitung oder anderweitig, gar nicht möglich ist. Die Frage des Anschlusses ist nicht nur für die Güte der Energieübertragung von Wichtigkeit, wie die Leitungstheorie angibt, sondern sie ist infolge der sich hieraus ergebenden Dämpfung der Endglieder von ausschlaggebender Bedeutung für die Form der Resonanzkurve, also für die Eignung des ganzen Gebildes für Siebzwecke.

§ 12. Der dreigliedrige Kettenleiter erster Art.

Es werde betrachtet ein Kettenleiter nach dem Schema der Abb. 22.

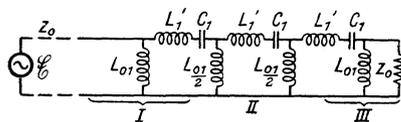


Abb. 22.

Wir erhalten wieder in komplexer Schreibweise entsprechend der Gleichung (151):

$$\mathfrak{S}_{III} = \frac{\mathfrak{G}'_0 \mathfrak{R}_{01}^2}{4 \left(\mathfrak{R}_I \mathfrak{R}_{II} \mathfrak{R}_{III} - \frac{\mathfrak{R}_{01}^2}{4} (\mathfrak{R}_I + \mathfrak{R}_{III}) \right)}. \quad (165)$$

Hierin ist jedoch an Stelle von \mathfrak{G}'_0 in (151): $\mathfrak{G}'_0 = \mathfrak{G}'_0 \frac{\mathfrak{R}_{01}}{\mathfrak{R}_0}$ zu schreiben oder in reeller Form: $E'_0 = E'_0 \cdot a_{01}$. Wenn wir wieder setzen:

$$a_{01}^2 = \frac{\omega^2 L_{01}^2}{z_0^2 + \omega^2 L_{01}^2}, \quad b_{01}^2 = 1 - a_{01}^2 = \frac{z_0^2}{z_0^2 + \omega^2 L_{01}^2}.$$

Es ist in (165): $\Re_{01} = i \omega L_{01}$

$$\begin{aligned}
 \Re_I &= R_I + i \left(\omega L_I - \frac{1}{\omega C_I} \right) = z_0 a_{01}^2 + i \left(\omega L_I - \omega L_{01} a_{01}^2 - \frac{1}{\omega C_I} \right) \\
 &= z_0 a_{01}^2 + i \left(\omega L_I + \frac{1}{2} \omega L_{01} + \omega L_{01} - \omega L_{01} a_{01}^2 - \frac{1}{\omega C_I} \right) \\
 &= z_0 a_{01}^2 + i \left(\omega L_I + \frac{1}{2} \omega L_{01} + b_{01}^2 \omega L_{01} - \frac{1}{\omega C_I} \right) \\
 &= R_I + i S_I. \\
 \Re_{II} &= i \left(\omega L_{II} - \frac{1}{\omega C_{II}} \right) = i \left(\omega L_I + \omega L_{01} - \frac{1}{\omega C_I} \right) \\
 &= i S_{II}. \\
 \Re_{III} &= R_{III} + i \left(\omega L_{III} - \frac{1}{\omega C_{III}} \right) = z_0 a_{01}^2 + i \left(\omega L_{III} - \frac{1}{\omega C_I} \right) \\
 &= z_0 a_{01}^2 + i \left(\omega L_I + \frac{1}{2} \omega L_{01} + b_{01}^2 \omega L_{01} - \frac{1}{\omega C_I} \right) \\
 &= R_{III} + i S_{III} = R_I + i S_I = \Re_I.
 \end{aligned} \tag{166}$$

Für die Eigenfrequenzen finden wir:

$$\begin{aligned}
 \omega_I^2 &= \frac{1}{[L_I + L_{01}(\frac{1}{2} + b_{01}^2)] C_I} = \omega_{III}^2, \\
 \omega_{II}^2 &= \frac{1}{(L_I + L_{01}) C_I}.
 \end{aligned}$$

Die drei Kreise sind also nur dann auf dieselbe Eigenfrequenz abgestimmt, wenn:

$$b_{01}^2 - \frac{1}{2} = d = 0, \quad b_{01}^2 = \frac{1}{2}, \quad \text{also } z_0 = \omega_0 L_{01} \text{ ist.}$$

Aus (165) erhalten wir:
$$\Im_{III} = \frac{\mathfrak{G}_0'' \Re_{01}^2}{4 \Re_I \Re_I \Re_{II} - \frac{1}{2} \Re_{01}^2} \tag{167}$$

und wenn wir zu reellen Werten übergehen:

$$J_{III} = \frac{E_0'' \omega^2 L_{01}^2}{4 \sqrt{(R_I^2 + S_I^2) \left[\left(\frac{\omega^2 L_{01}^2}{2} - S_I S_{II} \right)^2 + R_I^2 S_{II}^2 \right]}}. \tag{168}$$

Setzen wir hierin: $S_{II} = S_I - \omega L_{01}(b_{01}^2 - \frac{1}{2})$ und dividieren Zähler und Nenner durch R_I^2 , so wird:

$$J_{III} = \frac{E_0'' \eta^2 m_I^2}{R_I \{ (1 + U_I^2) [\{ 2 m_I^2 \eta^2 - U_I^2 + 2 U_I \eta m_I (b_{01}^2 - \frac{1}{2}) \}^2 + \{ U_I - 2 \eta m_I (b_{01}^2 - \frac{1}{2}) \}^2] \}}. \tag{169}$$

Es ist jetzt:

$$m_I = \frac{K_I}{D_I} = \frac{L_{01} \omega_0 L_I}{2 L_I z_0 a_{01}^2} = \frac{1}{2} \frac{\omega_0 L_{01} (z_0^2 + \omega_0^2 L_{01}^2)}{z_0 \omega_0^2 L_{01}^2},$$

und wenn wir wieder setzen:

$$\begin{aligned}
 \frac{\omega_0 L_{01}}{z_0} &= q \\
 m_I &= \frac{1 + q^2}{2q}.
 \end{aligned} \tag{170}$$

Wir können uns zur Untersuchung der Maxima der Resonanzkurve wieder auf die Betrachtung des Radikanden im Nenner von (169) beschränken und hierin $\eta = 1$ setzen. Wir finden dann als Bedingung für Extremwerte:

$$\left. \begin{aligned} & [\{2m_I^2 - U_I^2 + 2U_I m_I (b_{01}^2 - \frac{1}{2})\}^2 + \{U_I - 2m_I (b_{01}^2 - \frac{1}{2})\}^2] \cdot 2U_I \\ & + (1 + U_I^2) [2\{2m_I^2 - U_I^2 + 2U_I m_I (b_{01}^2 - \frac{1}{2})\} \{-2U_I + 2m_I (b_{01}^2 - \frac{1}{2})\}] \\ & + 2\{U_I - 2m_I (b_{01}^2 - \frac{1}{2})\} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

Dies ergibt im allgemeinen Fall eine nicht durch Wurzelzeichen auflösbare Gleichung fünften Grades. Wir wollen den Fall betrachten, wo $b_{01}^2 - \frac{1}{2} = d = 0$ wird.

Dann ist:

$$\frac{z_0^2}{z_0^2 + \omega_0^2 L_{01}^2} = \frac{1}{2}, \quad \text{also:} \quad \omega_0 L_{01} = z_0.$$

Die Bedingungsgleichung (171) vereinfacht sich dann zu:

$$[(2m_I^2 - U_I^2)^2 + U_I^2] 2U_I + (1 + U_I^2) [2(2m_I^2 - U_I^2)(-2U_I) + 2U_I] = 0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $U_I = 0$. Scheiden wir diesen Fall aus, so ergibt sich durch Division durch $2U_I$:

$$(2m_I^2 - U_I^2)^2 + U_I^2 + (1 + U_I^2)(1 - 4m_I^2 + 2U_I^2) = 0.$$

Also:

$$U_I^4 + \frac{4}{3} U_I^2 (1 - 2m_I^2) + \frac{1}{3} (1 - 2m_I^2)^2 = 0$$

und demnach: $U_I^2 = 2m_I^2 - 1$ und $U_I^2 = \frac{1}{3}(2m_I^2 - 1)$. (172)

Hiervon stellt der erste Wert die beiden äußeren Maxima, der zweite Wert die dazwischenliegenden Minima dar.

Nun hatten wir angenommen: $\omega_0 L_{01} = z_0$, also: $q = 1$. Folglich ist in unserem Falle: $m_I = 1$, und wir erhalten für die Maxima: $U_I^2 = 1$, $U_I = \pm 1$.

Setzen wir $U_I = 0$ und die Wurzeln (172) in (169) ein, so erhalten wir für die Maxima:

$$J_{III} = \frac{E_0''}{2R_I},$$

für die Minima:

$$J_{III} = \frac{E_0''}{2R_I} \cdot 0,98.$$

Wir haben also eine Resonanzkurve mit einem zwar schmalen Durchlässigkeitsbereich, doch ist innerhalb dieses Bereiches die Durchlässigkeit sehr gleichmäßig. Die Breite des Durchlässigkeitsbereiches hängt von der Dämpfung ab; für $D_I = 0,03$ z. B. beträgt diese Breite etwa 2,8%.

Eine solche Resonanzkurve wird in vielen Fällen genügen. Andernfalls muß man auf den allgemeineren Fall zurückgreifen. Die Gleichung (171) lautet in anderer Form:

$$\begin{aligned} & 6U_I^5 - U_I^4 \cdot 2m_I d + 8U_I^3 \cdot (2m_I^2 d^2 - m_I^2 + 1) + 24U_I^2 (m_I^3 d - m_I d) \\ & + 2U_I (4m_I^4 + 8m_I^2 d^2 - 4m_I^2 + 1) + 4m_I d (2m_I^2 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Hieraus ersehen wir, daß in dem allgemeinen Fall, wo $d \neq 0$ ist, die Gleichung dann die Wurzel $U_I = 0$ hat, wenn $m_I^2 = \frac{1}{2}$ ist. Für die anderen Wurzeln haben wir dann eine Gleichung vierten Grades, in der jedoch die Glieder mit ungeraden Potenzen von U_I nicht verschwinden. Die Resonanzkurve ist also unsymmetrisch. Dies ist erst recht der Fall, wenn m_I^2 nicht gleich $\frac{1}{2}$ ist.

In grober Annäherung kann man sich in folgender Weise ein Bild über die Lage der Maxima machen: Der Radikand im Nenner von (169) besteht aus zwei Summanden von der Form X und $U_I^2 \cdot X$, wo X eine Funktion von U_I ist. Der Summand $U_I^2 \cdot X$ wird stärker veränderlich sein als der andere Summand. Wenn wir also

X im Vergleich zu $U_I^2 \cdot X$ als konstant betrachten, so wird der Ausdruck (169) ein Maximum haben für $U_I = 0$. Andererseits können wir den Radikanden darstellen in folgender Form:

$$(1 + U_I^2)(2m_I^2 - U_I^2 + 2U_I m_I d)^2 + (1 + U_I^2)(U_I - 2m_I d)^2.$$

Wenn wir hierin das zweite Glied gegenüber dem ersten als konstant betrachten, weil es nur vom vierten Grade in U_I ist, während das erste Glied vom sechsten Grade ist, so muß (169) ein Maximum haben, wenn:

$$2m_I^2 - U_I^2 + 2U_I m_I d = 0$$

wird, also für:

$$U_I = m_I(d \pm \sqrt{d^2 + 2}).$$

Für $d = 0$ verschwindet hierin das erste Glied. Die Resonanzkurve ist dann symmetrisch. Die Unsymmetrie ist andererseits um so erheblicher, je mehr sich d seinem Maximalwert 0,5 nähert.

Wie wir in (170) gesehen haben, gilt die gestrichelte Kurve der Abb. 10 auch in unserem jetzt betrachteten Fall. Wenn also q klein wird, so wird m_I schnell groß,

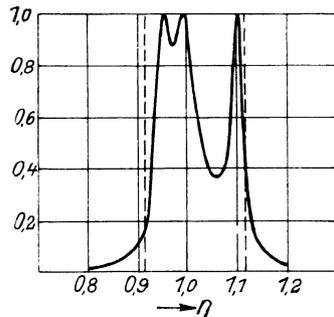


Abb. 23.

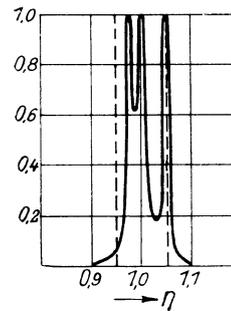


Abb. 24.

d. h. es wächst die Koppelung stark an im Vergleich zur Dämpfung. Wir werden also bei sehr loser Koppelung ähnliche Verhältnisse erwarten dürfen, wie sie durch die Abb. 11 und 12 beim zweigliedrigen Kettenleiter erster Art dargestellt waren. Die Abb. 23 und 24 bestätigen das. Es sind hierin: $z_0 = r_3 = 500$ und

Abb. 23: $D_I = 0,0385$, $K_I = 0,1$, $m_I = 2,6$,

Abb. 24: $D_I = 0,01$, $K_I = 0,05$, $m_I = 5,0$.

Man sieht, daß wieder wie früher mit abnehmender Koppelung die Maxima zwar näher zusammenrücken, doch werden, weil die Dämpfung gleichzeitig abnimmt, die Minima immer tiefer, die Gleichmäßigkeit also immer schlechter. Die nach der Leitungstheorie ermittelten Lochgrenzen sind in die Abbildungen eingetragen. Man sieht, daß ihnen auch hier keinerlei praktische Bedeutung zukommt.

Schließlich ist in Abb. 25 eine Resonanzkurve für folgende Verhältnisse gezeichnet: $z_0 = r_3 = 500$, $D_I = 0,03$, $K_I = 0,0375$, $m_I = 1,25$. Die Kurve ist wesentlich günstiger als die der Abb. 23 und 24. Doch kann auch hier von einer gleichbleibenden Durchlässigkeit nur in der rechten Hälfte der Kurve, wo zwei Maxima sehr nahe

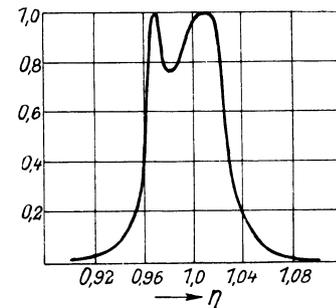


Abb. 25.

beieinanderliegen, die Rede sein. Das linke Maximum kommt hierfür kaum noch in Betracht. Man sieht, daß sich die oben erläuterte Unsymmetrie der Kurve, die sich durch die eigenartige Koppelung am Anfang und Ende des Kettenleiters ergibt, schon bei geringer Entfernung von dem Punkte $m_I = 1$ störend bemerkbar macht. Wir haben also hier wieder das sonst schon immer gefundene Resultat bestätigt gefunden, daß, um günstige Kurvenformen zu ergeben, der induktive Widerstand des Koppelungsgliedes nicht erheblich von $z_0 = r_3$ abweichen darf.

Zusammenfassung.

Nach Zusammenstellung der benötigten Formeln aus der Leitungs- und Schwingungstheorie wird die maximale Energie berechnet, die über eine homogene lange Freileitung übertragen werden kann. Weiter wird gezeigt, wie man einfache Schwingungskreise mit der Leitung koppeln muß, um diese maximale Energie nutzbar zu übertragen. Es ergibt sich, daß die Übertragung der maximalen Energie bei jedem beliebigen Schwingungskreise gelingt, wenn man nur die Koppelung in bestimmter Weise bemißt. Für Bemessung der Koppelung werden Formeln angegeben.

Diese Ergebnisse werden angewendet auf einzelne Glieder von Kettenleitern nach der Leitungstheorie. Es ergibt sich, daß auch hier maximale Energieübertragung bei beliebiger Dämpfung des Kettengliedes möglich ist. Bei der von der Leitungstheorie geforderten Angleichung des Nutzwiderstandes und des Wellenwiderstandes an die Leitungscharakteristik sind die Bedingungen für maximale Energieübertragung für eine oder zwei bestimmte Wellenlängen erfüllt; doch ist dies ein spezieller Fall der vorher abgeleiteten allgemeinen Regel.

Es wird ein zweigliedriger Kettenleiter erster Art betrachtet und gezeigt, daß bei ungünstiger Wahl der Koppelung sich Resonanzkurven ergeben, die den Kettenleiter für Siebzwecke als ungeeignet erscheinen lassen. Es wird ein Verfahren angegeben, nach dem man, auch bei Berücksichtigung der Eigendämpfung der einzelnen Schwingungskreise, Kettenleiter erhalten kann, deren Resonanzkurven günstige Formen haben; auch bei Veränderung der Koppelung über weite Bereiche wird der Charakter dieser Kurvenformen nicht geändert.

Es werden Resultate von experimentellen Untersuchungen an zweigliedrigen Kettenleitern erster Art mitgeteilt, die die Ergebnisse der Theorie bestätigen.

Der zweigliedrige Kettenleiter zweiter Art und der dreigliedrige Kettenleiter erster Art werden unter der Annahme vernachlässigbarer Eigendämpfung der einzelnen Schwingungskreise theoretisch behandelt. Es zeigt sich, daß unter diesen Umständen die drei Maxima der Resonanzkurven gleich hoch sind. Für die Bemessung der Koppelung zur Erzielung günstiger Resonanzkurvenformen ergeben sich ähnliche Bedingungen wie bei zweifachen Schwingungssystemen. Weiter wird gezeigt, daß die Angleichung des Verbraucherwiderstandes an die Leitungscharakteristik, die von der Leitungstheorie zur Erzielung günstigster Energieübertragung gefordert wird, nicht nur hierfür wichtig ist, sondern daß hiervon auch die Gestalt der Resonanzkurve wesentlich abhängig ist.

Vergleichende Geräuschemessung.

Von **K. Küpfmüller.**

Mit 8 Textabbildungen.

Mitteilung aus dem Zentrallaboratorium des Wernerwerkes der Siemens & Halske A.-G. zu Siemensstadt.

Eingegangen am 16. April 1924.

Zweierlei Störungen durch benachbarte Starkstromleitungen sind in Fernmeldeanlagen möglich. Zunächst können die induzierten Spannungen an sich eine Höhe erreichen, die zu einer Gefährdung von Personen führt. Diese Art von Störungen hat naturgemäß große Beachtung gefunden; eine Reihe von Mitteln zu ihrer Unterdrückung sind bekanntgeworden. Die zweite Art der Störungen wird durch die Induktionswirkung der in jeder Starkstromleitung vorhandenen Schwingungen höherer Frequenzen verursacht. Diese Schwingungen rühren von schnellen periodischen Änderungen im Magnetfelde der elektrischen Maschinen, bei Kommutationsmaschinen außerdem von periodischen Widerstandsänderungen her und liegen in der Hauptsache im Frequenzgebiet der hörbaren Töne. Daher werden sie in den Fernsprechanlagen störend wahrgenommen, wobei die Schallempfindung die eines brummenden oder heulenden Geräusches ist, da die Schwingungszahlen starker Teiltöne sehr nahe benachbart sein können und da im allgemeinen ein Teil der Töne nicht harmonisch zur Grundschwingung liegt. Die absolute Stärke des Geräusches in den Fernsprechapparaten und -leitungen wird im wesentlichen durch zwei Faktoren bestimmt, nämlich durch die Stärke der Oberschwingungen im Starkstromnetz und durch die Symmetrie der Fernmeldeanlage. Es liegt daher im praktischen Fall die Aufgabe vor, den Anteil dieser beiden Faktoren an der Störung festzustellen. Mit dieser Aufgabe beschäftigen sich die folgenden Ausführungen.

Eine sehr gründliche Untersuchung über die Störwirkung von einzelnen Tönen auf die Sprachübertragung ist von einem besonderen Unterausschuß des American Institute of Electrical Engineers¹⁾ vorgenommen worden. Bei dieser Untersuchung wurden den Sprechströmen in einer Fernsprechverbindung Störströme bestimmter Frequenz und Amplitude überlagert. Die geminderte Güte der Sprachübertragung wurde gemessen durch den Prozentsatz der verstandenen Wortsilben von einer Anzahl gesprochener. Es ergab sich eine starke Abhängigkeit der Störwirkung von der Frequenz; niederfrequente Schwingungen und solche von sehr hoher Frequenz verursachen erst bei großer Stärke eine merkliche Störung, dagegen haben Schwingungen in dem auch sonst als Gebiet der wichtigen Sprechfrequenzen bezeichneten Bereich besonders großen Einfluß auf die Verständlichkeit. Auf diese Weise konnte jeder Frequenz ein „Gewicht“ zugeordnet werden, das aus den rezi-

¹⁾ Siehe H. Osborne: Transactions of the A. I. E. E. Bd. 38, S. 261. 1919.

proken Werten der Störströme für gleiche Sprachgüte hervorgeht und das man geradezu als ein Maß für die Wichtigkeit der Frequenzen in der Sprache überhaupt ansehen kann. Es ist interessant, daß dieses Gewicht in seiner Frequenzabhängigkeit ziemlich mit der Empfindlichkeit des Ohres übereinstimmt.

Auf dieser Grundlage hat der genannte Ausschuß ein Meßgerät ausgearbeitet zur Bestimmung der Störwirkung von Wechselströmen und -spannungen („Interference Factor Meter“). Dieses Meßgerät wird im wesentlichen aus gekoppelten Resonanzkreisen und einem Thermogalvanometer gebildet; es ist so beschaffen, daß das Verhältnis zwischen Strom im Galvanometer und angelegter Spannung proportional dem Produkt aus Frequenz und „Gewicht“ der betreffenden Schwingung ist. Die so entstandene Resonanzkurve der Meßanordnung ist in Abb. 1 dargestellt.

Die Multiplikation mit der Frequenz wurde eingeführt, weil die von einer einfachen Schwingung induzierten Spannungen in den Fernmeldeanlagen im wesentlichen proportional der Frequenz der Schwingung sind. Die zu untersuchende Spannung, z. B. die eines Generators, wird dem Meßgerät zugeführt und das Verhältnis des im Thermogalvanometer zu messenden Stromes in μA zur Spannung am Eingang in Volt als Störfaktor bezeichnet. Dieser Störfaktor liegt bei normalen Generatoren etwa zwischen 10 und 200 $\mu\text{A}/\text{V}$. Solche Zahlen haben, für sich genommen, natürlich keinen physikalischen Sinn; man kann mit ihrer Hilfe nur vergleichende Schlüsse ziehen. Hierin liegt ein

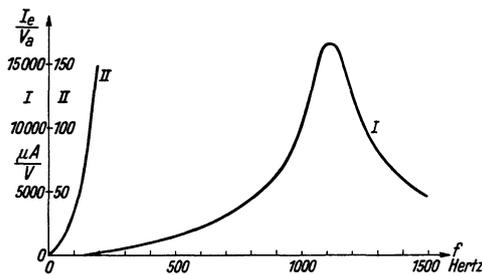


Abb. 1.

Nachteil der beschriebenen Meßmethode; sie hat ferner noch einen grundsätzlichen Mangel. Das Thermogalvanometer bildet den effektiven Mittelwert aus den durch die Resonanzschaltung fließenden Teilströmen. Diesen Mittelwert könnte man nur dann als Maß für die Störwirkung des Geräusches betrachten, wenn die Summierung der Teiltöne im menschlichen Ohr in gleicher Weise erfolgte. Dies ist nicht der Fall.

An der Zusammensetzung von Teiltönen zu einer intensiven Schallvorstellung sind psychologische und physiologische Vorgänge beteiligt. Neuere Untersuchungen¹⁾ über die Dynamik der inneren Gehörorgane machen es wahrscheinlich, daß bei tiefen Tönen sämtliche Nervenfasern der Basilarmembran in besonderer Weise erregt werden, indem tiefe Schwingungen der Schneckenflüssigkeit sich durch den in der Kuppel der Schnecke vorhandenen Verbindungsgang (Helicotrema) nach der dem Ovalfenster entgegengesetzten Seite der Basilarmembran fortpflanzen. Höherfrequente Schwingungen erfahren dagegen schon in der Vorhoftreppe (Scala vestibuli) eine solche Dämpfung, daß sie das Helicotrema nicht mehr erreichen. Besteht daher ein Geräusch beispielsweise aus einem sehr hohen und einem sehr tiefen Ton, so sind die dem hohen Ton zugeordneten Nervengruppen der Basilarmembran bereits durch die tiefen Schwingungen erregt und vermitteln nach dem Gehirn eine andersartige Empfindung des hohen Tones als bei Fehlen des tiefen. Die Verhältnisse werden noch weiter verwickelt durch die unwillkürliche Akkommodation des Trommelfelles. Vermutlich sind interessante Beobachtungen von C. Stump²⁾ über die Laut-

¹⁾ Besonders H. Fletcher: Journ. Franklin Inst. 1923; und R. Wegel und C. Lane: Phys. Rev. Bd. 23, S. 266. 1924.

²⁾ Tonpsychologie. Leipzig 1890.

stärke von Zusammenklängen dem Einfluß dieser physiologischen Vorgänge zuzuschreiben. Stumpf schließt aus seinen Versuchen hinsichtlich der Intensitätsurteile bei zusammengesetzten Klängen wörtlich¹⁾: „Das Hinzukommen²⁾ anderer, selbst einer großen Zahl anderer Töne bedingt keine Verstärkung des Empfindungsganzen.“

Die verwickelten Verhältnisse bei zusammengesetzten Schallempfindungen gehen sehr deutlich auch aus Versuchen von Wegel und Lane³⁾ über die Verdeckung eines Tones durch einen anderen hervor. Das Verhältnis der beiden Schallintensitäten im Grenzfall, wo ein Ton durch einen anderen gerade verdeckt erscheint, hängt nicht allein von den absoluten Schwingungszahlen der beiden Töne, sondern in sehr hohem Grade von der Stärke der Töne selbst ab; dieses Verhältnis kann sich auf das 10^4 - bis 10^6 -fache vergrößern, wenn die Intensität des verdeckenden Tones gesteigert wird, bei anderen Frequenzverhältnissen zeigt sich eine Verminderung in gleichem Maße. Die Unterschiede zwischen der Zusammensetzung eines Geräusches im Gehör und der im Thermogalvanometer sind daher wahrscheinlich sehr beträchtlich, besonders weil es sich praktisch fast immer um eine sehr große Zahl wirksamer Teiltöne handelt.

Ein Meßverfahren zur Kennzeichnung der Stärke von Geräuschen, das hieran zu knüpfende Folgerungen berücksichtigt, hat die Western Electric Co. angegeben⁴⁾. Dieses Verfahren besteht darin, den Schalleindruck des Geräusches mit einem in seiner Stärke veränderbaren Normalgeräusch zu vergleichen.

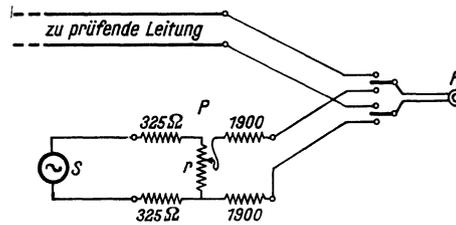


Abb. 2.

Abb. 2 zeigt das grundsätzliche Schaltbild der Anordnung. Das Normalgeräusch wird durch einen Unterbrechersummer S erzeugt, der so gebaut ist, daß er eine reiche Serie von Oberschwingungen enthält („Schnarrsummer“). Die Stärke dieses Geräusches wird durch den Spannungsteiler P so lange verändert, bis im Fernhörer F gleicher Lautstärkeneindruck entsteht wie beim Anschließen des Fernhörers an die zu prüfende Leitung. Der Widerstand r ist in Einheiten unterteilt derart, daß eine Einheit einem Verhältnis von Strom im Fernhörer zu Strom im Summer von 10^{-6} entspricht. Eine solche Einheit wird als Geräuscheinheit bezeichnet, so daß man das Geräusch in der zu prüfenden Leitung dadurch kennzeichnen kann, daß man etwa feststellt, es betrage 20 Geräuscheinheiten. Es ist ersichtlich, daß auch diese Zahlen, für sich genommen, nichts über die Störwirkung des Geräusches aussagen können. Zu vergleichenden Messungen darf das Verfahren aber ebenfalls nur mit Vorsicht benutzt werden, da die gewonnenen Zahlen natürlich nur dann vergleichbar sind, wenn der vom Summer in den Spannungsteiler fließende Strom immer die gleiche Stärke hat. Da dieser Strom aus einer großen Zahl von Harmonischen von nahezu gleicher Stärke besteht, ist seine genaue Definition aber kaum möglich; er ist ferner abhängig von der mechanischen Einstellung der Summerfedern. Die Geräuscheinheiten sind ferner nicht vergleichbar bei Leitungen mit verschiedenen Scheinwiderständen, da die Strom- und Spannungsverhältnisse im Normalkreis immer die gleichen bleiben, dagegen im Leitungskreis abhängen vom Scheinwiderstand der Leitung. So würde man bei zwei Leitungen mit den gleichen induzierten Spannungen aber verschiedenen Scheinwiderständen eine verschiedene Zahl von Geräusch-

¹⁾ a. a. O. Bd. 2, S. 425. ²⁾ Gemeint ist: zu einem oder mehreren bereits vorhandenen Tönen.
³⁾ a. a. O. ⁴⁾ R. A. Mack: Electrical Communication 1923, Heft 4, S. 4.

einheiten feststellen, und zwar ungefähr im umgekehrten Verhältnis der Scheinwiderstände.

Es ist vorgeschlagen worden, die Stärke eines Geräusches durch das Energieverhältnis zu messen, in welchem man das Geräusch schwächen muß, damit es unhörbar wird. Der halbe Logarithmus dieses Energieverhältnisses wurde als Löschdämpfung bezeichnet, da er der Dämpfung einer Leitung entspricht, durch welche die zu prüfende Leitung verlängert werden muß, damit das Geräusch verschwindet.

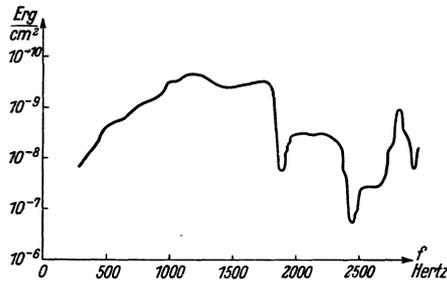


Abb. 3.

Abgesehen davon, daß ein genügend ruhiger Raum zur Ausführung solcher Messungen selten zur Verfügung stehen wird, liefert dieses Verfahren jedoch kein Maß für die Stärke oder die Störwirkung des Geräusches, hauptsächlich deswegen, weil die Reizschwelle des Ohres in sehr komplizierter Weise von der Frequenz abhängt. Abb. 3 zeigt den Verlauf dieser Frequenzabhängigkeit für ein normales Ohr nach Messungen von F. W. Kranz¹⁾. Diese Abhängigkeit ist

individuell vollkommen verschieden, bei Frequenzerhöhungen um einen halben Ton können Sprünge in der Schwellenenergie auf das 200- bis 1000fache vorkommen. Daher tritt bei der Messung des genannten Energieverhältnisses eine falsche Wertung

der einzelnen Teilschwingungen ein.

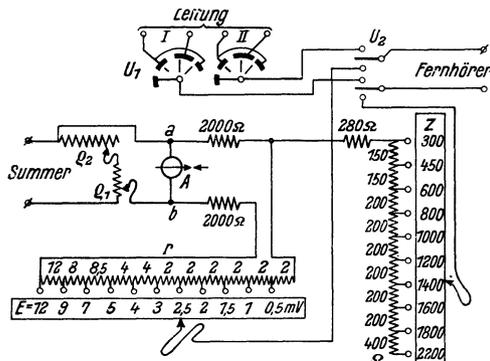


Abb. 4.

Abb. 4 zeigt das grundsätzliche Schaltbild eines Geräuschmessers, den wir seit einiger Zeit benutzen. Er beruht ebenfalls auf dem Prinzip der subjektiven Vergleichung, Abb. 2; wir haben jedoch das Normalgeräusch ersetzt durch einen Ton, der durch die beiden Angaben der Frequenz und Amplitude festgelegt werden kann. Es hat sich gezeigt, daß die Unterschiede beim Vergleichen eines Tones mit einem Geräusch durch verschiedene Beobachter nicht größer

sind als die beim Vergleichen zweier verschiedener Geräusche. Die Verwendung eines Tones bietet aber die Möglichkeit einer absoluten Zahlenangabe für die Geräuschstärke. Zu dieser Zahlenangabe kommt man auf folgende Weise:

Es sei der Spannungsteilerwiderstand r so eingestellt, daß der Ton ebenso laut erscheint wie das Geräusch. Dann kann man den Fernhörerkreis für den

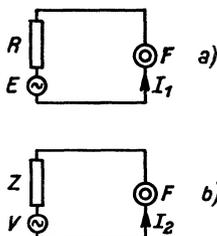


Abb. 5.

Fall der Tonwahrnehmung durch ein Ersatzbild nach Abb. 5a darstellen. R bedeutet den Scheinwiderstand der Spannungsteileranordnung, gemessen vom Umschalter U_2 aus; die EMK E bewirkt im Fernhörer den Strom I_1 , der dort den Normalton erzeugt. Es ist

$$I_1 = \frac{E}{R + \mathfrak{R}},$$

wenn man mit \mathfrak{R} den Fernhörerscheinwiderstand bezeichnet. Denkt man sich in der zu prüfenden Leitung vom Schein-

¹⁾ Phys. Review Bd. 22, S. 66. 1923.

widerstand Z eine EMK V wirksam, die im Fernhörer den gleichen Ton erzeugt, so muß nach Abb. 5b

$$I_2 = \frac{V}{Z + \Re} = I_1$$

sein, oder

$$\frac{V}{E} = \frac{Z + \Re}{R + \Re}.$$

Macht man daher $R = Z$, so wird $V = E$, d. h. die im Spannungsteiler wirksame EMK ist unmittelbar ein Maß für die äquivalente Geräuschspannung in der Leitung, und zwar unabhängig vom Scheinwiderstand des verwendeten Fernhörers und der Leitung. In der Meßeinrichtung nach Abb. 4 ist diese Möglichkeit ausgenutzt. Der Widerstand r des Spannungsteilers ist verhältnismäßig klein gegen die praktisch vorkommenden Scheinwiderstände der Leitungen, der Ausgangswiderstand Z ist veränderbar und wird vor der Messung auf den bekannten Wert des Leitungsscheinwiderstandes eingestellt. Die Spannung der Wechselstromquelle kann mit Hilfe von Regulierwiderständen ϱ und einem Anzeigeinstrument A auf einem konstanten Wert gehalten werden, so daß der Spannungsteiler unmittelbar in Spannungen geeicht werden kann; auf der Skala sind die Geräuschspannungen in mV angegeben. Die Widerstandsverhältnisse sind so gewählt, daß Veränderungen in der Einstellung am Spannungsteiler keinen Einfluß auf die Klemmenspannung haben, so daß die Regulierwiderstände nur vor Beginn jeder Meßreihe und in großen Abständen nachgestellt werden müssen. Als Anzeigeinstrument hat sich eine Edelgasröhre bewährt, die über einen Transformator an die Punkte $a b$ angeschlossen ist; die Spannung zwischen diesen Punkten hat den richtigen Wert, wenn die Edelgasröhre gerade aufleuchtet. Als Frequenz für den Normalton haben wir die Kreisfrequenz 5000 gewählt. Dies hat den Vorteil, daß die Geräuschspannungen in Vergleich gesetzt werden können zur Spannung der Sprechströme, die man ebenfalls gewöhnlich auf die Kreisfrequenz 5000 bezieht. Erfahrungsgemäß sind Fremdströme irgendwelcher Art nicht mehr störend, wenn sie sich mindestens um einen Dämpfungswert $b' = 3$ von den Sprechströmen unterscheiden. Setzt man daher beispielsweise ein Mikrophon mit der EMK 1 V voraus, so ergeben sich als zulässige Geräuschspannungen die Werte der folgenden Tabelle.

Leitungsdämpfung $b =$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
Spannung der Sprechströme ¹⁾ $V_e =$. .	0,65	0,426	0,265	0,164	0,099	0,062	0,036 V
Maximal zulässige Geräuschspannung $E =$	32	21	13	8,2	5,0	3,1	1,8 mV

Auch diese Zahlen gelten unabhängig von der jeweiligen Größe der Leitungsscheinwiderstände. Bei Fernkabeln, deren Restdämpfung ungefähr $b = 1,5$ beträgt, wäre demnach eine Geräuschspannung von etwa 20 mV noch zulässig. Praktisch wird man natürlich erheblich unterhalb dieses Grenzwertes bleiben, da die Geräusche an sich bei einer derartigen Stärke in den Gesprächspausen unangenehm bemerkbar sind, auch wenn sie die Sprechverständigung selbst noch nicht beeinträchtigen.

Über die Genauigkeit der Geräuschspannungsmessung ist noch einiges zu sagen. Die Methode ist an sich eine subjektive, doch ist es bemerkenswert, daß die Streuung der Meßergebnisse ein und desselben Beobachters erheblich kleiner wird mit fortschreitender Übung. Während man bei den ersten Messungen Abweichungen von

¹⁾ Es ist bekanntlich $V_e = \frac{Va}{\zeta_0 \Gamma b}$, und daher im vorliegenden Fall, wo $Va = 1V$, $E = \frac{e^{-3}}{\zeta_0 \Gamma b}$ Volt.

etwa ± 60 bis 70% feststellen kann, sinken die Unterschiede in den Ergebnissen selbst verschiedener Beobachter nach einiger Übung auf ± 10 bis 20% herab. Die bei der Messung notwendige Umstellung zu der ungewohnten Auffassung eines nicht harmonischen Klanges als eines Ganzen kann man dadurch erleichtern, daß man die Vertauschung von Ton und Geräusch periodisch und rasch vornimmt; es lassen sich dann auch ohne große Übung leicht die Grenzen feststellen, jenseits welcher das Geräusch oder der Ton vorherrscht, so daß auch Ungeübte auf diese Weise eine Meßgenauigkeit von etwa $\pm 15\%$ erreichen können.

Es muß noch bemerkt werden, daß die akustische und elektrische Resonanz des zur Messung verwendeten Fernhörers möglichst wenig ausgeprägt sein soll. Der Umschalter U_1 dient zur Auswahl der 3 Sprechkreise in einem Kabelvierer. Als Stromquelle verwenden wir einen Unterbrechersummer; seine Stromkurve wird gegebenenfalls durch eine Drosselkette von Oberschwingungen gereinigt.

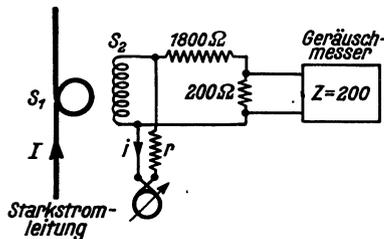


Abb. 6.

Mit Hilfe der Geräuschspannungsmessung kann man auch die Störwirkung der Ströme in Starkstromanlagen zahlenmäßig festlegen. Abb. 6 zeigt die hierzu von uns verwendete Anordnung im Prinzip.

In die zu untersuchende Starkstromleitung, z. B. die Speiseleitung einer elektrischen Bahn oder die Verbindungsleitung zwischen einem Generator im Prüffeld und seinem Belastungswiderstand, wird

ein zu einer Schleife S_1 gebogenes Kabel eingefügt. Mehrere Windungen Kupferdrahtes, deren Zahl und Form keine Rolle spielen, bilden eine Auffangspule S_2 . Die in dieser Spule induzierten Spannungen der Grund- und Oberschwingungen sind proportional dem Produkt aus Frequenz und Amplitude der Teilschwingungen im Strom I . Daher bildet die am Widerstand Z mit Hilfe des Geräuschmessers feststellbare Geräuschspannung ein Maß für die Störwirkung des untersuchten Stromes. Zweckmäßig setzt man diese Geräuschspannung in Beziehung zum Effektivwert der gesamten induzierten Spannung, der etwa mit einem Thermogalvanometer, wie es in Abb. 6 angedeutet ist, gemessen wird. Das Verhältnis dieser beiden Spannungen haben wir Störfaktor genannt und mit ζ bezeichnet. Unter Berücksichtigung der Wirkung des Spannungsteilers würde sich für den in Abb. 6 dargestellten Fall der Störfaktor aus der Geräuschspannung E und dem Strom i im Thermogalvanometer ergeben zu

$$\zeta = \frac{10 E}{i r}.$$

Den Vorteil, den die Einführung dieser Definition mit sich bringt, erkennt man am einfachsten an einem Beispiel. Mit Hilfe der bekannten Formeln¹⁾ sei festgestellt worden, daß in einer oberirdischen Fernsprehdoppelleitung eine Spannung der Grundschwingung von maximal 1,5 V aus einer benachbarten elektrischen Bahn induziert wird. An den Generatoren und Motoren der Bahn sei ein maximaler Störfaktor von $\zeta = 5\%$ gemessen worden. Dann ist eine Geräuschspannung in der Doppelleitung von höchstens $0,05 \cdot 1,5 = 0,075$ V zu erwarten.

Die hier gemachte Voraussetzung, daß der Effektivwert der induzierten Spannung, $i r$, mit der Effektivspannung der Grundschwingung übereinstimmt, ist prak-

¹⁾ O. Brauns, Telegr.- u. Fernsprechtechnik 1919, S. 70.

tisch zulässig, solange keine der induzierten Oberschwingungen in ihrer Amplitude 40% der Grundschwingung überschreitet. Man könnte erforderlichenfalls den so entstandenen Fehler leicht vollständig beseitigen dadurch, daß man den Spannungsmesskreis mit einer Reihenschaltung von Spule und Kondensator auf die Grundschwingung abstimmt.

Bei Kabeln liegen die Verhältnisse etwas komplizierter wegen der Wirkung der im Kabelmantel induzierten Ströme, die im allgemeinen den Störfaktor ζ erheblich verkleinern¹⁾, etwa auf den Betrag $\vartheta\zeta$. Die Größe ϑ , die diese Schutzwirkung darstellt, kann theoretisch berechnet werden. Nach den Darlegungen von Krause und Zastrow²⁾ ist sie gegeben in

$$\vartheta = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\omega_1 L_1}{R_1}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega_2 L_2}{R_2}\right)^2}}$$

wo ω_1 die Frequenz der Grundschwingung, $\omega_2 = 5000$ die Frequenz des Normaltones, L_1 und L_2 die Induktivität und R_1 und R_2 den Wirkwiderstand des Kabelmantels bei den Frequenzen ω_1 und ω_2 bedeuten. Bei einem vorliegenden Kabel kann man $\vartheta\zeta$ natürlich auch unmittelbar messen, indem man die Spannung der Grundwelle und die Geräuschspannung zwischen Adern und Erde bestimmt; der Quotient dieser Spannungen liefert die Größe $\zeta\vartheta$. ϑ liegt je nach der Konstruktion des Kabelmantels in der Größenordnung 0,02 bis 0,1.

Mit den Größen ϑ , ζ und der bekannten induzierten EMK der Grundschwingung kann man die Geräuschspannung der Kabeladern gegen Erde vorausberechnen. Die in den Fernsprechapparaten wirksame Störspannung ist dann wiederum ein Bruchteil von der Geräuschspannung gegen Erde, der um so kleiner ist, je symmetrischer die Sprechkreise hinsichtlich ihrer elektromagnetischen Felder gegen ihre Umgebung sind³⁾. Das Verhältnis der Geräuschspannung im Sprechkreis zur Geräuschspannung gegen Erde nennen wir die Geräuschsymmetrie u des Sprechkreises. Sie wird mit einem Gerät bestimmt, das grundsätzlich durch Abb. 7 dargestellt ist. Es besteht aus einem Spannungsteiler, der an eine Ader und an Erde angelegt ist. Vom Spannungsteiler wird mit einem Fernhörer ein solches Stück abgegriffen, daß die Geräuschstärke die gleiche ist wie beim Anschluß des Fernhörers an den Sprechkreis; dies wird mit dem Umschalter U_2 festgestellt. Auch hier ist es wie oben notwendig, daß der Ausgangswiderstand im Spannungsteilerkreis gleich ist dem Scheinwiderstand Z des Sprechkreises, wofür ein besonderer Stufenwiderstand (Z) vorgesehen ist. Der Spannungsteiler ist unmittelbar in Geräuschsymmetrien (%) geeicht. Steht das zu unter-

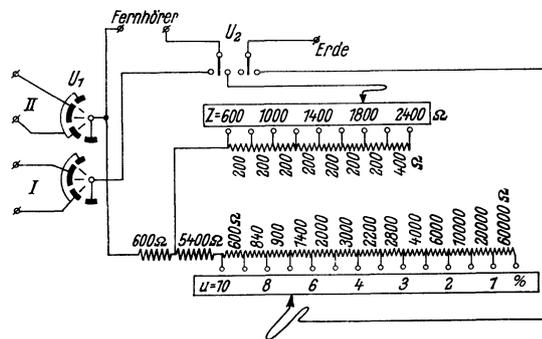


Abb. 7.

¹⁾ G. Krause und A. Zastrow: Wissenschaft. Veröffentl. a. d. Siemens-Konzern Bd. 2, S. 422. 1922.

²⁾ a. a. O.

³⁾ K. Küpfmüller: E. T. Z. 1923, S. 452.

suchende Kabel noch nicht unter äußerer Induktion, so muß zur Messung an irgendeine am fernen Ende kurzgeschlossene Ader eine Stromquelle von Hörfrequenz angeschlossen werden. Bei der Messung wird das ferne Ende jedes Kabelvierers durch die Nachbildung des Wellenwiderstandssystems abgeschlossen, um Betriebsverhältnisse herzustellen. Ein Bild von der Größe der praktisch vorkommenden Zahlenverhältnisse gibt das folgende Beispiel: In einem längs einer elektrischen Bahn geführten Mehrfachfernsprechkabel von 25 km Länge ist im normalen Bahnbetriebe eine maximale Spannung der an beiden Enden isolierten Adern gegen Erde von $V_e = 10$ V gemessen worden. Der Störfaktor wurde in den Speiseleitungen der Bahn zu $\zeta = 20\%$ festgestellt. Der die Schutzwirkung des Kabelmantels berücksichtigende Faktor ist für das mit gewöhnlichem Bandeisern armierte Kabel $\vartheta = 0,1$. Die Kabelleitungen waren so weit symmetriert, daß die Geräuschunsymmetrie $u = 1,5\%$ betrug. Die in den Sprechkreisen auftretende Geräuschspannung ist daher

$$E = V_e \cdot \zeta \cdot \vartheta \cdot u = 3 \text{ mV}.$$

Der Vollständigkeit halber schließen wir noch einige Bemerkungen über den Zusammenhang der Geräuschunsymmetrie u von Kabelleitungen mit den physikalischen Eigenschaften der Adern an. In einem Kabel mit einer einzigen Doppelleitung größerer Länge, das im magnetischen Feld einer Starkstromleitung liegt, besteht zwischen der Geräuschspannung in der Doppelleitung, E_{12} , und der Geräuschspannung einer Ader gegen Erde, E_1 , die Beziehung

$$u = \frac{E_{12}}{E_1} = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1}, \quad 1)$$

wenn γ_1 und γ_2 die mittleren Fortpflanzungsgrößen der beiden Ader-Erde-Schleifen bedeuten. Unterscheiden sich die mittleren Induktivitätswerte der beiden Ader-schleifen um die relative Zahl $l = \frac{L_2 - L_1}{L_1}$, die beiden Erdkapazitäten um eine relative Zahl $c = \frac{C_2 - C_1}{C_1}$, so ist hiernach sehr angenähert, da c und l praktisch kleine Größen darstellen,

$$u = \frac{E_{12}}{E_1} = \frac{1}{2} c + \frac{1}{2} l. \quad (1)$$

Hier ist also u ein genaues Maß für die Symmetrie der Doppelleitung gegen Erde, die auf andere Weise auch direkt gemessen werden kann. Nicht so einfach liegen die

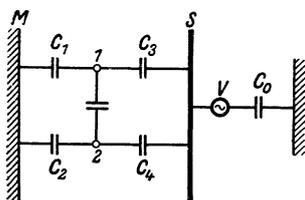


Abb. 8.

Dinge indessen, wenn es sich um mehrpaarige Kabel handelt. Dieser Fall soll kurz angedeutet werden. In Abb. 8 bedeuten 1 und 2 die Adern einer Doppelleitung, etwa in der äußeren Lage eines Mehrfachkabels, M den Kabelmantel. Zwischen den beiden Adern und dem Kabelmantel liegen die Teilerdkkapazitäten C_1 und C_2 ; ferner besitzen die betrachteten Adern Kapazitäten C_3 und C_4 gegen die aus den übrigen Adern im Kabel gebildete Umgebung, die man als einen elektrostatischen Schirm S mit der Erdkapazität C_0 auffassen kann. Der Schirm S nimmt teils durch die direkte induktive Einwirkung des Starkstromfeldes, teils aus etwa angeschlossenen Freileitungen eine Spannung V

¹⁾ K. Kūpfmüller: a a. O.

gegen Erde an. Die Spannung V gleicht sich über die Brücke C_1, C_2, C_3, C_4 nach der Erde aus, und es bleibt die Doppelleitung 12 nur geräuschfrei, wenn

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_3}{C_4}. \quad (2)$$

Diese „Starkstromstörungen zweiter Art“ setzen sich mit den vorhin behandelten „Störungen erster Art“ zusammen. Dann ist die Größe u nicht mehr ausschließlich ein Maß für die Unsymmetrie der Adern gegen Erde, sondern auch für die Ungleichheit der Teilkapazitäten zwischen den Adern und ihrer Umgebung. Die Kompliziertheit dieser Verhältnisse hat die Einführung der Größe u notwendig gemacht; ihre Bestimmung kann nur praktisch durch Vergleich der Geräuschspannungen, so wie es oben beschrieben wurde, erfolgen.

Geräuschspannung, Störfaktor und Geräuschunsymmetrie ermöglichen eine einfache Untersuchung der in den Fernmeldeanlagen auftretenden Störgeräusche. Eine noch ungeklärte Frage ist die nach den zulässigen Werten dieser drei Größen. Diese Frage kann erst beantwortet werden, wenn genauere Erfahrungen über die Anforderungen im Fernsprechtbetrieb und die Möglichkeiten im Bau der Generatoren und Motoren vorliegen; sie zeigt daher, wie wichtig es ist, zunächst Material über die drei genannten Größen zu sammeln, und zwar in den Betrieben der Fernmeldeleitungen, der elektrischen Bahnen und in den Maschinenprüffeldern der Starkstromtechnik.

Zusammenfassung.

In Fernsprechleitungen, die in der Nähe von Starkstromanlagen, z. B. elektrischen Bahnen, geführt sind, treten infolge der in den Starkstromleitungen immer vorhandenen Oberschwingungen Geräusche auf. Es wird ein Verfahren zur Messung der Stärke dieser Geräusche erläutert, das auf der subjektiven Vergleichung des Geräusches mit einem Normalton beruht. Die Geräuschstärke wird durch die EMK des Normaltones gleicher Lautstärke, die „Geräuschspannung“, gekennzeichnet. Es wird gezeigt, wie die Geräuschspannung ein Mittel zur Untersuchung von elektrischen Maschinen hinsichtlich der Störwirkung auf die Fernsprechleitungen und von Fernmeldeanlagen hinsichtlich ihrer Symmetrie und Störempfindlichkeit liefert; Meßeinrichtungen zur Bestimmung des „Störfaktors“ und der „Geräuschunsymmetrie“ werden beschrieben.

Ein Normal-Meßgerät für Röntgenstrahlen¹⁾.

Von **Otto Berg, Werner Schwerdtfeger und Rudolf Thaller.**

Mit 7 Textabbildungen.

Mitteilung aus dem physikalischen Laboratorium des Wernerwerkes M
der Siemens & Halske A.-G.

Eingegangen am 21. Januar 1924.

1. Das praktische Bedürfnis bei der Arbeit mit Röntgenstrahlen stellt die messende Physik vor die Aufgabe, für die Röntgenstrahlung ein einfaches einwandfreies Meßverfahren auszubilden. Jedes einer Röntgenröhre entnommene Strahlenbündel ist, ähnlich dem weißen Licht, zerlegbar in eine kontinuierliche Folge von Bestandteilen verschiedener Wellenlänge (Spektrum). Das Strahlenbündel wäre quantitativ erst dann eindeutig bestimmt, wenn man die Intensität der Bestandteile für jede Wellenlänge nach einem definierten Maße (etwa der Energie) angeben könnte (spektrale Energieverteilung). Diese Aufgabe ist zur Zeit noch nicht gelöst. Zunächst ist es schwer, festzustellen, in welchem Maße die einzelnen Bestandteile eines Bündels bei der spektralen Zerlegung (durch Reflexion an einem Kristall) geschwächt werden, so daß man nicht weiß, ob das zerlegte Bündel in seiner Zusammensetzung dem unzerlegten noch entspricht. Überhaupt bietet die Energiemessung spektral zerlegter Röntgenstrahlen schon wegen der geringen Intensität erhebliche Schwierigkeiten.

2. Wenn es sich weniger um physikalische Methoden sondern in erster Linie um ein praktisch brauchbares Maß für die Intensität handelt, ist die Aufgabe jedoch wesentlich einfacher. Ähnlich wie es bei der Photometrie des weißen Lichtes oft genügt, die Lichtstärke nach Hefnerkerzen zu messen und anzugeben, ohne auf die spektrale Energieverteilung einzugehen, genügt es auch bei der Röntgenstrahlung in vielen Fällen die Intensität summarisch festzustellen. Die spektrale Energieverteilung eines Röntgenstrahlenbündels gehorcht gewissen allgemeinen Gesetzen. So z. B. endet das Spektrum nach der kurzwelligen Seite bei einer gewissen Wellenlänge, welche durch die am Röntgenrohr liegende Maximalspannung eindeutig be-

¹⁾ Die Versuche, über die in der folgenden Mitteilung berichtet wird, wurden bereits im Jahre 1919 begonnen und sind im wesentlichen seit längerer Zeit abgeschlossen. Plan und Konstruktion der ersten Druckkammern stammt von Herrn R. Thaller; die erste Ausführung wurde 1920 beendet. Herr R. Thaller berichtete darüber auf dem 12. Kongreß der Deutschen Röntengesellschaft 1921, s. Verh. d. Deutschen Röntgen-Ges. Bd. 12. Die Druckkammer sollte dazu dienen, die in der Praxis üblichen Ionisationskammern, speziell die kleinen Kammern, einheitlich zu prüfen. Über solche Vergleichsmessungen wird in einer späteren Mitteilung berichtet werden. — Wir haben uns jetzt entschlossen, die zunächst für unser Laboratorium bestimmten Untersuchungen zu publizieren, da neuerdings allgemeineres Interesse an dem Gegenstand hervorgetreten ist. Herr Behnken hat für die Arbeiten zur Durchführung einer Einheitsdosis der Röntgenstrahlen in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt eine Druckkammer gebaut. Herr Küstner empfiehlt neuerdings die Druckkammer als Standardkammer.

stimmt ist (Grenzwellenlänge). Durch die Angabe dieser Maximalspannung und der Betriebsart des Rohres (ob Wechselspannung bzw. pulsierende Gleichspannung oder nahezu konstante Gleichspannung) ist der Charakter der Röntgenstrahlung bereits recht genau festgelegt. In manchen Fällen, wie z. B. bei der therapeutischen Anwendung der Röntgenstrahlen, scheint nun die Wirkung der Strahlen an einer bestimmten Körperstelle lediglich von der dort absorbierten Strahlenenergie abzuhängen. Weiche Strahlung wird bereits nahe der Oberfläche absorbiert und wirkt darum stark auf die Oberfläche; harte Strahlung dringt in größere Tiefen und wirkt dementsprechend auch in der Tiefe. Eine Abhängigkeit der biologischen Wirkung von der Wellenlänge ist bisher nicht nachgewiesen. Für solche Fälle wäre es nahelegend nach einem Meßverfahren zu suchen, welches die Gesamtenergie eines Röntgenstrahlenbündels festzustellen gestattet.

3. Aber auch eine etwa bolometrisch ausgeführte Energiemessung ist nur mit umständlichen physikalischen Mitteln durchführbar. Daher kommt für die Praxis die eigentliche Energiemessung nicht in Betracht. Es wäre darum schon ein Fortschritt, wenn es gelänge mit Hilfe der üblichen, leicht zu handhabenden, ionometrischen Methoden ein Intensitätsmaß zu definieren. Die Bestimmung des Energieäquivalents könnte späteren Untersuchungen vorbehalten bleiben. Da eine Ionisationskammer nur auf die Energie reagieren kann, die sie absorbiert, führt das zu der Aufgabe eine Ionisationskammer als Normalinstrument herzustellen, dessen Angaben möglichst unabhängig von den individuellen Eigenschaften der Kammer durch die von ihr absorbierte Strahlenenergie bestimmt sind.

4. Nach den vorhergehenden Überlegungen hätte solch ein Normalinstrument allerdings nur einen beschränkten Geltungsbereich, ähnlich einem Photometer, das für weißes Licht eingerichtet ist, aber für ultrarotes oder ultraviolettes versagt. Der Bereich unseres Röntgenmeßgeräts ist dadurch bestimmt, daß es in erster Linie für die zu therapeutischen Zwecken erzeugten Röntgenstrahlen verwandt werden soll. Deren Wellenlängengebiet liegt ungefähr zwischen $0,5$ und $0,05 \cdot 10^{-8}$ cm, Spannungen von 60 bis 250 kV am Röntgenrohr entsprechend. Ebenso wie wir von einem Photometer für sichtbares Licht verlangen, daß es auf alle Bestandteile dieses Lichtes gleichmäßig anspricht und nicht etwa für Rot hochempfindlich, für Blau unempfindlich ist, werden wir auch verlangen, daß die Normalkammer in dem ganzen Wellenlängenbereich, für den sie bestimmt ist, gleichmäßige Empfindlichkeit zeigt; oder, was im vorliegenden Falle etwa dasselbe besagt, daß sie auf Röntgenstrahlen verschiedener Wellenlänge in entsprechender Weise reagiert wie lebendes Gewebe.

5. Diesen Forderungen genügen nicht die kleinen in der Praxis mit Vorteil verwandten Ionisationskammern. Sie gestatten vermöge ihres kleinen Umfangs und ihrer Beweglichkeit bequeme Messungen auch während der therapeutischen Bestrahlung an der Körperoberfläche evtl. auch im Körperinnern oder im Wasserphantom. Sie reagieren auf Strahlen, die in beliebiger Richtung einfallen, und sind dadurch zur Messung der Streustrahlung geeignet. Jedoch sind ihre Angaben, besonders auch ihre Wellenlängenempfindlichkeit, nicht nur von ihrer Form, sondern auch vom Material der Wand und der Elektroden in schwer zu übersehender Weise abhängig. Geeignet ist die „große Kammer“ in der Form, die Holthusen¹⁾ be-

¹⁾ H. Holthusen: Über die Bedingungen der Röntgenstrahlen-Energiemessung bei verschiedenen Impulsbreiten auf luftelektrischem Wege. Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstr. Bd. 26, S. 213—231. 1919.

geschrieben und ausführlich untersucht hat. Sie besteht aus einem durch Stirnflächen geschlossenen Metallzylinder, der gleichzeitig als Kammerwand und als Außen- elektrode dient. Die zweite Elektrode (Innenelektrode) ist ein der Zylinderaxe paralleler, aber exzentrisch angebrachter Stab mit gut isolierter Zuleitung von außen. Die Messung der Ionisation erfolgt wie üblich elektrometrisch unter ausreichend hoher, die Sättigung des Meßstromes sichernder Potentialdifferenz an den Elektroden. Die Röntgenstrahlen treten durch Fenster in den Stirnwänden ein und aus; sie verlaufen in einem dünnen Bündel längs der Zylinderaxe, ohne die Innenelektrode oder sonst einen Metallteil in der Kammer zu treffen. Die Wirksamkeit der Kammer beruht dann auf folgendem Vorgang:

An den von Röntgenstrahlen getroffenen Luftmolekülen werden unter Verbrauch der Strahlenenergie lichtelektrisch Elektronen ausgelöst, die den Luftraum der Kammer mit großer Geschwindigkeit durchsetzen und dort sekundäre Elektronen auslösen. Wie wir später nachweisen werden, ist die Zahl dieser Elektronen so groß, daß die Zahl der Primärelektronen dagegen verschwindet. Die in der Ionisationskammer gemessene Leitfähigkeit der Luft rührt also wesentlich von diesen Sekundärelektronen her bzw. von der durch ihre Abspaltung und Vereinigung mit neutralen Luftmolekülen erzeugten Ionisierung der Luft. Allerdings sind gewisse andere Wirkungen diesem Hauptvorgang überlagert. Die Röntgenstrahlen erleiden durch die Luftmoleküle eine gewisse Streuung. Die Streustrahlen, angenähert von derselben Wellenlänge wie die Primärstrahlung, verbreiten sich allseitig durch den Luftraum der Kammer; sie werden zum kleinen Teil in der Luft absorbiert und erzeugen dabei wie die Primärstrahlen durch lichtelektrische Wirkung eine gewisse Ionisation; endlich treffen sie die Kammerwand und lösen dort wiederum lichtelektrische Elektronen aus, die nun ihrerseits den Luftraum ionisieren. Diesen Einfluß haben wir durch eine Reihe von Versuchen zu klären gesucht. Die an der Kammerwand ausgelöste tertiäre Röntgenstrahlung ist so schwach, daß sie für die weitere Betrachtung keine Rolle spielt. Jedoch werden auch am Eintritts- und Austrittsfenster an den Stirnwänden lichtelektrische Elektronen und Streustrahlung ausgelöst. Holthusen hat deren Einfluß untersucht; wir brauchen ihn nicht zu erörtern, da wir ihn durch geeignete Gestaltung der Kammer ganz vermieden haben.

6. Wir beschäftigen uns zunächst mit einer Kammer, bei der es gelungen sein möge, die dem Hauptvorgang überlagerten Störungen auszuschalten. Der gemessene Ionisationsstrom ist dann proportional der Zahl der Sekundärelektronen, die von den lichtelektrischen Primärelektronen im Luftraum der Kammer ausgelöst werden und von deren Zahl und Geschwindigkeit abhängen. Über Zahl (N) und Geschwindigkeit (v) der lichtelektrischen Primärelektronen lassen sich folgende Angaben machen. Die Geschwindigkeit hängt ab von der Frequenz ν der auslösenden Röntgenstrahlung. Nach den Vorstellungen der Quantentheorie, die Einstein zuerst auf diesen Fall angewandt hat, absorbiert ein Molekül das Energiequantum $h \cdot \nu$, wo h das Plancksche Wirkungsquantum bezeichnet, und überträgt die Energie dieses Quantums in Form von lebendiger Energie ($\frac{1}{2} m v^2$) auf ein Elektron. Bezeichnen wir mit e dessen Ladung und mit V die Potentialdifferenz, die das Elektron durchlaufen müßte, um die Lineargeschwindigkeit v zu erreichen („Voltgeschwindigkeit“ des Elektrons), so wäre nach dieser Auffassung $h \cdot \nu = e \cdot V$, vorausgesetzt, daß beim Loslösen des Elektrons aus dem Molekülverband keine gegen $e \cdot V$ in Betracht kommende Arbeit geleistet zu werden braucht. Die Voltgeschwindigkeit des Elektrons ist also gleich

$\left(\frac{h}{e} \cdot \nu\right)$, d. h. eindeutig durch die Schwingungszahl der Röntgenstrahlen bestimmt, durch deren Energie es ausgelöst wurde. Diese Quantenbeziehung steht im Einklang mit Untersuchungen von De Broglie¹⁾ und von Whiddington¹⁾, bedarf aber noch weiterer experimenteller Prüfung²⁾.

7. Eine anschauliche Vorstellung über die Größe der Geschwindigkeiten V gewinnt man durch die Überlegung, daß die Grenzfrequenz ν_0 des Röntgenspektrums durch dieselbe Quantenbeziehung mit der Voltgeschwindigkeit E der die Antikathode treffenden Kathodenstrahlen (oder der Entladungsspannung am Röntgenrohr) verbunden ist ($e \cdot E = h \cdot \nu_0$). Die höchsten bei den lichtelektrischen Elektronen vorkommenden Geschwindigkeiten sind also gleich denen der im Röntgenrohr verlaufenden Kathodenstrahlen, die hier bis 250 kV betragen können. Da das Röntgenspektrum im kurzwelligsten Teil zunächst geringe Intensität hat und kurzwellige Strahlen noch dazu am schwächsten absorbiert werden, kommen die schnellsten lichtelektrischen Elektronen nur in geringer Zahl vor. Die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen wäre erst dann angebar, wenn die Energieverteilung im Röntgenspektrum oder, genauer gesagt, die Energieverteilung der im Luftraum der Kammer absorbierten Röntgenstrahlung bekannt wäre.

8. Die Durchführung der quantentheoretischen Vorstellungen erlaubt uns jedoch immerhin eine Bestimmung der Elektronenzahl, die für die Einheit der absorbierten Energie jeder Schwingungszahl als Äquivalent auftreten. Wir machen dazu die wohl mit genügender Annäherung zulässige Annahme, daß die von Röntgenstrahlen jeder einzelnen Wellenlänge absorbierte Energie zur Auslösung der Elektronen ganz verbraucht wird, sich also — bei Vernachlässigung der Loslösungsarbeit — in der Energie der Elektronen ($N \cdot e \cdot V$) vollkommen wiederfindet. Jedes einzelne Elektron nimmt dann eine seiner Voltgeschwindigkeit (V) oder der Frequenz (ν) proportionale Energiemenge mit sich hinaus. Die Zahl der Elektronen, die gerade imstande sind, die absorbierte Energieeinheit einer Strahlung von der Frequenz ν aufzunehmen, d. h. die Zahl der für die absorbierte Energieeinheit emittierten Elektronen, wird also gefunden, indem man die absorbierte Energie durch das Energiequantum $h \cdot \nu$ dividiert; sie ist umgekehrt proportional der Frequenz ν und damit der Voltgeschwindigkeit V der ausgelösten Elektronen. Wir sind nun in der Lage, auch die entsprechende Gesamtzahl von Sekundärelektronen und damit die Ionisation zu berechnen, wenn wir dabei das Zahlenmaterial über Kathodenstrahlen zugrunde legen, das wir Herrn Lenard³⁾ verdanken. Wir können danach die Zahl der von jedem einzelnen Elektron irgendwelcher Geschwindigkeit ausgelösten Sekundärelektronen angeben. Die nach Lenards³⁾ Tabellen gezeichnete Kurve I der Abb. 1 stellt die Abhängigkeit dieser Zahl von der Voltgeschwindigkeit der Primärelektronen

¹⁾ M. de Broglie: Les phénomènes photoélectriques pour les rayons X. Journ. de phys. et le radium (6) Bd. 2, S. 265—287. 1920. — R. Whiddington: X-ray electrons. Phil. mag. (6) Bd. 43, S. 1116—1126. 1922.

²⁾ Inzwischen hat Herr R. Bothe (Zeitschr. f. Phys. Bd. 22, S. 237—255. 1923) über Versuche berichtet, in denen er die ionisierende Wirkung der Elektronen nachweist, die dem Compton-Effekt entsprechend bei der Streuung der Röntgenstrahlen in Bewegung gesetzt werden. Ihre Geschwindigkeit ist rund 10 000 V, ihre Reichweite von der Größenordnung eines Millimeters. Ihre Ionisationswirkung in Luft entspricht nur einem kleinen Teil der gesamten Ionisation. An dem Resultat der hier angestellten Betrachtungen ändert die Mitwirkung dieser Elektronen nichts Wesentliches.

³⁾ Ph. Lenard: Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten. Heidelberg: L. Winter 1918. 262 S. u. Kurventaf.

dar. Man entnimmt der Kurve z. B., daß durch die Elektronen von 250 kV nahezu 2500 Sekundärelektronen losgelöst werden. Bei 25 kV Geschwindigkeit ist die Zahl der Sekundärelektronen noch etwa 100; die dieser Geschwindigkeit entsprechenden Röntgenstrahlen liegen bei den für uns in Betracht kommenden Strahlenhärten schon weit jenseits des spektralen Intensitätsmaximums nach der langwelligen Seite hin und haben relativ nur noch geringe Intensität. Daraus ergibt sich, daß für die Leitfähigkeit der Luft in der Ionisationskammer die Zahl der Primärelektronen gegenüber der weit größeren Zahl der von ihnen gebildeten Sekundärelektronen nicht in Betracht kommt (s. Abs. 5).

9. Die Kurve *II* der Abb. 1 stellt, den obigen Überlegungen entsprechend, die Zahl der für jede absorbierte Energieeinheit gebildeten Sekundärelektronen, d. h. die gemessene Ionisation in Abhängigkeit von der Frequenz ν der Röntgenstrahlung, dar. Der Energiemaßstab ist

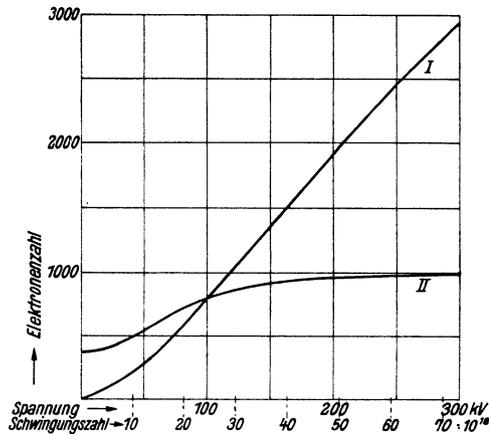


Abb. 1. Kurve *I* gibt die Zahl der von einem Elektron bei vollkommener Absorption in Luft auf der ganzen Flugbahn freigemachten Elektronen in Abhängigkeit von der anfänglichen Voltgeschwindigkeit des Elektrons in kV (nach Lenard: „Totale summarische Sekundärstrahlung“) (s. Abs. 8). Kurve *II* ist gewonnen durch Division der Ordinaten von Kurve *I* durch die Abszisse kV und stellt die Zahl der für jede absorbierte Energieeinheit der Röntgenstrahlen freigemachten Elektronenzahl dar (s. Abs. 9). Energiemaßstab willkürlich.

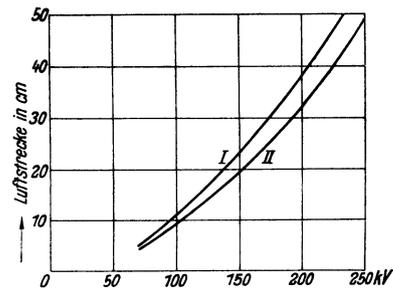


Abb. 2. Intensitätsabnahme von Kathodenstrahlen in Luft von Atmosphärendruck.

Kurve *I* stellt die Luftstrecken dar, die nötig sind, um einen Kathodenstrahl auf 5% seiner Anfangsintensität zu schwächen. Kurve *II* desgleichen für eine Schwächung bis auf 10% des Anfangswertes. Als Abszissen sind die Anfangsgeschwindigkeiten des Kathodenstrahls in kV aufgetragen (s. Abs. 10).

willkürlich angenommen. Für unsere Betrachtungen ist nur der Verlauf der Kurve wesentlich; sie nähert sich in ihrem oberen Teil einer zur Abszissenaxe parallelen Geraden an, weicht überhaupt in dem für größere Strahlenarten hauptsächlich in Betracht kommenden Teil nicht allzusehr von dieser Geraden ab¹⁾. Das bedeutet, daß die für jede absorbierte Energieeinheit in der Kammer erzeugte Ionisation bei jeder Schwingungszahl (Härte) der einfallenden Röntgenstrahlen nahezu denselben Wert hat, d. h. daß die Angaben der Ionisationskammer mit einer gewissen Annäherung wellenlängenunabhängig sind, und zwar gerade in dem für uns in Betracht kommenden Gebiet harter Strahlung.

10. Damit würde die Kammer gerade den Forderungen genügen, die wir oben für eine Normalkammer gestellt hatten. Dabei ist vorausgesetzt, daß Nebenwirkungen

¹⁾ Sie würde genau eine zur Abszissenachse parallele Gerade sein, wenn die Kurve *I* eine durch den Koordinatenanfang gehende Gerade wäre.

wie Streustrahlung (s. Abs. 5) den Hauptvorgang nicht störend überlagern und daß dieser selbst sich ungestört abspielt. Holthusen hat nachgewiesen, daß dazu gewisse Mindestabmessungen der Ionisationskammer erforderlich sind. Die lichtelektrischen Elektronen legen nach Lenard vermöge ihrer Anfangsgeschwindigkeit in der Luft einen gewissen Weg zurück, längs dessen sie Sekundärelektronen auslösen und einen gewissen, meist nicht beträchtlichen Teil ihrer Geschwindigkeit verlieren, bis sie durch einen zufälligen Zusammenstoß mit einem Luftmolekül den ganzen Rest ihrer Geschwindigkeit einbüßen. Dieser Zufall tritt im allgemeinen um so später ein, je größer die Elektronengeschwindigkeit ist, jedoch sind die zurückgelegten Weglängen der einzelnen Elektronen gleicher Anfangsgeschwindigkeit sehr verschieden. Wenn die ionisierende Wirkung der lichtelektrischen Elektronen voll ausgenutzt werden soll, muß ihre überwiegende Zahl freie Bahn im Luftraum der Kammer haben und darf nicht auf deren Wände treffen. Auf Grund der Lenardschen Zahlenangaben läßt sich berechnen, welcher Prozentsatz aller Elektronen von gleicher Anfangsgeschwindigkeit Wegstrecken von einer gegebenen Länge überschreitet. Wir können z. B. nach den Wegstrecken fragen, die von nur 5% aller Elektronen überschritten werden. Die Kurve *I* der Abb. 2 gibt diese als Ordinaten aufgetragenen Wegstrecken als Funktion der auf der Abszissenaxe aufgetragenen Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen (als Voltgeschwindigkeit), Kurve *II* gibt dasselbe für 10% der Elektronen. Man sieht aus diesen Kurven z. B., daß bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 200 kV 5% aller Elektronen Wege zurücklegen, die länger sind als 38 cm, und 10% solche, die länger sind als 32 cm. Wenn man die ionisierende Wirkung der Elektronen praktisch voll ausnutzen will, kommt man daher zu recht ansehnlichen Abmessungen der Ionisationskammer. Jedoch ist es nicht möglich, theoretisch ein Mindestmaß für die Kammer festzusetzen, solange man zwar die höchste in Betracht zu ziehende Geschwindigkeit der lichtelektrischen Elektronen kennt, nicht aber deren Geschwindigkeitsverteilung. Daher hat Holthusen Versuche mit zylindrischen Ionisationskammern angestellt; er fand, daß unter sonst gleichbleibenden Umständen der Ionisationsstrom mit dem Durchmesser der Kammer bis zu einem Grenzwert steigt. Bei den härtesten Strahlen, die er verwandte, würde dieser nach seiner Schätzung mit einem Kammerdurchmesser von etwa 20 cm erreicht.

11. Wir haben die Versuche mit Röntgenstrahlen wiederholt, die von einer Coolidge-Röhre unter den in der heutigen Röntgentherapie üblichen Bedingungen erzeugt wurden. Die bei einigen der Versuche benutzten Kammern bestanden aus Aluminiumzylindern von 20 cm Länge und Durchmessern von 4, 8, 12 und 16 cm. Deren Stirnseiten trugen Aluminiumdeckel mit Zellonfenstern zum Durchtritt der Röntgenstrahlen. Innenelektrode war ein 2 mm starker exzentrisch, aber parallel zur Zylinderaxe angebrachter Aluminiumstab (s. Abs. 5). Nachdem festgestellt war, daß bei 300 Volt Spannung Stromsättigung in der Kammer bereits erreicht war, wurde der Kammerzylinder auf eine konstante Spannung von 1000 Volt geladen und der zur Innenelektrode durch den Luftraum fließende Ionisationsstrom beobachtet. Zu dem Zwecke war diese über einen Widerstand von 10^{10} Ohm mit der Erde verbunden. Die Spannung, die der zur Erde fließende Ionisationsstrom an diesem Widerstand erzeugte, wurde mit einem Elektrometer gemessen; sie ist der Stromstärke proportional und diente als deren Maß. Folgende Tabelle enthält die Resultate einer Reihe von Messungen¹⁾. Sie gibt die Ionisationsströme in den 4 verschiedenen

¹⁾ Angestellt im Juni 1920 von Herrn R. Thaller.

Tabelle I.
Ionisationsströme in relativem Maß.

Kammer- durchmesser	Ungefiltert		Filter 5 mm Al 140 kV (Spitzenspannung)
	84 kV	112 kV	
4 cm	100	100	100
8 „	102	103	108
12 „	102	105	116
16 „	102	105	122

erkennen, daß bei 84 kV bereits mit einem Kammerdurchmesser von 8 cm die Höchststromstärke erreicht ist, bei 140 kV jedoch auch zwischen 12 und 16 cm noch eine Zunahme der Stromstärke eintritt. Also ist vielleicht auch bei 16 cm Kammerdurchmesser die Ausnutzung der Elektronen noch nicht vollständig. Eine spätere Wiederholung dieser Versuche unter Verwendung eines mit Gleichspannung betriebenen Rohres ergab ähnliche Resultate.

12. Nach diesen Ergebnissen scheint für Messungen bei hohen Spannungen eine erhebliche Vergrößerung des Kammerdurchmessers unvermeidlich zu sein. Eine zu kleine Kammer würde gerade für die härtesten Strahlenkomponenten, die bei der Therapie eine wichtige Rolle spielen, zu geringe Empfindlichkeit zeigen und darum den an eine Normalkammer zu stellenden Anforderungen nicht genügen. Ionisationskammern von sehr großem Durchmesser sind aber sehr unhandliche Instrumente. Außerdem haben sie einen anderen Nachteil; wegen des großen Abstandes ihrer Elektroden ist eine große Spannungsdifferenz nötig, um Sättigungsstrom zu erreichen; denn dieser erfordert einen gewissen Potentialgradienten in der Kammer, und der Gradient wird bei gleicher Potentialdifferenz an den Elektroden um so kleiner, je größer deren Abstand ist.

13. Druckluftkammer. Diese Schwierigkeiten führten den einen von uns dazu, von einer Vergrößerung der Kammerdimensionen Abstand zu nehmen und dafür die Kammer mit Luft von erhöhtem Druck zu füllen. Zunächst wurde im Jahre 1920 eine Kammer in Angriff genommen, deren Form sich an die bisher beschriebene angeschlossen, die aber Luft von 5 Atmosphären Druck enthielt. Über diese Kammer und die mit ihr angestellten Messungen ist auf dem 12. Kongreß der Deutschen Röntengesellschaft im Jahre 1921 berichtet worden¹⁾. Die Vorteile der Druckkammer bestehen zunächst in einer Verkürzung der Flugbahn der lichtelektrischen Elektronen. In der Kurvendarstellung der Abb. 2 wären für eine Druckkammer mit 5 Atmosphären Druck alle Ordinaten auf den 5. Teil ihres Wertes zu verkürzen. Bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 200 kV würden z. B. nur 5% aller Elektronen Strecken zurücklegen, die größer sind als 7,6 cm (gegen 38 cm bei Atmosphärendruck; s. Abs. 10). Dazu kommt, daß die von dem Luftraum der Kammer absorbierte Energie (die auf die Kammer entfallende „Dosis“) bei gleicher Länge den 5fachen Wert hat, daß somit 5 mal soviel Elektronen lichtelektrisch ausgelöst werden, also die Empfindlichkeit die 5fache ist. Durch Erhöhung des Druckes auf 5 Atmosphären erreicht man demnach ebensoviel wie durch Erhöhung aller Lineardimensionen auf das 5fache. Dagegen ist der bei gleicher Potentialdifferenz an den Elektroden entstehende Potentialgradient in der Kammer vom Drucke unabhängig; demgemäß Sättigung in der Druckkammer relativ leicht zu erreichen.

¹⁾ R. Thaller: Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstr. Verh. d. Deutschen Röntgen-Ges. Bd. 12. 1921.

Kammern. In den Spaltenüberschriften sind Erzeugungsspannungen und Filterungen angegeben.

Die Röhre wurde durch einen Transformator unter Zwischenschaltung eines Glühkathodenventilrohres mit 3 mA betrieben. Der Ionisationsstrom in der Kammer von 4 cm Durchmesser ist willkürlich = 100 gesetzt. Die Zahlen lassen

14. Auf Grund dieser Überlegungen wurde eine Druckkammer hergestellt, die sich in ihrer ersten Ausführungsform von der gewöhnlichen Zylinderkammer nur darin unterschied, daß ihre Wände aus Eisen von 3 mm Dicke ausgeführt waren, um dem inneren Überdruck standhalten zu können. Der innere Zylinderdurchmesser betrug 14 cm und die Länge des Zylinders 17 cm. Um einen Überblick über die Wirkungsweise der Kammer zu gewinnen, wurde die Abhängigkeit des Ionisationsstromes vom Druck in der Kammer bestimmt, wobei ein Bündel Röntgenstrahlen von konstanter Intensität die Kammer durchsetzte. Die durch $\frac{1}{2}$ mm Kupfer gefilterte Strahlung entstammte einer mit 140 kV Spitzenspannung betriebenen Glühkathodenröhre. Das Ergebnis dieser Messungen gibt die Kurve der Abb. 3. Sie verläuft zunächst nach oben konkav und geht dann von 2 Atmosphären ab in eine Gerade über. Der Ionisationsstrom steigt also zunächst schneller

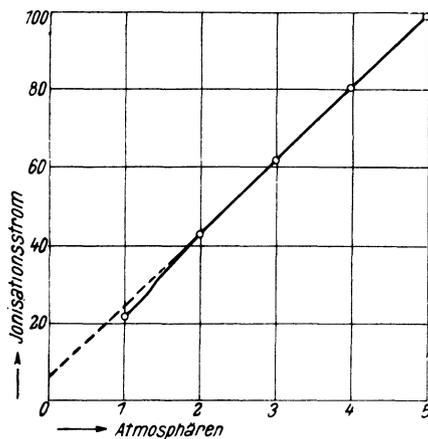


Abb. 3. Abhängigkeit des Ionisationsstromes in einer Druckkammer vom Druck.

Der geradlinige Teil der Kurve, nach rückwärts verlängert, geht nicht durch den Koordinatenanfang, was auf Wirkung der von den Fenstern der Kammer ausgehenden Streustrahlung zurückgeführt wird (s. Abs. 13).

zunächst nach oben konkav und geht dann von 2 Atmosphären ab in eine Gerade über. Der Ionisationsstrom steigt also zunächst schneller

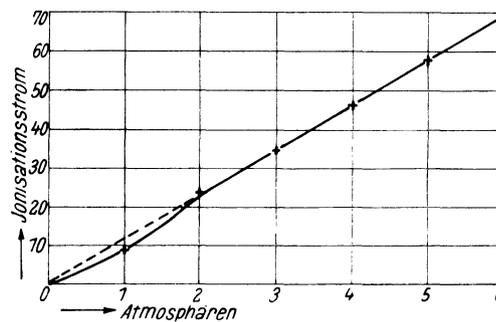


Abb. 4. Abhängigkeit des Ionisationsstromes vom Druck in der endgültigen Form der Druckkammer.

(Glühkathodenrohr, betrieben mit 180 kV Spitzenspannung, Filterung mit 1 mm Kupfer. Die angegebenen Beobachtungen sind Mittelwerte aus je 6 Einzelbeobachtungen.)

als linear mit der Druckerhöhung an, was dadurch zu erklären ist, daß bei einem Druck von einer Atmosphäre die lichtelektrischen Elektronen zunächst noch nicht voll ausgenutzt werden, sondern zu einem merklichen Teil die Kammerwand treffen, ehe sie ihre volle Ionisationswirkung ausgeübt haben. Wenn man den geradlinigen Teil der Kurve nach rückwärts verlängert, zeigt sich, daß die Gerade nicht, wie man erwarten sollte, durch den 0-Punkt geht. Da die von dem Luftraum der Kammer absorbierte Energie der Röntgenstrahlen dem Druck proportional ansteigt, müßte dasselbe auch von der Zahl der in der Luft ausgelösten Elektronen und damit auch der Ionisation gelten. Das Verhalten der Kurve deutet also auf einen sich überlagernden Vorgang. Als solcher kommt vermutlich die Auslösung lichtelektrischer Elektronen am Eintritts- und Austrittsfenster in Betracht. Diese Elektronenemission würde vom Luftdruck unabhängig vor sich gehen und müßte also zur Folge haben, daß die nach rückwärts verlängerte Gerade der Abb. 3 die Ordinatenaxe in ihrem positiven Teil schneidet.

15. Nach dieser Auffassung genügt eine kleine konstruktive Änderung, um die Störung zu beseitigen. Die Stirnwände der Kammer wurden beiderseitig mit röhren-

förmigen Ansätzen versehen, die an ihren äußeren Enden die Fenster trugen. Alle von den Fenstern ausgehenden Strahlungen können dann nur zu einem verschwindend kleinen Teil in den Hauptraum der Kammer gelangen, entsprechend dem kleinen räumlichen Winkel, unter dem sie in diesen eintreten. Um von Störungen an den Enden der Kammer auch sonst nach Möglichkeit frei zu werden, wurde die Innenelektrode in der Achsenrichtung verkürzt und in ihrer Verlängerung, aber isoliert von ihr, beiderseitig je eine Schutzelektrode angebracht. (Prinzip des Schutzringkondensators.)

16. Daß die Störungen damit im wesentlichen beseitigt sind, zeigt die Kurve der Abb. 4. Sie stellt den Sättigungsstrom in der neuen Kammer als Funktion des Drucks von 1—6 Atmosphären dar. Die bei den Messungen verwandte konstante Röntgenstrahlung entstammt einem Glühkathodenrohr, das mit gleichgerichtetem Wechselstrom von 180 kV Spitzenspannung und 1,5 mA betrieben wurde. Die eingezeichneten Werte sind das Mittel aus je 6 Beobachtungen. Es zeigen sich nur geringe als Versuchsfehler anzusehende Abweichungen von der Proportionalität der Sättigungsströme mit dem Druck¹⁾.

17. Versuche über den Einfluß der Streustrahlung. Einer besonderen Untersuchung bedurfte noch der oben (s. Abs. 5) erwähnte Einfluß der Streustrahlung. Dabei kann nur die von den Luftmolekülen ausgehende Streustrahlung in Betracht kommen, da außer den Fenstern keine festen Teile der Kammer von den primären Röntgenstrahlen getroffen werden, die von den Fenstern ausgehende Streustrahlung aber infolge der Form der Kammer in den eigentlichen Meßraum nicht merklich eintreten kann. Die von den Luftmolekülen ausgehende Streustrahlung hat nahezu dieselbe Härte wie die Primärstrahlung; ihre beobachtbare Wirkung kann eine zweifache sein. Zunächst wird sie zum kleinen Teil in der Luft absorbiert und erzeugt dabei lichtelektrisch Elektronen und durch diese sekundär Ionisation. Dann trifft sie fast ungeschwächt auf die Wände der Kammer und löst dort wiederum Elektronen aus.

18. Wir überzeugen uns zunächst davon, daß die durch direkte Wirkung der Streustrahlung auf die Luft erzeugte Ionisation nur äußerst gering sein kann, verglichen mit der durch die primären Röntgenstrahlen erzeugten Ionisation. Zu diesem Zwecke vergleichen wir den von der Streustrahlung im Luftraum der Kammer absorbierten Anteil a , den wir überschläglich schätzen werden, mit der absorbierten Primärstrahlenmenge (A). Dabei wollen wir annehmen, daß die Primärstrahlen in der Kammer einen Weg von 20 cm zurücklegen, so daß die Menge $A = 20 \cdot q \cdot \alpha$ absorbiert wird, wo q den Querschnitt des Strahlenbündels, α den Absorptionskoeffizienten bezeichnet. Gestreut wird dann längs des ganzen Weges in der Kammer die Menge $20 \cdot q \cdot \sigma$, wo σ den Streukoeffizienten der Luft angibt, der etwa $= 2 \times 10^{-4}$ ist. Die von den einzelnen Stellen des primären Strahlenbündels ausgehenden Streustrahlen legen je nach ihrer Richtung sehr verschiedene lange Wege zurück, bis sie die Wand der Kammer treffen. Im Mittel kann diese Weglänge bei einem Kammerdurchmesser von 14 cm auf etwa 8 cm geschätzt werden; dann würde für jede Einheit der gestreuten Strahlenmenge im Mittel der Betrag $8 \cdot \alpha$ absorbiert, wenn wir bei der Streustrahlung mit demselben Absorptionskoeffizienten rechnen wie bei der

¹⁾ Freilich bleibt es auffällig, daß in einer größeren Reihe hier nicht wiedergegebener Messungen der Wert für 1 Atmosphäre etwas unterhalb, der für 2 Atmosphären oberhalb der Proportionalitätsgeraden liegt.

direkten Strahlung. Die Gesamtmenge des von der gestreuten Strahlung absorbierten Anteils ist mithin $a = 20 \cdot q \cdot \sigma \cdot 8 \cdot \alpha = 20 q \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 8 \cdot \alpha$. Das Verhältnis von absorbiertes gestreuter zu absorbiertes direkter Strahlung ist also:

$$\frac{a}{A} = \frac{320 \cdot q \cdot \alpha \cdot 10^{-4}}{20 \cdot q \cdot \alpha} = 0,16 \% .$$

Die hierdurch erzeugte zusätzliche Ionisation bleibt noch unter 0,16%, da die von der Streustrahlung in Luft ausgelösten lichtelektrischen Elektronen zum großen Teil nicht die Möglichkeit freier Ausbreitung haben, also zur Ionisation nicht voll ausgenutzt werden.

19. In der Kammer mit erhöhtem Druck sind Absorptions- und Streukoeffizient proportional mit dem Druck gesteigert. Das Resultat der Überschlagsrechnung, daß die Wirkung der Streustrahlung auf die Luft der Kammer zur Ionisation nicht merklich beiträgt, bleibt also auch für die Druckkammer bestehen.

20. Wirkung der Streustrahlung auf die Wandung der Ionisationskammer. Anders steht es mit der von der Streustrahlung an den Wänden ausgelösten Elektronenstrahlung. Sie ist schwer abzuschätzen, da ihr Einfluß vom Material und von der Oberflächenbeschaffenheit der Wände sowie vom Auftreffwinkel der Strahlung an die Wände abhängt¹⁾. Sie könnte daher die Brauchbarkeit der Druckkammer als Normale in Frage stellen. Wir haben diese Wandwirkung der Streustrahlung durch besondere Versuche zu klären gesucht, indem wir zylinderförmige Ionisationskammern mit verschiedenem Wandmaterial ein und derselben Röntgenstrahlung aussetzten und jedesmal den Ionisationsstrom maßen. Wenn diese Wirkung auf die Wände zum Ionisationsstrom merklich beiträgt, so müssen Kammern mit verschiedenem Wandmaterial (wir wählten Blei, Zink, Aluminium, Papier) verschieden starke Ionisationsströme geben. Tatsächlich fanden wir nicht unbedeutende Unterschiede.

21. Die folgenden Versuche wurden mit einer zylinderförmigen Kammer aus Aluminiumblech bei Atmosphärendruck angestellt (Länge 20 cm, \varnothing 14,5 cm). Die Deckel an den Stirnseiten trugen Fenster von 12 mm \varnothing aus 1 mm starkem Zellon. Ein Bündel Röntgenstrahlen wurde durch eine 5 mm weite Vorderblende hineingelassen und durchsetzte beide Fenster der Kammer. In den Aluminiumzylinder der Kammer wurden der Reihe nach 14 cm weite Zylinder aus den verschiedenen Materialien eingesetzt. Etwa 1 $\frac{1}{2}$ m von der Vorderblende entfernt war das Glühkathodenröntgenrohr aufgestellt, dem hochgespannter Gleichstrom aus einer Siemensschen Stabilivoltanlage zugeführt wurde. Diese Zylinder wurden gemeinsam mit der Kammerwand auf ein konstantes Potential von 500 V geladen, während die stabförmige etwas abseits vom zentral durchtretenden Strahlenbündel angebrachte Innenelektrode mit einem Quadrantelektrometer verbunden war. Dessen Potentialanstieg in der Zeiteinheit diente als Maß des Ionisationsstromes. Bei den Messungen war zu beobachten, daß die Röntgenröhre trotz genau konstant gehaltener Spannung und Stromstärke keine ganz konstante Röntgenstrahlung liefert. Die Ausbeute schwankt etwas und zeigt während einer längeren Beobachtungsreihe einen gewissen Gang, dem bei der Berechnung durch geeignete Bildung der Mittelwerte Rechnung getragen werden mußte. Das Röntgenrohr konnte bei den Messungen nicht mit so

¹⁾ O. Berg und Ph. Ellinger: Über die Emission von Elektronen bei Bestrahlung verschiedener Substanzen mit Röntgenstrahlen. Wissenschaftl. Veröffentl. a. d. Siemens-Konzern Bd. 2, S. 335 ff. 1922.

hohen Spannungen belastet werden, wie es im Betrieb sonst verträgt, da bei den höchsten Spannungen die Ausbeute an Strahlen unregelmäßig schwankt.

22. In den folgenden Tabellen sind die Resultate einiger Versuchsreihen wiedergegeben. Die dort angegebenen Ionisationsstromstärken sind Mittelwerte aus 10 Einzelbeobachtungen. Die Zahlen sind der zeitlichen Reihenfolge der Beobachtungen entsprechend von links nach rechts angeordnet.

Tabelle II.

122 kV Gleichspannung. 3 mA Stromstärke im Röntgenrohr.
Filterung mit 0,51 mm Kupfer.

Material der Kammerwand	Pb	Al	Pb	Al	Pb	Mittel	
						Pb	Al
Ionisationsstrom . . .	524	498	528	501	530	527	500

Zunahme des Ionisationsstromes bei Verkleidung der Aluminiumwandung mit Blei:

$$\frac{\text{Pb} - \text{Al}}{\text{Al}} = \frac{27}{500} = 5,4\%.$$

Tabelle III.

144 kV. 3 mA. 0,51 mm Kupferfilter.

Material der Kammerwand	Zn	Al	Pb	Al	Zn	Pb	Mittel	
							Zn	Al
Ionisationsstrom . . .	574	554	622	556	572	622	573	555

Zunahme bei Verkleidung mit Blei: $\frac{\text{Pb} - \text{Al}}{\text{Al}} = \frac{67}{555} = 12,1\%$,

Zunahme bei Verkleidung mit Zink: $\frac{\text{Zn} - \text{Al}}{\text{Al}} = \frac{18}{555} = 3,25\%$.

Tabelle IV.

144 kV. 3 mA. 0,51 mm Kupferfilter.

Material der Kammerwand	Al	Pb	Al	Pb	Al	Zn	Al	Mittel	
								Pb	Al
Ionisationsstrom . . .	581	637	581	648	582	612	593	642	581

Zunahme bei Verkleidung mit Blei: $\frac{\text{Pb} - \text{Al}}{\text{Al}} = \frac{61}{581} = 10,5\%$,

Zunahme bei Verkleidung mit Zink: $\frac{\text{Zn} - \text{Al}}{\text{Al}} = \frac{25}{587} = 4,3\%$.

Tabelle V.

150 kV. 3 mA. 0,51 mm Kupferfilter.

Material der Kammerwand	Pb	Al	Pb	Al	Pb	Mittel	
						Pb	Al
Ionisationsstrom . . .	693	625	712	642	738	714	634

Zunahme bei Verkleidung mit Blei: $\frac{\text{Pb} - \text{Al}}{\text{Al}} = \frac{80}{634} = 12,6\%$.

Tabelle VI.

144 kV. 3 mA. 0,51 mm Kupferfilter.

Material der Kammerwand	Al	Papier	Al	Papier
Ionisationsstrom . . .	664	664	662	657

Bei Auskleidung mit Papier also keine Änderung.

Tabelle VII.

144 kV. 3 mA. 0,51 mm Kupferfilter.

Material der Kammerwand	Al	Papier	Al	Papier	Al
Ionisationsstrom . . .	664	662	662	657	658

Bei Auskleidung mit Papier also keine Änderung.

Aus den Tabellen ergibt sich eine Zunahme des Ionisationsstromes bei Bleiauskleidung der Kammer von rund 12% für eine Röhrenspannung von 144 kV, von 5,4% bei 122 kV. Bei Zinkauskleidung von etwa 4% bei 144 kV. Wir schreiben diese Zunahme der lichtelektrischen Wirkung der Streustrahlung auf die Wandungen der Kammer zu. In der Tat stehen diese Zahlen in Übereinstimmung mit früheren Ergebnissen über die lichtelektrische Wirkung von Röntgenstrahlung auf feste Elemente¹⁾. Danach ist in Übereinstimmung mit den hier gefundenen Zahlen die Elektronenemission des Zinks etwa $\frac{1}{3}$ von der des Bleis, die des Aluminiums nur etwa $\frac{1}{8}$ von der des Zinks. Unter Annahme dieser Zahl läßt sich der Anteil berechnen, den die durch lichtelektrische Wirkung der Streustrahlung am Aluminium erzeugte Ionisation s zur Gesamtionisation in der Kammer liefert. Nennt man die durch das primäre Röntgenstrahlenbündel erzeugte Ionisation p , so ist die gesamte Ionisation in der Kammer mit Aluminiumwandung $p + s$, in der Kammer mit Zinkwandung $p + 8s$. Nach den Resultaten der obigen Tabellen ist also $\frac{(p + 8s) - (p + s)}{p + s} = \frac{4}{100}$, daraus: $\frac{s}{p} = \frac{1}{174}$.

Die Aluminiumstreustrahlung trägt zur Gesamtionisation also wenig mehr als $\frac{1}{2}\%$ bei. Darum ist es auch verständlich, daß beim Auskleiden der Aluminiumkammer mit Papier keine Änderung in der Ionisationswirkung gefunden wurde (Tab. VI und VII). Die Wirkung der Streustrahlung ist schon bei Aluminiumwandung so gering, daß sie zum Ionisationsstrom nicht merklich beiträgt. Wir haben uns davon überzeugt, daß bei Auskleidung einer Bleiwandung mit Papier der Ionisationsstrom derselbe ist wie beim Auskleiden einer Aluminiumwandung mit Papier.

Damit kommen wir zu dem Schluß, daß die Streustrahlung in der Ionisationskammer nur dann störend wirkt, wenn größere Flächen von Schwermetall von ihr getroffen werden. Sind die Wandungen aus Aluminium oder mit einem Material aus Elementen noch niedriger Atomnummer überzogen, so sind Störungen nicht zu befürchten.

23. Wir haben weiterhin Versuche gemacht, die Streustrahlen getrennt von der Wirkung des primären Röntgenstrahlenbündels zu beobachten, indem wir das Primär-

¹⁾ O. Berg und Ph. Ellinger, l. c. S. 339.

bündel durch einen Zylinder aus dünnem Aluminiumblech von dem übrigen Raum der Kammer abschlossen. Durch den Zylinder konnten die Streustrahlen hindurchtreten und zu den Kammerwänden gelangen; die ionisierende Wirkung der primären Röntgenstrahlung war dagegen ausgeschaltet. Die Beobachtungen ergaben bei Kammerwänden aus Aluminium, Zink und Blei dasselbe Verhältnis der Streustrahlenwirkung wie vorher. Da die Versuche noch nicht abgeschlossen sind, kann im einzelnen erst später darüber berichtet werden.

Damit erscheinen uns die Grundlagen für den Aufbau einer Normalkammer genügend geklärt. Wir lassen nähere Angaben über die Konstruktion einer danach gebauten Druckluftkammer folgen.

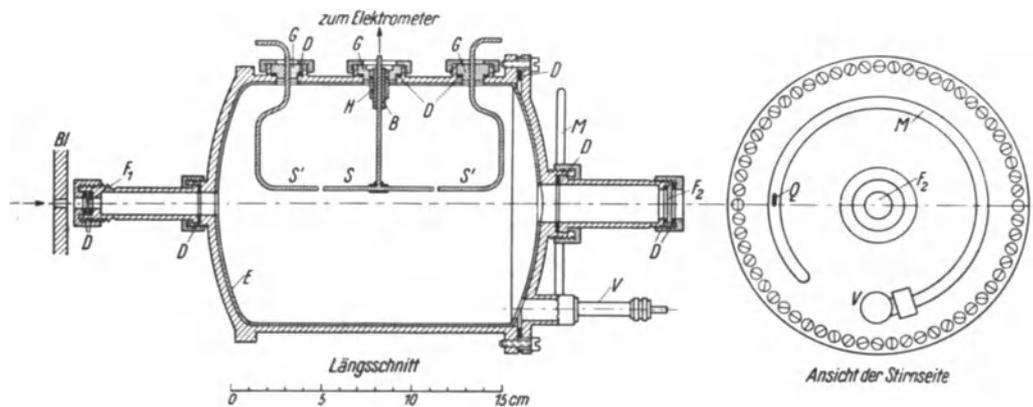


Abb. 5.

- B* Bleiblende.
- F*₁ Eintrittsfenster aus 1 mm starkem Zellon.
- F*₂ Austrittsfenster aus 3 mm starkem Glas.
- J* Innenelektrode aus Aluminium (3 mm starker Stab).
- B* Bernsteinisolation.
- H* Geerdete Schutzhülse.
- G* Hartgummiisolation.
- S'* Geerdete Schutzelektroden.
- D* Dichtungen aus Blei oder Gummi.
- E* Innenaluminiumbekleidung der eisernen Kammerwandung.
- V* Einlaßventil für die Füllung mit Druckluft.
- M* Manometer, bestehend aus einer am Ende geschlossenen kreisförmig gebogenen Glaskapillare mit Quecksilbertropfen *Q*.

24. Ausführungsform einer Druckkammer. Die Einzelheiten des Aufbaus der Druckkammer sind aus der Abb. 5 im wesentlichen zu entnehmen. Die Kammer wurde zunächst mit Luft von 6 Atmosphären Druck gefüllt. Die Wandungen bestehen aus 2 mm starkem Eisenblech mit Aluminiumverkleidung. Die nötigen festen Verbindungen sind durch autogene Schweißung hergestellt. Als Manometer dient in primitiver Weise eine einseitig zugeschmolzene Glaskapillare mit Quecksilbertropfen. Hat diese Kapillare dieselbe Temperatur wie die Kammer, so zeigt der Stand des Quecksilbertropfens nicht den Druck, sondern die Dichte der Luftfüllung an, die bei Absorption der Röntgenstrahlen und Elektronen tatsächlich maßgebend ist.

Dem Eintrittsfenster konnte der kleine Durchmesser von 6 mm gegeben werden, so daß das Fenster, aus nur 1 mm starkem Zellon, dennoch dem Innendruck standhält. Der Querschnitt des einfallenden Strahlenbündels wird durch die

vordere Bleibende begrenzt. Da das Strahlenbündel innerhalb der Kammer divergiert, wurde dem Austrittsfenster ein entsprechend großer Durchmesser gegeben (12 mm). Mit Hilfe eines Fluoreszenzschirmes ist es leicht festzustellen, ob das austretende Strahlenbündel durch das Austrittsfenster tatsächlich frei austritt ohne dessen Ränder zu berühren.

25. Beim äußeren Aufbau der Apparatur wurde auf den nötigen Schutz gegen äußere elektrostatische Störungen und Röntgenstrahlen die nötige Rücksicht genommen. Zur richtigen Einstellung in den Strahlengang ist die Kammer um eine horizontale Achse drehbar. Die Abb. 6 und 7 zeigen den Aufbau einer im Jahre 1921 mit der Druckkammer zusammengestellten Meßeinrichtung. Sie enthält neben der Kammer in dem oberen Schränkchen ein Quadrantelektrometer mit Lichtzeigerablesung, unten eine Ladevorrichtung für die Kammerwand, die mit Hilfe von Glühkathodenventilen eine konstante Ladespannung von etwa 1000 Volt herzustellen gestattet. Die Messung des Ionisationsstromes erfolgt in der auch sonst üblichen Weise entweder durch Zeitbeobachtungen mit der Stoppuhr oder durch Messung des Spannungsabfalls an einem großen Widerstande, über den der Ionisationsstrom zur Erde geleitet wird.

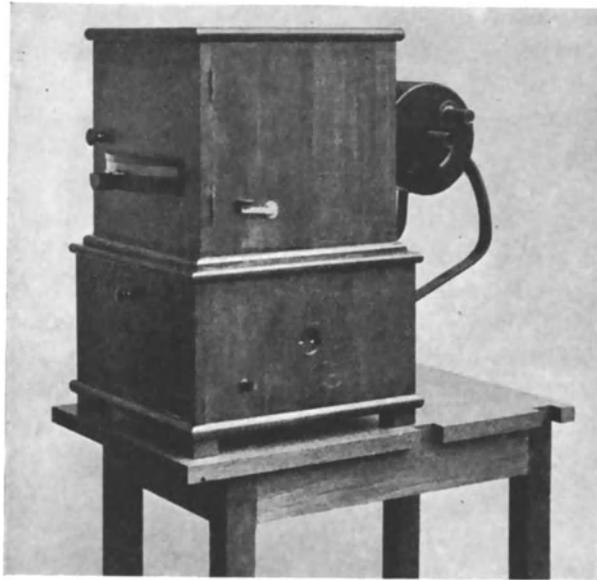


Abb. 6.

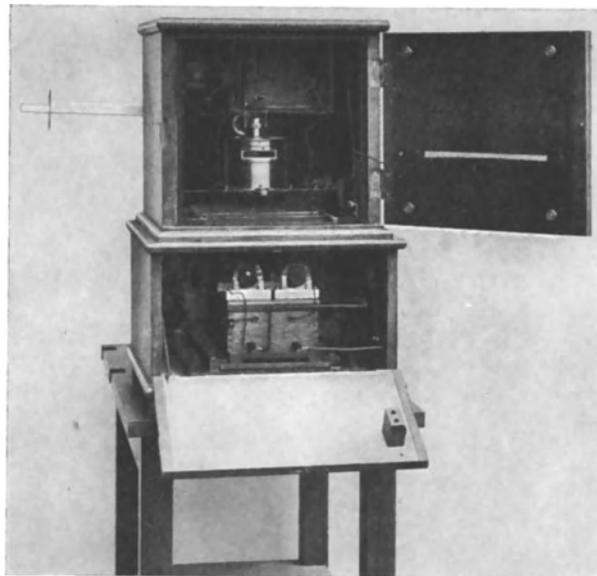


Abb. 7.

Äußerer Aufbau einer Druckluftkammer. Die Ionisationskammer sitzt in dem rechts oben in der Abb. 6 sichtbaren Zylinder. Der obere Teil des Schränkchens enthält Quadrantelektrometer und Zubehör, der untere Teil eine Aufladevorrichtung für die Ionisationskammer.

Zusammenfassung.

Da eine auf das Energiemaß zurückgeführte Intensitätsmessung der Röntgenstrahlen für die praktische Anwendung zur Zeit nicht in Betracht kommt, wird die Frage aufgeworfen, ob sich die Ionisationskammer zu einem für die Praxis geeigneten Normalinstrument ausbilden läßt. Die Erörterung der an solch ein Instrument zu

stellenden Anforderungen und der physikalischen Vorgänge in der Ionisationskammer führt zu dem Schluß, daß die Ionisationskammer unter gewissen Voraussetzungen den Anforderungen genügt. Solche Voraussetzungen sind:

1. Vollkommene Ausnutzung der lichtelektrisch ausgelösten Elektronen zur Ionisierung. Das wird am besten erreicht durch Füllung der Kammer mit Druckluft.

2. Vermeidung der Wirkungen, die durch Auftreffen von Röntgenstrahlen auf feste Körper innerhalb der Kammer auftreten. Dazu dient geeignete Formung der Elektroden, Anordnung von Schutzelektroden, geeignete Anordnung der Ein- und Austrittsfenster der Strahlung.

3. Vermeidung der Streustrahlenwirkung an der Kammerwandung, die nicht aus Elementen hoher Atomnummer bestehen darf.

Eine nach diesen Gesichtspunkten gebaute und durchgeprüfte Druckluftkammer wird beschrieben.

Methoden zur Messung hochohmiger Widerstände.

Von **Robert Jaeger** und **Willy Hinze**.

Mit 9 Textabbildungen.

Mitteilung aus dem physikalischen Laboratorium des Wernerwerks M der
Siemens & Halske A.-G.

Eingegangen am 9. Januar 1924.

Für die Zwecke der Messung äußerst kleiner Ströme, wie man sie bei Gasentladungen und radioaktiven Vorgängen erhält, benötigt man hochohmige Widerstände in der Größenordnung von etwa 10^7 — 10^{11} Ohm. Die Messung solcher Widerstände kann zum Teil ohne weiteres mit Hilfe eines hochempfindlichen Spiegelgalvanometers vorgenommen werden. Immerhin ist man bei den höchsten der gebräuchlichen Widerstände schon an der Grenze der Empfindlichkeit angelangt. Außerdem kann man nicht ohne weiteres jede beliebige Spannung verwenden, da die meisten der bekannten hochohmigen Widerstände nur innerhalb eines kleineren Bereichs eine lineare Stromspannungscharakteristik zeigen. Dadurch wird die direkte galvanometrische Messung erschwert. In noch viel höherem Maße gilt dies für die Methode von Werner v. Siemens, bei der die Zeit gemessen wird, innerhalb der sich eine Kapazität über den zu messenden Widerstand entlädt. (Vgl. Lehrbuch der praktischen Physik von Kohlrausch, Teubner 1914, S. 469.) Die Methode setzt eine lineare Widerstandscharakteristik voraus. Liegt eine solche nicht vor, so kann man aus einer Zeitmessung nicht ohne weiteres auf den Widerstandswert bei einer bestimmten Spannung schließen, da diese während der Messung ein großes Bereich durchläuft. Wenn man also mit kleinen Spannungen arbeiten will, ist man entweder auf sehr hohe Widerstände beschränkt, oder man ist genötigt, sehr große Kapazitäten zu nehmen, die man mit der notwendigen guten Isolation (Bernstein) schwer herstellen kann. Ein weiterer Nachteil der Siemensschen Methode ist die Notwendigkeit einer Zeitmessung, die den subjektiven Fehler vergrößert. Diesem Nachteil läßt sich nur durch eine größere Reihe von Ablesungen begegnen¹⁾.

Wir haben die Siemenssche Methode dahin erweitert, daß wir die Aufladung und Entladung durch eine besondere Vorrichtung periodisch vornehmen ließen. Geschieht dieser Vorgang in bestimmtem Rhythmus von entsprechender Frequenz, so erhält man außer der Verkleinerung des mittleren Fehlers als neu hinzukommenden großen Vorteil eine direkte Ablesung am Elektrometer, die einem bestimmten Mittelwert aus den durchlaufenen Spannungen entspricht. Die wesentlichen Merkmale dieser Methode liegen in der schnellen Ermittlung des Widerstandes und dem großen Meßbereich, das Wider-

¹⁾ Eine weitere Meßmethode besteht in der Anwendung eines radioaktiven Luftwiderstandes als Strombegrenzer, der in Reihe mit dem zu messenden Widerstand liegt. Aus Strom und Spannung wird der Widerstand ermittelt. Der Nachteil besteht bei schwachem Präparat in dem geringen Meßbereich.

stände von 10^7 — 10^{11} Ohm umfaßt. Die Erweiterung des Meßbereiches läßt sich durch einfache Umschaltungen und Änderung der Elektrometerempfindlichkeit erzielen.

Aus der großen Anzahl von Schaltungsmöglichkeiten, die sich ergeben, wenn man durch eine Kontaktvorrichtung eine oder mehrere Kapazitäten über den zu messenden Widerstand periodisch sich auf- oder entladen läßt, sind im folgenden einige Beispiele herausgegriffen, die praktisch ausprobiert worden sind. Diese Beispiele sind für einige spezielle Fälle berechnet und an Schaubildern deren charakteristische Merkmale erläutert. Als Meßinstrument bei den besprochenen Methoden kann irgendein elektrostatisches Meßgerät benutzt werden, also ein Quadrant bzw. Binant-

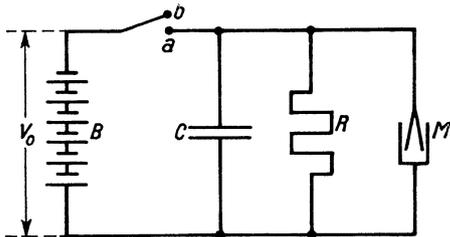


Abb. 1. Die dem Elektrometer M und dem zu messenden Widerstand R parallelliegende Kapazität C wird durch den Kontakt ab periodisch auf die Spannung V_0 der Batterie B aufgeladen. Das Instrument M zeigt den effektiven Mittelwert der Spannungsfunktion an.

Elektrometer, Fadenelektrometer oder schließlich ein Elektronenelektrometer¹⁾.

Je nach der Schaltung wird man ein Meßsystem mit großer oder kleiner Schwingungsdauer verwenden. Was am Elektrometer abgelesen wird, entspricht dem effektiven Mittelwert der Spannungsfunktion V , also:

$$M_{eff} = \left[\frac{1}{T} \int_t^{t+T} V^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

der sich für jeden praktischen Fall leicht ermitteln läßt.

1. Schaltung.

Die einfachste Schaltung ist die in Abb. 1 skizzierte, wo die Kapazität C , welcher der Widerstand R und das Meßinstrument M parallel geschaltet sind, durch eine

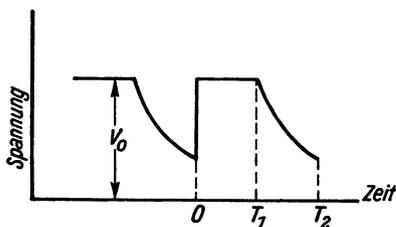


Abb. 2. Zeitlicher Verlauf der Spannung an der Kapazität C bei Schaltung nach Abb. 1.

Kontaktvorrichtung periodisch auf die Spannung V_0 der Batterie B aufgeladen wird. Dabei können die beiden Zeiten der Aufladung und der Entladung verschieden gewählt werden. Der allgemeinere Fall ist der, daß auch die Zeit des Kontaktes gegen die Zeit der Entladung in Betracht kommt. Um zu wissen, welchen Wert das angelegte Elektrometer anzeigt, ist der Effektivwert der in Abb. 2 angegebenen Spannungskurve zu ermitteln. Zur Berechnung des Integrals wird dieses zweckmäßig in

2 Teile zerlegt, so daß von 0 bis T_1 die Spannung während der Kontaktdauer konstant bleibt und von T_1 bis T_2 je nach Maßgabe der Kapazität und des Widerstandes abfällt. Die Berechnung des effektiven Mittelwertes ergibt folgendes Resultat:

$$M_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T_2} \left[\int_0^{T_1} V_0^2 dt + \int_{T_1}^{T_2} V_0^2 e^{-2\frac{(t-T_1)}{RC}} dt \right]} = \sqrt{\frac{1}{T_2} \left[V_0^2 T_1 - \frac{RC}{2} V_0^2 e^{-2\frac{(T_2-T_1)}{RC}} + \frac{RC}{2} V_0^2 \right]}$$

¹⁾ Benutzt man eine Gitterelektronenröhre, so kann die Gleichrichterwirkung der Röhre Störungen verursachen. Diese treten leicht auf, da man es hier mit Entladungsvorgängen in schwingungsfähigen Gebilden zu tun hat. Diese Schwierigkeit hat es bis jetzt verhindert, die Methode für den Siemens-Röntgendosismesser anzuwenden, wie er von Haüßer, Jaeger, Vahle in den Wissenschaftl. Mittlg. aus dem Siemens-Konzern Bd. 1 beschrieben wurde. Da in der Kammer Sättigungsstrom fließt, würde man linearen Spannungsverlauf und einfache theoretische Verhältnisse erhalten.

Um die Ergebnisse graphisch darstellen zu können, sind im folgenden einige Spezialfälle behandelt. Die Spannung der Batterie V_0 kann dabei beliebig angenommen werden.

Abb. 3 zeigt den gemessenen Effektivwert, ausgedrückt in Prozenten von V_0 in Abhängigkeit des Widerstandes für eine gesamte Periodendauer von 1 sec und eine Kapazität von $C =$ etwa 100 cm. C ist so gewählt, daß für einen Widerstand von 10^{10} Ohm $R \cdot C = 1$ wird, um eine bequeme Berechnung zu ermöglichen. Als Parameter ist das Verhältnis von Kontaktzeit zu Entladezeit gewählt. Ist die Kontakt-

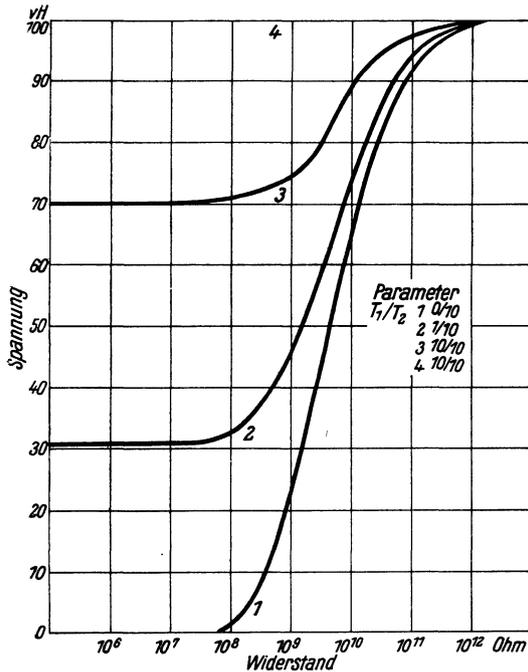


Abb. 3. Abhängigkeit des effektiven Spannungsmittelwertes von dem Widerstand R bei verschiedenen Verhältnissen von Kontaktzeit und Entladezeit (nach Abb. 1).

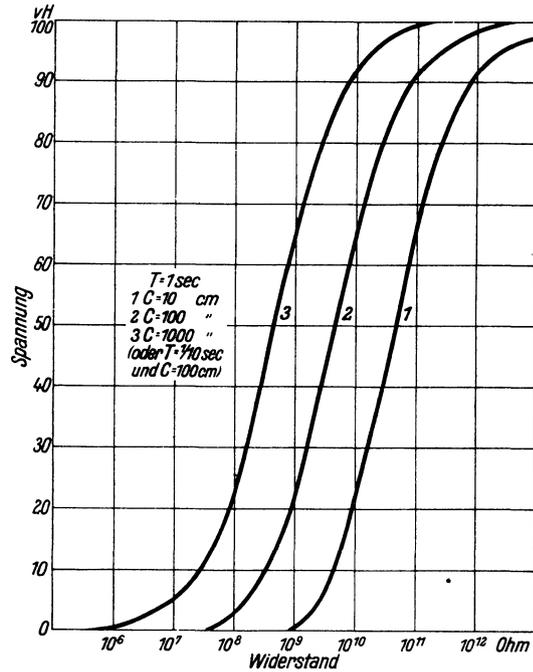


Abb. 4. Abhängigkeit des effektiven Spannungsmittelwertes von dem Widerstand R bei verschiedenen Kapazitäten (bzw. in Fall 3 Entladezeit). Man ersieht, wie man durch geeignete Wahl dieser Größen das Meßbereich verändern kann.

zeit unendlich klein, so ergibt sich Kurve 1, für das Verhältnis der Zeiten 1 : 10 Kurve 2, und für das Verhältnis 1 : 1 die Kurve 3. Das für dieses Beispiel brauchbare Widerstandsbereich würde also zwischen $5,10^8$ und $5,10^{10}$ Ohm liegen, also 3 Zehnerpotenzen umfassen.

Um das Meßbereich nach großen oder kleinen Widerständen zu erweitern, kann man die Kapazität vergrößern oder verkleinern. In Abb. 4 ist dargestellt, wie sich das Meßbereich für $C = 10, 100$ und 1000 cm verschiebt, während alle übrigen Größen konstant bleiben. Schließlich läßt sich noch die Gesamtdauer der Perioden verschieden groß wählen. Für kleinere Zeiten, also für $1/100$ sec, würde, wenn alles übrige gleichbliebe, die Kurve entsprechend nach links verschoben, für größere Zeiten von etwa 10 sec nach rechts. Es ist also möglich, mit Hilfe einfacher Umschaltungen am Kontaktrad oder an den Kapazitäten das äußerst große Widerstandsbereich von etwa 10^7 — 10^{11} Ohm zu überstreichen. Die Grenzen für die Anwendungsmöglichkeit sind dadurch gezogen, daß das Meßinstrument nur eine gewisse Schwingungsdauer

besitzen kann, um die Potentialschwankungen nicht mitzumachen, oder aber es darf die gesamte Periode einen bestimmten Zeitwert nicht überschreiten.

Man kann unter Umständen bei dieser Schaltung auch die Umkehrpunkte zur Messung verwenden, meist aber wird man mit festem Skalenausschlag arbeiten wollen.

2. Schaltung.

Die 2. Schaltung verhält sich gegenüber der 1. insofern anders, als hier das Elektrometer die Potentialänderungen nicht mitmacht. Soll es ruhig stehen, so muß man entweder zu sehr hohen Schwingungsdauern übergehen oder hohe Frequenzen verwenden, was das Meßbereich zu nur noch kleineren Widerständen hin verschiebt.

In der vorliegenden Schaltung ist dieser Übelstand dadurch vermieden, daß das Elektrometer in jeder Schaltperiode nur ein bestimmtes Momentanpotential erteilt bekommt. Wenn also die Voraussetzung guter Isolation und regelmäßiger Kontakt-

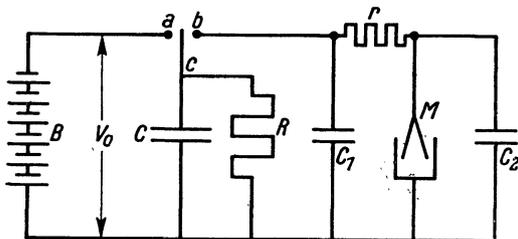


Abb. 5. Der Kontakt wird periodisch zwischen ac und ab geschlossen. Das Meßinstrument M erhält dabei jedesmal das gleiche Potential, das durch Entladung der Kapazität C über den Widerstand R zwischen den beiden Kontaktzeiten erreicht wird. Über die Hilfskapazitäten C_1 und C_2 sowie den Dämpfungswiderstand r siehe Text.

gebung erfüllt sind, erhält man vollkommen stillstehende Ausschläge. Dies wird dadurch erreicht, daß die dem Widerstand parallelgeschaltete Kapazität abwechselnd an die Batterie B und das Meßinstrument M angelegt wird (s. Abb. 5). Es tritt dann folgender Vorgang ein:

Während der Kontaktzeit ac wird die Kapazität C aufgeladen; die Länge dieser Zeit kann beliebig kurz sein, da die Aufladung momentan erfolgt. Entladung findet statt, während der Kontakt c gelöst ist. Nach Erreichung eines bestimmten Potentials wird c mit b verbunden und gleich

wieder gelöst. War das Elektrometer noch nicht aufgeladen, so tritt bei den ersten Kontakten eine Ladungsteilung zwischen der Kapazität C und der Elektrometerekapazität auf, die aber für die praktischen Fälle nach 3—4 Kontakten ausgeglichen ist, wie man leicht berechnen kann. Sowie der stationäre Zustand erreicht ist, erhält das Elektrometer jedesmal den gleichen momentanen Spannungswert. Theoretisch ist diese Schaltung also sehr einfach zu übersehen. Denn wenn V_0 die Spannung

der Batterie b darstellt, so zeigt das Elektrometer den Wert $V_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ an, wo t die Zeit zwischen den Kontaktstellungen ac und bc bedeutet. Dies gilt natürlich nur unter der Voraussetzung, daß die Zeit bc genügend kurz ist, um den Ausschlag des Elektrometers nicht zu beeinflussen. Die Anordnung wurde mit einem Fadenelektrometer und einer Kontaktvorrichtung ausprobiert, die mit Hilfe einer kleinen elektrischen Uhr betrieben wurde. Das Elektrometer stand, ohne daß allzu große Präzision der Kontaktbildung nötig war, vollkommen still. Für praktische Beispiele können folgende Größen gewählt werden.

Widerstand	Entladezeit	Kapazität	Ausschlag
10^9	1 oder 0,1 sec	1000 od. 100 cm	$0,37 \cdot V_0$
10^{10}	1 sec	100 cm	$0,37 \cdot V_0$
10^{11}	1 oder 10 sec	10 oder 100 cm	$0,37 \cdot V_0$

Die Fälle sind so gewählt, daß man einen brauchbaren Ausschlag erhält. Um von einer Zehnerpotenz zur anderen zu gelangen, ist also nur eine Kapazitätsumschaltung oder eine Umstellung am Kontaktdraht vorzunehmen (siehe unten).

In Abb. 4 sind noch ein Dämpfungswiderstand r und Hilfskapazitäten C_1 und C_2 eingezeichnet. Diese haben folgende Bedeutung: C_1 nimmt bei dem Kontakt bc zunächst die Ladung auf und gibt sie langsam an das Elektrometer ab. C_2 dient nur zur Vergrößerung der Elektrometerkapazität, wenn man, um mit kleinen Spannungen arbeiten zu können, ein Fadenelektrometer verwendet. C_1 und C_2 betragen je etwa 100 cm und r ungefähr 10^8 Ohm. Die Größen gehen in die Messung nicht ein.

3. Schaltung.

Eine weitere Schaltungsmöglichkeit besteht darin, daß sowohl die Aufladung wie die Entladung des Kondensators durch den zu messenden Widerstand R geschieht. Abb. 6 zeigt die Anordnung der Schaltung. Die Aufladezeit und die Entladezeit sollen gleich sein, d. h. die Kontaktzeit $ac =$ der Kontaktzeit bc . Es ist nun zu untersuchen, auf welches Potential sich der Kondensator einstellt. Da der Aufladevorgang durch die Gleichung

$$V = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

gegeben ist und die Entladung von diesem Potential durch die Gleichung

$$V_1 = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) e^{-\frac{t}{RC}}$$

ersieht man, daß der Kondensator nicht nach der ersten Entladung auf das Potential 0 fallen kann, da ja $e^{-\frac{t}{RC}}$ stets größer als 0 sein muß. Der stationäre Zustand wird

dann erreicht sein, wenn die Potentialzunahme während der Aufladezeit gleich der Potentialabnahme während

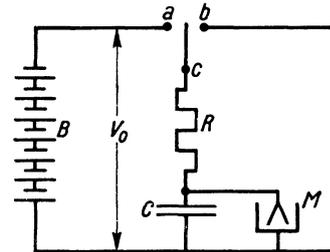


Abb. 6. Die Aufladung und Entladung geschieht periodisch jedesmal über den zu messenden Widerstand R .

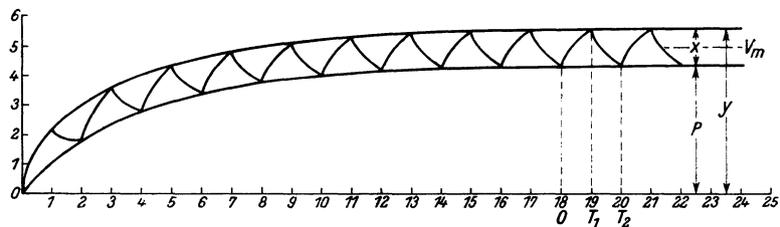
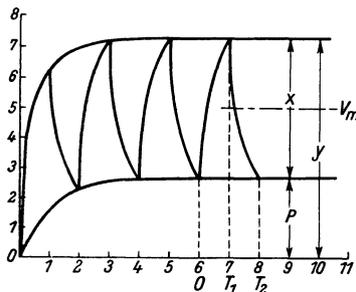


Abb. 7 und 8. Aufschaukelvorgang der Spannung am Kondensator C in Schaltung nach Abb. 6 bei 2 verschiedenen Kontaktperioden. (Abb. 7: $R \cdot C = 1$, $T = 1$ sec. Abb. 8: $R \cdot C = 1$, $T = 0,25$ sec. $V_0 = 10$ Volt.)

der Entladezeit ist. Hat der Kondensator ein Potential P , so gilt für weitere Aufladung

$$V = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) + P e^{-\frac{t}{RC}}$$

Das Anfangspotential P bedingt nun das Gleichwerden der Spannungszunahme sowie der Spannungsabnahme. In folgendem sei V_0 wieder das Potential der Batterie und t_1 die Aufladezeit, t_2 die Entladezeit $= t_1$, P das Anfangspotential des Kondensators. In Abb. 7 und 8 ist der Aufladevorgang, wie er durch die Schaltung (Abb. 6) bedingt

wird, graphisch aufgetragen, nachdem die einzelnen Werte durch numerische Rechnung ermittelt worden sind. Man erkennt aus der Zeichnung, daß nach verschiedenen Auf- und Entladungen ein stationärer Zustand erreicht wird. In beiden Fällen beträgt $V_0 = 10$ Volt. Die Spannung ist als Ordinate aufgetragen. Für Abb. 7 ist $t_1 = t_2 = 1$ sec, $RC = 1$, für Abb. 8 $t_1 = t_2 = 0,25$ sec und $RC = 1$ gewählt. Bezeichnen wir ferner die gleichwertigen An- und Abstiege mit x , die maximale Spitzenspannung am Kondensator mit y , so gilt für den ansteigenden Teil

$$y = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) + P e^{-\frac{t}{RC}},$$

und da $x = y - P$

$$x = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) + P e^{-\frac{t}{RC}} - P.$$

Für den absteigenden Teil der Kurve muß gelten:

$$P = y \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = \left[V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) + P e^{-\frac{t}{RC}} \right] e^{-\frac{t}{RC}},$$

und da $x = y - P$

$$x = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) + P e^{-\frac{t}{RC}} - \left[V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) + P e^{-\frac{t}{RC}} \right] e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Durch Gleichsetzen beider x -Werte folgt

$$P = \frac{V_0 e^{-\frac{t}{RC}}}{1 + e^{-\frac{t}{RC}}};$$

d. h. nach Erreichung dieses Potentials nach mehreren Entladungsvorgängen ist der stationäre Zustand erreicht. Der vom Elektrometer angezeigte effektive Mittelwert ist leicht zu berechnen durch Addition der Ausdrücke für den ansteigenden und den abfallenden Teil, so daß sich ergibt

$$M_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T_2} \left[\int_0^{T_1} \left[V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) + P e^{-\frac{t}{RC}} \right]^2 dt + \int_{T_1}^{T_2} \left[V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) + P e^{-\frac{t}{RC}} \right] e^{-\frac{t}{RC}} \right]^2 dt }.$$

Für P ist nun der den stationären Zustand bedingende Wert einzusetzen, so daß man erhält:

$$\begin{aligned} M_{eff} &= \sqrt{\frac{1}{T_2} \left[\int_0^{T_1} \left\{ V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) + \frac{V_0 e^{-\frac{2t}{RC}}}{1 + e^{-\frac{t}{RC}}} \right\}^2 dt + \int_{T_1}^{T_2} \left[V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \frac{V_0 e^{-\frac{2t}{RC}}}{1 + e^{-\frac{t}{RC}}} \right] e^{-\frac{t}{RC}} dt \right]^2} \\ &= V_0 \sqrt{\frac{1}{T_2} \left\{ \int_0^{T_1} \left(\frac{1}{1 + e^{-\frac{t}{RC}}} \right)^2 dt + \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{1 + e^{-\frac{t}{RC}}} \right)^2 dt \right\}}. \end{aligned}$$

Die Auswertung des Integrals ergibt den Ausdruck:

$$M_{eff} = V_0 \sqrt{\frac{RC}{T_2} \left\{ \left[\frac{1}{2} \ln \left(e^{\frac{t}{RC}} + 1 \right)^2 + \frac{1}{e^{\frac{t}{RC}} + 1} \right]_{T_1}^{T_2} + \left[\ln \frac{e^{\frac{t}{RC}}}{e^{\frac{t}{RC}} + 1} + \frac{1}{e^{\frac{t}{RC}} + 1} \right]_{T_1}^{T_2} \right\}}.$$

Durch Einsetzen der Grenzwerte für $2 T_1 = T_2 = T$ ergibt sich der Wert

$$M_{eff} = V_0 \sqrt{\frac{RC}{T} \left\{ \ln \frac{\left(\frac{T}{e^{2RC} + 1} \right)^2 \frac{T}{e^{2RC}}}{2 \left(\frac{T}{e^{RC} + 1} \right)} + \frac{1}{\frac{T}{e^{RC} + 1}} - \frac{1}{2} \right\}}.$$

Genau wie in den vorhergehenden Fällen läßt sich hieraus die Abhängigkeit der Ausschläge von den verschiedenen Werten des Widerstandes, Kapazität und Zeit ermitteln. In der Praxis wird es einfacher sein, mit bekannten Widerständen die Apparatur zu eichen.

Die letztgenannte Schaltung ist hauptsächlich geeignet für Anwendung von Instrumenten mit kleiner Schwingungsdauer, da hier die Frequenz ziemlich hoch gewählt werden kann. In Abb. 9 ist ein von uns benutzter Unterbrecher schematisch aufgezeichnet. Die Kontakte werden durch Blattfedern mit Silberstift gebildet, wie sie in der automatischen Telephonie weitgehende Verwendung finden. Die Bezeichnung der Zuleitungen entspricht denen in Abb. 5 und 6. Das isoliert montierte Rädchen R wird durch ein elektrisches Uhrwerk in dem durch den Pfeil angedeuteten Sinn gedreht und betätigt durch die Nocken und Vertiefungen die Kontaktfeder c , die so gespannt sein muß, daß sie nach dem Rad zu drückt. Der Grund dafür, daß man in der Praxis besser ein elektrisches Uhrwerk nimmt, ist der, daß ein Werk mit Unruhe ruckweise läuft; dann muß die Aufeinanderfolge der Kontakte mit der Schrittzahl des Uhrwerks übereinstimmen oder ein bestimmtes Vielfaches von ihr sein.

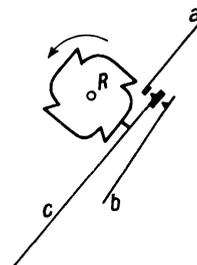


Abb. 9. Kontaktrad R für den rotierenden Unterbrecher. Die Feder c liegt am Rad an und wird durch die Nocken an b gedrückt; durch die Vertiefungen wird der Kontakt $a-c$ betätigt.

Zusammenfassung.

Nach kurzer Darlegung der bekannten Methoden zur Messung hochohmiger Widerstände werden neue Schaltungen angegeben, die auf einer Erweiterung der Siemensschen Methode beruhen. Das Meßbereich liegt zwischen 10^7 — 10^{11} Ohm. Die Spannungen können beliebig gewählt werden. Als Instrument läßt sich jedes Elektrometer benutzen. Die am Elektrometer abgelesenen Effektivwerte sind berechnet und zum Teil in Abhängigkeit von Widerstand, Kapazität und Kontaktzeit aufgetragen. Bei praktischen Messungen wird man am besten derartig vorgehen, daß man für bekannte Widerstände die entsprechenden Elektrometersausschläge ermittelt und aus den für jedes Meßbereich aufgetragenen Eichkurven den Widerstand direkt abliest.

Über die Erweiterung der perspektivischen Skalen zu Rechentafeln.

Von Felix Strecker.

Mit 8 Textabbildungen.

Mitteilung aus der Patentabteilung des Wernerwerkes der Siemens & Halske A.-G. zu Siemensstadt.

Eingegangen am 11. April 1924.

Einleitung.

Die nomographischen Methoden verbreiten sich in allen den Gebieten der Technik immer mehr, in denen zahlreiche Rechnungen nach einem bestimmten Schema vorgenommen werden müssen. Die Nomographie verschaffte insbesondere der Darstellung von Funktionen durch Skalen Eingang, und obwohl sie noch recht weite Gebiete außerdem umfaßt, denkt man doch in der Hauptsache, wenn man den Namen Nomographie hört, an Rechentafeln, die aus einer Anzahl von bezifferten geraden oder krummlinigen Skalen bestehen. Unter diesen Skalen spielt die projektive eine besondere Rolle, die eine Darstellung der rationalen linear gebrochenen Funktion ist. Ihre Bedeutung liegt darin, daß sie zeichnerisch außerordentlich einfach durch Projektion einer regelmäßig fortschreitenden Skala auf eine andere Gerade von einem festen Punkt aus gewonnen werden kann, während die numerische Berechnung unbequem ist. Diese hervorragende Eigenschaft der perspektivischen Konstruktion ist noch nicht genügend ausgenutzt worden, da bisher nur die Skala als solche eine Rolle in der Nomographie gespielt hat. In einer früheren kleinen Arbeit¹⁾ habe ich darauf aufmerksam gemacht, daß man die Vorteile, die bei den projektiven Skalen allgemein gesagt in der Zusammengehörigkeit einer einfachen Konstruktion und einer rechnerisch unbequemen Formel liegen, in viel höherem Maße ausnutzen kann, als bisher geschehen. Und zwar ist eine Entwicklung in der Weise möglich, daß man mehr als eine Veränderliche zuläßt und dabei im wesentlichen die Form der Funktion erhält. Hierbei entfaltet sich von selbst die Skala zu einer Rechentafel. Als Sonderfall kann man dann die neuen Veränderlichen wieder mit der ursprünglichen identisch werden lassen. Man kommt dann zu Skalen zurück, bei denen die Projektion ein Konstruktionsschritt in der Herstellung der Skalendarstellung komplizierterer Funktionen geworden ist.

Die früher gegebenen Ausführungen beschränken sich auf die Ableitung der Formeln für den Projektionspunkt S [hier Gleichung (6) und (7)] und einige Beispiele. In der vorliegenden Arbeit sollen die Grundzüge einer Theorie der perspektivischen Tafeln gegeben werden. Die Darstellung umfaßt infolge ihrer Allgemeinheit natür-

¹⁾ E. T. Z. 1924, S. 271.

lich auch den bekannten Fall der Gleichung (1); es werden auch, soweit erforderlich, die grundlegenden Begriffe erläutert, so daß die Arbeit als selbständiges Ganzes gelesen werden kann.

Ein Nomogramm ist natürlich nur Mittel zum Zweck, daher ergibt sich sofort die Frage, inwieweit der Entwurf einer solchen Tafel überhaupt lohnt. Ich habe daher auf einige Möglichkeiten hingewiesen, durch die eine Formel für den praktischen Gebrauch umgeformt werden kann, andererseits auch die Grenzen angeben, über die hinaus andere Methoden den Vorzug verdienen.

Die erreichte Verallgemeinerung ist ziemlich groß, so daß sich wohl in allen Gebieten der Technik Formeln finden werden, die mit den hier angegebenen Methoden vorteilhaft behandelt werden können.

1. Einen Ausdruck von der Form

$$F(\alpha) = \frac{m f(\alpha) + n}{p f(\alpha) + q} \quad (1)$$

kann man durch eine projektive Skala darstellen¹⁾. Hierbei soll $f(\alpha)$ eine Funktion von α sein, deren Funktionsskala auf einer Geraden als Träger gegeben ist oder gezeichnet werden kann. m, n, p, q müssen konstant sein und die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = mq - np \neq 0.$$

Der Fall $p = 0$ sei ebenfalls ausgeschaltet, da die Funktion in diesem Fall nicht mehr gebrochen ist. Diese Bedingungen schränken die zu behandelnden Funktionen stark ein. Es soll gezeigt werden, daß man auch viel allgemeinere Fälle behandeln kann. Zunächst kann man zulassen, daß $f(\alpha, \beta, \dots)$ eine Funktion mehrerer Veränderlicher ist. Läßt sich dann eine Rechentafel konstruieren, die ermöglicht, f aus α, β, \dots zu ermitteln, so kann man auf jeden Fall auch die gewünschte Skala zeichnen. In vielen Fällen kann man z. B. eine Tafel mit Parallelkoordinaten [Methode der flucht-rechten Punkte²⁾] so einrichten, daß man die Funktionsskala direkt erhält. Was unter einer solchen zu verstehen ist, wird später noch genau definiert. Die Herstellung dieser Skalen ist ein allgemeineres Problem der Nomographie und soll hier nicht behandelt werden.

Von wesentlicher Bedeutung für diesen Aufsatz ist nur der Fall, daß man m, n, p und q — die in der Folge gelegentlich als „Koeffizienten“ bezeichnet werden — als Funktionen einer oder mehrerer Veränderlicher $\gamma, \delta \dots$ ansehen kann, deren Zahl theoretisch sehr groß sein darf. Praktisch ergeben sich recht bald Grenzen, da die Rechentafeln dann sehr kompliziert werden und den Wettbewerb mit anderen Verfahren, z. B. numerischen, nicht mehr aushalten können. Es hängt auch für den Bau der Rechentafel ziemlich viel davon ab, wie viele der Koeffizienten veränderlich, wie viele konstant sind.

2. Bezeichnungen. Der bequemeren Schreibweise wegen soll, soweit zugänglich, die Angabe der willkürlichen Veränderlichen weggelassen werden. Ausführlich geschrieben wären die Funktionen von der Form

$$F(\alpha, \beta \dots \gamma, \delta \dots) = \frac{m(\gamma, \delta \dots) f(\alpha, \beta \dots) + n(\gamma, \delta \dots)}{p(\gamma, \delta \dots) f(\alpha, \beta \dots) + q(\gamma, \delta \dots)}, \quad (2)$$

¹⁾ Vgl. z. B. M. Pirani: Graph. Darst. in Wissensch. u. Techn. Sammlg. Göschen, S. 60.

²⁾ Z. B. M. Pirani: S. 74.

worin also jetzt m, n, p, q auch Funktionszeichen sind. Setzt man für $\alpha, \beta \dots$ ein System konstanter Werte $\alpha_0, \beta_0 \dots$ ein, so ist $f(\alpha_0, \beta_0 \dots)$ also eine Konstante, dagegen ist $F(\alpha_0, \beta_0, \dots, \gamma, \delta \dots)$ noch eine Funktion der $\gamma, \delta \dots$. Es sollen folgende Abkürzungen gebraucht werden:

$$\begin{aligned} f_0 &= f(\alpha_0, \beta_0 \dots), \\ F_0 &= F(\alpha_0, \beta_0 \dots, \gamma, \delta \dots). \end{aligned}$$

Das System s der Koeffizienten schreibt man analog der Determinante, aber in runden Klammern,

$$s = \begin{pmatrix} m, & n \\ p, & q \end{pmatrix}.$$

Hierbei dürfen keine Umstellungen vorgenommen werden, wie es bei der Determinante möglich ist. Man kann dann (1) symbolisch als Produkt schreiben. Es ist also die Schreibweise

$$F = s \cdot f = \begin{pmatrix} m, & n \\ p, & q \end{pmatrix} f$$

nur eine Abkürzung für (1). Von dieser verkürzten Schreibweise wird nur S. 189 Gebrauch gemacht.

3. Definition der Funktionsskala. Man denke sich $f(\alpha)$ zunächst als eindeutige Funktion einer Veränderlichen α . Auf einer Geraden wähle man einen Anfangspunkt O und trage darauf die Strecke $\mu = OE$ als positive Einheit ab. Man wähle für α einen konstanten Wert α_i , trage $\mu \cdot f(\alpha_i)$ auf der Geraden ab und schreibe an den Endpunkt die Ziffer α_i . Läßt man nun α_i im Veränderlichkeitsbereich von α eine genügende Anzahl Werte annehmen, so erhält man die Funktionsskala von $f(\alpha)$. Die angeschriebenen Werte der Veränderlichen bilden die „Bezifferung“, während die Längen der Strecken den Funktionswert darstellen. Sie gestattet, nötigenfalls durch Interpolation, zu jedem Wert α den Wert von $f(\alpha)$ und umgekehrt festzustellen mit Hilfe der Strecke μ . Diese heißt die „Einheit“ oder der „Modul“. Um die Werte von $f(\alpha)$ direkt ablesen zu können, braucht man auf der anderen Seite der Geraden nur die Skala $n\mu$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) anzubringen und genügend zu unterteilen. Diese Funktionsskala ist eine ganz spezielle Darstellung der Funktion: Die Skala $n\mu$, mit welcher $f(\alpha)$ ausgemessen wird, ist regulär. Das ist wesentlich. Man könnte z. B. zur Darstellung der Funktion so verfahren, daß man auf der Geraden nicht $f(\alpha)$, sondern $\log f(\alpha)$ abträgt. Man hätte dann eine logarithmische „Abbildung“ der Funktionsskala $f(\alpha)$. Die vom Anfangspunkt gemessene Strecke stellt nicht mehr $f(\alpha)$ selber dar. Um den numerischen Wert von $f(\alpha)$ festzustellen, muß man auch die Meßskala $n\mu$ logarithmisch abbilden, also die Skala $\log n\mu$ zeichnen. Eine solche Abbildung ermöglicht dann ebenfalls, zu jedem α das $f(\alpha)$ festzustellen und umgekehrt, und ist in vielen Fällen sehr bequem. Für die Zwecke dieser Arbeit ist es aber notwendig, daß die Strecke selber den Funktionswert darstellt.

Abbildungen einzelner Funktionsskalen werden im allgemeinen nicht verwendet. Sehr brauchbar für die perspektivischen Rechentafeln sind dagegen häufig perspektivische Abbildungen der ganzen Tafeln. Im Beispiel 1 wird gezeigt, wie der nutzbare Teil einer Tafel, der bis ins Unendliche reicht, durch perspektivische Abbildung der Tafel ganz ins Endliche gebracht werden kann.

Ist nun $f(\alpha, \beta \dots)$ eine Funktion mehrerer Veränderlicher, so gehört zu einem Wert von f eine mehrfach ∞ Zahl von Systemen von $\alpha, \beta \dots$. Ist z. B.

$f(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$, so gehört zum Werte $f = c$ das System $\alpha_i; \beta_i = c - \alpha_i$, worin α_i ganz willkürlich ist. Man kann natürlich nicht den einen Punkt der Skala mit ∞ vielen Zifferpaaren beziffern.

Solche Skalen heißen „mehrziffrige“ Skalen. Allgemeinere Betrachtungen darüber findet man z. B. bei d' Ocagne¹⁾. Man hat in diesem Fall eine Rechentafel zu zeichnen, welche als Endergebnis die gewünschte Skala liefert. In unserem Beispiel erhält man sehr leicht die 2ziffrige (oder „binäre“) Skala durch eine Parallelkoordinatentafel (Abb. 1). Auf der u -Achse ist die Funktion $\mu \cdot 2 \alpha$, auf der v -Achse $\mu \cdot 2 \beta$ gezeichnet. Die Mittelparallele ist die gewünschte Skala $f(\alpha, \beta) = \mu(\alpha + \beta)$. Die Skala trägt als solche keine der beiden Ziffern, da diese auf die Achsen verteilt sind. Die Bezifferung, die darangeschrieben ist, ist die „Meßskala“ $n\mu$, welche den numerischen Wert von f angibt. Interessiert dieser Wert nicht, so erhält die Skala gar keine direkte Bezifferung: sie ist eine sog. „Zapfengerade“.

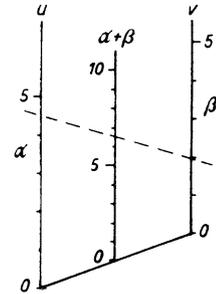


Abb. 1.

Auch im einfachsten Falle, der uns hier beschäftigen wird, wo also $f(\alpha)$ nur von einer, die Koeffizienten von einer zweiten Veränderlichen γ abhängen, ist $F(\alpha, \gamma)$ eine binäre Skala. Die zu entwickelnde Methode bezweckt in einem solchen Falle nur, mit dem Hilfsmittel der Projektion eine einfache Herstellung dieser Skala zu gewinnen.

4. Die Koordinaten des Projektionspunktes. Für die weiteren Entwicklungen soll $f(\alpha)$ als Funktion einer Veränderlichen angesehen werden. Die Übertragung auf andere Fälle ergibt sich ohne weiteres. Die Koeffizienten mögen zunächst als konstant gelten. Man denke sich auf zwei Geraden die Funktionsskalen f und F gezeichnet. Verschiebt man die Geraden so, daß 2 Punkte mit derselben Ziffer α_0 in einem Punkt O zusammenfallen und die Geraden sich unter beliebigem Winkel in O schneiden, so können die beiden Geraden als Achsen eines Descartischen Koordinatensystems aufgefaßt werden (Abb. 2). Wählt man den Träger der f -Skala zur ξ -Achse, den der F -Skala zur η -Achse, so ist also

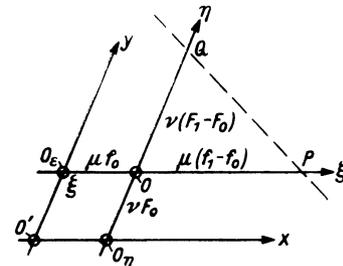


Abb. 2.

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \mu(f - f_0), \\ \eta &= \nu(F - F_0). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

μ und ν sind die willkürlichen Einheiten. Zieht man durch die Anfangspunkte O_ξ und O_η der Skalen die Parallelen zu den Achsen, die sich in O' schneiden, und wählt $O'O_\eta$ zur x -Achse, $O'O_\xi$ zur y -Achse, so ist in diesem Koordinatensystem

$$x = \mu f, \quad y = \nu F. \quad (4)$$

Es bestehen also die Beziehungen

$$\xi = x - \mu f_0; \quad \eta = y - \nu F_0. \quad (5)$$

Das ξ -, η -System wird im allgemeinen als fest, das y -, x -System als beweglich angesehen. Wir betrachten die beiden Punkte $P(x = \mu f_1, y = \nu F_0)$ und $Q(x = \mu f_0, y = \nu F_1)$ auf der ξ - und η -Achse. Und zwar sollen P und Q die beiden Punkte der Skalen sein, die dem Werte α_1 entsprechen. Analog der Abkürzung f_0 ist $f_1 = f(\alpha_1)$ und $F_1 = F(\alpha_1)$.

¹⁾ d'Ocagne: Traité de nomographie. Paris 1899.

Die Gerade PQ hat also die Gleichung

$$y - \nu F_0 = \frac{\nu}{\mu} \frac{F_0 - F_1}{f_1 - f_0} (x - \mu f_1).$$

Nun ist

$$\begin{aligned} F_0 - F_1 &= \frac{m f_0 + n}{p f_0 + q} - \frac{m f_1 + n}{p f_1 + q} \\ &= \frac{\Delta(f_0 - f_1)}{(p f_0 + q)(p f_1 + q)}. \end{aligned}$$

Setzt man diesen Wert ein, so erhält man

$$\left[(y - \nu F_0) p - \nu \frac{\Delta}{p f_0 + q} \right] f_1 + \left[(y - \nu F_0) q + \frac{\nu}{\mu} \frac{\Delta}{p f_0 + q} x \right] = 0.$$

Damit diese Gleichung für jeden beliebigen Wert von f_1 , also auch für jeden beliebigen Wert von α , erfüllt ist, müssen die Ausdrücke in den eckigen Klammern verschwinden. Man erhält daraus ein Wertepaar x, y : die Koordinaten des Projektionspunktes S , die nun nicht mehr von α abhängen. Die Koordinaten werden mit dem Index S bezeichnet:

$$\left. \begin{aligned} x_S &= -\mu \frac{q}{p}, & y_S &= \nu \left(\frac{\Delta}{p(p f_0 + q)} + F_0 \right) \\ \xi_S &= -\mu \left(\frac{q}{p} + f_0 \right), & \eta_S &= \nu \frac{\Delta}{p(p f_0 + q)}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Durch diese Rechnung ist gleichzeitig bewiesen worden, daß die beiden Skalen perspektivisch liegen, d. h. daß die Verbindungsgeraden je zweier Punkte mit gleicher Ziffer für α alle durch den Punkt S gehen, falls m, n, p, q konstant gehalten werden. Die Projektion wird unmöglich, wenn S auf der ξ - oder η -Achse liegt. Also darf $p f_0 + q$ nicht identisch 0 sein, da sonst $\xi_S = 0$ ist. Ist $q \neq 0$, so kann man $f_0 = 0$ wählen. Dann ist

$$\left. \begin{aligned} x_S &= -\mu \frac{q}{p}, & y_S &= \nu \left(\frac{\Delta}{p q} + \frac{n}{q} \right) = \nu \frac{m}{p} \\ \xi_S &= -\mu \frac{q}{p}, & \eta_S &= \nu \left(\frac{m}{p} - \frac{n}{q} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Verbindet man also S mit dem Punkte P der f -Skala, dessen Ziffer α_1 ist, so schneidet die Gerade auf der η -Achse das Stück $OQ = \nu(F - F_0)$ ab. Sind die Koeffizienten m, n, p, q konstant, so kann man, da auch F_0 konstant ist, durch Addition leicht F bestimmen. Man kann dann eine Meßskala $n \nu$ ($n = \pm 1, \pm 2 \dots$) von O_η aus auftragen. Sind die Koeffizienten aber veränderlich, so verschiebt sich mit F_0 der Punkt O_η gegen O , und die Meßskala müßte auch beweglich gemacht werden. Da F_0 nicht von α abhängt — α ist ja gleich α_0 gesetzt —, ist F_0 eine einfachere Funktion als F . Man braucht unter Umständen eine besondere Rechentafel, um F_0 zu berechnen und die Addition durchzuführen. Dadurch kann die Rechentafel so kompliziert werden, daß sie praktisch wertlos wird. Diese Verhältnisse erfordern daher besondere Aufmerksamkeit. Von der weitaus größten praktischen Bedeutung ist der Fall $f_0 = 0$. Dann ist $F_0 = \frac{n}{q}$; daher ist es sehr wichtig, daß wenigstens n und q konstant sind, da dann auch F_0 konstant ist. ξ_S hängt nur von p und q , den Koeffizienten des Nenners ab, ist also für alle Funktionen mit gleichem Nenner

das gleiche. Sind p und q konstant, so bewegt sich S auf einer η -parallelen Geraden. Man erhält demnach die einfachsten Konstruktionen, wenn nur m veränderlich (und $q \neq 0$) ist.

5. Die Einführung der reziproken Werte oder der inversen Funktion gestattet, das System der Koeffizienten auf 8 verschiedene Formen zu bringen. Man erhält immer wieder linear gebrochene Funktionen. Wir bedienen uns hier der leicht verständlichen kurzen symbolischen Schreibweise. Man bestätigt leicht, daß, wenn man von der Form $G = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} g$ ausgeht, auch folgende Gleichungen bestehen:

$$G = \begin{pmatrix} b, & a \\ d, & c \end{pmatrix} \frac{1}{g}, \quad \frac{1}{G} = \begin{pmatrix} c, & d \\ a, & b \end{pmatrix} g, \quad \frac{1}{G} = \begin{pmatrix} d, & c \\ b, & a \end{pmatrix} \frac{1}{g},$$

$$g = \begin{pmatrix} d, & -b \\ -c, & a \end{pmatrix} G, \quad g = \begin{pmatrix} -b, & d \\ a, & -c \end{pmatrix} \frac{1}{G}, \quad \frac{1}{g} = \begin{pmatrix} -c, & a \\ d, & -b \end{pmatrix} G, \quad \frac{1}{g} = \begin{pmatrix} a, & -c \\ -b, & d \end{pmatrix} \frac{1}{G}.$$

Elemente, die ursprünglich diagonal stehen, bleiben diagonal. Man kann aber ein Element an eine vorgeschriebene Stelle bringen, wodurch das diagonalstehende bestimmt ist, während die beiden übrigen noch vertauschbar sind. Man kann auch vorschreiben, daß die Elemente einer beliebigen Zeile oder Spalte entweder in die untere Zeile oder in die zweite Spalte kommen sollen. Dies ist wichtig, wenn 2 Elemente konstant sind. Man hat dann die Wahl, entweder ξ_s oder F_0 konstant zu machen. Betrachtet man immer G als die gesuchte Funktion, so sieht man, daß bei den letzten 4 Formen die gesuchte Funktion, die Rolle von f , die gegebene die Rolle von F übernommen hat. Solange man die Lösung mit Hilfe einer einzigen Geraden findet, können hieraus aber keine Schwierigkeiten entstehen. Beispiel 2 wird auch einen Fall zeigen, worin einer der Koeffizienten gesucht ist.

6. Sonderfälle. Ist nur ein Koeffizient veränderlich, so kann man immer dafür sorgen, daß er den Platz von m einnimmt (vgl. Beispiel 1). Ist dann $q \neq 0$, so kann man $f_0 = 0$ wählen. Man ersieht aus (7), daß dann ξ_s konstant ist und $\eta_s = v \left(\frac{m}{p} - \frac{n}{q} \right)$. Man erhält also auf einer Geraden die verschobene Skala der Funktion m in der Einheit $\frac{v}{p}$.

Bei zwei unabhängig voneinander veränderlichen Koeffizienten hat man zu unterscheiden den Typ, bei dem die konstanten Elemente diagonal stehen, von dem Typ, bei dem sie in einer Zeile oder Spalte stehen. Im zweiten Fall empfiehlt es sich meist, die Funktion so umzuformen, daß n und q konstant sind (bei Beispiel 2 war das von vornherein der Fall). F_0 ist dann konstant. ξ_s hängt nur von einem veränderlichen Koeffizienten (p) ab (wenn $f_0 = 0$), man erhält für ξ_s eine gewöhnliche Skala. In η_s , das ursprünglich von beiden veränderlichen Koeffizienten abhängt, kann man also p durch ξ_s ausdrücken, so daß man eine Gleichung zwischen ξ_s , η_s und m , d. h. eine Kurvenschar mit dem Parameter m enthält: die 3 Veränderlichen α , p und m sind dann getrennt. (In Beispiel 2 besteht die Kurvenschar aus einem Strahlenbüschel.)

Stehen die konstanten Elemente diagonal, so empfiehlt es sich im allgemeinen, m und q zu Konstanten zu machen, da q sowohl bei F_0 als bei ξ_s vorkommt. Ist $q \neq 0$, $f_0 = 0$, so erhält man aus (7)

$$\xi_s = -\mu \frac{q}{p} \quad (p)$$

eine Schar zur η -Achse paralleler Geraden für p , und

$$\eta_S = \nu \left(\frac{m}{p} - \frac{n}{q} \right) = -\frac{\nu}{\mu} \cdot \frac{m}{q} \xi_S - \frac{\nu}{q} \cdot n \quad (n)$$

eine Schar paralleler Geraden mit dem Parameter n .

Sind 3 Koeffizienten unabhängig voneinander veränderlich, so bekommt man schon ziemlich schwierige Verhältnisse.

Oft treten wesentliche Vereinfachungen auf, wenn die Koeffizienten nicht willkürlich veränderlich, sondern von einer oder zwei unabhängigen Veränderlichen abhängig sind. Hängen die Koeffizienten von einer Veränderlichen γ ab, so erhält man nach (6) oder (7) ξ_S und η_S als Funktionen von γ . Durch Elimination von γ ergibt sich die Gleichung einer Kurve, des Trägers der Punkte S . Haben wir 2 Veränderliche γ und δ , so erhält man durch Elimination je einer davon eine Kurvenschar, die die andere als Parameter enthält. Man erhält so ein Netz, welches den Punkt S aus γ und δ zu bestimmen gestattet¹⁾. Bei 3 Veränderlichen muß man im allgemeinen ξ_S und η_S gesondert bestimmen, wodurch die Rechentafel schwerfällig wird.

7. Gebrochene rationale Funktionen höheren Grades mit konstanten Koeffizienten. Von großer Bedeutung ist der Fall, daß die Koeffizienten m, n, p, q von derselben Veränderlichen α abhängen wie $f(\alpha)$, auf diese Weise gelingt es nämlich sich von der linearen Form frei zu machen. Wir betrachten hiervon einen Sonderfall: es sei $m = \varphi(\alpha)$, $p = \psi(\alpha)$, dagegen n und q konstant und $q \neq 0$, also

$$F = \frac{\varphi \cdot f + n}{\psi \cdot f + q}.$$

Man erhält für $f_0 = 0$

$$\xi_S = -\mu \frac{q}{\psi} \quad (\psi)$$

$$\eta_S = \nu \left(\frac{\varphi}{\psi} - \frac{n}{q} \right) = -\frac{\nu}{\mu} \frac{\varphi}{q} \cdot \xi_S - \nu \frac{n}{q}$$

oder

$$\eta_S + \nu \frac{n}{q} = y_S = -\varphi \cdot \frac{\nu}{\mu} \frac{1}{q} \cdot \xi_S \quad (\varphi)$$

(ψ) stellt ein System von Parallelen zur η -Achse dar. Die Skala, die das System auf der ξ -Achse abschneidet, kann aus der Funktionsskala von ψ als reziproke leicht projektiv gewonnen werden. (φ) stellt ein Strahlenbüschel durch O_η (Abb. 2) dar, das auf der Geraden $\xi = -\mu q$ die Funktionsskala $y_S = \nu \varphi$ ausschneidet. Die Rechentafel ist also aus den 3 Funktionsskalen für f, φ, ψ leicht herzustellen. Bisher ist noch kein Gebrauch davon gemacht, daß alle 3 Funktionen von α abhängen sollen. Wir spezialisieren den Fall noch weiter. Es soll sein: $f(\alpha) = \alpha$, $\varphi(\alpha)$ und $\psi(\alpha)$ ganze rationale Funktionen vom Grade κ bzw. λ . $F(\alpha)$ ist dann eine gebrochene rationale Funktion, deren Zähler vom Grade $\kappa + 1$, deren Nenner vom Grade $\lambda + 1$ ist. Damit ist die Aufgabe, die Skala einer gebrochenen rationalen Funktion zu zeichnen, auf die einfachere zurückgeführt zwei Skalen zu zeichnen, deren Grad je um 1 niedriger als der des Zählers und Nenners ist. Methoden für die Konstruktion der Skalen ganzer rationaler Funktionen sind bekannt. Die Elimination von α er-

¹⁾ Ein Beispiel dafür findet sich in meiner erwähnten früheren Arbeit.

gibt als Ort des Projektionspunktes eine Kurve, soll hier aber nur für den Fall $\varkappa = \lambda = 1$ durchgeführt werden, also für die Funktion

$$F(\alpha) = \frac{a_1 \alpha^2 + a_0 \alpha + n}{b_1 \alpha^2 + b_0 \alpha + q}.$$

Hier ist demnach

$$\varphi(\alpha) = a_1 \alpha + a_0,$$

$$\psi(\alpha) = b_1 \alpha + b_0.$$

Mit $f_0 \equiv \alpha_0 = 0$ folgt

$$\xi_S = -\mu \frac{q}{b_1 \alpha + b_0},$$

$$y_S = -\frac{\nu}{\mu} \cdot \frac{1}{q} (a_1 \alpha + a_0) \xi_S.$$

Die Elimination von α ergibt

$$y_S = \frac{\nu}{\mu} \cdot \frac{\left| \begin{array}{c} a_1 a_0 \\ b_1 b_0 \end{array} \right|}{b_1 q} \xi_S + \nu \frac{a_1}{b_1}$$

oder

$$\eta_S = \frac{\nu}{b_1 q} \left(\left| \begin{array}{c} a_1 a_0 \\ b_1 b_0 \end{array} \right| \cdot \frac{\xi_S}{\mu} + \left| \begin{array}{c} a_1 n \\ b_1 q \end{array} \right| \right) \quad (G)$$

Der Träger ist also eine gerade Linie G . Nun ist ξ_S von α projektiv abhängig, also bilden die S auf G ebenfalls eine von α projektiv abhängige Skala, die man auch durch Projektion der Skala α direkt erhalten kann. Durch Projektion der Skala α auf der ξ -Achse von den entsprechenden Punkten S der Geraden G erhält man dann auf der η -Achse von O_η aus gemessen die Funktionsskala F (Beispiel 3).

Beispiel 1. Fall eines veränderlichen Koeffizienten. Formel für den Dampfverbrauch für die Stunde und Pferdestärke in der verlustfreien Maschine bei trockenem Dampf¹⁾.

$$D = \frac{6,76 - 0,9 \log p_0}{\log p - \log p_0}.$$

p = Dampfdruck vor Eintritt in die Maschine.

p_0 = Gegendruck (Kondensator oder Auspuffdruck).

Der veränderliche Koeffizient $\log p$ wird an die Stelle m gebracht, indem man schreibt:

$$\frac{1}{D} = \frac{\log p \left(\frac{1}{\log p_0} \right) - 1}{6,76 \left(\frac{1}{\log p_0} \right) - 0,9}.$$

Man hat dann das System

$$\begin{pmatrix} \log p, & -1 \\ 6,76, & -0,9 \end{pmatrix}$$

und erhält mit $\mu = \nu = 1$; $f_0 = \frac{1}{\log p_0} = 0$ nach (7)

$$\xi_S = \frac{0,9}{6,76} = 0,133,$$

$$\eta_S = -1,111 + \frac{\log p}{6,76}.$$

¹⁾ Hütte, 23. Aufl., Bd. I, S. 424. Diese Funktion spielt auch eine Rolle bei der Berechnung des Ausströmens trocken gesättigten Dampfes. Hütte S. 446.

Der Punkt O_η ist bestimmt durch

$$\eta = -F_0 = -1,111.$$

Die Tafel, welche sich so ergibt (Abb. 3), ist praktisch unbrauchbar, da die Skala für p zu klein und die Skala für p_0 sich mit dem nutzbaren Teil bis ins Unendliche erstreckt. Der nutzbare Teil der Tafel ist schraffiert. Eine Verbesserung wird erzielt, dadurch, daß man ein zentralperspektivisches Bild der Tafel benutzt.

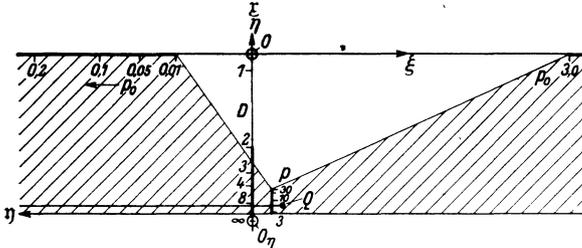


Abb. 3.

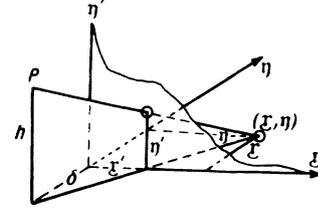


Abb. 4.

Da es hier nicht darauf ankommt, diese Abbildung allgemein zu behandeln, sondern nur auf die bestehenden Möglichkeiten durch ein Beispiel hinzuweisen, sei folgender spezielle Fall zugrunde gelegt. Man denke sich (Abb. 4) die abzubildende Zeichnung auf einer Ebene ausgebreitet und senkrecht dazu die Bildebene errichtet. Die Schnittgerade sei für die Ebene der ursprünglichen Zeichnung die ξ -Achse, für die Bildebene die ξ' -Achse. Man lege durch den Punkt P , von dem aus man projizieren will, die zur ξ -Achse senkrechte Ebene, welche die Bildebene in der η' -Achse, die andere Ebene in der η -Achse schneidet. Wir haben dann die beiden ebenen Koordinatensysteme ξ, η und ξ', η' und das räumliche System $\xi \equiv \xi', \eta, \eta'$. In diesem möge P die Koordinaten haben $\xi \equiv \xi' = 0, \eta = -\delta, \eta' = h$. Man leitet durch Aufstellen der Proportionen leicht ab, daß durch eine Gerade der Punkt ξ, η des Originals projiziert wird in ξ', η' der Bildebene mit

$$\xi' = \frac{\delta \xi}{\eta + \delta},$$

$$\eta' = \frac{h \eta}{\eta + \delta}.$$

Die anschauliche Vorstellung, die man von einer derartigen zentralperspektivischen Abbildung hat, erlaubt oft sofort recht brauchbare Werte von δ und h zu wählen. In unserer Abb. 3 denke man sich den Projektionspunkt in der Entfernung 1 senkrecht über Q ($\xi = 0,2, \eta = -1$) und die Bildebene in der η -Achse aufgerichtet. Zur Transformation auf das Koordinatensystem η, ξ dienen dann die Formeln

$$\xi = \eta + 1, \quad \eta = -\xi;$$

ferner ist $\delta = 0,2, h = 1$. Wir setzen noch $\eta' = \xi'$ und $\xi' = \eta'$ und erhalten die Transformationsformel

$$\xi' = \frac{-h \xi}{-\xi + \delta} = \frac{\xi}{0,2 - \xi},$$

$$\eta' = \frac{\delta(\eta + 1)}{-\xi + \delta} = \frac{0,2(\eta + 1)}{0,2 - \xi}.$$

Der D Träger, $\xi = 0$, geht über in $\xi' = 0$, die η' -Achse. Auf dieser ist $\eta' = \eta + 1 = \frac{1}{D} - 0,111$: die D -Skala wird nur verschoben (Abb. 5). Für den p_0 -Träger,

die ξ -Achse: $\eta = 0$ erhalten wir durch Elimination von ξ die Gleichung der geraden Linie $-\xi' + \eta' - 1 = 0$. Da in diesem Fall $\xi' = \frac{\xi}{0,2 - \xi}$ ist, mit $\xi = \frac{1}{\log p_0}$, und die eben bestimmte Gerade den Winkel $\chi = 45^\circ$ mit der ξ' -Achse bildet, erhalten wir auf der Geraden eine Skala

$$\zeta = \frac{\xi'}{\cos \chi} = \frac{\sqrt{2}}{0,2 \log p_0 - 1},$$

welche sich aus der Skala $\log p_0$ projektiv ableiten läßt. (ζ ist vom Schnittpunkt mit der η' -Achse aus zu zählen.) Der p -Träger ist bestimmt durch $\xi_s = 0,133$; also ist

$$\xi'_s = \frac{0,133}{0,067} = 1,987.$$

Hierauf ist nach Einsetzen von η_s und ξ_s

$$\eta'_s = \frac{0,2}{0,067} \left(-0,111 + \frac{\log p}{6,76} \right) = -0,332 + 0,442 \log p.$$

Die dadurch bestimmte Tafel ist in Abb. 5 skizziert. Sie zeigt gegenüber Abb. 3 eine wesentliche Besserung. Den letzten Mangel, daß die Ausdehnung in der η' -Richtung zu klein ist, kann man dadurch beheben, daß man den Maßstab in dieser Richtung vergrößert. Man setze etwa $\eta'' = 10 \eta'$. Es geht dann χ von 45° zu $\text{arc tg } 10$ über. Man hat also

$$\zeta = \frac{10,05}{0,2 \log p_0 - 1}$$

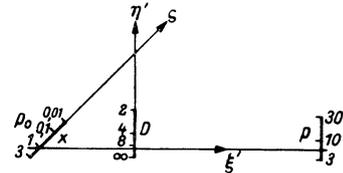


Abb. 5.

zu setzen. Es ergibt sich Abb. 6, welche noch nicht die beste Form der Tafel darstellt. Es gibt Methoden, nach denen man eine projektive Transformation finden kann, die ein beliebiges Viereck — etwa das in Abb. 5 oder 6 durch $p_0 = 0,05$; $p_0 = 3$; $p = 3$; $p = 35$ bestimmte — in ein Rechteck von vorgeschriebener Form verwandeln. Hierüber findet man z. B. bei d' Ocagne Auskunft.

Zahlenbeispiel: $p = 10$, $p_0 = 0,7$. Man findet nach Abb. 6, daß D sehr dicht unter 6 liegt. Zur genaueren Ablesung müßte die Skala dichter unterteilt werden. Berechnet wurde mit dem Rechenschieber 5,97.

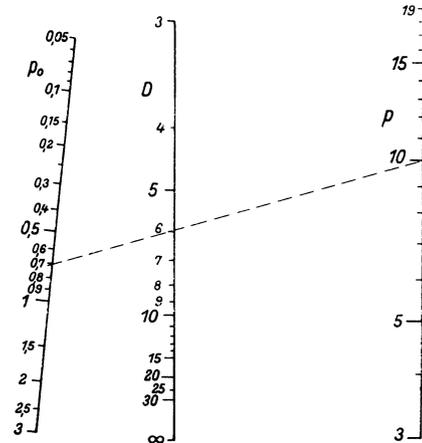


Abb. 6.

Beispiel 2. Fall zweier veränderlicher Koeffizienten. Verhältnis der Ausflußzeit Z_{fl} einer Flüssigkeit im Vergleich mit der Ausflußzeit Z_{W} von Wasser¹⁾ (Abb. 7).

$$\left(\frac{Z_{\text{fl}}}{Z_{\text{W}}} \right)^2 = \frac{\lambda_{\text{fl}} \frac{l}{d} + 1}{\lambda_{\text{W}} \frac{l}{d} + 1}.$$

l = Länge in m, d = Durchmesser in m,
 λ = Reibungszahl für kreisförmigen Querschnitt.

¹⁾ Hütte 23. Aufl., Bd. I, S. 287.

Hier ist $\frac{l}{d}$ als $f(l, d)$ zu wählen. Die Binärskala $\frac{l}{d}$ kann durch eine Rechentafel (z. B. in Parallelkoordinaten) dargestellt werden. $\frac{l}{d}$ sei der Einfachheit halber

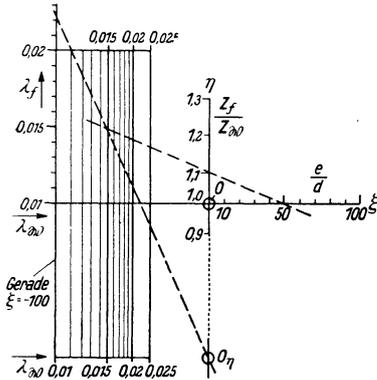


Abb. 7.

als gegebener Wert behandelt. Gesucht ist hier im allgemeinen der Koeffizient $\lambda_{\mathfrak{F}}$.

Das System ist
$$\begin{pmatrix} \lambda_{\mathfrak{F}}, & 1 \\ \lambda_{\mathfrak{B}}, & 1 \end{pmatrix},$$

also folgt mit $\mu = \nu = 1$ und $f_0 = 0$

$$\xi_S = -\frac{1}{\lambda_{\mathfrak{B}}} \quad (\lambda_{\mathfrak{B}}),$$

$$\eta_S = \frac{\lambda_{\mathfrak{F}}}{\lambda_{\mathfrak{B}}} - 1 \quad \text{oder} \quad \eta_S + 1 = -\lambda_{\mathfrak{F}} \cdot \xi_S \quad (\lambda_{\mathfrak{F}}).$$

$(\lambda_{\mathfrak{F}})$ gibt ein Strahlenbündel durch O_η , das auf der Geraden $\xi = -100$ die Skala

$$\eta + 1 = 100 \lambda_{\mathfrak{F}}$$

und auf der Abszissenachse die Skala

$$\xi = -\frac{1}{\lambda_{\mathfrak{F}}}$$

abschneidet. Letztere ist mit der Skala für $\lambda_{\mathfrak{B}}$ auf der ξ -Achse identisch. Man kann sich also die Zeichnung des Strahlenbündels für $(\lambda_{\mathfrak{F}})$ sparen. Man spannt den Faden, mit dem man die Ablesung macht, von O_η über den Punkt der Skala für $\lambda_{\mathfrak{B}}$ auf der ξ -Achse oder für $\lambda_{\mathfrak{F}}$ auf der Geraden $\xi = -100$ und erhält so den Strahl, den man gerade braucht. Man ersieht aus der Zeichnung sofort, wie sich aus der regulären Skala auf der Geraden $\xi = -100$ durch Projektion von O_η aus die Skala für $\lambda_{\mathfrak{B}}$ und $\lambda_{\mathfrak{F}}$ auf der ξ -Achse ergibt. Auf der η -Achse erhält man als Ergebnis den Wert $\left(\frac{Z_{\mathfrak{F}}}{Z_{\mathfrak{B}}}\right)^2$. Um den Wert von $\frac{Z_{\mathfrak{F}}}{Z_{\mathfrak{B}}}$ zu erhalten, wird man also eine quadratisch fortschreitende Meßskala anbringen. In Abb. 7 ist die Einheit für η nachträglich 100 mal so groß gemacht als für ξ . Da $\frac{Z_{\mathfrak{F}}}{Z_{\mathfrak{B}}}$ zwischen sehr weiten Grenzen schwankt, kann man die Skalen für einen zweiten Bereich auf der anderen Seite der η -Achse anbringen. O_η rückt dann aber immer näher an O heran, so daß man bald dazu übergehen muß, die Strahlen für $\lambda_{\mathfrak{F}}$ wirklich zu zeichnen, um genaue Werte zu erhalten.

Gesucht ist meist $\lambda_{\mathfrak{F}}$.

Zahlenbeispiel: $\frac{l}{d} = 50$, $\frac{Z_{\mathfrak{F}}}{Z_{\mathfrak{B}}} = 1,1$, $\lambda_{\mathfrak{B}} = 0,015$. Ergebnis 0,0223.

Beispiel 3. Gebrochene rationale Funktion zweiten Grades. Solche Funktionen spielen als Resonanzkurven eine große Rolle bei erzwungenen Schwingungen. Hort¹⁾ gibt z. B. für die Auslenkung ϱ des Spurbunktes bei Biegungsschwingungen rasch rotierender Wellen die Formel

$$\varrho = \frac{l \omega^2}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + b'^2 \omega^2}},$$

ω = Kreisfrequenz der Störungsfunktion, α = Eigenfrequenz.

¹⁾ Wilh. Hort: Technische Schwingungslehre II. Aufl., 1922, S. 215.

Es ist also

$$\left(\frac{\varrho}{e}\right)^2 = \frac{n^2}{n^2 - cn + 1},$$

worin

$$\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 = n \quad \text{und} \quad 2 - \frac{b'^2}{\alpha^2} = c$$

ist. Setzt man

$$\alpha = n, \quad a_1 = b_1 = q = 1, \quad a_0 = n = 0 \quad \text{und} \quad b_0 = -c, \quad \mu = \nu = 1,$$

so erhält man nach (G)

$$\begin{aligned} \eta_s &= y_s = -c\xi_s + 1, \\ c\xi_s + \eta_s + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Die Gerade G schneidet also auf der ξ -Achse das Stück $\frac{1}{c}$, auf der η -Achse das Stück 1 ab (Abb. 8). Ferner ist $\xi_s = \frac{1}{c-n}$. Diese Schar von Parallelen zur η -Achse schneidet auf G die Skala

$$\zeta = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c-n}$$

ab. Wir konstruieren diese Funktion besonders. Die Rolle von $f(\alpha) = f(n)$ übernimmt hier n selber. Das Koeffizientensystem ist

$$\begin{pmatrix} 0, & \sqrt{1+c^2} \\ -1, & c \end{pmatrix}.$$

Wir benutzen ein Koordinatensystem ξ', η' , es folgt mit $f_0 = n_0 = 0$ für den Projektionspunkt S' :

$$\begin{aligned} \xi'_s &= c, \\ \eta'_s &= -\sqrt{1 + \frac{1}{c^2}}, \\ \zeta_0 = F_0 &= \sqrt{1 + \frac{1}{c^2}} = \overline{RO_1} \quad \text{in Abb. 8.} \end{aligned}$$

Da die Werte ζ von R aus zu messen sind, fällt also der Anfangspunkt O_1 des Systems $\xi'\eta'$ auf die ξ -Achse. Man bestätigt leicht, daß dann die Gerade RS' auf der ξ -Achse das Stück $OT = c$ abschneidet. Da $RS' = c$ ist, ergibt sich hieraus eine überaus einfache Konstruktion der ganzen Anordnung. Man zeichne auf der ξ -Achse des $\xi\eta$ -Systems die Skala (II) für n und trage von O in der negativen ξ -Richtung c ab. Man erhält so T und auf RT [$R \equiv (\xi = 0, \eta = 1)$] S' und durch das Lot in R den Punkt O_1 . Auf dem Lot in O_1 auf O_1R , der ξ' -Achse, zeichne man die Skala (I) für n . Um nun den Punkt unserer Skala $F = \left(\frac{\varrho}{e}\right)^2$ z. B. für $n = 0,5$ zu finden, verbinde man S' mit 0,5 auf I und gehe vom Schnittpunkt Q mit G über 0,5 von II bis zur η -Achse. Man erhält so sehr bequem die gesamte Funktionsskala für $\left(\frac{\varrho}{e}\right)^2$, von welcher man sofort zur Darstellung durch eine Kurve übergehen kann.

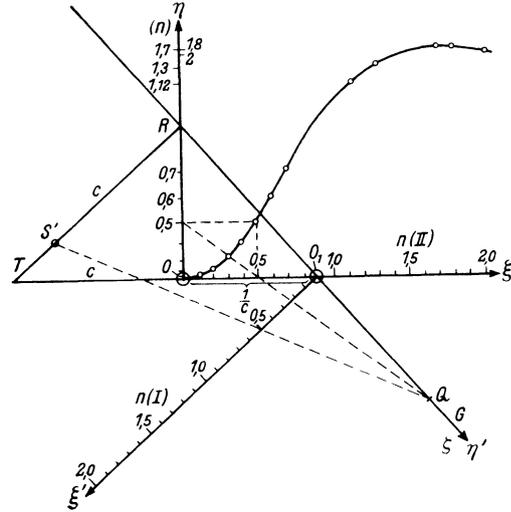


Abb. 8.

Die Funktionsskala ist, wie es sein muß, mit n , der unabhängigen Veränderlichen, beziffert. Die Meßskala ist weggelassen. Würde man auf der ξ -Achse noch eine abgebildete Meßskala $\sqrt{n} = \frac{\omega}{\alpha}$ und auf der η -Achse eine quadratische Skala anbringen, so könnte man leicht den Übergang zu der Form der Resonanzkurve, welche nicht $\left(\frac{\rho}{e}\right)^2$ als Funktion von $n = \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2$, sondern $\frac{\rho}{e}$ als Funktion von $\frac{\omega}{\alpha}$ darstellt, machen. Für manche Zwecke ist gerade die hier gefundene Form der Resonanzkurve von Wert.

Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wird die Erweiterung von perspektivischen Skalen zu Rechentafeln dargestellt und allgemein eine Theorie der betreffenden nomographischen Methoden gegeben. Die Anwendungsmöglichkeiten dieser Tafeln werden erörtert und durch Beispiele belegt. Die Ergebnisse der Überlegungen sind kurz folgende:

1. Eine linear gebrochene rationale Funktion läßt sich bekanntlich durch eine Skala darstellen, die durch Projektion von einem festen Punkt aus gewonnen werden kann. Sind die Koeffizienten m, n, p, q der Funktion [Gl. (1)] von Veränderlichen abhängig oder selbst veränderliche Größen, so wird die Lage des Projektionspunktes eine Funktion dieser Veränderlichen. Die Funktionsskala geht dadurch in eine Rechentafel über.

2. Derartige Tafeln sind häufig einfacher zu entwerfen und zu handhaben als die nach den bisher üblichen Methoden hergestellten. Hierzu ist erforderlich, daß die Zahl der veränderlichen Koeffizienten und gegebenenfalls auch die Zahl der Veränderlichen, deren Funktionen die Koeffizienten sind, ziemlich gering ist. Am günstigsten sind die Fälle, bei denen entweder n und q oder p und q [Gl. (1)] konstant sind.

3. Gewisse Umformungen gestatten häufig, der Funktion eine geeignete Form zu geben. Unter Umständen lassen sich die Tafeln ohne weiteres zur Ermittlung der Funktion f oder eines Koeffizienten an Stelle der Funktion F [Gl. (1)] verwenden.

4. Die parallel- oder zentralperspektivische Abbildung gestattet häufig, den einzelnen Skalen günstige Abmessungen zu geben, wie an einem Beispiel erläutert wird.

5. Die Koeffizienten m, n, p, q können auch Funktionen derselben Veränderlichen α sein, von der $f(\alpha)$ abhängt. Man erhält dann an Stelle einer Rechentafel die Konstruktion der Skala einer Funktion, die nicht mehr linear ist. Unter diesen Fällen haben die gebrochenen rationalen Funktionen höheren Grades mit konstanten Koeffizienten besondere Bedeutung.

Über die Vorausbestimmung des Dauerkurzschlußstromes von Wechselstromgeneratoren.

Von **Reinhold Rüdenberg.**

Mit 3 Textabbildungen.

Mitteilung aus dem Dynamowerk der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H.

Eingegangen am 15. Februar 1924.

In großen elektrischen Leitungsnetzen entstehen häufig Kurzschlüsse, die auf Isolationsdurchschläge, auf Fremdkörper, auf Leitungsbrüche oder Fehlschaltungen zurückzuführen sind und die wegen der hohen Kurzschlußstromstärke eine Reihe verderblicher Wirkungen äußern. Man bestimmt den Dauerkurzschlußstrom, der nach Ablauf der ersten Stromspitzen so lange bestehen bleibt, wie der Kurzschluß andauert, häufig dadurch, daß man die wirksame Spannung durch die Impedanz der Kurzschlußbahnen dividiert. Je nachdem man hierbei die Spannung oder die Impedanz definiert, können aber leicht erhebliche Abweichungen von den wirklichen Werten der Kurzschlußströme entstehen. Da die Bemessung der Leitungen und Apparate großer Anlagen wesentlich durch die Stärke der Kurzschlußströme bedingt ist, so soll eine einfache graphische Methode zur genauen Bestimmung der Dauerkurzschlußströme entwickelt werden.

In Abb. 1 ist das typische Schaltbild für einen Kurzschlußvorgang dargestellt. Ein Generator, der von dem Gleichstrom J_μ erregt wird, liefert die Spannung E und den Strom J . In dem Kurzschlußleitungsbranche mit der Selbstinduktion L_k entwickelt sich der Kurzschlußstrom J_k , dessen genaue Stärke zu bestimmen ist. Würde die Sammelschienenspannung konstant gleich E_0 bleiben, so entstände unter ihrer Wirkung ein Kurzschlußstrom

$$J_{k\infty} = \frac{E_0}{\omega L_k}, \quad (1)$$

wobei ω die Kreisfrequenz des Netzes bezeichnet. In Wirklichkeit durchfließt dieser Strom jedoch auch den Generator und bewirkt eine Erniedrigung von dessen Klemmenspannung, sowohl durch den Spannungsabfall in seiner Streuinduktion S als auch durch die Ankerrückwirkung.

Zunächst wollen wir den einfachsten Fall betrachten, daß der Generator vor dem Kurzschluß unbelastet war, und daß der Kurzschlußkreis keinen erheblichen Ohmschen Widerstand besitzt. Die Generatorspannung ist dann vor dem Kurzschluß durch die magnetische Leerlaufcharakteristik

$$E = f(J_n) \quad (2)$$

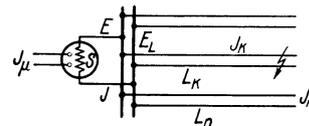


Abb. 1.

gegeben, die in Abb. 2 dargestellt ist. Auch bei beliebigen Belastungen stellt diese Linie stets die im Generator erzeugte EMK abhängig von den magnetisierenden Strömen dar. Da der Kurzschlußstrom im rein induktiven Kreise um 90° phasenverschoben zur Spannung ist, so wirkt er im Generator stark entmagnetisierend, seine

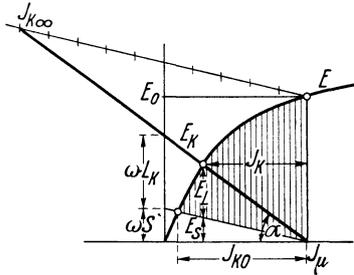


Abb. 2.

Wirkung ist daher von der des erregenden Gleichstromes im Läufer in Abzug zu bringen. In der Streuinduktion der Maschine und der Selbstinduktion des Kurzschlußkreises erzeugt der Kurzschlußstrom eine Spannung

$$E_k = E_S + E_L = J_k (\omega S + \omega L_k), \quad (3)$$

deren Abhängigkeit vom Kurzschlußstrom durch die starke gerade Linie in Abb. 2 dargestellt wird. Dabei ist der Ständerstrom durch Multiplikation mit dem Verhältnis der Windungszahlen auf den Läuferstrom

umgerechnet und ist in entgegengesetzter Richtung wie dieser aufgetragen, um sofort den wirksamen Erregerstrom zu geben.

Die beim wirklichen Kurzschluß vorhandene EMK liegt nun einerseits auf der Leerlaufcharakteristik E , die den Einfluß des Generators und seiner Sättigung widerspiegelt, andererseits liegt sie auf der Kurzschlußcharakteristik E_k , die die Spannungsverhältnisse im äußeren und inneren Stromkreis wiedergibt. Der Schnittpunkt beider Linien stellt den tatsächlichen Arbeitspunkt dar und liefert nach Abb. 2 sofort die Größe des auftretenden Kurzschlußstromes J_k sowie die Aufteilung der EMK auf die innere Streuspannung E_S und die Spannung des äußeren Kurzschlußkreises E_L . Diese letztere bildet gleichzeitig die Klemmenspannung oder Sammelschienenspannung des Netzes.

Die Neigung der Kurzschlußcharakteristik ist gegeben durch

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_k}{J_k} = \omega S + \omega L_k, \quad (4)$$

sie läßt sich also bequem zeichnen, indem man auf der Ordinatenachse die Streuinduktanz und die Induktanz des Kurzschlußkreises im geeigneten Maßstabe abträgt. Je größer die letztere ist, je weiter also der Kurzschluß von der Zentrale entfernt liegt, um so steiler verläuft die Kurzschlußlinie, um so geringer ist daher der Kurzschlußstrom, und um so größer bleibt die Klemmenspannung, die innerhalb des schraffierten Bereiches der Abb. 2 nach und nach die verschiedensten Lagen annehmen kann.

Bei Klemmenkurzschluß ohne äußere Induktanz geht die Kurzschlußcharakteristik in die Streulinie E_S über, die den maximal möglichen Dauerkurzschlußstrom J_{k0} auf der Leerlaufcharakteristik abschneidet. Verlängert man die Kurzschlußlinie über die Ordinate hinaus, bis zum Schnitt mit der gestrichelten Geraden, die unter der Neigung der Streucharakteristik durch den Leerlaufpunkt der Magnetisierungslinie gezogen ist, so erhält man andererseits den Kurzschlußstrom $J_{k\infty}$, entsprechend Gleichung (1), der bei unendlich starker Zentrale auftreten würde. Wir sehen, daß der tatsächliche Kurzschlußstrom einerseits viel geringer ist als dieser Grenzwert und auch geringer als der Strom bei direktem Klemmenkurzschluß, daß er aber andererseits durch die magnetische Sättigung und die Krümmung der Leerlaufcharakteristik nicht unwesentlich vergrößert wird.

Um die Maßstäbe der Abb. 2 richtig anzusetzen, kann man beachten, daß das nicht schraffierte Streudreieck mit dem Klemmenkurzschlußstrom J_{k0} und seiner Streuspannung E_S für jeden Generator zahlenmäßig bekannt ist. Man braucht daher nur die äußere Induktanz ωL_k mit der Streuinduktanz ωS zu vergleichen, um die richtige Lage der Kurzschlußcharakteristik im Diagramm zu erhalten, die den tatsächlichen Kurzschlußstrom J_k im Verhältnis zu J_{k0} bei Klemmenkurzschluß abschneidet.

War der Generator vor Eintritt des Kurzschlusses induktiv belastet, so können wir die Vorbelastung des Netzes nach Abb. 1 durch eine konstante Selbstinduktion L_n darstellen, die sich aus dem Quotienten von Spannung und Strom ergibt. Der Erregerstrom bei Last ist entsprechend Abb. 3 größer als bei Leerlauf, weil Streuung und Ankerrückwirkung des Netzstromes nach dem stark gezeichneten Potierschen Dreieck eine erhebliche Vermehrung der Erregung erfordern. Der gesamte den Generator nach dem Kurzschluß durchfließende Strom setzt sich jetzt aus Netzstrom und Kurzschlußstrom zusammen

$$J = J_n + J_k. \quad (5)$$

Er erzeugt sowohl in der Kurzschlußbahn wie auch in der Vorbelastung des Netzes und im Generator entsprechend Abb. 1 eine Spannung

$$E_k = \omega S J + \omega L_k J_k = \omega S J + \omega L_n J_n. \quad (6)$$

Daraus erhält man für die Neigung der gesamten Netz- und Kurzschlußcharakteristik die Beziehung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_k}{J} = \omega S + \frac{\omega L_k \cdot \omega L_n}{\omega L_k + \omega L_n}. \quad (7)$$

Dies ist in Abb. 3 wieder als gerade Linie eingetragen, und zwar rückwärts vom Belastungserregerstrom aus, und liefert durch den Schnittpunkt mit der Leerlaufcharakteristik des Generators den wirklichen Arbeitspunkt der Anlage.

Man muß jetzt also außer der Streuinduktanz noch die Induktanz der Parallelschaltung von Netz- und Kurzschlußbahnen auf der Ordinatenachse auftragen, um die richtige Netzkurzschlußcharakteristik zu erhalten. Der Arbeitspunkt liefert sofort die innere Streuspannung E_S sowie die Klemmenspannung E_L beim Kurzschluß und den gesamten Maschinenstrom J . Um den Strom J_k an der Kurzschlußstelle zu erhalten, muß man beachten, daß der Netzstrom proportional der verminderten Klemmenspannung geringer wird, was durch die schräge Gerade für J_n in Abb. 3 dargestellt wird. Für jede Lage der Kurzschlußcharakteristik E_k stellt alsdann die schraffierte Fläche mit ihrer Breite den Kurzschlußstrom und mit ihrer Höhe die verbleibende Klemmenspannung dar.

Bei vollständigem Netzkurzschluß an den Generatorklemmen geht die Kurzschlußlinie in die Streucharakteristik über und ergibt wieder den größtmöglichen Kurzschlußstrom J_{k0} , der jetzt wegen der Vollasterregung wesentlich größer ist als früher bei Leerlauf. Bei modernen Turbogeneratoren und schnellaufenden Wasserkraftgeneratoren pflegt dieser Klemmenkurzschlußstrom bei Normalbelastung etwa das 1,5- bis 2fache des Normalstromes zu betragen, bei langsamlaufenden Schenkelgenerator steigt er bis zum 3fachen an. Bei großer Induktanz der Kurzschluß-

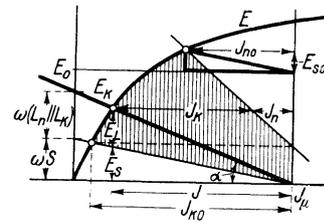


Abb. 3.

bahn dagegen hebt sich die Kurzschlußlinie schließlich bis zur Spitze des Potierschen Dreiecks, der Kurzschlußstrom wird alsdann Null, der Netzstrom ist J_{n0} , und die Klemmenspannung E_L wird mit der des normalen Netzes E_0 identisch.

Die Maßstäbe ergeben sich jetzt am einfachsten, wenn man die Kurzschlußströme, Streuspannungen und Induktanzen auf das Potiersche Dreieck bezieht, das für jeden Generator bekannt ist. Man zieht also durch den Magnetisierungspunkt J_μ eine Parallele zur Hypotenuse dieses Dreiecks und schreibt an ihren Schnitt mit der Ordinatenachse die bekannte Streuinduktanz des Generators in Ohm an. Damit liegen sofort alle Maßstäbe fest.

Besitzt der äußere Stromkreis erheblichen Widerstand R , etwa bei Kurzschlüssen hinter langen Fernleitungen, so ist die Resultierende aller Spannungen

$$E_k = \sqrt{(E_S + E_L)^2 + E_R^2}. \quad (8)$$

Der Kurzschlußstrom besitzt dann eine geringere Phasenverschiebung als 90° , entsprechend

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{E_S + E_L}{E_R} = \frac{\omega S + \omega L}{R}, \quad (9)$$

die von der Größe des Widerstandes abhängt. L und R bedeuten dabei die resultierenden Selbstinduktionen und Widerstände des vorbelasteten Netzes nebst Kurzschlußzweig entsprechend Gleichung (7). Im Generator wirkt jetzt im wesentlichen nur der Blindstrom

$$J_b = J \sin \varphi_k = J \frac{E_S + E_L}{E_k} \quad (10)$$

entmagnetisierend, so daß die Netzkurzschlußcharakteristik nur über diesem Strom aufgetragen werden darf. Für ihre Neigung erhält man daher

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_k}{J_b} = \omega S + \omega L + R \operatorname{ctg} \varphi_k, \quad (11)$$

wenn man die Werte der Beziehungen (8) bis (10) einsetzt. Die Netzcharakteristik wird daher durch die Wirkung des Leitungswiderstandes gehoben, so daß sich nur geringere Kurzschlußströme entwickeln können.

Die Größe der EMK im Generator wird wieder durch den Schnittpunkt von Netz- und Generatorcharakteristik bestimmt. Die Aufteilung auf Streuspannung und Klemmenspannung sowie auch die Bestimmung der Netz- und Kurzschlußströme nimmt man jetzt am besten analytisch nach den letzten Gleichungen vor, unter Berücksichtigung der verschiedenen Phasenwinkel der Teilspannungen und Teilströme. Solange der Widerstand im Netz und Kurzschlußkreise gering ist, spielt er wegen des kleinen $\operatorname{ctg} \varphi_k$ nach Gleichung (9) keine erhebliche Rolle. Erst wenn sein Wert in die Größenordnung der Induktanzen kommt, kann er die Netzcharakteristik bis auf die doppelte Steilheit und darüber heben. Da der Kurzschlußstrom nach Abb. 2 und 3 bei kleinen Kurzschlußreaktanzen sowieso nicht sehr stark von der Neigung der Netzcharakteristik abhängt, sondern in der Nähe des Klemmenkurzschlußstromes bleibt, so darf man die Wirkung eines geringfügigen Leitungswiderstandes für viele praktische Fälle ganz vernachlässigen.

Sehr häufig bilden sich die Kurzschlüsse nicht dreiphasig, sondern einphasig zwischen nur 2 Leitungen aus, und da hierbei das Windungsverhältnis von Ständer- zu Läuferwicklung kleiner und daher die Rückwirkung geringer ist, so sind die einphasigen Kurzschlußströme wesentlich größer als die bei vollständigem, dreiphasigem

Kurzschluß. Um die maximal mögliche Gefährdung in einem Netze zu erhalten, müssen wir die Diagramme der Abb. 2 und 3 daher für einphasigen Kurzschluß zeichnen. Man erhält für Klemmenkurzschluß des Generators dabei etwa die 1,8fachen Ströme wie bei dreiphasigem Schluß. Findet der Kurzschluß gegen den Sternpunkt des Generators statt, z. B. bei Erdschluß eines Netzes mit geerdetem Generatornullpunkt, so wachsen die Ströme gar auf das etwa 2,6fache der dreiphasigen Klemmenkurzschlußströme an. Hierdurch liegt der geänderte Maßstab des Stromes J_{k0} fest.

Selbsttätige Spannungsregler beeinflussen beim Eintritt eines Kurzschlusses die Erregung des Generators im ansteigenden Sinne, da sie ja die Spannung wieder auf den früheren Wert zu bringen suchen. Der Erregerstrom im Diagramm der Abb. 3 wird daher auf sein äußerstes Maß verstärkt, und damit rückt die Kurzschlußcharakteristik nach rechts und bewirkt ein gewaltiges Zunehmen des Kurzschlußstromes im Netz. Da dies höchst unerwünscht und sogar gefährlich ist, so müssen selbsttätige Spannungsregler beim Eintreten des Kurzschlusses unbedingt abgeschaltet werden.

Da der Kurzschlußstrom in jeder Zweigleitung von Abb. 1 bis zur Stärke des Kurzschlußstromes der ganzen Zentrale anwachsen kann, während ihr Normalstrom nur ein gewisser Bruchteil des Normalstromes der ganzen Zentrale ist, so sieht man, daß das Verhältnis von Kurzschlußstrom zu Normalstrom um so größer ist, je schwächer die Zweigleitung ist. Für kleine Abzweige großer Netze ist es daher eine Notwendigkeit, Luftdrosselspulen vorzuschalten, um durch deren Selbstinduktion die Kurzschlußcharakteristik in Abb. 3 zu heben und eine erträgliche Begrenzung der Kurzschlußströme zu erreichen. Andernfalls würden die Schaltapparate zur Beherrschung der Kurzschlußströme unangemessene Größe erhalten müssen. Drosselspulen von 5% Induktanz für den Normalstrom ergeben nach Gleichung (1) einen Grenzwert für den Kurzschlußstrom vom 20fachen Betrage des Normalstromes, der durch den Abfall im Generator noch ein wenig geringer wird.

Die vom Kurzschlußstrom durchflossenen Leitungen erleiden eine starke zusätzliche Erwärmung, die im wesentlichen von der Stromdichte i_k und von der Zeit t abhängt, die bis zum Abschalten der Leitung vergeht. Nennt man den spezifischen Widerstand des Leiters ϱ und seine spezifische Wärme für die Raumeinheit c , so ist die Erwärmung durch den Dauerkurzschlußstrom

$$\vartheta = \frac{\varrho}{c} i_k^2 t, \quad (12)$$

sofern die Abschaltdauer klein gegenüber der thermischen Zeitkonstante der Leitung ist, was bei gefährlichen Kurzschlüssen stets notwendig ist. Rechnet man bei Kupferleitungen mit 2 Amp./mm² Stromdichte für den normalen Strom, so bewirkt der 20fache Kurzschlußstrom in je 10 sec eine Zunahme der Temperatur um etwa

$$\vartheta = \frac{1}{45 \cdot 3,5} (20 \cdot 2)^2 \cdot 10 = 100^\circ \text{C.}$$

Beim 30fachen Kurzschlußstrom wächst die Erwärmung im gleichen Zeitraum um 225° und beim 40fachen Strom gar um 400° C. Im letzteren Falle müßte der Leitungsquerschnitt verstärkt werden. Man erkennt hieraus, wie notwendig eine Begrenzung des Kurzschlußstromes und der Abschaltzeit für den Be-

stand der Leitungen ist, die eine höhere Stoßtemperatur als 200 bis 300° C auf die Dauer nicht ertragen, und wie wichtig daher eine genaue Berechnung der Kurzschlußströme für die Wahl der Leitungsquerschnitte und der Schaltapparate unserer großen Anlagen ist.

Zusammenfassung.

Leitungen und Apparate großer elektrischer Anlagen müssen nach dem Kurzschlußstrom bemessen werden. Zur genauen Bestimmung der Dauerkurzschlußströme wird eine graphische Methode entwickelt, die nicht nur die Selbstinduktion der Leitungen und die Streuung und Ankerrückwirkung der speisenden Generatoren berücksichtigt, sondern auch den wichtigen Einfluß der Sättigung im Generator, der Vorbelastung des Netzes und des Widerstandes der Kurzschlußbahnen. Auf Grund der stets bekannten Leerlaufcharakteristik der Generatoren lassen sich die Kurzschlußströme für beliebige Lagen der Kurzschlußstellen im Netz mit relativ einfachen Hilfsmitteln bestimmen. Zum Schluß wird auf die Wirkung selbsttätiger Spannungsregler, auf den Einfluß der Drosselspulen und auf die Folgen der Kurzschlußströme in bezug auf die Erwärmung der Leitungen hingewiesen, aus der sich die Bestimmung der am Auslöser einzustellenden Abschaltzeit ergibt.

Namenverzeichnis.

[Die fettgedruckten Ziffern beziehen sich auf die Hefte, die anderen Zahlen auf die Seiten.]

- Angerer, E. 1**, 175.
Arnold, C. 1, 212, 217f.
Aston 1, 182.
- Backhaus, H. 2**, 101ff., 207.
Baeyer, A. v. 2, 4, 6.
Bauch, R. 1, 50.
Bauer, B. 1, 231ff.; **2**, 22, 37.
Bauschinger, J. 1, 234, 238.
Becker, H. 1, 243ff.
Beckinsale 2, 22ff., 31f., 34.
Behnken 2, 162.
Behrend, H. 1, 1.
Berg, O. 2, 162.
Biltz, W. 2, 9.
Bloch, O. 1, 95.
Bortkewitsch, L. v. 1, 174.
Bothe, R. 2, 169.
Bouty, E. 1, 165, 170.
Brauns 2, 158.
Breisig, F. 1, 127; **2**, 103.
Broglie, M. de 2, 165.
Broemser, Ph. 2, 66.
Brücke, E. Th. v. 2, 66.
Buchner, E. 2, 5.
Burkhard, P. A. 1, 250.
- Carpenter 1**, 240ff.
Carson, R. 1, 111, 113, 127, 129.
Clark, A. 1, 128.
Collit, 2, 20.
Combe, W. 2, 9.
Crandall 1, 212, 217f.
Curtius, Th. 2, 6.
Czochralski, J. 2, 19.
- De Broglie 2**, 165.
d'Ocagne 2, 193, 197.
Duhme, E. 2, 39ff.
- Einstein, A. 2**, 164.
Ellinger, Ph. 2, 171, 173.
Elöd, E. 1, 175.
Emde, Fr. 1, 32.
Evers, Fr. 1, 251f.
- Farner 2**, 18.
Feldmann, Cl. 1, 130.
Fellinger, Rob. 2, 1.
- Fetkenheuer, B. 2**, 19ff.
Fischer, E. 2, 4, 6.
Fletcher, H. 2, 154.
Frank, J. 1, 165, 181.
 —, **O. 2**, 44, 66.
Fresenius, C. 2, 19.
Freundlich, E. 1, 249.
- Garten, S. 2**, 45, 66.
Gati, B. 1, 109.
Gaul, A. 2, 5.
Gehlhoff, G. 1, 160, 168, 180.
 —, **K. 2**, 45, 66.
Gerdien, H. 1, 189, 226.
Gerlach, E. 1, 139ff.
Graetz, L. 1, 182, 186, 188.
Grotian, W. 1, 182.
Günther-Schulze, A. 1, 188.
Guye, C. E. 1, 185.
- Haase, C. 2**, 22ff.
Haeckel, E. 2, 4.
Hahn, F. 2, 9.
Hahnemann, W. 2, 67.
Hammershaimb, G. 1, 185.
Harries, C. D. 1, 248ff., 253ff.;
2, 1ff., 12ff.
 —, **H. 2**, 5.
Haußer, K. W. 2, 178.
Heaviside, O. 1, 109, 111, 116.
Hecht, H. 2, 67.
Hehl 1, 184.
Helmholtz, H. v. 2, 44, 54, 66.
Hensen, V. 2, 44, 66.
Hermann, L. 2, 44, 54, 66.
Herzog, J. 1, 130.
Heyn, E. 1, 231ff.; **2**, 22, 37.
Hildebrand, A. 2, 5.
Hinze, W. 2, 177ff.
Hofmann, A. W. v. 2, 4.
 —, **Fritz 2**, 7.
 —, **K. A. 2**, 1ff.
Hohorst, G. 2, 20.
Holm, R. 1, 127, 159ff., 187.
Holthusen 2, 163, 167.
Hort, W. 2, 194.
- Jacobson, P. 2**, 5.
Jaeger, R. 2, 177ff.
Jander, Fr. 2, 19.
- Imhof, A. 1**, 144, 150.
- Kaden, H. 1**, 41ff.
Kafka, H. 1, 144ff.
Kann, H. 1, 94.
Keinath, G. 1, 146ff., 155.
Kleeberg, F. 1, 66f., 71, 73.
Knorr, L. 2, 6.
Kohlrausch, F. 2, 177.
Konarsky, A. 2, 19ff.
König, A. 1, 175.
Kopczynski, Th. 1, 94ff.
Körber, 1, 238; **2**, 23.
Kranz, F. W. 2, 156.
Krause, G. 2, 159.
Kreusler, H. 1, 162, 226.
Krijger, L. P. 1, 44.
Krüger, Th. 1, 187.
Küpfmüller, K. 1, 109ff., 130ff.;
2, 153ff., 159f.
Küstner 2, 162.
- Laue, C. 2**, 154f.
Leithäuser, G. 1, 244.
Lenard, Ph. 1, 183; **2**, 165.
Lichte, H. 2, 67.
Loens, H. 2, 3.
Lotz, A. 1, 189.
Lüschen, F. 1, 109ff.
- Mack, R. A. 2**, 155.
Mallison 2, 22.
Masing, Gg. 1, 231ff., 240ff.;
2, 22ff., 33, 37, 38.
Maxwell, J. 1, 122.
Mayer, F. 1, 180f.
Mendes Da Costa, E. 2, 19.
Mercier, P. 1, 185.
Metzler, K. 1, 100ff.
Michalke, C. 1, 22ff.
Moeller, M. 1, 244.
Moore, B. 2, 22, 25f., 31f., 34.
- Nagel, W. 1**, 248f., 253ff.; **2**, 12ff.
Natalis, F. 1, 1ff.
Neubert, P. 1, 163, 168f., 177ff.
- d'Ocagne 2**, 187, 193.
Oelschläger, E. 1, 29ff., 80.

Olmstead, P. G. **1**, 180.
 Orlich, E. **1**, 56.
 Osborne, H. **2**, 153.
 Ostwald, W. **1**, 248f., 251.

Partzsch, A. **1**, 188.
 Paschen, F. **1**, 184.
 Peek, F. W. **1**, 185.
 Pflieger-Haertel, H. **1**, 61ff.
 Pichelmayer **1**, 103.
 Piloty, O. **2**, 5.
 Pipping, H. **2**, 44, 66.
 Pirani, M. **2**, 185.
 Poincaré, H. **1**, 109.
 Polanyi **1**, 239; **2**, 33, 37.
 Pollinger **1**, 250.
 Preece **1**, 212.
 Pummerer, R. **1**, 250f.

Raps, A. **2**, 45, 66.
 Rayleigh, J. W. **2**, 67.
 Regan **2**, 20.
 Reich, M. **1**, 212.
 Reiche, E. **1**, 186.
 Riegger, H. **1**, 190ff., 226ff.;
2, 46, 67ff., 102, 109, 128.
 Rossem, van **1**, 251.
 Rüdberg, R. **2**, 197ff.

Samojloff, A. **2**, 66.
 Schenkel, M. **1**, 61.
 Schmitz **2**, 9f., 20.
 Schumann, W. O. **1**, 186.
 Schüler, H. **1**, 188.
 Schwerdtfeger, W. **2**, 162ff.
 Skinner, C. A. **1**, 184.
 Siemens, Wilh. v. **2**, 5.
 —, Werner v. **2**, 6, 177.
 Stancescu, C. **1**, 185.
 Stark, J. **1**, 180, 184.
 Staudinger **1**, 250.
 Steinmetz, Ch. P. **1**, 67, 138.
 Stock, A. **1**, 226.
 Strecker, F. **2**, 184ff.
 Strindberg, A. **2**, 3.
 Strutt, R. J. **1**, 175.
 Stumpf, C. **2**, 44, 66, 154.

Täuber-Gretlen **1**, 154.
 Thaller, R. **2**, 162ff., 167, 168.
 Thomson, J. J. **1**, 165.
 Thomson-Marx **1**, 165, 184ff.
 Tiede **1**, 226.
 Tiemann, F. **2**, 6.
 Toepler, M. **1**, 185f.
 Trendelenburg, F. **1**, 212ff.;
2, 43ff.
 Tschirch, A. **2**, 18.

Vahle, W. **2**, 178.
 Voller, Fr. **1**, 155.
 Vorwerk, W. **2**, 20.

Wagner, K. W. **1**, 109, 111, 116,
 121f., 137; **2**, 66, 101.
 Wallach, O. **2**, 6.
 Wallot, J. **1**, 140.
 Warburg, E. **1**, 244.
 Wartenberg, H. v. **1**, 226.
 Weber, L. **2**, 19.
 Wegel, R. **2**, 154f.
 Wehner, F. **1**, 163, 177ff.
 Weigle, H. **1**, 185.
 Weiß, O. **2**, 45, 66.
 Wendeler, P. **2**, 44, 66.
 Wente, E. C. **1**, 218ff., 225; **2**, 45, 66.
 Whiddington, R. **2**, 165.
 Wieland **2**, 23.
 Wien, M. **2**, 66.
 Wilke-Dörfurt, E. **2**, 19, 21.
 Willers, Fr. A. **1**, 68f.
 Willstätter, R. **1**, 250.
 Withey, **2**, 19.
 Wolf, F. **1**, 77ff.
 Wolff, H. **2**, 15.
 Zastrow, A. **2**, 159.
 Zenneck, J. **2**, 66.
 Zipperer, L. **2**, 57, 66.

Sachverzeichnis.

[Die fettgedruckten Ziffern beziehen sich auf die Hefte, die anderen Zahlen auf die Seiten.]

- Abkühlung eines homogenen Körpers **1**, 78ff.
Abkühlungskurven **1**, 30f., 80.
Admiralitätsmetall **2**, 24.
Ähnlichkeitsgesetze (Glimmstromtheorie) **1**, 159ff.
Aggregation (Kautschuk, Schellack) **1**, 248ff.
Aldehyde **2**, 6.
Aleuritinsäure **2**, 7, 12ff.
Aluminium (Magnesium-Fällung) **2**, 9ff.
Aluminiumlegierungen, Magnesiumbestimmung **2**, 19ff.
Antipyrin **2**, 6.
Asynchronmotoren, Vektoranalytische Berechnung **1**, 1ff.
Ausbeute und Konzentration bei Ozonapparaten, graphische Darstellung **1**, 243ff.
Aufreißen von Messing **2**, 22f.
Ausgleichsvorgänge in einem linearen System, allgem. Beziehungen **1**, 110ff.
Azeton **2**, 7.
Azetonalkaloide **2**, 6.
- B**ändchenlautsprecher **2**, 95f.
Beseitigung innerer Spannungen im Messing **2**, 22ff.
Bleilegerungen, Magnesiumbestimmung **2**, 19ff.
- D**ämpfungsfaktor (Kettenleiter) **1**, 191.
Dämpfungszahl (lineare Netze) **1**, 135.
Dauerkurzschlußstrom von Wechselstromgeneratoren **2**, 197ff.
Desaggregation (Kautschuk, Schellack) **1**, 248ff.
Diagramm über Ausbeute, Konzentration usw. von Ozonapparaten **1**, 246.
Diaminopentane **2**, 6.
Dihydrotoluol **2**, 6.
Dioxyldicarbonsäure, hydroaromatische **2**, 7, 12.
Dreheiseninstrumente (Richtmoment) **1**, 149ff.
Drehmomentmesser **1**, 146.
Druckamplituden eines Schallvorganges **1**, 139ff.
Dynamometrische Instrumente (Richtmoment) **1**, 150ff.
- E**inankerumformer, Wechselspannungen **1**, 100ff.
Einstellmoment, spezifisches (Meßinstrumente) **1**, 146, 152, 156ff.
Eisen, reinstes, elektrolytische Darstellung **2**, 39ff.
Elastische Spannungen in Metallen **1**, 231ff.
Elektrische Festigkeit der Luft **1**, 184ff.
Elektrodynamisches Blatt **2**, 87ff.
Elektrolytische Darstellung reinsten Eisens **2**, 39ff.
- Empfänger mit Frequenzmodulation **2**, 84ff.
Erichsen-Tiefung (Messingblech) **2**, 26ff.
Exponentialskala **1**, 83ff.
Erwärmungsgesetz (homogene Körper) **1**, 79.
Erwärmungskurven **1**, 30f., 79, 81, 84.
Erwärmungslinien eines ölkühlten Transformators **1**, 84.
Erweiterung perspektivischer Skalen zu Rechentafeln **2**, 184ff.
Euphtalmin **2**, 3, 6.
- F**ahrtregulierung bei Wechselstromlokomotiven **1**, 94ff.
Fällung des Magnesiums mit Phosphat aus tartrathaltiger Lösung in Gegenwart von Aluminium **2**, 9ff.
- Fechners psychophysisches Gesetz **1**, 24.
Festigkeit, elektrische, der Luft **1**, 184ff.
Flächenhelligkeit **1**, 26, 28.
Frequenzmaß (Wechselstrom) **1**, 116ff.
Frequenzmodulation, Empfänger **2**, 84ff.
Funkenpotential **1**, 184.
- G**eräuschmessung, vergleichende **2**, 153ff.
Gipszylinder, Abkühlung, Temperaturanstieg **1**, 30.
Gleichgewichtslagen von elektr. Meßinstrumenten **1**, 144ff.
Gleichrichterleistungsfaktor für verschiedene Schaltungen **1**, 59.
Gleichrichtertheorie **1**, 41ff.
Gleichstrom-Drehspulinstrumente (Richtmoment) **1**, 147f.
Glimmlichtlänge **1**, 183.
Glimmsaum **1**, 182.
Glimmstromtheorie **1**, 159ff.
Glyoxal **2**, 6.
Goldsteins Gesetz **1**, 181.
Graphische Darstellung (vereinfachte) der Ausbeute und Konzentration bei Ozonapparaten **1**, 243ff.
- H**arznatur des Schellacks **2**, 12ff.
Harzsynthese (Schellack) **2**, 12ff.
„Heil dir im Siegerkranz“ **2**, 5.
Helligkeit einer Fläche **1**, 26, 28.
Heynsche Theorie zur Verfestigung der Metalle **1**, 231.
Hochohmige Widerstände, Meßmethoden **2**, 177ff.
Hookesches Gesetz **1**, 234.

- Hydantoine **2**, 6.
Hydrazin **2**, 6.
- Innere Spannungen im Messing und ihre Beseitigung **2**, 22ff.
Instrumente mit elektromagnetisch erzeugtem Richtmoment **1**, 153ff.
— mit mechanischem Richtmoment **1**, 147ff.
Isopren **2**, 6ff.
- Kabel, homogenes, Sinusschwingungen **1**, 109ff.
—, lange, Wechselstromtelegraphie **1**, 124ff.
Kaltrecken von Messing **2**, 22ff.
Kampfer **2**, 6.
Kampferphoron **2**, 6.
Karvon **2**, 6.
Kaseine **2**, 6f.
Kathodenstrahlrofen **1**, 226.
Kautschuk **2**, 6f.
—, plastizierter **1**, 251.
— und Schellack, kolloidchemische Betrachtung **1**, 243.
Ketone **2**, 6.
Kette, Eigenfrequenz **1**, 205.
—, homogene **1**, 197ff.
— mit Spule und Kondensator in Parallelschaltung **1**, 204.
Ketten mit Drosselschaltung **1**, 207ff.
Kettenleiter **1**, 190ff.
Klangaufzeichnung, objektive **2**, 43ff.
Klangbilder der Vokale **2**, 57ff.
Klangforschung, experimentelle **2**, 43ff.
Klangreinheit **1**, 220ff.
Kolbenmembran, Rayleighsche **2**, 68ff.
Kolloidchemische Betrachtungen auf dem Gebiete des Schellacks und Kautschuks **1**, 248.
Kondensatormikrophon (objektive Klangaufzeichnung) **2**, 43.
Konstitution des Messings **1**, 240.
Koppelungskoeffizienten, elektrische **1**, 192.
—, magnetische **1**, 191, 203.
—, Ohmsche **1**, 192, 203.
Kreuzpulinstrumente **1**, 155ff.
- Lambertsches Grundgesetz **1**, 28.
Lautsprecher (Bändchenlautsprecher) **2**, 95f.
—, elektrostatischer **2**, 96ff.
—, Theorie **2**, 67ff.
Lävulinsäurealdehyd **2**, 7.
Leistungsfaktor, Änderung auf dem Wege vom Generator zum Gleichrichter **1**, 41ff.
Lichtarbeit **1**, 23.
Lichtleistung **1**, 23f.
Luft, elektrische Festigkeit **1**, 184ff.
- Magnesiumbestimmung in Aluminium-, Zink- und Bleilegierungen **2**, 19ff.
Magnesiumfällung aus tartrathaltiger Lösung **2**, 9ff.
Mesityloxyd **2**, 6.
Messing, innere Spannungen **2**, 22ff.
—, Konstitution **1**, 240.
Meßmoment **1**, 145.
- Messung hochohmiger Widerstände **2**, 177ff.
— von Schall-Druckamplituden **1**, 139ff.
Methoden zur Messung hochohmiger Widerstände **2**, 177ff.
Methylisopren **2**, 6f.
Methylkautschuk **2**, 7.
Modifikationen des Schellackreinharzes **1**, 253ff.
- Nomographisches Verfahren zur Lösung wärmetechnischer Probleme **1**, 77ff.
Normalmeßgerät für Röntgenstrahlen **2**, 162ff.
- Objektive Klangaufzeichnung mittels des Kondensatormikrophons **2**, 43ff.
Ortskurven und Zustandsdiagramme eines Wechselstromkreises **1**, 94ff.
Oszillogramme von Sinusschwingungen **1**, 128f.
Ozon **2**, 6f.
Ozonapparate, graphische Darstellung der Ausbeute und Konzentration **1**, 243ff.
- Partialsynthese zur Aufklärung der Harznatur des Schellacks **2**, 12ff.
Paschens Gesetz **1**, 185, 189.
Passivitätserscheinungen in Metallen **2**, 40.
Peptisation eines Harzes **2**, 15f.
Perhydrokautschuk **1**, 251.
Perspektivische Skalen, Erweiterung zu Rechentafeln **2**, 184ff.
Phenylhydrazin **2**, 6.
Phoron **2**, 6.
Phosphat (Magnesiumfällung) **2**, 9ff.
Photometrie, Zeitbegriff in der **1**, 22ff.
Piperidinreihe, Stereochemie **2**, 6.
Polarisation, chemische **2**, 40.
Positive Säule, Schichtabstand (Glimmstrom) **1**, 177ff.
— —, Theorie **1**, 164ff.
Psychophysisches Gesetz von Fechner **1**, 24.
Pulegon **2**, 6.
Pupinierte Leitung, Sinusschwingungen **1**, 127ff.
- Quecksilber zum Nachweis innerer Spannungen im Messing **2**, 23.
Quecksilberdampf-Gleichrichteranlage, Strom- und Spannungskurven **1**, 61ff.
Quecksilbersalzlösungen zum Nachweis innerer Spannungen im Messing **2**, 23, 25ff.
- Raumladungslast (Glimmstrom) **1**, 166.
Raumladungsverbesserung (Glimmstrom) **1**, 166.
Rechentafeln, Erweiterung perspektivischer Skalen zu **2**, 184ff.
Resonatoren, Helmholtzsche **1**, 139.
Resonanzkurve einer Telephonmembran **1**, 224.
Richtmoment (Meßinstrumente) **1**, 145, 150ff.
Röntgenstrahlen, Normalmeßgerät **2**, 162ff.
Rückstrahlungszahl **1**, 22, 25ff.
- Salizylaldehyd, Abkömmlinge **2**, 6.
Schall-Druckamplituden, Messung **1**, 139ff.
Schallintensität **2**, 43.

- Schellack **2**, 12ff.
 — und Kautschuk, kolloidchemische Betrachtungen **1**, 248.
 Schellackreinharz, verschiedene Modifikationen **1**, 253.
 Schellolsäure **2**, 7, 12ff.
 Schichtabstand, in der positiven Säule (Glimmstrom) **1**, 177ff.
 Schichtpotential (Glimmstrom) **1**, 186ff.
 Schichttheorie (Glimmstrom) **1**, 180ff.
 Schichttypentafel (Glimmstrom) **1**, 178.
 Schwingungskreise, einfache **2**, 112ff.
 Schwingungssysteme, zweifache **2**, 128ff.
 —, dreifache **2**, 143ff.
 Scharbeit, Schleistung **1**, 23.
 Siebketten und deren Anschluß an Leitungen **2**, 101ff.
 Sinusschwingungen auf einer pupinisierten Leitung **1**, 127ff.
 — in einem langen homogenen Kabel **1**, 109ff.
 Skalencharakteristik (Meßinstrumente) **1**, 151, 154ff.
 Spannungen, innere, im Messing **2**, 22ff.
 —, verborgen elastische, in Metallen **1**, 231ff.
 Spulen- und Kondensatorkette **1**, 211.
 Stereochemie der Piperidinreihe **2**, 6.
 Sternleitwert **1**, 131f.
 Stocklack **2**, 18.
 Strahlkurven **1**, 68ff.
 Strahlpunkt **1**, 69ff.
 Streufaktor (lineare Netze) **1**, 138.
 Strom- und Spannungskurven für Quecksilberdampf-Gleichrichteranlagen **1**, 61ff.
 Strukturbilder von Messing **1**, 241.
- Telephon, elektrodynamisches **2**, 71ff.
 —, elektrostatisches **2**, 78ff.
 Temperaturanstieg in einem Gipszylinder **1**, 30.
 Terpene **2**, 6.
 Theorie der linearen Netze, Umwandlungssatz **1**, 130ff.
 — der positiven Säule (Glimmstrom) **1**, 164ff.
 — des Gleichrichters **1**, 41ff.
 — des Glimmstromes **1**, 159.
 — des Lautsprechers **2**, 67ff.
 — (Heynsche) zur Verfestigung der Metalle **1**, 231.
 Thermophon, Wirkungsweise und Anwendung **1**, 212ff.
 Transformator, Typenleistung **1**, 57f.
 Transformatoren, vektoranalytische Berechnung **1**, 1ff.
 Triazetonaminreihe **2**, 6.
- Trimethyltriöse **2**, 6.
 Trioxypalmitinsäure **2**, 7, 12.
 Tropeine der Triazetonaminreihe **2**, 6.
 Typenleistung eines Transformators **1**, 57ff.
- Umwandlungssatz zur Theorie der linearen Netze **1**, 130ff.
 Untersuchungen über die Gleichgewichtslagen von elektrischen Meßinstrumenten **1**, 144ff.
- Vektoranalytische Berechnung von Transformatoren usw. **1**, 1ff.
 Vorausbestimmung des Dauerkurzschlußstromes von Wechselstromgeneratoren **2**, 197ff.
 Vokale, Klangbilder **2**, 57ff.
 Vokaltheorien **2**, 53ff.
- Wärmetechnische Probleme, nomographisches Verfahren **1**, 77ff.
 Wärmeübergangszahl an der Oberfläche eines Gipszylinders **1**, 31.
 Wärmewanderung in Zylindern aus homogenen Wärmeleitern **1**, 29ff.
 Wechselspannungen an Einankerumformern **1**, 100ff.
 Wechselstromentnahme aus Gleichstromankern **1**, 100ff.
 Wechselstromgeneratoren, Dauerkurzschlußstromvorausbestimmung **2**, 197ff.
 Wechselstromkreis, Ortskurven und Zustandsdiagramme **1**, 94ff.
 Wechselstromlokomotiven, Fahrtregulierung **1**, 94ff.
 Wechselstromtelegraphie über lange Kabel **1**, 124ff.
 Wechselstromzeichen, Ausbreitung in einem unendlich langen homogenen Kabel **1**, 116ff.
 Widerstände, hochohmige, Meßmethoden **2**, 177ff.
 Wirkungsweise und Anwendung des Thermophons **1**, 212ff.
- Zeitbegriff in der Photometrie **1**, 22ff.
 Zeitkonstante bei der Abkühlung eines homogenen Körpers **1**, 85.
 Zentralstelle für wissenschaftlich-technische Forschungsarbeiten des Siemens-Konzerns **2**, 8.
 Zinklegierungen, Magnesiumbestimmung **2**, 19ff.
 Zischlaute **2**, 62f.
 Zitronellal **2**, 6.
 Zustandsdiagramme eines Wechselstromkreises **1**, 94ff.
 — von Cu-Zn-Legierungen (Carpenter) **1**, 240.
 Zyklohexanon **2**, 6.